

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

720

PL ISSN 0079-3701

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 23 • ZESZYT 2



WARSZAWA 1985

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

Profesor	Józef Więckowski	— Wspomnienie pośmiertne.	171
A. MUC,	Basic equations of symmetric elastic-plastic deformations of an incomplete toroidal shell. Основные уравнения симметричных упругопластических деформаций торoidalных оболочек Podstawowe równania symetrycznych odkształceń sprężysto-plastycznych powłoki toroidalnej.		175
T. LEWIŃSKI,	The state of extension of honeycomb grid strip. Растяжение сетчатой полосы со структурой соты мёда. Rozciąganie pasma siatkowego o strukturze plastra miodu.		187
Z. NANIEWICZ,	Some existence and uniqueness results in elastostatics with constraints for displacements and stresses. Некоторые результаты касающиеся существования и однозначности в эластостатике со связями в перемещениях и напряжениях Istnienie i jednoznaczność rozwiązań w elastostatyce z więzami dla przemieszczeń i naprężeń.		209
K. SZABELSKI, W. SAMODULSKI,	Drgania układu z niesymetryczną charakterystyką sprężystości przy parametrycznym i zewnętrznym wymuszeniu. Колебания системы с несимметрической характеристикой упругости при параметрическом и внешнем воздействии. The vibrations of the system with nonsymmetrical characteristics of the elasticity under the parametric excitation and external exertion.		223
J. OSIŃSKI,	Analiza drgań parametrycznych układów ciągłych poddanych stałemu obciążeniu poprzecznemu z zastosowaniem metody asymptotycznej i metody elementów skończonych. Анализ параметрических колебаний непрерывной системы с постоянной поперечной нагрузкой с применением асимптотического метода и конечных элементов. Analysis of parametric vibrations of continuous systems with constant transversal loading by asymptotic method and finite elements.		241
R. WOJNAR,	Zastosowanie wewnętrznego odbicia pod kątem Brewstera do rozdzielania naprężeń w elastooptyce. Применение внутреннего отражения под углом Брюстера для разделения напряжений в фото-упругости. Application of the internal reflection at Brewster's angle to obtain the photoelastic image.		255
J. GARBARSKI,	Wpływ napromieniowania i temperatury na właściwości reologiczne polietylenu. Влияние излучения и температуры на реологические свойства полиэтилена The effect of irradiation and temperature on the rheological behaviour of polyethylene.		267
Z. GABRYSZEWski, B. PINDUR,	Ocena powierzchni plastyczności materiałów anizotropowych nieliniowych metoda sprzężenia termo-mechanicznego. Оценка поверхности пластичности анизотропных нелинейных материалов методом термо-механического сопряжения. The determination of the anisotropic non-linear material's yield surface by thermal-mechanical coupling method.		291
K. GOŁOŚ,	Zastosowanie zmodyfikowanej metody Kryłowa-Bogolubowa do badania drgań swobodnych układów nieliniowych. Применение модифицированного метода Крылова-Боголюбова для анализа свободных нелинейных колебаний систем. The use of modified Krylov-Bogoliubov method in the analysis of free nonlinear oscillations of systems.		307
T. SMOLEŃ,	Zginanie belek lepkosprężystych na podłożu reologicznym. Изгиб вязкоупругих балок на реологическом основании. Bending of visco-elastic beams on rheological foundation.		315
Biuletyn Informacyjny			334

4m 420

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 23 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1985

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,
STANISŁAW JERZY GDULA, IGOR KISIEL,
ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI, PIOTR WILDE,
JÓZEF WOJNAROWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY
STANISŁAW DUBIEL — REDAKTOR
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR
ANDRZEJ TYLIKOWSKI — REDAKTOR
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR
ZOFIA DYŚKO — REDAKTOR
FELICJA KOLIŃSKA — SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 500. Ark. wydawniczych 14,0 Ark. drukarskich 11,5. Papier druk. b. sat. kl. III, 80 g. 70 × 100
Oddano do składania 5.IV.1985 r. Druk ukończono w lutym 1986 r. Zam.405/85. Cena 100 zł.—

Drukarnia Im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

Profesor Józef Więckowski



WSPOMNIENIE POŚMIERTNE

W dniu 15 października 1984 r. zmarł nagle w pełni sił twórczych prof. dr hab. inż. Józef Więckowski, teoretyk wysokiej klasy w dziedzinie mechaniki, doskonały badacz i pedagog w dziedzinie wytrzymałości konstrukcji okrętowych.

Prof. Józef Więckowski urodził się w 1928 roku w Warszawie. Pracę zawodową rozpoczął jeszcze będąc studentem Wydziału Budowy Maszyn Politechniki Gdańskiej w roku 1949, jako młodszy asystent w Katedrze Matematyki. Po ukończeniu studiów, jako wybitnie uzdolniony, został zaangażowany do utworzonego w Gdańsku Oddziału Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, gdzie pracował jako aspirant naukowy pod kierownictwem profesora Jarosława Naleszkiewicza, w owych czasach rzecznika nowoczesnych zagadnień mechaniki analitycznej.

Tematem pracy doktorskiej aspiranta Więckowskiego, zakończonej w 1957 roku, były „Parametry hydro- i stereomechaniczne drgań kadłuba statku”.

Od początku 1958 roku adiunkt Józef Więckowski objął stanowisko kierownika katedry Mechaniki Ustrojów Okrętowych. W tym samym roku uzyskał stopień docenta, osiągając status samodzielnego pracownika nauki, kierującego placówką naukową, w niespełna 6 lat po dyplomie.

Pierwszą dużą, samodzielną tematyką podjętą przez profesora Więckowskiego dla okrętownictwa był cykl prac nad zastosowaniem metod wariacyjnych teorii sterowania w statyce i dynamice konstrukcji okrętowych. Wysoki poziom teoretyczny i konieczność wprowadzenia założeń upraszczających dla uzyskania wyników liczbowych nie sprzyjały możliwości bezpośrednich zastosowań praktycznych. Prace te zyskały wysokie uznanie w środowiskach naukowych mechaników. W okrętownictwie, gdzie panowała jeszcze tradycja rozwiązywania zadań na podstawie metod empirycznych, opartych na doświadczeniach towarzystw klasyfikacyjnych, brak było wiary w perspektywę rozwoju metod analitycznych konstruowania.

Profesor podejmuje szereg innych tematów zasięgiem swoim szeroko wybiegających poza mechanikę okrętu.

Pracuje nadal w IPPT, a później w Instytucie Maszyn Przepływowych PAN, prowadząc tam pracownię dynamiki maszyn i kształcąc kadrę naukową. Zostaje także recenzentem pisma naukowego — Applied Mechanics Reviews i polskiego — Bibliografia Analityczna Mechaniki.

W roku 1965 uzyskuje habilitację za pracę podsumowującą tematykę zastosowania teorii sterowania w mechanice konstrukcji okrętowych.

W roku 1967 zostaje mianowany profesorem nadzwyczajnym.

Przełom, który nastąpił wraz z rozpowszechnieniem komputerów w stosowaniu metod analitycznych do zagadnień praktycznych, nie ominął i okrętownictwa. Powstaje powszechne zapotrzebowanie na wiedzę teoretyczną, na poważne metody analityczne, na matematykę stosowaną. Reakcja Profesora jest zdecydowana — zwiększa tempo i poziom pracy. Satisfakcja, że wybrał właściwą drogę, dodaje Mu sił i pewności. W roku 1973 zostaje członkiem korespondentem PAN, w 1975 profesorem zwyczajnym.

W latach 1975 - 1981 pełni funkcję dyrektora Instytutu Okrętowego. Profesor nadal intensywnie publikuje dalsze prace własne i szkoli kadrę naukową prowadząc seminaria. Uczestniczy w licznych konferencjach naukowych, jest zapraszany do wielu krajów, zdobywa w zagranicznych środowiskach naukowych pozycję autorytetu w dziedzinie mechaniki okrętu.

W 1980 r. powołany został na przewodniczącego nowo powstałego, obejmującego 7 województw Oddziału PAN w Gdańsku, wykazując talent organizatora i twórcy linii programowej Oddziału.

Wybitny teoretyk i pedagog w dziedzinie mechaniki i wytrzymałości konstrukcji okrętowych był głównym twórcą szeregu rozwiązań teoretycznych wykorzystanych w praktyce, w gospodarce. Aktualnie pełnił funkcję koordynatora problemu międzyresortowego badań podstawowych o nazwie „Podstawowe zagadnienia mechaniki i systemów technicznych w zastosowaniach morskich”.

Profesor opublikował ponad 130 prac naukowych, był promotorem ośmiu obronionych przewodów doktorskich i kilku dalszych będących w toku. Wielką wagę przykładając do nauczania studentów wprowadzając nowoczesne treści i metody do wykładów akademickich oraz popularyzując wiedzę na wykładach Wszechnicy PAN. Był autorem 4 podręczników akademickich.

Bardzo rzetelny w formułowaniu hipotez naukowych stawiał również wysokie wymagania innym. Był przedstawicielem środowiska w Centralnej Komisji Kwalifikacyjnej Kadr Naukowych, w Komitecie Nagród Państwowych, zasiadał w Prezydium Polskiej Akademii Nauk.

Profesor był członkiem założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Aktywnie uczestniczył w pracach Towarzystwa. Był członkiem Komitetu Redakcyjnego organu Towarzystwa „Mechanika Teoretyczna i Stosowana” oraz przewodniczącym Oddziału w Gdańsku w latach 1969 - 1971.

Osobny, bardzo bogaty rozdział stanowiła praca społeczna na rzecz nauki, gospodarki i regionu gdańskiego. Profesor pełnił funkcje: posła do Sejmu PRL w latach 1977 - 1980,

radnego WRN w Gdańsku w latach 1980 - 1984 i ponownie w obecnej kadencji, będąc jednocześnie członkiem prezydium WRN. Brał udział w pracach wielu komisji rad naukowych, krajowych i wojewódzkich.

Za zasługi i osiągnięcia Profesor został odznaczony m.in. Krzyżem Oficerskim i Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski, Medalem Komisji Edukacji Narodowej i Odznaką Zasłużonego Nauczyciela PRL.

Odszedł z szeregów Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej Członek wielce zasłużony dla rozwoju Towarzystwa, Człowiek całkowicie oddany nauce w pełnym jej bogactwie i wielostronności, uprawianej z pasją i bez wytchnienia.

Liczne grono przyjaciół opuścił serdeczny Kolega.

BASIC EQUATIONS OF SYMMETRIC ELASTIC-PLASTIC DEFORMATIONS OF AN INCOMPLETE TOROIDAL SHELL

ALEKSANDER MUC

*Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej,
 Kraków, ul. Warszawska 24*

1. Formulation of the problem

In the case when kinematic nonlinearities is taken into account the elastic deformations may have essential influence on both the initiations of elastic-plastic process and its termination. Basic equations for symmetric, rigid-plastic deformations of a toroidal shell, loaded by in-plane bending and pressure, have been derived in [2]. The purpose of this paper is to generalize these results to the case when elastic-plastic deformations are allowed

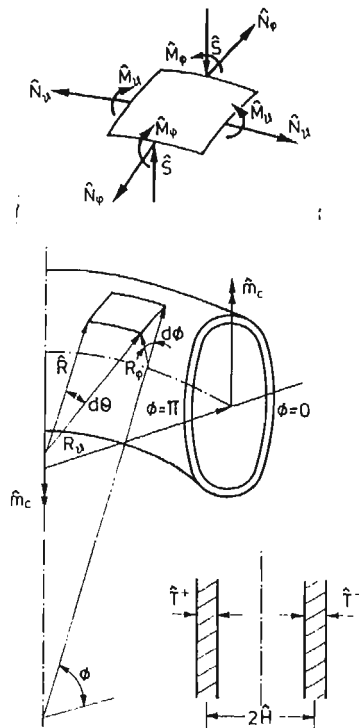


Fig. 1

for. Similarly as in [1] we consider deformation of an incomplete torus as the rotationally-symmetric problem in broader sense, since circumferential displacements are allowed for (Fig. 1). Thus, geometric assumptions investigated in [1], as well as the notation introduced there, have been retained. Let the parameter of change of principal curvature κ be defined as an increment of angle in the circumferential direction

$$\kappa = d\vartheta/d\theta - 1 \quad (1.1)$$

The Cauchy strain rates derived in [1] have the following form:

$$(\delta \varepsilon_j^c)^\pm = \delta \varepsilon_j \pm \delta \kappa_j, \quad j = \varphi, \vartheta \quad (1.2)$$

where

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_\varphi &= \frac{-\delta u_r' \sin \varphi + \delta u_z' \cos \varphi}{R_\varphi}, & \delta \kappa_\varphi &= \frac{\delta \varphi'}{R_\varphi}, \\ \delta \varepsilon_\vartheta &= \frac{\delta u_r}{R} (1 + \kappa) + \delta \kappa \left(1 + \frac{u_r}{R} \right), & \delta \kappa_\vartheta &= \frac{-\delta \varphi \sin \varphi (1 + \kappa) + \delta \kappa \cos \varphi}{R}, \\ \delta \varphi &= - \frac{\delta u_r' \cos \varphi + \delta u_z' \sin \varphi}{R}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

δ and ()' denote the derivation with respect to time-like parameter τ and material, angular, meridional coordinate, respectively. Other symbols used in (1.3) denote:

φ, ϕ — angular, meridional coordinate in deformed and undeformed state,
 ϑ, θ — angular, circumferential coordinate in deformed and undeformed state,

$\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\vartheta$ — elongations at the middle surface,

$\kappa_\varphi = \hat{\kappa}_\varphi \hat{H}, \kappa_\vartheta = \hat{\kappa}_\vartheta \hat{H}$ — parameters of increments of the middle surface curvature change of unit angle,

$R_\varphi = \hat{R}_\varphi(\hat{H}, R = \hat{R}_\vartheta) \hat{H}$ — radii of undeformed element,

$u_r = \hat{u}_r(\hat{H}, u_z = \hat{u}_z) \hat{H}$ — radial and axial middle surface displacements.

All quantities are dimensionless, \hat{H} is the half distance between sandwich sheets ($\hat{\quad}$ denotes dimension quantity).

The radii of curvature in current configuration r_φ, r_ϑ are related to R_φ, R_ϑ by:

$$r_\varphi = R_\varphi/\varphi', \quad r_\vartheta = R_\vartheta \frac{\cos \phi}{(1 + \kappa) \cos \varphi}. \quad (1.4)$$

According to [2] the dimensionless, generalized stresses have the following form:

$$\begin{aligned} N_j &= \frac{1}{2} (\sigma_j^+ + \sigma_j^-) \\ M_j &= \frac{1}{2} (-\sigma_j^+ + \sigma_j^-), \quad j = \varphi, \vartheta \end{aligned} \quad (1.5)$$

where $N_j = \hat{N}_j / 2\hat{\sigma}_0 \hat{T}$, $M_j = \hat{M}_j / 2\hat{\sigma}_0 \hat{H} \hat{T}$, $\sigma_j = \hat{\sigma}_j / \hat{\sigma}_0$,

$\hat{\sigma}_0$ — tensile yield stress of sandwich sheet material,

\hat{T} — initial thickness of sandwich sheets.

Superscripts + or — denote quantities evaluated in the exterior or interior sandwich sheets respectively.

Moreover, the system of equations of equilibrium derived in [2, 3] will be applied here in the following fashion:

$$\begin{aligned} (RN_\varphi)' + R_\varphi \sin \varphi (1 + \kappa) N_\vartheta + \varphi' RS &= 0 \\ (RS)' - R_\varphi (1 + \kappa) M_\vartheta \cos \varphi - \varphi' RN_\varphi + RR_\varphi p_n &= 0 \\ (RM_\varphi)' + R_\varphi (1 + \kappa) M_\vartheta \sin \varphi + RR_\varphi S &= 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

where $S = \hat{S}/2\hat{\sigma}_0 \hat{T}$ — shearing force (reaction), $p_n = \hat{p}_n \hat{H}/2\hat{\sigma}_0 \hat{T}$ — normal pressure. For the uniform presenting of the final system of equations, we transform the upper system (1.6) to the convenient, incremental fashion:

$$\begin{aligned} R\delta N_\varphi' + R'\delta N_\varphi + R_\varphi [\sin \varphi (1 + \kappa) \delta N_\vartheta + N_\vartheta (1 + \kappa) \cos \varphi \delta \varphi + N_\vartheta \sin \varphi \delta \kappa] + \\ + RS\delta \varphi' + R\varphi'\delta S = 0, \\ R\delta S' + R'\delta S + R_\varphi [(1 + \kappa) M_\vartheta \sin \varphi \delta \varphi - (1 + \kappa) \cos \varphi \delta M_\vartheta - M_\vartheta \cos \varphi \delta \kappa + R\delta p_n] - \\ + RN_\varphi \delta \varphi' - R\varphi' \delta N_\varphi = 0, \\ R\delta M_\varphi' + R'\delta M_\varphi + R_\varphi [(1 + \kappa) \delta M_\vartheta \sin \varphi + (1 + \kappa) M_\vartheta \cos \varphi \delta \varphi + \\ + M_\vartheta \delta \kappa \sin \varphi + R\delta S] = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

2. Physical relations

The material of working sheets of perfect sandwich-wall is assumed to be elastic/perfectly-plastic, isotropic, perfectly incompressible and to obey the Huber-Mises-Hencky yield condition. Under the assumption of plane stress state, this condition takes the form:

$$(\sigma_\varphi^\pm)^2 - \sigma_\varphi^\pm \sigma_\vartheta^\pm + (\sigma_\vartheta^\pm)^2 = 1 \tag{2.1}$$

The similarity of deviators will be generally applied in this paper as the physical law. From among six possibilities postulated in Table 1 which complete those discussed in [2] to the case when elastic strains are allowed for we shall use here the Prandtl-Reuss theory.

Table 1

	Deformation theory of plasticity	Incremental theory of plasticity	
		elastic strains	
		neglected	allowed for
Small strains	$e_i = \psi s_i$ Hencky-Ilyushin H-I	$\delta e_i = \delta \psi s_i$ Levy-Mises L-M	$\delta e_i = \delta \psi s_i + \frac{1}{2G} \delta s_i$ Prandtl-Reuss P-R I
Large strains	$e_i^H = \Lambda s_i^C$ Nadai-Davis N-D I	$\delta e_i^H = \delta \Lambda s_i^C$ Nadai-Davis N-DII	$\delta e_i^H = \delta \Lambda s_i^C + \frac{1}{2G} \delta s_i^C$ Prandtl-Reuss P-R II

C — Cauchy stress tensor, H — Hencky strain measure, $i = \varphi, \vartheta, z$. Variants of constitutive equations

Since in the problem considered we deal with irrotational deformation, we need here only the principal components of Hencky strain tensor instead of its tensorial expansions in broader case of deformation [4]. Introducing dimensionless scalar factors $\delta\psi^\pm = \delta\hat{\psi}^\pm/3\hat{\sigma}_0$ and dimensionless Kirchhoff's modulus $G = \hat{G}/\hat{\sigma}_0$, we obtain:

$$\begin{aligned}(\delta\varepsilon_\varphi^\pm)^\pm &= \frac{1}{6G} (2\delta\sigma_\varphi^\pm - \delta\sigma_\theta^\pm) + \delta\psi^\pm (2\sigma_\varphi^\pm - \sigma_\theta^\pm) \\(\delta\varepsilon_\theta^\pm)^\pm &= \frac{1}{6G} (2\delta\sigma_\theta^\pm - \delta\sigma_\varphi^\pm) + \delta\psi^\pm (2\sigma_\theta^\pm - \sigma_\varphi^\pm)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Equations of internal equilibrium (1.7) and kinematic relations (1.2) - (1.4), together with the physical equations (2.1-2.2), constitute system of fundamental governing equations. They determine the vector of unknown variables

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_r \\ u_z \\ N_\varphi \\ M_\varphi \\ S \\ P_n \\ \kappa \end{bmatrix}\tag{2.3}$$

where in (2.3) the two last are loadings parameters. We assume the vector as the basic in our approach, other unknowns N_θ , M_θ and scalar factors $\delta\psi^\pm$ can be simply eliminated by applying (2.1) and (2.2). In this way the problem may be reduced to the solution of system of six nonlinear, coupled, partial differential equations, linear with respect to the time-like parameter τ .

3. Basic differential equations

In the P-R I formulation we consider time derivatives of first six components of vector Γ (2.3) three kinematic — δu_r , δu_z , $\delta\varphi$ and three static — δN_φ , δM_φ , δS as basic unknowns for the governing system of differential equations:

$$\begin{aligned}\delta\varphi' &= \frac{1}{2} R_\varphi (\delta F^+ - \delta F^-), \\ \delta u_r' &= -R_\varphi \delta\varphi \cos\varphi - \frac{1}{2} R_\varphi (\delta F^+ + \delta F^-) \sin\varphi, \\ \delta u_z' &= -R_\varphi \delta\varphi \sin\varphi + \frac{1}{2} R_\varphi (\delta F^+ + \delta F^-) \cos\varphi, \\ \delta N_\varphi' &= R_\varphi \{ \delta N_\varphi \sin\phi - \delta N_\theta (1+\kappa) \sin\varphi - N_\theta [(1+\kappa) \cos\varphi \delta\varphi + \sin\varphi \delta\kappa] \} / R - \\ &\quad + \varphi' \delta S - \frac{1}{2} R_\varphi (\delta F^+ - \delta F^-) S,\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\delta M'_\varphi &= R_\varphi \{ \delta M_\varphi \sin \phi - \delta M_\theta (1 + \kappa) \sin \varphi - M_\theta [(1 + \kappa) \delta \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \delta \kappa] \} / R - \\
&\quad + R_\varphi \delta S, \\
\delta S' &= R_\varphi \{ \delta S \sin \phi + \delta N_\theta (1 + \kappa) \cos \varphi + N_\theta [\delta \kappa \cos \varphi - \delta \varphi (1 + \kappa) \sin \varphi] \} / R + \\
&\quad + R_\varphi \left[\frac{1}{2} (\delta F^+ - \delta F^-) N_\varphi + \varphi' \delta N_\varphi - \delta p_n \right],
\end{aligned} \tag{3.1}$$

[cont.]

where, new unknown is defined

$$\delta F^\pm = 2 \left[\frac{1}{6G} (\delta N_\varphi \mp \delta M_\varphi) + \delta \psi^\pm (N_\varphi \mp M_\varphi) \right] - \left[\frac{1}{6G} (\delta N_\theta \mp \delta M_\theta) + \delta \psi^\pm (N_\theta \mp M_\theta) \right] \tag{3.2}$$

and scalar factors $\delta \psi^\pm$ takes the form:

$$\delta \psi^\pm = \begin{cases} 0 & \text{for elastic domain.} \\ \left\{ \left[\delta u_r (1 + \kappa) / R + \delta \kappa (1 + u_r / R) \right] - \frac{1}{6G} [2(\delta N_\theta \mp \delta M_\theta) - \right. \\ \left. + (\delta N_\varphi \mp \delta M_\varphi)] \right\} / [2(N_\theta \mp M_\theta) - (N_\varphi \mp M_\varphi)] & \text{for elastic domain.} \end{cases} \tag{3.3}$$

To determine all eight components of vector Γ (2.3), we have to complete the system of differential Eqs. (3.1) by two additional equations — equation of trajectory

$$h(\Gamma) = 0 \tag{3.4}$$

and definition of a monotonically increasing quantity as time-like parameter

$$\tau = d(\Gamma). \tag{3.5}$$

4. Numerical solution of the problem

The basic system of equations (3.1 - 3.5) as the system of partial, differential equations describes the initial/boundary problem. It can be reduced to two independent problems, initial and boundary problems, by discretization of time-like parameter τ along the trajectory (3.4) into intervals $\Delta \tau_i$ with $\tau_0 = 0$ corresponding to the beginning of the process. For each step of time τ_i , we assume, the simplest, linear extrapolation for vector Γ according to Euler's formula:

$$\Gamma|_{\tau=\tau_i} = \Gamma|_{\tau=\tau_{i-1}} + \delta \Gamma|_{\tau=\tau_{i-1}}, \quad i \geq 1 \tag{4.1}$$

which is also valid for the derivatives with respect to ϕ variable of Γ . The above relation (4.1) must be completed by the condition at $\tau = \tau_0$ (the initiation of the process) which takes, generally, the form:

$$\Gamma|_{\tau=\tau_0} = \Gamma_0. \tag{4.2}$$

For the problem considered the vector of initial condition has the form:

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Other forms of the initial vector Γ_0 depend on the assumed material of the shell (for a rigid/perfectly-plastic material the seven or the eight component of Γ_0 must be different from zero) or on the considered initial, geometrical imperfections of torus.

Replacing all components of vector Γ and its derivatives with respect to ϕ variable in the system of equations (3.1 - 3.5) by the relation (4.1) we obtain at each step of time $\tau_i (i \geq 1)$ the system of ordinary differential equations with respect to ϕ variable for the unknown increment $\delta\Gamma|_{\tau=\tau_{i-1}}$. Finally, for each step τ_i we need eight boundary conditions. Generally, they takes the form:

$$L_C \Gamma|_{\phi=\phi_C} = V_C, \quad L_D \Gamma|_{\phi=\phi_D} = V_D \quad (4.4)$$

where L_C, L_D are arbitrary operators and V_C, V_D — arbitrary vectors. In the case considered in this paper, the meridional section remains closed and symmetric about $\phi = 0$ so $\phi_C = 0$ and $\phi_D = \pi$. Thus, the operators L_C, L_D has following representation

$$L_C = L_D = [\delta, \delta, 0, 0, 0, \delta, \delta, \delta] \quad (4.5)$$

and first six components of V_C and V_D are equal to zero. Using the semi-inverse method (shooting method) the two-point boundary problem (4.4) can be converted into Cauchy's problem. By employing Newton-Raphson's method one can determine, missing, initial components of vector Γ at $\phi = \phi_C$ by assuring the boundary conditions at $\phi = \phi_D$. To improve the effectiveness of the iterative (Newton-Raphson's) procedure, the Lagrange quadratic extrapolation formula is used in searching of unknown, missing, initial components of vector $\delta\Gamma$ at $\phi = \phi_C$. We start our calculation at $\tau = \tau_0$ where the initial vector Γ_0 is known (4.3) and the whole shell is elastic. Applying the numerical integration along the coordinate ϕ (for example Runge-Kutta IV) after extrapolation (4.1) and the usage of shooting method, we find the distribution of $\delta\Gamma|_{\tau=\tau_0}$ along ϕ variable. Then, we calculate $\Gamma|_{\tau=\tau_1}$ according to the scheme (4.1) and get the distribution $\delta\Gamma|_{\tau=\tau_1}$ for the new, initial values $\Gamma|_{\tau=\tau_1}$. The described procedure can be repeated along the trajectory (3.4) with increasing time-like parameter τ — (3.5). We assume the distribution of elastic and plastic zones at the beginning of each time step τ_i (it is identical to the distribution at $\tau = \tau_{i-1}$). The assumed zones are corrected by checking the condition (2.1) and scalar factor $\delta\psi^\pm$ at ϕ_j such as to fulfill the mentioned conditions as well as the boundary conditions (4.4). The procedure is continued to the appearance of singularity of equations (3.1 - 3.3) which corresponds to the zero of the denominator of $\delta\psi^\pm$, when

$$2\sigma_\phi^\pm - \sigma_\phi^\pm = 0 \quad (4.6)$$

5. Numerical examples

The initial geometry of a torus is completely defined by two dimensionless radii which were assumed in numerical calculations as follows

$$R_\varphi = 50, \quad R_\delta = 1000. \quad (5.1)$$

To illustrate different processes of plastic deformations of the shell we restrict our considerations to two strictly determined cases of the loading trajectory (3.4) and the time-like parameter (3.5). In the first case we assume the loading stations and the independent parameter τ in the following way:

$$\begin{aligned} \kappa &= 0, \\ p_n &= \tau \end{aligned} \quad (5.2)$$

and in the second case

$$\begin{aligned} p_n &= c\kappa, \\ \kappa &= \tau \end{aligned} \quad (5.3)$$

where c is an arbitrary, real constant. On each step τ_i , the boundary conditions (4.4) takes the following, explicit form:

$$[\delta\varphi, \delta u_z, \delta S, \delta\kappa, \delta p_n] = [0, 0, 0, 0, \delta\tau] \quad \text{for } \phi = 0 \wedge \pi \quad (5.4)$$

in the case of the relations (5.2) and

$$[\delta\varphi, \delta u_z, \delta S, \delta\kappa, \delta p_n] = [0, 0, 0, \delta\tau, c\delta\tau] \quad \text{for } \phi = 0 \wedge \pi \quad (5.5)$$

in the second case (5.3).

The process of acting of internal pressure is the elastic one. The first point of plastification of the shell (at $\phi = \pi/2$) corresponds to termination of the process (the limit

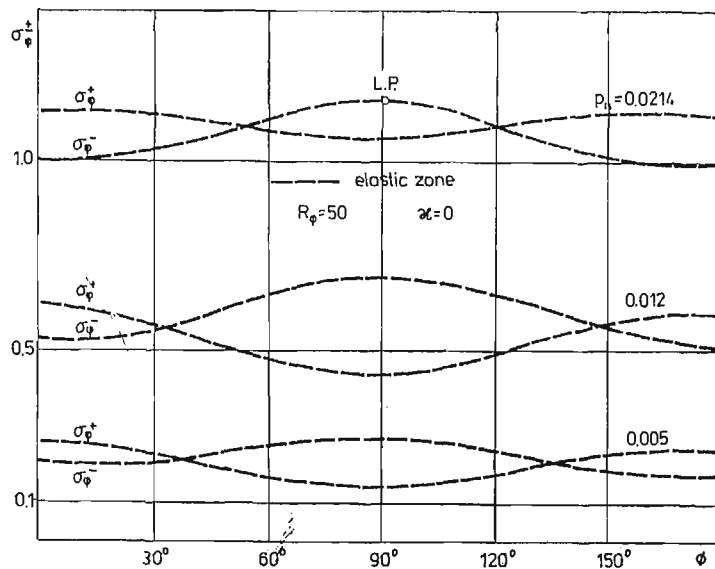


Fig. 2

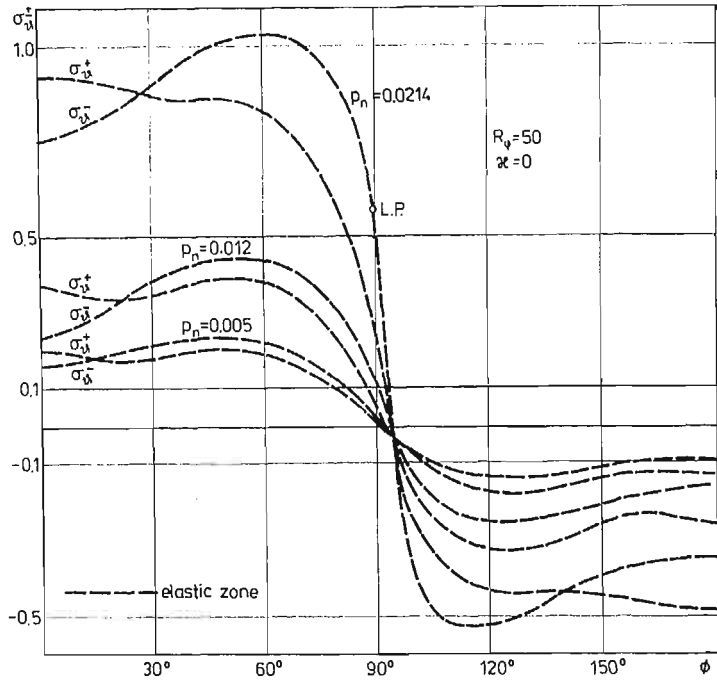


Fig. 3

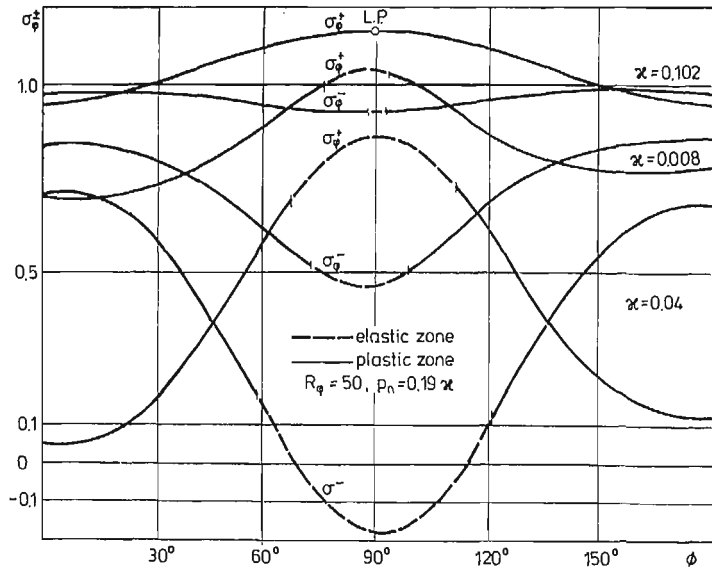


Fig. 4

carrying capacity — L.P.) because the conditions (2.1) and (4.6) are satisfied simultaneously. Redistributions of meridional and circumferential stresses are shown in Fig. 2 and 3.

The influence of bending (the second analyzed case — (5.3) and (5.5)) causes antisymmetry of redistribution of meridional stresses as well as the great development of plastic

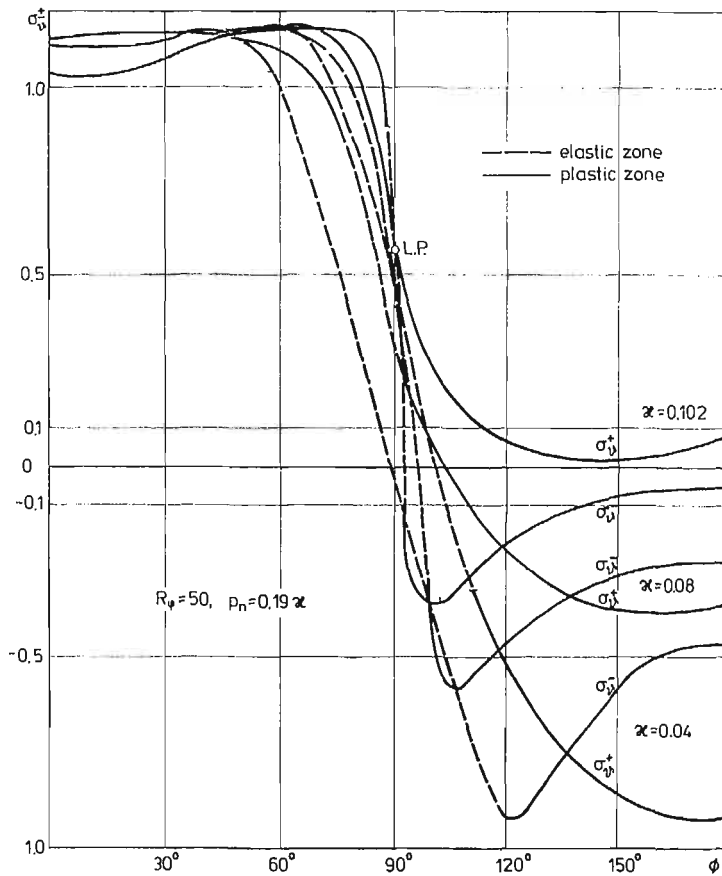


Fig. 5

zone — elastic zone exists only in the neighbourhood of $\phi = \pi/2$ (see Fig. 4,5). The limit point (4.6) — L.P. is also achieved at the edge of elastic zone at $\phi = \pi/2$, so the evolution of meridional strains is inconsiderable — Fig. 6. Similar results concerning to in-plane bending with internal pressure was obtained by C. R. Calladine [6]. The presented examples show also essential influence of type of material of working sheets compare the results with [5].

The form of the limit carrying capacity curve in the $p_n - \kappa$ system will be discussed separately.

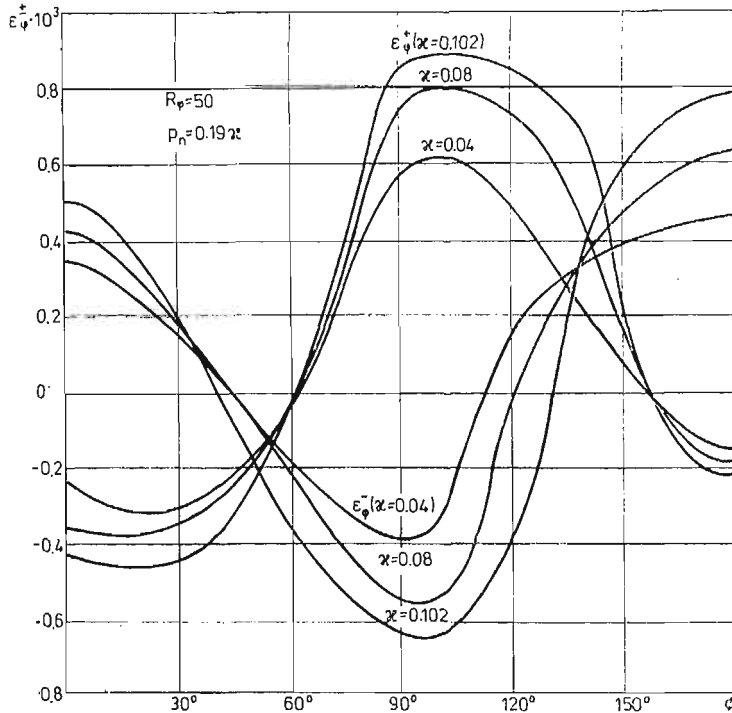


Fig. 6

References

1. J. SKRZYPEK, *Kinematics and statics of symmetric and finite deformations of an incomplete toroidal shell* Bull. Ac. Pol. Sc Tech., 28, 1980, 113 - 120.
2. J. SKRZYPEK, *Basic equations of symmetric finite plastic deformations of an incomplete toroidal shell*, Bull. Ac. Pol. Sc Tech., 28, 1980, 121 - 126.
3. J. SKRZYPEK, P. G. HODGE, Techn. Rep. AEM-M1-12, Univ. of Minnesota, Minneapolis, 1975.
4. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The classical field theories*, *Handbuch der Physik III/1*, Berlin—Heidelberg—N.Y., 1960,
5. J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, *Termination of processes of finite plastic deformations of incomplete toroidal shell*, SM Arch. 8, 1983, 39 - 98.
6. C. R. CALLADINE, *Limit analysis of curved tubes*, J. Mech. Eng. Sci., E, 2, 16, 1974, pp. 85 - 87.

Резюме

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ
ДЕФОРМАЦИЙ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

В работе представлена основная система дифференциальных уравнений описывающих упругопластические деформации вафельной, торoidalной оболочки подвергнутой изгибу в плоскости главныи и действию нормального давления. Проблема сформулирована на основании теории малых деформации Прандтля-Рейсса (но конечных перемещений). Предполагается что материал

несущих слоев упруго-идеальнопластический, несжимаемый и подчиняется условию текучести Хубера-Мизеса-Генки. Рассмотрены разные варианты управления процессом и разные определения параметра времени. Предложен метод нумерического решения этой проблемы.

Streszczenie

PODSTAWOWE RÓWNANIA SYMETRYCZNYCH ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYSTOPLASTYCZNYCH POWŁOKI TOROIDALNEJ

W pracy przedstawiono podstawowy układ równań różniczkowych opisujących sprężysto-plastyczne odkształcenia sandwiczowej powłoki toroidalnej zginanej w płaszczyźnie krzywizny głównej i obciążonej ciśnieniem normalnym. Problem został sformułowany w oparciu o teorię małych odkształceń Prandtl-Reussa (uwzględniono jednak skończone przemieszczenia). Założono, że materiał warstw nośnych toroidu jest sprężysto/idealnie-plastyczny, nieściśliwy i podlega warunkowi plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego. Rozważono możliwości różnorodnego sterowania procesem jak również różnych definicji umownego parametru czasowego. Zaproponowano także metodę numerycznego rozwiązania tego problemu.

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 stycznia 1983 roku

THE STATE OF EXTENSION OF HONEYCOMB GRID STRIP

TOMASZ LEWIŃSKI

*Politechnika Warszawska
Instytut Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich*

1. Introduction

In the papers [1 - 4] continuum models of elastic hexagonal-type grid plates in plane stress state have been formulated. The following Cosserat-type models have been analysed: two versions resulting from the Woźniak's concept of fibrous Cosserat media and so called κ — models corresponding to Rogula-Kunin's pseudocontinuum description. Moreover a simple asymptotic Horvay's model has been recalled. In the mentioned paper [4] an „a priori” analysis of a range of applicability of the Cosserat-type models has been presented and several hypotheses concerning advantages and disadvantages of the considered differential approaches have been put forward.

The „raison d'être” of the present work is to elucidate problems concerning accuracy of the Cosserat-type models of dense grid plates. The error analysis is carried out by an example of a grid strip with hexagonal structure in a state of extension. The problem is considered independently by means of analytical approaches based on continuum descriptions as well as via finite element analysis which in the considered case of the grid structure can be treated as an exact method (the errors produced by computer program are neglected). Thus a direct error analysis of the considered continuum models viz. errors of evaluating displacements and rotations of nodes as well as internal forces at the nodes is performed.

The statical problem considered makes it possible to disclose scale effects following here from the coupling of constitutive equations by means of \mathbf{B} tensor (see [1, 2]). As it has been pointed out in [2 - 4] moduli B and C are determined non-uniquely; they depend upon the choice of a version of Cosserat-type description. These moduli can be treated as small parameters of the theory. Their influence on the final analytical results is various; the aim of the present paper is to analyse this phenomenon and, if it is feasible, to distinguish the best differential approach which induces errors of the smallest values. The presented „a posteriori” analysis allows us to appreciate the hypotheses of the paper [4] which have been obtained by „a priori” analysis of approximation of functions $\hat{\Phi}_{\alpha\beta}(k)$ in k -representation.

2. Formulation of the problem

Consider an infinitely long hexagonal grid strip of the unit thickness in the state of extension, Fig. 2.1. Its height is denoted by L . The rods whose axes constitute hexagons of sides equal to l are connected by rigid nodes. A position of the hexagons with respect to the unloaded boundary lines parallel to the horizontal axis of symmetry is shown in Fig. 2.1. The main nodes (cf. [1 - 4]) are marked by circles. The rods are assumed to be made of isotropic elastic material, Young modulus and Poisson ratio being denoted by E

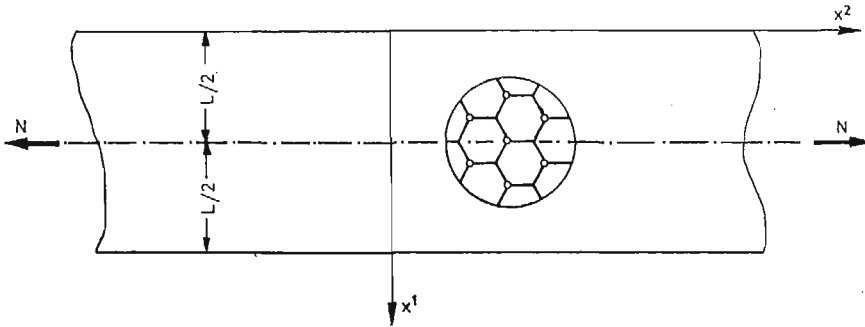


Fig. 2.1

and ν respectively. The heights of rods h (measured in the plane of the strip) are assumed to be constant. The slenderness ratio η of the bars is equal to l^2/h^2 . It is assumed that rods are sufficiently slender so as to classical, improved (by taking into account transverse shear deformations) theory of bars can be applied. Moreover it is supposed that all conditions (concerning the loads, density of the grid as well as wavelengths of deformation patterns, see [1 - 4]) being a starting point of the continuum Cosserat-type description are fulfilled here so as to the mentioned mathematical models could be applied.

The displacements and rotations of main nodes are approximated by functions u^α , φ , $\alpha = 1, 2$. The state of strain is determined by the tensors $\gamma_{\alpha\beta}$ and κ_α (see [1 - 4]) while the state of stress is expressed by means of the tensors of stresses $p^{\alpha\beta}$ and couple stresses m^α . Elastic properties of the structure are described by means of effective moduli λ , μ , α , B and C .

3. Analytical solutions due to Cosserat-type descriptions

Consider a grid strip of honeycomb structure subjected to stretching forces as in Fig. 2.1. Boundary conditions on the unloaded edges are satisfied exactly whereas stresses in transverse cross-sections are not exactly specified; it is assumed only that both the transverse shear resultant and the resultant moment are equal to zero whereas longitudinal resultant force amounts to N . Owing to the assumed method of fulfilling boundary conditions the one-dimensional state of stress can be achieved. In order to make the functions

$u^\alpha \varphi$ unique a middle point $(L/2, 0)$ is supposed to be fixed. Thus the boundary conditions take the form

$$\begin{aligned}
 p^{11}(0, y) &= 0, & p^{11}(L, y) &= 0, \\
 p^{12}(0, y) &= 0, & p^{12}(L, y) &= 0, \\
 m^1(0, y) &= 0, & m^1(L, y) &= 0, \\
 \int_0^L p^{22} dx &= N, & \int_0^L p^{21} dx &= 0, & \int_0^L [p^{22}(x-L/2) + m^2] dx &= 0, \\
 u^\alpha(L/2, 0) &= 0, & \varphi(L/2, 0) &= 0, & \alpha &= 1, 2,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

where $x^1 = x, x^2 = y$, see Fig. 2.1.

By virtue of one-dimensionality of the problem the functions u^α and φ can be expressed by means of equations linear with respect to the variable y :

$$\begin{aligned}
 u^1(x, y) &= u(x) + m \cdot y + u_0^1, \\
 u^2(x, y) &= v(x) + p \cdot y + u_0^2, \\
 \varphi(x, y) &= \varphi(x) + s \cdot y,
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

where m, p, s, u_0^α denote arbitrary integration coefficients.

Deformations associated with the state of displacement read

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= u', & \gamma_{22} &= p, & \gamma_{12} &= v' - \varphi - sy, \\
 \gamma_{21} &= m + \varphi + sy, & \kappa_1 &= \varphi', & \kappa_2 &= s,
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

where $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x$.

Components of stress and stress couples take the form

$$\begin{aligned}
 p^{11} &= (2\mu + \lambda)u' + \lambda p + B\varphi', \\
 p^{22} &= (2\mu + \lambda)p + \lambda u' - B\varphi', \\
 p^{12} &= (\mu + \alpha)(v' - \varphi - sy) + (\mu - \alpha) \cdot (m + \varphi + sy) - B \cdot s, \\
 p^{21} &= (\mu + \alpha)(m + \varphi + sy) + (\mu - \alpha)(v' - \varphi - sy) - B \cdot s, \\
 m^1 &= C\varphi' + B(u' - p), \\
 m^2 &= Cs - B(v' + m),
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

where the constitutive equations of honeycomb grid plate (see [1, 2]) have been applied. One-dimensionality of the state of stress implies $s = 0$. The set of equilibrium equations expressed in terms of displacements can be written as follows

$$\begin{aligned}
 (2\mu + \lambda)u'' + B\varphi'' &= 0, \\
 (\mu + \alpha)v'' - 2\alpha\varphi' &= 0, \\
 2\alpha v' - 4\alpha\varphi + C\varphi'' + Bu'' - 2m\alpha &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

On integrating this system of differential equations and using boundary conditions (3.1) with the aid of strain-displacement (3.3) as well as constitutive (3.4) relations, the components of states of

— displacement

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= u^1(x) = \left[\frac{B^2(\mu + \lambda)(\mu + \alpha)\varepsilon}{2\alpha\mu\lambda(2\mu + \lambda)\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \operatorname{sh}(\varepsilon(x - L/2)) + \left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \zeta \\ u^2(x, y) &= -\zeta\lambda^{-1} \left[\frac{B(\mu + \lambda)}{\mu\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \left[\operatorname{ch}\left(\varepsilon\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) - 1 \right] + (2\mu + \lambda)y \right], \\ \varphi(x, y) &= \varphi(x) = - \left[\frac{B(\mu + \lambda) \cdot (\mu + \alpha)\varepsilon}{2\alpha\mu\lambda\operatorname{ch}\frac{\varepsilon L}{2}} \operatorname{sh}\varepsilon\left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \zeta, \end{aligned} \quad (3.6)$$

— strain

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \left[\frac{B^2(\mu + \alpha) \cdot (\mu + \lambda) \cdot \varepsilon^2}{2\alpha\mu\lambda \cdot (2\mu + \lambda)\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \operatorname{ch}\left(\varepsilon\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + 1 \right] \zeta, \\ \gamma_{12} &= \left[\frac{(\mu + \lambda)(\mu - \alpha) \cdot B\varepsilon}{2\alpha\mu\lambda\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \operatorname{sh}(\varepsilon(x - L/2)) \right] \zeta, \\ \gamma_{21} &= \left[\frac{-B(\mu + \lambda)(\mu + \alpha)\varepsilon}{2\alpha\mu\lambda\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \operatorname{sh}(\varepsilon(x - L/2)) \right] \zeta, \\ \gamma_{22} &= -\frac{2\mu + \lambda}{\lambda} \zeta, \\ \varkappa_1 &= \left[\frac{-B(\mu + \lambda)(\mu + \alpha)\varepsilon^2}{2\alpha\mu\lambda\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \operatorname{ch}(\varepsilon(x - L/2)) \right] \zeta, \quad \varkappa_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

— and stress

$$\begin{aligned} p^{11} &= p^{12} = 0, \\ p^{22} &= \left[\frac{B^2(\mu + \lambda)^2(\mu + \alpha)\varepsilon^2}{\alpha\mu\lambda(\lambda + 2\mu)\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \operatorname{ch}\left(\varepsilon\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) - \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{\lambda} \right] \zeta, \\ p^{21} &= \frac{-2B(\mu + \lambda)\varepsilon}{\lambda} \frac{\operatorname{sh}(\varepsilon(x - L/2))}{\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \zeta, \\ m^1 &= \frac{2B(\mu + \lambda)}{\lambda} \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(\varepsilon(x - L/2))}{\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \right] \zeta, \\ m^2 &= \frac{B^2\varepsilon(\mu + \lambda)}{\mu\lambda} \frac{\operatorname{sh}(\varepsilon(x - L/2))}{\operatorname{ch}(\varepsilon L/2)} \zeta, \end{aligned} \quad (3.8)$$

are finally found, where

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left[\frac{4\alpha(2\mu + \lambda)\mu}{(\mu + \alpha)[C(2\mu + \lambda) - B^2]} \right]^{1/2}, \quad [\varepsilon] = 1/m, \\ \zeta &= \frac{0.25N\lambda}{\left[\frac{B^2\varepsilon(\mu + \lambda)^2(\mu + \alpha)}{2\alpha\mu(2\mu + \lambda)} \operatorname{th}(\varepsilon L/2) - \mu(\mu + \lambda)L \right]}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

The quantity ε , being a new „material” constant of the grid, exists due to the energy bounds (5.3), [2]. As it follows from [6] this constant plays essential role in the theory of hexagonal-type grid plates. Patterns of variations of functions (3.6 - 3.8) are presented in Fig. 3.1. Two types of cross-sections are considered: along main nodes ($y_2, y_4, B > 0$) and — intermediate ones ($y_1, y_3, B < 0$).

Note that the function $u^1(x)$ does not depend on sign B so that u^1 displacements of

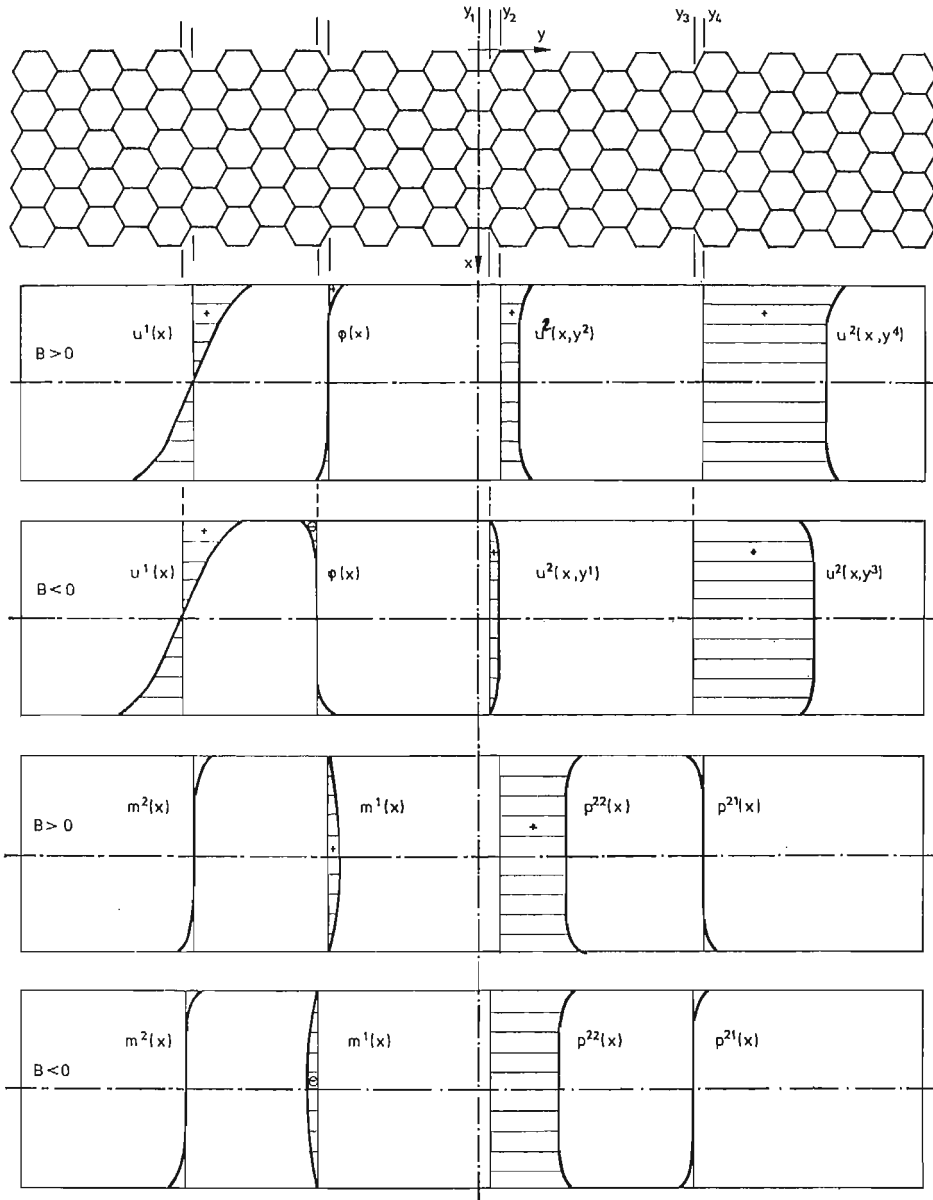


Fig. 3.1

main and intermediate nodes lying in the same distance from the longitudinal axis of symmetry are identical.

The function u^2 consists of two terms; the first of them depends on $\text{sign} B$ whereas the second one is independent of this factor. Thus longitudinal displacements u^2 vary accordingly to the choice of the sections being drawn along main or intermediate nodes (cf. Fig. 3.1).

The function $\varphi(x)$ is proportional to $\text{sign} B$. Thus rotations of main and intermediate nodes, which lie at the same distance from the strip's axis, have same absolute values and opposite signs.

Stresses p^{22} and m^2 do not depend of $\text{sign} B$ whereas the stress components p^{21} and m^1 depend upon this factor, cf. Fig. 3.1.

Nonlinear form of the graphs plotted in Fig. 3.1 results from coupling of constitutive equations ($B \neq 0$). The results obtained can be divided into two groups (a) and (b). To the first group these quantities belong which do not vanish if one substitutes $B = 0$; whereas the quantities vanishing in the case of $B = 0$ constitute (b) group. The quantities of (a) type have nonvanishing values along transverse cross-sections. The quantities of (b) type take essential values in edge zones only. These areas which can be treated as effective carriers (i.e. domains where values of functions cannot be neglected in comparison with the values of (a)-type functions) will be called further B -effect zones. Despite apparent imprecision of this definition we do not see any need to give a precise one although such a definition can be formulated.

In the subsequent section a numerical test of the theoretically obtained qualitative results and corollaries will be carried out. Moreover the errors induced by Cosserat-type models as well as by asymptotic model (in which $B = C = 0$) will be examined.

REMARK 1

Note that in the problem considered a density of strain energy

$$e = \frac{1}{2} (p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} + m^\alpha \kappa_\alpha) \quad (3.10)$$

does not depend of the choice of main nodes, i.e. of $\text{sign} B$.

REMARK 2

Consider analogous problem of extension of a lattice-type strip of hexagonal structure rotated at an angle $\pi/2$ from the position considered above (as in Fig. 3.1). It can be proved that in this case an assumption of one-dimensionality of a stress state leads to a contradiction; the boundary conditions of the form of (3.1) cannot be fulfilled.

REMARK 3

Examine rotations of the boundary nodes lying at a distance of $L/2$ from the longitudinal axis of the strip, subjected to stretching stresses $\sigma_{yy} = N/L$, in the limiting case $L \rightarrow \infty$ at $l = \text{const}$. By inserting $x = 0$ into (3.6)₃ and taking into account that $L \rightarrow \infty$ the following formula

$$|\varphi_{\text{max}}/\sigma_{yy}| = \frac{B}{4\mu} \cdot \left[\frac{(2\mu + \lambda)(\mu + \alpha)}{\alpha\mu[C(2\mu + \lambda) - B^2]} \right]^{1/2} \quad (3.11)$$

is obtained. The RHS of Eq. (3.11) involves effective elastic moduli only. In the subsequent section an accuracy of the derived formula will be examined.

4. Numerical analysis by displacement method

The subject of the numerical analysis are plane grid structures A and B (see Fig. 4.1 where the quarters of the structures are shown). The rods are assumed to be made of a steel with Young modulus $E = 2.106 \cdot 10^7$ N/cm². Transverse shear deformations of the rods are neglected. Cross-sections of bars are rectangular $1 \times h$ where $h = 1$ cm or $h = 2$ cm. The internode distance l is equal to 10 cm. The both grids are subjected to stretching longitudinal forces $P = 8660.250$ N (cf. Fig. 4.1) hence the mean stress of tension reads

$$\sigma = \frac{P}{l\sqrt{3}/2} = 1000 \text{ N/cm}^2.$$

The state of extension is realized by various ways (exemplary loads are shown in Fig. 4.1). For further analysis only these results are important which do not vary under various statically equivalent systems of loads. The aim of the numerical tests is to create a one-dimensional state of deformation. Thus at some distances from the loaded boundaries of the strip the displacements, strains and stresses (apart from the displacements u^2 parallel to strip's horizontal axis) ought to assume stable values, viz. independent of the distance of the section from the loaded ends. Numerical computations (performed with the aid of the program STRAINS 75, computer Odra 1305) confirm this supposition which can be interpreted as „discrete analogy” of Saint Venant principle. However, transverse forces in horizontal bars (which occur due to the fact that the strips A and B are of finite length) do not satisfy this condition; their values are not periodical. Nevertheless it should be stressed here that these forces are negligible in comparison with transverse forces in bars whose axes are situated at angles $\pm \pi/3$ from the horizontal symmetry line. Moreover it should be emphasised that periodicity of some quantities occurs in some boundary layer only, e.g. the moments in horizontal bars, reaching the greatest values in the vicinity of the unloaded edges, vanish rapidly towards the strip's horizontal axis; the greatest moments only (in B strip-at the first, say, six nodes lying at the edge) satisfy the desired one-dimensional state of stress condition whereas the other (negligible) values vary at random.

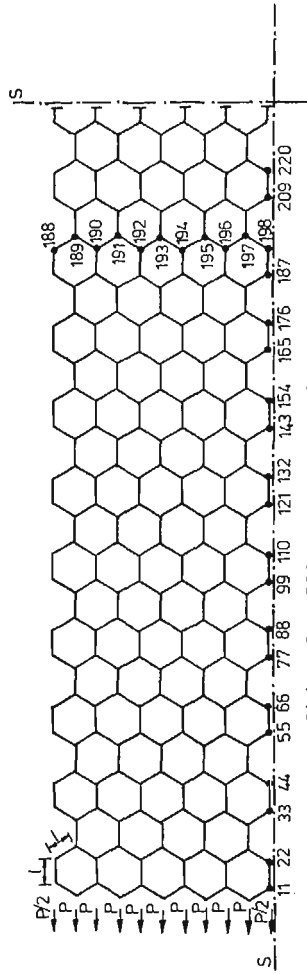
The complete set of numerical results will not be reported; indeed not they are of essential importance here. In the subsequent section selected results will be given together with analytical results obtained by approximate differential models discussed in the paper.

5. Accuracy analysis of the continuum Cosserat-type and asymptotic approaches

This section is devoted to comparison of results analytically obtained in Sec. 3 with results produced by computer analysis (outlined in Sec. 4) of the A and B structures, cf. Fig. 4.1. Such comparison can be carried out, because

- a) honeycomb grids A and B satisfy the desired regularity and density conditions,
- b) strip-type forms of A and B structures as well as the loads subjected ensure (as it has been pointed out in Sec. 4) a one-dimensional state of stress so that the fundamental assumption of the presented in Sec. 3 analytical approach is fulfilled,
- c) deformations of structures vary smoothly except for the B zones lying at unloaded.

Strip A 237 nodes, 326 bars



Strip B 586 nodes, 833 bars

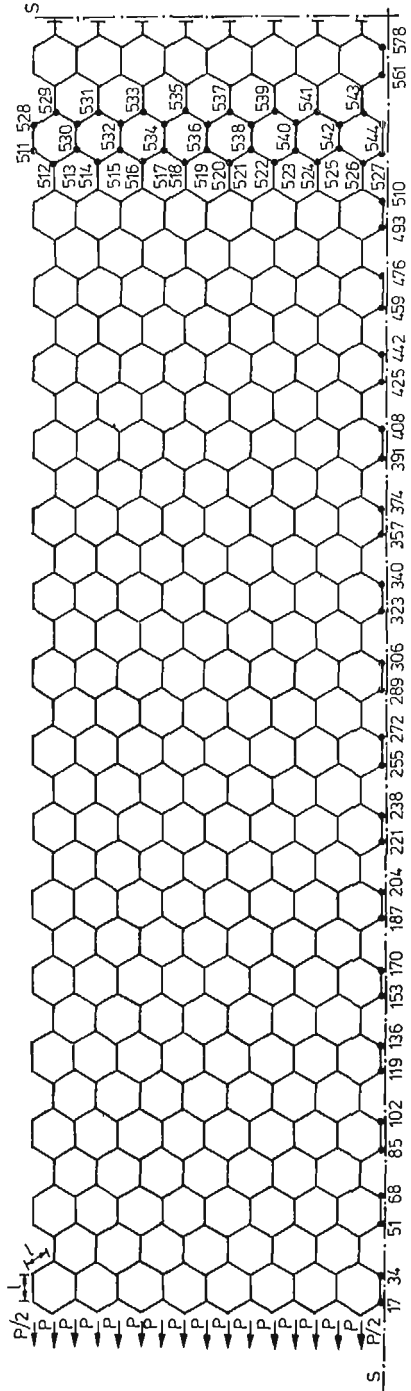


Fig. 4.1

edges. Thus the mathematical models, based on the assumption that strain energy density depends on the first deformation gradients only, may be applied.

Prior to performing an accuracy analysis of the considered differential models of honeycomb grids, let the effective elastic moduli of the structures *A* and *B*, under the assumption of slenderness of bars ($\eta \approx \bar{\eta}$), be computed¹⁾. The following models are examined: Klemm and Woźniak version (see [2], Sec. 3) with the set of constants ($\lambda, \mu, \alpha, B^\vee, C^\vee$), second Woźniak — type (II) version (see [2], Sec. 4) with the moduli ($\lambda, \mu, \alpha, B^\wedge, C^\wedge$) and \varkappa — models (see [4], Sec. 5) leading to the constants ($\lambda, \mu, \alpha, B^0, C_{(\varkappa)}^0$).

The values of the effective moduli are set up in Table 5.1.

5.1 Approximation of displacements of nodes.

1. Displacements u^1 perpendicular to the strip's horizontal axis

The displacements u^1 of the nodes 188, 189, ..., 198, lying along the lines perpendicular to the horizontal axis of the strip *A* (cf. Fig. 4.1), obtained via displacement method (denotations: ∇) as well as by the continuum models, are shown in Fig. 5.1. Relevant graphs of relative errors induced by the latter approaches are plotted in Fig. 5.2. These errors are computed by assuming the results of the displacement method as „exact” ones.

Table 5.1

$\frac{l=10\text{cm}}{h[\text{cm}]}$	η	$\lambda[\text{N/cm}^2]$	$\mu[\text{N/cm}^2]$	$\alpha[\text{N/cm}^2]$	$B^\vee[\text{N/cm}]$	$B^\wedge[\text{N/cm}]$	$B^0[\text{N/cm}]$
a 1	100	583178	11781	1487	58907	29453	51470
b 2	25	1096390	91532	11899	457661	228831	398165

$\frac{l=10\text{cm}}{h[\text{cm}]}$	$C^\vee[\text{N}]$	$C^\wedge[\text{N}]$	$C_{(0)}^0[\text{N}]$	$C_{(1/2)}^0[\text{N}]$	$C_{(1)}^0[\text{N}]$
a 1	393694	99160	542434	319324	96215
b 2	3081580	793279	4271500	2486630	701747

The „exact” results confirm that behaviour of u^1 function is nonlinear. However, this effect is so unconsiderable that it cannot be shown in Fig. 5.1. It can be noted that the greatest errors are induced by: the zero-order approximation and the unstable ($\varkappa = 1$) model. Apart from this a very good (0.5% - 0.6% error) approximation of u^1 by ($\varkappa = 0$) version is worth emphasising. The second (II) version provides a slightly better results than the first (I) one.

On the basis of computations which are not reported herein it can be stated that in the case of $h = 2$ cm relative errors are greater than in the case of $h = 1$ cm.

An analysis of the u^1 displacements in *B* strip do not lead to new conclusions. Nevertheless the analysed relative errors are smaller in this case: the (I) version induces ca. 1.4% errors (in *A* case — 2.3%); the (II) version — 1.07% (in *A* case — ca. 1.75%); ($\varkappa = 0$) model — ca. 0.34% (in *A* case — 0.60%); ($\varkappa = 1$) version—ca. 4.4% (in *A* case — 7.35%). Therefore the more dense a lattice is the better are results.

2. Displacements u^2 parallel to the horizontal symmetry axis

In order to examine u^2 displacements a slightly more complex procedure should be applied since these displacements change their values along the strip's axis. Apart from

¹⁾ For the definition of $\bar{\eta}$, see [2].

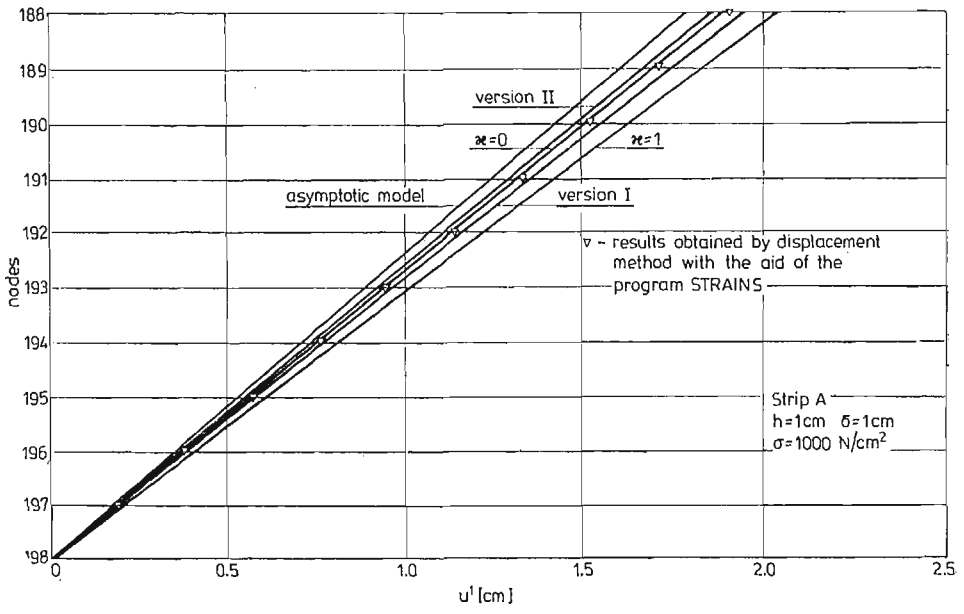


Fig. 5.1

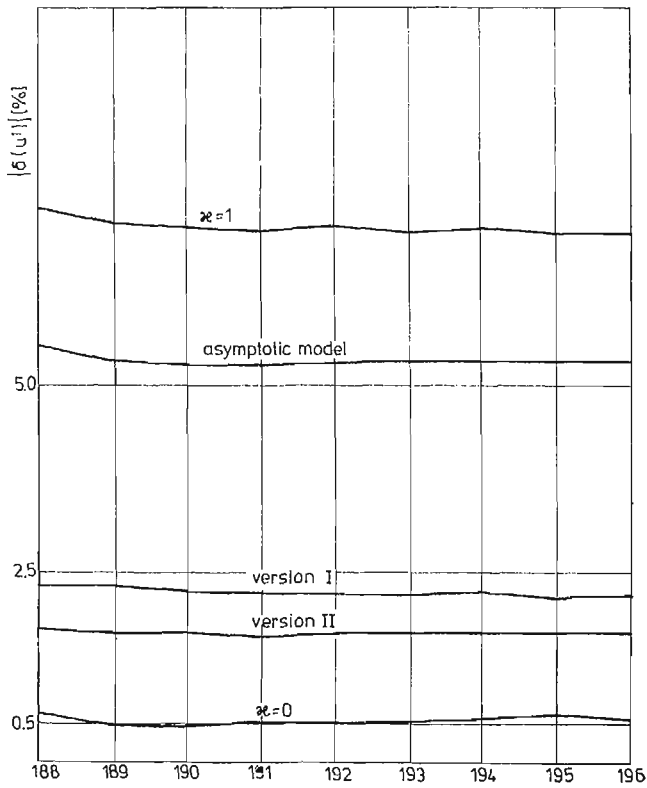


Fig. 5.2

this an approximation of main and intermediate nodal translations u^2 should be considered separately, see Fig. 3.1.

