

720  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK  
TOM 23 • ZESZYT 3-4

WARSZAWA 1985

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

## SPIS TREŚCI

<p>J. KOŁODZIEJ, Określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej kompozytu o jednokierunkowo ułożonych włóknach metodą kollokacji brzegowych          Определение перпендикулярной эффективной теплопроводности композитов укрепленных волокнами расположенными в одном направлении методом граничной коллокации          Determination of the transverse effective thermal conductivity of unidirectionally fibre arranged composites by means of boundary collocation method</p>	355
<p>J. PIWIŃK, Doświadczalna analiza kinematyki procesu wyciskania          Экспериментальный анализ кинематики при осесимметричном прессовании          Experimental analysis of the kinematics of extrusion process</p>	375
<p>E. ŚEGLIŃSKI, Problemy optymalnego kształtowania wspornikowej belki lepkoplastycznej przy obciążeniu quasi-statycznym          Проблемы оптимального формирования кронштейновой вязко пластической балки подбергнутой действию квази-статической нагрузки          Some problems of optimal shape-design of viscoplastic cantilever beam under quasi-static loading</p>	381
<p>E. WŁODARCZYK, Płaski rozłot produktów detonacji ze skokowo zmiennym wykładnikiem izentropy          Плоский разлёт продуктов детонации со скачкообразно изменяющимся показателем изентропы.          Plane expansion of detonation products with step-variable isentropic exponent</p>	397
<p>R. ŚLIWA, J. ZASADZIŃSKI, Metoda górnej oceny w zastosowaniu do dwuotworowego wyciskania metali          Применение метода верхней оценки для двухотверстивного прессования          An upper-bound approach to the extrusion of metals through two-hole-die</p>	413
<p>K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, Modelowanie matematyczne automatycznie sterowanego śmigłowca w ruchu przestrzennym          Математическое моделирование автоматически управляемого вертолётa в пространственном движении          Mathematical modelling of the controlled helicopter in the three-dimensional motion</p>	427
<p>K. JANKOWSKI, Metodyka wyznaczania parametrów ruchu ustalonego śmigłowca na przykładzie lotu poziomego i zawisu          Методика определения параметров установившегося движения вертолётa с применением к горизонтальному полёту и висению          Methods of determination of the helicopter steady motion parameters with exemplary application to horizontal flight and hover</p>	443
<p>K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, Badanie stateczności ustalonych stanów lotu sterowanego śmigłowca i analiza sprzężeń ruchów przestrzennych jego elementów          Исследование устойчивости установившихся режимов полётa управляемого вертолётa и анализ сопряжений пространственных движений его элементов          Study of a dynamic stability of the steady flight states of the controlled helicopter and analysis of couplings between three-dimensional motions of the helicopter elements</p>	455
<p>J. GŁADYSZ, M. MINCH, Wykorzystanie rachunku dystrybucyjnego do opisu tarczy зарисowanej          Использование обобщённого счёта для описания зарисованного диска          The application of distribution calculus to the description of cracked plate</p>	467
<p>T. GAŁKIEWICZ, A. ŻELIGOWSKI, Nośność graniczna ścianki równomiernie ściskanej skrzynkowego podzespołu cienkościennego          Несущая способность тонкой боковой стенки тонкостенного столба          Load carrying capacity of uniform compressed flange of thin-walled box substructure</p>	475
<p>A. ŻELIGOWSKI, Badania doświadczalne stanu zakrytycznego równomiernie ściskanej płyty prostokątnej, będącej elementem zginanego dźwigara</p>	485

Y II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 23 • Z E S Z Y T 3-4

W A R S Z A W A 1985

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА  
содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## KOMITET REDAKCYJNY

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY  
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,  
STANISŁAW JERZY GDULA, IGOR KISIEL,  
ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI, PIOTR WILDE,  
JÓZEF WOJNAROWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY  
STANISŁAW DUBIEL — REDAKTOR  
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR  
ANDRZEJ TYLIKOWSKI — REDAKTOR  
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR  
ZOFIA DYŚKO — REDAKTOR  
FELICJA KOLIŃSKA — SEKRETARZ

## REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 413+87. Ark. wydawniczych 26,0 Ark. drukarskich 22,0 Papier offs. imp. kl. III, 70 x 100  
Oddano do składania 30.VIII. 1985 r. Druk ukończono w sierpniu 1986 r. Zam. 881/12/85. Cena zł 200.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa



## OKREŚLENIE POPRZECZNEJ EFEKTYWNEJ PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ KOMPOZYTU O JEDNOKIERUNKOWO UŁOŻONYCH WŁÓKNACH METODĄ KOLLOKACJI BRZEGOWEJ

JAN A. KOŁODZIEJ (POZNAŃ)

*Politechnika Poznańska*  
*IMS*

### 1. Wprowadzenie

Problem określenia efektywnych własności transportu, takich jak przewodność elektryczna lub cieplna, przenikalność dielektryczna, współczynniki Lamégo lub któraś z pozostałych ośmiu wielkości wymienionych w pracy Batchelora [1], nie jest zagadnieniem nowym w literaturze. Maxwell [2] i Lord Rayleigh [3] są prawdopodobnie pierwszymi, którzy badali własności elektryczne i magnetyczne materiałów dyspersyjnych. W ostatnich latach dużo uwagi poświęcono efektywnym własnościom cieplnym materiałów kompozytowych, które składają się z włókien otoczonych osnową. Większość tych prac dotyczy przypadku, gdy włókna mają przewodność cieplną istotnie różną od osnowy, są ustawione regularnie w jednym kierunku i dostatecznie długie, ponieważ takie materiały mają korzystną sztywność w kierunku równoległym do osi włókien. W takim układzie teoretyczna efektywna przewodność cieplna materiału  $\lambda_{II}$  w kierunku włókien jest określona prostym „wzorem mieszaniny”:

$$\lambda_{II} = \varphi \lambda_f + (1 - \varphi) \lambda_m, \quad (1)$$

gdzie  $\lambda_m$  i  $\lambda_f$  są odpowiednio przewodnościami cieplnymi osnowy i włókien, natomiast  $\varphi$  jest objętościowym udziałem włókien w kompozycie.

W ten sposób  $\lambda_{II}$  jest niezależne od sposobu ułożenia włókien w płaszczyźnie prostopadłej do osi włókien. Efektywna przewodność cieplna kompozytu w kierunku prostopadłym do włókien zależy jednak od wspomnianego ułożenia.

Problem określenia poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej  $\lambda_{\perp}$  był rozważany przez szereg autorów [4 - 24]. W tych pracach można wyróżnić cztery kierunki badań:

- 1) eksperymentalne określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej [4 - 9];
- 2) określenie górnej i dolnej granicy możliwych numerycznych wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej [8 - 13];
- 3) przy założeniu losowego rozkładu równoległych włókien określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej [13 - 16];

4) dla regularnej i ściśle określonej geometrii rozmieszczenia włókien (np. w siatce kwadratowej) określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej [6 - 7, 14, 17 - 24].

Pracę Kellera [25] trudno jest umieścić w którymś z czterech wymienionych kierunków badań. W pracy tej podaje się twierdzenie dotyczące kompozytu z włóknami ułożonymi według siatki prostokątnej, które określa związek, jaki musi spełniać efektywna przewodność cieplna, jeśli przewodność cieplna osnowy przyjmie wartość przewodności cieplnej włókien, i odwrotnie.

Omówmy nieco szerzej czwarty z wymienionych kierunków badań, ponieważ niniejsza praca jest kontynuacją tego kierunku. We wspomnianej pracy Rayleigha [3] podano przybliżony wzór dla przypadku włókien ułożonych w siatce kwadratowej, który jest słuszny dla małych udziałów objętościowych włókien. W pracach [14] i [19], również dla siatki kwadratowej, zaproponowano przybliżony model wyznaczania  $\lambda_{\perp}$ , tzw. „model cieplny”, w którym po wydzieleniu powtarzającego się elementu siatki zakłada się, że linie adiabatyczne są liniami prostymi równoległymi do średniego strumienia ciepła. Jak słusznie zauważyli Furmański i Gogół [9], wyznaczona przy takich założeniach efektywna przewodność cieplna jest dolną granicą dla efektywnej przewodności takiego kompozytu. W pracy [17] podano przybliżony sposób wyznaczania efektywnej przewodności cieplnej dla włókien ułożonych w siatce kwadratowej, który jest słuszny dla udziałów objętościowych włókien bliskich maksymalnemu przy założeniu, że włókna są doskonałymi przewodnikami lub doskonałymi izolatorami.

Wiele prac, w których wyznacza się zastępczy współczynnik przewodzenia ciepła dla kompozytów o regularnej strukturze ułożenia włókien, opiera się na rozwiązaniu równania przewodzenia ciepła na poziomie mikrostruktury w powtarzającym się elemencie siatki. Prawdopodobnie po raz pierwszy takie podejście zastosowali Keller i Sachs [18] — którzy rozważali przypadek, gdy włókna są ułożone w siatce kwadratowej — zakładając, że są one doskonałymi izolatorami lub doskonałymi przewodnikami. Do wyznaczenia pola temperatury w powtarzającym się elemencie siatki stosowali oni metodę różnic skończonych. Springer i Tsai [14], oprócz propozycji przybliżonego modelu cieplnego, zauważyli analogię pomiędzy wyznaczaniem efektywnej przewodności cieplnej i zastępczego podłużnego modułu ścinania. Wyniki uzyskane w oparciu o przybliżony model porównywali oni z wynikami uzyskanymi dla podłużnego modułu ścinania obliczonego w oparciu o rozwiązanie na poziomie mikrostruktury uzyskane metodą różnic skończonych [26]. Dla siatki kwadratowej wyznaczenie zastępczego współczynnika przewodzenia w oparciu o rozwiązanie równania Laplace'a na poziomie mikrostruktury otrzymane brzegową metodą najmniejszych kwadratów można znaleźć w pracach [8] i [24], natomiast w pracy [21] tego samego podejścia użyto dla rozważenia siatki prostokątnej. W pracy [22] zastosowano z kolei metodę kollokacji z minimalizacją sumy kwadratu błędu w punktach kollokacji do wyznaczenia rozwiązania mikrostrukturalnego dla siatki prostokątnej i trójkątnej. Perrins ze współpracownikami [20] zastosowali ulepszoną metodę Rayleigha do wyznaczania rozwiązania w powtarzającym się elemencie siatki kwadratowej i trójkątnej równobocznej. Jeszcze inną metodę do wyznaczania rozwiązania równania przewodnictwa na poziomie mikrostruktury zaproponował Sekine [23], który wyznaczał efektywną przewodność cieplną dla kompozytu z cienkimi nie przewodzącymi włóknami rozmieszczonymi w węzłach siatki prostokątnej lub trójkątnej. Przedstawienie wtrąceń w postaci

rozkładu pewnych źródeł ciepła pozwala sprowadzić zagadnienie do równania całkowego z jądrem typu Cauchy'ego, rozwiązania którego poszukuje się w postaci rozkładu w wielomiany Czebyszewa.

Jak wynika z dokonanego przeglądu prac poprzeczną efektywną przewodność cieplną wyznaczano tylko dla najprostszych regularnych sposobów ułożenia prętów w osnowie. Zasadniczym celem niniejszej pracy jest podanie analityczno-numerycznego algorytmu wyznaczania poprzecznego efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla szerokiej klasy regularnych sposobów ułożenia włókien w osnowie. Proponowaną metodę stosuje się dla dowolnych stosunków przewodności cieplnej pręta do przewodności cieplnej osnowy, jak również dla dowolnych udziałów objętościowych prętów, z wyjątkiem granicznych wartości tych parametrów. Istotną cechą proponowanego algorytmu jest wykorzystanie metody kollokacji brzegowej do wyznaczenia rozwiązania równania przewodnictwa ciepła na poziomie mikrostruktury, co powoduje, że proponowana metoda pozwala uzyskać wymaganą dokładność z minimalnym komputerowym „wysiłkiem”.

Należy zauważyć, że sposób określania efektywnej przewodności cieplnej kompozytu przyjęty w niniejszej pracy nie nawiązuje do żadnego z głównych kierunków badań teoretycznych kompozytów, tj. procedury wygładzania [27 - 29], czy procedury homogenizacji [30 - 32], natomiast jego istota jest najbliższa eksperymentalnemu badaniu kompozytów. Istotą niniejszej pracy jest propozycja prostych myślowych eksperymentów, które są tak pomyślane, aby umożliwiały wyznaczenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej przy zadanej mikrostrukturze kompozytu.

## 2. Algorytm określania poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej kompozytów z regularnym rozkładem włókien w osnowie

Rozważmy materiał kompozytu o jednokierunkowo ułożonych włóknach w osnowie. Włókna są rozmieszczone w regularny sposób według siatki kwadratowej, trójkątnej i sześciokątnej lub innej siatki, która jest kompozycją regularnych wielokątów (rys. 1a - 5a).

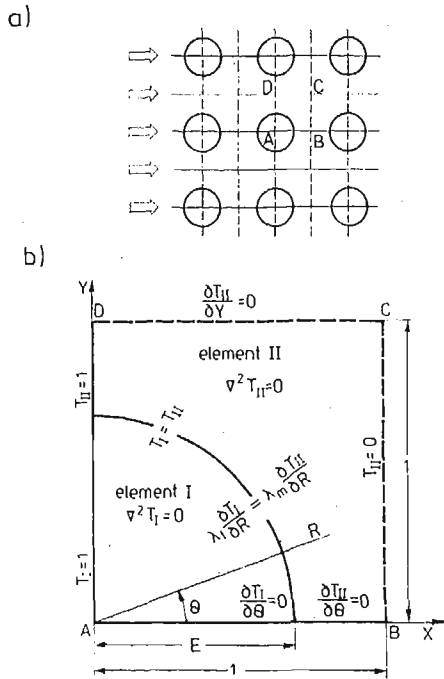
Wprowadzamy następujące wielkości charakteryzujące geometrię siatki:  $a$  — promień włókien,  $b$  — odległość pomiędzy sąsiadującymi włóknami. Stosunek średnicy włókien do odległości pomiędzy sąsiadującymi włóknami oznaczmy przez  $E = \frac{2a}{b}$ . Wielkość ta związana jest z objętościowym udziałem włókien  $\varphi$  (objętość włókien/całkowita objętość) zależnością, która dla sposobów ułożenia włókien przedstawionych na rys. 1a - 5a podana jest w tab. 1. Stosunek przewodności cieplnych oznaczmy przez  $F = \frac{\lambda_f}{\lambda_m}$

Wprowadzamy następujące założenia:

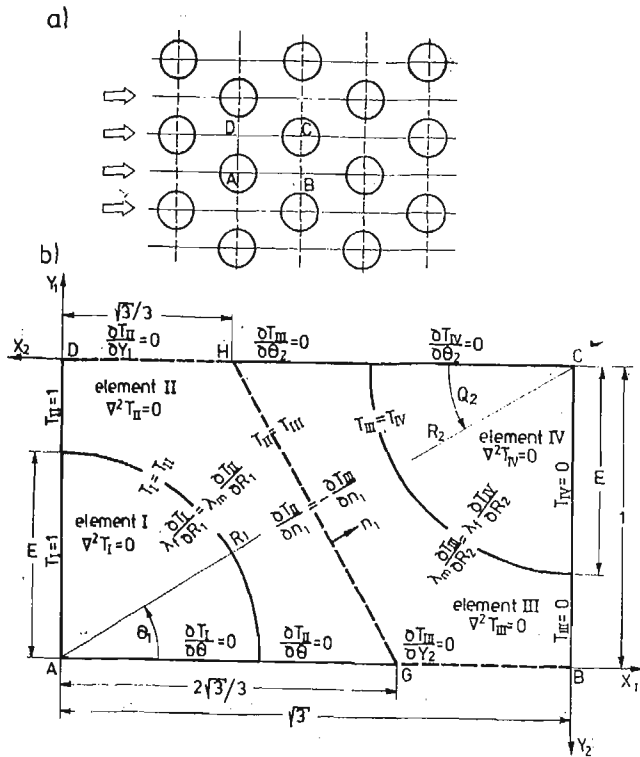
1) włókna są cylindrami o jednakowym promieniu, przy czym stosunek długości włókien do ich średnicy jest na tyle duży, że mogą one być traktowane jako nieskończenie długie;

2) materiał włókien i osnowy jest jednorodny i izotropowy;

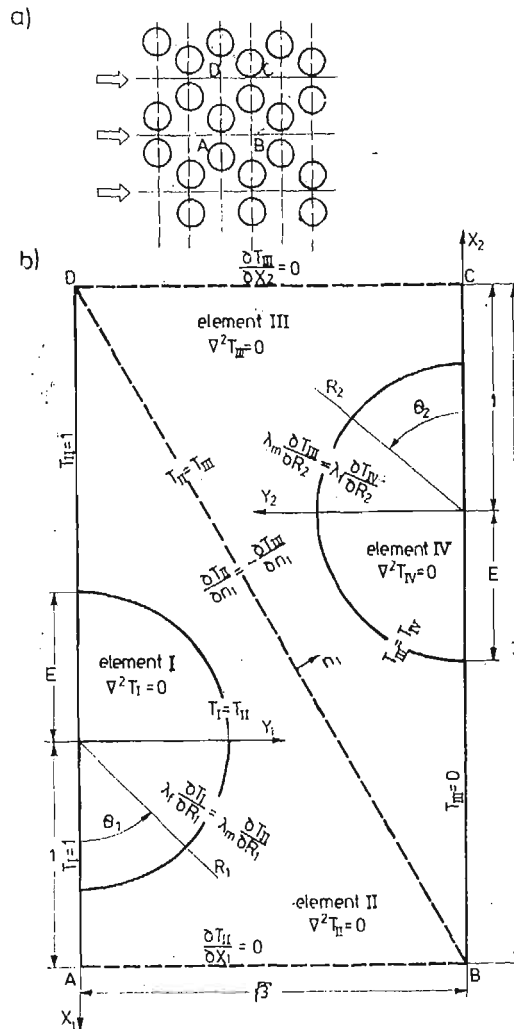
3) istnieje doskonały kontakt termiczny pomiędzy włóknami i osnową;



Rys. 1. Siatka kwadratowa; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane) b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego



Rys. 2. Siatka trójkątna; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane), b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego



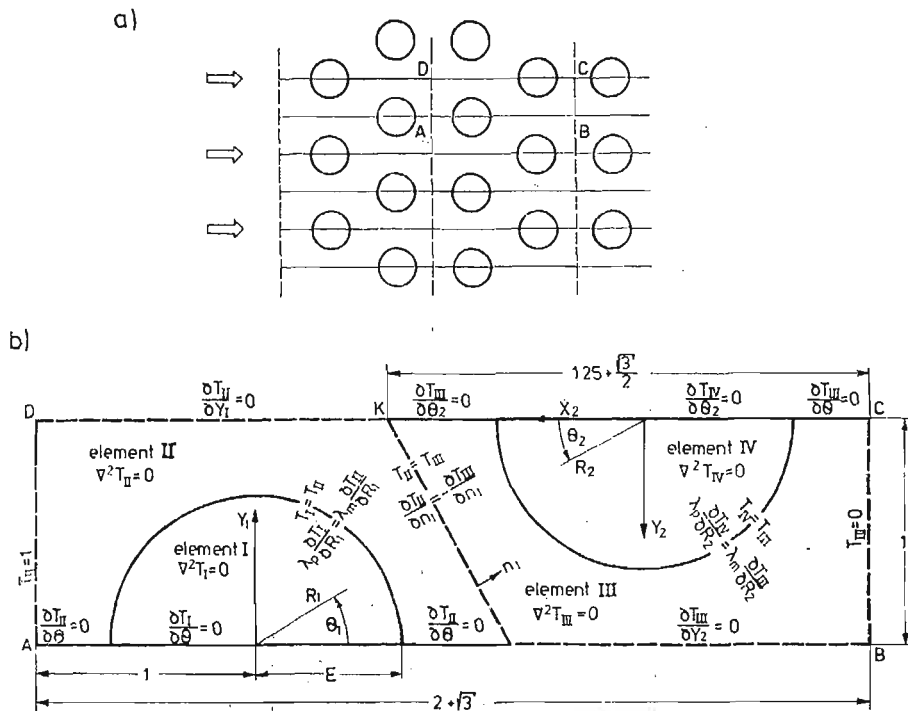
Rys. 3. Siatka sześciokątna; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane), b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego

4) płaski ustalony przepływ ciepła jest prostopadły do kierunku włókien;

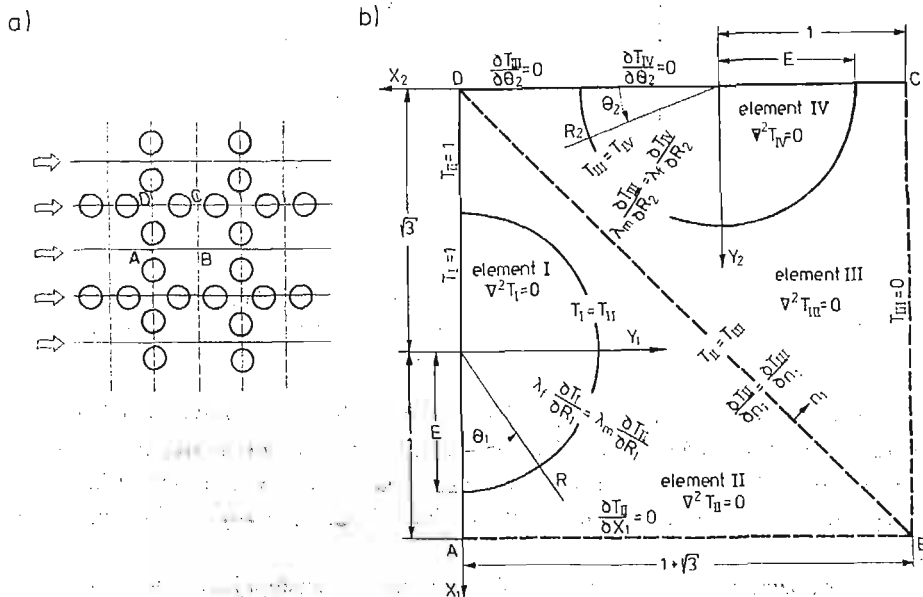
5) linie symetrii ułożenia włókien prostopadłe do kierunku średniego strumienia ciepła są liniami izotermicznymi (linie kreskowane na rys. 1a - 5a), natomiast linie symetrii równoległe do średniego strumienia ciepła są liniami adiabatycznymi (linie ciągłe na rys. 1a - 5a).

Po wprowadzeniu powyższych założeń proponujemy następujący algorytm określania poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej:

1. Wydzielić z rozważanego układu powtarzający się obszar ograniczony sąsiadującymi liniami adiabatycznymi i izotermicznymi, z którego poprzez przesunięcia i odbicia zwierciadlane można zbudować cały układ. Obszary takie dla rozważanych przykładowych



Rys. 4. Siatka trójkątno-kwadratowa; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane), b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego



Rys. 5. Siatka kwadratowo-ośmiokątna; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane), b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego

Tablica 1

	Typ siatki				
	kwadratowa	trójkątna	sześciokątna	trójkątno- kwadratowa	kwadratowo- ośmiokątna
$\varphi$	$\frac{\pi E^2}{4}$	$\frac{\pi E^2}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\pi E^2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{\pi E^2}{2+\sqrt{3}}$	$\frac{\pi E^2}{(1+\sqrt{3})^2}$
$2M$	$2N-1$	$4N-2$	$4N-2$	$4N$	$4N-2$

sposobów ułożenia włókien zostały przedstawione na rys. 1b - 5b. Poprzeczna efektywna przewodność cieplna może być wyznaczona w oparciu o znajomość stacjonarnego pola temperatury w takich powtarzających się obszarach.

2. Podzielić powtarzający się obszar na tzw. „duże elementy skończone” [33] w sposób, którego przykłady podano na rys. 1b - 5b.

3. Sformułować problem brzegowy dla ustalonego pola temperatury w powtarzającym się obszarze. Na odcinkach, które dzielą obszar osnowy na dwie części, korzystamy z twierdzenia Duhema cytowanego przez Chen Yi-Zhou i Chen Yi-Henga [34]. Twierdzenie to głosi, że jest możliwa konstrukcja funkcji harmonicznej w obszarze  $\Omega$  przez „zszycie” dwóch harmonicznych funkcji definiowanych w dwóch sąsiadujących podobszarach obszaru  $\Omega$ . Warunkiem „zszycia” jest równość wartości tych funkcji oraz ich pochodnych normalnych na brzegu, który dzieli obszar  $\Omega$  na podobszary. Przykłady sformułowań wspomnianych zagadnień brzegowych podano na rys. 1b - 5b.

4. Wybrać obcięte szeregi funkcji próbných, które spełniają ściśle równanie różniczkowe w elementach powtarzającego się obszaru oraz część warunków brzegowych, w szczególności warunki brzegowe na granicy pręta i osnowy, jak również na niektórych liniach adiabatycznych i izotermicznych. Przykładowy sposób otrzymywania obciętych szeregów funkcji próbných dla siatki kwadratowej podano w dodatku A. Obcięte szeregi funkcji próbných dla przykładowo rozważanych układów z rys. 1 - 5 podano w tab. 2. Brzegi, na których obcięte szeregi spełniają warunki brzegowe w sposób ścisły, zaznaczono na rys. 1b - 5b linią ciągłą, natomiast brzegi, gdzie warunki brzegowe są spełniane w sposób przybliżony — linią przerywaną.

5. Wybrać punkty kollokacji na brzegach, gdzie warunki brzegowe są spełniane w sposób przybliżony. Dla rozważanych przypadków na każdym prostoliniowym odcinku brzegu, gdzie warunki brzegowe spełnia się kollokacyjnie, przyjęto  $N$  punktów kollokacji. Następnie założono równą odległość pomiędzy punktami kollokacji na tych odcinkach. Przykładowo dla siatki kwadratowej rozmieszczenie punktów oraz wzory określające współrzędne tych punktów podano na rys. 6.

6. Zastosować warunki brzegowe do obciętych szeregów funkcji próbných w wybranych punktach kollokacji. Dzięki temu otrzymamy układ równań liniowych dla współczynników szeregu w postaci:

$$\sum_{j=1}^{2M} A_{ij} X_j = B_i \quad i = 1, 2, \dots, 2M, \quad (2)$$

Tablica 2. Obcięte szeregi funkcji próbnych dla pięciu rozważanych sposobów ułożenia włókien

siatka kwadratowa

$$T_I = 1 + \sum_{K=1}^{2M} X_K R^{(2K-1)} \cos[(2K-1)\theta]$$

$$T_{II} = 1 + \sum_{K=1}^{2M} \frac{X_K}{2} \left[ (1+F)R^{(2K-1)} + (1-F)\frac{E^{(4K-2)}}{R^{(2K-1)}} \right] \cos[(2K-1)\theta]$$

siatka trójkątna

$$T_I = 1 + \sum_{K=1}^M X_K R_1^{(2K-1)} \cos[(2K-1)\theta_1]$$

$$T_{II} = 1 + \sum_{K=1}^M \frac{X_K}{2} \left[ (1+F)R_1^{(2K-1)} + (1-F)\frac{E^{(4K-2)}}{R_1^{(2K-1)}} \right] \cos[(2K-1)\theta_1]$$

$$T_{III} = \sum_{K=1}^M \frac{X_{M+K}}{2} \left[ (1+F)R_2^{(2K-1)} + (1-F)\frac{E^{(4K-2)}}{R_2^{(2K-1)}} \right] \cos[(2K-1)\theta_2]$$

$$T_{IV} = \sum_{K=1}^M X_{M+K} R_2^{(2K-1)} \cos[(2K-1)\theta_2]$$

siatka sześciokątna

$$T_I = \sum_{K=1}^M X_K R_1^{(K-1)} \cos[(K-1)\theta_1]$$

$$T_{II} = \sum_{K=1}^M \frac{X_K}{2} \left[ (1+F)R_1^{(K-1)} + (1-F)\frac{E^{2(K-1)}}{R_1^{(K-1)}} \right] \cos[(K-1)\theta_1]$$

$$T_{III} = \sum_{K=1}^M \frac{X_{M+K}}{2} \left[ (1+F)R_2^{(K-1)} + (1-F)\frac{E^{2(K-1)}}{R_2^{(K-1)}} \right] \cos[(K-1)\theta_2]$$

$$T_{IV} = \sum_{K=1}^M X_{M+K} R_2^{(K-1)} \cos[(K-1)\theta_2]$$

siatka kwadratowo-trójkątna

$$T_I = \sum_{K=1}^M X_K R_1^{(K-1)} \cos[(K-1)\theta_1]$$

$$T_{II} = \sum_{K=1}^M \frac{X_K}{2} \left[ (1+F)R_1^{(K-1)} + (1-F)\frac{E^{2(K-1)}}{R_1^{(K-1)}} \right] \cos[(K-1)\theta_1]$$

$$T_{III} = \sum_{K=1}^M \frac{X_{M+K}}{2} \left[ (1+F)R_2^{(K-1)} + (1-F)\frac{E^{2(K-1)}}{R_2^{(K-1)}} \right] \cos[(K-1)\theta_2]$$

$$T_{IV} = \sum_{K=1}^M X_{M+K} R_2^{(K-1)} \cos[(K-1)\theta_2]$$



Tablica 2 (ciąg dalszy)

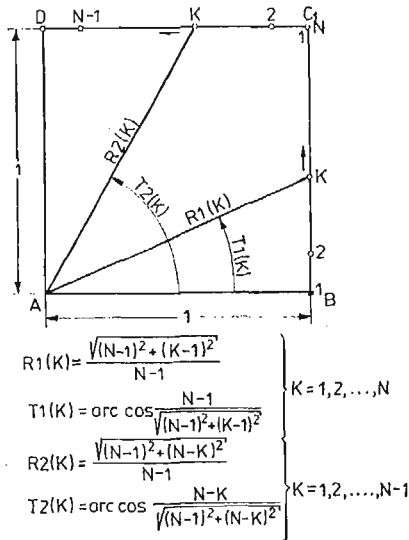
siatka kwadratowo-ośmiokątna

$$T_i = 1 + \sum_{K=1}^M X_K R_1^K \sin(K\theta_1)$$

$$T_{II} = 1 + \sum_{K=1}^M \frac{X_K}{2} \left[ (1+F)R_1^K + (1-F)\frac{E^{2K}}{R_1^K} \right] \sin(K\theta_1)$$

$$T_{III} = \sum_{K=1}^M \frac{X_{M+K}}{2} \left[ (1+F)R_2^K + (1-F)\frac{E^{2K}}{R_2^K} \right] \cos(K\theta_2)$$

$$T_{IV} = \sum_{K=1}^M \frac{X_{M+K}}{2} R_2^K \cos(K\theta_2)$$



Rys. 6. Rozmieszczenie punktów kollokacji w powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej

gdzie związek pomiędzy  $M$  i  $N$  podano w tabeli 1. Przykładowy sposób wyznaczania macierzy układu  $A_{ij}$  oraz wektora wyrazów wolnych  $B_i$  układu (2) podano w dodatku B.

7. Rozwiązać układ równań liniowych (2).
8. Określić poprzeczną efektywną przewodność cieplną ze wzoru:

$$\lambda_{\perp} = \frac{QL}{\Delta T}, \tag{3}$$

gdzie  $Q$  jest całkowitą ilością ciepła przewodzoną przez powtarzający się obszar kompozytu,  $\Delta T$  — różnica temperatury na brzegach izotermicznych tego obszaru,  $L$  — odległość pomiędzy brzegami izotermicznymi. Dzięki zastosowanej metodzie otrzymuje się wzory w postaci zamkniętej dla  $\lambda_{\perp}$ , które dla rozważanych przypadków sposobów ułożenia włókien zostały podane w tab. 3. Przykładowy sposób określenia  $\lambda_{\perp}$  dla siatki kwadratowej podano w dodatku C.

Tablica 3. Wzory dla poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej dla czterech typów rozważanych sposobów ułożenia włókien

siatka kwadratowa	
$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_m} = \sum_{K=1}^{2M} X_K (-1)^{(K+1)} \left\{ FE^{(2K-1)} + \frac{1}{2} \left\{ (1+F)[1-E^{(2K-1)}] - \right. \right.$	
$\left. \left. -(1-F)E^{(4K-2)} \left[ 1 - \frac{1}{E^{(2K-1)}} \right] \right\} \right\}$	
siatka trójkątna	
$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_m} = \sqrt{3} \sum_{K=1}^M X_K (-1)^{(K+1)} \left\{ FE^{(2K-1)} + \frac{1}{2} \left\{ (1+F)[1-E^{(2K-1)}] - \right. \right.$	
$\left. \left. -(1-F)E^{(4K-2)} \left[ 1 - \frac{1}{E^{(2K-1)}} \right] \right\} \right\}$	
siatka sześciokątna	
$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_m} = 3 \sum_{K=1}^M X_{2K} (-1)^{(K-1)} \left\{ FE^{(2K-1)} + \frac{1}{2} \left\{ (1+F)[(\sqrt{3})^{(2K-1)}] - \right. \right.$	
$\left. \left. -E^{(2K-1)} \right\} - (1-F)E^{2(2K-1)} \left[ \frac{1}{(\sqrt{3})^{(2K-1)}} - \frac{1}{E^{(2K-1)}} \right] \right\}$	
siatka kwadratowo-trójkątna	
$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_m} = (2+\sqrt{3}) \sum_{K=1}^M X_{2K} (-1)^{(K+1)} \left\{ FE^{(2K-1)} + \frac{1}{2} \left\{ (1+F) \cdot \right. \right.$	
$\left. \left. [1-E^{(2K-1)}] - (1-F)E^{2(2K-1)} \left[ 1 - \frac{1}{E^{(2K-1)}} \right] \right\} \right\}$	

Należy tutaj zauważyć, że nie ma powodów, aby zakładać izotropię poprzecznego przewodnictwa dla wszystkich rozważanych kompozytów. Innymi słowy, zmieniając kierunek strumienia ciepła w płaszczyźnie prostopadłej do włókien, poprzeczna efektywna przewodność cieplna może ulec zmianie. W niniejszej pracy nie bada się tej zmiany, jakkolwiek opisana metoda może służyć do tego celu.

W przedstawionym algorytmie dla przybliżonego spełnienia warunków brzegowych zaproponowano najprostszą odmianę metody kollokacji brzegowej, zwanej prostą kollokacją brzegową. Polega ona na tym, że liczba punktów kollokacji pokrywa się z liczbą niewiadomych współczynników w wybranych szeregach funkcji próbnych oraz na ścisłym spełnieniu warunków brzegowych w tych punktach. Niektórzy autorzy, np. France [35], Hulbert [36], twierdzą, że lepsze wyniki uzyskuje się stosując metodę kollokacji brzegowej z minimalizacją sumy kwadratu błędu spełnienia warunku brzegowego w przyjętych punktach kollokacji. Wówczas liczba punktów kollokacji może być większa od liczby określanych współczynników. Jeśli zastosujemy procedurę opisaną wyżej, to układ równań

liniowych (2) będzie układem nadokreślonym. Zakładając, że suma kwadratów błędów spełnienia warunku brzegowego jest minimalna, otrzymuje się układ równań liniowych w postaci

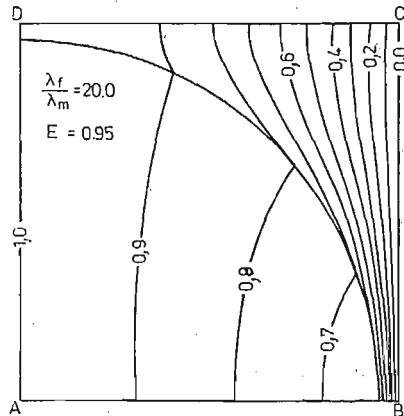
$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}, \quad (4)$$

w którym liczba niewiadomych jest równa ilości równań.

W niniejszej pracy stosuje się obie odmiany metody kolokacji brzegowej.

### 3. Rezultaty numeryczne

Istotnym punktem proponowanego algorytmu jest wyznaczenie stacjonarnego pola temperatury, opisywanego płaskim równaniem Laplace'a, w powtarzającym się elemencie układu. Obecnie istnieje wiele metod numerycznego rozwiązywania płaskiego równania Laplace'a. Do najbardziej znanych należą metoda różnic skończonych i metoda elementów skończonych. Stosowana w niniejszej pracy metoda kolokacji brzegowej, jak również pokrewne jej metody, nazywane ogólnie metodami brzegowymi, są znacznie mniej rozpowszechnione. Przed przystąpieniem do rozwiązania konkretnego zagadnienia brzegowego należy zdecydować się na określoną metodę. Powstaje wówczas pytanie, która ze znanych metod zapewnia dostateczną dokładność wyników przy minimalnym nakładzie pracy komputera i przygotowującego obliczenia. Metoda różnic skończonych i elementów skończonych tracą, między innymi, swą dokładność, jeśli występują duże gradienty przestrzenne poszukiwanych funkcji. W rozważanym problemie, dla niektórych wartości  $F$  i  $E$ , istnieją duże gradienty temperatury, co ilustruje przykładowe pole temperatury podane na rys. 7. Jak wynika z tego rysunku, przy odpowiednio dużych wartościach  $F$  oraz dla



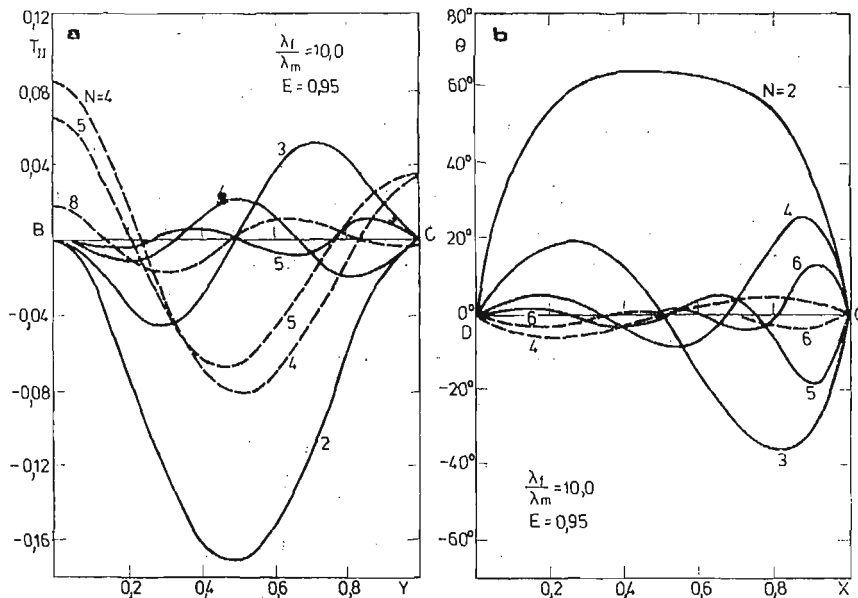
Rys. 7. Przykładowe pole temperatury w powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej dla  $E = 0,95$ ,  $F = 20$

wartości  $E$  bliskich maksymalnym, w otoczeniu punktu  $B$  występują duże gradienty temperatury. Jest to jedna z przyczyn, z powodu której metoda kolokacji brzegowej wydaje się bardziej odpowiednia do rozwiązywania rozważanych problemów brzegowych od popularnych metod różnic skończonych i elementów skończonych. Do innych przyczyn należy

zaliczyć znacznie niższy wymiar układu równań liniowych, jaki należy rozwiązywać numerycznie przy stosowaniu metody kollokacji brzegowej.

W proponowanej metodzie rozwiązywania zagadnień brzegowych warunki brzegowe na części brzegu rozważanego obszaru zostały spełnione w sposób przybliżony. Spełnia się je ściśle tylko w skończonej liczbie  $2M$  punktów lub minimalizuje się sumę kwadratu błędu spełnienia warunku w skończonej liczbie  $2M$  punktów.

Intuicyjnie może się wydawać, że zwiększając liczbę punktów kollokacji zwiększamy dokładność spełnienia warunków brzegowych, a tym samym dokładność otrzymywanych rezultatów. Eksperymenty numeryczne nie potwierdzają jednak w pełni takiego przypuszczenia. Okazuje się, że liczba punktów kollokacji nie musi być duża, aby uzyskać odpowiednio mały maksymalny błąd spełnienia warunku brzegowego pomiędzy punktami kollokacji. Sytuację tę ilustrują rys. 8, gdzie podano wykresy błędu spełnienia warunku brzegowego na brzegach powtarzającego się obszaru siatki kwadratowej. Widzimy, że już przy kilku punktach kollokacji maksymalny błąd jest mały.



Rys. 8. a) Przykładowy błąd spełnienia warunku brzegowego  $T_{II} = 0$  w powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej; linia ciągła przy czystej kollokacji, linia przerywana dla kollokacji z minimalizacją sumy kwadratu błędu w punktach kollokacji. b) Przykładowy błąd spełnienia warunku brzegowego  $\frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = \text{tg } \theta = 0$  w powtarzającym się elemencie siatki kwadratowej; linia ciągła dla kollokacji czystej, linia przerywana dla kollokacji z minimalizacją sumy kwadratu błędu w punktach kollokacji

Z drugiej strony powiększanie liczby punktów kollokacji prowadzi w końcu do złego uwarunkowania układu równań (2). Związane to jest z faktem, że zgęszczanie punktów kollokacji powoduje, iż sąsiadujące z sobą równania w układzie (2), wynikające ze spełnienia warunku brzegowego w sąsiadujących punktach kollokacji, niewiele różnią się od siebie. Sytuację utraty dokładności otrzymywanych rezultatów wskutek złego uwarun-

Tablica 4. Wpływ ilości punktów kolokacji  $N$  na poprzeczną efektywną przewodność cieplną oraz uwarunkowanie układu dla  $E = 0,1$ ,  $F = 0,1$  dla siatki kwadratowej

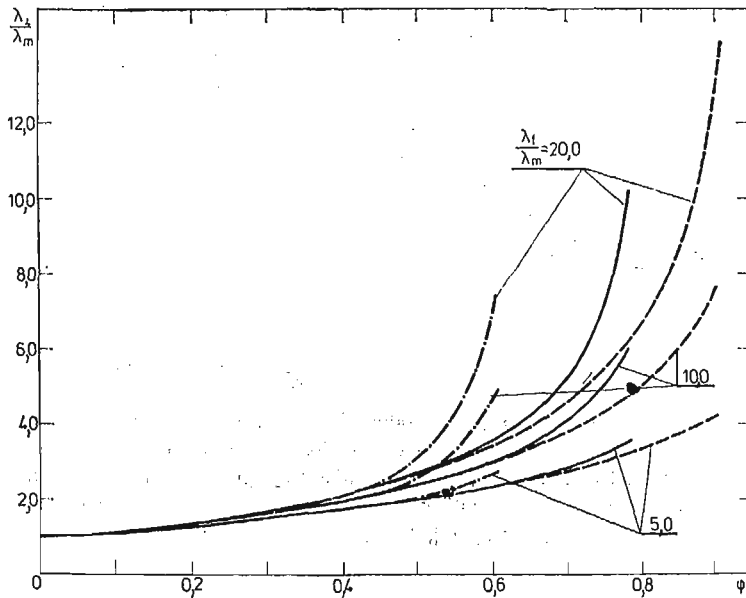
Wymiar układu liniowego	$\frac{\lambda_1}{\lambda_m}$	$\beta$
3	0,98375	$\sim 10$
5	0,98374	$\sim 10^2$
7	0,98374	$\sim 10^2$
9	0,98374	$\sim 10^3$
11	0,98374	$\sim 10^4$
13	0,98374	$\sim 10^5$
15	0,98374	$\sim 10^7$
17	-0,92409	$\sim 10^8$

kowania układu liniowego ilustruje tab. 4. Jako miarę uwarunkowania przyjęto „ $N$  — warunkującą liczbę macierzy  $\mathbf{A}$ ” daną wzorem {[37], str. 222}:

$$\beta = \frac{1}{2M} \|\mathbf{A}\|_{III} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{III}, \tag{5}$$

gdzie

$$\|\mathbf{A}\|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} A_{ij}^2}. \tag{6}$$

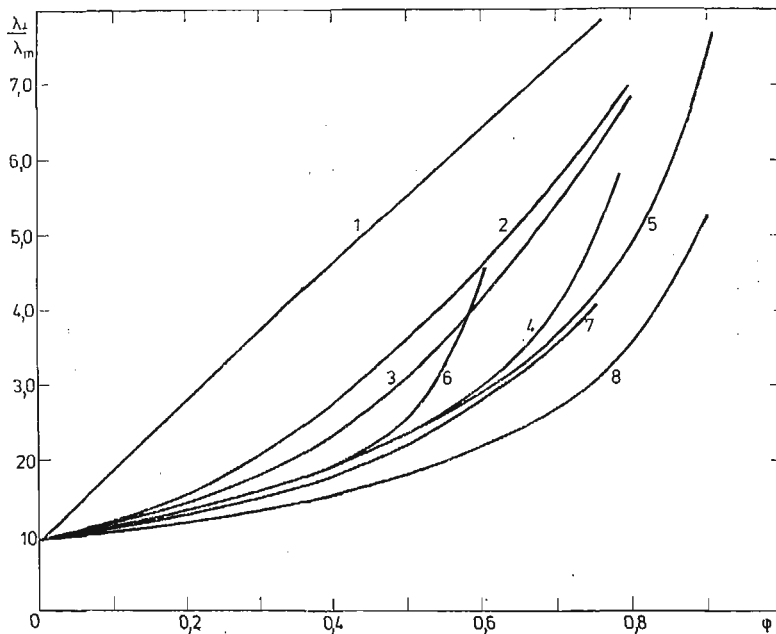


Rys. 9. Wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej  $\lambda_1$  w funkcji udziału objętościowego włókien dla trzech sposobów ułożenia włókien: --- wg siatki trójkątnej, — wg siatki kwadratowej, ---- wg siatki sześciokątnej

W przedstawionym w tab. 4 przykładzie wyniki są stabilne począwszy od pięciu punktów kolokacji, jednak przy siedemnastu punktach kolokacji przestają być sensowne wskutek złego uwarunkowania układu liniowego.

Na rys. 9. zostały przedstawione wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej w funkcji udziału objętościowego włókien dla trzech typów siatek. Z rysunku wynika, że dla małych udziałów objętościowych włókien ich ułożenie nie ma wpływu na efektywną przewodność cieplną. Jednak dla udziałów objętościowych bliskich maksymalnym sposób ułożenia włókien ma istotny wpływ na przewodność cieplną. Stosunek przewodności cieplnej prętów i osnowy ma również istotny wpływ na efektywną przewodność cieplną przy dużych udziałach objętościowych włókien.

Na rys. 10 porównano wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej otrzymane w niniejszej pracy z wynikami innych autorów. Na uwagę zasługuje fakt, że dla siatki kwadratowej i trójkątnej wyniki proponowanej metody są zgodne z wynikami innych autorów. Wyjątkiem jest tutaj wzór empiryczny podany w pracy [6], jednak w konfrontacji z innymi wynikami doświadczalnymi [4 - 5] nie budzi on zaufania.



Rys. 10. Wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej  $\lambda_1$  wg różnych autorów dla  $F = 10$ : 1 — wzór (1) dla  $\lambda_{II}$ , 2 — górna granica [10], 3 — losowe ułożenie włókien [15], 4 — siatka kwadratowa — wyniki proponowanego modelu oraz [7, 8, 22], 5 — siatka trójkątna — wyniki proponowanego modelu oraz [7, 22], 6 — siatka sześciokątna — wyniki proponowanego modelu, 7 — siatka kwadratowa — wzór empiryczny [6], 8 — dolna granica [10]

DODATEK A. WYZNACZENIE OBCIĘTYCH SZEREGÓW FUNKCJI PRÓBNYCH  
DLA SIATKI KWADRATOWEJ

Rozważmy powtarzający się obszar siatki kwadratowej. Obszar ten został podzielony na dwa elementy w sposób pokazany na rys. 1b, gdzie również podano sformułowanie problemu brzegowego. Celem otrzymania obciętych szeregów funkcji próbnych dla tych elementów weźmy pod uwagę ogólne rozwiązanie dwuwymiarowego równania Laplace'a w biegunowym układzie współrzędnych  $(R, \theta)$  odpowiednio w elemencie I

$$T_I = A_0^I + A_1^I \theta + A_2^I \theta \ln R + A_3^I \ln R + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (B_n^I R^n + C_n^I R^{-n}) \cos n\theta + (D_n^I R^n + E_n^I R^{-n}) \sin n\theta \}, \quad (A1)$$

oraz w elemencie II

$$T_{II} = A_0^{II} + A_1^{II} \theta + A_2^{II} \theta \ln R + A_3^{II} \ln R + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (B_n^{II} R^n + C_n^{II} R^{-n}) \cos n\theta + (D_n^{II} R^n + E_n^{II} R^{-n}) \sin n\theta \}, \quad (A2)$$

gdzie  $A_0^I, A_1^I, \dots, E_n^I, A_0^{II}, A_1^{II}, \dots, E_n^{II}$  są stałymi, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Z warunków  $\frac{\partial T_I}{\partial \theta} = \frac{\partial T_{II}}{\partial \theta} = 0$  dla  $\theta = 0$  wynika, że

$$A_1^I = A_1^{II} = A_2^I = A_2^{II} = 0 \quad (A3)$$

oraz

$$D_n^I = E_n^I = D_n^{II} = E_n^{II} = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \quad (A4)$$

Uwzględniając warunki  $T_I = T_{II} = 1$  dla  $\theta = \frac{\pi}{2}$  otrzymujemy

$$A_0^I = A_0^{II} = 1 \quad (A5)$$

oraz że dopuszczalne są następujące wartości

$$n = 1, 3, 5, \dots \quad (A6)$$

Z uwagi na fakt, że  $T_I$  musi być ograniczone dla  $R = 0$ , otrzymujemy

$$A_3^I = C_n^I = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \quad (A7)$$

Jeśli uwzględnimy otrzymane wyniki w (A1) i (A2), otrzymamy następujące równania na rozkład temperatury odpowiednio w I i II elemencie

$$T_I = 1 + \sum_{K=1}^{\infty} B_K^I R^{(2K-1)} \cos[(2K-1)\theta] \quad (A8)$$

oraz

$$T_{II} = 1 + A_3^{II} \ln R + \sum_{K=1}^{\infty} (B_K^{II} R^{(2K-1)} + C_K^{II} R^{-(2K-1)}) \cos[(2K-1)\theta]. \quad (A9)$$

Uwzględniając warunki brzegowe na granicy elementów powtarzającego się obszaru (na granicy przęta i osnowy), tj.  $T_I = T_{II}$  oraz  $\lambda_f \frac{\partial T_I}{\partial R} = \lambda_m \frac{\partial T_{II}}{\partial R}$  przy  $R = E$  otrzymujemy

$$A_3^{II} = 0, \quad (A10)$$

$$B_k^{II} = B_k^I \frac{1}{2} (1+F), \quad (A11)$$

$$C_k^{II} = B_k^I \frac{1}{2} (1-F) E^{4K-2}. \quad (A12)$$

Po podstawieniu (A10 - A12) do (A8) i (A9) oraz wprowadzając oznaczenie  $B_k^I = X_k$  i obcinając nieskończone szeregi do  $2M$  pierwszych wyrazów otrzymujemy poszukiwane szeregi obciętych funkcji próbnych dla siatki kwadratowej odpowiednio w elemencie I

$$T_I = 1 + \sum_{K=1}^{2M} X_K R^{(2K-1)} \cos[(2K-1)\theta] \quad (A13)$$

oraz w elemencie II

$$T_{II} = 1 + \sum_{K=1}^{2M} \frac{X_K}{2} \left[ (1+F) R^{(2K-1)} + (1-F) \frac{E^{(4K-2)}}{R^{(2K-1)}} \right] \cos[(2K-1)\theta], \quad (A14)$$

gdzie  $X_k$  są stałymi do wyznaczenia z niewykorzystanych jeszcze warunków brzegowych (do wyznaczenia metodą kollokacji).

W podobny sposób otrzymujemy pozostałe obcięte szeregi funkcji próbnych podane w tab. 1, biorąc pod uwagę ogólne rozwiązania w postaci (A1) w każdym z elementów i odpowiednio je upraszczając dzięki wykorzystaniu warunków brzegowych na brzegach zaznaczonych liniami ciągłymi.

#### DODATEK B. WYZNACZENIE MACIERZY UKŁADU I WEKTORA WYRAZÓW WOLNYCH W UKŁADZIE RÓWNAŃ (2) DLA SIATKI KWADRATOWEJ

W obciętych szeregach funkcji próbnych (A13) i (A14) opisujących pole temperatury w powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej występuje  $2M$  nieznanymi współczynników  $X_1, X_2, \dots, X_{2M}$ , do wyznaczenia których dysponujemy następującymi warunkami brzegowymi:

$$T_{II} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1, \quad (B1)$$

$$\frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = 0 \quad \text{dla} \quad Y = 1. \quad (B2)$$

Po podstawieniu (A14) do (B1) i (B2) i po skorzystaniu ze wzoru

$$\frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = \frac{\partial T_{II}}{\partial R} \sin \theta + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{II}}{\partial \theta} \cos \theta \quad (B3)$$

otrzymujemy

$$1 + \sum_{K=1}^{2M} \frac{X_K}{2} \left[ (1+F) R^{(2K-1)} + (1-F) \frac{E^{(4K-2)}}{R^{(2K-1)}} \right] \cos[(2K-1)\theta] = 0 \quad \text{dla} \quad R = \frac{1}{\cos \theta}, \quad (B4)$$

$$\sum_{K=1}^{2M} \frac{X_K}{2} (2K-1) \left\{ (1+F) R^{(2K-2)} \sin[2(K-1)\theta] + (1-F) \frac{E^{4K-2}}{R^{2K}} \sin(2K\theta) \right\} = 0 \quad \text{dla} \quad R = \frac{1}{\sin \theta}. \quad (B5)$$



Zakładając, że warunki brzegowe spełniamy w przyjętych punktach kolokacji, których współrzędne zostały podane na rys. 6; po skorzystaniu z (B4) i (B5) otrzymujemy następującą postać macierzy układu i wektora wyrazów wolnych w układzie równań (2) dla siatki kwadratowej

$$A_{IJ} = \left[ (1+F) R1(I)^{(2J-1)} + (1-F) \frac{E^{(4J-2)}}{R1(I)^{(2J-1)}} \right] \cdot \cos[(2J-1)T1(I)], \quad (B6)$$

$$I = 1, 2, \dots, N,$$

$$J = 1, 2, \dots, 2M = 2N-1,$$

$$A_{IJ} = (2J-1) \left\{ (1+F) R2(K)^{(2J-2)} \cdot \sin[2(J-1)T2(K)] + \right. \\ \left. + (1-F) \frac{E^{(4J-2)}}{R2(K)^{2J}} \sin[2J \cdot T2(K)] \right\} \quad (B7)$$

$$I = N+K,$$

$$K = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$J = 1, 2, \dots, 2M = 2N-1,$$

$$B(I) = -2 \quad \text{dla} \quad I = 1, 2, \dots, N$$

$$B(I) = 0 \quad \text{dla} \quad I = N+K, K = 1, 2, \dots, N-1.$$

#### DODATEK C. OBLICZENIE DLA $\lambda_1$ SIATKI KWADRATOWEJ

Dla siatki kwadratowej we wzorze (3) mamy (patrz rys. 1b)

$$L = 1 \quad \text{i} \quad \Delta T = 1. \quad (C1)$$

Całkowitą ilość ciepła przewodzoną przez powtarzający się obszar kompozytu w tym przypadku obliczamy ze wzoru

$$Q = -\lambda_f \int_0^E \left( \frac{1}{R} \frac{\partial T_I}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} dR - \lambda_m \int_E^1 \left( \frac{1}{R} \frac{\partial T_{II}}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} dR. \quad (C2)$$

Uwzględniając wzory (A13) i (A14) przy obliczaniu  $\frac{\partial T_I}{\partial \theta}$  i  $\frac{\partial T_{II}}{\partial \theta}$  po dokonaniu całkowania i pewnych przekształceń otrzymujemy

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_m} = \sum_{K=1}^{2M} X_K \left\{ FE^{(2K-1)} + \frac{1}{2} \left\{ (1+F) [1 - E^{(2K-1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - (1-F)] E^{(4K-2)} \left[ 1 - \frac{1}{E^{(2K-1)}} \right] \right\} \right\} (-1)^{(K-1)}. \quad (C3)$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. G. K. BATCHELOR, *Transport properties of two-phase materials with random structure*, A. Rev. Fluid Mech., vol. 6, pp. 227-255, 1974.
2. J. C. MAXWELL, *A treatise on electricity and magnetism*, Oxford Univ. Press., pp. 435-441, 1904.

3. Lord RAYLEIGH, *On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium*, Phil. Mag., vol. 43, pp. 481 - 502, 1982.
4. M. M. Z. KHARADLY, W. JACKSON, Instn. elect. Engrs, vol. 100. pp. 199 - 212, 1952.
5. J. D. THORNBURG, C. D. PEARS, *Prediction of the Thermal Conductivity of Filled and Reinforced Plastics*, ASME Paper 65-WA/HT-4, 1965.
6. D. M. KARPINOS, V. S. KLIMENKO, V. H. KADYROW, *Transport properties in fibre reinforced aluminium matrices*, High Temperatures — High Pressures, vol. 5, no 1, pp. 13 - 17, 1973.
7. W. T. PERRINS, R. C. MCPHEDRAN, D. R. McKenzie, *Optical properties of dense regular cermets with relevance to selective solar absorbers*, Thin Solid Films, 57. no. 2, pp. 321 - 326, 1979.
8. P. FURMAŃSKI, W. GOGÓŁ, *Badanie ustalonego przewodzenia ciepła w dwuwymiarowym modelu kompozytu z symetrycznie rozmieszczonymi włóknami o przekroju kołowym*, Archiwum Termodynamiki, vol. 1, nr. 1, str. 63 - 80, 1980.
9. P. FURMAŃSKI, W. GOGÓŁ, *Wyznaczenie ograniczeń efektywnej przewodności cieplnej kompozytów*, Archiwum Termodynamiki, vol. 2, nr 3 - 4, str. 255 - 278, 1981.
10. Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN, *A Variational Approach to the Theory of Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials*, Journal of Applied Physics, vol. 33, no. 10, pp. 3125 - 3130, 1962.
11. W. F. BROWN, *Dielectric constants, permeabilities and conductivities of random media*, Transactions of the Society of Rheology, vol. 9, part 1, pp. 357 - 380, 1965.
12. M. J. BERAN, N. R. SILMUTZER, *Effective Electrical, Thermal and Magnetic Properties of Fiber Reinforced Materials*, Jour. Composite Materials, vol. 5, no. 3, pp. 246 - 249, 1971.
13. J. J. MCCOY, *Bounds on the transverse effective conductivity of computer-generated fiber composites*, J. Appl. Mech., vol. 49, no. 2, pp. 319 - 326, 1982.
14. G. S. SPRINGER, S. W. TSAI, *Thermal Conductivities of Unidirectional Materials*, Jour. Composite Materials, vol. 1, no. 2, pp. 166 - 173, 1967.
15. W. E. A. DAVIES, *The dielectric constant of fibre composites*, Jour. of Physics D: Applied Physics, vol. 7, no. 1, pp. 120 - 130, 1974.
16. Z. HASHIN, *Theory of fiber-reinforced materials*, NASA CR-1974, 1972 (na podstawie cytowania przez R. M. Christensen: *Mechanics of composite materials*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto).
17. J. B. KELLER, *Conductivity of a Medium Containing a Dense Array of Perfectly Conducting Spheres or Cylinders or Nonconducting Cylinders*, Jour. Appl. Phys., vol. 34, no. 3, pp. 991 - 993, 1963.
18. H. KELLER, D. SACHS, *Calculations of the conductivity of a medium containing cylindrical inclusions* J. Appl. Phys., pp. 537 - 538, 1964.
19. W. KNAPPE, H. J. OTT, G. WAGNER, *Berechnung und Messung der Wärmeleitfähigkeit von glaserverstärkten Kunststoffen*, Kunststoffe, vol. 68, H. 7, pp. 420 - 426, 1978.
20. W. T. PERRINS, D. R. MCKENZIE, R. C. MCPHEDRAN, *Transport properties of regular arrays of cylinders*, Proc. Roy. Soc. Lond. A369, pp. 207 - 225, 1979.
21. P. FURMAŃSKI, W. GOGÓŁ, *Określenie efektywnej przewodności cieplnej kompozytów wzmacnianych ciągliwymi włóknami o przekroju kołowym*, Archiwum Termodynamiki, vol. 1, nr 3 - 4, str. 199 - 209, 1980.
22. L. S. HAN, A. A. COSNER, *Effective Thermal Conductivities of Fibrous Composites*, Jour. Heat Transfer, no. 2, pp. 387 - 392, 1981.
23. H. SEKINE, *On the effective thermal conductivity of composite materials with periodically spaced thin insulators*, Compos. Mater.: Mech., Mech. Prop. and Fabr. Jap.-US Conf., Tokyo 12 - 14 Jan., 1981, Barking, 1981, pp. 330 - 338.
24. A. S. SANGANI, A. ACRIVOS, *Slow flow past periodic arrays of cylinders with application to heat transfers*, Int. J. Multiphase Flow, vol. 8, no. 3, pp. 193 - 206, 1982.
25. J. H. KELLER, *A Theorem on the Conductivity of a Composite Medium*, Jour. Mathem. Phys., vol. 5, no. 4, pp. 548 - 549, 1964.
26. D. F. ADAMS, D. R. DONER, *Transverse Normal Loading of a Unidirectional Composite*, Jour. Composite Materials, vol. 1, no. 1, pp. 152 - 159, 1967.
27. J. B. KELLER, *Effective behavior of heterogeneous media, Statistical mechanics and statistical methods in theory and applications*, R. Landman, ed., pp. 631 - 644, Plenum, New York 1977.

28. D. R. AXELROD, *Micromechanics of solids*, Elsevier Scientific Publ., New York 1978.
29. M. J. BERAN, J. J. MCCOY, *Mean field variation in random media*, Q. Appl. Math. vol. 37, no. 2, pp. 245 - 258, 1970.
30. I. BABUSKA, *Homogenization and its application. Mathematical and computational problems*, Numerical solution of partial differential equations — III, B. Hubbard, ed. Academic Press, New York, pp. 89 - 116, 1976.
31. A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North — Holland, Amsterdam 1978.
32. E. SANCHEZ — PALENCIA, *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Berlin 1980.
33. P. JANSSENS, M. D. TOLLEY, *On the deformation of elastic plates*, Z. Angew. Phys., vol. 30, no. 2, pp. 234 - 242, 1979.
34. CHEN YI-ZHOU, CHEN YI-HENG *Solutions of the torsion problem for bars with  $\Gamma - \square - \triangle$  and  $\Gamma -$  cross-section by harmonic continuation technique*, Int. J. Eng. Sci., vol. 19, no. 6, pp. 791 - 804, 1981.
35. D. M. FRANCE, *Analytical Solution to Steady-State Heat Conduction Problems with Irregularly Shaped Boundaries*, J. Heat Transfer, Trans. ASME, ser. C, vol. 93, no. 4, pp. 449 - 454, 1971.
36. L. E. HULBERT, F. A. SIMONSEN, *Analysis of Stresses in Shallow Spherical Shells With Periodically Spaced Holes*, Jour. of Engng. for Industry. Trans. ASME, ser. B, vol. 92, 1970.
37. B. KOWALCZYK, *Macierze i ich zastosowania*, WNT, Warszawa 1976.

## Р е з ю м е

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
КОМПОЗИТОВ УКРЕПЛЕННЫХ ВОЛОКНАМИ РАЗПОЛОЖЕННЫМИ В ОДНОМ  
НАПРАВЛЕНИИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНОЙ КОЛЛОКАЦИИ

На основе метода граничной коллокации представлено общий метод определения перпендикулярной эффективной теплопроводности композитов укрепленных волокнами расположенными в одном направлении. В этом анализе предполагается знакомство геометрии регулярно расположенных волокон, а также теплопроводность компонентов. Исследуется пять способов расположения волокон в треугольной, квадратовой, шестиугольной, квадратовой-треугольной и восьми-квдратовой сетке. Результаты вычислений эффективной теплопроводности сравнено с величинами полученными через другими авторами.

## S u m m a r y

DETERMINATION OF THE TRANSVERSE EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY  
OF UNIDIRECTIONALLY FIBRE ARRANGED COMPOSITES BY MEANS OF BOUNDARY  
COLLOCATION METHOD

The general method of finding transverse effective thermal conductivity of the unidirectionally fibre arranged composites has been presented in this paper. It has been based on the boundary collocation method. The geometry of regularly arranged fibers and thermal conductivity of componets are assumed to be known. Five different patterns of lattice of fibers are considered: triangular, square, hexagonal, square-triangular, and octagonal-square. The results of calculations of effective thermal conductivity were juxtaposed with results obtained by other authors.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1984 roku*



## DOŚWIADCZALNA ANALIZA KINEMATYKI PROCESU WYCISKANIA

JAN PIWNIK (BIAŁYSTOK)

*Uniwersytet Warszawski Białystok*

### 1. Wprowadzenie

Celem pracy jest eksperymentalna analiza kinematyki procesu wyciskania osiowo-symetrycznego i dyskusja wyników otrzymanych z rozwiązania teoretycznego tegoż problemu. Proces ten, bardzo ważny w technologii bezwórowej, jest typowym przykładem, w którym z braku danych nie możemy sformułować mieszanych warunków brzegowych dla podstawowego układu równań różniczkowych plastyczności. Układ ten z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa i stowarzyszonym z nim prawem płynięcia jest typu eliptycznego [1, 2]. Dotychczas nie uzyskano efektywnych jego rozwiązań. Celem rozprężenia rozwiązań dla naprężeń i prędkości stosowano warunek plastyczności Treski i postulat Haara-Kármána. Przy tych uproszczeniach podstawowy układ równań jest typu hiperbolicznego i rozwiązuje się go metodą charakterystyk [1, 2, 7, 11, 12].

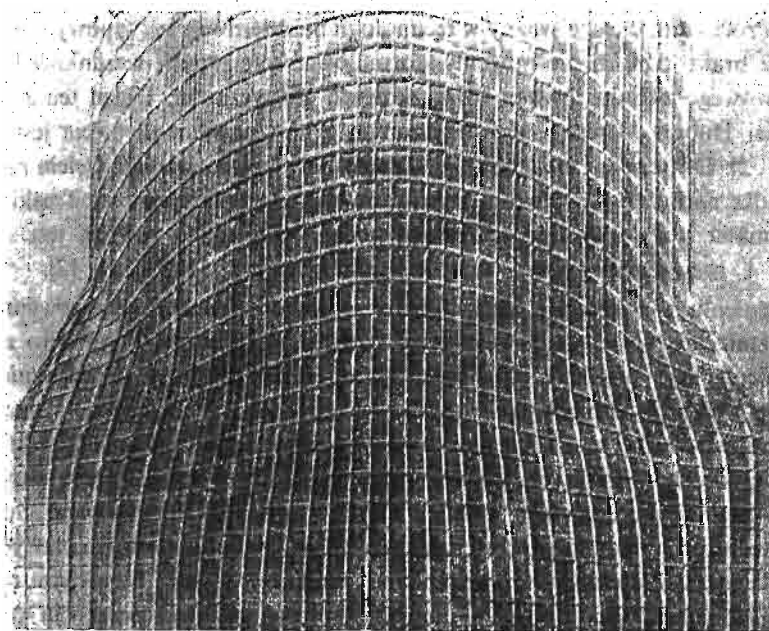
W odróżnieniu od rozwiązań zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi płaskiego stanu odkształcenia, rozwiązania w osiowej symetrii są nieliczne. Wynika to z trudności usunięcia nieciągłości prędkości na liniach ograniczających obszar uplastycznienia. Linie te nie mogą być liniami nieciągłości prędkości, gdyż przecinają one oś symetrii [6, 11]. Przykładem ilustrującym wszystkie kłopoty z tym związane jest praca [11], w której wykorzystując metodę charakterystyk, podano rozwiązanie kinematyki procesu współbieżnego wyciskania pręta cylindrycznego przez matrycę stożkową. Zastosowano tam metodę kolejnych iteracji. Zakładano rozkład naprężeń normalnych na konturze matrycy i sprawdzano każdorazowo zgodność z warunkami kinematycznymi. Uzyskano rozwiązania przy braku sił tarcia, przy małych i dużych stopniach redukcji przekroju wyjściowego pręta.

Porównano teoretyczne przebiegi linii prądu, prędkości i zasięgi stref deformacyjnych zaczerpnięte z pracy [11] z doświadczalnymi otrzymanymi metodą wizjoplastyczności [4]. W literaturze odczuwa się brak takich porównań, pomimo pewnej, skromnej zresztą, liczby prac poświęconych doświadczalnej analizie procesów wyciskania [3, 4, 5, 8, 9, 10]. Przyczynami są: duża pracochłonność eksperymentu i trudności z obróbką matematyczną materiału doświadczalnego.

Rozwiązania teorii procesów obróbki plastycznej są z konieczności przybliżone. Weryfikacja doświadczalna tych rozwiązań jest podstawą rozwoju matematycznej teorii plastycznego płynięcia, która umożliwia racjonalną analizę takich procesów.

## 2. Badania doświadczalne

Badania wykonano na przyrządzie konstrukcji autora [4] z dwuczęściową składaną komorą, w której umieszczono próbki złożone z dwóch połówek. Osiowo-symetryczne próbki walcowe  $\phi$  70 mm wykonano ze stopu aluminium PA2. Na płaszczyźnie podziału, którą stanowiła płaszczyzna południkowa jednej z połówek, naniesiono metodą mechanicznego nacinania siatkę kwadratową złożoną z linii oddalonych o  $2^{\pm 0.1}$  mm. Dwie połówki próbki składano w matrycy i obciążano przyrostowo, powodując wypływ materiału z prędkością około 1 mm/min. Po każdym kroku odpowiadającym przemieszczeniu stempla o wartość w granicach od 1 do 2 mm demontowano matrycę i wykonywano na specjalnym stanowisku zdjęcie zdeformowanej siatki. Na podstawie kilku kolejnych zdjęć, łącząc ze sobą punkty odpowiadające położeniom węzłów siatki, określono linie prądu w zdeformowanym materiale. Porównanie kolejnych zdjęć pozwala na określenie prędkości i zakresu, w którym zachowane są warunki ustalonego płynięcia. Rys. 1 przedsta-

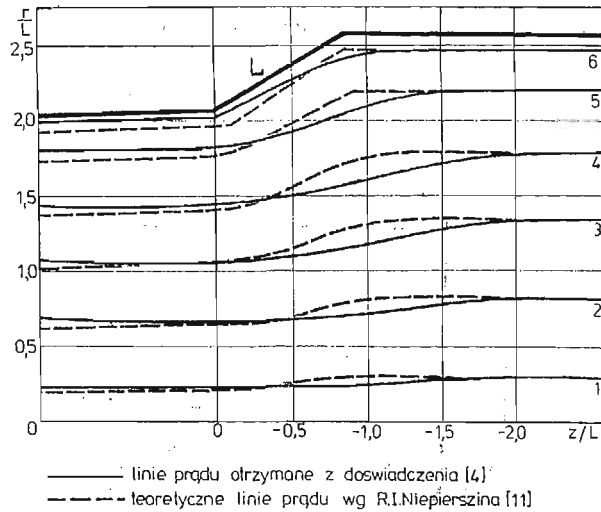


Rys. 1.

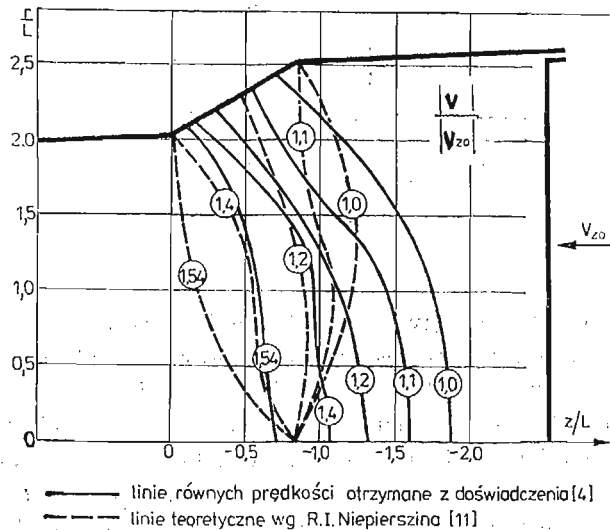
wia obraz zdeformowanej siatki w ustalonej fazie deformacji próbki, której średnicę początkową zredukowano z 70 na 58 mm. Kąt nachylenia tworzącej otworu matrycy wynosił  $\alpha = 30^\circ$ . Proces wyciskania prowadzono bez smarowania, ale z wysoką gładkością powierzchni styku narzędzia z materiałem. Przed wyciskaniem próbkę poddano wyżarzaniu ujednoradniającemu.

### 3. Porównanie wyników doświadczeń i teorii

Rysunek 2 zawiera porównania teoretycznych [11] (linie przerywane) i doświadczalnych (linie ciągłe) przebiegów sześciu linii prądu z obszaru uplastycznienia próbki. Wyniki naniesiono we współrzędnych bezwymiarowych  $r/L - z/L$ , gdzie  $L$  jest długością tworzącej otworu matrycy. Doświadczalne linie prądu w porównaniu z obliczeniowymi [11] doznają bardziej łagodnych przebiegów u wejścia do obszaru uplastycznionego i u wyjścia z niego. Położenie doświadczalnych linii 3, 4, 5 i 6 wykazuje mniejsze odchylenie od teoretycznych w porównaniu z liniami 1, 2. Odstępstwa te są powodowane nie uwzględnionym w obli-



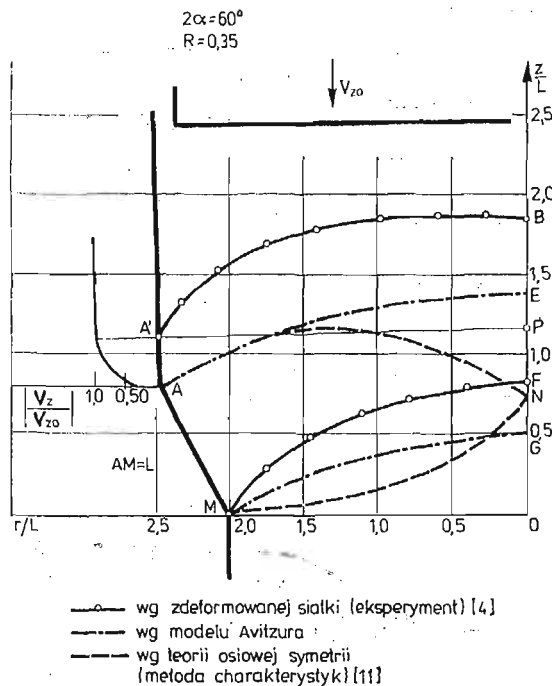
Rys. 2.



Rys. 3.

zeniach wzmocnieniem materiału; które hamuje rozwijanie się odkształceń plastycznych, szczególnie w obszarach z rosnącymi gradientami prędkości. Ilustruje to rys. 3, na którym pokazano doświadczalne (linie ciągłe) i obliczeniowe [11] (linie przerywane) przebiegi równych stosunków modułów prędkości na liniach prądu do prędkości stempla  $|V|/|V_{z0}|$ . Największe gradienty prędkości doświadczalnych występują w otoczeniu linii prądu [3, 4 i 6]. W przeciwieństwie do teorii w doświadczeniu nie występuje przecinanie się linii z różnymi prędkościami w narożach matrycy i osi symetrii. Wydaje się, że decydującym czynnikiem limitującym te różnice jest udział sił tarcia, którego nie uwzględniono w pracy [11].

Na rys. 4 pokazano liniami ciągłymi położenie górnych i dolnych granic obszaru płynięcia plastycznego wyznaczonych doświadczalnie w punktach zakrzywienia linii prądu.



Rys. 4.

Granice te skonfrontowano z teoretycznymi [11] i dodatkowo na ich tle pokazano zasięg obszaru uplastycznionego uproszczonego, biegunowego modelu płynięcia przyjmowanego często do górnych oszacowań sił [3]. Wpływ tarcia uwidacznia się przesunięciem początku uplastycznienia od naroża  $A$  w kierunku  $A'$ . Stosunek bezwymiarowej prędkości  $|V_z|/|V_{z0}|$  zmienił się na powierzchni przylegania od 1 do 0,4. Linie doświadczalne  $A'B$  i  $MF$  są skierowane wypukłością w kierunku przeciwnym do kierunku wyciskania. Doświadczalny zasięg strefy deformacyjnej jest większy zarówno od obliczeniowego [11], jak i uproszczonego [3].



#### 4. Wnioski

1. Stwierdzono dobrą jakościową zgodność doświadczenia i teorii [11] w przebiegach linii prądu z obszaru uplastycznienia. Teoria daje więc możliwość przewidywania układu włókien w zdeformowanym materiale.

2. Znaczne różnice w prędkościach występujące pomiędzy teorią [11] i doświadczeniem lokalizują się w otoczeniu naroży matrycy i osi symetrii.

3. Rozbieżności między rozwiązaniem teoretycznym [11] i eksperymentem można głównie przypisać udziałowi wzmocnienia i tarcia. Szczególnie istotny jest wpływ tarcia na kinematykę procesu. Czynniki tych nie uwzględniono w obliczeniach.

4. Przedstawione porównania wskazują, że rozwiązania zagadnień osiowo-symetrycznych dla ośrodka sztywno-plastycznego bez wzmocnienia i bez tarcia możemy traktować jako dość zgrubne przybliżenie.

Uzyskanie rozwiązań mieszanych zagadnień brzegowych dla podstawowego układu równań jest bardzo trudne i w ogóle możliwe tylko przy bardzo silnych uproszczeniach.

#### Literatura

1. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.
2. L. M. KACHANOV, *Fundamentals of theory of plasticity*, Mir, 1974.
3. *Metal forming, interrelation between theory and practice*, Plenum Pres. London-New York 1971.
4. J. PIWNIK, *Metody obliczeń złożonych procesów obróbki plastycznej w świetle badań doświadczalnych*, Praca doktorska, IPPT PAN Warszawa 1979.
5. A. H. SHABAİK, S. KOBAYSHI, *Computer application to the viscoplasticity method*, Trans. ASME I. Eng. Ind. 89, ser. B, 2, 1967.
6. R. T. SHIELD, *On the plastic flow metals under conditions of axial symmetry*, Proc. Roy. Soc. 233A 1193, 1955.
7. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki*, PWN, Warszawa 1967.
8. E. G. THOMSEN, C. T. YANG, J. B. BIERBOWER, *An experimental investigation of the mechanics deformation of metals*, Univ. of California Publications in Engineering, 5, 4, 1954.
9. Ю. А. Аллошин, и інші, *Стандартные программы расчета процессов пластической деформации на Е. В. М.*, Кузн. Штам. Произ., 6, 1971.
10. Г. Д. Дель, *Определение напряжений в пластической области по распределению твердости*, Москва: Машиностроение, 1971.
11. Р. И. Непершин, *Осесимметричное прессование с малыми и большими обжатиями*, сб. „Расчеты процессов пластического течения металлов”, Наука, 1973.
12. В. В. Соколовский, *Теория пластичности*, Москва: В. Ш. 1969.

#### Резюме

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КИНЕМАТИКИ ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНОМ ПРЕССОВАНИИ

В этой работе приводится сравнение теоретического и экспериментального решения для скорости и линий тока при осесимметричном прессовании через коническую матрицу с обжатием  $R=0,35$ . Теоретическое решение выполнено в работе II на основе осесимметричного жесткопластичного тела при условии пластичности треска. Экспериментальное поле скоростей определялось методом визиопластичности. Образцы изготовляли из сплава на основе системы. Распределение

теоретических и экспериментальных полей скорости и линий тока приводит к разнице в окрестностях оси симметрии и угловой точки профиля матрицы.

Считается, что погрешности теории связаны с влиянием трения и упрочнения, которых то факторов невозможно точно учитывать в решении [11].

### Summary

#### EXPERIMENTAL ANALYSIS OF THE KINEMATICS OF EXTRUSION PROCESS

The paper is devoted to the experimental verification of the solution of axially symmetric problem with mixed boundary conditions which was obtained in the framework of the plastic flow theory by using the method of characteristics [11]. Theoretical and experimental course of the stream lines, velocities and range of the plastic regions has been compared for axially symmetric extrusion of divided billets made of aluminium alloy PA2.

It was shown that there is good qualitative agreement of the stream lines and essential differences of velocities in the corners of die and near the axis of symmetry. Divergences of shapes of plastic regions were also shown.

The differences between results of theory and experiments were caused by the effects of workhardening of the material and friction which were not been taken into account in the paper [11].

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lutego 1984 roku*

## PROBLEMY OPTIMALNEGO KSZTAŁTOWANIA WSPORNIKOWEJ BELKI LEPKOPLASTYCZNEJ PRZY OBCIĄŻENIU QUASI-STATYCZNYM

EDWARD CEGIELSKI (KRAKÓW)

*Politechnika Krakowska*

### 1. Uwagi wstępne

Nagle i krótkotrwałe obciążenia powodują na ogół przekroczenie nośności sprężyste elementów maszyn, co dla wielu powszechnie stosowanych materiałów konstrukcyjnych jest przyczyną pojawienia się odkształceń lepkoplastycznych. Takie obciążenia stają się także często przyczyną zniszczenia przeciążonego elementu. Optymalizacja konstrukcji lepkoplastycznych jest jednak tematyką mało rozebraną w literaturze światowej. Powodem tego są poważne trudności związane zarówno z formułowaniem równań konstytutywnych, jak też skomplikowany lub częściowej nieznany charakter obciążenia impulsowego.

Jednymi z pierwszych prac z zakresu optymalizacji belek plastycznych poddanych działaniu obciążeń impulsowych są opracowania Ja. Lellepa i Ju. Lepika, omówione szeroko w pracy przeglądowej [5]. Stosowane przez autorów prawa fizyczne nie obejmują jednak własności lepkich, co w praktyce może dawać rozwiązania obarczone znacznymi błędami ilościowymi i jakościowymi. Wrażliwość materiału na prędkość odkształceń uwzględnił Ju. Lepik i Z. Mróz [6, 7]: materiał optymalizowanych belek opisywano prostym równaniem nieliniowego tłumika

$$\dot{\epsilon} = D_0 \sigma^p, \quad (1.1)$$

gdzie  $D_0$  i  $p$  oznaczają stałe materiałowe. Autorzy wszystkich wymienionych prac uwzględniali też bezwładność belek, stosując przy tym przybliżoną metodę analizy modalnej, co znacznie upraszcza poszukiwanie odpowiednich rozwiązań.

Najczęściej stosowanym obciążeniem był modalny „prostokątny” (schodkowy) impuls sił zewnętrznych. Krótkotrwałe obciążenia rzeczywistych konstrukcji bardzo rzadko dają się opisać tego typu aproksymacją, jednak zastosowanie innych programów obciążeń wiąże się na ogół z dodatkowymi trudnościami.

Prawo (1.1) bywa stosowane również do opisu własności materiałów lepkoplastycznych; taki opis konieczny jest często w tych przypadkach, gdy rozgraniczenie procesów czynnych i biernych może uniemożliwiać dochodzenie do rozwiązań ścisłych. Pewną metodę wyznaczenia współczynników  $D_0$  oraz  $p$  podaje P. Symonds [9].

Celem prezentowanej pracy było zbadanie wpływu wielu różnych czynników na proces optymalizacji rozważanej belki. Określano między innymi wpływ parametrów definiujących potęgową funkcję nadwyżkową w równaniu fizycznym, a także wpływ nieliniowości

i asymetrii zdefiniowanego później programu obciążenia  $\theta = \theta(t)$ . Rozważono przy tym dwa różne kryteria optymalizacji w ujęciu dualnym. Liczne trudności związane z optymalizacją konstrukcji lepkoplastycznych podyktowane mogą być także niedostateczną zgodnością istniejących propozycji opisu prawa fizycznego z odpowiednimi wynikami badań doświadczalnych. Z tych względów pożądanym jest zbadanie, jak wpływa przyjęta aproksymacja równania konstytutywnego na wynik optymalizacji.

Zastosowanie ścisłego równania fizycznego (niejednorodnego) materiału sprężysto-lepkoplastycznego zamiast jednorodnego prawa (1.1) oraz poszukiwanie ścisłych, a nie modalnych form deformacji komplikuje znacznie postawiony problem. Z tych względów w dalszej części pracy przyjęto liczne założenia upraszczające. Przede wszystkim ograniczono się do analizy izostatycznej belki w jednoosiowym stanie naprężenia; w ten sposób uniknięto trudności związanych ze złożoną formą i słabszą weryfikacją doświadczalną równań konstytutywnych w przypadku ogólnym. Pominięto także oddziaływanie sił masowych, rozważając jedynie procesy quasi-statyczne. Założenia te ograniczają wprawdzie poważnie klasę analizowanych problemów, jednak tak proste ujęcie umożliwia znalezienie wielu efektywnych rozwiązań ścisłych przy zastosowaniu klasycznych metod rachunku wariacyjnego.

## 2. Sformułowanie problemu

W pracy rozważono jedynie optymalizację kształtu wspornikowej, idealnie dwuteowej belki poddanej działaniu zmiennego w czasie obciążenia zewnętrznego. Zakłada się przy tym, że obciążenie zmienia się na tyle powoli, iż słuszne jest podejście quasi-statyczne; w szczególności założenie to obejmuje obciążenia długotrwałe. Równoległe prowadzone są prace w zakresie numerycznej optymalizacji konstrukcji lepkoplastycznych przy obciążeniu dynamicznym [2, 3, 4].

Zadanie rozwiązano w następującym sformułowaniu:

- a) kryterium optymalizacji: minimum objętości,
- b) ograniczenia:
  - 1) typu energetycznego — zadana całkowita energia rozproszona,
  - 2) typu sztywnościowego — zadane przemieszczenie maksymalne,
- c) ujęcie: dualne — minimalizacji podlega ograniczenie przy ustalonej objętości,
- d) zmienna decyzyjna: funkcja przekroju  $A(X)$ ; np. szerokość  $B(X)$  przy stałej grubości pólki  $H_0$  (rys. 1),
- e) równanie stanu: addytywne równanie materiału sprężysto-lepkoplastycznego (P. Perzyna [8]) o potęgowej funkcji nadwyżkowej, które dla dodatnich naprężeń zapiszemy w postaci

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left\langle D \left( \frac{\dot{\sigma}}{\sigma_0} - 1 \right)^p \right\rangle \quad (2.1)$$

gdzie symbol  $\langle f \rangle$  oznacza  $\langle f \rangle = 0$  dla  $\sigma \leq \sigma_0$  oraz  $\langle f \rangle = f$  dla  $\sigma > \sigma_0$ .

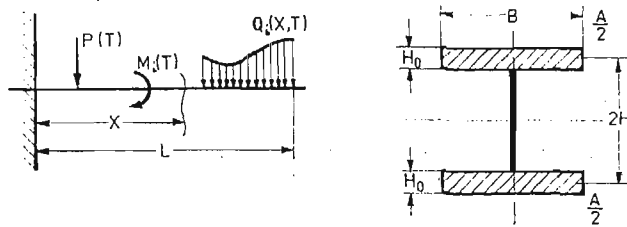
Inne możliwe kryteria optymalizacji lepkoplastycznych elementów konstrukcyjnych omówił M. Życzkowski [10]; podział i systematyzację odpowiednich kryteriów autor rozważył w wygodniejszym ujęciu dualnym.

Proces obciążania i odciążania opisywano modalnym programem działających sił zewnętrznych [5]

$$P(X, T) = P_1(X)P_2(T), \tag{2.2}$$

gdzie:  $P_1(X)$  — funkcja opisująca przestrzenny rozkład obciążeń,  $P_2(T)$  — dowolna funkcja czasu nazwana dalej „programem obciążenia”. Pomijając siły masowe oraz mając na uwadze jedynie belki statycznie wyznaczalne, całkowity moment zginający w przekroju belki zapisać można wtedy w postaci:

$$M(X, T) = M_0(X)\theta(T), \tag{2.3}$$



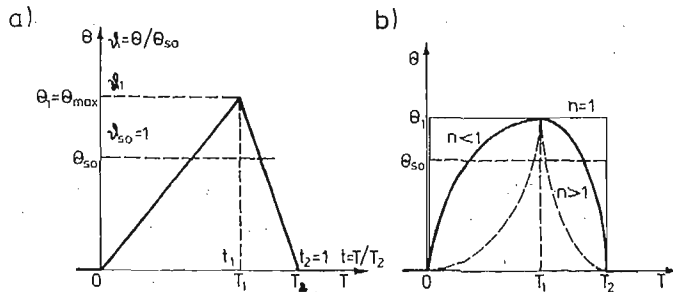
Rys. 1.

gdzie  $\theta(T) = P_2(T)$ . Dalej przyjmować będziemy, iż funkcja  $M_0(X)$  jest dodatnia na całej długości rozważanej belki; w takim przypadku maksymalne ugięcie resztkowe wystąpi zawsze na końcu belki.

Funkcję czasu  $\theta(T)$  opisywano zależnością potęgową

$$\theta(T) = \begin{cases} \theta_1 \left( \frac{T}{T_1} \right)^n & \text{dla } 0 \leq T \leq T_1 \\ \theta_1 \left( \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} \right)^n & \text{dla } T_1 \leq T \leq T_2 \\ 0 & \text{dla } T < 0 \text{ lub } T > T_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

gdzie  $n$  — dowolny dodatni wykładnik potęgowy. Parametry  $\theta_1$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  opisujące funkcję  $\theta(T)$  zaznaczono na rys. 2, na którym przedstawiono przebiegi tej funkcji dla różnych wartości wykładnika  $n$ .



Rys. 2.

Wielkości bezwymiarowe wprowadzimy następująco:

$$x = \frac{X}{L} \quad t = \frac{T}{T_2} \text{--- zmienne niezależne,} \quad (2.5)$$

$$s = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad k = KL, \quad w = \frac{W}{L} \text{--- zmienne stanu,}$$

$$a = \frac{A}{A_{s0}} \text{--- zmienna sterowania,}$$

$$m = \frac{M}{M_{s0}}, \quad m_0 = \frac{\theta_{s0} M_0}{M_{s0}}, \quad \vartheta = \frac{\theta}{\theta_{s0}} \text{--- funkcja momentu zginającego oraz jej funkcje składowe,}$$

$$h = \frac{H}{L} \text{--- stała wysokość belki,}$$

gdzie

$L$  — całkowita długość belki,

$K = K(X, T)$  — krzywizna osi obojętnej,

$W = W(X, T)$  — przemieszczenie pionowe,

$A = A(X)$  — przekrój poprzeczny,

$A_{s0} = A_s(0)$  — przekrój belki równomiernej wytrzymałości (o zadanej objętości) w miejscu utwierdzenia,

$M_{s0} = M_s(0) = \sigma_0 A_{s0} H$  — moment zginający odpowiadający nośności sprężystej przekroju belki równomiernej wytrzymałości w miejscu utwierdzenia,

$\theta_{s0}$  — wartość funkcji czasu  $\theta(T)$  odpowiadająca pierwszemu uplastycznieniu belki równomiernej wytrzymałości.

Belką równomiernej wytrzymałości nazwano tu umownie kształt belki równomiernej wytrzymałości w zakresie sprężystym, natomiast indeksem „s” oznaczono wielkości zdefiniowane dla takiej właśnie belki.

W dalszych obliczeniach ograniczono się do rozważania małych przemieszczeń i odkształceń; zakładano także słuszność hipotezy płaskich przekrojów oraz analizowano edynie przypadek belki statycznie wyznaczalnej (wspornikowej).

### 3. Podstawowe równania

Przy założeniu ustalonej wysokości belki  $h(x) = \text{const}$  naprężenia w jej półkach nośnych można określić prostym wzorem

$$s(x, t) = \frac{m(x, t)}{a(x)}. \quad (3.1)$$

W celu ułatwienia dalszych przekształceń wygodnie jest obliczyć maksymalne naprężenie (3.1) względem czasu  $t$ . Oznaczając  $\max s(x) = s_{\max}(x)$  będziemy mieli

$$s_{\max}(x) = \frac{\vartheta_1 m_0(x)}{a(x)}, \quad (3.2)$$

gdzie  $\vartheta_1 = \vartheta_{\max}$  — maksymalna wartość bezwymiarowej funkcji czasu  $\vartheta(t)$  (rys. 2). Z powyższego związku wynika prosta zależność:

$$a_s(x) = m_0(x), \quad (3.3)$$

gdzie przez  $a_s$  oznaczono bezwymiarową funkcję przekroju belki równomiernej wytrzymałości.

Uwzględniając przyjęty układ wielkości bezwymiarowych (2.5) oraz dodatkowo zależność (3.3), warunek stałej objętości zapiszemy w postaci

$$\int_0^1 a(x) dx = \int_0^1 m_0(x) dx. \quad (3.4)$$

Funkcję ugięcia belki wspornikowej  $w = w(x, t)$  wyrazimy całką

$$w(x, t) = \int_0^x dz \int_0^z k(y, t) dy = \int_0^x k(y, t) (x-y) dy, \quad (3.5)$$

gdzie  $k(x, t)$  jest krzywizną dającą się wyrazić jednorodną zależnością na całej długości belki  $0 \leq x \leq 1$ .

W najbardziej ogólnym przypadku deformacji belki należy uwzględnić na przemian występujące strefy, w których krzywizna  $k(x, t)$  opisywana będzie różnymi wzorami (np. strefy odkształceń sprężystych, plastycznych, resztkowych) i wtedy

$$w_j(x, t) = \sum_{i=0}^j \int_{x_{i-1}}^{x_i} k_i(y, t) (x-y) dy, \quad (3.6)$$

gdzie

$j$  — numer kolejny rozważanej strefy licząc od strony utwierdzenia,

$x_j = x$  — współrzędna bieżąca w miejscu obliczanego przemieszczenia,

$x_0 = 0$ .

W przypadku zastosowania addytywnego prawa fizycznego (2.1) krzywiznę resztkową rozważanej belki izostatycznej  $k_r(x)$  obliczymy z całki

$$k_r(x) = \int_{t_a}^{t_b} \frac{\dot{\varepsilon}^{pp}(x, t)}{h} dt, \quad (3.7)$$

gdzie granice całkowania  $t_a$ ,  $t_b$  oznaczają odpowiednio czas rozpoczęcia i zakończenia procesu płynięcia w rozważanym przekroju. Znając program obciążenia wielkości te można obliczyć z warunku  $s(x) = 1$ , skąd

$$t_a(x) = t_1 \left[ \frac{a(x)}{\vartheta_1 m_0(x)} \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (3.8a)$$

$$t_b(x) = 1 - (1 - t_1) \left[ \frac{a(x)}{\vartheta_1 m_0(x)} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (3.8b)$$

#### 4. Warunek optymalności

Całkowitą energię rozproszoną lub przemieszczenie resztkowe końca belki można zapisać w postaci funkcjonału

$$J(x, a) = \int_0^1 \psi(x, a) dx, \quad (4.1)$$

gdzie dla bezwymiarowo określonej energii rozproszonej będzie

$$\psi = \int_{t_a}^{t_b} m(x, t) \frac{\dot{\epsilon}^{vp}(x, t)}{h} dt, \quad (4.2)$$

natomiast dla maksymalnego przemieszczenia resztkowego belki wspornikowej podstawiając do (3.6)  $x_j = 1$  mamy

$$\psi = k_r(x, a)(1-x), \quad (4.3)$$

gdzie  $k_r$  — krzywizna resztkowa (po czasie  $t \geq t_2$ ).

Określona przez (4.2) lub (4.3) funkcja  $\psi$  może być przedziałami równa zero lub większa od zera w zależności od tego, czy doszło do uplastycznienia w określonym przekroju, czy też nie.

W dowolnej strefie nieuplastycznionej ( $k_r \equiv 0$ ) maksymalne naprężenie  $s_{\max}(x)$  (3.2) musi być mniejsze lub równe granicy plastyczności. Najbardziej optymalny przekrój w takiej strefie otrzymamy, żądając, aby naprężenie to było jak największe, czyli aby spełniony był warunek  $s_{\max}(x) = 1$ , skąd

$$a = a_{opt}(x) = \vartheta_1 m_0(x). \quad (4.4)$$

Przekroje optymalne stref odkształconych plastycznie ( $k_r > 0$ ) obliczymy z równania Eulera-Lagrange'a przy warunku pobocznym (3.4). Wprowadzając mnożnik Lagrange'a  $\lambda$  otrzymujemy funkcjonał w postaci

$$J = \int_0^1 [\psi(x, a) + \lambda a] dx, \quad (4.5a)$$

lub z podziałem na strefy analogicznie do (3.6)

$$J = \sum_{i=1}^j \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\psi_i(x, a_i) + \lambda a_i] dx, \quad (4.5b)$$

gdzie  $x_0 = 0$ ,  $x_j = 1$ . W ogólnym przypadku jest to więc zagadnienie wariacyjne z ruchomymi końcami, przy czym należy pamiętać, że dla strefy nie odkształconej plastycznie przekrój optymalny określa (4.4), a krzywizna resztkowa takiej strefy  $k_r = 0$ . Rozpisując wariację funkcjonału (4.5b) otrzymamy  $j+1$  warunków transversalności, które należy spełnić dla każdej współrzędnej granicznej  $x_i$

$$\psi_i(x, a_i) + \lambda a_i = \psi_{i+1}(x, a_{i+1}) + \lambda a_{i+1} \quad \text{dla } x = x_i. \quad (4.6)$$

Zakładając dodatkowo ciągłość funkcji momentu zginającego  $m_0(x)$  można pokazać, że warunek (4.6) jest spełniony w przypadku ciągłości przekroju

$$a^-(x_i) = a^+(x_i). \quad (4.7)$$



Na przykładzie wykonanych w dalszej części pracy obliczeń pokażemy, iż funkcjonal (4.5b) uwzględniający podział belki na strefy odkształcone i nie odkształcone plastycznie należy rozważać jedynie w tym przypadku, gdy przy obliczeniach funkcji  $\psi$  nie narzucono dodatkowego ograniczenia w postaci

$$s_{\max}(x) \geq 1. \quad (4.8)$$

Warunek (4.8) może być nie spełniony np. w przypadku, gdy czasy graniczne  $t_a$  i  $t_b$ , (3.8), we wzorach (4.2) i (4.3) nie zostaną wyznaczone ze związku  $s = 1$ , lecz będą określone z innych zależności (np. przypadek prostokątnego programu obciążenia  $\theta(T)$  daje  $t_a = 0$ ,  $t_b = 1$ ).

Funkcjonał (4.5b) należy uzupełnić wtedy o dodatkowe ograniczenie (4.8). W pozostałych przypadkach można rozważać funkcjonal

$$J = \int_0^1 [\bar{\psi}(x, a) + \lambda a] dx, \quad (4.9)$$

gdzie  $\bar{\psi}(x, a)$  wyraża się jednorodną zależnością dla całego przedziału  $0 \leq x \leq 1$ .

## 5. Rozwiązania szczegółowe

**5.1. Minimalizacja całkowitej energii rozproszonej.** Poszukując kształtu optymalnego belki, dla którego energia dysypowana w trakcie płynięcia lepkoplastycznego przyjmuje wartość minimalną, założymy wstępnie, iż przyłożenie maksymalnego obciążenia spowoduje uplastycznienie całej belki, czyli że spełniony jest warunek (4.8) dla każdego  $0 \leq x \leq 1$ . Prawdziwość tego założenia można później łatwo sprawdzić dla rozwiązania optymalnego  $a = a_{\text{opt}}(x)$ .

Funkcję  $\psi$  we wzorze na energię rozproszoną (4.1) zapiszemy w postaci:

$$\psi(x, a) = \frac{m_0(x)}{h} \int_{t_a}^{t_b} \vartheta(t) \dot{\epsilon}^{vp} dt, \quad (5.1)$$

gdzie  $\dot{\epsilon}^{vp} = \dot{\epsilon}^{vp}(s-1)$  jest dowolną funkcją nadwyżkową prawa fizycznego (2.1). Granice całkowania  $t_a$  i  $t_b$ , (3.8), oraz naprężenie  $s(x, t)$ , (3.1), są funkcjami argumentu  $\frac{a(x)}{m_0(x)}$ , z czego wynika, że całkowanie (5.1) daje:

$$\psi(x, a) = m_0(x) \psi_0 \left( \frac{a}{m_0} \right). \quad (5.2)$$

Funkcjonał (4.9) można więc także uzależnić od argumentu  $\frac{a(x)}{m_0(x)}$

$$J = \int_0^1 m_0(x) \left[ \psi_0 \left( \frac{a}{m_0} \right) + \lambda \frac{a}{m_0} \right] dx. \quad (5.3)$$

Wprowadzając dodatkowo oznaczenie

$$\Xi = m_0(x) \left[ \psi_0 \left( \frac{a}{m_0} \right) + \lambda \frac{a}{m_0} \right], \quad (5.4)$$

równanie Eulera-Lagrange'a dla (5.3) zapiszemy w postaci

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \left( \frac{a}{m_0} \right)} \frac{\partial \left( \frac{a}{m_0} \right)}{\partial a} = 0. \quad (5.5)$$

Wykonując przepisane różniczkowanie otrzymujemy

$$\frac{a(x)}{m_0(x)} = c = \text{const}(x). \quad (5.6)$$

Jedyną funkcją  $a(x)$  spełniającą jednocześnie (5.6) oraz warunek stałej objętości (3.4) jest

$$a = a_{\text{opt}}(x) = m_0(x), \quad (5.7)$$

a więc funkcja opisująca kształt przekroju belki równomiernej wytrzymałości.

Belka równomiernej wytrzymałości (5.7) zostaje uplastyczniona zawsze jednocześnie na całej jej długości, niezależnie od postaci funkcji czasu  $\theta(t)$ , (2.4), z czego wynika, że warunek (4.8) jest spełniony dla każdego  $0 \leq x \leq 1$ .

**5.2. Minimalizacja maksymalnego przemieszczenia resztkowego.** Optymalnych funkcji kształtu  $a = a_{\text{opt}}(x)$  przy kryterium minimalnego przemieszczenia resztkowego końca belki poszukiwać będziemy dla trzech przypadków liniowości:

- 1) liniowy rozkład momentu  $M_0(X)$ , (2.3), odpowiadający obciążeniu belki dowolnie zmienną w czasie siłą skupioną:  $m_0 = 1-x$ ,
- 2) dwuliniowy („trójkątny”) program obciążenia  $\theta(T)$ , (2.4):  $n = 1$ ,
- 3) liniowa funkcja nadwyżkowa  $\varepsilon^{sp}$  w równaniu fizycznym (2.1):  $p = 1$ .

Przyjmując liniowość jednej z funkcji  $M_0(X)$ ,  $\theta(T)$  lub  $\varepsilon^{sp}(\sigma - \sigma_0)$  będziemy jednocześnie dopuszczać nieliniowość pozostałych funkcji opisujących postawiony problem.

**5.2.1. Obciążenie siłą skupioną: liniowa funkcja momentu  $M_0(X)$ .** Podobnie jak dla problemu minimalizacji całkowitej energii rozproszonej, założymy wstępnie, iż obciążenie belki maksymalną siłą skupioną spowoduje jej całkowite uplastycznienie. Krzywiznę resztkową (3.7) można zapisać jako funkcję argumentu  $\frac{a(x)}{m_0(x)}$ . Funkcjonał (4.9) uzależnimy również od tego argumentu. Równanie Eulera-Lagrange'a zapiszemy podobnie jak dla funkcji  $\mathcal{E}$ , (5.4), skąd:

$$(1-x) \frac{\partial \left[ k_r \left( \frac{a}{m_0} \right) \right]}{\partial \left( \frac{a}{m_0} \right)} + m_0 \lambda = 0. \quad (5.8)$$

Podstawiając do (5.8) moment  $m_0 = 1-x$  opisujący działanie siły skupionej otrzymujemy (5.6), czyli funkcję przekroju równomiernej wytrzymałości (5.7). Podobnie jak dla kryterium minimalnej energii rozproszonej, rozwiązanie optymalne w tym przypadku jest niezależne od postaci funkcji czasu  $\theta(T)$ , (2.4), oraz od prawa fizycznego (2.1).

**5.2.2. Dwuliniowy („trójkątny”) program obciążenia  $\theta(T)$ .** Rozważmy dwuliniowy niesymetryczny program obciążenia  $\theta(T)$ , (2.4), przy dowolnym rozkładzie momentu  $m_0(x)$  i potęgowym prawie fizycznym (2.1). Krzywizna resztkowa (3.7) wyraża się wtedy zależnością:

$$k_r = \frac{DT_2}{(p+1)h} \frac{a}{\vartheta_1 m_0} \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a} - 1 \right)^{p+1}. \quad (5.9)$$

Kształt optymalny funkcji  $a(x)$  wyznaczmy z równania Eulera-Lagrange'a zapisanego dla funkcjonału (4.9), skąd

$$\frac{1-x}{m_0} \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} - 1 \right)^p \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} + 1 \right) = \frac{\vartheta_1 (p+1)h}{DT_2} \lambda = \lambda_0. \quad (5.10)$$

Jak widać, rozwiązanie optymalne  $a_{\text{opt}}(x)$  zależy jedynie od wykładnika  $p$  w prawie fizycznym i nie zależy od lepkości materiału  $D$ . Rozwiązanie to jest także niezależne od asymetrii cyklu obciążenia ani od czasu trwania impulsu obciążenia  $t_2$ . Warto też dodać, że (5.10) łatwo daje się uogólnić na przypadek bardziej skomplikowanego prawa fizycznego zaproponowanego przez P. Perzynę [8]

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \sum_{i=1}^N D_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^i. \quad (5.11)$$

Przekrój optymalny  $a_{\text{opt}}(x)$  określony jest wtedy następująco:

$$\frac{1-x}{m_0} \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{i+1} \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} - 1 \right)^i \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} + 1 \right) = \frac{\vartheta_1 h}{T_2} \lambda = \lambda_1. \quad (5.12)$$

Mnożnik Lagrange'a  $\lambda$  występujący w rozwiązaniach (5.10), (5.12) należy wyznaczyć z warunku stałej objętości (3.4); w szczególnym przypadku  $\lambda = 0$  otrzymujemy zawsze (5.7), czyli kształt belki równomiernej wytrzymałości.

Przy większych obciążeniach, gdy  $\vartheta_1 > 1$ , mamy  $\lambda > 0$ . Przy nieujemnych wartościach mnożnika  $\lambda$  z równań (5.10), (5.12) wynika

$$s_{\text{max}}(x) = \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} > 1,$$

co oznacza, że warunek uplastycznienia belki (4.8) jest spełniony dla każdego  $0 \leq x \leq 1$ .

**5.2.3. Liniowe równanie fizyczne.** Wpływ nieliniowych funkcji czasu  $\theta(T)$  na rozwiązania optymalne  $a_{\text{opt}}(x)$  pokażemy dla różnych wykładników  $n$  potęgowej funkcji (2.4) oraz dla liniowości fizycznej prawa (2.1) ( $p = 1$ ). Odpowiednie podstawienia do wzoru na krzywiznę resztkową (3.11) dadzą

$$k_r = \frac{DT_2}{h} \left[ \vartheta_1 \frac{m_0}{a} \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \left( \vartheta_1 \frac{m_0}{a} \right)^{-\frac{1}{n}} - 1 \right], \quad (5.13)$$

natomiast z równania Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału (4.9) otrzymujemy

$$\frac{1-x}{m_0} \left( \vartheta_1 \frac{m_0}{a_{\text{opt}}} \right)^2 - \left( \vartheta_1 \frac{m_0}{a_{\text{opt}}} \right)^{1-\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)\vartheta_1 h}{DT_2} \lambda = \lambda_2. \quad (5.14)$$

Przy  $n > 0$  oraz  $\lambda > 0$  (5.14) daje zawsze

$$s_{\text{max}}(x) = \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} > 1,$$

co oznacza, iż belka zostaje uplastyczniona dla każdego  $0 \leq x \leq 1$ .

Przejścia graniczne  $n \rightarrow \infty$  oraz  $n \rightarrow 0$  nie wynikają wprost z rozwiązania (5.14) i dlatego wymagają osobnego omówienia.

Przypadek  $n \rightarrow \infty$  daje zawsze  $k_r = 0$  (5.13), i wtedy, dowolny rozkład przekroju wzdłuż osi belki jest optymalnym. Bardziej złożony jest przypadek „prostokątnego” programu obciążenia  $\theta(T)$ , a więc  $n = 0$ , (2.4). Z rozwiązania ogólnego (5.14) mamy wtedy

$$a_{\text{opt}}(x) = \lambda_3 \sqrt{m_0(x)(1-x)}, \quad (5.15)$$

gdzie  $\lambda_3 = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{\lambda_2}}$ .

Rozwiązanie (5.15) jest jednak błędne: z warunku stałej objętości (3.4) mamy  $\lambda_3 = \frac{2}{3} \vartheta_1$  z czego wynika, że dla  $\vartheta_1$  niewiele większego od jedności oraz dla dowolnie zmiennego momentu  $m_0(x)$  naprężenie maksymalne (3.2) może być mniejsze od granicy plastyczności. Z rozwiązania (5.15) nie otrzymujemy też ciągłego przejścia do funkcji równomiernej wytrzymałości (5.7) ( $\vartheta_1 = 1$ ).

Dokładniejsza analiza tego przypadku nasuwa wniosek, iż błędne rozwiązanie wynika z tego, że czasy graniczne  $t_a(x)$  i  $t_b(x)$  określone są tu początkiem i końcem samego impulsu:  $t_a = 0$ ,  $t_b = t_2 = 1$ , a nie zostały obliczone ze wzorów (3.8), jak to było dla poprzednio analizowanych zadań ( $n > 0$ ). Dlatego też przypadek obciążenia programem prostokątnym ( $n = 0$ ) należy rozważyć przy dodatkowym ograniczeniu (4.8). Zadanie to rozwiążemy znaną metodą Valentine’a, stosowaną często przy optymalizacji belek sprężystych z ograniczeniami na wielkość przekroju [1]. W tym celu wprowadzimy nieujemną funkcję  $e^2(x)$ , taką że

$$e^2(x) = s_{\text{max}}(x) - 1, \quad (5.16)$$

oraz dodatkowy mnożnik Lagrange’a  $\lambda_s = \lambda_s(x)$ , tak że funkcjonał (4.5) przyberze postać

$$J = \int_0^1 [(1-x)k_r + \lambda a + \lambda_s(e^2 - s_{\text{max}} + 1)] dx. \quad (5.17)$$

Obliczając wariację funkcjonału (5.17) ze względu na poszukiwaną funkcję przekroju  $a(x)$  oraz ze względu na niewiadomą  $e(x)$  otrzymujemy

$$\vartheta_1 \frac{(1-x)m_0}{a^2} + \lambda + \lambda_s(x) \frac{d}{da} (s_{\text{max}}) = 0, \quad (5.18)$$

$$2\lambda_s(x)e(x) = 0. \quad (5.19)$$

Równanie (5.19) prowadzi do dwóch przypadków:

- 1)  $e(x) = 0$  i wtedy z (5.16) otrzymujemy omówione już wcześniej rozwiązanie (4.4),
- 2)  $\lambda_s(x) = 0$ , i wówczas (5.18) daje

$$a_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\vartheta_1}{\lambda} m_0(x)(1-x)} = \lambda_4 \sqrt{m_0(x)(1-x)}. \quad (5.20)$$

Związek (5.20), który obowiązuje dla uplastycznionej części belki, ma wprawdzie identyczną postać jak błędny wynik (5.15), jednak mnożnik  $\lambda_4$  jest tutaj zależny od wartości

współrzędnej  $x_g$  rozgraniczającej odpowiednie strefy. Wyznaczając  $\lambda_4$  oraz  $x_g$  należy spełnić zarówno warunek stałej objętości, w którym uwzględniono rozwiązanie (4.4), jak również warunek transversalności (4.6), z którego wynika ciągłość przekroju na granicy odpowiednich rozwiązań (4.7)\*).

## 6. Przykłady

Zależności (5.10), (5.14) na funkcję opisującą przekrój optymalny belki otrzymano w postaci uwikłanej. Obliczenie efektywnej funkcji  $a_{opt}(x)$  dla dowolnych wykładników  $p$  oraz  $n$  może więc narażać poważne trudności, których nie da się pokonać bez pomocy maszyny cyfrowej. Wyjątek stanowi tu przypadek liniowości fizycznej ( $p = 1$ ) oraz dwuliniowy program obciążenia ( $n = 1$ ); wzory (5.10), (5.14) dają się wtedy sprowadzić do postaci, z której łatwo można określić funkcję optymalną przekroju dla dowolnego rozkładu momentu  $m_0(x)$ :

$$a_{opt}(x) = \vartheta_1 m_0(x) \sqrt{\frac{1-x}{\lambda_0 m_0(x) + 1-x}}, \quad (6.1)$$

gdzie  $\lambda_0$  należy wyznaczyć z warunku stałej objętości (3.4). Wykorzystując (6.1), obliczymy przykładowo  $\lambda_0$  oraz odpowiednie funkcje resztkowego przemieszczenia końca belki dla typowych przypadków obciążenia: siły skupionej, obciążenia ciągłego równomiernego i momentu skupionego. Czwarty i ostatni przykład ilustruje metodę postępowania przy określaniu optymalnej funkcji przekroju dla „prostokątnej” funkcji czasu  $\theta(T)$ , (2.4).

a) Obciążenie siłą skupioną:  $m_0 = 1-x$

$$a_{opt} = 1-x, \quad (6.2)$$

$$w_{opt} = w_s = \frac{DT_2}{h} \frac{(\vartheta_1 - 1)^2}{4\vartheta_1}, \quad (6.3)$$

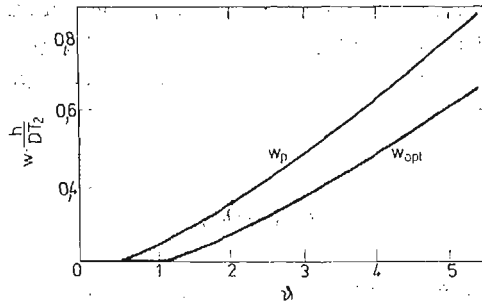
$$w_p = \frac{DT_2}{h} \frac{(\vartheta_1 - 1)^3}{24\vartheta_1^2}, \quad (6.4)$$

gdzie  $w_{opt}$ ,  $w_s$ ,  $w_p$  oznaczają odpowiednio przemieszczenia resztkowe końca belki optymalnej, równomiernej wytrzymałości i przyrmatycznej. Jak już wcześniej wspomniano, belka optymalna, przy jej obciążeniu siłą skupioną, jest belką równomiernej wytrzymałości, a więc funkcja optymalna  $a_{opt}(x)$  nie zależy od maksymalnej wartości impulsu obciążenia  $\vartheta_1$ ; od współczynnika  $\vartheta_1$  zależy jednak różnica pomiędzy maksymalnym ugięciem belki optymalnej i przyrmatycznej, co pokazano na rys. 3.

b) Obciążenie ciągle równomierne:  $m_0 = (1-x)^2$ ,

$$a_{opt} = \frac{\vartheta_1(1-x)^2}{\sqrt{\lambda_0(1-x)+1}}, \quad (6.5)$$

\* ) Bardziej szczegółową dyskusję obciążenia belki impulsem prostokątnym zawiera praca doktorska E. Cegielskiego pt.: Optymalizacja konstrukcji lepkoplastycznych, Politechnika Krakowska 1981.



Rys. 3.

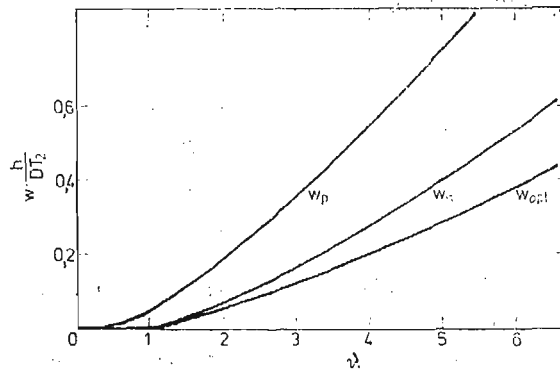
$$\vartheta_1 = \frac{5\lambda_0^3}{2[3(\lambda_0+1)^2 - 10(\lambda_0+1) + 15]\sqrt{\lambda_0+1} - 16}, \quad (6.6)$$

$$w_{opt} = \frac{DT_2}{h} \frac{1}{2\lambda_0^2} \left[ \frac{2}{5} (\lambda_0+1)^{5/2} - 2\sqrt{\lambda_0+1} - \lambda_0^2 + \frac{8}{5} \right], \quad (6.7)$$

$$w_s = \frac{DT_2}{h} \frac{(\vartheta_1 - 1)^2}{4\vartheta_1}, \quad (6.8)$$

$$w_p = \frac{DT_2}{h} \frac{1}{2\vartheta_1} \left( \frac{3}{4} \vartheta_1^2 - \vartheta_1 + \frac{1}{6} \ln 3\vartheta_1 + \frac{1}{4} \right). \quad (6.9)$$

Na rys. 4 przedstawiono odpowiednie funkcje maksymalnego ugięcia resztkowego belki przyzmatycznej (6.9), równomiernej wytrzymałości (6.8) i optymalnej (6.7) w zależności

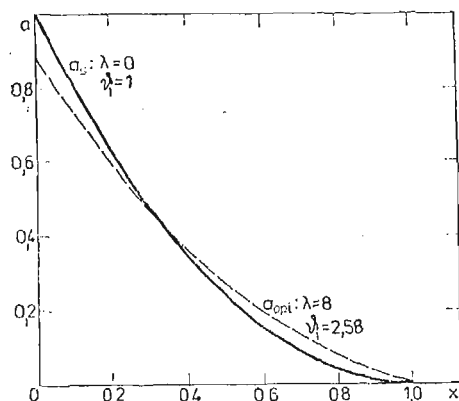


Rys. 4.

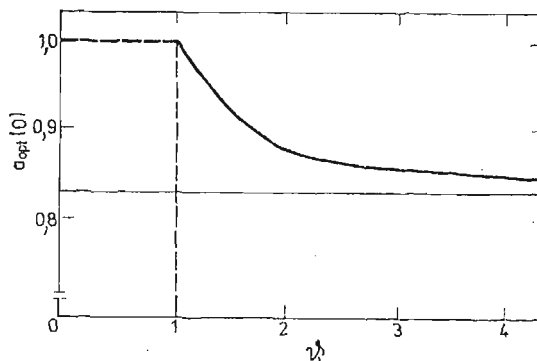
od parametru  $\vartheta_1$ . Kolejny rysunek, nr 5, przedstawia funkcję przekroju  $a(x)$  belki równomiernej wytrzymałości oraz optymalnej dla  $\vartheta_1 = 2,58$  ( $\lambda_0 = 8$ ), a na rysunku 6 pokazano zależność wielkości przekroju belki optymalnej w miejscu utwierdzenia od współczynnika  $\vartheta_1$ .

c) Obciążenie momentem skupionym:  $m_0 = 1$ ,

$$a_{opt} = \vartheta_1 \sqrt{\frac{1-x}{\lambda_0+1-x}}, \quad (6.10)$$



Rys. 5.



Rys. 6.

