

+ JN 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK  
TOM 23 ZESZYT 1



WARSZAWA 1985  
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

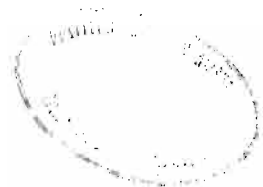
531

## SPIS TREŚCI

Profesor Antoni Sawczuk	3
<b>B. SKALMIERSKI, Kształt skrzypiec a elastyka Eulera.</b>	7
Wid skripki a elastika Эйлера.	
Shape of the violin and Euler's elastics.	
<b>W. FRYDRYCHOWICZ, M. C. SINGH, Group theoretic technique for the similarity solution of a non-linear elastic rod subjected to velocity impact.</b>	19
Решение подобия нелинейного упругого стержня под воздействием импульса скорости с помощью метода групповых преобразований.	
Transformacje podobieństwa w przypadku zagadnienia nieliniowego pręta sprężystego pod działaniem impulsu prędkości przy pomocy metody przekształceń grupowych.	
<b>A. RADZIECKI, Metoda rozwiązywania równań ruchu przy inercyjnych obciążeniach ruchomych.</b>	39
Метод решения уравнений движения при инертных подвижных нагрузках.	
A method of solving equations of motion for inert moving loads.	
<b>T. LEWIŃSKI, Physical correctness of Cosserat-type models honeycomb grid plates.</b>	53
Анализ физической правильности моделей типа Коссератов для сетчатых гексагональных пластинок.	
Analiza fizycznej poprawności modeli typu Cosseratów prętowych tarcz heksagonalnych.	
<b>J. MIĄSTKOWSKI, Wpływ grubości na nośność graniczną i stan odkształcenia płaskich elementów z karami prostokątnymi o różnej ostrości.</b>	71
Влияние толщины на несущую способность плоских стержней с прямоугольными надрезами а различной геометрии.	
The influence of the thickness on the yield load of elements with a rectangular notch of various geometry.	81
<b>K. GRYSA, Graniczne zagadnienia odwrotne dla równań falowych.</b>	97
Граничные обратные задачи для волнового уравнения.	
Boundary inverse problems for wave problems.	
<b>R. NAGÓRSKI, Jednowymiarowy ciągły model stateczności sprężystej siatkowych dźwigarów powierzchniowych.</b>	
Устойчивость одномерной непрерывной модели сеткообразных упругих поверхностных конструкции.	
Stability of a one-dimensional continuous model of lattice-type elastic surface structures.	
<b>R. NAGÓRSKI, Jednowymiarowy ciągły model stateczności sprężystej płaskiego dźwigara siatkowego.</b>	113
Устойчивость одномерной непрерывной модели сеткообразных упругих пластинок	
Stability of a one-dimensional continuous model of lattice-type elastic plates.	
<b>R. ŚWITKA, B. HUSIAR, Analiza reologiczna siatek ciągowych wykonanych z lin stalowych.</b>	137
Реологический анализ сеток, изготовленных из стальных канатов.	
Rheological analysis of net structures made of steel cables.	
<b>S. DOERFFER, Wpływ oscylacji na konwekcyjne przekazywanie ciepła w zastosowaniu do zbiorników okrętowych.</b>	153
Теплообмен в колеблющихся цистермах.	
Heat transfer in oscillating tank.	
Biuletyn informacyjny.	165

JH 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 23 • Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1985

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY  
MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,  
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,  
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,  
ZBIGNIEW OLESIAK—REDAKTOR NACZELNY,  
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR  
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR  
ZOFIA DYŚKO—REDAKTOR  
FELICJA KOLIŃSKA—SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 420+90. Ark. wydawniczych 12,75 Ark. drukarskich 10,5 Papier druk. sat. kl. IV, 70 g. 70×100  
Oddano do składania 16.XI. 1984 r. Druk ukończono w styczniu 1986 r. Zańm. 7090/12/84. Cena zł 100.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa



PROFESOR ANTONI SAWCZUK

(1927 - 1984)

Profesor dr hab. inż. Antoni Sawczuk, członek rzeczywisty PAN, rektor Międzynarodowego Centrum Nauk Mechanicznych w Udine, odznaczony Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski, zmarł nagle dnia 27 maja 1984 r. w Grenoble (Francja) przeżywszy zaledwie 57 lat. Nauka polska utraciła wybitnego uczonego, organizatora nauki i wychowawcę.

Profesor Sawczuk był członkiem-założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, zastępcą skarbnika i skarbnikiem we wczesnym okresie działalności PTMST.

Urodzony 16 stycznia 1927 r. w Komarnie koło Białej Podlaskiej ukończył Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej w 1951 r. i prawie równocześnie rozpoczął pracę w Katedrze Wytrzymałości Materiałów na Wydziale Budownictwa Przemysłowego

P.W., gdzie uzyskał stopień doktora nauk technicznych (1958) i doktora habilitowanego (1960). W tym też czasie rozpoczął pracę w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN jako kierownik pracowni, a następnie kierownik Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych i Zakładu Teorii Konstrukcji. W roku 1966 otrzymał tytuł profesora nadzwyczajnego, a w 1977 — profesora zwyczajnego. W 1969 r. został członkiem-korespondentem PAN, a w 1983 r. — członkiem rzeczywistym. W 1982 r. wybrano Go rektorem Międzynarodowego Centrum Nauk Mechanicznych (CISM) w Udine we Włoszech.

Dzięki niezwyklej pracowitości i zdolnościom organizacyjnym, Zmarły potrafił połączyć aktywną działalność naukową z działalnością pedagogiczną, redakcyjną i organizacyjną, stając się w krótkiej historii polskiej mechaniki jedną z najwybitniejszych postaci. Był jednym ze współtwórców, obok zmarłego w 1980 r. prof. Wacława Olszaka, polskiej szkoły teorii plastyczności, wychowawcą licznej grupy naukowców w Polsce i za granicą, współredaktorem wielu czasopism, aktywnym działaczem wielu polskich i międzynarodowych organizacji naukowych. Opublikował blisko 200 artykułów, przeważnie w poważnych czasopismach o zasięgu międzynarodowym. Artykuły te, jak i monografie, których był współautorem, poczynając od opublikowanej w 1963 r., wspólnie z niezującym już Th. Jaegerem, „Grenztragfähigkeitstheorie der Platten” były wielokrotnie cytowane przez uczonych z różnych krajów.

Obok prac na temat płyt i powłok plastycznych w różnych aspektach tej tematyki (nośność graniczna, przystosowanie, dynamika), jednym z głównych kierunków prac prof. Sawczuka były problemy związane z plastyczną anizotropią. Zaproponowany przez Niego w 1965 r. ogólny opis anizotropowego wzmocnienia (*Acta Mechanica*, 2, 1965, praca wspólna z A. Bałtowem) nie stracił na aktualności do dziś. W ostatnich latach, prof. Sawczuk poświęcił wiele uwagi zastosowaniu reprezentacji funkcji tensorowych do budowania praw konstytutywnych, modelujących plastyczność, pełzanie, czy degradację materiału.

Przez cały okres swej działalności naukowej, prof. Sawczuk utrzymywał liczne kontakty z ośrodkami naukowymi na całym świecie. W roku akademickim 1958/59 odbył staż naukowy w USA współpracując z uczonymi tej miary co P. G. Hodge i W. Prager, a w roku 1964/65 wykładał w Illinois Institute of Technology w Chicago. Prowadził wykłady w Grenoble (1966 - 68) i w Marsylii (1981 - 83) we Francji oraz w Nagoya w Japonii (1975). Odwiedzał wiele innych ośrodków naukowych w różnych krajach, wygłaszając serie wykładów, m.in. w Waterloo (Kanada), Mediolanie i Udine (Włochy), Poitiers i Nantes (Francja). W czasie tych wizyt był promotorem szeregu prac doktorskich i opiekunem kilku habilitacji. Działalność ta przyczyniła się niewątpliwie do podniesienia pozycji polskiej szkoły mechaniki w nauce światowej. Wyrazem tego uznania było przyznanie Mu doktoratu honoris causa przez Uniwersytet w Grenoble.

Również w Polsce, prof. Sawczuk, pomimo, że miał liczne grono uczniów i współpracowników w IPPT PAN, brał czynny udział w pracach innych ośrodków naukowych. Prowadził seminaria, wykłady i przewody doktorskie, wywierając istotny wpływ na rozwój tych ośrodków.

Niemniej aktywny był udział profesora Sawczuka w organizacji nauki. Był organizatorem lub współorganizatorem wielu polskich i międzynarodowych kongresów, konferencji i sympozjów naukowych, jak np. Polskich Konferencji Mechaniki Ciała Stałego (Kroś-

cienko 1971, Wisła 1976, Kozubnik 1978), Międzynarodowej Konferencji Podstaw Plastyczności (Warszawa 1972), Sympozjów IUTAM (Warszawa 1973, Waterloo 1979), Konferencji SMiRT (Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin 1973, 1979, Londyn 1975, San Francisco 1977, Paryż 1981, Chicago 1983), Sympozjum IABSE (Kopenhaga 1979), Kolokwiów „Euromech” (Jabłonna 1974, Grenoble 1979, Palermo 1983), Sympozjum „Plasticity Today” (Udine 1983).

Reprezentował Polskę w Międzynarodowej Unii Mechaniki (IUTAM).

Przez wiele lat (1972 - 83) był przewodniczącym Komitetu Mechaniki PAN. W latach 1981 - 83 był członkiem Sekretariatu Wydz. IV Nauk Technicznych PAN, a w latach 1972 - 75 członkiem Centralnej Komisji Kwalifikacyjnej.

Pomimo tak wielu zajęć, profesor Sawczuk potrafił znaleźć czas na pracę redaktorską. Był redaktorem materiałów siedmiu konferencji naukowych, członkiem komitetów redakcyjnych wielu czasopism, m.in. Archiwum Inżynierii Lądowej, Archiwum Mechaniki Stosowanej w Polsce, Journal of Structural Mechanics, Mechanics Research Communications (USA), Mechanika polimierów (ZSRR), International Journal of Mechanical Sciences, Engineering Optimisation, Res Mechanica, Engineering Education (Wielka Brytania), Computer Methods in Engineering and Applied Mechanics (RFN), Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (NRD), Nuclear Engineering and Design (Berlin Zach.), Journal de Mécanique Théorique et Appliquée (Francja).

Odszedł od nas człowiek, którego wpływ na rozwój mechaniki polskiej jest trudny do pełnego oceniaenia, a który okaże się zapewne widoczniejszy teraz, gdy Go zabrakło.





## KSZTAŁT SKRZYPIEC A ELASTYKA EULERA

BOGDAN SKALMIERSKI

*Politechnika Gliwicka*

Hipoteza tajemnicy dobrego instrumentu [4,5,6] sugeruje, że boczki pierwotnie wyginano sprężysto w celu uzyskania ósemkowatego kształtu skrzypiec. Jeśli tak jest, to zarys boczków powinien składać się z łuków powstałych w wyniku sprężystego odkształcenia prętów smukłych. Jak się okaże, ścisła analiza potwierdzi nasze przypuszczenie, a optymalny kształt skrzypiec będziemy mogli uzyskać za pomocą maszyny cyfrowej.

Niniejsza praca jest poświęcona różnym aspektom tej sprawy.

### 1. Zarys „ósemkowaty” skrzypiec

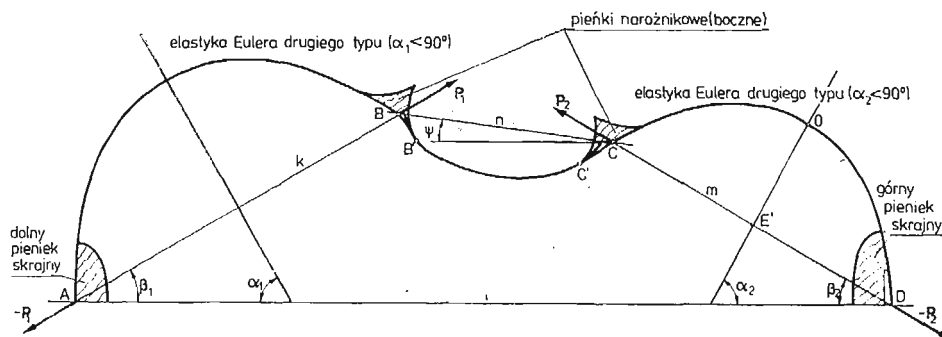
Zarys boczków ma oś symetrii, wystarczy zatem skupić swoją uwagę na lewej lub prawej części. Każda z tych połówek zawiera trzy łuki  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  i  $\widehat{CD}$ , z których środek  $\widehat{BC}$  ma krzywiznę innego znaku niż pozostałe części zarysu (patrz Rys. 1). Zachodzi pytanie, jakie krzywe matematyczne opisują poszczególne łuki zarysu boczków.

Powołując się na hipotezę [4, 5, 6] dobrego instrumentu, zauważamy, że wynika z niej, iż lutnicy szesnastego czy siedemnastego wieku otrzymywali kształty konturów instrumentów przez gięcie drewnianych listew, bez wykorzystania ciepła, a więc nie na gorąco, jak to się czyni obecnie. Jeżeli przyjmujemy, że to przypuszczenie jest słuszne, to wówczas łuki skrzypiec powinny odpowiadać jakiejś odkształconej formie smukłego pręta w stanie sprężystym. W ten sposób zbliżamy się do odpowiedzi na pytanie zasadnicze.

Odwołując się do konstrukcji skrzypiec, można uzasadnić sposób obciążenia pręta smukłego, który w sposób zgodny z hipotezą naprężeniową dobrego instrumentu wyzwoli w pudle rezonansowym odpowiednie siły.

Wiadomo, że zgodnie z tą hipotezą [4,5,6] płyty rezonansowe instrumentów powinny pozostawać w stanie obciążenia siłami rozciągającymi. Siły te można zrealizować przez działanie na pieńki skrajne  $A$  i  $D$  (rys. 1) siłami przeciwnymi do sił pochodzących od strun, [6]. W związku z tym łuki zarysu boczków pomiędzy skrajnymi a środkowymi pieńkami powinny działać na nie tak, jak ściśnięta sprężyna, a więc siłami na zewnątrz.

Na rysunku 1 przedstawiono ideę rozumienia funkcji boczków jako elastyk drugiego typu działających siłami  $\mathbf{P}_1$  i  $\mathbf{P}_2$  w punktach  $A$  i  $D$  pieńków skrajnych. Na początku zajmijmy się kształtem łuków  $\widehat{AB}$  oraz  $\widehat{CD}$ . Założymy, iż są to elastyki Eulera drugiego typu (patrz [2] s. 103). Dla kompletności rozważań powtórzmy krótko tok rozumowania [2], prowadzący do matematycznej postaci równania tych łuków.



Rys. 1

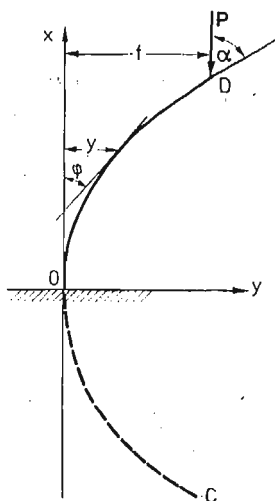
Jeżeli na pręt smukły w stanie wybozczenia sprężystego działają siły  $P$  (rys. 2), to wywołują zginanie momentem  $M = P(f-y)$ , gdzie  $f = y_{\max}$ . Zatem zgodnie z teorią zginania [3] mamy:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{P}{EJ}(f-y), \quad (1.1)$$

gdzie  $\frac{1}{\varrho}$  jest krzywizną,  $E$  — modułem Younga, a  $J$  — momentem bezwładności przekroju pręta.

Ponieważ  $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds}$ , gdzie  $ds$  jest infinitezmalnym przyrostem długości łuku osi odkształconej pręta, przeto różniczkując (1.1) względem  $s$  oraz zauważając, że  $\frac{dy}{ds} = \sin \varphi$ , otrzymujemy

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{P}{EJ} \sin \varphi. \quad (1.2)$$



Rys. 2

Tabela 1

$\alpha$	60°		59°	
	$x$	$y$	$x$	$y$
0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1	0.0174532	0.0001523	0.0177218	0.0001546
2	0.0349065	0.0006093	0.0354438	0.0006187
3	0.0523598	0.0013714	0.0531662	0.0013926
4	0.0698132	0.0024389	0.0708891	0.0024765
5	0.0872666	0.0038125	0.0886127	0.0038714
6	0.1047201	0.0054931	0.1063374	0.0055781
7	0.1221738	0.0074818	0.1240632	0.0075978
8	0.1396277	0.0097797	0.1417904	0.0099317
9	0.1570821	0.0123884	0.1595196	0.0125814
10	0.1745371	0.0153094	0.1772509	0.0155487
11	0.1919929	0.0185447	0.1949848	0.0188356
12	0.2094499	0.0220965	0.2127219	0.0224443
13	0.2269083	0.0259670	0.2304627	0.0263775
14	0.2443687	0.0301590	0.2482078	0.0306378
15	0.2618315	0.0346753	0.2659580	0.0352285
16	0.2792973	0.0395192	0.2837141	0.0401528
17	0.2967667	0.0346940	0.3014771	0.0454146
18	0.3142406	0.0502037	0.3192480	0.0510179
19	0.3317199	0.0560523	0.3370281	0.0569673
20	0.3492056	0.0622446	0.3548186	0.0632674
21	0.3666990	0.0687853	0.3726212	0.0699238
22	0.3842014	0.0756799	0.3904377	0.0769421
23	0.4017143	0.0829342	0.4082697	0.0843286
24	0.4192396	0.0905546	0.4261197	0.0920903
25	0.4367790	0.0985481	0.4439900	0.1002346
26	0.4543349	0.1069222	0.4618834	0.1087696
27	0.4719098	0.1156850	0.4798028	0.1177042
28	0.4895067	0.1248457	0.4977518	0.1270482
29	0.5071284	0.1344139	0.5157341	0.1368123
30	0.5247788	0.1444004	0.5337541	0.1470079
31	0.5424618	0.1548169	0.5518167	0.1576480
32	0.5601819	0.1656763	0.5699273	0.1687467
33	0.5779444	0.1769927	0.5880920	0.1803194
34	0.5957549	0.1887818	0.6063177	0.1923833
35	0.6136200	0.2010607	0.6246122	0.2049575
36	0.6315472	0.2138487	0.6429847	0.2180630
37	0.6495448	0.2271669	0.6614450	0.2317237
38	0.6676226	0.2410392	0.6800048	0.2459659
39	0.6857913	0.2554921	0.6986772	0.2608195
40	0.7040638	0.2705556	0.7174776	0.2763183
41	0.7224544	0.2862636	0.7364236	0.2925006
42	0.7409801	0.3026547	0.7555355	0.3094105
43	0.7596604	0.3197731	0.7748376	0.3270986
44	0.7785180	0.3376695	0.7943578	0.3456237
45	0.7975805	0.3564030	0.8141300	0.3650550
46	0.8168797	0.3760431	0.8341946	0.3854738

Tabela 1 (cd.)

$\alpha$	60°		59°	
	x	y	x	y
47	0.8364544	0.3966714	0.8546006	0.4069780
48	0.8563517	0.4183859	0.8754082	0.4296854
49	0.8766291	0.4413052	0.8966920	0.4537414
50	0.8973587	0.4655749	0.9185475	0.4793276
51	0.9186317	0.4913774	0.9410972	0.5066761
52	0.9405659	0.5189450	0.9645033	0.5360892
53	0.9633171	0.5485807	0.9889869	0.5679733
54	0.9870969	0.5806918	1.014859	0.6028944
55	1.012204	0.6158436	1.042575	0.6416726
56	1.039074	0.6548553	1.072842	0.6855656
57	1.068383	0.6989797	1.106838	0.7366420
58	1.101252	0.7502711	1.146716	0.7986521
59	1.139724	0.8124347	1.197021	0.8794295
60	1.188073	0.8931491		

Całkując otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{P}{EJ} (\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (1.3)$$

Stąd mamy

$$ds = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{P}{EJ}} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi, \quad (1.4)$$

co prowadzi do określenia współrzędnych  $x$  oraz  $y$

$$x = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{P}{EJ}}} \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (1.5a)$$

$$y = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{P}{EJ}}} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (1.5b)$$

Wzory (1.5) i (1.5b) przy przyjęciu  $\frac{P}{EJ} = 1$  zostały tablicowane dla kątów  $\alpha = 60, 59$ , które mogą być wykorzystane przy konstruowaniu zarysu łuków  $\widehat{AB}$  oraz  $\widehat{CD}$  (tabela 1). Przy konstruowaniu konturu proponuję przyjąć kąty  $\alpha_1$  oraz  $\alpha_2$  równe sobie, tzn.  $\alpha_1 = \alpha_2$  (w skrzypcach Stradivariego 60°).

2. Kształt łuku  $\widehat{BC}$ 

Studia nad kształtem talii skrzypiec prowadzą do spostrzeżenia, że kształt „C” mógł być osiągnięty przez przyłożenie do końców pręta jednocześnie siły  $P$  i momentu skupionego  $M_\alpha$  (rys. 3). Równanie różniczkowe odkształconej postaci pręta będzie następujące

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{P}{EJ} \sin\varphi, \quad (2.1)$$

co prowadzi do całki pierwszej

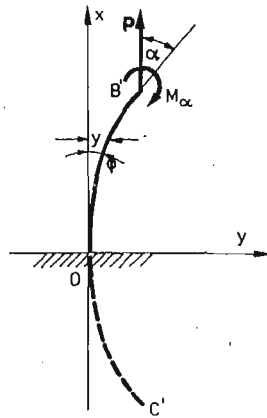
$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{M_\alpha}{EJ} \right)^2 + \frac{P}{EJ} (\cos\alpha - \cos\varphi). \quad (2.2)$$

Ponieważ

$$\frac{M_\alpha}{EJ} = \frac{1}{\varrho_\alpha}, \quad (2.3)$$

gdzie  $\varrho_\alpha$  jest promieniem krzywizny końców pręta, przeto:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mp \frac{1}{\varrho_\alpha} \sqrt{1 + \frac{4P}{M_\alpha} \varrho_\alpha \left( \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}. \quad (2.4)$$



Rys. 3

Przyjmując, że w początku układu współrzędnych promień koła ściśle stycznego do krzywej odkształconej postaci pręta wynosi  $\varrho_0$ , napiszemy:

$$\left( \frac{1}{\varrho_0} \right)^2 = \left( \frac{1}{\varrho_\alpha} \right)^2 \left( 1 - \frac{4P}{M_\alpha} \varrho_\alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right), \quad (2.5)$$

stąd

$$\frac{4P}{M_\alpha} \varrho_\alpha = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left( 1 - \left( \frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0} \right)^2 \right). \quad (2.6)$$

Tabela 2

$\alpha$	36°		37°	
	x	y	x	y
$\varphi$				
			$\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0} = \frac{1}{3}$	
0	0	0	0	0
1	0.052301709	0.000456188	0.052304563	0.000456225
2	0.104258308	0.001816010	0.104280760	0.001816590
3	0.155543577	0.004054030	0.155617292	0.004056910
4	0.205866263	0.007130370	0.206034588	0.007139110
5	0.254981353	0.010993991	0.255295280	0.011014266
6	0.302695708	0.015586305	0.303209750	0.015625930
7	0.348868462	0.020844810	0.349636984	0.020913508
8	0.393407359	0.026706153	0.394481703	0.026815188
9	0.436262529	0.033108544	0.437689037	0.033270276
10	0.477419095	0.039993434	0.479237968	0.040220882
11	0.516889674	0.047306548	0.519134525	0.047612995
12	0.554707490	0.054998398	0.557405392	0.055397059
13	0.590920422	0.063024408	0.594092301	0.063528179
14	0.625586140	0.071344779	0.629247343	0.071966054
15	0.658768259	0.079924199	0.662929224	0.080674745
16	0.690533411	0.088731463	0.695200341	0.089622345
17	0.720949081	0.097739061	0.726124597	0.098780612
18	0.750082051	0.106922768	0.755765789	0.108124578
19	0.777997334	0.116261256	0.784186472	0.117632183
20	0.804757456	0.125735728	0.811447183	0.127203928
21	0.830422026	0.135329597	0.837605937	0.137062556
22	0.855047496	0.145028196	0.862717928	0.146952773
23	0.878687065	0.154818525	0.886835382	0.156940990
24	0.901390691	0.164689030	0.910007517	0.167015110
25	0.923205165	0.174629409	0.932280579	0.177164327
26	0.944174233	0.184630449	0.953697924	0.187378966
27	0.964338749	0.194683878	0.974300144	0.197650332
28	0.983736837	0.204782249	0.994125208	0.207970585
29	1.002404074	0.214918826	1.013208612	0.218332633
30	1.020373655	0.225087496	1.03158354	0.228730039
31	1.03767657	0.235282696	1.049281019	0.239156934
32	1.054341768	0.245499334	1.066330068	0.249607957
33	1.070396310	0.255732744	1.082757852	0.260078185
34	1.085865517	0.265978626	1.098589816	0.270563087
35	1.100773109	0.276233009	1.113849816	0.281058476
36	1.115141338	0.286492212	1.128560239	0.291560473
37			1.142742123	0.302065470
			$\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0} = \frac{1}{4}$	
0	0	0	0	0
1	0.069671195	0.000607408	0.069672950	0.000607501
2	0.138508245	0.002408220	0.138563318	0.002409660
3	0.205760283	0.005341790	0.205937146	0.005348670

Tabela 2 (cd.)

$\alpha$	36°		37°	
	x	y	x	y
4	0.270821206	0.009317620	0.271213743	0.009337840
5	0.333257918	0.014227550	0.333966398	0.014272777
6	0.392807126	0.019957274	0.393927005	0.020042248
7	0.449351076	0.026395351	0.450965739	0.026536812
8	0.502884227	0.033438887	0.505061542	0.033654513
9	0.553479937	0.040996372	0.556271654	0.041303890
10	0.601262065	0.048988453	0.604704976	0.049494994
11	0.646383110	0.057347446	0.650501055	0.057889135
12	0.689008589	0.066016204	0.693814716	0.066697931
13	0.729306523	0.074946735	0.734805459	0.075782074
14	0.76744078	0.084098830	0.773630550	0.085100034
15	0.803567142	0.093438789	0.810440784	0.094616850
16	0.837831231	0.102938309	0.845378108	0.104303047
17	0.870367654	0.112573543	0.878574496	0.114133703
18	0.901299907	0.122324309	0.910151626	0.124087673
19	0.930740760	0.132173441	0.940221074	0.134146925
20	0.958792893	0.142106258	0.968884792	0.144296010
21	0.985549664	0.152110127	0.996235763	0.154521616
22	1.011095922	0.162174111	1.022358714	0.164812205
23	1.035508822	0.172288682	1.047330857	0.175157715
24	1.058858588	0.182445486	1.071222600	0.185549323
25	1.081209236	0.192637156	1.094098228	0.195979242
26	1.102619223	0.202857153	1.116016514	0.206440561
27	1.123142036	0.213099641	1.137031299	0.216927111
28	1.142826722	0.223359385	1.157191996	0.227343357
29	1.161718353	0.233631664	1.176544048	0.237954308
30	1.179858439	0.243912199	1.195129335	0.248485439
31	1.197285294	0.254197097	1.212986533	0.259022634
32	1.214034355	0.264482801	1.230151432	0.269562131
33	1.23013846	0.274766048	1.246657220	0.280100475
34	1.245628107	0.285043833	1.262534725	0.290634489
35	1.260531659	0.295313382	1.277812639	0.301161235
36	1.274875544	0.305572126	1.292517708	0.311677992
37			1.306674905	0.322182230

Podstawiając (2.6) do (2.4) otrzymujemy:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\mp 1}{\varrho_\alpha} \sqrt{\left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2\right]}. \quad (2.7)$$

Wiedząc, że przyjęty rodzaj obciążenia pręta powoduje jego odkształconą postać symetryczną względem osi y napiszemy wzory analogiczne do (1.5).

$$x = \varrho_\alpha \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2\right]}}, \quad (2.8a)$$

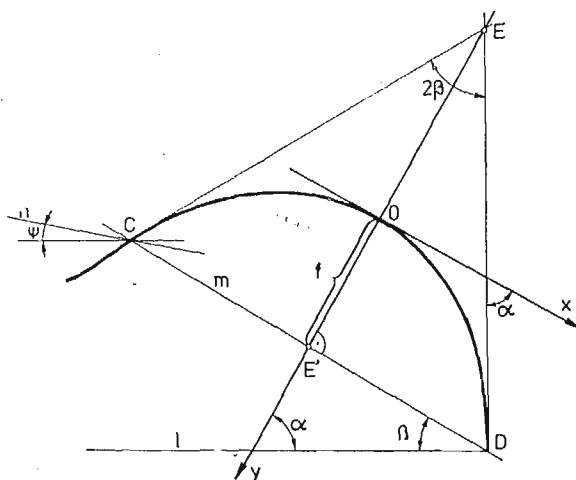
$$y = \varrho_\alpha \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2\right]}}, \quad (2.8b)$$

Wzory (2.8) pozwalają na określenie kształtu talii skrzypiec. Wartości liczbowe współrzędnych  $x$  oraz  $y$ , dla różnych wartości kąta  $\alpha$  oraz różnych stosunków krzywizn w centrum i na końcach pręta dla  $\varrho_\alpha = 1$  zestawiono w tabeli 2.

### 3. Sposób wyznaczenia zarysu boczków

Zaczynamy od przyjęcia kąta  $\beta$ . Kąt ten w skrzypcach klasycznych jest bliski  $30^\circ$ . Z dowolnego punktu  $D$  (rys. 4) prostej  $l$  kreślimy prostą  $m$  pod kątem  $\beta$ . Następnie przyjmujemy na prostej  $m$  punkt  $C$ . Do odcinka  $(CD)$  kreślimy następnie symetralną, a z punktu  $D$  prostą prostopadłą do prostej  $l$  do punktu przecięcia z symetralną odcinka  $(CD)$ . Otrzymujemy punkt  $E$ . Punkt  $E$  łączymy z punktem  $C$ . Otrzymany trójkąt  $CDE$  jest trójkątem równoramiennym o podstawie  $CD$  oraz o kącie  $DEC = 2\beta$ . Następnie korzystając z tabeli 1 wyznaczamy stosunek największego  $y$  do największego  $x$  i obliczamy:

$$f = \frac{1}{2} \frac{y_{\max}}{x_{\max}}(CD). \quad (3.1)$$



Rys. 4



Znając wartość  $f$  wyznaczamy punkt  $O$  będący początkiem układu współrzędnych  $x, y$ .

Na podstawie rys. 4 zauważamy, że  $E'C = X_{\max}$  oraz  $f = Y_{\max}$  (dużymi literami  $X$  oraz  $Y$  oznaczamy współrzędne na rysunku).

Oczywiście zachodzi

$$X = \frac{X_{\max}}{x_{\max}} x \quad (3.2)$$

oraz

$$Y = \frac{Y_{\max}}{y_{\max}} y, \quad (3.3)$$

przy czym

$$\frac{X_{\max}}{x_{\max}} = \frac{Y_{\max}}{y_{\max}}.$$

Wzory (3.2) i (3.3) umożliwiają wyznaczenie współrzędnych  $X$  i  $Y$  na podstawie tablicy  $I$ , co pozwoli na wykreślenie łuku  $\widehat{DC}$  zarysu boczków. W dalszym ciągu przez punkt  $C$  prowadzimy prostą  $n$  tworzącą z osią  $l$  kąt  $\Psi$ , na której wyznaczymy punkt  $B$ , z którego prowadzimy prostą  $k$  pod kątem  $\beta$  do osi  $l$  (rys. 1). Przecięcie prostej  $k$  z prostą  $l$  wyznacza punkt  $A$ .

Łuk elastyki pomiędzy punktami  $A$  i  $B$  wyznaczamy tak samo jak elastykę o łuku  $\widehat{CD}$ .

Punkty  $C$  i  $B$  (rys. 1) łączymy elastyką wg tabeli 2 wykreślając ją tak, ażeby w punkcie  $C$  łączące się krzywe miały wspólną styczną. Sposób wykreślenia łuku elastyki  $\widehat{CB}$  jest analogiczny do sposobu wykreślenia łuku  $\widehat{DC}$  wcześniej opisanego.

#### 4. Uwagi i wnioski

Zauważamy, że na podstawie uzyskanych tabela 1 i 2 mogliśmy wyznaczyć zarys boczków. Ogólnie można stwierdzić, że skrzypce starowłoskie mają łuki pomiędzy pieńkami skrajnymi a narożnikowymi bardzo zbliżone do elastyk Eulera drugiego typu ( $\alpha < 90^\circ$ ). Odształcone boczki rozciągają płyty rezonansowe wzdłuż prostych łączących pieńki należące do tej samej elastyki Eulera.

Proste wyznaczające kierunki tych sił przechodzą przez centrum tzw. „policzków”. Wypadkowe siły od elastyk rozciągają całe pudło wzdłuż osi pudła rezonansowego. W przypadku równej sztywności zginania prętów siły utrzymujące je w stanie równowagi są większe w przypadku krótszych łuków, z tego powodu dolne „policzki” mogą być bardziej narażone na pojawienie się sił ściskających, pochodzących od naciągu strun. Jeżeli zatem pomiar wskazałby, że dolne „policzki” drgają z niedostateczną mocą, to w celu polepszenia własności akustycznej należałoby zwiększyć napięcie boczków. W tym celu można odkleić dolny pieńek skrajny wraz z sąsiadującymi boczkami i przesuwać go nieznacznie w głąb pudła rezonansowego, ponownie skleić części rozklejone. Jest to jeden ze sposobów korygujących rozkład sił wewnętrznych w pudle rezonansowym.

Prawdopodobnie Stradivarius dokonywał podobnych korekt w trakcie konstruowania nowego instrumentu. Za tym twierdzeniem przemawia fakt, iż jego instrumenty różnią się

wymiarami [1], co wskazywałoby, iż Stradivarius formy używał jedynie do wstępnego kształtowania boczaków, po czym zdejmując je z formy miał duże pole do działania przy formowaniu optymalnych sił sprężystych kształtujących pola naprężeń płyt rezonansowych. Konsekwencją takich zabiegów jest odejście od kształtu formy. Mógł np. po zdjęciu wieńca z formy odkształcić go dość dowolnie bez listewek, a następnie przyklejając listewki powracać do kształtu wyjściowego odpowiadającego formie. To zbliżenie się ponownie do kształtu wyjściowego mogło być korygowane ze względu na konieczne siły.

Naturalnie poprawki te nie mogły naruszać zasadniczo podstawowych wymiarów. Niemniej jednak każdy z instrumentów Wielkiego Mistrza uzyskiwał indywidualne proporcje i jest mało prawdopodobne, ażeby Stradivarius dla każdego z nich budował odrębną formę.

Takie sprężyste formowanie wieńca boczaków wymaga większych umiejętności lutnika.

Drewno, jak to niektórzy określają, przystosowuje się, i wydawałoby się, że po pewnym okresie siły w wieńcu boczaków zanikną. Doświadczenie jednak pokazuje, że jakkolwiek procesy releksacyjne prowadzą do osłabienia sił wewnętrznych, to jednak nie sprowadzają ich do zera. Jest istotne, ażeby naprężenia residualne były właściwe. Naprężenia te trwają przez długie lata w drewnie, gdyż podtrzymuje je zdolność drewna do regeneracji naprężeń.

Hipoteza naprężeniowa nie tylko podsuwa koncepcję optymalnego rozwiązania kształtu wieńca boczaków, ale również wzbogaca sztukę lutniczą o jeszcze jeden element, o pole naprężeń wstępnych w płytach rezonansowych. Znany i ceniony lutnik Akademii Muzycznej w Katowicach Stefan Węgrzyn wykonał już kilka egzemplarzy skrzypiec, których zarys boczaków ściśle odpowiada kształtem elastykom Eulera.

#### Bibliografia

1. W. H. HILL, A. F. HILL, A. E. HILL, *Antonio Stradivari His Life and Work (1644 - 1737)* 1963 by Dover Publications, Inc., New York.
2. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości, część II*. PWN, Warszawa 1954.
3. B. SKALMIERSKI, *Mechanics and Strength of Materials*, Elsevier — PWN, 1979.
4. B. SKALMIERSKI, *Drgania pudła rezonansowego skrzypiec*. Zeszyty Nauk. Pol. Śl. „Górnictwo” Z. 89, Gliwice 1978.
5. B. SKALMIERSKI, *The Statics and Dynamics of the Sound Box of Stringed Instruments*. Bulletin De L'Academie, Vol. XXIX, No 9 - 10, 1981.
6. B. SKALMIERSKI, *The Construction of Old Italian Violins: A Tentative Explanation*. Bulletin De L'Academie, Vol. XXIX, No 9 - 10, 1981.

#### Резюме

#### ВИД СКРИПКИ А ЭЛАСТИКА ЭЙЛЕРА

В связи с работами [4, 5, 6] в которых представлено гипотезу секрета хорошего инструмента, здесь рассмотрена задача восьмеркомого вида скрипки. Оказывается, что из предложенного гипотеза вытекает контур скрипки состоящий из кривых возникающих из упругой деформации гибких стержней.

Таким образом, исходя из проблемы эластичности Эйлера предложен метод определения контура скрипки.

S u m m a r y

SHAPE OF THE VIOLIN AND EULER'S ELASTICS

In connection with earlier papers [4, 5, 6] where a hypothesis of a secret of good instrument had been presented, here we consider the problem of the eight-shaped violin. It turns out, however, that the hypothesis implies the violin contour consisting of the curves resulting from the elastic displacement of slender bars. Thus, departing from the problem of Euler's elastics, the method has been proposed to determine the instrument contour.

*Praca została złożona w Redakcji 13 marca 1984 roku*

---



## GROUP THEORETIC TECHNIQUE FOR THE SIMILARITY SOLUTION OF A NON-LINEAR ELASTIC ROD SUBJECTED TO VELOCITY IMPACT

WACŁAW FRYDRYCHOWICZ, MANSA C. SINGH

*Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics  
Institute of Mechanics  
University of Warsaw  
Warsaw, Poland*

*Department of Mechanical Engineering  
University of Calgary  
Calgary, Alberta, Canada*

### 1. Introduction

One of the first applications of the dimensional group of transformations to the similarity solutions of problems in fluid mechanics is found in Birkhoff's Hydrodynamics [1]. The work was further extended for applications to partial differential equations by Morgan and Michal [2, 3]. Moran and Gaggioli [4] applied it to a system of partial differential equations arising in Fluid Mechanics taking into account the auxiliary conditions. Moran and Marshek [5] made use of the matrices of exponents of the parameters of a group of transformations to determine the similarity variables of a system of partial differential equations along with their auxiliary conditions. Seshadri and Singh [6] made use of the similarity characteristic relationship at the wave front to reduce a hyperbolic partial differential equation into an ordinary differential boundary value problem in the case of wave propagation in nonlinear elastic rods. Frydrychowicz and Singh [7] applied multiparameter dimensional group of transformations to the analysis of quasilinear partial differential equations of order two in two variables. In this paper, the technique is applied to the study of wave propagation in a nonlinear elastic rod subjected to time dependent velocity impact.

A multiparameter dimensional group of transformations is widely applicable to a variety of non-linear dynamical problems in fluids and solids. This approach leads to the determination of similarity transformations which in the case of unidirectional wave propagation leads to a similarity representation consisting of an ordinary differential equation and the associated auxiliary conditions. Making use of the similarity characteristic relationship [6, 7], the wave front can be located in the transformed space. It turns out that in the case of a nonlinear elastic rod when the similarity characteristic relationship is satisfied, the kinematical condition of compatibility and the balance law of linear momentum are also identically satisfied at the wave front, [8, 9, 10]. For general non-linear case the location

of the wave front in the transformed space is given implicitly and depends on the slope of the unknown similarity function. However, in the case of a constant velocity impact the location of the wave front is obtained explicitly. The same result holds for time dependent velocity-impact and linearly elastic case. A solution of similarity representation is obtained by assuming the parameter of the material nonlinearity,  $q$ , to be close to unity. The solution of general nonlinear case is obtained by numerical approach. A similar problem was treated by D. B. Taulbee et al [11] as a special case in their study of wave propagation in a nonlinear viscoelastic rod. However, there was no application of group theoretic approach, and their results were obtained only for odd positive integral values of parameter of nonlinearity,  $q$ . Also the location of the wave front in the transformed space was assumed fixed and the similarity variable was taken to be unity thereat which holds true only in special cases. In general, under this assumption the kinematical condition of compatibility across the wave front is not satisfied. Furthermore in the treatment of their special case the transformation for  $\gamma = 0$  is not the similarity transformation since the variable  $t$  is no longer present in the similarity variable. In this paper the application of the continuous multi-parameter dimensional groups of transformations gives the similarity representation formally, the location of the wave front and the boundary conditions are obtained precisely and the problem can be solved for any positive value of the parameter of nonlinearity,  $q$ .

## 2. Basic Equations

For a non-linear elastic rod the governing equations are:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t}, \text{ equation of motion} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ compatibility relation} \quad (1b)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^q \right], \text{ constitutive law for a nonlinear elastic material} \quad (1c)$$

where

$$e = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1d, e)$$

$$x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad q > 0.$$

The boundary conditions for a time dependent velocity impact applied in the direction of positive  $x$ -axis are assumed to be in the form ,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x = 0, t) = V_c t^\delta, \quad t > 0, \quad (2a)$$

and

$$u(x \geq x_w(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2b)$$

The initial conditions are

$$u(x, t = 0) = 0, \quad x > 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0), \quad x > 0. \quad (3b)$$

In the above equations  $x$  is the axial coordinate,  $t$  is the time,  $\sigma$  is the normal stress,  $u$  is the displacement along the  $x$  axis,  $v$  is the particle velocity,  $e$  is the strain,  $\rho$  is the mass density,  $\mu$  is the modulus of elasticity,  $q$  is the material parameter of nonlinearity,  $\delta$  and  $V_c$  are parameters of the velocity impact,  $x_w(t)$  locates the wave front at any time  $t$ . Compressive stress is assumed to be positive.

It may be pointed out that the initial conditions (3a, b) are a consequence of (2b), as at  $t = 0$  the wave front in (2b) is coincident with the origin and (3a, b) follow. Thus, conditions (3a) and (3b) are redundant and as a consequence only the conditions (2a, b) need to be taken into account in the formulation of the similarity representation.

### 3. Determination of four parameter group of transformations $G_4^B$ and Derivation of similarity transformations

In order to determine the 4-parameter dimensional group of transformations  $G_4^B$  (for dimensional group of transformations see, for instance, [5], [7], [12], [13], [14], [15]) under which the system of equations (1) together with auxiliary conditions (2), (3) are invariant we introduce the following 8-parameter group of transformations:

$$G_8^B: \begin{cases} \bar{x} = A_x x, \bar{t} = A_t t; & \text{independent variables} \\ \bar{\mu} = A_\mu \mu, \bar{\rho} \bar{q} = A_\rho(\rho q), V_c = A_{V_c} V_c; & \text{physical variables} \\ \bar{u} = A_u u, \bar{v} = A_v v, \bar{\sigma} = A_\sigma \sigma; & \text{dependent variables} \end{cases} \quad (4)$$

Where  $A_x, A_t, A_\mu, A_\rho, A_{V_c}, A_u, A_v, A_\sigma$  are eight nondimensional parameters introduced to characterize the eight parameter dimensional group of transformations. In order to check the invariance of differential forms involved in the basic equations, the group  $G_8^B$  may be enlarged by including the following transformations

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{x}} = A_x^{-1} A_\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (5a)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = A_t^{-1} A_v \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (5b)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = A_t^{-1} A_u \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (5c)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = A_x^{-1} A_v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (5d)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\sigma}{\mu} \right]^q = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[ \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\mu}} \right]^q = A_t^{-1} A_\sigma^q A_\mu^{-q} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^q. \quad (5e)$$

Making use of the transformations (4) and (5) the differential form of (1a)

$$\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right\}, \quad (6a)$$

assumes the form

$$\left\{ [A_x]^{-1} A_\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} + A_e [A_t]^{-1} A_v \varrho \frac{\partial v}{\partial t} \right\} \quad (6b)$$

which yields the expression (6a) whenever

$$A_\sigma = A_x A_t^{-1} A_e A_v. \quad (6c)$$

Thus, (6a) is invariant under the group of transformations  $G_3^B$  and its enlargement consisting of equations (5) when the group parameters satisfy equation (6c). Similarly the invariance of the differential form of (1e) implies

$$A_u = A_v A_t, \quad (6d)$$

and the invariance of differential form of (1c) yields

$$A_\sigma = A_x^{-\frac{1}{q}} A_t^{\frac{1}{q}} A_v^{\frac{1}{q}} A_\mu. \quad (6e)$$

Combination of (6c) with (6e) leads to

$$A_v = A_x^{-\frac{1+q}{q-1}} A_t^{\frac{1+q}{q-1}} A_e^{-\frac{q}{q-1}} A_\mu^{\frac{q}{q-1}}. \quad (6f)$$

Substitution of (6f) into (6d) and (6c) gives

$$A_u = A_x^{-\frac{1+q}{q-1}} A_t^{\frac{2q}{q-1}} A_e^{-\frac{q}{q-1}} A_\mu^{\frac{q}{q-1}}, \quad (6g)$$

$$A_\sigma = A_x^{\frac{-2}{q-1}} A_t^{\frac{2}{q-1}} A_e^{\frac{-1}{q-1}} A_\mu^{\frac{q}{q-1}}. \quad (6h)$$

Finally, the boundary condition (3a) is invariant under  $G_3^B$ , whenever

$$A_{V_c} = A_x^{-\frac{1+q}{q-1}} A_t^{\frac{1+q}{q-1} - \delta} A_e^{-\frac{q}{q-1}} A_\mu^{\frac{q}{q-1}}. \quad (6i)$$

Similar treatment of the differential expressions of equations (1b, d) and (2b) yields no additional independent relationships. Consequently, (6f, g, h, i) represent a system of four equations among the eight parameters; therefore at the most four of them can be considered to be independent. So, the 4-parameter group of transformations  $G_4^B$  assumes the form:

$$G_4^B: \begin{cases} \bar{x} = A_x x, & \bar{t} = A_t t, & (7a) \\ \bar{\mu} = A_\mu \mu, & \bar{\varrho} \bar{q} = A_e(\varrho q), & (7b) \\ \bar{V}_c = A_x^{-\frac{1+q}{q-1}} A_t^{\frac{1+q}{q-1} - q} A_e^{-\frac{q}{q-1}} A_\mu^{\frac{q}{q-1}} V_c, & (7c) \\ \bar{u} = A_x^{-\frac{1+q}{q-1}} A_t^{\frac{2q}{q-1}} A_e^{-\frac{q}{q-1}} A_\mu^{\frac{q}{q-1}} u, & (7d) \\ \bar{v} = A_x^{-\frac{1+q}{q-1}} A_t^{\frac{1+q}{q-1}} A_e^{-\frac{q}{q-1}} A_\mu^{\frac{q}{q-1}} v, & (7e) \\ \bar{\sigma} = A_x^{-\frac{2}{q-1}} A_t^{\frac{2}{q-1}} A_e^{-\frac{1}{q-1}} A_\mu^{\frac{q}{q-1}} \sigma. & (7f) \end{cases}$$

In the above relations  $S_4^B$  is a 4-parameter subgroup of  $G_4^B$ . Also, the equation of characteristic is conformally invariant under  $G_4^B$  (see theorem 3 in [7]). It turns out that the kinematical condition of compatibility across the wave front [8, 9, 10],



$$\left[ \frac{du(x, t)}{dt} \right] = \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{dx_w(t)}{dt} \right] \quad (8)$$

and the balance law of linear momentum

$$[\sigma(x, t)] = \rho \frac{dx_w(t)}{dt} \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right], \quad (9)$$

across the singular surface, [8, 9, 10], are also invariant under the group  $G_4^B$ . The symbol of square bracket,  $[\cdot]$ , in (8) and (9) means the jump of the function across the wave front. The proof of invariance is similar to that given in [16], and is omitted here. This implies, that the conditions on the wave front do not give further restrictions among the group parameters and the parameters are essential.

The dimensional matrices associated with the dimensional group of transformations  $G_4^B$  assume the forms:

$$A: \begin{bmatrix} -\frac{1+q}{q-1}, & \frac{2q}{q-1}, & -\frac{q}{q-1}, & \frac{q}{q-1} \\ -\frac{1+q}{q-1}, & \frac{1+q}{q-1}, & -\frac{q}{q-1}, & \frac{q}{q-1} \\ -\frac{2}{q-1}, & \frac{2}{q-1}, & -\frac{1}{q-1}, & \frac{q}{q-1} \end{bmatrix}, \quad (10a)$$

$$B: \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \quad (10b)$$

$$C: \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ -\frac{1+q}{q-1}, & \frac{1+q}{q-1} - \delta, & -\frac{q}{q-1}, & \frac{q}{q-1} \end{bmatrix}. \quad (10c)$$

The matrix  $BC$ , constructed by augmenting the matrix  $B$  with  $C$ , has the rank,  $r = 4$ , while the matrix  $C$  has the rank,  $s = 3$  (since  $q > 0$ ). These properties of the matrices  $BC$  and  $C$  indicate that since  $r > s$  the similarity transformations for the problem formulated above, can be obtained.

Theorem 2 in [7] indicates that the group  $G_4^B$  has  $[n+m+p-r] = [3+2+3-4] = 4$  functionally independent absolute invariants, where  $n$  is the number of dependent variables,  $m$  — independent variables,  $p$  — physical parameters. Making use of formulae (1.16) - (1.21) (1.21) of [7] we obtained respectively:

$$\eta = x[t]^{r_{12}} [\mu]^{\gamma_{11}} [\rho q]^{\gamma_{12}} [v_c]^{\gamma_{13}}, \quad (11)$$

where  $r_{12}$  and  $\gamma_{1j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , provide linearly independent solutions to

$$\Gamma_{12} \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{24} \end{bmatrix} + \sum_{\omega=1}^3 \gamma_{1\omega} \begin{bmatrix} c_{\omega 1} \\ c_{\omega 2} \\ c_{\omega 3} \\ c_{\omega 4} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \end{bmatrix}. \quad (12a)$$

Taking into account (10b, c), the above equation (12a), can be written as

$$\Gamma_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma_{13} \begin{bmatrix} -\frac{(1+q)}{q-1} \\ \frac{1+q}{q-1} - \delta \\ -\frac{q}{q-1} \\ \frac{q}{q-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12b)$$

The system of equations (12b) gives

$$\gamma_{11} = -\frac{q}{1+q}, \quad \gamma_{12} = \frac{q}{1+q}, \quad \gamma_{13} = \frac{q-1}{1+q}, \quad (13a)$$

$$\Gamma_{12} = -m, \quad \text{where } m = 1 + \delta \frac{1-q}{q+1}. \quad (13b)$$

Substituting (13a, b) into (11) we obtain

$$\eta = K \frac{x}{t^m}, \quad (14a)$$

where

$$K = \left\{ \left( \frac{\mu}{\rho q} \right)^{\frac{q}{1+q}} \frac{1-q}{V_c^{1+q}} \right\}^{-1}, \quad (14b)$$

$$m = 1 + \delta \frac{1-q}{1+q} > 0. \quad (14c)$$

Next, the functionally independent absolute invariants are determined as new dependent variables  $F_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ :

$$F_1 = u[t]^{A_{12}} [\mu]^{\lambda_{11}} [\rho q]^{\lambda_{12}} [v_c]^{\lambda_{13}}, \quad (15a)$$

$$F_2 = v[t]^{A_{22}} [\mu]^{\lambda_{21}} [\rho q]^{\lambda_{22}} [v_c]^{\lambda_{23}}, \quad (15b)$$

$$F_3 = \sigma[t]^{A_{32}} [\mu]^{\lambda_{31}} [\rho q]^{\lambda_{32}} [v_c]^{\lambda_{33}}, \quad (15c)$$

where  $A_{j2}$  and  $\lambda_{j\omega}$  provide linearly independent solutions to

$$A_{j2} \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{24} \end{bmatrix} + \sum_{\omega=1}^3 \lambda_{j\omega} \begin{bmatrix} c_{\omega 1} \\ c_{\omega 2} \\ c_{\omega 3} \\ c_{\omega 4} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \\ a_{j4} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (16a)$$

Taking into account the elements of matrices  $B$  and  $C$ , from equations (10), equation (16a) becomes

$$A_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_{j3} \begin{bmatrix} -\frac{1+q}{q-1} \\ \frac{1+q}{q-1} - \delta \\ -\frac{q}{q-1} \\ \frac{q}{q-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \\ a_{j4} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (16b)$$

In relations (16)  $a_{j\alpha}$  are the elements of the matrix  $A$ , (10a). For  $j = 1$  the solution of (16b) can be expressed in the form

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{13} = -1, \quad (17a)$$

$$\lambda_{12} = -(1+\delta). \quad (17b)$$

hence, the invariant  $F_1$  assumes the form

$$F_1 = uV_c^{-1}t^{-(1+\delta)}. \quad (18)$$

If  $j = 2$ , the system of equations (16b) leads to

$$\lambda_{21} = 0, \quad \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{23} = -1, \quad (19a)$$

$$\lambda_{22} = -\delta. \quad (19b)$$

Substitution of (19) into (15b) results in

$$F_2 = vV_c^{-1}t^{-\delta}. \quad (20)$$

Finally, setting  $j = 3$  we obtain form (16b)

$$\lambda_{31} = -\frac{q}{q+1}, \quad \lambda_{32} = -\frac{1}{q+1}, \quad \lambda_{33} = -\frac{2}{q+1}, \quad (21a)$$

$$\lambda_{32} = -\frac{2\delta}{q+1}. \quad (21b)$$

The last invariant of the group  $G_4^B$  assumes the form

$$F_3 = \sigma t^{-\frac{2\delta}{q+1}} \mu^{-\frac{q}{q+1}} (\rho q)^{-\frac{1}{q+1}} V_c^{-\frac{2}{q+1}}. \quad (22)$$

The set  $\{\eta, F_1, F_2, F_3\}$  of independent absolute invariants of  $G_4^B$ , given by (14a), (18), (20) and (22), gives the following similarity transformations:

$$\eta = K \frac{x}{t^m}, \quad (23a)$$

$$u(x, t) = V_c t^{(1+\delta)} F_1(\eta), \quad (23b)$$

$$v(x, t) = V_c t^\delta F_2(\eta), \quad (23c)$$

$$\sigma(x, t) = K_1 t^{m_1} F_3(\eta), \quad (23d)$$

where

$$K = \left( \frac{\mu}{\rho q} \right)^{-\frac{q}{q+1}} V_c^{-\frac{1-q}{1+q}}, \quad (23e)$$

$$m = 1 + \delta \frac{1 - q}{1 + q}, \quad (23f)$$

$$K_1 = (\mu^q \rho q V_c^2)^{\frac{1}{1+q}}, \quad (23g)$$

$$m_1 = \frac{2\delta}{q+1}. \quad (23h)$$

#### 4. Similarity Representation

Making use of the similarity transformations (23), the system of equations (1) and auxiliary conditions (2) can be reduced to an ordinary boundary value problem. The partial derivatives appearing in equations (1), can now be expressed in terms of similarity transformations as

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_c t^\delta [(1 + \delta) F_1(\eta) - m\eta F_1'(\eta)], \quad (24a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = V_c t^{(\delta-1)} [\delta F_2(\eta) - m\eta F_2'(\eta)], \quad (24b)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = K_1 K t^{(m_1-m)} F_3'(\eta), \quad (24c)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -K V_c t^{(\delta-m)} F_2'(\eta), \quad (24d)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^q \right] = q \left( \frac{K_1}{\mu} \right)^q t^{m_1 q - 1} F_3^{(q-1)}(\eta) [m_1 F_3(\eta) - m\eta F_3'(\eta)]. \quad (24e)$$

Substituting (24a) and (23c) in (1e) results

$$F_2(\eta) = (1 + \delta) F_1(\eta) - m\eta F_1'(\eta), \quad (25a)$$

the equations of motion, (1a), can be expressed in terms of similarity transformations as

$$q F_3'(\eta) = -\delta F_2(\eta) + m\eta F_2'(\eta), \quad (25b)$$

and the constitutive law (1c), taking into account (24d, e), assumes the form

$$F_2'(\eta) = -q m_1 F_3^q(\eta) + q m \eta F_3^{q-1}(\eta) F_3'(\eta). \quad (25c)$$

The boundary condition (2a) also can be transformed to the similarity space, as

$$F_2(0) = 1, \quad (26a)$$

and by the use of equations (25a, b) and (26a) we obtain

$$F_1(0) = \frac{1}{1 + \delta}, \quad F_3'(0) = -\frac{\delta}{q}. \quad (26b, c)$$

It should be pointed out, that boundary conditions (26) are not linearly independent and only one of them can be taken into account for further consideration.