The displacements u^2 of the nodes 188, ..., 194 (*A* strip) are shown in Fig. 5.3. Non-linearities of functions f_1, f_2 interpolating „exact” translations of main and intermediate nodes respectively can be noted, but, on taking into account that their deviations from the straight lines are very small, it could not be shown in Fig. 5.3. However, differential theories produce curvings of u^2 functions much stronger.

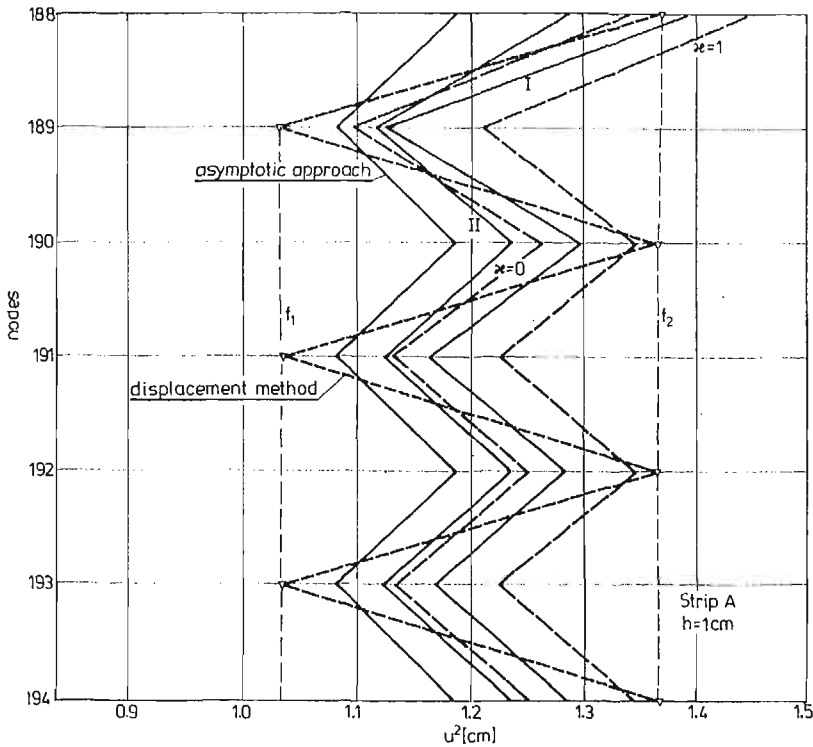


Fig. 5.3

The displacements u^2 of main nodes are approximated in a different manner than analogous displacements of the intermediate nodes. An error analysis of u^2 along cross-sections perpendicular to the horizontal strip's axis proves (cf. Fig. 5.3, see also [5], where appropriate graphs were plotted) that main nodes' displacements are over estimated whereas the intermediate ones are underestimated. Approximation errors of the main nodes' translations u^2 decrease in the edge *B*-zones while the analogous errors of computing the displacements of the intermediate nodes increase in this zone. A behaviour of relative errors along the horizontal strip axis from the loaded edge to the transverse symmetry axis is worth examining. The relevant graphs are plotted in Figs. 5.4, 5.5. Absolute values of relative errors grow rapidly in the vicinity of the symmetry axis where u^2 tends to zero; then their values go down and again grow at the loaded boundary. Similar diagrams concerning *B* structure are plotted in Figs. 5.6, 5.7. In this case a stabilization of errors along the strip axis is readily seen.

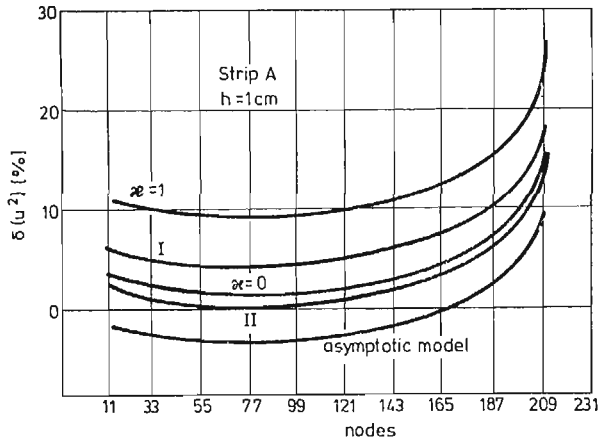


Fig. 5.4

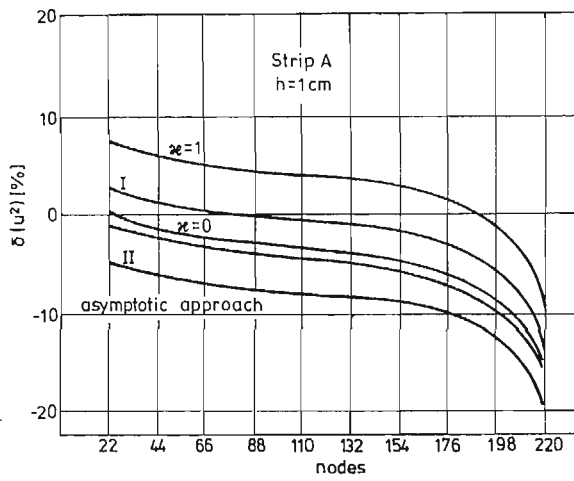


Fig. 5.5

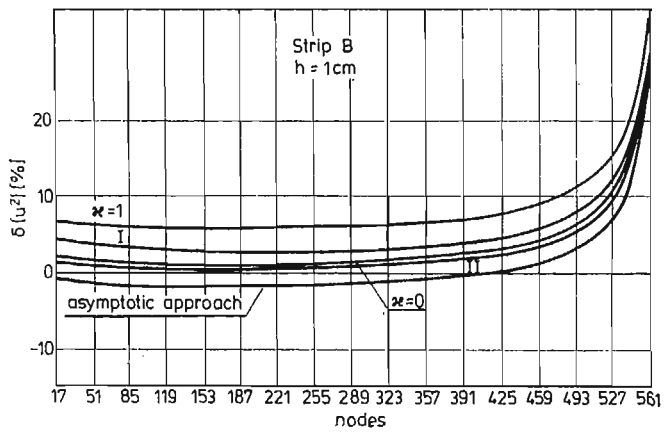


Fig. 5.6

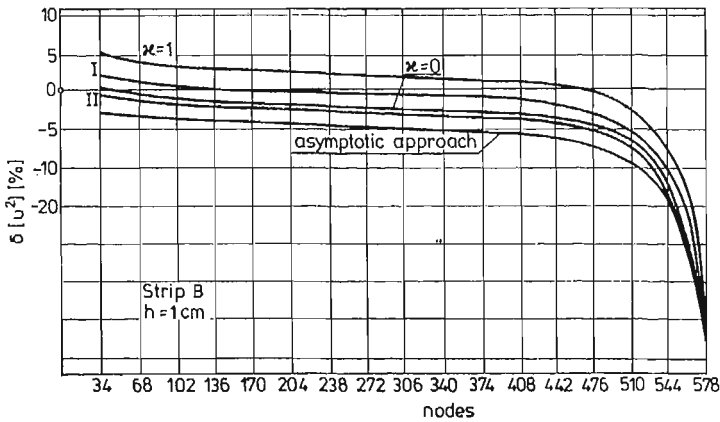


Fig. 5.7

It is worth stressing that approximation errors of displacements of nodes of the *B* strip are less than analogous errors in the case of the *A* strip. Thus the errors vary together with the density ratio l/L . Moreover, it was tested that the errors grow if the slenderness ratio η increases.

3. Rotations of nodes φ

Rotations of the nodes lying along the cross-section lines perpendicular to the strip horizontal axis are set up in Tables 5.2a, 5.2b; the values of rotations are increased 1000 times. The results of the Table 5.2a are shown in Fig. 5.8. A similar behaviour of φ function yields from an analysis of *B* strip so that the second set of diagrams concerning this structure is omitted here.

Table 5.2 a

Strip A nodes	continuum models					Displacement method
	I	II	$\xi = 0$	$\xi = 1/2$	$\xi = 1$	
188 a	59.613	57.109	43.026	57.117	112.127	41.782
188 b	7.667	7.272	5.446	7.325	15.822	5.380
189 a	-21.701	-7.625	-18.242	-18.607	-14.051	-8.452
189 b	-2.709	-0.937	-2.275	-2.305	-1.527	-0.994
190 a	7.899	1.020	7.734	6.061	1.761	1.695
190 b	0.957	0.121	0.951	0.725	0.147	0.169
191 a	-2.876	-0.136	-3.279	-1.975	-0.221	-0.329
191 b	-0.338	-0.016	-0.397	-0.228	-0.014	-0.028
192 a	1.047	0.018	1.390	0.643	0.028	0.085
192 b	0.119	0.002	0.166	0.072	0.001	0.007

a) $h=1\text{cm}$, b) $h=2\text{cm}$

Table 5.2 b

Strip B nodes	continuum models					Displacement method
	I	II	$\xi = 0$	$\xi = 1/2$	$\xi = 1$	
528	57.887	56.305	42.232	55.726	106.888	40.927
529	-21.072	-7.518	-17.905	-18.153	-13.395	-8.287
530	7.671	1.004	7.591	5.914	1.676	1.647
531	-2.792	-0.134	-3.218	-1.926	-0.210	-0.324
532	1.016	0.018	1.364	0.628	0.026	0.067

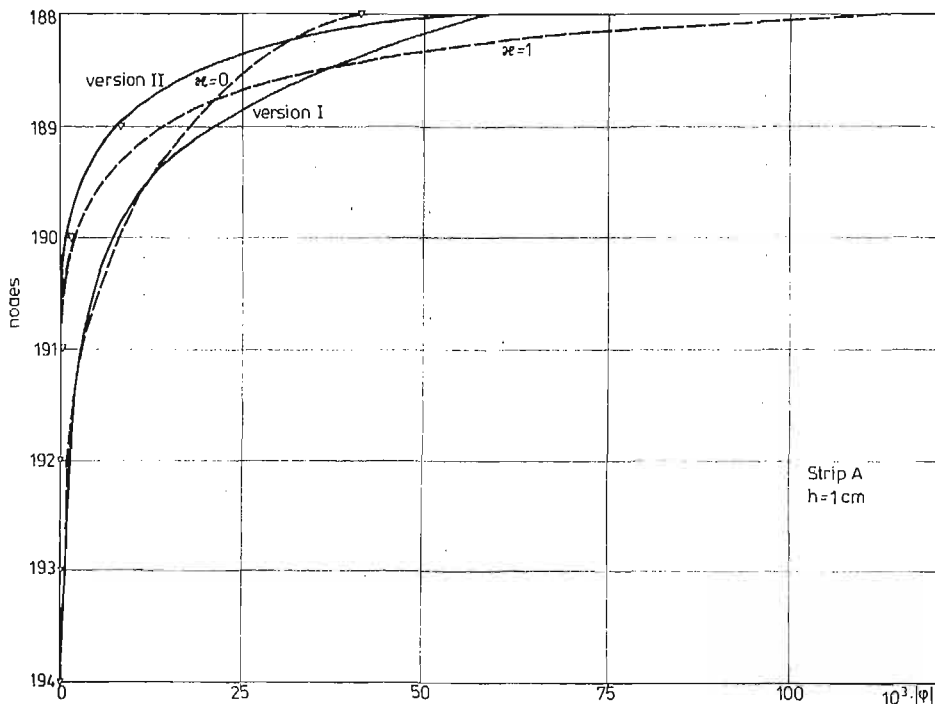


Fig. 5.8

It should be pointed out that continuum description of nodal rotations is qualitatively correct because the all analysed differential theories ensure that:

a) rotations of the main and intermediate nodes lying at the same distance from the horizontal strip axis have opposite turns since the function φ is proportional to $\text{sgn}B$ (cf. (3.6)₃) which amounts to -1 and 1 at the intermediate and the main nodes, respectively,

b) the function $|\varphi|$ grows rapidly in the edge B -zones,

c) the B -zone (being a carrier of the essential values of nodal rotations) varies accordingly to the density ratio l/L . In the limiting case when $l/L \rightarrow 0$ the B -zone's height vanishes.

The all continuum descriptions produce essential quantitative errors, see Fig. 5.9 where the interpolations of absolute errors (being divided by the maximum value of the rotation of the node lying on the boundary) are given. A correct evaluation of order of φ is yielded from both the second (II) model and ($\nu = 1$) model. The zero-order model does not forecast an existence of nodal rotations in the considered example. Fig. 5.9 discloses that (I), ($\nu = 0$) and ($\nu = 1/2$) versions bring about greater errors of the rotation description than the most simple asymptotic (zero-order) approach. This fact confirms one of the „a priori” formulated hypothesis following from the approximation analysis of equilibrium equations in k -representation, see [4]. Thus the second (II) version of Woźniak's theory seems to approximate nodal rotations in a best fashion.

A comparison of the results set up in Tables 5.2 leads to a corollary that there is no relation between density of the grid and the approximation errors of φ . Similarly it is

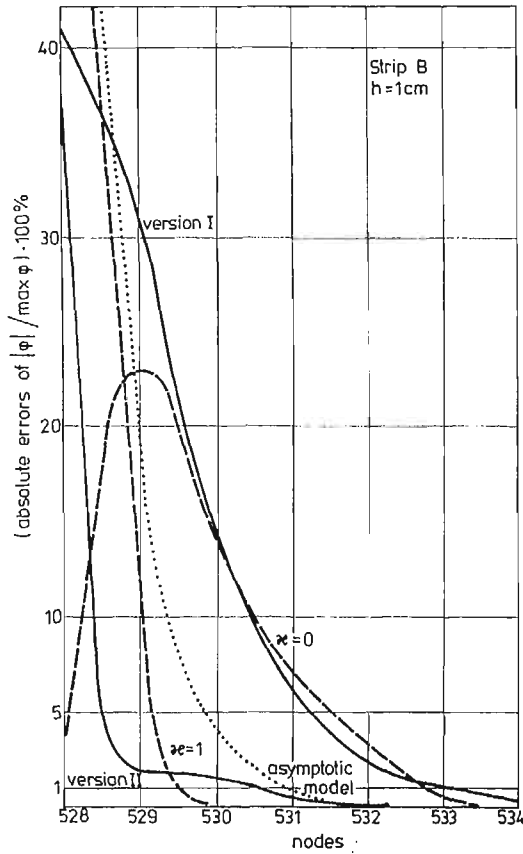


Fig. 5.9

difficult to find a relation between slenderness of lattice rods and an accuracy of analytical solutions.

5.2 Approximation of internal resultant forces. Internal forces in lattice rods can be computed by means of three methods

i) stress method

Consider stress and couple-stress components at the boundary Γ with a unit normal \mathbf{n} and a tangent \mathbf{t} (Fig. 5.10). We have

$$\begin{aligned} \sigma &= \sin^2 \alpha \cdot p^{11} + \cos^2 \alpha \cdot p^{22} + \sin \alpha \cos \alpha (p^{12} + p^{21}), \\ \tau &= \sin \alpha \cos \alpha (p^{11} - p^{22}) - \sin^2 \alpha \cdot p^{12} + \cos^2 \alpha \cdot p^{21}, \\ m &= \sin \alpha \cdot m^1 + \cos \alpha \cdot m^2, \end{aligned}$$

where α denotes an angle between \mathbf{t} and x^1 axis.

On the basis of the above formulae the stresses at the sections perpendicular to the bars joint in main nodes of the grid can be found. The longitudinal force, the transverse force and the moment at the nodes are

$$N = \sigma \cdot l \sqrt{3}, \quad T = \tau \cdot l \sqrt{3}, \quad M = m \cdot l \sqrt{3},$$

respectively.

ii) *approximate slope-deflection equations' method.*

A main idea of the method consists in applying equations which express internal forces in terms of strains, i.e. by means of the formulae (3.3), [2] in (I) version or (4.1), [2], in (II) version. Thus only in the two mentioned cases of continuum descriptions this method can be applied.

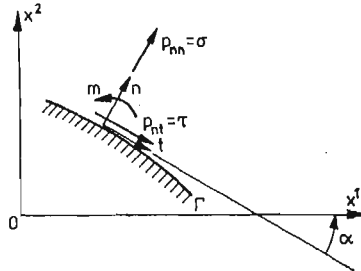


Fig. 5.10

iii) *exact slope-deflection equations' method*

Internal forces can be calculated by substituting the values of nodal displacements (translations and rotations) into slope-deflection equations well known from the classical theory of bars. However, it occurs that such apparently natural procedure results in completely incorrect outcomes. The appropriate negative examples are presented in [5]. Therefore this method will not be applied in further analysis.

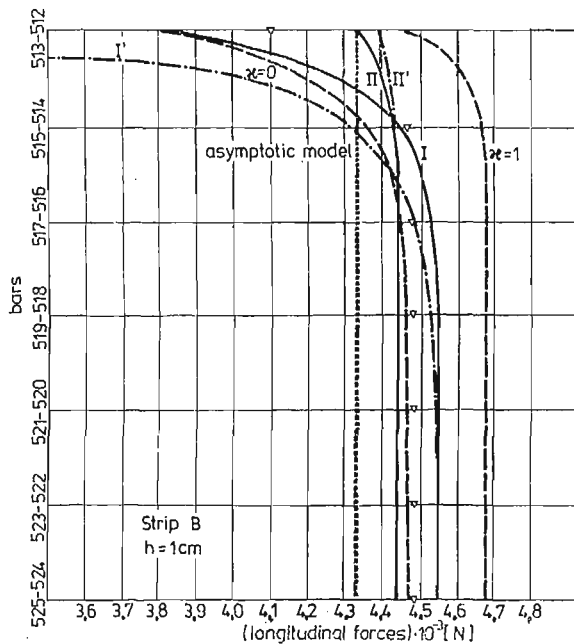


Fig. 5.11

1. Longitudinal forces

Sloping bars. The graphs of functions which interpolate values of longitudinal forces in sloping bars 513 - 512, ..., 524 - 525 (viz. in bars which are inclined from the horizontal symmetry axis of the strip at angles $\pm\pi/3$, see Fig. 4.1) are plotted in Fig. 5.11. By means of a prime (I', II') and the lines —, —, —, the results due to (ii) method are distinguished. The best results are produced by ($\nu = 0$) version, the worst — by the asymptotic and unstable ($\nu = 1$) models.

Horizontal bars. Appropriate graphs are shown in Fig. 5.12. Similarly to the preceding case the best results yield from (I), (II) and particularly from ($\nu = 0$) versions; the worst are produced by ($\nu = 1$) and the asymptotic versions. The latter model does not describe the *B*-effect, of course.

2. Transverse forces

Sloping bars. The functions interpolating transverse forces in bars 513 - 512, ..., 524 - 525 of *B* strip are plotted in Fig. 5.13. The remarks concerning approximations of

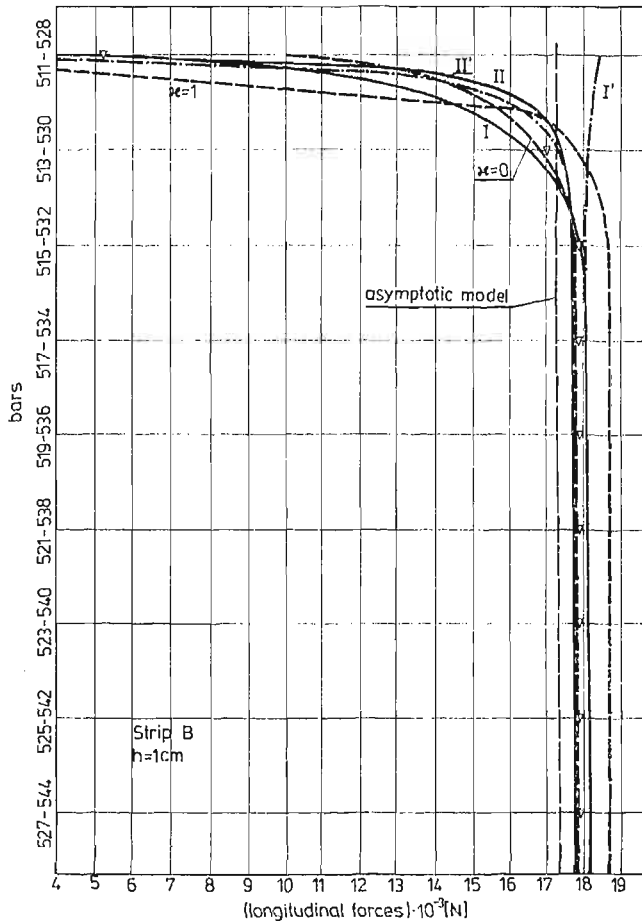


Fig. 5.12

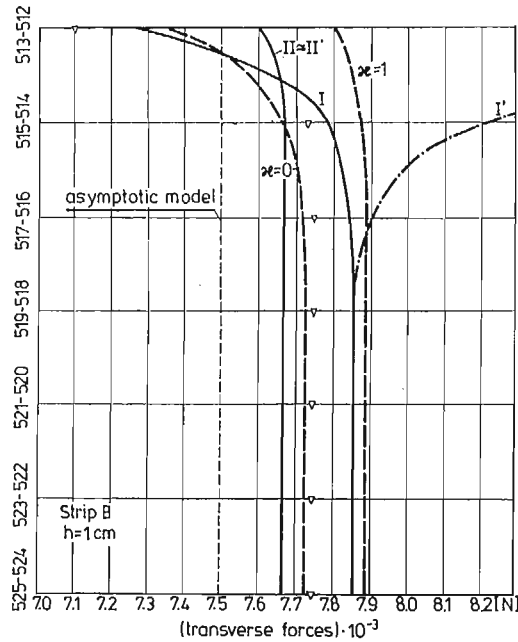


Fig. 5.13

longitudinal forces in sloping bars can be transferred to the considered case of transverse forces. It can be mentioned yet that the method (ii) becomes incorrect in B -zones.

Horizontal bars. Transverse forces in the horizontal bars are equal to zero provided the considered strip is infinitely long. The analytical solution found in Sec. 3 (which is based on the assumption of an one-dimensional stress state) is obtained by virtue of the approximate way of fulfilling the boundary conditions. Specifically the condition $p^{21} = 0$ on the loaded boundary is substituted by an integral expression (3.1)₈. Thus $p^{21} \neq 0$ in each Cosserat version whereas the mentioned contradiction does not hold in the zero-order theory where the condition $p^{21} = 0$ is not in contrast to the assumption of onedimensionality of the state of stress. A domain of essential values of p^{21} is a B -effect zone. Thus the solution $T = p^{21} \cdot l\sqrt{3} = 0$ is approximated exactly only by the asymptotic model.

3. Approximation of bending moments

Sloping bars. The functions approximating moments at the nodes of the bars: 513 - 512, ..., 527 - 526 in B strip are plotted in Fig. 5.14. One can pointed out that the second version II', method (ii) provides a very good approximation whereas the ordinary method (i) leads (in the case of the same version) to errors of ca. 50%. Two times increased results of (II) version are shown in Fig. 5.14, the appropriate graph being denoted by $2 M_{II}$. The coefficient 2 results from the ratio $B^{\vee}/B^{\wedge} = 2$ when $\eta = \bar{\eta}$. The physical interpretation of m^{α} in (II) version especially and also in other versions is not clear and is retained in this paper as open question; some theorems on this problem are formulated in [5].

Horizontal bars. Appropriate graphs standing for moments at nodes of the bars 511 - 528, ..., 527 - 544 in B strip are displayed in Fig. 5.15. The considered moments are

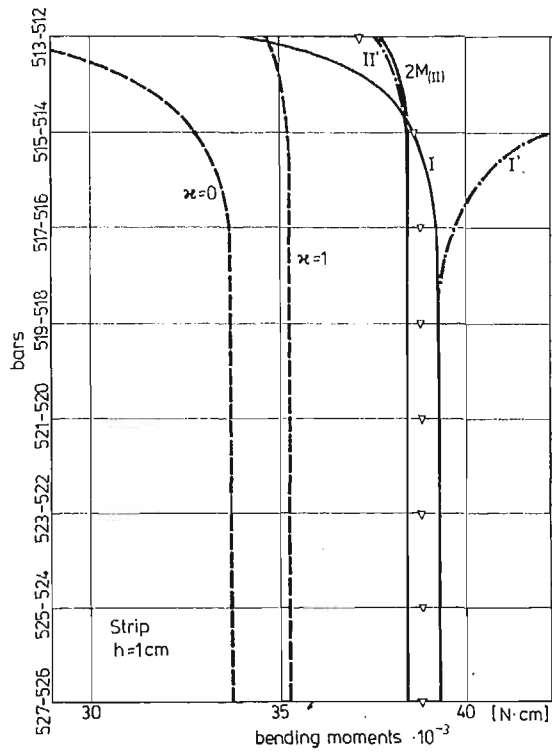


Fig. 5.14

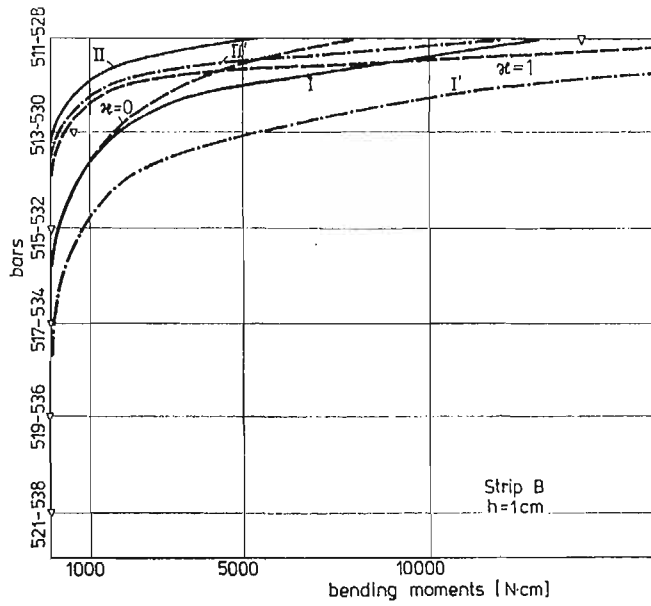


Fig. 5.15

negligibly small comparatively with moments in sloping bars except for the one moment (in the bar 511 - 528) which is of the same order as moments in sloping bars. However, exactly this maximal moment is approximated in the best way, specifically by (I) and (II') methods.

Continuum models supply qualitatively correct description of the bending moments in horizontal bars. However, quantitative errors are considerable; the best results yield from (II') method.

6. Concluding remarks

1) Numerical analysis confirms an existence of B -effect zones which have been predicted previously by the analytical considerations based upon Cosserat-type models (the asymptotic model does not describe this effect). Numerical test proves that the effective height of this zone is evaluated with various degrees of accuracy, the minimal errors yield from the (II) Woźniak's version and from the unstable ($\varkappa = 1$) model. Both analytical considerations and finite element computations show that the B zone's height H varies almost independently of the strip's height L so that a relative height of B zones: H/L decreases if L grows.

2) Quantities characterizing states of stresses and strains of the grid can be divided (as has been done in Sec. 3) into two groups (a) and (b). Computer analysis confirms that such a division is reasonable. Quantities of (a) type take essential values in every point of the strip's cross-sections whereas (b) — quantities take inconsiderable values outside the B — effect domains.

In the B -zones relative errors induced by the continuum models are extreme since exactly in these zones gradients of u^x and φ functions grow rapidly. In these areas a fundamental assumption concerning a smoothness of functions which stand for nodal displacements and rotations is not satisfied.

3) One of the aim of the present paper was to appraise the models which are more complicated than the simplest theory of zero-order accuracy and to answer the obvious question, i.e. whether it is reasonable to use such models. One could get a negative answer, provided in several cases the results produced by asymptotic theory would be more accurate than the results yielded from the models of higher order. The performed analysis proves that such a phenomenon does not hold except for two cases of approximations of the u^z displacements of main nodes and- the transverse forces in bars horizontal to the strip's axis.

4) Computer analysis confirms that rotations of boundary nodes tend to a non-zero limit $\varphi_{\max}^{\text{num}}$ when L grows. In the considered case this limit is ca. 0.041 rad. Theoretical evaluation of this value has been found in Sec. 3, Remark 3, Eq. (3.11). The theoretical results obtained by (I), (II), ($\varkappa = 0$) and ($\varkappa = 1$) versions are displayed below in the Table 6.1.

Table 6.1

	I	II	$\varkappa = 0$	$\varkappa = 1$
φ_{\max}	0.0552	0.0550	0.0409	0.0992

Sufficiently good approximation of the boundary rotation (except for ($\kappa = 1$) version) is worth emphasising.

5) It has been noted that making of the grid denser implies that errors of approximation of (a) type quantities considerably decrease whereas the errors relevant to (b) type quantities vary inconsiderably and their decreasing has not been observed.

6) An increase in the slenderness of the grid bars makes the evaluation of the displacements u^1 better and the evaluation of the displacements u^2 — worse and has no apparent influence on the approximation of nodal rotations.

A slightly more general accuracy analysis is presented in [5] where errors induced by the so called (III) Woźniak-type model are additionally examined. This version is derived in [5] and has not been a subject of consideration in the papers [1 - 4]. It is sufficient to mention here only that in this model elastic properties of the grid are characterised by the moduli ($\lambda, \mu, \alpha, B^\nu, \tilde{C}$) where

$$\tilde{C} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{7\eta+4}{\eta+1} \cdot \frac{EJ}{l} \approx \frac{7}{4} \cdot \check{C}$$

in the case of slender grid bars ($\eta \approx \bar{\eta}$). Results produced by this model are resemble to that following from ($\kappa = 0$) version. The (III) version has not been examined here in order to make an analysis as brief as possible.

References

1. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Dense elastic lattices of hexagonal-type* (in Polish), *Mech. Teoret. Stos.*, **8**, 3, 277 - 293, 1970.
2. T. LEWIŃSKI, *Two versions of Woźniak's continuum model of hexagonal-type grid plates*, *Mech. Teoret. Stos.*, **23**, 3-4, 1984.
3. T. LEWIŃSKI, *Differential models of hexagonal-type grid plates*, *Mech. Teoret. Stos.*, **23**, 3-4, 1984.
4. T. LEWIŃSKI, *Physical correctness of Cosserat-type models of honeycomb grid plates*, *Mech. Teoret. Stos.*, **24**, 1, 1984.
5. T. LEWIŃSKI, *Continuum models of lattice-type hexagonal plates*, *Doctor's Thesis*, Technical University of Warsaw (in Polish) 1983.
6. T. LEWIŃSKI, *Fundamental solutions to the Cosserat-type model of honeycomb grid in a plane-stress state*, *Engng.* **32**, 2, 225-242, 1984.

Резюме

РАСТЯЖЕНИЕ СЕТЧАТОЙ ПОЛОСЫ СО СТРУКТУРОЙ СОТЫ МЁДА

Предметом работы является статический анализ сетчатой полосы (с гексагональной структурой), растяжённой силами, параллельными к её краям. Перемещения узлов и внутренние силы в стержнях анализированы на основе континуальных расчетных моделей типа Коссера: двух версий, вытекающих из общей концепции Возняка и так называемых κ — моделей, предложенных автором в [4], и — при помощи модели Хорвая асимптотического типа. Результаты, вытекающие из расчетных дифференциальных моделей, сравнены с соответствующими результатами, полученными на основе исходной дискретной модели конструкции.

Сформулированы различные предложения, касающиеся полезности и диапазона аппликационности моделей типа Коссера и модели Хорвая.

Streszczenie

ROZCIĄGANIE PASMA SIATKOWEGO O STRUKTURZE PŁASTRA MIODU

Przedmiotem rozprawy jest analiza statyczna pasma prętowego o strukturze heksagonalnej rozciągane go siłami równoległymi do jego brzegów. Przesunięcia węzłów i siły wewnętrzne w prętach badano za pomocą modeli kontynualnych typu Cosseratów: dwóch wersji zgodnych z ogólną koncepcją Woźniaka oraz tzw κ — wersji zaproponowanych przez autora w pracy [4] oraz — za pomocą modelu asymptotycznego Horvaya. Wyniki analityczne porównano z wynikami numerycznymi otrzymanymi metodą przemieszczeń.

Sformułowano szereg wniosków dotyczących użyteczności i zakresu stosowalności modeli typu Cosseratów i modelu Horvaya.

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 czerwca 1983 roku

SOME EXISTENCE AND UNIQUENESS RESULTS IN ELASTOSTATICS WITH CONSTRAINTS FOR DISPLACEMENTS AND STRESSES

ZDZISŁAW NANIEWICZ

*Institut Mechaniki
Uniwersytet Warszawski*

The aim of the paper is the investigation of some class of problems of elastostatics with constraints for displacements and stresses. There are considered such restrictions which lead to the problems with generalized displacements and generalized stresses. Some existence and uniqueness results are proved.

1. Basic concepts and assumptions of elastostatics with constraints

Throughout the paper $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1,2,3}$ denotes a fixed orthonormal basis in Euclidean 3-space \mathfrak{E} . The dual basis is given by $\{\mathbf{e}^k\}_{k=1,2,3}$, $e = (\delta_{ij})$, where δ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ is the Kronecker delta, is the metric tensor in \mathfrak{E} . If $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}$ then by (x^k) we denote the orthogonal coordinates of \mathbf{x} relative to the basis $\{\mathbf{e}_k\}$, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k x^k$, and analogously (x_k) are coordinates of \mathbf{x} relative to the basis $\{\mathbf{e}^k\}$, $\mathbf{x} = x_k \mathbf{e}^k$ (In the following the summation convention holds and the indices i, j, k, \dots run from 1 to 3).

Let B be a bounded region in \mathfrak{E} with the regular boundary ∂B , c.f. [1], occupied by the body in its undeformed state. The problem will be analyzed under the basic assumption of the infinitesimal theory.

Let us denote by \mathfrak{D} the space of all vector functions components of which relative to the basis $\{\mathbf{e}^k\}$ are square integrable together with their first partial derivatives in B , i.e.

$$\mathfrak{D} = \{\mathbf{u} = (u_k(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in B, \quad u_k \in H^1(B), \quad k = 1, 2, 3\},$$

equipped with the norm

$$\|\mathbf{u}\|_1^2 = \int_B [\mathbf{u}^2 + h^2 \text{tr}(\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^T)] dv = \int_B (u_k u^k + h^2 u_{,i}^k u_{,k,m} \delta^{im}) dv,$$

where $\nabla \mathbf{u} = (u_{k,i})$ is the gradient of u with respect to \mathbf{x} , h is a positive constant suitable chosen in the problem under consideration. The space \mathfrak{D} will be interpreted as the displacement space and its elements as displacement fields.

External forces acting at the body will be represented by linear continuous functionals on \mathfrak{D} , i.e. by elements of \mathfrak{D}^* , \mathfrak{D}^* being the dual of \mathfrak{D} . To the system of external forces will be assigned such element \mathbf{f}^* of \mathfrak{D}^* that the value of work done by these forces on arbitrary

field $\mathbf{v} \in \mathcal{D}$ is equal to the value of the functional \mathbf{f}^* at \mathbf{v} . Assuming that the body is subjected to the body forces $\mathbf{b} = (b^k(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in B$, $b^k \in L^2(B)$, $k = 1, 2, 3$, and to the surface traction $\mathbf{p} = (p^k(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \partial B$, $p^k \in L^2(\partial B)$, $k = 1, 2, 3$, we have the following representation for the corresponding functional $\mathbf{f}^* \in \mathcal{D}^*$:

$$\langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v} \rangle_1 = \int_B \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{v} + \int_{\partial B} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} ds, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{D}, \quad (1.1)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ being the pairing between \mathcal{D}^* and \mathcal{D} .

Let us introduce \mathcal{S} as the space of all symmetric tensor functions, components of which relative to the basis $\{\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l\}_{k,l=1,2,3}$, are square integrable in B , i.e.

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{C} = (C_{kl}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in B, \quad C_{kl} = C_{lk}, \quad C_{kl} \in L^2(B) \}.$$

The space \mathcal{S} is assumed to be equipped with the norm

$$\|\mathbf{C}\|_2^2 = \int_B \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}) d\mathbf{v} = \int_B C_{kl} C^{kl} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{C} \in \mathcal{S}.$$

The displacement-strain relations will be described by the linear continuous operator $\mathbf{E}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$, which assigns to any $\mathbf{v} \in \mathcal{D}$ the symmetric part of the displacement gradient $\nabla \mathbf{u}$, i.e.

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}) = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{D},$$

or equivalently

$$\mathbf{E} = (E_{kl}), \quad E_{kl}(\mathbf{v}) = 1/2(v_{k,l} + v_{l,k}), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{D}.$$

The subspace of \mathcal{S} being the image of \mathcal{D} by the mapping \mathbf{E} is said to be the space of all strain fields. The whole space \mathcal{S} will be called the strain space.

Independently of \mathcal{S} we introduce the space \mathcal{T} of all symmetric tensor functions \mathbf{T} , components of which relative to the basis $\{\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l\}_{k=1,2,3}$, are square integrable in B , i.e.

$$\mathcal{T} = \{ \mathbf{T} = (T^{kl}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in B, \quad T^{kl} = T^{lk}, \quad T^{kl} \in L^2(B), \quad k, l = 1, 2, 3 \},$$

the space \mathcal{T} being equipped with the norm

$$\|\mathbf{T}\|_2^2 = \int_B \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{T}) d\mathbf{v} = \int_B T^{kl} T_{kl} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{T} \in \mathcal{T}.$$

\mathcal{T} will be treated as the stress space and its elements as stress fields. It is easy to see that from the mathematical point of view the spaces \mathcal{S} and \mathcal{T} coincide. The main difference between them follows from the physical interpretation.

For any $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$ and any $\mathbf{C} \in \mathcal{S}$ let

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{C} \rangle_2 \stackrel{\text{df}}{=} \int_B \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{C}) d\mathbf{v} = \int_B T^{kl} C_{kl} d\mathbf{v}. \quad (1.2)$$

Under the above denotation the value of virtual work done by the internal forces corresponding to the stress field $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$ over any strain field $\mathbf{E}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathcal{D}$, can be written as

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{E}(\mathbf{v}) \rangle_2 = \int_B \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{E}(\mathbf{v})) d\mathbf{v}.$$

The material properties of the body will be determined by the operator $\mathbf{K}: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{S}$, which is assumed to satisfy the following monotonicity condition

$$\langle \mathbf{KT} - \mathbf{K}\sigma, \mathbf{T} - \sigma \rangle_2 \geq c \|\mathbf{T} - \sigma\|_2^2 \quad \forall \mathbf{T}, \sigma \in \mathfrak{T},$$

where c is a positive constant.

It must be stressed, that in this approach the constitutive operator \mathbf{K} may be non-linear. It means that we can also deal with problems in which some physical non-linearities are taken into account. In the linear case \mathbf{K} coincides with a compliance field tensor $\mathbf{K} = (K_{ijkl}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in B$. Then the above monotonicity condition can be rewritten in the form

$$\langle \mathbf{KT}, \mathbf{T} \rangle_2 \geq c \|\mathbf{T}\|_2^2, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathfrak{T}.$$

In the paper we shall deal with such problems of elastostatics in which admissible are only certain distinguished subsets of the displacement space \mathfrak{D} and the stress space \mathfrak{S} . It means that on displacements and stresses are imposed some restrictions which will be called displacement constraints and stress constraints, respectively. To precise these concepts we shall assume that in every problem under consideration there are given a priori two subsets $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{D}$ and $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{T}$ of all admissible displacement fields and stress fields, respectively. In particular, if $\mathfrak{U} = \mathfrak{D}$ and $\mathfrak{Z} = \mathfrak{T}$ then we deal with the unconstrained body.

Throughout the considerations we confine ourselves to some class of constraints, namely it will be assumed that \mathfrak{U} and \mathfrak{Z} are proper convex and closed subsets of \mathfrak{D} and \mathfrak{T} , respectively¹⁾.

The equations of equilibrium in problems with constraints will be assumed in the form of the following condition

$$\int_B \text{tr}(\mathbf{TE}(\mathbf{v})) dv - \int_B \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv - \int_{\partial B} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} ds - \langle \mathbf{r}^*, \mathbf{v} \rangle_1 = 0, \tag{1.4}$$

which has to be satisfied for any $\mathbf{v} \in \mathfrak{D}$, where $\mathbf{T} \in \mathfrak{Z}$ is the stress field, \mathbf{b} and \mathbf{p} have the same meaning as in (1.1), $\mathbf{r}^* \in \mathfrak{D}^*$ is the functional which represents the work of reaction forces due to the displacement constraints, c.f. [6]. The condition (1.4) states that the value of work done by the external forces and by the reaction forces over any $\mathbf{v} \in \mathfrak{D}$ is equal to the value of work done by the internal forces over corresponding strain field $\mathbf{E}(\mathbf{v})$.

In this approach together with the displacement constraints we have introduced reaction forces which have to maintain the constraints. As far as the mathematical aspects of the problem is concerned it will be assumed that the functional $\mathbf{r}^* \in \mathfrak{D}^*$ representing the work of reaction forces (contrary to the functional $\mathbf{f}^* \in \mathfrak{D}^*$ which represents the work of external forces) can be an arbitrary element of \mathfrak{D}^* . This requirement is due to the fact that in the considerations we are to deal with a wide class of constraints and therefore we ought to introduce suitable wide class of reaction forces in order to maintain these constraints. Thus we take into account not only functionals r^* of the form

$$\langle \mathbf{r}^*, \mathbf{v} \rangle_1 = \int_B \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial B} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} ds, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{D},$$

¹⁾ These assumptions are due the mathematical tool which will be used later.

where $\mathbf{r} \in L^2(B)^3$ and $\mathbf{s} \in L^2(\partial B)^3$ are interpreted as body reaction forces and surface reaction tractions, respectively, but also functionals having the most general representation, namely,²⁾

$$\langle \mathbf{r}^*, \mathbf{v} \rangle_I = \int_B (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + \text{tr}(\nabla \mathbf{w} \nabla \mathbf{v}^T)) dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{D}, \quad (1.5)$$

for some $\mathbf{w} \in \mathfrak{D}$.

For every displacement field u admissible by the constraints, i.e. $u \in \mathfrak{U}$, we have to determine the set of all reactions which can act at the body. In order to determine this set we shall assume that the displacement constraints are ideal, c.f. [6], i.e.

$$\langle \mathbf{r}^*, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_I \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{U}. \quad (1.6)$$

The above condition is said to be the principle of ideal displacement constraints [6 - 8]. It states that the value of work done by the reaction forces over any virtual displacement field $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{U}$, is always non-negative.

The constitutive relations for stresses will be given in the form of the following condition

$$\int_B \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{KT} - \mathbf{E}(\mathbf{u}))] dv - \int_B \text{tr}[\boldsymbol{\sigma} \mathbf{G}] dv = 0, \quad (1.7)$$

which has to be satisfied for any $\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{T}$, where u is the displacement field, \mathbf{T} is the stress field, $\mathbf{G} \in \mathfrak{S}$ is said to be the strain field incompatibilities due to the stress constraints, [8]. Together with the stress constraints we have introduced the strain field incompatibilities which have to maintain these constraints. As in the case of reaction forces, for every stress field \mathbf{T} admissible by the constraints, i.e. $\mathbf{T} \in \mathfrak{Z}$, we have to determine a set of all strain incompatibilities. In order to determine this set we shall assume that the stress constraints are ideal, [8], i.e.

$$\int_B \text{tr}[(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{T}) \mathbf{G}] dv \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{Z}. \quad (1.8)$$

The above condition is said to be the principle of ideal stress constraints. It states that the value of work done by internal forces corresponding to any virtual stress $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{T}$, $\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{Z}$, over the strain field incompatibilities \mathbf{G} is always non-negative. In particular, if the stress constraints are absent, i.e. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{T}$, then from (1.8) it follows that $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ and (1.7) leads to the well known form of the constitutive equations for elastic body, namely

$$\mathbf{KT} - \mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Ideal constraints are the special case of so called quasi-ideal constraints which have been discussed in [8]. Such constraints and their realization are defined by means of the

²⁾ Since, as it is known, \mathfrak{D} is a Hilbert space with the inner product given by

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_B (\mathbf{w} \mathbf{v} + \text{tr}(\nabla \mathbf{w} \nabla \mathbf{v}^T)) dv, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{D},$$

so, by Riesz Representation Theorem it follows that an arbitrary element of \mathfrak{D}^* can be represented in the form (1.5).

known proper convex lower semicontinuous functions $\beta: \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ and $\gamma: \mathfrak{T} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$,³⁾ suitable choosen in every problem under consideration. Principles of quasi-ideal constraints are assumed to have the following forms:

$$\langle \mathbf{r}^*, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_1 + \beta(\mathbf{v}) - \beta(\mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{D}, \quad (1.6)'$$

for the displacement constraints, and

$$\int_B \text{tr}[(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{T})\mathbf{G}]d\mathbf{v} + \gamma(\boldsymbol{\sigma}) - \gamma(\mathbf{T}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{T}, \quad (1.8)'$$

for the stress constraints, respectively. In particular, if β and γ are the indicator functions of \mathfrak{U} and $\mathfrak{\Sigma}$ then (1.6)' and (1.8)' reduce to (1.6) and (1.8), respectively, and we are to deal with ideal constraints.

We shall assume that

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_0^* + \mathbf{f}_1^*, \quad (1.9)$$

where $\mathbf{f}_0^* \in \mathfrak{D}^*$ represents „dead” load, i.e.

$$\langle \mathbf{f}_1^*, \mathbf{v} \rangle_1 = \int_B \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v}d\mathbf{v} + \int_{\partial B} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{v}ds, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{D}, \quad (1.10)$$

where $\mathbf{b}_0 \in L^2(B)^3$, $\mathbf{p}_0 \in L^2(\partial B)^3$ are the known vector functions not depending on the displacement field \mathbf{u} , and $\mathbf{f}_1^* \in \mathfrak{D}^*$ represents external forces essentially depending on the displacement field by the formula

$$\langle \mathbf{f}_1^*, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_1 + \zeta(\mathbf{v}) + \zeta(\mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{D}, \quad (1.11)$$

where $\zeta: \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ is the known proper convex lower semicontinuous function such that its effective domain satisfies the condition $D(\zeta) \supset \mathfrak{U}^{(4)}$. For instance, by means of (1.11) we can characterize the potential forces (ζ being Gateaux differentiable), the forces of friction [1], the forces of mutual interaction between the body and its foundation, [1], e.c.t.⁵⁾.

Summing up, foundations of elastostatics with constraints for displacements and stresses are given by equation of equilibrium (1.4), constitutive equation for stresses, (1.7), constitutive relations for external forces (1.9) - (1.11), the principle of ideal (quasi-ideal) constraints (1.6) ((1.6)') and that of the ideal (quasi-ideal) stress constraints (1.8) ((1.8)').

2. Generalized displacements and generalized stresses

In this Section the restrictions will be given leading to problems with so called generalized displacement and generalized stresses.

Let us begin the formulation of the displacement constraints. It is supposed that there

³⁾ Here and what follows $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

⁴⁾ For any convex function $\alpha: X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ we use the symbol $D(\alpha)$ to denote the effective domain of α , i.e.

$$D(\alpha) = \{x \in X: \alpha(x) < +\infty\}.$$

⁵⁾ Eqs. (1.9) - (1.11) can be referred to as the constitutive relations for external forces \mathbf{f}^* .

is given a space \mathfrak{B} , being a closed linear subspace of \mathfrak{D} , and an element $\mathbf{u}_0 \in \mathfrak{D}$ such that

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{v})\|_2 \geq c\|\mathbf{v}\|_1, \quad \mathbf{v} \in \mathfrak{B}, \quad (2.1)$$

i.e. on \mathfrak{B} Korn's inequality holds, and

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B} + \mathbf{u}_0 = \{\mathbf{v} + \mathbf{u}_0 : \mathbf{v} \in \mathfrak{B}\}. \quad (2.2)$$

For instance, such situations take a place if \mathfrak{U} is a subset of all displacement fields satisfying on a given part of the body the known displacement boundary conditions.

Moreover, we suppose that there is given the linear continuous operator $\Phi: \Omega \rightarrow \mathfrak{B}$ from a reflexive Banach space Ω into \mathfrak{B} such that

$$\|\Phi(\mathbf{q})\|_1 \geq c\|\mathbf{q}\|_\Omega, \quad \mathbf{q} \in \Omega, \quad c > 0, \quad (2.3)$$

and there is known the non-empty closed convex subset $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ for which

$$\mathfrak{U} = \tilde{\mathfrak{U}} + \mathbf{u}_0 = \{\mathbf{v} + \mathbf{u}_0 : \mathbf{v} \in \tilde{\mathfrak{U}}\}, \quad (2.4)$$

where

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \Phi(\tilde{\Omega}) = \{\mathbf{v} \in \mathfrak{B} : \mathbf{v} = \Phi(\mathbf{q}) \text{ for some } \mathbf{q} \in \tilde{\Omega}\}. \quad (2.5)$$

Ω will be called the space of generalized displacements and $\tilde{\Omega}$ the set of all admissible generalized displacements. The set \mathfrak{U} is the image of $\tilde{\Omega}$ by the mapping Φ , translated by \mathbf{u}_0 . From Eq. (2.3) it follows that to any displacement field \mathbf{u} admissible by the constraints, i.e. $\mathbf{u} \in \mathfrak{U}$, corresponds exactly one $\mathbf{q} \in \tilde{\Omega}$ such that $\mathbf{u} = \mathfrak{B}(\mathbf{q}) + \mathbf{u}_0$.

In order to specify the set of all admissible stress fields we suppose that there is known linear continuous operator $\Psi: \Pi \rightarrow \mathfrak{T}$ from a reflexive Banach space Π into \mathfrak{T} with

$$\|\Psi(\boldsymbol{\pi})\|_2 \geq c\|\boldsymbol{\pi}\|_\Pi, \quad \boldsymbol{\pi} \in \Pi, \quad c > 0. \quad (2.6)$$

There is also known the non-empty closed convex subset $\tilde{\Pi} \subset \Pi$ such that

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Psi(\tilde{\Pi}) = \{\mathbf{T} \in \mathfrak{T} : \mathbf{T} = \Psi(\boldsymbol{\pi}) \text{ for some } \boldsymbol{\pi} \in \tilde{\Pi}\}. \quad (2.7)$$

Π will be called the space of generalized stresses and $\tilde{\Pi}$ — the set of all admissible generalized stresses. The set $\boldsymbol{\Sigma}$ is the image of $\tilde{\Pi}$ by the mapping Ψ . From (2.6) it follows that to any stress field \mathbf{T} admissible by the constraints, i.e. $\mathbf{T} \in \boldsymbol{\Sigma}$, corresponds exactly one $\boldsymbol{\pi} \in \tilde{\Pi}$ such that $\mathbf{T} = \Psi(\boldsymbol{\pi})$.

Now, let us pass to the governing relations of the problems of elastostatics with constraints defined above.

By Riesz Representation Theorem the stress space \mathfrak{T} can be identified with the dual of \mathfrak{S} . Thus $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, defined by (1.2) can be treated as the pairing between \mathfrak{T} and \mathfrak{S} . The adjoint of the restriction \mathbf{E} to \mathfrak{B} , $\mathbf{E}|_{\mathfrak{B}}$, as the operator from \mathfrak{T} into \mathfrak{B}^* , \mathfrak{B}^* being the dual of \mathfrak{B} , will be denoted by \mathbf{E}^* , $\mathbf{E}^*: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{B}^*$. Recall that \mathbf{E}^* assigns to any $\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{T}$ such element $\mathbf{E}^*\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{B}^*$ that

$$\langle \mathbf{E}^*\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle_1 \stackrel{\text{df}}{=} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}(\mathbf{v}) \rangle_2, \quad \mathbf{v} \in \mathfrak{B},$$

(we use the same denotation for the pairing between \mathfrak{B}^* and \mathfrak{B} as that of between \mathfrak{D}^* and \mathfrak{D}).

⁶⁾ Throughout this paper c denote generic positive constants, necessarily the same at each occurrence.

⁷⁾ The physical meaning and selected applications of the introduced constraints can be found in [3.4].

Assuming that the displacement constraints given by (2.4) are ideal, i.e. (1.6) holds, for the restriction of $\mathbf{r}^* \in \mathcal{D}^*$ to \mathfrak{B} , $\mathbf{r}^*|_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{B}^*$, we obtain

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}^*|_{\mathfrak{B}} \in \{ \mathbf{v}^* \in \mathfrak{B}^* : \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_1 \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \} = \\ & = \{ \mathbf{v}^* \in \mathfrak{B}^* : \langle \mathbf{v}^*, \Phi(\mathbf{p}) + \mathbf{u}_0 - (\Phi(q) + \mathbf{u}_0) \rangle_1 \geq 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \tilde{\Omega} \} = \\ & = \{ \mathbf{v}^* \in \mathfrak{B}^* : \langle \Phi^* \mathbf{v}^*, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle_{\Omega} \geq 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{u} = \Phi(q) + \mathbf{u}_0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

where $\Phi^*: \mathfrak{B}^* \rightarrow \Omega^*$ is the adjoint of Φ , Ω^* denotes the dual of Ω , $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ is the pairing between Ω^* and Ω . Let $\text{ind}_{\tilde{\Omega}}: \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ be the indicator function of $\tilde{\Omega}$ and $\partial \text{ind}_{\tilde{\Omega}}: \Omega \rightarrow 2^{\Omega^*}$ be its subdifferential,⁸⁾. Then (2.8) can be written as

$$\Phi^* \mathbf{r}^*|_{\mathfrak{B}} \in -\partial \text{ind}_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in \tilde{\Omega}. \quad (2.9)$$

Analogously, assuming that the stress constraints (2.7) are ideal, i.e. (1.8) holds, for the strain field incompatibilities we obtain the similar results to that given by (2.9) namely

$$\Psi^* \mathbf{G} \in -\partial \text{ind}_{\tilde{\Pi}}(\boldsymbol{\pi}), \quad \boldsymbol{\pi} \in \tilde{\Pi}, \quad T = \Psi(\boldsymbol{\pi}), \quad (2.10)$$

where $\Psi^*: \mathfrak{S} \rightarrow \Pi^*$ is the adjoint to Ψ , Π^* being the dual of Π , $\partial \text{ind}_{\tilde{\Pi}}: \Pi \rightarrow 2^{\Pi^*}$ being the subdifferential of the indicator function of $\tilde{\Pi}$, $\text{ind}_{\tilde{\Pi}}: \Pi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$.

By virtue of (1.10) and (1.11) for the external forces we have

$$\Phi^* \mathbf{f}^*|_{\mathfrak{B}} \in \Phi^* \mathbf{f}_0^*|_{\mathfrak{B}} - \partial \bar{\zeta}(\mathbf{q}), \quad (2.11)$$

where $\mathbf{f}^*|_{\mathfrak{B}}$ and $\mathbf{f}_0^*|_{\mathfrak{B}}$ are the restrictions of \mathbf{f}^* and \mathbf{f}_0^* to \mathfrak{B} (treated as elements of \mathfrak{B}^*) and $\bar{\zeta}: \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ is the function defined by

$$\bar{\zeta}(\mathbf{p}) \stackrel{\text{df}}{=} \zeta(\Phi(\mathbf{p}) + \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{p} \in \Omega,$$

$\partial \bar{\zeta}: \Omega \rightarrow 2^{\Omega^*}$ is the subdifferential.

Combining equations of equilibrium (1.4) and constitutive relation (1.7) with the reaction force relation (2.9), the strain incompatibility relation (2.10) and the external force relation (2.11) we arrive at the following system of two variational inequalities

$$\begin{cases} \Phi^* \mathbf{E}^* \Psi(\boldsymbol{\pi}) - \Phi^* \mathbf{f}_0^*|_{\mathfrak{B}} \in -\partial \xi(\mathbf{q}) \\ \Psi^* \bar{\mathbf{K}} \Psi(\boldsymbol{\pi}) - \Psi^* \mathbf{E} \Phi(q) \in -\partial \text{ind}_{\tilde{\Pi}}(\boldsymbol{\pi}) \end{cases} \quad (2.12)$$

for the basic unknown $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}) \in \tilde{\Omega} \times \tilde{\Pi}$, provided that a function $\xi: \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, defined by $\xi \stackrel{\text{df}}{=} \text{ind}_{\tilde{\Omega}} + \bar{\zeta}$, satisfies the condition $\partial \xi = \partial \text{ind}_{\tilde{\Omega}} + \partial \bar{\zeta}$. In the foregoing system $\bar{\mathbf{K}}: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{S}$ stands for the operator given by

$$\bar{\mathbf{K}}(\cdot) \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{K}(\cdot) + \mathbf{E}(\mathbf{u}_0). \quad (2.13)$$

⁸⁾ Let α be an arbitrary proper convex function defined on a Banach space X . Following [10] we are the notation

$$\partial \alpha(x) = \{ x^* \in X^* : \alpha(y) - \alpha(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle_x, \quad \forall y \in X \} \in 2_{X^*},$$

where X^* is the dual of X , $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ is the pairing between X^* and X , 2_{X^*} stands for the family of all subsets of X^* . The mapping

$$X \in x \rightarrow \partial \alpha(x) \in 2_{X^*}$$

is said to be the subdifferential of α .

In particular, if constraints for generalized stresses are absent, i.e. $\bar{\Pi} = \Pi$, then (2.12) reduces to the following system of relations

$$\begin{cases} \Phi^* E^* \Psi(\pi) - \Phi^* f_0^*|_{\mathfrak{B}} \in -\partial \xi(\mathbf{q}) \\ \Phi^* \bar{K} \Psi(\pi) - \Psi^* E \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.14)$$

for the basic unknown $(\mathbf{q}, \pi) \in \bar{\Omega} \times \Pi$. If only „dead” loads act at the body then $\xi = \text{ind}_{\bar{\Omega}}$.

The system (2.12) can be represented in equivalent form as follows

$$\begin{cases} \int_B \text{tr}[\Psi(\pi)(E\Phi(\mathbf{p}) - E\Phi(\mathbf{q}))] dv - \int_B \mathbf{b}_0 \cdot (\Phi(\mathbf{p}) - \Phi(\mathbf{q})) dv \\ - \int_{\partial B} \mathbf{p}_0 \cdot (\Phi(\mathbf{p}) - \Phi(\mathbf{q})) ds + \xi(\mathbf{p}) - \xi(\mathbf{q}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega, \\ \int_B \text{tr}[(\Psi(\sigma) - \Psi(\pi))(\bar{K}\Psi(\pi) - E\Phi(\mathbf{q}))] dv \geq 0, \quad \forall \sigma \in \Pi. \end{cases} \quad (2.12)'$$

Now, let us assume that the realization of the constraints are quasi-ideal, i.e. (1.6)' and (1.8)' hold. In this case the governing relations take the form of two following variational inequalities

$$\begin{cases} \Phi^* E^* \Psi(\pi) - \Phi^* f_0^*|_{\mathfrak{B}} \in -\partial \alpha(\mathbf{q}) \\ \Psi^* \bar{K} \Psi(\pi) - \Psi^* E \Phi(\mathbf{q}) \in -\partial \bar{\gamma}(\pi), \end{cases} \quad (2.15)$$

in which $(\mathbf{q}, \pi) \in \bar{\Omega} \times \Pi$ is the basic unknown, provided that the function $\alpha: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, defined by $\alpha \stackrel{\text{df}}{=} \bar{\beta} + \bar{\zeta}$, satisfies the condition $\partial \alpha = \partial \bar{\beta} + \partial \bar{\zeta}$, where $\bar{\beta}(\mathbf{p}) \stackrel{\text{df}}{=} \beta(\Phi(\mathbf{p}) + \mathbf{u}_0)$, $\forall \mathbf{p} \in \Omega$ and $\bar{\gamma}(\rho) \stackrel{\text{df}}{=} \gamma(\Psi(\rho))$, $\forall \rho \in \Pi$, and $\partial \alpha$, $\partial \bar{\gamma}$ stand for the subdifferentials of α and $\bar{\gamma}$, respectively.

3. System of variational inequalities

The general form of the governing relations for problems of elastostatics with constraints for displacements and stresses given by (2.4) and (2.7) takes the form of two variational inequalities (2.12) — for the ideal constraints, and (2.15) — for the quasi-ideal constraints.

In this Section we shall consider more general abstract problem which can be stated as follows: find $(u, \sigma) \in V \times Y^*$ such that

$$\begin{cases} L^* \sigma - f \in -\partial \varphi(u) \\ K \sigma - Lu \in -\partial \psi(\sigma), \end{cases} \quad (3.1)$$

where $L: V \rightarrow Y$ is a linear continuous operator from reflexive Banach space V into a reflexive Banach space Y with domain $D(L) = V$, V^* and Y^* are the duals of V and Y , respectively, $K: Y^* \rightarrow Y$ is a maximal monotone operator from Y^* into Y with the domain $D(K) = Y^*$, $\varphi: V \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ and $\psi: Y^* \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ are proper lower semicontinuous functions on V and Y^* , $\partial \varphi: V \rightarrow 2^{V^*}$ and $\partial \psi: Y^* \rightarrow 2^Y$ are subdifferentials of φ and ψ , respectively f is a given fixed element of V^* . The norms on V and Y will be denoted by $\|\cdot\|_V$ and $\|\cdot\|_Y$, respectively.

Note, that putting in (3.1) $V = \Omega$, $Y = \Pi^*$, $L = \Psi^* E \Phi$, $\varphi = \alpha$, $\psi = \bar{\gamma}$, $f = \Phi^* f_0^*|_{\mathfrak{B}}$ we obtain the system (2.15).

Systems of variational inequalities of the form (3.1) have been analyzed in [2] under the assumption that $\text{Ker } L = 0$ ($\text{Ker } L$ denotes the null space of L). In our considerations this condition in general is not satisfied.

If $\text{Ker } L$ is not trivial subspace of V , i.e. $\text{Ker } L \neq 0$, we pass to the quotient with $\text{Ker } L$. Thus, we introduce

$$V^* = V/\text{Ker } L$$

and define $L^*: V^* \rightarrow Y$ setting

$$L^*u^* \stackrel{\text{df}}{=} Lu, \quad u \in u^*, \quad u^* \in V^*.$$

As it is known, V^* equipped with the norm

$$\|u^*\|^* \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{\varrho \in \text{Ker } L} \|u + \varrho\|_V, \quad u \in u^*, \quad u^* \in V^*,$$

is a reflexive Banach space, [9]. Assuming that

$$\begin{aligned} \langle f, \varrho \rangle_V &= 0 \quad \forall \varrho \in \text{Ker } L, \\ \varphi(v + \varrho) &= \varphi(v) \quad \forall \varrho \in \text{Ker } L, \quad v \in V, \end{aligned}$$

we can define $f^* \in (V^*)^*$ and $\varphi^*: V^* \rightarrow \bar{R}$ setting

$$\begin{aligned} \langle f^*, u^* \rangle &\stackrel{\text{df}}{=} \langle f, u \rangle_V, \quad u \in u^*, \quad u^* \in V^*, \\ \varphi^*(u^*) &= \varphi(u), \quad u \in u^*, \quad u^* \in V^*, \end{aligned}$$

where $(V^*)^*$ stands for the dual of V^* . As a results we obtain the following system of variational inequalities

$$\begin{cases} (L^*)^*\sigma - f^* \in -\partial\varphi^*(u^*) \\ K\sigma - L^*u^* \in -\partial\psi(\sigma) \end{cases} \quad (3.2)$$

for the basic unknown $(u^*, \sigma) \in V^* \times Y^*$. Above, $(L^*)^*: Y^* \rightarrow (V^*)^*$ and $\partial\varphi^*: V^* \rightarrow 2^{(V^*)^*}$ stand for the adjoint of L^* and the subdifferential of φ^* , respectively.

It must be stressed that if $(u^*, \sigma) \in V^* \times Y^*$ is a solution of (3.2) then any element $(u, \sigma) \in V \times Y^*$, where $u \in u^*$, is a solution of (3.1).

The formal structure of (3.2) is the same as that of (3.1) and furthermore $\text{Ker } L^* = 0$. Thus for the formulation of existence results we can use the argument given in [2]. To this aid let us define the function $\alpha^*: Y^* \rightarrow \bar{R}$ putting

$$\alpha^*(\eta) \stackrel{\text{df}}{=} (\varphi^*)^*(-(L^*)^*\eta + f^*), \quad \forall \eta \in Y^*, \quad (3.3)$$

where $(\varphi^*)^*: (V^*)^* \rightarrow \bar{R}$ is the conjugate of φ^* .

Theorem 3.1, [2]. Suppose that

- (i) $\|L^*u^*\|_Y \geq \bar{c}\|u^*\|^*$, $\forall u^* \in V^*$, $\bar{c} > 0$;
- (ii) $\langle K\eta - K\sigma, \eta - \sigma \rangle_Y \geq c\|\eta - \sigma\|_{Y^*}^2$, $\forall \eta, \sigma \in Y^*$, $c > 0$;
- (iii) $\partial\psi + \partial\alpha^*$ is maximal monotone.

Then (3.2) has at least one solution. Moreover, the solution is unique with respect to σ .

As an immediately consequence of the above Theorem we have

Theorem 3.2. Suppose that

- (i) $\varphi(v) = \varphi(v + \varrho) \quad \forall \varrho \in \text{Ker } L, \quad v \in V;$
- (ii) $\langle f, \varrho \rangle_V = 0 \quad \forall \varrho \in \text{Ker } L;$
- (iii) $\|Lv\|_Y \geq \bar{c} \inf_{\varrho \in \text{Ker } L} \|v + \varrho\|_V \quad \forall v \in V;$
- (iv) $\langle K\eta - K\sigma, \eta - \sigma \rangle_Y \geq c \|\eta - \sigma\|_Y^2 \quad \forall \eta, \sigma \in Y^*;$
- (v) $\partial\psi + \partial\alpha^*$ is maximal monotone.

Then (3.1) has at least one solution. The solution is unique with respect to σ . Moreover, if (u, σ) is a solution of (3.1) then for any $\varrho \in \text{Ker } L$ the pair $(u + \varrho, \sigma)$ is also a solution of (3.1).

In Theorem 3.2 conditions (i) - (iii) assure the maximal monotonicity of $\partial\alpha^*$. In fact, from (iii) we have the surjectivity of $(L^*)^*$, i.e. $\text{Im}(L^*)^* = (V^*)^*$, which together with (i) and (ii) guarantees that α^* is a proper lower semicontinuous convex function. As it is known, subdifferentials of such functions are maximal monotone mappings [5].

In particular, if $\psi \equiv 0$ on Y^* , then $\partial\psi \equiv 0$ and the sum $\partial\psi + \partial\alpha^*$ reduces to $\partial\alpha^*$, which is maximal monotone. Thus the condition (v) in Theorem 3.2 is satisfied immediately. Moreover, the second inequality in (3.1) becomes the equality. It implies that if $(u_1, \sigma), (u_2, \sigma)$ are any solutions of (3.1), then $u_1 - u_2 \in \text{Ker } L$. As a result we can formulate the following

Theorem 3.3. Suppose that

- (i) $\varphi(v) = \varphi(v + \varrho) \quad \forall \varrho \in \text{Ker } L, \quad v \in V;$
- (ii) $\langle f, \varrho \rangle_V = 0 \quad \forall \varrho \in \text{Ker } L;$
- (iii) $\|Lv\|_Y \geq \bar{c} \inf_{\varrho \in \text{Ker } L} \|v + \varrho\|_Y, \quad v \in V, \quad c > 0;$
- (iv) $\psi \equiv 0 \quad \text{on } Y^*;$
- (v) $\langle K\eta - K\sigma, \eta - \sigma \rangle_Y \geq c \|\eta - \sigma\|_Y^2, \quad \forall \eta, \sigma \in Y^*.$

Then (3.2) has at least one solution. The solution is unique with respect to σ . Moreover, if (u_1, σ) and (u_2, σ) are any solutions of (3.2) then $u_1 - u_2 \in \text{Ker } L$.

