

J II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

**M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A**

**K W A R T A L N I K**

**T O M 2 4 · Z E S Z Y T 3**



**W A R S Z A W A 1 9 8 6**

**P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E**

531

## SPIS TREŚCI

M. Życzkowski, Przegląd prac nad optymalnym kształtowaniem konstrukcji w warunkach pełzania.	243
Обзор трудов оптимального проектирования конструкции в условиях ползучести.	
A survey of optimal structural design in creep conditions.	
E. Kossecka, Boundary integral equations in the theory of thin plates.	259
Крайовые интегральные уравнения в теории тонких пластинок.	
Brzegowe równania całkowe w teorii cienkich płyt.	
S. Dubiel, Liniowe układy mechaniczne o najszybszym tłumieniu.	271
Линейные механические системы с наиболее быстрым затуханием.	
Linear mechanical systems with supreme damping.	
K. Nobis, Balance equations for mixture and porous media in the light of nonstandard analysis.	281
Уравнения баланса для смесей и пористых тел в виду нестандартного анализа.	
Równania bilansu dla mieszanin i ciał porowatych w świetle analizy niestandardowej.	
B. Rogowski, Contact between a rigid indenter and a transversely isotropic layer.	295
Контактная задача жёсткого тела трансверсально — изотропного слоя.	
Kontakt między sztywnym ciałem i poprzecznie izotropową warstwą.	
R. Krzewiński, A. Spychała, R. Trębiński, W. Warachim, E. Włodarczyk, M. Zieliński, Metoda generacji wybuchowych dynamicznych obciążeń symulujących tępięcie.	317
Метод генерации взрывных динамических нагрузок имитирующих горный удар.	
Method for generation of explosive dynamic loads simulating a crump.	
S. Konieczny, Obliczanie płyt mikromorficznych.	331
Расчёт микроморфных плит.	
Calculation of micromorphic plates.	
H. Kopecki, J. Smykła, Funkcje sklepane w zastosowaniu do fizycznie i geometrycznie nieliniowej analizy płyt prostokątnych.	339
Сплайн — функции в применении к анализу физически и геометрически нелинейных прямоугольных пластин.	
Splines in applications to physically and geometrically nonlinear rectangular plates analysis.	
D. Faryńska, Ł. Sobolewska, Z. Zagdański, Symulacja cyfrowa lotu samolotu TS-11 „Iskra” w języku macroassembler.	353
Цифровая симуляция полёта самолёта ТС-11 „Искра” в языке макроассемблер.	
Computer simulation of TS-11 „Iskra” plane flight in terms of macroassembler language.	
J. Maryniak, J. Trajer, Analiza numeryczna parametrów lotu i sterowania samolotu w ustalonym ruchu spiralnym.	363
Численный анализ параметров полёта и управления самолёта в установившемся спиральном движении.	
Numerical analysis of airplane flight and control parameters in a steady spiral motion.	
J. Maryniak, J. Trajer, Drgania samolotu w ustalonym ruchu spiralnym.	377
Колебания самолёта в установившемся спиральном движении.	
The vibrations of airplane in a steady spiral motion.	
J. Maryniak, J. Trajer, Symulacja numeryczna sterowanego samolotu w ruchu spiralnym.	387
Численная симуляция управляемого самолёта в спиральном движении.	
Numerical simulation of controlled airplane performing a spiral motion.	
J. Trajer, Modelowanie cyfrowe procesu sterowania samolotu w ruchu spiralnym.	397
Численные моделирования процесса управления самолётом в спиральном движении.	
Model presentation of numerical process of airplane control in a spiral motion.	
M. Stodulski, M. Życzkowski, Analiza porównawcza modeli sprężysto-plastycznego pręta pod działaniem zginania, siły podłużnej i temperatury.	403
Сравнительный анализ моделей упруго-пластического стержня под действием изгиба, продольной силы и температуры.	

J II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A



T O M 2 4 • Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 8 6

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## KOMITET REDAKCYJNY

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY  
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,  
STANISŁAW JERZY GDULA, IGOR KISIEL,  
ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI, PIOTR WILDE,  
JÓZEF WOJNAROWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY  
STANISŁAW DUBIEL — REDAKTOR  
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR  
ANDRZEJ TYLIKOWSKI — REDAKTOR  
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR  
EWA KOISAR — SEKRETARZ

## REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Kwartalnik ukazuje się przy pomocy finansowej PAN

---

Nakład (417+93) Ark. wydawniczych 17,5 Ark. drukarskich 15,0 Papier druk. sat.kl. IV, 70 g. 70×100  
Oddano do składania 16.IV.1986 r. Druk ukończono w marcu 1987 r. Zam. 2403/86. Cena zł 120.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## PRZEGLĄD PRAC NAD OPTYMALNYM KSZTAŁTOWANIEM KONSTRUKCJI W WARUNKACH PEŁZANIA\*

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

*Politechnika Krakowska*

### 1. Uwagi historyczne

Optymalne kształtowanie konstrukcji, a najczęściej tylko prostych elementów konstrukcyjnych pracujących w warunkach pełzania, należy do najmłodszych gałęzi optymalnego kształtowania. Podczas gdy optymalizacja w zakresie sprężystym, rozpoczęta przez Galileusza, liczy ponad 300 lat, a optymalizacja konstrukcji idealnie plastycznych została zapoczątkowana w latach pięćdziesiątych obecnego stulecia, to za początek kształtowania w warunkach pełzania przyjmuje się lata 1967-8. Wprawdzie już w roku 1953 A. G. Kostiuk [34] określił kształty tarcz wirujących równomiernej wytrzymałości w warunkach pełzania, a podobny problem omawia szczegółowo monografia Ju. N. Ra-  
botnowa [58], to jednak dopiero w latach 1967-8 sformułowano w kilku pracach ogól-  
niejsze ujęcie problemu.

Pierwsza z tych prac, M. I. Rejtmana [59], formułuje problem optymalizacji konstrukcji przy uwzględnieniu ograniczenia czasu jej żywotności i cen kolejnych nakładów inwestycyjnych. Autor ogranicza się w tytule pracy do konstrukcji z tworzyw sztucznych, lecz w istocie teoria może objąć i inne materiały podlegające pełzaniu. Funkcja celu przyjmuje postać

$$C = \frac{V}{1 - k^{-t_*}}, \quad (1)$$

gdzie  $V$  oznacza objętość konstrukcji,  $k = 1 + E$ ,  $E$  oznacza normowy współczynnik efektywności nakładów inwestycyjnych,  $t_*$  — czas pracy konstrukcji do zniszczenia (czas żywotności). Szczegółowej analizie poddano optymalne kształtowanie pręta rozciąganego przy czasie  $t_*$  wyznaczonym przez zadane przemieszczenie  $w_*$ , belki zginanej również przy ograniczeniu przemieszczeniowym, oraz słupa poddanego wyboczeniu pełzającemu. W istocie były to raczej problemy optymalnego wymiarowania, gdyż rozważano elementy pryzmatyczne.

Dalsze trzy prace pochodzą z roku 1968. W. Prager [57] podał warunek optymalności dla tarcz podlegających ustalonemu pełzaniu przy ograniczeniu sztywnościowym, wyra-

---

\*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 0.5.12 - 13.1.

żonym przez moc obciążeń zewnętrznych. Warunek ten ma prostą postać

$$\Phi = \text{const}, \quad (2)$$

gdzie  $\Phi$  oznacza potencjał pełzania; szczegółowo rozważono tarczę pierścieniową o brzegu wewnętrznym obciążonym a brzegu zewnętrznym utwierdzonym — w wyniku uzyskano profil hiperboliczny. Również Ju. W. Niemirowskij [52] położył nacisk na ograniczenia sztywnościowe, wyrażone przez przemieszczenie w określonym punkcie konstrukcji; poświęcił on także uwagę konstrukcjom równomiernej wytrzymałości w warunkach pełzania.

Szersze ujęcie zagadnień optymalnego kształtowania konstrukcji przy pełzaniu podaje praca M. Życzkowskiego [84], referowana na XII Międzynarodowym Kongresie Mechaniki w Stanford w r. 1968, a opublikowana w r. 1971. Jej główne tezy zostaną ujęte w p. 2. Wybrane nowsze osiągnięcia z tej dziedziny omawia krótka praca przeglądowa M. Życzkowskiego [85]. Wypada tu również wspomnieć, że pokrewna praca o charakterze częściowo przeglądowym H. M. Adelmanna, Patricii L. Sawyer i C. P. Shore'a [1], dotycząca optymalnego kształtowania konstrukcji pracujących w podwyższonych temperaturach, pomija niemal całkowicie zagadnienia pełzania, tak, że obecna praca może być traktowana jako pewien odpowiednik i uzupełnienie tamtej.

## 2. Typowe sformułowania problemów optymalnego kształtowania w warunkach pełzania

Spośród czterech podstawowych elementów optymalnego kształtowania konstrukcji dwa zazwyczaj nie różnią się od ogólnie stosowanych w zagadnieniach sprężystych lub plastycznych. Jest to funkcja celu, za którą przyjmuje się z reguły objętość konstrukcji (choć może to również być funkcja (1) lub podobne), oraz zmienne decyzyjne określające jej wymiary i kształt. Natomiast równania stanu ulegają zastąpieniu przez dość różnorodne równania konstytutywne pełzania, wykazujące często silną nieliniowość, a zasadnicze różnice występują w sformułowaniu warunków ograniczających, gdzie istotną rolę odgrywa czynnik czasu. Dla celów klasyfikacyjnych (a czasem i ze względów rachunkowych) dogodniej jest rozpatrywać odwrotne sformułowanie problemów optymalizacyjnych (zwane też wzajemnym lub dualnym) i dyskutować różnorodne kryteria optymalizacji pod założeniem stałej objętości. Kryteria takie podzielimy na zależne i niezależne od czasu.

**2.1. Kryteria optymalizacji zależne od czasu.** W pierwszym rzędzie wymienimy tu kryteria sztywności konstrukcji. Sztywność — choć jest to pojęcie o zrozumiałym sensie i wyraźnym znaczeniu technicznym — nie jest pojmowana jednoznacznie i musi być wyrażona przy pomocy pewnych, dość zresztą różnorodnych kryteriów. Kryteria takie można sformułować na drodze następującego rozumowania. Konstrukcja idealnie sztywna, stosownie podparta, wykazuje zerowe przemieszczenia, a w konsekwencji również zerowe prędkości przemieszczeń, odkształcenia, prędkości odkształceń, pracę i moc sił zewnętrznych, moc rozpraszaną itp. Minimalizacja dowolnej z tych wielkości może stanowić pewne kryterium sztywności (a raczej podatności) dla konstrukcji odkształcalnej. W warunkach pełzania dogodna jest tu moc obciążeń zewnętrznych: jest to skalar, charakteryzujący sztywność w sposób globalny. Skalar ten na ogół zależy od czasu, a przy stałych obciążeniach

zeniach i pełzaniu fizycznie i geometrycznie ustalonym — nie zależy od czasu (ten ostatni przypadek rozpatrywał W. Prager [57]).

Sformułowanie kryterium sztywności wykorzystującego pozostałe wyżej wymienione wielkości fizyczne natrafia z reguły na większe trudności. Przeszyczenia i prędkości przemieszczeń tworzą pola wektorowe, natomiast odkształcenia i prędkości odkształceń — pola tensorowe. Minimalizacja wymaga tu wprowadzenia pewnych norm, i to norm w podwójnym sensie, np. jako normy wektora, a następnie normy funkcji zmiennych przestrzennych. Jako normę wektora przyjmuje się zazwyczaj bądź jego długość, bądź wartość bezwzględną największej składowej; ta ostatnia norma nie jest niezmiennicza względem obrotu, ale jest często dogodna w zastosowaniach (rozpatrujemy np. ugięcie belki, płyty lub powłoki, pomijając pozostałe składowe wektora przemieszczenia). Norma funkcji zmiennych przestrzennych bywa często przyjmowana w formie Czebyszewa, jako kres górny wartości bezwzględnej funkcji (np. największe ugięcie). Stosowane przez Niemirowskiego [52] i niektórych innych autorów „przeszyczenie w określonym punkcie ciała” jest równoważne powyższej normie tylko wtedy, gdy brak wątpliwości, że przeszczenie w tym punkcie jest istotnie największe. Kryterium sztywności może być również związane z uogólnionymi odkształceniami lub prędkościami odkształceń (np. z prędkością krzywizny osi belki).

Inne kryteria zależne od czasu mogą być związane z relaksacją naprężeń, bądź przy zadanych siłach początkowych, bądź też przy zadanych przeszczeniach. W obu tych przypadkach możliwe są różne sformułowania, np. dotyczące minimalizacji prędkości zmniejszania się reakcji lub naprężeń, maksymalizacji samych reakcji lub naprężeń itp. W zależności od problemu kryteria te mogą prowadzić do identycznych lub do różnych kształtów optymalnych.

**2.2. Przypadki szczególne kryteriów zależnych od czasu.** Rozważmy przypadek, gdy kryterium jest określone pewną funkcją skalarną  $u$ , natomiast kształt może być wyznaczony pewną skończoną liczbą parametrów  $s_i$ ; możemy wtedy napisać  $u = u(x, y, z; s_i; t)$ . Można wtedy wyodrębnić trzy następujące przypadki szczególne.

Jeżeli  $u$  można zapisać w postaci

$$u = \psi[\varphi_1(x, y, z; s_i) \cdot \varphi_2(t)], \quad (3)$$

gdzie  $\psi$  jest monotoniczną funkcją swojego argumentu  $\varphi_1 \varphi_2$ , to wystarczy optymalizować funkcję  $\varphi_1$ . Optymalny kształt jest wtedy niezależny od czasu.

Jeżeli  $u$  można zapisać w postaci

$$u = \psi[\varphi_1(x, y, z) \cdot \varphi_2(s_i; t)], \quad (4)$$

gdzie  $\psi$  jest monotoniczną funkcją swojego argumentu  $\varphi_1 \varphi_2$ , to wówczas optymalny kształt jest niezależny od normy funkcji  $\varphi_1$ , natomiast jest zależny od czasu. Praktycznie przeprowadza się wtedy optymalizację dla zadanego czasu pracy konstrukcji  $t_*$ .

Jeżeli wreszcie zachodzi

$$u = \psi[\varphi_1(x, y, z) \cdot \varphi_2(s_i) \cdot \varphi_3(t)], \quad (5)$$

to optymalny kształt nie zależy ani od czasu, ani od przyjętej normy funkcji  $\varphi_1$ .

**2.3. Kryteria optymalizacji niezależne od czasu.** Do grupy kryteriów niezależnych od czasu zaliczymy kryteria związane ze zniszczeniem przy pełzaniu, z wyobczeniem pełzającym,

częstością drgań, oraz większość kryteriów formułowanych dla konstrukcji lepkoplastycznych. Najprostsze hipotezy zniszczenia przy pełzaniu — to hipoteza uszkodzeń prowadzących do kruchego pęknięcia (Ł. M. Kaczanowa) oraz hipotezy zniszczenia ciągłego Hencky'ego-Hoffa. Ta ostatnia wymaga analizy odkształceń skończonych i dotychczas do optymalnego kształtowania nie była jeszcze stosowana, natomiast hipoteza Kaczanowa okazała się efektywna w wielu przypadkach. Nieco odmienne podejście Ju. W. Niemirowskiego [53] wiąże zniszczenie przy pełzaniu z jednostkową pracą odkształcenia; wyniki obu tych podejść są często identyczne. W najprostszymi przypadkach (statyczna wyznaczalność, nieistotne zmiany geometrii ciała) powyższe kryteria prowadzą do kształtów równomiernej wytrzymałości przy pełzaniu; Niemirowski wykazał kilka ogólnych twierdzeń dotyczących konstrukcji tego typu. Ogólne podejście wykorzystujące metodę elementów skończonych zostało zaproponowane w pracy A. A. Czirasa i W. M. Dulmana [13].

Teorie wyboczenia pełzającego wprowadzają zazwyczaj pojęcie czasu krytycznego i maksymalizacja tego czasu stanowi często ważne kryterium optymalnego kształtowania. Pojęcia czasu krytycznego bywają przy tym wprowadzane w sposób bardzo różnorodny, np. jako czasu utraty stateczności pręta prostego (Shanley, Gerard, Rabotnow-Szestierikow) lub czasu nieograniczonego wzrostu ugięć pręta o krzywiznie pierwotnej (Kempner-Hoff).

Przy optymalizacji konstrukcji lepkoplastycznych jako typowe kryteria wymienimy: maksymalizację nośności pod działaniem obciążeń dynamicznych; minimalizację przemieszczeń resztkowych po impulsie obciążenia; maksymalizację obciążenia krytycznego itp.

### 3. Problem zależności optymalnych kształtów od równań konstytutywnych pełzania

Przy optymalnym kształtowaniu konstrukcji sprężystych lub idealnie plastycznych rzadko rozważa się problem zależności optymalnych kształtów od przyjętych równań konstytutywnych (z wyjątkiem wpływu anizotropii na kształt). W przypadku konstrukcji narażonych na pełzanie problem ten staje się istotny, tym bardziej, że równania konstytutywne wykazują tu dużą różnorodność. Można się spodziewać, iż na ogół kształty optymalne zależą od przyjętych równań. Jednakże A. Gajewski [20, 23], który poświęcił temu zagadnieniu wiele uwagi, wyodrębnił dość liczne przypadki kształtowania wykazujące bądź niezależność od równań konstytutywnych, bądź też zależność nieistotną (poprzez stałą występującą jako mnożnik). Należą tu np. jednorodne belki statyczne wyznaczalne (lecz bez udziału siły podłużnej), jednorodne płyty kołowe przy kryterium minimum mocy obciążeń zewnętrznych, jednorodne wirujące tarcze kołowe przy warunku wyrównania intensywności naprężeń i wiele innych przypadków. Podobne problemy badał również A. A. Ziewin [81], ograniczając się jednak do pełzania liniowego.

### 4. Pręty i belki

Obecnie przejdziemy do omówienia uzyskanych wyników w zakresie optymalnego kształtowania typowych elementów konstrukcyjnych w warunkach pełzania.



Pręty rozciągane lub ściskane (bez analizy stateczności) stanowią bardziej interesujący problem optymalizacyjny tylko przy obciążeniu zmiennym wzdłuż osi. Przypadek taki rozważał A. Gajewski w pracy [22] poświęconej optymalnemu kształtowaniu pręta wirującego wokół osi prostopadłej do jego osi na jednym z końców, z masą skupioną umieszczoną na drugim końcu. Uwzględniono siły bezwładności związane z wirowaniem; jako kryterium przyjęto prędkość pełzania (promieniowego) swobodnego końca. Optymalny kształt zależy w istotny sposób od prawa pełzania. Bardziej trywialny przypadek stałej siły podłużnej rozważał wcześniej przy funkcji celu (1) i przy ograniczeniu przemieszczeniowym M. I. Rejtman [59].

Znacznie więcej uwagi poświęcono optymalnemu kształtowaniu belek w warunkach pełzania. Zostało ono zapoczątkowane pracami Ju. B. Niemirowskiego i B. S. Reznikowa [53, 54], którzy określali kształty równomiernej wytrzymałości belek zginanych; jako miarę utraty wytrzymałości przyjmowano jednostkową pracę odkształcenia. Ciężar własny belek równomiernej wytrzymałości uwzględniali A. Gajewski [20, 21] oraz ten sam autor wraz z M. Albińską [2] i T. Sabikiem [24]. Ju. W. Goldsztejn i M. A. Sołomieszc [26, 27] określali kształty belek równomiernej wytrzymałości przy zginaniu z siłą podłużną w przypadku materiałów podlegających liniowemu prawom pełzania; wykazano, iż uzyskany kształt nie różni się od odpowiedniego kształtu w zakresie sprężystym. Wpływ siły podłużnej uwzględniali również M. Życzkowski i W. Świsterski w pracach [89, 69], określających belki równomiernej wytrzymałości w zakresie ugięć skończonych. Uwzględniono rozciągliwość osi i redystrybucję naprężeń, a równomierną wytrzymałość związane z hipotezą kruchego pęknięcia Ł. M. Kaczanowa; całkowanie numeryczne układu równań dla nieliniowego pełzania połączono z iteracyjną metodą optymalnego kształtowania.

Równolegle rozwija się optymalne kształtowanie belek przy różnych kryteriach sztywności w warunkach pełzania. Ju. W. Niemirowskij i B. S. Reznikow [55] przyjmowali za takie kryterium prędkość strzałki ugięcia belki; wielkość tę można rozumieć jako normę Czebyszewa dla prędkości ugięć. Podobne kryterium sztywności przyjmowali M. Albińska i A. Gajewski [2, 20], którzy uwzględniali wpływ ciężaru własnego na optymalne kształty, oraz Ja. A. Lellep [38], rozważający belkę z materiału o innym module pełzania dla rozciągania a innym dla ściskania. Dalszym typowym kryterium sztywności (a raczej podatności) przy pełzaniu jest moc obciążeń zewnętrznych. Kryterium takie przyjmowali J. B. Martin i A. R. S. Ponter [46, 47], oraz P. I. Danczak, M. S. Michajliszin i O. N. Szablilij [14], którzy uwzględniali również efekty naprężeń ścinających. Ju. B. Goldsztejn i M. A. Sołomieszc [26, 27] traktowali całkowitą energię odkształcenia za miarę podatności przy optymalnym kształtowaniu. Porównaniu różnych kryteriów podatności wiele uwagi poświęcił A. Gajewski [20]. Jednoczesne ograniczenia związane z wytrzymałością i ze sztywnością rozważał Ju. M. Poczman [56], który określał optymalne kształty belek metodą programowania dynamicznego. Optymalnemu kształtowaniu belek przy niepełnej informacji, odnośnie rozkładu obciążeń poświęcona jest praca N. Ch. Arutiuniana i W. B. Kołmanowskiego [3].

Kształtowanie belek przy obciążeniach dynamicznych było przedmiotem prac Z. Mroza i Ju. R. Lepika [48, 49, 40, 42, 43]; wiązali oni kryterium podatności z normą Gaussa dla resztkowych ugięć belek sztywno-lepkich poddanych impulsowi obciążenia o danej energii kinetycznej. Lepik rozważał również optymalne podparcie belek. T. Lekszycki

i N. Olhoff [37] rozważali optymalizację belek drgających, wykonanych z materiału liniowo lepkosprężystego, pod kątem możliwie szybkiego zanikania drgań.

Stosunkowo mało uwagi poświęcono dotychczas doborowi optymalnego kształtu przekroju belek zginanych w warunkach pełzania. Jedynie w pracy M. Życzkowskiego [84] określono optymalny cienkościenny zamknięty profil przekroju belki z warunku minimum pola powierzchni przy ustalonej prędkości krzywizny osi belki.

### 5. Słupy, pręty narażone na wyboczenie pełzające

Wyboczenie pełzające prętów niepryzmatycznych było przedmiotem kilku prac M. Życzkowskiego [82, 83], jednak zagadnienie optymalnego kształtu zostało sformułowane i rozwiązane dopiero w pracy M. Życzkowskiego i R. Wojdanowskiej-Zajac, referowanej na sympozjum IUTAM w Göteborgu w r. 1970 [90]. Poszukiwano w niej jednostronnie utwierdzonego lub dwuprzegubowego pręta o minimalnej objętości przy zadanej sile osiowej i czasie krytycznym w nawiązaniu do teorii Rabolnowa-Szestierikowa. Prawo fizyczne opisuje przy tym pełzanie nieliniowe ze wzmocnieniem zależnym od odkształcenia. Odpowiednie rozwiązanie dla pręta dwustronnie utwierdzonego, z uwzględnieniem optymalizacji bimodalnej, podali J. Błachut i M. Życzkowski [7] stosując zasadę maksimum Pontriagina.

W przypadku słupów wykazujących imperfekcje (krzywizna pierwotna, mimośród obciążenia) problemy optymalizacji muszą być sformułowane odmiennie. Wprawdzie i w tym przypadku przy pełzaniu nieliniowym możliwe jest wprowadzenie czasu krytycznego (Kempnëra-Hoffa), to jednak ograniczenia optymalizacji mają zazwyczaj charakter sztywnościowy lub wytrzymałościowy. N. Distefano [16] przeprowadzał optymalizację parametryczną słupów o danym ugięciu w pewnym określonym czasie. R. Wojdanowska [77] dla prawa pełzania Maxwella oraz R. Wojdanowska i M. Życzkowski [79] dla ogólnego prawa liniowego uwzględniającego starzenie materiału wykazali, iż optymalne kształty uzyskane dla zakresu sprężystego zapewniają również minimalną prędkość wyboczenia pełzającego (dla pewnych szczególnych pierwotnych linii ugięcia), są więc również w pewnym stopniu optymalne w zakresie pełzania. W. Świsterski, A. Wróblewski i M. Życzkowski [70] przeprowadzili optymalizację kształtu jednostronnie utwierdzonego słupa mimośrodowo obciążonego w zakresie dużych ugięć: warunek ograniczający związane z tworzeniem się pierwszych pęknięć w sensie hipotezy Kaczanowa. Słup optymalny różni się tu od słupa równomiernej wytrzymałości.

Do omawianego działu zaliczymy również prace N. Ch. Arutiuniana i A. A. Ziewina [5, 6] poświęcone optymalizacji słupów o wysokości narastającej np. w wyniku procesu technologicznego. Autorzy określają kształt słupa, który przy stałej objętości minimalizuje przyrost przemieszczeniu swobodnego końca do chwili  $t_1$  po przyłożeniu obciążenia; uwzględniono wpływ ciężaru własnego a pełzanie materiału opisane jest równaniem liniowym ujmującym starzenie. Optymalizacji słupów zbrojonych poświęcone są prace L. W. Genkina i W. B. Kołmanowskiego [25], W. B. Kołmanowskiego i W. W. Mielłowa [33] (ta ostatnia w ujęciu procesów losowych). Wiele uwagi zagadnieniom tego typu poświęca monografia N. Ch. Arutiuniana i W. B. Kołmanowskiego [4].

## 6. Ustroje prętowe

Optymalnemu kształtowaniu ustrojów prętowych w zakresie sprężystym oraz plastycznym poświęcono w literaturze wiele uwagi, z uwzględnieniem możliwości utraty stateczności elementów ściskanych lub bez. W przeciwieństwie do tego, w zakresie pełzania problemy te są prawie nietknięte, a w każdym razie brak teorii o szerszym zasięgu. G. A. Hegemier i W. Prager [32] wykazali, że ustroje kratowe typu Michella są konstrukcjami optymalnymi również w zakresie ustalonego pełzania; warunki ograniczające związane przy tym z podatnością wyrażoną mocą obciążeń zewnętrznych, natomiast ewentualnej utraty stateczności elementów ściskanych nie uwzględniono. Stateczność uwzględniono natomiast w pracach R. Wojdanowskiej i M. Życzkowskiego [76, 78], poświęconym doborowi optymalnych konfiguracji prostych dwu- i trójprętowych ustrojów kratowych. W pracy [78] wiązano stateczność z teorią Kempnera-Hoffa dla prętów z imperfekcjami, podczas gdy w pracy [76] zastosowano teorię Rabotnowa-Szestierikowa dla prętów idealnych; w obu pracach warunki ograniczające dla prętów rozciąganych sformułowano w nawiązaniu do hipotezy kruchego pęknięcia zaproponowanej przez Kaczanowa.

Praca R. Wojdanowskiej i M. Życzkowskiego [80] poświęcona jest optymalnemu przeniesieniu siły skupionej na sztywny kontur oporowy. Konstrukcją optymalną jest tu z reguły kratownica dwuprętowa. W pracy wykorzystano metodę konturów całkowitej niejednoznaczności, zaproponowaną przez M. Markiewicza i M. Życzkowskiego [44, 45] dla konstrukcji sprężystych i sprężystoplastycznych; w przypadku pełzania kontury takie zależą od założonego czasu pracy konstrukcji. Dla prętów ściskanych zastosowano teorię Rabotnowa-Szestierikowa, dla rozciąganych — Kaczanowa.

Optymalnemu kształtowaniu konstrukcji ramowych w warunkach pełzania poświęcają nieco uwagi Ju. B. Goldsztejn i M. A. Sołomieszcz [26, 27], jednakże autorzy podali jedynie wytyczne projektowania przy warunku sztywności bez żadnego przykładu.

Do omawianego działu zaliczymy również prace W. Nachbara i J. B. Schipmøldera [50] oraz A. Trojnackiego i M. Życzkowskiego [73], poświęcone optymalnemu doborowi reologicznych własności samochodowych pasów bezpieczeństwa; pasy takie po napięciu traktowano jako konstrukcje kratowe. Problem optymalizacji polegał na doborze takich własności reologicznych, które zapewnią maksimum prędkości pojazdu przy ograniczeniu przemieszczenia osoby chronionej i siły oddziaływującej w chwili zderzenia; w pracy [73] uwzględniono dodatkowo efekty plastycznego zgniotu nadwozia przy zderzeniu.

## 7. Tarcze i płyty

Kilka prac poświęcono optymalnemu kształtowaniu tarcz w warunkach pełzania. Obok wspomnianych już prac A. G. Kostiuka [34] (tarcze wirujące równomiernej wytrzymałości) i W. Pragera [57] (tarcze w spoczynku optymalizowane przy warunku minimum mocy obciążeń zewnętrznych) wymienimy tu prace A. Gajewskiego [20], O. Gunneskova [28] i Ja. Lellepa [39]. Gajewski rozważał zależność optymalnych kształtów tarcz wirujących, obciążonych ciśnieniem zewnętrznym, od prawa pełzania przy różnych warunkach ograniczających; stwierdził on, że przy warunku wytrzymałościowym i przy warunku

ograniczonej mocy uzupełniającej kształty optymalne nie zależą od prawa pełzania, natomiast przy ograniczeniu przemieszczenia brzegu tarczy — zależą. Gunneskov stosował metodę małego parametru do optymalizacji tarcz wirujących obciążonych ciśnieniem zewnętrznym przy warunku stałej prędkości przemieszczenia promieniowego na obwodzie tarczy. Lellep uogólnił rozwiązanie Pragera dla tarcz pierścieniowych na przypadek materiałów o odmiennych własnościach po stronie rozciągania i ściskania.

Dotychczasowe osiągnięcia w dziedzinie optymalnego kształtowania płyt w warunkach pełzania dotyczą głównie płyt kołowych i pierścieniowych przy obciążeniach kołowo-symetrycznych. Warunki ograniczające związane są przede wszystkim z wytrzymałością i ze sztywnością. Pierwsze rozwiązania dla płyt kołowych równomiernej wytrzymałości pod działaniem równomiernego obciążenia ciągłego podali niemal jednocześnie Ju. W. Niemirowskij i B. S. Reznikow [54] oraz I. G. Tieregułow [72]. Ogólniejsze podejście należy do A. A. Czirasa i W. M. Dulmana [13, 18], którzy za kryterium utraty wytrzymałości przyjęli jednostkową energię rozproszoną do chwili przejścia pełzania ustalonego w pełzanie nieustalone trzeciego okresu. Prace te nawiązują do metody elementów skończonych.

Optymalizację płyt przy warunkach sztywności rozpoczęli również Ju. W. Niemirowskij i B. S. Reznikow [55]. Warunek ograniczający wiązali oni z osiągnięciem przez przemieszczenie w ustalonym punkcie płyty pewnej zadanej wartości; w przypadku płyt kołowych punkt ten przyjmowano w środku płyty, co z reguły jest w pełni uzasadnione. Wiele uwagi optymalnemu kształtowaniu płyt kołowych poświęcił A. Gajewski [20], który formułował warunek sztywności poprzez energię potencjalną, energię dopełniającą i ugięcie w środku płyty; w dwóch pierwszych przypadkach optymalny kształt nie zależy od przyjętego prawa fizycznego, w trzecim — zależy. G. E. Faktorowicz [19] stosował zasadę maksimum Pontriagina do optymalizacji płyt przy ograniczeniu sztywnościowym związanym z prędkością ugięcia w środku płyty. Ju. M. Pocztnan [56] określał optymalne kształty płyt metodą programowania dynamicznego przy warunkach wytrzymałości i sztywności.

Problemy optymalizacji płyt przy obciążeniach dynamicznych rozpatrywał Ju. R. Lepik [41, 43]. Określał on optymalne kształty sandwichowych płyt pierścieniowych o utwierdzonym brzegu wewnętrznym, poddanych impulsowi obciążenia o danej energii kinetycznej, przy ustalonej wartości własnej układu, charakteryzującej przebieg ruchu. W pracy [43] podano ogólniejszy algorytm, uwzględniający dodatkowo możliwość ograniczenia maksymalnej grubości warstw nośnych płyty.

## 8. Powłoki, cylindry, rurociągi

Optymalne kształtowanie powłok w warunkach pełzania jest dziedziną najmniej rozwiniętą: ogólniejszych teorii w tym zakresie dotychczas brak. Tym niemniej, podano kilka rozwiązań szczegółowych, które stanowią dogodny wstęp do dalszego rozwijania tematyki.

Wzmiankę o powłokach równomiernej wytrzymałości w stanie błonowo-giętym można znaleźć w pracy I. G. Tieregułowa [72]; proponuje on — bez specjalnego uzasadnienia — wyrównanie intensywności naprężeń uśrednionej po grubości powłoki. Przeciwnie, w stanie

blonowym powłok obrotowo-symetrycznych rozkład naprężeń jest wewnątrznie statycznie wyznaczalny i równomierny po grubości, tak, że powłoki optymalne w zakresie sprężystym są równocześnie optymalne przy pełzaniu (o ile zniszczenie może być określone tą samą hipotezą wyężeniową). Z nowszych prac wykorzystujących hipotezę Hubera-Misesa-Hencky'ego wymienimy tu J. Krużeleckiego [35], który nawiązuje również do hipotezy kruchego zniszczenia przy pełzaniu w ujęciu Kaczanowa-Leckiego-Hayhursta.

Optymalnemu kształtowaniu przekroju rurociągów pod działaniem ciśnienia, zginania i rozciągania przy ograniczeniu wytrzymałościowym w nawiązaniu do hipotezy kruchego zniszczenia przy pełzaniu typu Kaczanowa poświęconych jest kilka prac M. Rysza i M. Życzkowskiego; przyjęto prawo fizyczne nieliniowego ustalonego pełzania Nortona-Odqvista. W pracy [87] autorzy kształtują cienkościenny przekrój rurociągu o zmiennej grubości ścianki w nawiązaniu do hipotezy Kaczanowa-Galileusza; linię środkową profilu wyznaczono z warunku eliminacji stanów giętnych (profil kolisty), grubość ścianki z warunku równomiernej wytrzymałości, natomiast promień podlegał optymalizacji parametrycznej. Praca [88] uogólnia to rozwiązanie na przypadek dodatkowego skręcania i hipotezy Kaczanowa-Sdobyriewa. Skręcanie z jednej strony komplikuje problem, z drugiej go jednak upraszcza, gdyż algebraicznie największe naprężenie główne jest określone wtedy jednolitym wzorem i podział przekroju na strefy przestaje być potrzebny. M. Rysz w pracy [63] określa optymalny cienkościenny przekrój kołowy o stałej grubości ścianki wzmocniony żebrami podłużnymi przenoszącymi większą część momentu zginającego; kształt taki jest znacznie łatwiejszy do wykonania od kształtu o zmiennej grubości. Praca [64] uogólnia te rozważania na przypadek dodatkowego skręcania. Prace [61, 62, 65] poświęcone są optymalnym cylindrom grubościennym: w [61, 62] określano zmienną grubość ścianki metodą małego parametru, natomiast w [65] dobierano optymalne wymiary cylindrów o stałej grubości ścianki. N. Ch. Arutiunian i A. A. Ziewin [5] rozważali problem optymalnego owijania cylindrów wykazujących własności reologiczne taśmą sprężystą o wysokiej wytrzymałości.

Optymalizacji parametrycznej powłok wykonanych z kompozytów z wypełniaczem o własnościach reologicznych poświęcone są prace G. A. Tettersa, R. B. Rikardsa i W. L. Narusberga [71, 51, 60]. Analizowane były powłoki ściskane osiowo, materiał wypełniacza był opisany równaniami liniowego pełzania, a warunki ograniczające związane były z natychmiastową utratą stateczności i z ograniczeniem ugięć w trakcie pełzania.

Zaliczmy tu również pewne specyficzne zagadnienie optymalizacji, które rozważali A. E. Dubberley, D. P. Johnson, J. R. Panches i R. J. McCandless [17]: optymalizowali oni sześciokątną rurę, stanowiącą element reaktora, pod działaniem pola temperatury i strumienia neutronów, wpływających bezpośrednio na charakterystyki pełzania materiału.

## 9. Problemy optymalizacji związane z relaksacją naprężeń

Naprężenia resztkowe, pozostające w konstrukcji po zdjęciu obciążeń, mogą wywoływać w tej konstrukcji bądź efekty korzystne (np. w przypadku konstrukcji sprężonych), bądź też niekorzystne (gdy rozpatrujemy korozję naprężeniową, wpływ na póź-

niejszą utratę stateczności, zmęczenie itp.). Ponieważ relaksacja — jako typowy proces reologiczny — powoduje częściowe lub całkowite zanikanie tych naprężeń, więc odnośnie problemy optymalizacji mogą bądź zmierzać do minimalizacji efektów relaksacji, bądź też do ich maksymalizacji.

Problemy minimalizacji efektów relaksacji sformułował i badał w pracy [84] M. Życzkowski. Dla przykładu określono optymalne parametry kształtu prostego statycznie niewyznaczalnego ustroju prętowego, powodujące zachowanie możliwie największych reakcji bądź przy danych wartościach początkowych tych reakcji, bądź też przy danym przemieszczeniu początkowym. Rozpatrywano konstrukcje jednorodne i niejednorodne; zwłaszcza w tych ostatnich wynik zależał w sposób istotny od sformułowania zagadnienia.

Całkowicie odmiennie sformułowane problemy rozważali O. N. Szablij i W. I. Zareckij. W pracy [67] określili oni dla powłoki walcowej, a w pracy [68] dla tarczy pierścieniowej takie przebiegi nagrzewania indukcyjnego, które w ciałach liniowo termolepkosprężystych spowodują w wyniku relaksacji możliwie małe naprężenia resztkowe.

Problemy optymalizacji związane z relaksacją naprężeń — typowe dla ośrodków reologicznych — są więc jeszcze bardzo słabo zbadane zarówno pod względem filozoficznym (sformułowanie właściwych celów działania), jak i odnośnie ogólnych twierdzeń i metod obliczeniowych.

## 10. Problemy optymalnego kształtowania konstrukcji lepkoplastycznych

Kształtowanie konstrukcji lepkoplastycznych wyodrębnimy z uwagi na pewne specyficzne cechy i dla podkreślenia stopnia trudności. Lepkoplastyczność — stanowiąca najbardziej adekwatny opis własności licznych materiałów, zwłaszcza przy obciążeniach dynamicznych — łączy trudności teorii plastyczności i klasycznej reologii: efektywny czynnik czasu, a jednocześnie konieczność rozróżnienia procesów plastycznie czynnych i plastycznie biernych, co w lepkoplastyczności nie zawsze jest określone jednoznacznie i doświadczalnie sprawdzonymi kryteriami. Takie problemy jak stateczność konstrukcji lepkoplastycznych czy narażenie ich na różne formy lokalnego zniszczenia są znacznie mniej zbadane, niż w teorii plastyczności i teorii lepkosprężystości, co utrudnia właściwe sformułowanie warunków ograniczających przy kształtowaniu.

Szczególnie wiele uwagi optymalnemu kształtowaniu konstrukcji lepkoplastycznych, zarówno przy obciążeniach quasi-statycznych, jak i dynamicznych, poświęcił E. Cegielski. Ograniczenia optymalizacji zostały przy tym podzielone na ograniczenia o charakterze globalnym i lokalnym. Do pierwszej grupy zaliczono między innymi energię dysypowaną w trakcie procesu i normę przemieszczeń resztkowych (np. największe ugięcie resztkowe). Lokalne ograniczenia były nakładane na jednostkową energię dysypowaną, maksymalne (w czasie) naprężenie zredukowane w poszczególnych punktach ciała, największy lub najmniejszy wymiar przekroju itp. Ograniczeń związanych ze statecznością konstrukcji nie stawiano.

Obciążenia quasi-statyczne rozważano w pracy [10], badającej dla przykładu optymalne kształty belki wspornikowej. Zbadano zależność kształtów od praw fizycznych,

od rozkładu obciążeń w przestrzeni i w czasie, oraz od przyjętej formy ograniczeń. Pozostałe prace poświęcono obciążeniom dynamicznym: kształtom optymalnym prętów uderzanych osiowo [11], kształtowaniu belek przy udarze poprzecznym [86], kształtowaniu powłok walcowych przy dynamicznych obciążeniach złożonych [12] (te trzy prace zostały opublikowane wspólnie z M. Życzkowskim) oraz kształtowaniu belek przy różnych formach impulsu [9].

Pomimo różnorodności omówionej powyżej tematyki można stwierdzić, że optymalne kształtowanie konstrukcji lepkoplastycznych przedstawia jeszcze pole niemal całkowicie otwarte.

### 11. Inne zagadnienia optymalizacji przy pełzaniu

Niezależnie od problemów optymalnego kształtowania konstrukcji, własności reologiczne materiałów stwarzają możliwości sformułowania zagadnień optymalizacji procesów w ustalonym punkcie ciała, nawet w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia. Problem optymalnej ścieżki  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ , zapewniającej minimalną pracę odkształcenia przy osiągnięciu danego odkształcenia końcowego w zadanym czasie  $T$ , sformułował S. Breuer [8]; podał on rozwiązanie dla pewnych szczególnych przypadków liniowej lepkosprężystości. Ogólny przypadek liniowych praw fizycznych rozpatrywali G. Leitmann [36], M. E. Gurtin, R. C. MacCamy i L. F. Murphy [29]; w tej ostatniej pracy autorzy stwierdzili, że bez dodatkowych ograniczeń przyjętych przez Leitmanna ścieżka optymalna wykazuje nieciągłości w punktach  $t = 0$  i  $t = T$ . Dalsze rezultaty w tym kierunku uzyskali M. A. Day [15] (oszacowanie minimalnej pracy odkształcenia) i S. J. Spector [66] (dowód monotoniczności ścieżki). Optymalne sterowanie procesu temperaturą rozpatrywali M. E. Gurtin i L. F. Murphy [30, 31] oraz Y. Weitsman i D. Ford [74, 75] (optymalne chłodzenie zapewniające minimalizację naprężeń resztkowych).

### 12. Uwagi końcowe i wnioski

Optymalne kształtowanie konstrukcji w warunkach pełzania stanowi stosunkowo nową gałąź kształtowania, technicznie ważną zarówno z uwagi na pracę konstrukcji metalowych w podwyższonych temperaturach, strumieniu neutronów itp., jak i na stosowanie materiałów pełzających w temperaturze pokojowej, np. betonu i tworzyw sztucznych.

Problemy kształtowania w warunkach pełzania wyróżniają się następującymi specyficznymi cechami:

1) Istnienie czynnika czasu, który z jednej strony prowadzi do projektowania konstrukcji na określoną żywotność a z drugiej powoduje wzrost liczby wymiarów zagadnienia — np. równania stanu dla elementów jednowymiarowych stają się równaniami różniczkowymi cząstkowymi w miejsce zwyczajnych;

2) Równania stanu cechuje z reguły nieliniowość, co często uniemożliwia stosowanie metod dogodnych dla zagadnień liniowych; ponadto duża różnorodność równań stanu często rzutuje na wynik optymalizacji;

3) Formy ograniczeń optymalizacji są również bardzo różnorodne — tak na przykład istnieje wiele teorii wyboczenia pełzającego, zniszczenia przy pełzaniu itp.

4) Występują tu całkowicie nowe typy ograniczeń (lub kryteriów optymalizacji), np. w związku z ograniczeniem lub minimalizacją relaksacji naprężeń, z minimalizacją pracy odkształcenia w trakcie procesu itp.

5) W przypadku konstrukcji lepkoplastycznych wszystkie te cechy nakładają się na cechy typowe dla plastyczności, związane przede wszystkim z rozróżnieniem procesów plastycznie czynnych i biernych.

W świetle omówionego bogactwa problematyki uzyskane w tym zakresie wyniki są jeszcze bardzo skromne. Z drugiej strony uwzględnianie pełzania w obliczeniach wytrzymałościowych bywa coraz częściej stosowane w praktyce inżynierskiej. Dziedzina optymalnego kształtowania konstrukcji w warunkach pełzania może więc liczyć na dalszy wszechstronny rozwój.

#### Literatura

1. H. M. ADELMAN, PATRICIA L. SAWYER, C. P. SHORE, *Optimum design of structures at elevated temperatures*, AIAA Journal **17** (1979), 6, 622 - 629.
2. M. ALBIŃSKA, A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie belki wspornikowej obciążonej silami zewnętrznymi i ciężarem własnym w warunkach pełzania*, Mech. Teor. Śtos. **16** (1978), 4, 499 - 506.
3. Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ, *Задача оптимизации в теории ползучести для неоднородных балок, подверженных старению*, Прикл. Механика **15** (1979), 10, 97 - 106.
4. Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ, *Теория ползучести неоднородных тел*, Наука, Москва 1983.
5. Н. Х. АРУТЮНЯН, А. А. ЗЕВИН, *Задачи оптимизации в теории ползучести для нарастаемых тел, подверженных старению*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1979), I, 100 - 107.
6. Н. Х. АРУТЮНЯН, А. А. ЗЕВИН, *Оптимальная форма нарастаемой колонны*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1981), 5, 128 - 132.
7. J. WŁASCHUT, M. ŻYCZKOWSKI, *Bimodal optimal design of clamped—clamped columns under creep conditions*, Int. J. Solids Struct. **20** (1984), 6, 571 - 577.
8. S. BREUER, *The minimizing strain-rate history and the resulting greatest lower bound on work in linear viscoelasticity*, Z. angew. Math. Mech. **49** (1969), 209 - 213.
9. E. SEGIELSKI, *Optimization of rigid-viscoplastic bars and beams under dynamic loadings*, IV Bulg. Congr. Mech., Varna 1981, Vol. 1, 484 - 489.
10. E. SEGIELSKI, *Problemy optymalnego kształtowania wspornikowej belki lepkoplastycznej przy obciążeniu quasistatycznym*, Mech. Teor. Śtos. **23** (1985), 3-4, 381 - 396.
11. E. SEGIELSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Parametric optimization of viscoplastic bars under dynamic axial loading*, Rozpr. Inż. **29** (1981), 1, 27 - 37.
12. E. SEGIELSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimization of some viscoplastic structures under variable loads*, Euromech Coll. 174 on Inelastic Structures, Palermo 1983, COGRAS, Palermo 1984, 105 - 116.
13. А. А. ЧИРАС, В. М. ДУЛЬМАН, *Задачи оптимизации элементов конструкций в условиях ползучести*, Строит. Мех. Расч. Сооруж. (1984), 6, 19 - 22.
14. Р. И. ДАНЧАК, М. С. МИХАЙЛИШИН, О. Н. ШАБЛИЙ, *Оптимальное проектирование статически определимых балок, находящихся в условиях установившейся ползучести, с учетом напряжений поперечного сдвига*, Прикл. Механика **20** (1984), 7, 89 - 96.
15. M. A. DAY, *Improved estimates for least work in linear viscoelasticity*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **32** (1979), 1, 17 - 24.
16. N. DISTEFANO, *Quasilinearization and the solution of nonlinear design problems in structures undergoing creep deformations*, Int. J. Solids Struct. **8** (1972), 215 - 225.



17. A. E. DUBBERLEY, D. P. JOHNSON, J. R. PUNCHES, R. J. MCCANDLESS, *LMFBR fuel assembly channel wall cross section optimization*, Trans. 4th SMiRT Congr. San Francisco 1977, D2/1 - 2/9.
18. В. М. Дульман, *Оптимизация круговых осесимметрично нагруженных пластинок в условиях установившейся ползучести, Постановка и Решение Задач Строительной Механики*, Вильнюс 1981.
19. Г. Е. Факторович, *Оптимальное проектирование круглой пластины при ползучести*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1978), 6, 163 - 165.
20. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiału o nieliniowości fizycznej*, Zesz. Nauk. Polit. Krak. 5, Kraków 1975.
21. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie belki wspornikowej z materiału nieliniowego fizycznie obciążonej ciężarem własnym*, Rozpr. Inż. 24 (1976), 3, 453 - 467.
22. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wirującego pręta z uwzględnieniem nieliniowości fizycznej materiału*, Mech. Teor. Stos. 14 (1976), 2, 261 - 271.
23. A. GAJEWSKI, *Effect of physical nonlinearities on optimal design of structures*, Proc. IUTAM Symp. on Physical Nonlinearities Senlis 1980, Springer 1981, 81 - 84.
24. A. GAJEWSKI, T. SĄBIK, *Optymalne kształtowanie swobodnie podparte belki, obciążonej silami zewnętrznymi i ciężarem własnym, w warunkach pełzania ustalonego*, Czasopismo Techn. 84 (1984), 2-M, 1 - 7.
25. Л. В. Генкин, В. Б. Колмановский, *Оптимизация по прочности формы вязкоупругого армированного стержня*; Прикл. Мат. Мех. 46 (1982), 683 - 690.
26. Ю. Б. Гольдштейн, М. А. Соломещ, *Некоторые задачи оптимального проектирования упруго-вязких стержневых систем*, Уч. Зап. Петрозаводск. Унив. 18 (1972), 4, 184 - 193.
27. Ю. Б. Гольдштейн, М. А. Соломещ, *Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем*, Изд. Ленингр. Унив. Ленинград 1980.
28. O. GUNNESKOV, *Optimal design of rotating disks in creep*, J. Struct. Mech. 4 (1976), 2, 141 - 160.
29. M. E. GURTIN, R. C. MACCAMY, L. F. MURPHY, *On optimal strain paths in linear viscoelasticity*, Quart. Appl. Math. 37 (1979), 151 - 156.
30. M. E. GURTIN, L. F. MURPHY, *On optimal temperature paths for thermorheologically simple viscoelastic materials*, Quart. Appl. Math. 38 (1980), 2, 179 - 189.
31. M. E. GURTIN, L. F. MURPHY, *Optimal temperature paths for thermorheologically simple viscoelastic materials with constant Poisson's ratio are canonical*, Quart. Appl. Math. 41 (1984), 4, 457 - 460.
32. G. A. HEGEMIER, W. PRAGER, *On Michell trusses*, Int. J. Mech. Sci. 11 (1969), 2, 209 - 215.
33. В. Б. Колмановский, В. В. Метлов, *Оптимальная форма армированной колонны, нарастающей со случайной скоростью*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1983), I, 91 - 101.
34. А. Г. Костюк, *Расчет профиля вращающегося диска для условий ползучести*, Прикл. Мат. Мех. 17 (1953), 5, 615 - 618.
35. J. KRUŻELECKI, *Pewne problemy kształtowania powłok osiowo-symetrycznych w stanie blonowym*, Mech. Teor. Stos. 17 (1979), 1, 79 - 92; str. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 27 (1979), 8/9, 353 - 360.
36. G. LEITMANN, *Some problems of scalar and vector-valued optimization in linear viscoelasticity*, J. Optimiz. Theory Appl. 23 (1977), 1, 93 - 99.
37. T. LEKSZYCKI, N. OLSHOFF, *Optimal design of viscoelastic structures under forced steady state vibration*, DCAMM rep. 195 (1980); J. Struct. Mech. 9 (1981), 4.
38. Я. А. Леллеп, *Оптимальное проектирование балок в условиях установившейся ползучести*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1977), I, 202 - 206.
39. Я. А. Леллеп, *К оптимальному проектированию кольцевых пластин при установившейся ползучести*, Уч. Зап. Тартуск. Унив. 487 (1979), 8 - 15.
40. Ю. Р. Лепик, *Оптимальное проектирование неупругих балок с дополнительными опорами в случае динамического нагружения*, Уч. Зап. Тартуск. Унив. 430 (1977), 132 - 143.
41. Ю. Р. Лепик, *Оптимальное проектирование нелинейно-вязких кольцевых пластин при импульсном нагружении*, Труды XII Всес. Конф. Обол. и Пластин, т. III, Ереван 1980, 5 - 10.
42. Ü. LERIK, *Application of the control theory for optimal design of nonelastic beams under dynamic loading*, Proc. IUTAM Symp. Structural Control, Waterloo 1979, North Holland 1980, 447 - 457.

43. Ю. Лепик, *Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения*, Валгус, Таллин 1982.
44. M. MARKIEWICZ, *Kształtowanie prostych ustrojów kratowych metodą wyznaczania konturu całkowitej niejednoznaczności*, Rozpr. Inż. **28** (1980), 4, 569 - 584.
45. M. MARKIEWICZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Contour of complete nonuniqueness as a method of structural optimization with stability constraints*, J. Optimiz. Theory Appl. **35** (1981), 1, 23 - 30.
46. J. B. MARTIN, *The optimal design of beams and frames with compliance constraints*, Int. J. Solids Struct. **7** (1971), 1, 63 - 81.
47. J. B. MARTIN, A. R. S. PONTIER, *The optimal design of a class of beam structures for non-convex cost function*, J. de Mécanique **11** (1972), 2, 341 - 360.
48. Z. MRÓZ, *Mode approach to rational synthesis of structures under impulsive and dynamic pressure loading*, Trans. 4th Conf. SMiRT, San Francisco 1977, L2.4/1 - 8.
49. З. Мроз, Ю. Р. Лепик, *Оптимальное проектирование конструкций при импульсном нагружении*, Мех. Полимеров (1977), 6, 1021 - 1028.
50. W. NACHBAR, J. B. SCHIRMÖLDER, *Optimization of a viscoelastic structure, the seat-belt problem*, J. Appl. Mech. **36** (1969), 4, 565 - 572.
51. В. Л. НАРУСВЕРГ, *Оптимизация цилиндрической оболочки из композита с вязкоупругим наполнителем, работающим на длительную устойчивость*, Мех. Полимеров (1977), 4, 679 - 684.
52. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Оптимальное проектирование ползучих конструкций*, III Всес. Съезд по Теор. Прикл. Мех., Москва 1968.
53. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Об учете веса при проектировании конструкций в условиях ползучести*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1970), 4, 113 - 123.
54. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, Б. С. РЕЗНИКОВ, *Равнопрочные в условиях ползучести балки и плиты*, Машиноведение (1969), 2, 58 - 64.
55. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, Б. С. РЕЗНИКОВ, *Об оптимальном по условиям эксплуатации проектировании балок и пластин подверженных ползучести*, Машиноведение (1969), 3, 75 - 80.
56. Ю. М. ПОЧТМАН, *Динамическое программирование в задачах оптимизации конструкции подверженных ползучести*, Докл. АН СССР **196** (1971), 3, 553 - 556.
57. W. PRAGER, *Optimal structural design for given stiffness in stationary creep*, Z. angew. Math. Physik **19** (1968), 2, 252 - 256.
58. Ю. Н. РАВОТНОВ, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, Москва 1966.
59. М. И. РЕЙТМАН, *К теории оптимального проектирования пластмассовых конструкций с учетом фактора времени*, Мех. Полимеров (1967), 357 - 360.
60. Р. Б. РИКАРДС, Г. А. ТЕТЕРС, *Оптимизация цилиндрической оболочки из композитного материала с вязкоупругим наполнителем при осевом сжатии*, Мех. Полимеров (1975), 3, 442 - 446.
61. M. RYSZ, *Optimal design of a thick-walled pipe-line cross-section in creep conditions*, IV Bulg. Congr. Mech., Varna 1981, Vol. 1, 478 - 483.
62. M. RYSZ, *Wytniarowanie cylindrów grubościennych pod działaniem ciśnienia wewnętrznego i rozciągania z uwagi na kruche pękanie przy pelzaniu*, Rozpr. Inż. **33** (1985), 4, 445 - 459.
63. M. RYSZ, *Optimal rib-reinforcement of a thin-walled pipeline with respect to creep rupture*, J. of Pipelines (Elsevier), **5**, (1985) 125-136.
64. M. RYSZ, *Optimal design of ribbed pipelines in creep conditions*, J. of Pipelines (w druku).
65. M. RYSZ, *Optimal design of a thick-walled pipe-line cross-section against creep rupture* (w druku).
66. S. J. СПЕКТОР, *On monotonicity of the optimal strain path in linear viscoelasticity*, Quart. Appl. Math. **38** (1980), 369 - 373.
67. О. Н. ШАБЛИЙ, В. И. ЗАРЕЦКИЙ, *Оптимальное управление напряженно-деформированным состоянием упруговязкой цилиндрической оболочки*, Прикл. Мех. **17** (1981), 7, 42 - 47.
68. О. Н. ШАБЛИЙ, В. И. ЗАРЕЦКИЙ, *Оптимальное управление напряженно-деформированным состоянием диска*, Прикл. Мех. **17** (1981), 8, 69 - 74.
69. W. ŚWISTERSKI, *Optimization of statically indeterminate, geometrically non-linear beams in creep conditions*, IV Bulg. Congr. Mech., Varna 1981, Vol. 1, 472 - 477.
70. W. ŚWISTERSKI, A. WRÓBLEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically non-linear eccentrically compressed*

- columns of uniform creep strength vs optimal columns*, Int. J. Non - Linear Mechanics **18** (1983), 4, 287 - 296.
71. Г. А. ТЕТЕРС, Р. Б. РИКАРДС, В. Л. НАРУСБЕРГ, *Оптимизация оболочек из слоистых композитов*, Зинатне, Рига 1978.
  72. И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, *Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести*, Наука, Москва 1969.
  73. А. ТРОЈНАСКИ, М. ЖЫЧКОВСКИ, *Effect of plastic crushing of the car body on optimization of rheological properties of safety belts*, Rozpr. Inż. **29** (1981), 1, 115 - 130.
  74. Y. WEITSMAN, *Optimal cool-down in linear viscoelasticity*, J. Appl. Mech. **47** (1980), 1, 35 - 39.
  75. Y. WEITSMAN, D. FORD, *On the optimization of cool-down temperatures in viscoelastic resins*, Proc. 14th Mtg. Soc. Engin. Sci. (1977), 323 - 339.
  76. R. WOJCIANOWSKA, *Оптималне кшталтование устройств кратовых в условиях ползучести в отношении до теории выщеления Работнова-Шестерикова*, Mech. Teor. Stos. **12** (1974), 3, 245 - 263.
  77. R. WOJCIANOWSKA, *Optimal design of weakly curved compressed bars with Maxwell type creep effects*, Arch. Mech. Stos. **30** (1978), 6, 845 - 851.
  78. R. WOJCIANOWSKA, M. ЖЫЧКОВСКИ, *Оптималне кшталтование устройств кратовых в условиях ползучести в отношении до теории выщеления Кемпнера-Хоффа*, Arch. Inż. Ладowej **18** (1972), 4, 511 - 530; str. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. **21** (1973), 6, 261 - 268.
  79. R. WOJCIANOWSKA, M. ЖЫЧКОВСКИ, *On optimal imperfect columns subjected to linear creep buckling*, J. Appl. Mech. **47** (1980), 2, 438 - 439.
  80. R. WOJCIANOWSKA, M. ЖЫЧКОВСКИ, *Optimal trusses transmitting a force to a given contour in creep conditions*, Int. J. Mech. Sci. **26** (1984), 1, 21 - 28.
  81. А. А. ЗЕВИН, *Об оптимальной форме стареющегося наследственного тела*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1979), 3, 127 - 134.
  82. M. ЖЫЧКОВСКИ, *Some problems of creep buckling of homogeneous and non-homogeneous bars*, Proc. IUTAM Symp. on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Warsaw 1958, Pergamon Press London 1959, 353 - 363.
  83. M. ЖЫЧКОВСКИ, *Creep buckling of continuously longitudinally non-homogeneous and non-prismatic bars*, Arch. Mech. Stos. **13** (1961), 2, 213 - 237.
  84. M. ЖЫЧКОВСКИ, *Optimal structural design in rheology*, 12th. Int. Congr. Theor. Appl. Mechanics, Stanford 1968; J. Appl. Mech. **38** (1971), 1, 39 - 46.
  85. M. ЖЫЧКОВСКИ, *Recent results on optimal design in creep conditions*, Euromech Coll. 164 on Optimization Methods in Structural Design, Bibl. Inst. Zürich 1983, 444 - 449.
  86. M. ЖЫЧКОВСКИ, E. СЕГИЕЛЬСКИ, *Parametryczna optymalizacja belek sztywno-lepkoplastycznych pod działaniem obciążeń dynamicznych*, Arch. Inż. Ладowej, **32** (1986), 1, 95 - 104.
  87. M. ЖЫЧКОВСКИ, M. RYSZ, *Optimal design of a thin-walled pipe-line cross-section in creep conditions*, Proc. Symp. on Mechanics of Inelastic Media and Structures, Waszawa 1978, PWN 1982, 329 - 339.
  88. M. ЖЫЧКОВСКИ, M. RYSZ, *Optimization of cylindrical shells under combined loading against brittle creep rupture*, Proc. IUTAM Symp. on Inelastic Behavior of Plates and Shells, Rio de Janeiro 1985, Springer 1986, 385 - 401.
  89. M. ЖЫЧКОВСКИ, W. ШВИСТЕРСКИ, *Optimal structural design of flexible beams with respect to creep rupture time*, Proc. IUTAM Symp. on Structural Control, Waterloo 1979, North Holland 1980, 795 - 810.
  90. M. ЖЫЧКОВСКИ, R. WOJCIANOWSKA-ZAJĄC, *Optimal structural design with respect to creep buckling*, Proc. IUTAM Symp. Creep in Structures II, Göteborg 1970, Springer 1972, 371 - 387.

## Резюме

ОБЗОР ТРУДОВ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИИ  
В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассмотрено проблематику и характерные черты оптимального проектирования конструкции в условиях ползучести; эту тему раскрыли четыре работы 1967 - 8 годов.

В дальнейшем рассмотрено результаты полученные в области проектирования отдельных конструктивных элементов, а именно: (4) стержни и балки, (5) колонны, стержни подвергающиеся продольному изгибу при ползучести, (6) стержневые системы, (7) диски и пластинки, (8) оболочки, цилиндры, трубопроводы, (9) проблемы оптимизации связанные с релаксацией напряжений, (10) проблемы оптимального проектирования вязкопластических конструкций, (II) другие задачи оптимизации при ползучести. Специфические черты разрабатываемой проблематики приведены в конечных выводах следующим образом: (I) существование фактора времени, (2) нелинейность уравнений состояния, (3) разнородность ограничений оптимизации, (4) новые типы ограничений, напр. связанные с релаксацией напряжений, (5) добавочные черты специфические при проектировании вязкопластических конструкций.

#### Summary

#### A SURVEY OF OPTIMAL STRUCTURAL DESIGN IN CREEP CONDITIONS

Typical problems and features of optimal design of structures in creep conditions are discussed; this branch of optimal design was initiated by four papers published in 1967-8. Subsequently, the results obtained in optimization of individual structural elements are reviewed, namely: (4) bars and beams, (5) columns, bars subject to creep buckling, (6) bar systems, (7) disks and plates, (8) shells, cylinders, pipelines, (9) problems of optimization under relaxation constraints, (10) problems of optimal design of viscoplastic structures, (11) other problems of optimization in creep conditions. Specific features of the problems discussed are summarized in final remarks as follows: (1) existence of the factor of time, (2) nonlinearity of equations of state, (3) great variety of optimization constraints, (4) new types of constraints, e.g. related to stress relaxation, (5) additional features when optimizing viscoplastic structures.

*Praca wpłynęła do Redakcji 20 listopada 1985 roku*

## BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS IN THE THEORY OF THIN PLATES

ELŻBIETA KOSSECKA

IPPT PAN Warszawa

### 1. Introduction

The method of boundary integral equations, connected with the classical boundary value problems of potential theory, due to the progress of modern computational techniques, has become an effective tool to solve the boundary value problems.

It allows to reduce a three-dimensional problem to a two-dimensional one or a two-dimensional problem to a one-dimensional one, what is advantageous when solving the problem numerically.

In this paper, different possible formulations of the problem of a thin plate, with simply supported or clamped edges, are presented. They lead to a different systems of boundary integral equations.

One of the possible approaches is through the Rayleigh — Green formula, which represents a biharmonic function as a superposition of four biharmonic potentials. It leads to the system of weakly singular integral equations of the first kind.

Besides that, a biharmonic function can be represented in several ways by different combinations of two biharmonic potentials, what leads to different systems of boundary integral equations of the first and second kind for boundary functions which in general do not have a physical interpretation.

### 2. Basic relationships and equation of equilibrium for the thin plate

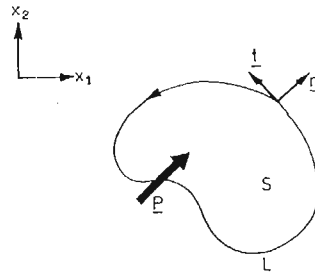
A homogenous, thin elastic plate, we describe in the following way. The middle surface of the plate is a region  $S$  of the plane  $(x_1, x_2)$ , its boundary constitutes a curve  $L$  (Fig. 1):

$$x \in S; x = [x_1, x_2]. \quad (1)$$

The curve  $L$  is given in the parametric form:

$$x \in L: x = [x_1(l), x_2(l)], \quad (2)$$

the parameter  $l$  being the arc length along the curve  $L$ . We assume that  $L$  consists of a finite number of segments of the class  $C^2$ .  $\tau$  is the tangent vector of  $L$ ,  $n$  is the normal



Rys. 1.

vector directed outwards  $S$ :

$$t(l) = \frac{dx(l)}{dl}, \quad n(l) = [t_2(l), -t_1(l)]. \quad (3)$$

By  $\kappa$  we denote the internal curvature of the curve  $L$ .

$$\kappa(l) = -\frac{dt(l)}{dl} n(l), \quad n = -\frac{1}{\kappa} \frac{dt}{dl}, \quad (4)$$

the reciprocal of  $\kappa$  is the curvature radius  $\varrho$ :

$$\varrho = \frac{1}{\kappa}. \quad (5)$$

The deflection of the middle surface of the plate in the direction of the  $x_3$  axis, describes the function  $w = w(x)$ , its derivatives have the meaning of the deflection slopes of the middle surface of the bent plate with respect to the surface  $(x_1, x_2)$ .

We consider now an element of the transversal cross-section of the plate, of unit length, having the normal vector  $n$  and the tangent vector  $t$ . The derivatives in the directions  $n$  and  $t$  we denote respectively:

$$\frac{\partial}{\partial n} = n \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = t \frac{\partial}{\partial x}, \quad (6)$$

$\frac{\partial w}{\partial n}$  and  $\frac{\partial w}{\partial t}$  represent respectively the slopes of the middle surface in the directions  $n$  and  $t$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}$  and  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  represent the curvatures of the middle surface.

The bending moment  $M_{nn}$  and the twisting moment  $M_{nt}$ , acting on the element of the cross-section, are given respectively:

$$M_{nn} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = -D \left[ \Delta w - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right], \quad (7)$$

$$M_{nt} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}, \quad (8)$$

$\Delta$  is the Laplace operator.

The transverse force  $Q_n$  is given as:

$$Q_n = -D \frac{\partial}{\partial n} \Delta w. \quad (9)$$

The limits of the above quantities at the boundary  $L$  of  $S$ , we consider as the functions of the parameter  $l$ .

The effective transverse force acting on the element of the boundary of unit length:

$$V_n = Q_n + \frac{d}{dl} M_n = -D \left[ \frac{\partial}{\partial n} \Delta w + (1-\nu) \frac{d}{dl} \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial l} \right]; \quad x \in L. \quad (10)$$

The equation of equilibrium of a thin, homogeneous elastic plate, loaded by the lateral load, described by the intensity  $p(x)$ , has the form:

$$\Delta \Delta w = \frac{P}{D}, \quad (11)$$

$D$  is the bending stiffness of the plate:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (12)$$

where  $h$  the plate thickness,  $E$  the elasticity modulus and  $\nu$  the Poisson ratio of the material of the plate (see [1, 2]).

### 3. The integral formula for the function $w$

For a function  $w$  satisfying in the region  $S$ , bounded by the curve  $L$ , the differential equation (11), we can derive the following integral formula.

Let  $G$  be a Green function of the equation (11). In the sense of the theory of generalized functions,  $G$  is the solution of the equation:

$$\Delta \Delta G(x, x') = \delta_{(2)}(x-x'), \quad (13)$$

where  $\delta_{(2)}(x-x')$  is the two-dimensional Dirac delta function. In general  $G$  is of the form:

$$G = G_0 + G_1, \quad (14)$$

where  $G_0$  is a particular solution of the equation (13), while  $G_1$  is a solution of the homogeneous biharmonic equation and satisfies appropriate boundary conditions. We may take  $G_0$  in the form:

$$G_0(x, x') = \frac{1}{8\pi} [r^2 \ln r - r^2], \quad r = x - x'. \quad (15)$$

For  $G_0$  we can take also the function  $\frac{1}{8\pi} r^2 \ln r$  or  $\frac{1}{8\pi} r^2 \ln \frac{r}{a}$ ; the expression (15) has the advantage, that its laplasian is proportional to  $\ln r$ .

In the forthcoming formulae  $x$  will be a fixed point of the area  $S$  or the boundary  $L$ , whereas  $x'$  will be varying. To the fixed point of the boundary  $L$  corresponds a fixed value of the parameter  $l$ , to the varying point of  $L$  corresponds the varying value of the para-

meter  $l'$ :

$$\mathbf{x} \in L: \mathbf{x} = \mathbf{x}(l); \quad \mathbf{x}' \in L: \mathbf{x}' = \mathbf{x}'(l'). \quad (16)$$

With primes we shall distinguish the quantities corresponding to the varying point  $\mathbf{x}' \cdot \frac{\partial}{\partial n}$  will denote the derivative in the direction normal to the boundary  $L$  at the point  $l$  with respect to the variable  $\mathbf{x}$ , whereas  $\frac{\partial}{\partial n'}$  will denote the normal derivative at the point  $l$  with respect to the variable  $\mathbf{x}'$ :

$$\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n}(l) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial n'} = \mathbf{n}'(l') \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}. \quad (17)$$

For  $\mathbf{x} \in S$  we have the following identity:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &\equiv \int_S ds' w(\mathbf{x}') \delta_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_S ds' w(\mathbf{x}') \Delta \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \\ &= \int_S ds' w(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \frac{\partial}{\partial x'_\beta} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'); \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in S. \end{aligned} \quad (18)$$

Performing in the above formula four times integration by parts, we obtain the following formula — called the Rayleigh — Green identity — for the function  $w$  satisfying in the region  $S$  Eq. (11):

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= \oint_L dl' w(\mathbf{x}'(l')) \frac{\partial}{\partial n'} \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'(l')) - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} w(\mathbf{x}'(l')) \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'(l')) + \\ &+ \oint_L dl' \Delta w(\mathbf{x}'(l')) \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'(l')) - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w(\mathbf{x}'(l')) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'(l')) + \\ &+ \frac{1}{D} \int_S ds' p(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (19)$$

The formula (19) has the twofold meaning. On the one hand, when the function  $G$  satisfying suitable boundary conditions is known, it allows for the derivation of the function  $w$  satisfying given boundary conditions, with the given loadings  $p$ . On the other hand, using the simplest  $G$ , for example  $G_0$ , it constitutes the base to formulate the boundary equation; for the unknown functions. The solution can then be found by simple integration. In particular, the boundary equations method allows for the derivation of  $G$  itself, assuming  $p$  to be the concentrate force (see [3]).

#### 4. The simply supported plate

We call the plate simply supported, if the deflection and the bending moment are zero at its boundary:

$$\mathbf{x} \in L: w = 0 \quad M_{nn} = -D \left[ \Delta w - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (20)$$



If the deflection  $w$  is equal to zero at the boundary, its derivatives along the boundary are equal to zero, in particular:

$$\begin{aligned} x \in L: \quad 0 &= \frac{d^2 w}{dl^2} = \frac{d}{dl} t \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{dt}{dl} \frac{\partial w}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{dt}{dl} n \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial w}{\partial n}. \end{aligned} \quad (21)$$

Hence:

$$x \in L: \quad w = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial w}{\partial n}. \quad (22)$$

For the rectilinear boundary  $\kappa = 0$ , the boundary conditions (20) have thus the form:

$$x \in L: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad (23)$$

or

$$x \in L: \quad w = 0, \quad \Delta w = 0. \quad (24)$$

For the curvilinear boundary:

$$x \in L: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \kappa \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (25)$$

or

$$x \in L: \quad w = 0, \quad \Delta w - (1 - \nu) \kappa \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (26)$$

### 5. The boundary integral equations for the simply supported plate resulting from the boundary formula

The integral formula (19) gives the representation of the function  $w$  in terms of the boundary values of the function itself and its derivatives. We shall call them boundary functions. The boundary conditions for the function  $w$  determine immediately some boundary functions, being at the same time the integral equations for the remaining functions, treated as the unknowns in these equations.

We consider first the simply supported plate in the form of a polygon, satisfying the boundary conditions (24). From the formula (19) it follows, that the deflection function of such a plate may be represented in the form:

$$w = - \oint_L dl' \frac{\partial w}{\partial n} \Delta G - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w G + \frac{1}{D} \int_S ds' p G. \quad (27)$$

At the same time, from the boundary conditions (24), we obtain the following set of equations for the functions  $\frac{\partial w}{\partial n}$  and  $\frac{\partial}{\partial n} \Delta w$  which we accept as the unknown boundary functions, depending on the parameter  $l$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= - \oint_L dl' \frac{\partial w}{\partial n'} \Delta G - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w G + \frac{1}{D} \int_S ds' p G, \\
 0 &= - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w \Delta G + \frac{1}{D} \int_S ds' p \Delta G, \quad x, x' \in L.
 \end{aligned} \tag{28}$$

For the function  $G$  we take the function  $G_0$ , given by the formula (15). (If we have used in the formula (27) not the function  $G_0$  but the function  $G$  satisfying the boundary conditions  $G = 0$ ,  $\Delta G = 0$ , only the last term would remain in this formula, and the boundary conditions would be satisfied automatically).

Deriving the second equation, we have assumed the limit of the contour integral containing the term  $\Delta \Delta G$  to be equal to zero, because from (13):

$$\Delta \Delta G(x, x') = 0 \quad \text{for } x \in S, x' \in L, x \neq x'. \tag{29}$$

The function  $\frac{\partial w}{\partial n}$  and  $\frac{\partial}{\partial n} \Delta w$  disappear in the corners of the plate. Let us consider a rectangular corner. If the quantities  $w$  and  $\Delta w$  disappear at the boundary then its tangent derivatives along the boundary disappear also. But at the corner the tangent derivatives along one edge are equal to the normal derivatives along the other edge,  $\frac{\partial w}{\partial n}$  and  $\frac{\partial}{\partial n} \Delta w$  disappear thus in the corner. The similar reasoning can be carried out for the corner with arbitrary internal angle.

The set of equations we have obtained, is the set of the Fredholm's equations of the first kind, as the unknown functions appear only under the integral sign. The integral kernels possess only weak, logarithmic singularities. In the second equation only the unknown function  $\frac{\partial}{\partial n'} \Delta w$  appears.

Let us consider now the simply supported plate with curvilinear boundary. From the integral formula (19) and the boundary conditions (26) results the following representation for the function  $w$ :

$$w = - \oint_L dl' \frac{\partial w}{\partial n'} \left[ \Delta - (1-\nu)\kappa' \frac{\partial}{\partial n'} \right] G - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w G + \frac{1}{D} \int_S ds' p G. \tag{30}$$

Let us mention, that in the boundary conditions the boundary function  $\frac{\partial w}{\partial n}$  appears.

At the same time, from the boundary conditions (26) we obtain the following set of equations for the unknown boundary functions:

$$\begin{aligned}
 0 &= - \oint_L dl' \frac{\partial w}{\partial n'} \left[ \Delta - (1-\nu)\kappa' \frac{\partial}{\partial n'} \right] G - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w G + \frac{1}{D} \int_S ds' p G, \\
 0 &= - \frac{1}{2} (1-\nu)\kappa \frac{\partial w}{\partial n} + (1-\nu) \oint_L dl' \frac{\partial w}{\partial n'} \kappa' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta G - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w \Delta G + \\
 &\quad + \frac{1}{D} \left[ \Delta - (1-\nu)\kappa \frac{\partial}{\partial n} \right] \int_S ds' p G.
 \end{aligned} \tag{31}$$

The appropriate derivatives of the function  $G = G_0$  are given by the formulae A1 (2, 3, 5, 7). When deriving the second equation, we have taken into account (29) and the limiting properties of the two-dimensional harmonic potential of a double layer, which constitutes the integral with the kernel  $\frac{\partial}{\partial n'} \Delta G$  (see A2 (1, 2)). For  $\kappa = 0$  equations (31) turn into equation (28). We assume also that the limiting transition to the plate with corners ( $\varrho \Rightarrow 0$ ) exists.

The second equation contains the unknown function outside the integral sign also, it is thus the integral equation of the second kind.

### 6. Different integral representation and the boundary equations for the function $w$

The integral formula (19) is not the only possible representation of the function  $w$ , which we can use to solve the boundary value problems. In general, we can seek for the function  $w$  in the form:

$$w = w_0 + w_1, \quad (32)$$

where  $w_0$  is a certain particular solution of the equation (11) whereas  $w_1$  satisfies in  $S$  homogeneous biharmonic equation. For the constant load  $p$  we can take for instance  $w_0$  in the form:

$$w_0 = \frac{p}{D} \frac{r^4}{64}. \quad (33)$$

To the biharmonic function  $w_1$  corresponds the harmonic function  $\Delta w_1$ , which can be looked for in the form of a harmonic potential of a simple or double layer or their combination. It suggests different possible representations of the function  $w_1$ .

Let us consider a polygonal, simply supported plate.

a) Let us try to seek for the function  $w$  in the following form:

$$w = \oint_L dl' f(l') \frac{\partial}{\partial n'} \Delta G + \oint_L dl' g(l') \frac{\partial G}{\partial n'} + w_0. \quad (34)$$

In the above and in the following formulae, for the function  $G$  we shall accept the function  $G_0$ , given by the formula (15). From the boundary conditions (24) we obtain the following set of equations for the unknown functions  $f$  and  $g$  (for points located not at the corners of the boundary):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} f(l) + \oint_L dl' f(l') \frac{\partial}{\partial n'} \Delta G + \oint_L dl' g(l') \frac{\partial G}{\partial n'} + w_0, \\ 0 &= \frac{1}{2} g(l) + \oint_L dl' g(l') \frac{\partial}{\partial n'} \Delta G + \Delta w_0. \end{aligned} \quad (35)$$

We have made use of A2 (1, 2) and (29).

We have obtained the set of the Fredholm's equations of the second kind. The kernels of the equations are non-singular. At a rectilinear segment of the boundary, to which

belongs a point  $l$ , after performing the limitary transition  $\Delta 2(2)$ , the expressions  $\frac{\partial G}{\partial n'}$  and  $\frac{\partial}{\partial n'} \Delta G$  are equal to zero.

The functions  $f$  and  $g$  do not have any direct physical meaning, they need not satisfy also any special conditions at the corners.

We can consider the above way of derivation of the boundary integral equations for the boundary conditions (24) as the analogue of the classical solution of Dirichlet's problem.

We shall not use the representation (34) to derive the boundary equations for the plate with a curvilinear contour, because we would obtain in this case the equations with strong singularities, what we want to avoid. For polygonal plates, we can use also the representation with the kernels  $G$  and  $\frac{\partial}{\partial n'} \Delta G$ .

b) The natural representation of the deflection function of a loaded plate is the representation in the form of a sum of particular solution  $w_0$  and the solution due to the distributions along the boundary of the appropriate forces and moments (see [3]):

$$w = \oint_L dl' f(l') \frac{\partial G}{\partial n'} + \oint_L dl' g(l') G + w_0. \quad (36)$$

From the boundary conditions (24), we obtain for the polygonal plate the following set of equations (for points located not in the corners):

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_L dl' f(l') \frac{\partial G}{\partial n'} + \oint_L dl' g(l') G + w_0, \\ 0 &= \frac{1}{2} f(l) + \oint_L dl' f(l') \frac{\partial}{\partial n'} \Delta G + \oint_L dl' g(l') \Delta G + \Delta w_0, \end{aligned} \quad (37)$$

and for the plate with a curvilinear boundary, from the boundary conditions (26), the set of equations:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_L dl' f(l') \frac{\partial G}{\partial n'} + \oint_L dl' g(l') G + w_0, \\ 0 &= \frac{1}{2} f(l) + \oint_L dl' f(l') \left[ \frac{\partial}{\partial n'} \Delta G - (1-\nu) \kappa \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial n'} \right] + \\ &+ \oint_L dl' g(l') \left[ \Delta G - (1-\nu) \kappa \frac{\partial}{\partial n} G \right] + \left[ \Delta - (1-\nu) \kappa \frac{\partial}{\partial n} \right] w_0. \end{aligned} \quad (38)$$

The appropriate derivatives of the function  $G$  are given by the formula A1 (2, 3, 4, 5, 7).

We have obtained the set of equations, where the second equation contains the boundary function outside the integral sign, is thus the integral equation of the second type. The equations for the polygonal plate differ from those for the plate with curvilinear boundary relatively little. The second equation contains the weakly singular integral with the logarithmic kernel.

c) We can also look for the function  $w$  in the form:

$$w = \oint_L dl' f(l') \Delta G + \oint_L dl' g(l') \frac{\partial G}{\partial n'} + w_0. \quad (39)$$

For a polygonal plate, from the boundary conditions (24), we obtain the equations:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_L dl' f(l') \Delta G + \oint_L dl' g(l') \frac{\partial G}{\partial n'} + w_0, \\ 0 &= \frac{1}{2} g(l) + \oint_L dl' g(l') \frac{\partial}{\partial n'} \Delta G + \Delta w_0. \end{aligned} \quad (40)$$

whereas for the plate with a curvilinear boundary, from the conditions (26), the equations:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_L dl' f(l') \Delta G + \oint_L dl' g(l') \frac{\partial G}{\partial n'} + w_0, \\ 0 &= \frac{1}{2} (1-\nu) \kappa(l) f(l) - (1-\nu) \kappa(l) \oint_L dl' f(l') \frac{\partial}{\partial n} \Delta G + \frac{1}{2} g(l) + \\ &+ \oint_L dl' g(l') \frac{\partial}{\partial n'} \Delta G - (1-\nu) \kappa(l) \oint_L dl' g(l') \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial n'} + [\Delta - (1-\nu) \kappa(l)] w_0. \end{aligned} \quad (41)$$

The appropriate derivatives of the function  $G$  are given by the formulae A1 (3, 4, 5, 6, 7).

The second equation is of the second kind, the first equation is of the first kind. For  $\nu = 0$  the set of equations (41) turns into the set of equations (40).

### 7. The plate with clamped edges

A plate is called clamped (or with clamped edges) if the deflection and the deflection slope are equal to zero at the boundary:

$$x \in L: \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (42)$$

From the integral formula (19), the following representation results for the deflection function of the plate under the lateral load  $p(x)$ :

$$w = \oint_L dl' \Delta w \frac{\partial}{\partial n'} G - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w G + \frac{1}{D} \int_S ds' p G. \quad (43)$$

From the boundary conditions (42), we obtain the following set of equations for the function  $\Delta w$  and  $\frac{\partial}{\partial n'} \Delta w$  on  $L$ , which we accept as the unknown boundary functions:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_L dl' \Delta w \frac{\partial}{\partial n'} G - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w G + \frac{1}{D} \int_S ds' p G, \\ 0 &= \oint_L dl' \Delta w \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n'} G - \oint_L dl' \frac{\partial}{\partial n'} \Delta w \frac{\partial G}{\partial n} + \frac{1}{D} \int_S ds' p \frac{\partial G}{\partial n}. \end{aligned} \quad (44)$$

The appropriate derivatives of the function  $G$  are given by the formulae A1(2, 3, 4). We have obtained the set of equations of the first kind, the first one being non-singular, the second one being weakly singular. The form of the equations does not depend on the shape of the plate. In the case of a polygonal plate, the boundary functions disappear in the corners. (From the disappearance of  $w$  and  $\frac{\partial w}{\partial n}$  at the boundary follows the disappearance of  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3}$  and  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial n}$ , from here follows the disappearance of  $\Delta w$  and  $\frac{\partial}{\partial n} \Delta w$ ).

We can consider the representation (43) as the particular case of the representation:

$$w = \oint_L dl' f \frac{\partial G}{\partial n'} + \oint_L dl' g G + w_0, \quad (45)$$

where  $w_0$  is the particular solution of the equation (11).

Besides the representation (43) or (45) for the function  $w$ , we can make use of the other integral representations.

a) Let us consider the representation:

$$w = \oint_L dl' f \Delta G + \oint_L dl' g G + w_0. \quad (46)$$

From the boundary conditions (42), the following boundary equations for the boundary functions  $f$  and  $g$  result:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_L dl' f \Delta G + \oint_L dl' g G + w_0, \\ 0 &= -\frac{1}{2} f(l) + \oint_L dl' f \frac{\partial}{\partial n} \Delta G + \oint_L dl' g \frac{\partial G}{\partial n} + \frac{\partial w_0}{\partial n}. \end{aligned} \quad (47)$$

b) On the other hand the representation:

$$w = \oint_L dl' f \Delta G + \oint_L dl' g \frac{\partial G}{\partial n'} + w_0, \quad (48)$$

leads to the boundary equations:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_L dl' f \Delta G + \oint_L dl' g \frac{\partial G}{\partial n'} + w_0, \\ 0 &= -\frac{1}{2} f(l) + \oint_L dl' f \frac{\partial}{\partial n} \Delta G + \oint_L dl' g \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial n'} + \frac{\partial w_0}{\partial n}. \end{aligned} \quad (49)$$

In the sets of equations (47) and (49) we find the equation of the second kind with respect to the function  $f$  and the equation of the first kind with respect to the function  $g$ . The functions  $f$  and  $g$  need not satisfy any special conditions in the possible corners of the boundary.

### 8. Conclusions

The deflection function of a thin, homogeneous, isotropic plate, laterally loaded, as a solution of the nonhomogeneous biharmonic equation, can be represented in several ways with the help of appropriate biharmonic potentials, with densities playing the role of boundary functions. The boundary value problem is reduced in this way to the solution of a set of the boundary integral equations for the unknown boundary functions.