The boundary conditions on the wave front will be determined on the basis of the similarity characteristic — relationship [6, 7] and the relation between  $F_3(\eta)$  and  $F_1'(\eta)$ . The

system of coupled equations (1) leads to the partial differential equations of second order in terms of stress as

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{\rho q}{\mu q} \sigma^{q-1} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \frac{\rho q(q-1)}{\mu^q} \sigma^{q-2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2. \quad (27)$$

Making use of theorem 3, given in [7], we know that the equation of characteristics of quasi-linear partial differential equation (27) is invariant under the group  $G_4^B$ . This allows us to transform the location of the wave front into the similarity space. The characteristic equation of (27) has the form

$$\frac{dt}{dx} = \left( \frac{\rho q}{\mu q} \right)^{1/2} \sigma^{\frac{q-1}{2}}. \quad (28a)$$

Making use of the equation (23d), (28a) becomes

$$\frac{dt}{dx} = \left( \frac{\rho q}{\mu q} \right)^{1/2} K_1^{\frac{q-1}{2}} t^{\frac{m_1(q-1)}{2}} F_3^{\frac{q-1}{2}}(\eta) \quad (28b)$$

and hence

$$t^{\frac{m_1(1-q)}{2}} dt = \left( \frac{\rho q}{\mu q} \right)^{1/2} K_1^{\frac{q-1}{2}} F_3^{\frac{q-1}{2}}(\eta) dx. \quad (28c)$$

Integration of both sides of (28c) gives

$$\frac{1}{m} t^m = \left( \frac{\rho q}{\mu q} \right)^{1/2} K_1^{\frac{q-1}{2}} F_3^{\frac{q-1}{2}}(\eta) x + c. \quad (28d)$$

For the characteristic passing through the origin the constant  $c$  becomes zero, hence on the wave front the following relation holds

$$\frac{1}{m} t^m = \left( \frac{\rho q}{\mu q} \right)^{1/2} K_1^{\frac{q-1}{2}} K^{-1} t^m F_3^{\frac{q-1}{2}}(\eta_w) \eta_w, \quad (28e)$$

where  $\eta_w$  is the location of the wave front in the transform space.

Finally, after substituting the values of  $K_1$  and  $K$  in (28e), the similarity characteristic relation assumes the form

$$\eta_w = \frac{1}{m} [F_3(\eta_w)]^{\frac{1-q}{2}}. \quad (29)$$

It can be easily shown that whenever the characteristic relation, (29) holds, the kinematical condition of compatibility, (8), across the singular surface and the balance law of linear momentum, (9), are identically satisfied. The calculations are similar to that given in [16] and are omitted here. The relation (29) locates the wave front, however, this is given implicitly. In order to state full boundary value problems we need one more boundary condition. This will be obtained by the use of the relation between  $F_3(\eta)$  and  $F_1'(\eta)$ . The constitutive law, (1c), is equivalent to

$$\sigma(x, t) = \mu \left( - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (30)$$

Making use of the similarity transformations (23), it is found that (30) becomes

$$F_3(\eta) = (-F_1'(\eta))^{\frac{1}{q}}. \quad (31)$$

Now, we can eliminate  $F_2(\eta)$  and  $F_3(\eta)$  between equations (25a, b, c) to deduce a single differential equation in terms of  $F_1(\eta)$ :

$$\left\{ [-F_1'(\eta)]^{\frac{1-q}{q}} - m^2 \eta^2 \right\} F_1''(\eta) - m(m-2\delta-1)\eta F_1'(\eta) - \delta(\delta+1)F_1(\eta) = 0, \quad (32a)$$

with boundary conditions

$$F_1(0) = \frac{1}{1+\delta}, \quad (32b)$$

$$F_1(\eta = \eta_w) = 0 \quad \text{and} \quad (32c)$$

$$\eta_w = \frac{1}{m} [-F_1'(\eta_w)]^{-\frac{1-q}{2q}}. \quad (32d)$$

During the derivation of equation (32a) the relation (31) has been used and the characteristic relation (29) becomes (32d) after the substitution of (31). The boundary condition (32c) is obtained on the basis of physical consideration, since the displacement  $u(x, t)$  is a continuous function and must equal zero at the wave front.

The boundary value problem (32) is in agreement with a special case of a more general problem given in [17], however the solution in [17] is obtained only for almost nonlinear case. The boundary value problems (32) can not be considered for arbitrary values of the parameters  $\delta$  and  $q$ , suitable restriction given by equation (14c) must be taken into account. Also in order to include the physically interesting case of an applied velocity impact which is infinitely large at  $t = 0$  followed by a decay in time, the parameter  $\delta$  is permitted to take on negative values. However, it seems reasonable to consider only those cases for which both the impulse and displacement at the origin are finite. According to equations (23b, c) we must then require

$$\delta > -1. \quad (33)$$

The restriction on parameter  $\delta$  and  $q$  given by (14c), which requires  $m$  to be positive and inequality (33) implies that for  $q = 1$ , linear case,  $\delta$  can assume any real number greater than  $-1$ . It turns out that this assumption is valid not only for  $q = 1$ , but also for any  $0 < q \leq 1$ . However, when  $q > 1$ ,  $\delta$  has to satisfy the inequality

$$-1 < \delta < \frac{1+q}{q-1}. \quad (34)$$

## 5. Closed Form Solutions of Some Special Cases

### a). Linear elastic rod, $q = 1$ , subjected to time dependent velocity impact $\delta > -1$

For some special cases closed form solutions can be obtained for the system of equations (32). For instance, if we consider a linear elastic material ( $q = 1$ ) then the function

$$F_1(\eta) = \frac{1}{1+\delta} (1-\eta)^{1+\delta}, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \delta > -1, \quad q = 1, \quad (35)$$

satisfies equation (32a) and boundary conditions (32b, c, d), see [6, 18]. The similarity function,  $F_3(\eta)$ , may then be obtained by substitution of equation (35) into equation (31)

$$F_3(\eta) = (1 - \eta)^\delta, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \delta > -1, \quad q = 1. \quad (36)$$

The displacement and the stress distribution in the original  $(x, t)$ —space can now be easily expressed by making use of equations (35) and (36) in equations (23b) and (23d) to obtain

$$u(x, t) = V_c t^{1+\delta} \frac{1}{1+\delta} \left(1 - K \frac{x}{t}\right)^{1+\delta}, \quad \delta > -1, \quad q = 1, \quad (37a)$$

$$\sigma(x, t) = K_1 t^\delta \left(1 - K \frac{x}{t}\right)^\delta, \quad \delta > -1, \quad q = 1, \quad (37b)$$

or

$$u(x, t) = \frac{1}{1+\delta} V_c \left(t - \frac{x}{c}\right)^{1+\delta}, \quad \delta > -1, \quad q = 1, \quad (38a)$$

$$\sigma(x, t) = (\mu_0 V_c^2)^{1/2} \left(t - \frac{x}{c}\right)^\delta, \quad \delta > -1, \quad q = 1, \quad (38b)$$

where  $c$  is the velocity of wave propagation in the linear elastic rod. We can express the above relations in nondimensional form for convenience in the evaluation of numerical results. For this purpose we set

$$\bar{x} = \frac{x}{x_0} \quad \text{and} \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0} \quad (39)$$

where  $\bar{x}$  and  $\bar{t}$  are dimensionless,  $x_0$  and  $t_0$  have the same dimension as  $x$  and  $t$  respectively, otherwise they have nonzero but arbitrary magnitudes. On this basis we obtain the following nondimensional expressions:

$$\bar{u} = \frac{u(\bar{x}, \bar{t})}{V_c t_0^{1+\delta}} = \frac{1}{1+\delta} (\bar{t} - \bar{x})^{1+\delta}, \quad \delta > -1, \quad q = 1, \quad (40a)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma(\bar{x}, \bar{t})}{(\mu_0)^{1/2} V_c t_0^\delta} = (\bar{t} - \bar{x})^\delta, \quad \delta > -1, \quad q = 1. \quad (40b)$$

where

$$\bar{x} = \bar{x} \frac{x_0}{t_0} = \eta \bar{t}. \quad (40c)$$

**b). Nonlinear elastic rod  $q > 0$  subjected to step velocity impact,  $\delta = 0$**

The second class of closed form solutions is for step velocity loading,  $\delta = 0$ . In this case equation (32a) reduces to

$$\left\{ [-F_1'(\eta)]^{\frac{1-q}{q}} - m^2 \eta^2 \right\} F_1''(\eta) = 0 \quad (41)$$

which is identically satisfied if  $F_1''(\eta) = 0$ . Thus, the general solution is given by

$$F_1(\eta) = c_1 + c_2 \eta. \quad (42)$$

The boundary conditions (32b, c, d) give

$$c_1 = 1 \quad \text{and} \quad c_2 = -1, \quad (43)$$

which implies, that for any  $q > 0$

$$\eta_w = 1. \quad (44)$$

Hence,

$$F_1(\eta) = 1 - \eta, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \delta = 0, \quad q > 0. \quad (45)$$

Thus, for a nonlinear elastic bar with step velocity impact, the function  $F_3(\eta)$  related to stress by equation (23d) assumes the form

$$F_3(\eta) = (-F_1'(\eta))^{\frac{1}{q}} = 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad q > 0, \quad \delta = 0, \quad (46)$$

In the manner similar to case a) the displacement  $u(x, t)$  and the stress  $\sigma(x, t)$  for the constant velocity impact can be expressed in nondimensional form. Taking into account (39) and the solution (45) and (46) and the similarity transformation (23) we obtain respectively:

$$u(x, t) = V_c t \left( 1 - K \frac{x}{t} \right) = V_c(t - Kx), \quad q > 0 \quad (47a)$$

$$\sigma(x, t) = K_1, \quad q > 0 \quad (47b)$$

or

$$\bar{u} = \frac{u(\bar{x}, \bar{t})}{V_c t_0} = (\bar{t} - \bar{x}), \quad q > 0, \quad \delta = 0, \quad (47c)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma(\bar{x}, \bar{t})}{(\mu^q \rho V_c^2)^{\frac{1}{1+q}}} = q^{\frac{1}{1+q}}, \quad q > 0, \quad \delta = 0, \quad (47d)$$

where

$$\bar{x} = x \frac{c_q}{c_q t_0} = \eta \bar{t}, \quad (47e)$$

and  $c_q = \frac{1}{K}$ , where  $K$  given by (23e), is the velocity of propagation of the elastic wave in the non-linear material. When  $q = 1$ ,  $\bar{\sigma} = 1$  which is in agreement with that obtained in [18].

### c). Almost non-linear material for $q$ close to unity

A valid analytical approximation can be obtained for the parameter of the non-linearity  $q$  close to unity.

For an almost nonlinear rod we assume that the parameter  $q$  assumes the values close to unity such that

$$[-F_1'(\eta)]^{\frac{1-q}{q}} \cong 1. \quad (48a)$$

It is understood in equation (48a) that the slope of similarity function  $F_1(\eta)$  is not zero and does not tend to infinity at any point  $0 \leq \eta \leq \eta_w$ . With the above approximation the similarity representation given by equations (32a, b, c, d) assumes the form

$$[1 - m^2 \eta^2] F_1'(\eta) - m(m - 2\delta - 1) \eta F_1'(\eta) - \delta(\delta + 1) F_1(\eta) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_w, \quad (48b)$$

$$F_1(\eta = 0) = \frac{1}{1 + \delta}, \quad (48c)$$

$$F_1(\eta = \eta_w) = 0, \quad (48d)$$



where

$$\eta_w = \frac{1}{m}, \quad \text{and} \quad q \cong 1, \quad m > 0. \quad (48e)$$

It should be pointed out, that the parameter of nonlinearity of material,  $q$ , is still included in the similarity representation (48), since the parameter  $m$  depends on  $q$ . The approximation is made only in one term, namely  $[-F_1'(\eta)]$ . Following the method given in [17] and applying directly the theorem 5, page 369 of Kaplan, [19], two linearly independent solutions of equation (48b) are obtained as

$$F_1^{(1)}(\eta) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \eta^{2s} \frac{(1+q)^{s/q}}{2^s s!} \frac{\delta(\delta+1)}{(1+q)} \frac{(\delta-2m+1)(\delta-2m)}{3(1+q)} \\ \times \frac{(\delta-4m+1)(\delta-4m)}{5(1+q)} \dots \frac{(\delta-2m(s-1)+1)(\delta-2m(s-1))}{(2s-1)(1+q)} \quad (49a)$$

$$F_1^{(2)}(\eta) = \eta \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \eta^{2s} \frac{(1+q)^{s/q}}{2^s s!} \frac{(\delta+1-m)(\delta-m)}{3(1+q)} \right. \\ \left. \times \frac{(\delta-3m+1)(\delta-3m)}{5(1+q)} \dots \frac{(\delta-2m(s-1)+1-m)(\delta-m(2s-1))}{(2s+1)(1+q)} \right\}. \quad (49b)$$

The general solution of equation (48b) in terms of two linearly independent functions  $F_1^{(1)}(\eta)$  and  $F_1^{(2)}(\eta)$  can be written as

$$F_1(\eta) = c_1 F_1^{(1)}(\eta) + c_2 F_1^{(2)}(\eta), \quad (49c)$$

where  $c_1$  and  $c_2$  are constants to be determined from the boundary conditions. Making use of the boundary condition (48c) the value of  $c_1$  is obtained as

$$c_1 = \frac{1}{1+\delta}, \quad (50a)$$

and on the basis of the boundary condition (48d) we obtain

$$c_2 = - \frac{F_1^{(1)}(\eta)}{(1+\delta) F_1^{(2)}(\eta_w)}, \quad (50b)$$

where  $\eta_w$  is given by (48e).

Thus, on the basis of equations (50a, b) the solution (49c) can be written as

$$F_1(\eta) = \frac{1}{1+\delta} \left[ F_1^{(1)}(\eta) - \frac{F_1^{(1)}(\eta_w)}{F_1^{(2)}(\eta_w)} F_1^{(2)}(\eta) \right], \quad (51a)$$

$$0 \leq \eta \leq \frac{1}{m}, \quad (51b)$$

and under the condition that the parameters  $q$  and  $\delta$  must satisfy the inequalities (33) or (34). Furthermore, it may be remembered that the solution holds for the values of  $q$  close to unity. The numerical analysis shows that the solution given by (51) gives an acceptable approximation for  $0.5 \leq q \leq 1.5$ . This would approximate the behaviour of such engineering materials which are not ideally linearly elastic but are close to it.

The nondimensional expressions for displacement  $\bar{u}(\hat{x}, \bar{t})$  and stress  $\bar{\sigma}(\hat{x}, t)$  for the almost nonlinear case assume the forms

$$\bar{u} = \frac{u(\hat{x}, \bar{t})}{V_c t_0^{\delta+1}} = \bar{t}^{(\delta+1)} F_1(\eta), \quad (52a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{\sigma(\hat{x}, t)}{(\mu^q \rho V_c^2)^{\frac{1}{1+q}}} = \left[ \frac{1}{1+\delta} \bar{t}^{(\delta+1)} \frac{F_1^{(1)}(\eta_w)}{F_2^{(2)}(\eta_w)} \right]^{\frac{1}{q}}, \quad \eta = 0, \\ &= [-t^{(\delta+1)} F_1'(\eta)]^{\frac{1}{q}}, \quad \eta \neq 0, \end{aligned} \quad (52b)$$

where  $F_1'(\eta)$  is the derivative of  $F_1(\eta)$  evaluated on the basis of (51). The results are in agreement with those obtained in [17].

## 6. Numerical Solution

Numerical solution of nonlinear similarity representation, equations (32), is obtained by Gear method for precision and convenience [20, 21]. The Gear subroutine package is available, for instance, in MULTICS computer system. It solves the initial value problem for a system of ordinary differential equations given in the form

$$\dot{y} = f(y, t), \quad (53a)$$

with initial values

$$y(t_0) = y_0, \quad (53b)$$

where  $y$ ,  $\dot{y}$  and  $f$  are vectors of order  $N \geq 1$ . With a subroutine for the calculation of  $f$ , the GEAR package computes a numerical solution of equations (53) at values of the independent variable  $t$  in some interval  $[t_0, T]$ , as desired by the user. It must be remembered that the right-hand side  $f$  of the ODE's must be a well defined function of  $y = y(t)$  and  $t$ . Thus, it cannot involve  $y$  at previous values of  $t$  as for example in delay or retarded ordinary differential equations or in integro-differential equations. The approach used in the GEAR package are linear multipoint methods of the form

$$y_n = \sum_{j=1}^{k_1} \alpha_j y_{n-j} + h \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \dot{y}_{n-j}, \quad (54)$$

where  $y_k$  is an approximation to  $y(t_k)$ ,  $\dot{y}_k = f(y_k, t_k)$  is an approximation to  $\dot{y}(t_k)$ , and  $h$  is a constant step size:  $h = t_{k+1} - t_k$ . In the case of the Adams method of order  $l$  we have  $k_1 = 1$  and  $k_2 = l-1$ . In the case of the backward differentiation formula (BDF) of order  $l$ , also called Gear's stiff method, we have  $k_1 = l$  and  $k_2 = 0$ . The BDF's are so called because, on dividing through by  $h\beta_0$ , they can be regarded as approximation formulas for  $\dot{y}_n$  in terms of  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-l}$ . In either case,  $\alpha_j$  and  $\beta_j$  are constants associated with the method, and  $\beta_0 > 0$ . The latter means that equation (54) is an implicit equations for  $y_n$  and is in general a nonlinear algebraic system that must be solved on every step. The fact that the order of a given method is  $l$  means that, if equation (54) is solved for  $y_n$

with all past values being exact, then  $y_n$  will differ from the correct solution of the ODE by a local truncation error that is  $O(h^{l+1})$  for small  $h$ .

A prime feature of GEAR package is its ability to solve stiff ODE problems. Also, it contains, as an option, a method well suited for non-stiff problems as well, namely the implicit Adams method with functional (or fixpoint) corrector iteration, also called the Adams-Bashforth-Moulton method. In this analysis both the stiff and non-stiff methods are implemented in a manner which allows both the step size and the order to vary in a dynamic way throughout the problem.

For details concerning the Gear's stiff method we refer the reader to Hindmarsh [20], where a description of method, testing examples, and listings of subroutines can be found.

In application of Gear method to the solution of the system of equations (32), first of all it is reduced to a system of two first order equations

$$\dot{y}_1(\eta) = y_2(\eta), \quad (55a)$$

$$\dot{y}_2(\eta) = \frac{m(m-2\delta-1)\eta}{(-y_2(\eta))^{\frac{1-q}{q}} - m^2\eta^2} y_2(\eta) + \frac{\delta(\delta+1)}{(-y_2(\eta))^{\frac{1-q}{q}} - m^2\eta^2} y_1(\eta) \quad (55b)$$

with initial conditions

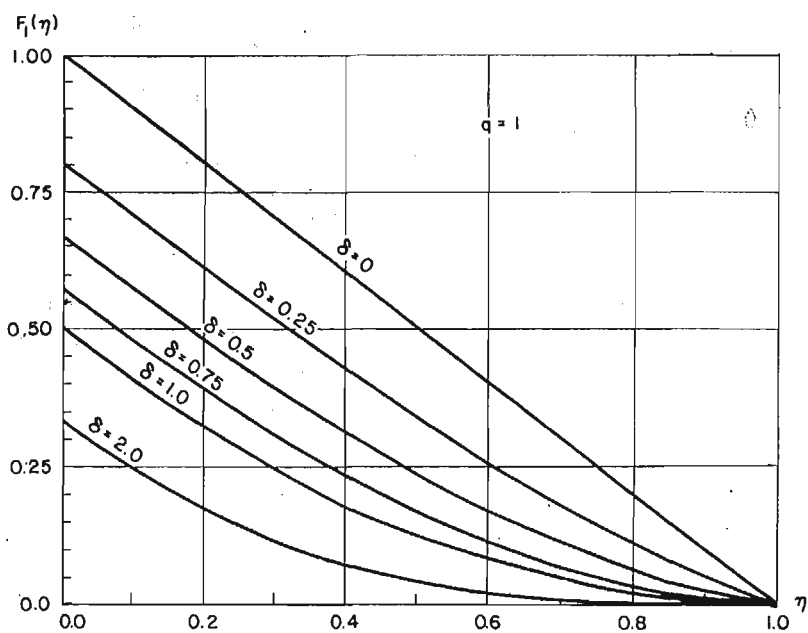
$$y_1(0) = \frac{1}{1+\delta}, \quad (56a)$$

$$y_2(0) = F_1'(0) = \alpha, \quad (56b)$$

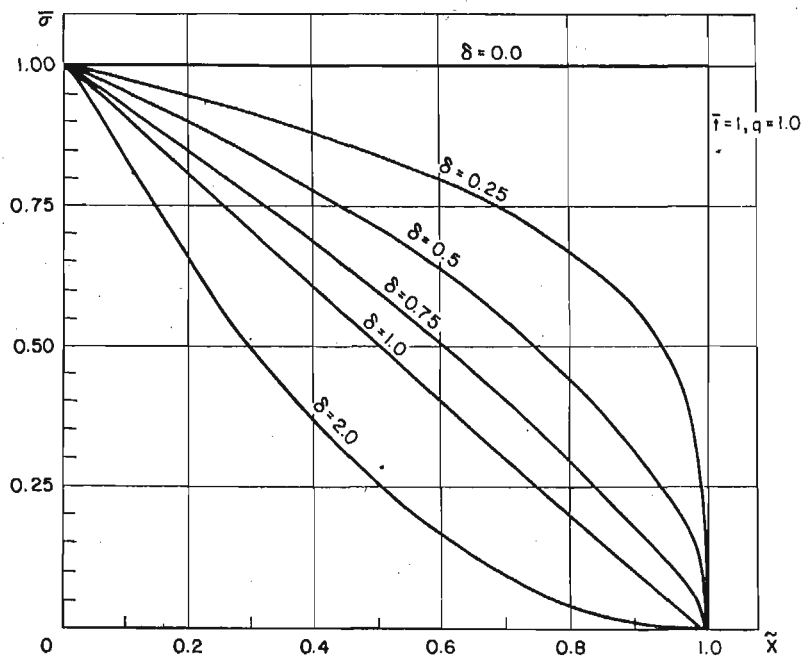
Where, as first approximation,  $\alpha$  is evaluated from the series solution for almost nonlinear case, equations (51). It turns out that the slope of the function  $F_1(\eta)$  does not change sharply with the parameter of nonlinearity  $q$  in the neighbourhood of  $\eta = 0$ . Thus, the second initial condition (56b) can be determined from the analytical solution of almost nonlinear case. The correction for  $\alpha$  is obtained by taking into account the boundary condition (32c, d) in such a way that the error in  $\eta_w$ , equation (32d) is kept less than  $10^{-3}$ . Then, the boundary value problem is numerically solved by making use of Gear method. Computations were made for  $\delta = 0$  and  $q = 1.25$  and results were compared with the corresponding solution for almost nonlinear case. The numerical results obtained by Gear method were also compared with those obtained as close form solutions for  $q = 3$  and  $\delta = 0$ . In both the above cases the numerical results were in good agreement with the corresponding exact solutions.

Effect of time dependence of impact, through the variation of parameter  $\delta$ , is shown in Fig. 1 for a linear case,  $q = 1$ . It may be noted that whereas the value of  $F_1(\eta)$ , in general, decreases with increase of  $\delta$ , the value of  $\eta_w$  is independent of  $\delta$  and remains fixed as unity. Corresponding variation of  $\bar{\sigma}$  as against  $\bar{x}$  are shown in Fig. 2. Solution for almost nonlinear case with  $\delta = 1$  is given for values of  $0.5 \leq q \leq 1.5$  in Fig. 3. It is clear that in this case  $\eta_w$  varies with  $q$ .

Corresponding values of  $\bar{\sigma}$  are given in Fig. 4, where it is seen that the values of  $\bar{\sigma}$  and  $\bar{x}_w$  decrease with decrease in the values of  $q$ . In Fig. 5 is shown the effect of variations in the parameter of nonlinearity,  $q$  for a constant velocity impact,  $\delta = 0$  and a fixed  $\bar{t}$ , it is seen that value of  $\bar{\sigma}$  approaches unity as  $q \rightarrow \infty$ .



Rys. 1



Rys. 2

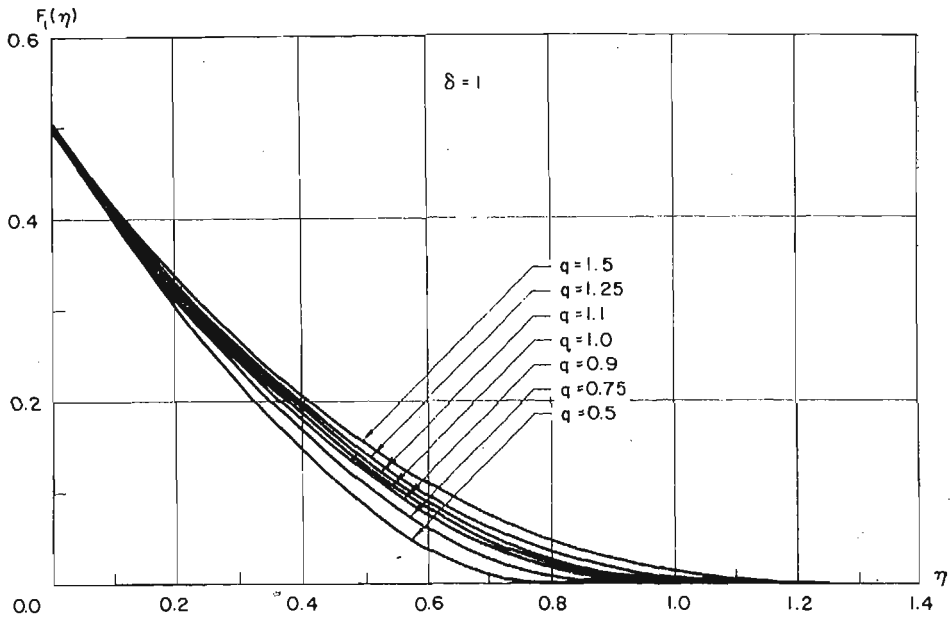


Fig. 3

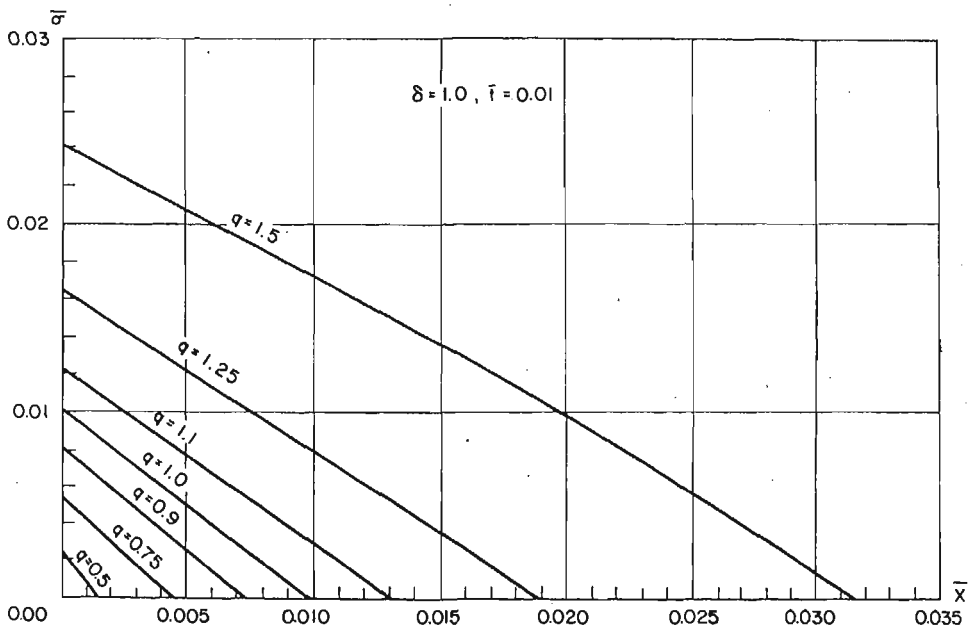


Fig. 4

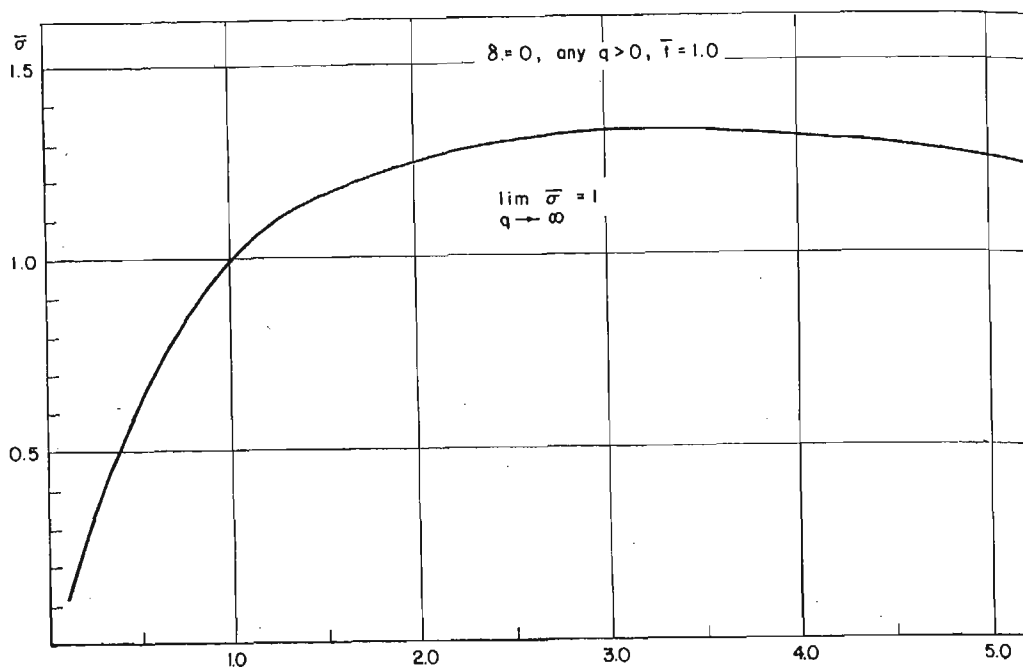


Fig. 5

## References

1. G. BIRKHOFF, *Hydrodynamics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1950.
2. A. J. A. MORGAN, *The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations*, *Quart. J. Math.* 2, 1952, 250 - 259.
3. A. D. MICHAL, *Differential invariants and invariant partial differential equations under continuous transformation groups in normal linear spaces*, *Proc. Natn. Acad. Sci. USA*, Vol. 37, p. 623, 1952.
4. M. J. MORAN, and R. A. GAGGIOLI, *Reduction of the Number of Variables in Systems of Partial Differential Equations with Auxiliary Conditions*, *SIAM J. Appl. Math.*, 16, 202 - 215, 1968.
5. M. J. MORAN and K. M. MARSHEK, *Some matrix aspects of generalized dimensional analysis*, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 6, No. 3, 1972, p. 291.
6. R. SESHADRI and M. C. SINGH, *Similarity analysis of wave propagation in nonlinear rods*, *Arch. Mech.* Vol. 32, 6, 933 - 945, 1980.
7. W. FRYDRYCHOWICZ and M. C. SINGH, *Group theoretic and similarity analysis of hyperbolic partial differential equations*, Report 233, Department of Mechanical Engineering, The University of California, 1982.
8. C. TRUESDELL and R. TOUPIN, *The classical field theories*, *Handbuch der Physik*, Vol. III/1, Sects. 175 - 176, 180 and 181, Berlin. Springer, 1960.
9. P. J. CHEN, *Growth and Decay of Waves in Solids*, *Handbuch der Physik*, Vol. VI a/3, pp. 303 - 402. Berlin, Springer, 1973.
10. J. D. ACHENBACH, S. M. VOGEL and G. HERRMANN, *On Stress Waves in Viscoelastic Media Conducting Heat. Irreversible Aspects of Continuum Mechanics — Transfer of Physical Characteristic in Moving Fluids*, Ed. by H. Parkus and L. I. Sedov, Wien, Springer, 1968.
11. D. B. TAULBEE, F. A. COZZARELLI and C. L. DYM, *Similarity solutions to some non-linear impact problems*, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 6, 1971.

12. I. P. EISENHART, *Continuous groups of transformations*, Dover Publications, New York 1961.
13. W. F. AMES, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Vol. II, Academic Press, New York 1972.
14. L. V. OVSIANNIKOW, *Group Analysis of Differential Equations*, English edition, Academic Press, New York, London 1982.
15. W. FRYDRYCHOWICZ and M. C. SINGH *Application of a Multiparameter Group of Transformations to an Impact Problem of a Nonlinear Viscoelastic Rod*, in „*Nonlinear Deformation Waves*”, IUTAM Symposium, Tallinn, 1982, Editors: U. Nigul, J. Engelbrecht, Springer, Berlin 1983.
16. W. FRYDRYCHOWICZ and M. C. SINGH, *Group and Similarity Analysis of Wave Propagation in Nonlinear Viscoelastic Rod*, Report 300, Department of Mechanical Engineering. The University of Calgary, 1984.
17. W. FRYDRYCHOWICZ and M. C. SINGH, *Wave propagation in nonhomogeneous almost nonlinear thin elastic rods*, Arch. Mech., 34, 4, p. 437 - 454, 1982.
18. M. C. SINGH and W. FRYDRYCHOWICZ, *Wave propagation in nonhomogeneous thin elastic rods subjected to time dependent velocity impact*, The J. Acoust. Society of America, 67, 1982.
19. W. KAPLAN, *Ordinary differential equations*, Addison-Wesley, Reading, 1968.
20. A. C. HINDMARSH, *GEAR: Ordinary Differential Equation System Solver*, Lawrence Livermore Laboratory, Report UCID-30001, Revision 3, December, 1974.
21. C. GEAR WILLIAM, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

#### Резюме

#### РЕШЕНИЕ ПОДОБИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА СКОРОСТИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ГРУППОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Преобразования подобия для основных уравнений движения нелинейного упругого стержня под действием соударения со скоростью зависящей от времени получены путём применения групп преобразований. Подобие представлено в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями в точке возникновения волны и на волновом фронте. Решения замкнутого типа были получены в нелинейном случае при соударении с постоянной скоростью и в линейном случае при соударении с переменной скоростью. Решение в виде ряда получено для почти нелинейного случая, так как для общего нелинейного случая получены численные решения.

#### Streszczenie

#### TRANSFORMACJE PODOBIENSTWA W PRZYPADKU ZAGADNIENIA NIELINIOWEGO PRĘTA SPRĘŻYSTEGO POD DZIAŁANIEM IMPULSU PRĘDKOŚCI PRZY POMOCY METODY PRZEKSZTAŁCEŃ GRUPOWYCH

Transformacje podobieństwa dla podstawowych równań ruchu nieliniowego pręta sprężystego pod działaniem impulsu prędkości otrzymano przy wykorzystaniu przekształceń przestrzennych.

Przedstawienie podobieństwa otrzymano jako system nieliniowych, zwyczajnych równań różniczkowych, w warunkach brzegowych w początku układu i na froncie fali.

Wyprowadzono równania w postaci zamkniętej dla przypadku liniowego zależnego od czasu impulsu prędkości oraz nieliniowego niezależnego od czasu impulsu prędkości.

Cały szereg rozwiązań otrzymano w przypadku prawie nieliniowym, natomiast w ogólnym przypadku nieliniowym przedstawiono rozwiązania numeryczne.

*Praca została złożona w Redakcji 7 sierpnia 1984 roku*





## METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RUCHU PRZY INERCYJNYCH OBCIĄŻENIACH RUCHOMYCH

ANDRZEJ RADZIECKI

*Politechnika Gliwicka*

### 1. Wstęp

Problem dynamicznych obliczeń konstrukcji mostowych jest złożony. Występuje w nim znaczna liczba parametrów i nie udało się go dotychczas w pełni rozwiązać.

Istotne ożywienie w rozwiązywaniu zagadnienia drgań nieustalonych konstrukcji, m.in. przy obciążeniach ruchomych, wnosi elektroniczna technika obliczeniowa. Szczególnego znaczenia nabrały przy tym modele dyskretne i oparte na nich metody macierzowych analiz konstrukcji, w tym zwłaszcza metoda elementów skończonych. Mimo postępu w matematycznym modelowaniu pracy układów dynamicznych, osiągnięte rezultaty nie mogą zadowalać. Jak wynika z analizy dotychczasowych prac w tej dziedzinie, charakteryzują się one podejściem polegającym na rozwiązywaniu odrębnych przypadków. Bardziej złożone geometrycznie układy, wymagające nawet w dyskretnych modelach obliczeniowych znacznej liczby współrzędnych, przy inercyjnym traktowaniu obciążeń prowadzą do dużych układów liniowych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach, których rozwiązywanie jest bardzo czasochłonne. Wynika to z konieczności bezpośredniego całkowania krok po kroku pełnego układu (por. YOSHIDA, WEAVER [1], BOROWICZ [2]), postępowanie takie wymaga generowania i odwracania macierzy współczynników w każdym kroku całkowym, przy czym macierze te, jak i postać wektora obciążeń, wyznaczone są na podstawie funkcji kształtu.

W pracy przedstawiona zostanie efektywna metoda formowania i rozwiązywania równań ruchu konstrukcji poddanych obciążeniom zmiennym zarówno w czasie, jak i w przestrzeni. W szczególności rozważa się ogólny przypadek inercyjnych obciążeń skupionych. Obciążenia te mogą być traktowane jako grupy mas lub lepkosprężystych oscylatorów pozostających względem siebie w dowolnie zmieniającym się układzie.

### 2. Idea metody

W proponowanej metodzie wprowadza się oprócz stosowania dyskretyzacji geometrycznej również dyskretne podejście do opisu wielkości będących funkcją czasu. Jako punkt wyjścia przyjęto podstawowe równanie dynamiczne metody elementów skończonych,

opisujące zachowanie się konstrukcji sprężystych z liniowym tłumieniem, w postaci podanej przez ZIENKIEWICZA [3]:

$$\mathbf{K}\delta + \mathbf{C}\dot{\delta} + \mathbf{M}\ddot{\delta} + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

przy czym w rozpatrywanym przypadku oprócz wektora  $\mathbf{F}$  także macierze sztywności, tłumienia i mas ( $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{M}$ ) są zmienne w czasie. Do rozwiązania zagadnienia dochodzi się drogą następującego rozumowania. Załóżmy, że wystarczająca jest znajomość usytuowania obciążeń tylko w wybranych stosunkowo odległych chwilach czasu  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Zdeterminowane w tych chwilach stany obciążenia układają się w kolejne „zdjęcia migawkowe” przebiegu całego procesu obciążenia. Jeśli dodatkowo, w miejscu położenia każdego obciążenia w wydzielonych chwilach  $t_i$ , występuje węzeł (stopień swobody) generowanie macierzy  $\mathbf{K}_{t_i}$ ,  $\mathbf{C}_{t_i}$  i  $\mathbf{M}_{t_i}$  oraz wektora  $\mathbf{F}_{t_i}$ , może odbywać się bezpośrednio na podstawie odpowiednich macierzy ustroju nieobciążonego, bez stosowania funkcji kształtu. W tym celu wprowadza się dwa kryteria doboru węzłów siatki podziału ustroju na elementy. Obok kryterium dotychczas stosowanego, jakim jest właściwe oddanie cech geometryczno-materiałowych obliczanego ustroju, wprowadza się nowe, polegające na takiej ich lokalizacji, by w chwilach  $t_i$  każde z obciążeń znajdowało się w węźle (rys. 1). Jeśli teraz

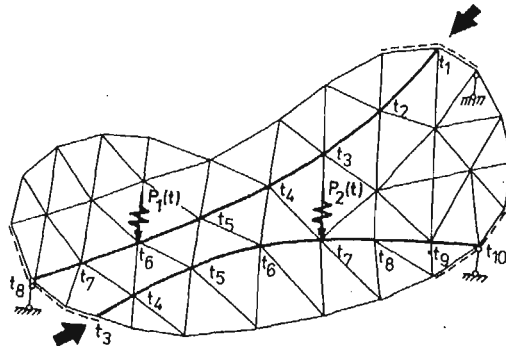


Fig. 1

przyjmemy, że znany nam jest wpływ zachowania się układu w odcinkach czasowych pomiędzy „zdjęciami” (zagadnienie to przedstawiono w pracy), to dysponując tak usytuowanymi węzłami, przebieg zmienności obciążeń i odpowiadającą mu modyfikację macierzy współczynników można opisać i wyznaczyć, deklarując jedynie numery stopni swobody, określające położenia obciążeń w chwilach czasu, przyjętych jako obligatoryjne. Obowiązuje przy tym założenie, że ruch pomiędzy kolejnymi chwilami odbywa się po torze prostym, z prędkością średnią.

Udogodnienie powyższe występuje również po przeprowadzeniu transformacji redukującej liczbę stopni swobody [3, 4] (tzw. kondensacji stopni swobody) pod warunkiem zachowania tych, które wydzielone zostały ze względu na drugie kryterium. Dokonać jej można przez transformację układu współrzędnych uogólnionych:

$$\delta = \mathbf{L}\delta^*, \quad (2.2)$$

gdzie  $\delta$  — wektor ( $u$ ) przemieszczeń węzłowych układu wyjściowego,  $\delta^*$  — wektor ( $n$ ) przemieszczeń węzłowych układu zredukowanego,  $L$  — prostokątna ( $u \times n$ ) macierz redukcji.

Macierz  $L$  może być znajdowana w sposób oparty na analogii fizycznej (por. np. [5]), a następnie macierze sztywności i mas, zredukowane do wybranych stopni swobody, otrzymujemy z zależności

$$K^* = L^T K L, \quad M^* = L^T M L. \quad (2.3)$$

Po takiej redukcji przestaje mieć znaczenie typ modelowanej konstrukcji, istotne są tylko numery identyfikacyjne pozostawionych stopni swobody, przy czym nawet znaczne zmniejszenie ogólnej bazy współrzędnych (np. na skutek wyeliminowania obrotowych stopni swobody) nie ma większego wpływu na wartości podstawowych parametrów dynamicznych konstrukcji, a przyczynia się zdecydowanie do podniesienia efektywności dalszych operacji matematycznych.

### 3. Formowanie macierzowego równania ruchu

Istnieją dwa podstawowe modele inercyjnych obciążeń ruchomych; masa poruszająca się bezpośrednio po konstrukcji i oscylator, czyli masa, której działanie przekazuje się za pośrednictwem więzi sprężystej z liniowym tłumieniem. W obu przypadkach przemieszczenia poprzeczne odcinka toru, na którym aktualnie występuje obciążenie, można wyrazić przez wartości przemieszczeń węzłowych oraz założonych funkcji aproksymacyjnych (kształtu). Na rysunku 2 pokazano odcinek toru zawarty pomiędzy punktami  $s(t_{i-1})$

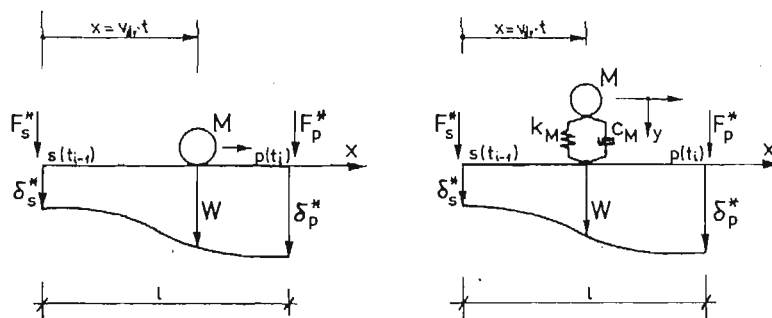


Fig. 2

i  $p(t_i)$ , w których występują stopnie swobody  $\delta_s^*$  i  $\delta_p^*$ . Punkty te identyfikują również położenie obciążenia we współrzędnej czasu. Przemieszczenie „śledzące”  $W$  wyrażamy ziążkiem

$$W = N \delta_l^*, \quad (3.1)$$

gdzie  $N$  — funkcja kształtu,  $\delta_l^*$  — wektor przemieszczeń węzłowych końców odcinka toru.

Przyjmując, że obciążenie przesuwa się po odcinku ze stałą prędkością

$$v_{sr} = \frac{l}{t_i - t_{i-1}} = \frac{l}{\Delta t_i}, \quad (3.2)$$

bezwymiarową zmienną geometryczną można wyrazić również jako bezwymiarową zmienną czasu

$$\xi t = \frac{x}{l} = \frac{v_{sr}t}{l} = \frac{t}{\Delta t_i}. \quad (3.3)$$

Zakładając funkcje kształtu w postaci hermitowskich wielomianów sześciennych, związek (3.1) zapisujemy

$$w(\xi t, t) = \mathbf{N}(\xi t) \boldsymbol{\delta}_i^*(t) = [1 - 3(\xi t)^2 + 2(\xi t)^3, 3(\xi t)^2 - 2(\xi t)^3] \begin{Bmatrix} \delta_s^* \\ \delta_p^* \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

a uwzględniając ponadto (3.3), kolejne pochodne czasowe przemieszczenia śledzącego wyrażają wzory:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{1}{\Delta t_i} \mathbf{N}' \boldsymbol{\delta}_i^* + \mathbf{N} \frac{d\boldsymbol{\delta}_i^*}{dt}, \\ \frac{d^2W}{dt^2} &= \frac{1}{\Delta t_i^2} \mathbf{N}'' \boldsymbol{\delta}_i^* + 2 \frac{1}{\Delta t_i} \mathbf{N}' \frac{d\boldsymbol{\delta}_i^*}{dt} + \mathbf{N} \frac{d^2\boldsymbol{\delta}_i^*}{dt^2}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

symbolem (') oznaczono pochodną po zmiennej geometrycznej.

W przypadku obciążeń masą nieresorowaną  $M$ , wektor obciążeń węzłowych (równoważników obciążeń zewnętrznych) przyjmuje postać ,

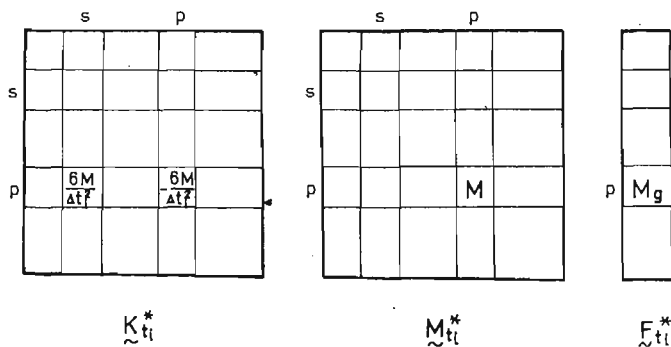
$$\mathbf{F}_i^* = \begin{Bmatrix} F_s^* \\ F_p^* \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^T(\xi t) \mathbf{P}(t) = \mathbf{N}^T(\xi t) \left( Mg - M \frac{d^2W}{dt^2} \right) \quad (3.6)$$

gdzie  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim.

Ostatecznie po uwzględnieniu (3.5) przy wartości  $\xi t = 1,0$  odpowiadającej położeniu obciążenia w punkcie  $p(t_i)$  (por. [6]), otrzymujemy

$$F_s^* = 0, \quad F_p^* = Mg - 6 \frac{1}{\Delta t_i^2} M \delta_s^* + 6 \frac{1}{\Delta t_i^2} M \delta_p^* - M \ddot{\delta}_p^*. \quad (3.7)$$

Wprowadzając powyższe wyrażenie na siłę do równania  $p$  układu i grupując składowe zależne od niewiadomych  $\delta_s^*$  oraz  $\delta_p^*$  i jej pochodnej otrzymujemy schemat (rys. 3) modyfikacji macierzy sztywności i mas oraz generowania wektora obciążeń w chwili  $t_i$ .



Rys. 3

W analogiczny sposób określany może być udział wszystkich mas ruchomych znajdujących się w danym momencie na konstrukcji i tym samym wygenerowanie bloków  $\mathbf{K}_{t_i}^*$ ,  $\mathbf{M}_{t_i}^*$  i  $\mathbf{F}_{t_i}^*$ . W rozważanym przypadku obciążenia, macierze  $\mathbf{K}_{t_i}^*$  stają się niesymetryczne. Jest to wynik uwzględniania wpływu przyspieszenia Coriolisa. W proponowanej dalej metodzie rozwiązania równań ruchu o zmiennych współczynnikach, wpływ ten pominięto. Uproszczenie to nie ma większego znaczenia, gdy się weźmie pod uwagę realne prędkości obciążeń i wartości przemieszczeń konstrukcji, a pozwoli zachować symetryczność wszystkich macierzy układu.

W przypadku obciążeń masą  $M$  na zawieszeniu sprężystym o charakterystyce  $k_M$  z tłumieniem o współczynniku  $c_M$ , współrzędne wektora obciążeń węzłowych wynoszą

$$\mathbf{F}_{t_i}^* = \mathbf{N}^T(\xi t)P(t) = \mathbf{N}^T(\xi t) \left[ Mg + k_M(y - W) + c_M \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dW}{dt} \right) \right] \quad (3.8)$$

oraz równanie równowagi ruchomej więzi sprężystej (rys. 2b)

$$F_M = M \frac{d^2y}{dt^2} + c_M \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dW}{dt} \right) + k_M(y - W) = 0 \quad (3.9)$$

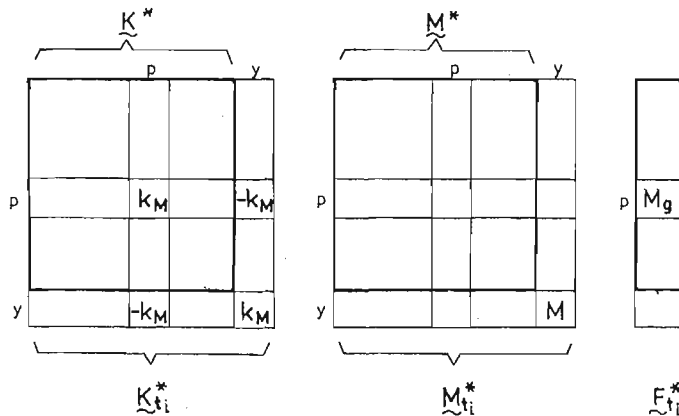
gdzie  $y$  współrzędna wychyleń masy na zawieszeniu sprężystym.

Dla wartości  $\xi t = 1,0$  otrzymujemy:

$$F_s^* = 0, \quad F_p^* = Mg - k_M \delta_p^* - c_M \dot{\delta}_p^* + k_M y + c_M \dot{y}, \quad (3.10)$$

$$-k_M \delta_p^* - c_M \dot{\delta}_p^* + k_M y + c_M \dot{y} + M \ddot{y} = 0. \quad (3.11)$$

Dołączenie dodatkowego równania (3.11) do układu równań równowagi dynamicznej ustroju wyjściowego, na skutek pojawienia się nowego, (przemieszczającego się) stopnia swobody  $y$ , powoduje rozszerzenie macierzy współczynników układu. Schemat modyfikacji macierzy sztywności i mas oraz generowania wektora obciążeń w chwili  $t_i$  przedstawiono na rysunku 4. I tym razem możliwe jest uwzględnienie wielu różnych oscylatorów. Ulega wówczas zwiększeniu w odpowiednim stopniu liczba współrzędnych, nie wpływa to jednak na sposób generowania powyższych macierzy.



Rys. 4



Rozwiązanie tych równań przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych nie nastęca większych trudności, niewiadome wartości funkcji i jej pochodnych obliczane mogą być przez zastosowanie jednej ze znanych metod całkowania numerycznego. Po określeniu wektorów  $z$ ,  $\dot{z}$  i  $\ddot{z}$  w wybranych punktach czasu, wyrażenie tych wielkości w bazie współrzędnych naturalnych odbywa się na podstawie transformacji (4.2). W przypadku niepokrywania się założonych na wstępie obligatoryjnych chwil z tymi punktami na osi czasu, w których chcemy uzyskać parametry ruchu konstrukcji, zachodzi konieczność interpolacji wartości wektorów własnych.

Wprowadzenie oscylatora zmienia rozpatrywany układ w sposób jakościowy, prowadząc również do zmiany jego widma częstości drgań własnych. Zazwyczaj jednak częstość drgań własnych oscylatora znajduje się w dolnych rejonach tego widma i gdy sprzężenie jest w istocie znaczące, nie występuje niebezpieczeństwo pominięcia jego wpływu przy odrzuceniu równań odpowiadających dalszym częstościom. Współczynnik tłumienia równania związanego z częstością oscylatora można przyjąć jako stały i określić z zależności  $2\gamma = c_M/M$ . Zastosowanie analizy modalnej pozwala również uniknąć generowania i następnie dalszego przekształcenia macierzy tłumienia ustroju, której postać (w aspekcie złożoności zjawiska) jest trudna do określenia. W zbiorze współrzędnych głównych istnieje mianowicie możliwość określania współczynników tłumienia nie tylko według hipotezy tłumienia masowego czy tłumienia reologicznego wg wariantu Voigta, ale również według hipotezy ustalonego dekrementu, tłumienia mogą one być wreszcie specyfikowane indywidualnie dla każdej postaci.

## 5. Przykład

Opierając się na przedstawionej metodzie dokonano rozbudowy systemu programowego IDIM-34 [7]. Nowa konfiguracja systemu [5] pozwoliła zachować jego otwartość.

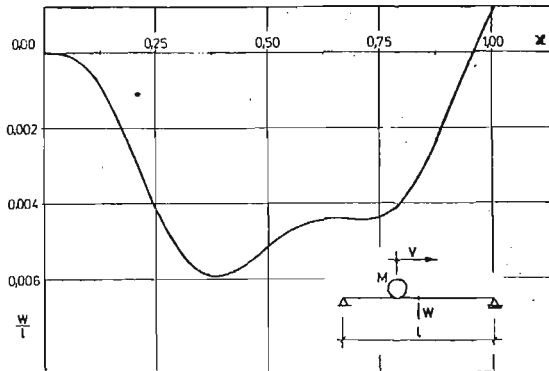
W pracy przedstawiono analizę dwóch przykładów, do których dane ustalono na podstawie obliczeń zamieszczonych w pracy [2]. Belkę swobodnie podpartą obciąża się raz masą nieresorowaną i drugi raz tą samą masą na zawieszeniu liniowo-sprężystym z tłumieniem. Obciążenia poruszały się ze stałymi prędkościami. Obliczenia prowadzone były dla trzech różnych modeli ustroju charakteryzujących się różną liczbą stopni swobody. Modele te, oznaczone B4, B8 i B16 składają się odpowiednio z 4, 8 i 16 elementów prętowych o równych długościach (oznaczonych  $l_1$ ,  $l_2$  i  $l_3$ ).

Dane fizyczne belki wynoszą: moduł sprężystości  $E = 21 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$ , moment bezwładności  $J = 0,01 \text{ m}^4$ , pole powierzchni przekroju  $F = 0,1 \text{ m}^2$ , długość belki  $l = 20,0 \text{ m}$ , długości elementów;  $l_1 = 5,0 \text{ m}$ ,  $l_2 = 2,5 \text{ m}$ ,  $l_3 = 1,25 \text{ m}$ , masa objętościowa  $\rho = 267584 \text{ kg/m}^3$ , współczynnik tłumienia  $\gamma = 0$ .