From our considerations it follows that the condition (iii) in Theorems (3.2) and (3.3) plays the fundamental role in the existence of solutions to the problem under consideration. As it is known this condition is equivalent to the closedness of the image of L , $\text{Im } L$ in Y , [9].

Let us consider the case in which $L: V \rightarrow Y$ can be represented in the following composition $L = AB$, where $A: X \rightarrow Y$ and $B: V \rightarrow X$ are linear continuous operators, X is a reflexive Banach space. Note, that setting $A = \Psi^*$ and $B = E\Phi$ we obtain $L = \Psi^*E\Phi$. The below lemma characterizes in terms of A and B conditions under which $\text{Im } L$ is a closed subspace of Y .

Lemma 3.1. Suppose that A is surjective, i.e. $\text{Im } A = Y$, and that there exists an absolute constant $\bar{c} > 0$ such that $\|Bv\|_X \geq \bar{c} \|v\|_V, \forall v \in V$. Then $\text{Im } L$, where $L = AB$, is a closed linear subspace of Y if and only if $\text{Ker } A + \text{Im } B$ is a closed linear subspace of X .

Proof. (Sufficiency). Assume that $\text{Ker } A + \text{Im } B$ is closed and that $\{Lv_n\}, v_n \in V, n = 1, 2, \dots$, converges to y , i.e. $Lv_n \rightarrow y$ as $n \rightarrow \infty$. It suffices to prove that $y = Lv$ for some $v \in V$. By the surjectivity of A we can find a constant $c_1 > 0$ with

$$\|Ax\|_Y \geq c_1 \inf_{z \in \text{Ker } A} \|x + z\|_X, \quad x \in X. \quad (3.3)$$

The sequence $\{ABv_n\}$ satisfies Cauchy condition. From (3.3) it follows that we can find $\{x_n\}$, $x_n \in \text{Ker } A$ such that $\{Bv_n + x_n\}$ is Cauchy sequence, so it converges. By the assumption the limit of this sequence belongs to $\text{Ker } A + \text{Im } B$, i.e. $Bv_n + x_n \rightarrow Bv + x$ as $n \rightarrow \infty$ for some $v \in V$ and $x \in \text{Ker } A$. Hence $ABv_n \rightarrow ABv$ and consequently we obtain $y = ABv = Lv$.

(Necessity). Assume that $Bv_n + x_n \rightarrow x$ as $n \rightarrow \infty$, where $v_n \in V$, $x_n \in \text{Ker } A$, $n = 1, 2, \dots$. From the continuity of A we have $ABv_n \rightarrow Ax$. But the range of $L = AB$ is closed by the assumption and therefore $Ax = ABv$ for some $v \in V$. Hence $x = Bv + x$ for a certain $x \in \text{Ker } A$. This completes the proof of the lemma.

The above Lemma shows that the closedness of $\text{Im } L$ is equivalent to the closedness of the sum $\text{Ker } A + \text{Im } B$ (under suitable assumptions related to A and B). Now we give some usefull result for the sum of closed linear subspaces of a Hilbert space to be again closed.

Lemma 3.2. [11] Let X be a Hilbert space and let M and N be closed linear subspaces of X . Let us denote by R the intersection of M and N , i.e. $R = M \cap N$. The ortogonal projection of X onto R will be denoted by P , $P: X \rightarrow R$. Suppose that there exists $\varepsilon > 0$ such that

$$\|x - Px + y - Py\|_X \geq \varepsilon \tag{*}$$

for any $x \in M$ and $y \in N$ such that $\|x - Px\|_X = 1$ and $\|y - Py\|_X = 1$. Then the sum $M + N$ is a closed subspace of X .

Proof. Let $\{x_n + y_n\}$ be a sequence in $M + N$ ($x_n \in M$, $y_n \in N$, $n = 1, 2, \dots$) converging to x and such that $\|x_n - Px_n\|_X = 1$, $\|y_n - Py_n\|_X = 1$, $n = 1, 2, \dots$. We have to prove that $x \in M + N$. First, we will show that the sequence $\{x_n - Px_n\}$ satisfies Cauchy condition. Suppose that it is not true. Then there exists $\delta > 0$ and a sequence $\{k_n\}$ of natural numbers that

$$\|x_{n+k_n} - Px_{n+k_n} - x_n + Px_n\|_X \geq \delta \tag{3.4}$$

for any natural number n . From the continuity and linearity of P we have

$$P(x_n + y_n) = Px_n + Py_n \rightarrow Px, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Since the sequence $\{x_n + y_n - P(x_n + y_n)\}$ converges, it has to satisfy Cauchy condition. Hence

$$\|x_{n+k_n} - Px_{n+k_n} + y_{n+k_n} - Py_{n+k_n} - x_n + Px_n - y_n + Py_n\|_X \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{3.5}$$

For the simplicity of denotations let us put

$$\alpha_m = x_m - Px_m \quad \text{and} \quad \beta_m = y_m - Py_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Under the above denotations (3.4) and (3.5) take the form

$$\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X \geq \delta, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.6}$$

and

$$\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n + \beta_{n+k_n} - \beta_n\|_X \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \tag{3.7}$$

From (3.6) and (3.7) we obtain

$$\frac{\alpha_{n+k_n} - \alpha_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} + \frac{\beta_{n+k_n} - \beta_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \tag{3.8}$$

Since

$$\left\| \frac{\alpha_{n+k_n} - \alpha_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} \right\|_X = 1$$

for any n , the condition (3.8) yields

$$\left\| \frac{\beta_{n+k_n} - \beta_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} \right\|_X \rightarrow 1, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

At the same time we have

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\alpha_{n+k_n} - \alpha_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} + \frac{\beta_{n+k_n} - \beta_n}{\|\beta_{n+k_n} - \beta_n\|_X} \right\|_X &\leq \left\| \frac{\alpha_{n+k_n} - \alpha_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} + \frac{\beta_{n+k_n} - \beta_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} \right\|_X + \\ &+ \left| 1 - \left\| \frac{\beta_{n+k_n} - \beta_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} \right\|_X \right| \end{aligned}$$

This condition together with (3.8) and (3.9) gives

$$\left\| \frac{\alpha_{n+k_n} - \alpha_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} + \frac{\beta_{n+k_n} - \beta_n}{\|\beta_{n+k_n} - \beta_n\|_X} \right\|_X \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

On noting that

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n+k_n} - \alpha_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} &= \frac{x_{n+k_n} - x_n}{\|x_{n+k_n} - x_n - Px_{n+k_n} + Px_n\|_X} - P \left(\frac{x_{n+k_n} - x_n}{\|x_{n+k_n} - x_n - Px_{n+k_n} - Px_n\|_X} \right) \\ \frac{x_{n+k_n} - x_n}{\|x_{n+k_n} - x_n - Px_{n+k_n} + Px_n\|_X} &\in M, \quad \left\| \frac{\alpha_{n+k_n} - \alpha_n}{\|\alpha_{n+k_n} - \alpha_n\|_X} \right\|_X = 1, \quad n = 1, 2, \dots \\ \left(\text{similarly for } \frac{\beta_{n+k_n} - \beta_n}{\|\beta_{n+k_n} - \beta_n\|_X} \right) &\text{ and taking into account (3.10) we arrive at the contradiction} \end{aligned}$$

with the assumption (*). Thus sequences $\{x_n - Px_n\}$ in M and $\{y_n - Py_n\}$ in N have to satisfy Cauchy condition. From the closedness of M and N it follows that there exists $\bar{x} \in M$ and $\bar{y} \in N$ that $x_n - Px_n \rightarrow \bar{x}$ and $y_n - Py_n \rightarrow \bar{y}$. Hence $x_n + y_n = x_n + y_n - Px_n - Py_n + P(x_n + y_n) \rightarrow \bar{x} + \bar{y} + Px$ and finally we obtain $x = \bar{x} + \bar{y} + Px \in M + N$. This ends the proof of the lemma.

4. Existence and uniqueness results

Now, on the base of the results given in Section 3 we shall formulate some sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions to problems governed by systems (2.12) and (2.14).

Let us begin with problems in which on generalized displacements and generalized stresses are imposed some restrictions. In this case the corresponding system of variational inequalities takes the form (2.12). Putting

$$\mu(\pi) \stackrel{\text{df}}{=} \xi^* (-\Phi^* E^* \Psi(\pi) + \Phi^* f_0^*|_{\mathfrak{B}}), \quad \pi \in \Pi,$$

ξ^* being the conjugate of ξ , denoting by \mathfrak{R} the intersection of $\text{Ker } \Psi^*$ and $\text{Im } E\Phi$, i.e. $\mathfrak{R} = \text{Ker } \Psi^* \cap \text{Im } E\Phi$ and by $P_{\mathfrak{R}}$ the orthogonal projection on \mathfrak{R} , $P_{\mathfrak{R}}: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$, we arrive at the following

Theorem 4.1. Suppose that (2.1), (2.3) and (2.6) hold. Moreover, let the following conditions be satisfied:

(i) \mathbf{K} is maximal monotone operator with the domain $D(\mathbf{K}) = \mathfrak{X}$ such that there exists positive constant $c, c > 0$, with

$$\langle \mathbf{K}\sigma - \mathbf{K}\eta, \sigma - \eta \rangle_2 \geq C \|\eta - \sigma\|_2^2, \quad \forall \sigma, \eta \in \mathfrak{X};$$

(ii) There exists positive constant $\varepsilon, \varepsilon > 0$, such that for any $\sigma \in \text{Ker } \Psi^*$, $\|\sigma - P_{\mathfrak{R}}\sigma\|_2 = 1$ and any $\eta \in \text{Im } \mathbf{E}\Phi$, $\|\eta - P_{\mathfrak{R}}\eta\|_2 = 1$ the following inequality holds

$$\|\sigma - P_{\mathfrak{R}}\sigma + \eta - P_{\mathfrak{R}}\eta\|_2 \geq \varepsilon;$$

(iii) $\langle \mathbf{f}_0^*|_{\mathfrak{B}}, \Phi(\mathbf{p}) \rangle_1 = 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \text{Ker } \Psi^* \mathbf{E}\Phi;$

(iv) $\xi(\mathbf{q}) = \xi(\mathbf{q} + \mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in \text{Ker } \Psi^* \mathbf{E}\Phi, \quad \mathbf{q} \in \Omega;$

(v) $\partial \mu + \partial \text{ind}_{\tilde{\Pi}}$ is maximal monotone.

Then (2.12) has at least one solution $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}) \in \tilde{\Omega} \times \tilde{\Pi}$. The solution is unique with respect to $\boldsymbol{\pi}$ and for any $\mathbf{p} \in \text{Ker } \Psi^* \mathbf{E}\Phi$ the pair $(\mathbf{q} + \mathbf{p}, \boldsymbol{\pi})$ is also a solution.

Proof of the above theorem follows immediately from Theorem 3.2 and Lemmas 3.6 and 3.7.

An analogous result can be formulated for (2.15) replacing only in the hypotheses (iv) and (v) of Theorem 4.1 the functions ξ and $\text{ind}_{\tilde{\Pi}}$ by α and $\bar{\gamma}$, respectively.

If there are no restrictions on generalized stresses then $\tilde{\Pi} = \Pi$ and the system (2.12) reduces to (2.14). In this case the assumptions (iii) and (iv) imply immediately (v) and therefore we obtain

Remark 4.2. Suppose that (2.1), (2.3) and (2.6) hold. Moreover, let the hypotheses (i), (ii), (iii), (iv) of Theorem 4.1 be satisfied. Then problem (2.14) has at least one solution $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}) \in \tilde{\Omega} \times \Pi$. The solution is unique with respect to $\boldsymbol{\pi}$ and for any $\mathbf{p} \in \text{Ker } \Psi^* \mathbf{E}\Phi$ the pair $(\mathbf{q} + \mathbf{p}, \boldsymbol{\pi})$ is also a solution.

Remark 4.3. Let us suppose that $\tilde{\Pi} = \Pi$ and $\tilde{\Omega} = \Omega$ (restrictions on generalized displacements and generalized stresses are absent) and that $\xi \equiv 0$ (the body is subjected to the „dead” load only). Then (2.12) reduces to the system of two equations. In this case if $(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi})$ and $(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi})$ are any two solutions of (2.12) then $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \in \text{Ker } \Psi^* \mathbf{E}\Phi$, i.e. we have obtained the uniqueness of generalized displacements with respect to elements of $\text{Ker } \Psi^* \mathbf{E}\Phi$.

Remark 4.4. From our considerations it follows that in general the displacement field in problems with stress constraints of the form (2.7) is not uniquely determined. The uniqueness depends on the kernel of the operator $\Psi^* \mathbf{E}\Phi$. If $\text{Ker } \Psi^* \mathbf{E}\Phi = \mathbf{0}$ then the solution is unique, but if $\text{Ker } \Psi^* \mathbf{E}\Phi$ is not trivial subspace of Ω then the strain field can be determined up to strain fields belonging to the set $\{\mathbf{H} = \mathbf{E}\Phi(\mathbf{p}) \text{ for some } \mathbf{p} \text{ such that } \int_B \text{tr}[\mathbf{E}\Phi(\mathbf{p}) \Psi(\boldsymbol{\pi})] dv = 0, \forall \boldsymbol{\pi} \in \Pi\}$.

Some applications of obtained results to problems of plates, shells, membranes and discretization can be found in [3, 4].

References

1. G. DUVAULT, J. L. LIONS, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer—Verlag, New York 1976.
2. Z. NANIEWICZ, *On some class of problems of Linear Elasticity with constraints for displacements and stresses*, Arch. of Mech. (in press).
3. Z. NANIEWICZ, *On the plane stress problem* (in preparation).
4. Z. NANIEWICZ, *Some remarks on the independent discretization of displacements and stresses* (in preparation).
5. R. T. ROCKAFELLAR, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. 33, 1, 209 - 216 (1970).
6. CZ. WOŹNIAK, *Constrained continuous media* (Parts I, II, III), Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Techn. 21, 1, 109 - 116, 2, 167 - 173, 3, 175 - 182 (1973).
7. CZ. WOŹNIAK, *On the realization of constraints and loosenesses in continuum mechanics*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Techn. 25, 12 (1977).
8. CZ. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN Warszawa—Poznań 1982.
9. W. RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York 1973.
10. I. EKELAND, R. TEMAM, *Convex Analysis and Variational Problems*, North—Holland Publ. Company, New York 1976.
11. S. ROLEWICZ, *O domkniętości rzutu podprzestrzeni w przestrzeniach Banacha*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria I: Prace Matematyczne III (1959), 143 - 145.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КОСАЮЩИЕСЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ
И ОДНОЗНАЧНОСТИ
В ЭЛАСТОСТАТИКЕ СО СВЯЗЯМИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

В работе рассмотрен некоторый класс проблем теории эластостатики со связями в перемещениях и напряжениях. Рассматриваются связи приводящие к проблемом с обобщёнными перемещениями и обобщёнными напряжениями. Доказано теоремы существования и однозначности для таких проблем.

Streszczenie

ISTNIENIE I JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZAŃ W ELASTOSTATYCE
Z WIĘZAMI DLA PRZEMIESZCZEŃ I NAPRĘŻEŃ

W pracy rozpatrzono pewną klasę zagadnień elastostatyki z więzami dla przemieszczeń i naprężeń. Zbadano takie ograniczenia, które prowadzą do problemów z uogólnionymi przemieszczeniami i uogólnionymi naprężeniami. Udowodniono twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla tych zagadnień.

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 grudnia 1984 roku

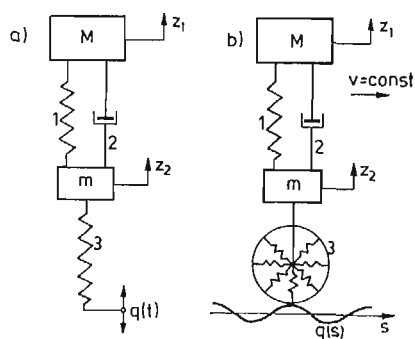
DRGANIA UKŁADU Z NIESYMETRYCZNĄ CHARAKTERYSTYKĄ SPRĘŻYSTOŚCI PRZY PARAMETRYCZNYCH I ZEWNĘTRZNYM WYMUSZENIU

KAZIMIERZ SZABELSKI
WALDEMAR SAMODULSKI

Politechnika Lubelska

1. Wstęp

Przeprowadźmy badania analityczne drgań układu należącego do takiej klasy nieliniowych układów mechanicznych, które zawierają elementy o charakterystykach sprężystości typu kwadratowego. Przyjmijmy ponadto, że układ charakteryzuje się również okresowo zmienną sztywnością, poddany jest działaniu kinematycznego wymuszenia zewnętrznego oraz przedstawić go można w postaci dwumasowego modelu płaskiego z liniowym tłumieniem (rys. 1a).



Rys. 1

Rys. 1b przykładowo ilustruje model fizyczny takiego układu w przypadku pionowych drgań ogumionego pojazdu. W przypadku tym masa uresorowana M połączona jest z masą nieresorowaną elementem pneumatycznym (1) o charakterystyce sprężystości w postaci funkcji drugiego stopnia [6] oraz amortyzatorem (2) którego charakterystykę aproksymowano funkcją liniową. Element sprężysty (3) przedstawia koło którego sztywność promieniowa ogumienia na obwodzie zewnętrznego zarysu opony jest zmienna na skutek niejednorodności jej budowy powstałej w trakcie procesu technologicznego [5], [7]. Zmianę

tej sztywności wokół pewnej wartości średniej aproksymujemy funkcją harmoniczną w postaci dwóch fal [7].

Ze względu na adekwatność modelu — z pewnym przybliżeniem wynikającym między innymi z założenia słabego sprzężenia drgań tylnej i przedniej osi samochodu — możemy traktować go jako odpowiadający układowi przedniego lub tylnego zawieszenia pojazdu. W dalszych rozważaniach skoncentrujemy się na analizie drgań tego typu układów (rys. 1a)

2. Matematyczny model drgań

Układ równań różniczkowych ruchu przyjmuje postać

$$\begin{aligned} M\ddot{z}_1 + h(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k(z_1 - z_2) + k_1(z_1 - z_2)^2 &= 0 \\ m\ddot{z}_2 - h(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k(z_1 - z_2) - k_1(z_1 - z_2)^2 &= c(t)[q(t) - z_2] \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

z_1, z_2 — współrzędne uogólnione,

k_1, k_1 — współczynniki sztywności,

h — współczynnik tłumienia,

$c(t)$ — zmienny współczynnik sztywności elementu (3),

$q(t)$ — funkcja przemieszczenia.

Przyjmijmy okresowo zmienną sztywność elementu (3) w postaci

$$c(t) = c_1 - c_0 \cos 2\omega t$$

oraz

$$q(t) = q_0 \cos(\Omega t - \varphi),$$

gdzie:

c_1 — średnia wartość współczynnika sztywności,

c_0 — amplituda modulacji sztywności,

ω — częstość kołowa wymuszenia parametrycznego,

Ω — częstość kołowa wymuszenia zewnętrznego,

φ — kąt przesunięcia fazowego.

Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{c_0}{c_1} = \mu; \quad \frac{k_1}{k} = \mu x; \quad h = \mu h_1$$

$$q_0 \cos \varphi = \mu Q_1; \quad q_0 \sin \varphi = \mu P_1$$

oraz pomijając niektóre wyrazy ze względu na realne założenie, że amplituda modulacji sztywności jest znacznie mniejsza od podwojonej średniej wartości współczynnika sztywności

$$c_0 \ll 2c_1$$

otrzymujemy układ nieliniowych równań różniczkowych z których jedno jest równaniem niejednorodnym i zawiera okresowo zmienny współczynnik

$$\begin{aligned} M\ddot{z}_1 + \mu h_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k(z_1 - z_2) + \mu x k(z_1 - z_2)^2 &= 0 \\ m\ddot{z}_2 - \mu h_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k(z_1 - z_2) - \mu x k(z_1 - z_2)^2 + \\ + c_1(1 - \mu \cos 2\omega t)z_2 &= \mu c_1(Q_1 \cos \Omega t + P_1 \sin \Omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

Podstawiając do układu równań (2) $\mu = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} M\ddot{z}_1 + k(z_1 - z_2) &= 0, \\ m\ddot{z}_2 - k(z_1 - z_2) + c_1 z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Przyjmując rozwiązania równań (3) w postaci

$$z_1 = a \cos pt \quad z_2 = b \cos pt$$

znajdujemy — przy założeniu, że a i b są różne od zera — kwadraty częstości kołowych drgań własnych układu liniowego w postaci

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{k}{M} + \frac{k+c_1}{m} \mp \sqrt{\left(\frac{k}{M} + \frac{k+c_1}{m} \right)^2 - \frac{4kc_1}{Mm}} \right] \quad (4)$$

Zakładając małe tłumienie [4], wprowadźmy współrzędne quasi-normalne dla których przy $\mu = 0$ nastąpi rozprzężenie układu równań różniczkowych. W tym celu dokonajmy liniowej transformacji współrzędnych w postaci

$$\begin{aligned} z_1 &= \beta_1 y_2 - \beta_2 y_1, \\ z_2 &= \psi(y_1 - y_2), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{m\gamma_1}{M(\gamma_1 - \gamma_2)}; \quad \beta_2 = \frac{m\gamma_2}{M(\gamma_1 - \gamma_2)}; \quad \psi = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \\ \gamma_1 &= \frac{k - Mp_1^2}{k}; \quad \gamma_2 = \frac{k - Mp_2^2}{k} \end{aligned}$$

Wprowadzając czas bezwymiarowy

$$\tau = \omega t$$

oraz wykorzystując zależność (5), z równań (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \lambda_1^2 y_1 &= \mu [-\chi \bar{M} \lambda_1^2 (\varepsilon_1 y_2 - \varepsilon_2 y_1)^2 - \delta_1 \lambda_1 (\varepsilon_1 \dot{y}_2 - \varepsilon_2 \dot{y}_1) + \\ &+ \varrho_1 \lambda_1^2 (y_1 - y_2) \cos 2\tau + \bar{Q}_1 \lambda_1^2 \cos \bar{Q} \tau + \bar{P}_1 \lambda_1^2 \sin \bar{Q} \tau] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + \lambda_1^2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 y_2 &= \mu \left[-\chi \bar{M} \lambda_1^2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 (\varepsilon_1 y_2 - \varepsilon_2 y_1)^2 - \delta_1 \lambda_1 \frac{p_2}{p_1} (\varepsilon_1 \dot{y}_2 - \varepsilon_2 \dot{y}_1) + \right. \\ &\left. + \varrho_2 \lambda_1^2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 (y_1 - y_2) \cos 2\tau + \bar{Q}_2 \lambda_1^2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 \cos \bar{Q} \tau + \bar{P}_2 \lambda_1^2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 \sin \bar{Q} \tau \right] \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i &= \frac{d^2 y_i}{d\tau^2} \quad (i = 1, 2); \quad \frac{M}{m} = \bar{M}, \quad \lambda_i^2 = \frac{p_i^2}{\omega^2} \\ \delta_1 &= \frac{Mp_1 h_1}{mk}; \quad \varrho_1 = \frac{\gamma_1 c_1 \psi}{mp_1^2}; \quad \varepsilon_1 = \beta_2 + \psi \\ \bar{Q}_1 &= \frac{\gamma_1 c_1 \bar{Q}_1}{mp_1^2}; \quad \bar{P}_1 = \frac{\gamma_1 c_1 P_1}{mp_1^2}; \quad \bar{Q} = \frac{\Omega}{\omega} \end{aligned}$$

oraz

$$\delta_2 = \frac{Mp_2 h_1}{mk}; \quad \varrho_2 = \frac{\gamma_2 c_1 \psi}{mp_2^2}; \quad \varepsilon_2 = \beta_2 + \psi$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{\gamma_2 c_1 Q_1}{mp_1^2}; \quad \bar{P}_2 = \frac{\gamma_2 c_1 P_1}{mp_2^2}$$

W drugim przypadku gdy $\lambda_2^2 = \frac{p_2^2}{\omega^2}$ znajdujemy

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \lambda_2^2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 y_1 = & \mu \left[-x \bar{M} \lambda_2^2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 (\varepsilon_1 y_2 - \varepsilon_2 y_1)^2 + \right. \\ & - \delta_1 \lambda_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right) (\varepsilon_1 \dot{y}_2 - \varepsilon_2 \dot{y}_1) + \varrho_1 \lambda_2^2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 (y_1 - y_2) \cos 2\tau + \\ & \left. + \bar{Q}_1 \lambda_2^2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 \cos \bar{Q} \tau + \bar{P}_1 \lambda_2^2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 \sin \bar{Q} \tau \right] \\ \ddot{y}_2 + \lambda_2^2 y_2 = & \mu \left[-\chi \bar{M} \lambda_2^2 (\varepsilon_1 y_2 - \varepsilon_2 y_1)^2 - \delta_2 \lambda_2 (\varepsilon_1 \dot{y}_2 - \varepsilon_2 \dot{y}_1) + \right. \\ & \left. + \varrho_2 \lambda_2^2 (y_1 - y_2) \cos 2\tau + \bar{Q}_2 \lambda_2^2 \cos \bar{Q} \tau + \bar{P}_2 \lambda_2^2 \sin \bar{Q} \tau \right] \end{aligned} \quad (7)$$

3. Metoda rozwiązań

W badaniach drgań parametrycznych układów nieliniowych z symetrycznymi charakterystykami sprężystości zazwyczaj stosuje się metodę bilansu harmonicznych [2], [3].

Rozwiążmy układ równań (6) i (7) w oparciu o perturbacyjną metodę małego parametru [1]. Dzięki temu wyznaczymy poszukiwane wielkości, rozwiązując układ rekurencyjnych równań różniczkowych liniowych.

Zbadajmy drgania układu odpowiadające głównym rezonansom parametrycznym. W celu znalezienia rozwiązań okresowych układów równań (6), (7) przedstawmy $y_1(\tau)$ i $y_2(\tau)$ w postaci szeregów potęgowych wyrażonych w funkcji małego parametru

$$\begin{aligned} y_1(\tau) &= y_1^{(0)}(\tau) + \mu y_1^{(1)}(\tau) + \mu^2 y_1^{(2)}(\tau) + \\ y_2(\tau) &= y_2^{(0)}(\tau) + \mu y_2^{(1)}(\tau) + \mu^2 y_2^{(2)}(\tau) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $y_i^{(i)}$, $y_2^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2 \dots$) są funkcjami okresowymi. Rozwiązania okresowe równań (6) możliwe są dla pewnych wartości parametru λ_1^2 , który również przedstawimy w postaci szeregu potęgowego

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{p_1}{\omega} \right)^2 = 1 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \dots \quad (9)$$

gdzie α_i ($i = 1, 2 \dots$) są stałymi współczynnikami, które wyznaczymy z warunku okresowości unikając w rozwiązaniach wyrazów sekularnych.

W przypadku układu równań (7) parametr λ_2^2 wyrazimy w postaci

$$\lambda_2^2 = \left(\frac{p_2}{\omega} \right)^2 = 1 + \mu \alpha_1 + \mu \alpha_2 + \dots \quad (10)$$

Podstawiając szeregi (8) i (9) oraz (8) i (10) odpowiednio do równań (6) i (7) oraz wprowadzając oznaczenia

$$\frac{p_2}{p_1} = \nu; \quad \frac{p_1}{p_2} = \nu_1$$

po przyrównaniu do zera członów przy μ^i otrzymujemy układy rekurencyjnych równań różniczkowych liniowych. W celu uniknięcia rezonansów wewnętrznych, wyłączmy przypadek szczególny gdy $\nu = \frac{p_2}{p_1}$ jest liczbą całkowitą.

4. Analiza drgań okresowych układu bez wymuszenia zewnętrznego

Rozpatrzmy drgania okresowe układu opisane równaniami (6) i (7) w przypadku gdy $\bar{P}_1 = \bar{Q}_1 = \bar{P}_2 = \bar{Q}_2 = 0$. Oznacza to, że na układ nie działa wymuszenie zewnętrzne. Na przykładzie modelu przedstawionego na rys. 1b równoważne jest to z założeniem, że ogumione koło toczy się po idealnie równej nawierzchni.

Rozpatrując układ równań (6) zbadajmy drgania okresowe dla których zgodnie z (9) przy $\mu = 0$ częstość ω jest równa pierwszej częstości drgań własnych p_1 . Przyjmując $y_2^{(0)} = 0$ otrzymujemy

$$y_1^{(0)} + y_1^{(0)} = 0 \tag{11}$$

$$y_1^{(1)} + y_1^{(1)} = -\alpha_1 y_1^{(0)} - x\bar{M}\varepsilon_2^2 y_1^{(0)2} + \delta_1 \varepsilon_2 y_1^{(0)} + \varrho_1 y_1^{(0)} \cos 2\tau \tag{12}$$

$$y_1^{(2)} + y_1^{(2)} = -\alpha_2 y_1^{(0)} - \alpha_1 y_1^{(1)} - x\bar{M}[\varepsilon_2^2(\alpha_1 y_1^{(0)2} + 2y_1^{(0)}y_1^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(1)}y_1^{(0)}] +$$

$$- \delta_1 \left[\varepsilon_1 y_2^{(1)} - \varepsilon_2 \left(\frac{\alpha_1}{2} y_1^{(0)} + y_1^{(1)} \right) \right] + \varrho_1 (\alpha_1 y_1^{(0)} + y_1^{(1)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau \tag{13}$$

.....

$$y_2^{(1)} + \nu^2 y_2^{(1)} = -x\bar{M}\varepsilon_2^2 \nu^2 y_1^{(0)2} + \delta_2 \varepsilon_2 \nu y_1^{(0)} + \varrho_2 \nu^2 y_1^{(0)} \cos 2\tau \tag{14}$$

$$y_2^{(2)} + \nu^2 y_2^{(2)} = -\alpha_1 \nu^2 y_2^{(1)} - x\bar{M}\nu^2 [\varepsilon_2^2(\alpha_1 y_1^{(0)2} + 2y_1^{(0)}y_1^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(1)}y_1^{(0)}] +$$

$$- \delta_2 \nu \left[\varepsilon_1 y_2^{(1)} - \varepsilon_2 \left(\frac{\alpha_1}{2} y_1^{(0)} + y_1^{(1)} \right) \right] + \varrho_2 \nu^2 (\alpha_1 y_1^{(0)} + y_1^{(1)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau \tag{15}$$

.....

Założenie trywialnego rozwiązania $y_2^{(0)} = 0$ wynika z równania

$$y_2^{(0)} + \nu^2 y_2 = 0,$$

Przy wcześniejszym założeniu, że obie częstości drgań własnych p_1, p_2 są niewspółmierne (ν nie jest liczbą całkowitą), gdyby $y_2^{(0)} \neq 0$, współrzędna „nieresonansowa” $y_2(\tau)$ nie zmieniałaby się z taką samą częstością jak współrzędna „rezonansowa” $y_1(\tau)$. W takich przypadkach rozwiązanie niezaburzone $y_2^{(0)}(\tau)$ stanowiłoby człon zakłócający okresowość funkcji $y_2(\tau)$ a tym samym — z uwagi na równania (5) — również drgań opisanych przez współrzędne uogólnione.

Podstawiając do równania (12)

$$y_1^{(0)} = a_1 \cos \tau + b_1 \sin \tau$$

z warunków okresowości rozwiązań otrzymujemy

$$\alpha_1 a_1 - \frac{1}{2} \varrho_1 a_1 - \delta_1 \varepsilon_2 b_1 = 0,$$

$$\delta_1 \varepsilon_2 a_1 + \alpha_1 b_1 + \frac{1}{2} \varrho_1 b_1 = 0,$$

skąd przy $a_1 \neq 0$ i $b_1 \neq 0$ znajdziemy

$$\alpha_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varrho_1^2 - 4\delta_1^2 \varepsilon_2^2},$$

$$a_1^2 - b_1^2 = \frac{2\alpha_1}{\varrho_1} A_1^2; \quad a_1 b_1 = -\frac{\delta_1 \varepsilon_2}{\varrho_1} A_1^2,$$

(16)

gdzie

$$A_1^2 = a_1^2 + b_1^2$$

Po przekształceniach równanie (12) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} + y_1^{(1)} = & -\frac{1}{2} x \bar{M} \varepsilon_2^2 A_1^2 - \frac{1}{2} x \bar{M} \varepsilon_2^2 (a_1^2 - b_1^2) \cos 2\tau + \\ & - x \bar{M} \varepsilon_2^2 a_1 b_1 \sin 2\tau + \frac{1}{2} \varrho_1 (a_1 \cos 3\tau + b_1 \sin 3\tau). \end{aligned}$$

Rozwiązaniem szczególnym tego równania jest funkcja

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} = & -\frac{1}{2} x \bar{M} \varepsilon_2^2 A_1^2 + \frac{1}{6} x M \varepsilon_2^2 (a_1^2 - b_1^2) \cos 2\tau + \\ & + \frac{1}{3} x \bar{M} \varepsilon_2^2 a_1 b_1 \sin 2\tau - \frac{1}{16} \varrho_1 (a_1 \cos 3\tau + b_1 \sin 3\tau) \end{aligned}$$

(17)

natomiast równania (14) funkcja

$$\begin{aligned} y_2^{(1)} = & -\frac{1}{2} x \bar{M} \varepsilon_2^2 A_1^2 + \frac{\nu}{\nu^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 \nu a_1 + \delta_2 \varepsilon_2 b_1 \right) \cos \tau + \\ & - \frac{\nu}{\nu^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 \nu b_1 + \delta_2 \varepsilon_2 a_1 \right) \sin \tau - \frac{x \bar{M} \varepsilon_2^2 \nu^2}{2(\nu^2 - 4)} (a_1^2 - b_1^2) \cos 2\tau + \\ & - \frac{\nu}{\nu^2 - 4} x \bar{M} \varepsilon_2^2 a_1 b_1 \sin 2\tau + \frac{\varrho_2 \nu^2}{2(\nu^2 - 9)} (a_1 \cos 3\tau + b_1 \sin 3\tau) \end{aligned}$$

Podstawiając zależności (17) i (18) do (15) z warunku zapewnienia rozwiązań okresowych otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha_2 a_1 = & -x \bar{M}^2 \left\{ \varepsilon_2^4 \left[-A_1^2 a_1 + \frac{1}{6} (a_1^2 - b_1^2) a_1 + \frac{1}{3} a_1 b_1^2 \right] + \right. \\ & \left. + \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \left[A_1^2 a_1 + \frac{\nu^2}{2(\nu^2 - 4)} (a_1^2 - b_1^2) a_1 + \frac{\nu^2}{\nu^2 - 4} a_1 b_1^2 \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \delta_1 \varepsilon_2 \alpha_1 b_1 + \frac{\delta_1 \varepsilon_1 \nu}{\nu^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 \nu b_1 + \delta_2 \varepsilon_2 a_1 \right) + \\ - \frac{\varrho_1 \nu}{2(\nu^2 - 1)} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 \nu a_1 + \delta_2 \varepsilon_2 b_1 \right) - \frac{\varrho_1 \varrho_2 \nu^2}{4(\nu^2 - 9)} a_1 + \frac{1}{2} \varrho_1 \alpha_1 a_1 - \frac{1}{32} \varrho_1^2 \alpha_1$$

oraz

$$\alpha_2 b_1 = -x^2 \bar{M}^2 \left\{ \varepsilon_2^4 \left[-A_1^2 b_1 - \frac{1}{6} (a_1^2 - b_1^2) b_1 + \frac{1}{3} a_1^2 b_1 \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \left[A_1^2 b_1 - \frac{\nu^2}{2(\nu^2 - 4)} (a_1^2 - b_1^2) b_1 + \frac{\nu^2}{\nu^2 - 4} a_1^2 b_1 \right] \right\} + \\ - \frac{1}{2} \delta_1 \varepsilon_2 \alpha_1 a_1 + \frac{\delta_1 \varepsilon_1 \nu}{\nu^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 \nu a_1 + \delta_2 \varepsilon_2 b_1 \right) + \\ - \frac{\varrho_1 \nu}{2(\nu^2 - 1)} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 \nu b_1 + \delta_2 \varepsilon_2 a_1 \right) - \frac{\varrho_1 \varrho_2 \nu^2}{4(\nu^2 - 9)} b_1 - \frac{1}{2} \varrho_1 \alpha_1 b_1 - \frac{1}{32} \varrho_1^2 b_1$$

Z powyższych zależności znajdujemy

$$\alpha_2 = x^2 \bar{M}^2 A_1^2 \left[\varepsilon_2^4 \frac{3\varrho_1^2 - 2(\alpha_1^2 + \delta_1^2 \varepsilon_2^2)}{3\varrho_1} - \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \frac{(\nu^2 - 4)\varrho_1^2 + 2\nu^2(\alpha_1^2 + \delta_1^2 \varepsilon_2^2)}{(\nu^2 - 4)\varrho_1^2} \right] + \quad (19) \\ + \frac{\delta_1 \delta_2 \varepsilon_2 \nu (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\nu^2 - 1} - \frac{\delta_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varrho_2 \nu^2}{(\nu^2 - 1)\varrho_1} - \frac{\varrho_1 \varrho_2 \nu^2 (\nu^2 - 5)}{2(\nu^2 - 1)(\nu^2 - 9)} + \alpha_1^2 - \frac{1}{32} \varrho_1^2$$

Podstawiając znalezione wyrażenia do (9) otrzymujemy

$$\lambda_1^{2(c)} = 1 + \frac{1}{2} \mu \sqrt{\varrho_1^2 - 4\delta_1^2 \varepsilon_2^2} + \alpha_2 \mu^2 + \dots \\ \lambda_1^{2(s)} = 1 - \frac{1}{2} \mu \sqrt{\varrho_1^2 - 4\delta_1^2 \varepsilon_2^2} + \alpha_2 \mu^2 + \dots \quad (20)$$

Zbadajmy następnie drgania okresowe opisane układem równań (7). W tym celu w równaniach tych wykorzystamy szeregi (8) i (9) przy uwzględnieniu rozwinięcia

$$\lambda_2 = 1 + \mu \frac{\alpha_1}{2} + \dots$$

Po przyrównaniu do zera poszczególnych wyrazów występujących przy μ^i ($i = 0, 1, 2, \dots$) oraz analogicznym jak dla układu równań (6) założeniu $y_1^{(0)} = 0$ wynikającym z równania

$$y_1^{(0)''} + \nu_1^2 y_1^{(0)} = 0$$

otrzymujemy

$$y_1^{(1)''} + \nu_1^2 y_1^{(1)} = -x \bar{M} \varepsilon_1^2 \nu_1^2 y_2^{(0)2} - \delta_1 \varepsilon_1 \nu_1 y_1^{(0)'} - \varrho_1 \nu_1^2 y_2^{(0)} \cos 2\tau \quad (21)$$

$$y_1^{(2)''} + \nu_1^2 y_1^{(2)} = -\nu_1^2 \alpha_1 y_1^{(1)} - x \bar{M} \nu_1^2 [\varepsilon_1^2 (\alpha_1 y_2^{(0)2} + 2y_2^{(0)} y_2^{(1)}) + \\ - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(0)} y_1^{(1)}] - \delta_1 \nu_1 \left[\varepsilon_1 \left(\frac{\alpha_1}{2} y_2^{(0)'} + y_2^{(1)'} \right) - \varepsilon_2 y_1^{(1)'} \right] + \quad (22) \\ + \varrho_1 \nu_1^2 (y_1^{(1)} - \alpha_1 y_2^{(0)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau \\ \dots \\ \dots$$

$$\ddot{y}_2^{(0)} + y_2^{(0)} = 0 \quad (23)$$

$$\ddot{y}_2^{(1)} + y_2^{(1)} = -\alpha_1 y_2^{(0)} - x\bar{M}\varepsilon_1^2 y_2^{(0)2} - \delta_2 \varepsilon_1 \dot{y}_2^{(0)} - \varrho_2 y_2^{(0)} \cos 2\tau \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2^{(2)} + y_2^{(2)} = & -\alpha_2 y_2^{(0)} - \alpha_1 y_2^{(1)} - x\bar{M}[\varepsilon_1^2(\alpha_1 y_2^{(0)2} + 2y_2^{(0)}y_2^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(0)}y_1^{(1)}] + \\ & -\delta_2 \left[\varepsilon_1 \left(\frac{\alpha_1}{2} \dot{y}_2^{(0)} + \dot{y}_2^{(1)} \right) - \varepsilon_2 \dot{y}_1^{(1)} \right] + \varrho_2 (y_1^{(1)} - \alpha_1 y_2^{(0)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Postępując analogicznie jak w przypadku poprzednim znajdujemy

$$\alpha_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varrho_2^2 - 4\delta_2^2 \varepsilon_1^2} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} y_2^{(1)} = & -\frac{1}{2} x\bar{M}\varepsilon_1^2 A_2^2 + \frac{1}{6} x\bar{M}\varepsilon_1^2 (a_2^2 - b_2^2) \cos 2\tau + \\ & + \frac{1}{3} x\bar{M}\varepsilon_1^2 a_2 b_2 \sin 2\tau + \frac{1}{16} \varrho_2 (a_2 \cos 3\tau + b_2 \sin 3\tau) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} = & -\frac{1}{2} x\bar{M}\varepsilon_1^2 A_2^2 - \frac{\nu_1}{\nu_1^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_1 \nu_1 a_2 + \delta_1 \varepsilon_1 b_2 \right) \cos \tau + \\ & + \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_1 \nu_1 b_2 + \delta_1 \varepsilon_1 a_2 \right) \sin \tau - \frac{x\bar{M}\varepsilon_1^2 \nu_1^2}{2(\nu_1^2 - 4)} (a_2^2 - b_2^2) \cos 2\tau + \\ & - \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - 4} x\bar{M}\varepsilon_1^2 a_2 b_2 \sin 2\tau - \frac{\varrho_1 \nu_1^2}{2(\nu_1^2 - 9)} (a_2 \cos 3\tau + b_2 \sin 3\tau) \end{aligned} \quad (28)$$

oraz

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & A_2^2 x^2 \bar{M}^2 \left[\varepsilon_1^4 \frac{3\varrho_2^2 - 2(\alpha_1^2 + \delta_2^2 \varepsilon_1^2)}{3\varrho_2^2} - \frac{(\nu_1^2 - 4)\varrho_2^2 + 2\nu_1^2(\alpha_1^2 + \delta_2^2 \varepsilon_1^2)}{(\nu_1^2 - 4)\varrho_2} \varepsilon_1^3 \varepsilon_2 \right] + \\ & + \frac{\delta_1 \delta_2 \varepsilon_1 \nu_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\nu_1^2 - 1} - \frac{\delta_2^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varrho_1 \nu_1^2}{(\nu_1^2 - 1)\varrho_2} - \frac{\varrho_1 \varrho_2 \nu_1^2 (\nu_1^2 - 5)}{2(\nu_1^2 - 1)(\nu_1^2 - 9)} + \alpha_1^2 - \frac{1}{32} \varrho_2^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Powyższe zależności wykorzystujemy w równaniach

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(c)} &= 1 - \frac{1}{2} \mu \sqrt{\varrho_2^2 - 4\delta_2^2 \varepsilon_1^2} + \alpha_2 \cdot \mu^2 + \dots \\ \lambda_2^{(s)} &= 1 + \frac{1}{2} \mu \sqrt{\varrho_2^2 - 4\delta_2^2 \varepsilon_1^2} + \alpha_2 \cdot \mu^2 + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

5. Analiza drgań okresowych układu z wymuszeniem zewnętrznym

Zbadajmy drgania układu z parametrycznym oraz jednoczesnym zewnętrznym wymuszeniem drgań. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do takich przypadków, dla których częstość wzbudzenia parametrycznego jest równa częstości wymuszenia zewnętrznego ($\omega = \Omega$). Założenie to zasadniczo rzutuje na rozważane rozwiązania. Podstawowa

bowiem częstość drgań parametrycznych rozpatrywanego układu — bez wymuszenia zewnętrznego — w przypadkach rezonansów głównych jest równa ω .

Jeśli rozpatrujemy drgania układu z ogumionym kołem (rys. 1b), to ze względu na związek

$$\omega = \frac{v}{R}; \quad \Omega = \frac{2\pi v}{l}$$

gdzie: v — prędkość jazdy, R — promień koła, l — długość fali nierówności drogi; założenie $\omega = \Omega$, odpowiada jeździe, po drodze której długość fali nierówności określa zależność

$$l = 2\pi \cdot R.$$

Podstawiając szeregi (8) i (9) do układu równań (6) przy założeniu $y_2^{(0)} = y_2^{(1)} = 0$, otrzymujemy

$$y_1^{(0)''} + y_1^{(0)} = 0, \quad (31)$$

$$y_1^{(1)''} + y_1^{(1)} = -\alpha_1 y_1^{(0)} - x\bar{M}\varepsilon_2^2 y_1^{(0)2} + \delta_1 \varepsilon_2 y_1^{(0)'} + \varrho_1 y_1^{(0)} \cos 2\tau + \bar{Q}_1 \cos \tau + \bar{P}_1 \sin \tau, \quad (32)$$

$$y_1^{(2)''} + y_1^{(2)} = -\alpha_2 y_1^{(0)} - \alpha_1 y_1^{(1)} - x\bar{M}[\varepsilon_2^2(\alpha_1 y_1^{(0)2} + 2y_1^{(0)} y_1^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(1)} y_1^{(0)}] + \\ -\delta_1 \left[\varepsilon_1 y_2^{(1)'} - \varepsilon_2 \left(y_1^{(1)'} + \frac{\alpha_1}{2} y_1^{(0)'} \right) \right] + \varrho_1 (y_1^{(1)} + \alpha_1 y_1^{(0)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau + \\ + \alpha_1 \bar{Q}_1 \cos \tau + \alpha_1 \bar{P}_1 \sin \tau, \quad (33)$$

$$y_2^{(1)''} + \nu^2 y_2^{(1)} = -x\bar{M}\varepsilon_2^2 \nu^2 y_1^{(0)2} + \delta_2 \varepsilon_2 \nu + \varrho_2 \nu^2 y_1^{(0)} \cos 2\tau + \\ + \nu^2 \bar{Q}_2 \cos \tau + \nu^2 \bar{P}_2 \sin \tau, \quad (34)$$

$$y_2^{(2)''} + \nu^2 y_2^{(2)} = -\nu^2 \alpha_1 y_2^{(1)} - x\bar{M}\nu^2 [\varepsilon_2^2(\alpha_1 y_1^{(0)2} + 2y_1^{(0)} y_1^{(1)}) + \\ - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_1^{(0)} y_2^{(1)}] - \delta_2 \nu \left[\varepsilon_1 y_2^{(1)'} - \varepsilon_2 \left(\frac{\alpha_1}{2} y_1^{(0)'} + y_1^{(1)'} \right) \right] + \\ + \varrho_2 \nu^2 (y_1^{(1)} + \alpha_1 y_1^{(0)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau + \alpha_1 \nu^2 \bar{Q}_2 \cos \tau + \alpha_1 \nu^2 \bar{P}_2 \sin \tau \quad (35)$$

Podstawiając do równania (32)

$$y_1^{(0)} = a_1 \cos \tau + b_1 \sin \tau$$

po przekształceniach znajdujemy

$$a_1 \left(\alpha_1^2 - \frac{1}{4} \varrho_1^2 + \delta_1^2 \varepsilon_2^2 \right) = \bar{Q}_1 \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \varrho_1 \right) + \bar{P}_1 \delta_1 \varepsilon_2$$

$$b_1 \left(\alpha_1^2 - \frac{1}{4} \varrho_1^2 + \delta_1^2 \varepsilon_2^2 \right) = \bar{P}_1 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \varrho_1 \right) - \bar{Q}_1 \delta_1 \varepsilon_2$$

Z powyższych równań dla przypadku $\bar{P}_1 = \bar{Q}_1$ co odpowiada przyjęciu w funkcji przesunięcia $q(t)$ wartości kąta przesunięcia fazowego $\varphi = \pi/4$ oraz $A_1 \neq 0$ otrzymujemy

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\bar{Q}_1^2}{A_1^2} + \frac{1}{4} (\varrho_1^2 - 4\delta_1^2 \varepsilon_2^2)} \pm \frac{\bar{Q}_1}{A_1} \sqrt{\varrho_1 (\varrho_1 + 2\delta_1 \varepsilon_2) + \frac{\bar{Q}_1^2}{A_1^2}} \quad (36)$$

Rozwiązaniem szczególnym równania (32) jest funkcja

$$y_1^{(1)} = -\frac{1}{2} x \bar{M} \varepsilon_2^2 A_1^2 + \frac{1}{6} x \bar{M} \varepsilon_2^2 (a_1^2 - b_1^2) \cos 2\tau + \frac{1}{3} x \bar{M} \varepsilon_2^2 a_1 b_1 \sin 2\tau - \frac{1}{16} \varrho_1 (a_1 \cos 3\tau + b_1 \sin 3\tau) \quad (37)$$

natomiast równania (34)

$$y_2^{(1)} = -\frac{1}{2} x \bar{M} \varepsilon_2^2 A_1^2 + \frac{\nu}{\nu^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 \nu a_1 + \delta_2 \varepsilon_2 b_1 + \nu \bar{Q}_2 \right) \cos \tau - \frac{\nu}{\nu^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 \nu b_1 + \delta_2 \varepsilon_2 a_1 - \nu \bar{P}_1 \right) \sin \tau - \frac{x \bar{M} \varepsilon_2^2 \nu^2}{2(\nu^2 - 4)} (a_1^2 - b_1^2) \cos 2\tau + \frac{x \bar{M} \varepsilon_2^2 \nu^2}{\nu^2 - 4} a_1 b_1 \sin 2\tau + \frac{\varrho_2 \nu^2}{2(\nu^2 - 9)} (a_1 \cos 3\tau + b_1 \sin 3\tau) \quad (38)$$

Wykorzystując zależności:

$$a_1^2 - b_1^2 = \frac{2(\alpha_1 A_1^2 - \bar{Q}_1 a_1 - \bar{P}_1 b_1)}{\varrho_1}$$

$$a_1 b_1 = \frac{\bar{P}_1 a_1 - \bar{Q}_1 b_1 - \delta_1 \varepsilon_2 A_1^2}{\varrho_1}$$

po przekształceniach znajdujemy

$$\alpha_2 = \chi^2 \bar{M}^2 \varepsilon_2^4 \left\{ A_1^2 - \frac{2}{3\varrho_1^2} [\bar{Q}_1^2 + \bar{P}_1^2 - 2(\alpha_1 \bar{Q}_1 a_1 + \alpha_1 \bar{P}_1 b_1 + \delta_1 \varepsilon_2 \bar{P}_1 a_1 - \delta_1 \varepsilon_2 \bar{Q}_1 b_1) + A_1^2 (\alpha_1^2 + \delta_1^2 \varepsilon_2^2)] \right\} +$$

$$- \chi^2 \bar{M}^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \left\{ A_1^2 + \frac{2\nu^2}{(\nu^2 - 4)\varrho_1^2} [(\bar{P}_1^2 + \bar{Q}_1^2) - 2(\alpha_1 \bar{Q}_1 a_1 + \alpha_1 \bar{P}_1 b_1 + \bar{P}_1 \delta_1 \varepsilon_2 a_1 - \bar{Q}_1 \delta_1 \varepsilon_2 b_1) + A_1^2 (\alpha_1^2 + \delta_1^2 \varepsilon_2^2)] \right\} +$$

$$+ \frac{(\delta_1 \varepsilon_1 \varrho_2 \nu^2 - \delta_2 \varepsilon_2 \varrho_1 \nu)}{(\nu^2 - 1)\varrho_1} \left(\bar{P}_1 \frac{a_1}{A_1^2} - \bar{Q}_1 \frac{b_1}{A_1^2} - \delta_1 \varepsilon_2 \right) +$$

$$+ \frac{\delta_1 \varepsilon_1 \nu^2}{\nu^2 - 1} \left(\bar{Q}_2 \frac{b_1}{A_1^2} - \bar{P}_2 \frac{a_1}{A_1^2} \right) - \frac{\varrho_1 \nu^2 \left(\bar{P}_2 \frac{b_1}{A_1^2} - \bar{Q}_2 \frac{a_1}{A_1^2} \right)}{2(\nu^2 - 1)} +$$

$$+ \frac{\delta_1 \varepsilon_1 \delta_2 \varepsilon_2 \nu}{\nu^2 - 1} - \varrho_1 \varrho_2 \nu^2 \frac{\nu^2 - 5}{2(\nu^2 - 1)(\nu^2 - 9)} + \alpha_1^2 - \frac{1}{32} \varrho_1^2 \quad (39)$$

Podstawiając szeregi (8) i (10) do układu równań (7) przy $y_1^{(0)} = y_1^{\prime(0)} = 0$ otrzymujemy

$$y_1^{\prime(1)} + \nu_1^2 y_1^{(1)} = -\nu_1^2 x \bar{M} \varepsilon_1^2 y_2^{(0)\prime} - \delta_1 \varepsilon_1 \nu_1 y_2^{(0)} - \varrho_1 \nu_1^2 y_2^{(0)} \cos 2\tau + \nu_1^2 \bar{Q}_1 \cos \tau + \nu_1^2 \bar{P}_1 \sin \tau \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1^{(2)} + \nu_1^2 y_1^{(2)} = & -\nu_1^2 \alpha_1 y_1^{(1)} - \chi \bar{M} \nu_1^2 [\varepsilon_1^2 (\alpha_1 y_2^{(0)2} + 2y_2^{(0)} y_1^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(0)} y_1^{(1)}] + \\ & - \delta_1 \nu_1 \left[\varepsilon_1 \left(\frac{\alpha_1}{2} y_2^{(0)} + y_2^{(1)} \right) - \varepsilon_2 y_1^{(1)} \right] + \varrho_1 \nu_1^2 (y_1^{(1)} - y_2^{(1)} - \alpha_1 y_2^{(0)}) \cos 2\tau + \\ & + \alpha_1 \nu_1^2 \bar{Q}_1 \cos \tau + \alpha_1 \nu_1^2 \bar{P}_1 \sin \tau \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (41)$$

$$\ddot{y}_2^{(0)} + y_2^{(0)} = 0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2^{(1)} + y_2^{(1)} = & -\alpha_1 y_2^{(0)} - x \bar{M} \varepsilon_1^2 y_2^{(0)2} - \delta_2 \varepsilon_1 y_2^{(0)} - \varrho_2 y_1^2 \cos 2\tau + \\ & + \bar{Q}_2 \cos \tau + \bar{P}_2 \sin \tau \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2^{(2)} + y_2^{(2)} = & -\alpha_2 y_2^{(0)} - \alpha_1 y_2^{(1)} - x \bar{M} [\varepsilon_1^2 (\alpha_1 y_2^{(0)2} + 2y_2^{(0)} y_2^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(0)} y_2^{(1)}] + \\ & - \delta_1 \nu_1 \left[\varepsilon_1 \left(\frac{\alpha_1}{2} y_2^{(0)} + y_2^{(1)} \right) - \varepsilon_2 y_1^{(1)} \right] + \varrho_2 (y_1^{(1)} - y_2^{(1)} - \alpha_1 y_2^{(0)}) \cos 2\tau + \\ & + \alpha_1 \bar{Q}_2 \cos \tau + \alpha_1 \bar{P}_2 \sin \tau \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Postępując analogicznie jak w przypadku poprzednim przy założeniu, że $\bar{P}_2 = \bar{Q}_2$ znajdujemy

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\bar{Q}_2^2}{A_2^2} + \frac{1}{4} (\varrho_2^2 - 4\delta_2^2 \varepsilon_1^2)} \pm \frac{\bar{Q}_2}{A_2} \sqrt{\varrho_2 (\varrho_2 + 2\delta_2 \varepsilon_1) + \frac{\bar{Q}_2^2}{A_2^2}} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} y_2^{(1)} = & -\frac{1}{2} \chi \bar{M} \varepsilon_1^2 A_2^2 + \frac{1}{6} \chi \bar{M} \varepsilon_2^2 (a_1^2 - b_2^2) \cos 2\tau + \\ & + \frac{1}{3} \chi \bar{M} \varepsilon_1^2 a_2 b_2 \sin 2\tau + \frac{1}{16} \varrho_2 (a_2 \cos 3\tau + b_2 \sin 3\tau) \end{aligned} \quad (46)$$

Wykorzystując zależności

$$\begin{aligned} a_2^2 - b_2^2 &= \frac{2(\bar{Q}_2 a_2 + \bar{P}_2 b_2 - \alpha_1 A_2^2)}{\varrho_2} \\ a_2 b_2 &= \frac{\bar{Q}_2 b_2 - \bar{P}_2 a_2 - \delta_2 \varepsilon_1 A_2^2}{\varrho_2} \end{aligned}$$

otrzymujemy również

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & x^2 \bar{M}^2 \varepsilon_1^4 \left\{ A_2^2 - \frac{2}{3\varrho_2^2} [\bar{Q}_2^2 + \bar{P}_2^2 - 2(\alpha_1 \bar{Q}_2 a_2 + \alpha_1 \bar{P}_2 b_2 + \delta_2 \varepsilon_1 \bar{Q}_2 b_2 + \right. \\ & \left. - \delta_2 \varepsilon_1 \bar{P}_2 a_2) + A_2^2 (\alpha_1^2 + \delta_2^2 \varepsilon_1^2)] \right\} - \varepsilon_1^3 \varepsilon_2 x^2 \bar{M}^2 \left\{ A_2^2 + \frac{2\nu_1^2}{(\nu_1^2 - 4)\varrho_2^2} [\bar{Q}_2^2 + \bar{P}_2^2 + \right. \\ & \left. - 2(\alpha_1 \bar{Q}_2 a_2 + \alpha_1 \bar{P}_2 b_2 + \delta_2 \varepsilon_1 \bar{Q}_2 b_2 - \delta_2 \varepsilon_1 \bar{P}_2 a_2) + A_2^2 (\alpha_1^2 + \delta_2^2 \varepsilon_1^2)] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta_2 \varepsilon_2 \varrho_1 \nu_1^2 - \delta_1 \varepsilon_1 \varrho_2 \nu_1}{(\nu_1^2 - 1) \varrho_2} \left(\bar{Q}_2 \frac{b_2}{A_2^2} - \bar{P}_2 \frac{a_2}{A_2^2} - \delta_2 \varepsilon_1 \right) + \\
& + \frac{\delta_2 \varepsilon_2 \nu_1^2}{\nu_1^2 - 1} \left(\bar{P}_1 \frac{a_2}{A_2^2} - \bar{Q}_1 \frac{b_2}{A_2^2} \right) - \frac{\varrho_2 \nu_1^2 \left(\bar{P}_1 \frac{b_2}{A_2^2} - \bar{Q}_1 \frac{a_2}{A_2^2} \right)}{2(\nu_1^2 - 1)} + \\
& + \frac{\delta_2 \varepsilon_2 \delta_1 \varepsilon_1 \nu_1}{\nu_1^2 - 1} - \varrho_1 \varrho_2 \nu_1^2 \frac{\nu_1^2 - 5}{2(\nu_1^2 - 1)(\nu_1^2 - 9)} + \alpha_1^2 - \frac{1}{32} \varrho_2^2
\end{aligned}$$

6. Przykład liczbowy i badania analogowe

Badania analityczne zilustrowano przykładem liczbowym przyjmując następujące dane:

$$\begin{aligned}
M &= 200 \text{ [kg]}, & k &= 60000 \text{ [N/m]}, & n &= 100 \left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}} \right], \\
m &= 100 \text{ [kg]}, & c_1 &= 150000 \text{ [N/m]}, & ux &= 0,4 \text{ [1/m]}, \\
q_0 &= 0,01 \text{ [m]}.
\end{aligned}$$

Na podstawie (4) obliczono

$$p_1 = 14,3182 \text{ [1/s]}, \quad p_2 = 46,8507 \text{ [1/s]}$$

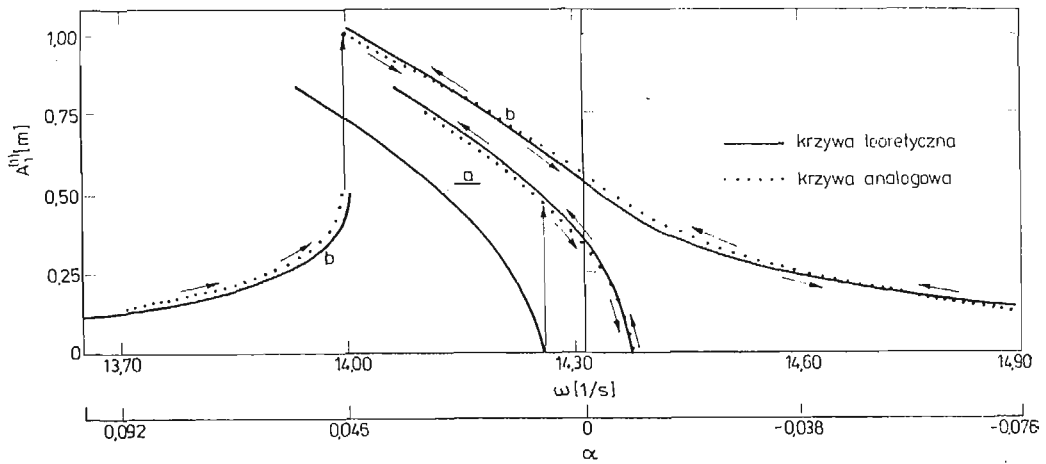
Wykorzystując wyniki analityczne oraz zależności (5) sporządzono wykresy amplitud $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$ odpowiadające współrzędnym z_1 i z_2 oraz wartości bezwzględnych przemieszczeń środków drgań $|X_{z_1}|$ i $|X_{z_2}|$ obu mas w przypadkach braku i występowaniu wymuszenia zewnętrznego. Wielkości te przedstawiono w funkcji rozstrojenia częstotliwości wymuszenia parametrycznego α zgodnie z zależnością

$$\lambda^2 = \left(\frac{p}{\omega} \right)^2 = 1 + \alpha$$

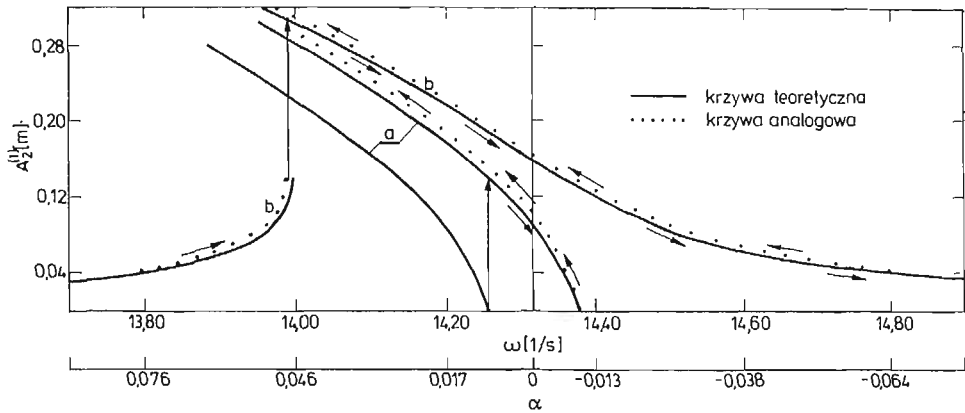
W celu sprawdzenia poprawności badań analitycznych przeprowadzono badania analogowe na maszynie MEDA 43H. Badaniom analogowym poddano układy równań różniczkowych wyrażonych we współrzędnych uogólnionych z_1 i z_2 , przy automatycznej zmianie ω — częstotliwości wymuszenia parametrycznego. Pisak rejestrował graniczne wartości wychyleń kreśląc obwiednię amplitud. W celu określenia przedziałów dwuznaczności rozwiązań rejestrację analogową przeprowadzono przy zwiększaniu, a następnie zmniejszaniu wartości ω . Z tego też względu symulacja analogowa spełniła również rolę badań stateczności rozwiązań.

Wyniki badań analogowych przedstawiono łącznie z wynikami badań analitycznych, nanosząc na osiach odciętych wartości ω oraz odpowiadających im wartości rozstrojenia częstotliwości α .

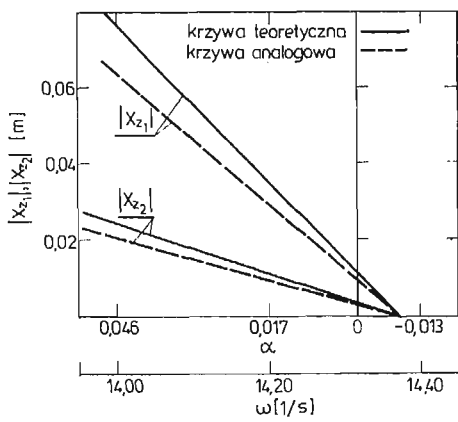
Na rysunkach przedstawiających wykresy amplitud w funkcji częstotliwości, literami „a” oznaczono krzywe odpowiadające amplitudom drgań układu bez wymuszenia zewnętrznego, natomiast literami „b” — krzywe dotyczące amplitud drgań układu z wymuszeniem



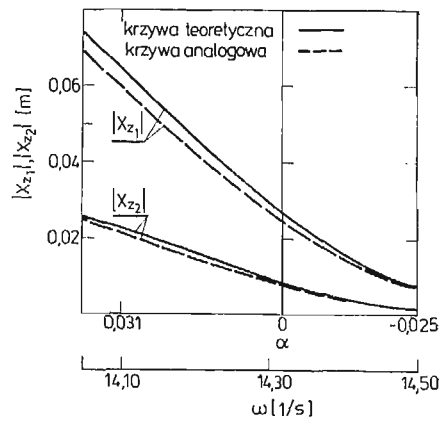
Rys. 2



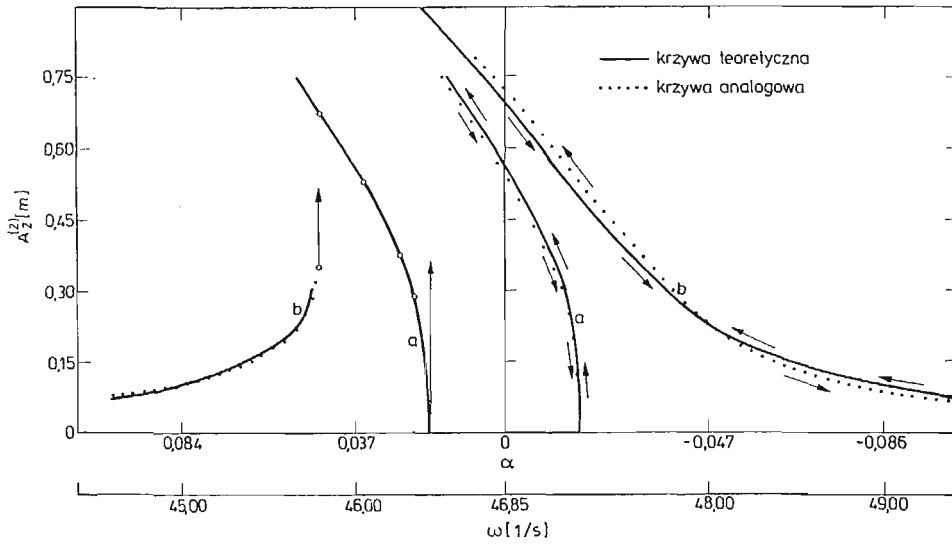
Rys. 3



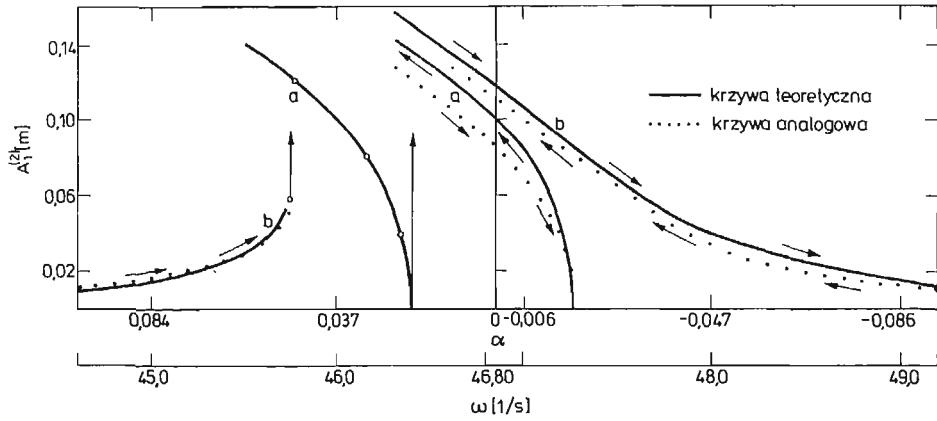
Rys. 4



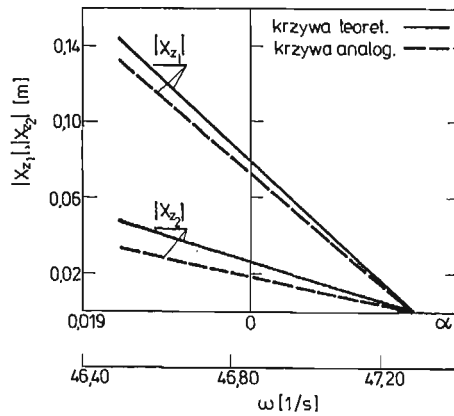
Rys. 5



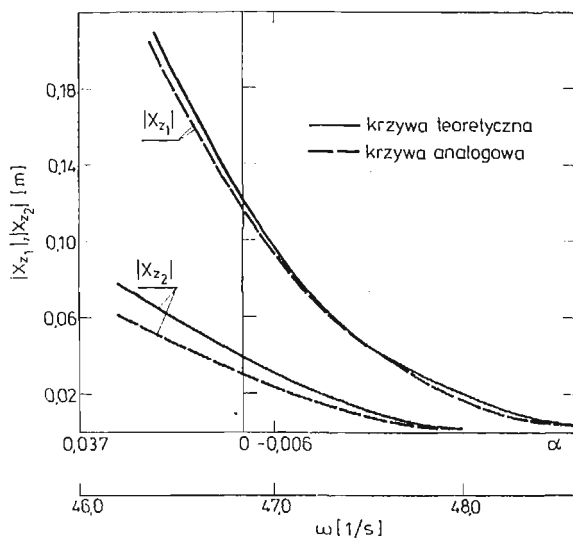
Rys. 6



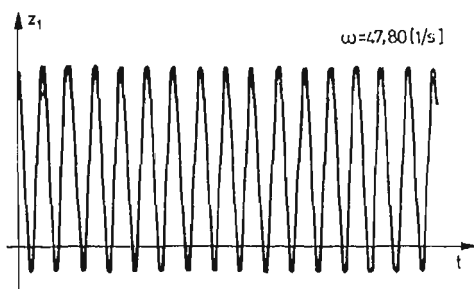
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

zewnątrznym. Wyniki badań dla przypadku rezonansu względem częstości drgań własnych p_1 przedstawiają rysunki 2, 3, 4 i 5.