The most natural representation is one following from the Rayleigh — Green boundary formula, where boundary functions have the meaning of a deflection, deflection slope, bending moment and the transverse force at the boundary. However another representations can lead to „better” sets of integral equations, containing equations of the second kind, whereas from that formula equations of the first kind follow, (see [5]).

### Appendix 1

The derivatives of the Green function of the biharmonic equation:

$$G = \frac{1}{8\pi} [r^2 \ln r - r^2]; \quad r = x - x', \quad (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{8\pi} (nr)[2 \ln r - 1], \quad (2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = -\frac{1}{8\pi} (n'r)[2 \ln r - 1], \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial n'} = -\frac{1}{8\pi} [(nn')(2 \ln r - 1)] + 2 \frac{(nr)(n'r)}{r^2}, \quad (4)$$

$$\Delta G = \frac{1}{2\pi} \ln r, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \Delta G = \frac{1}{2\pi} \frac{(nr)}{r^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial n'} \Delta G = -\frac{1}{2\pi} \frac{(n'r)}{r^2}. \quad (7)$$

### Appendix 2

Properties of the two-dimensional double-layer potential. Let  $u$  be the potential:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_L dl' \mu(l') \frac{\partial}{\partial n'} \ln r \equiv \frac{1}{8\pi} \oint_L dl' \mu(l') \frac{\partial}{\partial n'} \Delta [r^2 \ln r - r^2], \quad (1)$$

$$r = x - x'(l'); \quad x \in S, \quad x'(l') \in L,$$

$L$  being the boundary of the region  $S$ . Denote by  $u_i$  and  $u_e$  the interior and exterior limits

of  $u$  at the point  $x$  belonging to the smooth boundary  $L$  ·  $u_i$  and  $u_e$  are given respectively:

$$u_i(x(l)) = \frac{1}{2\pi} \oint_L dl' \mu(l') \frac{\partial}{\partial n'} \ln r + \frac{1}{2} \mu(l), \quad (2)$$

$$u_e(x(l)) = \frac{1}{2\pi} \oint_L dl' \mu(l') \frac{\partial}{\partial n'} \ln r - \frac{1}{2} \mu(l); \quad x(l) \in L, \quad x'(l') \in L. \quad (3)$$

where the integrals are to be understood in the sense of a principal value.

More generally, relaxing the restriction to a smooth curve, if  $x$  is located at a corner of the boundary having an interior angle  $\Omega(x)$ , then (see[4]):

$$u_i(x(l)) = \frac{1}{2\pi} \oint_L dl' \mu(l') \frac{\partial}{\partial n'} \ln r + \left[ 1 - \frac{\Omega}{2\pi} \right] \mu(l), \quad (4)$$

$$u_e(x(l)) = \frac{1}{2\pi} \oint_L dl' \mu(l') \frac{\partial}{\partial n'} \ln r - \frac{\Omega}{2\pi} \mu(l). \quad (5)$$

#### References

1. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, Mc Graw-Hill, 1959.
2. W. NOWACKI, *Dźwigary powierzchniowe*, PWN 1979.
3. A. BARYŁA, E. SOBOCIŃSKA, *Teoria płyt żelbetowych z rysami*, PWN 1983.
4. M. A. JASWON, G. T. SYMM, *Integral Equations Methods in Potential Theory and Elastostatics*, Acad. Press 1977.
5. U. HEISE, *Systematic compilation on integral equations of the Rizzo type and of Kupradze's functional equations for boundary value problems of plane elastostatics*, J. of Elasticity, **10**, No. 1 (1980).

#### Резюме

#### КРАЕВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЕ В ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

Краевая задача для дифференциального уравнения малых изгибов тонкой пластинки, поперечно нагруженной, может быть приведена к системе интегральных уравнений, соответствующих данному представлению функции изгиба. Возможны различные интегральные представления через бигармонические потенциалы, приводящие к разным системам интегральных уравнений.

#### Streszczenie

#### BRZEGOWE RÓWNANIA CAŁKOWE W TEORII CIENKICH PŁYT

Problem brzegowy dla równania różniczkowego opisującego małe ugięcia cienkiej płyty, obciążonej poprzecznie, może być sprowadzony do układu równań całkowych dla określonych na brzegu płyty funkcji brzegowych, odpowiadających danej reprezentacji funkcji ugięcia. Możliwe są różne reprezentacje całkowe poprzez potencjały biharmoniczne, prowadzące do różnych układów równań całkowych.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 maja 1985 roku.*



## LINIOWE UKŁADY MECHANICZNE O NAJSZYBSZYM TŁUMIENIU

STANISŁAW DUBIEL

*Wojskowa Akademia Techniczna*

### Wstęp

Układy mechaniczne tworzone przez człowieka spełniają swoją rolę tym lepiej im korzystniejszy jest ruch tych układów. Założeniem konstruktorów jest zbudowanie układów optymalnych, w tym przypadku układów poruszających się w sposób najkorzystniejszy. Zezwalają na to rozwijające się metody optymalizacji, zapoczątkowane w ramach wariacyjnych zasad mechaniki i rozwijane aktualnie w teorii sterowania.

Cechą charakterystyczną układów mechanicznych, tworzonych przez człowieka jest celowość ich ruchu, realizowana najmniejszym kosztem. Takie przynajmniej założenia przyświecają pierwotnym koncepcjom każdego tworzonego układu. Układy takie realizują ruch według opracowanego wcześniej programu poprzez sterowanie tymi układami. Sterowane układy mechaniczne będziemy w dalszym ciągu nazywali układami mechanicznymi celowego działania.

Optymalny program ruchu można opracować znanymi metodami optymalizacji w postaci ekstremal. Bardzo często uzyskuje się takie ekstremale jako zbiór krzywych kawałkami ciągłych. Realizacja takiego programu wymaga bardzo często gwałtownej zmiany położenia równowagi układu, co pociąga za sobą niekorzystne procesy przejściowe. Celem złagodzenia tych procesów stosowane są odpowiednie podukłady sprzęgające, których elastyczność łagodzi niebezpieczne zmiany położenia równowagi. Złagodzenie to jest tym płynniejsze im właściwiej dobrana jest charakterystyka podukładu sprzęgającego. Charakterystykę taką można określać mianem związków sprzęgających.

Rozważania niniejsze stanowią metodę syntezy układów mechanicznych celowego działania, zmierzające do wyznaczenia związków sprzęgających, które zapewnią najszybsze tłumienie układu. Tak zaprojektowane sprzężenie układu mechanicznego z układem sterowania daje spokojny przebieg procesów przejściowych wywołanych zmianą położenia równowagi. Oddala również niebezpieczeństwo wynikające niekiedy z awaryjnych przerw w układzie sterującym, wywołanych przerwami zasilania układu.

### 1. Wyjściowe równania układu mechanicznego

Oddziaływanie układu sterowania na układ mechaniczny sprowadza się z zasady do zmiany sił działających na układ. Model matematyczny układu można zapisać w prze-

strzeni konfiguracji ( $Q$  — przestrzeni) za pomocą współrzędnych uogólnionych. Układ opisujący dynamiczne efekty sterowania przyjmie więc postać

$$\ddot{q}_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Rozważania niniejsze ogranicza się do liniowej zależności sił od przemieszczeń i prędkości uogólnionych a więc równanie liniowego układu dynamicznego zapisać można w formie

$$\ddot{q}_k = \sum_{j=1}^n c_{kj} q_j + \sum_{j=1}^n d_{kj} \dot{q}_j, \quad (1.2)$$

gdzie macierz  $\mathbf{C} = \{c_{kj}\}$  jest macierzą sprężystości układu, zaś macierz  $\mathbf{D} = \{d_{kj}\}$  jest macierzą tłumienia

Część elementów macierzy  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  można przyjąć jako poszukiwane wielkości. Są to te elementy, które reprezentują charakterystykę układu sprzęgającego, a więc sztywności i tłumienia układu sterowania, oraz współczynniki wzmocnienia tego układu. Zdaniem syntezy jest wyznaczenie takich ich wartości, aby tłumienie układu było jak najszybsze. Poszukiwane elementy można wyodrębnić specjalnym oznaczeniem.

Syntezę układu liniowego (1.2) można przeprowadzić drogą czysto algebraiczną, lub drogą pośrednią, którą nazwiemy metodą macierzową. Droga czysto algebraiczna polega na przekształceniu wielomianu charakterystycznego odpowiadającego równaniu wyjściowemu i wyznaczeniu odpowiednich warunków na pierwiastki tego wielomianu. Metoda macierzowa polega na odpowiednim przekształceniu macierzowego równania jednorodnego odpowiadającego układowi dynamicznemu, a następnie wyznaczenie warunków na nierosnące rozwiązania układu przekształconego. Obie metody nabierają ogólniejszego charakteru jeśli równania ruchu opisujące układ mechaniczny sprowadzimy do formy macierzowej.

Formę macierzową równoważną układowi (1.2) uzyskamy w przestrzeni fazowej wprowadzeniem następujących oznaczeń

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1; & x_{s-1} &= q_k; & x_{m-1} &= q_n; \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{q}_1; & x_s &= \dot{x}_{s-1} = \dot{q}_k; & x_m &= \dot{x}_{m-1} = \dot{q}_n, \end{aligned} \quad (1.3)$$

gdzie  $s = 2k = 2, 4, \dots, m = 2n$ .

Układ równań (1.2) w przestrzeni fazowej ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_{s-1} &= x_s, \\ \dot{x}_s &= \sum_{j=1}^n c_{kj} x_{2j-1} + \sum_{j=1}^n d_{kj} x_{2j}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Formę macierzową powyższego układu można zapisać następująco:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.5)$$

gdzie

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

zaś macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c_{11}}{0} & \frac{d_{11}}{0} & \frac{c_{12}}{0} & \frac{d_{12}}{0} & \dots & \frac{c_{1n}}{0} & \frac{d_{1n}}{1} \\ c_{n1} & d_{n1} & c_{n2} & d_{n2} & \dots & c_{nn} & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz  $\mathbf{A}$  w układzie (1.5) będącym odpowiednikiem układu (1.4) posiada dość specyficzną formę. Nieparzyste wiersze macierzy  $\mathbf{A}$  posiadają  $2n-1$  zer oraz jedynki na kolejnych parzystych miejscach. Wiersze parzyste są kombinacją współczynników sztywności i tłumienia na przemian. Wprowadza to pewne uproszczenia do przekształceń dokonywanych w procesie badań. Ponieważ jednak przekształcenia opracowano dla ogólnej macierzy  $\mathbf{A}$  zatem w dalszym ciągu elementy macierzy  $\mathbf{A}$  oznacza się odpowiednio przez  $a_{ij}$ . Wskaźniki  $i, j$ , przyjmują ze zbioru liczb naturalnych zarówno wartości nieparzyste jak i parzyste czyli

$$i, j = 1, 2, \dots, m$$

Co więcej dla ogólności rozważań  $m$  może być również liczbą parzystą jak i nieparzystą. Równanie macierzowe

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.5')$$

może więc mieć postać ogólniejszą w odniesieniu do równania (1.4). Zatem macierz  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}^* \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}^* \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}^* \end{bmatrix}.$$

Zakłada się, że wszystkie elementy macierzy  $\mathbf{A}$  są stałe i rzeczywiste.

Elementy macierzy  $\mathbf{A}$  oznaczone gwiazdką można dobierać w taki sposób aby rozwiązanie spełniało odpowiednie warunki.

## 2. Poszukiwanie rozwiązań o najszybszym tłumieniu z wielomianu charakterystycznego

Niech macierz  $\mathbf{A}$  w zakresie zmienności  $\{a_{im}^*\}$  spełnia warunek stateczności układu. Zgodnie z warunkami Sylvestra

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &> 0, \text{ dla } m \text{ parzystego,} \\ \det \mathbf{A} &< 0, \text{ dla } m \text{ nieparzystego,} \end{aligned}$$

zaś

$$\text{Tr } \mathbf{A} < 0.$$

Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  wyznacza się z wielomianu charakterystycznego

$$W(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0.$$

Jeżeli elementy macierzy  $\mathbf{A}$  są stałe i rzeczywiste wówczas wartości własne macierzy

są rzeczywiste lub zespolone parami sprzężone. Spełniają one równanie charakterystyczne

$$W(\lambda) = (-1)^m [\lambda^m + p_1 \lambda^{m-1} + p_2 \lambda^{m-2} + \dots + p_{m-1} \lambda + p_m], \quad (2.2)$$

gdzie

$$p_1 = -\sum_{i=1}^m a_{ii} = -\text{Tr } \mathbf{A},$$

$$p_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \quad j > i,$$

$$p_3 = (-1)^3 \sum_{i=1}^{m-2} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kn} \end{vmatrix}, \quad k > j > i,$$

$$p_m = (-1)^m \det \mathbf{A}.$$

Kolejne współczynniki  $p_i$  wielomianu charakterystycznego są sumami wszystkich wyznaczników minorów głównych  $i$ -tego stopnia. Dla układu statecznego współczynniki te są-wszystkie jednakowego znaku. Spełniają ponadto warunki Hurwitzta w całym zakresie zmienności współczynników  $\{a_{im}^*\}$ .

Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  spełniają związki Viety

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = -p_1,$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=k+1}^m \lambda_k \lambda_l = p_2,$$

$$\sum_{k=1}^{m-2} \sum_{l=k+2}^m \lambda_k \lambda_{k+1} \lambda_l = -p_3,$$

$$\prod_{i=1}^m \lambda_i = (-1)^m p_m.$$

Wyrażenia powyższe łącznie z zależnościami na współczynniki  $\{p_i\}$  dają interesujące związki między pierwiastkami równania charakterystycznego,  $\lambda_i$  a elementami macierzy  $\mathbf{A}$ . Przy ich pomocy można przeprowadzić wielce pożyteczne badania jakościowe liniowego układu. Już pierwszy związek daje możliwości wyznaczenia takich pierwiastków, które dadzą rozwiązania o najszybszym tłumieniu.

Pierwiastki równania charakterystycznego (2.1) i (2.2) mają ogólną postać

$$\lambda_{(s-1)s} = -\delta_s \pm i\omega_s, \quad s = 2, 4, \dots, 2_n. \quad (2.5)$$

Pierwiastki powyższe są parami sprzężone zatem pierwszy ze związków Viety można wyrazić za pomocą sumy części rzeczywistych

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = -2 \sum_{k=1}^n \delta_k = -p_1, \quad k = 1, 2, \dots, n = \frac{1}{2} m. \quad (2.6)$$

Części urojone dają w sumie zero.

Układ, którego ruch jest ruchem statecznym posiada wszystkie części rzeczywiste ujemne co w wyrażeniu (2.5) podkreślono znakiem minus. Spośród wszystkich części rzeczywistych interesuje nas pierwiastek którego moduł jest najmniejszy. Pierwiastek taki nosi nazwę pierwiastka dominującego. Decyduje on o prędkości tłumienia, a więc prędkości zanikania procesów przejściowych. Oznaczmy pierwiastek dominujący przez  $\delta_d$ , a więc

$$\delta_d < \{\delta_k\},$$

dla wszystkich  $k$  z wyjątkiem  $k = d$ .

Skrócenie czasu trwania procesów przejściowych (zwiększenie prędkości tłumienia) sprowadza się więc do zwiększenia modułu części rzeczywistej pierwiastka dominującego. Jest to równoznaczne ze zwiększeniem dekrementu logarytmicznego tłumienia rozwiązania szczególnego, najwolniej tłumionego.

Łatwo wykazać, że największą wartość, jaką może osiągnąć moduł części rzeczywistej pierwiastka dominującego

$$\delta_{d_{max}} = \frac{p_1}{m}. \quad (2.8)$$

Ma to miejsce wówczas, kiedy wszystkie części rzeczywiste pierwiastków są jednakowe. Zgodnie z równaniem (2.6)

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \frac{p_1}{m}. \quad (2.9)$$

Można więc sformułować bardzo ważne twierdzenie.

**Twierdzenie:**

Układ dynamiczny (1.5) będzie układem najszybciej tłumionym, jeżeli wszystkie części rzeczywiste pierwiastków równania charakterystycznego (2.1) będą jednakowe i ujemne. D o w ó d:

Jeżeli by którykolwiek z pierwiastków miał część rzeczywistą większą o bardzo małą liczbę  $\varepsilon > 0$ , a więc np.  $\delta_k = \frac{p_1}{m} + \varepsilon$  to w myśl równania (2.6) inny pierwiastek musiałby mieć część rzeczywistą mniejszą o  $\varepsilon$ , a więc  $\delta_d = \frac{p_1}{m} - \varepsilon$  i ten byłby częścią rzeczywistą pierwiastka dominującego.

Należy więc ustalić warunki na poszukiwane elementy macierzy  $\mathbf{A}$   $a_{i,j}$ , przy których uzyskuje się pierwiastki ze wszystkimi częściami rzeczywistymi równymi. Wprowadza się w tym celu następujące podstawienie do wielomianu charakterystycznego

$$\lambda = \sigma - \delta,$$

gdzie  $\delta = \frac{p_1}{m}$ .

Otrzymuje się w ten sposób równanie charakterystyczne o postaci

$$\sigma^m + b_2 \sigma^{m-2} + b_3 \sigma^{m-3} + \dots + b_{m-1} \sigma + b_m = 0. \quad (2.10)$$

Poszczególne współczynniki równania (2.10) wyznacza się z zależności

$$b_i = \sum_{k=0}^m \binom{m-k}{i-k} p_k (-\delta)^{i-k},$$

przy czym

$$b_1 = -m \cdot \delta + p_1 = 0.$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego (2.5) będą miały jednakowe części rzeczywiste jeżeli pierwiastki równania (2.10) będą pierwiastkami tylko urojonymi lub równymi zero. Zgodnie ze związkami Viety

$$\sum_{k=1}^m \sigma_k = 0,$$

a zatem układ dynamiczny, którego równanie (2.10) jest równaniem charakterystycznym nie posiada rozwiązania tylko malejącego. Może posiadać rozwiązanie co najwyżej nierosnące i to tylko w takim przypadku kiedy wszystkie pierwiastki są czysto urojone lub równe zero. Pierwiastki takie można uzyskać jeżeli:

$$\begin{aligned} b_i &= 0, & \text{dla } i \text{ nieparzystych,} \\ b_i &> 0, & \text{dla } i \text{ parzystych.} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Równanie (2.10) przy warunkach (2.11) zapisze się w postaci zawierającej tylko parzyste potęgi dla  $m$  parzystego (lub tylko nieparzyste dla  $m$  nieparzystego).

Dla  $m$  parzystego

$$\sigma^m + b_2 \sigma^{m-2} + b_4 \sigma^{m-4} + \dots + b_{m-2} \sigma^2 + b_m = 0, \quad (2.12)$$

zaś dla  $m$  nieparzystego

$$(\sigma^{m-1} + b_2 \sigma^{m-3} + b_4 \sigma^{m-5} + \dots + b_{m-3} \sigma^2 + b_{m-1}) \sigma = 0. \quad (2.12')$$

Równanie (2.12) posiada  $m = 2n$  pierwiastków i możemy wprowadzić oznaczenie

$$\sigma^2 = b_2 \cdot r, \quad (2.13)$$

otrzymuje się wówczas równanie  $n$ -tego stopnia gdzie  $n = \frac{m}{2}$

$$r^n + r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + c_3 r^{n-3} + \dots + c_{n-1} r + c_n = 0,$$

$$c_2 = \frac{b_4}{b_2^2}; \quad c_3 = \frac{b_6}{b_2^3}; \dots; \quad c_i = \frac{b_{2i}}{b_2^i}. \quad (2.14)$$

Równanie (2.12) będzie posiadać wszystkie pierwiastki urojone lub równe zero, jeśli wszystkie pierwiastki równania (2.14) będą pierwiastkami rzeczywistymi niedodatnimi. Takie pierwiastki zapewniają następujące warunki wystarczające.

$$\begin{aligned} 0 < c_2 &< \frac{n-1}{2!n}, \\ 0 < c_3 &< \frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2}, \\ 0 < c_i &< \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-i+1)}{i!n^{i-1}}, \\ \dots &\dots \\ 0 < c_n &= \frac{1}{n^n}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Pierwiastki równania (2.14) będą mieć postać

$$r = -\frac{\sigma^2}{b_2},$$

Zaś pierwiastki równania (2.12)

$$\sigma_{s(s+1)} = \pm i\omega_s, \quad \omega = \sqrt{|b_2 \cdot r|},$$

Rozwiązanie równania wyjściowego ma postać

$$x(t) = e^{-\delta(t-t_0)} \sum_{s=1}^n [A_s \cos \omega_s(t-t_0) + B_s \sin \omega_s(t-t_0)]. \quad (2.16)$$

Najszybsze tłumienie układu wymaga aby współczynnik  $p_1$  był jak największy, a to jest równoznaczne z wymaganiami największej wartości modułu śladu macierzy  $\mathbf{A}$ . Warunek stateczności wymaga bowiem, aby ślad macierzy  $\mathbf{A}$  był mniejszy od zera.

### 3. Wyznaczenie warunków najszybszego tłumienia z formy macierzowej

Przekształcenie wyznacznika charakterystycznego  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$  do wielomianu charakterystycznego wymaga dość żmudnych obliczeń. Proces wyznaczenia warunków najszybszego tłumienia można znacznie uprościć odpowiednim przekształceniem równania (1.5). Wprowadza się następujące przekształcenie

$$x = y \cdot e^{\delta t}, \quad (3.1)$$

gdzie

$$\delta = \frac{1}{m} \text{Tr } \mathbf{A}.$$

Pochodne

$$\dot{x} = (\dot{y} + \delta y) e^{\delta(t-t_0)},$$

prowadzą do równania

$$\dot{y} = \mathbf{B}y, \quad (3.2)$$

dla której macierz  $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{I}\delta$ ,  
a więc

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}^* \\ a_{21} & b_{22} & \dots & a_{2m}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m2} & a_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

gdzie

$$b_{ii} = a_{ii} - \delta,$$

zaś ślad macierzy  $\mathbf{B}$  jest równy zeru, czyli:

$$\text{Tr } \mathbf{B} = \text{Tr } \mathbf{A} - m\delta = 0.$$

Rozwiązania  $y$  nie mogą być rozwiązaniami malejącymi, co najwyżej nierosnącymi. Takich właśnie nierosnących rozwiązań należy poszukiwać, aby rozwiązanie  $x(t)$  były

rozwiązaniami najszybciej tłumionymi. Rozwija się w tym celu wyznacznik macierzy  $(\mathbf{B} - \delta \mathbf{I})$ , który daje bezpośrednio wielomian charakterystyczny odpowiedni wielomianowi (2.10).

$$\det(\mathbf{B} - \sigma \mathbf{I}) = D(\sigma), \quad (3.4)$$

$$D(\sigma) = (-1)^m (\sigma^m + b_2 \sigma^{m-2} + b_3 \sigma^{m-3} + \dots + b_{m-1} \sigma + b_m),$$

gdzie poszczególne współczynniki

$$b_1 = -\text{Tr } \mathbf{B} = -\sum_{i=1}^m (a_{ii} - \delta) = 0,$$

$$b_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \begin{vmatrix} b_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & b_{jj} \end{vmatrix}, \quad j > i,$$

$$b_3 = -\sum_{i=1}^{m-2} \begin{vmatrix} b_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & b_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & b_{kk} \end{vmatrix}, \quad k > j > i,$$

zaś

$$b_m = (-1)^m \det \mathbf{B}.$$

Warunki konieczne na to aby pierwiastki równania charakterystycznego

$$D(\sigma) = \sigma^m + b_2 \sigma^{m-2} + b_3 \sigma^{m-3} + \dots + b_{m-1} \sigma + b_m = 0, \quad (3.5)$$

były urojone i równe zero są analogiczne jak dla równania (2.10)

$$\begin{aligned} b_k &= 0, & \text{dla } k \text{ nieparzystych,} \\ b_k &> 0, & \text{dla } k \text{ parzystych.} \end{aligned} \quad (3.5')$$

Zaproponowany sposób przekształcenia macierzy  $\mathbf{A}$  na macierz  $\mathbf{B}$  upraszcza znacznie proces obliczeniowy. Odpada przejście od równania charakterystycznego (2.2) do równania (2.10). Współczynniki  $b_i$  uzyskuje się bezpośrednio z rozwinięcia wyznacznika charakterystycznego macierzy  $\mathbf{B}$ .

Warunki (3.5') są niezależne od tego czy  $m$  jest parzyste czy nie. Dla  $m$  — parzystego uzyskuje się równanie

$$\sigma^{2n} + b_2 \sigma^{2(n-1)} + b_4 \sigma^{2(n-2)} + \dots + b_{2(n-1)} \sigma^2 + b_{2n} = 0, \quad (3.6)$$

zaś dla  $m$  nieparzystego

$$(\sigma^{2n} + b_2 \sigma^{2(n-1)} + b_4 \sigma^{2(n-2)} + \dots + b_{2(n-2)} \sigma^2 + b_{2(n-1)}) \sigma = 0. \quad (3.6')$$

Zatem jeden z pierwiastków  $\sigma = 0$  dla  $m$  nieparzystego. Wielomian w nawiasie równania (3.6') posiada analogicznie jak równanie (3.6) tylko parzyste potęgi. Warunki dające pierwiastki czysto urojone lub równe zero dla obu równań będą podobne.

Podstawienie dla obu równań  $\sigma^2 = b_2 r$ , daje

$$r^n + r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + c_3 r^{n-3} + \dots + c_{n-1} r + c_n = 0, \quad (3.7)$$

gdzie:  $c_i = \frac{b_{2i}}{b_2^i}$ .

Przy analogicznych warunkach (2.15) dla współczynników  $b_{2i}$  uzyskuje się pierwiastki



$r$  rzeczywiste i ujemne, a zatem

$$\sigma_{s(s+1)} = \pm i\omega_s; \quad \omega = \sqrt{b_2 \cdot r}, \quad (3.7')$$

$$s = 1, 3, \dots, 2(n-1).$$

Rozwiązania równania wyjściowego (1.5') mają postać:

$$x(t) = e^{-\delta(t-t_0)} \sum_{s=1}^n [A_s \cos \omega_s(t-t_0) + B_s \sin \omega_s(t-t_0)]. \quad (3.8)$$

Ponieważ wielkość  $\delta$  jest zarazem wielkością dominującą o największej wartości zatem i czas uspokojenia procesu zakłóconego będzie najkrótszy. Oznacza się go przez  $t_r$  — jako czas regulacji. Jego wartość wyznacza zależność [3]

$$t_r = \frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{\Delta}, \quad (3.9)$$

gdzie  $\Delta$  wartość odchyień założona dla wyznaczenia czasu procesu przejściowego. Stanowi ona zazwyczaj

$$\Delta = 0,02 \div 0,05,$$

w stosunku do początkowych wartości dla  $t = t_0$ .

### Podsumowanie

Sposób wyznaczania rozwiązań najszybciej zanikających, zaproponowany w niniejszym opracowaniu, wyprowadzono ze związków czysto algebraicznych. Warunki układu najszybciej tłumionego są tym samym łatwiejsze do wykazania, a więc bardziej oczywiste.

Podano dwie drogi wyznaczania tych warunków. Korzystniejsza w ujęciu ogólnym jest metoda uzyskana bezpośrednio z zapisu macierzowego. Skraca bowiem wyraźnie proces obliczeniowy znacznie dla ogólnej postaci macierzy  $\mathbf{A}$ . Jeśli jednak ilość stopni swobody jest mniejsza, np. 2—3, to dla układu mechanicznego prostsze może okazać się wyznaczenie warunków końcowych z równania charakterystycznego jak w punkcie 2. Czytelnik sam osądzi kiedy stosowanie jednej lub drugiej metody jest bardziej opłacalne.

Wyznaczenie warunków najszybszego tłumienia nie jest jeszcze równoznaczne z problemem minimalno-czasowym. Należy dodatkowo rozwiązać problem oscylacyjności poszczególnych rozwiązań. Dla celów praktycznych nie zawsze jest to konieczne, choć ważnym zadaniem jest uniknięcie stanów krytycznych.

### Literatura

1. A. H. Голубенцев; *Интегральные методы в динамике*, Киев 1967.
2. Y. TAKAHASHI, M. J. RABINS, D. M. AUSLÄNDER; *Sterowanie i układy dynamiczne*; WNT Warszawa 1976
3. T. KACZOREK; *Teoria sterowania*, T. 1 PWN Warszawa 1977.
4. S. DUBIEL; *O pewnej modyfikacji metody A.N. GOŁUBIENCEWA optymalizacji liniowych układów dynamicznych*. Biuletyn WAT nr 5 1984.

## Резюме

## ЛИНЕЙНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С НАИБОЛЕЕ БЫСТРЫМ ЗАТУХАНИЕМ

В работе рассмотрены условия наиболее быстрого затухания для линейных механических систем. Эти условия выведены алгебраическим методом для линейного дифференциального уравнения  $n$ -того порядка, а для линейной механической системы в матричной форме, методом некоторого преобразования системы дифференциальных уравнений первого порядка.

## Summary

## LINEAR MECHANICAL SYSTEMS WITH SUPREME DAMPING

In the paper are determined the conditions for supreme damping of linear mechanical systems. The conditions have been derived by algebraic approach for linear differential equations of  $n$ -th order, and next for systems of linear equations, presented in matrix form, by a method consisting of a transformation of the system of first order differential equations.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 lutego 1986 roku*

---

## BALANCE EQUATIONS FOR MIXTURE AND POROUS MEDIA IN THE LIGHT OF NONSTANDARD ANALYSIS

KRZYSZTOF NOBIS

*Institut Mechaniki UW*

### Introduction

The list of papers and monographs concerning mixtures and porous media is very extensive (for example, cf. [1 - 20]). Most of them is based on the rather unphysical postulate that in every point of the region occupied by the mixture there are all its components. At the same time, also porosity is assigned to every such point. Moreover, in [1 - 19], the balance equations for mixture and porous media are introduced in a form of certain a priori assumptions, which take into account the forementioned postulates being not related to the balance equations of the classical continuum mechanics.

The aim of the paper is to derive the balance equations for the mixture and porous media directly from the well known balance equations of continuum mechanics. We are to show that it can be done using the methods of the nonstandard analysis. Such approach makes it possible to assign the clear physical interpretation to all terms in the resulting balance equations for mixture and porous media. At the same time, the extra unphysical postulates, such as mentioned in the beginning of the Introduction, are avoided. The present paper is self contained but the partial results and ideas concerning the proposed approach were published in [24 - 26]. The approach proposed here has certain features common with that of [14], [21 - 22].

Denotations. Throughout the paper  $n$  is the fixed positive integer. Subscripts  $\alpha, \beta$  run over the sequence  $1, 2, \dots, n$ , subscript  $\gamma$  runs over  $0, 1, 2, \dots, n$ . Moreover,  $t_0, t_1$  are the known real numbers,  $t_0 < t_1$ , which determine certain time interval.

### 1. Physical basis

Let  $\varepsilon$  be Euclidean real 3-space of places,  $O$  be a set of all regular regions in  $\varepsilon$ ,  $V$  be a translation space for  $\varepsilon$ ,  $V_f$  be a Euclidean real 3-space of forces,  $U$  be the material universe of all 3-dimensional elementary differentiable manifolds (deformable bodies).

Define  $\mathcal{M}$  as a set of all  $n$ -tuples  $(\chi_1, \dots, \chi_n)$  where  $\chi_\alpha: \Omega_\alpha \times [t_0, t_1] \rightarrow \varepsilon$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  are deformation functions of  $n$  disjointed deformable bodies  $\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\alpha \in U$  such that

$$(\forall \alpha, \beta)(\forall t)((\alpha \neq \beta) \Rightarrow (\chi_\alpha(\Omega_\alpha, t) \cap \chi_\beta(\Omega_\beta, t) \neq \emptyset)).$$

Let  $\Omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$ , be the disjointed regions in  $\varepsilon$  occupied by bodies  $\mathcal{B}_\alpha$  in the known reference configurations  $\kappa_\alpha: \mathcal{B}_\alpha \rightarrow \varepsilon$ . Let  $v_\alpha(\cdot, t) \in V$ , where  $v_\alpha(x, t) \equiv \dot{\chi}(X, t)$ ,  $X = \chi^{-1}(x, t), X \in \Omega_\alpha, t \in [t_0, t_1]$ , be the velocity field defined, for every  $t$ , on the region  $\chi_\alpha(\Omega_\alpha, t)$  occupied by the body  $\mathcal{B}_\alpha$  at the time instant  $t$ . Define  $\Omega_\alpha^t \equiv \chi_\alpha(\Omega_\alpha, t)$  and  $\Omega_0^t \equiv \varepsilon \setminus \cup \bar{\Omega}_\alpha^t$ . By virtue of the well known assumptions of solid mechanics, to every  $(\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathcal{M}$  and to every  $\Delta \in \mathcal{O}$  the following functions are uniquely assigned:

$$\begin{aligned}
 [t_0, t_1] \ni t &\rightarrow \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} \varrho_\alpha(x, t) dv \in R_+, \\
 [t_0, t_1] \ni t &\rightarrow \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} \varrho_\alpha(x, t) b_\alpha(x, t) dv \in V_f, \\
 [t_0, t_1] \ni t &\rightarrow \int_{\partial(\Delta \cap \Omega_\alpha^t) \cap \partial \Omega_\gamma^t} t_{\alpha\gamma}(x, t) da \in V_f, \quad t_{\alpha\alpha}(\cdot) \equiv 0, \\
 [t_0, t_1] \ni t &\rightarrow \int_{\partial \Delta \cap \Omega_\alpha^t} T_\alpha(x, t) n_{\partial \Delta}(x) da \in V_f, \\
 [t_0, t_1] \ni t &\rightarrow \int_{(\Delta \cap \Omega_\alpha^t) \cap \partial \Omega_\beta^t} f_{\alpha\beta}(x, t) da \in V_f.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Functions (1.1) are assumed to be continuous for almost every  $t \in [t_0, t_1]$ . The values of (1.1) represent for any fixed  $t$ , the following objects: mass of  $\mathcal{B}_\alpha$  in  $\Delta$ , resultant body forces acting at  $\mathcal{B}_\alpha$  in  $\Delta$ , resultant of the boundary tractions executed by  $\mathcal{B}_\gamma$  (for  $\gamma \neq \alpha$ ) on  $\mathcal{B}_\alpha$  in  $\Delta$ , resultant of the surface tractions on  $\partial \Delta$  within body  $\mathcal{B}_\alpha$  ( $T_\alpha(x, t)$  is Cauchy stress tensor), respectively. Moreover  $f_{\alpha\beta}(x, t)$  is the density of the forces due to the friction between  $\mathcal{B}_\alpha$  and  $\mathcal{B}_\beta$ , which act on  $\mathcal{B}_\alpha$ . Here  $f_{\alpha\beta}(x, t) + f_{\beta\alpha}(x, t) = 0$ . Term  $t_{\alpha 0}$  in (1.1)<sub>3</sub> represents boundary tractions due to the external forces acting at  $\mathcal{B}_\alpha$ .

For an arbitrary  $\Delta, \Delta \in \mathcal{O}$ , define

$$\begin{aligned}
 \Delta^e &\equiv \varepsilon \setminus \Delta, \\
 \Gamma_{\alpha\gamma}^t(\Delta, \Delta^e) &\equiv \partial(\Omega_\alpha^t \cap \Delta) \cap \partial(\Omega_\gamma^t \cap \Delta^e) \subset \partial \Delta, \\
 \Gamma_{\alpha\gamma}^t(\Delta, \Delta) &\equiv \partial(\Omega_\alpha^t \cap \Delta) \cap \partial(\Omega_\gamma^t \cap \Delta).
 \end{aligned}$$

As it is known, for each  $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n), \mathcal{B}_\alpha \in U$ , and every  $(\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathcal{M}$ , the integrands in formulas (1.1) satisfy the well known system of conditions

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} \varrho_\alpha(x, t) dv = 0^t, \tag{1.2}$$

<sup>1)</sup> Here

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} f(x, t) dv \equiv \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} \left[ \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(f(x, t)v_\alpha(x, t)) \right] dv,$$

for an arbitrary function  $f(x, t)$  on the LHS of Eqs. (1.2)

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} v_\alpha(x, t) \rho_\alpha(x, t) dv &= \sum_{\gamma=0}^n \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t(\Delta, \Delta^c)} t_{\alpha\beta}(x, t) da + \sum_{\gamma=0}^n \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t(\Delta, \Delta)} t_{\alpha\gamma}(x, t) da + \\ &+ \int_{\partial\Delta \cap \Omega_\alpha^t} T_\alpha(x, t) n_{\partial\Delta}(x) da + \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} b_\alpha(x, t) \rho_\alpha(x, t) dv, \end{aligned} \tag{1.2}$$

[ cont. ]

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} (x-x_0) \times v_\alpha(x, t) \rho_\alpha(x, t) dv &= \sum_{\gamma=0}^n \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t(\Delta, \Delta^c)} (x-x_0) \times t_{\alpha\gamma}(x, t) da + \\ &+ \sum_{\gamma=0}^n \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t(\Delta, \Delta)} (x-x_0) \times t_{\alpha\gamma}(x, t) da + \int_{\partial\Delta \cap \Omega_\alpha^t} (x-x_0) \times T_\alpha(x, t) n_{\partial\Delta}(x) da + \\ &+ \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} (x-x_0) \times b_\alpha(x, t) \rho_\alpha(x, t) dv, \end{aligned}$$

which has to hold for every  $\Delta \in \mathcal{O}$  and a.e.  $t \in [t_0, t_1]$ . Here  $x_0$  is an arbitrary point in  $\varepsilon$  and  $t_{\alpha\beta}(\cdot) \equiv 0$ , for  $\alpha = \beta$ , while

$$t_{\alpha\beta}(x, t) = T_\alpha(x, t) n_{\partial\Omega_\alpha^t}(x) = -T_\beta(x, t) n_{\partial\Omega_\beta^t}(x) + f_{\alpha\beta}(x, t), \quad \alpha \neq \beta, \tag{1.3}$$

holds for a.e.  $x \in \partial\Omega_\alpha^t \cap \partial\Omega_\beta^t$ . Eqs. (1.2) represent the well known balance equations of mass, momentum and moment of momentum, respectively, for the system of  $n$  non intersecting deformable bodies.

### 2. Nonstandard definition of mixtures and porous media

Let  $\mathfrak{M}$  be the full structure in which  $\varepsilon, V, V_f, R$  are disjointed relations of the type (0) (cf. [23], p. 19). The balance equations (1.2), which hold in  $\mathfrak{M}$ , hold also in  $^*\mathfrak{M}$  as certain internal relations. It means that for every (internal)  $\mathcal{B}_\alpha \in ^*U, \alpha = 1, \dots, n$ , for every internal  $(\chi_1, \dots, \chi_n) \in ^*\mathcal{M}$ , for every internal  $\Delta \in ^*\mathcal{O}$  and  $x_0 \in \varepsilon$ , as well as for every internal function of the form (1.1) (with domain  $^*[t_0, t_1]$  in  $^*R$  and with the values in  $^*R$  and  $^*V_f$ , respectively), relations (1.2) and (1.3) hold in  $^*\mathfrak{M}$ .

Define in  $^*\mathfrak{M}$

$$m_\alpha(x, r) \equiv \int_{\mathcal{B}(x, r) \cap \Omega_\alpha^t} \rho_\alpha(x, t) dv,$$

where  $\mathcal{B}(x, r)$  stands for a ball with a center  $x$  and the radius  $r, r \in ^*R_+$ .

Let  $\mathcal{M}^0$  be a subset of  $^*\mathcal{M}$  which satisfies the following conditions:

1° For every  $(\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathcal{M}^0$  there is  ${}^\circ(\chi_\alpha) = \chi$  for  $\alpha = 1, \dots, n$  where  $\chi$  is deformation function in  $\mathfrak{M}$ , i.e.,  $\chi: \Omega \times [t_0, t_1] \rightarrow \varepsilon^2$ ). Hence we see that there are regions  $\Omega^t$  in  $\varepsilon$ , such that

$${}^\circ(\Omega_\alpha^t) = \bar{\Omega}^t \quad \text{for } \alpha = 1, \dots, n \quad \text{and} \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{2.1}$$

<sup>2)</sup> Symbols  ${}^\circ(\cdot)$  stands for a standard part of function or set, [23], p. 115.

We also assume that all points belonging to each  $\Omega_\alpha^t$  are near standard and  $\Omega^t$  are regular regions in  $\varepsilon$ .

2° For every  $x \in S\text{-int}^*\Omega^t$  <sup>3)</sup>, the internal sequences

$$\frac{\text{vol}[B(x, r_m) \cap \Omega_\alpha^t]}{\text{vol} B(x, r_m)}, \quad \frac{m_\alpha(x, r_m)}{\text{vol}[B(x, r_m) \cap \Omega_\alpha^t]}, \quad (2.2)$$

$$r_m = \frac{r_1}{m}, \quad \circ(r_1) > 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

have  $F$ -limits (cf. [23], p. 109). By virtue of the theorem which can be found in [23], p. 110, there exists  $\lambda_0 \in {}^*N \setminus N$  such that for every  $\nu \in {}^*N \setminus N$  and  $\nu < \lambda_0$  each value

$$\frac{\text{vol}[B(x, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]}{\text{vol} B(x, r_\nu)}, \quad \frac{m_\alpha(x, r_\nu)}{\text{vol}[B(x, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]}, \quad (2.3)$$

is the  $F$ -limit of any sequence (2.2).

3° There exist functions  $\Omega^t \ni x \rightarrow \nu_\alpha(x, t) \in [0, 1]$ ,  $\Omega^t \ni x \rightarrow \tilde{g}_\alpha(x, t) \in R_+$ , continuous a.e. on  $\Omega^t$  for  $t \in [t_0, t_1]$  (where  $\tilde{g}_\alpha(\cdot, t)$  is also differentiable) which are the standard parts of functions

$$S\text{-int}^*\Omega^t \ni x \rightarrow \frac{\text{vol}[B(x, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]}{\text{vol} B(x, r_\nu)} \in {}^*[0, 1],$$

$$S\text{-int}^*\Omega^t \ni x \rightarrow \frac{m_\alpha(x, r_\nu)}{\text{vol}[B(x, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \in {}^*R_+.$$

Now we formulate the following.

Definition. The system of bodies  $\mathcal{B}_\alpha \in {}^*U$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , for which  $(\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathcal{M}^0$ , will be called the mixture. Every  $\mathcal{B}_\alpha$  is said to be the component of the mixture. The value  $\nu_\alpha(x, t)$  will be called the saturation of the mixture by the  $\alpha$ -th component.

Define function

$$\Omega^t \ni x \rightarrow \nu(x, t) \in [0, 1],$$

putting

$$\nu(x, t) \equiv 1 - \sum_{\alpha=1}^n \nu_\alpha(x, t).$$

If  $\nu(x, t)$  is not identically equal to zero and  $n = 1$ , then the mixture is called the porous medium. Function  $\nu(\cdot, t)$  is known as a porosity, and has been derived here by the non-standard approach from the real porous structure of the body. In the traditional approaches, porosity  $\nu(\cdot, t)$  and saturation  $\nu_\alpha(\cdot, t)$  are postulated a priori.

### 3. General form of the balance equation in $\mathfrak{M}$ and ${}^*\mathfrak{M}$

All balance equations (1.2) can be written down in what is called the general form of the balance equation

<sup>3)</sup> Symbol  $S\text{-int}$ , where  $A \in {}^*R^n$  stands for  $S$ -interior of  $A$ , cf. [23], p. 107. Moreover, for every  $A$  in  $\mathfrak{M}$ , by  ${}^*A$  we define the corresponding standard entity in  $\mathfrak{M}^*$ .

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} \Psi_\alpha(x, t) \varrho_\alpha(x, t) dv &= \sum_{\gamma=0}^n \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t(\Delta, \Delta^e)} G_{\alpha\gamma}(x, t) da + \\ &+ \sum_{\gamma=0}^n \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t(\Delta, \Delta)} G_{\alpha\gamma}(x, t) da + \int_{\partial\Delta \cap \Omega_\alpha^t} \Phi_\alpha(x, t) n_{\partial\Delta}(x) da + \\ &+ \int_{\Delta \cap \Omega_\alpha^t} B_\alpha(x, t) \varrho_\alpha(x, t) dv, \quad \alpha = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

where  $G_{\alpha\beta}(\cdot) \equiv 0$  for  $\alpha = \beta$  and where

$$G_{\alpha\beta}(x, t) = \Phi_\alpha(x, t) n_{\partial\Omega_\alpha^t}(x) = -\Phi_\beta(x, t) n_{\partial\Omega_\beta^t}(x) + F_{\alpha\beta}(x, t); \quad \alpha \neq \beta, \tag{3.2}$$

here  $F_{\alpha\beta}(x, t) = -F_{\beta\alpha}(x, t)$  hold for a.e.  $x \in \Gamma_{\alpha\beta}^t(\Delta, \Delta^e) \subset \partial\Delta$  and  $t \in [t_0, t_1]$ . Eqs. (3.1) have to be satisfied by an arbitrary  $\mathcal{B}_\alpha \in U$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , by every  $(\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathcal{M}$  and by every  $\Delta \in O$ . In Eqs. (3.1), scalar field  $\varrho_\alpha(\cdot, t)$  has the same meaning as before,  $\Psi_\alpha(\cdot, t)$ ,  $B_\alpha(\cdot, t)$  are tensor fields of the  $k$ -th order, defined a.e. on  $\Omega_\alpha^t$ . Moreover,  $G_{\alpha\gamma}(\cdot, t)$  are tensor fields of the  $k$ -th order defined a.e. on  $\partial\Omega_\alpha^t \cap \partial\Omega_\beta^t$  and  $\Phi_\alpha(\cdot, t)$  are tensor fields of the  $k+1$ -th order, defined a.e. on  $\Omega_\alpha^t$ . Here  $\Phi_\alpha(\cdot, t)$  is the flux field,  $B_\alpha(\cdot, t)$  is the internal and  $G_{\alpha\gamma}(\cdot, t)$  is the external supply in the  $\alpha$ -th component. In what follows instead of (1.2), (1.3) we shall deal with the general form of the balance equation (3.1) and with the continuity conditions (3.2).

On passing to enlargement  $^*\mathfrak{M}$  of  $\mathfrak{M}$  we shall take the internal conditions (3.1) and (3.2) as the basis of the analysis.

#### 4. From micro- to macro- general balance equations

The general balance equation in  $^*\mathfrak{M}$  given by (3.1), (3.2), under assumptions that  $(\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathcal{M}^0 \subset ^*\mathcal{M}$ , will be called the general micro-balance equation for mixtures and porous media. The forementioned micro-balance equation constitutes only the starting point for further considerations, being the basis for obtaining in  $\mathfrak{M}$  what will be called the general macro-balance equation. In order to pass from the micro-balance equation in  $^*\mathfrak{M}$  to the macro-balance equation in  $\mathfrak{M}$ , a number of the extra assumptions has to be introduced. It must be emphasized that the macro-balance equations exist only for rather special kinds of structure of mixtures and porous media (which in the nonstandard sense were defined in Sec. 2).

Let us substitute to (3.1):  $\Delta = B(z, r_\nu)$ ,  $z \in S - \text{int}^*\Omega^t$ ,  $\nu < \lambda_0$ ,  $\nu \in ^*N \setminus N$ . Then for a.e.  $z \in S - \text{int}^*\Omega^t$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , from (3.1) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \Psi_\alpha(x, t) \varrho_\alpha(x, t) dv = \\ = \sum_{\gamma=0}^n \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t(B(z, r_\nu), B^e(z, r_\nu))} G_{\alpha\gamma}(x, t) da + \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\gamma=0}^n \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t(B(z, r_\nu), B(z, r_\nu))} G_{\alpha\gamma}(x, t) da + & (4.1) \\
 & + \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{\partial B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \Phi_\alpha(x, t) n_{\partial B(z, r_\nu)}(x) da + & [\text{cont.}] \\
 & + \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} B_\alpha(x, t) \varrho_\alpha(x, t) dv.
 \end{aligned}$$

We shall assume that all terms in (4.1) are near standard and that in  $\mathfrak{M}$  there is field  $\tilde{\Psi}_\alpha(\cdot, t)$ ,

$$\tilde{\Psi}(z, t) = \left( \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \Psi_\alpha(x, t) dv \right),$$

such that the following formulas hold<sup>4)</sup>

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \Psi_\alpha(x, t) \varrho_\alpha(x, t) dv \simeq \frac{* \tilde{\varrho}(z, t)}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \Psi_\alpha(x, t) dv \simeq \\
 & \simeq * \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) * \nu_\alpha(z, t) \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \Psi_\alpha(x, t) dv \simeq * \tilde{\varrho}(z, t) * \nu_\alpha(z, t) * \tilde{\Psi}(z, t), \\
 & \frac{D}{Dt} \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \Psi_\alpha(x, t) \varrho_\alpha(x, t) dv \simeq \frac{D}{Dt} [* \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) * \nu_\alpha(z, t) * \tilde{\Psi}_\alpha(z, t)].
 \end{aligned}$$

Analogously, we assume that in  $\mathfrak{M}$  there are fields  $\tilde{B}_\alpha(\cdot, t)$  and  $S_{\alpha\gamma}(\cdot, t)$  such that

$$\begin{aligned}
 * \tilde{B}_\alpha(z, t) & \simeq \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} B_\alpha(x, t) dv, \\
 * S_{\alpha\gamma}(z, t) & \simeq \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t(B(z, r_\nu), B(z, r_\nu))} G_{\alpha\gamma}(x, t) da, \quad \gamma = 1, \dots, n, \\
 * \tilde{\varrho}(z, t) * \nu_\alpha(z, t) * \tilde{B}_\alpha(z, t) & \simeq \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} B_\alpha(x, t) \varrho_\alpha(x, t) dv,
 \end{aligned}$$

holds in  $S\text{-int}^* \Omega^t, t \in [t_0, t_1]$ .

Let  $\Gamma$  be an arbitrary smooth surface in  $S\text{-int}^* \Omega^t$  oriented by the unit normal  $n_\Gamma(z), z \in \Gamma$ . Let the minimum radius  $r_{min}$  of the curvature of  $\Gamma$  is greater than  $r_\nu$ . Define by  $B^+(z, r), B^-(z, r), z \in \Gamma$  the semispheres of the ball  $B(z, r)$ , which are situated on the positively and negatively oriented side of  $\Gamma$ , respectively.

Define

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^t[B^+(z, r), B^-(z, r)] \equiv \partial[B^+(z, r) \cap \Omega_\alpha^t] \cap \partial[B^-(z, r) \cap \Omega_\alpha^t],$$

<sup>4)</sup> We write  $a \simeq b$ , where  $a, b$  are finite numbers in  $*R$ , if  $|a-b|$  is infinitesimal



for  $\alpha = 1, \dots, n; \gamma = 0, \dots, n$ . We shall assume that for every  $z \in \Gamma \cap (S\text{-int}^*\Omega')$ , the internal sequences

$$\frac{\text{area} \Gamma_{\alpha\gamma}^i [B^+(z, r_m), B^-(z, r_m)]}{\text{area} [\Gamma \cap B(z, r_m)]},$$

$$r_m = \frac{r_1}{m}, \quad m = 1, 2, \dots, \circ(r_1) > 0$$

have  $F$ -limits. Then by virtue of [23], p. 110 there exist  $\lambda_1 \in {}^*N \setminus N$  such that for every  $\delta \in {}^*N \setminus N$  and  $\delta < \lambda_1$ , the following values

$$\frac{\text{area} \Gamma_{\alpha\gamma}^i [B^+(z, r_\delta), B^-(z, r_\delta)]}{\text{area} [\Gamma \cap B(z, r_\delta)]}, \tag{4.2}$$

are the  $F$ -limits.

We shall assume that for every pair of surfaces  $'\Gamma, ''\Gamma$  in  $S\text{-int}^*\Omega'$ , which satisfy conditions analogous to those imposed on  $\Gamma$ , and for every  $z \in '\Gamma \cap ''\Gamma$  there is

$$\frac{\text{area} '\Gamma_{\alpha\gamma}^i [B^+(z, r_\delta), B^-(z, r_\delta)]}{\text{area} ['\Gamma \cap B(z, r_\delta)]} \simeq \frac{\text{area} ''\Gamma_{\alpha\gamma}^i [B^+(z, r_\delta), B^-(z, r_\delta)]}{\text{area} [''\Gamma \cap B(z, r_\delta)]},$$

where  $\Gamma_{\alpha\gamma}^i(\cdot), ''\Gamma_{\alpha\gamma}^i(\cdot)$  have the same meaning as  $\Gamma_{\alpha\gamma}^i(\cdot)$ .

Define the system of functions

$$\Gamma \cap (S\text{-int}^*\Omega') \ni z \rightarrow \frac{\text{area} \Gamma_{\alpha\gamma}^i [B^+(z, r_\delta), B^-(z, r_\delta)]}{\text{area} [\Gamma \cap B(z, r_\delta)]} \in {}^*[0, 1],$$

and assume that there exist functions

$$\Omega' \ni x \rightarrow \mu_{\alpha\gamma}(x, t) \in [0, 1],$$

which are standard parts of functions defined above. We also postulate that there exist functions

$$\Omega' \ni x \rightarrow \Phi_{\alpha\beta}(x, t),$$

constituting tensor fields of the  $k+1$ -th order, such that

$$*\Phi_{\alpha\gamma}(z, t) n_\Gamma(z) \simeq \frac{1}{\text{area} \Gamma_{\alpha\gamma}^i [B^+(z, r_\delta), B^-(z, r_\delta)]} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^i [B^+(z, r_\delta), B^-(z, r_\delta)]} \Phi_\alpha(x, t) n_\Gamma(x) da,$$

Hence

$$*\mu_{\alpha\gamma}(z, t) *\Phi_{\alpha\gamma}(z, t) n_\Gamma(z) \simeq \frac{1}{\text{area} [\Gamma \cap B(z, r_\delta)]} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^i [B^+(z, r_\delta), B^-(z, r_\delta)]} \Phi_\alpha(x, t) n_\Gamma(x) da.$$

Now assume that

$$\begin{aligned} \text{div} [*\mu_{\alpha\beta}(z, t) *\Phi_{\alpha\beta}(z, t)] &\simeq \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{\partial B(z, r_\nu)} *\mu_{\alpha\beta}(x, t) *\Phi_{\alpha\beta}(x, t) n_{\partial B(z, r_\nu)}(x) da \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\text{vol} B(z, r_\nu)} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}^i [B(z, r_\nu), B^e(z, r_\nu)]} \Phi_\alpha(x, t) n_{\partial B(z, r_\nu)}(x) da. \end{aligned}$$

Taking into account all obtained results, we conclude that (4.1) implies that

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} [\tilde{\varrho}_\alpha(z, t) \nu_\alpha(z, t) \tilde{\Psi}_\alpha(z, t)] &= \sum_{\gamma=0}^n \operatorname{div} [\mu_{\alpha\gamma}(z, t) \tilde{\Phi}_{\alpha\gamma}(z, t)] + \\ &+ \sum_{\gamma=0}^n S_{\alpha\gamma}(z, t) + \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) \nu_\alpha(z, t) \tilde{B}_\alpha(z, t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

hold for a.e.  $z \in \Omega^t$  and for a.e.  $t \in R$ .

Let us observe, that from

$$\int_{R_{\alpha\beta}^t[B^+(z, r), (B^-(z, r))]} \Phi_\alpha(x, t) n_\Gamma(x) da = \int_{R_{\alpha\beta}^t[B^-(z, r), B^+(z, r)]} [-\Phi_\beta(x, t) n_\Gamma(x) + F_{\alpha\beta}(x, t)] da,$$

and under assumption that  $\mu_{\alpha\beta}(x, t) = \mu_{\beta\alpha}(x, t)$  and  $F_{\alpha\beta}(\cdot) \equiv 0$  we obtain  $\Phi_{\alpha\beta}(x, t) = \Phi_{\beta\alpha}(x, t)$ .

Thus, for every  $\mathcal{P} \subset \Omega$  and every  $t \in [t_0, t_1]$ , there is

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{x(\mathcal{P}, t)} \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) \nu_\alpha(z, t) \tilde{\Psi}_\alpha(z, t) dv &= \sum_{\gamma=0}^n \int_{\partial\chi(\mathcal{P}, t)} \mu_{\alpha\gamma}(z, t) \tilde{\Phi}_{\alpha\gamma}(z, t) n_{\partial\chi(\mathcal{P}, t)}(z) da + \\ &+ \sum_{\gamma=0}^n \int_{x(\mathcal{P}, t)} S_{\alpha\gamma}(z, t) dv + \int_{x(\mathcal{P}, t)} \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) \nu_\alpha(z, t) \tilde{B}_\alpha(z, t) dv. \end{aligned} \quad (4.4)$$

At the same time, assuming that  $\mu_{\alpha\beta}(\cdot, t) = \mu_{\beta\alpha}(\cdot, t)$  we define

$$\tilde{F}_{\alpha\beta}(z, t) \equiv \Phi_{\alpha\beta}(z, t) - \Phi_{\beta\alpha}(z, t),$$

as a field determining the effect of friction. Condition (4.4) will be called the general integral macro-balance equation for mixtures and porous media, while (4.3) be the local form of this equation.

From the foregoing consideration it follows that the general macro-balance equation in the form (4.3) or (4.4) holds under rather strong regularity conditions, which have been successively introduced in this Section. The mixtures and porous media for which Eqs. (4.3) and Eqs. (4.4) take place, will be called the ideal mixtures and ideal porous media, respectively.

### 5. Macro-balance equations for ideal mixtures and porous media

From the general balance equation (4.4) we shall obtain now the macro-balance equations of mass, momentum and moment of momentum. It will be done by the specification of fields  $\Psi_\alpha(\cdot, t)$ ,  $G_{\alpha\gamma}(\cdot, t)$ ,  $\Phi_\alpha(\cdot, t)$  and  $B_\alpha(\cdot, t)$  in (3.1) and (3.2).

**5.1. Mass conservation.** In order to obtain the principle of mass conservation from the general balance equations (for  $\alpha$ -th component of the mixture), we have to substitute

$$\Psi_\alpha(\cdot) \equiv 1, \quad G_{\alpha\gamma}(\cdot) \equiv 0, \quad \Phi_\alpha(\cdot) \equiv 0, \quad B_\alpha(\cdot) \equiv 0,$$

into Eq. (3.1), where  $\varrho_\alpha(\cdot, t)$  stands for a mass density of the  $\alpha$ -th component in configuration  $\Omega_\alpha^t$ . Taking into account the forementioned substitutions, we obtain fields  $\Psi_\alpha(\cdot, t)$ ,  $\Phi_{\alpha\gamma}(\cdot, t)$ ,  $S_{\alpha\beta}(\cdot, t)$ ,  $\tilde{B}_\alpha(\cdot, t)$ ,  $\tilde{\varrho}_\alpha(\cdot, t)$  and  $\nu_\alpha(\cdot, t)$  in  $\mathfrak{M}$  where in  $^*\mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}
 ^*\tilde{\Psi}_\alpha(z, t) &= \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \Psi_\alpha(x, t) dv = 1, \\
 ^*\tilde{\Phi}_{\alpha\gamma}(z, t)n_\Gamma(z) &= \frac{1}{\text{area}\Gamma_{\alpha\gamma}^t[B^+(z, r_\nu), B^-(z, r_\nu)]} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}^t[B^+(z, r_\nu), B^-(z, r_\nu)]} \Phi_\alpha(x, t)n_\Gamma(x) da = 0, \\
 ^*S_{\alpha\gamma}(z, t) &= \frac{1}{\text{vol}B(z, r_\nu)} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t[B(z, r_\nu), B(z, r_\nu)]} G_{\alpha\gamma}(x, t) da = 0, \\
 ^*\tilde{B}_\alpha(z, t) &= \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} B_\alpha(x, t) dv = 0, \\
 ^*\tilde{\varrho}_\alpha(z, t) &\simeq \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \varrho_\alpha(x, t) dv, \\
 ^*\nu_\alpha(z, t) &\simeq \frac{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]}{\text{vol}B(z, r_\nu)},
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

and where  $z \in S\text{-int}^*\Omega^t$ ,  $\nu, \lambda_0 \in {}^*N \setminus N$ ,  $\nu < \lambda_0$ . Now, from (5.1) and from Eq. (4.3) we obtain

$$\frac{D}{Dt} (\tilde{\varrho}_\alpha(z, t)\nu_\alpha(z, t)) = 0, \tag{5.2}$$

where  $\tilde{\varrho}_\alpha(z, t)$  and  $\nu_\alpha(z, t)$  satisfy the postulated regularity condition and

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) &= \left( \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \varrho_\alpha(x, t) dv \right), \\
 \nu_\alpha(z, t) &= \left( \frac{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]}{\text{vol}B(z, r_\nu)} \right),
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

hold for every  $z \in S\text{-int}^*\Omega^t$ . Moreover if  $\mathcal{P}$  is an arbitrary regular subregion of  $\Omega$ , then

$$\frac{D}{Dt} \int_{z(\mathcal{P}, t)} \tilde{\varrho}_\alpha(z, t)\nu_\alpha(z, t) dv = 0, \tag{5.4}$$

holds. The resulting equations (5.2), (5.4) represent macro-mass balance equations in the local and the integral form, respectively. Fields  $\tilde{\varrho}_\alpha^*(\cdot, t)$ ,  $\nu_\alpha(\cdot, t)$  are not postulated a priori (which takes place in the known approaches to mechanics of porous media) but are given by formulas (5.3).

**5.2. Conservation of momentum.** In this case we have to assume that in the general balance equation (3.1)

$$\begin{aligned}
 \Psi_\alpha(\cdot, t) &\equiv \nu_\alpha(\cdot, t), \\
 G_{\alpha\gamma}(\cdot, t) &\equiv t_{\alpha\gamma}(\cdot, t),
 \end{aligned}$$

$$\Phi_\alpha(\cdot, t) \equiv T_\alpha(\cdot, t),$$

$$B_\alpha(\cdot, t) \equiv b_\alpha(\cdot, t).$$

By virtue of the assumptions formulated in Sec. 4 we have

$$\begin{aligned} {}^* \tilde{v}_\alpha(z, t) &\simeq \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} v_\alpha(x, t) dv, \\ {}^* s_{\alpha\gamma}(z, t) &\simeq \frac{1}{\text{vol}B(z, r_\nu)} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t[B(z, r_\nu), B(z, r_\nu)]} t_{\alpha\gamma}(x, t) da, \\ {}^* T_{\alpha\gamma}(z, t) &\simeq \frac{1}{\text{area}\Gamma_{\alpha\gamma}^t[B^+(z, r_\nu), B^-(z, r_\nu)]} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t[B^+(z, r_\nu), B^-(z, r_\nu)]} T_\alpha(x, t) n_\Gamma(x) da, \quad (5.5) \\ {}^* \tilde{b}_\alpha(z, t) &\simeq \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} b_\alpha(x, t) dv, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \frac{1}{\text{vol}B(z, r_\nu)} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} v_\alpha(x, t) \varrho_\alpha(x, t) dv &\simeq \\ &\simeq \frac{D}{Dt} [{}^* \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) {}^* v_\alpha(z, t) {}^* \tilde{v}_\alpha(z, t)], \end{aligned}$$

for  $z \in S - \text{int}^* \Omega^t$ ,  $\lambda_0, \nu \in {}^* N \setminus N$ ,  $\nu < \lambda_0$ . Using the procedure analogous to that applied in Sec. 4, instead of (4.3) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} [\tilde{\varrho}_\alpha(z, t) v_\alpha(z, t) \tilde{v}_\alpha(z, t)] &= \sum_{\gamma=0}^n \text{div} [\mu_{\alpha\gamma}(z, t) T_{\alpha\gamma}(z, t)] + \\ &+ \sum_{\gamma=0}^n s_{\alpha\gamma}(z, t) + \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) v_\alpha(z, t) \tilde{b}_\alpha(z, t). \quad (5.6) \end{aligned}$$

The meaning of  $\mu_{\alpha\gamma}(\cdot, t)$  has been explained in Sec. 4. Here

$$\text{div} [{}^* \mu_{\alpha\gamma}(z, t) {}^* T_{\alpha\gamma}(z, t)] \simeq \frac{1}{\text{vol}B(z, r_\nu)} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t[B^+(z, r_\nu), B^-(z, r_\nu)]} t_{\alpha\gamma}(x, t) n_{\partial B}(x) da.$$

If  $\mu_{\alpha 1}(z, t) = \dots = \mu_{\alpha n}(z, t)$  then the following equalities hold

$$\sum_{\gamma=0}^n \text{div} [\mu_{\alpha\gamma}(z, t) T_{\alpha\gamma}(z, t)] = \text{div} \left[ \mu_{\alpha\gamma}(z, t) \sum_{\gamma=0}^n T_{\alpha\gamma}(z, t) \right].$$

Putting

$$\bar{T}_\alpha(z, t) \equiv \sum_{\gamma=0}^n T_{\alpha\gamma}(z, t),$$

we shall refer  $\bar{T}_\alpha(\cdot, t)$  to as a partial stress tensor related to the  $\alpha$ -th component of the mixture. At the same time, for an arbitrary regular subregion by virtue of (4.4) we obtain

$$\begin{aligned}
 & \frac{D}{Dt} \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) \nu_\alpha(z, t) \tilde{v}_\alpha(z, t) dv = \\
 & = \sum_{\gamma=0}^n \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \mu_{\alpha\gamma}(z, t) T_{\alpha\gamma}(z, t) da + \sum_{\gamma=0}^n \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} s_{\alpha\gamma}(z, t) dv + \\
 & \quad + \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \tilde{\varrho}_\alpha(z, t) \nu_\alpha(z, t) \tilde{b}_\alpha(z, t) dv.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Eqs. (5.6), (5.7) represent the local and global form, respectively, of the macro-balance equation of momentum. The macro-fields occurring in the forementioned equations have been not postulated a priori but are related to the micro-structure of the body by means of Eqs. (5.5).

5.3. Conservation of moment of momentum. Applying the procedure analogous to that of Sec. 5.1, 5.2, we assume now that

$$\begin{aligned}
 \Psi_\alpha(x, t) & \equiv (x - x_0) \times v_\alpha(x, t), \\
 G_{\alpha\gamma}(x, t) & \equiv (x - x_0) \times t_{\alpha\gamma}(x, t), \\
 \Phi_\alpha(x, t) n_{\partial d}(x) & \equiv (x - x_0) \times T_\alpha(x, t) n_{\partial d}(x), \\
 B_\alpha(x, t) & \equiv (x - x_0) \times b_\alpha(x, t).
 \end{aligned}$$

Hence in  $\mathfrak{M}$  there are fields  $\tilde{v}_\alpha(\cdot, t)$ ,  $s_{\alpha\gamma}(\cdot, t)$ ,  $T_{\alpha\gamma}(\cdot, t)$  such that in  ${}^*\mathfrak{M}$  the following relations hold

$$\begin{aligned}
 (z - z_0) \times {}^*\tilde{v}(z, t) & \simeq \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} (x - x_0) \times v_\alpha(x, t) dv, \\
 (z - x_0) \times {}^*s_{\alpha\gamma}(z, t) & \simeq \frac{1}{\text{vol}B(z, r_\nu)} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t[B(z, r_\nu), B(z, r_\nu)]} (x - x_0) \times t_{\alpha\gamma}(x, t) da, \\
 (z - x_0) \times {}^*T_{\alpha\gamma}(z, t) n_\Gamma(z) & \simeq \frac{1}{\text{area}[B(z, r_\nu) \cap \Gamma]} \int_{\Gamma_{\alpha\gamma}^t[B^+(z, r_\nu), B^-(z, r_\nu)]} (x - x_0) \times T_\alpha(x, t) n_\Gamma(x) da, \\
 (z - x_0) \times {}^*\tilde{b}_\alpha(z, t) & \simeq \frac{1}{\text{vol}[B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t]} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} (x - x_0) \times b_\alpha(x, t) dv,
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

and where

$$\begin{aligned}
 & \frac{D}{Dt} \frac{1}{\text{vol}B(z, r_\nu)} \int_{B(z, r_\nu) \cap \Omega_\alpha^t} \varrho_\alpha(x, t) (x - x_0) \times v_\alpha(x, t) dv \simeq \\
 & \simeq \frac{D}{Dt} [{}^*\tilde{\varrho}_\alpha(z, t) {}^*\nu_\alpha(z, t) (z - x_0) \times {}^*\tilde{v}_\alpha(z, t)].
 \end{aligned}$$

Applying the forementioned relations we arrived

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} [\tilde{\rho}_\alpha(z, t) \nu_\alpha(z, t) (z - x_0) \times \tilde{v}_\alpha(z, t)] = \\ & = \sum_{\gamma=0}^n \operatorname{div} [\mu_{\alpha\gamma}(z, t) (z - x_0) \times T_{\alpha\gamma}(z, t)] + \\ & + \sum_{\gamma=0}^n (z - x_0) \times s_{\alpha\gamma}(z, t) + \nu_\alpha(z, t) (z - x_0) \times \tilde{b}_\alpha(z, t). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Taking the time derivation of Eq. (5.9) and bearing in mind (5.6), we obtain

$$\mu_{\alpha\gamma}(z, t) \operatorname{div} z \times T_{\alpha\gamma}(z, t) = \tilde{\rho}_\alpha(z, t) \nu_\alpha(z, t) \frac{Dz}{Dt} \times \tilde{v}_\alpha(z, t) = 0,$$

under the extra assumption  $\tilde{v}_1(\cdot, t) = \dots = \tilde{v}_n(\cdot, t) = \tilde{v}(\cdot, t)$  where

$$\frac{Dz}{Dt}(X, t) = \tilde{v}(\chi(X, t), t), \quad X \in \Omega.$$

Hence, after simple calculation, we arrive at

$$\sum_{\gamma=0}^n \mu_{\alpha\gamma}(z, t) T_{\alpha\gamma}(z, t) = \left[ \sum_{\gamma=0}^n \mu_{\alpha\gamma}(z, t) T_{\alpha\gamma}(z, t) \right]^T. \quad (5.10)$$

Defining

$$\tilde{T}_\alpha(z, t) \equiv \sum_{\gamma=0}^n \mu_{\alpha\gamma}(z, t) T_{\alpha\gamma}(z, t),$$

as a total stress tensor of the  $\alpha$ -th component of the mixture, we obtain here the symmetry condition of this tensor.

The resulting equation (5.10) represents the macro-balance law of the moment of momentum in its local form.

### Final remarks

The main feature of the resulting macro-balance equations is that they are not postulated a priori but are derived from the balance equations for system of unintersecting and coating deformable bodies, i.e., from Eqs. (1.2). Such procedure has been realized here by applying the methods of the nonstandard analysis. On this way we are able to give the exact phenomenological definitions of mixtures, ideal mixtures, porous media, and ideal porous media. The approach used in the paper assigns to every term in the resulting macro-balance equations its physical interpretation in terms occurring in Eqs. (1.2), which have the clear physical meaning. For the particulars and the further analysis of the obtained results, the reader is referred to [27].

## References

1. M. A. BIOT, *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*, J. Appl. Phys., 12, (1941).
2. M. A. BIOT, *Theory of Propagation of Elastic Waves in Fluid Saturated Porous Solid*, J. Acoust. Soc. of Amer., 28, 2, (1956).
3. W. DERSKI, *Equation for Motion for a Fluid Saturated Porous Solid*, Bull. Pol. Ac. Techn.: 26, 1, (1978).
4. F. A. L. DULLIEN, *Porous Media Fluid Transport and Pore Structure*, Academic Press, New York, (1979).
5. A. GOODMAN, E. COWIN, *A Continuum Theory for Granular Material*, A. R. M. A., 44, 4, (1972).
6. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *A Note on Mixtures*, Int. J. Eng. Sci., 6, (1968).
7. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *On Basic Equations for Mixtures*, Quar. Jour. Mech. and Appl. Math., v. XXX, 4, (1969).
8. A. E. GREEN, N. LAWS, *Global Properties of Mixtures*, A. R. M. A., 43, 1, (1971).
9. M. E. GURTIN, G. M. de la PHENA, *On the Thermodynamics of Mixtures, Mixtures of Rigid Heat Conditions*, A. R. M. A., 36, 3, (1970).
10. J. IGNACZAK, *Tensorial Equations of Motion for a Fluid Saturated Porous Media*, Bull. Pol. Ac. Techn.: 26, 8 - 9, (1978),
11. S. J. KOWALSKI, *Współrzędne normalne i warunki brzegowe w teorii mieszanin*, Rozpr. Habil., IPPT, (1980).
12. J. KUBIK, *Mechanika silnie odkształcalnych ośrodków o anizotropowej przepuszczalności*, IPPT, (1981).
13. V. N. NIKOLAEVSKII, *On processes of unsteady deformations in water-saturated solids*, Arch. Mech. Stos. 17, (1965).
14. V. N. NIKOLAEVSKII, K. S. BASNEV, A. T. GORBUNOV, G. A. ZOTOV, *Mechanics of Saturated Porous Media, (in Russian)*, Moscow, (1970).
15. A. E. SCHEIDEGGER, *The Physics of Flow Through Porous Media*, Toronto, (1957).
16. G. SZEFER, *Nonlinear Problems of Consolidation Theory*, Proc. of Polish-French Symp., Cracow, (1977).
17. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, In Handbuch der Physik, Bd III/I, Springer, (1960).
18. B. UZIEMBŁO, *Podstawy termodynamiki aksjomatycznej wieloskładnikowych ośrodków ciągłych*, Rozpr. dokt., IPPT, (1979),
19. W. O. WILLIAMS, *On the Theory of Mixtures*, A. R. M. A., 51, 4, (1973).
20. CZ. WOŹNIAK, *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa, (1969).
21. CZ. WOŹNIAK, M. WOŹNIAK, *Effective Balance Equations for Multiconstituent and Porous Media*, Bull. Pol. Ac. Techn.: 29, 1 - 2, (1981).
22. M. WOŹNIAK, *On the Formulation on Conservation Laws in Multiconstituent and Porous Media*, Bull. Pol. Ac. Techn.: 29, 1 - 2, (1981).
23. A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, (1966).
24. K. NOBIS, *An Applications of Nonstandard Analysis in Mechanics of Porous Media*, Bull. Pol. Ac. Techn.: 32, 7 - 8, (1984).
25. K. NOBIS, E. WIERZBICKI, CZ. WOŹNIAK, *On the Interpretation of Nonstandard Method in Mechanics*, Bull. Pol. Ac. Techn.: 32, 7 - 8, (1984).
26. CZ. WOŹNIAK, K. NOBIS, *Nonstandard Analysis and Balance Equation in the Theory of Porous Media*, Bull. Pol. Ac. Techn.: 29, 11 - 12, (1981).
27. K. NOBIS, *Formulation of the Balance Equation for Mixtures and Porous Media by the Nonstandard Analysis Methods*, (in Polish), Diss., Dept. of Math., Comp. Sci. and Mechanics, University of Warsaw, to be prepared.

## Резюме

УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ДЛЯ СМЕСЕЙ И ПОРИСТИХ ТЕЛ  
В ВИДУ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Цель настоящего сообщения — это получить, методами нестандартного анализа, уравнения баланса для смесей и пористых тел из известных уравнений баланса механики сплошных сред. Такой подход дает возможность ясной интерпретации всех полей в полученных уравнениях баланса.

## Streszczenie

RÓWNANIA BILANSU DLA MIESZANIN I CIAŁ POROWATYCH  
W ŚWIETLE ANALIZY NIESTANDARDOWEJ

Celem pracy jest otrzymanie, za pomocą metod analizy niestandardowej, równań bilansu dla mieszanin i ciał porowatych wprost ze znanych równań bilansu mechaniki kontinuum. Podejście takie umożliwia jasną interpretację wszystkich pól w otrzymanych równaniach bilansu.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 kwietnia 1985 roku*

---



## CONTACT BETWEEN A RIGID INDENTER AND A TRANSVERSELY ISOTROPIC LAYER

BOGDAN ROGOWSKI

*Politechnika Łódzka  
Instytut Inżynierii Budowlanej*

The indentation of a transversely isotropic layer by a rigid indenter is investigated. The lower plane of the layer is elastically supported. On the upper surface of the layer certain normal displacement is prescribed inside a circular region with an unknown radius, outside of which certain arbitrary normal stresses are given in an annular region and the normal displacement is zero on a remaining boundary, while the shear stresses vanish all over the boundary.

The author formulates the problem as the solution of a set of triple integral equations. To this end, the differential, integral and series representation of the unknown function is devised, which satisfies two of the three equations exactly, while the third one leads to three infinite sets of algebraic equations with respect to the coefficients introduced in the representation. The physical quantities which characterize the contact and the stress intensity factors are obtained by means of these coefficients.

Some punch, inclusion and crack problems in a transversely isotropic layer are considered.

### 1. Introduction

A number of hexagonal crystals are characterized as being transversely isotropic. Many fiber-reinforced composite materials and platelet systems were also characterized as transversely isotropic media, which have five elastic constants [1]. According to effective modulus theory [2] the gross elastic behaviour of the laminated medium is transversely isotropic and homogeneous elastic material with the normal to the layers as the axis of symmetry; the effective elastic constants of such a medium are given by Achenbach ([2], p. 33),

The present work studies the indentation of a transversely isotropic layer by a smooth indenter. Only the circular part of one surface is subjected to the indentation of the indenter, while the outer annular region is subjected to normal, symmetrical in  $r$ , pressure and the normal displacement is zero on a remaining boundary. These displacements cause

in the layer by a rigid punch, inclusion which exists in a penny-shaped crack, obstacle which lies between two the same materials, which are pressed together by a pressure.

The method of Hankel transforms is used to satisfy the equilibrium equations and the boundary conditions, which have three different parts. The solutions are obtained using the technique of triple integral equations, which are reduced to three infinite systems of simultaneous linear algebraic equations.

Recently Mastrojanis, Mura and Keer [3] studied the mixed boundary-value problem for an isotropic half-space with the following boundary conditions: the constant normal displacement is prescribed inside a circle, outside of which the normal stress vanish in an annular region and the normal displacement is zero on the remaining surface, while the shear stresses vanish all over the boundary. The more general problem, pointed out in the summary is considered in this paper.

## 2. Formulation

Consider a transversely isotropic elastic layer  $0 \leq z \leq h$ , with the planes of isotropy parallel to the boundaries. The stress-strain relationships of such a medium can be written in cylindrical coordinates  $(r, \theta, z)$  as follows:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_{11} e_r + c_{12} e_\theta + c_{13} e_z, \\ \sigma_\theta &= c_{12} e_r + c_{11} e_\theta + c_{13} e_z, \\ \sigma_z &= c_{13} e_r + c_{13} e_\theta + c_{33} e_z, \\ \sigma_{rz} &= c_{44} e_{rz}, \\ \sigma_{\theta z} &= c_{44} e_{\theta z}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) e_{r\theta}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Here  $c_{ij}$ 's are the elastic constants.

The foregoing strain  $e_{ij}$  can be first written in terms of the displacements and then substituted into the preceding equations to obtain the stress-displacement relationships. The relationships are finally used in the equilibrium equations to form a system of partial differential equations for the displacements. In the problem with axial symmetry the displacements  $(u_r, 0, w_z)$  satisfied the equations

$$\begin{aligned}c_{11} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right] + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w_z}{\partial r \partial z} + c_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} &= 0, \\ c_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right] + c_{33} \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} &= 0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

The solution of the equilibrium equations is given by two displacement potentials  $\varphi_1(r, z)$  and  $\varphi_2(r, z)$ , and the components of the displacement and stress can be expressed in terms of those potentials as follows:

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} (k\varphi_1 + \varphi_2), \quad w_z = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1 + k\varphi_2),\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -c_{44}(k+1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi_1 + \varphi_2) - (c_{11} - c_{12}) r^{-1} u_r, \\
\sigma_\theta &= -c_{44}(k+1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi_1 + \varphi_2) - (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
\sigma_z &= c_{44}(k+1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (s_1^{-2} \varphi_1 + s_2^{-2} \varphi_2), \\
\sigma_{rz} &= c_{44}(k+1) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (\varphi_1 + \varphi_2),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

provided that the potentials  $\varphi_1(r, z)$  and  $\varphi_2(r, z)$  are the solution of the differential equations

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_i(r, z) = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{2.5}$$

and if the parameters  $s_1^2$  and  $s_2^2$  are the roots of the following quadratic equation for  $s^2$

$$c_{33} c_{44} s^4 - [c_{11} c_{33} - c_{13}(2c_{44} + c_{13})] s^2 + c_{11} c_{44} = 0, \tag{2.6}$$

and the material parameter  $k$  is a function of the elastic constants and the characteristic root  $s_1^2$

$$k = (c_{33} s_1^2 - c_{44}) / (c_{13} + c_{44}). \tag{2.7}$$

The roots  $s_i^2$  are either both real or a pair of complex conjugates, depending on the values of the material constants. Both types of root give physically meaningful results.

The conditions specified on  $z = 0$  inside and outside the annulus  $\lambda < \varrho < 1$  are

$$w_z(\varrho, 0) = \begin{cases} \delta - \kappa b^2 \varrho^2; & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \\ 0; & 1 \leq \varrho, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\sigma_z(\varrho, 0) = -p_0 f(\varrho); \quad \lambda < \varrho < 1, \tag{2.9}$$

$$\sigma_{zr}(\varrho, 0) = 0; \quad \varrho \geq 0 \tag{2.10}$$

and the displacements and stresses vanish at infinity. The layer at  $z = h$  is elastically supported such that

$$\sigma_{zr}(\varrho, \eta) = 0; \quad \varrho \geq 0, \tag{2.11}$$

$$\sigma_z(\varrho, \eta) = -c_0 w_z(\varrho, \eta); \quad \varrho \geq 0. \tag{2.12}$$

In above equations, nondimensional variables and parameters are as follows:  $\varrho = r/b$ ,  $\zeta = z/b$  and  $\lambda = a/b$ ,  $\eta = h/b$ , where  $a$  and  $b$  are the inner and outer radii of the annulus, respectively. Inside the annulus normal stress  $p_0 f(\varrho)$  is arbitrary, but assumed to be symmetrical about the  $z$ -axis. The parameter  $c_0$  is the spring of stiffness of the foundation.

In the boundary conditions (2.8), which have three different parts, only constant or quadratic with respect to  $r$  normal displacement were prescribed within the circle. The conditions (2.8) corresponds to the displacement distribution produced by the indentation of a surface of the layer by an indenter, when its shape is specified. If the contact surface of the rigid indenter is spherical in shape with radius  $R$ , the shape of the indentation can be written as  $g(r) = \delta - r^2/2R$ . The condition required to this equation is that the radius

a of the contact area is small compared to the radius of the contact surface of the indenter. The condition is indeed satisfied in usual stress ranges. This equation also applies for an oblate spheroid with semiaxes  $d_z$  and  $d_r$ . In this case, the radius of curvature of the spheroid at the center of the contact area is  $R = d_r^2/d_z$ ,  $d_z$  being the minor semiaxis along the z-axis. The displacement-shape function  $w_z(\varrho, 0)$  in equation (2.8) is identical to the shape of the rigid indenter inside the contact area with unknown radius equal to  $\lambda = a/b$ , but is unknown outside the contact area  $\lambda < \varrho < 1$ . These displacements cause in the layer by a rigid punch, inclusion which exists in a penny-shaped crack, obstacle which lies between two the same materials, which are pressed together by a pressure. In the last case there is the compatibility condition  $\{dw_z(r, 0)/dr\}_{r=b} = 0$ . For infinitesimal elasticity theory, there is no loss of generality if the profiles of the inclusion and obstacle or of the base of the punch assume that  $g(r) = \delta - r^2/2R$ , where  $1/R = 2\kappa$  is the curvature at the center of the contact area and  $\delta$  is semiaxis or the (prescribed) vertical penetration depth of the punch. From a physical consideration, the contact stress should be finite for a smooth indenter whose contact surface does not have any abrupt change in slope. The unknown contact radius  $a$  is to be determined later using this condition.

Using the method of Hankel transforms, the condition of vanishing shear stress in equation (2.10) and (2.11) and the boundedness conditions at infinity the displacement functions  $\varphi_i(r, z)$  are found to be

$$\begin{aligned} \varphi_i(\varrho, \zeta) = & (-1)^{i+1} \frac{s_{i\pm 1}}{G_1(k+1)(s_1-s_2)} \int_0^\infty \left\{ \frac{p(x)}{x} \left[ e^{-s_i x \zeta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\sinh s_i x \eta} (e^{-s_i x \eta} \cosh s_i x \zeta - g_1(x \eta) \cosh s_i x (\eta - \zeta)) \right] \right\} + \\ & + \frac{\omega(x)}{x \sinh s_i x \eta} [\cosh s_i x \zeta - g_2(x \eta) \cosh s_i x (\eta - \zeta)] \Big\} J_0(x \varrho) dx; \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

where  $G_1 = c_{44}$  is the shear modulus in the z-direction and  $J_0(x\varrho)$  is the Bessel function of the first kind and zero order. The unknown functions  $p(x)$  and  $\omega(x)$  and the unknown contact radius  $\lambda$  are to be determined using the remaining boundary conditions (2.8), (2.9) and (2.12) and the finiteness of the contact stresses between the indenter and the layer surface. The functions  $g_1(x\eta)$  and  $g_2(x\eta)$  are known and defined as follows:

$$\begin{aligned} g_i(x) = & \frac{1}{\sinh \alpha x + \alpha \beta^{-1} \sinh \beta x} \cdot \begin{cases} \cosh \beta x + \alpha \beta^{-1} \sinh \beta x - e^{-\alpha x}; & i = 1, \\ 2 \beta^{-1} (s_1 \sinh s_1 x - s_2 \sinh s_2 x); & i = 2, \end{cases} \tag{2.14} \\ & \{\alpha, \beta\} = s_1 \pm s_2. \end{aligned}$$

The material parameter  $\alpha$  is always real and  $\beta$  is either real or imaginary.