W poszczególnych modelach przeprowadzono, zgodną co do zasady, kondensację stopni swobody, i tak kolejne modele ustroju (B4, B8 i B16) zredukowano do 5, 9 i 17 stopni swobody, pozostawiając te, które są przemieszczeniami poprzecznymi wszystkich (również podporowych) węzłów. W każdym modelu liczba stopni swobody stanowiła równocześnie o liczbie punktów obligatoryjnych na osi czasu, a funkcje obciążenia i częstości drgań własnych z równań (4.4) aproksymowano wielomianami Lagrange'a o stopniu maksymalnie

możliwym do osiągnięcia w danym modelu, tj. odpowiednio 4-tego, 8-mego i 16-tego stopnia.

W przypadku obciążenia belki ruchomą masą bezpośrednio, parametry obciążenia wynosiły: masa  $M = 133792$  kg, a jej prędkość  $v = 8,8595$  m/s. Uzyskane w każdym obliczeniu przebiegi czasowe ugięć punktu środkowego belki (rys. 5) nie różniły się znacząco między sobą, jak również w porównaniu z przebiegiem, którego wykres zamieszczono w pracy [2].



Rys. 5

W tabeli 1 przedstawiono dwie wartości charakterystyczne powyższego wykresu otrzymane przy kolejnych modelach; są to: ugięcie maksymalne ( $w_{\max}^0$ ) oraz ugięcie występujące w chwili zjazdu obciążenia z belki ( $w_k^0$ ). Ponadto w tabeli tej podane zostały dwie pierwsze częstotliwości drgań własnych; ustroju nieobciążonego ( $f_1$  i  $f_2$ ) i ustroju w momencie gdy ruchoma masa znajduje się w środku belki ( $f'_1$  i  $f'_2$ ).

Tabela 1

Model	$w_{\max}^0$ [m]	$w_k^0$ [m]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f'_1$ [Hz]	$f'_2$ [Hz]
B4	0,11661	-0,0158	1,1005	4,4323	0,89762	4,4323
B8	0,11804	-0,0219	1,1001	4,4018	0,89751	4,4018
B16	0,11741	-0,0212	1,1001	4,4006	0,89750	4,4006

W tabeli 2 zamieszczono wartości ugięć  $w_{\max}^0$  i  $w_k^0$ , uzyskiwane przy wykorzystaniu modelu B8 z uwzględnieniem zmiennej (od 1 do 4) liczby form własnych.

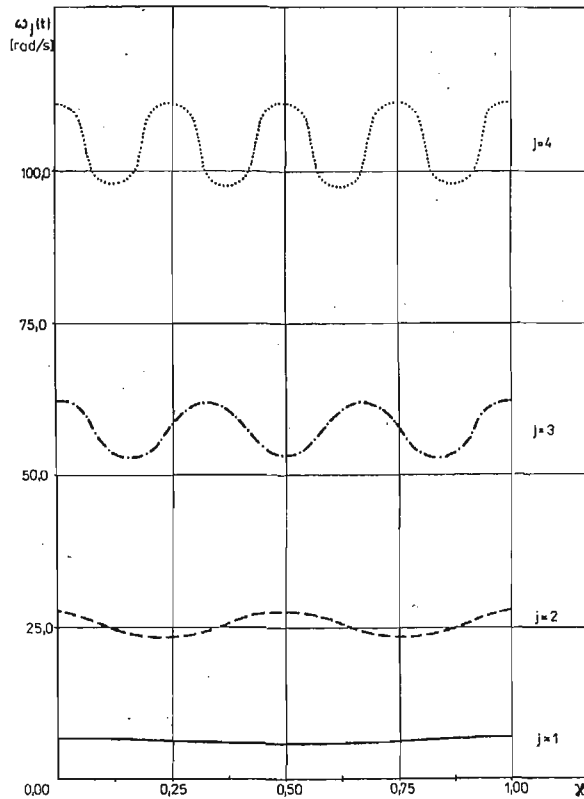
Rezultaty zawarte w tabelach 1 i 2 potwierdzają dobrą zgodność wyników otrzymanych przy uwzględnieniu różnej liczby stopni swobody oraz główne znaczenie podstawowych form drgań własnych. Uzasadnieniem owej stabilności rozwiązań, otrzymywanych przy wykorzystaniu proponowanej metody, mogą być wykresy funkcji przedstawionych na rys. 6 i rys. 7. Na pierwszym z nich znajdują się wykresy funkcji czterech pierwszych częstotliwości



Tabela 2

Liczba postaci	$w_{max}^0$ [m]	$w_k^0$ [m]
1	0,11850	-0,021906
2	0,11804	-0,021906
3	0,11839	-0,021831
4	0,11839	-0,021831

drgań własnych, uzyskane z aproksymacji przy dziewięciu punktach obligatoryjnych. Zarówno charakter ich zmienności (występowanie minimów lokalnych w liczbie równej numerowi częstości), jak i wartości amplitud, wskazują na możliwość uzyskiwania największych dokładności aproksymacji funkcji najniższego rzędu, a więc najbardziej znaczących. Rysunek 7 zawiera cztery pierwsze, rozwinięte względem form własnych, funkcje obciążenia, które podzielone zostały przez odpowiadające im funkcje częstości drgań własnych. Tak określone funkcje, w przypadku gdy pomija się wpływ inercji obciążenia (ob-



Rys. 6

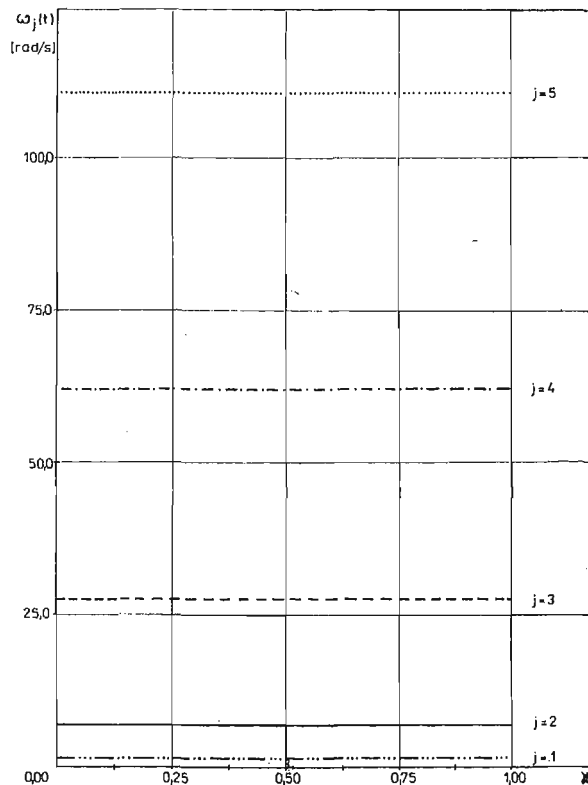


Tabela 3

Model	$w_{max}^0$ [m]	$w_k^0$ [m]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f'_1$ [Hz]	$f'_2$ [Hz]
B4	0,13037	0,00516	0,22233	1,1005	0,22183	1,1083
B8	0,13087	0,00576	0,22293	1,1001	0,22262	1,1043
B16	0,13148	0,00581	0,22293	1,1001	0,22274	1,0970

lizowanie wartości porównywanych wystąpiło w modelach B8 i B16, to przy obciążeniu oscylatorem wynik uzyskany przy najprostszym modelu B4 jest również bliski pozostałym.

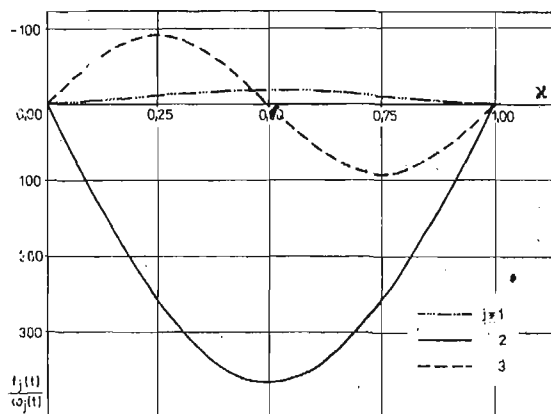
Uzasadnienie powyższego i tym razem można znaleźć analizując przebieg funkcji, od których zależy rozwiązanie zadania. Na rys. 9 pokazano wykres funkcji pierwszych pięciu częstości drgań własnych. Pomimo że obraz przebiegu tych funkcji wydaje się świadczyć o ich stałej wartości, zawierają one jednak pewną, niewidoczną w tej skali, zmienność w czasie. Tym razem występuje tendencja odwrotna, niż to miało miejsce przy obciążeniu bezpośrednio masą. Otóż w kolejnych funkcjach częstości pojawiają się nie minima, lecz maksyma lokalne w liczbie równej numerowi danej postaci drgań (licząc z pominięciem



Rys. 9

postaci wynikającej z wprowadzenia oscylatora), jak również obserwuje się zanikanie wartości ich amplitud wraz ze wzrostem numeru częstości.

Rysunek 10 zawiera wykresy trzech pierwszych funkcji obciążenia w konwencji określonej wcześniej. Funkcja o numerze  $j = 1$  jest — rozwiniętą względem form własnych i podzieloną przez właściwą częstość — prawą stroną równania oscylatora. Jest ona podobnie uformowana jak pierwsza funkcja równania belki i przy założonych parametrach układu ma znacznie mniejszą amplitudę. Dalsze, nie pokazane funkcje mają ten sam kształt jak na rys. 7.



Rys. 10

Mając powyższe na uwadze, jak i brak widocznych różnic pomiędzy wykresem ugięć punktu środkowego (rys. 8), a analogicznym wykresem zamieszczonym w pracy [2], można stwierdzić, że powodem tak dobrych rezultatów jest z jednej strony model matematyczny ustroju, który już przy niewielkiej liczbie stopni swobody pozwala uzyskać z dużą dokładnością podstawowe parametry drgań swobodnych, z drugiej zaś łagodny przebieg pierwszych funkcji częstości i obciążenia, pozwalający na dokładną ich aproksymację.

## 6. Wnioski

Przedstawiony sposób powiązania współrzędnych przestrzeni i czasu umożliwia efektywną analizę drgań wymuszonych praktycznie dowolnych konstrukcji w zakresie liniowo-sprężystym przy ruchomych obciążeniach inercyjnych traktowanych jako grupa niezależnych mas skupionych lub pojedynczych oscylatorów.

Efektywność zaproponowanej metody wynika z dwuetapowej redukcji współrzędnych układu = statycznej i dynamicznej. Redukcja statyczna układu (kondensacja stopni swobody) pozwala zmniejszyć ogólną liczbę współrzędnych naturalnych, ograniczając je jedynie do tych, które mają istotny wpływ na drgania ustroju. Redukcję dynamiczną — w tym przypadku — umożliwia zaproponowany sposób rozwiązywania układów równań o zmiennych współczynnikach przez ich diagonalizację interpolacyjną na podstawie diagonalizacji w określonych chwilach. Wykorzystanie rozwinięcia względem form własnych, a więc rozwiązania układu we współrzędnych głównych ma jeszcze tę zaletę, iż czyni stosunkowo

gładkimi funkcje będące współczynnikami i wyrazami wolnymi równań odpowiadających najniższym formom, co podnosi dokładność ich aproksymacji na podstawie wartości stabilizowanych. Najczęściej już kilka pierwszych równań postaci modalnej wystarcza dla uzyskania wyników technicznie dokładnych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. D. M. YOSHIDA, W. J. R. WEAVER, *Finite element analysis of beam and plates with moving loads* IABSE Publications, 31, I, 1971.
2. T. BOROWICZ, *Wyteżenie belek pod obciążeniem ruchomym*, Arch. Inż. Łąd., 24, 2, 1978.
3. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
4. J. H. ARGYRIS i inni, *Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej*, IPPT PAN, Ossolineum, Wrocław 1977.
5. A. RADZIECKI, J. WESELI, *Obliczenia dynamiczne w otwartym systemie metody elementów skończonych IDIM-34, XXVI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Ref. t, 1, Krynica 1980.*
6. A. RADZIECKI, *Analiza ustroju mostowego poddanego działaniu złożonych układów skupionych sił ruchomych*, Arch. Inż. Łąd. 29, 1-2, 1983
7. J. WESELI, *Metoda elementów skończonych, programy do obliczania konstrukcji inżynierskich*, Część II, wyd. w ramach mat. XXIV Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB w Krynicy, Gliwice 1978.

#### Резюме

#### МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ИНЕРТНЫХ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗКАХ

В работе представлен метод образования и решения уравнений движения конструкций, подверженных действию подвижных инертных нагрузок, рассматриваемых в виде групп сосредоточенных масс или вязко-упругих осцилляторов. Причём отдельные нагрузки могут оставаться по отношению к себе в произвольно меняющемся соотношении.

В предлагаемом способе решения использован метод конечных элементов, в котором кроме геометрической дискретизации использован разностный метод для описания величин, являющихся функцией времени. Этот способ решения позволяет эффективно рассчитывать произвольные структуры в линейно-упругой области при сложных подвижных нагрузках. Эффективность метода вытекает из двухэтапной редукции координат системы — статической и динамической — причём последняя возможна благодаря применению интерполярной диагонализации системы уравнений движения.

#### Summary

#### A METHOD OF SOLVING EQUATIONS OF MOTION FOR INERT MOVING LOADS

A method of formulating and solving of the equations of motion of the constructions subjected to the inert moving loads is presented. The loads are treated as groups of concentrated masses or viscoelastic oscillators, particular loads can be in arbitrary varying relations with respect to one another.

In the considered solution we make use of the finite element method and apart from the geometrical discretisation also the time depending quantities are discretised. The method lets us to find the effective solution in the linear elastic regions for complex moving loads. The effectiveness of the method results from the two-stage reduction of the coordinate system — static and dynamic; the latter one is feasible due to the introduction of the interpolator diagonalisation of the system of equations of motion.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1982 roku*



## PHYSICAL CORRECTNESS OF COSSERAT-TYPE MODELS OF HONEYCOMB GRID PLATES

TOMASZ LEWIŃSKI

*Politechnika Warszawska*

### 1. Introduction

Formulated via phenomenological considerations micropolar theory of elasticity (cf. [1]) can be applied for continuum description of dense, regular grids. This has been noted and applied by Woźniak et al. in numerous papers pertaining to lattice-type shells and plates, cf. [2]. Woźniak's approach is based on variational methods; an adequacy of the proposed differential model of a body with additional degrees of freedom is „a priori” assumed. In the first-order approximation (see Sec. III in [2]) an in-plane plate motion is described by means of three independent functions approximating displacements and rotations of nodes. The governing equations of the theory have a similar form to those of the plane-stress theory of micropolar media. Therefore the Woźniak's approach is a heuristic one thus the recalled above procedure does not allow us to perform a physical correctness analysis of the model provided appropriate numerical tests are not carried out.

In the case of simple layout grid plates (in which neighbourhoods of all nodes are congruent) Woźniak's algorithm leads to one set of effective constants describing elastic properties of the structure. However in the case of complex layout grids, one can derive at least two sets of  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  tensors (cf. [3]). In the present paper an attempt is made to elucidate questions concerning the mentioned difficulties in formulation of Cosserat-type models of complex geometry lattice plates. An attention will be focused on hexagonal grids belonging to the class of complex layout structures. In order to have a new look at Woźniak's continuum models results of the work [4] (pertaining to differential models due to Rogula-Kunin's approach) are applied.

It is easy to note that Cosserat-type equilibrium equations expressed in terms of displacements cannot be obtained by asymptotic method, e.g. by formal simplifications (neglect of terms of higher order) of equilibrium equations found in [4] by Rogula-Kunin's procedure; thus a simple correspondence between the latter and Woźniak's-type equations is not valid. This fact is obvious since differential models derived in [4] (just contrary to theories outlined in [3]) do not satisfy stability conditions.

In Sec. 5 a simple modification of the second-order differential approximation (obtained in [4]) will be proposed. The aim of the procedures is to formulate a well-established

Cosserat-type equations, so called  $\kappa$ -versions. In Sec. 6 an attempt is undertaken to examine a range of applicability of the latter versions as well as of two variants resulting from Woźniak's concept, see [3].

## 2. Basic assumptions

A subject of our considerations is a plane-stress statical problem of a honeycomb grid composed of bars whose axes constitute hexagons of sides being equal to  $l$ , cf. Fig. 1. In order to make final results as clear as possible the bars are assumed to be prismatic (thus their heights  $h$  are constant while their depth is of unit dimension) and made of an isotropic, elastic material whose properties are characterised by Young modulus  $E$  and

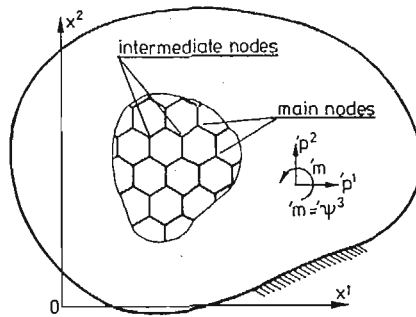


Fig. 1

Poisson's ratio  $\nu$ . External loads (subjected to lattice joints only) are assumed to yield plane-stress plate response hence the external forces are supposed to be subjected in-plane while moments should be normal to the mid-surface of the grid. A slenderness ratio of lattice rods is defined by, cf. [3]

$$\eta = l^2/h^2.$$

A parameter  $\varrho$  defined as a quotient of opening's diameter to a spacing between centres of neighbouring openings, see [3], reads

$$\varrho = (\sqrt{3\eta} - 1)/\sqrt{3\eta} \quad (2.1)$$

As it has been pointed out in [3]  $EJ/l^3 = E/12\eta^{3/2}$  where  $J$  denotes a moment of inertia of a constituent bar's cross section. Lattice rods are assumed to be sufficiently slender so as to known methods of the theory of structures could be applied. Analogously to [3, 4] lattice nodes are divided into two families of main and intermediate ones, see Fig. 1. Displacements and rotations of main nodes are approximated by continuous functions  $u^\alpha(x^b)$  and  $\varphi(x^b)$ . External loads subjected to main and intermediate nodes are characterised by functions  $F^\alpha$ ,  $M$ ,  $F^\alpha$ ,  $M$ , respectively.



### 3. Two versions of Woźniak-type continuum descriptions

**3.1. Equilibrium equations in terms of displacements.** A set of the title equations has a form similar to that known from plane-stress problem of micropolar media, see [3]

$$\begin{aligned} [(2\mu + \lambda)\partial_1^2 + (\mu + \alpha)\partial_2^2]u^1 + (\lambda + \mu - \alpha)\partial_1\partial_2u^2 + [B(\partial_1^2 - \partial_2^2) + 2\alpha\partial_2]\varphi + 'p^1 &= 0, \\ (\lambda + \mu - \alpha)\partial_1\partial_2u^1 + [(2\mu + \lambda)\partial_2^2 + (\mu + \alpha)\partial_1^2]u^2 + [-2B\partial_1\partial_2 - 2\alpha\partial_1]\varphi + 'p^2 &= 0, \\ [B(\partial_1^2 - \partial_2^2) - 2\alpha\partial_2]u^1 + [-2B\partial_1\partial_2 + 2\alpha\partial_1]u^2 + [C(\partial_1^2 + \partial_2^2) - 4\alpha]\varphi + 'Y^3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

where

$$\begin{aligned} 'p^\alpha &= p^\alpha + \partial_\beta \dot{p}^{\beta\alpha}, \quad 'Y^3 = Y^3 + \partial_\alpha \dot{m}^\alpha + e_{\alpha\beta} \dot{p}^{\alpha\beta}, \\ (p^\alpha, \dot{p}^{\alpha\beta}, Y^3, \dot{Y}^3) &= (F^\alpha, \dot{F}^\alpha, M, \dot{M})/P, \quad p = 1, 5 \sqrt{3} l^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ricci tensor is denoted by  $e_{\alpha\beta}$ , an area of a recurrent hexagon amounts to  $P$ . The effective moduli  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $\alpha$  are uniquely defined in both Woźniak-type versions examined in [3] whereas  $B$  and  $C$  moduli can be defined twofold

i) Klemm-Woźniak's version (Sec. 3, [3])

$$\check{B} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \eta}{\bar{\eta} + 1} \cdot \frac{EJ}{l^2}, \quad \check{C} = \frac{\sqrt{3}(3\eta + \bar{\eta} + 1)}{3(\bar{\eta} + 1)} \cdot \frac{EJ}{l}. \quad (3.3)$$

ii) the second, author's variant (Sec. 4, [3])

$$\hat{B} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \eta \cdot (3\eta - \bar{\eta})}{(\bar{\eta} + 1) \cdot (3\eta + \bar{\eta})} \cdot \frac{EJ}{l^2}, \quad \hat{C} = \frac{\sqrt{3} \cdot [(3\eta - \bar{\eta})^2 + (3\eta + \bar{\eta})]}{3(\bar{\eta} + 1) \cdot (\bar{\eta} + 3\eta)} \cdot \frac{EJ}{l} \quad (3.4)$$

where  $\bar{\eta} = \eta + 2.4(1 + \nu)$ .

The tensors  $\dot{p}^{\alpha\beta}$  and  $\dot{m}^\alpha$  are dependent upon the loads subjected to intermediate nodes; their definitions are given in [3], [6].

**3.2. Strain energy as a positive definite function.** Strain energy of the structure is positive definite provided, [3]

$$\mu > 0, \quad \alpha > 0, \quad \mu + \lambda > 0, \quad C > 0, \quad B^2 < C \cdot \mu. \quad (3.5)$$

### 4. Unstable quasicontinuum micropolar-type equilibrium equations

**4.1. Derivation of governing equations.** Focus attention on Cosserat-type equations (3.1). On noting that  $B \sim l$ ,  $C \sim l^2$  one can make following remarks:

a) two first equilibrium equations involve zero-order (with respect to powers of  $l$ ) terms of displacement-type and a first-order term relevant to nodal rotations;

b) the last equation involves first-order terms of displacement-type and a second-order term depending upon the rotations.

The procedures put forward in [3] did not explain why:

a) two first equations do not involve first-order terms being dependent on displacements. Does it yield from approximations only or result from specific properties of the hexagonal grid?

b) the last equation does not involve second-order terms of displacement-type; also herein the same question arises.

Answers to the above questions are supplied by quasicontinuum considerations, [4]. Compare consequent second-order equations ((6.1) in [4]) with Eqs. (3.1) of Cosserat-type theory. First of all it can be stated that moduli  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $\alpha$  (being involved in both compared sets of equations) have been identically defined (cf. (3.8)<sub>1-3</sub> in [3] and (6.2)<sub>1-3</sub> in [4]). Thus both approaches (based on Woźniak's [3] and Rogula-Kunin's, [4], concepts) result in the same definitions of elastic moduli  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $\alpha$  being dependent upon slenderness ratio of bars only and thus being independent of the internode spacing  $l$ .

Note that equations similar to the Cosserat-type (3.1) can be derived from the second-order Eqs. ((6.1) in [4]) provided in the latter all the terms involving derivatives up to the second order are retained:

$$\begin{aligned} [(2\mu + \lambda)\partial_1^2 + (\mu + \alpha)\partial_2^2]u^1 + (\lambda + \mu - \alpha)\partial_1\partial_2 u^2 + [B^0(\partial_1^2 - \partial_2^2) + 2\alpha\partial_2]\varphi + \dot{p}^1 &= 0, \\ (\lambda + \mu - \alpha)\partial_1\partial_2 u^1 + [(2\mu + \lambda)\partial_2^2 + (\mu + \alpha)\partial_1^2]u^2 + [-2B^0\partial_1\partial_2 - 2\alpha\partial_1]\varphi + \dot{p}^2 &= 0, \quad (4.1) \\ [B^0(\partial_1^2 - \partial_2^2) - 2\alpha\partial_2]u^1 + [-2B^0\partial_1\partial_2 + 2\alpha\partial_1]u^2 + [C^0(\partial_1^2 + \partial_2^2) - 4\alpha]\varphi + \dot{Y}^3 &= 0, \end{aligned}$$

where

$$B^0 = \beta l, \quad C^0 = \gamma l^2. \quad (4.2)$$

Moduli  $\beta$  and  $\gamma$  have been defined by Eqs. (6.2)<sub>4,6</sub> in [4]. Hence we obtain

$$\begin{aligned} B^0 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\eta}{\bar{\eta}} \left( \frac{3\eta - \bar{\eta}}{3\eta + \bar{\eta}} + \frac{3\bar{\eta} - 1}{\bar{\eta} + 1} \right) \cdot \frac{EJ}{l^2}, \\ C^0 &= \frac{\sqrt{3}}{\bar{\eta}} \cdot \left[ \frac{(3\eta - \bar{\eta})^2}{3(3\eta + \bar{\eta})} - \frac{\eta}{1 + \bar{\eta}} \right] \cdot \frac{EJ}{l}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

Quantities  $\dot{p}^\alpha$  and  $\dot{Y}^3$  are equal to functions  $'p^\alpha$  and  $'Y^3$  employed in [4]. In a zero-order approximation we have

$$\dot{p}^\alpha = p^\alpha + \dot{p}^{\alpha*} + \frac{3\eta}{3\eta + \bar{\eta}} e^{\alpha\beta} \partial_\beta \dot{Y}^3, \quad \dot{Y}^3 = Y^3 + \frac{\bar{\eta} - 3\eta}{\bar{\eta} + 3\eta} \cdot \dot{Y}^{3*}. \quad (4.4)$$

The derivation of Eqs. (4.1) (which will be called further quasicontinuum micropolar-type equilibrium equations) violates accuracy principles formulated in [4] where the approximation procedure has been called consequent provided all the terms proportional to  $l^p$ ,  $p \leq s$ , ( $s$  is fixed) are being retained. In the next section an improved accuracy analysis will be presented. The approximations of governing equations correspond to a certain form of density of strain energy of the structure. Thus various approximations of three equilibrium equations are reflected in the form of the one scalar function which stands for the energy of the grid. This method of error analysis is not new, the idea was originated by Koiter in the paper [5] pertaining to the Kirchoff-Love shell theory and up till now it is often applied to the accuracy analysis of so called improved theories describing plate and shell behaviour, see [6].

**4.2. The micropolar-type approximation as a model of „moderate” rotations. The energy criterion.** Strain energy of the infinite hexagonal grid amounts to ,

$$E_c = \frac{1}{2} P \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} w_n^\alpha \Phi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{n}-\mathbf{m})} w_m^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

where the hexagon's area of a side  $l$  has been denoted by  $P$ ,  $P = 1.5\sqrt{3} \cdot l^2$ ;  $w^\alpha = u^\alpha$ ,  $w^3 = \varphi$ ; the summation has been implied over all main nodes which constitute a plain (Bravais-type) lattice of the grid. The values of  $\Phi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{n})}$  functions were given in [4]. On passing to  $k$ -representation we arrive at (the proof is omitted here)

$$E_c = \int_{\hat{P}} \hat{e}(\mathbf{k}) d^2\mathbf{k}, \quad \hat{e}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^2 \cdot P} \bar{w}^\alpha(\mathbf{k}) \hat{\Phi}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \cdot \hat{w}^\beta(\mathbf{k}),$$

$$d^2\mathbf{k} = 4 \cdot \pi^2 \cdot dk_1 dk_2 / P$$

where the domain of the unit cell of the reciprocal lattice has been denoted by  $\hat{P}$ ; a discrete Fourier transform of a discrete-argument function  $f^{\mathbf{m}}$  has been denoted by  $\hat{f}(\mathbf{k})$ . Certain approximations of  $\hat{\Phi}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ , cf. [4], result in differential models, particularly (as it will be shown further) — in Cosserat-type models.

Introduce dimensionless variables  $\Psi^\alpha = u^\alpha / L$ , where  $[L] = m$ . Let  $L = l/\varepsilon$ . The density of strain energy of the grid

$$\hat{e}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^2 P} \left\{ \frac{l^2}{\varepsilon^2} (\bar{\Psi}^\alpha \hat{\Phi}_{\alpha\beta} \hat{\Psi}^\beta) + \frac{l}{\varepsilon} [\bar{\Psi}^\alpha \hat{\Phi}_{\alpha 3} \hat{\varphi} + \bar{\varphi} \hat{\Phi}_{3\alpha} \hat{\Psi}^\alpha] + (\bar{\varphi} \hat{\Phi}_{33} \hat{\varphi}) \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

can be rearranged to the form

$$\hat{e}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} a_{11} \cdot |\hat{\Psi}^1|^2 + \frac{1}{2} a_{22} \cdot |\hat{\Psi}^2|^2 + \frac{1}{2} a_{33} \cdot |\hat{\varphi}|^2 \right\} + \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \{ a_{12} \bar{\hat{\Psi}}^1 \hat{\Psi}^2 + a_{13} \bar{\hat{\Psi}}^1 \hat{\varphi} + a_{23} \cdot \bar{\hat{\Psi}}^2 \hat{\varphi} \}. \quad (4.5)$$

Let us define dimensionless quantities  $\tau$  and  $\theta$  by means of the formulae

$$\tau = l|\mathbf{k}|, \quad \cos \theta = k_1/|\mathbf{k}|, \quad \sin \theta = k_2/|\mathbf{k}|.$$

Within the fourth-order approximation (with respect to the powers of  $k_\alpha$ ) the coefficients  $a_{\alpha\beta}$  can be expressed by means of the following equations, cf. Eqs. (6.1) in [4]

$$a_{11} = \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \left[ (\mu + \alpha) + (\lambda + \mu - \alpha) \cos^2 \theta - \frac{3\tau^2}{16} (\mu + \alpha) - \frac{\tau^2}{4} (\lambda + \mu - \alpha) \cos^4 \theta \right],$$

$$a_{22} = \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \left[ (\lambda + \mu - \alpha) \sin^2 \theta + (\mu + \alpha) - \frac{3\tau^2}{16} (\mu + \alpha) - \frac{3\tau^2}{16} (\lambda + \mu - \alpha) \cdot \left( -\frac{1}{3} \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) \right],$$

$$a_{33} = 4\alpha + \gamma \tau^2 - \frac{3}{16} \tau^4 \cdot \gamma,$$

$$a_{12} = \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \left[ (\lambda + \mu - \alpha) \cos \theta \sin \theta - \frac{\tau^2}{8} (\lambda + \mu - \alpha) \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) + i\tau\delta \cdot \cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) \right],$$

$$a_{13} = \frac{\tau}{\varepsilon} \left[ \tau\beta \cos 2\Theta - \frac{\tau^3\beta}{16} (5 \cos^4\Theta - 3 \sin^4\Theta - 6 \cos^2\Theta \sin^2\Theta) + \right. \\ \left. + i \left( -2\alpha \sin \Theta + \frac{3}{4} \tau^2 \sin \Theta \right) \right],$$

$$a_{23} = \frac{\tau}{\varepsilon} \left[ -\tau\beta \sin 2\Theta + \frac{\tau^3}{8} \beta \sin 2\Theta (\cos^2\Theta + 3 \sin^2\Theta) + i \left( 2\alpha \cos \Theta - \frac{3}{4} \tau^2 \alpha \cos \Theta \right) \right].$$

The  $\delta$  modulus has been defined by (6.2)<sub>5</sub> in [4]. Let  $\lambda_d$  means a wavelength of the deformation pattern in  $\mathbf{k}$  direction;  $\lambda_d = 2\pi/|\mathbf{k}|$ .

Thus the magnitude  $\tau$  is:

$$\tau = 2\pi l/\lambda_d = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{b}{\lambda_d} \approx 3.6275 \frac{b}{\lambda_d}$$

where  $b = l\sqrt{3}$  stands for the spacing of main nodes. From now on the  $\tau$  quantity will be supposed to be less than one,  $\tau < 1$ ; this yields  $\lambda_d > 3.6275 b$ . The parameters  $\tau$  and  $\varepsilon$  are interrelated by means of the formula  $\tau/\varepsilon = 2\pi L/\lambda_d$ .

Let  $\hat{\varphi}_0$  and  $\hat{u}_0$  stand for the absolute values of the transforms  $\hat{\varphi}$  and  $\max \hat{u}^\alpha$  measured at the fixed node  $O$  of the grid. The parameter  $\hat{\varphi}_0 \cdot l/\hat{u}_0 = (\hat{\varphi}_0/\hat{\Psi}_0) \varepsilon$  determines the relation between rotation and displacements of the node  $O$ . Depending upon the assumed estimates of value of this parameter three types of equations describing hexagonal grid behaviour can be distinguished:

- a)  $\hat{\varphi}_0 \varepsilon/\hat{\Psi}_0 \sim \tau^2$  — the state (model) of infinitesimal rotations,
- b)  $\hat{\varphi}_0 \varepsilon/\hat{\Psi}_0 \sim \tau$  — the state (model) of small rotations,
- c)  $\hat{\varphi}_0 \varepsilon \sim \hat{\Psi}_0$  — the state (model) of moderate rotations.

The relation  $a \sim b$  (which reads:  $a$  is of the same order as  $b$ ) should be understood in the sense similar to that used in the literature devoted to the thin shell theories, cf. [5, 6].

Within the frames of the mentioned deformation classes differential models of an arbitrary accuracy order can be formulated. A brief analysis of approximation of strain energy density  $\hat{e}$  in two cases b) and c) will be carried out below. The case a) will not be dealt with here.

Ad b) On inserting  $\hat{\varphi}_0 \sim \frac{\tau}{\varepsilon} \hat{\psi}_0$  into (4.5) we have

$$\hat{e}(\mathbf{k}) \sim \left[ \left( \frac{\tau}{\varepsilon} \right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} e_{(m)}^{(b)}(\Theta) \tau^m \right] |\hat{\Psi}_0|^2.$$

Three first terms of this expansion correspond to the approximation of  $\hat{e}$  which yield a second-order model derived in [4], Sec. 6, Eqs. (6.1). The presented derivation provides a deeper insight into the assumptions (implicitly and tacitly assumed in [4]) which are a basis of this model.

On neglecting all the terms except for the two first ones the first-order model, cf. [4], Sec. 7, occurs.

The first term of the expansion is related to the zero-order, asymptotic or Horvay's theory, see [4], Sec. 8.

Ad c) On substituting  $\hat{\varphi}_0 \sim \frac{1}{\varepsilon} \hat{\Psi}_0$  into (4.5) we obtain

$$\hat{e}(\mathbf{k}) \sim \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m=0}^{\infty} e_{(m)}^{(c)}(\Theta) \cdot \tau^m \right] |\hat{\Psi}_0|^2.$$

By neglecting the terms of higher order than second (i.e. proportional to  $\tau^p$ ,  $p > 2$ ) we arrive at the expansion which corresponds to the micropolar-type approximation. Also herein it can be pointed out that the approach presented has revealed and elucidated assumptions which constitute a basis of the Cosserat-type models of fine hexagonal networks.

**4.3. Stability.** Necessary and sufficient stability conditions of Eqs. (4.1) (in the spirit of Kunin, [7]) will be arrived at. According to this definition stability of equilibrium is satisfied provided an energy expressed in terms of the wave vector components  $k_\alpha$  is positive definite. Stability implies both existence and uniqueness of solutions.

The Eqs. (4.1) are stable in the considered meaning when and only when the matrix

$$\mathbf{\Lambda}(x, y) = \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda)x^2 + (\mu + \alpha)y^2 & (\lambda + \mu - \alpha)xy & B^0(x^2 - y^2) + 2\alpha y \cdot i \\ (\lambda + \mu - \alpha)xy & (2\mu + \lambda)y^2 + (\mu + \alpha)x^2 & -(2B^0xy + 2\alpha xi) \\ B^0(x^2 - y^2) - 2\alpha yi & -(2B^0x \cdot y - 2\alpha \cdot x \cdot i) & C^0(x^2 + y^2) + 4\alpha \end{bmatrix}$$

is positive definite for arbitrary  $x, y \in R$ . It can be shown (cf. [8]) that the above condition can be reduced to the system of inequalities involving effective moduli  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $B^0$  and  $C^0$

$$\begin{aligned} & \mu > 0 \wedge \alpha > 0 \wedge 2\mu + \lambda > 0 \wedge \\ & \left[ \left( \alpha < \mu + \lambda \wedge C^0 > \frac{(B^0)^2}{\mu + \alpha} \right) \vee \left( \alpha > \mu + \lambda \wedge C^0 > \frac{(B^0)^2}{2\mu + \lambda} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

By virtue of the definitions (6.2)<sub>1-3</sub>, [4], of  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $\alpha$  moduli it can be stated that  $\alpha < \mu + \lambda$ . The last condition (4.6)<sub>3</sub> reduces to the form

$$C^0 > C_s^0 = (B^0)^2 / (\mu + \alpha). \quad (4.7)$$

The moduli  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $\alpha$  satisfy the conditions (4.6)<sub>1-3</sub> whereas the inequality (4.7) is not fulfilled for real grids. Therefore Eqs. (4.1) obtained by formal (although justified in the previous section) simplifications of the second-order Eqs. (6.1), [4], are unstable in the meaning of Kunin.

**4.4. Strong ellipticity.** Strong ellipticity of a partial-differential equation system implies (see [9]) the solutions featured by the properties similar to those known from a classical theory of well-established boundary value elliptic problems involving a one function to be sought. If boundary conditions are admissible the strong ellipticity suffices for existence, uniqueness and continuous dependence the solution upon the boundary conditions.

Consider a correctly supported hexagonal grid plate. Solutions are unique and always exist as it clearly follows from the theory of structures. This continuum theories ought to ensure (apart from specific cases which are not dealt with here) the solutions to be unique that holds good provided the moduli  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $B^0$  and  $C^0$  satisfy the strong ellipticity condition.

The set of Eqs. (4.1) is strongly elliptic when and only when the matrix

$$\Xi(x, y) = \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda)x^2 + (\mu + \alpha) \cdot y^2 & (\lambda + \mu - \alpha)xy & B^0(x^2 - y^2) \\ (\lambda + \mu - \alpha) \cdot x \cdot y & (2\mu + \lambda)y^2 + (\mu + \alpha)x^2 & -2B^0xy \\ B^0(x^2 - y^2) & -2B^0xy & C^0(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

is positive definite for arbitrary  $x, y \in R$ . On using Sylvester theorem necessary and sufficient conditions of strong ellipticity, [8]

$$2\mu + \lambda > 0 \wedge \mu + \alpha > 0 \wedge$$

$$\left[ \left( \alpha < \mu + \lambda \wedge C^0 > \frac{(B^0)^2}{\mu + \alpha} \right) \vee \left( \alpha > \mu + \lambda \wedge C^0 > \frac{(B^0)^2}{2\mu + \lambda} \right) \right] \quad (4.8)$$

are arrived at. Therefore stability implies strong ellipticity condition so that ellipticity analysis does not yield additional restrictions imposed on moduli  $B^0$  and  $C^0$ . Thus Eqs. (4.1) are not strongly elliptic.

## 5. Formulation of stable quasicontinuum Cosserat-type $\kappa$ -models

**5.1. Modification of the modulus  $C^0$ .** In the preceding sections instability and non-ellipticity of Eqs. (4.1), which approximate difference equilibrium equations (3.4), [4], on their solutions, have been shown. In order to construct a stable system of equations (which will be called  $\kappa$ -equations) a modification of the last equation (3.4)<sub>3</sub>, [4], expressing a balance of moments of the main node  $i$ , will be carried out. The modified equation reads

$$\mathcal{L}_{31}(\mathbf{u}^1) + \mathcal{L}_{32}(\mathbf{u}^2) + \mathcal{L}_{33}(\boldsymbol{\varphi}) + \mathcal{L}_3(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{M}) = 0, \quad (5.1)$$

where

$$\mathbf{u}^\alpha = (u_K^\alpha, u^\alpha), \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_K, \varphi), \quad \alpha = 1, 2, \quad K = I, \dots, VI, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{F}_\alpha = (F_a^\alpha, F_b^\alpha, F_c^\alpha, F^\alpha), \quad \mathbf{M} = (M_a^*, M_b^*, M_c^*, M)$$

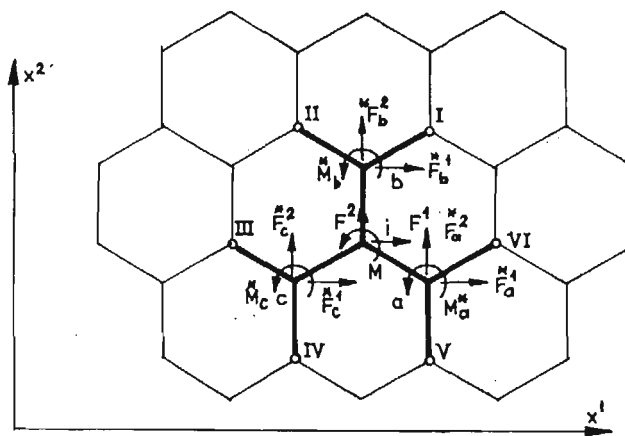


Fig. 2

Quantities  $(u_K^i, \varphi_K)$ ,  $K = \text{I}, \dots, \text{VI}$ , denote displacements of main nodes surrounding the main node  $\mathbf{i}$  to which Eq. (5.1) is referred, cf. Fig. 2,  $(u^i, \varphi)$  mean displacements in the  $\mathbf{i}$  node;  $F_J^*, M_J^*$ ,  $J = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , denote forces and moments subjected to intermediate nodes surrounding  $\mathbf{i}$ ;  $F^i, M^i$  stand for similar quantities referred to the latter node. By means of  $\mathcal{L}_{3J}, \mathcal{L}_3$  difference operators determined by the coefficients  $\Phi_{3\beta}^{(m)}$  and  $S_{3\beta}^{(m)}$  (see Eqs. (3.5) in [4]) are denoted.

The object of the modification is an operator  $\mathcal{L}_{33}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{33}(\varphi) = & \left\{ \left[ \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\eta}{\bar{\eta}(1+\bar{\eta})} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\eta+\bar{\eta}}{\bar{\eta}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{(3\eta-\bar{\eta})^2}{\bar{\eta}(3\eta+\bar{\eta})} \right] \varphi + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{-2\eta}{3\sqrt{3}\bar{\eta}(1+\bar{\eta})} + \frac{2}{9\sqrt{3}} \frac{(3\eta-\bar{\eta})^2}{\bar{\eta}(\eta+3\eta)} \right] \cdot \sum_{J=1}^{\text{VI}} \varphi_J \right\} \frac{EJ}{l^3} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Let the differential expression

$$\hat{C}_{(\kappa)} \nabla^2 \varphi(x^\sigma) - 4\alpha \varphi(x^\sigma), \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \sigma = 1, 2 \quad (5.4)$$

be approximated by a weighted difference expression  $\mathcal{L}_{33}(\varphi)$

$$\mathcal{L}_{33}(\varphi) = \hat{C}_{(\kappa)} \nabla_R^2 \varphi - 4\alpha \tilde{\varphi} \quad (5.5)$$

where

$$\nabla_R^2 \varphi = \frac{1}{3l^2} \left[ -4\varphi + \frac{2}{3} \sum_{J=1}^{\text{VI}} \varphi_J \right], \quad \tilde{\varphi} = \kappa \varphi + \frac{1-\kappa}{6} \sum_{J=1}^{\text{VI}} \varphi_J. \quad (5.6)$$

The parameter  $\kappa$  is taken from the interval  $[0,1]$  hence the weighted coefficients are assumed to be positive. The expression  $\tilde{\varphi}$  approximates the value  $\varphi(\mathbf{i})$  with an error of order  $l^2$ . The expression  $\nabla_R^2 \varphi$  approximates the laplacian  $\nabla^2 \varphi$  with an error of fourth order. Thus the RHS of Eq. (5.5) approximates (5.4) with an error of second order. By equating (5.3) with the RHS of (5.5) two relations involving  $C_{(\kappa)}^0$  and  $\alpha$  are obtained. The first one yield the known definition (6.2)<sub>3</sub>, [4], of the modulus  $\alpha$ . The second one results in ,

$$\begin{aligned} C_{(\kappa)}^0 &= C^0 + 3(1-\kappa)\alpha l^2 \\ C_{(\kappa)}^0 &= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3\bar{\eta}(\bar{\eta}+3\eta)} [9 \cdot \eta^2 + 6 \cdot (2-3\kappa)\eta \cdot \bar{\eta} + \bar{\eta}^2] - \frac{\sqrt{3}\eta}{\bar{\eta}(1+\bar{\eta})} \right\} \frac{EJ}{l}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

If  $\kappa = 1$  we have  $C_{(1)}^0 = C^0$ . Thus a simple generalisation of the definition (4.3)<sub>2</sub> is found. The modulus  $C_{(\kappa)}^0$  (being dependent upon  $\kappa$  parameter) varies considerably when  $\kappa$  changes its value from zero to one. If  $\kappa = 1/3$

$$C_{(1/3)}^0 = \frac{\sqrt{3}(3\eta+\bar{\eta}+1)}{3(\bar{\eta}+1)} \cdot \frac{EJ}{l} = C^\wedge \quad (5.8)$$

and thus the Woźniak-Klemm's modulus  $C^\wedge$ , see (3.3)<sub>2</sub>, occurs. It is worth mentioning that the modulus  $C^\wedge$ , (3.4)<sub>2</sub>, resulting from the second version of constitutive equations, differs inconsiderably from  $C_{(1)}^0 = C^0$  provided the bars are sufficiently slender ( $\bar{\eta} \approx \eta$ )

$$C_{(1)}^0 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{1+\eta} \right) \cdot \frac{EJ}{l} \approx \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{EJ}{l} = C^{\wedge} \quad (5.9)$$

**5.2. Stability condition. Lower and upper bounds of the modulus  $C_{\kappa(\alpha)}^0$ .** Examine for what values of  $\kappa$  the modified system of Eqs. (4.1) (viz. in which a quantity  $C^0$  is substituted by  $C_{(\kappa)}^0$ ) satisfies stability as well as ellipticity conditions. Stability (or strong ellipticity) condition (4.7):

$$C_{(\kappa)}^0 > C_s^0 = \frac{(B^0)^2}{\mu + \alpha}$$

implies the domain of variation of  $\kappa$  parameter to be decreased to the interval  $[0, \kappa_s)$  being dependent upon the slenderness ratio  $\eta$ .

If  $\bar{\eta} \approx \eta$  we can evaluate

$$\kappa_s = \frac{249\eta^2 + 266\eta + 17}{324\eta^2 + 360\eta + 36} \approx 0.7 \quad \text{for} \quad \eta \gg 25.$$

One can require the  $C_{(\kappa)}^0$  modulus to satisfy inequality (3.5)<sub>3</sub> resulting from positive determination of strain energy expressed in terms of strain components  $\gamma_{\alpha\beta}$  and  $\kappa_\alpha$ .

$$C_{(\kappa)}^0 > C_{p.d.}^0 = (B^0)^2/\mu \quad (5.10)$$

that decreases the upper bound of  $\kappa$ :  $\kappa \in [0, \kappa_d)$  where  $\kappa_d < \kappa_s$ . The definition of  $\kappa_d$  expressed in terms of  $\eta$  will not be reported here.

The upper bound of  $C_{(\kappa)}^0$ :  $C_{(\kappa)}^0 < C_{(0)}^0$  does not follow from physical considerations but from the condition of positivity of weighted coefficients in (5.6)<sub>2</sub>. Thus the modulus  $C_{(\kappa)}^0$  can vary in the limits ,

$$C_{p.d.}^0 < C_{(\kappa)}^0 < C_{(0)}^0 \quad \text{or} \quad C_s^0 < C_{(\kappa)}^0 > C_{(0)}^0. \quad (5.11)$$

**5.3. K-representation interpretation of the proposed „stabilisation procedure”. Remarks on the range of applicability of the micropolar-type  $\kappa$ -models.** The proposed modification of  $\mathcal{L}_{33}$  operator can be interpreted as an approximation of the function  $P^{-1} \hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k})$  defined by Eq. (3.5) in [4]. Accuracy analysis of this approximation is outlined below.

The function  $P^{-1} \hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k})$  can be expressed by the formula

$$P^{-1} \hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k}) = \Phi_{33}^{(0)} + 2\Phi_{33}^{(1)} \cdot \sum_{J=I}^{III} \cos(l\sqrt{3}\mathbf{k}\mathbf{t}_J) = 4\alpha - \frac{4}{9}\gamma \sum_{J=I}^{III} [\cos(l\sqrt{3}\mathbf{k}\mathbf{t}_J) - 1] \quad (5.12)$$

where the relations

$$6\Phi_{33}^{(1)} + \Phi_{33}^{(0)} = 4\alpha, \quad -4.5\Phi_{33}^{(1)} = \gamma$$

have been applied. The constants  $\alpha$  and  $\gamma$  have been defined by Eqs. (6.2)<sub>3,6</sub> in [4]. Components of  $\mathbf{t}_J$  vectors are, see Fig. 1 in [4]

$$\mathbf{t}_I = (-0.5, -\sqrt{3}/2), \quad \mathbf{t}_{II} = (0.5, -\sqrt{3}/2), \quad \mathbf{t}_{III} = (1, 0).$$

It can be shown that the function  $\hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k})$  varies almost independently of the wave vector direction provided  $\tau = l \cdot |\mathbf{k}| < 3$ , thus,



$$\sum_{j=1}^{III} \cos(l\sqrt{3} \mathbf{k} t_j) \approx \sum_{j=1}^{III} \cos(l\sqrt{3} (0, |\mathbf{k}|) t_j) = 2 \cdot \cos(1.5\tau) + 1$$

hence

$$P^{-1} \hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k}) = 4\alpha - \frac{8}{9} \gamma [\cos(1.5\tau) - 1], \tag{5.13}$$

The modification proposed in Sec. 5.1 corresponds to the approximation

$$P^{-1} \hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k}) = 4\alpha + \gamma_{(\kappa)} l^2 |\mathbf{k}|^2 = 4\alpha + \gamma_{(\kappa)} \cdot \tau^2 \tag{5.14}$$

where  $\gamma_{(\kappa)} = C_{(\kappa)}^0 / l^2$ ,  $\gamma_{(1)} = \gamma$ ,  $\gamma_{(\kappa)} > \gamma$ , if  $\kappa \in (0, 1)$ .

Fig. 3 displays variations of the function  $f$

$$f(\tau) = \frac{1}{\alpha \cdot P} \hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k}) \approx 4 + \frac{8}{9} \frac{\gamma}{\alpha} \cdot (1 - \cos(1.5\tau)) \tag{5.15}$$

and its approximation (Eq. 5.14)

$$g_{(\kappa)}(\tau) \approx \frac{1}{\alpha P} \hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k}) \approx 4 + \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\gamma_{(\kappa)}}{\gamma} \tau^2 \tag{5.16}$$

The diagrams in Fig. 3, are found for  $\eta \approx \bar{\eta} = 50$  ( $l/h \approx 7$ ) thus  $\gamma/\alpha = 0.6275$ .

As it was possible to suspect it can be stated that  $g_{(1)}$  curve yields the best approximation of  $f$ . For wave vectors satisfying the condition  $\tau < 1.5$  a relative error of approximation of  $f$  by  $g_{(1)}$  is less than 10% and less than 2.5% provided  $\tau < 1$ . If an accuracy analysis is confined to the behaviour of the function  $\hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k})$  one can conclude that unstable Cosserat-type model which employs the set of moduli  $\lambda, \mu, \alpha, B^0, C_{(1)}^0$  approximates „rotational waves” (i.e. two-variable continuous functions interpolating rotations of main nodes) of lengths  $\lambda_d = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} > 2\pi l$  with some per cent errors only. Considerably worse result is yielded from the set of moduli  $(\lambda, \mu, \alpha, B^0, C_{(0)}^0)$ . If  $\tau < 0.25$  a relative error approximation of  $f$  by  $g_{(0)}$  is less than 4.7%. The latter condition means that „rotational waves” of lengths  $\lambda_d > 8\pi l \approx 23.14 l$  are admitted with 5% error whereas the wave patterns of  $\lambda_d > 4 \cdot \pi \cdot l$  are related to 18% of error. Therefore according to the choice of the parameter  $\kappa \in (0, 1)$  the „rotational wave patterns” of lengths  $\lambda_d > \lambda_{(\kappa)}$  where  $\lambda_{(\kappa)} \in (6.28 l, 25.14 l)$  are admissible.

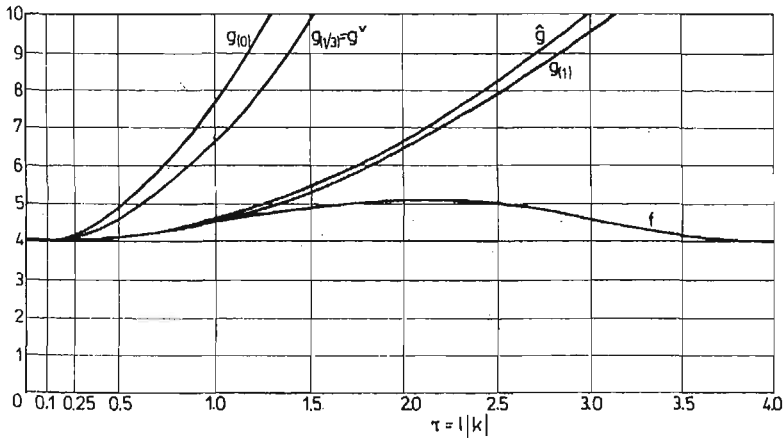


Fig. 3

The above analysis is somewhat incomplete since our attention has been focused on the function  $\hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k})$  only. To make-up the considerations a complete analysis of approximations of all functions  $\hat{\Phi}_{\alpha\beta}$  should be given.

Mention yet that the constant function  $h(\tau) = 4$  supplies a better approximation of the function  $f$  that  $g_{(\kappa)}$  functions provided ,

$$\gamma_{(\kappa)}/\gamma > 2. \quad (5.17)$$

Therefore  $\kappa$  parameter cannot be too small; if not the carried out modification of  $\hat{\Phi}_{33}$  induces the greater error than a simple neglect of the term  $C^0 \nabla^2 \varphi$  in (4.1)<sub>3</sub>. It is easy to show that lower bounds of  $C^0$ :  $C_{p,d}^0$  and  $C_s^0$  do not satisfy (5.17), i.e.  $C_{p,d}^0 > 2C_{(1)}^0 = 2 \cdot \gamma \cdot l^2$ . Nevertheless it is more purposeful to retain the term  $C^0 \nabla^2 \varphi$  in (4.1)<sub>3</sub> than to neglect it (and further to eliminate rotations  $\varphi$  from Eqs. (4.1)<sub>1,2</sub>, see [4], Sec. 6) in order to formulate well-established stable theory. However the stability is achieved at the sacrifice of the approximation condition.

## 6. Comparison of Woźniak's and $\kappa$ -models. Further remarks on accuracy analysis

**6.1. Governing equations.** Governing equations (3.1) and (4.1) have similar forms. As it has been mentioned in Sec. 4 both systems of partial differential equations involve the same moduli  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $\alpha$ . Qualitative differences distinguish between two sets of moduli  $B$  and  $C$ ; to this topic Sec. 6.4 will be devoted. Essential quantitative differences occur in functions approximating effects of external loads. Definitions (4.4) of  $\hat{p}^\alpha$  and  $\hat{Y}^3$  cannot be rearranged to the form (3.2), viz. Eqs. (3.2) do not involve  $\hat{p}^\alpha$  but their derivatives only. The latter fact can be treated as a shortcoming of the theory. The definitions of  $\hat{Y}^3$  and  $'Y^3$  are also different. In the case of slender rods ( $l/h > 7$ ,  $\eta > 49$ , say)  $'Y^3$  depends inconsiderably on  $\hat{Y}^3$  and, if  $\eta \rightarrow \infty$  we have  $'Y^3 \rightarrow Y^3$ ; on the other hand in  $\kappa$ -models there is:  $Y^3 \rightarrow Y^3 - 0.5\hat{Y}^3$  provided  $\eta \rightarrow \infty$ .

**6.2. Existence and uniqueness of solutions.** The existence and uniqueness of solutions are ensured by:

- a) stability (4.6) or strong ellipticity (4.8) conditions — in the case of  $\kappa$ -models;
- b) positive definiteness of strain energy expressed in terms of  $\gamma$  and  $\kappa$  tensors (3.5) — in both approaches due to Woźniak's concept.

It is worth stressing that the latter condition is stronger than the former.

**6.3. Boundary conditions.** In Sec. 4 boundary conditions of  $\kappa$ -versions have not been formulated. However, since the governing equations of these models have similar form to Woźniak's equations it seems reasonable to subject the solutions to similar boundary conditions, cf. Eqs. (7.3) in [3].