Wyniki badań dla przypadku rezonansu względem drugiej częstości drgań własnych p_2 przedstawiają rysunki 6, 7, 8 i 9.

Rys. 10 przedstawia przykładowo przebieg czasowy drgań zarejestrowany w trakcie badań analogowych. Ilustruje on przesunięcie środka drgań.

7. Analiza wyników badań i wnioski końcowe

Przebiegi krzywych amplitudowych otrzymanych na drodze rozważań analitycznych oraz symulacji analogowej świadczą o dobrej zgodności wyników obu rodzajów badań, a tym samym o poprawności dociekań analitycznych. Jedynie dla amplitud drgań masy M przy samym wymuszeniu parametrycznym i rezonansie względem p_2 rozbieżność tych wyników wynosi około 12%.

Krzywe amplitudowe dla układu z nieliniową sprężystością typu kwadratowego odchylają się w stronę mniejszych częstości wymuszenia drgań, tak jak w przypadkach miękkiej charakterystyki sprężystości z nieliniowością sześcienną. Największe amplitudy drgań statecznych stwierdzono dla dolnej masy m przy rezonansie względem drugiej częstości drgań własnych p_2 , zarówno w przypadku samego wzbudzenia parametrycznego, jak również jednocześnie działającego z nim wymuszenia kinematycznego. Szerokość obszaru niestateczności parametrycznej w przypadku rezonansu względem drugiej częstości drgań własnych p_2 , jest około 7,2 razy większa od szerokości obszaru dla rezonansu względem częstości p_1 . Porównując prawe gałęzie krzywych amplitudowych „a” i „b” — odpowiadających rozwiązaniom statecznym — należy stwierdzić znaczny wpływ wzbudzenia parametrycznego na wartości amplitud drgań.

Uwaga: Uważa się o tendencję do zbliżania się obu tych krzywych wraz ze zmniejszaniem częstości ω począwszy od prawej granicy obszaru niestateczności parametrycznej. Na przykład, dla rezonansu względem drugiej częstości p_2 , amplituda drgań, przy $\alpha = 0$ masy m w przypadku działania samego wymuszenia parametrycznego stanowi około 82% wartości amplitudy przy jednoczesnym działaniu obu rodzajów wymuszeń, natomiast dla masy M udział ten wynosi około 80%.

Podczas symulacji analogowej — spełniającej również rolę badań stateczności — nie stwierdzono drgań odpowiadających lewym gałęziom „a” teoretycznych krzywych amplitudowych. Świadczy to o tym, że drgania przedstawione tymi krzywymi są niestateczne. Ponieważ badania analogowe przeprowadzono przy ciągłym zwiększaniu, a następnie zmniejszaniu wartości ω , w rezultacie otrzymano obwiednie amplitud drgań statecznych.

Na rysunkach, wzdłuż krzywych amplitudowych oznaczono strzałkami kierunki ruchu pisaka, a tym samym zmian wartości amplitud wraz ze zmianą częstości ω . Stwierdzono przy tym przeskoki amplitud występujące w miejscach zaznaczonych strzałkami pionowymi. Rezultaty te potwierdzają znaną w teorii drgań zasadę zrywania amplitud wzdłuż pionowych stycznych do krzywych amplitudowych.

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach (rys. 4, 5, 8, 9) bezwzględne wartości przesunięć rosną wraz ze zmniejszaniem częstości ω . Dla rezonansów względem p_1 i p_2 bezwzględne wartości przesunięć dla masy M są większe od masy dolnej m .

Literatura cytowana w tekście

1. J. J. STOKER, *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*, New York, 1950.
2. Ch. HAYASHI, *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*, WNT Warszawa 1968.
3. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Uogólnienie metody bilansu harmonicznych do wyznaczania parametrycznych rezonansów kombinowanych*, Prace I.P.P.T. PAN 1977.
4. S. P. STRIELKOW, *Wwiedienije w teoriju kolebanij*, Nauka, Moskwa 1964.
5. M. MITSCHKE, *Dynamika samochodowa*, WKŁ, Warszawa 1977.
6. W. WOJNO, *Zawieszenia pneumatyczne w pojazdach drogowych*.
7. H. SPUS, *Badanie wpływu niejednorodności opony na drgania pojazdów*, Postęp w badaniach pojazdów samochodowych, Wydawnictwo PAN, Kraków 1976.

Р е з ю м е

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ УПРУГОСТИ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ И ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В работе исследуются колебания системы при двух степенях свободы с нелинейной упругостью квадратичного типа, а также с линейным затуханием при параметрическом возбуждении действующим совместно с кинематическим воздействием.

Аналитические исследования проведены с использованием пертурбационного метода.

Правильность результатов аналитических исследований, а также исследования устойчивости проведены путем аналоговой имитации.

S u m m a r y

THE VIBRATIONS OF THE SYSTEM WITH NONSYMMETRICAL CHARACTERISTICS OF THE ELASTICITY UNDER THE PARAMETRIC EXCITATION AND EXTERNAL EXERTION

In this work the vibrations were considered of the system of two degrees of freedom with nonlinear quadratic type elasticity and linear damping under the parametric excitation and simultaneous kinematic exertion.

Analytical examinations were proceeded by the method of perturbation. The correctness of the results of analytical considerations and stability examination were proved by means of an analogue simulation.

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 października 1983 roku

ANALIZA DRGAŃ PARAMETRYCZNYCH UKŁADÓW CIĄGŁYCH
PODDANYCH STAŁEMU OBCIĄŻENIU POPRZECZNEMU
Z ZASTOSOWANIEM METODY ASYMPTOTYCZNEJ
I METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

JERZY OSIŃSKI

*Instytut Podstaw Budowy Maszyn
Politechnika Warszawska*

1. Wstęp

W analizie drgań parametrycznych istotną rolę ma uwzględnienie wpływu obciążenia stałego. Wpływ siły stałej na drgania parametryczne w układach dyskretnych był badany przez autora, a wyniki tych badań przedstawiono między innymi w pracach [5, 8, 9, 10]. W pracach autora i E. Kamińskiego [5, 10] wykazano, że w liniowym równaniu drgań parametrycznych z obciążeniem (tzn. równaniu Mathieu ze stałą siłą po prawej stronie) występuje dodatkowa rodzina rozwiązań opisująca drgania parametryczne o własnościach odmiennych od podstawowych drgań parametrycznych. Wzmocnienia rezonansowe występują przy stosunku częstości:

$$\frac{\omega}{\nu} = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

gdzie: ω — częstość własna, ν — częstość modulacji parametrycznej.

Własności drgań tej dodatkowej rodziny są analogiczne do drgań wymuszonych harmonicznie o amplitudzie zależnej od współczynnika modulacji parametrycznej. Drgania tej rodziny mają istotne znaczenie, gdyż nie można ich wyeliminować drogą zwiększania tłumienia. Drgania dodatkowej rodziny drgań parametrycznych są stateczne, amplitudy przy częstościach rezonansowych mają wartości skończone.

Własności drgań parametrycznych wywołanych obciążeniem zewnętrznym o wartości stałej w czasie były analizowane przez autora również w układach z nieliniową sprężystością. W pracach [8, 10] przedstawiono wyniki tej analizy dla dwóch charakterystyk sprężystych: ciągłej typu x^3 i nieciągłej dla układu z luzami.

Drgania parametryczne są również analizowane w układach ciągłych; powstaje więc pytanie, czy wpływ obciążenia jest tak samo istotny dla drgań parametrycznych układów ciągłych. Wyjaśnienie tego zagadnienia jest celem niniejszej pracy. Celowość podjęcia takiego problemu jest związana zarówno z praktycznym znaczeniem drgań parametrycznych związanych z obciążeniem, jak i z faktem, że w monografiach poświęconych w cało-

ści drganiom parametrycznym (np. G. Schmidt [12], W. Szemplińska-Stupnicka [13]) problem ten jest całkowicie pominięty.

Analizę przeprowadzono dla dwóch przykładów: drgań giętnych belki wywołanych siłą osiową i drgań belki o zmiennej długości. Rozważono wzbudzenie parametryczne wywołane funkcją sinusoidalną i prostokątną. W analizie stosowano metodę numeryczną i metodę ścisłą (Fouriera). Metoda ścisła prowadzi do ciągu równań różniczkowych zwyczajnych ze zmiennymi współczynnikami, które rozwiązano metodą asymptotyczną.

Najważniejszą zaletą metody ścisłej jest możliwość jakościowego przedstawienia najważniejszych wniosków. Jej zastosowanie jest jednak ograniczone do najprostszych przypadków drgań parametrycznych układów ciągłych. W monografiach poświęconych drganiom parametrycznym są stosowane przybliżone metody analityczne (np. G. Schmidt [12], W. Szemplińska-Stupnicka [13]), których możliwości są jednak również bardzo ograniczone. W analizowanych w wymienionych pracach układach nie uwzględnia się obciążeń poprzecznych i przyjmuje się znaczne założenia upraszczające w opisie tłumienia. Jako funkcję modulacji parametrycznej przyjmuje się jedynie funkcję sinusoidalną. Z tego względu jednym z celów niniejszej pracy jest opracowanie metody numerycznej pozwalającej w szczególności na analizę układów z nieciągłym wzbudzeniem parametrycznym poddanych obciążeniu poprzecznemu. Podstawą metody jest aproksymacja dowolnej funkcji modulacji parametrycznej funkcją odcinkami stałą. Rozwiązanie w tym przypadku otrzymuje się poprzez łączenie rozwiązań otrzymanych dla poszczególnych odcinków o stałej sztywności.

Równania ruchu odcinków o stałej sztywności otrzymano metodą podziału układów na elementy skończone. Podejście takie jest korzystne, gdyż pozwala na analizę układów o złożonych kształtach i warunkach brzegowych. Działanie metody przedstawiono na przykładzie analizy drgań parametrycznych belki o zmiennej długości z prostokątnym wzbudzeniem parametrycznym. Wnioski otrzymano w niniejszym opracowaniu mają charakter ogólny i dotyczą wszelkich układów ciągłych z wzbudzeniem parametrycznym.

2. Drgania giętne belki wywołane siłą osiową z uwzględnieniem stałego obciążenia poprzecznego

Problem drgań giętnych belki wywołanych siłą osiową bez obciążenia poprzecznego jest problemem znanym, a jego rozwiązanie można znaleźć w monografiach dotyczących drgań, między innymi w książce S. Ziemby [21], Z. Osińskiego [11] lub zbiorowej pod redakcją S. Kaliskiego [2]. Rozwiązania przedstawione w tych pracach zmodyfikowano tak, aby można było uwzględnić wpływ obciążenia poprzecznego o wartości stałej w czasie,

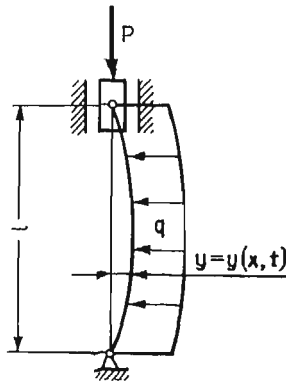
Schemat belki z obciążeniem przedstawiono na rys. 1. Przyjęto, że własności lepkosprężyste materiału można opisać modelem Voigta-Kelvina oraz że sztywność osiowa jest nieskończenie duża.

Układ może być opisany następującym równaniem:

$$\frac{EI\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial y^5(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + \rho F \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = q_0. \quad (2)$$

W równaniu (2) przyjęto następujące oznaczenia:

- E — moduł sprężystości podłużnej,
- I — moment bezwładności przekroju belki,
- ρ — gęstość materiału belki,
- F — pole przekroju poprzecznego belki,
- τ — współczynnik tłumienia zgodnie z przyjętym modelem tłumienia,
- P — zewnętrzna siła wzdłużna (rys. 1) stała co do wartości i równa sile zewnętrznej,
- q_0 — natężenie obciążenia poprzecznego (rys. 1),
- t — czas,
- y, x — współrzędne liniowe (rys. 1),



Rys. 1

Przyjęto, że zewnętrzna siła wzdłużna zmienia się wg zależności:

$$P = P_0 P_1 \cos vt. \quad (3)$$

Rozwiązania równania (2) poszukujemy w postaci szeregu funkcji:

$$y_n(x, t) = T_n(t) U_n(x) = T_n(t) \sin n \frac{\pi x}{l}. \quad (4)$$

Obciążenie zewnętrzne przedstawiamy również w postaci szeregu:

$$q_0 = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (5)$$

przy czym funkcje $Q_n(t)$ należy wyliczyć z zależności:

$$Q_n = \frac{1}{2} \int_0^l q_0 \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (6)$$

Po wykonaniu obliczeń wg wzorów (6) otrzymano

$$Q_n = \begin{cases} \frac{4q_0}{n\pi} & \text{dla } n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & \text{dla } n = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \quad (7)$$

Podstawiając (4), (5) i (7) do (2) otrzymano ciąg równań:

$$\left\{ \ddot{T}_n(t) + \frac{1}{\rho F} \left[\tau \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \right] \dot{T}_n(t) + \frac{1}{\rho F} \left[EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - (P_0 + P_1 \cos \nu t) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right] T_n(t) \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{4q_0}{n\pi \rho F} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad \text{dla } n = 1, 3, 5 \dots \quad (8)$$

Stąd dla określenia $T_n(t)$ otrzymano równanie:

$$\ddot{T}_n(t) + 2h_n \dot{T}_n(t) + (1 - \mu_n \cos \nu t) \omega_n^2 T_n(t) = P_{sn} \quad (9)$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{\tau}{2\rho F} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4, \\ \mu_n &= \frac{P_1}{P_{knn} - P_0}, \\ \omega_n^2 &= \frac{1}{\rho F} (P_{knn} - P_0) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \\ P_{sn} &= \frac{4q_0}{n\pi \rho F} \quad \text{dla } n = 1, 3, 5 \dots, \\ P_{sn} &= 0 \quad \text{dla } n = 2, 4, 6 \dots, \\ P_{knn} &= EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie P_{knn} — n siła krytyczna statyczna.

Badanie drgań ma sens jedynie w zakresie:

$$P_{knn} > P_0, \quad n = 1, 2 \dots, \quad (11)$$

wobec czego wartości μ_n, ω_n^2 określone wzorami (10) są zawsze dodatnie.

Z równania (8) jest widoczne, że w przypadku drgań parametrycznych belki z obciążeniem otrzymujemy do analizy nie równania Mathieu, lecz odpowiadające im równania, ale z siłą po prawej stronie. Równania niejednorodne występują jednak tylko dla nieparzystych wartości n . Dla wartości parzystych otrzymujemy równanie jednorodne (równania Mathieu), których rozwiązania są znane i przedstawione w podstawowych monografiach poświęconych teorii drgań (np. [11, 21]). Z punktu widzenia celu pracy istotne jest określenie charakteru rozwiązań równań niejednorodnych.

Dokładna analiza rozwiązań równania tego typu została przeprowadzona w pracach [5, 9], gdzie stosowano metodę asymptotyczną, przedstawiając rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego względem μ oraz metodę numeryczną. Zgodnie z wnioskami z wymienionych prac w równaniu (8) mogą występować dwie rodziny drgań parametrycznych: podstawowa rodzina drgań parametrycznych równania Mathieu oraz dodatkowa, której występowanie jest związane z siłą P_{sn} . Rodzina podstawowa występuje jednak tylko przy odpowiednio małych współczynnikach tłumienia. Zgodnie z wynikami prac [5, 9] podstawowy rezonans parametryczny w okolicy stosunku częstości:

$$\frac{\nu}{\omega} = 0,5 \quad (12)$$

wystąpi jeżeli spełniony jest warunek:

$$\frac{\mu_n}{4} > \gamma_n \quad (13)$$

gdzie γ_n — współczynnik tłumienia bezwymiarowego określony wzorem:

$$\gamma_n = \frac{h_n}{\omega_n}. \quad (14)$$

Korzystając z zależności (10) otrzymano z (13) po przekształceniach warunek:

$$P_1 > 2\tau \left(\frac{n\pi}{l} \right)^3 \sqrt{\frac{P_{krn} - P_0}{\rho F}} \quad (15)$$

Zgodnie z (11) wartość pod pierwiastkiem jest zawsze dodatnia. Wzór (15) określa warunek, jaki musi spełnić amplituda składowej harmonicznej wymuszenia, aby wystąpił podstawowy rezonans parametryczny. Widoczne jest, że najgroźniejszy jest rezonans $n = 1$, gdyż prawa strona zależności (15) rośnie bardzo silnie ze wzrostem n . Jeżeli tłumienie jest dostatecznie duże, to warunek (13) nie jest spełniony, i wówczas rozwiązanie równania (8) składa się jedynie z dodatkowej rodziny drgań parametrycznych związanej z siłą P_{sn} . Rozwiązanie w tym wypadku można przedstawić w postaci szeregu rozwiązań:

$$T_n(t) = x_{st} + \mu [a_1 \cos(\nu t - \varphi_1)] + \mu^2 [x_p + a_2 \sin(2\nu t - \varphi_2)] \quad \text{dla } n = 1, 3, 5 \dots \quad (16)$$

Sposób określenia poszczególnych składników rozwiązania przedstawiono w pracach autora oraz E. Kamińskiego [5, 9]. W przypadku badanym w niniejszej pracy wynoszą one:

$$\begin{aligned} X_{st} &= \frac{q_0}{\rho F \omega_n^2}, \\ a_1 &= \frac{\frac{q_0}{\rho F}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \nu^2)^2 + 4h_n^2 \nu^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{2h_n}{\omega_n^2 - \nu^2}, \\ x_p &= \frac{\mu a_1}{2} \cos \varphi_1, \\ a_2 &= \frac{\frac{\omega_n^2 a_1}{2\mu}}{\sqrt{(\omega_n^2 - 4\nu^2)^2 + 16h_n^2 \nu^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{2h_n}{\omega_n^2 - 4\nu^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Rozwiązania określone wzorem (16) mają charakter drgań wymuszonych harmonicznie — występują stateczne drgania okresowe o skończonej amplitudzie. Zwiększenie współczynnika tłumienia nie powoduje wyeliminowania tych drgań, a jedynie ograniczenie ich ampli-

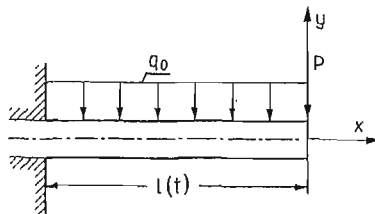
tudy. Częstościami rezonansowymi są częstości określone wzorem (1): podstawowy rezonans wystąpi w strefie $\nu \cong \omega_1$, czyli:

$$\nu \cong \sqrt{\frac{1}{\rho F} (P_{kr1} - P_0)} \left(\frac{\pi}{l} \right). \quad (18)$$

Należy również zwrócić uwagę, że występowanie dodatkowych drgań parametrycznych związanych z obciążeniem jedynie dla nieparzystych wartości n nie jest zależnością ogólną występującą we wszelkich układach ciągłych ze wzbudzeniem parametrycznym, lecz występuje jedynie w układach z warunkami brzegowymi, takimi jak na rys. 1. W rozwiązanych w rozdziałach 3 i 4 przykładzie układu z innymi warunkami brzegowymi występuje również rezonans dla wartości parzystych ($n = 2$).

3. Drgania giętne belki o zmiennej długości

Drgania giętne belki wywołane zmianą w czasie jej długości zostały przeanalizowane w pracach J. Zajączkowskiego, J. Lipińskiego i G. Yamady [17, 18, 19, 20]. Schemat układu przedstawiono na rys. 2. W badanym układzie możliwe są dwie sytuacje. W pierwszej belka jest nieruchoma w kierunku osi X , a zamocowanie wykonuje ruch okresowy w kie-



Rys. 2

runku osi X , w drugiej zamocowanie jest nieruchome, a ruch okresowy wykonuje belka. Przyjęto dla obu wymienionych przypadków, że długość swobodna belki (tzn. odległość między końcem swobodnym belki a początkiem zamocowania) zmienia się okresowo wg wzoru:

$$l(t) = l_0(1 - \mu f(t)), \quad (19)$$

gdzie: l_0 — długość średnia belki, $f(t)$ — dowolna funkcja okresowa.

Parametr μ musi być zawarty w zakresie:

$$0 < \mu < 1. \quad (20)$$

Własności materiału opisano modelem Voigta-Kelvina. W pierwszym z omówionych powyżej przypadków (belka nieruchoma) układ może być opisany równaniem:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \tau \frac{\partial y^5}{\partial x^4 \partial t} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q_0 \quad (21)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} y(l(t), t) &= 0, \\ \frac{\partial y(l(t), t)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 y(0, t)}{\partial x^3} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Przyczyną wzbudzenia parametrycznego jest w tym przypadku okresowa zmienność długości belki. W drugim z omówionych powyżej przypadków (belka ruchoma, nieruchome zamocowanie) układ może być opisany równaniem:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \tau \frac{\partial y^5}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho F x \frac{d^2 l}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q_0 \quad (23)$$

z warunkami brzegowymi w postaci (22). Równanie (23) zapisano korzystając z pracy Z. Zajączkowskiego, J. Lipińskiego [18]. W równaniach (21) i (23) przyjęto oznaczenia analogiczne do oznaczeń w równaniu (2). W równaniu (23) w stosunku do równania (21) występuje dodatkowy wyraz, który fizycznie przedstawia osiową siłę bezwładności belki ruchomej. Siła bezwładności jest okresowo zmienna w czasie, a więc jest również przyczyną wzbudzenia drgań parametrycznych. Analiza przedstawionego zagadnienia przeprowadzona w pracach J. Zajączkowskiego, J. Lipińskiego, G. Yamady [18, 19, 20] dotyczyła wyłącznie problemu stateczności parametrycznej, wobec czego wpływ stałego w czasie obciążenia a nie był w niej uwzględniony (q nie wpływa na stateczność). Ponadto wyniki przedstawione w pracy [18] są bardzo uproszczone — pomija się wpływ tłumienia, a wzbudzenie parametryczne jest wywołane jedynie funkcją sinusoidalną. W niniejszym opracowaniu podjęto próbę rozwiązania równania niejednorodnego (z uwzględnieniem obciążenia q), uwzględniając również tłumienie.

Ze względu na złożoność problemu analizę ograniczono do pierwszego z omówionych powyżej przypadków badanego układu (ruchome zamocowanie, belka nieruchoma), a więc do analizy drgań parametrycznych wywołanych okresową zmianą długości belki. Problem drgań parametrycznych wywołanych osiową siłą bezwładności zostanie rozpatrzony oddzielnie ze względu na złożony i nieliniowy charakter tego wymuszenia. W konsekwencji postawione zadanie sprowadza się do rozwiązania równania (21). Problem ten jest jednak bardzo złożony ze względu na występowanie zmiennych w czasie warunków brzegowych (22). Zadanie można sprowadzić do problemu ze stałymi w czasie warunkami brzegowymi, dokonując zamiany współrzędnych za pomocą podstawienia:

$$x = z l(t). \quad (24)$$

Po wykonaniu przekształceń zgodnie z (24) otrzymano równanie:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} \left[\frac{1}{l(t)} \right]^4 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{l(t)} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} \right] \tau + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \rho F \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial y}{\partial z} \frac{1}{l(t)} z \frac{dl}{dt} \right] = q_0 \quad (25)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} y(1, t) &= 0, \\ \frac{\partial y(1, t)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 y(0, t)}{\partial z^3} &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Widoczne jest jednak, że po wykonaniu przekształcenia (24) otrzymano stałe w czasie warunki brzegowe (26). Przekształcone równanie otrzymało jednak złożoną postać praktycznie niemożliwą do rozwiązania przybliżonymi metodami analitycznymi. Konieczne jest więc zastosowanie metody numerycznej. Jej podstawą jest aproksymacja dowolnej funkcji modulacji parametrycznej $f(t)$ (wzór (19)) funkcją odcinkami stałą. Rozwiązanie w tym przypadku można uzyskać drogą łączenia rozwiązań liniowych. Równania ruchu dla poszczególnych odcinków liniowych otrzymano drogą podziału belki na elementy skończone. Sposób podziału na elementy i tworzenia macierzy sztywności, bezwładności i tłumienia opracowano na podstawie monografii J. Szmeltera i zespołu [15].

Przyjęto podział układu na elementy belkowe. Przy tworzeniu macierzy sztywności uwzględniono jedynie naprężenia wywołane momentem gnącym. Pominięto wpływ siły poprzecznej.

W macierzy bezwładności przyjęto współczynniki mas odpowiadające współrzędnym liniowym i momenty bezwładności odpowiadające współrzędnym kątowym. Są to więc założenia nieco ogólniejsze (uwzględnienie momentów bezwładności) niż w równaniu technicznym belki. Pierwszym etapem rozwiązania jest analiza zagadnienia własnego dla poszczególnych odcinków liniowych. Drugim etapem jest określenie rozwiązań dla poszczególnych odcinków liniowych. Etap ten jest wykonywany różnymi metodami w zależności od przyjętych założeń. W przypadku ogólnym korzysta się z numerycznych metod rozwiązywania równań ruchu (konkretnie z metody Rungego-Kutty czwartego rzędu).

Najkorzystniejsza jest sytuacja, gdy można założyć, że układ spełnia warunki rozprężania. W szczególności wymaga to przyjęcia, że macierz tłumienia jest proporcjonalna do macierzy sztywności lub bezwładności, lub też przyjęcia, że postacie drgań są niezależne od tłumienia (metoda modalna — omówiona w monografiach J. Kruszewskiego i zespołu [6]). Tłumienia takie są powszechnie przyjmowane w analizie dynamiki z użyciem MES (np. J. Szmelter [14], J. Langer [7], J. Kruszewski i inni [6]). W tym przypadku układ równań można uprościć wprowadzając współrzędne główne i pomijając równania odpowiadające wyższym częstościom układu. Przy rozprężaniu (wprowadzaniu współrzędnych głównych) równań korzystano z prac E. Kamińskiego [4] i autora [9]. Podstawą do rozprężnięcia jest analiza zagadnienia własnego dla układu nietłumionego.

Rozwiązania dla poszczególnych odcinków otrzymano w tym przypadku ze znanych zależności. Po otrzymaniu rozwiązania we współrzędnych głównych w końcu danego odcinka liniowego należy dla obliczenia wartości współrzędnych uogólnionych opisujących stan układu wykonać przekształcenie:

$$\mathbf{x}(t_K) = \mathbf{T}_i \boldsymbol{\xi}_i(t_K), \tag{27}$$

gdzie:

\mathbf{X} — macierz kolumnowa współrzędnych uogólnionych

\mathbf{T}_i — macierz wektorów własnych układu w i -tym odcinku liniowym,

t_k — czas zakończenia i -tego odcinka.

Dla rozpoczęcia następnego odcinka należy wykonać przekształcenie:

$$\xi_{i+1}(t_k) = \mathbf{T}_{0_{i+1}} \mathbf{x}(t_k), \quad (28)$$

gdzie:

ξ_{i+1} — macierz kolumnowa współrzędnych głównych układu w kolejnym odcinku liniowym,

$\mathbf{T}_{0_{i+1}}$ — macierz odwrotna do macierzy wektorów własnych układu w kolejnym odcinku liniowym.

Po zakończeniu każdego kolejnego odcinka należy wykonać przekształcenie analogiczne do (27, 28).

Program przygotowano w ten sposób, aby po jednokrotnym rozwiązaniu zagadnienia własnego można było wielokrotnie znajdować rozwiązania dla różnych obciążeń, różnych częstości wzbudzenia parametrycznego i różnych tłumień. Jest to istotne, gdyż czas rozwiązania zadania własnego jest stosunkowo długi. Program jest przystosowany do pracy w trybie konwersacyjnym umożliwiającym bezpośrednio wprowadzenie przez użytkownika różnych zestawów danych. Wyniki mogą być wyprowadzane na drukarkę lub bezpośrednio na rejestrator przygotowujący wykresy rozwiązań.

4. Przykład numeryczny

W pracy przedstawiono rozwiązania dla układu z rys. 2 z danymi liczbowymi:

długość średnia belki (wzór 19) $l_0 = 0,92855$ m,

wymiary przekroju: $b = 0,02$ m; $h = 0,02$ m,

współczynnik zmiany długości (wzór 19): $\mu = 0,0714$, (29)

moduł Younga $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ N/m,

gęstość materiału: $\rho = 7850$ kg/m³.

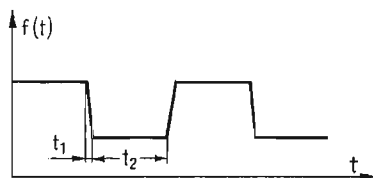
W przykładzie zbadano problem wzbudzenia parametrycznego funkcją nieciągłą, tzn. przyjęto, że po przesunięciu ruchomego zamocowania (rys. 2) z jednego położenia skrajnego w drugie nastąpi zatrzymanie, a następnie rozruch i przesunięcie w drugą stronę. Odpowiada to funkcji $l(t)$ przedstawionej na rys. 3. Jeżeli sterowanie ruchem jest takie, że spełniona jest zależność:

$$t_1 \ll t_2, \quad (30)$$

to funkcję z rys. 3 można przybliżyć funkcją odcinkami stałą złożoną z dwóch odcinków (funkcją prostokątną). Zgodnie z omówioną w poprzednim rozdziale metodą w pierwszej kolejności rozwiązano zagadnienie własne dla układów równań opisujących dwa odcinki liniowe. Wymagało to określenia częstości własnych i współczynników postaci drgań dla belek o długościach:

$$\begin{aligned} l_{max} &= 1 \text{ m,} \\ l_{min} &= 0,8571 \text{ m.} \end{aligned} \quad (31)$$

Obliczenia przeprowadzono metodą Jacobiego, korzystając z programów przedstawionych w książce J. Szmeltera [14]. Przy doborze ilości elementów potrzebnych dla rozwiązania zagadnienia własnego korzystano z wniosków z pracy Z. Dźygadły, J. Błaszczyka [1]. Konkretnie przyjęto podział belki na $n = 7$ elementów. Dokładność oceniono przez porównanie wyników z wartościami obliczonymi na podstawie równania technicznego



Rys. 3

belki. Wynosiła ona ok. 1% dla częstości podstawowej. Dokładność ta może być znacznie zwiększona przez zwiększenie podziału, jednakże dla celów niniejszej pracy była ona zupełnie wystarczająca.

W tabeli 1. przedstawiono pierwsze pięć częstości własnych.

Tabela 1

Lp.	I odcinek	II odcinek
1	103,94	126,61
2	630,66	761,34
3	1702,18	2037,11
4	3196,51	3792,82
5	5045,36	5934,04

Z tablicy widoczne jest, że częstości bardzo szybko wzrastają, wobec czego po rozprzęgnięciu równań można pominąć równania współrzędnych głównych odpowiadające wyższym częstościom. Praktycznie dla uzyskania dobrej dokładności wystarczy uwzględnić dwie pierwsze częstości.

Po rozwiązaniu zagadnienia własnego wyznaczono rozwiązania dla układu nieobciążonego ($P = 0$; $q = 0$; rys. 2). Stwierdzono, że rezonans parametryczny występuje jedynie w określonym zakresie małych tłumień. Analizę rozwiązań układu obciążonego ($P \neq 0$; rys. 2) przeprowadzono w zakresie tłumień, w których nie występował podstawowy rezonans parametryczny (układu nieobciążonego). Stwierdzono, że charakter rozwiązań silnie zależy od przyjętego modelu tłumienia. Przyjęcie modelu Voigta stosowanego w pracy [18] nie jest celowe, gdyż prowadzi to do macierzy tłumienia proporcjonalnej do sztywności. Współczynniki tłumienia rosną wówczas proporcjonalnie wraz z częstościami własnymi, i w układzie wystąpią jedynie rezonansy najniższych częstości. Podobnie niekorzystne jest przyjęcie modelu tłumienia masowego (macierz tłumień proporcjonalna jest do ma-

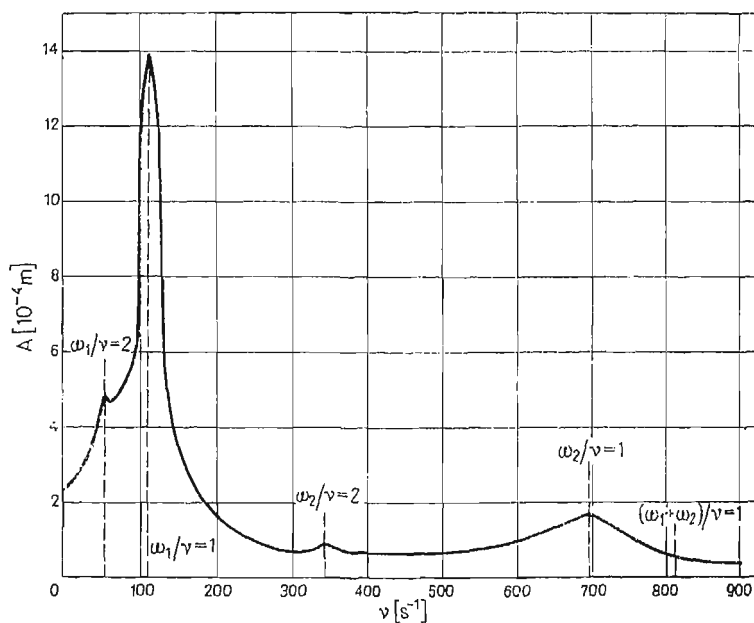
cierzy bezwładności, gdyż prowadzi to do malejących z częstością współczynników tłumienia). Celowe natomiast jest przyjęcie współczynników tłumienia zgodnie z metodą modalną [6], przyjęcie macierzy tłumienia jako sumy składowych proporcjonalnych do macierzy sztywności i bezwładności lub przyjęcie dowolnych tłumień i znajdowanie rozwiązań metodą Rungego-Kutty. Przygotowane w niniejszej pracy programy pozwalają na analizę układów, w których występują wszystkie wyżej wymienione rodzaje tłumienia. Jako przykład przedstawiono analizę rezonansową w układzie z rys. 2 z obciążeniem siłą o wartości:

$$P = 10N \quad (32)$$

w otoczeniu dwóch podstawowych częstości własnych (tab. 1) dla tłumienia będącego sumą składowych proporcjonalnych. Przyjęto, że wymiarowy współczynnik tłumienia jest stały w obu odcinkach liniowych. Wobec tego współczynniki tłumienia bezwymiarowego określone analogicznie do wzoru (14) różniły się w obu układach, gdyż różniły się częstości własne. W obliczonym przykładzie bezwymiarowe współczynniki tłumienia dla dwóch pierwszych podstawowych częstości wynosiły:

$$I \begin{cases} \gamma_1 = 0,09182 \\ \gamma_2 = 0,11189 \end{cases} \quad II \begin{cases} \gamma_1 = 0,11180 \\ \gamma_2 = 0,13507 \end{cases} \quad (33)$$

Otrzymane rozwiązania miały charakter analogiczny do drgań wymuszonych siłą harmonicznie zmienną. Miały one (w odróżnieniu od drgań parametrycznych układu nieobciążonego) skończone amplitudy. Zależność amplitudy od częstości wymuszenia parametrycznego przedstawiono na wykresie rezonansowym na rys. 4.



Rys. 4

Z wykresu widoczne jest, że istotne znaczenie mają jedynie rezonansy główne występujące w otoczeniu stosunków częstości:

$$\frac{\omega_1}{\nu} = 1; \quad \frac{\omega_2}{\nu} = 1. \quad (34)$$

Największe amplitudy występują dla częstości nieznacznie niższych niż określone wzorami (34). Jest to związane z występowaniem w układzie tłumienia, którego wpływ na warunki rezonansu jest identyczny jak dla drgań wymuszonych siłą harmonicznie zmienną.

W otoczeniu wartości:

$$\frac{\omega_1}{\nu} = 0,5; \quad \frac{\omega_2}{\nu} = 0,5 \quad (35)$$

nie stwierdzono występowania wzmocnień rezonansowych. W otoczeniu rezonansów pobocznych:

$$\frac{\omega_1}{\nu} = 2; \quad \frac{\omega_2}{\nu} = 2 \quad (36)$$

stwierdzono występowanie nieznacznych wzmocnień rezonansowych. W otoczeniu rezonansu kombinowanego

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\nu} = 1, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{\nu} = 2 \quad (37)$$

nie stwierdzono wzmocnień rezonansowych.

Przyczyną niewystępowania w obliczanych wynikach wzmocnień dla rezonansów kombinowanych i bardzo nieznacznych wzmocnień w okolicy rezonansów pobocznych jest fakt występowania w układzie tłumienia, które bardzo silnie wpływa na wygaszanie wymienionych rezonansów. Wykonane dodatkowo obliczenia numeryczne wykazały, że wzmocnienia rezonansowe w okolicy stosunku częstości określonym zgodnie ze wzorem (37) (rezonans kombinowany) występują jedynie dla bardzo małych wartości współczynników tłumienia. Układy, w których występuje tak małe tłumienie, nie mają praktycznego znaczenia, wobec czego nie przeprowadzono dokładnej analizy drgań w takich układach.

Jakościowy charakter wyników otrzymanych w obliczonym przykładzie jest zgodny z wynikami analizy przeprowadzonej w rozdziale 2 z użyciem przybliżonych metod analitycznych. Zakres zastosowania metody numerycznej może być jednak niepomierne większy, w szczególności przy obliczaniu drgań w układach o złożonych kształtach i nietypowych warunkach brzegowych.

5. Wnioski

Stwierdzono, że w układach ciągłych ze wzbudzeniem parametrycznym poddanych stałemu obciążeniu poprzecznemu występuje dodatkowa rodzina drgań parametrycznych. Własności drgań tej rodziny są analogiczne do własności drgań wymuszonych harmonicznie. Drgania są stateczne, a amplitudy mają wartości skończone. Wielkość amplitud występujących w drganiach tej dodatkowej rodziny drgań parametrycznych jest uzależniona zarówno od warunków brzegowych badanego układu, jak i od rodzaju występują-

cego tłumienia. Znaczenie praktyczne dodatkowej rodziny drgań parametrycznych jest związane z tym, że rozwiązania okresowe występują niezależnie od wartości tłumienia. Zwiększenie współczynników tłumienia nie powoduje wyeliminowanych drgań, lecz jedynie ograniczenie ich amplitud. Dla porównania drgania podstawowej rodziny parametrycznej występują jedynie przy stosunkowo małych współczynnikach tłumienia. Przedstawione w niniejszej pracy metody mogą być zastosowane do wyznaczania granicznych współczynników tłumienia, przy których występują drgania parametryczne rodziny podstawowej — ze względu jednak na obszerność zagadnienia będzie ono tematem odrębnej publikacji.

Przedstawione wnioski otrzymano w pracy dla różnych układów drgających (belka obciążona siłą osiową i belka o zmiennej długości) dla różnych wzbudzeń parametrycznych (ciągłe — sinusoidalne, nieciągłe — prostokątne), różnymi metodami (asymptotyczna i numeryczna z podziałem belki na elementy skończone). Matematycznie badane zagadnienie sprowadza się do układu liniowych równań różniczkowych z okresowo zmiennymi współczynnikami. Można więc otrzymane wnioski uogólnić, że mają one znaczenie dla drgań wszelkich układów liniowych ciągłych ze wzbudzeniem parametrycznym. Wydaje się również, że opracowana dla celów niniejszej pracy metoda numeryczna będzie miała niepomiernie większy zakres zastosowań niż stosowana najczęściej do analizy układów ciągłych ze wzbudzeniem parametrycznym przybliżone metody analityczne. W szczególności pozwoliła ona na uwzględnienie różnych modeli tłumienia, obciążenia poprzecznego, wzbudzenia parametrycznego wywołanego funkcją nieciągłą. Wzbudzenie parametryczne funkcją nieciągłą jest przypadkiem często spotykanym — przykładem może tu być przekładnia zębata. Przykład zastosowania metody łączenia odcinkami rozwiązań liniowych do analizy modelu układu napędowego z uwzględnieniem wzbudzeń parametrycznych w przekładniach zębatych, traktowanego jako układ ciągły, można znaleźć w pracy S. M. Wanga, I. E. Morse'a [16]. Przedstawione w pracy programy po odpowiednich modyfikacjach będą mogły być zastosowane do analizy drgań parametrycznych w układach napędowych zawierających przekładnie zębate.

Literatura

1. Z. DŻYGADŁO, J. BŁASZCZYK, *Analiza podłużnych drgań własnych odkształcalnego samolotu metodą elementów skończonych*. Biuletyn WAT 7/1978.
2. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK pod red. ogólną S. Kaliskiego, *Drgania i fale w ciałach stałych*. PWN Warszawa 1966.
3. A. JAKUBOWICZ, Z. ORŁOŚ, *Wytrzymałość materiałów*. WNT Warszawa 1977.
4. E. KAMIŃSKI, *Rozprzęganie układów mechanicznych z członami lepkosprężystymi*. Prace IPPT PAN 46/1970.
5. E. KAMIŃSKI, J. OSIŃSKI, *Drgania parametryczne modelu jednostopniowej przekładni zębatej uwzględniającej tłumienie i stałe obciążenie*. Archiwum Budowy Maszyn 1/1981.
6. J. KRUSZEWSKI i inni, *Metoda sztywnych elementów skończonych*. Arkady Warszawa 1975.
7. J. LANGER, *Wybrane problemy drgań konstrukcji pod obciążeniem ruchomym*. X Jubileuszowe Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”. Poznań—Błażejewko 19 - 22 maja 1982 r.
8. J. OSIŃSKI, *Drgania parametryczne układów z nieliniową charakterystyką sprężystą i stałym obciążeniem*. X Jubileuszowe Sympozjum „Drgania w układach fizycznych” Poznań — Błażejewko 19 - 22 maja 1982.

9. J. OSIŃSKI, *Drgania parametryczne jednostopniowej przekładni zębatej jako układów o dwóch stopniach swobody uwzględniającego tłumienie i stałe obciążenie*. Praca doktorska. Politechnika Warszawska 1978 r.
10. J. OSIŃSKI — *Parametric Vibrations of the systems with nonlinear characteristic and constant loading*. Problemy Dynamiki Maszyn Nr. 1.
11. Z. OSIŃSKI, *Teoria drgań*. PWN Warszawa 1978 r.
12. G. SCHMIDT, *Parametererregte schwingungen*. VEB Deutscher Verlag Berlin 1975.
13. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Zastosowanie parametrycznych równań różniczkowych w mechanice i technice*.
14. Prace IPPT PAN 1/1975 r.
14. J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*. PWN Warszawa 1980 r.
15. J. SZMELTER i inni, *Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji*. Arkady Warszawa 1979 r.
16. S. M. WANG, I. E. MORSE, *Torsional response of a Gear Train System*. Transactions of the ASME. Series B. May 1972.
17. J. ZAJĄCZKOWSKI, J. LIPIŃSKI, *Vibrations of parametrically excited systems*. Journal of Sound and Vibration 1/1979.
18. J. ZAJĄCZKOWSKI, J. LIPIŃSKI, *Instability of the motion of a beam of periodically varying length*. Journal of Sound and Vibration 7/1979 r.
19. J. ZAJĄCZKOWSKI, G. YAMADA, *Further results on instability of the motion of beam of periodically varying length*. Journal of Sound and Vibration 2/1980.
20. J. ZAJĄCZKOWSKI, *An approximate method of analysis of parametric vibration*. Journal of Sound and Vibration, 4/1981.
21. S. ЗЕМБА, *Analiza drgań Cz. II*. PWN Warszawa 1957.

Р е з ю м е

АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКОЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе представлен анализ параметрических колебаний непрерывной системы с постоянной поперечной нагрузкой. Рассмотрено два примера: изгибные колебания балки, вызванные продольной силой, и колебания балки с изменяющейся длиной. В анализе применены асимптотический метод и численный метод с использованием конечных элементов. Найдено, что в системе параметрических колебаний с постоянной поперечной нагрузкой возникает добавочная семья параметрических колебаний со свойствами, аналогичными свойствам гармонически вынужденных колебаний.

S u m m a r y

THE ANALYSIS OF PARAMETRIC VIBRATIONS OF CONTINUOUS SYSTEMS WITH CONSTANT TRANSVERSAL LOADING BY ASYMPTOTIC METHOD AND FINITE ELEMENTS

The analysis of parametric vibration in a system with constant transversal loading is presented. Two examples are considered: flexural beam vibrations generated by axial force, and varying length beam vibrations. The asymptotic method is applied, and numerical method with the use of finite elements. It has been found that an additional class of parametric vibration exists in the system with parametric excitation. Properties these vibrations are similar to those of harmonic force.

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 września 1983 roku

ZASTOSOWANIE WEWNĘTRZNEGO ODBICIA POD KĄTEM BREWSTERA DO ROZDZIELENIA NAPRĘŻEŃ W ELASTOOPTYCE

RYSZARD WOJNAR

IPPT PAN
Zakład Teorii Konstrukcji

1. Wstęp

Obserwacja zjawiska elastoptycznego wymaga poddania światła dwukrotnemu działaniu filtra polaryzującego: przed i po przejściu przez dany ośrodek elastoptyczny [1]. Działanie pierwsze nazywamy działaniem polaryzatora, działanie drugie — działaniem analizatora. W pracy niniejszej chcielibyśmy zwrócić uwagę na to, że w pewnych warunkach rolę jednego z filtrów, polaryzatora lub analizatora może spełnić zjawisko wewnętrznego odbicia pod kątem Brewstera. Jak wiadomo, przy odbiciu pod tym kątem następuje całkowita polaryzacja światła [2].

Po przedstawieniu podstaw teoretycznych zjawiska podamy przykład, w którym działanie analizatora zastąpione jest przez odbicie wewnętrzne. Otrzymany w ten sposób obraz elastoptyczny w połączeniu z obrazem otrzymanym przy prześwietleniu normalnym może służyć do rozdzielania naprężeń.

2. Efekty polaryzacyjne przy odbiciu promienia świetlnego od płaskorównoległej płytki dwójłomnej

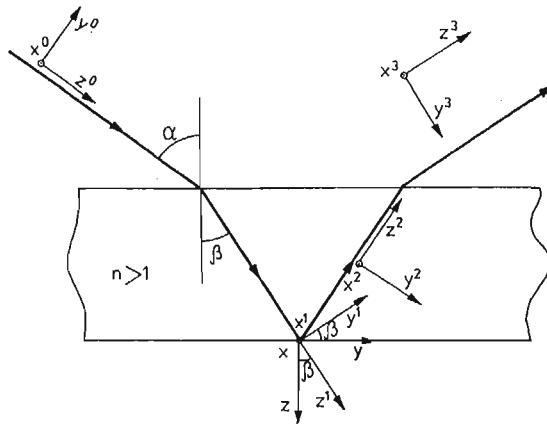
Niech wiązka świetlna pada pod kątem α na płaskorównoległą płytkę dwójłomną — ośrodek elastoptyczny. Powierzchnię płytki, przez którą światło wchodzi do ośrodka, nazwiemy powierzchnią przednią płytki; drugą powierzchnię płytki nazwiemy tylną. Zajmiemy się tylko tą częścią wiązki, która po załamaniu na powierzchni przedniej, przejściu przez ośrodek, odbiciu od powierzchni tylnej, powtórny przejściu przez ośrodek i załamaniu na powierzchni przedniej opuszcza płytkę po stronie wejściowej. Wybierzmy z tej części wiązki promień świetlny i zbadajmy zmiany stanu jego polaryzacji po przejściu w określony powyżej sposób przez ośrodek elastoptyczny.

Wprowadźmy układ współrzędnych prostokątnych x, y, z , którego oś z jest prostopadła do powierzchni płytki elastoptycznej, oś x zaś jest prostopadła do płaszczyzny padania, tzn. płaszczyzny zawierającej oś z i rozważany promień świetlny wiązki padającej. Ponadto wprowadźmy układy x^i, y^i, z^i , $i = 0, 1, 2, 3$, związane z kolejnymi kierunkami biegu rozważanego promienia. Oś z^0 pokrywa się z kierunkiem promienia padającego na płytkę, oś z^1 — promienia załamane, oś z^2 — promienia odbitego wewnątrz

i z^3 — promienia, który opuścił płytkę. Osie x^i , $i = 0, 1, 2, 3$, są równoległe do osi x układu x, y, z (por. rys. 1).

Do przedstawienia składowych wektora elektrycznego na poszczególnych odcinkach drogi promienia będziemy stosowali ten układ współrzędnych, którego oś z^i pokrywa się z kierunkiem biegu promienia na tym odcinku. Przyjmiemy, że wektor

$$\mathbf{E}^i = \begin{vmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{vmatrix}$$



Rys. 1. Płaszczyzna padania światła na płytkę płaskorównoległą. Kierunki osi x w poszczególnych układach współrzędnych, a więc x^i , $i = 0, 1, 2, 3$ są do siebie równoległe i zarazem prostopadłe do płaszczyzny rysunku, stanowiącej płaszczyznę padania

opisuje składowe wektora elektrycznego w układzie x^i, y^i, z^i na początku odcinka biegu promienia równoległego do z^i ; a więc wskaźnik „ i ” jest taki, że wektor \mathbf{E}_i^i jest prostopadły do osi z^i . Na przykład wektor

$$\mathbf{E}^1 = \begin{vmatrix} E_x^1 \\ E_y^1 \end{vmatrix}$$

opisuje składowe wektora elektrycznego zaraz po pierwszym załamaniu promienia, w układzie współrzędnych x^1, y^1, z^1 .

Zmiany stanu polaryzacji promienia wskutek załamania i odbicia znajdziemy stosując wzory Fresnela. Celem zwiększenia przejrzystości obliczeń wprowadzimy następujące macierze polaryzacji:

$$P^i = \begin{vmatrix} p_x^i & 0 \\ 0 & p_y^i \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Tutaj

$$\begin{aligned} p_x^1 &= \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, & p_y^1 &= \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \\ p_x^2 &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, & p_x^3 &= -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \\ p_x^3 &= \frac{2 \cos \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, & p_y^3 &= \frac{2 \cos \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad (2.3)$$

gdzie β jest kątem załamania, a n średnim współczynnikiem załamania ośrodka elastooptycznego względem powietrza. Współczynnikiem tym możemy się posługiwać przy opisie zjawiska załamania, ponieważ na ogół wartość dwójłomności wymuszonej jest niewielka. Macierz \mathbf{P}^1 działając na wektor \mathbf{E}^0 przekształca go na wektor \mathbf{E}^1 pola fali świetlnej po pierwszym załamaniu. Tak więc

$$\mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^1 \mathbf{E}^0,$$

podobnie

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{P}^2 \mathbf{E}^1, \quad \mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^3 \mathbf{E}^2.$$

- * Znikanie składowych niediagonalnych macierzy (2.1) zgodnie ze wzorami Fresnela oznacza, że wskutek samego tylko procesu załamania (odbicia) składowa pola elektrycznego prostopadła do płaszczyzny padania nie może zostać przekształcona na składową równoległą do tej płaszczyzny; nie może też zajść zjawisko odwrotne. Macierze \mathbf{P}^i są szczególnym przypadkiem uogólnionych macierzy Jonesa [3]. Ich granicznym przypadkiem są macierze

$$\mathbf{P}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{P}(\pi/2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

opisujące działanie idealnych filtrów polaryzujących, które przepuszczają odpowiednio składową E_x lub E_y pola elektrycznego [4]. W razie odbicia wewnętrznego pod kątem β spełniającym warunek Brewstera zachodzi

$$\operatorname{tg} \beta = 1/n, \quad (2.5)$$

a więc

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}; \quad (2.6)$$

to z kolei zachodzi przy kącie padania promienia na płytkę spełniającym warunek

$$\sin \alpha = n \cdot \sin \beta = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \quad (2.7)$$

a więc

$$\operatorname{tg} \alpha = n. \quad (2.8)$$

Korzystając z (2.5) i (2.8) dostajemy

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1 - n \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = 0, \quad (2.9)$$

co oznacza, zgodnie z (2.2)₄, że element macierzowy p_y^2 znika:

$$p_y^2 = 0. \quad (2.10)$$

Biorąc pod uwagę, że zgodnie z (2.6 - 2.7)

$$\cos \beta = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}. \quad (2.11)$$

mamy

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad \sin(\alpha + \beta) = 1, \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{2n}{n^2 + 1},$$

a zatem zgodnie z (2.2) macierze P^i przy założeniu (2.5) są

$$P^{1B} = \begin{vmatrix} p_x^{1B} & 0 \\ 0 & p_y^{1B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{n^2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

$$P^{2B} = \begin{vmatrix} p_x^{2B} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad P^{3B} = \begin{vmatrix} p_x^{3B} & 0 \\ 0 & p_y^{3B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2n^2}{n^2 + 1} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}.$$

Zgodnie z własnością odbicia pod kątem Brewstera, macierz (2.12)₂ działając na wektor E^1 pozostawia co najwyżej składową w kierunku osi x^2 różną od zera.

Wpływ dwójłomności płytki płaskorównoległej na stan polaryzacji promienia świetlnego opiszemy, stosując za Jonesem, macierz względnego przesunięcia fazowego o kąt φ :

$$T_0^i(\varphi) = \begin{vmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

oraz macierz obrotu o kąt Ψ wokół osi z^i

$$R^i(\psi) = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Iloczyn macierzowy

$$T_\psi^i(\varphi) = R^i(-\psi) T_0^i(\varphi) R^i(\psi), \quad i = 1, 2 \quad (2.15)$$

opisuje działanie płytki dwójłomnej, w której poruszają się w tym samym kierunku z^i , z różnymi prędkościami, dwa promienie, zwyczajny i nadzwyczajny, o wzajemnie prostopadłych płaszczyznach polaryzacji; przy tym płaszczyzna polaryzacji promienia szybszego tworzy z płaszczyzną $x^i z^i$ kąt ψ , między zaś promieniem szybszym a wolniejszym wytwarza się różnica faz φ ;

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l(n_2 - n_1), \quad (2.16)$$

gdzie l jest długością odcinka przebytego przez promienie w płytce o grubości d

$$l = d/\cos \beta, \quad (2.17)$$

λ jest długością fali światła w powietrzu, zaś n_1 i n_2 są współczynnikami załamania, odpowiednio promienia szybszego i wolniejszego.

Szczególnym przypadkiem płytki dwójtomnej jest ćwierćfalówka. Działanie ćwierćfalówki na promień poruszający się w kierunku z^0 , jeśli jej pierwszy azymut tworzy z płaszczyzną x^0z^0 kąt χ , opisuje w analogii do (2.15) iloczyn

$$Q(\chi) = R^0(-\chi) T_o^0 \left(\frac{\pi}{2} \right) R^0(\chi). \quad (2.18)$$

Znajdziemy teraz związki między składowymi wektora elektrycznego promienia świetlnego przed i po przejściu przez płytkę dwójtomną przy założeniu (2.5). Rozważmy trzy przypadki, różniące się stanem polaryzacji początkowej promienia.

a) Promień padający na płytkę spolaryzowany jest w płaszczyźnie padania.

Płaszczyzna padania pokrywa się z płaszczyzną y^0z^0 , a więc promień pierwotny o składowych

$$\mathbf{E}^0 = \begin{vmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

poddany zostaje kolejno działaniu polaryzatora (2.4)₂, załamania (2.12)₁, przesunięcia fazowego (2.15)₁₌₁, odbicia pod kątem Brewstera (2.12)₂, przesunięcia fazowego (2.15)₁₌₂ oraz załamania (2.12)₃.

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\varphi^2(\varphi) \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\varphi^1(\varphi) \mathbf{P}^{1B} \mathbf{P}(\pi/2) \mathbf{E}^0. \quad (2.20)$$

Wykonując kolejno działania znajdujemy

$$\mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{1B} \mathbf{P}(\pi/2) \mathbf{E}^0 = \begin{vmatrix} 0 \\ p_y^{1B} \cdot E_y^0 \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\varphi^1(\varphi) \mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{2B} \mathbf{R}^1(-\varphi) \mathbf{T}_o^1(\varphi) \mathbf{R}^1(\varphi) \mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{2B} \mathbf{R}^1(-\varphi) \begin{vmatrix} e^{i\varphi/2} \sin \psi \\ e^{-i\varphi/2} \cos \psi \end{vmatrix} p_y^{1B} E_y^0 = \\ &= \begin{vmatrix} p_x^{2B} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2} \sin \psi \cos \psi \\ e^{i\varphi/2} \sin^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \cos^2 \psi \end{vmatrix} p_y^{1B} E_y^0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} i p_x^{2B} p_y^{1B} E_y^0 \sin \frac{\varphi}{2} \sin 2\psi = \begin{vmatrix} E_x^2 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^3 &= \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\varphi^2(\varphi) \mathbf{E}^2 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{R}^2(-\varphi) \mathbf{T}_o^2(\varphi) \mathbf{R}^2(\varphi) \mathbf{E}^2 = \\ &= \begin{vmatrix} p_x^{3B} (e^{i\varphi/2} \cos^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \sin^2 \psi) \\ p_y^{3B} i \sin \frac{\varphi}{2} \sin 2\psi \end{vmatrix} E_x^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Natężenie światła zaraz po odbiciu brewsterowskim dane jest wyrażeniem

$$I_a^{(2)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{2*} = [p_x^{2B} p_y^{1B} E_y^0]^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi, \quad (2.24)$$

gdzie (*) oznacza operację sprzężenia.

Wyrażenie (2.24), z dokładnością do stałych współczynników, pokrywa się z wyrażeniem znanym z teorii polaryskopu liniowego ze skrzyżowanymi polaroidami.

Natężenie światła po wyjściu z płytki dane jest wyrażeniem

$$\begin{aligned} I_a^{(3)} &= \mathbf{E}^3 \cdot \mathbf{E}^{3*} = E_x^2 E_x^{2*} \left[(p_x^{3B})^2 (\cos^4 \psi + 2 \cos \varphi \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \sin^4 \psi) + \right. \\ &\left. + (p_y^{3B})^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right] = I_a^{(2)} \left\{ (p_x^{3B})^2 + [(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2] \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Porównując (2.25) z (2.24) widzimy, że przebieg ekstremów funkcji $I_a^{(3)}$ jest taki sam jak funkcji $I_a^{(2)}$. A więc jakościowo obraz elastoptyczny wywołany odbiciem wewnętrznym pod kątem Brewstera jest taki jak w polaryskopie liniowym. Jeśli pominąć stały współczynnik, to również ilościowo te obrazy różnią się od siebie niewiele, gdyż składnik

$$(p_y^{3B})^2 = \left(\frac{2n^2}{n^2+1} \right)^2$$

jest na ogół kilkakrotnie większy od

$$(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2 = \left(n \frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^2.$$

Na przykład dla $n = 1,5$ odpowiednie wartości wynoszą 1,92 i 0,33.

b) Promień padający na płytkę spolaryzowany jest prostopadle do płaszczyzny padania

Z płytki wychodzi promień o składowych

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\varphi^2(\varphi) \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\varphi^1(\varphi) \mathbf{P}^{1B} \mathbf{P}(0) \mathbf{E}^0. \quad (2.26)$$

Kolejno znajdujemy

$$\mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{1B} \mathbf{P}(0) \mathbf{E}^0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_x^{1B} E_x^0 \\ E_x^0 \end{vmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\varphi^1(\varphi) \mathbf{E}^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_x^{2B} p_x^{1B} E_x^0 (e^{i\varphi/2} \cos^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \sin^2 \psi) \\ E_x^0 \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

zaś

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\varphi^2(\varphi) \mathbf{E}^2 \quad (2.29)$$

dane jest tym samym wyrażeniem co w przypadku a), wzór (2.23), z tą różnicą, że E_x^2 dane jest przez (2.28), a nie przez (2.22). Stąd

$$I_b^{(2)} = \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{E}^{2*} = [p_x^{2B} p_x^{1B} E_x^0]^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right), \quad (2.30)$$

co ma analogię w zależnościach teorii polaryskopu liniowego z polaroidami ustawionymi równolegle oraz

$$\begin{aligned} I_b^{(3)} &= \mathbf{E}^3 \cdot \mathbf{E}^{3*} = I_b^{(2)} \left\{ (p_x^{3B})^2 + [(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2] \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right\} = \\ &= I_b^{(2)} \left\{ (p_y^{3B})^2 - [(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2] \left(-\sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ponieważ

$$(p_y^{3B})^2 = n^2 > (p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2 = \left(n \frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^2,$$

więc podobnie jak w przypadku a) przebieg ekstremów funkcji $I_b^{(3)}$ jest taki, jak $I_b^{(2)}$; ilościowe różnice między wartościami obu funkcji są, z przyczyn podobnych jak w a), też niewielkie.

c) Promień padający na płytkę spolaryzowany jest kołowo. Tym razem

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\psi^2(\varphi) \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\psi^1(\varphi) \mathbf{P}^{1B} \mathbf{Q}\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{P}(0) \mathbf{E}^0, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^1 &= \mathbf{P}^{1B} \mathbf{Q}\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{P}(0) \mathbf{E}^0 = \mathbf{P}^{1B} \mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{T}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \mathbf{E}_x^0 = \\ &= \mathbf{P}^{1B} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \mathbf{E}_x^0 = \\ &= \mathbf{P}^{1B} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} \mathbf{E}_x^0 = \begin{vmatrix} p_x^{1B} \\ ip_y^{1B} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{E}_x^0 = \begin{vmatrix} E_x^1 \\ E_y^1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\psi^1(\varphi) \mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{2B} \begin{vmatrix} E_x^1 (e^{i\varphi/2} \cos^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \sin^2 \psi) + i E_y^1 \sin 2\psi \sin \frac{\varphi}{2} \\ i E_x^1 \sin 2\psi \sin \frac{\varphi}{2} + E_y^1 (e^{i\varphi/2} \sin^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \cos^2 \psi) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} p_x^{2B} \left[E_x^1 (e^{i\varphi/2} \cos^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \sin^2 \psi) + i E_y^1 \sin 2\psi \sin \frac{\varphi}{2} \right] = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} E_x^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\psi^2(\varphi) \mathbf{E}^2, \quad (2.35)$$

jak w przypadku a), wzór (2.23), z tym że teraz \mathbf{E}^2 dane jest przez (2.34). Stąd

$$\begin{aligned} I_c^{(2)} &= \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{E}^{2*} = \left[p_x^{2B} \frac{\sqrt{2}}{2} E_x^C \right]^2 \left\{ (p_x^{1B})^2 + [(p_y^{1B})^2 - (p_x^{1B})^2] \sin^2 2\psi \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - p_x^{1B} p_y^{1B} \sin \varphi \sin 2\psi \right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$I_c^{(3)} = \mathbf{E}^3 \cdot \mathbf{E}^{3*} = I_c^{(2)} \left\{ (p_x^{3B})^2 + [(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2] \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right\}. \quad (2.37)$$

Zależność $I_c^{(2)}$ od φ i ψ jest więc bardziej skomplikowana niż odpowiednie zależności $I_a^{(2)}$ i $I_b^{(2)}$. Celem zbadania charakteru tej zależności zauważmy, że dla $n = 1,5$:

$$p_x^{1B} = \frac{2}{n^2 + 1} = 0,615, \quad p_y^{1B} = \frac{1}{n} = 0,667, \quad (p_x^{1B})^2 = 0,378, \quad (p_y^{1B})^2 = 0,446, \\ p_x^{1B} p_y^{1B} = 0,410,$$

zatem wkład składnika z współczynnikiem

$$(p_y^{1B})^2 - (p_x^{1B})^2 = 0,068$$

do sumy (2.36) nie przewyższa 20% wkładu pozostałych składników. Jeśli więc położyć w przybliżeniu

$$p_x^{1B} \cong p_y^{1B} \gg (p_y^{1B})^2 - (p_x^{1B})^2,$$

to otrzymamy

$$I_c^{(2)} \cong [p_x^{2B} E_x^0]^2 \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi \sin 2\psi). \quad (2.38)$$

Jeśli idzie o wpływ kąta ψ — parametru izokliny, to $I_c^{(2)}$ jest proporcjonalne do $\sin 2\psi$, a nie do $\sin^2 2\psi$, jak było w poprzednich przypadkach. Zatem przy polaryzacji kołowej izoklina ujawnia się w sposób mniej kontrastowy, dzięki czemu wyraźniejszy jest obraz izochrom. Fakt ten znajduje potwierdzenie doświadczalne.

Przypuśćmy teraz, że jesteśmy w obszarze płytki, gdzie

$$\sin 2\psi = 1.$$

Wtedy (2.38) przyjmuje postać

$$I_c^{(2)} = [p_x^{2B} E_x^0]^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Zależność od φ w tym wyrażeniu przypomina odpowiednie wzory w przypadkach a) i b); wstępne przesunięcie fazowe wynosi tu $\pi/4$.

3. Efekt elastoptyczny przy skośnym prześwietleniu

Niech dwójłomność płytki będzie wymuszona przez pole naprężeń σ opisane w układzie x, y, z , macierzą o składowych

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

W płytce panuje zatem płaski stan naprężenia.