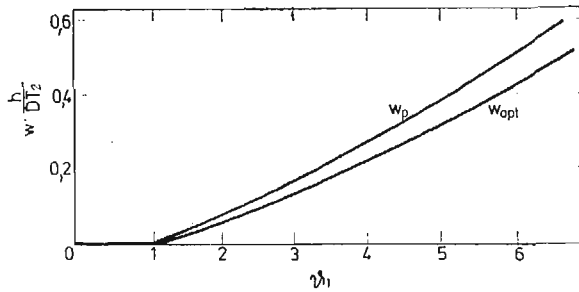
$$\vartheta_1 = \left( \sqrt{\lambda_0 + 1} - \frac{\lambda_0}{2} \ln \frac{2 + \lambda_0 - 2\sqrt{\lambda_0 + 1}}{\lambda_0} \right)^{-1}, \quad (6.11)$$

$$w_{opt} = \frac{DT_2}{h} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_0}{2} \right) \sqrt{\lambda_0 + 1} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda_0^2}{8} \ln \frac{(\sqrt{\lambda_0 + 1} + 1)^3}{\lambda_0 (2\sqrt{\lambda_0 + 1} + \lambda_0 + 2)^{1/2}} \right], \quad (6.12)$$

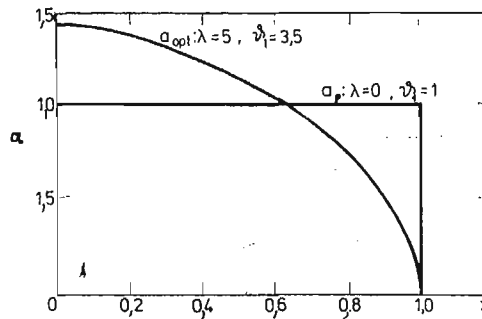
$$w_s = w_p = \frac{DT_2}{h} \frac{(\vartheta_1 - 1)^2}{4\vartheta_1}. \quad (6.13)$$

Zależność przemieszczenia resztkowego końca belki pryzmatycznej i optymalnej od maksymalnej wartości parametru  $\vartheta_1$  przedstawiono na rys. 7. Rysunek 8 przedstawia kształt optymalnej funkcji przekroju  $a_{opt}(x)$  dla wartości  $\vartheta_1 = 3,5$  ( $\lambda_0 = 5$ ). Jak widać, przekrój optymalny jest równy zero w miejscu działania momentu skupionego, z czego wynika, że płynięcie plastyczne zostanie wywołane w tym przekroju natychmiast po przyłożeniu obciążenia, podczas gdy dla belki pryzmatycznej (równomiernej wytrzymałości) pierwsze odkształcenia plastyczne pojawią się jednocześnie w całej belce po pewnym czasie  $t_1 = 0$ .

d) Obciążenie momentem skupionym o stałej wartości  $m(x, t) = \vartheta_1$  przyłożonym nagle w przedziale czasu  $0 \leq t \leq t_2$  ( $n = 0$ ).



Rys. 7.



Rys. 8.

$$a_{opt}(x) = \begin{cases} \vartheta_1 & \text{dla } 0 \leq x \leq x_g, \\ \lambda_{II} \sqrt{1-x} & \text{dla } x_g \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (6.14)$$

$$\lambda_{II} = \frac{3}{2} \frac{1 - \vartheta_1 x_g}{(1 - x_g)^{3/2}}, \quad (6.15)$$

$$w_{opt} = \frac{DT_2}{h} (1 - x_g)^2 \left( \frac{2}{3} \frac{\vartheta_1}{\lambda_{II}} \sqrt{1 - x_g} - \frac{1}{2} \right), \quad (6.16)$$

$$w_p = \frac{1}{2} \frac{DT_2}{h} (\vartheta_1 - 1), \quad (6.17)$$

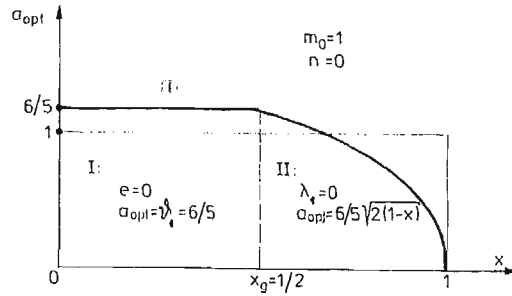
gdzie

$$x_g = \begin{cases} \frac{3 - 2\vartheta_1}{\vartheta_1} & \text{dla } 1 \leq \vartheta_1 \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{dla } \vartheta_1 \geq \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (6.18)$$

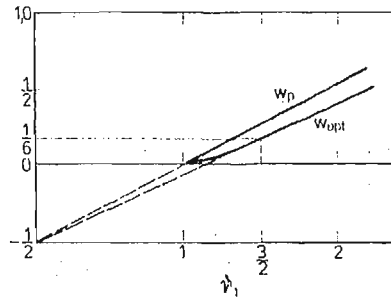
oznacza granicę pomiędzy poszczególnymi strefami.

Przykład przekroju optymalnego dla  $\vartheta_1 = \frac{6}{5}$  przedstawiono na rysunku 9, natomiast odpowiednie funkcje przemieszczenia reszkowego końca belki przyzmatycznej (równomiernej wytrzymałości) i optymalnej przedstawiono graficznie na rysunku 10.





Rys. 9.



Rys. 10.

## 7. Wnioski końcowe

Otrzymane w prezentowanej pracy rozwiązania optymalne nasuwają szereg wniosków, spośród których najważniejsze są następujące:

1) optymalna funkcja kształtu dla liniowej funkcji momentu zginającego  $m_0(x) = 1 - x$  jest niezależna od przyjętego kryterium optymalizacji (w ujęciu dualnym);

2) przy minimalizacji energii rozproszonej rozwiązanie optymalne (kształt równomiernej wytrzymałości) jest niezależne od postaci równania fizycznego (2.1) i funkcji impulsu obciążenia  $\theta(T)$ ;

3) jeśli minimalizowane jest przemieszczenie resztkowe końca belki, wtedy:

a) wszystkie rozwiązania optymalne z wyjątkiem obciążenia siłą skupioną zależą wyraźnie od postaci równania fizycznego (2.1) oraz funkcji czasu  $\theta(T)$ ,

b) wszystkie rozwiązania nie zależą od czasu trwania impulsu obciążenia  $T_2$  ani od asymetrii tego impulsu,

c) nieliniowe równanie fizyczne (2.1) wpływa na kształt optymalny głównie przez wykładnik potęgowy  $p$ ; lepkość  $D$  nie ma prawie żadnego wpływu na odpowiednie rozwiązania (od lepkości zależą jedynie przemieszczenia resztkowe),

d) dla dwuliniowego impulsu obciążenia można otrzymać odpowiednie rozwiązanie dla dowolnego addytywnego równania fizycznego przy założeniu, że prędkość odkształcenia lepkoelastycznego  $\dot{\epsilon}^{vp}$  daje się aproksymować szeregiem potęgowym (5.11),

e) bezpośrednio przejście od rozwiązania dla potęgowej funkcji czasu  $\theta(T)$  ( $n \neq 0$ ) do programu prostokątnego ( $n = 0$ ) nie istnieje: w celu otrzymania właściwego rozwiązania należy wprowadzić dodatkowy warunek ograniczający:

$$s_{\max}(x) \geq 1.$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiału o nieliniowości fizycznej*, Zeszyty Naukowe Polit. Krak. nr 5, 1975.
2. E. CEGIELSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Parametric optimization of viscoplastic bars under dynamic axial bending*, Rozpr. Inż. 1, 29 27 - 37, 1981.
3. E. CEGIELSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimization of some viscoplastic structures under variable loads*, in: Proc. Euromech, Coll. 174 on Inelastic Structures Under Variable Loadings, Palermo 1983.
4. E. CEGIELSKI, *Optimization of rigid visco-plastic bars and beams under dynamic loadings*, Proc. of Fourth Congress BAN, Varna 1981.
5. J. LELLEP, JU. LEPIK, *Analytical methods in plastic structural design*, Eng. Optimization, 7, 209 - 239, 1984.
6. JU. LEPIK, *Optymalnoje projektowanie nieuprugiach balok s dopolnitielnymi podporami w sluczaje dynamiczeskogo nagruzenia*, UZTGU, 430, 132 - 143, 1970.
7. Z. MRÓZ, JU. LEPIK, *Optymalnoje projektowanie konstrukcji pri impulsivnom nagruzenii*. Mech. Polim. 6, 1021 - 1028, 1977.
8. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*. PWN, Warszawa 1966.
9. P. SYMONDS, *Dynamika nieuprugiach konstrukcji — zbornik statiej*, Mechanika, 29, Moskwa 1982.
10. M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal structural design in rheology*, J. Appl. Mech., 3, 38, 39 - 46, 1971.

#### Резюме

#### ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ФОРМИРОВАНИЯ КРОНШТЕЙНОВОЙ ВЯЗКО ПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКИ ПОДВЕРГНУТОЙ ДЕЙСТВИЮ КВАЗИ-СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

В работе рассматривается оптимизация кронштейновой балки идеально двухфазовой, подвергнутой действию пропорционально переменной внешней нагрузки  $P(X, T) = P_1(X)P_2(T)$  где  $P_1(X)$  является произвольной функцией описывающей пространственное распределение нагрузки,  $P_2(T)$  — является степенной функцией времени. Искомая функция поперечного сечения  $A = A_{\text{опт}}(X)$  обеспечивает минимум рассеяной энергии или минимум максимального перемещения, при предположении постоянного объема. Анализировалось влияние коэффициентов степенного закона упруго вязкопластического материала и влияние формы квази-статической программы нагрузки  $P_2 = P_2(T)$  на вид решения.

#### Summary

#### SOME PROBLEMS OF OPTIMAL SHAPE-DESIGN OF VISCOPLASTIC CANTILEVER BEAM UNDER QUASI-STATIC LOADING

The paper is devoted to the shape optimization of cantilever I beam under proportional external loading  $P(X, T) = P_1(X)P_2(T)$  where  $P_1(X)$  denotes arbitrary function of spatial variable,  $P_2(T)$  — power function of time. Under the assumption of constant volume and criterion of minimum residual deflection of the free end or minimum of total dissipated energy, the function of cross section  $A = A_{\text{opt}}(X)$  is sought. The analytical solution is given for linear and nonlinear law of elastic viscoplastic material; the influence of the form of quasi-static loading program  $P_2(T)$  on the optimal function  $A_{\text{opt}}$  is described.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 marca 1984 roku

## PLASKI ROZLOT PRODUKTÓW DETONACJI ZE SKOKOWO ZMIENNYM WYKŁADNIKIEM IZENTROPY

EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

WAT

### 1. Wstęp

Problem rozlotu produktów detonacji (PD) był badany przez wielu autorów [1 - 6]. Omawiany jest również w licznych monografiach poświęconych fizyce wybuchu [7 - 17]. Ostatnio nabrał on szczególnego znaczenia w badaniach nad kompresją ośrodków ciągłych do stanów ekstremalnych. W tym przypadku chodzi o napędzanie do dużej prędkości, rzędu kilkunastu i więcej km/s, powłok lub płytek (linerów) [18 - 24] za pomocą materiałów wybuchowych (MW).

Poza tym, przy urabianiu kopalin cylindrycznymi ładunkami wybuchowymi, górne segmenty otworów wypełnia się obojętymi materiałami inercyjnymi, które tworzą tzw. przybitkę. Produkty detonacji w procesie rozprężania się są hamowane przez nią, co ma istotny wpływ na rozkład parametrów stanu i ruchu produktów wybuchu w otworze strzelniczym, a w konsekwencji — na masę urabianej skały. Zagadnienia te były badane w pracach [25 - 28].

W cytowanych publikacjach problem swobodnego i hamowanego rozlotu PD badano przy założeniu, że rozprężają się one analogicznie jak gaz idealny. Do opisu zjawisk zachodzących za frontem detonacji stosowano izentropę Poissona ze stałym wykładnikiem, tj.

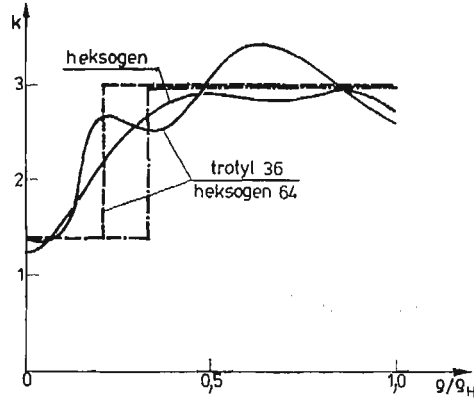
$$p = p_H \left( \frac{\rho}{\rho_H} \right)^{k_H}; \quad k_H = k = \text{const} \quad (1.1)$$

gdzie  $p_H$  i  $\rho_H$  oraz  $k_H$  są odpowiednio wartościami ciśnienia i gęstości oraz wykładnika izentropy w punkcie Jougueta, natomiast  $p$  i  $\rho$  oznaczają odpowiednio ciśnienie i gęstość PD w strefie rozrzedzenia.

Aproksymacja procesu rozprężania się PD równaniem Poissona (1.1) pozwoliła skonstruować zamknięte rozwiązanie wielu zagadnień granicznych gazodynamiki wybuchu. Jest to zaleta tego modelu. Natomiast jego wadą jest duża rozbieżność, szczególnie w końcowej fazie procesu rozprężania się PD, między równaniem (1.1) a eksperymentalnymi izentropami PD. Wynika to z faktu, że w rzeczywistym procesie rozprężania się PD wykładnik izentropy jest funkcją gęstości. W zależności od rodzaju MW może zmieniać się

w przedziale  $1 < k < 3,5$ . Przykładowe zmiany wykładnika izentropy  $PD$  dla heksogenu oraz dla mieszaniny trotyl /heksogen 36/ 64 pokazujemy na rys. 1 (linie ciągłe). Z wykresów tych wynika wniosek, że aproksymacja procesu rozprężania  $PD$  równaniem Poissona obarczona jest dużym błędem.

Można go częściowo zredukować, aproksymując doświadczalną izentropę  $PD$  krzywą złożoną z dwóch segmentów opisanych równaniami typu (1.1). Wykładnik  $k$  w równaniu (1.1), przy przejściu z jednego segmentu na drugi, zmienia się w sposób skokowy (linie



Rys. 1.

przerywane na rys. 1). Konsekwencją tego faktu jest skokowa zmiana prędkości dźwięku na styku dwóch segmentów, natomiast ciśnienie, gęstość i prędkość przepływu  $PD$  zachowują ciągłość.

Mimo skokowej zmiany prędkości propagacji zaburzeń taka aproksymacja dość dobrze przybliży rzeczywistość oraz umożliwi konstrukcję zamkniętych rozwiązań zagadnień dynamicznych fizyki wybuchu. Mając to na uwadze, zastosujemy dwusegmentowy model krzywej  $p-\rho$  do opisu procesu rozprężania się  $PD$  za frontem detonacji  $MW$ . W rozważaniach uwzględniamy oddziaływanie atmosfery na ruch produktów detonacji.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. We wstępie dokonujemy krótkiego przeglądu literatury oraz omawiamy dwa równania izentrop  $PD$ . W rozdziale drugim kompletujemy równania opisujące ruch  $PD$  za frontem detonacji, a w trzecim rozwiązujemy badany problem dla izentropy Poissona ze stałym wykładnikiem  $k$ . Rozdział czwarty zawiera rozwiązanie dla izentropy dwusegmentowej ze skokową zmianą wykładnika  $k$ . Pracę kończymy przykładem zamieszczonym w rozdziale piątym.

## 2. Sformułowanie problemu

Niech prawą półprzestrzeń wypełnia skondensowany (stały lub ciekły) materiał wybuchowy. Może ją wypełniać również gazowa lub aerozolowa mieszanina wybuchowa. Z półprzestrzenią tą kontaktuje nieruchome powietrze o następujących, początkowych parametrach stanu: ciśnienie —  $p_0$ , gęstość —  $\rho_0$ , temperatura —  $T_0$  i wykładnik izentropy —

$\gamma$ . Prędkość detonacji  $MW$  oznaczmy przez  $d$ . Ponadto założymy, że detonacja inicjowana jest jednocześnie na całej swobodnej płaszczyźnie półprzestrzeni wypełnionej  $MW$ . Wówczas ruch badanego układu wymuszony detonacją  $MW$  jest płaski.

Zgodnie z klasyczną, hydrodynamiczną teorią detonacji [7-9], w przedstawionym układzie wytworzy się system fal złożony z fali detonacyjnej, fali rozrzedzenia i fali uderzeniowej. Będziemy zatem badać płaski, niestacjonarny ruch niejednorodnego ośrodka gazowego ze słabymi i silnymi nieciągłościami oraz z nieciągłością kontaktową (styk produktów wybuchu z powietrzem).

W obszarach, w których przepływ ośrodka jest ciągły (fale rozrzedzenia), jego ruchem rządzą równania różniczkowe o następującej postaci:

$$\begin{aligned} \rho_e u_{,tt} &= -p_{,r} \\ \rho_e &= \rho(1+u_{,r}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie  $r$  jest współrzędną Lagrange'a, a  $t$  oznacza czas, natomiast symbole  $p$ ,  $\rho$  i  $u$  oznaczają odpowiednio: ciśnienie, gęstość i przemieszczenie ośrodka.

Zgodnie z zapowiedzią zawartą w poprzednim rozdziale, równania (2.1) uzupełniamy dwusegmentową izentropą o następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_K} &= \left(\frac{\rho}{\rho_K}\right)^m, & \text{jeśli } p \leq p_K, \quad \rho \leq \rho_K \\ \frac{p}{p_H} &= \left(\frac{\rho}{\rho_H}\right)^n, & \text{jeśli } p_K \leq p \leq p_H, \quad \rho_K \leq \rho \leq \rho_H \end{aligned} \quad (2.2)$$

przy czym od punktu Jougueta do punktu  $K$  wykładnik izentropy  $n = k_H = \text{const}$ , natomiast dla  $p < p_K$  przyjmujemy  $m < n$ . Dla klasycznych  $MW$  można przyjąć  $m = 1,25$  oraz  $n = 3$ . Wielkości  $p_K$  i  $\rho_K$  określamy z równań [8]:

$$\begin{aligned} \frac{p_H}{p_K} &= \left(\frac{\rho_H}{\rho_K}\right)^n, \\ \frac{p_K}{\rho_K(m-1)} + \frac{p_H}{\rho_H(n-1)} - \frac{p_K}{\rho_K(n-1)} &= Q + \frac{p_H}{2} \left(\frac{1}{\rho_e} - \frac{1}{\rho_H}\right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie  $Q$  jest ciepłem wybuchu  $MW$ .

Na frontach fal silnych nieciągłości (fale uderzeniowa i detonacyjna) równania różniczkowe (2.1) tracą sens. W ich miejsce, zgodnie z prawami zachowania masy, pędu i energii oraz warunkiem Jougueta [7-9] mamy:

— na froncie fali detonacyjnej

$$\begin{aligned} (u_{,t})_H &= v_H = \frac{d}{k_{H+1}}, & c_H &= \frac{k_H}{k_{H+1}} d, \\ (1+u_{,r})_H &= \frac{\rho_e}{\rho_H} = \frac{k_H}{k_{H+1}}, & p_H &= \frac{1}{k_{H+1}} \rho_e d^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

— na froncie fali uderzeniowej

$$\begin{aligned} p_u - p_0 &= (b-v_0)(v_u - v_0)\rho_0 \\ (b-v_u)\rho_u &= (b-v_0)\rho_0, \\ e_u - e_0 &= \frac{1}{2} (p_u + p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_u}\right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie  $b$ ,  $c$  i  $d$  oraz  $v$  odpowiednio oznaczają prędkości propagacji: fali uderzeniowej w powietrzu; dźwięku w gazach powybuchowych i fali detonacyjnej w  $MW$ , oraz prędkość przemieszczania się (przepływu) ośrodka;  $e$  jest energią wewnętrzną odniesioną do jednostki masy powietrza. Indeksami  $u$  i  $o$  oznaczyliśmy odpowiednio parametry powietrza na froncie i przed frontem fali uderzeniowej.

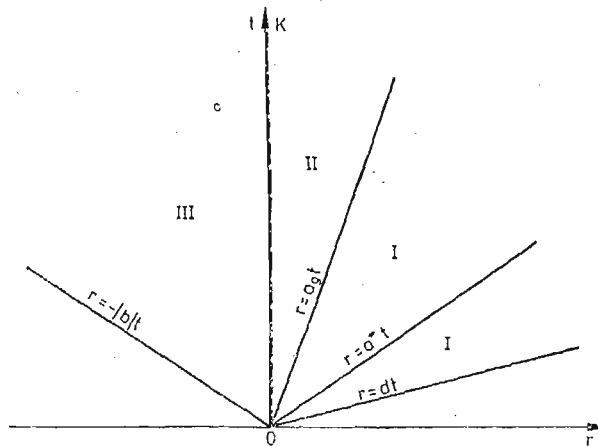
Pozostałe warunki graniczne będziemy identyfikować w trakcie rozwiązywania konkretnych zagadnień granicznych w poszczególnych obszarach płaszczyzny  $r, t$ .

Przejdziemy obecnie do konstrukcji rozwiązania sformułowanego problemu. W pierwszej kolejności rozpatrzmy przypadek, kiedy wykładnik izentropy jest stały ( $k_H = k = \text{const}$ ). W ten sposób uzyskamy tło porównawcze dla rozwiązania problemu podanego w tytule pracy.

### 3. Rozwiązanie problemu dla $k = \text{const}$

Falowy obraz rozwiązania dla tego przypadku przyjmuje postać pokazaną na rys. 2. Zgodnie z hydrodynamiczną teorią detonacji normalnej [7, 8], w rozpatrywanym przypadku, kontaktujące z  $MW$  powietrze nie oddziałuje na przebieg procesu detonacji. Dlatego front fali detonacyjnej, niezależnie od warunków brzegowych, propaguje się z prędkością

$$d = \frac{r}{t}. \quad (3.1)$$



Rys. 2.

Prędkość  $d$  determinowana jest przez fizykochemiczne właściwości  $MW$ . Za frontem fali detonacyjnej  $r = dt$  zachodzi izentropowy proces rozprężania się nagranych do wysokiej temperatury (rzędu kilku tysięcy stopni Kelvina) produktów wybuchu. Tworzy się pęk prostoliniowych, rozbieżnych charakterystyk o dodatnich współczynnikach kierunkowych. Wśród tego pęku prostych wyróżnia się charakterystyka o równaniu

$$(3.2) \quad r = a^*t,$$

wzdłuż której następuje całkowite wyhamowanie  $PD$  ( $v = 0$ ). Od tej charakterystyki poczynając, gazy powybuchowe poruszają się w przeciwnym kierunku w stosunku do

frontu detonacji. Proces dekompresji *PD* kończy się na charakterystyce granicznej:

$$(3.3) \quad r = a_H t.$$

Ruchoma granica *PD* (nicciągłość kontaktowa *OK* — granica kontaktu półprzestrzeni *MW* z powietrzem) spełnia rolę płaskiego tłoka, który porusza się ze stałą prędkością i generuje w powietrzu front fali uderzeniowej o równaniu

$$(3.4) \quad r = -|b|t,$$

gdzie *b* jest prędkością propagacji frontu stacjonarnej fali uderzeniowej.

Przedstawiony jakościowy opis zjawiska w ujęciu analitycznym kształtuje się w następujący sposób.

Procesem rozprężania się *PD* za frontem detonacji rządzą równania (2.1) uzupełnione równaniem izentropii (2.2), która dla przypadku  $k = \text{const}$  ma postać:

$$\frac{p}{p_H} = \left( \frac{\rho}{\rho_H} \right)^k. \quad (3.5)$$

W badanym problemie równania (2.1) wygodnie jest zastąpić następującymi związkami:

$$du_{,t} = \pm a(u, r) du_{,r}, \quad (3.6)$$

które są spełnione wzdłuż charakterystyk

$$dr = \pm a(u, r) dt, \quad (3.7)$$

gdzie  $a(u, r)$  jest prędkością propagacji małych zaburzeń w *PD*. W opisie Lagrange'a, dla badanego przypadku płaskiego przepływu, wyraża się ona wzorem:

$$a(u, r) = \left[ \frac{kp_H \rho_e^{k-1}}{\rho_H^k (1+u, r)^{k+1}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{k+1}{k} (1+u, r) \right]^{-\frac{k+1}{2}} d \quad (3.8)$$

Po podstawieniu funkcji (3.8) do związków (3.6) i scałkowaniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_{,t} - (u, t)_p &= \mp \frac{2}{k-1} \left( \frac{kp_H \rho_e^{k-1}}{\rho_H^k} \right)^{\frac{1}{2}} [(1+u, r)^{-\frac{k-1}{2}} - (1+u, r)_p^{-\frac{k-1}{2}}] = \\ &= \mp \frac{2}{k-1} \left( \frac{k}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2}} [(1+u, r)^{-\frac{k-1}{2}} - (1+u, r)_p^{-\frac{k-1}{2}}], \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdzie indeksem *p* oznaczono wartości początkowe odpowiednich wielkości. W rozpatrywanym przypadku będą to wartości parametrów na froncie fali detonacyjnej, tj:

$$\begin{aligned} (u, t)_p &= v_H = \frac{d}{k+1}, \\ (1+u, r)_p &= (1+u, r)_H = \frac{k}{k+1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Przejdziemy obecnie do rozwiązania zagadnień granicznych w poszczególnych obszarach płaszczyzny *r, t*. Parametry stanu i ruchu w obszarach będziemy oznaczać dolnym indeksem liczbowym zgodnym z numerem danego obszaru.

Obszar I.

Z równania pęku charakterystyk

$$\frac{r}{t} = a_1 = \left[ \frac{k p_H \varrho_e^{k-1}}{\varrho_H^k (1+u_{1,r})^{k+1}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{k+1}{k} (1+u_{1,r}) \right]^{-\frac{k+1}{2}} d$$

wynika, że:

$$1+u_{1,r} = \left[ \frac{\varrho_e}{k p_H} \left( \frac{\varrho_H}{\varrho_e} \right)^k \right]^{-\frac{1}{k+1}} \left( \frac{r}{dt} \right)^{-\frac{2}{k+1}} = \frac{k}{k+1} \left( \frac{r}{dt} \right)^{-\frac{2}{k+1}} \quad (3.11)$$

Podstawiając (3.11) do (2.1)<sub>2</sub> otrzymamy:

$$\varrho_1(r, t) = \varrho_H \left( \frac{r}{dt} \right)^{\frac{2}{k+1}} = \frac{k+1}{k} \left( \frac{r}{dt} \right)^{\frac{2}{k+1}} \varrho_e \quad (3.12)$$

Dalej z równania izentropy (3.5) po wykorzystaniu wyrażeń (2.4) mamy:

$$p_1(r, t) = p_H \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_H} \right)^k = \frac{1}{k+1} \left( \frac{r}{dt} \right)^{\frac{2k}{k+1}} \varrho_e d^2. \quad (3.13)$$

Z kolei podstawiając wyrażenia (3.10) i (3.11) do równania (3.9) (ze znakiem +), po przekształceniach otrzymujemy:

$$u_{1,r}(r, t) = v_1(r, t) = \frac{d}{k-1} \left[ \frac{2k}{k+1} \left( \frac{r}{dt} \right)^{\frac{k-1}{k+1}} - 1 \right]. \quad (3.14)$$

Poza tym, wzdłuż charakterystyki (3.2), na której  $v_1 = 0$ , mamy:

$$-v_H = \frac{2}{k-1} \left( \frac{k}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[ (1+u_{1,r}^*)^{-\frac{k-1}{2}} - (1+u_{1,r})_H^{-\frac{k-1}{2}} \right].$$

Stąd po wykorzystaniu zależności (2.4) i dokonaniu przekształceń uzyskujemy następujący wzór:

$$1+u_{1,r}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{2k}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (3.15)$$

Z kolei po podstawieniu wyrażenia (3.15) do wzoru (3.8) otrzymujemy:

$$a^* = \left( \frac{k+1}{2k} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} d. \quad (3.16)$$

Pozostałe parametry stanu na charakterystyce  $r = a^* t_1$  zgodnie z wyprowadzonymi wzorami (3.12) i (3.13) oraz (3.16), przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \varrho_1^* &= \frac{k+1}{k} \left( \frac{a^*}{d} \right)^{\frac{2}{k+1}} \varrho_e = 2 \left( \frac{k+1}{2k} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \varrho_e, \\ p_1^* &= \frac{1}{k+1} \left( \frac{a^*}{d} \right)^{\frac{2k}{k+1}} \varrho_e d^2 = \frac{1}{2k} \left( \frac{k+1}{2k} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \varrho_e d^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$



Obszary II i III.

W pierwszej kolejności przekształcimy wyrażenia na froncie fali uderzeniowej (2.5). Zgodnie z termodynamiką gazu politropowego, jego wewnętrzną energię właściwą można wyrazić wzorem:

$$e = \frac{p}{(\gamma-1)\varrho}. \quad (3.18)$$

Z kolei podstawiając wyrażenie (3.18) do związku (2.5)<sub>3</sub> (indeks  $u$  zastępujemy indeksem 3), po przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_0} = \frac{(\gamma+1)p_3 + (\gamma-1)p_0}{(\gamma+1)p_0 + (\gamma-1)p_3} \quad \text{lub} \quad \frac{p_3}{p_0} = \frac{(\gamma+1)\varrho_3 - (\gamma-1)\varrho_0}{(\gamma+1)\varrho_0 - (\gamma-1)\varrho_3}.$$

Jest to analityczna postać adiabaty uderzeniowej dla gazu politropowego.

Związki na froncie fali uderzeniowej (2.5), po wykorzystaniu wzorów (3.19) można zredukować do następującej (wygodnej dla inżynierskich zastosowań) postaci:

$$\begin{aligned} \frac{v_3}{b} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{a_0^2}{b^2}\right), \\ \frac{p_3 - p_0}{\varrho_0 b^2} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{a_0^2}{b^2}\right), \\ 1 - \frac{\varrho_0}{\varrho_3} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{a_0^2}{b^2}\right), \\ a_0 &= \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\varrho_0}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Obecnie przejdziemy do rozwiązania problemu w obszarach II i III. Zgodnie z teorią rozpadu dowolnej nieciągłości [9] parametry stanu i ruchu zachowują tutaj stałe wartości. Z ciągłości ciśnienia i prędkości na granicy ośrodków  $OK$  wynika, że

$$\begin{aligned} p_2 &= p_3 = p_\theta = \text{const}, \\ v_2 &= v_3 = v_\theta = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Z równości (3.21), po wykorzystaniu (3.13) i (3.14) oraz (3.3) i (3.20), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{1}{k+1} \left(\frac{a_g}{d}\right)^{\frac{2k}{k+1}} \varrho_e d^2 = p_0 \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{b^2}{a_0^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right), \\ v_\theta &= \frac{d}{k-1} \left[\frac{2k}{k+1} \left(\frac{a_g}{d}\right)^{\frac{k-1}{k+2}} - 1\right] = \frac{2}{\gamma+1} \frac{a_0^2}{b} \left(\frac{b^2}{a_0^2} - 1\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dalej z równości (3.22)<sub>1</sub> wynika, że

$$\frac{b}{a_0} = - \left[ \frac{\gamma+1}{2(k+1)} \frac{\varrho_e d^2}{\varrho_0 a_0^2} \left(\frac{a_g}{d}\right)^{\frac{2k}{k+1}} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

Z kolei podstawiając wyrażenie (3.23) do równości (3.22)<sub>2</sub> otrzymujemy przestępne równanie na wielkość  $a_g/d$  w następującej postaci

$$\frac{D}{k-1} = \frac{2k}{k^2-1} D A_g^{k-1} + \frac{\frac{\omega D}{k+1} A_g^{2k} - \frac{1}{\gamma}}{\left[ \frac{\gamma+1}{2(k+1)} \omega D A_g^{2k} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{1/2}} \quad (3.24)$$

dla  $k \neq 1$  oraz

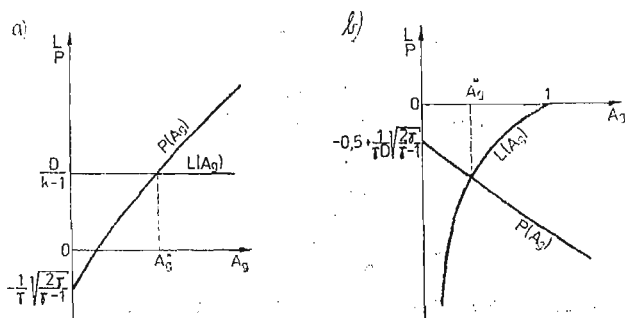
$$\ln A_g = -0,5 - \frac{\omega D A_g^2 - 2/\gamma}{D \left[ (\gamma+1)\omega D A_g^2 + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma} \right]^{1/2}} \quad (3.25)$$

dla  $k = 1$ , gdzie

$$A_g = \left( \frac{a_g}{d} \right)^{\frac{1}{k+1}}, \quad D = \frac{d}{a_0}, \quad \omega = \frac{\rho_e d}{\rho_0 a_0} \quad (3.26)$$

Równania (3.24) i (3.25) mają po jednym pierwiastku rzeczywistym  $A_g^*$ . Wynika to bezpośrednio z rys. 3, na którym przedstawiono w jakościowy sposób zmianę lewych  $L(A_g)$  i prawych  $P(A_g)$  stron równań (3.24) — rys. 3a, i (3.25) — rys. 3b w funkcji zmiennej  $A_g$ .

Dla skondensowanych (stałych i ciekłych) materiałów wybuchowych wartość iloczynu  $\omega D = \rho_e d^2 / \rho_0 a_0^2$  jest dużo większa od jedności ( $\omega D \sim 10^5 - 10^6$ ). Na przykład dla tetrylu



Rys. 3.

( $\rho_e = 1680 \text{ kg/m}^3$ ,  $d = 7500 \text{ m/s}$ ) jest  $\omega D = 672688,75$ , a dla trotylu usypowego ( $\rho_e = 800 \text{ kg/m}^3$ ,  $d = 4340 \text{ m/s}$ ) mamy:  $\omega D = 107263,5$ . Mając to na uwadze, po pominięciu we wzorach (3.24) i (3.25) wielkości małych wyższego rzędu, otrzymujemy uproszczone równania przestępne na parametr  $A_g$  w następującej postaci:

$$\sqrt{\frac{2\omega D}{(\gamma+1)(k+1)}} A_g^k + \frac{2k}{k^2-1} D A_g^{k-1} - \frac{D}{k-1} = 0 \quad (3.27)$$

dla  $k \neq 1$  oraz

$$\ln A_g = -0,5 - \sqrt{\frac{1}{\gamma+1} \frac{\omega}{D}} A_g \quad (3.28)$$

dla  $k = 1$ .

Ze wzoru (3.27) dla całkowitych wartości wykładnika  $k = 2$  i  $k = 3$  odpowiednio otrzymujemy:

$$A_g^* = D \left( -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + \sqrt{\frac{2}{3(\gamma+1)} \frac{\omega}{D}}} \right) \sqrt{\frac{3(\gamma+1)}{2\omega D}} \quad (3.29)$$

dla  $k = 2$  oraz

$$A_g^* = \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} + \sqrt{\frac{q_0^2}{4} + \frac{r_0^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} - \sqrt{\frac{q_0^2}{4} + \frac{r_0^3}{27}}} - \sqrt{\frac{\gamma+1}{8} \frac{D}{\omega}} \quad (3.30)$$

dla  $k = 3$ , gdzie

$$r_0 = -\frac{3}{8}(\gamma+1)\frac{D}{\omega}; \quad q_0 = \left(\frac{\gamma+1}{8}\frac{D}{\omega} - 1\right) \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\frac{D}{\omega}}. \quad (3.31)$$

Jednoznaczne określenie wartości parametru  $A_g^*$  rozwiązuje badany problem. I tak w obszarach II i III, zgodnie ze wzorami (3.19) i (3.21÷3.23), mamy:

$$\begin{aligned} p_2 = p_3 = p_g &= \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}B^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) p_0, \\ v_2 = v_3 = v_g &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{B^2-1}{B} a_0, \\ \varrho_2 &= \frac{k+1}{k} \left(\frac{k+1}{\gamma+1} \frac{2B^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}}{\omega D}\right)^{1/k} \varrho_0, \\ \varrho_3 &= \frac{(\gamma+1)B^2}{2+(\gamma-1)B^2} \varrho_0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

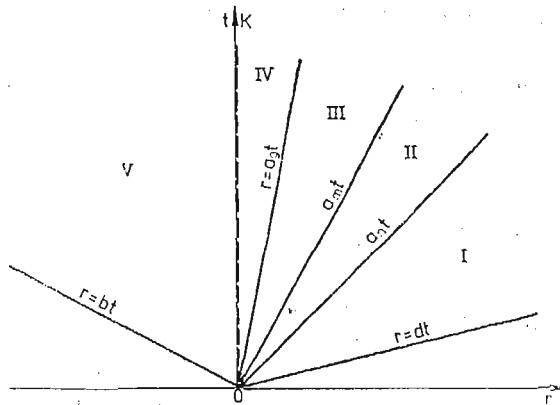
gdzie:

$$B = \left[ \frac{\gamma+1}{2(k+1)} \omega D A_g^{*2k} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{1/2} \quad (3.33)$$

Tym samym problem został rozwiązany w zamkniętej postaci dla  $k = \text{const}$ .

#### 4. Rozwiązanie problemu dla $k \neq \text{const}$

Falowy obraz procesu rozprężania się  $PD$  według krzywej  $p-\varrho$  opisanej wzorami (2.2) przyjmuje postać pokazaną na rys. 4. Początkowa faza rozłotu  $PD$  przebiega identycznie jak w przypadku opisanym w poprzednim rozdziale. Z chwilą gdy parametry stanu  $p$  i  $\varrho$  osiągną wartości  $p_k$  i  $\varrho_k$ , następuje skokowa zmiana wykładnika izentropy z  $k = n$  na  $k = m < n$ . Powoduje to skokową zmianę wartości prędkości propagacji



Rys. 4.

zaburzeń z  $a = a_n$  na  $a = a_m < a_n$ . W związku z tym na płaszczyźnie  $r, t$  powstaje klinowy obszar II zawarty między charakterystykami  $r = a_n t$  i  $r = a_m t$ , w którym parametry stanu  $p$  i  $\varrho$  oraz prędkość przemieszczania się gazów  $v$  zachowują stałe wartości. Po upływie czasu  $\Delta t = r/a_m - r/a_n$  następuje dalszy proces dekompresji  $PD$  według drugiego segmentu krzywej (2.2). Przebieg tego procesu jest analogiczny do przypadku opisanego w rozdziale trzecim.

Przedstawiony jakościowy opis zjawiska rozlotu  $PD$  z uwzględnieniem skokowej zmiany wykładnika izentropy  $k$ , w ujęciu analitycznym kształtuje się w następujący sposób.

#### O b s z a r I.

Wykorzystując rozwiązanie dla  $k = \text{const}$  (wzory (3.12) - (3.14)) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_1(r, t) &= \frac{1}{n+1} \left( \frac{r}{dt} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \varrho_e d^2, \\ \varrho_1(r, t) &= \frac{n+1}{n} \left( \frac{r}{dt} \right)^{\frac{2}{n+1}} \varrho_e, \\ v_1(r, t) &= \frac{d}{n-1} \left[ \frac{2n}{n+1} \left( \frac{r}{dt} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

#### O b s z a r II.

Parametry w tym obszarze zachowują stałe wartości i odpowiednio wynoszą:

$$\begin{aligned} p_2(r, t) &= p_K = \text{const}, \\ \varrho_2(r, t) &= \varrho_K = \text{const}, \\ v_2(r, t) &= v_K = \frac{d}{n-1} \left[ \frac{2n}{n+1} \left( \frac{a_n}{d} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} - 1 \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie:

$$a_n = \sqrt[n]{n \frac{\varrho_K p_K}{\varrho_e p_e}} \quad (4.3)$$

Wartości parametrów  $p_K$  i  $\varrho_K$  określamy ze wzorów (2.3).

#### O b s z a r III.

Wykorzystując wyrażenie (3.8), równanie (2.1)<sub>2</sub>, równanie pęku charakterystyk  $r = a_3 t$  oraz związek na dodatniej charakterystyce (3.9), po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_3(r, t) &= p_K \left( \frac{r}{a_m t} \right)^{\frac{2m}{m+1}}, \\ \varrho_3(r, t) &= \varrho_K \left( \frac{r}{a_m t} \right)^{\frac{2}{m+1}}, \\ v_3(r, t) &= v_K + \frac{2}{m-1} c_K \left[ \left( \frac{r}{a_m t} \right)^{\frac{m-1}{m+1}} - 1 \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_m &= \sqrt{m \frac{\rho_K}{\rho_e} \frac{p_K}{\rho_e}} = \sqrt{\frac{m}{n}} a_n, \\ c_K &= \sqrt{m \frac{p_K}{\rho_K}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Obszary IV i V.

W obszarach IV i V, zgodnie z teorią rozpadu dowolnej nieciągłości, parametry stanu i ruchu  $PD$  oraz powietrza zachowują stałe wartości. Dalej z ciągłości ciśnienia i prędkości ruchu gazów wynika, że

$$\begin{aligned} p_4 &= p_5 = p_g = \text{const}, \\ v_4 &= v_5 = v_g = \text{const}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

gdzie zgodnie ze wzorami (4.4)<sub>1</sub> i (4.4)<sub>3</sub> mamy:

$$\begin{aligned} p_g &= p_K \left( \frac{a_g}{a_m} \right)^{\frac{2m}{m+1}}, \\ v_g &= v_K + \frac{2}{m-1} c_K \left[ \left( \frac{a_g}{a_m} \right)^{\frac{m-1}{m+1}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Z drugiej strony, ze wzorów na froncie fali uderzeniowej (3.20) wynika, że:

$$\begin{aligned} p_g &= p_0 \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{b^2}{a_0^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right), \\ v_g &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{a_0^2}{b} \left( \frac{b^2}{a_0^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ze wzorów (4.7)<sub>1</sub> i (4.8)<sub>1</sub> otrzymujemy wyrażenie na prędkość propagacji frontu fali uderzeniowej w następującej postaci:

$$\frac{b}{a_0} = - \left\{ \left[ \frac{p_K}{p_0} \left( \frac{a_g}{a_m} \right)^{\frac{2m}{m+1}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right] \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right\}^{1/2}. \quad (4.9)$$

W celu wyprowadzenia wzoru na stosunek prędkości  $a_g/a_m$  wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} A_g &= \left( \frac{a_g}{a_m} \right)^{\frac{1}{m+1}}, \quad V_K = \frac{v_K}{a_0}, \\ C_K &= \frac{c_K}{a_0} = \frac{1}{a_0} \sqrt{m \frac{p_K}{\rho_K}}, \quad P_K = \frac{p_K}{p_0}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Wówczas ze wzorów (4.7)<sub>2</sub>, (4.8)<sub>2</sub> i (4.9) otrzymujemy

$$V_K + \frac{2C_K}{m-1} (A_g^{m-1} - 1) = \frac{1 - P_K A_g^{2m}}{\gamma \left[ \left( P_K A_g^{2m} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right]^{1/2}} \quad (4.11)$$

W przypadku gdy  $P_K A_g^{2m} \gg 1$ , równanie przestępne (4.11) można uprościć do postaci:

$$\frac{2C_K}{m-1} (1 - A_g^{m-1}) - V_k \approx \sqrt{\frac{2P_K}{\gamma(\gamma+1)}} A_g^m. \quad (4.12)$$

Podobnie jak dla  $k = \text{const}$  (rozdział 3), równania przestępne (4.11) i (4.12) mają po jednym pierwiastku rzeczywistym  $A_g^*$ . Obliczamy je znanymi metodami numerycznymi.

Mając określony pierwiastek  $A_g^*$ , pozostałe wielkości w obszarach IV i V obliczamy z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} p_4 = p_5 = p_g &= P_K A_g^{*2m} p_0, \\ v_4 = v_5 = v_g &= \left[ V_k + \frac{2C_K}{m-1} (A_g^{*m-1} - 1) \right] a_0, \\ q_4 &= A_g^{*2} q_K, \\ q_5 &= \frac{(\gamma+1)B^2}{2 + (\gamma-1)B^2} q_p, \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie

$$B = - \left[ \left( P_K A_g^{*2m} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right]^{1/2}. \quad (4.14)$$

Tym samym problem został rozwiązany. Przejdziemy obecnie do przykładu liczbowego.

### 5. Przykład

Rozpatrzmy *MW* w postaci mieszaniny trotyl/heksogen 36/64 o następujących parametrach

$$\begin{aligned} \rho_e &= 1717 \text{ kg/m}^3; & d &= 7980 \text{ m/s}; & p_H &= 29\,500 \text{ MPa}; \\ \rho_H &= 2351 \text{ kg/m}^3; & v_H &= 6,524 a_0; & k_H &= 2,71; & Q &= 1350 \text{ kcal/kg}. \end{aligned}$$

Poza tym dla powietrza w warunkach normalnych mamy:

$$\rho_0 = 1,29 \text{ kg/m}^3; \quad a_0 = 330 \text{ m/s}; \quad \gamma = 1,4.$$

Wykorzystując te wartości liczbowe parametrów oraz wyprowadzone w rozdziałach 3 i 4 wzory otrzymujemy:

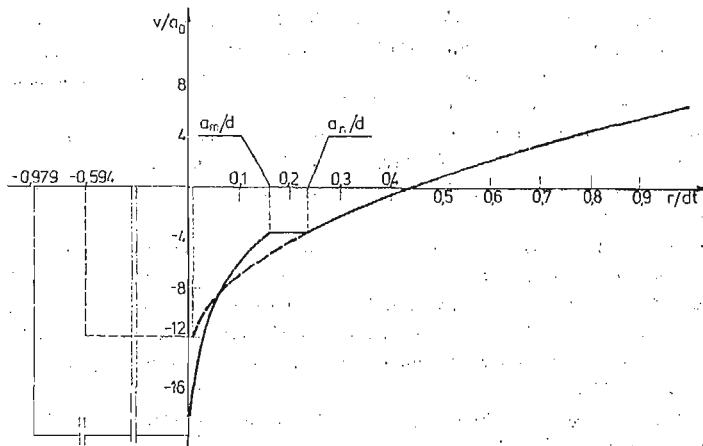
— dla  $k = k_H = \text{const}$

$$\begin{aligned} D &= 24,2, & \omega &= 32186, \\ A_g^* &= 0,269, & a^* &= 10,623 a_0, \\ B &= -14,374, & a_g &= 0,186 a_0, \\ p_1^* &= 88435 p_0, & q_1^* &= 1169,4 q_0, \\ p_2 = p_3 = p_g &= 240,9 p_0, & v_1^* &= 0, \\ q_2 &= 131,9 q_0, & q_3 &= 5,9 q_0, \\ v_2 = v_3 = v_g &= -11,920 a_0, \end{aligned}$$

— dla  $k \neq \text{const}$ ,  $n = k_H = 2,71$ ;  $m = 1,25$

$$\begin{aligned}
 D &= 24,2, & \omega &= 32186, \\
 A_g^* &= 0,203, & a^* &= 10,623a_0, \\
 B &= -23,684, & a_g &= 0,106a_0, \\
 a_m &= 3,842a_0, & a_n &= 5,653a_0, \\
 p_1^* &= 88435p_0, & \rho_1^* &= 1169,4\rho_0, \\
 p_2 = p_K &= 35232p_0, & p_4 = p_5 = p_g &= 654,2p_0, \\
 \rho_2 = \rho_K &= 831,2\rho_0, & \rho_4 &= 34,3\rho_0, \\
 \rho_5 &= 5,9\rho_0, \\
 v_2 = v_K &= -3,572a_0, & v_4 = v_5 = v_g &= -19,752a_0.
 \end{aligned}$$

Z uzyskanych wyników liczbowych można wnioskować, że model ze skokowo zmien-  
nym wykładnikiem  $k$  daje istotne zmiany w rozkładzie pola prędkości ruchu wstecznego  
 $PD$  i powietrza (rys. 5). Zmienia się również istotnie prędkość propagacji frontu fali



Rys. 5.

uderzeniowej w powietrzu (parametr  $B$ ). Zmiany te powodowane są wzrostem prędkości  
 $PD$  przy malejącym wykładniku  $k$ .

Pozostałe wielkości zmieniają swoje wartości o kilka procent i można ich nie uwzględ-  
niać w obliczeniach inżynierskich.

#### Literatura

1. А. А. ГРИБ, О распространении плоской детонационной волны. ПММ, т. III, 1944.
2. А. А. ГРИБ, Влияние места инициирования на параметры воздушной ударной волны при детонации взрывных газовых смесей. ПММ, т. III, 1944.
3. Л. Д. ЛАНДАУ, К. П. СТАНЮКОВИЧ, Определение скорости истечения продуктов детонации некоторых газовых смесей. ДАН СССР 47, № 3, 1945.
4. Л. Д. ЛАНДАУ, К. П. СТАНЮКОВИЧ, Определение скорости продуктов детонации конденсированных ВВ. ДАН СССР 47, № 4, 1945.

5. К. П. Станюкович, *Одномерный разлёт продуктов детонации бризантных взрывчатых веществ*. ДАН СССР III, 1946.
6. К. П. Станюкович, *Истечение продуктов детонации в случае косой детонационной волны*. ДАН СССР LV, 1947.
7. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанец, *Теория детонации*. Москва 1955.
8. Ф. А. Баум, Л. П. Орленко, К. П. Станюкович, В. П. Чельшев, Б. И. Шехтер, *Физика взрыва*. Москва 1975.
9. К. П. Станюкович, *Неустановившиеся движения сплошной среды*. Москва 1971.
10. Л. Д. Ландау, *Собрание трудов*. Под ред. Е. М. Лифшица. Москва 1969.
11. К. И. Щелкин, Я. К. Трошин, *Газодинамика горения*. Изд. АН СССР, Москва 1963.
12. Х. А. Рахматуллин, А. Я. Сагомоян, А. И. Бинимович, И. Н. Зверев, *Газовая Динамика*. Изд. Высшая школа, Москва 1965.
13. Ю. В. Фролов, *Теория горения и взрыва*. Изд. Наука, Москва 1981.
14. J. HENRYCH, *The dynamics of explosion and its use*. Academia, Prague 1979.
15. R. H. COLE, *Underwater explosions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1948.
16. R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic flow and shock waves*. Interscience Publishers, Inc., New York, Interscience Publishers Ltd., London 1956.
17. S. S. PENNER, F. A. WILLIAMS, *Detonation and two-phase flow*. Academic Press, New York, London 1962.
18. K. A. BRUECKNER, S. JORNA, *Laser driven fusion*. KMSF. Inc., Ann Arbor, Michigan 1973.
19. S. KALISKI, *Lasery; synteza jądrowa*. Wiedza Powszechna — Omega, Warszawa 1982.
20. H. DERENTOWICZ, S. KALISKI, *Implementation of biconical system of explosion-induced plasma micro-fusion*. Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Sci. Tech., 27, 2, 1979.
21. H. DERENTOWICZ, S. KALISKI, J. WOLSKI, Z. ZIÓŁKOWSKI, *On generating the neutrons of nuclear fusion by a pure explosion*. Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Sci. Tech. 25, 10, 1977.
22. S. KALISKI, *Explosive compression of plasma to critical values of the micronuclear fusion*. Part. I and II. J. Techn. Phys. 18, 2, 1977.
23. В. А. Чураев, К. М. Лобанов, В. П. Федяков, В. Д. Дятлов, А. М. Томонин, *Сжатие плазмы проводящим лайнером ускоренным с помощью взрыва*. ЖТО, XLV, 7, 1975.
24. A. GAŁKOWSKI, W. GŁUCHOWSKI, S. KALISKI, R. ŚWIERCZYŃSKI, *Neutron yield for explosion — induced D-T compression in cylindrical system with heavy inertial layer*. J. Techn. Phys. 20, 3, 1979.
25. E. WŁODARCZYK, *Slowing-down the disruption of the detonation products by the elastic-medium layer*. Rozpr. Inż., 32, 1, 1984.
26. E. WŁODARCZYK, *Slowing-down the disruption of the detonation products by the non-elastic medium layer*. J. Techn. Phys. 24, 3, 1983.
27. E. WŁODARCZYK, *Action of the multi-segmented charge explosion products upon the rock mass*. J. Techn. Phys. 24, 1, 1983.
28. E. WŁODARCZYK, *Plaski rozlot produktów wybuchu. (zamknięte rozwiązanie)*. Biul. WAT 32, 7, 1983.

## Резюме

ПЛОСКИЙ РАЗЛЕТ ПРОДУКТОВ ДЕТОНАЦИИ СО СКАЧКООБРАЗНО  
ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПОКАЗАТЕЛЕМ ИЗЭНТРОПИ

Решена явным образом проблема разлета газовых продуктов плоской детонации с учетом скачкообразного изменения значения показателя энтропии  $k$ . Учтена также реакция атмосферного воздуха, окружающего взрывчатое вещество. Выведены замкнутые формулы для параметров состояния и движения расширяющихся взрывных газов.

Эти формулы можно применять в инженерской практике, например при оценке влияния забойки на импульс давления взрывных газов в цилиндрическом шпуре. Они позволяют тоже оценить потери энергии освобожденной из взрывчатого вещества при взрывании без забоек.



## S u m m a r y

## PLANE EXPANSION OF DETONATION PRODUCTS WITH STEP-VARIABLE ISENTROPIC EXPONENT

The problem has been solved explicitly of the expansion of gaseous products of the plane detonation, on consideration of jump-variations in the value of the isentropic exponent  $k$ . The reaction of the atmospheric air that surrounds the explosive has also been taken into account. Closed-form formulae have been derived for the parameters of state and motion of the expanding post-explosion gases.

These formulae can be applied in engineering practice, for instance, when assessing the effect of tamping upon the pressure-pulse of the post-explosion gases in a cylindrical shot-hole. They also permit the losses to be assessed of energy released from the explosive while blasting with no tamping.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lutego 1984 roku*

---



## METODA GÓRNEJ OCENY W ZASTOSOWANIU DO DWUOTWOROWEGO WYCISKANIA METALI

ROMANA ŚLIWA  
JÓZEF ZASADZIŃSKI (KRAKÓW)

AGH

### Wprowadzenie

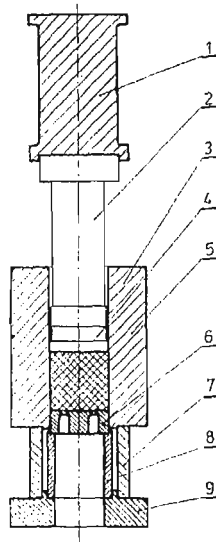
Zastosowanie w wyciskaniu matryc wielootworowych ma duże praktyczne znaczenie. Znajomość charakteru płynięcia metalu w takim procesie w powiązaniu z rozmieszczeniem otworów na powierzchni czynnej matrycy stwarza możliwość określenia właściwych parametrów wyciskania i daje podstawę do poprawnego konstruowania matryc. Zagadnienie nabiera tym większej wagi, że w dotychczasowej praktyce konstruowania matryc wielootworowych głównym kryterium decydującym o rozstawie otworów jest kryterium wytrzymałościowe projektowanej matrycy.

Tyle uwagi poświęca się poszukiwaniu optymalnego położenia otworów w matrycy, ponieważ oprócz tarcia i własności materiału oddziaływanie parametrów geometrycznych na charakter płynięcia metalu jest pierwszorzędne.

Szczególnym przypadkiem matrycy wielootworowej jest matryca dwuotworowa. Wpływ geometrii matrycy na płynięcie metalu w przedstawionej pracy jest śledzony na podstawie analizy płynięcia podczas wyciskania przy możliwych zmiennych parametrach geometrycznych takiej matrycy, tj. rozstawu otworów i ich wielkości. Próba analitycznej weryfikacji modelu płynięcia, uzyskanego na podstawie szczegółowych informacji o rozkładzie prędkości cząstek w strefie odkształcenia (metodą wizjoplastyczności), może być dokonana drogą graficznego rozwiązania bloków poślizgowych i zastosowania w oparciu o nie metody górnej oceny.

### Badania modelowe płynięcia metalu podczas wyciskania przez matryce dwuotworowe

Badania przeprowadzono na specjalnie zbudowanym stanowisku badawczym (rys. 1). Współbieżnie wyciskano ołów w gat. Pb1 z zastosowaniem kompletu matryc odpowiednio zróżnicowanych pod względem wielkości otworów i ich rozstawu (rys. 2). Dla uzyskania dokładnych informacji o charakterze płynięcia metalu badano płynięcie w trzech płasz-



Rys. 1. Schemat stanowiska badawczego: 1 — głowica do pomiaru siły całkowitej wyciskania, 2 — stempel, 3 — pojemnik, 4 — przetłocznka, 5 — matryca, 6 — wlewk, 7 — głowica pierścieniowa do pomiaru siły pochodzącej od tarcia wlewka o pojemnik, 8 — podkładka I pod matrycę, 9 — podkładka II

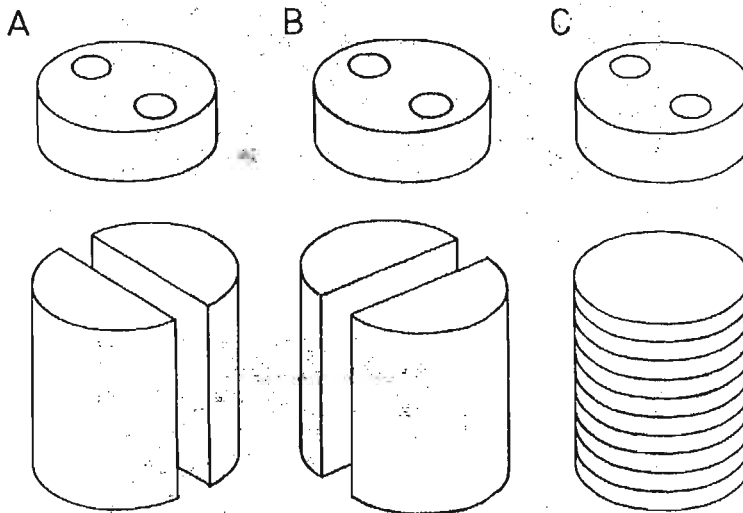
		Średnica otworów w matrycy (mm)			
		d=2 ( $\lambda=450$ )	d=5,45 ( $\lambda=60,5$ )	d=12 ( $\lambda=12,5$ )	d=23 ( $\lambda=3,75$ )
Rozmiar otworów w matrycy	najmniejszy możliwy	M3 L=8 	M6 L=11,5 	M8 L=18 	
	pośredni	M2 L=30 	M5 L=30 		M9 L=28 
	największy możliwy	M1 L=50 	M4 L=46,5 	M7 L=40 	

Rys. 2. Komplet matryc dwuotworowych wykorzystanych w badaniach modelowych

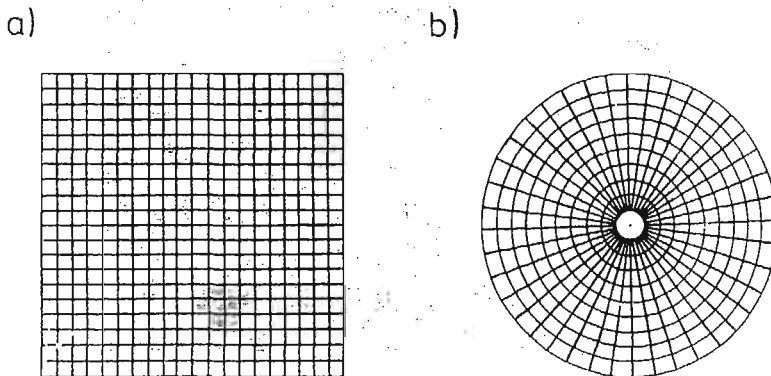
czynach podziału wlewka (rys. 3) — schemat pokazuje sposób usytuowania płaszczyzny podziału wlewka względem otworów w matrycy. Na płaszczyznę podziału naniesiono siatki: prostokątne dla płaszczyzn *A* i *B* i promieniowo-kołowe dla typu *C* (rys. 4). Skokowo wyciskano wlewek z rejestrowaniem kolejno odkształconej siatki i wytrawionej makrostruktury na płaszczyźnie podziału wlewka. Przykładowe obrazy odkształconej siatki w płaszczyźnie *A*, *B* oraz *C* pokazują rys. 5, 6, 7 ( $\lambda = 12,5$  — maksymalny rozstaw otworów).

Zastosowana metoda wizjoplastyczności umożliwiła wyznaczenie względnych prędkości cząstek drogą pomiaru ich przemieszczeń i uzyskanie rozkładów prędkości cząstek w płaszczyznach podziału wlewka. Wyniki przedstawiono w postaci wykresów zależności

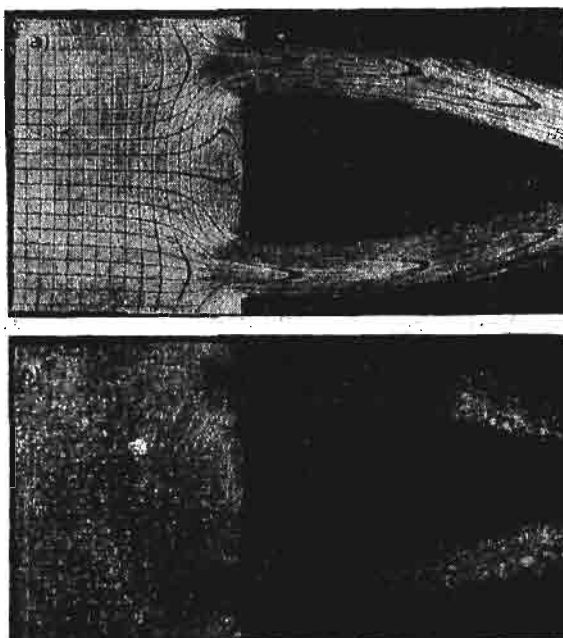
$$\frac{\text{prędkość cząstki}}{\text{prędkość stempla}} = \frac{V}{V_0} = f(z, r_n)$$



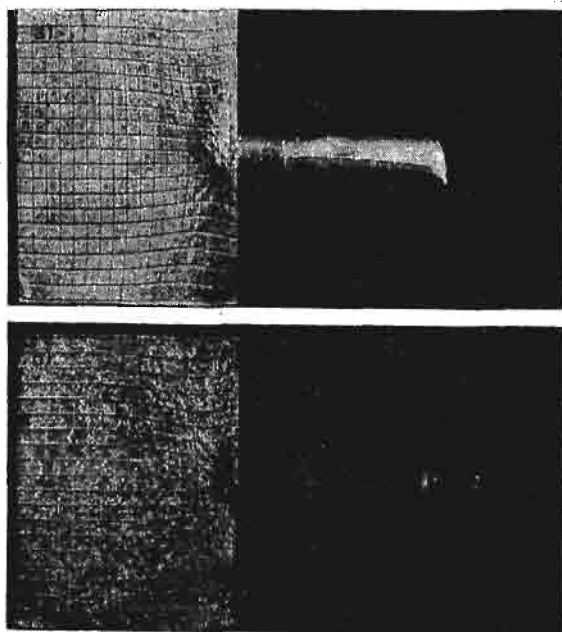
Rys. 3. Schemat usytuowania płaszczyzn *A*, *B*, *C* podziału wlewka



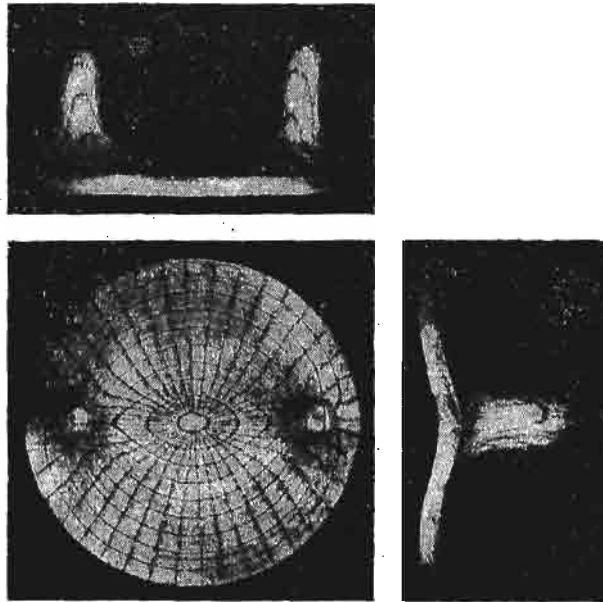
Rys. 4. Siatki nanoszone na powierzchnię podziału wlewka; a) dla płaszczyzn *A*, *B*, b) dla płaszczyzny *C*



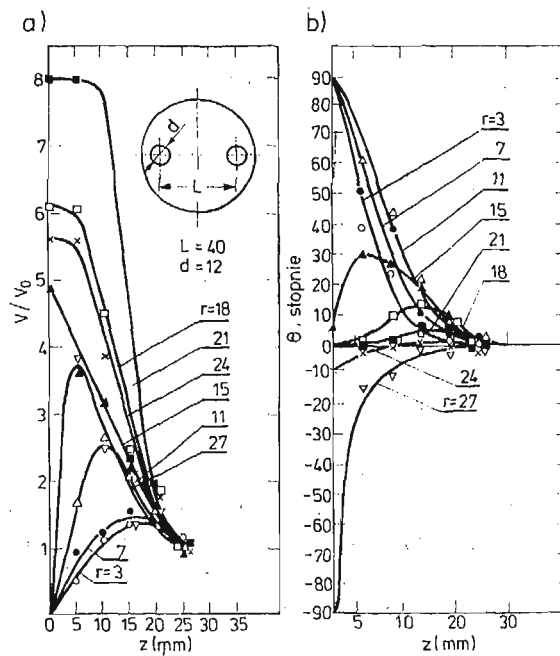
Rys. 5. Obraz odkształconej siatki i makrostruktury w płaszczyźnie  $A$  ( $\lambda = 12,5$ ; rozstaw otworów maksymalny); a) siatka, b) makrostruktura



Rys. 6. Obraz odkształconej siatki i makrostruktura w płaszczyźnie  $B$  ( $\lambda = 12,5$ ; rozstaw otworów maksymalny); a) siatka, b) makrostruktura



Rys. 7. Obraz odkształconej siatki w płaszczyźnie C (jeden z krążków składowych wlewka w 3 widokach;  $\lambda = 12,5$ ; rozstaw maksymalny)



Rys. 8. Zależność: a)  $\frac{v}{v_0} = f(z, r)$ ; dla  $\lambda = 12,5$ ; rozstaw otworów maksymalny, b)  $\theta = f(z, r_n)$

i kąta nachylenia kierunku prędkości  $V$  do osi  $z$  (osi wyciskania)

$$\theta = f(z, r_n).$$

Przykładowo zależności te pokazano dla jednego przypadku (rys. 8). W analizie i ocenie płynięcia podczas wyciskania przez matryce dwuotworowe o różnych rozstawach otworów i różnych współczynnikach wydłużenia  $\lambda$  wzięto pod uwagę: stopień jednorodności pola prędkości, maksymalne prędkości wypływu prasówki oraz strefę martwą.

### Górna ocena

Rozwiązanie graficzne bloków poślizgowych może posłużyć do oceny kierunku i wartości prędkości względnych. Górna ocena wynika z tego rozwiązania i służy do oszacowania parametrów siłowych. W metodzie górnej oceny przyjmuje się, że

$$\dot{E} < k \left[ \int_V \dot{\gamma} dv + \int_S \dot{s} ds \right], \quad (1)$$

gdzie  $k$  — naprężenie uplastyczniające na ścinanie,  $\dot{\gamma}$  — maksymalna prędkość odkształcenia plastycznego w elementarnej objętości  $dv$ ,  $\dot{s}$  — prędkość poślizgu na powierzchni nieciągłości prędkości,  $\dot{E}$  — średnia wielkość mocy.

Dla bloków poślizgowych sztywno-plastycznego materiału przyjmuje się, że  $\dot{\gamma} = 0$ . Stąd na powierzchni o długości  $H$  z jednostkową szerokością i przy jednostkowej prędkości stempla, przy założeniu procesu beztarcowego, energia według górnej oceny może być wyrażona przez:

$$pH = k \left[ \sum_1^n s\dot{s} \right], \quad (2)$$

gdzie  $p$  — średni nacisk stempla,  $n$  — liczba powierzchni nieciągłości prędkości (krawędzi bloków poślizgowych),  $s$  — długość powierzchni nieciągłości prędkości (z jednostkową szerokością).

Jeżeli uwzględnimy współczynnik tarcia  $f$  na powierzchniach bloków, to równanie jest postaci (wg Kudo [2]):

$$pH = k \left[ \sum_1^n fs\dot{s} \right]. \quad (3)$$

Górna ocena w rozwiązaniach teoretycznych stosowana jest do zagadnień płaskiego odkształcenia przy założeniu, że:

- 1) materiał jest idealnie sztywno-plastyczny, nie ma więc odkształceniowego umocnienia,
- 2) nie uwzględnia się wpływu prędkości odkształcenia.

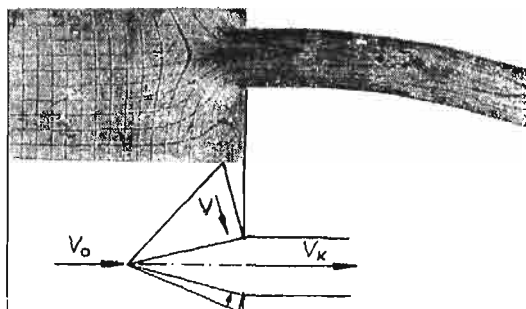
Teorię górnej oceny można zastosować wg Yanga [3] do trójwymiarowych zagadnień przy tych samych założeniach. Równania (1) i (2) mogą być zastosowane do cylindrycznego problemu, jeśli wielkość  $H$  zastąpi się średnicą stempla  $D$ , naprężenie uplastyczniające na ścianie  $k$  przez naprężenie uplastyczniające  $2k$ , wyznaczone przy rozciąganiu bądź ścisnaniu. Stąd

$$pD = 2k \left[ \sum_1^n s\dot{s} \right]. \quad (4)$$



Na bazie rozwiązania graficznego Johnsona [1] oprócz znalezienia wartości stosunku  $\frac{P}{2k}$  można wyznaczyć przybliżone kierunki wypływu prasówki z matrycy i oszacować wartość prędkości względnej  $\frac{v}{v_0}$ .

Przyjmowanie bloków poślizgowych może odbywać się na podstawie obrazu odkształconej siatki [4]. Dla matrycy dwuotworowej sposób przyjmowania bloków poślizgowych



Rys. 9. Model płynięcia podczas wyciskania współbieżnego z użyciem matrycy dwuotworowej;  $\lambda = 12,5$

przedstawiono na rys. 9. Przyjęcie mechanizmu płynięcia w postaci sztywnych bloków poślizgowych jest w przedstawianym przypadku oczywiście dużym uproszczeniem (zwłaszcza wobec braku osiowej symetrii). Jednakże wyniki tej metody służą właściwie do szacunkowej oceny (tu: kierunku i wartości prędkości względnych), mają dobrą zgodność z rzeczywistością, wobec czego metoda ze swą prostotą i małą pracochłonnością może być bardzo przydatna przy wstępnych opracowaniach procesu technologicznego.

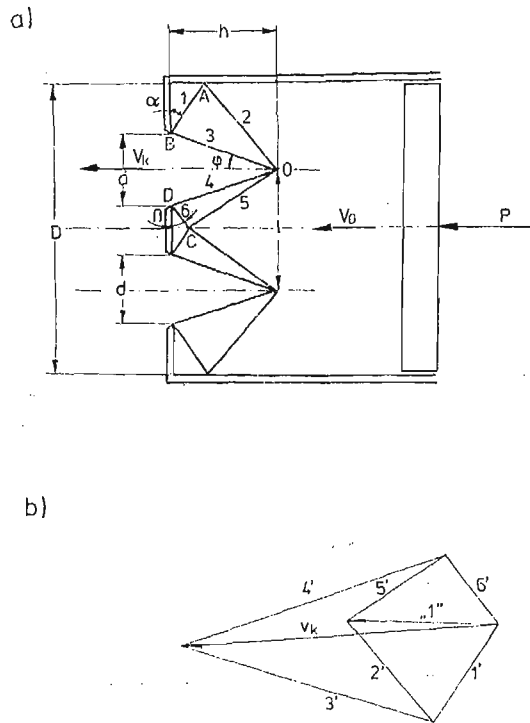
### Rozwiązanie graficzne bloków poślizgowych dla matrycy dwuotworowej

Dane: kąty strefy martwej  $\alpha$  i  $\beta$ ; rozstaw otworów  $l$ , średnica otworów  $d$ , średnica pojemnika  $D$ , przyjęta prędkość stempla „1” (rys. 10).

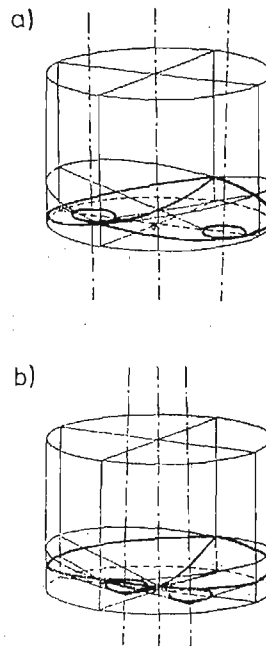
Wielkość kątów  $\alpha$  i  $\beta$  zależnych od rozstawu otworów  $l$  i ich średnic  $d$  oraz wielkości strefy odkształcenia głównego  $h$  wpływa na kształt bloków poślizgowych. Wynikający z tych danych kąt  $\varphi$  charakteryzuje płynięcie materiału. Im większy jest ten kąt, tym kierunek prędkości końcowej (prędkości wychodzącej prasówki z matrycy) bardziej odstaje od kierunku stempla  $v_0$ .

Oczywiście z punktu widzenia dobrej jakości wyrobu rzeczą korzystną jest, by w miarę możliwości kierunki  $v_0$  i  $v_k$  pokrywały się. Związane to jest z problemem pęknięcia wychodzącej prasówki w wyniku różnic prędkości cząstek na przekroju poprzecznym wyrobu, a szczególnie na obwodzie. Różnice prędkości powodują pojawienie się naprężeń rozciągających, a w konsekwencji pęknięć.

Wynika to również z różnej konfiguracji powierzchni strefy martwej, zależnie od rozstawu otworów i współczynnika wydłużenia  $\lambda$  (rys. 11). Obszar, wielkość i rodzaj pęknięć powierzchniowych zależne są od rozstawu otworów, co stwierdzono doświadczalnie [6]



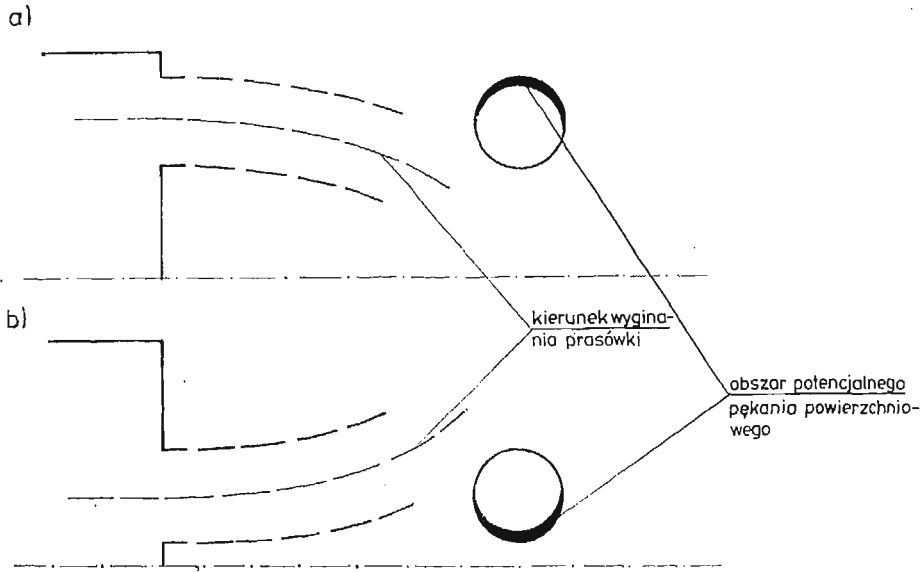
Rys. 10. Schemat wyciskania dwóch prętów z liniami nieciągłości prędkości; a) bloki poślizgowe, b) odpowiadający założonym blokom poślizgowym hodograf prędkości



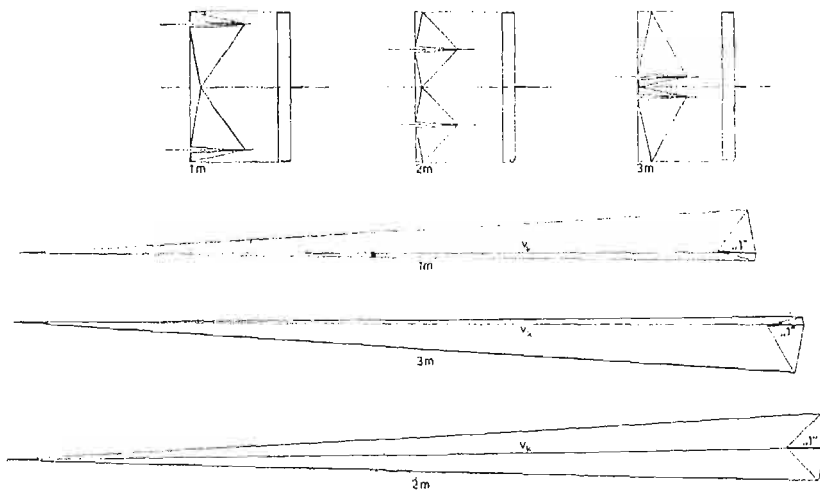
Rys. 11. Konfiguracja powierzchni strefy martwej podczas wyciskania dwuwymiarowego  $\lambda = 12,5$ ; a) rozstaw maksymalny [6], b) rozstaw minimalny

(rys. 12). Pozwala to przewidzieć rozstaw otworów, przy którym można uzyskać maksymalną prędkość wypływu prasówki bez pęknięć powierzchniowych.

Metoda górnej oceny dla problemu trójwymiarowego oparta na przedstawionym graficznie rozwiązaniu prowadzi do oceny wpływu wielkości otworów i ich położenia na powierzchni matrycy na wielkość stosunku  $\frac{P}{2k}$ . Minimalne wartości  $\frac{P}{2k} = f(l)$  dla danego  $\lambda$  określi najkorzystniejszy rozstaw otworów. Zależność ta dla różnych  $\lambda$  pozwoli na oszacowanie wpływu  $\lambda$  na parametry siłowe procesu.



Rys. 12. Obszar potencjalnego pęknięcia prasówki przy różnych rozstawach otworów: a) rozstaw duży [7]  
b) rozstaw mały

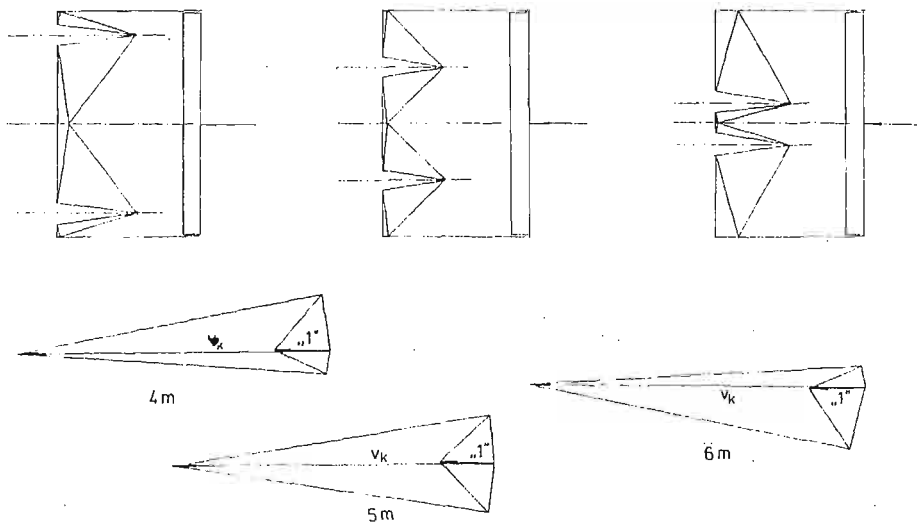


Rys. 13. Bloki poślizgowe i odpowiadające im hodografy prędkości dla matryc M1, M2, M3

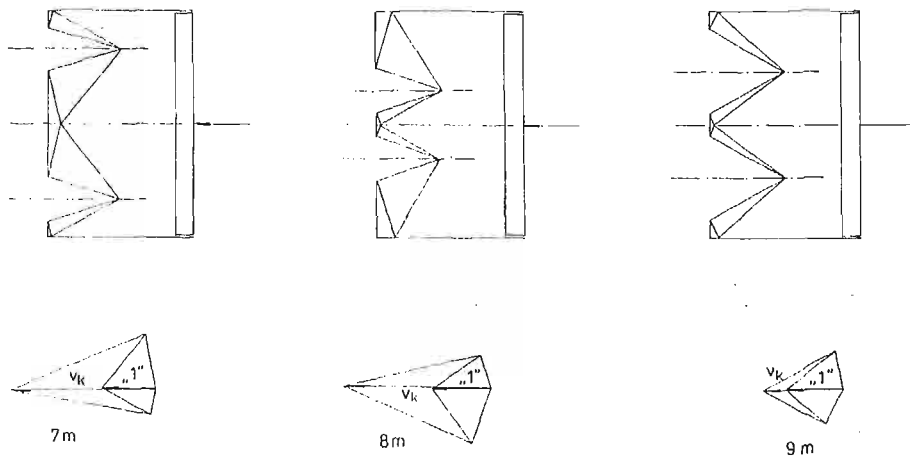
Dla przedstawionych przypadków wyciskania dwuotworowego zastosowano tę metodę rozwiązania. Graficzne rozwiązanie bloków poślizgowych przedstawiają hodografy prędkości dla wszystkich przypadków (rys. 13, 14, 15). Wyznaczony kierunek prędkości końcowej  $v_k$  ma odpowiednik w wynikach eksperymentu (rys. 16).

Wykorzystując pomiary bloków poślizgowych zastosowano metodę górnej oceny. Wyniki przedstawia wykres zależności  $\frac{P}{2k} = f(l)$  dla różnych  $\lambda$  (rys. 17). Wyznaczona stąd wielkość siły wyciskania dla poszczególnych przypadków ujęta jest w wykresie  $P_c = f(l)$  z rys. 18. Minimum siły wyciskania wyznacza optymalny rozstaw otworów.

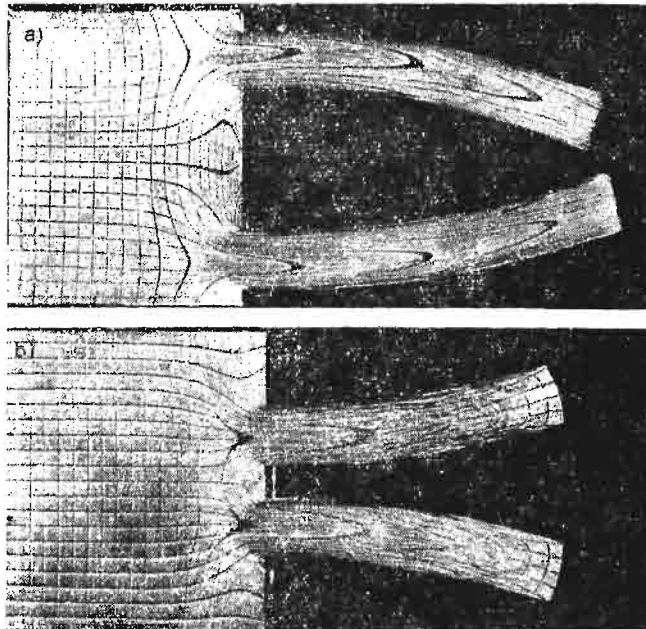
Dokonany w doświadczeniu pomiar wielkości siły wyciskania podczas serii odpowiednich badań przedstawiono graficznie na rys. 19a, b, c.



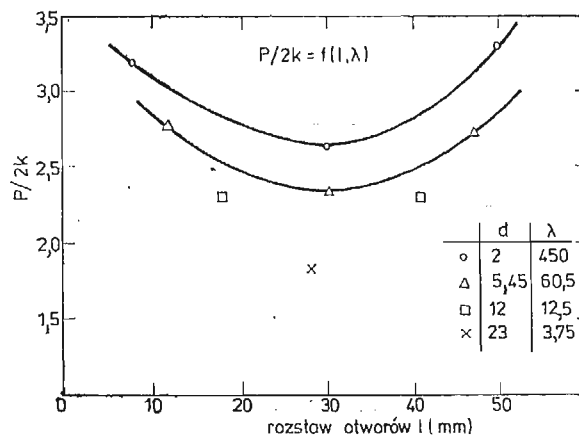
Rys. 14. Bloki poślizgowe i odpowiadające im hodografy prędkości dla matryc M4, M5, M6



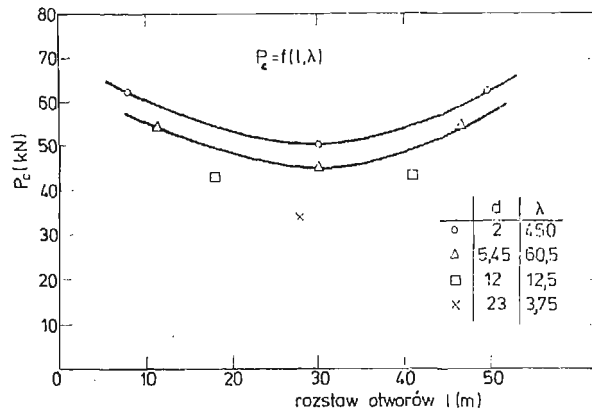
Rys. 15. Bloki poślizgowe i odpowiadające im hodografy prędkości dla matryc M7, M8, M9



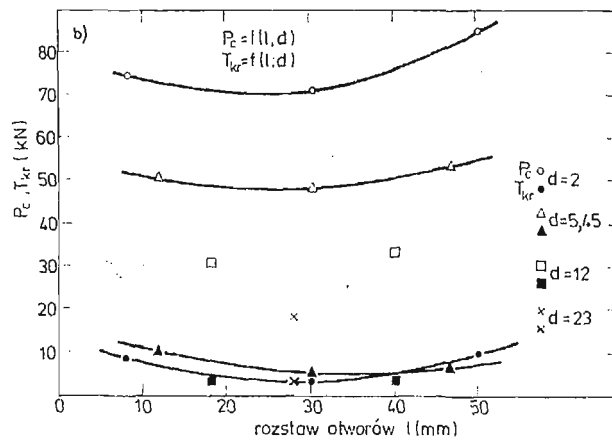
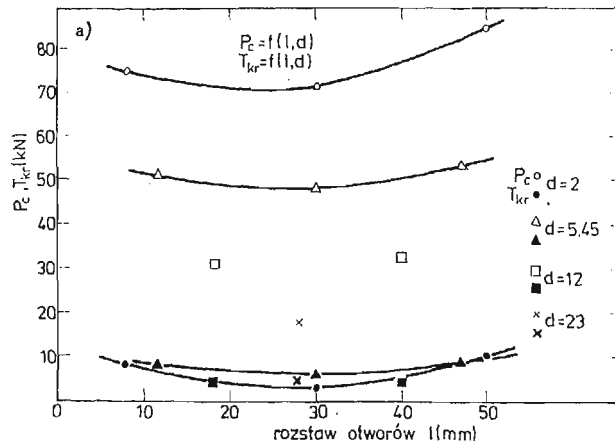
Rys. 16. Zakrzywienie prasówki w zależności od rozstawu otworów  $\lambda = 12,5$ ; a) rozstaw duży, b) rozstaw mały



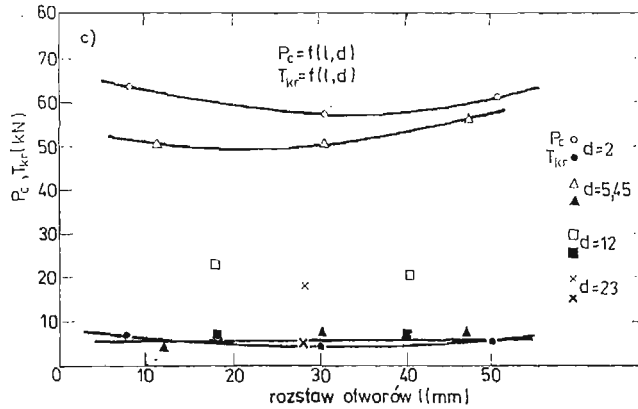
Rys. 17. Zależność  $\frac{P}{2k} = f(l)$



Rys. 18. Zależność  $P_c = f(l)$



Rys. 19. a, b



Rys. 19. Zależność sił  $P_c$  i  $T_{kr}$  od rozstawu otworów i współczynnika wydłużenia  $\lambda$ ; a) wleki dzielone w płaszczyźnie A, b) wleki dzielone w płaszczyźnie B, c) wleki dzielone w płaszczyźnie C

### Analiza i wnioski

Dążenie do jednorodności własności na przekroju prasówki poprzez ujednorodnianie pola prędkości, to między innymi dążenie do prostoliniowości wyrobu, czyli pokrycia kierunku prędkości końcowej  $v_k$  (prędkości wypływu prasówki) z kierunkiem prędkości stempla w rozstawie optymalnym.

Wyznaczone z hodografów prędkości, kierunki prędkości wychodzącej prasówki wykazują dobrą zgodność z wynikami doświadczenia. ( $v_k$  na rys. 13, 14, 15 i kierunek zakrzywienia na zdjęciach z rys. 16. Kierunek odchylenia  $v_k$  na hodografie prędkości odpowiada kierunkowi zakrzywienia prasówki w eksperymencie).

Otrzymane na bazie tego rozwiązania warunki siłowe procesu metodą górnej oceny są stosunkowo dobre, zgodne z rezultatami eksperymentu. Charakter zmienności tych parametrów odpowiada stanowi rzeczywistości. Mimo bardzo uproszczonych przyjętych bloków poślizgowych i przy założeniu procesu beztarciowego, metoda daje dobre wyniki.

W podsumowaniu należy podkreślić, że wobec zasadniczego oddziaływania parametrów geometrycznych na charakter płynięcia metalu (oprócz tarcia i własności) celową rzeczą jest poszukiwanie optymalnego położenia otworu na powierzchni matrycy.

Przedstawiona metoda graficznego rozwiązania bloków poślizgowych koresponduje z wynikami eksperymentu, co pozwala wpłynąć na uzyskanie najkorzystniejszego płynięcia metalu (z punktu widzenia dobrej jakości wyrobu i maksymalnej wydajności procesu). Oparta na niej metoda górnej oceny parametrów siłowych dobrze oddaje charakter ich zmienności w zależności od rozstawu otworów i współczynnika wydłużenia.

Fakty te mogą stanowić podstawę do racjonalnego projektowania rozstawu otworów na powierzchni matrycy.

### Literatura

1. W. JOHNSON, P. B. MELLOR, *Plasticity for Mechanical Engineers*, D. Van Nostrand Company Ltd, 1962.
2. H. KUDO, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. I, s. 57, 1960.

3. C. T. YANG, J. Eng. Ind. Trans. ASME, Nov, s. 397, 1962.
4. H. KUDO, Int. J. Mech. Sci., vol. I, s. 366, 1960.
5. R. ŚLIWA, Praca doktorska, AGH Kraków 1981.
6. R. ŚLIWA, J. ZASADZIŃSKI, Arch. Hutn., Tom 28, z. 2, s. 231, 1983.
7. R. ŚLIWA, J. ZASADZIŃSKI, (w przygotowaniu do druku).

#### Резюме

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДВУХОТВЕРСТВЕННОГО ПРЕССОВАНИЯ

Решение методом верхней оценки для условий плоской деформации можно модифицировать и применять к „трёх-мерному” прессованию. На основе графического решения Джонсона представлено решение двухотверственного прессования металлов.

В результате выполненных расчётов определено величину необходимой силы во время прессования через двухотверственные матрицы. Определены теоретические силовые параметры прессования и сравнено с результатами эксперимента прессования свинца через соответствующие матрицы с разной расстановкой и величиной отверстия. Сравнение теоретических расчётов с результатами экспериментов указывает их хорошее согласие.

Анализируемый метод верхней оценки даёт возможность определить оптимальное положение отверстия на поверхности матрицы.

Предположена концепция может быть использована для проектирования многоотверственных матриц для прессования.

#### Summary

### AN UPPER — BOUND APPROACH TO THE EXTRUSION OF METALS THROUGH TWO-HOLE-DIE

The upper — bound solution for plane-strain conditions can be modified and used in the „three-dimension” extrusion. Basing on Johnson's graphical solution, problem of the extrusion through two-hole-die was solved in this work.

The value of the necessary force for extrusion through two-hole-die was defined on the basis of calculation. Theoretical force parameters were compared with results obtained during extrusion of lead through two-hole-dies with various holes' distance.

A good convergence was found between calculated and measured parameters. Proposed methods of solution give possibilities to define optimum holes' distance in the die.

Concept mentioned above can be used for design multi-hole-dies for extrusion of metals.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 maja 1984 roku*



## MODELOWANIE MATEMATYCZNE AUTOMATYCZNIE STEROWANEGO ŚMIGŁOWCA W RUCHU PRZESTRZENNYM

KRZYSZTOF JANKOWSKI (WARSZAWA)  
JERZY MARYNIAK

*Politechnika Warszawska*

### 1. Wstęp

Przedmiotem prezentowanej pracy jest zbudowanie modelu fizycznego i matematycznego śmigłowca wraz z umieszczonym na nim układem sterowania automatycznego, przy możliwie małej liczbie założeń upraszczających. Celowość zbudowania takiego modelu wynika z potrzeby bardziej dokładnego zbadania szeregu zagadnień dynamiki ruchu przestrzennego śmigłowca z uwzględnieniem wszystkich głównych stopni swobody, wpływu ruchu wirnika nośnego, śmigła ogonowego, statecznika poziomego oraz turbin silników. W dotychczas opublikowanych pracach z tej tematyki [6, 8, 10] zagadnienia te nie są całościowo rozpatrywane.

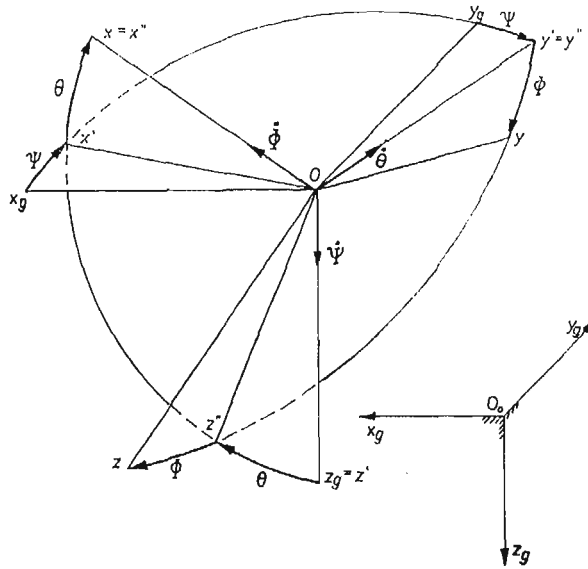
Często stawiane jest zadanie uwzględnienia w opisie matematycznym śmigłowca pełniejszych charakterystyk masowych łopatek wirnika nośnego i śmigła ogonowego oraz statecznika: momentów bezwładności względem ich osi podłużnej, momentów dewiacyjnych oraz statycznych (wyważenia łopat) [1, 6, 9, 10]. W takim przypadku, jeśli uwzględnia się jednocześnie więzy nakładane przez układ sterowania automatycznego, rozpatrywany układ mechaniczny jest układem nieholonomicznym (najczęściej są to więzy kinematyczne, niecałkowalne i nie sprowadzające się do więzów geometrycznych). Dzieje się tak dlatego, że kąty ustawienia łopat są obecnie współzrędnymi uogólnionymi, opisującymi położenie układu mechanicznego. Ponieważ śmigłowce nie mają dobrych własności dynamicznych i charakterystyk stateczności [7, 8, 9], na większości etapów lotu korzystają z układów podwyższania stateczności. W związku z tym uwzględnianie więzów nieholonomicznych przy budowaniu pełnych modeli dynamicznych śmigłowców jest niezbędne.

### 2. Model fizyczny obiektu oraz współrzędne opisujące położenie jego elementów

Przyjmuje się, że rozpatrywany jednowirnikowy śmigłowiec jest układem mechanicznym, którego główną częścią jest sztywny kadłub oraz następujące sztywne elementy, mogące zmieniać swe położenie względem kadłuba:

- części obrotowe silników turbinowych ze swobodną turbiną,
- piasta wirnika nośnego z wałem i układem przenoszenia mocy,
- łączniki łączące za pomocą przegubów poziomych i pionowych piastę z łopatom,
- łopaty wirnika nośnego,
- piasta śmigła ogonowego,
- łopaty śmigła ogonowego, przegubowo mocowane do piasty,
- statecznik poziomy.

Dla opisu ruchu kadłuba w przestrzeni wykorzystuje się następujące układy odniesienia [4] (rys. 1):



Rys. 1. Transformacja quasi-eulerowska

- nieruchomy układ grawitacyjny  $O_0 x_g y_g z_g$  związany z Ziemią,
- układ grawitacyjny  $O x_g y_g z_g$  związany ze środkiem masy kadłuba,
- układ  $Oxyz$ , sztywno związany z kadłubem, którego oś  $Oz$  jest równoległa do osi wału wirnika nośnego (rys. 2).

Chwilowe położenie kadłuba wyznaczone jest przez współrzędne  $x_g, y_g, z_g$  jego środka masy w nieruchomym układzie współrzędnych oraz przez quasi-eulerowskie kąty obrotu (samolotowe)  $\Phi, \theta, \Psi$  (rys. 1).

Dla opisu ruchu pozostałych elementów śmigłowca wprowadzono odpowiednie układy współrzędnych, sztywno związane z kadłubem, równoległe do  $Oxyz$  (rys. 2, rys. 3). Położenie danego elementu będzie wyznaczone, jeżeli poda się jego położenie kątowe względem właściwego układu współrzędnych.

Położenie turbiny napędowej i turbiny sprężarki silnika lewego opisują kąty  $\psi_{tl}$  i  $\psi_{kl}$  ich obrotu dookoła osi  $O_{sl} x_{sl}$  (rys. 3), a dla silnika prawego odpowiednio kąty  $\psi_{tr}$  i  $\psi_{kr}$ .

Chwilowe położenie  $i$ -tej łopaty wirnika nośnego wyznaczają współrzędne punktu  $O_3$  w układzie  $O_2 x_2 y_2 z_2$  oraz kąty:  $\psi_i$  — azymutu,  $\beta_i$  — wahań,  $\xi_i$  — odchylenia oraz

$\varphi_i$  — ustawienia łopaty (rys. 4). Kąt  $\psi_i$  związany jest z kątem obrotu piasty wirnika nośnego następującą zależnością:

$$\psi_i = \varphi + \frac{2\pi i}{n}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (1)$$

gdzie:  $n$  — liczba łopat.

Położenie  $j$ -tej łopaty śmigła ogonowego opisuje się podając położenie początku układu  $O_5 x_5 y_5 z_5$  w układzie  $O_4 x_4 y_4 z_4$  oraz kątami:  $\psi_{sj}$  — azymutu,  $\xi_j$  — wahań i  $\varphi_{sj}$  — ustawienia łopaty (rys. 5). Kąt  $\psi_{sj}$  w następujący sposób zależy od kąta obrotu piasty śmigła:

$$\psi_{sj} = \psi_s + \frac{2\pi j}{m}, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1), \quad (2)$$

gdzie  $m$  — liczba łopat śmigła ogonowego.

Położenie statecznika poziomego wyznacza kąt  $\varphi_{st}$  jego obrotu dookoła osi  $O_6 y_6$ .

### 3. Więzy geometryczne i kinematyczne nałożone na układ

Na współrzędne, opisujące położenie punktów rozpatrywanego układu mechanicznego, nałożone są następujące ograniczenia, wynikające ze struktury kinematycznej śmigłowca:

— sprzężenie kąta obrotu piasty wirnika nośnego z kątami obrotów turbin napędowych silników:

$$\psi_{tp} = \psi_{ti} = i_i \psi; \quad (3)$$

— sprzężenie kąta obrotu śmigła ogonowego z kątem obrotu wirnika nośnego:

$$\psi_s = i_s \psi; \quad (4)$$

— związek kąta ustawienia  $i$ -tej łopaty wirnika nośnego z kątami określanymi przez układ sterowania i kompensator wzniosu łopaty:

$$\varphi_i = \varphi_\theta + \Delta\varphi + \theta_1 \sin \psi_i + \theta_2 \cos \psi_i + k\beta_i, \quad (5)$$

gdzie:

$\varphi_\theta$  — kąt skoku ogólnego,

$\Delta\varphi$  — kąt skręcenia łopaty względem przekroju początkowego,

$k$  — współczynnik kompensatora wzniosu łopaty,

$\theta_1, \theta_2$  — kąty pochylenia tarczy sterującej na azymutach  $90^\circ$  i  $0^\circ$ ;

— zależności kątów pochylenia tarczy sterującej od kątów sterowania w ruchu podłużnym  $\varkappa$  i ruchu bocznym  $\eta$ :

$$\theta_1 = \varkappa \sin \psi_0 + \eta \cos \psi_0, \quad (6)$$

$$\theta_2 = \varkappa \cos \psi_0 - \eta \sin \psi_0, \quad (7)$$

gdzie  $\psi_0$  — kąt wyprzedzenia sterowania;

— zależność kąta ustawienia  $j$ -tej łopaty śmigła ogonowego od kąta sterowania  $\varphi_s$ :

$$\varphi_{sj} = \varphi_s; \quad (8)$$

— zależność kąta ustawienia statecznika poziomego od kąta skoku ogólnego łopata wirnika nośnego:

$$\varphi_{sr} = A_0 + A_1 \varphi_g + A_2 \varphi_g^2, \quad (9)$$

gdzie  $A_0, A_1, A_2$  — stałe współczynniki.

Są to więzy geometryczne nałożone na układ. Obecność układu automatycznego sterowania lotem nakłada na rozpatrywany obiekt następujące więzy kinematyczne, liniowe względem prędkości [7, 9]:

— prawo sterowania w kanale pochylenia:

$$T_1 \dot{\alpha} + \alpha = k_\theta(\theta - \theta_z) + k_q Q + k_x(x_g - x_{gz}) + k_{\dot{x}}(\dot{x}_g - \dot{x}_{gz}) + \alpha_0,$$

— prawo sterowania w kanale przechylenia:

$$T_2 \dot{\eta} + \eta = k_\Phi(\Phi - \Phi_z) + k_p P + k_y(y_g - y_{gz}) + k_{\dot{y}} \dot{y}_g + k_{\Psi}(\Psi - \Psi_z) + \eta_0, \quad (11)$$

— prawo sterowania w kanale wysokości:

$$T_3 \dot{\phi}_g + \phi_g = k_z(z_g - z_{gz}) + k_{\dot{z}} \dot{z}_g + \phi_{g0}, \quad (12)$$

— prawo sterowania w kanale odchylenia:

$$T_4 \dot{\phi}_s + \phi_s = k_\Psi(\Psi - \Psi_z) + k_r R + \phi_{s0}. \quad (13)$$

W równaniach tych  $T_1 \div T_4$  oznaczają stałe czasowe członów inercyjnych, opisujących charakterystyki dynamiczne elementów wykonawczych autopilota [7, 8, 9], wielkości z indeksem „z” oznaczają zadane wartości parametrów lotu, a indeks „o” przy symbolu kąta sterowania oznacza jego wartość w stanie ustalonym (początkowym). Wybrany stan pracy układu automatycznego sterowania lotem otrzymuje się przez nadanie odpowiednich wartości (w tym zerowych) współczynnikom wzmocnienia  $k_a$ .

Ponieważ związki opisujące więzy kinematyczne są niecałkowalne, rozpatrywany układ mechaniczny jest układem nieholonomicznym.

#### 4. Współrzędne uogólnione i quasi — prędkości

Obecnie można opisać zbiór współrzędnych, wyznaczających w sposób zupełny położenie rozpatrywanego układu. Są to:

— współrzędne środka masy kadłuba śmigłowca w układzie  $O_0 x_g y_g z_g$ :  $q_1 = x_g$ ,  $q_2 = y_g$ ,  $q_3 = z_g$ ;

— kąty quasi — eulerowskie:  $q_4 = \Phi$ ,  $q_5 = \theta$ ,  $q_6 = \Psi$  (rys. 1);

— kąt obrotu piasty wirnika nośnego:  $q_7 = \psi$  (rys. 4a);

— kąty wahań łopata wirnika:  $q_{8+i} = \beta_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), (rys. 4a);

— kąty obrotów łopata wirnika wokół przegubów pionowych:

$$q_{n+8+i} = \xi_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (\text{rys. 4a});$$

— kąty wahań łopata śmigła ogonowego:

$$q_{2n+8+j} = \zeta_j, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1), \quad (\text{rys. 5a});$$

— kąty obrotów turbin sprzężarek silników:

$$q_{2n+m+8} = \psi_{kl}, \quad q_{2n+m+9} = \psi_{kp} \quad (\text{rys. 3b});$$

— kąty sterowania:  $q_{l+1} = \alpha$ ,  $q_{l+2} = \eta$ ,  $q_{l+3} = \varphi_\theta$ ,  $q_{l+4} = \varphi_s$ , gdzie  $l = 2n+m+9$ . Liczba współrzędnych uogólnionych jest więc równa  $k = 2n+m+13$ .

Jako quasi — prędkości wygodnie jest przyjąć następujące parametry kinematyczne:

— rzuty wektora prędkości środka masy kadłuba śmigłowca  $V_e$  na osie układu  $Oxyz$ :

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix}, \quad (14)$$

gdzie współczynniki  $a_{kl}$  są równe:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\theta \cos\Psi, & a_{12} &= \cos\theta \sin\Psi, & a_{13} &= -\sin\theta, & a_{21} &= \sin\Phi \sin\theta \cos\Psi - \cos\Phi \sin\Psi, \\ a_{22} &= \sin\Phi \sin\theta \sin\Psi + \cos\Phi \cos\Psi, & a_{23} &= \sin\Phi \cos\theta, \\ a_{31} &= \cos\Phi \sin\theta \cos\Psi + \sin\Phi \sin\Psi, & a_{32} &= \cos\Phi \sin\theta \sin\Psi, & a_{33} &= \cos\Phi \cos\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

— rzuty wektora prędkości kątowej kadłuba  $\Omega$  na osie układu  $Oxyz$ :

$$\begin{bmatrix} \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\Phi & \cos\theta \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\theta \cos\Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}; \quad (16)$$

— część quasi — prędkości przyjęto jako równe pochodnym współrzędnych uogólnionych:

$$\omega_7 = \dot{\psi}, \quad \omega_{8+i} = \dot{\beta}_i, \quad \omega_{n+8+i} = \dot{\xi}_i, \quad \omega_{2n+8+j} = \dot{\zeta}_j, \quad \omega_{l-1} = \dot{\psi}_{kl}, \quad \omega_l = \dot{\psi}_{kp}, \quad (17)$$

gdzie:  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $j = 0, 1, \dots, m-1$ .

— ostatnie quasi — prędkości zostaną tak wprowadzone [5], aby na mocy równań więzów kinematycznych (10)÷(13) były równe zero:

$$\omega_{l+1} = k_\theta(\theta - \theta_z) + k_q Q + k_x(x_g - x_{gz}) + k_{\dot{x}}(\dot{x}_g - \dot{x}_{gz}) + \alpha_0 - T_1 \dot{\alpha} - \alpha, \quad (18)$$

$$\omega_{l+2} = k_\Phi(\Phi - \Phi_z) + k_p P + k_y(y_g - y_{gz}) + k_{\dot{y}} \dot{y}_g + k_{1\psi}(\Psi - \Psi_z) + \eta_0 - T_2 \dot{\eta} - \eta, \quad (19)$$

$$\omega_{l+3} = k_z(z_g - z_{gz}) + k_{\dot{z}} \dot{z}_g + \varphi_{g0} - T_3 \dot{\varphi}_g - \varphi_g, \quad (20)$$

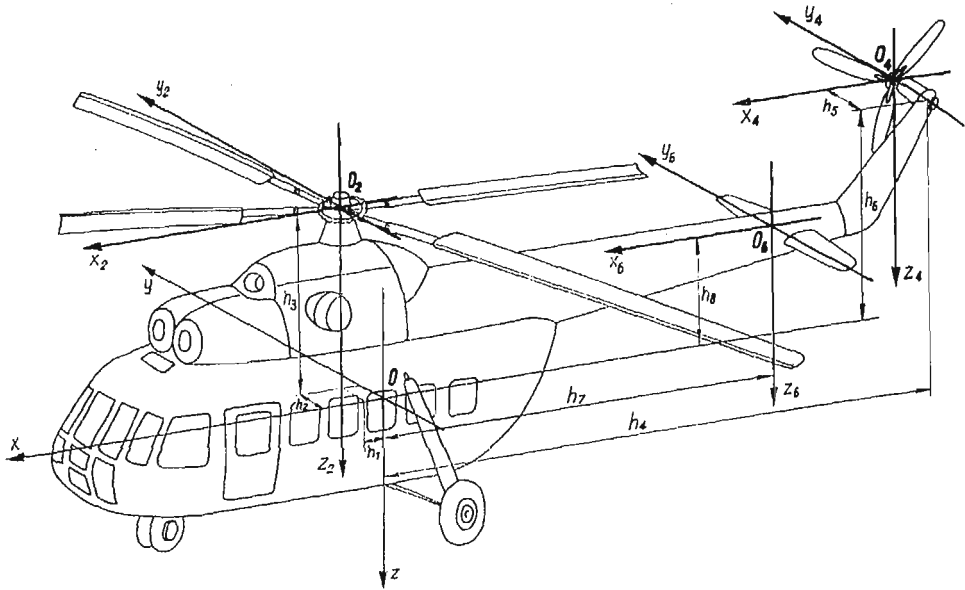
$$\Delta_{l+4} = k_\Psi(\Psi - \Psi_z) + k_r R + \varphi_{s0} - T_4 \dot{\varphi}_s - \varphi_s. \quad (21)$$

Ilość stopni swobody  $l$  przyjętego modelu śmigłowca równa jest różnicy liczby współrzędnych uogólnionych  $k$  i liczby więzów nieholonomicznych:  $l = k-4 = 2n+m+9$ .

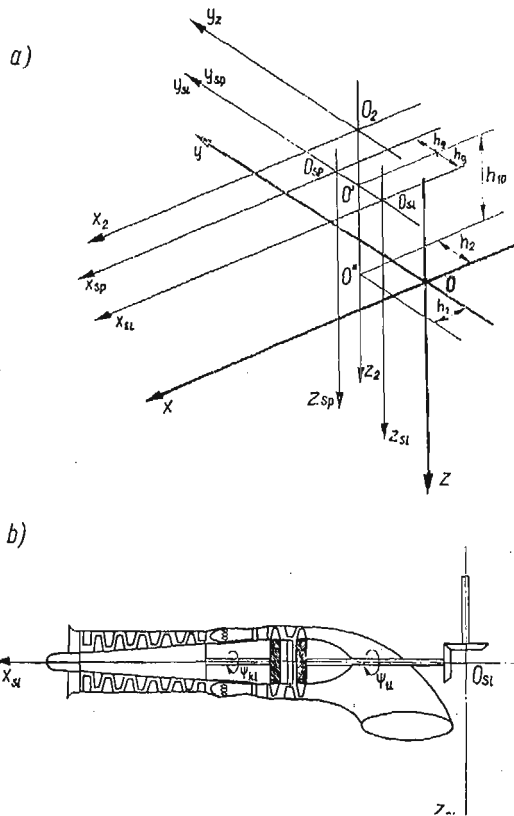
### 5. Energia kinetyczna układu

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznych kadłuba i pozostałych elementów. Po wyznaczeniu prędkości absolutnych  $V_e$  (względem nieruchomego układu ziemskiego) punktów należących do danego elementu  $e$  jego energia kinetyczna jest równa:

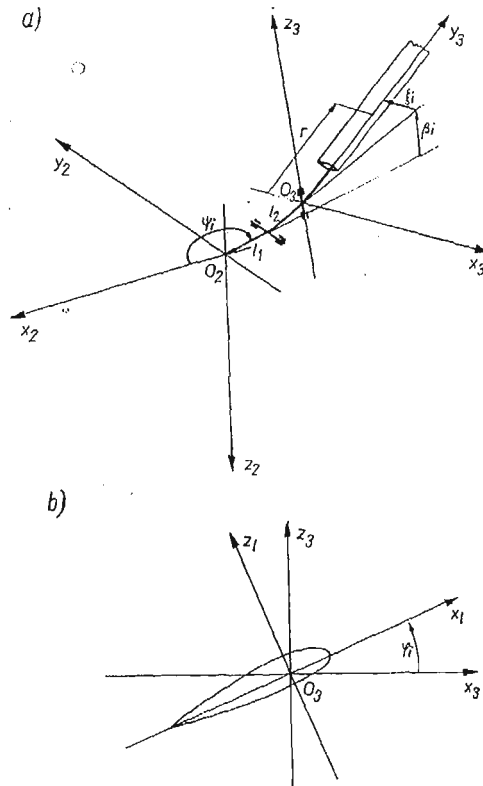
$$T_e = \frac{1}{2} \int_{m_e} V_e \cdot V_e dm. \quad (22)$$



Rys. 2. Położenie układów sztywno związanych z kadłubem



Rys. 3. Układy określające ruch silników; a) położenie układów związanych z kadłubem śmigłowca, b) schemat rozmieszczenia turbin silnika lewego i kierunki ich obrotów



Rys. 4. Położenie układów związanych z  $i$ -tą łopatką wirnika nośnego

Przy całkowaniu uwzględnia się pełne charakterystyki masowe poszczególnych elementów. Wektory prędkości punktów należących do poszczególnych elementów można zdefiniować w następujący sposób:

a) wektor prędkości dowolnego punktu kadłuba:

$$\mathbf{V}_{pk} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k, \quad (23)$$

gdzie  $\mathbf{r}_k$  — wektor łączący środek masy kadłuba z bieżącym punktem kadłuba;

b) wektor prędkości punktu turbiny napędowej (dla pozostałych turbin wektory prędkości definiowane są analogicznie):

$$\mathbf{V}_{tl} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{sl} + \mathbf{r}_{tl}) + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{r}_{tl}, \quad (24)$$

gdzie  $\mathbf{h}_{sl}$  — wektor łączący punkt  $O$  z punktem  $O_{sl}$  (rys. 3),  $\mathbf{r}_{tl}$  — wektor łączący punkt  $O_{sl}$  z punktem turbiny;

c) wektor prędkości punktu piasty wirnika nośnego:

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{o2} + \mathbf{r}_p) + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{r}_p, \quad (25)$$

gdzie  $\mathbf{h}_{o2}$  — wektor łączący punkty  $O$  i  $O_2$  (rys. 2),

$\mathbf{r}_p$  — wektor łączący punkt  $O_2$  z punktem piasty;

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{o2} + \mathbf{l}_j + \mathbf{r}_r) + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_r) + \dot{\boldsymbol{\beta}}_i \times \mathbf{r}_r, \quad (26)$$

d) wektor prędkości punktu  $i$ -tego łącznika piasty:

gdzie  $\mathbf{l}_1$  — wektor łączący punkt  $O_2$  z przegubem poziomym (rys. 4),  $\mathbf{r}_i$  — wektor łączący przegub poziomy z punktem na osi  $i$ -tego łącznika;

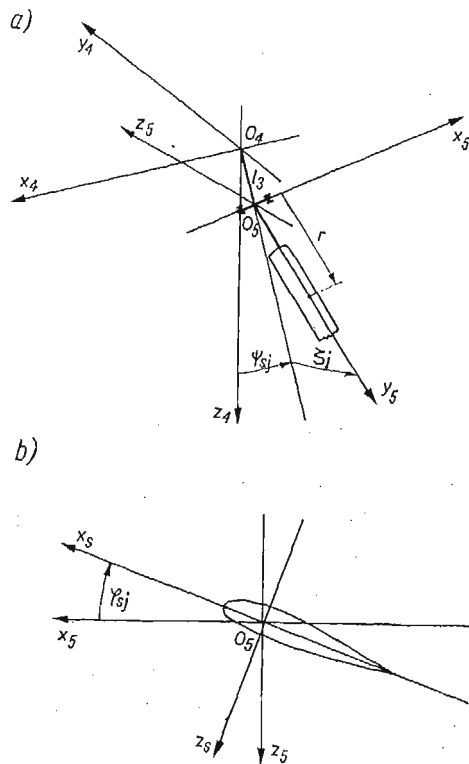
e) wektor prędkości punktu  $i$ -tej łopaty:

$$\mathbf{V}_l = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{02} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{r}_l) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{r}_l) + \boldsymbol{\beta}_i \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{r}_l) + \boldsymbol{\xi}_i \times \mathbf{r}_l + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i \times \mathbf{r}_l, \quad (27)$$

gdzie  $\mathbf{l}_2$  — wektor łączący środki przegubów poziomego i pionowego (rys. 4),  $\mathbf{r}_l$  — wektor łączący punkt  $O_3$  z dowolnym punktem łopaty;

f) wektor prędkości punktu piasty śmigła ogonowego:

$$\mathbf{V}_{ps} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{04} + \mathbf{r}_{ps}) + \dot{\boldsymbol{\psi}}_s \times \mathbf{r}_{ps}, \quad (28)$$



Rys. 5. Położenie układów związanych z  $j$ -tą łopata śmigła ogonowego

gdzie  $\mathbf{h}_{04}$  — wektor łączący punkty  $O$  i  $O_4$  (rys. 2),  $\mathbf{r}_{ps}$  — wektor łączący punkt  $O_4$  z punktem piasty;

g) wektor prędkości punktu należącego do  $j$ -tej łopaty śmigła ogonowego:

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{04} + \mathbf{l}_3 + \mathbf{r}_s) + \dot{\boldsymbol{\psi}}_s \times (\mathbf{l}_3 + \mathbf{r}_s) + \dot{\boldsymbol{\zeta}}_j \times \mathbf{r}_s + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{sj} \times \mathbf{r}_s, \quad (29)$$

gdzie  $\mathbf{l}_3$  — wektor łączący punkty  $O_4$  i  $O_3$  (rys. 5),  $\mathbf{r}_s$  — wektor łączący punkt  $O_3$  z dowolnym punktem łopaty śmigła;



h) wektor prędkości punktu należącego do statecznika poziomego:

$$\mathbf{V}_{st} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_0 + \mathbf{r}_{st}) + \dot{\boldsymbol{\phi}}_{st} \times \mathbf{r}_{st}, \quad (30)$$

gdzie  $\mathbf{h}_{06}$  — wektor łączący punkty  $O$  i  $O_6$  (rys. 2),  $\mathbf{r}_{st}$  — wektor łączący punkt  $O_6$  z dowolnym punktem statecznika.

## 6. Siły uogólnione

Działające na układ siły uogólnione składają się z sił i momentów aerodynamicznych, ciężarowych, napędowych, sprężystych i tłumiących.

Poniżej podane zostaną składowe w układzie  $Oxyz$  sił i momentów aerodynamicznych i napędowych działających na kadłub wraz ze skrzydłem, statecznikiem poziomym i pionowym. Współczynniki sił aerodynamicznych mierzone są w układzie półzwiązany z przepływem wokół poszczególnych elementów, a współczynniki momentów aerodynamicznych — wokół osi układu związanego z kadłubem  $Oxyz$ .

$$\begin{aligned} X_k^a = & -\frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} (C_{xk} \cos \alpha_k - C_{zk} \sin \alpha_k) - \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} (C_{xsk} \cos \alpha_{sk} - C_{zsk} \sin \alpha_{sk}) + \\ & -\frac{1}{2} \rho V_{st}^2 S_{st} (C_{xst} \cos \alpha_{st} - C_{zst} \sin \alpha_{st}) - \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_v (C_{xv} \cos \alpha_v - C_{yv} \sin \alpha_v) + X_q Q + X^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_k^a = & -\frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} C_{yk} - \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} C_{ysk} - \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_v (C_{xv} \sin \alpha_v + \\ & + C_{yv} \cos \alpha_v) + Y_r R + Y_p P + Y^n, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} Z_k^a = & -\frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} (C_{xk} \sin \alpha_k + C_{zk} \cos \alpha_k) - \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} (C_{xsk} \sin \alpha_{sk} + C_{zsk} \cos \alpha_{sk}) + \\ & -\frac{1}{2} \rho V_{st}^2 S_{st} (C_{xst} \sin \alpha_{st} + C_{zst} \cos \alpha_{st}) + Z_q Q + Z^n, \end{aligned}$$

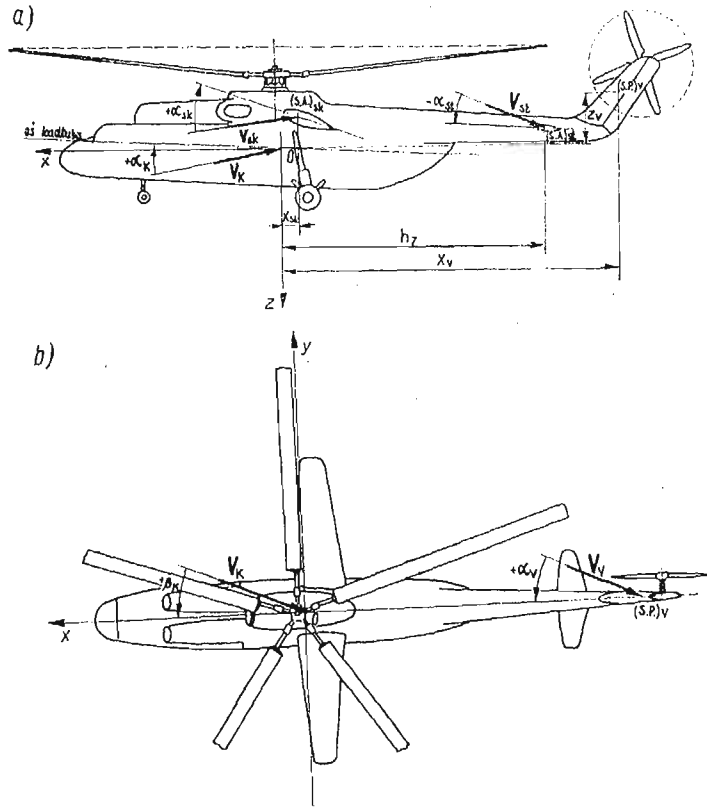
$$\begin{aligned} L_k^a = & \frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} l_a C_{lk} + \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} l_a C_{l,sk} - \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_v z_v (C_{xv} \sin \alpha_v + \\ & + C_{yv} \cos \alpha_v) + L_p P + L_r R, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} M_k^a = & \frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} l_a C_{mk} + \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} l_a C_{m,sk} - \frac{1}{2} \rho V_{st}^2 S_{st} [(C_{xst} \sin \alpha_{st} + \\ & + C_{zst} \cos \alpha_{st}) h_7 + (C_{zst} \sin \alpha_{st} - C_{xst} \cos \alpha_{st}) h_8] + M_q Q - X^n h_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_k^a = & \frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} l_a C_{nk} + \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} l_a C_{n,sk} + \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_v x_v (C_{xv} \sin \alpha_v + \\ & + C_{yv} \cos \alpha_v) + N_p P + N_r R. \end{aligned}$$

W równaniach tych  $X^n$  oznacza składową wzdłuż osi  $Ox$  siły odrzutu gazów z dysz wylotowych silników turbinowych. Pozostałe symbole są zwykle stosowane przy opisach sił i momentów aerodynamicznych, część z nich uwidocznił na rys. 6.