**6.4. Analysis of moduli  $B$  and  $C$ .** In the paper [3] (cf. Sec. 3 of the present work) two versions of constitutive equations of Woźniak-type models resulting in different moduli  $B$  ( $B^\vee$ ,  $B^\wedge$ ) and  $C$  ( $C^\vee$ ,  $C^\wedge$ ) have been proposed. Considerations based on the quasicontinuum

approach (Sec. 4) yield the one definition (4.3) of  $B^0$  and  $C^0$ . In Sec. 5 the one-parameter definition (5.7) of the modulus  $C_{(\alpha)}^0$  has been derived.

Variations of moduli  $B(\varrho)$ ,  $\varrho \in [0.8, 1]$  (ratio  $\varrho$  being defined by (2.1)) are plotted in Fig. 5 in the case of  $\nu = 0,3$  (so that  $\bar{\eta} = \eta + 3.12$ ). The following inequalities hold true

$$B^{\wedge}(\varrho) < B^0(\varrho) < B^{\vee}(\varrho), \quad \varrho \in [0.8, 1].$$

Differences between  $B^{\wedge}$  and  $B^0$  are considerable. If one assumes  $B^0$  as exact definition of  $B$  deviations of  $B^{\wedge}$  from  $B^0$  attain to 100% relative error.

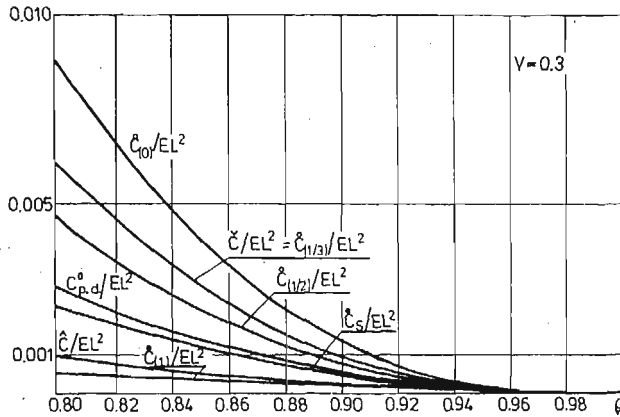


Fig. 4

Consider variations of moduli  $C_{(\alpha)}^0(\varrho)$ ,  $C^{\wedge}(\varrho)$  and  $C^{\vee}(\varrho)$ . The family of curves  $C_{(\alpha)}^0(\varrho)$  covers the area between  $C_{(0)}^0(\varrho)$  and  $C_s^0(\varrho)$  or  $C_{p,d}^0(\varrho)$  curves. In Fig. 4 two curves  $C^{\vee}(\varrho) = C_{(1/3)}^0$  and  $C_{(1/2)}^0$  lying within the mentioned „admissible” area and a curve  $C^{\wedge}(\varrho)$  outside this region are plotted.

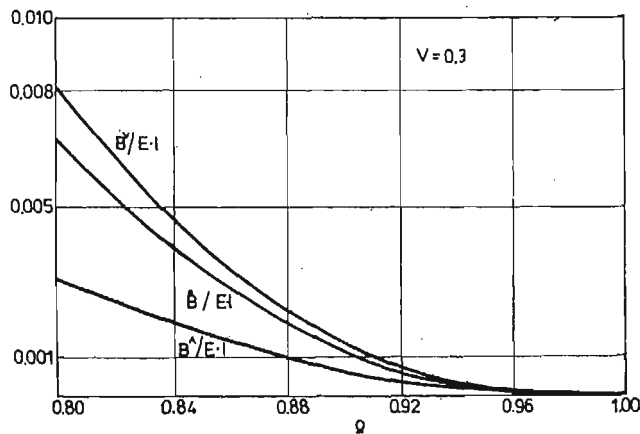


Fig. 5

6.5. A range of applicability of two models due to Woźniak's concept. Analogously to the method applied to  $\varkappa$ -versions, cf. Sec. 5.3, an accuracy analysis of the two models due to Woźniak's concept can be carried out:

i) Woźniak-Klemm's variant.

Examine approximations of functions  $\hat{\Phi}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  (see [4]) corresponding to Eqs. (3.1) of I version in which moduli  $\lambda, \mu, \alpha, B^\vee$  and  $C^\vee$  are employed. An analysis will be restricted to  $\hat{\Phi}_{3k}$  and  $\hat{\Phi}_{k3}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) functions approximations of which are non-trivial i.e. do not result from neglect of higher order terms in the expansions (5.2), [4]. By virtue of an equality  $\hat{\Phi}_{3k} = \hat{\Phi}_{k3}$  it is sufficient to analyse three functions  $\hat{\Phi}_{k3}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , only.

Approximation analysis of  $\hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k})$  outlined in Sec. 5.3 makes it possible to evaluate the errors of approximation of this function induced by Woźniak's models. Namely, bearing in mind that Eq. (5.8) holds good, an analysis of approximation by the I model reduces to the analysis of the case of  $\varkappa = 1/3$ . A curve  $g_{(1/3)}$  is displayed in Fig. 3. On assuming the  $f$  function to be approximated by  $g_{(1/3)}$  with a 12% error a quantity  $\lambda_{(s)}$  (cf. Sec. 5.3) amounts to  $\lambda_{(1/3)} = 4 \cdot \pi \cdot l \approx 7.26b$ . Thus only smooth regular long „rotational waves”  $\varphi$  of  $\lambda_d > \lambda_{(1/3)}$  may be admitted.

Consider a function  $\hat{\Phi}_{13}(\mathbf{k})$  and its approximation related to the I version. First few terms of  $\hat{\Phi}_{13}$  written out explicitly read,

$$P^{-1} \frac{l}{\alpha} \hat{\Phi}_{13}(\mathbf{k}) \approx \frac{\beta}{\alpha} \left[ \tau^2 \cos 2\Theta - \frac{\tau^4}{16} (\cos^4 \Theta - 3 \sin^4 \Theta - 6 \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta) \right] + \quad (6.1)$$

$$- i \frac{\tau}{4} \sin \Theta (8 - 3\tau^2)$$

where (acc. to notations introduced in Sec. 4.2)  $l \cdot \mathbf{k} = \tau (\cos \Theta, \sin \Theta)$  whereas the following expression

$$P^{-1} \frac{l}{\alpha} \hat{\Phi}_{13}(\mathbf{k}) \approx \frac{\beta^\vee}{\alpha} \tau^2 \cos 2\Theta - 2i\tau \sin \Theta, \quad \beta^\vee = B^\vee / l \quad (6.2)$$

corresponds to the first (I) version. The approximation errors being induced by (6.2) depend considerably upon the wave vector direction and attain the greatest values when  $k_2 = 0$ . One can show that if lattice bars are slender ( $\eta > 50$ , say) a relative error of evaluation of absolute values of complex function  $\hat{\Phi}_{13}$  is not less than 15% for arbitrary  $k_1 > 0$  and amounts to 17% if  $\cos \Theta = 0.25$ . Thus no matter how the functions  $u^z$  and  $\varphi$  are regular approximation errors of  $|\hat{\Phi}_{13}|$  are at least about 15%. In the case of  $k_1 = 0$  the errors induced by (6.2) are less than in the previous case and tend to zero provided  $k_2 \rightarrow 0$ . Deformations of  $\mathbf{k} = (0, k_2)$  direction and of wavelengths  $\lambda_d > 8\pi l$  are associated with 4.6% error of evaluating of  $|\hat{\Phi}_{13}|$ , and if  $\lambda_d > 4\pi l$  the errors increase to 15%.

Consider the errors of evaluating of  $|\hat{\Phi}_{23}(\mathbf{k})|$ . The first few terms of  $\hat{\Phi}_{23}$  are

$$P^{-1} \frac{l}{\alpha} \hat{\Phi}_{23}(\mathbf{k}) \approx \frac{\beta}{\alpha} \tau^2 \cos \Theta \sin \Theta \left[ -2 + \frac{\tau^2}{4} (\cos^2 \Theta + 3 \sin^2 \Theta) \right] +$$

$$+ i \left[ 2\tau \cos \Theta - \frac{3}{4} \tau^3 \cos \Theta \right]. \quad (6.3)$$

Equations of the (I) version result from the approximation

$$P^{-1} \frac{l}{\alpha} \hat{\Phi}_{23}(\mathbf{k}) \approx \frac{-2\beta^\vee}{\alpha} \tau^2 \cos \Theta \sin \Theta + 2i\tau \cos \Theta \quad (6.4)$$

If  $k_1 = 0$  the approximation errors vanish. For  $k_2 = 0$  a wavelength  $8 \cdot \pi l$  corresponds to 2.2% error of evaluating of  $|\hat{\Phi}_{23}|$ ; if  $\lambda_d = 4\pi l$  an error amounts to 8.5%. In the case of  $k_1 = k_2$  ( $\Theta = \pi/4$ ) wavelengths  $\lambda_d > 8\pi l$  correspond to 5% error, and if  $\lambda_d > 4\pi l$  — to 15% error.

The above analysis proves that approximation errors of  $|\hat{\Phi}_{k3}|$ ,  $k = 1, 2, 3$ , are of the same order (12%—15%) in the case of wavelengths  $\lambda_d > 4\pi l$ .

ii) Variant II.

In this version approximation of  $|\hat{\Phi}_{33}|$  is considerably better than in the first (I) version. A curve  $\hat{g}$

$$\hat{g}(\tau) = \frac{1}{\alpha P} \hat{\Phi}_{33}(\mathbf{k}) = 4 + \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \tau^2, \quad \hat{\gamma} = \hat{C}/l^2$$

approximates the function  $f$  (cf. Fig. 5.2) with an error of 12% provided  $\lambda_d > \frac{4}{3} \pi l \approx 2.42b$ , and with 3.2% error for  $\lambda_d > 2\pi l$ .

Consider  $\hat{\Phi}_{13}$  function. According to the wave vector direction a relative error of evaluating of  $|\hat{\Phi}_{13}|$  is less or great than that induced by Klemm-Woźniak's equations. In the case of  $k_1 = 0, k_2 > 0$  an error of 9% is associated with deformations of wavelengths  $\lambda_d > 4 \cdot \pi l$  (in I version — 15%). The error decreases to 0% provided  $k_2 \rightarrow 0$ . Assume that  $k_1 > 0, k_2 = 0$ . If  $k_1 \rightarrow 0$  the error tends to 43% and decreases (what is a paradox) to 17% for  $\lambda_d = 2\pi l$ . In the case  $f$  of  $k_1 = k_2$  the errors induced by both (I) and (II) versions are identical.

Consider approximations of  $|\hat{\Phi}_{23}(\mathbf{k})|$ . In both cases:  $k_1 = 0, k_2 > 0$  and  $k_1 > 0, k_2 = 0$  the errors are equal to those induced by the I version: 2.2% for  $\lambda_d > 8\pi l$  and 8.5% if  $\lambda_d > 4\pi l$ . In the case of  $k_1 = k_2$  an approximation error of  $|\hat{\Phi}_{23}|$  is equal to 16.5% provided  $\lambda_d > 8\pi l$  thus it is greater than in the I version where this error is about 5%.

Therefore approximation errors of  $|\hat{\Phi}_{3k}|$  hesitate: from inconsiderable errors induced by the approximation of  $|\hat{\Phi}_{33}|$  to essential errors related to  $\hat{\Phi}_{13}$  in the particular case of  $k_2 = 0$ . Note that in the case of deformations relevant to the vector  $\mathbf{k} = (0, k_2)$ , displacement waves of  $\lambda_d > 4\pi l$  correspond to 10% errors what is rather a small value if one takes into account that a wavelength  $\lambda_d d \min = 4\pi l$  is relatively short with respect to the internode distance. Displacement waves of the direction  $\mathbf{k} = (k_1, 0)$  are related to the errors of about 40%. Thus the II variant is characterized by the lack of symmetry of approximations; directions  $k_1$  and  $k_2$  are not equivalent here.

## 7. Concluding remarks

Three Cosserat-type models for fine hexagonal grids have been analysed:

- i) variant I (due to Woźniak and Klemm) involving moduli  $\lambda, \mu, \alpha, \hat{B}$  and  $\hat{C}$
- ii) variant II in which moduli  $\lambda, \mu, \alpha, \hat{B}$  and  $\hat{C}$  are employed

iii)  $\kappa$ -models with moduli  $\lambda, \mu, \alpha, B^0$  and  $C_{(\kappa)}^0, \kappa \in [0, \kappa_s)$ .

In order to estimate ranges of applicability of the mentioned models approximation errors of  $\hat{\Phi}_{3\beta}$  and  $\hat{\Phi}_{\beta 3}, \beta = 1, 2, 3$ , induced by each approach, have been examined.

Ad i) It has been shown that approximation errors of  $|\hat{\Phi}_{k3}|$  are equal to  $\sim 15\%$  for deformation patterns of wavelengths  $\lambda_d > 4\pi l$ . This value of errors results from the approximation of all of the functions  $\hat{\Phi}_{k3}, k = 1, 2, 3$

Ad ii) The considerable approximation errors pertain to the functions  $\hat{\Phi}_{\alpha 3}, \alpha = 1, 2$ . These errors depend upon the wave vector direction. To wave deformation patterns of  $\mathbf{k} = (k_1, 0)$  a 40% error of evaluation of  $|\hat{\Phi}_{13}|$  is related

Ad iii) The essential errors occur in approximation of the function  $\hat{\Phi}_{33}$  and strongly depend on a choice of a parameter  $\kappa$ . In the limiting case of  $\kappa = 0$  an 18% error is related to rotational wave patterns of  $\lambda_d > 4\pi l$  whereas if  $\kappa = 1/3$  an analogous error is equal to 12%.

The presented error analysis is obviously simplified since no relations between resulting errors of the sought functions  $u^\alpha$  and  $\varphi$  and errors of approximations imposed on functions  $\hat{\Phi}_{IJ}(\mathbf{k})$  have been given. Nevertheless the proposed accuracy analysis allows us to formulate the following remarks.

1. It is impossible to suspect which of the versions considered (i ÷ iii) induces the greatest errors of evaluating displacements  $u^1$  and  $u^2$  whereas it is almost apparent that the (ii) version should yield the best evaluation of nodal rotations  $\varphi$ .

2. The unstable variant  $\kappa = 1$  (iii) can be employed for examining local effects resulting for instance from an influence of concentrated nodal loads.

3. The version (iii) allows us to consider an effect of changes of the parameter  $\kappa$  on solutions of boundary value problems. Computations performed for several values of  $\kappa \in (0, \kappa_s)$  yield results which are divisible into two groups (a) and (b). Results of (a) type are stable with respect to variations of  $\kappa$  whereas the (b)-results do not satisfy the latter condition. Apart from this, a zero-order Horvay's asymptotic model (see [4]) involving displacements  $u^1, u^2$  only, can be employed. Results of (a) type vary inconsiderably thus only these results are reliable. Nevertheless results of (b) type are of great interest, because despite the fact that their values are evaluated incorrectly, valuable qualitative information is obtained. In cases of simple states of stress, to (a) group displacements belong while rotations belong to (b) group.

The remarks formulated above are confirmed in [10] in the specific case of infinitely long grid strip of hexagonal structure subjected to longitudinal forces. Specifically, the remark I occurred to be accurate; although approximations of nodal rotations are charged with errors, the II version seems to induce the smallest ones. Nonetheless it should be pointed out here that the Cosserat-type models provide the description qualitatively correct, particularly the alternate vanishing variation of rotations of main and intermediate nodes lying along the lines perpendicular to the strip's horizontal axis being successfully predicted.

#### References

1. W. NOWACKI, *Theory of unsymmetrical elasticity* (in Polish), PWN, Warsaw 1981.
2. Cz. WOŹNIAK, *Lattice-type shells and plates* (in Polish), PWN, Warsaw 1970.

3. T. LEWIŃSKI, *Two versions of Woźniak's continuum model of hexagonal-type grid plates*, Mech. Teoret. Stos., **23**, 3/4, 1984.
4. T. LEWIŃSKI, *Differential models of hexagonal-type grid plates*, Mech. Teoret. Stos., **22**, 3/4, 1984.
5. W. T. KOITER, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. IUTAM Symp. Theory of thin shells, Delft 1959; North Holland P. Co., Amsterdam 1960, pp. 12 - 33.
6. W. PIETRASZKIEWICZ, *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*, PWN Warsaw-Poznań 1979.
7. I. A. KUNIN, *Theory of elastic media with microstructure* (in Russian) Nauka, Moscow 1975.
8. T. LEWIŃSKI, *Continuum models of lattice-type hexagonal plates*, (in Polish), Doctor's thesis, Technical University of Warsaw 1983.
9. M. T. VIŠIK, *On strongly elliptic systems of differential equations* (in Russian), Mat. Sb., **29**, (71), 3, 1951.
10. T. LEWIŃSKI, *The state of extension of honeycomb grid strip*, Mech. Teoret. Stos., **23**, 2, 1985.

## Резюме

## АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРАВИЛЬНОСТИ МОДЕЛЕЙ ТИПА КОССЕРАТОВ ДЛЯ СЕТЧАТЫХ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

В работе рассматривается проблема физической корректности микрополярной модели стержневых гексагональных пластинок. Проанализированы три варианта таких теорий: две версии модели Возняка и псевдоконтинуальные  $\kappa$ -модели получены путём соответствующих модификаций уравнений Рогоули — Кунина.

Упругие свойства решётки определяются при помощи эффективных модулей  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $B$  и  $C$ . Первые три константы определены однозначно, в то время как „микрополярные” модули  $B$  и  $C$  зависят от выбора варианта метода континуальной описи решётки. Кроме того, анализированные теории разным образом учитывают влияние нагрузок в „посредственных” узлах конструкции.

Каждой версии описи типа Коссератов отвечает некоторая аппроксимация функции  $\hat{\Phi}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  в окрестности  $\mathbf{k} = 0$ . Представлен анализ приближений этой функции с помощью которого формулируются гипотезы касающиеся границ применения дифференциальных моделей.

## Streszczenie

## ANALIZA FIZYCZNEJ POPRAWNOŚCI MODELI TYPU COSSERATÓW PRĘTOWYCH TARCZ HEKSAGONALNYCH

W pracy podjęto problem fizycznej poprawności modelu mikropolarnej prętowej tarczy heksagonalnej. Dokonano analizy trzech wariantów teorii wykorzystującej ten model: dwie wersje teorii Woźniaka oraz pseudokontynualne  $\kappa$  — modele otrzymane drogą modyfikacji równań Roguli i Kunina.

Właściwości siatki są określone za pomocą modułów zastępczych  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $B$  i  $C$ . Pierwsze trzy stałe są jednoznacznie określone, podczas gdy moduły „mikropolarne”  $B$  i  $C$  zależą od wyboru wariantu metody kontynuального opisu tarczy. Ponadto analizowane wersje w różny sposób uwzględniają obciążenia przyłożone do węzłów pośrednich.

Każdej wersji opisu typu Cosseratów odpowiada pewna aproksymacja funkcji  $\hat{\Phi}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  w otoczeniu  $\mathbf{k} = 0$ . Przeprowadzono analizę aproksymacji tych funkcji i na jej podstawie sformułowano hipotezy dotyczące obszarów stosowalności omawianych modeli różniczkowych.

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 września 1983 roku





WPLYW GRUBOŚCI NA NOŚNOŚĆ GRANICZNĄ I STAN ODKSZTAŁCENIA  
PŁASKICH ELEMENTÓW Z KARBAMI PROSTOKĄTNYMI  
O RÓŻNEJ OSTROŚCI

JÓZEF MIASTKOWSKI

*Instytut Podstawowych  
Problemów Techniki PAN  
Warszawa*

1. Wprowadzenie

Znaczna liczba elementów maszyn i konstrukcji inżynierskich ma postać płaskich prętów osłabionych korbami. Karby te są przyczyną koncentracji naprężeń, które mogą znacznie przewyższać średnią wartość naprężeń obliczonych jako iloraz siły przez pole przekroju poprzecznego.

Przy obciążeniach quasi-statycznych określenie rozkładu naprężeń i teoretycznej nośności granicznej płaskich elementów z korbami jest możliwe w dwóch skrajnych przypadkach, a mianowicie, dla płaskiego stanu odkształcenia i dla płaskiego stanu naprężenia.

Rozwiązanie kompletne dla płaskiego stanu odkształcenia jest możliwe, o ile stosunek części poza korbą  $2c$  do przewężenia  $2h$  (rys. 1b) jest na tyle duży, że pole linii poślizgu leży całkowicie wewnątrz konturu pręta [1, 2]. Jeżeli jednak wartość parametru  $\kappa = c/h$  jest mniejsza od wartości wynikającej z przedłużenia siatki linii poślizgu w obszar sztywny (rys. 2), możliwe jest jedynie oszacowanie górnej i dolnej oceny nośności granicznej.

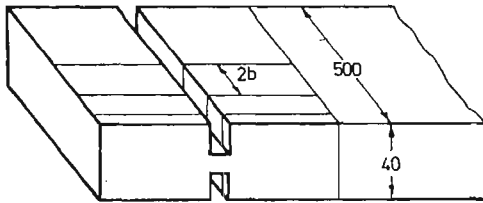
W rzeczywistych konstrukcjach występują często elementy, których grubość (wymiar  $2b$  na rys. 1) nie jest na tyle mała, aby powstał płaski stan naprężenia, ani na tyle duża, aby powstał płaski stan odkształcenia. Powstaje wówczas ważny problem, kiedy teoretyczne schematy płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia mogą stanowić dobre przybliżenie rzeczywistych warunków panujących w elementach o pośredniej grubości. Próba teoretycznej analizy tego zagadnienia, polegająca na doborze odpowiednich pól kinematycznie lub statycznie dopuszczalnych, może dać jedynie przybliżoną ocenę wielkości  $2b$ , niezbędnej dla powstania stanu zbliżonego do płaskiego stanu odkształcenia. Całkowicie pewne informacje mogą być uzyskane jedynie w sposób doświadczalny.

W. S. Żukowski [4, 5, 6] wykazał, że w prętach stalowych z korbami kątowymi stan odkształcenia zbliżony jest do płaskiego dla stosunku  $b/h > 4$ .

W pracy W. Szczepińskiego i J. Miastkowskiego [7] wartość stosunku  $b/h$  jest większa od 2 w prętach stalowych z korbami prostokątnymi o zaokrąglonych narożach.

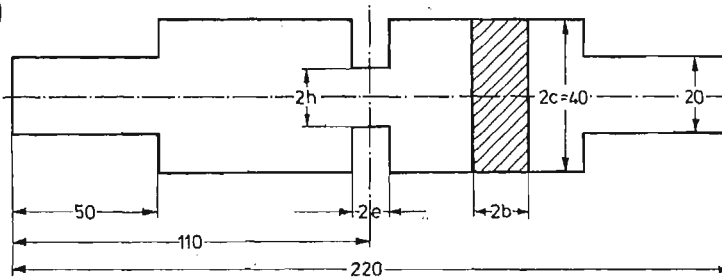
W pracy W. N. Findleya i D. C. Druckera [8] wartość stosunku  $b/h = 7$  dla płaskich prętów aluminiowych oraz  $b/h = 4$  dla próbek stalowych osłabionych odpowiednio nacięciami kątowymi i prostokątnymi z zaokrąglonymi narożami.

a)

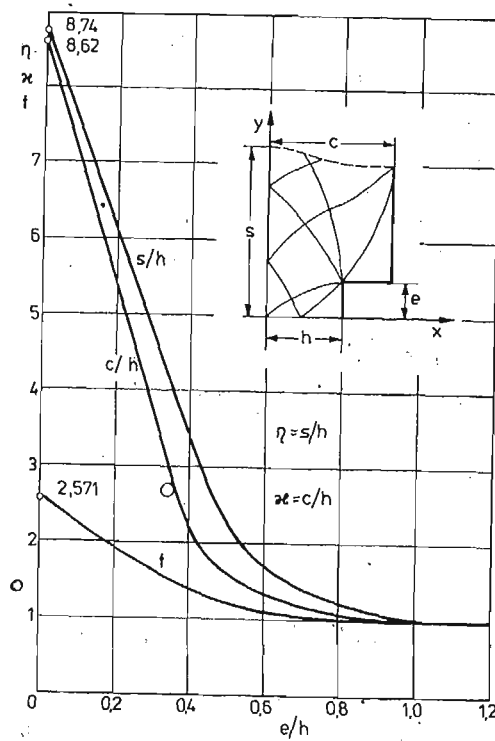


Materiał	PA 2 (Al Mg 2)
Liczba próbek	45
$2h_s$ [mm]	6,8
$\alpha = c/h$	5,9

b)



Rys. 1



Rys. 2

W pracy autora [9] stwierdzono, że w prętach ze stopu aluminium, osłabionych korbami kątowymi, płaski stan odkształcenia praktycznie realizuje się już dla stosunku  $b/h > 3$ .

Z przytoczonego przeglądu prac wynika duża różnorodność ocen wartości granicznej parametru  $\lambda = b/h$ , którą dla celów praktycznych można z dobrym przybliżeniem przyjmować za początek realizowania się w elementach z korbami płaskiego stanu odkształcenia. Podstawową przyczyną tej rozbieżności jest to, że w pracach tych badania przeprowadzane były w sposób wycinkowy i fragmentaryczny. Wyniki te więc nie dają podstaw do uogólnień, zwłaszcza, że badania przeprowadzono na próbkach wykonanych z różnych materiałów i osłabionych korbami o odmiennych konfiguracjach.

Próbie wyjaśnienia tego zagadnienia podjął autor w pracy [10] w oparciu o badania płaskich elementów wykonanych z dwóch różnych stopów aluminium i osłabionych korbami okrągłymi o różnej ostrości. Stwierdzono, że w przypadku karbu okrągłego, graniczna wartość stosunku grubości do przewężenia, powyżej której w elemencie powstają warunki płaskiego stanu odkształcenia, waha się od 2 do 7,5. Wartość ta zależy od rodzaju materiału i od ostrości karbu. W świetle tych wyników łatwiej zrozumieć spotykaną w literaturze różnorodność ocen granicznej wartości parametru  $\lambda = b/h$ .

W prezentowanej pracy zajęto się pokrewnym zagadnieniem, a mianowicie podjęto próbę określenia warunków powstawania płaskiego stanu odkształcenia w elementach osłabionych korbami prostokątnymi o różnej ostrości.

## 2. Rozwiązanie sztywno-plastyczne dla płaskiego stanu odkształcenia

Teoria stanu naprężenia i odkształcenia w płaskim pręcie osłabionym obustronnie symetrycznymi wycięciami i poddanym rozciąganiu jest oparta na założeniu, że panuje w nim płaski stan odkształcenia. Teoretycznie nastąpi to wtedy, gdy stosunek  $b/h$  (rys. 1b) dąży do nieskończoności. Jednakże, jak wykazują wyniki badań doświadczalnych, rozwiązania dla płaskiego stanu odkształcenia mają praktyczne znaczenie już przy grubości  $b$  kilkakrotnie przewyższającej charakterystyczny wymiar  $h$ . Określenie więc na drodze eksperymentalnej, kiedy teoretyczne schematy płaskiego stanu odkształcenia mogą stanowić dobre przybliżenie rzeczywistych warunków, stanowi istotny problem naukowy. Jest to o tyle ważne, że w wielu rzeczywistych konstrukcjach występują elementy o skończonej wartości stosunku  $b/h$ .

Wyznaczenie obciążenia granicznego elementów osłabionych symetrycznymi nacięciami o dowolnym kształcie oparte jest na założeniu, że cały najwęższy przekrój ulegnie uplastycznieniu. Stan naprężenia w sąsiedztwie brzegu jest wówczas zależny jedynie od istniejących na nim warunków. Kontur karbu jest brzegiem swobodnym, a więc warunki brzegowe są na nim jednoznacznie określone. Rozwiązując zagadnienie brzegowe Cauchy'ego można wyznaczyć z obu stron symetryczne siatki linii poślizgu do osi pręta (wstawka na rys. 2). Metoda podana przez R. Hilla [11] pozwala obliczyć w sposób numeryczny rozkład naprężeń i nośność graniczną dla dowolnego kształtu karbu [2]. Analiza teoretyczna wykazuje, że naprężenia normalne na osi próbki z korbami są znacznie większe od naprężeń równych granicy plastyczności materiału  $\sigma_{pl}$ , występujących w skrajnych punktach zewnętrznych [2]. Rozkład naprężeń normalnych zależy od kształtu karbu. W pewnych przypadkach

naprężenia na osi są przeszło dwu i półkrotnie większe od  $\sigma_{p1}$ . Jak wiadomo, jest to związane z istnieniem trójosiowego stanu naprężenia w wewnętrznych punktach najmniejszego przekroju. Taki rozkład naprężeń w chwili połączenia się obszarów plastycznych powoduje, że nośność graniczna  $P_{p1}^*$  prętów z karbem jest większa niż prętów gładkich o takim samym przekroju  $P_{p1}$ . Liczbowe ujęcie tego zjawiska określa współczynnik zwiększenia nośności granicznej  $f$  określany z zależności:

$$f = \frac{P_{p1}^*}{P_{p1}}$$

Dla rozpatrywanych w pracy karbów prostokątnych wykres wartości współczynnika zwiększenia nośności granicznej  $f$  w funkcji ostrości karbu  $\beta = e/h$  przedstawiono na rys. 2.

**2.1. Przedłużenie siatki linii poślizgu w obszar sztywny.** Całkowitą pewność, że maksymalna siła, określona nośnością graniczną najmniejszego przekroju, może być przeniesiona przez pozostałe przekroje elementu bez naruszenia warunku plastyczności, można uzyskać budując przedłużenie siatki linii poślizgu z otoczenia nacięć na przylegające obszary (wstawka na rys. 2) [2]. Pozwala to określić optymalną szerokość  $2c$  (rys. 1) części nieosłabionych. Sposób budowy przedłużenia siatki linii poślizgu w obszar sztywny podał J. F. W. Bishop [1]. Tak zbudowane pole naprężeń w sztywnej części pręta jest statycznie dopuszczalne. Określone na tej podstawie bezpieczne szerokości części chwytowych dla elementów osłabionych karbami o dowolnych kształtach przedstawione zostały w opracowaniu [2]. Dla rozpatrywanego w pracy przypadku elementu z nacięciami prostokątnymi wykres bezpiecznej szerokości części poza karbem  $\kappa = c/h$  w funkcji ostrości karbu  $\beta = e/h$  podano na rys. 2.

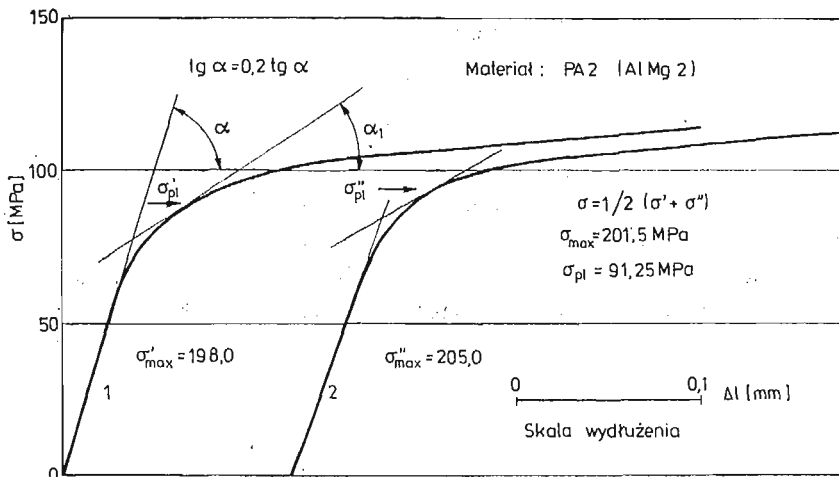
Drugą charakterystyczną wielkością przedłużenia w obszar sztywny siatki linii poślizgu jest wymiar  $s$  (rys. 2). Wymiar ten ma duże znaczenie praktyczne, zwłaszcza przy analizie nośności granicznej elementów z wieloma karbami. Pozwala ocenić minimalną odległość między nimi, przy której ich wzajemny wpływ zanika. Wykres  $\eta = s/h$  w funkcji  $\beta = e/h$ , dla rozpatrywanego przypadku karbów prostokątnych, podano również na rys. 2.

### 3. Doświadczalne badanie stanu odkształcenia w elementach z karbami prostokątnymi

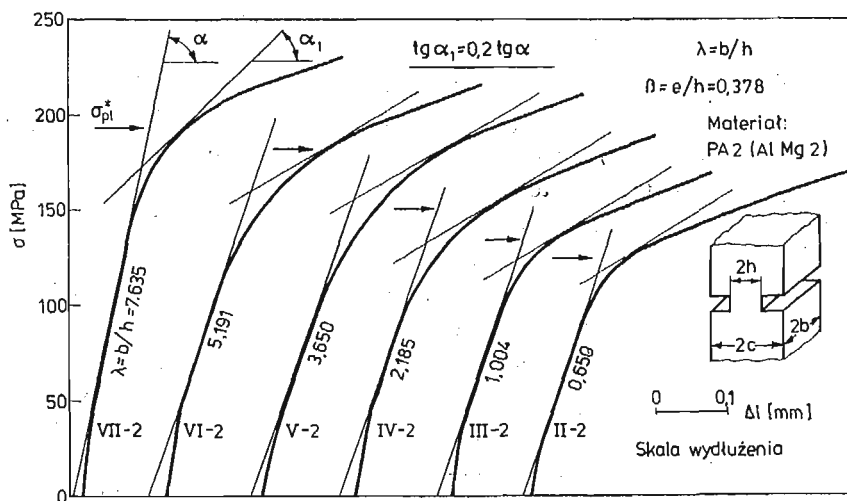
**3.1. Przebieg doświadczenia.** Próbkki do badań wykonano ze stopu aluminium PA2 (AlMg2). Kształt karbu oraz wymiary próbek podane zostały na rys. 1b. Łącznie z próbkami bez karbu (dwie próbki) badaniom poddano 47 próbek. Wszystkie próbki miały stałą wartość wymiarów  $2h$  i  $2c$ , przy czym szerokość części chwytowej  $2c$  była tak określona, aby w żadnym z rozpatrywanych przypadków nie była mniejsza od wynikającej z przedłużenia linii poślizgu w obszar sztywny (rys. 2). Końce próbek, przeznaczone do mocowania w uchwytach zrywarki, mają celowo zmniejszoną szerokość, aby zwiększyć osiowość obciążania i zapobiec ewentualnemu ich zginaniu w procesie rozciągania. Warto podkreślić, że wszystkie próbki, zarówno z karbami, jak i bez karbu, były wycinane z płyty w jednym określonym kierunku (rys. 1a). Próbkki z karbami podzielono na 5 grup, które różniły się między sobą ostrością karbów  $\beta = e/h$ . Wartości pięciu parametrów  $\beta$ , charakterystycznych dla

każdej grupy, podano na rys. 7. W każdej grupie było pięć próbek o różnej grubości (rysunki: 4, 5 i 6).

Odształcenia mierzono z dokładnością do 0,001 mm za pomocą dwóch tensometrów mechanicznych umieszczonych po obu stronach próbki na bazie pomiarowej 60 mm. Wydłużenie określano jako średnią wartość wskazań obu czujników. Mierzenie odkształceń na dwóch przeciwległych powierzchni próbki  $\pm b$  pozwoliło sprowadzić do minimum błędy pomiaru wydłużeń powstające w wyniku ewentualnego zginania próbki. Stwierdziło, że powyższa metoda badań zapewniła otrzymanie dobrych wyników doświadczeń. Wykresy krzywych obciążenie-wydłużenie cechowała duża regularność przebiegu. Typowe krzywe rozciągania próbek gładkich i z karbami pokazano odpowiednio na rys. 3 i 4. Wobec braku na krzywych wyraźnego momentu pełnego uplastycznienia przekroju określano umowną



Rys. 3



Rys. 4

granice plastyczności. Utożsamiano ją z punktem, w którym moduł stycznej osiągał wartość  $0,2 \operatorname{tg} \alpha$ . Przez  $\alpha$  oznaczono kąt, jaki tworzy początkowo prostoliniowa część wykresu z osią wydłużeń (rys. 3 i 4). Określone w powyższy sposób wartości umownych granic plastyczności były podstawą do określenia współczynnika zwiększenia nośności granicznej  $f$  (rys. 7) oraz do określenia grubości granicznej, przy której w elemencie pojawia się stan odkształcenia zbliżony do płaskiego.

**3.2. Wyniki badań.** Materiał PA2, z którego wykonano próbki, jest bardzo podatny do obróbki plastycznej na gorąco i na zimno. Stosowany jest do wyrobu średnio obciążonych elementów konstrukcji lotniczych, okrętowych, budowlanych i pojazdów mechanicznych, a także urządzeń przemysłu chemicznego i spożywczego. Umowna granica plastyczności, określona wyżej opisaną metodą stycznej,  $\sigma_{p1} = 91,25 \text{ MPa}$ . Wytrzymałość na rozciąganie  $\sigma_m = 201,5 \text{ MPa}$ . Określano ją z zależności:

$$\sigma_m = \frac{P_{\max}}{F_0},$$

gdzie  $P_{\max}$  jest największą siłą rozciągającą działającą na próbkę, a  $F_0$  — powierzchnią przekroju poprzecznego próbki. Wartości umownej granicy plastyczności i wytrzymałości na rozciąganie są określone jako średnie z dwóch prób (rys. 3).

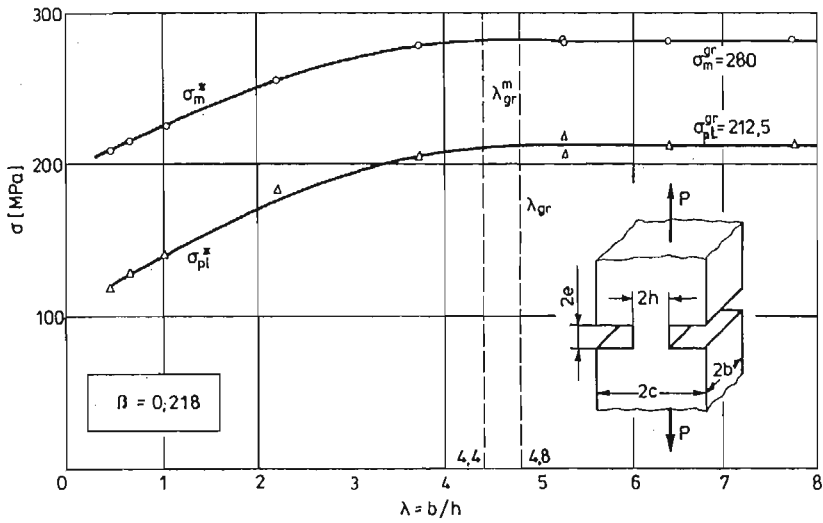
Na podstawie badań elementów z karbami określono wartości granic plastyczności  $\sigma_{p1}^*$ , wytrzymałości  $\sigma_m^*$ . Wytrzymałość na rozciąganie określano, podobnie jak próbek bez karbu, z zależności:

$$\sigma_m^* = \frac{P_{\max}^*}{F_0},$$

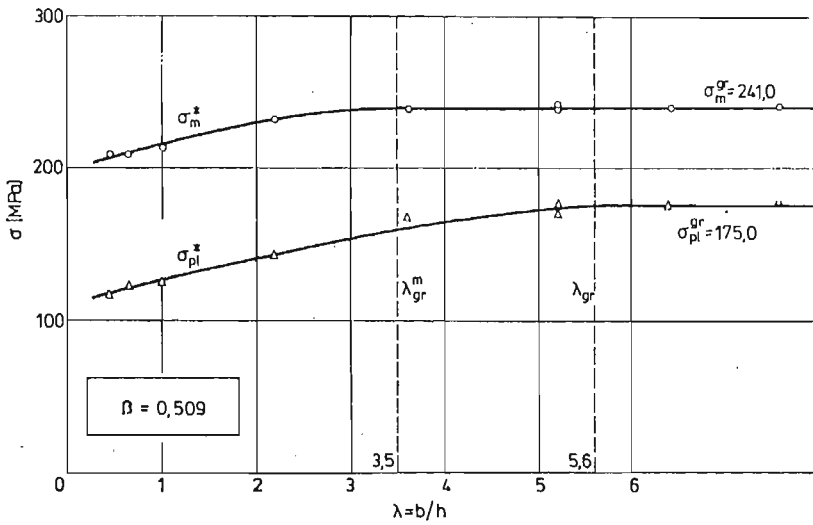
gdzie  $P_{\max}^*$  jest największą siłą rozciągającą próbkę z karbem.

Otrzymane wartości  $\sigma_{p1}^*$  i  $\sigma_m^*$  były podstawą do sporządzenia wykresów tych wielkości w funkcji grubości  $\lambda = b/h$ . Wykresy te wyznaczono dla pięciu grup próbek, a więc dla wszystkich pięciu wartości parametru  $\beta = e/h$  charakteryzujących ostrość karbu. Na rys. 5 i 6 podano przykładowo przebieg tych wykresów dla dwóch wartości  $\beta$ .

Rozpatrzmy teraz przebieg wykresu  $\sigma_{p1}^*$  na rys. 5. Widać wyraźnie, że zależność ta ma początkowo przebieg krzywoliniowy, a następnie przechodzi w prostoliniową fazę ustabilizowaną. Prostoliniowa część wykresu bierze początek w punkcie przecięcia z przerywaną linią o równaniu  $\lambda = 4,8$ . Oznacza to, że od wartości  $\lambda = 4,8$  przyrost grubości próbki nie ma wpływu na wielkość granicy plastyczności. Można więc uważać, że w rozpatrywanym przypadku dla  $\lambda \geq 4,8$  w elemencie realizuje się stan odkształcenia bliski płaskiemu. Tę wartość parametru  $\lambda$ , od której bierze początek prostoliniowa faza wykresu  $\sigma_{p1}^*$ , nazwano wartością graniczną i oznaczono przez  $\lambda_{gr}$ . W podobny sposób określono wartości graniczne parametru  $\lambda_{gr}$  dla pozostałych grup próbek, osłabionych karbami o innej ostrości. Drugi taki przykład podano na rys. 6. W tym przypadku  $\lambda_{gr} = 5,6$ . Przebieg pozostałych wykresów podano w postaci zależności współczynnika zwiększenia nośności granicznej  $f$  w funkcji grubości  $\lambda = b/h$  (rys. 7). Z rys. 7 wynika, że najszybciej stabilizuje się wykres odpowiadający karbom o największej ostrości. W elementach osłabionych nacięciami łagodnymi, stan graniczny pojawia się znacznie później, a więc dla większych grubości.



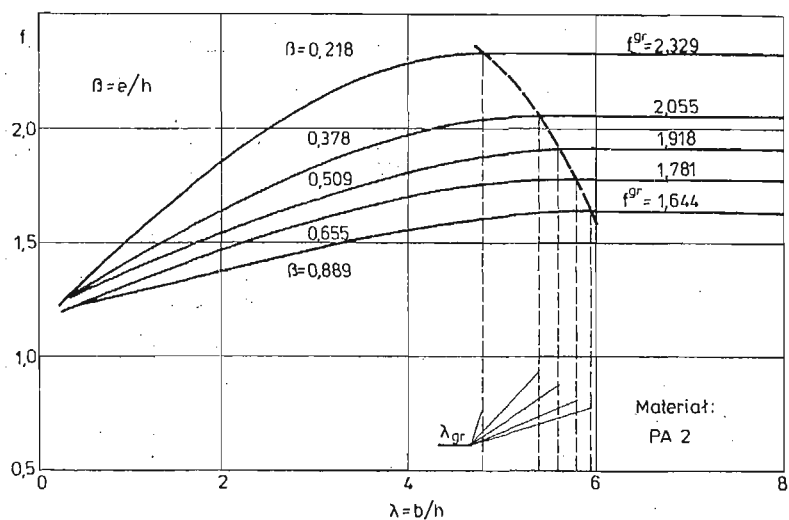
Rys. 5



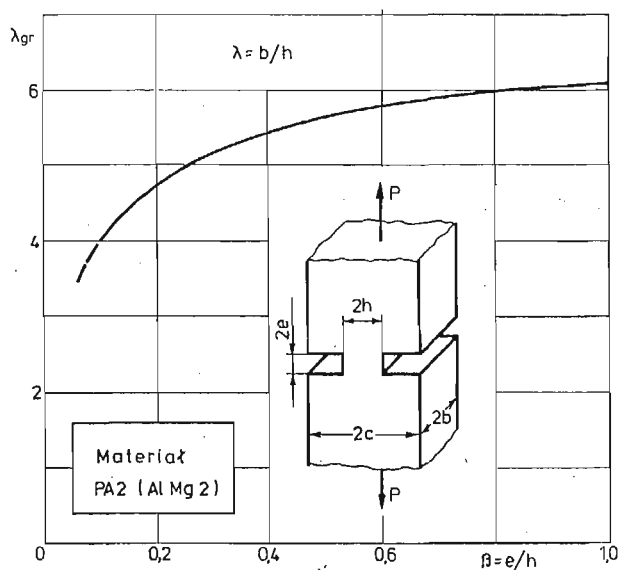
Rys. 6

Obok wykresów odpowiadających granicy plastyczności  $\sigma_{pl}^*$ , dla wszystkich pięciu grup próbek sporządzono także wykresy wytrzymałości na rozciąganie  $\sigma_m^*$  w funkcji grubości  $\lambda = b/h$ . Widać wyraźnie, że wartości graniczne grubości są różne dla  $\sigma_{pl}^*$  i  $\sigma_m^*$ .

Na rysunku 8 podano wykres parametru  $\lambda_{gr}$ , charakteryzującego graniczną grubość elementu osłabionego nacięciami prostokątnymi, w funkcji ostrości karbu  $\beta = e/h$ . Przebieg krzywej wskazuje, że w elementach osłabionych karbami ostrymi graniczne grubości są niższe od tych, które odpowiadają karbom o mniejszej ostrości.



Rys. 7



Rys. 8

#### 4. Wnioski

Na podstawie wyników przeprowadzonych badań można stwierdzić, że ostrość karbu jest istotnym czynnikiem warunkującym pojawienie się w rzeczywistym elemencie stanu granicznego zbliżonego do płaskiego stanu odkształcenia.

W elementach osłabionych nacięciami ostrymi stan graniczny pojawia się szybciej (przy mniejszej grubości), niż to ma miejsce w prętach z karami łagodnymi, o dużych szerokościach  $2e$  (rys. 8).



## Literatura

1. J. F. W. BISHOP: *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 1953, 43 - 53.
2. L. DIETRICH, J. MIĄSTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI: *Nośność graniczna elementów konstrukcji*, PWN Warszawa, 1970.
3. D. C. DRUCKER: *On obtaining plane strain or plane stress conditions in plasticity*, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 485 - 488.
4. В. С. Жуковский: *Распределение деформаций и напряжений в плоских надрезанных стержнях в связи с объемностью напряженного состояния*, Проблемы прочности в машиностроении, Вып. 2, Изд. АН СССР, Москва 1959.
5. В. С. Жуковский: *О коэффициенте усиления и характере распространения пластических зон в надрезанных стержнях*, Изв. АН СССР, ОТН, 5, 1958, 116—119.
6. В. С. Жуковский: *Деформированное состояние и прочность плоских надрезанных стержней произвольной толщины*, Расчеты на прочность, сборник статей, вып. 9, Машгиз., Москва 1963, 231 - 252.
7. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIĄSTKOWSKI: *Doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych płaskich prętów z karbem*, Rozprawy Inżynierskie, 3, 13, 1965, 637 - 652.
8. W. N. FINDLEY, D. C. DRUCKER: *An experimental study of plane plastic straining of notched bars*, J. Appl. Mech., 32, 1965, 493 - 503.
9. J. MIĄSTKOWSKI: *Nośność graniczna rozciąganych prętów z karbem kątowym o dowolnych wymiarach części nad karbami*, Mech. Teoret. Stosow., 1, 7, 1969, 81 - 98.
10. J. MIĄSTKOWSKI: *Analiza nośności granicznej płaskich elementów o dowolnej grubości osłabionych okrągłymi karbami o różnej ostrości*, Rozprawy Inżynierskie, 2, 32, 1984.
11. R. HILL: *The plastic yielding of notched bars under tension*, Quart, J. Mech. Appl. Math., 2, 1949, 40.

## Резюме

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕЙ  
С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ НАДРЕЗАМИ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Приводятся результаты экспериментального исследования влияния толщины образца с прямоугольным надрезом различной геометрии на его несущую способность.

Определены предельные толщины стержней, при которых реализуется плоское деформированное состояние.

## Summary

THE INFLUENCE OF THE THICKNESS ON THE YIELD LOAD OF ELEMENTS WITH  
A RECTANGULAR NOTCH OF VARIOUS GEOMETRY

The influence of the thickness on the yield load of elements with a rectangular notch of various geometry was tested. The limit values of the thickness for which practically the plane state of strain occurs were determined.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 listopada 1983 roku*



## GRANICZNE ZAGADNIENIA ODWROTNE DLA RÓWNANIA FALOWEGO

KRZYSZTOF GRYSA

*Politechnika Poznańska*

### Wstęp

Równanie falowe było wielokrotnie rozważane w literaturze naukowej ze względu na liczne jego zastosowania. Głównie badano je pod kątem znalezienia rozwiązań zagadnień początkowych bądź początkowo-brzegowych.

Tak zwane zagadnienia odwrotne dla równania falowego zaczęto badać stosunkowo niedawno. Przez takie zagadnienia rozumiano przy tym różnego typu problemy, m.in.

- zagadnienia wyznaczania nieznanymi, stałymi lub zmiennymi współczynników w równaniach,
- zagadnienie identyfikacji funkcji opisującej źródła zaburzeń,
- zagadnienia identyfikacji obciążeń brzegu obszaru (tzw. graniczne zagadnienia odwrotne) i inne.

W odróżnieniu od nich zagadnienia początkowo-brzegowe zwykło się nazywać zagadnieniami prostymi lub bezpośrednimi, [10].

Prace poświęcone zagadnieniom odwrotnym dla równania falowego spotyka się w literaturze stosunkowo rzadko. Rozważane są głównie zagadnienia jednowymiarowe, wśród których — wg rozeznania autora — nieliczne są prace dotyczące granicznych zagadnień odwrotnych. Istotą tego typu zagadnień jest poszukiwanie warunków panujących wewnątrz i na brzegu rozważanego obszaru na podstawie tzw. wewnętrznych odpowiedzi przy znanych warunkach początkowych. Wewnętrzne odpowiedzi są przy tym znane na pewnej powierzchni (krzywej, zbiorze punktów izolowanych — zależnie od tego, czy rozpatrujemy zagadnienie trój-, dwu- czy jednowymiarowe) wewnątrz rozważanego obszaru, przy czym mogą to być przemieszczenia, prędkości lub inne wielkości.

W pracy niniejszej rozważane są wielowymiarowe graniczne zagadnienia odwrotne dla równania falowego. Na podstawie teorii potencjałów wprowadzono reprezentacje całkowite rozwiązań pewnych zagadnień prostych, a następnie sformułowano równania całkowite, pozwalające rozwiązywać zagadnienia odwrotne. Są to równania na gęstość potencjału opóźnionego warstwy pojedynczej. Równania te wykorzystano przy rozwiązywaniu trzech jednowymiarowych zagadnień odwrotnych, dla których wyznaczono rozwiązania ścisłe.

### 1. Potencjały opóźnione

Rozważmy równanie falowe

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c^2} f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T, \quad (1)$$

gdzie  $\Omega$  jest pewnym obszarem regularnym o brzegu kawałkami gładkim.  $\Omega \subset E^m$ , gdzie  $E^m$  jest  $m$ -wymiarową przestrzenią euklidesową;  $m = 1, 2, 3$ . Ponadto  $c = \text{const} > 0$  jest prędkością falową,  $u(\mathbf{x}, t)$  jest funkcją klasy  $C^{2,2}$  na  $\Omega \times T$ , gdzie  $T = (0, t_0)$ ,  $t_0 < +\infty$ , oraz  $f(\mathbf{x}, t)$  jest lokalnie całkowna na  $\Omega \times T$ .

Jeśli położymy  $f(\mathbf{x}, t) = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in E^m \times T$ ,  $\mathbf{y} \in E^m$ , wówczas rozwiązanie równania (1) otrzymujemy w postaci (por. [1], § 9.13, [2], § 5.9):

$$V(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) = \begin{cases} \frac{\delta(t-r/c)}{4\pi r c^2} & \text{gd } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^3, \\ \frac{\eta(t-r/c)}{2\pi c^2 \sqrt{t^2 - (r/c)^2}} & \text{gd } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^2, \\ \frac{1}{2c} \eta(t-r/c) & \text{gd } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^1, t \in T, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie  $\delta(\cdot)$  jest dystrybucją delta Diraca,  $r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ , a  $\eta(\cdot)$  jest funkcją Heaviside'a. Funkcję  $V(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)$  nazywamy rozwiązaniem podstawowym równania (1).

Wykorzystując rozwiązanie podstawowe wprowadza się potencjały opóźnione, które tutaj zapiszemy w postaci całek ze splotów rozwiązania podstawowego i odpowiednich gęstości.

Potencjałem opóźnionym warstwy pojedynczej nazywamy całkę

$$WS(\mathbf{x}, t|H) = c^2 \int_{\partial\Omega} V(\mathbf{x}-\xi, t) * H(\xi, t) dS(\xi), \quad (\mathbf{x}, t) \in E^m \times T, \quad (3)$$

gdzie gęstość potencjału,  $H(\xi, \tau)$ , jest funkcją klasy  $C^{0,2}$  na  $\partial\Omega \times T$ ,  $\partial\Omega$  jest brzegiem obszaru  $\Omega \subset E^m$ ,  $*$  zaś oznacza splot rozumiany następująco:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)dt, \quad t \in T. \quad (4)$$

Potencjałem opóźnionym warstwy podwójnej nazywamy całkę

$$WD(\mathbf{x}, t|G) = c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\mathbf{x}-\xi, t)}{\partial n(\xi)} * G(\xi, t) dS(\xi), \quad (\mathbf{x}, t) \in E^m \times T, \quad (5)$$

gdzie gęstość potencjału,  $G(\xi, t)$ , jest funkcją klasy  $C^{1,2}$  na  $\partial\Omega \times T$  oraz  $\partial(\cdot)/\partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla(\cdot)$ ;  $\mathbf{n}(\xi)$  jest normalną zewnętrzną w punkcie  $\xi \in \partial\Omega$ .

Potencjałem opóźnionym objętościowym nazywamy całkę

$$WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0) = \int_{\Omega} \left[ v_0(\mathbf{y}) + u_0(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} + f(\mathbf{y}, t) * \right] V(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) dV(\mathbf{y}), \quad (6)$$

$(\mathbf{x}, t) \in E^m \times T$ , gdzie funkcja  $u_0(\mathbf{x})$  jest klasy  $C^3$  na  $\bar{\Omega}$ , funkcja  $v_0(\mathbf{x})$  jest klasy  $C^2$  na  $\bar{\Omega}$ , funkcja zaś  $f(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$ , jest klasy  $C^{0,2}$  na  $\Omega \times T$ , ograniczona na  $\Omega$ , [7], s. 250

Potencjał  $WD$  oraz pochodna normalna potencjału  $WS$  doznają skoku przy przejściu  $z$  argumentem  $x$  do brzegu  $\partial\Omega$ . Zachodzą związki, [3]:

$$\lim_{x \rightarrow \xi \in \partial\Omega} WD(x, t|G) = \begin{cases} -C(\xi; \Omega)G(\xi, t) + WD(\xi, t|G), & x \in \Omega, \\ [1 - C(\xi; \Omega)]G(\xi, t) + WD(\xi, t|G), & x \in \Omega', \end{cases} \quad (7)$$

$t \in T$ , gdzie  $\Omega' = E^m \setminus \bar{\Omega}$ , oraz

$$\lim_{x \rightarrow \xi \in \partial_s \Omega} \frac{\partial WS(x, t|H)}{\partial n(x)} = \pm \frac{1}{2} H(\xi, t) + c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\xi - \zeta, t)}{\partial n(\zeta)} * H(\zeta, t) dS(\zeta), \quad (8)$$

$t \in T$ , gdzie znak „+” dotyczy przypadku, gdy  $x \in \Omega$ , a znak „-” — gdy  $x \in \Omega'$ . Funkcja  $C(x; \Omega)$  jest uogólnioną funkcją Heaviside'a i ma postać

$$C(x; \Omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \text{Int}\Omega, \text{ Int}\Omega = \Omega \setminus \partial\Omega, \\ 1/2, & \text{gdy } x = \xi \in \partial_s \Omega, \\ \varepsilon \in (0, 1), & \text{gdy } x = \xi \in (\partial\Omega \setminus \partial_s \Omega) \\ 0, & \text{gdy } x \in \Omega', \end{cases} \quad (9)$$

gdzie  $\partial_s \Omega$  oznacza zbiór punktów gładkości powierzchni  $\partial\Omega$ , [4]. Wartość  $\varepsilon$  jest równa stosunkowi kąta bryłowego, jaki tworzy powierzchnia  $\partial\Omega$  w punkcie  $\xi$ , do pełnego kąta bryłowego (por. także [5], s. 52 - 53). Całki po prawej stronie wzorów (7) i (8) rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego, [6], s. 155.