W układzie x^1, y^1, z^1 powstałym przez obrót osi współrzędnych o kąt β wokół osi x , a więc przy transformacji

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

składowe tensora naprężenia są opisane macierzą

$$\sigma' = \begin{vmatrix} \sigma'_x & \sigma'_{xy} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{xy} & \sigma'_y & \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{xz} & \sigma'_{yz} & \sigma'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \cos \beta & -\sigma_{xy} \sin \beta \\ \sigma_{xy} \cos \beta & \sigma_y \cos^2 \beta & -\sigma_y \sin \beta \cos \beta \\ -\sigma_{xy} \sin \beta & -\sigma_y \sin \beta \cos \beta & \sigma_y \sin^2 \beta \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Jeśli płytka elastoptyczna, wykonana z materiału o elastoptycznej stałej modelowej K , prześwietlana jest równolegle do kierunku z' , to rząd izochromy dany jest zależnością [5]:

$$m' = \frac{1}{K \cos \beta} \sqrt{(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + 4\sigma_{xy}'^2}. \quad (3.4)$$

Przypuśćmy, że oś x jest osią symetrii pola naprężenia (3.1). Na osi symetrii

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (3.5)$$

oraz

$$\sigma'_{xy} = 0, \quad (3.6)$$

więc jeśli $\sigma'_x > \sigma'_y$, co zachodzi zawsze, gdy $\sigma_x > \sigma_y$, to

$$Km' = (\sigma_x - \sigma_y \cos^2 \beta) \frac{1}{\cos \beta}. \quad (3.7)$$

Ponadto, przy prześwietlaniu normalnym, jeśli $\sigma_x > \sigma_y$, na osi symetrii rząd izochromy wynosi

$$m = \frac{1}{K} (\sigma_x - \sigma_y). \quad (3.8)$$

Rozwiązując układ (3.7, 3.8) względem σ_x, σ_y dostajemy znane związki Druckera [6]:

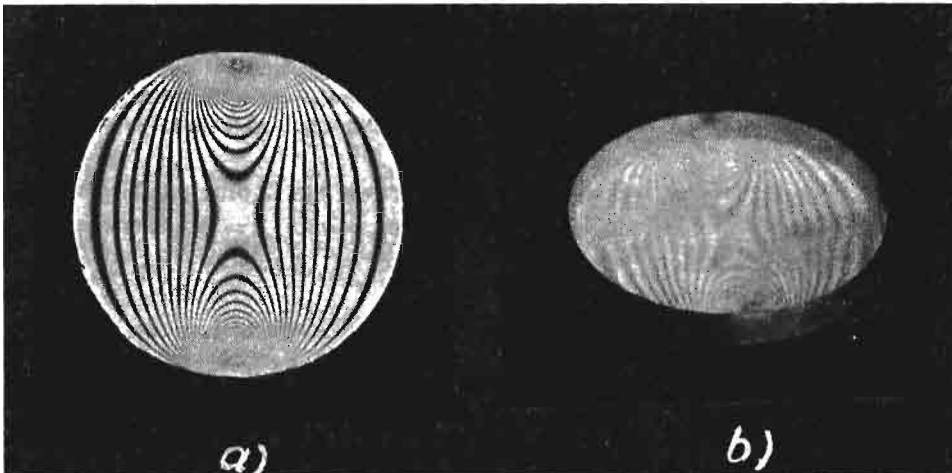
$$\sigma_x = K \frac{m' - m \cos \beta}{\sin^2 \beta} \cos \beta, \quad (3.9)$$

$$\sigma_y = K \frac{m' \cos \beta - m}{\sin^2 \beta}. \quad (3.10)$$

4. Przykład

Celem przykładu zbadaliśmy model tarczy kołowej ściskanej osiowo. Model wykonany był z żywicy epoksydowej, o współczynniku załamania $n = 1,47_{\pm 0,01}$. Efekt elastoptyczny został utrwalony w tarczy metodą „zamrażania”. Na rys. 2a widzimy obraz izochrom m otrzymany przy prześwietlaniu normalnym, a na rys. 2b obraz izochrom w świetle odbitym pod kątem Brewstera,

$$\beta = \arctg \frac{1}{n} = \arctg 0,680_{\pm 0,005} = 34^{\circ} 13'_{\pm 12}. \quad (4.1)$$



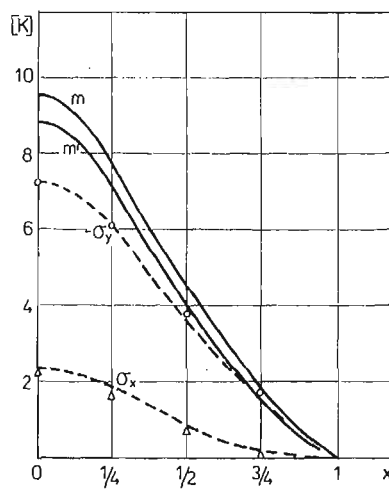
Rys. 2. Obrazy izochrom wykorzystane w rozważanym przykładzie: a) Obraz izochrom przy prześwietlaniu normalnym, b) Obraz izochrom w świetle odbitym pod kątem Brewstera. Skrócenie obrazu w kierunku pionowym wynosi $\cos \alpha = 0,56$

Kąt padania światła

$$\alpha = \operatorname{arctgn} n = \operatorname{arctg} 1,47_{\pm 0,01} = 55^{\circ}46'_{\pm 11'} \quad (4.2)$$

realizowany był z dokładnością do 3° . Nie stosowano cieczy immersyjnej. Wstępna polaryzacja światła była kołowa, przypadek c).

Przyjmujemy początek układu współrzędnych x, y, z w środku tarczy kołowej, oś y pokrywamy z kierunkiem ściskania. W oparciu o obrazy izochrom z rys. 2 i wzory (3.9 - 10) rozdzieliliśmy naprężenia wzdłuż osi x , tzn. wzdłuż średnicy modelu prostopadłej do kierunku ściskania. Na rys. 3 przedstawiony jest przebieg funkcji: $m = m(x, y = 0)$,



Rys. 3. Wynik rozdzielania naprężeń w tarczy kołowej wzdłuż promienia prostopadłego do kierunku sił zewnętrznych. Oś odciętych na rysunku odpowiada właśnie temu wybranemu przekrojowi. Przy tym przyjęto promień tarczy za równy jedności. Oś rzędnych przedstawia różne funkcje zbudowane ze składowych naprężenia w jednostkach stałej modelowej K . I tak: — krzywa m oznacza doświadczalny przebieg izochrom otrzymanych przy prześwietlaniu normalnym; — krzywa m' oznacza przebieg izochrom otrzymanych przez odbicie pod kątem Brewstera; — krzywa przerywana $(-\sigma_y)$ oznacza przebieg składowej $(-\sigma_y)$ otrzymanej z rozwiązania teoretycznego; — krzywa przerywana σ_x oznacza przebieg składowej σ_x otrzymanej z rozwiązania teoretycznego; — kołeczka oznaczają wartości $(-\sigma_y)$ wyznaczone na podstawie m i m' wg wzoru (3.10); — trójkąciki oznaczają wartości σ_x wyznaczone na podstawie m i m' wg wzoru (3.9)

$m' = m'(x', y' = 0)$, $x' = x$, wykreślonych na podstawie rys. 2 oraz przebieg wyznaczonych na ich podstawie funkcji: $\sigma_x = \sigma_x(x, y = 0)$, $\sigma_y = \sigma_y(x, y = 0)$, stanowiących szukane rozwiązanie. Naniesiony dla porównania przebieg teoretyczny σ_x, σ_y zgadza się bardzo dobrze z tym rozwiązaniem.

5. Zakończenie

Powyższe wyniki wykazują, iż korzystając z wewnętrznego odbicia pod kątem Brewstera można otrzymać obraz elastoptyczny, użyteczny do doświadczalnej analizy naprężeń. Spostrzeżenie to, interesujące samo w sobie, może znaleźć zastosowanie przy obserwacji zjawisk elastoptycznych wtedy, gdy względy konstrukcyjne lub ekonomiczne wymagają

ograniczenia liczby polaroidów w układzie optycznym, np. przy jednoczesnej obserwacji dużej liczby czujników elastoptycznych lub obserwacji pod dwoma kątami czasowej zależności zjawiska elastoptycznego. Zrozumiałe jest, że sposób uzyskania obrazu elastoptycznego przez odbicie Brewstera ma wszystkie wady metody skośnego prześwietlania. Przede wszystkim sposób ten zawodzi w obszarach dużej koncentracji naprężeń.

Ubocznym niejako wnioskiem z powyższych rozważań jest wskazanie na znaczenie zjawisk polaryzacyjnych zachodzących na powierzchniach granicznych ośrodka, a zatem i na konieczność ich uwzględniania przy interpretacji obrazu elastoptycznego.

Literatura

1. E. COKER, L. FILON, *A treatise on photo-elasticity*, Cambridge 1957.
J. PINDERA, *Zarys elastoptyki*, Warszawa 1953
2. S. PIENKOWSKI, *Fizyka doświadczalna*, t. III Optyka, Warszawa 1955.
M. SUFFCZYŃSKI, *Elektrodynamika*, Warszawa 1965
3. R. JONES, *A new calculus for the treatment of optical systems*, J. Opt. Soc. Am. 31, 488 - 93, 1941.
4. J. VOS, *Birefringence of hexagonal single crystal of helium-4 at various pressures*, Dr. dissert. Delft 1968
R. WOJNAR, *Uogólnione macierze Jonesa i ich zastosowanie w elastoptyce*, VII Sympozjum Badań Doświadczalnych w Mechanice, Warszawa 1976.
5. M. FROCHT, *Photoelasticity*, vol. II, p. 333, N. York 1948.
6. P. DRUCKER, *Photoelastic separation of principal stresses by oblique-incidence*, J. Appl. Mech. Trans. ASME 10, A156 - 60 (1943).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ ПОД УГЛОМ БРЮСТЕРА ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ФОТОУПРУГОСТИ

Использовано явление внутреннего отражения под углом Брюстера до получения фотоупругой картины. Самое отражение исполняет роль анализатора, так что только один поляризатор — поляризатор нужен в эксперименте. Дается теория восстановления картины, использующая обобщенные матрицы Джонса.

Обращено внимание на возможность использования эффекта до разделения напряжений, на принципе метода косого просвечивания.

Summary

APPLICATION OF INNER REFLECTION AT BREWSTER'S ANGLE TO THE STRESS SEPARATION IN PHOTOELASTICITY

The effect of the internal reflection at Brewster's angle is applied to obtain a photoelastic pattern for stresses in a two-dimensional layer. The reflection itself acts as an analyzer, therefore only one polaroid — the polarizer is needed in an experiment. The explanation of the pattern formation is presented, using the generalised Jones matrices.

The possibility of the application of the method to stress separation, on basis of the oblique incidence method is pointed out.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1981 roku

WPLYW NAPROMIENIOWANIA I TEMPERATURY NA WŁAŚCIWOŚCI REOLOGICZNE POLIETYLENU

JACEK GARBARSKI

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Podjęmowane dotychczas próby opisu zachowania się materiału lepkosprężystego przy określonym oddziaływaniu mechanicznym zmierzają do ustalenia ogólnego związku między naprężeniami i odkształceniami oraz ich pochodnymi. Znalezienie takiego związku, zwanego równaniem stanu, następuje pewne trudności. Znane są [1] liniowe lub nieliniowe opisy poszczególnych procesów, jednak ograniczają się one tylko do jednego procesu i nie pozwalają na wyznaczenie równania stanu. Znane przykłady nieliniowych równań stanu [2] nie zawsze pozwalają na obliczenie przewidywanego zachowania się materiału przy dowolnym działającym naprężeniu lub odkształceniu.

Liniowemu różniczkowemu równaniu stanu odpowiadają liniowe modele lepkosprężystości będące kombinacją elementów liniowo lepkich i liniowo sprężystych. Stosowanie modeli lepkosprężystości do opisu zachowania się materiału jest w wielu pracach krytykowane. Spotykana zazwyczaj argumentacja przemawiająca przeciwko stosowaniu tych modeli można streścić następująco. Modele lepkosprężystości symulują jedynie pod względem jakościowym zachowanie się materiału [3,4] i nie mogą służyć do opisu ilościowego. Przyczyną tego jest fakt dużej rozbieżności krzywych eksperymentalnych pełzania lub relaksacji z krzywymi analitycznymi będącymi symulacją tych procesów przy pomocy prostych modeli. Natomiast rozbudowywanie modeli w celu zwiększenia dokładności aproksymacji powoduje znaczne komplikacje matematyczne, gdyż każdy nieredukujący się element lepki w modelu podnosi rząd równania stanu o jeden. Dlatego w celu uzyskania dokładnego opisu zachowania się materiału stosuje się tzw. zapis całkowity, tzn. zakłada się, że model reologiczny składa się z nieskończenie wielkiej liczby elementów, rezygnuje się ze stosowania równania stanu, a zamiast niego używa się funkcji lepkosprężystości, jak np. widma czasów relaksacji i retardacji oraz funkcji pełzania i relaksacji. Celem niniejszej pracy było wykazanie, że mechaniczne modele lepkosprężystości, mimo że nie posiadają waloru pełnej uniwersalności, są w określonych przypadkach dogodnym sposobem symulacji zachowania się materiału również pod względem ilościowym. Zastosowano w niej liniowe różniczkowe równanie stanu oraz odpowiadające mu modele reologiczne dla opisu zachowania się polietylenu wysokociśnieniowego.

Uzyskano dobrą zbieżność krzywych eksperymentalnych zarówno dla wyjściowego procesu reologicznego, którym była próba pełzania, jak również dla procesu weryfikującego, którym było wielostopniowe rozciąganie ze stałą prędkością.

W niniejszej pracy wyliczono również parametry modeli reologicznych oraz parametry równania stanu dla polietylenu, który poddany był obróbce radiacyjnej w celu poprawienia jego własności. Prowadząc następnie badania reologiczne w różnych temperaturach uzyskano zależność parametrów równania stanu oraz parametrów modeli od temperatury i pochłoniętej dawki promieniowania.

2. Opis matematyczny zachowania się materiału lepko-sprężystego

Rozwiązując równanie stanu o ogólnej postaci

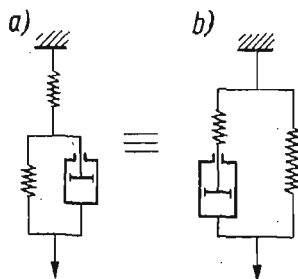
$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i \sigma}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \varepsilon}{dt^j} \quad (1)$$

dla szczególnego przypadku obciążenia lub odkształcenia otrzyma się równanie procesu który można zrealizować eksperymentalnie. Procesem tym może być na przykład próba pełzania lub próby cyklicznego obciążenia. Do znalezienia równania stanu konkretnego materiału prowadzą dwa etapy:

- 1) wybranie odpowiedniego modelu.
- 2) znalezienie liczbowych wartości jego parametrów, czyli tzw. identyfikacji modelu.

Wybierając model należy rozważyć, jaki proces reologiczny ma być punktem wyjścia dla znalezienia równania stanu. Istnieje bowiem zasada równoważności modeli [3], dzięki której różne typy modeli dają takie samo różniczkowe równanie stanu. Z zasady tej wynikają wskazówki dotyczące doboru typu modelu do procesu, który ma być tym modelem symulowany. Wskazówki te można sformułować następująco:

— jeśli w procesie reologicznym mierzone jest odkształcenie $\varepsilon(t)$, a naprężenie $\sigma(t)$ jest wielkością zadaną (np. próba pełzania), to wygodniej jest stosować model o szeregowym połączeniu modeli podstawowych¹⁾ (rys. 1a), jeśli natomiast naprężenie $\sigma(t)$ jest mierzone, a odkształcenie $\varepsilon(t)$ jest wielkością zadaną (np. próba relaksacji, rozciągania statycznego, niektóre przypadki badań cyklicznych), to korzystniej jest stosować model o równoległym połączeniu modeli podstawowych (rys. 1b).



Rys. 1. Modele równoważne.

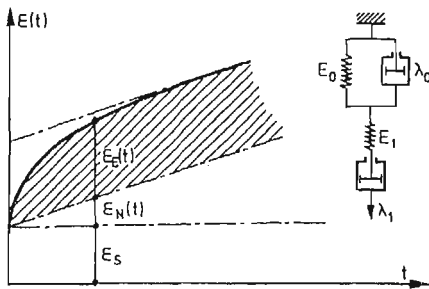
¹⁾ Pod pojęciem „model podstawowy” rozumie się element sprężysty, element lepki oraz model Kelvina-Voigta i model Maxwella.

Modele przedstawione przykładowo na rys. 1 są równoważne, tzn. należą do tej samej klasy i są reprezentowane takim samym równaniem stanu:

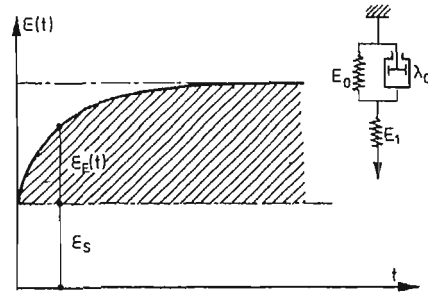
$$a_1 \dot{\sigma} + a_0 \sigma = b_1 \dot{\epsilon} + b_0 \epsilon \quad (2)$$

Stosowanie się do podanych wskazówek wynikających z zasady równoważności modeli pozwala na znalezienie równania procesu reologicznego bez wykonywania samego rozwiązywania równania stanu, co dla bardziej złożonych modeli jest bardzo żmudną operacją algebraiczną. Ułożenie zaś równania stanu nie następuje trudności.

W niniejszej pracy do wyznaczenia parametrów równania stanu wykorzystano próbę pełzania, która jest stosunkowo łatwa w realizacji i w interpretacji wyników. W przypadku pełzania, dla modelu liniowego odkształcenie całkowite jest superpozycją odkształceń: sprężystego natychmiastowego ϵ_s , stałego w czasie, płynięcia newtonowskiego $\epsilon_N(t)$ narastającego liniowo w czasie oraz odkształcenia sprężystego opóźnionego $\epsilon_E(t)$ narasta-



Rys. 2. Krzywa pełzania i model reologiczny dla ciał z płynięciem newtonowskim.



Rys. 3. Krzywa pełzania i model reologiczny dla ciał bez płynięcia newtonowskiego.

jącego nieliniowo w czasie, przy czym istnieje grupa materiałów nie wykazująca składowej newtonowskiej $\epsilon_N(t)$. Odpowiednie krzywe pełzania i odpowiadające im modele dla ciał wykazujących i nie wykazujących składowej newtonowskiej przedstawiają rys. 2 i 3.

Sprężyna E_1 symuluje odkształcenia sprężyste natychmiastowe, tłumik λ_1 — płynięcie newtonowskie, natomiast dwuelementowy model Kelvina-Voigta — odkształcenia sprężyste opóźnione.

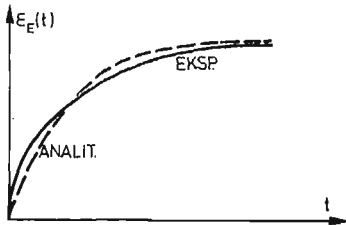
Ponieważ pełzanie jest procesem reologicznym, w którym mierzone jest odkształcenie $\epsilon(t)$, a napężenie jest wielkością zadaną, dlatego zastosowano modele o szeregowym połączeniu elementów podstawowych.

W obu modelach przedstawionych na rys. 2 i 3 dwuelementowy model podstawowy (Kelvina-Voigta) symulujący odkształcenia sprężyste opóźnione daje, w przypadku pełzania, rozwiązanie w postaci funkcji wykładniczej rosnącej. Natomiast krzywe pełzania rzeczywistych materiałów pomimo zewnętrznego podobieństwa do krzywej wykładniczej nie mają zgodnego z nią przebiegu. Charakter rozbieżności pomiędzy krzywą eksperymentalną a symulowaną modelem dla większości tworzyw wielocząsteczkowych pokazuje rys. 4.

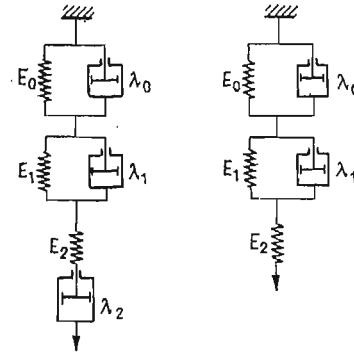
Można to uzasadnić tym, że rzeczywisty materiał charakteryzowany jest widmem czasów retardacji [5, 6], model zaś dwuelementowy odpowiada jednemu takiemu czasowi.

Dokładną aproksymację krzywej eksperymentalnej można uzyskać przez szeregowe połączenie dużej ilości takich modeli, jednak wówczas rząd równania stanu staje się bardzo wysoki. Otrzymuje się wtedy bardzo dokładną aproksymację samego procesu, jednak bez możliwości praktycznego przejścia do równania stanu.

Wydaje się, że dodanie do istniejących modeli (Thomsona-Philipsa i Burgersa) tylko jednego modelu Kelvina-Voigta, da model pięcio- lub sześćelementowy (rys. 5) zezwalający na ustalenie dość jeszcze prostego równania stanu drugiego lub trzeciego rzędu



Rys. 4. Rozbieżność między krzywą eksperymentalną i analityczną przy aproksymacji składowej odkształceń sprężystych opóźnionych modelem dwuelementowym.

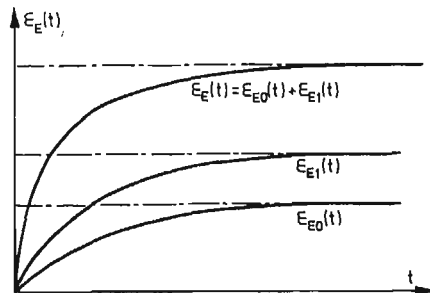


Rys. 5. Modele o budowie szeregowej użyte do symulacji pełzania materiału.

wykazującego dość dużą zgodność z eksperymentem. W takim wypadku składowa odkształceń sprężystych opóźnionych jest superpozycją dwóch krzywych wykładniczych $\varepsilon_{E_0}(t)$ i $\varepsilon_{E_1}(t)$ (rys. 6), z których każda ma dwa parametry: stałą, określającą wysokość asymptoty oraz charakterystyczną stałą czasową będącą w tym wypadku czasem retardacji. Równanie tej składowej ma postać

$$\varepsilon_E(t) = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0}{\lambda_0} t}\right) + \frac{\sigma}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\lambda_1} t}\right) \quad (3)$$

Dobór występujących w tym równaniu parametrów, czyli znalezienie takich wartości $\frac{\sigma}{E_0}$, $\frac{\sigma}{E_1}$, $\frac{\lambda_0}{E_0}$, $\frac{\lambda_1}{E_1}$ (gdzie $\sigma = \text{const}$ jest znane), aby krzywa opisana tym równaniem



Rys. 6. Składowa odkształceń sprężystych opóźnionych jako superpozycja dwóch krzywych o przebiegu wykładniczym.

pokrywała się z krzywą eksperymentalną, nastęrcza pewne trudności. W przeciwieństwie do modeli Burgersa i Thomsona-Philipsa, gdzie znalezienie tylko dwóch parametrów modelu symulującego odkształcenia sprężyste opóźnione jest proste, tutaj obliczenie analityczne czterech szukanych parametrów jest kłopotliwe. Wykorzystując wyniki pomiarów wykonanych dla różnych czasów otrzymuje się cztery równania, których rozwiązanie metodami analitycznymi jest skomplikowane. Pozostaje zatem numeryczne znajdowanie parametrów za pośrednictwem maszyny cyfrowej. W takim wypadku udaje się znaleźć warunek brzegowy w postaci:

$$\varepsilon_E(\infty) = \sigma \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \right), \quad (4)$$

który pozwala na zmniejszenie liczby szukanych parametrów z czterech do trzech. Zostało to omówione w rozdziale 4.2.

Drugi z dających się wyznaczyć warunków brzegowych w postaci:

$$\dot{\varepsilon}_E(0) = \sigma \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad (5)$$

nie nadaje się do praktycznego wykorzystania, gdyż wyznaczenie $\dot{\varepsilon}_E(0)$ jako stycznej do krzywej pełzania w punkcie zerowym obarczone jest bardzo dużym błędem.

Znalezienie pozostałych dwóch parametrów λ_2, E_2 proponowanego modelu sześcioczęściowego nie nastęrcza trudności, ponieważ z wykresu pełzania można łatwo odczytać zarówno odkształcenie ε_s , jak i prędkość płynięcia newtonowskiego $\dot{\varepsilon}_N$.

Daje się więc wyliczyć wszystkie parametry modelu sześcioczęściowego tworzącego równanie stanu o postaci:

$$a_3 \ddot{\sigma} + a_2 \dot{\sigma} + a_1 \sigma = b_3 \ddot{\varepsilon} + b_2 \dot{\varepsilon} + b_1 \varepsilon \quad (6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_3 &= 1, & b_3 &= E_2, \\ a_2 &= E_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) + \frac{E_1}{\lambda_1} + \frac{E_0}{\lambda_0}, & b_2 &= \left(\frac{E_0}{\lambda_0} + \frac{E_1}{\lambda_1} \right) E_2, \\ a_1 &= \frac{1}{\lambda_0 \lambda_1} (E_0 E_2 + E_1 E_2 + E_0 E_1) + \frac{E_2}{\lambda_2} \left(\frac{E_0}{\lambda_0} + \frac{E_1}{\lambda_1} \right), & b_1 &= \frac{E_0 E_1 E_2}{\lambda_0 \lambda_1}, \\ a_0 &= \frac{E_0 E_1 E_2}{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}, \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego równania dla przypadku pełzania, tj. gdy $\sigma = \text{const}$, jest:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_2} + \frac{\sigma}{\lambda_2} t + \frac{\sigma}{E_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0}{\lambda_0} t} \right) + \frac{\sigma}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\lambda_1} t} \right) \quad (7)$$

Równanie (7) jest więc równaniem (3) powiększonym o składową sprężystą i newtonowską. Jest ono jednocześnie rozwiązaniem równania (6) dla przypadku $\sigma = \text{const}$. Rozwiązanie równania różniczkowego trzeciego rzędu wymaga znalezienia trzech stałych, które można by wyznaczyć na podstawie warunków początkowych. Jest to procedura dość pracochłonna. Dlatego istotną sprawą jest taki dobór modelu, aby rozwiązanie równania stanu można było znaleźć bez wykonywania obliczeń.

Dla ciał usieciowanych stosuje się model pięcioelementowy, który ma równanie stanu o postaci:

$$a_2 \ddot{\sigma} + a_1 \dot{\sigma} + a_0 \sigma = b_2 \ddot{\varepsilon} + b_1 \dot{\varepsilon} + b_0 \varepsilon \quad (8)$$

gdzie:

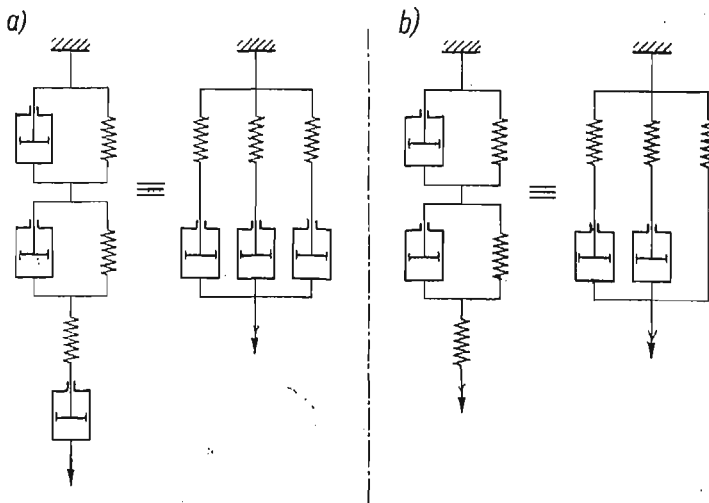
$$\begin{aligned} a_2 &= 1, & b_2 &= E_2, \\ a_1 &= E_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} \right) + \frac{E_0}{\lambda_0} + \frac{E_1}{\lambda_1}, & b_1 &= E_2 \left(\frac{E_0}{\lambda_0} + \frac{E_1}{\lambda_1} \right), \\ a_0 &= \frac{1}{\lambda_0 \lambda_1} (E_0 E_2 + E_1 E_2 + E_0 E_1), & b_0 &= \frac{E_0 E_1 E_2}{\lambda_0 \lambda_1}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie dla przypadku $\sigma = \text{const}$, czyli równanie pełzania, ma postać

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_2} + \frac{\sigma}{E_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0}{\lambda_0} t} \right) + \frac{\sigma}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\lambda_1} t} \right) \quad (9)$$

Wykonując próby pełzania w różnych warunkach można uzyskać zależność parametrów modelu, a więc również parametrów równania stanu od tych warunków.

Dla sprawdzenia poprawności znalezionej równania stanu należy poddać badany materiał innemu typowi obciążenia niż ten, który posłużył do jego wyznaczania, na przykład wielostopniowemu rozciąganiu na maszynie wytrzymałościowej ze stałymi prędkościami. Celem próby jest porównanie wyników eksperymentalnych z wynikami obliczonymi analitycznie przez rozwiązanie równania stanu dla przypadku $\dot{\varepsilon} = \text{const}$. Jest to przypadek, gdy $\varepsilon(t)$ jest wielkością zadaną, $\sigma(t)$ zaś — mierzona, a więc odwrotnie niż w przypadku pełzania. Zgodnie z podaną wcześniej zasadą należy tu zastosować model o równoległym połączeniu modeli podstawowych, gdyż tylko wtedy będzie można napisać równanie procesu nie rozwiązując równania stanu. Zgodnie z zasadą równoważności odpowiednie pary modeli przedstawionych na rys. 7 mają takie same równania stanu.



Rys. 7. Modele równoważne: a) sześćelementowe; b) pięcioelementowe.

Zależności algebraiczne między parametrami równania stanu a parametrami każdego z równoważnych modeli są inne. W związku z tym można napisać następujące układy równań:

— dla modelu sześciocementowego

	Budowa szeregową	Budowa równoległa
a_3	$1 =$	1
a_2	$E_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) + \frac{E_0}{\lambda_0} + \frac{E_1}{\lambda_1} =$	$\frac{E'_0}{\lambda'_0} + \frac{E'_1}{\lambda'_1} + \frac{E'_2}{\lambda'_2}$
a_1	$\frac{1}{\lambda_0 \lambda_1} (E_0 E_1 + E_1 E_2 + E_0 E_2) + \frac{E_2}{\lambda_2} \left(\frac{E_0}{\lambda_0} + \frac{E_1}{\lambda_1} \right) =$	$\frac{E'_0 E'_1}{\lambda'_0 \lambda'_1} + \frac{E'_0 E'_2}{\lambda'_0 \lambda'_2} + \frac{E'_1 E'_2}{\lambda'_1 \lambda'_2}$
a_0	$\frac{E_0 E_1 E_2}{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2} =$	$\frac{E'_0 E'_1 E'_2}{\lambda'_0 \lambda'_1 \lambda'_2}$
b_3	$E_2 =$	$E'_0 + E'_1 + E'_2$
b_2	$E_2 \left(\frac{E_0}{\lambda_0} + \frac{E_1}{\lambda_1} \right) =$	$E'_0 E'_1 \left(\frac{1}{\lambda'_0} + \frac{1}{\lambda'_1} \right) + E'_1 E'_2 \left(\frac{1}{\lambda'_1} + \frac{1}{\lambda'_2} \right) + E'_0 E'_2 \left(\frac{1}{\lambda'_0} + \frac{1}{\lambda'_2} \right)$
b_1	$\frac{E_0 E_1 E_2}{\lambda_0 \lambda_1} =$	$E'_0 E'_1 E'_2 \left(\frac{1}{\lambda'_0 \lambda'_1} + \frac{1}{\lambda'_1 \lambda'_2} + \frac{1}{\lambda'_0 \lambda'_2} \right)$

— dla modelu pięciocementowego

	Budowa szeregową	Budowa równoległa
a_2	$1 =$	1
a_1	$E_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} \right) + \frac{E_0}{\lambda_0} + \frac{E_1}{\lambda_1} =$	$\frac{E'_0}{\lambda'_0} + \frac{E'_1}{\lambda'_1}$
a_0	$\frac{1}{\lambda_0 \lambda_1} (E_0 E_2 + E_1 E_2 + E_0 E_1) =$	$\frac{E'_0 E'_1}{\lambda'_0 \lambda'_1}$
b_2	$E_2 =$	$E'_0 + E'_1 + E'_2$
b_1	$E_2 \left(\frac{E_0}{\lambda_0} + \frac{E_1}{\lambda_1} \right) =$	$\frac{E'_0}{\lambda'_0} (E'_1 + E'_2) + \frac{E'_1}{\lambda'_1} (E'_0 + E'_2)$
b_0	$\frac{E_0 E_1 E_2}{\lambda_0 \lambda_1} =$	$\frac{E'_0 E'_1 E'_2}{\lambda'_0 \lambda'_1}$

Podane układy równań umożliwiają obliczenie parametrów modelu na podstawie znanych parametrów modelu jemu równoważnego, a więc są swego rodzaju przejściem między modelami równoważnymi.

W powyższych równaniach szukane parametry modeli o budowie równoległej oznaczono E' i λ' .

Nowe, równoważne modele o budowie równoległej umożliwiają napisanie równania odkształcenia ze stałą prędkością. Tak więc odpowiednio:

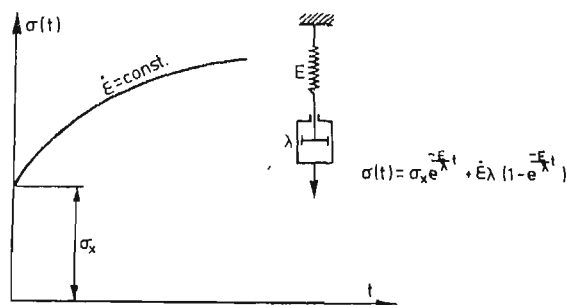
— dla modelu sześćcioelementowego

$$\sigma(t) = \dot{\epsilon} \sum_{i=0}^2 \lambda_i \left(1 - e^{-\frac{E_i}{\lambda_i} t} \right) \quad (10)$$

— dla modelu pięcioelementowego

$$\sigma(t) = E_2 \dot{\epsilon} t + \dot{\epsilon} \sum_{i=0}^1 \lambda_i \left(1 - e^{-\frac{E_i}{\lambda_i} t} \right) \quad (11)$$

Jeżeli proces rozciągania przebiega wielostopniowo z różnymi prędkościami, wówczas jego równanie staje się bardziej skomplikowane. Należy wtedy znaleźć to równanie dla niezerowych warunków początkowych. Rozpatrzmy na początku proces rozciągania pojedynczego modelu Maxwella przy założeniu, że w momencie zerowym, tj. na początku skali czasu model wykazuje skończone naprężenie $\sigma_x > 0$ (rys. 8).



Rys. 8. Rozciąganie modelu Maxwella dla niezerowych warunków początkowych.

Równanie stanu modelu Maxwella ma postać

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda} - \dot{\epsilon} = 0. \quad (12)$$

Rozwiązaniem tego równania dla $\dot{\epsilon} = \text{const}$ i dla warunku początkowego $\sigma(0) = \sigma_x > 0$ będzie:

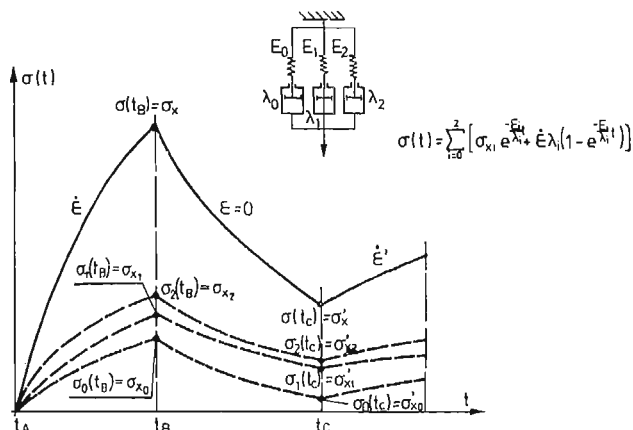
$$\sigma(t) = \sigma_x e^{-\frac{E}{\lambda} t} + \dot{\epsilon} \lambda \left(1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t} \right). \quad (13)$$

Ponieważ dla modelu sześćcioelementowego składającego się z trzech równoległe połączonych modeli Maxwella naprężenie całkowite jest w dowolnym czasie sumą naprężeń poszczególnych modeli Maxwella, równanie (13) można dla modelu sześćcioelementowego napisać w postaci:

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^2 \left[\sigma_{x_i} e^{-\frac{E_i}{\lambda_i} t} + \dot{\epsilon} \lambda_i \left(1 - e^{-\frac{E_i}{\lambda_i} t} \right) \right] \quad (14)$$

Umożliwia ono obliczenie naprężenia w funkcji czasu przy odkształcaniu modelu sześćcioelementowego ze stałą prędkością $\dot{\epsilon}$ jeżeli znane są składowe σ_{x_i} , całkowitego naprężenia σ_x w punkcie, w którym zaczyna się kolejna skala czasu.

Rys. 9 pokazuje przykładowo odkształcanie omawianego modelu sześcioczęściowego z różnymi prędkościami, przy czym w szczególnym przypadku prędkości te mogą być równe zero (relaksacja) lub mniejsze od zera. Znalezienie składowych σ_{xi} potrzebnych do obliczeń w kolejnej fazie nie następuje trudności, ponieważ naprężenia $\sigma_i(t)$ kończące poprzednią fazę są naprężeniami początkowymi σ_{xi} dla fazy następnej.



Rys. 9. Trzystopniowe rozciąganie modelu sześcioczęściowego.

I tak np. na rys. 9 naprężenie $\sigma(t_B)$ i jego składowe $\sigma_i(t_B)$ będące wynikiem rozciągania od naprężenia równego zero z prędkością $\dot{\epsilon}$ w czasie $t_B - t_A$ są warunkami początkowymi, a więc σ_x i odpowiednio σ_{xi} dla fazy następnej (w tym wypadku relaksacji) rozpoczynającej się w punkcie t_B .

Z kolei naprężenie $\sigma(t_C)$ i jego składowe $\sigma_i(t_C)$ będące wynikiem tejże relaksacji w czasie $t_C - t_B$ są warunkami początkowymi, a więc σ'_x i odpowiednio σ'_{xi} dla następnej fazy (w tym wypadku rozciągania z prędkością $\dot{\epsilon}' = \text{const}$ zaczynającego się w punkcie t_C).

Dla modelu pięcioczęściowego otrzyma się podobny wzór w postaci:

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^1 \left[\sigma_{xi} e^{-\frac{E_i}{\lambda_i} t} + \dot{\epsilon} \lambda_i \left(1 - e^{-\frac{E_i}{\lambda_i} t} \right) \right] + \sigma_{x_2} + E_2 \dot{\epsilon} t. \tag{15}$$

Wzory (14) i (15) mogą służyć do weryfikacji równania stanu. Można by je także wykorzystać przy wyznaczaniu parametrów modelu na podstawie próby odkształcania ze stałą prędkością (obejmuje to również relaksację jako przypadek szczególny). Takie postępowanie byłoby jednak o wiele bardziej skomplikowane niż w przypadku pełzania.

3. Stanowisko badawcze do prób pełzania

Do wykonania prób pełzania posłużyło stanowisko, zwane pełzarką, które zaprojektowano i wykonano we własnym zakresie [7] i [8].

Główną częścią tego stanowiska jest prosty układ dźwigniowy, który został optymalizowany przy pomocy maszyny cyfrowej, tak aby naprężenie rzeczywiste w rozciągane

próbce było stałe przez cały czas trwania próby. Specjalne urządzenie pomocnicze zapewnia płynne zawieszanie obciążenia ze stałą prędkością, którą można regulować. Urządzenie to umożliwia także rejestrację odkształcenia sprężystego w czasie umownie równym zeru.

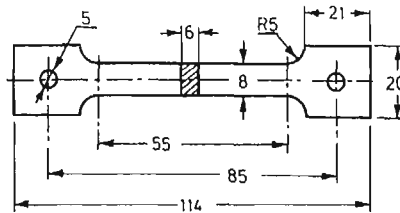
4. Część doświadczalna

4.1. Materiał i przygotowanie próbek. Do badań użyto polietylenu wysokociśnieniowego produkcji zakładów „Blachownia” o nazwie handlowej Politen II/003/GO/00.

Z materiału w postaci granulatu wykonano metodą prasowania tłocznego (ciśnienie 9 MPa) płytki kwadratowe o wymiarach 140 × 140 mm i grubości 6 mm. Z płytek tych frezowano próbki o kształcie jak na rys. 10.

Zastosowana metoda, mimo iż dość czasochłonna, pozwoliła na otrzymanie jednorodnego materiału pozbawionego orientacji, która występowałaby na przykład w przypadku próbek wtryskiwanych.

Przed wykonywaniem badań próbki klimatyzowano przechowując je przez 10 dni w pomieszczeniu, w którym odbywały się próby.



Rys. 10. Próбка użyta do badań.

4.2. Program badań. Dla otrzymania uogólnionego równania stanu wykonywano próby pełzania materiału nienapromieniowanego oraz napromieniowanego w akceleratorze liniowym trzema różnymi dawkami promieniowania elektronowego. Dawki te wynosiły: 22×10^4 J/kg, 62×10^4 J/kg i 90×10^4 J/kg. Różnie napromieniowane próbki poddano pełzaniu w trzech różnych temperaturach: 21°C, 41°C, 61°C. W ten sposób powstała możliwość znalezienia parametrów modeli reologicznych w zależności od pochłoniętej dawki promieniowania i temperatury. Wprowadzoną numerację poszczególnych prób przedstawia tablica 1.

Tabela 1. Numeracja prób w zależności od temperatury i dawki napromieniowania

Dawka [$\times 10^4$ J/kg]	0	22	62	90
Temperatura (°C)				
21	1	2	3	4
41	5	6	7	8
61	9	10	11	12

Dla każdej kombinacji temperatury i dawki (każdego numeru w tabeli 1) wykonano po trzy próby pelzania w celu uśrednienia wyników. Następnie, posługując się metodą numeryczną, obliczono parametry modelu o budowie szeregowej dla każdego numeru próby.

Aproksymacji numerycznej podlegała składowa odkształceń sprężystych opóźnionych opisana równaniem (3). Dla wyznaczenia występujących w tym równaniu czterech parametrów $E_0, E_1, \lambda_0, \lambda_1$ daje się wykorzystać tylko równanie (4) będące warunkiem początkowym. W tym ostatnim równaniu $\sigma = \text{const}$ jest znane, a $\varepsilon_E(\infty)$ daje się łatwo znaleźć na wykresie pelzania jako wysokość asymptoty, do której zmierza ta składowa. Jak wynika z rys. 6, a także z równania (3), asymptota ta leży na wysokości równej sumie współrzędnych asymptot dla obu modeli Kelvina-Voigta. Dla potrzeb obliczeń numerycznych oznaczono:

- wielkość znaną z eksperymentu $\varepsilon_E(\infty)$ jako A_{nom} ,
- wielkość szukaną $\frac{\sigma}{E_0}$ jako A (wobec tego $\frac{\sigma}{E_1} = A_{\text{nom}} - A$).

Korzystając poza tym z oznaczenia $T0 = \frac{\lambda_0}{E_0}$ i $T1 = \frac{\lambda_1}{E_1}$ równaniu (3) można nadać postać

$$\varepsilon_E(t) = A \left(1 - e^{-\frac{t}{T0}} \right) + (A_{\text{nom}} - A) \left(1 - e^{-\frac{t}{T1}} \right) \quad (16)$$

Równanie (16) ma trzy nieznanne parametry: $A, T0$ i $T1$. Przy użyciu maszyny cyfrowej, dla zadanych przedziałów, znaleziono takie wartości $A, T0, T1$, dla których pokrywanie się funkcji analitycznej $\varepsilon_E(t)$ opсанej równaniem (16) z wynikami eksperymentalnymi jest najlepsze. Kryterium najlepszej zbieżności przebiegów przyjęto w postaci

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon_{i\text{EKSPER.}} - \varepsilon_{i\text{ANALIT.}})^2 \rightarrow \min.$$

Dokonano tego w kilku etapach, zawężając stopniowo przedziały poszukiwania parametrów. Na podstawie znalezionych parametrów $A, T0$ i $T1$, posługując się dodatkowo równaniem (4), obliczono parametry modelu w zależności od temperatury i dawki promieniowania. Następnie, posługując się układami równań zawartymi na stronie 273, na podstawie znanych parametrów modelu o budowie szeregowej wyliczono parametry modelu równoważnego o budowie równoległej. Wyliczone parametry przedstawiono w sposób analogiczny, jak parametry modelu o budowie szeregowej.

Posługując się powyższymi równaniami znaleziono również liczbowe wartości parametrów równania stanu, uzależnione od dawki napromieniowania i temperatury.

W celu weryfikacji znalezionych parametrów modeli wykonano badania sprawdzające na maszynie wytrzymałościowej typu „INSTRON”. Każdą próbę (wg tabeli 1) wykonano wg następującego programu:

- rozciąganie ze stałą prędkością ok. 6 mm/min,
- zatrzymanie uchwytu (relaksacja czyli rozciąganie z prędkością równą zero),
- cofanie uchwytu ze stałą prędkością ok. 2 mm/min,
- rozciąganie z prędkością ok. 2 mm/min.

Dla każdego numeru próby (tabela 1) wykonano trzy pomiary w celu uśrednienia wyników.

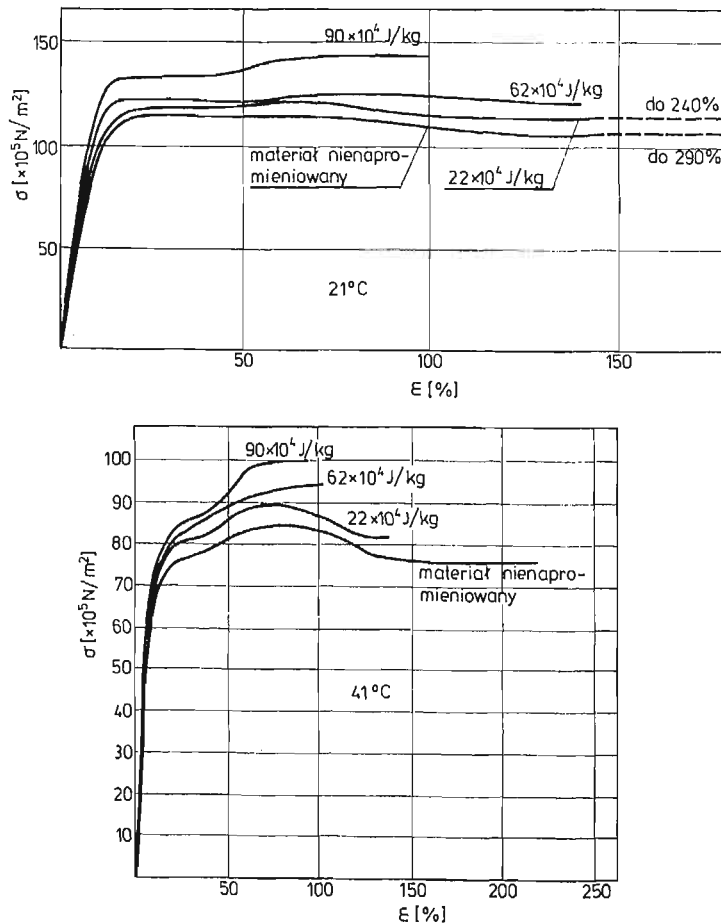
Uzyskaną na wykresach siłę przeliczono na naprężenie, dzieląc ją przez przekrój bieżący.

Otrzymane wyniki eksperymentalne porównano z wynikami uzyskanymi analitycznie przy użyciu wzorów (14) i (15) na podstawie znanych parametrów modeli.

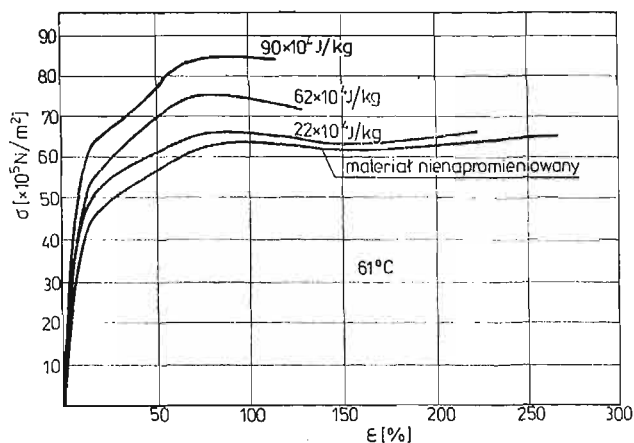
Jako badania dodatkowe mające na celu lepsze scharakteryzowanie materiału wykonano próby rozciągania statycznego oraz oznaczono stopień krystaliczności i zawartość fazy usieciowanej.

Wyniki prób rozciągania statycznego przedstawiają rysunki 11 i 12.

Stopień krystaliczności oznaczono metodą rentgenowską w Pracowni Fizyki Polimerów IPPT PAN. W tym celu naświetlano specjalną kliszę promieniami X , które na swej drodze napotykały badaną próbkę. W efekcie otrzymywano po wywołaniu kliszy współosiowe okręgi o różnej jasności, co związane jest z dyfrakcją promieni X przechodzących przez badany materiał. Wykonując następnie promieniowe fotometrowanie kliszy otrzymano wykres zależności natężenia światła przechodzącego przez kliszę od odległości od



Rys. 11. Krzywe rozciągania statycznego z prędkością 150 mm/min ($\dot{\epsilon} = 0,0455$ s⁻¹) w temperaturach 21°C i 41°C.

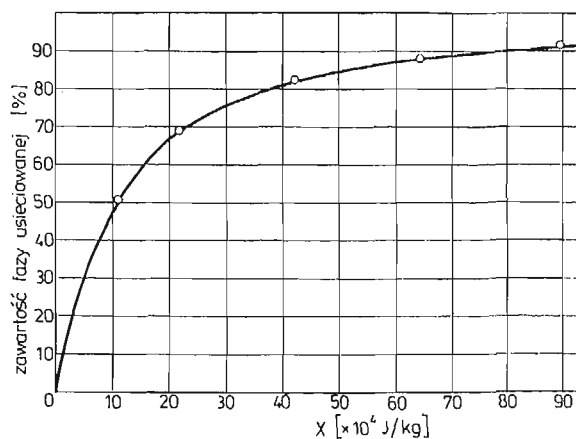


Rys. 12. Krzywe rozciągania statycznego z prędkością 150 mm/min ($\dot{\epsilon} = 0,0455 \text{ s}^{-1}$) w temperaturze 61°C.

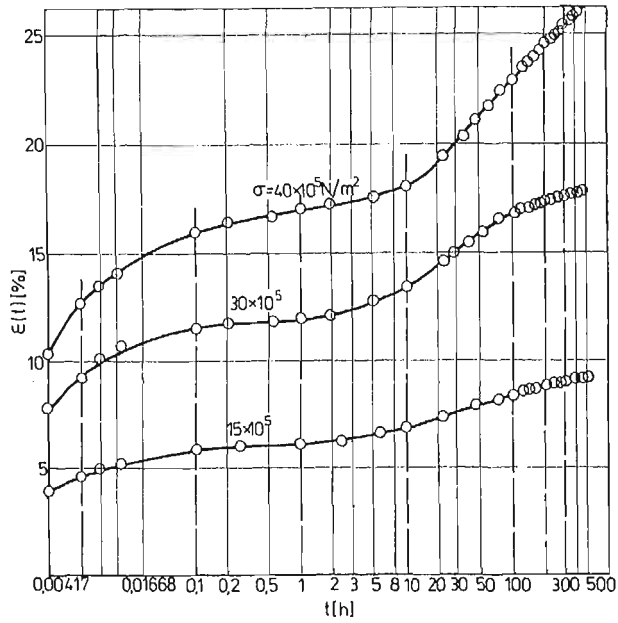
środku kliszy. Procentową zawartość fazy krystalicznej wyliczono [21], [22] na podstawie stosunku odpowiednich pól na wykresie.

Zawartość fazy usieciowanej ustalono metodą ekstrakcji we wrzącym ksylenie w Zakładzie Chemii Radiacyjnej Instytutu Badań Jądrowych w Warszawie. W tym celu próbkę o masie początkowej 0,4 g po czterech godzinach ekstrakcji w 1000 g ksylenu ekstrahowano przez jedną godzinę w świeżym, wrzącym ksylenie. Nie rozpuszczoną pozostałość próbki suszono i ważono na wadze analitycznej z dokładnością do 0,0001 g. Stopień usieciowania określono procentową zawartością frakcji nierozpuszczalnych w odniesieniu do wyjściowej masy próbki przed ekstrakcją. Wyniki przedstawia rys. 13.

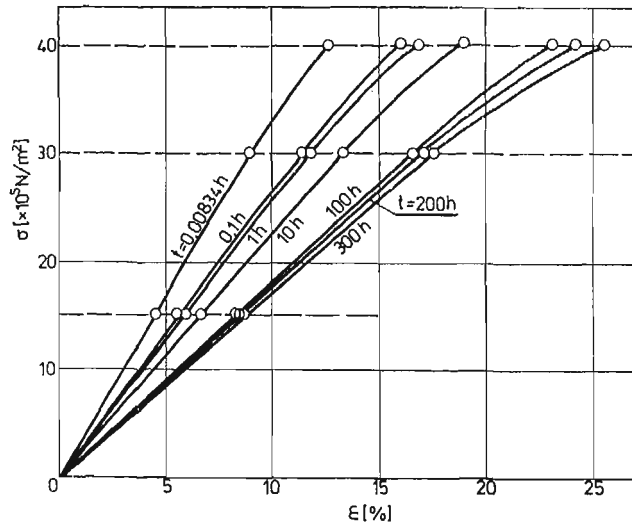
W celu dokładnego ustalenia zakresu liniowości wykonano dla każdego numeru próby badania pełzania przy różnych naprężeniach. I tak w temperaturach 21°C i 41°C (numery prób od jednego do ośmiu) wykonano próby pełzania dla naprężeń 20, 45, 60 i $80 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, a w temperaturze 61°C (numery prób od dziewięciu do dwunastu) dla naprężeń



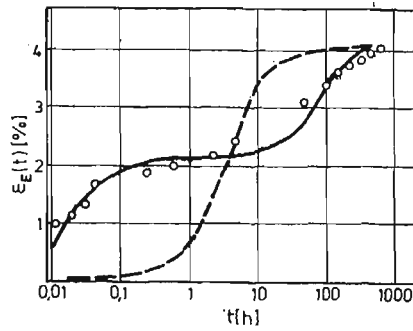
Rys. 13. Wpływ pochłoniętej dawki promieniowania na zawartość fazy usieciowanej.



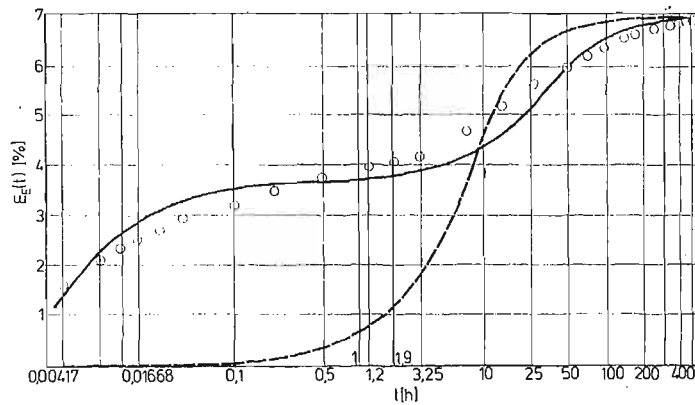
Rys. 14. Krzywe pełzania wykonane w temperaturze 61°C dla trzech różnych poziomów naprężeń dla materiału napromieniowanego dawką 22×10^4 J/kg.



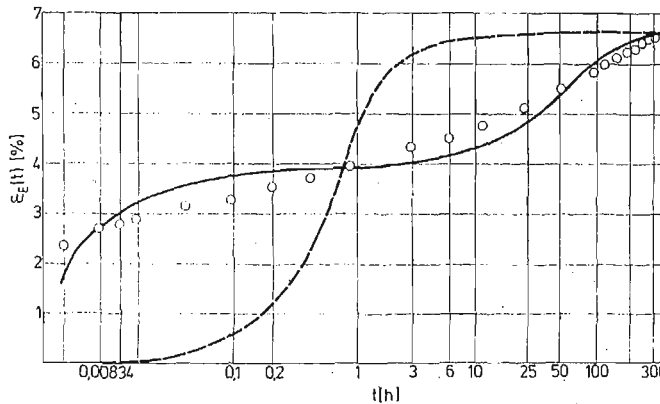
Rys. 15. Krzywe izochronowe wykonane na podstawie krzywych pełzania (rys. 14) dla siedmiu różnych czasów



Rys. 16. Porównanie aproksymacji numerycznej (linia ciągła) i aproksymacji pojedynczym modelem Kelvina-Voigta (linia przerywana) pełzania polietylenu (punkty) w temp. 41°C napromieniowanego dawką 90×10^4 J/kg.



Rys. 17. Porównanie aproksymacji numerycznej (linia ciągła) i aproksymacji pojedynczym modelem Kelvina-Voigta (linia przerywana) pełzania polietylenu (punkty) w temp. 61°C napromieniowanego dawką 62×10^4 J/kg.



Rys. 18. Porównanie aproksymacji numerycznej (linia ciągła) i aproksymacji pojedynczym modelem Kelvina-Voigta (linia przerywana) pełzania polietylenu (punkty) w temp. 61°C napromieniowanego dawką 90×10^4 J/kg.

15, 30 i 40×10^5 N/m². Na podstawie otrzymanych w ten sposób krzywych pełzania wykonano krzywe izochronowe dla czasów: 0,00834 h; 0,1 h; 1 h; 10 h; 100 h; 200 h; 300 h. Krzywe pełzania i krzywe izochronowe dla próby nr 10 pokazują przykładowo rys. 14 i 15. Na podstawie krzywych izochronowych ustalono, że naprężenia 45×10^5 N/m² dla temperatur 21°C i 41°C oraz 30×10^5 N/m² dla temperatury 61°C odpowiadają zakresowi liniowego zachowania się materiału.

4.3. **Dyskusja wyników.** Aproksymując krzywe pełzania przy użyciu maszyny cyfrowej otrzymano dobrą zgodność aproksymacji z wynikami eksperymentalnymi. Rys. 16, 17, 18 przedstawiają przykładowo krzywe pełzania dla prób nr 8, 11 i 12 oraz ich aproksymację numeryczną. Zwraca uwagę dobra zbieżność tych krzywych w porównaniu z przypadkiem aproksymacji pojedynczym modelem Kelvina-Voigta. Istniejąca w dalszym ciągu rozbieżność związana jest z zastosowaną techniką aproksymacji przy pomocy modeli mechanicznych. Widoczna wada, nie mająca dla zastosowań inżynierskich większego znaczenia, kompensowana jest znaczną prostotą tego rodzaju aproksymacji.

Ostatecznym efektem pracy jest uzależnienie parametrów:

- modelu o budowie szeregowej (rys. 19)
- modelu o budowie równoległej (rys. 20),
- równania stanu (rys. 21),

od temperatury i stopnia napromieniowania.

Szerzej zostaną omówione jedynie zmiany parametrów modeli, ponieważ parametry równania stanu nie mają interpretacji fizykałnej.

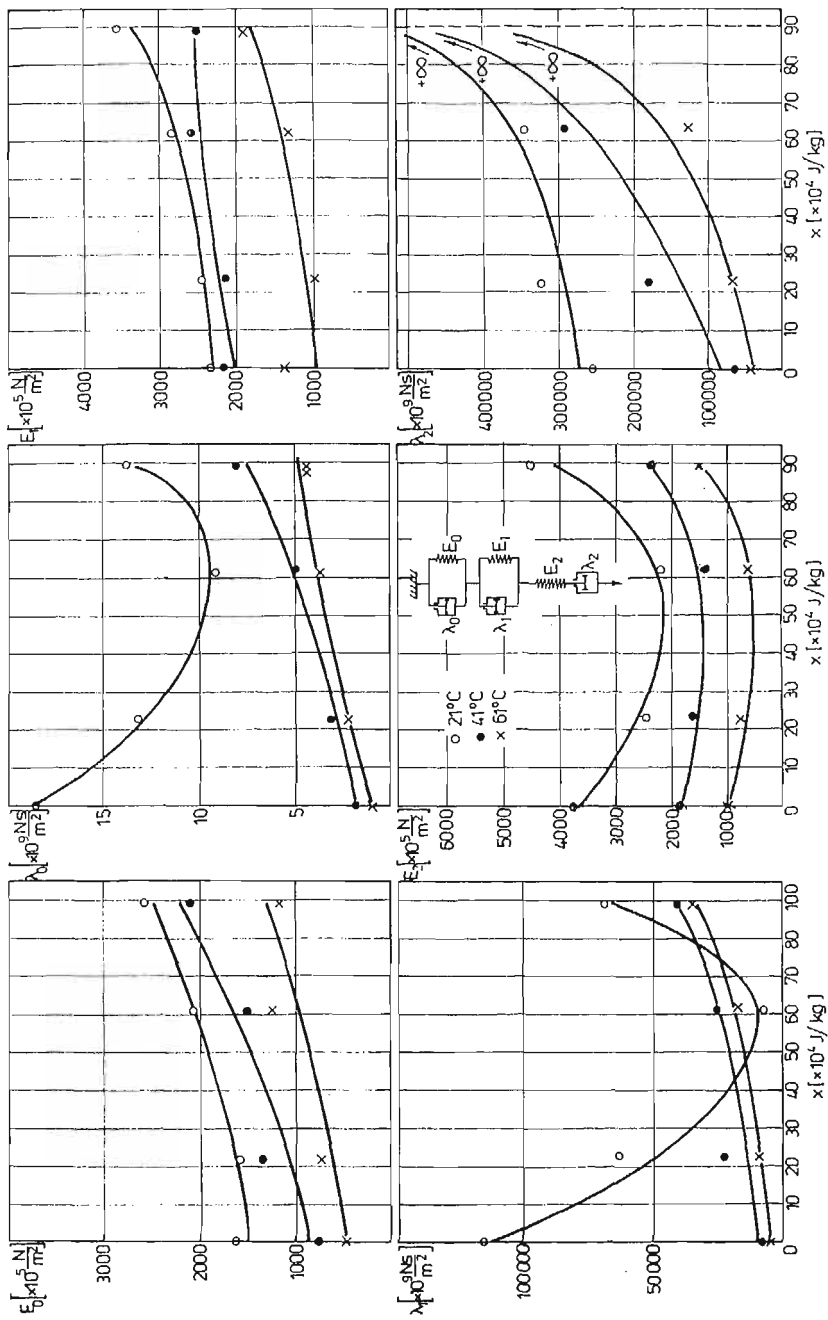
Parametry modelu o budowie szeregowej (rys. 19) uzyskano bezpośrednio na podstawie krzywych pełzania. Z rysunku 19 wynika, że sprężystości E_0 i E_1 związane ze składową odkształceń sprężystych opóźnionych wzrastają wraz ze zwiększaniem się stopnia napromieniowania we wszystkich trzech temperaturach. Daje się to wytłumaczyć tym, że usieciowanie utrudnia prostowanie się makrocząsteczek. (Jest to mechanizm molekularny odkształceń sprężystych opóźnionych). Wartości obu sprężystości E_0 i E_1 dla każdej dawki napromieniowania obniżają się wraz z podwyższeniem temperatury.

Lepkości λ_0 i λ_1 związane z odkształceniami sprężystymi opóźnionymi wykazują dla temperatur 41° i 61°C stały wzrost wraz ze zwiększaniem dawki napromieniowania, natomiast dla temperatury 21°C wykazują minima (dla dawki rzędu $68 - 70 \times 10^4$ J/kg), co odpowiada stopniowi usieciowania ok. 85%. Można przypuszczać, że minima te związane są z destrukcją tlenową przy niewystarczającym jeszcze stopniu usieciowania.

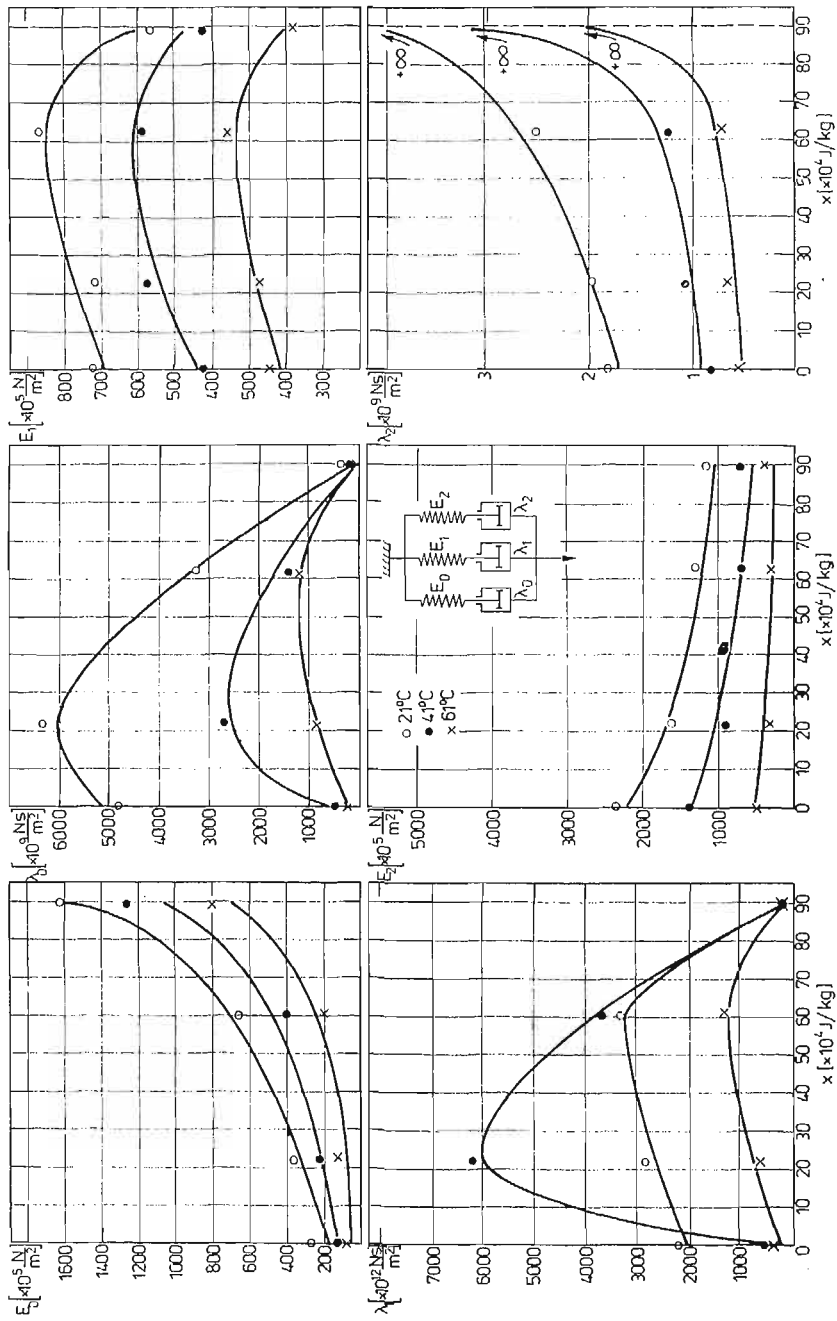
Zaobserwowany wzrost wartości λ_0 i λ_1 zachodzący w podwyższonych temperaturach wraz ze wzrostem napromieniowania tłumaczymy następująco: w temperaturach 41° - 61°C, w porównaniu z temperaturą 21°C, zachodzi niewielki spadek krystaliczności (z 47% na 42%) oraz spadek lepkości fazy nieusieciowanej. Natomiast w fazie usieciowanej stosowane temperatury powodują bardzo nieznaczne zmiany. Można więc przypuszczać, że zwiększając stopień usieciowania materiału powoduje się mniejszą jego wrażliwość na wszelkie zmiany zachodzące w fazie nieusieciowanej, ponieważ zawartość tej fazy jest bardzo mała.

Wielkość E_2 związana z odkształceniem sprężystym wyrażona w funkcji napromieniowania ma podobny przebieg jak moduł Younga wyznaczony z próbki rozciągania statycznego.

Podobne wyniki uzyskano w pracy [9].



Rys. 19. Parametry modelu o budowie szeregowej w funkcji temperatury i dawki promieniowania.



Rys. 20. Parametry modelu o budowie równoległej w funkcji temperatury i dawki promieniowania.

Dla każdej temperatury istnieje minimum wielkości E_2 w zakresie dawek $50 - 60 \times 10^4$ J/kg. Stąd (a także przy uwzględnieniu wielkości λ_0 i λ_1 w temperaturze 21°C) wynika, że dawka około 60×10^4 J/kg jest najmniej korzystna, gdyż przy niewystarczającym jeszcze wówczas stopniu usieciowania występują dość silne efekty degradacji materiału. Degradacji tej można by uniknąć, gdyby materiał napromieniowany był w próżni.

Lepkość λ_2 związana z płynięciem newtonowskim wykazuje stały wzrost przy napromieniowaniu we wszystkich temperaturach. Można to tłumaczyć tym, że zwiększające się usieciowanie ogranicza coraz bardziej możliwość przesuwania się całych łańcuchów względem siebie (jest to mechanizm molekularny płynięcia newtonowskiego). Dawka 90×10^4 J/kg i związany z nią stopień usieciowania równy 90% uniemożliwia poruszanie się łańcuchów makrocząsteczek względem siebie. W wyniku tego wartość lepkości λ_2 rośnie do nieskończoności. Oznacza to, że przy dawce 90×10^4 J/kg materiał pozbywa się składowej newtonowskiej przy pełzaniu, co jest zjawiskiem korzystnym.