We can easily obtain the displacements and stresses by substitution of the displacement potentials (2.13) into the expressions (2.3) and (2.4). In particular, the displacement  $w_z$  and the stresses  $\sigma_z$  and  $\sigma_{rz}$  on the surfaces of the layer  $\zeta = 0$  and  $\zeta = \eta$  are given as

$$CG_1 b w_z(\varrho, 0) = \int_0^\infty \{p(x)[1 - g_1(x\eta)] - \omega(x)g_2(x\eta)\} J_0(x\varrho) dx, \tag{2.15}$$

$$CG_1 b w_z(\varrho, \eta) = - \int_0^\infty \omega(x) J_0(x\varrho) dx,$$

$$b^2 \sigma_z(\varrho, 0) = - \int_0^\infty x p(x) J_0(x\varrho) dx, \tag{2.15}$$

[cont.]

$$b^2 \sigma_z(\varrho, \eta) = - \int_0^\infty x \{p(x) g_2(x\eta) + \omega(x) [1 - g_3(x\eta)]\} J_0(x\varrho) dx,$$

$$\sigma_{zr}(\varrho, 0) = \sigma_{zr}(\varrho, \eta) = 0,$$

where

$$g_3(x) = 1 - \frac{[1 - g_2(x)][1 + g_2(x)]}{1 - g_1(x)} = 1 - \frac{\cosh \alpha x - 1 - \alpha^2 \beta^{-2} (\cosh \beta x - 1)}{\sinh \alpha x + \alpha \beta^{-1} \sinh \beta x}, \tag{2.16}$$

and

$$C = (k+1)(k-1)^{-1}(s_2^{-1} - s_1^{-1}), \tag{2.17}$$

is a real-valued function of the elastic constants and the characteristics roots.

Substituting the stress  $\sigma_z(\varrho, \eta)$  and the displacement  $w_z(\varrho, \eta)$  into the condition (2.12), we get

$$\int_0^\infty \{p(x) g_2(x\eta) + \omega(x) [1 - g_3(x\eta) + c_1(x\eta)^{-1}]\} \times J_0(x\varrho) dx = 0; \quad \varrho \geq 0, \tag{2.18}$$

where the constant

$$c_1 = \frac{c_0 h}{G_1 C}, \tag{2.19}$$

describes the relative rigidity of foundation to layer, it being zero when the lower surface is stress free and infinitely large for a perfectly smooth rigid base.

Thus

$$p(x) g_2(x\eta) + \omega(x) [1 - g_3(x\eta) + c_1(x\eta)^{-1}] = 0. \tag{2.20}$$

Get a new unknown function  $t(x)$  and set as follows

$$p(x) [1 - g_1(x\eta)] - \omega(x) g_2(x\eta) = t(x). \tag{2.21}$$

Then

$$p(x) = t(x) [1 - h(x\eta)], \quad \omega(x) = -t(x) h_1(x\eta), \tag{2.22}$$

where

$$h(x) = \frac{g_3(x) - c_1 g_1(x)}{1 + c_1 - c_1 g_1(x)} =$$

$$= 1 - \frac{\cosh \alpha x - 1 - \alpha^2 \beta^{-2} (\cosh \beta x - 1) + c_1 x^{-1} (\sinh \alpha x + \alpha \beta^{-1} \sinh \beta x)}{\sinh \alpha x + \alpha \beta^{-1} \sinh \beta x + c_1 x^{-1} (\cosh \alpha x - \cosh \beta x)}, \tag{2.23}$$

$$h_1(x) = \frac{g_2(x)}{1 + c_1 - c_1 g_1(x)} =$$

$$= 2\beta^{-1} \frac{s_1 \sinh s_1 x - s_2 \sinh s_2 x}{\sinh \alpha x + \alpha \beta^{-1} \sinh \beta x + c_1 x^{-1} (\cosh \alpha x - \cosh \beta x)}.$$

With the help of the known functions  $h(x\eta)$  and  $h_1(x\eta)$  and the only one unknown  $t(x)$ , the boundary values of the normal displacement and stress can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} CG_1 b w_z(\varrho, 0) &= \int_0^\infty t(x) J_0(x\varrho) dx, \\ CG_1 b w_z(\varrho, \eta) &= \int_0^\infty t(x) h_1(x\eta) J_0(x\varrho) dx, \\ b^2 \sigma_z(\varrho, 0) &= - \int_0^\infty x t(x) [1 - h(x\eta)] J_0(x\varrho) dx, \\ \sigma_z(\varrho, \eta) &= -c_0 w_z(\varrho, \eta). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Hence,  $t(x)$  is the only unknown which from Eqs. (2.8) and (2.9) can be found from the triple integral equations

$$\int_0^\infty t(x) J_0(x\varrho) dx = \begin{cases} CG_1 b (\delta - \kappa b^2 \varrho^2); & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \\ 0; & 1 \leq \varrho, \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\int_0^\infty x t(x) [1 - h(x\eta)] J_0(x\varrho) dx = p_0 b^2 f(\varrho); \quad \lambda < \varrho < 1, \quad (2.26)$$

with  $h(x\eta)$  being defined by Eq. (2.23). Since it is difficult to solve Eqs. (2.25) and (2.26) directly, these equations are solved in an approximate method to yield the parameters which characterize the contact.

### 3. The series solution

We assume the function  $t(x)$  in the form

$$t(x) = 2 CG_1 \kappa b^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} J_0(\lambda x) \right] + \int_0^\pi F(\Psi) J_1(xR) d\Psi, \quad (3.1)$$

where  $F(\Psi)$  is an arbitrary continuous function in the interval  $0 \leq \Psi \leq \pi$  and

$$2R^2 = 1 + \lambda^2 - (1 - \lambda^2) \cos \Psi; \quad \lambda \leq R \leq 1, \quad 0 \leq \Psi \leq \pi. \quad (3.2)$$

Using (3.2), the variable  $R$  in  $\lambda \leq R \leq 1$  can be exchanged for a new one  $\Psi$ , which is  $0 \leq \Psi \leq \pi$ , when  $R = \lambda$  corresponds to  $\Psi = 0$  and  $R = 1$  to  $\Psi = \pi$ .

Substituting Eq. (3.1) into  $w_z(\varrho, 0)$  of Eq. (2.24)<sub>1</sub>, we obtain

$$w_z(\varrho, 0) = (CG_1 b)^{-1} \int_0^\pi \frac{1}{R} F(\Psi) H(R - \varrho) d\Psi + \kappa b^2 \begin{cases} (\lambda^2 - \varrho^2); & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \\ 0; & \lambda < \varrho \end{cases} \quad (3.3)$$

where  $H(R - \varrho)$  is the Heaviside's function.

We see that:

(i) The displacement  $w_z(\varrho, 0)$  equals  $\delta - \kappa b^2 \varrho^2$  in the interval  $0 \leq \varrho \leq \lambda$  provided that

the compatibility equation

$$\kappa b^2 \lambda^2 + (CG_1 b)^{-1} \int_0^\pi \frac{1}{R} F(\Psi) d\Psi = \delta \quad (3.4)$$

is satisfied.

(ii) The displacement is a function of  $\varrho$  in the interval  $\lambda \leq \varrho \leq 1$  i.e.

$$w_z(\varrho, 0) = (G_1 C b)^{-1} \int_\varphi^\pi \frac{1}{R} F(\Psi) d\Psi, \quad (3.5)$$

where

$$2\varrho^2 = 1 + \lambda^2 - (1 - \lambda^2) \cos \Phi; \quad \lambda \leq \varrho \leq 1, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi. \quad (3.6)$$

(iii) The displacement equals zero in the remaining interval  $\varrho \geq 1$  independent on the function  $F(\Psi)$ .

We now assume a series expansion with unknown parameters  $a_0, a_1, a_2, \dots$  for the function  $F(\Psi)$  as

$$F(\Psi) = \frac{1}{\pi} b^2 R \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\Psi; \quad 0 \leq \Psi \leq \pi. \quad (3.7)$$

Equations (3.7) and (3.4) lead to

$$a_0 = CG_1 b^{-1} (\delta - \kappa b^2 \lambda^2). \quad (3.8)$$

This equation yields either an unknown radius of the contact region  $\lambda$  for a curved base of the indenter or for a flat indenter yields the parameter  $a_0$ , because in this case the extent of the contact is known beforehand. For a curved base the parameter  $a_0$  may have to be found so that the contact stress is finite at the boundary of the contact region.

Thus the displacement  $w_z(\varrho, 0)$  is given by

$$w_z(\varrho, 0) = \begin{cases} \delta - \kappa b^2 \varrho^2; & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \\ (\delta - \kappa b^2 \lambda^2) \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \left[ \Phi + \frac{1}{a_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin n\Phi \right] \right\}; & \lambda \leq \varrho \leq 1, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi, \\ 0; & 1 \leq \varrho. \end{cases} \quad (3.9)$$

The unknown portion of the displacement-shape function in the interval  $0 \leq \Phi \leq \pi$  is in the form of the Fourier series and is determined by substitution Eqs. (3.7), (3.8) into Eq. (3.5) and integration.

Two of the three equations, namely Eqs. (2.25), are satisfied exactly.

In our problem contact is maintained only by compressive stresses; in these unbonded frictionless contact problems the extent of the contact is the primary unknown quantity, and the contact stress is finite at the ends of the contact regions.

The last condition may be replaced by

$$\left. \frac{dw_z(\varrho, 0)}{d\varrho} \right|_{\varrho=\lambda} = -2\kappa b^2 \lambda, \quad (3.10)$$

which leads to the condition  $F(0) = 0$  or

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0, \quad (3.11)$$

and then the surface of the layer contacts smoothly at the edge of the contact region with the indenter.

By substitution of Eq. (3.7) into Eq. (3.1), we obtain

$$t(x) = 2CG_1 \kappa b^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} J_0(\lambda x) \right] - b^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x}, \quad (3.12)$$

where

$$Z_n(x) = J_n \left[ \frac{x}{2} (1 - \lambda) \right] J_n \left[ \frac{x}{2} (1 + \lambda) \right]. \quad (3.13)$$

The stresses in Eq. (2.24)<sub>3</sub> which correspond to (3.12) are as follows

$$\begin{aligned} \sigma_z(\varrho, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [1 - h(x\eta)] \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} x J_0(x\varrho) dx - \\ &- 2CG_1 \kappa b \int_0^{\infty} [1 - h(x\eta)] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} J_0(\lambda x) \right] x J_0(x\varrho) dx, \end{aligned} \quad (3.14)$$

and are bounded at  $\varrho = \lambda$  under the condition (3.11); it is clarified bellow (see Eq. (4.10)).

The preceding equation and Eq. (2.9) lead to

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [1 - h(x\eta)] \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} x J_0(x\varrho) dx = \\ &- 2CG_1 \kappa b \int_0^{\infty} [1 - h(x\eta)] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} J_0(\lambda x) \right] x J_0(x\varrho) dx - p_0 f(\varrho); \quad \lambda < \varrho < 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Multiplying both sides of Eq. (3.15) by  $\varrho$ , using the formula  $x\varrho J_0(x\varrho) = \partial[\varrho J_1(x\varrho)]/\partial\varrho$  integrating with respect to  $\varrho$  and using the formula  $\partial[J_0(x\varrho)]/\partial x = -\varrho J_1(x\varrho)$ , we obtain

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [1 - h(x\eta)] \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} [J_0(x\varrho)] dx = \\ &= 2CG_1 \kappa b \int_0^{\infty} [1 - h(x\eta)] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} J_0(\lambda x) \right] \frac{\partial}{\partial x} [J_0(x\varrho)] dx - c + p_0 f^*(\varrho); \quad \lambda < \varrho < 1, \end{aligned} \quad (3.16)$$

where



$$f^*(\varrho) = \int_0^{\varrho} sf(s) ds, \tag{3.17}$$

and  $c$  is an unknown integral constant.

Equation (3.16) is solved under the assumption that the moment  $f^*(\varrho)$  of the function  $f(\varrho)$  may be expanded in Fourier series, namely

$$f^*(\varrho) = f_0^* + 2 \sum_{m=1}^{\infty} f_m^* \cos m\Phi; \tag{3.18}$$

$$f_m^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\Phi) \cos m\Phi d\Phi; \tag{3.18}$$

$$\lambda \leq \varrho \leq 1, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi.$$

By substitution of these equations and the Neumann's formula into Eqs. (3.16) and equation the coefficients of  $\cos m\Phi$  in both sides and assumption of the parameters  $a_n$  as follows

$$a_n = 2CG_1 \kappa ba_n'' - ca_n'' + p_0 a_n', \tag{3.19}$$

we arrive at the three infinite systems of simultaneous equations for the determination of the parameters  $a_n'$ ,  $a_n''$  and  $a_n'''$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n' A_{mn} = f_m^*,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n'' A_{mn} = \delta_{0m}, \tag{3.20}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n''' A_{mn} = B_m; \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

with the Kronecker delta  $\delta_{0m}$ , the coefficients  $f_m^*$  defined by Eq. (3.18) and the matrices

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} [1 - h(x\eta)] \frac{\partial Z_m(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} dx,$$

$$B_m = \int_0^{\infty} [1 - h(x\eta)] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} J_0(\lambda x) \right] \frac{\partial Z_m(x)}{\partial x} dx = \tag{3.21}$$

$$= -\frac{\lambda^4}{4} [I_0^m(\lambda) + I_2^m(\lambda)] + \frac{3\lambda^2(1+\lambda)}{2} \left[ \frac{\lambda(1-\lambda)}{(1+\lambda)^2} \right]^m \frac{\Gamma[m+(1/2)]}{[\Gamma(m+1)]^2 \Gamma[-m+(5/2)]} \times$$

$$\times F_4 \left[ m - \frac{3}{2}, m + \frac{1}{2}; m+1, m+1; \left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)^2, \left( \frac{2\lambda}{1+\lambda} \right)^2 \right] - H^m(\lambda, \eta),$$

where  $F_4(\cdot \cdot \cdot; \cdot \cdot \cdot; \cdot \cdot)$  is hypergeometric series of two variables [4] and  $\Gamma(\cdot)$  denotes the Gamma function,  $I_0^m(\lambda)$  and  $I_2^m(\lambda)$  are presented analytically in the authors paper [5]

and the improper integrals

$$H^m(\lambda, \eta) = \lambda^2 \int_0^\infty h(x\eta) \frac{\partial Z_m(x)}{\partial x} \cdot \frac{J_2(\lambda x)}{x} dx; \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.22)$$

can be evaluated numerically in finite interval, because those integrand decrease exponentially to zero with the increase of  $x$ , are continuous for any  $x \in (0, \infty)$  and are bounded for  $x \rightarrow 0$ .

The coefficients  $f_m^*$  assume the form

$$f_m^* = \frac{1 + \lambda^2}{4} \delta_{0m} - \frac{1 - \lambda^2}{8} \delta_{1m}, \quad \text{for } f(\varrho) = 1, \quad (3.23)$$

$$f_m^* = \frac{1}{\pi} \varrho_0 \cos m\Phi_0, \quad \text{for } f(\varrho) = \delta(\varrho - \varrho_0) = \delta(\Phi - \Phi_0),$$

for a constant normal pressure  $p_0$  and concentrated forces  $P$  acting at the circumference  $\varrho = \varrho_0 \in (\lambda, 1)$ , respectively. For  $\Phi_0 = \pi/2$ , i.e.  $\varrho_0 = [(1 + \lambda^2)/2]^{1/2}$  the values of the coefficients  $f_m^*$  are:  $\varrho_0/\pi$  for  $m = 0, 4, 8, \dots$ ; 0 for  $m = 1, 3, 5, \dots$  and  $-\varrho_0/\pi$  for  $m = 2, 6, 10, \dots$ . In the case of the load on the circumference  $\varrho = \varrho_0$  the stress  $p_0$  in Eq. (3.19) and subsequent equations would be replaced by  $P/b$ .

Notice that the matrix  $A_{mn}$  is symmetric and can be evaluated by the similar method as in the autor's paper [5]. The first two systems in Eqs (3.20) correspond to constant displacement in a circular region ( $\varkappa = 0$  — cylindrical punch or inclusion). In the last case is  $a_n = -ca_n'' + p_0 a_n'$ . To evaluate the unknown constant  $c$  we make use of the conditions (3.19) and (3.11) which lead to

$$2CG_1 \varkappa b \sum_{n=0}^{\infty} a_n''' - c \sum_{n=0}^{\infty} a_n'' + p_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n' = 0. \quad (3.24)$$

For the constant displacement  $\delta$  in the circular region  $0 \leq \varrho \leq \lambda$  we have from Eq. (3.8)  $a_0 = CG_1 \delta b^{-1}$  and the constant  $c$  is determined by equation

$$-ca_0'' + p_0 a_0' = CG_1 b^{-1} \delta. \quad (3.25)$$

Consequently, the presented three-part mixed boundary value problem is reduced to the solution of the simultaneous algebraic equations (3.20). If we determine  $a_n$  from Eqs. (3.20), (3.19) and (3.24) the function  $t(x)$  will be presented by the equation (3.12). The infinite systems of simultaneous algebraic equations can be solved by truncation [5, 6]. As a result of the above analysis all components of displacements and stresses and the parameters which characterize the contact can be found.

#### 4. Displacement and stress fields

The normal displacement on the upper surface of the layer is given by Eq. (3.9) and on the lower one is

$$\begin{aligned}
 w_z(\varrho, \eta) = & 2\kappa b^2 \lambda^2 \int_0^\infty h_1(x\eta) x^{-1} J_2(x\lambda) J_0(x\varrho) dx - \\
 & - (G_1 C)^{-1} b \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty h_1(x\eta) \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} J_0(x\varrho) dx
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

and can be rewritten to the form

$$\begin{aligned}
 w_z(\varrho, \eta) = & \delta \frac{4\alpha}{4\alpha + c_1(\alpha^2 - \beta^2)} + 2\kappa b^2 \lambda^2 \int_0^\infty (x\lambda)^{-1} J_1(x\lambda) [J_0(x\varrho) h_1'(x\eta) - \\
 & - \varrho J_1(x\varrho) h_1(x\eta)] dx + \frac{\delta - \kappa b^2 \lambda^2}{a_0} \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty Z_n(x) [J_0(x\varrho) h_1'(x\eta) - \varrho J_1(x\varrho) h_1(x\eta)] dx,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

where  $h_1'(x\eta)$  is the  $x$ -derivative of the function  $h_1(x\eta)$ . The normal stress on the surface  $\zeta = \eta$  is proportional to these displacement.

Making use of the identity

$$\int_0^\infty x J_0(x\varrho) \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} dx = - \left( I_0^n + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^n \right), \tag{4.3}$$

where the improper integrals

$$I_0^n = \int_0^\infty J_0(x\varrho) Z_n(x) dx \tag{4.4}$$

are presented analytically in the author's paper [5], the stresses  $\sigma_z(\varrho, 0)$  in Eq. (3.14) can be rewritten as follows

$$\begin{aligned}
 \sigma_z(\varrho, 0) = & - \sum_{n=0}^\infty a_n \left[ I_0^n + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^n + h^n(\varrho; \lambda, \eta) \right] + \\
 & + 2CG_1 \kappa b \lambda \left[ \lambda h(\varrho; \lambda, \eta) + \begin{cases} -F\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \frac{\varrho^2}{\lambda^2}\right); & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \\ \frac{1}{\pi}; & \lambda = \varrho, \\ \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^3 F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3; \frac{\lambda^2}{\varrho^2}\right); & \lambda \leq \varrho \end{cases} \right]
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

The symbols  $F(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$  denote the common Gaussian hypergeometric series and  $h^n(\varrho; \lambda, \eta)$ ,  $h(\varrho; \lambda, \eta)$  are the improper integrals defined as follows

$$h^n(\varrho; \lambda, \eta) = \int_0^{\infty} x h(x\eta) J_0(x\varrho) \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} dx, \quad (4.6)$$

$$h(\varrho; \lambda, \eta) = \int_0^{\infty} h(x\eta) J_2(x\lambda) J_0(x\varrho) dx,$$

which can be numerically evaluated at the finite interval, because the function  $h(x\eta)$  tends exponentially to zero as  $x$  tends to infinity. The maximum value of the contact stress at the center  $\varrho = 0$  is

$$[\sigma_z(\varrho, 0)]_{max} = \sigma_z(0, 0) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)^n \frac{\Gamma[n+(1/2)]}{\Gamma(n+1)} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}; n+1; \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n(0; \lambda, \eta) +$$

$$+ 2CG_1 C\kappa b\lambda[\lambda h(0; \lambda, \eta) - 1], \quad (4.7)$$

where  $\Gamma(\cdot)$  denotes the Gamma function.

On the other hand, making use of the asymptotic expansion of  $J_n(x\varrho)$  with large value of  $x$ , we obtain

$$x \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} \doteq -\frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} [\lambda \sin x\lambda - (-1)^n \cos x] + O(x^{-1}) \quad (4.8)$$

and

$$\int_0^{\infty} x \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} J_0(x\varrho) dx = \int_0^{\infty} \left\{ x \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} + \frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} [\lambda \sin x\lambda - (-1)^n \cos x] \right\} J_0(x\varrho) dx -$$

$$-\frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} \left[ \frac{\lambda H(\lambda-\varrho)}{\sqrt{\lambda^2-\varrho^2}} - (-1)^n \frac{H(\varrho-1)}{\sqrt{\varrho^2-1}} \right] \quad (4.9)$$

where the values of the Weber-Schafheitlin integrals were employed.

Then, the normal stress in Eq. (3.14) can be represented as

$$\sigma_z(\varrho, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \left[ x \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} + \frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} (\lambda \sin x\lambda - (-1)^n \cos x) \right] J_0(x\varrho) dx -$$

$$-\frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} \left[ \frac{\lambda H(\lambda-\varrho)}{\sqrt{\lambda^2-\varrho^2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \frac{H(\varrho-1)}{\sqrt{\varrho^2-1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \right] -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} -a_n h^n(\varrho; \lambda, \eta) + 2G_1 C\kappa b\lambda[\lambda h(\varrho; \lambda, \eta) + \quad (4.10)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{ll} -F\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \frac{\varrho^2}{\lambda^2}\right); & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \\ \frac{1}{\pi}; & \varrho = \lambda \\ \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^3 F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3; \frac{\lambda^2}{\varrho^2}\right); & \lambda \leq \varrho \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} [4.10] \\ [\text{cont.}] \end{array}$$

where  $H(\cdot)$  is the Heaviside's function.

The first series in equation (4.10) is finite, the second must be zero because the contact stress is finite at  $\varrho \rightarrow \lambda^-$  for a indenter with a smooth curved base (this condition corresponds to Eqs. (3.10), (3.11)) or has a singularity when  $\varrho \rightarrow \lambda^-$  for a indenter with a flat base or corners, the third series has a singularity when  $\varrho \rightarrow 1^+$  in both cases and the others terms are nonsingular.

The physical quantity of interest is the stress intensity factor  $L_b$  which is defined as

$$L_b = \sqrt{2b} \lim_{\varrho \rightarrow 1^+} \sqrt{\varrho - 1} \{\sigma_z(\varrho, 0)\}_{\varrho > 1}. \quad (4.11)$$

Using Eq. (4.10) the stress intensity factor can be expressed in terms of  $a_n$  as

$$L_b = \frac{2\sqrt{b}}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n. \quad (4.12)$$

The stresses decrease from the maximum value to zero in the interval  $\varrho \in \langle 0, \lambda \rangle$ , where are always compressive (for a indenter with a smooth curved base), are given by  $-p_0 f(\varrho)$  in the interval  $\varrho \in (\lambda, 1)$  and decrease from infinity to zero in the remaining interval  $\varrho > 1$ , where are tensile. Notice that the stress is finite inside the contact region and has the desired square-root singularity at  $\varrho = 1^+$ .

Use is made of families of above solutions, as described in the following sections.

### 5. Punch problem

A punch problem is a particular case of the more general case considered in the previous sections and the formulae obtained there can give its immediate solution.

If  $\kappa b^2 \varrho^2$  denotes the shape of the punch,  $\delta$  is measure of the penetration of the punch, the boundary radius of the contact region  $\lambda$  is given by Eq. (3.8) and the total load on the punch is given by

$$P = \pi a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{J_0^n(\lambda) - I_2^n(\lambda) + H^n(\lambda, \eta)\} + \frac{8}{3} G_1 C \kappa a^3 \left[ 1 - \frac{3}{2} \pi H(\lambda, \eta) \right], \quad (5.1)$$

where the improper integrals

$$H^n(\lambda, \eta) = 2\lambda^{-1} \int_0^{\infty} h(x\eta) J_1(x\lambda) \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} dx, \quad (5.2)$$

$$H(\lambda, \eta) = \int_0^{\infty} x^{-1} h(x\eta) J_2(x\lambda) J_1(x\lambda) dx,$$

are convergent and equal to zero for a half-space problem.

The relevant solutions of the special cases are summarized: (i) Indentation of a layer or a half-space by a cylindrical punch.

The curvature  $\varkappa$  is zero for a punch with a flat base. Apart from the displacement and stress there are four parameters which characterize the contact; these relate to total load  $P$ , the central displacement  $w_z(0, \eta)$  on the lower surface of the layer and the stress singularities at the outer and inner boundaries of the annulus. It may be shown that these are:

$$P = \pi CG_1 \delta a \left\{ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \left[ F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) \right]^2 + \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^3 F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1; \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3; \frac{2\lambda}{1+\lambda}\right) + \lambda H^0(\lambda, \eta) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n [I_0^n(\lambda) - I_2^n(\lambda) + H^n(\lambda, \eta)] \right\}, \quad (5.3)$$

$$\frac{w_z(0, \eta)}{\delta} = \frac{4\alpha}{4\alpha + c_1(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{1}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} h'_1(x\eta) Z_n(x) dx, \quad (5.4)$$

$$L_a = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a}{1-\lambda^2}} \left[ CG_1 \frac{\delta}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right], \quad (5.5)$$

$$L_b = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{b}{1-\lambda^2}} \left[ CG_1 \frac{\delta}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \right],$$

where

$$a_n = CG_1 \frac{\delta}{b} \frac{a'_n}{a'_0} - p_0 a'_0 \left( \frac{a'_n}{a'_0} - \frac{a'_n}{a'_0} \right) \quad (5.6)$$

and the parameters  $a'_n$ ,  $a''_n$  are the roots of the first and second systems of algebraic equations (3.20).

The contact stress is given by series

$$\sigma_z(\varrho, 0) = -CG_1 \frac{\delta}{a} \lambda \left\{ I_0^0 + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^0 + h^0(\varrho; \lambda, \eta) \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ I_0^n + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^n + h^n(\varrho; \lambda, \eta) \right\} \quad (5.7)$$

and has the minimum value

$$\sigma_z(0, 0) = -2CG_1 \frac{\delta}{a} \left[ \frac{\lambda}{1+\lambda} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\right) + \lambda h^0(0; \lambda, \eta) \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)^n \frac{\Gamma[n+(1/2)]}{\Gamma(n+1)} F\left(\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}; n+1; \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\right) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^n(0; \lambda, \eta). \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Taking  $h \gg b(\eta \rightarrow \infty)$ , we have  $H^n(\lambda, \eta) = h^n(\rho; \lambda, \eta) = 0$  and the above solution leads to the one of a half-space problem. In order taking  $p_0 = 0$ , we obtain the solution of the problem in which the annular region  $\lambda < \rho < 1$  is stress free. Similarly, if  $p_0 = 0$  and  $b \gg a (\lambda \rightarrow 0)$ , we can also obtain, by evaluation of the limit under  $\lambda \rightarrow 0$  the solution corresponding to stress free surface outside the contact region. Notice that if  $f(\rho) = 1$ , which corresponds to the constant pressure in the annular region and  $b \gg a(\lambda \rightarrow 0)$ , but  $b$  is bounded in the half-space problem the roots of the system (3.20)<sub>1</sub> have the form of the set as [6]

$$a'_n = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)(1+\delta_{n0})}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{5.9}$$

which satisfies

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a'_n = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a'_n = 0, \tag{5.10}$$

and the parameters  $a_n$  are

$$a_n = -\frac{2}{\pi} p_0 \left[ \frac{2}{(4n^2-1)(1+\delta_{n0})} + \frac{a''_n}{a''_0} \right] + CG_1 \frac{\delta}{b} \frac{a''_n}{a''_0}. \tag{5.11}$$

In this limiting case the stress intensity factors are

$$\begin{aligned}
L_a &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{a} \left( CG_1 \frac{\delta}{b} - \frac{2}{\pi} p_0 \right) \left( 1 + \frac{1}{a''_0} \sum_{n=1}^{\infty} a''_n \right), \\
L_b &= \frac{2}{\pi} \sqrt{b} \left[ p_0 + \left( CG_1 \frac{\delta}{b} - \frac{2}{\pi} p_0 \right) \left( 1 + \frac{1}{a''_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a''_n \right) \right],
\end{aligned} \tag{5.12}$$

where the parameters  $a''_n$  are the roots of the equations

$$\sum_{n=0}^{\infty} a''_n \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ J_m^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ J_n^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right] dx = \delta_{0m}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \tag{5.13}$$

It is interesting to note that the presence of compressive outside stresses makes indentation easier while tensile stresses make indentation harder. For example, if  $2 p_0/\pi = CG_1 \delta/b$  the preceding stress intensity factors tend to zero and to the value in the classical penny-shaped crack problem, respectively.

Only in the limiting case of the half-space problem with stress free surface outside the contact region we can obtain from the above mentioned results the closed-form

solution. It is

$$\begin{aligned}
 P &= 4CG_1 \delta a, \quad \sigma_z(\varrho, 0) = -\frac{2}{\pi} CG_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}} H(1-\varrho), \\
 w_z(\varrho, 0) &= \delta \left[ H(1-\varrho) + \frac{2}{\pi} \arcsin \left( \frac{1}{\varrho} \right) H(\varrho-1) \right]; \quad \varrho = r/a, \\
 L_a &= -\frac{2}{\pi} CG_1 \frac{\delta}{a} \sqrt{a}, \quad L_b \rightarrow 0.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

(ii) Two punches, stress free lower surface.

The ratio  $c_1 = c_0 h / CG_1$  describes the relative rigidity of foundation to layer; it being zero when the lower surface is stress free and infinitely large for a perfectly rigid base. Using the functions  $h(x\eta)$  and  $h_1(x\eta)$ , in Eq. (2.23), which for these limiting cases are reducible, we obtain the solution of the contact problem for a thick plate of height  $2h$  by a pair of the same punches, which are pressed onto both surfaces of the plate and the solution corresponding to the stress free lower surface of the layer respectively.

(iii) Concave punch.

If the method is applied to concave punch, then using Eqs. (3.8) and (3.19) the parameters  $a_n$  are found to be

$$a_n = CG_1 b^{-1} \delta \frac{a_n''}{a_0''} - p_0 a_0' \left( \frac{a_n''}{a_0''} - \frac{a_n'}{a_0'} \right) + 2CG_1 b^{-1} u \lambda^{-2} a_0''' \left( \frac{a_n''}{a_0''} - \frac{a_n'''}{a_0'''} \right) \tag{5.15}$$

where  $u = -\kappa a^2$  and  $\delta$  are the measures of the concavity of the base of the punch and the penetration of the punch at  $\varrho = \lambda$ , respectively. The stress concentration factors at  $\varrho = \lambda$  and  $\varrho = 1$  are given by equations (5.5) and (5.15).

Only in the limiting case of the half-space problem with stress free surface outside the contact region we obtain from the above mentioned results the closed-form solution. It may be shown that these are

$$\begin{aligned}
 P &= 4CG_1 a \left( \delta - \frac{1}{3} u \right), \quad \left( \geq P_0 \equiv \frac{32}{3} G_1 C a u \right) \\
 \sigma_z(\varrho, 0) &= -\frac{2}{\pi} CG_1 a^{-1} \frac{\delta - 3u + 4u\varrho^2}{\sqrt{1-\varrho^2}}, \quad \delta \geq 3u; \quad \varrho = \frac{r}{a},
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$w_z(\varrho, 0) = [\delta - u(1-\varrho^2)]H(1-\varrho) + \frac{2}{\pi} \left\{ [\delta - u(1-\varrho^2)] \arcsin \frac{1}{\varrho} - u \sqrt{\varrho^2 - 1} \right\} H(\varrho-1)$$

The condition that the entire punch surface makes contact with the half-space is  $\sigma_z(\varrho, 0) \leq 0$  in  $0 \leq \varrho \leq 1$ . Then we obtain the condition  $\delta \geq 3u$ . The critical load  $P_0$  means the minimum indented load for the entire face to contact. If  $P < P_0$  or  $\delta < 3u$ , the contact region becomes annular. The above equations are valid for circular contact region. Additionally, if  $u < 0$  and  $\delta \geq -u$ , the punch face is convex and the stress  $\sigma_z(\varrho, 0)$  is always compressive on the contact region. If  $u < 0$  and  $\delta < -u$  the stress  $\sigma_z(\varrho, 0)$  is compressive without the neighbourhood of  $\varrho = 1$ . The physical aspects of the corresponding isotropic problem are discussed by Barber [7], Shibuya [8] and for transversely isotropic material by author [9].



## (iv) Parabolic punch

The general case of parabolic punch was presented above. Notice only, that these results for the half-space problem with stress free surface outside the contact region by purely limiting manipulations lead to exact solution

$$\begin{aligned} \delta &= 2\kappa a^2, \quad P = \frac{16}{3} \kappa CG_1 a^3, \\ \sigma_z(\varrho, 0) &= -\frac{4}{\pi} CG_1 \frac{\delta}{a} \sqrt{1-\varrho^2}; \quad 0 \leq \varrho \leq 1, \\ w_z(\varrho, 0) &= \frac{\delta}{\pi} \left[ (2-\varrho^2) \arcsin\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \sqrt{\varrho^2-1} \right], \quad \varrho > 1; \quad \varrho = \frac{r}{a} \end{aligned} \quad (5.17)$$

## 6. Crack problem

The stress distribution produced by the indentation of a penny-shaped crack by an inclusion and tractions in a transversely isotropic layer can be investigated using the above mentioned results.

If we consider a layer of height  $2h$  weakened by a penny-shaped crack of radius  $b$  located in the middle plane of the layer and opened by a thin symmetric rigid inclusion of profile  $z = \pm(\delta - \kappa b^2 \varrho^2)$  and by tractions acting outside, then in such a crack problem formulae obtained in the previous sections can give its solution. By virtue of linear superposition, the stress field is equivalent to the field generated in the crack faces that are equal in magnitude but opposite in sign to the corresponding tractions in the uncracked layer. The last displacement and stress fields are obtained as the particular solution of the equilibrium equations. In particular:  $u_{r0} = p_0 r c_{13}/c$ ,  $w_{z0} = -p_0 z(c_{11} + c_{12})/c$ ,  $\sigma_{z0} = -p_0$ , if on the clamped-free faces of the layer the pressure  $p_0$  is prescribed. Here  $c$  is a combination of the elastic constants, equal to  $c = c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}^2$ .

Apart from the displacement and stress there are the stress intensity factors which characterize the crack problem. These are given by Eq. (4.12) for smooth inclusion and by Eq. (5.5) for cylindrical inclusion. In the special cases the stress intensity factors at the inner and outer boundaries of the annulus  $a \leq r \leq b$  are given by

$$\begin{aligned} L_a &= -\frac{2}{\pi} \frac{\delta G_1 C}{b} \sqrt{\frac{a}{1-\lambda^2}} \left[ 1 + \frac{1}{a_0''} \sum_{n=1}^{\infty} a_n'' \right], \\ L_b &= \frac{2}{\pi} \frac{\delta G_1 C}{b} \sqrt{\frac{b}{1-\lambda^2}} \left[ 1 + \frac{1}{a_0''} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n'' \right], \end{aligned} \quad (6.1)$$

when the crack is opened only by cylindrical inclusion ( $p_0 = 0$ ) and

$$\begin{aligned} L_a &= -\frac{2p_0}{\pi} \sqrt{\frac{a}{1-\lambda^2}} \left( \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n'}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n''} \sum_{n=0}^{\infty} a_n'' - \sum_{n=0}^{\infty} a_n' \right), \\ L_b &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

for cylindrical inclusion and pressure

$$p_0 \geq p_{0cr} = CG_1 \frac{\delta}{ba'_0} \cdot \frac{1 + \frac{1}{a'_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a''_n}{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{a'_n}{a'_0} - \frac{a''_n}{a'_0} \right)}, \quad (6.3)$$

where the critical load  $p_{0cr}$  means the minimum pressure for the tip  $\varrho = \lambda$  of the crack to contact. When the pressure at the layer surface is above the critical load we have an annular contact region between the crack faces, the outer circumference of which coincides with the crack tip and the inner radius of which will shrink with increasing load.

The crack problem for high loads can therefore be treated by contact problem of the layer and rigid base with protrusion, which is discussed in the other author's paper [6].

The stress in ensity factor  $L_a$  is always negative, decreases with the increase of the external pressure to value (6.2) and for the pressure above the value (6.3) depends on the load as in the contact problem [6]. In contrast  $L_b$  is positive and decreases to zero.

On the other hand, in the case of the tension of the layer with cylindrical inclusion in the crack, there may be cases that the inclusion surface makes partially contact or does not make contact with the elastic medium. Let  $p'_{0cr}$  be the tension giving the state in which the layer contacts the surfaces of the inclusion without neighbourhood of the point  $\varrho = 0$ . Then for thick layer Eq. (5.6) and (5.8) give

$$p'_{0cr} = \frac{I_0^0(0) + \frac{1}{a'_0} \sum_{n=1}^{\infty} a''_n I_0^0(0)}{1 + a'_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_0^0(0) \left( \frac{a'_n}{a'_0} - \frac{a''_n}{a'_0} \right)}. \quad (6.4)$$

When the tensile load  $p_0$  is above the critical value (6.4), the contact area will be an annulus, the inner circumference of which increases with the increase of the load, and when the load is above some value  $p''_{0cr}$  the elastic body does not make contact with the surface of the inclusion. These critical loads can be found from the condition  $w_c(\lambda, 0) = \delta$ , where  $w_c(\lambda, 0)$  denotes the displacement of the penny-shaped crack in the point  $\varrho = \lambda$ .

For a thick layer these critical loads are given by formula

$$p''_{0cr} = \frac{\pi}{2} G_1 C \frac{\delta}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \quad (6.5)$$

Very interesting case in which the tension is in the interval  $p'_{0cr} < p_0 < p''_{0cr}$  and the contact region on the cylindrical inclusion is annular is not included in our solutions.

By substitution of Eq. (6.5) for  $\lambda = 0$  into Eq. (5.12) we obtain  $L_a \rightarrow 0$  and  $L_b = 2p_0 \sqrt{b}/\pi$ .

The physical aspects of the corresponding isotropic problem are discussed by Tweed [10] and Gladwell [11].

### 7. A rigid inclusion pressed between two layers

The solution presented here may be applied to the following problem: two identical transversely isotropic layers are pressed together by a pressure; a rigid obstacle lies between the layers. The solution for each layer may be obtained as the superposition of two fields. The first corresponds to a stress field in the  $z$ -direction namely  $\sigma_z(r, z) = -p_0 f(r)$ . The second may be expressed by means of the above mentioned results provided that the compatibility equation  $\{dw_z(r, 0)/dr\}_{r=b} = 0$  is satisfied. This is the equation giving  $b$ , the extent of the contact region. Thus, on using Eqs. (3.5) and (3.7) we find  $F(\pi) = 0$  or

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = 0, \quad (7.1)$$

which with the aid of the notation (3.19) may be written

$$2CG_1 \kappa b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n'' - c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n'' + p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n' = 0. \quad (7.2)$$

Assuming the ratio of the inner to the outer radius of the uncontact region  $\lambda = a/b$  and the ratio  $\eta = h/b$  an solving for given external pressure distribution the equations (3.20) we can obtain the parameters  $a_n'$ ,  $a_n''$  and  $a_n'''$ . Then, Eqs. (7.2) and (3.24) yield the value of the pressure  $p_0$  and Eqs (3.8) and (3.19) the value of  $\delta$  in terms of known quantities; the values which give this contact state.

Full details of the other corresponding problems may be found in the articles by Alblas [12], Gladwell [13, 14] and author [6].

### 8. Isotropic case

All the results obtained in this paper can also be applied for completely isotropic bodies.

Setting  $\alpha = s_1 + s_2 = 2$  and evaluating the limit under  $\beta = s_1 - s_2 \rightarrow 0$  in Eq. (2.23), we get

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x) - 1 \\ h_1(x) \end{array} \right\} = \frac{1}{\sinh 2x + 2x + c_1 x^{-1} (\cosh 2x - 1)} \times \left\{ \begin{array}{l} - [\cosh 2x - 2x^2 - 1 + c_1 x^{-1} [\sinh 2x + 2x]] \\ 2(\sinh x + x \cosh x) \end{array} \right\}. \quad (8.1)$$

For an isotropic material the parameter  $C$  reduces to  $(1-\nu)^{-1}$  and the relative rigidity of the foundation to the layer is  $c_1 = c_0 h(1-\nu)/G$ . Here  $G$  is the shear modulus and  $\nu$  is Poisson's ratio.

### 9. Conclusions

It has been demonstrated that a large class of unbonded contact problems may be reduced to the solution of the infinite systems of simultaneous algebraic equations.

On the basis of the presented results the effect of arbitrary loading outside of an indenter, of the boundary conditions and transverse anisotropy on the contact behaviour and the load-contact length relation can be clarified.

#### Literatura

1. R. M. CHRISTENSEN, *Mechanics of Composite Materials*, Wiley, New York, 1979.
2. J. D. ACHENBACH, *A Theory of Elasticity with Microstructure for Directionally Reinforced Composites*, Springer, Berlin, 1975.
3. E. N. MASTROJANIS, T. MURA, L. M. KEER, *An axisymmetric Neumann potential problem for the circular annulus*, Comp. and Struct. 18, No 2, pp. 365 - 368, 1983.
4. A. ERDELYI, (Editor), *Higher transcendental functions*, Mc Graw-Hill, New York, 1954.
5. B. ROGOWSKI, *Mixed boundary value problems of a transversely isotropic layer under torsion and various boundary conditions*, Rozpr. Inż., 31, 3, pp. 293 - 315, 1983.
6. B. ROGOWSKI, *A transversely isotropic layer pressed onto a rigid base with a protrusion or pit*, Mech. Teoret. i Stos. 22, 1 - 2, pp. 279 - 297, 1984.
7. J. R. BARBER, *Indentation of the semi-infinite elastic solid by a concave rigid punch*, J. Elasticity 6, pp. 149 - 159, 1976.
8. T. SHIBUYA, *Indentation of an elastic half-space by a concave rigid punch*. ZAMM 60 pp. 421—427, 1980.
9. B. ROGOWSKI, *Wciskanie sztywnego wklęsłego stempla w sprężyste ciało poprzecznie izotropowe* ZN PŁ, Budownictwo z. 31, ss. 81 - 99, 1984.
10. J. TWEED, *The stress intensity factor of a Griffith crack which is opened by a thin symmetric wedge*, J. Elasticity 1, pp. 29 - 35, 1971.
11. G. M. L. GLADWELL, *The stress intensity factor for a Griffith crack which is opened by a thin symmetric wedge*, J. Elasticity, 7, 3, pp. 325 - 327, 1977.
12. J. B. ALBLAS, *On the two-dimensional contact problem of a rigid cylinder, pressed between two elastic half-planes*, Mech. Res. Comm. 1, pp. 15 - 20, 1974.
13. G. M. L. GLADWELL, *A note on a three-part contact problem, Chebyshev polynomials and elliptic integrals*, Int. J. Engng. Sci., 18, pp. 61 - 67, 1980.
14. G. M. L. GLADWELL, *The contact problem for a rigid inclusion pressed between two dissimilar elastic half planes*, J. of Appl. Mech. 48, 1, pp. 104 - 108, 1981.

#### Резюме

#### КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ЖЁСТКОГО ТЕЛА И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

Рассматривается задача трансверсально-изотропного слоя контактируемого с жёстким телом. Нижний край слоя упруго подпертый. На верхней площадке дано нормальное перемещение внутри круговой области с неизвестным радиусом, вокруг которого выступают нормальные напряжения в области кольца и исчезают нормальные перемещения на остальной части верхнего края слоя.

Задача сформулирована как решение тройных интегральных уравнений. При решении этих уравнений используются дифференциальное, интегральное и рядовое представления неизвестной функции, которая удовлетворяет два из трёх уравнений точно, в то время как третье ведёт к трём бесконечным системам алгебраических уравнений относительно коэффициентов введенных в представление.

Физические величины, которые характеризуют контакт и коэффициенты интенсивности напряжения представлены при помощи коэффициентов — решения алгебраических уравнений.

Рассмотрены некоторые задачи о штампе, включении и трещине в трансверсально-изотропном слое.

## Streszczenie

## KONTAKT MIĘDZY SZTYWNYM CIAŁEM I POPRZECZNIE IZOTROPOWĄ WARSTWĄ

Rozpatrzono zagadnienie warstwy poprzecznie izotropowej kontaktującej się z ciałem sztywnym. Dolna płaszczyzna warstwy jest sprężyste podparta. Na górnej powierzchni warstwy dane jest normalne przemieszczenie wewnątrz kołowego obszaru o nieznanym promieniu; na zewnątrz tego obszaru występują normalne naprężenia, a na pozostałej części tej powierzchni przemieszczenia normalne są równe zeru. Na obu brzegach warstwy naprężenia styczne nie występują.

Autor sformułował zagadnienie jako rozwiązanie potrójnych równań całkowych. W celu rozwiązania ich wprowadzono taką różniczkową, całkową i szeregową reprezentację poszukiwanej funkcji, która spełnia dwa z trzech równań ściśle, podczas gdy trzecie równanie prowadzi do trzech nieskończonych układów równań algebraicznych względem współczynników wprowadzonych w reprezentacji. Fizyczne wielkości, które charakteryzują kontakt oraz współczynniki intensywności naprężenia wyznaczono za pomocą rozwiązań układów równań algebraicznych.

Rozpatrzono pewne zagadnienia stempla, inkluzji i szczeliny dla poprzecznie izotropowej warstwy.

*Praca wpłynęła do Redakcji 28 października 1984 roku*

---



## METODA GENERACJI WYBUCHOWYCH DYNAMICZNYCH OBCIĄŻEŃ SYMULUJĄCYCH TĄPNIECIE

ROMAN KRZEWIŃSKI, ANDRZEJ SPYCHAŁA,  
RADOSŁAW TRĘBIŃSKI, WACŁAW WARACHIM,  
EDWARD WŁODARCZYK, MIECZYSLAW ZIELIŃSKI

WAT

### 1. Wstęp

Jednym z podstawowych zagrożeń występujących w górnictwie podziemnym są tąpnięcia górotworu. Tąpnięcie, będące procesem gwałtownego odciążenia się górotworu, generuje fale naprężeń, które wprawiają w ruch masy skalne sąsiadujące z wyrobiskami górnictwami. W wyniku tego pojawiają się duże, szybkozmienne obciążenia działające na górnicze obudowy ścianowe. Dla zabezpieczenia wyrobisk przed skutkami tąpnięć konieczne jest przystosowanie elementów obudów zmechanizowanych do pracy w warunkach obciążeń dynamicznych występujących w pokładach tąpniących. Szczególnej uwagi wymaga konstrukcja stojaków i osprzętu hydraulicznego przejmującego obciążenie dynamiczne.

Stan wiedzy na temat wielkości i czasu trwania obciążeń dynamicznych przejmowanych przez obudowy nie pozwala na opracowanie jednoznacznej metody oceny przydatności elementów konstrukcyjnych obudów zmechanizowanych do pracy w warunkach pokładów tąpniących. Pozostaje tym samym jedynie metoda porównawcza określania wytrzymałości dynamicznej elementów konstrukcyjnych obudów zmechanizowanych na stanowiskach symulujących obciążenia generowane tąpnięciem. Powszechnie stosowaną metodą badania dynamicznej wytrzymałości stojaków jest metoda kafarowa. Metoda ta posiada szereg istotnych wad, do których należą:

- wyzwalanie dużych energii uderzenia wymaga dużej wysokości spadania masy, tym samym konstrukcja stanowiska musi być odpowiednio wysoka;
- skomplikowana zmiana masy bijaka konieczna do wywoływania różnych obciążeń;
- budowa dużych i kosztownych fundamentów;
- zagrożenie środowiska spowodowane przenoszeniem się drgań wywołanych uderzeniem.

Wady stanowiska kafarowego, a szczególnie jego szkodliwe oddziaływanie na otoczenie skłoniły autorów niniejszego opracowania do poszukiwania innych rozwiązań. Założono, że nowe stanowisko badawcze powinno stanowić układ zamknięty, w którym zbędny jest

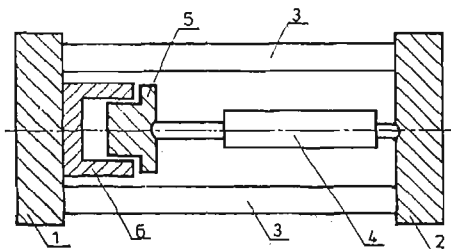
fundament. Drugim istotnym założeniem było poszukiwanie taniego źródła energii, charakteryzującego się dużą mocą. Postanowiono do generacji obciążeń wykorzystać energię pochodzącą z wybuchowego spalania prochu strzelniczego. Wyniki oszacowań oraz badania modelu stanowiska wskazywały, że zastosowanie generatora obciążeń wybuchowych umożliwi uzyskanie dużego obciążenia przy bardzo krótkim czasie jego narastania. Rezultaty badań wstępnych na stanowisku prototypowym w pełni potwierdziły tę prognozę.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono opis stanowiska dynamicznej diagnostyki stojaków z wybuchowym generatorem obciążeń oraz wyniki badań skalujących. Prezentowany jest również matematyczny model stanowiska będący podstawą teoretycznej prognozy parametrów obciążeń generowanych na stanowisku, przeprowadzona jest dyskusja wyników i porównanie z wynikami badań doświadczalnych.

Na zakończenie sformułowane są wnioski dotyczące wybuchowej metody symulacji tąpnięć.

## 2. Opis stanowiska i wyniki badań skalujących

Schemat prototypowego stanowiska dynamicznej diagnostyki stojaków przedstawia rys. 1. Zamknięty układ stanowiska stanowią dwa bloki oporowe 1 i 2 połączone słupami 3. Badany stojak 4 rozparty jest pomiędzy tłokiem generatora 5 i blokiem oporowym



Rys. 1.

2. Wybuchowy generator obciążeń składa się z tłoka 5 i komory spalania 6 opartej o blok oporowy 1 [2].

Obciążenie stojaka wywołane jest spalaniem ładunku prochowego. Spalanie inicjowane jest za pomocą zapłonika elektrycznego. Wielkość obciążenia dynamicznego regulowana jest gęstością ładowania komory. Gęstość ta definiowana jest jako stosunek masy ładunku prochowego do objętości komory spalania. Czas narastania oraz całkowity czas trwania obciążenia przy stałej gęstości ładowania można regulować wielkością i kształtem ziaren prochowych.

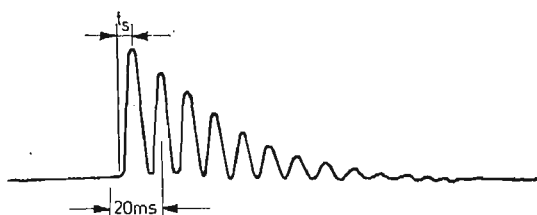
Prototypowe stanowisko poddane zostało badaniom skalującym. Oprzyrządowanie zawierało układy pomiarowe do rejestracji przebiegów ciśnienia w cylindrze stojaka, odkształceń ścianki cylindra, tłoczyska i przedłużacza stojaka oraz przemieszczeń części ruchomych stojaka. Przebiegi ciśnienia w cylindrze stojaka rejestrowano za pomocą pięciu równoległych kanałów pomiarowych. Dwa z nich zawierały przetworniki piezo-



elektryczne, pozostałe — manometry tensometryczne. Zastosowanie czujników piezoelektrycznych obok tensometrycznych miało na celu sprawdzenie poprawności rejestracji przebiegów dynamicznych przez manometry tensometryczne. Na podstawie wyników rejestracji przebiegów ciśnienia stwierdzono, że manometry tensometryczne wiernie rejestrują generowane ciśnienia i nie zachodzi potrzeba stosowania przetworników piezoelektrycznych.

Podstawowym celem badań skalujących było sprawdzenie założeń konstrukcyjnych i prawidłowości działania generatora obciążeń dynamicznych. Dodatkowym celem było zbadanie możliwości badawczych stanowiska, a w szczególności zbadanie wpływu gęstości ładowania na wielkość obciążenia oraz wpływu rodzaju prochu na czas narastania i trwania obciążenia. Przedmiotem badań były dwa typy stojaków: największy z produkowanych o średnicy 250 mm przy pełnym wysunięciu tłoczyska oraz stojak  $\Phi 200$  mm, również przy pełnym wysunięciu tłoczyska. W obu typach stojaków wstępne ciśnienie w cylindrze wynosiło 25 MPa.

Na rys. 2 przedstawiono przykładowy oscylogram przebiegu ciśnienia w cylindrze stojaka  $\Phi 250$  mm przy gęstości ładowania komory generatora  $\Delta = 200$  kg/m<sup>3</sup>. Przebieg ciśnienia ma charakter tłumionych drgań o dość szybko malejącej amplitudzie. Naj-



Rys. 2.

bardziej istotne z punktu widzenia badań wytrzymałościowych jest pierwsze, najwyższe maksimum ciśnienia. Czas, w którym ciśnienie osiąga maksymalną wartość, przyjęto jako miarę czasu narastania obciążenia.

Wyniki badań stojaka  $\Phi 250$  mm przedstawiono w tabeli 1. Zawiera ona pomierzone w kolejnych próbach wartości ciśnienia dynamicznego w cylindrze stojaka  $p_{ms}$ , czasu jego narastania  $t_s$  oraz naprężeń rozciągających w ścianie cylindra stojaka  $\sigma_{rc}$  i ściskających w ścianie tłoczyska  $\sigma_{sr}$  w funkcji gęstości ładowania komory generatora  $\Delta$ . Przy próbie 6 naprężenia rozciągające w ścianie cylindra osiągnęły wartość znacznie przekraczającą minimalną wartość granicy plastyczności, co spowodowało wybrzuszenie cylindra i utratę jego szczelności.

Wyniki badań przedstawione w tabeli 1 ukazują możliwość uzyskiwania na stanowisku wielkości obciążeń zmieniających się w dużym zakresie, do obciążeń niszczących włącznie. Należy zwrócić uwagę na czasy narastania obciążenia  $t_s$ . Są one znacznie krótsze od czasów uzyskiwanych na stanowiskach katarowych.

Badania stojaków  $\Phi 200$  mm dały rezultaty zbliżone do uzyskanych dla stojaków  $\Phi 250$  mm. W trakcie badań wygenerowano obciążenie, przy którym nastąpiło rozzerwanie cylindra stojaka.

Tabela 1

Próba nr	$\Delta$ kg/m <sup>3</sup>	$p_{ms}$ MPa	$t_s$ ms	$\sigma_{rc}$ MPa	$\sigma_{sr}$ MPa
1	50	35	8,5	91	78
2	100	60	5,0	313	264
3	150	95	4,0	495	427
4	200	115	4,0	573	491
5	200	125	3,5	586	500
6	300	155	3,0	797	682

W kolejnej serii prób zbadano wpływ rodzaju prochu na parametry obciążeń generowanych na stanowisku. Badania te przeprowadzono dla stojaków  $\Phi$  200 mm. Wyniki badań przedstawiono w tabeli 2. Z zastosowanych prochów największą grubość warstwy palnej posiadał proch RNDSI, najmniejszą WUFL. Jak wynika z danych przedstawionych w tabeli 2 odpowiedni dobór grubości warstwy palnej ziaren prochowych pozwala zmieniać czas narastania obciążenia w bardzo szerokim zakresie.

Tabela 2

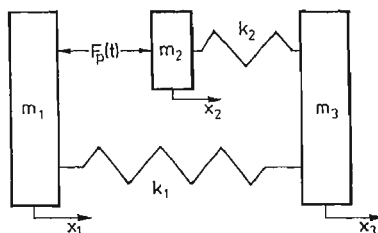
Próba nr	$\Delta$ kg/m <sup>3</sup>	$p_{ms}$ MPa	$t_s$ ms	$\sigma_{rc}$ MPa	$\sigma_{sr}$ MPa	Proch
1	100	50	22,0	236	181	SW
2	220	80	50,0	369	283	RNDSI
3	200	110	15,5	491	377	SW
4	100	100	5,0	455	349	WUFL

### 3. Matematyczny model stanowiska

W fazie projektowania stanowiska opracowano model matematyczny, który posłużył do dokonania teoretycznej prognozy parametrów obciążenia. Celem tej prognozy była weryfikacja wybuchowej metody symulacji tąpnięć. Wyniki prognozy potwierdziły słuszność przyjętych założeń. Oszacowane wielkości obciążeń wykorzystano przy obliczeniach wytrzymałościowych elementów stanowiska. Po uruchomieniu stanowiska prototypowego i doświadczalnej weryfikacji modelu, wykorzystano go do planowania dalszych badań.

Dla oszacowania parametrów obciążenia generowanego na stanowisku przyjęto schemat zastępczy układu pokazany na rys. 3. Siła  $Fp(t)$  reprezentuje siłę wywieraną przez gazy prochowe. Masa  $m_1$  przedstawia sobą łączną masę bloku oporowego 1 i cylindra generatora 6 (rys. 1). Masa  $m_2$  odpowiada masie tłoka generatora i ruchomych części siłownika. Masa  $m_3$  reprezentuje łączną masę bloku oporowego 2 i cylindra stojaka. Symbolami  $k_1$  i  $k_2$  oznaczono zastępcze sztywności słupów i stojaka.

Na matematyczny model procesu fizycznego przebiegającego w rozpatrywanym układzie składają się równania opisujące proces palenia się ładunku prochowego oraz rów-



Rys. 3.

nania ruchu elementów układu. Proces palenia się ładunku prochowego i rozprężania gazów prochowych opisany jest w oparciu o następujące założenia:

- w komorze spalania panuje jednorodne ciśnienie;
- energię kinetyczną gazów prochowych można pominąć ze względu na małą masę ładunku w porównaniu z masami  $m_1$  i  $m_2$ ;
- zmiany stanu gazów prochowych opisuje równanie Abela

$$p(v_g - \alpha) = RT, \quad (3.1)$$

gdzie  $p$  — ciśnienie,  $v_g$  — objętość właściwa,  $\alpha$  — kowolumen (współobjętość),  $R$  — stała gazowa,  $T$  — temperatura;

- pojemność cieplna gazów prochowych nie zależy od temperatury;
- palenie się ziaren prochowych podlega geometrycznemu prawu spalania [1]:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Gamma(\Psi)p, \quad \Gamma(\Psi) = \frac{\kappa u_1}{e_1} \sqrt{1 + 4 \frac{\lambda \Psi}{\kappa}}, \quad (3.2)$$

gdzie  $\Psi$  — względna objętość spalonego prochu,  $t$  — czas,  $\kappa$ ,  $\lambda$  — charakterystyki kształtu ziarna prochowego,  $u_1$  — liniowa prędkość palenia się prochu przy ciśnieniu atmosferycznym,  $e_1$  — grubość warstwy palnej ziarna prochowego;

- straty energii związane są z oddawaniem ciepła ściankom komory spalania oraz ucieczką gazów prochowych z komory.

Opierając się na powyższych założeniach wyprowadzono równanie opisujące czasową zmianę ciśnienia w komorze generatora. Punktem wyjścia jest równanie bilansu energii dla mieszaniny gazowo-prochowej. Ma ono postać:

$$\frac{dE_w}{dt} = \frac{dE_G}{dt} + \frac{dL}{dt} + \frac{dQ}{dt} + \frac{dE_U}{dt}, \quad (3.3)$$

gdzie  $E_w$ ,  $E_G$ ,  $L$ ,  $Q$ ,  $E_U$  oznaczają odpowiednio: energię wydzieloną przy spalaniu prochu, energię wewnętrzną gazów prochowych, pracę przesunięcia mas  $m_1$  i  $m_2$ , straty ciepłne oraz straty energii na skutek ucieczki gazu z komory. Poszczególne składniki występujące w równaniu (3.3) można wyrazić w sposób następujący [1]:

$$\frac{dE_w}{dt} = \frac{\omega f}{\gamma - 1} \frac{d\Psi}{dt}, \quad (3.4)$$

$$\frac{dE_G}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{P}{\gamma - 1} \left( V - \frac{1 - \Psi}{\delta} \omega - \alpha m_g \right) \right], \quad (3.5)$$

$$\frac{dL}{dt} = pA(v_2 - v_1), \quad (3.6)$$

$$\frac{dE_U}{dt} = E_G \frac{G}{m_g}, \quad (3.7)$$

gdzie  $\omega$  — masa ładunku prochowego,  $f$  — siła prochu,  $\gamma$  — wykładnik izentropy gazów prochowych,  $V$  — bieżąca objętość komory,  $m_g$  — masa gazów prochowych,  $\delta$  — gęstość stałego prochu,  $A$  — powierzchnia tłoka,  $v_1, v_2$  — prędkość mas  $m_1$  i  $m_2$ ,  $G$  — wydatek gazu uciekającego z komory. Uwzględniając wyrażenie na zmianę objętości:

$$V = V_0 + A(x_2 - x_1), \quad (3.8)$$

oraz związek (I1):

$$\frac{dm_g}{dt} = \omega \frac{d\Psi}{dt} - G, \quad (3.9)$$

i wykorzystując zależności (3.4) - (3.7) możemy równanie (3.3) przekształcić do postaci:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\gamma - 1}{V - \frac{1 - \Psi}{\delta} \omega - \alpha m_g} \left\{ \frac{\omega}{\gamma - 1} \left( f - \frac{p}{\delta} \right) \frac{d\Psi}{dt} - \frac{p}{\gamma - 1} \left[ \gamma A(v_2 - v_1) + \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha \frac{dm_g}{dt} \right] - \frac{dQ}{dt} \right\} - p \frac{G}{m_g}.$$

Równania (3.2), (3.9) i (3.10) opisują proces zachodzący w komorze generatora. Aby opisać cały proces zachodzący na stanowisku należy do nich dołączyć równania ruchu elementów stanowiska:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{m_1} [F_0 + k_1(x_3 - x_1) - Ap], \quad (3.11)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{m_2} [Ap - F_0 - k_2(x_2 - x_3)], \quad (3.12)$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{m_3} [k_2(x_2 - x_3) - k_1(x_3 - x_1)], \quad (3.13)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.14)$$

Symbol  $F_0$  występujący w równaniach (3.11) i (3.12) oznacza siłę wstępnego rozparcia stojaka.

Warunki początkowe dla układu równań (3.2), (3.8), (3.10) - (3.14) mają postać:

$$p(0) = p_0 = \frac{F_0}{A}, \quad (3.15)$$

$$\Psi(0) = \frac{p_0 \left( \frac{V_0}{\omega} - \frac{1}{\delta} \right)}{f + p_0 \left( \alpha - \frac{1}{\delta} \right)}, \quad (3.16)$$

$$m_0(0) = \omega \Psi(0), \quad (3.17)$$

$$v_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.18)$$

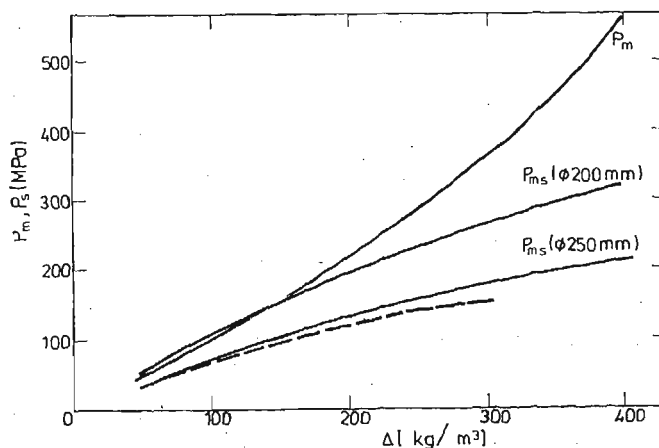
$$x_i(0) = 0. \quad (3.19)$$

Układ równań (3.2), (3.8), (3.10)÷(3.14) wraz z warunkami początkowymi (3.15) - (3.19) stanowi matematyczny model stanowiska. Układ ten rozwiązywany był w sposób numeryczny, metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. Wyniki obliczeń przedstawione są w rozdziale 4.

#### 4. Wyniki teoretycznej prognozy parametrów obciążenia

W obliczeniach przyjęto następujące wartości parametrów charakteryzujących układ:  $m_1 = 4857$  kg,  $m_2 = 368$  kg (343 kg) (dane bez nawiasów odnoszą się do stojaka  $\Phi$  250 mm, w nawiasach do stojaka  $\Phi$  200 mm),  $V_0 = 1$  dm<sup>3</sup>,  $A = 3,142$  dm<sup>2</sup>,  $f = 1$  MJ/kg,  $\alpha = 0,9$  dm<sup>3</sup>/kg,  $\delta = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\gamma = 1,2$ ;  $\kappa = 1,11$ ;  $\lambda = -0,1$ ;  $e_1 = 0,125 \cdot 10^{-3}$  m  $u_1 = 0,9$  mm/sGPa,  $k_1 = 4,05$  GN/m,  $k_2 = 0,1041$  GN/m (0,0949 GN/m),  $F_0 = 1227$  kN (785 kN). Zastępczą sztywność stojaka wyznaczono traktując go jako szeregowe połączenie dwóch elementów sprężystych: jednego odpowiadającego tłoczysku z przedłużaczem i drugiego odpowiadającego słupowi emulsji zawartej w cylindrze. W pierwszym etapie obliczeń pominięto wpływ efektów dyssypacji energii, tzn. przyjęto  $\frac{dQ}{dt} = 0$ ;  $G = 0$ .

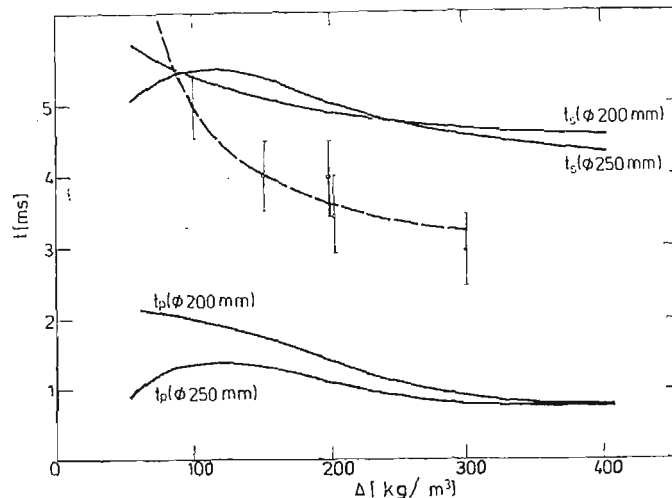
Otrzymane z obliczeń wartości maksymalnych ciśnień w generatorze  $p_m$  i w cylindrze stojaka  $p_{ms}$  w funkcji gęstości ładowania dla stojaków  $\Phi$  250 mm i  $\Phi$  200 mm przedstawiono na rys. 4. Jak wynika z przedstawionych wykresów, w zakresie dostępnych w układzie gęstości ładowania  $\Delta l$  do 400 kg/m<sup>3</sup> możliwe jest uzyskanie w stojaku  $\Phi$  250 mm maksymalnych ciśnień rzędu 200 MPa, zaś w stojaku  $\Phi$  200 mm — rzędu 300 MPa, przy maksymalnym ciśnieniu gazów prochowych około 550 MPa. Prognozowane wartości



Rys. 4.

ciśnienia znacznie przekraczają wartości ciśnienia, przy których następuje zniszczenie stojaków.

Otrzymane z obliczeń czasy narastania ciśnienia w generatorze  $t_p$  i stojaku  $t_s$  w funkcji gęstości ładowania przedstawiono na rys. 5. Jak wynika z przedstawionych wykresów czas narastania obciążenia stosunkowo słabo zależy od gęstości ładowania i waha się w gra-



Rys. 5.

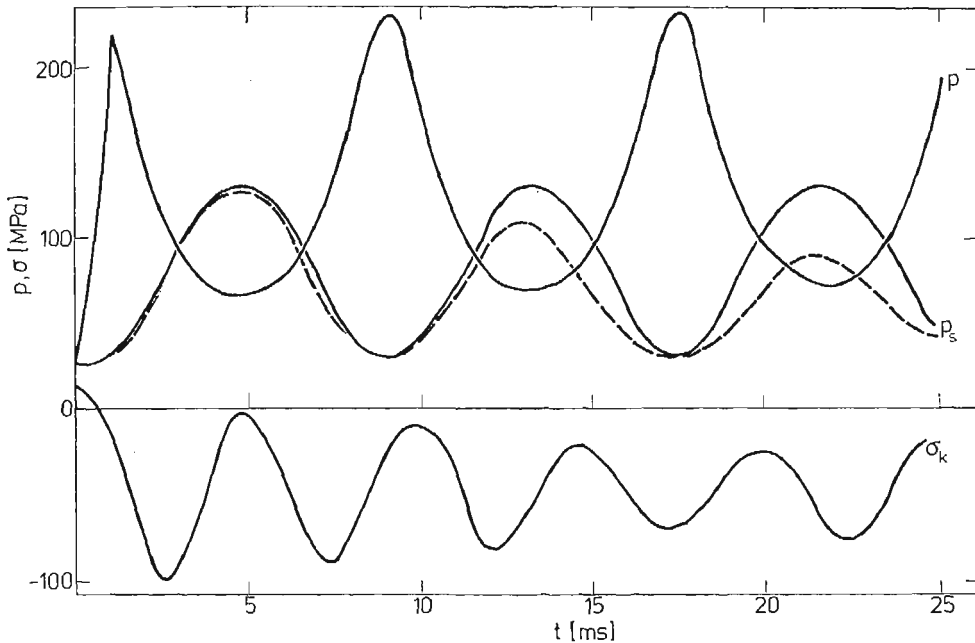
nicach 4,5 - 5,5 ms. Czas narastania ciśnienia w generatorze jest kilkakrotnie krótszy, co jest zrozumiałe zważywszy, że obciążenie przekazywane jest na siłownik przez elementy bezwładne.

Korzystając z wyników analizy numerycznej dokonajmy porównania wybuchowej i kafarowej metody generacji obciążeń dynamicznych. Otóż czas narastania ciśnienia w cylindrze stojaka zależy od prędkości z jaką porusza się masywny element obciążający stojak. Im większa jest prędkość tego elementu, tym krótszy jest czas narastania ciśnienia w cylindrze. Z analizy wynika, że tłok generatora uzyskuje prędkość rzędu kilkunastu m/s. Na przykład, dla gęstości ładowania  $\Delta = 200 \text{ kg/m}^3$  uzyskuje się wartość maksymalnej prędkości tłoka równą 17,7 m/s. Prędkość tę osiąga tłok na drodze 24 mm. Dla uzyskania tej samej prędkości bijaka na stanowisku kafarowym należałoby unieść go na wysokość około 16 m. Porównanie dróg rozpędzania tłumaczy dlaczego wybuchowa metoda generacji obciążeń pozwala uzyskiwać czasy narastania ciśnienia w stojaku nieosiągalne w metodzie kafarowej.

Dla stojaka  $\Phi 250 \text{ mm}$  dokonano porównania wyników analizy z wynikami badań na stanowisku prototypowym. Na rys. 4 i 5 linią przerywaną zaznaczono otrzymane eksperymentalnie zależności maksymalnego ciśnienia w siłowniku i czas narastania obciążenia od gęstości ładowania. W odniesieniu do maksymalnych wartości obciążenia wyniki obliczeń i eksperymentu pozostają w dobrej zgodności, z tym, że ze wzrostem gęstości ładowania powiększa się rozbieżność pomiędzy wynikami obliczeń i eksperymentu. Jest to spowodowane efektami dyssypacji energii w układzie oraz odkształceniem ścianek cylindra stojaka. Dla gęstości ładowania  $\Delta = 300 \text{ kg/m}^3$  zaobserwowano trwałe odkształcenia

cylindra, co świadczy, że dla dużych obciążeń stojaka należy brać pod uwagę odkształcalność ścianek jego cylindra.

Czasy narastania obciążenia określone teoretycznie i eksperymentalnie pozostają w dobrej zgodności. Oceniając ich zgodność należy wziąć pod uwagę fakt, że dokładne określenie momentu uruchomienia tłoka generatora w oparciu o doświadczalne przebiegi ciśnienia jest utrudnione, gdyż początkowo ciśnienie narasta bardzo powoli (patrz rys. 6, wykres  $p_s(t)$ ). Trudności z określeniem początku narastania obciążenia utrudniają porów-

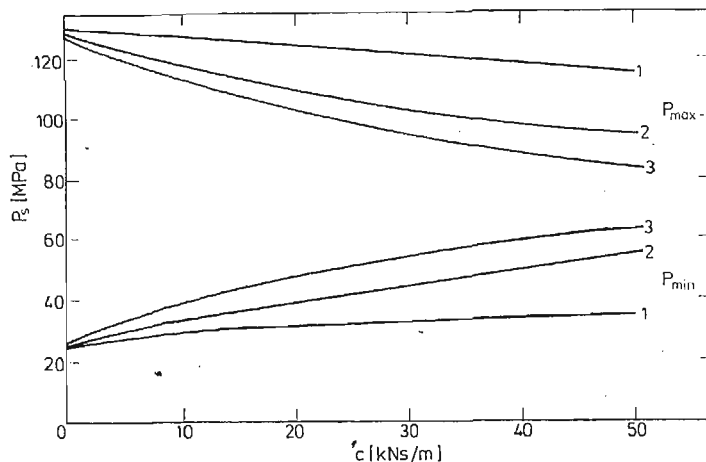


Rys. 6.

nianie czasowych przebiegów ciśnienia otrzymanych z obliczeń i eksperymentu. Aby przeprowadzić takie porównanie dokonano „synchronizacji” obu przebiegów, przyjmując jako wspólną taką chwilę, dla której na narastającej części pierwszego maksimum, ciśnienie osiąga połowę wartości maksymalnej. Wybór tego punktu podyktowany był tym, że jest to punkt największego nachylenia krzywej  $p_s(t)$ , co pozwala na precyzyjne określenie odpowiadającej mu chwili czasu. Zsynchronizowane w opisany wyżej sposób teoretyczny i doświadczalny przebiegi ciśnienia w cylindrze stojaka przedstawiono na rys. 6. Na rysunku tym przedstawiono również otrzymane z obliczeń przebiegi ciśnienia gazów prochowych  $p(t)$  i naprężeń w słupach  $\sigma_k(t)$ .

Porównanie doświadczalnego i teoretycznego przebiegu ciśnienia wykazuje dobrą zgodność dla pierwszej oscylacji ciśnienia. Dla dalszych oscylacji występuje dobra fazowa zgodność obu przebiegów, przy dość dużej rozbieżności w wielkości amplitudy drgań. Fakt ten nasunął przypuszczenie, że model stojaka powinien obok elementu sprężystego zawierać również tłumik. Obliczenia wykonane przy uwzględnieniu tłumienia wiskotycznego wykazały, że obserwowane w układzie tłumienie drgań należy łączyć z innymi efek-

tami. Na rys. 7 przedstawiono wykresy obrazujące zależność maksymalnej  $p_{\max}$  i minimalnej  $p_{\min}$  amplitudy trzech kolejnych oscylacji ciśnienia od współczynnika tłumienia  $c$ . Próba doboru takiej wartości współczynnika tłumienia, dla której otrzymano by zgodność obliczonych i pomierzonych wartości ciśnienia zakończyła się niepowodzeniem. Co więcej,



Rys. 7.

w obliczeniach uzyskano wzrost wartości kolejnych minimów. Tymczasem w badaniach stwierdzono nieznaczny spadek ich wartości. Istnieje zatem istotna różnica jakościowa, która skłania do poszukiwania innych mechanizmów tłumienia drgań w układzie. Rozpatrzono dwa takie mechanizmy: oddawanie ciepła przez gazy prochowe oraz ucieczkę gazów z komory generatora.

Wpływ efektu oddawania ciepła oszacowano posłużwszy się wzorem Mouraura — [1]. Wzór ten wyraża ilość ciepła oddawanego przez gazy prochowe jako liniową funkcję ciśnienia:

$$\frac{dQ}{dt} = D_1 p, \quad D_1 = \frac{C_M f(\gamma - 1) u_1 A_c}{0,7744 e_1}, \quad (4.1)$$

gdzie  $C_M$  — empiryczny współczynnik zależny od grubości warstwy palnej ziarna prochowego,  $A_c$  — powierzchnia wewnętrznych ścianek komory. Porównanie wyników eksperymentu i obliczeń wykonanych przy przyjęciu wyrażenia (4.1) na intensywność strat cieplnych pokazało, że oszacowany wpływ strat cieplnych nie daje takiej skali tłumienia drgań jak zaobserwowano w eksperymencie.

Dla ilościowego oszacowania efektu ucieczki gazów prochowych z komory generatora posłużono się analogią z wypływem gazu z komory spalania silnika raketowego na paliwo stałe. Zgodnie z tą analogią przyjęto, że wydatek gazu jest proporcjonalny do pierwiastka ze stosunku ciśnienia gazu i jego objętości właściwej:

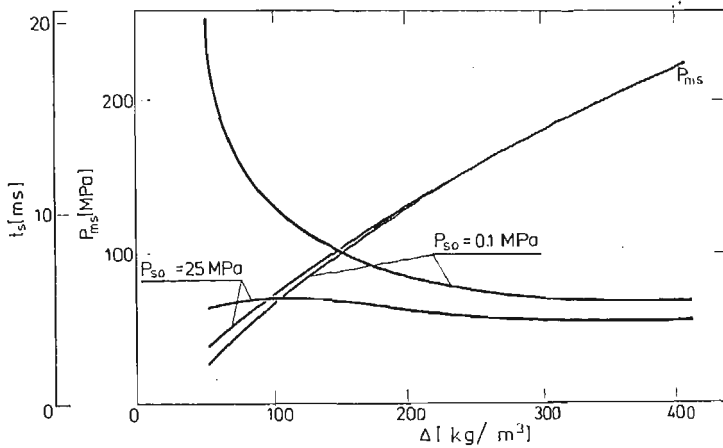
$$G = D_2 \sqrt{\frac{p}{v_g}} = D_2 \sqrt{\frac{p m_g}{V}}, \quad (4.2)$$

gdzie  $D_2$  — współczynnik proporcjonalności.



Wyniki obliczeń pokazały, że efekt ucieczki gazów prochowych daje skalę tłumienia drgań zbliżoną do obserwowanej w doświadczeniu. Sugeruje to, że efekt ten jest podstawowym mechanizmem tłumienia drgań w układzie.

Dla poszerzenia zakresu badań stanowiska pojawiła się potrzeba wydłużenia czasów narastania obciążenia. W tym celu rozpatrzono następujące możliwości: obniżenie wstępnej siły różporu  $F_0$ , dołączenie dodatkowej masy  $\Delta m$  do tłoka generatora oraz zastosowanie prochu o większej grubości warstwy palnej  $e_1$ . Na rys. 8 przedstawiono wykresy zależ-



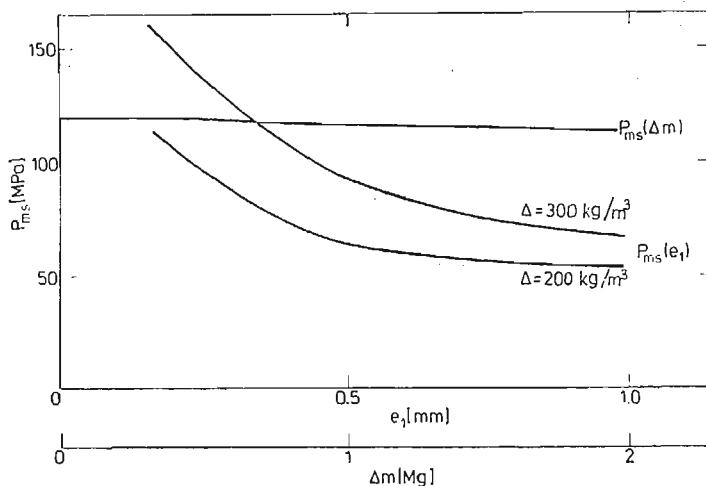
Rys. 8.

ności maksymalnego ciśnienia w cylindrze stojaka  $p_{ms}$  i czasu jego narastania  $t_s$  w funkcji gęstości ładowania dla dwóch różnych wartości ciśnienia wstępnego  $p_{so}$  — 0,1 i 25 MPa. Z porównania wykresów dla różnych wartości ciśnienia wstępnego  $p_{so}$  wynika, że obniżenie jego wartości niewiele wpływa na maksymalną wartość ciśnienia, powoduje natomiast pewne wydłużenie czasu narastania ciśnienia. Jednakże skala wzrostu czasu narastania ciśnienia nie pozwalałaby na istotne rozszerzenie możliwości badawczych stanowiska.

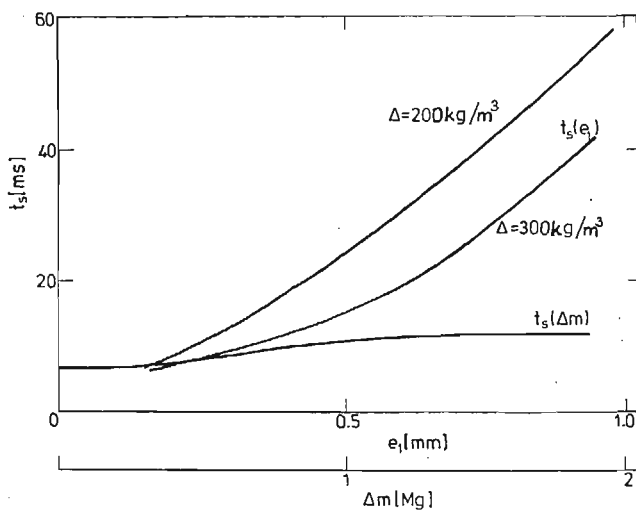
Wyniki analizy wpływu dodatkowej masy  $\Delta m$  dołączonej do tłoka generatora na maksymalne ciśnienie w stojaku i czas narastania ciśnienia przedstawiono na rys. 9 i 10. Jak wynika z przedstawionych wykresów, znaczny wzrost masy tłoka daje nieznaczny wzrost czasu narastania obciążenia, przy praktycznie stałym maksymalnym ciśnieniu. Otrzymane wyniki wskazują, że zwiększenie masy tłoka nie jest efektywną drogą do wydłużenia czasu narastania obciążenia.

Wyniki analizy wpływu grubości warstwy palnej ziaren prochu  $e_1$  na wartość czasu narastania obciążenia przedstawiono na rys. 10. Jak wynika z przedstawionych wykresów zastosowanie prochu o grubości warstwy palnej rzędu 1 mm pozwala uzyskać czasy narastania rzędu kilkudziesięciu milisekund. Wydłużenie czasu narastania ciśnienia odbywa się jednakże kosztem obniżenia maksymalnej wartości ciśnienia (rys. 9). Wyniki badań eksperymentalnych potwierdziły wnioski wynikające z analizy teoretycznej. Jak wynika z danych przedstawionych w tabeli 2, poprzez zastosowanie prochu o dużej grubości

warstwy palnej udało się uzyskać znaczne wydłużenie czasu narastania obciążenia. Towarzyszył temu znaczny spadek maksymalnej wartości ciśnienia.



Rys. 9.



Rys. 10.

## 5. Wnioski

Wyniki badań modelowych oraz badań skalujących prototypowego stanowiska do dynamicznej diagnostyki stojaków pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

1. Wybuchowa metoda generacji obciążeń symulujących tąpnięcie pozwala na uzyskiwanie czasów narastania obciążeń niedostępnych przy innych metodach generacji obciążeń.

2. Metoda wybuchowa pozwala w prosty sposób zmieniać w szerokim zakresie wielkość obciążenia generowanego na stanowisku. Realizuje się to poprzez zmianę gęstości ładowania komory spalania. Badania na stanowisku prototypowym dowiodły, że metoda wybuchowa pozwala osiągnąć wielkości obciążeń, przy których następuje zniszczenie stojaka.
3. Zastosowanie materiałów wybuchowych o zmiennej grubości ziaren pozwala na dobór czasu narastania obciążenia dynamicznego stojaków w zakresie od 2 do 50 ms. Natomiast czas trwania obciążenia może się zmieniać w przedziale od 40 do 300 ms.
4. Stanowisko jest układem zamkniętym, bez fundamentów co znacznie obniża koszty jego budowy. Koszty te nie przekraczają 15% kosztów budowy stanowiska kafarowego.
5. Badania na stanowisku prototypowym potwierdziły w pełni brak szkodliwego oddziaływania na otaczające środowisko.

#### Literatura

1. М. Е. СЕРЕБРЯКОВ — *Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет*, Москва, 1962.
2. R. KRZEWIŃSKI, A. SPYCHAŁA, R. TRĘBIŃSKI, W. WARACHIM, E. WŁODARCZYK, M. ZIELIŃSKI — *Metoda oraz stanowisko do badań stojaków obudów ścianowych obciążonych impulsem symulującym tąpnięcie*. VIII Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej, Wrocław, 1985 r.

#### Резюме

#### МЕТОД ГЕНЕРАЦИИ ВЗРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ИМИТИРУЮЩИХ ГОРНЫЙ УДАР

В работе представлена идея использования метода генерации взрывных нагрузок имитирующих горный удар окружающих горных пород для исследования динамической прочности конструктивных элементов горных стеночных креплений. Приведено описание прототипной исследовательской установки, а также представлены предварительные результаты исследований проведенных на этой установке. Предложена теоретическая модель описывающая генерацию динамических нагрузок взрывным методом. Проведено обсуждение результатов теоретического анализа параметров нагрузки и они сравнены с экспериментом.