Opisu aerodynamiki łopaty wirnika nośnego i śmigła ogonowego dokonano przy przyjęciu hipotezy opływu quasi-ustalonego [10]. Rozpatrywany schemat sił i momentów



Rys. 6. Widoki śmigłowca z boku (a) i z góry (b) z zaznaczonymi parametrami występującymi w opisie aerodynamiki kadłuba

pozwala znacznie rozszerzyć model opływu łopaty, przyjęty w teorii Glauerta-Locka [8, 10].

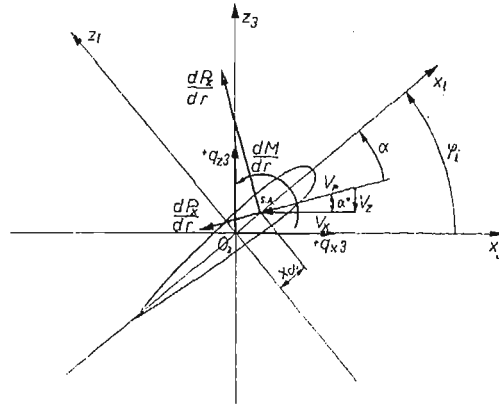
Obciążenie przekroju  $i$ -tej łopaty wirnika położonego w odległości  $r$  od przegubu pionowego składa się z sił elementarnych  $\frac{dP_x}{dr}$ ,  $\frac{dP_z}{dr}$  oraz momentu  $\frac{dM}{dr}$  (rys. 4, rys. 7).

Po zrzutowaniu na osie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 q_{x3}^i &= -\frac{dP_x}{dr} \cos \alpha^* - \frac{dP_z}{dr} \sin \alpha^* = -\frac{1}{2} \rho b V_p (C_z V_{zt} + C_x V_{xt}), \\
 q_{z3}^i &= -\frac{dP_x}{dr} \sin \alpha^* + \frac{dP_z}{dr} \cos \alpha^* = \frac{1}{2} \rho b V_p (C_z V_{xt} - C_x V_{zt}), \\
 q_{my3}^i &= -\frac{1}{2} \rho b^2 V_p^2 C_{ms.A} - \frac{1}{2} \rho b V_p x_a [C_x (V_{xi} \sin \varphi_l - V_{zi} \cos \varphi_l) + \\
 &\quad + C_z (V_{xt} \cos \varphi_l + V_{zt} \sin \varphi_l)].
 \end{aligned} \tag{33}$$

Kąt natarcia przekroju łopaty:

$$\alpha_l = \varphi_l - \alpha^* = \varphi_l - \arctg \frac{V_{zt}}{V_{xt}}, \tag{34}$$



Rys. 7. Obciążenie przekroju łopaty wirnika nośnego

gdzie składowe wzdłuż osi  $O_3x_3$  i  $O_3z_3$  prędkości przekroju łopaty względem opływającego czynnika są równe:

$$\begin{aligned} V_{x_i} &= (-U + Qh_3 + Rh_2) \sin \psi_i + (V + Ph_3 + Rh_1) \cos \psi_i + P(l_2 + r) \cos \psi_i \sin \beta_i + \\ &\quad + Q(l_2 + r) \sin \psi_i \sin \beta_i + (R + \omega) [l_1 + (l_2 + r) \cos \beta_i] - \xi_i r, \\ V_{z_i} &= (-U + Qh_3 + Rh_2) \cos \psi_i \sin \beta_i - (V + Ph_3 + Rh_1) \sin \psi_i \sin \beta_i + \\ &\quad - (W - Qh_1 + Ph_2) \cos \beta_i - P \sin \psi_i (l_1 \cos \beta_i + l_2 + r) + Q \cos \psi_i (l_1 \cos \beta_i + \\ &\quad + l_2 + r) + \beta_i (l_2 + r) + v_i \cos \beta_i, \end{aligned} \quad (35)$$

a  $v_i$  oznacza aktualną dla danego azymutu  $\psi_i$  i promienia  $r$  składową prędkości indukowanej.

Rzuty sił aerodynamicznych, działających na wirnik nośny, na osie układu  $Oxyz$  mają następującą postać:

$$\begin{aligned} X_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} (q_{x3}^i b_{11}^i + q_{z3}^i b_{13}^i) dr, \\ Y_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} (q_{x3}^i b_{21}^i + q_{z3}^i b_{23}^i) dr, \\ Z_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} (q_{x3}^i b_{31}^i + q_{z3}^i b_{33}^i) dr. \end{aligned} \quad (36)$$

Momenty aerodynamiczne wirnika wokół osi układu  $Oxyz$ :

$$\begin{aligned} L_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} [q_{x3}^i (R_y^i b_{31}^i - R_z^i b_{21}^i) + q_{z3}^i (R_y^i b_{23}^i - R_z^i b_{33}^i) + q_{m,y3}^i b_{12}^i] dr, \\ M_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} [q_{x3}^i (R_z^i b_{11}^i - R_x^i b_{31}^i) + q_{z3}^i (R_z^i b_{13}^i - R_x^i b_{33}^i) + q_{m,y3}^i b_{22}^i] dr, \\ N_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} [q_{x3}^i (R_x^i b_{21}^i - R_y^i b_{11}^i) + q_{z3}^i (R_x^i b_{23}^i - R_y^i b_{13}^i) + q_{m,y3}^i b_{32}^i] dr. \end{aligned} \quad (37)$$

W równaniach tych  $R_x^i$ ,  $R_y^i$ ,  $R_z^i$  są rzutami wektora łączącego początek układu  $Oxyz$  z punktem na osi  $i$ -tej łopaty. Współczynniki  $b_{ki}^i$  (elementy macierzy przejścia od układu  $O_3x_3y_3z_3$  do układu  $O_2x_2y_2z_2$ ) są równe:

$$\begin{aligned} b_{11}^i &= -\sin\psi_i \cos\xi_i + \cos\psi_i \cos\beta_i \sin\xi_i, & b_{12}^i &= \sin\psi_i \sin\xi_i + \cos\psi_i \cos\beta_i \cos\xi_i, \\ b_{13}^i &= -\cos\psi_i \sin\beta_i, & b_{21}^i &= \cos\psi_i \cos\xi_i + \sin\psi_i \cos\beta_i \sin\xi_i, \\ b_{22}^i &= -\cos\psi_i \sin\xi_i + \sin\psi_i \cos\beta_i \cos\xi_i, & b_{23}^i &= -\sin\psi_i \sin\beta_i, \\ b_{31}^i &= -\sin\beta_i \sin\xi_i, & b_{32}^i &= -\sin\beta_i \cos\xi_i, & b_{33}^i &= -\cos\beta_i. \end{aligned} \quad (38)$$

Moment aerodynamiczny wirnika wokół jego osi obrotu jest równy:

$$\begin{aligned} N_{02}^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} \{ q_{x3}^i [ [(l_1 + l_2 \cos\beta_i) \cos\psi_i + b_{12}^i r] b_{21}^i - [(l_1 + l_2 \cos\beta_i) \sin\psi_i + \\ &+ b_{22}^i r] b_{11}^i ] + q_{z3}^i [ [(l_1 + l_2 \cos\beta_i) \cos\psi_i + b_{12}^i r] b_{23}^i - \\ &- [(l_1 + l_2 \cos\beta_i) \sin\psi_i + b_{22}^i r] b_{13}^i ] + q_{my3}^i b_{32}^i \} dr. \end{aligned} \quad (39)$$

Moment aerodynamiczny  $i$ -tej łopaty względem osi przegubu poziomego możn. wyrazić w następujący sposób:

$$M_{hi}^a = \int_0^{R_i} [ q_{z3}^i (l_2 + r \cos\xi_i) - q_{my3}^i \sin\xi_i ] dr, \quad (40)$$

natomiast moment względem przegubu pionowego jest równy:

$$M_{vi}^a = \int_0^{R_i} (-q_{x3}^i r) dr. \quad (41)$$

W podobny sposób oblicza się siły i momenty aerodynamiczne śmigła ogonowego.

Ponieważ początek układu  $Oxyz$  jest środkiem masy kadłuba, jego momenty ciężarowe są równe zero. Uwzględnić natomiast należy w zależnościach na siły uogólnione momenty grawitacyjne poszczególnych zespołów śmigłowca wokół osi układu  $Oxyz$  i na pozostałych przesunięciach przygotowanych. Poza tym, w prawych stronach równań ruchu umieszczone zostaną momenty napędowe oraz momenty działające na łopaty wirnika nośnego wokół przegubów poziomych i pionowych od sprężyn i tłumików.

## 7. Równania ruchu śmigłowca

Równania ruchu śmigłowca wyprowadzono wykorzystując równania Boltzmanna-Hamela dla układów nieholonomicznych w quasi-współrzędnych [2, 5]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^l \gamma_{\mu\alpha}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^*, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l). \quad (42)$$

Występujące w równaniach współczynniki Boltzmanna  $\gamma_{\mu\alpha}^r$  obliczono, wykorzystując tzw. związki przestawialności [2, 5]:

$$d\delta\pi_r - \delta d\pi_r = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \gamma_{\mu\lambda}^r d\pi_\mu \delta\pi_\lambda, \quad (r = 1, 2, \dots, k). \quad (43)$$

Po wykonaniu odpowiednich operacji równania ruchu obiektu śmigłowiec układ sterowania sformułowano w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial U} &= \left( \frac{\partial T^*}{\partial x_g} a_{11} + \frac{\partial T^*}{\partial y_g} a_{12} + \frac{\partial T^*}{\partial z_g} a_{13} + \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} \frac{k_x}{T_1} a_{11} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_y}{T_2} a_{12} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_g} \frac{k_z}{T_3} a_{13} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial V} R + \frac{\partial T^*}{\partial W} Q + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left( \frac{k_x}{T_1} - k_x \right) a_{11} + \\ &+ \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left( \frac{k_y}{T_2} - k_y \right) a_{12} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+3}} \left( \frac{k_z}{T_3} - k_z \right) a_{13} = X_k^a + X_w^a + X_s^a + m_c g a_{13}. \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial V} &= \left( \frac{\partial T^*}{\partial x_g} a_{21} + \frac{\partial T^*}{\partial y_g} a_{22} + \frac{\partial T^*}{\partial z_g} a_{23} + \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} \frac{k_x}{T_1} a_{21} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_y}{T_2} a_{22} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_g} \frac{k_z}{T_3} a_{23} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial U} R - \frac{\partial T^*}{\partial W} P + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left( \frac{k_x}{T_1} - k_x \right) a_{21} + \\ &+ \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left( \frac{k_y}{T_2} - k_y \right) a_{22} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+3}} \left( \frac{k_z}{T_3} - k_z \right) a_{23} = Y_k^a + Y_w^a + Y_s^a + m_c g a_{23}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial W} &= \left( \frac{\partial T^*}{\partial x_g} a_{31} + \frac{\partial T^*}{\partial y_g} a_{32} + \frac{\partial T^*}{\partial z_g} a_{33} + \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} \frac{k_x}{T_1} a_{31} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_y}{T_2} a_{32} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_g} \frac{k_z}{T_3} a_{33} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial U} Q + \frac{\partial T^*}{\partial V} P + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left( \frac{k_x}{T_1} - k_x \right) a_{31} + \\ &+ \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left( \frac{k_y}{T_2} - k_y \right) a_{32} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+3}} \left( \frac{k_z}{T_3} - k_z \right) a_{33} = Z_k^a + Z_w^a + Z_s^a + m_c g a_{33}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial P} &= \left( \frac{\partial T^*}{\partial \Phi} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_p}{T_2} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial V} W + \frac{\partial T^*}{\partial W} V - \frac{\partial T^*}{\partial Q} R + \frac{\partial T^*}{\partial R} Q - \\ &- \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} R k_q + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left( \frac{k_p}{T_2} - k_p \right) + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} Q k_r = L_k^a + L_w^a + L_s^a + \\ &+ L_w^g + L_s^g + L_{sil}^g + L_{st}^g, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial Q} &= \left( \frac{\partial T^*}{\partial \Phi} \sin \Phi \operatorname{tg} \theta + \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \cos \Phi + \frac{\partial T^*}{\partial \Psi} \frac{\sin \Phi}{\cos \theta} + \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} \frac{k_q}{T_1} \right) + \\ &+ \frac{\partial T^*}{\partial U} W - \frac{\partial T^*}{\partial W} U + \frac{\partial T^*}{\partial P} R - \frac{\partial T^*}{\partial R} P + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left( \frac{k_q}{T_1} - k_q \cos \Phi \right) + \\ &+ \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left( k_p R - k_q \sin \Phi \operatorname{tg} \theta - k_{1v} \frac{\sin \Phi}{\cos \theta} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \left( -k_r P - k_v \frac{\sin \Phi}{\cos \theta} \right) = \\ &= M_k^a + M_w^a + M_s^a + M_w^g + M_s^g + M_{sil}^g + M_{st}^g, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial R} &= \left( \frac{\partial T^*}{\partial \Phi} \cos \Phi \operatorname{tg} \theta - \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \sin \Phi + \frac{\partial T^*}{\partial \Psi} \frac{\cos \Phi}{\cos \theta} + \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_s} \frac{k_r}{T_4} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial V} U - \\ &- \frac{\partial T^*}{\partial U} V - \frac{\partial T^*}{\partial P} Q + \frac{\partial T^*}{\partial Q} P + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} (k_q P + k_\theta \sin \Phi) + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left( -k_v Q - \right. \end{aligned} \quad (49)$$

$$-k_\psi \cos \Phi \operatorname{tg} \theta - k_{j\psi} \frac{\cos \Phi}{\cos \theta} \left) - \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \left( \frac{k_r}{T_4} k_\psi + \frac{\cos \Phi}{\cos \theta} \right) = \quad (49)$$

$$= N_k^a + N_w^a + N_s^a + N_w^g + N_s^g + N_{sil}^g + N_{st}^g, \quad [\text{cd.}]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega} - \frac{\partial T^*}{\partial \psi} = N_{02}^a + N_{02}^g + i_s M_{04}^a + i_s M_{04}^g + i_s M_{04}^g + N_{20}^a, \quad (50)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \beta_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \beta_i} = M_{hi}^a + M_{hi}^g - c_h \beta_i - k_h \beta_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (51)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \xi_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \xi_i} = M_{vi}^a + M_{vi}^g - c_v \xi_i - k_v \xi_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (52)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial T^*}{\partial \zeta_j} = M_{pj}^a + M_{pj}^g - c_p \zeta_j - k_p \zeta_j, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1), \quad (53)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kl}} - \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kl}} = M_{kl}, \quad (54)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kp}} - \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kp}} = M_{kp}, \quad (55)$$

W równaniach tych  $T^*$  oznacza energię kinetyczną układu wyznaczoną w quasi-prędkościach.

Do tej pory nie opisywane oznaczenia to:  $m_c$  — masa całkowita śmigłowca; momenty działające na:  $N_{02}$  — wirnik nośny wokół osi  $O_2 z_2$ ,  $M_{04}$  — śmigło ogonowe wokół osi  $O_4 y_4$ ,  $M_{hi}$ ,  $M_{vi}$  —  $i$ -tą łopatą wirnika wokół osi przegubu poziomego oraz pionowego,  $M_{pj}$  —  $j$ -tą łopatą śmigła ogonowego wokół osi przegubu wahań,  $M_{kl}$ ,  $M_{kp}$  — turbiny sprężarek silnika lewego oraz prawego;  $c_h$ ,  $c_v$ ,  $c_p$  — stałe sprężyn w przegubach: poziomych i pionowych łopat wirnika oraz wahań śmigła ogonowego;  $k_h$ ,  $k_v$ ,  $k_p$  — współczynniki tłumienia w tych przegubach. Indeksy dolne oznaczają:  $k$  — kadłuba,  $w$  — wirnika,  $s$  — śmigła ogonowego,  $sil$  — silników,  $st$  — statecznika poziomego. Indeksy górne:  $a$  — aerodynamiczny,  $g$  — grawitacyjny,  $n$  — napędowy.

Równania (44) ÷ (55) wraz z czterema równaniami więzów (10) ÷ (13) oraz zależnościami określającymi quasi-prędkości w funkcji prędkości uogólnionych (14), (16), (17) tworzą układ  $k+l = 42+2n+22$  równań ruchu. Mając dane wartości początkowe można wyznaczyć z niego  $42+2n+22$  nieznanymi funkcji czasu: quasi-prędkości i współrzędnych uogólnionych. W pracy [3] przedstawiono wszystkie składniki równań (44) ÷ (55).

## 8. Wnioski

Korzystając z metod mechaniki analitycznej układów nieholonomicznych zbudowano model matematyczny śmigłowca wyposażonego w układ sterowania automatycznego. Uwzględniono przy tym praktycznie wszystkie główne stopnie swobody śmigłowca jako układu mechanicznego oraz pełne charakterystyki masowe jego elementów. Analizując otrzymane ogólne równania ruchu przestrzennego stwierdzono występowanie silnego sprzężenia ruchów podłużnych i bocznych kadłuba śmigłowca w przestrzeni, a także

спрężeń рухів посzczególnych zespołów śmigłowца. Z tych powodów oddzielne analizowanie рухів podłużnych i poprzecznych śmigłowца jest dużym uproszczeniem i przy poważniejszych rozważaniach nie może być stosowane, co się jednak często zdarza. Oceniając wyniki badań własności dynamicznych izolowanej łopaty należy zwracać uwagę na to, że w rzeczywistości umocowana jest ona do piasty, wykonującej wraz z kadłубem złożone ruchy przestrzenne.

Otrzymano model matematyczny może być wykorzystany przy rozpatrywaniu wielu zagadnień dynamiki śmigłowców bądź ich zespołów. W przygotowywanych do publikacji pracach przedstawione zostaną:

- metodyka określenia parametrów ruchu ustalonego na przykładzie lotu poziomego i zawisu śmigłowца, wraz z przykładem obliczeniowym;
- badanie stateczności ustalonych stanów lotu i ilościowa analiza sprężeń рухів poszczególnych elementów śmigłowца.

#### Literatura cytowana w tekście

1. R. W. BALKE, R. L. BENNETT, T. M. GAFFEY, R. R. LYNN, *Tail Rotor Design, Part II: Structural Dynamics*, Journal of the American Helicopter Society, October 1970.
2. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
3. K. JANKOWSKI, *Modelowanie fizyczne i matematyczne własności dynamicznych sterowanego śmigłowца w ruchu przestrzennym*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1982.
4. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe — Mechanika Nr 32, Politechnika Warszawska, Warszawa 1975.
5. J. I. NEJMARK, N. A. FUFAJEW, *Dynamika układów nieholonomicznych*, PWN, Warszawa 1971.
6. H. L. PRICE, *Rotor Dynamics and Helicopter Stability, Part I ÷ V*, Aircraft Engineering, No. 3, 1963 ÷ No. 11, 1965.
7. D. SWEETING, *Some Design Aspects of the Stability Augmentation System for the WG-13 Rigid Rotor Helicopter*, AGARD Conference Proceedings, No. 86, 1971.
8. С. Ю. ЕСАУЛОВ, О. П. БАХОВ, И. С. ДМИТРИЕВ, *Вертолет как объект управления*, Машиностроение, Москва 1977.
9. В. А. КОЖЕВНИКОВ, *Автоматическая стабилизация вертолетов*, Машиностроение, Москва 1977.
10. М. Л. Миль и др. — *Вертолеты. Расчет и проектирование*, Кн. 1, Кн. 2'', Машиностроение, Москва 1967.

#### Резюме

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМОГО ВЕРТОЛЕТА В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Целью настоящей работы является построение полной математической модели вертолётa. В связи с этим учитывается практически все главные степени свободы вертолётa как механической системы. Кроме движения фюзеляжа в пространстве и несущего винта рассматривается также движение рулевого винта, стабилизатора и турбин двигателей. Интегральной частью модели вертолётa является система автоматического управления накладывающая на рассматриваемую механическую систему неинтегрируемые кинематические связи (неголономная система).

## Summary

MATHEMATICAL MODELLING OF THE CONTROLLED HELICOPTER  
IN THE THREE-DIMENSIONAL MOTION

The purpose of the work is to develop a unified mathematical model of a helicopter. All main degrees of freedom of a helicopter as a mechanical system are actually taken into account. The motion of fuselage in space and the motion of main rotor, tail rotor, tail plane, turbines is considered. An integral part of the mathematical model of a helicopter is the flight control system which imposes the constraints, specified by nonintegrable expressions involving the velocities (non — holonomic system), on considered mechanical system.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 czerwca 1984 roku*

---



## METODYKA WYZNACZANIA PARAMETRÓW RUCHU USTALONEGO ŚMIGŁOWCA NA PRZYKŁADZIE LOTU POZIOMEGO I ZAWISU

KRZYSZTOF JANKOWSKI (WARSZAWA)

*Politechnika Warszawska*

### 1. Wstęp

W locie ustalonym pilot stara się utrzymać jednostajny ruch śmigłowca na zadanym torze i w tym celu utrzymuje w stałym położeniu organy sterowania, nieznacznie i na krótki czas odchylając je dla przeciwdziałania zaburzeniom tego ruchu. Ustalonym stanom lotu odpowiadają właściwe położenia organów sterowania, wielkości kątów opisujących przestrzenne położenie śmigłowca i inne parametry ruchu. Wielkości te zmieniają się wraz ze zmianą prędkości, wysokości lotu, masy śmigłowca i innych czynników, ponieważ od nich zależą siły i momenty działające w ruchu ustalonym na śmigłowiec. Istotny wpływ na parametry ruchu ustalonego ma też wyważenie śmigłowca, gdyż przy jego zmianie zmieniają się odległości punktów przyłożenia poszczególnych sił od środka masy śmigłowca.

Zależności parametrów ruchu ustalonego od prędkości lotu nazywane są krzywymi równowagi, a ich graficzne przedstawienie — wykresami równowagi. Buduje się je dla każdego z ustalonych stanów lotu i dla różnych wartości głównych parametrów eksploatacyjnych. Krzywe równowagi pozwalają określić zapasy sterowania, kąty pochylenia, przechylenia i ślizgu śmigłowca na różnych etapach lotu, a także pewne charakterystyki stateczności statycznej i sterowności. Krzywe te otrzymuje się metodami obliczeniowymi, a następnie weryfikuje się je przez porównanie z rezultatami badań śmigłowców w locie [8].

Prezentowane w wielu publikacjach równania ruchu śmigłowca w prostej postaci zapewniają otrzymanie tylko jakościowych uwag o wielkościach parametrów ruchu ustalonego [1, 6 i in.]. Przy rozpatrywaniu wielu zagadnień (np. w przypadku analizy stateczności dynamicznej) niezbędna jest znajomość dokładnych wartości tych parametrów. W niniejszej pracy do wyprowadzenia równań ruchu ustalonego posłużą pełne równania dynamiczne śmigłowca [2, 3]. Ze względu na nieliniowy charakter i rozmiary układ równań algebraicznych opisujących ruch ustalony śmigłowca należy rozwiązywać wykorzystując metody numeryczne.

Równania ruchu ustalonego wyprowadzone zostaną dla lotu postępowego śmigłowca w płaszczyźnie pionowej, pokrywającej się z płaszczyzną symetrii kadłuba, w tym — dla

zawisu. Krzywe równowagi otrzymano dla lotu poziomego — stanu, w którym śmigłowiec najczęściej się znajduje oraz dla zawisu — podstawowego, najbardziej dla śmigłowca typowego stanu lotu. Wykresy równowagi dla lotu poziomego przedstawiono w zależności od prędkości lotu, a dla zawisu — zależnie od wyważenia podłużnego śmigłowca.

## 2. Uprozczone nieliniowe równania ruchu śmigłowca dla lotu postępowego i zawisu

Równania ruchu śmigłowca, wyprowadzone według ogólnych praw dynamiki [3, 7], są układem równań różniczkowych nieliniowych silnie sprzężonych, z okresowymi współczynnikami. Przy rozpatrywaniu szeregu zagadnień dynamiki lotu śmigłowca, takich jak równowaga w ruchu ustalonym, stateczność ruchu zaburzonego śmigłowca, równania te upraszcza się przy zachowaniu głównych członów nieliniowych do układu równań z nieokresowymi współczynnikami [1, 5, 6, 7]. W tym celu wprowadza się specjalne współrzędne uogólnione, będące pierwszymi harmonicznymi rozwinięć w szeregi Fouriera współrzędnych kątowych, opisujących ruchy wirnika nośnego i śmigła ogonowego, zmieniających się w funkcji kątów azymutu. Dla modelu matematycznego śmigłowca jednowirnikowego przedstawionego w [2, 3] zastosowano następujące podstawienia:

— kąty obrotu  $i$ -tej łopaty wirnika nośnego wokół przegubów poziomego i pionowego:

$$\beta_i = a_0 - a_1 \cos \psi_i - b_1 \sin \psi_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (1)$$

$$\xi_i = e_0 + e_1 \cos \psi_i + f_1 \sin \psi_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1); \quad (2)$$

— kąt obrotu  $j$ -tej łopaty śmigła ogonowego wokół przegubu wahań:

$$\zeta_j = c_0 - c_1 \cos \psi_{sj} - d_1 \sin \psi_{sj}, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1). \quad (3)$$

Nowe współrzędne  $a_0, a_1, \dots, d_1$  są funkcjami czasu, a nie zależą od kątów azymutów  $\psi_i$  i  $\psi_{sj}$ . Przy sumowaniu wyrażeń w równaniach ruchu po wszystkich łopatach, przy liczbach łopat  $n \geq 3$  oraz  $m \geq 3$ , redukują się funkcje kątów  $\psi_i$  i  $\psi_{sj}$  [5, 6].

Następne uproszczenia polegają na zastąpieniu funkcji trygonometrycznych kątów opisujących ruch wirnika, śmigła ogonowego i statecznika pierwszymi wyrazami ich rozwinięć w szereg Maclaurina:  $\sin \beta_i \approx \beta_i$ ,  $\cos \beta_i \approx 1 - \frac{1}{2} \beta_i^2$ , ... W równaniach ruchu opuszcza się człony powyżej drugiego rzędu względem małych wielkości.

Równania ruchu, wyprowadzone dla ogólnego przypadku [2, 3] względem środka masy kadłuba, dla równań uproszczonych wygodnie jest sprowadzić do innego punktu — środka masy śmigłowca w locie ustalonym. Momenty statyczne śmigłowca wzdłuż osi układu współrzędnych, mającego początek w środku masy, będą wtedy równe zeru.

Dla opisu rozkładu prędkości indukowanej przez wirnik nośny  $v_i$  wykorzystano następujące przybliżone zależności [5]:

— dla lotu postępowego:

$$v_i = v_0 \left( 1 - \frac{\frac{4}{3} \frac{U}{v_0 - W}}{\frac{6}{5} + \frac{U}{v_0 - W}} \cdot \frac{r}{R_w} \cos \psi_i \right), \quad (4)$$

gdzie:  $U, W$  — składowe podłużna i pionowa prędkości śmigłowca,  $r$  — aktualny promień,  $R_w$  — promień wirnika, a prędkość  $v_0$  związana jest ze składową wzdłuż osi  $O_2 z_2$  [3] ciągu wirnika równaniem:

$$-Z_w^a = 2\pi R_k^2 \rho [(W - v_0)^2 + U^2]^{\frac{1}{2}} v_0, \quad (5)$$

$R_k$  — promień aerodynamicznie czynnej części wirnika;

— dla zawisu i lotu pionowego z małymi prędkościami:

$$v_l = v_0 = \frac{1}{2} W + \frac{1}{2} \sqrt{W^2 - \frac{2Z_w^a}{\pi R_k^2 \rho}}. \quad (6)$$

Dla śmigła ogonowego przyjęto, że prędkość indukowana  $v_s$  jest stała na całej powierzchni śmigła i można ją wyliczyć z równań:

— dla lotu postępowego:

$$Y_s^a = 2\pi R_{ks}^2 \rho (U^2 + W^2 + v_s^2)^{\frac{1}{2}} v_s; \quad (7)$$

— dla zawisu:

$$v_s = \text{sign}(Y_s^a) \sqrt{\frac{|Y_s^a|}{2\pi R_{ks}^2 \rho}}, \quad (8)$$

gdzie  $Y_s^a$  jest składową ciągu śmigła ogonowego wzdłuż osi  $O_4 y_4$  [3].

Po uwzględnieniu powyższych ustaleń oraz dokonaniu często stosowanych w opisie aerodynamiki śmigłowców przekształceń [2, 7] układ równań różniczkowych ruchu, podany w [3], zapisano w postaci:

$$A \frac{dy}{dt} + B(y) = C(y), \quad (9)$$

gdzie:

—  $y$  [37] — wektor, którego składowymi są quasi-prędkości i współrzędne uogólnione:

$$y = \text{col}[U, V, W, P, Q, R, \omega, \dot{a}_0, \dot{a}_1, \dot{b}_1, \dot{e}_0, \dot{e}_1, \dot{f}_1, \dot{c}_0, \dot{c}_1, \dot{d}_1, \omega_{kl}, \omega_{kp}, x_g, y_g, z_g, \Phi, \theta, \Psi, a_0, a_1, b_1, e_0, e_1, f_1, c_0, c_1, d_1, \kappa, \eta, \varphi_a, \varphi_s]; = \quad (10)$$

—  $A$  [37 × 37] — macierz, której elementy są funkcjami składowych wektora  $y$ ;

—  $B(y), C(y)$  — funkcje wektorowe, zdefiniowane w następujący sposób:

$$B(y) = \text{col}[B_1(y), B_2(y), \dots, B_{37}(y)], \quad (11)$$

$$C(y) = \text{col}[C_1(y), C_2(y), \dots, C_{37}(y)]. \quad (12)$$

Elementy  $C_i(y)$  funkcji wektorowych  $C(y)$  odpowiadają działającym na układ siłom uogólnionym  $Q_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, 18$ ), dlatego należy opisać tylko 18 pierwszych elementów  $C_i(y)$ , pozostałe są tożsamościowo równe zeru.

Występujące wśród składowych wektora  $y$  kąty sterowania w ruchu podłużnym  $\varkappa$  oraz bocznym  $\eta$  poprzez ciągną układu sterowania wpływają na kąty pochylenia tarczy sterującej  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , od których zależą kąty ustawienia łopaty wirnika  $\varphi_i$  [2, 3, 7]:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \varkappa \sin \psi_0 + \eta \cos \psi_0, \\ \theta_2 &= \varkappa \cos \psi_0 - \eta \sin \psi_0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\varphi_i = \varphi_g + k a_0 + (\theta_1 - k b_1) \sin \psi_i + (\theta_2 - k a_1) \cos \psi_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

gdzie  $\psi_0$  — kąt wyprzedzenia sterowania,  $\varphi_g$  — kąt skoku ogólnego,  $k$  — współczynnik kompensatora wzniosu łopaty.

### 3. Równania ruchu ustalonego

Zgodnie z definicją [4] ruch układu jest ustalony, jeżeli współrzędne niecykliczne i odpowiadające współrzędnym cyklicznym prędkości mają stałe wartości. Wobec tego stan ruchu ustalonego bez zmian położenia kąтового kadłuba śmigłowca w przestrzeni charakteryzuje wektor  $y_0$  o następujących współrzędnych:

$$y_0 = \text{col}[U_0, V_0, W_0, 0, 0, 0, \omega_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \omega_{k10}, \omega_{kp0}, x_\theta, y_\theta, z_\theta, \Phi_0, \theta_0, \Psi_0, a_{00}, a_{10}, b_{10}, e_{00}, e_{10}, f_{10}, c_{00}, c_{10}, d_{10}, \alpha_0, \eta_0, \varphi_{\theta 0}, \varphi_{s0}], \quad (14)$$

gdzie wielkości z indeksem „0” nie zmieniają się wraz z czasem.

Po uwzględnieniu powyższego w równaniach dynamicznych ruchu, dla wyznaczenia parametrów ruchu ustalonego otrzymuje się z 18 pierwszych równań układu (9) układ równań algebraicznych, w którym występuje 22 niewiadome — stałe współrzędne wektora  $y_0$ . Wynika z tego, że 4 z tych wielkości mogą mieć dowolne wartości. W rozpatrywanym przypadku rozmaitość ruchu ustalonego ma więc wymiar 4 i jest równa liczbie więzów nieholonomicznych, nałożonych na układ [3]. Jest to zgodne z wynikami rozumowania przedstawionego w [4].

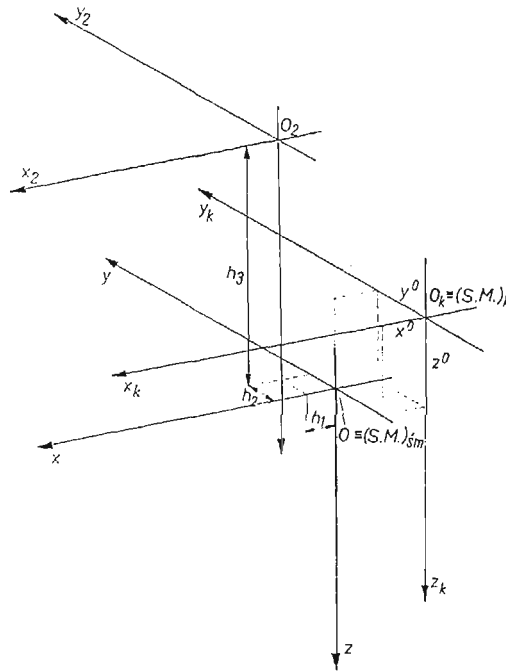
Dla konkretnych zastosowań równania ruchu ustalonego zostaną zmodyfikowane w następujący sposób. Prędkość kątowna wirnika  $\omega_0$  zostanie przyjęta jako dana dla określonego typu śmigłowca i rozpatrywanego stanu lotu, a jako niewiadomą przyjmie się moment napędowy  $N_{02}^n$ . Podobnie postąpi się z prędkościami turbin swobodnych  $\omega_{k10}$  i  $\omega_{kp0}$ , nie dołączając równań określających je — w stanie ustalonym wypadkowe momenty na nie działające muszą być równe zeru. Poza tym, w związku z koniecznością wyznaczenia wartości prędkości indukowanych przez wirnik nośny  $v_0$  i śmigło ogonowe  $v_s$ , do równań ruchu ustalonego dołącza się równania określające je: (5) i (7) lub (6) i (8). Aby obliczyć współrzędne położenia środka masy śmigłowca względem środka masy kadłuba  $x^0, y^0$  i  $z^0$ , należy dołączyć dodatkowo 3 równania, wynikające z przyrównania do zera momentów statycznych śmigłowca:

$$\begin{aligned} S_x^{sm} &= h_1 m_w + \frac{n}{2} S_h a_{00} a_{10} - h_4 m m_s - \frac{m}{2} S_{ys} c_{00} d_{10} - m_k x^0 = 0, \\ S_y^{sm} &= h_2 m_w + \frac{n}{2} S_h a_{00} b_{10} + h_5 m m_s - m S_{ys} c_{00} - m_k y^0 = 0, \\ S_z^{sm} &= -h_3 m_w - n S_h a_{00} - h_6 m m_s + \frac{m}{2} S_{ys} c_{00} c_{10} - m_k z^0 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie  $m_w$  — masa wirnika,  $m_s$  — masa łopaty śmigła ogonowego,  $m_k$  — masa kadłuba,  $h_1, h_2, \dots, h_6$  — odpowiednie odległości od środka masy śmigłowca (rys. 1),  $S_h$  — moment statyczny łopaty wirnika względem osi przegubu poziomego,  $S_{ys}$  — moment statyczny łopaty śmigła względem osi przegubu wahań.

Dla przypadku lotu poziomego warunki pozwalające wyznaczyć 4 wielkości dowolne można sformułować w następujący sposób:

- z założenia, że lot odbywa się bez ślizgu, składowa boczna prędkość śmigłowca  $V_0 = 0$ ,
- z założenia, że wektor prędkości  $V_c$  ma stały kierunek i moduł, składowe prędkości liniowej śmigłowca  $U_0$  i  $W_0$  i kąty quasi-eulerowskie zostaną w następujący sposób zwi-



Rys. 1. Położenie środka masy śmigłowca względem środka masy kadłuba

zane z prędkościami w układzie inercyjnym:

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= U_0 \cos \theta_0 \cos \Psi_0 + W_0 (\cos \Phi_0 \sin \theta_0 \cos \Psi_0 + \sin \Phi_0 \sin \Psi_0) = V_c, \\ \dot{y}_g &= U_0 \cos \theta_0 \sin \Psi_0 + W_0 \cos \Phi_0 \sin \theta_0 \sin \Psi_0 = 0, \\ \dot{z}_g &= -U_0 \sin \theta_0 + W_0 \cos \Phi_0 \cos \theta_0 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

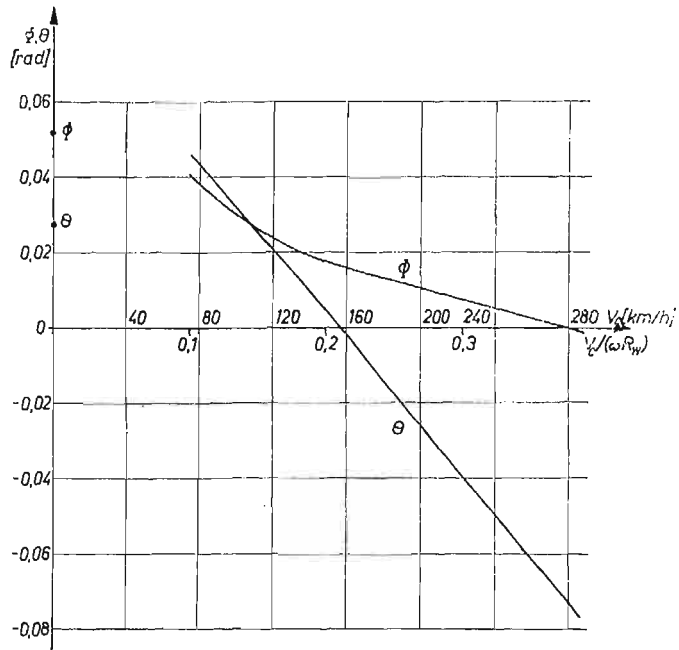
W efekcie dla lotu poziomego otrzymuje się układ 24 równań algebraicznych nieliniowych z 24 niewiadomymi — parametrami ruchu ustalonego. Parametry te są składowymi szukanego wektora  $z$ :

$$z = \text{col}[U_0, W_0, \Phi_0, \theta_0, \Psi_0, a_{00}, a_{10}, b_{10}, e_{00}, e_{10}, f_{10}, c_{00}, c_{10}, d_{10}, z_0, \eta_0, \varphi_{g0}, \varphi_{s0}, N_{02}^n, v_0, v_s, x^0, y^0, z^0]. \quad (17)$$

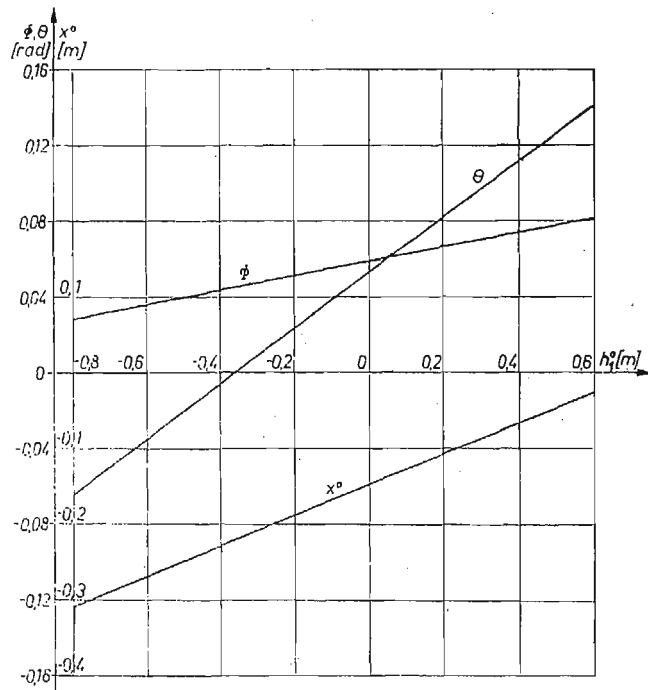
Dla stanu zawisu śmigłowca zakłada się zerowe wartości prędkości  $U_0$ ,  $V_0$  i  $W_0$  oraz można dowolnie przyjąć kąt odchylenia śmigłowca  $\Psi_0$ . Dla tego przypadku otrzymuje się układ 21 równań algebraicznych nieliniowych z 21 niewiadomymi — szukanymi parametrami ruchu śmigłowca w zawisie.

#### 4. Numeryczne wyznaczenie parametrów lotu poziomego oraz zawisu śmigłowca

W celu wyznaczenia parametrów ruchu ustalonego należało rozwiązać odpowiednie układy równań. Obliczeń numerycznych dokonano na maszynie cyfrowej CDC 6400 w systemie CYBER, wykorzystując własne programy. Dla rozwiązania układów równań



Rys. 2. Wykresy równowagi śmigłowca w locie poziomym — zmiany kątów przechylenia  $\Phi$  i pochylenia  $\theta$

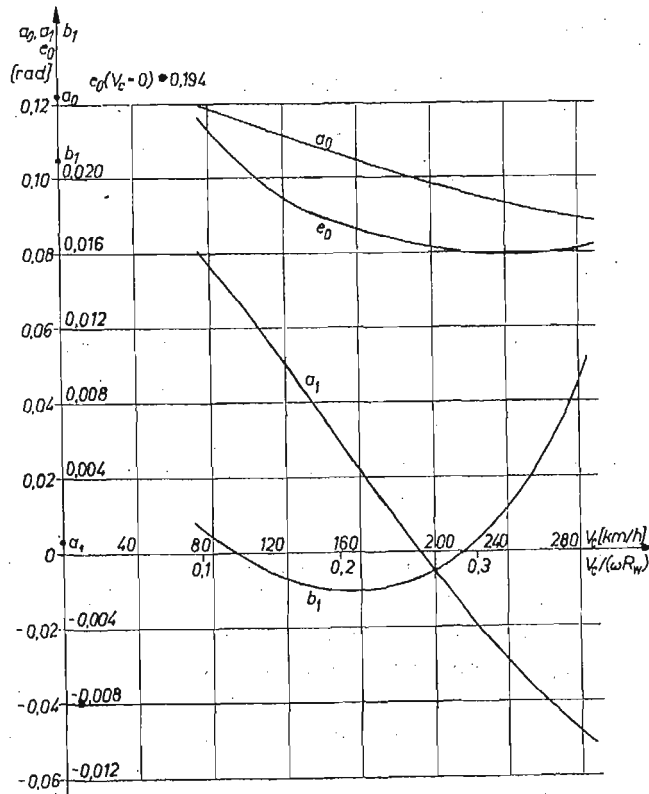


Rys. 3. Zależności kątów przechylenia  $\Phi$ , pochylenia  $\theta$  i odległości  $x^0$  od odległości  $h_1^0$  dla zawisu ( $V_c = 0$ )

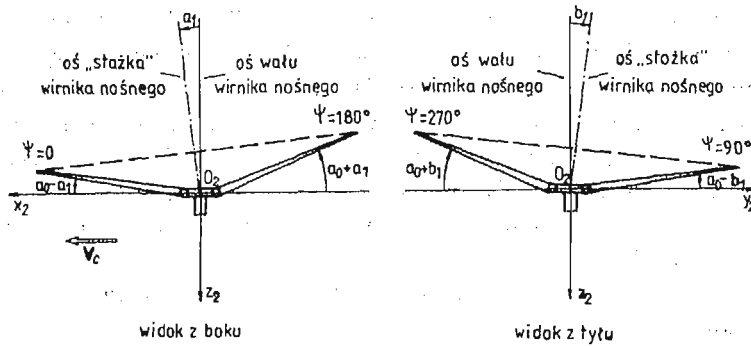
algebraicznych zastosowano procedurę NONLIQ z biblioteki systemu. Procedura ta dla obsługi procesu iteracyjnego rozwiązywania układu równań nie wymaga podania w jawnej postaci macierzy Jacobiego, co dla złożonych układów równań byłoby dość pracochłonne. Dla zapewnienia szybkiej zbieżności procesu obliczeniowego wartości początkowe szukanych parametrów ruchu ustalonego starano się podawać jak najdokładniej, wykorzystując dostępne wyniki badań śmigłowców w locie. Należy jednak zaznaczyć, że dla danego problemu prawidłowe rozwiązania osiągnano również przy podaniu dowolnych danych początkowych.

Krzywe równowagi wyznaczono dla modelu fizycznego śmigłowca klasy Mi-6. Śmigłowiec ten wyposażony jest w śmigło ogonowe z przegubowym mocowaniem łopat wirnika nośnego (liczba łopat  $n = 5$ ) i śmigła ogonowego (liczba łopat  $m = 4$ ). Jego parametry są stosunkowo dobrze opisane w literaturze [8, 9].

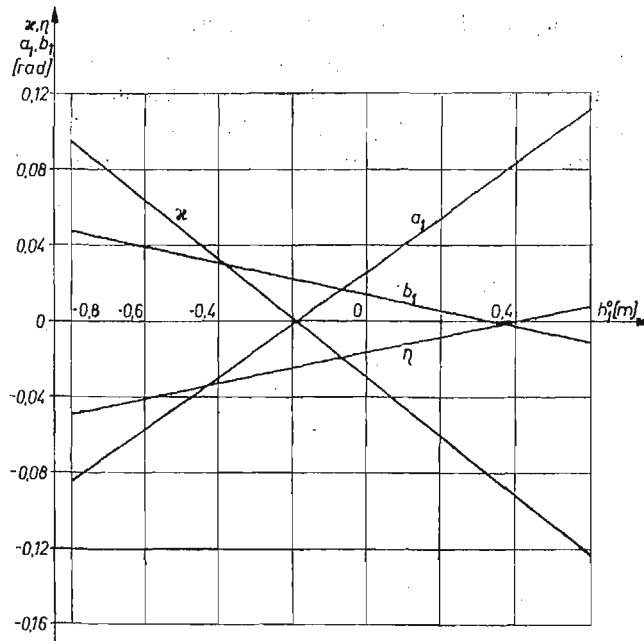
Spośród wyników obliczeń dla lotu poziomego 24 parametrów ruchu ustalonego dla różnych wartości prędkości lotu  $V_c$  wybrano szereg charakterystycznych wielkości i przedstawiono je na wykresach. Dla przypadku zawisu obliczano 21 parametrów ruchu ustalonego w zależności od odległości  $h_1^0$  od środka masy kadłuba do osi wirnika nośnego w kierunku równoległym do osi  $Ox$ . Przy zmianie  $h_1^0$  zmienia się odległość od środka masy śmigłowca do osi wirnika  $h_1 = h_1^0 - x^0$  (rys. 1), czyli wyważenie podłużne śmigłowca.



Rys. 4. Wpływ prędkości lotu na współczynniki kątowe wirnika nośnego:  $a_0, a_1, b_1$  i  $e_0$



Rys. 5. Położenie kątowe „stożka” opisywanego przez łopaty wirnika nośnego



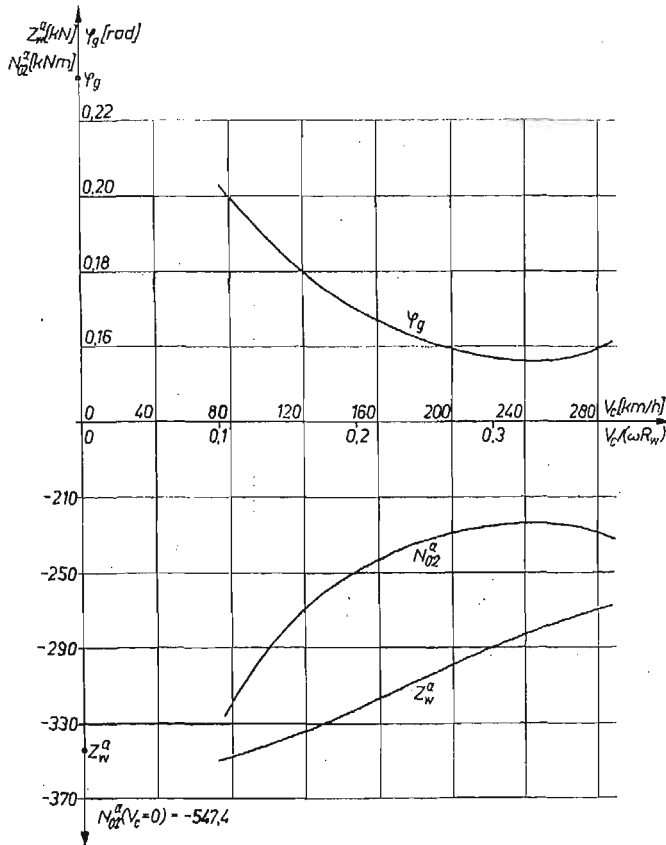
Rys. 6. Wykresy współrzędnych kątowych wirnika  $a_1$  i  $b_1$  oraz kątów sterowania  $\alpha$  i  $\eta$  w zależności od odległości  $h_1^0$ ,  $V_c = 0$

Na wykresach równowagi dla lotu poziomego umieszczono również wartości odpowiednich parametrów w zawisie ( $V_c = 0$ ), przy tej samej wartości odległości  $h_1^0 = -0,17$  [m]. Punkty na wykresach odpowiadające zawisowi nie starano się łączyć z punktami dla  $V_c \geq 80$  [km/h] rozmyślnie, gdyż aerodynamika śmigłowca, a szczególnie kadłuba jest w zawisie całkowicie odmienna od lotu poziomego. Przy prędkościach poniżej  $80 \div 100$  [km/h] występuje strefa przejściowa, trudna do opisu analitycznego, który dałby wiarygodne wyniki.

W niniejszym rozdziale opuszczono stosowane w równaniach (14)÷(17) indeksy 0 przy oznaczeniach parametrów ruchu ustalonego.



Na rys. 2 pokazano wykres zmian z prędkością lotu quasi-eulerowskich kątów  $\Phi$  — przechylenia i  $\theta$  — pochylenia. Jak można zauważyć, wraz ze wzrostem prędkości następuje charakterystyczne pochylenie „nosa” śmigłowca do dołu (kąt  $\theta$  maleje), co wynika z niezbędnej dla równowagi zmiany podłużnych sił i momentów, działających na śmigłowiec. Największy dodatni kąt pochylenia występuje przy małych prędkościach lotu oraz przy tylnym wyważeniu, gdy  $h_1^0$  rośnie. Widać to na rys. 3, gdzie dla przypadku zawisu pokazano zależności (w przybliżeniu liniowe) kątów  $\Phi$  i  $\theta$  od wyważenia podłużnego.

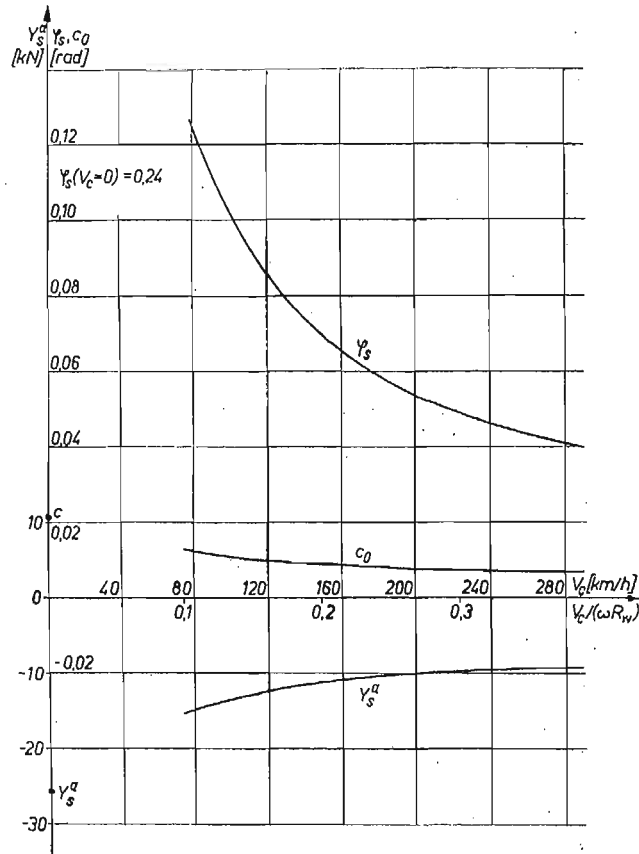


Rys. 7. Wykresy zmian z prędkością lotu składowej ciągu wirnika  $Z_w^a$ , momentu aerodynamicznego  $N_{\sigma_2}^a$  oraz kąta skoku ogólnego  $\varphi_g$ .

Z pochyleniem kadłuba śmigłowca związana jest zmiana kąta pochylenia „stożka” opisywanego przez łopaty wirnika nośnego. Rys. 4 przedstawia zmianę wraz z prędkością lotu współczynników związanych z wirnikiem nośnym:  $a_0$  — stałego względem azymutu składnika kąta wzniosu łopat  $\beta_i$  (1),  $a_1$  i  $b_1$  — cyklicznych (z  $\cos \psi_i$  i  $\sin \psi_i$ ) zmian tego kąta oraz  $e_0$  — stałego składnika kąta  $\xi_i$  obrotu łopat wokół przegubów pionowych (2). Na rys. 5 poglądowo pokazano położenie katowe „stożka” wirnika nośnego. Z wykresu na rys. 4 wynika, że wraz ze wzrostem prędkości następuje odchylenie „stożka” do tyłu. Ponieważ jednocześnie kąt  $\theta$  maleje, oś „stożka” cały czas w locie poziomym jest odchyłona

w kierunku lotu. W zawisie natomiast (rys. 6) przy przesuwaniu środka masy kadłuba śmigłowca do tyłu „stożek” wirnika pochyla się do przodu ( $\alpha_1$  rośnie). Aby to osiągnąć, należy drążek sterowy ustawić w nowym położeniu, dalej „od siebie” — do przodu. Wskazuje na to zmiana (zmniejszanie się) kąta sterowania w ruchu podłużnym  $\alpha$  (rys. 6, równania (13)).

Analiza zmian parametrów ruchu bocznego śmigłowca prowadzi do wniosku, że dla szerokiego zakresu prędkości równowaga w locie bez ślizgu możliwa jest tylko z dodatnim



Rys. 8. Wykresy zmian z prędkością lotu wielkości związanych ze śmigłem ogonowym: kąta ustawienia łopat  $\varphi_s$ , składowej ciągu  $Y_s^a$  oraz kąta  $c_0$  — niecyklicznej składowej kąta wahań łopat  $\zeta_J$

kątem przechylenia  $\Phi$  (rys. 2), co jest zgodne z wynikami badań w locie śmigłowców jednowirnikowych [8, 9]. Lot bez przechylenia natomiast odbywa się przy występowaniu pewnego ślizgu. Maksymalne przechylenie kadłuba śmigłowca występuje przy małych prędkościach lotu oraz w zawisie, szczególnie przy tylnym wyważeniu (rys. 3). Na wykresie na rys. 4 widać, że gdy kąt przechylenia kadłuba śmigłowca na dużych prędkościach maleje, „stożek” wirnika nośnego odchyła się w prawo ( $b_1$  rośnie) dla niezbędnego zrównoważenia ciągu śmigła ogonowego. W zawisie, przy zmianie wyważenia na tylne, wraz ze wzrostem przechylenia kadłuba maleje kąt  $b_1$  odchylenia „stożka” wirnika w prawo

(rys. 5, rys. 6). Niezbędne dla tego jest umieszczenie drążka sterowego w nowych położeniach, bardziej na lewo: kąt sterowania w ruchu bocznym  $\eta$  przyjmuje coraz większe wartości.

Jak można zaobserwować, zmiany parametrów ruchu podłużnego śmigłowca powodują duże zmiany parametrów ruchu bocznego, co jest ilościowym potwierdzeniem wcześniej zaobserwowanego sprzężenia tych ruchów [3].

Na rys. 7 wykreślono zależność składowej  $Z_w^a$  siły nośnej wirnika od prędkości lotu  $V_c$ . W miarę wzrostu prędkości, wskutek odciążania wirnika przez skrzydło, potrzebna siła nośna wirnika maleje. Na tymże rysunku pokazane są wykresy zmian momentu aerodynamicznego wirnika względem jego osi obrotu  $N_{o_2}^a$  i kąta skoku ogólnego łopat wirnika  $\varphi_a$ . Można zauważyć przyjmowanie przez te parametry charakterystycznych minimów, odpowiadających prędkości ekonomicznej.

Wykresy parametrów związanych ze śmigłem ogonowym przedstawione są na rys. 8. Jak widać, wraz ze wzrostem prędkości maleje potrzebny ciąg śmigła  $|Y_s^a|$  oraz kąt ustawienia łopat śmigła  $\varphi_s$ , m.in. w związku ze wzrostem siły bocznej statecznika pionowego — odpowiednio uprofilowanej części belki ogonowej. W rzeczywistości dla dużych prędkości, ze względu na wejście statecznika pionowego i śmigła ogonowego w strefę zawirowań od wirnika nośnego, pogarszają się ich warunki pracy i należy zwiększyć kąt skoku śmigła  $\varphi_s$ . Widać tu przy dużych prędkościach lotu niedostatek przyjętego modelu opływu śmigła ogonowego i statecznika pionowego.

## 5. Wnioski

W pracy przedstawiono metodykę wyznaczania parametrów ruchu ustalonego śmigłowca dla lotu postępowego i zawisu. Równania ruchu ustalonego wyprowadzono z ogólnych równań dynamicznych ruchu przestrzennego śmigłowca, bez rozdzielania ruchu obiektu na ruchy podłużne i poprzeczne — ze względu na ich silne sprzężenie.

Otrzymane z rozwiązania układu równań ruchu ustalonego krzywe równowagi mogą być wykorzystywane dla rozwiązywania problemów projektowych bądź eksploatacyjnych. Dla tego celu należy je każdorazowo weryfikować przez porównanie z odpowiednimi wynikami badań śmigłowców w locie.

### Literatura cytowana w tekście

1. A. R. S. BRAMWELL, *Helicopter dynamics*, London 1976.
2. K. JANKOWSKI, *Modelowanie fizyczne i matematyczne własności dynamicznych sterowanego śmigłowca w ruchu przestrzennym*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1982.
3. K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, *Modelowanie matematyczne automatycznie sterowanego śmigłowca w ruchu przestrzennym*, Mech. Teoret. i Stos., **23**, 3-4, 1985.
4. J. I. NEJMARK, N. A. FUFAJEW, *Dynamika układów nieholonomicznych*, PWN, Warszawa 1971.
5. P. R. PAYNE, *Helicopter Dynamics and aerodynamics*, Pitman, London 1959.
6. H. L. PRICE, Rotor dynamics and helicopter stability, Part III: Solution of the trim equations, Aircraft Eng., No. 11, No. 12, 1963.
7. С. Ю. Еслаулов, О. П. Бахов, И. С. Дмитриев, *Вертолет как объект управления*, Машиностроение, Москва 1977.

8. В. Ф. Ромасевич, Г. А. Самойлов, *Практическая аэродинамика вертолетов*, Восниздат, Москва 1980.
9. М. С. Яцунович, *Практическая аэродинамика вертолета Ми-6*, Транспорт, Москва 1969.

#### Резюме

### МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВЕРТОЛЕТА С ПРИМЕНЕНИЕМ К ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ПОЛЕТУ И ВИСЕНИЮ

В работе представлено методику построения балансирующих кривых для установившихся режимов полета вертолета. Уравнения установившегося движения выведены из общих динамических уравнений пространственного движения вертолета. Установлено, что для полного описания установившегося прямолинейного полета нужно 24 нелинейных алгебраических уравнений с 24-ю неизвестными (параметрами установившегося движения), а для висения — 21 уравнений с 21 — ими неизвестными. Приводятся результаты примерных вычислений для вертолета класса Ми — 6.

#### Summary

### METHODS OF DETERMINATION OF THE HELICOPTER STEADY MOTION PARAMETERS WITH EXEMPLARY APPLICATION TO HORIZONTAL FLIGHT AND HOVER

In the paper the methods of construction of the equilibrium curves are presented. Equations of steady motion are derived from general dynamical equations of a helicopter three-dimensional motion. It is shown that a complete description of steady rectilinear motion demands the use of twenty-four equations in twenty-four parameters, and for hover — twenty-one equations in twenty-one parameters. The exemplary numerical results for the Mi-6 helicopter are presented.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 28 czerwca 1984 roku*

## BADANIE STATECZNOŚCI USTALONYCH STANÓW LOTU STEROWANEGO ŚMIGŁOWCA I ANALIZA SPRZEŻEŃ RUCHÓW PRZESTRZENNYCH JEGO ELEMENTÓW

KRZYSZTOF JANKOWSKI (WARSZAWA)  
JERZY MARYNIAK

*Politechnika Warszawska*

### 1. Wstęp

Stan lotu śmigłowca, ustalony przez pilota odpowiednim ustawieniem organów sterowniczych, może być naruszony różnymi zewnętrznymi zaburzeniami: podmuchem wiatru, zmianą wyważenia, przypadkowym ruchem drążka sterowego, wystrzeleniem raket itp. Praktyka pokazuje, że śmigłowce jednowirnikowe z wirnikami nośnymi z przegubowym zamocowaniem łopat nie są stateczne w szerokim zakresie prędkości i wysokości lotu [10, 11, 12]. Dla polepszenia charakterystyk pilotażowych śmigłowców stosuje się specjalne urządzenia automatyczne. W przypadku podłączenia ich według schematu różnicowego odchylenie organu sterowniczego jest sumą odchylenia drążka sterowego i sygnału urządzenia automatycznego. Sterując śmigłowcem wyposażonym w odpowiednio dobrany układ sterowania automatycznego pilot ma do czynienia ze statecznym obiektem latającym.

Przedmiotem prezentowanej pracy jest badanie stateczności lotu poziomego i zawisu śmigłowca jednowirnikowego, a także analiza sprzężeń pomiędzy ruchami jego poszczególnych elementów oraz ruchami określanymi jako podłużne i boczne. Model matematyczny śmigłowca, którego stateczność rozwiązań będzie badana, przedstawiono w pracach [5, 6, 7]. W wyprowadzonych tam równaniach uwzględniono ruchy względem kadłuba śmigłowca takich jego elementów, jak łopaty wirnika nośnego, łopaty śmigła ogonowego, statecznika i turbiny silników, biorąc pod uwagę nieinercjalność układów odniesienia, względem których badany jest ruch. W równaniach ruchu śmigłowca uwzględniono ponadto wpływ układu sterowania automatycznego, którego oddziaływanie na śmigłowca wyrażone jest więzami kinematycznymi.

### 2. Równania różniczkowe ruchu zaburzonego

Wyprowadzone w [5, 6] nieliniowe równania różniczkowe ruchu, po wyłączeniu równań opisujących ruch turbin swobodnych (ze względu na słabe sprzężenie z pozostałymi równaniami), można zapisać w następujący sposób:

$$A \frac{dy}{dt} + B(y) = C(y), \quad (1)$$

gdzie:

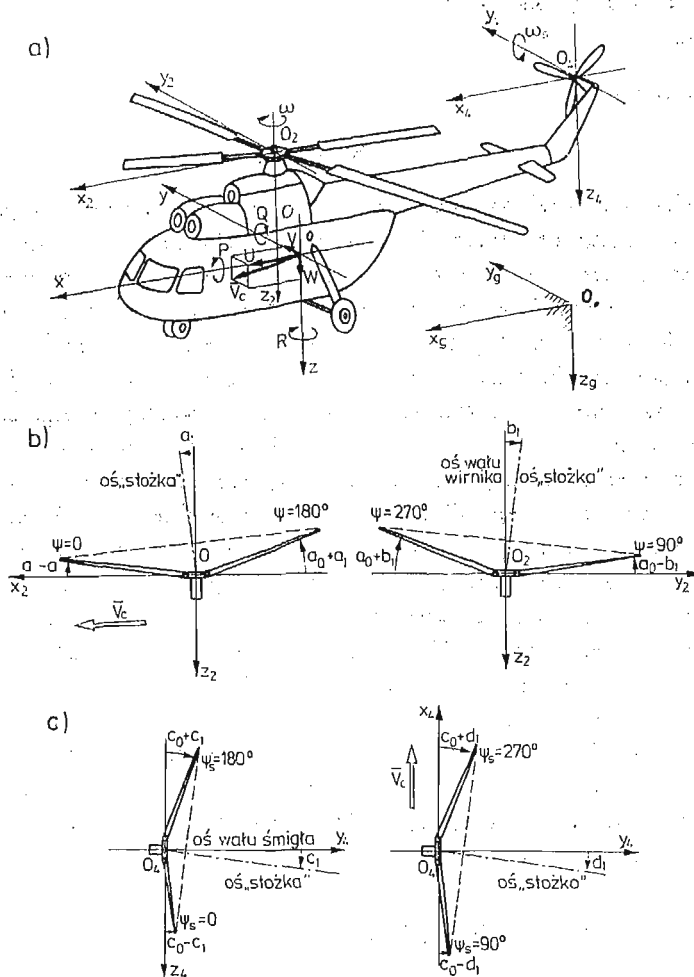
—  $y[35]$  — wektor, którego składowymi są quasi-prędkości i współrzędne uogólnione (opisane w [6, 7] oraz poglądowo pokazane na rys. 1):

$$y = \text{col}[U, V, W, P, Q, R, \omega, \dot{a}_0, \dot{a}_1, \dot{b}_1, \dot{e}_0, \dot{e}_1, \dot{f}_1, \dot{c}_0, \dot{c}_1, \dot{d}_1, x_a, y_a, z_a, \Phi, \theta, \Psi, a_0, a_1, b_1, e_0, e_1, f_1, c_0, c_1, d_1, \alpha, \eta, \varphi_a, \varphi_s]; \quad (2)$$

—  $A[35 \times 35]$  — macierz, której elementy są funkcjami składowych wektora;

—  $B(y), C(y)$  — funkcje wektorowe z ciągłymi drugimi pochodnymi względem  $y$ . Stan ruchu ustalonego charakteryzuje wektor  $y_0$ , spełniający równanie wektorowe:

$$B(y_0) = C(y_0). \quad (3)$$



Rys. 1. Schemat śmigłowca z zaznaczonymi parametrami występującymi w opisie jego ruchu: a) widok ogólny, b) widoki z boku i z tyłu „stożka” opisywanego przez łopaty wirnika nośnego, c) widoki z tyłu i z góry „stożka” łopat śmigła ogonowego

Wartości stałych współrzędnych tego wektora oraz pozostałych parametrów ruchu ustalonego wyznacza się z równań ruchu ustalonego [6].

Położmy

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0, \quad (4)$$

gdzie  $\mathbf{x}$  oznacza odchylenie rozwiązania  $\mathbf{y}$  od położenia równowagi opisanego wektorem  $\mathbf{y}_0$ .

Funkcje wektorowe z równania (1) można rozwinąć w szereg Taylora do postaci [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{y}) - \mathbf{B}(\mathbf{y}) &= \mathbf{C}(\mathbf{y}_0) - \mathbf{B}(\mathbf{y}_0) + \mathbf{C}'(\mathbf{y}_0)\mathbf{x} - \mathbf{B}'(\mathbf{y}_0)\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|) = \\ &= (\mathbf{D} - \mathbf{F})\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}'(\mathbf{y}_0) = [C_{ik}(\mathbf{y}_0)], \quad (6)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}'(\mathbf{y}_0) = [B_{ik}(\mathbf{y}_0)], \quad (7)$$

oznaczają macierze Jacobiego.

Po podstawieniu (4) i (5) do równań (1) otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu zaburzonego:

$$\mathbf{A}_0 \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{D} - \mathbf{F})\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|), \quad (8)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0}. \quad (9)$$

Pochodne sił uogólnionych obliczono na drodze analitycznej, poprzez różniczkowanie odpowiednich wyrażeń. Są one umieszczone w 16-tu pierwszych wierszach macierzy  $\mathbf{D} = \mathbf{C}'(\mathbf{y}_0)$ . Przy obliczaniu pochodnych uwzględniono, że składowa prędkości indukowanej przez wirnik  $v_0$  zależy od składowych prędkości liniowej  $U$ ,  $V$ ,  $W$  i kątowej  $R$  śmigłowca oraz od prędkości obrotowej wirnika  $\omega$ , a prędkość indukowana przez śmigło ogonowe  $v_s$  zależy od prędkości  $U$ ,  $V$ ,  $W$  i  $Q$  oraz od prędkości obrotowej śmigła  $\omega_s$ . W dodatkach do pracy [5] podano wszystkie elementy macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{F}$ .

### 3. Model matematyczny badania stateczności dynamicznej obiektu śmigłowca — układ sterowania

Zakładając, że stała macierz  $\mathbf{A}_0$  w równaniu różniczkowym ruchu zaburzonego (8) jest nieosobliwa i mnożąc lewostronnie równanie (8) przez  $\mathbf{A}_0^{-1}$  otrzymuje się:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{F})\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|). \quad (10)$$

Wprowadzając macierz

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{F}), \quad (11)$$

zwaną też macierzą stanu, równanie różniczkowe ruchu zaburzonego można zapisać w postaci:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{G}\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|). \quad (12)$$

Dla badania stateczności w sensie Lapunowa położenia równowagi układu, którego ruch opisywany jest równaniem różniczkowym autonomicznym (1) wykorzystano twierdzenia podane w [2]. Zmienna  $x$  wyznaczająca odchylenie rozwiązania  $y$  od stanu ruchu ustalonego  $y_0$  spełnia równanie różniczkowe (12). Jeśli wszystkie wartości własne macierzy  $G = A_0^{-1}(D-F)$  mają ujemne części rzeczywiste, to stan równowagi  $y = y_0$  jest asymptotycznie stateczny przy  $t \rightarrow \infty$ .

Ponieważ rozpatrywany układ jest układem nieholonomicznym [7] przy badaniu stateczności w sensie Lapunowa, otrzyma się pewną liczbę zerowych wartości własnych macierzy stanu [9]. Układy nieholonomiczne mają pewne różnice położenia równowagi lub różnice ruchu ustalonego [6]. W związku z tym równania zlinearyzowane tych układów należy badać w otoczeniu różnic położenia równowagi lub ruchu ustalonego. Jak wykazano w [9], zerowe wartości własne macierzy stanu wynikają z tej różnicy i nie są równoznaczne z przypadkiem krytycznym w teorii stateczności.

Dla rozpatrywanego modelu matematycznego śmigłowca wymiar różnicy ruchu ustalonego jest równy 4 [6]. Należy więc spodziewać się 4 zerowych wartości własnych, których nie należy brać pod uwagę, a stateczność oceniać według pozostałych wartości własnych macierzy stanu.

Przy pomocy otrzymanych równań ruchu zaburzonego (12) można badać stateczność każdego punktu 4-wymiarowej powierzchni, odpowiadającej różnicy ruchu ustalonego. W zastosowaniach praktycznych bada się stateczność wybranych punktów tej powierzchni, ważnych z fizycznego punktu widzenia.

#### 4. Przykład obliczeniowy na badanie własności dynamicznych śmigłowca

Przy badaniu własności dynamicznych śmigłowca razem z wartościami własnymi  $\lambda_j$  macierzy stanu oblicza się odpowiadające im wektory własne  $w_j$ . Umożliwia to przeprowadzenie analizy modalnej, polegającej na obliczeniu częstości drgań i współczynników tłumienia oraz wyznaczeniu postaci drgań. W efekcie można stwierdzić, które ruchy obiektu śmigłowca-układ sterowania są charakteryzowane przez kolejne wartości własne macierzy stanu.

Obliczeń numerycznych dokonano dla modelu fizycznego śmigłowca klasy Mi-6, którego charakterystyczne dane są następujące: masa — 35 000 [kg], liczba łopat wirnika nośnego — 5, promień wirnika — 17,5 [m], cięciwa przekroju łopaty o obrysie prostokątnym — 1 [m], prędkość obrotowa piasty wirnika — 11,8 [rad/s], liczba łopat śmigła ogonowego — 4, promień śmigła — 3,15 [m], cięciwa charakterystyczna przekroju łopaty śmigła — 0,5 [m], współczynnik sprzężenia kąta obrotu piasty śmigła z kątem obrotu piasty wirnika — 5,66. Dla opisu położenia równowagi, których stateczność jest badana, wykorzystano obliczone w [6] parametry lotu poziomego (dla różnych wartości prędkości lotu  $V_c$ ) oraz parametry zawisu śmigłowca — zależnie od wyważenia podłużnego.

##### Lot poziomy

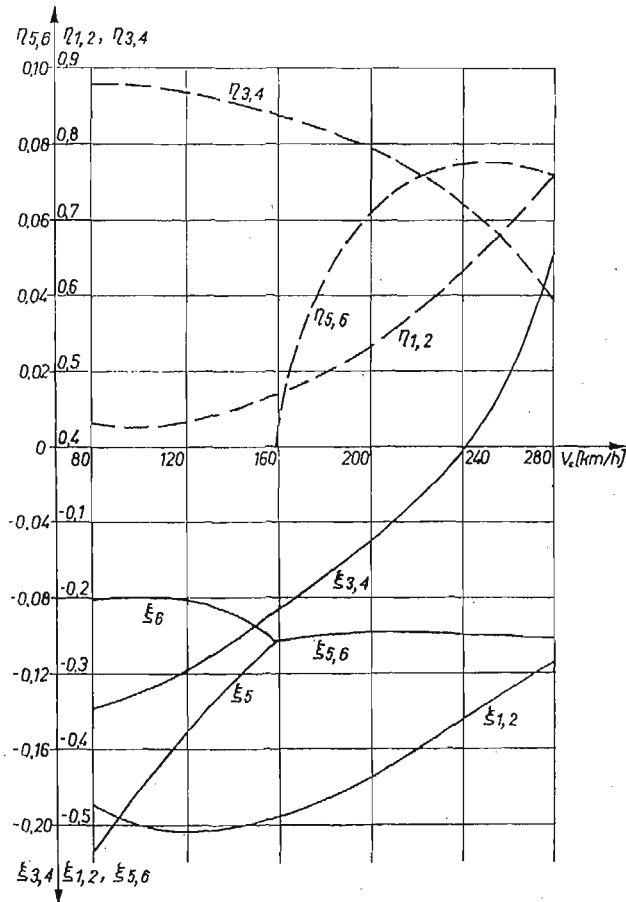
Spośród wartości własnych macierzy  $G[35 \times 35]$  4 są bliskie zera dla całego zakresu zmian prędkości lotu, co wynika z nieholonomiczności układu i jest zgodne z wcześniejszymi rozważaniami.



Jako charakterystyczne należy wskazać postacie odpowiadające ruchom: krótkookresowemu ( $\lambda_{1,2}$  i  $\lambda_{3,4}$ ) i długookresowemu ( $\lambda_{5,6}$ ) śmigłowca. Ponieważ jako dane przyjęto parametry ciężkiego śmigłowca, ze środkiem parcia kadłuba położonym za SM śmigłowca, postacie te nie zawierają ruchu pochylającego (zaburzeń prędkości  $Q$ ). Reprezentują one natomiast sprzężone ruchy pionowe i boczne śmigłowca ( $\lambda_{1,2}$ ,  $\lambda_{5,6}$ ). Jak widać na rys. 2, słabo tłumiony ruch oscylacyjny o częstości  $\eta_{3,4}$  na dużych prędkościach (powyżej 240 [km/h]) przekształca się w oscylacje rozbieżne — ruch śmigłowca staje się niestateczny.

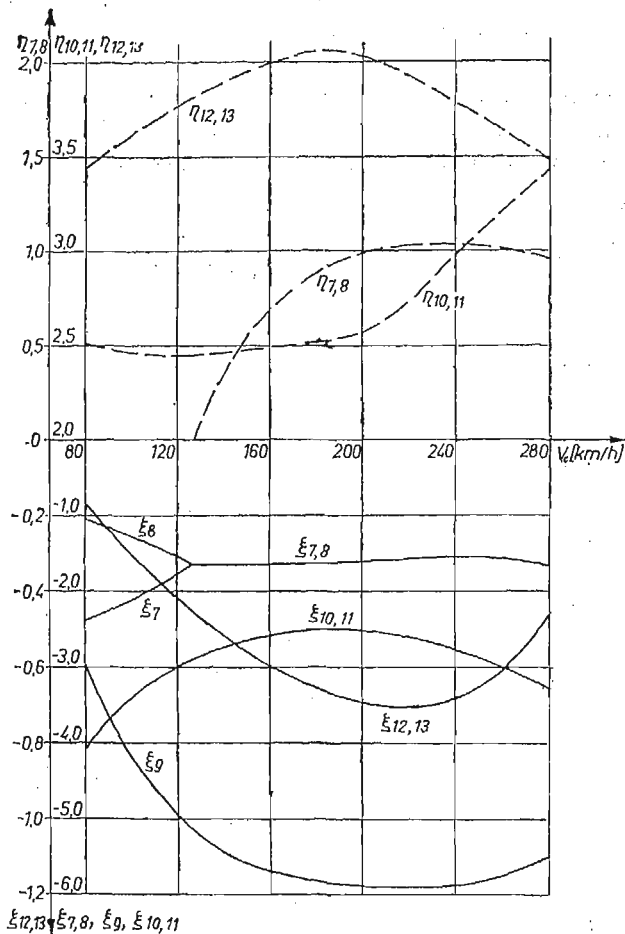
Wykresy parametrów ruchów bocznych śmigłowca, sprzężonych z ruchami pionowymi, umieszczono również na rys. 3. Są to ruchy oscylacyjne, z wyjątkiem  $\lambda_7$  i  $\lambda_8$ , które dla prędkości  $V_c < 130$  [km/h] reprezentują dwa ruchy aperiodyczne o współczynnikach tłumienia  $\xi_7$  i  $\xi_8$ .

Interesujące są postacie giroskopowe ruchów wirnika nośnego i śmigła ogonowego. Nie można tu wyodrębnić czystej postaci ruchu precesyjnego, mamy do czynienia raczej



Rys. 2. Częstości oscylacji  $\eta$  i współczynniki tłumienia  $\xi$  w funkcji prędkości lotu  $V_c$  dla ruchów krótko- i długookresowych śmigłowca

ze złożonym ruchem nutacyjnym:  $\lambda_{15,16}$  — zmiany kątów  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$  oraz prędkości pionowej  $W$ , częstość oscylacji zbliżona do prędkości obrotowej wirnika:  $\eta_{15,16} \approx \omega$ ;  $\lambda_{18,19}$  — zaburzenia współrzędnych  $a_1$  i  $b_1$ , silnie sprzężone z zaburzeniami współrzędnej  $c_1$  ruchu łopat śmigła ogonowego oraz prędkości przechylenia  $P$  całego śmigłowca,  $\eta_{18,19} \approx 3\omega$ ;



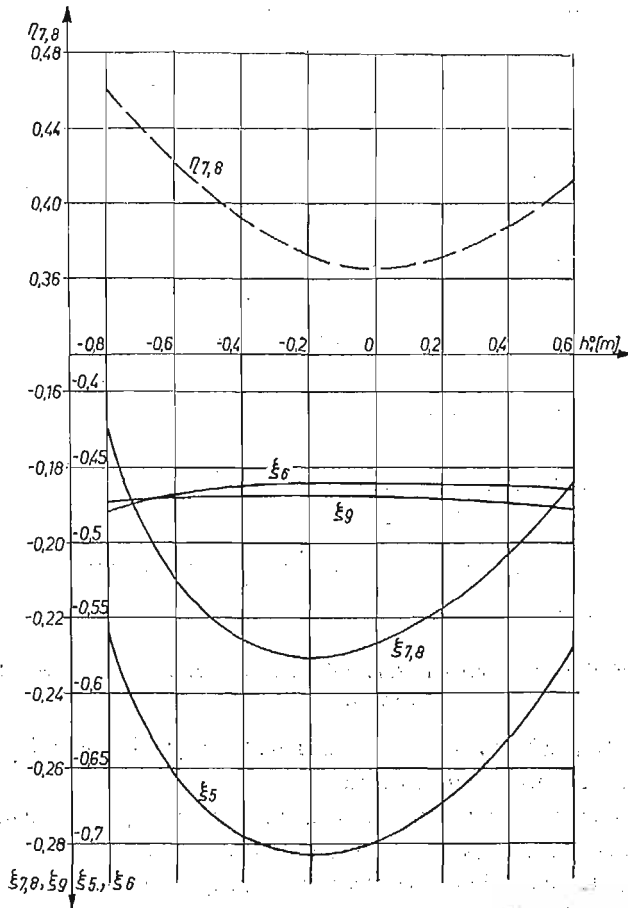
Rys. 3. Częstości oscylacji  $\eta$  i współczynniki tłumienia  $\xi$  dla ruchów bocznych śmigłowca, sprzężonych z ruchami pionowymi

$\lambda_{25,26}$  — oscylacje współrzędnej  $c_0$  ruchu łopat śmigła ogonowego wokół przegubu wahań,  $\eta_{25,26} \approx \omega_s = i_s \omega$ ;  $\lambda_{27,28}$  — zaburzenia współrzędnych  $c_1$  i  $d_1$ ,  $\eta_{27,28} \approx 2\omega_s$ ;  $\lambda_{29,30}$  — zaburzenia współrzędnych  $c_1$  i  $d_1$ ,  $\eta_{29,30} \ll \omega_s$ .

Bardzo ważne są zaobserwowane sprzężenia poszczególnych ruchów śmigłowca. Istnieją tu nie tylko sprzężenia ruchów podłużnych i bocznych kadłuba śmigłowca, ale i sprzężenia pomiędzy ruchami; kadłuba i wirnika; wirnika i śmigła ogonowego; kadłuba, wirnika i śmigła ogonowego.

## Zawis śmigłowca

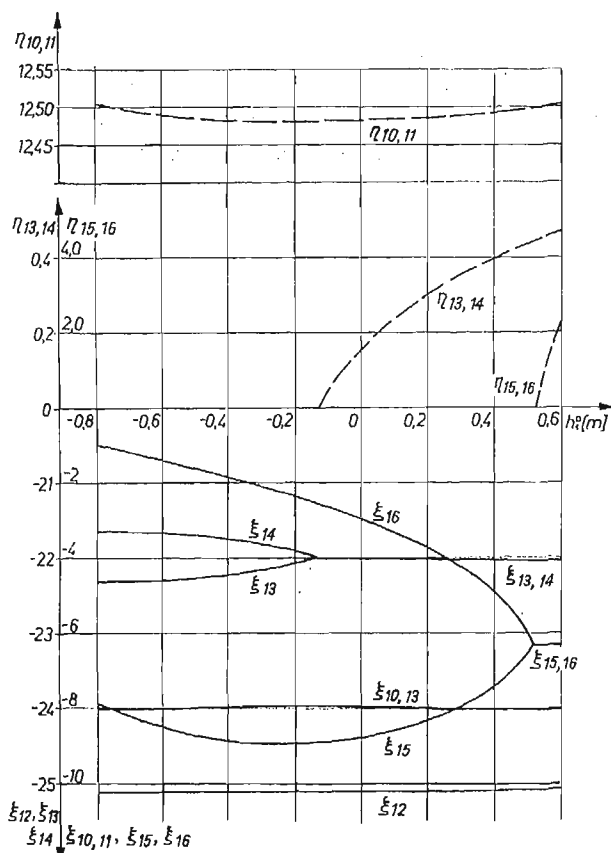
W zawisie, oprócz wskazanych przy analizie lotu poziomego postaci giroskopowych ruchów wirnika nośnego i śmigła ogonowego, interesujące są postacie ruchów całego śmigłowca w przestrzeni, przy czym są to zarówno ruchy przestrzenne środka masy śmigłowca, jak i sprzężone z nimi ruchy wokół środka masy. Do pierwszej grupy należą np.:



Rys. 4. Częstotliwości oscylacji  $\eta_j$  i współczynniki tłumienia  $\xi_j$  dla ruchów środka masy śmigłowca oraz wokół środka masy w funkcji odległości  $h_1^0$ ,  $V_c = 0$ .

$\lambda_{1,2}$  — tłumione oscylacje współrzędnych  $z_g$ ,  $x_g$  i  $y_g$ ;  $\lambda_{7,8}$  — oscylacje  $x_g$ ,  $y_g$  i  $z_g$ ;  $\lambda_9$  — aperiodyczne słabo tłumione ruchy środka masy:  $x_g$ ,  $y_g$ ,  $z_g$ ; a do drugiej grupy:  $\lambda_{3,4}$  — charakteryzuje oscylacje  $x_g$ ,  $y_g$ ,  $z_g$  i kąta pochylenia  $\theta$ ;  $\lambda_5$ ,  $\lambda_6$  — aperiodyczne, tłumione ruchy pionowe i postępowe śmigłowca, sprzężone z ruchem bocznym i pochyleniem  $\theta$ .

Na rys. 4 wykreślono w zależności od wyważenia podłużnego śmigłowca, charakteryzowanego odległością  $h_1^0$  od środka masy kadłuba do osi wirnika nośnego, części rzeczywiste i urojone wartości własnych odpowiadających ruchom całego śmigłowca:

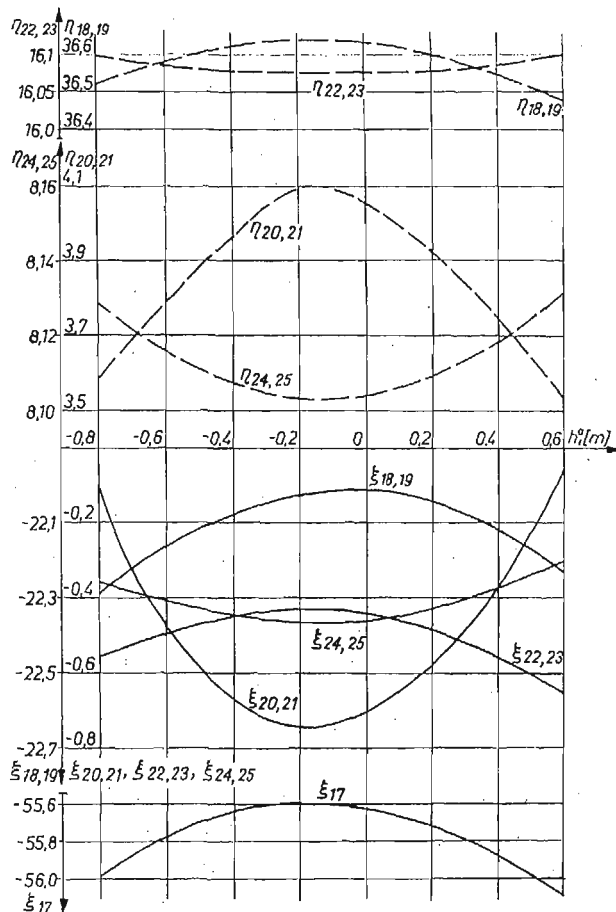


Rys. 5. Częstości oscylacji  $\eta_j$  i współczynniki tłumienia  $\xi_j$  dla sprzężonych ruchów wirnika nośnego i innych elementów,  $V_c = 0$

$\lambda_5$ ,  $\lambda_6$ ,  $\lambda_{7,8}$  i  $\lambda_9$ . Największe zmiany wykazują współczynniki tłumienia  $\xi_5$  i  $\xi_{7,8}$ , dążące na krańcach badanego przedziału do zera.

Dla ruchów związanych z wirnikiem (rys. 5), oprócz w przybliżeniu stałych współczynników tłumienia:  $\xi_{10,11}$ ,  $\xi_{12}$ ,  $\xi_{13,14}$  i częstości oscylacji  $\eta_{10,11}$ , występują też zmienne, jak np.  $\xi_{15}$  — współczynnik tłumienia charakteryzujący sprzężone ruchy wirnika, śmigła ogonowego i kadłuba śmigłowca. Przy większych ujemnych wartościach  $h_1^0$  ruch stanie się niestacyczny.

Z analizy postaci pozostałych ruchów związanych z wirnikiem (rys. 6) wynika, że przy wartościach  $h_1^0 > 0,6$  [m] lub  $h_1^0 < -0,8$  [m] ruch będzie niestacyczny — współczynnik tłumienia  $\xi_{20,21}$  przyjmie wartości dodatnie. Częstość oscylacji  $\eta_{20,21}$  przy mniejszym tłumieniu jest mniejsza niż przy maksymalnym. Interesujący jest fakt, że  $\lambda_{20,21}$  charakteryzuje głównie zaburzenia ruchu łopat wirnika nośnego wokół przegubów pionowych i ruchu pionowego SM śmigłowca. Podobnie wrażliwy na zmiany wyważenia podłużnego jest współczynnik tłumienia  $\xi_{24,25}$ , również charakteryzujący m.in. ruchy związane z zaburzeniami kątów obrotów łopat wirnika nośnego wokół przegubów pionowych, jak i ruchy boczne i postępowe SM śmigłowca.



Rys. 6. Częstości oscylacji  $\eta$ , i współczynniki tłumienia  $\xi$ , dla pozostałych ruchów związanych z wirnikiem,  $V_c = 0$

### 5. Wnioski

Analiza otrzymanych w pracy równań oraz wyników obliczeń numerycznych pozwoliła wyjaśnić szereg istotnych cech dynamiki lotu automatycznie sterowanego śmigłowca. Stwierdzono, że części rzeczywiste wartości własnych macierzy stanu, charakteryzujące stateczność ruchu śmigłowca, doznają znacznych zmian przy zmianach prędkości lotu. Wynika z tego, że układ sterowania automatycznego ze stałymi wartościami współczynników wzmocnienia nie może podwyższać stateczności śmigłowca w całym zakresie zmian prędkości lotu. W zawisie zaobserwowano zmiany wartości własnych, charakteryzujących zarówno ruchy podłużne, jak i boczne, w zależności od wyważenia podłużnego śmigłowca.

Występowanie znacznych sprzężeń ruchów podłużnych i poprzecznych kadłuba śmigłowca wywołuje potrzebę włączenia do każdego z kanałów sygnałów proporcjonalnych do parametrów wszystkich ruchów, co pozwoli uprzedzić zaburzenia wynikające ze sprzężeń i polepszyć jakość stabilizacji. Ten sposób sterowania stosuje się w śmigłowcach

produkowanych w USA, co sugerują m.in. prace [1, 8]. Tymczasem, jak wynika z dostępnych źródeł [10, 11], w eksploatowanych w Polsce w latach 60-ych i 70-ych śmigłowcach stosuje się prawa sterowania, nie zawierające sygnałów sprzęgających.

Rozważenia wymaga sugerowana w pracy [3] idea włączenia do praw sterowania śmigłowcem parametrów ruchu kąтового łopat wirnika nośnego (pochylenia ( $a_1$  i  $\dot{a}_1$ ) oraz przechylenia ( $b_1$  i  $\dot{b}_1$ )) „stożka” opisywanego przez łopaty wirnika, rys. 1), z powodu sprzężenia ruchów wirnika i kadłuba śmigłowca. Hall i Bryson intuicyjnie podważyli twierdzenie o szerokim rozdzielaniu („large separation”) charakterystyk częstotliwościowych wirnika od charakterystyk częstotliwościowych ruchu kadłuba jako ciała sztywnego i porównali różne sposoby sterowania — bez uwzględnienia i z uwzględnieniem dynamiki wirnika w prawach sterowania. W niniejszej pracy oraz w innych pracach [5, 7] przedstawiono wyniki jakościowej i ilościowej analizy, które demonstrowują wyraźnie sprzężenia ruchów kadłuba i wirnika.

Z powyższym zagadnieniem związane są problemy tłumienia dynamicznego drgań przenoszonych z wirnika na kadłub. W latach 70-ych firma Sikorsky umieściła na głowicy jednego ze śmigłowców eliminator wahadłowy drgań typu Sarazina-Chiltona. Jak wiadomo [4], eliminator tego rodzaju musi być dostrojony do jednej z harmonicznnych — tłumić drgania odpowiadające jednej z wielokrotności prędkości obrotowej wirnika. Po wykorzystaniu przedstawionego modelu matematycznego i dokonaniu obliczeń numerycznych dla konkretnego śmigłowca otrzymuje się wskazania ilościowe co do doboru takiego tłumika. W prezentowanym w tej pracy przykładzie obliczeniowym jedna z postaci drgań opisywana wartościami własnymi macierzy stanu  $\lambda_{18, 19}$  odpowiadała sprzężonym ruchom wirnika oraz kadłuba i śmigła ogonowego o częstości  $\eta_{18, 19} \approx 3\omega$ . Wynika z tego, że dla danego śmigłowca tłumiona powinna być 3-cia harmoniczna.

Należy podkreślić, że powyższe rozważania możliwe były do przeprowadzenia dzięki dysponowaniu wyprowadzonym pełnym modelem dynamicznym śmigłowca.

#### Literatura cytowana w tekście

1. T. R. CROSSLEY, B. PORTER, *Synthesis of helicopter stabilization system using modal control theory*, Journal of Aircraft, Vol. 9, No. 1, 1972.
2. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
3. W. E. HALL, A. E. BRYSON, *Inclusion of rotor dynamics in controller design for helicopters*, Journal of Aircraft, Vol. 10, No. 4, 1973.
4. J. P. HARTOG DEN, *Mechanical vibrations*, McGraw-Hill, New York 1956.
5. K. JANKOWSKI, *Modelowanie fizyczne i matematyczne własności dynamicznych sterowanego śmigłowca w ruchu przestrzennym*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1982.
6. K. JANKOWSKI, *Metodyka wyznaczania parametrów ruchu ustalonego śmigłowca na przykładzie lotu poziomego i zawisu*, Mech. Teoret. i Stos. vol. 23, no. 3-4, 1985.
7. K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, *Modelowanie matematyczne automatycznie sterowanego śmigłowca w ruchu przestrzennym*, Mech. Teoret. i Stos. vol. 23, no. 3-4, 1989.
8. R. D. MURPHY, K. S. NARENDRA, *Design of helicopter stabilization systems using optimal control theory*, Journal of Aircraft, Vol. 6, No. 2, 1969.
9. J. I. NEJMARK, N. A. FUFAJEW, *Dynamika układów nieholonomicznych*, PWN, Warszawa 1971.
10. И. С. ДМИТРЕВ, С. Ю. БСАУЛОВ, *Системы управления одновинтовых вертолетов*, Машиностроение, Москва 1969.

11. В. А. Кожевников, *Автоматическая стабилизация вертолетов*, Машиностроение, Москва 1977.
12. В. Ф. Ромасевич, Г. А. Смайлов, *Практическая аэродинамика вертолетов*, Воениздат, Москва 1980.

## Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ПОЛЁТА  
УПРАВЛЯЕМОГО ВЕРТОЛЁТА И АНАЛИЗ СОПРЯЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
ДВИЖЕНИЙ ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ

В работе представлено исследование устойчивости горизонтального полёта и висения одно-винтового вертолётa, а также анализ сопряжений между движениями его различных элементов и сопряжений между продольным и боковым движениями. Анализ полученных уравнений и результатов вычислений обнаружил ряд существенных особенностей динамики полёта управляемого вертолётa и дал признаки подбора систем автоматического управления вертолетами и динамических гасителей колебаний.

## Summary

STUDY OF A DYNAMIC STABILITY OF THE STEADY FLIGHT STATES  
OF THE CONTROLLED HELICOPTER, AND ANALYSIS OF COUPLINGS BETWEEN  
THREE-DIMENSIONAL MOTIONS OF THE HELICOPTER ELEMENTS

Study of a dynamical stability of the horizontal flight and the hover of the single-rotor helicopter is presented. Couplings between motions of the different elements of the helicopter and between longitudinal and lateral motions are discussed. Derived equations and numerical calculation results allow to explain some important features of the helicopter flight dynamics. The above analysis gives criteria of choice of helicopter stabilization systems and of dynamical vibration absorbers.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 czerwca 1984 roku*

---





## WYKORZYSTANIE RACHUNKU DYSTRYBUCYJNEGO DO OPISU TARCZY ZARYSOWANEJ

JACEK GŁADYSZ, MACIEJ MINCH (WROCLAW)

*Institut Budownictwa  
Politechniki Wrocławskiej*

W pracy sformułowano zasadę wariacyjną typu Lagrange'a dla tarczy zarysowanej. Następnie wykorzystując otrzymane równanie pola Lamé wraz ze stowarzyszonymi warunkami brzegowymi (zewnętrznymi i wewnętrznymi) wyprowadzono globalne równanie różniczkowe w klasie dwuwymiarowych wektorowych funkcji uogólnionych. W modelu uwzględniono doświadczalnie potwierdzony efekt nieciągłości wektora przemieszczenia spowodowany pojawieniem się rysy.

### 1. Wprowadzenie

Dotychczasowe sposoby obliczania żelbetowych tarcz zarysowanych rozwijały się w dwóch kierunkach. Pierwszy z nich wyznaczają prace, w których zastosowano kontynuacyjny model obliczeń. Przykładowo można tu wymienić prace [1, 2] (metoda różnic skończonych) oraz [3] (metoda elementów skończonych). Globalny obraz efektów zarysowania otrzymany w tych pracach jest poprawny, jednak zaburzenia w miejscach rys są z założenia niedokładne. Drugi kierunek polega na formułowaniu ścisłych modeli matematycznych dla ciał kruchych z defektami. Literatura w tej dziedzinie jest niezwykle bogata. Wymienić tu można prace [4], w której rozwiązań poszukuje się poprzez przekształcenia całkowe i wprowadzenie funkcji zespolonych, oraz prace [5, 6, 7], gdzie podano teorie defektów. Teorie te polegają na budowaniu pewnych potencjałów modelujących defekty.

Wykorzystanie matematycznych modeli dla ciał kruchych w konstrukcjach z betonu zbrojonego napotyka jednak na pewne trudności. Dlatego też teorie żelbetu rozwijają się niezależnie, choć wykorzystują również rozwiązania matematycznych teorii defektów. Jedną z udanych prób wzbogacania matematycznego modelu płyty zarysowanej stanowi praca [8]. W pracy tej dokonano opisu płyty przy pomocy rachunku dystrybucyjnego.

W niniejszej pracy wyprowadzono różniczkowe równanie tarczy zarysowanej w klasie dwuwymiarowych wektorowych funkcji uogólnionych, uwzględniające nieciągłość wektora przemieszczenia w miejscu rysy. Rozpatrywana jest tarcza o dowolnym kształcie, z ogólnymi warunkami brzegowymi. Celem zwiększenia przejrzystości zapisu założono istnienie pojedynczej rysy krzywoliniowej wewnątrz jej obszaru.

## 2. Podstawowe związki i definicje

Poniżej przedstawiono definicje i związki teorii dystrybucji wykorzystywane w dalszej części pracy (zob. np. [9]).

DEFINICJA 1. Przestrzenią  $D(\Omega)$  dwuwymiarowych wektorowych funkcji próbnych nazywa się zbiór wszystkich funkcji  $\varphi$  określonych w dowolnym obszarze  $\Omega$  przestrzeni euklidesowej  $R^2$ , spełniających następujące warunki:

- a)  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ ,
- b) nośnik funkcji  $\varphi$  jest zbiorem zwartym.

DEFINICJA 2. Dystrybucją lub funkcją uogólnioną nazywa się każdy funkcjonal  $f: D(\Omega) \rightarrow R^1$  liniowy i ciągły w  $D(\Omega)$ , tzn. funkcjonal o następujących właściwościach:

$$\langle f, a\varphi + b\psi \rangle = a\langle f, \varphi \rangle + b\langle f, \psi \rangle, \quad \text{gdzie } a, b \in R \quad (2.1)$$

DEFINICJA 3. Działania na dystrybucji określone są w następujący sposób:  
Suma dystrybucji:

$$\langle f_1 + f_2, \varphi \rangle = \langle f_1, \varphi \rangle + \langle f_2, \varphi \rangle \quad (2.2)$$

Iloczyn funkcji gładkiej i dystrybucji

$$\langle \beta f, \varphi \rangle = \langle f, \beta \varphi \rangle, \quad \beta \in C^\infty(R^2) \quad (2.3)$$

Pochodna dystrybucji

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \quad (2.4)$$

gdzie  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $D^\alpha$  — jest operatorem różniczkowym rzędu  $\alpha$ .

Z definicji 3 wynika, że dystrybucja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

W dalszych rozważaniach istotne znaczenie mają dystrybucje (będące uogólnieniem funkcji  $\delta$ -Diraca) o danej gęstości skoncentrowanej na krzywej  $l \in R^2$  o następujących własnościach:

$$\begin{aligned} \langle \psi \delta_l, \varphi \rangle &= \int \psi(x) \varphi(x) ds, \\ \langle D^\alpha(\psi \delta_l), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int \psi(x) D^\alpha \varphi(x) ds, \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie:  $x = (x_1, x_2)$ .

## 3. Wariacyjny opis przemieszczenia dla tarczy zarysowanej

Podstawowy układ równań dla płaskiego stanu naprężenia składa się z: równań równowagi

$$\operatorname{div} S + b = 0; \quad (3.1)$$

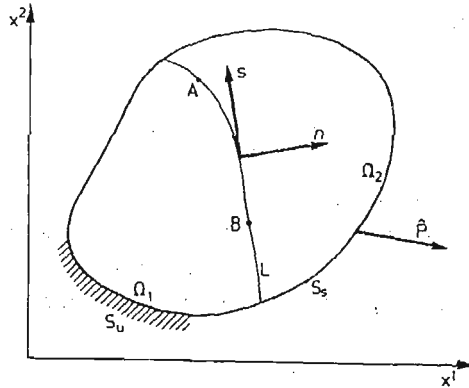
związków geometrycznych

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \equiv \hat{\nabla} u; \quad (3.2)$$

oraz związków fizycznych

$$S = 2\mu \left( E + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{1} \operatorname{tr} E \right); \quad (3.3)$$

Tutaj  $S$ ,  $E$ ,  $u$ ,  $b$  oznaczają kolejno tensor naprężenia, tensor odkształcenia, wektor przemieszczenia oraz wektor sił masowych;  $\lambda$  i  $\mu$  są stałymi Lamégo. Ponadto  $\mathbf{1}$  jest tensorem jednostkowym.



Rys. 1.

Do układu równań pola (3.1)÷(3.3) należy dołączyć jeszcze warunki brzegowe (rys. 1).

— przemieszczeniowe  $u = \hat{u}$  na  $S_u$  (3.4)

— naprężeniowe  $Sn = \hat{p}$  na  $S_s$  (3.5)

gdzie  $\hat{u}$  i  $\hat{p}$  są funkcjami zadanymi odpowiednio na brzegu  $S_u$  i  $S_s$ ,  $n$  zaś oznacza wektor normalny zewnętrzny do  $S$ .

Zakłada się, że układ równań (3.1)÷(3.3) spełniony jest w obszarze dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej  $\Omega$  ograniczonej powierzchnią  $S = S_u \cup S_s$ .

Do opisu omawianego zagadnienia wykorzystano zasadę wariacyjną typu Lagrange'a. Oznacza to założenie o poszukiwanej funkcji  $u$ , że spełnia ona związki geometryczne (3.2), związki fizyczne (3.5) oraz przemieszczeniowe warunki brzegowe (3.4).

Przyjęto funkcjonal w postaci:

$$J[u(x)] = \int_{\Omega} U(u(x)) d\Omega - \int_{\Omega} b(x)u(x) d\Omega - \int_{S_s} \hat{p}(x)u(x) ds \quad (3.6)$$

gdzie

$$U = \frac{1}{2} \mu \left( \hat{\nabla} u \hat{\nabla} u + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} u \operatorname{div} u \right) \quad (3.7)$$

jest funkcją energii odkształcenia.

Poszukuje się ekstremali funkcjonau (3.6) na zbiorze dopuszczalnych wartości wektora przemieszczenia  $u$  w obszarze  $\Omega$ , przy założeniu istnienia jednego załamania dzielącego ten obszar na dwa podobszary  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  (rys. 1).

Przyjęto, że poszukiwana funkcja  $u \in C^2(\Omega/L)$  (dla  $x \in L$  funkcja  $u(x)$  ma nieciągłość).

Warunkiem koniecznym na to, by  $\mathbf{u}$  było rzeczywistym przemieszczeniem w tarczy, jest zerowanie się pierwszej wariacji funkcjonału (3.6), co po prostych przekształceniach można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left\{ \mu \left[ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div } \mathbf{u} \right] + \mathbf{b} \right\} \delta \mathbf{u} d\Omega + \\ & + \int_{S_s} [\hat{\mathbf{p}} - P(\mathbf{u})] \delta \mathbf{u} ds + \int_L P(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} ds = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie:

$$P(\cdot) = \mu \left( \hat{\nabla} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{1} \text{div} \right) (\cdot) \mathbf{n} \quad (3.9)$$

jest operatorem napięcia powierzchniowego.

Pojawienie się ostatniej całki we wzorze (3.8) wynika z uwzględnienia dodatkowego brzegu wewnątrz tarczy, tzn. linii  $L = L_1 \cup L_2$  ( $L_1$  i  $L_2$  stanowią odpowiednio lewy i prawy brzeg rysy). Należy zwrócić uwagę na fakt, że wektory  $\mathbf{n}$  normalne do brzegu  $L_1$  i  $L_2$  mają przeciwne zwroty.

Warunek (3.8) musi być spełniony dla dowolnej wariacji  $\delta \mathbf{u}$ . Stąd otrzymuje się: przemieszczeniowe równanie różniczkowe tarczy

$$\mu \left( \nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

naturalne naprężeniowe warunki brzegowe

$$P(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{p}} \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in S_s \quad (3.11)$$

oraz dodatkowe warunki brzegowe

$$[P(\mathbf{u})]_L = \mathbf{0} \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in L \quad (3.12)$$

gdzie  $[ ]_L$  oznacza różnicę prawostronnej i lewostronnej granicy wyrażenia w nawiasie na krzywej  $L$ .

#### 4. Równanie różniczkowe tarczy zarysowanej

W poprzednim rozdziale obszar tarczy podzielony został na dwa podobszary  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , w których funkcja  $\mathbf{u}$  jest ciągła. Obecnie będzie poszukiwane rozwiązanie w całym obszarze  $\Omega$  przy założeniu, że  $\mathbf{u}$  należy do klasy funkcji uogólnionych. W tym celu w oparciu o związki z rozdziału 1 formalnie oblicza się wyrażenia:

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = & \int_{\Omega} \{ \nabla^2 \mathbf{u} \} \boldsymbol{\varphi} d\Omega - \int_S \left[ \left( \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \right) \boldsymbol{\varphi} - \left( \frac{\partial}{\partial n} \boldsymbol{\varphi} \right) \mathbf{u} \right] ds + \\ & + \int_L \left[ \left( \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \right)_L \boldsymbol{\varphi} - \frac{\partial}{\partial n} \boldsymbol{\varphi} [\mathbf{u}]_L \right] ds, \end{aligned} \quad (4.1)$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle \text{grad div } \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \int_{\Omega} \{ \text{grad div } \mathbf{u} \} \boldsymbol{\varphi} d\Omega + \int_S [\text{div } \mathbf{u} \mathbf{u} - \\ &- \text{div } \mathbf{u} \boldsymbol{\varphi}] ds - \int_L [[\mathbf{u}]_L \text{div } \boldsymbol{\varphi} - [\text{div } \mathbf{u}]_L \boldsymbol{\varphi}] \mathbf{n} ds; \end{aligned} \quad (4.2)$$

tutaj  $\{ \}$  oznacza różniczkowanie w zwykłym sensie;  $[\mathbf{u}]_L$  zaś oznacza skok wektora przemieszczenia przy przejściu przez rysę. Ponadto prawo fizyczne rządzące defektem opisane jest wyrażeniem:

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x})]_L = \mathbf{g}(\mathbf{x}); \quad (4.3)$$

gdzie:  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  jest funkcją gęstości defektu ciągłą dla  $\mathbf{X} \in L$ . Przykładową postać gęstości defektu (związku konstytutywnego w rysie) można znaleźć w pracy [10].

Całość dotychczasowych rozważań dotyczyła szczególnego przypadku rysy dzielącej obszar  $\Omega$  na dwie części. Można wykazać, że uogólnienie na przypadek rysy wewnętrznej (np. na łuku  $\widehat{AB}$  — rys. 1) w niczym nie zmienia przeprowadzonych wyżej rozważań. Sprowadza się to do przyjęcia na pozostałej części krzywej  $L$  warunku

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x})]_L = \mathbf{0} \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \notin \widehat{AB}, \quad (4.4)$$

oraz związków definiujących zachowanie się funkcji gęstości defektu na końcach rysy

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial s}(A) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial s}(B) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

Po elementarnych przekształceniach wzoru (3.10) i wykorzystaniu relacji (3.11), (3.12) oraz (4.1)÷(4.3) otrzymano równanie różniczkowe na wektor przemieszczenia  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  w klasie funkcji uogólnionych

$$\begin{aligned} \mu \left\langle \left( \nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \langle \mathbf{b}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \\ = \int_S [\mathbf{u} P(\boldsymbol{\varphi}) + (\hat{\mathbf{p}} - P(\mathbf{u})) \boldsymbol{\varphi}] ds + \int_{\widehat{AB}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) P(\boldsymbol{\varphi}) ds. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ostateczne globalne równanie różniczkowe tarczy zarysowanej można zapisać w postaci:

$$\mu \left( \nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u} + \mathbf{b} = -P(\mathbf{g} \delta_L) + (\hat{\mathbf{p}} - P(\mathbf{u})) \delta_{S_s} - P(\mathbf{u} \delta_{S_s}). \quad (4.7)$$

Jeżeli przyjmie się siły masowe w formie:

$$\mathbf{b} = -P(\hat{\mathbf{u}} \delta_{S_s}). \quad (4.8)$$

to równanie (4.7) przyjmie postać:

$$\mu \left( \nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u} = -P(\mathbf{g} \delta_L) + (\hat{\mathbf{p}} - P(\mathbf{u})) \delta_{S_s} + P[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \delta_{S_s}] \quad (4.9)$$

W ten sposób otrzymano równanie różniczkowe tarczy zarysowanej, które zawiera w sobie komplet warunków brzegowych zewnętrznych oraz dodatkowo spełnia warunek graniczny w rysie.

Wykorzystując definicję splotu, można zapisać rozwiązanie równania różniczkowego (4.9) w formie przedstawienia całkowego na funkcję  $u(\mathbf{x})$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) P(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) ds + \int_S \{ P(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) [u(\mathbf{y}) - \hat{u}(\mathbf{y})] - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [P(u(\mathbf{y})) - \hat{p}(\mathbf{y})] \} ds \quad (4.10)$$

gdzie  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest funkcją Greena spełniającą równanie

$$\mu \left( \nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \quad (4.11)$$

oraz założone warunki brzegowe (3.4) i (3.5).

## 5. Podsumowanie

Wyprowadzone globalne równanie różniczkowe opisuje ścisły matematyczny model tarczy zarysowanej. Pojawienie się w równaniu (4.9) warunków brzegowych wynika z zastosowania do analizy funkcji uogólnionych. Równanie to uwzględnia nieciągłość wektora przemieszczenia w miejscu rysy, zapewniając jednocześnie ciągłość wektora napięcia powierzchniowego przy przejściu przez krzywą  $L$ . Skonstruowany model posłuży do wyznaczania przemieszczeń w tarczy zarysowanej metodą całek brzegowych, gdzie efekt rysy traktowany jest jako małe zaburzenie.

## Literatura cytowana w tekście

1. F. LEONHARDT, E. MÖNNING, *Vorlesungen über Massivbau*, 2, Springer, Berlin 1975.
2. N. KARPIENKO, *Teoria deformirovanija żelezobetona s treščinami*. Stroizdat, Moskva 1976.
3. L. CEDOLIN, S. DEI POLI, B. S. KAPUR, *Finite element analysis of reinforced concrete deep beams*. Con-  
struzioni in cemento armato, 3-13, Politecnico di Milano, Italcementi 1977.
4. J. SNEDDON, *Zagadnienie szczelin w matematycznej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa 1962.
5. H. ZORSKI, *Theory of discrete defects*, Arch. Mech., 18, 3, 301 - 372, 1966.
6. E. KOSSECKA, *Mathematical theory of defects*, Part I, Statics, Arch. Mech., 26, 6, 995 - 1010, 1974.
7. J. D. ESHELBY, *The continuum theory of lattice defects*, Solid State Physics, 3, 79, 1956.
8. A. BARYŁA, E. SOBOCIŃSKA, *Teoria płyt żelbetowych z rysami*. PWN, Warszawa—Łódź 1983.
9. L. SCHWARTZ, *Theorie des distributions*, Paris 1966.
10. M. MINCH, *Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych*. Rozp.  
Inż., 28, 3, 445 - 468, 1980.

## Резюме

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО СЧЁТА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЗАРИСОВАННОГО ДИСКА

В работе введено дифференциальное уравнение зарисованного диска используя классический вариационный принцип типа Лягранжа. Получено уравнение поля Ляме вместе с относительными наружными и внутренними береговыми условиями в трещине. Мы представили валовое дифференциальное уравнение в классе двумерных обобщённых векторных функций. В модели мы взяли во внимание опытно опровергаемый эффект прерывности вектора перемещения вызванный возникновением трещины.

## S u m m a r y

## THE APPLICATION OF DISTRIBUTION CALCULUS TO THE DESCRIPTION OF CRACKED PLATE

In this paper the differential equation of the cracked plate, using the classical variational method of Lagrange is worked out. The displacements equation of Lamé with the boundary conditions and compatibility conditions in the crack is obtained. The total differential equation in the class of the two-dimensional general vector functions is shown. In this model the effect of discontinuity displacement vector into account is taken.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1984 roku*

---





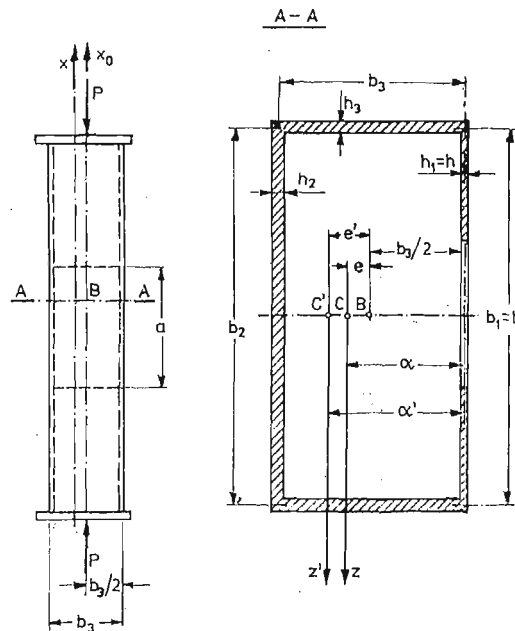
## NOŚNOŚĆ GRANICZNA ŚCIANKI RÓWNOMIERNIE ŚCISKANEJ SKRZYNKOWEGO PODZESPOŁU CIENKOŚCIENNEGO

TADEUSZ GAŁKIEWICZ, ANDRZEJ ŻELIGOWSKI (ŁÓDŹ)

*Politechnika Łódzka  
Instytut Mechaniki Stosowanej*

Celem pracy jest przedstawienie sposobu określenia stanu granicznego słupa o konstrukcji skrzynekowej (rys. 1), ściskanego mimośrodowo w przypadku, gdy jedna boczna ściana słupa jest równomiernie ściskana i pracuje w stanie zakrytycznym. Sposób prowadzenia obliczeń omówiony zostanie na przykładzie liczbowym. Niechaj siła  $P$  ściska słup wzdłuż osi  $x_0$  (rys. 1) równoległej do osi  $x$ , tzn. do osi nie obciążonego słupa, i niech wymiary przekroju poprzecznego słupa (rys. 1) są następujące:

$$b_1 = b_2 = b = 0,8 \text{ m}, \quad b_3 = b/2 = 0,4 \text{ m};$$

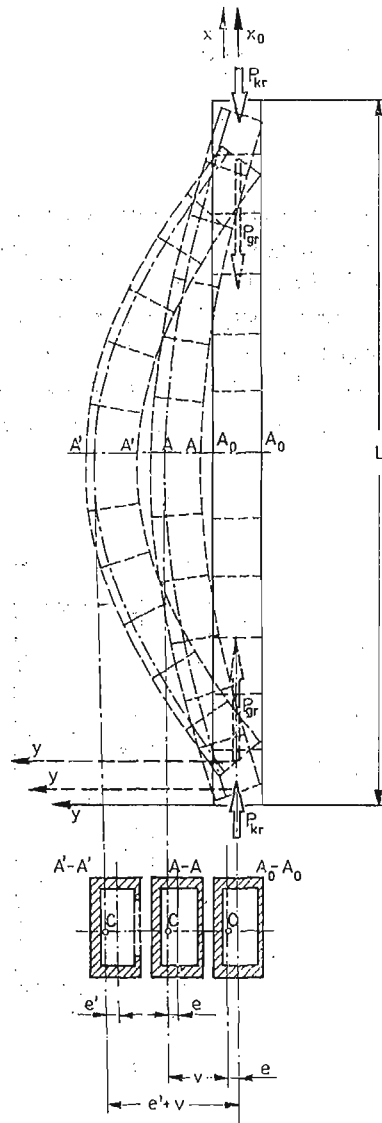


Rys. 1.

grubość cieńszej ścianki bocznej  $h_1 = h = 0,004$  m, grubość grubszych ścianek bocznych  $h_2 = h_3 = 2h = 0,008$  m.

W omawianym przypadku cieńsza boczna ścianka słupa jest znacznie mniej sztywna na zginanie niż ścian doń przylegających, więc w dalszych obliczeniach przyjęto, że oba brzegi cieńszej ściany równoległe do osi  $x$  są sztywno zamocowane.

Zadanie rozwiązane zostało w dwóch wariantach. W wariantcie I rozpatrzono słup krótki, następnie w wariantcie II analizie wytrzymałościowej poddano słup długi (rys. 2) wzmocniony równomiernie rozmieszczonymi przeponami.



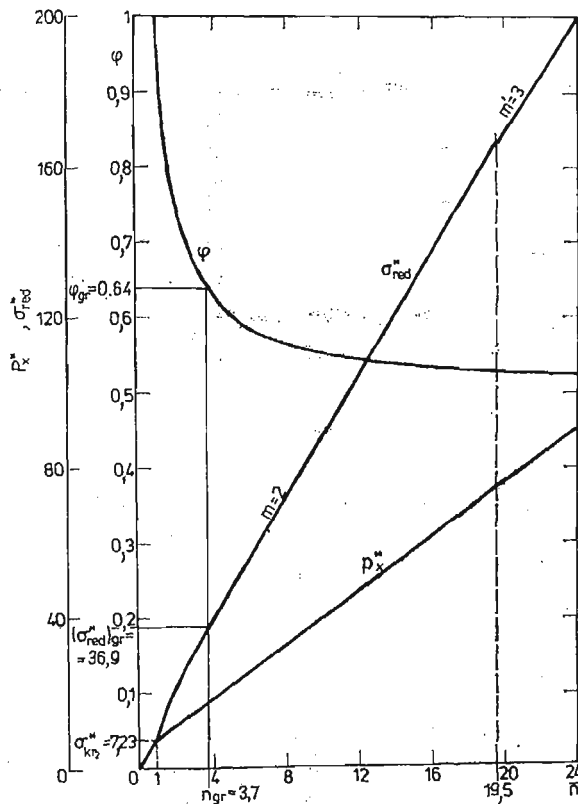
Rys. 2.

przeponami oznaczono przez  $a$ . Założono, że przepony są podatne na zginanie, więc oddziałują na ścianki boczne słupa jak podparcie rolkowe.