Można udowodnić, że potencjał  $WS$  jest funkcją ciągłą na brzegu  $\partial\Omega$  obszaru  $\Omega$  dla  $t \in T$ .

W dalszych rozważaniach przy obliczaniu pochodnej normalnej nie będziemy rozróżniać zbioru punktów gładkości brzegu,  $\partial_s \Omega$ , od brzegu  $\partial\Omega$ , gdyż krawędzie i wierzchołki będziemy traktować jako domknięcia jednego z płatów ograniczonych daną krawędzią czy krawędziami, zbiegającymi się w danym wierzchołku. W praktyce obliczeniowej decyzyjnie o tym, do którego płata powierzchniowego dołącza się krawędź (wierzchołek) podejmuje się w oparciu o przesłanki natury fizycznej.

## 2. Reprezentacje całkowe rozwiązań zagadnień prostych

W oparciu o twierdzenie o wzajemności, [2], s. 370, można udowodnić następujące twierdzenie o reprezentacji całkowej rozwiązania równania falowego, [2], s. 372 - 373:

### Twierdzenie 1

Niech  $\Omega \subset E^m$  będzie obszarem regularnym o brzegu  $\partial\Omega$ . Niech funkcja  $u(x, t)$  klasy  $C^{2,2}$  na  $\Omega \times T$  spełnia równanie (1). Wówczas dla  $x \in E^m$  ma miejsce następująca reprezentacja całkowa:

$$\hat{C}(x; \Omega)u(x, t) = WS\left(x, t \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right. \right) - WD(x, t|u) + WV(x, t|f, u_0, v_0), \quad (10)$$

gdzie  $u_0(x)$  jest klasy  $C^3$  na  $\bar{\Omega}$ ,  $v_0(x)$  jest klasy  $C^2$  na  $\bar{\Omega}$ ,  $f(\cdot, t)$  jest ograniczona i ciągła na  $\bar{\Omega}$ ,  $f(x, \cdot)$  jest klasy  $C^2$  na  $T$  oraz

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = v_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (11)$$

a  $\hat{C}(\mathbf{x}; \Omega)$  określona jest wzorem

$$\hat{C}(\mathbf{x}; \Omega) = \begin{cases} C(\mathbf{x}; \Omega), & \text{gdy } \mathbf{x} \notin \partial\Omega, \\ 1 - C(\mathbf{x}; \Omega), & \text{gdy } \mathbf{x} = \xi \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (12)$$

Dla  $\mathbf{x} = \xi \in \partial\Omega$  całki powierzchniowe po prawej stronie wzoru (10) rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego.  $\square$

Na podstawie twierdzenia 1 można udowodnić inne twierdzenia o reprezentacjach rozwiązań zagadnień prostych. Mogą to być tak reprezentacje bazujące na potencjale warstwy pojedynczej, jak i na potencjale warstwy podwójnej. Poniżej przedstawiamy twierdzenia dotyczące kilku reprezentacji całkowych rozwiązań zagadnień prostych.

#### T w i e r d z e n i e 2

Niech  $\Omega \subset E^m$  będzie obszarem regularnym o brzegu  $\partial\Omega$ . Niech funkcja  $u(\mathbf{x}, t)$ , klasy  $C^{2,2}$  na  $\Omega \times T$ , spełnia równanie (1) z warunkiem brzegowym

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \rightarrow \xi \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}, t) = u_b(\xi, t), \quad t \in T \quad (13)$$

oraz z warunkami początkowymi (11). Funkcja  $u_b(\xi, t)$  jest przy tym klasy  $C^{1,2}$  na  $\partial\Omega \times T$ . Wówczas funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$  można wyznaczyć ze wzoru

$$u(\mathbf{x}, t) = WS(\mathbf{x}, t|H) + WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0), \quad (\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T, \quad (14)$$

przy czym gęstość potencjału warstwy pojedynczej spełnia następujące równanie całkowe:

$$WS(\xi, t|H) = u_b(\xi, t) - WV(\xi, t|f, u_0, v_0), \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times T. \quad \square \quad (15)$$

#### Dowód:

Rozważmy dwa problemy propagacji fal, w obszarze  $\Omega$  i w jego dopełnieniu  $\Omega' = E^m \setminus \bar{\Omega}$ . Niech prędkości fal w obu obszarach będą równe  $c$ . Załóżmy, że w obszarze  $\Omega$  fala opisana jest funkcją  $u'(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$ , spełniającą warunek brzegowy (13) i warunki początkowe (11). W obszarze  $\Omega'$  fala opisana jest funkcją  $u''(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega' \times T$ , równą funkcji  $u'(\mathbf{x}, t)$  dla  $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times T$ . W obszarze  $\Omega'$  zakładamy zerowe warunki początkowe oraz brak źródeł zaburzeń. Na mocy twierdzenia 1 można napisać następujące reprezentacje całkowe funkcji  $u'$  oraz  $u''$ :

$$\hat{C}(\mathbf{x}; \Omega)u'(\mathbf{x}, t) = WS\left(\mathbf{x}, t \left| \frac{\partial u'}{\partial n'} \right.\right) - WD(\mathbf{x}, t|u') + WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0), \quad (16)$$

$$\hat{C}(\mathbf{x}; \Omega')u''(\mathbf{x}, t) = WS\left(\mathbf{x}, t \left| \frac{\partial u''}{\partial n''} \right.\right) - WD(\mathbf{x}, t|u''), \quad (\mathbf{x}, t) \in E^m \times T,$$

Dodając związki (16) stronami i oznaczając

$$u(\mathbf{x}, t) = \hat{C}(\mathbf{x}; \Omega)u'(\mathbf{x}, t) + \hat{C}(\mathbf{x}; \Omega')u''(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in E^m \times T \quad (17)$$

$$H(\xi, t) = \frac{\partial u'}{\partial n'}(\xi, t) + \frac{\partial u''}{\partial n''}(\xi, t). \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times T, \quad \mathbf{n}'' = -\mathbf{n}', \quad (18)$$

otrzymujemy wzór (14). Tutaj  $\mathbf{n}'$  oznacza normalną zewnętrzną do  $\partial\Omega$ . Gęstość potencjału  $WS$ ,  $H(\xi, t)$ , wyznacza się z równania całkowego (15), które otrzymuje się, wykorzystując (14), (13) i ciągłość potencjału  $WS$  na powierzchni  $\partial\Omega$ .

W związkach (16) potencjały  $WD$  dla  $\mathbf{x} = \xi \in \partial\Omega$  rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego.  $\square$

**T w i e r d z e n i e 3**

Niech  $\Omega \subset E^m$  będzie obszarem regularnym o brzegu  $\partial\Omega$ . Niech funkcja  $u(\mathbf{x}, t)$  klasy  $C^{2,2}$  na  $\Omega \times T$  spełnia równanie (1) z warunkiem brzegowym (13) oraz z warunkami początkowymi (11). Wówczas funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T$  można wyznaczyć ze wzoru

$$u(\mathbf{x}, t) = -WD(\mathbf{x}, t|G) + WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0), \quad (19)$$

przy czym gęstość potencjału warstwy podwójnej spełnia następujące równanie całkowe dla  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ :

$$C(\xi; \Omega)G(\xi, t) - WD(\xi, t|G) = u_b(\xi, t) - WV(\xi, t|f, u_0, v_0), \quad (20)$$

Całkę  $WD$  po lewej stronie równania (20) rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego.

$\square$

**Dowód:**

Rozważmy dwa problemy propagacji fal, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2. Załóżmy przy tym, że funkcja  $u''(\mathbf{x}, t)$  nie spełnia warunku (13), spełnia natomiast warunek następujący:

$$\frac{\partial u'}{\partial \mathbf{n}'}(\xi, t) = -\frac{\partial u''}{\partial \mathbf{n}''}(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times T, \quad (21)$$

gdzie  $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}''$  jest normalną zewnętrzną do  $\partial\Omega$ .

Dla funkcji  $u'(\mathbf{x}, t)$  i  $u''(\mathbf{x}, t)$  prawdziwe są reprezentacje (16). Dodając je stronami, wprowadzając oznaczenie (17) oraz oznaczając

$$G(\xi, t) = u'(\xi, t) - u''(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times T; \quad (22)$$

otrzymujemy wzór (19). Gęstość potencjału  $WD$ ,  $G(\xi, t)$ , wyznacza się z równania całkowego postaci (20), które otrzymuje się, wykorzystując (19), (13) i (7).

**T w i e r d z e n i e 4**

Niech  $\Omega \subset E^m$  będzie obszarem regularnym o brzegu  $\partial\Omega$ . Niech funkcja  $u(\mathbf{x}, t)$  klasy  $C^{2,2}$  na  $\Omega \times T$  spełnia równanie (1) z warunkami początkowymi (11) i z warunkiem brzegowym

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \rightarrow \xi \in \partial\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = u_n(\xi, t), \quad t \in T, \quad (23)$$

gdzie  $u_n(\xi, t)$  jest funkcją klasy  $C^{0,2}$  na  $\partial\Omega \times T$ .

Wówczas funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T$ , można wyznaczyć ze wzoru (14), przy czym gęstość potencjału warstwy pojedynczej spełnia następujące równanie całkowe dla  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H(\xi, t) + c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\xi - \zeta, t)}{\partial n(\zeta)} \times H(\zeta, t) dS(\zeta) = \\ = u_n(\xi, t) - \frac{\partial}{\partial n(\xi)} WV(\xi, t|f, u_0, v_0). \end{aligned} \quad (24)$$

Całkę powierzchniową po lewej stronie równania całkowego (24) rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego.  $\square$

Dowód twierdzenia 4 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 2. Równanie całkowe (24) otrzymuje się wykorzystując (14), (23) i (8).

**Twierdzenie 5**

Niech  $\Omega \subset E^m$  będzie obszarem regularnym o brzegu  $\partial\Omega$ . Niech funkcja  $u(\mathbf{x}, t)$  klasy  $C^{2,2}$  na  $\Omega \times T$  spełnia równanie (1) z warunkami początkowymi (11) i z warunkami brzegowymi postaci (13) na części  $S_1$  brzegu oraz postaci (23) na części  $S_2 = \partial\Omega \setminus \bar{S}_1$ . Wówczas funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$  można wyznaczyć ze wzoru (14), przy czym gęstość potencjału opóźnionego warstwy pojedynczej,  $H(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , spełnia następujące związki całkowe: równanie (15) dla  $(\xi, t) \in S_1 \times \bar{T}$  oraz równanie (24) dla  $(\xi, t) \in S_2 \times T$ .  $\square$

**Dowód:**

Postać (14) reprezentacji całkowej funkcji  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T$ , jest niezależna od rodzaju warunków brzegowych (por. dowód tw. 2). Jak pokazano w dowodach twierdzeń 2 i 4, z postaci (14) funkcji  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T$  i z własności potencjału  $WS$  na brzegu  $\partial\Omega$  obszaru  $\Omega$  wynikają związki (15) i (24). W szczególności gdy dla  $(\xi, t) \in \bar{S}_1 \times T$ , określona jest funkcja  $u_b(\xi, t)$ , a dla  $(\xi, t) \in S_2 \times T$  — funkcja  $u_n(\xi, t)$ ; wówczas gęstość  $H(\xi, t)$  potencjału  $WS$  musi spełniać odpowiednio równanie (15) dla  $(\xi, t) \in \bar{S}_1 \times T$  i równanie (24) dla  $(\xi, t) \in S_2 \times T$ .  $\square$

Można udowodnić, że jeśli istnieje rozwiązanie układu równań całkowych na gęstość  $H(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , potencjału  $WS$ , tzn. układu składającego się z równań (15) dla  $(\xi, t) \in \bar{S}_1 \times T$  i (24) dla  $(\xi, t) \in S_2 \times T$ , to jest ono jednoznaczne.

### 3. Równania całkowe dla zagadnień odwrotnych

Jak już wspomniano we wstępie, zajmiemy się tylko granicznymi zagadnieniami odwrotnymi, tzn. zagadnieniami, w których wyznacza się funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in (\Omega \setminus \partial\Omega^*) \times T$ , na podstawie tzw. wewnętrznej odpowiedzi (w skrócie  $WO$ ), którą jest funkcja opisująca przemieszczenia lub inne wielkości dla  $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega^* \times T$ , gdzie  $\partial\Omega^*$  jest powierzchnią regularną, ograniczającą obszar  $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$ .

Przyjmujemy następującą definicję  $WO$ :

**Definicja**

Niech  $\Omega \subset E^m$  będzie obszarem regularnym o brzegu  $\partial\Omega$ . Niech  $\Omega^* \subset \Omega$  będzie obszarem regularnym o brzegu  $\partial\Omega^*$ . Niech  $T = (0, t_0)$ ,  $t_0 < +\infty$ , będzie przedziałem czasowym.

a) Funkcja  $u^*(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega^* \times T$ , może opisywać  $WO$  przemieszczeniową ( $WOP$ ), jeśli  $u^*(\mathbf{x}, t)$  jest klasy  $C^{2,2}$  na  $\partial\Omega^* \times T$ .

b) Funkcja  $g^*(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega^* \times T$ , może opisywać  $WO$  typu gradientowego lub odkształceniowego ( $WOO$ ), jeśli  $g^*(\mathbf{x}, t)$  jest klasy  $C^{1,2}$  na  $\partial\Omega^* \times T$ . Poszukiwana funkcja  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$ , będąca rozwiązaniem równania (1), musi wówczas spełniać warunek

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = g^*(\mathbf{x}^*, t), \quad t \in T, \quad (25)$$

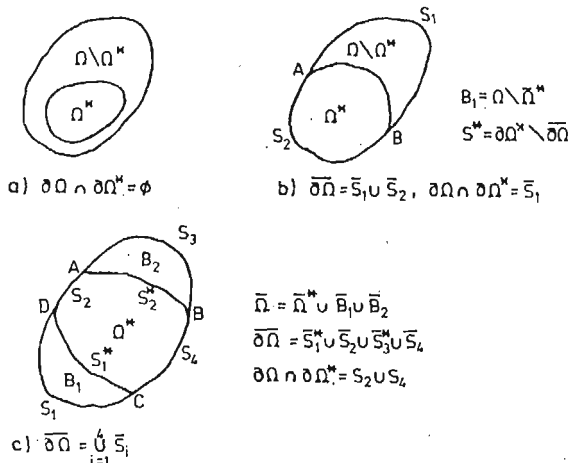
gdzie  $\mathbf{n}(\mathbf{x}^*)$  jest normalną zewnętrzną do  $\partial\Omega^*$ .



c) Funkcja  $v^*(x^*, t)$ ,  $(x^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$ , może opisywać *WO* prędkościową (*WOV*), jeśli  $v^*(x^*, t)$  jest klasy  $C^{2,1}$  na  $\partial\Omega^* \times T$ .  $\square$

W zbiorze  $\partial\Omega^* \times T$  dopuszcza się istnienie hiperpowierzchni na których *WO* doznają skoku.

Obszar  $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$  może być taki, że  $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ . Na rys. 1 przedstawiono trzy najbardziej charakterystyczne przypadki zbiorów  $\Omega^*$  i  $\Omega$ . O funkcjach  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$  i  $f(x, t)$ , występujących w sformułowanych niżej problemach, zakłada się, że są odpowiedniej klasy różniczkowości.



Rys. 1

**Problem 1**

Niech  $\Omega$  i  $\Omega^*$  będą obszarami regularnymi takimi, że  $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$ . Niech dana będzie funkcja  $u^*(x^*, t)$ ,  $(x^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$  oraz funkcje  $u_0(x)$  i  $v_0(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , takie, że  $u^*$  opisuje *WOP*, przy czym

$$\lim_{t \rightarrow 0} u^*(x^*, t) = u_0(x^*),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u^*(x^*, t)}{\partial t} = v_0(x^*), \quad x^* \in \partial\Omega^*.$$
(26)

Niech ponadto dana będzie funkcja  $f(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times T$ , opisująca prawą stronę równania (1), oraz współczynnik  $c = \text{const}$ .

Należy wyznaczyć taką funkcję  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in (\Omega \setminus \partial\Omega^*) \times T$ , dla której

$$\lim_{(\Omega \setminus \partial\Omega^*) \ni x \rightarrow x^* \in \partial\Omega^*} u(x, t) = u^*(x^*, t), \quad t \in T,$$
(27)

oraz spełnione są warunki początkowe (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje  $u_b(\xi, t)$  i  $u_n(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , stanowiące prawe strony związków (13) i (23).  $\square$

Założmy najpierw, że znana jest funkcja  $u_b(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ . Wówczas na mocy twierdzenia 2 można przedstawić funkcję  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in \text{Int } \Omega \times T$ , w postaci (14). W szczególności dla  $x = x^* \in \partial\Omega^*$  mamy

$$u(x^*, t) = WS(x^*, t|H) + WV(x^*, t|f, u_0, v_0), \quad (x^*, t) \in \partial\Omega^* \times T,$$
(28)

przy czym gęstość potencjału opóźnionego warstwy pojedynczej wyznacza się na podstawie równania całkowego (15).

Jednakże funkcja  $u_b(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , jest jedną z funkcji poszukiwanych. Jeśli funkcja  $u(\mathbf{x}, t)$  ma być rozwiązaniem problemu (1), to na mocy związków (27) i (28) otrzymujemy w miejsce równania (15) następujące równanie całkowe na gęstość  $H$  potencjału  $WS$ :

$$WS(\mathbf{x}^*, t|H) = u^*(\mathbf{x}^*, t) - WV(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0),$$

lub wykorzystując (3),

$$c^2 \int_{\partial\Omega} V(\mathbf{x}^* - \xi, t) * H(\xi, t) dS(\xi) = u^*(\mathbf{x}^*, t) - WV(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0), \quad (29)$$

$(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$ . Warto tu zwrócić uwagę na fakt, że wykorzystanie twierdzenia 3 w miejsce twierdzenia 2 nie zmienia typu równania całkowego na gęstość potencjału (por. wzór (19)). Równanie to w dalszym ciągu pozostaje równaniem I rodzaju.

Po wyznaczeniu funkcji  $H(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$  z równania (29), funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T$ , wyznacza się ze związku (14), a  $u_b(\xi, t)$  i  $u_n(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , na podstawie związków (15) i (24).

Szczególnym przypadkiem problemu 1 jest zagadnienie, w którym brzeg  $\partial\Omega^*$  obszaru  $\Omega^* \subset \Omega$  ma część wspólną z brzegiem  $\partial\Omega$  (rys. 1b). Wówczas równanie całkowe (29) ma dla  $(\mathbf{x}^*, t) \in (\partial\Omega \cap \partial\Omega^*) \times T$  tę samą postać co równanie całkowe (15), a funkcja  $u_b(\xi, t)$  jest dla  $(\xi, t) \in (\partial\Omega \cap \partial\Omega^*) \times T$  równa funkcji  $u^*(\mathbf{x}^*, t)$ .

### Problem 2

Niech  $\Omega$  i  $\Omega^*$  będą obszarami regularnymi takimi, że  $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$ . Niech dana będzie funkcja  $g^*(\mathbf{x}^*, t)$ ,  $(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$ , oraz funkcje  $u_0(\mathbf{x})$  i  $v_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ , takie, że  $g^*$  opisuje  $WOO$ , przy czym

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} g^*(\mathbf{x}^*, t) &= \left. \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial g^*(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t} &= \left. \frac{\partial v_0(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}, \quad \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*. \end{aligned} \quad (30)$$

Niech dana będzie funkcja  $f(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$ , opisująca prawą stronę równania (1), oraz współczynnik  $c = \text{const}$ .

Należy wyznaczyć taką funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$ , dla której spełnione są warunki (25) oraz (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje  $u_b(\xi, t)$  i  $u_n(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , stanowiące prawe strony związków (13) i (23).  $\square$

Rozważmy najpierw sytuację, w której  $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega = \emptyset$  (rys. 1a). Załóżmy, że znana jest funkcja  $u_b(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ . Funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T$ , można przedstawić w postaci (14). Różniczkując ten wzór otrzymamy

$$\nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla WS(\mathbf{x}, t|H) + \nabla WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0), \quad (\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T,$$

skąd dla  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*$  można — wobec (25) — otrzymać związek

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{x}^*) \cdot [\nabla u(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} &= g^*(\mathbf{x}^*, t) = \frac{\partial WS}{\partial n(\mathbf{x}^*)}(\mathbf{x}^*, t|H) + \\ &+ \frac{\partial WV}{\partial n(\mathbf{x}^*)}(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0), \quad (\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T, \end{aligned} \quad (31)$$

przy czym gęstość  $H$  potencjału  $WS$  wyznacza się na podstawie równania całkowego (15).

Jednakże funkcja  $u_b(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , jest jedną z funkcji poszukiwanych. Jeśli więc funkcja  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$ , ma być rozwiązaniem problemu 2, to gęstość  $H$  musi być wyznaczona na podstawie równania całkowego (31). Równanie to możemy przepisać w postaci

$$c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\mathbf{x}^* - \xi, t)}{\partial n(\mathbf{x}^*)} \times H(\xi, t) dS(\xi) = g^*(\mathbf{x}^*, t) - \frac{\partial WV}{\partial n(\mathbf{x}^*)}(\mathbf{x}^*, t | f, u_0, v_0), \quad (32)$$

$(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$ . Rozważmy teraz sytuację, gdy  $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega = S_2 \neq \emptyset$  (rys. 1b). Wówczas dla  $\mathbf{x}^* = \xi \in S_2$  pochodna normalna potencjału opóźnionego warstwy pojedynczej doznaje skoku (por. (8)). Zatem dla  $\mathbf{x}^* = \xi \in S_2$  w miejsce równania (32) mamy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} H(\xi, t) + c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\xi - \zeta, t)}{\partial n(\xi)} * H(\zeta, t) dS(\zeta) = \\ & = g^*(\xi, t) - \frac{\partial WV}{\partial n(\xi)}(\xi, t | f, u_0, v_0), \quad (\xi, t) \in S_2 \times T, \end{aligned} \quad (33)$$

a dla  $(\mathbf{x}^*, t) \in (\partial\Omega^* \setminus S_2) \times T$  — równanie (32). Tak więc w przypadku, gdy  $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , układ równań całkowych na gęstość  $H$  potencjału  $WS$  składa się z dwóch równań, z których jedno jest I rodzaju, a drugie — II rodzaju.

Po wyznaczeniu funkcji  $H(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T$ , wyznacza się ze związku (14), zaś  $u_b(\xi, t)$ ,  $u_n(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , na podstawie związków (15) i (24). Jeśli  $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega = S_2 \neq \emptyset$ , wówczas dla  $\mathbf{x}^* = \xi \in S_2$   $u_n(\xi, t) = g^*(\xi, t)$  i po znalezieniu gęstości  $H$  funkcję  $u_n(\xi, t)$  wyznacza się tylko dla  $(\xi, t) \in (\partial\Omega \setminus S_2) \times T$ .

### Problem 3

Niech  $\Omega$  i  $\Omega^*$  będą obszarami regularnymi, takimi, że  $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$ . Niech dana będzie funkcja  $v^*(\mathbf{x}^*, t)$ ,  $(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$ , oraz funkcja  $u_0(\mathbf{x})$  i  $v_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ , takie, że  $v^*$  opisuje  $WOV$ , przy czym

$$\lim_{t \rightarrow 0} v^*(\mathbf{x}^*, t) = v_0(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*. \quad (34)$$

Niech dana będzie funkcja  $f(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$ , opisująca prawą stronę równania (1), oraz współczynnik  $c = \text{const}$ .

Należy wyznaczyć taką funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$ , dla której spełnione będą warunki (11) oraz warunków

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = v^*(\mathbf{x}^*, t), \quad t \in T. \quad (35)$$

Ponadto należy wyznaczyć funkcje  $u_b(\xi, t)$  i  $u_n(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , stanowiące prawe strony związków (13) i (23). □

Załóżmy, że znana jest funkcja  $u_b(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ . Funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T$ , można przedstawić w postaci (14). Różniczkując ten wzór po czasie otrzymujemy

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial WS}{\partial t}(\mathbf{x}, t | H) + \frac{\partial WV}{\partial t}(\mathbf{x}, t | f, u_0, v_0), \quad (\mathbf{x}, t) \in \text{Int } \Omega \times T,$$

skąd dla  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*$  można — wobec (35) — otrzymać związek

$$v^*(\mathbf{x}^*, t) = \frac{\partial WS}{\partial t}(\mathbf{x}^*, t|H) + \frac{\partial WV}{\partial t}(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0), \quad (\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T, \quad (36)$$

przy czym gęstość  $H$  potencjału  $WS$  wyznacza się na podstawie równania całkowego (15).

Jednakże funkcja  $u_b(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , jest jedną z funkcji poszukiwanych. Jeśli więc funkcja  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times T$ , ma być rozwiązaniem problemu 3, to gęstość  $H$  musi być wyznaczona na podstawie równania (36), które możemy przepisać w postaci

$$c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\mathbf{x}^* - \xi, t)}{\partial t} * H(\xi, t) dS(\xi) = v^*(\mathbf{x}^*, t) - \frac{\partial WV}{\partial t}(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0), \quad (\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T. \quad (37)$$

Przechodząc w (37) z chwilą  $t$  do zera otrzymujemy związek (34). Przejście to wynika z własności potencjału objętościowego  $WV$  (por. [7], s. 247 i 249 - 251; w monografii tej wprowadzono inne niż w przedstawionej pracy oznaczenia). Całkując natomiast (37) od 0 do  $t$ , wykorzystując (14) i przechodząc z  $t$  do zera otrzymujemy (11)<sub>1</sub>.

Po wyznaczeniu funkcji  $H(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , funkcję  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int}\Omega \times T$ , wyznacza się ze związku (14), a  $u_b(\xi, t)$  i  $u_n(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , na podstawie związków (15) i (24).

W sposób podobny jak wyżej można także sformułować problemy odwrotne, w których na różnych częściach powierzchni  $\partial\Omega^*$  dane są różnego typu  $WO$ . Tego rodzaju problemy prowadzą do układów równań całkowych na płatach otwartych, przy czym istnienie i jednoznaczność rozwiązań tych równań jest sprawą otwartą. Dla przykładu jeśli  $\partial\Omega^* = \overline{S_1^*} \cup \overline{S_2^*}$  i  $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega = \emptyset$ , przy czym na  $S_1^*$  dana jest  $WOP$ , a na  $S_2^*$  —  $WOO$ , to w celu wyznaczenia gęstości  $H$  potencjału  $WS$  trzeba rozwiązać układ równań całkowych, na które składają się równanie (29) dla  $(\mathbf{x}^*, t) \in S_1^* \times T$  oraz równanie (32) dla  $(\mathbf{x}^*, t) \in S_2^* \times T$ .

W następnej części pracy rozważymy pewne jednowymiarowe przypadki zagadnień odwrotnych. Ponieważ wówczas  $\mathbf{x} \in E^1$ , więc w miejsce  $\mathbf{x}$  będziemy pisać  $x$ . Również oś  $Ox_1$ , orientującą przestrzeń  $E^1$ , oznaczymy  $Ox$ .

#### 4. Zagadnienia jednowymiarowe

W przypadku zagadnień jednowymiarowych, gdy  $x \in E^1$ , obszary  $\Omega$  i  $\Omega^*$  są odcinkami lub półprostymi, a ich brzegi  $\partial\Omega$  i  $\partial\Omega^*$  — zbiorami punktów izolowanych. Potencjały  $WS$  i  $WV$  oraz całki powierzchniowe, występujące w równaniach całkowych (33), (32) i innych przyjmują szczególnie prostą postać. Jeśli  $\Omega = \{x \in E^1 : 0 < x < l\} \equiv (0, l) \subset E^1$ , wówczas  $\partial\Omega = \{x : x = 0 \vee x = l\} \equiv \{0, l\}$ , a wspomniane wyżej potencjały i całki przyjmują postacie następujące:

$$WS(x, t|H) = \frac{c}{2} \left[ \eta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) * H(0, t) + \eta \left( t - \frac{|x-l|}{c} \right) * H(l, t) \right], \quad (x, t) \in E^1 \times T, \quad (38)$$

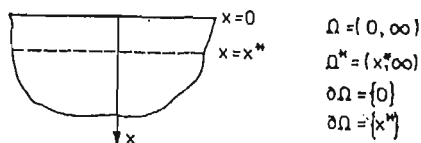
$$WV(x, t|f, u_0, v_0) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left[ v_0(y) + u_0(y) \frac{\partial}{\partial t} + f(y, t) \right] \eta \left( t - \frac{|x-y|}{c} \right) dy, \quad (x, t) \in E^1 \times T, \quad (39)$$

$$c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(x^* - \xi, t)}{\partial n(x^*)} \times H(\xi, t) dS(\xi) = \frac{1}{2} n(x^*) \left[ \delta \left( t - \frac{l-x^*}{c} \right) \times H(l, t) - \delta \left( t - \frac{x^*}{c} \right) \times H(0, t) \right], \quad (x^*, t) \in \partial\Omega^* \times T. \quad (40)$$

Tutaj  $n(x^*)$  jest równe 1 lub  $-1$ . Gdy  $\Omega = \{x \in E^1 : x > 0\} = (0, \infty) \subset E^1$ ,  $\partial\Omega = \{0\}$ , we wzorach (38) i (40) trzeba pominąć sploty zawierające  $H(l, t)$ , we wzorze zaś (39) — górną granicę całkowania zamienić na  $+\infty$ .

#### Problem 4

Niech  $\Omega = \{x \in E^1 : x > 0\} = (0, \infty)$  oraz niech  $\Omega^* = (x^*, \infty)$   $x^* > 0$  (rys. 2). Rozważmy dla takich obszarów problem 1, w którym dana jest funkcja  $u^*(x^*, t)$ ,  $t \in T$ , opisująca WOP, funkcje  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , spełniające warunki (26), oraz funkcja  $f(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times T$ ; współczynnik  $c = \text{const}$ . Należy wyznaczyć funkcję  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in (\Omega \setminus \{x^*\}) \times T$ , spełniającą warunek (27) oraz warunki początkowe (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje  $u_b(0, t)$  oraz  $u_n(0, t)$ ,  $t \in T$ , stanowiące w rozważanym przypadku prawe strony związków (13) i (23).  $\square$



Rys. 2

Wobec (38) równanie całkowe (29) przyjmuje tutaj postać następującą:

$$\frac{c}{2} \eta \left( t - \frac{x^*}{c} \right) \times H(0, t) = u^*(x^*, t) - WV(x^*, t|f, u_0, v_0), \quad t \in T. \quad (41)$$

Równanie to łatwo rozwiązuje się w transformatach Laplace'a. Otrzymujemy

$$\bar{H}(0, s) = \frac{2s}{c} \exp \left( \frac{x^*s}{c} \right) [\bar{u}^*(x^*, s) - \bar{WV}(x^*, s|f, u_0, v_0)], \quad (42)$$

gdzie nadkreślenie oznacza przetransformowaną postać funkcji;  $s$  — parametr transformacji.

Związek (14) ma w rozważanym przypadku postać następującą:

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \eta \left( t - \frac{x}{c} \right) \times H(0, t) + WV(x, t|f, u_0, v_0), \quad (x, t) \in \Omega \times T, \quad (43)$$

Wstawiając prawą stronę związku (42) do przetransformowanego wzoru (43) i odwracając transformaty znajdujemy

$$u(x, t) = u^* \left( x^*, t - \frac{x - x^*}{c} \right)_+ - WV \left( x^*, t - \frac{x - x^*}{c} \middle| f, u_0, v_0 \right)_+ + \\ + WV(x, t | f, u_0, v_0), \quad (x, t) \in \Omega \times T, \quad (44)$$

gdzie

$$U(x, t)_+ = \begin{cases} U(x, t) & \text{dla } t \geq 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

Funkcję  $WV(x, t | f, u_0, v_0)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times T$ , można przekształcić do postaci

$$WV(x, t | f, u_0, v_0) = \frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy + \\ + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau, \quad (x, t) \in \Omega \times T \quad (45)$$

znanej jako rozwiązanie d'Alemberta drgań struny, [8], s. 583. O funkcjach  $u_0$ ,  $v_0$  i  $f$  zakłada się przy tym, że są nieparzystymi funkcjami argumentu  $x \in E^1$ . Jak łatwo sprawdzić, funkcja  $u(x, t)$ , określona wzorem (44), spełnia warunki (11) i (27). Wynika to stąd, że dla  $t = 0$  i  $x - x^* < 0$  ma miejsce równość

$$u^* \left( x^*, \frac{x^* - x}{c} \right)_+ = WV \left( x^*, \frac{x^* - x}{c} \middle| f, u_0, v_0 \right)_+,$$

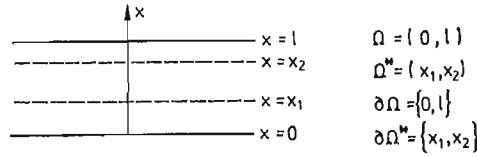
związana z faktem, że dopóki zaburzenie nie dojdzie od brzegu do punktu  $x^*$ , dopóty wartość funkcji  $u(x^*, t)$  w tym punkcie zależy tylko od warunków początkowych i funkcji opisującej wewnętrzne źródła zaburzeń (por. także [10]).

Wykorzystując związki (13) i (23) oraz fakt, że  $WV(0, t | f, u_0, v_0) = 0$ , znajdujemy

$$u_b(0, t) = u^* \left( x^*, t + \frac{x^*}{c} \right) - WV \left( x^*, t + \frac{x^*}{c} \middle| f, u_0, v_0 \right), \quad t \in T, \\ u_n(0, t) = \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial u^*(x^*, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial WV(x^*, \tau | f, u_0, v_0)}{\partial \tau} \right]_{\tau=t+\frac{x^*}{c}} - \\ - \frac{\partial WV(x, t | f, u_0, v_0)}{\partial x} \bigg|_{x=0}, \quad t \in T. \quad (46)$$

### Problem 5

Niech  $\Omega = (0, l)$  oraz niech  $\Omega^* = \{x \in E^1 : 0 < x_1 < x < x_2 < l\}$ , (rys. 3). Rozważmy dla takich obszarów problem 1, tzn. problem, w którym dana jest funkcja  $u^*(x^*, t)$ ,  $(x^*, t) \in \hat{c}\Omega^* \times T$ , opisująca  $WOP$ , funkcje  $u_0(x)$  i  $v_0(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , spełniające warunki (26) oraz funkcja  $f(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times T$  i współczynnik  $c = \text{const}$ . Wyznaczyć należy funkcję  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in (\Omega \setminus \partial\Omega^*) \times T$ , spełniającą warunek (27), oraz warunki początkowe (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje  $u_b(\xi, t)$  oraz  $u_n(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , stanowiące w rozważanym przypadku prawe strony związków (13) i (23).  $\square$



Rys. 3

Wobec (38) równanie całkowe (29) przyjmie tutaj postać układu równań na funkcje  $H(0, t)$  i  $H(l, t)$ ,  $t \in T$ :

$$\begin{aligned} \eta \left( t - \frac{x_i}{c} \right) \times H(0, t) + \eta \left( t - \frac{l - x_i}{c} \right) \times H(l, t) = \\ = \frac{2}{c} [u^*(x_i, t) - WV(x_i, t | f, u_0, v_0)], \end{aligned} \quad (47)$$

$i = 1, 2$ . Układ równań całkowych (47) bez trudu rozwiązuje się w transformatach Laplace'a. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{H}(0, s) = \frac{s}{c \sinh\left(\frac{L}{c} s\right)} \left\{ [\bar{u}^*(x_1, s) - \bar{WV}(x_1, s | f, u_0, v_0)] \exp\left(\frac{x_2}{c} s\right) - \right. \\ \left. - [\bar{u}^*(x_2, s) - \bar{WV}(x_2, s | f, u_0, v_0)] \exp\left(\frac{x_1}{c} s\right) \right\}, \end{aligned} \quad (48)_1$$

$$\begin{aligned} \bar{H}(l, s) = - \frac{s}{c \sinh\left(\frac{L}{c} s\right)} \left\{ [\bar{u}^*(x_1, s) - \bar{WV}(x_1, s | f, u_0, v_0)] \exp\left(\frac{l - x_2}{c} s\right) - \right. \\ \left. - [\bar{u}^*(x_2, s) - \bar{WV}(x_2, s | f, u_0, v_0)] \exp\left(\frac{l - x_1}{c} s\right) \right\}, \end{aligned} \quad (48)_2$$

gdzie  $L = x_2 - x_1$ . Związek (14) ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{c}{2} \left[ \eta \left( t - \frac{x}{c} \right) \times H(0, t) + \eta \left( t - \frac{l - x}{c} \right) \times H(l, t) \right] + \\ + WV(x, t | f, u_0, v_0), \quad (x, t) \in \Omega \times T. \end{aligned} \quad (49)$$

Wstawiając prawe strony wzorów (48) do przetransformowanego wzoru (49) i wykorzystując związki z tablicy B.2 z monografii [9] do odwrócenia transformat otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ u^* \left( x_1, t + \frac{x_1 - x - 2Ln}{c} \right)_+ + u^* \left( x_2, t - \frac{x_2 - x + 2Ln}{c} \right)_+ - \right. \\ \left. - WV \left( x_1, t + \frac{x_1 - x - 2Ln}{c} \middle| f, u_0, v_0 \right)_+ - WV \left( x_2, t - \frac{x_2 - x + 2Ln}{c} \middle| f, u_0, v_0 \right)_+ \right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ u^* \left( x_1, t - \frac{x_1 - x + 2Ln}{c} \right)_+ + u^* \left( x_2, t + \frac{x_2 - x + 2Ln}{c} \right)_+ - \right. \end{aligned} \quad (50)$$

$$-WV\left(x_1, t - \frac{x_1 - x + 2Ln}{c} \middle| f, u_0, v_0 \right)_+ - WV\left(x_2, t + \frac{x_2 - x - 2Ln}{c} \middle| f, u_0, v_0 \right)_+ \Big] + \\ + WV(x, t | f, u_0, v_0), \quad (x, t) \in \Omega \times T.$$

Funkcję  $WV$  można przekształcić do postaci (45) przy założeniu, że  $u_0(x) = -u_0(-x)$ ,  $u_0(x+2l) = u_0(x)$ ,  $v_0(x) = -v_0(-x)$ ,  $v_0(x+2l) = v_0(x)$ ,  $f(x, t) = -f(-x, t)$ ,  $f(x+2l, t) = f(x, t)$ ;  $(x, t) \in E^1 \times T$ .

Kładąc we wzorze (50)  $x = 0$  lub  $x = l$  otrzymujemy związki (4.7) z pracy [10], opisujące funkcję  $u_b(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ . Cytowane wzory otrzymano w pracy [10] na drodze odmiennej od przedstawionej tutaj. Wyznaczenie wzorów opisujących funkcję  $u_n(\xi, t)$ ,  $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ , nie przedstawia większych trudności, dlatego ich tutaj nie będziemy przytaczać.

### Problem 6

Niech  $\Omega = (0, \infty)$  oraz niech  $\Omega^* = (x^*, \infty)$ ,  $x^* > 0$  (rys. 2). Rozważmy dla takich obszarów problem 3, tzn. problem, w którym dana jest funkcja  $v^*(x^*, t)$ ,  $t \in T$ , opisująca  $WOV$ ,  $u_0(x)$ ;  $v_0(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , spełniająca warunek (34), oraz funkcja  $f(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times T$  i współczynnik  $c = \text{const}$ . Wyznaczyć należy funkcję  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times T$ , spełniającą warunek (35) oraz warunki początkowe (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje  $u_b(0, t)$  oraz  $u_n(0, t)$ ,  $t \in T$ , stanowiące w rozważanym przypadku prawe strony związków (13) i (23).  $\square$

Wobec (38) równanie całkowe (37) przyjmie postać następującą:

$$\frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta \left( t - \frac{x^*}{c} \right) * H(0, t) \right] = v^*(x^*, t) - \frac{\partial WV}{\partial t} (x^*, t | f, u_0, v_0), \quad t \in T, \quad (51)$$

Równanie to rozwiązujemy w transformatach Laplace'a. Otrzymujemy

$$\bar{H}(0, s) = \frac{2s}{c} \exp\left(\frac{x^*s}{c}\right) \left[ \frac{1}{s} \bar{v}^*(x^*, s) - \bar{WV}(x^*, s | f, u_0, v_0) \right]. \quad (52)$$

Z porównania związków (52) i (42) widać, że mają one analogiczną budowę. Postępując dalej tak jak w problemie 4 otrzymujemy ostatecznie

$$u(x, t) = \int_0^{t - \frac{x-x^*}{c}} v^*(x^*, \tau) d\tau \eta \left( t - \frac{x-x^*}{c} \right) - WV \left( x^*, t - \frac{x-x^*}{c} \middle| f, u_0, v_0 \right)_+ + \\ + WV(x, t | f, u_0, v_0), \quad (x, t) \in \Omega \times T, \quad (53)$$

Związki opisujące funkcje  $u_b(0, t)$  i  $u_n(0, t)$ ,  $t \in T$ , wyznacza się podobnie jak w problemie 4.

## 5. Uwagi końcowe

Przedstawiona w pracy metoda rozwiązywania granicznych zagadnień odwrotnych dla równania falowego, bazująca na całkowym sformułowaniu problemu, pozwala bez trudu sformułować równania całkowe lub układ równań całkowych na gęstość potencjału opóźnionego warstwy pojedynczej bez względu na rodzaj  $WO$  i wymiar zagadnienia. W przypad-



ku zagadnień jednowymiarowych równania te przyjmują bardzo prostą postać, pozwalającą na otrzymanie rozwiązań ścisłych. Fakt ten jest wart podkreślenia, gdyż graniczne zagadnienia odwrotne teorii przewodnictwa cieplnego, którym głównie poświęcano uwagę w ostatnich latach, nie doczekały się jeszcze rozwiązań ścisłych.

Do budowania równań całkowych dla zagadnień odwrotnych rozpatrywanych w pracy wykorzystano reprezentacje całkowe rozwiązań zagadnień prostych, zawierające potencjał opóźniony warstwy pojedynczej. Jak pokazano w problemie 1, wykorzystanie reprezentacji całkowych zawierających potencjał opóźniony warstwy podwójnej nie zmienia typu równania całkowego na gęstość potencjału. Budowanie równań całkowych dla problemów 1 - 3 i ich jednowymiarowych egzemplifikacji w oparciu o twierdzenie 3 nie nastęrcza większych trudności i dlatego w pracy nie poświęcono im uwagi.

Interesujący jest fakt, że całki powierzchniowe ze splotów można w przypadku zagadnień trój- i dwuwymiarowych sprowadzić do całek potrójnych. Wynika to z postaci rozwiązania podstawowego równania falowego, (2). W przypadku gdy  $f(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$ , oraz zerowych warunków początkowych fakt ten znacznie upraszcza zagadnienie rozwiązania problemu odwrotnego.

Gdy obszar  $\Omega \subset E^m$ ,  $m = 2, 3$ , ma złożony kształt, wówczas przy rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych można posłużyć się metodą elementów brzegowych, często wykorzystywaną do rozwiązywania zagadnień prostych, [16 - 19], gdyż punktem wyjścia dla tej metody jest właśnie sprowadzenie rozważanego problemu do układu równań całkowych, zawierające całki powierzchniowe.

#### Literatura

1. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
2. A. C. ERINGEN, E. S. SUHUBI, *Elastodynamics*, vol. II — Linear Theory, Academic Press, New York 1975.
3. K. GRYSA, *Zagadnienia odwrotne w teorii niestabilnego przewodnictwa cieplnego i w dynamicznej teorii naprężeń cieplnych*, w przygotowaniu.
4. M. E. GURTIN, *The linear theory of elasticity*, w: *Encyclopedia of Physics*, vol. VIa/2, Springer-Verlag, Berlin 1972.
5. P. K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD, *Boundary element methods in engineering science*, McGraw-Hill Book Co. (U. K.) Ltd., London 1981.
6. A. PISKOREK, *Równania całkowe*, WNT, Warszawa 1971.
7. H. MĄRCINKOWSKA, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa 1972.
8. J. OSIŃSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, 1972.
9. A. H. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformacji*, PWN, Warszawa 1969.
10. K. GRYSA, *O zagadnieniu odwrotnym dla równania falowego*, *Mech. Teoret. Stos.*, **20**, 1 - 2 (1982).
11. M. M. LAVRENT'EV, *Ob odnoj obratnoj zadače dla volnovo go uravnenia*, *DAN SSSR*, **157**, 3 (1964).
12. W. G. ROMANOV, *Nekotoryje obratnyje zadači dla uravnenia giperboličeskogo tipa*, Nauka, Nowosybirsk 1972.
13. A. S. BLAGOVEŠČENSKIJ, *Obratnaja zadača dla volnovo go uravnenia s neizvestnym istočnikom*, w: *Problemy matematičeskoj fiziki*, vyp. 4, Izd. LGU, 1970.
14. R. BURRIDGE, *The Gelfand-Levitan, the Marchenko, and the Gopinath-Sondhi integral equations of inverse scattering theory in the context of inverse impulse-response problems*, *Wave Motion*, **2** (1980).
15. M. M. LAVRENT'EV, K. G. REZNIČKAJA, V. G. JACHNO, *Odnomernyje obratnyje zadači matematičeskoj fiziki*, Nauka, Nowosybirsk 1982.

16. R. P. SHAW, *Boundary integral equation methods applied to wave problems*, w: Developments in BEMs-1 ed. P. K. Banarjee and R. Butterfield, AS Publ. Ltd., London 1979.
17. W. J. MANSUR, C. A. BREBBIA, *Numerical implementation of the boundary element method for two dimensional transient scalar wave propagation problems*, Appl. Math. Modelling, 6 (1982) 299 - 306.
18. D. M. MISLJENVIČ, *Boundary element method and wave equation*, Appl. Math. Modelling, 6 (1982) 205 - 208.
19. D. M. MISLJENVIČ, *The boundary element method in shock waves analysis*, Appl. Math. Modelling, 6 (1982) 312 - 315.

## Р е з ю м е

## ГРАНИЧНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В статье представлены многомерные граничные обратные задачи для волнового уравнения. Интегральные репрезентации решений начально-краевых задач выведены на основе теории потенциала. Для обратных задач сформулированы интегральные уравнения в которых неизвестной функцией является плотность потенциала простого слоя. Употребляя эту интегральную формулировку найдены точные решения трех одномерных граничных обратных задач.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1984 roku*

## S u m m a r y

## BOUNDARY INVERSE PROBLEMS FOR WAVE EQUATION

The multidimensional boundary inverse problems for the wave equation are considered. On the basis of the potential theory the integral representations for the solutions of the initial-boundary problems are derived. Next, the integral equations for the inverse problems are formulated, in which density of the simple layer potential is an unknown function.

The exact solutions for three one-dimensional inverse problems are found by means of the integral formulation.

## JEDNOWYMIAROWY CIĄGŁY MODEL STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ SIATKOWYCH DŹWIGARÓW POWIERZCHNIOWYCH

ROMAN NAGÓRSKI

*Politechnika Warszawska*

### 1. Wstęp

Przedmiotem pracy jest stateczność w zakresie sprężystym siatkowych dźwigarów powierzchniowych o gęstej i regularnej siatce elementów. Celem rozprawy jest wyprowadzenie równań jednowymiarowego modelu ciągłego powyższego problemu [1]. Poszukiwane równania uzyskamy, stosując koncepcję kontinuum z więzami wewnętrznymi [2] do powierzchniowego ośrodka typu Cosseratów, będącego ciągłym dwuwymiarowym modelem rozważanych dźwigarów [3].

Prezentowany problem jest złożony. Stosowanie opisu dyskretnego prowadzi do kosztownych obliczeń lub znanych trudności z uzyskaniem „zamkniętych rozwiązań” szerszej klasy równań różnicowych [4, 5]. Wykorzystanie opisu kontynualnego [3] powoduje konieczność całkowania równań różniczkowych cząstkowych. Możliwość otrzymania rozwiązań analitycznych tych równań jest ograniczony, natomiast przybliżone całkowanie numeryczne jest na ogół również stosunkowo kosztowne. Z powyższych względów liczba uzyskanych do tej pory rozwiązań jest niewielka i dotyczy szczególnych rodzajów kształtu i struktury dźwigara oraz typu obciążenia i warunków brzegowych (por. np. [3], [4]). Wydaje się zatem, że celowe jest poszukiwanie prostych i dostatecznie dokładnych modeli stateczności rozpatrywanych dźwigarów, zezwalających na rozszerzenie zakresu możliwości do efektywnego rozwiązania zadań praktycznych.

W tej pracy przyjmujemy następujące założenia:

1. Przez zagadnienie stateczności rozumiemy problem wyznaczenia krytycznej wartości obciążenia, dla której możliwe są różne postacie położenia równowagi. Inaczej mówiąc, dla pewnej wartości parametru stanu obciążenia istnieją nieznikające tożsamościowo funkcje określające stan przemieszczenia, zaburzające podstawowe położenie równowagi, tak że bez zmiany obciążenia zewnętrznego i warunków podparcia możliwa jest dalej równowaga konstrukcji.

2. Materiał dźwigara jest liniowo-sprężysty.

3. Przemieszczenia i odkształcenia są małe, umożliwiające wykorzystanie liniowej postaci związków geometrycznych.

4. W równaniach równowagi, w statystycznych warunkach brzegowych oraz w związkach wiążących składowe pól statycznych i geometrycznych w bazie konfiguracji odkształ-

conej i nieodkształconej można pominąć składniki jawnie nieliniowe względem składowych stanu przemieszczenia.

5. O utracie stateczności położenia równowagi decyduje liniowa część przyrostu (wariacji) równań równowagi względem przyrostu składowych stanu przemieszczenia, zaburzających stan równowagi podstawowej.

6. Powierzchnia podstawowa dźwigara w konfiguracji początkowej różni się od tej powierzchni w konfiguracji aktualnej głównie położeniem w przestrzeni i kształtem, tzn. zmiana na skutek deformacji długości elementarnych łuków i pól elementarnych powierzchni nie wpływa na stateczność położenia równowagi.

7. Stan podstawowy (niezaburzony) konstrukcji obciążonej można określić korzystając z równań liniowych teorii infinitesimalnej (przy uwzględnieniu zasady zeszywnienia).

8. Spełnione są założenia stosowalności ciągłego modelu pierwszego przybliżenia konstrukcji siatkowych. W szczególności powierzchnia podstawowa składa się z pewnej liczby gładkich płatów niezbyt zakrzywionych; osie elementów tworzą gęstą, regularną i dyskretną siatkę krzywych na tej powierzchni [3].

9. Będziemy rozważać ruszty powierzchniowe złożone z dwu lub trzech rodzin prętów w przybliżeniu przyrównanych, dostatecznie smukłych i sztywno połączonych w węzłach, oraz powłoki perforowane o stałej grubości, złożone z dwu rodzin elementów o niezbyt dużej szerokości, tworzących siatkę ortogonalną.

10. Równania idealnych więzów typu kinematycznego i statecznego są całkowalne i liniowe.

11. Równania jednowymiarowego modelu stateczności wyprowadzimy dla dźwigarów ukształtowanych na powierzchni w kształcie jednoparametrowej rodziny konturów łukowo gładkich.

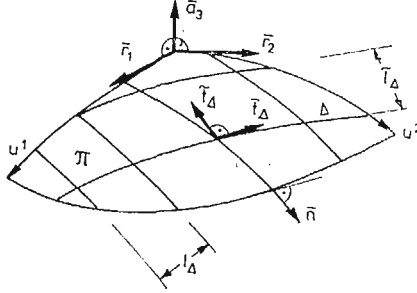
Wymienione wyżej założenia ograniczają oczywiście zakres stosowalności prezentowanej dalej teorii. Jednak przypadki spełniające przyjęte postulaty stanowią z praktycznego punktu widzenia ważną klasę konstrukcji. Pewne wątpliwości mogą nasuwać silne założenie liniowości równań stateczności. Wydaje się jednak, że dla określenia krytycznego obciążenia powodującego „globalną” utratę stateczności dźwigarów dostatecznie „smukłych” względem jednego z charakterystycznych wymiarów, wyprowadzone w pracy równania mogą być użyteczne.

W podanych dalej równaniach i wzorach będziemy stosować ujęcie tensorowe w notacji wskaźnikowej. Konwencja sumacyjna dotyczy wskaźników oznaczonych małymi literami greckimi przyjmującymi wartości „1” i „2”.

## 2. Równania stateczności teorii dwuwymiarowej z węzami wewnętrznymi

Niech  $\pi$  oznacza płat powierzchni podstawowej dźwigara powierzchniowego w konfiguracji początkowej, parametryzowanej współrzędnymi  $(u^\alpha)$ ,  $(\bar{r}_\alpha, \bar{a}_3)$  i  $(\bar{r}_\alpha, \bar{a}_3)$  — bazę i kobazę lokalną,  $g_{\alpha\beta}$ ,  $b_{\alpha\beta}$ ,  $e_{\alpha\beta}$  — tensor metryczny, krzywiznowy i pseudotensor Ricciego,  $(\dots)_|$  — symbol powierzchniowej pochodnej kowariantnej,  $\bar{n} = n^\alpha r_\alpha = n_\alpha \bar{r}^\alpha$  — wersor normalny do przekroju normalnego powierzchni  $\pi$ , w szczególności brzegowego  $\partial\pi$  (rys. 1).

Przez  $\pi_0$  oznaczymy obraz  $\pi$  po deformacji, przez  $(\vec{r}_\alpha, \vec{a}_3)$  i  $(\vec{r}^\alpha, \vec{a}_3)$  — bazę i kobazę lokalną,  $\hat{g}_{\alpha\beta}$  — tensor metryczny przy parametryzacji  $\pi_0$  również współrzędnymi  $(u^\alpha)$ , a przez  $\hat{n} = \hat{n}^\alpha \vec{r}_\alpha = \hat{n}_\alpha \vec{r}^\alpha$  wektor normalny do przekroju normalnego  $\pi_0$ , będącego obrazem przekroju normalnego  $\pi$ .



Rys. 1

Na mocy założenia 4, 6, po wykorzystaniu znanych z geometrii wzorów, przyjmiemy

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha + \dot{\gamma}_{\alpha\beta} \vec{r}^\beta + \dot{\gamma}_\alpha \vec{a}_3, \quad \vec{a}_3 = \vec{a}_3 - \dot{\gamma}_\alpha \vec{r}^\alpha, \quad (2.1)$$

$$\sqrt{\hat{g}} = \sqrt{g}, \quad \hat{n}_\alpha = \dot{n}_\alpha, \quad \hat{g}_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

gdzie

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = v_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} v, \quad \dot{\gamma}_\alpha = v|_\alpha + b_\alpha^\beta v_\beta, \quad (2.2)$$

a  $\bar{v} = v_\alpha \vec{r}^\alpha + v \vec{a}_3$  jest wektorem przemieszczenia i  $\vartheta = \vartheta_\alpha \vec{r}^\alpha + \vartheta \vec{a}_3$  — rozpatrywanym dalej wektorem małego obrotu cząstki ośrodka.

Oznaczmy przez  $\bar{p}(\bar{n})$  i  $\bar{m}(\bar{n})$  gęstość liniową siły i momentu oddziaływań wewnętrznych w ośrodku w przekroju o normalnej  $\bar{n}$ .