#### Summary

#### METHOD FOR GENERATION OF EXPLOSIVE DYNAMIC LOADS SIMULATING A CRUMP

The idea of application of a method for generation of explosive dynamic loads simulating a crump to dynamical testing of structural components of lining is presented. The description of a test stand is given and the results of preliminary investigations carried out on the stand are shown. A theoretical model describing the dynamical loads generated by the explosion method is proposed. Results of a theoretical analysis of load parameters are discussed and compared with that of the experiment.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 grudnia 1984 roku*



## OBLICZANIE PŁYT MIKROMORFICZNYCH

SYLWESTER KONIECZNY

*Politechnika Łódzka*

### 1. Wstęp

Równania różniczkowe dla teorii Kirchhoffa płyt obciążonych mikrookresowym obciążeniem skupionym lub ciągłym można otrzymać wykorzystując aparat analizy niestandardowej [1], [2], [3]. Skończone deformacje wywołane tym obciążeniem są aproksymowane pewną klasą mikrodeformacji, które z kolei zależą od znanych funkcji mikrookresowych.

Przemieszczenia punktów materialnych w płycie są określane następującą funkcją [2]

$$w(x^1, x^2) = w_0(x^1, x^2) + w_a(x^1, x^2)h^a(x^1, x^2).$$

Funkcje  $h^a(x^1, x^2)$  są a priori danymi funkcjami okresowymi spełniającymi warunek

$$\int_{A(x^1, x^2)} h^a(x^1, x^2) da = 0,$$

gdzie  $A(x^1, x^2)$  jest obszarem odpowiadającym powtarzającemu się obciążeniu. Nieznane funkcje;  $w_0, w_a$  opisują kolejno makrodeformację i tak zwaną mikrodeformację. Postulowane a priori funkcje  $h^a(x^1, x^2)$  opisują okresowy charakter mikrodeformacji.

Celem pracy jest podanie podstawowych równań dla płyt mikromorficznych i przeanalizowanie kilku rozwiązań pasm płytowych obciążonych obciążeniem okresowym.

W pracy obowiązuje konwencja sumacyjna, wskaźniki greckie przebiegają ciąg 1, 2, łacińskie 1, 2 ...,  $n$ .

### 2. Podstawowe równania we współrzędnych prostokątnych

Sparametryzujemy płaszczyznę środkową  $\Omega$  płyty prostokątnym układem współrzędnych  $x^a$ . Oś prostopadłą do płaszczyzny  $\Omega$  oznaczmy przez  $z$ . Pod działaniem obciążeń punkty materialne przemieszczają się tylko w kierunku osi  $z$ , przy czym przemieszczenia te są niewielkie w porównaniu z wysokością płyty i należą do przestrzeni  $C_2(\Omega)$ . Niech  $n_\alpha, t_\alpha$  będą składowymi wektorów jednostkowych kolejno normalnego i stycznego do brzegu  $\partial\Omega$ .

Podstawowy układ równań dla płyt mikromorficznych otrzymamy wykorzystując postać wariacyjną [2]

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (\tilde{q}v_0 + \tilde{r}v_{0,n}) ds + \int_{\Omega} \tilde{p}v_0 da &= \int_{\Omega} \tilde{m}^{\alpha\beta} v_{0,\alpha\beta} da, \\ \oint_{\partial\Omega} (q_a v_a + r^a v_{a,n} + r_n^a v_a) ds + \int_{\Omega} p^a v_a da &= \\ &= \int_{\Omega} (m^a v_a + m^{\alpha\alpha} v_{a,\alpha} + m^{\alpha\beta} v_{a,\alpha\beta}) da. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Równania (2.1) winny być spełnione dla każdego  $v_0, v_a \in C_2(\Omega)$ . Wielkości  $\tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{p}, q^a, r^a, r_n^a, p^a$  w (2.1) są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x) &\simeq \langle q \rangle_{L(x)}, \\ q^a(x) &\simeq \langle qh^a \rangle_{L(x)}, \\ r_n^a(x) &\simeq \langle rh_{,n}^a \rangle_{L(x)}, \\ p^a(x) &\simeq \langle ph^a \rangle_{A(x)}, \\ \tilde{r}(x) &\simeq \langle r \rangle_{L(x)}, \\ r^a(x) &\simeq \langle rh^a \rangle_{L(x)}, \\ \tilde{p}(x) &\simeq \langle p \rangle_{A(x)}, \\ (x) &\equiv (x^1, x^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Natomiast równania konstytutywne mają postać [2]

$$\begin{bmatrix} \tilde{m}^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\alpha\beta} \\ m^{\alpha\alpha} \\ m^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle & \langle D^{\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle \\ \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu\nu}^b \rangle \\ 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h^b \rangle & 4 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle \\ \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h^b \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{0,\mu\nu} \\ W_{b,\mu\nu} \\ W_{b,\nu} \\ W_b \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

We wzorach (2.2) i (2.3) nawiasem  $\langle \cdot \rangle$  oznaczono [2]

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_{A(x)} &\equiv \frac{1}{\text{powierzchnię } A(x)} \int_{A(x)} (\cdot) da, \\ \langle \cdot \rangle_{L(x)} &\equiv \frac{1}{\text{długość } L(x)} \int_{L(x)} (\cdot) ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Podstawowy układ równań otrzymamy podstawiając prawe strony wzorów (2.3) do (2.1). Tym samym

$$\begin{aligned} \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle W_{0,\mu\nu\alpha\beta} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle W_{b,\mu\nu\alpha\beta} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle W_{b,\nu\alpha\beta} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle W_{b,\alpha\beta} - \tilde{p} &= 0, \\ \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle W_{0,\mu\nu\alpha\beta} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle W_{b,\mu\nu\alpha\beta} - 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a \rangle W_{0,\mu\nu\alpha} - 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h^b \rangle W_{b,\mu\nu\alpha} + \\ + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle W_{b,\nu\alpha\beta} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a \rangle W_{0,\mu\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h^b \rangle W_{b,\mu\nu} + \\ - 4 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle W_{b,\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu\nu}^b \rangle W_{b,\alpha\beta} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle W_{b,\nu} + \\ - 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle W_{b,\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle W_b - p^a &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Powyższe równania zachodzą w każdym prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich i są spełnione dla każdego  $a$ . Funkcje  $\tilde{p}$ ,  $p^a$  są znanymi siłami zewnętrznymi obciążającymi płytę oraz  $D^{\alpha\beta\mu\nu}$  są znanymi składowymi tensora sztywności sprężystej. Pozostałe funkcje występujące w (2.5) są poszukiwanymi niewiadomymi. Funkcje te w obszarze  $\Omega$  powinny spełniać równania (2.5) a na brzegu  $\partial\Omega$  obszaru  $\Omega$  powinny spełniać odpowiednie warunki brzegowe. Warunki brzegowe zależą od sposobu podparcia lub obciążenia brzegów płyty. Trzy sposoby podparcia brzegów płyty omówimy poniżej.

1. Brzeg płyty sztywno utwierdzony, gdy warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} w_0 &= w_b = 0, \\ w_{0,\alpha} &= w_{b,\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Na brzegu  $\partial\Omega$  znikają przemieszczenia i obroty płyty.

2. Na brzegu swobodnie podpartym są spełnione następujące warunki:

$$w_0 = w_b = 0,$$

$$\begin{aligned} (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle w_{0,\mu\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle w_{b,\mu\nu} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle w_b) n_\alpha n_\beta &= 0, \\ (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle w_{0,\mu\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle w_{b,\mu\nu} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu\nu}^b \rangle w_b) n_\alpha n_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Jeżeli brzeg płyty jest swobodny (nie podparty) to warunki brzegowe mają postać:

$$\begin{aligned} (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle w_{0,\mu\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle w_{b,\mu\nu\alpha} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle w_{b,\alpha}) n_\beta + \\ - (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle w_{0,\mu\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} - (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle w_{b,\mu\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} + \\ - (2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} - (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle w_b n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} + \tilde{q} = 0, \\ 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a \rangle w_{0,\mu\nu} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h^b \rangle w_{b,\mu\nu} + 4 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} + \\ + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle w_b n_\alpha - (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle w_{0,\mu\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle w_{b,\mu\nu\alpha} + \\ + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu\nu}^b \rangle w_{b,\alpha}) n_\beta + (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle w_{0,\mu\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} + \\ + (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle w_{b,\mu\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} + (2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} - q^n - r_n^a = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dla brzegu nieobciążonego zachodzi  $\tilde{q} = 0$ ,  $q^n = 0$ ,  $r_n^a = 0$ . Ponadto na brzegu swobodnym winny być spełnione warunki (2.7).

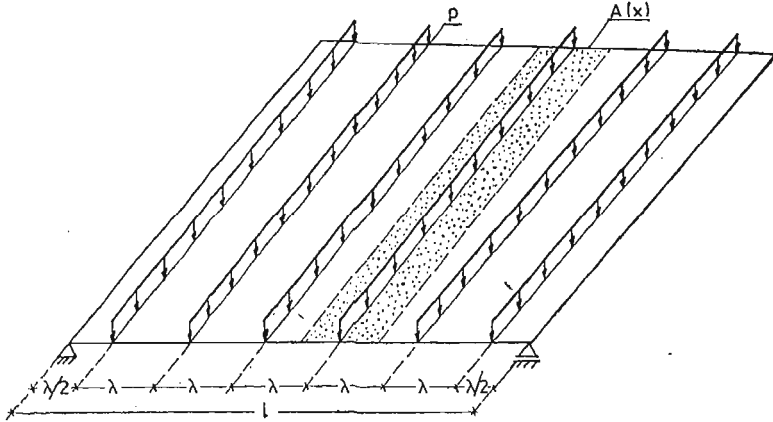
Rozwiązanie zagadnienia brzegowego teorii płyt mikromorficznych polega na wyznaczeniu funkcji  $w_0$  i  $w_b$  spełniających w obszarze  $\Omega$  równania (2.5) a na poszczególnych częściach brzegu  $\partial\Omega$  tego obszaru spełniających warunki jednej z postaci (2.6) - (2.8).

### 3. Pasma jednokierunkowo obciążone

W wielu zagadnieniach spotykanych w praktyce mamy do czynienia z prostokątnymi płytami w których jedna para przeciwległych brzegów ma długość wielokrotnie większą od drugiej pary. Założmy, że sposób podparcia każdego z dłuższych brzegów płyty jest na całej jego długości taki sam (dopuszczamy możliwość, że przeciwległy brzeg może mieć inne podparcie). Obliczenia statyczne mikromorficznych płyt prostokątnych o takim kształcie i sposobie podparcia można wtedy zastąpić w przybliżeniu obliczaniem tzw. pasm płytowych.

Niech rozważane pasmo płytowe będzie obciążone obciążeniem  $p$  okresowym o długości okresu  $\lambda$ , rys. 1. Szerokość pasma przyjęto  $l$ , a okres powtarzającego się obciążenia  $\lambda = l/6$ . Funkcje okresowe  $h^a(x^1)$  przyjęto w postaci

$$h^a(x^1) = \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} x^1\right), \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$



Rys. 1.

Wykorzystując fakt, że wszystkie poszukiwane funkcje są funkcjami tylko jednej zmiennej, równania (2.5) będą miały postać

$$\begin{aligned} \langle D^{1111} \rangle w_{0,1111} + \langle D^{1111} h^b \rangle w_{b,1111} + 2 \langle D^{1111} h_{,1}^b \rangle w_{b,111} + \langle D^{1111} h_{,11}^b \rangle w_{b,11} - \tilde{p} &= 0, \\ \langle D^{1111} h^a \rangle w_{0,1111} + \langle D^{1111} h^a h^b \rangle w_{b,1111} - 2 \langle D^{1111} h_{,1}^a \rangle w_{0,111} + (2 \langle D^{1111} h^a h_{,1}^b \rangle + \\ - 2 \langle D^{1111} h_{,1}^a h_{,1}^b \rangle) w_{b,111} + \langle D^{1111} h_{,11}^a \rangle w_{0,11} + (\langle D^{1111} h_{,11}^a h^b \rangle + \\ - 4 \langle D^{1111} h_{,1}^a h_{,1}^b \rangle + \langle D^{1111} h^a h_{,11}^b \rangle) w_{b,11} + (2 \langle D^{1111} h_{,11}^a h_{,11}^b \rangle + \\ - 2 \langle D^{1111} h_{,11}^a h_{,11}^b \rangle) w_{b,1} + \langle D^{1111} h_{,11}^a h_{,11}^b \rangle w_b - p^a &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Obciążenia  $\tilde{p}$ ,  $p^a$  i składowe tensora sprężystości  $D^{\alpha\beta\mu\nu}$  zgodnie z wzorem (2.4) wynoszą

$$\begin{aligned} \tilde{p} = \langle p \rangle &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \delta\left(x^1 - \frac{\lambda}{2}\right) p dx^1 = \frac{p}{\lambda}, \\ p^a = \langle p h^a \rangle &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \delta\left(x^1 - \frac{\lambda}{2}\right) p \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} x^1\right) dx^1 = \frac{(-1)^a p}{\lambda}, \\ \langle D^{1111} \rangle &= D^{1111}, \\ \langle D^{1111} h^a h^b \rangle &= \begin{cases} \frac{1}{2} D^{1111} & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b, \end{cases} \\ \langle D^{1111} h^a h_{,11}^b \rangle &= \begin{cases} \frac{-2a^2 \pi^2}{\lambda^2} D^{1111} & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$



$$\langle D^{1111} h_{,1}^a h_{,1}^b \rangle = \begin{cases} \frac{2a^2 \pi^2}{\lambda^2} D^{1111} & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b, \end{cases}$$

$$\langle D^{1111} h_{,11}^a h^b \rangle = \langle D^{1111} h^a h_{,11}^b \rangle,$$

$$\langle D^{1111} h_{,11}^a h_{,11}^b \rangle = \begin{cases} \frac{8a^4 \pi^4}{\lambda^4} D^{1111} & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b. \end{cases}$$

Pozostałe składowe są równe zeru. Składowa  $D^{1111} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \equiv D$  (materiał pasma jest izotropowy).

Podstawiając wyrażenia (3.3) do równania (3.1), otrzymamy

$$Dw_{0,1111} = \frac{p}{\lambda}$$

$$w_{a,1111} - \frac{24a^2 \pi^2}{\lambda^2} w_{a,11} + \frac{16a^4 \pi^4}{\lambda^4} w_a = \frac{(-1)^a 2p}{\lambda D} \quad (3.4)$$

Całki ogólne równań (3.4) mają postać ( $x^1 \equiv x$ )

$$w_0 = \frac{p}{24\lambda D} x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + c_4,$$

$$w_a = A_1 \sinh r_1 x + A_2 \cosh r_1 x + A_3 \sinh r_2 x +$$

$$+ A_4 \cosh r_2 x + \frac{(-1)^a \lambda p}{8a^4 \pi^4 D}. \quad (3.5)$$

gdzie oznaczono:

$$r_1 = 2 \sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot \frac{a\pi}{\lambda},$$

$$r_2 = 2 \sqrt{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{a\pi}{\lambda}, \quad (3.6)$$

Przyjmijmy, że brzegi pasma płytowego są swobodnie podparte o warunkach brzegowych (2.7)

$$\begin{aligned} w_0(0) &= w(l) = 0, \\ w_a(0) &= w_a(l) = 0, \\ w_{0,11}(0) &= w_{0,11}(l) = 0, \\ w_{a,11}(0) &= w_{a,11}(l) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Po obliczeniu stałych, (3.5) zapiszemy w postaci:

$$w_0(x) = \frac{p}{24\lambda D} (x^4 - 2lx^3 + l^3x),$$

$$w_a(x) = \left[ \frac{-3 - 2\sqrt{2} + (6\sqrt{2} - 3) \cosh r_1 l}{2\sqrt{2} \sinh r_1 l} \sinh r_1 x + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3-6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cosh r_1 x + \frac{3-2\sqrt{2} + (3-2\sqrt{2}) \cosh r_2 l}{2\sqrt{2} \sinh r_2 l} \sinh r_2 x + \\
 & + \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}} \cosh r_2 x + 2 \left] \cdot \frac{(-1)^a p \lambda^3}{16\pi^4 a^4 D}.
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Rzędne  $w_a(x)$  obliczone z (3.8) są bardzo małe. Dla  $r_1 l \geq 5$   $w_a(x)$  można zapisać w postaci

$$w_a(x) \simeq \frac{(-1)^a p \lambda^3}{8\pi^4 a^4 D}. \quad (3.9)$$

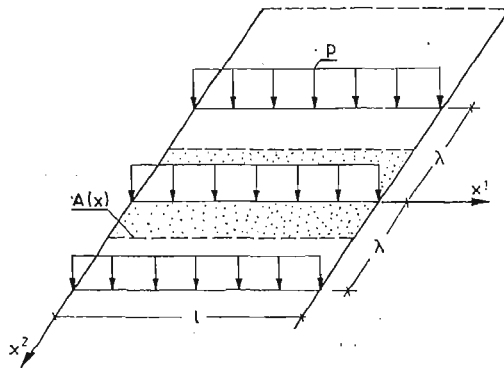
Przemieszczenie pionowe dowolnego punktu rozważanego pasma ma postać

$$w(x) = \frac{p}{24\lambda D} (x^4 - 2l^3 + l^3 x) + \sum_{a=1}^n \frac{(-1)^a p \lambda^3}{8\pi^4 a^4 D} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} ax\right), \quad (3.10)$$

a maksymalne przemieszczenie dla  $x = \frac{l}{2}$  wynosi

$$w_{max} = \frac{5pl^4}{384\lambda D} \left[ 1 + \sum_{a=1}^n \frac{0,0985}{a^4} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 \right]. \quad (3.11)$$

Z rozwiązania (3.9) wynika wniosek, że pasma płytowe obciążone mikrookresowym obciążeniem jak na rys. 1. można rozwiązywać obciążając je równomiernie o intensywności  $p/\lambda$ . Błąd w ugięciach jaki popełnimy wówczas jest nie większy od  $\sum_{a=1}^n \frac{0,0985}{a^4} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4$ .



Rys. 2.

Rozpatrzmy jeszcze pasmo płytowe przedstawione na rys. 2. Funkcje  $h^a(x^2)$  przyjmujemy w następujący sposób

$$h^a(x^2) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} ax^2\right). \quad (3.12)$$

Równania przemieszczeniowe (2.5) sprowadzają się do postaci

$$\begin{aligned} \langle D^{1111} \rangle w_{0,1111} + \langle D^{1111} h^b \rangle w_{b,1111} + 2 \langle D^{1121} h_{,2}^b \rangle w_{b,111} + \langle D^{1122} h_{,22}^b \rangle w_{b,11} - \tilde{p} = 0, \\ \langle D^{1111} h^a \rangle w_{0,1111} + \langle D^{1111} h^a h^b \rangle w_{b,111} - 2 \langle D^{1211} h_{,2}^a \rangle w_{0,111} + \\ + 2 \langle \langle D^{1121} h^a h_{,2}^b \rangle - \langle D^{1211} h_{,2}^a h^b \rangle \rangle w_{b,111} + \langle D^{2211} h_{,22}^a \rangle w_{0,11} + \\ + \langle \langle D^{2211} h_{,22}^a h^b \rangle - 4 \langle D^{1221} h_{,2}^a h_{,2}^b \rangle + \langle D^{1122} h^a h_{,22}^b \rangle \rangle w_{b,11} + \\ + 2 \langle \langle D^{2221} h_{,22}^a h_{,2}^b \rangle - \langle D^{1222} h_{,2}^a h_{,22}^b \rangle \rangle w_{b,1} + \langle D^{2222} h_{,22}^a h_{,22}^b \rangle w_b - p^a = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Składowe tensorów sprężystości i intensywności obciążeń  $\tilde{p}$ ,  $p^a$  mają takie same wartości jak w poprzednim przypadku. Równania (3.13) będą miały postać

$$\begin{aligned} w_{0,1111} &= \frac{p}{\lambda D}, \\ w_{a,1111} - (2\nu + 4) \frac{4a^2 \pi^2}{\lambda^2} w_{a,11} + \frac{16a^4 \pi^4}{\lambda^4} w_a &= \frac{(-1)^a 2p}{\lambda D}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdzie  $\nu$  jest współczynnikiem Poissona. Rozwiązanie równań (3.14) możemy zapisać

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{p}{24\lambda D} x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4, \\ w_a &= A_1 \sinh r_1 x + A_2 \cosh r_1 x + A_3 \sinh r_2 x + A_4 \cosh r_2 x + \frac{(-1)^a p \lambda^3}{8\pi^4 a^4 D}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{2 - \nu - \sqrt{\nu^2 - 4\nu + 3}} \cdot \frac{2\pi a}{\lambda}, \\ r_2 &= \sqrt{2 - \nu + \sqrt{\nu^2 - 4\nu + 3}} \cdot \frac{2\pi a}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Na każdym z brzegów  $x = 0$  i  $x = l$  winno być spełnionych po cztery warunki brzegowe. Przyjmując, że brzeg jest swobodnie podparty, całki ogólne (3.15) są następujące:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{p}{24\lambda D} (x^4 - 2lx^3 + l^3 x), \\ w_a &= \left( r_2^2 \frac{1 - \cosh r_1 l}{\sinh r_1 l} \sinh r_1 x + r_2^2 \cosh r_1 x + r_1^2 \frac{\cosh r_2 l - 1}{\sinh r_2 l} \sinh r_2 x + \right. \\ &\quad \left. - r_1^2 \cosh r_2 x + r_1^2 - r_2^2 \right) \cdot \frac{1}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{(-1)^a p \lambda^3}{8\pi^4 a^4 D}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Jeżeli  $r_1 l \geq 5$  to wyrażenie (3.17) staje się identyczne jak (3.9). Z obydwóch przeanalizowanych przypadków wynika wniosek, że jeżeli  $\lambda < l$  to, pasma płytowe obciążone obciążeniem mikrookresowym można rozwiązywać obciążając je równomiernie o intensywności  $p/\lambda$  wówczas wpływ funkcji  $w_a(x) h^a(x)$  na ugięcie jest mały (może być pominięty). Natomiast wpływ funkcji  $w_a(x) h^a(x)$  na siły wewnętrzne nie może być pominięty ponieważ w zależności od charakteru funkcji  $h^a(x)$  może on być bardzo duży.

**Literatura**

1. A. ROBINSON, *Nonstandard analysis and philosophy*, Selected Papers, Vol. 2, North—Holland, Amsterdam 1979.
2. CZ. WOŹNIAK, *Nonstandard analysis in mechanics*, Advances in Mechanics 1985.
3. CZ. WOŹNIAK, *Micromorphic aspects of finite deformations in the light of the nonstandard analysis*, Proc. of Int. Symp. on Physical Basis and Modelling of Finite Deformations of Aggregates, Paris, October 1985 (in press).

**Резюме****РАСЧЁТ МИКРОМОРФНЫХ ПЛИТ**

В работе рассмотрено дифференциальные уравнения теории плит Кирхгоффа. Плиты нагружены микроморфическими сплошными нагрузками, а также точечными силами. В выводе уравнений применено метод нестандартного анализа. Подробно рассмотрен пример полосы.

**S u m m a r y****CALCULATION OF MICROMORPHIC PLATES**

In the paper the differential equations of Kirchhoff's plate theory been derived. The considered plates are loaded by microperiodic continuous loads or point loads. The derivation is based on the nonstandard analysis. The plate strip has been analysed in details.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 27 listopada 1985 roku*

---

## FUNKCJE SKLEJANE W ZASTOSOWANIU DO FIZYCZNIE I GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ ANALIZY PŁYT PROSTOKĄTNYCH

HENRYK KOPECKI  
JAN SMYKLA

*Politechnika Rzeszowska*

### 1. Wstęp

Ustawiczna dążność do minimalizowania ciężaru konstrukcji, w szczególności znajdujących coraz szersze zastosowanie konstrukcji cienkościennych, jak również dążność do zwiększenia ich trwałości i niezawodności wymaga od konstruktora uwzględnienia nieliniowości fizycznej w równaniach konstytutywnych. Efekty nieliniowe zaobserwuje się zarówno w obszarze zaawansowanych deformacji sprężystych, jak i niesprężystych (plastycznych, reologicznych). Rzeczą niezbędną jest również opis deformacji za pomocą teorii nieliniowych w sensie geometrycznym.

Sformułowany w ten sposób problem staje się złożony pod względem matematycznym, a jego rozwiązania ściśle nie są znane.

Spotykane rozwiązania uwzględniające fizyczną i geometryczną nieliniowość w analizie cienkościennych ustrojów nośnych mają charakter przybliżony, przy czym większość współczesnych rozwiązań opiera się na metodach numerycznych, w szczególności metodzie elementów skończonych oraz metodzie różnic skończonych.

W niniejszej pracy przedstawimy nieco odmienne ujęcie w stosunku do wyżej wspomnianych, problemu fizycznie i geometrycznie nieliniowego płyt o konturze prostokątnym. Opierając się na metodzie energetycznej, wyrażenia dla przemieszczeń będziemy aproksymowali bikubicznymi funkcjami sklejanymi, których wartości dyskretne wyznaczymy losową, adaptacyjną metodą poszukiwania minimum funkcjonału. Wyniki rozważań zilustrujemy przykładami numerycznymi. Niektóre z otrzymanych wyników skonfrontujemy z rezultatami własnych badań doświadczalnych, wykonanych metodą mory projekcyjnej.

### 2. Sformułowanie problemu

Rozważamy cieką płytę o konturze prostokątnym obciążoną równomiernie ciśnieniem zewnętrznym o intensywności  $p$ . Płyta zamocowana jest sztywno na brzegach.

Wskutek obciążenia pojawia się w niej stan naprężenia, w którym efekty giętne pomijamy jako małe w porównaniu z naprężeniami w płaszczyźnie środkowej.

Zależności geometryczne opieramy na teorii nieliniowej przy następujących założeniach: odkształcenia w płaszczyźnie płyty są małe, składowe przemieszczenia prostopadła do powierzchni środkowej przyjmuje wartości skończone, obowiązującymi są założenia Kirchhoffa-Love'a, grubość płyty nie zmienia się w trakcie deformacji.

Przyjmujemy układ kartezjańskich współrzędnych,  $x_k$  z początkiem w środku płyty, zaś płaszczyznę  $x_1, x_2$  utożsamiamy z płaszczyzną środkową. Płyta posiada dwa boki:  $2a$  i  $2b$  oraz grubość  $h$ . Oś  $x_1$  jest równoległa do boku  $2a$ .

Związki pomiędzy składowymi tensora odkształcenia i przemieszczeniami odpowiadające powyższym założeniom wyrażają się zależnością:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_\beta} \right), \quad (1)$$

Tutaj  $x_k$  ( $k = \alpha, \beta$ ) oznaczają współrzędne prostokątne,  $u_k$  — składowe przemieszczenia w kierunku linii współrzędnych  $x_1, x_2$ ,  $w$  — jest ugięciem płyty mierzonym w kierunku normalnym do powierzchni środkowej. Wskaźniki  $\alpha$  i  $\beta$  przebiegają wartości 1, 2.

Równanie konstytutywne opisujące własności fizyczne materiału płyty przyjmujemy w formie

$$\varepsilon_{IJ} = \Phi(\sigma_e) S_{IJ}, \quad (2)$$

odpowiadającej deformacji nieliniowo-sprężystej, bądź sprężysto-plastycznej (proces czynny).

Tutaj  $\varepsilon_{IJ}$  oznaczają składowe tensora odkształcenia,  $S_{IJ}$  są składowymi dewiatora naprężenia, zaś  $\delta_{IJ}$  oznacza symbol Kroneckera.  $\Phi(\sigma_e)$  jest nieliniową funkcją intensywności naprężenia  $\sigma_e$ , którą przyjmujemy w postaci dwuparametrowego związku

$$\Phi(\sigma_e) = \frac{3}{2} A \sigma_e^{m-1}, \quad \text{gdzie} \quad \sigma_e^2 = \frac{3}{2} (S_{IJ} S_{IJ}). \quad (3)$$

$A$  i  $m$  są stałymi materiałowymi, zaś

$$S_{IJ} = \sigma_{IJ} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{IJ}. \quad (4)$$

Dla płaskiego stanu naprężenia tensory naprężenia i odkształcenia możemy przedstawić w formie:

$$[\sigma_{IJ}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_{IJ}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

zaś intensywność odkształcenia wyrażamy poprzez składowe dewiatora odkształcenia

$$\varepsilon_e^2 = \frac{2}{3} (e_{IJ} e_{IJ}), \quad \text{gdzie} \quad e_{IJ} = \varepsilon_{IJ} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{IJ}. \quad (6)$$

Z racji założonej w równaniu konstytutywnym nieściśliwości składowe stanu odkształcenia spełniają warunek

$$\varepsilon_{kk} = 0. \quad (7)$$

### 3. Metoda rozwiązania

Określenia składowych stanu naprężenia oraz ugięcia płyty dokonamy metodą energetyczną. W tym celu wyznaczmy energię potencjalną płyty [4]

$$V = h \iiint [\sigma_{x_1} d\epsilon_{x_1} + \sigma_{x_2} d\epsilon_{x_2} + 2\sigma_{x_1 x_2} d\epsilon_{x_1 x_2}] dx_1 dx_2 - p \iint w dx_1 dx_2, \quad (8)$$

Człon pierwszy wyraża energię odkształcenia płyty, drugi zaś pracę sił zewnętrznych. Ze względu na przyjęty sposób zamocowania pomijamy pracę reakcji oddziaływania brzegu na płytę.

Do równania (8) podstawiamy związki fizyczne (3), (2) uwzględniając jednocześnie zależności (4) i (5). Po jednokrotnym scałkowaniu członu pierwszego równanie to przyjmuje postać:

$$V = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{h}{\sqrt{A}} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \epsilon_e^{\frac{m+1}{m}} dx_1 dx_2 - p \int_{-a}^a \int_{-b}^b w dx_1 dx_2. \quad (9)$$

Wyrażenia dla przemieszczeń  $u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2(x_1, x_2)$  i  $w(x_1, x_2)$  przyjmujemy w formie bikubicznych funkcji sklejanych. Funkcje te oznaczamy następująco [1]:

$$S_{\pi}(u_1; x, y), \quad S_{\pi}(u_2; x, y), \quad S_{\pi}(w; x, y). \quad (10)$$

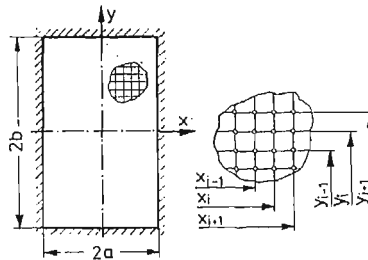
Dla uproszczenia zapisu tutaj i w dalszych rozważaniach przyjmujemy oznaczenia  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ .

Rozpatrywana płyta tworzy na płaszczyźnie  $x, y$  prostokąt:

$$D = \{(x, y): -a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b\}, \quad (11)$$

w którym wyróżniamy dyskretną siatkę węzłów

$$\pi = \{(x_i, y_j): -a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a, \quad -b = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}. \quad (12)$$



Rys. 1. Oznaczenia współrzędnych przyjętego układu

Interpolacja każdej z trzech składowych przemieszczenia  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$ ,  $w(x, y)$  będzie polegała na określeniu w w/w obszarze prostokątnym funkcji, spełniającej warunek  $f \in C^2(D)$ . Funkcja ta w każdym prostokątnym podobszarze jest wielomianem trzeciego stopnia, postaci [1], [5]

$$f(x, y) = f_{ij}(x, y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{ki}^{jl} (x_i - x)^k (y_j - y)^l, \quad (13)$$

przyjmując na brzegach obszaru wartości zerowe. Zakładamy, że wartości zerowe przyjmuje również druga pochodna funkcji, względem normalnej do brzegu [5], [6], [8].

W powyższym związku  $f(x, y)$  oznacza dowolną z w/w trzech składowych przemieszczenia.

Współczynniki funkcji aproksymujących będziemy mogli określić dopiero po wyznaczeniu wartości tychże funkcji w węzłach siatki. W dowolnym prostokątnym podob-szarze

$\{x, y: x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$  każda z funkcji sklejanych jest bikubicznym wielomianem postaci [5]

$$\begin{aligned} S_n(f; x, y) = \hat{f}_{ij}(x, y) = & \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y)}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{6h_i} [(x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y)}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{6h_i} [(x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1})] \right\} + \\ & + \hat{f}(x_{i-1}, y) \frac{(x_i - x)}{h_i} + \hat{f}(x_i, y) \frac{(x - x_{i-1})}{h_i}, \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y)}{\partial x^2} = & \frac{\partial^4 \hat{f}(x_{i-1}, y_{j-1})}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y_j - y)^3 - \tau_j^2(y_j - y)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^4 \hat{f}(x_{i-1}, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y - y_{j-1})^3 - \tau_j^2(y - y_{j-1})] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y_{j-1})}{\partial x^2} \frac{(y_j - y)}{\tau_j} + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y_j)}{\partial x^2} \frac{(y - y_{j-1})}{\tau_j}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y)}{\partial x^2} = & \frac{\partial^4 \hat{f}(x_i, y_{j-1})}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y_j - y)^3 - \tau_j^2(y_j - y)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^4 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y - y_{j-1})^3 - \tau_j^2(y - y_{j-1})] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_{j-1})}{\partial x^2} \frac{(y_j - y)}{\tau_j} + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial x^2} \frac{(y - y_{j-1})}{\tau_j}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_{i-1}, y) = & \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y_{j-1})}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y_j - y)^3 - \tau_j^2(y_j - y)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y_j)}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y - y_{j-1})^3 - \tau_j^2(y - y_{j-1})] \right\} + \\ & + \hat{f}(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{(y_j - y)}{\tau_j} + \hat{f}(x_{i-1}, y_j) \frac{(y - y_{j-1})}{\tau_j}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_i, y) = & \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_{j-1})}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y_j - y)^3 - \tau_j^2(y_j - y)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y - y_{j-1})^3 - \tau_j^2(y - y_{j-1})] \right\} + \\ & + \hat{f}(x_i, y_{j-1}) \frac{(y_j - y)}{\tau_j} + \hat{f}(x_i, y_j) \frac{(y - y_{j-1})}{\tau_j}. \end{aligned} \quad (18)$$



Tutaj i w dalszych rozważaniach przyjęto oznaczenia:

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

$$\tau_j = y_j - y_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (20)$$

Występujące we wzorach (15), (16), (17), (18) wyrażenia:  $\frac{\partial^4 \hat{f}(x_i, y_i)}{\partial x^2 \partial y^2}$ , ..., będące współczynnikami aproksymujących wielomianów określimy dalej, tymczasem zakładając, że wartości poszukiwanych funkcji w węzłach są znane.

W węzłach tych funkcje sklepane przyjmują wartości, które oznaczamy:

$$\begin{aligned} S_n(w; x_i, y_j) &= w_{ij}, \\ S_n(u_1; x_i, y_j) &= u_{1ij}, \\ S_n(u_2; x_i, y_j) &= u_{2ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (21)$$

Ze względu na symetrię geometryczną oraz symetrię zewnętrznego obciążenia płyty punkty  $x_i$  położone są symetrycznie względem punktu  $x_k = 0$ , zaś punkty  $y_j$  — symetrycznie względem  $y_l = 0$ , wobec czego

$$n = 2k, \quad m = 2l. \quad (22)$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami przemieszczenia na brzegach przyjmują wartości zerowe:

$$u_1(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \quad u_2(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \quad w(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \quad (23)$$

gdzie  $\Gamma$  oznacza brzeg prostokątnego obszaru  $D$ .

Zakładamy dalej, że funkcje sklepane spełniają warunek brzegowy [1], [5]

$$\frac{\partial^2 S_n(u_i; x, y)}{\partial \nu^2} \Big|_{x,y \in \Gamma} = 0, \quad i = 1, 2; \quad \frac{\partial^2 S_n(w; x, y)}{\partial \nu^2} \Big|_{x,y \in \Gamma} = 0, \quad (24)$$

gdzie przez  $\nu$  oznaczono normalną zewnętrzną do brzegu.

Przemieszczenie  $u_1$  jest antysymetryczne względem osi  $y$  zaś na samej osi przyjmuje wartości zerowe. Podobnie przemieszczenie  $u_2$  jest antysymetryczne względem osi  $x$ . Warunki te znajdują wyraz w zapisie:

$$u_1(0, y_j) = 0, \quad u_2(x_i, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

Formułujemy macierze przemieszczeń  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{U1}$ ,  $\mathbf{U2}$  przyjmując, że pierwszy wskaźnik oznacza numer punktu rzędnej  $x$ , drugi zaś numer punktu odciętej  $y$ . Zatem wartości funkcji  $w$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  na siatce prostokąta  $D$  możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,l} & \dots & w_{1,m-1} & 0 \\ 0 & w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,l} & \dots & w_{2,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & w_{k,1} & w_{k,2} & \dots & w_{k,l} & \dots & w_{k,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & w_{n-1,1} & w_{n-1,2} & \dots & w_{n-1,l} & \dots & w_{n-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbf{U1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,l} & \dots & u_{1,m-1} & 0 \\ 0 & u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,l} & \dots & u_{2,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{k-1,1} & u_{k-1,2} & \dots & u_{k-1,l} & \dots & u_{k-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{k+1,1} & u_{k+1,2} & \dots & u_{k+1,l} & \dots & u_{k+1,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,l} & \dots & u_{n-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{U2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,l-1} & 0 & u_{2,l+1} & \dots & u_{2,m-1} & 0 \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,2} & \dots & u_{2,l-1} & 0 & u_{2,l+1} & \dots & u_{2,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{2,k} & u_{2,k} & \dots & u_{2,l-1} & 0 & u_{2,l+1} & \dots & u_{2,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{2,n-1} & u_{2,n-1} & \dots & u_{2,n-1,l-1} & 0 & u_{2,n-1,l+1} & \dots & u_{2,n-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Dla uproszczenia, w dalszych rozważaniach dowolną z powyższych trzech macierzy będziemy oznaczali symbolem  $\mathbf{F}$ .

Również współczynniki  $\frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial x^2}$  występujące we wzorach (15) i (16) grupujemy w macierz

$$\mathbf{F}_{,xx} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{,xx1,1} & \hat{f}_{,xx1,2} & \dots & \hat{f}_{,xx1,m-1} \\ \hat{f}_{,xx2,1} & \hat{f}_{,xx2,2} & \dots & \hat{f}_{,xx2,m-1} \\ \hat{f}_{,xxn-1,1} & \hat{f}_{,xxn-1,2} & \dots & \hat{f}_{,xxn-1,m-1} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

gdzie przyjęto oznaczenie  $\frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial x^2} = f_{,xxi,j}$ .

Dążąc do określenia współczynników wielomianów będących elementami macierzy (29) stosujemy jednowymiarową interpolację sześciennymi funkcjami sklejanymi, kolejno na liniach  $y = y_j, j = 1, 2, \dots, m-1$ . Otrzymujemy w ten sposób układ równań liniowych, ze względu na poszukiwane współczynniki:  $\hat{f}_{,xx1,j}, \dots, \hat{f}_{,xxn-1,j}$ , stanowiące  $j$ -tą kolumnę macierzy  $\hat{\mathbf{F}}_{,xx}$ .

Ponieważ dla każdej z linii  $y = y_j$  otrzymany układ równań charakteryzuje się identyczną macierzą współczynników, możemy utworzyć grupę układów równań liniowych:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{F}}_{,xx} = \mathbf{H}\mathbf{F}, \quad (30)$$

gdzie **A** i **H** są trójdagonalnymi macierzami postaci:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & d_2 & & & \\ & d_2 & c_2 & d_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & d_{n-1} & c_{n-1} & d_n \end{bmatrix}, \quad (32)$$

których elementy wyznaczamy z wzorów

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1}), & b_i &= \frac{1}{6}h_{i+1}, \\ c_i &= -\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right), & d_i &= \frac{1}{h_i}. \end{aligned} \quad (33)$$

Analogiczną procedurę zachowujemy wyznaczając współczynniki  $\frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_i)}{\partial y^2}$ , występujące we wzorach (17) i (18), otrzymując macierz  $\hat{\mathbf{F}}_{,yy}$  o identycznej strukturze jaka charakteryzuje macierz (29).

Interpolacja kolejna na liniach  $x = x_i$  doprowadza do grupy następujących układów równań liniowych:

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{F}}_{,yy}^T = \mathbf{G}\mathbf{F}^T, \quad (34)$$

gdzie: **B** i **G** są macierzami trójdagonalnymi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & & & & \\ q_1 & p_2 & q_2 & & & \\ & q_2 & p_3 & q_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & q_{m-3} & p_{m-2} & q_{m-2} \\ & & & & & q_{m-2} & p_{m-1} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} s_1 & r_1 & s_2 & & & \\ & s_2 & r_2 & s_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & s_{m-1} & r_{m-1} & s_m \end{bmatrix}, \quad (36)$$

gdzie:

$$p_j = \frac{1}{3}(\tau_j + \tau_{j+1}), \quad q_j = \frac{1}{6}\tau_{j+1},$$

$$r_j = -\left(\frac{1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_{j+1}}\right), \quad s_j = \frac{1}{\tau_j}.$$
(37)

Pozostałe do określenia współczynniki  $\frac{\partial^4 \hat{f}(x_i, y_i)}{\partial x^2 \partial y^2}$ , występujące w zależnościach: (15), (16), (17) i (18) określamy zachowując identyczny tok postępowania. Uzyskujemy w ten sposób macierz współczynników  $\hat{\mathbf{F}}_{,xyy}$ , o postaci

$$\hat{\mathbf{F}}_{,xyy} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{,xyy1,1} & \hat{f}_{,xyy1,2} & \dots & \hat{f}_{,xyy1,m-1} \\ \hat{f}_{,xyy2,1} & \hat{f}_{,xyy2,2} & \dots & \hat{f}_{,xyy2,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{f}_{,xyyn-1,1} & \hat{f}_{,xyyn-1,2} & \dots & \hat{f}_{,xyyn-1,m-1} \end{bmatrix}.$$
(38)

Traktując macierz współczynników  $\hat{\mathbf{F}}_{,xx}$  już jako znaną, stosujemy ponownie interpolację jednowymiarową kolejno na liniach  $x = x_i$  sześciennymi funkcjami sklejanymi. W wyniku zachowywania omówionej procedury otrzymujemy grupę układów równań, zapisaną następującym równaniem macierzowym:

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{F}}_{,xyy}^T = \mathbf{G}\hat{\mathbf{F}}_{,xx}^T, \quad (39)$$

gdzie symbol  $T$  oznacza transpozycję macierzy.

Rozwiązując układy równań (30), (34), (39) otrzymujemy poszukiwane współczynniki wielomianów aproksymujących (14), które są znane o ile znane są wartości funkcji sklejaných w węzłach siatki  $\pi$  obszaru  $D$ . Problem sprowadza się zatem do określenia wartości przemieszczeń  $u_1, u_2, w$ , w węzłach siatki. Wartości te wyznaczamy z warunku na minimum energii potencjalnej określonej wzorem (9), do którego podstawiamy przyjęte wielomiany interpolacyjne. Do wyznaczenia owego minimum stosujemy adaptacyjną metodę losową poszukiwania minimum funkcjonału, omówioną szczegółowo w pracy [3], zmodyfikowaną dodatkowymi ograniczeniami wynikającymi ze specyfiki rozważanego problemu. Metodę tę cechuje bieżąca korekta kierunku i długości kroku, w wyniku tworzona jest pamięć kierunku szukania.

Przedstawimy obecnie procedurę, umożliwiającą wyznaczenie energii potencjalnej w zależności od przyjętych funkcji sklejaných dla przemieszczeń. W tym celu funkcje (10) wprowadzamy do równań: (1), (3), (4), (6). Po wykonaniu przepisanych wzorem (9) przekształceń i operacji różniczkowania, warunek na minimum energii potencjalnej zapisujemy w postaci:

$$V = \min_{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{W}} (\xi S e - p S w), \quad (40)$$

gdzie oznaczają:

$$\xi = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{h}{\sqrt[m]{A}}, \quad (41)$$

$$Se = \int_{-a}^a \int_{-b}^b S_{\pi}(\varepsilon e^{\frac{m+1}{m}}; x, y) dx dy, \quad (42)$$

$$Sw = \int_{-a}^a \int_{-b}^b S_{\pi}(w; x, y) dx dy. \quad (43)$$

Całki występujące w związkach (42) i (43) obliczamy ze wzoru, otrzymanego w wyniku całkowania wielomianu bikubicznego

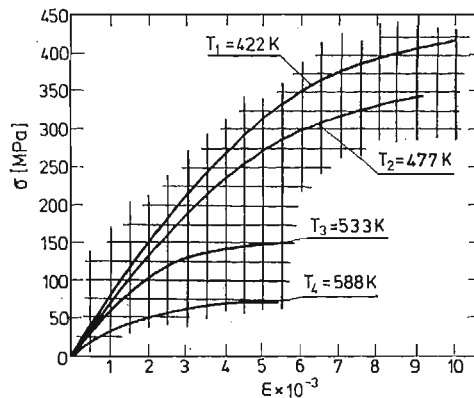
$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b S_{\pi}(f; x, y) dx dy = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \left\{ h_i \left[ (f_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j} + f_{i,j}) \tau_j - \right. \right. \\ \left. \left. - (\hat{f}_{,yy_{i-1,j-1}} + \hat{f}_{,yy_{i,j-1}} + \hat{f}_{,yy_{i-1,j}} + \hat{f}_{,yy_{i,j}}) \frac{\tau_j^3}{12} \right] + \frac{h_i^3}{12} \left[ (\hat{f}_{,xyy_{i-1,j-1}} + \hat{f}_{,xyy_{i,j-1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{f}_{,xyy_{i-1,j}} + \hat{f}_{,xyy_{i,j}}) \frac{\tau_j^3}{12} - (\hat{f}_{,xx_{i-1,j-1}} + \hat{f}_{,xx_{i,j-1}} + \hat{f}_{,xx_{i-1,j}} + \hat{f}_{,xx_{i,j}}) \tau_j \right] \right\}. \quad (44)$$

Powyższy wzór (44) wykorzystujemy do obliczenia całek występujących w związkach (42) i (43), niezbędnych do określenia minimum funkcjonału wyrażonego formułą (40).

Dla przedstawionego algorytmu opracowano program dla EMC w języku Fortran IV. Wyniki obliczeń numerycznych wykonanych na EMC ODRA 1304 przedstawiono w rozdziale 4.

#### 4. Przykłady numeryczne

Metodę rozwiązania opartą na przedstawionej koncepcji zastosowania funkcji sklejanych do analizy fizycznie i geometrycznie nieliniowych płyt prostokątnych ilustrujemy przykładami numerycznymi.



Rys. 2. Wykresy zależności  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  dla stopu aluminium 2014-T6

Obliczenia przeprowadzamy dla dwóch rodzajów materiałów płyt:

1. Stopu aluminium o symbolu 2014-T6 [9], którego charakterystyki fizyczne  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  dla  $T = \text{const}$  przedstawia rys. 2. Na podstawie w/w charakterystyk zidentyfiko-

wano stałe  $A$  i  $m$  występujące w równaniu (3). Stałe te, dla dwóch temperatur:  $T_1 = 422$  K, i  $T_4 = 588$  K, wyznaczono stosując metodę najmniejszych kwadratów. Wynoszą one odpowiednio:

$$A = 1,00252 \cdot 10^{-6} \text{ (MPa)}^{-1,5}, \quad m = 1,5, \quad \text{dla } T_1 = 422 \text{ K}$$

$$A = 2,50457 \cdot 10^{-7} \text{ (MPa)}^{-2,266}, \quad m = 2,266, \quad \text{dla } T_4 = 588 \text{ K}$$

Przyjęto, że płyty z w/w materiału badane są w temperaturach  $T_1$  i  $T_4$  przy obciążeniu  $p = 0,025$  MPa.

2. Tworzywa sztuczne Epidian-53, dla którego stałe w temperaturze  $T = 293$  K wynoszą:

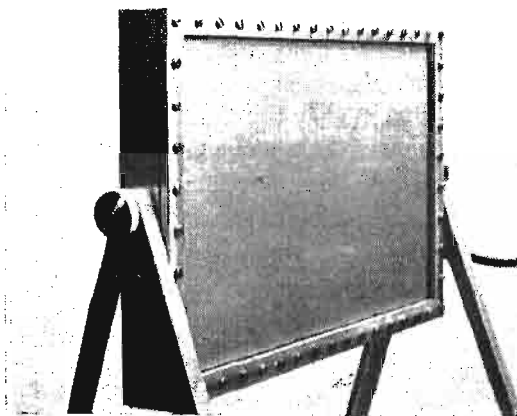
$$A = E^{-1} = 0,0003397 \text{ (MPa)}^{-1}, \quad m = 1.$$

Obliczenia dla płyty z materiału Epidian-53 wykonywano w założeniu, że obciążenie płyty wynosi  $p = 0,005$  MPa.

Pozostałe parametry geometryczne dla płyt z obu materiałów przyjęto:  $a = 125$  mm,  $b = 225$  mm,  $h = 0,5$  mm.

W celu uzyskania oceny dokładności proponowanej metody przeprowadzono badania eksperymentalne ugięć płyty z materiału Epidian-53, o identycznych j.w. wymiarach i obciążeniu.

Płytę przygotowaną do badań przedstawia rys. 3.

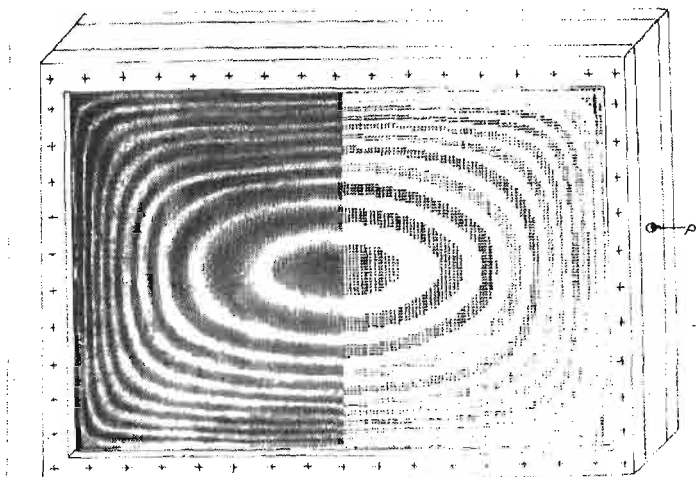


Rys. 3. Płyta z materiału Epidian-53 zamontowana na stanowisku do badań

Badania przeprowadzono metodą mory projekcyjnej (7) otrzymując mapę morową, dla której odległości między sąsiednimi płaszczyznami warstwowymi wynosiły:

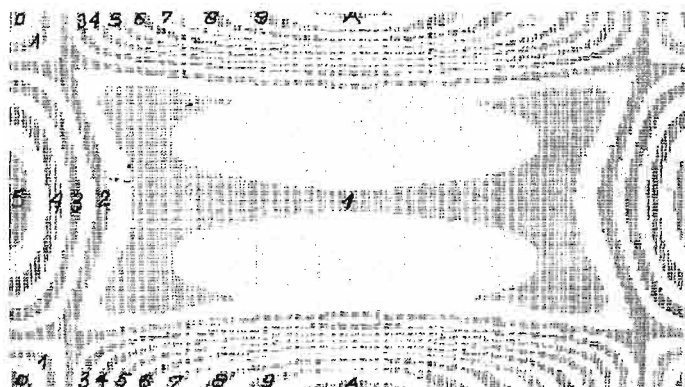
$$d_{k+1/k} = 1,13 \text{ mm, gdzie } k = 0, 1, \dots, 10.$$

Jako rzutnika do rzutowania siatki na powierzchnię płyty użyto projektora TS 107 „Malinverno”. Ze względu na ukośną projekcję, zastosowano odpowiednią siatkę otrzymaną z siatki linii równo-odległych drogą przetworzenia optycznego [2], zapewniając odwzorowanie się jej jako układu linii równo-odległych. Fotografowanie przeprowadzono aparatem fotograficznym o identycznej ogniskowej, spełniając odpowiednie wymogi odnośnie lokalizacji punktu fotografowania.



Rys. 4. Powierzchnie warstwowe obrazujące poziomy stałych ugięć płyty z materiału Epidian-53. Strona lewa przedstawia warstwicową mapę morową, dla której odległości między sąsiednimi płaszczyznami warstwowymi wynoszą:  $d_{k+1,k} = 1,13 \text{ mm}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 10$ . Strona prawa obrazuje mapę warstwicową otrzymaną na drodze obliczeniowej:

Symbol	ugięcie mm	Symbol	ugięcie mm
0	0 ÷ 0,3	6	6,4 ÷ 7,0
1	0,8 ÷ 1,4	7	7,6 ÷ 8,1
2	2,0 ÷ 2,5	8	8,7 ÷ 9,2
3	3,1 ÷ 3,6	9	9,8 ÷ 10,4
4	4,2 ÷ 4,8	A	10,9 ÷ 11,2
5	5,3 ÷ 5,9		



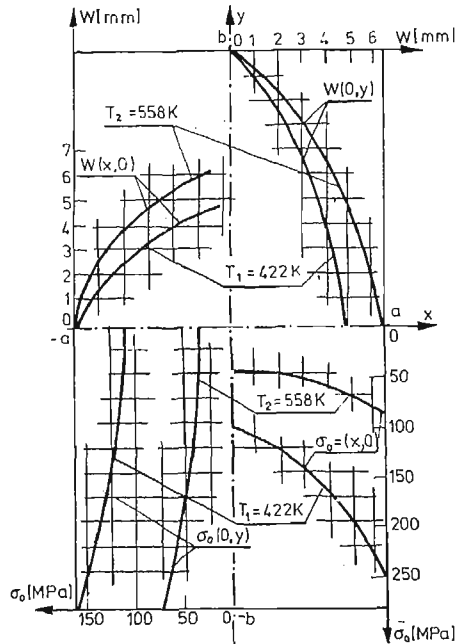
Rys. 5. Rozkład naprężeń zredukowanych w/g hipotezy Hubera-Misesa w płycie z materiału Epidian-53 przedstawiony w formie warstwic

Symbol	Zakres wyężenia	Symbol	Zakres wyężenia
0	0 ÷ 1,43 MPa	6	32,96 ÷ 35,83 MPa
1	4,30 ÷ 7,16 MPa	7	35,75 ÷ 41,56 MPa
2	10,03 ÷ 12,90 MPa	8	44,42 ÷ 47,29 MPa
3	15,76 ÷ 18,63 MPa	9	50,16 ÷ 53,02 MPa
4	21,49 ÷ 24,36 MPa	A	55,89 ÷ 57,32 MPa
5	27,22 ÷ 30,10 MPa		

Obszarom oznaczonym kropkami odpowiadają wartości pośrednie pomiędzy sąsiednimi zakresami wyężenia

Na rys. 4, w lewej jego części przedstawiono warstwicową mapę morową. Strona prawa przedstawia mapę warstwicową otrzymaną na drodze obliczeniowej dla identycznej płyty. Również wyężenie w/g hipotezy Hubera-Misesa przedstawiono w formie warstwic obrazujących jednakowe poziomy wyężenia w płycie z materiału Epidian-53 (rys. 5).

Na rys. 6 przedstawiono obliczone rozkłady ugięć oraz naprężeń zredukowanych w/g hipotezy Hubera-Misesa w przekrojach na osiach symetrii dla płyty ze stopu 2014-T6. Wykresy te, odnoszące się do dwóch temperatur wrysowano w kontur płyty.



Rys. 6. Rozkłady ugięć oraz naprężeń zredukowanych w/g hipotezy Hubera-Misesa w przekrojach na osi symetrii dla płyty ze stopu 2014-T6 obciążonej ciśnieniem  $p = 0,025$  MPa, w temperaturach:  $T_1 = 422$  K oraz  $T_2 = 558$  K

## 5. Wnioski

W pracy rozważono zagadnienia fizycznie i geometrycznie nieliniowych płyt prostokątnych w stanie błonowym, oparte na zastosowaniu bikubicznych funkcji sklepanych.

Otrzymane wyniki, w konfrontacji z przeprowadzonym badaniem eksperymentalnym potwierdzają dobrą zgodność zaproponowanego ujęcia z rzeczywistym rozkładem deformacji.

Zaproponowana metoda zilustrowana na przykładzie płyty prostokątnej może być stosunkowo prosto uogólniona na zakres płyt i powłok małowyniosłych o bardziej złożonej geometrii konturu.

Obliczenia wykonywane zaproponowaną metodą mogą być realizowane na maszynach cyfrowych o niezbyt dużej pamięci.



## Literatura

1. J. H. AHLBERG, E. N. NILSON, J. L. WALSH, *The theory splines and their applications*, Academic Press, New York and London 1967.
2. R. FINSTERWALDER, W. HOFMAN, *Photogrammetrie*, Wyalter de Gruyter and Co. Berlin, 1968.
3. Z. KLEPACKI, *Metoda optymalizacji podstawowych parametrów samolotu rolniczego*, Praca doktorska, Politechnika Rzeszowska 1984.
4. H. KOPECKI, *Duże ugięcia malowyniosłej powłoki o konturze prostokątnym z materiału o własnościach reologicznych*, IV Sympozjon PTMTS poświęcony geologii, Wrocław 1969.
5. G. I. MARCZUK, *Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej*, P.W.N. Warszawa 1983.
6. P. M. PRENTER, *Splines and variational methods*, A. Wiley-Interscience Publication, New York—London—Sydney—Toronto 1975.
7. J. J. WASOWSKI, *Badanie ugięć powłok techniką warstwicowych map morowych*, *Archiwum Budowy Maszyn*, 23, 3, 1976.
9. *Military Standardization Handbook, Metallic Materials and elements for aerospace vehicle structures*, 1971.
8. Ю. С. Завялов, Б. Й. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Метод сплайн функций*, Изд. „Наука”, Москва 1980.

## Резюме

## СПЛАЙН-ФУНКЦИИ В ПРИМЕНЕНИИ К АНАЛИЗУ ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Работа содержит анализ прямоугольных пластин нагруженных равномерно распределенной нагрузкой с учетом физической и геометрической нелинейности. Результаты теоретических исследований для случая физической линейности и геометрической нелинейности сопоставлены с результатами произведенных экспериментальных исследований.

## Summary

## SPLINES IN APPLICATIONS TO PHYSICALLY AND GEOMETRICALLY NONLINEAR RECTANGULAR PLATES ANALYSIS

The paper refers to the analysis of the rectangular plates loaded with constant pressure.

Material of the plate deforms in accordance to the theory of nonlinear elasticity.

Results of calculations of linear elastic and geometrically nonlinear deformations of the plate are compared with experimental results.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 maja 1985 roku*



## SYMULACJA CYFROWA LOTU SAMOLOTU TS-11 „ISKRA” W JĘZYKU MACROASSEMBLER<sup>\*)</sup>

DANUTA FARYŃSKA  
ŁUCJA SOBOLEWSKA  
ZBIGNIEW ZAGDAŃSKI

*Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych*

### 1. Cel pracy

Praca ta stanowi rozwinięcie i uzupełnienie opracowanego w ITWL komputerowego systemu treningowego zespołu naziemnej obsługi lotów — IKS-80. W systemie tym nawigator obserwując na ekranie wskaźnika radiolokacyjnego dynamiczny obraz sytuacji powietrznej generowany przez cyfrowy zestaw obliczeniowy, steruje lotem symulowanych samolotów poprzez wprowadzanie zestawu standardowych komend. Komendy te, wprowadzane do maszyny przez asystenta instruktora, powodują zmianę parametrów lotu sterowanych samolotów. System zakłada model tzw. idealnego pilota — który bez błędów wykonuje ściśle polecenia nawigatora w sposób określony przez regulamin wykonywania lotów. IKS-80 przewiduje możliwość współpracy systemu z kabinami treningowymi KTS-4 i TŁ-1M.

Ponieważ w kraju jest niewiele lotniczych urządzeń treningowych, a istniejące — b. kosztowne (cena ich jest niewspółmierna do ceny IKS-80), wynikała potrzeba opracowania kabiny, które umożliwiła by trening pilota w ograniczonym zakresie, tj.:

- 1) wykonywania zadań nawigacyjnych;
  - 2) współpracy z personelem obsługi naziemnej
- a równocześnie byłaby stosunkowo tania.

Prace podjęte w ITWL zmierzają do opracowania takiej względnie taniej i prostej kabiny treningowej w oparciu o maksymalne wykorzystanie techniki komputerowej. W pierwszym etapie prowadzone są prace nad zbudowaniem makiety kabiny, dla:

- 1) zebrania doświadczeń,
- 2) oceny skali przedsięwzięcia,
- 3) sformułowania modelu dynamiki obiektu.

---

<sup>\*)</sup> Praca przedstawiona na I Ogólnopolskiej Konferencji „Mechanika w lotnictwie” — Warszawa 19.I.1984 r.

## 2. Model fizyczny i zakres odwzorowania modelu

Jako bazę do opracowania kabiny treningowej przyjęto samolot TS-11 „Iskra”, ze względu na dość dobrą znajomość jego charakterystyk. TS-11 „Iskra” jest metalowym średniopłatem o usterzeniu klasycznym. Wyposażony jest w następujące systemy:

- 1) lotki, klapy, ster kierunku i ster wysokości,
- 2) przestawialny statecznik,
- 3) hamulce aerodynamiczne,
- 4) podwozie trójkołowe z kółkiem przednim,
- 5) silnik odrzutowy jednowałowy jednoprzepływowy, ze stałą dyszą, bez dopalacza,
- 6) podwieszenia zewnętrzne,
- 7) instalacje podstawowe: hydrauliczną, elektryczną, pneumatyczną,
- 8) zestaw klasycznych organów sterowania i przyrządów pilotażowo-nawigacyjnych,
- 9) instalacje awaryjne,
- 10) instalacje radiowe.

Przyjęty dla celów Stanowiska Szkolenia Pilota (SSP) model fizyczny samolotu uwzględnia działanie w w/wym. elementów, za wyjątkiem systemów awaryjnych i niektórych instalacji pokładowych. Na podstawie modelu fizycznego został opracowany model matematyczny, przy następujących założeniach:

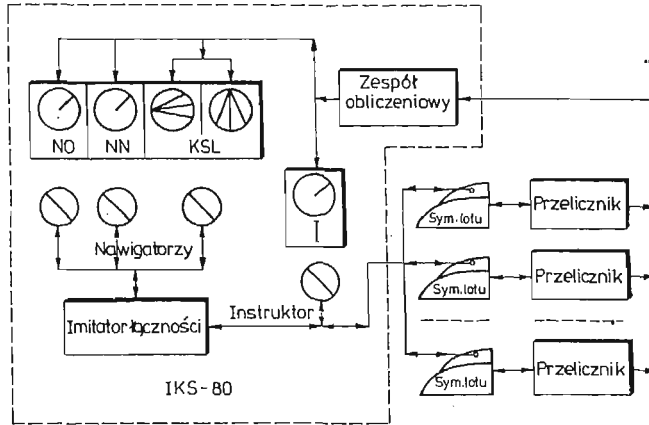
- 1) dynamika płatowca uwzględnia wpływ:
  - podstawowych organów sterowania,
  - atmosfery wzorcowej,
  - sprzężeń dynamicznych pochodzących od silnika,
  - podwieszeń zewnętrznych;
- 2) dynamika silnika napędowego uwzględnia wpływ:
  - organów sterowania,
  - atmosfery wzorcowej,
  - sprzężeń dynamicznych pochodzących od dynamiki lotu;
- 3) przyjęto zestaw przyrządów pilotażowo-nawigacyjnych i organów sterowania w zakresie pozwalającym na właściwy pilotaż samolotu pełnosprawnego.

Model matematyczny dynamiki samolotu został opracowany przy współpracy merytorycznej z Zespołem Dynamiki Obiektów Ruchomych ITLiMS PW pod kierunkiem prof. dr hab. inż. Jerzego Maryniaka. Model ten został opracowany w sposób umożliwiający rozszerzenie go w późniejszych etapach pracy o dynamikę stanów awaryjnych obiektu i pozostałych instalacji i systemów pokładowych. SSP składa się z następujących bloków:

- 1) konstrukcji nośnej — odwzorowującej architekturę kabiny samolotu,
- 2) zespołu organów sterowania i imitatorów lotniczych przyrządów pokładowych,
- 3) zespołu obliczeniowego — zwanego dalej przelicznikiem,
- 4) układów zasilania i imitatora łączności,
- 5) bloku programu modelującego dynamikę obiektu.

Ze względu na przewidywaną konieczność współpracy SSP z IKS-80 przyjęto, że przelicznik SSP będzie zespołem cyfrowych urządzeń liczących opartych o technikę komputerową. Jako podstawowy blok przelicznika przyjęto minikomputer ogólnego

przeznaczenia — MERA-400 — jako jedyny produkowany w kraju. Na wybór tego mini-komputera — oprócz racji przedstawionej wyżej wpłynęły również wyniki analizy porównawczej SSP z symulatorami lotu samolotu tej samej klasy firmy Singer, w których rolę przelicznika pełnił minikomputer ogólnego przeznaczenia, o takiej samej długości słowa maszynowego, pojemności pamięci i szybkości wykonywania operacji, co MERA-400.



Rys. 1. Uproszczony schemat współpracy symulatorów lotu samolotu z systemem IKS-80

Problemem podstawowym, decydującym o powodzeniu pracy jest opracowanie komputerowego modelu dynamiki obiektu, sterowalnego, obserwowalnego o realizowanego w przyjętym dla celów SSP przeliczniku w czasie rzeczywistym.

### 3. Model matematyczny

Model matematyczny dynamiki ruchu samolotu opracowany na bazie podstawowych równań mechaniki jest układem nieliniowych równań różniczkowych. Opisując ruch samolotu przyjęto założenie, że samolot i jego układy są doskonale sztywne z możliwością zmian wychyleń sterów. Wprowadzono następujące układy:

- układ samolotowy —  $Ox_s y_s z_s$  — oś  $x_s$  skierowana jest wzdłuż osi samolotu do przodu, oś  $y_s$  prostopadłe do płaszczyzny symetrii na prawe skrzydło, oś  $z_s$  w dół samolotu tak aby układ był prawoskrętny;
- układ prędkościowy  $Ox_p y_p z_p$  powstały z  $Ox_s y_s z_s$  przez obrót wokół osi  $y_s$  w jej ujemnym kierunku o kąt  $\alpha$ ;
- układ opływowy  $Ox_o y_o z_o$  powstały z układu prędkościowego przez obrót wokół osi  $z_p$  w jej dodatnim kierunku o kąt bocznego opływu  $\beta_0$ .

Ponieważ rozpatruje się ruch samolotu z punktu widzenia pilota i aparatury kontrolno-sterującej znajdującej się na samolocie równania dynamiki przedstawiono w układzie samolotowym w sposób następujący:

$$m(\dot{U} + QW - RV) = X = X_u + \frac{\partial X}{\partial u} \cdot u + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot v + \frac{\partial X}{\partial w} \cdot w + \frac{\partial X}{\partial p} \cdot p + \frac{\partial X}{\partial q} \cdot q + \frac{\partial X}{\partial r} \cdot r, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
m(\dot{V} + RU - PW) &= Y = Y_u + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot u + \frac{\partial Y}{\partial v} \cdot v + \frac{\partial Y}{\partial w} \cdot w + \dots, & (1) \\
m(\dot{W} + PV - Q \cdot U) &= Z = Z_u + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot u + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot v + \frac{\partial Z}{\partial w} \cdot w + \dots, & [\text{cd.}] \\
I_x \dot{P} - (I_y - I_z)Q \cdot R - I_{xy}(Q - PR) + I_{yz}(R^2 - Q^2) - I_{xz}(R^2 + PQ) &= \\
= \Sigma L = L_u + \frac{\partial L}{\partial u} \cdot u + \frac{\partial L}{\partial v} \cdot v + \frac{\partial L}{\partial w} \cdot w + \frac{\partial L}{\partial p} \cdot p + \frac{\partial L}{\partial q} \cdot q + \frac{\partial L}{\partial r} \cdot r, \\
I_y \dot{Q} - (I_z - I_x)R \cdot P - I_{yz}(R - PQ) + I_{xz}(P^2 - R^2) - I_{xy}(P + QR) &= \\
= \Sigma M = M_u + \frac{\partial M}{\partial u} \cdot u + \frac{\partial M}{\partial v} \cdot v + \dots, \\
I_z \dot{R} - (I_x - I_y)PQ - I_{xz}(P - QR) + I_{xy}(Q^2 - P^2) - I_{yz}(Q + PR) &= \\
= \Sigma N = N_u + \frac{\partial N}{\partial u} \cdot u + \frac{\partial N}{\partial v} \cdot v + \frac{\partial N}{\partial w} \cdot w + \frac{\partial N}{\partial p} \cdot p + \frac{\partial N}{\partial q} \cdot q + \frac{\partial N}{\partial r} \cdot r.
\end{aligned}$$

Do równań (1) dołączono związki kinematyczne prędkości kątowych:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi} &= P - Q \sin \Phi \operatorname{tg} \Theta - R \cos \Phi \operatorname{tg} \Theta, \\
\dot{\Theta} &= Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \\
\dot{\Psi} &= Q \sin \Phi \sec \Theta + R \cos \Phi \sec \Theta,
\end{aligned} \tag{2}$$

oraz związki kinematyczne prędkości liniowych:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= U \cos \Theta \cos \Psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\
&\quad + W(\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi), \\
\dot{Y}_1 &= U \cos \Theta \sin \Psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) + \\
&\quad + W(\cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \sin \Phi \cos \Psi) + W \cdot \cos \Phi \cos \Theta, \\
\dot{Z}_1 &= U \cdot \sin \Theta + V \cdot \sin \Phi \cos \Psi.
\end{aligned} \tag{3}$$

Wpływ silnika na dynamikę ruchu opisuje nieliniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\tau_1 \tau_2 \ddot{n} + (\tau_1 + \tau_2) \cdot \dot{n} = K[Q(t - \tau_0) - Q_0] \cdot n.$$

Oznaczenia:

$n$  — prędkość obrotowa,

$X_u, I_u, Z_u, L_u, M_u, N_u$  — składowe sił i momentów aerodynamicznych, które nie zależą od małych prędkości  $u, v, w, p, q, r$ .

Siły te uwzględniają składowe grawitacji i ciągu.

$$\left. \begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial u}, \dots, \frac{\partial Y}{\partial u}, \dots, \\
&\frac{\partial M}{\partial u}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u}, \dots, \frac{\partial N}{\partial r}, \dots
\end{aligned} \right\} \text{ pochodne aerodynamiczne}$$

$\Delta Q = Q(t - \tau_0) - Q_0$  — przyrost wydatku paliwa,

czas zwłoki  $\tau_0 = \tau_0(n, Q, P, T)$ ,

stałe czasowe:  $\tau_1 = \text{const}$ ,  $\tau_2 = \tau_2(n, Q, P, T, M)$ ,

$U, V, W$  — składowe prędkości liniowej,

$P, Q, R$  — składowe prędkości kątovej,

Siły (nośna  $P_z$ , oporu  $P_x$  i oporu bocznego  $P_y$ ) oraz momenty (przechylający  $L$ , pochylający  $M$  i odchylający  $N$ ) aerodynamiczne powstają pod działaniem opływu strumienia masy powietrza z prędkością  $V$  na poszczególnych elementach samolotu.

Dla płata, kadłuba i gondol:

— ustrzenia wysokości:  $P_x^H, P_z^H, M^H$ ,

— usterzenia kierunku:  $P_x^v, P_y^v, L^v$ ,

— lotek:  $L^l$ ,

— klap:  $\Delta P_x^{kl}, \Delta P_z^{kl}, \Delta M^{kl}$ ,

— podwozie;  $\Delta P_x^{podw.}, \Delta P_z^{podw.}, M^{podw.}$ ,

— hamulce aerodynam.  $\Delta P_x^{ham}, \Delta P_z^{ham}$ ,

— podwieszenie  $\Delta P_x^p, \Delta P_z^p, M^p$ .

W przypadku ogólnym każdą z tych sił i momentów można przedstawić w postaci

$$P = \frac{1}{2} q V_c^2 \cdot S \cdot C_i^{**}(\cdot, \cdot); \quad M = \frac{1}{2} q V_c^2 \cdot S \cdot b c_i^*(\cdot, \cdot),$$

$s, b$  — wielkości charakteryzujące kształt obiektu

$c_i^*(\cdot, \cdot), c_i^{**}(\cdot, \cdot)$  bezwymiarowe współczynniki odpowiednio sił i momentów.

Ponieważ dostępne charakterystyki samolotu są podane w układzie opływowym bądź prędkościowym zachodzi konieczność transformacji tych danych do układu samolotowego.

Wyróżniono następujące macierze transformacji:

$\mathbf{T}_F^{o-s}$  — macierz transformacji współczynników sił: oporu, oporu bocznego oraz siły nośnej z układu opływowego do samolotowego.

$\mathbf{T}_M^{o-s}$  — macierz transformacji momentów: przechylającego, pochylającego i odchylającego z układu opływowego do układu samolotowego.

$\mathbf{T}_P^{o-s}$  — macierz transformacji pochodnych sił i momentów aerodynamicznych względem prędkości liniowych i kątowych z układu prędkościowego do samolotowego.

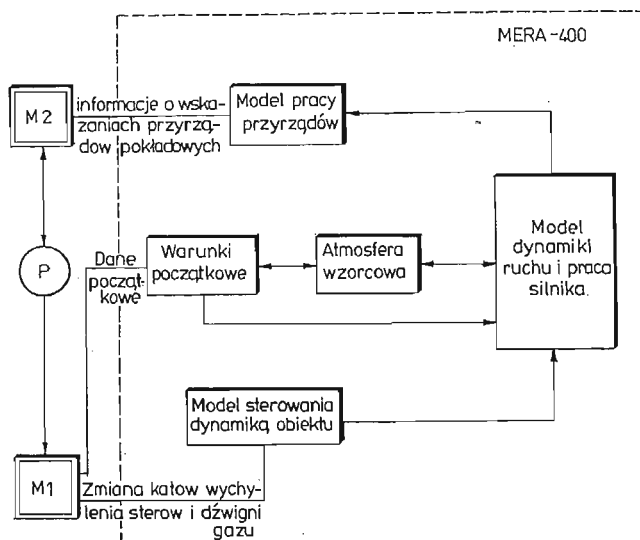
$$\mathbf{T}_F^{o-s} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta_0 & \cos \alpha \sin \beta_0 & -\sin \alpha \\ -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta_0 & \sin \alpha \sin \beta_0 & \sin \alpha \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_M^{o-s} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta_0 & \cos \alpha \sin \beta_0 & -\sin \alpha \\ \sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta_0 & -\sin \alpha \sin \beta_0 & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_P^{o-s} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

#### 4. Model badawczy

Powyższy model matematyczny wykorzystano w symulacji cyfrowej ruchu samolotu. Z uwagi na trwające prace konstrukcyjne kabiny i układów współpracujących przyjęto w pracach wstępnych model badawczy (Rys. 2), którego celem jest ocena możliwości realizacji systemu obliczeniowego.



Rys. 2. Model badawczy

Model badawczy wykorzystuje posiadany zestaw komputerowy złożony z maszyny cyfrowej typu MERA-400 oraz dwóch monitorów  $\alpha$  — numerycznych. Poprzez klawiaturę monitora M1 wprowadzone są informacje dotyczące

- parametrów początkowych lotu,
- zmian kątów wychylenia sterów i dźwigni gazu.

Drugi monitor M2 spełnia rolę deski przyrządowej w kabinie pilota; co pewien czas wyświetlane są na nim wskazania podstawowych przyrządów pokładowych jak:

- prędkościomierz ( $V_r$ ,  $V_p$ ,  $M_a$ ),
- wariometr (prędkość wznoszenia),
- busoła (kurs),
- wysokościomierz (wysokość),
- sztuczny horyzont (przechylenie, pochylenie),
- zakrętomierz (prędkość kątowna zakrętu, ślizg).

Dodatkowo możliwe jest wyświetlenie innych wskazań przyrządów np. dotyczących pracy silnika.

W maszynie zawarte są modele ściśle ze sobą współpracujące

- dynamika ruchu płatowca,
- praca silnika,
- warunki początkowe,



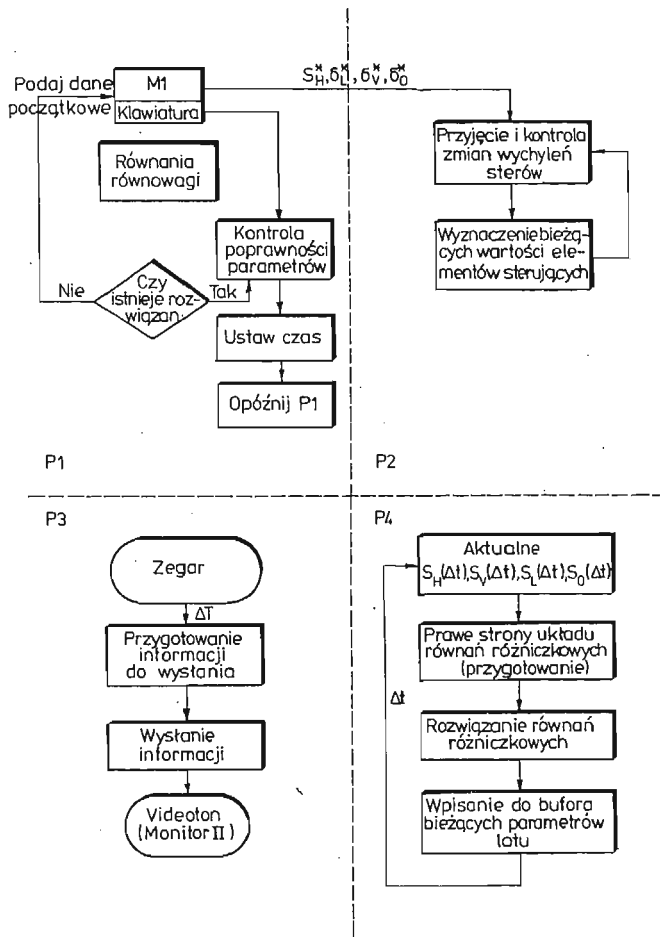
- sterowanie imitatorami przyrządów pokładowych,
- atmosfera wzorcowa.

Z modelem dynamiki ruchu związany jest model warunków początkowych. Podstawę do określenia warunków początkowych dla nieliniowych równań ruchu jest prawidłowe ustalenie warunków równowagi obiektu latającego. Wiąże się to z aproksymacją takich parametrów jak  $\alpha$ ,  $P_s$ ,  $\Phi$ ,  $\delta_H$ ,  $\delta_V$ ,  $\delta_L$ . Uzyskano to poprzez rozwiązanie równań równowagi samolotu będących układem nieliniowych równań algebraicznych

$$F_i(V, H, \alpha, P_s \dots) = 0, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Funkcje  $F_i$  są ściśle związane z przyjętym modelem dynamiki ruchu samolotu i stanowią sumę sił i momentów działających na samolot w stanie równowagi.

Model atmosfery wzorcowej został opracowany w oparciu o standardy Międzynarodowej Atmosfery Wzorcowej. Model sterowania imitatorami przyrządów pokładowych opracowano w oparciu o „Algorytmy pracy wybranych przyrządów i systemów pokładowych TS-11 „Iskra” ” — opracowane w ITWL (nie publ.) — ze względu na przyjęty sposób prezentacji wyników nie jest obecnie wykorzystywany.



Rys. 3. Rozwiązanie programowe

Silnik został przedstawiony jako obiekt regulacji prędkości obrotowej przy przepływie paliwa jako wielkości sterującej.

Wykorzystując przedstawiony model badawczy opracowano algorytmy i program w języku Macroassembler w oparciu o istniejący w ITWL specjalizowany system operacyjny.

Model generowania dynamiki ruchu obiektu wymaga następujących algorytmów:

- algorytmu rozwiązywania układu nieliniowych równań różniczkowych. Posłużono się przy tym procedurą całkowania metodą Kutty-Mersona;
- algorytmy interpolacji funkcji ciągłych i aproksymacji;
- algorytmy obliczania funkcji trygonometrycznych, pierwiastka kwadratowego i innych funkcji analitycznych.

Zgodnie z założeniami specjalizowanego systemu operacyjnego program podzielono na procesory, z których każdy posiada ustalony priorytet wykonania i realizuje określone zadanie. Transmisja informacji nie zależy od wykonywanego aktualnie zadania. Rozwiązanie programowe przedstawione jest na rys. 3. Wprowadzono następujący podział:

Procesor 1

- a) wprowadzenie danych początkowych lotu z monitora M1,
- b) rozwiązanie równań równowagi dla danych początkowych,
- c) przygotowanie warunków początkowych dla równań dynamiki,
- d) ustawienie zegara czasu rzeczywistego.

Procesor 2

Przyjęcie z monitora informacji o zmianie wychyleń elementów sterujących samolotu.

Procesor 3

- a) obróbka informacji przygotowanej do wysłania,
- b) wysłanie informacji na monitor M2 wg. zegara czasu rzeczywistego.

Procesor 4

- a) obliczenie wartości prawych stron nieliniowego układu równań różniczkowych,
- b) rozwiązanie układu równań z zadaniem krokiem całkowania,
- c) obliczenie parametrów przeznaczonych do uaktualnienia parametrów lotu.

## 5. Wnioski

Badania programowe przeprowadzone na minikomputerze wykazały, że zachodzi konieczność zmniejszenia czasu realizacji programu przy zachowaniu odpowiedniej dokładności. Można to osiągnąć przez:

- uproszczenie metod aproksymacji i rozwiązywanie równań różniczkowych,
- optymalizację stosowanych algorytmów,
- optymalizację podprogramów.

Badania programowe wykazały, że o zbieżności modelu matematycznego z modelem fizycznym decyduje dokładność zadania warunków początkowych dla układu równań różniczkowych opisujących dynamikę obiektu.

Резюме

ЦИФРОВАЯ СИМУЛЯЦИЯ ПОЛЁТА САМОЛЁТА ТС-11 „ИСКРА” В ЯЗЫКЕ  
МАКРОАССЕМБЛЕР

В работе представлено: модель динамики полёта самолёта, его реализацию на ЕЦВМ и метод визуализации кинематических параметров полёта при помощи ЕЦВМ

Summary

COMPUTER SIMULATION OF TS-11 „ISKRA” PLANE FLIGHT IN TERMS  
OF MACROASSEMBLER LANGUAGE

In the paper computer realisation of aircraft flight dynamic model and visualisation method of kinematic parameters is presented.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 lutego 1985 roku*

---



## ANALIZA NUMERYCZNA PARAMETRÓW LOTU I STEROWANIA SAMOLOTU W USTALONYM RUCHU SPIRALNYM

JERZY MARYNIAK

*ITLiMS Politechnika Warszawska*

JĘDRZEJ TRAJER

*IMRiL Akademia Rolnicza w Warszawie*

### 1. Wstęp

W pracy przedstawiono analizę numeryczną parametrów lotu i sterowania samolotu w spirali ustalonej [1], [2], [3], [11], [12].

Spirala ustalona stanowi pewien typ ustalonego lotu okrężnego samolotu ze zmianą wysokości po trajektorii śrubowej. Ten typowo przestrzenny charakter ruchu charakteryzuje się trudnymi warunkami lotu, jak:

- podkrytyczne kąty natarcia na płacie,
- duże kąty ślizgu,
- konfiguracja samolotu z dużym przechyleniem,
- występowanie prędkości kątowych wokół trzech osi samolotu,
- duże przeciążenia.

W konsekwencji prowadzi to do budowy skomplikowanego modelu matematycznego zjawiska [3], [7], [8], [9], [10]. Poszukiwanymi wielkościami charakteryzującymi ruch są tu parametry lotu oraz dodatkowo niewiadome wartości kątów wychyleń powierzchni sterowych.

Względy powyższe zadecydowały, że do badania rozpatrywanego zagadnienia zastosowano model cyfrowy praktycznie jedyny możliwy sposób podejścia. Samolot traktowano jako układ mechaniczny sztywny o sześciu stopniach swobody. Przyjęto, że wychylenia powierzchni sterowych mają tylko wpływ parametryczny na wartości sił i momentów sił aerodynamicznych.

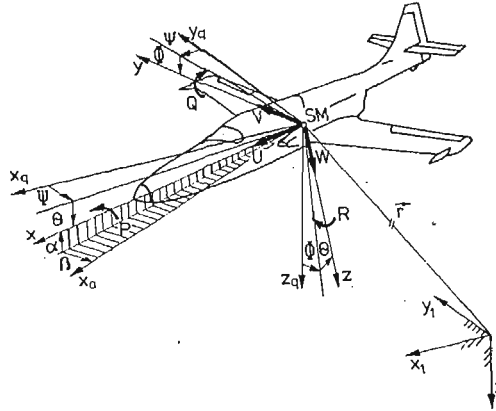
Równania ruchu ustalonego samolotu w spirali dla przyjętego modelu fizycznego wyprowadzono w oparciu o pełne równania ruchu przestrzennego samolotu [7, 8, 11]. Otrzymano układ siedmiu nieliniowych równań algebraicznych, a rozwiązanie wyznaczono dla danej wysokości lotu (punkt równowagi spirali ustalonej [4], [11]).

W pracy omówiono program i wyniki obliczeń numerycznych dla samolotu TS-11

„Iskra”. Program wykonano w języku FORTRAN IV a obliczenia przeprowadzone zostały w Ośrodku Obliczeniowym Politechniki Warszawskiej na elektronicznej maszynie cyfrowej CDC 6400 CYBER 70.

## 2. Przyjęte układy odniesienia

Do opisu dynamiki samolotu w spirali przyjęto następujące układy współrzędnych [2, 7, 11] rys. 1.



Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia

- nieruchomy układ grawitacyjny związany z Ziemią  $Ox_1 y_1 z_1$ ,
- układ grawitacyjny  $Ox_g y_g z_g$  związany z poruszającym się samolotem i równoległy do układu  $Ox_1 y_1 z_1$ ,
- układ prędkościowy  $Ox_a y_a z_a$  związany z kierunkiem przepływu ośrodka omywającego obiekt,
- układ  $Oxyz$  sztywno związany z samolotem, zwany samolotowym,
- układ  $Ox_s y_s z_s$  obrazujący konfigurację samolotu względem toru lotu zwany dalej układem spiralnym, (rys. 2).