W obliczeniach przyjęto, że cieńsza ścianka słupa jest pasmem płytowym o szerokości  $b$  (rys. 1), podpartym na równomiernie rozstawionych przeponach, o brzegach równoległych do osi  $x$  sztywno zamocowanych. W pracy uwzględniono fakt przemieszczenia się przepon w kierunku prostopadłym do osi słupa wynikający z uginania się słupa.

Słup poddany jest mimośrodowemu ściskaniu. Przekroje poprzeczne słupa ściskane są siłą  $P$  i równocześnie zginane momentem  $Pe$ , gdzie  $e$  jest odległością środka ciężkości „pracującego przekroju poprzecznego” słupa od linii działania siły  $P$ . W omawianym przypadku wraz ze zwiększeniem się siły  $P$  wzrasta w sposób istotny ugięcie słupa, a więc i wymiar  $e$ . Obliczenia komplikują się, gdyż okazuje się, że wraz ze wzrostem obciążenia pojawia się lokalna utrata stateczności bocznej ściany słupa, w związku z czym w stanie zakrytycznym wzrostowi obciążenia towarzyszy malenie sztywności ściskania i sztywności zginania słupa.

Powtarzającym się elementem cieńszej ściany słupa (elementem tracącym stateczność) jest płyta prostokątna o bokach  $a \times b$  i grubości  $h$ , ściskana w kierunku osi  $x$ . Brzegi tej płyty równoległe do osi  $x$  są w przybliżeniu sztywno utwierdzone, natomiast brzegi poprzeczne podparte są na przeponach swobodnie. Wyniki rozwiązania nieliniowego zagad-



Rys. 3.

nienia ściskania takich płyt [1] dla przypadku płyty kwadratowej ( $a = b$ ) podane są na rys. 3.

Niżej przytoczone zostały oznaczenia, zależności i wzory niezbędne do określenia stanu krytycznego i granicznego płyty. Naprężenia krytyczne:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 k_m, \quad \sigma_{kr}^* = \frac{\sigma_{kr}}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} k_m, \quad (1)$$

gdzie

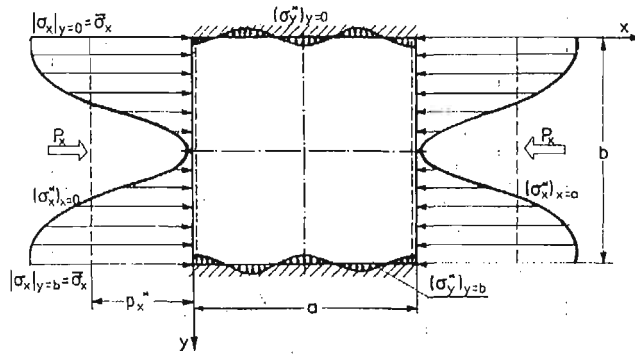
$$k_m = \left(\frac{m}{a/b}\right)^2 + \frac{8}{3} + \frac{16}{3} \left(\frac{a/b}{m}\right)^2. \quad (2)$$

W omawianym przykładzie  $a = b = 0,8$  m,  $h = 0,004$  m,  $m = 2$ ,  $E = 2,06 \cdot 10^5$  MPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_{prop} = \sigma_{spr} = 190$  MPa, więc  $k_m = 8$ ,  $\sigma_{kr} = 37,24$  MPa,  $\sigma_{kr}^* = 7,23$ .

Po utracie stateczności rozkład naprężeń błonowych w płycie nie jest jednorodny (rys. 4). Średnie naprężenia  $\sigma_x$  oznaczone zostały symbolem  $p_x$

$$p_x = (\delta_x)_{\bar{\sigma}_x} = \frac{1}{bh} \int_0^b (\sigma_x)_{x=\text{const}} h dy = \frac{1}{b} \int_0^b (\sigma_x)_{x=\text{const}} dy \quad (3)$$

w wielkościach bezwymiarowych  $p_x^* = \frac{p_x}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^2$ .



Rys. 4.

Naprężenia błonowe  $\sigma_x$  przy brzegu płyty (tzn. gdy  $y = 0$  bądź  $y = b$ ) oznaczono symbolem  $\bar{\sigma}_x$ , czyli  $\bar{\sigma}_x = |\sigma_x|_{y=0} = |\sigma_x|_{y=b}$ , przez  $\bar{n}$  zaś stosunek  $\bar{\sigma}_x/\sigma_{kr}$ . Okazuje się, że całkowite skrócenie w kierunku osi  $x$  środkowej powierzchni płyty wzdłuż brzegu  $y = 0$  i wzdłuż brzegu  $y = b$  jest takie, jak gdyby wzdłuż brzegu występował jednokierunkowy stan naprężenia, czyli skrócenie płyty wynosi:

$$\Delta a = \bar{\sigma}_x a / E, \quad \text{a więc} \quad e_x = \Delta a / a = \bar{\sigma}_x / E.$$

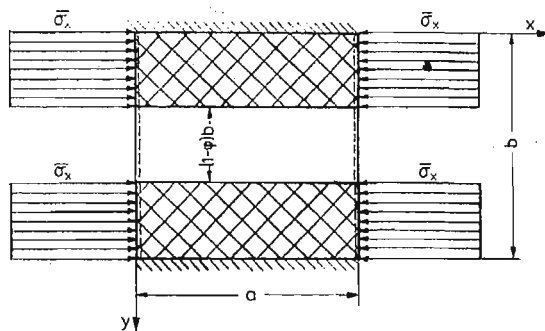
W praktycznych obliczeniach przyjmuje się często, że po utracie stateczności ściskanej płyty wyłącza się z pracy jej część, a pozostałe części o szerokości zredukowanej równej  $b\varphi$  obciążona jest naprężeniami stałymi równymi  $\bar{\sigma}_x$ . Współczynnik redukcji płyty  $\varphi$  wynosi  $\varphi = p_x / \bar{\sigma}_x$ .

Rozkład naprężeń błonowych w płycie wydzielonej myślowo z cieńszej ścianki słupa pokazany jest na rys. 4. W obliczeniach przyjęto, że płyta ta wzdłuż brzegów  $y = 0, y = b$  jest sztywno utwierdzona i opiera się przegubowo na dwóch kolejnych przęponach. Uproszczony model zastępczy płyty pokazany jest na rys. 5.

#### WARIANT I ( $v = 0$ )

Wariant I dotyczy przypadku słupa (rys. 1) na tyle krótkiego, iż można przyjąć, że ugięcie jego  $v = 0$ . Siła krytyczna dla takiego słupa wynika z zależności

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} + \frac{P_{kr}e}{I_z} \alpha = \frac{P_{kr}}{F} \left( 1 + \frac{Fe\alpha}{I_z} \right) \Rightarrow P_{kr} = \frac{\sigma_{kr} F}{1 + Fe\alpha/I_z} \quad (4)$$



Rys. 5.

gdzie  $\sigma_{kr}$  — naprężenie krytyczne płyty tracącej stateczność,  $F$  — pole przekroju poprzecznego słupa,  $\alpha$  — odległość środka ciężkości pola  $F$  od powierzchni środkowej cieńszej ścianki,  $e$  — mimośród ( $e = \alpha - b_3/2$ ),  $I_z$  — moment bezwładności pola  $F$  względem osi centralnej  $z$ .

W omawianym przypadku:  $\sigma_{kr} = 37,24$  MPa,  $F = 5 \cdot bh = 0,016$  m<sup>2</sup>,  $\alpha = 0,3b = 0,24$  m,  $e = 0,05b = 0,04$  m,  $I_z = 0,217b^3h = 444,4 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>, więc  $P_{kr} = 0,4427$  MN.

W stanie krytycznym wyężenie materiału dalekie jest od stanu granicznego, gdyż  $\sigma_{max} = \sigma_{kr} = 37,24$  MPa  $\ll \sigma_{prop} = 190$  MPa, słup może więc pracować w stanie zakrytycznym aż do momentu, gdy w płycie  $\max \sigma_{red} = \sigma_{prop} = 190$  MPa, czyli gdy

$$\max(\sigma_{red}^*) = (\sigma_{red}^*)_{gr} = \frac{\sigma_{prop}}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^2 = \frac{190}{2,06 \cdot 10^5} \left( \frac{0,8}{0,004} \right)^2 = 36,9$$

Z wykresu rys. 3 wynika, że wówczas  $\bar{n} = \bar{n}_{gr} = 3,7$ ,  $\varphi = \varphi_{gr} = 0,64$ ,  $\bar{\sigma}_x = (\bar{\sigma}_x)_{gr} = \bar{n}_{gr} \sigma_{kr} = 3,7 \cdot 37,24 = 137$  MPa.

W stanie zakrytycznym pole „pracującego przekroju” (zredukowane pole) cieńszej bocznej ścianki wynosi  $\varphi b_1 h_1 = \varphi bh$ , więc „pole pracujące” całego słupa  $F' = \varphi b_1 h_1 + b_2 h_2 + 2b_3 h_3 = (\varphi + 4)bh = 0,0148$  m<sup>2</sup>.

Wprowadzono oznaczenia:  $\alpha'$  — odległość środka ciężkości pola  $F'$  od powierzchni środkowej cieńszej bocznej ścianki, (rys. 1)  $e'$  — mimośród ( $e' = \alpha' - b_3/2$ ),  $I_z'$  — moment bezwładności pola  $F'$  względem osi centralnej tego pola — czyli względem osi  $z'$ .

W omawianym przypadku:  $\alpha' = 0,324b = 0,26$  m,  $e' = 0,074b = 0,059$  m,  $I_z' = 368,6 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>.

Siłę graniczną określa się ze wzoru analogicznego do (4). Wynosi ona:

$$P_{gr} = \frac{(\bar{\sigma}_x)_{gr} F'}{1 + F' e' \alpha' / I_z} = 1,26 \text{ MN.}$$

Siła ta jest większa od siły krytycznej 2,85 razy.

#### WARIANT II ( $v \neq 0$ )

Wariant II dotyczy przypadku słupa na tyle długiego, iż w obliczeniach uwzględnić należy jego uginanie się.

Analizie poddano słupek o przekroju poprzecznym takim, jak w wariancie I podparty przegubowo. Przyjęto przykładowo  $L = 20a = 16 \text{ m}$ . Słupek poddany jest ściskaniu siłą  $P$  działającą stale wzdłuż osi  $x_0$  (rys. 2). Siłę tę można zredukować do środka ciężkości „pracującego przekroju” poprzecznego słupa. Moment gnący w przekroju poprzecznym zmienia się na długości słupa, gdyż zależy od rzędnej linii ugięcia  $v$  i od położenia środka ciężkości tego przekroju. Moment ten wynosi:

- w stanie dokrytycznym  $M_g = P(e+v)$ ,
- w stanie zakrytycznym  $M_g = P(e'+v)$ .

#### Stan dokrytyczny

Do chwili utraty stateczności ścianki równania różniczkowe osi ugiętej słupa ma postać  $EI_z v'' = -P(e+v)$ , więc

$$v'' + \beta^2 v = -\beta^2 e, \quad (5)$$

gdzie  $\beta = \sqrt{P/EI_z}$ .

Rozwiązaniem tego równania, uwzględniającym przyjęte warunki brzegowe jest funkcja

$$v = e \left[ \frac{2 \sin^2(\beta L/2)}{\sin(\beta L)} \sin(\beta x) + \cos(\beta x) - 1 \right], \quad (6)$$

więc

$$v_{max} = v_{x=L/2} = 2e \left[ \frac{\sin^3(\beta L/2)}{\sin(\beta L)} - \sin^2(\beta L/4) \right] = e \left[ \frac{1}{\cos(\beta L/2)} - 1 \right]. \quad (7)$$

W połowie długości słupa w przekroju poprzecznym maksymalne naprężenia ściskające cieńszą boczną ściankę wynoszą

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} + \frac{P(e+v_{max})}{I_z} \alpha = \frac{P}{F} \left[ 1 + \frac{F(e+v_{max})\alpha}{I_z} \right], \quad (8)$$

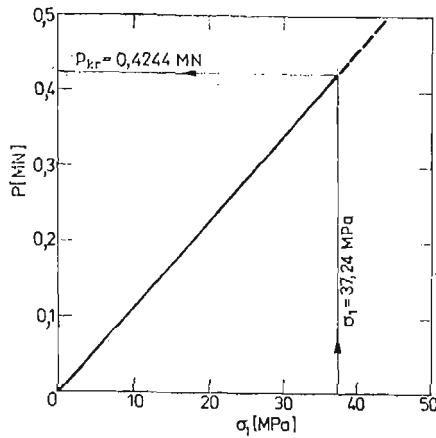
stąd

$$P = \sigma_1 F / [1 + F(e+v_{max})\alpha / I_z]. \quad (9)$$

We wzorze tym wielkości  $F$ ,  $e$ ,  $\alpha$ ,  $I_z$  są takie, jak w I wariancie, natomiast ugięcie  $v_{max}$  określa się ze wzoru (7). Zależność  $P$  od  $\sigma_1$  wynikająca z powyższego wzoru pokazana jest na rys. 6. W omawianym przypadku traci stateczność cieńsza z bocznych ścianek słupa. Poprzednio wykazano, że dla tej ścianki  $\sigma_1 = (\sigma_1)_{kr} = 37,24 \text{ MPa}$ , więc z wykresu (rys. 6) widać, że dla tej wartości naprężenia siła

$$P = P_{kr} = 0,4244 \text{ MN.}$$

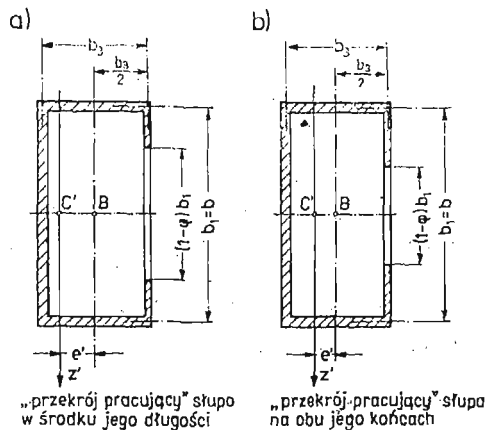
Siła ta jest więc o 4.1% mniejsza od siły krytycznej otrzymanej dla przypadku słupa krótkiego (patrz WARIANT I).



Rys. 6.

*Stan zakrytyczny*

Po utracie stateczności pole powierzchni „pracującego przekroju”  $F$  zmienia się wzdłuż długości słupa. Najmniejsze pole jest w przekroju najbardziej obciążonym, tzn. w środku długości słupa (rys. 7a), natomiast największe przy obu jego końcach (rys. 7b). W oma-



Rys. 7.

wianym przykładzie różnice liczbowe między polami przekrojów pokazanymi na rys. 7a i 7b nie są duże. Chcąc ocenić wpływ długości słupa na wyniki rozwiązań wariantów I i II postąpiono ostrożnie, przyjmując w obliczeniach, że w stanie granicznym słupa pola wszystkich jego przekrojów poprzecznych są jednakowe i są takie, jakie były przy określaniu siły granicznej w wariacie I. Po podstawieniu do wzorów (5) ÷ (7) zamiast współrzędnej  $e$  współrzędną  $e' = 0,059$  m, zamiast momentu  $I_z$  moment  $I_{z'} = 368,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$  i przyjęciu w pierwszym przybliżeniu wartości granicznej np.  $(P_{gr})_1 = 1,1$  MN (czyli wartości nieco mniejszej od wartości uzyskanej w I wariacie), otrzymano:

$$(\beta L)_1 = 1,926, \quad (v_{max})_1 = 0,0444 \text{ m}$$

Maksymalne naprężenie w cieńszej bocznej ścianie wynosi

$$\sigma_1 = \frac{P_{gr}}{F'} + \frac{P_{gr}(e' + v_{max})}{I_{z'}} \alpha' = \frac{P_{gr}}{F'} \left[ 1 + \frac{F'(e' + v_{max})}{I_{z'}} \alpha' \right]$$

stąd

$$P_{gr} = \frac{\sigma_1 F'}{[1 + F'(e' + v_{max}) \alpha' / I_{z'}]}$$

Jeżeli do powyższego wzoru podstawimy  $\sigma_1 = (\sigma_1)_{gr} = 137,8$  MPa (patrz I wariant)  $F' = 0,0148$  m<sup>2</sup>,  $e' = 0,059$  m,  $v_{max} = 0,0444$  m,  $\alpha' = 0,26$  m,  $I_{z'} = 368,6 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>, to otrzyma się drugie przybliżenie wartości siły granicznej. Okazuje się, że dokładniejsza wartość siły granicznej wynosi  $(P_{gr})_2 = 0,981$  MN.

Powtarzanie powyższych obliczeń prowadzi do dalszego uściślenia rozwiązania. Otrzymuje się kolejno następujące wyniki:

$$\begin{aligned} (\beta L)_2 &= 1,82, & (v_{max})_2 &= 0,371 \text{ m}, & (P_{gr})_3 &= 1,018 \text{ MN}, \\ (\beta L)_3 &= 1,853, & (v_{max})_3 &= 0,0392 \text{ m}, & (P_{gr})_4 &= 1,007 \text{ MN}, \\ (\beta L)_4 &= 1,842, & (v_{max})_4 &= 0,03855 \text{ m}, & (P_{gr})_5 &= 1,01 \text{ MN}. \end{aligned}$$

W wariancie II siła graniczna jest większa od krytycznej 2,38 razy.

### Podsumowanie

Celem pracy jest przedstawienie sposobu określenia stanu krytycznego i granicznego cienkościennego słupa o budowie skrzynkowej doznającego lokalnej utraty stateczności i pracującego w stanie zakrytycznym. W pracy wykazano, jak dla konkretnego przypadku ocenić wpływ długości słupa na wartość siły krytycznej i siły granicznej. Okazało się, że przy długim słupie ten wpływ jest istotny. W analizowanych w pracy przykładach siła graniczna w wariancie II (tzn. w słupie dłuższym) jest mniejsza od siły uzyskanej w wariancie I o  $\sim 20\%$ .

### Literatura

1. T. GAŁKIEWICZ, A. ŻELIGOWSKI, *Stateczność i stan zakrytyczny konstrukcji cienkościennych\**. Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12. IPPT PAN 1974-78. Inst. Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej.
2. T. KARMAN, E. E. SECHLER, L. H. DONNELL, *The strength of thin plates in compression*. Trans. ASME 54, 1932.
3. A. S. VOLMIR, *Ustoicivost deformiruiemych sistem*. Nauka, Moskwa 1967.

\*) Zagadnienie rozwiązano stosując metodę Bubnowa-Galerkina aproksymując ugięcie płyty za pomocą funkcji  $w = f(1 - \cos 2\pi y/b) \sin(m\pi x/a)$ , przy uwzględnieniu możliwości skokowego narastania wraz z obciążeniem liczby półfal  $m$ . Naprężenia zredukowane określone zostały wg hipotezy Hubera w  $m \times 196$  punktach.



## Р е з ю м е

## НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ТОНКОЙ БОКОВОЙ СТЕНКИ ТОНКОСТЕННОГО СТОЛБА

Проблема касается равномерно сжатой тонкой боковой стенки тонкостенного столба содержащей между хрупкими диафрагмами и прилегающими к этой стенке гораздо негнущимися боковыми стенками. Приводя результаты решения представлено один с методов использования помещенными формулами и диаграммами. Доказано, что длина сжатого столба имеет влияние на величину критической и граничной силы.

## S u m m a r y

ULTIMATE STRENGTH OF UNIFORM COMPRESSED FLANGE  
OF THIN-WALLED BOX SUBSTRUCTURE

The problem considered is similar to that which occurs during uniform compression of thin plate element of the column. Such an element is situated between two significantly flexurally stiffer walls of the column and on two other sides is connected to slender diaphragm. Results are given in the form of expressions and tables. An exemplary illustration of their practical application is also presented. It has been proved that the length of the compressed column have an effect on the critical loading as well as on the load carrying capacity of the structure considered.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1984 roku*

---

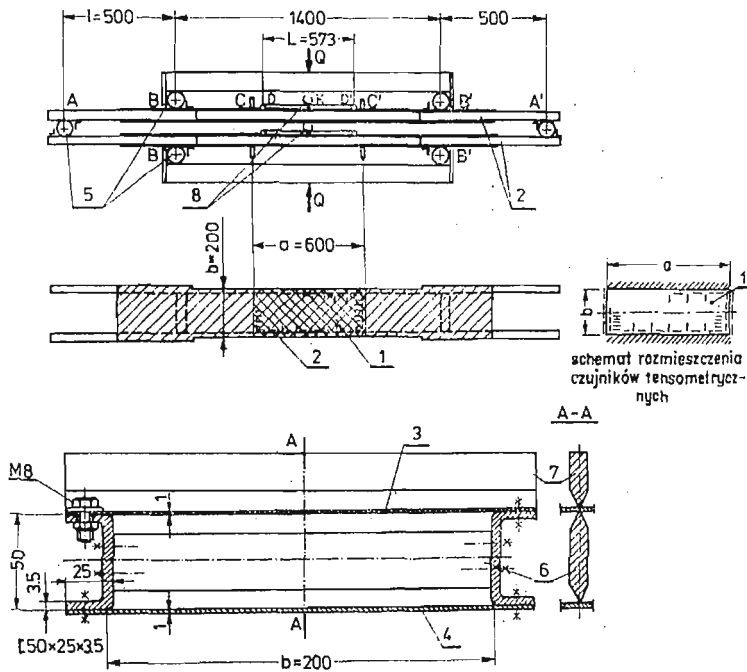


**BADANIA DOŚWIADCZALNE STANU ZAKRYTYCZNEGO  
RÓWNOMIERNIE ŚCISKANEJ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ,  
BĘDĄCEJ ELEMENTEM ZGINANEGO DŹWIGARA**

ANDRZEJ ŻELIGOWSKI (ŁÓDŹ)

Politechnika Łódzka  
Instytut Mechaniki Stosowanej

Celem badań była weryfikacja doświadczalna wzorów otrzymanych w pracy [1] dotyczącej analizy stanów naprężenia i odkształcenia równomiernie ściskanej płyty prostokątnej o dwóch brzegach równoległych do kierunku ściskania — utwierdzonych i pozostałych brzegach (poprzecznych) swobodnie podpartych. Badaniu poddano płytę 1 będącą elementem specjalnie skonstruowanego dźwigara skrzynkowego 2 poddanego czystemu zginaniu. Przekrój poprzeczny dźwigara pokazany jest na rys. 1. Dźwigar utworzony



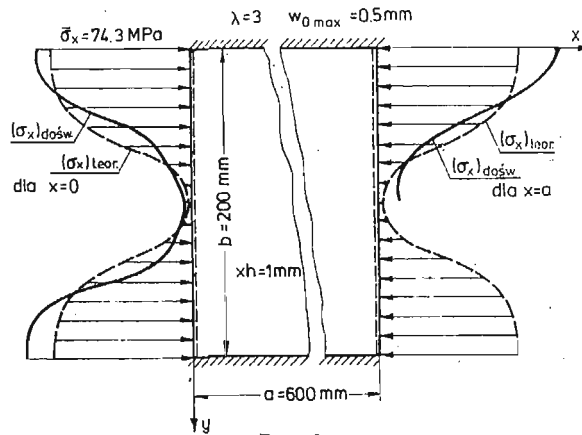
Rys. 1.

został z dwóch ceowników  $[50 \times 25 \times 3,5 \text{ mm}]$  połączonych dwoma cienkimi pasami 3,4. Pasy dźwigara wykonano z jednomilimetrowej blachy. Brzegi dłuższe pasów przykręcono do półek ceowników dużą ilością śrub M8, co powodowało utwierdzenie tych brzegów do znacznie sztywniejszych od blachy ceowników. Zamiast przepon, które bywają w dźwigarach, zastosowano pryzmy 6 i 7 realizujące przegubowe podparcie poprzecznych brzegów badanych płyt.

Wykonano dwa identyczne dźwigary przedzielone w punktach  $A, A'$  rolkami 5 i obciążono je w sposób pokazany na rys. 1. W każdym z dźwigarów badano jedną z płyt ściskanego pasa.

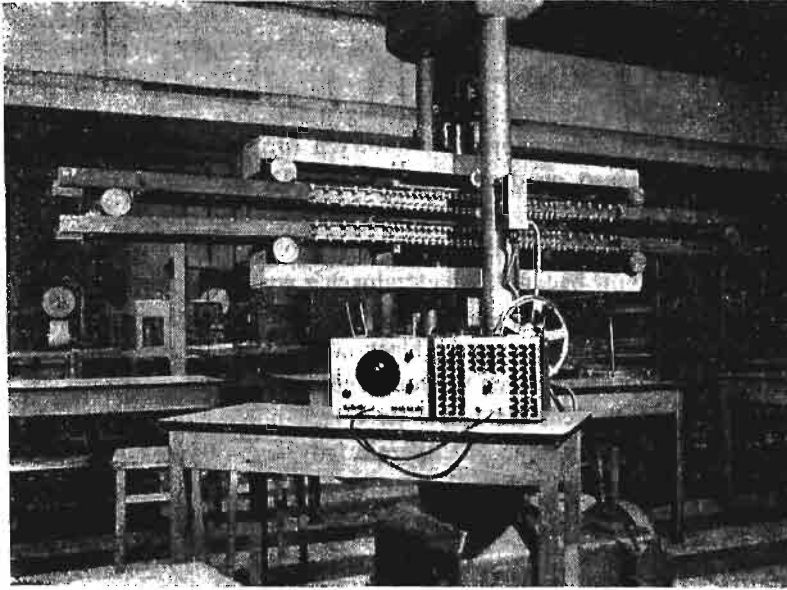
### 1. Rezultaty wynikające z pomiarów tensometrycznych

Stanowisko pomiarowe (rys. 1) umieszczono w maszynie wytrzymałościowej o napędzie mechanicznym firmy VEB Thüringen Industrierwerk Ravenstein i zakresie obciążenia 0 - 9, 81 kN; następnie omówiony model obciążono siłami  $Q$  wywołującymi na odcinkach  $BB'$  czyste zginanie dźwigarów i powodującymi w każdym dźwigarze ściskanie jednego z pasów. Częścią ściskanego pasa była badana płyta 1. Naprężenia w płycie określono poprzez pomiar odkształceń (w 98 punktach) dokonywany tensometrami oporowymi. Schemat rozmieszczenia czujników tensometrycznych znajduje się na rys. 1. Pomiary odkształceń zawsze przeprowadzane były równocześnie dla dwóch zewnętrznych przeciwnych powierzchni płyt, co umożliwiało oddzielenie naprężeń stanu błonowego od naprężeń stanu zgięciowego. Fotografia stanowiska znajduje się na rys. 3. Dźwigary obciążano

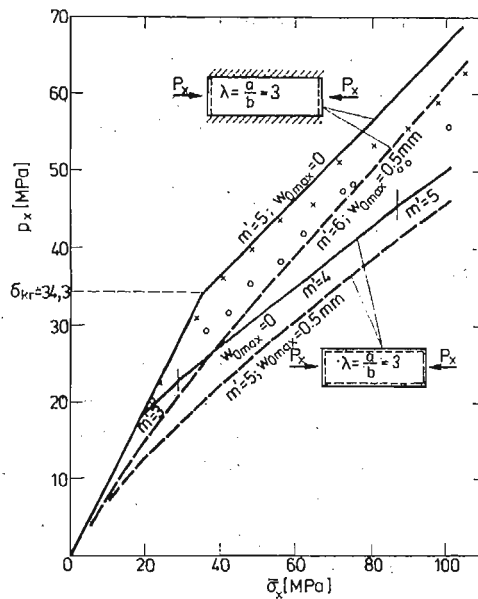


Rys. 2.

zmieniając wartości sił  $Q$  co 0,49 kN od 1,67 kN do 7,06 kN. Każdorazowo odczytywano wskazania tensometrów, co pozwoliło na wyznaczenie naprężeń błonowych przy brzegach płyt  $\bar{\sigma}_x = (\sigma_x)_{y=0} = (\sigma_x)_{y=b}, (\sigma_x)_{x=0}, (\sigma_x)_{x=a}$ . Z otrzymanego rozkładu naprężeń określono wartość średnich naprężeń ściskających  $p_x$ . Na rys. 2 wykres wykonany linią ciągłą przedstawia rozkład naprężeń w środkowej powierzchni płyty otrzymany z doświadczeń, a linią przerywaną rozkład tychże naprężeń otrzymany teoretycznie wg pracy [1]. Wykres dotyczy stanu naprężenia, w którym przy brzegu płyty naprężenia  $\bar{\sigma}_x = 74,3 \text{ MPa}$ . Na rys. 4



Rys. 3.



Rys. 4.

wykonane są wykresy określające zależności średnich naprężeń ściskających  $p_x$  od naprężeń na brzegu  $\sigma_x$ . Linie ciągłe dotyczą płyt nie mających ugięć wstępnych  $w_0 = 0$ . Punkty naniesione na wykres oznaczone kółeczkami wynikają z doświadczeń. Punkty te znajdują się w bliskim sąsiedztwie górnej linii kreskowanej uzyskanej z obliczeń teoretycznych [1]

dla płyt mających ugięcie wstępne  $w_{0,max} = h/2 = 0,5$  mm. Dla  $\sigma_x < 100$  wartość naprężenia  $p_x$  otrzymana z doświadczenia różni się od wartości otrzymanej wg pracy [1]:

- gdy  $w_0 = 0$  maksymalnie o  $\sim 17\%$
- gdy  $w_{0,max} = 0,5h = 0,5$  mm maksymalnie o  $10\%$ .

Pokazany na rys. 2 rozkład naprężeń błonowych  $(\sigma_{xb})_{x=0}$  wynikający z doświadczeń jest zbliżony do uzyskanego na drodze analitycznej [1] dla płyty, której maksymalne ugięcie wstępne wynosi  $w_0^* = 0,5$ . Maksymalny błąd wynosi  $\Delta\sigma_x \sim 27\%$ . W badanym modelu ugięcia wstępne płyty były rzędu połowy grubości płyty, a więc otrzymano zadowalającą zgodność wyników badań doświadczalnych z wynikami uzyskanymi analitycznie. W praktycznych obliczeniach czyni się czasem uproszczenie zwiększające bezpieczeństwo, przyjmując, że płyty będące elementami blachownic są na całym obwodzie podparte przegubowo. Uproszczenie to robi się wówczas, gdy brak jest wyczerpujących rozwiązań przypadków bardziej złożonych. Na rys. 4 (w celach porównawczych) zamieszczone są wykresy zależności  $p_x(\bar{\sigma}_x)$  uzyskane analitycznie, gdy  $w_0 = 0$  oraz gdy  $w_{0,max} = h/2 = 0,5$  mm dla płyt różniących się od analizowanych tym, że wszystkie jej brzegi podparte są przegubowo.

## 2. Wyniki uzyskane z pomiarów ugięć dźwigara

Równoległe z opisanymi w punkcie 1 badaniami bazującymi na pomiarach tensometrycznych prowadzone były badania oparte na określeniu ugięć dźwigara dokonywanych za pomocą czujników zegarowych 8 (rys. 1). Mierzono ugięcie  $f_k$  środkowego fragmentu  $DD'$  dźwigara mieszczącego się w obrębie badanej płyty. Dźwigar na odcinku pomiarowym poddany był czystemu zginaniu momentem  $M = Q \cdot l/2$ . Przyjęto, że  $E_{ceownika} = E_{pasów} = E = 2,06 \cdot 10^5$  MPa.

Moment bezwładności pracującej części przekroju poprzecznego dźwigara wynika ze znanego wzoru na strzałkę ugięcia

$$f_k = \frac{ML^2}{8EJ} \Rightarrow J = \frac{ML^2}{8Ef_k} = \frac{(Ql/2)L^2}{8Ef_k} = \frac{lL^2}{16E} \left( \frac{Q}{f_k} \right). \quad (1) \quad (2)$$

W omawianym przypadku  $l = 0,50$  m,  $L = DD' = 0,573$  m. Wartości siły obciążającej  $Q$  oraz odpowiadające jej strzałki ugięcia dźwigara zestawiono w tablicy 1.

Jeżeli  $w_0 = 0$ , to przed utratą stateczności ściskanego pasa, wychodząc z elementarnych wzorów wytrzymałościowych, teoretycznie w obydwu pasach dźwigara stan naprężenia jest jednorodny i wówczas  $Q/f_k = \text{const}$ , a zatem  $J = \text{const}$ .

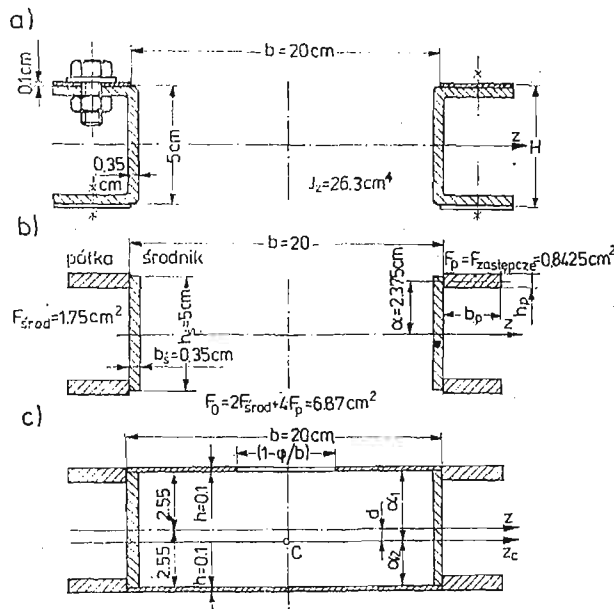
Moment bezwładności przekroju poprzecznego dźwigara znajdującego się w stanie dokrytycznym określony został w sposób następujący:

$$J_z = \bar{J}_z + 2[bh^3/12 + bh(H/2)^2] \approx \bar{J}_z + bhH^2/2; \quad (3)$$

tu  $\bar{J}_z$  jest to moment bezwładności przekroju poprzecznego badanego dźwigara, z którego wycięto symetrycznie, z obu przeciwległych pasów płyty zawarte między ceownikami i przymami (rys. 5a). Moment bezwładności  $\bar{J}_z$  określony został doświadczalnie na dźwigarach pozbawionych płyt  $a \times b$  przy wykorzystaniu wzoru analogicznego do (2).

Tablica 1. Badania doświadczalne stanu zakrytycznego równomiernie ściskanej płyty prostokątnej, będącej elementem zginanego dźwigara

$Q$	kN	1,67	2,65	3,14	3,63	4,12	4,61	5,10	5,59	6,08	6,57	7,06
$f_k$ Ugięcie dźwigara pozbawionego pasów	mm	—	—	—	0,69	0,78	0,875	1,00	1,05	1,12	1,25	—
$f_k$ Ugięcie dźwigara	mm	0,16	0,255	0,305	0,36	0,415	0,47	0,525	0,58	0,64	0,695	0,75



Rys. 5.

Okazało się, że  $\bar{J}_z = 26,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ . Podstawiając do wzoru (3):  $\bar{J}_z = 26,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ,  $b = 0,2 \text{ m}$ ,  $h = 0,001 \text{ m}$ ,  $H = 0,051 \text{ m}$  otrzymano  $J_z = 52,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ .

W chwili utraty stateczności naprężenia we wszystkich punktach przekrojów poprzecznych obydwu pasów teoretycznie są jednakowe (w rzeczywistości — w przybliżeniu jednakowe) i wynoszą

$$\sigma_x = M \cdot H / (2J_z) = QlH / (4J_z) \quad (4)$$

gdzie wymiar  $l$  widoczny jest na rys. 1;  $l = 500 \text{ mm} = 0,5 \text{ m}$ . Ze ściskanego pasa zginanego dźwigara wydzielić można myślowo płytę o wymiarach  $a \times b \times h = 0,6 \times 0,2 \times 0,001 \text{ m}$ , dla której  $\lambda = a/b = 3$ .

Z zależności podanych w pracy [1] wynika, że w stanie krytycznym powinno powstać 5 półfal ( $m = 5$ ) powierzchni ugięcia. Zgodnie z pracą [1]  $k_m = 7,36$ , a więc naprężenia krytyczne powodujące lokalną utratę stateczności ściskanego pasa

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right) k_m = \frac{\pi^2 \cdot 2,06 \cdot 10^5}{12(1-0,3^2)} \cdot \left(\frac{0,001}{0,2}\right)^2 \cdot 7,36 = 34,3 \text{ MPa.}$$

Siła  $Q$  wywołująca ten stan nazywana będzie siłą krytyczną. Wynika ona ze wzoru (4)

$$Q_{kr} = 4\sigma_{kr}J_z/(lH) = 4 \cdot 34,3 \cdot 52,3 \cdot 10^{-8}/(0,5 \cdot 0,051) = 2,81 \text{ kN.}$$

Jeżeli pas dźwigara skrzynkowego pracuje w stanie zakrytycznym, to iloraz  $Q/f_k$  wraz ze wzrostem obciążenia maleje, a więc maleje również i  $J_{zc}$  określone wzorem (2). Wynika to stąd, że rozkład naprężeń w ściskanym pasie przestaje być wówczas równomierny (rys. 2). Pas ściskany pracując w stanie pofalowanym jest mniej sztywny od pasa rozciąganego. Chcąc w obliczeniach praktycznych korzystać ze wzoru (1), a przy określaniu naprężeń ze wzoru (4), należy przyjąć, że szerokość pracująca ściskanej płyty zawartej między ceownikami wynosi nie  $b$ , lecz  $\varphi b$  (rys. 5c), gdzie  $\varphi$  jest współczynnikiem redukcyjnym.

Naprężenie  $\bar{\sigma}_x$  przy brzegu badanej płyty wynosi

$$\bar{\sigma}_x = M\alpha_1/J_{zc} = Ql\alpha_1/(2J_{zc}) \quad (5)$$

gdzie  $\alpha_1$  — jest to odległość powierzchni środkowej pasa ściskanego od osi obojętnej  $z_c$  „pracującego przekroju” poprzecznego dźwigara (rys. 5c).

Z pracy dźwigara „wyłącza” się część ściskanego pasa o polu równym  $\Delta F = (1-\varphi)bh$ . Przekrój poprzeczny modelu obliczeniowego dźwigara pokazany jest na rys. 5c. Pole przekroju poprzecznego dźwigara wynosi

$$F_c = F_0 + \varphi bh + bh,$$

gdzie  $F_0$  jest to pole przekroju poprzecznego dźwigara pozbawionego pasów (rys. 5b);  $F_0 = 6,87 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Środek ciężkości przekroju zredukowanego, oznaczony punktem  $C$  na rys. 5c, leży poniżej osi  $z$  w odległości  $d$  od tej osi

$$d = (1-\varphi)bh(H/2)/F_c. \quad (6)$$

Moment bezwładności zastępczego przekroju dźwigara wynosi

$$J_{zc} = (\bar{J}_z + F_0 d^2) + \left(\frac{\varphi bh^3}{12} + \varphi bh\alpha_1^2\right) + \left(\frac{bh^3}{12} + bh\alpha_2^2\right) \approx \bar{J}_z + F_0 d^2 + bh(\varphi\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \quad (7)$$

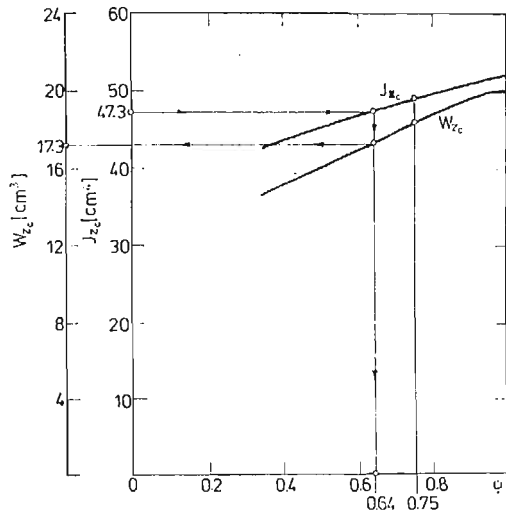
gdzie  $\alpha_1 = H/2 + d$ ,  $\alpha_2 = H/2 - d$ . Wskaźnik wytrzymałości na zginanie  $W_{zc} = J_{zc}/\alpha_1$ , a więc

$$\bar{\sigma}_x = M/W_{zc} = Ql/(2W_{zc}) \quad (8)$$

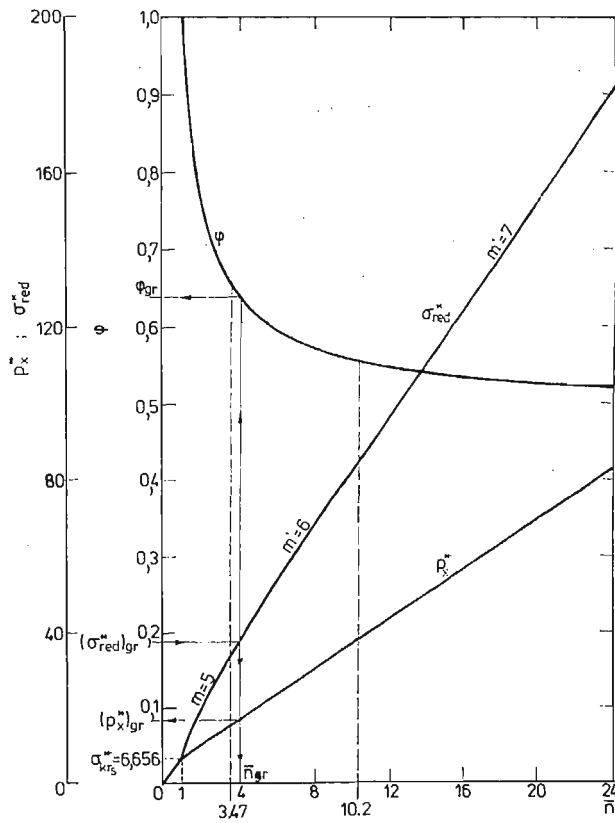
Korzystając z powyższych wzorów po wstawieniu danych szczegółowych określono, jak zmienia się  $J_{zc}$  i  $W_{zc}$  w zależności od  $\varphi$ . Graficzny obraz funkcji  $J_{zc}(\varphi)$  i  $W_{zc}(\varphi)$  podany jest na rys. 6.

Jak zaznaczono, moment bezwładności całego przekroju poprzecznego dźwigara określony został doświadczalnie ze wzoru (2), do którego na  $f_k$  podstawiono strzałki ugięcia zmierzone doświadczalnie. Wyniki pomiarów zestawiono w tabelicy 1.





Rys. 6.



Rys. 7.

Po określeniu z doświadczeń momentu bezwładności  $J_{zc}$  znaleziono z wykresu (rys. 6) wartość współczynnika  $\varphi$  i wskaźnika na zginanie  $W_{zc}$ . Naprężenia  $\bar{\sigma}_x$  obliczono ze wzoru (8) natomiast wartość średnich naprężeń ściskających wynika ze wzoru (9)

$$p_x = \varphi \bar{\sigma}_x \quad (9)$$

Zależności między  $p_x$  i  $\bar{\sigma}_x$  wyznaczono dla 11 obciążeń dźwigara. Wyniki naniesiono na wykres znajdujący się na rys. 4 punkty zaznaczono gwiazdkami. Widać, że punkty te dla  $\bar{\sigma}_x < 70$  MPa leżą nieco poniżej wykresu przedstawiającego zależności  $p_x(\bar{\sigma}_x)$   $w_0 = 0$ , otrzymaną analitycznie na podstawie wzorów pracy [1], natomiast dla  $79 \text{ MPa} < \bar{\sigma}_x < 103 \text{ MPa}$  punkty oznaczone gwiazdkami leżą poniżej wykresu odpowiadającego rozwiązaniu analitycznemu [1], dla którego  $w_{0\max} = 0,5h = 0,5 \text{ mm}$ .

Bezwymiarowe naprężenie graniczne (czyli naprężenie, przy którym w płycie  $\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{prop}} = 190 \text{ MPa}$ ) dla badanej płyty wynosi

$$(\sigma_{\text{red}}^*)_{\text{gr}} = \frac{\sigma_{\text{prop}}}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^2 = \frac{190}{2,06 \cdot 10^5} \left( \frac{0,2}{0,001} \right)^2 = 37.$$

Z wykresu rys. 7 dla płyty bez ugięcia wstępnego można odczytać graniczne wartości  $\bar{n}_{\text{gr}}$ ,  $\varphi_{\text{gr}}$ , oraz bezwymiarowe graniczne naprężenie  $(p_x^*)_{\text{gr}} = 17$ .

W omawianym przypadku  $\bar{n}_{\text{gr}} = 4$ ,  $\varphi_{\text{gr}} = 0,64$ ,  $(p_x^*)_{\text{gr}} = 87,6 \text{ MPa} > \sigma_{\text{kr}} = 34,3 \text{ MPa}$  więc badana płyta może pracować w stanie zakrytycznym przy obciążeniu  $p_x \leq (p_x^*)_{\text{gr}} = 87,6 \text{ MPa}$ , stale będąc układem sprężystym, którego to obciążenia podczas doświadczeń nie przekroczone.

$$\lambda = 3,0$$

Z wykresów znajdujących się na rys. 4 widać, że podczas badań doświadczalnych średnie naprężenie w płytach wynosiło maksymalnie  $(p_x)_{\text{max}} = 64 \text{ MPa}$ , a więc stan graniczny w analizowanych płytach nie został przekroczony.

#### Literatura

1. T. GAŁKIEWICZ, A. ŻELIGOWSKI, *Stateczność i stan zakrytyczny konstrukcji cienkościennych\**. Praca wykonana w ramach problemu 05.12 IPPT PAN 1974-78, Inst. Mechaniki Stosowanej PŁ.
2. T. KÁRMÁN, E. E. SECHLER, L. H. DONNELL, *The strength of thin-plates in compression*, Trans. ASME 54, 1932.
3. A. S. VOLMIR, *Ustoicivost deformiruiemych sistem*. Nauka, Moskwa 1967.
4. N. YAMAKI, *Postbuckling behaviour of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression*. Journal of App. Mech. 58, 1959.
5. H. SCHULTZ, *Zum Spannungszustand der elastisch eingespannten Rechteckplatte oberhalb der Beullast*. Schiff und Hafen 19, Nr 2, 1967.

\*) Zagadnienie rozwiązano metodą Bubnova-Galerkina, aproksymując ugięcie płyty za pomocą funkcji  $w = f(1 - \cos 2\pi y/b) \cdot \sin(m\pi x/a)$  przy uwzględnieniu możliwości skokowego narastania wraz z obciążeniem liczby półfal  $m$ . Naprężenia zredukowane określone zostały wg hipotezy Hubera  $wm \times 196$  punktach.

## Р е з ю м е

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАКРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ  
РАВНОМЕРНЕ СЖИМАЕМОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Темой работы является частичная опытная верификация теоретических формул, касающихся сжатия в закритическом пределе прямоугольной пластинки с продольных краях укрепленных, а поперечных, которые шарнирно подпартых. Исследуется пластинку, которая является отрывком особо построенного модели ящичковой балки, испытанной чистому изгибу.

## S u m m a r y

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF POSTCRITICAL STATE OF UNIFORMLY  
COMPRESSED RECTANGULAR PLATE AS AN ELEMENT OF BENT

The aim of this paper is to present the experimental verification of the theoretical expressions derived for the post-buckling behaviour of the compressed rectangular plate clamped along longitudinal edges and simply supported along loaded sides. The compressed element of the flange of the box-girder loaded by pure bending is regarded as an experimental model.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1984 roku*

---



## STATECZNOŚĆ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ TRÓJWARSTWOWEJ POWŁOKI W KSZTAŁCIE WYCINKA STOŻKA W UJĘCIU GEOMETRYCZNIE NIELINIOWYM

JAROSŁAW NOWINKA I JERZY ZIELNICA (POZNAŃ)

*Politechnika Poznańska*

W pracy wyznaczono górne i dolne obciążenia krytyczne oraz przeanalizowano przebieg utraty stateczności dla swobodnie podpartej otwartej trójwarstwowej powłoki stożkowej obciążonej siłami podłużnymi i równomiernym ciśnieniem poprzecznym. Założono, że w chwili wyboczenia warstwy nośne powłoki są sprężyste lub uplastycznione, podczas gdy rdzeń pozostaje sprężysty. Postawione zagadnienie sformułowano w ujęciu energetycznym, a do rozwiązania zastosowano metodę Ritz'a. Równania wyprowadzono w oparciu o związki fizyczne deformacyjnej teorii plastyczności Nadai'a-Hencky'ego, wykorzystując koncepcję wzrastającego obciążenia Shanley'a. Opracowano iteracyjny algorytm obliczeniowy, który umożliwia przeanalizowanie ścieżek równowagi dla powłok znajdujących się w sprężystym, sprężysto-plastycznym lub całkowicie plastycznym przedkrytycznym stanie naprężeń. Przedstawiono szereg przykładów liczbowych, których celem jest zbadanie wpływu podstawowych parametrów fizycznych i geometrycznych na przebieg utraty stateczności powłoki przy dużych ugięciach.

### 1. Wstęp

Cienkościenne powłoki wielowarstwowe znajdują zastosowanie w budowie nowoczesnych pojazdów powietrznych, wodnych i lądowych oraz w budownictwie. Najczęściej spotykane konstrukcje składają się z dwóch warstw nośnych połączonych ze sobą środkową warstwą wypełniającą. Stosunkowo cienkie warstwy nośne wykonywane są z materiałów o dużej sztywności (stal, stopy aluminium), natomiast warstwa środkowa może być zbudowana z blachy falistej lub z masy plastycznej, masy piankowo-gąbczastej, porowatego kauczuku, korka, itp. materiałów. Powłoki tego typu charakteryzują się dobrą izolacją akustyczną i termiczną. Mają takie istotne zalety, jak lekkość i możliwość przenoszenia stosunkowo dużych obciążeń. Dla spełnienia tych wymagań konstruktorowi obecnie nie wystarcza już analiza w zakresie sprężystym; istotną staje się znajomość faz przejścia od pojawienia się pierwszych odkształceń plastycznych, do chwili całkowitego wyczerpania nośności. Celem niniejszej pracy jest przeanalizowanie zagadnienia stateczności omawianej

powłoki przy dość ogólnych założeniach, dotyczących zarówno obciążenia, jak i parametrów materiałowych i geometrycznych.

Problemom sprężysto-plastycznej stateczności powłok trójwarstwowych poświęcono dotychczas niewielką liczbę opracowań. Wymienić należy prace dotyczące powłok walcowych [2 i 6], gdzie autorzy przyjmowali do analizy związki fizyczne teorii odkształceniowej. E. I. Grigoluk [3] wyprowadził związki dla analizy powłok mało wyniosłych; pojawiają się jednak trudności przy ich całkowaniu, gdy w powłoce w stanie przedkrytycznym panuje niejednorodny stan naprężeń (jak np. w powłoce stożkowej). W pracach [9 i 10] wyznaczono obciążenia krytyczne dla trójwarstwowej zamkniętej powłoki stożkowej; do rozwiązania zastosowano metodę ortogonalizacyjną oraz iteracyjną procedurę numeryczną, opierając się na związkach fizycznych zarówno teorii deformacyjnej, jak i przyrostowej teorii plastycznego płynięcia. Wymienić należy również pracę R. Struka [7], gdzie rozpatrzono podobne zagadnienie, lecz ograniczając się do zakresu sprężystego, oraz pracę J. Maciejewskiego i J. Zielnicy [5], gdzie rozpatrzono zagadnienie sprężysto-plastycznej stateczności jednowarstwowej powłoki stożkowej, a sformułowanie problemu i przyjęta metoda rozwiązania są podobne do stosowanych w rozważanym tutaj zagadnieniu.

W niniejszej pracy podjęto analizę stateczności trójwarstwowej powłoki o postaci wycinka stożkowego, swobodnie podpartej i poddanej działaniu sił podłużnych oraz poprzecznych. Rozważa się aktywny proces obciążenia (brak zewnętrznego lub wewnętrznego odciążenia). Przyjęto następujące założenia podstawowe: 1) warstwy nośne mają symetryczną budowę i równą grubość, wykonane są z materiału izotropowego, ściśliwego ze wzmocnieniem — uwzględnia się ich sztywność na zginanie oraz przyjmuje dla nich ważność hipotez Kirchhoffa-Love'a; 2) warstwa wypełniająca jest typu lekkiego o niewielkiej sztywności na rozciąganie i zginanie (pomijanej w obliczeniach); poddana obciążeniu nie uplastycznia się i przenosi wyłącznie ścinanie poprzeczne. Postawione zagadnienie zostanie rozwiązane metodą Ritz'a z wykorzystaniem związków geometrycznych teorii nieliniowej oraz związków fizycznych deformacyjnej teorii plastyczności.

## 2. Podstawowe zależności

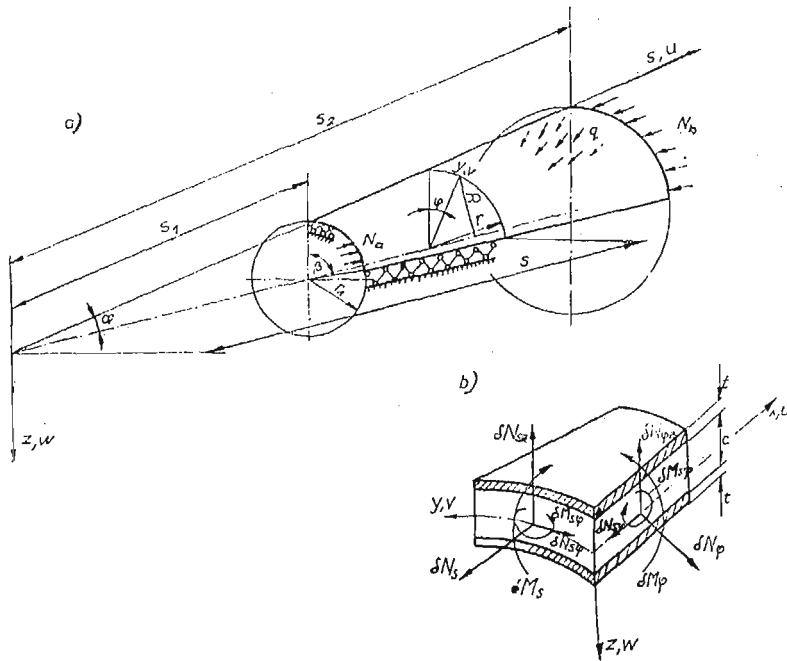
Przedmiotem analizy jest swobodnie podparta trójwarstwowa powłoka w kształcie wycinka stożka, składająca się z dwóch warstw nośnych o równej grubości oraz z warstwy wypełniającej (rys. 1). Zakładając stosowalność hipotezy Kirchhoffa-Love'a dla warstw nośnych, a także przyjmując, iż wariacja przemieszczeń wzdłuż grubości powłoki w warstwie wypełniającej jest liniowa, uzyskujemy następujące wzory na przemieszczenia  $u$  i  $v$  wywołane utratą stateczności odpowiednio w kierunku wzdłużnym i obwodowym na powierzchni odległej o  $z$  od powierzchni podstawowej powłoki (rys. 2);

a) warstwa nośna zewnętrzna,  $0,5c \leq z \leq 0,5c + t$

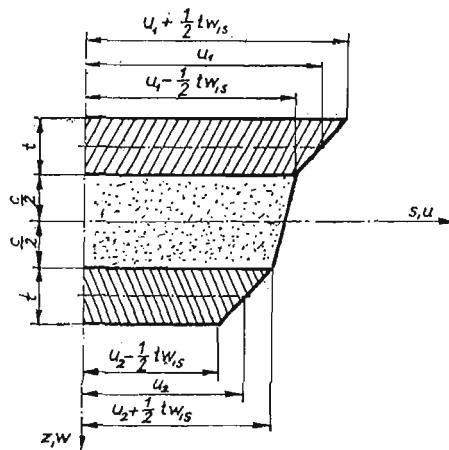
$$u = u^+ + \left( z - \frac{c+t}{2} \right) w_{,s}, \quad v = v^+ + \left( z - \frac{c+t}{2} \right) \frac{1}{r} w_{,\varphi}, \quad (2.1)$$

b) warstwa nośna wewnętrzna,  $-0,5c - t \leq z \leq -0,5c$

$$u = u^- + \left( z + \frac{c+t}{2} \right) w_{,s}, \quad v = v^- + \left( z + \frac{c+t}{2} \right) \frac{1}{r} w_{,\varphi}, \quad (2.2)$$



Rys. 1.



Rys. 2.

c) warstwa wypełniająca,  $-0,5c \leq z \leq 0,5c$

$$u = u_{\alpha} + \frac{z}{c}(2u_{\beta} - tw_{,s}), \quad v = v_{\alpha} + \frac{z}{c}\left(2v_{\beta} - \frac{t}{r}w_{,p}\right). \quad (2.3)$$

W powyższych wzorach  $u^+$  i  $v^+$  oraz  $u^-$  i  $v^-$  są przemieszczeniami powierzchni środkowych odpowiednio zewnętrznej i wewnętrznej warstwy nośnej. Przyjęto  $w = w_1 = w_2 = w_3$ .

Wprowadzono tutaj również

$$u_\alpha = \frac{u^+ + u^-}{2}, \quad v_\alpha = \frac{v^+ + v^-}{2}, \quad u_\beta = \frac{u^+ - u^-}{2}, \quad v_\beta = \frac{v^+ - v^-}{2}. \quad (2.4)$$

Wariacje odkształceń oraz krzywizn w powłoce określimy następująco [4]:

a) warstwy nośne

$$\begin{aligned} \delta e_s^\pm &= u_{,s}^\pm + \left( z \mp \frac{c+t}{2} \right) w_{,ss} + \frac{1}{2} w_{,s}^2, \\ \delta e_\varphi^\pm &= \frac{1}{r} v_{,\varphi}^\pm + \left( z \mp \frac{c+t}{2} \right) \left( \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{s} w_{,s} \right) + A_0 \frac{u^\pm}{s} - \frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2r^2} w_{,\varphi}^2, \\ \delta \gamma_{s\varphi}^\pm &= \frac{1}{r} u_{,\varphi}^\pm + v_{,s}^\pm + 2 \left( z \mp \frac{c+t}{2} \right) \left( \frac{1}{r} w_{,s\varphi} - \frac{1}{rs} w_{,\varphi} \right) - A_0 \frac{v^\pm}{s} + \frac{1}{r} w_{,s} w_{,\varphi}, \\ \delta \kappa_s^\pm &= w_{,ss}, \\ \delta \kappa_\varphi^\pm &= \frac{1}{s} w_{,s} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{\cos \alpha}{r^2} v_{,\varphi}^\pm, \\ \delta \kappa_{s\varphi}^\pm &= \frac{1}{r} w_{,s\varphi} - \frac{1}{rs} w_{,\varphi} + \frac{\cos \alpha}{4r} v_{,s}^\pm - \frac{5 \cos \alpha}{4rs} v^\pm + \frac{\cos \alpha}{4r^2} u_{,\varphi}^\pm, \end{aligned} \quad (2.5)$$

b) warstwa wypełniająca (przenosi wyłącznie ścinanie poprzeczne)

$$\begin{aligned} \delta \gamma_{sz} &= \frac{1}{c} (2v_\beta - (c+t)w_{,s}), \\ \delta \gamma_{\varphi z} &= \frac{1}{c} \left( 2v_\beta - (c+t) \frac{1}{r} w_{,\varphi} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Niewielkie różnice występujące między niniejszymi związkami a przyjętymi przez Goldenwajzera [4] leżą w granicach dokładności założeń teorii powłok. Niekiedy w różnych opracowaniach dotyczących teorii powłok podane są nieco inne wyrażenia dla zmiany krzywizn (np. wg Własowa). Celem zbadania wpływu dodatkowych składników na wyniki obliczeń wprowadzono współczynnik  $A_0$ , który w obliczeniach numerycznych przyjmie wartość 0 lub 1.

Dla przyjętego przypadku obciążenia siły zewnętrzne i naprężenia odpowiadające bezmomentowemu przedkrytycznemu stanowi naprężeń wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} N_s &= 2t\sigma_s = \frac{1}{2} q \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{s_1}{s} - s \right) - N_\alpha \frac{s_1}{s}, \\ N_\varphi &= 2t\sigma_\varphi = -q \operatorname{stg} \alpha, \quad T_s = T_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Zakładając stały stosunek obciążenia podłużnego do poprzecznego

$$\kappa = \frac{N_\alpha}{qs_1}, \quad (2.8)$$

zapewniamy proporcjonalny wzrost składowych tensora naprężenia przy zwiększaniu obciążenia zewnętrznego, co stanowi wymóg tzw. „prostego obciążenia” dla deformacyjnej



teorii plastyczności. Naprężenia wzdłużne, obwodowe, styczne oraz intensywność naprężeń przyjmą odpowiednio wartości:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= -\frac{qs}{4t} k_s \operatorname{tg} \alpha, & \sigma_\varphi &= -\frac{qs}{2t} \operatorname{tg} \alpha, & \tau_{s\varphi} &= 0, \\ \sigma_t &= (\sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 + 3\tau_{s\varphi}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{qs}{4t} \sqrt{\Omega} \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie

$$k_s = 1 - \left( \frac{s_1}{s} \right)^2 \left( 1 - \frac{2\kappa}{\operatorname{tg} \alpha} \right), \quad \Omega = k_s(k_s - 2) + 4.$$

Zakładamy liniową charakterystykę umocnienia materiału warstw nośnych w zakresie plastycznym, dla której moduł styczny  $E_k = \text{const}$ , natomiast moduł sieciowy

$$E_c = \begin{cases} \frac{E_k}{1 + \frac{k_1}{qs\sqrt{\Omega}}}, & \text{dla } \sigma_{pl} \leq \sigma_t \leq \sigma_m, \\ E, & \text{dla } 0 \leq \sigma_t \leq \sigma_{pl}, \end{cases} \quad (2.10)$$

gdzie  $\sigma_m$  jest wytrzymałością doraźną, a  $k_1 = \frac{4t}{\operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{E_k}{E} - 1 \right) \sigma_{pl}$ . W opisie  $E_c$  (2.10) wykorzystano warunek plastyczności H-M-H. W obliczeniach numerycznych jest on realizowany przez odpowiednie instrukcje logiczne.

Związki fizyczne dla warstw nośnych wg teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych Nadaia-Hencky'ego mają postać [8]

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{1}{E_c} \sigma_s - \left( \frac{1}{2E_c} - \frac{1-2\nu}{2E} \right) \sigma_\varphi, \\ \varepsilon_\varphi &= -\left( \frac{1}{2E_c} - \frac{1-2\nu}{2E} \right) \sigma_s + \frac{1}{E_c} \sigma_\varphi, \\ \gamma_{s\varphi} &= \left( \frac{3}{E_c} - \frac{1-2\nu}{E} \right) \tau_{s\varphi}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Przyjmując  $E_c = E$  uzyskujemy z (2.11) związki fizyczne dla ciała liniowo-sprężystego.

Aby wyznaczyć wariacje naprężeń, należy dokonać wariacji wyrażeń (2.11), a następnie odwrócić je ze względu na  $\delta\sigma_{\alpha\beta}$ . Po wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy zależności

$$\begin{bmatrix} \delta\sigma_s \\ \delta\sigma_\varphi \\ \delta\tau_{s\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_s \\ \delta\varepsilon_\varphi \\ \delta\gamma_{s\varphi} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Elementy macierzy sztywności mają postać

$$\begin{aligned} F_1 = f_{11} &= \frac{t}{D_0} \left( k_2 \bar{S}_\varphi^2 + \frac{E_k}{E_c} \right), \\ F_2 = f_{12} = f_{21} &= \frac{t}{D_0} \left[ -k_2 \bar{S}_s \bar{S}_\varphi + \frac{1}{2} (k_0 - 2) \frac{E_k}{E_c} \right], \end{aligned}$$

$$F_4 = f_{22} = \frac{t}{D_0} \left( k_2 \bar{S}_s^2 + \frac{E_k}{E_c} \right),$$

$$F_3 = f_{33} = \frac{tE_c}{k_0},$$

gdzie

$$D_0 = \frac{1}{4E_c} \left[ 3 + \frac{1-2\nu}{E} E_k (k_0 - 1) \right] - \frac{1-2\nu}{E} k_2 \bar{S}_s \bar{S}_\varphi, \quad k_0 = 3 - \frac{1-2\nu}{E} E_c, \quad (2.14)$$

$$\bar{S}_s = \frac{1}{\sigma_i} \left( \sigma_s - \frac{1}{2} \sigma_\varphi \right) = (1 - k_s) / \sqrt{\Omega}, \quad \bar{S}_\varphi = \frac{1}{\sigma_i} \left( \sigma_\varphi - \frac{1}{2} \sigma_s \right) = \frac{k_s - 4}{2\sqrt{\Omega}}, \quad k_2 = 1 - \frac{E_k}{E_c}.$$

Siły i momenty w warstwach nośnych powstające w wyniku utraty stateczności uzyskuje się przez całkowanie wariacji naprężeń (2.12) wzdłuż grubości warstw nośnych

$$\delta N_{\alpha\beta}^{\pm} = \int_{\pm \frac{1}{2}c}^{\pm \frac{1}{2}c \pm t} \delta \sigma_{\alpha\beta}^{\pm} dz, \quad \delta M_{\alpha\beta}^{\pm} = \int_{\pm \frac{1}{2}c}^{\pm \frac{1}{2}c \pm t} \delta \sigma_{\alpha\beta}^{\pm} z dz. \quad (2.15)$$

Warstwa wypełniająca zgodnie z przyjętymi założeniami przenosi wyłącznie siły ścinające, stąd

$$\delta N_{sz} = G_3 \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} \delta \gamma_{sz} dz, \quad \delta N_{\varphi z} = G_3 \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} \delta \gamma_{\varphi z} dz, \quad (2.16)$$

gdzie  $G_3$  jest modułem odkształcenia postaciowego materiału warstwy wypełniającej.

### 3. Równanie stateczności

Układ równań stateczności powłoki stożkowej wyrażony w przemieszczeniach nie ma ścisłego rozwiązania. Przybliżone rozwiązanie metodą ortogonalizacyjną Galerkina związane jest z pracochłonnymi obliczeniami, dlatego w niniejszej pracy zastosowano metodę Ritz'a. Opierając się na twierdzeniu, że równowadze układu odpowiada ekstremum jego energii potencjalnej  $W$ , otrzymujemy równanie równowagi powłoki w ujęciu wariacyjnym,

$$\delta W = \delta(U + L) = 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $U$  jest energią zgromadzoną w powłoce w trakcie jej odkształcenia,  $L$  zaś jest pracą sił zewnętrznych. Równanie (3.1) jest poprawne zarówno dla stanów przedkrytycznych, jak i pokrytycznych.

Do wzoru na energię  $W$ , zamiast ścisłych wyrażeń na przemieszczenia, wprowadzimy funkcje aproksymujące zawierające współczynniki  $A_i$ , które dobiera się tak, aby możliwie najdokładniej odtwarzały przebieg rzeczywistych przemieszczeń.

Równanie

$$\delta W = \sum_{i=1}^k W_{,A_i} \delta A_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.2)$$

jest spełnione przy zupełnej dowolności wariacji  $\delta A_i$ , zatem

$$W_{,A_i} = 0. \quad (3.3)$$

Warunek równoczesnego spełnienia tych równań określa krytyczny układ obciążeń. Gdy równania te są liniowe i jednorodne, pozostaje do rozwiązania zagadnienie wartości własnych, jednak w naszym przypadku powstaje bardziej złożony układ równań nieliniowych i niejednorodnych.

Całkowitzą energię potencjalną powłoki  $W$  uzyskujemy, sumując jej wartości w warstwach nośnych:  $U^+$  (zewnątrznej),  $U^-$  (wewnętrznej), w warstwie wypełniającej  $U^w$  oraz pracę sił zewnętrznych  $L$ :

$$W = U^+ + U^- + U^w + L. \quad (3.4)$$

Poszczególne składniki energii mają postać

$$U^\pm = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta (\delta N_s^\pm \delta \varepsilon_s^\pm + \delta N_\varphi^\pm \delta \varepsilon_\varphi^\pm + \delta N_{s\varphi}^\pm \delta \gamma_{s\varphi}^\pm + \delta M_s^\pm \delta \kappa_s^\pm + \delta M_\varphi^\pm \delta \kappa_\varphi^\pm + 2\delta M_{s\varphi}^\pm \delta \kappa_{s\varphi}^\pm) r d\varphi ds, \quad (3.5)$$

$$U^w = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta (\delta N_{sz} \delta \gamma_{sz} + \delta N_{\varphi z} \delta \gamma_{\varphi z}) r d\varphi ds,$$

gdzie wariacje odkształceń uzyskane ze wzorów (2.5) dotyczą powierzchni środkowych odpowiednich warstw. Pracę sił zewnętrznych można w pewnym uproszczeniu ([8]) zapisać jako funkcję przemieszczenia  $w$ ,

$$L = - \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta q w r d\varphi ds - \frac{1}{2} N_a s_1 \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta w_{,s}^2 d\varphi ds. \quad (3.6)$$

Po podstawieniu odpowiednich wyrażeń na wariacje sił i momentów (2.15) i (2.16) oraz odkształceń i krzywizn, wykorzystując oznaczenia (2.4), otrzymujemy następujące wyrażenie na energię potencjalną powłoki

$$W = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta \left\{ 2f_{11} \left[ \left( u_{\alpha,s} + \frac{1}{2} w_{,s}^2 \right)^2 + u_{\beta,s}^2 \right] + 4f_{12} \left[ \left( u_{\alpha,s} + \frac{1}{2} w_{,s}^2 \right) \left( \frac{1}{r} v_{\alpha,\varphi} + A_0 \frac{u_\alpha}{s} - \frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2r^2} w_{,\varphi}^2 \right) + \frac{1}{r} u_{\beta,s} v_{\beta,\varphi} + \frac{A_0}{s} u_{\beta,s} u_\beta \right] + 2f_{22} \left[ \left( \frac{1}{r} v_{\alpha,\varphi} + A_0 \frac{u_\alpha}{s} - \frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2r^2} w_{,\varphi}^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{r} v_{\beta,\varphi} + A_0 \frac{u_\beta}{s} \right)^2 \right] + 2f_{33} \left[ \left( \frac{1}{r} u_{\alpha,\varphi} + v_{\alpha,s} - A_0 \frac{v_\alpha}{s} + \frac{1}{r} w_{,s} w_{,\varphi} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} u_{\beta,\varphi} + v_{\beta,s} - A_0 \frac{v_\beta}{s} \right)^2 \right] + 2 \left[ \left( \frac{c+t}{2} u_{\beta,s} + \frac{t^2}{12} w_{,ss} \right) \left( f_{11} w_{,ss} + f_{12} \left( \frac{1}{s} w_{,s} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right) \right) + \left( \frac{c+t}{2} \left( \frac{1}{r} v_{\beta,\varphi} + A_0 \frac{u_\beta}{s} \right) + \frac{t^2}{12} \left( \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{s} w_{,s} \right) \right) \left( f_{12} w_{,ss} + f_{22} \left( \frac{1}{s} w_{,s} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right) \right) \right] + \frac{\cos \alpha}{r^2} \left( \frac{c+t}{2} (f_{12} (2v_{\alpha,\varphi} u_{\beta,s} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2v_{\beta,r}u_{\alpha,s} + w_{s,s}^2 v_{\beta,\varphi} + f_{22} \left( \frac{4}{r} v_{\alpha,\varphi} v_{\beta,\varphi} + 2A_0 \frac{1}{s} (u_{\alpha} v_{\beta,\varphi} + u_{\beta} v_{\alpha,\varphi}) + 2v_{\beta,\varphi} \left( -\frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2r^2} w_{,\varphi}^2 \right) \right) + \\
& \quad (3.7) \\
& + \frac{t^2}{6} \left( f_{12} v_{\alpha,\varphi} w_{,ss} + f_{22} v_{\alpha,\varphi} \left( \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{s} w_{,s} \right) \right) + 4f_{33} \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,s\varphi} - \frac{1}{rs} w_{,\varphi} \right) \left( \frac{c+t}{2} \left( \frac{1}{r} u_{\beta,\varphi} + \right. \right. \right. \\
& + v_{\beta,s} - A_0 \frac{v_{\beta}}{s} \left. \right) + \frac{t^2}{6} \left( \frac{1}{r} w_{,s\varphi} - \frac{1}{rs} w_{,\varphi} + \frac{\cos \alpha}{4r} v_{\alpha,s} - \frac{5 \cos \alpha}{4rs} v_{\alpha} + \frac{\cos \alpha}{4r^2} u_{\alpha,\varphi} \right) + \frac{c+t}{2} \left( \frac{\cos \alpha}{4r} \times \right. \\
& \times \left( \frac{1}{r} (u_{\alpha,\varphi} v_{\beta,s} + u_{\beta,\varphi} v_{\alpha,s}) + 2v_{\alpha,s} v_{\beta,s} - \frac{A_0}{s} (v_{\alpha,s} v_{\beta} + v_{\alpha} v_{\beta,s}) + \frac{1}{r} w_{,s} w_{,\varphi} v_{\beta,s} \right) - \frac{5 \cos \alpha}{4rs} \times \\
& \times \left( \frac{1}{r} (u_{\alpha,\varphi} v_{\beta} + v_{\beta,\varphi} v_{\alpha}) + v_{\alpha,s} v_{\beta} + v_{\beta,s} v_{\alpha} - \frac{2A_0}{s} v_{\alpha} v_{\beta} + \frac{1}{r} v_{\beta} w_{,s} w_{,\varphi} \right) + \frac{\cos \alpha}{4r^2} \left( \frac{2}{r} u_{\alpha,\varphi} u_{\beta,\varphi} + \right. \\
& \left. v_{\alpha,s} u_{\beta,\varphi} + v_{\beta,s} u_{\alpha,\varphi} - \frac{A_0}{s} (v_{\alpha} u_{\beta,\varphi} + v_{\beta} u_{\alpha,\varphi}) + \frac{1}{r} w_{,s} w_{,\varphi} u_{\beta,\varphi} \right) \left. \right] + 4 \frac{G_3}{c} \left[ \left( u_{\beta} - \frac{c+t}{2} w_{,s} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \left( v_{\beta} - \frac{c+t}{2r} w_{,\varphi} \right)^2 \right] \Bigg] r d\varphi ds - \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{\beta} q w r d\varphi ds - \frac{1}{2} N_a s_1 \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{\beta} w_{,s}^2 d\varphi ds.
\end{aligned}$$

W celu rozwiązania zagadnienia przyjmujemy następujące funkcje aproksymujące przemieszczenia:

$$\begin{aligned}
w(s, \varphi) &= A_1 r^2 \sin k\psi \sin p\varphi, \\
u_{\alpha}(s, \varphi) &= A_2 r^2 \cos k\psi \sin p\varphi, \\
u_{\beta}(s, \varphi) &= A_3 r^2 \cos k\psi \sin p\varphi, \\
v_{\alpha}(s, \varphi) &= A_4 r^2 \sin k\psi \cos p\varphi, \\
v_{\beta}(s, \varphi) &= A_5 r^2 \sin k\psi \cos p\varphi,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
k &= \frac{m\pi}{l}, \quad l = s_2 - s_1, \quad \psi = s - s_1 \\
p &= \frac{n\pi}{\beta}, \quad r = s \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Funkcje (3.8) spełniają kinematyczne warunki swobodnego podparcia brzegów powłoki

$$\begin{aligned}
w \Big|_{\substack{s=s_1 \\ s=s_2}} &= 0, \quad u_{\alpha} \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad v_{\alpha} \Big|_{\substack{s=s_1 \\ s=s_2}} = 0 \\
w \Big|_{\varphi=0} &= 0, \quad u_{\beta} \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad v_{\beta} \Big|_{\substack{s=s_1 \\ s=s_2}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Podstawiając funkcje (3.8) do wyrażenia (3.7) oraz obliczając pochodne cząstkowe energii  $W$  względem parametrów  $A_i$  (3.3), otrzymujemy następujący wyjściowy układ nieliniowych równań algebraicznych

$$W_{,A_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5. \tag{3.11}$$

Układ ten możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} (a_{11} + \tilde{a}_{11}) A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3 + a_{14} A_4 + a_{15} A_5 &= \\ &= b_{11} A_1^2 + b_{12} A_1^3 + b_{13} A_1 A_2 + b_{14} A_1 A_3 + b_{15} A_1 A_4 + b_{16} A_1 A_5 + b_{17}, \\ a_{21} A_1 + a_{22} A_2 + a_{23} A_3 + a_{24} A_4 + a_{25} A_5 &= b_{21} A_1^2, \\ a_{31} A_1 + a_{32} A_2 + a_{33} A_3 + a_{34} A_4 + a_{35} A_5 &= b_{31} A_1^2, \\ a_{41} A_1 + a_{42} A_2 + a_{43} A_3 + a_{44} A_4 + a_{45} A_5 &= b_{41} A_1^2, \\ a_{51} A_1 + a_{52} A_2 + a_{53} A_3 + a_{54} A_4 + a_{55} A_5 &= b_{51} A_1^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ze względu na skomplikowaną budowę równań zastosowano tutaj szereg oznaczeń skracających.

Obliczone analitycznie całki po współrzędnej oznaczono  $\beta$  następującymi symbolami:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\beta \sin^2 p\varphi d\varphi, & J_2 &= \int_0^\beta \cos^2 p\varphi d\varphi, & J_3 &= \int_0^\beta \sin^3 p\varphi d\varphi, \\ J_4 &= \int_0^\beta \sin p\varphi d\varphi, & J_5 &= \int_0^\beta \sin^4 p\varphi d\varphi, & J_6 &= \int_0^\beta \cos^4 p\varphi d\varphi, \\ J_7 &= \int_0^\beta \sin^2 p\varphi \cos p\varphi d\varphi, & J_8 &= \int_0^\beta \sin p\varphi \cos^2 p\varphi d\varphi, & J_9 &= \int_0^\beta \sin^2 p\varphi \cos^2 p\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Z kolei kombinacje funkcji zmiennej  $s$ , po której całkowanie zostanie zrealizowane numerycznie, zapisano w postaci

$$\begin{aligned} C_1 &= s \sin^2 k\varphi, & C_2 &= s^2 \sin^2 k\varphi, & C_3 &= s^3 \sin k\varphi, \\ C_4 &= s^3 \sin^2 k\varphi, \dots & C_{14} &= s^4 \sin^2 k\varphi \cos k\varphi, \dots \\ C_{31} &= s^4 \sin k\varphi \cos^2 k\varphi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Wprowadzono także zależność

$$V_{k,l}(s) = \int_{s_1}^{s_2} F_k(s) C_l(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots, 5, \quad l = 1, 2, \dots, 31, \quad (3.15)$$

gdzie  $F_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  są elementami macierzy sztywności (1.13) oraz  $F_5 = 1$ . Dodatkowo oznaczono

$$z_1 = \frac{c+t}{2}, \quad z_2 = \frac{t^2}{12}, \quad z_3 = 4 \frac{G_3}{c}. \quad (3.16)$$

Przy wykorzystaniu oznaczeń (3.13), (3.15), (3.16) poszczególne współczynniki  $a_{ij}$  i  $b_{ij}$  równań (3.12) mają postać

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha J_1 V_{4,4} + 2z_2 [J_1 (\sin^5 \alpha (4V_{1,1} + 16kV_{1,11} - 4k^2V_{1,4} - 8k^3V_{1,13} + \\ &+ 16k^2V_{1,23} + k^4V_{1,8} + 8V_{2,1} + 20kV_{2,11} - 4k^2V_{2,4} - 2k^3V_{2,13} + 4k^2V_{2,23} + \\ &+ 4V_{4,1} + 2kV_{4,11} + k^2V_{4,23}) + \sin^3 \alpha p^2 (-4V_{2,1} - 8kV_{2,11} + 2k^2V_{2,4} - 4V_{4,1} + \\ &+ 2kV_{4,11}) + \sin \alpha p^4 V_{4,1}) + 4J_2 \sin^3 \alpha p^2 (V_{3,1} + 2kV_{3,11} + k^2V_{3,23})] + z_3 \sin^3 \alpha \times \\ &\times z_1^2 [J_1 \sin^2 \alpha (4V_{5,4} + 4kV_{5,13} + k^2V_{5,25}) + J_2 p^2 V_{5,4}], \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= -N_a s_1 J_1 \sin^5 \alpha (4V_{5,2} + 4kV_{5,12} + k^2 V_{5,24}), \\
a_{12} &= a_{21} = \sin^4 \alpha \cos \alpha J_1 (-4V_{2,12} - 2A_0 V_{4,12} + 2kV_{2,6}) + \sin^2 \alpha \cos \alpha p J_2 z_2 (2V_{3,28} - \\
&\quad - 2kV_{3,29}), \dots \\
b_{11} &= 3 \sin^4 \alpha \cos \alpha [\sin^2 \alpha J_3 (4V_{2,7} + 4kV_{2,16} + k^2 V_{2,17}) + p^2 J_8 V_{4,7}], \quad [\text{cd.}] \\
b_{12} &= -\sin^5 \alpha [\sin^4 \alpha J_5 (16V_{1,10} + 32kV_{1,19} + 24k^2 V_{1,21} + k^4 V_{1,27}) + p^4 J_6 V_{4,10} + \\
&\quad + \sin^2 \alpha p^2 (8V_{2,10} + 8kV_{2,19} + 2k^2 V_{2,21} + 16kV_{3,19} + 4k^2 V_{3,21} + 16V_{3,10} + \\
&\quad + 8 \sin^4 \alpha J_5 k^3 V_{1,22})], \dots
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Powyżej zamieszczono jedynie kilka spośród współczynników  $a_{ij}$  i  $b_{ij}$  z uwagi na ich rozbudowaną strukturę.

Zapis kombinacji współczynników  $a_{ij}$  oraz  $b_{ij}$  przedstawimy przy pomocy funkcji  $\bar{g}$ ,

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}, r) = \sum_{i=2}^5 \left( \bar{x}_{1(i+r)} \left\{ \sum_{j=1}^4 (-1)^{i+j} \bar{y}_{(j+1)1} d_{ij} \right\} \right), \tag{3.18}$$

gdzie wyrażenia  $d_{ij}$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  są minorami wyznacznika  $W_1$ , powstałym w wyniku wykreślenia  $(i-1)$ -szej kolumny oraz  $j$ -tego wiersza:

$$W_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

Rozwiązując układ (3.12) względem parametru funkcji ugięcia  $A_1$ , otrzymujemy równanie stateczności w postaci

$$q = \frac{e_1 A_1 + e_2 A_1^2 + e_3 A_1^3}{e_1 \kappa A_1 + e_5}, \quad N_a = q s_1 \kappa, \tag{3.20}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
e_1 &= a_{11} + W_1^{-1} \bar{g}(a, a, 0), \\
e_2 &= -b_{11} - W_1^{-1} (\bar{g}(a, b, 0) + \bar{g}(b, a, 1)), \\
e_3 &= -b_{12} + W_1^{-1} \bar{g}(b, b, 1), \\
e_4 &= s_1^2 \sin^5 \alpha J_1 (4V_{5,2} + 4kV_{5,12} + k^2 V_{5,24}), \\
e_5 &= \sin^3 \alpha J_4 W_{5,3}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

#### 4. Obliczenia numeryczne i wnioski

Efektom działania programu obliczeń numerycznych jest uzyskanie wartości obciążenia poprzecznego  $q$  (oraz siły wzdłużnej  $N$ ) w funkcji ugięcia powłoki, według równania (3.20). Ze względu na uwikłaną postać tej zależności (obciążenie  $q$  tkwi m.in. w elementach lokalnej macierzy sztywności) obliczenia przeprowadzono iteracyjnie. Na każdym kroku obliczeniowym ścieżki równowagi przyjmowano pewną wartość początkową obciążenia  $q_x$ . Umożliwiło to wyznaczenie współczynników sztywności i otrzymanie równania o znanych współczynnikach,

$$q = q(x), \tag{4.1}$$

gdzie ugięcie reprezentuje parametr  $A_1$  (4.1). Ostatecznie jako  $q$  przyjmowano wartość spełniającą warunek,

$$|q - q_x| < \varepsilon_q, \quad (4.2)$$

gdzie  $\varepsilon_q$  oznacza założoną dokładność obliczeń. Kolejne przybliżenia wartości  $q$  ustalano w oparciu o metodę „regula falsi”. Uproszczony algorytm obliczeń przedstawiono na rys. 3, gdzie

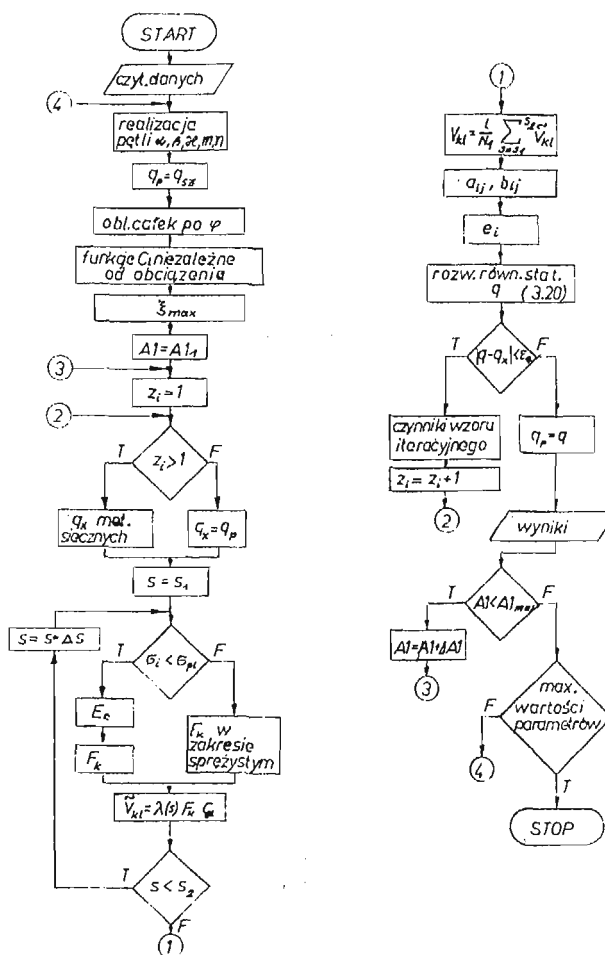
$N_1$  — ilość kroków całkowania,

$\lambda$  — współczynnik całkowania, zależny od przyjętej metody (stosowano metodę trapezów),

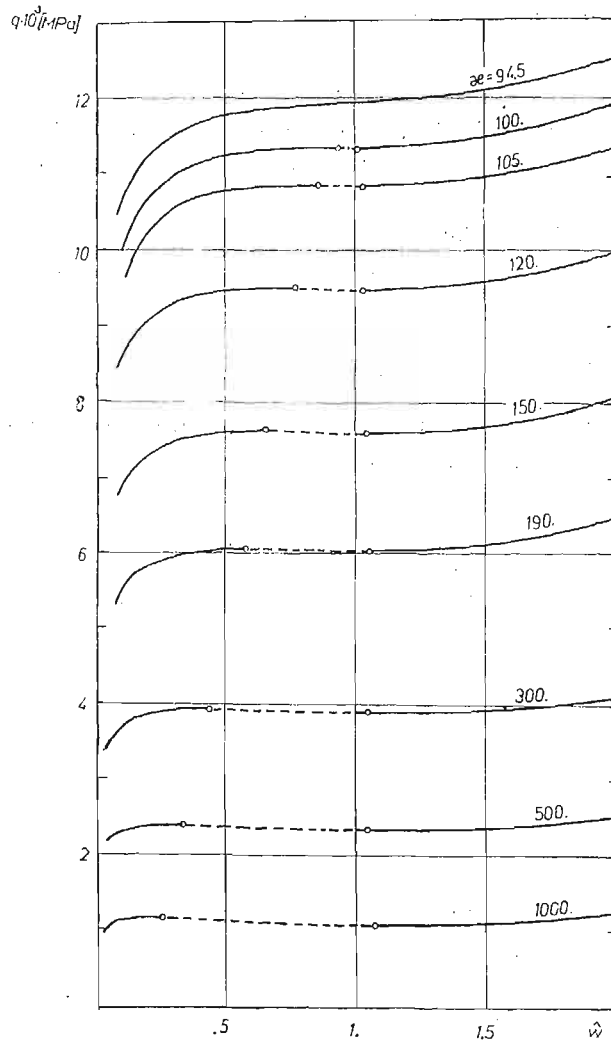
$\xi_{max}$  — parametr ugięcia,

$$\xi_{max} = \text{MAX} |s^2 \sin^2 \alpha \sin k\varphi|. \quad (4.3)$$

program napisano w języku FORTRAN, a obliczenia przeprowadzono na komputerach SM-1 oraz ODRA-1305. Jako dane podstawowe przyjęto:



Rys. 3.



Rys. 4.

a) stałe materiałowe

$E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa,  $E_k = 3 \cdot 10^4$  MPa,  $\sigma_{pl} = 240$  MPa,  $\nu = 0,3$ ,  $G_3 = 25$  MPa,

b) stałe geometryczne:

$r_s = 1,3$  m,  $L = 0,8$  m,  $t = 0,002$  m,  $c = 0,003$  m,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $\beta = 0,5$ ,

gdzie  $r_s$  — promień średni,

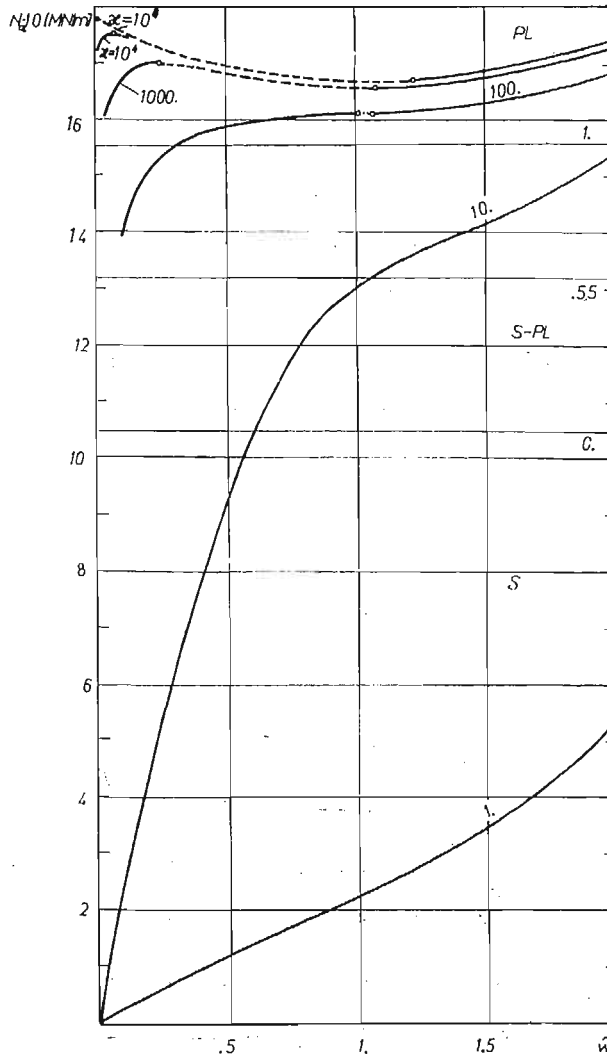
c) parametry:

$\kappa = 1000$ ,  $N_1 = 20$ ,  $m = n = 1$ ,  $A_0 = 1$ .

Podstawę analizy stanowią wykresy zależności obciążenia od względnego ugięcia powłoki  $w$ , odniesionego do jej całkowitej grubości

$$w = \frac{w_{\max}}{2t + c}, \quad w_{\max} = A_1 \xi_{\max}. \quad (4.4)$$





Rys. 5.

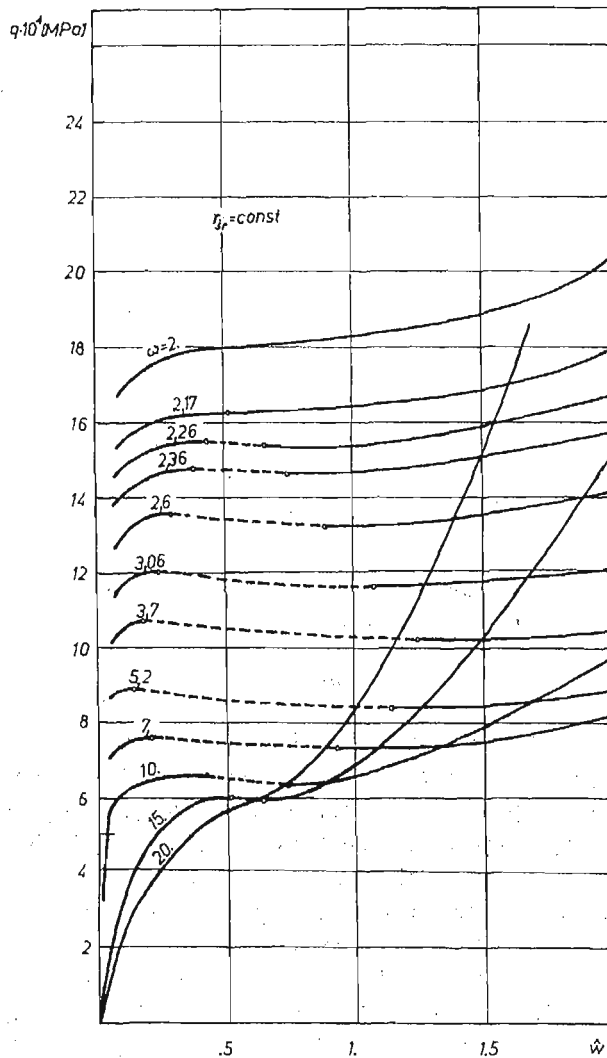
Obszar niestateczny zaznaczono na wykresach linią przerywaną. Początek tego obszaru stanowi górne obciążenie krytyczne  $q_+^*$ ; koniec — dolne obciążenie krytyczne  $q_-^*$ . Rysunki, na których w istotnej proporcji, oprócz obszaru plastycznego występuje obszar sprężysty lub sprężysto-plastyczny, zaopatrzone dodatkowo w linie opisane liczbami, oznaczającymi stopień uplastycznienia liczony wzdłuż tworzącej powłoki.

Stosunek obciążeń, wyrażony przez współczynnik  $\kappa$ , wywiera zasadniczy wpływ na postać wybożenia powłoki. Na rys. 4 przedstawiono krzywe obrazujące przebieg utraty stateczności dla różnych wartości  $\kappa$ . Dla małych wartości  $\kappa$  krzywe  $q(\hat{w})$  i  $N_a(\hat{w})$  wykazują jedynie przegięcie i każde obciążenie daje w tym przypadku stany stateczne. Powyżej pewnej wartości granicznej ( $\kappa \cong 95$ ), dla której  $q_+^* = q_-^*$ , pojawia się obszar niestateczny, który przy dalszym wzroście  $\kappa$  rozszerza się, a jego początek występuje przy coraz mniej-

szych ugięciach. Jednocześnie obciążenia krytyczne  $q^*$  maleją, a krytyczne siły wzdłużne rosną. Powyżej pewnej wartości ( $\varkappa = 10^4$ ) ścieżki równowagi nie odbiegają istotnie od krzywej granicznej, odpowiadającej przypadkowi działania na powłokę jedynie siły wzdłużnej ( $\varkappa = \infty$ ). Jak wynika z rys. 5, utrata stateczności następuje po całkowitym uplastycznieniu powłoki.

Rys. 6 przedstawia przebieg utraty stateczności powłoki przy różnym stosunku promienia średniego wycinka stożkowego do długości tworzącej  $\omega = \frac{2r_s}{l}$  ( $r_s = \text{const}$ ).

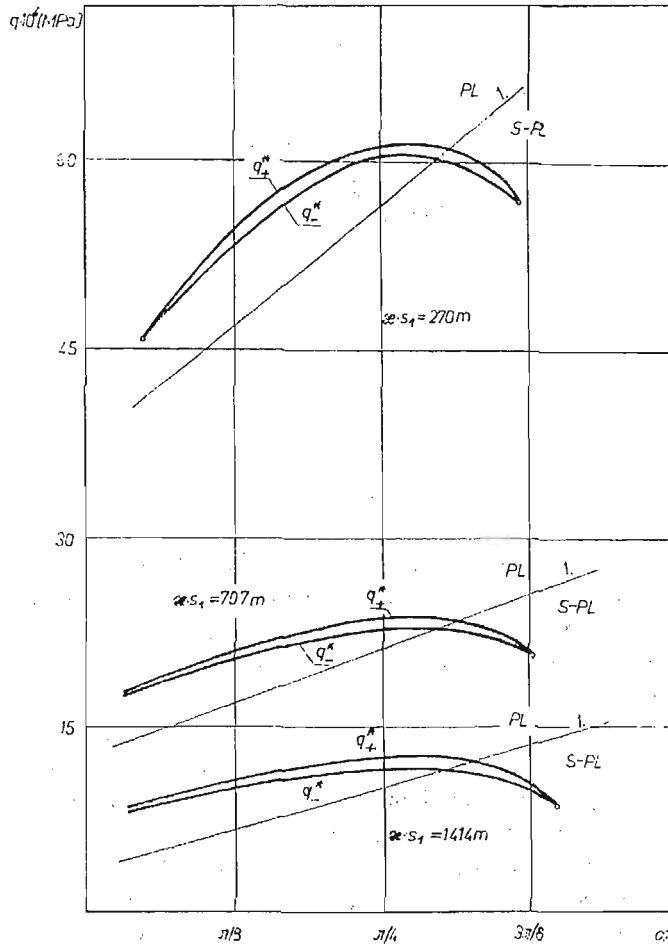
Charakterystyczną cechą rodziny krzywych  $q(\hat{w})$  jest tutaj występowanie dwóch krzywych granicznych: górnej i dolnej. Przy wzroście  $\omega$  obciążenia krytyczne  $q_+^*$  i  $q_-^*$  maleją, natomiast ich różnica, jak również przedział ugięć niestatecznych, najpierw nieliniowo wzrastają



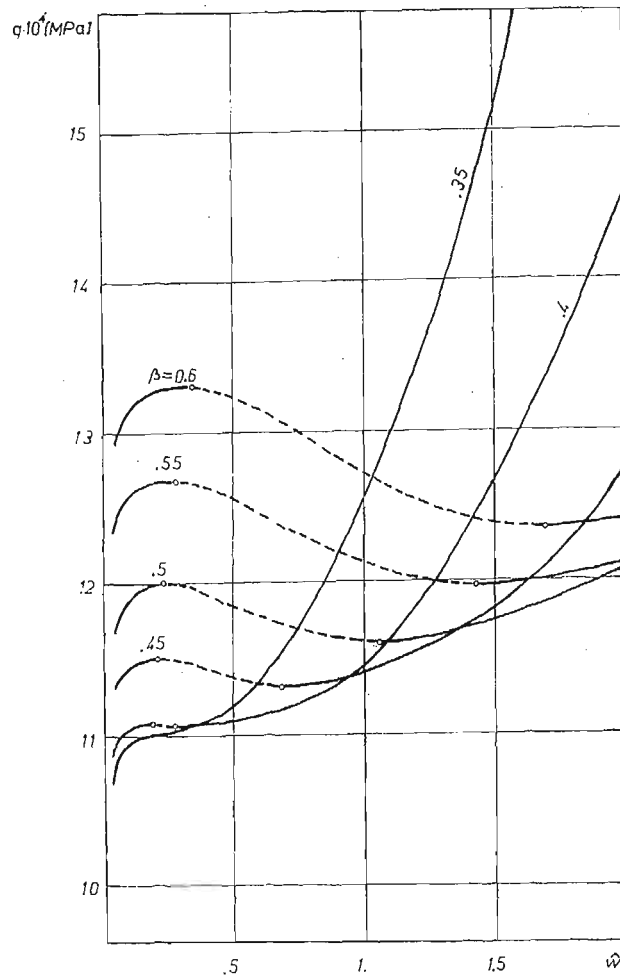
Rys. 6.

do określonej wartości maksymalnej, a potem maleją. Porównanie dwóch wariantów zmienności  $\omega$  (przy  $r_s = \text{const}$  i przy  $l = \text{const}$ ) dało analogiczne wartości  $\omega$ , odpowiadające krzywym granicznym, a także pozwoliło stwierdzić, iż powłoki o większych rozmiarach ulegały wyboczeniu przy niższych obciążeniach krytycznych.

Analiza przebiegu wyboczenia powłoki związana ze zmianą kąta  $\alpha$  (rys. 7) została przeprowadzona przy zachowaniu stałej wartości pola powierzchni bocznej powłok ( $r_s = \text{const}$ ,  $l = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ ). Ponieważ założenie takie powoduje odpowiednią zmianę wartości  $s_1$ , dla zachowania stałej wartości stosunku obciążeń w badaniu tego przypadku, zapewniono  $\kappa s_1 = \text{const}$ . Obliczenia przeprowadzono dla trzech wariantów, które zestawiono na wykresie 7. Występuje duże podobieństwo odpowiednich charakterystyk. Dla kątów  $\alpha$  bardzo małych lub bliskich  $\pi/2$  brak jest obszarów niestatecznych. Obciążenia krytyczne mają maksimum dla pewnych kątów pochylenia tworzącej, które przy wzroście iloczynu  $\kappa s_1$  nieznacznie przesuwają się w stronę większych wartości  $\alpha$ . Pomimo przebadania stosunkowo niewielkiego zakresu zmienności kąta  $\beta$  ( $20 \div 35^\circ$ ) zaobserwowano



Rys. 7.

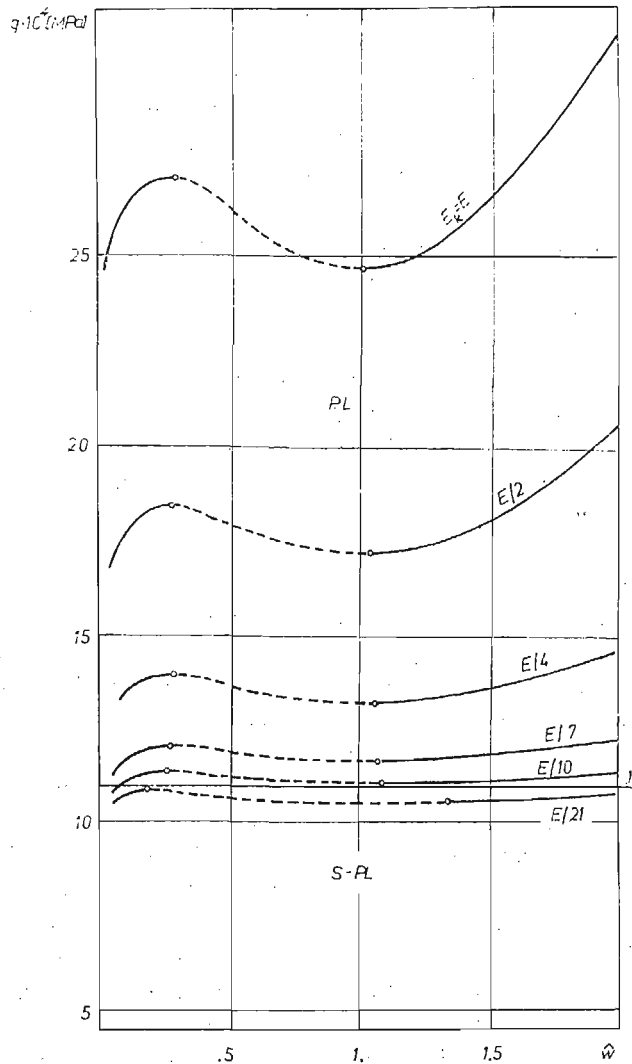


Rys. 8.

duże zróżnicowanie przebiegu funkcji  $q(\hat{w})$  (rys. 8). Dla małych wartości  $\beta$  występuje stan stateczny. Po przekroczeniu wartości granicznej ( $\beta \cong 22^\circ$ ) pojawiają się obszary niestateczne, które ze wzrostem  $\beta$  rozszerzają się, chociaż ich początek odpowiada coraz większym ugięciom. Jednocześnie rosną zarówno obciążenia krytyczne, jak i różnica pomiędzy górnym i dolnym obciążeniem krytycznym.

Na kolejnym wykresie (rys. 9) przedstawiono analizę wpływu modułu stycznego  $E_t$  na przebieg wyboczenia powłoki. Górna krzywa na wykresie odpowiada analizie powłoki sprężystej. Zmniejszając wartość modułu stycznego, obserwuje się spadek obciążeń krytycznych oraz rozszerzenie obszaru niestateczności.

Oprócz wyników przedstawionych na zamieszczonych wykresach, przebadano również wpływ innych parametrów na przebieg utraty stateczności powłoki. Stwierdzono liniowy wzrost obciążeń krytycznych w miarę zwiększania się grubości warstw nośnych w stosunku do całkowitej grubości powłoki lub przy wzroście granicy plastyczności. Uwzględnienie



Rys. 9.

sztynności ścinania warstwy wypełniającej doprowadziło do wzrostu obciążeń krytycznych rzędu 8% (porównano przypadki  $G_3 = 80$  MPa i  $G_3 = 0$ ). Wpływ zmian liczby Poissona w zakresie  $0,25 \leq \nu \leq 0,5$  okazał się znikomy. Również nieistotny okazał się wpływ dodatkowych członów w związkach geometrycznych (opatrzonych współczynnikiem  $A_0$ ) na wartości obciążeń krytycznych.

Przedstawiona w pracy metoda rozwiązania zagadnienia stateczności sprężysto-plastycznej trójwarstwowej powłoki jest metodą analityczno-numeryczną, gdzie komputer wykorzystano w końcowym etapie do iteracyjnego obliczania ścieżki równowagi, gdyż w odróżnieniu od analogicznego zagadnienia sprężystego uzyskanie rozwiązania w postaci zamkniętej jest niemożliwe — głównie z uwagi na nieliniowość geometryczną i niejednorodność

stanu naprężenia. Przyjęcie koncepcji Shanleya zapewniło stosunkowo prostą budowę związków wyjściowych, co byłoby niemożliwe przy uwzględnieniu procesów biernych (podejście Engessera-Kármána). Przedstawienie wyników pracy jest zwarte, a opracowany algorytm umożliwia stosunkowo łatwe wykorzystanie wyników w praktyce inżynierskiej i nie wymaga maszyn cyfrowych o dużej pamięci operacyjnej, jaka jest potrzebna na przykład w metodzie elementów skończonych (MES). Czas obliczeń nawet przy dużej liczbie iteracji nie jest wielki. Nadmienić tutaj należy, że zastosowanie metody elementów skończonych w zagadnieniach nieliniowych geometrycznie z uwzględnieniem odkształceń plastycznych dla powłok wielowarstwowych jest trudne i dotychczas istnieje niewiele prac zajmujących się tym problemem. Poza tym rozwiązania te są mało ogólne, gdyż w małym stopniu korzystają ze standardowego oprogramowania. W metodzie elementów skończonych dąży się ostatnio z jednej strony do opracowania efektywnych algorytmów (konieczność skracania czasu obliczeń, który z reguły w zagadnieniach nieliniowych jest znacznie dłuższy niż w liniowych), z drugiej zaś do podwyższenia dokładności obliczeń. Przy obliczaniu nieliniowych ścieżek równowagi istotną rolę spełnia przyjęcie odpowiedniego niezależnego parametru sterującego. W analizie liniowej jest to parametr obciążenia. Sterowanie obciążeniowe nie może być wogóle stosowane w otoczeniu punktów krytycznych, gdzie macierz styczna sztywności  $\mathbf{K}$  jest słabo uwarunkowana, a nawet osobliwa. Stosowanie z kolei sterowania nieobciążeniowego jest w metodzie elementów skończonych dość kłopotliwe, gdyż wymaga modyfikacji standardowych procedur. Istnieje tu ponadto problematyka dyskretyzacji konstrukcji i aproksymacji wewnątrz elementów skończonych. W problemach nieliniowych, a zwłaszcza przy badaniu stateczności, można popełniać dość duże błędy przez eliminację drugorzędnych stopni swobody. Wyniki niniejszej pracy mają charakter ogólny i mogą być również wykorzystane do testowania rozwiązań uzyskanych w oparciu o MES. Poprawność wyprowadzonych związków zbadano przez porównanie wyników z rezultatami uzyskanymi dla powłoki jednowarstwowej [5]. W tym celu przyjęto do obliczeń grubość warstwy nośnej równą połowie grubości powłoki jednowarstwowej, natomiast grubość warstwy środkowej równą zeru. Przyjęcie odpowiednich danych umożliwiło także sprowadzenie obliczeń do rozwiązania sprężystego. Uzyskane wyniki wykazały zgodność z pracą [7] poświęconą zagadnieniu wyboczenia analogicznej powłoki w zakresie czysto sprężystym.

Przeprowadzona analiza i obliczenia numeryczne mogą posłużyć, w projektowaniu powłok stożkowych, do doboru właściwych parametrów geometrycznych i fizycznych, w celu uniknięcia powstawania niestatecznych stanów pokrytycznych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. D. BUSHNELL, *Plastic buckling of various shells*, Journ. of Pressure Vessel Technology, Vol. 104, May, 1982.
2. S. GELLIN, *Effect of an axisymmetric imperfections on the plastic buckling of an axially compressed cylindrical shell*, Trans. ASME, 1, 46, 1979.
3. E. I. GRIGOLUK, *Buckling of sandwich constructions beyond the elastic limit*, Journ. Mech. Ph. Sol., 6, 1968.
4. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa, 1976.

5. J. MACIEJEWSKI, J. ZIELNICA, *Nieliniowe zagadnienie stateczności powłoki o postaci wycinka stożkowego w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozprawy Inżynierskie, **32**, 3, 1984.
6. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Об устойчивости за пределом упругости слоистых оболочек несимметрического сечения*, Мех. Тв. Тела, **4**, 1966.
7. R. STRUK, *Non-linear Stability Problem of an Open Conical Shell Under External Pressure and Axial Compression*, Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. XIX, No. 3, 1984.
8. А. С. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, М., 1967.
9. J. ZIELNICA, *Wyboczenie trójwarstwowej powłoki stożkowej poza zakresem sprężystym*, Rozprawy Inżynierskie, **29**, 3, 453 - 475, 1981.
10. J. ZIELNICA, *Elastic-Plastic Buckling of Sandwich Conical Shells Under Axial Compression and External Pressure*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série des sciences techniques, Vol. XXIX, 11 - 12, pp. 239 - 251, 1981.

## Р е з ю м е

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

В работе определяются верхние и нижние критические нагрузки и анализируется потеря устойчивости для свободно опертой трехслойной конической оболочки нагруженной продольными усилиями и внешним давлением. Полагается, что во время потери устойчивости несущие слои упругие или пластические, а наполнитель остается упругим. Задача решена методом Ритца. Уравнения получены с использованием физических соотношений деформационной теории пластичности и концепции продольяющего нагружения Шенли-Работнова. Итерационный алгоритм решения позволяет анализировать пути равновесия для упругих, упруго-пластических или пластических оболочек. Представлены числовые примеры в которых рассмотрено влияние физических и геометрических параметров на потерю устойчивости при больших прогибах.

## S u m m a r y

## GEOMETRICALLY NONLINEAR PROBLEM OF AN ELASTIC-PLASTIC OPEN SANDWICH CONICAL SHELL

In the paper the upper and lower critical loads are investigated, and also stability loss is analysed for an open sandwich conical shell loaded by longitudinal forces and uniformly distributed external pressure. It is assumed that the shell faces are elastic or plastic in the moment of buckling, and the core remains elastic. The problem is solved by the Ritz method. The equations are derived on the basis of deformation theory of plasticity using the concept of the growing load (Shanley). An iterative algorithm of calculation has been elaborated, which make it possible to analyse the shells in elastic, elastic-plastic or in totally plastic prebuckling state of stresses. The numerical examples show the influence of principal geometrical and physical shell's parameters on the stability loss at large deflections.

*Praca została złożona w Redakcji 29 października 1984*





## DRGANIA GIĘTNE, NIELINIOWE BELKI POD DZIAŁANIEM OBCIĄŻEŃ STOCHASTYCZNYCH POPRZECZNYCH I WZDŁUŻNYCH

NGUYEN CAO MENH (HANOI)

*Institut Mechaniki,*

### 1. Wstęp

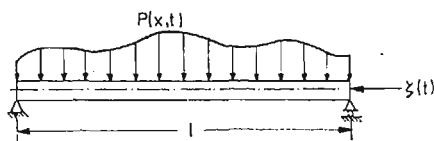
Drgania poprzeczne belki pod działaniem sił: poprzecznej i wzdłużnej, będących procesami stochastycznymi (rys. 1), uwzględniając wpływ bezwładności przekroju belki i nieliniowej sprężystości, można przedstawić równaniem różniczkowym cząstkowym w następującej postaci [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{EJ}{\varrho} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( N \frac{\partial v}{\partial s} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial v}{\partial t} = P(s, t), \quad (1.1)$$

gdzie  $EJ$  — stała sztywności na zginanie,  $\varrho$  — promień krzywizny,  $N$  — siła wzdłużna w belce,  $v(s, t)$  — przemieszczenie poprzeczne belki,  $s$  — długość łuku wzdłuż belki,  $m$  — masa jednostki długości belki,  $c_1$  — współczynnik tłumienia wiskotycznego.

Mamy wzór

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \sqrt{1 - \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2} \quad (1.2)$$



Rys. 1.

W czasie ruchu siła wzdłużna belki składa się z siły zewnętrznej  $\zeta(t)$  i siły bezwładności wywołanej ruchem podłużnym przekroju belki, dlatego można ją przedstawić wzorem [1]

$$N = \zeta(t) - \Delta N(s-t), \quad (1.3)$$

gdzie

$$w \approx \frac{1}{2} \int_0^s \left( \frac{\partial v}{\partial u} \right)^2 du, \quad (1.4)$$

$$\Delta N(s, t) = \frac{1}{2} \int_l^{l-s} m \ddot{w}(u, t) du, \quad (1.5)$$

gdzie kropka oznacza pochodną funkcji względem  $t$ .

Podstawiając (1.2) - (1.5) do (1.1), stosując metodę Galerkiną z założeniem, że przemieszczenie poprzeczne belki  $v(s, t)$  i siła  $P(s, t)$  przyjmują postać

$$v(s, t) = x(t) \sin \frac{\pi s}{l}, \quad (1.6)$$

$$P(s, t) = \xi(t) m \sin \frac{\pi s}{l}, \quad (1.7)$$

otrzymamy równanie

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \zeta(t)) = \xi(t), \quad (1.8)$$

gdzie

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \zeta(t)) = cx^3 + ex(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + \alpha\zeta(t)x, \quad (1.9)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \text{ — częstość właściwa drgania poprzecznego belki,}$$

$$\varepsilon e = \frac{\pi^4}{4l^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right) \text{ — współczynnik bezwładności nieliniowej,}$$

$$\varepsilon c = \pi^2 \omega_0^2 / (8l^2) \text{ — współczynnik sprężystości nieliniowej,}$$

$$\varepsilon \alpha = \omega_0^2 / P^* \text{ — współczynnik zakłócenia parametrycznego,}$$

$$P^* = \pi^2 EJ / l^2 \text{ — siła krytyczna,}$$

$$2h = c_1 / m.$$

W pracach [1] i [2] pokazano, że w pewnych warunkach drgania poprzeczne płyty i ramy są także przedstawione równaniem (1.8).

W pracy [2] Schmidt rozpatrywał równanie (1.8) pod warunkiem, że  $\xi(t)$  i  $\zeta(t)$  są procesami typu białego szumu. Stosując metodę uśrednienia i równania Fokkera-Plancka-Kolmogorowa, otrzymał przybliżoną jednowymiarową funkcję gęstości prawdopodobieństwa dla amplitudy drgań.

W niniejszej pracy chcielibyśmy poszukać funkcji gęstości widmowej drgań, tzn. charakterystyki statystycznej dwuchwilowej dla przemieszczenia  $x(t)$  w równaniu (1.8). Stąd można rozpatrzeć wpływ zakłócenia parametrycznego, sprężystości i bezwładności nieliniowych na drgania tych układów.

## 2. Metoda rozwiązywania

Teraz stosujemy metodę kolejnych przybliżeń [3], aby obliczyć funkcję gęstości widmowej odpowiedzi układu (1.8) w przybliżeniu rzędu drugiego względem małego parametru  $\varepsilon$  z założeniem, że  $\xi(t)$  i  $\zeta(t)$  są procesami stochastycznymi, stacjonarnymi, niezależnymi o rozkładzie normalnym i  $0 < h < \omega_0$ .

Z równania (1.8) mamy następujące równania kolejnych przybliżeń

$$\ddot{x}_0 + 2h\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = \xi(t) = \xi_0(t), \quad (2.1)$$

$$\ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\varepsilon F(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \zeta) + \xi(t) = \xi_1(t), \quad (2.2)$$

$$\ddot{x}_2 + 2h\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\varepsilon F(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \zeta) + \xi(t) = \xi_2(t). \quad (2.3)$$

Z równania (2.1) spostrzegamy, że  $x_0(t)$  jest procesem stochastycznym normalnym stacjonarnym dla czasu dostatecznie dużego. A zatem proces  $x_1(t)$  z równania (2.2) jest stacjonarny i jest funkcjonalem procesów łącznie normalnych  $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \zeta, \xi$ . Następnie na podstawie równania (2.3) zauważmy, że  $x_2(t)$  jest procesem stacjonarnym. Funkcja gęstości widmowej procesu  $x_2(t)$  będzie określona wzorem

$$S_{x_2}(\omega) = \frac{S_{\xi_2}(\omega)}{|P(\omega)|^2}, \quad (2.4)$$

gdzie  $S_{\xi_2}(\omega), S_{x_2}(\omega)$  — funkcje gęstości widmowej procesów odpowiednio,  $\xi_2(t)$  i  $x_2(t)$ ,

$$P(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + 2h\omega i. \quad (2.5)$$

Teraz obliczamy  $\langle \xi_2(t_1)\xi_2(t_2) \rangle = R_{\xi_2}(\tau)$  ( $\tau = t_1 - t_2$ ), następnie stosując przekształcenie Fouriera do  $R_{\xi_2}(\tau)$ , otrzymamy  $S_{\xi_2}(\omega)$  i stąd mamy  $S_{x_2}(\omega)$ .

W obliczeniu funkcji korelacyjnej  $R_{\xi_2}(\omega)$  zauważmy, że funkcja  $F(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \zeta)$  w tym przypadku staje się funkcjonalem złożonym procesów łącznie normalnych  $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \zeta$  i  $\xi$ . Zwracając uwagę na wzór Furutsu-Nowikowa [4, 5]

$$\langle y_i(t)L[y] \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \langle y_i(t)y_k(s) \rangle \left\langle \frac{\delta L[y]}{\delta y_k(s)} \right\rangle ds \quad (2.6)$$

i

$$\frac{\delta Q[y]}{\delta y_i(s)} = F'(L[y]) \frac{\delta L[y]}{\delta y_i(s)} \quad (2.7)$$

gdzie  $L[y]$  jest funkcjonalem procesu wektorowego normalnego  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ ,  $\delta L[y]/\delta y_k(s)$  jest pochodną wariacyjną [5],  $Q[y] = F(L[y])$  jest funkcją funkcjonala  $L[y]$ , mamy następujące wyrażenie

$$R_{\xi_2}(\tau) = R_{\xi}(\tau) + \varphi(\tau) + \varphi(-\tau) + \varepsilon^2 \langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle + \varepsilon^3 \dots \quad (2.8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} F_0(t) &= F(x_0(t), \dot{x}_0(t), \ddot{x}_0(t), \zeta(t)) \\ \varphi(\tau) &= -\varepsilon \left\{ \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial x_0} \right\rangle R_{x_0\xi}(\tau) + \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}_0} \right\rangle R_{\dot{x}_0\xi}(\tau) + \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial \ddot{x}_0} \right\rangle R_{\ddot{x}_0\xi}(\tau) \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(t_1 - u) \left[ R_{x_0\xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial x_0^2} F_0(u) \right\rangle + R_{\dot{x}_0\xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0 \partial x_0} F_0(u) \right\rangle + \right. \\ &+ R_{\ddot{x}_0\xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0 \partial x_0} F_0(u) \right\rangle + R_{x_0\xi}(u - t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial F_0(u)}{\partial x_0} \right\rangle + \\ &+ R_{\dot{x}_0\xi}(u - t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0} \cdot \frac{\partial F_0(u)}{\partial \dot{x}_0} \right\rangle + R_{\ddot{x}_0\xi}(u - t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0} \cdot \frac{\partial F_0(u)}{\partial \ddot{x}_0} \right\rangle \Big] du + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(t_1 - u) \left[ R_{x_0\xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial x_0 \partial \dot{x}_0} F_0(u) \right\rangle + R_{\dot{x}_0\xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0^2} F_0(u) \right\rangle + \right. \\ &+ R_{\ddot{x}_0\xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0 \partial \dot{x}_0} F_0(u) \right\rangle + R_{x_0\xi}(u - t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0} \cdot \frac{\partial F_0(u)}{\partial x_0} \right\rangle + \end{aligned} \quad (2.9)$$



$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon^2 \{K(\tau) [(3cD_0 - eD_{01})eD_0 + 6ceR_{x_0}^2(\tau) + 4e^2R_{x_0}^2(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 2e^2R_{x_0}^2(\tau)]\} * \ddot{R}_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 \{4e\dot{K}(\tau) [3cR_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau) + eR_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 2e\dot{R}_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau)]\} * R_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 \{-4e^2\dot{K}(\tau) [R_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + \dot{R}_{x_0}^2(\tau)]\} * \dot{R}_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 [4e^2\dot{K}(\tau)R_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau)] * \ddot{R}_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 \{\ddot{K}(\tau) [eD_0(3cD_0 - eD_{01}) + 6ceR_{x_0}^2(\tau) + 2e^2\dot{R}_{x_0}^2(\tau) + 4e^2R_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau)]\} * R_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 [-4e^2\dot{K}(\tau)R_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau)] * \dot{R}_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 \{e^2\ddot{K}(\tau) [D_0^2 + 2R_{x_0}^2(\tau)]\} * \ddot{R}_{x_0\xi}(\tau) \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

gdzie  $D_0 = \langle x_0^2(t) \rangle$ ,  $D_{01} = \langle \dot{x}_0^2(t) \rangle$  i symbol (\*) jest splotem dwóch funkcji.