Dokonując rozkładu

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{n}) &= \hat{p}^{\beta\alpha} \hat{n}_\beta \vec{r}^\alpha + \hat{p}^\beta \hat{n}_\beta \vec{a}_3 = p^{\beta\alpha} \dot{n}_\beta \vec{r}^\alpha + p^\beta \dot{n}_\beta \vec{a}_3, \\ \bar{m}(\bar{n}) &= \hat{m}^{\beta\alpha} \hat{n}_\beta \vec{r}^\alpha + \hat{m}^\beta \hat{n}_\beta \vec{a}_3 = m^{\beta\alpha} \dot{n}_\beta \vec{r}^\alpha + m^\beta \dot{n}_\beta \vec{a}_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

otrzymujemy po uwzględnieniu (2.1) zależności

$$\begin{aligned} \hat{p}^{\beta\alpha} &= p^{\beta\alpha} + g^{\alpha\delta} \dot{\gamma}_{\gamma\delta} p^{\beta\gamma} - g^{\alpha\delta} \dot{\gamma}_\delta p^\beta, & \hat{p}^\beta &= p^\beta + \dot{\gamma}_\gamma p^{\beta\gamma}, \\ \hat{m}^{\beta\alpha} &= m^{\beta\alpha} + g^{\alpha\delta} \dot{\gamma}_{\gamma\delta} m^{\beta\gamma} - g^{\alpha\delta} \dot{\gamma}_\delta m^\beta, & \hat{m}^\beta &= m^\beta + \dot{\gamma}_\gamma p^{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wprowadzając gęstości powierzchniowe obciążenia zewnętrznego typu sił i momentów  $\bar{q} = q^\alpha \vec{r}_\alpha + q \vec{a}_3$ ,  $\bar{h} = h^\alpha \vec{r}_\alpha + h \vec{a}_3$  i gęstości liniowe obciążenia brzegowego  $\bar{p} = p^\alpha \vec{r}_\alpha + p \vec{a}_3$ ,  $\bar{m} = m^\alpha \vec{r}_\alpha + m \vec{a}_3$  otrzymujemy w znany sposób przy wykorzystaniu zał. 4 i 6 i (2.3), (2.1) równania równowagi elementu „ $d\pi$ ”

$$\begin{aligned} \hat{p}^{\beta\alpha}|_\beta - b_\beta^\alpha \hat{p}^\beta + q^\alpha + r^\alpha &= 0, & \hat{p}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} \hat{p}^{\alpha\beta} + q + r &= 0, \\ \hat{m}^{\beta\alpha}|_\beta - b_\beta^\alpha \hat{m}^\beta + e_\beta^\alpha \hat{p}^\beta + e^{\alpha\gamma} \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \hat{p}^\beta + e_\beta^\alpha \dot{\gamma}_\gamma \hat{p}^{\gamma\beta} + h^\alpha + s^\alpha &= 0, \\ \hat{m}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} \hat{m}^{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta} \hat{p}^{\alpha\beta} + e_\alpha^\gamma \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \hat{p}^{\beta\alpha} + h + s &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

oraz statyczne warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \dot{p}^{\beta\alpha} n_\beta &= \dot{p}^\alpha + \tau^\alpha, & \dot{p}^\beta n_\beta &= \dot{p} + \tau, \\ \dot{m}^{\beta\alpha} n_\beta &= \dot{m}^\alpha + \mu^\alpha, & \dot{m}^\beta n_\beta &= \dot{m} + \mu, \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdzie  $r^\alpha$ ,  $r$  i  $s^\alpha$ ,  $s$  oraz  $\tau^\alpha$ ,  $\tau$  i  $\mu^\alpha$ ,  $\mu$  są składowymi w bazie  $(\bar{r}_\alpha, \bar{a}_3)$  reakcji typu sił i momentów odpowiednio na  $\pi_0$  i  $\partial\pi_0$  więzów wewnętrznych typu kinematycznego nałożonych a priori na stan przemieszczenia ośrodka [1, 2].

Geometryczne warunki brzegowe przyjmujemy w postaci

$$v_\alpha = \dot{v}_\alpha, \quad v = \dot{v}, \quad \vartheta_\alpha = \dot{\vartheta}_\alpha, \quad \vartheta = \dot{\vartheta} \quad (2.7)$$

gdzie  $\dot{v}_\alpha$ ,  $\dot{v}$  oraz  $\dot{\vartheta}_\alpha$ ,  $\dot{\vartheta}$  są składowymi danego na brzegu wektora przemieszczenia  $\dot{\bar{v}}$  i obrotu  $\dot{\bar{\vartheta}}$  w bazie  $(\bar{r}^\alpha, \bar{a}_3)$ .

Postulujemy idealność więzów typu kinematycznego za pomocą zasady

$$\int_\pi (r^\alpha \delta v_\alpha + r \delta v + s^\alpha \delta \vartheta_\alpha + s \delta \vartheta) d\pi + \int_{\partial\pi} (\tau^\alpha \delta v_\alpha + \tau \delta v + \mu^\alpha \delta \vartheta_\alpha + \mu \delta \vartheta) d(\partial\pi) = 0, \quad (2.8)$$

dla dowolnych wariacji  $\delta v_\alpha$ ,  $\delta v$ ,  $\delta \vartheta_\alpha$ ,  $\delta \vartheta$  zgodnych z więzami, których równania sprecyzujemy dalej.

Związki fizyczne przyjmiemy w postaci (por. [3] i zał. 2)

$$\begin{aligned} p^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\xi\eta} \gamma_{\xi\eta}, & p^\alpha &= A^{\alpha\xi} \gamma_\xi, \\ m^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\beta\xi\eta} \chi_{\xi\eta}, & m^\alpha &= B^{\alpha\xi} \chi_\xi, \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie  $A^{\alpha\beta\xi\eta}$ , ...,  $B^{\alpha\xi}$  oznaczają tensory sztywności sprężystej, a  $\gamma_{\xi\eta}$ , ...,  $\chi_\xi$  — składowe tensorów odkształcenia.

Jeżeli nakładamy na składowe stanu napięcia więzy idealne [1, 2], to przy uwzględnieniu (2.1)<sub>3</sub> mamy

$$\int_\pi [(\gamma_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}^*) \delta p^{\alpha\beta} + (\gamma_\alpha - \gamma_\alpha^*) \delta p^\alpha + (\chi_{\alpha\beta} - \chi_{\alpha\beta}^*) \delta m^{\alpha\beta} + (\chi_\alpha - \chi_\alpha^*) \delta m^\alpha] d\pi = 0 \quad (2.10)$$

dla dowolnych wariacji  $\delta p^{\alpha\beta}$ ,  $\delta p^\alpha$ ,  $\delta m^{\alpha\beta}$ ,  $\delta m^\alpha$  zgodnych z więzami typu kinetycznego, których równania sprecyzujemy dalej, natomiast (por. [3] i zał. 3)

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^* &= v_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} v + e_{\alpha\beta} \vartheta, & \gamma_\alpha^* &= v|_\alpha + b_\alpha^\beta v_\beta + e_\alpha^\beta \vartheta_\beta, \\ \chi_{\alpha\beta}^* &= \vartheta_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} \vartheta, & \chi_\alpha^* &= \vartheta|_\alpha + b_\alpha^\beta \vartheta_\beta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Rozważymy przypadek, gdy ośrodek jest ciągłym dwuwymiarowym modelem dźwigara siatkowego (por. zał. 8, [3]) złożonego z kilku rodzin  $\Delta$  ( $\Delta = \text{I, II, III, ...}$ ) elementów, których osie tworzą regularną siatkę dyskretną krzywych na powierzchni podstawowej (rys. 1).

Wprowadzamy na  $\pi$  wzdłuż każdej krzywej rodziny  $\Delta$  ortonormalną bazę  $(\bar{t}_\Delta, \bar{\tilde{t}}_\Delta)$  gdzie  $\bar{t}_\Delta$  jest wersorem stycznym,  $\bar{\tilde{t}}_\Delta = a_3 \times \bar{t}_\Delta$  — normalnym, przy czym

$$\bar{t}_\Delta = t^\alpha \bar{r}_\alpha, \quad \bar{\tilde{t}}_\Delta = \tilde{t}^\alpha \bar{r}_\alpha. \quad (2.12)$$

Jeżeli  $\bar{t}_\Delta^0 = \bar{t}_\Delta^\alpha \bar{r}_\alpha$ ,  $\bar{\tilde{t}}_\Delta^0 = \bar{\tilde{t}}_\Delta^\alpha \bar{r}_\alpha$  są odpowiednio obrazami  $\bar{t}_\Delta$  i  $\bar{\tilde{t}}_\Delta$  po deformacji, to zgodnie z zał. 4, 6 można przyjąć

$$\bar{t}_\Delta^\alpha = t_\Delta^\alpha, \quad \bar{\tilde{t}}_\Delta^\alpha = \tilde{t}_\Delta^\alpha. \quad (2.13)$$

W przypadku rusztu prętowego (por. zał. 9) przy uwzględnieniu (2.13) jest [3]

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\xi\eta} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} (t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\eta} R_{\Delta} + \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} \tilde{t}_{\Delta}^{\eta} \tilde{R}_{\Delta}), & A^{\alpha\xi} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} \check{R}_{\Delta}, \\ B^{\alpha\beta\xi\eta} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} (t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\eta} S_{\Delta} + \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} \tilde{t}_{\Delta}^{\eta} \tilde{S}_{\Delta}), & B^{\alpha\xi} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} \check{S}_{\Delta}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_{\Delta} &= \frac{E_{\Delta} A_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, & \tilde{R}_{\Delta} &= \frac{12 E \check{J}}{\tilde{l}_{\Delta} l^2}, & \check{R} &= \frac{12 E_{\Delta} \check{J}}{\tilde{l}_{\Delta} l^2}, \\ S_{\Delta} &= \frac{G_{\Delta} J_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, & \tilde{S}_{\Delta} &= \frac{E_{\Delta} \check{J}_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, & \check{S}_{\Delta} &= \frac{E_{\Delta} \check{J}_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

przy czym  $E_{\Delta}$ ,  $G_{\Delta}$  oznaczają moduł Younga i moduł skręcania,  $l_{\Delta}$ ,  $\tilde{l}_{\Delta}$  — długość elementów rodziny  $\Delta$  i odległość między „sąsiednimi” elementami tej rodziny (rys. 1),  $A_{\Delta}$ ,  $J_{\Delta}$ ,  $\check{J}_{\Delta}$ ,  $\check{J}_{\Delta}$  — pole przekroju oraz osiowy i główne środkowe momenty bezwładności tego przekroju względem osi  $\tilde{t}_{\Delta}$ ,  $\tilde{t}_{\Delta}$ ,  $\tilde{a}_3$  ( $\Delta = \text{I, II}$  lub  $\Delta = \text{I, II, III}$ ).

Natomiast dla powłoki perforowanej przy wykorzystaniu (2.13) mamy (por. zał. 9 i [3])

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\xi\eta} &= \sum_{\Delta} \left( t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} \sum_{\Gamma} t_{\Gamma}^{\xi} t_{\Gamma}^{\eta} R_{\Delta\Gamma} + t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\xi} \tilde{t}_{\Delta}^{\eta} R_{\Delta} \right), & A^{\alpha\xi} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} \check{R}_{\Delta}, \\ B^{\alpha\beta\xi\eta} &= \sum_{\Delta} \left( t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} \sum_{\Gamma} t_{\Gamma}^{\xi} \tilde{t}_{\Gamma}^{\eta} \tilde{S}_{\Delta\Gamma} + t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\xi} t_{\Delta}^{\eta} S_{\Delta} \right), & B^{\alpha\xi} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} \check{S}_{\Delta}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

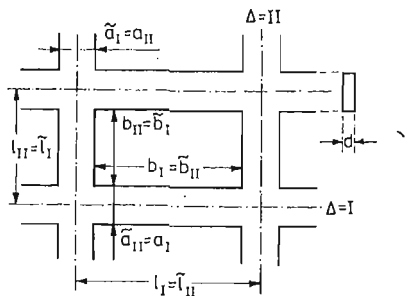
gdzie

$$\begin{aligned} [R_{\Delta\Gamma}] &= \begin{bmatrix} R_{\text{I}} & \tilde{\nu}_{\text{II}} R_{\text{I}} \\ \tilde{\nu}_{\text{I}} R_{\text{II}} & R_{\text{II}} \end{bmatrix}, & [\tilde{S}_{\Delta\Gamma}] &= \begin{bmatrix} \tilde{S}_{\text{I}} & \tilde{\nu}_{\text{II}} \tilde{S}_{\text{I}} \\ \tilde{\nu}_{\text{I}} \tilde{S}_{\text{II}} & \tilde{S}_{\text{II}} \end{bmatrix}, \\ R_{\Delta} &= \frac{\tilde{E}_{\Delta} d}{1 - \tilde{\nu}_{\text{I}} \tilde{\nu}_{\text{II}}}, & \tilde{R}_{\Delta} &= \frac{\tilde{E}_{\Delta} d \tilde{a}_{\Delta}^2}{b_{\Delta}^2 + 2(1 + \nu) \tilde{a}_{\Delta}^2}, & \check{R}_{\Delta} &= \frac{\tilde{E}_{\Delta} d^3}{b_{\Delta}^2}, \\ S_{\Delta} &= k_{\Delta} \frac{\tilde{E}_{\Delta} d^3}{2(1 + \nu)}, & \tilde{S}_{\Delta} &= \frac{d^2}{12} R_{\Delta}, & \check{S}_{\Delta} &= \frac{\tilde{E}_{\Delta} \tilde{a}_{\Delta}^2 d l_{\Delta}}{12 b_{\Delta}} \\ \tilde{E}_{\Delta} &= E \frac{\tilde{a}_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, & \tilde{\nu}_{\Delta} &= \nu \frac{\tilde{a}_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

przy czym  $E$ ,  $\nu$  oznaczają moduł Younga i współczynnik Poissona,  $d$  — grubość powłoki,  $k_{\Delta}$  — współczynnik skręcania dla przekroju prostokątnego; znaczenie  $a_{\Delta}$ ,  $\tilde{a}_{\Delta}$ ,  $b_{\Delta}$ ,  $\tilde{b}_{\Delta}$  wyjaśniono na rys. 2 ( $\Delta = \text{I, II}$ ).

Wielkości  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{\vartheta}$  oznaczają (w punktach przecięcia krzywych siatki dyskretnej) przemieszczenia i kąty obrotu węzłów dźwigara.

Jeżeli przez  $\bar{P}_{\Delta} = P_{\Delta} \bar{t}_{\Delta}^0 + \tilde{P} \tilde{t}_{\Delta}^0 + \check{P}_{\Delta} \check{a}_3$  i  $\bar{M}_{\Delta} = M_{\Delta} \bar{t}_{\Delta}^0 + \tilde{M} \tilde{t}_{\Delta}^0 + \check{M} \check{a}_3$  oznaczymy wektor siły i momentu w przekroju środkowym pręta rodziny  $\Delta$  (rys. 3), to zgodnie z założeniami, ciągłego modelu rozważanych ustrojów oraz (2.13) mamy [3]



Rys. 2

$$p^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} p_{\Delta}^{\alpha\beta}, \quad p^{\alpha} = \sum_{\Delta} p_{\Delta}^{\alpha}, \quad m^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} m_{\Delta}^{\alpha\beta}, \quad m^{\alpha} = \sum_{\Delta} m_{\Delta}^{\alpha},$$

$$P_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} p_{\Delta}^{\beta\alpha} t_{\Delta\beta} t_{\Delta\alpha}, \quad \tilde{P}_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} p_{\Delta}^{\beta\alpha} t_{\Delta\beta} \tilde{t}_{\Delta\alpha}, \quad \check{P}_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} p_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta\beta},$$

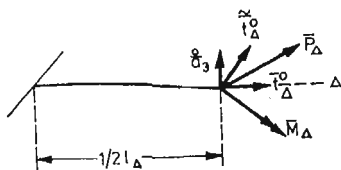
$$M_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} m_{\Delta}^{\beta\alpha} t_{\Delta\beta} t_{\Delta\alpha}, \quad \tilde{M}_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} m_{\Delta}^{\beta\alpha} t_{\Delta\beta} \tilde{t}_{\Delta\alpha}, \quad \check{M}_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} m_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta\beta},$$

przy czym  $t_{\alpha} = g_{\alpha\beta} t^{\beta}$ ,  $\tilde{t}_{\alpha} = g_{\alpha\beta} \tilde{t}^{\beta}$ .

Założymy dalej, że powierzchnia  $\pi$  jest utworzona przez jednoparametrową rodzinę odcinkowo gładkich i spójnych konturów  $\Gamma(u^1)$  ( $u^1 \in \langle u_1^1, u_2^1 \rangle$ ) tak, że  $\Gamma(u_a^1) \cap \Gamma(u_b^1) = \emptyset$  dla  $u_a^1 \neq u_b^1$  oraz na brzegu różnym od  $\Gamma(u_a^1)$  (gdy  $\Gamma(u^1)$  nie jest konturem zamkniętym —  $\partial\Gamma(u^1) \neq \emptyset$ ) dane są jedynie statyczne warunki brzegowe. Na brzegu  $\Gamma(u_a^1)$  (gdy  $\Gamma(u_1^1) \neq \Gamma(u_2^1)$ ) mogą być one statyczne lub geometryczne (zgodne z przyjętymi więzami). Jako zmienną  $u^2$  powyższej klasy powierzchni podstawowej ośrodka przyjmijmy parametr konturu  $\Gamma(u^1)$ .

Rozważania poniższe ograniczymy do całkwalnej i liniowej postaci równań więzów typu kinetycznego (por. zał. 10, [1, 2])

$$(v_{\alpha}, v, \vartheta_{\alpha}, \vartheta) = \sum_{K=1}^N [(v_{\alpha K}^1, v_K^1, \vartheta_{\alpha K}^1, \vartheta_K^1)(u^{\alpha}) \psi_K^1(u^1) + (v_{\alpha K}^2, v_K^2, \vartheta_{\alpha K}^2, \vartheta_K^2)(u^{\alpha}) \psi_K^2(u^1)], \quad (2.19)$$



Rys. 3

gdzie  $\psi_K$  są nieznanymi przemieszczeniami uogólnionymi,  $v_{\alpha K}^1, \dots, \vartheta_K^2$  znanymi funkcjami  $(\dots)' = \partial(\dots)/\partial u^1$ .

Więzy typu kinetycznego postulujemy w postaci wyrażającej często stosowany w praktyce fakt pomijalności wpływu niektórych składowych stanu napięcia na zachowanie się dźwigara

$$p^{\beta\alpha} = \pi_p^{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}, \quad p^{\alpha} = \pi_p^{\alpha} p^{\alpha}, \quad m^{\alpha\beta} = \pi_m^{\alpha\beta} m^{\alpha\beta}, \quad m^{\alpha} = \pi_m^{\alpha} m^{\alpha}, \quad (2.20)$$



gdzie  $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^\alpha$  są parametrami przyjmującymi wartości „0” lub „1” w zależności od tego, czy dana składowa jest pomijana czy dowolna. Formalny zapis (2.20) powyższych więzów zezwala na niewyszczególnienie na etapie ogólnych rozważań, którą z wielkości statycznych można uznać za pomijalnie małą.

Zajmiemy się następnie wyprowadzeniem równań stateczności. Przyjmiemy, że składowe stanu obciążenia są na tyle duże, że bez zmiany warunków brzegowych możliwe są różne postacie położenia równowagi określone przez zaburzenie stanu podstawowego przez dodatkowe wektory małego przesunięcia  $\partial\bar{v} = \partial v_\alpha \bar{r}^\alpha + \partial v \bar{a}_3$  i obrotu  $\partial\bar{\theta} = \partial\theta_\alpha \bar{r}^\alpha + \partial\theta \bar{a}_3$  zgodne z więzami (2.19), tj. określone przez przyrosty  $\partial\psi_K (K = 1, 2, \dots, N)$  przemieszczeń uogólnionych (por. zał. 1)

$$(\partial v_\alpha, \partial v, \partial\theta_\alpha, \partial\theta) = \sum_{K=1}^N \left[ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (v_{\alpha K}, v_K, \theta_{\alpha K}, \theta_K) \end{matrix} \partial\psi_K + \begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ (v_{\alpha K}, v_K, \theta_{\alpha K}, \theta_K) \end{matrix} \partial\psi'_K \right]. \quad (2.21)$$

Wykorzystując fakt, że „całkowity” i „podstawowy” stan przemieszczenia, napięcia i odkształcenia spełnia równania i związki (2.2), (2.4) – (2.11), (2.19), (2.20) oraz uwzględniając założenie 5 otrzymujemy równania problemu stateczności:

równania równowagi

$$\begin{aligned} \partial\hat{p}^{\beta\alpha}|_\beta - b_\beta^\alpha \partial\hat{p}^\beta + \partial r &= 0, & \partial\hat{p}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} \partial\hat{p}^{\alpha\beta} + \partial r &= 0, \\ \partial\hat{m}^{\beta\alpha}|_\beta - b_\beta^\alpha \partial\hat{m}^\beta - e_\beta^\alpha \partial\hat{p}^\beta + e^{\alpha\gamma} (\hat{\gamma}_{\beta\gamma} \partial p^\beta + \partial\hat{\gamma}_{\beta\gamma} p^\beta) + e_\beta^\alpha (\hat{\gamma}_\gamma \partial p^{\gamma\beta} + \partial\hat{\gamma}_\gamma p^{\gamma\beta}) + \partial s^\alpha &= 0, \quad (2.22) \\ \partial\hat{m}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} \partial\hat{m}^{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta} \partial\hat{p}^{\alpha\beta} + e_\alpha^\gamma (\hat{\gamma}_{\beta\gamma} \partial p^{\beta\alpha} + \partial\hat{\gamma}_{\beta\gamma} p^{\beta\alpha}) + \partial s &= 0, \end{aligned}$$

statyczne warunki brzegowe

$$\partial\hat{p}^{\beta\alpha} n_\beta = \partial\tau^\alpha, \quad \partial\hat{p}^\beta n^\beta = \partial\tau, \quad \partial\hat{m}^{\beta\alpha} n_\beta = \partial\mu^\alpha, \quad \partial\hat{m}^\beta n_\beta = \partial\mu, \quad (2.23)$$

geometryczne warunki brzegowe (zgodne z więzami typu kinematycznego)

$$\partial v_\alpha = 0, \quad \partial v = 0, \quad \partial\theta_\alpha = 0, \quad \partial\theta = 0, \quad (2.24)$$

gdzie

$$\partial\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = \partial v_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} \partial v, \quad \partial\hat{\gamma}_\alpha = \partial v|_\alpha + b_\alpha^\beta \partial v_\beta \quad (2.24)$$

oraz

$$\begin{aligned} \partial\hat{p}^{\beta\alpha} &= \partial p^{\beta\alpha} + g^{\alpha\delta} (\hat{\gamma}_{\gamma\delta} \partial p^{\beta\gamma} + \partial\hat{\gamma}_{\gamma\delta} p^{\beta\gamma}) - g^{\alpha\delta} (\hat{\gamma}_\delta \partial p^\beta + \partial\hat{\gamma}_\delta p^\beta), \\ \partial\hat{p}^\beta &= \partial p^\beta + \hat{\gamma}_\gamma \partial p^{\beta\gamma} + \partial\hat{\gamma}_\gamma p^{\beta\gamma}, \\ \partial\hat{m}^{\beta\alpha} &= \partial m^{\beta\alpha} + g^{\alpha\delta} (\hat{\gamma}_{\gamma\delta} \partial m^{\beta\gamma} + \partial\hat{\gamma}_{\gamma\delta} m^{\beta\gamma}) - g^{\alpha\delta} (\hat{\gamma}_\delta \partial m^\beta + \partial\hat{\gamma}_\delta m^\beta), \\ \partial\hat{m}^\beta &= \partial m^\beta + \hat{\gamma}_\gamma \partial m^{\beta\gamma} + \partial\hat{\gamma}_\gamma m^{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

związki fizyczne

$$\begin{aligned} \partial p^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\xi\eta} \partial\gamma_{\xi\eta}, & \partial p^\alpha &= A^{\alpha\xi} \partial\gamma_\xi, \\ \partial m^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\beta\xi\eta} \partial\kappa_{\xi\eta}, & \partial m^\alpha &= B^{\alpha\xi} \partial\kappa_\xi, \end{aligned} \quad (2.27)$$

związki geometryczne

$$\begin{aligned} \partial\gamma_{\alpha\beta}^* &= \partial v_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} \partial v - e_{\alpha\beta} \partial\theta, & \partial\gamma_\alpha^* &= \partial v|_\alpha + b_\alpha^\beta \partial v_\beta + e_\alpha^\beta \partial\theta_\beta, \\ \partial\kappa_{\alpha\beta}^* &= \partial\theta_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} \partial\theta, & \partial\kappa_\alpha^* &= \partial\theta|_\alpha + b_\alpha^\beta \partial\theta_\beta, \end{aligned} \quad (2.28)$$

oraz zasadę idealności więzów kinematycznych

$$\int_{\pi} (\partial r^{\alpha} \partial v_{\alpha} + \partial r \partial v + \partial s^{\alpha} \partial \vartheta_{\alpha} + \partial s \partial \vartheta) d\pi + \int_{\partial\pi} (\partial \tau^{*} \delta v_{\alpha} + \partial \tau \delta v + \partial \mu^{\alpha} \delta \vartheta_{\alpha} + \partial \mu \delta \vartheta) d(\partial\pi) = 0, \quad (2.29)$$

i kinetycznych

$$\int_{\pi} [(\partial \gamma_{\alpha\beta} - \partial \gamma_{\alpha\beta}^{*}) \delta p^{\alpha\beta} + (\partial \gamma_{\alpha} - \partial \gamma_{\alpha}^{*}) \delta p^{\alpha} + (\partial \kappa_{\alpha\beta} - \partial \kappa_{\alpha\beta}^{*}) \delta m^{\alpha\beta} + (\partial \kappa_{\alpha} - \partial \kappa_{\alpha}^{*}) \delta m^{\alpha}] d\pi = 0, \quad (2.30)$$

przy czym

$$\partial p^{\alpha\beta} = \overset{*}{\pi}_p^{\alpha\beta} \partial p^{\alpha\beta}, \quad \partial p^{\alpha} = \overset{*}{\pi}_p^{\alpha} \partial p^{\alpha}, \quad \partial m^{\alpha\beta} = \overset{*}{\pi}_m^{\alpha\beta} \partial m^{\alpha\beta}, \quad \partial m^{\alpha} = \overset{*}{\pi}_m^{\alpha} \partial m^{\alpha}. \quad (2.31)$$

W zależnościach (2.31) parametry  $\overset{*}{\pi}_p^{\alpha\beta}, \dots, \overset{*}{\pi}_m^{\alpha}$  przyjmują wartości „0” lub „1”, przy czym w stosunku do (2.20) odróżniono  $\overset{*}{\pi}_p^{\alpha\beta}, \dots, \overset{*}{\pi}_m^{\alpha}$  od  $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^{\alpha}$  z uwagi na fakt, że pomijalność pewnej składowej stanu napięcia w stanie podstawowym może być nieuzasadniona w stanie zaburzonym i odwrotnie.

Jeżeli nie nakładamy więzów wewnętrznych to wobec dowolności i niezależności  $\delta v_{\alpha}, \dots, \delta \vartheta$  oraz  $\delta p^{\alpha\beta}, \dots, \delta m^{\alpha}$  z zasad idealności (2.8), (2.10) i (2.29), (2.30) wynika, że

$$\begin{aligned} r^{\alpha} = r = 0, \quad s^{\alpha} = s = 0, \quad \tau^{\alpha} = \tau = 0, \quad \mu^{\alpha} = \mu = 0, \\ \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^{*}, \quad \gamma_{\alpha} = \gamma_{\alpha}^{*}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}^{*}, \quad \kappa_{\alpha} = \kappa_{\alpha}^{*} \end{aligned} \quad (2.32)$$

oraz

$$\begin{aligned} \partial r^{\alpha} = \partial r = 0, \quad \partial s^{\alpha} = \partial s = 0, \quad \partial \tau^{\alpha} = \partial \tau = 0, \quad \partial \mu^{\alpha} = \partial \mu = 0, \\ \partial \gamma_{\alpha\beta} = \partial \gamma_{\alpha\beta}^{*}, \quad \partial \gamma_{\alpha} = \partial \gamma_{\alpha}^{*}, \quad \partial \kappa_{\alpha\beta} = \partial \kappa_{\alpha\beta}^{*}, \quad \partial \kappa_{\alpha} = \partial \kappa_{\alpha}^{*}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Zatem wyprowadzone równania sprowadzają się do równań statyki i stateczności modelu dwuwymiarowego.

Otrzymane rezultaty mogą być podstawą dalszych uproszczeń.

Zgodnie z ogólnym postulatem liniowości prezentowanej w tej pracy teorii przyjmiemy (por. zał. 7), że w równaniach stanu podstawowego (2.4), (2.5)

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha} = 0. \quad (2.34)$$

Często w praktyce, zwłaszcza w przypadku, gdy znany jest rozkład  $p^{\alpha\beta}, p^{\alpha}, m^{\alpha\beta}, m^{\alpha}$  zakłada się, że stan podstawowy ośrodka jest „sztywny”, tzn. równości (2.34) uwzględnia się również w (2.22), (2.26).

Inne możliwe uproszczenia wyprowadzonych równań i związków dogodnie i bardziej stosownie jest rozważać dla konkretnych pod względem kształtu i struktury typów dźwigara oraz rodzajów obciążenia i warunków podparcia.

### 3. Równania stateczności modelu jednowymiarowego

Po wyznaczeniu z (2.5), (2.6) składowych reakcji więzów, a z (2.19) wariacji składowych stanu przemieszczenia i po podstawieniu do zasady idealności (2.8), wykorzystaniu zgodnie z zał. 7 związków (2.34), zależności (2.20) oraz  $\pi = \{I(u^1), u^1 \in \langle u_1^1, u_1^2 \rangle\}$  otrzymujemy

po wykonaniu całkowania wobec dowolności i niezależności  $\delta\psi_K (K = 1, 2, \dots, N)$  uogólnione równania równowagi stanu podstawowego [6, 7]

$$\overset{2}{\Psi}'_K - \overset{2}{\Phi}'_K - \overset{1}{\Psi}'_K + \overset{1}{\Phi}'_K + \overset{2}{F}'_K - \overset{1}{F}'_K = 0 \quad (u^1 \in (u^1_1, u^1_2)) \quad (3.1)$$

i warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \overset{2}{\Psi}'_K - \overset{2}{\Phi}'_K - \overset{1}{\Psi}'_K + \overset{2}{F}'_K &= -\overset{1}{G}_{K\alpha} \quad \text{lub} \quad \psi_K = \overset{1}{\psi}_{K\alpha}, \\ \overset{2}{\Psi}'_K &= \overset{2}{G}_{K\alpha} \quad \text{lub} \quad \psi'_K = \overset{2}{\psi}_{K\alpha} \quad (u^1 = u^1_\alpha), \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie uogólnione siły wewnętrzne, zewnętrzne przeszłowe i brzegowe określone są odpowiednio wzorami:

$$\begin{aligned} \overset{\gamma}{\Psi}'_K &= \int_{\Gamma(u^1)} \left( \pi_p^{1\alpha} p^{1\alpha\gamma} v_{\alpha K} + \pi_p^1 p^1 v_K + \pi_m^{1\alpha} m^{1\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} + \pi_m^1 m^1 v_K \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \overset{\gamma}{\Phi}'_K &= \int_{\Gamma(u^1)} \left( \pi_p^{\alpha\beta} p^{\alpha\beta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K} + \pi_p^\alpha p^\alpha \gamma_{\alpha K} + \pi_m^{\alpha\beta} m^{\alpha\beta\gamma} \kappa_{\alpha\beta K} + \pi_m^\alpha m^\alpha \kappa_{\alpha K} \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \overset{\gamma}{F}'_K &= \int_{\Gamma(u^1)} \left( q^{\alpha\gamma} v_{\alpha K} + q^\gamma v_K + h^{\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} + h^\gamma \vartheta_K \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma + \sum_{\partial\Gamma(u^1)} L \left( p^{\alpha\gamma} v_{\alpha K} + p^\gamma v_K + m^{\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} + m^\gamma \vartheta_K \right), \\ \overset{\gamma}{G}_{K\beta} &= (-1)^\beta \int_{\Gamma(u^1_\beta)} \left( p^{\alpha\gamma} v_{\alpha K} + p^\gamma v_K + m^{\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} + m^\gamma \vartheta_K \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.3)$$

przy czym  $Ldu^1 = d(\partial\Gamma(u^1))$ , jeśli  $\partial\Gamma(u^1) \neq \emptyset$ ;  $(\dots)' = \partial(\dots)/\partial u^1$ , natomiast

$$\begin{aligned} \overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha\beta K} &= \overset{\gamma}{v}_{\beta K|\alpha} - b_{\alpha\beta} \overset{\gamma}{v}_K - e_{\alpha\beta} \overset{\gamma}{\vartheta}_K, & \overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha K} &= \overset{\gamma}{v}_{K|\alpha} + b_\alpha^\beta \overset{\gamma}{v}_{\beta K} + e_\alpha^\beta \overset{\gamma}{\vartheta}_K, \\ \overset{\gamma}{\kappa}_{\alpha\beta K} &= \overset{\gamma}{\vartheta}_{\beta K|\alpha} - b_{\alpha\beta} \overset{\gamma}{\vartheta}_K, & \overset{\gamma}{\kappa}_{\alpha K} &= \overset{\gamma}{\vartheta}_{K|\alpha} + b_\alpha^\beta \overset{\gamma}{\vartheta}_{\beta K}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Podstawiając (2.19) do (2.11) i wykorzystując znane z geometrii powierzchni wzory znajdujemy

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^* &= \sum_{K=1}^N \left[ \overset{1}{\gamma}_{\alpha\beta K} \psi_K + \overset{2}{\gamma}_{\alpha\beta K} \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( \overset{1}{v}_{\beta K} \psi'_K + \overset{2}{v}_{\beta K} \psi''_K \right) \right], \\ \gamma_\alpha^* &= \sum_{K=1}^N \left[ \overset{1}{\gamma}_{\alpha K} \psi_K + \overset{2}{\gamma}_{\alpha K} \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( \overset{1}{v}_K \psi'_K + \overset{2}{v}_K \psi''_K \right) \right], \\ \kappa_{\alpha\beta}^* &= \sum_{K=1}^N \left[ \overset{1}{\kappa}_{\alpha\beta K} \psi_K + \overset{2}{\kappa}_{\alpha\beta K} \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( \overset{1}{\vartheta}_{\beta K} \psi'_K + \overset{2}{\vartheta}_{\beta K} \psi''_K \right) \right], \\ \kappa_\alpha^* &= \sum_{K=1}^N \left[ \overset{1}{\kappa}_{\alpha K} \psi_K + \overset{2}{\kappa}_{\alpha K} \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( \overset{1}{\vartheta}_K \psi'_K + \overset{2}{\vartheta}_K \psi''_K \right) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie  $\overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha\beta K}$ ,  $\overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha K}$ ,  $\overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha\beta K}$ ,  $\overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha K}$  są określone za pomocą (3.4),  $\delta_{\alpha\beta}$  — jest symbolem Kroneckera.

Związki fizyczne odwrotne do (2.9) zapiszemy w postaci

$$\gamma_{\alpha\beta} = \mathfrak{V}_{\alpha\beta\xi\eta} P^{\xi\eta}, \quad \gamma_\alpha = \mathfrak{V}_{\alpha\xi} P^\xi, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \mathfrak{B}_{\alpha\beta\xi\eta} m^{\xi\eta}, \quad \kappa_\alpha = \mathfrak{B}_{\alpha\xi} m^\xi, \quad (3.6)$$

gdzie  $\mathfrak{V}_{\alpha\beta\xi\eta}$ ,  $\dots$ ,  $\mathfrak{B}_{\alpha\xi}$  są tensorami podatności sprężystej. Stosunkowo łatwo może je wyzna-

czyć w przypadku rusztu prętowego i powłoki perforowanej (por. (2.14) - (2.17)), gdy  $\mathcal{A} = \text{I, II}$  i dyskretna siatka osi elementów pokrywa się z ortogonalnymi liniami parametrycznymi powierzchni podstawowej.

Uwzględniając (3.6) i (2.10) w zasadzie idealności (2.20) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\nabla_{\alpha\beta\xi\eta}\pi_p^{\xi\eta}p^{\xi\eta} - \gamma_{\alpha\beta}^*)\pi_p^{\alpha\beta} &= 0, & (\nabla_{\alpha\xi}\pi_p^{\xi}p^{\xi} - \gamma_{\alpha}^*)\pi_p^{\alpha} &= 0, \\ (\mathfrak{B}_{\alpha\beta\xi\eta}\pi_m^{\xi\eta}m^{\xi\eta} - \kappa_{\alpha\beta}^*)\pi_m^{\alpha\beta} &= 0, & (\mathfrak{B}_{\alpha\xi}\pi_m^{\xi}m^{\xi} - \kappa_{\alpha}^*)\pi_m^{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

(nie sumować względem  $\alpha, \beta$ ).

Na podstawie (3.5), (3.7) łatwo znajdujemy wyrażenia na niezerowe składowe stanu napięcia w funkcji  $\psi_K, \psi'_K, \psi''_K$ . Postać tych wyrażeń jest następująca:

$$\begin{aligned} \pi_p^{\alpha\beta}p^{\alpha\beta} &= \pi_p^{\alpha\beta} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 p_K^{\alpha\beta} \psi_K^{(i-1)}, & \pi_p^{\alpha}p^{\alpha} &= \pi_p^{\alpha} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 p_K^{\alpha} \psi_K^{(i-1)}, \\ \pi_m^{\alpha\beta}m^{\alpha\beta} &= \pi_m^{\alpha\beta} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 m_K^{\alpha\beta} \psi_K^{(i-1)}, & \pi_m^{\alpha}m^{\alpha} &= \pi_m^{\alpha} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 m_K^{\alpha} \psi_K^{(i-1)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\psi_K^{(i-1)} = \psi_K, \psi'_K, \psi''_K, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Po podstawieniu (3.8) do (3.3)<sub>1,2</sub> otrzymujemy uogólnione związki fizyczne

$$\Psi_K^{\alpha} = \sum_{L=1}^N \sum_{i=1}^3 \Psi_{KL}^{\alpha i} \psi_L^{(i-1)}, \quad \Phi_K^{\alpha} = \sum_{L=1}^N \sum_{i=1}^3 \Phi_{KL}^{\alpha i} \psi_L^{(i-1)}, \quad (3.10)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Psi_{KL}^{\gamma i} &= \int_{\Gamma(u^i)} \left( \pi_p^{1\alpha\gamma} v_{\alpha K} p_L^{1\alpha} + \pi_p^{1\gamma} v_K p_L^1 + \pi_m^{1\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} m_L^{1\alpha} + \pi_m^{1\gamma} \vartheta_K m_L^1 \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \Phi_{KL}^{\gamma i} &= \int_{\Gamma(u^i)} \left( \pi_p^{\alpha\beta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K} p_L^{\alpha\beta} + \pi_p^{\alpha\gamma} \gamma_{\alpha K} p_L^{\alpha} + \pi_m^{\alpha\beta\gamma} \kappa_{\alpha\beta K} m_L^{\alpha\beta} + \pi_m^{\alpha\gamma} \kappa_{\alpha K} m_L^{\alpha} \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.11)$$

W przypadku gdy wszystkie parametry  $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^{\alpha\beta}$  są równe jedności, to po bezpośrednim uwzględnieniu (3.5) w (2.9) wobec  $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^*, \gamma_{\alpha} = \gamma_{\alpha}^*, \kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}^*, \kappa_{\alpha} = \kappa_{\alpha}^*$  (por. (2.10)) a następnie w (3.3)<sub>1,2</sub> uzyskujemy następujące wzory na uogólnione sztywności

$$\begin{aligned} p_K^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\xi\eta} \left( \gamma_{\xi\eta K}^1 + \delta_{2\gamma} \delta_{1\xi} v_{\eta K}^1 \right), & p_K^{\alpha} &= A^{\alpha\beta 1\eta} v_{\eta K}^2, \\ p_K^{\alpha\xi} &= A^{\alpha\xi} \left( \gamma_{\xi K}^1 + \delta_{2\gamma} \delta_{1\xi} v_K^1 \right), & p_K^{\alpha} &= A^{\alpha 1} v_K^2, \\ m_K^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\beta\xi\eta} \left( \kappa_{\xi\eta K}^1 + \delta_{2\gamma} \delta_{1\xi} \vartheta_{\eta K}^1 \right), & m_K^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\beta 1\eta} \vartheta_{\eta K}^2, \\ m_K^{\alpha\xi} &= B^{\alpha\xi} \left( \kappa_{\xi K}^1 + \delta_{2\gamma} \delta_{1\xi} \vartheta_K^1 \right), & m_K^{\alpha} &= B^{\alpha 1} \vartheta_K^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

oraz

$$\begin{aligned} \Psi_{KL}^{\gamma\delta} &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[ A^{1\alpha\xi\eta\gamma} v_{\alpha K} \gamma_{\xi\eta L}^{\delta} + A^{1\xi\gamma} v_K \gamma_{\xi L}^{\delta} + B^{1\alpha\xi\eta\gamma} \vartheta_{\alpha K} \kappa_{\xi\eta L}^{\delta} + B^{1\xi\gamma} \vartheta_K \kappa_{\xi L}^{\delta} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{2\delta} \left( A^{1\alpha 1\eta\gamma} v_{\alpha K} v_{\eta L}^1 + A^{11\gamma} v_K v_L^1 + B^{1\alpha 1\eta\gamma} \vartheta_{\alpha K} \vartheta_{\eta L}^1 + B^{11\gamma} \vartheta_K \vartheta_L^1 \right) \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{KL}^{\gamma\delta} &= \int_{\Gamma(u^1)} \left[ A^{\alpha\beta\xi\eta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K}^{\delta} \gamma_{\xi\eta L}^{\delta} + A^{\alpha\xi\gamma} \gamma_{\alpha K}^{\delta} \gamma_{\xi L}^{\delta} + B^{\alpha\beta\xi\eta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K}^{\delta} \gamma_{\xi\eta L}^{\delta} + B^{\alpha\xi\gamma} \gamma_{\alpha K}^{\delta} \gamma_{\xi L}^{\delta} + \right. \\ &+ \delta_{2\delta} \left( A^{\alpha\beta 1\eta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K}^1 v_{\eta L}^1 + A^{\alpha 1\gamma} \gamma_{\alpha K}^1 v_L^1 + B^{\alpha\beta 1\eta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K}^1 \vartheta_{\eta L}^1 + B^{\alpha 1\gamma} \gamma_{\alpha K}^1 \vartheta_L^1 \right) \left. \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \Psi_{KL}^{\gamma 3} &= \int_{\Gamma(u^1)} \left( A^{1\alpha 1\eta\gamma} v_{\alpha K}^2 v_{\eta L}^2 + A^{11\gamma} v_K^2 v_L^2 + B^{1\alpha 1\eta\gamma} \vartheta_{\alpha K}^2 \vartheta_{\eta L}^2 + B^{11\gamma} \vartheta_K^2 \vartheta_L^2 \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma. \\ \Phi_{KL}^{\gamma 3} &= \int_{\Gamma(u^1)} \left( A^{\alpha\beta 1\eta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K}^2 v_{\eta L}^2 + A^{\alpha 1\gamma} \gamma_{\alpha K}^2 v_L^2 + B^{\alpha\beta 1\eta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K}^2 \vartheta_{\eta L}^2 + B^{\alpha 1\gamma} \gamma_{\alpha K}^2 \vartheta_L^2 \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Po uwzględnieniu (3.10) w (3.1), (3.2) łatwo otrzymujemy równania różniczkowe i warunki brzegowego jednowymiarowego modelu stanu podstawowego — równania statyki jednowymiarowej teorii infinitezymalnej.

Następnie wyprowadzimy równania stanu zaburzonego. Obliczając z (2.22), (2.23) przyrosty reakcji więzów, a z (2.19) wariacje składowych stanu przemieszczenia, i uwzględniając w (2.29), wykonując całkowanie przy wykorzystaniu znanych z geometrii powierzchni wzorów, zależności (2.20), (2.31) oraz  $\pi = \{\Gamma(u^1), u^1 \in \langle u_1^1, u_2^1 \rangle\}$  otrzymujemy wobec dowolności i niezależności  $\delta\psi_K (K = 1, 2, \dots, N)$  równania równowagi

$$\partial \Psi_K^{0''} - \partial \Phi_K^2 - \partial \Psi_K^1 + \partial \Phi_K^0 = 0, \quad (u^1 \in (u_1^1, u_2^1)) \quad (3.14)$$

i warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \partial \Psi_K^{0'} - \partial \Phi_K^2 - \partial \Psi_K^1 &= 0 \quad \text{lub} \quad \partial \psi_K = 0, \\ \partial \Psi_K^0 &= 0 \quad \text{lub} \quad \partial \psi_K' = 0 \quad (u^1 = u_\alpha^1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\begin{aligned} \partial \Psi_K^0 &= \int_{\Gamma(u^1)} \left( \hat{p}^{1\alpha} v_{\alpha K}^e + \hat{p}^1 v_K^e + \hat{m}^{1\alpha} \vartheta_{\alpha K}^e + \hat{m}^1 \vartheta_K^e \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} du^2, \\ \partial \Phi_K^0 &= \int \left[ \hat{p}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta K}^e + \hat{p}^\alpha \gamma_{\alpha K}^e + \hat{m}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta K}^e + \hat{m}^\alpha \gamma_{\alpha K}^e - e^{\alpha\gamma} (\gamma_{\beta\gamma}^* \pi_\delta^\beta \partial p^\delta + \partial \gamma_{\beta\gamma}^* \pi_\delta^\beta p^{\delta\alpha}) \vartheta_{\alpha K}^e - \right. \\ &\left. - e_\beta^\alpha (\gamma_{\beta\gamma}^* \pi_\delta^\beta \partial p^{\gamma\delta} + \partial \gamma_{\beta\gamma}^* \pi_\delta^\beta p^{\gamma\delta}) \vartheta_{\alpha K}^e - e_\beta^\alpha (\gamma_{\beta\gamma}^* \pi_\delta^\beta \partial p^{\delta\alpha} + \partial \gamma_{\beta\gamma}^* \pi_\delta^\beta p^{\delta\alpha}) \vartheta_K^e \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdzie  $\gamma_{\alpha\beta K}^e, \gamma_{\alpha K}^e, \gamma_{\alpha\beta K}^e, \gamma_{\alpha K}^e$  są określone za pomocą (3.4).

Podstawiając (2.19) do (2.2), (2.25) znajdujemy (por. (3.5))

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha\beta} &= \sum_{K=1}^N \left[ \gamma_{\alpha\beta K}^0 \psi_K + \gamma_{\beta\alpha K}^2 \psi_K' + \delta_{1\alpha} \left( v_{\beta K}^1 \psi_K' + v_{\beta K}^2 \psi_K'' \right) \right], \\ \bar{\gamma}_\alpha &= \sum_{K=1}^N \left[ \gamma_{\alpha K}^0 \psi_K + \gamma_{\alpha K}^2 \psi_K' + \delta_{1\alpha} \left( v_K^1 \psi_K' + v_K^2 \psi_K'' \right) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\partial\gamma_{\alpha\beta}^0 = \sum_{K=1}^N \left[ \gamma_{\alpha\beta K}^0 \partial\psi_K + \gamma_{\alpha\beta K}^2 \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( v_{\beta K} \partial\psi'_K + v_{\beta K} \partial\psi''_K \right) \right], \quad (3.17)$$

[cd.]

$$\partial\gamma_{\alpha}^0 = \sum_{K=1}^N \left[ \gamma_{\alpha K}^0 \partial\psi_K + \gamma_{\alpha K}^2 \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( v_K \partial\psi'_K + v_K \partial\psi''_K \right) \right],$$

gdzie (por. (3.4))

$$\gamma_{\alpha\beta K}^0 = \gamma_{\alpha\beta K} + e_{\alpha\beta} \vartheta_K^0, \quad \gamma_{\alpha K}^0 = \gamma_{\alpha K} - e_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{\beta K}^0. \quad (3.18)$$

Postępując analogicznie jak przy wyprowadzeniu związków (3.5) - (3.8) otrzymujemy na podstawie (2.27), (2.28), (2.30), (2.31)

$$\begin{aligned} \partial\gamma_{\alpha\beta}^* &= \sum_{K=1}^N \left[ \gamma_{\alpha\beta K}^1 \partial\psi_K + \gamma_{\alpha\beta K}^2 \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( v_{\beta K} \partial\psi'_K + v_{\beta K} \partial\psi''_K \right) \right], \\ \partial\gamma_{\alpha}^* &= \sum_{K=1}^N \left[ \gamma_{\alpha K}^1 \partial\psi_K + \gamma_{\alpha K}^2 \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( v_K \partial\psi'_K + v_K \partial\psi''_K \right) \right], \\ \partial\kappa_{\alpha\beta}^* &= \sum_{K=1}^N \left[ \kappa_{\alpha\beta K}^1 \partial\psi_K + \kappa_{\alpha\beta K}^2 \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( \vartheta_{\beta K}^1 \partial\psi'_K + \vartheta_{\beta K}^2 \partial\psi''_K \right) \right], \\ \partial\kappa_{\alpha}^* &= \sum_{K=1}^N \left[ \kappa_{\alpha K}^1 \partial\psi_K + \kappa_{\alpha K}^2 \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left( \vartheta_K^1 \partial\psi'_K + \vartheta_K^2 \partial\psi''_K \right) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

a następnie

$$\begin{aligned} \pi_p^{*\alpha\beta} \partial p^{\alpha\beta} &= \pi_p^{*\alpha\beta} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 \partial p_K^{\alpha\beta} \partial\psi_K^{(i-1)}, & \pi_p^{*\alpha} \partial p^{\alpha} &= \pi_p^{*\alpha} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 \partial p_K^{\alpha} \partial\psi_K^{(i-1)}, \\ \pi_m^{*\alpha\beta} \partial m^{\alpha\beta} &= \pi_m^{*\alpha\beta} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 \partial m_K^{\alpha\beta} \partial\psi_K^{(i-1)}, & \pi_m^{*\alpha} \partial m^{\alpha} &= \pi_m^{*\alpha} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 \partial m_K^{\alpha} \partial\psi_K^{(i-1)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

gdzie

$$\partial\psi_K^{(i-1)} = \partial\psi_K, \partial\psi'_K, \partial\psi''_K \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \quad (3.21)$$

$\partial p_K^{\alpha\beta}$ ,  $\partial p_K^{\alpha}$ ,  $\partial m_K^{\alpha\beta}$ ,  $\partial m_K^{\alpha}$  są znanymi funkcjami zmiennych ( $u^{\alpha}$ ) (równymi odpowiednio  $p_K^{\alpha\beta}$ ,  $p_K^{\alpha}$ ,  $m_K^{\alpha\beta}$ ,  $m_K^{\alpha}$ , jeśli  $\pi_p^{*\alpha\beta} = \pi_p^{\alpha\beta}$ ,  $\pi_p^{*\alpha} = \pi_p^{\alpha}$ ,  $\pi_m^{*\alpha\beta} = \pi_m^{\alpha\beta}$ ,  $\pi_m^{*\alpha} = \pi_m^{\alpha}$ ).

Uwzględniając (2.20), (2.31) w (2.26), a następnie w (3.16) przekształcamy wyrażenia na  $\partial\Psi_K^0$ ,  $\partial\Phi_K^0$  następująco:

$$\partial\Psi_K^0 = \partial\Psi_K^1 + \partial\Psi_K^2 + \partial\Psi_K^3, \quad \partial\Phi_K^0 = \partial\Phi_K^1 + \partial\Phi_K^2 + \partial\Phi_K^3, \quad (3.22)$$

gdzie

$$\partial\Psi_K^1 = \int_{\Gamma(u^1)} \left( \pi_p^{*1\alpha} \partial p^{1\alpha} v_{\alpha K} + \pi_p^{*1} \partial p^1 v_K + \pi_m^{*1\alpha} \partial m^{1\alpha} \vartheta_{\alpha K} + \pi_m^{*1} \partial m^1 \vartheta_K \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 \partial \Phi_K^0 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left( \pi_p^{*\alpha\beta} \partial p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta K} + \pi_p^{*\alpha} \partial p^{\alpha} \gamma_{\alpha K} + \pi_m^{*\alpha\beta} \partial m^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta K} + \pi_m^{*\alpha} \partial m^{\alpha} \kappa_{\alpha K} \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\
 \partial \Psi_K^0 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[ g^{\alpha\delta} (\partial \dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_p^{1\gamma} p^{1\gamma} - \partial \dot{\gamma}_{\delta} \pi_p^1 p^1) v_{\alpha K} + \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{1\gamma} p^{1\gamma} v_K + \right. \\
 &\quad \left. + g^{\alpha\delta} (\partial \dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_m^{1\gamma} m^{1\gamma} - \partial \dot{\gamma}_{\delta} \pi_m^1 m^1) v_{\alpha K} + \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_m^{1\gamma} m^{1\gamma} v_K \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\
 \partial \Phi_K^2 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[ g^{\alpha\delta} (\partial \dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_p^{\beta\gamma} p^{\beta\gamma} - \partial \dot{\gamma}_{\delta} \pi_p^{\beta} p^{\beta}) \gamma_{\beta\alpha K} + \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{\beta\gamma} p^{\beta\gamma} \gamma_{\beta K} + \right. \\
 &\quad \left. + g^{\alpha\delta} (\partial \dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_m^{\beta\gamma} m^{\beta\gamma} - \partial \dot{\gamma}_{\delta} \pi_m^{\beta} m^{\beta}) \kappa_{\beta\alpha K} + \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_m^{\beta\gamma} m^{\beta\gamma} \kappa_{\beta K} - \right. \\
 &\quad \left. - (e^{\alpha\gamma} \partial \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_p^{\beta} p^{\beta} - e_{\beta}^{\alpha} \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{\gamma\beta} p^{\gamma\beta}) v_{\alpha K} - e_{\alpha}^{\gamma} \partial \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_p^{\beta\alpha} p^{\beta\alpha} v_K \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \quad (3.23) \\
 &\quad \text{[cd.]} \\
 \partial \Psi_K^3 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[ g^{\alpha\delta} (\dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_p^{1\gamma} \partial p^{1\gamma} - \dot{\gamma}_{\delta} \pi_p^1 \partial p^1) v_{\alpha K} + \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{1\gamma} \partial p^{1\gamma} v_K + \right. \\
 &\quad \left. + g^{\alpha\delta} (\dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_m^{1\gamma} \partial m^{1\gamma} - \dot{\gamma}_{\delta} \pi_m^1 \partial m^1) v_{\alpha K} + \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_m^{1\gamma} \partial m^{1\gamma} v_K \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\
 \partial \Phi_K^3 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[ g^{\alpha\delta} (\dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_p^{*\beta\gamma} \partial p^{\beta\gamma} - \dot{\gamma}_{\delta} \pi_p^{*\beta} \partial p^{\beta}) \gamma_{\beta\alpha K} + \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{*\beta\gamma} \partial p^{\beta\gamma} \gamma_{\beta K} + \right. \\
 &\quad \left. + g^{\alpha\delta} (\dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_m^{*\beta\gamma} \partial m^{\beta\gamma} - \dot{\gamma}_{\delta} \pi_m^{*\beta} \partial m^{\beta}) \kappa_{\beta\alpha K} + \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_m^{*\beta\gamma} \partial m^{\beta\gamma} \kappa_{\beta K} - \right. \\
 &\quad \left. - (e^{\alpha\gamma} \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_p^{*\beta} \partial p^{\beta} - e_{\beta}^{\alpha} \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{*\gamma\beta} \partial p^{\gamma\beta}) v_{\alpha K} - e_{\alpha}^{\gamma} \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_p^{*\beta\alpha} \partial p^{\beta\alpha} v_K \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu (3.17)<sub>3,4</sub> do (3.23)<sub>3,4</sub>, a (3.20) do (3.23)<sub>1,2,5,6</sub> i uwzględnieniu (3.21) można wielkości (3.23) łatwo doprowadzić do postaci ( $j = 1, 2, 3$ )

$$\partial \Psi_K^j = \sum_{L=1}^N \sum_{i=1}^3 \Psi_{KL}^i \partial \psi_L^{(i-1)}, \quad \partial \Phi_K^j = \sum_{L=1}^N \sum_{i=1}^3 \Phi_{KL}^i \partial \psi_L^{(i-1)}, \quad (3.24)$$

gdzie przykładowo jest (por. (3.11))

$$\begin{aligned}
 \Psi_{KL}^i &= \int_{\Gamma(u^i)} \left( \pi_p^{1\alpha} v_{\alpha K} \partial p_L^{\alpha} + \pi_p^i v_K \partial p_L^i + \pi_m^{1\alpha} v_{\alpha K} \partial m_L^{\alpha} + \pi_m^i v_K \partial m_L^i \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\
 \Phi_{KL}^i &= \int_{\Gamma(u^i)} \left( \pi_p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta K} \partial p_L^{\alpha\beta} + \pi_p^{\alpha} \gamma_{\alpha K} \partial p_L^{\alpha} + \pi_m^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta K} \partial m_L^{\alpha\beta} + \pi_m^{\alpha} \kappa_{\alpha K} \partial m_L^{\alpha} \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma. \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Zależne od składowych stanu napięcia w stanie podstawowym miary sztywności  $\Psi_{KL}^{0l}$ ,  $\Phi_{KL}^{0l}$  można po wykorzystaniu (3.8) przedstawić w funkcji liniowej przemieszczeń uogólnionych tego stanu

$$\Psi_{KL}^{0l} = \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^3 {}^j\Psi_{KL}^{0l} \psi_j^{(1-j)}, \quad \Phi_{KL}^{0l} = \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^3 {}^j\Phi_{KL}^{0l} \psi_j^{(j-1)} \quad (3.26)$$

i podobnie zależne od deformacji konfiguracji początkowej miary sztywności  $\Psi_{KL}^{0l}$ ,  $\Phi_{KL}^{0l}$  można po uwzględnieniu (3.17)<sub>1,2</sub>, (3.9) wyrazić następująco:

$$\Psi_{KL}^{0l} = \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^3 {}^j\Psi_{KL}^{0l} \psi_j^{(j-1)}, \quad \Phi_{KL}^{0l} = \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^3 {}^j\Phi_{KL}^{0l} \psi_j^{(j-1)}. \quad (3.27)$$

Wyznaczając z równań (3.1), (3.2), (3.10) jednowymiarowego problemu brzegowego uogólnione przemieszczenia  $\psi_K$  w funkcji parametru stanu obciążenia, a następnie podstawiając je do (3.26), (3.27) otrzymujemy na podstawie (3.14), (3.15) i (3.22), (3.24) równania jednowymiarowego uogólnionego zagadnienia na wartości własne, z którego obliczamy krytyczne wartości parametru obciążenia i postacie wyboczenia określone przez  $\partial\psi_K$ .