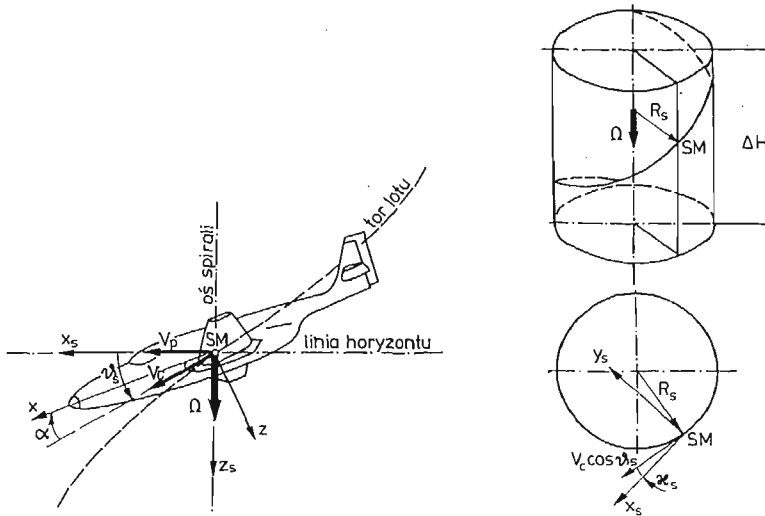
Chilowe położenie samolotu jako ciała sztywnego jest opisane przez orientację przestrzenną i położenie środka masy SM, mierzonego względem nieruchomego układu współrzędnych  $Ox_1 y_1 z_1$  przy pomocy wektora wodzącego  $\vec{r}[x_1(t), y_1(t), z_1(t)]$ . Konfigurację przestrzenną wyznaczają kąty obrotu samolotu:  $\Phi$  — kąt przechylenia,  $\Theta$  — kąt pochylenia,  $\Psi$  — kąt odchylenia zwane kątami quasi-eulerowskimi lub samolotowymi [2, 7, 13].

Ruch samolotu opisano w układzie osi  $Oxyz$ , w którym składowe wektorów chwilowych prędkości liniowej  $\vec{V}_c$  i kątowej  $\vec{\Omega}$  są następujące (rys. 1):

- wektor całkowitej prędkości liniowej  $\vec{V}_c$

$$\vec{V}_c = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}, \quad (1)$$

gdzie:  $U$  — prędkość podłużna samolotu, wzdłuż osi  $Ox$ ,  
 $V$  — prędkość boczna samolotu, wzdłuż osi  $Oy$ ,  
 $W$  — prędkość przemieszczeń pionowych samolotu, wzdłuż osi  $Oz$ ,



Rys. 2. Parametry opisujące ruch samolotu w spirali ustalonej

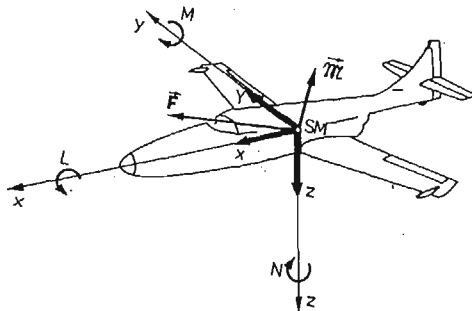
— wektor całkowitej prędkości kątowej  $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}, \quad (2)$$

gdzie:  $P$  — kątowa prędkość przechylenia samolotu, wokół osi  $Ox$ ,

$Q$  — kątowa prędkość pochylania samolotu, wokół osi  $Oy$ ,

$R$  — kątowa prędkość odchylenia samolotu, wokół osi  $Oz$ ,



Rys. 3. Wektor sił i momentów sił zewnętrznych

Wektory sił i momentów sił zewnętrznych mają następującą postać (rys. 3):

— wektor sił zewnętrznych  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \quad (3)$$

gdzie:  $X$  — siła podłużna, wzdłuż osi  $Ox$ ,

$Y$  — siła boczna, wzdłuż osi  $Oy$ ,

$Z$  — siła pionowa, wzdłuż osi  $Oz$ ,

— wektor momentów sił zewnętrznych  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}, \quad (4)$$

gdzie:  $L$  — moment przechylający, wokół osi  $Ox$ ,

$M$  — moment pochyłający, wokół osi  $Oy$ ,

$N$  — moment odchylający, wokół osi  $Oz$ .

W pracy wykorzystano następujące związki kinematyczne ruchu samolotu [7], [11]

— zależności prędkości kątowych

$$\begin{aligned} P &= \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \sin \Theta, \\ Q &= \dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi, \\ R &= \dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Theta} \sin \Phi, \end{aligned} \quad (5)$$

— zależności prędkości liniowych

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= U \cos \Theta \cos \Psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\ &\quad + W(\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi), \\ \dot{y}_1 &= U \cos \Theta \sin \Psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) + \\ &\quad + W(\cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi), \\ \dot{z}_1 &= -U \sin \Theta + V \sin \Phi \cos \Theta + W \cos \Phi \cos \Theta, \end{aligned} \quad (6)$$

oraz:

$$\begin{aligned} U &= V_c \cos \alpha \cos \beta, \\ V &= V_c \sin \beta, \\ W &= V_c \sin \alpha \cos \beta, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie: — kąt natarcia [2], [3], [13] (rys. 1)

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{W}{U} \right),$$

— kąt ślizgu [2], [3], [13] (rys. 2)

$$\beta = \operatorname{arcsin} \left( \frac{V}{V_c} \right),$$

— orientacja kątowa układu spiralnego (rys. 2)

$$\vartheta_s = \operatorname{arcsin}[-\sin \Theta \sin \alpha \cos \beta + \sin \Phi \cos \Theta \sin \beta + \cos \Phi \cos \Theta \sin \alpha \cos \beta], \quad (8)$$

$$\kappa_s = \operatorname{arcsin} \left[ -\frac{1}{\cos \vartheta_s} (\cos \Phi \sin \beta - \sin \Phi \sin \alpha \cos \beta) \right],$$

gdzie:  $\vartheta_s$  — kąt pochylenia trajektorii lotu względem płaszczyzny horyzontu [11] (Rys. 2)

$\kappa_s$  — kąt odchylenia samolotu od toru lotu mierzony w płaszczyźnie horyzontalnej [11]. (Rys. 2)

### 3. Model fizyczny zjawiska

Ustalony lot po trajektorii śrubowej przyjęto nazywać spiralą ustaloną (rys. 2). W rzeczywistości występują małe odchylenia wywołane choćby wpływem zmiany wysokości (wysokość ma wpływ na wartość sił i momentów aerodynamicznych [1], [2], [3], [10]).



Poczyniono następujące założenia modelu fizycznego zjawiska:

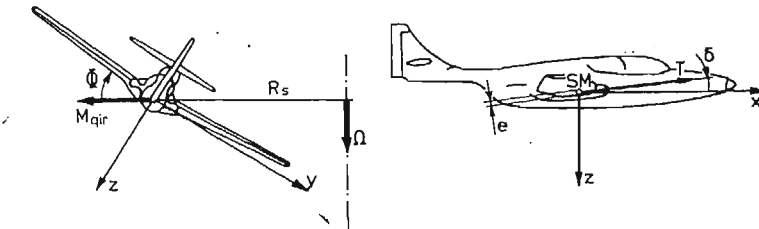
- 1° Samolot traktowano jako układ mechaniczny sztywny o sześciu stopniach swobody.
- 2° Wychylenia powierzchni sterowych: lotek, steru kierunku i wysokości mają tylko wpływ parametryczny na wartości sił i momentów sił aerodynamicznych.
- 3° Ruch samolotu w spirali ustalonej odbywa się po linii śrubowej.
- 4° Oś spirali ustalonej jest prostopadła do płaszczyzny horyzontu, a wektor całkowitej prędkości kątowej leży w tej osi.
- 5° Ciąg silnika jest stały, silnik jest zdławiony.

Przy budowie modelu fizycznego szczególne znaczenie ma prawidłowa interpretacja oraz właściwe wprowadzenie do modelu działających i mogących wystąpić sił zewnętrznych. Wyróżniono w tym przypadku następujące grupy sił:

- a) siły aerodynamiczne [2, 3, 7, 13],
- b) siły od urządzeń napędowych [2, 3, 7, 11],
- c) siły grawitacyjne [3, 7, 11],
- d) siły wynikające z procesu sterowania [2, 3, 7, 9, 11, 13].

Wartości sił i momentów sił aerodynamicznych, w których uwzględniono wpływ wychyleń powierzchni sterowych (ze względu na złożoność problemu z punktu widzenia matematycznego) wyznacza opracowany program numeryczny.

Siły od urządzeń napędowych uwzględniają oddziaływanie wynikające z położenia wektora ciągu względem środka masy samolotu oraz efekt giroskopowy. W locie krzywoliniowym urządzenia wirujące zespołu napędowego powodują powstanie momentu giroskopowego (Rys. 4).



Rys. 4. Siły i momenty sił pochodzące od urządzeń napędowych w ruchu okrężnym samolotu

Wektor sił i momentów sił zewnętrznych  $F_z$  ma następującą postać

$$F = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^a - mg \sin \Theta + T \cos \delta \\ Y^a + mg \sin \Phi \cos \Theta \\ Z^a + mg \cos \Phi \cos \Theta - T \sin \delta \\ L^a \\ M^a + Te + J_T \omega_T R \\ N^a - J_T \omega_T Q \end{bmatrix} \quad (9)$$

gdzie:  $F = \text{col}[X^a, Y^a, Z^a, L^a, M^a, N^a]$  — wektor sił i momentów sił aerodynamicznych,

$m$  — masa samolotu

$T$  — ciąg silnika,

$J_T$  — moment bezwładności wirnika silnika względem osi obrotu własnego,  
 $\omega_T$  — prędkość kątowna części wirujących silnika,  
 $\delta$  — kąt odchylenia wektora ciągu  $T$  od osi  $Ox$  w płaszczyźnie  $Oxz$ ,  
 $e$  — mimośród między linią działania wektora  $T$  a położeniem środka masy samolotu.

przy czym

$$F_a = F_a(\alpha, \beta, V_c, P, Q, R, \rho, \delta_s).$$

Wartość wektora  $F$  zależy od zmiennych stanu  $z$ , gdzie  $z = \text{col}[U, V, W, P, Q, R]$ , parametrów sterowania  $\delta_s = \text{col}[\delta_V, \delta_H, \delta_L]$ , gęstości powietrza  $\rho(H)$  oraz przyspieszenia ziemskiego  $g$ :

$$F = F(z, \delta_s, \rho, g), \quad (10)$$

przy czym zaniedbano wpływ zmiany wysokości lotu na wartość  $g$  natomiast uwzględniono ten wpływ na wartości  $\rho$

$$\rho_H = \rho_0 \left( 1 + \frac{z_1}{44300} \right)^{4.256}, \quad (11)$$

dla  $H \in (0; 11000 \text{ [m]})$

gdzie  $z_1 = -H$ .

#### 4. Punkt równowagi spirali ustalonej

Parametry lotu i sterowania w spirali ustalonej dla danej wysokości lotu  $H$  wyznaczone z pełnych równań ruchu samolotu:

$$\frac{d\alpha}{dt} = Q + \frac{1}{\cos\beta} \left[ - \left( \frac{X}{mV_c} + R \sin\beta \right) \sin\alpha + \left( \frac{Z}{mV_c} - P \sin\beta \right) \cos\alpha \right], \quad (12)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = - \left( \frac{X}{mV_c} \sin\beta + R \right) + \frac{Y}{mV_c} \cos\beta - \left( \frac{Z}{mV_c} \sin\beta - P \right) \sin\alpha, \quad (13)$$

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{X}{m} \cos\alpha \cos\beta + \frac{Y}{m} \sin\beta + \frac{Z}{m} \sin\alpha \cos\beta, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & \frac{1}{1 - \frac{J_x J_z}{J_x^2}} \left[ \left( 1 - \frac{J_y - J_x}{J_z} \right) \frac{J_{xz}}{J_x} PQ - \left( \frac{J_z - J_y}{J_x} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z} \right) QR + \right. \\ & \left. + \frac{1}{J_x} \left( L + \frac{J_{xz}}{J_z} N \right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{M}{J_y} + \frac{J_z - J_x}{J_y} PR - \frac{J_{xz}}{J_y} (P^2 - R^2), \quad (16)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}} \left[ \left( \frac{J_x - J_y}{J_z} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z} \right) PQ - \left( 1 - \frac{J_y - J_z}{J_x} \right) \frac{J_{xz}}{J_x} QR + \right. \\ \left. + \frac{1}{J_z} \left( \frac{J_{xz}}{J_x} L + N \right) \right]. \quad (17)$$

Wprowadzając zapis macierzowy, powyższy różniczkowy układ równań w postaci normalnej przedstawia się następująco

$$\dot{z} = f(z, \delta_s),$$

gdzie:

$$z = \text{col}[\alpha, \beta, V_c, P, Q, R].$$

Punktem równowagi tego układu równań różniczkowych I stopnia na podstawie [4], [11] jest wektor  $z^*$

$$z^* = \text{col}[\alpha^*, \beta^*, V_c^*, P^*, Q^*, R^*],$$

spełniający równanie

$$Y(z^*, \delta_s^*) = 0.$$

Wprowadzając do układu równań (12-17) założenia dotyczące lotu w spirali ustalonej; a więc

—  $\dot{z} = 0$  — ruch ustalony,

—  $\frac{d\Phi}{dt} = 0, \frac{d\Theta}{dt} = 0, \frac{d\Psi}{dt} = \Omega = \text{constants}$  — całkowita prędkość kątowna samo-

lotu położona w osi spirali,  $\vartheta_s$  — kąt pochylenia linii śrubowej,

$$\vartheta_s = \arcsin[-\sin\Theta \sin\alpha \cos\beta + \sin\Phi \cos\Theta \sin\beta + \cos\Phi \cos\Theta \sin\alpha \cos\beta],$$

otrzymano układ równań algebraicznych opisujących stan lotu samolotu w spirali ustalonej (18-24). Rozwiązanie  $z^*$  należy obliczać dla danej wysokości lotu  $H$  występuje bowiem wpływ tej wielkości na wartości sił i momentów sił aerodynamicznych. Wektor rozwiązania  $z^*$  opisuje stan ustalony w spirali, przyjęto tu nazwę punktu równowagi spirali ustalonej.

W pracy analizowano stan lotu ustalonego poprzez założenie niektórych parametrów punktu równowagi a następnie wyznaczono pozostałe nieznanne wielkości, to znaczy parametry lotu i sterowania. Należało tak postąpić ze względu na istnienie dodatkowych niewiadomych jakimi są tu: kąt wychylenia lotek  $\delta_L$ , kąt wychylenia steru kierunku  $\delta_V$ , kąt wychylenia steru wysokości  $\delta_H$  i ciąg silnika  $T$ .

Dla ułatwienia wyboru wielkości, które należy założyć wprowadzono nowe zmienne  $Y$  mające wyczuwalny sens fizyczny. Umożliwia to właściwie rozpatrzeć fizykę zjawiska i przyjmując wartości liczbowe danych.

Wektor  $Y$  ma następującą postać:

$$Y = \text{col}[\alpha, \beta, V_c, \Phi, \Theta, R_s, \vartheta_s, \delta_H, \delta_V, \delta_L, T_0],$$

przy czym na podstawie rozważań teoretycznych i danych doświadczalnych przyjęto jako znane: prędkość całkowitą samolotu  $V_c$ , promień spirali  $R_s$ , kąt przechylenia samolotu  $\Phi$  i ciąg biegu jałowego  $T_0$ .

Po wprowadzeniu tych zmiennych do równań ruchu (12-17) oraz uwzględnieniu następujących zależności, a mianowicie:

— na podstawie założenia 3°:4° i wzorów (5)

$$\begin{aligned} P &= -\Omega \sin \Theta, \\ Q &= \Omega \cos \Theta \sin \Phi, \\ R &= \Omega \cos \Theta \cos \Phi, \end{aligned}$$

— na podstawie 4° i (rys. 5)

$$\Omega = \frac{V_c \cos \vartheta_s}{R_s},$$

— na podstawie 3° i wzorów (8)

$$\begin{aligned} \vartheta_s &= \arcsin [-\sin \Theta \sin \alpha \cos \beta + \sin \Phi \cos \Theta \sin \beta + \\ &\quad + \cos \Phi \cos \Theta \sin \alpha \cos \beta], \end{aligned}$$

otrzymano następujący układ siedmiu równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} \frac{V_c}{R_s} \cos \Theta \sin \Phi \cos \vartheta_s + \frac{1}{\cos \beta} \left[ \left( -\frac{X}{mV_c} + \frac{V_c}{R_s} \cos \Theta \sin \Phi \cos \vartheta_s \sin \beta \right) \sin \alpha + \right. \\ \left. + \left( \frac{Z}{mV_c} + \frac{V_c}{R_s} \sin \Theta \cos \vartheta_s \right) \cos \alpha \right] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} - \left( \frac{X}{mV_c} \sin \beta + \frac{V_c}{R_s} \cos \Theta \cos \Phi \cos \vartheta_s \right) \cos \alpha + \frac{Y}{mV_c} \cos \beta + \\ - \left( \frac{Z}{mV_c} \sin \beta + \frac{V_c}{R_s} \sin \Theta \cos \vartheta_s \right) \sin \alpha = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{X}{mV_c} \cos \alpha \cos \beta + \frac{Y}{mV_c} \sin \beta + \frac{Z}{mV_c} \sin \alpha \cos \beta = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}} \left\{ - \left( 1 - \frac{J_y - J_x}{J_z} \right) \frac{J_{xz}}{J_x} \frac{V_c^2}{R_s^2} \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi \cos^2 \vartheta_s + \right. \\ \left. - \left( \frac{J_z - J_y}{J_x} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z} \right) \frac{V_c^2}{R_s^2} \cos^2 \Theta \sin \Phi \cos \Phi \cos^2 \vartheta_s + \right. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\left. + \frac{1}{J_x} \left[ L^a + \frac{J_{xz}}{J_z} \left( N^a - J_T \omega_T \frac{V_c}{R_s} \cos \Theta \sin \Phi \cos \vartheta_s \right) \right] \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_y} \left( M^a - T \cdot e + J_T \omega_T \frac{V_c}{R_s} \cos \Theta \cos \Phi \cos \vartheta_s \right) + \\ - \frac{J_z - J_x}{J_y} \frac{V_c^2}{R_s^2} \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi \cos^2 \vartheta_s - \frac{J_{xz}}{J_y} \left[ \frac{V_c^2}{R_s^2} \cos^2 \vartheta_s (\sin^2 \Theta - \cos^2 \Theta \cos^2 \Phi) \right] = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}} \left[ - \left( \frac{J_x - J_y}{J_z} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z} \right) \frac{V_c^2}{R_s^2} \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi \cos^2 \vartheta_s + \right. \\ \left. - \left( 1 - \frac{J_y - J_z}{J_x} \right) \frac{J_{xz}}{J_x} \frac{V_c^2}{R_s^2} \cos^2 \Theta \sin \Phi \cos \Phi \cos^2 \vartheta_s + \right. \quad (23)$$

$$\left. + \frac{1}{J_z} \left( \frac{J_{xz}}{J_x} L^a + N^a - J_T \omega_T \frac{V_c}{R_s} \cos \Theta \sin \Phi \cos \vartheta_s \right) \right] = 0, \\ \vartheta_s = \arcsin(-\sin \Theta \sin \alpha \cos \beta + \sin \Phi \cos \Theta \sin \beta + \\ + \cos \Phi \cos \Theta \sin \alpha \cos \beta), \quad (24)$$

Powyższy układ siedmiu nieliniowych równań algebraicznych z niewiadomymi  $X$

$$X = \text{col}[\alpha, \beta, \Theta, \vartheta_s, \delta_H, \delta_v, \delta_L],$$

możliwy jest do rozwiązania drogą obliczeń numerycznych.

### 5. Przykład obliczeniowy

Opracowany program obliczeń numerycznych na podstawie danych geometrycznych i masowych samolotu oraz założonych niektórych wielkości charakteryzujących lot samolotu w spirali [1, 5, 11, 14] wyznacza wartości pozostałych nieznanymi wielkości charakteryzujących lot samolotu w spirali ustalonej i wartości wychyleń powierzchni sterowych.

Obliczenia przykładowe wykonano dla poddźwiękowego samolotu odrzutowego TS-11 „Iskra”. Prezentowane przypadki ze względu na ocenę wpływu różnią się od wersji podstawowej jednym wybranym parametrem. Przyjęto następujące standardowe warunki lotu:

$$V_c = 100 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right],$$

$$R_s = 500 \text{ [m]},$$

$$\Phi = 40 \text{ [deg]},$$

$$T_0 = 1000 \text{ [N]} \text{ — ciąg jałowy.}$$

Analizę porównawczą przedstawiono dla różnych zmian parametrów lotu (tabela 1.) ciągu silnika (z uwzględnieniem i bez uwzględnienia zjawiska giroskopowego), wysokości lotu (tabela 2.) oraz czynników konstrukcyjnych (tabela 3).

Uzyskane wyniki nasuwają następujące spostrzeżenie ogólne:

- lot samolotu po linii śrubowej charakteryzuje się dużymi kątami przechylenia  $\Phi$ , pochylenia  $\Theta$ , ślizgu  $\beta$  i natarcia  $\alpha$  (przy czym średni kąt natarcia na płacie jest większy o dwa stopnie od podanego w tabelach, gdyż nie uwzględniono tam kąta zakładowania skrzydła względem osi samolotu),
- większe wartości promienia w spirali powodują, że lot staje się bardziej bezpieczny,

Tabela 1

Wpływ zmian podstawowych parametrów lotu na wartości pozostałych wielkości opisujących ruch samolotu w spirali ustalonej

Wersja	Różnica w stosunku do wersji standart		Parametry sterowania				Parametry lotu							Tor lotu		
	proc. %	ilościowa	$\delta_H$	$\delta_V$	$\delta_L$	$\alpha$	$\beta$	$\Theta$	$\Omega$	$P$	$Q$	$R$	$\varphi_s$	$\Delta H$	$n_r$	
			deg	deg	deg	deg	deg	rd/s	rd/s	rd/s	rd/s	rd/s	rd/s	deg		m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
stan- dard																
A	-20% $V_c$	80 [m/s]	-5,68	56,29	-38,98	7,50	-27,72	-34,06	0,190	0,106	0,101	0,120	18,50	1050	3,6	
B	+20% $V_c$	120 [m/s]	-7,00	47,73	-32,60	9,19	-23,39	-20,00	0,157	0,054	0,095	0,113	10,12	560	2,6	
C	-10% $R_s$	450 [m]	-5,38	56,59	-33,93	6,13	-27,96	-43,55	0,215	0,148	0,100	0,120	26,05	1534	4,8	
D	+10% $R_s$	550 [m]	-6,33	38,18	-44,01	8,71	-28,74	-37,04	0,207	0,125	0,106	0,127	21,23	1097	3,5	
E	+100% $R_g$	1000 [m]	-5,49	53,83	-34,84	6,80	-26,41	-30,86	0,174	0,089	0,096	0,115	16,30	1009	3,6	
F	+10% $\Phi$	4,4 [deg]	-3,88	22,91	-11,36	3,77	-11,55	-9,37	0,099	0,016	0,063	0,075	4,65	510	3,9	
			-5,65	52,41	-35,28	7,35	-25,75	-31,51	0,192	0,100	0,114	0,118	16,34	918	3,5	

Tabela 2

Wpływ zmian ciągu silnika, wysokości lotu i zjawiska giroskopowego na postać spirali ustalonej i wartości parametrów sterowania

Wersja	Zjawisko giroskopowe	Różnica ilościowa w stosunku do wersji standard	Parametry sterowania			Parametry lotu						Tor lotu			
			$\delta_H$ deg	$\delta_V$ deg	$\delta_L$ deg	$\alpha$ deg	$\beta$ deg	$\Theta$ deg	$\Omega$ rd/s	$P$ rd/s	$Q$ rd/s	$R$ rd/s	$\phi_s$ deg	$\Delta H$ m	$n_z$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
G	nie uwzględniono	$T = 900$ [N]	-5.67	56.23	-38.85	7.48	-27.68	-34.15	0.189	0.106	0.101	0.120	18,61	1057	3.5
H	nie uwzględniono	$T = 3500$ [N]	-5.82	57.84	-42.22	7.96	-28.58	-31.68	0.192	0.101	0.105	0.125	15.93	893	3.6
J	uwzględniono	Standard	-5.77	56.17	-39.03	7.51	-27.70	-34.03	0.190	0.106	0.101	0.120	18,49	1050	3.5
K	uwzględniono	$H = 1000$ [m]	-6.86	57.43	-42.71	9.31	-28,35	-34.45	0,189	0,107	0,100	0,119	19,26	1096	3,5
L	uwzględniono	$R_s = 1000$ [m]	-4.28	41.78	-21.83	4.08	-20.83	-16.85	0,099	0,028	0,051	0,072	8,93	986	3,9
M	uwzględniono	$T = 3500$ [N]	-5.94	57.68	-42.37	7.97	-28.56	-31.64	0.192	0.101	0.105	0.125	15,92	895	3.6

Tabela 3

Wpływ zmian czynników konstrukcyjnych na postać spirali ustalonej

Wersja	Zmiana czynnika konstrukcyjnego		Parametry sterowania				Parametry lotu							Tor lotu	
	Parametr	%	$\delta_H$ deg	$\delta_V$ deg	$\delta_L$ deg	$\alpha$ deg	$\beta$ deg	$\Theta$ deg	$\Omega$ rd/s	$P$ rd/s	$Q$ rd/s	$R$ rd/s	$\theta_s$ deg	$\Delta H$ m	$n_z$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N	015 $X_{zm}$		-11,04	56,88	-40,90	7,84	-27,69	-34,17	0,189	0,106	0,101	0,120	18,81	1069	3,5
O	035 $X_{zm}$		-0,24	55,85	-36,66	7,17	-27,68	-34,10	0,190	0,106	0,101	0,121	18,39	1043	3,5
P	$M = 3800$ [kg]		-9,83	56,82	-48,73	11,67	-27,60	-34,80	0,186	0,106	0,098	0,117	21,33	1225	3,1
R	$M = 2780$ [kg]		-5,31	53,82	-31,58	6,01	-26,37	-33,19	0,190	0,104	0,102	0,122	18,01	1020	3,9
S	$\nu_z = 1^\circ$	-100%	-6,01	56,46	-30,30	7,50	-27,89	-33,94	0,190	0,106	0,101	0,121	18,26	1035	3,5
T	$\nu_z = 3^\circ$	+100%	-5,62	56,15	-47,42	7,65	-27,46	-34,17	0,189	0,106	0,100	0,120	18,90	1074	3,5
U	$X_v = 5,5$ [m]	+4%	-5,67	56,48	-38,92	7,50	-27,73	-34,09	0,190	0,106	0,101	0,120	18,52	1051	3,5
W	$Z_v = 1,84$ [m]	+12%	-5,71	56,29	-39,22	7,51	-27,72	-34,06	0,190	0,106	0,101	0,120	18,51	1059	3,5
Z	$S_v = 2,5$ [m <sup>2</sup> ]	+11%	-5,67	56,66	-38,94	7,50	-27,71	-34,07	0,190	0,106	0,101	0,120	18,52	1051	3,5



wartości parametrów lotu i sterowania mają mniejsze wartości (dotyczy to zmiennych kątowych),

- obciążenia konstrukcji i przeciążenia działające na pilota opisuje współczynnik obciążenia  $n_z$  który osiąga średnie wartości  $n_z = 3.5$ ; przy czym widać, że największy wpływ na jego wartość ma zwiększenie prędkości lotu w spirali,
- wyniki liczbowe wskazują na uzyskane bardzo duże wartości kątów ślizgu i wychyleń powierzchni sterowych (wynika to z przyjętej uproszczonej metody wyznaczania sił i momentów sił aerodynamicznych), odchyłki te nie mają większego wpływu na ogólny charakter zjawiska i umożliwiają poprawną analizę zagadnienia,
- przy analizowaniu czynników konstrukcyjnych należy zwrócić uwagę na wpływ zmian masy i wyważenia samolotu, dotyczy to zwłaszcza samolotów, które mogą być wyposażone w elementy podczepiane pod skrzydłami, gdyż zakres tych zmian ma bardzo duży wpływ na postać spirali ustalonej, wpływ zjawiska giroskopowego na postać spirali ustalonej jest zauważalny, jest on niwelowany większym wychyleniem lotek.

## 6. Wnioski

Przedstawiona metoda pozwala na ogólne badanie wpływu różnych czynników na postać spirali ustalonej. Istotne przy formułowaniu modelu zjawiska i przyjęciu danych wejściowych jest posiadanie danych empirycznych i właściwe ich uwzględnienie. Szczegółowa analiza teoretyczna zagadnienia przesądza tu więc o uzyskaniu poprawnego rozwiązania.

Przeprowadzone obliczenia numeryczne nasunęły następujące uwagi praktyczne, które mogą mieć zastosowanie do badania innych stanów ustalonych zjawisk fizycznych:

a) uzyskanie rozwiązania numerycznego ułatwia ten sam rząd wartości prawnych stron równań (12-17), w tym celu w przypadku powyższym równanie (14) podzielono przez wartość  $V_c$ ,

b) ułatwienie wyboru wielkości (które należy założyć) oraz właściwą analizę zagadnienia umożliwiają zmienne fizyczne, zmienne te należy wprowadzić do modelu matematycznego zjawiska,

c) w przypadku trudności w uzyskaniu rozwiązania należy zastosować bardziej efektywną metodę rozwiązania równań algebraicznych lub potraktować jedną zmienną jako parametr, w przypadku powyższym kąt przechylenia samolotu  $\Phi$  mógł być korygowany. Prezentowana metoda obliczeń umożliwia łatwą analizę zagadnienia i może mieć zastosowanie we wstępnym etapie badań. Świadczą o tym uzyskane wyniki zgodne z badaniami w locie. Istnieje możliwość zastosowania tej metody do analizy innych stanów ustalonych oraz wyznaczenia punktu równowagi, co z kolei pozwala na badanie małych drgań wokół położenia równowagi.

## Literatura

1. A. ABLAMOWICZ, *Akrobacja lotnicza*, MON Warszawa 1954.
2. B. ETKIN, *Dynamics of atmospheric flight*, John Wiley, New York 1972.
3. W. FISZDON, *Mechanika lotu. Część I i II*, PWN Łódź—Warszawa 1961.

4. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT Warszawa 1971,
5. *Instrukcja techniki pilotowania i zastosowanie bojowe samolotu TS-11 „Iskra”*, MON Poznań 1973.
6. J. LEGRAS: *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT Warszawa 1974.
7. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe Politechniki Warszawskiej Mechanika Nr 32 WPW Warszawa 1976.
8. J. MARYNIAK, W. BLAJER, *Numeryczna symulacja korkociągu samolotu*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Zeszyt 2/3, Tom 21, Warszawa 1983.
9. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, E. T. DĄBROWSKA, *Modelowanie i badanie własności dynamicznych samolotów w ruchu przestrzennym*, IV Konferencja Naukowo-Techniczna ITL WAT Warszawa 1979, Referat problemowy.
10. *Military Specification Flying Qualities of Piloted Airplanes-MIL-F-8785 B(ASG)* August 1969.
11. J. TRAJER, *Modelowanie i badanie własności dynamicznych poddźwiękowego samolotu odrzutowego w sterowanym ruchu spiralnym*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska Warszawa 1983.

## Р е з ю м е

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЁТА И УПРАВЛЕНИЯ  
САМОЛЁТА В УСТАНОВИВШЕМСЯ СПИРАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Самолёт принято как механическую жёсткую систему с шестью степенями свободы. Влияние отклонений рулевых поверхностей: рулём высоты и рулём направления а также элеронов принято как параметрическое действие аэродинамических сил и моментов сил.

Уравнения установившегося спирального движения самолёта выведено из полных уравнений пространственного движения самолёта. Примерно для самолёта класса TS-11 „Iskra” вычислено параметры равновесия в спирали.

## S u m m a r y

NUMERICAL ANALYSIS OF AIRPLANE FLIGHT AND CONTROL PARAMETERS  
IN A STEADY SPIRAL MOTION

In the paper a numerical analysis is presented of airplane flight control parameters in a steady spiral motion.

The airplane is assumed to be a stiff, mechanical object with six degrees of freedom. The deflections of control surfaces, i.e. ailerons, rudder and elevator have parametric influence only on the values of aerodynamic forces and moments.

The equations of airplane steady spiral motion are based on full airplane space equations of motion. A set of seven non-linear algebraic equations is obtained which allow us to determine the equilibrium.

In order to investigate the problem under study a numerical model is applied. A numerical analysis of motion in subsonic TS-11 „Iskra” jet aircraft is presented.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 września 1985 roku*

## DRGANIA SAMOLOTU W USTALONYM RUCHU SPIRALNYM\*

JERZY MARYNIAK

*ITLiMS Politechnika Warszawska*

JĘDRZEJ TRAJER

*IMRiL Akademia Rolnicza Warszawa*

### 1. Wstęp

W przedstawionej pracy zaprezentowano metodę badań małych drgań samolotu około położenia równowagi w spirali ustalonej [1, 2, 4].

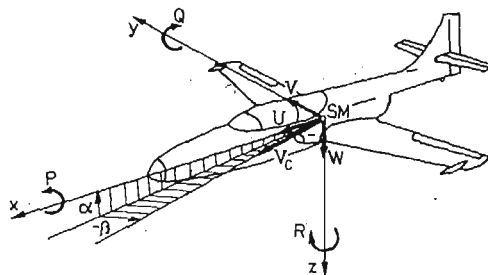
Analiza zagadnienia jest utrudniona ze względu na niepełne dane doświadczalne oraz rozbudowany aparat matematyczny. Do rozwiązania wykorzystano metody numeryczne, które pozwoliły na szybkie wyznaczenie wartości liczbowych.

Uzyskano wyniki umożliwiające ocenę własności lotnych projektowanego samolotu w warunkach lotu przestrzennego i bardziej racjonalną jego konstrukcję.

### 2. Model fizyczny zjawiska

Przyjęto następujące założenia modelu fizycznego zjawiska [1, 5]:

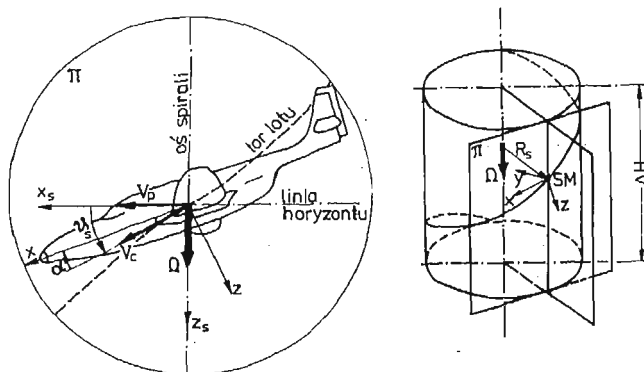
1. Samolot traktowany jest jako układ mechaniczny sztywny o sześciu stopniach swobody, rys. 1.



Rys. 1. Parametry kinematyczne lotu samolotu

\*) Fragmenty pracy zostały przedstawione na IX Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”, maj 1984, Białejewko k. Poznania.

2. Samolot charakteryzuje się konwencjonalną, symetryczną i zwartą budową.
3. Średnie kąty natarcia na płacie podczas wykonywania spirali ustalonej nie przekraczają wartości krytycznych.
4. Wychylenie powierzchni sterowych: lotek, steru kierunku i steru wysokości mają tylko wpływ parametryczny na wartości sił i momentów sił aerodynamicznych.
5. Ruch okrężny samolotu ze zmniejszeniem wysokości po trajektorii śrubowej przyjęto jako ruch w spirali, rys. 2.
6. Oś spirali ustalonej i wektor całkowitej prędkości kątowej leży w osi grawitacyjnej.



Rys. 2. Spirala ustalona

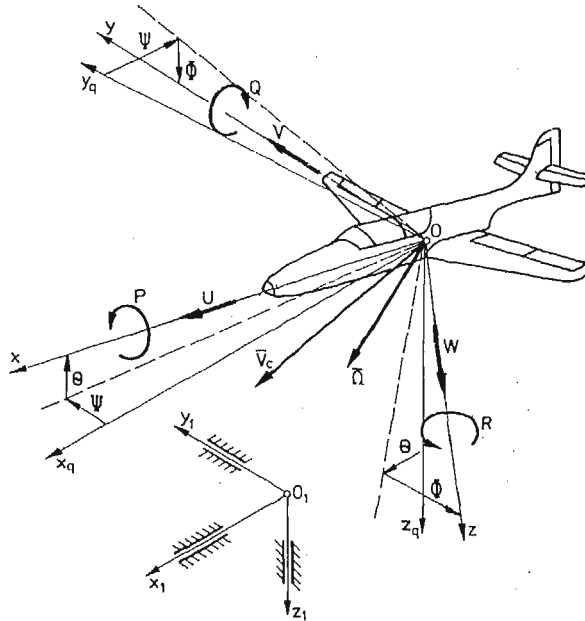
Przy budowie modelu fizycznego szczególne znaczenie ma prawidłowa interpretacja oraz właściwe wprowadzenie do modelu działających i mogących wystąpić sił zewnętrznych. Wyróżniono następujące grupy sił [1,4]:

- siły pochodzenia aerodynamicznego (wyznaczono metodą numeryczną, uwzględniono oddziaływania wynikające z wychyleń powierzchni sterowych),
- siły od urządzeń napędowych (uwzględniono oddziaływania zespołu napędowego w tym efekt giroskopowy elementów wirujących),
- siły bezwładności,
- siły grawitacyjne.

### 3. Model matematyczny

Do opisu dynamiki samolotu w spirali ustalonej przyjęto następujące układy współrzędnych, rys. 3, [4, 5]:

- nieruchomy układ grawitacyjny związany z Ziemią  $Ox_1y_1z_1$ ,
- układ grawitacyjny  $Ox_gy_gz_g$  związany z poruszającym się samolotem i równoległy do układu nieruchomego  $Ox_1y_1z_1$ ,
- układ prędkości  $Ox_a y_a z_a$  związany z kierunkiem przepływu ośrodka omywającego obiekt,
- układ  $Oxyz$  sztywno związany z samolotem, zwany samolotowym,



Rys. 3. Przyjęte układy odniesienia

— układ  $Ox_s, y_s, z_s$  obrazujący konfigurację samolotu względem toru lotu zwany układem spiralnym.

Do analizy zagadnienia wykorzystano wyprowadzone równania ruchu samolotu [4, 5] w zmiennych  $\alpha$  — kąt natarcia,  $\beta$  — kąt ślizgu,  $V_c$  — prędkość lotu,  $P$  — kątowna prędkość przechylenia,  $Q$  — kątowna prędkość pochylania,  $R$  — kątowna prędkość odchylenia. Równania te rozszerzono o dodatkowe związki kinematyczne dla  $\Phi$  — kąta przechylenia i  $\Theta$  — kąta odchylenia [4]:

$$\frac{d\alpha}{dt} = Q + \frac{1}{\cos\beta} \left[ -\left(\frac{X}{mV_c} + R\sin\beta\right) \sin\alpha + \left(\frac{Z}{mV_c} - P\sin\beta\right) \cos\alpha \right], \quad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\left(\frac{X}{mV_c} \sin\beta + R\right) \cos\alpha + \frac{Y}{mV_c} \cos\beta - \left(\frac{Z}{mV_c} \sin\beta - P\right) \sin\alpha, \quad (2)$$

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{X}{m} \cos\alpha \cos\beta + \frac{Y}{m} \sin\beta + \frac{Z}{m} \sin\alpha \cos\beta, \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}} \left[ \left(1 - \frac{J_y - J_x}{J_z}\right) \frac{J_{xz}}{J_x} PQ - \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}\right) QR + \frac{1}{J_x} \left(L + \frac{J_{xz}}{J_z} N\right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{M}{J_y} + \frac{J_z - J_x}{J_y} PR - \frac{J_{xz}}{J_y} (P^2 - R^2), \quad (5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}} \left[ \left( \frac{J_x - J_y}{J_z} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z} \right) PQ - \left( 1 - \frac{J_y - J_z}{J_x} \right) \frac{J_{xz}}{J_x} QR + \right. \\ \left. + \frac{1}{J_z} \left( \frac{J_{xz}}{J_x} L + N \right) \right], \quad (6)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = P + Q \sin \Phi \operatorname{tg} \Theta + R \cos \Phi \operatorname{tg} \Theta, \quad (7)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad (8)$$

gdzie:  $m$  — masa samolotu,

$J_x, J_y, J_z$  — moment bezwładności samolotu odpowiednio względem osi  $Ox, Oy, Oz$ ,

$J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  — momenty dewiacyjne samolotu,

$F = \operatorname{col}[X, Y, Z, L, M, N]$  — wektor sił zewnętrznych,

$F_a = \operatorname{col}[X^a, Y^a, Z^a, L^a, M^a, N^a]$  — wektor sił i momentów sił aerodynamicznych, przy czym  $F_a = F_a(z, \varrho, \delta_s)$ ,

oraz

$$F = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^a - mg \sin \Theta + T \cos \delta \\ Y^a + mg \sin \Phi \cos \Theta \\ Z^a + mg \cos \Phi \cos \Theta - T \sin \delta \\ L^a \\ M^a + T \cdot e + J_T \omega_T R \\ N^a - J_T \omega_T Q \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie:  $J_T$  — moment bezwładności wirnika względem osi obrotu własnego,

$\delta$  — kąt odchylenia wektora ciągu  $T$  od osi  $Ox$  w płaszczyźnie  $Oxyz$ ,

$e$  — mimośrodek między linią działania wektora ciągu a położeniem środka masy samolotu,

$\omega_T$  — prędkość kątowa części wirujących silnika (prawoobrotowy).

W oparciu o powyższe równania opracowano program numeryczny wyznaczający parametry lotu ustalonego tzn. punkt równowagi spirali ustalonej [2, 4, 5], a następnie badano zaburzenia tego ruchu.

Układ równań ruchu w postaci normalnej ma następujący zapis macierzowy

$$\dot{z} = f(z), \quad (10)$$

gdzie:

$$z = \operatorname{col}[\alpha, \beta, V_c, P, Q, R, \Phi, \Theta].$$

Układ (10) zlinearyzowano w punkcie równowagi  $z^*$  i badano zaburzenia ruchu w bliskim otoczeniu tego punktu metodą Lapunowa [2, 3, 5]. Metoda ta nie wymaga znajomości rozwiązania ogólnego wyrażonego przez funkcje elementarne i w przypadku zlinearyzowanego równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$\dot{z} = \mathbf{A}z, \quad (11)$$

Sprowadza się do wyznaczania wartości własnych  $\lambda_j$  i macierzy stanu  $\mathbf{A}$  i odpowiadającym im wektorem własnym [2, 3].

Linearyzując układ równań ruchu w punkcie równowagi  $z^*$  i pomijając małe wyższego rzędu otrzymamy:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{\beta} &= \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{V}_c &= \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{P} &= \frac{\partial \dot{P}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{P}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{P}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{P}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{P}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{Q} &= \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{R} &= \frac{\partial \dot{R}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{R}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{R}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{R}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{\Phi} &= \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{\Theta} &= \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} \vartheta.\end{aligned}$$

Linearyzacja ta jest przeprowadzona w oparciu o teorie małych zaburzeń [1, 2, 3]. Przyjmując

$$z = z^* + x, \quad (12)$$

gdzie

$x$  — wektor małego zaburzenia,

$$x = \text{col}[\alpha, \beta, v_c, p, q, r, \varphi, \vartheta],$$

otrzymamy układ quasi-liniowy opisujący ruch drgający

$$\dot{x} = \mathbf{R}x + 0(x), \quad (13)$$

gdzie:

$0(x)$  — reszta z rozwinięcia Taylora,

$\mathbf{R} = f'(z^*)$  — macierz Jacobiego,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial P} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial R} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \Theta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{P}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{R}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Dla przykładu pierwszy wyraz jest następujący:

$$r(1, 1) = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\cos \beta} \left[ \left( \frac{X^a - mg \sin \Theta}{mV_c} + R \sin \beta \right) \cos \alpha + \left( \frac{Z^a + mg \cos \Theta \cos \Phi}{mV_c} - P \sin \beta \right) \sin \alpha + \frac{\frac{\partial X^a}{\partial \alpha} \sin \alpha - \frac{\partial Z^a}{\partial \alpha} \cos \alpha}{mV_c} \right].$$

Postać analityczną poszczególnych elementów  $r_{ij}$  macierzy Jacobiego  $\mathbf{R}$  wyznaczono w oparciu o wyprowadzone równania ruchu. Elementy  $r_{ij}$  zawierają pochodne aerodynamiczne  $\frac{\partial F_a}{\partial z}$  w następującej postaci:

$$\frac{\partial F_a}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial X^a}{\partial \beta} & \frac{\partial X^a}{\partial V_c} & \frac{\partial X^a}{\partial P} & \frac{\partial X^a}{\partial Q} & \frac{\partial X^a}{\partial R} & \frac{\partial X^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial X^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial Y^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y^a}{\partial \beta} & \frac{\partial Y^a}{\partial V_c} & \frac{\partial Y^a}{\partial P} & \frac{\partial Y^a}{\partial Q} & \frac{\partial Y^a}{\partial R} & \frac{\partial Y^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial Y^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial Z^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z^a}{\partial \beta} & \frac{\partial Z^a}{\partial V_c} & \frac{\partial Z^a}{\partial P} & \frac{\partial Z^a}{\partial Q} & \frac{\partial Z^a}{\partial R} & \frac{\partial Z^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial Z^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial L^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial L^a}{\partial \beta} & \frac{\partial L^a}{\partial V_c} & \frac{\partial L^a}{\partial P} & \frac{\partial L^a}{\partial Q} & \frac{\partial L^a}{\partial R} & \frac{\partial L^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial L^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial M^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial M^a}{\partial \beta} & \frac{\partial M^a}{\partial V_c} & \frac{\partial M^a}{\partial P} & \frac{\partial M^a}{\partial Q} & \frac{\partial M^a}{\partial R} & \frac{\partial M^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial M^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial N^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial N^a}{\partial \beta} & \frac{\partial N^a}{\partial V_c} & \frac{\partial N^a}{\partial P} & \frac{\partial N^a}{\partial Q} & \frac{\partial N^a}{\partial R} & \frac{\partial N^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial N^a}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Wartości liczbowe powyższych wielkości obliczano numerycznie metodą różnic skończonych.

#### 4. Przykład obliczeniowy

Opracowano program numeryczny, który na podstawie wstępnych danych dotyczących warunków lotu i parametrów samolotu wyznacza punkt równowagi spirali ustalonej



Tablica 1

Wartość własna  $\lambda_j$  macierzy stanu  $\mathbf{R}$  dla poszczególnych punktów równowagi spirali ustalonej

Wersja	$\lambda_{1(\alpha)}$		$\lambda_{2(\beta)}$		$\lambda_{3(\psi_e)}$		$\lambda_{4(\rho)}$		$\lambda_{5(\sigma)}$		$\lambda_{6(R)}$		$\lambda_{7(\phi)}$		$\lambda_{8(\theta)}$	
	$\xi_1$	$\eta_1$	$\xi_2$	$\eta_2$	$\xi_3$	$\eta_3$	$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$	$\xi_7$	$\eta_7$	$\xi_8$	$\eta_8$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
STAND	-4.584	0.	-0.316	2.730	-0.316	-2.730	-0.142	-0.756	-0.142	0.756	-0.213	-0.146	-0.213	0.146	-0.011	0.
A	-0.734	-3.070	-0.734	3.070	-0.438	-2.569	-0.438	+2.569	-1.197	0.	-0.011	-0.156	-0.011	0.015	-0.002	0.
B	-6.831	0.	-0.342	-3.293	-0.342	3.293	-0.869	0.	+0.392	-0.344	0.392	0.344	-0.011	-0.045	-0.011	0.045
C	-2.575	0.	-0.747	-2.124	-0.747	2.124	1.194	0.	-0.945	0.	-0.092	0.260	-0.092	-0.260	0.026	0.
D	-5.565	0.	-0.393	3.247	-0.393	-3.247	-0.684	0.	0.208	-0.580	0.208	0.580	-0.037	-0.028	-0.037	0.028
E	-4.054	0.	-0.438	-3.168	-0.438	3.168	-1.510	-1.993	-1.510	1.993	-0.024	0.108	-0.024	-0.108	-0.006	0.
F	-5.287	0.	-0.024	2.852	-0.024	-2.852	-1.654	0.	0.903	0.	0.006	-0.962	0.006	0.962	0.003	0.
G	-5.163	0.	-0.257	2.775	-0.257	-2.775	-0.600	0.	0.121	-0.572	0.121	0.572	-0.062	0.	0.039	0.
H	-4.889	0.	-0.246	-2.753	-0.246	2.753	0.969	0.	-0.895	0.	0.082	-0.114	0.082	0.114	0.028	0.
J	-5.182	0.	-0.259	-2.778	-0.259	2.778	-0.555	0.	0.123	-0.535	0.123	0.535	-0.096	0.	-0.029	0.
K	-0.785	3.580	-0.785	3.580	-0.466	-2.705	-0.466	2.705	-1.108	0.	-0.019	0.187	-0.019	-0.187	-0.002	0.
L	-4.784	0.	-0.435	3.213	-0.445	-3.213	-0.796	1.105	-0.796	-1.105	-0.063	-0.102	-0.063	0.102	-0.014	0.
M	-4.981	0.	-0.248	-2.758	-0.248	2.758	1.004	0.	-0.860	0.	0.050	-0.125	0.050	0.125	0.028	0.
N	-4.392	0.	-0.269	-2.838	-0.269	2.838	0.017	0.098	0.017	-0.098	-0.203	-0.112	-0.203	0.112	-0.017	0.
O	-5.993	0.	-0.258	2.694	-0.258	-2.694	1.855	0.	-1.503	0.	-0.016	-0.185	-0.016	0.185	0.001	0.
P	-4.916	0.	-0.359	3.129	-0.359	-3.129	-0.758	0.	0.269	-0.512	0.269	0.512	-0.028	-0.031	-0.028	0.031
R	-0.457	-3.493	-0.457	3.493	-0.760	-3.222	-0.760	3.222	-0.329	0.	-0.070	0.210	-0.070	-0.210	-0.014	0.
S	-5.707	0.	-0.283	-2.751	-0.283	2.751	-0.813	0.	0.355	-0.343	0.355	0.343	-0.008	0.049	-0.008	-0.049
T	-4.131	0.	-0.233	-2.771	-0.233	2.771	-0.853	0.	0.293	-0.370	0.293	0.370	-0.005	-0.048	-0.005	0.048
U	-5.182	0.	-0.274	2.822	-0.274	-2.822	-0.613	0.	0.140	-0.566	0.140	0.566	-0.047	0.013	-0.047	-0.013
W	-5.170	0.	-0.268	2.783	-0.268	-2.783	-0.618	0.	0.132	-0.560	0.132	0.560	-0.048	0.011	-0.048	-0.011
Z	-5.166	0.	-0.294	-2.923	-0.294	2.923	-0.608	0.	0.135	-0.568	0.135	0.568	-0.048	-0.078	-0.048	0.077

a następnie wartości własne  $\lambda_j$  macierzy Jacobiego  $\mathbf{R}$  układu zlinearyzowanego równań ruchu.

Na podstawie otrzymanych wyników przeprowadzono analizę zaburzeń ruchu samolotu w spirali ustalonej.

Samolotem testującym był poddźwiękowy samolot odrzutowy TS-11 „Iskra”.

Analizę przedstawiono dla różnych zmian:

- parametrów lotu (wersja  $S$ , ...,  $F$ ),
- ciągu silnika (z uwzględnieniem i bez uwzględnienia zjawiska giroskopowego) i wysokości lotu (wersja  $G$ , ...,  $M$ ),
- czynników konstrukcyjnych, (wersja  $N$ , ...,  $Z$ ) TABELA 1, patrz: „Analiza numeryczna parametrów lotu i sterowania samolotu w ustalonym ruchu spiralnym”.

Przy ocenie zaburzeń ruchu zwracano szczególną uwagę na wartość własną  $\lambda_1$  (odpowiadającą zmianom kąta natarcia  $\alpha$ ), gdyż wartość kąta  $\alpha$  ma decydujący wpływ na wartość sił i momentów aerodynamicznych.

Przy ocenie zaburzeń kierowano się następującymi kryteriami

- a)  $\lambda_j = \xi_j$  dla  $\xi_j > 0$  aperiodyczny ruch rozbieżny,  
dla  $\xi_j < 0$  „ „ „ „ tłumiony,
- b)  $\lambda_j = \xi_j \pm i\eta_j$  ruchy okresowe sprzężone,
- c)  $\xi_j = |\operatorname{Re} \lambda_j|$  ilościowe ujęcie stateczności lub niestateczności ruchu — współczynnik tłumienia,
- d)  $\eta_j = |\operatorname{Im} \lambda_j|$  wartość charakteryzująca częstotliwość drgań ruchu odpowiadającego rozwiązaniu szczegółowemu — częstość drgań,
- e)  $x_j = R_j e^{\lambda_j t}$  rozwiązanie szczegółowe,
- f)  $T_j = \frac{2\pi}{\eta_j}$  okres wahań,
- g)  $T_{\frac{1}{2}j} = -\frac{\ln 2}{\xi_j}$  czas stłumienia amplitudy do połowy,
- h)  $d = \frac{e^{(t+1)}}{e^t}$  dekrement ruchu, wyrażający ilościową zmianę rozwiązania w ciągu sekundy.

## 5. Wnioski

1. Przedstawiona metoda badań zaburzeń ruchu ustalonego w spirali dostarczyła wiele cennych informacji poznawczych o zjawisku, które mogą być wykorzystane w projekcie wstępnym samolotu.
2. Przedstawiona metoda analizy dostarcza wszelkich danych o zaburzeniu ruchu samolotu w przypadku jego pełnej trójwymiarowości. Zastosowany model cyfrowy obliczeń umożliwia łatwą i szybką analizę.
3. Przedstawiony model matematyczny i cyfrowy łatwo może być rozszerzony o dodatkowe stopnie swobody, jak odkształcalność konstrukcji i układu sterowania.
4. Przedstawione wyniki wskazują duży wpływ na własności dynamiczne samolotu zmiany masy i wyważenia.

## Literatura

1. W. FISZDON, *Mechanika lotu, Część I i II*, PWN Łódź, Warszawa 1961.
2. R. GUTOWSKI, *Podstawy teorii stateczności ruchu układów dyskretnych i ciągłych*, WPW Warszawa 1981.
3. J. LA SALLE, S. LEFSCHETZ, *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej*, PWN Warszawa 1966.
4. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika Nr 32 WPW Warszawa 1976.
5. J. TRAJER, *Modelowanie i badanie własności dynamicznych poddźwiękowego samolotu odrzutowego w sterowanym ruchu spiralnym*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska Warszawa 1983.

## Резюме

## КОЛЕБАНИЯ САМОЛЁТА В УСТАНОВИВШЕМСЯ СПИРАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

В статье представлено метод теоретических исследований малых колебаний самолёта вокруг положения равновесия в установившемся спиральном движении.

Принимая теорию малых возмущений линеаризовано уравнения пространственного движения самолёта. Численные вычисления сведено к расчётам собственных значений и соответствующим им собственным векторам. Приведено расчёты для самолёта класса TS-11 „Iskra”.

## Summary

## THE VIBRATIONS OF AIRPLANE IN A STEADY SPIRAL MOTION

In the paper a method of analysis of airplane small vibrations about the equilibrium position in a steady spiral motion is presented.

The motions disturbances near equilibrium point are discussed according to Lapunow method. The analysis is based on a full set of motion differential equations, linearised in accordance with the theory of small disturbances.

A comparative analysis of results for selected parameters is presented.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 września 1985 roku*



## SYMULACJA NUMERYCZNA STEROWANEGO SAMOŁOTU W RUCHU SPIRALNYM

JERZY MARYNIAK

*ITLiMS Politechnika Warszawska*

JĘDRZEJ TRAJER

*IMRiL Akademia Rolnicza Warszawa*

### 1. Wstęp

Przedstawiona poniżej metoda symulacji numerycznej umożliwia pełną analizę dynamiki przestrzennego ruchu samolotu z uwzględnieniem procesu sterowania.

Rozpatrywano sterowany ruch spiralny, który w lotnictwie jest figurą akrobacyjną charakteryzującą w dużym stopniu możliwości akrobacyjne samolotu i skuteczność jego układu sterowania [1, 2, 5].

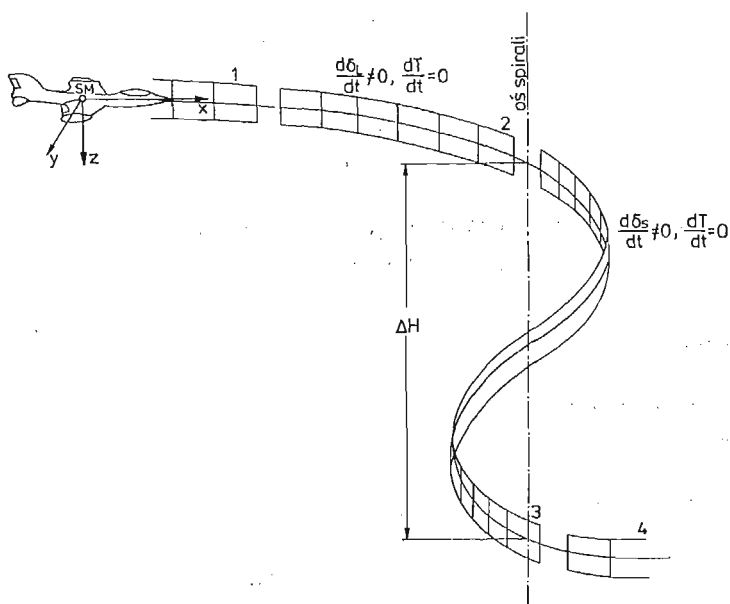
Samolot traktowano jako układ mechaniczny sztywny o sześciu stopniach swobody. Założono parametryczny wpływ wychyleń powierzchni sterowych na wartość sił i momentów aerodynamicznych. Do badania rozpatrywanego zagadnienia zastosowano model cyfrowy praktycznie jedyny możliwy sposób podejścia. Rozszerzono równania ruchu (o dodatkowe związki kinematyczne) całkowano numerycznie metodą Eulera przy równoczesnym cyfrowym modelowaniu procesu sterowania. W wyniku otrzymano przebiegi czasowe wszystkich parametrów kinematycznych oraz dane dotyczące sterowania, trajektorii i warunków lotu.

### 2. Model fizyczny zjawiska

Przyjęto, że sterowany ruch spiralny samolotu składa się z trzech zasadniczych faz lotu, rys. 1.

- wprowadzenie: sterowany etap lotu mający na celu wprowadzenie samolotu z ustalonego lotu prostoliniowego w stan lotu ustalonego po linii śrubowej,
- lot po linii śrubowej: etap lotu, w którym warunki zbliżone są do ustalonych,
- wyprowadzenie: sterowany etap lotu mający na celu wyprowadzenie samolotu ze spirali do poziomego lotu prostoliniowego.

Sterowanie w fazie wprowadzenia i wyprowadzenia jest realizowane przez odpowied-



Rys. 1. Sterowany ruch spiralny

nie wychylenia powierzchni lotek, steru kierunku i wysokości w funkcji czasu. Proces sterowania w locie po linii śrubowej dąży do utrzymania stanu ustalonego.

Założono, że ciąg zespołu napędowego nie zmienia się podczas całej figury, silnik jest na biegu luzem.

Przyjęto, że wychylenia powierzchni sterowych mają tylko wpływ parametryczny na wartości sił i momentów sił aerodynamicznych.

Samolot traktowano jako układ mechaniczny sztywny o sześciu stopniach swobody.

### 3. Metoda badania dynamiki ruchu sterowanego

Własności dynamiczne [2, 4] samolotu w ruchu sterowanym można należycie ocenić znając zmiany czasowe wszystkich parametrów lotu i sterowania.

Istnieją dwie możliwości postępowania do wyznaczania tych niewiadomych:

— wyznaczenie zmian wektora stanu  $z(t)$  wywołanych przyjętym sterowaniem  $\delta_{st} = \text{col}[\delta_V, \delta_H, \delta_L, T]$ ,

gdzie:  $\delta_V$  — kąt wychylenia steru kierunku,

$\delta_H$  — kąt wychylenia steru wysokości,

$\delta_L$  — kąt wychylenia lotek,

$T$  — ciąg silnika,

$t$  — czas.

lub

— wyznaczenie sposobu sterowania  $\delta_{st}(t)$  przy założeniu parametrów ruchu i położenia (tor lotu, konfiguracja, prędkość itp.).

W obu powyższych przypadkach trzeba wyznaczyć rozwiązania zależne od czasu  $t$ ,  $z(t)$  lub  $\delta_{st}(t)$ .

W przestrzennym sterowanym ruchu jakim jest spirala nie jest możliwe założenie wszystkich parametrów lotu, dotyczy to zwłaszcza nieustalonej fazy wprowadzenia i wprowadzenia. Jest to warunek „za sztywny”, istnieje bowiem zbyt wiele czynników decydujących o tak złożonym stanie lotu. Jednocześnie nie można a priori założyć lub jednoznacznie wyznaczyć procesu sterowania, które zapewniałyby wykonanie figury.

Powyższe przesłanki przesądziły o przyjęciu numerycznej metody, polegającej na uzyskaniu rozwiązania  $z(t)$  drogą całkowania numerycznego pełnych równań ruchu przy jednoczesnym cyfrowym modelowaniu sterowania  $\delta_{st}(t)$  w oparciu o bieżącą znajomość niektórych parametrów lotu.

Wykorzystano rozszerzony układ równań ruchu [4, 5], który w układzie samolotowym ma następującą postać:

$$\dot{U} = X^a - m_s g \sin \Theta + T \cos \delta + m_s V R - m_s W Q, \quad (1)$$

$$\dot{V} = Y^a + m_s g \sin \Phi \cos \Theta - m_s U R + m_s W P, \quad (2)$$

$$\dot{W} = Z^a + m_s g \cos \Phi \cos \Theta - T \sin \delta + m_s U Q + m_s V P, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{P} = & \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}} \left[ \left( 1 - \frac{J_y - J_x}{J_z} \right) \frac{J_{xz}}{J_x} P Q - \left( \frac{J_z - J_y}{J_x} - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z} \right) Q R + \right. \\ & \left. + \frac{1}{J_x} \left( L^a + \frac{J_{xz}}{J_z} (N^a - J_T \omega_T Q) \right) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{J_y} (M^a + T \cdot e + J_T \omega_T R) + \frac{J_z - J_x}{J_y} P R - \frac{J_{xz}}{J_y} (P^2 - R^2), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{R} = & \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}} \left[ \left( \frac{J_x - J_y}{J_z} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z} \right) P Q - \left( 1 - \frac{J_y - J_z}{J_x} \right) \frac{J_{xz}}{J_x} Q R + \right. \\ & \left. + \frac{1}{J_z} \left( \frac{J_{xz}}{J_x} L^a + N^a - J_T \omega_T Q \right) \right], \quad (6) \end{aligned}$$

$$\dot{\Phi} = P + Q \sin \Phi \operatorname{tg} \Theta + R \cos \Phi \operatorname{tg} \Theta, \quad (7)$$

$$\dot{\Theta} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad (8)$$

$$\dot{\Psi} = (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \sec \Theta, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & U \cos \Theta \cos \Psi + V (\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\ & + W (\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi), \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & U \cos \Theta \sin \Psi + V (\sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) + \\ & + W (\cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi), \quad (11) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_1 = -U \sin \Theta + V \sin \Phi \cos \Theta + W \cos \Phi \cos \Theta, \quad (12)$$

gdzie:  $m$  — masa samolotu,  
 $g$  — przyspieszenie ziemskie,  
 $z$  — wektor stanu:

$$z = \text{col}[U, V, W, P, Q, R, \Phi, \Theta, \Psi, x_1, y_1, z_1,],$$

$U, V, W$  — prędkości liniowe samolotu odpowiednio względem osi samolotowych  $x, y, z$ .

$P, Q, R$  — prędkości kątowe samolotu odpowiednio wokół osi samolotowych  $x, y, z$ ,

$\Phi, \Theta, \Psi$  — kąty Eulera odpowiednio przechylenia, pochylenia i odchylenia samolotu,

$x_1, y_1, z_1$  — współrzędne położenia samolotu,

$F_a$  — wektor sił i momentów sił aerodynamicznych,

$$F_a = \text{col}[X^a, Y^a, Z^a, L^a, M^a, N^a], \quad (13)$$

$F_T$  — wektor sił i momentów sił od urządzeń napędowych,

$$F_T = \begin{bmatrix} X^T \\ Y^T \\ Z^T \\ L^T \\ M^T \\ N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \cos \delta \\ 0 \\ -T \sin \delta \\ 0 \\ T \cdot e + J_T \omega_T R \\ -J_T \omega_T Q \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$T$  — ciąż silnika,

$\delta$  — kąt odchylenia wektora ciągu  $T$  od osi  $Ox$  układu samolotowego w płaszczyźnie  $Oxyz$ ,

$e$  — mimośród między linią działania wektora ciągu a położeniem środka masy samolotu,

$\omega_T$  — prędkość kąтова części wirujących silnika,

$J_T$  — moment bezwładności wirnika względem osi obrotu własnego.

Dodatkowo uwzględniono zmianę gęstości powietrza  $\rho$  z wysokością lotu  $H$  [5]

$$\rho_H = \rho_0 \left( 1 + \frac{z_1}{44 \ 300} \right)^{4.256}, \quad (15)$$

gdzie:

$$H = -z_1,$$

która ingeruje w wartości sił i momentów sił aerodynamicznych. Wykorzystano też zależności analityczne do wyznaczania wartości całkowitej prędkości liniowej lotu  $V_c$ , kątów natarcia  $\alpha$  i ślizgu  $\beta$  oraz przeciążenia  $n_z$ .

Powyższy układ równań różniczkowych ruchu w postaci normalnej w zapisie macierzowym przedstawia się następująco:

$$\dot{z} = f(z, \delta_s, \rho, t),$$



przy czym faktyczna zależność jest

$$\dot{z} = f(z, t),$$

gdyż wartości wynikające ze sterowania  $\delta_s = \text{col}[\delta_v, \delta_H, \delta_L]$  ingerują tylko w sposób parametryczny w wartości sił i momentów sił aerodynamicznych, zaś  $\rho$  zależy od  $H$  czyli  $z_1$ .

$$F = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^a - mg \sin \Theta + T \cos \delta \\ Y^a + mg \sin \Phi \cos \Theta \\ Z^a + mg \cos \Phi \cos \Theta - T \sin \delta \\ L^a \\ M^a + T \cdot e + J_T \omega_T R \\ N^a - J_T \omega_T Q \end{bmatrix}, \quad (16)$$

przy czym:

$$F_a = F_a(U, V, W, P, Q, R, \delta_v, \delta_H, \delta_L, \rho),$$

$F$  — wektor sił i momentów sił zewnętrznych.

Do wyznaczenia rozwiązania powyższych równań przyjęto metodę całkowania Eulera [3], która na tym etapie badań jest wystarczająco dokładna a przy tym szybka w obliczeniach.

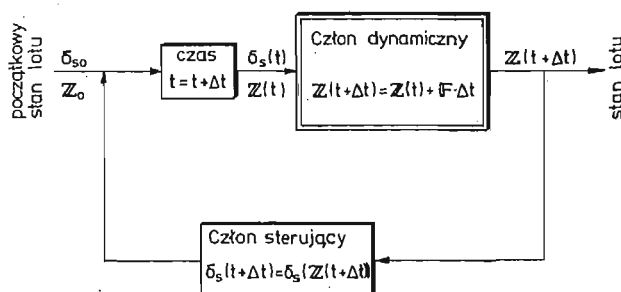
Rozwiązanie  $z(t)$  uzyskuje się przez krokowe w czasie  $\Delta t$  obliczenie wektora  $z$  przy założeniu stanu początkowego lotu oraz modelowaniu cyfrowym sterowania  $\delta_s$ .

$$z(t + \Delta t) = z(t) + f(z(t), t) \Delta t, \quad (17)$$

przy czym  $f$  odpowiadają chwilowym wartościom przyspieszeń  $\dot{z}$ .

Błąd metody zależy od przyjętego kroku całkowania.

Metodą symulacji cyfrowej ruchu samolotu w spirali przedstawia poniższy układ, rys. 2.

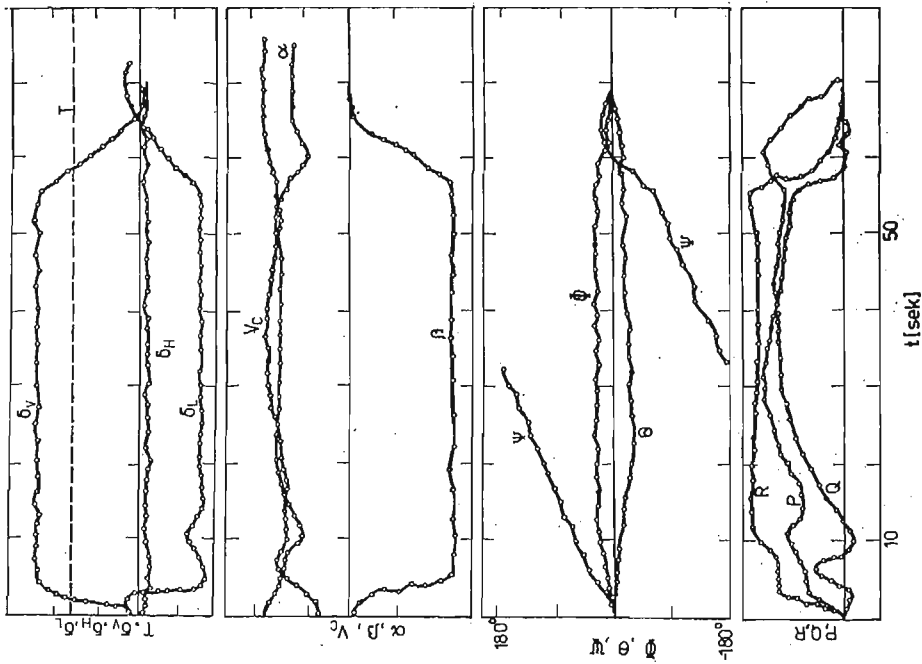


Rys. 2. Schemat układu opisujący dynamikę samolotu w sterowanym ruchu przestrzennym

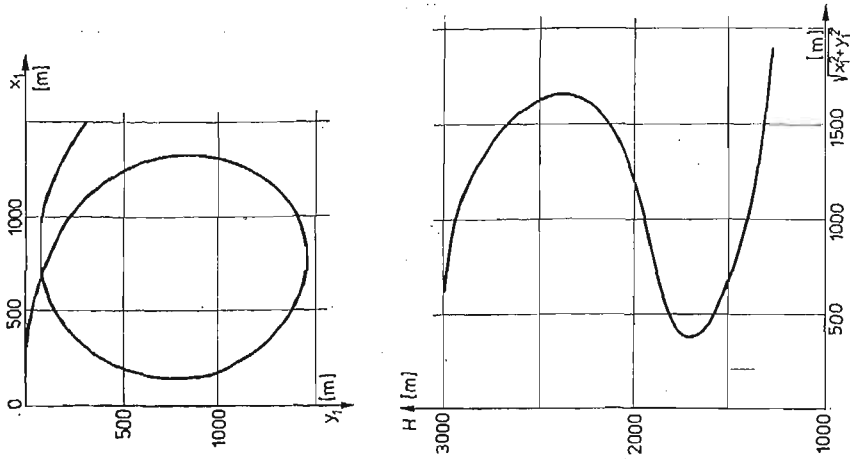
Autopilot w powyższym przypadku jest programem numerycznym, który na podstawie bieżącego śledzenia parametrów lotu w oparciu o pewne kryteria wyznacza wartości wychyleń powierzchni sterowych w danej chwili.

#### 4. Przykład obliczeniowy

Obliczenia przykładowe przeprowadzone zostały dla poddźwiękowego samolotu odrzutowego TS-11 „Iskra”.



Rys. 3. Zmiany parametrów lotu i sterowania podczas wykonywania spirali



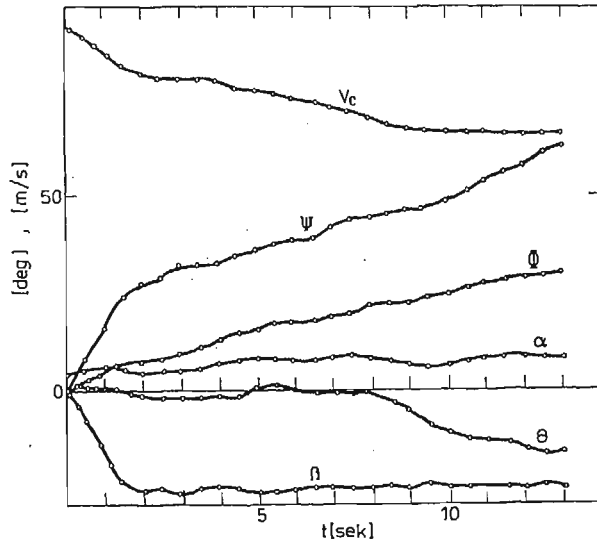
Rys. 4. Trajektoria lotu samolotu dla przeprowadzonej symulacji ruchu w spirali

Przyjęto, że samolot po redukcji ciągu rozpoczyna akrobację z wysokości  $H = 3000$ , [m] z lotu prostoliniowego ustalonego. Po wykonaniu pełnej zvitki następuje faza wprowadzenia do lotu prostoliniowego.

Na wykresach zmian parametrów lotu i sterowania rys. 3 oraz trajektorii lotu rys. 4 zaznaczono zakończenie fazy wprowadzenia „1” i lotu po linii śrubowej „2”. Podano też wartości chwilowych przyspieszeń  $\dot{z}$  w tych punktach (mogą one stanowić pewne kryterium oceny poprawności wykonania figury).

Przeprowadzono obliczenia dla kilku wariantów fazy wprowadzenia, przy czym różnica dotyczy warunków początkowych lotu i modelu sterowania lotkami, rys.: 5, 6, 7.

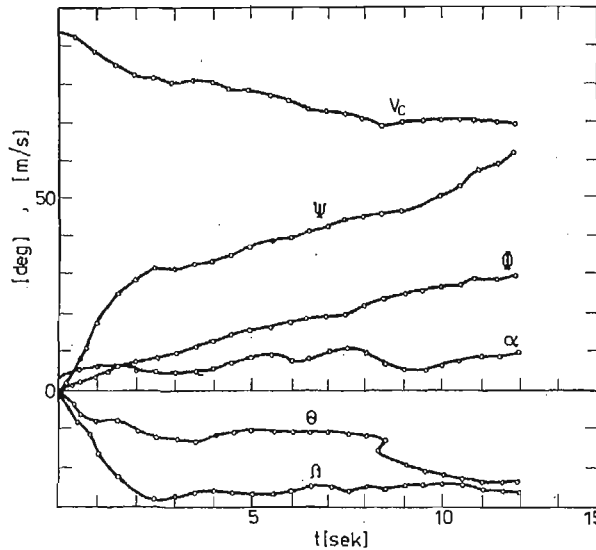
Uzyskane wyniki są zgodne z próbami w locie. Symulacja cyfrowa lotu wykazała, że duży wpływ na poprawność i postać figury ma faza lotu ustalonego tuż przed rozpoczęciem akrobacji. Uzyskane przebiegi czasowe wychyleń powierzchni sterowych są w praktyce do przyjęcia zwłaszcza, gdy dopuści się pewien zakres zmian parametrów lotu. Mała efektywność powierzchni sterowych wynika z przyjętych założeń upraszczających przy wyznaczaniu sił i momentów sił aerodynamicznych.



Rys. 5. Zmiany parametrów ruchu w fazie wprowadzenia dla danych początkowych  $\alpha = 4$ . [deg],  $\Theta = 0$ . [deg]  $V_c = 93$ .  $\left[ \frac{m}{s} \right]$

Dla  $t_1 = 13$  [sek] czasu rozpoczynającego fazę lotu po linii śrubowej otrzymano:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -0,183 \left[ \frac{m}{s^2} \right], & \dot{V} &= 0,612 \left[ \frac{m}{s^2} \right], & \dot{W} &= -0,018 \left[ \frac{m}{s^2} \right], \\ \dot{P} &= 0,092 \left[ \frac{rd}{s^2} \right], & \dot{Q} &= 0,022 \left[ \frac{rd}{s^2} \right], & \dot{R} &= 0,028 \left[ \frac{rd}{s^2} \right], \\ \dot{\phi} &= 0,041 \left[ \frac{rd}{s} \right], & \dot{\Theta} &= -0,050 \left[ \frac{rd}{s} \right], & \dot{\Psi} &= 0,077 \left[ \frac{rd}{s} \right]. \end{aligned}$$



Rys. 6. Zmiany parametrów ruchu w fazie wprowadzenia dla danych początkowych  $\alpha = 4$  [deg],  $\theta =$

$$= -10 \text{ [deg]}, V_c = 92.5 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Dla  $t_1 = 12$  [sek] otrzymano:

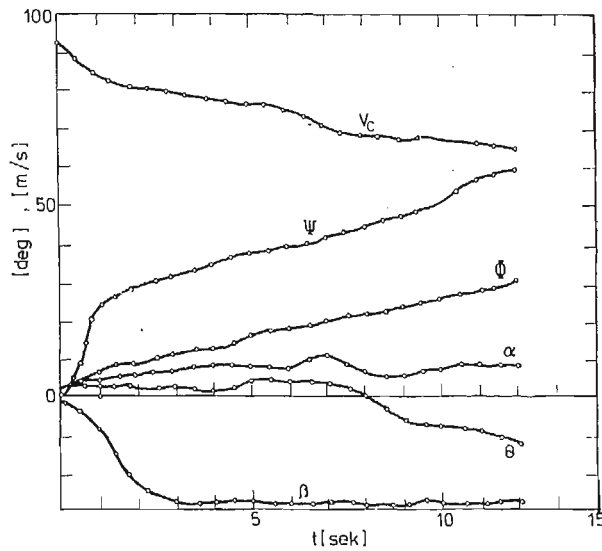
$$\begin{aligned} \dot{U} &= -0,152 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], & \dot{V} &= 0,576 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], & \dot{W} &= -0,449 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], \\ \dot{P} &= 0,082 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}^2} \right], & \dot{Q} &= 0,007 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}^2} \right], & \dot{R} &= 0,021 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}^2} \right], \\ \dot{\Phi} &= 0,033 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}} \right], & \dot{\Theta} &= -0,042 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}} \right], & \dot{\Psi} &= 0,084 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}} \right] \end{aligned}$$

## 5. Wnioski

Przedstawiona metoda symulacji numerycznej lotu samolotu w sterowanym ruchu spiralnym dostarcza wiele cennych informacji poznawczych o zjawisku, które niemożliwe są do osiągnięcia innymi znanymi metodami. Istnieje możliwość przebadania wszystkich niebezpiecznych warunków lotu bez ujemnych konsekwencji jak to ma miejsce podczas prób w locie.

Metoda ta może być zaadaptowana do innych złożonych faz lotu. Zastosowany aparat matematyczny umożliwia łatwe uwzględnienie dodatkowych stopni swobody przy bardziej szczegółowej analizie zjawiska.

Uzyskane wyniki liczbowe świadczą, że przyjęte na tym etapie badań założenia upraszczające nie wpływają na ogólną poprawną analizę zagadnienia.



Rys. 7. Zmiany parametrów ruchu w fazie wprowadzenia dla danych początkowych  $\alpha = 4$ . [deg],  $\Theta =$

$$= 4 \text{ [deg]}, V_c = 93 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Dla  $t_1 = 12$  [sek] otrzymano:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -0,209 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], & \dot{V} &= 0,800 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], & \dot{W} &= -0,080 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], \\ \dot{P} &= 0,058 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}^2} \right], & \dot{Q} &= 0,022 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}^2} \right], & \dot{R} &= 0,027 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}^2} \right], \\ \dot{\Phi} &= 0,045 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}} \right], & \dot{\Theta} &= -0,053 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}} \right], & \dot{\Psi} &= 0,072 \left[ \frac{\text{rd}}{\text{s}} \right] \end{aligned}$$

#### Literatura

1. A. ABLAMOWICZ, *Akrobacja lotnicza*, MON Warszawa 1954.
2. W. FISZDON, *Mechanika lotu, Część I i II*, PWN Łódź—Warszawa 1961.
3. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT Warszawa 1974.
4. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe Politechniki Warszawskiej. Mechanika Nr 32 WPW Warszawa 1976.
5. J. TRAJER, *Modelowanie i badanie własności dynamicznych poddźwiękowego samolotu odrzutowego w sterowanym ruchu spiralnym*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska Warszawa 1983 r.

#### Резюме

#### ЧИСЛЕННАЯ СИМУЛЯЦИЯ УПРАВЛЯЕМОГО САМОЛЁТА В СПИРАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

В статье представлено численный метод симуляций полёта самолёта с влиянием управления. Уравнения движения интегрировано численным методом Эйлера с одновременным применением управления самолётом.

В результате численных вычислений получено временные пробеги кинематических параметров движения, траекторию центра массы самолёта и программу управления. Все вычисления сделано для самолёта класса TS-11 „Iskra”.

#### S u m m a r y

#### NUMERICAL SIMULATION OF CONTROLLED AIRPLANE PERFORMING A SPIRAL MOTION

In the paper a numerical method of simulation of airplane motion is discussed with control process taken into account. The differential equations are integrated numerically by Euler method with simultaneous numerical modelling of control process. In the result time histories of all kinematic parameters and data concerning control, trajectories and other flight conditions are obtained.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 września 1985 roku*

## MODELOWANIE CYFROWE PROCESU STEROWANIA SAMOLOTU W RUCHU SPIRALNYM

JĘDRZEJ TRAJER

*IMRiL Akademia Rolnicza w Warszawie*

### 1. Wstęp

Poniżej przedstawiono model cyfrowy procesu sterowania zastosowany w symulacji numerycznej lotu samolotu [1], [4], [5].

Uwzględniono, na ile to było możliwe, wszystkie te czynniki które charakteryzują warunki rzeczywiste [2], [3]. Przebiegi czasowe parametrów sterowania czyli wychyleń powierzchni sterowych lotek, steru kierunku i wysokości uzyskano w oparciu o bieżące śledzenie parametrów lotu.

Przyjęty proces sterowania ma charakter dyskretny.

### 2. Założenia fizyczne lotu sterowanego w spirali

Założono, że zjawisko sterowanego ruchu spiralnego samolotu składa się z trzech zasadniczych faz lotu:

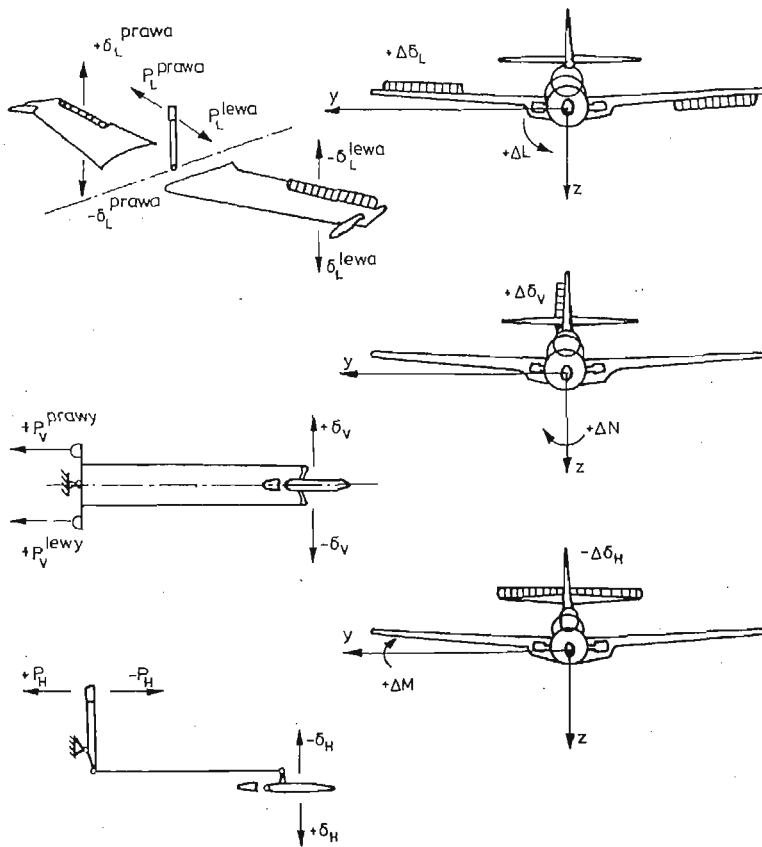
- wprowadzenie,
- lot po linii śrubowej,
- wyprowadzenie.

W poszczególnych etapach występują odmienne warunki lotu i charakteru sterowania [4], [5].

Wprowadzenie samolotu po uprzednim zredukowaniu ciągu następuje z lotu prostoliniowego ustalonego; początkowym impulsem jest ruch przechyłu wynikający z wychylenia lotek.

Sterowanie na zasadzie spełnienia odpowiednich kryteriów lotu jest realizowane w oparciu o bieżącą kontrolę parametrów lotu przez odpowiednie wychylenia powierzchni lotek, steru kierunku i wysokości. Proces sterowania w locie po linii śrubowej dąży do utrzymania warunków ustalonych.

Układ sterowania samolotu przedstawia Rys. 1.



Rys. 1. Układ sterowania samolotu

### 3. Ogólna koncepcja modelu

W przestrzennym sterowanym ruchu jakim jest spirala nie jest możliwe założenie z góry modelu sterowania, który zapewniłby poprawne wykonanie figury [1], [2].

Modelowanie ruchu samolotu w spirali jest realizowane przez modelowanie procesu sterowania. Metoda ta polega na dyskretnych zmianach wartości parametrów sterowania w oparciu o krokowe bieżące śledzenie rozwiązania i korygowanie go. Stanowi to więc działanie podobne do automatycznego pilota, który ma możliwość reagowania w małych odstępach czasu. Warunkami, które decydują o sposobie sterowania i jego wartości, a więc przebiegu  $\delta_s(t)$  są wybrane ograniczenia ruchu oraz faza lotu. W przypadku ruchu spiralnego mogą nimi być na przykład nie przekroczenie w locie krytycznego kąta natarcia, nie przekroczenie dopuszczalnej prędkości kątowej obrotu samolotu, utrzymanie założonego kąta przechylenia samolotu itp. Kryteria te dobiera się w oparciu o szczegółową analizę teoretyczną i doświadczenia pilotażowe, są one odmienne w poszczególnych fazach lotu [1], [2], [3].