Zauważmy, że  $x_0$ ,  $\dot{x}_0$ ,  $\ddot{x}_0$ ,  $\xi(t)$  są łącznie normalne o zerowej wartości przeciętnej; stosując wzory [7]

$$\begin{aligned}
 \langle y_1 y_2 \dots y_{2m+1} \rangle & = 0, \\
 \langle y_1 y_2 \dots y_{2m} \rangle & = \sum \langle y_j y_k \rangle \dots \langle y_r y_s \rangle,
 \end{aligned}$$

gdzie suma zawiera wszystkie możliwości ugrupowania  $2m$  zmiennych losowych łącznie normalnych  $y_1, \dots, y_{2m}$  na  $m$  par, mamy

$$\begin{aligned}
 \langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle & = (3cD_0 - eD_{01})^2 R_{x_0}(\tau) + 2eD_0(3cD_0 - eD_{01})\ddot{R}_{x_0}(\tau) + \\
 & + e^2D_0^2R_{x_0}^{IV} + 6e^2R_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}^2(\tau) + 8e^2\dot{R}_{x_0}^2(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 12ceR_{x_0}^2(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau) + 12ceR_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}^2(\tau) + \\
 & + 6c^2R_{x_0}^3(\tau) + 2e^2R_{x_0}^2(\tau)R_{x_0}^{IV}(\tau) + 8e^2R_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + \alpha^2R_{\xi}(\tau)R_{x_0}(\tau). \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Jeśli proces  $\xi(t)$  jest typu białego szumu, funkcja korelacyjna ma postać

$$R_{x_0}(\tau) = D_0 e^{-h|\tau|} \left( \cos \beta \tau + \frac{h}{\beta} \sin \beta |\tau| \right), \tag{3.3}$$

gdzie  $\beta^2 = \omega_0^2 - h^2$ ,  $D_0 = \pi S_{\xi} / (2h\omega_0^2)$ ,  $D_{01} = \omega_0^2 D_0$ .

Wtedy otrzymamy następujące wyrażenie dla funkcji gęstości widmowej

$$|P(\omega)|^2 S_{x_2}(\omega) = S_{\xi} + \Phi(\omega) + \overline{\Phi(\omega)} + \varepsilon^2 \mathcal{F} \{ \langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle \} + \varepsilon^3 \dots \tag{3.4}$$

gdzie  $\mathcal{F} \{ \dots \}$  oznacza przekształcenie Fouriera,  $\Phi(\omega) = \mathcal{F} \{ \varphi(\tau) \}$  i  $\overline{\Phi(\omega)}$  jest sprzężoną formą wobec  $\Phi(\omega)$ . W tym przypadku mamy

$$\begin{aligned}
 \Phi(\omega) & = -\varepsilon S_{\xi} D_0 [3c - e(\omega_0^2 + \omega^2)] / P(\omega) + \varepsilon^2 \frac{S_{\xi}}{P(\omega)} \sum_{j=1}^3 [M_j + N_j(i\omega) - L_j \omega^2] + \\
 & + \varepsilon^2 \frac{D_0^2 S_{\xi}}{4\beta^3 P(\omega)} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{3hA_j + B_j + i\omega A_j}{(3h + i\omega)^2 + \beta^2} + \frac{3hE_j + 3\beta F_j + i\omega E_j}{(3h + i\omega)^2 + 9\beta^2} + \right. \tag{3.5} \\
 & + \left[ \frac{3hG_j + \beta H_j + i\omega G_j}{(3h + i\omega)^2 + \beta^2} + \frac{3hI_j + 3\beta K_j + i\omega I_j}{(3h + i\omega)^2 + 9\beta^2} \right] (i\omega) \\
 & + \left. \left[ \frac{3hP_j + \beta Q_j + i\omega P_j}{(3h + i\omega)^2 + \beta^2} + \frac{3hR_j + 3\beta S_j + i\omega R_j}{(3h + i\omega)^2 + 9\beta^2} \right] (-\omega^2) \right\} + \\
 & + \varepsilon^2 \frac{S_{\xi} D_0^2}{[P(\omega)]^2} [3c - e(\omega_0^2 + \omega^2)]^2 + 2\pi \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 S_{\xi}}{P(\omega)} \mathcal{F} \{ K(\tau) R_{\xi}(\tau) \}
 \end{aligned}$$

Przekształcenie Fouriera dla  $\langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle$  przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle \} &= \frac{S_\xi D_0^2}{|P(\omega)|^2} [3c - e(\omega_0^2 + \omega^2)]^2 + \\ &+ \frac{D_0^3}{4\pi\beta^2} \frac{(3hA_4 - \beta B_4)\omega^2 + (3hA_4 + \beta B_4)(\omega_0^2 + 8h^2)}{|q(\omega)|^2} + \\ &+ \frac{3D_0^3}{4\pi\beta^2} \frac{(hE_4 - \beta F_4)\omega^2 + 9\omega_0^2(hE_4 + \beta F_4)}{|Q(\omega)|^2} + \\ &+ \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\omega - z) S_{x_0}(z) dz, \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} q(\omega) &= -\omega^2 + 6h\omega i + \omega_0^2 + 8h^2, \\ Q(\omega) &= -\omega^2 + 6h\omega i + 9\omega_0^2, \\ M_1 &= D_0^2(e + 3c)(3c - e\omega_0^2)/\omega_0^2, \quad N_1 = e^2\omega_0^2 D_0^2/(2h) - D_0^2 e(\beta^2 - h^2)(3c - e\omega_0^2)/(4h\beta^2), \\ L_1 &= eD_0^2(3c - e\omega_0^2)/\omega_0^2, \quad M_2 = e^2 D_0^2 \omega_0^2/(2\beta^2), \quad N_2 = -N_1, \quad L_2 = 0, \\ M_3 &= -2eD_0^2(3c - e\omega_0^2) + e^2 D^2 \omega_0^2(3\beta^2 - h^2)/(2\beta^2), \quad N_3 = L_3 = 0, \\ A_1 &= -E_1 = 4\beta h(9c^2 - 7e^2\omega_0^4) \\ B_1 &= 18c^2(\omega_0^2 + 2h^2) + 4e^2\omega_0^2(\beta^4 - 12h^2\beta^2 + 3h^4) - 24ce\omega_0^2(\beta^2 - 3h^2) + \\ &+ 36ce\omega_0^4 + 4e^2\omega_0^4(30h^2 - 9\omega_0^2), \\ F_1 &= 18(\beta^2 - h^2)(c^2 + e^2\omega_0^4) - 36ce\omega_0^4, \\ G_1 &= -I_1 = 4(3ce\beta\omega_0^2 - e^2\omega_0^4\beta), \\ H_1 &= 4[9ceh\omega_0^2 - e^2h\omega_0^2(5\omega_0^2 - 8h^2) + 6e^2h\omega_0^4], \\ K_1 &= -12eh\omega_0^2(c + e\omega_0^2), \\ P_1 &= -R_1 = 12ceh\beta, \\ Q_1 &= 2[3ce(\omega_0^2 + 2h^2) + 8e^2h^2\omega_0^2 + e^2\omega_0^4], \\ S_1 &= 6[ce(\omega_0^2 - 2h^2) - e^2\omega_0^4], \\ A_2 &= 8e^2h\beta\omega_0^2(\omega_0^2 - 4h^2), \\ B_2 &= 4e\omega_0^2[-3c + e(\beta^2 - h^2)(\beta^2 - 3h^2) + 8e^2\omega_0^4(\beta^2 + 3h^2)], \\ E_2 &= 24e^2h\beta\omega_0^4, \\ F_2 &= 12e\omega_0^4[-c + e(\beta^2 - h^2)], \\ G_2 &= -4e^2\beta(3\beta^2 - h^2 + \omega_0^2), \\ H_2 &= 4e^2h(3h^2 - \beta^2 + 3\omega_0^4), \\ I_2 &= 4e^2\beta\omega_0^2(1 + \omega_0^2), \\ K_2 &= -4e^2h\omega_0^2(1 + \omega_0^2), \\ P_2 &= 0, \\ Q_2 &= -4e^2\omega_0^2(\beta^2 - 3h^2), \\ R_2 &= 0, \\ S_2 &= -4e^2\omega_0^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= 4e^2 h \beta \omega_0^2 (5\beta^2 - 3h^2) - 48ceh\beta^3, \\
B_3 &= -6ce(\beta^4 + 6h^2\beta^2 - 3h^4) + 2e^2\omega_0^2(\beta^2 - h^2)(\beta^2 + 9h^2), \\
E_3 &= 12e^2 h \beta \omega_0^4, \\
F_3 &= 6e\omega_0^4 [c + e(\beta^2 - h^2)], \\
G_3 &= -4e^2 \beta \omega_0^4, \\
H_3 &= -4e^2 h \omega_0^4 (5\beta^2 - 3h^2), \\
I_3 &= 0, \\
K_3 &= -4e^2 h \omega_0^4 (3\beta^2 - h^2), \\
P_3 &= -16e^2 h \beta^3, \\
Q_3 &= 2e^2(\beta^4 + 6h^2\beta^2 - 3h^4), \\
R_3 &= 0, \\
S_3 &= -2e^2 \omega_0^4, \\
A_4 &= -16e^2 \omega_0^6 + [6e^2(3\beta^2 - h^2) + 12ce]\omega_0^4 + [-12ce(3\beta^2 - h^2) + 18c^2 + \\
&\quad + 2e^2(3\beta^4 - 14\beta^2 h^2 - h^4)]\omega_0^2, \\
B_4 &= \frac{h}{\beta} \{24e^2 \omega_0^6 + [6e^2(3h^2 - \beta^2) + 36ce - 8e^2(5\beta^2 - 3h^2)]\omega_0^4 + \\
&\quad + [-12ce(\beta^2 - 3h^2) + 18c^2 - 2e^2(\beta^4 + 14\beta^2 h^2 - 3h^4)]\omega_0^2\}, \\
E_4 &= 24e^2 \omega_0^6 - 24ce\omega_0^4 + 6c^2(\beta^2 - 3h^2), \\
F_4 &= \frac{h}{\beta} [-24e^2 \omega_0^6 - 24ce\omega_0^4 - 6c^2(h^2 - 3\beta^2)]. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Wzory (3.4) - (3.6) wyrażają jawną postać funkcji gęstości widmowej dla przemieszczenia w przybliżeniu rzędu drugiego względem  $\varepsilon$  zależną od parametrów tego układu.

Z wyrażenia funkcji gęstości widmowej można znaleźć funkcję korelacyjną  $R_{x_2}(\tau)$  za pomocą przekształcenia odwrotnego Fouriera.

Wariancja przemieszczenia będzie określona wzorem

$$D_2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_2}(\omega) d(\omega) = D_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\omega) + \overline{\Phi(\omega)}}{|P(\omega)|^2} d\omega + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}\{\langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle\}}{|P(\omega)|^2} d\omega. \tag{3.8}$$

Po obliczeniu całek we wzorze (3.8) metodą residuów i stosując wzory podane w [8], otrzymamy następujące wyrażenie dla wariancji przemieszczenia w przybliżeniu rzędu drugiego względem

$$\begin{aligned}
D_2 &= D_0 - \varepsilon D_0^2(3c - e\omega_0^2) + \varepsilon^2 D_0(M_1 + M_2 + M_3) + \varepsilon^2 D_0^3(3c - e\omega_0^2)^2/\omega_0^4 + \\
&+ \frac{\varepsilon^2 D_0^3}{2^6 \beta^3 h (\omega_0^2 + 3h^2)} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{1}{h} [18h^3 A_j + \beta(5h^2 - \beta^2) B_j + (8h^2 - \beta^2) G_j + 3h\beta H_j + 2hP_j + \beta Q_j] + \right. \\
&+ \frac{1}{\omega_0^2} [(18h^4 + 7h^2\beta^2 + \beta^4) E_j + 3h\beta(5h^2 + \beta^2) F_j + 2h(\omega_0^2 + 3h^2) I_j + \\
&\left. + 3\beta(2h^2 + \omega_0^2) K_j + (2h^2 - \beta^2) R_j + 3h\beta S_j] \right\} + \tag{3.9}
\end{aligned}$$





Jeżeli parametry tego układu są podane liczbami

$$\omega_0^2 = 1, \quad h = 1/2, \quad \pi S_\xi = 1, \quad \pi S_\zeta = 1,$$

mamy

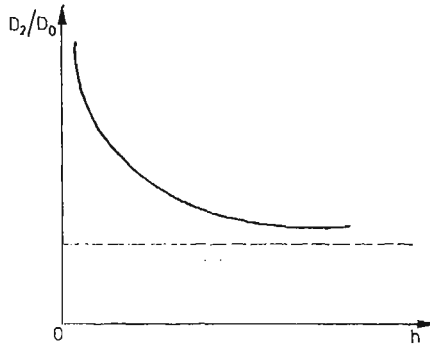
$$D_2 = 1 - 3\varepsilon c + (24c^2 + \pi\alpha^2 S_\zeta) \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \dots \quad (3.12)$$

Stąd spostrzegamy, że w tym przypadku zakłócenie parametryczne ma wpływ tylko na człon dodatkowy w przybliżeniu rzędu drugiego.

Jeżeli  $c = 0$ , ze wzoru (3.11) mamy

$$D_2 = D_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 \pi S_\zeta}{2h\omega_0^2} \right). \quad (3.13)$$

Wykres  $D_2/D_0$  jest przedstawiony na rys. 2, zależy od współczynnika tłumienia  $h$ . W tym przypadku zakłócenie parametryczne zawsze powiększa wartość wariancji w porównaniu z odpowiednim układem liniowym (rys. 2).



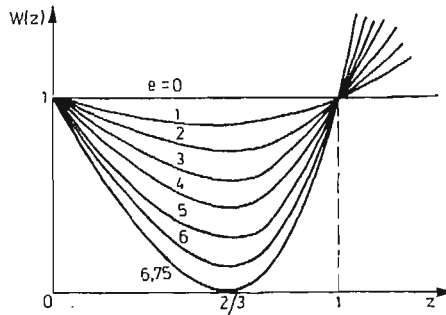
Rys. 2.

Jeżeli  $\varepsilon$  jest dostatecznie małe i  $h^2$  ma wartość małą tego samego rzędu co  $\varepsilon$ ,  $c = 1$ , wtedy wzór (3.11) przyjmuje następującą postać

$$D_2 \approx D_0 W(z), \quad (3.14)$$

gdzie

$$W(z) = 1 + \gamma_1 z^2(z-1), \quad \gamma_1 = \frac{9\varepsilon^2(\pi S_\xi)^2}{27h^4}, \quad z = 1/\omega_0^2.$$



Rys. 3.

Wykres funkcji  $W(z) = D_2/D_0$  zależny od  $z$  jest przedstawiony na rys. 3, wtedy wpływ zakłócenia parametrycznego na odpowiedź tego układu nie jest wyraźny.

b)  $\zeta(t)$  jest procesem otrzymanym w wyniku przekształcenia procesu białego szumu przez filtr liniowy.

Załóżmy, że proces stochastyczny stacjonarny  $\zeta(t)$  otrzymany jest z układu liniowego

$$\ddot{\zeta}(t) + 2h_1 \dot{\zeta}(t) + (h_1^2 + \beta_1^2)\zeta(t) = \zeta_1(t),$$

gdzie  $\zeta_1(t)$  jest procesem stochastycznym typu białego szumu.

W tym przypadku  $\zeta(t)$  jest procesem o wąskim zakresie widma. Jego funkcja korelacyjna ma postać

$$R_\zeta(\tau) = D_\zeta e^{-h_1|\tau|} \left( \cos \beta_1 \tau + \frac{h_1}{\beta_1} \sin \beta_1 |\tau| \right), \quad (3.15)$$

gdzie  $h_1, \beta_1$  są stałe filtru liniowego,  $D_\zeta$  jest wariancją procesu  $\zeta(t)$ . Następnie należy obliczyć  $\mathcal{F}\{K(\tau)R_\zeta(\tau)\}$  i  $\mathcal{F}\{R_\zeta(\tau)R_{x_0}(\tau)\}$ . Po obliczeniu otrzymamy

$$\mathcal{F}\{K(\tau)R_\zeta(\tau)\} = \frac{D_\zeta}{4\pi\beta_1} \left\{ \frac{\beta_1 \mathcal{B} - h_1(H+i\omega)}{(H+i\omega)^2 + \mathcal{B}^2} + \frac{\beta_1 B + h_1(H+i\omega)}{(H+i\omega)^2 + B^2} \right\}, \quad (3.16)$$

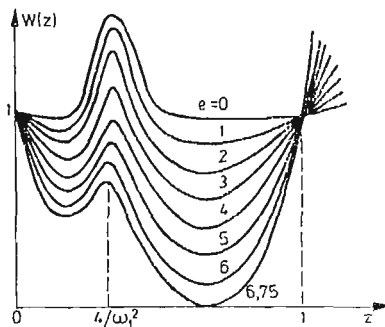
gdzie

$$\mathcal{B} = \beta_1 + \beta, \quad B = \beta_1 - \beta, \quad H = h_1 + h. \quad (3.17)$$

$\mathcal{F}\{R_\zeta(\tau)R_{x_0}(\tau)\} =$

$$= \frac{D_0 D_\zeta}{2\pi\beta_1} \left\{ \frac{[(\beta\beta_1 - hh_1)H - (h_1\beta + h\beta_1)\mathcal{B}]\omega_0^2 + [(\beta\beta_1 - hh_1)H + (h_1\beta + h\beta_1)\mathcal{B}](\mathcal{B}^2 + H^2)}{[(\mathcal{B} + \omega)^2 + H^2][(\mathcal{B} - \omega)^2 + H^2]} + \frac{[(\beta\beta_1 + hh_1)H - (h_1\beta - h\beta_1)B]\omega^2 + [(\beta\beta_1 + hh_1)H + (h_1\beta - h\beta_1)B](B^2 + H^2)}{[(B + \omega)^2 + H^2][(B - \omega)^2 + H^2]} \right\}. \quad (3.18)$$

Zatem w tym przypadku mamy wzory (3.4) - (3.6) dla funkcji gęstości widmowej, w których  $\mathcal{F}\{K(\tau)R_\zeta(\tau)\}$  i  $\mathcal{F}\{R_\zeta(\tau)R_{x_0}(\tau)\}$  są przedstawione wzorami (3.16) i (3.18). Stąd można obliczyć wariancję przemieszczenia tego układu. Po obliczeniu spostrzegamy, że jeśli  $\varepsilon$  jest dostatecznie małe i  $h^2 = 0(\varepsilon)$ ,  $h_1 = 0(\varepsilon)$  (tzn.  $h^2$  i  $h_1$  mają wartości małe w tym samym rzędzie jakim  $\varepsilon$ ), wtedy w zakresie  $|\omega_0^2 - (\omega_1/2)^2| < \varepsilon$  wartość wariancji  $D_2$  jest istotnie duża, natomiast poza tym zakresem wartość ta nie ma dużej różnicy w porównaniu z poprzednim przypadkiem. Dlatego wykres funkcji  $D_2/D_0$  zależny od  $z = 1/\omega_0^2$  jest przedstawiony na rys. 4.



Rys. 4.

2. Przypadek istnienia bezwładności i sprężystości nieliniowych ( $c \neq 0$ ,  $e \neq 0$ ,  $\zeta = 0$ ).

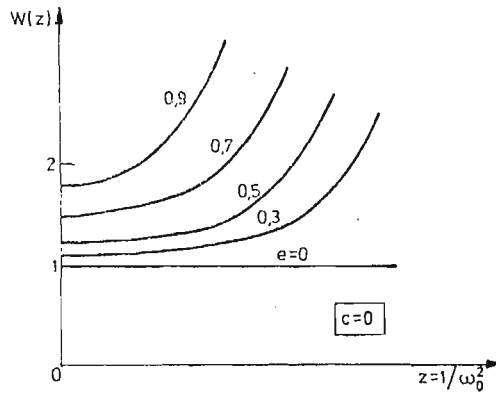
W tym przypadku funkcja gęstości widmowej jest przedstawiona wzorem (3.4), w którym podstawiamy  $\alpha = 0$ . Jeżeli  $h$  jest dostatecznie małe, wariancja  $D_2$  przyjmuje następujące wyrażenie:

$$D_2 = D_0 \{1 + 9\gamma_2 e^2 + \gamma_2 [(3ce + 10e^2)z + (6e^2 - 18ce - 9c^2)z^2 + (3ce + 9c^2)z^3]\}, \quad (3.19)$$

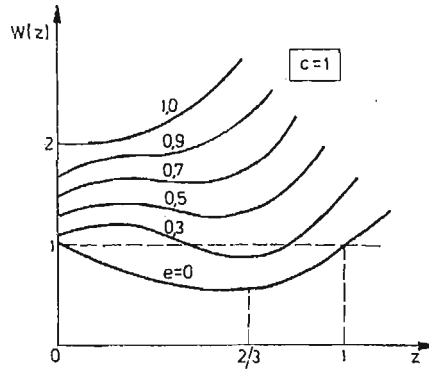
gdzie

$$\gamma_2 = \varepsilon^2 (\pi S_\xi^2)^2 / (27h^4), \quad z = 1/\omega_0^2.$$

Wykres funkcji  $W(z) = D_2/D_0$  w przypadku  $\gamma_2 = 1/9$ ,  $c = 0$  zależny od wartości  $e$  jest przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5.



Rys. 6.

A wykres funkcji  $W(z) = D_2/D_0$  w przypadku  $\gamma_2 = 1/9$ ,  $c = 1$ , zależny od wartości  $e$ , jest przedstawiony na rys. 6.

Powyżej rozpatrywaliśmy układy mechaniczne pod działaniem sił stochastycznych normalnych za pomocą metody kolejnych przybliżeń. Pokazaliśmy, że można zastosować tę metodę do znalezienia funkcji gęstości widmowej i wariancji przemieszczenia w przybliżeniu rzędu drugiego względem  $\varepsilon$ . Stąd spostrzegaliśmy, że w przypadku tłumienia wisko-

tycznego układu dostatecznie małego sprężystość nieliniowa zmniejsza wariację (rys. 3), natomiast bezwładność nieliniowa powiększa ją (rys. 5). Jednak istnienie jednoczesne dwóch elementów ma wpływ na wariację zależny od stosunku ich wartości (rys. 6). W przypadku istnienia zakłócenia parametrycznego typu procesu o wąskim zakresie widma wariacja przemieszczenia przyjmuje wartość dostatecznie dużą, jeśli średnia częstość zakresu widma zakłócenia parametrycznego jest dwa razy większa niż częstości własnej rozpatrywanego układu mechanicznego (rys. 4).

#### Literatura

1. V. V. BOLOTIN, *Dinamičeskaja ustojčivost' uprugich sistem*. Moskva 1956.
2. G. S. SCHMIDT, *Parametrically excited random vibrations of nonlinear mechanical systems*. Advances in Mechanics, Vol. 4, n. 2, 1981.
3. N. C. MENH, *On the investigation of stochastic dynamic systems by successive approximation*. ZAMM (w druku) 1985.
4. E. A. NOVIKOV, *Funkcjony i metody slučajnych sil w teorii turbulentnosti*. ЖЭТФ, Т. 47, 1964.
5. K. SOB CZYK, *Fale stochastyczne*. Warszawa 1982.
6. N. C. MENH, *Metoda zamknięcia normalnego w teorii drgań stochastycznych układów słabo nieliniowych*. Prace IPBM PW, z. 13, 1982.
7. Y. K. LIN, *Probabilistic theory of structural dynamics*. New York 1975.
8. K. PI SZCZEK, *Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych*. Warszawa 1982.
9. В. И. Кляцкин, *Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами*. Москва 1975

#### Summary

#### NONLINEAR FLEXURAL VIBRATIONS OF BEAM SUBJECTED TO STOCHASTIC TRANSVERSE AND LONGITUDINAL LOADINGS

In this work the mechanical systems where exist nonlinear elasticity and inertia, subjected to stochastic loadings in the form of external force and parametric excitation are considered.

The procedure of calculating spectral density function in the second order approximation is presented in general case.

The influences of nonlinear terms and parametric excitation on responses of the mechanical systems is investigated in special cases.

#### Резюме

#### НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ НАГРУЗОК

В этой работе рассмотрены механические системы, в которых существуют нелинейная упругость и инерция, под воздействием случайных нагрузок внешних сил и параметрических возмущений.

Метод определения функции спектральной плотности представлен в общем виде приближением второго порядка.

Влияние нелинейных членов и параметрического возмущения на реакцию механических систем анализируется в частных случаях.

Praca została złożona w Redakcji 17 lutego 1984 roku

## KLASA PRZEPŁYWÓW POWOLNYCH W KANAŁACH KOŁOWO ZAKRZYWIONYCH

STANISŁAW TOKARZEWSKI (WARSZAWA)

IPPT PAN

### Spis ważniejszych oznaczeń

- $(r, \theta)$  — współrzędne biegunowe,  
 $R$  — położenie ścianki kanału,  
 $u$  — prędkość promieniowa,  
 $v$  — prędkość obwodowa,  
 $p$  — ciśnienie,  
 $u_R, u_t$  — prędkości promieniowe postawione na ściance kanału,  
 $v_R, v_t$  — prędkości wzdłużne postawione na ściance kanału,  
 $Q_0$  — wydatek cieczy przez wybrany przekrój kanału,  
 $\tilde{\Psi}$  — funkcja prądu.

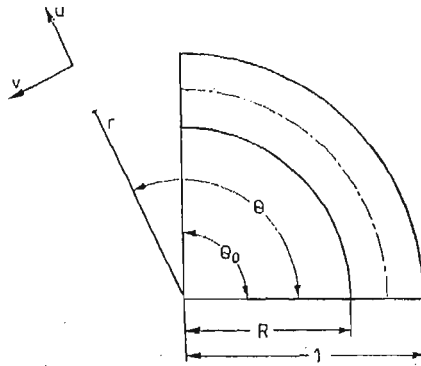
### 1. Wstęp

Przepływy z małymi liczbami Reynoldsa, zwane powszechnie przepływami powolnymi, realizują się na dużą skalę zarówno w technice, jak i w przyrodzie. Mamy z nimi do czynienia między innymi w procesie przepływu krwi w naczyniach krwionośnych, w procesach smarowania, flotacji, sedymentacji i wielu innych. Do opisu przepływów powolnych powszechnie używa się równań Stokesa [5]. Równania te należą do podstawowych równań mechaniki płynów. Poszukiwanie więc klas ścisłych rozwiązań równań Stokesa opisujących przepływy powolne jest zadaniem ważnym zarówno z teoretycznego, jak również z praktycznego punktu widzenia. Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie pewnej klasy przepływów powolnych realizujących się w płaskim kanale, którego ścianki mające kształt dwóch współśrodkowych łuków okręgów są przepuszczalne dla cieczy. Poszukiwane przepływy powolne opisywać będziemy za pomocą tak zwanej funkcji prądu spełniającej równanie biharmoniczne, określone w biegunowym układzie współrzędnych. Klasa ścisłych rozwiązań równania biharmonicznego powszechnie używana w literaturze jest wyrażona za pomocą szeregów Fouriera [9, 5]. Nieznane współczynniki tych szeregów wyznacza się

z warunków brzegowych, wykonując odpowiednie operacje całkowania. Klasy funkcji prądu uzyskane natomiast w tej pracy mają postać nieskończonych szeregów funkcyjnych, których poszczególne wyrazy są iloczynami kolejnych pochodnych funkcji prędkości postawionych na ściankach kanału mnożonych przez ściśle określone wielomiany zależne wyłącznie od jednej zmiennej promieniowej. Przepływy powolne otrzymane w tej pracy istotnie więc się różnią od klas przepływów powolnych wyrażonych szeregami Fouriera.

## 2. Sformułowanie zadania

Rozważmy dwuwymiarowy kanał, którego obydwie ścianki mają kształt dwóch współśrodkowych łuków okręgów opartych na tym kącie środkowym  $\theta = \theta_0$  (rys. 1). Kanał taki nazywać będziemy kanałem zakrzywionym. Załóżmy, że ścianki rozważanego kanału



Rys. 1.

są dla cieczy przepuszczalne. Niech przez przekrój  $\theta = 0$ , ściankę górną oraz ściankę dolną (rys. 1) wpływa do wnętrza kanału ciecz odpowiednio: o wydatku  $Q_0$ , z prędkością o składowych  $U_1, V_1$  oraz z prędkością o składowych  $U_R, V_R$ . Przyjmujemy, że w przepływie powstającym w kanale (rys. 1) siły bezwładności są pomijalnie małe w stosunku do sił lepkich. Celem pracy jest wyznaczenie klasy przepływów powolnych realizujących się w dwuwymiarowych kanałach zakrzywionych (rys. 1), mających ścianki przepuszczalne.

## 3. Podstawowe równania

Do opisu dwuwymiarowych przepływów powolnych powstających w kanałach zakrzywionych o ściankach przepuszczalnych (rys. 1) używa się następujących równań Stokesa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0.$$

oraz stawia się następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} u(R, \theta) &= U_R(\theta), & v(R, \theta) &= V_R(\theta), \\ u(1, \theta) &= U_1(\theta), & v(1, \theta) &= V_1(\theta), \end{aligned} \quad (3.1b)$$

gdzie

$$r = \frac{r'}{R_0}, \quad p = \frac{p'R_0}{uU_0}, \quad u = \frac{u'}{u_0}, \quad v = \frac{v'}{u_0} \quad (3.1c)$$

są odpowiednio bezwymiarowym promieniem, bezwymiarowym ciśnieniem, bezwymiarową prędkością promieniową oraz bezwymiarową prędkością obwodową. Przedmiotem poszukiwań będzie klasa funkcji  $\{u, v, p\}$  spełniająca ściśle równania Stokesa (3.1a) oraz warunki brzegowe (3.1b). Wygodnie jest poszukiwaną klasę przepływów powolnych  $\{u, v, p\}$ , rozwiązującą zagadnienie brzegowe (3.1), przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r}, & v &= -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r}, \\ p &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r, u) + \int_0^r \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) dr, \end{aligned} \quad (3.2a)$$

gdzie funkcja  $\tilde{\Psi}$ , zwana funkcją prądu, spełnia równanie biharmoniczne

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \tilde{\Psi} = 0 \quad (3.2b)$$

oraz warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \theta} \Big|_{r=R} &= U_R(\theta), & -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \Big|_{r=R} &= V_R(\theta), \\ \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \theta} \Big|_{r=1} &= U_1(\theta), & -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \Big|_{r=1} &= V_1(\theta). \end{aligned} \quad (3.2c)$$

Związki (3.2) i (3.1) są równoważne. Stąd w dalszej części pracy ograniczymy się wyłącznie do wyznaczenia klasy funkcji prądu  $\tilde{\Psi}$  rozwiązującej zagadnienie brzegowe (3.2b - c). Poszukiwana klasa przepływów powolnych  $\{u, v, p\}$  wynika bowiem natychmiast ze związków (3.2a). Niech funkcja  $\tilde{\Psi}(r, \theta, R, U_R, V_R)$  spełnia związki (3.2b - c) w przypadku, gdy  $U_1 = V_1 = 0$ . Nietrudno wykazać, że funkcja  $\tilde{\Psi}\left(\frac{r}{R}, \theta, \frac{1}{R}, U_1, V_1\right)$  powstała w wyniku prostej zamiany argumentów spełnia te same zależności (3.2b - c) przy założeniu jednak, że  $U_R = V_R = 0$ . Stąd wygodnie jest poszukiwaną klasę funkcji prądu  $\tilde{\Psi}$  rozwiązującą zagadnienie brzegowe (3.2b - c) przedstawić w postaci następującej sumy

$$\tilde{\Psi}(r, \theta) = \Psi(r, \theta, R, U_R, V_R) + \Psi\left(\frac{r}{R}, \theta, \frac{1}{R}, U_1, V_1\right), \quad (3.3)$$

gdzie  $R, U_R, V_R, U_1, V_1$  są z góry danymi parametrami. Aby więc znaleźć poszukiwaną klasę przepływów powolnych  $\{u, v, p\}$  należy, po pierwsze: rozwiązać równanie biharmoniczne

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Psi = 0 \quad (3.4a)$$

wraz z dołączonymi do niego następującymi warunkami brzegowymi

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = U_R(\theta), \quad - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=R} = V_R(\theta), \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Big|_{r=1} = 0, \quad - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad (3.4c)$$

po drugie: zbudować na podstawie (3.3) funkcję prądu  $\tilde{\Psi}$  oraz po trzeciej: wyznaczyć w oparciu o zależności (3.2a) poszukiwaną klasę przepływów powolnych  $\{u, v, p\}$ . W dalszej części pracy ograniczymy się do rozwiązania zagadnienia brzegowego (3.4).

#### 4. Klasa rozwiązań równania biharmonicznego

Na wstępie wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$L = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial^n f(\theta)}{\partial \theta^n} = f^{(n)}(\theta), \quad (4.1)$$

które używać będziemy w dalszej części tekstu. Przy użyciu zależności (4.1) równanie biharmoniczne (3.4a) przyjmuje postać

$$\left( L^2 + L \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} L \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right) \Psi = 0. \quad (4.2)$$

Rozwiązanie równania (4.2) wygodnie jest wyrazić za pomocą następującego nieskończonego szeregu funkcyjnego

$$\Psi = \sum_{s=0}^{\infty} W_s(r) f^{(2s)}(\theta), \quad (4.3)$$

gdzie  $W_s(r)$  jest funkcją wyłącznie promienia  $r$ ,  $f^{(2s)}(\theta)$  zaś oznacza  $2s$ -tą pochodną dowolnej funkcji  $f(\theta)$ , zależnej jedynie od kąta  $\theta$ . Podstawiając związek (4.3) do zależności (4.2) i przyrównując do zera wyrażenia przy tych samych rzędach pochodnych funkcji  $f(\theta)$ , otrzymujemy następujące równania rekurencyjne określające funkcje  $W_s(r)$ :

$$L^2 W_s = - \left( L \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} L \right) W_{s-1} - \frac{1}{r^4} W_{s-2}, \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

$$W_{-1} = W_{-2} = 0.$$

Ogólne rozwiązanie układu równań (4.4) przyjmuje postać

$$W_s(r) = \sum_{m=0}^s (-1)^m \left[ (r^2 \alpha_{s-m} + \gamma_{s-m}) \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + (r^2 \beta_{s-m} + \delta_{s-m}) \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right] \quad (4.5)$$

gdzie  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$ ,  $\gamma_s$  i  $\delta_s$  są dowolnymi stałymi. W celu ustalenia kryteriów zbieżności otrzymanego szeregu (4.3), (4.5) wygodnie jest  $N$ -tą sumę cząstkową związku (4.3), (4.5) przekształcić do równoważnej postaci

$$\sum_{s=0}^N W_s(r) f^{(2s)}(\theta) = \sum_{m=0}^N (-1)^m \left\{ a_{N,m} \frac{\ln^{2n+1} r}{(2m+1)!} + b_{N,m} \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right\}, \quad (4.6)$$



gdzie

$$a_{N,m} = \sum_{s=0}^{N-m} (r^2 \alpha_s + \gamma_s) f^{(2s+2m)}(\theta), \quad b_{N,m} = \sum_{s=0}^{N-m} (r^2 \beta_s + \delta_s) f^{(2s+2m)}(\theta). \quad (4.7)$$

Granicę ciągu (4.3) możemy na podstawie (4.6) zapisać następująco

$$\sum_{s=0}^{\infty} W_s(r) f^{(2s)}(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N (-1)^m \left\{ a_{N,m} \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + b_{N,m} \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right\}. \quad (4.8)$$

Ciąg funkcji (4.8) jest zbieżny, gdy spełnione są jednocześnie następujące nierówności:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} a_{N,m} &= a_{\infty,m} < \infty, & \lim_{N \rightarrow \infty} b_{N,m} &= b_{\infty,m} < \infty, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ a_{\infty,m} \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + b_{\infty,m} \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right\} &< \infty. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do związków (4.9) otrzymujemy na podstawie (4.8) i (4.7) następujące kryteria zbieżności szeregu (4.3), (4.5) obowiązujące w przedziale  $\frac{1}{\varrho} \leq r \leq \varrho$ :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{4m^2} \frac{f^{(2m+2)}(\theta)}{f^{(2m)}(\theta)} \ln^2 \varrho \right| &< 1, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\eta_{m+1}}{\eta_m} \frac{f^{(2m+2)}(\theta)}{f^{(2m)}(\theta)} \right| &< 1, \quad (\eta = \alpha, \beta, \gamma, \delta). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ostatecznie więc poszukiwaną klasę ścisłych rozwiązań równania biharmonicznego określają szeregi (4.3), (4.5) wraz z nierównościami (4.10).

### 5. Szeregi Fouriera

Znaną klasę rozwiązań równania biharmonicznego określonego w biegunowym układzie współrzędnych są następujące szeregi Fouriera:

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N(r) \cos N\theta, \quad (N = 0, 1, 2 \dots), \quad (5.1a)$$

przy czym

$$F_N(r) = \lim_{n \rightarrow N} (A_n r^{n+2} + B_n r^{n-2} + C_n r^n + D_n r^{-n}), \quad (5.1b)$$

gdzie  $A_n, B_n, C_n$  i  $D_n$  są dowolnymi stałymi. Interesujące jest przejście od szeregów (4.3), (4.5) do szeregów (5.1). Przyjmijmy dowolną funkcję  $f(\theta)$  w postaci

$$f(\theta) = \cos n\theta \quad (5.2)$$

i podstawmy ją do związku (4.3). Po wykorzystaniu zależności (4.5) otrzymujemy

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ (r^2 \alpha_{s-m} + \gamma_{s-m}) \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + (r^2 \beta_{s-m} + \delta_{s-m}) \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right] \times (-1)^s n^{2s} \cos n\theta. \quad (5.3)$$

Zakładając, że szereg (5.3) jest bezwzględnie zbieżny, związek (5.3) daje się po zmianie kolejności sumowania przedstawić w postaci

$$\Psi(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) \cos n\theta, \quad (5.4a)$$

$$F_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} n^{2m} \left[ (r^2 \alpha_{(n)} + \gamma_{(n)}) \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + (r^2 \beta_{(n)} + \delta_{(n)}) \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right],$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$w_{(n)} = \sum_{s=0}^{\infty} w_s n^{2s}, \quad (w = \alpha, \beta, \gamma, \delta). \quad (5.4b)$$

Nieskończona suma wyrazów szeregu (5.4a) równa się

$$F_n(r) = (A_n r^{n+2} + B_n r^{n-2} + C_n r + D_n r^{-n}), \quad (5.5)$$

$$A_n = \frac{1}{2} \left( B_{(n)} + \frac{\alpha_{(n)}}{n} \right), \quad B_n = \frac{1}{2} \left( \beta_{(n)} - \frac{\alpha_{(n)}}{n} \right), \quad (5.6)$$

$$C_n = \frac{1}{2} \left( \delta_{(n)} + \frac{\gamma_{(n)}}{n} \right), \quad D_n = \frac{1}{2} \left( \delta_{(n)} - \frac{\gamma_{(n)}}{n} \right).$$

Przechodząc do granicy

$$F_N(r) = \lim_{n \rightarrow N} F_n(r), \quad (N = 0, 1, 2 \dots) \quad (5.7)$$

otrzymujemy dokładnie funkcję (5.1b). A zatem, przy założeniu, że przeprowadzane operacje obliczeniowe (5.2 - 5.7) są zbieżne, zależności (5.6 - 5.7) pozwalają przejść od uzyskanych w tej pracy klas rozwiązań (4.3), (4.5) do klas rozwiązań (5.1) powszechnie używanych w literaturze.

## 6. Klasa przepływów powolnych

Klasę rozwiązań równania biharmonicznego (4.3), (4.5) wykorzystamy do rozwiązania zagadnienia brzegowego (3.4). Z warunków brzegowych (3.4c) otrzymujemy natychmiast

$$\delta_s = -\beta_s, \quad \gamma_s = -2\beta_s - \alpha_s. \quad (6.1)$$

Pozostałe dwa warunki brzegowe (3.4b) spełnimy przyjmując funkcję prądu  $\Psi(r, \theta)$  w postaci

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \overset{1}{W}_s(r) U_R^{(2s-1)}(\theta) + \overset{2}{W}_s(r) V_R^{(2s)}(\theta), \quad (6.2a)$$

gdzie

$$\overset{1}{W}_0(R) = R, \quad \frac{d}{dr} \overset{1}{W}_0(r)|_{r=R} = 0, \quad (6.2b)$$

$$\overset{2}{W}_0(R) = 0, \quad R \frac{d}{dr} \overset{2}{W}_0(r)|_{r=R} = -R, \quad (6.2c)$$

$$\overset{1}{W}_s(R) = \overset{2}{W}_s(R) = 0, \quad (s = 1, 2, 3 \dots) \quad (6.2d)$$

oraz

$$U^{(-1)}(\theta) = - \int_0^{\theta} U(\theta) d\theta. \quad (6.2e)$$

Nałożone na funkcję  $W_s(r)$  warunki brzegowe (6.1 - 6.2) prowadzą do następujących wzorów rekurencyjnych

$$W_s(r) = \sum_{m=0}^s (-1)^m \left\{ [(r^2-1)\alpha_{s-m} - 2\beta_{s-m}] \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + (r^2-1)\beta_{s-m} \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right\}, \quad (6.3a)$$

gdzie

$$\alpha_k(R) = \frac{[2(R^2-1)]M_k(R) - [(R^2-1) - 2\ln R]N_k(R)}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2},$$

$$\beta_k(R) = \frac{-[2R^2\ln R + (R^2-1)]M_k(R) + (R^2-1)(\ln R)N_k(R)}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2}, \quad (6.3b)$$

przy czym

$$M_k(R) = - \sum_{m=1}^k (-1)^m \left\{ \left[ (R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right] \alpha_{k-m} + \right. \\ \left. - \left[ 2 \frac{(\ln R)^{2m+1}}{(2m+1)!} - (R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m}}{(2m)!} \right] \beta_{k-m} \right\}, \quad (6.3c)$$

$$N_k(R) = - \sum_{m=1}^k (-1)^m \left\{ \left[ \frac{2R^2(\ln R)^{2m+1}}{(2m+1)!} + (R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m}}{(2m)!} \right] \alpha_{k-m} + \right. \\ \left. + \left[ 2(R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m}}{(2m)!} + (R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m-1}}{(2m-1)!} \right] \beta_{k-m} \right\}. \quad (6.3d)$$

Wartości początkowe wprowadzane do wzorów (6.3a - d) równają się

$$\alpha_0^1(R) = \frac{2(R^2-1) \cdot R}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2}, \quad \beta_0^1(R) = - \frac{[2R^2\ln R + (R^2-1)] \cdot R}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2},$$

$$\alpha_0^2(R) = \frac{R(R^2-1 - 2\ln R)}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2}, \quad \beta_0^2(R) = - \frac{R(R^2-1)\ln R}{4R^2\ln R - (R^2-1)^2}. \quad (6.3e)$$

Ostatecznie więc poszukiwaną klasę przepływów powolnych realizujących się w kanałach kołowo zakrzywionych o ściankach przepuszczalnych określają związki (6.3), (4.3), (3.3), (3.2a). Zakres stosowalności otrzymanych rozwiązań określają nierówności (4.10) po podstawieniu do nich

$$f(\theta) = U_R(\theta), \quad f(\theta) = V_R(\theta), \quad f(\theta) = U_1(\theta), \quad f(\theta) = V_1(\theta). \quad (6.4)$$

Nierówności te, ze względu na skomplikowane formuły iteracyjne (6.3), są trudne lub wręcz niemożliwe do rozwiązania. Stąd wyznaczenie dokładnego zakresu stosowalności otrzymanych wyników pozostaje problemem nie rozwiązany. Należy jednak zauważyć, że w przypadku gdy funkcje prędkości postawione na ściankach kanału są wyrażone za pomocą wielomianów zmiennej  $\theta$ , uzyskane w tej pracy formuły są zbieżne.

## 7. Przykład zastosowania otrzymanych rozwiązań

Niech przez ścianki kanału kołowo zakrzywionego zasysana jest ciecz z następującymi prędkościami:

$$\text{I. } U_R(\theta) = \frac{\theta^n}{n!}, \quad V_R(\theta) = 0, \quad U_1(\theta) = 0, \quad V_1(\theta) = 0, \quad (7.1a)$$

$$\text{II. } U_R(\theta) = 0, \quad V_R(\theta) = \frac{\theta^n}{n!}, \quad U_1(\theta) = 0, \quad V_1(\theta) = 0, \quad (7.1b)$$

$$\text{III. } U_R(\theta) = 0, \quad V_R(\theta) = 0, \quad U_1(\theta) = \frac{\theta^n}{n!}, \quad V_1(\theta) = 0, \quad (7.1c)$$

$$\text{IV. } U_R(\theta) = 0, \quad V_R(\theta) = 0, \quad U_1(\theta) = 0, \quad V_1(\theta) = \frac{\theta^n}{n!}. \quad (7.1d)$$

Funkcję prądu opisującą przepływ powolny w kanale uzyskujemy natychmiast na podstawie formuł (6.2a) i (3.3)

$$\text{I } \Psi_n(r, \theta) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} {}^1 W_s(r, R) \frac{\theta^{n+1-2s}}{(n+1-2s)!}, \quad (7.2a)$$

$$\text{II } \Psi_n(r, \theta) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} {}^2 W_s(r, R) \frac{\theta^{n-2s}}{(n-2s)!}, \quad (7.2b)$$

$$\text{III } \Psi_n(r, \theta) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} {}^1 W\left(\frac{r}{R}, \frac{1}{R}\right) \frac{\theta^{n+1-2s}}{(n+1-2s)!}, \quad (7.2c)$$

$$\text{IV } \Psi_n(r, \theta) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} {}^2 W\left(\frac{r}{R}, \frac{1}{R}\right) \frac{\theta^{n-2s}}{(n-2s)!}, \quad (7.2d)$$

gdzie symbol  $E\left(\frac{n}{2}\right)$  oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą od  $\frac{n}{2}$ ,  $R$  zaś jest parametrem. Niech teraz przez ścianki rozważanego kanału wpływa do jego wnętrza ciecz z prędkością,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \theta^n, \quad (f = U_R, V_R, U_1, V_1), \quad (7.3a)$$

o której założyliśmy, że jest rozwijalna w szereg Taylora w przedziale  $-\infty < \theta < +\infty$ . Oznacza to, że spełniona jest następująca nierówność:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+2)}(\theta_0)}{f^{(n)}(\theta_0)} \right| < \frac{n^2}{\theta^2}, \quad (f = U_R, V_R, U_1, V_1). \quad (7.3b)$$

Następnie zbudujemy szereg nieskończony następujący

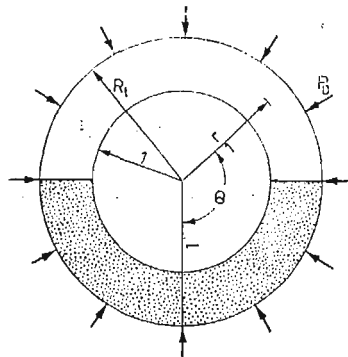
$$\tilde{\Psi}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \{U_R^{(n)}(0) {}^1 \Psi_n(r, \theta) + V_R^{(n)}(0) {}^2 \Psi_n(r, \theta) + U_1^{(n)}(0) {}^3 \Psi_n(r, \theta) + V_1^{(n)}(0) {}^4 \Psi_n(r, \theta)\} \quad (7.4)$$

i zauważmy w oparciu o (7.1 - 7.2), że każdy wyraz tego szeregu, a także ich suma, spełniają równanie biharmoniczne (3.4a) oraz warunki brzegowe (7.3a). Szereg (7.4) przedstawia więc klasę przepływów powolnych realizujących się w kanałach kołowo zakrzywionych, w przypadku gdy pochodne funkcji prędkości postawionych na ściankach kanału spełniają nierówność (7.3b).

### 8. Przykład rozwiązania zagadnienia fizycznego

Niech nieskończenie długi, sztywny walec o promieniu 1 położony będzie wewnątrz nieskończenie długiego, elastycznego cylindra o promieniu  $R_t$  (rys. 2). Niech w chwili  $t = 0$  połowę objętości wąskiej szczeliny między rurą a walcem wypełnia nieściśliwa ciecz lepka. Pod wpływem ciśnienia zewnętrznego elastyczna powierzchnia cylindra przemieszcza się. Niech przemieszczenia promieniowe powierzchni rury będą z góry zadane. Oznaczmy je przez  $R_t$ . O przemieszczeniach obwodowych zaś założymy, że równają się zeru. Wyznamy pole prędkości cieczy ściskanej wypełniającej szczelinę (patrz rys. 2). W tym celu wprowadzmy dalsze upraszczające założenia. Przyjmijmy, że następujący stosunek

$$(R_t - 1) \ll 1 \quad (7.1)$$



Rys. 2.

oraz następująca liczba Reynoldsa

$$\frac{\dot{R}_t(R_t - 1)}{V} \ll 1 \quad (7.2)$$

są małe, gdzie przez  $\dot{R}_t$  oznaczyliśmy prędkość promieniową powierzchni rury ściskającej ciecz. Wprowadzone założenia pozwalają bezpośrednio wykorzystać wyniki uzyskane w niniejszej pracy, dane związkami (6.2 - 6.3). Jako warunki brzegowe przyjmujemy

$$U_R(\theta) = \dot{R}_t, \quad V_R(\theta) = 0. \quad (7.3)$$

Podstawiając (7.3) do (6.2a) oraz korzystając z (6.3) otrzymujemy natychmiast funkcję prądu

$$\Psi = \{[(r^2 - 1)\alpha_0 - 2\beta_0] \ln r + (r^2 - 1)\beta_0\} \dot{R}_t \cdot \theta \quad (7.4a)$$

oraz wynikające z tej funkcji prędkości: promieniową

$$u = \left\{ \left[ \left( r - \frac{1}{r} \right) \alpha_0 - \frac{2}{r} \beta_0 \right] \ln r + \left( r - \frac{1}{r} \right) \beta_0 \right\} \dot{R}_t, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_t, \quad (7.4b)$$

oraz prędkość obwodową

$$v = - \left\{ 2r\alpha_0 \ln r + \left( r - \frac{1}{r} \right) (\alpha_0 + 2\beta_0) \right\} \dot{R}_t \cdot \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_t, \quad (7.4c)$$

gdzie wielkości  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\theta_t$  zależą od czasu i równają się odpowiednio

$$\alpha_0 = \frac{2(R_t^2 - 1)}{4R_t^2 \ln^2 R_t - (R_t^2 - 1)^2}, \quad \beta_0 = - \frac{[2R_t^2 \ln R_t + (R_t^2 - 1)] R_t}{4R_t^2 \ln^2 R_t - (R_t^2 - 1)^2}, \quad (7.4d)$$

$$\theta_t = \frac{1}{2} \frac{R_0^2 - 1}{R_t^2 - 1} \pi, \quad (7.4e)$$

przy czym zachodzi następująca nierówność:

$$R_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2R_0^2}} < R_t \leq R_0. \quad (7.4f)$$

W ramach przyjętych założeń związku (7.4) opisują proces powolnego wyciskania cieczy z kołowo zakrzywionej szczeliny.

## 9. Końcowe uwagi

W niniejszej pracy uzyskano za pomocą funkcji prądu klasę przepływów powolnych realizujących się w kanałach kołowo zakrzywionych o przepuszczalnych ściankach (rys. 1). Rozwiązania uzyskano w postaci nieskończonych szeregów funkcyjnych, których poszczególne wyrazy są iloczynami kolejnych pochodnych funkcji prędkości postawionych na ściance kanału mnożonych przez odpowiednio wyznaczone wielomiany zmiennej  $\ln r$ . Współczynniki tych wielomianów liczy się w oparciu o formuły iteracyjne zamieszczone w niniejszej pracy. Uzyskane w punkcie 7 konkretne rozwiązania wskazują, że klasa rozwiązań (6.3), (4.3), (3.3), (3.2a) daje poprawne wyniki, w przypadku gdy promień zbieżności funkcji prędkości postawionych na ściance kanału jest nieskończony. Należy również zaznaczyć, że ze względu na skomplikowane formuły obliczeniowe wyznaczenie dokładnego zakresu stosowalności otrzymanych w tej pracy rozwiązań jest niezwykle trudne i wymaga dalszych badań.

## References

1. R. FINN, W. NOLL, *On the uniqueness and nonexistence of Stokes flow*, Arch. Rat. Mech. Anal. 1, 98, 1957.
2. J. HAPPEL, H. BRENNER, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey 1965.
3. S. KAPLUN, *Low Reynolds number flow past a circular cylinder*, Jour. of Mat. and Mech. 6, 595, 1957.

4. M. KRAKOWSKI, A. CHARNES, *Stokes' paradox and biharmonic flows*, Carnegie Inst. of Techn. Tech. Rep. 37, 1951.
5. H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6th ed. London Cambr. Univ. Press 1932.
6. W. E. LANGLOIS, *Slow viscous flow*, The Macmillan Comp, New York 1964.
7. N. J. MUSKHELISVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, P. Noordhoff 1953.
8. A. SZANIAWSKI, A. ZACHARA, *Przepływ laminarny w kanale o zmiennym przekroju z ruchomymi i porowatymi ściankami*, Mech. Teor. i Stos. 3, 16, 1978.
9. S. TIMOSHENKO, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill Book Comp New York 1940.

## Р е з ю м е

## КЛАСС МЕДЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ИСКРИВЛЁННЫХ КАНАЛАХ

Найдено класс медленных течений в искривлённых каналах когда функции скорости заданные на стенках канала достаточно гладкие. Решения тогда получаются в форме бесконечных рядов.

## S u m m a r y

## A CLASS OF CREEPING FLOWS IN THE CURVED CHANNELS

A class of two dimensional creeping flows has been obtained in the curved channels for the case when velocity functions prescribed at the permeable walls of the channels are sufficiently smooth. Results have been obtained in the form of infinite functional series.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1985 roku*

—————





## ZMODYFIKOWANA METODA PROPORCJONALNEGO NAPROWADZANIA POCISKÓW W POZIOMEJ PŁASZCZYŹNIE ZBLIŻENIA

MIROSLAW GLAPSKI (WARSZAWA)

*Wojskowa Akademia Techniczna*

Uwzględniając ograniczenia proporcjonalnego zblżenia, rozpatrzono możliwości usprawnienia procesu naprowadzania. Z przeprowadzonej analizy niezaburzonego ruchu pocisku o zmiennej masie i zmiennej prędkości, naprowadzanego w poziomej płaszczyźnie zblżenia, sformułowano wniosek o potrzebie „uzmiennienia” współczynnika (stałej) proporcjonalności. Pokazano zalety takiego podejścia. Zaproponowano zmodyfikowaną metodę proporcjonalnego zblżenia. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

### Wstęp

Proporcjonalne zblżenie (proporcjonalna nawigacja) wysunęło się na czołowe miejsce wśród metod samonaprowadzania pocisków, a szczególnie raket „powietrze-powietrze”. Proces samonaprowadzania tych raket odbywa się najczęściej w poziomej płaszczyźnie zblżenia (lub znacznie do niej zblżonej). Pozwala to na pewne uproszczenie modelu teoretycznych rozważań. Nie wszystkie jednak założenia czynione w dotychczasowych publikacjach są do przyjęcia, szczególnie właśnie w przypadku raket „powietrze-powietrze”. Znaczna część praktycznych rozwiązań tych raket cechuje się krótkim początkowym działaniem silnika raketowego i w związku z tym gwałtownym rozpędzaniem i częścią procesu samonaprowadzania na tzw. dolocie. W związku z tym zbyt daleko odbiega od rzeczywistości założenie o stałym module prędkości pocisku czy stałej prędkości wzajemnego zblżania się pocisku i atakowanego celu. Następuje również znaczna początkowa zmiana masy pocisku i nie należy przyjmować jej jako stałej.

Niniejsze opracowanie, stanowiące kontynuację rozważań zawartych w pracach [1, 2, 3], podejmuje próbę dalszego ulepszenia i przystosowania metody proporcjonalnego zblżenia do wykorzystania w przypadku wspomnianych pocisków „powietrze-powietrze” o zmiennej, w trakcie naprowadzania, masie i zmiennym module prędkości lotu.

Szansę ulepszenia i przystosowania metody daje „uzmiennienie” współczynnika (tzw. stałej) proporcjonalności. Może to następować poprzez zmianę początkowej wartości współczynnika proporcjonalności wraz za zmianą początkowych warunków naprowa-



$\Psi$  — kąt odchylenia toru pocisku (między poziomą składową prędkości a osią  $Ox_0$ ).

Założymy horyzontalny ruch pocisku przy równowadze ciężaru i siły nośnej powiększonej o pionową składową ciągu silnika raketowego, odbywający się bez przechylenia przy równowadze siły odśrodkowej i bocznej, powiększonej o poziomy rzut normalnej (do toru) składowej ciągu.

Otrzymamy poniższy układ równań kierowanego, niezaburzonego, względnego ruchu pocisku i celu:

$$m \frac{dv}{dt} = P - P_x, \quad (1)$$

$$\frac{dm}{dt} = -m_s, \quad (2)$$

$$mv \frac{d\Psi}{dt} = (P + \bar{c}_y v^2) \beta, \quad (3)$$

$$J_z \frac{d^2\psi}{dt^2} = M_z^\delta \delta + M_z^\omega \frac{d\psi}{dt} + M_z^\beta \beta, \quad (4)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = a \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5)$$

$$\frac{dr}{dt} = v_c \cos \varphi - v \cos \varepsilon, \quad (6)$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = -v_c \sin \varphi + v \sin \varepsilon, \quad (7)$$

$$\Psi = \varphi - \varepsilon, \quad (8)$$

$$\psi = \varphi - \varepsilon + \beta, \quad (9)$$

W powyższych równaniach oznaczono:

$a$  — współczynnik proporcjonalności,

$m$  — masa pocisku,

$m_s$  — sekundowy wydatek masowy silnika raketowego,

$t$  — czas,

$\bar{c}_y = S \frac{\rho}{2} (c_y^\beta + b c_y^\delta)$  — uogólniony współczynnik siły bocznej pocisku,

$M_z^\delta = m_z^\delta \frac{\rho v^2}{2} S \cdot l$  — współczynnik momentu sterującego,

$M_z^\omega = m_z^\omega \frac{\rho v^2}{2} S \cdot l$  — współczynnik momentu tłumiącego,

$M_z^\beta = m_z^\beta \frac{\rho v^2}{2} S \cdot l$  — współczynnik momentu stabilizującego.

Wykorzystamy również wyrażenie na współczynnik obciążenia bocznego pocisku, manewrującego w poziomej płaszczyźnie zblżenia

$$n = -\frac{v}{g} \frac{d\Psi}{dt}, \quad (10)$$

gdzie  $g$  — przyspieszenie ziemskie.

Rozpatrując możliwość wprowadzenia założeń upraszczających, rozpatrzmy prędkość zблиżenia pocisku i celu  $\frac{dr}{dt}$ . Różniczkując stronami równanie (6) otrzymamy:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv_c}{dt} \cos \varphi - \frac{dv}{dt} \cos \varepsilon - av \sin \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (11)$$

Przyjmując, dla uproszczenia rozważań, że dla początku naprowadzania  $\varepsilon_0 = 0$  oraz  $\left( \frac{dv_c}{dt} \right)_0 = 0$ , otrzymujemy

$$\left( \frac{d^2r}{dt^2} \right)_0 = \frac{1}{r_0} v_0^2 \sin^2 \varphi_0 - \left( \frac{dv}{dt} \right)_0. \quad (12)$$

Jak widać z powyższego, początkowa zmiana prędkości zблиżenia, w wielu praktycznych przypadkach pocisków i początkowych warunków naprowadzania może być znaczna i nie należy jej pomijać. Zakładając  $\frac{dr}{dt} = \text{const}$  zarówno na początku, jak i w czasie naprowadzania, musimy liczyć się ze znacznymi błędami.

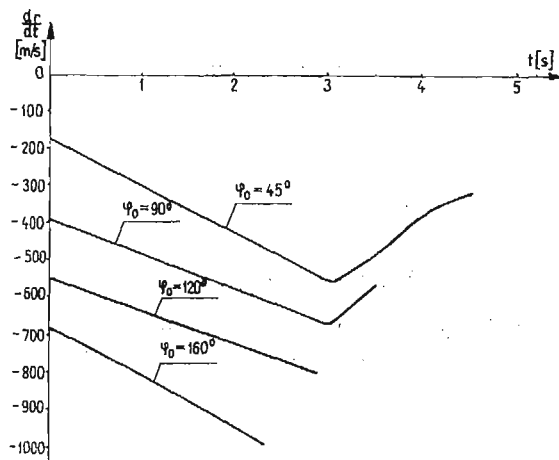
W niniejszym opracowaniu wykorzystuje się wykonane obliczenia dla hipotetycznego pocisku, zблиżonego do amerykańskiego pocisku „powietrze-powietrze” Sidewinder, gdzie dla wysokości ataku  $H = 5000$  m przyspieszenie  $\left( \frac{dv}{dt} \right)_0 = 140$  m/s<sup>2</sup>, prędkość  $v_0 = 400$  m/s. Zakładając do tego prędkość celu  $v_c = 300$  m/s oraz początkową odległość ataku  $r_0 = 2000$  m, mamy przykładowo:

$$\text{— dla } \varphi_0 = 0^\circ \quad \left( \frac{d^2r}{dt^2} \right)_0 = -140 \text{ m/s}^2,$$

$$\text{— dla } \varphi_0 = 90^\circ \quad \left( \frac{d^2r}{dt^2} \right)_0 = -95 \text{ m/s}^2.$$

Są to już wielkości, które trudno pominąć w rozważaniach.

W wyniku wspomnianych numerycznych obliczeń uzyskano następujący obraz (pokazany na rys. 2) zmiany prędkości zблиżenia w trakcie naprowadzania.



Rys. 2.

Zmiany  $\frac{dr}{dt}$  są znaczne i w rozpatrywanych przypadkach dochodzą nawet do 300% (dla  $\varphi_0 = 45^\circ$ ). Przy  $\varphi_0 = 90^\circ$  zmiana wynosi 70%, dla  $\varphi_0 = 120^\circ$  dochodzi do 44%, a dla  $\varphi_0 = 160^\circ$  do 46%.

Rozpatrując różne przypadki obliczeniowe proporcjonalnego naprowadzania wyżej omówionych typów pocisków powietrze-powietrze i poszukując możliwości złagodzenia ograniczeń (rozszerzenia stref ataku, skrócenia czasu naprowadzania, zwiększenia zapasu możliwości manewrowych w trakcie naprowadzania) zaobserwowano w szeregu przykładowych procesów zbliżania, że jeśli tylko na początku naprowadzania wartości bezwzględne współczynnika obciążenia lub kąta wychylenia steru nie narastają, to i podczas naprowadzania nie przewyższają (co do wartości bezwzględnych) swych początkowych wielkości.

Wychodząc z tej właściwości można sformułować dla początku naprowadzania wstępny warunek

$$\frac{dn}{dt} \leq 0, \quad (13)$$

który ze względu na taki sam charakter zmian, zapewnia również początkowe zmniejszanie się bezwzględnych wartości kąta wychylenia steru.

Z drugiej strony, na początku naprowadzania zarówno współczynnik obciążenia boczego, jak i kąt wychylenia steru nie mogą przekroczyć wielkości dopuszczalnych

$$|n_0| \leq n_d, \quad (14)$$

$$|\delta_0| \leq \delta_d. \quad (15)$$

Okazuje się przy tym, że również spełnienie warunku na obciążenie dopuszczalne, na ogół, zapewnia nieprzekraczanie dopuszczalnego kąta wychylenia steru.

Uwzględniając obecnie zamierzone „uzmiennienie” współczynnika proporcjonalności, mamy na podstawie (10)

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{g} \left( \frac{da}{dt} \frac{d\varphi}{dt} v + a \frac{d^2\varphi}{dt^2} v + a \frac{dv}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

i według (13) dla początku naprowadzania:

$$a_0 \geq -\frac{da}{dt} \frac{d\varphi}{dt} v \left( v \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{dv}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Na podstawie (6), (7), (10) i (16) otrzymujemy, po uwzględnieniu (14)

$$a_0 \geq 2 + \frac{1}{\cos \varepsilon_0} \left[ \frac{1}{gn_d} \frac{da}{dt} (v_{c_0} \sin \varphi_0 - v_0 \sin \varepsilon_0) - \frac{2v_{c_0}}{v_0} \cos \varphi_0 + \frac{r_0}{v_0^2} \frac{dv}{dt} \left( \frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{-v_{c_0} \sin \varphi_0 + v_0 \sin \varepsilon_0} + 1 \right) \right]. \quad (17)$$

Z drugiej strony, ze względu na dopuszczalne obciążenia po uwzględnieniu (7), mamy na podstawie (10) dla początku naprowadzania

$$a_0 \leq n_d g r_0 [v_0 (v_{c_0} \sin \varphi_0 - v_0 \sin \varepsilon_0)]^{-1}. \quad (18)$$

Wyrażenia (17) i (18) tworzą zestaw warunków, wstępnie określających zakres początkowych wartości współczynnika proporcjonalności przy jego doborze.

Oznaczając odpowiednio prawe strony nierówności (17) i (18) przez  $M$  oraz  $N$ , możemy kryterium wstępnego doboru początkowych wartości współczynnika proporcjonalności zapisać następująco

$$M \leq a_0 \leq N. \quad (19)$$

Ograniczenia, które z powyższego kryterium wynikają, uwidaczniają się głównie w bardzo ważnej, z punktu widzenia strefy możliwych ataków, tzw. bliższej granicy możliwych ataków, czyli minimalnych odległości od celu  $(r_0)_{\min}$ , z których można rozpocząć skuteczny proces naprowadzania.

Zapisując inaczej (19) mamy

$$M \leq N \quad (20)$$

i na tej podstawie możemy uzyskać ogólne wyrażenie

$$r_0 \geq 2 \frac{E}{Z} (v_0 \cos \varepsilon_0 - v_{c_0} \cos \varphi_0) + \frac{da}{dt} \frac{v_0 E^2}{g n_d Z}, \quad (21)$$

gdzie

$$E = v_{c_0} \sin \varphi_0 - v_0 \sin \varepsilon_0,$$

$$Z = g n_d \cos \varepsilon_0 - \frac{dv}{dt} \left( \frac{v_{c_0}}{v_0} \sin \varphi_0 - 2 \sin \varepsilon_0 \right).$$

Wyrażenie (20) dla najczęściej spotykanego w praktyce przypadku  $\varepsilon_0 = 0$  przybiera postać

$$r_0 \geq \frac{2v_{c_0} \sin \varphi_0 (v_0 - v_{c_0} \cos \varphi_0)}{g n_d - \frac{dv}{dt} \frac{v_{c_0}}{v_0} \sin \varphi_0} + \frac{da}{dt} \frac{v_0 v_{c_0}^2 \sin^2 \varphi_0}{g n_d \left( g n_d - \frac{dv}{dt} \frac{v_{c_0}}{v_0} \sin \varphi_0 \right)}. \quad (22)$$

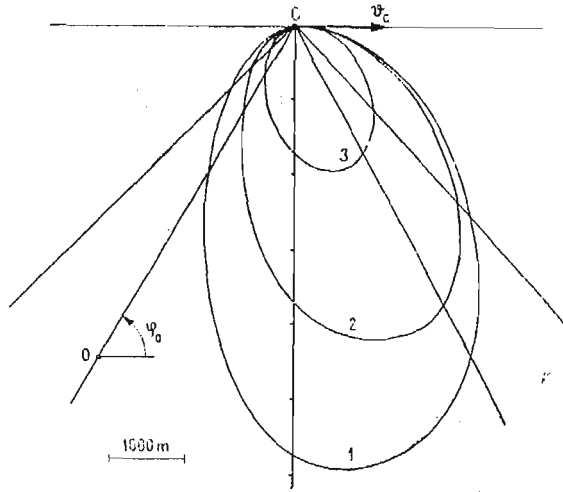
W wyniku numerycznych obliczeń, z wykorzystaniem EMC, dla wspomnianego wcześniej hipotetycznego pocisku oraz przy założeniu  $v_c = 300$  m/s i dopuszczalnych obciążeniach bocznych pocisku  $n_d = 15$  oraz  $\varepsilon_0 = 0$  uzyskano obraz bliższej granicy strefy możliwych ataków, pokazany na rys. 3.

Na rys. 3 początkowe wartości współczynnika proporcjonalności określano zgodnie z kryterium (19). Krzywa 1 pokazuje  $(r_0)_{\min} = f(\varphi_0)$  dla  $a_0 = \text{const}$ , czyli  $\frac{da}{dt} = 0$ , krzywa zaś 2 dla  $\frac{da}{dt} = -0,1$ .

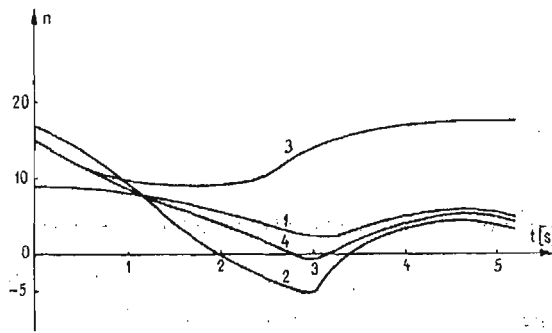
Krzywa 3 będzie omówiona w dalszej części opracowania.

Jak wyglądają różne warianty proporcjonalnego naprowadzania, w aspekcie proponowanych kryteriów ograniczających pokazują poniższe przykłady obliczeniowe dla wspomnianego hipotetycznego pocisku rozpędzanego (w trakcie 3s działającego silnika) od  $v_0 = 400$  m/s do  $v = 820$  m/s. Na rys. 4 pokazano charakter zmian obciążeń bocznych przy ataku z tylnej półsfery  $\varphi_0 = 0,7854$  ( $45^\circ$ ), przy czym  $\varepsilon_0 = 0$  oraz  $r_0 = 2000$  m.

Początkowe wartości przy  $a = 2 = \text{const}$  (krzywa 1) spełniają kryterium (19) i jak widać, przez cały czas naprowadzania obciążenia nie przekraczają dopuszczalnej wartości



Rys. 3.



Rys. 4.

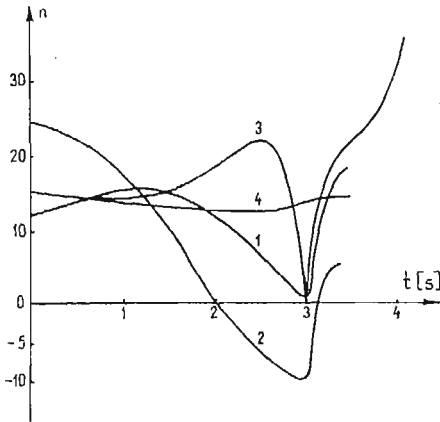
$n_d = 15$ . Wartości początkowe przy  $a = 4$  (krzywa 2) nie spełniają kryterium (19) i ograniczeń z niego wynikających ( $a = 4$  jest większe od  $a_{0\max} = 3,46$ ), stąd obciążenia w początkowym okresie naprowadzania przekraczają wartość dopuszczalną. W przypadku krzywej 3 spełnione zostało kryterium (19) i obserwujemy przy nieprzekraczaniu na początku  $n_d = 15$  również i początkowy spadek obciążeń, ale pod koniec naprowadzania obciążenia przewyższają założone dopuszczalne wartości. Jest to przykład nie w każdym przypadku spełnianych oczekiwań przebiegu  $n = f(t)$  mimo wypełnienia zastosowanego kryterium (19). Między innymi przyczyniło się to do dalszych poszukiwań i opracowania modyfikacji metody (następny rozdział).

Rys. 5 ilustruje przebiegi  $n = f(t)$  dla  $r_0 = 2000$  m i  $\varphi_0 = 1,5708$  ( $90^\circ$ ) oraz  $\varepsilon_0 = 0$ , również dla  $a = 2 = \text{const}$  (krzywa 1) i  $a = 4 = \text{const}$  (krzywa 2) oraz dla  $a_0 = 2,45$  i  $\frac{da}{dt} = -0,81$  (krzywa 3).

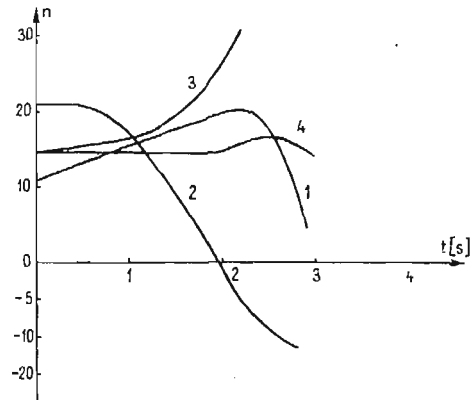
Omawiane, pokazane na rys. 5, krzywe 1, 2, 3 charakteryzują procesy naprowadzania dla warunków początkowych nie spełniających kryterium (19) i w każdym z tych przypadków współczynniki obciążenia przekraczają w trakcie naprowadzania  $n_d = 15$ .

Rys. 6 przedstawia charakter zmian  $n = f(t)$  dla przedniej strefy ataku  $\varphi_0 = 2,0944$  ( $120^\circ$ ),  $r_0 = 2000$  m,  $\varepsilon_0 = 0$  i również dla  $a = 2 = \text{const}$  (krzywa 1) dla  $a = 4 = \text{const}$  (krzywa 2) oraz dla  $a_0 = 2,83$  i  $\frac{da}{dt} = -0,61$  (krzywa 3).

Również i w tym przypadku przebiegi  $n = f(t)$ , pokazane przez krzywe 1, 2 i 3, nie spełniają na początku kryterium (19) i współczynniki obciążenia przewyższają  $n_d = 15$



Rys. 5.



Rys. 6.

## 2. Zmodyfikowana metoda proporcjonalnego zbliżenia

Wprowadzenie zmiennego w trakcie naprowadzania współczynnika proporcjonalności umożliwiło złagodzenie ograniczeń procesu naprowadzania i otworzyło nowe kierunki badań w celu dalszego jego usprawniania. Czynniono szereg prób korzystnego doboru prawa zmiany w czasie współczynnika proporcjonalności. Między innymi zakładano liniowy charakter zmniejszania się współczynnika na aktywnej części toru

$$a = a_0 + \frac{da}{dt} t \quad (23)$$

i przyjmowano, że

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{t_a} (1 - a_0) \quad (24)$$

co powodowało, że na końcu aktywnej części toru (przy czasie  $t_a$ ) współczynnik proporcjonalności przybierał wartość  $a = 1$  i dalej naprowadzanie odbywało się według klasycznej metody pogoni. Przykłady takiego naprowadzania pokazują krzywe 3 na rysunkach 4, 5, 6.

Okazało się, że korzystne z wielu względów wyniki (szybkie zmniejszanie współczynników obciążenia bocznych na torze, skrócenie czasu naprowadzania, uproszczenie wzorów obliczeniowych w trakcie analizy procesu naprowadzania itp.) uzyskano przy hipotezie zakładającej zmianę współczynnika proporcjonalności odwrotnie proporcjonalną do zmiany modułu prędkości pocisku



$$a = \frac{K}{v}, \quad (25)$$

gdzie  $K = \text{const.}$

Przyjęto przy tym, że wartość współczynnika  $K$  określać należy dla początkowych warunków naprowadzania i dopuszczalnego współczynnika obciążenia bocznego  $n_d$ . Wówczas

$$K = - \frac{gn_d}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0}. \quad (26)$$

Dla powyższej hipotezy zmiana współczynnika proporcjonalności wygląda następująco

$$\frac{da}{dt} = - \frac{K}{v^2} \frac{dv}{dt} = - \frac{a}{v} \frac{dv}{dt}. \quad (27)$$

Ujemny gradient współczynnika proporcjonalności zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu modułu prędkości rakiety. Dla tak zmodyfikowanej metody uzyskano na podstawie (17), po uwzględnieniu (26) i (27),

$$a_0 \geq 2 - 2 \frac{v_{c_0} \cos \varphi_0}{v_0 \cos \varepsilon_0} + r_0 \frac{dv}{dt} \frac{\text{tg } \varepsilon_0}{v_0} (-v_{c_0} \sin \varphi_0 + v_0 \sin \varepsilon_0)^{-1} \quad (28)$$

i pozostawiając taki sam warunek (18), z analogicznego do (19) kryterium określono bliższą granicę strefy możliwych ataków

$$r_0 \geq \frac{2(v_0 \cos \varepsilon_0 - v_{c_0} \cos \varphi_0)(v_{c_0} \sin \varphi_0 - v_0 \sin \varepsilon_0)}{gn_d \cos \varepsilon_0 + \frac{dv}{dt} \sin \varepsilon_0}. \quad (29)$$

Dla częstego, praktycznego przypadku  $\varepsilon_0 = 0$  wzór (29) upraszcza się do

$$r_0 \geq \frac{2(v_0 - v_{c_0} \cos \varphi_0)v_{c_0} \sin \varphi_0}{gn_d}. \quad (30)$$

Jak widać, wyrażenia (28), (29) i (30) są prostsze od ogólnych wyrażań (17), (21) i (22), nawet w porównaniu z przypadkiem  $a = \text{const.}$

Bliższa granica możliwych ataków przybliża się znacznie do atakowanego celu. Widać to wyraźnie z obliczeń wykonanych dla hipotetycznego pocisku i przyjętych warunków początkowych. Ilustruje to, obliczona na podstawie (30), krzywa 3 na rys. 3.

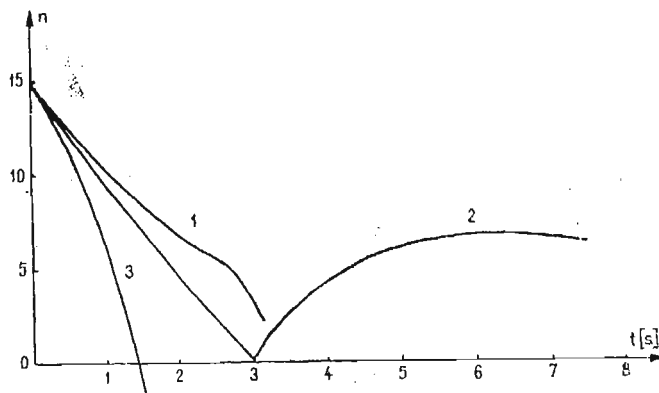
Znacznie korzystniejsze są również zmiany  $n = f(t)$ . Pokazują to krzywe 4 z obliczeń dla  $r_0 = 2000$  m i  $\varphi_0 = 0,7854$  ( $45^\circ$ ),  $\varphi_0 = 1,5708$  ( $90^\circ$ ) i  $\varphi_0 = 2,0944$  ( $120^\circ$ ) odpowiednio na rys. 4, rys. 5 i rys. 6.

Szczególnie korzystnie wyglądają krzywe  $n = f(t)$  dla  $r_0$  wyraźnie przekraczających  $(r_0)_{\text{min}}$ . Pokazuje to rys. 7. Krzywa 1 charakteryzuje zmiany obciążeń bocznych dla  $r_0 = 1200$  m i  $\varphi_0 = 0,7854$  ( $45^\circ$ ), krzywa 2 — dla  $r_0 = 5200$  m i  $\varphi_0 = 2,0944$  ( $120^\circ$ ) krzywa 3 — dla  $r_0 = 1400$  m i  $\varphi_0 = 2,7925$  ( $160^\circ$ ).

Rozpatrzmy obecnie, na ile możliwe jest przy zaproponowanej metodzie przyjęcie założenia o stałości prędkości zbliżania,  $\frac{dr}{dt} = \text{const.}$

Po zróżniczkowaniu względem czasu równania (7), wykorzystaniu (6) i uwzględnieniu (8) mamy:

$$r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt} \sin \varepsilon - v \frac{d\Psi}{dt} \cos \varepsilon - \frac{dv_c}{dt} \sin \varphi. \quad (31)$$



Rys. 7.

Po uwzględnieniu (5) i (25) równanie (31) przybiera postać

$$r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} \left( 2 \frac{dr}{dt} + K \cos \varepsilon \right) = \frac{dv}{dt} \sin \varepsilon - \frac{dv_c}{dt} \sin \varphi. \quad (32)$$

Jeśli założymy stałą prędkość zbliżania  $\frac{dr}{dt} = \text{const}$ , możemy napisać, analogicznie do rozważań w [4],

$$r = r_0 + \frac{dr}{dt} t,$$

i gdy przez  $t_c$  oznaczymy całkowity czas takiego naprowadzania, a przez  $r_0$  — odległość początkową między pociskiem i celem, to uzyskujemy

$$r_0 = - \frac{dr}{dt} t_c, \quad (33)$$

wobec czego

$$r = (t - t_c) \frac{dr}{dt}. \quad (34)$$

Wykorzystując powyższe dojdziemy do równania różniczkowego. Na podstawie (32) i (33) mamy

$$(t_c - t) \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \left[ 2 + K \left( \frac{dr}{dt} \right)^{-1} \cos \varepsilon \right] \frac{d\varphi}{dt} = - \left( \frac{dr}{dt} \right)^{-1} \left( \frac{dv}{dt} \sin \varepsilon - \frac{dv_c}{dt} \sin \varphi \right). \quad (35)$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy dla  $\frac{dv_c}{dt} = 0$ , przy założeniu  $\cos \varepsilon = 1$  oraz  $\sin \varepsilon = \varepsilon = \text{const}$ ,

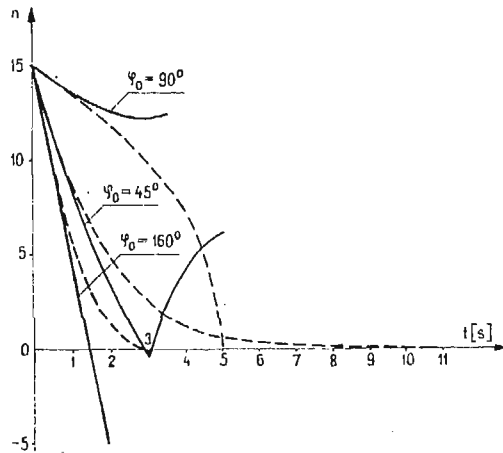
$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{t_c - t}{t_c}\right)^b \cdot \left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 - \frac{c}{b}\right] - \frac{c}{b}, \quad (36)$$

gdzie  $b = -2 - K\left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1}$ ,

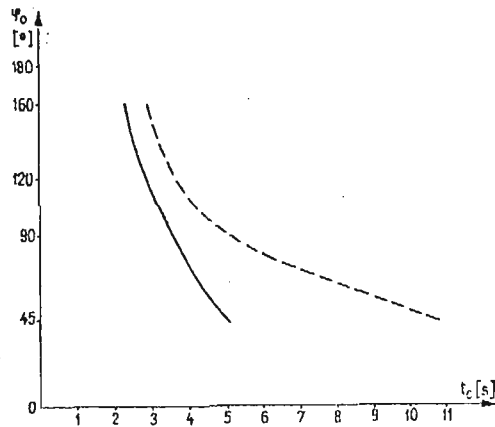
$$c = \left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1} \frac{dv}{dt} \varepsilon.$$

Dla porównania wykonano uzupełniające przykładowe obliczenia dla wspomnianego hipotetycznego pocisku, przy  $\varepsilon_0 = 0$  i  $r_0 = 2000$  m według uzyskanego rozwiązania (36). Wyniki uzyskane z całkowania liczbowych wyjściowych równań przy użyciu EMC i obliczeń według rozwiązania (36) pokazuje rys. 8.

Na rys. 8 linią ciągłą wykreślono zmiany  $n = f(t)$  uzyskane przy numerycznych obliczeniach, a linią przerywaną — przy wykorzystaniu rozwiązania (36).



Rys. 8.



Rys. 9.

Jak wynika z porównań, w początku naprowadzania różnice są niewielkie i największe bezwzględne wartości osiągają przy końcu czasu naprowadzania  $t_c$  określonego z numerycznych obliczeń. Znacznie również różni się rzeczywisty czas naprowadzania (tak nazwiemy czas  $t_c$  z numerycznych obliczeń) od czasu wynikającego z przybliżonej zależności (33). Ilustruje to rys. 9 z obliczeń dla  $r_0 = 2000$  m. Krzywą ciągłą naniesiono rzeczywisty czas naprowadzania.

Krzywa przerywana na rys. 9 pokazuje  $t_c = f(\varphi_0)$  dla  $\frac{dr}{dt} = \text{const}$ . Im mniejsza początkowa wartość kąta obserwacji celu  $\varphi_0$ , tym bardziej przybliżona wartość  $t_c$  różni się od rzeczywistej. Na przykład dla  $\varphi_0 = 45^\circ$  przybliżony czas naprowadzania przewyższa więcej niż dwukrotnie czas rzeczywisty (10,64 s wobec 5,1 s).

### 3. Zmiana kąta wychylenia sterów pocisku

Podstawowym równaniem w tej części rozważań jest równanie (4). Po uwzględnieniu (8) i (9) otrzymujemy

$$M_z^{\delta} \delta = -M_z^{\beta} \beta - M_z^{\omega} \left( \frac{d\beta}{dt} + \frac{dY'}{dt} \right) + J_z \left( \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{d^2Y'}{dt^2} \right) \quad (37)$$

i jeśli wykorzystamy (2), (3) i (5) oraz oznaczymy:

$$\beta = A \frac{dY'}{dt}, \quad (38)$$

$$A = mB, \quad (39)$$

$$B = \frac{v}{P + \bar{c}_y v^2}, \quad (40)$$

to uwzględniając zmianę w czasie współczynnika proporcjonalności, otrzymamy ostatecznie wyrażenie na kąt wychylenia steru:

$$\delta = \left( D_1 a + D_2 \frac{da}{dt} + D_3 \frac{d^2 a}{dt^2} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \left( D_2 a + 2D_3 \frac{da}{dt} \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D_3 a \frac{d^3 \varphi}{dt^3}. \quad (41)$$

W (41) oznaczono:

$$D_1 = \frac{1}{M_z^{\delta}} \left( J_z \frac{d^2 A}{dt^2} - M_z^{\omega} \frac{dA}{dt} - M_z^{\omega} - M_z^{\beta} A \right), \quad (42)$$

$$D_2 = \frac{1}{M_z^{\delta}} \left( J_z - M_z^{\omega} A + 2J_z \frac{dA}{dt} \right), \quad (43)$$

$$D_3 = \frac{I_z A}{M_z^{\delta}}, \quad (44)$$

w (42) i (43) zaś:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{A_2} \left( \frac{dA_1}{dt} - \frac{dA_2}{dt} A \right), \quad (45)$$

$$A_1 = mv; \quad \frac{dA_1}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt},$$

$$A_2 = P + c_y v^2; \quad \frac{dA_2}{dt} = \frac{d\bar{c}_y}{dt} v^2 + 2v\bar{c}_y \frac{dv}{dt}, \quad (45)$$

[cd.]

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \frac{1}{A_2} \left( \frac{d^2 A_2}{dt^2} - A_2 \frac{d^2 A_2}{dt^2} - 2 \frac{dA}{dt} \frac{dA_2}{dt} \right), \quad (46)$$

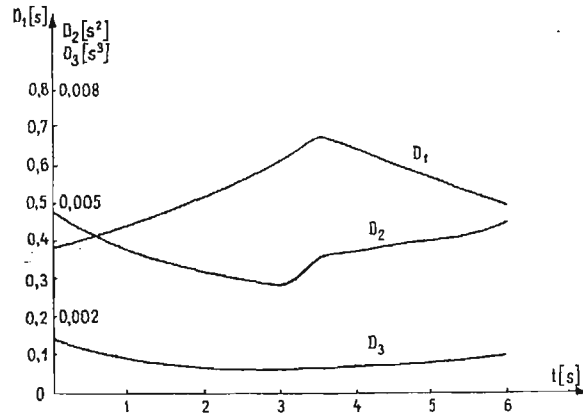
$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} = 2 \frac{dm}{dt} \frac{dv}{dt} + m \frac{d^2 v}{dt^2}; \quad \text{przy} \quad \frac{d^2 m}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 A_2}{dt^2} = 4 \frac{d\bar{c}_y}{dt} v \frac{dv}{dt} + 2\bar{c}_y \left[ \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + v \frac{d^2 v}{dt^2} \right],$$

przy  $\frac{d^2 \bar{c}_y}{dt^2} = 0$ .

Jak wynika z obliczeń dla hipotetycznego pocisku, współczynnik  $D_1$  przybiera wartości rzędu kilku dziesiątych. Współczynniki  $D_2$  i  $D_3$  mają wartości odpowiednio o dwa i trzy rzędy niższe.

Zmiana tych współczynników w czasie naprowadzania, dla przyjętych warunków (rozdz. 1), została pokazana na rys. 10.



Rys. 10.

Jeśli uwzględnimy proponowaną modyfikację proporcjonalnej nawigacji i zmianę współczynnika proporcjonalności według (26) i (27), to znaczy:

$$a = \frac{K}{v}; \quad \frac{da}{dt} = -\frac{a}{v} \frac{dv}{dt}$$

oraz (jak stąd wynika)

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{a}{v^2} \left[ 2 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 - v \frac{d^2 v}{dt^2} \right], \quad (47)$$

to otrzymamy wyrażenie na kąt wychylenia steru w następującej postaci:

$$\delta = \left\{ D_1 - D_2 \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} + D_3 \frac{1}{v^2} \left[ 2 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 - v \frac{d^2v}{dt^2} \right] \right\} a \frac{d\varphi}{dt} + \left( D_2 - 2D_3 \frac{dv}{dt} \right) a \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D_3 a \frac{d^3\varphi}{dt^3}. \quad (48)$$

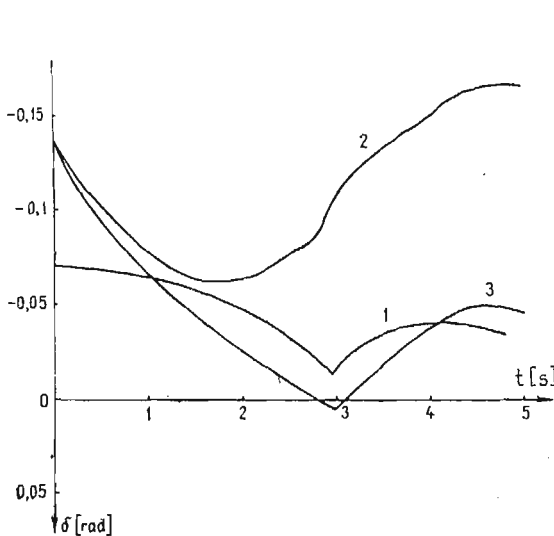
Jak wynika z analizy poprzednio uzyskanego wyrażenia (41) i wyrażenia dla zmodyfikowanej metody (48), podstawowe znaczenie ma pierwszy człon iloczynu, i w przybliżeniu można przyjmować

$$\delta \cong D_1 a \frac{d\varphi}{dt}. \quad (49)$$

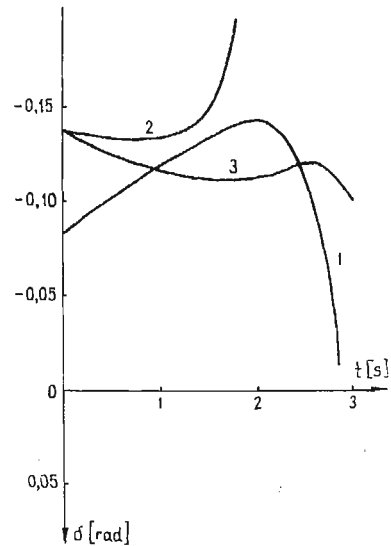
Bezpośredni i decydujący wpływ na zmianę kąta wychylenia steru w procesie naprowadzania ma zmiana charakterystyk dynamicznych pocisku oraz zastosowane prawo zmiany współczynnika proporcjonalności, mające również podstawowy wpływ na zmianę kąta obserwacji celu  $\varphi$ .

Dla ilustracji pokazano na rys. 11 i rys. 12 zmiany kąta wychylenia steru dla przyjętego hipotetycznego pocisku (oraz warunków podanych w rozdziale 1 przy  $r_0 = 2000$  m), dla stałego współczynnika proporcjonalności  $a = 2$  (krzywe 1). Dla zmiennego współczynnika proporcjonalności zgodnie z (23) i (24) pokazują to krzywe 2, a dla współczynnika proporcjonalności zmieniającego się zgodnie z proponowaną zasadą (krzywa 3).

Rys. 11 ilustruje naprowadzanie przy  $\varphi_0 = 0,7854$  ( $45^\circ$ ).



Rys. 11.



Rys. 12.

Rys. 12 charakteryzuje naprowadzanie z przedniego obszaru,  $\varphi_0 = 2,0944$  ( $120^\circ$ ).

Z rysunków 11 i 12 widać, że najbardziej korzystną zmianę  $\delta = f(t)$  obserwujemy w przypadku proponowanej zmodyfikowanej metody proporcjonalnego naprowadzania (krzywe 3).

#### 4. Wnioski

1. Na podstawie szeregu wykonanych uprzednio rozważań i przykładowych obliczeń [1, 2] potwierdzona została możliwość, szczególnie przy wstępnych rozważaniach, doboru współczynnika proporcjonalności i określenia bliższej granicy możliwych ataków w oparciu o początkowe wartości czynników toru pocisku i celu.

2. Zmiana modułu prędkości pocisku, jak również zmiana prędkości wzajemnego zbliżania pocisku i atakowanego celu, uzasadnia zmianę w trakcie naprowadzania współczynnika proporcjonalności.

3. Wynikająca z przeprowadzonych analiz hipoteza o zmianie współczynnika proporcjonalności odwrotnie proporcjonalnej do modułu prędkości pocisku i zaproponowana modyfikacja metody proporcjonalnego naprowadzania wpływa korzystnie zarówno na dopuszczalne początkowe warunki naprowadzania (przybliża do atakowanego celu strefę możliwych ataków), jak również na zmianę dynamicznych parametrów ruchu na torze (pocisk wykonuje szybki manewr na początku naprowadzania, przygotowując niejako duży zapas obciążeń bocznych i kąta wychylenia steru w przewidywaniu manewru obronnego celu).

4. Przeprowadzone rozważania i proponowana modyfikacja metody proporcjonalnego zbliżenia może stanowić podstawę szeregu praktycznych wskazówek i zaleceń przy analizie warunków optymalnego naprowadzania pocisków „powietrze-powietrze”.

#### Literatura

1. M. GLAŃSKI, *Ograniczenia proporcjonalnej nawigacji w ogólnym przypadku naprowadzania kierowanych pocisków „powietrze-powietrze”*, Biuletyn WAT, 3, 1972.
2. M. GLAŃSKI, *Ograniczenia proporcjonalnej nawigacji w uproszczonym przypadku naprowadzania kierowanych pocisków „powietrze-powietrze”*, Biuletyn WAT, 8, 1971.
3. M. GLAŃSKI, *Wpływ początkowego kąta wyprzedzenia na strefę ataku przy proporcjonalnej nawigacji pocisków „powietrze-powietrze”*, Biuletyn WAT, 9, 1973.
4. E. I. KRYNIECKI, *Sistemy nawiedienija*, Moskwa 1970.

#### Резюме

#### МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО НАВЕДЕНИЯ СНАРЯДОВ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ СБЛИЖЕНИЯ

Учитывая ограничения пропорциональной навигации, рассмотрены возможности совершенствования процесса наведения. Из проведенного анализа невозмущенного движения снаряда с переменной массой и переменной скоростью, наводимого в горизонтальной плоскости сближения, сформулирован вывод о необходимости „вариации” коэффициента (постоянной) пропорциональности. Показаны достоинства такого подхода. Предложен модифицированный метод пропорционального сближения.

Рассуждения иллюстрированы числовыми примерами.

## S u m m a r y

THE MODIFIED METHOD OF PROPORTIONAL APPROACH OF A MISSILES IN THE  
HORIZONTAL APPROACH — PLANE

On consideration of limitations to the proportional navigation, have been considered of making the homing-in process more efficient.

From an analysis of the unperturbed motion of a missiles with a variable mass and a variable velocity and being homed-in in the horizontal approach — plane, a conclusion has been formulated on the need of rendering the factor (constant) of proportionality variable. The advantages of such of solution have been demonstrated.

The considerations have been illustrated by the numeric examples.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku*

---



## DETERMINATION OF STRESS INTENSITY FACTORS BY OPTICAL METHODS

J. BALAŠ, M. DRŽÍK (BRATISLAVA)

*Institute of Construction and Architecture  
of the Slovak Academy of Sciences*

### Introduction

In the development of structures the fracture mechanics principles and criteria are used in an ever greater number of applications. The stress intensity factor (SIF) provides a quantitative criterion which combines critical fracture stresses with the length of crack and the specimen geometry. The determination of the influence of geometry and loading on stress concentrations in the vicinity of the crack tip has been included to the problems which are solvable by optical methods of stress analysis. In the Institute of Construction and Architecture of the Slovak Academy of Sciences several methods in the area of holographic interferometry, speckle interferometry and some other optical techniques were developed and realized for this purpose.

### 1. Stress intensity factors in the generalized plane stress state cracked specimens

As one of the first applications we used the image-plane holographic technique on models of PMMA transparent material to the examination of isopachic fringes. The advantage of this procedure is in the fact, that the SIF may be determined from isopachics data without requiring troublesome separation of principal stress components. A holographic interferometer was developed in the optical arrangement of which the diffuser screen is not included. For this reason the recorded interference pattern can be photographically greatly magnified and by this the required resolved power of image details can be secured.

Stress intensity factors  $K_I$  and  $K_{II}$  were determined in cracked beams with inclined and curved edge cracks. Example of the pattern of isopachics is shown in Fig. 1.

In order to determine the quantitative values of  $K_I$  as well as  $K_{II}$  several evaluating procedures have been developed based on the description of the stress state around the crack tip by asymptotic series. It has been shown that these procedures allow reliably to calculate SIF-s generally in arbitrary geometrical and loading configurations of cracked specimens in the plane stress state with an accuracy of better than  $\pm 5$  per cent [1].

An analogous technique of the holographic record and SIF evaluating we used also in the investigation of the dynamic crack propagation. The interferometer functioned



Fig. 1. Interference pattern of isopachics in the vicinity of the angled crack in a bend specimen



Fig. 2. Isopachic fringes of dynamic crack propagation in PMMA three-point bend specimen at crack velocity of 400 m/s

with a ruby impulse laser. Isopachics around the crack running with the speed of about 400 m/s in the bend PMMA specimen are shown in Fig. 2. For the quantitative evaluating of  $K_{ID}$  values a dynamic correction of interference constant must be performed. To do this, we can get the known dynamic dependencies of material constants and by using the graphical Fourier analysis and iterative procedure the evaluating interference fringe values may be calculated. It has been shown, that the differences between static and dynamic values in polymer materials (such as PMMA) may be 50 per cent or even more. By this procedure the relationship between the dynamic SIF and the crack tip velocity  $a$ , which is the important fracture characterization, was obtained (Fig. 3).

For the measurement of the time functions of the dynamic values of SIF-s also a new photo-electric method was developed. Based on optical observation of the deformation of a mirror like flat close to the crack tip and on optical filtration principle, changes of the light intensity are produced. These are transformed to electric quantities by means of a photosensor. In this simple way without employing a high speed camera a continuous record directly of the stress intensity factor can be obtained immediately in time on the

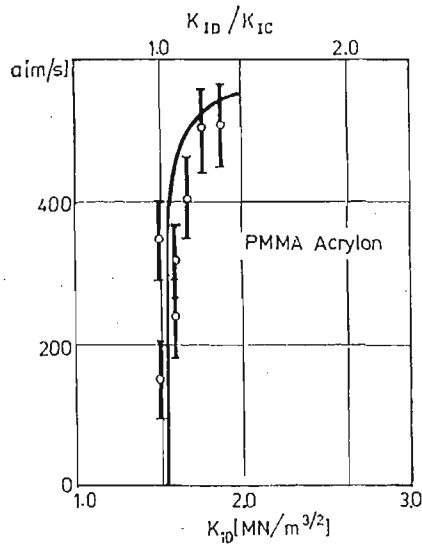


Fig. 3. The  $K_{ID}$  —  $a$  relation for PMMA Acrylon obtained from the holographic interferometry data

oscilloscope screen. Consequently, very fast non-stationary dynamic processes such as impact load may easily be solved. Moreover, the technique takes notice of the stress waves space distribution due to the fact that the deformation is watched close to the crack tip. Fig. 4 illustrates the method by the  $K_{ID}$  versus time dependence in the typical impact load process as was observed on the oscilloscope screen.

The possibility of the displacement measurements on the specimen surfaces ranks among the most important characteristics of the holographic-speckle interferometry principle. For the study of the SIF determination from displacement data we can try on application of image optics free speckle technique when the holographic plate is fixed immediately on the measured object. The main advantage of this technique is the self compensation of large non-controlled displacements of the rigid body motion. We employed

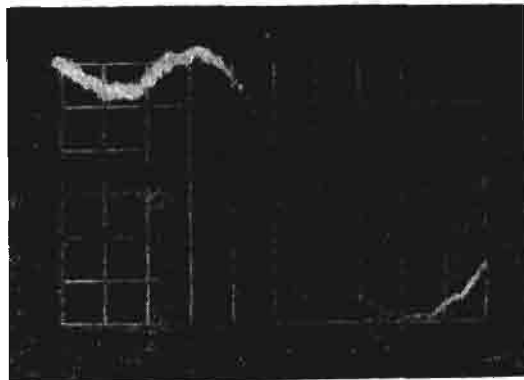


Fig. 4. Stress intensity factor in the strip with an edge stationary crack subjected to three-point impact load bending as a function of time (time calibration  $200 \mu\text{s}$  (div and  $K_{ID} = 10^5 \text{ MNm}^{-3/2}$ ) (div))

the method by means, when one of the transparent model surfaces is roughed (on the side of holographic plate emulsion). Collimated laser beam passed through the model and the ground screen surface scatter it so that the specklegram may be recorded. In the step of reconstruction we used the Fourier filtration procedure and by this in-plane orthogonal displacement components are optically obtained. As a test specimen we chosen the crack emanating from a hole in a complicated piercing bending specimen.

In evaluating of the SIF the relation displacements versus the distance from crack tip is graphically drawn. A precise interpolation of that curve to the zero distance from the tip can be done on the basis of linear fracture mechanics condition of zero value displacements at the tip (see Fig. 5). So the first term of asymptotic solution for displacements

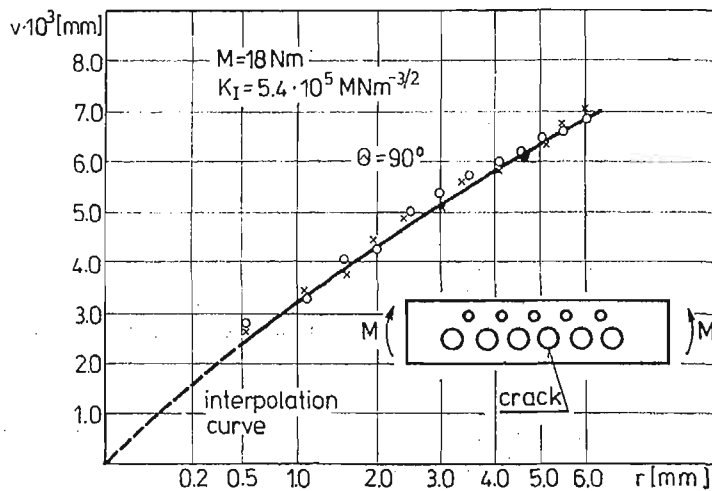


Fig. 5. Displacement data as a function of square root of radial distance  $r$  from the crack tip for the piercing cracked specimen

field around the crack may be successfully used. We believe that the displacement data with respect to the stress intensity factor determination give the most precise results of all the optical methods.

## 2. Application of non-destructive optical methods to study 3-D cracked bodies

One of the up-to-date task in the field of optical methods of experimental stress analysis is to develop reliable and effective methods for the measurement of three-dimensional stress state. We used holographic interferometry as a non-destructive method for the SIF determination in three-dimensional cracked specimens. The basic principle is to record a double-exposure image hologram with perpendicular illumination of the crack surface and filtration of space frequencies for the separation of the out-of-plane displacement component. Arrangement of the optical system with the model is shown schematically in Fig. 6. Surface of the crack is illuminated by a beam passing through the polished side surface of the transparent model. The image of the crack is observed from the same direction and is projected by an objective on a holographic plate where the hologram with

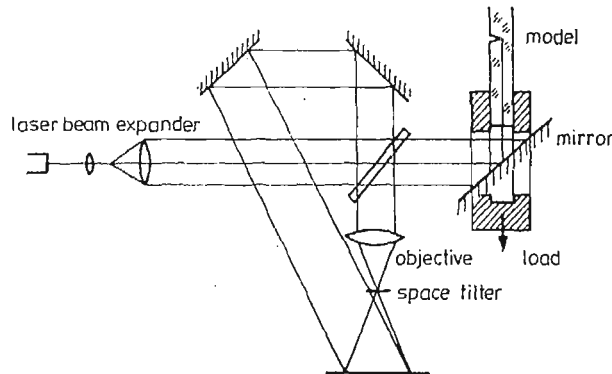


Fig. 6. Scheme of optical arrangement of the holographic interferometer for crack opening displacements measurement

the reference beam is formed. In the focal plane of the lens the space filter — diaphragm with circle aperture — is positioned for the separation of the near-to-zero space frequencies. Moreover, in this manner, not only the separation of the out-of-plane displacements is performed but an improvement of the correlation between the first and second exposure records may be reached, too. The radius of the correlation which is characterized by the speckle size may be varied by a suitable choice of the aperture diameter in the space filter, consequently contrast of the fringes may be increased. Light rays immediately behind the reflection from the crack surface spread through the thickness of the transparent model material. This is the reason, why the value of material index of refraction  $n$  will be included in the expression for the quantitative evaluation of the out-of-plane component  $w$ . Using the diffraction theory this expression may be derived for the interpretation of interference fringes [2]

$$w = N \frac{\lambda}{2n}, \quad (1)$$

where  $N$  is the order number and  $\lambda$  is the wave length.

Illumination and observation of the inside crack was experimentally achieved with the aid of small mirror which turns the light beam to the polished side of the model. The mirror was placed in the sight-hole of jaw on one margin of the model. By these groove steel chuck jaws the tension loaded beam including a surface flaw was fixed on both ends where the loading force was applied.

Application of the „classic” speckle method to the measurement of the displacements inside a transparent body was another optical method for the non-destructive SIF evaluation on the same specimen as in the previous case of holographic interferometry. Laser beam with a diameter of 0.5 mm from the 60 mW power He-Ne laser was penetrating across the PMMA model near the crack front (see Fig. 7). Intensity of the light radiation in the beam was sufficient to the observable light scattering along the beam trace which arose from the Tyndal effect. Scattered coherent light was concentrated on a holographic plate where the image of the light line was focused by the photographic objective. Microstructure of that image represents a speckle record and when the double-exposure procedure is used we can evaluate the displacements of the points on the light line. Evaluating

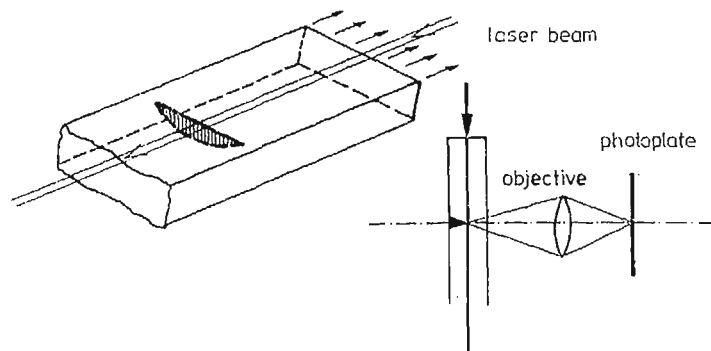


Fig. 7. Schematic drawing of the speckle interferometry arrangement in the measurement of inside body displacements

of the specklegrams has been carried out by the usual Young's fringes point by point method. The objective used for the measurement was wide open Helios lens with aperture number 1.5 and focal distance 85 mm. Magnification of the image was 4 times and corresponding exposure times were several tens of seconds on Agfa-Gevaert holographic plates.

Both, the holographic method of crack opening displacements measurement and the speckle method using inside scattered light were experimentally tested on the same three tensile loading beam specimens including a semi elliptical surface cracks. The surface flaws as an imitation of natural cracks were machined with the aid of a circular milling cutter.

By holography a field of interference fringes on a crack plane was reached several times on each sample for different loading levels. One example of the measured fringe patterns of crack opening displacements is shown in Fig. 8. In addition to the direct focused



Fig. 8. Interference pattern of crack opening displacements on the semi elliptical crack

image of the crack surface a total reflex on an inside mirror smooth surface of the model is imaged, too (see bottom part of Fig. 8).

Being based on values of crack opening displacements the stress intensity factor can be calculated by means of asymptotic relations for the displacements around two-dimensional crack in the state of plane strain [3]. For the points on a perpendicular line to the

crack front the factor  $K_I$  may be given by the well-known relationship described here for the polar angle  $\theta = 180^\circ$

$$K_I = \frac{E(2\pi)^{1/2}w}{4(1-\nu^2)r^{1/2}} \tag{2}$$

where  $E, \nu$  are material constants and  $r$  is the polar distance from the crack tip. To calculate the factor  $K_I$  by Eq. (2), points in the close vicinity of the crack tip are taken into account. The stress intensity factors are obtained along the whole crack front.

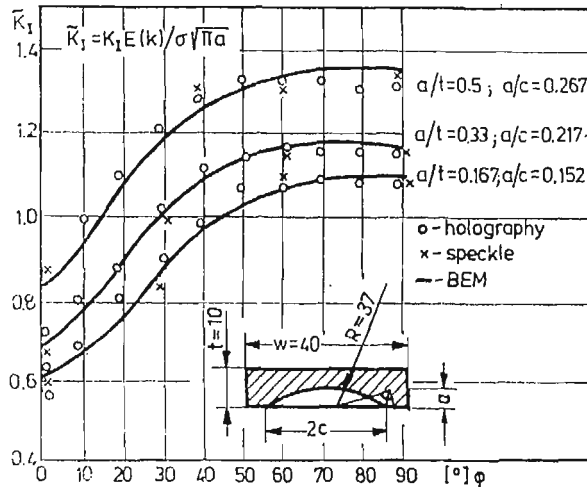


Fig. 9. Variations of the stress intensity factor along the crack front as were measured by holographic and speckle interferometry and calculated by boundary element method [4]

To calculate the factor  $K_I$  from the data obtained by the speckle interferometry the same asymptotic expression but for the polar angle  $\theta = 90^\circ$  may be used

$$K_I = \frac{E(2\pi)^{1/2}w}{2(1+\nu)\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)r^{1/2}} \tag{3}$$

Results for the test specimens are summarized in the form of  $K_I$  relationships on the radial angle of the given crack front point. Values of the factor  $\bar{K}_I$  plotted in Fig. 9 are normalized by the maximum value of the factor  $K_I$  for an elliptical crack in an infinite space. The evaluated data obtained by holography and speckle methods are compared with those calculated by the numerical boundary element method [4].

### 3. Conclusions

Results and experience acquired during the last years show that the exploitation of optical methods in the field of stress state investigation in the bodies including cracks are adequately exact and effective in the solution of both engineering tasks and problems of fundamental research. Problems connected with a material evaluation and testing with

regard to the influence of cracks measurement of fracture toughness parameters as well as a research of non-linear effects in the cracked bodies, all these questions call for experimental measurements. Moreover, methods of experimental mechanics, an important part of what are optical methods, allow successfully work out also very complicated problems in static and dynamic conditions. In comparison with the numerical computational method an experiment has the advantage where the specified boundary conditions are inaccurate or complicated (thermal, dynamical problems).

This is why we can say that application of optical methods in fracture mechanics has a bright perspective.

#### References

1. M. DRŽÍK, *Stress analysis in the vicinity of angled cracks by holographic interferometry* (in Slovak), *Staveb. čas.* 30 (12), 913 - 927, 1982.
2. J. BALŠA, M. DRŽÍK, *Measurement of  $K_I$  on three-dimensional cracked bodies by holographic interferometry*, 5th Int. Congress Exp. Mech., Montreal, June 10 - 15, 1984 (to be published).
3. M. K. KASSIR, G. C. SIH, *Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings*, *J. Appl. Mech.* 33(4), 602 - 611, 1966.
4. J. SLÁDEK, V. SLÁDEK, *Boundary element method in fracture mechanics*, *Acta Techn. ČSAV*, 27(6), 718 - 732, 1982.

#### Резюме

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ОПТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Для определения коэффициентов интенсивности напряжений в случае плоского трехмерного состояний напряжения, в условиях статике и динамики, применено ряд оптических методов, а именно голографической интерферометрии „спецль” интерферометрии и оптической фильтрации в соединению с фотоэлектрической записью.

Результаты и опыт последних лет показывают, что применение оптических методов в области исследования напряжения тел с трещинами являются соответственно точными и эффективными так в задачах инженерных, как и в основных исследованиях.

#### Streszczenie

#### WYZNACZANIE WSPÓLCZYNNIKÓW INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ METODAMI OPTYCZNYMI

Do wyznaczenia współczynników intensywności naprężeń w przypadku płaskiego i trójwymiarowego stanu naprężenia, w warunkach statycznych jak i dynamicznych, zastosowano szereg metod optycznych, a mianowicie interferometrii holograficznej, interferometrii plamkowej i optycznej filtracji połączonej z zapisem fotoelektrycznym. Wyniki i doświadczenia ostatnich lat pokazują, że zastosowanie metod optycznych w dziedzinie badania stanu naprężeń spękanych ciał są odpowiednio dokładne i efektywne zarówno w rozwiązaniach zagadnień inżynierskich jak i badaniach podstawowych.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku*



## КВАЗИХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ СКРУЧИВАЕМЫХ ОБРАЗЦОВ С $V$ — ОБРАЗНЫМИ ВЫРЕЗАМИ

И.И. Бугаков (Ленинград, СССР)

Экспериментально исследованы две задачи кручения — осесимметричная и антиплоская. опыты проводили на цилиндрических образцах из стеклообразного эпоксидного полимера с  $V$  — образными вырезами. Относительную глубину выреза и радиус его вершины оставляли неизменными, а угол раствора варьировали в интервале  $15 - 150^\circ$ . Изучены жесткость и прочность образцов, характер разрушения. Дано сравнительное исследование обеих задач.

### 1. Введение

Одной из наиболее трудных проблем механики деформируемых тел является определение прочности тел с концентраторами напряжений. Имеется большое число теоретических и экспериментальных исследований в случаях гладких концентраторов, с одной стороны, и разрезов (начальных трещин), с другой. Однако, большой научный и практический интерес представляют и всевозможные промежуточные случаи, когда концентраторы имеют ребра, угловые точки, но отличны от трещин. Можно привести много примеров угловых концентраторов:  $U$  и  $V$  — образные пазы и канавки,  $L$  — образные переходы встречаются в шпоночных, шлицевых, резьбовых, сварных и других соединениях и в элементах машин, конструкций, сооружений.

Трудности математического исследования такого рода задач связаны с резкими градиентами напряжений в окрестности вершины углового выреза. В рамках механики континуума поле напряжений в окрестности вершины сингулярно [1]. При этом степень сингулярности не равна 0,5, как в случае разрезов, а изменяется в пределах от 0 до 0,5, уменьшаясь с ростом угла раствора при вершине. Альтернативный подход разработан в монографии [2].

Что касается прочности, то критерий Гриффитса для таких задач оказывается неприменимым и начаты исследования других критериев разрушения [3 - 6]. Не вызывает сомнений острая необходимость накопления экспериментальных данных.

Образцы с  $V$  — образным вырезом применяют для оценки вязкости разрушения материалов при осевом и внецентренном растяжении, статическом и удар-

ном изгибе; угол раствора не варьируют и чаще всего принимают равным  $60^\circ$ . При этом такие образцы обычно применяют с целью замены образцов с начальной трещиной. Лишь в редких случаях испытания образцов с угловыми концентраторами рассматривают как представляющие самостоятельный интерес [3 - 5, 7 - 9]. В работе [6] экспериментальные данные [8, 9] были удовлетворительно описаны при помощи критерия Новожилова. В указанных работах исследовали растяжение или изгиб образцов.

В настоящей работе экспериментально исследуются две задачи кручения цилиндрического стержня из стеклообразного полимера с  $V$  — образным вырезом. В одном случае вырез был кольцевым (осесимметричная задача), в другом продольным (антиплоская задача).

## 2. Эксперимент

Образцы были изготовлены из отливки эпоксидного полимера горячего отверждения ЭД-20, использованного в предыдущих работах [8, 9]. Этот полимер имеет трехмерное молекулярное строение, при комнатной температуре находится в стеклообразном состоянии и разрушается квазихрупко; модуль сдвига равен  $1,1 \text{ ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $0,35$ .

Форма и размеры образцов (в миллиметрах) изображены на рис. 1. Относительная глубина выреза в обоих случаях была равна  $0,5$ ; радиус его вершины не пре-

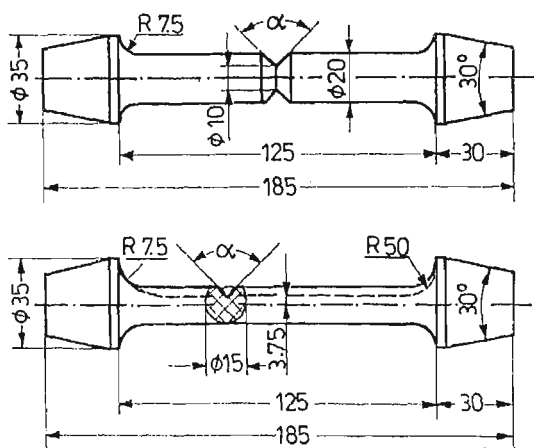


Рис. 1.

вышал  $0,03 \text{ мм}$ . Угол раствора  $\alpha$  изменялся в интервале  $15^\circ - 150^\circ$ . Вырезы изготавливали резцами на фрезерном и токарном станках. Технология аналогична подробно описанной в [10]. Всего было испытано 15 образцов I и 16 образцов II, температура была равна  $296 \pm 1 \text{ К}$ .

Опыты были проведены на простой лабораторной установке, позволяющей точно центрировать образцы и прикладывать крутящий момент  $M$  до  $50 \text{ Нм}$ ; мо-

мент создавали грузами, а угол закручивания  $\vartheta$  отсчитывали по лимбу с ценой деления  $0,5^\circ$ . Мощности установки нехватило, чтобы довести до разрушения образцы II с диаметром 20 мм, как у образцов I, и потому их диаметр был уменьшен до 15 мм.

Результаты экспериментов и их обсуждение приводятся ниже.