Jeżeli pominiemy wpływ deformacji powierzchni  $\pi$  w stanie podstawowym na wyżej opisany problem stateczności dźwigara, to zgodnie z (2.34) w związkach (3.22) należy przyjąć (por. [1])

$$\partial\Psi_K^0 = 0, \quad \partial\Phi_K^0 = 0. \quad (3.28)$$

#### 4. Uwagi końcowe

Wyprowadzone w p. 3 ogólne równania mogą być podstawą budowy jednowymiarowych modeli stateczności.

Jeżeli kształt i struktura dźwigara odpowiada przyjętym w pracy założeniom, a szeroko rozumiane doświadczenia wskazują na praktycznie uzasadnioną możliwość przyjęcia hipotez geometrycznych i statycznych prowadzących do rozważanych postaci równań więzów, to w wyniku postępowania opisanego w p. 3 otrzymujemy stosunkowo prosty model zagadnienia. Oczywiście istotnym czynnikiem jest również typ obciążenia zewnętrznego i warunków podparcia oraz relacje między charakterystykami geometrycznymi dźwigara.

Konkretny przykład zastosowania przedstawionej koncepcji ujęcia problemu stateczności wraz z propozycją dalszych uproszczeń otrzymanych równań zamieszczono w pracy [8].

Prezentowane w p. 2 i 3 rozważania wskazują, że uogólnienie koncepcji na przypadek teorii geometrycznie nieliniowej jest możliwe. Jednak złożoność odpowiednich równań i wzorów oraz stopni trudności uzyskania rozwiązania tych równań znacznie wzrasta.

Pewne inne uogólnienia i rozszerzenia w zakresie liniowym możliwe stosunkowo łatwo do adaptacji na zagadnienie stateczności (w rozumieniu tej pracy) zawiera poświęcona problemom statyki i drgań obszerna rozprawa [7]. Rozszerzenia te dotyczą głównie struktury dźwigara, kształtu powierzchni podstawowej i postaci równań więzów wewnętrznych.



W pozycji [7] poruszono również tematykę poprawności i dokładności modelu jednowymiarowego i podano bardziej wyczerpującą literaturę dotyczącą ciągłych modeli dźwigarów siatkowych i mechaniki kontinuum z więzami wewnętrznymi.

Obszerną bibliografię problemu matematycznego formułowania zagadnień z mechaniki ustrojów siatkowych (w tym zagadnienia stateczności) zawierają monografie [3, 4, 5] oraz rozprawa przeglądowa [9].

#### Spis literatury

1. R. NAGÓRSKI, *Stability of a one-dimensional continuous model surface lattice beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 30, 5 - 6, 1982.
2. Cz. WOŹNIAK, *On the non-standard continuum mechanics. I. Basic concepts. Continua with constrained kinematic fields. II. Continua with kinetic and kinematic-kinetic constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 24, 1, 1976.
3. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
4. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
5. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
6. R. NAGÓRSKI, *Statics and vibrations of a one-dimensional continuous model of surface lattice beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 30, 5 - 6, 1982.
7. R. NAGÓRSKI, *Jednowymiarowe modele ciągle siatkowych dźwigarów powierzchniowych*, Zesz. Nauk. Pol. Warszawskiej, Seria: Bud. (w druku).
8. R. NAGÓRSKI, *Jednowymiarowy ciągły model stateczności sprężystej płaskiego dźwigara siatkowego*, Mech. Teor. i Stos. (ibid.).
9. W. GUTKOWSKI, *Mechanika ustrojów siatkowych*, Usp. Mech., t. 1, nr 3/4, 1978.

#### Резюме

#### УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ СЕТКООБРАЗНЫХ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Предметом настоящей работы являются линейные уравнения устойчивости в смысле Эйлера поверхностных упругих систем с густой регулярной сеткой элементов. Эти уравнения получены в результате применения положений механики континуума с внутренними связями Ч. Возняка уравнениям поверхности типа Коссератов являющейся непрерывной моделью рассматриваемых конструкций

#### Summary

#### STABILITY OF A ONE-DIMENSIONAL CONTINUOUS MODEL OF LATTICE-TYPE ELASTIC SURFACE STRUCTURES

The paper deals with linear equations of stability for a one-dimensional continuous model of elastic surface structures with a dense regular lattice of elements. The equations were obtained by applying Woźniak's concept of continuum mechanics with internal constraints to equations of stability of Cosserat's surface, being two-dimensional continuous model for surface grids and perforated shells. The condition of stability in the Euler sense was formulated, i.e. the adequate one-dimensional boundary — value problem was presented.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 listopada 1983 roku*



## JEDNOWYMIAROWY CIĄGŁY MODEL STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ PŁASKIEGO DŹWIGARA SIATKOWEGO

ROMAN NAGÓRSKI

*Politechnika Warszawska*

### 1. Wstęp

Przedmiotem pracy są równania i przykłady rozwiązania problemu stateczności w zakresie sprężystym płaskiego dźwigara siatkowego o gęstej, regularnej i ortogonalnej siatce prętów przyzmatycznych.

Celem tej rozprawy jest podanie przykładowej realizacji zaproponowanej w pracy [1] koncepcji budowy równań ciągłego, liniowego modelu jednowymiarowego stateczności dźwigarów siatkowych ukształtowanych na powierzchniach w postaci jednoparametrowej rodziny konturów. Do sformułowania wymienionych wyżej równań wykorzystano w [1] metody mechaniki kontinuum z więzami wewnętrznymi [2] i równania ciągłego dwuwymiarowego modelu rozpatrywanych dźwigarów [3].

Rozważymy płaski ustrój w kształcie prostokąta (siatkowy płaskownik), dla którego po przyjęciu określonych hipotez geometrycznych i statycznych (analogicznych jak w teorii prętów pełnościennych) wyprowadzimy równania stateczności w sensie Eulera. Podamy przykłady rozwiązania dla konstrukcji w kształcie wspornika, utwierdzonego wzdłuż jednej krawędzi i obciążonego osiowo wzdłuż krawędzi przeciwległej, przyjmując pręty o przekroju prostokątnym i stałe charakterystyki geometryczno-fizyczne w obszarze dźwigara.

Szczegółowe założenia, dotyczące przyjętego modelu stateczności, podano w pracy [1].

### 2. Równania stateczności teorii dwuwymiarowej z więzami wewnętrznymi

Rozważymy w przestrzeni  $Ox^1x^2x^3$  obszar prostokątny na płaszczyźnie  $(x^1, x^2) = (x, y)$ , będącej płaszczyzną podstawową dźwigara w stanie nieodkształconym i nienaprężonym, przyjmując (rys. 1)

$$x^1 = x \in (0, L), \quad x^2 = y \in \left(-\frac{\tilde{L}}{2}, \frac{\tilde{L}}{2}\right). \quad (2.1)$$

Wykorzystamy następujące liniowe równania podstawowego stanu odkształconego [1]:  
— równania równowagi

$$\begin{aligned}
 p_{,x}^{11} + p_{,y}^{21} + r^1 + q^1 &= 0, & p_{,x}^{12} + p_{,x}^{22} + r^2 + q^2 &= 0 \\
 p_{,x}^{11} + p_{,y}^{21} + r + q &= 0, & m_{,x}^{11} + m_{,y}^{21} + p^2 + s^1 + h^1 &= 0 \\
 m_{,x}^{12} + m_{,y}^{22} - p^1 + s^2 + h^2 &= 0, & m_{,x}^{11} + m_{,y}^{21} + p^{12} - p^{21} + s + h &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

— statyczne warunki brzegowe  
dla  $x = 0$

$$\begin{aligned}
 -p^{11} &= 'p^1 + \tau^1, & -p^{12} &= 'p^2 + \tau^2, & -p^1 &= 'p + \tau, \\
 -m^{11} &= 'm^1 + \mu^1, & -m^{12} &= 'm^2 + \mu^2, & -m^1 &= 'm + \mu,
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

dla  $x = L$

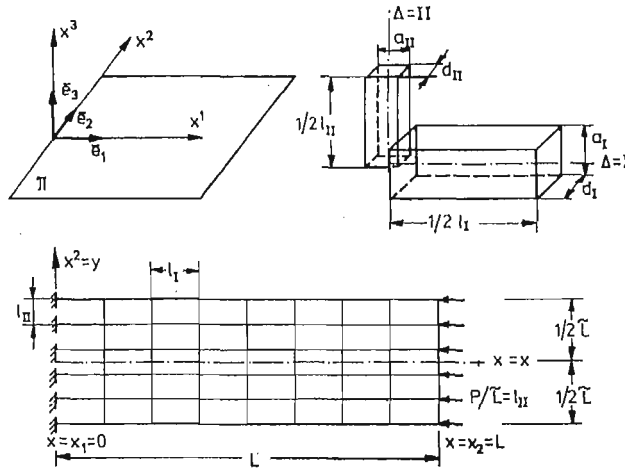
$$\begin{aligned}
 p^{11} &= 'p^1 + \tau^1, & p^{12} &= 'p^2 + \tau^2, & p^1 &= 'p + \tau, \\
 m^{11} &= 'm^1 + \mu^1, & m^{12} &= 'm^2 + \mu^2, & m^1 &= 'm + \mu,
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

dla  $y = -\frac{1}{2}\tilde{L}$

$$\begin{aligned}
 -p^{21} &= 'p^1 + \tau^1, & -p^{22} &= 'p^2 + \tau^2, & -p^2 &= 'p + \tau, \\
 -m^{21} &= 'm^1 + \mu^1, & -m^{22} &= 'm^2 + \mu^2, & -m^2 &= 'm + \mu,
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

dla  $y = \frac{1}{2}\tilde{L}$

$$\begin{aligned}
 p^{21} &= 'p^1 + \tau^1, & p^{22} &= 'p^2 + \tau^2, & p^2 &= 'p + \tau, \\
 m^{21} &= 'm^1 + \mu^1, & m^{22} &= 'm^2 + \mu^2, & m^2 &= 'm + \mu,
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$



Rys. 1

gdzie  $p^{\alpha\beta}$ ,  $p^\alpha$  i  $m^{\alpha\beta}$ ,  $m^\alpha$  — oznaczają składowe stanu napięcia typu sił i momentów,  $q^\alpha$ ,  $q$ ,  $h^\alpha$ ,  $h$  i  $'p^\alpha$ ,  $'p$ ,  $'m^\alpha$ ,  $'m$  — składowe stanu obciążenia zewnętrznego powierzchniowego i brzegowego,  $r^\alpha$ ,  $r$ ,  $s^\alpha$ ,  $s$  i  $\tau^\alpha$ ,  $\tau$ ,  $\mu^\alpha$ ,  $\mu$  — reakcje powierzchniowe i brzegowe więzów wewnętrznych (w bazie  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$ ,  $\bar{e}_3$ ) —  $\alpha, \beta = 1, 2$ , rys. 1),

— związki geometryczne

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11}^* &= v_{1,x}, & \gamma_{12}^* &= v_{2,x} - \vartheta, & \gamma_{21}^* &= v_{1,y} + \vartheta, & \gamma_{22}^* &= v_{2,y}, \\
 \gamma_1^* &= v_{,x} + \vartheta_2, & \gamma_2^* &= v_{,y} - \vartheta_1, & \kappa_1^* &= \vartheta_{,x}, & \kappa_2^* &= \vartheta_{,y}, \\
 \kappa_{11}^* &= \vartheta_{1,x}, & \kappa_{12}^* &= \vartheta_{2,x}, & \kappa_{21}^* &= \vartheta_{1,y}, & \kappa_{22}^* &= \vartheta_{2,y},
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie  $v_\alpha$ ,  $v$  i  $\vartheta_\alpha$ ,  $\vartheta$  są składowymi wektora małego przemieszczenia i obrotu.

— związki fizyczne, które dla dźwigara prętowego złożonego z dwu rodzin ortogonalnych prętów przyrządowych sztywno połączonych w węzłach i osiach równoległych do linii parametrycznych  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  przyjmują postać (rys. 1):

$$\begin{aligned}
 p^{11} &= R_I \gamma_{11}, & p^{12} &= \check{R}_I \gamma_{12}, & p^{21} &= \check{R}_{II} \gamma_{21}, & p^{22} &= R_{II} \gamma_{22}, \\
 p^1 &= \check{R}_I \gamma_1, & p^2 &= \check{R}_{II} \gamma_2, & m^1 &= \check{S}_I \kappa_1, & m^2 &= \check{S}_{II} \kappa_2, \\
 m^{11} &= S_I \kappa_{11}, & m^{12} &= \check{S}_I \kappa_{12}, & m^{21} &= \check{S}_{II} \kappa_{21}, & m^{22} &= S_{II} \kappa_{22},
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie  $\gamma_{\alpha\beta}$ ,  $\gamma_\alpha$ ,  $\kappa_{\alpha\beta}$ ,  $\kappa_\alpha$  są składowymi stanu odkształcenia,  $R_I$ ,  $\check{R}_I$ ,  $\check{R}_{II}$ ,  $S$ ,  $\check{S}_I$ ,  $\check{S}_{II}$  — ciągłymi miarami sztywności sprężystej dla prętów rodziny  $\Delta$  ( $\Delta = I, II$ ),

— zasady idealności więzów typu kinematycznego (geometrycznego)

$$\begin{aligned}
 &\int_0^L \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} (r^1 \delta v_1 + r^2 \delta v_2 + r \delta v + s^1 \delta \vartheta_1 + s^2 \delta \vartheta_2 + s \delta \vartheta) dy dx + \int_0^L [(\tau^1 \delta v_1 + \tau^2 \delta v_2 + \tau \delta v + \\
 &+ \mu^1 \delta \vartheta_1 + \mu^2 \delta \vartheta_2 + \mu \delta \vartheta)|_{y=-\frac{1}{2}\check{L}} + (\tau^1 \delta v_1 + \tau^2 \delta v_2 + \tau \delta v + \mu^1 \delta \vartheta_1 + \mu^2 \delta \vartheta_2 + \mu \delta \vartheta)|_{y=\frac{1}{2}\check{L}}] dx + \\
 &+ \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} [(\tau^1 \delta v_1 + \tau^2 \delta v_2 + \tau \delta v + \mu^1 \delta \vartheta_1 + \mu^2 \delta \vartheta_2 + \mu \delta \vartheta)|_{x=0} + \\
 &+ (\tau^1 \delta v_1 + \tau^2 \delta v_2 + \tau \delta v + \mu^1 \delta \vartheta_1 + \mu^2 \delta \vartheta_2 + \mu \delta \vartheta)|_{x=L}] dy = 0 \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

dla dowolnych wariacji  $\delta v_\alpha$ ,  $\delta v$ ,  $\delta \vartheta_\alpha$ ,  $\delta \vartheta$  ( $\alpha = 1, 2$ ) zgodnych z więzami,

— zasadę idealności więzów typu kinetycznego (statycznego)

$$\begin{aligned}
 &\int_0^L \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} [(\gamma_{11} - \gamma_{11}^*) \delta p^{11} + (\gamma_{12} - \gamma_{12}^*) \delta p^{12} + (\gamma_{21} - \gamma_{21}^*) \delta p^{21} + (\gamma_{22} - \gamma_{22}^*) \delta p^{22} + \\
 &+ (\gamma_1 - \gamma_1^*) \delta p^1 + (\gamma_2 - \gamma_2^*) \delta p^2 + (\kappa_1 - \kappa_1^*) \delta m^1 + (\kappa_2 - \kappa_2^*) \delta m^2 + \\
 &+ (\kappa_{11} - \kappa_{11}^*) \delta m^{11} + (\kappa_{12} - \kappa_{12}^*) \delta m^{12} + (\kappa_{21} - \kappa_{21}^*) \delta m^{21} + (\kappa_{22} - \kappa_{22}^*) \delta m^{22}] dy dx = 0 \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

dla dowolnych wariacji  $\delta p^{\alpha\beta}$ , ...,  $\delta m^\alpha$  zgodnych z więzami.

Równania więzów wewnętrznych sprecyzujemy w p. 3.

Następnie wykorzystamy zlinieryzowane wariacje równań dla zaburzonego stanu odkształconego w stosunku do stanu podstawowego — liniowe równania stateczności [1]:

— równania równowagi

$$\begin{aligned}
 \partial \hat{p}_{,x}^{11} + \partial \hat{p}_{,y}^{21} + \partial r^1 &= 0, & \partial \hat{p}_{,x}^{12} + \partial \hat{p}_{,y}^{22} \partial r^2 &= 0, \\
 \partial \hat{p}_{,x}^1 + \partial \hat{p}_{,y}^2 + \partial r &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \dot{m}_{,x}^{11} + \partial \dot{m}_{,y}^{21} + \partial \dot{p}^2 + \partial \dot{\gamma}_{12} p^1 + \dot{\gamma}_{12} \partial p^1 + \partial \dot{\gamma}_{22} p^2 + \dot{\gamma}_{22} \partial p^2 - \partial \dot{\gamma}_1 p^{12} - \dot{\gamma}_1 \partial p^{12} - \\ - \partial \dot{\tau}_2 p^{22} - \dot{\gamma}_2 \partial p^{22} + \partial s^1 = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \partial \dot{m}_{,x}^{12} + \partial \dot{m}_{,y}^{22} - \partial \dot{p}^1 - \partial \dot{\gamma}_{11} p^1 - \dot{\gamma}_{11} \partial p^1 - \partial \dot{\gamma}_{21} p^2 - \dot{\gamma}_{21} \partial p^2 + \partial \dot{\gamma}_1 p^{11} + \dot{\gamma}_1 \partial p^{11} + \\ + \partial \dot{\gamma}_2 p^{21} + \dot{\gamma}_2 \partial p^{21} + \partial s^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \dot{m}_{,x}^1 + \partial \dot{m}_{,y}^2 + \partial \dot{p}^{12} - \partial \dot{p}^{21} - \partial \dot{\gamma}_{12} p^{11} - \dot{\gamma}_{12} \partial p^{11} - \partial \dot{\gamma}_{22} p^{21} - \dot{\gamma}_{22} \partial p^{21} + \\ + \partial \dot{\gamma}_{11} p^{12} + \dot{\gamma}_{11} \partial p^{12} + \partial \dot{\gamma}_{21} p^{22} + \dot{\gamma}_{21} \partial p^{22} = 0. \end{aligned}$$

— statyczne warunki brzegowe

dla  $x = 0$

$$\begin{aligned} -\partial \dot{p}^{11} = \partial \tau^1, \quad -\partial \dot{p}^{12} = \partial \tau^2, \quad -\partial \dot{p}^1 = \partial \tau, \\ -\partial \dot{m}^{11} = \partial \mu^1, \quad -\partial \dot{m}^{12} = \partial \mu^2, \quad -\partial \dot{m}^1 = \partial \mu, \end{aligned} \quad (2.12)$$

dla  $x = L$

$$\begin{aligned} \partial \dot{p}^{11} = \partial \tau^1, \quad \partial \dot{p}^{12} = \partial \tau^2, \quad \partial \dot{p}^1 = \partial \tau, \\ \partial \dot{m}^{11} = \partial \mu^1, \quad \partial \dot{m}^{12} = \partial \mu^2, \quad \partial \dot{m}^1 = \partial \mu, \end{aligned} \quad (2.13)$$

dla  $y = -\frac{1}{2} \tilde{L}$

$$\begin{aligned} -\partial \dot{p}^{21} = \partial \tau^1, \quad -\partial \dot{p}^{22} = \partial \tau^2, \quad -\partial \dot{p}^2 = \partial \tau, \\ -\partial \dot{m}^{21} = \partial \mu^1, \quad -\partial \dot{m}^{22} = \partial \mu^2, \quad -\partial \dot{m}^2 = \partial \mu, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dla  $y = \frac{1}{2} L$

$$\begin{aligned} \partial \dot{p}^{21} = \partial \tau^1, \quad \partial \dot{p}^{22} = \partial \tau^2, \quad \partial \dot{p}^2 = \partial \tau, \\ \partial \dot{m}^{21} = \partial \mu^1, \quad \partial \dot{m}^{22} = \partial \mu^2, \quad \partial \dot{m}^2 = \partial \mu, \end{aligned} \quad (2.15)$$

— związki statyczne

$$\begin{aligned} \partial \dot{p}^{11} &= \partial p^{11} + \partial \dot{\gamma}_{11} p^{11} + \dot{\gamma}_{11} \partial p^{11} + \partial \dot{\gamma}_{21} p^{12} + \dot{\gamma}_{21} \partial p^{12} - \partial \dot{\gamma}_1 p^1 - \dot{\gamma}_1 \partial p^1, \\ \partial \dot{p}^{12} &= \partial p^{12} + \partial \dot{\gamma}_{12} p^{11} + \dot{\gamma}_{12} \partial p^{11} + \partial \dot{\gamma}_{22} p^{12} + \dot{\gamma}_{22} \partial p^{12} - \partial \dot{\gamma}_2 p^1 - \dot{\gamma}_2 \partial p^1, \\ \partial \dot{p}^{21} &= \partial p^{21} + \partial \dot{\gamma}_{11} p^{21} + \dot{\gamma}_{11} \partial p^{21} + \partial \dot{\gamma}_{21} p^{22} + \dot{\gamma}_{21} \partial p^{22} - \partial \dot{\gamma}_1 p^2 - \dot{\gamma}_1 \partial p^2, \\ \partial \dot{p}^{22} &= \partial p^{22} + \partial \dot{\gamma}_{12} p^{21} + \dot{\gamma}_{12} \partial p^{21} + \partial \dot{\gamma}_{22} p^{22} + \dot{\gamma}_{22} \partial p^{22} - \partial \dot{\gamma}_2 p^2 - \dot{\gamma}_2 \partial p^2, \\ \partial \dot{p}^1 &= \partial p^1 + \partial \dot{\gamma}_1 p^{11} + \dot{\gamma}_1 \partial p^{11} + \partial \dot{\gamma}_2 p^{12} + \dot{\gamma}_2 \partial p^{12}, \\ \partial \dot{p}^2 &= \partial p^2 + \partial \dot{\gamma}_1 p^{21} + \dot{\gamma}_1 \partial p^{21} + \partial \dot{\gamma}_2 p^{22} + \dot{\gamma}_2 \partial p^{22}, \\ \partial \dot{m}^{11} &= \partial m^{11} + \partial \dot{\gamma}_{11} m^{11} + \dot{\gamma}_{11} \partial m^{11} + \partial \dot{\gamma}_{21} m^{12} + \dot{\gamma}_{21} \partial m^{12} - \partial \dot{\gamma}_1 m^1 - \dot{\gamma}_1 \partial m^1, \\ \partial \dot{m}^{12} &= \partial m^{12} + \partial \dot{\gamma}_{12} m^{11} + \dot{\gamma}_{12} \partial m^{11} + \partial \dot{\gamma}_{22} m^{12} + \dot{\gamma}_{22} \partial m^{12} - \partial \dot{\gamma}_2 m^1 - \dot{\gamma}_2 \partial m^1, \\ \partial \dot{m}^{21} &= \partial m^{21} + \partial \dot{\gamma}_{11} m^{21} + \dot{\gamma}_{11} \partial m^{21} + \partial \dot{\gamma}_{21} m^{22} + \dot{\gamma}_{21} \partial m^{22} - \partial \dot{\gamma}_1 m^2 - \dot{\gamma}_1 \partial m^2, \\ \partial \dot{m}^{22} &= \partial m^{22} + \partial \dot{\gamma}_{12} m^{21} + \dot{\gamma}_{12} \partial m^{21} + \partial \dot{\gamma}_{22} m^{22} + \dot{\gamma}_{22} \partial m^{22} - \partial \dot{\gamma}_2 m^2 - \dot{\gamma}_2 \partial m^2, \\ \partial \dot{m}^1 &= \partial m^1 + \partial \dot{\gamma}_1 m^{11} + \dot{\gamma}_1 \partial m^{11} + \partial \dot{\gamma}_2 m^{12} + \dot{\gamma}_2 \partial m^{12}, \\ \partial \dot{m}^2 &= \partial m^2 + \partial \dot{\gamma}_1 m^{21} + \dot{\gamma}_1 \partial m^{21} + \partial \dot{\gamma}_2 m^{22} + \dot{\gamma}_2 \partial m^{22}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

— związki geometryczne

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{11} &= v_{1,x}, & \dot{\gamma}_{12} &= v_{2,x}, & \dot{\gamma}_{21} &= v_{1,y}, & \dot{\gamma}_{22} &= v_{2,y}, \\ & & \dot{\gamma}_1 &= v_{,x} & \dot{\gamma}_2 &= v_{,y} \end{aligned} \quad (2.17)$$

oraz

$$\begin{aligned} \partial \dot{\gamma}_1 &= \partial v_{,x}, & \partial \dot{\gamma}_2 &= \partial v_{,y}, \\ \partial \dot{\gamma}_{11} &= \partial v_{1,x}, & \partial \dot{\gamma}_{12} &= \partial v_{2,x}, & \partial \dot{\gamma}_{21} &= \partial v_{1,y}, & \partial \dot{\gamma}_{22} &= \partial v_{2,y}, \\ \partial \gamma_{11}^* &= \partial v_{1,x}, & \partial \gamma_{12}^* &= \partial v_{2,x} - \partial \vartheta, & \partial \gamma_{21}^* &= \partial v_{1,y} + \partial \vartheta, & \partial \gamma_{22}^* &= \partial v_{2,y} \quad (2.18) \\ \partial \gamma_1^* &= \partial v_{,x} + \partial \vartheta_2, & \partial \gamma_2^* &= \partial v_{,y} - \partial \vartheta_1, & \partial \kappa_1^* &= \partial \vartheta_{,x}, & \partial \kappa_2^* &= \partial \vartheta_{,y}, \\ \partial \kappa_{11}^* &= \partial \vartheta_{1,x} & \partial \kappa_{12}^* &= \partial \vartheta_{2,x}, & \partial \kappa_{21}^* &= \partial \vartheta_{1,y} & \partial \kappa_{22}^* &= \partial \vartheta_{2,y}, \end{aligned}$$

— związki fizyczne

$$\begin{aligned} \partial p^{11} &= R_I \partial \gamma_{11}, & \partial p^{12} &= \check{R}_I \partial \gamma_{12}, & \partial p^{21} &= \check{R}_{II} \partial \gamma_{21}, & \partial p^{22} &= R_{II} \partial \gamma_{22} \\ \partial p^1 &= \check{R}_I \partial \gamma_1, & \partial p^2 &= \check{R}_{II} \partial \gamma_2, & \partial m^1 &= \check{S}_I \partial \kappa_1, & \partial m^2 &= \check{S}_{II} \partial \kappa_2, \quad (2.19) \\ \partial m^{11} &= S_I \partial \kappa_{11}, & \partial m^{12} &= \check{S}_I \partial \kappa_{12}, & \partial m^{21} &= \check{S}_{II} \partial \kappa_{21}, & \partial m^{22} &= S_{II} \partial \kappa_{22}, \end{aligned}$$

— zasadę idealności więzów typu kinematycznego

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} (\partial r^1 \delta v_1 + \partial r^2 \delta v_2 + \partial r \delta v + \partial s^1 \delta \vartheta_1 + \partial s^2 \delta \vartheta_2 + \partial s \delta \vartheta) dy dx + \\ & + \int_0^L [(\partial \tau^1 \delta v_1 + \partial \tau^2 \delta v_2 + \partial \tau \delta v + \partial \mu^1 \delta \vartheta_1 + \partial \mu^2 \delta \vartheta_2 + \partial \mu \delta \vartheta)|_{y=\frac{1}{2}\check{L}} + \\ & + (\partial \tau^1 \delta v_1 + \partial \tau^2 \delta v_2 + \partial \tau \delta v + \partial \mu^1 \delta v_1 + \partial \mu^2 \delta v_2 + \partial \mu \delta v)|_{y=\frac{1}{2}L}] dx + \\ & \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} [(\partial \tau^1 \delta v_1 + \partial \tau^2 \delta v_2 + \partial \tau \delta v + \partial \mu^1 \delta \vartheta_1 + \partial \mu^2 \delta \vartheta_2 + \partial \mu \delta \vartheta)|_{x=0} + \\ & + (\partial \tau^1 \delta v_1 + \partial \tau^2 \delta v_2 + \partial \tau \delta v + \partial \mu^1 \delta \vartheta_1 + \partial \mu^2 \delta \vartheta_2 + \partial \mu \delta \vartheta)|_{x=L}] dy = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

— zasadę idealności więzów typu kinetycznego

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} [(\partial \gamma_{11} - \partial \gamma_{11}^*) \delta p^{11} + (\partial \gamma_{12} - \partial \gamma_{12}^*) \delta p^{12} + (\partial \gamma_{21} - \partial \gamma_{21}^*) \delta p^{21} + \\ & + (\partial \gamma_{22} - \partial \gamma_{22}^*) \delta p^{22} + (\partial \gamma_1 - \partial \gamma_1^*) \delta p^1 + (\partial \gamma_2 - \partial \gamma_2^*) \delta p^2 + (\partial \kappa_1 - \partial \kappa_1^*) \delta m^1 + \\ & + (\partial \kappa_2 - \partial \kappa_2^*) \delta m^2 + (\partial \kappa_{11} - \partial \kappa_{11}^*) \delta m^{11} + (\partial \kappa_{12}^* - \partial \kappa_{12}^*) \delta m^{12} + (\partial \kappa_{21} - \partial \kappa_{21}^*) \delta m^{21} + \\ & + (\partial \kappa_{22} - \partial \kappa_{22}^*) \delta m^{22}] dy dx = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

dla dowolnych  $\delta v_\alpha$ ,  $\delta v$ , ...,  $\delta m^\alpha$  zgodnych z więzami wewnętrznymi (nałożonymi na przy-

rosty stanu przemieszczenia i napięcia w stosunku do stanu podstawowego). Symbol „ $\partial(\dots)$ ” oznacza przyrost danej wielkości typu geometrycznego lub statycznego.

Rozważymy również uproszczenia wymienionych wyżej równań, przyjmując w (2.11), (2.16)

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha} = 0 \quad (2.22)$$

oraz

$$1 + \partial\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 1, \quad 1 + \partial\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha} = 1 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.23)$$

Jeżeli na składowe stanu przemieszczenia i napięcia oraz ich przyrosty nie nakładamy żadnych więzów, to wobec dowolności i niezależności  $\delta v_{\alpha}$ , ...,  $\delta \vartheta$  i  $\delta p^{\alpha\beta}$ , ...,  $\delta m^{\alpha}$  wynika z zasad idealności (2.9), (2.10) i (2.20), (2.21), że składowe reakcji więzów i miary niezgodności odkształceń oraz ich przyrosty są równe zero. Zatem równania (2.2) - (2.8), (2.11) - (2.19) sprowadzają się do równań dwuwymiarowego modelu ciągłego stateczności rozważanego dźwigara.

W monografii [3] podano uzyskane za pomocą szeregów Fouriera rozwiązania tych równań, tj. rozwiązanie zagadnienia na wartości własne dla niektórych typów obciążenia i warunków podparcia przy dodatkowych uproszczeniach (pominięciu wielkości małych wyższych rzędów). Nie uzyskano do tej pory, w przekonaniu autora, zdawalających (prostych i dostatecznie dokładnych) rozwiązań problemu stateczności rozważanego dźwigara (w ramach przyjętego w tej pracy liniowego modelu ciągłego) dla wielu innych praktycznie ważnych rodzajów obciążenia i podparcia.

### 3. Równania teorii jednowymiarowej

Przyjmujemy następujące liniowe równania idealnych więzów typu kinematycznego w postaci całkownej [1]

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1 - \Theta_2 y, & v_2 &= w_2, & v &= w_3 + \Theta_1 y, \\ \vartheta_1 &= \varphi_1, & \vartheta_2 &= \varphi_2 + \lambda y, & \vartheta &= \varphi_3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie  $w_1, w_2, w_3, \Theta_1, \Theta_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \lambda$  są nieznanymi funkcjami zmiennej  $x$  — przemieszczeniami uogólnionymi.

Równania (3.1) wyrażają hipotezę prostoliniowości przekroju  $x = \text{const}$  po odkształceniu oraz taką postać funkcji obrotów węzłów, aby w szczególności spełnione były założenia Bernoulli'ego-Timoshenki-Własowa dla płaskownika pełnościennego. Dla dużej gęstości siatki elementów dźwigara obserwujemy bowiem duże podobieństwo między zachowaniem się konstrukcji o strukturze siatkowej i ciągłej. Ponadto w pracy [4] wykazano, że w zakresie zginania statycznego równania więzów (3.1) prowadzą do dobrej zgodności z rezultatami ścisłymi w ramach modelu dyskretnego.

Po uwzględnieniu (3.1) w (2.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= w_1' - \Theta_2' y, & \gamma_{12}^* &= w_2' - \varphi_3, & \gamma_{21}^* &= -\Theta_2 + \varphi_3, & \gamma_{22}^* &= 0, \\ \gamma_1^* &= w_3' + \varphi_2 + (\Theta_1' + \lambda) y, & \gamma_2^* &= \Theta_1 - \varphi_1, & \kappa_1^* &= \varphi_3', & \kappa_2^* &= 0, \\ \kappa_{11}^* &= \varphi_1', & \kappa_{12}^* &= \varphi_2' + \lambda' y, & \kappa_{21}^* &= 0, & \kappa_{22}^* &= \lambda, \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie  $(\dots)' = \partial(\dots)/\partial x$ .



Więzy typu kinetycznego przyjmiemy w postaci wyrażającej fakt pomijalności niektórych składowych stanu napięcia na zachowanie się ustroju [1]

$$p^{\alpha\beta} = \pi_p^{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}, \quad p^\alpha = \pi_p^\alpha p^\alpha, \quad m^{\alpha\beta} = \pi_m^{\alpha\beta} m^{\alpha\beta}, \quad m^\alpha = \pi_m^\alpha m^\alpha, \quad (3.3)$$

gdzie  $\pi_p^{\alpha\beta}$ ,  $\pi_p^\alpha$ ,  $\pi_m^{\alpha\beta}$ ,  $\pi_m^\alpha$  przyjmują wartości „0” lub „1” w zależności od tego, czy dana składowa stanu napięcia może być pominięta, czy nie.

Po wyznaczeniu z (2.2) - (2.6) reakcji więzów, a z (3.1) wariacji składowych stanu przemieszczenia i po podstawieniu do zasady idealności (2.10) otrzymujemy po wykonaniu całkowania wobec dowolności i niezależności  $\delta w_1, \dots, \delta \lambda$  równania równowagi modelu jednowymiarowego dla stanu podstawowego ( $x \in (0, L)$ )

$$\begin{aligned} P_1^{w'} + f &= 0, & P_2^{w'} + f_2^w &= 0, & P_2^{w'} + f_3^w &= 0, \\ M_1^{\Theta'} - P_1^{\Theta} + g_1^{\Theta} &= 0, & M_2^{\Theta'} - P_2^{\Theta} + g_2^{\Theta} &= 0, \\ M_1^{\varphi'} + P_1^{\varphi} + g_1^{\varphi} &= 0, & M_2^{\varphi'} - P_2^{\varphi} + g_2^{\varphi} &= 0, \\ M_3^{\varphi'} + P_2^w - P_2^{\Theta} + g_3^{\varphi} &= 0, & H^{\lambda'} - M_1^{\Theta} - M^{\lambda} + h^{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

oraz warunki brzegowe ( $x = 0, L$ )

$$\begin{aligned} P_1^w &= 'P_{1\alpha}^w & \text{lub} & & w_1 &= 'w_{1\alpha}, \\ P_2^w &= 'P_{2\alpha}^w & \text{lub} & & w_2 &= 'w_{2\alpha}, \\ P_3^w &= 'P_{3\alpha}^w & \text{lub} & & w_3 &= 'w_{3\alpha}, \\ M_1^{\Theta} &= 'M_{1\alpha}^{\Theta} & \text{lub} & & \Theta_1 &= '\Theta_{1\alpha}, \\ M_2^{\Theta} &= 'M_{2\alpha}^{\Theta} & \text{lub} & & \Theta_2 &= '\Theta_{2\alpha}, \\ M_1^{\varphi} &= 'M_{1\alpha}^{\varphi} & \text{lub} & & \varphi_1 &= '\varphi_{1\alpha}, \\ M_2^{\varphi} &= 'M_{2\alpha}^{\varphi} & \text{lub} & & \varphi_2 &= '\varphi_{2\alpha}, \\ M_3^{\varphi} &= 'M_{3\alpha}^{\varphi} & \text{lub} & & \varphi_3 &= '\varphi_{3\alpha}, \\ H^{\lambda} &= 'H^{\lambda} & \text{lub} & & \lambda &= '\lambda_{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie uogólnione siły wewnętrzne określone są następująco

$$\begin{aligned} P_1^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^{11} dy, & P_2^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^{12} dy, & P_3^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^1 dy, \\ M_1^{\Theta} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^1 y dy, & P_1^{\Theta} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^2 dy, & M_2^{\Theta} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^{11} y dy, \\ P_2^{\Theta} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^{21} dy, & M_1^{\varphi} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^{11} dy, & M_2^{\varphi} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^{12} dy, \\ M_3^{\varphi} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^1 dy, & H^{\lambda} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^{12} y dy, & M^{\lambda} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^{22} dy, \end{aligned} \quad (3.6)$$

a siły zewnętrzne przęsłowe i brzegowe dane są odpowiednio wzorami (dla  $x \in (0, L)$ )

$$\begin{aligned}
 f_1^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} q^1 dy + 'p^1|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'p^1|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, & f_2^w &= \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} q^2 dy + 'p^2|_{-\frac{1}{2}L} + 'p^2|_{\frac{1}{2}L}, \\
 f_3^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} q dy + 'p|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'p|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, & g_1^\circ &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} q y dy - \frac{1}{2}\tilde{L}('p|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} - 'p|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}), \\
 g_2^\circ &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} q^1 y dy - \frac{1}{2}\tilde{L}('p^1|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} - 'p^1|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}), & g_1^q &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} h^1 dy + 'm|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'm|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, \\
 g_2^q &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} h^2 dy + 'm^2|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'm^2|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, & g_3^q &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} h dy + 'm|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'm|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, \\
 h^1 &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} h^2 y dy - \frac{1}{2}\tilde{L}('m^2|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} - 'm^2|_{\frac{1}{2}\tilde{L}})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

oraz (dla  $x = x_\alpha$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L$ )

$$\begin{aligned}
 'P_{1\alpha}^w &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p^1|_{x_\alpha} dy, & 'P_{2\alpha}^w &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p^2|_{x_\alpha} dy, \\
 'P_{3\alpha}^w &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p|_{x_\alpha} dy, & 'M_{1\alpha}^\circ &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p y|_{x_\alpha} dy, \\
 'M_{2\alpha}^\circ &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p^1 y|_{x_\alpha} dy, & 'M_{1\alpha}^q &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'm^1|_{x_\alpha} dy, \\
 'M_{2\alpha}^q &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'm^2|_{x_\alpha} dy, & 'M_{3\alpha}^q &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'm|_{x_\alpha} dy, \\
 'H_\alpha^1 &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'm^2 y|_{x_\alpha} dy.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Na podstawie (3.3), (2.8), (2.10) oraz (3.6) znajdujemy związki fizyczne modelu jednowymiarowego (przy założeniu stałości miar sztywności  $R_A, \dots, \tilde{S}_A$  dla  $A = I, II$ )

$$\begin{aligned} P_1^w &= R_1^w w_1', & P_2^w &= R_2^w (w_2' - \varphi_3), & P_3^w &= R_3^w (w_3' + \varphi_2), \\ M_1^\Theta &= S_1^\Theta (\Theta_1' + \lambda), & P_1^\Theta &= R_1^\Theta (\Theta_1 - \varphi_1), & M_2^\Theta &= -S_2^\Theta \Theta_2', \\ P_2^\Theta &= R_2^\Theta (\varphi_3 - \Theta_2), & M_1^\varphi &= S_1^\varphi \varphi_1', & M_2^\varphi &= S_2^\varphi \varphi_2', \\ M_3^\varphi &= S_3^\varphi \varphi_3' & H^\lambda &= T^\lambda \lambda', & M^\lambda &= S^\lambda \lambda, \quad ((\dots)' = \partial(\dots)/\partial x), \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_1^w &= \pi_p^{11} R_I \tilde{L}, & R_2^w &= \pi_p^{12} \tilde{R}_I L, & R_3^w &= \pi_p^1 \check{R}_I \tilde{L} \\ S_1^\Theta &= \frac{1}{12} \pi_p^1 \check{R}_I \tilde{L}^3, & R_1^\Theta &= \pi_p^2 \check{R}_{II} \tilde{L}, & S_2^\Theta &= \frac{1}{12} \pi_p^{11} R_I \tilde{L}^3, \\ R_2^\Theta &= \pi_p^2 \tilde{R}_{II} \tilde{L}, & S_1^\varphi &= \pi_m^{11} S_I \tilde{L}, & S_2^\varphi &= \pi_m^{12} \tilde{S}_I \tilde{L}, \\ S_3^\varphi &= \pi_m^1 \check{S}_I \tilde{L}, & T^\lambda &= \frac{1}{12} \pi_m^{12} \tilde{S}_I \tilde{L}^3, & S^\lambda &= \pi_m^{22} S_{II} \tilde{L}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

W przypadku gdy przekroje prętów dźwigara są prostokątne o osiach głównych równoległych do osi układu współrzędnych (rys. 1), mamy

$$\begin{aligned} R_1^w &= \pi_p^{11} K_I, & R_2^w &= \pi_p^{12} K_I \left( \frac{a_I}{l_I} \right)^2, & R^w &= \pi_p^1 K_I \left( \frac{d_I}{l_I} \right)^2, \\ \frac{S_1}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_p^1 K_I \left( \frac{\tilde{L}}{L} \right)^2, & R_1^\Theta &= \pi_p^2 K_{II} \left( \frac{d_{II}}{l_{II}} \right)^2, \\ \frac{S_2^\Theta}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_p^{11} K_I \left( \frac{\tilde{L}}{L} \right)^2, & R_2^\Theta &= \pi_p^{21} K_{II} \left( \frac{a_{II}}{l_{II}} \right)^2, \\ \frac{S_1^\varphi}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_m^{11} K_I \frac{G_I}{E_I} \left( \frac{l_I}{L} \right)^2 \left[ \left( \frac{a_I}{l_I} \right)^2 + \left( \frac{d_I}{l_I} \right)^2 \right], \\ \frac{S_2^\varphi}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_m^{12} K_I \left( \frac{l_I}{L} \right)^2 \left( \frac{d_I}{l_I} \right)^2, & \frac{S_3^\varphi}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_m^1 K_I \left( \frac{l_I}{L} \right)^2 \left( \frac{a_I}{l_I} \right)^2, \\ \frac{T^\lambda}{L^4} &= \frac{1}{144} \pi_m^{12} K_I \left( \frac{\tilde{L}}{L} \right)^2 \left( \frac{l_I}{L} \right)^2 \left( \frac{d_I}{l_I} \right)^2, \\ \frac{S^\lambda}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_m^{22} K_{II} \frac{G_{II}}{E_{II}} \left( \frac{\tilde{L}}{L} \right)^2 \left( \frac{l_{II}}{L} \right)^2 \left[ \left( \frac{a_{II}}{l_{II}} \right)^2 + \left( \frac{d_{II}}{l_{II}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdzie

$$K = R \tilde{L} = \frac{E}{\tilde{I}} a d \tilde{L}, \quad (3.12)$$

przy czym  $a, d$  oznaczają szerokości (w płaszczyźnie podstawowej konstrukcji) i grubość elementów rodziny  $\Delta, l = l_{III}$  — długość,  $E$  i  $G$  moduły Younga i skręcania ( $\Delta = I, II$ ).

Zauważmy, że równania stanu podstawowego rozdzielają się na niezależne układy opisujące

- I. Rozciąganie (ściskanie) osiowe ( $w_1$ ),
- II. Zginanie z płaszczyzny dźwigara ( $w_3, \varphi_2$ )
- III. Zginanie w płaszczyźnie dźwigara ( $w_2, \Theta_2, \varphi_3$ )
- IV. Skręcanie ( $\Theta_1, \varphi_1, \lambda$ )

(w nawiasach podano przemieszczenia uogólnione określające dany stan zachowania się konstrukcji).

Wyprowadzimy następnie równania modelu jednowymiarowego dla stanu zaburzonego.

Założymy, że więzy typu kinematycznego są również postaci (3.1), tzn.

$$\begin{aligned} \partial v_1 &= \partial w_1 - \partial \Theta_2 y, & \partial v_2 &= \partial w_2, & \partial v &= \partial w_3 + \partial \Theta_1 y, \\ \partial \vartheta_1 &= \partial \varphi_1, & \partial \vartheta_2 &= \partial \varphi_2 + \partial \lambda y, & \partial \vartheta &= \partial \varphi_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdzie  $\partial w_1, \dots, \partial \varphi_3$  są przyrostami przemieszczeń uogólnionych.

Na podstawie (3.1), (3.13) oraz (2.17), (2.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{11} &= w'_1 - \Theta'_2 y, & \dot{\gamma}_{12} &= w'_2, & \dot{\gamma}_{21} &= -\Theta_2, & \dot{\gamma}_{22} &= 0, \\ \dot{\gamma}_1 &= w'_3 + \Theta'_1 y, & \dot{\gamma}_2 &= \Theta_1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

oraz

$$\begin{aligned} \partial \dot{\gamma}_{11} &= \partial w'_1 - \partial \Theta'_2 y, & \partial \dot{\gamma}_{12} &= \partial w'_2, & \partial \dot{\gamma}_{21} &= -\partial \Theta_2, & \partial \dot{\gamma}_{22} &= 0, \\ \partial \dot{\gamma}_1 &= \partial w'_3 + \partial \Theta'_1 y, & \partial \dot{\gamma}_2 &= \partial \Theta_1, \\ \partial \gamma_{11}^* &= \partial w'_1 - \partial \Theta'_2 y, & \partial \gamma_{12}^* &= \partial w'_2 - \partial \varphi_3, & \partial \gamma_{21}^* &= -\partial \Theta_2 + \partial \varphi_3, & \partial \gamma_{22}^* &= 0, \\ \partial \gamma_1^* &= \partial w'_3 + \partial \varphi_2 + (\partial \Theta'_1 + \partial \lambda) y, & \partial \gamma_2^* &= \partial \Theta_1 - \partial \varphi_1, & \partial \kappa_1^* &= \partial \varphi_3, & \partial \kappa_2^* &= 0, \\ \partial \kappa_{11}^* &= \partial \varphi_1, & \partial \kappa_{12}^* &= \partial \varphi_2 + \partial \lambda y, & \partial \kappa_{21}^* &= 0, & \partial \kappa_{22}^* &= \partial \lambda. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Więzy typu kinetycznego przyjmiemy również w postaci (3.3)

$$\partial p^{\alpha\beta} = \pi_p^{\alpha\beta} \partial p^{\alpha\beta}, \quad \partial p^\alpha = \pi_p^\alpha \partial p^\alpha, \quad \partial m^{\alpha\beta} = \pi_m^{\alpha\beta} \partial m^{\alpha\beta}, \quad \partial m^\alpha = \pi_m^\alpha \partial m^\alpha, \quad (3.16)$$

gdzie parametry  $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^\alpha$  przyjmują wartość „1” lub „0”, przy czym w stosunku do (3.3) niekoniecznie te same przyrosty składowych stanu napięcia  $p^{\alpha\beta}, \dots, m^\alpha$  mogą być pominięte, co składowe w stanie podstawowym ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ).

Po wyznaczeniu z (2.11) - (2.16) przyrostów reakcji więzów, a z (3.13) wariacji składowych stanu przemieszczenia i po podstawieniu do zasady idealności (2.12) oraz uwzględnieniu związków (2.16), (3.14), (3.15) i zasady idealności (2.21), związków fizycznych (2.19) oraz wyrażeń (3.16) otrzymujemy po wykonaniu całkowania i wykorzystaniu oznaczeń (3.6) wobec dowolności i niezależności  $\delta w_1, \dots, \delta \lambda$  równania równowagi

$$\begin{aligned} \partial P_1^{w'} + (\partial w'_1 P_1^{w'} - \partial \Theta'_2 M_2^\vartheta - \partial \Theta_2 P_2^{w'} - \partial w'_3 P_3^{w'} - \partial \Theta'_1 M_1^\vartheta)' + (w'_1 \partial P_1^{w'} - \Theta'_2 \partial M_2^\vartheta - \Theta_2 \partial P_2^{w'} - \\ - w'_3 \partial P_3^{w'} - \Theta'_1 \partial M_1^\vartheta)' = 0, \\ \partial P_2^{w'} + (\partial w'_2 P_1^{w'} - \partial \Theta_1 P_3^{w'})' + (w'_2 \partial P_1^{w'} - \Theta_1 \partial P_3^{w'})' = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 & \partial P_3^w + (\partial w_3' P_1^w + \partial \Theta_1' M_2 + \partial \Theta_1 P_2^w)' + (w_3' \partial P_1^w + \Theta_1' \partial M_2^{\circ} + \Theta_1 \partial P_2^w)' = 0, \\
 & \partial M_1^{\circ} + \left( \partial w_3' M_2^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_1^w \right)' + \left( w_3' \partial M_2^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_1' \partial P_1^w \right)' - \\
 & \quad - \partial P_1^{\circ} - \partial w_3' P_2^{\circ} - w_3' \partial P_2^{\circ} = 0, \\
 & \partial M_2^{\circ} + \left( \partial w_1' M_2^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_2' P_1^w - \partial w_3' M_1^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_3^w \right)' + \\
 & \quad + \left( \tilde{w}_1' \partial M_2^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_2' \partial P_1^w - w_3' \partial M_1^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_1' \partial P_3^w \right)' - \\
 & \quad - \partial P_2^{\circ} - \partial w_1' P_2^{\circ} + \partial w_3' P_1^{\circ} - w_1' \partial P_2^{\circ} + w_3' \partial P_1^{\circ} = 0, \\
 & \partial M_1^w + (\partial w_1' M_1^w - \partial \Theta_2 M_2^w - \partial w_3' M_3^w)' + (w_1' \partial M_1^w - \Theta_2 \partial M_2^w - w_3' \partial M_3^w)' + \\
 & \quad + \partial P_1^{\circ} + \partial w_3' (P_2^{\circ} - P_2^w) + \partial w_2' P_3^w + w_3' (\partial P_2^{\circ} - P_2^w) + w_2' \partial P_3^w = 0, \\
 & \partial M_2^w + (\partial w_2' M_1^w - \partial \Theta_1 M_3^w)' + (w_2' \partial M_1^w - \Theta_1 \partial M_3^w)' - \partial P_3^w - \partial w_1' P_3^w + \\
 & \quad + \partial \Theta_2' M_1^{\circ} - \partial \Theta_1 (P_2^w - P_2^{\circ}) - w_1' \partial P_3^w + \Theta_2' \partial M_1^{\circ} - \Theta_1 (\partial P_2^w - \partial P_2^{\circ}) = 0, \\
 & \partial M_3^w + (\partial w_3' M_1^w + \partial \Theta_1 M_2^w)' + (w_3' \partial M_1^w + \Theta_1 \partial M_2^w)' + \partial P_2^w - \partial P_2^{\circ} + \\
 & \quad + \partial w_1' (P_2^w - R_2^{\circ}) + \partial w_3' P_1^{\circ} - \partial \Theta_1 P_3^w + w_1' (\partial P_2^w - \partial P_2^{\circ}) + w_3' \partial P_1^{\circ} - \Theta_1 \partial P_3^w = 0, \\
 & \partial H^{\lambda} - \partial M_1^{\circ} - \partial M^{\mu} - \partial w_1' M_1^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_2 P_3^w - w_1' \partial M_1^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_2 \partial P_3^w = 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

[cd.]

oraz warunki brzegowe

$$\begin{aligned}
 & \partial P_1^w + \partial w_1' P_1^w - \partial \Theta_2' M_2^{\circ} - \partial \Theta_2 P_2^w - \partial w_3' P_3^w - \partial \Theta_1' M_1^{\circ} + \\
 & \quad + w_1' \partial P_1^w - \Theta_2' \partial M_2^{\circ} - \Theta_2 \partial P_2^w - w_3' \partial P_3^w - \Theta_1 \partial M_1^{\circ} = 0 \quad \text{lub} \quad \partial w_1 = 0, \\
 & \partial P_2^w + \partial w_2' P_1^w - \partial \Theta_1 P_3^w + w_2' \partial P_1^w - \Theta_1 \partial P_3^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial w_2 = 0, \\
 & \partial P_3^w + \partial w_3' P_1^w + \partial \Theta_1' M_2^{\circ} + \partial \Theta_1 P_2^w + w_3' \partial P_1^w + \Theta_1' \partial M_2^{\circ} + \Theta_1 \partial P_2^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial w_3 = 0, \\
 & \partial M_1^{\circ} + \partial w_3' M_2^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_1^w + w_3' \partial M_2^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_1' \partial P_1^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \Theta_1 = 0, \\
 & \partial M_2^{\circ} + \partial w_1' M_2^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_2 P_1^w - \partial w_3' M_1^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_3^w + \\
 & \quad + w_1' \partial M_2^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_2 \partial P_1^w - w_3' \partial M_1^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_1' \partial P_3^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \Theta_2 = 0, \\
 & \partial M_1^w + \partial w_1' M_1^w - \partial \Theta_2 M_2^w - \partial w_3' M_3^w + w_1' \partial M_1^w - \Theta_2 \partial M_2^w - w_3' \partial M_3^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \varphi_1 = 0, \\
 & \partial M_2^w + \partial w_2' M_1^w - \partial \Theta_1 M_3^w + w_2' \partial M_1^w - \Theta_1 \partial M_3^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \varphi_2 = 0, \\
 & \partial M_3^w + \partial w_3' M_1^w + \partial \Theta_1 M_2^w + w_3' \partial M_1^w + \Theta_1 \partial M_2^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \varphi_3 = 0, \\
 & \partial H^{\lambda} = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \lambda = 0,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

gdzie siły uogólnione  $P_1^w, \dots, M^\lambda$  wyrażają się za pomocą (3.6), a ich przyrosty  $\partial P_1^w, \dots, \partial M^\lambda$  następująco:

$$\begin{aligned}
\partial P_1^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^{11} dy, & \partial P_2^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}L} \partial p^{12} dy, & \partial P_3^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^1 dy, \\
\partial M_1^\Theta &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^1 y dy, & \partial P_1^\Theta &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}L} \partial p^2 dy, & \partial M_2^\Theta &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^{11} y dy, \\
\partial P_2^\Theta &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^{21} dy, & \partial M_1^\varphi &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial m^{11} dy, & \partial M_2^\varphi &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial m^{12} dy, \\
\partial M_3^\varphi &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}L} \partial m^1 dy, & \partial H^\lambda &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial m^{12} y dy, & \partial M^\lambda &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial m^{22} dy,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
\partial P_1^w &= \overset{*}{R}_1^w \partial w_1', & \partial P_2^w &= \overset{*}{R}_2^w (\partial w_2' - \partial \varphi_3), & \partial P_3^w &= \overset{*}{R}_3^w (\partial w_3' + \partial \varphi_2), \\
\partial M_1^\Theta &= \overset{*}{S}_1^\Theta (\partial \Theta_1' + \partial \lambda), & \partial P_1^\Theta &= \overset{*}{R}_1^\Theta (\partial \Theta_1 - \partial \varphi_1), & \partial M_2^\Theta &= -\overset{*}{S}_2^\Theta \partial \Theta_2', \\
\partial P_2^\Theta &= \overset{*}{R}_2^\Theta (\partial \varphi_3 - \partial \Theta_2), & \partial M_1^\varphi &= \overset{*}{S}_1^\varphi \partial \varphi_1', & \partial M_2^\varphi &= \overset{*}{S}_2^\varphi \partial \varphi_2', \\
\partial M_3^\varphi &= \overset{*}{S}_3^\varphi \partial \varphi_3', & \partial H^\lambda &= \overset{*}{T}^\lambda \partial \lambda', & \partial M^\lambda &= \overset{*}{S}^\lambda \partial \lambda,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

natomiast  $\overset{*}{R}_1^w, \dots, \overset{*}{S}^\lambda$  określone są wzorami (3.10) (lub w szczególności (3.11)) po zastąpieniu  $\pi_p^{11}, \dots, \pi_m^2$  odpowiednio przez  $\overset{*}{\pi}_p^{11}, \dots, \overset{*}{\pi}_m^2$ .