Należy nadmienić, że otrzymany sposób sterowania wydaje się być w praktyce do



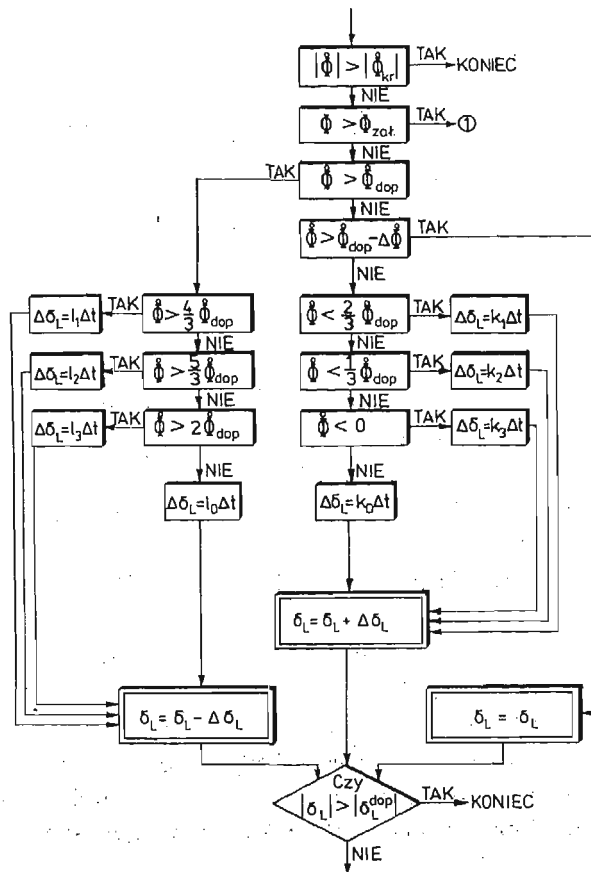
osiągnięcia, pomimo założonych reakcji w krótkich odstępach czasu  $\Delta t$ . Wychylenia sterów w tych okresach czasu są bowiem porównywalne z wartościami  $\Delta t$ .

4. Model cyfrowy procesu sterowania

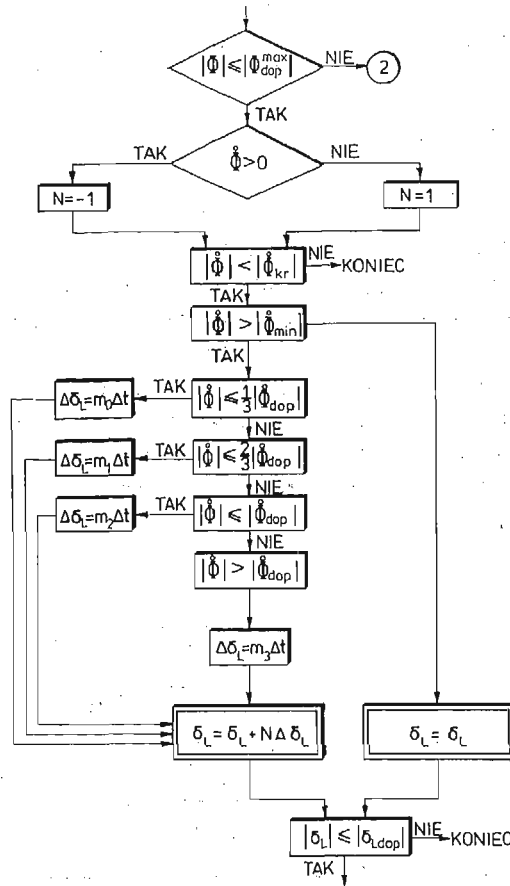
Przedstawiony model cyfrowy procesu sterowania opracowano w oparciu o dane doświadczalne i analizę teoretyczną zjawiska. Metoda modelowania wynika z przyjętych kryteriów dotyczących tego ruchu, jak również uwzględnia możliwości pilota. Maksymalna szybkość zmian kątów wychyleń powierzchni sterowych jest bowiem tak dobrana, aby zapewnić realizację w praktyce.

Dla zilustrowania ogólnej zasady sterowania przedstawiono na Rys. 2 i Rys. 3 sieci działań modelu cyfrowego sterowania lotkami w fazie wprowadzenia i locie po trajektorii śrubowej. Symbole z Rys. 2 i Rys. 3 mają następujące znaczenie:

- 1 — etykieta oznaczająca model sterowania lotkami w locie po trajektorii zbliżonej po linii śrubowej,



Rys. 2. Sieć działań modelu cyfrowego sterowania lotkami w fazie wprowadzenia



Rys. 3. Sieć działań modelu cyfrowego sterowania lotkami w spirali ustalonej

- 2 — etykieta oznaczająca model sterowania lotkami niwelujący za duży przechył samolotu, podobnie jak w fazie wprowadzenia,  
 koniec — etykieta oznaczająca przerwanie obliczeń,  
 $\dot{\Phi}_{kr}$  — krytyczna prędkość kątowa przechylenia samolotu, przy której ruch przechyłu jest niekontrolowany,  
 $\dot{\Phi}_{dop}$  — dopuszczalna prędkość kątowa przechylenia samolotu przy której ruch przechyłu jest jeszcze w pełni kontrolowany,  
 $\dot{\Phi}_{min}$  — założona minimalna prędkość kątowa przechylenia, która nie wpływa na charakter ruchu w spirali,  
 $\Delta \dot{\Phi}$  — założony przedział zmian prędkości kątowej przechylenia, w którym  $\delta_L$  pozostaje stałe, wprowadzono w celu bardziej płynnego sterowania,  
 $\Phi_{zal}$  — założony kąt przechyłu samolotu w locie po trajektorii śrubowej,  
 $\Phi_{dop}^{max}$  — maksymalna dopuszczalna wartość kąta przechyłu samolotu w spirali ustalonej,  
 $\delta_L^{dop}$  — dopuszczalna wartość kąta wychylenia lotek,

$\Delta\delta_L$  — wartość przyrostu kąta wychylenia lotek w przedziale czasowym  $\Delta t$ ,

$\left. \begin{array}{l} k_0, k_1, k_2, k_3 \\ l_0, l_1, l_2, l_3 \\ m_0, m_1, m_2, m_3 \end{array} \right\}$  — współczynnik proporcjonalności

przy czym:

$$k_0 < k_1 < k_2 < k_3,$$

$$l_0 < l_1 < l_2 < l_3,$$

$$m_0 < m_1 < m_2 < m_3.$$

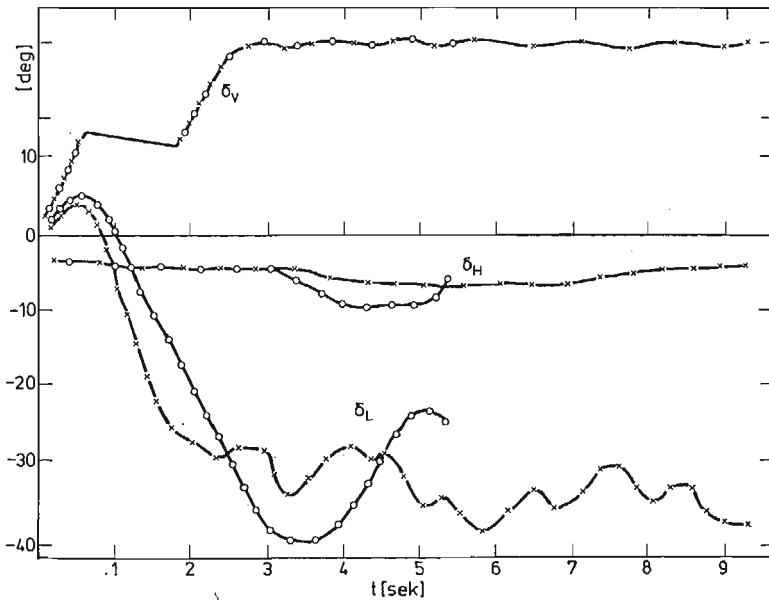
Ilościowego oszacowania tych wielkości dokonuje się w wyniku obliczeń punktu równowagi spirali ustalonej oraz testów programu czyli identyfikacji rozumianej jako proces poszukiwania wartości  $k_i, l_i, m_i$ . Wyznaczenie wartości, jak wykazała praktyka, nie jest trudne bowiem istnieje tu pewna dowolność.

Podobną zasadę stosowano do pozostałych kryteriów.

Uzyskany tak proces sterowania ma charakter dyskretny, ale jest zbliżony do rzeczywistego. Stanowi to niewątpliwą zaletę. Mankamentem w stosunku do rzeczywistości jest to, że w przypadku pilota nie jest on w stanie tak dokładnie śledzić na bieżąco wszystkich czynników, działa z opóźnieniem i nie tak precyzyjnie w danej chwili.

### 5. Wyniki i wnioski

Przykładowo na Rys. 4 podano uzyskane przebiegi czasowe wychyleń powierzchni sterowych lotek  $\delta_L$ , steru kierunku  $\delta_V$  i wysokości  $\delta_H$  w fazie wprowadzenia. Podano



Rys. 4. Przykłady zmian parametrów sterowania w fazie wprowadzenia  $\times \times \times$  manewr poprawny, kątowna prędkość przechylenia  $\dot{\phi}$  jest kontrolowana,  $\cdot \cdot \cdot$  manewr niepoprawny, kątowna prędkość przechylenia  $\dot{\phi}$  staje się niekontrolowana

charakter zmian w przypadku manewru nieprawidłowego uzyskanego bez dobrego oszacowania współczynników proporcjonalności  $k_i$ ,  $l_i$ ,  $m_i$  oraz poprawnego. Jak ilustrują wykresy charakter tych zmian w obu przypadkach jest łagodny. Mała efektywność sterów wynika z przyjętej uproszczonej koncepcji wyznaczania sił i momentów sił aerodynamicznych.

W przyjętym modelu sterowania postać figury jest zdeterminowana przede wszystkim przez fazę wprowadzenia. Stan początkowy lotu i postać ruchu w fazie wprowadzenia decydują również o sukcesie akrobacji. Wynika więc, że należy optymalizować postać spirali z punktu widzenia tych warunków.

Prezentowana metoda modelowania cyfrowego sterowania może mieć zastosowanie do innych przypadków złożonego przestrzennego ruchu samolotu. Wprowadzając pewne modyfikacje można otrzymać proces sterowania prawie identyczny z działaniem pilota.

#### Literatura

1. B. ETKIN, *Dynamics of atmospheric flight*, John Wiley, New York 1972.
2. W. FISZDON, *Mechanika lotu. Część I i II*, PWN Łódź, Warszawa 1961.
3. *Instrukcja techniki pilotowania i zastosowanie bojowe samolotu TS-11 „Iskra”*, MON Poznań 1973.
4. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, E. T. DĄBROWSKA, *Modelowanie i badanie własności dynamicznych samolotów w ruchu przestrzennym*, IV Konferencja Naukowo-Techniczna ITL WAT Warszawa 1979, Referat problemowy.
5. J. TRAJER, *Modelowanie i badanie własności dynamicznych poddźwiękowego samolotu odrzutowego w sterowanym ruchu spiralnym*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska Warszawa 1983.
6. J. MARYNIAK, J. TRAJER, *Symulacja numeryczna sterowanego samolotu w ruchu spiralnym*, MTiS 24 (1986), 3, 387 - 396.

#### Резюме

#### ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЁТОМ В СПИРАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

В статье представлено численную модель процесса управления самолёта с применением к численной симуляции полёта.

Представлено критерия построения численной модели движения самолёта в управляемом полёте с одновременной контролью параметров полёта необходимых к управлению.

Получено дискретный характер процесса управления. Численные вычисления сделано для самолёта класса TS-11 „Iskra”.

#### Summary

#### MODEL PRESENTATION OF NUMERICAL PROCESS OF AIRPLANE CONTROL IN A SPIRAL MOTION

In the paper a numerical model of control process of an airplane for flight numerical simulation is presented.

The physical assumptions, the criteria of constructing numerical model of airplane motion in controlled flight with simultaneous flight control parameters have been discussed.

The assumed model of motion controlling is discrete.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 września 1986 roku*

## ANALIZA PORÓWNAWCZA MODELI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO PRĘTA POD DZIAŁANIEM ZGINANIA, SIŁY PODŁUŻNEJ I TEMPERATURY\*

MAREK STODULSKI  
MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

*Politechnika Krakowska*

Problem pręta, będącego pod działaniem zginania, siły osiowej i temperatury w zakresie sprężysto-plastycznym, pozornie prosty, natrafia na trudności przy określaniu charakterystyk wiążących uogólnione siły i uogólnione przemieszczenia. W pracy analizowano kilka modeli takiego pręta, nawiązujących do odkształcalnych lub sztywnych elementów skończonych. Porównanie modeli przeprowadzono pod kątem wykorzystania ich do opisu rurkowego podłoża płyt sitowych w wymiennikach ciepła i reaktorach chemicznych.

### 1. Wstęp

W pracy rozpatrywany jest pręt pryzmatyczny, obciążony na końcach siłą osiową i momentem zginającym z uwzględnieniem wpływu zmiany temperatury na przemieszczenia osiowe. Tak obciążone pręty mają swoje odpowiedniki w rzeczywistych konstrukcjach np. w szeroko stosowanych w przemyśle energetycznym i chemicznym płaszczoworurowych wymiennikach ciepła i reaktorach chemicznych. Jednymi z elementów tych aparatów są rurki, których końce mocuje się (rozłacza, spawa) w perforowanych płytach zwanych płytami sitowymi. Obciążenie całego układu ciśnieniem i temperaturą wywołuje ugięcia obu płyt, które wymuszają przemieszczenia i obroty końców współpracujących z nimi rurek. Z kolei rurki oddziałują na płyty siłami i momentami wywołanymi ich zmienioną konfiguracją. W tym przypadku rurki są w stosunku do rozważanego pręta dodatkowo obciążone różnicą ciśnień na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni. Efekt ten będzie jednak pominięty w obecnej pracy.

Przy ograniczeniu się do symetrycznego obciążenia obu końców pręta jego pracę w poszczególnych zakresach: sprężystym, jedno- lub dwustronnego uplastycznienia, można opisać dwoma związkami typu

$$\Phi_i(U_0, \Theta_0, M_0, N_0, \Delta T) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

\*) Praca została wykonana w ramach probl. węzł. 05.12. - 02.9.

gdzie:  $U_0, \Theta_0$  — przemieszczenie osiowe i kąt obrotu końcowego przekroju pręta,  $M_0, N_0$  — moment zginający i siła osiowa na końcu pręta,  $\Delta T$  — jednorodna dla całego pręta zmiana temperatury. Dla dalszych zastosowań korzystne jest rozwikłanie tych związków bądź do postaci

$$\begin{aligned} M_0 &= \Psi_1(U_0, \Theta_0, \Delta T), \\ N_0 &= \Psi_2(U_0, \Theta_0, \Delta T) \end{aligned} \quad (1.2)$$

bądź do postaci odwrotnej

$$\begin{aligned} U_0 &= \Psi_3(M_0, N_0, \Delta T), \\ \Theta_0 &= \Psi_4(M_0, N_0, \Delta T). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Związki te będziemy nazywać charakterystykami pręta. We wspomnianych konstrukcjach rurki pracują w warunkach zbliżonych do wymuszenia kinematycznego; dla zadanego na obu końcach  $U_0$  i  $\Theta_0$  należy wyznaczyć  $N_0$  i  $M_0$ . Tak postawione zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia charakterystyk w postaci (1.2). W pracy przyjęto za dodatnie siłę rozciągającą oraz przemieszczenie powodujące zmniejszenie odległości pomiędzy końcowymi przekrojami pręta, które odpowiada dodatniemu ugięciu płyty. Dodatni znak momentu jest natomiast zgodny z dodatnim znakiem kąta.

Analiza statyczna lub dynamiczna konstrukcji prętowych — stosunkowo prosta w przypadku liniowości fizycznej materiału (sprężystość lub liniowe pełzanie) — staje się znacznie trudniejsza w przypadku materiałów fizycznie nieliniowych. Trudności te — nawet przy ograniczeniu się do jednoosiowego stanu naprężenia w poszczególnych punktach pręta (rozciąganie — ściskanie i zginanie) — pojawiają się na dwóch szczeblach: na szczeblu przekroju, przy wyprowadzaniu „integralnych” równań konstytutywnych wiążących uogólnione siły wewnętrzne i uogólnione odkształcenia oraz na szczeblu całego ciała, gdy poszukujemy zależności między parametrami obciążeń i charakterystycznymi uogólnionymi przemieszczeniami. Dla pręta o zmiennym wzdłuż osi momencie zginającym na ogół nie jest możliwe analityczne wyznaczenie charakterystyk w jawnej postaci (1.2) lub (1.3).

Drogi pokonywania powyższych trudności można podzielić na dwie grupy. Grupa pierwsza ma charakter czysto numeryczny i sprowadza się na obu szczeblach do przeprowadzenia całkowań wzorami przybliżonymi o możliwie dużej dokładności. Takie podejście, nawiązujące do różnych wariantów metody różnic skończonych, może istotnie zapewnić dużą dokładność wyników końcowych wykazuje jednak następujące wady, które niekiedy mogą być istotne: (1) utrudnia analizę jakościową przez nadmierny nacisk na stronę numeryczną przy jednoczesnym oderwaniu się od interpretacji fizycznej i inżynierskiej, (2) na ogół nie zezwala na wyprowadzenie prostych wzorów końcowych, mogących służyć do dalszych zastosowań. Natomiast druga grupa, nawiązująca do różnych wariantów metody elementów skończonych, ma znacznie wyraźniejszą interpretację fizyczną. W przypadku niewielkiej liczby elementów mówimy o modelowaniu konstrukcji rzeczywistej; w ten sposób tworzone modele nadają się szczególnie dobrze do przeprowadzenia analityz jakościowej.

Przedmiotem obecnej pracy będzie porównanie charakterystyk paru tego typu modeli

o kilku stopniach swobody, wyznaczonych metodą analityczno-numeryczną. Charakterystyki te mogą być następnie wykorzystane jako charakterystyki podłoża dla współpracujących z prętami (rurkami) płyt sitowych.

## 2. Modele

Na szczeblu przekroju modele zastępują przekrój rzeczywisty przez wielopunktowy (wielowarstwowy), co prowadzi do zastąpienia całkowania przez sumowanie. Jedynie przekrój dwupunktowy (teoretyczny dwuteownik) jest przy tym statycznie wyznaczalny (przy zginaniu w płaszczyźnie głównej) co umożliwia zarówno wyrażenie sił wewnętrznych przez naprężenia, jak i na odwrót, niezależnie od równań konstytutywnych. Zasady doboru zastępczych przekrojów wielopunktowych przy sprężysto-plastycznym zginaniu z siłą podłużną podał J. Orkisz [18, 19]; nieco inne podejście zaproponowali J. Krużelecki i W. Krzyś [15], ograniczając się do przypadku czystego zginania, ale uwzględniając możliwość wzmocnienia plastycznego. Zastosowanie koncepcji przekrojów zastępczych do obliczenia ugięć sprężysto-plastycznych wielopunktowych belek nierozciągliwych podali J. Orkisz i M. Życzkowski [20] (małe ugięcia) i [21] (duże ugięcia), belek rozciągliwych — Z. Waszczyszyn [29], łuków — M. Radwańska i Z. Waszczyszyn [22, 23].

Znacznie większe możliwości modelowania występują przy analizie pręta jako całości. Modele takie podzielimy na dwie grupy: nawiązujące do sztywnych elementów skończonych i nawiązujące do odkształcalnych elementów skończonych.

Metoda sztywnych elementów skończonych została opracowana w sposób ogólny przez J. Kruszewskiego [14], W. Gawrońskiego i J. Kruszewskiego [7, 8], głównie dla analizy drgań, jednak prostsze koncepcje tego typu w odniesieniu do zagadnień stateczności prętów są znacznie dawniejsze. Jako pierwszą należy tu wymienić rozprawę habilitacyjną H. Hencky'ego z r. 1920 [4], który wprowadził metodę „łańcucha o przegubach sprężystych”. Najbardziej znanym modelem tego typu jest model o jednym stopniu swobody (pręt sztywny, odkształcalny element skupiony w utwierdzeniu), podany przez H. Wagnera [28]. Analiza zjawisk flatteru wymaga modeli o conajmniej dwóch stopniach swobody; odpowiednie uogólnienie zaproponował H. Ziegler [30]. Stateczność modeli wykorzystujących sztywne elementy skończone była bardziej szczegółowo badana przez J. Naleszkiewicza [16], A. R. Rżanicyna [24], J. M. Thompsona i G. Hunta [27]. Bardziej złożone modele zaproponował A. Chajes [3].

W zakresie sprężystym lub liniowego pełzania modele o sztywnych elementach skończonych mogły bez trudu być łączone ze ścisłym, dowolnym kształtem przekroju pręta, gdyż kształt ten jest wtedy bez większego znaczenia: jest on wystarczająco scharakteryzowany momentem bezwładności  $I$  i polem powierzchni przekroju  $A$ . Sytuacja ulega zasadniczej zmianie przy nieliniowym pełzaniu lub w zakresie sprężysto-plastycznym. Wtedy najprostszymi modelami kombinuje długi element sztywny z krótkim elementem odkształcalnym o przekroju dwupunktowym (lub inaczej z dwoma krótkimi prętami odkształcalnymi). Model taki zaproponowali E. I. Ryder i F. R. Shanley [25]; miał on zasadnicze znaczenie dla rozwoju współczesnej teorii wyboczenia sprężysto-plastycznego. Zmodyfikowany model Shanley'ego analizują w swoich pracach G. Ballio, F. Perotti [1]—element odkształcalny ma wielopunktowy przekrój — oraz K. Kawashima, S. Kimura [11] — kilka sztywnych elementów połączonych odkształcalnymi elementami o przekroju

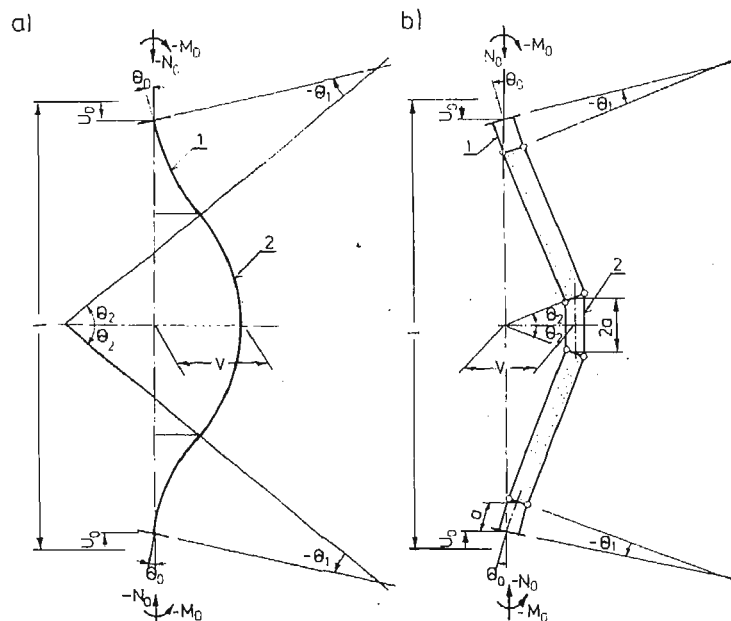
z jedną osią symetrii sprowadzonym do wielopunktowego. W niektórych przypadkach możliwe jest połączenie elementów sztywnych z elementami odkształcalnymi o danym, nie podlegającym uproszczeniu kształcie przekroju: C. R. Calladine [2], M. Życzkowski, A. Zaborski [34], K. Kowalczyk [13], K. Kawashima, S. Obata [12], S. Dorosz [6].

Model uwzględniający dwuosiowy stan naprężenia charakterystyczny dla utraty stateczności powłok, zaproponował M. Życzkowski [31]; dwuwarstwowy przekrój ułatwia analizę w zakresie niesprężystym.

Metoda odkształcalnych elementów skończonych, zaproponowana w formie ogólnej z końcem lat pięćdziesiątych, została dość szybko przystosowana do przybliżonej analizy stateczności prętów (B. J. Hartz [9], G. W. Hicks [10], D. A. Nethercot, K. C. Rockey [17]). Charakterystyczną dla modelu pogłębliwość a jednocześnie niezbędną prostotę w przypadku nieliniowości fizycznej materiału otrzymuje się jedynie w przypadku elementów o stałej krzywiznie, gdyż wtedy równanie konstytutywne wyprowadzone dla jednego przekroju obowiązuje w całym elemencie. Dwuelementowe (dwukrzywiznowe) modele tego typu będą analizowane w obecnej pracy; jeden element o stałej krzywiznie nie jest wystarczający, gdyż nie może opisać występujących w rzeczywistym przecie punktów przegięcia. Dodatkowo przyjęto, że punkt „zszycia” odkształcalnych elementów o różnych krzywiznach jest ustalony i określony parametrem  $\xi_0 = l_2/l$ .

Spośród wielu przedstawionych kombinacji modelu o odkształcalnych i sztywnych elementach skończonych z różnymi kształtami przekrojów w pracy przeprowadzono analizę:

- dwukrzywiznowego modelu o odkształcalnych elementach skończonych (OES) z dwupunktowym, prostokątnym i pierścieniowym przekrojem poprzecznym, rys. 1a;

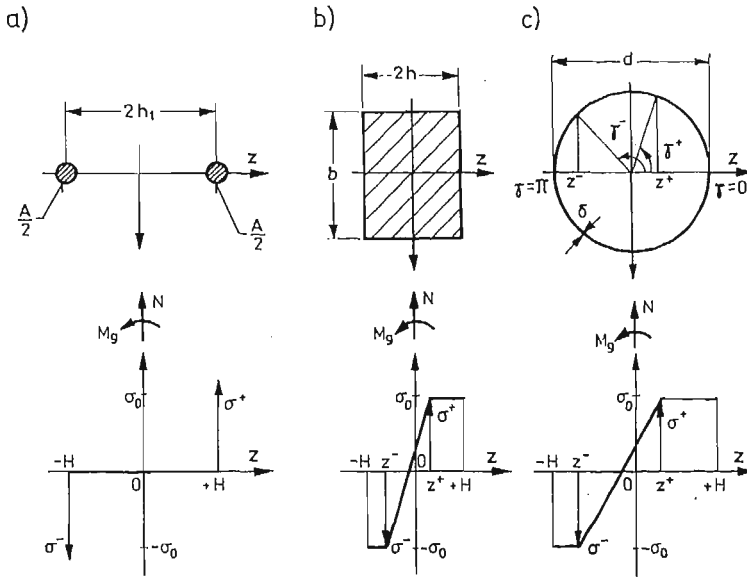


Rys. 1. Modele pręta: a) o odkształcalnych elementach skończonych (OES) b) o sztywnych elementach skończonych (SES)



— modelu o sztywnych elementach skończonych (SES) z dwupunktowym przekrojem elementu odkształcalnego, rys. 1b.

W modelu SES, dla opisu występujących w rzeczywistym pręcie punktów przegięcia trzeba wprowadzić dodatkowe elementy odkształcalne, w stosunku do modelu zaproponowanego przez F. R. Shanley'a [25]. Analizowane przekroje z wymiarami i charakterystycznymi wielkościami pokazano na rys. 2. Efektem analizy każdego z modeli jest określenie dla sprężysto-plastycznego zakresu pracy przekrojów zależności  $N_0(U_0, \Theta_0, \Delta T)$  i  $M_0(U_0, \Theta_0, \Delta T)$  i ich porównanie.



Rys. 2. Rozpatrywane kształty przekroju

K. Kawashima, S. Obata [12] i K. Kawashima, S. Kimura [11] analizowali pokrytyczne zachowanie się modelu pręta w stanie niesprężystym podając m.in. graficznie zależność siły  $N_0$  od strzałki ugięcia dla materiału ze wzmocnieniem. G. Ballio, F. Perotti [1] i S. Dorosz [6] podali również graficznie zależność  $N_0(U_0)$  przy cyklicznych obciążeniach modelu pręta wykonanego z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. W pracach tych modele obciążone są tylko siłą osiową (w [11] dodatkowo poprzeczną) przyłożoną do końców mających całkowitą swobodę obrotu.

W pracy obecnej oprócz siły osiowej uwzględniono skupiony na końcach moment, który spowodowany jest ograniczoną swobodą ich obrotu przyjmując, że każdy z czynników obciążenia zależy od przemieszczenia i kąta obrotu.

Do dalszych rozważań wprowadzono bezwymiarowe naprężenie, odkształcenie, krzywiznę, kąt obrotu przekroju, siłę podłużną, moment zginający i przyrost temperatury odnosząc odpowiednie wielkości do ich największej wartości w zakresie sprężystym przy jednoparametrowym obciążeniu (siła, moment lub temperatura działające z osobna):

$$\begin{aligned} s &= \sigma/\sigma_0, & e &= \varepsilon/\varepsilon_e, & u_0 &= 2U_0/(\varepsilon_e l), \\ k &= \kappa/\kappa_e, & \vartheta &= \Theta/\Theta_e, & n &= N/N_e, \\ m_0 &= M_0/M_{0e}, & \tau &= \Delta T/\Delta T_e, \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie:  $\varepsilon_e = \sigma_0/E$ ,  $\varkappa_e = \varepsilon_e/H$ ,  $\Theta_e = \frac{1}{2} \varkappa_e l$  (dla modelu OES),  $\Theta_e = 2\varkappa_e a$  (dla modelu

SES),  $N_e = \sigma_0 A$ ,  $M_{ge} = \zeta H N_e$ ,  $\Delta T_e = \varepsilon_e/\alpha$ ,  $\zeta = \frac{i^2}{H^2}$ ,

$A$  — pole powierzchni przekroju,

$H$  — pół wysokości bisymetrycznego przekroju,

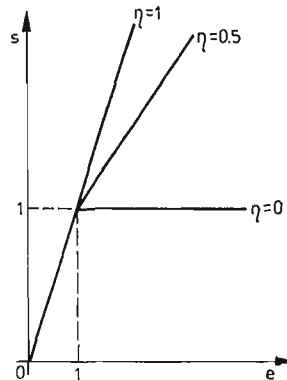
$i$  — promień bezwładności przekroju,

$\alpha$  — współczynnik rozszerzalności liniowej materiału modelu.

### 3. Zależności dla przekrojów

**3.1. Przekrój dwupunktowy.** Sprężysto-plastyczna analiza przekroju dwupunktowego jest znacznie prostsza niż dla przekrojów o polu rozłożonym w sposób ciągły. W skupionych polach występują stany czysto sprężyste lub czysto plastyczne a więc znika problem wyznaczenia granicy pomiędzy strefami. Z tego powodu można bez trudności wprowadzić do rozważań np. model ciała ze wzmocnieniem liniowym, rys. 3, dla którego prawo fizyczne ma postać

$$s = \eta e + (1 - \eta) \text{sign}(e). \quad (3.1)$$



Rys. 3. Zależność naprężenie-odkształcenie dla różnych wartości współczynnika wzmocnienia  $\eta$

Współczynnik wzmocnienia  $\eta = \frac{E_t}{E}$  przyjmuje wartość  $\eta = 1$  w zakresie odkształceń sprężystych ( $e \leq 1$ ) oraz w zależności od przyjętego modelu  $0 \leq \eta \leq 1$  w zakresie odkształceń plastycznych ( $e > 1$ ). Przekrój jako całość znajduje się w stanie sprężysto-plastycznym, gdy w jednym punkcie przekroju  $\eta = 1$  a w drugim  $\eta < 1$ .

Siła normalna i moment zginający w przekroju określone są przez naprężenia panujące w obu punktach  $z = +H$  i  $z = -H$ :

$$n = \frac{1}{2} (s^+ + s^-), \quad m_g = \frac{1}{2} (s^+ - s^-). \quad (3.2)$$

Podobnie odkształcenie osi geometrycznej i krzywizna osi obojętnej przekroju wyznaczone są przez odkształcenia występujące w tych punktach

$$e = \frac{1}{2} (e^+ + e^-), \quad k = \frac{1}{2} (e^+ - e^-). \quad (3.3)$$

**3.2. Przekrój prostokątny.** W częściowo uplastycznionym przekroju prostokątnym można wyodrębnić strefy odkształceń sprężystych i plastycznych. Granicę strefy plastycznej propagującej się od punktu  $\chi = \frac{z}{H} = -1$  oznaczmy przez  $\chi^-$  a strefy plastycznej propagującej się od punktu  $\chi = 1$  przez  $\chi^+$ , rys. 2b. W przypadku ciała sprężysto-idealnie plastycznego ( $\eta = 0$  dla  $e > 1$ ) siła normalna i moment zginający określone są zależnościami

$$n = \frac{1}{2} (s^+ + s^-) - \frac{1}{4} (s^+ - s^-)(\chi^+ + \chi^-), \quad (3.4)$$

$$m_\theta = \frac{1}{4} (s^+ - s^-)[3 - (\chi^+)^2 - \chi^+ \chi^- - (\chi^-)^2], \quad (3.5)$$

a odkształcenie osi geometrycznej i krzywizna osi obojętnej, M. Życzkowski [32]

$$e = -(s^+ \chi^- - s^- \chi^+) / (\chi^+ - \chi^-), \quad (3.6)$$

$$k = (s^+ - s^-) / (\chi^+ - \chi^-). \quad (3.7)$$

**3.3. Przekrój idealnie pierścieniowy.** Za A. G. Dorfmanem i S. D. Lejtiesem [5] przyjmujemy, że w przekroju idealnie pierścieniowym pole powierzchni skupione jest na okręgu o średnicy  $d$ . Wartość naprężenia w każdym punkcie przekroju zależy tylko od jego odleg-

łości od osi  $z = \frac{1}{2} d \cos \gamma$ . Dla określenia granicy stref wygodnie jest ze względu na kształt

przekroju posługiwać się kątem  $\gamma$ ,  $\gamma^+$  — gdy odkształcenia plastyczne rozprzestrzeniają się od punktu  $\gamma = 0$ ,  $\gamma^-$  — od punktu  $\gamma = \pi$ , rys. 2c. W przypadku ciała sprężysto-idealnie plastycznego wzory na siłę normalną, moment zginający, odkształcenie osi geometrycznej i krzywiznę osi obojętnej mają postać, A. G. Dorfman, S. D. Lejties [5]

$$n = s^- + \frac{1}{\pi} (s^+ - s^-)(\sin \gamma^- - \gamma^- \cos \gamma^- - \sin \gamma^+ + \gamma^+ \cos \gamma^+)(\cos \gamma^+ - \cos \gamma^-)^{-1}, \quad (3.8)$$

$$m_\theta = \frac{1}{\pi} (s^+ - s^-)(\gamma^- - \sin \gamma^- \cos \gamma^- - \gamma^+ + \sin \gamma^+ \cos \gamma^+)(\cos \gamma^+ - \cos \gamma^-)^{-1}, \quad (3.9)$$

$$e = -(s^+ \cos \gamma^- - s^- \cos \gamma^+)(\cos \gamma^+ - \cos \gamma^-)^{-1}, \quad (3.10)$$

$$k = (s^+ - s^-)(\cos \gamma^+ - \cos \gamma^-)^{-1}. \quad (3.11)$$

#### 4. Zależności dla modeli

**4.1. Model o odkształcalnych elementach skończonych.** Przybliżenie rzeczywistej linii ugięcia odcinkami łuków o stałych krzywiznach wymaga wprowadzenia dla każdego z nich siły normalnej i momentu zginającego o stałych wartościach takich, żeby skutki ich działania

były porównywalne z efektami wywołanymi rzeczywistym obciążeniem pręta. W pracy przyjęto, że zastępcze wartości w obu elementach są równoważne pod względem energetycznym, a mianowicie zdefiniujemy je z warunku równości wariacji pracy sił zewnętrznych

$$\delta L_z = N_e \varepsilon_e l (-n_0 \delta u_0 + \zeta m_0 \delta \vartheta_0) \quad (4.1)$$

i pracy sił wewnętrznych

$$\delta L_w = N_e \varepsilon_e l [(1 - 2\xi_0) n_1 \delta e_1 + 2\xi_0 n_2 \delta e_2 + \zeta m_{\theta 1} \delta \vartheta_1 + \zeta m_{\theta 2} \delta \vartheta_2]. \quad (4.2)$$

W tym celu należy przeprowadzić analizę uogólnionych przemieszczeń modelu. Wyrażenia na osiowe przemieszczenie końcowego przekroju modelu i strzałkę ugięcia środkowego przekroju wyprowadzono ze ścisłych związków geometrycznych po rozwinięciu występujących w nich funkcji kąta w szereg i pozostawieniu wyrazów co najmniej drugiego stopnia:

$\frac{\sin \Theta}{\Theta} \cong 1 - \frac{1}{6} \Theta^2$ ,  $\frac{1 - \cos \Theta}{\Theta} \cong \frac{1}{2} \Theta$ . Tak więc osiowe przemieszczenie z uwzględnieniem wpływu temperatury wyraża się wzorem

$$u_0 = \frac{1}{24} \zeta \varepsilon_e \lambda^2 [\vartheta_2^2 + (1 - 2\xi_0) \vartheta_0 \vartheta_2 + (1 - 2\xi_0) \vartheta_0^2] - [(1 - 2\xi_0) e_1 + 2\xi_0 e_2] - \tau, \quad (4.3)$$

a bezwymiarowa strzałka ugięcia (odniesiona do długości modelu  $l$ )

$$f = \frac{1}{8} \sqrt{\zeta} \varepsilon_e \lambda [(1 - 2\xi_0) \vartheta_0 + \vartheta_2]. \quad (4.4)$$

We wzorach tych  $\lambda = l/i$  jest smukłością modelu. Kąt obrotu końca modelu względem jego środka wyznaczamy z zależności:

$$\vartheta_0 = \vartheta_1 + \vartheta_2, \quad (4.5)$$

przy czym kąty obrotu przekroju końcowego i środkowego względem rozgraniczającego odkształcalne elementy związane są z ich krzywiznami

$$\vartheta_1 = (1 - 2\xi_0) k_1, \quad \vartheta_2 = 2\xi_0 k_2. \quad (4.6)$$

Wykorzystanie zależności (4.1) do (4.6) pozwala określić wartości zastępczych sił i momentów dla skrajnego i środkowego elementu

$$n_1 = n_2 = n_0, \quad (4.7)$$

$$m_{\theta 1} = m_0 - \frac{1}{24} \varepsilon_e \lambda^2 (1 - 2\xi_0) (2\vartheta_0 + \vartheta_2) n_0, \quad (4.8)$$

$$m_{\theta 2} = m_0 - \frac{1}{24} \varepsilon_e \lambda^2 [3(1 - 2\xi_0) \vartheta_0 + (3 - 2\xi_0) \vartheta_2] n_0. \quad (4.9)$$

Przytoczone równania (4.3) do (4.9) wraz z kompletem zależności dla każdego z przekrojów pozwalają wyznaczyć  $n_0$  i  $m_0$  dla zadanych  $u_0$ ,  $\vartheta_0$ ,  $\tau$ . W przypadku przekroju prostokątnego i pierścieniowego wyznaczenie charakterystyk modeli sprowadza się do znalezienia rozwiązania układu czterech równań nieliniowych ze względu na różne kombinacje czterech niewiadomych wielkości spośród ośmiu (czterech naprężeń i czterech granic

stref) w zależności od tego czy przekroje pracują sprężysto, czy są jedno- lub dwustronnie uplastycznione. Dla przekroju dwupunktowego można ten układ sprowadzić do jednego równania algebraicznego piątego stopnia ze względu na  $n_0$ .

We wzorach występuje parametr  $\xi_0$  decydujący o proporcjach długości odkształcalnych elementów skończonych. W pracy przeprowadzono analizę wpływu  $\xi_0$  na wartość siły krytycznej sprężystego modelu z przegubowo zamocowanymi i dwustronnie utwierdzonymi końcami. Różnice względne w odniesieniu do eulerowskich sił krytycznych dla obu przypadków zamocowania zamieszczono w tabelcy 1. W dalszych rozważaniach przyjęto wartość  $\xi_0 = 0.25$  zapewniającą najmniejszy błąd dla pręta dwustronnie utwierdzonego przy niewielkim błędzie dla przegubowo podpartego.

Tabela 1.

Błędy przybliżenia siły krytycznej dla modelu OES o dwóch elementach skończonych

$\xi_0$	$(P_{kr} - P_E)/P_E$	
	przeg.	utw.
0.10	+14,4%	+90,0%
0.20	+7,6%	+26,8%
0.25	+5,4%	+21,8%
0.30	+4,6%	+26,8%
2/3	+4,8%	+37,0%
0.40	+7,4%	+90,0%

4.2. Model o sztywnych elementach skończonych. Analiza symetrycznie obciążonego modelu z dwoma długimi elementami sztywnymi i trzema krótkimi elementami odkształcalnymi ( $\frac{a}{l} = \xi \ll 1$ ), rys. 1b, sprowadza się do wyznaczenia odkształceń w czterech rozciąganych lub ściskanych prętach odpowiadających dwu przekrojom dwupunktowym. Dla wyznaczenia tych odkształceń dysponujemy warunkami równowagi sił (4.7) i momentów

$$m_{g1} = m_0, \quad m_{g2} = m_0 - \lambda f n_0, \quad (4.10)$$

wyrażeniami wyprowadzonymi ze ścisłych zależności geometrycznych po przyjęciu takiej samej dokładności w rozwinięciach funkcji kąta jak w modelu OES

$$u_0 = 2\xi^2 \varepsilon_e \lambda^2 [(1 - 4\xi)\vartheta_2^2 + 2\xi\vartheta_0^2] - 2\xi(e_1 + e_2) - 4\xi\tau, \quad (4.11)$$

$$f = \xi \varepsilon_e \lambda [(1 - 4\xi)\vartheta_2 + 2\xi\vartheta_0] \quad (4.12)$$

i dodatkowo związkami

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} k_1, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{2} k_2. \quad (4.13)$$

Równania (4.10) do (4.13) wraz z kompletem zależności dla przekroju dwupunktowego można sprowadzić do równania piątego stopnia ze względu na  $n_0$  a więc dla zadanych  $u_0, \vartheta_0, \tau$  można wyznaczyć charakterystyki modelu  $n_0(u_0, \vartheta_0, \tau)$  i  $m_0(u_0, \vartheta_0, \tau)$ .

### 5. Ścisłe rozwiązania w zakresie sprężystym

Ścisłe rozwiązania zlinearyzowanego równania dla pręta obciążonego siłą osiową i momentem zginającym na obu końcach w zakresie sprężystym (S. Timoshenko, J. Gere [26]) po uwzględnieniu wpływu zmian temperatury na osiowe przemieszczenie przekrojów i wprowadzeniu analogicznie jak dla modeli wielkości bezwymiarowych (w tym przypadku oznaczonych wężykiem) mają postać:

— w przypadku zginania ze ściskaniem

$$\tilde{n}_0 - \frac{1}{8} \zeta \tilde{\varepsilon}_e \tilde{\lambda}^2 \frac{kl - \sin kl}{kl(1 - \cos kl)} \tilde{\vartheta}_0^2 + (\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}) = 0, \quad (5.1)$$

$$\tilde{m}_0 = \frac{1}{2} \frac{kl \sin kl}{1 - \cos kl} \tilde{\vartheta}_0; \quad (5.2)$$

— w przypadku zginania z rozciąganiem

$$\tilde{n}_0 - \frac{1}{8} \zeta \tilde{\varepsilon}_e \tilde{\lambda}^2 \frac{kl - \operatorname{sh}(kl)}{kl[1 - \operatorname{ch}(kl)]} \tilde{\vartheta}_0^2 + (\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}) = 0, \quad (5.3)$$

$$\tilde{m}_0 = -\frac{1}{2} \frac{kl \operatorname{sh}(kl)}{1 - \operatorname{ch}(kl)} \tilde{\vartheta}_0, \quad (5.4)$$

gdzie:

$$kl = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_e \tilde{\lambda}^2 |\tilde{n}_0|}.$$

Rozwiązanie równań (5.1) do (5.4) pozwala wyznaczyć charakterystyki  $\tilde{n}_0 = \tilde{n}_0(\tilde{u}_0, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{\tau})$  i  $\tilde{m}_0 = \tilde{m}_0(\tilde{u}_0, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{\tau})$  dla ciała idealnie sprężystego co odpowiada przyjęciu  $\eta = 1$  dla modelu z liniowym wzmocnieniem.

### 6. Warunki odpowiedniości modeli

Końcowym efektem przeprowadzonej analizy jest porównanie w sprężysto-plastycznym zakresie charakterystyk wszystkich modeli i dodatkowo zweryfikowanie ich ze ścisłym rozwiązaniem kryterialnego pręta (pręt o przekroju idealnie pierścieniowym) dla czysto sprężystych odkształceń. W tym celu należy tak dobrać proporcje między parametrami modeli i kryterialnego pręta, aby zapewnić spełnienie kilku wybranych warunków. W pracy przyjęto, że pręt i jego modele mają taką samą (1) nośność sprężystą przy rozciąganiu i ściskaniu, (2) siłę krytyczną, (3) sztywność na rozciąganie i (4) sztywność na zginanie. Zrezygnowano ze spełnienia warunku równości nośności sprężystej przy zginaniu, ponieważ powodował przesztynienie układu równań uniemożliwiając dobór parametrów geometrycznych i fizycznych modeli.

Wartość siły krytycznej a tym samym proporcje liczbowe pomiędzy parametrami geometrycznymi i fizycznymi porównywanych obiektów zależą od sposobu zamocowania końców. Przeprowadzona pod tym kątem analiza modelu dwukrzywiznowego wykazała, tablica 1, że różnica wartości siły krytycznej modelu i eulerowskiej pręta w przypadku przegubowo zamocowanych końców nie przekracza 6%, natomiast w przypadku obustronnego utwierdzenia dochodzi do 22%. W konsekwencji zdecydowano, że dobrane parametry mają zapewnić zgodność sił krytycznych pręta i modeli z utwierdzonymi końcami.

Oczywisty dla modelu OES warunek sztywności na zginanie w przypadku modelu SES wymaga objaśnienia. W pracy przyjęto, że będzie on spełniony gdy strzałki ugięcia pod siłą przyłożoną w środku długości obustronnie utwierdzonego pręta i modelu są w zakresie sprężystym równe.

W dalszych rozważaniach przyjęto, że zgodność nośności sprężystych przy rozciąganiu i sił krytycznych pręta kryterialnego i modeli ma być zachowana z osobna dla przypadku obciążenia siłą osiową i dla przypadku obciążenia temperaturą (nieobciążony siłą pręt pomiędzy dwoma sztywnymi ścianami). Z pierwszego warunku wynikają takie same dla modeli OES i SES związki

$$A\sigma_0 = \tilde{A}\tilde{\sigma}_0, \quad \frac{\varepsilon_e}{\tilde{\varepsilon}_e} = \frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}. \quad (6.1)$$

Spełnienie pozostałych warunków daje zależności pomiędzy smukłościami, promieniami bezwładności i maksymalnymi odkształceniami sprężystymi modeli i pręta kryterialnego: — w przypadku modelu OES

$$\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} = \left(\frac{12}{\pi^2}\right)^{3/4}, \quad \frac{i}{\tilde{i}} = \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{1/4}, \quad \frac{\varepsilon_e}{\tilde{\varepsilon}_e} = \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{1/2}; \quad (6.2)$$

— w przypadku modelu SES

$$\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{i}{\tilde{i}} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{3}}, \quad \frac{\varepsilon_e}{\tilde{\varepsilon}_e} = \frac{3}{\pi^2\xi}. \quad (6.3)$$

W powyższych wzorach wielkości bez wężyka charakteryzują modele, z wężykiem — pręt kryterialny i zdefiniowane są zależnościami (2.1). Spełnienie czterech wymienionych warunków odpowiedniości nie wymaga jednoznacznego określenia proporcji  $A/\tilde{A}$  i  $\sigma_0/\tilde{\sigma}_0$  byle zachowana była pierwsza z równości (6.1).

## 7. Obliczenia numeryczne dla modeli

Charakterystyki modeli  $n_0(u_0, \vartheta_0, \tau)$  i  $m_0(u_0, \vartheta_0, \tau)$  w zakresie sprężysto-plastycznych odkształceń zostały określone numerycznie dla modelu OES z dwupunktowym, prostokątnym i idealnym przekrojem pierścieniowym oraz dla modelu SES z dwupunktowym przekrojem po przyjęciu  $\xi = 0.025$ . Parametry geometryczne i fizyczne modeli zostały dobrane zgodnie z warunkami (6.1), (6.2), (6.3) przy założeniu, że granice plastyczności materiału i modeli i pręta kryterialnego są równe  $\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0$ . Obliczenia przeprowadzono dla  $\tilde{\varepsilon}_e = 0.001$  (wartość odpowiadająca dużej grupie węglowych stali konstrukcyjnych) w technicznie ważnym zakresie smukłości  $100 \leq \tilde{\lambda} \leq 300$ .

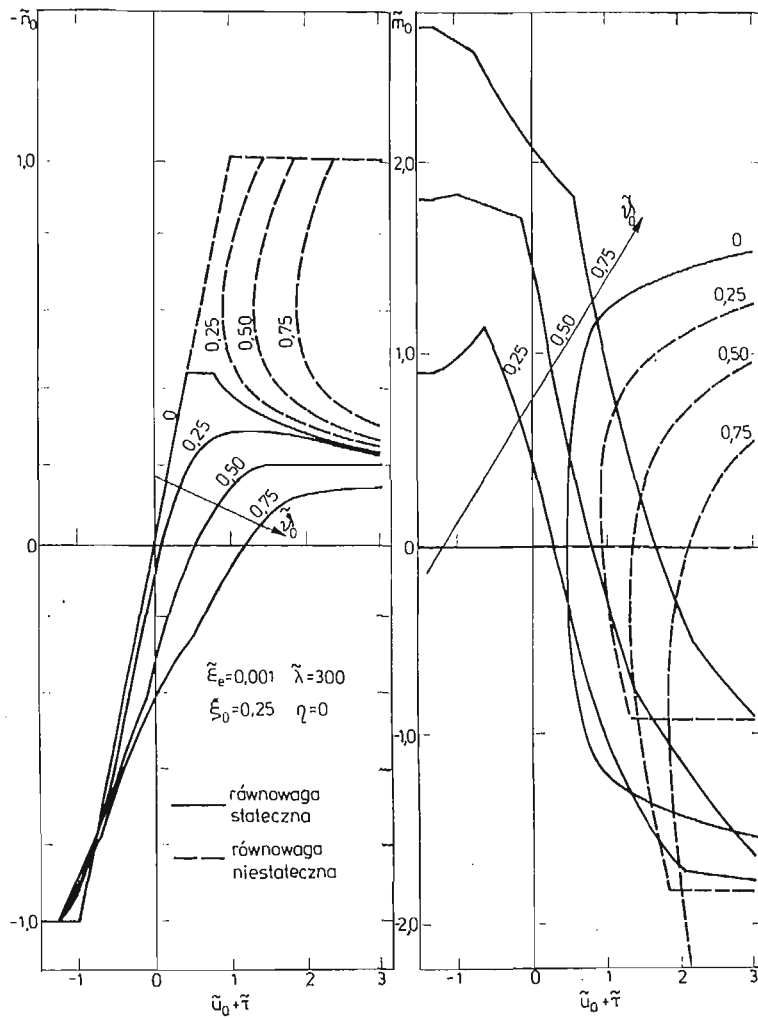
Układy równań nieliniowych (tego samego typu dla wszystkich modeli) rozwiązywano doliczając wartości siły i momentu na końcach modeli  $n_0$ ,  $m_0$  do zadanego przemieszczenia i kąta obrotu końcowego przekroju  $u_0 + \tau$ ,  $\vartheta_0$ . Wyniki obliczeń przedstawiono głównie w postaci wykresów  $\tilde{n}_0(\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}, \tilde{\vartheta}_0)$  i  $\tilde{m}_0(\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}, \tilde{\vartheta}_0)$  przyjmując jako zmienną niezależną przemieszczenie osiowe końcowego przekroju pręta kryterialnego ( $\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}$ ) a jego kąt obrotu  $\tilde{\vartheta}_0$  traktując jako parametr. W tym celu przeliczono odpowiednie wielkości wykorzystując ich definicje (2.1) i warunki (6.1) do (6.3); dla modelu OES  $\tilde{n}_0/n_0 = 1$ ,  $\tilde{m}_0/m_0 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \xi\right)^{1/2}$ ,  $\tilde{u}_0/u_0 = 1$ ,  $\tilde{\tau}/\tau = 1$ ,  $\tilde{\vartheta}_0/\vartheta_0 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{\pi} \xi\right)^{1/2}$  oraz dla modelu SES  $\tilde{n}_0/n_0 = 1$ ,  $\tilde{m}_0/m_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$ ,  $\tilde{u}_0/u_0 = \frac{1}{4\xi}$ ,  $\tilde{\tau}/\tau = 1$ ,  $\tilde{\vartheta}_0/\vartheta_0 = \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2}$ . Charakterystyki sił są funkcjami parzystymi względem  $\tilde{\vartheta}_0$ , a charakterystyki momentów — nieparzystymi.

## 8. Analiza wyników i wnioski

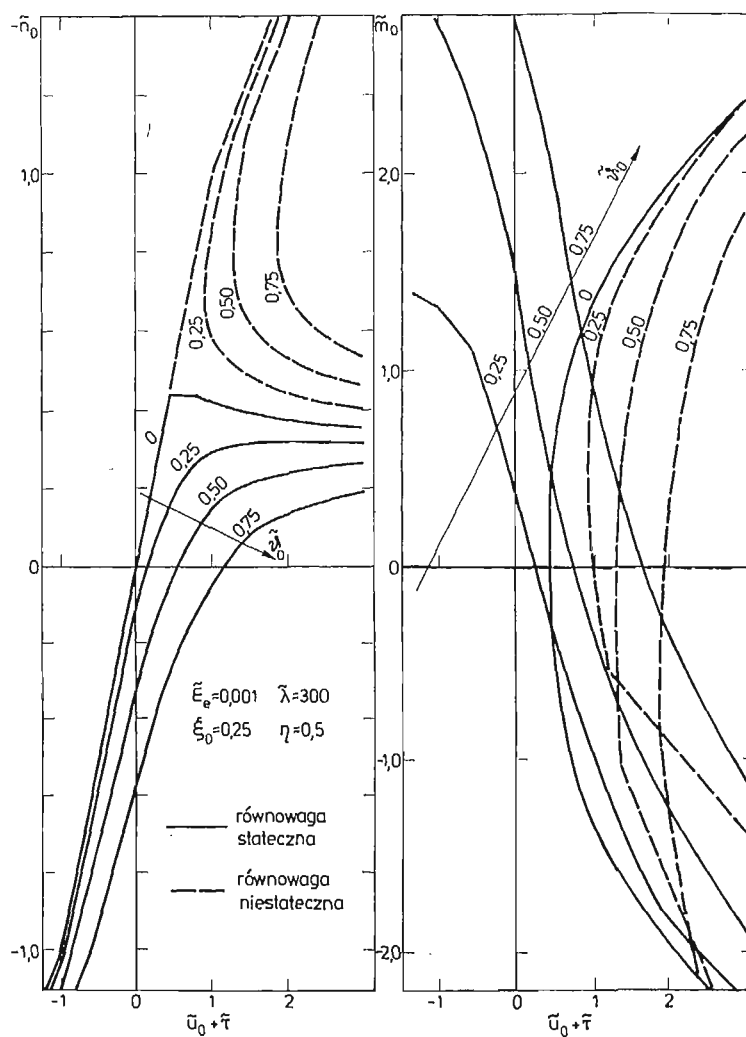
**8.1. Jednoznaczność rozwiązania układu równań.** Analizując zachowanie się pręta sztywno utwierdzonego na obu końcach ( $\tilde{\vartheta}_0 = 0$ ) przy równoczesnym wymuszeniu ich przemieszczenia osiowego można stwierdzić, że w zakresie przemieszczeń mniejszych od wartości odpowiadającej eulerowskiej sile krytycznej istnieje tylko jedna postać równowagi — prostoliniowa. Dla przemieszczeń większych następuje utrata stateczności i możliwe są trzy postacie: dwie stateczne równouprawnione (przeciwnie wygięte) i jedna niestateczna (prostoliniowa). W przypadku prętów, których końcowe przekroje obrócone są o zadany kąt ( $\tilde{\vartheta}_0 \neq 0$ ) zaistnieje podobna sytuacja. Jedna postać równowagi występuje dla przemieszczeń mniejszych od pewnej wartości granicznej uzależnionej od kąta  $\tilde{\vartheta}_0$  i trzy różne postacie dla większych przemieszczeń, spośród których tylko jedna jest stateczna. Spostrzeżenia te znajdują potwierdzenie w wynikach obliczeń numerycznych modeli wykonanych w ramach obecnej analizy. Układy równań nieliniowych posiadają jeden pierwiastek w zakresie przemieszczeń mniejszych od granicznego oraz trzy różne dla przemieszczeń większych. Przykładowo pokazano wyniki obliczeń modelu OES z przekrojem dwupunktowym wykonanego z materiału bez wzmocnienia  $\eta = 0$ , rys. 4, ze wzmocnieniem liniowym  $\eta = 0.5$ , rys. 5 oraz idealnie sprężystego  $\eta = 1$ , rys. 6, dla smukłości pręta kryterialnego  $\tilde{\lambda} = 300$ . We wszystkich tych przypadkach przyjęto, że rozwiązaniami odpowiadającymi statecznym formom równowagi są te, które dają najmniejsze wartości bezwzględne sił ściskających (zaznaczone ciągłą linią). W dalszych obliczeniach porównawczych uwzględniono tylko te rozwiązania uważając, że są one poszukiwanymi przez nas charakterystykami modeli. Widoczne w przypadku ciał sprężysto-plastycznych załamania charakterystyk zarówno sił jak i momentów spowodowane są uplastycznieniami kolejnych punktów. W przypadku przekrojów o polu rozłożonym w sposób ciągły załamania te są znacznie mniej wyraźne.

Dla statecznej formy równowagi modelu pokazano bardziej typowe zależności: siły osiowej od strzałki ugięcia dla różnych wartości  $\tilde{\vartheta}_0$ , rys. 7 i momentu skupionego od

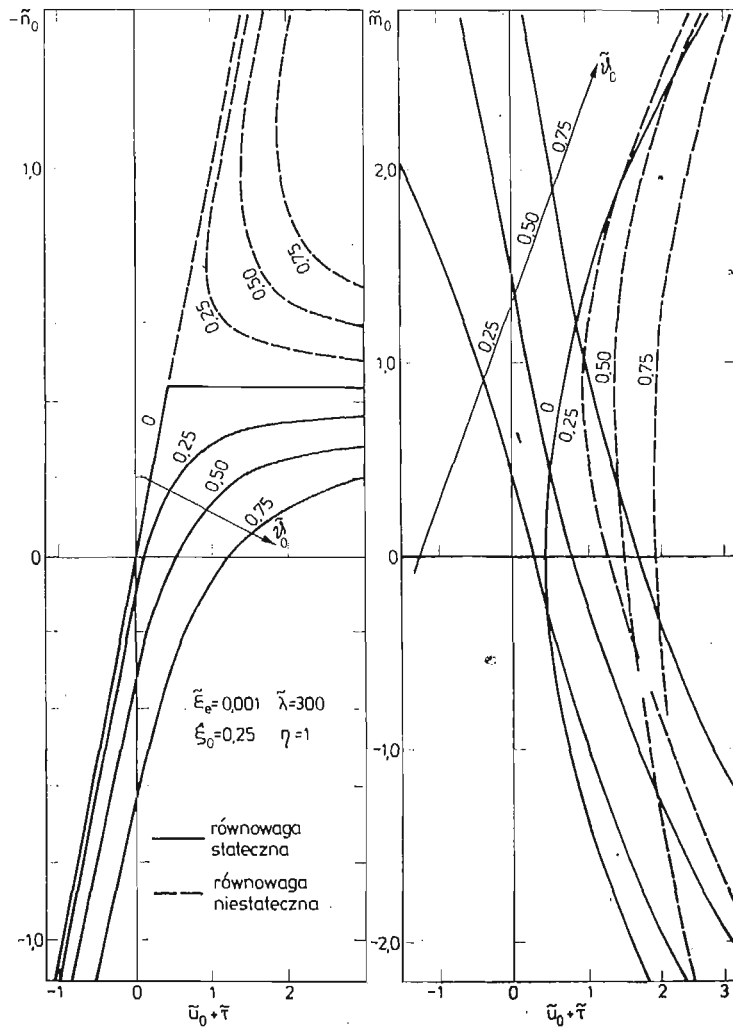




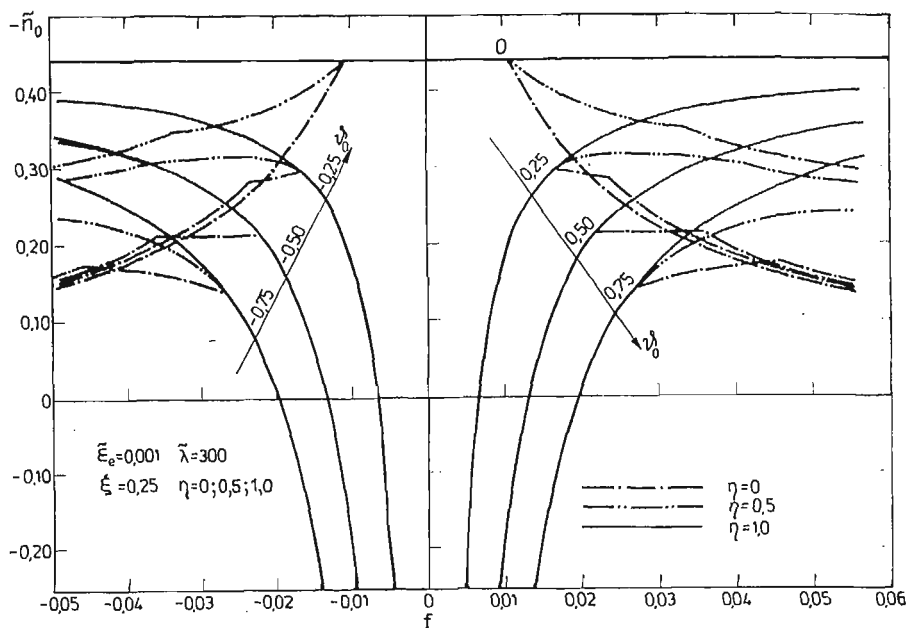
Rys. 4. Charakterystyki sił i momentów dla statecznych i niestatecznych form równowagi modelu OES — materiał bez wzmocnienia,  $\eta = 0$



Rys. 5. Charakterystyki sił i momentów dla statecznych i niestatecznych form równowagi modelu OES, materiał ze wzmocnieniem liniowym,  $\eta = 0,5$



Rys. 6. Charakterystyki sił i momentów dla statecznych i niestatecznych form równowagi modelu OES, materiał sprężysty,  $\eta = 1$

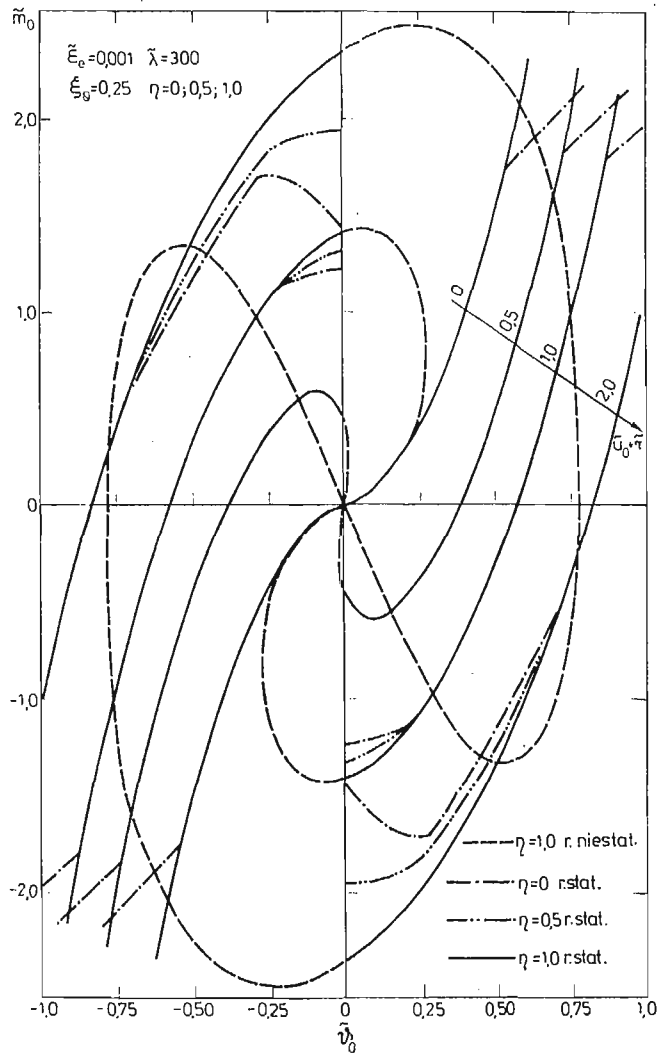


Rys. 7. Zależność siła-strzałka ugięcia dla statecznej formy równowagi modelu OES'

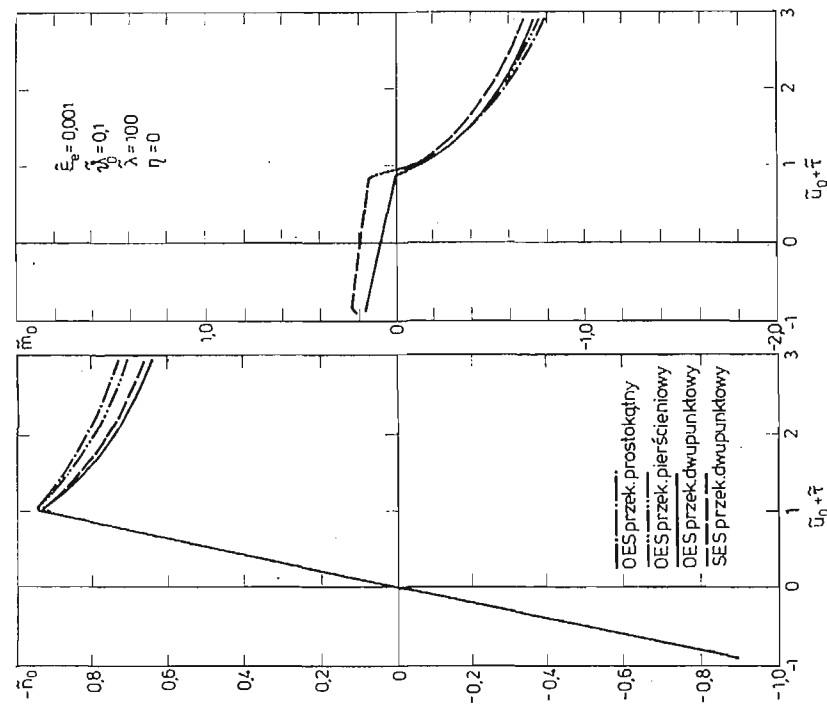
kąta dla różnych wartości  $\tilde{u}_0 + \tilde{z}$ , rys. 8. Na rysunkach tych zestawiono wyniki obliczeń dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego, ze wzmocnieniem liniowym  $\eta = 0.5$  i sprężystego  $\eta = 1$ . Dla przypadku modelu ze sprężystego materiału zależność momentu od kąta obrotu, rys. 8 pokazano dla statecznych i niestatecznych form równowagi.

Na podstawie wyników obliczeń modeli dla ciała idealnie sprężystego można wysnuć wniosek, że przyjęta dokładność w wyrażeniach na  $u_0$  (4.3) i (4.11) jest niewystarczająca dla dokładnego opisu stanu pokrytycznego (bezwzględna wartość siły ściskającej nie zmienia się ze wzrostem przemieszczenia a wg dokładniejszych teorii powinna rosnać [33]).

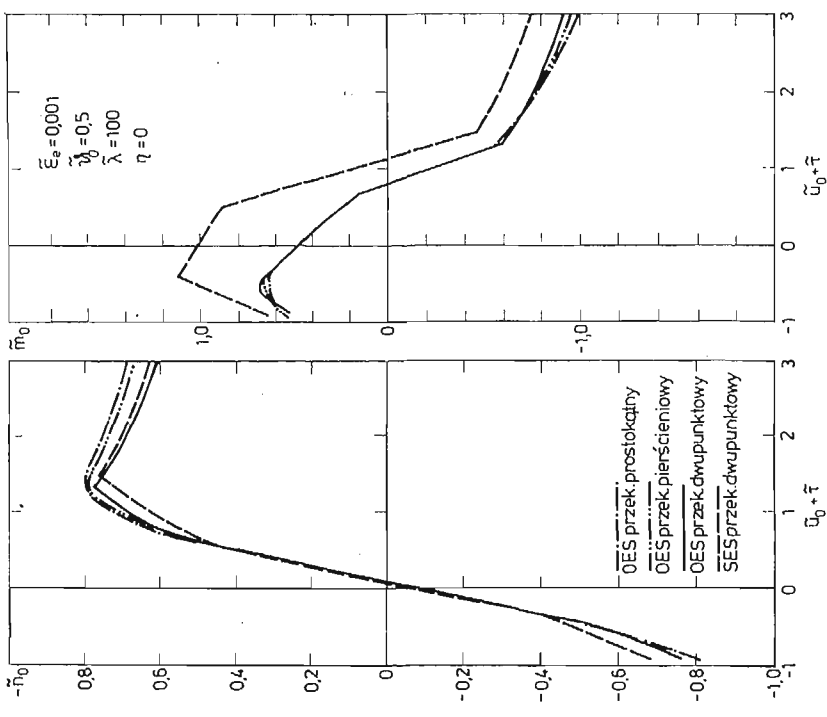
**8.2. Porównanie dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego  $\eta = 0$ .** Dla prętów o smukłościach małych i średnich ( $\tilde{\lambda} \leq 200$ ) zależność siły od przemieszczenia osiowego ma ekstremum w zakresie sił ściskających w przebadanym przedziale zmienności kąta  $\tilde{\vartheta}_0$ . Ekstremalna wartość bliska sile uplastyczniającej dla małych smukłości i kątów obrotu, rys. 9, obniża się i przesuwa: ze wzrostem kąta w kierunku większych przemieszczeń, rys. 10, ze wzrostem smukłości w kierunku mniejszych, rys. 11. Różnice ilościowe znikome w zakresie sprężystym są wyraźniejsze w zakresie sprężysto-plastycznym; po osiągnięciu ekstremum w obszarze zginania ze ściskaniem zwiększają się ze wzrostem przemieszczenia. W tym zakresie znaczące różnice występują pomiędzy modelami o przekrojach dwupunktowych i modelami o przekrojach ciągłych dających większe wartości sił. Po stronie sprężysto-plastycznego rozciągania zauważalne różnice występują dla większych kątów ( $\tilde{\vartheta}_0 = 0.5$ ) pomiędzy modelami OES i SES, rys. 10,12. Znikają one przy pełnym uplastycznieniu modeli przez rozciąganie. Dla smukłych prętów przy małych kątach, rys. 11, największe różnice występują w okolicy ekstremum. W tym przypadku modele o dwupunktowych przekrojach dają większe wartości sił. Dla wzrastających wartości kąta, rys. 12, wyraźnie



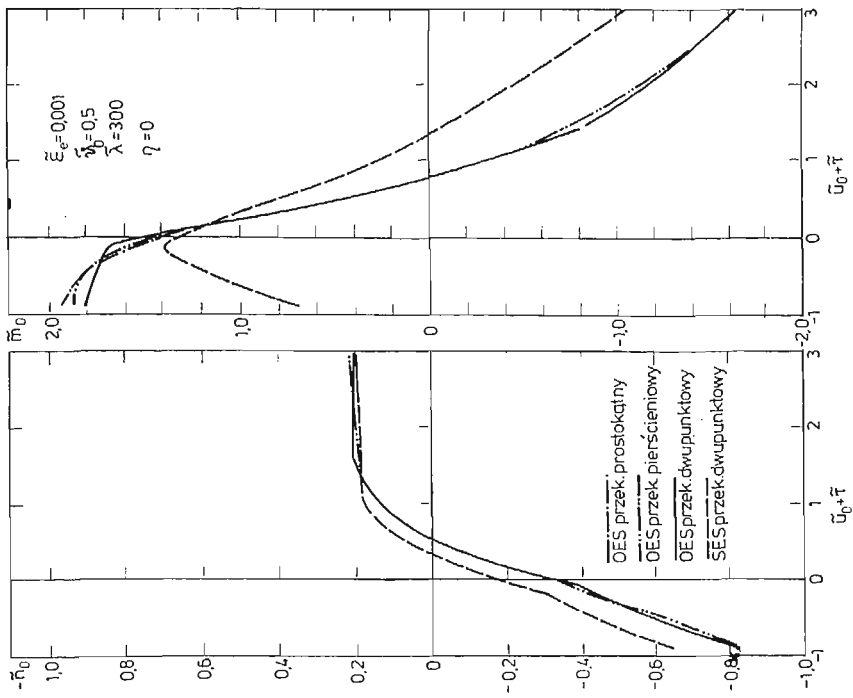
Rys. 8. Zależność moment-kąt obrotu dla różnych form równowagi modelu OES



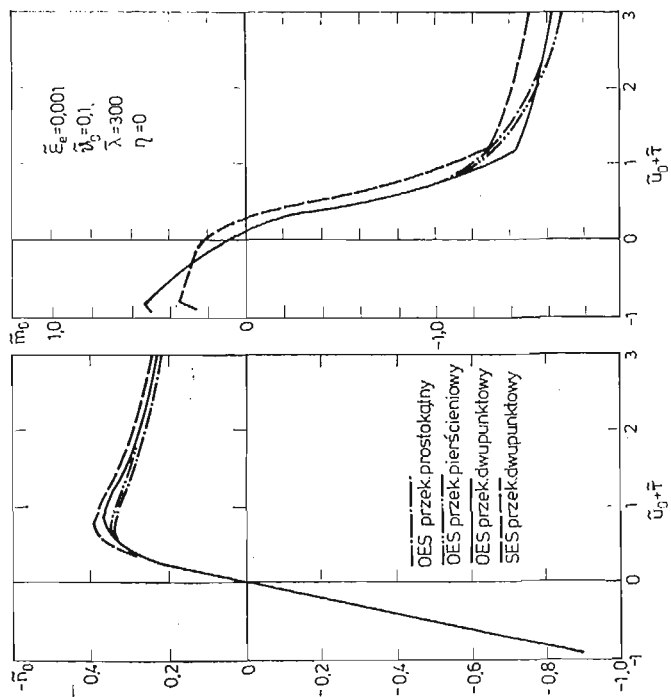
Rys. 9. Porównanie charakterystyk dla materiału bez wzmocnienia, mały kąt obrotu, mała smukłość



Rys. 10. Porównanie charakterystyk dla materiału bez wzmocnienia, duży kąt obrotu, mała smukłość



Rys. 11. Porównanie charakterystyk dla materiału bez wzmocnienia, mały kąt obrotu, duża smukłość



Rys. 12. Porównanie charakterystyk dla materiału bez wzmocnienia, duży kąt obrotu, duża smukłość

wzrastają różnice pomiędzy modelami SES i OES w obszarze małych przemieszczeń zarówno po stronie ściskania jak i rozciągania.

Zależność momentu od przemieszczenia osiowego dla każdego modelu wykazuje ekstremum w zakresie sprężysto-plastycznego zginania z rozciąganiem rys. 9, 10, 11. W zakresie zginania ze ściskaniem istnieje wartość przemieszczenia osiowego, przy której moment się zeruje, co odpowiada przegubowemu zamocowaniu pręta. Dla mniejszych przemieszczeń moment ma znak dodatni (krzywizny w obu elementach są tego samego znaku); dla większych moment staje się ujemny (krzywizny elementów są przeciwnego znaku) co odpowiada w ogólnym przypadku nieszywnemu utwierdzeniu. Różnice ilościowe pomiędzy modelami OES są w zasadzie niewielkie. W zakresie niesprężystego zginania ze ściskaniem wyraźnie zaczynają narastać począwszy od pewnej wartości przemieszczenia ( $\tilde{u}_0 + \tilde{\tau} > 3$ ). W zakresie niesprężystego zginania z rozciąganiem zauważalne różnice występują w pobliżu ekstremum.

Przebieg zmienności momentu ze zmianą przemieszczenia dla modelu SES jest inny niż dla modelu OES, wykazuje jednak we wszystkich przeliczonych przypadkach wspólną cechę, którą jest przesunięcie miejsca zerowego w kierunku większych przemieszczeń w porównaniu do modeli OES. Porównanie ilościowe można zrobić np. przyjmując za wspólny przypadek przegubowego podparcia. Przy małych smukłościach ( $\tilde{\lambda} = 100$ ) model SES daje większe wartości momentu niż model OES praktycznie w całym zakresie sprężysto-plastycznego zginania z rozciąganiem i ściskaniem. Dla większych smukłości ( $\tilde{\lambda} = 300$ ) prawidłowość ta utrzymuje się w zakresie ujemnych wartości momentu, natomiast w zakresie dodatnich wartości model SES daje mniejsze momenty niż model OES. Przy pełnym uplastycznieniu modeli przez rozciąganie wartość momentu dla OES ustala się na pewnym poziomie zależnym od smukłości i kąta, natomiast dla SES wynosi zero. Rozbieżność ta jest spowodowana różnymi metodami określenia momentów zginających w odkształcalnych elementach: energetyczną — dla OES i kollokacyjną dla SES.

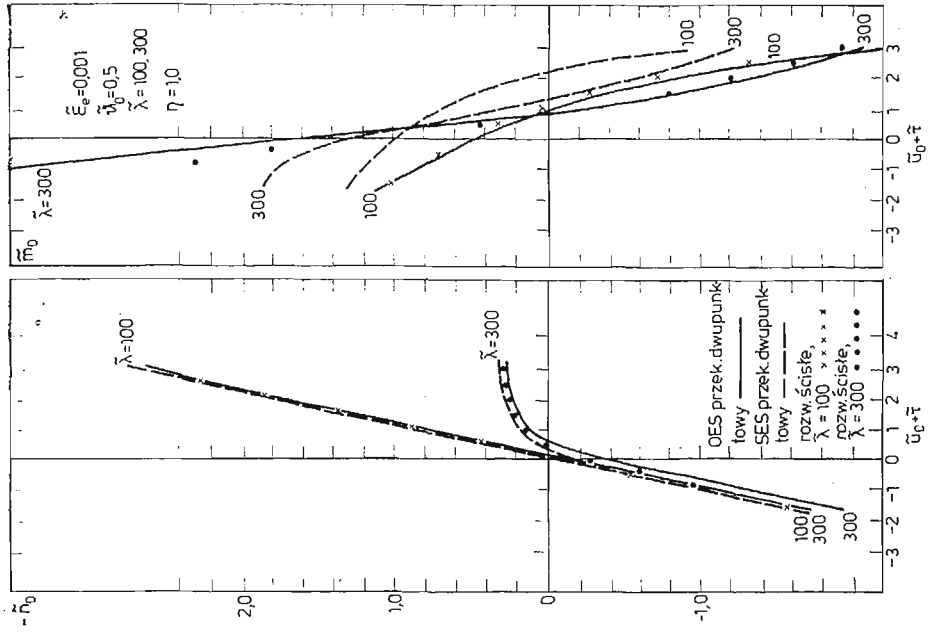
**8.3. Porównanie dla materiału z liniowym wzmocnieniem.** Wyniki obliczeń przeprowadzonych dla modeli OES i SES z dwupunktowymi przekrojami pokazano na rys. 13 dla  $\eta = 0.5$  i na rys. 14 dla  $\eta = 1$ . Zależności siły od przemieszczenia dla obu modeli są bardzo zbliżone do siebie. Znaczące różnice można zaobserwować dopiero dla dużych smukłości i kątów  $\tilde{\lambda} = 300$ ,  $\tilde{\vartheta}_0 = 0.5$ , rys. 13, 14.

Charakter zależności momentu od przemieszczenia jest bardzo różny dla obu modeli. Cechy wspólne to zmiana znaku momentu z dodatniego na ujemny i monotoniczne malenie z dalszym wzrostem przemieszczenia. W przypadku przyjęcia za wyjściowy stan przegubowego podparcia modeli prawidłowości wskazane dla materiału bez wzmocnienia tracą swoją aktualność ze wzrostem współczynnika wzmocnienia.

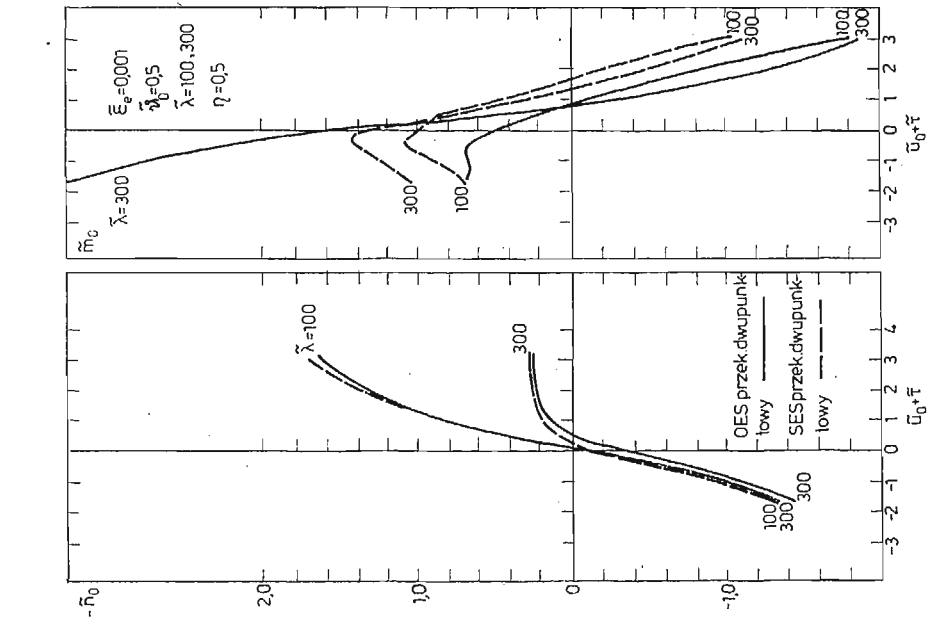
Porównanie wyników obliczeń obu modeli ze ścisłym rozwiązaniem sprężystym rys. 14 wskazuje, że dla ciała idealnie sprężystego zarówno model OES i SES nieźle odwzorowują zależność siły od przemieszczenia w przebadanym zakresie zmienności smukłości i kąta. Wartości sił określone przy pomocy modelu SES są nieznacznie większe od rozwiązania ścisłego.

Model OES natomiast znacznie lepiej przybliża ścisłą zależność momentu od przemieszczenia aczkolwiek przybliżenie to jest gorsze niż dla sił.





Rys. 13. Porównanie charakterystyk dla materiału ze wzmocnieniem liniowym  $\eta = 0.5$ , duży kąt obrotu



Rys. 14. Porównanie charakterystyk dla materiału sprężystego  $\eta = 1$ , duży kąt obrotu

## 9. Wnioski

1. Analizowane modele nadają się dość dobrze do wyznaczenia globalnych zależności  $\tilde{n}_0 = \tilde{\Psi}_1(\tilde{u}_0, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{\tau})$  i  $\tilde{m}_0 = \tilde{\Psi}_2(\tilde{u}_0, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{\tau})$ . Lokalna analiza odkształceń i naprężeń pręta w oparciu o nie może prowadzić nawet do jakościowych błędów, np. w modelu OES ze wzrostem siły rozciągającej krzywizna środkowego elementu zmienia znak. Spowodowane to jest ustaleniem punktu zszycia obu elementów. Model SES nie wykazuje takich efektów.
2. Wyznaczone charakterystyki są silnie nieliniowe względem przemieszczenia osiowego i kąta obrotu w interesującym pod kątem praktycznego zastosowania przedziale zmienności  $-3 < \tilde{u}_0 + \tilde{\tau} < 5$ . O ile nieliniowość względem  $\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}$  występuje dla każdego z przebadanych kątów to dla niektórych wartości przemieszczenia siła i moment są praktycznie liniowo zależne od  $\tilde{\vartheta}_0$ .
3. Wpływ zmiany kąta na wartość siły oraz przemieszczenia osiowego na wartość momentu jest duży. Nie uwzględnienie go może prowadzić do znacznych błędów, zatem podłoże utworzone przez rodzinę prętów (rurek) powinno być traktowane jako „podłoże momentowe”.
4. Przewidując wykorzystanie modeli do opisu zachowania się rurkowego podłoża płyt sitowych istotne znaczenie ma skala trudności rozwiązywania problemu. Pod tym względem przewagę mają modele o dwupunktowych przekrojach, dla których układy równań nieliniowych dają się sprowadzić do algebraicznego równania piątego stopnia. Występująca dla każdego z modeli zmiana znaku momentu na końcach ze wzrostem przemieszczenia upoważnia do przypuszczenia, że podłoże płyt sitowych lokalnie (np. w wyniku utraty stateczności) zmieni się z podtrzymującego w dociążające.
5. Otrzymane charakterystyki modeli dla zakresu sprężysto-plastycznych odkształceń, jak również porównanie ich ze ścisłym rozwiązaniem w zakresie sprężystym wskazują, że do dalszego zastosowania najbardziej nadaje się model OES o przekroju dwupunktowym. Daje on lepsze przybliżenia od modelu SES przy takim samym stopniu trudności rozwiązania problemu (mniejszym niż w przypadku pierścieniowego i prostokątnego przekroju).