### 3. Жесткость и прочность

Диаграммы крутящий момент  $M$  — угол закручивания между захватами  $\vartheta$  образцов I и II для различных углов раствора  $\alpha$  представлены на рис. 2. Видно, что диаграммы при высоких нагрузках нелинейны, начальные участки линейны, а их

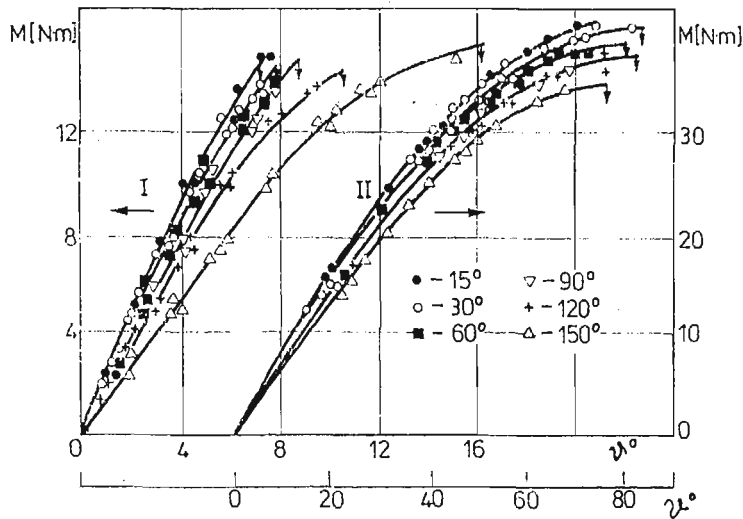


Рис. 2.

наклон зависит от  $\alpha$ , при этом с ростом  $\alpha$  жесткость образцов заметно падает. Сравнение данных для обоих образцов показывает, что жесткость образцов I больше, а значения разрушающего крутящего момента  $M_c$  и угла закручивания при разрушении  $\vartheta_c$  меньше, чем у образцов II. При этом значения  $\vartheta_c$  с ростом  $\alpha$  для образцов I увеличиваются, а для образцов II почти не изменяются.

Априори можно было предположить, что с ростом  $\alpha$  прочность будет заметно возрастать, как это имеет место в случае растягиваемых образцов с вырезом в виде лунки [8, 9]. Оказалось, что прочность образцов I при  $\alpha \leq 120^\circ$  не зависит от  $\alpha$  и лишь при  $\alpha = 150^\circ$  наблюдается ее увеличение. Прочность образцов II заметно уменьшается с ростом  $\alpha$ , причем график средней относительной прочности  $M_c(\alpha)$  вполне повторяет график  $I_c(\alpha)$ . Здесь  $I_c$  — полярный момент инерции поперечного сечения, полученный по углу наклона прямолинейных участков диаграмм на фиг. 2. Следовательно, влияние полярного момента на прочность образцов II оказывается доминирующим.

#### 4. Характер разрушения

Ниже приводятся результаты макроскопического обследования разрушенных образцов. Материал образцов был прозрачен, что позволило рассматривать не только изломы, но и внутренние трещины. Вид фрагментов образцов II с внутренними трещинами показал, что при малых углах  $\alpha$ , когда разрушение носило множественный характер, оно начиналось почти одновременно во многих точках вдоль вершины выреза. Это свидетельствует о высокой степени однородности материала, а также напряженного состояния вдоль продольной оси образца.

Хотя диаграммы нагружения (см. рис. 2) заметно нелинейны, разрушение было квазихрупким. Об этом свидетельствует как рельеф поверхностей разрушения, так и ориентация внутренних трещин и изломов. На изломах видны зеркальная зона, а также ступеньки, борозды, гребни, ориентированные в направлении движения фронта, который был криволинейен. Отчетливо выделяется зона долома образцов I. Положение внутренних трещин и рельеф изломов свидетельствует о том, что разрушение всегда начиналось от вершины выреза.

Разрушение происходило по первому типу (нормальный разрыв): трещины распространялись не в поперечной плоскости, а примерно под углом  $45^\circ$  к плоскостям симметрии образцов. Аналогичную ориентацию трещин разрушения наблюдали в случае кольцевых надрезов-трещин [11, 12]. Лишь долом происходил под другими углами.

Формы разрушения образцов I и II внешне не одинаковы (см. ниже, п. 5).

Имеется корреляция между рельефом и площадью изломов, с одной стороны, и работой разрушения, с другой.

Известно, что работа разрушения равна дополнительной работе. В нашем случае это разность между работой внешнего крутящего момента и работой деформации образца. Она измеряется площадью области, ограниченной осью моментов и диаграммой нагружения. По данным фиг. 2, она растет в образцах I с увеличением  $\alpha$ , а в образцах II — с уменьшением  $\alpha$ . При этом дополнительная работа образцов II значительно больше, чем образцов I. Соответственно, более грубым является рельеф изломов образцов II, а стало быть больше и скорости трещин в образцах II. Чем больше дополнительная работа, тем меньшую относительную площадь изломов занимает зеркальная зона. С ростом дополнительной работы увеличивается число осколков и площадь поверхностей разрушения образцов. При этом число осколков и площадь поверхностей разрушения образцов II больше образцов I и резко растет с уменьшением угла  $\alpha$ .

#### 5. Формы разрушения

Во всех случаях образцы I при разрушении разделились в зоне наиболее слабого сечения на две половины. В зависимости от угла  $\alpha$  в этих образцах наблюдаются три формы разрушения: односторонняя ( $\alpha = 15$  и  $30^\circ$ ), двухсторонняя ( $\alpha = 120$  и  $150^\circ$ ) и промежуточная, переходная ( $\alpha = 60$  и  $90^\circ$ ).

При одностороннем разрушении от каждой половины отделилось лишь по одному осколку (рис. 3, а). Скол на второй половине расположен произвольно по отношению к сколу первой.

При двухстороннем разрушении от каждой половины образца I отделилось по два и более осколков, при этом на месте наиболее слабого сечения образовалось ребро (рис. 3, в). Рельеф обоих сколов различен, из чего следует, что оба скола образовались одновременно.

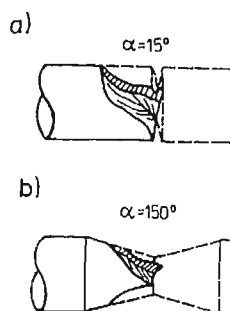


Рис. 3.

При промежуточной форме от одной половины образца I отделился один осколок, а от другой два — три (все с одного бока), и при этом в теле каждой из двух половин образовались трещины пространственной формы, не успевшие выйти на боковую поверхность образца, как это имело место при двухсторонней форме.

Поверхность каждого излома — почти плоская, под углом к ней расположена плоскость долома.

Разрушение образцов II происходило по винтовым поверхностям. По виду наиболее крупных обломков можно заключить, что при всех углах  $\alpha$  имеют место три формы разрушения: продольная, поперечная и смешанная. Чаще всего встречается продольная форма: разрушение происходит около продольной плоскости симметрии, а поверхность разрушения имеет вид ступенек (рис. 4, а).

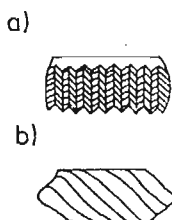


Рис. 4.

При поперечной форме ( $\alpha < 150^\circ$ ) образуются трещины внутренние и вышедшие на поверхность. Первые имеют вид закрученных лопастей, вторые образуют на цилиндрической поверхности образцов винтовые линии (рис. 4, в). При  $\alpha = 150^\circ$  образцы разделялись на крупные фрагменты, не имеющие внутренних трещин.

## 6. Выводы

Обычно при расчетах напряженного состояния при осесимметричной деформации и антиплоском сдвиге ограничиваются вычислением коэффициента интенсивности напряжений  $K_3$ . Приведенные результаты наряду с [11, 12] показывают, что такие расчеты нельзя применить к оценке прочности хрупких материалов. Прочность образцов I при одинаковых угле  $\alpha$  и относительной глубине выреза существенно ниже прочности образцов II и свойства образцов I и II во многих отношениях противоположны.

## Литература

1. M. L. WILLIAMS, *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension*. J. Appl. Mech., 19, 4, 526 - 528, 1952.
2. H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*. Springer, Berlin 1958.
3. J. F. KNOTT, *Fundamentals of fracture mechanics*. Butterworths, London 1973.
4. V. WEISS, In: *Fracture. An Advanced Treatise* (ed. by H. Liebovitz). Vol. 3. Acad. Press. N.Y. & London 1971.
5. А. А. Чинчик, *Вопросы применения механики разрушения к анализу работоспособности материалов паровых турбин при наличии дефектов и трещин*. В: *Повышение надежности и качества материалов энергооборудования*. Труды Центр. котлотурб. инст., Ленинград, 160, 29 - 44, 1978.
6. Н. Ф. Морозов, *Исследование разрушающей нагрузки для области, ослабленной вырезом в виде лунки*. Доклады Академии наук СССР, 253, 6, 1336 - 1338, 1980.
7. B. GROSS, A. MENDELSON, *Plate elastostatic analysis of V-notched plates*. Intern. J. Fracture Mech. 8, 3, 267 - 276, 1972.
8. И. И. Бугаков, И. И. Демидова, *Квазихрупкое разрушение образцов с вырезом, имеющим угловые точки*. Известия Академии Наук СССР, Механика твердого тела, 3, 182 - 183, 1980.
9. И. И. Бугаков, *Квазихрупкое разрушение образцов с вырезом в виде лунки*. Известия Академии Наук СССР, Механика твердого тела, 1, 177 - 180, 1982.
10. J. L. MARCH, W. J. RUPRECHT, G. REED, *Machining of notched tension test specimens*. ASTM Bull., 244, 52 - 55, 1960.
11. E. SOMMER, *Forming of fracture „lances” in glass*. Eng. Fracture Mech., 1, 3, 539 - 546. 1969.
12. W. G. KNAUSS, *An observation of crack propagation in anti-plane shear*. Intern. J. Fracture Mech., 6, 2, 183 - 187, 1970.

## Streszczenie

### KWAZIKRUCHE PEKANIE PRÓBEK SKRĘCANYCH Z KARBEM W KSZTAŁCIE LITERY V

Badano doświadczalnie dwa przypadki skręcania próbek walcowych z karbem obrączkowym i karbem wzdłużnym. Próby przeprowadzono na próbkach ze szklopodobnego polimeru epoksydowego. Głębokość karbu i promień dna karbu były stałe, zmieniano natomiast kąt rozwartości karbu w granicach  $15^\circ \div 150^\circ$ .

Wyznaczono sztywność, wytrzymałość próbek oraz przedstawiono różnice charakteru pęknięcia. Podano porównanie obydwu przypadków karbów.

## S u m m a r y

QUASI BRITTLE FRACTURE OF THE  $V$  NOTCHED SPECIMENS SUBJECTED TO PURE TORSION

Two types of specimens have been investigated, both cylindrical with circumferential and longitudinal  $V$  notches. Tests have been conducted on specimens made of glassy epoxy polymer. Depth of the notch and notch tip radius were constant while notch angle varied from  $15^\circ$  to  $150^\circ$ .

Stiffness and strength of the specimens as well as character of fracture have been determined. Comparison of both cases has been given.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku*

---





## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СОСТАВНЫХ ТЕЛАХ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

И. И. Демидова (Ленинград, СССР)

Ещё до открытия Брюстером (1816 г.) явления двуупреломления исследователей привлекала интерференционная картина в закалённых стёклах. По этой картине они могли судить о качестве стекла. Позднее остаточную интерференционную картину обнаружили и в полимерных материалах. Свойство полимерных материалов - способность к „замораживанию” деформаций и образовывать остаточное двуупреломление - широко стало использоваться фотоупругистами. Так в 1936 году Оппелем был предложен метод „замораживания” для решения как плоских, так и пространственных задач теории упругости. В 60 - 70 годы разработаны различные методы: „замораживания-размораживания” [1, 2], фиксации температурных напряжений [7, 8]. В этих методах расшифровка интерференционной картины проводится в основном на основе закона Вертгейма, либо с использованием закона Файлона-Джессопа. Вопросам обоснования выше перечисленных методов посвящён ряд работ [3—5], где используется аппарат вязкоупругости и фототермовязкоупругости, так как фактически процесс образования остаточного двуупреломления - неизоэнтальпический процесс ползучести.

Настоящая работа посвящена исследованию остаточного двуупреломления в составных телах при однородном нагревании и охлаждении. В таких телах даже при однородном температурном поле всегда имеются начальные (остаточные) напряжения, вызванные или различием физико-механических свойств, или предварительной деформацией одного из элементов. Причём эти напряжения нельзя отжечь, можно лишь изменить их величину, варьируя скорость изменения температуры. Известно также, что остаточные напряжения при эксплуатации конструкции не остаются постоянными, а влияют на возникающие напряжения, приводя к перераспределению напряжений.

Если один из элементов выполнен из полимерного материала, то конструкция более чувствительна к изменению температуры, поскольку свойства полимеров в сильной степени зависят от температуры и времени. При исследовании напряжений в прозрачных полимерных материалах таких как эпоксидная смола, поликарбонат, полиуретан, которые стали конструкционными материалами, широко

применяется поляризационно-оптический метод [1]. Этот метод может быть отнесен как к разрушающим, так и к неразрушающим методам контроля остаточных напряжений. Если можно проследить за кинетикой формирования остаточных напряжений [6], то метод фотоупругости будет неразрушающим. А если нужно оценить величину остаточного напряжения по остаточному двупреломлению, то необходимо применять разрушающий метод, т.е. модель нужно распилить на маленькие элементы.

Проследим сначала за кинетикой образования остаточных двупреломления и напряжений. На рис. 1 приведены кинетики двупреломления в составных телах при нагревании и охлаждении: 1 — для стержня, вклеенного в жесткую обойму, 2 — для кольца, вклеенного в жесткую обойму, 3 — для кольца со звездообразным внутренним контуром, вклеенного в такую же обойму. Заметим, что материал

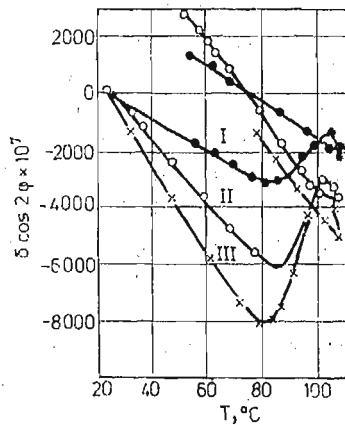


Рис. 1.

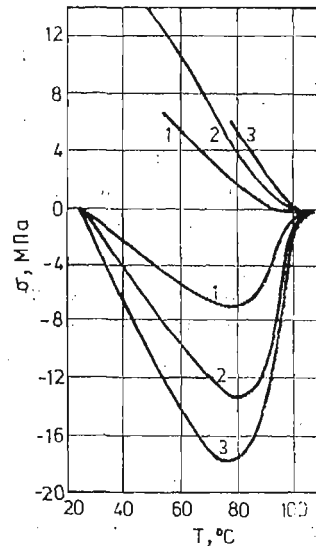


Рис. 2.

моделей и наружный радиус моделей одинаковы. Видно, что характер изменения двупреломления во всех моделях одинаков. Для определения напряжений по измеренному двупреломлению необходимо применить метод фототермовязкоупругости [6]. В основе метода лежат уравнения линейной ползучести, предложенные Диллом [9] по аналогии с реологическими. Система уравнений метода фототермовязкоупругости записывается в виде

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x_i, t) - \sigma_{22}(x_i, t) = \bar{R}_\xi \delta(x_i, t) \cos 2\varphi(x_i, t), \\ \sigma_{12}(x_i, t) = 1/2 \bar{R}_\xi \delta(x_i, t) \sin 2\varphi(x_i, t), \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{R}_\xi$  — линейный неизоотермический оптический оператор ползучести,  $\xi$  — приведенное время,  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений,  $t$  — время,  $T$  — температура. Для обоснования реологического и оптических уравнений вязкоупругости был разработан комплекс экспериментов, уравнения (1) были проверены при постоянных и переменных нагрузках и температурах, рассмотрены вопросы численной реализации метода, получены все необходимые исходные характеристики материала. Показана высокая точность этих уравнений. Кинетика напряжений приведена на рис. 2. И здесь кинетики напряжений подобны для всех моделей, поскольку существует связь между напряжениями в составных телах и напряжением в зацементированном стержне [6]

$$\sigma_{ij}(x, t) = \bar{a}_{ij}\sigma, \quad (2)$$

где  $\bar{a}_{ij}$  — тензор-оператор, функция  $a_{ij}$ , определяющая этот оператор зависит от геометрии модели, коэффициента Пуассона. Применение зависимости (2) значительно сокращает объём работы при решении задач со сложной геометрией, так как в упругих состояниях (в стеклообразном и высокоэластическом) можно легко найти функции, определяющие оператор  $\bar{a}_{ij}$ , используя обычный закон Вертгейма, а кинетику напряжений в стержне  $\sigma$  можно или вычислить на ЭВМ, или найти экспериментально.

Таким образом мы проследили за образованием остаточных напряжений. Если такую модель нагрузить или нагреть, то остаточные напряжения будут влиять на последующие процессы. В методе фотоупругости при решении упругих задач обычно начальное двупреломление вычитают из двупреломления, измеренного в нагруженных моделях [1]. При этом неявно предполагается, что начальное двупреломление не будет изменяться в течение эксперимента. Такое допущение, очевидно, не всегда является приемлемым. Например, в изотермических опытах при повышенных температурах начальное двупреломление и напряжения будут заметно релаксировать [6]. Тем более необходимо учитывать изменение начального двупреломления и напряжений в изотермических опытах. Методом фототермовязкоупругости изменение начального двупреломления учитывается автоматически, а именно, по измеренному двупреломлению с помощью численного решения уравнения (1) переходят к напряжениям. Так, если модели 1 - 3 снова нагреть, то кинетика двупреломления и напряжений будет практически такой же, как и при первом охлаждении, если скорости изменения температуры одинаковые [6]. Такой характер изменения двупреломления и напряжений связаны с тем, что начальные напряжения и двупреломления не остаются постоянными при неизоотермическом процессе — они релаксируют. Заметим, что в рассмотренном случае остаточные двупреломление и напряжения были положительными. Если начальные двупреломление и напряжения отрицательные, как часто бывает при склейке модели, например, трёхслойной, у которой полимерное кольцо жёстко соединено с элементами из различных металлов (модель 4), то кинетика  $\delta(T)$  иная (см. рис. 3, кривая 1). Здесь также происходит релаксация. Если бы начального двупреломления не было, то характер был бы таким же, как и на рис. 3, кривая 2. С учетом релаксации начального двупреломления кинетика  $\delta(T)$  будет (рис. 3, кривая 3). Интересно отметить, что уровень двупреломления для модели 4 значительно ниже, чем для

модели 1 - 3. Малое дупреломление вообще характерно для задач, в которых граничные условия заданы в перемещениях. В данном случае теоретическое решение для модели 4 можно представить в виде

$$\sigma_r = A + B \frac{a^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = A - B \frac{a^2}{r^2},$$

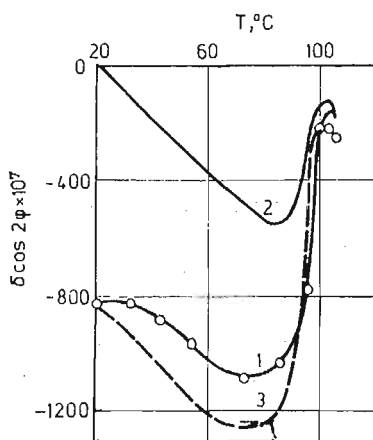


Рис. 3.

где  $A$  и  $B$ -функции модуля Юнга, коэффициента Пуассона полимерного материала, геометрии модели, разности тепловых деформаций. Дупреломление для этой задачи будет

$$\delta = \bar{C}_\xi (\sigma_r - \sigma_\theta) = 2 \frac{a^2}{r^2} \bar{C}_\xi B.$$

Отметим, что величина  $A \gg B$ . Если полимерное кольцо будет соединено с металлическими элементами, изготовленными из одного и того же материала, то  $B \equiv 0$  и дупреломление  $\delta \equiv 0$ . Отсутствие дупреломления может привести к ошибочному выводу о том, что тело свободно от напряжений. Однако достаточно просверлить отверстие, чтобы убедиться в том, что напряжения имеются.

Таким образом от неразрушающего метода контроля образования и изменения остаточного дупреломления мы перешли к необходимости применения методов с разрушением модели. Вообще, если есть в моделях остаточное дупреломление, а кинетика дупреломления неизвестна, то расшифровать интерференционную картину полос не всегда просто, поскольку количество полос в модели не всегда определяет уровень напряжений в моделях.

На рис. 4 приведены эпюры остаточных дупреломлений для модели 4 и для составных моделей, имеющих включения в центре полимерной матрицы, изготовленной в виде кольца (модели 5, 6). Во всех моделях полимерный элемент выполнен из эпоксидной смолы. Видно, что в модели 4 дупреломление незначительно, в моделях 5 и 6 количество полос одинаковое, отличается только параметр изоклины. Для расшифровки остаточного дупреломления и определения истинных напряжений нужно выявить причины образования дупреломления. Для этого выпишем

сначала из полимерной матрицы 5 и 6 небольшие элементы. После измерения дву-  
 преломления оказалось, что в модели 5 произошло изменение дву-  
 преломления (рис. 4 б, кривая 5.2), характерное для составных моделей, выполненных из раз-  
 личных материалов. А в модели 6 дву-  
 преломление осталось практически без изме-  
 нений, т. е. также как и в задачах о посадке с натягом или в методе „заморажи-

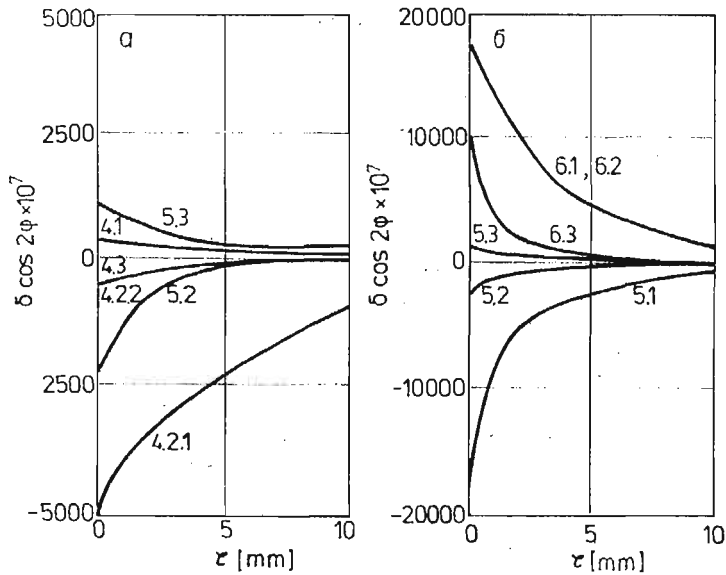


Рис. 4.

вания-размораживания”’. Следовательно, в этой модели источником образования  
 дву-  
 преломления была несовместность, неизменяющаяся в процессе охлаждения,  
 материалы включений и матрицы можно считать одинаковыми по физико-меха-  
 ническим свойствам.

Для трёхслойной модели 4 отделим сначала наружное кольцо. Из рис. 4а видно,  
 что дву-  
 преломление увеличилось и стало противоположного знака (кривая 4.2.1).  
 Затем выпилим, как и для моделей 5 и 6, элемент. Дву-  
 преломление в нем уменьши-  
 лось (рис. 4 а, кривая 4.2.1).

В результате отжига частей моделей 5 и 6 дву-  
 преломление полностью не исче-  
 зает. Кривые остаточного дву-  
 преломления обозначены на рис. 4 соответственно  
 5.3, 6.3. Заметим, что для модели 5 остаточное дву-  
 преломление противоположного  
 знака. Дву-  
 преломления в модели 4 после отжига практически нет.

Из приведенного исследования видно, что для определения остаточных напря-  
 жений нужно найти разность ординат соответствующих кривых  $i. 1$  и  $i. 3$  а затем  
 для моделей 4 и 5 эту величину разделить на коэффициент оптической чувстви-  
 тельности при температуре  $T_0$ . А для модели 6 эту разность нужно разделить на  
 коэффициент оптической чувствительности при температуре высокоэластического  
 состояния. Разделение напряжений на составляющие проводится также, как и в ме-  
 тоде фотоупругости. Для исследованных моделей получены следующие величины

радиальных и окружных напряжений на контуре включений:  $\sigma_{r3} = -11$  МПа,  $\sigma_{\theta5} = 14,5$  МПа,  $\sigma_{r6} = 0,37$  МПа,  $\sigma_{r4} = 15$  МПа,  $\sigma_{\theta4} = 30$  МПа.

Следовательно, несмотря на то, что количество интерференционных полос для моделей 5 и 6 было одинаковое, уровень напряжений в составной модели 5 значительно выше, чем в модели 6.

#### Литература

1. А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов, *Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела*. М. Наука, с. 576, 1973.
2. Г. С. Варданын, И. И. Пригоровский, *Моделирование термоупругих напряжений поляризационно-оптическим методом*. Изв. АН СССР. Мех. маш., № 4, с. 146 - 149, 1962.
3. Е. И. Эдельштейн, *О „замораживании“ деформации в методе фотоупругости*. Вестник ЛГУ, № 7, с. 118 - 125, 1968.
4. И. И. Бугаков, И. И. Демидова, *О способе „фиксации“ двууплощения в полимерных элементах составных моделей*. — Исследования по упругости и пластичности. Изд-во Ленинградского ун-та, вып. 12, с. 97 - 107, 1978.
5. И. И. Бугаков, И. И. Демидова, *О некоторых способах „фиксации“ двууплощения в полимерных телах*. — Сб.: Поляризац. — оптический метод и его приложение к исследованию тепловых напряжений. Киев, „Наукова Думка“, с. 34 - 40, 1976.
6. И. И. Демидова, *Об однородном нагреве и охлаждении полимерных тел, жестко закрепленных по части поверхности*. — Сб.: Поляризационно-оптический метод и его приложение к исследованию тепловых напряжений. Киев, Наукова Думка, с. 71 - 76, 1976.
7. R. S. SAMPTON, *A three dimensional photoelastic method for analysis of differential contraction stresses*. — Exp. Mech., v. 3, No 10, p. 225 - 237, 1963.
8. E. HOSP, *Experimentelle Bestimmung von Wärmespannungen in Bauteile auf spannungsoptischen Wege*. Bautechnik, N. 11, 1960.
9. E. H. DILL, *Photoviscoelasticity*. In.: Mech. Chem. Solids Propellant. Pergamon Press. N.Y.a.o., p 443 - 461, 1967.

#### Streszczenie

#### BADANIA METODAMI ELASTOOPTYCZNYMI NAPRĘŻEŃ RESZTKOWYCH W CIAŁACH ZŁOŻONYCH

W pracy rozpatrzono zagadnienia naprężeń cieplnych w ciałach złożonych w przypadku jednorodnego nagrzewania lub ochładzania. Pokazano, że metodą fototermolepkosprężystości można wyznaczać naprężenia przy dowolnej zmianie temperatury i można również uwzględnić naprężenia wstępne. Podano przykłady, pokazujące, że poziom dwójłomności nie zawsze wyznacza poziom naprężeń. Zaproponowano doświadczalną metodę badania resztkowej dwójłomności.

#### Summary

#### INVESTIGATION OF THE RESIDUAL STRESSES IN COMPLEX BODIES BY PHOTOELASTIC METHODS

In the paper the thermal stress in complex bodies have been considered for homogeneous heating or cooling. It has been shown that the stresses at arbitrary change of temperature, including also initial stresses, can be determined by means of the photothermoviscoelasticity method. It results from examples that the level of birefringence does not always determine the stress level. An experimental method has been proposed for the residual birefringence investigation.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku

## THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF MICRO-CRACKING INDUCED BY THE RAYLEIGH WAVE

J. F. CARDENAS-GARCIA and D. C. HOLLOWAY

*Department of Mechanical Engineering  
University of Maryland  
College Park, MD 20742*

### Abstract

This paper examines the extension of surface micro-cracks induced by a surface or Rayleigh wave (R-wave). This problem is examined both theoretically and experimentally. The theoretical approach involves a full-field reappraisal of the Lamb solution for a surface wave propagating in a homogeneous, isotropic, elastic, two-dimensional material, for the cases of plane strain and plane stress. Using the Griffith-Irwin energy release rate fracture criterion for cracks under combined Mode I and Mode II loading, a prediction is made of the path and final length of the surface micro-crack extension produced by the R-wave. Predictions of the crack extension direction are also obtained using the maximum normal stress fracture criterion. The experimental approach uses dynamic photoelasticity to observe the isochromatic patterns associated with a R-wave propagating along the narrow edge of a transparent, birefringent plate, examining in detail the process of crack extension. When the theoretically and experimentally obtained results are compared, reasonable agreement is obtained.

### Introduction

A previous paper [1] dealt with a detailed appraisal of the solution by Rayleigh for the surface wave phenomena that bears his name. This theoretical appraisal led to a hypothesis for the initiation and propagation of cracks by the passage of a Rayleigh wave (R-wave). The hypothesis was verified experimentally using large plates of glass and Homalite 100. This paper deals with a parallel appraisal of surface waves, using the Lamb solution [2], but following the treatment of Dally and Thau [3, 4], which considers the entire field of the R-wave. Both plane strain and plane stress solutions of the R-wave generated by a line load applied to a semi-infinite body have been examined.

The expressions for the characteristic or Rayleigh equation, the displacements, and the stresses over the full-field have been derived. Detailed numerical calculations have been

carried out and computer-generated isochromatic plots have been obtained which compare quite favorably to those observed experimentally. In addition, calculations of the cumulative strain energy contained in the R-wave field have been made, which confirm that a large portion of the energy contained in a propagating R-wave lies within one wavelength depth into the medium. Finally, the maximum normal stress fracture criterion [5] is used to obtain estimates of the crack extension direction, and crack extension is predicted using the Griffith-Irwin strain energy release rate fracture criterion [6, 7].

### The model

The geometry considered is shown in Figure 1. Examination of the boundary conditions yields the Rayleigh equation:

$$(K_1^2)^3 - 8(K_1^2)^2 + (24 - 16\alpha_1^2)(K_1^2) + (16\alpha_1^2 - 16) = 0 \quad (1)$$

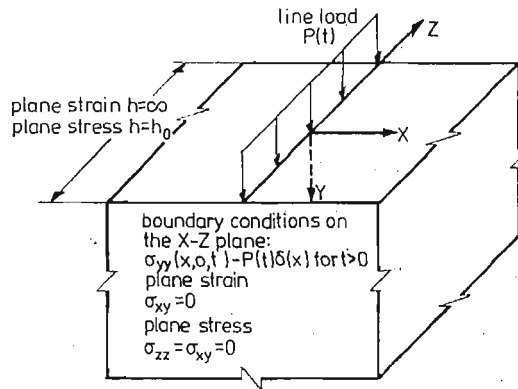


Fig. 1. Geometry of the semi-infinite plate used for the Lamb solution

where for plane strain

$$\alpha_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} = \left(\frac{k_l}{k_t}\right)^2 = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \quad (2)$$

and

$$K_1^2 = \left(\frac{k_t}{k_R}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{k_R C_2}\right)^2 = \left(\frac{C_R}{C_2}\right)^2 \quad (3)$$

and for plane stress (where  $\alpha_1$  and  $K_1$  change to  $\alpha_p$  and  $K_p$ , respectively),

$$\alpha_p^2 = \frac{(1-\nu)}{2} = \left(\frac{k_p}{k_t}\right)^2 = \left(\frac{C_2}{C_p}\right)^2 \quad (4)$$

and

$$K_p^2 = \left(\frac{k_t}{k_E}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{K_E C_2}\right)^2 = \left(\frac{C_E}{C_2}\right)^2 \quad (5)$$

where  $k_l$ ,  $k_p$ ,  $k_t$ ,  $k_R$  and  $k_E$  are the wave numbers associated with the various waves.  $C_E$  represents the R-wave velocity in plane stress. The Rayleigh equation shows that the



R-wave velocity,  $C_R$  or  $C_E$ , is independent of wave frequency and dependent only on the elastic properties of the material.

The equations for the plane strain displacements are:

$$u = k[\Phi'(\zeta_1) - \frac{2qs}{(s^2+k^2)}\Phi'(\zeta_2)], \quad (6)$$

$$v = iq[\Phi'(\zeta_1) - \frac{2k^2}{(s^2+k^2)}\Phi'(\zeta_2)], \quad (7)$$

$$w = 0 \quad (8)$$

where,

$$\mu\Phi'(\zeta_j) = \frac{i\lambda_1 A}{[4\pi(s^2-q^2)]} \sum_{n=1}^4 B_n(\zeta_j-t_n)^2 \ln(\zeta_j-t_n) \quad (9)$$

for  $j = 1, 2$ .  $q$  and  $s$  are the dilatational and distortional wave attenuation factors, respectively. The equations for the plane stress displacements are obtained by changing  $q$  to  $r$ , where  $r$  now represents the plate wave attenuation factor. The displacement in the  $z$ -direction,  $w$ , is non-zero for plane stress, but for the current analysis is unimportant.

The equations for the plane strain stresses are:

$$\sigma_{xx} = -\mu[(s^2-2q^2-k^2)\Phi''(\zeta_1) + (s^2+k^2)\Phi''(\zeta_2)], \quad (10)$$

$$\sigma_{yy} = -\mu(s^2+k^2)[\Phi''(\zeta_1) - \Phi''(\zeta_2)], \quad (11)$$

$$\sigma_{zz} = -\mu(s^2-2q^2+k^2)\Phi''(\zeta_1), \quad (12)$$

$$\sigma_{xy} = i2\mu q k[\Phi''(\zeta_1) - \Phi''(\zeta_2)], \quad (13)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0, \quad (14)$$

where,

$$\mu\Phi''(\zeta_j) = \frac{i\lambda_1 A}{[2\pi(s^2-q^2)]} \sum_{n=1}^4 B_n(\zeta_j-t_n) \ln(\zeta_j-t_n) \quad (15)$$

for  $j = 1, 2$ .

The stress equations for the plane stress solution can be obtained by setting or changing parameters as follows:

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (16)$$

$$q \rightarrow r, \quad k \rightarrow k_E. \quad (17)$$

The isochromatics can be calculated using the stress-optic law:

$$2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f_\sigma}{h} N \quad (18)$$

where  $h$  is the thickness of the model,  $N$  is the fringe or isochromatic order, and  $f_\sigma$  is the material fringe value. This law, for a two-dimensional material, indicates that the stress difference ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) can be determined if the fringe order  $N$  can be measured and if the material fringe value  $f_\sigma$  can be established by means of calibration. This can be done using a plane polariscope. It is also possible to do the inverse, that is to determine the

fringe order knowing the principal stress difference, the thickness of the plate and the material fringe value. It is then possible to obtain a fullfield view of the surface wave using isochromatics.

The strain energy per unit volume or strain energy density,  $U_0$ , for plane strain, is given by:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz}) + \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}^2. \quad (20)$$

For plane stress, it is given by:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2) - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}^2, \quad (21)$$

which implies that the strain energy can be expressed as:

$$U = \int_0^{y_0} \int_0^l \int_0^h U_0 dz dx dy = h \int_0^{y_0} \int_0^l U_0 dx dy \quad (22)$$

where  $h$  is the thickness of the material in which the plane R-wave travels.

Figure 2 shows the normalized strain energy plotted against normalized depth for plane strain and plane stress. The normalized strain energy represents that portion, up

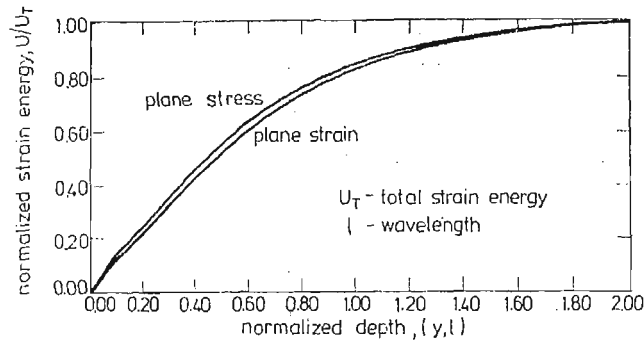


Fig. 2. The Lamb solution — normalized cumulative strain energy as a function of normalized depth, for plane strain and plane stress,  $\nu = 0.35$

to a depth  $y_0$  ( $0 \leq y_0 \leq 2e$ ), of the total strain energy per unit width contained in a R-wave which is one wavelength ( $e$ ) long and two wavelengths deep. More of the strain energy associated with the plane stress solution lies close to the surface than that of the plane strain solution. Or, at a given normalized depth, the plane stress solution shows a greater relative amount of cumulative strain energy than the plane strain solution. Even so, more than 80% of the strain energy is contained within one wavelength from the surface for both cases.

Figure 3 shows a representation of the magnitudes and directions, on and below the surface, of the principal stresses associated with a R-wave. The R-wave is moving to the right and the principal stresses have been normalized with respect to the largest principal stress occurring at the surface. The larger principal stress,  $\sigma_1$ , at any particular point is represented by solid lines and the smaller principal stress,  $\sigma_2$ , is represented by dotted

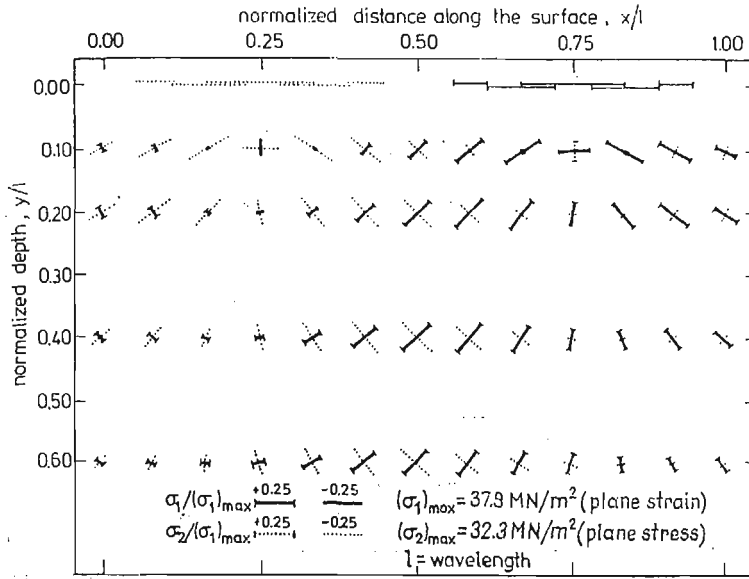


Fig. 3. The Lamb solution — normalized principal stresses and directions on and below the surface for plane strain and plane stress,  $\nu = 0.35$ .

lines. If a stress is positive a small bar is attached at each end of the respective representation of stress and if it is negative, no bar is added. The first half-wavelength of the R-wave, at the surface, exhibits a tensile component while the second half-wavelength of the R-wave exhibits a compressive component tangent to the surface. Considering only the first quarter-wavelength of the R-wave and applying the maximum normal stress fracture criterion, where the crack propagation takes place perpendicular to the direction of the maximum principal stress, it is clear that the crack would grow into the material, in the direction opposite to that of R-wave propagation, at some angle from the vertical. But consideration of the second and third quarter-wavelengths of the R-wave, which seem to be the dominant portions, shows that the crack would grow into the material, away from the direction where the R-wave originated, at some angle from the vertical. The last quarter-wavelength could again cause the crack to change direction, but the magnitudes of the stresses would probably not support continued crack propagation. If a prediction were to be made of the final overall R-wave crack propagation length, it would be of the order of one-quarter of a wavelength. This assumes a crack to R-wave velocity ratio of one-third and that the crack would start propagating at a value of normalized distance along the surface,  $x/e$ , of 0.75.

### Experimental results and comparison

The experimental model is shown in Figure 4. It consists of a  $18 \times 24 \times 1/2$  inch plate of Homalite 100, a transparent, birefringent material which is homogeneous and isotropic. A micro-crack or flaw across the plate thickness was induced on the edge, by tapping an X-acto knife edge softly with a hammer. The micro-crack is 10 inches away from the

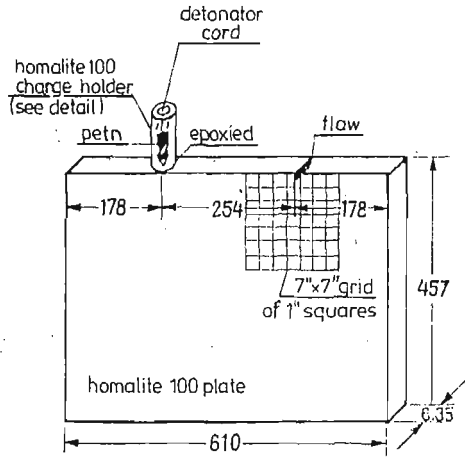


Fig. 4. The experimental model

Homalite 100 cylindrical charge holder 6,35mm — diameter  $\times$  1" long), which was hollowed out with a 3,17mm diameter drill and epoxied on to the edge of the model plate. The explosive used was 200 mg of PETN. A 7"  $\times$  7" grid of one-inch squares was drawn with black ink on the side of the Homalite 100 plate facing the camera. This experimental model is used to simulate, under controlled conditions, the extension of a surface micro-crack as the R-wave moves past it along the edge of the plate. Care was taken in choosing the size of the plate so as to prevent reflected stress waves from impinging upon the crack which would alter the results.

Using this experimental set-up several tests were run. A typical test is presented here and the results are compared to the theory. Figure 5 shows the isochromatic patterns associated with a R-wave moving from left to right, and the location and size of the initial crack. Notice that the leading fringes of the R-wave appear unaffected by the presence of the crack which has an initial length of 0,53 mm inches which corresponds to a length normalized with respect to the wavelength of 0,006. The initial normalized depth is less than that which Dally [8] found to have negligible effect on the R-wave characteristic

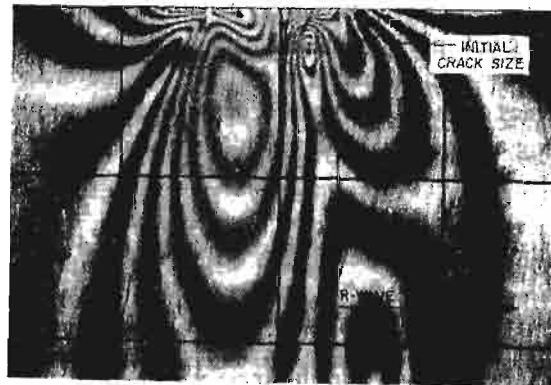


Fig. 5.

stress distribution, which was 0.018. Figure 6 shows the final crack size. It also shows some effects of R-wave component reflections as is evident from the jagged look of some of the isochromatic fringes. The crack in Figure 5 is located, with respect to the R-wave, at a fringe of order of 2.5 on the leading portion of the R-wave.

Figure 7 shows a comparison of the experimentally obtained isochromatics with the theoretical predictions using the Classical and Lamb solutions, for the plane stress case. The resemblance between the experimental and the Lamb solution result is very close. Therefore, the theoretical solution and the methods used to obtain it from the experimental result are adequate. This also implies that the description of the stresses in the entire R-wave field is being modelled correctly.

Figure 8 shows the experimental result as a composite of the crack tip location in each of the frames. As such, it incorporates a greater amount of experimental error because

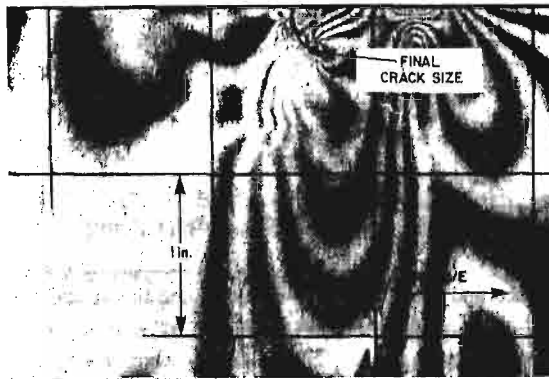


Fig. 6.

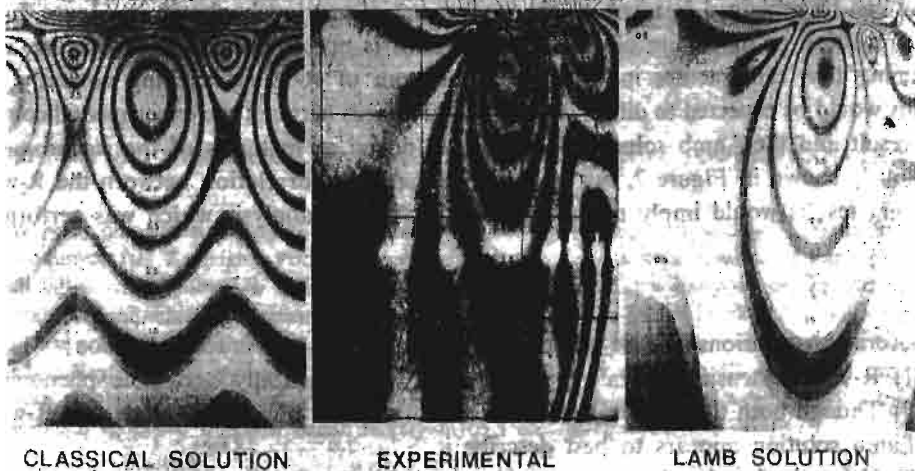


Fig. 7. A Comparison of the experimental and theoretical full-field isochromatic patterns: a) classical solution, b) experimental result, c) Lamb solution

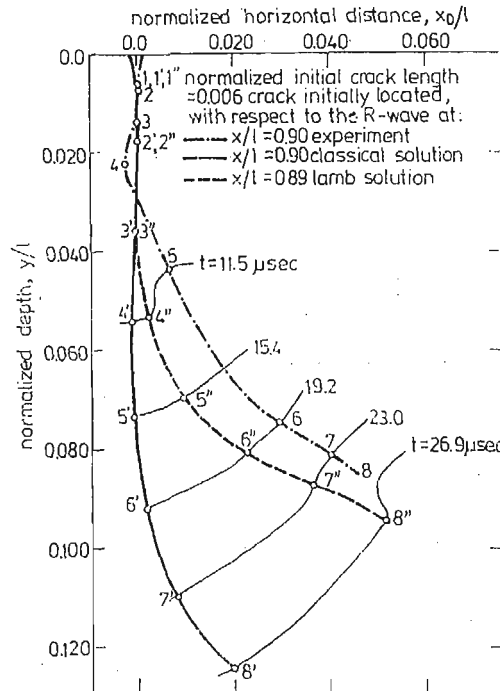


Fig. 8. A comparison in space and time of the experimental and theoretical results of crack extension induced by the Rayleigh wave

of the changing perspective in the Cranz-Schardin camera, since each frame has a separate lens location. Also plotted in Figure 8 are the predictions obtained using the Classical and Lamb solutions. Lines have been drawn in Figure 8 to show equal absolute times. The large differences between the experimental composite result and the Classical solution result can be explained in terms of the isochromatics previously shown in Figure 7, i.e., the simulation or modelling of the full stress field is not at all similar. Therefore, even assuming that the fracture models the phenomena of R-wave cracking correctly, the results would be expected to differ. The small differences between the experimental composite result and the Lamb solution can also be looked at in terms of the isochromatics previously shown in Figure 7, but in this case the close correlation between the R-wave cracking results would imply the validity of the fracture analysis which was performed.

### Conclusions

Several observations can be made with regard to R-wave crack extension:

- (1) R-wave extension of micro-cracks is an experimentally verifiable phenomena.
- (2) Though both the Classical and Lamb solutions can be used to model the R-wave, the Lamb solution appears to best describe it.
- (3) Using the Lamb solution in combination with the Griffith-Irwin maximum strain energy release rate criterion it is possible to approximate R-wave micro-crack extension reasonably well.

## Bibliography

1. J. F. GARDENAS-GARCIA, and D. C. HOLLOWAY, *Theoretical and Experimental Investigation of the Propagation of Surface Cracks by the Rayleigh Wave*, Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis Annual Spring Conference, Cleveland, Ohio, pp. 937 - 944, May 1983.
2. H. LAMB, *On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid*, Phil. Trans. Royal Soc., Vol. A203, pp. 1 - 42, 1904.
3. J. W. DALLY, and S. A. THAU, *Observations of Stress Wave Propagation in a Half-Plane with Boundary Loading*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 3, pp. 293 - 308, 1967.
4. S. A. THAU, and J. W. DALLY, *Subsurface Characteristics of the Rayleigh Wave*, International Journal of Engineering Science, Vol. 7, pp. 37 - 52, 1969.
5. E. H. YOFFE, *The Moving Griffith Crack*, The Philosophical Magazine, Vol. 42, Seventh Series, No. 330 pp. 739 - 750, 1951.
6. A. A. GRIFFITH, *The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. A221, pp. 163 - 198, 1920.
7. G. R. IRWIN, *Fracture Dynamics*, Fracturing of Metals, American Society for Metals, p. 152, 1948.
8. J. W. DALLY, *Dynamic Photoelastic Studies of Stress Wave Propagation*, Modern Problems in Elastic Wave Propagation, J. Miklowitz and J. D. Achenbach (Eds.), John Wiley and Sons, Inc., New York (1978),

## Резюме

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МИКРОТРЕЩИН  
ВЫЗВАННЫХ ВОЛНАМИ РЭЛЕЙА

В работе обсуждены теоретические и экспериментальные исследования роста поверхностных микротрещин вызванных волной Рэлея.

Теоретический подход использует решение Лямба для пропации поверхностной волны в двумерной однородной изотропной среде для случаев плоского поля напряжений и деформаций.

Применяя признак Гриффитса — Ирвина скорости освобождения энергии для трещин подверженных нагрузкам I и II типов, предусмотрено дорожку и длину микротрещин вызванных волнами Рэлея.

В экспериментальном подходе применено фотоупругость для наблюдения распределения изохром связанных с пробегом волны Рэлея вдоль берега двупреломленного материала. Получено удовлетворительную сходимость теоретических и экспериментальных результатов.

## Streszczenie

TEORETYCZNE I DOŚWIADCZALNE BADANIA MIKROPEKNIĘĆ POWODOWANYCH FAŁĄ  
RAYLEIGHA

W pracy omówiono teoretyczne i doświadczalne badania rozwoju mikropęknięć powierzchniowych powodowanych fala Rayleigha. Podejście teoretyczne wykorzystuje polowe rozwiązanie Lamba dla propagacji fali powierzchniowej w dwuwymiarowym ośrodku jednorodnym izotropowym, dla przypadków płaskiego pola naprężeń i odkształceń. Stosując kryterium Griffitha-Irwina prędkości zwolnienia energii dla pęknięć poddanych I i II typowi obciążenia, przewidywano drogę i długość mikropęknięć wywoływanych przez fale Rayleigha. W podejściu doświadczalnym stosowano elastooptykę dla obserwacji rozkładów izochrom związanych z przebiegiem fali Rayleigha wzdłuż brzegu materiału dwójłomnego. Otrzymano zadowalającą zgodność wyników badań teoretycznych i doświadczalnych.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku





## MEASUREMENT OF DEFORMATION AND SHAPE BY HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY

Z. FÜZESSY

*Institute of Physics, Technical University Budapest  
Budapest, H-1527, Hungary*

### Summary

A few ways of recording holographic interferograms are compared, their advantages and disadvantages in industrial applications of hologram interferometry is briefly analysed. A portable hologram interferometric system for measurement of displacement due to static/dynamic load is presented. Some aspects of shape measurement is discussed.

### 1. Hologram interferometry in industry

Holographic interferometry and speckle techniques are widely used; the major applications are not in optics but in measuring mechanical displacement, vibration, stress and deformation. Still although two decades have passed since its invention the technique is mainly confined to research laboratories. Nevertheless, there exist some examples of industrial applications mainly in aircraft, machine tool and motor industries.

Apart from the usual conservatism and scepticism against strange, new methods some of this non-acceptance stems from the slow and cumbersome filmprocessing which prohibits for example on-line inspections. Another problem is associated with evaluation of interferograms. Interferograms recorded in factory environment does not contain the zero order fringe and so an unambiguous interpretation meets with difficulties.

The thermoplastic recording has been promising but that process is too slow for many purposes and in addition to the thermoplastic film has a limited resolution, not enough for large industrial object holography.

For the last decade a modified version of holographic interferometric system has been developed based upon direct videorecording and reconstruction. The system which consequently works in real time is commonly called electronic speckle pattern interferometry.

The main building blocks of an ordinary ESPI system is illustrated in the symbolic flow chart on Fig. 1.

The optical part of ESPI is best described as an image holography set-up where the object — and reference waves interfere in-line by means of a beam-combining device. The recording step is performed by the photoelectric action of the TV-camera while the reconstruction is done by electronic processing on the videosegment. The videostore is necessary whenever a comparison of different videoframes is wanted. Finally the processed videosegment is converted into a „reconstructed” image by TV-monitor display. As in

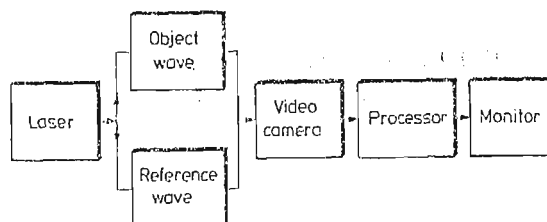


Fig. 1. The flow chart on an ESPI system

hologram interferometry the image of the test object will be covered by a fringe pattern representing the positional change of the object's surface during or between the exposure(s) for example,  $J_0^2$ -pattern for a vibrating object, while a double exposure provides a  $\cos^2$ -pattern.

The main advantage and strength of the ESPI-system are due to the videosystem. Another interesting property of ESPI is that the interferometric information at one stage is available as a videosegment. For one thing this simplifies the incorporation of computers into the system. In addition the videosegment may be relayed or transmitted over any distance to the analyzing station.

On the negative side the most notable drawback is the speckled appearance of the image which is caused by the low resolution of the videosystem. Commercial ESPI-systems tend to be somewhat costly but prices are coming down as competition increases.

ESPI-systems can not compete with hologram interferometry in the surveillance of a large area by one shot. The ESPI simply does not have the resolution capability for this.

Beside the moderate spreading the ESPI-systems in industry the application of hologram interferometry at leading factories has to be mentioned.

As an excellent example of the latest application the vibration analysis of automotive structures at Ford Motor Company can be mentioned [1]. An Apollo model double pulse holographic system with thermoplastic film was used. Double exposure interferograms were recorded and gear-excited resonance on transaxle housing was studied. A local stiffening rib was added to the housing as close to the bullseve as was feasible. As the result resonant response was eliminated under original excitation conditions.

Hologram interferometry in automotive industry has successfully been applied at Central Laboratory of Optics by Dr. Pawluczyk investigating of engine valves, selected parts of car using a double pulse ruby laser system of time interval between the two pulses regulated in range of 0,15 - 0,25 ms and energy up to 1 J [2].

Industrial application of hologram interferometry is clearly demonstrated by Japanese. As an example of that work measurements at Mitsubishi Heavy Industries, Ltd should

be presented [3]. Vibrational modes of compressor vanes were studied. As an example of the application of pw holography to large scale products the results of vibration mode analysis of a car body were presented.

These selected applications of hologram interferometry convince of its acceptance by industry. The application will be accelerated by solving the problem of automatic and unambiguous evaluation of interferograms recorded in factory environment. The systems mentioned above recorded single interferograms which can mainly be used for qualitative evaluation.

## 2. The fundamental equation of evaluation

In the most common technique of hologram interferometry [4] an interference pattern contains only informations for determination of the component of the displacement vector lying along the bysector of the angle between illumination and observation directions.

Determination of all the three components of the displacement vector with approximately equal accuracy is possible when the interferometer is sensitive to the three orthogonal directions (bysectors, sensitivity vectors) in the same way. That optimum can be approached by a system, where the sensitivity vectors are realized by bysectors of angles between one illumination and more observation directions. Determination of a component of the displacement vector is founded upon measurements of fringe order numbers.

The fundamental equation for evaluation in case of a few interferograms recorded simultaneously with different sensitivity vectors is as follows:

$$SL = N,$$

where  $S$  is the sensitivity matrix determined by the geometry of the object and measuring system,  $L$  is the displacement vector to be determined,  $N$  is the fringe order vector,  $\lambda$  is the wavelength of the light. Data stored in four interferograms are sufficient to determine the moduli and line of the influence of the vector. The main problem is the calibration of the fringes (interferograms do not contain the zero order fringe).

## 3. Hologram interferometric measuring system

In the following a hologram interferometric measuring system developed at the Institute of Physics, Technical University Budapest will be presented demonstrating our ambition to fulfill industrial conceptions. The portable interferometer can be used for inspection of virtually any industrial object, its behavior due to static/dynamic loading. Evaluation of the interferograms is computer aided.

**3.1. The interferometer.** The main building blocks of the interferometer of the system is illustrated in the symbolic flow chart in Fig. 2. The interferometer with the light sources (ruby and He-Ne laser) is mounted on a tripod. The interferometer can be lifted up hydraulically by foot or an electric motor. It can also be rotated along vertical and horizontal axis. Holographic plates in holocameras are illuminated by one object and four reference beams. The four interferograms provide data for determining the displacement vector.

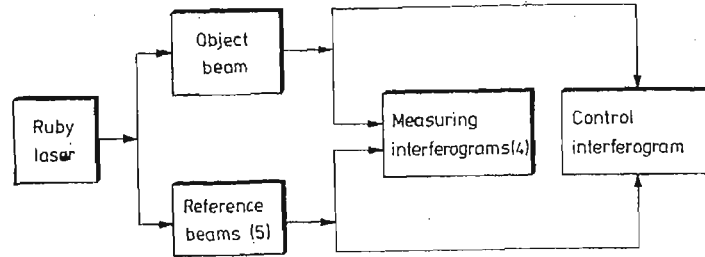


Fig. 2. The main building blocks of the interferometer

The control holocamera works with thermoplastic film, so recording is quick and the displacement field can be studied in some ten seconds after exposures. In case of any insufficiencies the recording of interferograms can/must be repeated.

**3.2. Interferogram evaluation.** The main building blocks of the interferogram evaluation is demonstrated in Fig. 3. The reconstructed interferograms are photographed. Evaluating them two tasks must be solved: determination of elements of  $S$  and  $N$  in the fundamental equation.

**The main steps determining the elements of  $S$ :**

— sticking marking points to the object surface in order to be able to identify the given point on interferograms with different observation directions;

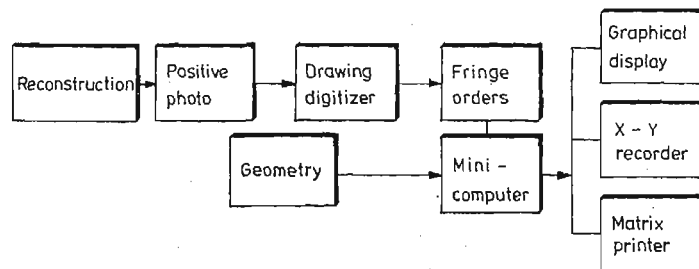


Fig. 3. The main blocks of evaluation procedure

— measurement of coordinates of the marking points as well as some points of the interferometer by theodolite;

— feeding coordinates of all that points measured on positive photos (4 ones) to the computer;

— to find an algorithm for identification of the points between the marking ones and points measured on photos and determination their position in coordinate system assigned to the object.

**The main steps determining  $N$ :**

— feeding coordinates of fringe maximum and minimum to the computer by drawing digitizer;

— fitting a function (fringe locus function) to the intensity distribution represented by the fringes on the interferogram, and fed into the computer, in the form of polynomials. The aim of this procedure is error correction and estimation of fringe fraction.

- determination of the fringe locus function in a coordinate system assigned to interferograms belonging to the four observation directions;
- coordination of picture points and object surface points knowing geometrical data.

#### Special properties of the evaluation system

- minicomputer with small memory;
- measured data are not stored in the memory. Using data acquisition methods functions are fitted to all data sets. The coefficients of the functions are only stored.
- at evaluation a person knowing the physics of interference is to be present.

#### Data processing

In data processing determining the components of  $L$  the equation is solved using computer programs; the actual fringe order even its fraction can be found as a value of the fitted function mentioned above at the object surface point considered.

The hologram interferometric system described above has been used in factories of Hungarian machine industry to inspect machine tools, engine vibrations at different clamping and speed of rotation, etc.

### 4. Measurement of shapes

There are no difficulties in contouring planar object such as razor blade with a sensitivity of about  $1 \mu\text{m}$ . In case of an object having normal size and complicated surface hologram interferometric contouring does not work in that sensitivity region.

During the last several years a new technique, the difference hologram interferometry [5] was developed providing determination of the difference between deformation of two objects subjected to the same load or difference in shape of two objects.

Holographic interferometric techniques for deformation measurement and contouring are quite analogous. The initial and final states of the object (before and after loading) and unaltered experimental set-up at deformation measurement can be compared to the initial and final states of the experimental arrangement (e.g. two-wavelength contouring) and unaltered object at shape measurement.

Because of the descriptiveness, the idea of difference hologram interferometry will be explained by Fig. 4. used at deformation measurements. The aim of the measurement was to determine the deformation difference between master and an another objects. On the figure beam expanding telescopes are not shown. The laser light coming from the right hand corner is divided into two beams. The beam passing through the beamsplitter  $BS_2$  is the reference beam  $R_1$ . The reference beam  $R_2$  is directed onto hologram plate by beamsplitter  $BS_3$ . The beam  $A$  serves for adjusting.

The two states of the master object are recorded on the same plate  $H_m$  with separate reference beams ( $R_1, R_2$ ) coming from different directions. The developed plate is put back, the master object is taken away, the object to be compared is put in that place where the master one was before. The new object is illuminated holographically — that is the main feature of this technique — by projecting the real images of the master object back onto the surface of the new object. This is done by reconstruction of images with conjugate

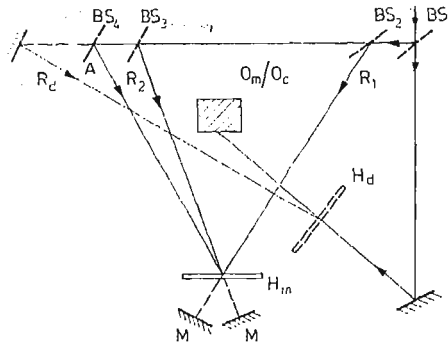


Fig. 4. Experimental setup for difference hologram interferometry

reference beams (Mirrors  $M$ ). Then a new double exposure hologram  $H_d$  is taken. (The new object, reference beam  $R_d$ ). This interferogram contains only the difference interference fringes.

Similar steps have to be taken at contouring. As the result the difference fringe pattern (a difference topographical map) corresponds to the shape difference between the two objects.

## 5. Conclusions

An industrial hologram interferometric system has to be portable, capable to work in factory environment, the evaluation of interferograms has to be fast and computer aided.

The technique of difference hologram interferometry can be used for measurement of differences in deformation/shapes of two objects. A hope may be expressed that this novel method will be the base of a measuring instrument in large scale product.

## References

1. G. M. BROWN and R. R. WALES, *Vibration analysis of automotive structures using holographic interferometry*, „Industrial Application of Laser Technology”, W. F. Fagan, Editor, Proc. SPIE 398, 82 - 89, 1983.
2. J. SCHÖRNER, H. ROTTENKOLBER, *Industrial application of instant holography*, „Industrial Application of Laser Technology”, W. F. Fagan, Editor, Proc. SPIE 398, 82 - 89, 1983.
3. M. MURATA and M. KURODA, *Application of holographic interferometry to practical vibration study*, „Industrial Application of Laser Technology”, W. F. Fagan, Editor, Proc. SPIE 398, 74 - 81, 1983.
4. A. E. ENNOS, *Measurement of inplane surface strain by hologram interferometry*, J. Sci. Instrum (J. Phys. E.) Vol. 1, Ser. 2, pp. 731 - 734, 1968.
5. Z. FÜZESSY, F. GYIMESI, *Difference holographic interferometry: displacement measurement*, Opt. Eng. Nov./Dec. 1984 (to be published).

## Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ФОРМ ПРИ ПОМОЩИ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ  
ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

В работе сравнено несколько методов записи голографических интерферограмм. Проанализировано их преимущества и недостатки для применений в индустрии. Представлено также передвижной состав аппаратуры для голографических исследований, служащий до измерений перемещений в условиях статических и динамических нагрузок.

Обсуждено также исследования формы и сравнение форм похожих объектов.

## Streszczenie

BADANIE ODKSZTAŁCENÍ I KSZTAŁTÓW Z POMOCĄ  
INTERFEROMETRII HOLOGRAFICZNEJ

W pracy porównano kilka metod zapisu interferogramów holograficznych. Przeanalizowano ich zalety i wady dla przypadku zastosowań przemysłowych. Zaprezentowano również przenośny zestaw aparatury do badań holograficznych służący do pomiarów przemieszczeń w warunkach obciążeń statycznych i dynamicznych. Omówiono też aspekty badania kształtu i porównywania kształtów obiektów podobnych

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1984 roku*





## THE APPLICATION OF DYNAMIC HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY AND PHOTOELASTICITY TO PROBLEMS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING

D. C. HOLLOWAY, W. H. WILSON, W. L. FOURNEY, D. B. BARKER

*Department of Mechanical Engineering  
University of Maryland  
College Park, Maryland 20742 U.S.A.*

### Abstract

The methods of dynamic holographic interferometry, using a pulsed ruby laser, and dynamic photoelasticity, using a Cranz-Schardin camera, have been applied to the study of explosives and their effects in geologic applications. Specifically, the problem of stress wave generation from a surface detonation and how these stress waves interact with surface trenches was studied via holographic interferometry. This method was also applied to the examination of the shock front emitted from a non-electric detonating cord. Dynamic photoelasticity was employed to examine the role of remote discontinuities in explosive fragmentation, and in the determination of the optimum placement of explosives for gas and oil well stimulation.

### Introduction

Dynamic holography and photoelasticity can be valuable tools in the study of how explosives can be more efficiently used in the civilian applications of mining, construction, and natural resource stimulation. With the emphasis today on saving costs, improving fragmentation results, improving the quality of the standing geologic material, and reducing immediate and long-term environmental effects there is a need to examine how explosives work to fracture rock. Holography and photoelasticity are convenient full field laboratory methods that provide information on the relative importance of the many blasting parameters. The results from these tests have been both quantitative and qualitative, and in many cases have been successfully scaled up for field application. This paper will focus on some recent problems that our laboratory has studied.

### 1. A Holographic Study of Dynamic Surface Response to Explosive Loading

Within the last several years there has been an increased need to control and reduce ground vibrations from surface blasting. As population centers have spread, the number of cases in which blasting must be done close to or even within developed areas has increased. Early studies attempted to identify characteristics of the stress waves which could be correlated to structural damage, and then to quantify safe levels of blasting based on these correlations. Another approach is to attempt to isolate structures or entire surroundings from the detonation area. Since most of the stress wave energy produced from a detonation is carried near the surface by Rayleigh type or *R* waves, it has been suggested that effective isolation can be obtained by surrounding a blast area with trenches of some depth. For a more detailed discussion of the background of this problem, see Holloway and Wilson (1983). In order to study this approach, and to quantify such parameters as trench depth, location, and effectiveness, we have made extensive use of holographic interferometry.

A complete description of the techniques used to produce photographs of dynamic surface response by holographic interferometry can be found in Holloway and Patacca (1975), and Holloway, Fourney and Patacca (1977). A pulsed ruby laser, operating at 6943 Å, was used to generate double exposure holograms of the model surface. Typical Q-switched pulse duration was 30 nanoseconds, with a 200 microsecond delay between pulses. An explosive charge of from 70 to 250 mg of PETN was detonated on the model surface at a controlled time between the two laser pulses. Specimens tested were granite blocks or cast blocks of Hydrostone, a product of United States Gypsum which when cured has a specific gravity of 1.69 and a compressive strength of 9,750 psi (67.2 mPa).

In each test, the charge was located 80 mm from a trench of rectangular cross section cut into the model surface. Trench depths of 10 mm and 18 mm were used. The illumination

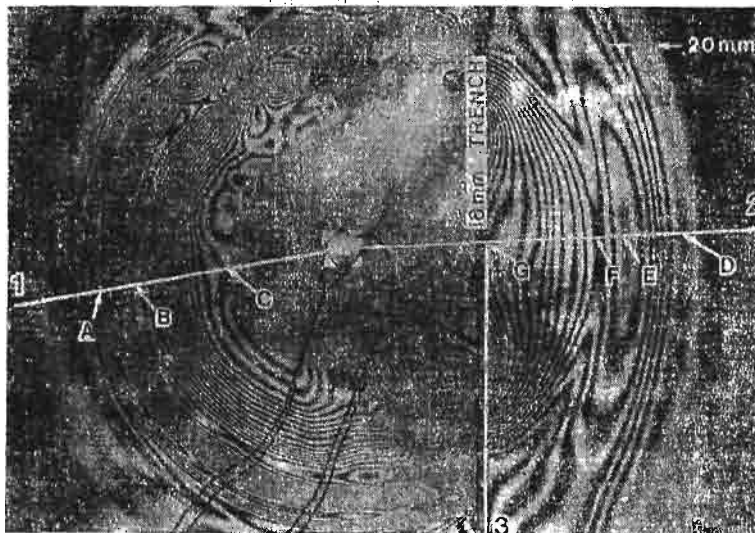


Fig. 1. *R* and *RP* wave patterns on a Hydrostone model, 90  $\mu$ s after detonation. Lines 1, 2 and 3 used in plots in Fig. 2. Points A through G (except C) show maximums, minimums and inflection points of the vertical surface displacement

and viewing angles were arranged so that the fringe pattern in the hologram represents a topological map of displacement normal to the model surface at the instant of the second laser pulse. Thus, we were able to study the overall effect on vertical ground motion in the waves crossing the trench. Figure 1 shows the fringe pattern 90  $\mu$ s after detonation, for the case of an 18 mm trench depth. The radial lines marked 1 and 2 and a line marked 3 along the trench have been used in the analysis of the surface displacements presented in Figure 2. At the far left along line 1 (no trench) are seen remnants of a shear wave recognized by its typically asymmetric pattern. Nearer the source, the peak positive displacement of the *R* wave is located at point *A*. The region of steepest displacement gradient then follows, as can be seen from the very tight clustering of the fringes. This is also the region of highest particle velocity. A minimum or valley is reached at point *B*. The surface then moves upward again. The air shock front is reached at point *C*, and all surface interferometric information is lost inside this radius.

Moving inward along line 2 from the right, we first notice a disturbance which has no counterpart on line 1. A small positive peak is reached at point *D*, followed by a local minimum at *E*. This displacement profile is very similar to that of an *R*-wave. This wave shows up consistently from test to test. Analysis of the tests show its velocity to be the same as that of an *R*-wave, and it is found to have been located at the trench just as the *P*-wave passed the trench. This *R* type wave (precursor to the main *R*-wave which follows), is created by the *P*-wave, and will be called an *RP*-wave. Further in along line 2, the relative peak of the transmitted *R*-wave is found at point *F*, and its minimum at *G*. As can be seen from Figure 2 there is a reduction of amplitude and an increase in wavelength for the transmitted wave; this has been found to be a general result.

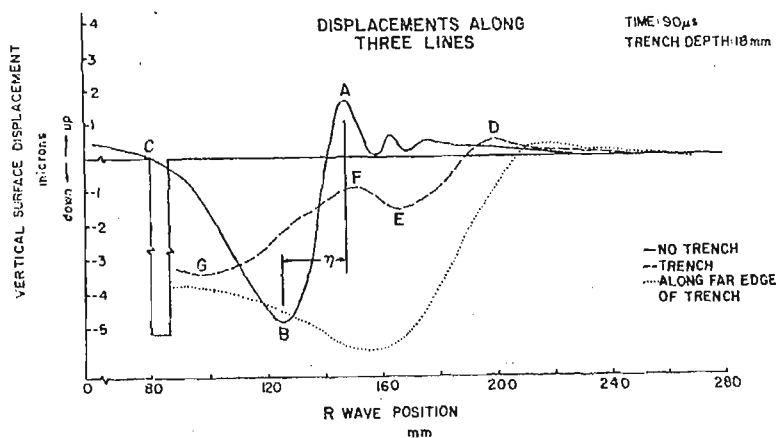


Fig. 2. Wave shapes 90  $\mu$ s after detonation, along lines 1, 2 and 3 of test shown in Figure 1. Wave position is relative to load location. Distance  $\eta$  is a repeatable feature in the *R* wave

Along line 3 on the far edge of the trench, there is at the lower end a very weak upward motion in the head of the wave followed by a downward displacement which is greater than the deepest part of the *R*-wave on line 1. We believe that there is another *R*-type wave traveling on the vertical side of the trench that is contributing to the *R*-wave displace-

ments on the horizontal surface. This observation points to the inadvisability of locating a structure within an  $R$  wavelength of an isolation trench.

An easily identifiable feature of the  $R$ -wave is the portion of the wavelength between the maximum upward and the deepest positions. The highest particle velocities occur in this part of the  $R$ -wave. This distance has been labeled as  $\eta$  in Figure 2 and is used in normalizing the results with trench depth, so that the effect of the trench can be measured. Peak particle velocities were calculated for fourteen tests, comparing  $R$ -waves on each side of the trench. The quantity  $(V_{p\text{-trench}})/(V_{p\text{-no-trench}})$ , where  $V_p$  is peak particle velocity, is plotted in Figure 3 as a function of the ratio of trench depth  $H$  over fractional wavelength  $\eta$  ( $H/\eta$ ). The linear fit to the data in the region of analysis is good, with a least squares correlation coefficient of .995.

Figure 3 shows that trench effectiveness in  $R$  wave attenuation increases with the ratio, trench depth over wave length. Thus, for a given trench depth, the higher frequency com-

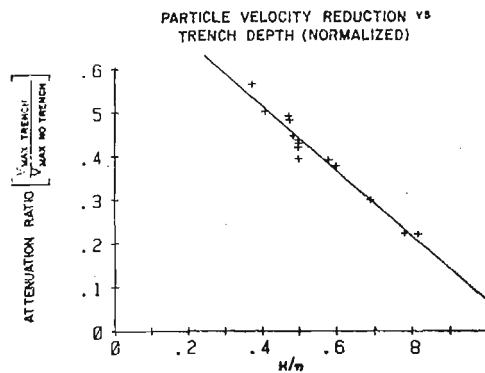


Fig. 3. Least squares linear fit for 14 tests, showing ratio of peak particle vertical velocity vs.  $H/\eta$ .  $H$  is depth of trench, and  $\eta$  is portion of wave from maximum to minimum. Typical  $\eta$  length is shown in Figure 2

ponents of the  $R$ -wave are more effectively attenuated. The effect of the trench on the  $R$ -wave is to reduce the overall displacement and to broaden the wave, thus lowering its frequency and reducing its particle velocity.

Our study also has identified other effects of the trench on the full wave system which should be considered in design of screening trenches. The distance of the trench from the source and trench depth are important factors, with some trade-offs involved. The  $P$ -wave, upon crossing the trench, has part of its energy converted to a new  $RP$ -wave, attenuating as  $1/r^2$ , while the  $RP$ -wave generated will attenuate only as  $1/\sqrt{r}$ . Although increasing trench depth improves  $R$ -wave blocking, it also increases the amount of  $P$ -wave energy the trench will intercept and convert to  $RP$ -wave energy. Finally, it also was observed that a high amplitude  $R$ -type wave propagates on the vertical surface of the trench.

## 2. Holographic Interferometry Applied to the Study of an Explosive Shock Front

Holographic methods are being used in our laboratory to study the behavior of shock fronts from various explosive detonators and initiator systems. Important parameters to be studied are the speed of the shock front, the pressure distribution behind the shock, and

the shape of the shock as it advances. The advantage of holographic techniques is that we gain information which can be related to all of these topics. Figure 4 shows a spherical shock front generated 95  $\mu$ sec earlier at the end of an Ensign-Bickford Nonel detonating tube. Nonel tube is a 3 mm diameter plastic tube coated internally with a thin film of high explosive. It is used to initiate detonations from remote locations by propagating an explosive shock along the inside of the tube. It is manufactured by Ensign-Bickford using

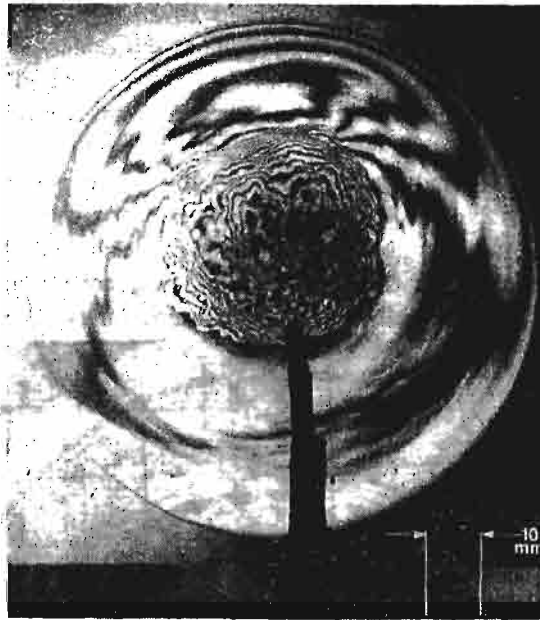


Fig. 4. Gas shock 95  $\mu$ s after being formed at end of Nonel detonator tube

proprietary and patented processes, under license from the Nitro Nobel Co. of Sweden, its inventor. As the explosively driven shock front propagates away from the end of the tube, the gas behind it is compressed, altering its index of refraction. Thus, the optical path is changed due to both a pressure rise and a change in the explosive gas composition. The combined effect produces interferometric fringes in the holographic image. By integration through the thickness of the spherical shock volume, we will be able to produce a pressure map of the shock intensity. Holographic interferometry can be used in a similar way to measure the strength and shape of other detonation system components, such as blasting caps and detonating cord, and to illustrate the high speed effects of these detonators on nearby components such as coupling blocks or other explosives.

### 3. A Dynamic Photoelastic Investigation of Fracture Initiation from Flaws Driven by Explosively Generated Stress Waves

In order to gain a basic understanding of the various fragmentation mechanisms in rock blasting, an experimental program was conducted with two dimensional polymeric models. Dynamic photoelasticity permitted the crack propagation behavior to be studied

in detail. The use of the Cranz-Schardin camera to record dynamic photoelastic fringe patterns, stress wave propagation, and crack propagation has been previously described; see for example Riley and Dally (1969). The particular example presented in this paper describes work conducted to study the initiation of cracks from flaws outside of the immediate borehole vicinity, and the contribution of these remote cracks to the overall fragmentation pattern. For a more detailed description, see Barker and Fourney (1978).

The fragmentation model was 305 mm in diameter and 6 mm thick, made from a sheet of a brittle birefringent polymer known as Homalite 100. Approximately 250 mg of PETN was tightly packed into a 6 mm diameter borehole in the center of the model. Pressure containment within the borehole was obtained with steel end caps and a lever arm arrangement that did not significantly obscure the visibility of the experiment. The explosive was detonated while the model was in a light field polariscope, and a Cranz-Schardin multiple spark gap camera recorded the dynamic photoelastic fringe patterns.

Figure 5 is a photo of the model 65  $\mu$ sec after the explosive was detonated. The fringes of the outgoing *P*-wave are just about to reach the model boundary. The dark vertical shadows extending upward from the center of the model are the arms which hold the pressure containment caps over the borehole. At each grid intersection in the model small

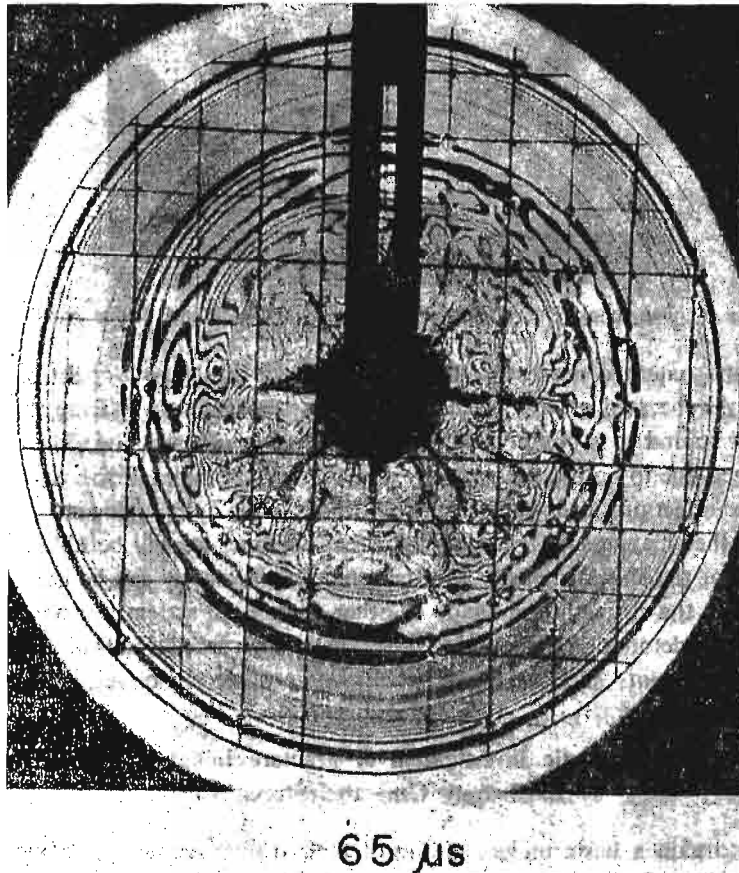


Fig. 5. and 6. Stress waves in artificially flawed photoelastic model. Time after detonation is shown. Note crack formation and growth at each flaw

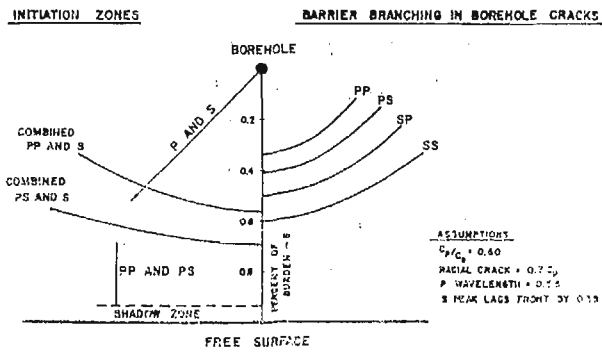
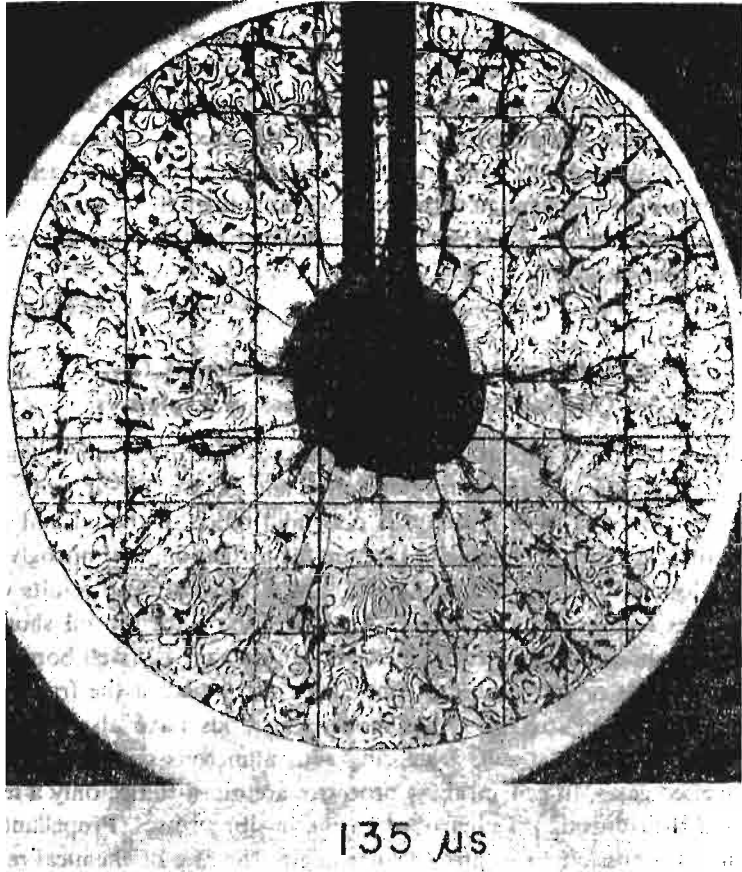


Fig. 7. Schematic showing regions in which stress waves can initiate cracks if a natural flaw is present

surface flaws exist. These were made by lightly tapping a sharp knife into the model when it was prepared. In this frame we see that cracks from the flaws close to the borehole have been initiated by the outgoing wave systems. These cracks are propagating in a radial direction. In Figure 6, 135  $\mu$ sec after detonation, it can be seen that cracks at all of the small flaw locations have been initiated by outgoing and reflected stress waves. By studying the full sequence of photographs from the experiment it was possible to determine which wave system initiates the flaws and how the stress waves control the direction of the cracks. Figure 7 summarizes the regions where flaws are initiated by the outgoing, reflected, and combined wave systems.

#### 4. A Dynamic Photoelastic Investigation of Gas and Oil Well Stimulation by Means of Explosives

From the very beginning of our oil and natural gas industry, owners and operators have attempted to recover a greater percentage of oil and gas from their wells. If the reservoir is not highly fractured, then drainage is poor and much of the oil and gas remains trapped in the rock. An early technique to fracture the formation used nitroglycerin explosive which was lowered into the producing zone and detonated. The results were mixed, but in many cases recovery was enhanced. Analysis done since the oil shortage of the early seventies has shown however that explosives can damage the well bore and actually impede the flow of gas or oil because of fine material trapped in the fractures, and the residual compressive hoop stresses. Other modern methods have also evolved for well stimulation. These include hydraulic fracturing with numerous combinations of liquids, gases, and liquefied gases. In general these processes are quasi-static; only a few fractures are formed, and their direction is controlled by the in-situ stresses. Propellants also have been used, since it is possible to control to some degree the rate of chemical reaction, thus reducing the well bore damage. See for example Cuderman and Northrop (1984). However, propellants are 10 to 20 times more expensive than explosives. Because of these deficiencies there has been renewed interest in developing a stimulation method that would provide an optimum pressure pulse in terms of peak pressure, total duration and time to peak pressure. In our laboratory we have investigated placing the explosive away from the zone

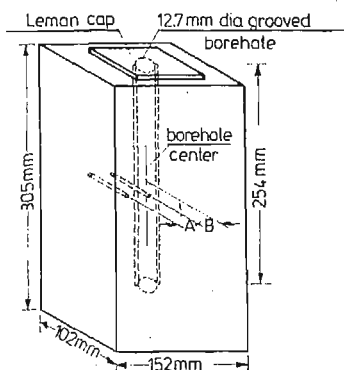


Fig 8.



to be stimulated (thus minimizing damage) and using the well bore geometry and end conditions to tailor the explosive pressure. For further background see Fourney, Barker, and Holloway (1981) and Fourney, Holloway, and Simha (1984).

The techniques developed, called stem induced fracturing, have been studied using the Cranz-Schardin camera and dynamic photoelasticity. A typical model used in the testing is depicted in Fig. 8. The models, made from 102 mm thick PMMA, were placed in front of the camera so that fractures initiated at the tips of notches along the borehole length would be seen as a plane. Stem induced fracturing utilizes a highly decoupled charge placed in the bottom of the borehole. Small piezoelectric transducers were used to monitor the pressures within the borehole and within the propagating fractures, such as at locations *A* and *B*.

Four frames from a typical 16 frame test are presented in Figure 9. PMMA, commercially known as plexiglas, is a birefringent material. The camera was fitted with circular polaroids to permit areas of high stresses to be identified during the testing. The black fringes in Figure 9 are isochromatics. For the test shown, a 250 mg charge was used. Frame 5, Figure 9a, shows the fracture location 90  $\mu$ s after detonation (the fracture is the dark

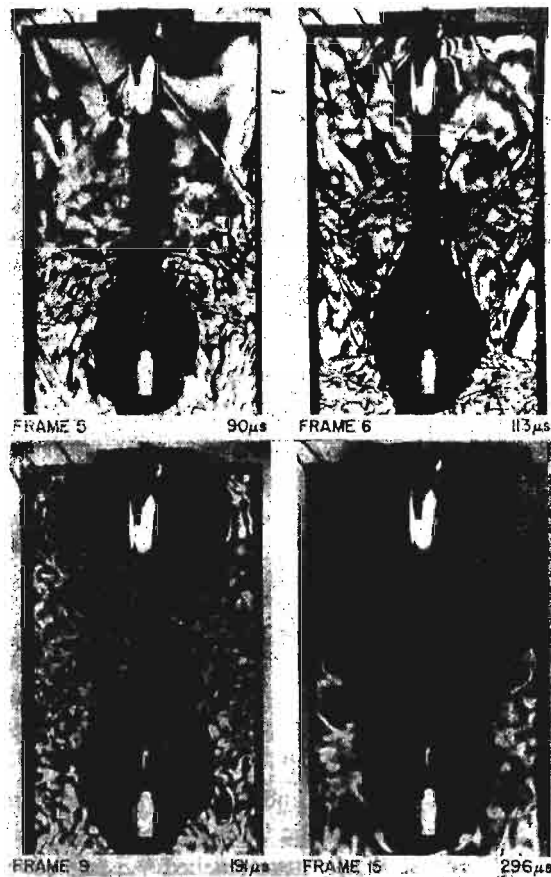
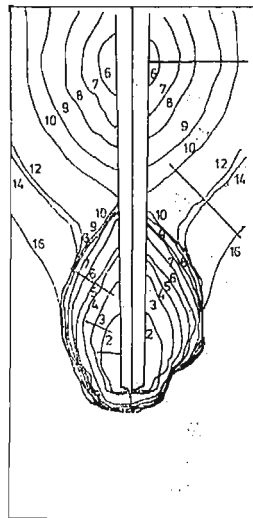


Fig. 9. Sequence from stem induced fracturing test

bladder-shaped area near the bottom of the model). Notice the two long straight fringes located in the upper third of the model. These show the  $P$ -wave in the PMMA which is being generated by the gas shock wave traveling up the borehole from the detonation. Each fringe makes an angle of  $40^\circ$  with the borehole wall, from which it is calculated that the ratio of shock wave speed to  $P$ -wave speed in the PMMA is 1.19. Note that there are two bright areas in the borehole, one at the bottom where the charge was detonated, and one near the top, at the stem. The bright area at the stem is due to an increase in pressure and temperature, caused by the shock wave reflection from the stem. Light is emitted due to ionization of the gas at that location. The camera used to record the photographs is such that light emitted from any area within the field of view will be visible in all 16 frames, so it is not possible to determine at what time the light flash occurred.

By the time Frame 6 (Fig. 9b) was recorded, just  $23 \mu\text{s}$  later at  $113 \mu\text{sec}$ , a fracture is seen to have initiated at the stemming area and has grown considerably. At this time the charge area fracture continues to grow, but at a much slower rate. By  $191 \mu\text{sec}$  (Fig. 9c) the fracture that originated at the stem is larger than the charge area fracture. Frame 15 (Fig. 9d) shows the stem area fracture beginning to engulf the arrested charge area fracture at  $296 \mu\text{sec}$  after detonation.

Figure 10 is a sketch showing how the fracture grew from frame to frame. The times at which each frame was photographed and the velocities computed from the crack front



Frame No.	Time ( $\mu\text{sec}$ )	Velocities between frames ( $n/a$ )	
1	12.5	Charge area	Stem area
2	34.0	530*	
3	57.0	350	
4	80.5	299	
5	89.5	317	
6	112.5	230	265*
7	140.6	183	451
8	163.5	128	442
9	190.5		558
10	214.5		314
12	246.5		733
14	271.5		167
16	322.5		512

\* Velocity probably low since fracture was not likely to initiate at the same instant the time count starts

Fig. 10

positions are indicated. Numbers on the sketch represent the frame sequence and the straight lines indicate directions along which the velocity measurements were made. Notice how quickly the charge area fracture slows and arrests, while the stemming area fracture continues to propagate at a somewhat erratic but high speed. The high velocity between Frames 10 and 12 occurred because the fracture reached the free edge of the model. The reason for the low velocity between Frames 12 and 14 is not clear. In many similar tests

using PMMA and geologic materials, this stem induced fracturing mechanism has been shown to be very efficient in initiating and advancing fractures.

The important point of this work is that explosives can be efficiently used to generate long fractures from well bores, which in turn connect natural fractures, thus increasing the yield from a well.

#### Acknowledgement

The authors wish to thank the National Science Foundation and the U.S. Department of Energy for partial sponsorship of the work. Some of the work by Mr. Wilson was performed in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy at the University of Maryland.

#### References

1. D. B. BARKER, and W. L. FOURNEY, *Photoelastic Investigation of Fragmentation Mechanisms. Part II-Flaw Initiated Network*, Report to U.S. National Science Foundation, Photomechanics Laboratory, Mechanical Engineering Dept., University of Maryland 1978.
2. J. F. CUDERMAN, and D. A. NORTHROP, *A Propellant-Based Technology for Multiple Fracturing Wellbores To Enhance Gas Recovery: Application and Results in Devonian Shale*, Proceedings, SPE/DOE/GRI Unconventional Gas Recovery Symposium, Pittsburgh, Pa., pp. 77 - 86, 1984.
3. W. L. FOURNEY, D. B. BARKER, and D. C. HOLLOWAY, *Model Studies of Explosive Well Stimulation Techniques*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 18, pp. 113 - 127, 1981.
4. W. L. FOURNEY, D. C. HOLLOWAY, and K. R. Y. SIMHA, *Model Investigation of Borehole Pressure Distribution*, Proceedings, SPE/DOE/GRI Unconventional Gas Recovery Symposium, Pittsburgh, Pa., pp. 497 - 506, 1984.
5. D. C. HOLLOWAY, and A. M. PATACCA, *Application of Holography to a Study of Wave Propagation in Rock*, Report to National Science Foundation by the Photomechanics Laboratory, Mechanical Engineering Department, University of Maryland, College Park, Md. 1975.
6. D. C. HOLLOWAY, W. L. FOURNEY, and A. M. PATACCA, *A Study of Surface Wave Propagation by Holographic Interferometry*, Experimental Mechanics, Vol. 17, No. 8, August, pp. 281 - 289, 1977.
7. D. C. HOLLOWAY, and W. H. WILSON, *Experimental Investigation of Dynamic Surface Response to Explosive Loading*, Proceedings, First International Symposium on Rock Fragmentation by Blasting, Lulea, Sweden, pp. 605 - 624, 1983.
8. W. F. RILEY, and J. W. DALLY, *Recording Dynamic Fringe Patterns with a Cran-Scardin Camera* Experimental Mechanics, Vol. 9, No. 8, pp. 27 - 33, 1969.

#### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЕ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ И ФОТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОТЕХНИКИ

В работе обсуждено применение голографической интерферометрии и фотоупругости для исследований взрывов и возникающих эффектов в геологических задачах.

Особенно методом голографической интерферометрии была исследована задача возникновения волн напряжений на поверхности детонации и их воздействия на поверхностные каналы.

Динамическая фотоупругость, при применении камеры Кранца-Шардина была применена для исследования влияния прерывности взрывного материала, а также для определения оптимального распределения взрывного материала при добычании нефти и газа.

## Streszczenie

ZASTOSOWANIE INTERFEROMETRII HOLOGRAFICZNEJ I ELASTOPTYKI  
DO BADANIA DYNAMICZNYCH PROBLEMÓW GEOTECHNIKI

W pracy opisano zastosowanie interferometrii holograficznej i elastooptyki do badań wybuchów i ich efektów w zastosowaniach geologicznych. Metodą interferometrii holograficznej badano szczególnie problem tworzenia się fal naprężeń na powierzchni detonacji i oddziaływania na rowy powierzchniowe.

Elastooptyka dynamiczna, przy zastosowaniu kamery Kranza-Schadrina była stosowana do badania wpływu nieciągłości materiału wybuchowego oraz do wyznaczenia optymalnego rozkładu materiału wybuchowego dla wydobycia gazu i ropy.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku*

## SHEAR TESTING OF COMPOSITES

R. PRABHAKARAN

*Old Dominion University*  
Norfolk, Virginia 23508, USA

### Introduction

Modern composite materials, incorporating fibers of glass, graphite, boron, etc., in a polymeric or metallic matrix, are finding increasing applications especially where high strength-to-weight and stiffness-to-weight ratios are required. The elastic constants and the strengths of composite materials have to be determined for designing structures utilizing these materials. For an orthotropic composite, there are five in-plane elastic constants and five values of strength that need to be determined. Referring to the in-plane material symmetry axes  $L$  and  $T$ , the elastic constants are the two Young's moduli  $E_L$ ,  $E_T$ , the shear modulus  $G_{LT}$  and the Poisson's ratios  $\nu_{LT}$  and  $\nu_{TL}$ . The strength properties are the tensile strengths  $S_{Lt}$ ,  $S_{Tt}$ , the compressive strengths  $S_{Lc}$ ,  $S_{Tc}$  and the shear strength  $S_{LT}$ .

The stiffness and strength properties of orthotropic composites along the material symmetry axes can easily be measured using standard tension or compression specimens. While the procedure is very similar to that of measuring the stiffness and strength of a metal, the following precautions must be observed: (1) The electrical resistance foil strain gage should be large enough to cover several fibers and thus indicate the over-all response of the composite; (2) As the composite can be highly orthotropic, the gages must be aligned very accurately, in order to minimize misalignment errors; (3) While the transverse sensitivity of the strain gages is usually small, sometimes it must be corrected for, as in the measurement of  $\nu_{TL}$ .

The determination of the shear properties of composite materials has proved to be much more difficult than that of longitudinal and transverse properties. So many methods and variations of each method have been developed that there is now much confusion as to which technique is applicable in a specific application. In this paper, some of the more widely used methods are briefly described and the Iosipescu shear test is considered in detail.

### Shear Testing of Composites

An ideal test method must satisfy all or most of the following requirements: (1) The method must be simple and should not require special equipment; (2) The method should use small specimens with simple geometry; (3) The test results should be reproducible;

(4) The data reduction procedure must be simple; (5) A uniform shear stress state accompanied by negligible normal stresses must be produced in the test section.

The block shear test was originally developed for wood and it was applied to glass fiber reinforced composites in the 1950's. In order to overcome the difficulty due to the overturning moment, the symmetric block shear test was developed. But in both versions of the test, a state of pure shear is not produced. Stress concentrations are also present. In the mid-1960's, when the use of composite materials was rapidly increasing, the short beam shear test was developed for quality control. The test is simple but the shear stress is non-uniform and is accompanied by significant normal stresses. Crushing at the loading and support points is also a problem.

The torsional shear of a circular thin-walled tube is the ideal test method to determine the shear modulus and the shear strength of any material. But from the practical point of view there are problems: (1) The cost of composite tubular specimens is very high; (2) The test apparatus tends to become more complex than at first it appears because bending must be avoided and the tube must be free to move axially; (3) Precautions must be taken to avoid crushing the regions where torques are introduced and also buckling.

The rail shear test is one of the more popular methods and it provides a good measurement for the shear modulus. In this method, a composite specimen is gripped along each side of a long narrow central region and the grips are loaded in opposite directions. The central region is assumed to be in pure shear. But the grips introduce normal stresses [1]. The picture-frame shear test is also commonly used. In this test, a uniaxial tensile or compressive load is applied at two diagonally opposite corners of a rigid frame which is attached to the edges of a composite plate specimen. The biaxial picture-frame test, in which equal tensile and compressive forces are simultaneously applied along the frame diagonals, provides a more uniform shear stress in the specimen. But both versions require expensive test fixtures and significant amounts of test material.

The off-axis tensile test utilizes a tensile specimen with the reinforcement oriented at a suitable angle to the specimen axis. An angle of 10 degrees has been strongly recommended [2]. While this test has the merit of being very simple, care must be taken in machining the specimen and in mounting the strain gages as small misalignments can lead to very large errors. Unlike conventional tensile tests, a large aspect ratio is required. A ratio of fifteen or greater has been suggested. Due to the presence of the normal stresses, this test gives the shear modulus and not the shear strength.

The slotted-tension shear test is based on the principle that a uniform shear stress exists in a region if equal orthogonal tensile and compressive stresses are imposed on the element's edges. Planes of pure shear will exist at 45 degrees to the load axes. A slotted tensile specimen has been suggested [3]; the slots machined parallel to the longitudinal axis of the specimen ensure that the transverse compressive stresses are transmitted only to the test section. This shear test provides both the shear modulus and shear strength. The major disadvantage of this method is the complexity of the test apparatus which must ensure that the two orthogonal stresses must be equal at all times.

The Iosipescu shear test and one of its modifications are described in the following sections.

**Iosipescu Shear Test**

The Iosipescu shear test was originally developed [4] in the 1960's for determining the shear properties of metals and has recently been adapted for composite materials. In an isotropic material, the Iosipescu shear test induces a state of pure shear at the specimen mid-section by applying two counteracting moments. Ninety-degree notches are machined in the specimen, as shown in Fig. 1. The parabolic shear stress distribution found in beams of constant cross-section is changed to a constant shear stress distribution in the region between the notches. As shown in Fig. 2, the specimen midsection (between the notches) is free of any bending stress.

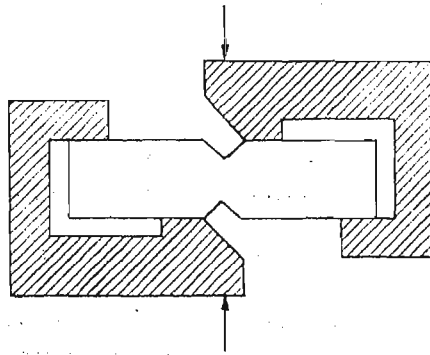


Fig. 1. Iosipescu shear specimen

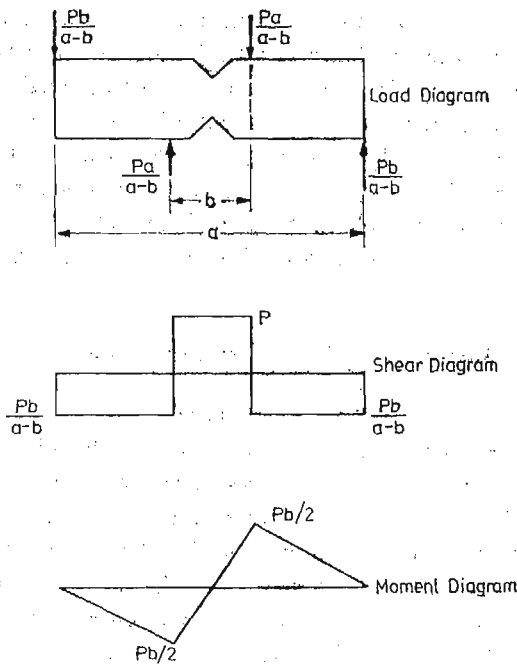


Fig. 2. Loading, shear and moment diagrams for Iosipescu specimen.

An extensive finite element analysis of the Iosipescu specimen has been performed [5]. It has been shown that while the longitudinal stress due to bending is small over the test section, significant transverse compressive stresses are present due to the applied loads. The normalized reaction force profile for the upper loading point [5] is shown in Fig. 3. The compressive stresses rise rapidly towards the edge of the notch and the influence of these loading-induced compressive stresses extends into the test section of the specimen.

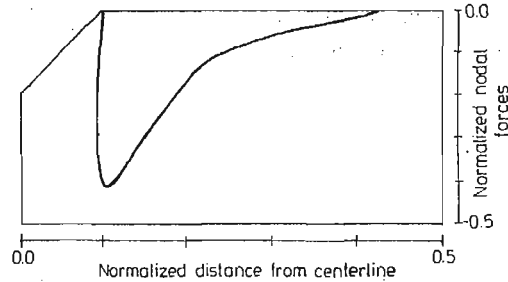


Fig. 3. Normalized compressive force distribution for Iosipescu specimen

This indicates that the loading surfaces need to be shifted away from the notches in the specimen.

Normalized shear stress contours indicate a shear stress concentration factor of 1.3 for isotropic materials and a shear stress concentration factor of 2.0 for orthotropic materials with an orthotropy ratio of 13. These results show that the notch geometry needs to be modified in order to minimize the shear stress concentration. In reference [5], the effect of notch depth, notch angle and notch tip radius on the shear stress concentration has been studied by finite elements. The notch depth does not appear to have any significant influence. In the case of isotropic as well as orthotropic materials, as the notch angle is increased from  $90^\circ$  to  $120^\circ$ , the shear stress concentration decreases while the average shear stress across the test section tends to be more uniform. The notch tip radius has a very similar influence. From a sharp notch, as the radius at the notch tip is increased to 0.100 in., the shear stress distribution becomes more uniform and the shear stress concentration drops, especially for materials with a high degree of orthotropy.

### Asymmetrical Four Point Bend Shear Test

This test is an outgrowth of the Iosipescu shear test and the specimen mid-section is again subjected to a shear force without an accompanying bending moment [6]. The test, as shown in Fig. 4, applies concentrated forces to the specimen through cylindrical rods which can cause local crushing on the edges of the specimen. Doublers must be glued on to the faces of the specimen to prevent this crushing. The specimen need not be machined to the same close tolerances as in the Iosipescu-test. This test appears good but there are still uncertainties in the test results because of the influence of the notch parameters. An extensive analytical and experimental investigation of this test has been performed [7]. It has been shown that when an attempt is made to optimize the notch parameters to



obtain favourable stress distributions, the failure mode changes unexpectedly. The result is that the test section does not fail in a pure shear mode. Free edge effects have been proposed as the cause of this phenomenon. For a quasi-isotropic graphite-epoxy laminate, the 90°-sharp notch appears to give the best result in terms of a pure shear failure. Further work needs to be done to optimize the notch parameters for orthotropic materials.

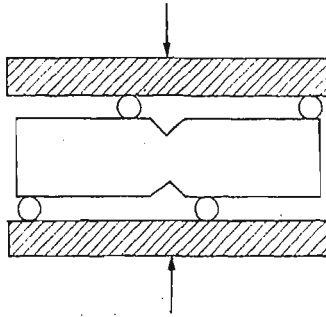


Fig. 4. Asymmetrical four point bend shear specimen

#### Photoelastic Calibration of Birefringent Orthotropic Materials

In recent years, the extension of transmission photoelastic techniques to transparent birefringent orthotropic composites has received considerable attention from researchers. Such materials are characterized by three fundamental photoelastic constants. The stress fringe values are  $f_L$ ,  $f_T$ , and  $f_{LT}$ , corresponding to the two normal stress components parallel and perpendicular to the major material symmetry axis and to the shear stress component. While these three photoelastic properties can be calculated from simple stress-strain models [8], they can also be obtained from the photoelastic calibration of tensile, compressive or bending coupons. If the fiber orientation (or the direction of the major material symmetry axis) is parallel or perpendicular to the specimen axis, then  $f_L$  and  $f_T$  are obtained, respectively. As the application of a pure shear stress is not straightforward, a third specimen with an angle of 45 degrees between the major material symmetry axis and the specimen axis is calibrated in tension. The resulting stress-fringe value  $f_{\pi/4}$  is used to calculate  $f_{LT}$  by the following equation:

$$f_{LT} = \left[ \frac{1}{f_{\pi/4}^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{f_L} + \frac{1}{f_T} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1)$$

The circular disk specimen that is commonly used to calibrate isotropic model materials has not been used in the calibration of orthotropic model materials because a closed-form theoretical solution is not available. The fringe values  $f_L$  and  $f_T$  can be obtained by testing a circular disk with strain gages but  $f_{LT}$  cannot be determined.

A half-plane specimen with photoelastic coating has been utilized [9] in measuring the in-plane elastic constants of orthotropic composites. The half-plane specimen has also been used for simultaneous measurement of orthotropic elastic and photoelastic constants [10]. One half of the specimen is utilized for the measurement of elastic constants and the other half is useful for photoelastic observations. A sketch of the specimen, with the

locations of the strain gages, is shown in Fig. 5. Composite laminates are heterogeneous materials which are assumed to be homogeneous for engineering applications. Usually average properties of the laminates are required. A least squares procedure that uses over-determined experimental data is ideally suited for this type of measurement [11].

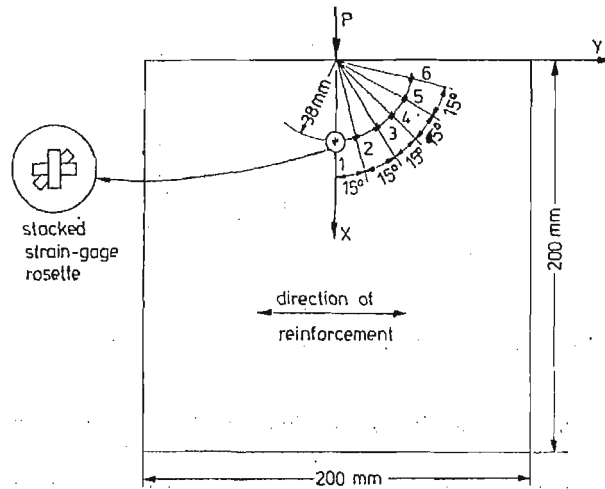


Fig. 5. Half-plane specimen with strain gages

The governing equation is written in terms of the required parameters in the general form

$$g_k = (A, B, C, D) = 0. \quad (2)$$

where  $k = 1, 2, \dots, M$  ( $M > 4$ ) refers to particular points in the data field. The parameters to be evaluated are  $A, B, C$  and  $D$ . Expanding Eq. (2) in a Taylor's series,

$$(gk)_{i+1} = (gk)_i + \left[ \frac{\partial g_k}{\partial A} \right]_i \Delta A + \left[ \frac{\partial g_k}{\partial B} \right]_i \Delta B + \left[ \frac{\partial g_k}{\partial C} \right]_i \Delta C + \left[ \frac{\partial g_k}{\partial D} \right]_i \Delta D \quad (3)$$

where  $i$  refers to the iteration-step number  $i$  and  $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$  are the corrections to the previous estimates of the corresponding parameters. Since the desired result is  $(gk)_{i+1} = 0$ ,

$$\left[ \frac{\partial g_k}{\partial A} \right]_i \Delta A + \left[ \frac{\partial g_k}{\partial B} \right]_i \Delta B + \left[ \frac{\partial g_k}{\partial C} \right]_i \Delta C + \left[ \frac{\partial g_k}{\partial D} \right]_i \Delta D = -(gk)_i. \quad (4)$$

Rewriting the above equation in matrix notation,

$$[g] = [b][\Delta E] \quad (5)$$

where

$$[g] = \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ \dots \\ -g_M \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$[b] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial A} & \frac{\partial g_1}{\partial B} & \frac{\partial g_1}{\partial C} & \frac{\partial g_1}{\partial D} \\ \frac{\partial g_M}{\partial A} & \frac{\partial g_M}{\partial B} & \frac{\partial g_M}{\partial C} & \frac{\partial g_M}{\partial D} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$[\Delta E] = \begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta B \\ \Delta C \\ \Delta D \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Solving Eq. (5),

$$[\Delta E] = [d]^{-1} [b]^T [g] \quad (9)$$

where

$$[d] = [b]^T [b]. \quad (10)$$

In implementing the above procedure, initial values of  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  are assumed and the matrices  $[g]$  and  $[b]$  are computed. Then the error vector  $[\Delta E]$  is calculated and the estimates of  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  are revised. The steps are repeated until the convergence is satisfactory.

Considering a load  $P$  applied perpendicular to the edge of an orthotropic half-plane, with the major material-symmetry axis parallel to the loaded edge of the half-plane, the stress components in polar coordinates are given [12] by

$$\sigma_r = \frac{2P \sin \theta}{\pi r l (\alpha_1^{1/2} - \alpha_2^{1/2})} \left[ \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 + 1 + (\alpha_2 - 1) \cos 2\theta} - \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1 + 1 + (\alpha_1 - 1) \cos 2\theta} \right] \quad (11)$$

$$\sigma_\theta, \tau_{r\theta} = 0 \quad (12)$$

where  $l$  is the thickness of the half-plane,  $\theta$  is the angle from the loaded edge and  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are derived elastic constants given by

$$\alpha_1 \alpha_2 = E_T / E_L, \quad (13)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = E_T / G_{LT} - 2\nu_{TL}. \quad (14)$$

The radial strain,  $\epsilon_r$  at any point is given by

$$\epsilon_r = \sigma_r / E_r \quad (15)$$

where

$$E_r = \left[ \frac{1}{E_L} \cos^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{E_T} \sin^4 \theta \right]^{-1}. \quad (16)$$

For the elastic calibration, Eq. (15) together with Eq. (16) is the governing equation. It can be written as

$$g_k(\alpha_1, \alpha_2, E_T) = 0. \quad (17)$$

The least-squares method is employed to determine. The strain readings from the gages at location 1 can be directly used to compute  $\nu_{TL}$ .

For the photoelastic calibration, the isochromatic fringe order per unit thickness,  $N$ , can be expressed as

$$N = \sigma_r \left[ \left( \frac{\cos^2 \theta}{f_T} - \frac{\sin^2 \theta}{f_L} \right)^2 + \frac{\sin^2 2\theta}{f_{LT}^2} \right]^{1/2} + Ar + B \quad (18)$$

where the term  $Ar + B$  accounts for the residual birefringence due to the matrix shrinkage during the fabrication process. The governing equation can be written as

$$g_k(f_L, f_T, f_{LT}, A, B) = 0. \quad (19)$$

The least-squares procedure gives  $f_L$ ,  $f_T$ ,  $f_{LT}$ ,  $A$  and  $B$ .

### Conclusions

To measure the shear modulus and the shear strength of composite materials, the Iosipescu and the Asymmetric Four Point Bend tests are very promising. But analytical and experimental work needs to be performed to establish optimum specimen geometry and loading. To measure the in-plane elastic and photoelastic constants of birefringent composites, the half-plane specimen appears very promising. The least-squares procedure gives the average properties of the model material by employing over-determined experimental data.

### References

1. H. W. BERGNER, J. G. DAVIS, and C. T. HERAKOVICH, *Analysis of Shear Test Methods for Composite Laminates*, Report VPI-E-77-14, Virginia Polytechnic Institute and State University, April 1977.
2. C. C. CHAMIS, and J. H. SINCLAIR, *Ten-Degree Off-Axis Test for Shear Properties in Fiber Composites*, *Experimental Mechanics*, Vol. 17, No. 9, September 1977.
3. M. F. DUGGAN, J. T. MCGRATH, and M. A. MURPHY, *Shear Testing of Composite Materials by a Simple Combined-Loading Technique*, AIAA Paper 78 - 50B, AIAA/ASME 19th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 1978.
4. N. IOSIPESCU, *New Accurate Procedure of Single Shear Testing Metals*, *Journal of Materials*, Vol. 2, No. 3, September 1967.
5. D. E. WALRATH, and D. F. ADAMS, *Analysis of the Stress State in an Iosipescu Shear Test Specimen*, Technical Report, University of Wyoming, June 1983.
6. J. M. SLEPETZ, T. F. ZAGESKI, and R. NOVELLO, *In-Plane Shear Test for Composite Materials*, AMMRC TR 78 - 30, Army Materials and Mechanics Research Center, July 1978.
7. B. S. SPIEGEL, *An Experimental and Analytical Investigation of the Iosipescu Shear Test for Composite Materials*, M.S. Thesis, Department of Mechanical Engineering and Mechanics, Old Dominion University, August 1984.
8. J. W. DALLY, and R. PRABHAKARAN, *Photo-Orthotropic Elasticity*, *Experimental Mechanics*, Vol. 11, No 8, August 1971.
9. J. STUPNICKI, and J. KOMOROWSKI, 9th Symposium on Experimental Research on the Mechanics of Solids, Warsaw, September 1980.
10. R. PRABHAKARAN, *Simultaneous Elastic and Photoelastic Calibration of Birefringent Orthotropic Model Materials*, Presented at the Second Inter-National Conference on Composite Structures, Paisley, Scotland, September 1983.
11. R. J. SANFORD, *Application of the Least-Squares Method to Photoelastic Analysis*, *Experimenta Mechanica*, Vol. 20, No. 6, June 1980.
12. A. E. GREEN, *Stress Systems in Aelotropic Plates-Part II*, *Proceedings of the Royal Society Series A*, Vol. 173, 1939.

## Резюме

## ИСПЫТАНИЯ КОМПОЗИТОВ НА СДВИГ

Исследованы распределения напряжений в сечениях образцов на сдвиг в зависимости от вида подкрепления и радиуса нарезок. Исследования проведены на образцах Йосипеску, их модификации, а также методом асимметричного испытания на сдвиг.

## Streszczenie

## PRÓBY NA ŚCINANIE KOMPOZYTÓW

Zbadane zostały rozkłady naprężeń, w przekrojach próbek z korbami w zależności od sposobu podparcia i promienia karbu. Badania przeprowadzono na próbkach Josipescu i ich modyfikacji oraz metodą asymetrycznej próby zginania.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku*

---



## ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ ТУГОПЛАВКИХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

В. Г. Трощенко, Е. И. Усков, А. В. Бляк (Киев)

*Институт проблем прочности  
Академии наук Украинской ССР*

### Введение

При оценке работоспособности изделий из тугоплавких материалов наряду с такими общеприятными характеристиками механических свойств как предел прочности, предел текучести и др., большое значение приобретают также параметры, характеризующие сопротивляемость указанных материалов развитию в них трещин [1]. Это обусловлено специфическими свойствами тугоплавких материалов — наличием вносимых в материал технологически зернограничных микротрещин, склонностью к высокотемпературному охрупчиванию, ослабляющему зернограничную прочность, преимущественно межзерненным разрушением —, а также особыми условиями эксплуатации, отличающимися сложными режимами температурно-силового воздействия.

В настоящее время вопросы исследования высокотемпературной трещиностойкости тугоплавких материалов освещены в литературе недостаточно, в связи с чем работы в этом направлении являются актуальными и важными.

### Материал и методика исследования

Для испытаний на трещиностойкость в широком интервале температур выбран вольфрам технической чистоты, полученный методом порошковой металлургии, в деформированном и рекристаллизованном состояниях. Рекристаллизованную структуру получали предварительным отжигом деформированного вольфрама при температуре 2200°C.

Испытания на трещиностойкость в интервале температур 20...2200°C проводили на разработанной в Институте проблем прочности АН УССР высокотемпературной вакуумной установке для испытаний на растяжение ВУРТ-1 [2], на которой осуществляли также рекристаллизационный отжиг образцов.

Для исследования использовали стандартные компактные образцы типа Е [3] на внецентренное растяжение, толщиной  $6,5 \cdot 10^{-3}$  м. Обоснованием для выбора

образцов указанной толщины послужили экспериментальные данные, представленные на рис. 1. Как видно из рисунка, изменение толщины образца в пределах от  $5 \cdot 10^{-3}$  м до  $7 \cdot 10^{-3}$  м не оказывает влияния на величину параметра  $K_Q$  в диапазоне температур 20...2000°C (рис. 1, а); параметр  $K_Q$ , определенный на образцах толщиной  $6,5 \cdot 10^{-3}$  м, не зависит от начальной длины исходной трещины  $Q_0$  (рис. 1, б) и от величины прироста трещины  $\Delta Q$  при повторных испытаниях одного образца при различных температурах (рис. 1, в).

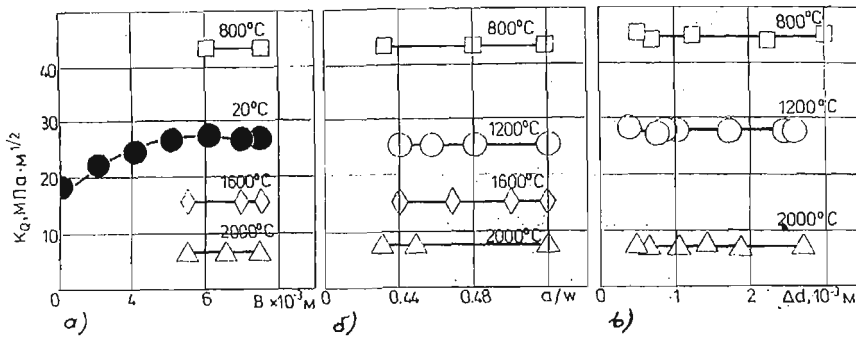


Рис. 1. Зависимость параметра  $K$  от толщины образца (а), длины исходной трещины (б) и величины подрастания трещины (в)

Полученные зависимости возможны лишь в том случае, когда коэффициент интенсивности напряжений  $K_Q$  принимает критическое значение, т. е.  $K_Q = K_{Ic}$ .

В пользу этого утверждения говорит и тот факт, что разрушение образцов вольфрама во всем исследованном температурном диапазоне было преимущественно хрупким, о чем свидетельствуют результаты фрактографического и рентгеноструктурного исследований [4 - 5].

Такой подход к выбору толщины образца обусловлен тем, что применяемые обычно для проверки корректности результатов размерные требования  $a, W-a, B \geq 2,5 (K_{Ic}/\sigma_{0.2})^2$  [6], в случае вольфрама являются слишком жесткими и нуждаются в уточнении.