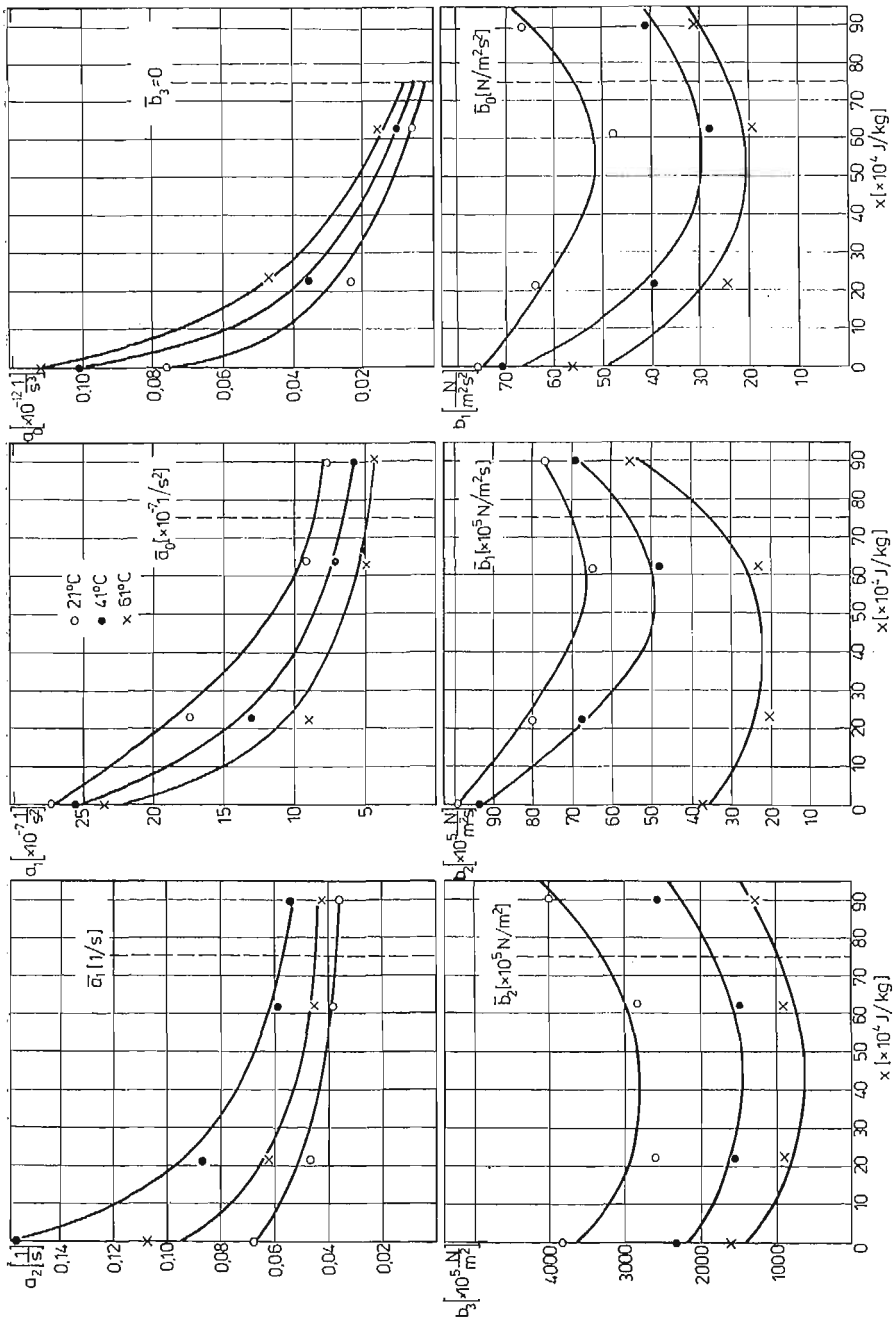
Przy dawce 90×10^4 J/kg pojawia się już wyraźnie żółknięcie materiału. Nie wykonano badań dla wyższych dawek. Należy jednak przypuszczać, że po przekroczeniu dawki $100 - 110 \times 10^4$ J/kg nastąpiłoby pogorszenie właściwości materiału związane m.in. z destrukcją tlenową. Biorąc to pod uwagę oraz zestawiając zmiany wszystkich sześciu parametrów można dawkę 90×10^4 J/kg uznać za optymalną dla tego gatunku polietylenu.

Równoważny model o budowie równoległej (rys. 20), którego parametry zostały obliczone na podstawie znanych parametrów modelu o budowie szeregowej, reprezentuje procesy relaksacyjne.

Zwraca uwagę podobny charakter zmian parametrów λ_0 i λ_1 w zależności od dawki we wszystkich stosowanych temperaturach. Parametry te po osiągnięciu pewnego ekstremum przybierają wartości bardzo małe. Jeśli zestawić to ze zmianami sprężystości E_0 i E_1 , to dla dawki 90×10^4 J/kg otrzyma się bardzo małe czasy relaksacji (gdyż $\tau = \frac{\lambda}{E}$).

Procesy relaksacyjne w części materiału symulowanej parametrami o indeksach 1 i 0 będą więc przy dawkach $40 - 60 \times 10^4$ J/kg przebiegały dość wolno, natomiast przy dawce 90×10^4 J/kg — bardzo szybko. Można przypuszczać, że procesy te związane są z fazą krystaliczną materiału, w której przy dużych dawkach następuje minimalny spadek krystaliczności i degradacja przy jednoczesnym braku sieciowania. Natomiast lepkość λ_2 wykazuje przy wszystkich temperaturach stały wzrost, z osiągnięciem wartości $+\infty$ dla dawki 90×10^4 J/kg. Oznacza to, że w części bezpostaciowej materiału, którą hipotetycznie reprezentują parametry z indeksem 2, dla dawki 90×10^4 J/kg nie zachodzą żadne procesy relaksacyjne, tzn. że faza ta zachowuje się jako ciało idealnie sprężyste. Jest to oczywiście duże uproszczenie: w rzeczywistym materiale występują również pośrednie czasy relaksacji w przedziale między zerem i nieskończonością. Model reprezentujący tylko trzy czasy relaksacji, podobnie jak równoważny mu model o budowie szeregowej, jest zbyt ubogi do dokładnej reprezentacji mechanizmów molekularnych występujących w materiale. Ponieważ jednak celem pracy jest opis makroskopowy zachowania się materiału, jedynym kryterium poprawności przyjętego modelu jest zgodność tego modelu z wynikami eksperymentalnymi.

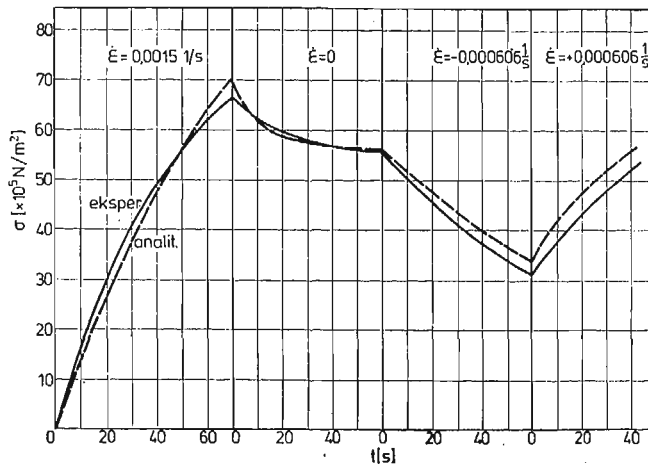
Parametry równania stanu w funkcji temperatury i pochłonięte dawki promieniowania



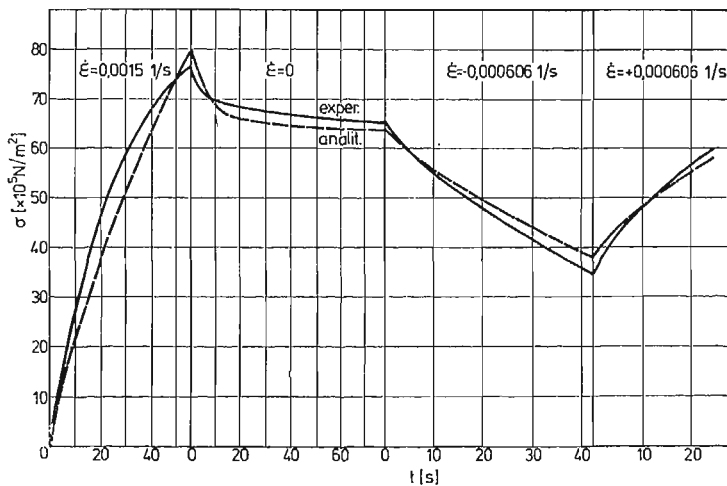
Rys. 21. Parametry równania stanu w funkcji temperatury i dawki promieniowania.

przedstawia rys. 21. Poprzednio stwierdzono, że przy dawce 62×10^4 J/kg materiał wykazuje jeszcze płynięcie newtonowskie, natomiast przy dawce 90×10^4 J/kg nie wykazuje go.

W zakresie dawek pośrednich nie wykonano badań, można jednak postawić hipotezę, że w zakresie tym (np. dla dawki 75×10^4 J/kg) następuje jakościowa zmiana zachowania się materiału, polegająca na zaniku newtonowskiego płynięcia. Zmianie tej z punktu widzenia interpretacji matematycznej odpowiada przejście od modelu sześcioczęściowego do pięcioczęściowego, czyli przejście od różniczkowego równania stanu trzeciego rzędu do równania drugiego rzędu. Dlatego na rys. 21 zaznaczono zmianę parametrów dla hipotetycznej dawki około 75×10^4 J/kg, która odpowiada przejściu od modelu sześcioc-



Rys. 22. Porównanie krzywej analitycznej i eksperymentalnej przy wielostopniowym rozciąganiu w temp. 41°C polietylenu nienapromienianego.



Rys. 23. Porównanie krzywej analitycznej i eksperymentalnej przy wielostopniowym rozciąganiu w temp. 41°C polietylenu napromienianego dawką 22×10^4 J/kg.

elementowego do pięcioelementowego, czyli od równania różniczkowego trzeciego rzędu do równania różniczkowego drugiego rzędu.

Badania weryfikujące wybranych modeli reologicznych i związanych z nimi równań stanu potwierdziły prawidłowość wykonywanych obliczeń oraz słuszność założeń wyjściowych. Zwraca uwagę fakt dużej zgodności wyników eksperymentalnych i przewidzianych przez obliczenia analityczne, mimo że rzędy wielkości czasów i prędkości przy pełzaniu i próbach sprawdzających znacznie się od siebie różniły. Dla wszystkich dwunastu prób zgodność ta jest dobra. Rysunki 22 i 23 przedstawiają przykładowo takie porównanie dla prób nr 5 i nr 6.

5. Wnioski

Na podstawie wykonanej pracy daje się wyciągnąć następujące wnioski:

— zaproponowany model sześćelementowy opisujący badany materiał okazał się wystarczająco dokładny do aproksymacji procesu pełzania, w zakresie 300 godz. jak i innych prób wykonanych w pracy,

— zamiast kłopotliwego (warunki początkowe) rozwiązywania ogólnego równania stanu dla wybranego procesu reologicznego korzystniej jest operować modelami reologicznymi, które tym równaniom odpowiadają,

— wybór modelu o budowie szeregowej lub równoległej uzależniony jest od typu procesu reologicznego, który ma być symulowany zachowaniem się modelu, wyliczone w ten sposób parametry mogą być podstawą do ułożenia odpowiednich tablic materiałowych dla obliczeń inżynierskich,

— czynnikami mającymi wpływ na własności materiału jest usieciowanie i degradacja. Stopień krystaliczności nie zmienia się w sposób istotny,

— napromieniowanie dawką 90×10^4 J/kg powoduje zanik występowania płynięcia newtonowskiego. Jednak początki żółknięcia materiału przy zastosowaniu tej dawki dają powody do przypuszczeń, że jej przekroczenie spowoduje znaczne pogorszenie własności ze względu na degradację. W związku z tym dawkę 90×10^4 J/kg można uznać za optymalną.

6. Literatura

1. V. MINENKOV, I. V. STASENKO, *Pročnost detaliej iz plastmass*, Moskwa 1977
2. S. BUĆKO, E. CEGIELSKI, *Badanie własności mechanicznych poliamidu przy udarowym rozciąganiu*, Kraków 1976
3. J. J. GOLBERG, *Mechaničeskoe povedenie polimernych materialov*, Moskwa 1970
4. W. DERSKI, S. ZIEMBA, *Analiza modeli reologicznych*, Warszawa 1968, PWN
5. B. ŁĄCZYŃSKI, *Mechanika tworzyw wielkocząsteczkowych*, Warszawa Wyd. Polit. Warsz. 1977
6. J. M. WARD, *Własności mechaniczne polimerów jako tworzyw konstrukcyjnych*, Warszawa PWN 1975
7. J. GARBARSKI, *Prowadzenie prób pełzania przy użyciu prostego układu dźwigniowego*, Przegląd mechaniczny nr 4, 1978
8. J. GARBARSKI, *Analiza pełzania polietylenu sieciowanego radiacyjnie*, Praca doktorska Warszawa 1980 (praca niepublikowana)
9. E. BUTTA, A. CHARLESBY, *Dynamic Mechanical Properties of Irradiated Polyethylene*, Journal of Polymer Science, tom XXXIII, 1958

Резюме

ВЛИЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ НА РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ПОЛИЭТИЛЕНА

В работе определено уравнение состояния вязкоупругого материала, полагаясь на испытании на ползучесть при одноосном растяжении. Уравнение состояния принимает вид линейного дифференциального уравнения третьего порядка. Это уравнение достаточно точно имитирует поведение материала как в исходном испытании на ползучесть, так и в испытании на растяжение с постоянной скоростью, которое послужило верификационным тестом. Для упрощения расчетной стороны были применены механические модели вязкоупругости.

Испытуемым материалом был полиэтилен „Politen” П-003/GO/00 польского производства, который был подвержен ползучести в разных температурах, а также после облучения — разным дозам электронного излучения. Оказалось, что дозу $90 \cdot 10^4$ J/kg можно считать оптимальной точки зрения механических свойств материала.

Summary

THE EFFECT OF IRRADIATION AND TEMPERATURE ON THE RHEOLOGICAL
BEHAVIOUR OF POLYETHYLENE

The paper presents the evaluation of the state equation of the viscoelastic material using creep test as a basis. The state equation has the form of a linear differential equation of the third order. This is proved to be sufficient to simulate the behaviour of the material in the basic creep test as well as in the test of deformation at the constant strain rate which served as a verification. In order to simplify the calculations, mechanical models of viscoelasticity have been applied. All tests were performed on Polish polyethylene „Politen” П-003/GO/00, which underwent the creep tests in various temperatures and after being irradiated with various doses. The optimal irradiation dose was found, which, for this kind of material, is 90×10^4 J/kg.

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 czerwca 1983 roku

OCENA POWIERZCHNI PLASTYCZNOŚCI MATERIAŁÓW ANIZOTROPOWYCH NIELINIOWYCH METODĄ SPRĘŻENIA TERMO-MECHANICZNEGO

ZDZISŁAW GABRYSZEWSKI
BOGDAN PINDUR

*Politechnika Wroclawska
Instytut Materialoznawstwa
i Mechaniki Technicznej*

1. Wstęp

Wyznaczanie granicy plastyczności w złożonych stanach naprężeń jest jednym z podstawowych problemów teorii plastyczności. Stosowane powszechnie metody określania jej wartości polegają na wykorzystywaniu warunków plastyczności oraz związanych z nimi definicji naprężeń i odkształceń zastępczych, na których podstawie jest ona obliczana i wyznaczana z danych doświadczalnych. Taka metoda powszechnie stosowana do weryfikacji doświadczalnej, np. warunku plastyczności, a polegająca na korzystaniu przy przeprowadzaniu doświadczeń i opracowaniu danych doświadczalnych z wielkości wynikających z tego warunku (definicji intensywności naprężeń i intensywności odkształceń), musi budzić zastrzeżenia. Daje ona jednak stosunkowo dobre rezultaty dla klasy materiałów początkowo izotropowych liniowo-sprężystych. Zastosowanie jej do materiałów anizotropowych wiąże się ponadto z koniecznością stosowania wielkości zastępczych definiowanych różnie nawet dla jednakowych warunków plastyczności [5]. Dodać należy, że głównym mankamentem anizotropowych warunków plastyczności z punktu widzenia ich praktycznego wykorzystania jest konieczność wcześniejszego poznania własności materiałów (stałych materiałowych) we wszystkich charakterystycznych kierunkach, co często bywa technicznie niewykonalne. Z tego powodu, w celu umożliwienia zastosowania, teorie te bywają w sposób dość dowolny upraszczane. Prowadzi to wprawdzie do ograniczenia ilości wspomnianych stałych, ale w konsekwencji jednocześnie utrudnia spełnienie wszystkich stawianych tym teoriom wymagań. Z zagadnieniem tym wiążą się również trudności w rzeczywistym zapewnieniu zakładanej z góry niezmienniczości anizotropowych krzywych odkształcania względem rodzaju stanu naprężenia. Powyższe metody stosowane są głównie do materiałów liniowo-sprężystych.

Pewną szansę ominięcia występujących w przypadku materiałów anizotropowych i nieliniowych trudności daje proponowana w niektórych pracach [1] możliwość zastosowania do wyznaczania powierzchni plastyczności zjawiska sprężenia termo-mechanicznego biernego.

Celem pracy było potraktowanie zjawiska sprężenia termo-mechanicznego jako narzędzia do określania granicy plastyczności w ogólnym przypadku obciążania (proste i złożone drogi obciążania) i rodzaju materiału (materiały anizotropowe początkowo liniowe i nieliniowe) oraz porównania możliwości metody sprężenia termomechanicznego z możliwościami tradycyjnych metod oceny powierzchni plastyczności.

2. Wyznaczanie powierzchni plastyczności za pomocą metody sprężenia termo-mechanicznego STM

Obciążany w warunkach adiabatycznych materiał wykazuje w zakresie odkształceń sprężystych zmiany temperatury, które mogą być dodatnie, ujemne lub w szczególnym przypadku zerowe [4], zależnie od kombinacji rodzaju anizotropii materiału z rodzajem obciążania [6]. Po wejściu materiału w obszar odkształceń plastycznych zmiany temperatury są zawsze dodatnie i przybierają charakter spontaniczny. Związane to jest z przemianą jednego ze składników pracy odkształceń plastycznych — energii dyssypacji w ciepło. U podstaw określania granicy plastyczności za pomocą metody sprężenia termo-mechanicznego leży jakościowe różnice w przebiegu adiabatycznych zmian temperatury obciążanego materiału w obszarze odkształceń sprężystych i plastycznych. Według tej metody wyznaczanie granicy plastyczności sprowadza się do wskazania na wykresie zależności adiabatycznych zmian temperatury obciążanego materiału od naprężeń miejsca, od którego począwszy obserwuje się spontaniczny wzrost temperatury. Dla branych tu pod uwagę możliwości określania wejścia materiału w stan plastyczny zaproponowanie definicji granicy plastyczności jest stosunkowo łatwe, gdy wykres adiabatycznych zmian temperatury w zależności od naprężeń wykazuje w obszarze odkształceń sprężystych przebieg liniowy. W przypadku przebiegu nieliniowego pojawiają się trudności w sformułowaniu definicji granicy plastyczności.

W materiałach liniowo-sprężystych zależność zmian temperatury θ_a w adiabatycznym procesie obciążania od naprężeń przedstawia znany [6] związek

$$\theta_a = - \frac{T_0}{c_\sigma} \alpha_{ij} \sigma_{ij}, \quad (1)$$

w którym: T_0 — temperatura początkowa, c_σ — ciepło właściwe materiału przy stałych naprężeniach przyjmowane jako wielkość stała, α_{ij} — współczynniki rozszerzalności cieplnej w stanie naturalnym materiału ($\sigma_{ij} = 0$, $T = T_0$). Dla materiałów nieliniowo-sprężystych, w których związki fizyczne w obszarze odkształceń sprężystych przyjmują postać funkcji kwadratowej, można na podstawie rozważań termodynamicznych [7] wyprowadzić zależność

$$\theta_a = - \frac{T_0}{c_\sigma(\sigma_{ij}, T)} \left(\alpha_{ij} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \right), \quad (2)$$

gdzie: α_{ijkl} — współczynniki rozszerzalności cieplnej drugiego rzędu w stanie naturalnym materiału, T — chwilowa temperatura materiału.

Naprężenia σ_{ij} podczas obciążania mogą być uprzednio wyrażone zależnością

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\sigma_{pq}), \quad (3)$$

w której: σ_{pq} — jedna, dowolnie wybrana składowa tensora stanu naprężenia, $f_{ij}(\sigma_{pq})$ — 5 znanych funkcji. W szczególności funkcje $f_{ij}(\sigma_{pq})$ można przedstawić w postaci szeregu względem σ_{pq} . W przypadku, gdy zachodzi zależność

$$\sigma_{ij} = k_{ij}\sigma_{pq}, \quad (3a)$$

w której k_{ij} jest tensorem stałych współczynników, obciążenie nazwiemy prostym, a gdy zależność (3a) nie będzie spełniona — obciążeniem złożonym. Otrzymamy wówczas zależności:

$$\theta_a = -\frac{T_0}{c_\sigma} \alpha_{ij} f_{ij}(\sigma_{pq}), \quad \theta_a = -\frac{T_0}{c_\sigma} \alpha_{ij} k_{ij} \sigma_{pq}; \quad (4)$$

$$\theta_a = -\frac{T_0}{c_\sigma(\sigma_{ij}, T)} \left[\alpha_{ij} f_{ij}(\sigma_{pq}) + \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} f_{ij}(\sigma_{pq}) f_{kl}(\sigma_{pq}) \right], \quad (5)$$

$$\theta_a = -\frac{T_0}{c_\sigma(\sigma_{ij}, T)} \left(\alpha_{ij} k_{ij} \sigma_{pq} + \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} k_{ij} k_{kl} \sigma_{pq}^2 \right);$$

z których wynika, że korzystny, przy formułowaniu definicji granicy plastyczności, liniowy przebieg zależności adiabatycznych zmian temperatury θ_a od wybranej składowej σ_{pq} stanu naprężenia w zakresie odkształceń sprężystych będzie występował tylko w przypadku szczególnym, a mianowicie dla materiału liniowo-sprężystego obciążanego na prostych drogach obciążania.

W celu umożliwienia budowy definicji granicy plastyczności w przypadku gdy materiał jest nieliniowo-sprężysty, a obciążenie złożone, wprowadzono wielkość r^T określoną zależnością (6):

$$r^T = \frac{1}{c_\sigma(\sigma_{ij}, T)} \left(\alpha_{ij} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \right) = \frac{S_\sigma^T(\sigma_{ij})}{c_\sigma(\sigma_{ij}, T)}. \quad (6)$$

Przedstawia ona entropię S_σ^T w izotermicznym procesie obciążania przypadającą na jednostkę ciepła właściwego c_σ . Zależność (2) przyjmuje wówczas postać (7),

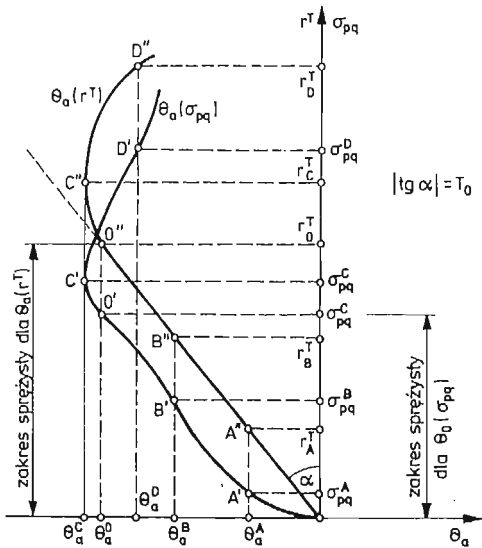
$$\theta_a = -T_0 \cdot r^T, \quad (7)$$

która ma tę zaletę, że w obszarze odkształceń sprężystych, niezależnie od rodzaju materiału i drogi obciążania, zależność adiabatycznych zmian temperatury θ_a od entropii r^T wykazuje pożądaną przebieg liniowy. Określanie granicy plastyczności polega na wskazaniu na wykresie zależności $\theta_a(r^T)$ takiego miejsca, od którego począwszy zależność ta nie jest już liniowa. Praktycznie, sporządzanie wykresu $\theta_a(r^T)$ w obszarze odkształceń sprężystych i plastycznych odbywa się na podstawie zarejestrowanej wcześniej krzywej zależności adiabatycznych zmian temperatury θ_a od jednej ze składowych stanu naprężenia σ_{pq} , przy jednoczesnej znajomości własności cieplnych materiału, tzn. współczynników rozszerzalności cieplnej α_{ij} , α_{ijkl} oraz funkcji ciepła właściwego $c_\sigma(\sigma_{ij}, T)$. Budowę krzywej zmian temperatury $\theta_a(r^T)$ przedstawia rys. 1. Propozycje różnych definicji granicy plastyczności przedstawiono na rys. 2. Za początek zakresu odkształceń plastycznych można umownie uważać:

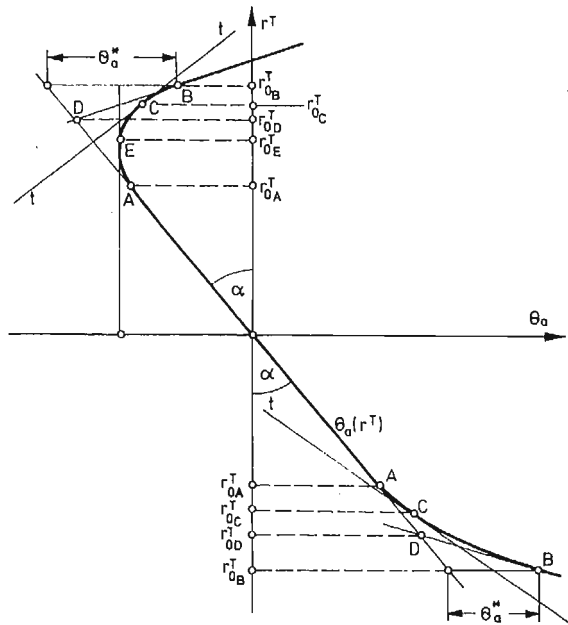
- 1) punkt *A*, odchylenia od przebiegu liniowego,
- 2) punkt *B*, odpowiadający umownie przyjętej wartości dodatniego przyrostu temperatury θ_a^* po odchyleniu się wykresu zmian temperatury od przebiegu prostoliniowego,

- 3) punkt C , odpowiadający określonemu nachyleniu stycznej do wykresu $\theta_a(r^T)$,
- 4) punkt D , wynikający ze schematyzacji wykresu zmian temperatury,
- 5) punkt E , dla którego $d\theta_a/dr^T = 0$ (dla $r^T > 0$).

Po wyznaczeniu wartości entropii r_0^T odpowiadającej granicy plastyczności pozostaje określić odpowiadające jej wartości składowych σ_{ij}^0 stanu naprężenia.



Rys. 1. Budowa krzywej zmian temperatury $\theta_a(r^T)$.



Rys. 2. Definicje granicy plastyczności.

3. Badania doświadczalne

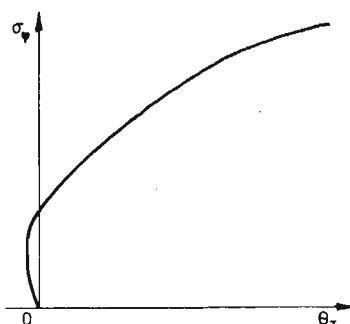
Badaniom został poddany technicznie czysty, polikrystaliczny cynk EO1 w postaci cienkościennych próbek rurowych. Badania obejmowały ustalenie własności mechanicznych materiału oraz pomiar granicy plastyczności metodą sprężenia termo-mechanicznego na następujących prostych drogach obciążania: rozciągania jednoosiowego w kierunku osiowym i obwodowym próbki, rozciągania dwuosiowego ($\sigma_z/\sigma_\varphi = 0,5$) i skręcania.

Obciążenia realizowano na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej o napędzie hydraulicznym, przy czym rozciąganie w kierunku osiowym próbki i skręcanie przeprowadzano w uchwytach maszyny, a rozciąganie obwodowe i dwuosiowe na drodze włączania do wnętrza próbek oleju. Do rejestracji zależności odkształceń i zmian temperatury próbek od naprężeń użyto układu urządzeń, w skład którego wchodziły: mostek tensometryczny AT 970, rejestratory Riken Denshi, ekstensometry z czujnikami oporowymi RL 120/6, termometr termistorowy z czujnikiem NTC 210, woltomierz V 524 i in.

Obciążanie próbek przeprowadzano przy stałych prędkościach zmian naprężeń wynoszących $\dot{\tau}_{z\varphi} \approx 0,5 \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-1}$ przy skręcaniu oraz $\dot{\sigma}_{max} \approx 1 \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-1}$ dla maksymalnych naprężeń występujących w pozostałych trzech drogach obciążania. Zmiany temperatury próbek podczas obciążania mierzono jednym czujnikiem w środku długości próbki na jej zewnętrznej powierzchni. Czas obciążania próbek wynosił około 50 s.

W przypadku rozciągania osiowego i skręcania wymagany z punktu widzenia rozważań termodynamicznych warunek adiabatywności obciążania był realizowany w przybliżeniu. Na podstawie pomocniczych doświadczeń [7] uznano, że stopień jego realizacji w środku długości próbki i w zastosowanym przedziale czasu obciążania jest wystarczający bez stosowania urządzeń specjalnych.

W przypadku rozciągania obwodowego i dwuosiowego realizowanych na drodze włączania do wnętrza próbek oleju zapewnienie quasi-adiabatywnych warunków obciążania stało się niemożliwe ze względu na wyraźny wzrost temperatury sprężonego oleju (rzędu 0,1 K dla stosowanych ciśnień). Mierzone na powierzchni zewnętrznej próbki nieadiabatyczne zmiany temperatury były wypadkową zmian temperatury materiału wskutek sprężenia termo-mechanicznego i nieustalanej wymiany ciepła między sprężanym olejem a próbką. Charakter tych zmian jest przedstawiony na rys. 3. W celu stworzenia możliwości odczytu granicy plastyczności z przebiegu nieadiabatywnych zmian temperatury



Rys. 3. Zmiany przyrostów temperatury próbki θ_z w funkcji naprężeń σ_φ .

dokonano analizy tego zagadnienia [7]. Punktem wyjścia było rozszerzone równanie przewodnictwa cieplnego [6], które przy założeniu izotropii przewodnictwa w materiale próbki i małych zmian temperatury przyjmuje postać

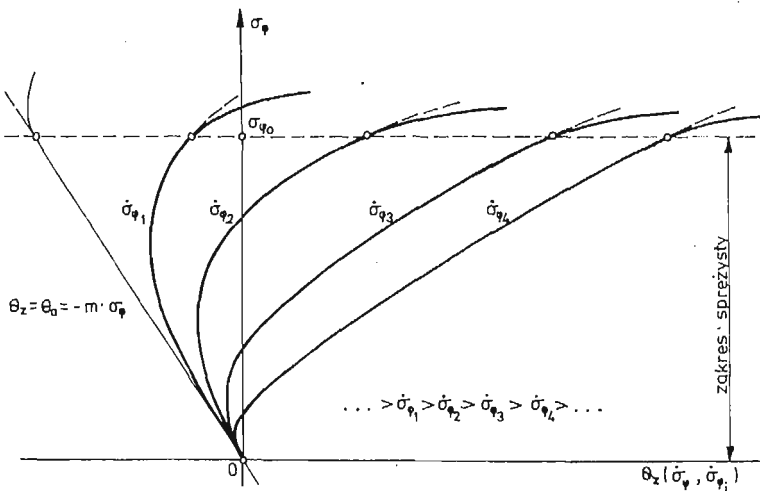
$$\lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + c_\sigma \frac{\partial}{\partial \tau} (\theta_a - \theta) = 0, \quad (8)$$

gdzie: λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego, c_σ — ciepło właściwe materiału próbki przy stałych naprężeniach, θ — chwilowa, całkowita zmiana temperatury próbki, θ_a — zmiana temperatury próbki związana ze sprzężeniem termo-mechanicznym, r, φ, z — współrzędne w walcowym układzie współrzędnych, τ — czas. Przy założeniach, że:

- 1) przewodnictwo ciepła w środku długości próbki, czyli w miejscu pomiaru temperatury zachodzi tylko w kierunku promieniowym;
- 2) rozkład zmian temperatury próbki wzdłuż jej promienia jest liniowy;
- 3) prędkość zmian naprężeń podczas obciążania jest stała — przyrosty temperatury θ_z na zewnętrznej powierzchni próbki w środku jej długości można aproksymować zależnością

$$\theta_z(\sigma_\varphi, \dot{\sigma}_{\varphi i}) = G(\dot{\sigma}_{\varphi i}) \cdot \sigma_\varphi^2 - m \cdot \sigma_\varphi, \quad (9)$$

gdzie: $G(\dot{\sigma}_{\varphi i})$ — funkcja prędkości zmian naprężeń obwodowych $\dot{\sigma}_{\varphi i}$, m — stała. Rodzinę krzywych $\theta_z(\sigma_\varphi, \dot{\sigma}_{\varphi i})$ dla różnych stałych prędkości zmian naprężeń $\dot{\sigma}_{\varphi i}$ przedstawia rys. 4. Począwszy od pewnej odpowiednio małej prędkości zmian naprężeń, którą można ustalić doświadczalnie, nieadiabaticzne przyrosty temperatury przyjmują w zakresie odkształceń sprężystych przebieg zbliżony do liniowego, co pozwala już wprowadzić definicję granicy plastyczności. W badaniach, przy pomiarach granicy plastyczności przyjęto definicję, według której materiał wchodzi w stan plastyczny w chwili odpowiadającej odchyleniu się krzywej adiabatycznych zmian temperatury od przebiegu prostoliniowego (dla rozciągania osiowego i skręcania) lub odchyleniu się krzywej nieadiabaticznych zmian



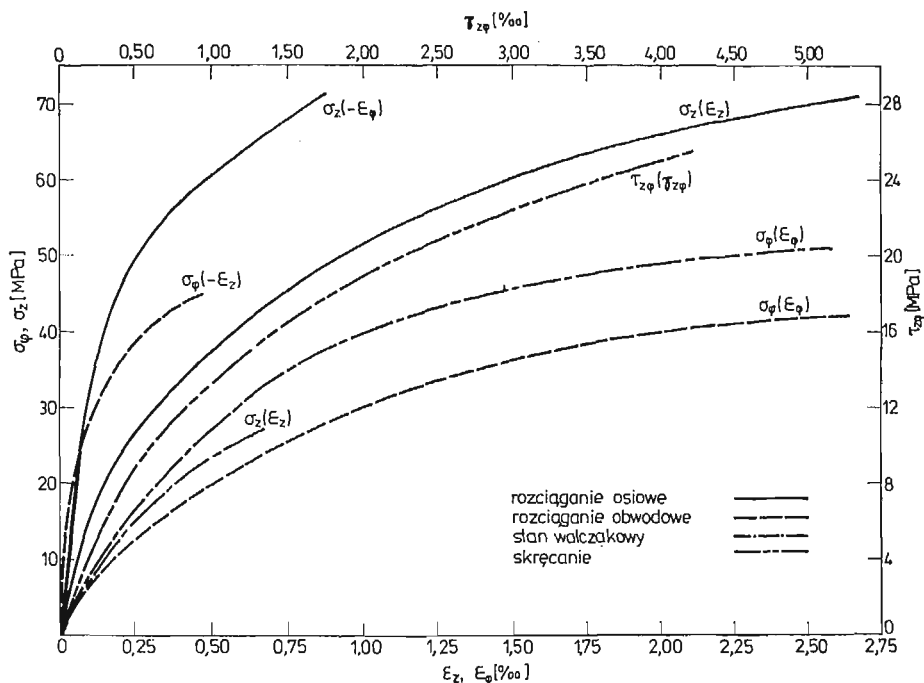
Rys. 4. Nieadiabaticzne krzywe zmian temperatury $\theta_z(\sigma_\varphi, \dot{\sigma}_{\varphi i})$.

temperatury od przebiegu quasiliniowego w zakresie sprężystym (rozciąganie obwodowe i dwuosiowe). Odchylenie to wskazuje fizykalnie na występowanie dyssypacji energii związanej z pojawieniem się odkształceń plastycznych.

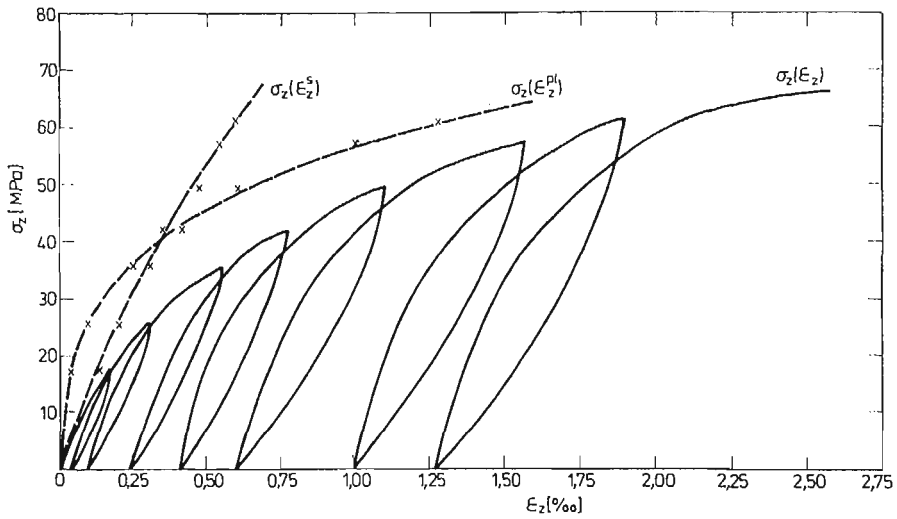
4. Wyniki badań doświadczalnych

Zależności naprężeń od odkształceń podczas rozciągania osiowego, obwodowego, dwuosiowego i skręcania przedstawiono na rys. 5. Wynika z nich wyraźna anizotropia związków fizycznych w kierunku osiowym i obwodowym próbki. Na wszystkich realizowanych drogach obciążania przeprowadzono próby polegające na wielokrotnym obciążeniu i odciążeniu próbek. Wykresy przedstawione na rys. 6 - 9 obrazują przebieg zależności naprężeń od odkształceń całkowitych w tych próbach oraz sporządzone na ich podstawie zależności naprężeń od odkształceń sprężystych i plastycznych. Wynika z nich, że na wszystkich drogach obciążania zależność naprężeń od odkształceń sprężystych jest nieliniowa, a od początku obciążania występują odkształcenia plastyczne.

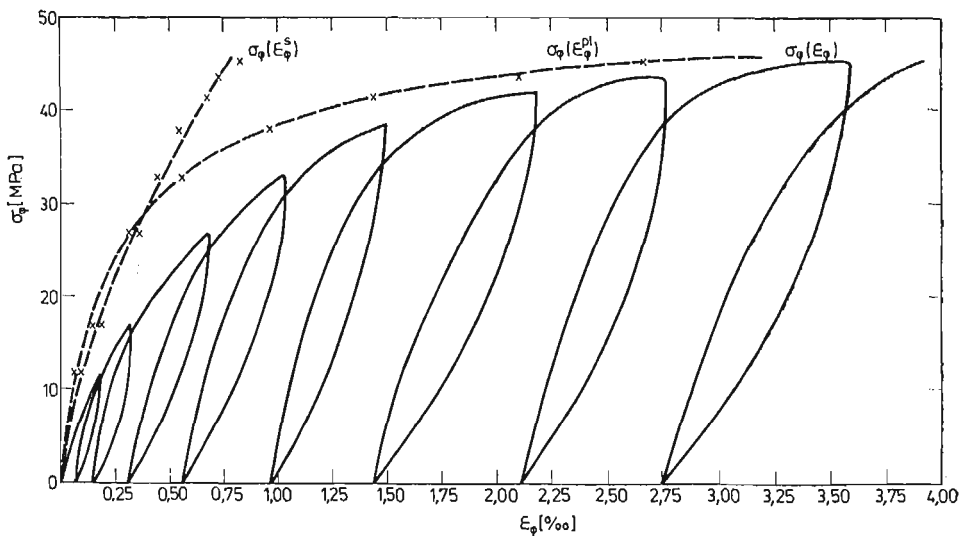
Zależność adiabatycznych zmian temperatury θ_a od naprężeń σ_z podczas rozciągania osiowego przedstawia dla jednej z próbek wykres na rys. 10. Zależność adiabatycznych zmian temperatury θ_a od naprężeń $\tau_{z\varphi}$ podczas skręcania przedstawia dla jednej z próbek rys. 11. Zgodnie z przyjętą definicją granicy plastyczności materiał wchodził w obu tych próbach w stan plastyczny w punktach odchylenia się wykresów zmian temperatury od przebiegów liniowych.



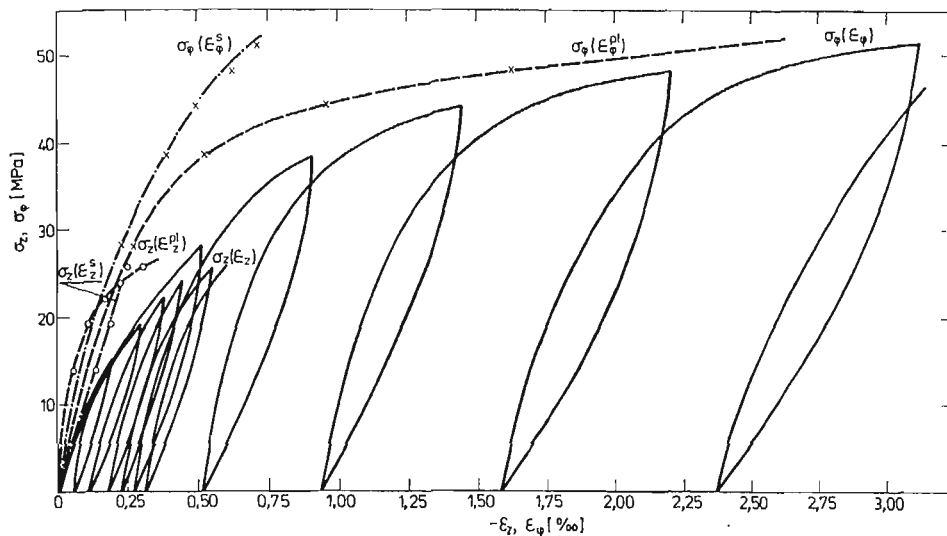
Rys. 5. Zależności naprężeń od odkształceń podczas rozciągania osiowego, obwodowego, dwuosiowego i skręcania.



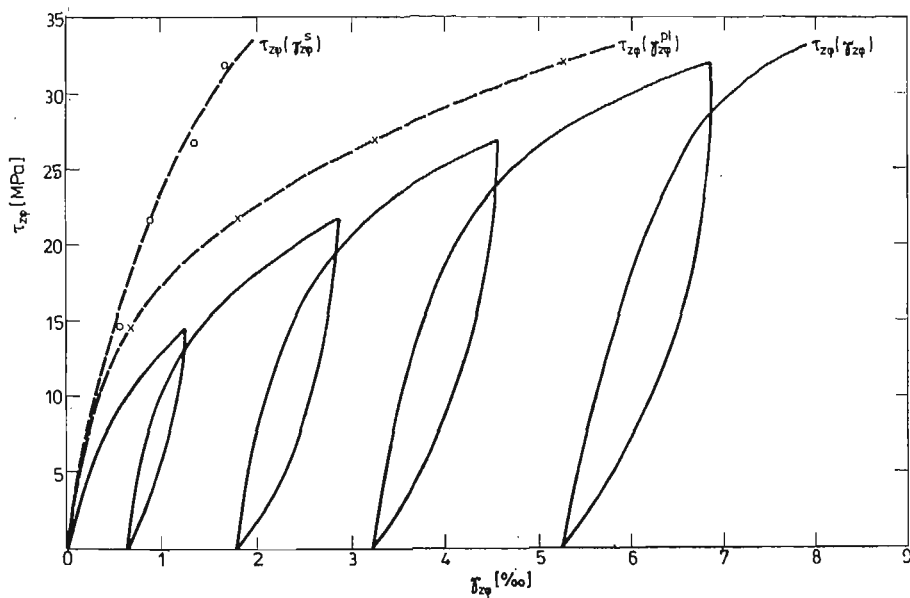
Rys. 6. Zależność naprężeń σ_z od odkształceń całkowitych ϵ_z , sprężystych ϵ_z^e i plastycznych ϵ_z^p podczas rozciągania osiowego.



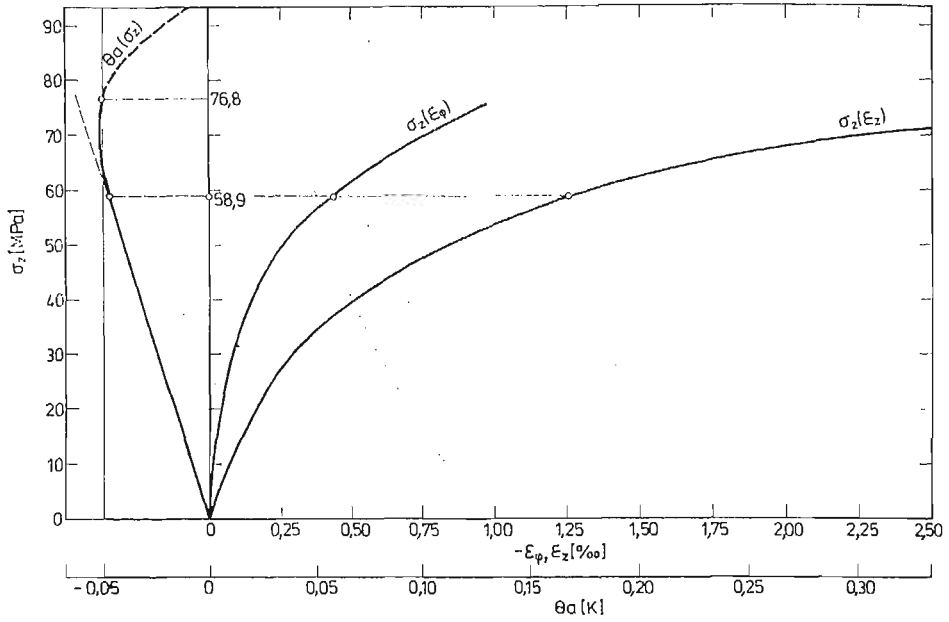
Rys. 7. Zależność naprężeń σ_ϕ od odkształceń całkowitych ϵ_ϕ , sprężystych ϵ_ϕ^e i plastycznych ϵ_ϕ^p podczas rozciągania obwodowego.



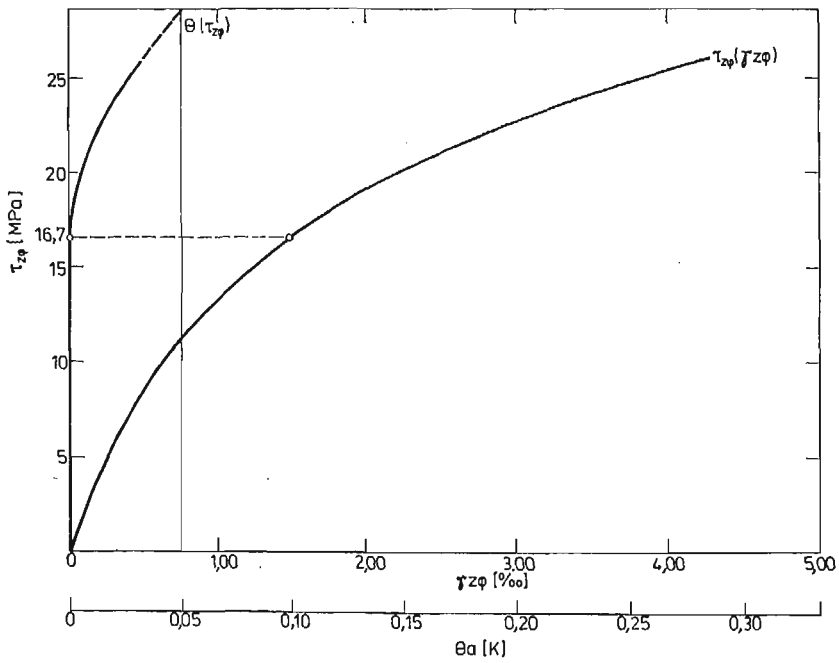
Rys. 8. Zależność naprężeń σ_x i σ_ϕ od odkształceń całkowitych ϵ_x i ϵ_ϕ , sprężystych ϵ_x^s i ϵ_ϕ^s oraz plastycznych ϵ_x^{pl} i ϵ_ϕ^{pl} podczas rozciągania dwuosiowego.



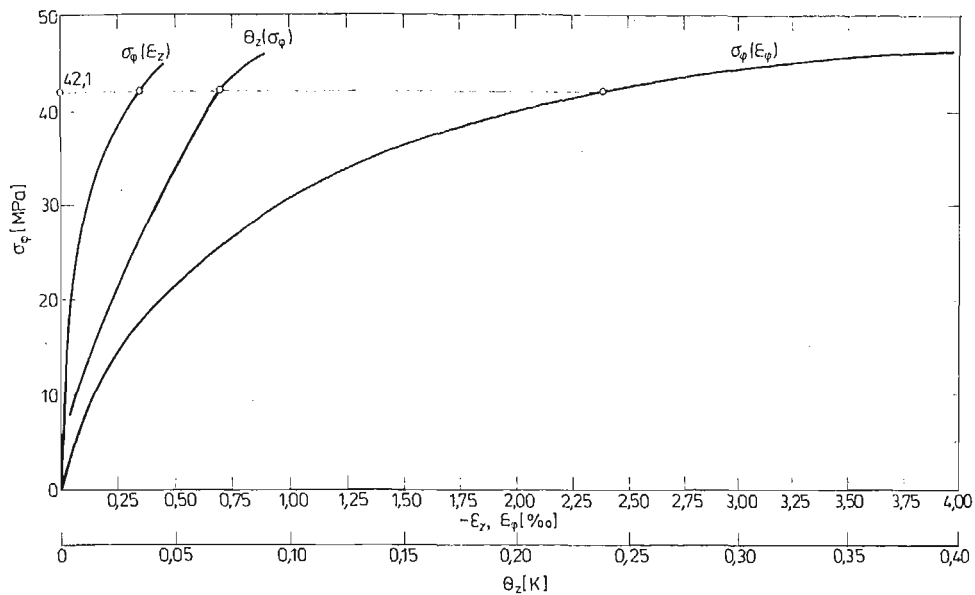
Rys. 9. Zależność naprężeń $\tau_{x\phi}$ od odkształceń całkowitych $\gamma_{x\phi}$, sprężystych $\gamma_{x\phi}^s$ i plastycznych $\gamma_{x\phi}^{pl}$ podczas skręcania.



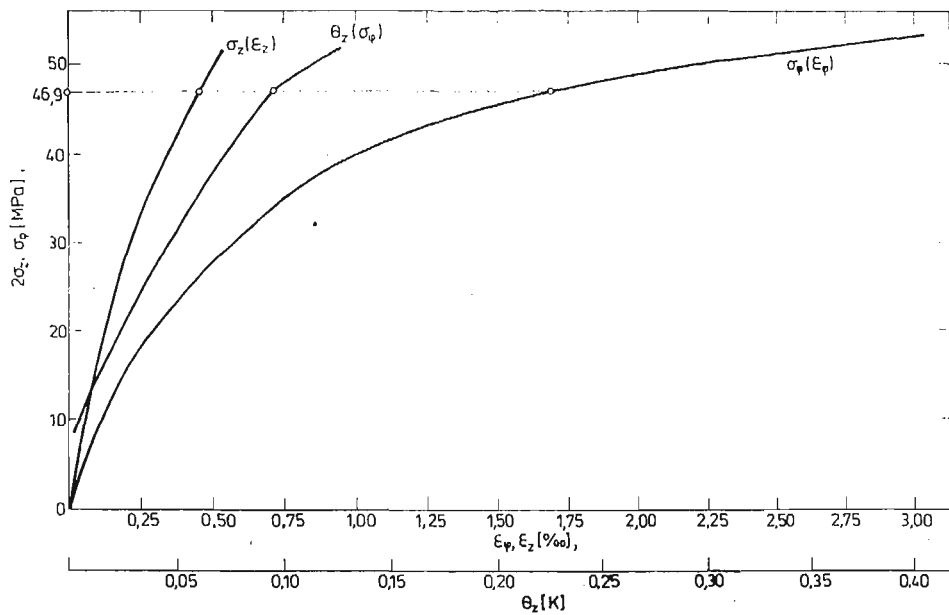
Rys. 10. Wykresy rozciągania $\sigma_z(\epsilon_z)$ i $\sigma_z(\epsilon_\varphi)$ oraz zmian temperatury $\theta_a(\sigma_z)$ podczas rozciągania osiowego.



Rys. 11. Wykres skręcania $\tau_{z\varphi}(\gamma_{z\varphi})$ i zmian temperatury $\theta_a(\tau_{z\varphi})$.



Rys. 12. Wykresy rozciągania $\sigma_\varphi(\varepsilon_\varphi)$ i $\sigma_\varphi(\varepsilon_z)$ oraz zmian temperatury $\theta_z(\sigma_\varphi)$ podczas rozciągania obwodowego.



Rys. 13. Wykresy rozciągania $\sigma_\psi(\varepsilon_\varphi)$ i $\sigma_z(\varepsilon_z)$ oraz zmian temperatury $\theta_z(\sigma_\varphi)$ podczas rozciągania dwuosiowego.

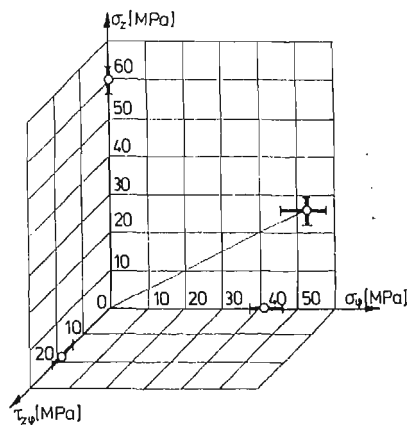
Wykresy zależności nieadiabaticznych zmian temperatury θ_z od naprężeń σ_φ podczas rozciągania obwodowego i dwuosowego dla pojedynczych próbek przedstawione są na rys. 12 i 13. Zgodnie z przyjętą definicją granicy plastyczności materiał wchodził w stan plastyczny w punktach rozgraniczających początkowy zbliżony do liniowego przebieg zmian temperatury od przebiegu szybszych przyrostów temperatury.

Wartości wszystkich wyznaczonych w ten sposób granic plastyczności na czterech realizowanych drogach obciążania wraz z 95% przedziałami ufności wg rozkładu t-Studenta zamieszczono w tabeli 1 i przedstawiono na rys. 14. Wartości odkształceń całkowitych i plastycznych w kierunkach działania naprężeń odpowiadające średnim wartościom granic plastyczności podano w tabeli 2.

Wyniki pomiarów granicy plastyczności dla rozciągania dwuosowego porównano z wartościami granic plastyczności wynikającymi z niektórych warunków plastyczności.

Tabela 1. Wartości granic plastyczności

Droga obciążania	Nr próbki	Granica plastyczności [MPa]		Wartość średnia [MPa]		95% przedział ufności [MPa]	
1	2	3		4		5	
I. Rozciąganie osiowe		σ_{z_0}		$\sigma_{z_0\delta r}$		$\Delta\sigma_{z_0}$	
	1	55,4		59,2		3,0	
	2	58,9					
	3	61,8					
	4	58,6					
	5	61,1					
II. Rozciąganie obwodowe		σ_{φ_0}		$\sigma_{\varphi_0\delta r}$		$\Delta\sigma_{\varphi_0}$	
	1	43,9		41,7		3,3	
	2	39,1					
	3	46,6					
	4	37,0					
	5	42,1					
III. Rozciąganie dwuosowe ($\sigma_z/\sigma_\varphi = 0,5$)		σ_{φ_0}	σ_{z_0}	$\sigma_{\varphi_0\delta r}$	$\sigma_{z_0\delta r}$	$\Delta\sigma_{\varphi_0}$	$\Delta\sigma_{z_0}$
	1	51,0	25,5	52,6	26,3	6,3	3,2
	2	50,1	25,1				
	3	46,9	23,5				
	4	60,0	30,0				
	5	55,1	27,6				
IV. Skręcanie		$\tau_{z\varphi_0}$		$\tau_{z\varphi_0\delta r}$		$\Delta\tau_{z\varphi_0}$	
	1	16,7		17,7		3,3	
	2	16,0					
	3	22,2					
	4	15,7					
	5	17,9					



Rys. 14. Wyznaczone metodą STM wartości średnie granic plastyczności (z zaznaczonymi przedziałami ufnności).

Tabela 2. Wartości odkształceń w momencie osiągnięcia granicy plastyczności

Droga obciążania	Odkształcenie całkowite [‰]	Odkształcenie plastyczne [‰]
1. Rozciąganie osiowe	$\varepsilon_{z_0} \approx 1,8$	$\varepsilon_{z_0}^p \approx 1,2$
2. Rozciąganie obwodowe	$\varepsilon_{\varphi_0} \approx 2,1$	$\varepsilon_{\varphi_0}^p \approx 1,5$
3. Rozciąganie dwuosiowe ($\sigma_z/\sigma_\varphi = 0,5$)	$\varepsilon_{\varphi_0} \approx 3,2$ $\varepsilon_{z_0} \approx 0,6$	$\varepsilon_{\varphi_0}^p \approx 2,6$ $\varepsilon_{z_0}^p \approx 0,3$
4. Skręcanie	$\gamma_{z\varphi_0} \approx 1,8$	$\gamma_{z\varphi_0}^p \approx 1,1$

Tabela 3. Wartości granic plastyczności (w MPa) podczas rozciągania dwuosiowego

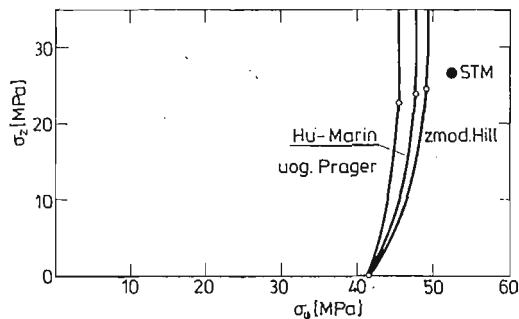
Metoda STM	Warunek Hu-Marina	Warunek Hilla	Uog. warunek Pragera
52,6	47,9	49,1	45,4

Ze względu na trudności w pełnym jakościowym i ilościowym zidentyfikowaniu anizotropii materiału założono, że materiał jest ortotropowy, a osiami głównymi ortotropii są osie r , φ , z walcowego układu współrzędnych związanego z próbką. Użyto warunku plastyczności Hu-Marina [3]

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{z_0}}\right)^2 - \frac{\sigma_z \sigma_\varphi}{\sigma_{z_0} \sigma_{\varphi_0}} - \left(\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\varphi_0}}\right)^2 = 1, \quad (10)$$

uogólnionego warunku Pragera (cyt. w [3])

$$\frac{3}{2} \left[\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{z_0}}\right)^2 - \frac{\sigma_z \sigma_\varphi}{\sigma_{z_0} \sigma_{\varphi_0}} + \left(\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\varphi_0}}\right)^2 \right]^3 - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{z_0}} + \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\varphi_0}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{z_0}} - \frac{2\sigma_\varphi}{\sigma_{\varphi_0}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\varphi_0}} - \frac{2\sigma_z}{\sigma_{z_0}}\right)^2 = 1, \quad (11)$$



Rys. 15. Wartości granic plastyczności podczas dwuosowego rozciągania wyznaczone metodą STM i obliczone na podstawie ortotropowych warunków plastyczności.

i zmodyfikowanego warunku Hilla [8]

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{z_0}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\varphi_0}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_{z_0}^2} + \frac{1}{\sigma_{\varphi_0}^2} - \frac{1}{\sigma_{\varphi_0}\sigma_{z_0}}\right)\sigma_z\sigma_\varphi = 1. \quad (12)$$

Występujące w nich granice plastyczności σ_{z_0} i σ_{φ_0} wyznaczono metodę sprzężenia termomechanicznego. Wartości granic plastyczności podczas rozciągania dwuosowego obliczone z warunków plastyczności są podane w tabeli 3 i przedstawione na rys. 15.

5. Wnioski

Z przeprowadzonej analizy teoretycznej oraz wyników przykładowych badań doświadczalnych wynika, że za miarę wejścia materiału w stan plastyczny można przyjąć przyrost temperatury sprzężonej z naprężeniami w adiabatycznym procesie obciążania. Fakt ten ma istotne znaczenie dla praktyki doświadczalnej, szczególnie w przypadku materiałów anizotropowych i nieliniowych.

Literatura

1. B. GABRYSZEWSKA, Praca doktorska. Politechnika Wrocławska, Wrocław 1964.
2. Z. GABRYSZEWSKI, W. ŚRÓDKA, *Zastosowanie temperatury sprzężonej z odkształceniami do oceny dysypacji energii i wyznaczania granic plastyczności*. Mech. Teor. i Stos., 19, 1, 1981.
3. HU L.W., Y. MARIN, *Anizotropnyje funkcji nagruženija dla složnych napriazennych sostojanij v plastičeskoj oblasti*. [w:] Mechanika. Izd. I. L., 2, Moskwa 1956.
4. J. KLEPACZKO, *Sprężenia termo-mechaniczne w metalach*. Prace IPPT, 11/78, Warszawa 1978.
5. Z. MARCINIAK, *Odształcenia graniczne przy tłoczeniu blach*. WNT, Warszawa 1971.
6. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*. PWN, Warszawa 1970.
7. B. PINDUR, Praca doktorska. IM i MT, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1983.
8. G. S. PISARENKO, A. A. LEBEDEV, *Deformirovanije i pročnosť materialow pri složnom napriazennom sostojanii*. Izd. „Naukova Dumka”, Kijew 1976.

Резюме

ОЦЕНКА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ ТЕРМО-МЕХАНИЧЕСКОГО СОПРЯЖЕНИЯ

В работе представлена роль термо-механического метода /STM/ исследования поверхности пластичности. Указана теоретическая возможность определения поверхности пластичности термо-механическим методом в анизотропных нелинейно-упругих материалах, подвергнутых простому и сложному нагружению. Были проведены экспериментальные исследования, состоящие в определении предела пластичности методом STM анизотропного упруго-пластического (с начала нагружения) материала. Тонкостенные трубчатые образцы из поликристаллического цинка были подвергнуты одноосному растяжению в осевом и тангенциальном направлении, двухосному растяжению и кручению. Полученные результаты были сравнены с результатами, вытекающими из некоторых гипотез пластичности.

Summary

THE DETERMINATION OF THE ANISOTROPIC NON-LINEAR MATERIAL'S YIELD SURFACE BY THERMAL-MECHANICAL COUPLING METHOD.

The role of thermal-mechanical coupling method (STM) of the yield surface investigation has been presented. A theoretical possibility of determining the yield surface using the STM method in anisotropic non-linear elastic materials at proportional and non-proportional loadings out has been pointed out. The experimental investigations consisting in the yield surface determination by STM method in macroanisotropic elastic-plastic material (since the beginning of loading) have been described. The material was polycrystalline zink. Tubular thin-walled specimens were subjected to uniaxial tension in axial and tangential direction, torsion and biaxial tension. The comparison of the obtained results with the values of the yield point resulting from the strength hypotheses has been presented.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 marca 1983 roku

ZASTOSOWANIE ZMODYFIKOWANEJ METODY KRYŁOWA-BOGOLUBOWA DO BADANIA DRGAŃ SWOBODNYCH UKŁADÓW NIELINIOWYCH

KRZYSZTOF GOŁOŚ

*Politechnika Warszawska
Instytut Podstaw Budowy Maszyn*

W pracy przedstawiono rozszerzenie metody Kryłowa-Bogolubowa dla rozwiązywania pewnej grupy równań różniczkowych. Przedstawioną metodę zastosowano do badania drgań swobodnych nieliniowego układu opisanego przez Z. Osińskiego równaniem różniczkowym trzeciego rzędu.

1. Wprowadzenie

Analiza drgań układu materialnego polega najczęściej na badaniu rozwiązań różniczkowego równania drgań. W wielu przypadkach rozwiązania te nie są znane. Analizę opiera się wtedy na badaniu rozwiązań przybliżonych. Jedną z możliwości stosowanych do rozwiązywania nieliniowych równań ruchu drgającego są metody małego parametru. Są one oparte na założeniu, że nieliniowa część jest mała w stosunku do liniowej. Można ją zatem uzależnić od parametru mającego małą wartość $\mu \ll 1$.

Równanie ruchu drgań swobodnych bez tłumienia ma na ogół postać:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (1)$$

gdzie: μ oznacza mały parametr, zaś $f(x, \dot{x})$ jest nieliniową funkcją przemieszczenia i prędkości. Metoda postępowania przy rozwiązywaniu równania (1) została przedstawiona przez Kryłowa i Bogolubowa [1, 2].

Sposób przedstawiony przez Kryłowa-Bogolubowa został rozszerzony przez Popova [3] na równania z liniowym tłumieniem postaci:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}). \quad (2)$$

Badaniem rozwiązań równań postaci (2) zajmował się też Bojadziew [4].

Modyfikację (rozszerzenie) przedstawionych podejść do badania drgań nieliniowych swobodnych układu zamodelowanych równaniem różniczkowym trzeciego rzędu przedstawił Osiński [5, 6].

Nieliniowe drgania opisane równaniem różniczkowym trzeciego rzędu były też przedmiotem rozważań Mulholland'a [8]. W pracy przedstawiono rozszerzenie metody Kryłowa-Bogolubowa stosowanej w pracach [5, 6, 7]. Przedstawiony sposób użyto do rozwiązania równania drgań swobodnych systemu uwzględniającego wpływ tarcia wewnętrznego i relaksację [6].

2. Rozwiązanie równania ruchu

W pracy podjęto analizę równania ruchu układu opisanego następującym równaniem różniczkowym:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + lx + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}), \quad (3)$$

gdzie: x oznacza przemieszczenie, k, l, ω^2 stałe materiałowe, μ mały parametr, a f jest nieliniową funkcją przemieszczenia i pochodnych przemieszczenia.

Równanie postaci (3) było przedmiotem rozważań w pracach [5, 6]. W prezentowanym podejściu do rozwiązania równania (3) zaproponowano metodę Kryłowa-Bogolubowa odpowiednio zmodyfikowaną. Rozwiązanie równania (3) przedstawiono w postaci równania:

$$x = a + b \cos \psi + \mu U_1(a, b, \psi) + \mu^2 U_2(a, b, \psi) + \dots \quad (4)$$

Wartości zmiennych a, b, ψ w zależności od czasu przedstawiono w formie układu równań:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\xi a + \mu A_1(a, b, \psi) + \mu^2 A_2(a, b, \psi) + \dots \\ \frac{db}{dt} = -\eta b + \mu B_1(a, b, \psi) + \mu^2 B_2(a, b, \psi) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} = \zeta + \mu C_1(a, b, \psi) + \mu^2 C_2(a, b, \psi) + \dots \end{cases} \quad (5)$$

Równanie charakterystyczne równania (3) ma postać:

$$r^3 + kr^2 + lr + \omega^2 = 0 \quad (6)$$

W pracy przyjęto założenia jak w [5, 6].

Założono, że $k > 0, l > 0, \omega > 0$, zatem równanie (6) ma jeden pierwiastek rzeczywisty ujemny i dwa zespolone o częściach rzeczywistych ujemnych. W układzie równań (5), ξ oznacza bezwzględną wartość rzeczywistego pierwiastka równania (6), η bezwzględną wartość rzeczywistej części pierwiastka zespolonego, a ζ bezwzględną wartość części urojonej tego pierwiastka. Nieznane funkcje $u_1(a, b, \psi), A(a, b, \psi), B(a, b, \psi), C(a, b, \psi)$ wyznaczamy po podstawieniu pochodnych $\dot{x}, \dot{\dot{x}}, \dot{\ddot{x}}$ (z uwzględnieniem (5)) i x do równania (3). Porównując współczynniki przy tych samych potęgach otrzymujemy rekurencyjny układ równań cząstkowych różniczkowych. W celu jednoznacznego wyznaczenia A, B, C wprowadzono dodatkowe warunki

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} U_1(a, b, \psi) \cos \psi d\psi &= 0, \\
 \int_0^{2\pi} U_1(a, b, \psi) \sin \psi d\psi &= 0, \\
 \int_0^{2\pi} U_2(a, b, \psi) \cos \psi d\psi &= 0, \\
 \int_0^{2\pi} U_2(a, b, \psi) \sin \psi d\psi &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Z fizycznego punktu widzenia wprowadzenie tych warunków oznacza nieistnienie w rozwinięciu funkcji u_1, u_2 pierwszych harmonicznych wpływających na wartość dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji (4).

Znając układ równań na A, B, C rozwiązujemy go. Wyznaczone wielkości wstawiamy do układu (5). Układ równań (5) rozwiązujemy na drodze numerycznej, przy czym stałe a_0, b_0, ψ_0 wyznaczamy z warunków początkowych.

3. Zastosowanie metody (Przykład)

W pracy zastosowano procedurę do równania drgań swobodnych przedstawionego w pracy [6]. Równanie ma postać:

$$\ddot{q} + \kappa \dot{q} + \alpha q + \omega^2 q = -\mu \beta q^3 - \mu \gamma \dot{q}^3 - \mu \delta \ddot{q}^3
 \tag{8}$$

Rozwiązanie równania (8) przewidziano w postaci układu równań (4) i (5).