## Literatura

1. G. BALLIO, F. PEROTTI, *A finite element describing axially loaded members subjected to cyclic loads*, EUROMECH COLL. 174, Palermo 1983, COGRAS, Palermo 1984, 67 - 78.
2. C. R. CALLADINE, *The effect of cross-section on the creep buckling behaviour of columns*, Int. J. Mech. Sci., 4 (1962), 387 - 407.
3. A. CHAJES, *Stability behavior illustrated by simple models*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 95 (1969), 6, 1153 - 1172.
4. P. CSONKA, *Die Knickung geradachsiger Stäbe bei Behandlung mit der Methode der elastischen Punkte*, Acta Technica Acad. Sci. Hung., XII (1955), 3 - 4, 275 - 287.
5. А. Г. Дорфман, С. Д. Лейтес, *Об устойчивости внецентрично сжатых трубчатых стержней из упруго-пластического материала*, Инж. журн., 4 (1964), 1, 134 - 140.
6. S. DOROSZ, *The hysteretic behaviour of the bar under cyclic axial loading*, EUROMECH COLL. 174, Palermo 1983, COGRAS, Palermo 1984, 357 - 376.

7. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do analizy drgań złożonych układów liniowych*, Rozpr. Inż., **20** (1972), 2, 601 - 612.
8. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Analiza drgań wymuszonych złożonych układów liniowych metodą sztywnych elementów skończonych*, Arch. Bud. Maszyn, **19** (1972), 4, 623 - 641.
9. B. J. HARTZ, *Matrix formulation of structural stability problems*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., **91** (1965), 141 - 157.
10. G. W. HICKS, *Finite-element elastic buckling analysis*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., **93** (1967), 6, 71 - 86.
11. K. KAWASHIMA, S. KIMURA, *Load-carrying capacity of inelastic columns in the post-buckling range*, 25<sup>th</sup> Polish Solid Mech. Conf., Jachranka, 1984.
12. K. KAWASHIMA, S. OBATA, *Reversed yield and plastic buckling*, J. Eng. Mech., **110** (1984), 6, 1005 - 1010.
13. K. KOWALCZYK, *Powierzchnie graniczne dla modelu sprężysto-plastycznego pręta przy uwzględnieniu zmian geometrii*, Mech. Teor. i Stos., **17** (1979), 2, 203 - 215.
14. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zesz. Nauk. Pol. Gdańskiej, Mechanika, **12**, 1971.
15. J. KRUŻELECKI, W. KRZYŚ, *Nowa metoda doboru zastępczego przekroju wielopunktowego w analizie sprężysto-plastycznego zginania*, Rozpr. Inż., **26** (1978), 2, 291 - 306.
16. J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN, W-wa 1958.
17. D. A. NETHERCOT, K. C. ROCKEY, *Finite element solutions for the buckling of columns and beams*, Int. J. Mech. Sci., **13** (1971), 945 - 949.
18. J. ORKISZ, *Principles of choosing a multipointed equivalent cross-section for elastic-plastic beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **10** (1962), 10, 405 - 414.
19. J. ORKISZ, *Interaction curves for multi-point equivalent cross-sections of elastic-plastic beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **10** (1962), 11, 451 - 460.
20. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Differential equations of elastic-plastic bending of beams with multi-point cross-sections*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **12** (1964), 4, 227 - 236.
21. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Skończone ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inż., **14** (1966), 4, 681 - 698.
22. M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYSZYN, *Obliczenia skończonych sprężysto-plastycznych ugięć prętów słabo zakrzywionych*, Rozpr. Inż., **20** (1972), 4, 479 - 496.
23. M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYSZYN, *Calculation of finite elastic-plastic deflections of weakly curved bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **21** (1973), 7 - 8, 333 - 340.
24. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Устойчивость равновесия упругих систем*, Гостехиздат, Москва 1955.
25. F. R. SHANLEY, *Inelastic column theory*, J. Aero. Sci., **14** (1947), 5, 261 - 268.
26. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, W-wa 1963.
27. J. M. T. THOMPSON, G. HUNT, *A general theory of elastic stability*, J. Wiley and Sons., London—N.Y.—Toronto 1973.
28. H. WAGNER, G. KIMM, *Bauelemente des Flugzeuges*, 2 wyd., 1942.
29. Z. WASZCZYSZYN, *Application of multi-point equivalent cross-sections to the calculation of finite deflections of elastic-plastic beams with stretchable axis*, Acta Mech., **3** (1967), 2, 219 - 235.
30. H. ZIEGLER, *On the concept of elastic stability*, Adv. Appl. Mech., **4** (1956), 351 - 403.
31. M. ŻYCZKOWSKI, *On axially symmetric elastic buckling of imperfect cylindrical shells under combined loadings*, Ch. Massonnet Volume, Liège, 1984, 387 - 396.
32. M. ŻYCZKOWSKI, *Combined loadings in the theory of plasticity*, PWN, W-wa 1981.
33. M. ŻYCZKOWSKI, *Podstawy analizy stateczności prętów sprężystych*, w książce pod redakcją Z. Waszczyszyna, Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław, 1981, 7 - 80.
34. M. ŻYCZKOWSKI, A. ZABORSKI, *Creep rupture phenomena in creep buckling*, Proc. IUTAM Symposium Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies, Göteborg 1974, Springer 1975, 283 - 290.

## Р е з ю м е

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗГИБА, ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Проблема стержня, подвергнутого действию изгиба, осевой силы и температуры в упруго-пластической области, на вид простая, встречает трудности при определении характеристик соединяющих обобщенные силы и обобщенные перемещения. В работе анализируются несколько моделей такого стержня касающихся деформируемых или жестких конечных элементов. Сравнение моделей проведено с точки зрения их использования к описанию трубчатого основания трубчатых решеток в теплообменниках и химических реакторах.

## S u m m a r y

## A COMPARATIVE ANALYSIS OF MODELS OF AN ELASTIC-PLASTIC BAR UNDER BENDING, AXIAL FORCE AND TEMPERATURE

Relatively easy problem of an elastic-plastic bar under simultaneous bending moment, axial force and temperature involves some difficulties when the relations between generalized loads and displacements are to be determined. Several models of the bar based on deformable as well as rigid finite elements are proposed and analysed. As a result of the comparative analysis a suitable mathematical model may be chosen to describe elastic-plastic behaviour of tubes constituting the foundation of tube sheets in heat exchangers and chemical reactors.

*Praca wpłynęła do Redakcji 20 września 1985 roku*

---

## NIELINIOWE WARUNKI BRZEGOWE W PROBLEMACH FILTRACJI USTALONEJ

BOGDAN WOSIEWICZ

*Akademia Rolnicza. Poznań*

### 1. Wstęp

W ciągu ostatnich kilku lat ukazało się kilka obszernych monografii, kompleksowo omawiających zjawiska filtracji przez ośrodki porowate i metody ich modelowania ([1], [2], [3], [4]). Przy matematycznym opisie zjawisk filtracji ustalonej pojawiać się musi problem sformułowania warunków brzegowych. Każda z cytowanych powyżej monografii poświęca temu zagadnieniu sporo uwagi.

W zagadnieniach filtracji pod ciśnieniem wyróżnia się: a) warunki na granicy kontaktu z zadaniem zwierciadłem wody (ciśnieniem), b) brzeg z zadaniem przepływu (w szczególności brzeg nieprzepuszczalny) oraz c) warunki na brzegu półprzepuszczalnym [1]. W sensie matematycznym odpowiadają one warunkom brzegowym Dirichleta, Neumanna i Cauchy'ego. W problemach filtracji swobodnej wyróżnia się nadto warunki brzegowe na powierzchni swobodnej oraz na powierzchni wysączenia. W ośrodkach ze skokowo zmienną przepuszczalnością wyróżnia się jeszcze warunki ciągłości (ciśnienia i przepływu) na granicach warstw.

Wszystkie analizowane w pracach [1], [2], [3], [4] i wymienione tu warunki brzegowe są warunkami liniowymi.

Okazuje się jednakże, że przy rozwiązywaniu problemów praktycznych mogą się pojawiać nieliniowe warunki brzegowe. Otrzymać je można przy linearyzacji nieliniowych równań filtracji pojawiających się w zagadnieniach opisanych nieliniowymi równaniami konstytutywnymi, a także przy obliczeniowej idealizacji niektórych złożonych zadań filtracji.

Celem pracy jest zwrócenie uwagi na możliwość pojawienia się nieliniowych warunków brzegowych w rzeczywistych problemach filtracji, podanie charakterystycznych przykładów oraz adaptacja znanych metod numerycznych do iteracyjnego rozwiązywania takich problemów. Tematyka nieliniowych warunków brzegowych nie była dotąd dyskutowana w odniesieniu do praktycznych, inżynierskich problemów filtracji przez ośrodki porowate (por. np. brak wzmianek na ten temat w monografiach [1], [2], [3], [4]).

## 2. Linearyzacja nieliniowych równań filtracji

W wielu ważnych problemach technicznych rozwiązania oparte o liniową zależność pomiędzy prędkością filtracji o gradientem ciśnienia (prawo Darcy'ego) można traktować wyłącznie jako pierwsze przybliżenie. Dotyczy to zarówno przepływu wody przez ośrodki gruboziarniste [5] jak i filtracji przez gliny i ropy [6]. Nieliniowe efekty pojawiają się przy przepływach roztworów wodnych soli mineralnych [7] jak również przy filtracji cieczy wykazujących tzw. pseudoplastyczne efekty (np. ropa naftowa) [8]. Jednakże przyjęcie nieliniowego prawa filtracji prowadzi do modelu opisanego nieliniowym równaniem różniczkowym rzędu drugiego, którego analityczne rozwiązanie napotyka na poważne trudności rachunkowe. Do nieliniowego równania filtracji prowadzą także problemy z uwzględnieniem ściśliwości cieczy. Nieliniowe dwuwymiarowe równania filtracji otrzymuje się również przy rozpatrywaniu przestrzennych problemów filtracji analizowanych przy założeniu Dupuit.

Niektóre z tak otrzymanych równań nieliniowych można zlinearyzować wprowadzając odpowiednio dobrany potencjał. Przy takiej linearyzacji pojawiać się mogą nieliniowe warunki brzegowe. Linearyzacja równania kosztem warunków brzegowych umożliwia często uzyskanie rozwiązania łatwiej i mniejszym kosztem niż rozwiązania problemu wyjściowego (por. np. p. 4).

Rozpatrzmy trzy charakterystyczne przykłady:

1. Najczęstszy przypadek linearyzacji, wykonywanej zresztą standardowo, pojawia się w problemach filtracji opisanych równaniem Boussinesq'a. W przypadku stacjonarnym konieczne jest wówczas rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y h \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \quad (1)$$

gdzie  $h$  jest wysokością położenia powierzchni swobodnej nad poziomą warstwą nieprzepuszczalną,  $k_x$  i  $k_y$  są współczynnikami filtracji odpowiednio w kierunku osi  $x$  i  $y$ . Zakładając dla uproszczenia, że  $k_x = k_y = k$  i wprowadzając potencjał zdefiniowany następująco:

$$H = \int_0^h kh dh = \frac{kh^2}{2}, \quad (2)$$

otrzymujemy, że funkcje  $H(x, y)$  w obszarze filtracji  $\Omega$  spełniać winna równanie różniczkowe Laplace'a:

$$\nabla^2 H = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (3)$$

Typowe warunki brzegowe

$$h = g, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (4)$$

$$v_n = q, \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (5)$$

gdzie  $v_n$  jest prędkością normalną do brzegu, a  $g$  i  $q$  są zadanymi funkcjami odpowiednio

na częściach  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  brzegu, są dla funkcji  $H$  także liniowe. Mają one postać:

$$H = \frac{k}{2} g^2, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = -q, \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (7)$$

Jeżeli jednak uwzględnić uogólniony problem brzegowy [1] z warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju na części  $\Gamma_2$  brzegu

$$v_n + ah = g, \quad (8)$$

gdzie  $a$  jest zadaną funkcją, to dla funkcji  $H$  otrzymujemy nieliniowy warunek brzegowy

$$\frac{\partial H}{\partial n} - a \sqrt{\frac{2H}{k}} = -g \quad (9)$$

2. Rozpatrzmy płaską nieliniową filtrację w ośrodku uwarstwowionym. Dla uproszczenia założymy istnienie tylko dwóch warstw oraz, że granica warstw jest prostą o równaniu  $y = y_1$ . Prawo filtracji dla obu warstw przyjmijmy w postaci:

$$v_i = -k_i(p_i) \text{grad} p_i, \quad (x, y) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

gdzie  $v_i$ ,  $p_i$  są odpowiednio wektorem prędkości oraz rozkładem ciśnienia w  $i$ -tej warstwie.

Wykorzystując równanie ciągłości otrzymamy dla każdej z warstw następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_i(p_i) \frac{\partial p_i}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_i(p_i) \frac{\partial p_i}{\partial y} \right] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Warunki ciągłości przepływu i ciśnienia wzdłuż granicy warstw mają postać:

$$k_1(p_1) \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{y=y_1} = k_2(p_2) \frac{\partial p_2}{\partial y} \Big|_{y=y_1}, \quad (12)$$

oraz

$$p_1(x, y_1) = p_2(x, y_1). \quad (13)$$

Wprowadzając dla każdej z warstw potencjały prędkości według następujących formuł:

$$P_i = \int_0^{p_i} k_i(p_i) dp_i, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

równania różniczkowe (11) przekształcają się w równania Laplace'a

$$\nabla^2 P_i = 0, \quad (x, y) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

a warunki brzegowe (12) i (13) przechodzą odpowiednio w równania

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=y_1} = \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=y_1}, \quad (16)$$

oraz

$$f_1[P_1(x, y_1)] = f_2[P_2(x, y_1)], \quad (17)$$

gdzie  $f_i(P_i)$  jest funkcją odwrotną do  $P_i(p_i)$ , wyznaczoną na podstawie równania (14).

Równanie (17) jest w ogólności także równaniem nieliniowym. Przykładowo, jeżeli przyjąć za pracę [9] dla przepuszczalności ośrodka następujące funkcje:

$$k_i(p_i) = k_{0i} \exp(\alpha_i p_i), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

gdzie  $k_{0i}$  oraz  $\alpha_i$  są stałymi, wówczas na podstawie (14) uzyskujemy:

$$P_i = \frac{1}{\alpha_i} k_{0i} \exp(\alpha_i p_i), \quad (19)$$

skąd

$$f_i(P_i) = \frac{1}{\alpha_i} \ln \frac{\alpha_i P_i}{k_{0i}}. \quad (20)$$

3. Rozpatrzmy nieliniową filtrację ustaloną ściśliwej cieczy barotropowej w anizotropowym ośrodku porowatym [10]. Na części  $\Gamma_1$  zadane jest ciśnienie  $p_0$ , a na pozostałej części  $\Gamma_2$  brzegu przepływ  $q$ . Równaniami podstawowymi problemu są:

— prawo Darcy'ego (bez udziału sił masowych)

$$\mathbf{v} = -\mathbf{k} \text{grad} p, \quad (21)$$

w którym tensor współczynników filtracji  $\mathbf{k}$  jest znaną funkcją współrzędnych ( $\mathbf{v}$  i  $p$  jak poprzednio),

— równanie stanu ( $\varrho$ -gęstość):

$$\varrho = \varrho(p), \quad (22)$$

oraz równanie ciągłości przepływu

$$\text{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0. \quad (23)$$

Warunki brzegowe są następujące:

$$p = p_0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_1, \quad (24)$$

$$v_n = q, \quad (x, y, z) \in \Gamma_2, \quad (25)$$

gdzie  $p_0$  i  $q$  są zadanymi funkcjami.

Podstawiając zależności (21) i (22) do równania ciągłości (23) uzyskamy nieliniowe równanie różniczkowe rzędu drugiego

$$\text{div}[\varrho(p) \mathbf{k} \text{grad} p] = 0, \quad (26)$$

pozwalające wraz z warunkami brzegowymi (24) i (25) na wyznaczenie funkcji  $p(x, y, z)$ . Wprowadźmy jak poprzednio w miejsce  $p$  nową zmienną  $P$  według zależności

$$P = \int_0^p \varrho(p) dp. \quad (27)$$

Na podstawie zależności (27) można napisać

$$\varrho \mathbf{v} = -\varrho(p) \mathbf{k} \text{grad} p = -\mathbf{k} \text{grad} P, \quad (28)$$

skąd równanie (26) przechodzi w liniowe równanie różniczkowe

$$\text{div}(\mathbf{k} \text{grad} P) = 0, \quad (29)$$



Warunek brzegowy dla  $P$  na brzegu  $\Gamma_1$  otrzymuje się z (24) następująco:

$$P = \int_0^{p_0} \varrho(p) dp = P_0. \quad (30)$$

Warunek brzegowy na brzegu  $\Gamma_2$  na podstawie zależności (25) i (28) można napisać następująco:

$$-k \text{grad } P \cdot \mathbf{n} = q\varrho[f(P)], \quad (31)$$

gdzie  $f(P)$  jest funkcją odwrotną do funkcji  $P(p)$  określonej równością (27), a  $\mathbf{n}$  jest jednostkowym wektorem w kierunku normalnej do brzegu.

Równanie (31) jest znowu nieliniowym warunkiem brzegowym.

Dla cieczy słabościśliwych można na przykład przyjąć równanie stanu w postaci następującej [3]

$$\varrho = \varrho_0 [1 + \alpha(p - p_0)], \quad (32)$$

gdzie  $\varrho_0$  jest gęstością przy ciśnieniu  $p_0$ , a  $\alpha$  jest współczynnikiem liczbowym. Na podstawie zależności (27) uzyskamy

$$P = \varrho_0 \left[ (1 - \alpha p_0)p + \frac{\alpha p^2}{2} \right], \quad (33)$$

skąd

$$f(P) = \frac{1}{\alpha} \left[ \sqrt{(1 - p_0)^2 + \frac{2\alpha}{\varrho_0} P} - (1 + \alpha p_0) \right]. \quad (34)$$

### 3. Obliczeniowa idealizacja złożonych problemów filtracji

Rozwiązanie wielu praktycznych problemów filtracji wymaga pewnej idealizacji w stosunku do geometrii obszaru filtracji, warunków, brzegowych jak i rzeczywistego prawa filtracji rządzącego przepływem i to zarówno przy analitycznych jak i numerycznych metodach rozwiązywania.

Można pokazać, że w pewnych problemach idealizacja taka może prowadzić do nieliniowych warunków brzegowych. Dotyczy to zagadnień, gdzie pojawiają się cienkie przewarstwienia gruntu z nieliniowym prawem filtracji, problemów z przegrodami częściowo przepuszczalnymi, niektórych zadań z drenażami, pompowań z nieliniowymi charakterystykami pomp, niektórych zadań dotyczących przemysłowych urządzeń filtracyjnych itp.

Rozważmy kilka charakterystycznych przykładów.

1. Rozpatrzmy problem filtracji pod fundamentem w warstwie o ograniczonej miąższości w przypadku występowania podłoża częściowo drenującego. Załóżmy, że pomiędzy warstwą drenującą a pokładem przepuszczalnym znajduje się cienka w stosunku do miąższości pokładu warstwa gruntu o nieliniowych właściwościach filtracyjnych (rys. 1a). Niech to będzie na przykład grunt opisany prawem filtracji z gradientem początkowym [11]

$$\mathbf{v} = \begin{cases} -k_1 \frac{v}{v + \lambda} \text{grad } h, & |\text{grad } h| > \lambda, \\ 0, & |\text{grad } h| \leq \lambda, \end{cases} \quad (35)$$

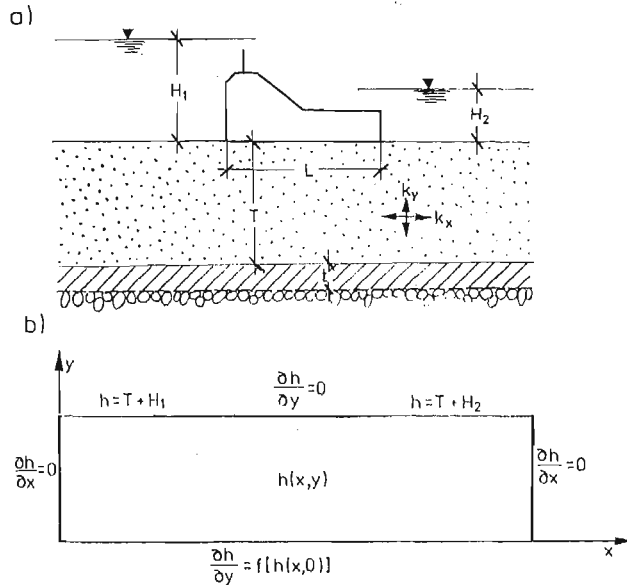
w którym  $h$  jest wysokością piezometryczną  $v = |v|$ ,  $\lambda = k_1 G$ , gdzie  $k_1$  jest współczynnikiem filtracji, a  $G$  progową wartością gradientu.

Ponieważ  $t \ll T$  można dla uproszczenia przyjąć, że ruch wody w tej warstwie będzie się odbywał wzdłuż prostych pionowych, a gradient ciśnienia wzdłuż grubości warstwy będzie stały. Przyjmując idealizację problemu jak na rys. 1b i zakładając w warstwie drenującej wysokość piezometryczną równą  $h = H$  możemy napisać, że w przewarstwieniu

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{h(x, 0) - H}{t}, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (36)$$

Warunek brzegowy wzdłuż prostej  $y = 0$  będzie miał teraz postać

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \begin{cases} \frac{k_1}{k_y} \left[ \frac{h(x, 0) - H}{t} - G \right], & [h(x, 0) - H] > Gt, \\ 0, & [h(x, 0) - H] \leq Gt. \end{cases} \quad (37)$$



1. Filtracja pod fundamentem: a) ogólny schemat zadania, b) obliczeniowa idealizacja problemu

W zależności od wartości  $\lambda$  większa lub mniejsza część brzegu  $y = 0$  będzie praktycznie nieprzepuszczalna. Przy określonej wartości  $\lambda$  długość strefy, przez którą woda nie będzie się przesączać do warstwy drenującej zależeć będzie od proporcji pomiędzy  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $T$ ,  $t$  oraz  $k_1$ ,  $k_x$  i  $k_y$ .

Jeżeli warstwa słabiej przepuszczalna opisana jest nieliniowym równaniem filtracji, np. w postaci [12]

$$v = -k(1 + c|\text{grad } h|)\text{grad } h, \quad (38)$$

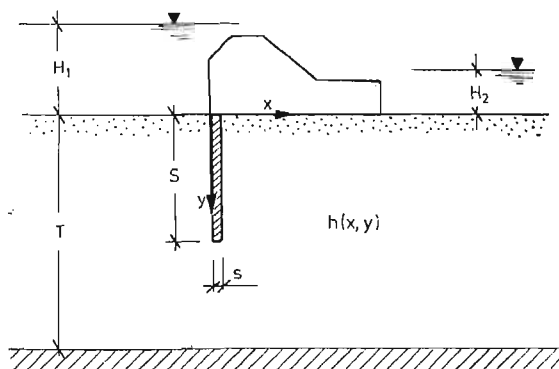
gdzie  $k$  i  $c$  to współczynniki określone przez wyniki eksperymentu, wówczas warunek

brzegowy wzdłuż prostej  $y = 0$  będzie miał postać:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{k}{k_y} \left[ 1 + \frac{c}{t} |h(x, 0) - H| \right] \frac{h(x, 0) - H}{t}. \quad (39)$$

Podobnie będzie dla innych typów nieliniowości.

2. Rozpatrzmy filtrację wokół i przez przegrodę częściowo przepuszczalną (ścianka szczelna, ekran itp.), jak na rys. 2. Dla uproszczenia założmy, że w ekranie o grubości  $s$  linie prądu układają się poziomo [13]. Niech prawo filtracji dla materiału ekranu ma postać (35), tj. prawo filtracji z gradientem początkowym. Ekran wyłączymy z obszaru filtracji.



2. Filtracja wokół i przez przegrodę częściowo przepuszczalną

W takim przypadku wzdłuż prostej  $x = 0$  następować będzie wypływ, a wzdłuż prostej  $x = s$  zasilanie obszaru filtracji tym samym wydatkiem. Przepływ przez ekran na głębokości  $y (0 \leq y \leq s)$  zależy będzie od jego grubości, gradientu progowego  $G$  i różnicy naporów;  $h(0, y) - h(s, y) > 0$ . W prezentowanym tu przypadku wypływ na jednostkę długości wzdłuż prostej  $x = 0$  i zasilanie wzdłuż prostej  $x = s$  będzie równe:

$$q = \begin{cases} k_1(i - G), & i > G, \\ 0, & i \leq G, \end{cases} \quad (40)$$

gdzie:

$$i = \frac{h(0, y) - h(s, y)}{s}.$$

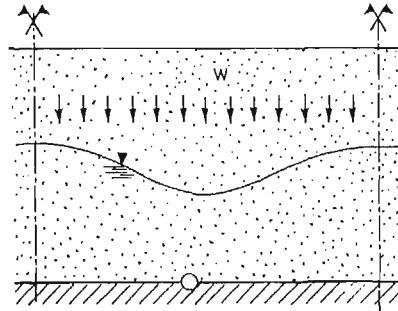
Równanie (40) jest nieliniowym warunkiem brzegowym, wiążącym ciśnienia piezometryczne wzdłuż punktów leżących po obu stronach ekranu. W zależności od geometrii obszaru filtracji oraz wartości  $H_1$ ,  $H_2$ , i  $G$  większa lub mniejsza część ekranu może być praktycznie nieprzepuszczalna.

3. Weźmy pod uwagę problem płaskiej filtracji stacjonarnej do układu drenów, umieszczonych na warstwie nieprzepuszczalnej, zasilanych przez infiltrację  $w$ . Z uwagi na symetrię wystarczy rozpatrzeć tylko obszar filtracji jak rys. 3. Jeżeli infiltracja jest mała i całą dopływającą wodę może drenaż przejąć, wówczas na granicy drenu można przyjąć  $p = 0$ . Dla pewnej wartości  $w$  drenaż zaczyna pracować pod ciśnieniem, a ciśnienie w drenażu jest, generalnie mówiąc, funkcją zasilania drenażu  $Q$  czyli  $p = f(Q)$ . Przed rozpoczęciem

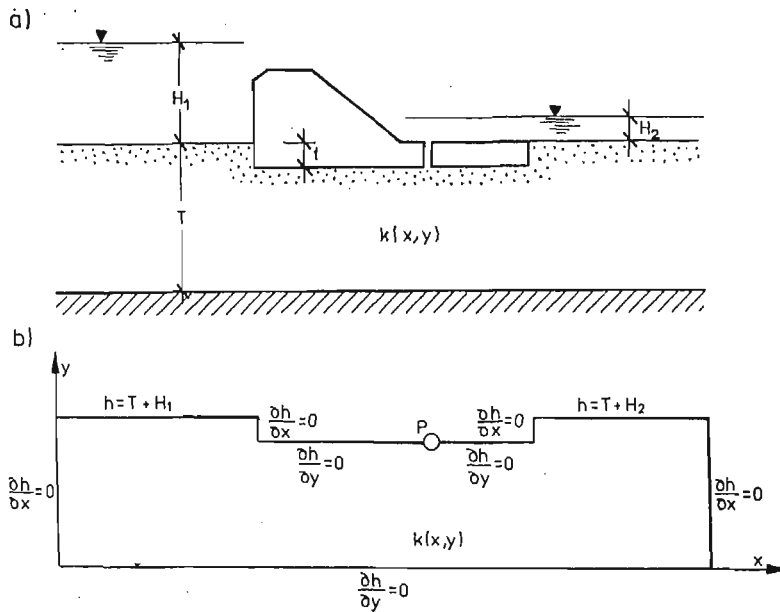
obliczeń nie można na ogół rozstrzygnąć, z którym przypadkiem mamy do czynienia. Realniejsze modelowanie pracy drenażu, traktowanego jako upust punktowy, polegać będzie na przyjęciu nieliniowego warunku brzegowego:

$$p = \begin{cases} 0, & Q < Q_0, \\ f(Q), & Q \geq Q_0, \end{cases} \quad (41)$$

gdzie  $Q_0$  jest graniczną wartością, przy której dren zaczyna pracować jako przewód pod ciśnieniem.



3. Dopływ filtracyjny do systemu drenów



4. Filtracja pod jazem z drenażem: a) schemat problemu, b) obliczeniowa idealizacja zadania

Bardziej złożone warunki pojawią się w przypadku, gdy interesuje nas głównie rozkład ciśnienia i prędkości w bezpośrednim sąsiedztwie drenażu. Należy wówczas rozpatrzyć rzeczywiste położenie zwierciadła wody w drenie.

4. Przeanalizujemy na koniec problem filtracji pod jazem z drenażem przy ograniczonej miąższości warstwy przepuszczalnego gruntu niejednorodnego (rys. 4a). Obliczenia

(zwykle numeryczne) prowadzi się przyjmując obszar filtracji i warunki brzegowe jak na rys. 4b, zakładając w punkcie  $P$  (drenaż) ciśnienie  $p = 0$  [14] lub lepiej wysokość piezometryczną  $h = T + H_2$ . W przyjęciu takim tkwi założenie, że cała dopływająca do drenażu woda jest przez drenaż odprowadzana bez zakłóceń.

Alternatywnie punkt  $P$  można traktować jako ujemne źródło punktowe (upust) o wydatku, który generalnie mówiąc, jest funkcją różnicy ciśnień na wlocie i wylocie drenażu

$$q = f(\Delta H), \quad (42)$$

gdzie

$$\Delta H = h(P) - (T + H_2),$$

oraz strat miejscowych na wlocie i wylocie oraz wzdłuż długości drenażu. W ten sposób możemy uwzględnić rzeczywistą możliwość przeprowadzenia wody przez drenaż.

Funkcja  $f(\Delta H)$  jest jednak nieliniową funkcją  $\Delta H$ , a zatem warunek (42) w punkcie  $P$  będzie nieliniowym warunkiem brzegowym.

Taki sposób potraktowania drenażu wydaje się właściwy wówczas, gdy interesuje nas głównie rozkład ciśnień i prędkości w pobliżu drenażu, a także wtedy, gdy zamierzamy sprawdzić warunki filtracji dla piętrzenia  $H_1$  większego niż to, dla którego drenaż zaprojektowano.

Problemy podobnego typu mogą się również pojawiać w zadaniach filtracji dla zapór posadowionych na powierzchniowej warstwie nieprzepuszczalnej [15] przy kontrolowanym odprowadzeniu wody z warstwy przepuszczalnej.

#### 4. Numeryczne całkowanie problemów filtracji z nieliniowymi warunkami brzegowymi

Efektywne rozwiązanie naszkicowanych wyżej problemów dla realnych warunków filtracji będzie możliwe jedynie na drodze numerycznej. Wśród numerycznych metod całkowania równań filtracji największe uznanie zdobyły: metoda różnic skończonych (MRS) [16], metoda elementów skończonych (MES) [17] oraz rozwijana w ostatnich latach metoda elementów brzegowych (MEB) [18], [19].

Numeryczne całkowanie liniowych problemów filtracji wymienionymi wyżej metodami sprowadza zagadnienie do rozwiązywania układu algebraicznych równań liniowych.

W przypadku nieliniowych warunków brzegowych MRS, MES i MEB prowadzą do rozwiązywania nieliniowego układu równań algebraicznych postaci:

$$\mathbf{A}X = \mathbf{B}(X), \quad (43)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest nieosobliwą macierzą współczynników liczbowych,  $X$  wektorem wartości poszukiwanej funkcji w wyróżnionych  $N$  punktach obszaru filtracji i/lub brzegu a  $\mathbf{B}(X)$  wektorem, którego każdy wyraz jest w ogólnym przypadku funkcją wszystkich  $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ .

Układ równań (43) można zapisać inaczej w postaci

$$X = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(X), \quad (44)$$

z której w sposób naturalny wynika ogólny wzór rekurencyjny metody iteracji bezpośred-

nich

$$X^{n+1} = \mathbf{A}^{-1}B(X^n). \quad (45)$$

Znając (szacując lub zakładając)  $X^0$  otrzymamy jednoznacznie określony ciąg przybliżeń  $X^1, X^2, X^3, \dots$ . Jeżeli tak otrzymany ciąg  $X^n$  przy  $n \rightarrow \infty$  zmierza do pewnej granicy  $X^*$ , to  $X^*$  jest rozwiązaniem równania (43) [20].

Metoda iteracji bezpośrednich wymaga jednokrotnego zbudowania macierzy  $\mathbf{A}$  i obliczenia jej macierzy odwrotnej  $\mathbf{A}^{-1}$ , którą z reguły można zapamiętać w miejsce zwolnione przez  $\mathbf{A}$ . Na każdym kroku iteracji wystarczy zatem wyliczyć wektor  $B(X^n)$  i wykonać mnożenie opisane zależnością (45). Metoda obliczeń jest efektywna, jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  jest dobrze uwarunkowana.

Taki sposób prowadzenia obliczeń pozwala na istotne oszczędności czasu pracy EMC w stosunku do bezpośredniego całkowania numerycznego problemów filtracji prowadzących do nieliniowego równania różniczkowego. W takim przypadku zagadnienie sprowadza się bowiem do nieliniowego układu równań algebraicznych, w którym współczynniki macierzy układu równań są funkcjami rozwiązania. Na każdym kroku iteracyjnym musimy wówczas budować macierzy  $\mathbf{A}(X)$  i znajdować jej macierz odwrotną [21]. W zagadnieniach nieliniowych z powierzchnią swobodną powstaje problem wyznaczenia nieznanego brzegu obszaru filtracji. Rozwiązanie można uzyskać poprawiając jednocześnie wektor  $X^n$  i położenie powierzchni swobodnej [22] lub formułując problem z wykorzystaniem teorii nierówności wariacyjnych [23].

Metoda iteracji bezpośrednich jest wygodną metodą rozwiązania równań (43) o ile proces iteracyjny jest zbieżny. Zbieżność metody można oszacować wykorzystując wyniki pracy [20]. Oznaczamy przez  $a_{ij}$  elementy macierzy  $\mathbf{A}^{-1}$  i wprowadźmy funkcje

$$g_i(X) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(X). \quad (46)$$

Załóżmy, że gdy  $X$  i  $X'$  należą do obszaru  $D$  zawierającego wszystkie wektory  $X^n$  to istnieją liczby dodatnie  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ) takie, że

$$|g_i(X) - g_i(X')| \leq \sum_{j=1}^N c_{ij} |x_j - x'_j|. \quad (47)$$

Proces iteracyjny opisany formułą (44) jest zbieżny o ile norma  $K$  macierzy  $\mathbf{C}$  spełnia warunek [20]

$$K = \|\mathbf{C}\| = \max_i \left( \sum_{j=1}^N |c_{ij}| \right) < 1. \quad (48)$$

Jeżeli funkcje  $g_i(X)$  są różniczkowalne, a ich pochodne ograniczone w obszarze  $D$ , to

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq c_{ij}, \quad (49)$$

czyli liczby  $c_{ij}$  ograniczają z góry pochodne  $\partial g_i / \partial x_j$ .

Im norma  $K$  jest mniejsza (wyrazy  $c_{ij}$  bliższe zera), tym zbieżność szybsza.

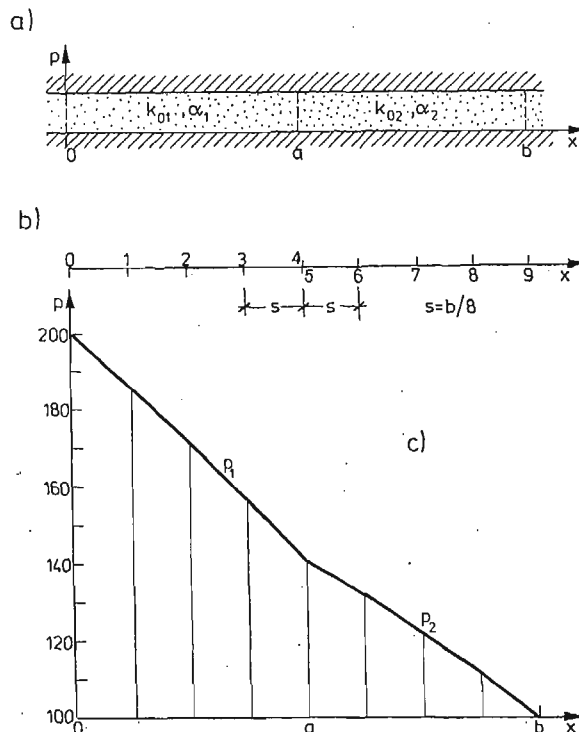
Zwrócić należy uwagę, że w problemach praktycznych z nieliniowymi warunkami brzegowymi tylko część wyrazów wolnych  $b_i$  jest funkcją i to ograniczonej liczby niewiadomych  $x_j$ , pozostałe wyrazy wolne są stałymi. Wówczas na podstawie (48) zdecydowana większość wyrazów  $c_{ij}$  może być wprost równa zeru.

W zreferowanych w niniejszej pracy przykładach posłużono się konsekwentnie metodą iteracji bezpośrednich.

### 5. Przykłady obliczeń

Rozpatrzmy dwa proste przykłady numerycznego całkowania problemów opisanych w p. 2 i 3 (porównaj również przykład analizowany w [24] za pomocą MEB).

1. Pierwszy przykład dotyczy jednowymiarowej filtracji w warstwie wodonośnej o jednostkowej miąższości z odcinkowo zmiennymi właściwościami ośrodka (rys. 5a).



5. Nieliniowa filtracja w warstwie wodonośnej z odcinkowo zmienną przepuszczalnością: a) ogólne warunki zadania, b) siatka różnicowa, c) rozkład ciśnień wzdłuż długości warstwy

Przepuszczalności określone są formułami (18). Przyjęto następujące wartości współczynników  $k_{0i} = k_{02} = 1$ ,  $\alpha_1 = 0,005$  i  $\alpha_2 = 0,01$ . Warunki brzegowe dla funkcji  $p_1(x)$  dla  $0 \leq x \leq a$  i  $p_2(x)$  dla  $a \leq x \leq b$  są następujące

$$p_1(0) = 200, \quad p_2(b) = 100, \quad p_1(a) = p_2(a),$$

$$\left[ e^{0,005 p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \right]_{x=a} = \left[ e^{0,01 p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} \right]_{x=a} \quad (50)$$

Równania różniczkowe problemu mają postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{0,005 p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) &= 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{0,01 p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) &= 0, & a \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (51)$$

Jest rzeczą oczywistą, że w analizowanym tu elementarnym przykładzie równania (51) można scałkować bezpośrednio. Dla ilustracji zastosujemy jednak opisane poprzednio przekształcenia linearyzujące. Wprowadzając nowe zmienne  $P_1$  i  $P_2$  według formuły (14) uzyskujemy równania różniczkowe

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = 0, \quad (0 \leq x \leq a) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} = 0, \quad (a \leq x \leq b). \quad (52)$$

Warunki brzegowe dla funkcji  $P_1$  i  $P_2$  będą miały postać następującą:

$$\begin{aligned} P_1(0) &= 200e, & P_2(b) &= 100e, \\ P_1^2(a) &= 400P_2(a), & \frac{\partial P_1(a)}{\partial x} &= \frac{\partial P_2(a)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (53)$$

Do rozwiązywania problemu zastosowano metodę różnic skończonych. Rozmieszczenie węzłów i ich numerację pokazano na rys. 5b. Zastosowano klasyczne operatory różnicowe oparte na różnicach centralnych. Układ równań różnicowych ma postać:

$$-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 6, 7, 8; \quad (54)$$

gdzie:

$$x_i = P_1(is) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

oraz

$$X_i = P_2[(i-1)s] \quad \text{dla} \quad i = 5, 6, 7, 8, 9.$$

Warunki brzegowe (53) w postaci różnicowej mają postać następującą:

$$\begin{aligned} X_0 &= 200e, & X_9 &= 100e, \\ X_4 &= 20\sqrt{X_5}, & X_4 - X_3 &= X_6 - X_5. \end{aligned} \quad (55)$$

Wprowadzając warunki brzegowe (55) do układu równań (54) otrzymujemy dogodny do iteracji układ równań algebraicznych (43) z nieliniowością w wektorze wyrazów wolnych. Układ można prosto rozwiązać korzystając z formuły (45) po przyjęciu startowej wartości  $p_1(a) = p_2(a) = 0,5$   $[p_1(0) + p_2(b)] = 150$ , skąd  $x = 448,6$ . Po ośmiu iteracjach uzyskano rezultaty, w których  $x_i^8 - x_i^7 < [p_1(a) - p_2(b)]/100$ . Uznano je za rozwiązanie analizowanego problemu nieliniowego i pokazano na rys. 5c (w ciśnieniach rzeczywistych). W tabeli 1 zestawiono wartości  $P_1$  i  $P_2$  otrzymane metodą różnic skończonych oraz wartości ściśle otrzymane przez scałkowanie równań (51) z warunkami (50), a także rzeczywiste ciśnienia  $p_1$  i  $p_2$ .

Zwrócić należy uwagę, że w analizowanym problemie otrzymane za pomocą MRS wartości ciśnień  $P_1$  i  $P_2$  zbiegają do wartości rzeczywistych, gdyż funkcje  $P_1$  i  $P_2$  są funkcjami liniowymi, a równania (54) odzwierciedlają ten fakt w sposób dokładny.



Druga uwaga dotyczy zbieżności. Oszacowana na podstawie (48) norma macierzy  $\mathbf{C}$  wynosi w tym problemie  $K = 0,76$ , stąd stosunkowo wolna zbieżność metody.

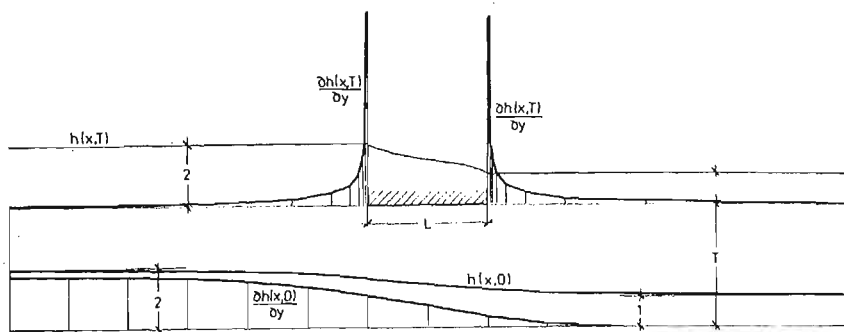
Tabela 1

Nr węzła	$x/b$	Wartości $P_1$ i $P_2$		Wartości ciśnieni rzeczywistych
		Metoda różnic skończonych	Wartości ścisłe	
1	0,125	509	509,03	186,84
2	0,250	474	474,39	172,74
3	0,375	440	439,76	157,58
4	0,500	405	405,14	141,18
5	0,500	410	410,35	141,18
6	0,625	376	375,72	132,37
7	0,750	341	341,09	122,70
8	0,875	306	306,46	111,99

2. Przykład drugi dotyczy problemu filtracji analizowanego jako pierwszy w p. 3.

Konkretne obliczenia wykonano przyjmując następujące proporcje dla obszaru filtracji  $T/L = 1$ ,  $H_1/L = 1$ ,  $H_2/L = 0$ ,  $H/L = 1/2$ ,  $t/L = 1/20$  i ograniczając obszar filtracji z lewej i prawej strony fundamentu na odległość  $3L$ . Dla cienkiej warstwy ograniczającej od dołu obszar filtracji przyjęto  $k_1 = 0,001k$ , gdzie  $k$  jest współczynnikiem filtracji w obszarze oraz  $G = 12$  jak dla łąk [25].

Do obliczeń zastosowano metodę elementów brzegowych [18], przyjmując elementy dwuwęzłowe o liniowej zmienności  $h$  i  $\frac{\partial h}{\partial n}$  wzdłuż brzegów. Wzdłuż dolnej granicy obszaru filtracji przyjęto 15 węzłów rozmieszczonych równomiernie co  $0,5 L$ . Wzdłuż dolnej i górnej wody węzły zagęszczono zdecydowanie w pobliżu fundamentu (najmniejsza odległość  $0,01 L$ , a największa  $L$ ), aby uzyskać poprawny rozkład  $\frac{\partial h}{\partial n}$ . Całkowita liczba węzłów wynosiła 46. W rozwiązaniu startowym przyjęto, że dolna granica obszaru filtracji jest całkowicie nieprzepuszczalna. W dalszych iteracjach poprawiono rozkład  $\frac{\partial h}{\partial y}$  w poszczególnych węzłach podziału na elementy korzystając z formuły (37). Po pięciu iteracjach wartości  $\frac{\partial h}{\partial y}$  ustaliły się we wszystkich węzłach z dokładnością do pięciu cyfr znaczących. Wartości wysokości piezometrycznych ustaliły się z dokładnością do pięciu cyfr znaczących już po trzech iteracjach. Na rys. 6 pokazano ostateczny rozkład wysokości piezometrycznych i funkcji  $\frac{\partial h}{\partial y}$  wzdłuż prostych  $y = 0$  i  $y = T$ . Obliczenia wykazały, że w odległości większych niż  $l = 0,75 L$  od fundamentu od strony wody dolnej cienka warstwa łąk jest praktycznie nieprzepuszczalna przy powyżej przyjętych parametrach filtracyjnych i geometrycznych. Obliczone całkowite zasilanie obszaru wynosiło  $0,556k$ , wpływ poniżej



6. Rozkład wysokości piezometrycznych i funkcji  $\partial h/\partial y$  wzdłuż prostych  $y = 0$  i  $y = T$  dla problemu filtracji pod fundamentem przedstawionego na rys. 1

fundamentu  $0,499k$ , a pozostały przez warstwę iłu ograniczającą obszar filtracji od warstwy drenującej ( $q = 0,058k$ ).

Obliczenia porównawcze wykonane metodą elementów [22] prowadziły do prawie identycznych rezultatów ( $l = 0,73L$ ,  $q = 0,058k$ ).

W przeliczonych zadaniach tego typu (por. [22]) ciąg przybliżeń  $X^0$ ,  $X^1$ ,  $X^2$ , ... miał charakter oscylacyjny, zarówno dla MES jak i MEB a rozwiązania uznane za poprawne uzyskiwano po 3-8 iteracjach.

## 6. Podsumowanie

Przeprowadzona dyskusja i przytoczone przykłady wykazały, że przy rozwiązywaniu problemów filtracji ustalonej pojawiać się mogą zadania z nieliniowymi warunkami brzegowymi. Ma to miejsce przy linearyzacji problemów z nieliniowymi równaniami konstytutywnymi oraz przy obliczeniowej idealizacji złożonych zadań filtracji.

Linearyzację opisaną w p. 2 można wykonać, jeżeli przepuszczalność ośrodka (rozumiana szeroko) zależy wyłącznie od poszukiwanej funkcji. Postępowanie linearyzujące jest celowe i z reguły korzystne, a standardowe metody linearyzacji sprowadzają się do wprowadzenia odpowiednio dobranego potencjału. W takim przypadku nieliniowości pojawiają się w warunkach brzegowych zawierających pochodne poszukiwanej funkcji, tj. warunku drugiego i trzeciego rodzaju na brzegach zewnętrznych i warunek ciągłości przepływu na granicach warstw o różnej przepuszczalności. Zwrócić należy uwagę, że dla innych typów nieliniowości (np. przepuszczalność zależna od gradientu funkcji poszukiwanej) znalezienie podobnego przekształcenia nie wydaje się w ogólności możliwe.

Obliczeniowa idealizacja złożonych problemów filtracji może prowadzić do nieliniowych warunków brzegowych, w których ciśnienie jest jawną funkcją przepływu, pochodna normalna do brzegu (przepływ) jest funkcją ciśnienia bądź do nieliniowych związków pomiędzy ciśnieniami w pewnych punktach obszaru filtracji.

Rozwiązanie realnych problemów filtracji z nieliniowymi warunkami brzegowymi wymagać będzie prawie zawsze zastosowania metod numerycznych. Można je wykonać wykorzystując powszechnie znane metody numeryczne. Przeprowadzone obliczenia

przykładowe wykazały pełną przydatność MRS, MES i MEB do rozwiązywania analizowanych problemów.

Algebraiczny układ równań nieliniowych otrzymany w tych metodach ma w przypadku nieliniowych warunków brzegowych postać (43), z której w sposób naturalny wynika formuła iteracyjna (45). W kolejnych iteracjach macierz układu równań pozostaje stała, a zmienia się wyłącznie prawa strona. Jest to bardzo korzystne z punktu widzenia kosztów prowadzenia obliczeń numerycznych.

Zagadnienia zbieżności MRS, MES i MEB, ich dokładności oraz efektywności w poszczególnych typach zadań filtracji z nieliniowymi warunkami brzegowymi wymagają dalszych badań i wielu obliczeń porównawczych.

#### Literatura

1. J. BEAR, *Hydraulics of groundwater*, Mc Graw-Hill, New York, 1979.
2. G. KOVÁCS; *Seepage Hydraulics*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1981.
3. П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА; *Теория движения грунтовых вод*, Наука, Москва, 1977
4. A. WIECZYSTY, *Hydrologia inżynierska*, PWN, Warszawa, 1982.
5. D. H. TROLLOPE, K. P. STARKE, R. E. VOLKER, *Complex flow through porous media*, Australian Geomechanics Journal, vol. 1, 1971, pp. 1 - 10.
6. H. W. OLSEN, *Deviations from Darcy's law in saturated clays*, Soil Sci. Soc. Amer., vol. 29, 1965, pp. 135 - 140.
7. R. SKAWIŃSKI, *Mechanizm przepływu cieczy w ośrodkach porowatych w świetle badań eksperymentalnych*, Zeszyt. Nauk. AGH, 1974, nr 459.
8. М. Г. БЕРНАДИНЕР, В. М. ЕНТОВ; *Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей*, Наука, Москва, 1975
9. P. M. КАЦ; *Нелинейная установившаяся фильтрация жидкости в слоистом пласте*, Изв. АН СССР, МЖГ, 1/1972, с. 180 - 186
10. М. М. ЧЕПИНОГА; *Некоторые нелинейные задачи теории фильтрации*, Теор. и прикл. мех. (Минск), 1982, в. 9, с. 69 - 74
11. W. M. JENTOW, *Hydrodynamiczna teoria filtrowania cieczy z reologicznymi anomaliami*, Rozpr. Inż., t. 27, 1979, z. 4, 501 - 516.
12. A. FORYŚ, *Konsolidacja warstwy sprężystej przy nieliniowym prawie przepływu*, Arch. Hydrot., t. 26, 1979, z. 2, s. 251 - 271.
13. С. Н. НУМЕРОВ, Л. А. ПАНАСЕНКО; *К вопросу о фильтрации в горизонтальном напорном пласте при наличии негерметичной полупроницаемой диафрагмы*, Изв. ВНИИГ, т. 126, 1978, с. 54 - 57
14. T. PIWESKI, Z. SOKÓLSKI, *O rozwiązywaniu niektórych zagadnień filtracji ustalonej*, Arch. Hydrot., t. 17, 1970, z. 2, s. 161 - 167.
15. K. CZYZEWSKI, W. WOLSKI, S. WÓJCICKI, A. ŻBIKOWSKI; *Zapory ziemne*, Arkady, Warszawa, 1973.
16. L. COLLATZ; *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa, 1960.
17. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method*, Mc Graw-Hill, London, 1977.
18. К. БРЕББИЯ, С. УОКЕР; *Применение метода граничных элементов в технике*, Мир, Москва, 1982
19. *Boundary Elements*, Proc. 5th Int. Conference, Hiroshima 1983, Springer Verlag, Berlin 1983 (Ed. C. A. Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka).
20. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*. WTN, Warszawa, 1974.
21. B. WOSIEWICZ, *Analiza numeryczna nieliniowej filtracji ustalonej*, Arch. Hydrot., t. 29, 1982, z. 1/2, s. 53 - 76.
22. B. WOSIEWICZ, *Analiza zagadnień filtracji ustalonej z nieliniowymi równaniami konstytutywnymi*, Roczn. AR Poznań, Rozpr. Naukowe t. 162, 1986.
23. J. T. ODEN, T. H. KIKUCHI, *Theory of Variational Inequalities with Application to Problems of Flow Through Porous Media*, Int. J. Eng. Science, t. 18, 1980, nr 10.

24. P. K. BENERJEE, R. BUTTERFIELD (ed); *Development in Boundary Element Method*, Applied Science Publishers, London, 1979.
25. A. KEZDI, *Handbook of Soil Mechanics*, vol. 1, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

## Резюме

## НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ

В работе показано, что в задачах установившейся фильтрации могут появляться нелинейные краевые условия. Проанализировано типичные примеры таких задач.

Для решения задач фильтрации с нелинейными краевыми условиями предложено известные численные методы (метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод граничных элементов). Вопрос сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (43), методом прямых итераций (45).

Приведены результаты расчётов двух типичных задач.

## Summary

## NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS FOR STEADY SEEPAGE PROBLEMS

It is shown in the paper that nonlinear boundary conditions can appear for steady seepage problems. Characteristic examples of the problems are discussed.

Known methods (finite difference method, finite element method and boundary element method) are proposed for solving steady seepage problems with nonlinear boundary conditions. The discretized system can be written as a set of nonlinear algebraic equations (43), which is solved by direct iteration technique (45).

Results for two typical problems are included.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 lutego 1984 roku*

---

## RUCH OŚRODKA POROWATEGO WYPEŁNIONEGO CIECZĄ. OPIS GLOBALNY

STEFAN JAN KOWALSKI

*Zakład Aeroakustyki IPPT PAN Poznań*

### 1. Wstęp

Opis ruchu ośrodków wieloskładnikowych budzi wciąż jeszcze wiele kontrowersji. Przedstawioną w pracy [11] (por. też. [13]) koncepcję opisu takich ośrodków, która pochodzi od Truesdella, nie można uznać za uniwersalną. Wykorzystuje się w niej opis względem barycentrycznego środka mas wszystkich składników. W związku z tym, równania bilansu składają się z członów będących dyskusyjnym i trudnym do zinterpretowania konglomeratem różnych wielkości. Ponadto, wątpliwym wydaje się wykorzystanie tej koncepcji do opisu takiego ośrodka, jakim jest porowate ciało stałe wypełnione płynem. Tutaj naturalnym byłoby przyjąć jako bazę odniesienia konfigurację ciała stałego, a nie barycentryczny środek masy. Wtedy, oczywiście, równania bilansu dla całej mieszaniny nie przybierają formy równania bilansu dla ośrodka jednoskładnikowego. Naruszona jest więc zasada metafizyczna Truesdella, że „ruch całej mieszaniny jest przedstawiony takim samym równaniem jak ruch jednolitego ciała”. Ponadto w równaniach ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą powinno być uwzględnione dość ewidentne zjawisko unoszenia części cieczy zawartej w porach przez porowate ciało, zwane też zjawiskiem sprzężenia ruchu przez masę. Znane w literaturze równania teorii mieszanin nie opisują niestety tego zjawiska.

Można wskazać dwa typy równań, które uwzględniają ten efekt. Są to równania zaproponowane przez BIOTA, [1], i DERSKIEGO, [2]. KOWALSKI w pracy [6] i nieco ogólniej w pracy [7] przedstawił pewien model wskazujący na tranzytywność, a tym samym na ekwiwalentność równań przedstawionych przez tych autorów. Był to jednak dowód ekwiwalentności w sensie lokalnym.

Przedmiotem niniejszej pracy są dwa zagadnienia: Po pierwsze, bazując na bilansie masy i pędu (opis globalny) wyprowadzić równania ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą z uwzględnieniem zjawiska sprzężenia ruchu przez masę i zmienności porowatości oraz gęstości składników. Po drugie, wskazać, że możliwe jest uzyskanie tą tą drogą dwóch różnych lecz tranzytywnych form równań, a mianowicie równań na wzór Derskiego i na wzór Biota.

Uzasadnieniem podjęcia postawionego zadania jest próba uporządkowania zagadnień związanych z opisem ruchu ośrodka porowatego. Równania Biota, przedstawione po raz pierwszy w 1956 r., stanowiły przez wiele lat bazę do rozwiązania szeregu technicznie ważnych zagadnień związanych np. z propagacją fal w nasyconych ośrodkach porowatych (por. np. [4]). Wiele kontrowersji budził jednakże występujący w tych równaniach współczynnik sprzężenia ruchu przez masę  $\rho_{12}$ . Nie został on przez Biota dostatecznie jasno zinterpretowany, a indywidualne jego interpretacje przez niektórych autorów prowadziły do sprzecznych wniosków. Wspomniano o tym w pracy [7], w której również, w oparciu o przyjęty tam model, podjęto próbę bliższego jego określenia.

Wyprowadzone przez Derskiego w 1978 r. równania, prostsze w swej formie i łatwiejsze w interpretacji, budziły początkowo sprzeczne opinie. Podczas dyskusji w kręgu zainteresowanych można było usłyszeć i takie, że stanowią one szczególnie przypadek równań Biota. Obecnie z kolei podaje się w wątpliwość znaczenie równań Biota. W argumentacji podkreśla się niemożność ich uzyskania z równań bilansu masy i pędu, przypisując jednocześnie ten plus równaniom Derskiego, które zostały właśnie w ten sposób wyprowadzone (Biota wyprowadził swoje równania korzystając z równań Lagrange'a). W niniejszej pracy podjęto próbę wyjaśnienia tych wątpliwości.

Konkluzją ostateczną niniejszych rozważań jest stwierdzenie, że równania Biota wynikają z bilansowania składników zdeterminowanych funkcją porowatości objętościowej (równą średniej porowatości powierzchniowej), natomiast równania Derskiego wynikają z bilansowania składników zdeterminowanych funkcją efektywnej porowatości powierzchniowej\*. Możliwa jest ich wzajemna tranzytywność, a zatem i ekwiwalentność, jeśli chodzi o jednoznaczność opisu zjawisk zachodzących w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, wywołanych oddziaływaniami zewnętrznymi.

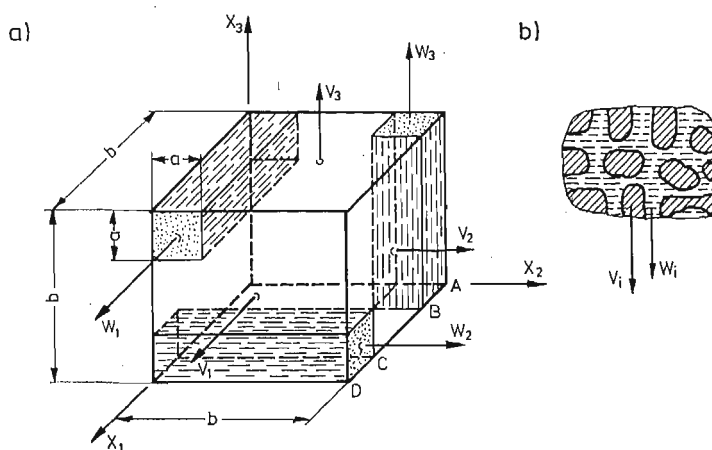
## 2. Założenia geometryczno-kinematyczne

Rozważać będziemy izotropowy\*\* ośrodek porowaty wypełniony cieczą o statystycznie równomiernym rozkładzie por. Do opisu ruchu takiego ośrodka wykorzystywać będziemy metody i założenia mechaniki ośrodków ciągłych. Wymaga to zapostulowania dodatkowo istnienia ciągłych i różniczkowalnych funkcji, przyporządkowujących każdemu punktowi trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa objętościowego udziału danego składnika w rozważanym ośrodku. Nie będziemy się tu zajmować konstruowaniem takich funkcji. Wspomnimy jedynie, że w mechanice ośrodka porowatego taką funkcją jest porowatość objętościowa, którą będziemy tu oznaczać symbolem:  $f_v(x, t)$ . W oznaczeniu tym  $x$  jest pozytywnym wektorem punktu przestrzeni Euklidesa, a  $t$  oznacza czas. Przy założeniu obowiązującym w tej pracy, że ciecz wypełnia całkowicie pory, funkcja ta wyraża ułamek objętościowego udziału cieczy w danym punkcie przestrzeni. Objętościowy udział ciała porowatego (szkieletu) wyraża się wtedy jako:  $1 - f_v(x, t)$ .

\* W pracy [8] autor wprowadził pojęcie podziału fizycznego i kinematycznego mieszaniny w zależności od tego czy posługiwano się funkcją porowatości objętościowej czy funkcją efektywnej porowatości powierzchniowej.

\*\* Geometrię ośrodka porowatego o anizotropowej przepuszczalności Czytelnik znajdzie w pracy [9].

Odnosnie opisu ruchu rozważanego ośrodka przyjmujemy następującą koncepcję. Zakładamy, że pole prędkości szkieletu  $v(x, t)$  jest ciągłe i różniczkowalne w całym obszarze z wyjątkiem być może powierzchni nieciągłości (w tym także powierzchni brzegowych). Pole prędkości cieczy może być natomiast nieciągłe, tzn. dwie cząsteczki cieczy znajdujące się obok siebie mogą poruszać się z prędkościami różniącymi się skończoną wartością. Nieciągłość ta wynika z unoszenia pewnej ilości cząstek cieczy przez porowate ciało stałe. Wyróżniamy więc pole prędkości cząstek cieczy mających prędkość różną niż prędkość szkieletu i pole prędkości cząstek unoszonych przez szkielet, przy czym nie interesuje nas profil prędkości, a średnia wartość wyrażająca objętościowy wydatek cieczy na jednostkę czasu. Funkcję objętościowego wydatku cieczy na jednostkę czasu i powierzchni oznaczamy przez  $w(x, t)$  i zakładamy, że jest ona ciągła i różniczkowalna w całym obszarze z wyjątkiem być może powierzchni nieciągłości. Istnieje jeszcze problem określenia efektywnej powierzchni, na której wydatek ma miejsce. Na powierzchni myślowego przekroju może się bowiem znajdować powierzchnia cieczy, której cząstki mają w kierunku  $e_i$  prędkość  $v_i$ . Stwierdzamy zatem, że obserwacja pola prędkości cieczy na przekroju może stanowić podstawę do wyróżnienia powierzchni efektywnego wydatku cieczy  $a_e$ . Oznaczmy elementarną powierzchnię obserwacji przez  $da$ , a znajdującą się na niej powierzchnię efektywnego wydatku przez  $da_e (= da)$ . W rozważaniach będziemy się posługiwać stosunkiem tych powierzchni, tj.  $f_e(x, t) = da_e(x, t)/da(x)$  i nazywać ten stosunek efektywną porowatością powierzchniową. Na rys. 1a przedstawiono element izotropowego ośrodka



Rys. 1

porowatego wypełnionego cieczą. Dla uproszczenia obliczeń przedstawiono sumę mikro-powierzchni efektywnego wydatku w formie kwadratu o boku  $a$ . Używając przyjętych tam oznaczeń określimy efektywną porowatość powierzchniową jako:

$$f_e = \frac{a^2}{b^2}. \tag{2.1}$$

Natomiast porowatość objętościowa, która stanowi stosunek objętości wszystkich porów

do całkowitej objętości, wyraża się jak następuje:

$$f_v = \frac{3a^2b}{b^3} = 3 \frac{a^2}{b^2}. \quad (2.2)$$

Posługując się naszym modelowym rysunkiem objaśnimy jeszcze dwie wielkości, a mianowicie: rzeczywistą porowatość powierzchniową i średnią porowatość powierzchniową. Pierwsza z nich jest na ogół nieregularna. Według rys. 1a porowatość ta przyjmuje wartości:

$$\begin{aligned} (a^2 + ab)/b^2 & \text{ — na odcinkach AB i CD,} \\ a^2/b^2 & \text{ — na odcinku BC.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ze względu na nieregularność, posługiwanie się tą wielkością jest kłopotliwe. Dlatego wprowadza się pojęcie średniej porowatości powierzchniowej, będącej średnią wartością z rzeczywistych porowatości powierzchniowych.

Tą średnią wartość określamy odnosząc wartości rzeczywiste na poszczególnych odcinkach do całej długości i sumując je. A więc:

$$f_p = 2 \frac{a^2 + ab}{b^2} \cdot \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b - 2a}{b}. \quad (2.4)$$

Zauważmy, że średnia porowatość powierzchniowa jest równa porowatości objętościowej tj.:

$$f_p = 3 \frac{a^2}{b^2} = f_v. \quad (2.5)$$

Ilość cieczy unoszonej przez szkielet w danym kierunku jest  $2a^2b$ . Różnicę średniej porowatości powierzchniowej i efektywnej porowatości powierzchniowej będziemy uważać za miarę ilości cieczy unoszonej przez szkielet i oznaczać:

$$f_u \equiv f_p - f_e = 2 \frac{a^2}{b^2}. \quad (2.6)$$

W naszych rozważaniach niezależnymi funkcjami będą więc: efektywna porowatość powierzchniowa:

$$f_e \equiv \frac{df}{da}, \quad (2.7)$$

oraz porowatość objętościowa:

$$f_v \equiv \frac{df}{dv}, \quad (2.8)$$

gdzie  $dv$  oznacza objętość całkowitą elementu porowatego, a  $dv_p \subset dv$  oznacza objętość porów zawartych w tym elemencie. Będziemy ponadto zakładać, że dla ośrodka izotropowego porowatość objętościowa jest równa średniej porowatości powierzchniowej.

### 3. Równania ciągłości masy

Rzeczywiste obszary zajmowane w przestrzeni przez ciecz i szkielet rozważanego ośrodka mogą być spójne, jednakże na ogół nieregularne. Całkowanie po takich obszarach



mogłoby być więc bardzo kłopotliwe. Niedogodność tą eliminujemy wykorzystując właśnie określoną w poprzednim punkcie funkcję porowatości. Jeśli  $\varrho_s^r$  i  $\varrho_f^r$  oznaczają odpowiednie rzeczywiste gęstości szkieletu i cieczy, to masę szkieletu i cieczy w dowolnym obszarze  $B$ , ograniczonym gładką, zamkniętą i zorientowaną na zewnątrz jednostkowym wektorem normalnym  $\mathbf{n}$  powierzchnią  $\partial B$ , możemy określić jak następuje:

$$m_s(t) = \int_{B_s(t)} \varrho_s^r(\mathbf{x}, t) dv_s(\mathbf{x}, t) = \int_B \varrho_s(\mathbf{x}, t) dv(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

$$m_f(t) = \int_{B_p(t)} \varrho_f^r(\mathbf{x}, t) dv_p(\mathbf{x}, t) = \int_B \varrho_f(\mathbf{x}, t) dv(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Tutaj  $B_s(t)$  i  $B_p(t)$  oznaczają odpowiednio obszary zajęte przez szkielet i przez ciecz w obszarze  $B$  tzn.:  $B_s(t) \subset B$  i  $B_p(t) \subset B$  oraz  $B_s(t) \cup B_p(t) = B$ .

Wielkości:

$$\varrho_s(\mathbf{x}, t) = \varrho_s^r(\mathbf{x}, t)[1 - f_v(\mathbf{x}, t)], \quad (3.4)$$

$$\varrho_f(\mathbf{x}, t) = \varrho_f^r(\mathbf{x}, t)f_v(\mathbf{x}, t), \quad (3.5)$$

przyjęto nazywać gęstościami parcjalnymi, odpowiednio szkieletu i cieczy. Wynikają one z zamiany zmiennych w całkach (3.1) i (3.2) przez podstawienie (2.8), tj.:

$$dv_s(\mathbf{x}, t) = [1 - f_v(\mathbf{x}, t)]dv(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

$$dv_p(\mathbf{x}, t) = f_v(\mathbf{x}, t)dv(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$

Korzystając z zasady zachowania masy szkieletu i cieczy piszemy:

$$\dot{m}_s(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_s(t)} \varrho_s^r(\mathbf{x}, t) dv_s(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial B_s(t)} [\varrho_s^r(\mathbf{x}, t) da_s(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_f(t) = & \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_p(t)} \varrho_f^r(\mathbf{x}, t) dv_p(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial B_p(t)} [\varrho_f^r(\mathbf{x}, t) da_e(\mathbf{x}, t)] \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} + \\ & + \int_{\partial B_u(t)} [\varrho_f^r(\mathbf{x}, t) da_u(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pierwsze całki w (3.8) i (3.9) określają lokalne zmiany masy, natomiast całki powierzchniowe wyrażają strumienie mas, przy czym:  $\partial B_s(t)$ ,  $\partial B_e(t)$ ,  $\partial B_u(t)$  oznaczają odpowiednio: powierzchnię szkieletu, powierzchnię efektywnego wydatku cieczy i powierzchnię unoszenia cieczy przez szkielet na powierzchni  $\partial B$ ;  $\partial B_s(t) \cup \partial B_e(t) \cup \partial B_u(t) = \partial B$ .

W poprzednim punkcie określiliśmy powierzchnię unoszenia cieczy przez szkielet jako różnicę pomiędzy uśrednioną całkowitą powierzchnią cieczy i powierzchnią efektywnego wydatku cieczy. Taka definicja implikuje aby  $da_s$  określać również jako średnią, a nie rzeczywistą, powierzchnię szkieletu. Dokonujemy więc następującej zamiany zmiennych w całkach (3.8) i (3.9):

$$\begin{aligned} da_s(\mathbf{x}, t) &= [1 - f_v(\mathbf{x}, t)] da(\mathbf{x}), \\ da_e(\mathbf{x}, t) &= f_e(\mathbf{x}, t) da(\mathbf{x}), \\ da_u(\mathbf{x}, t) &= [f_v(\mathbf{x}, t) - f_e(\mathbf{x}, t)] da(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ponadto wykorzystujemy zależności (3.6) i (3.7) oraz twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego. Po dokonaniu przepisanych operacji otrzymujemy:

$$\dot{m}_s(t) = \int_B \left[ \frac{\partial \varrho_s(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_s(x, t) v(x, t) \right] dv(x) = 0, \quad (3.11)$$

$$\dot{m}_f(t) = \int_B \left\{ \frac{\partial \varrho_f(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div} [\varrho_e(x, t) w(x, t) + \varrho_u(x, t) v(x, t)] \right\} dv(x) = 0, \quad (3.12)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} \varrho_e(x, t) &= \varrho_f^*(x, t) f_e(x, t), \\ \varrho_u(x, t) &= \varrho_f^*(x, t) [f_u(x, t) - f_e(x, t)], \end{aligned} \quad (3.13)$$

nazywać będziemy odpowiednio parcjalną gęstością cieczy swobodnej oraz parcjalną gęstością cieczy unoszonej przez szkielet. Łatwo zauważyć na podstawie (3.13) i (3.5), że:

$$\varrho_f(x, t) = \varrho_e(x, t) + \varrho_u(x, t). \quad (3.14)$$

Całkowita gęstość ośrodka jest sumą gęstości parcjalnych (3.4) i (3.5), tj.:

$$\varrho(x, t) = \varrho_s(x, t) + \varrho_f(x, t). \quad (3.15)$$

Z równań (3.11) i (3.12) wynikają następujące równania ciągłości masy odpowiednio szkieletu i cieczy:

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_s v = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \varrho_f}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho_e w + \varrho_u v) = 0. \quad (3.17)$$

W równaniu ciągłości masy cieczy (3.17) uwzględniono konwekcję cieczy przez szkielet.

Z punktu widzenia kinematyki wydaje się słusznym dokonać takiego rozdziału składników, aby ich pola prędkości były jednorodnie. Równania (3.16) i (3.17) sugerują w tym względzie, aby szkielet i unoszoną przez niego ciecz traktować jako jeden składnik, a ciecz swobodną jako drugi składnik. Jeśli napisać równania bilansu masy dla tak wyróżnionych składników, to otrzymalibyśmy, {por. też. [7]};

$$\frac{\partial (\varrho_s + \varrho_u)}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho_s + \varrho_u) v = \varrho_u^*, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_e w = \varrho_e^*, \quad (3.19)$$

Wielkości  $\varrho_u^*$  i  $\varrho_e^*$  wyrażają fakt, że masy składników wyróżnione z punktu widzenia kinematyki nie muszą być zachowane. Musi być natomiast zachowana masa całkowita ośrodka, czyli:

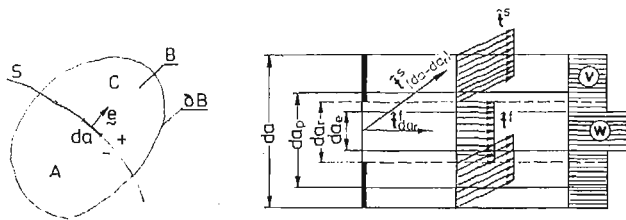
$$\varrho_u^* + \varrho_e^* = 0. \quad (3.20)$$

Fizycznie  $\varrho_u^* = -\varrho_e^*$  wyraża prędkość wzajemnej wymiany masy cieczy swobodnej i cieczy unoszonej przez szkielet. Jest ona zależna od ewolucji parametrów stanu, w tym przede wszystkim na prędkości deformacji. Dlatego, zdaniem autora, wielkość  $\varrho_u^* = -\varrho_e^*$  powinna być określona równaniem konstytutywnym.

#### 4. Analiza oddziaływań mechanicznych

Problem oddziaływań mechanicznych w ośrodku wieloskładnikowym jest niezwykle złożony. Poświęcono mu kilka prac, np. [5], [10], [11], [12], mimo to trudno uznać go za definitywnie rozwiązany. Kontrowersyjna jest definicja tzw. parcjalnego naprężenia. Definicję taką podał TRUESDELL, [11], lecz została ona podważona przez GURTINA, OLIVERA i WILLIAMS, [5]. Można by się z aprobatą odnieść do propozycji przedstawionej przez tych autorów, a także niezależnie przez OLIVERA, [10], gdyby przedstawionym przez nich rozważaniom matematycznym nadano sens fizyczny. Trudno np. uwierzyć, aby część wewnętrzną parcjalnego naprężenia, zwaną też częścią źródłową, można było a priori sformułować w warunku brzegowym, jak to sugerują autorzy.

Poniżej przedstawimy własny punkt widzenia odnośnie kwestii oddziaływań w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, nie zaniehbując przy tym sugestii przedstawionych przez wyżej wymienionych autorów. Na początku uczynimy dwa istotne założenia: zaniehbamy dewiator w cieczy jako pomijalnie mały w porównaniu z dewiatorem w szkielecie (nie oznacza to, że zaniehbujemy lepkość cieczy) oraz pomijamy ciśnienie dynamiczne w cieczy, tzn. zakładamy, że zarówno ciecz swobodna jak i ciecz unoszona przez szkielec podlegają w danym punkcie przestrzeni takiemu samemu ciśnieniu rzeczywistemu  $p(x, \hat{t})$ .



Rys. 2

Rozważmy dowolny obszar  $B$  przestrzeni, do której odwzorowano badany ośrodek i rozdzielmy ten obszar na części  $A$  i  $C$  za pomocą gładkiej powierzchni  $S$ , zorientowanej jednostkowym wektorem normalnym  $e$  (rys. 2a). Wydzielmy na tej powierzchni element  $da$ . Na rysunku 2b zaznaczono przez  $da_r$  rzeczywistą powierzchnię cieczy, przez  $da_e$  powierzchnię efektywnego wydatku cieczy, a przez  $da_p$  średnią powierzchnię cieczy na elemencie  $da$ . Jeśli  $\hat{t}^s$  oznacza rzeczywiste naprężenie w szkielecie, a  $\hat{t}^f = -pe$  rzeczywiste naprężenie w cieczy, to oddziaływanie szkielec na szkielec  $A$  oraz cieczy w  $C$  na ciecz  $A$  możemy wyrazić następująco:

$$f_{ss}(A, C) = \int_S (1 - f_r) \hat{t}^s da, \tag{4.1}$$

$$f_{ff}(A, C) = \int_S f_r \hat{t}^f da, \tag{4.2}$$

przy czym za pracę [5] przyjęto oznaczać przez  $f_{\alpha\beta}$  oddziaływanie powierzchniowe składnika  $\beta$  w  $C$  na składnik  $\alpha$  w  $A$ ;  $f_r = da_r/da$  oznacza tu rzeczywistą porowatość powierzchniową w danym punkcie przestrzeni. Całkowite oddziaływanie powierzchniowe

substancji w  $C$  na substancję w  $A$  przez powierzchnię  $S$  jest sumą:

$$f_{ss}(A, C) + f_{ff}(A, C) = \int_S t da, \quad (4.3)$$

gdzie  $t$  oznacza całkowity (uśredniony) wektor naprężenia, równy sumie wektorów parcjalnych.

Jednakże już w punkcie 2 wspomnieliśmy, że korzystanie z funkcji porowatości rzeczywistej mogłoby być kłopotliwe ze względu na jej nieregularność. Po wtóre, gdyby potraktować formuły (4.1) i (4.2) jako definicje parcjalnych wektorów naprężenia, to wyłania się trudność przyporządkowania tym oddziaływaniom odpowiednich popędów zdeterminowanych kinematyką ośrodka. Parcjalny wektor naprężenia musi więc być tak skonstruowany, aby można było mu jednoznacznie przyporządkować popęd parcjalny, a jednocześnie powinien on spełniać warunki twierdzenia Cauchy o liniowej zależności wektora naprężenia od jednostkowego wektora normalnego.

Jeśli z kolei w równaniach (4.1) i (4.2) zastosujemy inną funkcję porowatości niż  $f_r$ , to nie możemy już mówić, że parcjalny wektor naprężenia wyraża tylko wzajemne oddziaływanie tego samego składnika przez powierzchnię  $S$ . W ślad za definicją podaną przez TRUESDELLA, [11], mówi się, że dany składnik podlega parcjalnemu na prężeniu, jeśli jego działanie na dowolnie pomyślaną diafragmę jest równoważne działaniu wszystkich składników na zewnątrz diafragmy na materiał tego składnika wewnątrz diafragmy. Według tej definicji zamiast (4.1) i (4.2) powinniśmy napisać:

$$f_{ss}(A, C) + f_{sf}(A, C) = \int_S s^s(e) da, \quad (4.4)$$

$$f_{ff}(A, C) + f_{fs}(A, C) = \int_S s^f(e) da, \quad (4.5)$$

przy czym tutaj  $f_{sf}(A, C)$  wyraża oddziaływanie cieczy w  $C$  na szkielet w  $A$ , natomiast  $f_{fs}(A, C)$  wyraża oddziaływanie szkieletu w  $C$  na ciecz w  $A$ .

Jeśli zamienimy obszary  $A$  i  $C$  wzajemnie ze sobą, pozostawiając niezmienną orientację powierzchni  $S$ , to zamiast (4.4) i (4.5) otrzymamy:

$$f_{ss}(C, A) + f_{sf}(C, A) = \int_S s^s(-e) da, \quad (4.6)$$

$$f_{ff}(C, A) + f_{fs}(C, A) = \int_S s^f(-e) da. \quad (4.7)$$

Z zasady akcji i reakcji mamy:  $f_{ss}(C, A) = -f_{ss}(A, C)$ ,  $f_{ff}(C, A) = -f_{ff}(A, C)$ ,  $f_{sf}(C, A) = -f_{fs}(A, C)$ ,  $f_{fs}(C, A) = -f_{sf}(A, C)$ . Wykorzystując liniową zależność wektora naprężenia od wektora normalnego, tj.:  $s^\alpha(e) = -s^\alpha(-e)$ ;  $\alpha = s, f$ , otrzymujemy, na podstawie (4.4) ÷ (4.7), relację:

$$f_{sf}(A, C) = f_{fs}(A, C), \quad (4.8)$$

wyrażającą pewną symetrię oddziaływań, a mianowicie, że ciecz w  $C$  działa na szkielet w  $A$  z taką samą siłą jak szkielet w  $C$  na ciecz w  $A$ . GURTIN, OLIVER i WILLIAMS, [5], nazwali taką symetrię oddziaływań paradoksem. Proponują oni następującą korektę definicji Truesdella. Postulują, aby we wzorach (4.4) i (4.5) przyjąć  $s^\alpha(n) \neq s^\alpha(-n)$ ;

$\alpha = s, f$  i uzupełnić te formuły o powierzchniowe oddziaływania wewnętrzne  $\bar{f}_{sf}(A, A)$  i  $\bar{f}_{fs}(A, A)$ . Wtedy wektory główne sił powierzchniowych mają postać:

$$f_{ss}(A, C) + f_{sf}(A, C) + \bar{f}_{sf}(A, A) = \int_S \mathbf{t}^s(e) da, \quad (4.9)$$

$$f_{ff}(A, C) + f_{fs}(A, C) + \bar{f}_{fs}(A, A) = \int_S \mathbf{t}^f(e) da, \quad (4.10)$$

przy czym

$$\mathbf{t}^\alpha(e) = s^\alpha(e) + k^\alpha(e) = -\mathbf{t}^\alpha(-e). \quad (4.11)$$

W pracy [5] nazwano  $s^\alpha(e)$  zewnętrznym a  $k^\alpha(e)$  wewnętrznym wektorem naprężenia.

Korzystając z liniowej zależności parcjalnych wektorów naprężenia  $\mathbf{t}^s(e)$  i  $\mathbf{t}^f(e)$  od wektora normalnego oraz ze wzoru (4.3) znajdujemy następujące relacje:

$$f_{sf}(A, C) = -\frac{1}{2} [\bar{f}_{sf}(A, A) + \bar{f}_{sf}(C, C)], \quad (4.12)$$

$$f_{fs}(A, C) = -\frac{1}{2} [\bar{f}_{fs}(A, A) + \bar{f}_{fs}(C, C)].$$

Wykorzystując te relacje we wzorach (4.9) i (4.10) otrzymujemy:

$$f_{ss}(A, C) + \frac{\bar{f}_{sf}(A, A) - \bar{f}_{sf}(C, C)}{2} = \int_S \mathbf{t}^s(e) da, \quad (4.13)$$

$$f_{ff}(A, C) - \frac{\bar{f}_{sf}(A, A) - \bar{f}_{sf}(C, C)}{2} = \int_S \mathbf{t}^f(e) da.$$

Wyrażenie  $[\bar{f}_{sf}(A, A) - \bar{f}_{sf}(C, C)]$  będzie różne od zera na powierzchni  $S$  przy założeniu  $f_{sf}(A, C) \neq 0$  lub  $f_{fs}(A, C) \neq 0$  wtedy i tylko wtedy, jeśli na tej powierzchni będą istnieć źródła sił powierzchniowych, co naszym zdaniem jest możliwe tylko, jeśli  $S$  będzie powierzchnią osobliwą.

Konkludując stwierdzamy że założenie a priori  $f_{\alpha\beta}(A, C) \neq 0$ ,  $\alpha \neq \beta$  prowadzi do kontrowersyjnego wyniku występowania źródeł sił powierzchniowych na dowolnej powierzchni  $S$ , poprowadzonej myślowo przez ośrodek.

Naszym zdaniem, oddziaływania krzyżowe składników wewnątrz obszaru ze składnikami na zewnątrz obszaru nie istnieją, z wyjątkiem być może powierzchni osobliwych lub dalekich oddziaływań. Mogą istnieć natomiast oddziaływania krzyżowe pomiędzy składnikami wewnątrz samego obszaru. Mamy tu oczywiście na myśli oddziaływania inne niż te, które występują w związkach fizycznych (por. np. [1], [3]). W związkach tych parcjalne naprężenie w danym składniku zależy od deformacji wszystkich składników, lecz są to oddziaływania dylatacyjne.

Nie jest naszym celem formułowanie ogólnej definicji parcjalnego naprężenia. Wydaje się jednak, że definicja taka powinna określać izomorfizm parcjalnego pędu i cząstkowych sił powierzchniowych. Jeśli mieszanina znajduje się w równowadze wewnętrznej, tj. gdy nie występuje ruch względny składników, brak jest wtedy parcjalnych pędów i nie zachodzi potrzeba posługiwania się pojęciem parcjalnego naprężenia.

W tej pracy przyjmujemy zatem  $f_{\alpha\beta}(A, C) = 0$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Oddziaływania wewnętrzne będą wtedy samozrównoważone na powierzchni myślowego rozdziału, tj.:

$$\bar{f}_{\alpha\beta}(A, A) + \bar{f}_{\alpha\beta}(C, C) = 0 \text{ na } S. \quad (4.14)$$

Można im nadać określony sens fizyczny. Wielkość  $\bar{f}_{sf}(A, A)$  może np. wyrażać oddziaływanie na szkielet cieczy przez niego unoszonej itp.

Z powyższych konkluzji wynika, że na parcjalny wektor naprężenia składają się oddziaływania zewnętrzne z tym samym składnikiem oraz oddziaływania wewnętrzne z pozostałymi składnikami, czyli:

$$\begin{aligned} f_{ss}(A, C) + \bar{f}_{sf}(A, A) &= \int_S t^s(e) da, \\ f_{rf}(A, C) + \bar{f}_{rs}(A, A) &= \int_S t^f(e) da. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Formuły (4.15) sugerują pewną dowolność w konstruowaniu parcjalnego wektora naprężenia. Możemy np. skonstruować wektory parcjalne odniesione do efektywnej porowatości powierzchniowej, bądź też średniej porowatości powierzchniowej. W pierwszym przypadku oddziaływania wewnętrzne wynikają z różnicy rzeczywistej i efektywnej porowatości powierzchniowej, a w drugim przypadku z różnicy rzeczywistej i średniej porowatości powierzchniowej. Przyjmujemy, że iloczyn rzeczywistego naprężenia działającego w danym składniku przez odpowiadającą mu powierzchnię działania jest funkcją regularną. Przy żądanej gładkości obszarów i funkcji możemy naprężenia parcjalne  $t^1$ , działające na szkielet wraz z unoszoną cieczą oraz naprężenie parcjalne  $t^2$ , działające na ciecz swobodną wyrazić jak następuje:

$$t^1 = (1 - f_r) \hat{t}^s - (f_r - f_e) p e, \quad (4.16)$$

$$t^2 = -p f_e e. \quad (4.17)$$

Dla tego przypadku:

$$s^s = (1 - f_r) \hat{t}^s, \quad s^f = -p f_e e, \quad k^s = -k^f = -(f_r - f_e) p e.$$

Są to naprężenia parcjalne, skonstruowane w oparciu o rzeczywistą i efektywną porowatość powierzchniową. Natomiast naprężenia parcjalne, skonstruowane w oparciu o rzeczywistą i średnią porowatość powierzchniową przyjmują postać:

$$t^s = (1 - f_r) \hat{t}^s - (f_r - f_p) p e, \quad (4.18)$$

$$t^f = -p f_p e. \quad (4.19)$$

Tutaj:

$$s^s = (1 - f_r) \hat{t}^s, \quad s^f = -f_p p e, \quad k^s = -k^f = -(f_r - f_p) p e.$$

Jak łatwo zauważyć, wektory  $t^1$  i  $t^s$  oraz  $t^2$  i  $t^f$  różnią się między sobą wartością ciśnienia wynikającą z różnicy średniej i efektywnej porowatości:

$$t^1 = t^s - (f_p - f_e) p e, \quad (4.20)$$

$$t^2 = t^f + (f_p - f_e) p e. \quad (4.21)$$

Wzory (4.16) - (4.21) są istotne przy formułowaniu warunków brzegowych.