В процессе испытаний на трещиностойкость вольфрама строили диаграммы растяжения в координатах „нагрузка  $P$  — смещение  $V_p$ ”, обрабатывали их по стандартной методике 5% секущей [3, 6], определяя величину критической нагрузки срагивания трещины  $P_Q$  и коэффициент интенсивности напряжений  $K_Q$ .

Типичные диаграммы деформирования вольфрама в различных температурных диапазонах испытаний приведены на рис. 2. Характерные особенности каждой из диаграмм обусловлены особенностями развития магистральной трещины [7]. В температурном диапазоне  $20^\circ\text{C} \dots T_{xp}^B$  ( $T_{xp}^B$  — верхняя граница температурной области вязко-хрупкого перехода) развитие трещины является нестабильным. При температурах, превышающих  $T_{xp}^B$ , стабильное развитие магистральной трещины может происходить либо по механизму разветвления (в диапазоне  $T_{xp}^B \dots 1500^\circ\text{C}$ ), который отличается дискретным подрастанием трещины, либо путем непрерывного интеркристаллитного устойчивого роста трещины при температурах, превышающих



1500°C. Найденные при обработке диаграмм деформирования значения  $P_Q$  (на рис. 2  $P_S$  — нагрузка, при которой длина трещины увеличивается на 2%) подставляли в формулу (I) для определения критического коэффициента интенсивности напряжений  $K_{Ic}$ , который был выбран в качестве параметра трещиностойкости вольфрама

$$K_{Ic} = \frac{P_Q Y(a_0/w)}{B\sqrt{W}} \quad (I)$$

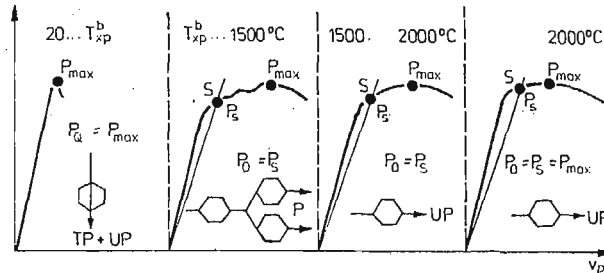


Рис. 2. Типичные диаграммы деформирования вольфрама и схематическое представление транскристаллитного  $TP$ , интеркристаллитного  $IP$  раздушения и разветвления трещины  $P$ .

где  $y(a_0/W)$  — коэффициент, учитывающий геометрию образца,  $B, W$  — толщина и ширина образца соответственно.

### Результаты испытаний и их обсуждение

На рис. 3 показана температурная зависимость трещиностойкости  $K_{Ic}$  деформированного вольфрама (кривая 1) и схематическое представление характера развития магистральной трещины (обозначения те же, что и на рис. 2). Здесь же при-

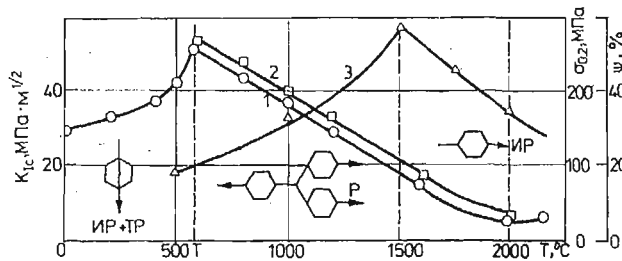


Рис. 3. Температурные зависимости трещиностойкости  $I$  и характеристик кратковременной прочности  $\sigma_{0,2}$  (2), (3) деформированного вольфрама

ведены температурные зависимости предела текучести  $\sigma_{0,2}$  (кривая 2) и характеристики пластичности  $\Psi$  (кривая 3) этого материала. Штриховыми линиями выделены температурные диапазоны, соответствующие характерным участкам на указанных зависимостях.

В температурном диапазоне  $20^\circ\text{C} \dots T_{xp}^B$  наблюдается возрастание  $K_{Ic}$  с ростом температуры при неустойчивом хрупком смешанном разрушении. Диапазон  $T_{xp}^B \dots 2000^\circ\text{C}$  отличается монотонным снижением параметра трещиностойкости  $K_{Ic}$  и предела текучести  $\sigma_{0,2}$  и устойчивым хрупким интеркристаллитным разрушением, которое характеризуется разветвлением магистральной трещины (в диапазоне  $T_{xp}^B \dots 1500^\circ\text{C}$ ) или непрерывным устойчивым ее подрастанием (в диапазоне  $1500^\circ\text{C} \dots 2200^\circ\text{C}$ ). При температурах, превышающих  $2000^\circ\text{C}$  имеет место незначительное возрастание параметра  $K_{Ic}$  и зернограничное растрескивание материала.

Анализируя представленные на рис. 3 результаты, можно отметить как аномальные следующие особенности: снижение  $K_{Ic}$  с повышением температуры в диапазоне  $T_{xp}^B \dots 2000^\circ\text{C}$  и отсутствие каких-либо изменений (перегибов) на зависимостях  $K_{Ic} = f(T)$  и  $\sigma_{0,2} = f(T)$  при температуре  $1500^\circ\text{C}$ , хотя при этой температуре имеется экстремум на зависимости  $\Psi = f(T)$  и изменяется характер развития исходной трещины. Следует отметить также и другие особенности представленных на рис. 3 зависимостей: корреляция характеристик  $K_{Ic}$  и  $\sigma_{0,2}$ , аномальный ход зависимости  $\Psi = f(T)$  по отношению к  $\sigma_{0,2}$  при  $T < 1500^\circ\text{C}$  и по отношению к  $K_{Ic}$  при  $T < 1500^\circ\text{C}$ .

Структурные исследования испытанных образцов показали, что в диапазоне температур  $T_{xp}^B \dots 2000^\circ\text{C}$  происходит монотонное совершенствование структуры, причем в окрестности температуры  $1500^\circ\text{C}$  отсутствуют какие-либо структурные изменения, свидетельствующие об охрупчивании (снижении  $\Psi$ ) вольфрама.

Однозначно истолковать указанные противоречивые данные, используя существующие представления о физических процессах, протекающих в вольфраме при нагреве, не представляется возможным.

В работе [8] предложено объяснить выявленную противоречивость представленных на рис. 3 данных действием внутренних структурных напряжений [9], возникающих в материале при термическом воздействии.

На рис. 4 схематически показано, как влияют на трещиностойкость  $W$  в диапазоне температур  $T_{xp}^B \dots 2200^\circ\text{C}$  процессы повышения пластичности с ростом температуры и одновременного ослабления межзеренных границ вследствие возникающего при нагреве  $W$  поля напряжений. Эти процессы оказывают противоположное воздействие на трещиностойкость  $W$ : с увеличением пластичности тре-

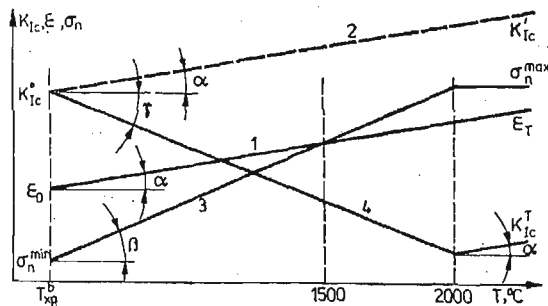


Рис. 4. Влияние пластичности и поля внутренних напряжений на трещиностойкость деформированного вольфрама

щностойкость должна возрастать (кривые 1 и 2), а с ростом поля напряжений — уменьшаться (кривые 3 и 4).

Для простоты в схеме приняты следующие допущения: параметр  $\sigma_n$ , характеризующий поле внутренних напряжений, с повышением температуры возрастает более резко, чем параметр  $\varepsilon$ , характеризующий пластичность материала ( $\operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \alpha$ ); изменение трещиностойкости материала находится в прямой зависимости от изменения его пластичности.

При повышении температуры с увеличением пластичности (кривая 1) должна увеличиваться и трещиностойкость (кривая 2). Однако более резкое возрастание поля внутренних напряжений (кривая 3) приводит к тому, что трещиностойкость уменьшается (кривая 4;  $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha$ ).

Вследствие ослабления межзеренных границ под влиянием поля напряжений разрушение происходит при частичной реализации материалом пластичности. Конкуренция двух указанных процессов приводит к смене механизмов разрушения ( $P \rightarrow IP$ ) и снижению  $\Psi$  при температурах выше  $1500^\circ\text{C}$ . При  $T \geq 2000^\circ\text{C}$  напряжения достигают предела прочности материала, вызывая интенсивное зернограничное растрескивание. При дальнейшем повышении температуры величина поля напряжений остается практически постоянной вследствие релаксации зернограничным растрескиванием ( $\sigma_n = \sigma_n^{\max} = \text{const}$ ) и трещиностойкость материала несколько возрастает, т. к.  $K_{Ic}$  зависит только от изменения пластичности материала.

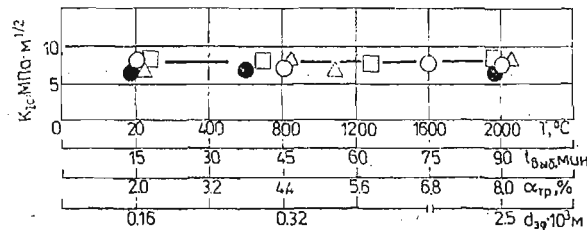


Рис. 5. Температурная зависимость трещиностойкости рекристаллизованного вольфрама

Описанные выше закономерности изменения трещиностойкости вольфрама, полученного методом порошковой металлургии, в исследованном интервале температур  $20 \dots 2200^\circ\text{C}$  характерны для материала в деформированном состоянии.

Высокотемпературный отжиг при  $T = 2200^\circ\text{C}$ , с целью создания рекристаллизованной структуры, независимо от времени выдержки  $t_{\text{выд}}$ , обусловил необратимое снижение трещиностойкости деформированного вольфрама, величина которой остается неизменной во всем исследованном температурном интервале от  $20$  до  $2200^\circ\text{C}$  (рис. 5). Кроме того, на величину  $K_{Ic}$  рекристаллизованного  $W$  не влияют ни температура испытаний  $T$ , ни такие структурные параметры как эффективный размер зерна  $d_{\text{эф}}$  (в пределах от  $0,16 \cdot 10^{-3}$  м до  $2,5 \cdot 10^{-3}$  м) и плотность микротрещин  $\alpha_{\text{Тр}}$  (при  $\alpha_{\text{Тр}} < 8\%$ ).

Характерная особенность поверхностей разрушения как образцов, испытанных при  $2200^\circ\text{C}$ , так и предварительно отожженных при  $2200^\circ\text{C}$  и испытанных при более низких температурах — протяженные зернограничные микротрещины, ко-

торые отсутствовали в исходном материале и не наблюдались на изломе образцов, испытанных при 2000°C.

Существенное различие характеристик трещиностойкости деформированного и рекристаллизованного вольфрама не противоречит имеющимся в литературе данным о резком отличии характеристик прочности и пластичности вольфрама с различной исходной структурой [10], что объясняется значительно более низкой прочностью границ зерен по сравнению с телом зерна в рекристаллизованном вольфраме.

### Выводы

1. Отсутствие влияния на величину параметра  $K_Q$  толщины образца (в пределах от  $5 \cdot 10^{-3}$  м до  $7 \cdot 10^{-3}$  м), длины исходной трещины и величины прироста трещины, а также хрупкий характер разрушения (прямой излом, отсутствие утяжки в вершине трещины) в исследованном диапазоне температур (20...2000°C), дают основание для применения компактных образцов малой толщины (более  $5 \cdot 10^{-3}$  м) при определении характеристик трещиностойкости вольфрама с использованием критериев линейной механики разрушения.

2. Характерной особенностью температурной зависимости  $K_{Ic}$  для деформированного вольфрама является наличие экстремума в области температуры хрупко-вязкого перехода  $T_{xp}^B$ , монотонное снижение величины  $K_{Ic}$  в температурном диапазоне  $T_{xp}^B$ ...2000°C, коррелирующее с изменением предела текучести  $\sigma_{0,2}$ , при наличии экстремума на температурной зависимости характеристики пластичности  $\psi$  при 1500°C, что объясняется взаимодействием двух протекающих в вольфраме при нагреве процессов — пластификации материала и ослабления зернограницной прочности вследствие действия внутренних структурных напряжений.

3. Высокотемпературный отжиг при 2200°C приводит к существенному снижению трещиностойкости вольфрама, причем на величину  $K_{Ic}$  рекристаллизованного вольфрама не оказывают влияние ни температура, ни такие структурные параметры как эффективный размер зерна и плотность микротрещин, что объясняется необратимым снижением зернограницной прочности материала при высокотемпературном воздействии.

### Литература

1. А. В. БАБАК, О количественной корреляции между трещиностойкостью  $K_{Ic}$  и кратковременной прочностью  $\sigma_b$ ,  $\sigma_{0,2}$  вольфрама-Порошковая металлургия, № II, с. 68 - 72, 1983.
2. А. В. БАБАК, Е. И., Усков, Установка для исследования характеристик вязкости разрушения тугоплавких материалов при высоких температурах в вакууме или инертной среде, Завод. лаб., т. 46, № 10, с. 955 - 956, 1980.
3. К. ХЕККЕЛЬ, Техническое применение механики разрушения. М.: Металлургия, 63 с. 1974.
4. В. А. СТЕПАНЕНКО, А. В. БАБАК, Е. И. Усков, Фрактографические особенности разрушения металлокерамического вольфрама в интервале температур 20...2000°C, Пробл. прочности, № 9, с. 88 - 90, 1982.

5. Н. Д. Бегл, А. В. Бабак, Е. И. Усков, *Рекристаллизация и охрупчивание спеченого вольфрама*, Порошковая металлургия, № 5, с. 75 - 79, 1982.
6. У. Браун, Дж. Сроули, *Испытание высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации*, М.: Мир, 246 с. 1972.
7. Е. И. Усков, А. В. Бабак, *Особенности разрушения металлокерамического вольфрама при различных температурах в вакууме*, Пробл. прочности, № 1, с. 79 - 82, 1981.
8. Бабак А. В., Усков Е. И. К вопросу о высокотемпературном охрупчивании вольфрама Пробл. прочности, № 5, с. 65 - 69, 1983.
9. Е. Э. Засимчук, В. С. Кравченко, *Механизм охрупчивания ОЦК-металлов в процессе динамической рекристаллизации*. — В кн.: Тез. докл. 4-й Всесоюз. конф. „Физика разрушения”. Киев: Ин-т Пробл. Материаловедения АН УССР, с. 28 - 30, 1980.
10. В. М. Амосов, Р. Т. Андреева, М. Н. Фомина, *Влияние металлов IУА, УА и УІА групп периодической системы на свойства вольфрама марки ВА*. В кн.: Порошковая металлургия в новой технике. М.: Наука, с. 121 - 128, 1968.

### Streszczenie

#### ODPORNOŚĆ NA PĘKANIE TRUDNOTOPLIWYCH METALI I STOPÓW

Przedstawione zostały wyniki badań odporności na pękanie odkształcanego i rekrytalizowanego wolframu technicznej czystości w zakresie temperatury 20 - 2000°C.

Charakterystyczną cechą zależności temperaturowej  $K_{Ic}$  dla odkształcanego wolframu jest obecność ekstremum przy temperaturze krucho-lepkiego przejścia  $T_{xp}^B$  i obniżenia  $K_{Ic}$  w zakresie  $T_{xp}^B \dots 2000^\circ\text{C}$ , a dla rekrytalizowanego niezależność  $K_{Ic}$  od temperatury i parametrów strukturalnych (efektywny rozmiar ziarna i gęstość mikroszczelin). Specyfikę zmiany odporności na pękanie wolframu można objaśnić wzajemnym oddziaływaniem dwóch procesów — uplastycznienia materiału i osłabienia wytrzymałości na granicy ziaren.

### Summary

#### FRACTURE TOUGHNESS OF HIGH-MELTING METALS AND ALLOYS

Results of the research in the fracture toughness of deformed and recrystallized wolfram of technical purity are presented for the temperature range 20 - 2000°C.

The characteristic feature of the temperature dependence  $K_{Ic}$  for the deformed wolfram is the presence of an extremum of the temperature of brittle-viscous transition  $T_{xp}^B$  and the decrease of  $K_{Ic}$  in the range  $T_{xp}^B \dots 2000^\circ\text{C}$  while the independence  $K_{Ic}$  of the temperature and structural parameters (effective grain dimension density of microcracks). The specific features of the wolfram fracture toughness can be explained by the interaction of the two processes, namely the material plastification and weakening of the inter grain strength.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku



## IN-PLANE STRAIN ANALYSIS BY MEANS OF REFLECTION HOLOGRAPHY

PIOTR WESOŁOWSKI

*Institute of Physics Technical University Budapest*

### Abstract

Application of reflection holography to numerical inplane strain measurement is presented. The corner transition of hydraulic press is investigated in order to pointing out critical points on the transition. The method makes possible examining small areas of large structures despite of large motions of the overall object. The recording set-up is very simple: the stability requirements for recording are drastically reduced and allow omiting of vibration-isolation equipment. The values of strain are obtained by derivating displacement vector field and compared with strain gauge measurement.

### Introduction

Holographic interferometry has provided the engineer with powerful tool for nondestructive testing, as well as with an aid for engineering design and analysis. In typical off-axis holographic interferometry the separation of investigated object from measuring system causes, that the fringe patterns are not characteristic only of effects of structural deformation but contain also rigid body motions, which should be cancelled out in optical-mechanical [5], [6] or numerical way.

If there are small localized distorsions of interest associated with large structural motions the problems with interferogram evaluating are very similar to mentioned above. Neumann and Penn [2] gave at first description of a method which overcomes the drawback of extrem sensitivity to vibration and is largely independent of the relative motion of the object and laser source. The main idea is to attach a transparent holographic plate to the object illuminating it directly through the plate. By double-exposure method, each of the exposures blong to one state of loading, the fringe pattern relating to the deformation can be obtained.

### Requirements of the technique

To investigate the in-plane displacements a plateholder with a plate without antihalation backing should be kinematically mounted to the object to be investigated in order to assure relation between object real deformation and fringe pattern. It is preferable to

know the character of deformation before attaching the holder to the object; otherwise the fringe pattern obtained by double exposure method can be characteristic of any relative motion between object surface and hologram plate that has occurred between two exposures, including rigid body motion too, being not characteristic of object deformation.

The stability requirements are described in [1], [2]. The most important of them are that an interferogram good quality depends only on the stability of the distance between the object and emulsion during exposure and is independent of changes in the distance from the illuminating source.

Reconstruction of interferograms takes place in collimated white light, although reconstruction in laser light can be naturally also applied.

### The model

The model of a framework of the hydraulic press for chipboards was prepared ensuring strict mechanical conditions. In interest of that not only the characteristics of material but geometrical similarity have also been ensured. Mechanical stress acting in the real press and that of the model must be the same. Thus the reduction ratio of length measurement is  $l_v = 0.1892$ ,  $v_m = 11.35$  mm,  $v_o = 60$  mm, where  $v_m$  is the thickness of the model's plate and  $v_o$  is the thickness of the real object's plate. The reduction ratio of loading force is  $F_v = 0.03359$  (the total loading of the model is  $F_m = 34527$  nN and loading of the object  $F_o = 96 \cdot 10^5$  N).

The symmetry of loading was checked by four strain gauges placed on the arms (nr. 1, 5, 9, 19). Strain gauges (KYOWA KFC 2-C1-11 type with measuring base of 2 mm) were cemented in the internal edges of the frame as it is shown on Fig. 1. The range of loading was 0 - 45 MPa. Fig. 2 shows strain values obtained from strain gauge measurement in range 0 - 30 MPa. Because of symmetry the values measured in the upper left and in upper right corner transition are put onto the same diagram a (Fig. 2).

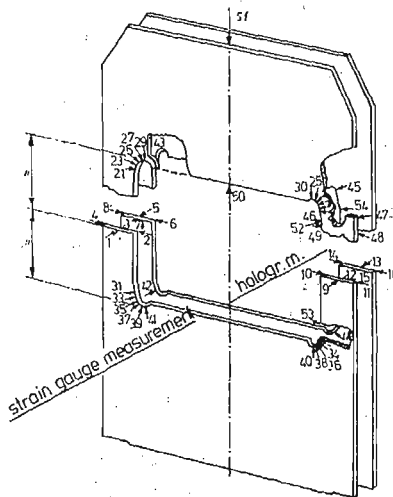


Fig. 1. The scheme of the hydraulic press model and setting of the strain gauges



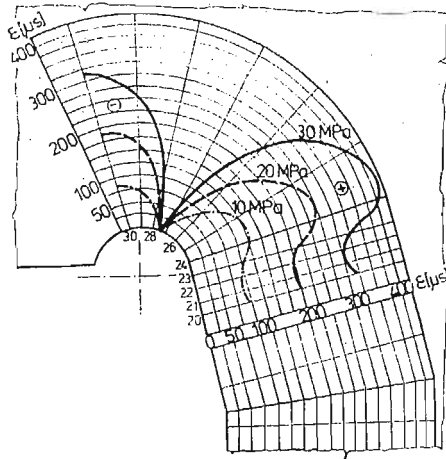


Fig. 2. The strain values obtained from strain-gauges measurement

### Experiment

There was used a cw He-Ne laser with output of 7 mW. The laser was mounted on a tripod standing on the floor of workshop at distance of about 2 m from the object. It illuminated the model from the opposite side to that being under strain-gauge measurement. Using collimator with external lens of 100 mm diameter and set of two flat mirrors a collimated plane wave was directed through the holographic plate normally to the surface (Fig. 3).

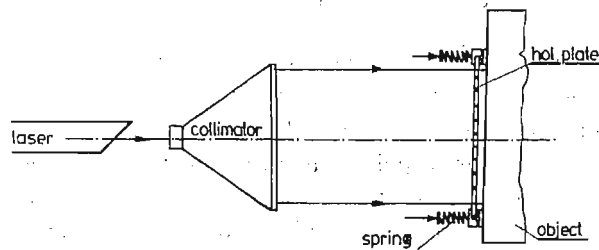


Fig. 3. The set-up for recording the holograms

The light reflected back forms the signal beam and interferes with incident light [8]. The object was painted white with diffusely reflecting paint in order to allow a large variation of the angle of view at reconstruction.

The plateholder mounting to the object is shown schematically on Fig. 4. As it was mentioned, the plateholder must be mounted kinematically to the object as it is shown on Fig. 4. The fix clamping point ( $P_2$ ) is placed in the zero strain zone (dotted-dashed line) to avoid noncharacteristic of object deformation-rigid body motion between plate and the object. On Fig. 4a the balls are fixed on to the upper side of the object.

Explanation:

*A-A*: the ball rest on a flat surface to slide freely in any horizontal direction.  
*B-B*: the ball defines the position of the hologram holder  
*C-C*: the ball rest in a slot in the form of a trench with triangular cross-section.  
 Two springs (*R1*, *R2*) press the plateholder to the object.

The model of press was initially loaded by pressure of 10 MPa and pressure belonging to the second exposure was 21 MPa.

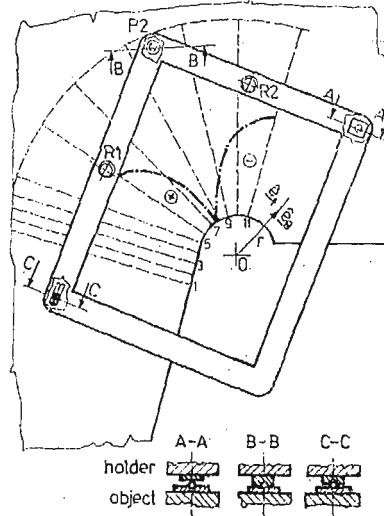


Fig. 4. The plateholder mounting to the object

### Reconstruction of the interferograms

Since the fringe pattern at reconstruction is not influenced by the reconstruction wavelength [1] the reconstruction of the interferograms is realized in collimated white light, which incidents normally to the hologram plate.

The investigated interferogram point was placed in the middle of a circle table with precise angle scale. Instead of varying observation directions, the whole circle table with interferogram lying on it was rotated round the vertical axis. The fringe patterns were

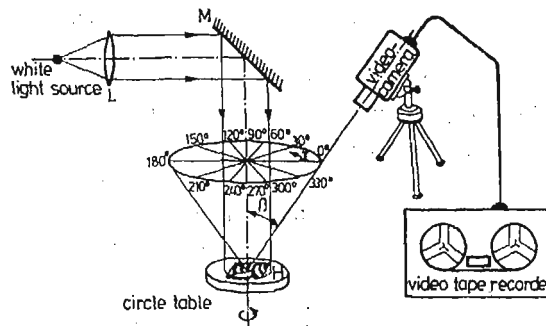


Fig. 5. The scheme of interferogram reconstruction

viewed by TV camera (SONY DXC 1800 *P*-type) under  $\beta$  angle normal to the surface of the plate (Fig. 5). Because of very fast changing of fringe patterns during varying of angle, the whole observation was recorded on Video taperecorder (SONY U-matic, VO-5630 type) to precise reconstruction of fringe pattern variation.

### Evaluation of the interferograms

Generally for evaluating displacement vector components there is a need for at least three different fringe patterns associated with different sensitivity vectors. In this case the fringe orders for each of investigated points were determined from twelve different observation angles ( $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 330^\circ$ ) (Fig. 5) to get an overdetermined set of equations for increasing the accuracy of the measurement.

Fringe counting was carried out in following way: order of a fringe passing the investigated point was chosen arbitrarily. Counterclockwise direction along tangent to given point was chosen as positive. The fringe pattern moving in opposite direction decreased it. The correctness of fringe counting was checked after rotating the interferogram about 360 degrees. In this case the fringe pattern formed a closed loop and it resulted in total number of fringes adding up to zero.

As it is seen from Fig. 4 the points from 11 to 5 were evaluated in polar coordinates, where:

$$\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{e}}_r + v\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (1)$$

where  $\mathbf{u}$  denotes plane displacement vector.

The plane strain components are:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (2)$$

namely:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \end{aligned}$$

The points 4, 3, 2, 1 were evaluated in local rectangular Cartesian coordinates, for which

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

The strain measured by strain gauges corresponds to  $\varepsilon_{\theta\theta}$  or  $\varepsilon_{xx}$  respectively.

For evaluation of displacement vector components there was applied the „Fringe — counting” method [4] described by equation:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{L} = \lambda \Delta \mathbf{N} \quad (3)$$

where  $\mathbf{K}$  is a matrix, which consists of differences of observation unit vectors,  $\Delta \mathbf{N}$  is a fringe order vector consisting of fringe order differences,  $\lambda$  denotes the wavelength of laser source,  $\mathbf{L}$  is a displacement vector.

The fringe order number was digitized with aid of drawing digitizer connected with microcomputer. Thus, for fringe values differed from each other of half order there were fitted smoothed cubic spline functions and the fringe orders in given points were interpolated. The fringe order evaluation of point  $x$  was evaluated in four neighbourhood points of  $x$ :  $(x-2\Delta, x-\Delta, x+\Delta, x+2\Delta)$ .  $\Delta x$ , chosen experimentally, satisfied eq.  $\Delta x = 2.50$  mm on drawing digitizer. Since the photographs of each fringe pattern ( $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 330^\circ$ ) were magnified 2 times comparing with real model, the ratio 1/2 was applied. In case of well defined fringe pattern the accuracy was better than 0.05 fringe order, in case of complicated fringe pattern (change of sign, fringe pattern with low spatial frequency) the accuracy was better than 0.1 fringe order.

The eq. 3 was solved by the least-square method [9]; in this way one can obtain displacement vector components of five points lying in given interval in tangent direction. Next these values of displacement vector components were fitted once more by smoothed cubic spline functions. The derivative is equal to component  $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$ ; in Cartesian rectangular coordinates it is equal to  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . The second component of  $\epsilon_{\theta\theta}$  in polar coordinates  $\left(\frac{u}{r}\right)$  is to be evaluated directly from displacement vector field. Fig. 6 compares the in-plane strains evaluated from interferogram and measured by strain — gauges.

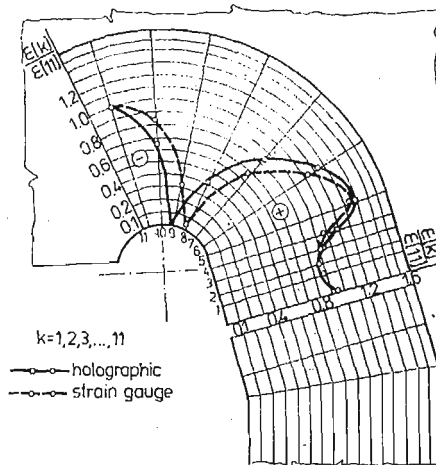


Fig. 6. Comparison of the strain values obtained from strain-gauge and holographic measurement

### Comment to the results

The measurement with aid of strain gauges was realized, as it is seen on Fig. 1, on front side of the press model and the holographic experiment was conducted on the opposite side of the model. Thus, although the symmetry adjustment on each of four press arms was controlled very carefully, the results of strain-gauge measurement and these of holographic evaluation must be assumed as being obtained not exactly upon the same experimental basis. The precise regulation of the manometer presented difficulties. As the two measurements were conducted not in the same time — the results were compared in relative scale and the strain value of point nr 11 was taken as minus unity (because of negative strain value).

### Conclusions

The comparison of results presented on Fig. 6 shows great similarity for values of both kinds of strain. Reflection holography in the way presented in this paper is time-consuming method, but its great advantages are simplicity of recording and reconstruction and non-destructive character of the method.

### References

1. P. M. BOONE, *Optica Acta*, 22, 579 - 589, 1975.
2. D. B. NEUMANN, R. C. PENN, *Experimental Mechanics*, 15(6), 241 - 244, 1975.
3. A. E. ENNOS, M. S. VIRDEE, *Experimental Mechanics*, 22, 202 - 209, 1982.
4. E. B. ALEXANDROV, A. M. BONCH-BRUEVICH, *Sov. Phys. Tech. Phys.*, 12, 258 - 265, 1967.
5. N. ABRAMSON, *Appl. Optics*, 13/9, 2019 - 2025.
6. W. A. CATHEY, U.S. Patent № 415587, 1968.
7. CH. H. REINSCH, *Num. Mathematik*, 10, 177 - 183, 1967.
8. Y. DENISYUK, *Sovj. Phys.-Dokl.*, 7, 543, 1962.
9. S. K. DHIR, P. J. SIKORA, *Experimental Mechanics*, 12, 323 - 327, 1972.

### Acknowledgments

The work reported in this paper was performed in Coherent Optics Laboratory of Institute of Physics, at Technical University, Budapest, The author is indebted to Dr. Z. Füzessy, the director of PhD study, for his helpful advices and proofreading of this paper. The model of hydraulic press was provided by Turi Zoltánné to whom the author is also indebted.

### Резюме

#### АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИИ В ПЛОСКОСТИ МЕТОДОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ В ОТРАЖЕННОМ СВЕТЕ

В работе представлено метод количественных исследований деформации при помощи голографической интерферометрии в отраженном свете и непосредственном креплении голографической плиты на испытываемом объекте. Метод делает возможным исследование фрагментов больших конструкций при исключении влияния перемещений целого объекта.

Состав аппаратуры для создания голограмм очень несложный, кроме этого значительно ограничены требования касающиеся виброизоляции системы.

В представленном примере деформации, определены на основе векторов перемещений точек, согласны с измеренными методом опорных дощечек.

#### Streszczenie

### ANALIZA ODKSZTAŁCEN W PŁASZCZYŹNIE PRZY UŻYCIU INTERFEROMETRII W ŚWIETLE ODBITYM

W pracy zaprezentowano metodę ilościowych badań odkształcenia przy pomocy interferometrii holograficznej w świetle odbitym z bezpośrednim mocowaniem płyty holograficznej na badanym obiekcie. Metoda umożliwia badanie fragmentów dużych konstrukcji eliminując wpływ przemieszczenia obiektu jako całości.

Zestaw aparatury do formowania hologramów jest bardzo prosty, a ponadto zostały znacznie ograniczone wymagania odnośnie wibroizolacji układu. W przedstawionym przykładzie, odkształcenia wyznaczone na podstawie wektorów przemieszczeń punktów są zgodne z mierzonymi metodą tensometrów oporowych.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku*

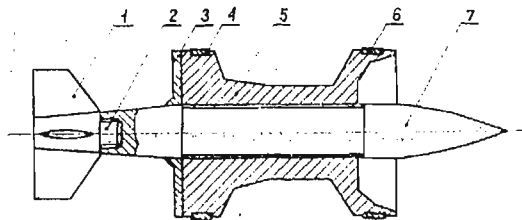
## MODEL AERODYNAMICZNY I OPIS MATEMATYCZNY RUCHU WYDŁUŻONEGO POCISKU CIĘŻKIEGO\*

JÓZEF GACEK (WARSZAWA)

Wojskowa Akademia Techniczna

### 1. Wprowadzenie

Przedmiotem pracy jest analiza warunków i specyfiki lotu nie kierowanych wydłużonych pocisków ciężkich na odcinku toru, odpowiadającym odległości strzału bezwzględnego, charakterystycznego dla strzelania lufowej artylerii przeciwpancernej. Pod pojęciem pocisku wydłużonego rozumie się tu taki rodzaj pocisku, którego długość jest wielokrotnie większa od jego średnicy (kalibru), co automatycznie wyklucza możliwość zastosowania stabilizacji obrotowej. Jest to zatem pocisk stabilizowany brzechwowo, pod względem kształtu zewnętrznego przypominający typowy pocisk raketowy (rys. 1). Równocześnie



Rys. 1. Wydłużony pocisk ciężki. 1 — brzechwa, 2 — smugacz, 3 — element łączący, 4 — pierścień wiodący  
5 — płaszcz, 6 — pierścień prowadzący, 7 — rdzeń

jest to pocisk ciężki, co oznacza praktycznie, że charakteryzuje się on dużym stosunkiem masy do objętości. Pod tym względem jest on bardziej zbliżony do niektórych pocisków wyrzeliwanych z broni lufowej, natomiast różni się zasadniczo od stosunkowo lekkich (w podanym sensie) pocisków raketowych, których znaczną część objętości zajmuje paliwo o niezbyt dużej gęstości oraz wolna przestrzeń wypełniona powietrzem. Te i inne jeszcze czynniki wskazują, że rozpatrywany rodzaj pocisków z punktu widzenia balistyki zewnętrznej zajmuje miejsce pośrednie pomiędzy typowymi pociskami lufowymi (artyleryjskimi czy strzeleckimi) i raketowymi.

W dostępnej literaturze brak jest jakichkolwiek informacji na temat specyfiki lotu na torze, charakterystyk aerodynamicznych, wrażliwości na różnego rodzaju zakłócenia

\* Praca przedstawiona na I Ogólnopolskiej Konferencji „Mechanika w Lotnictwie” — Warszawa 19.I.1984 r.

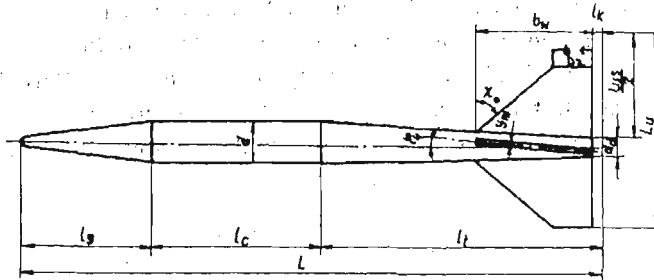
itp., czyli ogólnie problemów balistyki zewnętrznej tego rodzaju pocisków, bezpośrednio związanych z celnością strzelania, prędkością uderzenia, czyli czynnikami warunkującymi szeroko rozumianą skuteczność działania.

Biorąc powyższe pod uwagę, podjęto próbę kompleksowego rozwiązania tzw. problemu głównego balistyki zewnętrznej nowego rodzaju pocisków przeciwpancernych i przeprowadzenia na tej podstawie analizy specyfiki ich lotu pod kątem potrzeb aplikacyjnych.

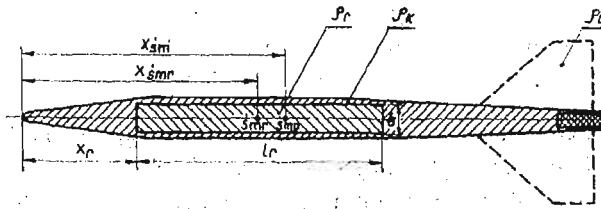
## 2. Model aerodynamiczny pocisku

Pod pojęciem modelu aerodynamicznego rozumie się tu myślowo zbudowany układ materialny, który w określonym stopniu pod względem własności odpowiada układowi rzeczywistemu. Wykorzystuje się następujące charakterystyki modelu aerodynamicznego pocisku:

- Charakterystyki geometryczne, czyli wielkości fizyczne charakteryzujące kształt i wymiary zewnętrzne pocisku (rys. 2).
- Charakterystyki masowe — wielkości charakteryzujące rozkład masy pocisku (rys. 3).



Rys. 2. Wybrane charakterystyki geometryczne pocisku



Rys. 3. Wielkości charakteryzujące rozkład masy pocisku

- Charakterystyki ośrodka ruchu — wielkości fizyczne charakteryzujące ośrodek ruchu pocisku.

- Parametry ruchu pocisku definiowane jako wielkości charakteryzujące ruch pocisku względem układów odniesienia.

- Parametry ruchu celu — charakteryzują ruch celu względem układów odniesienia.

- Charakterystyki sił (siły i momenty działające na pocisk), czyli wielkości fizyczne charakteryzujące wzajemne oddziaływanie pocisku i ośrodka.

Jako wielkości charakteryzujące wzajemne oddziaływanie pocisku i ophywającego go



powietrza przyjmuje się siły i momenty aerodynamiczne, mające istotny wpływ na własności dynamiczne pocisku czyli:

— całkowita siła aerodynamiczna  $R_a$  będąca wypadkową sił ciśnienia i tarcia powstałych podczas ruchu pocisku względem ośrodka; punktem przyłożenia tej siły jest środek parcia pocisku,

— wektor główny sił aerodynamicznych  $\vec{R}$ , przyłożony do środka masy pocisku, kolinearny do wektora całkowitej siły aerodynamicznej i równy z nim co do modułu,

— główny moment sił aerodynamicznych  $M_a$ .

Zależności na całkowitą siłę aerodynamiczną  $R_a$  i główny moment sił aerodynamicznych  $M_a$  przedstawia się zwykle w postaci:

$$R_a = C_R \frac{\rho V^2}{2} S; \quad M_a = C_M \frac{\rho V^2}{2} SL, \quad (2.1)$$

gdzie:  $S, L$  — charakterystyczna powierzchnia oraz wymiar liniowy pocisku,

$C_R$  — współczynnik całkowitej siły aerodynamicznej,

$C_M$  — współczynnik głównego momentu sił aerodynamicznych,

$M$  — liczba Macha,

$Re$  — liczba Reynoldsa

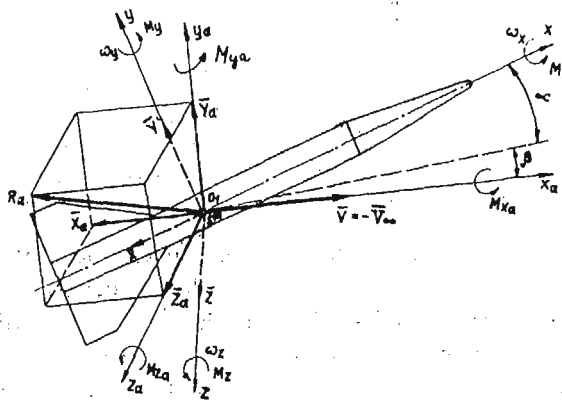
oraz

$C_R = C_R$  (charakterystyki geometryczne,  $M, Re$ )

$C_M = C_M$  (charakterystyki geometryczne, charakterystyki masowe,  $M, Re$ ). (2.2)

Rozkładając wektor główny sił aerodynamicznych wg prędkościowego układu osi współrzędnych, a główny moment sił aerodynamicznych wg układu osi współrzędnych związanych (rys. 4) otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} X_a &= X_{ap} = c_x \frac{\rho V^2}{2} S \text{ — siła oporu czołowego,} \\ Y_a &= Y_{ap} = c_y \frac{\rho V^2}{2} S \text{ — siła nośna,} \\ Z_a &= Z_{ap} = c_z \frac{\rho V^2}{2} S \text{ — siła boczna,} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$



Rys. 4. Schemat działania na pocisk sił aerodynamicznych w prędkościowym  $O_1 x_a y_a z_a$  i związanym układach osi współrzędnych

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{xp} = m_x \frac{\rho V^2}{2} SL \text{ — moment przechylający,} \\ M_y &= M_{yp} = m_y \frac{\rho V^2}{2} S b_A \text{ — moment odchylający,} \\ M_z &= M_{zp} = m_z \frac{\rho V^2}{2} S b_A \text{ — moment pochylający,} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

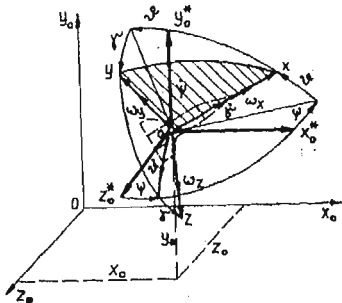
Współczynniki  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  są charakterystykami aerodynamicznymi pocisku lub współczynnikami sił i momentów aerodynamicznych.

### 3. Układy osi współrzędnych i równania ruchu pocisku

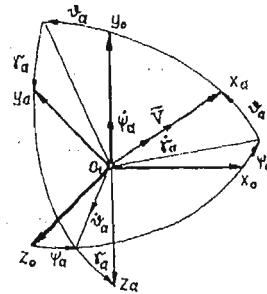
Ruch przestrzenny pocisku opisuje się za pomocą równań różniczkowych odzwierciedlających istotę fizycznego procesu lotu. Formułując w odpowiedni sposób założenia upraszczające, w równaniach ruchu uwzględniono czynniki w istotny sposób wpływające na tor lotu pocisku.

**3.1. Stosowane układy osi współrzędnych.** Ze względu na złożoność problemu już od początku jego postawienia pojawia się zagadnienie wyboru układu współrzędnych. Do opisu ruchu pocisku wykorzystuje się (jako podstawowe) prawoskrętne układy współrzędnych prostokątnych [1, 2, 3], mianowicie:

a) Ziemski układ osi współrzędnych ( $Ox_0y_0z_0$ ), którego początek pokrywa się z punktem startu pocisku; płaszczyzna  $Ox_0y_0$  jest pionową płaszczyzną strzelania w chwili wylotu (rys. 5).



Rys. 5. Wzajemne położenie związanego  $O_1xyz$  i ziemskiego  $Ox_0y_0z_0$  układów osi współrzędnych



Rys. 6. Wzajemne położenie ziemskiego  $Ox_0y_0z_0$  i prędkościowego  $O_1x_a y_a z_a$  układów osi współrzędnych

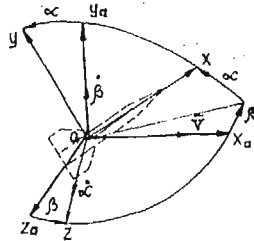
b) Związany układ osi współrzędnych ( $O_1xyz$ ), z początkiem pokrywającym się ze środkiem masy pocisku. Oś  $O_1x$  jest zgodna z osią wzdłużną pocisku i skierowana w stronę jego wierzchołka. Płaszczyzna  $O_1xy$  jest pionową płaszczyzną symetrii pocisku (rys. 7).

c) Prędkościowy układ osi współrzędnych ( $O_1x_a y_a z_a$ ), którego początek pokrywa się ze środkiem masy pocisku. Oś  $O_1x_a$  jest zgodna z kierunkiem wektora prędkości  $V$  środka masy pocisku. Oś  $O_1y_a$  leży w pionowej płaszczyźnie symetrii pocisku (rys. 6).

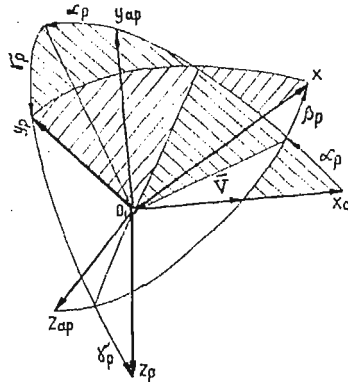
d) Układ osi współrzędnych  $O_1x_p y_p z_p$ . Początek układu pokrywa się ze środkiem masy

pocisku. Oś  $O_1x$  pokrywa się z osią wzdłużną pocisku. Płaszczyzna  $O_1xy_p$  jest płaszczyzną pionową przechodzącą przez oś wzdłużną pocisku (rys. 8).

e) Układ osi współrzędnych  $O_1x_a y_a z_a$ , którego początek pokrywa się ze środkiem masy pocisku. Oś  $O_1x_a$  jest zgodna z kierunkiem wektora prędkości środka masy. Płaszczyzna



Rys. 7. Wzajemne położenie związanego  $O_1xyz$  i prędkościowego  $O_1x_a y_a z_a$  układów osi współrzędnych



Rys. 8. Układy osi współrzędnych  $O_1x_p y_p z_p$  i  $O_1x_a y_a z_a$

$O_1x_a y_a z_a$  jest płaszczyzną pionową przechodzącą przez wektor prędkości środka masy (rys. 8).

Stosowane w literaturze przedmiotu (np. [1]) opisy matematyczne ruchu obiektów latających stwarzają dużo trudności w przypadku analizy przestrzennego ruchu pocisków obracających się w czasie lotu wokół osi podłużnej. Występujące bowiem w równaniach ruchu zmienne  $\gamma, \gamma_a, \alpha, \beta$  (szczególnie dwie pierwsze) powodują silną nieliniowość równań, wymagającą stosowania małego kroku całkowania w przypadku stosowania metod numerycznych. Ponadto podczas analizy ruchu pocisku często zakłada się, że czynniki ruchu bocznego  $\beta, \psi, \psi_a, \gamma, \gamma_a, \omega_x, \omega_y, z_0$  są zerowe, co jest jednoznaczne z założeniem, że nie występują istotne sprzężenia między czynnikami ruchu podłużnego i bocznego. Może to być przyczyną znacznych błędów podczas analizy ruchu pocisków wirujących. Aby uniknąć powyższych niedogodności, dynamiczne równania ruchu dookoła środka masy zapisano w układzie współrzędnych  $O_1x_p y_p z_p$ , co doprowadziło do wyeliminowania z opisu matematycznego zmiennych  $\gamma, \gamma_a, \alpha$  i  $\beta$ .

3.2. Podstawowe równania ruchu pocisku. Zapisując dynamiczne równania ruchu środka masy w układzie współrzędnych  $Ox_a y_a z_a$ , a dynamiczne równania ruchu dookoła środka masy w układzie  $Ox_p y_p z_p$  oraz określając związki kinematyczne i geometryczne między tymi układami, formułując się następujący układ równań, stanowiący model matematyczny przestrzennego ruchu pocisku:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum P_{x_a} = -(X_a + G \sin \vartheta_a) \frac{1}{m} \\ \frac{d\vartheta_a}{dt} &= \sum P_{y_{a_p}} = (Y_{a_p} - G \cos \vartheta_a) \frac{1}{mV} \\ \frac{d\psi_a}{dt} &= \sum P_{z_{a_p}} = \frac{Z_{a_p}}{mV \cos \vartheta_a} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= \sum M_{xp} = \frac{1}{I_{xp}} (M_x^q \varphi_u + M_y^{\omega_x} \bar{\omega}_x + M_x^{\alpha_y \omega_p} \alpha_p \bar{\omega}_{yp} + M_x^{\beta_p \omega_z} \beta_p \omega_{zp}), \\ \frac{d\omega_{yp}}{dt} &= \sum M_{yp} = \frac{1}{I_{yp}} [(M_{yp}^{\alpha_p} \alpha_p + M_{yp}^{\beta_p} \beta_p + M_{yp}^{\alpha_x \omega_x} \alpha_p \bar{\omega}_x) \cos \gamma_p + \\ &\quad + (M_{yp}^{\beta_p} \beta_p + M_{yp}^{\alpha_p} \alpha_p + M_{yp}^{\beta_x \omega_x} \beta_p \bar{\omega}_x) \sin \gamma_p + \\ &\quad + I_{xp} \omega_{zp} \omega_{xp} - I_{xp} \omega_x \omega_{zp}], \end{aligned} \right\} (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{1}{I_{zp}} \sum M_{zp} = \frac{1}{I_{zp}} [I_{xp} \omega_x \omega_{yp} - I_{yp} \omega_x \omega_{yp} - (M_{yp}^{\alpha_p} \alpha_p - M_{yp}^{\beta_p} \beta_p + \\ &\quad + M_{yp}^{\alpha_x \omega_x} \alpha_p \bar{\omega}_x) \sin \gamma_p + (M_{yp}^{\beta_p} \beta_p + M_{yp}^{\alpha_p} \alpha_p + \\ &\quad + M_{yp}^{\beta_x \omega_x} \beta_p \bar{\omega}_x) \cos \gamma_p], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\omega_{yp}}{\cos \vartheta}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{zp}, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \omega_{xp}, \end{aligned} \right\} (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xp} &= \omega_{yp} \cdot \operatorname{tg} \vartheta, \\ \frac{dx_0}{dt} &= V \cos \vartheta_a \cos \psi_a, \\ \frac{dy_0}{dt} &= V \sin \vartheta_a, \\ \frac{dz_0}{dt} &= -V \cos \vartheta_a \sin \psi_a, \end{aligned} \right\} (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_p \cos \beta_p &= \sin \vartheta \cos \vartheta_a - \cos \vartheta \sin \vartheta_a \cos(\psi - \psi_a), \\ \sin \beta_p &= \cos \vartheta \sin(\psi - \psi_a), \\ \sin \gamma_p \cos \beta_p &= \sin \vartheta \sin(\psi - \psi_a). \end{aligned} \right\} (3.5)$$

Układ równań (3.1 ÷ 3.5) można stosować do określenia parametrów lotu pocisku, w przypadku gdy nie zachodzi konieczność uwzględnienia wpływu wiatru na ruch badanego obiektu.

**3.3. Równania ruchu pocisku z uwzględnieniem wiatru.** Oddziaływanie wiatru na poruszający się w ośrodku pocisk uzewnętrznia się w postaci zmiany kierunku oraz modułu składowych sił i momentów aerodynamicznych. Aby uwzględnić w układzie równań (3.1 ÷ 3.5), wpływ wiatru należy wyznaczyć położenie wektora prędkości pocisku względem osi ziemskiego układu współrzędnych. W tym celu wprowadza się kąty  $\psi_{aw}$  i  $\vartheta_{aw}$ , będące odpowiednio kątami odchylenia i pochylenia wektora prędkości względnej  $V_w$ , wyznaczając je za pomocą następujących zależności:

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi_{aw} &= \frac{W_{z_0} - \dot{z}_0}{V_w \cos \vartheta_{aw}}; & \sin \vartheta_{aw} &= \frac{\dot{y}_0}{V_w}, \\ V_w &= \sqrt{V^2 + V_{x_0}^2 + V_{z_0}^2 - 2(\dot{x}_0 V_{x_0} + \dot{z}_0 V_{z_0})}. \end{aligned} \right\} (3.6)$$

gdzie  $V$  — prędkość pocisku,  
 $V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0}$  — odpowiednio składowe prędkości wiatru na oś ziemskiego układu współrzędnych,

$$\dot{x}_0 = \frac{dx_0}{dt}; \text{ itd.}$$

Uwzględniając powyższe, prawe strony równań dynamicznych ruchu środka masy pocisku (3.1) oraz ruchu dookoła środka masy (3.2) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \sum P_{xaw} &= -X_{aw}[\cos\vartheta_a \cos\vartheta_{aw} \cos(\psi_a - \psi_{aw}) + \sin\vartheta_a \sin\vartheta_{aw}] + \\ &\quad + Y_{aw}[\sin\vartheta_a \cos\vartheta_{aw} - \cos\vartheta_a \sin\vartheta_{aw} \cos(\psi_a - \psi_{aw})] + \\ &\quad - Z_{aw} \cos\vartheta_a \sin(\psi_a - \psi_{aw}) - G \sin\vartheta_a, \\ \sum P_{yav} &= X_{aw}[\sin\vartheta_a \cos\vartheta_{aw} \cos(\psi_a - \psi_{aw}) - \sin\vartheta_{aw} \cos\vartheta_a] + \\ &\quad + Y_{aw}[\cos\vartheta_a \cos\vartheta_{aw} + \sin\vartheta_a \sin\vartheta_{aw} \cos(\psi_a - \psi_{aw})] + \\ &\quad + Z_{aw} \sin\vartheta_a \sin(\psi_a - \psi_{aw}) - G \cos\vartheta_a, \\ \sum P_{zav} &= -X_{aw} \cos\vartheta_{aw} \sin(\psi_a - \psi_{aw}) - Y_{aw} \sin\vartheta_{aw} \sin(\psi_a - \psi_{aw}) + \\ &\quad + Z_{aw} \cos(\psi_a - \psi_{aw}), \\ \sum M_{xw} &= M_{xw}^{\sigma} \cdot \varphi_u + M_{xw}^{\bar{\omega}_x} \cdot \bar{\omega}_x + M_{xw}^{\beta_{pw}} \cdot \beta_{pw} \cdot \bar{\omega}_{zp} + M_{xw}^{\alpha_{pw}} \cdot \alpha_{pw} \bar{\omega}_{yp}, \\ \sum M_{yw} &= (M_{yw}^{\beta_{pw}} \cdot \beta_{pw} + M_{yw}^{\alpha_{pw}} \cdot \alpha_{pw} \cdot \varphi_u + M_{yw}^{\bar{\omega}_x} \alpha_{pw} \bar{\omega}_x) \cos \gamma_{pw} + \\ &\quad + (M_{yw}^{\alpha_{pw}} \cdot \alpha_{pw} + M_{yw}^{\beta_{pw}} \cdot \varphi_u \beta_{pw} + M_{yw}^{\bar{\omega}_x} \beta_{pw} \bar{\omega}_x) \sin \gamma_{pw} + \\ &\quad + M_{yw}^{\bar{\omega}_{yp}} \bar{\omega}_{yp} + T_{zp} \omega_x \omega_{zp} - I_{xp} \omega_x \omega_{zp}, \\ \sum M_{zw} &= (M_{zw}^{\alpha_{pw}} \cdot \alpha_{pw} + M_{zw}^{\beta_{pw}} \cdot \varphi_u \beta_{pw} + M_{zw}^{\bar{\omega}_x} \beta_{pw} \bar{\omega}_x) \cos \gamma_{pw} + \\ &\quad - (M_{zw}^{\beta_{pw}} \beta_{pw} + M_{zw}^{\alpha_{pw}} \varphi_u \alpha_{pw} + M_{zw}^{\bar{\omega}_x} \alpha_{pw} \bar{\omega}_x) \sin \gamma_{pw} + \\ &\quad + M_{zw}^{\bar{\omega}_{zp}} \bar{\omega}_{zp} + I_{xp} \omega_x \omega_{yp} - I_{yp} \omega_y \omega_{xp}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

W celu wyznaczenia kątów  $\alpha_{pw}, \beta_{pw}, \gamma_{pw}$  określających wzajemne położenie przepływowego układu osi współrzędnych względem układu  $O_1 x y_p z_p$  należy w równaniach (3.5) opisujących wzajemne położenie układów  $Ox_0 y_0 z_0$  i  $O_1 x_a y_a z_a$  przyjąć:

$$(3.9) \quad \vartheta_a = \vartheta_{aw}; \quad \psi_a = \psi_{aw}$$

Otrzymany w ten sposób opis matematyczny ruchu zawiera m.in. zależności zawierające związki między składnikami kryterium jakości a wielkościami charakteryzującymi bezpośrednio konstrukcję pocisku i ośrodek jego ruchu. Powyższe układy równań dla odpowiednich warunków początkowych wykorzystano do przeprowadzenia analizy numerycznej wpływu różnorodnych zakłóceń na parametry lotu badanego rodzaju pocisku w zakresie odległości strzału bezwzględnej  $X_b$  i prędkości lotu  $1,5 \leq M \leq 6$ , uwzględniając przy tym ograniczenia wynikające z balistyki wewnętrznej, zewnętrznej i końcowej.

Zakłócenia traktowano jako losowe lub zdeterminowane odchylenia od wartości nominalnych wielkości fizycznych charakteryzujących konstrukcję pocisku i ośrodek ruchu w istotny sposób wpływających na ruch obiektu latającego.

Otrzymane w wyniku analizy wnioski potwierdzają specyficzne własności dynamiczne wydłużonych pocisków ciężkich, odróżniając je od innych rodzajów obiektów latających.

#### 4. Wnioski końcowe

W wyniku przeprowadzonych badań symulacyjnych na EMC uzyskano szereg wniosków jakościowych i ilościowych w odniesieniu do zależności parametrów ruchu pocisku od zakłóceń charakteryzujących specyfikę jego konstrukcji i ośrodek ruchu. Do wniosków tych można m.in. zaliczyć następujące spostrzeżenia:

1) Wielkościami wpływającymi w istotny sposób na lot badanego pocisku są: temperatura ośrodka, masa pocisku, parametry charakteryzujące kształt i ustawienie stabilizatorów, kaliber oraz prędkość i kierunek wiatru.

2) Wydłużone pociski ciężkie mają wiele zalet w porównaniu z raketami czy klasycznymi artyleryjskimi pociskami przeciwpancernymi.

Potwierdza to przykładowe (dla  $X_b = 2400$  m) zestawienie charakterystycznych własności balistycznych ww pocisków:

Charakterystyczna własność balistyczna	Wydłużony pocisk ciężki	Pocisk raketowy nie kierowany	Klasyczny przeciwpancerny pocisk uderzeniowy
Spadek prędkości na torze w %	20	40	25 - 60
Przebijalność (mm) przy kącie uderzenia $90^\circ$	420	85	70 - 125
Czas lotu (s)	1,5	3,3	3,7 - 5
Odległość strzału bezwzględnej (m) dla $y_c = 3$ m	2500	1300	1100 - 1150
Parametr $\frac{mV_c^2}{2S_k}$ ( $S_k$ w (mm))	2700	250	60 - 200
Kąt upadku (rad)	0,005	0,1	0,03 - 0,05
Uchylenie $U_s$ (m)	0,8	40	5 - 30
Wierzchołkowa toru Y (m)	3	10	do 25

3) Opracowany model pocisku może być wykorzystany w pracach konstrukcyjnych i modernizacyjnych, w tym również z zastosowaniem zautomatyzowanych metod optymalizacyjnych.

4) Szczególnym zastosowaniem modelu może być jego wykorzystanie w opracowaniu tabel strzelniczych nowych konstrukcji pocisków oraz w modernizacji metod przygotowania danych do strzelania.

## Literatura

1. A. A. LEBEDEV, Ł. S. CZERNOBROWKIN, *Dynamika poleta*. Izd. Maszynostrojenije. Moskwa 1973.
2. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*. Prace naukowe, Mechanika PW, Warszawa 1972.
3. St. WIŚNIEWSKI, *Model matematyczny ruchu rakiety wirującej o krzyżowym układzie aerodynamicznym*. Biuletyn WAT Nr 2, 1979.

## Резюме

## СПЕЦИФИКА ПОЛЕТА СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ УДЛИНЕННОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО ОБЪЕКТА

В работе формулируется физическая модель и математическое описание вращающегося летательного объекта, характеризующегося большим относительным удлинением и большим нагружением поперечного сечения, движущегося со скоростью отвечающей  $1,5 \leq M \leq 6$ . Соответствующий подбор систем отсчета дает возможность уменьшения степени нелинейности уравнений, описывающих пространственное движение в атмосфере специфического, в многих отношениях, объекта, каким является удлиненный подкалиберный бронебойный снаряд. Применение разработанного математического описания движения дает возможность получить результаты дающие непосредственно информации об основных факторах траектории нового типа снарядов с характеристиками рассеивания (меткости) включительно.

## Summary

## CHARACTERISTIC FEATURES OF HIGH SUPERSONIC VELOCITY FLIGHT OF AN ELONGATED HEAVY MISSILE

A physical model and mathematical description of whirling elongated flying object with a high relative elongation and a high cross-section load, moving with supersonic velocity ( $1,5 \leq M \leq 6$ ) has been formulated. A mathematical model of the spatial motion in atmosphere of this, in many respects specific, object — (elongated sabot armour — pierced shell), has been derived.

As a result of suitable choice of the reference system we were able to reduce the degree of non-linearity.

The applications of the mathematical model of the motion enable us to obtain the direct information on the main features of the trajectory and its characteristics.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku*





## MODELOWANIE MATEMATYCZNE STEROWANEGO RUCHU SAMOŁOTU W KORKOCIAGU\*

WOJCIECH BLAJER, (RADOM)  
*WSI Radom*

JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)  
*Politechnika Warszawska*

Dla samolotu sztywnego zbudowano model matematyczny umożliwiającą numeryczną symulację ruchu samolotu w korkociągu. Przyjęto, że zmiany wychyleń powierzchni sterowych wpływają tylko na wartości sił i momentów aerodynamicznych działających na samolot w locie. Model uwzględniał sterowanie samolotem poprzez zmiany wychyleń lotek, steru wysokości i kierunku oraz zmiany ciągu i obrotów silnika. Według założonego programu lotu zamodelowano reakcje pilota sterującego samolotem w korkociągu. Zaprezentowano wyniki numerycznej symulacji ruchu samolotu TS-11 „Iskra” począwszy od przeciągnięcia statycznego, poprzez fazę wejścia w korkociąg i fazę korkociągu rozwiniętego, do wyprowadzenia z korkociągu.

### 1. Wstęp

Przedstawiono model matematyczny umożliwiającą cyfrową symulację sterowanego ruchu samolotu w korkociągu. Samolot traktowano jako sztywny obiekt latający o sześciu stopniach swobody, ze sztywnymi układami sterowania. Przyjęto, że zmiany wychyleń sterów wpływają jedynie na wartości sił i momentów aerodynamicznych działających na samolot w locie.

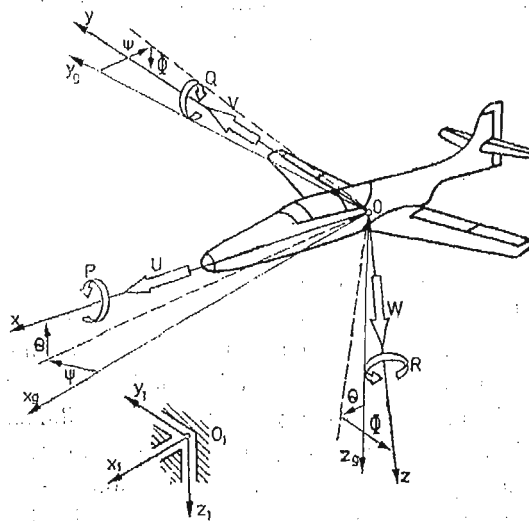
Różniczkowe równania ruchu samolotu, wyprowadzone w układzie związanym z samolotem, uzupełniono związkami kinematycznymi zmian położenia środka masy samolotu i jego konfiguracji w przestrzeni. Uwzględniono również zmianę gęstości powietrza w funkcji wysokości lotu.

Sterowanie samolotem zamodelowano przy pomocy zmian wychyleń lotek, sterów wysokości i kierunku oraz zmian ciągu i obrotów silnika. Chwilowe wartości parametrów sterowania uzależniono od czasu oraz od stanu lotu samolotu. W tym ostatnim przypadku

\* Praca przedstawiona na I Ogólnopolskiej Konferencji *Mechanika w Lotnictwie* Warszawa 19.1.1984 r.

zamodelowano reakcje pilota podczas wprowadzania i wyprowadzania samolotu z korkociągu.

Model przetestowano dla przypadku samolotu TS-11 „Iskra” według własnych programów napisanych w języku FORTRAN. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wykresów zmian podstawowych parametrów ruchu samolotu w funkcji czasu. Zaprezentowano wyniki symulacji ruchu samolotu od przeciągnięcia statycznego, w fazie wejścia w korkociąg i w korkociągu rozwiniętym, do wyprowadzenia z korkociągu.



Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia (układ inercjalny  $O_1x_1y_1z_1$ , związany z ziemią;  $Ox_0y_0z_0$  — ruchomy układ równoległy do inercjalnego,  $Oxyz$  — układ własny), współrzędne katowe (kąty:  $\Phi$  — przechylenia,  $\theta$  — pochylenia,  $\Psi$  — odchylenia), prędkości liniowe i katowe w układzie własnym  $Oxyz$

## 2. Model matematyczny ruchu samolotu w korkociągu

Dynamiczne równania ruchu samolotu wyprowadzono w układzie własnym  $Oxyz$  [1, 2, 3, 4, 5, 6], przy założeniu, że jest to układ centralny oraz że płaszczyzna  $Oxz$  jest płaszczyzną symetrii samolotu. Równania te uzupełniono związkami kinematycznymi uzależniającymi prędkości uogólnione samolotu  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\Phi}, \dot{\theta}, \dot{\Psi}$  od quasi-prędkości  $U, V, W, P, Q, R$  [1, 2, 5, 6]. Całki prędkości uogólnionych, współrzędne uogólnione  $x_1, y_1, z_1, \Phi, \theta, \Psi$  wyznaczają jednoznacznie położenie środka masy samolotu oraz jego konfigurację w przestrzeni. Pełny układ równań do całkowania numerycznego przyjęto w postaci:

$$m\dot{U} = X_a + T \cos \delta - mg \sin \theta + m(VR - WQ), \quad (1)$$

$$m\dot{V} = Y_a + mg \cos \theta \sin \Phi - m(UR - WP), \quad (2)$$

$$m\dot{W} = Z_a - T \sin \delta + mg \cos \theta \cos \Phi + m(UQ - VP), \quad (3)$$

$$J_x \dot{P} - J_{xz} \dot{R} = L_a - J_0 Q \omega \sin \delta + J_{xz} PQ - (J_z - J_y) QR, \quad (4)$$

$$J_y \dot{Q} = M_a + T^e + J_0 \omega (R \cos \delta + P \sin \delta) - J_{xz} (P^2 - R^2) + (J_z - J_x) PR, \quad (5)$$

$$J_z \dot{R} - J_{xz} \dot{P} = N_a - J_0 Q \omega \cos \delta - J_{xz} QR - (J_y - J_x) PQ, \quad (6)$$

$$\dot{\Phi} = P + (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \operatorname{tg} \theta, \quad (7)$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad (8)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{\cos \theta} (Q \sin \Phi + R \cos \Phi), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & U \cos \theta \cos \psi + V (\sin \Phi \sin \theta \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi) + \\ & + W (\cos \Phi \sin \theta \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & U \cos \theta \sin \psi + V (\sin \Phi \sin \theta \sin \psi + \cos \Phi \cos \psi) + \\ & + W (\cos \Phi \sin \theta \sin \psi - \sin \Phi \cos \psi), \end{aligned} \quad (11)$$

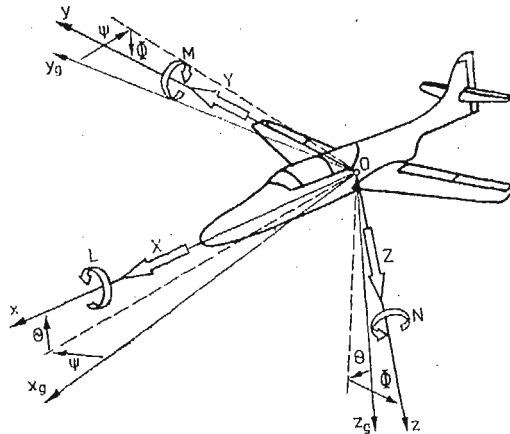
$$\dot{z}_1 = -U \sin \theta + V \sin \Phi \cos \theta + W \cos \Phi \cos \theta, \quad (12)$$

gdzie:  $m$  — masa samolotu,  $X_a, Y_a, Z_a$  — siły aerodynamiczne: podłużna, boczna i pionowa,  $L_a, M_a, N_a$  — momenty aerodynamiczne: przechylający, pochylający i odchylający,  $g$  — przyspieszenie ziemskie,  $T$  — ciąg silnika,  $J_0$  — moment bezwładności części wirujących silnika,  $\delta$  — kąt działania linii ciągu względem osi  $Ox$  w płaszczyźnie  $Oxz$ ,  $\omega$  — prędkość kątowa obrotów zespołu turbina-sprężarka silnika,  $e$  — odległość linii działania ciągu od środka masy,  $J_x, J_y, J_z, J_{xz}$  — momenty bezwładności i dewiacyjny samolotu w układzie  $Oxyz$ .

Dodatkowo uwzględniono zmianę gęstości powietrza w funkcji wysokości lotu. Przyjęto następującą zależność:

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{H_0 - z_1}{44\,300} \right)^{4,256}, \quad (13)$$

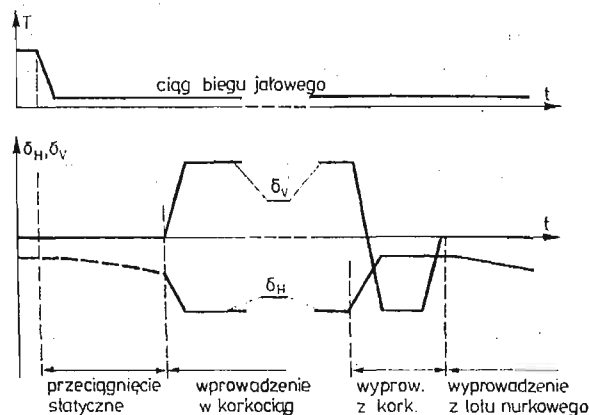
gdzie:  $\rho_0$  — gęstość powietrza na wysokości  $H = 0$  m,  $H_0$  — początkowa wysokość lotu, od której liczone jest  $z_1$  ( $H_0$  oraz  $z_1$  w metrach).



Rys. 2. Siły i momenty działające na samolot, współrzędne w układzie własnym  $Oxyz$ :  $X, Y, Z$  — siły wzdłużna, boczna i pionowa,  $L, M, N$  — momenty przechylający, pochylający i odchylający

Występujące w równaniach (1 ÷ 6) siły i momenty aerodynamiczne  $X_a, Y_a, Z_a, L_a, M_a, N_a$  wyznaczono w zależności od aktualnych parametrów lotu  $U, V, W, P, Q, R$ , aktualnych wartości wychyleń sterów  $\delta_L, \delta_H, \delta_V$  oraz aktualnej wysokości lotu, czyli od aktualnej gęstości powietrza. Przyjęta metoda, opisana bliżej w pracy [1], polegała na sumowaniu oddziaływań aerodynamicznych od poszczególnych części samolotu, to jest od usterzeń pionowego i poziomego, kadłuba i skrzydła podzielonego na  $N = 20$  pasków, odniesionych do środka masy samolotu. Lokalne oddziaływania aerodynamiczne liczone przy uwzględnieniu lokalnych warunków opływu danej części. Opierając się głównie na pracy [4], uwzględniono też szacunkowo wpływ poszczególnych części samolotu na siebie. Opisana metoda pozwoliła na przybliżone uwzględnienie wpływu prędkości kątowych samolotu na wartości sił i momentów aerodynamicznych.

Model sterowania samolotem uwzględniał możliwość zmian wychyleń lotek  $\delta_L$ , steru wysokości  $\delta_H$  i kierunku  $\delta_V$ , ciągu  $T$  i obrotów  $\omega$  silnika. Sposób sterowania samolotem podczas manewrów wprowadzenia i wyprowadzenia z korkociągu przyjęto zgodnie z ogólnie przyjętymi instrukcjami pilotażu, zawartymi między innymi w pracy [7].



Rys. 3. Zamodelowane manewry wprowadzenia i wyprowadzenia samolotu z korkociągu

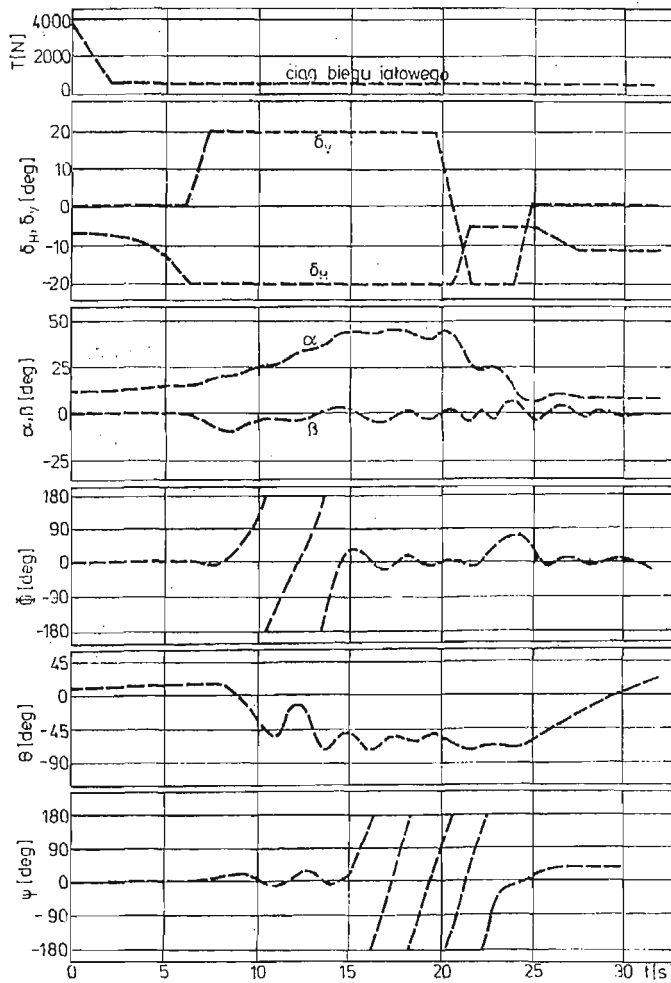
Manewr wprowadzenia w korkociąg poprzedzony został przecignięciem statycznym. W tej fazie lotu ciąg silnika zredukowany został do ciągu biegu jałowego, a następnie w miarę wytracania prędkości, samolot utrzymywany był w locie prostym poziomym poprzez stopniowy wzrost wychylenia steru wysokości. Po przekroczeniu krytycznego kąta natarcia na płatach, następowały typowe manewry sterem kierunku i wysokości.

Manewr wyprowadzenia z korkociągu polegał na pełnym przeciwnym wychyleniu steru kierunku w celu zatrzymania obrotu samolotu oraz jednoczesnym „oddaniu drążka sterowego”, czyli zmniejszeniu wychylenia steru wysokości. Po zatrzymaniu wirowania samolotu ster kierunku wycofywany jest do położenia neutralnego i rozpoczyna się faza lotu nurkowego. Wyprowadzenie z lotu nurkowego polega na stopniowym wzroście wychylenia steru wysokości.

W przyjętym modelu sterowania nie przewidziano manewrów lotkami w żadnej z faz korkociągu. Podobnie nie zamodelowano wzrostu ciągu silnika przy wyprowadzeniu

z korkociągu. Zbudowany model matematyczny dopuszcza jednak każdy inny model sterowania w zakresie zmian  $\delta_L$ ,  $\delta_H$ ,  $\delta_V$ ,  $T$ ,  $\omega$ .

Model sterowania ingeruje w równania ruchu samolotu (1 ÷ 6), pośrednio wpływając poprzez wartości  $\delta_L$ ,  $\delta_H$ ,  $\delta_V$  na wielkości sił i momentów aerodynamicznych oraz bezpośrednio poprzez wartości  $T$  i  $\omega$ . Aktualne wartości parametrów sterowania zmieniają się w funkcji czasu oraz w zależności od stanu lotu. Ta ostatnia zależność oznacza, że zamodelowano reakcje pilota na aktualny stan lotu. Podczas przeciągnięcia statycznego jest to zwiększanie wychylenia steru wysokości dla podtrzymania lotu prostego poziomego, następnie reakcja na przekroczenie krytycznego kąta natarcia na płatach, co zapoczątkowuje manewry wprowadzenia w korkociąg. Zamodelowano też reakcję na zaprzestanie wirowania samolotu podczas wyprowadzania z korkociągu oraz rozpoczęcie wyprowadzania samolotu z lotu nurkowego.



Rys. 4. Przebiegi czasowe parametrów sterowania oraz podstawowych parametrów ruchu samolotu w korkociągu

Uwzględniając powyższe uwagi oraz fakt, że gęstość powietrza  $\rho$  jest funkcją zależną od  $z_1$ , otrzymujemy równania (1÷12), które są więc równaniami w postaci wektorowej:

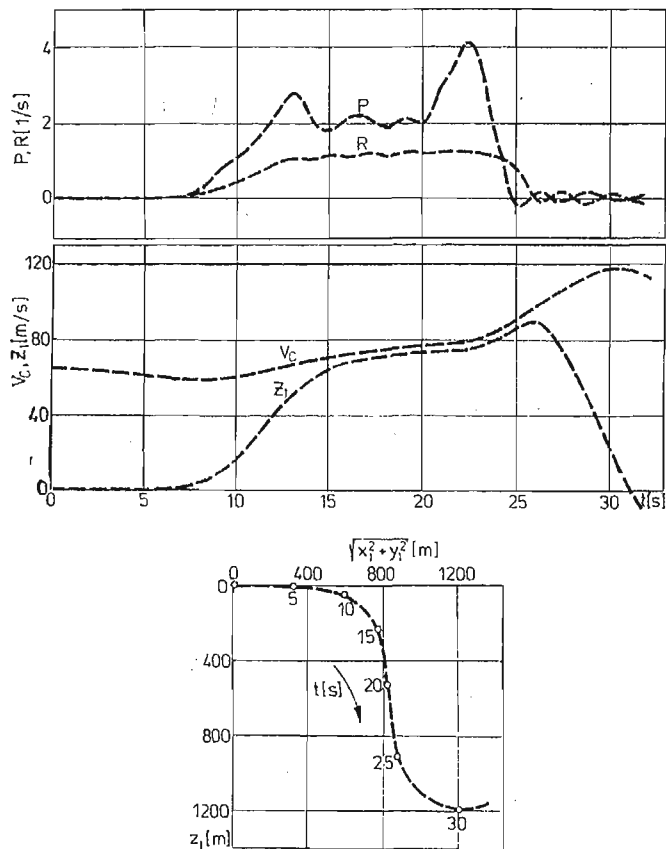
$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad (14)$$

gdzie:  $\mathbf{X} = \text{col}[U, V, W, P, Q, R, \Phi, \theta, \Psi, x_1, y_1, z_1]$  — wektor stanu,  $\mathbf{F}$  — wektor prawych stron,  $t$  — czas.

### 3. Przykład obliczeniowy

Obliczenia przykładowe, prezentujące możliwości zbudowanego modelu, przeprowadzono dla samolotu TS-11 „Iskra”, wykorzystując zbiór własnych programów napisanych w języku FORTRAN.

Symulując ruch samolotu w korkociągu postawiono sobie następujące zadania: wprowadzenie w korkociąg z przecignięcia statycznego, do którego stanem lotu początkowego jest lot prosty, poziomy, ustalony na wysokości  $H = 1500$  m. Po przekroczeniu krytycznego kąta natarcia na płatach zamodelowano manewry sterami wysokości i kierunku



Rys. 5. Przebiegi czasowe podstawowych parametrów ruchu samolotu w korkociągu

wprowadzające samolot w korkociąg. Po wejściu samolotu w korkociąg postawiono wymóg wykonania dwóch zwitek korkociągu rozwiniętego (dwa pełne obroty odchylające — zmiany kąta  $\psi$ ). Następnie zaprogramowano manewry wyprowadzenia samolotu z korkociągu (przeciwnie wychylenie steru kierunku i zmniejszenie wychylenia steru wysokości, a po zaprzestaniu wirowania samolotu, powrót steru kierunku do położenia neutralnego) i manewry wyprowadzenia z lotu nurkowego. Przebiegi podstawowych parametrów lotu samolotu w funkcji czasu, na tle zmian parametrów sterowania, prezentuje rys. 4.

#### Literatura

1. W. BLAJER, *Badanie dynamiki samolotu w korkociągu*, praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1982.
2. W. BLAJER, J. MARYNIAK, *Modelowanie matematyczne autorotacji samolotu w korkociągu*, XXII Symp. PTMTiS „Modelowanie w mechanice”, Gliwice—Wisła 1983.
3. B. ETKIN, *Dynamics of atmospherics flight*, John Wiley, New York 1972.
4. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, PWN, Warszawa 1961.
5. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, prace naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika nr. 32, Wyd. PW, Warszawa 1975.
6. J. MARYNIAK, M. ZŁOCKA, *Stateczność boczna samolotu i drgania lotek z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydeł i sprężystości układu sterowania*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, tom 14, zeszyt 1, Warszawa 1976.
7. T. PIĘTAK, *Eksploatacja samolotu TS-11 „Iskra” w szczególnych przypadkach lotu*, Cykl Techniki Lotniczej, WOSL-106/74, Dęblin 1974.

#### Резюме

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО САМОЛЁТА ВО ВРЕМЯ ШТОПОРА

Управляемый самолёт принято как жёсткую механическую систему с шестью степенями свободы. Принято, что отклонение рулёв влияет только на изменение аэродинамических сил и аэродинамических моментов действующих на самолёт во время полета. Уравнения движения выведено принимая уравнения Больцманна-Гамеля в квази-координатах системы связанной с самолётом. Примерно, сделано вычисления для самолёта класса TS — 11 „Iskra”

#### S u m m a r y

#### MATHEMATICAL MODELLING OF AIRCRAFT CONTROLLED MOTION IN SPIN

For a rigid plane, a mathematical model for computer digital simulation of airplane motion in spin is presented. Deflections of control surfaces have been assumed to have an influence only on aerodynamic forces and moments acting on the plane in flight. The model have considered aircraft controlling by changes of ailerons, horizontal and vertical tails, jet thrust and angular velocity of jet rotation. Accordingly to a programmed flight mode, reactions of the pilot controlling an aircraft in spin have been modelled. Test results of digital computer simulation carried out for TS-11 „Iskra” aircraft motion in spin entry, developed spin and spin departure are presented.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 grudnia 1984 roku*





## STATECZNOŚĆ SPIRALNA SAMOLOTU W RUCHU PRZESTRZENNYM Z UWZGLĘDNIENIEM EFEKTÓW ELEMENTÓW WIRUJĄCYCH ZESPOŁU NAPĘDOWEGO\*

JERZY MARYNIAK, WITOLD MOLICKI (WARSZAWA)

*ITLIMS Politechnika Warszawska*

### 1. Wyprowadzenie równań ruchu samolotu

Ruch samolotu w przestrzeni opisano stosując następujące układy odniesienia (rys. 1):

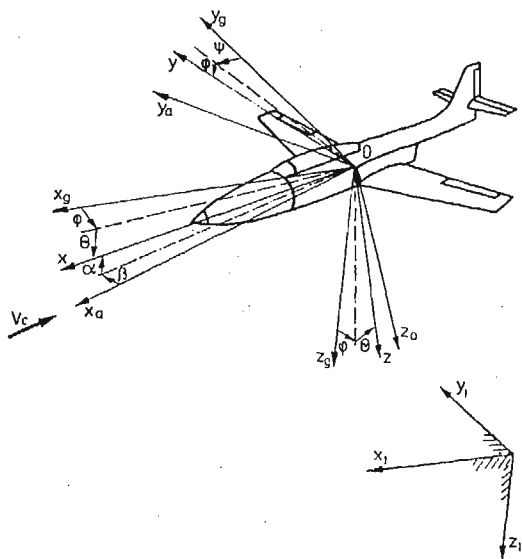
$OXYZ$  — układ „samolotowy” sztywno związany z poruszającym się samolotem,

$OX_aY_aZ_a$  — układ „prędkościowy” związany z kierunkiem przepływu,

$OX_gY_gZ_g$  — układ grawitacyjny związany z poruszającym się samolotem równoległy do układu  $OX_1Y_1Z_1$ .

$OX_1Y_1Z_1$  — nieruchomy układ grawitacyjny związany z ziemią.

Dodatkowo wprowadzono układ współrzędnych  $CX, Y, Z$ , związany z silnikiem. Początek  $C$  układu umieszczony jest w środku masy zespołu turbina — sprężarka, oś  $X$ , skierowana

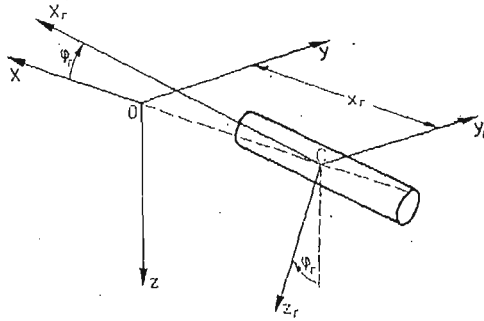


Rys. 1.

\*<sup>1</sup>) Praca przedstawiona na I Ogólnopolskiej Konferencji. *Mechanika w Lotnictwie*. Warszawa 19.1.1984.

jest wzdłuż osi obrotu zespołu ku przodowi płatowca, oś  $Z_r$  leży w płaszczyźnie symetrii samolotu i jest skierowana ku spodowi płatowca, zaś oś  $Y_r$  tworzy z dwoma poprzednimi prawoskrętny układ kartezjański (rys. 2). Przyjęto, że środek masy zespołu turbina-sprężarka leży w odległości  $x_r$  od początku układu  $OXYZ$ , a oś  $X_r$  tworzy z osią  $X$  kąt  $\varphi_r$ . Dla tak przyjętych układów współrzędnych macierz prędkości kątowej  $\Omega$  silnika w układzie  $OXYZ$  ma postać:

$$\Omega = \text{col}[P + \omega_r \cos \varphi_r, Q, R - \omega_r \sin \varphi_r], \quad (1)$$



Rys. 2.

gdzie:  $\omega_r$  — prędkość kątowa zespołu wirującego w układzie  $CX_rY_rZ_r$ ,  
 $P, Q, R$  — prędkości kątowe samolotu w układzie  $OXYZ$ .

Macierz prędkości liniowych środka masy zespołu wirującego w układzie  $OXYZ$  ma postać:

$$V = \text{col}[U, V - Rx_r, W + Qx_r], \quad (2)$$

gdzie:  $U, V, W$  — prędkości środka masy samolotu w układzie  $OXYZ$ . Samolot potraktowano jako ciało o siedmiu stopniach swobody, bez uwzględniania drgań powierzchni sterowych. Jako siódmy stopień swobody przyjęto ruch obrotowy zespołu turbina-sprężarka wokół własnej osi.

Dynamiczne równania ruchu samolotu w przestrzeni wyprowadzono stosując równania Boltzmana-Hamela [2, 3]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \gamma_{\alpha\mu}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^*, \quad (3)$$

gdzie:  $T^*$  — energia kinetyczna układu wyrażona w quasi-współrzędnych i quasi-prędkościach,

$\gamma_{\alpha\mu}^r$  — trójwskaźnikowe symbole Boltzmana,

$Q_\mu^*$  — siły uogólnione wyrażone w quasi-współrzędnych i quasi-prędkościach.

Jako współrzędne uogólnione przyjęto:

$q_1 = x_1, q_2 = y_1, q_3 = z_1$  — odległości środka masy samolotu od początku układu współrzędnych  $OX_1Y_1Z_1$ ,

$q_4 = \Phi, q_5 = \theta, q_6 = \Psi$  — kąty przechylenia, pochylenia i odchylenia samolotu mierzone od nieruchomego układu współrzędnych związanego z samolotem  $OX_\theta Y_\theta Z_\theta$  do ruchomego sztywno związanego z samolotem układu  $OXYZ$ ,

$q_7 = \varphi_w$  — kąt obrotu zespołu wirującego turbina-sprężarka.

Przyjmując zależności (1 - 3) otrzymano [7] równania ruchu samolotu w locie przestrzennym uwzględniające oddziaływania elementów wirujących zespołu napędowego:

$$\dot{U}m + QWm - RVm + R^2m_r x_r + Q^2m_r x_r = X^*; \quad (a)$$

$$\dot{V}m - \dot{R}m_r x_r - (PW - RU)m - PQm_r x_r = Y^*; \quad (b)$$

$$\dot{W}m + \dot{Q}m_r x_r - (QU - PV)m - PRm_r x_r = Z^*; \quad (c)$$

$$\begin{aligned} & \dot{P}(J_x + J_{x_r} \cos^2 \varphi_r + J_{z_r} \sin^2 \varphi_r) - \dot{R}[J_{xz} + (J_{x_r} - J_{z_r}) \sin \varphi_r \cos \varphi_r] - \dot{Q}J_{xy} + \\ & + \dot{n} \frac{\pi}{30} J_{x_r} (\cos^3 \varphi_r + \sin^2 \varphi_r \cos \varphi_r) + (R^2 - Q^2)J_{yz} - QR(J_y - J_z + J_{y_r}) + \\ & - J_{z_r} \cos^2 \varphi_r - J_{x_r} \sin^2 \varphi_r + m_r x_r^2 - PQ[J_{xz} + (J_{x_r} - J_{z_r}) \sin \varphi_r \cos \varphi_r] + \\ & + PRJ_{xy} + Qn \frac{\pi}{30} J_{x_r} (\sin^3 \varphi_r + \cos^2 \varphi_r \sin \varphi_r) = L^*; \end{aligned} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} & \dot{Q}(J_y + J_{y_r} + 2m_r x_r^2) + \dot{W}m_r x_r - \dot{P}J_{xy} - \dot{R}J_{yz} + (P^2 - R^2)[J_{xz} + \\ & + (J_{x_r} - J_{z_r}) \sin \varphi_r \cos \varphi_r] + PQJ_{yz} - RQJ_{xy} - PR[J_z - J_x - J_{x_r} (\cos^2 \varphi_r + \\ & - \sin^2 \varphi_r) - J_{z_r} (\sin^2 \varphi_r - \cos^2 \varphi_r) + m_r x_r^2] + (PV - QU)m_r x_r + \\ & + nR \frac{\pi}{30} J_{x_r} (\cos^3 \varphi_r + \sin^2 \varphi_r \cos \varphi_r) + nP \frac{\pi}{30} J_{x_r} (\sin^3 \varphi_r + \cos^2 \varphi_r \sin \varphi_r) = M^*; \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} & \dot{R}(J_z + J_{z_r} \cos^2 \varphi_r + J_{x_r} \sin^2 \varphi_r + m_r x_r) - \dot{P}[J_{xz} + (J_{x_r} - J_{z_r}) \sin \varphi_r \cos \varphi_r] + \\ & - \dot{Q}J_{yz} - \dot{V}m_r x_r - \dot{n} \frac{\pi}{30} J_{x_r} (\sin^3 \varphi_r + \cos^2 \varphi_r \sin \varphi_r) + (Q^2 - P^2)J_{xy} + \\ & - PQ(J_x - J_y + J_{x_r} \cos^2 \varphi_r + I_{z_r} \sin^2 \varphi_r - J_{y_r} - 2m_r x_r^2) + QR[J_{xz} + \\ & + (J_{x_r} - I_{z_r}) \sin \varphi_r \cos \varphi_r] - PRJ_{yz} + (PW - UR)m_r x_r + \\ & - Qn \frac{\pi}{30} J_{x_r} (\cos^3 \varphi_r + \sin^2 \varphi_r \cos \varphi_r) = N^*; \end{aligned} \quad (f)$$

$$\begin{aligned} & \dot{n}J_{x_r} (\sin^2 \varphi_r + \cos^2 \varphi_r)^2 - \dot{R}J_{x_r} (\sin \varphi_r + \cos^2 \varphi_r \sin \varphi_r) + \\ & + \dot{P}J_{x_r} (\cos^3 \varphi_r + \sin^2 \varphi_r \cos \varphi_r) = n^*; \end{aligned} \quad (g)$$

Dodatkowo uwzględniono:

— związki kinematyczne prędkości liniowych

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= U \cos \theta \cos \psi + V(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + \\ & + w(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi), \\ \dot{y}_1 &= U \cos \theta \sin \psi + V(\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) + \\ & + w(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi), \\ \dot{z}_1 &= -U \sin \theta + V \sin \phi \cos \theta + w \cos \phi \cos \theta; \end{aligned} \quad (5)$$

— związki kinematyczne prędkości kątowych

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= P + Q \sin \phi \operatorname{tg} \theta + R \cos \phi \operatorname{tg} \theta, \\ \dot{\theta} &= Q \cos \phi - R \sin \phi, \\ \dot{\psi} &= Q \sin \phi \operatorname{sec} \theta + R \cos \phi \operatorname{sec} \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

— zmianę kąta natarcia  $\alpha$ , kąta ślizgu  $\beta$ , prędkości liniowej samolotu  $v_c$ , oraz gęstości powietrza  $\rho$ :

$$\alpha = \arcsin \frac{w}{\sqrt{u^2 + w^2}}; \quad \beta = \arcsin \frac{v}{V_c}; \quad V_c^2 = U^2 + v^2 + W^2; \quad (7)$$

$$\rho = \rho_0(1 + z_1/44300)^{4,256} \quad \text{dla} \quad h = -z_1 \leq 11 \text{ km.}$$

Prawe strony równań (4) określono następująco [4, 5]

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{bmatrix} = \Delta_{BW} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} L^* \\ M^* \\ N^* \end{bmatrix} = \Delta_{BW} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}; \quad n^* = -\frac{nJx_r}{\tau_2}; \quad (8)$$

gdzie  $X, Y, Z, L, M, N$  — oznaczają siły i momenty działające na samolot. Wyrażenia te wyprowadzone w układzie „prędkościowym” mają postać [8]:

$$\begin{aligned} X &= -P_x + P_y \cos(\varphi_r + \alpha) - (P_{xH} + P_{xv}) \cos \varepsilon - P_{zH} \sin \varepsilon - P_{yv} \sin(\beta_0 + \delta) \cos \varepsilon - mg \sin \theta, \\ Y &= P_y + P_{sy} + P_{yv} \cos(\beta_0 + \delta) - mV_A^2/R + Y_r + mg \cos \theta \sin \phi, \\ Z &= -P_z - P_s \sin(\varphi_r + \alpha) - P_{zH} \cos \varepsilon + (P_{xH} + P_{xv}) \sin \varepsilon + mg \cos \theta \cos \phi, \\ L &= L_{\delta v} + L_{\delta L} + L_v + L_r + L_Q + L_T, \\ M &= M_{bH} - P'_{zH} X_{AH} + P'_{xH} Z_{AH} + P_{xv} \sin(\alpha - \varepsilon) z_{Av} + M_Q + M_T, \\ N &= N_{\delta v} + N_v + N_r + N_Q + N_T, \end{aligned} \quad (9)$$

$\Delta_{BW}$  — oznacza macierz transformacji z układu „prędkościowego” do układu „samolotowego” i przedstawia się następująco:

$$\Delta_{BW} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$\tau_2$  — stała czasowa silnika turboodrzutowego  $\sigma$  mająca postać:

$$\tau_2 = \left[ (1,269 - 0,703 \text{ Ma}) - (2,978 - 1,961 \text{ Ma}) \left( \frac{n}{10^3 \sqrt{T_H}} \right) + (1,82 + \right.$$

$$\left. - 1,333 \text{ Ma}) \left( \frac{n}{10^3 \sqrt{T_H}} \right)^2 \right] \left[ 1 + 0,3 \left( \frac{Q_0(t - \tau_0) - Q_0}{Q_0} \right)^2 \right] \frac{\sqrt{T_H}}{P_H}, \quad (11)$$

gdzie  $Q_0$  — charakterystyka statyczna silnika  $Q_0 = f(n)$ :

$$Q_0 = \left[ -57,1 + 387 \left( \frac{n}{10^3 \sqrt{T_H}} \right) - 704 \left( \frac{n}{10^3 \sqrt{T_H}} \right)^2 + 475 \left( \frac{n}{10^3 \sqrt{T_H}} \right)^3 \right] \times$$

$$\times \left[ 1 + 1,88 \text{ Ma} \left( \left( \frac{n}{10^3 \sqrt{T_H}} \right) - 0,9 \right) \right] P_H \sqrt{T_H}, \quad (12)$$

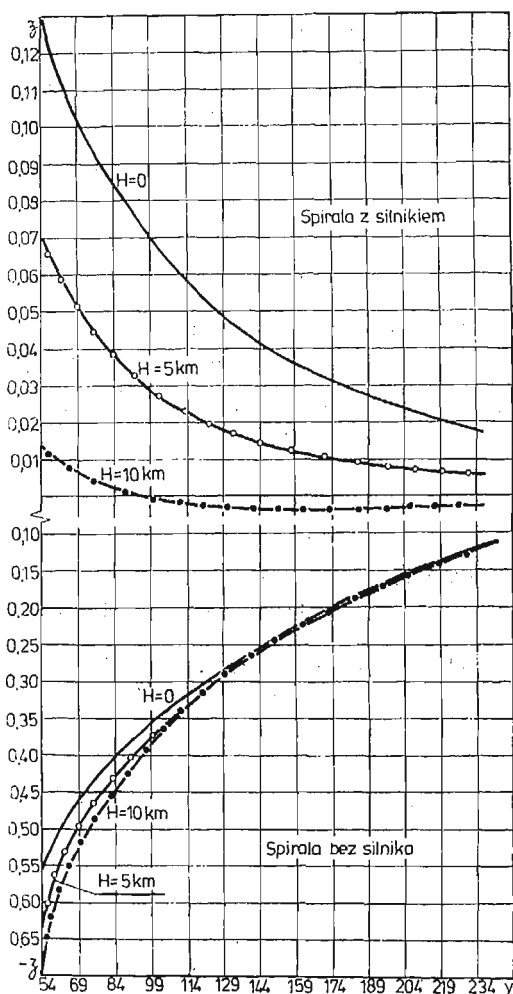
$\tau_0$  — stała czasowa  $\tau_0 = f(n)$ ,

$$\tau_0 = \frac{0,094 - 0,0196 \left( \frac{n}{10^3 \sqrt{T_H}} \right) + 0,106 \left( \frac{n}{10^3 \sqrt{T_H}} \right)^2}{1 + 0,2 \left( \frac{|Q_0(t - \tau_0) - Q_0|}{Q_0} \right)} \frac{\sqrt{T_H}}{P_H}, \quad (13)$$

$P_h, T_h$  — ciśnienie i temperatura powietrza na wysokości  $H$  nad poziomem morza,  
 $\text{Ma}$  — liczba Macha dla danej prędkości i wysokości lotu.

## 2. Badanie stateczności spiralnej samolotu w ruchu przestrzennym

Otrzymany układ równań (4÷7) zlinearyzowano stosując metodę małych zakłóceń wokół położenia równowagi. Otrzymano układ trzynastu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Układ ten poddano analizie modalnej w celu wnioskowania o jego stateczności. Wyniki obliczeń numerycznych dla postaci ruchu nazywanego spiralą przedstawiono



Rys. 3.

na rysunku 3 — zmiana współczynnika tłumienia  $\zeta$  w funkcji prędkości. Jako samolot testowy do obliczeń przyjęto samolot TS-11 „ISKRA” wyposażony w silnik SO-3, ze względu na dostęp do niezbędnych danych. Obliczenia wykonano w pełnym zakresie prędkości lotu, oraz dla trzech wybranych wysokości lotu.

Uwzględnienie w modelu samolotu elementów wirujących zespołu napędowego w zdecydowany sposób zmieniło jakościowo i ilościowo rozwiązania równań ruchu przestrzennego samolotu, wpływając na pogorszenie stateczności ruchu „spiralnego”.

## Literatura

1. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, J. Wiley, New York 1972.
2. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*. Prace naukowe—Mechanika nr. 32, Politechnika Warszawska, Warszawa 1975.
3. R. GUTOWSKI, *Mechanika Analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
4. I. W. OSTOSŁAWSKI, *Aerodynamika samolota*. GIOP, Moskwa 1957.
5. W. FISZDON, *Mechanika Lotu*. t.1, 2, PWN, Łódź—Warszawa 1960.
6. F. LENORT, *Próba określenia modelu matematycznego silnika turboodrzutowego jako obiektu regulacji*. Prace ILOT nr 68, WNT, Warszawa 1972.
7. W. MOLICKI, *Modelowanie własności dynamicznych samolotu w locie przestrzennym z uwzględnieniem mas wirujących*. XXII Sympozjon Modelowanie w mechanice — zbiór referatów (s. 299 - 306) Gliwice — PTMTS 1983.
8. Z. GORAJ, *Obliczenia sterowności, równowagi i stateczności samolotu w zakresie poddźwiękowym*. Politechnika Warszawska — skrypt (w druku).

## Резюме

СПИРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ САМОЛЕТА В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ  
УЧИТЫВАЯ ЭФФЕКТА ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИЛОВОЙ УСТАНОВКИ

В работе обсуждено спиральную устойчивость самолёта в пространственном движении. Предложено динамическую модель самолёта с силовой установкой. Представлено результаты численных решения для спиральной устойчивости.

## Summary

SPIRAL STABILITY OF AIRPLANE IN A SPACE MOTION  
WITH THE EFFECT OF POWER UNIT SPIN ELEMENTS

In the paper, the problem of spiral stability in a space motion is presented. Dynamic model of an airplane with power unit is proposed. Solution of the spiral stability motions have been obtained by means of a digital computer.

*Praca została złożona 25 grudnia 1984 roku*

## NUMERYCZNE I ORGANIZACYJNE ASPEKTY OBLICZEŃ STATECZNOŚCI SAMOLOTU\*

ZDOBYSŁAW GORAJ (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Uzyskanie świadectwa typu (certyfikatu) dla statku powietrznego wymaga dowodu, że wybrane własności statyczne i dynamiczne owego statku są zgodne z przepisami obowiązującymi w danym kraju. Dowód zgodności może być przeprowadzony albo w próbach naziemnych i w próbach w locie prototypu, albo łącznie w oparciu o próby i obliczenia numeryczne. Ponieważ obliczenia numeryczne są zwykle dużo tańsze niż badania eksperymentalne, a ponadto mogą być przeprowadzane już na etapie projektu wstępnego, więc zwykle udział obliczeń w dowodzie zgodności z przepisami jest znaczny. Przyjrzyjmy się przepisom w zakresie stateczności dynamicznej na przykładzie przepisów amerykańskich — FAR-ów [1]. Odnośnie stateczności bocznej dla samolotów kategorii normalnej, użytkowej i akrobacyjnej przepisy te mówią: „Wszelkie złożone wahania boczno-kierunkowe (holendrowanie) pojawiające się pomiędzy prędkością przeciągnięcia a maksymalną dopuszczalną prędkością właściwą dla konfiguracji samolotu muszą być tłumione do 1/10 amplitudy w 7 cyklach przy zasadniczych sterownicach puszczonej i trzymanych”. Każdy statek powietrzny jest przewidziany do użytkowania w kilku konfiguracjach masowych, w kilku konfiguracjach aerodynamicznych, często z różnymi wersjami silnika. Ponadto sam lot może się odbywać w różnych warunkach i mieć rozmaite fazy, jak np.: wznoszenie, lot poziomy, zakręt, nurkowanie, lot z bocznym opływem. Zdarza się również często, że na etapie projektu wstępnego rozważa się różne wersje geometryczne i masowe, takie jak różne wydłużenia płata, różne konfiguracje płat-kadłub, różne wyważenia itp. Ze wszystkich powyższych uwag wynika, że obliczenia muszą być tanie. Oznacza to, że zbiór danych wejściowych powinien być minimalny, pole pamięci zarezerwowane przy egzekucji programu powinno być jak najwęższe, same zaś obliczenia powinny być jak najszybsze, co należy rozumieć, że liczba wykonywanych operacji powinna być zminimalizowana. W dalszym ciągu pracy nie będziemy zajmować się szczegółami dotyczącymi minimalizacji danych wejściowych i minimalizacji pola pamięci. Wspomnimy tylko, że celowy jest po-

\* Fragmenty pracy były referowane na I Ogólnopolskiej Konferencji pt.: „Mechanika w Lotnictwie”, Warszawa 1984.01.19.

dział danych wejściowych na dane zmienne i dane stałe. Zbiór danych zmiennych powinien być minimalny, jednakże liczebność tego zbioru zależy od tego, czy np. zamierzamy modyfikować geometrię samolotu, czy też tylko warunki zewnętrzne i wyważenie. W odniesieniu do zmniejszenia pola pamięci wspomnimy, że celowe jest wielokrotne wykorzystywanie tablic roboczych, zmiennych pomocniczych oraz zastosowanie segmentacji programu. Szerzej omówimy natomiast zagadnienie szybkości obliczeń oraz wiążące się z tym aspekty organizacyjne i numeryczne.

W związku z tym sformułujemy trzy tezy:

$T_1$ : Obliczenia są tańsze, gdy równania ruchu „związane są” z punktem stałym na samolocie.

$T_2$ : Obliczenia są tańsze, gdy równania ruchu są zapisane w opływowym układzie współrzędnych.

$T_3$ : Przy modyfikacji konstrukcji pomocne są tzw. diagramy stateczności.

## 2. Dynamiczne równania ruchu samolotu związane z punktem stałym

Równania ruchu wyprowadzone w układzie współrzędnych związanych ze środkiem masy samolotu mają wprawdzie najprostszą postać, gdyż dla środka masy momenty statyczne są równe zeru, jednakże wykonanie obliczeń dla różnych położenia środków masy pociąga za sobą zmiany wielu danych wejściowych — geometrycznych i aerodynamicznych, niezależnych bezpośrednio od położenia środka masy. Dlatego wygodniej jest związać przyjęty układ współrzędnych z punktem stałym na samolocie. Punkt stały może być wybrany dowolnie. Wygodnie jest za punkt stały przyjąć  $1/4$  średniej cięciwy aerodynamicznej skrzydła ( $1/4$  SCA). W bliskim sąsiedztwie  $1/4$  SCA znajduje się środek aerodynamiczny płata, co gwarantuje, że nachylenie krzywej  $dc_{mbh}/dc_2$  jest niezbyt duże. W przypadku gdy obliczenia będą przeprowadzone również dla zmiennych wydłużeń i różnych zbieżności płata, wygodnie jest za punkt stały obrać np.  $1/4$  cięciwy przykadłubowej płata. Natomiast gdy w obliczeniach będzie zmieniane położenie płata względem kadłuba, to jako punkt stały można przyjąć dowolny punkt związany z kadłubem.

Dynamiczne równania ruchu samolotu mogą być wyprowadzone z uogólnionych równań zmiany pędu i krętu [2] dla bryły sztywnej w postaci:

$$\frac{d}{dt} m(\mathbf{V}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AC}) = \mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{P}_s, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{J}_A \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{AC} \times \frac{d\mathbf{V}_A}{dt} = \mathbf{AC} \times m\mathbf{g} + \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_A^P,$$

gdzie  $\mathbf{V}_A$  — prędkość bieguna  $A$  (czyli wybranego dowolnie punktu stałego),  $\boldsymbol{\Omega}$  — prędkość kątowna samolotu,  $\mathbf{AC}$  — wektor wyznaczający położenie środka masy samolotu względem bieguna  $A$ ,  $\mathbf{F}$  — wektor główny sił aerodynamicznych,  $\mathbf{P}_s$  — ciąg zespołu napędowego,  $\mathbf{J}_A$  — pseudotensor macierzy bezwładności związany z biegunem  $A$ ,  $\mathbf{M}_A$  — moment główny wszystkich sił aerodynamicznych obliczony względem bieguna  $A$ ,  $\mathbf{M}_A^P$  — moment ciągu zespołu napędowego obliczony względem bieguna  $A$ .

Równania ruchu mogą być również wyprowadzone z równań Boltzmann-Hamela [3]. W takim przypadku za współrzędne uogólnione należy przyjąć położenie punktu



stałego w inercyjnym układzie odniesienia oraz położenie kątowne bryły samolotu, a za quasi-współrzędne należy przyjąć prędkości liniowe punktu stałego i prędkości kątowne bryły samolotu.

Porównanie szybkości obliczeń przeprowadzimy w przypadku, gdy:

A) równania związane są z punktem stałym (czyli z punktem  $A$ )

C) równania związane są ze środkiem masy (czyli z punktem  $C$ ).

W przypadku  $A$  zbiorem zmiennych przeliczanych wraz ze zmianą wyważenia jest 9 elementów, a mianowicie:  $x_c, y_c, z_c, J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$ . W przypadku  $C$  przeliczeniu podlega znacznie więcej zmiennych, a mianowicie: 1) elementy macierzy bezwładności (przy zmianie wyważenia nowe momenty bezwładności są albo zadawane, albo obliczane na podstawie znajomości zmiany położenia elementów samolotu); 2) ramiona usterzeń —  $l_H, z_H, l_v, z_v$ ; 3) współczynnik momentu pochylającego  $c_{mbh}$ ; 4) większość pochodnych aerodynamicznych —  $X_q, Z_q, \dots, N_p, N_r$ . Należy podkreślić, że przeliczanie pochodnych aerodynamicznych przy zmianie bieguna redukcji jest szczególnie czasochłonne [4]. Dla przykładu podamy wzór na transformację liniową pochodnej  $M_q$  przy zmianie bieguna o wektor  $\{Dx, O, Dz\}$ :

$$M'_q = M_q + Dx(Z_q + M_w) - Dz(X_q + M_u) + Dx^2 Z_w - Dx Dz(Z_u + X_w) + Dz^2 X_u.$$

### 3. Transformacja kątowa pochodnych aerodynamicznych

W rozważaniach zastosujemy trzy prawoskrętne, ortogonalne układy współrzędnych:  $Ax_i$  — samolotowy układ współrzędnych związany z punktem  $A$  ( $1/4SCA$ ). Oś  $Ax_1$  jest skierowana wzdłuż  $SCA$  do przodu samolotu, oś  $Ax_2$  prostopadle do płaszczyzny symetrii samolotu na prawe skrzydło, oś  $Ax_3$  w kierunku brzucha samolotu;

$Ax_i'$  — prędkościowy układ współrzędnych powstały z  $Ax_i$  przez obrót wokół osi  $Ax_2$  w jej ujemnym kierunku o kąt natarcia  $\alpha$ ;

$Ax_i''$  — opływowy układ współrzędnych (w przypadku braku bocznego opływu nazywany również układem prędkościowym), powstały z  $Ax_i'$  przez obrót wokół osi  $Ax_3'$  w jej dodatnim kierunku o kąt bocznego opływu  $\beta_0$  (rys. 1).

Wprowadzenie jednolitych oznaczeń:

$F_i F_i' F_i''$  dla współrzędnych siły i momentu,

$S_j S_j' S_j''$  dla wymiarowych przyrostów prędkości liniowych, kątowych i przyspieszenia liniowego  $\dot{w}$ ,

$s_j s_j' s_j''$  dla bezwymiarowych przyrostów prędkości liniowych, kątowych i przyspieszenia liniowego  $\dot{w}$ ,

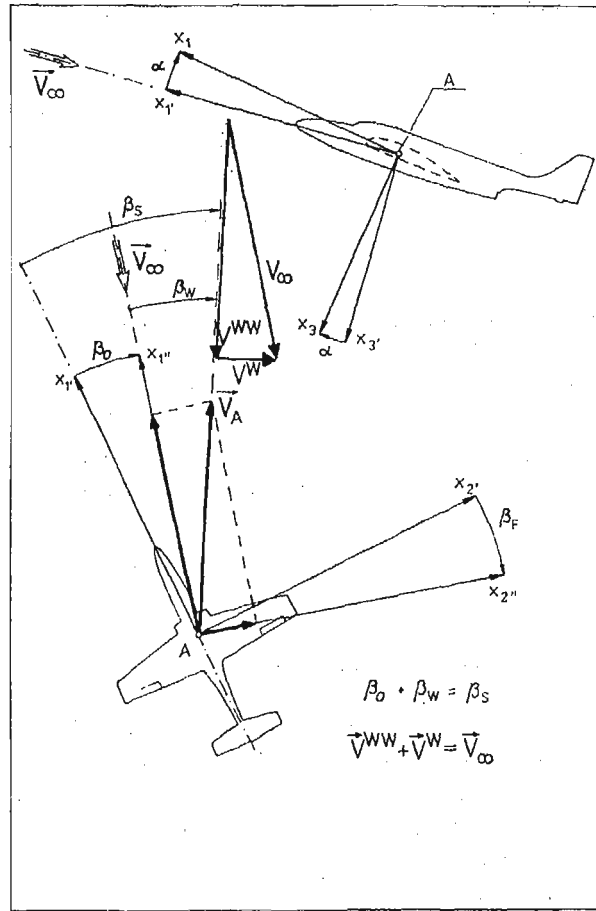
$l_i l_i' l_i''$  dla wymiaru charakterystycznego, odpowiadającego kolejnym równaniom sił i momentów oraz bezwymiarowym prędkościom liniowym i kątowym oraz przyspieszeniu  $\dot{w}$ ,

$C_i C_i' C_i''$  dla bezwymiarowych współczynników sił i momentów aerodynamicznych,

$c_{ij} c_{ij}' c_{ij}''$  dla pochodnych bezwymiarowych współczynników sił i momentów  $C_i$  względem bezwymiarowych przyrostów  $s_j$  prędkości liniowych, kątowych i przyspieszenia,

$F_{ij} F_{ij}' F_{ij}''$  dla wymiarowych pochodnych aerodynamicznych,

$p_{ij} p_{ij}' p_{ij}''$  dla bezwymiarowych pochodnych aerodynamicznych, umożliwi przeprze-



Rys. 1.

wadzenie wspólnych obliczeń i wspólnego dowodu o transformacji na przykładzie jednej z grup pochodnych aerodynamicznych, np. siły względem prędkości kątowej. Wprowadzone powyżej symbole oznaczają w zależności od wskaźnika  $i$  lub  $j$  następujące współrzędne (pierwotne definicje odnoszą się albo do układu samolotowego, jak np.  $l_i$ , albo do układu optywowego, jak np.  $C_i'$ , albo też równie dobrze do każdego układu współrzędnych):

$$\{F_i''\} = \{-P_x, P_y, -P_z, L, M, N\},$$

$$\{S_j''\} = \{u'', v'', w'', p'', q'', r'', \dot{w}''\},$$

$$\{s_j''\} = \left\{ \frac{u''}{V_A}, \frac{v''}{V_A}, \frac{w''}{V_A}, \frac{p''b}{V_A}, \frac{q''c_a}{V_A}, \frac{r''b}{V_A}, \frac{\dot{w}''c_a}{V_A^2} \right\} = \left\{ \frac{S_j'' l_j''}{V_A^{2-n}} \right\},$$

gdzie  $n = 1$  dla  $j'' = 1, 2, \dots, 6$  i  $n = 0$  dla  $j'' = 7$ ,

$$\{l_i\} = \{1, 1, 1, b, c_a, b, c_a\},$$

$$\{C_i''\} = \{-c_x, c_y, -c_z, c_l, c_m, c_n\},$$

$$\{c_{i''j''}\} = \left\{ \frac{\partial C_{i''}}{\partial \frac{S_{j''} l_{j''}}{V_A^{2-n}}} \right\},$$

$$\{F_{i''j''}\} = \left\{ \frac{\partial F_{i''}}{\partial S_{j''}} \right\},$$

gdzie  $F_{i''} = 0,5 \rho V_A^2 S l_{i''} C_{i''}$ ,

$$\{p_{i''j''}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial S_{j''}} (0,5 \rho V_A^2 S l_{i''} C_{i''}) \frac{1}{0,5 \rho S V_A^n l_{i''} l_{j''}} \right\}.$$

Wymiarową pochodną aerodynamiczną zdefiniujemy następująco:

$$F_{i''j''} = \frac{\partial F_{i''}}{\partial S_{j''}} = \frac{\partial}{\partial S_{j''}} (0,5 \rho V_A^2 S l_{i''} C_{i''}), \quad (2)$$

gdzie

$$l_{i''} = l_i \delta_{ii''} (\delta_{ii''} \text{ jest Deltą Kroneckera}),$$

$$V_A^2 = \sum_{k''=1}^3 (U_{k''} + u_{k''})^2 \text{ przy czym na podstawie rys. 1 mamy:} \quad (3)$$

$$U_{1''} = V_A \cos \beta_w, \quad U_{2''} = V_A \sin \beta_w, \quad U_{3''} = 0. \quad (4)$$

Różniczkując (3) względem  $S_{j''}$  otrzymujemy:

$$\frac{\partial V_A^2}{\partial S_{j''}} = 2(U_{j''} + u_{j''}) \approx 2U_{j''},$$

co przy uwzględnieniu (4) daje

$$\frac{\partial V_A^2}{\partial S_{1''}} = 2V_A \cos \beta_w, \quad \frac{\partial V_A^2}{\partial S_{2''}} = 2V_A \sin \beta_w, \quad \frac{\partial V_A^2}{\partial S_{j''}} = 0 \quad \text{dla } j'' = 3, 4, \dots, 7. \quad (5)$$

Pochodne bezwymiarowych współczynników  $C_{i''}$  obliczymy następująco:

$$C_{i''j''} = \frac{\partial C_{i''}}{\partial S_{j''}} = \frac{\partial C_{i''}}{\partial \left( \frac{S_{j''} l_{j''}}{V_A^{2-n}} \right)} \frac{l_{j''}}{V_A^{2-n}} = c_{i''j''} \frac{l_{j''}}{V_A^{2-n}}. \quad (6)$$

Bezwymiarowe pochodne aerodynamiczne  $p_{i''j''}$  są równe:

$$p_{i''j''} = \frac{\partial}{\partial S_{j''}} (0,5 \rho V_A^2 S l_{i''} C_{i''}) \frac{1}{0,5 \rho S V_A^n l_{i''} l_{j''}} =$$

$$= \frac{\rho S U_{j''} l_{i''} C_{i''}}{0,5 \rho S V_A^n l_{i''} l_{j''}} + \frac{0,5 \rho V_A^2 S l_{i''} c_{i''j''} \frac{l_{j''}}{V_A^{2-n}}}{0,5 \rho V_A^n S l_{i''} l_{j''}}, \quad (7)$$

po uwzględnieniu zaś (5) przybiorą postać

$$p_{i''j''} = 2C_{i''} f_{j''} + c_{i''j''}, \quad (8)$$

gdzie

$$f_1'' = \cos \beta_w, \quad f_2'' = \sin \beta_w, \quad f_3'' = f_4'' = \dots = 0 \quad (9)$$

Wzór (8) definiujący bezwymiarowe pochodne aerodynamiczne zapiszemy w postaci:

$$p_{i''j''} = 2C_{i''}f_{j''} + c_{i''j''} \quad \text{dla } j'' = 1, 2 \text{ oraz} \quad (10)$$

$$p_{i''j''} = c_{i''j''} = \frac{\partial C_{i''}}{\partial \frac{S_{j''}l_{j''}}{V_A^{2-n}}} \quad \text{dla } j'' = 3, 4, 5, 6, 7. \quad (11)$$

Macierze transformacji  $T^{SP}$  z układu samolotowego do prędkościowego,  $T^{PO}$  z układu prędkościowego do opływowego i  $T^{SO} = T^{PO}T^{SP}$  z układu samolotowego do prędkościowego są następujące:

$$T^{SP} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad T^{PO} = \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & \sin \beta_0 & 0 \\ -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Współrzędne  $C_i$  dowolnego wektora  $\mathbf{C}$  w układzie samolotowym  $Ax_i$  mogą być obliczone, jeśli znane są współrzędne  $C_{i''}$  tego wektora w układzie opływowym. Mamy

$$C_{i''} = T_{i''i}^{SO} C_i,$$

skąd, biorąc pod uwagę ortogonalność macierzy  $T^{SP}$ ,  $T^{PO}$ ,  $T^{SO}$  wynika

$$T_{i''k}^{SO} C_{i''} = T_{i''k}^{SO} T_{i''i}^{SO} C_i = \delta_{ki} C_i = C_k,$$

co jest równoznaczne z

$$C_k = T_{i''k}^{SO} C_{i''}. \quad (12)$$

Transformacja wymiarowych pochodnych aerodynamicznych może być przeprowadzona następująco:

$$F_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial S_j} = \frac{\partial F_i}{\partial F_{i''}} \frac{\partial F_{i''}}{\partial S_j} = \frac{\partial F_i}{\partial F_{i''}} \frac{\partial F_{i''}}{\partial S_{j''}} \frac{\partial S_{j''}}{\partial S_j}. \quad (13)$$

Z równania (12) wynikają związki:

$$\frac{\partial F_i}{\partial F_{i''}} = T_{i''i}^{SO}, \quad \frac{\partial S_{j''}}{\partial S_j} = T_{j''j}^{SO}, \quad (14)$$

z pomocą których (13) przepisujemy w postaci

$$F_{ij} = T_{i''i}^{SO} T_{j''j}^{SO} F_{i''j''}. \quad (15)$$

Równania (15) przedstawiają zasadę transformacji wymiarowych pochodnych aerodynamicznych. Jest to transformacja tensorowa [4, 5]. Jednakże jeżeli weźmiemy pod uwagę, że równania (15) uwzględniają tylko transformację kątową bez transformacji liniowej, to dojdziemy do wniosku, że tylko pochodna wektora głównego sił aerodynamicznych względem wektora prędkości liniowej,  $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{V}_A$ , jest tensorem. Pozostałe pochodne, a więc  $\partial \mathbf{F} / \partial \Omega$ ,  $\partial \mathbf{F} / \partial \dot{\mathbf{V}}_A$ ,  $\partial \mathbf{M}_A / \partial \mathbf{V}_A$ ,  $\partial \mathbf{M}_A / \partial \Omega$ ,  $\partial \mathbf{M}_A / \partial \dot{\mathbf{V}}_A$ , są pseudotensorem (tzn. transformują się tensorowo tylko przy obrotach, natomiast transformacja liniowa nie ma charakteru tensorowego).