Różniczkując prawą stronę równania (4) i uwzględniając (5) otrzymano wyrażenia na $\dot{q}, \ddot{q}, \ddot{\ddot{q}}$. Po wstawieniu wyliczonych pochodnych do lewej strony równania (8) i porównaniu wyrazów przy tych samych potęgach małego parametru μ otrzymano rekurencyjny układ równań.

Równanie utworzone z wyrazów stojących przy μ^0 :

$$\begin{aligned}
 -\xi^3 a + (3\eta \zeta - \eta^3) b \cos \psi + (\zeta^3 - 3\eta^2 \zeta) b \sin \psi + \kappa [\xi^2 a + (\eta^2 - \zeta^2) b \cos \psi + \\
 + 2\eta \zeta b \sin \psi] + \alpha (-\xi a - \eta b \cos \psi - b \zeta \sin \psi) + \omega^2 (a + b \cos \psi) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Równanie to jest spełnione tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases}
 -\xi^3 + \xi^2 \kappa - \alpha \xi + \omega^2 = 0 \\
 3\eta \zeta^2 - \eta^3 + \kappa (\eta^2 - \zeta^2) - \alpha \eta + \omega^2 = 0 \\
 \zeta^3 - 3\eta^2 \zeta + 2\kappa \eta \zeta - \alpha \zeta = 0
 \end{cases}
 \tag{10}$$

Układ równań (10) jest spełniony zawsze, ponieważ $-\xi$ i $-\eta - i\zeta$ są pierwiastkami równania charakterystycznego (6). Dla wyznaczenia funkcji A_1, B_1, C_1 , korzystając z przedstawionych wyżej warunków otrzymano, następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
& A_1(\xi^2 - \kappa\xi + \alpha) + a\xi(2\xi - \kappa) \frac{\partial A_1}{\partial a} + b\eta(\xi + \eta - \kappa) \frac{\partial A_1}{\partial b} + (\kappa\xi - \xi\eta) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} + \\
& + \xi^2 a^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial a^2} + \eta^2 b^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial b^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \psi^2} + 2\xi\eta ab \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} - 2\xi\xi a \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial \psi} - \\
& - 2\eta\xi b \frac{\partial^2 A_1}{\partial b \partial \psi} = c_{11} a^3 + c_{12} ab^2, \\
& B_1(\alpha - \eta\kappa + \eta^2 - 3\xi^2) + a\xi(\eta + \xi - \kappa) \frac{\partial B_1}{\partial a} + b\eta(2\eta - \kappa) \frac{\partial B_1}{\partial b} + \xi(\kappa - \eta) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + \\
& + \xi^2 a^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial a^2} + \eta^2 b^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial b^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial \psi^2} - 2\xi\eta ab \frac{\partial^2 B_1}{\partial a \partial b} - 2\xi\xi a \frac{\partial^2 B_1}{\partial a \partial \psi} + \\
& - 2\eta\xi b \frac{\partial^2 B_1}{\partial b \partial \psi} + c_1 \zeta b(6\eta - 2\kappa) + 3\xi\zeta ab \frac{\partial c_1}{\partial a} + 3\eta\zeta b^2 \frac{\partial c_1}{\partial b} - 3\xi^2 b \frac{\partial c_1}{\partial \psi} = \\
& = c_{15} b^3 + c_{16} ba^2 \\
& B_1 \zeta(3\eta - 2\kappa) + 3\xi\zeta a \frac{\partial B_1}{\partial a} + 3\eta\zeta b \frac{\partial B_1}{\partial b} - 3\xi^2 \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + c_1 b(3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\eta\kappa - \alpha) + \\
& + ab\xi(3\eta - \xi + \kappa) \frac{\partial c_1}{\partial a} + b^2\eta(\kappa - 4\eta) \frac{\partial c_1}{\partial b} + b\xi(3\eta - \kappa) \frac{\partial c_1}{\partial \psi} + \\
& - \xi^2 a^2 b \frac{\partial^2 c_1}{\partial a^2} + 2\xi\zeta ab \frac{\partial^2 c_1}{\partial a \partial \psi} + 2\eta\zeta b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial b \partial \psi} - \eta^2 b^3 \frac{\partial^2 c_1}{\partial b^2} + \\
& - \xi^2 b \frac{\partial^2 c_1}{\partial \psi^2} - 2\xi\eta ab^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial a \partial b} = c_{13} b^3 + c_{14} a^2 b,
\end{aligned} \tag{11}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= -\beta - \gamma\xi^6 - \delta\xi^9, \\
c_{12} &= -\frac{3}{2}\beta - \frac{3}{2}\gamma\xi^2(\eta^2 - \xi^2)^2 - 6\gamma\eta^2\xi^4 + \frac{3}{2}\delta\xi^3(3\eta\xi^2 - \eta^3)^2 + \frac{3}{2}\delta\xi^3(\xi^3 - 3\eta^2\xi)^2, \\
c_{13} &= -\frac{3}{2}\gamma(\eta^2 - \xi^2)^2\eta\xi - 6\gamma\eta^3\xi^3 - \frac{3}{4}\delta(3\eta\xi^2 - \eta^3)^2(\xi^3 - 3\eta^2\xi) - \frac{3}{4}\delta(\xi^3 - 3\eta^2\xi)^3, \\
c_{14} &= -6\gamma\xi^5\eta - 3\delta\xi^6(\xi^3 - 2\eta^2\xi), \\
c_{15} &= -\frac{3}{4}\beta - \frac{3}{4}\gamma(\eta^2 - \xi^2)^3 - 3\gamma(\eta^2 - \xi^2)\eta^2\xi^2 + \\
& - \frac{3}{4}\delta(3\eta\xi^2 - \eta^3)^3 - \frac{3}{4}\delta(3\eta\xi^2 - \eta^3)(\xi^3 - 3\eta^2\xi)^2, \\
c_{16} &= -3\beta - 3\gamma\xi^4(\eta^2 - \xi^2) - 3\delta\xi^6(3\eta\xi^2 - \eta^3).
\end{aligned}$$

Rozwiązując powyższe równania znaleziono zależności na A_1 , B_1 , C_1

$$\begin{aligned}
A_1 &= D_{11} a^3 + D_{12} ab^2 \\
B_1 &= D_{13} b^3 + D_{14} a^2 b \\
C_1 &= D_{15} b^2 + D_{16} a^2
\end{aligned} \tag{12}$$

Wartości współczynników $D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{16}$ są następujące:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= c_{11}/(4\xi^2 - 2\kappa\xi + \alpha), \\
 D_{12} &= c_{12}/(3\xi^2 - 2\kappa\xi + \alpha + 3\xi\eta + 2\eta^2 - \eta\kappa), \\
 D_{13} &= (c_{15} \cdot e_6 - c_{13} \cdot e_2)/(e_1 \cdot e_6 - e_5 \cdot e_2), \\
 D_{14} &= (c_{16} \cdot e_8 - c_{14} \cdot e_4)/(e_3 \cdot e_8 - e_7 \cdot e_4), \\
 D_{15} &= (c_{15} \cdot e_5 - c_{13} \cdot e_1)/(e_2 \cdot e_5 - e_6 \cdot e_1), \\
 D_{16} &= (c_{16} \cdot e_7 - c_{14} \cdot e_4)/(e_3 \cdot e_8 - e_7 \cdot e_4), \\
 e_1 &= \alpha - 2\eta\kappa + 4\eta^2 - 3\xi^2, \\
 e_2 &= 9\xi\eta - 2\kappa\eta, \\
 e_3 &= \alpha - 2\eta\kappa + 3\eta^2 - 3\xi^2 - \xi\eta + 2\xi^2 - \xi\kappa, \\
 e_4 &= 6\eta\xi - 2\kappa\xi + 3\xi\xi, \\
 e_5 &= 6\eta\xi - 2\kappa\xi, \\
 e_6 &= 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\eta\kappa - \alpha, \\
 e_7 &= 6\eta\xi - 2\kappa\xi + 3\xi\xi, \\
 e_8 &= 3\xi^2 - 3\eta^2 - 2\xi^2 + 2\eta\kappa + 3\eta\xi + \kappa\xi - \alpha.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Wstawiając (13) do (5) otrzymano zależności na pochodne $\ddot{a}, \ddot{b}, \dot{\psi}$

$$\begin{cases} \dot{a} = -\xi a + \mu a(D_{11}a^2 + D_{12}b^2), \\ \dot{b} = -\zeta b + \mu b(D_{13}b^2 + D_{14}a^2), \\ \dot{\psi} = \omega + \mu(D_{15}b^2 + D_{16}a^2). \end{cases} \tag{14}$$

W pierwszym przybliżeniu rozwiązanie równania (8) ma postać

$$q = a + b \cos \psi. \tag{15}$$

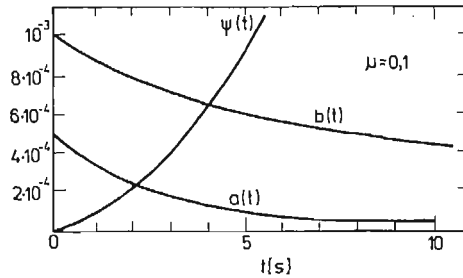
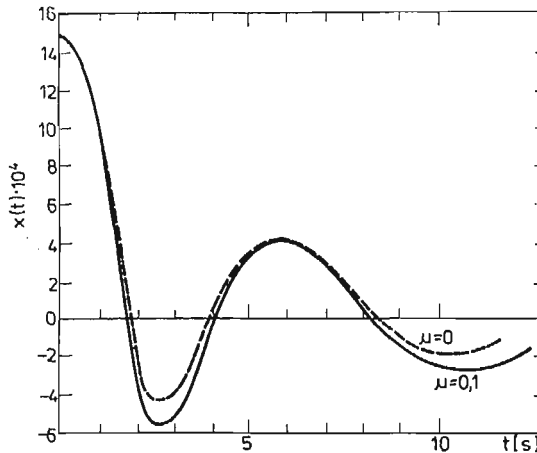
Przedstawiony układ równań (14) rozwiązano numerycznie stosując procedurę Runge'go-Kutty czwartego rzędu. Do obliczeń przyjęto następujące wartości stałych:

$$\begin{aligned}
 \kappa &= 5 \cdot 10^{-3}, \\
 \alpha &= 2 \cdot 10^{11}, \\
 \omega^2 &= 1,5 \cdot 10^9, \\
 \beta &= -1,2 \cdot 10^{14}, \\
 \gamma &= 3 \cdot 10^{11}, \\
 \delta &= 2 \cdot 10^{-8}.
 \end{aligned}$$

oraz warunki początkowe

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a(0) = 0,0005, \\
 b_0 &= b(0) = 0,001, \\
 \psi_0 &= \psi(0) = 0.
 \end{aligned}$$

znaleziono rozwiązania dla wartości małego parametru $\mu = 0,001$ i $0,1$. Wykresy zmian $a(t), b(t)$ i $\psi(t)$ dla $\mu = 0,1$ i podanych wyżej wartości przedstawiono na rys. 1.

Rys. 1. Przebieg $a(t)$, $b(t)$ i $\psi(t)$.Rys. 2. Przebieg $q(t)$.

Przebieg rozwiązania $q(t)$ dla różnych wartości μ przedstawiono na rys. 2. Jak wynika z wykresu, przebieg $q(t)$ dla $\mu = 0,1$ bardzo mało różni się od przebiegu dla $\mu = 0$. Ruch opisany równaniem (15) przedstawia drgania zanikające. Drgania te odbywają się około środka drgań, którego położenie nie jest stałe, ale który przemieszcza się dążąc asymptotycznie do pewnego ustalonego położenia. Amplitudę drgań określa $b(t)$. Własności te są obserwowane przy badaniu drgań tłumionych tarcie wewnętrzny [7].

4. Wnioski

Przedstawione w pracy uogólnienie metody Kryłowa-Bogolubowa stanowi rozszerzenie dotychczas stosowanego podejścia. Uzależnienie parametrów A , B i C od zmiennych a , b , ψ umożliwiło dokładniejsze rozpatrzenie drgań swobodnych układu drgającego. Często w badaniach zależy głównie na wyznaczeniu zmian amplitud układu a , b oraz przesunięcia w fazie ψ w zależności od czasu. Pełne podanie postaci układu (14) pozwala na bardziej precyzyjne przeanalizowanie tych wielkości. Jednocześnie z matematycznego

punktu widzenia zastąpienie rozpatrywania równania (3) (w przykładzie (8)) układem równań (4) i (5) (w przykładzie (14)) stanowi poważne ułatwienie. Prezentowana procedura postępowania może być wykorzystana do efektywnego badania drgań układów modelowanych równaniami różniczkowymi.

Literatura

1. Н. Н. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, Акад. Наук Укр. ССР, 1937.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва 1958.
3. И. П. Попов, *Обобщение асимптотического метода Боголюбова в теории нелинейных колебаний*, Докл. Акад. Наук СССР 111, Москва 1959.
4. G. N. BOJADZIEV, *Delay and Functional Differential Equations and Their Applications*. Academic Press, 1972.
5. Z. OSIŃSKI, *Drgania swobodne nieliniowego układu z uwzględnieniem relaksacji i tarcia wewnętrznego*. Arch. Bud. Maszyn 4, 1961.
6. Z. OSIŃSKI, *Próba nieliniowego przedstawienia zjawisk tarcia wewnętrznego i relaksacji*. Warszawa 1961.
7. Z. OSIŃSKI, *Badanie tłumienia drgań za pomocą drgań skrętnych swobodnych o malej częstości*. Zagadnienia drgań nieliniowych, 3, 1963.
8. R. J. MULHOLLAND, *Non-linear Oscillation of a Third — Order Differential Equation*. Int. J. Non — Linear Mechanics 6, 1971.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА КРЫЛОВА-БОГОЛЮБОВА ДЛЯ АНАЛИЗА СВОБОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ

В работе рассмотрено нелинейные свободные колебания системы. Сделано анализ асимптотического решения дифференциального уравнения в смысле Крылова-Боголюбова. Представлено обобщение концепции предложенной Осинским для решения дифференциальных нелинейных уравнений третьего ряда.

Summary

THE USE OF MODIFICATED KRYLOV-BOGOLIUBOV METHOD IN THE ANALYSIS OF FREE NONLINEAR OSCILATIONS OF SYSTEMS

The paper deals with the free nonlinear vibrations of a system. The asymptotic solution in the sence of Krylov-Bogoliubov of a differential equation is investigated. The extension of the idea proposed by Osinski to solve third order nonlinear differential equation is made.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 maja 1984 roku

ZGINANIE BELEK LEPKOSPĘŻYSTYCH NA PODŁOŻU REOLOGICZNYM

TADEUSZ SMOLEŃ

*WSI w Opolu
Instytut Inżynierii Lądowej*

1. Wstęp

Praca stanowi propozycję metody do analizy statycznej lepkospężytych belek o skończonej długości i dowolnym schemacie statycznym, spoczywających na podłożu reologicznym o właściwościach dających opisać się modelem ciała liniowo-lepkospężytego.

Z punktu widzenia mechaniki, zagadnienie zginania belek spoczywających na podłożu odkształcalnym, można zaliczyć do działu poświęconego tzw. zadaniom kontaktowym o niezmiennym — z góry określonym — obszarze kontaktu. Natomiast pod względem technicznym zagadnienie to dotyczy ważnej problematyki inżynierskiej, a mianowicie współpracy konstrukcji lub jej elementów z podłożem, na którym są one posadowione. Z tego względu rozwijanie i doskonalenie matematycznych modeli współpracy konstrukcji z podłożem oraz poszukiwanie coraz efektywniejszych metod rozwiązywania zadań z tego zakresu może rozszerzyć nie tylko sferę poznawczą zagadnienia, ale także bazę możliwości poprawnego rozwiązywania konkretnych zadań z praktyki inżynierskiej.

Temat zginania belek spoczywających na podłożu odkształcalnym znajduje wiele miejsca w literaturze poświęconej współpracy konstrukcji z podłożem. Szczególnie efektywne metody obliczeniowe opracowano dla rozwiązywania zadań z tego zakresu w wersji sprężystej, np. [1, 2, 3, 4]. Wspólną cechą tych metod jest przyjęcie modelu ciała liniowo-sprężystego do opisu własności materiałów, zarówno belki, jak i podłoża. Przyjęcie takie znacznie ułatwia rozwiązywanie wielu konkretnych zadań inżynierskich, ale uzyskiwane wyniki bardzo często wyraźnie odbiegają od realnych, gdyż układ belka-podłoże ma w rzeczywistości cechy — ogólnie mówiąc — zdecydowanie niesprężyste (lepkospężyte, lepkoplastyczne, plastyczne itp.). Sprawiają one, że aktualny stan naprężenia i odkształcenia zależy nie tylko od aktualnego stanu obciążenia, ale także od historii procesu deformacji belki i podłoża.

Ewidentny postęp w kierunku urealnienia modelu współpracy belki z podłożem czynią prace przyjmujące do opisu cech układu model ciała liniowo-lepkospężytego. Dzięki temu możliwe staje się ujęcie cech reologicznych materiału belki (np. beton, żelbet) i podłoża (np. grunt). Konsekwencją takiego opisu jest niestety znaczna komplikacja matematycznej strony zagadnienia w stosunku do jej wersji sprężystej. Fakt ten sprawia, że tylko dla nielicznych, wyidealizowanych zadań znane są poprawne i praktyczne w stosowaniu

rozwiązania przy obciążeniach statycznych i dynamicznych, np. [5, 6, 7]. Główną przeszkodą w uzyskiwaniu zadowalających rozwiązań w zakresie lepkosprężystym jest różniczkowo-całkowa postać równań opisujących pracę układu belka-podłoże, co w wielu realnych przypadkach wyłania zadania brzegowe wręcz niemożliwe do rozwiązania w sposób ścisły. Jedyłą szansą są wówczas metody oparte na analizie numerycznej.

W niniejszej pracy zaprezentowano kompleksową metodę wyznaczania przemieszczeń i sił wewnętrznych w belkach spoczywających na podłożu odkształcalnym w zakresie lepkosprężystym, poddanych quasi-statycznym obciążeniom o dowolnym rozkładzie i przebiegu w czasie. Sformułowania zadań dokonano w oparciu o analogię sprężysto-lepkosprężystą dla wybranych modeli współpracy belki z podłożem. Ideą metody jest wariacyjne ujęcie zagadnienia i wykorzystanie metody elementów skończonych (MES) w wersji półanalitycznej, pozwalającej na uniknięcie — kłopotliwej pod względem numerycznym — dyskretyzacji skali czasu. Materiał belki i podłoża potraktowano jako ciała liniowo-lepkosprężyste o odmiennych parametrach reologicznych (tzn. o różnych funkcjach relaksacji i pełzania) w wersji zaproponowanej przez Gurtina i Sternberga [8], a więc bez konkretyzowania typu modelu reologicznego. Dzięki temu opracowana metoda stanowi pewne uogólnienie metod analizy sprężystej na zakres lepkosprężysty.

2. Sformułowanie zadań brzegowych

Przedmiotem rozważań jest lepkosprężysta belka o skończonej długości i dowolnym schemacie statycznym, poddana quasi-statycznym obciążeniom dowolnego typu. Poszukiwanymi wielkościami są tutaj; funkcja ugięcia belki $w = w(x, t)$ — opisująca proces deformacji belki oraz funkcja momentu zginającego $M = M(x, t)$ — określająca ewolucję stanu naprężenia w belce. Postać równań opisujących zależęć będzie od przyjętego modelu podłoża i rodzaju współpracy belki z podłożem. W zakresie sprężystym znane są, między innymi, takie modele podłoża, jak; jednoparametrowy — typu Winklera-Zimmermanna, wieloparametrowe — typu Własowa, Wiegharda, Schulcego oraz ciągłe — typu półprzestrzeni lub półpłaszczyzny sprężystej.

Punktem wyjścia do sformułowania zadań brzegowych będzie różniczkowe równanie równowagi belki oraz równania fizyczne materiału belki i podłoża.

1° Belka lepkosprężysta na podłożu lepkosprężystym typu Winklera

Różniczkowe równanie równowagi belki opartej na podłożu odkształcalnym ma znaną postać

$$\frac{d^2 M(x, t)}{dx^2} = p(x, t) - q(x, t), \quad (2.1)$$

gdzie $q(x, t)$ jest funkcją obciążenia ciągłego, natomiast $p(x, t)$ — tzw. odporem podłoża.

Związek fizyczny dla belki wynika z ogólnego równania konstytutywnego dla ciała liniowo-lepkosprężystego [8, 9]

$$\sigma_{ij}(x, t) = E_{ijkl}(t) \times d\epsilon_{kl}(x, t), \quad (2.2)$$

sprowadzającego się — przy założeniu izotropii materiału i zredukowaniu do parametrów opisujących stan naprężenia i odkształcenia w przekroju belki — do postaci

$$M(x, t) = -E_0 J \cdot de(t) \times \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2}, \quad (2.3)$$

gdzie $e(t)$ jest bezwymiarową funkcją relaksacji materiału belki, $E_0 J$ — sztywnością belki na zginanie. Symbol „ \times ” oznacza mnożenie splotowe,

Związek fizyczny dla podłoża przyjęto — przez analogię do wariantu sprężystego — w postaci [5]

$$p(x, t) = R_0 dr(t) \times w(x, t), \quad (2.4)$$

w którym $r(t)$ oznacza bezwymiarową funkcję relaksacji materiału podłoża typu Winklera, a R_0 jest stałym parametrem tego podłoża.

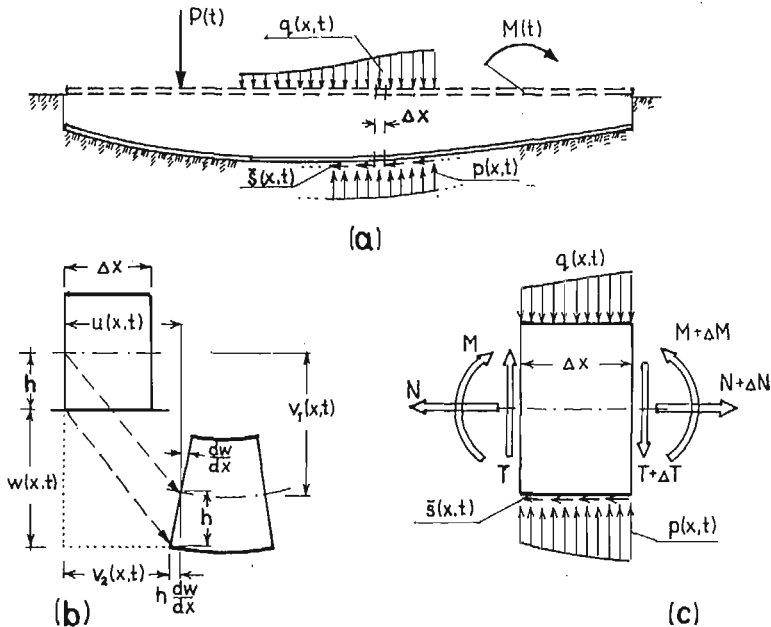
Podstawiając prawą stronę równania (2.4) w miejsce $p(x, t)$ w równaniu (2.1), otrzymuje się

$$\frac{d^2 M(x, t)}{dx^2} - R_0 dr(t) \times w(x, t) = -q(x, t). \quad (2.5)$$

Równania (2.3) i (2.5) posłużą do sformułowania zadania wariacyjnego dla metody elementów skończonych.

2° Belka lepkosprężysta na podłożu lepkosprężystym typu Własowa

Formuła współpracy belki z podłożem typu Własowa opiera się na założeniu zgodności przemieszczeń pionowych i poziomych w obszarze kontaktu belki z podłożem. Wskutek tego obciążenia poprzeczne wywołują, oprócz momentu zginającego i siły poprzecznej, także siłę osiową.



Rys. 1.

Z równań równowagi elementu belki (rys. 1c) wynikają następujące zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem i reakcjami podłoża:

$$\frac{dN(x, t)}{dx} = \bar{s}(x, t), \quad (2.6)$$

$$\frac{dT(x, t)}{dx} = p(x, t) - q(x, t), \quad (2.7)$$

$$\frac{dM(x, t)}{dx} = T(x, t) + s(x, t) \cdot h. \quad (2.8)$$

Warunki zgodności przemieszczeń punktów obszaru kontaktu belki z podłożem prowadzą do równań (rys. 1b)

$$v_1(x, t) = w(x, t), \quad (2.9)$$

$$v_2(x, t) = u(x, t) - h \frac{dw(x, t)}{dx}. \quad (2.10)$$

Równania fizyczne dla belki, wyrażone przez funkcję przemieszczeń punktów osi belki $u(x, t)$ i $w(x, t)$, otrzymuje się ze znanych zależności geometrycznych oraz warunków równowagi wewnętrznej przy wykorzystaniu równania (2.2)

$$M(x, t) = -E_0 J de(t) \times \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2}, \quad (2.11)$$

$$N(x, t) = E_0 A de(t) \times \frac{du(x, t)}{dx}, \quad (2.12)$$

gdzie $E_0 A$ jest sztywnością osiową belki.

Związki fizyczne dla podłoża przyjęto w następującej postaci:

$$p(x, t) = R_0 dr(t) \times w(x, t), \quad (2.13)$$

$$\bar{s}(x, t) = S_0 \cdot ds(t) \times v_2(x, t), \quad (2.14)$$

gdzie $s(t)$ oznacza bezwymiarową funkcję relaksacji podłoża przy deformacji wzdłuż linii kontaktu.

Równania (2.6) ÷ (2.14) stanowią układ dziewięciu równań. Redukując ten układ równań do postaci zawierającej jedynie funkcje przemieszczeń $u(x, t)$ i $w(x, t)$, otrzymuje się dwa równania

$$E_0 J de(t) \times \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} + R_0 \cdot dr(t) \times w(x, t) + S_0 ds(t) \times \left[\frac{du(x, t)}{dx} - h \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} \right] = q(x, t), \quad (2.15)$$

$$E_0 A \cdot de(t) \times \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} - S_0 \cdot ds(t) \times \left[u(x, t) - h \frac{dw(x, t)}{dx} \right] = 0.$$

Podobnie jak dla poprzedniego modelu współpracy, równania (2.15) wykorzystane zostaną do sformułowania zadania wariacyjnego w postaci wygodnej do zastosowania MES.

3° Belka lepkospężysta na podłożu typu półpłaszczyzny lepkospężystej

W odróżnieniu od dwóch poprzednich modeli podłoża, model podłoża ciągłego charakteryzuje się tym, że obciążenie zadane na jego powierzchni wywołuje przemieszczenia nie tylko w obszarze tego obciążenia, ale również poza nim. Przyjęcie takiego modelu podłoża, chociaż wydaje się najbardziej realne, wymaga jednak odwołania się do skomplikowanych rozwiązań klasycznych zadań brzegowych w teorii sprężystości (np. zagadnienia Boussinesqa i Cerrutiego [10, 11]).

W aspekcie kinematycznej współpracy belki z podłożem możliwe są dwa przypadki. W pierwszym zakłada się jedynie zgodność pionowych przemieszczeń punktów osi belki z odpowiadającymi im punktami podłoża. W drugim zakłada się dodatkowo także zgodność przemieszczeń stycznych do linii kontaktu belki z podłożem.

Ograniczając rozważania do przypadku pierwszego, dla określenia związku między przemieszczeniami pionowymi punktów osi belki $w(x, t)$ i odporem podłoża $p(x, t)$, wykorzystano znany wzór Flamanta [3]

$$w(x, t) = -\frac{2}{\pi b E_p} \int_0^L p(y/L, t) \ln \frac{|x-y|}{L} dy + A, \quad (2.16)$$

w którym b jest szerokością belki, E_p modułem sprężystości półpłaszczyzny, natomiast A dowolną stałą. Przenosząc związek (2.16) — w oparciu o analogię sprężysto-lepkospężystą — na przypadek półpłaszczyzny lepkospężystej, otrzymuje się

$$w(\xi, t) = -\frac{2}{\pi C_0} dc(t) * \int_0^1 p(\eta, t) \ln |\xi - \eta| d\eta + A(t), \quad (2.17)$$

gdzie $c(t)$ jest bezwymiarową funkcją pełzania materiału podłoża, $C_0 = bE_p$, $\xi = x/L$, $\eta = y/L$.

Dążąc do maksymalnie prostego sformułowania omawianego zadania brzegowego, pozwalającego na uniknięcie konieczności przekształcania równania całkowego (2.17), jako wielkości poszukiwane przyjęto funkcje $w(\xi, t)$ i $p(\xi, t)$. Eliminując funkcję momentu zginającego $M(x, t)$ z równań (2.1) i (2.3) oraz dołączając równanie (2.17), uzyskano następujący układ równań całkowych:

$$\begin{aligned} \frac{E_0 J}{L^4} dc(t) * \int_0^1 \frac{d^4 w(\eta, t)}{d\eta^4} \delta(\xi - \eta) d\eta + \int_0^1 p(\eta, t) \delta(\xi - \eta) d\eta &= q(\xi, t), \\ \int_0^1 w(\eta, t) \delta(\xi - \eta) d\eta + \frac{2}{\pi C_0} dc(t) * \int_0^1 p(\eta, t) \ln |\xi - \eta| d\eta &= A(t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

który opisuje zginanie belki lepkospężystej na ciągłym podłożu lepkospężystym traktowanym jako półpłaszczyzna.

3. Wariacyjne ujęcie zadań brzegowych

Mając na uwadze wykorzystanie metody elementów skończonych do rozwiązania sformułowanych zadań brzegowych, dokonano wariacyjnego ujęcia tych zadań. Wykorzystano ogólny schemat postępowania wynikający ze znanego twierdzenia Wainberga w teorii równań operatorowych. Zgodnie z tym twierdzeniem [12], dla równania operatorowego postaci

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

istnieje funkcjonal $\mathcal{F}(u)$

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle, \quad (3.2)$$

którego warunek stacjonarności prowadzi do równania (3.1). W formułach (3.1) i (3.2) \mathbf{A} jest operatorem równań zadania brzegowego, \mathbf{u} wektorem poszukiwanych rozwiązań, \mathbf{f} wektorem funkcji zadanych, natomiast symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny. Ogólnym warunkiem istnienia funkcjonału (3.2) jest potencjalność operatora \mathbf{A} , która dla operatora liniowego zachodzi wówczas, gdy operator ten spełnia warunek symetrii [12]

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle, \quad (3.3)$$

gdzie \mathbf{u} i \mathbf{v} traktowane są jako elementy przestrzeni Hilberta \mathcal{H}_A rozwiązań równania (3.1), z iloczynem skalarnym postaci

$$\langle \mathbf{u}(x, t), \mathbf{v}(x, t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \mathbf{u}(x, t) \times \mathbf{v}(x, t) dx. \quad (3.4)$$

Wariacyjne ujęcie zadania brzegowego 1°

Równania (2.3) i (2.5) — odpowiadające pierwszemu zadaniu brzegowemu — można zapisać w następującej postaci operatorowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{dc(t)}{E_0 J} \times (\dots), \delta(t) \times \frac{d^2}{dx^2} (\dots) \\ \delta(t) \times \frac{d^2}{dx^2} (\dots), -R_0 dr(t) \times (\dots) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Porównując równanie (3.5) z (3.1) łatwo stwierdzić, że

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} M(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{dc(t)}{E_0 J} \times (\dots), \delta(t) \times \frac{d^2}{dx^2} (\dots) \\ \delta(t) \times \frac{d^2}{dx^2} (\dots), -R_0 dr(t) \times (\dots) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x, t) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

gdzie $\delta(t)$ jest funkcją Diraca natomiast $c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1/\mathcal{L}[e(t)]\}$.

Ponieważ operator \mathbf{A} jest w tym przypadku symetryczny, więc istnieje funkcjonal typu (3.2). Realizując iloczyny skalarne w (3.2), otrzymano

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(w, M) = & \frac{1}{2} \frac{dc(t)}{E_0 J} * \int_0^L M(x, t) * M(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L w''(x, t) * M(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L w(x, t) * M''(x, t) dx - \frac{1}{2} R_0 dr(t) * \int_0^L w(x, t) * w(x, t) dx + \int_0^L q(x, t) * w(x, t) dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Zaprezentowane ujęcie wariacyjne pierwszego zadania brzegowego pozwala na niezależne traktowanie pól przemieszczeń i momentów zginających, co stanowi zaletę z punktu widzenia metody elementów skończonych.

Wariacyjne ujęcie zadania brzegowego 2°

Przedmiotem rozważań są tutaj równania (2.15), którym można nadać postać operatorową (3.1) o następującej strukturze:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{l} E_0 J \cdot de * \frac{d^4}{dx^4} (\dots) - h \cdot S_0 ds * \frac{d^2}{dx^2} (\dots) + R_0 dr * (\dots), S_0 ds * \frac{d}{dx} (\dots) \\ S_0 ds * \frac{d}{dx} (\dots), \frac{E_0 A}{h} de * \frac{d^2}{dx^2} (\dots) - \frac{S_0}{h} ds * (\dots) \end{array} \right], \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w(x, t) \\ u(x, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -q(x, t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podobnie jak w pierwszym zadaniu brzegowym, symetria operatora (3.8) zapewnia istnienie funkcyjnału typu (3.2). Realizując formułę (3.2) dla wyrażeń (3.8), otrzymano funkcyjnał

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(u, w) = & \frac{1}{2} E_0 J de(t) * \int_0^L w^{IV}(x, t) * w(x, t) dx - \frac{S_0}{2h} ds(t) * \int_0^L w''(x, t) * w(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{2} R_0 dr(t) * \int_0^L w(x, t) * w(x, t) dx + \frac{1}{2} S_0 ds(t) * \int_0^L u'(x, t) * w(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{2} S_0 ds(t) * \int_0^L w'(x, t) * u(x, t) dx + \frac{1}{2} \frac{E_0 A}{h} de(t) * \int_0^L u''(x, t) * u(x, t) dx + \\ & - \frac{1}{2} \frac{S_0}{h} ds(t) * \int_0^L u(x, t) * u(x, t) dx - \int_0^L q(x, t) * w(x, t) dx, \end{aligned} \quad (3.9)$$

którego warunek stacjonarności prowadzi do równań (2.15). W proponowanym ujęciu wariacyjnym (drugiego zadania brzegowego) pola przemieszczeń pionowych $w(x, t)$ i poziomych $u(x, t)$ traktowane są niezależnie.

Wariacyjne ujęcie zadania brzegowego 3°

Dla wariacyjnego ujęcia trzeciego zadania brzegowego, równania (2.18) przepisano w następującej postaci operatorowej

$$\begin{bmatrix} \frac{E_0 J}{L^4} de(t) \times \int_0^1 \delta(\xi - \eta) \frac{d^4}{d\eta^4} (\cdot) d\eta, \delta(t) \times \int_0^1 \delta(\xi - \eta) (\cdot) d\eta \\ \delta(t) \times \int_0^1 \delta(\xi - \eta) (\cdot) d\eta, \frac{2}{\pi C_0} dc(t) \times \int_0^1 \ln|\xi - \eta| (\cdot) d\eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w(\eta, t) \\ p(\eta, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q(\xi, t) \\ A(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Operator

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{E_0 J}{L^4} \delta(t) \times \frac{d^4}{d\eta^4} (\dots) \delta(\xi - \eta), \delta(t) \times (\dots) \delta(\xi - \eta) \\ \delta(t) \times (\dots) \delta(\xi - \eta), \frac{2}{\pi C_0} dc(t) \times \ln|\xi - \eta| (\dots) \end{bmatrix} d\eta$$

jest w tym przypadku operatorem całkowym. Fakt ten wyłania konieczność sprawdzenia jego symetrii (3.3). W rozważanym zadaniu brzegowym

$$\mathbf{u} = [w_1(\xi, t), p_1(\xi, t)], \quad \mathbf{v} = [w_2(\xi, t), p_2(\xi, t)].$$

Rozwijając warunek symetrii (3.3), otrzymano

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle &= \frac{E_0 J}{L^3} de(t) \times \int_0^1 w_1^{IV}(\xi, t) \times w_2(\xi, t) d\xi + L \int_0^1 p_1(\xi, t) \times w_2(\xi, t) d\xi + \\ &+ L \int_0^1 w_1(\xi, t) \times p_2(\xi, t) d\xi + \frac{2}{\pi C_0} dc(t) \times \int_0^1 \int_0^1 \ln|\xi - \eta| p_1(\xi, t) \times p_2(\eta, t) d\eta \cdot d\xi + \\ &- \frac{E_0 J}{L^3} de(t) \times \int_0^1 w_2^{IV}(\xi, t) \times w_1(\xi, t) d\xi - L \int_0^1 p_2(\xi, t) \times w_1(\xi, t) d\xi + \\ &- L \int_0^1 w_2(\xi, t) \times p_1(\xi, t) d\xi - \frac{2}{\pi C_0} dc(t) \times \int_0^1 \int_0^1 \ln|\xi - \eta| p_2(\xi, t) \times p_1(\eta, t) d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Całkowanie przez części oraz uwzględnienie warunków brzegowych pozwala zredukować większość składników w (3.11), z wyjątkiem tych, które zawierają całki podwójne. Jednak dzięki formalnej zamianie zmiennych w jednej z całek podwójnych i wykorzystaniu symetrii jądra całkowego $\ln|\xi - \eta| = \ln|\eta - \xi|$, staje się ona identyczna z drugą całką podwójną, a zatem składniki te również ulegają redukcji, co ostatecznie dowodzi symetrii operatora równań (3.10), a więc istnienia funkcjonału typu (3.2). Ma on postać

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3(w, p) = & \frac{1}{2} \frac{E_0 J}{L^3} de(t) * \int_0^1 w^{iv}(\xi, t) * w(\xi, t) d\xi + L \int_0^1 p(\xi, t) * w(\xi, t) d\xi + \\
& + \frac{1}{C_0} dc(t) * \int_0^1 \int_0^1 \ln|\xi - \eta| p(\xi, t) * p(\eta, t) d\eta d\xi + \\
& - L \int_0^1 q(\xi, t) * w(\xi, t) d\xi - A(t) * L \int_0^1 p(\xi, t) d\xi.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

W zakończeniu tej części pracy wydaje się rzeczą celową zwrócić uwagę na problem warunków brzegowych, które nie były dotychczas przedmiotem rozważań. Sposób ich uwzględnienia z reguły wiąże się z zastosowaną metodą rozwiązania zadania, dlatego szersze omówienie tego problemu ma miejsce w następnej części pracy, dotyczącej realizacji MES.

4. Realizacja metody elementów skończonych

Algorytmy realizowane w metodzie elementów skończonych, których punktem wyjścia są wariacyjne zasady podejmowanych zadań mechaniki konstrukcji, cechuje — typowa dla tej metody — duża uniwersalność. Wyraża się to przede wszystkim niezależnością schematu postępowania (przy konstrukcji tych algorytmów) od przyjętej zasady wariacyjnej podejmowanego problemu.

W niniejszej pracy przedstawiono algorytm rozwiązania w MES dla pierwszego zadania brzegowego traktując ten algorytm jako przykład, a zarazem wzór do opracowania podobnych algorytmów dla pozostałych zadań brzegowych. W realizacji celu kierowano się koncepcją analitycznego ujęcia czasu i wykorzystania ścisłego zadania w zakresie sprężystym do aproksymacji poszukiwanego rozwiązania lepkospężystego.

Podział belki na elementy i aproksymacja rozwiązania

Dla aproksymacji rozwiązania zadania dokonano naturalnego podziału belki na elementy skończone w sposób pozwalający uniknąć kłopotów związanych z nieciągłością funkcji sił wewnętrznych w punktach przyłożenia obciążeń skupionych (rys. 2).

Zgodnie z koncepcją, aproksymację pola przemieszczeń i pola momentów zginających w obrębie elementu przyjęto w postaci [13]

$$w_e(x_e, t) = \alpha_1^e(t) \eta_1^e(x_e) + \alpha_2^e(t) \eta_2^e(x_e) + \alpha_3^e(t) \eta_3^e(x_e) + \alpha_4^e(t) \eta_4^e(x_e) = \alpha_e^T(t) \eta_e(x_e), \tag{4.1}$$

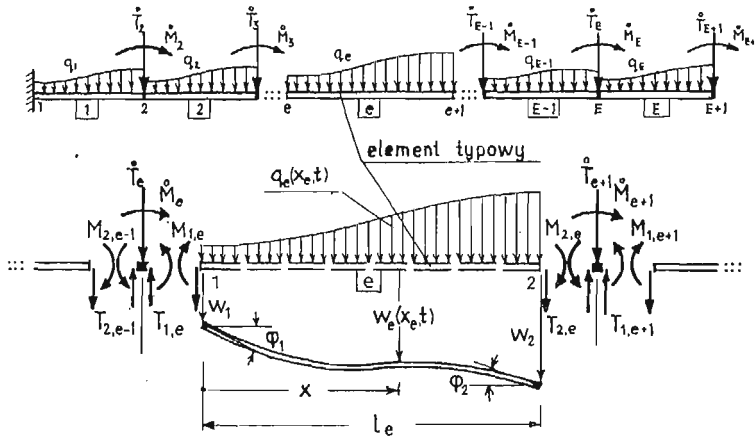
$$M_e(x_e, t) = \beta_1^e(t) \eta_2^e(x_e) + \beta_2^e(t) \eta_3^e(x_e) + \beta_3^e(t) \eta_4^e(x_e) = \beta_e^T(t) \eta_e(x_e), \tag{4.2}$$

gdzie

$$\eta_1^e(x_e) = \text{sh}(\kappa_e x_e) \sin(\kappa_e x_e), \quad \eta_2^e(x_e) = \text{sh}(\kappa_e x_e) \cos(\kappa_e x_e),$$

$$\eta_3^e(x_e) = \text{ch}(\kappa_e x_e) \sin(\kappa_e x_e), \quad \eta_4^e(x_e) = \text{ch}(\kappa_e x_e) \cos(\kappa_e x_e),$$

$$\kappa_e = \sqrt[4]{\frac{R_{0e}}{4E_0 J_e}}.$$



Rys. 2

Nieznane wektory funkcyjne $\alpha_e(t)$ i $\beta_e(t)$ muszą czynić zadość kinematycznym i statycznym warunkom brzegowym na końcach elementu (rys. 2), a więc

$$\begin{aligned}
 w_e(0, t) = w_{1e}(t) &\rightarrow \alpha_e^T(t)\eta_e(0) = w_{1e}(t) & M_e'(0, t) = -T_{1e}(t) &\rightarrow \beta_e^T(t)\eta_e'(0) = -T_{1e}(t) \\
 w_e'(0, t) = \Phi_{1e}(t) &\rightarrow \alpha_e^T(t)\eta_e'(0) = \Phi_{1e}(t) & M_e(0, t) = M_{1e}(t) &\rightarrow \beta_e^T(t)\eta_e(0) = M_{1e}(t) \\
 w_e(l_e, t) = w_{2e}(t) &\rightarrow \alpha_e^T(t)\eta_e(l_e) = w_{2e}(t) & M_e'(l_e, t) = T_{2e}(t) &\rightarrow \beta_e^T(t)\eta_e'(l_e) = T_{2e}(t) \\
 w_e'(l_e, t) = \Phi_{2e}(t) &\rightarrow \alpha_e^T(t)\eta_e'(l_e) = \Phi_{2e}(t) & M_e(l_e, t) = -M_{2e}(t) &\rightarrow \beta_e^T(t)\eta_e(l_e) = -M_{2e}(t)
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Warunkom (4.3) można nadać następującą postać macierzową

$$\mathbf{w}_e(t) = [\mathbf{A}_e]^{-1}\alpha_e(t), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{m}_e(t) = [\mathbf{B}_e]^{-1}\beta_e(t), \quad (4.5)$$

gdzie

$$\mathbf{w}_e(t) = [w_{1e}(t), \Phi_{1e}(t), w_{2e}(t), \Phi_{2e}(t)]^T, \quad \mathbf{m}_e(t) = [T_{1e}(t), M_{1e}(t), T_{2e}(t), M_{2e}(t)]^T,$$

$$[\mathbf{A}_e]^{-1} = \begin{bmatrix} \eta_{1e}(0), & \eta_{2e}(0), & \eta_{3e}(0), & \eta_{4e}(0) \\ \eta'_{1e}(0), & \eta'_{2e}(0), & \eta'_{3e}(0), & \eta'_{4e}(0) \\ \eta_{1e}(l_e), & \eta_{2e}(l_e), & \eta_{3e}(l_e), & \eta_{4e}(l_e) \\ \eta'_{1e}(l_e), & \eta'_{2e}(l_e), & \eta'_{3e}(l_e), & \eta'_{4e}(l_e) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{B}_e]^{-1} = \begin{bmatrix} -\eta'_{1e}(0), & -\eta'_{2e}(0), & -\eta'_{3e}(0), & -\eta'_{4e}(0) \\ \eta_{1e}(0), & \eta_{2e}(0), & \eta_{3e}(0), & \eta_{4e}(0) \\ \eta'_{1e}(l_e), & \eta'_{2e}(l_e), & \eta'_{3e}(l_e), & \eta'_{4e}(l_e) \\ -\eta_{1e}(l_e), & -\eta_{2e}(l_e), & -\eta_{3e}(l_e), & -\eta_{4e}(l_e) \end{bmatrix}$$

W ten sposób funkcje $w_e(x_e, t)$ i $M_e(x_e, t)$ zostały wyrażone przez parametry węzłowe $\mathbf{w}_e(t)$, $\mathbf{m}_e(t)$ oraz wektor funkcyjny $\eta_e(x_e)$

$$w_e(x_e, t) = \eta_e^T(x_e) [\mathbf{A}_e] \mathbf{w}_e(t) = \mathbf{w}_e^T(t) [\mathbf{A}_e^T] \eta_e(x_e), \quad (4.6)$$

$$M_e(x_e, t) = \eta_e^T(x_e) [\mathbf{B}_e] \mathbf{m}_e(t) = \mathbf{m}_e^T(t) [\mathbf{B}_e^T] \eta_e(x_e). \quad (4.7)$$

Funkcjonał dla elementu typowego

Wykorzystując wariacyjne ujęcie rozważanego zagadnienia, funkcyjonał (3.7) dla typowego elementu belki (rys. 2) zapisano w postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_e(w_e, M_e) = & \frac{1}{2} \frac{dc(t)}{E_0 J_e} \times \int_0^{l_e} M_e(x_e, t) \times M_e(x_e, t) dx_e + \frac{1}{2} \int_0^{l_e} w_e''(x_e, t) \times M_e(x_e, t) dx_e + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{l_e} w_e(x_e, t) \times M_e''(x_e, t) dx_e - \frac{1}{2} R_0 dr(t) \times \int_0^{l_e} w_e(x_e, t) \times w_e(x_e, t) dx_e + \\ & + \int_0^{l_e} w_e(x_e, t) \times q_e(x_e, t) dx_e, \end{aligned} \quad (4.8)$$

a następnie — korzystając z (4.6) i (4.7) — nadano temu funkcyjonałowi następującą formę macierzową

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_e(\mathbf{w}_e, \mathbf{m}_e) = & \frac{1}{2} dc(t) * \mathbf{m}_e^T(t) * [\mathbf{K}_e] \mathbf{m}_e(t) + \mathbf{w}_e^T(t) * [\mathbf{T}_e] \mathbf{m}_e(t) + \\ & - \frac{1}{2} dr(t) * \mathbf{w}_e^T(t) * [\mathbf{S}_e] \mathbf{w}_e(t) + \mathbf{w}_e^T(t) \times \mathbf{q}_e(t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_e] = & \frac{1}{E_0 J_e} [\mathbf{B}_e^T] \int_0^{l_e} \boldsymbol{\eta}_e(x_e) \cdot \boldsymbol{\eta}_e^T(x_e) dx_e [\mathbf{B}_e], \\ [\mathbf{S}_e] = & R_0 [\mathbf{A}_e^T] \int_0^{l_e} \boldsymbol{\eta}_e(x_e) \cdot \boldsymbol{\eta}_e^T(x_e) dx_e [\mathbf{A}_e], \\ [\mathbf{T}_e] = & \frac{1}{2} [\mathbf{A}_e^T] \int_0^{l_e} [\boldsymbol{\eta}_e''(x_e) \boldsymbol{\eta}_e^T(x_e) + \boldsymbol{\eta}_e(x_e) \boldsymbol{\eta}_e''^T(x_e)] dx_e [\mathbf{B}_e], \\ \mathbf{q}_e(t) = & [\mathbf{A}_e^T] \int_0^{l_e} \boldsymbol{\eta}_e(x_e) \cdot q_e(x_e, t) dx_e. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Jak widać, funkcyjonał (4.9) stanowi sumę form kwadratowych, dwuliniowej i liniowej nieznanymi parametrów węzłowych $\mathbf{w}_e(t)$ i $\mathbf{m}_e(t)$ względem iloczynu splotowego. Jądrami tych form są macierze określone wzorami (4.10).

Globalny układ równań MES

Tworzenie globalnego funkcyjonału dla całego (połączonego) układu dyskretnego polega tutaj na zapewnieniu ciągłości pola przemieszczeń w węzłach podziału belki na elementy

$$\begin{aligned} w_{2,e}(t) = w_{1,e+1}(t) = w_{e+1}(t), \\ \Phi_{2,e}(t) = \Phi_{1,e+1}(t) = \Phi_{e+1}(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

oraz na zagwarantowaniu równowagi tych węzłów (rys. 2)

$$\begin{aligned} T_{2,e}(t) + T_{1,e+1}(t) &= T_{e+1}(t), \\ M_{2,e}(t) + M_{1,e+1}(t) &= M_{e+1}(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Realizacja warunków (4.11) i (4.12) narzuca odpowiednie łączenie macierzy $[\mathbf{K}_e]$, $[\mathbf{T}_e]$, $[\mathbf{S}_e]$ i wektorów $\mathbf{q}_e(t)$ dla poszczególnych elementów. W wyniku tego łączenia otrzymuje się globalny funkcjonal będący sumą form (kwadratowych, dwuliniowej i liniowej) globalnych parametrów węzłowych $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{m}(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{w}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} dc(t) \times \mathbf{m}^T(t) \times [\mathbf{K}] \mathbf{m}(t) + dc(t) \times \mathbf{m}^T(t) \times [\mathbf{Q}] \dot{\mathbf{m}}(t) + \\ &+ \frac{1}{2} dc(t) \times \dot{\mathbf{m}}(t) \times [\mathbf{K}] \dot{\mathbf{m}}(t) + \mathbf{w}^T(t) \times [\mathbf{T}] \mathbf{m}(t) + \mathbf{w}^T(t) \times [\boldsymbol{\theta}] \dot{\mathbf{m}}(t) - \\ &- \frac{1}{2} dr(t) \times \mathbf{w}^T(t) \times [\mathbf{S}] \mathbf{w}(t) + \mathbf{w}^T(t) \times \mathbf{q}(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}}(t) &= [\dot{T}_1(t), \dot{M}_1(t), \dot{T}_2(t), \dot{M}_2(t), \dots, \dot{T}_{E+1}(t), \dot{M}_{E+1}(t)]^T, \\ [\mathbf{K}] &= \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{X}] [\mathbf{K}_e] [\mathbf{X}], \quad [\mathbf{S}] = \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{S}_e], \quad [\mathbf{T}] = \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{T}_e] [\mathbf{X}], \quad [\hat{\mathbf{K}}] = \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{Y}] [\mathbf{K}_e] [\mathbf{Y}], \\ [\mathbf{Q}] &= \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{X}] [\mathbf{K}_e] [\mathbf{Y}], \quad [\boldsymbol{\theta}] = \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{T}_e] [\mathbf{Y}], \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Warunek stacjonarności funkcjonału (4.13) $\delta \mathcal{F} = 0$, w połączeniu z twierdzeniem Titchmarsha [14] prowadzi do globalnego układu równań MES, a mianowicie

$$dc(t) \times [\mathbf{K}] \mathbf{m}(t) + (\mathbf{T}^T) \mathbf{w}(t) = -dc(t) \times [\mathbf{Q}] \dot{\mathbf{m}}(t), \quad (4.15)$$

$$-[\mathbf{T}] \mathbf{m}(t) + dr(t) \times [\mathbf{S}] \mathbf{w}(t) = \mathbf{q}(t) + [\boldsymbol{\theta}] \dot{\mathbf{m}}(t). \quad (4.16)$$

Rozwiązanie globalnego układu równań MES

Zmierzając do rozwiązania globalnego układu równań (4.15, 4.16), dokonano na nich transformacji Laplace'a, a następnie wyrugowano wektor $\bar{\mathbf{m}}(p)$, otrzymując

$$\mathbf{m}(p) = d\bar{e}(p) [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{T}^T] \bar{\mathbf{w}}(p) - [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{Q}] \dot{\bar{\mathbf{m}}}(p), \quad (4.17)$$

$$\{d\bar{e}(p) [\mathbf{T}] [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{T}^T] + d\bar{r}(p) [\mathbf{S}]\} \bar{\mathbf{w}}(p) = \bar{\mathbf{q}}(p) + \langle [\boldsymbol{\theta}] - [\mathbf{T}] [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{Q}] \rangle \dot{\bar{\mathbf{m}}}(p). \quad (4.18)$$

Po podzieleniu równania (4.18) przez $d\bar{e}(p) = 1/d\bar{c}(p)$ i wprowadzeniu oznaczeń $\bar{g}(p) = = d\bar{r}(p)/d\bar{e}(p)$, $\bar{\mathbf{f}}(p) = \bar{\mathbf{q}}(p) + \langle [\boldsymbol{\theta}] - [\mathbf{T}] [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{Q}] \rangle \dot{\bar{\mathbf{m}}}(p)$, $[\hat{\mathbf{K}}] = [\mathbf{T}] [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{T}^T]$, otrzymano

$$\langle [\hat{\mathbf{K}}] + \bar{g}(p) [\mathbf{S}] \rangle \bar{\mathbf{w}}(p) = \frac{1}{d\bar{e}(p)} \bar{\mathbf{f}}(p). \quad (4.19)$$

Pojawia się teraz problem rozwiązania algebraicznego równania macierzowego (4.19), lecz nie jest to możliwe poprzez bezpośrednie odwrócenie macierzy tego równania, ponieważ zawiera ona czynnik analityczny $\bar{g}(p)$. Jednak dzięki twierdzeniu Hamiltona [15], odwrotną macierz równania (4.19) można otrzymać przy pomocy jej rozkładu spektralnego

$$[\hat{\mathbf{K}}] + \bar{g}(p) [\mathbf{S}] = [\mathbf{W}^T]^{-1} \langle \langle \mathbf{G} \rangle + \bar{g}(p) \{I\} \rangle [\mathbf{W}]^{-1}, \quad (4.20)$$

gdzie $\{I\}$ jest macierzą jednostkową, natomiast $\{\mathbf{G}\}$ macierzą spektralną, a $[\mathbf{W}]$ macierzą własną rozszerzonego zagadnienia własnego [15]

$$[\hat{\mathbf{K}}] \mathbf{x} = g[\mathbf{S}] \mathbf{x}. \quad (4.21)$$

Taka postać macierzy równania (4.19) pozwala na jej odwrócenie przy jednoczesnym wyłączeniu czynnika analitycznego $\bar{g}(p)$ poza operacje macierzowe, mianowicie

$$\begin{aligned} \langle [\hat{\mathbf{K}}] + \bar{g}(p) [\mathbf{S}] \rangle^{-1} &= [\mathbf{W}] \langle \langle \mathbf{G} \rangle + \bar{g}(p) \{I\} \rangle^{-1} [\mathbf{W}^T] = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{g_n + \bar{g}(p)} [\mathbf{V}_n] = \sum_{n=1}^N \frac{d\bar{e}(p)}{g_n d\bar{e}(p) + d\bar{r}(p)} [\mathbf{V}_n], \end{aligned} \quad (4.22)$$

gdzie N jest wymiarem macierzy równania (4.19), natomiast $[\mathbf{V}_n]$ są macierzami powstałymi z iloczynów tensorowych wektorów własnych przez siebie, odpowiadających kolejnym wartościom własnym g_n równania (4.21). Przy takim podejściu, rozwiązanie równania (4.19) ma postać

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) * [\mathbf{V}_n] \mathbf{f}(t), \quad (4.23)$$

gdzie

$$\Phi_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{g_n d\bar{e}(p) + d\bar{r}(p)} \right\}.$$

Globalny wektor sił węzłowych $\mathbf{m}(t)$ otrzymuje się z równania (4.17) poprzez jego retransformację i podstawienie rozwiązania (4.23)

$$\mathbf{m}(t) = [\mathbf{K}]^{-1} \langle [\mathbf{T}^T] \sum_{n=1}^N \Psi_n(t) * [\mathbf{V}_n] \mathbf{f}(t) - [\mathbf{Q}] \dot{\mathbf{m}}(t) \rangle \quad (4.24)$$

gdzie

$$\Psi_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d\bar{e}(p)}{g_n d\bar{e}(p) + d\bar{r}(p)} \right\}.$$

Globalne wektory $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{m}(t)$ determinują pola przemieszczeń i sił wewnętrznych w poszczególnych elementach, zgodnie z przyjętą aproksymacją.

5. Przykłady obliczeń numerycznych

W celu wykazania efektywności przedstawionego algorytmu w MES, dla podjętego zadania, opracowano program obliczeń na EMC i dokonano analizy numerycznej trzech przykładów współpracy belki z podłożem.

Funkcje relaksacji materiału belki $e(t)$ i podłoża $r(t)$ zapisano w formie ujmującej jednocześnie modele: Hooke'a, Maxwella oraz standardowy, a mianowicie

$$\begin{aligned} e(t) &= (1-\eta)H(t) + \eta \cdot \exp(-e_0 t) \\ r(t) &= (1-\varrho)H(t) + \varrho \cdot \exp(-r_0 t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a, η, ϱ — bezwymiarowymi współczynnikami z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, e_0, r_0 — współczynnikami lepkości. Przyjmując $\eta = 0$, ($\varrho = 0$), otrzymuje się model sprężysty, natomiast dla $\eta = 1$, ($\varrho = 1$), funkcje (5.1) odpowiadają modelowi Maxwella. W pozostałych przypadkach opisują one model standardowy (Zennera). Realne wartości parametrów funkcji (5.1) ustalono na podstawie [16], traktując belki w analizowanych przykładach jako żelbetowe.

Występujące w rozwiązaniach (4.23) i (4.24) funkcje $\varphi_n(t)$ i $\psi_n(t)$ zależą od postaci funkcji relaksacji materiału belki i podłoża, czyli od typów modeli reologicznych tych materiałów. W realizacji algorytmu na EMC, funkcje te muszą być wyznaczone analitycznie, a następnie ujęte w programie w formie procedur. Dla funkcji relaksacji określonych wzorami (5.1) otrzymano

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{1+g_n} [\delta(t) + A_n \exp(\alpha_n t) + B_n \exp(\beta_n t)], \quad (5.2)$$

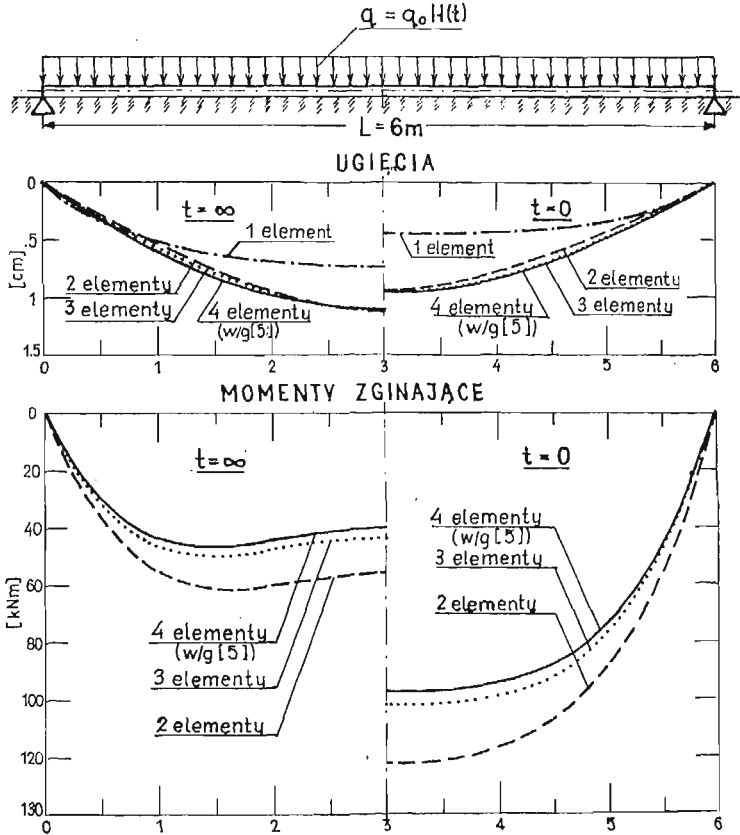
$$\Psi_n(t) = \frac{1}{1+g_n} \left[\delta(t) + \frac{(1-\eta)e_0 + \alpha_n}{e_0 + \alpha_n} A_n \exp(\alpha_n t) + \frac{(1-\eta)e_0 + \beta_n}{e_0 + \beta_n} B_n \exp(\beta_n t) \right], \quad (5.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -\frac{1}{2(1+g_n)} \left\{ (1+g_n-\varrho)r_0 + (1+g_n-g_n\eta)e_0 + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[(1+g_n-\varrho)r_0 - (1+g_n-g_n\eta)e_0]^2 + 4g_n r_0 \varrho e_0 \eta} \right\}, \\ \beta_n &= -\frac{1}{2(1+g_n)} \left\{ (1+g_n-\varrho)r_0 + (1+g_n-g_n\eta)e_0 + \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{[(1+g_n-\varrho)r_0 - (1+g_n-g_n\eta)e_0]^2 + 4g_n r_0 \varrho e_0 \eta} \right\}, \\ A_n &= \frac{1}{1+g_n} \frac{(\varrho+g_n\eta)e_0 r_0 - (\varrho r_0 + g_n r_0 \eta)\alpha_n}{\alpha_n - \beta_n} \\ B_n &= \frac{1}{1+g_n} \frac{(\varrho+g_n\eta)e_0 r_0 - (\varrho r_0 + g_n e_0 \eta)\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} \end{aligned}$$

Przykład 1: Żelbetowa belka leżąca na podłożu sprężystym, podparta przegubowo na końcach i obciążona równomiernie (rys. 3). Przykład ten dobrano dla sprawdzenia zbieżności rozwiązania względem gęstości podziału na elementy oraz dla porównania z rozwiązaniem analitycznym wg [5].

Przykład 2: Belka swobodnie leżąca na podłożu i obciążona na końcu siłą skupioną (rys. 4). Przykład ten rozwiązano w dwóch wariantach. W pierwszym belkę potraktowano jako lepkosprężystą, a podłożo sprężyste, natomiast w drugim wariantcie zamieniono własności belki i podłoża. Celem przykładu jest porównanie zachowania się pól przemieszczeń i sił wewnętrznych przy zamianie własności reologicznych materiału belki i podłoża.

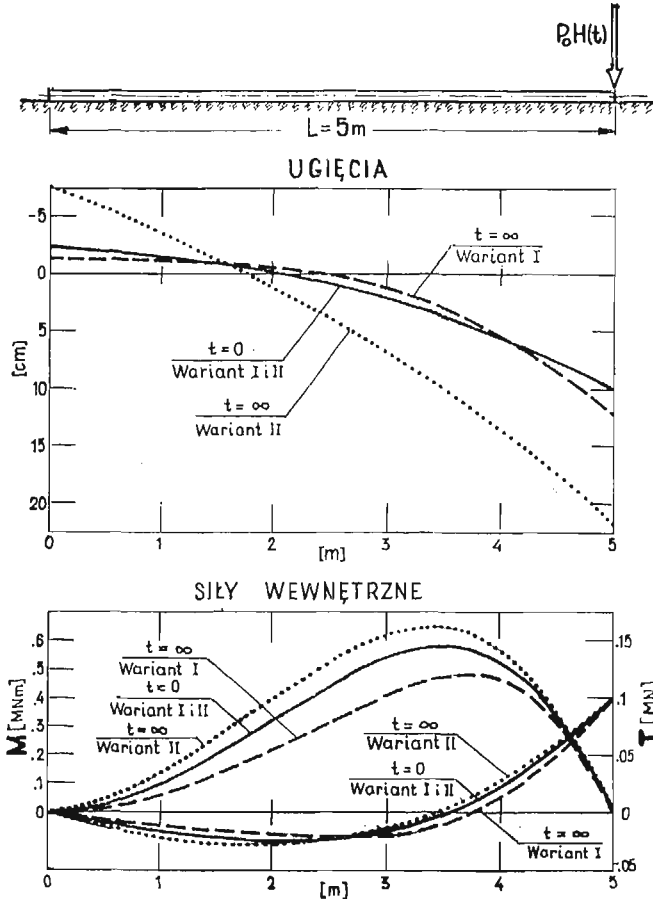


Rys. 3 Dane liczbowe: $q_0 = 10^5$ [N/m], $E_0 J = 4 \cdot 10^7$ [Nm²], $\eta = .595 e_0 = .08116$ [d⁻¹], $R_0 = 10^7$ [N/m²], $\varphi = 0$. Podział na elementy: I — 1 × 6 m, II — 2 × 3 m, III — 3 × 2 m, IV — 4 × 1,5 m

W graficznej prezentacji wyników analizy ograniczono się jedynie do wykresów przemieszczeń i sił wewnętrznych dla $t = 0$ i $t = \infty$, co daje jakościowe wyobrażenie o współpracy belki z podłożem w skrajnych fazach tej współpracy przy obciążeniach quasistatycznych.

Przykład 3: Belka żelbetowa o złożonym schemacie statycznym i zmiennej sztywności sprężystej, obciążona możliwymi typami sił (rozłożone i skupione), leżąca na podłożu lepkospężystym (rys. 5). Zamiarem przytoczenia tego przykładu jest potwierdzenie ogólności metody i algorytmu obliczeń numerycznych.

Przykład 3 upoważnia do przytoczenia sposobu uwzględniania statycznych i kinematycznych warunków brzegowych, czyli ograniczeń na przemieszczenia i siły wewnętrzne, stosowane do schematu statycznego belki. Ograniczenia na przemieszczenia (przesunięcie i obrót) uwzględniane są w algorytmie poprzez modyfikację macierzy [S], natomiast realizację zerowych warunków statycznych uzyskuje się poprzez modyfikację macierzy [K]. Modyfikacja ta — zgodnie z koncepcją IRONSA [17] — polega na znacznym zwiększeniu elementu diagonalnego macierzy (np. poprzez pomnożenie przez dużą liczbę), odpowiadającemu parametrowi węzłowemu (przemieszczeń i sił wewnętrznych), na który nakładane są ograniczenia.



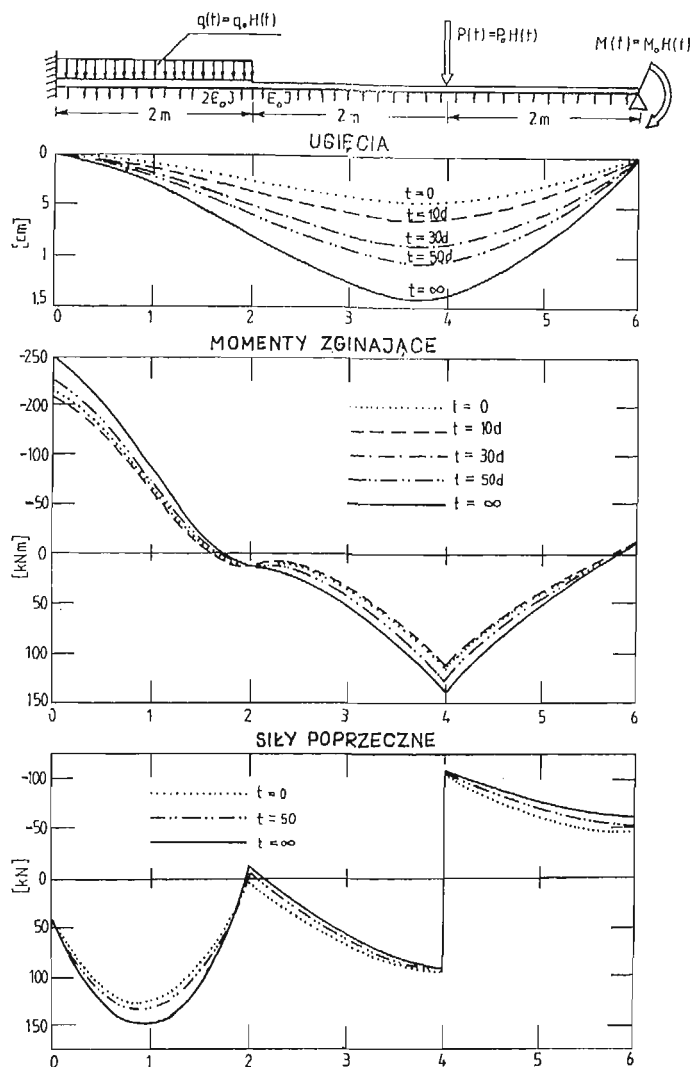
Rys. 4. Dane liczbowe: Wariant I — $P_0 = 10^6$ [N], $E_0 J = 4 \cdot 10^7$ [Nm²], $\eta = 0.5947$, $e_0 = 0.08116$ [d⁻¹], $R_0 = 10^7$ [N/m²], $\varrho = 0$. Wariant II — $P_0 = 10^6$ [N], $E_0 J = 4 \cdot 10^7$ [Nm²], $\eta = 0$, $R_0 = 10^7$ [N/m²], $\varrho = 0.5947$, $r_0 = 0.08116$ [d⁻¹]. Podział na elementy: 2m+2m+1m

6. Wnioski końcowe

Doświadczenia zdobyte w trakcie opracowywania metody oraz analiza wyników obliczeń licznych przykładów (ze zrozumiałych względów nie zamieszczonych w pracy), skłaniają do kilku wniosków o charakterze ogólnym.