### 5. Równania bilansu pędu

Rozważmy ponownie pewien obszar  $B$  ograniczony gładką i zamkniętą powierzchnią  $\partial B$ , zorientowaną na zewnątrz jednostkowym wektorem normalnym  $\mathbf{n}$ . Bilans pędu cieczy swobodnej zawartej w tym obszarze wyraża się następująco:

$$\int_{\partial B} (-pf_e \mathbf{n}) da + \int_B (\varrho_f^r f_e \mathbf{X} + \mathbf{F}^{21}) dv = \left( \int_B \varrho_f^r f_e \mathbf{w} dv \right)'. \quad (5.1)$$

Tutaj  $\mathbf{X}$  oznacza siły masowe, a  $\mathbf{F}^{12}$  siłę oddziaływania pomiędzy składnikami (siłę dyfuzji). Zastąpmy funkcję porowatości  $f_e$  w równaniu (5.1) funkcją średniej porowatości  $f_p$ . Mamy więc:

$$\int_{\partial B} (-pf_p \mathbf{n}) da + \int_B (\varrho_f^r f_p \mathbf{X} + \mathbf{F}^{fs}) dv = \left( \int_B \varrho_f^r f_p \mathbf{w} dv \right)'. \quad (5.2)$$

W powyższych równaniach przyjęliśmy następujące przyporządkowania sił powierzchniowych i pędów:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^2 &= -pf_e \mathbf{n} \leftrightarrow \varrho_f^r f_e \mathbf{w}, \\ \mathbf{t}^f &= -pf_p \mathbf{n} \leftrightarrow \varrho_f^r f_p \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

tzn. określonej porowatości przy niezmienionym  $p$ , przyporządkowana jest określona ilość masy biorącej udział w ruchu przy niezmienionej prędkości ruchu  $\mathbf{w}$ . Oczywiście, całkowite zmiany czasowe prawych stron równań (5.1) i (5.2) będą się różnić prędkościami konwekcji. W pierwszym przypadku rozważamy bowiem tylko ciecz swobodną, która może mieć jedynie prędkość konwekcji  $\mathbf{w}$ , a w drugim przypadku całą ciecz, która charakteryzuje się prędkością konwekcji zarówno  $\mathbf{w}$  jak i  $\mathbf{v}$  (por. punkt 3).

Równania (5.1) i (5.2), po rozpisaniu prawych stron i zamianie całek powierzchniowych na objętościowe, przyjmują postać:

$$\int_B (\text{grad } \sigma^2 + \varrho_e \mathbf{X} + \mathbf{F}^{21}) dv = \int_B \left( \frac{\partial \varrho_e \mathbf{w}}{\partial t} + \text{div } \varrho_e \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \right) dv, \quad (5.4)$$

$$\int_B (\text{grad } \sigma^f + \varrho_f \mathbf{X} + \mathbf{F}^{fs}) dv = \int_B \left( \frac{\partial \varrho_f \mathbf{w}}{\partial t} + \text{div} [\varrho_e \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} + \varrho_u \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}] \right) dv, \quad (5.5)$$

gdzie oznaczono:

$$\sigma^2 = -pf_e, \quad \sigma^f = -pf_p. \quad (5.6)$$

Bilans pędu szkieletu i unoszonej przez niego cieczy (traktowanych jako jeden składnik) opisuje równanie:

$$\int_{\partial B} \mathbf{t}^1 da + \int_B [(\varrho_s + \varrho_u) \mathbf{X} + \mathbf{F}^{12}] dv = \left( \int_B (\varrho_s + \varrho_u) \mathbf{v} dv \right)'. \quad (5.7)$$

Jeśli wykorzystamy wzór Cauchy dla naprężeń ( $\mathbf{t}^1(\mathbf{n})$  jest liniową funkcją wektora normalnego):

$$\mathbf{t}^1 = \sigma^1 \mathbf{n}, \quad (5.8)$$

oraz uwzględnimy fakt, że masa  $(\varrho_s + \varrho_u)$  posiada prędkość konwekcji  $\mathbf{v}$ , to równanie

(5.7) możemy przepisać w postaci:

$$\int_B (\operatorname{div} \sigma^1 + (\varrho_s + \varrho_u) X + F^{12}) dv = \int_B \left[ \frac{\partial(\varrho_s + \varrho_u) v}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_s + \varrho_u) v \otimes v \right] dv. \quad (5.9)$$

Równania (5.4) i (5.9) opisują ruch składników zdeterminowanych efektywną porowatością powierzchniową (składniki kinematyczne). Wobec dowolności wyboru obszaru  $B$ , możemy je napisać w postaci lokalnej:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^1 + (\varrho_s + \varrho_u) X + F^{12} &= \varrho_u^* v + (\varrho_s + \varrho_u) \frac{dv}{dt}, \\ \operatorname{grad} \sigma^2 + \varrho_e X + F^{21} &= \varrho_e^* w + \varrho_e \frac{Dw}{Dt}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

przy czym, przy przekształceniach prawych stron wykorzystano równania ciągłości (3.18) i (3.19), oraz oznaczono  $d(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + v \operatorname{grad}(\cdot)$ ,  $D(\cdot)/Dt = \partial(\cdot)/\partial t + w \operatorname{grad}(\cdot)$ .

Siły dyfuzji spełniają warunek:

$$F^{12} + F^{21} = 0. \quad (5.11)$$

Obecnie łatwo zauważyć, że równanie komplementarne do (5.2) powinno mieć postać:

$$\int_{\partial B} t^s da + \int_B (\varrho_s X + F^{sf}) dv = \left( \int_B [(\varrho_s + \varrho_u) v - \varrho_u w] dv \right)'. \quad (5.12)$$

Masa szkieletu i cieczy unoszonej przez szkielet mają prędkość konwekcji  $v$ . Dla wektora naprężenia  $t^s(n)$  wykorzystamy formułę Cauchy:

$$t^s = \sigma^s n \quad (5.13)$$

i przekształcimy równanie (5.12) jak następuje:

$$\int_B (\operatorname{div} \sigma^s + \varrho_s X + F^{sf}) dv = \int_B \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [(\varrho_s + \varrho_u) v - \varrho_u w] + \operatorname{div} [( \varrho_s + \varrho_u ) v - \varrho_u w] \otimes v \right\} dv. \quad (5.14)$$

Równania (5.5) i (5.14) stanowią drugą alternatywną parę równań opisujących ruch ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Dotyczą one składników zdeterminowanych porowatością objętościową. Wprowadzimy średnią prędkość ruchu cieczy  $V$  zdefiniowaną:

$$\varrho_f V \stackrel{\text{df}}{=} \varrho_u v + \varrho_e w, \quad (5.15)$$

i wyrazimy równania (5.5) i (5.14) za pomocą tej prędkości. Ich forma lokalna ma postać:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^s + \varrho_s X + F^{sf} &= \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_{11} v + \varrho_{12} V) + \operatorname{div} [(\varrho_{11} v + \varrho_{12} V) \otimes v], \\ \operatorname{grad} \sigma^f + \varrho_f X + F^{fs} &= \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_{12} v + \varrho_{22} V) + \operatorname{div} [(\varrho_{12} v + \varrho_{22} V) \otimes V], \end{aligned} \quad (5.16)$$



gdzie oznaczono:

$$\varrho_{11} = \varrho_s - \varrho_{12}, \quad \varrho_{12} = -\frac{\varrho_u \varrho_f}{\varrho_e}, \quad \varrho_{22} = \varrho_f - \varrho_{12}. \quad (5.17)$$

Zróżniczkujemy prawe strony równań (5.16) wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho_{11}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{11} \mathbf{v} &= \varrho_{11}^*, & \frac{\partial \varrho_{12}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{12} \mathbf{v} &= \varrho_{12}^*, & \varrho_{11}^* + \varrho_{12}^* &= 0, \\ \frac{\partial \varrho_{12}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{12} \mathbf{V} &= \varrho_{12}^{**}, & \frac{\partial \varrho_{22}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{22} \mathbf{V} &= \varrho_{22}^{**}, & \varrho_{12}^{**} + \varrho_{22}^{**} &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^s + \varrho_s \mathbf{X} + \mathbf{F}^{sf} &= \varrho_{11}^* \mathbf{v} + \varrho_{12}^* \mathbf{V} + \varrho_{11} \dot{\mathbf{v}} + \varrho_{12} \dot{\mathbf{V}}, \\ \operatorname{grad} \sigma^f + \varrho_f \mathbf{X} + \mathbf{F}^{fs} &= \varrho_{12}^{**} \mathbf{v} + \varrho_{22}^{**} \mathbf{V} + \varrho_{12} \dot{\mathbf{v}} + \varrho_{22} \dot{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

przy czym „kropka” nad symbolem oznacza pochodną materialną z prędkością konwekcji  $\mathbf{v}$ , a „prim” pochodną materialną z prędkością konwekcji  $\mathbf{V}$ . Wielkości  $\varrho_{12}^* = -\varrho_{11}^*$  i  $\varrho_{12}^{**} = -\varrho_{22}^{**}$ , podobnie jak  $\varrho_u^* = -\varrho_e^*$  powinny być określone równaniem konstytutywnym.

Równania (5.10) i (5.19), jeśli pominąć w nich człony źródłowe, są analogiczne odpowiednio jak równania DERSKIEGO, [2], i BIOTA, [1].

## 6. Uwagi końcowe

Przedstawimy jeszcze kilka uwag uzupełniających dotychczasowe rozważania. Bez dowodu, gdyż łatwo to sprawdzić, podamy, że pominięcie dewiatora naprężeń w cieczy implikuje automatycznie symetrię rozważanych przez nas parcjalnych tensorów naprężenia, tj.:

$$\sigma^1 = (\sigma^1)^T \quad \text{i} \quad \sigma^s = (\sigma^s)^T. \quad (6.1)$$

Aby określić wartości brzegowe parcjalnych tensorów naprężenia, należy znać na brzegu: rzeczywistą wartość wektora naprężenia w szkielecie  $\hat{\mathbf{t}}^s$ , rzeczywiste ciśnienie cieczy  $p$ , rzeczywistą porowatość powierzchniową  $f_r$  oraz efektywną, jeśli korzystamy z równań (5.10), lub średnią, jeśli korzystamy z równań (5.19), porowatość powierzchniową. Wtedy:

$$\begin{aligned} \sigma^1 \mathbf{n} &= (1 - f_r) \hat{\mathbf{t}}^s - (f_r - f_e) p \mathbf{n} = \text{funkcja dana}, \\ \sigma^2 \mathbf{n} &= -p f_e \mathbf{n} = \text{funkcja dana}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

lub:

$$\begin{aligned} \sigma^s \mathbf{n} &= (1 - f_r) \hat{\mathbf{t}}^s - (f_r - f_p) p \mathbf{n} = \text{funkcja dana}, \\ \sigma^f &= -p f_p = \text{funkcja dana}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Jeśli w obszarze  $B$  przemieszcza się z prędkością  $\mathbf{c}$  powierzchnia nieciągłości  $S$ , zorientowana jednostkowym wektorem normalnym  $\mathbf{e}$  (rys. 2a), to na tej powierzchni zachodzą

dążą następujące warunki ciągłości kinematycznej i dynamicznej:

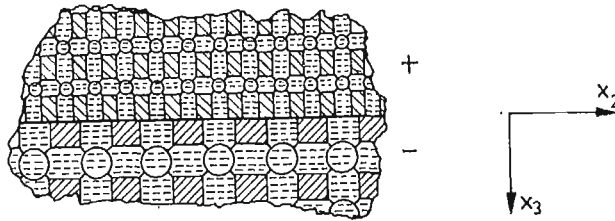
— dla składników kinematycznych

$$\begin{aligned} [[\varrho_s + \varrho_u](\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}] &= 0, & [[\varrho_e(\mathbf{w} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}] &= 0, \\ [[\mathbf{t}^1] &= [[\varrho_s + \varrho_u]\mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}], & [[\mathbf{t}^2] &= [[\varrho_e \mathbf{w}(\mathbf{w} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}], \end{aligned} \quad (6.4)$$

— dla składników fizycznych

$$\begin{aligned} [[\varrho_s(\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}] &= 0, & [[\varrho_f(\mathbf{V} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}] &= 0, \\ [[\mathbf{t}^s] &= [[(\varrho_{11}\mathbf{v} + \varrho_{12}\mathbf{V})(\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}], & [[\mathbf{t}^f] &= [[(\varrho_{12}\mathbf{v} + \varrho_{22}\mathbf{V})(\mathbf{V} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}], \end{aligned} \quad (6.5)$$

przy czym  $[[\varphi]] = \varphi^+ - \varphi^-$ , jest oznaczeniem nieciągłości funkcji na  $S$ . Jeśli powierzchnia  $S$  byłaby powierzchnią materialną, np. powierzchnią kontaktu dwóch ośrodków porowa-



Rys. 3

tych (lub powierzchnią brzegową związaną ze szkieletem) (rys. 3), wtedy  $\mathbf{v} = \mathbf{c}$  i związki (6.4) i (6.5) przyjmują prostszą postać:

$$[[\varrho_e(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}] = 0, \quad [[\mathbf{t}^1] = 0, \quad [[\mathbf{t}^2] = \varrho_e(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}[[\mathbf{w}], \quad (6.4a)$$

oraz

$$[[\varrho_f(\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}] = 0, \quad [[\mathbf{t}^s] = 0, \quad [[\mathbf{t}^f] = [[(\varrho_{12}\mathbf{v} + \varrho_{22}\mathbf{V})(\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}]. \quad (6.5a)$$

Zależności (6.4a) i (6.5a) mogą być pomocne przy formułowaniu warunków brzegowych.

Przez ekwiwalentność równań (5.10) i (5.19) rozumiemy ich potencjalną możliwość opisu tych samych zjawisk. Tak np. oba typy równań ujmują zjawisko sprzężenia ruchu przez masę. Moc mechaniczna przekazywana do dowolnie zdefiniowanego układu termodynamicznego musi być taka sama, niezależnie od tego czy użyjemy do opisu tensorów parcjalnych  $\sigma^1$  i  $\sigma^2 \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  = jednostkowy tensor) i odpowiednio prędkości przemieszczeń  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$ , czy też tensorów  $\sigma^s$  i  $\sigma^f \mathbf{I}$  i prędkości  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{V}$ . Analogicznie, moc sił dyfuzji, energia kinetyczna, energia wewnętrzna itp. muszą być takie same, niezależnie od tego czy dokonamy podziału na składniki kinematyczne czy też fizyczne. Żądanie spełnienia wyżej wymienionych warunków prowadzi do określonych relacji pomiędzy parametrami obu typów równań. Znamy już relacje pomiędzy parcjalnymi naprężeniami, parcjalnymi gęstościami, pomiędzy prędkościami, itp. Z równości mocy sił dyfuzji otrzymujemy dodatkowo relację:

$$\mathbf{F}^{12} = \mathbf{F}^{sf} \frac{f_c}{f_p}. \quad (6.6)$$

Wybiegając nieco poza zakres tej pracy, podamy relację:

$$\sigma^2 \text{grad} \left( \frac{f_v}{f_e} \right) = \frac{f_v}{f_e} \varrho_u^* \mathbf{w} - \varrho_u(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \text{grad} \mathbf{w}, \quad (6.7)$$

która wynika z przyrównania energii wewnętrznej w obu opisach. Wszystkie te relacje pozwalają przetransformować układ równań (5.10) w (5.19) i na odwrót. Na zakończenie wspomnimy jeszcze, że ponieważ energia kinetyczna przy podziale kinematycznym ma postać kanoniczną formy kwadratowej, tj.:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} [(\varrho_s + \varrho_u) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \varrho_e \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}], \quad (6.8)$$

natomiast przy podziale fizycznym pełną postać formy kwadratowej, tj.:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} (\varrho_{11} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\varrho_{12} \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + \varrho_{22} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}), \quad (6.9)$$

przyjęto mówić (por. [8]), że ruch składników kinematycznych opisany jest we współrzędnych normalnych.

#### Literatura

1. M. A. BIOT, *Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid Saturated Porous Solid, I. Low-Frequency Range*, J. Acoust. Soc. of Amer., Vol. 28, 2, 1956.
2. W. DERSKI, *Equations of Motion for a Fluid-Saturated Porous Solids*, Bull. Acad. Pol. Sci., Vol. XXVI, No 1, 1978.
3. W. DERSKI, S. J. KOWALSKI, *Equations of Linear Thermoconsolidation*, Arch. Mech. Stos. 31, 3, 1979.
4. R. DZIĘCIELAK, *Propagacja fal nieciągłości w ośrodku porowatym nasyconym cieczą*, Politechnika Poznańska, Rozprawy Nr 118, 1980.
5. M. E. GURTIN, M. L. OLIVER, W. O. WILLIAMS, *On Balance of Forces for Mixtures*, Quart. App. Math., January, 1973.
6. S. J. KOWALSKI, *Comparison of the Biot Equations of Motion for a Fluid-Saturated Porous Solid with Those of Derski*, Bull. Acad. Pol. Sci., Vol. XVII, No. 10 - 11, 1979.
7. S. J. KOWALSKI, *Identification of the Coefficients in the Equations of Motions for a Fluid-Saturated Porous Medium*, Acta Mechanica 47, 263 - 276, 1983.
8. S. J. KOWALSKI, *Współrzędne normalne i warunki brzegowe w teorii mieszanin*, Prace IPPT, nr 5/1980.
9. J. KUBIK, *Mechanika silnie odkształcalnych ośrodków o anizotropowej przepuszczalności*, Prace IPPT, nr 29/1981.
10. M. L. OLIVER, *On Balanced Interactions in Mixtures*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 49, 28, 1972.
11. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, In Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer-Verlag, Berlin—Göttigen—Heidelberg, 1960.
12. B. UZIEMBŁO, *Podstawy termodynamiki aksjomatycznej wieloskładnikowych ośrodków ciągłych*, Praca doktorska (IPPT), 28, 1974.
13. K. WILMAŃSKI, *Zarys termodynamiki i ośrodków ciągłych*, Prace IPPT, nr 6/1975.

#### Резюме

#### ДВИЖЕНИЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ВЫПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ. ОБЩИЙ ОПИСЬ

Целью работы является выведение из баланса массы и количества движения уравнений движения для пористой среды заполненной жидкостью. Учитывается при этом сопряжение движения компонентов через массу, изменение пористости и плотности компонентов. Показывается, что на этой пути возможно получить две отличные но эквивалентные формы уравнений похожих на известные уравнения Биота и Дерского. Вокруг этих уравнений существует много сомнений. Эти сомнения а также определение парциального напряжения обсуждается в работе.

## S u m m a r y

MOTION OF A FLUID-SATURATED POROUS MEDIUM  
GLOBAL DESCRIPTION

Main purpose of the paper is to show the way of derivation of two different forms of equations of motion for a fluid-saturate porous solid i.e. the equations similar to those presented earlier by Biot (1956) and by Derski (1978). However these equations and their interpretation are sometimes questionable. Departing from the mass and momentum balance equations we discuss the pertinent motions taking into account the effect of couplings through the mass, variation of porosity and the components density. A controversial definition of the partial stress is also discussed in the paper.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 lipca 1985 roku*

---

## METODA OBLICZANIA AMPLITUD DRGAŃ WYMUSZONYCH BELEK SŁABO TŁUMIONYCH TARCIEM KONSTRUKCYJNYM

WIESŁAW OSTACHOWICZ  
DARIUSZ SZWEDOWICZ

*Politechnika Gdańska*

### 1. Wstęp

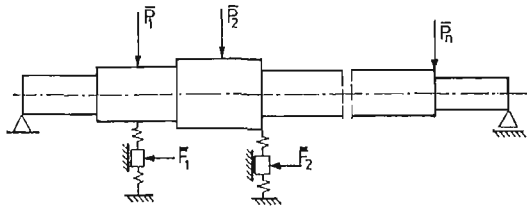
Przedmiotem analizy są drgania wymuszone belek z uwzględnieniem pętli histerezy w wybranych punktowych elementach skończonych (PES). Występowanie zjawiska histerezy może być spowodowane przez tarcie suche (Coulomba). Przykładem mogą być drgania konstrukcji stalowej gdy materiał ma własności elastoplastyczne.

Podjęte zagadnienie rozszerza metodę analizy przedstawioną w pracach Ostachowicza [1 - 3]. W pracach tych rozwiązano problem zagadnienia kontaktowego układów modelowanych elementami skończonymi i sztywnymi bryłami. W pracy Muszyńskiej i Jones'a [4] przedstawiono rozwiązanie drgań belek wspornikowych z uwzględnieniem sił tarcia Coulomba obciążających punktowo konstrukcję. W pracach [1 - 4] przyjęto inny model odkształcenia punktowych elementów skończonych.

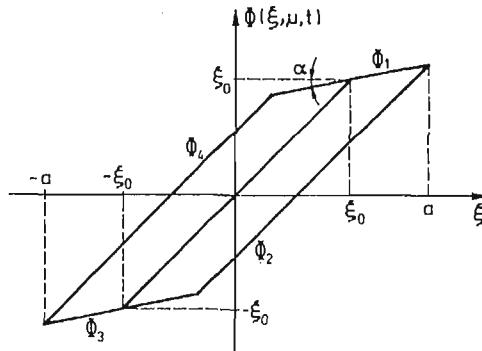
Przedstawiona niżej metoda umożliwia analizę konstrukcji o większym stopniu złożoności. Podano algorytm i przykłady obliczeń. Opisano program komputerowy, który wykorzystano przy opracowaniu przykładów.

### 2. Opis modelu obliczeniowego

Przedstawiono metodę obliczania amplitud drgań poprzecznych belki z uwzględnieniem tarcia konstrukcyjnego w kilku podporach. Przyjęto, że podpory te są odkształcalne a siła tarcia występuje na powierzchniach dociśniętych do siebie stałym naciskiem. W praktyce inżynierskiej podpory tego typu spotyka się między innymi przy instalacji rurociągów. Model dyskretny układu przedstawiono na rys. 1. Belkę modelowano dwuwęzłowymi elementami skończonymi (ES) o dwóch stopniach swobody w węźle. Funkcje kształtu elementu przyjęto jak w pracy Desai [5]. W kilku podporach przyjęto punktowe elementy skończone (PES). Własności sprężysto-tłumiące stosowanego niżej PES przedstawiono na rys. 2 ( $\xi$  oznacza przemieszczenie). Równania prostych  $\Phi_1, \dots, \Phi_4$  opisują



Rys. 1. Model dyskretny belki. PES — punktowe elementy skończone



Rys. 2. Własności sprężysto-tłumiące PES

równania

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\xi, \mu^*, t) &= \mu^* \xi_0 + (1 - \mu^*) \xi, \\
 \Phi_2(\xi, \mu^*, t) &= \mu^* (\xi_0 - a) + \xi, \\
 \Phi_3(\xi, \mu^*, t) &= -\mu^* \xi_0 + (1 - \mu^*) \xi, \\
 \Phi_4(\xi, \mu^*, t) &= -\mu^* (\xi_0 - a) + \xi,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \mu^* &= 1 - \mu, \\
 \mu &= \operatorname{tg} \alpha,
 \end{aligned}$$

przy czym  $\xi_0$  oznacza odcięta punktu przecięcia się prostej  $\Phi_1(\xi, \mu^*, t)$  z prostą  $\Phi(\xi) = \xi$ ,  $a$  oznacza maksymalną wartość przemieszczenia. Stosując ekwiwalentną linearyzację własności sprężysto-tłumiących PES na podstawie Piszczka [6] otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 c^* &= c + \frac{\overline{\Phi(\xi, \dot{\xi}, t) \dot{\xi}}}{\overline{\dot{\xi}^2}}, \\
 k^* &= k + \frac{\overline{\Phi(\xi, \dot{\xi}, t) \xi}}{\overline{\xi^2}},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie kreska nad wyrażeniem oznacza jego wartość średnią,  $c^*$  jest współczynnikiem ekwiwalentnego liniowego tłumienia,  $k^*$  przedstawia współczynnik ekwiwalentnej liniowej sztywności.

Równania ruchu układu tworzymy według powszechnie znanych zasad. W pierwszym etapie formujemy macierze charakterystyczne elementów, to jest macierz bezwładności  $\mathbf{M}_e$ , tłumienia  $\mathbf{C}_e$  i sztywności  $\mathbf{K}_e$ . W drugim etapie tworzymy macierze globalne  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  i formujemy wektor sił uogólnionych  $f$ . Równania ruchu przyjmują postać

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{C}\dot{q} + \mathbf{K}q = f, \quad (2.3)$$

gdzie  $q$  oznacza wektor współrzędnych uogólnionych. Macierz  $\mathbf{C}$  uzupełniamy blokami

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} c^* & -c^* \\ -c^* & c^* \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

a macierz sztywności  $\mathbf{K}$  blokami

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} k^* & -k^* \\ -k^* & k^* \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

gdzie  $c^*$  i  $k^*$  określają związki (2.2). Elementy bloków (2.4) i (2.5) dodajemy zgodnie z przyjętą numeracją współrzędnych uogólnionych określających ruch końców PES. Przy założeniu, że układ drgający jest słabo tłumiony i przy małej nieliniowości, odkształcenie PES opisują funkcje typu

$$\xi(t) = a \sin \varphi(t), \quad (2.6)$$

gdzie

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \Theta,$$

$\omega_0$  jest częstością wymuszenia,  $\Theta$  kątem przesunięcia fazowego. Stąd współczynniki  $c^*$  i  $k^*$  przyjmują postać

$$\begin{aligned} c^* &= c + \frac{2\langle L(a) \rangle}{\omega_0 \langle a^2 \rangle}, \\ k^* &= k + \frac{2\langle H(a) \rangle}{\langle a^2 \rangle}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie

$$\begin{aligned} L(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cos \varphi \cdot \Phi(\xi, \dot{\xi}, t) d\varphi, \\ H(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \sin \varphi \cdot \Phi(\xi, \dot{\xi}, t) d\varphi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Podstawiając do (2.8) związki (2.1), po scałkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} L(a) &= 2 \frac{k}{\pi} \mu^* \xi_0 (a - \xi_0), \\ H(a) &= \frac{a^2 k}{2\pi} \left[ \pi \left( 1 - \frac{3}{2} \mu^* \right) + \mu^* \beta + \frac{1}{2} \mu^* \sin 2\beta \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie

$$\beta = \arcsin \left( 1 - \frac{2\xi_0}{a} \right).$$

Związki (2.9) są słuszne przy  $a \geq \xi_0$ . W przeciwnym przypadku

$$\begin{aligned} L(a) &= 0, \\ H(a) &= \frac{1}{2} a^2 k. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wektor wymuszeń  $f$  przyjmujemy w postaci

$$f = \bar{f} \exp(i\omega_0 t), \quad (2.11)$$

gdzie  $\bar{f}$  jest wektorem kolumnowym

$$\bar{f} = \{f_j^0 \exp(i\Psi_j)\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

przy czym  $f_j^0 = \text{const}$ . Wektor współrzędnych uogólnionych zakładamy dalej w postaci

$$q = \bar{q} \exp(i\omega_0 t), \quad (2.13)$$

gdzie  $\bar{q}$  przyjmuje postać wektora kolumnowego

$$\bar{q} = \{q_j^0 \exp(i\Theta_j)\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.14)$$

przy czym  $q_j = \text{const}$ ,  $\Theta_j$  oznacza kąt przesunięcia fazowego,  $n$  — liczbę stopni swobody. Podstawiając do (2.3) związki (2.11) i (2.13) otrzymujemy

$$(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M} + i\omega_0 \mathbf{C}) \bar{q} = \bar{f}. \quad (2.15)$$

Z uwagi na to, że niektóre elementy macierzy  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{C}$  są funkcjami przemieszczeń końców PES, do rozwiązania równania (2.15) stosujemy procedurę iteracyjną. W pierwszym kroku iteracyjnym zakładamy, że współczynniki tłumienia i sztywności PES są równe

$$c^* = c, \quad k^* = k. \quad (2.16)$$

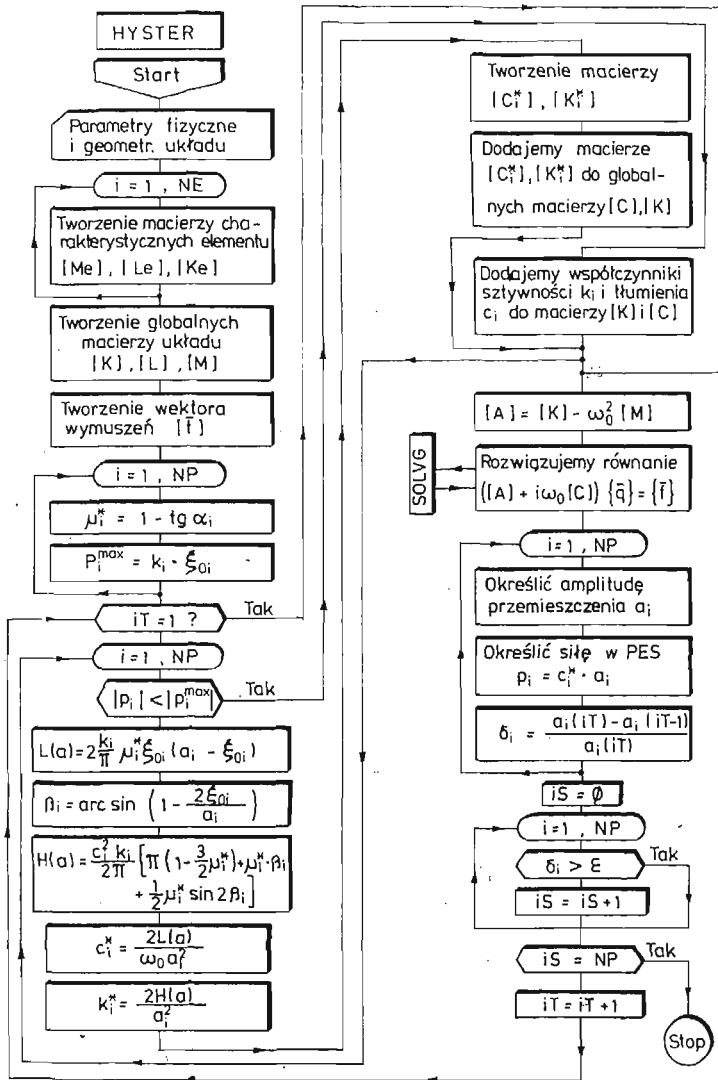
W drugim i dalszych krokach iteracji współczynniki sztywności i tłumienia PES obliczamy z równań (2.7). Istnieje zatem konieczność powtarzania obliczeń (2.13) przy zmianie macierzy  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{C}$ .

### 3. Opis programu komputerowego

Schemat blokowy programu komputerowego przedstawiono na rys. 3. W programie HYSTER podajemy parametry fizyczne i geometryczne układu a więc wymiary przekroju poprzecznego, długości elementów, moduł Younga, gęstość materiału a także liczbę elementów skończonych NE, liczbę podpór NP, współczynniki sztywności i tłumienia podpór  $k_i$  i  $c_i$  oraz  $\xi_{0i}$ ,  $\alpha_i$  (patrz rys. 2). Ponadto podajemy amplitudy i częstotliwości sił wymuszających. Tworzymy kolejno macierze charakterystyczne elementów a na ich podstawie macierze globalne  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{K}$ . Wektor  $\bar{f}$  zawiera amplitudy obciążeń zewnętrznych układu. Obliczamy współczynniki  $\mu_i^*$  w PES i dalej krytyczne obciążenia  $p_i^{max}$ . Z kolei określamy zastępcze współczynniki tłumienia  $c_i^*$  i sztywności  $k_i^*$  i na ich podstawie tworzymy bloki  $\mathbf{C}_i^*$  i  $\mathbf{K}_i^*$ , które dodajemy do globalnych macierzy  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{K}$ .



Określamy amplitudy drgań wymuszonych układu  $\bar{q}$ . Amplitudy te oblicza program SOLVVG, który opracowano według procedury Gaussa i przystosowano do rozwiązywania liniowych układów równań algebraicznych o współczynnikach zespolonych. Określamy amplitudy przemieszczeń PES ( $a_i$ ) i siły w nich ( $p_i$ ). Badamy zbieżność wyników porów-



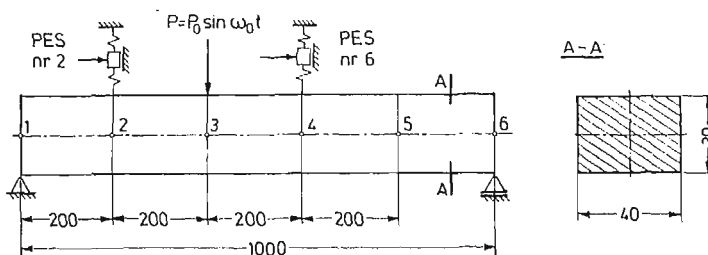
Rys. 3. Schemat blokowy programu komputerowego

nując współczynnik  $\delta_i$  z założoną tolerancją wyników  $\varepsilon$ . W przypadku  $\delta_i \geq \varepsilon$  następuje powtórzenie obliczeń przy nowej wartości  $a_i$ .

Opisany wyżej program komputerowy napisano w języku Fortran-4 i uruchomiono na komputerze ICL-70.

#### 4. Przykłady obliczeń

Obliczono amplitudy drgań poprzecznych belki przedstawionej na rys. 4. Belka podparta jest przegubowo na końcach a także w dwóch innych punktach, w których wprowadzono PES. Belkę modelowano pięcioma elementami skończonymi o jednakowej długości.



Rys. 4. Belka o stałym przekroju poprzecznym modelowana elementami skończonymi (Przykład 1)

Do obliczeń przyjęto następujące dane:

- gęstość materiału  $\rho = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ kg cm}^{-3}$ ,
- moduł Younga  $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N cm}^{-2}$ ,
- częstość wymuszenia  $\omega_0 = 400 \text{ rad s}^{-1}$ ,
- amplituda wymuszenia  $P_0 = 10.000 \text{ N}$ .

Na rys. 5 przedstawiono pętlę histerezy PES numer 2 i 6 dla  $\mu = 0,3$ . Na rys. 6 przedstawiono przemieszczenia i kąt przesunięcia fazowego węzłów belki dla kilku wartości  $\xi_0$ . Zbieżność wyników uzyskano w czwartym kroku iteracji. Obliczenia powtórzono przy podziale belki na 10 elementów skończonych. Wyniki obliczeń różniły się nie więcej niż 1%.

Na rys. 7 przedstawiono belkę o zmiennym przekroju poprzecznym, którą podparto na końcach oraz w dwóch PES. Belkę podzielono na pięć a w drugiej wersji obliczeń na dziesięć elementów skończonych. Parametry fizyczne układu przyjęto jak poprzednio. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch częstości wymuszeń:

$$\omega_0 = 350 \text{ rad s}^{-1},$$

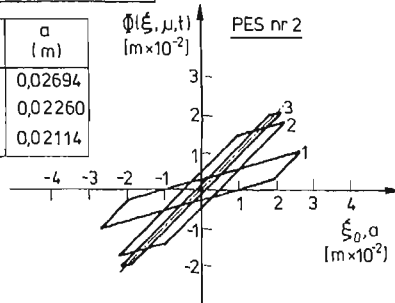
i

$$\omega_0 = 400 \text{ rad s}^{-1}.$$

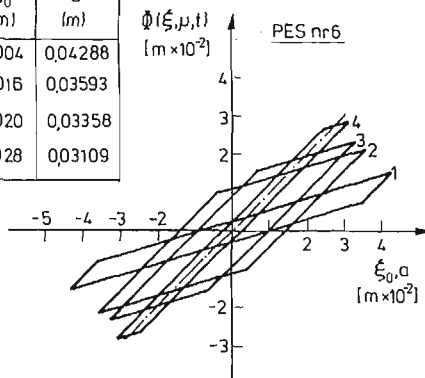
Na rys. 8-11 przedstawiono wyniki obliczeń belki modelowanej dziesięcioma elementami skończonymi. Na rys. 8 pokazano pętle histerezy PES nr 4 i 12 (dla  $\mu = 0,3$ ) a na rys. 9 amplitudy i kąty fazowe w węzłach dla różnych wartości  $\xi_0$ . Na rys. 10 i 11 przedstawiono wyniki obliczeń dla układu jak wyżej przy częstości wymuszenia  $\omega_0 = 400 \text{ rad s}^{-1}$ . Zbieżność iteracji otrzymano, jak poprzednio, już w czwartym jej kroku. Czas obliczeń jednego kompletu danych nie przekroczył 90 sek.

$\mu=0,3$ ; ilość ES=5; przekrój staty  
 $\omega_0=400$  rad/s

nr histerezy	$\xi_0$ (m)	a (m)
1	0,004	0,02694
2	0,016	0,02260
3	0,020	0,02114

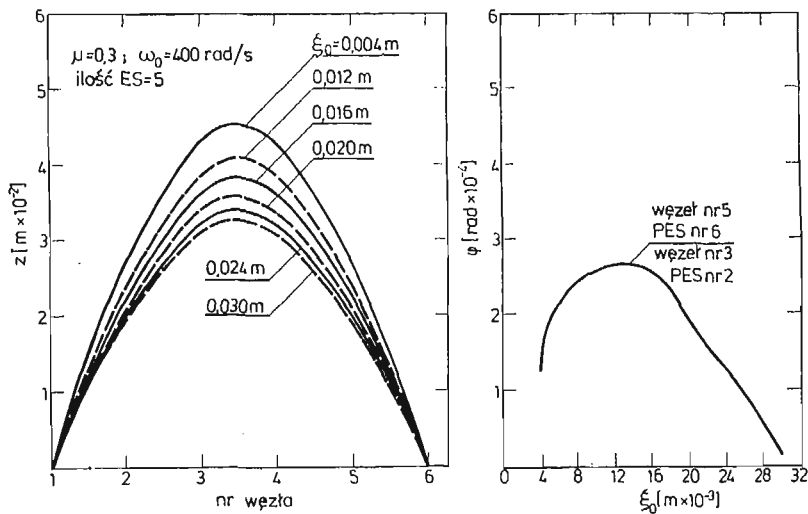


nr histerezy	$\xi_0$ (m)	a (m)
1	0,004	0,04288
2	0,016	0,03593
3	0,020	0,03358
4	0,028	0,03109

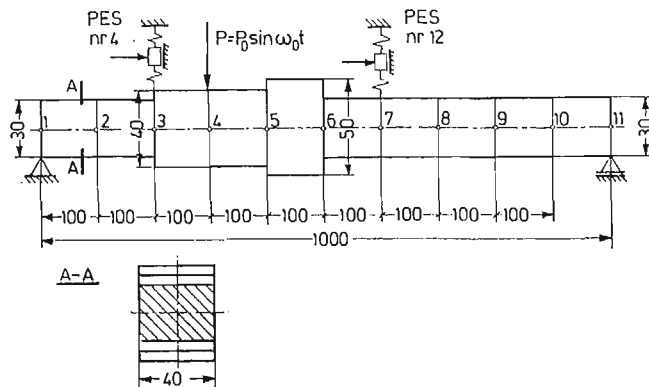


Rys. 5. Pętle histerezy dla  $\mu = 0,3$  w funkcji  $\xi_0$  (Przykład 1).

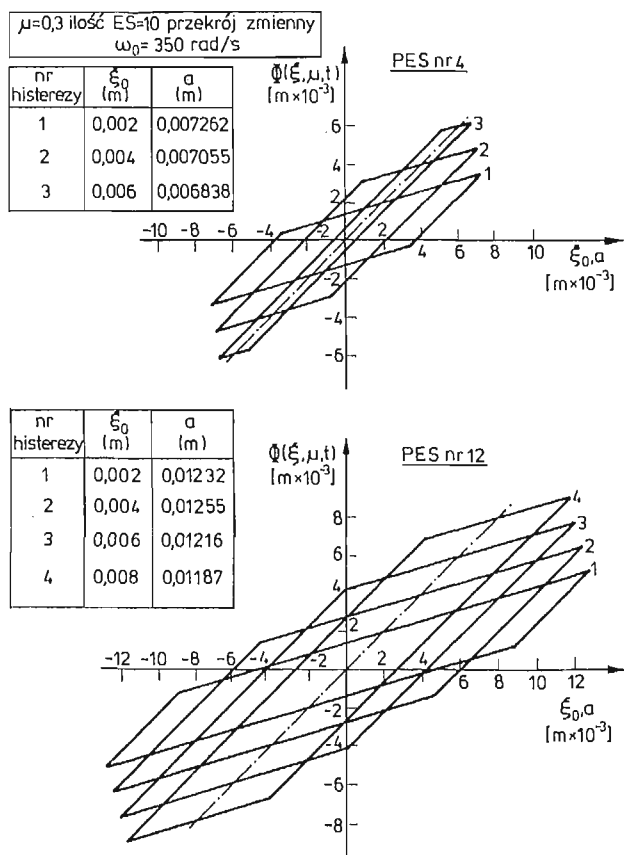
- (a) PES nr 2  
 (b) PES nr 6



Rys. 6. Przemieszczenia i kąty fazowe węzłów dla różnych wartości  $\xi_0$  (Przykład 1)

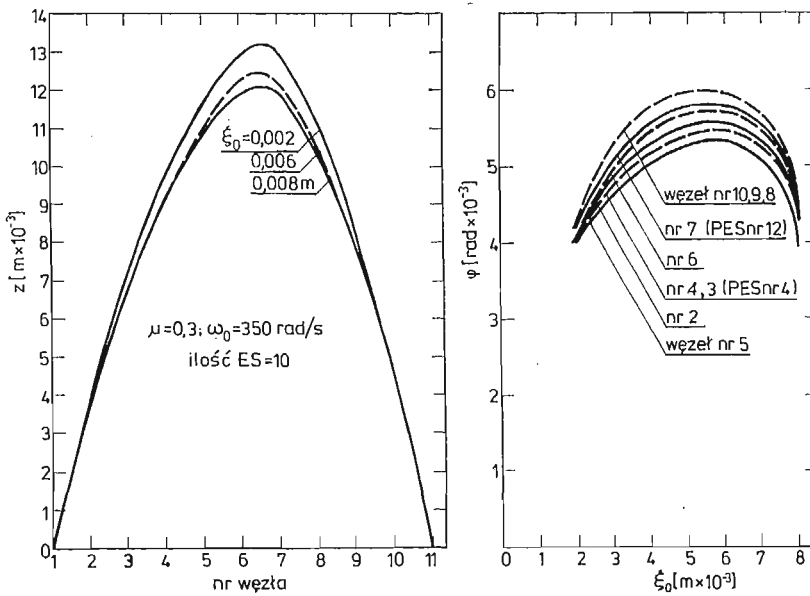


Rys. 7. Belka o zmiennym przekroju poprzecznym modelowana elementami skończonymi (Przykład 2)

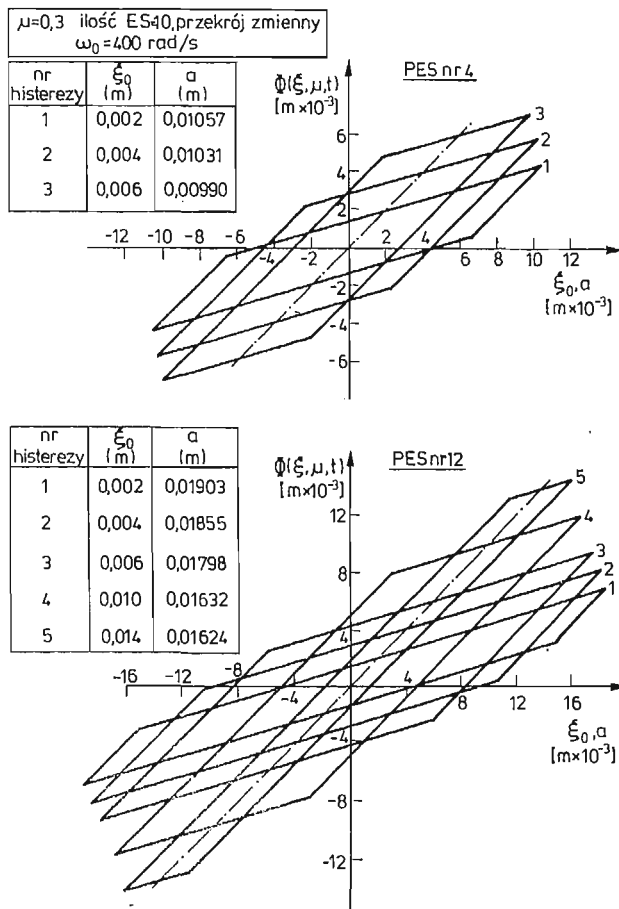


Rys. 8. Pętle histerezy dla  $\mu = 0,3$  w funkcji  $\xi_0$  (Przykład 2 —  $\omega_0 = 350 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ )

- (a) PES nr 4  
(b) PES nr 12

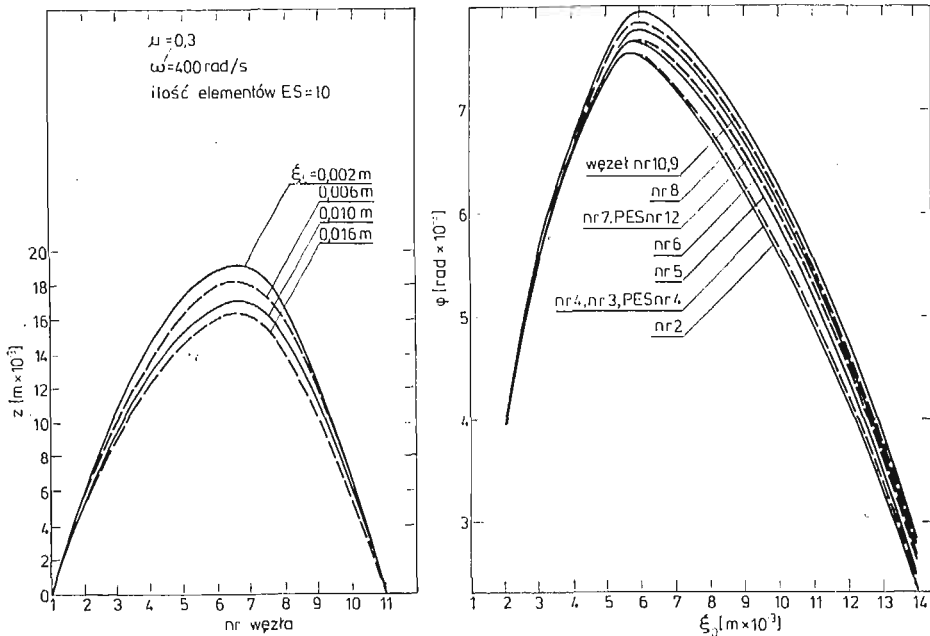


Rys. 9. Przeszczenia i kąty fazowe węzłów dla różnych wartości  $\xi_0$  (Przykład 2 —  $\omega_0 = 350 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ )



Rys. 10. Pętle histerezy dla  $\mu = 0,3$  w funkcji  $\xi_0$  (Przykład 2 —  $\omega_0 = 400 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ )

(a) PES nr 4      (b) PES nr 12



Rys. 11. Przeszczenia i kąty fazowe węzłów dla różnych wartości  $\xi_0$  (Przykład 2 —  $\omega_0 = 400 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ )

#### Literatura

1. M. MAZURKIEWICZ, W. OSTACHOWICZ, *Theory of finite element method for elastic contact problems of solid bodies*, Computer and structures, Pergamon Press, vol. 17, pp. 51 - 59, 1983.
2. W. OSTACHOWICZ, *Mixed finite element method for contact problems*, Computer and Structures, Pergamon Press, vol. 18, pp. 937 - 945, 1984.
3. W. OSTACHOWICZ, *Vibration analysis of structures with elastic contact.*, Proc. of Sixth World Congress IFToMN, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, pp. 611 - 614, 1983.
4. A. MUSZYŃSKA, D. I. G. JONES, *On discrete modelization of response of blades with slip and hysteretic damping*, Proc. of Fifth World Congress IFToMN, ASME, New York, pp. 646 - 649, 1979.
5. C. S. DESAI, *Elementary Finite Element Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1979.
6. K. PISZCZEK, *Metody Stochastyczne w Teorii Drgan Mechanicznych*, PWN, Warszawa 1982.

#### Резюме

#### МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ АМПЛИТУДА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК С УЧЁТОМ КОНСТРУКЦИОННОГО ТРЕНИЯ

В работе представлено анализ вынужденных колебаний с учётом петли гистерезиса в избранных пунктовых конечных элементах (PES). Эффект гистерезиса возникает в случае сухого трения (Куломба). Балки моделированы методом конечных элементов. Предложенный метод очень прост с точки зрения программирования алгоритма на электронно-вычислительную машину. Показаны примеры применения.

## Summary

METHOD OF DETERMINATION OF THE FORCED VIBRATION AMPLITUDE  
FOR THE BEAMS WITH CONSTRUCTIONAL FRICTION

The object of the paper is to present vibration analysis of beams taking into account the hysteresis loops in selected modes PES. The occurrence of the hysteresis phenomenon may result from Coulomb friction. The methods of finite elements and rigid finite elements are used for modelling of real beams. The method is provided with algorithm and computer programme, which was used in the preparation of examples.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 września 1985 roku*

---





# BIULETYN INFORMACYJNY

## SPRAWOZDANIE

Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej  
z działalności w roku 1985

### 1. Działalność naukowa

#### 1.1. Zebrania naukowe

W roku 1985 w Oddziałach Towarzystwa i Zarządzie Głównym zorganizowano 78 zebrań naukowych, na których wygłoszono 82 referaty.

#### Oddział w Bielsku Białej

1. Stanisław Jerzy Gdula — Pompy ciepła i transformatory ciepła.
2. Andrzej Bucewicz — Jednowymiarowe niustalone pole temperatury w ośrodku złożonym, 22 października

#### Oddział w Bydgoszczy

3. Mirosław Malec — Wyważanie wałów giętkich, 22 października
4. Jerzy Sawicki — Analizy ruchu cieczy serromagnetycznej w szczelinach krzywoliniowych, 10 grudnia

#### Oddział w Częstochowie

5. Zbigniew Olesiak — Mechanika lodu, 22 marca
6. Zbigniew Wesołowski — Własność akustyczna 2 równoległych płyt sprężystych, 23 maja
7. Zbigniew Wiernicki — Zjawiska ruchu gazów w piecach przemysłowych i wentylacji, 24 czerwca
8. Stanisław Drobnik — Metoda wizualizacji warunkowej w swobodnych przepływach osiowo-symetrycznych, 17 października
9. W. L. Sosonkin (Moskwa) — Problemy numerycznego sterowania obrabiarkami, 16 grudnia
10. A. Szczypiorowski — Diagnostyka przepływu plazmy w 3-palnikowym reaktorze łukowym, 17 grudnia

#### Oddział w Gdańsku

11. Jarosław Rybicki — Zastosowanie funkcji giętych (spline functions) w metodach numerycznych, 27 marca
12. Jarosław Rybicki — Zastosowanie funkcji giętych (spline functions) w metodach numerycznych — cz. II, 17 kwietnia
13. Jan Walczak — Stany krytyczne i pozakrytyczne niesprężystych ustrojów nośnych w ujęciu metody elementów skończonych, 8 maja
14. Piotr Konderla — Mechanika ciała materialnego o zmiennej masie, 30 października
15. Piotr Wilde — Innowacyjne koncepcje w zagadnieniach losowych, a zwłaszcza zastosowanych w teorii zbiorów rozmytych, cz. I, 14 listopada
16. Piotr Wilde — Innowacyjne koncepcje w zagadnieniach losowych, a zwłaszcza zastosowanych w teorii zbiorów rozmytych, cz. II, 15 listopada

#### Oddział w Gliwicach

17. Roman Gutowski — Rola matematyki współczesnej w zagadnieniach mechaniki — wykład I, 7 stycznia
18. Roman Gutowski — Rola matematyki współczesnej w zagadnieniach mechaniki — wykład II, 8 stycznia
19. Wojciech Tarnowski — Model procesu wyboru w projektowaniu technicznym, 23 stycznia

20. Ryszard Gryboś — Modele turbulencji, 7 maja  
 21. Krzysztof Wituszyński — Suboptymalna synteza i analiza rozrządu krzywkowego silników spalinowych, 18 czerwca  
 22. Jörg Wauer (RFN) — Symbolic generation of non-linear equations of motion for flexible industrial robots, 1 października  
 23. Jörg Wauer (RFN) — Über die stabilität dünner Kreiszyylinder Schallen und Rechteksplatten, 3 października  
 24. Józef Markowicz — Wyznaczenie obciążeń ruchowych ścianowych obudów zmechanizowanych z prowadzeniem leminiskatowym poprzez badanie sił w wybranych elementach sekcji, 16 października

#### Oddział w Kielcach

25. Leszek Gołaski — Akustyczna emisja w konstrukcjach, 16 kwietnia  
 26. Barbara Gambin — Efektywne stałe materiałowe dla ciał z mikrostrukturą — cz. I, 13 maja  
 27. Barbara Gambin — Efektywne stałe materiałowe dla ciał z mikrostrukturą — cz. II, 20 maja  
 28. Andrzej Gałka — O nierównościach wariacyjnych w mechanice, 27 maja  
 29. Zbigniew Olesiak — Momentowa teoria plastyczności, 18 czerwca  
 30. J. Supel — Zjawiska kruszenia się ziaren w ośrodkach ziarnistych, 26 września  
 31. Bertram Broberg (Szwecja) — Zastosowanie metod mechaniki pęknięcia w obliczeniach inżynierskich, 10 października  
 32. Bertram Broberg (Szwecja) — Drugi sposób pęknięcia w zastosowaniu do pęknięć ziemi, 15 października

#### Oddział w Krakowie

33. Stanisław Kasprzyk — Jednolita metoda rozwiązywania zagadnień belek, 29 stycznia  
 34. Stanisław Bednarz — Specyfika układów reo-nieholonomicznych, 12 listopada

#### Oddział w Lublinie

35. M. Bartnik — Problemy tłumienia wag obciążonych dynamicznie, 31 stycznia  
 36. W. L. Agamirow (ZSRR) — Stateczność dynamiczna płyt i powłok, 7 marca  
 37. S. Skierczyński — Wariacyjne metody w mechanice stosowanej w aspekcie analizy wrażliwości, 25 kwietnia  
 38. S. Fijałkowski — Bilanse cieplne łożysk gazowych stosowanych w ciepłych maszynach przepływowych, 30 maja  
 39. T. Piech — Zjawisko Barkhausena w pomiarach naprężeń i odkształceń, 27 kwietnia  
 40. Z. Oszczak — Analiza jakości pracy rozpylaczy płaskostrumieniowych, 28 listopada

#### Oddział w Łodzi

41. Danuta Gawin, Krzysztof Gawin — Odkształcenie tkanin przy rozciąganiu, 27 lutego  
 42. Krzysztof Czołczyński — Wpływ siły wzdłużnej na prędkości krytyczne pewnych modeli wirników, 30 maja  
 43. Tomasz Kapitaniak — Drgania parametryczne wzbudzone stochastycznym procesem Ornsteina — Uhlenbecka — efekty, 13 czerwca  
 44. Stefan Jan Kowalski — Zagadnienie linii poślizgu w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, 17 października  
 45. Maria Kotelko — Badania ugięć płyt metodą mory, 5 grudnia  
 46. Radosław Mania — Analiza stateczności trójwarstwowej płyty trapezowej, 5 grudnia

#### Oddział w Opolu

47. Lech Winnicki — Zagadnienia plastyczności i pelzania w metodzie elementów skończonych, 18 marca  
 48. Maciej Gryczmański — Mechaniczne modele podłoża gruntowego, 27 marca  
 49. Bogusław Pała — Kontakt budowli z podłożem przy wymuszaniu kinematycznym, 10 maja  
 50. Jarosław Szczęsny — Wariacyjne ujęcie optymalizacji kształtu konstrukcji, 15 listopada

**Oddział w Poznaniu**

51. Zbigniew Olesiak — Zagadnienia teorii plastyczności z naprężeniami momentowymi, 4 stycznia  
 52. Jerzy Rakowski — Zastosowanie równań różniczkowych i metody funkcji własnych w wybranych zagadnieniach dynamiki konstrukcji, 11 lutego  
 53. Czesław Woźniak — Matematyka a mechanika, 13 maja  
 54. Henryk Zorski — Chaos w niektórych zagadnieniach nieliniowej mechaniki, 18 listopada  
 55. Wojciech Barański — Metoda homogenizacji dla zagadnienia skręcania pręta włóknistego z uwzględnieniem tarcia włókien o matrycę, 12 grudnia

**Oddział w Rzeszowie**

56. Wiesław Zylski — Analiza wibroakustyczna manipulatora o budowie modułowej, 6 marca  
 57. Henryk Kopecki — Współczesne metody przygotowania i przeprowadzania badań statystycznych 20 marca  
 58. Zbyszko Stojek — Badania doświadczalne wybranych wibroizolatorów, 23 kwietnia  
 59. Edward Maciąg — Drgania budynków zlokalizowanych w niewielkiej odległości od jezdnii, badania doświadczalne, 12 czerwca  
 60. Zbyszko Stojek — Badania doświadczalne wybranych wibroizolatorów — cz. II, 25 września

**Oddział w Szczecinie**

61. Michał Kulik — Eliminator drgań z siłą wspomagającą, 28 lutego  
 62. Tadeusz Zapaśnik — Wybrane zagadnienia dynamiki pionowego wirnika podpar- tego elastycznie, 25 kwietnia  
 63. W. Kissing — Zastosowanie bezmomentowej teorii powłok do badania drgań cienkościennych konstrukcji zamkniętych, 26 czerwca  
 64. Helmuth Pfau, X. Larek — Zagadnienia fizycznego i matematycznego modelowania zjawisk uderowych w teorii sprężystości, 26 czerwca  
 65. Alfred Stępniewski — Uzupełniona i uogólniona zasada d'Alemberta jako podstawowe prawo mechaniki analitycznej układu brył sztywnych, 7 listopada  
 66. Helmuth Pfau, Robert Tiedt, Frank Ihlenburg — Nieliniowa analiza wytrzymałości cienkościennych konstrukcji skrzynekowych, 11 grudnia

**Oddział w Warszawie**

67. Michał Kleiber — Minikomputeryzacja mechaniki — czy wiarygodny trend rozwojowy, 4 kwietnia  
 68. Andrzej Ołędzki — Program CSSP do symulacji układów fizycznych, 4 kwietnia  
 69. L. Jurczak — Możliwości obliczeniowe współczesnych mikrokomputerów, 4 kwietnia  
 70. Tomasz Lewiński — Modele ciągle ustrojów siatkowych, 22 listopada  
 71. Krzysztof Żmijewski — Wybrane zagadnienia modelowania ustrojów dyskretno — ciągłych, 22 listopada

**Oddział we Wrocławiu**

72. E. Romanow, Z. Paluch — Trwałość prętów cienkościennych w złożonym stanie obliczeń, 6 maja  
 73. Piotr Konderla — Mechanika ciała materialnego o zmiennej masie, 2 lipca  
 74. Stefan Miller — Problemy syntezy strukturalnej w układach kinematycznych, 11 listopada  
 75. Marek Witt — Dynamika płyt laminowanych, 9 grudnia

**Oddział w Zielonej Górze**

76. Leszek Szeloch — Wprowadzenie do metod komputerowych, 30 stycznia  
 77. Stanisław Pryputniewicz — Zastosowanie metod komputerowych, 13 marca  
 78. Czesław Bojer — Metody komputerowe w dynamice układów dyskretnych, 12 czerwca  
 79. G. Burkhardt — Realizacja prac badawczych w sekcji mechaniki budowli w Wyższej Szkole Architektury i Budownictwa w Weimarze, 27 września  
 80. Mikołaj Kłapoc — Wpływ bardzo niskich temperatur na odkształcalność i wytrzymałość betonu, 19 grudnia

Zarząd Główny  
referaty naukowe na posiedzeniach plenarnych

81. Kazimierz Sobczyk — Kierunki rozwojowe współczesnej mechaniki, 29 maja  
82. Walery Sużcick — Tapania pokładowe, 14 grudnia

**1.2. Sympozjony i konferencje**

- Oddział w Gdańsku — współdziałal w konferencji „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji”, maj.  
Zorganizowanie konferencji „Problemy losowe w mechanice konstrukcji”, 15-16 listopada.  
Uczestniczyły 64 osoby, wygłoszono 28 referatów.
- Oddział w Gliwicach — XXIV Sympozjon „Modelowanie w mechanice” Szczyrk 4-9 marca.  
Uczestniczyły 202 osoby, wygłoszono 69 referatów, w dyskusji wzięło udział ok. 200 osób.
- Oddział w Kielcach — Konferencja nt. „Mechanika procesów technologicznych”, Borków k/Kielc 16-18 września. Uczestniczyło 51 osób, wygłoszono 28 referatów.
- Oddział w Krakowie — Członkowie PTMTS O/Kraków (24 osoby) wzięły udział w konferencji „Noise Control'85” zorganizowanej przez Komitet Akustyki PAN, Komisję Akustyki Węgierskiej Akademii Nauk, Polskie Towarzystwo Akustyczne oraz Instytut Mechaniki i Wibroakustyki AGH, 24-27 września. Wygłoszono 27 referatów.
- Oddział w Łodzi — Sympozjum nt. „Stateczność konstrukcji”, 9-11 października. Uczestniczyły 53 osoby.

**1.3. Sesje i seminaria naukowe**

- Oddział w Gdańsku — M. Skowronek, J. Górski, W. Sosnowski — seminarium nt. „Podstawy teorii endochronicznej”, kwiecień — maj.  
Seminarium nt. „Podstawy mechaniki nieliniowej”, 4-ty kwartał.
- Oddział w Gliwicach — Trzydniowa sesja naukowa „Poliptymalizacja”, 5-7 marca. Wygłoszono 17 referatów, w dyskusji udział wzięło ok. 40 osób.
- Oddział w Krakowie — Stanisław Bednarz — dwa seminaria nt. „Równania Nielsena w dynamice układów dyskretnych”, „Dynamika mechanizmu udarowego hydrogeologicznej maszyny wiertniczej”, kwiecień.
- Oddział w Opolu — seminarium nt. „Materiały kapilarno-porowate”, listopad - grudzień. Wygłoszono 9 referatów.
- Oddział w Rzeszowie — Zbyszko Stojek — seminarium nt. „Wibroizolacja czynna i bierna”, 12 listopada. Zygmunt Cisek — seminarium nt. „Drgania układów ciągłych, wzdluzne i skretne, możliwość uzyskania rozwiązań zamkniętych”, 12 grudnia.

**1.4. Konkursy**

- Oddział w Gliwicach — Konkurs na pracę dyplomową z dziedziny: mechanika.
- Oddział we Wrocławiu — Rostrzygnięcie konkursu na najlepszą pracę z mechaniki stosowanej:  
I nagroda — nie przyznano  
II nagroda — dr inż. Jan Kołodziej „Przegląd zastosowań metody kollokacji brzegowej w mechanice ośrodków ciągłych”  
III nagroda — dr inż. Włodzimierz Ilków „Obliczenie macierzy sztywności pręta w zagadnieniu geometrycznie nieliniowym z warunku równowagi sił”.

**1.5. Kursy i Szkoły**

- Oddział w Szczecinie — kurs „Podstawy elementów skończonych”, zakończony 20 marca. Udział wzięło 13 osób.
- Zarząd Główny PTMTS — Szkoła „Sterowanie w mechanice”, 20-25 października, Rudy Raciborskie. Uczestniczyło 59 osób.

## 2. Działalność wydawnicza

### 2.1. Wydawnictwa periodyczne i ciągłe

W roku 1985 ukazały się drukiem następujące zeszyty kwartalnika „Mechanika Teoretyczna i Stosowana”.

1 - 2/84 w czerwcu — 23,5 ark., 319 str., nakład 530 egz.

3 - 4/84 w listopadzie — 22,5 ark., strony 320 - 656, nakład 530 egz.

Złożono do druku zeszyty:

1/85, 2/85, 3 - 4/85 oraz 1 - 2/86.

- Oddział w Gdańsku — zbiór referatów z konferencji „Problemy losowe w mechanice konstrukcji”, str. 237. zbiór referatów z VII Konferencji „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji”, 5 tomów, str. 1396.
- Oddział w Gliwicach — zbiór referatów XXIV Sympozjum „Modelowanie w mechanice”, z. 51, PTMTS Gliwice 1985, str. 673.  
zbiór referatów XXIV Sympozjum „Modelowanie w mechanice”. Prace członków Oddziału, z. 52, PTMTS Gliwice, 1985, str. 174.
- Oddział w Kielcach — zbiór referatów z konferencji „Mechanika procesów technologicznych”. Zeszyt Naukowy Politechniki Świętokrzyskiej nr 37, str. 248 nakład 140 egz.
- Oddział w Łodzi — materiały z konferencji „Stateczność konstrukcji”, str. 135, nakład 150 egz.
- Oddział w Poznaniu — Informator o tematyce prac badawczych z zakresu mechaniki teoretycznej i stosowanej prowadzonych w środowisku poznańskim, PTMTS O/Poznań, str. 24.
- Oddział w Rzeszowie — Materiały VI Sympozjum Dynamiki Maszyn, str. 500.  
Materiały do Zeszytu Naukowego Członków Oddziału PTMTS.
- Zarząd Główny PTMTS — Materiały Szkoły „Sterowanie w mechanice” wydane dzięki pomocy Politechniki Śląskiej i Wojskowej Akademii Technicznej. Warszawa 1985, str. 391, nakład 145 egz.

### 3. Współpraca Towarzystwa z zagranicą

- przeprowadzono wstępne rozmowy na temat organizowania wymiennych konferencji z Jugosłowiańskim Towarzystwem Mechaniki. Rozmowy rozpoczęte w roku 1984 kontynuowali prof. prof. J. Wojnarowski i A. Tylikowski z Prezesem JTM prof. Luka Vujoševićem i Sekretarzem Generalnym JTM prof. Jovo Jaričem.
- przekazano dyplomy członkom zagranicznym PTMTS:  
prof. Cliffordowi Truesdelowi z USA, prof. Olofowi Bruhinowi, prof. Stigowi Hjalmarowski ze Szwecji.

### 4. Działalność organizacyjna

Odbyły się dwa Zebrania Plenarne Zarządu Głównego (w dniach 29 maja i 14 grudnia), 4 Zebrania Prezydium Z. G. (w dniach 4 marca, 24 kwietnia, 26 czerwca i 17 września) oraz 68 zebrań Zarządów Oddziałów, a mianowicie Bielsko-Biała 5, Bydgoszcz 5, Częstochowa 3, Gdańsk 4, Gliwice 8, Kielce 16, Kraków 3, Lublin 3, Łódź 1, Poznań 3, Rzeszów 3, Szczecin 4, Warszawa 3, Wrocław 1 i Zielona Góra 5. Liczba członków PTMTS wzrosła o 5 osób i wynosiła 1096 osób.

Nowy Zarząd Oddziału w Bydgoszczy (22 października)

Przewodniczący — doc. dr inż. B. Siolkowski

Sekretarz — dr inż. A. Topoliński

Skarbnik — dr inż. M. Małec

Członek Zarządu — dr J. Cabański

Członek Zarządu — doc. T. Kabat

### 5. Ważniejsze uchwały organów statutowych Towarzystwa i inne zmiany organizacyjne

5.1. 21 maja Urząd Miasta Stołecznego Warszawy zatwierdził Statut PTMTS uchwalony na XXI Zjeździe Delegatów.

5.2. Na Zebraniu Plenarnym PTMTS w dniu 29 maja 1985 zebrani jednomyślnie i w głosowaniu anym wypowiedzieli się za nadaniem godności członka zagranicznego PTMTS dr Józefowi Brillii Przewodniczącemu Słowackiego Towarzystwa Mechaniki, profesorowi Słowackiego Uniwersytetu w Bratysławie — na wniosek Przewodniczącego PTMTS prof. J. Wojnarowskiego. Opinię o prof. J. Brillii przygotowali prof. Z. Olesiak i doc. J. Kubik. Decyzja zastępcy Sekretarza Naukowego PAN z dnia 22 czerwca 85 r.

5.3. W dniu 14 grudnia na Zebraniu Plenarnym ustalono termin Zjazdu Delegatów na 9 - 10 października 1986 r. (w Kokotku).

5.4. Zatwierdzono w dniu 14 grudnia 85 instrukcję obiegu dokumentów finansowych.

5.5. 14 grudnia przyjęto jako obowiązujące stawki za referaty naukowe zgodnie z Dziennikiem Urzędowym Ministerstwa Pracy, Płac i Spraw Socjalnych Nr 5 z dnia 19.IX.85 w sprawie wynagradzania osób wygłaszających odczyty, prelekcje i referaty (Od 1800 - do 1200, zł w zależności od tytułu i stopnia naukowego).

5.6. Opracowano „Informację o podstawowych kierunkach i warunkach działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej” i przekazano ją 24 stycznia 1985 do Komitetu Organizacyjnego III Kongresu Nauki Polskiej.

5.7. Sporządzono opracowanie na temat „Rozwój nauk mechanicznych w Polsce — wnioski PTMTS na III Kongres Nauki Polskiej”. Przekazano je 21 czerwca 1985 Sekretarzowi Komitetu Organizacyjnego III Kongresu Nauki Polskiej prof. dr hab. Romanowi Neyowi.

Za wyżej wymienione opracowania PTMTS otrzymało podziękowanie od Komitetu Organizacyjnego III Kongresu Nauki Polskiej.

## 6. Inne formy działalności

Na uroczystościach odsłonięcia tablicy i wybicia medalu z okazji 20-tej rocznicy śmierci profesora Witolda Wierzbickiego Pierwszego Przewodniczącego PTMTS, w dniu 25 czerwca 1985 Zarząd Główny PTMTS reprezentował i przemówienie wygłosił prof. J. Wojnarowski.

## 7. Kontrole przeprowadzone w Towarzystwie

W dniach 18 - 20 grudnia 1985 mgr Lucjan Korona — inspektor Pierwszego Urzędu Skarbowego w Warszawie przeprowadził kontrolę. Nie stwierdził żadnych uchybień.

## KONFERENCJA

### „Mechanika procesów technologicznych” Borków koło Kielc, 16-19 września 1985

Konferencja została zorganizowana przez Wydział Mechaniczny Politechniki Świętokrzyskiej, Oddział Kielecki PTMTS, Sekcję Mechaniki Ciała Stałego Komitetu Mechaniki PAN. Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego został doc. Andrzej Radowicz. Uczestniczyło w niej około 50 naukowców polskich, reprezentujących głównie IPPT PAN, AHG — Kraków, Politechnikę Krakowską i Politechnikę Świętokrzyską oraz inne ośrodki naukowe. Wygłoszono 24 referaty w trzech grupach tematycznych:

1. Obróbka plastyczna metali,
2. Obróbka powierzchniowa,
3. Zagadnienia mechaniki pękania i kruszenia.

Wszystkie zostały wydrukowane w Zeszytach Naukowym „Mechanika” nr 37 Politechniki Świętokrzyskiej.

Obrady otworzył prof. Jan Osiecki, po czym referat wprowadzający na temat „O mechanizmach pękania ciągliwego metali” wygłosił prof. W. Szczepiński, który objął również przewodnictwo sesji porannej w trakcie której wygłoszono 6 referatów:

1. L. Sadok, W. Szulc, J. Łukasza — Technologiczne aspekty ciągnięcia rur na korku swobodnym przez obrotowe ciągadło.
2. J. Kazanecki — Energetyczny model procesu walcowania rur w walcierce Assola na trzpieniu.
3. H. Pietrzyk, J. Kusiak — Metody określenia odkształceń i naprężeń w niesymetrycznym procesie walcowania.

4. S. Turczyn, A. Nowakowski — Zastosowanie metody górnej oceny do analizy temperatury procesów walcowania blach cienkich.
5. M. Prącik — Analiza stanów naprężenia i odkształcenia w próbkach poddanych odkształceniom plastycznym w procesie spęczania.
6. M. Palczyński, J. Jezierski — Wyznaczenie maksymalnej redukcji średnic dla walcowania wzdłużnego wałów.

Po przerwie wznowiono obrady pod przewodnictwem prof. L. Sadoka, wygłoszono następujące referaty:

7. R. Szyndler, B. Klimkiewicz — Wpływ niejednorodności plastycznej materiału na kinematykę procesu spęczania.
8. K. Skalski — Zagadnienia kontaktowe w obróbce powierzchniowej nagniataniem.
9. R. Misiura — Interwencja uwarunkowań technologicznych w niektórych warunkach plastyczności.
10. B. Wierzchowski — Głębokie tłoczenie z wykorzystaniem pulsującego obciążenia z bieżącą identyfikacją procesów wyciskania.
11. H. Petryk — Metoda linii poślizgu w zagadnieniach kontaktowych.

W drugim dniu obrad w ramach sesji popołudniowej zorganizowano przy współdziałaniu dyrekcji Huty Ostrowiec Świętokrzyski wycieczkę do najciekawszych wydziałów Huty oraz unikatowej w skali światowej prehistorycznej kopalni krzemienia w Krzemionkach Opatowskich.

W sesji popołudniowej, której przewodniczyli prof. Z. Mróz oraz prof. A. Jakowluk przedstawiono następujące referaty:

12. Y. Tomita — Metody numeryczne w procesach obróbki plastycznej.
13. T. Lamber — Stan naprężenia i odkształcenia w wyrobach metalowych wywołany dyfuzyjną obróbką powierzchniową.
14. R. Holdak, J. Jezierski — Opory toczenia w obróbce powierzchniowej nagniataniem czopów.
15. K. Pacanowski — Obróbka elementów mosiężnych w wyładzarkach pojemnikowych.
16. M. Kozłowski — Mechanika nagniatania tocznego powierzchni walcowych głowicami rolkowymi.
17. D. Rasiński — Umacnianie warstwy wierzchniowej w obróbce nagniataniem.
18. A. Konieczny — Wpływ historii odkształcania na lokalizację odkształceń dla materiałów zdolnych do starzenia.

W trzecim dniu obrady odbyły się pod przewodnictwem prof. T. Lambersa i doc. Chrzanowskiego. Przeważały referaty z trzeciej grupy tematycznej:

19. A. Jakowluk, E. Mieszkowski — Zmiana anizotropii żeliwa szarego przy rozwoju mikrouszkodzeń w procesie pełzania.
20. Chrzanowski — Kontynuacja mechaniki uszkodzeń.
21. J. Supel — Zjawisko kruszenia się ziaren w ośrodkach ziarnistych.
22. S. Zdrodowski — Pękanie złączy w symulowanych warstwach spawania.
23. J. Linkowski — Wpływ rozdrabniania struktury i metody jej uzyskiwania na mechanizm zniszczenia siluminu.
24. H. Pachla — Opis betonu w ramach kinematycznej teorii uszkodzeń.

Podsumowania konferencji dokonali prof. J. Osiecki oraz doc. A. Radowicz.

Do zalet tego spotkania należały zaliczyć kameralny charakter umożliwiający uczestnikom lepszą koncentrację i łatwiejsze kontakty. Na konferencji tej przedstawiono szeroki wachlarz zagadnień co również przyczyniło się do ożywienia atmosfery i wzrostu aktywności w dyskusjach.

Duże znaczenie miał udział zaproszonych gości zagranicznych reprezentujących wysoki poziom naukowy. Szereg referatów było wynikiem prac osób rozpoczynających swoją działalność naukową a rzeczowa i ostra dyskusja wskazała im dalsze kierunki badań. Wszyscy uczestnicy podnieśli konieczność kontynuowania konferencji na ten sam temat w następnych latach.

Organizatorzy pragną podkreślić, że obrady konferencji miały również na celu uświetnienie obchodów dwudziestolecia Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach.

*Adam Barchan*

### XV Konferencja Dynamiki Maszyn — Interdynamics'85

W dniach 3 - 9 listopada 1985 r. odbyła się w Frankfurcie nad Odrą piętnasta konferencja poświęcona zagadnieniu dynamiki maszyn. Otwarcia konferencji dokonał Prof. W. Zwick z Instytutu Mechaniki Niemieckiej Akademii Nauk. Konferencje o tej problematyce są organizowane cyklicznie i kolejno przez cztery akademie nauk: Polską (PAN), Czechosłowacką (CSAV), Słowacką (SAV) i Niemieckiej Republiki Demokratycznej (AN NRD).

W konferencji udział wzięli z: Bułgarii 3, CSR 7, Jugosławii 1, NRD 33, Polski 27, RFN 2, Węgier 1, Wietnamu 1 i ZSRR 5 osób. Na konferencji Interdynamics'85 wygłoszono 69 referatów, w tym 7 plenarnych i 12 wiodących. Rozkład referatów na poszczególne kraje był następujący: Polska 26, NRD 22, CSR 7, ZSRR 6, Bułgaria 3, RFN 3, Jugosławia i Wietnam po 1. Referaty plenarne wygłoszono w dniu rozpoczęcia konferencji (4) i w ostatnim dniu obrad. Referaty te wygłoszili B. Heiman (Berlin), F. L. Czernouszko (Moskwa), F. Holzweissig (Drezno), C. Cempel (Poznań), A. Morecki (Warszawa), L. Pust (Praga), I. Ballo (Bratysława). Referaty wiodące wygłoszono w poszczególnych sekcjach. Liczba referatów w poszczególnych sekcjach była następująca:

System CAD — Problemy numeryczne (7)  
 Identyfikacja układów mechanicznych (6)  
 Badanie i pomiary w dynamice maszyn (6)  
 Problemy stosowane w dynamice maszyn (12)  
 Problemy tarcia (7)  
 Drgania mechanizmów i maszyn wirnikowych (5)  
 Niezawodność i eliminacja drgań (7)  
 Diagnostyka maszyn i urządzeń (5)  
 Roboty (7)

Poszczególne sesjom przewodniczyli:

I. Ballo (Bratysława), C. Cempel (Poznań), F. L. Czernouszko (Moskwa), B. Feimann (Berlin), F. Holzweissig (Drezno), G. Meltzer (Karl-Marx-Stadt), L. Lilov (Sofia), A. Morecki (Warszawa), L. Pust (Praga), J. Wojnarowski (Gliwice), W. Zwick (Karl-Marx-Stadt).

Wszystkie wygłoszone referaty zostaną wydrukowane w specjalnym wydawnictwie Akademii Nauk NRD w 1986 r.

W dniu 7 listopada 1985 r. pod przewodnictwem B. Heimanna odbyła się dyskusja okrągłego stołu, w czasie której omówiono problematykę konferencji dynamiki maszyn i zagadnienia związane z jej organizacją.

Ponadto ustalono, że następna szesnasta konferencja zostanie zorganizowana przez Słowacką Akademię Nauk w 1988 r.

*Józef Wojnarowski*

### Kolokwium Euomech 204 — Struktura i propagacja rys w kompozytach z kruchą matrycą, Jabłonna 12 - 15 listopada 1985

Kolokwium Euomech-204 zostało zorganizowane w ramach IUTAM (Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej). Kolokwia te są nieformalnymi spotkaniami małych grup naukowców, o których udziale w konferencji decyduje każdorazowo przewodniczący kolokwium. Przewodniczący kolokwium mianowany jest przez Europejski Komitet Mechaniki. Na obradach kolokwium Euomech prezentowane są prace badawcze najbardziej aktualne, nawet jeśli nie są one jeszcze dokończone. Pozwala to uczestnikom kolokwium na zapoznanie się z najnowszymi osiągnięciami i prowadzonymi pracami badawczymi w dziedzinach poruszanych przez uczestników podczas obrad.

Przewodniczącymi Kolokwium Euomech 204 byli prof. A. M. Brandt z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN oraz dr I. H. Matshal z Paisley College of Technology z Wielkiej Brytanii.

Kompozyty z kruchą matrycą są materiałami stosowanymi w różnych konstrukcjach, jednak ich



bardziej dogłębne badania zostały dopiero rozwinięte w ciągu ostatnich dziesięcioleci w szczególności z uwzględnieniem mechaniki pękania oraz inżynierii materiałowej.

Prace prezentowane na kolokwium poruszały zagadnienia związane ze strukturą i propagacją rys w kruchych materiałach jak kompozyty betonopodobne, ceramiki i kompozyty na bazie polimerów. Obejmowały one takie zagadnienia jak:

- teoretyczną analizę i przewidywania własności kompozytów,
- nowe metody badawcze,
- metody projektowania i optymalizacji struktury kompozytów.

W obradach kolokwium wzięło udział 56 referentów, z tego z Austrii — 1, Czechosłowacji — 2, Francji — 8, Holandii — 3, Norwegii — 1, Portugalii — 1, RFN — 5, Szwecji — 2, USA — 1, Węgier — 2, Wielkiej Brytanii — 1, Włoch — 2 i Polski — 27 osób. Obrady poprowadził referat wprowadzający prof. J. W. Dougilla z Imperial College of Science and Technology z Londynu na temat zagadnień strukturalnych i kontynualnych zagadnień związanych z pękaniem kompozytów o kruchych matrycach. Obrady kolokwium były podzielone na sześć sesji tematycznych.

Sesja I obejmowała ogólne problemy kwalifikacji kompozytów i metod badawczych oraz modelowania stochastycznego rozwoju rys w kruchych kompozytach.

Sesja II obejmowała zagadnienia rozwoju rys w kompozytach ceramicznych. Poruszano między innymi problemy rozwoju rys w wysokich temperaturach, w strefach stykowych oraz rys zmęczeniowych. Przedstawiono również analizę reakcji chemicznych na styku włókno—matryca.

Sesja III poświęcona była pękaniu kompozytów na bazie polimerów w tym również polimerobetonów.

Sesja IV obejmowała referaty poruszające problemy rozwoju rys w materiałach o matrycach cementowych.

Sesja V była poświęcona materiałom kompozytowym uzbrojonym włóknami ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień struktury i jej wpływu na mechaniczne własności materiału.

Sesja VI poruszała ogólne zagadnienia związane z mechaniką pękania materiałów kompozytowych.

Przebieg obrad miał charakter nieformalny co umożliwiło szeroką dyskusję w trakcie wygłaszanych referatów. Ponieważ uczestnicy kolokwium mieszkali na miejscu obrad, pozwalało to na nawiązanie bliskich kontaktów pomiędzy uczestnikami oraz na prowadzenie merytorycznych dyskusji długo po zakończeniu obrad.

Na zakończenie obrad odbyła się dyskusja okrągłego stołu podsumowująca wyniki obrad kolokwium i pozwalająca na generalną wymianę poglądów. W wyniku niej stwierdzono, że mimo osiągnięć badawczych w dziedzinie mechaniki pękania jest ona w sposób rażący nie wykorzystywana w procesie projektowania konstrukcji i elementów konstrukcyjnych w szczególności tyczy się to dziedziny konstrukcji budowlanych z betonów. Te stwierdzenia korespondują z następnym wnioskiem, że ciągle za mało uwagi poświęca się w procesie kształcenia zagadnieniom mechaniki pękania, nie są one włączone do programów nauczania większości szkół wyższych i to w konsekwencji powoduje nieznaną tych zagadnień przez projektantów.

Ostatnim problemem poruszonym w dyskusji okrągłego stołu było zagadnienie skali próbek i przenoszenia wyników badań z małych próbek na rzeczywiste konstrukcje, często kilkudziesięciokrotnie większe od badanych próbek. Szczególnie problem ten jest wyraźny i trudny dla próbek betonowych. Z jednej strony badania prowadzi się na małych próbkach podczas gdy obiekty rzeczywiste są wielokrotnie większe a jeżeli nawet przeprowadzi się badania na większych próbkach to dodatkowym czynnikiem zmiennym jest jednorodność materiału.

Na zakończenie obrad uczestnicy wyrazili podziękowanie prof. A. M. Brandtowi za doskonałe przygotowanie obrad oraz Polskiej Akademii Nauk, której finansowe poparcie umożliwiło zorganizowanie konferencji. Poparcie to pozwoliło na udział w niej kilku młodych naukowców, których ciekawe prace w innym wypadku nie były by prezentowane i dyskutowane podczas obrad kolokwium.

Przedstawione na kolokwium referaty zostaną wydane w pierwszej połowie 1986 roku w wydawnictwie Elsevier w Londynie. W opinii uczestników konferencji i wydawnictwa Elsevier istnieje szerokie zainteresowanie tematyką poruszaną na kolokwium i w związku z tym proponuje się zorganizowanie w roku 1986 konferencji o szerszym zasięgu na temat struktury i propagacji rys w kompozytach z kruchą matrycą.

*Andrzej Burakiewicz*



- A comparative analysis of models of an elastic-plastic bar under bending, axial force and temperature.
- B. Wosiewicz, Nieliniowe warunki brzegowe w problemach filtracji ustalonej. 427  
 Нелинейные краевые условия в задачах установившейся фильтрации.  
 Nonlinear boundary conditions for steady seepage problems.
- S. J. Kowalski, Ruch ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Opis globalny. 443  
 Движение пористой среды выполненной жидкостью. Общий опись.  
 Motion of a fluid-saturated porous medium. Global description.
- W. Ostachowicz, D. Szwedowicz, Metoda obliczania amplitud drgań wymuszonych belek słabo tłumionych tarciem konstrukcyjnym. 459  
 Метод вычисления амплитуда вынужденных колебаний балок с учётом конструкционного трения.  
 Method of determination of the forced vibration amplitude for the beams with constructional friction.
- Biuletyn Informacyjny 471

Prenumeratę na kraj przyjmują i informacji o cenach udzielają urzędy pocztowe i doręczyciele na wsi oraz Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” w miastach.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11. Wysyłka za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumerat na kraj i za granicę:

- do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA, 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland.

Our bankers: BANK HANDLOWY WARSZAWA S.A.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa, pokój 309)*

---