Transformacja współrzędnych dowolnego punktu z układu samolotowego  $Ax_i$  do układu opływowego  $Ax_{i''}$  może być przeprowadzona następująco:

$$x_{i''} = T_{i''i}^{SO} x_i,$$

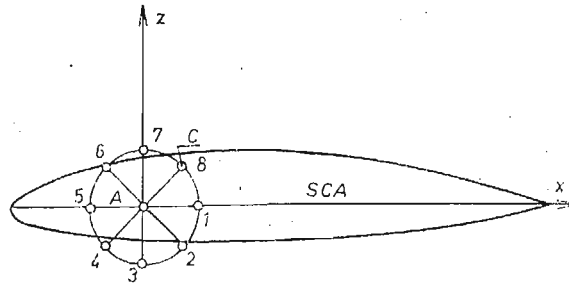
skąd wynika, że transformacja pseudotensora bezwładności ma postać:

$$J_{i''j''} = \int T_{i''i}^{SO} x_i T_{j''j}^{SO} x_j dm = T_{i''i}^{SO} T_{j''j}^{SO} J_{ij}. \quad (16)$$

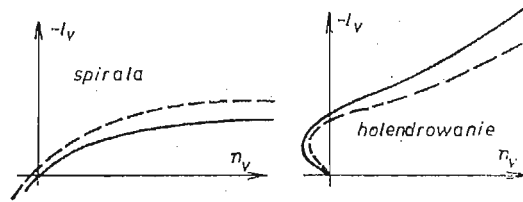
Rozważmy zagadnienie obliczania wartości własnych i postaci drgań samolotu przy wielu różnych prędkościach lotu i różnych kątach bocznego opływu. Założymy przy tym, że pochodne aerodynamiczne są znane w układzie opływowym. Założenie to jest w większości przypadków spełnione. W przypadku pomiarów pochodnych aerodynamicznych w tunelu składowe siły i momentów mierzone są właśnie wzdłuż osi związanych z opływem. Podobnie jest w przypadku, gdy pochodne są oszacowywane na podstawie metod teoretycznych [4]. W przypadku zapisania równań ruchu w układzie samolotowym należy w każdym kroku obliczeniowym dokonywać transformacji współrzędnych sześciu pseudotensorów pochodnych aerodynamicznych. W zapisie skalarnym sprowadzi się to do transformacji 54 pochodnych aerodynamicznych (pod warunkiem, że istnieją również tzw. pochodne skrośne). W tym przypadku nie podlegają transformacji współrzędne pseudotensora bezwładności oraz współrzędne środka masy. Natomiast w przypadku gdy równania ruchu zapisane są w układzie opływowym, pochodne aerodynamiczne nie podlegają transformacji, należy zaś transformować współrzędne pseudotensora bezwładności (6 współrzędnych) i 3 współrzędne środka masy  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$ . Tak więc obliczenia stateczności w układzie opływowym są szybsze (wykonuje się mniejszą liczbę operacji), a więc i tańsze. Nawet w przypadku gdy pominiemy pochodne aerodynamiczne skrośne oraz pochodne względem przyspieszeń, to i tak pozostanie do transformacji 18 pochodnych aerodynamicznych, co w każdym przypadku przemawia na korzyść układu opływowego.

#### 4. Diagramy stateczności

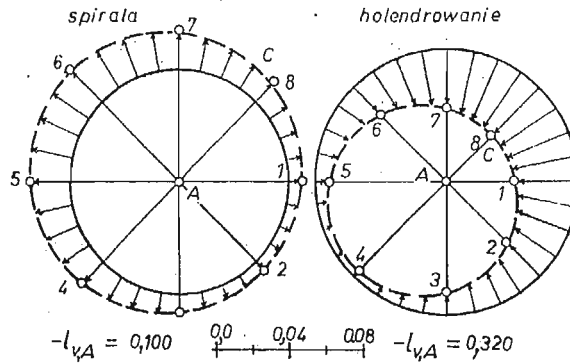
Przy modyfikacji konstrukcji często napotyka się na sprzeczne cele. I tak np. zwiększenie usterzenia pionowego „poprawia stateczność” holendrowania, pogarsza natomiast stateczność spirali (poprawę czy też pogorszenie stateczności rozumie się tutaj jako zmniejszenie lub zwiększenie czasu podwojenia amplitudy drgań). Wydaje się, że przy modyfikacji konstrukcji celowe byłoby zastosowanie teorii wrażliwości. Jednakże nawet małe zmiany konstrukcyjne mogą spowodować duże zmiany w opływie, a w związku z tym spore zmiany pochodnych aerodynamicznych. Nieliniowa wersja teorii wrażliwości jest zbyt kłopotliwa w zastosowaniach i trudno byłoby przekonać do niej konstruktorów samolotu. Klasyczna metoda obliczeń stateczności również wydaje się niecelowa, gdyż liczba wariantów ze względu na możliwe zmiany geometrii jest bardzo duża. Okazuje się, że bardzo wygodną metodą jest w tym przypadku sporządzenie diagramów stateczności. Dynamiczne równania ruchu, oddzielnie dla modelu symetrycznego i antysymetrycznego, mogą być sprowadzone do równań algebraicznych IV stopnia. Obliczenie pierwiastków takiego równania może być wykonane nawet na kalkulatorze kieszonkowym. Typowe diagramy stateczności przedstawione są w [4, 6]. W niniejszej pracy zamieszczono wyniki obliczeń granic obszarów stateczności samolotu TS-11 przy zmianie wyważenia. Założono, że zmiana wyważenia odbywa się w wyniku wędrówki środka masy po okręgu o promieniu równym 10%  $SCA$ , którego środek znajduje się w  $\frac{1}{4} SCA$  (rys. 2). Zmianie położenia środka masy towarzyszy



Rys. 2.



Rys. 3.



Rys. 4.

zmiana momentów bezwładności samolotu. Przyjęto założenie, że we wszystkich konfiguracjach momenty bezwładności względem środka masy i układu osi równoległych do układu samolotowego są takie same, czyli że  $J_{x,C} = \text{const}$ ,  $J_{z,C} = \text{const}$ ,  $J_{xz,C} = \text{const}$ . Oznacza to, że momenty bezwładności odniesione do  $\frac{1}{4}$  SCA (a więc do punktu stałego) mogą być obliczone następująco:

$$J_{x,A} = J_{x,C} + mz_c^2, \quad J_{z,A} = J_{z,C} + mx_c^2, \quad J_{xz,A} = J_{xz,C} + mx_c z_c,$$

gdzie indeks  $A$  oznacza  $\frac{1}{4}$  SCA, indeks zaś  $C$  oznacza środek masy.

Na podstawie obliczeń stwierdzono, że najkorzystniejsza sytuacja ze względu na stateczność spirali i holendrowania jest wtedy, gdy środek masy znajduje się w  $\frac{1}{4}$  SCA. Przemieszczenie środka masy poza  $\frac{1}{4}$  SCA podnosi granicę stateczności spirali i obniża granicę stateczności holendrowania (rys. 3). Zmiany granic stateczności w funkcji położenia

środku masy samolotu przedstawiono na rys. 4. Linie ciągłe oznaczają wartość pochodnej aerodynamicznej ( $-l_v$ ) na granicy stateczności spirali i holendrowania przy środku masy położonym w  $\frac{1}{4}$  SCA. Linie przerywane oznaczają odpowiednie granice przy niezmienionej pochodnej  $n_v$ , w funkcji położenia środka masy. Z rysunku 4 widać, że ze względu na spiralę najkorzystniejszą konfiguracją jest górnopłat z wyważeniem tylnym, ze względu zaś na holendrowanie — górnopłat z wyważeniem przednim (środek masy znajduje się zwykle w pobliżu osi kadłuba, więc ujemne  $z_c$  odpowiada konfiguracji górnopłata). Na zakończenie należy podkreślić, że wymagania co do stateczności samolotu są zwykle spełniane przez konstruktora dopiero w dalszej kolejności, np. po zagwarantowaniu dobrych osiągnięć, prostoty konstrukcji czy wreszcie taniej eksploatacji. Są to często sprzeczne ze sobą cele i sprzeczne również z wymogami stateczności. Jednakże konstruktor powinien być świadomy, jakie zmiany mogą powstać ze względu na stateczność samolotu po zmianie wyważenia czy też innych parametrów.

### 5. Podsumowanie

W pracy przedyskutowano różne aspekty wiążące się z organizacją i metodyką obliczeń stateczności samolotu. Wykazano, że ze względu na szybkość, a więc i koszty obliczeń numerycznych celowe jest związanie równań ruchu z punktem stałym na samolocie oraz zapisanie tychże równań w opływowym układzie współrzędnych (pod warunkiem, że pochodne aerodynamiczne znane są też dla układu opływowego). W pracy wskazano również na korzyści wynikające z zastosowania zapomnianych już dziś i rzadko stosowanych diagramów stateczności. Diagramy stateczności, w odróżnieniu od nieliniowej teorii wrażliwości, są bardzo łatwe do otrzymania i mogą być cenną pomocą dla konstruktora samolotu przy modyfikacji i ustalaniu właściwego kierunku zmian.

### Literatura

1. FAR-23, Vol. III, part 23. *Federal Aviation Administration, Department of Transport.*, Washington 1965 (with Amendments of 23.10.1972).
2. Z. GORAJ, *Comparison between Analytical and Vectorial Methods of the Synthesis of Equations of Motion*. Proc. Instn. Mech. Engrs, Vol 197C, 99/83 IMechE, December pp. 265 - 274, 1983.
3. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Mechanika z. 32, Warszawa 1975.
4. Z. GORAJ, *Obliczenia sterowności, równowagi i stateczności samolotu w zakresie poddźwiękowym*, preskrypt wydany przez Zakłady Graficzne Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1984.
5. Z. GORAJ, *Tensory pochodnych aerodynamicznych i ich rola w modelowaniu własności dynamicznych samolotu*, Materiały XX Sympozjonu „Modelowanie w Mechanice”, Gliwice—Wisła 1981, Wydawnictwa Politechniki Śląskiej w Gliwicach, str. 166 - 178, 1981.
6. A. W. BABISTER, *Aircraft Dynamics, Stability and Response*, Pergamon Press, Oxford, New York 1980.

## Резюме

## ЧИСЛЕННЫЕ И ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ САМОЛЕТА

В работе рассматриваются различные аспекты вычислений устойчивости самолёта. Доказано, что с точки зрения времени и цены вычислений целесообразно связать уравнения движения с постоянной точкой самолёта, а также вычертить проекцию этих уравнений на координатную систему, связанную с вектором скорости невозмущённого обтекания. В работе указано тоже достоинства диаграмм устойчивости при модификации конструкции.

## Summary

## NUMERICAL AND ORGANIZATIONAL SIDES TO THE COMPUTING OF STABILITY OF AN AIRCRAFT

In the paper many sides to the computing of stability are considered. It is shown that from point of view of the time and the cost of computations it is advisable to join the equations of motion with a „fixed point“ of the aircraft. Also it is advisable to project these equations on the stability axes (i.e. axes, which are connected with the vector of undisturbed flow). An advantage of usage of the stability diagrams in the design modification is mentioned.

*Praca została złożona w Redakcji 12 kwietnia 1985 roku*



## ANALIZA DYNAMIKI STEROWANEJ ŁOPATY NOŚNEGO WIRNIKA ŚMIGŁOWCA METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH\*

JERZY MANEROWSKI (WARSZAWA)

ITWL

### 1. Wstęp

W pracy przedstawiono metodykę numerycznego badania dynamiki sterowanej łopaty nośnego wirnika śmigłowca w zawisie. Wykorzystano przy tym metodę elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej ([1, 6 i 7]) oraz metodę numerycznego całkowania Wilsona-Newmarka [2].

W opracowanym modelu łopatę potraktowano jako odkształcalną belkę o zmiennych wzdłuż długości parametrach sztywności, bezwładności i tłumienia [3]. Uwzględniono przy tym wpływ bezwładności obrotu przekrojów na linię ugięcia łopaty [4].

Obciążenie aerodynamiczne łopaty wyznaczono w oparciu o teorię quasi-ustalonego przepływu — analogicznie jak w pracy [3].

Zamieszczono algorytm numerycznego badania dynamiki sterowanej łopaty oraz wyniki przykładowych obliczeń.

### 2. Równania dynamicznej równowagi

Niżej zamieszczono wyprowadzone równania dynamicznej równowagi wirującej łopaty nośnego wirnika śmigłowca w zawisie (rys. 1). Zastosowano metodę elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej ([1, 6 i 7]).

Wprowadzono następujące układy współrzędnych prostokątnych (rys. 1):

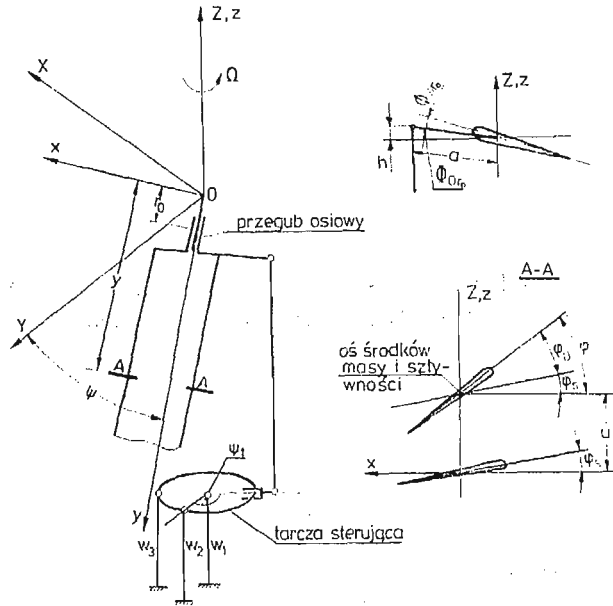
$OXYZ$  — inercjalny układ związany ze śmigłowcem,

$Oxyz$  — związany z osią przekręceń nie odkształconej łopaty,

$Ox_i y_i z_i$  — związany z  $i$ -tym elementem skończonym.

Łopatę traktowano jako odkształcalną belkę ([3 i 4]) o zmiennych wzdłuż długości parametrach. Przyjęto, że materiał łopaty spełnia założenia lepkosprężystego modelu Voigta [5].

\* Praca przedstawiona na I Ogólnopolskiej Konferencji „Mechanika w Lotnictwie” Warszawa 1984.01.19.



Rys. 1.

Założono, że kąt ustawienia łopaty  $\varphi(y, t)$  (rys. 1) jest zmienny w czasie i jest zależny od położenia tarczy sterującej oraz azymutu łopaty  $\psi(t)$ .

Ograniczono się do przypadku łopaty sztywno zamocowanej do wirnika i wirującej ze stałą prędkością kątową  $\Omega$ . Założono, że przemieszczenia łopaty w kierunku osi  $x$  i  $y$  są pomijalnie małe w porównaniu z przemieszczeniami wzdłuż osi  $z$ .

Obciążenia aerodynamiczne łopaty śmigłowca w zawisie (rys. 1), zgodnie z teorią quasi-ustalonego przepływu, stanowią (por. [3]):

— siła aerodynamiczna (ciąg)

$$T(y, t) = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial C_z}{\partial \varphi} b \left[ \varphi \Omega^2 y^2 - \Omega y \frac{\partial u}{\partial t} + \left( 0,75 - \frac{x_0}{b} \right) b \Omega y \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right], \quad (2.1)$$

— moment pochylający (moment skręcający)

$$M(y, t) = -\frac{\pi}{16} \rho b^3 \Omega y \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sigma_r T(y, t) \quad (2.2)$$

gdzie:  $\rho$  — gęstość powietrza,  $C_z$  — współczynnik siły nośnej,  $b$  — cięciwa łopaty,  $x_0$  — odległość osi sztywności od noska profilu,  $\sigma_r$  — odległość ogniska aerodynamicznego od osi sztywności,

oraz

$$\varphi = \varphi(y, t) = \varphi_s(y) + \varphi(y, t) \quad (2.3)$$

$\varphi_0(y, t)$  — zmienny w czasie kąt ustawienia łopaty, związany ze sterowaniem łopaty oraz jej odkształceniami,

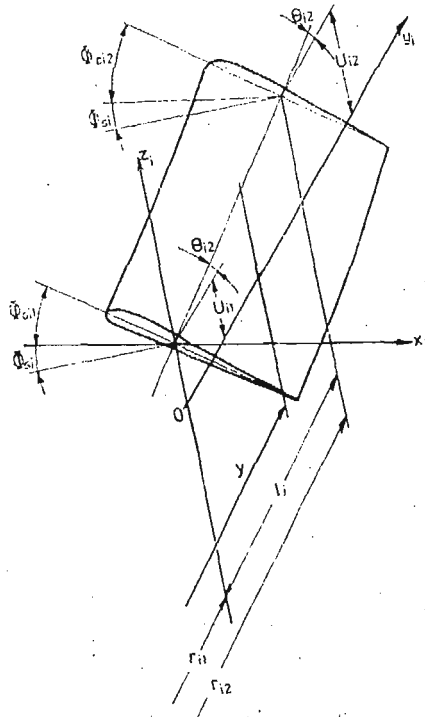
$\varphi_s(y)$  — kąt ustawienia nie odkształconej łopaty.

Celem ułożenia równań równowagi, łopate podzielono na  $i$  odkształcalnych elementów skończonych (rys. 2) o: długości  $l_i$ , stałych kątach ustawienia  $\Phi_{si}$  (kąt ustawienia nie odkształconej łopaty — wzór (2.3) oraz stałych wartościach parametrów sztywności, bezwładności i tłumienia:

$EJ_x, GJ_y$  — odpowiednio sztywność na zginanie i skręcanie,

$m, I_x, I_y$  — odpowiednio masa i masowe momenty bezwładności na jednostkę długości względem osi  $x_i$  i  $y_i$ ,

$\varepsilon_z, \varepsilon_s$  — współczynniki tłumienia materiałowego odpowiednio dla zginania i skręcania.



Rys. 2.

Założono również stałe wartości  $b, x_0, \sigma_f$  i  $\frac{\partial c_z}{\partial \varphi}$  (por. (2.1) i (2.2)) wzdłuż długości elementu.

Funkcje przemieszczenia  $i$ -tego elementu założono w postaci wielomianów algebraicznych: dla zginania wielomian trzeciego stopnia i dla skręcania wielomian pierwszego stopnia. Jako stopnie swobody elementu przyjęto: przemieszczenie  $U$ , kąt obrotu przekroju  $\theta$  i kąt skręcenia  $\Phi_0$  lewej oraz prawej krawędzi (rys. 2).

Po uwzględnieniu powyższych ustaleń oraz wykorzystaniu zasady prac wirtualnych, równanie równowagi omawianej łopaty przyjmuje postać:

$$[K_1] \{U_1\} + [C_1] \{\dot{U}_1\} + [B_1] \{\ddot{U}_1\} = \{F_1\}, \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\{U_1\} = [U, \theta, \Phi_0]_1, (U, \theta, \Phi_0)_2 \dots (U, \theta, \Phi_0)_k]^T, \quad (2.5)$$

$k = i + 1$  — liczba węzłów łopaty, przy czym  $(U, \Theta, \Phi_0)_1$  są przemieszczeniami łopaty na promieniu  $r_0$  (rys. 1).

Warunki brzegowe dla łopaty (rys. 1) są następujące:

$$\begin{aligned} u(r_0, t) &= U_{r_0}(t) = U_1 = 0, \\ \frac{\partial u(r_0, t)}{\partial y} &= \Theta_{r_0}(t) = \Theta_1 = 0, \\ \varphi_0(r_0, t) &= \Phi_{0,r_0}(t) = \Phi_{01}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 3. Numeryczne rozwiązanie problemu

Opierając się na równaniu (2.4) i warunkach (2.6), przy wykorzystaniu metody numerycznego całkowania Wilsona-Newmarka, zbadano dynamikę sterowanej łopaty śmigłowca w zawisie.

W tym celu równanie (2.4), po uwzględnieniu (2.6), przedstawiono w postaci:

$$[K] \{U\} + [C] \{\dot{U}\} + [B] \{\ddot{U}\} = \{F\}. \quad (3.1)$$

Liczba równań zależności (3.1) zmniejszona jest o trzy w porównaniu z zależnością (2.4).

Macierze współczynników równania (3.1) oraz wektorów  $\{U\}$ ,  $\{\dot{U}\}$ ,  $\{\ddot{U}\}$  i  $\{F\}$  określone są następująco:

$[K]$ ,  $[C]$  i  $[B]$  są odpowiednio macierzami powstałymi w wyniku odrzucenia pierwszych trzech wierszy i kolumn w macierzach  $[K_1]$ ,  $[C_1]$  i  $[B_1]$ ;

$$(3.2) \quad \{U\} = [(U, \Theta, \Phi_0)_2 \dots (U, \Theta, \Phi_0)_k]^T$$

oraz analogicznie  $\{\dot{U}\}$  i  $\{\ddot{U}\}$ :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{14} \\ F_{15} \\ \vdots \\ F_{1k} \end{Bmatrix} - \dot{\Phi}_{01} \begin{Bmatrix} C_{143} \\ C_{153} \\ \vdots \\ C_{1k3} \end{Bmatrix} - \ddot{\Phi}_{01} \begin{Bmatrix} B_{143} \\ B_{153} \\ \vdots \\ B_{1k3} \end{Bmatrix} - \Phi_{01} \begin{Bmatrix} K_{143} \\ K_{153} \\ \vdots \\ K_{1k3} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Kąt ustawienia łopaty  $\Phi_{01} = \Phi_{0,0} = \Phi(t)$  zależy od położenia tarczy sterującej. Wielkość tego kąta określono z zależności geometrycznych i kinematycznych (rys. 1):

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= \arcsin \frac{h}{a}, \\ h &= h(t) = w_1(t)(1 - \cos \psi_t - \sin \psi_t) + w_2(t) \sin \psi_t + w_3(t) \cos \psi_t, \\ \psi_t &= \psi_t(t) = \Omega t + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 4. Algorytm numerycznego badania dynamiki

Do rozwiązania równania (3.1) wykorzystano metodę całkowania [2]. Metoda ta pozwala na obliczenie w chwili  $t + \Delta t$  wektorów  $\{U\}$ ,  $\{\dot{U}\}$  i  $\{\ddot{U}\}$ , jeżeli znane są te wektory w chwili  $t$ , przy założeniu liniowej zmiany  $\{\ddot{U}\}$  w przedziale  $t + \tau$ , gdzie  $\tau = \gamma \Delta t$ , a  $\gamma > 1$ .

Poniżej przedstawiono algorytm rozwiązania równania (3.1), zapisany w sposób zgodny z chronologią kolejnych etapów obliczeń.

W zastosowanej metodzie jej autor [2] zaleca wprowadzenie wielkości  $\alpha$ ,  $\delta$  oraz  $a_0 - a_9$ , które są wartościami stałymi dla stałego kroku całkowania  $\Delta t$ :

$$\alpha = 1/6, \quad \delta = 1/2, \quad \gamma = 1,4, \quad \tau = \gamma \Delta t$$

$$a_0 = 1/\alpha/\tau^2, \quad a_1 = \delta/\alpha/\tau, \quad a_2 = 1/\alpha/\tau, \quad (4.1)$$

$$a_3 = 1/\alpha/2 - 1, \quad a_4 = \delta/\alpha - 1, \quad a_5 = \tau(\delta/\alpha - 2)/2,$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \Delta t\delta, \quad a_8 = \Delta t^2(1/2 - \alpha),$$

$$a_9 = \alpha \Delta t. \quad (4.2)$$

Kolejnym etapem obliczeń jest wyznaczenie macierzy  $[K^*]$  i  $[F^*]$ , a następnie wektora przemieszczeń w chwili  $t + \tau$ :

$$[K^*] = [K] + a_0[B] + a_1[C],$$

$$\{F^*\} = \{F(t + \tau)\} + [M](a_0\{U(t)\} + a_2\{\dot{U}(t)\} + a_3\{\ddot{U}(t)\} +$$

$$[C](a_1\{U(t)\} + a_4\{\dot{U}(t)\} + a_5\{\ddot{U}(t)\}), \quad (4.3)$$

$$[K^*]\{U(t + \tau)\} = \{F^*\}. \quad (4.4)$$

Po wyznaczeniu  $\{U(t + \tau)\}$  można obliczyć  $\{\ddot{U}(t + \tau)\}$ , a następnie:

$$\{\ddot{U}(t + \tau)\}, \quad \{\dot{U}(t + \Delta t)\} \text{ i } \{U(t + \Delta t)\}. \quad (4.5)$$

$$\{\ddot{U}(t + \tau)\} = a_0(\{U(t + \tau)\} - U(t)) - a_2\{\dot{U}(t)\} - a_3\{\ddot{U}(t)\}$$

$$\{\ddot{U}(t + \Delta t)\} = \{\ddot{U}(t)\} + (\{\ddot{U}(t + \tau)\} - \ddot{U}(t))/\gamma$$

$$\{\dot{U}(t + \Delta t)\} = \{\dot{U}(t)\} + a_6\{\ddot{U}(t)\} + a_7\{\ddot{U}(t + \Delta t)\} \quad (4.6)$$

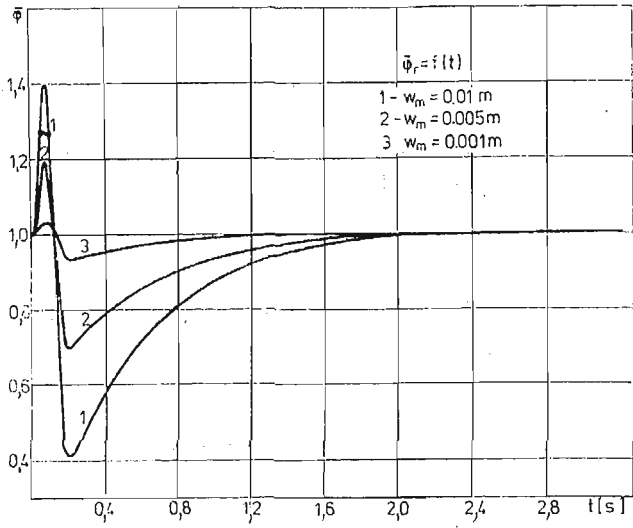
$$\{U(t + \Delta t)\} = \{U(t)\} + \Delta t\{\dot{U}(t)\} + a_8\{\ddot{U}(t)\} + a_9\{\ddot{U}(t + \Delta t)\}$$

Po wyznaczeniu wektorów (4.6) obliczyć można rzeczywiste kąty ustawienia (2.3) oraz obciążenie aerodynamiczne (2.1) i (2.2). Do realizacji obliczeń ((4.1) - (4.6)) niezbędna jest znajomość warunków początkowych. Poniżej podano warunki początkowe dla następującego przypadku. Łopata wiruje przy położeniu tarczy sterującej (rys. 1)  $w_1 = w_2 = w_3 = w$ , po czym w chwili  $t = t_0$  następuje zmiana położenia tarczy — zgodnie z określonym programem. Zgodnie z tym założeniem w chwili  $t = t_0$   $\{\ddot{U}(t_0)\} = \{\dot{U}(t_0)\} = 0$ . Wektor  $\{U(t_0)\}$  można wyznaczyć bezpośrednio z (3.1) po obliczeniu wielkości (3.4).

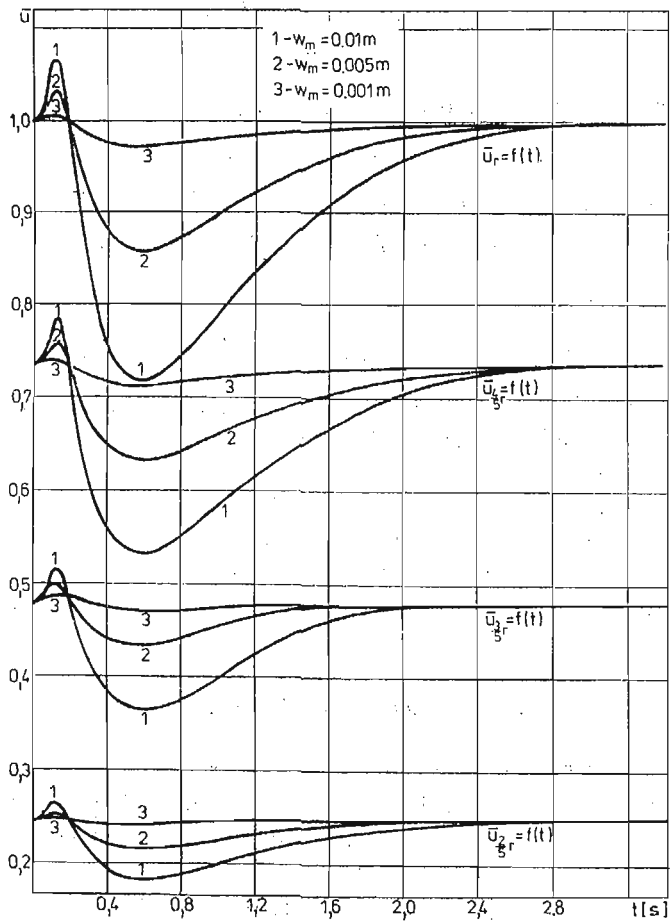
## 5. Przykładowe wyniki obliczeń

Celem przeprowadzenia obliczeń opracowano program do badania dynamiki łopat wirników nośnych śmigłowca (rys. 1). Program napisano w języku FORTRAN 1900 na maszynę cyfrową „Odra 1305”. Do rozwiązywania równań (4.3) wykorzystano, analogicznie jak w [7], procedury IPASMO i XPASMO [6].

Na rys. 3 ÷ 6 zamieszczono przykładowe wyniki obliczeń dla łopaty wirującej ze stałą prędkością kątową  $\Omega = 20$  rad/s. Przyjęto, że łopata wiruje przy położeniu tarczy sterującej



Rys. 3.



Rys. 4.

$w_1 = w_2 = w_3 = 0,01$  m, po czym w czasie  $t = 0 \div 0,2$  s następuje zmiana jej położenia wg programu:

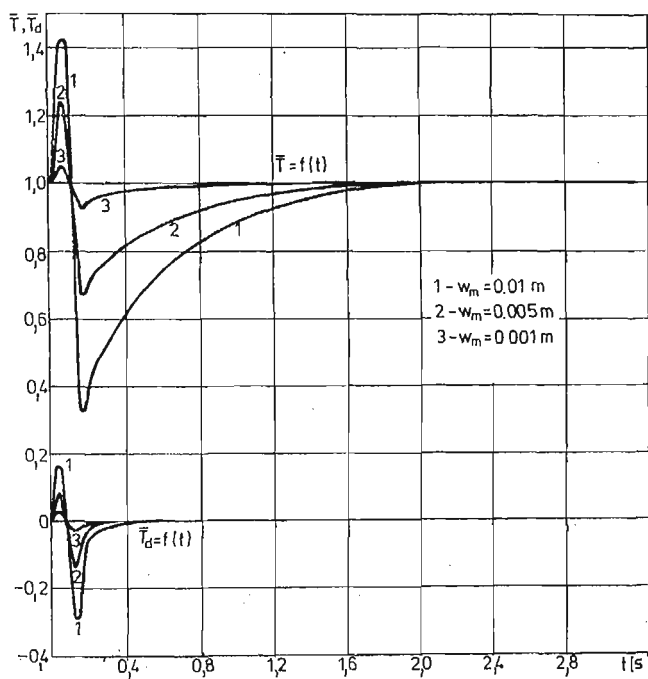
$$w_1 = w_2 = 0,01, \quad w_3 = w_m \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{0,1}\right). \quad (5.1)$$

Dla  $t \geq 0,2$  s przyjęto  $w_1 = w_2 = w_3 = 0,01m$ .

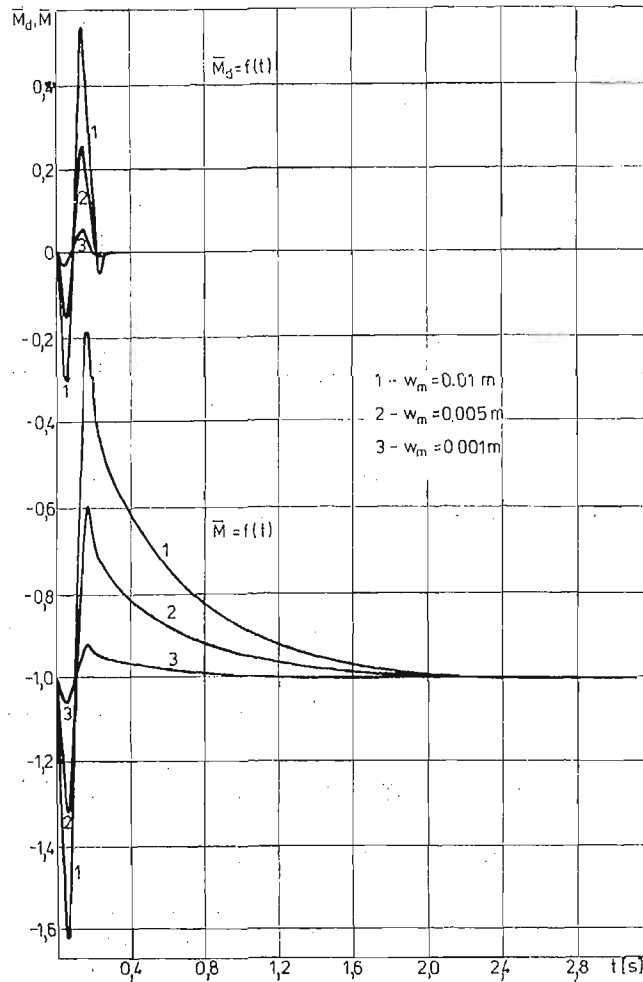
Na rys. 3 pokazano zmianę w czasie względnego kąta ustawienia łopaty na promieniu zewnętrznym ( $\bar{\varphi}_r(t) = \varphi_r(t)/\varphi_{r_0}(t)$ ). Z kolei na rys. 4 przedstawiono zmianę względnych przemieszczeń łopaty ( $\bar{u}_y(t) = u_y(t)/u_r(t_0)$ ) na promieniach  $y = \frac{2}{5}r, \frac{3}{5}r, \frac{4}{5}r$  i  $r$ .

Zmianę w czasie względnego obciążenia aerodynamicznego łopaty  $\bar{T}(t) = T(t)/T(t_0)$  i  $\bar{M}(t) = M(t)/M(t_0)$  pokazano na rys. 5 i 6. Dodatkowo naniesiono na tych rysunkach człony dynamiczne obciążenia, a więc człony zależne od pochodnych względem czasu kąta ustawienia i przemieszczenia (por. (2.1) i (2.2)).

Naturalnie przedstawione wyniki należy traktować jedynie jako przykładowe, a więc nie wyczerpujące wszystkich możliwości podanego algorytmu.



Rys. 5.



Rys. 6.

## Literatura

1. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*. Arkady 1972.
2. E. L. WILSON, *Numerical method for dynamics analysis*. International symposium on numerical methods offshore engineering, Swensa 1977.
3. Z. DŻYGADŁO, W. SOBIERAJ, *Natural, flexural — torsional vibration analysis of helicopter rotor blades by the finite element method*. Journal of Technical Physics 4, 1977.
4. J. LIPKA, *Wpływ bezwładności obrotowej oraz sił poprzecznych na drgania własne wirujących prętów*. Archiwum Budowy Maszyn, t. VII, z. 3, 1960.
5. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale w ciałach stałych*. PWN, Warszawa 1966.
6. J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*. PWN, Warszawa 1980.
7. Z. DŻYGADŁO, J. MANEROWSKI, *Vibration and stability analysis of rotors on orthotropic supports*. Journal of Technical Physics, 23, 1982.



## Р е з ю м е

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО ВИНТА ВЕРТОЛЁТА МЕТОДОМ  
КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В настоящей работе представлен метод численного анализа перемещений и нагрузок управляемой лопасти несущего винта вертолётa в положении висения. Был применён метод конечных элементов в варианте перемещений. При решении уравнений динамического равновесия был использован метод численного интегрирования Уилсона-Ньюмарка.

В статье представлены результаты примерных расчётов.

## S u m m a r y

DYNAMICAL ANALYSIS OF ROTOR BLADE OF A HELICOPTER  
BY FINITE ELEMENT METHOD

The numerical analysis method of displacements and loads for a controllable rotor blade of a helicopter during hovering has been presented. The finite element method in version of the displacement method has been used. The Wilson-Newmark numerical integration method has been used for solution of equation of dynamic equilibrium. Results of exemplifying calculations have been placed.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 grudnia 1984 roku*

---



# B I U L E T Y N I N F O R M A C Y J N Y

Dnia 12-tego marca 1986 roku zmarła tragicznie Barbara Michalska-Czachor, kierownik biura Zarządu Głównego PTMTS

## XVI MIĘDZYNARODOWY KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, LYNGBY (DANIA), 19 - 25.VIII.1984 R.

Międzynarodowe kongresy mechaniki ICTAM odbywają się co cztery lata od roku 1924; organizację szesnastego kongresu w roku 1984 powierzono Danii, przy czym na przewodniczącego Komitetu Organizacyjnego powołano prof. F. I. Niordsona, a na sekretarza — prof. N. Olhoffa z Królewskiego Uniwersytetu Technicznego w Lyngby koło Kopenhagi. Międzynarodowy Komitet Kongresowy działał w składzie 29-osobowym pod przewodnictwem prof. D. C. Druckera (USA); sekretarzem Komitetu był prof. B. A. Boley (USA), natomiast Polskę reprezentował w nim prof. W. Fiszdón.

Uniwersytet Techniczny Lyngby zapewnił bardzo dobre warunki uczestnikom Kongresu: rozległe położona uczelnia dysponowała aulą liczącą ok. 1500 miejsc, licznymi salami wykładowymi o dogodnym dojeździe, biblioteką, dużą stołówką o 1000 miejscach i salami klubowymi umożliwiającymi organizację spotkań towarzyskich, mniej lub bardziej formalnych.

Międzynarodowe Kongresy Mechaniki wzbudzały i wzbudzają zawsze duże zainteresowanie, choć liczba zarejestrowanych uczestników XVI Kongresu (820 osób po dołączeniu listy uzupełniającej, podanej do wiadomości już w trakcie Kongresu) była znacznie mniejsza od rekordowych liczb osiągniętych w r. 1968 w Stanfordzie (1300) i w r. 1972 w Moskwie (2500). Na ten spadek frekwencji złożyły się zapewne dwie przyczyny: po pierwsze, w Stanfordzie uczestniczyła wyjątkowo duża grupa naukowców amerykańskich, a w Moskwie — radzieckich; po drugie, w ostatnich latach znacznie wzrosła liczba sympozjów specjalistycznych, np. IUTAM i Euromech i wielu potencjalnych uczestników sądzi, że są to lepsze okazje do zaprezentowania swojego dorobku i do twórczych dyskusji niż gigantyczne kongresy. Pewną barierę stanowiło też wpisowe, choć kwota wyznaczona przez organizatorów (ok. 130 dolarów w terminie normalnym, a ok. 160 w terminie spóźnionym) nie należała do najwyższych.

Jak zwykle, największa liczba uczestników pochodziła ze Stanów Zjednoczonych. Dziesięć najliczniejszych delegacji reprezentowało następujące kraje:

1. USA	188
2. Dania (gospodarz)	72
3. Francja	66
4. Wielka Brytania	58
5. RFN	43
6. Japonia	43
7. Holandia	39
8. ChRL	38
9. Szwecja	38
10. Kanada	31

Oprócz krajów, których reprezentacje zawsze były liczne (Francja, Wielka Brytania, RFN), dużą rolę grały tu względy geograficzne (Dania, Holandia, Szwecja). Szczególnie należy podkreślić liczebność i aktywność delegacji chińskiej — kraj ten dokłada wszelkich starań, by nadrobić straty okresu „rewolucji kulturalnej”. Polskę można było również zaliczyć do krajów o dobrym położeniu geograficznym; delegacja polska, licząca mimo wszystkich trudności 18 osób, znalazła się na trzynastym miejscu i była najliczniejsza z krajów Demokracji Ludowej.

Tematyka Kongresu obejmowała tradycyjnie wszystkie działy mechaniki ciał stałych i mechaniki płynów, włączając w to metody matematyczne, a także niektóre zagadnienia termodynamiczne. Jednakże

tym razem organizatorzy założyli preferowanie trzech działów, które znajdują się na pograniczu mechaniki ciał stałych i mechaniki płynów, a mianowicie:

- 1) mikromechanika ośrodków wieloskładnikowych,
- 2) interakcja konstrukcji morskich z falami,
- 3) rozwój chaotycznego zachowania się w układach dynamicznych.

Istotnie, jak wynika z podanego poniżej zestawienia, powyższe działy tematyczne były (z jednym wyjątkiem) najliczniej obsadzonymi działami.

Program Kongresu przewidywał ogółem 26 referatów godzinnych o charakterze generalnym (referat wstępny i końcowy, 15 referatów sekcyjnych opracowanych na specjalne zaproszenie organizatorów oraz 9 referatów wprowadzających do trzech przytoczonych powyżej preferowanych działów tematycznych), 242 referaty półgodzinne i 184 referaty przedstawione systemem posterowym na 20 sesjach; razem 452 referaty. Referaty te zgrupowali organizatorzy w 37 działach tematycznych. Zestawienie dziesięciu najliczniejszych działów przedstawia się następująco:

Dział tematyczny	Referaty godzinne	Referaty półgodzinne	Referaty posterowe	Razem
1. Mikromechanika ośrodków wieloskładnikowych	4	32	14	50
2. Interakcja konstrukcji morskich z falami	4	22	10	36
3. Plastyczność	1	15	15	31
4. Rozwój chaotycznego zachowania się w układach dynamicznych	3	12	12	27
5. Drgania	0	14	12	26
6. Stateczność konstrukcji	0	13	12	25
7. Przepływy burzliwe	1	9	11	21
8. Fale w cieczach	3	7	9	19
9. Dynamika	2	6	11	19
10. Przepływy ściśliwe, akustyka	1	11	7	19
—	—	—	—	—

Oczywiście, iż w tego rodzaju podziałach tkwi pewna dowolność i z powyższego zestawienia nie można wyciągać zbyt daleko idących wniosków: gdyby np. ująć łącznie dwa pokrewne działy „Mechanika szczelin” (14 referatów) i „Pękanie” (9 referatów), traktowane przez organizatorów oddzielnie, to taki dział łączny znalazłby się bez trudu w pierwszej dziesiątce. Również dział „Różne zagadnienia mechaniki płynów” stanowił przykład nieprecyzyjnej klasyfikacji, a utworzenie takiego działu było zapewne motywowane względami organizacyjnymi. W każdym razie przewaga liczby referatów poświęconych mechanice ciał stałych nad mechaniką płynów była tym razem dość wyraźnie widoczna.

Kongres rozpoczął się w poniedziałek, 20 sierpnia 1984, o godz. 9<sup>15</sup> w auli Królewskiego Uniwersytetu Technicznego w Lyngby; po krótkim koncercie i przemówieniach powitalnych (D. C. Drucker, F. I. Niordson) referat inauguracyjny „Badania kosmiczne i nowe podejście do mechaniki płynów w kosmosie” wygłosił H. Alfven (Szwecja). Referat był bogato ilustrowany i wzbudzał duże zainteresowanie. Po półgodzinnej przerwie na kawę zostały wygłoszone cztery równoległe referaty sekcyjne: „Dynamika pojazdów” (W. O. Schiehlen, RFN); „Plastyczność i wytrzymałość gruntów anizotropowych” (J. Salençon, Francja); „Zagadnienia akustyki nieliniowej” (L. Bjørnø, Dania) oraz „Ewolucja wirów dwuwymiarowych” (D. W. Moore, Wielka Brytania). Po przerwie obiadowej obrady toczyły się równoległe w 8 salach: w 4 salach wygłoszono referaty półgodzinne, w 3 salach odbywały się sesje posterowe, a w pozostałej sali zostały wygłoszone trzy godzinne referaty wprowadzające do preferowanej tematyki interakcji konstrukcji morskich z falami. W dniu tym została przedstawiona tylko jedna polska praca: „O optymalnym kształtowaniu konstrukcji przy tłumieniu nadkrytycznym” (T. Lekszycki — sesja posterowa z zakresu optymalizacji).

We wtorek, 21 VIII, obrady toczyły się przed południem równoległe w 5 salach: w 4 salach wygłoszono po 6 referatów półgodzinnych, natomiast w piątej — trzy godzinne referaty wprowadzające do preferowanej tematyki mikromechaniki ośrodków wieloskładnikowych. Po przerwie obiadowej zostały najpierw wygłoszone cztery równoległe referaty sekcyjne: „Mechanika uszkodzeń i zniszczenia kompozytów włóknistych (S. S. Wang, USA), „Współczesne badania spektrum fal oceanicznych” (H. Mitsuyasu, Japonia), „Wizualizacja pól przepływów” (S. Taneda, Japonia) oraz „Zjawiska rezonansowe w ruchach obrotowych naturalnych i sztucznych satelitów” (W. W. Bieleckij, ZSRR). Ostatnia sesja wtorkowa była najbardziej pracowita — obradowano równoległe w 10 salach. W 7 salach wygłoszono po 3 referaty półgodzinne, natomiast w 3 pozostałych odbywały się sesje posterowe. W dniu tym zostały przedstawione 3 polskie prace: „Plastyczne usuwanie niepożądaných odkształceń plastycznych” (M. Życzkowski i J. Zimny), „Pewna nowa klasa zasad zachowania w teorii sprężystości i ich zastosowanie” (Z. Mróz i K. Dems) oraz „Makroskopowe własności mechaniczne materiałów o zorientowanych uszkodzeniach” (A. Litewka — sesja posterowa z mechaniki szczelin).

Środa, 22.VIII, była dniem częściowo odpoczynkowym. Obrady toczyły się tylko przed południem, równoległe w 5 salach. W 4 salach wygłoszono po 6 referatów półgodzinnych, natomiast w piątej — trzygodzinne referaty wprowadzające do preferowanej tematyki rozwoju chaotycznego zachowania się w układach dynamicznych. W dniu tym nie przedstawiono ani jednej polskiej pracy.

Czwartek, 23.VIII, był znowu dniem bardzo pracowitym. Obrady rozpoczęły się czterema równoległymi referatami sekcijnymi: „Mechanika szczelin sprężysto-plastycznych” (J. R. Rice, USA); „Hydro-sprężyste zachowanie się konstrukcji morskich” (W. G. Price i Y. Wu, Wielka Brytania); „Mechanika płynów przy wydobywaniu ropy naftowej ze zbiorników podziemnych” (E. J. Hinch, Wielka Brytania) oraz „Nieliniowy ruch falowy i homokliniczna bifurkacja” (K. Kirchgässner, RFN). W dalszym ciągu obradowano równoległe w 10 salach: w 7 wygłoszono po 4 referaty półgodzinne, natomiast w 3 pozostałych odbywały się sesje posterowe. Podobnie przedstawiał się program popołudniowy: w 7 salach wygłoszono po 6 referatów półgodzinnych, a w 3 odbywały się sesje posterowe. W dniu tym przedstawiono aż cztery polskie lub częściowo polskie prace: jedną jako referat półgodzinny „O kształtowaniu konstrukcji pod działaniem obciążeń cyrkulacyjnych” (R. Bogacz i O. Mährenholtz, RFN) oraz trzy w ramach sesji posterowych: „O analizie nieliniowych sieci przy zastosowaniu elementów brzegowych” (J. Rakowski i R. Sygulski), „O jednostronnym problemie sztywnego stempla działającego na łuk sprężysty” (J. Bauer i J. Sokolowski) oraz „Trójwymiarowy podmuch działający na płat Żukowskiego” (H. Atassi i J. Grzędziński).

Liczba przedstawionych prac rosła z dnia na dzień (z wyjątkiem środy) i osiągnęła swoje maksimum w piątek 24.VIII; w dniu tym przedstawiono ogółem 134 prace, a więc znacznie powyżej 1/4 wszystkich zakwalifikowanych prac. Obrady rozpoczęły się trzema równoległymi, ostatnimi już referatami sekcijnymi: „Trójwymiarowa stateczność i bifurkacja ustalonych fal wodnych” (P. G. Saffman, USA), „Mechanika lodu i śniegu jako dział mechaniki teoretycznej i stosowanej” (K. Hutter, Szwajcaria) i „Nieklasyczne kontinua materialne” (D. Rogula, Polska). Tak więc referaty sekcyjne reprezentowały przede wszystkim USA i Wielką Brytanię (po 3), Japonię i RFN (po 2), oraz Danię, Francję, Polskę, Szwajcarię i ZSRR (po 1).

W dalszym ciągu obradowano przed południem równoległe w 11 salach (w 8 wygłoszono po 4 referaty półgodzinne, w 3 pozostałych odbyły się sesje posterowe — na najliczniej obsadzonej sesji posterowej

z plastyczności przedstawiono 15 prac), a po południu w 10 salach (w 7 wygłoszono po 5 referatów półgodzinnych, w pozostałych 3-sesje posterowe). Piątek można również nazwać „dniem polskim” — oprócz wspomnianego już referatu sekcyjnego D. Roguli przedstawiono pięć dalszych polskich prac, a mianowicie cztery w ramach referatów półgodzinnych: „Doświadczalne badania przepływu zawieszin przez rurę” (T. A. Kowalewski), „Płaski plastyczny stan odkształcenia i teoria pola poślizgów w ośrodkach porowatych wypełnionych cieczą” (S. J. Kowalski), „Quasi-stacjonarne, nieregularne odbicie uderzeń — tworzenie i struktura” (Z. A. Walenta) oraz „Zależność zjawisk pęknięcia od ewolucji konstytutywnej struktury ciał stałych” (P. Perzyna); piątą natomiast w ramach sesji posterowej: „Równania całkowite stowarzyszone z równaniem Helmholtza i ich zastosowanie do problemów odwrotnych przewodnictwa cieplnego i ruchu falowego (K. Grysa).

Ostatni dzień obrad, sobota, 25.VIII, był już znacznie mniej przeładowany referatami. W 7 salach wygłoszono po dwa lub trzy referaty półgodzinne, w tym żadnej pracy polskiego uczestnika. O godz. 11-tej wykład końcowy „Pewne osiągnięcia i pewne problemy mechaniki” wygłosił J. Keller (USA). Autor w bardzo interesujący sposób przedstawił liczne problemy, zarówno teoretyczne, jak i doświadczalne, zwracając szczególną uwagę na ujęcia stochastyczne i na współczesną teorię chaotycznego zachowania się układów dynamicznych. Po krótkiej ceremonii XVI Kongres Mechaniki został zamknięty o godz. 12<sup>15</sup>.

Podczas Kongresu odbyły się liczne imprezy, mniej lub bardziej oficjalne. We wtorek wieczorem wszystkich uczestników Kongresu podejmował na ratuszu burmistrz Kopenhagi (przemówienie powitalne wygłosiła jedna z jego zastępczyń); w piątek odbył się uroczysty bankiet w hotelu Marienlyst w pobliżu historycznego Elsinore. Niemal każdego dnia niektórzy uczestnicy Kongresu byli zapraszani na coctails organizowane przez naczelnych redaktorów czasopism z zakresu mechaniki (Journal of Thermal Stresses, poniedziałek, International Journal of Solids and Structures, czwartek).

Udział polskich uczestników Kongresu można uważać za bardzo udany. Ogólna liczba 14 referatów — w tym jeden referat sekcyjny — była najwyższą liczbą polskich referatów w historii kongresów mechaniki; dla pełniejszego naświetlenia sprawy wypada jednak dodać, że i łączna liczba wszystkich referatów była tym razem wyższa (dawniej kwalifikowano około 300 referatów do wygłoszenia).

Podwyższenie liczby referatów uzyskano dzięki wprowadzeniu dodatkowych sesji posterowych, organizowanych następująco: 1) godzinne przedstawienie posterów; 2) godzinne bezpośrednie dyskusje z autorami; 3) godzinna dyskusja ogólna, prowadzona przez przewodniczącego sali. Dyskusje ogólne przebiegały w sposób bardzo nierównomierny i nad większością prac nie było żadnej dyskusji, natomiast niektóre wywoływały różnorodne publiczne komentarze.

Podczas Kongresu odbyły się również liczne zebrania władz IUTAM: dwa zgromadzenia ogólne (środa i czwartek), dwa zebrania Biura IUTAM (poniedziałek i sobota) oraz dwa zebrania Komitetu Kongresów IUTAM (niedziela i piątek). Zgromadzenie ogólne wybrało nowym przewodniczącym IUTAM prof. M. J. Lighthilla (Londyn, Wielka Brytania), natomiast Komitet Kongresów podjął decyzję, iż następny XVII Międzynarodowy Kongres Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej odbędzie się w r. 1988 w Grenoble (Francja), przy czym przewodnictwo powierzono prof. P. Germain. Uczestnicy XVI Kongresu żegnali się więc słowami „do zobaczenia za cztery lata w Grenoble!”.

*Michał Życzkowski*

## EUROMECH 189

### „ELASTICITY COUPLED WITH THERMAL AND ELECTROMAGNETIC EFFECTS” POZNAŃ-BŁAŻEJEWKO 18 - 20 OCTOBER 1984

Celem Kolokwium było spotkanie naukowców zajmujących się intensywnie rozwijającą się ostatnio dziedziną, jaką jest teoria sprężystości sprzężona z innymi polami, przez przedstawienie i przedyskutowanie najnowszych osiągnięć w tej dziedzinie. Udział w Kolokwium zgłosiło 30 osób. Ze względu na przypadające w tym samym okresie wyjazdy poza Europę (USA, Japonia) nie mogli w nim wziąć udziału prof. G. A. Ma-

ugijn z Paryża oraz dr R. K. T. Hsieh ze Sztokholmu. Nie mogli również uczestniczyć w spotkaniu prof. M. F. Mc Carthy z Irlandii oraz dr A. Ghaleb z Egiptu.

Wśród uczestników zagranicznych byli przedstawiciele Francji (2), Niemiec Zachodnich (2), Belgii (1), Holandii (1), Bułgarii (1). Na stosunkowo małą liczbę uczestników zasadniczy wpływ miał termin spotkania, tj. październik, który jest pierwszym miesiącem wykładów we wszystkich europejskich szkołach wyższych. Drugim powodem było IUTAM-IUPAM Sympozjum „The Mechanical Behaviour of Electromagnetic Solid Continua”, które odbyło się w lipcu 1984 r. w Paryżu.

Przedstawione na Kolokwium EUROMECH 189 referaty dotyczyły wzajemnych oddziaływań pól mechanicznych i niemechanicznych w ośrodkach ciągłych o własnościach sprężystych, lepkosprężystych, mikropolarnych i ciekłych kryształach oraz o różnych własnościach elektromagnetycznych jak przewodniki, półprzewodniki, izolatory, magnetyki, elektryki. Rozważano procesy zarówno w ciałach izotropowych, jak również w piezoelektrykach.

Referaty podzielono na następujące zasadnicze grupy: referaty ogólne, referaty dotyczące procesów magnetosprężystych i piezoelektrycznych oraz procesów termosprężystych. Większość referatów (9) była poświęcona zagadnieniom rozchodzenia się fal w ciałach stałych. Autorzy przedstawili wyniki dotyczące zarówno propagacji fal powierzchniowych, jak również objętościowych w ciałach izotropowych i w kryształach. Następną pod względem ilości grupę (7) stanowiły referaty zawierające wyprowadzenia i dyskusję równań podstawowych w przypadku różnych modeli elektromagneto-termosprężystych. Zagadnieniom termosprężystości zajmowało się czterech autorów. Pozostałe prace dotyczyły termodynamiki w polu elektromagnetycznym. Wszystkie referaty miały charakter dociekań teoretycznych. Uczestnicy mają możliwość opublikowania wygłoszonych referatów w „Journal of Technical Physics” oraz Biuletynie PAN.

Przebieg kolokwium oraz żywa, merytoryczna dyskusja po każdym z referatów wykazały, że poruszana problematyka leżała w kręgu zainteresowań wszystkich uczestników. Organizatorzy są zdania, że kolokwium było bardzo owocne i przyspieszyło wymianę myśli między europejskimi naukowcami zajmującymi się teorią pól połączonych.

Uczestnicy z uznaniem wyrażali się o jego stronie merytorycznej i organizacyjnej. Stwierdzono celowość kontynuacji spotkań w gronie osób pracujących nad zagadnieniami teorii pól połączonych.

Kolokwium odbyło się dzięki znacznej pomocy organizacyjnej i finansowej Politechniki Poznańskiej i Oddziału Poznańskiego Polskiej Akademii Nauk.

*J. Stefaniak*

#### Referaty wygłoszone na Kolokwium EUROMECH 189

- |   |   |
|---|---|
| H. Bcđnarczyk (RFN),<br>M. Chebuś (Polska),<br>B. Collet (Francja),<br>E. Danicki (Polska), | Remarks on the dispersion of artificial birefringence.<br>Closed line defects in continuum.<br>Nonlinear wave propagation in deformable dielectrics.<br>Analysis of saw reflection from periodic shallow grooves etched in a piezoelectric halfspace. |
| A. Drzewiecki (Polska),<br>Y. Ersoy (Holandia),   | Diffusion in dielectrics.<br>A study on the Maxwell-Cattaneo equation of heat conduction for magnetoelastic solids.   |
| K. Grysa (Polska),<br>T. Hoffmann (Polska),<br>Ts. P. Ivanov (Bułgaria),                    | On the boundary inverse problems of the theory of thermal stresses.<br>On electromagnetic and thermodiffusion effects in dielectric materials.<br>On determining the mechanical and thermal constants in generalized thermo-mechanics.                |
| J. Kapelewski (Polska),   | On a possible mechanism for stimulating the local changes of surface acoustic impedance in ferroelectric materials.   |
| H. K. Lachowicz (Polska),<br>G. Lebon, B. Maruszewski                                       | Magnetomechanical effects in metallic glasses.<br>(Belgia, Polska), An extended irreversible thermodynamic description of electro-thermoelastic semi-conductors.  |

- T. Lenkowska-Czerwińska (Polska), Spin-phonon interaction in anisotropic Heisenberg chain.  
 J. Lenz (RFN), Magnetoelastic effects in magnetically saturated, cubic crystals.  
 K. Majorkowska-Knap (Polska), Propagation of piezoelectric low- modes in an elastic isotropic dielectric solid.  
 B. Maruszewski (Polska), Thermoelastic semiconductor in periodic pressure field.  
 S. J. Matysiak (Polska), An axisymmetric contact problem in the linear theory of piezoelectro-elasticity.  
 J. P. Nowacki (Polska), Some problems of hemitropic micropolar magneto-elasticity.  
 J. Pouget and G. A. Maugin (Francja), Nonlinear elastic waves generated by solitons in ferroelectric crystals.  
 E. Radzikowska (Polska), Electrodynamic instability of liquid crystals.  
 D. Roguła (Polska), Strongly nonlinear models of electromagnetic fields.  
 T. Rożnowski (Polska), Integral representation in generalized asymmetric thermoelasticity.  
 L. Solarz (Polska), Reflection of the surface wave by a waveguide with charge nonlinearity.  
 J. Stefaniak (Polska), Concentrated harmonic forces in an elastic conductor.  
 R. Wojnar (Polska), Uflyand — Mindlin's plate equations in thermoelasticity with relaxation times.

#### POLSKIE CZASOPISMA NAUKOWE Z ZAKRESU MECHANIKI

Opracowanie niniejsze wykonano na życzenie Zespołu ds. Wydawnictw Komitetu Mechaniki PAN. Chodziło o rozeznanie się w ogólnej masie naukowych wydawnictw ciągłych i periodyków polskich z zakresu mechaniki i nauk pokrewnych.

Badanie oparto głównie na dwu narzędziach informacyjnych i uzupełniono je metodą wywiadu przeprowadzonego z redakcjami. Posłużono się najpierw ogólnopolskim rejestrem czasopiśmienniczym pt. *Wykaz polskich periodyków technicznych* w opracowaniu M. Jasińskiej, wydanym przez CİNTE w Warszawie 1973. Następnie przeanalizowano spis wydawnictw, które są regularnie przeglądane przez Redakcję Polskiej Bibliografii Analitycznej Mechaniki. Spis ten opublikowany jest w każdym zeszycie PBAM.

Te dwa narzędzia pomogły wyłonić tytuły związane z mechaniką, z których następnie wyeliminowano czasopisma wydawane przez NOT, gdyż takie było założenie. Wytypowane czasopisma opisano, wydobywając dość dużo danych z informatora CİNTE. Resztę informacji zdobywano drogą wywiadu z Komitetami Redakcyjnymi poszczególnych tytułów. Chodziło o orientację dotyczącą instytucji sprawczych, tradycji czasopism, ich charakteru, topografii na terenie kraju, stosowanych technik poligraficznych, objętości arkuszowej, nakładu itp.

Najdelikatniejsze pytanie dotyczyło recenzowania prac, ale wbrew pierwotnym obawom odpowiedzi (jeżeli padały) były zdecydowane i jasne. Ze względów taktycznych nie zadawano jednak pytania o anonimowość recenzji.

W wykazie uwzględniono periodyki o szeroko pojętej częstotliwości, zgodnie z obowiązującymi zasadami nie włączając wydawnictw seryjnych, które są zaliczane do druków zwartych.

Ogółem wychodzi w PRL obecnie (poza czasopismami NOT) 88 tytułów naukowych wydawnictw ciągłych z zakresu szerzej pojętej mechaniki teoretycznej i stosowanej, łącznie z dyscyplinami pokrewnymi, jak np. teoria konstrukcji, inżynieria materiałowa, podstawowe problemy techniki itp., ale prawie bez inżynierii lądowej i wodnej oraz budownictwa.

Opis każdego czasopisma składa się z następujących elementów:

- 1) Liczba porządkowa,
- 2) Tytuł czasopisma, jego instytucja sprawcza, miejsce wydania, nakładca, adres redakcji.
- 3) Czy istnieje Komitet Redakcyjny i czy prace przed publikacją są recenzowane. Odpowiedzi oznaczono umownie : + (pozytywna) i - (negatywna).
- 4) Stosowana technika poligraficzna.
- 5) Rok założenia, z którego wyliczamy tradycję czasopisma.



- 6) Częstotliwość.  
 7) Roczna objętość w arkuszach.  
 8) Nakład poszczególnego zeszytu w tysiącach egzemplarzy.  
 9) Przez jakie wydawnictwa referujące czasopismo jest analizowane.

Wykaz jest ułożony alfabetycznie i opatrzony indeksem instytucji sprawczych. Na końcu zamieszczono analizę podsumowującą oraz wyliczenia procentowe.

Lp.	Tytuł, instytucja sprawcza, miejsce wydania, nakładca, adres redakcji	Komitet Redakcyjny	Technika poligraficzna	Rok założenia	Czę- stotli- wość	Objętość rocznika w ark.	Nakład jednego numeru w tys. egz.	Analizowane przez
		Czy prace rec.						
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Archiwum Budowy Maszyn, PAN, Komitet Budowy Maszyn, Warszawa, PWN, Warszawa, Nowowiejska 22/24	$\frac{+}{+}$	druk	1954	kwart.	40	0,6	PBAM, RŻ, AMR
2	Archiwum Inżynierii Lądowej, PAN, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej, Warszawa, PWN, Warszawa, PKiN, p. 1724	$\frac{+}{+}$	„	1955	„	68,8	0,7	PBAM, RŻ, AMR
3	Archives of Mechanics, IPPT PAN, Warszawa, PWN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{+}$	„	1949	dwu- mies.	70	1	PBAM, RŻ, AMR, MR, SCI, BS
4	Archiwum Nauki o Materiałach, PAN, Komitet Nauki o Mater. Warszawa, PWN, Katowice, Graniczna 16	$\frac{+}{+}$	„	1980	kwart.	11	0,2	PBAM
5	Archiwum Termodynamiki, Komitet Termodynamiki i Spalania PAN, Warszawa, PWN, Warszawa, Nowowiejska 25	$\frac{+}{+}$	„	1979	„	21	0,2	PBAM, RŻ, AMR
6	Biuletyn Informacyjny Instytutu Techniki Ciepłej Politechniki Warszawskiej, Warszawa, PW, Warszawa, Nowowiejska 25	$\frac{+}{+}$	mała pol.	1953	nie- reg.	≈ 15,6	0,3	PBAM

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	Biuletyn Informacyjny Przemysłu Motoryzacyjnego, Instytut Motoryzacji POLMO, Warszawa, Stalingradzka 23	$\frac{+}{-}$	druk	1972	kwart.	10	0,6	PBAM, RŻ
8	Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, WAT, Warszawa, ul. Lazurowa	$\frac{+}{+}$	druk	1952	mies.	122	0,9	
9	Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Techniques, Warszawa, PWN Warszawa, PKiN	$\frac{+}{\text{rekom.}}$	druk	1953	mies.	75	0,9	PBAM, AMR, BS, RŻ, SCI, MR
10	Ciepłne Maszyny Przepływowe, Politechnika Łódzka Łódź, PWN, Łódź, Gdańska 155	$\frac{+}{+}$	mała pol.	1957	nie-reg.	≈ 6,6	0,3	PBAM
11	Czasopismo Techniczne, — Mechanika. Politechnika Krakowska, Kraków, PWN, Kraków, Filipa 25	$\frac{+}{+}$	druk	1897	kwart.	36	0,6	PBAM
12	Działalność Naukowa Instytutu Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk, PWN, Gdańsk, Fiszera 14	$\frac{+}{-}$	druk	1970	nie-reg.	≈ 16,5	0,3	
13	Działalność Naukowa Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, [wersje: polska i ang.] Warszawa, PWN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{-}$	druk	1961	rocz.	20,0	0,8	
14	Działalność Naukowa Politechniki Warszawskiej, Warszawa, PW, Warszawa, Plac Jedności Rob. 1	$\frac{+}{-}$	mała pol.	1966	rocz.	9,5	0,2	
15	Fluid Dynamics Transactions, Instytut Podstawowych Probl. Techniki PAN, PWN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{-}$	druk	1964	nie-reg.	≈ 12	0,4	PBAM, RŻ, AMR

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	Informator o Pracach Naukowo-badawczych Instytutu Obróbki Skrawaniem, Warszawa WEMA, Kraków, Wrocławska 37a	$\frac{+}{-}$	druk	1971	nie-reg.	$\approx 16,6$	1,0	
17	Journal of Technical Physics, Instytut Podst. Problemów Techniki PAN, PWN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{+}$	druk	1959	kwart.	35,0	0,8	PBAM, RŽ, AMR, SCI, BS, MR
18	Mechanika i Komputer, Instytut Podst. Problemów Techniki PAN, PWN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{+}$	druk	1978	nie-reg.	$\approx 22,2$	0,7	PBAM
19	Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Polskie Tow. Mechaniki Teoret. i Stos. Warszawa, PWN, Warszawa, PKiN	$\frac{+}{+}$	druk	1963	kwart.	50	0,7	PBAM, AMR, RŽ, MR
20	Mechanika. Technologia Budowy Maszyn, Bydgoskie Tow. Naukowe, Bydgoszcz, PWN, Bydgoszcz, Jezuicka 4	$\frac{+}{-}$	druk	1969	rocz.	5,0	0,5	
21	Maszyny Budowlane. Przegląd Dokumentacyjny, Ośr. Bad.-Rozw. Maszyn Bud. Warszawa, Kolejowa 57	$\frac{+}{-}$	mała pol.	1967	dwumies.	19,0	0,2	
22	Mechanizacja Górnictwa, Zakłady Konstrukcyjno-Mechanizacyjne Przem. Węglowego, Gliwice, Pszczyńska 37	$\frac{+}{-}$	druk	1963	dwumies.	45,5	1,2	PBAM
23	Mechanizacja i Automatyzacja w Odlewnictwie, Ośr. Konstr.-Bad. Fabryki Maszyn Odlewniczych w Radomiu-STOP, Kraków, Cystersów 16	$\frac{+}{-}$	pow.	1964	nie-reg.	$\approx 8,0$	1,0	
24	Mechanizacja Rolnictwa, Warszawa, PWRiL, Warszawa, Al Jerozolimskie 28	$\frac{+}{+}$	druk	1952	dwutyg.	96,0	18,0	

1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	Nonlinear Vibration Problems, Instytut Podst. Probl. Techn. PAN, PWN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{+}$	druk	1960	nie-reg.	$\approx 30,6$	0,5	PBAM, RŻ, AMR
26	Obróbka Plastyczna. Zeszyty Centralnego Laboratorium Obróbki Plastycznej, Poznań, CLOP, Poznań, Zamenhofska 2/4	$\frac{+}{+}$	druk	1959	nie-reg.	$\approx 25,2$	1,0	
27	Optica Applicata, Politechnika Wroclawska, Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27	$\frac{+}{+}$	druk	1971	nie-reg.	$\approx 12,4$	0,5	
28	Podstawowe Problemy Współczesnej Techniki, PAN, Wydział IV, PWN, Warszawa, PKiN	$\frac{+}{-}$	druk	1956	nie-reg.	$\approx 20,0$	1,5	
29	Polska Bibliografia Analityczna Mechaniki, Instytut Podst. Probl. Techn. PAN, PWN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{+}$	druk	1955	kw.	20,0	0,5	
30	Prace Instytutu Badawczego Dróg i Mostów, Warszawa, WKiŁ, Warszawa, Stalingradzka 40	$\frac{+}{+}$	druk	1958	kw.	48,0	0,9	PBAM
31	Prace Centralnego Ośrodka Badań i Rozwoju Techniki Kolejnictwa, Warszawa, WKiŁ, Warszawa, Chłopickiego 50	$\frac{+}{+}$	druk	1959	nie-reg.	$\approx 9,8$	1,5	PBAM
32	Prace IPPT — IFTR Reports Instytut Podst. Problemów Techniki PAN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{+}$	mała pol.	1967	nie-reg.	$\approx 150$	0,15	PBAM
33	Prace Instytutu Lotnictwa, Warszawa, WNT, Warszawa, Al. Krakowska 145	$\frac{+}{-}$	druk	1952	kw.	41,6	0,5	PBAM
34	Prace Instytutu Maszyn Przepływowych PAN, PWN, Gdańsk, Fiszerka 14	$\frac{+}{+}$	druk	1960	nie-reg.	$\approx 12$	0,4	PBAM, RŻ, AMR, MR

1	2	3	4	5	6	7	8	9
35	Prace Instytutu Obróbki Skrawaniem, Seria: Zeszyty Naukowe, Kraków, Wrocławska 37a	+	mała pol.	1959	nie-reg.	≈ 5,8	0,4	PBAM
36	Prace Instytutu Techniki Ciepłej, Łódź, PWN, Łódź, Piotrkowska 204	+	mała pol.	1953	nie-reg.	≈ 19,6	0,4	PBAM
37	Prace Instytutu Techniki Budowlanej, ITB, Warszawa, Filtrowa 1	+	mała pol.	1975	kwart.	32	1,6	PBAM
38	Prace Naukowe Instytutu Techniki Budowlanej, — Seria Monografie	Rada	mała	1975	nie-reg.	≈ 100	1,8	PBAM
39	— Seria Studia	Nauk.	pol.					
40	— Seria Rozprawy, ITB, Warszawa, Filtrowa 1	+						
41	Prace Komisji Budowy Maszyn, Poznańskie Tow. Przyj. Nauk, Poznań, PWN, Mielżyńskiego 27/29	+	druk	1970	nie-reg.	≈ 4	0,2	PBAM
42	Prace Komisji Mechaniki Stosowanej Oddziału PAN w Krakowie, Mechanika, PWN, Kraków, Sławkowska 17	+	druk	od czasu PAU	nie-reg.	≈ 6,7	0,5	PBAM
43	Prace Instytutu Technologii i Eksploatacji Maszyn Politechniki Lubelskiej			1970	nie-reg.			PBAM
	— Seria A — Rozprawy i Studia	+	mała pol.					
44	— Seria B — Artykuły i Komun.	+	mała pol.	1970	nie-reg.	≈ 20	0,1	
45	— Seria C — Mat. Konferencyjne	+	mała pol.	1970				
46	Prace Instytutu Mechaniki Politechniki Lubelskiej	+	mała pol.	1970	kwart.	12	0,15	PBAM
	— Ser. A — Rozprawy i Studia	+						
47	— Ser. B — Artykuły i Komun.	+	mała pol.	1970	kwart.	10	0,15	PBAM
48	— Ser. C — Mat. Konferencyjne	+	mała pol.	1970	nie-reg.	≈ 10	0,15	

1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej — Mechanika, PW, Warszawa, Plac Jedności Rob. 1	$\frac{+}{+}$	mała pol.	1968	nie-reg.	≈ 6	0,2	PBAM, RŽ
50	Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Inst. Podstaw Budowy Maszyn, PW, W-wa, Plac Jedności Rob. 1	$\frac{+}{+}$	mała pol.	około 1960	kwart.	6	0,2	PBAM, RŽ
51	Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej — Podstawowe Problemy Techniki, PW, Warszawa, Plac Jedności Rob. 1	$\frac{+}{+}$	mała pol.	1982	nie-reg.	≈ 6	0,2	
52	Prace Naukowe Politechniki Wrocław. Instytut Podstaw Budownictwa Maszynowego — Ser. Monografie	$\frac{+}{+}$	mała pol.	1969	nie-reg.	≈ 9	0,15	PBAM
53	— Ser. Konferencje	$\frac{+}{+}$	„	1969	„	≈ 9	0,15	
54	— Ser. Studia i Materiały	$\frac{+}{+}$	„	1969	„	≈ 9	0,15	
55	Prace Naukowe Politechniki Wrocław. Instytut Technologii Budowy Maszyn — Ser. Monografie	$\frac{+}{+}$	„	1975	„	≈ 9	0,15	PBAM
56	— Ser. Konferencje	$\frac{+}{+}$	„	1975	„	≈ 9	0,15	
57	— Ser. Studia i Materiały	$\frac{+}{+}$	„	1975	„	≈ 9	0,15	PBAM
58	Prace Naukowe Politechniki Wrocław. Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej — ser. Monografie	$\frac{+}{+}$	„	1969	„	≈ 9	0,15	PBAM
59	— Ser. Konferencje	$\frac{+}{+}$	„	1969	„	≈ 9	0,15	
60	— Ser. Studia i Materiały	$\frac{+}{+}$	„	1969	„	≈ 9	0,15	PBAM

1	2	3	4	5	6	7	8	9
61	Prace Naukowe Politechniki Wrocław. Instytut Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów — Ser. Monografie	$\frac{+}{+}$	„	1970	„	≈ 9	0,15	PBAM
62	— Ser. Konferencje	$\frac{+}{+}$	„	1970	„	≈ 9	0,15	
63	— Ser. Studia i Materiały	$\frac{+}{+}$	„	1970	„	≈ 9	0,15	PBAM
64	Prace Nauk. Politechniki Szczecińskiej, Instytut Technologii Mechanicznej Szczecin, Pułaskiego 10	$\frac{+}{+}$	„	1975	„	≈ 20	0,15	PBAM
65	Rozprawy Hydrotechniczne, Instytut Budownictwa Wodnego PAN, PWN, Gdańsk-Oliwa, Cystersów 11	$\frac{+}{+}$	druk	1956	„	≈ 10	0,4	PBAM, RŻ, AMR
66	Rozprawy Inżynierskie, Instytut Podstawowych Probl. Techniki PAN, PWN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{+}$	druk	1953	kwart.	59	0,8	PBAM, RŻ, AMR, MR
67	Studia Geotechnica et Mechanica, Polit. Wrocławskiej, Instytut Geotechniki, Wrocław, Plac Grunwaldzki 9	$\frac{+}{+}$	druk	1978	kwart.	15	0,3	PBAM
68	Studia z Zakresu Inżynierii, Komitet Inż. Łąd. PAN, PWN, Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{+}$	mała pol.	1958	1 - 2 rocznie	15	0,4	PBAM, RŻ, AMR, BS
69	Uspechi Mechaniki, IPPT PAN+BAN+CSAV+WAN+DAW+ANSSSR.PWN Red. Warszawa, Świętokrzyska 21	$\frac{+}{+}$	druk	1978	kwart.	35	0,4	PBAM, RŻ, AMR, MR
70	Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, Komitet Budowy Maszyn PAN, PWN, Warszawa, PKiN	$\frac{+}{+}$	druk	1965	kwart.	61	1,1	PBAM, RŻ, AMR
71	Zeszyty Naukowe AGH — Elektrotechnika, Mechanika, Górnictwo, Hutnictwo, Kraków, AGH, Mickiewicza 30	$\frac{+}{+}$	mała pol.	1954	nie-reg.	≈ 6,4	0,3	PBAM

1	2	3	4	5	6	7	8	9
72	Zeszyty Naukowe AGH — Prace Instytutu Podstaw Budowy Maszyn, Kraków AGH, Mickiewicza 30	$\frac{+}{+}$	„	1968	„	≈ 3	0,2	
73	Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Mechanika, Białystok, Grunwaldzka 11/15	$\frac{+}{+}$	„	1976	rocznik	8	0,1	PBAM
74	Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej, Mechanika, Częstochowa, Zawadzkiego 21	$\frac{+}{+}$	„	1957	nie-reg.	≈ 12	0,15	PBAM
75	Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej — Prace Habilitacyjne [Mechanika], adres j.w.	$\frac{+}{+}$	„	1975	„	≈ 20	0,15	
76	Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Mechanika, Gdańsk, Majakowskiego 11/12	$\frac{+}{+}$	„	1956	„	≈ 20	0,2	PBAM
77	Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Mechanika, Kraków, Warszawska 24	$\frac{+}{+}$	„	1958	„	≈ 8	0,2	PBAM
78	Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Podstawy Nauk Technicznych, adres j.w.	$\frac{+}{+}$	„	1975	„	≈ 6	0,2	PBAM
79	Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Mechanika, Łódź, Worcella 6/8	$\frac{+}{+}$	„	1954	„	≈ 14	0,3	PBAM
80	Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Ciepne Maszyny Przepływowe, adres j.w.	$\frac{+}{+}$	„	1967	„	≈ 15	0,3	PBAM
81	Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej — Rozprawy habilitacyjne, adres j.w.	$\frac{+}{+}$	„	1976	„	≈ 20	0,3	
82	Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Mechanika, Poznań, Piotrowo 10	$\frac{+}{+}$	mała pol.	1958	nie-reg.	≈ 18	0,2	PBAM



1	2	3	4	5	6	7	8	9
83	Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Maszyny Robocze i Pojazdy, adres j.w.	$\frac{+}{+}$	„	1970	„	≈ 10	0,2	PBAM
84	Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika, Gliwice, Strzody 18	$\frac{+}{+}$	„	1961	„	≈ 6	0,2	PBAM
85	Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej, Mechanika, Kielce, Tysiąclecia Państwa	$\frac{+}{+}$	„	1969	„	≈ 26	0,12	PBAM
86	Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej, Nauki Podstawowe, adres j.w.	$\frac{+}{+}$	„	1972	„	≈ 13	0,12	
87	Zeszyty Naukowe Akademii Techniczno-Rolniczej, Mechanika i Budownictwo, Olsztyn-Kortowo	$\frac{+}{+}$	„	1975	„	≈ 6	0,12	PBAM
88	Zeszyty Naukowe, Przemysłowy Instytut Motoryzacji POLMO, Warszawa, Stalingradzka 23	$\frac{+}{+}$	druk	1974	„	≈ 6	0,5	PBAM

## Index instytucji sprawczych

AGH — 71, 72.

AT-R Olsztyn — 87.

CLOP (Centr. Lab. Obr. Plast.) — 26.

IPPT — 3, 13, 15, 17, 18, 25, 29, 32, 66, 69.

Instytuty resortowe — 7, 30, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 88.

Ośrodki Badawczo-Rozwojowe — 21, 23, 31.

PAN (bez IPPT) — 1, 2, 4, 5, 9, 12, 28, 34, 42, 65, 68, 70.

PWRiL — 24.

## Politechniki:

Białostocka — 73.

Częstochowska — 74, 75.

Gdańska — 76.

Krakowska — 11, 77, 78.

Lubelska — 43, 44, 45, 46, 47, 48.

Łódzka — 10, 79, 80, 81.

Poznańska — 82, 83.

Śląska — 84.

Świętokrzyska — 85, 86.

Szczecińska — 64.

Warszawska — 6, 14, 49, 50, 51.

Wrocławska — 27, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67.

WAT — 8.

WEMA — 16.

Towarzystwa Naukowe — 19, 20, 41.

Zakłady konstrukcyjne — 22.

### Podsumowanie

Ogółem wychodzi w PRL obecnie (poza czasopismami NOT) 88 tytułów naukowych wydawnictw ciągłych i periodyków z zakresu szeroko pojętej mechaniki teoretycznej i stosowanej łącznie z dyscyplinami pokrewnymi. Z tego regularnych czasopism — 30, ciągłych nieregularnych zaś — 58.

#### Instytucje sprawcze (zob. też Index):

25 tytułów (co stanowi 28%) wydawanych jest przez PAN, jej Instytuty, Komitety, Komisje i Towarzystwa Naukowe.

45 tytułów (56%) wydają wyższe uczelnie, głównie politechniki.

16 tytułów (18%) wydają instytucje związane z przemysłem.

#### Geografia czasopism mechanicznych

34 tytuły (39%) wydaje się w Warszawie, 55 tytułów zaś (63%) w różnych miastach wojewódzkich. Wśród tych ostatnich prym wiodzie Wrocław, gdzie ukazuje się 14 (16%) tytułów.

Także 50% czasopism o charakterze przemysłowym wydawane jest w Warszawie.

#### Wiek czasopism

Zdecydowana większość czasopism (prawie 50 tytułów = 57%) ma 20 - 30 letnią tradycję. W latach: 1969 i siedemdziesiątych powstało 35 (40%) tytułów, głównie związanych z uczelniami, czyli powstałych prawdopodobnie w wyniku reorganizacji szkolnictwa wyższego.

#### Charakter wydawnictw

Wśród wszystkich analizowanych — 81 tytułów (92%) publikuje prace źródłowe, 7 zaś (8%) czasopism ma charakter przeglądów dokumentacyjno-informacyjnych.

#### Komitety redakcyjne, recenzje prac

Prawie wszystkie wydawnictwa (87 tytułów) mają swoje komitety redakcyjne. Recenzje prac przed ich drukiem stosuje większość redakcji. Udało się stwierdzić, że 69 (78%) czasopism recenzuje prace. Autorka jednak nie czuła się upoważniona do zbadania trybu przeprowadzanych prac recenzyjnych, w związku z czym nie wykryto stopnia jawności bądź anonimowości recenzji. Ustalono jedynie, że:

- zdecydowanie nie recenzuje — 6 tytułów (w tym 4 PAN-owskie) = 7%,
- polega na rekomendacji — 1 tytuł (1,1%),
- nie ustalono — 12 przypadków (14%).

#### Techniki poligraficzne

Drukiem, ze składu wydaje się — 42 tytuły (48%),

metodą małej poligrafii — 46 tytułów (52%).

#### Objętość arkuszowa

Tutaj uzyskane dane są najmniej precyzyjne, gdyż dla wydawnictw ciągłych nieregularnych rocznego zużycia arkuszy wydawniczych nie ustala się ściśle z góry. Ponieważ zaś nieregularnych tytułów mamy aż 58, tabelki w tych miejscach i dla tych tytułów podają liczby średnie, wyprowadzone z rocznych wielkości zużytych arkuszy. Zatem szacujemy, że na wszystkie wydawnictwa ciągle i czasopisma z mechaniki wykorzystuje się rocznie około 2000 arkuszy wydawniczych.

#### Nakład

Czasopisma te ukazują się w niskich nakładach. Waha się on w granicach od 120 egzemplarzy do 18 000 egzemplarzy. Przeważająca liczba (59 tytułów = 67%) nie przekracza nakładów 500-egzemplarzowych, w tym nawet 38 (43%) tytułów wychodzi w liczbie 150 - 200 egzemplarzy. 17 tytułów (19%) ukazuje się w nakładach do 1000 egz. Tylko 1 tytuł dotyczący mechanizacji rolnictwa drukowany jest w nakładzie 18 000 egzemplarzy.

**Znaczenie czasopism**

Zainteresowanie, jakie budzą polskie wydawnictwa naukowe z zakresu mechaniki, odczytujemy z czasopism referujących, które analizują produkcję piśmienniczą ze swoich zakresów tematycznych i geograficznych.

Z naszych 88 tytułów omawiane są:

— przez Polską Bibliografię Analityczną Mechaniki (PBAM)	— 63 tytuły (72%),
— przez Referativnyj Żurnał (RŻ)	— 18 tytułów (20%),
— przez Applied Mechanics Review (AMR)	— 15 tytułów (17%),
— przez Mathematical Review (MR)	— 7 tytułów (8%),
— przez Bulletin Signalétique (BS)	— 3 tytuły (3,4%),
— przez Science Citation Index (SCI)	— 3 —,—
— przez wszystkie razem	— 3 —,—

Zatem tylko 3 tytuły z całej badanej „populacji” przeszły z powodzeniem wszystkie ogniwa selekcji światowej i ostaly się w SCI, co uznaje się zwykle za równoznaczne z dobrym światowym poziomem naukowym nie tylko we własnej dyscyplinie. Zważywszy, że filadelfijski index cytowań uznał w r. 1966, iż zaledwie 17 polskich czasopism naukowych jest „godne” reprezentować całe naukowe czasopiśmiennictwo polskie widzimy, że prawie 18% z tego, to nasze periodyki z zakresu mechaniki. Są to następujące pozycje tabelki: 3, 9, 17.

Natomiast selektywne narzędzie wewnątrzdyscyplinarne referujące literaturę światową, jakim jest Applied Mechanics Review, omawia 15 naszych tytułów. Dotyczy to następujących pozycji: 1, 2, 3, 4, 9, 15, 17, 19, 25, 34, 65, 66, 68, 69, 70.

Applied Mechanics Review, który analizuje prace naukowe o dobrym i co najmniej średnim światowym poziomie, corocznie omawia około 120 prac autorów polskich, opublikowanych przede wszystkim w wymienionych powyżej tytułach czasopism. Sam fakt, że trafiają one do selektywnego światowego rejestru bibliograficznego, jest już pewną korzystną ich oceną merytoryczną i świadczy o tym, że z „powodzi” światowego piśmiennictwa swej dyscypliny prace te wybijają się na czoło.

*Aleksandra Królikowska*  
Biblioteka IPPT PAN

**Konferencje**

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1 | The 6th European Conference<br>on Fracture<br>RAI — Congress Centre<br>Amsterdam, Holandia<br>15—20 czerwca 1986             | TNO Corporate Communication<br>Department<br>H. van den Berg<br>P.O. Box 297<br>2501 BD The Hague<br>The Netherlands                   |
| 2 | Finite Element and Boundary<br>Element Techniques from<br>Mathematical and Engineering<br>Point of View — Advanced<br>School | Centro Internazionale di<br>Scienze Meccaniche<br>Palazzo del Torso<br>Piazza Garibaldi, 18<br>33100 Udine, Włochy                     |
| 3 | First international<br>Conference on industrial<br>and applied mathematics<br>Paryż, Francja<br>29 czerwiec — 3 lipca 1987   | INRIA, Service des Relations<br>Exterieurs Bureau des<br>Colloques. Domaine<br>de Voluceau<br>BP105-78153 Le Chesnay<br>Cedex, Francja |



SPIS TREŚCI ZA ROK 1984.

Tom 22, Zeszyt 1—2

- T. LEHMANN, Some considerations on the constitutive law in thermoplasticity 3  
 Рассуждения о конститивных законах в термопластичности.  
 Rozważania o prawach konstytutywnych w termoplastyczności.
- K. P. HERMANN, J. M. MIHOVSKY, Plastic zone size of Dugdale type cracks in a self — stressed 25  
 two-phase medium with partially plastified matrix material  
 Размер пластичной зоны трещины, типа Дагдейли, в предварительно напряженной  
 двухфазной среде, с частично пластическим материалом матрицы.  
 Zasięg strefy uplastycznienia szczelin typu Dugdale'a we wstępnie naprężonym ośrodku dwu-  
 fazowym z częściowo uplastycznionym materiałem matrycy
- E. WŁODARCZYK, A. WIŚNIEWSKI, O propagacji frontu fali bocznego rozprężenia gazowych produk- 41  
 tów detonacji w ładunku kumulacyjnym,  
 О распространении фронта волны бокового расширения газовых продуктов детонации  
 в кумуляционном заряде.  
 Propagation of lateral-expansion wave front of gaseous detonation products in a cumulative  
 charge
- J. T. PINDERA Isodyne photoelasticity and gradient photoelasticity: Physical and mathematical 53  
 models, efficacy, applications  
 Изодинамная и градиентная фотоупругость. Физические и математические модели, возмож-  
 ности и применения.  
 Elastooptyka izodynowa i gradientowa. Modele fizyczne i matematyczne, możliwości i zastoso-  
 wanie,
- P. WESOŁOWSKI, Some practical problems of displacement and strain measurement by incoherent 69  
 superposition of interferograms  
 Некоторые практически проблемы измерений перемещений и деформаций при инко-  
 герентной суперпозиции интерферогамм  
 Pewne problemy pomiarów przemieszczeń i odkształceń przy niekoherentnej superpozycji  
 interferogramów
- M. LECH, I. MRUK, J. STUPNICKI, Badania chropowatości powierzchni metodą immersyjną inter- 77  
 ferometri holograficznej  
 Исследования шероховатости поверхностей иммерсионным методом голографической  
 интерферометрии  
 Investigations of surface roughness by use of immersion method of holographic interfero-  
 metry
- P. KUBSKI, W. LEWANDOWSKI, Komórkowo-kominowy charakter konwekcji swobodnej od izo- 93  
 termicznych, poziomych powierzchni wymieniających ciepło w przestrzeni nieorganicznej  
 Ячейко-трубной характер естественной конвекции от изотермических поверхностей до  
 неопределенного пространства  
 Cellular — plumer character of natural convection from isothermal, horisontal surfaces in  
 in unlimited space
- J. ZIELIŃSKI, Procesy turbulentnego transportu, pędu i ciepła w przepływie zapalísadowym 107  
 Процессы турбулентного транспорта количества движения и тепла в течении за решет-  
 кой плит.  
 The turbulent heat and momentum transfer behind a row of blades.
- J. STELECKA, S. KONIECZNY, Equations of the shells with inclusions order along of the parameter lines 115  
 Уравнение оболочек с инклюдзиями вдоль одного семейства параметрических линий  
 Równania powłok z inkluzjami wzdluż jednej rodziny linii parametrycznych
- B. MICHAŁAK, Metoda elementów skończonych dla płyt warstwowych o wyższego rzędu rozkładzie 125  
 funkcji ruchu po grubości płyty  
 Метод конечных элементов для уточненной теории слоистых пластин,

- The finite element method for laminated plates with a high-order theory of plate deformation
- W. OSTASZOWICZ, *Hybrydowa metoda elementów skończonych w zagadnieniu kontaktowym* 135  
 Гибридный метод конечного элемента в контактных задачах  
 Hybrid finite element method in contact problems
- W. BLAJER, J. MARYNIAK, *Uproszczona analiza ustalonego korkociągu samolotu* 151  
 Упрощенный анализ установившегося штопора самолета,  
 Simplified study of airplane steady spin
- W. BLAJER, J. MARYNIAK, *Ustalony korkociąg samolotu. Warunki równowagi* 159  
 Установившейся штопор самолета, условия равновесия  
 Equilibrium conditions of airplane steady spin
- K. SZABELSKI, *Drgania układu samowzbudnego z wymuszeniem parametrycznym i nieliniową sprężystością* 171  
 Колебания самовозбуждающей системы с параметрическим возбуждением и нелинейной упругостью  
 The vibrations of the self-excited system with the parametric extortion and non-linear elasticity
- B. BOSCHNEK, A. GAJEWSKI, *Jednomodalna i dwumodalna optymalizacja ściskanych prętów drgających* 185  
 Одномодальная и бимодальная оптимализация колеблющегося сжимаемого стержня  
 Single and bimodal optimization of vibrating compressed bar
- B. BOSCHNEK, *Оптималне kształtowanie modelu łuku o osi ściśliwej* 187  
 Оптимизация арки со сжимаемой осью  
 Optimization of an arc with compressible axis
- R. ŚWITKA, B. HUSIAR, *Dyskretna analiza modeli reologicznych* 209  
 Дискретный анализ реологических моделей  
 Discrete analysis of reological models
- M. KMIĘSKI, *Przyrostowe równania nieliniowej teorii płyt z naprężeniami i ugięciami początkowymi w zakresie sprężysto-plastycznym materiału* 235  
 Инкрементные уравнения нелинейной теории пластинок с начальными напряжениями и прогибами в упругопластической области  
 Incremental equations of nonlinear theory of plates with initial deflections and stresses in elastic-plastic range
- Z. ŚLODERWACH, T. SAWICKI, *Wpływ parametru wzmacnienia na zachowanie się grubościennej sprężysto-plastycznej kuli obciążonej gradientem temperatury* 255  
 Влияние параметра упрочнения на поведение толстостенного упруго-пластического шара под нагрузкой температуры  
 Elastic-plastic behaviour of thick-walled sphere of work — hardening material subject to a radial temperature gradient
- B. LESZCOWICZ, Z. PIEKARSKI, *Оптимализация przy jawnej zależności równań stanu od wartości brzegowych zmiennych stanu* 271  
 Оптимализация при зависимости уравнений состояния от краевых значений переменных состояния  
 Optimization for a dependence between state equations and boundary values of state variable
- B. ROGOWSKI, *A transversely isotropic layer pressed onto a rigid base with a protrusion or pit* 279  
 Трансверсально-изотропный слой прижимаемый к жесткому основанию с выступом или впадиной  
 Warstwa poprzecznie izotropowa dociskana do sztywnego podłoża z wzniesieniem albo zagłębieniem
- M. SARNA, *Fuzzy sets in adequacy description of mathematical models of mechanical systems* 229  
 Размытые множества в описании адекватности математических моделей технических механических систем  
 Zbiory rozmyte w opisie adekwatności modeli matematycznych technicznych systemów mechanicznych
- Biuletyn Informacyjny 313

- Cz. WOŹNIAK, Constraints in constitutive relations of mechanics. 325  
 Связи в определяющих уравнениях механики.  
 Więzy w porównaniach konstytutywnych mechaniki.
- E. WŁODARCZYK, Zamknięte rozwiązanie problemu propagacji niestacjonarnej płaskiej fali uderzeniowej w suchym gruncie piaszczystym. 343  
 Замкнутое решение проблемы распространения нестационарной плоской ударной волны в сухом песчаном грунте.  
 Closed form solution to the propagation problem of a non-stationary plane shock wave in a dry sandy soil.
- S. WIŚNIEWSKI, Stateczność drgań parametrycznych wału napędzającego mechanizmu rozmieszczone rzędowo. 355  
 Устойчивость параметрических колебаний вала ведущего рядово расположенные механизмы.  
 Parametric vibration stability of a drive shaft for mechanisms spaced in a row.
- W. WALCZAK, M. KOTELKO, Stateczność prostokątnych płyt przekładkowych o zmiennej sztywności wypełniacza. 363  
 Устойчивость прямоугольных, трехслойных пластин о переменной жесткости заполнителя.  
 Stability of rectangular sandwich plates at variable rigidity of the plate core.
- E. WALICKI, J. SAWICKI, Numeryczna analiza przepływu MHD w kanale 379 z niesymetrycznym rozszerzeniem. 379  
 Численный анализ течения МГД в канале с несимметричным расширением.  
 Numerical analysis of MHD flow in the channel with a unsymmetrical cavity.
- T. LEWIŃSKI, Two versions of Woźniak's continuum model of hexagonal-type grid plates. 389  
 Две континуальные модели (по Вознаку) гексагональных сетчатых пластинок.  
 Dwa kontynualne modele (typu Woźniaka) heksagonalnych tarcz siatkowych.
- T. LEWIŃSKI, Differential models of hexagonal-type grid plates. 407  
 Дифференцированные модели гексагональных сетчатых пластинок.  
 Różniczkowe modele heksagonalnych tarcz prętowych.
- J. ZIELNICA, Linearized equations of stability of elastic-plastic conical shell including the effects of passive processes. 423  
 Линеаризация уравнений упруго-пластической устойчивости конической оболочки с учетом разгрузки.  
 Linearyzacja równań stateczności sprężysto-plastycznej powłoki stożkowej z uwzględnieniem procesów biernych.
- J. MARYŃIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, Wpływ warunków rzutu na ruch zasobnika w pobliżu nosiciela i parametry upadku. 433  
 Влияние условий сброса на движение авиационного контейнера близко носителя и параметры его падения.  
 Influence of the dropping conditions on the container motion near carrier and on the impact parameters.
- W. BŁAJER, Badanie stateczności samolotu w ustalonym korkociągu. 445  
 Испытания устойчивости самолета во время установившегося штопора.  
 A study of airplane motion stability in steady spin.
- A. DĄBROWSKI, Z. BURDA, Dynamika jednokulkowego korektora pionu sztucznego horyzontu. 453  
 Динамический анализ механического корректора вертикали по авиагоризонту.  
 Dynamical analysis of the mechanical Erector for Gyro-Vertical.
- B. ROGOWSKI, Thermal stresses in a transversely isotropic layer containing an annular crack. Tensile and shear — type crack. 473  
 Тепловые напряжения в трансверально-изотропном слое с кольцевой трещиной. Раскрытие и сдвиг трещины.

- Naprężenia cieplne w poprzecznie izotropowej warstwie z pierścieniową szczeliną. Rozwieranie i ścinanie szczeliny.
- M. ŻUKOWSKI, Structures on the partly elastic subsoil. 493  
Взаимодействие конструкций с частично упругим основанием.  
Współpraca konstrukcji z częściowo sprężystym podłożem.
- K. MAJORKOWSKA-KNAPP, Fale sprzężone mechano-termo-elektryczne w stałym ośrodku piezoelektrycznym. 509  
Сопряженные механо-термо-электрические волны в пьезоэлектрических средах.  
Coupled mechano-thermo-electric waves in solid piezoelectric continuum.
- J. BIELSKI, J. SKRZYPEK, Analiza stateczności procesu dużych odkształceń sprężystych powłoki cylindrycznej przy dwukierunkowym rozciąganiu. 525  
Устойчивость процесса больших упругих деформаций цилиндрической оболочки в случае двунаправленного растяжения.  
Stability of the process of large elastic strains of a cylindrical shell at biaxial tension.
- K. SZUWAŁSKI, Idealnie sprężysto-plastyczna tarcza o profilu hiperbolicznym. 539  
Идеально упруго-пластический диск гиперболического профиля.  
Perfectly elastic-plastic hyperbolic disk.
- P. WITAKOWSKI, E. KAMIENIOWBRODZKA-OLSZEWSKA, Termodynamika betonu w warunkach pożarowych. 549  
Термодинамика бетона в пожарных условиях.  
Thermodynamics of concrete in fire conditions.
- J. PIWNIK, Niejednorodność plastyczna stopu PA2 w procesie wyciskania. 565  
Пластическая неоднородность при прессовании сплава ПА2.  
Nonhomogeneity of the plastic properties of alloy PA2 during extrusion.
- T. SADOWSKI, Dwoistość równowagi w stanach czystego zginania. 575  
Бифуркационное равновесие в состояниях чистого изгиба.  
Bifurcation equilibrium in pure bending states.
- M. WĄGROWSKA, Osiowo symetryczne zagadnienia mikropolarnej teorii plastyczności. 595  
Аксально симметричные задачи микрополярной теории пластичности.  
Axially symmetric problems of the micropolar theory of plasticity.
- Z. RUSZTER, Zredukowane liniowe równania powłok o wolno zmiennych krzywiznach. 613  
Упрощенные линейные уравнения оболочек с медленно изменяющимися кривизнами.  
Reduced linear equations of shells with slowly varying curvatures.
- J. GRABOWSKI, Wyboczenie prętów stalowych poddanych wstępnym wydłużeniom trwałym. 621  
Потеря устойчивости стальных стержней подвергнутых предварительным стойким удлинением.  
Buckling of steel bars initially overstrained in tension.
- E. BOBUŁA, Odpowiedź na list J. Waclawika do Redakcji Mechaniki 637  
Teoretycznej i Stosowanej.  
Nota Redakcyjna 639  
Biuletyn Informacyjny. 641



SPIS TREŚCI ZA ROK 1985

Tom 23, Zeszyt 1

Profesor Antoni Sawczuk.	3
B. SKALMIERSKI, Kształt skrzypiec a elastyka Eulera.	7
Вид скрипки а эластика Эйлера. Shape of the violin and Euler's elastics.	
W. FRYDRYCHOWICZ, M. C. SINGH, Group theoretic technique for the similarity solution of a non-linear elastic rod subjected to velocity impact.	19
Решение подобия нелинейного упругого стержня под воздействием импульса скорости с помощью метода групповых преобразований. Transformacja podobieństwa w przypadku zagadnienia nieliniowego pręta sprężystego pod działaniem impulsu prędkości przy pomocy metody przekształceń grupowych.	
A. RADZIECKI, Metoda rozwiązywania równań ruchu przy inercyjnych obciążeniach ruchomych.	39
Метод решения уравнений движения при инертных подвижных нагрузках A method of solving equations of motion for inert moving loads.	
T. LEWIŃSKI, Physical correctness of Cosserat-type models honeycomb grid plates.	53
Анализ физической правильности моделей типа Коссератов для сетчатых гексагональных пластинок Analiza fizycznej poprawności modeli typu Cosseratów prętowych tarcz heksagonalnych.	
J. MIĄSTKOWSKI, Wpływ grubości na nośność graniczną i stan odkształcenia płaskich elementów z karami prostokątnymi o różnej ostrości.	71
Влияние толщины на несущую способность плоских стержней с прямоугольными надрезами о различной геометрии. The influence of the thickness on the yield load of elements with a rectangular notch of various geometry.	
K. GRYSA, Graniczne zagadnienie odwrotne dla równań falowych.	81
Граничные обратные задачи для волнового уравнения. Boundary inverse problems for wave problems.	
R. NAGÓRSKI, Jednowymiarowy ciągły model stateczności sprężystej siatkowych dźwigarów powierzchniowych.	97
Устойчивость одномерной непрерывной модели сеткообразных упругих поверхностных конструкций. Stability of a one-dimensional continuous model of lattice-type elastic surface structures.	
R. NAGÓRSKI, Jednowymiarowy ciągły model stateczności sprężystej płaskiego dźwigara siatkowego.	113
Устойчивость одномерной непрерывной модели сеткообразных упругих пластинок. Stability of a one-dimensional continuous model of lattice-type plates.	
R. ŚWITKA, B. HUSIAR, Analiza reologiczna siatek ciągowych wykonanych z lin stalowych.	137
Реологический анализ сеток, изготовленных из стальных канатов. Reological analysis of net structures made of steel cables.	
S. DOERFFER, Wpływ oscylacji na konwekcyjne przekazywanie ciepła w zastosowaniu do zbiorników okrętowych.	153
Теплообмен в колеблющихся цистермах. Heat transfer in oscillating tank.	
Biuletyn informacyjny.	165

Tom 23, Zeszyt 2

Profesor JÓZEF WIĘSKOWSKI — wspomnienie pośmiertne.	171
A. MUC, Basic equations of symmetric elastic-plastic deformations of an incomplete toroidal shell.	175
Основные уравнения симметричных упруго-пластических деформации тороидальных оболочек.	

- Podstawowe równania symetrycznych odkształceń sprężysto-plastycznych powłoki toroidalnej.
- T. LEWIŃSKI, The state of extension of honeycomb grid strip. 187  
 Растяжение сетчатой полосы со структурой соты мёда.  
 Rozciągania pasma siatkowego o strukturze plastra miodu.
- Z. NANIEWICZ, Some existence and uniqueness results in elastostatics with constraints for displacements and stresses. 209  
 Некоторые результаты касающиеся существования и однозначности в эластостатике со связями в перемещениях и напряжениях.  
 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań w elastostatyce z więzami dla przemieszczeń i naprężeń.
- K. SZABELSKI, W. SAMODULSKI, Drgania układu z niesymetryczną charakterystyką sprężystości przy parametrycznym i zewnętrznym wymuszeniu. 223  
 Колебания системы с несимметрической характеристикой упругости при параметрическом и внешнем воздействии.  
 The vibrations of the system with nonsymmetrical characteristics of the elasticity under the parametric excitation and external exertion.
- J. OSIŃSKI, Analiza drgań parametrycznych układów ciągłych poddanych stałemu obciążeniu poprzecznemu z zastosowaniem metody asymptotycznej i metody elementów skończonych. 241  
 Анализ параметрических колебаний непрерывной системы с постоянной поперечной нагрузкой с применением асимптотического метода и конечных элементов.  
 The analysis of parametric vibrations of continuous systems with constant transversal loading by asymptotic method and finite elements.
- R. WOJNAR, Zastosowanie wewnętrznego odbicia pod kątem Brewstera do rozdzielania naprężeń w elastoptyce. 255  
 Применение внутреннего отражения под углом Брюстера для разделения напряжений в фото-упругости.  
 Application of the internal reflection at Brewster's angle to obtain the photoelastic image.
- J. GARBARSKI, Wpływ napromieniowania i temperatury na właściwości reologiczne polietylenu. 267  
 Влияние излучения и температуры на реологические свойства полиэтилена.  
 The effect of irradiation and temperature on the rheological behaviour of polyethylene.
- Z. GABRYSZEWski, B. PINDUR, Ocena powierzchni plastyczności materiałów anizotropowych nieliniowych metodą sprzężenia termo-mechanicznego. 291  
 Оценка поверхности пластичности анизотропных нелинейных материалов методом термо-механического сопряжения.  
 The determination of the anisotropic non-linear material's yield surface by thermal-mechanical coupling method.
- K. GOŁOŚ, Zastosowanie zmodyfikowanej metody Kryłowa-Bogolubowa do badania drgań swobodnych układów nieliniowych. 307  
 Применение модифицированного метода Крылова-Боголюбова для анализа свободных нелинейных колебаний систем.  
 The use of modified Krylov-Bogoliubov method in the analysis of free nonlinear oscillations of systems.
- T. SMOLEŃ, Zginanie belek lepko-sprężystych na podłożu reologicznym. 314  
 Изгиб вязкоупругих балок на реологическом основании.  
 Bending of visco-elastic beams on rheological foundation.
- Biuletyn Informacyjny. 335

- J. KOŁODZIEJ, Określenie poprzecznie efektywnej przewodności cieplnej kompozytu o jednokierunkowo ułożonych włóknach metodą kollokacji brzegowej. 355  
 Определение перпендикулярной эффективной теплопроводности композитов укрепленных волокнами расположенными в одном направлении методом граничной коллокации.

- Determination of the transverse effective thermal conductivity of unidirectionally fibre arranged composites by means boundary collocation method.
- J. PTWNIK, Doświadczalna weryfikacja rozwiązań kinematyki procesu wyciskania. 375  
 Экспериментальный анализ кинематики при осесимметричном прессовании.  
 Experimental analysis of the kinematics of extrusion process.
- E. CEGIELSKI, Problemy optymalnego kształtowania belki lepkoplastycznej przy obciążeniu quasi- 381  
 statycznym.  
 Проблемы оптимального формирования кронштейновой вязко пластической балки  
 подвергнутой действию квази-статической нагрузки.  
 Some problems of optimal shape-design of viscoplastic cantilever beam under quasi-static  
 loading.
- E. WŁODARCZYK, Płaski rozlot produktów detonacji ze skokowo zmiennym wykładnikiem izen- 397  
 tropu.  
 Плоский разлет продуктов детонации со скачкообразно изменяющимся показателем  
 изэнтропии.  
 Plane expansion of detonation products with step-variable isentropic exponent.
- R. SŁIWA, J. ZASADZIŃSKI, Metoda górnej oceny w zastosowaniu do dwuotworowego wyciskania 413  
 metali.  
 Применение метода верхней оценки для двухотверстивного прессования  
 An upper-bound approach to the extrusion of metals through two-hole-die.
- K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, Modelowanie matematyczne automatycznie sterowanego śmigłowca 427  
 w ruchu przestrzennym.  
 Математическое моделирование автоматически управляемого вертолѐта в пространстве-  
 венной движении.  
 Mathematical modelling of the controlled helicopter in the three-dimensional motion.
- K. JANKOWSKI, Metodyka wyznaczania parametrów ruchu ustalonego śmigłowca na przykładzie 443  
 lotu poziomego i zawisu.  
 Методика определения параметров установившегося движения вертолѐта с приме-  
 нением к горизонтальному полѐту и висению.  
 Methods of determination of the helicopter steady motion parameters with exemplary applica-  
 tion to horizontal flight and hover.
- K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, Badanie stateczności ustalonych stanów lotu sterowanego śmigłowca 455  
 i analiza sprzężeń ruchów przestrzennych jego elementów.  
 Исследование устойчивости установившихся режимов полѐта управляемого верто-  
 лѐта и анализ сопряжений пространственных движений его элементов.  
 Study of a dynamic stability of the steady flight states of the controlled helicopter and analysis  
 of couplings between three-dimensional motions of the helicopter elements.
- J. GLADYSZ, M. MNICH, Wykorzystanie rachunku dystrybucyjnego do opisu tarczy zarysowanej. 467  
 Использование обобщѐнного счѐта для описания зарисованного диска.  
 The application of distribution calculus to the description of cracked plate.
- T. GAŁKIEWICZ, A. ŻELIGOWSKI, Nośność graniczna ścianki równomiernie ściskanej — skrzyń- 475  
 kowego podzespołu cienkościennego.  
 Несущая способность тонкой боковой стенки тонкостенного столба.  
 Load carrying capacity of uniform compressed flange of thin-walled box substructure.
- A. ŻELIGOWSKI, Badania doświadczalne stanu zakrytycznego równomiernie ściskanej płyty prosto- 485  
 kątej, będącej elementem zginanego dźwigara.  
 Экспериментальные исследования закритического состояния равномерно сжимаемой  
 прямоугольной плиты.  
 Experimental investigation of postcritical state of uniformly compressed rectangular plate  
 as an element of bent.
- J. NOWINKA, J. ZIELNICA, Stateczność sprężysto-plastycznej trójwarstwowej powłoki w kształcie 495  
 wycinka stożka w ujęciu geometrycznie nieliniowym.

- Геометрически нелинейная устойчивость трехслойной конической панели.  
Geometrically nonlinear problem of an elastic-plastic open sandwich conical shell.
- N. CAO MENN, Drgania gięte, nieliniowe belki pod działaniem obciążeń stochastycznych poprzecznych i wzdłużnych. 515  
Нелинейные изгибные колебания балки под воздействием случайных и продольных нагрузок  
Nonlinear flexural vibrations of beam subjected to stochastic transverse and longitudinal loadings.
- S. TOKARZEWSKI, Klasa przepływów powolnych w kanałach kołowo zakrzywionych. 527  
Класс медленных течений в искривлённых каналах.  
A class of creeping flows in curved channels.
- M. GLĄPSKI, Zmodyfikowana metoda proporcjonalnego naprowadzania pocisków w poziomej płaszczyźnie zbliżenia 539  
Модифицированный метод пропорционального наведения снарядов в горизонтальной плоскости сближения  
The modified method of proportional approach of missiles in the horizontal approach — plane
- J. BALAŠ, M. DRŽIK, Determination of stress intensity factors by optical methods 555  
Определение коэффициентов интенсивности напряжений оптическими методами  
Wyznaczenie współczynników intensywności naprężeń metodami optycznymi
- I. I. BUGAKOW, Квазихрупкое разрушение скручиваемых образцов с V — образными вырезами.  
Kwazikruche pękanie próbek skręcanych z karbem w kształcie litery A  
Quasi brittle fracture of the V notched specimens subjected to pure torsion
- I. I. DEMIDOWA, Исследование остаточных напряжений в составных телах методом фотоупругости.  
Badania metodami elastoоптычными напряżeń reszkowych w ciałach złożonych  
Investigation of the residual stresses in complex bodies by photoelastic methods
- J. F. CARDENAS-GARCIA, D. C. HOLLOWAY, Theoretical and experimental study of micro-cracking induced by the Rayleigh wave. 577  
Теоретические и экспериментальные исследования микротрещин вызванных волнами Рэлея.  
Teoretyczne i doświadczalne badania mikropęknięć powodowanych falą Rayleigha
- Z. FÜZESSY, Measurement of deformation and shape by holographic interferometry. 587  
Исследование деформации и форм при помощи голографической интерферометрии  
Badanie odkształceń i kształtów z pomocą interferometrii holograficznej
- D. C. HOLLOWAY, W. H. WILSON, W. L. FOURNEY, D. B. BARKER, The application of dynamic holographic interferometry and photoelasticity to problems in geotechnical engineering 595  
Применение голографической интерферометрии и фотоупругости для исследования динамических задач геотехники  
Zastosowanie interferometrii holograficznej i elastoоптыki do badania dynamicznych problemów geotechniki
- R. PRAVNAKARAN, Shear testing of composites 607  
Испытания композитов на сдвиг.  
Próby na ścinanie kompozytów
- W. T. TROSZCZENKO, E. I. USKOW, A. W. ВАВАК, Трещиностойкость тугоплавких металлов и сплавов  
Odporność na pękanie trudnotopliwych metali i stopów  
Fracture toughness of high-melting metals and alloys
- P. WESOŁOWSKI, In-plane strain analysis by means of reflection holography 625  
Анализ деформации в плоскости методом интерферометрии в отраженном свете  
Analiza odkształceń w płaszczyźnie przy użyciu interferometrii w świetle odbitym

- J. GASEK, Model aerodynamiczny i opis matematyczny ruchu wydłużonego pocisku ciężkiego 633  
Специфика полёта со сверхзвуковой скоростью удлиненного детального объекта.  
Characteristic features of high supersonic velocity flight of an elongated heavy missile
- W. BLAJER, J. MARYNIAK, Modelowanie matematyczne sterowanego ruchu samolotu w korkociągu 643  
Математическое моделирование управляемого самолёта во время штопора  
Mathematical modelling of aircraft controlled motion in spin
- J. MARYNIAK, W. MOLICKI, Stateczność spiralna samolotu w ruchu przestrzennym z uwzględnieniem efektów elementów wirujących zespołu napędowego 651  
Спиральная устойчивость самолёта в пространственном движении учитывая эффекты вращательных элементов силовой установки  
Spiral stability of airplane in a space motion with the effect of power unit spin elements
- Z. GORAJ, Numeryczne i organizacyjne aspekty obliczeń stateczności samolotu 657  
Численные и организационные аспекты вычислений устойчивости самолёта  
Numerical and organizational sides to the computing of stability of an aircraft
- J. MANEROWSKI, Analiza dynamiki sterowanej łopaty nośnego wirnika śmigłowca metodą elementów skończonych 667  
Анализ динамики лопасти несущего винта вертолётa методом конечного элемента  
Dynamical analysis of rotor blade of a helicopter by finite element method
- Biuletyn Informacyjny 677

Fracture toughness of high-melting metals and alloys Odporność na pękanie trudnotopliwych metali i stopów	
P. WESOŁOWSKI, In-plane strain analysis by means of reflection holography Анализ деформации в плоскости методом интерферометрии в отраженном свете Analiza odkształceń w płaszczyźnie przy użyciu interferometrii w świetle odbitym	625
J. GASEK, Model aerodynamiczny i opis matematyczny ruchu wydłużonego pocisku ciężkiego Специфика полета со сверхзвуковой скоростью удлиненного летательного объекта Characteristic features of high supersonic velocity flight of an elongated heavy missile	633
W. BLAJER, J. MARYNIAK, Modelowanie matematyczne sterowanego ruchu samolotu w korkociągu Mathematical modelling of aircraft controlled motion in spin Математическое моделирование управляемого самолёта во время штопора	643
J. MARYNIAK, W. MOŁICKI, Stateczność spiralna samolotu w ruchu przestrzennym z uwzględnieniem efektów elementów wirujących zespołu napędowego Спиральная устойчивость самолёта в пространственном движении учитывая эффекты вращательных элементов силовой установки Spiral stability of airplane in a space motion with the effect of power unit spin elements	651
Z. GORAJ, Numeryczne i organizacyjne aspekty obliczeń stateczności samolotu Numerical and organizational sides to the computing of stability of an aircraft Численные и организационные аспекты вычислений устойчивости самолёта	657
J. MANEROWSKI, Analiza dynamiki sterowanej łopaty rotacyjnego wirnika śmigłowca metodą elementów skończonych Анализ динамики лопасти несущего винта вертолета методом конечного элемента Dynamical analysis of rotor blade of a helicopter by finite element method	667
Biuletyn informacyjny	677
Spis treści za rok 1984	695
Spis treści za rok 1985	699

- Экспериментальные исследования закритического состояния равномерно сжимаемой прямоугольной плиты  
Experimental investigation of postcritical state of uniformly compressed rectangular plate as an element of bent
- J. NOWINKA, J. ZIELNICA, Stateczność sprężysto-plastycznej trójwarstwowej powłoki w kształcie wycinka stożka w ujęciu geometrycznie nieliniowym. 495  
Геометрически нелинейная устойчивость трехслойной конической панели  
Geometrically nonlinear problem of an elastic-plastic open sandwich conical shell
- N. CAO MENH, Drgania giętne, nieliniowe belki pod działaniem obciążeń stochastycznych poprzecznych i wzdłużnych 515  
Нелинейные погибные колебания балки под воздействием случайных поперечным и продольным нагрузкам  
Nonlinear flexural vibrations of beam subjected to stochastic transverse and longitudinal loadings
- S. TOKARZEWSKI, Klasa przepływów powolnych w kanałach kołowo zakrzywionych 527  
Класс медленных течений в искривлённых каналах  
A class of creeping flows in the curved channels
- M. GLAŃSKI, Zmodyfikowana metoda proporcjonalnego naprowadzania pocisków w poziomej płaszczyźnie zbliżenia 539  
Модифицированный метод пропорционального наведения снарядов в горизонтальной плоскости сближения  
The modified method of proportional approach of missiles in the horizontal approach-plane
- J. BALAŚ, M. DRŻIK, Determination of stress intensity factors by optical methods 555  
Определение коэффициентов интенсивности напряжений оптическими методами  
Wyznaczanie współczynników intensywności naprężeń metodami optycznymi.
- I. I. ВУГАКОВ, Квазихрупкое разрушение скручиваемых образцов с  $V$  — образными вырезами 563  
Kwazikruche pękanie próbek skręcanych z karbem w kształcie litery  $V$ .  
Quasi brittle fracture of the  $V$  notched specimens subjected to pure torsion
- I. I. ДЕМЬОВА, Исследование остаточных напряжений в составных телах методом фотоупругости 571  
Badania metodami elastoоптычными naprężeń resztkowych w ciałach złożonych  
Investigation of the residual stresses in complex bodies by photoelastic methods
- J. F. CARDENAS-GARCIA, D. C. HOLLOWAY, Theoretical and experimental study of micro-cracking induced by the Rayleigh wave 577  
Теоретические и экспериментальные исследования микротрещин вызванных волнами Рэлея  
Teoretyczne i doświadczalne badania mikropęknięć powodowanych falą Rayleigha
- Z. FÜZESSY, Measurement of deformation and shape by holographic interferometry 587  
Исследование деформации и форм при помощи голографической интерферометрии  
Badanie odkształceń i kształtów z pomocą interferometrii holograficznej
- D. C. HOLLOWAY, W. H. WILSON, W. L. FOURNEY, D. B. BARKER, The application of dynamic holographic interferometry and photoelasticity to problems in geotechnical engineering 595  
Применение голографической интерферометрии и фотоупругости для исследования динамических задач геотехники  
Zastosowanie interferometrii holograficznej i elastoоптыki do badania dynamicznych problemów geotechniki
- R. PRAVNAKARAN, Shear testing of composites 607  
Испытания композитов на сдвиг  
Próby na ścinanie kompozytów
- W. T. TROSZCZENKO, E. I. USKOW, A. W. ВАВЛК, Трещиностойкость тугоплавких металлов и сплавов 617

Cena zł 200.—

**Warunki prenumeraty**

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 400.—

półrocznie zł 200.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1963 r. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 3, pokój 309)*

---