1° Wariacyjne ujęcie zadań brzegowych w wersji dwupolowej w połączeniu z MES oraz wykorzystanie ścisłego rozwiązania „sprężystego” do aproksymacji poszukiwanych rozwiązań, stworzyło możliwość budowy efektywnego algorytmu do analizy szerokiej klasy konkretnych i realnych zadań dotyczących współpracy belek z podłożem, w ujęciu reologicznym.

2° Szczególnie pozytywną zaletą metody jest analityczne ujęcie zmiennej czasowej, co stwarza możliwość operowania różnymi wariantami obciążeń bez konieczności powtarzania głównej części programu obliczeń dla danego schematu statycznego belki. Dzięki



Rys. 5. Dane liczbowe: $q_0 = 10^5$ [N/m], $P_0 = 2 \cdot 10^5$ [N], $M_0 = 10^5$ [Nm], $E_0 J = 4 \cdot 10^7$ [Nm²], $= \eta \cdot 5947$, $e_0 = 0.08116$ [d⁻¹], $R_0 = 10^{-7}$ [N/m²], $Q = .75$, $r_0 = .05$ [d⁻¹].

temu, opracowana metoda jest bardzo przydatna w sytuacji skromnej bazy komputerowej, gdyż nie wymaga tak dużej pamięci EMC, jak ma to miejsce w przypadku metod opartych na dyskretyzacji skali czasu.

3° W przypadku dysponowania EMC z pamięcią zewnętrzną proponowana metoda może być bezpośrednio przeniesiona na zagadnienia dwu- i trójwymiarowe (np. płyty lub powłoki). W tym celu należy sformułować odpowiedni funkcyjonał dla podjętego zadania brzegowego, a następnie zastosować MES, wzorując się na przedstawionym w pracy algorytmie.

4° W realizacji metody przyjęto konkretne postacie funkcji relaksacji materiału belki i podłoża, co jednak nie wynika z ograniczeń metody. Ograniczenia na te funkcje wynikają

jedynie z liniowości związków fizycznych i z warunków istnienia transformat Laplace'a. Wprowadzając pojęcie splotu uogólnionego, zamiast wykorzystanego w pracy splotu w sensie Borella, można uogólnić metodę na zagadnienia w ramach bardziej zaawansowanych liniowych teorii lepkosprężystości (np. Arutuniana teoria starzenia).

5° Uzyskane wyniki numeryczne wskazują na znaczne jakościowe i ilościowe zmiany przemieszczeń i sił wewnętrznych w procesie deformacji układu belka-podłoże. Fakt ten podkreśla celowość uwzględniania reologicznych cech układu w praktyce projektowej.

Literatura

1. M. I. GORBUNOW-POSADOW, *Obliczanie konstrukcji na podłożu sprężystym*, WBiA, Warszawa 1956.
2. A. IWANCZEWSKA, J. LEWANDOWSKI, *Obliczanie konstrukcji na sprężystym podłożu*, Arkady, Warszawa 1968,
3. J. MAĆZKA, G. SZEFER, *Krótkie belki na podłożu typu półprzestrzeni sprężystej*, Rozpr. Inż., t. 18, z. 1, 1970 s. 133 - 155,
4. Praca zbiorowa, *Numerical methods in geotechnical engineering*, McGraw-Hill Book Company, 1977,
5. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963,
6. K. SZPUNAR, *Ugięcie belki na podłożu reologicznym Pragera*, Rozpr. Inż., t. 10, z. 2, s. 211 - 229, 1962,
7. B. SKALMIERSKI, *Zagadnienie lepkosprężystego pręta kolowego na podłożu lepkosprężystym*, Rozpr. Inż., t. 13, z. 2, s. 325 - 339, 1965,
8. M. E. GURTIN, E. STERNBERG, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 11, s. 291 - 356, 1962,
9. R. M. CHRISTENSEN, *Theory of viscoelasticity*, Academic Press, New York, and London 1971
10. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970,
11. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969,
12. J. T. ODEN, *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill Book Company, 1972,
13. T. SMOLEŃ, *Sprężysto — lepkosprężysta analiza statyczna belek na podłożu odkształcalnym*, XXVIII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Warszawa—Krynica 1982, t. 1, s. 151 - 158,
14. Praca zbiorowa, *Poradnik inżyniera — matematyka*, WNT, Warszawa 1971,
15. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1975,
16. A. MITZEL, *Reologia betonu*, Arkady, Warszawa 1972,
17. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

ИЗГИБАНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ БАЛОК НА РЕОЛОГИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ

В работе сформулировано несколько задач касающихся изгибаия вязкоупругих балок при произвольной статической схеме, лежащих на основании облагающим реологическими свойствами. При формулировке принято различие реологических моделей материалов балки и основания без уточнения типов этих моделей на этапе формулировки. Имея во вниманио применение метода конечных элементов для решения сформулированных задач, сделано вариационную формулировку этих задач, а также представлено общий алгоритм для числительного анализа с использованием ЭВМ. В изготовлении алгоритма применено полуаналитическую аппроксимацию, которая состоит в аналитическом принятию рассуждаемых соотношений по отношению к временной переменной. Эффективность алгоритма иллюстрированно несколькими числительными примерами.

S u m m a r y

BENDING OF VISCOELASTIC BEAMS ON A RHEOLOGICAL FOUNDATION

In the paper several problems of bending of viscoelastic beams with arbitrary static scheme, resting on a foundation having viscoelastic properties are formulated. In the formulation the difference of rheological models of a beam and foundation materials is assumed but they are not precised on the stage of the formulation. Keeping on mind the application of the finite element method, the variational formulations of the problems are achieved and general algorithm and its computer realization is presented. In working out of the algorithm the semi-analytical approximation of searched solution by using the solution of analogical elastic problem is applicated. The approximation consist in analytic formulating of considered dependences with respect to time. The efficiency of the algorithm by several numerical examples is supported.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1984 roku

BIULETYN INFORMACYJNY

Protokół z XXI Zjazdu Delegatów i Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej 9 - 11 maja 1984

Bielsko-Biała

Patronat nad Zjazdem objęli profesorowie: Jan Karol Kostrzewski, Prezes PAN, Benon Miśkiewicz, Minister Nauki, Szkolnictwa Wyższego i Techniki, Witold Nowacki, Inicjator założenia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

W Zjeździe wzięło udział 97 delegatów oraz zaproszeni goście: prof. dr Janusz Dietrych — Członek Honorowy PTMTS i Czł. Gł. Kom. Rewizyjnej, mgr inż. Józef Gorczyca — przedstawiciel Ministerstwa Nauki, Szkolnictwa Wyższego i Techniki, mgr. inż. Bogusław Siuda — wicewojewoda Bielska-Białej, prof. dr hab. dr h.c. Oktawian Popowicz.

Na wstępie profesor dr hab. S. J. Gdula, powitał zebranych gości i przedstawił proponowany porządek obrad.

Następnie prof. Z. Olesiak, Przewodniczący Zarządu Głównego, przedstawił referat na temat powstania i historii Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Po referacie prof. Z. Olesiaka głos zabierali zaproszeni goście: Przedstawiciel Ministra Nauki Szkolnictwa Wyższego i Techniki — mgr inż. Józef Gorczyca, V-ce Wojewoda mgr inż. Bolesław Siuda, Prof. Tadeusz Zagajewski — Przewodniczący Oddziału Katowickiego Polskiej Akademii Nauk, reprezentujący Prezesa PAN.

W swoim wystąpieniu prof. Tadeusz Zagajewski podkreślił znaczenie Towarzystwa na rzecz rozwoju mechaniki w Polsce na przestrzeni 25-lecia i życzył dalszych osiągnięć w następnych latach. Na zakończenie prof. T. Zagajewski wręczył w imieniu Prezesa PAN listy z podziękowaniem następującym Członkom Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej:

prof. dr hab. Eugeniuszowi Bielewiczowi (Gdańsk)
prof. dr hab. Eugeniuszowi Brzuchowskiemu (Wrocław)
prof. dr hab. Markowi Dietrichowi (Warszawa)
prof. dr hab. Stanisławowi Jerzemu Gdule (Bielsko-Biała)
prof. dr hab. Przemysławowi Jastrzębskiemu (Warszawa)
prof. dr Zbigniewowi Kączkowskiemu (Warszawa)
prof. dr hab. Wiesławowi Krzysiu (Kraków)
doc. dr Jerzemu Mierzejewskiemu (Szczecin)
prof. dr Zbigniewowi Olesiakowi (Warszawa)
doc. dr Waleremu Szuścikowi (Gliwice)
doc. dr Władysławowi Walczakowi (Łódź)
prof. dr hab. Józefowi Wojnarowskiemu (Gliwice)

Po części oficjalnej rozpoczęto Sesję Naukową, której przewodniczył prof. Józef Wojnarowski.

W czasie obrad tej sesji wygłoszono następujące referaty:

prof. dr hab. Marek Dietrich: *O modelowaniu w budowie maszyn*, prof. dr hab. G. Rakowski: *Komputeryzacja mechaniki konstrukcji w Polsce w ostatniej dekadzie działalności PTMTS*, Prof. dr hab. C. Woźniak: *Co to jest analiza niestandardowa i jej zastosowania w mechanice*, Prof. dr hab. K. Sobczyk: *Metody stochastyczne w mechanice, stan i tendencje rozwojowe*.

W dyskusji głos zabrali Profesorowie: E. Brzuchowski, M. Dietrich, S. Krzyś, J. Wojnarowski.

Po przerwie obiadowej odbyła się I część Zjazdu Delegatów.

PIERWSZY DZIEŃ OBRAD ZJAZDU DELEGATÓW

W statutowej części Zjazdu Delegatów uczestniczyli:

1. Prof. dr hab. Oktawian Popowicz — wybrany na Zjeździe członek honorowy PTMTS
2. Prof. dr Janusz Dietrych członek honorowy PTMTS (wyjechał przed wyborami) oraz delegaci:

Oddział w Bielsku-Białej

3. Prof. dr hab. S. Jerzy Gdula (Przew. Oddziału i Delegat)
4. Doc. dr hab. Kazimierz Maczyński — nieobecny 10.V.1984
5. Dr Andrzej Sucheta

Oddział w Bydgoszczy

6. Dr Andrzej Golik
7. Mgr inż. Jerzy Gil
8. Mgr inż. Anna Gil

Oddział w Częstochowie

9. Prof. dr hab. Janusz Elsner (Przew. Oddziału i Delegat)
10. Doc. dr Waldemar Bachmacz
11. Dr Stanisław Drobnik
12. Doc. dr hab. Lech Tomski
13. Prof. dr hab. Tadeusz Lechowski
14. Doc. dr Seweryn Lewandowski
15. Doc. dr Roman Wolański
16. Doc. dr hab. Ryszard Parkitny (Z-ca Czł. ZG i Delegat)

Oddział w Gdańsku

17. Prof. dr hab. Eugeniusz Bielewicz (Przew. Oddziału i Delegat)
18. Prof. dr hab. Zbigniew Cywiński
19. Doc. dr Mirosław Skowronek
20. Dr Edmund Wittbrodt
21. Prof. dr Mieczysław Wizmur

Oddział w Głiwicach

22. Doc. dr Walery Szuścik (Przew. Oddziału i Delegat)
23. Dr Jan Adamczyk
24. Prof. dr hab. Bogdan Skalmierski
25. Doc. dr Roman Bąk
26. Doc. dr Zdzisław Sulimowski
27. Doc. dr Zbigniew Bogucki
28. Dr Andrzej Buchacz
29. Dr Remigiusz Ówik
30. Dr Joachim Otte
31. Dr Jerzy Kuczyński
32. Dr Adam Kwaśnicki
33. Dr Wojciech Pillich
34. Dr Henryk Skowron
35. Doc. dr hab. Włodzimierz Starosolski
36. Dr Józef Suchoń
37. Doc. dr Wojciech Tarnowski
38. Prof. dr hab. Józef Wojnarowski (Z-ca Przew. ZG i Delegat)

Oddział w Kielcach

- 39. Dr Adam Barchan
- 40. Dr Mieczysław Bojczuk
- 41. Dr Marek Miksa

Oddział w Krakowie

- 42. Doc. dr hab. Stanisław Bednarz (Przew. Oddziału i Delegat)
- 43. Dr Maria Baczyńska
- 44. Dr Jerzy Wapiennik
- 45. Dr Andrzej Gołaś
- 46. Prof. dr hab. Wiesław Krzyś
- 47. Dr Marek Szczybura

Oddział w Lublinie

- 48. Doc. dr Zdzisława Rotter (Przew. Oddziału i Delegat)
- 49. Dr inż. Jan Golec
- 50. Dr inż. Antoni Malicki
- 51. Dr inż. Bogusław Skierczyński

Oddział w Łodzi

- 52. Doc. dr hab. Waldemar Kobza (Przew. Oddziału i Delegat)
- 53. Dr inż. Leon Kowalczyk
- 54. Doc. dr Janusz Lipiński
- 55. Doc. dr Władysław Walczak (Sekretarz Gen. ZG i Delegat)
- 56. Dr Andrzej Młotkowski

Oddział w Opolu

- 57. Doc. dr hab. Jan Kubik (Przew. Oddziału i Delegat)
- 58. Doc. dr Jerzy Gołaś

Oddział w Poznaniu

- 59. Doc. dr hab. Ryszard Dziecielak (Przew. Oddziału i Delegat)
- 60. Prof. dr hab. Ryszard Ganowicz
- 61. Doc. dr Zenon Kończak
- 62. Dr Jerzy Rakowski
- 63. Doc. dr hab. Andrzej Litewka
- 64. Prof. dr hab. Henryk Mikołajczyk
- 65. Prof. dr hab. Kazimierz Wrześniowski

Oddział w Rzeszowie

- 66. Doc. dr Henryk Kopecki (Przew. Oddziału i Delegat)

Oddział w Szczecinie

- 67. Doc. dr hab. Karol Grudziński (Przew. Oddziału i Delegat)
- 68. Dr inż. Jerzy Honczarenko
- 69. Doc. dr Marian Kmiecik
- 70. Doc. dr Czesław Mickiewicz

Oddział w Warszawie

- 71. Dr inż. Jerzy Bajkowski
- 72. Dr inż. Kazimierz Borsuk
- 73. Prof. dr hab. Marek Dietrich
- 74. Prof. dr hab. Stanisław Dubiel

75. Prof. dr hab. Zbigniew Dzygadlo
76. Prof. dr hab. Roman Gutowski (Z-ca Przew. ZG i Delegat)
77. Dr inż. Tadeusz Kuźmiczewicz
78. Dr inż. Maciej Mróz
79. Prof. dr Zbigniew Olesiak (Przew. ZG i Delegat)
80. Dr. inż. Stanisław Radkowski
81. Dr inż. Wiesław Sobieraj
82. Prof. dr hab. Jacek Stupnicki
83. Prof. dr hab. Wanda Szemplińska-Stupnicka
84. Prof. dr hab. Andrzej Tylikowski (Czl. GKR i Delegat)
85. Prof. dr hab. Andrzej Wilczyński (Skarbnik ZG i Delegat)
86. Prof. dr hab. Czesław Woźniak

Oddział we Wrocławiu

87. Prof. dr hab. Kazimierz Biernatowski (Przew. Oddziału i Delegat)
88. Prof. dr hab. Augustyn Borucz
89. Dr inż. Włodzimierz Brząkała
90. Prof. dr hab. Eugeniusz Brzuchowski (Czl. ZG i Delegat)
91. Prof. dr Otton Dąbrowski (Czl. GKR i Delegat)
92. Doc. dr Roman Jankowiak
93. Prof. dr Adam Negrusz
94. Prof. dr hab. Jeremi Bieczkowski
95. Dr inż. Maciej Hawrysz
96. Doc. dr hab. Mirosław Wereszko

Oddział w Zielonej Górze

97. Doc. dr Leszek Szeloch (Przew. Oddziału i Delegat)
98. Mgr inż. Stanisław Mazur
99. Dr inż. Stanisław Przyputniewicz

Bez głosu stanowiącego w Zjeździe uczestniczyli profesorowie A. Jakubowicz (w pierwszym dniu Zjazdu) i K. Sobczyk.

Obrady otworzył Przewodniczący ZG profesor Z. Olesiak i przedstawił kandydaturę profesora S. J. Gduli na Przewodniczącego Zjazdu Delegatów. Przedstawioną kandydaturę zaakceptowano jednogłośnie.

Po dyskusji przyjęto następujący porządek pierwszego dnia obrad Zjazdu:

1. Wybór Przewodniczącego Zjazdu, Zastępcy Przewodniczącego i Sekretarza Zjazdu
2. Wybór Komisji Mandatowej
3. Wybór Członków Honorowych PTMTS
4. Przyjęcie protokołu z XX Zjazdu Delegatów PTMTS odbytego w Warszawie 22 października 1982 r.
5. Powołanie Komisji Matki, Komisji Skrutacyjnej i Wnioskowej
6. Przedstawienie sprawozdania z działalności Towarzystwa w XX kadencji
7. Przedstawienie sprawozdania finansowego
8. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej
9. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie sprawozdań, postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi absolutorium i głosowanie nad wnioskiem
10. Zmiany w Statucie PTMTS
11. Dyskusja nad projektem regulaminu wyborów i przyjęcie regulaminu
12. Ewentualne przeprowadzenie głosowania indykacyjnego na Przewodniczącego ZG (w zależności od wyniku dyskusji i głosowania nad regulaminem wyborów).

ad 1

Realizując przyjęty porządek obrad wybrano Zastępcę Przewodniczącego Zjazdu, którym został doc. W. Szuścik (Gliwice). Na Sekretarza wybrano: dr M. Baczyńską i dr. H. Skowrona (Kraków, Gliwice).

ad 2

Do Komisji Mandatowej wybrano następujących Kolegów:

A. Negrusz (Wrocław) — Przewodniczący, H. Kopecki (Rzeszów), L. Szeloch (Zielona Góra).

Przewodniczący ZG przedstawił Zjazdowi Delegatów wniosek Zarządu Głównego (załącznik 1) o przyznanie godności Członka Honorowego profesorowi Oktawianowi Popowiczowi, członkowi Oddziału Gliwickiego, doktorowi *honoris causa* Akademii Górniczej we Freibergu.

Wniosek ten zaaprobowano jednomyślnie w głosowaniu jawnym i następnie Przewodniczący ZG oraz Sekretarz Generalny wręczyli profesorowi O. Popowiczowi dyplom Członka Honorowego PTMTS.

Zabierając głos prof. O. Popowicz podziękował serdecznie Zarządowi Oddziału Gliwickiego za to, że wystąpił z wnioskiem, a Zarządowi Głównemu oraz Zjazdowi Delegatów za przyznanie Mu godności Członka Honorowego PTMTS.

ad 4

Protokół z XX Zjazdu został wcześniej wręczony Delegatom, zaproponowano dyskusję bez jego odczytania. Protokół został zatwierdzony wraz z przyjętymi dwiema poprawkami natury formalnej.

ad 5

W skład powołanej Komisji Matki weszli następujący Koledzy:

E. Bielewicz (Gdańsk), R. Ganowicz (Poznań), Z. Rotter (Lublin), K. Grudziński (Szczecin).

Komisję Skrutacyjną powołano w składzie:

K. Borsuk (Warszawa), J. Kubik (Opole), A. Sucheta (Bielsko) i J. Lipiński (Łódź).

Komisję Wnioskową powołano w składzie:

R. Bąk (Gliwice) — Przewodniczący, S. Bednarz (Kraków) i M. Miksa (Kielce).

ad 6

Sprawozdanie z działalności Zarządu Głównego XX kadencji zostało wydrukowane i doręczone Delegatom. Przewodniczący ZG w swoim wystąpieniu omówił więc tylko najważniejsze punkty tego sprawozdania.

Przed wszystkim podziękował Zarządowi Oddziałów za zorganizowanie imprez naukowych, które wymieniono w sprawozdaniu ZG, a laureatom konkursu naukowego zorganizowanego przez Oddział w Łodzi pogratulował wyróżnień. Podziękował również wszystkim, którzy brali udział w pracach poszczególnych Komisji ZG, a mianowicie:

— autorom memoriału „O nauczaniu Mechaniki” Kolegom: S. Dubielowi, R. Gutowskiemu, R. Rutkowskiemu, K. Szabelskiemu, W. Szuścikowi i M. Trombskiemu;

— Członkom Komisji Obchodów XXV-lecia PTMTS, Kolegom: W. Bachmaczowi, E. Brzuchowskiemu, S. J. Gduli, Z. Sulimowskiemu i J. Wojnarowskiemu;

— członkom Komisji Oceny Stanu Mechaniki i Mapy Kierunków Rozwoju, Kolegom: S. Kasprzykowi, W. Pietraszkiewiczowi, W. Walczakowi, A. Wilczyńskiemu i J. Wojnarowskiemu;

— członkom Komisji Historii Mechaniki, Kolegom: J. Kruszewskiemu i A. Wilczyńskiemu.

Kolega Z. Olesiak przedstawił również Delegatom odnaleziony i zebrany zbiór Biuletynów PTMTS z lat 1959—1963.

Dalej w swoim wystąpieniu podziękował Zarządowi Oddziału Gliwickiego za pomoc w pracy ZG. Na zakończenie wspomniał jeszcze o pracach kodyfikacyjnych jakie podjęto w ZG a mianowicie w opracowaniu: regulaminu wyborów (W. Walczak), uzupełnień i poprawek do statutu (W. Bachmacz), regulaminu przyznawania godności Członka Honorowego PTMTS (W. Walczak).

Poinformował również Delegatów o wystosowaniu przez ustępujący ZG listów z podziękowaniami za współpracę do wszystkich Przewodniczących Zarządów Oddziałów oraz do innych członków PTMTS, którzy przez wiele lat pracowali społecznie na rzecz PTMTS, nie szczędząc swego czasu i talentu.

A oto lista zasłużonych Członków Towarzystwa, która została opublikowana również w Jubileuszowym wydaniu kwartalnika *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* (4/1983):

Oddział w Bielsku-Białej

Prof. Stanisław J. Gdula

Oddział w Częstochowie

Prof. Janusz Elsner
Prof. Roman Janiczek
Doc. Waldemar Bachmacz

Oddział w Gdańsku

Prof. Roman Kazimierczak
Prof. Piotr Wilde
Prof. Wojciech Pietraszkiewicz
Prof. Jan Kruszewski

Prof. Józef Więckowski

Oddział w Gliwicach

Prof. Jerzy Antoniak
Prof. Szczepan Borkowski
Dr Remigiusz Ćwik
Prof. Janusz Dietrych
Prof. Marian Janusz
Doc. Walery Szuścik
Prof. Józef Wojnarowski

Oddział w Krakowie

Prof. Roman Ciesielski
Prof. Zbigniew Engel
Doc. Stanisław Kasprzyk
Prof. Wiesław Krzyś
Prof. Zenon Waszczyszyn
Prof. Michał Życzkowski

Oddział w Łodzi

Prof. Zdzisław Parszewski
Doc. Władysław Walczak
Prof. Jerzy Sułocki (poprzednio Oddział w Szczecinie)
Doc. Janusz Lipiński
Doc. Kazimierz Grossman

Oddział w Poznaniu

Prof. Jarosław Stefaniak
Prof. Czesław Cempel
Prof. Henryk Mikołajczyk

Oddział w Szczecinie

Doc. Jerzy Mierzejewski
Doc. Czesław Mickiewicz
Doc. Karol Grudziński
Doc. Henryk Ostapiuk
Mgr Mieczysław Kosecki

Oddział w Warszawie

Dr Kazimierz Borsuk
Prof. Zbigniew Brzoska
Prof. Marek Dietrich
Prof. Stanisław Dubiel

Prof. Przemysław Jastrzębski
Prof. Zbigniew Kączkowski
Prof. Jan Mutermilch
Prof. Witold Nowacki
Prof. Zbigniew Olesiak
Prof. Zbigniew Osiński
Doc. Edward Radwański
Prof. Jacek Stupnicki
Prof. Andrzej Tylikowski (poprzednio Oddział w Gliwicach)
Prof. Stefan Zahorski

Oddział we Wrocławiu

Prof. Augustyn Borcz
Prof. Eugeniusz Brzuchowski
Prof. Adam Cybulski
Prof. Otton Dąbrowski
Prof. Igor Kisiel
Prof. Jerzy Zawadzki

Profesor Zbigniew Olesiak wręczył podziękowania obecnym na Zjeździe Kolegom, a dyplomy dla Kolegów nieobecnych przekazał Przewodniczącym Oddziałów z prośbą o dalsze ich przekazanie, w imieniu ustępującego Zarządu Głównego uhonorowanym osobom.

ad 7

Sprawozdanie finansowe złożył Skarbnik prof. A. Wilczyński (szczegółowy tekst włączony został do akt Zjazdu — załącznik 2). Prof. A. Wilczyński zaznaczył, że sprawozdanie to nie obejmowało pełnej kadencji ZG, gdyż ZG nie posiadał wtedy kompletu sprawozdań finansowych Oddziałów. Podsumowując wystąpienie zaapelował o uregulowanie zaległości w placeniu składek.

ad 8

Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej odczytał prof. Andrzej Tylikowski (tekst włączono do akt Zjazdu — załącznik 3). W konkluzji sprawozdania stwierdza się, że Komisja oceniając działalność Zarządu Głównego za zgodną ze Statutem PTMTS-u, stawia wniosek o udzielenie mu absolutorium.

ad 9

W dyskusji prof. Z. Olesiak — zastanawiając się nad kierunkami dalszej działalności PTMTS-u stwierdził, że w pierwszym Zarządzie Głównym PTMTS-u, działało pięciu Profesorów którzy byli członkami PAN. Nie sugerując, że kontynuowanie tej tradycji jest konieczne Prof. Olesiak powiedział, że jednak wielu poważnych uczonych odsunęło się od działalności w Towarzystwie. Wydaje się celowe, aby takich Profesorów z powrotem do działalności w Towarzystwie przyciągnąć. Obserwuje się również, co jest widoczne m.in. na przykładzie Oddziału Warszawskiego, małą liczbę młodych w szeregach PTMTS-u.

Prof. M. Dietrich — pogratulował Zarządowi Głównemu jego osiągnięć i aktywności. Z uznaniem mówił również o powołaniu nowego oddziału PTMTS-u w Kielcach oraz o wznowieniu działalności Oddziału w Rzeszowie. Poparł również wniosek Komisji Rewizyjnej, aby wzmocnić oddziaływanie PTMTS-u w szerszych kręgach inżynierów w przemyśle, chociaż równocześnie PTMTS nie powinien dublować SIMP-u. Prof. M. Dietrich mówił również, że każdy z Oddziałów powinien mieć w swoim programie działania organizację jakiegoś sympozjonu lub konferencji naukowej, tak jak to ma miejsce w przypadku np. oddziałów w Gliwicach i Warszawie.

Prof. E. Brzuchowski podkreślił, że ostatnia kadencja należała do trudnych, mimo to zrobiono dużo. Zaproponował również założenie kronik w oddziałach wzorem Gliwic.

Prof. K. Biernatowski potwierdził sens urządzania sympozjonów, dając przykład sympozjonów organizowanych przez Oddział Wrocławski, jednego na temat reologii i drugiego na temat metod statystycznych w geotechnice.

Prof. W. Krzys omawiając trudną sytuację finansową PTMTS-u ubiegłych lat pytał o perspektywy dalszego finansowania Towarzystwa.

Prof. A. Tylikowski — w odpowiedzi poinformował zebranych o wzroście dotacji o 62%, równocześnie zwrócił uwagę na konieczność zwiększenia wysokości składek członkowskich.

Doc. M. Kmiecik w swojej wypowiedzi wskazał na pewne możliwości podniesienia atrakcyjności zebrań naukowych w oddziałach (np. opłacanie referatów przez ZG). W dyskusji, jaka się wywiązała w związku z kwestią finansowania przez ZG referatów, zabierali jeszcze głos prof. A. Wilczyński oraz doc. Z. Sulimowski, wskazując na trudności w przyjęciu takiej zasady, z uwagi na możliwości finansowe Towarzystwa i założenia społeczne jego działalności.

Prof. M. Dietrich nie zgodził się z propozycją doc. M. Kmiecika, że podniesienie stawek za referaty może uatrakcyjnić poziom zebrań naukowych. Prawdziwa nauka jest bowiem sama w sobie atrakcyjna.

Doc. W. Szuścik — w związku z wcześniejszą wypowiedzią prof. A. Wilczyńskiego postawił wniosek o zwiększenie składek członkowskich do 200 zł. rocznie począwszy od 1985 roku. Wniosek przyjęto w głosowaniu jawnym przy 1 głosie wstrzymującym się.

Po zakończeniu dyskusji doc. W. Szuścik postawił wniosek o udzielenie absolutorium ustępującemu Zarządowi Głównemu. Wniosek w głosowaniu jawnym Zjazd przyjął jednogłośnie.

ad 10

Propozycje zmian w statucie Towarzystwa, opracowane przez ustępujący Zarząd Główny zreferował doc. W. Bachmacz. Ustalono, że będzie dyskutowana każda z proponowanych zmian a ostateczne brzmienie każdego z paragrafów będzie zatwierdzane w głosowaniu jawnym.

Po wyczerpaniu wszystkich propozycji zmian uchwalono w głosowaniu jawnym — przy 1 głosie „przeciw” i 4 „wstrzymujących się” zakończenie dyskusji nad wprowadzeniem zmian do statutu Towarzystwa.

Tekst zatwierdzonych poprawek do statutu został włączony do akt Zjazdu. Zjazd upoważnił nowy Zarząd Główny PTMTS i biuro Zarządu do opracowania ostatecznych zmian w uzgodnieniu z Wydziałem Spraw Społeczno-Administracyjnych Urzędu Miasta Stołecznego Warszawy i zatwierdzenia ich przez ten Urząd.

ad 11

Regulamin wyborów opracowany przez ZG przedstawił doc. W. Walczak. W początkowym etapie dyskusji nad regulaminem istniała różnica zdań w kwestii: czy opracowany regulamin ma obowiązywać od obecnego XXI czy dopiero od XXII Zjazdu. W głosowaniu jawnym (większością głosów) ustalono by przedyskutowany i zatwierdzony regulamin wyboru władz naczelnych Towarzystwa obowiązywał już na XXI Zjeździe.

Poszczególne punkty regulaminu dyskutowano i zatwierdzano w takim samym trybie jak zmiany w Statucie. W szczególności Zjazd Delegatów nie zatwierdził wniosku o przeprowadzenie wyborów indykacyjnych. Po zakończeniu całości dyskusji zatwierdzono w głosowaniu jawnym (przy 1 głosie wstrzymującym się) regulamin wyborów władz Towarzystwa. (Załącznik nr 4).

ad 12

Głosowanie indykacyjne nie odbyło się.

Drugi dzień obrad zjazdu delegatów

W dniu 10.5.84 obrady otworzył prof. S. J. Gdula przedstawiając następujący program dnia:

13. Wybory Przewodniczącego Zarządu Głównego
14. Wybory członków Zarządu Głównego
15. Wybory Komisji Rewizyjnej
16. Dyskusja i uchwalenie wytycznych Towarzystwa
17. Przyjęcie wniosków Komisji Wnioskowej
18. Sprawy bieżące i wolne wnioski

Program ten został przyjęty przez Zjazd Delegatów

ad 13

Na wniosek Wiceprzewodniczącego doc. W. Szuścika Zjazd wybrał jednogłośnie Sekretarzy II Dnia Zjazdu Delegatów, Kolegów: Andrzeja Buchacza i Jerzego Kuczyńskiego. Prof. S. J. Gdula poprosił Przewodniczącego Komisji Mandatowej o zabranie głosu.

Przewodniczący Komisji Mandatowej, prof. A. Negrusz, oznajmił, że na sali znajduje się 95 osób z głosem stanowiącym, w tym 94 delegatów na 115 wybranych (co stanowi 81,7%) i 1 członek honorowy PTMTS. A zatem przeprowadzone wybory będą prawomocne.

Komisja Matka zgłosiła dwie kandydatury na Przewodniczącego ZG PTMTS, a mianowicie:

1. Prof. dr Z. Olesiaka,
2. Prof. dr hab. J. Wojnarowskiego.

Profesor S. Dubiel zgłosił kandydaturę prof. dr. hab. Romana Gutowskiego. Prof. R. Gutowski prosił, aby jego osoby nie uwzględniać w wyborach na Przewodniczącego. Z braku dalszych zgłoszeń lista kandydatów na Przewodniczącego ZG PTMTS została przez Zjazd zamknięta.

Następnie kandydaci na Przewodniczącego przedstawili swoje programy wyborcze.

Profesor Z. Olesiak w swoim wystąpieniu podkreślił, że działalność Zarządu Głównego jest działalnością służebną wobec członków Towarzystwa. Następnie powiedział, że gdyby został wybrany, będzie się starał aby dotychczasowa działalność była kontynuowana zarówno przez Zarząd, jak i istniejące Komisje; będzie również zachęcał do współpracy w Towarzystwie mechaników — wybitnych naukowców, z których nie wszyscy są członkami PTMTS-u. Postara się uporządkować pracę sekretariatu, sprawy finansowe oraz działalność bieżącą.

Stwierdził również, że przyszłe Zjazdy Delegatów powinny odbywać się łącznie z sesjami naukowymi, i Zjazdy te winny być otwarte w zakresie sesji naukowych dla wszystkich członków Towarzystwa, a nie tylko dla Delegatów.

Profesor J. Wojnarowski w swoim wystąpieniu podkreślił, że zrobienie czegoś nowego w świetle osiągnięć Towarzystwa w minionym ćwierćwieczu jest bardzo trudne i dlatego należy kontynuować dotychczasowe formy działalności PTMTS-u.

Przedstawił pokrótce genezę powstawania różnych Towarzystw zarówno w okresie zaborów, jak i po odzyskaniu niepodległości i współcześnie. Wskazał również na to, aby nie zaprzepaścić niemałych osiągnięć Towarzystwa. Zwrócił uwagę, aby utrzymać dotychczasową tradycję wydawnictw Towarzystwa. Powiedział, że gdyby został wybrany, będzie się starał, aby nie wystąpiły w Towarzystwie problemy finansowe. Położył większy nacisk na prężniejszą działalność sekretariatu i większą kolegalność podejmowanych decyzji. Powiedział również, że ZG powinien włączyć się do organizacji seminariów naukowych i szkół oraz prezentować swe osiągnięcia w środowisku inżynierskim. Ponadto PTMTS powinien przekazywać raporty, jakie dyscypliny z mechaniki powinny być rozwijane.

Wybory Komisji Matki i przewodniczącego PTMTS

Do Komisji Skrutacyjnej wybrano następujących Kolegów: K. Borsuk, J. Kubik, J. Lipiński, A. Sucheta (przy jednym głosie wstrzymującym się).

Przewodniczącym Komisji Skrutacyjnej został wybrany dr K. Borsuk.

Po przeprowadzeniu wyborów i po przeliczeniu głosów Przewodniczący Komisji Skrutacyjnej przedstawił wyniki głosowania.

Przewodniczącym ZG PTMTS został wybrany prof. Józef Wojnarowski — 52 głosy.

Prof. Z. Olesiak otrzymał 40 głosów.

Trzech Delegatów wstrzymało się od głosowania na obu kandydatów.

Po ogłoszeniu wyniku wyborów głos zabrał prof. Z. Olesiak, gratulując wyboru prof. J. Wojnarowskiemu.

Nowo wybrany Przewodniczący ZG PTMTS w serdecznych słowach podziękował wszystkim zebrany za wybór i zaufanie.

ad 14

Po przerwie Komisja Matka przedstawiła listę kandydatów na członków Zarządu Głównego, byli to Koledzy: W. Bachmacz, E. Brzuchowski, Z. Dźygadło, J. Golaś, W. Krzyś, C. Mickiewicz, R. Parkitny, B. Skalmierski, K. Sobczyk, W. Starosolski, Z. Sulimowski, W. Walczak, A. Wilczyński, M. Wizmur, C. Woźniak.

Prof. C. Woźniak nie wyraził zgody na kandydowanie do Zarządu. Z sali padła kandydatura doc. J. Lipińskiego, który wyraził zgodę na kandydowanie do Zarządu.

Na tym listę kandydatów do Zarządu Głównego zamknięto.

W wyniku tajnego głosowania do ZG wybrano następujących Kolegów: Z. Dźygadło (82), W. Krzyś (82), J. Lipiński (79), B. Skalmierski (78), A. Wilczyński (76), M. Wizmur (76), K. Sobczyk (73), R. Parkitny (70), E. Brzuchowski (68), oraz zastępców członków: J. Golaś (64), C. Mickiewicz (63), Z. Sulimowski (63).

ad 15

Następnie Komisja Matka przedstawiła kandydatury do Głównej Komisji Rewizyjnej, byli to Koledzy: O. Dąbrowski, S. Dubiel, M. Kmiecik, J. Mames, M. Skowronek, A. Tylikowski, K. Wrześniowski.

W wyniku tajnego głosowania wybrano Główną Komisję Rewizyjną w składzie: A. Tylikowski (80), O. Dąbrowski (66), K. Wrześniowski (61) oraz zastępców członków Głównej Komisji Rewizyjnej: S. Dubiel (59), M. Skowronek (53).

Po przerwie przed przystąpieniem do dyskusji głos zabrał Przewodniczący Zarządu Głównego J. Wojnarowski, który poinformował, że w dniu 10.V. odbyło się pierwsze posiedzenie Zarządu Głównego XXII Kadencji, na którym ukonstytuował się nowy Zarząd Główny Towarzystwa, a mianowicie:

Prof. dr hab. J. Wojnarowski	Przewodniczący z wyboru
Prof. dr hab. E. Brzuchowski	Zastępca Przewodniczącego
Prof. dr hab. W. Krzyś	„ „
Prof. dr hab. Z. Dźygadło	Sekretarz Generalny
Prof. dr hab. A. Wilczyński	Skarbnik
Doc. dr J. Lipiński	Z-ca Sekretarza Generalnego
Doc. dr hab. R. Parkitny	Zastępca Skarbnika
Prof. dr hab. B. Skalmierski	Członek Zarządu
Prof. dr hab. K. Sobczyk	„ „
Prof. dr hab. M. Wizmur	„ „
Doc. dr J. Golaś	Zastępca Członka Zarządu
Doc. dr C. Mickiewicz	„ „ „
Doc. dr Z. Sulimowski	„ „ „

ad 9

Dyskusja i uchwalenie wytycznych działalności Towarzystwa

Prof. M. Dietrich — zaproponował, aby Zarząd Główny doprowadził do takiej sytuacji, aby każdy Oddział miał swoją jakąś charakterystyczną działalność, np. w formie sympozjonu, szkoły lub seminarium. Ponadto przedstawił konieczność nawiązania przez ZG kontaktów z zagranicą oraz reprezentowania go w IUTAM.

Prof. W. Krzyś podkreślił konieczność podniesienia rangi mechaniki technicznej w kształceniu studentów w szkołach wyższych oraz zaproponował podjęcie działań w kierunku przenikania się środowisk uczelnianych z pozauczelnianymi.

Prof. A. Wilczyński zaproponował, aby przyjąć wytyczne z poprzedniego Zjazdu jako obowiązujące również dla nowowybranego ZG.

Doc. M. Kmiecik stwierdził, że w celu podniesienia poziomu prac z mechaniki, publikacje w naszym czasopiśmie powinny być oceniane w rok później i jednocześnie tłumaczone na język angielski.

Prof. S. Dubiel poparł wniosek prof. W. Krzysia i zaproponował, aby jego wnioski wyszły na zewnątrz i były przedłożone odpowiednim władzom.

Dr R. Ćwik zaproponował, aby ZG poczynił starania, aby uznać PTMTS, jako towarzystwo wyższej użyteczności publicznej — co może pomóc w pozyskaniu dotacji, druków itp.

Doc. W. Szuszcik przedstawił zagadnienie organizowania konkursów studenckich na najlepszą pracę dyplomową oraz najlepszą pracę teoretyczną z mechaniki; zaproponował też, aby artykuły wydawać w języku polskim, a niektóre również z mutacją w językach obcych.

Prof. E. Brzuchowski poruszył zagadnienie współdziałania PTMTS-u z SIMPem, przedstawił wniosek Oddziału Wrocławskiego, by recenzje do artykułów w naszym kwartalniku były jawne, oraz poparł wniosek o drukowanie artykułów w językach kongresowych.

Prof. R. Gutowski uznał, że głównym kierunkiem działalności PTMTSu powinna być współpraca z przemysłem; poruszył konieczność nawiązania kontaktów z podobnymi towarzystwami (organizacjami)

zagranicznymi; stwierdził ponadto, że aby na świecie być zauważalnym, należy publikować w językach kongresowych.

Prof. K. Biernatowski zaproponował, aby ZG w swej działalności brał pod uwagę wnioski z zebrań Oddziałów. Konkursy należałoby zastąpić rozszerzeniem działalności różnego rodzaju szkół, które są pewną formą kształcenia. Stwierdził, że PTMTS nie jest organizacją popularyzatorską i że współpraca z SIMPem i przemysłem nie może iść za daleko. Poparł wniosek o publikowanie artykułów w językach kongresowych.

Dr. A. Młotkowski sprzeciwił się podejmowaniu daleko idącej współpracy z SIMP-em, a to z uwagi na nieco inne cele PTMTSu.

Prof. R. Ganowicz podkreślił konieczność nawiązania kontaktów z IUTAM, dotarcia do bieżących czasopism zagranicznych. Przedstawił Uchwałę Walnego Zgromadzenia PTMTS w Poznaniu (załącznik 4).

Prof. J. Wojnarowski poprosił prof. Z. Olesiaka, aby w imieniu ZG reprezentował PTMTS na Kongresie Mechaniki w Jugosławii, który ma się odbyć pod koniec maja br.

Doc. W. Bachmacz poruszył sprawy statutowe.

Prof. S. J. Gdula wysunął propozycję, aby ZG miał prawo powoływania i odwoływania Kolegium Redakcyjnego kwartalnika „Mechanika Teoretyczna i Stosowana”.

Prof. Z. Olesiak wyjaśnił zebrany, że Kolegium Redakcyjne jest podporządkowane Polskiej Akademii Nauk, która też zatwierdza Redaktora Naczelnego i Komitet Redakcyjny, na podstawie wniosku ZG PTMTS.

Wywiązała się dyskusja, w której zabrał głos prof. J. Wojnarowski stwierdzając, że tradycyjnie funkcję przewodniczącego Rady Redakcyjnej pełnił aktualny przewodniczący PTMTS-u lub jego zastępca. Prof. Ryszard Ganowicz poparł stanowisko prof. Z. Olesiaka, uznając za niewłaściwe ingerowanie w kompetencje PAN w tym zakresie.

Po zakończeniu dyskusji Zjazd Delegatów w wyniku głosowania nie przyjął wniosku prof. S. Gduli.

Po dyskusji poproszono Przewodniczącego Komisji Wnioskowej o przedstawienie wniosków.

Doc. R. Bąk w swoim wystąpieniu stwierdził, że na podstawie analizy dwudziestu pięciu lat działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, ze szczególnym uwzględnieniem ostatniej Kadencji Zarządu Głównego, Dwudziesty Pierwszy Zjazd Delegatów sformułował następujące wnioski:

1. Zarząd Główny oraz Zarządy Oddziałów Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej dążyć powinny do zaktywizowania i urozmaicenia form statutowej działalności naukowej. Szczególną uwagę poświęcić należy organizowaniu okresowych szkół naukowych oraz wypracowaniu specjalności naukowych oddziałów (np. poprzez organizowanie monotematycznych sympozjów o zasięgu krajowym).

2. Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej powinno w sposób permanentny starać się o przywrócenie właściwej rangi mechaniki w procesie kształcenia studentów wyższych uczelni. Jedną ze skutecznych form tego rodzaju działalności stanowić powinny sporządzane okresowo raporty o stanie mechaniki w kraju.

3. Należy poszukiwać właściwych form współpracy Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej z kadrą inżynierską, ze szczególnym uwzględnieniem przemysłowego zaplecza naukowo-badawczego.

4. Zjazd Delegatów zaleca Zarządowi Głównemu szersze rozwinięcie współpracy z zagranicznymi towarzystwami oraz ośrodkami naukowymi, działającymi w zakresie mechaniki.

5. Wnioski z XX Zjazdu Delegatów traktować należy jako nadal aktualne wytyczne działalności towarzystwa na okres rozpoczynającej się XXI kadencji.

6. Zjazd Delegatów zaleca Zarządowi Głównemu przeanalizowanie i wykorzystanie wniosków z walnych zgromadzeń oddziałów.

7. Wszystkie prace publikowane w wydawnictwach PTMTS powinny podlegać corocznej ocenie konkursowej. Wyniki konkursu opublikować należy w jednym z języków kongresowych.

8. Zjazd Delegatów powinien mieć charakter otwarty, umożliwiający udział każdego członka PTMTS w charakterze obserwatora.

9. Zarządy Oddziałowe PTMTS powinny prowadzić kronikę swojej działalności. Kroniki te bowiem znakomicie dokumentują i utrwalają informację o rozwoju mechaniki w kraju.

10. Zarząd Główny powinien wypracować i utrwalić właściwe formy działalności w zakresie gospodarczo-finansowym.

11. Zarząd Główny powinien podjąć energiczne starania, w celu pozyskania jako członków Towarzystwa, wybitnych pracowników naukowych w zakresie mechaniki.
12. Zjazd Delegatów uznał za dramatyczną sytuację w zakresie zakupu literatury i aparatury naukowej z drugiego obszaru płatniczego.
13. Zjazd Delegatów uchwalił wysokość rocznej składki na dwieście złotych, która obowiązuje w Towarzystwie od 1 stycznia 1985 r.

Odczytane wnioski zostały przyjęte jednomyślnie.

Ponadto Zjazd przyjął uchwałę Oddziału Poznańskiego o wystąpieniu do władz zwierzchnich z apelem o utrzymanie poziomu zakupów książek, czasopism, aparatury badawczej i części zamiennych do tej aparatury z drugiego obszaru płatniczego.

ad 18

Wolnych wniosków nie było.

Na tym zakończono obrady statutowej części XXI Zjazdu Delegatów.

Po drugim dniu obrad Zjazdu Delegatów odbyła się II Sesja Naukowa, której przewodniczył prof. Roman Gutowski.

W sesji wygłoszono 3 następujące referaty wg załączonego programu:

prof. dr hab. Jacek Stupnicki — *Mechanika doświadczalna, problemy i kierunki rozwoju*,

dr inż. Wojciech Kania — *Aerodynamika doświadczalna w zakresie dużych prędkości*,

dr inż. Stanisław Drobnik — *Przegląd osiągnięć krajowych badań doświadczalnych turbulencji w okresie minionego dziesięciolecia*.

W sobotę, w ostatnim dniu Zjazdu, część delegatów wzięła udział w wycieczce do Elektrowni Szczytowo-Pompej, „Porąbka-Żar”.

Po obiedzie odbyło się zebranie okrągłego stołu na temat przyszłości i perspektyw Mechaniki. W dyskusji okrągłego stołu udział wzięli Koledzy: W. Szemplińska-Stupnicka, Z. Olesiak, S. Gdula, J. Wojnarowski, W. Szuścik, Z. Bogucki, Z. Sulimowski, A. Wilczyński. Dyskusję prowadził prof. J. Stupnicki. Na tym obrady XXI Zjazdu Delegatów PTMTS zakończono.

Sekretarze XX Zjazdu Delegatów

w pierwszym dniu: w drugim dniu:

Dr Maria Baczyńska Dr Andrzej Buchacz

Dr Henryk Skowron Dr Jerzy Kuczyński

Przewodniczący XXI Zjazdu Delegatów

PTMTS

Prof. Stanisław J. Gdula

Wstępny program działalności PTMTS na XXI kadencję

(1984—1986)

przyjęty na posiedzeniu Prezydium ZG w dniu 6 VI 1984 r.

1. Odbywanie posiedzeń Prezydium Zarządu Głównego.
2. Odbywanie plenarnych posiedzeń ZG połączonych z seminariami w Warszawie oraz na sesjach wyjazdowych w Oddziałach.
3. Realizowanie uchwał (załącznik) XXI Zjazdu Delegatów.
4. Podjęcie działań w celu zatwierdzenia poprawek wprowadzonych do Statutu na XXI Zjeździe Delegatów.
5. Przyjęcie sprawozdania z zakończenia działalności Komitetu Organizacyjnego XXI Zjazdu Delegatów.
6. Organizowanie szkół doskonalenia kadry z wybranych działów mechaniki i matematyki stosowanej, które powinny być rozwijane jako niezbędny element postępu technicznego.
Pierwszą na temat „Sterowanie w mechanice” — proponujemy zorganizować w 1985 roku.
7. Uporządkowanie danych i sprecyzowanie naszych opinii na tematy:
— nowych kierunków badań w mechanice,

- modernizacji treści nauczania mechaniki w szerokim rozumieniu przedmiotu,
 - formy dalszej działalności PTMTS,
 - mając na uwadze organizowany w 1985 r. Kongres Nauki Polskiej.
8. Zakończenie prac Komisji z XX Kadencji, a mianowicie: Komisji 25-lecia, Komisji do opracowania memoriałów o nauczaniu mechaniki i Komisji historii mechaniki.
 9. Zorganizowanie w 1986 r. sesji naukowej w 3-setną rocznicę złożenia przez Izaaka Newtona *Principiów* w Londyńskim Towarzystwie Królewskim.
Tytuł roboczy sesji: „Znaczenie *principiów* (traktatu) Newtona dla rozwoju mechaniki i techniki”.
 10. Prezentowanie na łamach naszego kwartalnika opinii o książkach i skryptach z zakresu mechaniki.
 11. Przeprowadzenie oceny działalności wydawniczej Towarzystwa.
 12. Przeanalizowanie form organizacyjnych konkursów naukowych w aspekcie podniesienia ich rangi, zwiększenia zasięgu i liczby uczestników, a także szerszego udziału w Jury uczonych spoza ośrodka organizującego konkurs.
 13. Wspomaganie działalności Zarządów Oddziałów i współdziałanie w realizacji ich planów.
 14. Przeprowadzanie oceny sytuacji finansowej Towarzystwa i występowanie do PAN o dotację budżetową. Przekazywanie odpowiednich funduszy Oddziałom.
 15. poddanie pod dyskusję spraw związanych z organizowaniem konferencji i sympozjonów oraz ustalenie form ich finansowania.
 16. Gromadzenie i porządkowanie informacji o działalności Towarzystwa. Przygotowanie danych o składach Zarządów Oddziałów, Imienne wykazy Członków PTMTS i tp.
 17. Informowanie Oddziałów o mających się odbywać konferencjach krajowych i zagranicznych.
 18. Rozwijanie kontaktów międzynarodowych i działanie w kierunku zapewnienia odpowiedniej reprezentacji Towarzystwa w międzynarodowych organizacjach rozwijających dyscyplinę mechaniki.
 19. Programowanie działalności PTMTS poprzez wysyłanie pism informacyjnych do Członków Zagranicznych Towarzystwa z jednoczesnym zapraszaniem do ścisłej współpracy.
 20. Uporządkowanie działalności „Biura” Towarzystwa. Ustalenie rozdziału zadań i zakresu odpowiedzialności dla pracowników etatowych.

Przewodniczący
Zarządu Głównego PTMTS
Prof. dr hab. J. Wojnarowski

XI Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”

W dniu 24—26 maja 1984 r. odbyło się w Błażejewku k. Kórnik XI Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”. Sympozjum to, organizowane co dwa lata przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i Instytut Mechaniki Technicznej Politechniki Poznańskiej, ma już wieloletnią tradycję. Zgodnie z przyjętym zwyczajem obrady przedpołudniowe inaugurowała sesja plenarna. Podczas sesji tych wygłoszono 2 referaty:

1. Sławomir Janecki — „Problemy drgań układów łopatek wirnikowych turbin i sprzężarek osiowych”,
2. Józef Nizioł — „Wibroizolacja pasywna i aktywna układów mechanicznych poddanych działaniu wymuszeń przypadkowych”.

Dalšie obrady odbywały się w sekcjach. Zarówno względy merytoryczne, jak i organizacyjne sprawiły, że dokonano następującego podziału tematycznego referatów:

- Sekcja I — Dynamika ciągłych modeli mechanicznych,
- Sekcja II — Dynamika dyskretnych modeli mechanicznych,
- Sekcja III — Dynamika i wibroakustyka maszyn.

W sekcji I wygłoszono 40 referatów, w sekcji II 36 referatów, w sekcji III 34 referaty. W sympozjum uczestniczyło 149 osób, w tym po raz pierwszy 3 osoby z zagranicy (CSRS, Kuba, NRD).

Zdecydowaną większość uczestników (127) stanowili pracownicy wyższych uczelni. Instytuty PAN reprezentowane były przez 8 osób, a inne instytuty o charakterze wiodącym przez 10 osób. Materiały Sympozjum zawierające pełne teksty referatów plenarnych oraz streszczenia referatów sekcyjnych wydano drukiem, nakładem Politechniki Poznańskiej.

Ryszard Dzięcielak

XI SYMPOZJUM DOŚWIADCZALNYCH BADAŃ W MECHANICE CIAŁA STAŁEGO

XI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego odbyło się w Jadwisinie k. Warszawy w dniach 6—8 września 1984 r. Tradycyjnie już organizatorami Sympozjum był Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Zespół Mechaniki Doświadczalnej Komitetu Mechaniki PAN oraz Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej.

Ustalono następujący skład Komitetu Organizacyjnego:

- prof. dr inż. Zbigniew Brzoska — honorowy przewodniczący,
- prof. dr hab. inż. Jacek Stupnicki — przewodniczący
- dr inż. Ryszard Wójcik — sekretarz,
- dr inż. Tomasz Zagrajek — sekretarz,
- prof. dr hab. inż. Przemysław Jastrzębski,
- doc. dr hab. inż. Jacek Kapkowski,
- dr inż. Wojciech Klepacki,
- prof. dr hab. inż. Stanisław Kocańda,
- prof. dr hab. inż. Zbigniew Orłoś,
- prof. dr hab. inż. Wojciech Szczepiński,
- doc. dr inż. Zdzisław Świdzki.

Spośród zgłoszonych na Sympozjum artykułów, Komitet Organizacyjny zakwalifikował na sesje plenarne 7 prac autorów polskich oraz 7 prac autorów zagranicznych.

Ponadto na odbywających się, na przemian z plenarnymi, sesjach wystawowych zaprezentowano 81 prac polskich oraz jedną z zagranicy.

Sesje wystawowe odbywały się w następujących pięciu grupach tematycznych:

1. Badania własności materiałów.
2. Zmęczenie, pękanie.
3. Metody badań.
4. Mechanika pękania
5. Badania modelowe i badania konstrukcji.

Na sesjach plenarnych przedstawiono natomiast referaty problemowe i przeglądowe, wskazujące główne kierunki i metody badań w mechanice doświadczalnej. Oto lista autorów wraz z tytułami referatów, zamieszczona w kolejności ich wygłaszania:

1. D. C. Holloway, W. H. Wilson — University of Maryland, USA: *The application of dynamic holographic interferometry and photoelasticity*”.
2. Z. Füzessy — Technical University Budapest, WRL: *Hologram interferometric applications in displacement and shape measurements*.
3. J. Balas, M. Drzik — Institute of Construction and Architecture: *Determination of stress intensity factors by optical methods*.
4. J. F. Cardenas — Garcia-Colorado State University — USA: *Theoretical and experimental study of micro-cracking induced the Rayleigh wave*.
5. A. Pietrzyk — Politechnika Warszawska: *Cyfrowe przetwarzanie obrazów w mechanice doświadczalnej*.
6. K. Patorski — Politechnika Warszawska: *Nowe metody różniczkowania odkształceń rastrów mory*.
7. J. Szlagowski — Politechnika Warszawska: *Badanie odporności konstrukcji blachownicowych ukształtowanych według kryterium nośności granicznej na obciążenia cyklicznie zmienne i udarowe*.
8. A. Buczyński, M. Sidorowicz, J. Zawada — Politechnika Warszawska: *Badanie sil kruszenia w kruszarce modelowej*.
9. J. Linkowski, M. Korzeniowska — Politechnika Warszawska: *Zastosowanie rentgenowskiej metody $\sin^2\phi$ do badania wpływu rozdrobnienia struktury stopu dwufazowego na przebieg procesu jego niszczenia*.
10. A. Wojtyczka — Politechnika Wrocławska: *Analiza doświadczalna zmian energetycznych w próbie jednoosiowego rozciągania mosiądzów Mo58 i M63*.
11. W. Sachse — Cornell University — USA: *Directions and experimental methods for ultrasonic measurements*.

12. W. Cudny, Z. Dyląg, G. Galin, Z. Orłoś — WAT: *Analiza efektów cieplnych, mechanicznych i optycznych w pewnym przypadku badań termosprężystych.*
13. P. Wesolowski — Technical University Budapest, WRL: *In-plane strain analysis by means of reflection holography.*
14. R. Prabhakaran — Old Dominion University — USA: *Shear testing of composites.*

Przed rozpoczęciem Sympozjum, wydana została I część materiałów konferencyjnych, zawierająca artykuły autorów polskich. Część II zawierająca referaty zagraniczne ukaże się na początku 1985 r.

W opinii uczestników, XI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego uzyskało pozytywną ocenę zarówno pod względem merytorycznym, jak i organizacyjnym.

Zaprezentowano szereg prac ukazujących najnowsze kierunki w badaniach doświadczalnych. W wielu dziedzinach autorzy wykazali, że prowadzone przez nich prace nie odbiegają od poziomu światowego. Na podkreślenie zasługuje ożywiona dyskusja po referatach i autentyczne zainteresowanie uczestników treścią referatów. Polscy badacze mieli możliwość zapoznania się z najnowszymi osiągnięciami światowymi w zakresie metod nieniszczących, głównie holografii, elastooptyki, metod ultradźwiękowych oraz sposobu badania tak złożonych struktur jak kompozyty. Sesje wystawowe dały przegląd zagadnień, jakimi zajmują się ośrodki krajowe. Najliczniej reprezentowana była grupa metod optycznych oraz ich zastosowanie w mechanice pękania (ok. 40% prac). Przedstawiono również wiele prac w zakresie badań rzeczywistych konstrukcji, jak pomiary naprężeń w elementach silników spalinowych czy w elementach budowlanych.

Wprawdzie w części z tych prac wykorzystano rutynowo stosowane metody, jednak pozwoliło to lepiej ocenić ich przydatność w konkretnych przypadkach.

Okolo 20% prac poświęcona było badaniom materiałowym. Wydaje się, że cel XI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, jakim było zaprezentowanie prowadzonych obecnie w kraju i za granicą prac eksperymentalnych, został osiągnięty.

Dr inż. Ryszard Wójcik

Wykłady seminaryjne środowiskowego studium teorii pól sprężonych

Z inicjatywy Profesora Witolda Nowackiego i Instytutu Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego przy współudziale Wojskowej Akademii Technicznej i Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN zostały zorganizowane wykłady seminaryjne z teorii pól sprężonych. Pomyślane są one jako forum dyskusyjne, na którym można przedstawić własne, lub istniejące koncepcje z tej dziedziny celem ich krytycznego omówienia i przedyskutowania. W roku akademickim 1984/85 seminaria te były ograniczone do środowiska warszawskiego oraz do pól mechanicznych sprężonych z innymi polami. Wygłoszone zostały cztery referaty, po których na ogół rozwijała się obszerna dyskusja, czasami nawet kontrowersyjna. Wykładowcami byli: Profesor Czesław Rymarz (WAT, 27 lutego 1985), który mówił o zagadnieniach kryształów ciekłych, Profesor Jerzy Kurlandzki i Dr Zofia Kurlandzka (27 marca 1985)—o elektrodynamice galileuszowej, Profesor Adam Piskorek (24 kwietnia 1985)—o różniczkowych równaniach pól sprężonych, oraz Profesor Józef Ignaczak — o zagadnieniach przewodnictwa cieplnego z dwoma prędkościami relaksacji. W bieżącym roku akademickim mamy zamiar zapraszać kolegów, interesujących się tą tematyką, również z innych ośrodków akademickich. Wykłady seminaryjne nawiązują do tradycji wykładów „okrągłego stołu” z lat pięćdziesiątych, gdy Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych mieścił się jeszcze w Pałacu Staszica, jego kierownikiem był Profesor Wacław Olszak, a obrady odbywały się tamże w sali z okrągłym stołem.

Najbliższy wykład planowany jest na środę 29 stycznia 1986 r. W przyszłości proponujemy, jeżeli znajdzie to przychylny oddźwięk, rozszerzenie tematyki na pola sprężone w cieczach i gazach. Zebrania seminaryjne z teorii pól sprężonych będą mogły być również miejscem do dyskusji nad zagadnieniami związanymi z grupą tematyczną p.t. „Oddziaływanie pól elektromagnetycznych z ośrodkiem stałym odkształcalnym” w problemie międzyresortowym planowanym na lata 1986—1990.

Zbigniew Olesiak

KOŁOKWIA EUROMECHU 1986

- | | | |
|-----|--|---|
| 206 | Viscoelasticity of polymeric liquids
(Processing of polymer solutions and melts)
13—16 stycznia 1986
Grenoble | Prof. J. M. Piau
Institut de Mécanique de Grenoble
B. P. 68 Domaine Universitaire
38402 Saint Martin d'Hères Cedex
Francja
oraz P. J. Carreau, Montreal |
| 207 | Natural convection
7—9 kwietnia 1986
Delft, Holandia | Prof. ir. C. J. Hoogendoorn
Department of Applied Physics
Delft University of Technology
P. O. Box 5
2600 AA Delft, Holandia
oraz prof. M. A. Combarous,
Bordeaux |
| 208 | Explosions in industry
14—16 kwietnia 1986
Getynga, RFN | Prof. H. Gg. Wagner
Max-Planck-Institut für
Strömungsforschung
Böttlingerstrasse 6/8
3400 Göttingen, RFN
oraz prof. H. Gg. Hornung, Göttingen |
| 209 | Vibrations with unilateral constraints
5—7 czerwca 1986
Como, Włochy | Prof. C. Citrini
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano
Piazza Leonardo da Vinci, 32
20133 Milano, Włochy
oraz prof. H. Cabannes, Paris |
| 210 | Post-critical behaviour and fracture of dissipative solids
Jablonna, Polska | Prof. P. Perzyna
Inst. Podst. Probl. Techniki PAN
Świętokrzyska 21
00-049 Warszawa, Polska |
| 211 | Heat and mass transfer in the flow of thin liquid films
24—27 czerwca 1986
Glasgow, Szkocja | Dr. G. Wilks
Department of Mathematics
University of Strathclyde
Glasgow, Scotland
oraz dr. D. B. R. Kenning, Oxford |
| 212 | Non linear waves in solids
1—4 lipca 1986
Toledo, Hiszpania | Prof. E. Alarcón
Universidad Politecnica
de Madrid
E. T. S. Ingenieros Industriales
J. Gutiérrez Abascal, 2
28006 Madrid, Hiszpania
oraz prof. W. K. Nowacki,
Warszawa |
| 213 | Active methods of controlling sound and vibration
8—11 września 1986
Marsylia, Francja | Prof. B. Nayroles
Laboratoire de Mécanique et
d'Acoustique (C. N. R. S.)
B. P. 71, 13277 Marseille
Cedex 9, Francja
oraz prof. J. E. Ffowcs Williams,
Cambridge |

- | | | |
|-----|---|--|
| 214 | The mechanical behaviour of composites and laminates
16—19 września 1986
Dubrownik, Jugosławia | Prof. M. Mićunović
Faculty of Mechanical Engineering
University „Svetozar Marković”
34000 Kragujevac, Jugosławia
oraz dr. N. A. Green, Nottingham |
| 215 | Mechanics of sediment transport in fluvial and marine environments
22—26 września 1986
Genoa, Włochy | Prof. G. Seminara
Istituto di Idraulica
Facolta di Ingegneria
Università di Genova
Via Montallegro, 1
16145 Genova, Włochy
oraz prof. J. Fredsøe, Lyngby |
| 216 | Integrable systems in nonlinear analytical mechanics
22—25 września 1986
Leeds, Wielka Brytania | Dr. A. P. Fordy
Centre for Nonlinear Studies
University of Leeds
Leeds LS2 9JT, Wielka Brytania
oraz prof. F. Calogero, Rome |
| 217 | Dynamic plastic response of structures
13—16 października 1986
Matrafured, Węgry | Prof. S. Kaliszky
Department of Mechanics
Technical University Budapest
Müegyetemrkp. 3K. mf 35
1521 Budapest, Węgry
oraz prof. N. Jones, Liverpool |
| 218 | The interaction of free and forced convection
18—20 listopada 1986
Poitiers, Francja | Prof. J. -L. Peube
L. E. S. T. E. University
of Poitiers
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex, Francja |
| 219 | Refined dynamical theories of beams, plates and shells and their applications
23—25 września 1986
Kassel, RFN | Prof. Dr. -Ing. H. Irretier
Institut für Mechanik
Gesamthochschule Kassel-
Universität
Postfach 10 13 80
3500 Kassel, RFN
oraz prof. dr. I. Elishakoff,
Haifa |

Inne konferencje

- | | | |
|---|--|--|
| 1 | The Second International Conference on „Microcomputers in engineering development and application of soft ware”

University College, Swansea,
Wielka Brytania
7—10 kwietnia 1986 | adres wysyłania streszczeń:
Dr. B. A. Schrefler
Istituto di Costruzioni
Ponti e Strade
Via Marzolo, 9,
35131 Padova, Włochy |
| 2 | Reliability of methods for engineering analysis
University College, Swansea, | Prof. D. R. J. Owen
Department of Civil Engineering
University College of Swansea |

- | | | |
|---|---|--|
| | Wielka Brytania
9—11 lipca 1986 | Singleton Park
Swansea SA2 8PP, Wielka Brytania |
| 3 | The First International
Conference on „Numerical Grid
Generation in Computational
Fluid Dynamics”
Landshut, RFN
14—17 lipca 1986 | Dr. J. Häuser
Department of Mechanical and
Electrical Engineering,
College of Landshut,
Stethaimerstr. 32—34,
8300 Landshut, RFN |
| 4 | Third International Conference
on „Numerical Methods for
Non-Linear Problems”
Dubrownik, Jugosławia
15—18 września 1986 | informacje: P. Marović
Faculty of Civil Engineering,
Gradevinski Fakultet Split,
V. Maslese b. b.,
58000 Split, Jugoslawia
streszczenia: Dr. E. Hinton
Department of Civil Engineering,
University College of Swansea,
Singleton Park,
Swansea SA2 8PP, Wielka Brytania |
| 5 | The First World Congress
on Computational Mechanics
The University of Texas at Austin
22—25 września 1986 | Continuing Engineering Studies
College of Engineering
Cockrell Hall 10.324
The University of Texas at Austin
Austin, Texas 78712 |
| 6 | Continuous Surface Mining
University of Alberta,
Edmonton, Kanada
29 września — 1 października 1986 | Dr. T. S. Golosinski, P. Eng.
Department of Mineral Engineering
University of Alberta
Edmonton, Alberta,
Kanada T6G 2G6 |
| 7 | International Conference on
Computational Plasticity
Models, Software and Applications
Barcelona, Hiszpania
6—10 kwietnia 1987 | Prof. D. R. J. Owen
Department of Civil Engineering
University College of Swansea
Singleton Park
Swansea SA2 8PP, Wielka Brytania |

Cena zł 100,—

Warunki prenumeraty

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 400,—

półrocznie zł 200,—

Prenumeratę **na kraj** przyjmuje się:

— do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,

— do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Instytucje i zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”, w miejscowościach zaś w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11, w terminach podanych dla prenumeraty krajowej. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland. Our bankers: BANK HANDLOWY WARSZAWA S.A.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 3, pokój 309)

Mech. Teor. T. 23, z. 2, s. 169—352, Warszawa 1985, Indeks 36523