W przypadku uwzględnienia założeń (2.22), (2.23) w (2.11), (2.16) równania równowagi (3.17) i warunki brzegowe (3.18) upraszczają się do postaci

$$\begin{aligned}
\partial P_1^{w'} - (\partial \Theta_2 P_2^w + \partial w_3' P_3^w + \partial \Theta_1' M_1^\Theta)' &= 0, \\
\partial P_2^{w'} + (\partial w_2' P_1^w - \partial \Theta_1 P_3^w)' &= 0, \\
\partial P_3^{w'} + (\partial w_3' P_1^w + \partial \Theta_1' M_2^\Theta + \partial \Theta_1 P_2^w)' &= 0, \\
\partial M_1^{\Theta'} + \left( \partial w_3' M_2^\Theta + \frac{1}{14} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_1^w \right)' - \partial P_1^\Theta - \partial w_3' P_2^\Theta &= 0, \\
\partial M_2^{\Theta'} - \left( \partial w_3' M_1^\Theta + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_3^w \right)' - \partial P_2^\Theta + \partial w_3' P_1^\Theta &= 0, \\
\partial M_1^{\varphi'} - (\partial \Theta_2 M_2^\varphi + \partial w_3' M_3^\varphi)' + \partial P_1^\Theta + \partial w_3' (P_2^\Theta - P_2^w) + \partial w_2' P_3^w &= 0, \\
\partial M_2^{\varphi'} + (\partial w_2' M_1^\varphi - \partial \Theta_1 M_3^\varphi)' \partial P_3^w - \partial \Theta_1 (P_2^w - P_2^\Theta) &= 0, \\
\partial M_3^{\varphi'} + (\partial w_3' M_1^\varphi + \partial \Theta_1 M_2^\varphi) + \partial P_2^w - \partial P_2^\Theta + \partial w_3' P_1^\Theta - \partial \Theta_1 P_3^w &= 0, \\
\partial H^{\lambda'} - \partial M_1^\Theta - \partial M^\lambda &= 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \partial P_1^w - (\partial \Theta_2 P_2^w + \partial w_3' P_3^w + \partial \Theta_1' M_1^{\Theta}) &= 0 & \text{lub} & \quad \partial w_1 = 0, \\
 \partial P_2^w + \partial w_2' P_1^w - \partial \Theta_1 P_3^w &= 0 & \text{lub} & \quad \partial w_2 = 0, \\
 \partial P_3^w \partial w_3' P_1^w + \partial \Theta_1' M_2^{\Theta} + \partial \Theta_1 P_2^w &= 0 & \text{lub} & \quad \partial w_3 = 0, \\
 \partial M_1^{\Theta} + \partial w_3' M_2^{\Theta} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_1^w &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \Theta_1 = 0, \\
 \partial M_2^{\Theta} - \left( \partial w_3' M_1^{\Theta} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_3^w \right) &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \Theta_2 = 0, \\
 \partial M_1^{\varphi} - (\partial \Theta_2 M_2^{\varphi} + \partial w_3' M_3^{\varphi}) &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \varphi_1 = 0, \\
 \partial M_2^{\varphi} + \partial w_2' M_1^{\varphi} - \partial \Theta_1 M_3^{\varphi} &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \varphi_2 = 0, \\
 \partial M_3^{\varphi} + \partial w_3' M_1^{\varphi} + \partial \Theta_1 M_2^{\varphi} &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \varphi_3 = 0, \\
 \partial H^{\lambda} &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \lambda = 0,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

#### 4. Stateczność stanu osiowego ściskania

Równania stanu podstawowego składają się z równania równowagi (3.4), i warunków brzegowych (3.5)<sub>1</sub>, związku fizycznego (3.9)<sub>1</sub>

$$\begin{aligned}
 P_1^{w'} + f_1^w &= 0, \\
 P_1^w &= 'P_{1\alpha}^w \quad \text{lub} \quad w_1 = 'w_{1\alpha}, \\
 P_1^w &= R_1^w w_1'.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Rozważmy dla przykładu dźwigar w kształcie wspornika obciążony siłami o wypadkowej  $'P_{12}^w = -P$ . Tak jest np. gdy węzły krawędzi  $x = L$  obciążone są równomiernie rozłożonymi siłami o gęstości  $'P^1 = -P/\tilde{L}$ . Wtedy bowiem zgodnie z (3.8) dla  $\alpha = 2$  jest  $'P_{12}^w = -P$ , a pozostałe brzegowe siły uogólnione są równe zeru.

Rozwiązanie równań (4.1)<sub>1,3</sub> dla  $f_1^w = 0$ ,  $\pi_p^{11} = 1$  i przy warunkach brzegowych

$$w_1 = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0, \quad P_1^w = -P \quad \text{dla} \quad x = L \tag{4.2}$$

wyraża się następująco:

$$w_1 = -\frac{Px}{R_1^w}, \quad P_1^w = -P. \tag{4.3}$$

Równania równowagi stanu zaburzonego (3.17) upraszczają się po uwzględnieniu (4.3) i (3.20) do postaci

$$\begin{aligned}
 R_1^{*w} \partial w_1' - P \left( 1 + \frac{R_1^{*w}}{R_1^w} \right) \partial w_1' &= 0, \\
 R_2^{*w} (\partial w_2' - \partial \varphi_3') - P \partial w_2' &= 0, \\
 R_3^{*w} (\partial \omega_3' + \partial \varphi_2') - P \partial w_3' &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{*}{S}_1^\varnothing (\partial\Theta_1' + \partial\lambda) - \frac{P}{12} \tilde{L}^2 \partial\Theta_1' - \overset{*}{R}_1^\varnothing (\partial\Theta_1 - \partial\varphi_1) = 0, \\
& -\overset{*}{S}_2^\varnothing \partial\Theta_2' + P \left( \frac{\tilde{L}^2}{12} + \frac{\overset{*}{S}_2^\varnothing}{R_1^w} \right) \partial\Theta_2' + \left( P \frac{\overset{*}{R}_2^\varnothing}{R_1^w} - \overset{*}{R}_2^\varnothing \right) (\partial\varphi_3 - \partial\Theta_2) = 0, \\
& \left( \overset{*}{S}_1^\varphi - P \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{R_1^w} \right) \partial\varphi_1' + \overset{*}{R}_1^\varnothing (\partial\Theta_1 - \partial\varphi_1) = 0, \\
& \overset{*}{S}_2^\varphi \partial\varphi_2' - \left( \overset{*}{R}_3^w - P \frac{\overset{*}{R}_3^w}{R_1^w} \right) (\partial w_3' + \partial\varphi_2) = 0, \\
& \overset{*}{S}_3^\varphi \partial\varphi_3' + \left( \overset{*}{R}_2^w - P \frac{\overset{*}{R}_2^w}{R_1^w} \right) (\partial w_2' - \partial\varphi_3) - \left( \overset{*}{R}_2^\varnothing - P \frac{\overset{*}{R}_2^\varnothing}{R_1^w} \right) (\partial\varphi_3 - \partial\Theta_2) = 0, \\
& \overset{*}{T}^\lambda \partial\lambda' - \left( \overset{*}{S}_1^\varnothing - P \frac{\overset{*}{S}_1^\varnothing}{R_1^w} \right) (\partial\Theta_1' + \partial\lambda) - \overset{*}{S}^\lambda \partial\lambda = 0,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4)  
[cd.]

natomiast warunki brzegowe dla dźwigara w kształcie wspornika do postaci

— dla  $x = 0$

$$\partial w_1 = \partial w_2 = \partial w_3 = 0, \quad \partial\Theta_1 = \partial\Theta_2 = \partial\varphi_1 = \partial\varphi_2 = \partial\varphi_3 = 0, \quad \partial\lambda = 0, \tag{4.5}$$

— dla  $x = L$

$$\begin{aligned}
& \overset{*}{R}_1^w \partial w_1' - P \left( 1 + \frac{\overset{*}{R}_1^w}{R_1^w} \right) \partial w_1' = 0, \quad \overset{*}{R}_2^w (\partial w_2' - \partial\varphi_3) - P \partial w_2' = 0, \\
& \overset{*}{R}_3^w (\partial w_3' + \partial\varphi_2) - P \partial w_3' = 0, \quad \overset{*}{S}_1^\varnothing (\partial\Theta_1' + \partial\lambda) - \frac{P}{12} L^2 \partial\Theta_1' = 0, \\
& -\overset{*}{S}_2^\varnothing \partial\Theta_2' + P \left( \frac{\tilde{L}^2}{12} + \frac{\overset{*}{S}_2^\varnothing}{R_1^w} \right) \partial\Theta_2' = 0, \quad \left( \overset{*}{S}_1^\varphi - P \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{R_1^w} \right) \partial\varphi_1' = 0, \\
& \overset{*}{S}_2^\varphi \partial\varphi_2' = 0, \quad \overset{*}{S}_3^\varphi \partial\varphi_3' = 0, \quad \overset{*}{T}^\lambda \partial\lambda' = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Z równań (4.4) wynika, że możliwe są trzy niezależne, jakościowo różne postacie wybočenja określone przez następujące układy przyrostów przemieszczeń uogólnionych:  $(\partial w_3, \partial\varphi_2)$ ,  $(\partial w_2, \partial\Theta_2, \partial\varphi_3)$ ,  $(\partial\Theta_1, \partial\varphi_1, \partial\lambda)$  (możliwą teoretycznie czwartą postacią dla  $w_1 = f(x)$  przy  $f(0) = 0$  i  $P = \overset{*}{R}_1^w \overset{*}{R}_1^w / (\overset{*}{R}_1^w + \overset{*}{R}_1^w)$  należy odrzucić jako fizycznie niedopuszczalną).

Stosując znane postępowanie dla zagadnienia na wartości własne dla równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach otrzymujemy następujące wyrażenia lub równania algebraiczne na podstawowe wartości własne — wartości obciążenia krytycznego i odpowiadające im funkcje własne — postacie wybočenja (dla  $\overset{*}{\pi}_p^{11} = \overset{*}{\pi}_p^{12} = \overset{*}{\pi}_p^{21} = \overset{*}{\pi}_p^1 = \overset{*}{\pi}_{11}^m = \overset{*}{\pi}_{12}^m = \overset{*}{\pi}_m^1 = \overset{*}{\pi}_m^{22} = 1$ )

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{R_1^w}{2} \left( 1 + \frac{\pi^2 \overset{*}{S}_2^\varphi}{4L^2 \overset{*}{R}_3^w} - \sqrt{\left( 1 + \frac{\pi^2 \overset{*}{S}_2^\varphi}{4L^2 \overset{*}{R}_3^w} \right)^2 - \frac{\pi^2 \overset{*}{S}_2^\varphi}{L^2 \overset{*}{R}_1^w}} \right), \\
\partial w_3 &= A \left( \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} - 1 \right), \quad \partial\varphi_2 = \frac{\pi}{2L} \frac{\overset{*}{R}_3^w - P}{\overset{*}{R}_3^w} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}
\end{aligned} \tag{4.7}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^2}{2L^2} &= \frac{\sqrt{(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 + 4a_1 b_1 (a_3 b_3 - a_2 b_2)} - a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 b_1} \\
 a_1 &= S_2^\circ \left(1 - \frac{P_2}{R_1^w}\right) - \frac{\tilde{L}^2}{12} P_2, \quad a_2 = R_2^\circ \left(1 - \frac{P_2}{R_1^w}\right) = b_3, \\
 a_3 &= R_2^\circ \frac{R_2^w - P_2}{R_2^*} \left(1 - \frac{P_2}{R_1^w}\right), \quad b_1 = S_3^\circ \frac{R_2^w - P_2}{R_2^*}, \\
 b_2 &= \left(1 - \frac{P_2}{R_1^w}\right) \frac{R_2^w R_2^\circ - P_2 (R_2^w + R_2^\circ)}{R_2^*}, \\
 \partial w_2 &= A \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right), \quad \partial \varphi_3 = \frac{\pi}{2L} \frac{R_2^w - P_2}{R_2^*} A \sin \frac{\pi x}{2L}, \\
 \partial \Theta_2 &= \frac{\pi}{2L} \left[ \frac{R_2^w - P_2}{R_2^*} \left(1 + \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_3^\circ}{R_2^*}\right) - \frac{P_2}{R_2^\circ} \right] A \sin \frac{\pi x}{2L}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 &\left[1 + \left(\frac{\beta_2 \alpha_2^2 + \beta_1}{\beta_2 \alpha_1^2 - \beta_1}\right)^2\right] \cos \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{\beta_2 \alpha_2^2 + \beta_1}{\beta_2 \alpha_1^2 - \beta_1} \operatorname{th} \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0, \\
 \alpha_1 &= \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + 4a_1 a_3} + a_2}{2a_1}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + 4a_1 a_3} - a_2}{2a_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 a_1 &= T^\lambda \beta_2, \quad a_2 = T^\lambda \beta_1 + L^2 S_1^\circ \left(1 - \frac{P_3}{R_1^w}\right) (\beta_2 - \beta_0) + S^\lambda \beta_2 L^2, \\
 a_3 &= \left[S_1^\circ \left(1 - \frac{P_3}{R_1^w}\right) (1 - \beta_1) - S^\lambda \beta_1\right] L^2, \quad \beta_0 = \frac{S_1^\circ}{L^2 R_1^*} \left(1 - \frac{P_3}{R_1^w}\right), \\
 \beta_1 &= 1 - \frac{P_3}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^\circ} + \frac{S_1^\circ}{S_1^\circ} \left(1 - \frac{P_3}{R_1^w}\right), \quad \beta_2 = 1 - \frac{P_3}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^\circ} \beta_0,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

gdzie  $A$  jest stałą dowolną. Skrętniej postaci wyboczenia nie podajemy.

Następnie zbadamy możliwość uproszczenia otrzymanych wyżej zależności na wartości obciążeń krytycznych. W tym celu wykorzystamy równania (3.21) i warunki brzegowe (3.22), które po uwzględnieniu (3.20), (4.3) doprowadzamy do postaci

$$\begin{aligned}
 R_1^* \partial w_1'' &= 0, \quad R_2^w (\partial w_2'' - \partial \varphi_3') - P \partial w_2'' = 0, \\
 R_3^w (\partial w_3'' + \partial \varphi_2') - P \partial w_3'' &= 0, \quad S_1^\circ (\partial \Theta_1'' + \partial \lambda') - \frac{P}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1'' - R_1^\circ (\partial \Theta_1 - \partial \varphi_1) = 0, \\
 -S_2^\circ \partial \Theta_2'' - R_2^\circ (\partial \varphi_3 - \partial \Theta_2) &= 0, \quad S_1^\circ \partial \varphi_1'' + R_1^\circ (\partial \Theta_1 - \partial \varphi_1) = 0, \\
 S_2^\circ \partial \varphi_2'' - R_3^w (\partial w_3'' + \partial \varphi_2) &= 0, \quad S_3^\circ \partial \varphi_3'' + R_2^w (\partial w_2'' - \partial \varphi_3) - \\
 -R_2^\circ (\partial \varphi_3 - \partial \Theta_2) &= 0, \quad T^\lambda \partial \lambda'' - S_1^\circ (\partial \Theta_1'' + \partial \lambda) - S^\lambda \partial \lambda = 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

oraz dla dźwigara w kształcie wspornika

— dla  $x = 0$

$$\partial w_1 = \partial w_2 = \partial w_3 = 0, \quad \partial \Theta_1 = \partial \Theta_2 = \partial \varphi_1 = \partial \varphi_2 = \partial \varphi_3 = 0, \quad \partial \lambda = 0, \quad (4.11)$$

— dla  $x = L$

$$\begin{aligned} \overset{*}{R}_1^w \partial w_1' &= 0, & \overset{*}{R}_2^w (\partial w_2' - \partial \varphi_3) - P \partial w_2' &= 0, \\ \overset{*}{R}_3^w (\partial w_3' + \partial \varphi_2) - P \partial w_3' &= 0, & \overset{*}{S}_1^\Theta (\partial \Theta_1' + \partial \lambda) - \frac{P}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' &= 0, \\ -\overset{*}{S}_2^\Theta \partial \Theta_2' &= 0, & \overset{*}{S}_1^\varphi \partial \varphi_1' &= 0, & \overset{*}{S}_2^\varphi \partial \varphi_2' &= 0, & \overset{*}{S}_3^\varphi \partial \varphi_3' &= 0, & T^\lambda \partial \lambda' &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Zauważmy, że jeżeli

$$\frac{\overset{*}{S}_3^\varphi}{\overset{*}{S}_2^\Theta} \ll 1, \quad \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{\overset{*}{S}_1^\Theta} \ll 1, \quad \frac{\overset{*}{S}^\lambda}{\overset{*}{S}_1^\Theta} \ll 1, \quad \frac{T^\lambda}{\overset{*}{S}_1^\Theta L} \ll 1, \quad (4.13)$$

to możliwe są również dodatkowe uproszczenia w wyniku przyjęcia

$$\overset{*}{\pi}_m^1 = 0, \quad \overset{*}{\pi}_m^{1,1} = 0, \quad \overset{*}{\pi}_m^{2,2} = 0, \quad \overset{*}{\pi}_m^{1,2} = 0 (w T^{\lambda}) \quad (4.14)$$

przy  $\overset{*}{\pi}_p^{1,1} = \overset{*}{\pi}_p^1 = \overset{*}{\pi}_p^2 = \overset{*}{\pi}_p^{1,2} = \overset{*}{\pi}_p^{2,1} = 1$  (por. (3.11) w przypadku prostokątnego przekroju prętów dźwigara po zastąpieniu  $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^\alpha$  przez  $\overset{*}{\pi}_p^{\alpha\beta}, \dots, \overset{*}{\pi}_m^\alpha$ ).

Innego typu uproszczenia obliczeń można otrzymać zauważając, że jeżeli (dla  $\overset{*}{\pi}_p^1 = \overset{*}{\pi}_p^2 = \overset{*}{\pi}_p^{1,2} = \overset{*}{\pi}_p^{2,1} = 1$ )

$$\frac{\overset{*}{S}_2^\varphi}{L^2 \overset{*}{R}_3^w} \ll 1, \quad \frac{\overset{*}{S}_3^\varphi}{L^2 (\overset{*}{R}_2^w + \overset{*}{R}_2^\Theta)} \ll 1, \quad \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{L^2 \overset{*}{R}_1^\Theta} \ll 1, \quad \frac{T^\lambda}{L^2 (\overset{*}{S}_1^\Theta + \overset{*}{S}^\lambda)} \ll 1 \quad (4.15)$$

to w równaniach (4.10) uzasadnione są następujące asymptotyczne przybliżenia:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\partial w_3' + \frac{\overset{*}{S}_2^\varphi}{L^2 \overset{*}{R}_2^w} \partial \varphi_2'' \approx -\partial w_3', \\ \partial \varphi_3 &= \frac{\overset{*}{R}_2^w \partial w_2' + \overset{*}{R}_2^\Theta \partial \Theta_2}{\overset{*}{R}_2^w + \overset{*}{R}_2^\Theta} + \frac{\overset{*}{S}_3^\varphi}{\overset{*}{R}_2^w + \overset{*}{R}_2^\Theta} \partial \varphi_3'' \approx \frac{\overset{*}{R}_2^w \partial w_2' + \overset{*}{R}_2^\Theta \partial \Theta_2}{\overset{*}{R}_2^w + \overset{*}{R}_2^\Theta}, \\ \partial \varphi_1 &= \partial \Theta_1 - \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{\overset{*}{R}_1^\Theta} \partial \varphi_1'' \approx \partial \Theta_1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\partial \lambda = -\frac{\overset{*}{S}_1^\Theta}{\overset{*}{S}_1^\Theta + \overset{*}{S}^\lambda} \partial \Theta_1' + \frac{T^\lambda}{\overset{*}{S}_1^\Theta + \overset{*}{S}^\lambda} \partial \lambda'' \approx -\frac{\overset{*}{S}_1^\Theta}{\overset{*}{S}_1^\Theta + \overset{*}{S}^\lambda} \partial \Theta_1'.$$

Stosując znany sposób postępowania wyznaczamy z (4.10) - (4.12) podstawowe obciążenia krytyczne i odpowiadające im giętne i skrętne postacie wybożenia (przy  $\overset{*}{\pi}_p^{1,1} = \overset{*}{\pi}_p^1 = \overset{*}{\pi}_p^2 = \overset{*}{\pi}_p^{1,2} = \overset{*}{\pi}_p^{2,1} = 1$ )

Mamy zatem

— dla  $\pi_m^{*12} = 1$

$$P_1^\alpha = \frac{\pi^2}{4} \frac{S_2^*}{L^2} \frac{1}{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi^2}{4} \frac{S_2^*}{R_3^* L^2},$$

$$\partial w_3^\alpha = A \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2} \right) \frac{x}{L}, \quad \partial \varphi_2^\alpha = -\frac{\pi}{2L} \frac{A}{1+\alpha} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$
(4.17)

— dla  $S_2^*/L^2 R_3^* \ll 1$  ( $\pi_m^{*12} = 1$ )

$$P_1^b = \frac{\pi^2}{4} \frac{S_2^{*q}}{L^2}, \quad w_3^b = A \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2} \right) \frac{x}{L}, \quad \partial \varphi_2^b = -\frac{\pi}{2L} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$
(4.18)

— dla  $\pi_m^{*1} = 1$

$$P_2^a = R_2^{*o} \frac{(1+a_1)(1+b_1)-1}{(1+b_1)(1+a_2)+b_2},$$

$$a_1 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_3^*}{R_2^{*o}}, \quad a_2 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_3^*}{R_2^*},$$

$$b_1 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_2^{*o}}{R_2^{*o}}, \quad b_2 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_2^{*o}}{R_2^*},$$
(4.19)

$$\partial w_2^a = A \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right), \quad \partial \varphi_3^a = \frac{\pi}{2L} \frac{R_2^{*w} - P_2^a}{R_2^{*o}} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

$$\partial \Theta_2^a = \frac{\pi}{2L} \left[ \frac{R_2^{*w} - P_2^a}{R_2^{*o}} \left( 1 + \frac{2}{4L^2} \frac{S_3^*}{R_2^{*o}} \right) - \frac{P_2^a}{R_2^{*o}} \right] A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla  $\pi_m^{*1} = 0$

$$P_2^b = \frac{\pi^2}{4} \frac{S_2^{*o}}{L^2} \frac{1}{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_2^{*o}}{R_s^*}, \quad R_s^* = \frac{R_2^{*w} R_2^{*o}}{R_2^{*w} + R_2^{*o}}.$$

$$\partial w_2^b = A \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right), \quad \partial \varphi_3^b = \frac{\pi}{2L} \frac{R_2^{*w} - P_2^b}{R_2^{*w}} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$
(4.20)

$$\partial \Theta_2^b = \frac{\pi}{2L} \frac{A}{1+\alpha} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla  $S_3^*/L^2 (R_3^* + R_2^{*o}) \ll 1$  ( $\pi_m^{*1} = 1$ )

$$P_2^c = P_2^b, \quad \partial w_2^c = \partial w_2^b, \quad \partial \varphi_3^c = \partial \varphi_3^b, \quad \partial \Theta_2^c = \partial \Theta_2^b,$$
(4.21)

— dla  $\pi_m^{*12} = \pi_m^{*11} = 1$  ( $\pi_m^{*22} = 1$  lub  $\pi_m^{*22} = 0$ )

$$\left[ 1 + \left( \frac{\beta_2 \alpha_2^2 + \beta_1}{\beta_2 \alpha_1^2 - \beta_1} \right)^2 \right] \cos \alpha_2 + \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \frac{\beta_2 \alpha_2^2 + \beta_1}{\beta_2 \alpha_1^2 - \beta_1} \operatorname{th} \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_1 = \left( \frac{\sqrt{a_2^2 + 4a_1 a_3 + a_2}}{2a_1} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha_2 = \left( \frac{\sqrt{a_2^2 + 4a_1 a_3 - a_2}}{2a_1} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$a_1 = T^{\lambda} \beta_2, \quad a_2 = T^{\lambda} \beta_1 + S_1^{\ominus} L^2 (\beta_2 - \beta_0) + S_1^{\lambda} L^2 \beta_2, \quad (4.22)$$

$$a_3 = [S_1^{\ominus} - (S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}) \beta_1] L^2, \quad \beta_0 = \frac{S_1^{\ominus}}{L^2 R_1^{\ominus}},$$

$$\beta_1 = 1 - \frac{P_3^a}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^{\ominus}} + \frac{S_1^{\ominus}}{S_1^{\lambda}}, \quad \beta_2 = \beta_0 \left( 1 - \frac{P_2^a}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^{\ominus}} \right),$$

— dla  $\pi_m^{12} = 0, \pi_m^{11} = 1$  ( $\pi_m^{22} = 0$  lub  $\pi_m^{22} = 1$ )

$$P_3^b = \frac{12}{\tilde{L}^2} \frac{S_1^{\lambda} (1 + a_1) + S_1^{\ominus} (1 + a_2)}{(1 + a_1)(1 + a_2)}, \quad a_1 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_1^{\ominus}}{R_1^{\ominus}}, \quad a_2 = \frac{S_1^{\lambda}}{S_1^{\ominus}},$$

$$\partial \Theta_1^b = A \left( 1 + \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_1^{\ominus}}{R_1^{\ominus}} \right) \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}, \quad \partial \varphi_1^b = A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}, \quad (4.23)$$

$$\partial \lambda^b = -\frac{\pi}{2L} \left[ \left( 1 - \frac{P_3^b}{12} \frac{L^2}{S_1^{\ominus}} + \frac{S_1^{\ominus}}{S_1^{\lambda}} \right) + \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_1^{\ominus}}{R_1^{\ominus}} \left( 1 - \frac{P_3^b}{12} \frac{L^2}{S_1^{\ominus}} \right) \right] A \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla  $\pi_m^{12} = 1, \pi_m^{11} = 0$  ( $\pi_m^{22} = 1$  lub  $\pi_m^{22} = 0$ )

$$P_2^c = 12 \frac{S_1^{\ominus}}{\tilde{L}^2} \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \alpha = \frac{S_1^{\lambda}}{S_1^{\ominus}} + \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{T^{\lambda}}{S_1^{\ominus}}, \quad (4.24)$$

$$\partial \Theta_1^c = \partial \varphi_1^c = A \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right), \quad \partial \lambda^c = -\frac{\pi}{L^2} \left( 1 - \frac{P_3^c}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^{\ominus}} \right) A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla  $\pi_m^{12} = \pi_m^{11} = 0, \pi_m^{22} = 1$

$$P_3^d = 12 \frac{S_1^{\ominus}}{\tilde{L}^2} \frac{S_1^{\lambda}}{S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}}, \quad \partial \Theta_1^d = \partial \varphi_1^d = A \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right), \quad (4.25)$$

$$\partial \lambda^d = -\frac{\pi}{2L} \frac{S_1^{\ominus}}{S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

lub

$$P_3^d = 12 \frac{S_1^{\ominus}}{\tilde{L}^2} \frac{S_1^{\lambda}}{S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}}, \quad \partial \Theta_1^d = \partial \varphi_1^d = A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}, \quad (4.26)$$

$$\partial \lambda^d = -\frac{\pi}{2L} \frac{S_1^{\ominus}}{S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}} A \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla  $S_1^\varphi/L^2 R_1^\varphi \ll 1$  ( $\kappa_m^{*12} = \kappa_m^{*11} = 1$ ,  $\kappa_m^{*22} = 1$  lub  $\kappa_m^{*22} = 0$ )

$$P_3^e = 12 \frac{S_1^*(1+a_1) + S_s^*(1+a_2)}{\tilde{L}^2(1+a_1)},$$

$$a_1 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{T^{\lambda*}}{S_1^{\varphi*} + S^{\lambda*}}, \quad a_2 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{T^{\lambda*}}{S^{\lambda*}}, \quad S_s^* = \frac{S_1^{\varphi*} S^{\lambda*}}{S_1^{\varphi*} + S^{\lambda*}}, \quad (4.27)$$

$$\partial\theta_1^e = \partial\varphi_1^e = A \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right), \quad \partial\lambda^e = -\frac{\pi}{2L} \left( 1 - \frac{P_3^e}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^{\varphi*}} + \frac{S_1^{\varphi*}}{S_1^{\varphi*}} \right) A \sin \frac{\pi x}{2L},$$

Tabela 1

Nr	[m]	a <sub>I</sub>	a <sub>II</sub>	d <sub>I</sub> = d <sub>II</sub>	l <sub>I</sub>	l <sub>II</sub>	L	$\tilde{L}$	
1		0,10	0,10	0,10	1,0	1,0	18,0	6,0	
2		0,20	0,10	0,10					
3		0,10	0,20	0,10					
4		0,10	0,10	0,20					
5		0,10	0,10	0,10	2,0	1,0			
6		0,20	0,10	0,10					
7		0,10	0,20	0,10					
8		0,10	0,10	0,20					
9		0,40	0,10	0,10					
10		0,40	0,20	0,10					
11		0,40	0,10	0,20					
12		0,10	0,10	0,10	1,0	0,5			
13		0,10	0,10	0,05					
14		0,10	0,05	0,10					
15		0,05	0,10	0,10					
16		0,10	0,10	0,10	1,0	1,0	36,0		
17		0,10	0,10	0,10	2,0	1,0			
18		0,20	0,10	0,10					
19		0,10	0,10	0,10	4,0	1,0			
20		0,20	0,10	0,10					
21		0,40	0,10	0,10					
22		0,40	0,10	0,20					

— dla  $\dot{S}_1/L^2 \dot{R}_1^{\circ} \ll 1$ ,  $\dot{T}^{\lambda}/L^2(\dot{S}_1^{\circ} + \dot{S}^{\lambda}) \ll 1$  ( $\pi_m^{12} = \pi_m^{11} = 1$ ,  $\pi_m^{22} = 1$  lub  $\pi_m^{22} = 0$ )

$$P_3^f = \frac{12}{L^2} \left( \dot{S}_1^{\circ} + \frac{\dot{S}_1^{\circ} \dot{S}^{\lambda}}{\dot{S}_1^{\circ} + \dot{S}^{\lambda}} \right), \quad \partial \Theta_1^f = \partial \varphi_1^f = A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

$$\partial \lambda^f = -\frac{\pi}{2L} \frac{\dot{S}_1^{\circ}}{\dot{S}_1^{\circ} + \dot{S}^{\lambda}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$
(4.28)

gdzie A jest stałą dowolną.

Tabela 2

[kN] Nr	$P_1$ ( $\times 10^1$ )	$P_2$ ( $\times 10^3$ )	$P_2^b$ ( $\times 10^3$ )	$P_3$ ( $\times 10^2$ )	$P_3^b$ ( $\times 10^2$ )	$P_3^c$ ( $\times 10^2$ )	$P_3^d$ ( $\times 10^2$ )	$P_3^e$ ( $\times 10^2$ )	$P_3^f$ ( $\times 10^2$ )
1	11,4	7,38	7,38	8,06	7,16	3,65	3,54	7,27	7,16
2	22,8	13,5	13,4	16,8	15,3	3,80	3,58	15,6	15,4
3	11,4	11,5	11,5	15,5	14,7	11,2	11,1	14,8	14,7
4	91,3	14,8	14,8	24,2	23,5	12,6	11,7	24,4	23,5
5	11,4	2,80	2,80	6,15	5,35	1,84	1,74	5,46	5,36
6	22,8	6,68	6,62	14,7	13,5	1,99	1,77	13,8	13,6
7	11,4	3,84	3,83	9,53	8,82	5,30	5,22	8,91	8,82
8	91,2	5,60	5,59	18,2	17,6	6,68	5,80	18,5	17,6
9	45,6	8,98	8,29	38,3	30,5	2,24	1,79	31,1	30,7
10	45,6	43,1	42,7	36,5	34,5	6,13	5,70	35,0	34,6
11	36,5	18,0	16,6	210	193	9,48	5,87	198	194
12	22,8	18,6	18,6	10,9	10,8	3,80	3,58	11,0	10,8
13	2,85	9,30	9,29	2,41	2,20	0,75	0,72	2,22	2,20
14	22,8	6,64	6,62	8,03	7,96	0,93	0,73	8,19	7,96
15	11,4	3,84	3,84	5,12	5,02	3,65	3,55	5,13	5,02
16	2,85	4,79	4,80	8,44	7,16	3,57	3,55	7,19	7,16
17	2,85	2,32	2,32	6,51	5,35	1,77	1,74	5,38	5,35
18	5,71	5,35	5,33	15,5	13,5	1,83	1,77	13,6	13,6
19	2,85	0,83	0,83	5,37	4,45	0,86	0,84	4,48	4,45
20	5,70	2,63	2,62	13,9	12,6	0,92	0,87	12,7	12,6
21	11,4	4,00	3,84	30,2	29,7	1,00	0,87	29,9	29,8
22	91,2	8,01	7,68	203	191	3,82	2,92	192	191

Tabela 3

[kN]	$R_1^I$ ( $\times 10^5$ )	$R_2^S$ ( $\times 10^4$ )	$S_1^0/L^2$ ( $\times 10^0$ )	$R_2^S$ ( $\times 10^4$ )	$S_2^0/L^2$ ( $\times 10^4$ )	$R_2^0$ ( $\times 10^4$ )	$S_2^0/L^2$ ( $\times 10^4$ )	$S_3^0/L^2$ ( $\times 10^0$ )	$R_1^0$ ( $\times 10^4$ )	$S_1^0/L^2$ ( $\times 10^2$ )	$S_1^I/L^2$ ( $\times 10^0$ )	$S^2/L^2$ ( $\times 10^1$ )	$T^2/L^4$ ( $\times 10^{-2}$ )
Nr													
1	18,0	1,80	4,63	1,80	1,67	1,80	4,63	1,80	1,80	1,67	3,35	3,35	4,29
2	36,0	3,60	9,26	1,44	3,33	1,80	37,0	3,33	1,80	3,33	10,9	3,35	8,57
3	18,0	1,80	4,63	1,80	1,67	1,44	4,63	1,67	3,60	1,67	3,35	10,9	4,29
4	36,0	14,4	37,0	3,60	3,33	3,60	9,26	3,33	14,4	13,3	10,9	10,9	34,3
5	18,0	0,45	4,63	0,45	1,67	0,90	4,63	1,67	0,90	0,42	3,35	1,67	4,29
6	36,0	0,90	9,26	3,60	3,33	0,90	37,0	3,33	0,90	0,83	10,9	1,67	8,57
7	18,0	0,45	4,63	0,45	1,67	7,20	4,63	1,67	1,80	0,42	3,35	5,45	4,29
8	36,0	3,60	37,0	0,90	3,33	1,80	9,26	3,33	7,20	3,33	10,9	5,45	34,3
9	72,0	1,80	18,5	2,88	6,67	0,90	296	6,67	0,90	1,67	26,8	1,67	17,2
10	72,0	1,80	18,5	2,88	6,67	7,20	296	6,67	1,80	1,67	26,8	5,45	17,2
11	144	14,4	148	5,76	13,3	1,80	593	13,3	7,20	13,3	175	5,45	137
12	36,0	3,60	9,26	3,60	3,33	7,20	9,26	3,33	7,20	3,33	6,70	3,35	8,57
13	18,0	0,45	1,16	1,80	1,67	3,60	4,63	1,67	0,90	0,42	1,36	0,68	1,07
14	36,0	3,60	9,26	3,60	3,33	0,90	9,26	3,33	3,60	3,33	6,70	0,68	8,57
15	18,0	1,80	4,63	0,45	1,67	7,20	1,16	1,67	7,20	1,67	1,36	3,35	4,29
16	18,0	1,80	1,16	1,80	0,42	1,80	1,16	0,42	1,80	0,42	0,84	0,84	0,27
17	18,0	0,45	1,16	0,45	0,42	0,90	1,16	0,42	0,90	0,10	0,84	0,42	0,27
18	36,0	0,90	2,32	3,60	0,83	0,90	9,26	0,83	0,90	0,21	2,73	0,42	0,54
19	18,0	0,11	1,16	0,11	0,42	0,45	1,16	0,42	0,45	0,026	0,84	0,21	0,27
20	36,0	0,23	2,32	0,90	0,83	0,45	9,26	0,83	0,45	0,052	2,73	0,21	0,54
21	72,0	0,45	4,63	7,20	1,67	0,45	74,1	1,67	0,45	0,10	6,69	0,21	1,07
22	144	3,60	37,0	14,4	3,33	0,90	148	3,33	3,60	0,83	43,6	0,68	8,57

Na podstawie (4.7) - (4.9), (4.17) - (4.28) wyznaczono wartości krytyczne parametru obciążenia  $P$  przyjmując

$$E = 3 \cdot 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad \nu = 1/6, \quad \pi_m^{*22} = 1$$

oraz  $a_1, a_{11}, d_1 = d_{11}, l_1, l_{11}, L, \tilde{L}$  zgodnie z tabeli 1. Rezultaty obliczeń zamieszczono w tabeli 2. Dodatkowo w tabeli 3 podano wartości miar sztywności (zgodnie z numeracją z tabeli 1).

Stwierdzono, że dla rozpatrywanych danych liczbowych różnice między  $P_1^a, P_2^a, P_3^a$  oraz odpowiednio  $P_1, P_2, P_3$  nie przekraczają 0,1%, a różnice między  $P_1$  i  $P_1^b$  — 0,5%. Z przedstawionych w tabeli 2 wyników wnioskujemy, że wartości  $P_2, P_2^b$  praktycznie pokrywają się (poza  $P_2, P_2^b$  z pozycji 9, 11, 21, 22 w tabeli 2). Różnic między  $P_3$  oraz  $P_3^c, P_3^d$  są bardzo duże. Natomiast zbliżone do siebie na ogół wartości  $P_3^b, P_3^e, P_3^f$  w pewnych przypadkach różnią się mało od  $P_3$ , a w innych przypadkach różnią się stosunkowo znacznie, przy czym najbliższa  $P_3$  jest wielkość  $P_3^e$  (mniejsza od  $P_3$ , a więc bezpieczna z punktu widzenia projektowania). W rozpatrywanym przykładzie wyniki przybliżone są bliskie ścisłym (w ramach rozważanego modelu) w przypadku giętej postaci wyboczenia, a w przypadku postaci skrętnej obciążone są większymi błędami.

Zauważmy, że wielkości  $P_1^b l_{11} / \tilde{L}$  są dokładnymi wartościami krytycznymi obciążenia dla pręta o długości  $L$  i o przekroju prostokątnym  $a_1 \times d_1$ .

## 5. Uwagi końcowe

Na podstawie uzyskanych w p. 4 rezultatów można wnioskować, że przyjęcie niezależnych parametrów obrotów węzłów w stosunku do parametrów obrotu przekroju  $x = \text{const}$  (por. (3.1), (3.13)) ma istotne znaczenie przy formułowaniu jednowymiarowego modelu rozważanego w pracy dźwigara. Oznacza to, że formalne przeniesienie hipotez typu Bernoulli'ego-Timoshenki-Własowa z teorii dźwigarów pełnościennych na konstrukcje siatkowe może prowadzić do znacznych błędów (por. również [4]).

Oczywiście można było przewidzieć, że najmniejszą z wartości krytycznych parametru obciążenia w rozważanym w p. 4 przykładzie jest  $P_1$  i można ją łatwo wyznaczyć w sposób ścisły na podstawie zarówno modelu dyskretnego, jak również dwuwymiarowego modelu ciągłego. Przedstawiona analiza ma przede wszystkim na celu zbadanie stopnia trudności rozwiązywania problemów stateczności w ramach zaproponowanego modelu jednowymiarowego oraz możliwości dalszych jego uproszczeń. Przykłady innych, bardziej technicznie interesujących zagadnień stateczności (jak np. problemu utraty płaskiej postaci zginania) będą przedmiotem dalszych prac autora. Pełniejszego wyjaśnienia wymaga również zakres stosowności omówionego modelu jednowymiarowego.



## Spis literatury

1. R. NAGÓRSKI, *Jednowymiarowy ciągły model stateczności sprężystej siatkowych dźwigarów powierzchniowych*, (ibid.).
2. Cz. WOŹNIAK, *On the non-standard continuum mechanics. I. Basic-concepts. Continua with constrained kinematic fields. II. Continua with kinetic and kinematic-kinetic constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci. Serie Sci. Techn., 24, 1, 1976.
3. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970,
4. R. NAGÓRSKI, *Jednowymiarowe modele ciągłe siatkowych dźwigarów powierzchniowych*, Zesz. Nauk. Pol. Warszawskiej, Seria: Budownictwo (w druku).

## Резюме

## УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ СЕТКООБРАЗНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК

Предметом работы являются линейные уравнения устойчивости прямоугольной сеткообразной пластинки типа роллверк с густой, регулярной ортогональной сеткой призматических элементов. Эти уравнения получены в результате применения представленной в работе [1] идеи построения одномерной непрерывной модели устойчивости сеткообразных поверхностных систем. Для конструкции в форме консоли определены критические параметры нагрузки при осевом состоянии сжатия

## Summary

## STABILITY OF A ONE-DIMENSIONAL CONTINUOUS MODEL OF LATTICE-TYPE ELASTIC PLATES

The paper deals with linear equations of stability for an elastic grid with dense, regular and orthogonal lattice of prismatic rods. The equations were obtained by applying the concept of the one-dimensional continuous model of the lattice-type surface structures, presented in [1]. The critical values of load for the grid in the shape of cantilever in the state of axial compression were obtained and analysed.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 listopada 1983 roku*



## ANALIZA REOLOGICZNA SIATEK WYKONANYCH Z LIN STALOWYCH\*)

BOGDAN HUSIAR

*Politechnika Poznańska*

ROMUALD ŚWITKA

*Politechnika Poznańska*

### 1. Wstęp

Wstępnie napięte siatki ciągnowe, stosowane jako konstrukcje przekryć w budownictwie, są z reguły wykonywane z lin stalowych. Właściwości reologiczne stali, jako tworzywa konstrukcyjnego, nie są zbyt znaczne. Wzrastają one w podwyższonych temperaturach, co jednak raczej nie ma miejsca w przypadku przekryć budowlanych. Wydawałoby się więc, że badanie wpływów reologicznych we wstępnie napiętych siatkach ciągnowych nie ma większego znaczenia. Okazuje się, że wpływy te mogą być na tyle istotne, że uwzględnianie ich przy projektowaniu siatek ciągnowych powinno być brane pod uwagę.

Wiadomo [1], że pełzanie lin jest ok. 20% większe od pełzania pojedynczych drutów. Jest to wynik wewnętrznej struktury liny: odwijanie się splotów, wybieranie luzów i powstawanie poślizgów pomiędzy poszczególnymi drutami lub splotami ma przebieg powolny i długotrwały. Można powiedzieć, że na pełzanie „materiałowe” nakłada się w linach pełzanie „strukturalne”. Te długotrwałe zjawiska pełzania i relaksacji są niepożądane, bowiem przebiegają poza kontrolą konstruktora i na ogół pogarszają parametry konstrukcyjne i eksploatacyjne ustroju. W celu zmniejszenia skutków pełzania stosuje się wstępne naciąganie lin. Norma PN-80/B-03200 „Konstrukcje stalowe, obliczenia statyczne i projektowanie” podaje współczynniki sprężystości podłużnej dla lin stalowych wstępnie naciągniętych siłą równą 40% nominalnej siły zrywającej. Badania nad wpływem wstępnego przeciążenia na pełzanie i relaksację cięgien stosowanych w konstrukcjach sprężonych prowadził M. Kosiorek [2]. Z badań tych wynika, że wpływ wstępnego naciągania jest znaczny: odkształcenia pełzania lin zmniejszają się o 35 ÷ 65% po 1000 h, a relaksacja naprężeń po 1000 h jest mniejsza o 35 ÷ 40%. Zmniejszenie właściwości pełzania i relaksacji dotyczy przede wszystkim początkowego okresu eksploatacji. Po dłuższym czasie właściwości reologiczne lin wstępnie naciąganych i nienaciąganych zbliżają się do siebie. Ograniczony w czasie wpływ wstępnego naciągania potwierdzają badania E. Engeberga i L. Wallina [3].

---

\* Praca została wykonana w ramach P. W. 05.12.

Wpływ zjawisk reologicznych w konstrukcjach ciągnowych znacznie wzrosło w przypadku zastosowania lin stalowo-aluminiowych, lin z rdzeniem niemelatowym (np. konopnym lub z tworzywa sztucznego) oraz lin wykonanych w całości z tworzywa sztucznego.

Niezbyt liczne są w literaturze dane dotyczące parametrów reologicznych lin. Większość badań dotyczy drutów i lin stosowanych do konstrukcji wstępnie sprężonych. Badania lin zastosowanych do budowy przekryć stadionu olimpijskiego w Monachium przeprowadził G. Mayr [4]. Krzywa pełzania podana przez Mayra została wykorzystana w pracy [5] do wyznaczenia parametrów lepkosprężystości liny. Na rynku krajowym bardziej dostępne są liny stosowane do sprężania betonu. Dlatego w niniejszej pracy wykorzystane zostaną głównie wyniki badań J. Kmity [6]. Badania Kmity zostały również wyczerpująco opisane w znanej monografii I. Kisiela [7]. Przyjęto więc, że w zakresie sprężystym można przyporządkować linie stalowej reologiczny model standardowy (model Zenera), dla którego jest:  $E_1 = 1880000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $E_2 = 120000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\eta = 4249000 \text{ kG dni/cm}^2$  (jednostki podaje się za I. Kisielą [7], w dalszym ciągu będą stosowane jednostki z układu SI).

Ze względu na skąpe dane w literaturze ograniczymy się do analizy wpływów reologicznych w siatkach ciągnowych z lin stalowych, zwracając uwagę, że wyprowadzone tu wnioski będą tym bardziej aktualne dla lin wykonanych z innych tworzyw.

Celem niniejszej publikacji jest zbadanie, w jakim stopniu właściwości reologiczne lin stalowych wpływają na pracę złożonych układów ciągnowych. Podana zostanie metoda numeryczna obliczania ciągnowych konstrukcji lepkosprężystych, bazująca na wynikach pracy [8] i polegająca na uogólnieniu metody elementów skończonych na lepkosprężyste układy ciągnowe. Mając na uwadze studialny charakter niniejszej pracy, zrezygnowano z niektórych uogólnień zawartych w pracy [8] i ograniczono się do najprostszej wersji metody numerycznego całkowania konstytutywnych równań lepkosprężystości, opisanej w cytowanej wyżej pracy. Dzięki temu można było zbudować stosunkowo prosty program na EMC, który pozwolił na wykonanie obliczeń reologicznych dla kilku przykładów wstępnie napiętych siatek ciągnowych wykonanych z lin stalowych.

## 2. Lepkosprężysty element ciągnowy

Uogólnienie metody elementów skończonych na siatki lepkosprężyste jest możliwe w oparciu o wyprowadzone przez autorów w pracy [8] równanie stanu w ujęciu dyskretnym. Zgodnie z tym równaniem odkształcenie w danej chwili jest określone przez naprężenie w tej chwili oraz przez stan układu w chwili poprzedniej. W pracy [8] przyjęto, że równanie konstytutywne materiału lepkosprężystego ma postać związku różniczkowego

$$a_0 \sigma + a_1 \dot{\sigma} + a_2 \ddot{\sigma} = b_0 \varepsilon + b_1 \dot{\varepsilon} + b_2 \ddot{\varepsilon} \quad (2.1)$$

z pięcioma niezależnymi parametrami (stałymi materiałowymi). Dopuszczono nieciągłości pierwszego rodzaju (skoki) dla funkcji  $\sigma(t)$  i jej pochodnej  $\dot{\sigma}(t)$  oraz dla funkcji  $\varepsilon(t)$  i  $\dot{\varepsilon}(t)$ . Oś czasu podzielono węzłami (numerowanymi:  $\tau = 0, 1, 2, \dots$ ) na przedziały o długości  $\vartheta_\tau$ , przy czym funkcja  $\sigma(t)$  powinna być ciągła wraz z pierwszą pochodną w każdym otwartym przedziale  $(t_\tau, t_{\tau+1})$ . Dla funkcji  $\sigma(t)$  zastosowano w poszczególnym przedziale

aproxymację liniową lub kwadratową. W pracy [8] przeanalizowano błąd obliczeń w zależności od rodzaju aproxymacji i długości kroku oraz przeprowadzono analizy obliczeń dla podstawowych modeli reologicznych (Kelvin-Voigt, Zener, Burgers).

W niniejszej pracy rozważania ograniczymy do modeli trójparametrowych ( $a_2 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ) i do aproxymacji liniowej. Dyskretne równanie stanu można w tym przypadku przedstawić w postaci [8]:

$$\varepsilon_\tau = c_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \gamma_\tau \sigma_\tau + (a_0 c_{2,\tau} - \gamma_\tau) \sigma'_{\tau-1} + a_1 c_{5,\tau} \Delta \sigma_{\tau-1}, \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

W równaniu (2.2)  $\varepsilon_\tau$  i  $\sigma_\tau$  są odpowiednio odkształceniem i naprężeniem w chwili  $t_\tau$  (granice lewostronne, znak „prim” oznaczać będzie granicę prawostronną),  $\Delta \sigma_\tau$  jest skokiem naprężenia w chwili  $t_\tau$

$$\Delta \sigma_\tau = \sigma'_\tau - \sigma_\tau. \quad (2.3)$$

Ponadto

$$\gamma_\tau = \frac{1}{\vartheta_\tau} (a_0 c_{3,\tau} + a_1 c_{2,\tau}), \quad (2.4)$$

$c_{i,\tau}$  są współczynnikami zestawionymi w tabelicy 1 (współczynniki  $c_{1,\tau}$  i  $c_{4,\tau}$  pominięte w tabeli, nie występują w modelu trójparametrowym).

Tabela 1

L.p.	Przypadek	$c_{0,\tau}$	$c_{2,\tau}$	$c_{3,\tau}$	$c_{5,\tau}$
1	$b_0 = 0, b_1 \neq 0$	1	$\frac{1}{b_1} \vartheta_\tau$	$\frac{1}{2b_1} \vartheta_\tau^2$	$\frac{1}{b_1}$
2	$b_0 \neq 0, b_1 \neq 0$	$\exp(-\alpha \vartheta_\tau)$ $\alpha = b_0/b_1$	$\frac{1}{b_0} (1 - c_{0,\tau})$	$\frac{1}{b_0} \vartheta_\tau - \frac{1}{\alpha} c_{2,\tau}$	$\frac{1}{b_1} c_{0,\tau}$

Jeśli w chwili  $t_\tau$  zachodzi nieciągłość (skok) funkcji naprężenia  $\Delta \sigma_\tau$ , to skok odkształcenia  $\Delta \varepsilon_\tau$  oblicza się wzorem

$$\Delta \varepsilon_\tau = \gamma_0 \Delta \sigma_\tau, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

w którym

$$\gamma_0 = a_1/b_1. \quad (2.6)$$

W układzie prętowym naprężenia (siły przekrojowe) wyrażają się za pośrednictwem warunków równowagi węzłów przez obciążenia. Związki te w układzie liniowym mają również charakter liniowy i dowolna aproxymacja naprężeń jako funkcji czasu przenosi się na taką samą aproxymację sił obciążających. Przyjmując, że program obciążania konstrukcji jest znaną funkcją czasu, dobieramy krok  $\vartheta_\tau$  w ten sposób, żeby otrzymać wystarczająco dobrą aproxymację tej funkcji. W układzie geometrycznie nieliniowym, jakim jest siatka ciągnowa, aproxymacje przebiegu naprężeń i obciążeń nie będą równoważne. Jednakże badania numeryczne prowadzone przy różnej długości kroku  $\vartheta_\tau$  wskazują, że i w tym przypadku, przynajmniej w odniesieniu do siatek ciągnowych, istotna jest tylko dobra aproxymacja funkcji opisującej program obciążania, i przy spełnieniu tego warunku długość kroku nie ma widocznego wpływu na wyniki.

Przejsie od stanu obciazenia  $\mathbf{P}_{\tau-1}$  do stanu  $\mathbf{P}_{\tau}$  przebiega wiec zgodnie z przyjeta aproksymacja i uzaleznione jest od zmiany konfiguracji ukladu, ktora w kazdym kroku czasowym jest uaktualniana.

Zadanie nieliniowe (geometrycznie) rozwiazuje sie w kazdym kroku czasowym metoda iteracyjna Newtona-Raphsona, stosujac postepowanie typowe dla metody elementow skonczonech. Odcinki ciegien miedzy wezlami traktuje sie jako elementy prostoliniowe. Element „e” laczacy wezly „i” i „k” w chwili  $t_{\tau}$  jest rozciagany sila  $S_{\tau}$  i ma dlugosc  $l_{\tau}$ . Pole przekroju pręta jest rowne  $A$ . Wprowadza sie lokalny uklad wspolrzędnych  $(x_e, y_e, z_e)$  z poczatkem w wezle „i”, ktorego os  $x_e$  pokrywa sie z osia pręta, a os  $y_e$  lezy w płaszczyźnie poziomej. W lokalnym ukladzie wspolrzędnych wektory przemieszczenia wezlow będa wyroznione nadkreśleniem:

$$\bar{\mathbf{u}}_{i,\tau} = \text{col}(\bar{u}_{xi,\tau}, \bar{u}_{yi,\tau}, \bar{u}_{zi,\tau}),$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{k,\tau} = \text{col}(\bar{u}_{xk,\tau}, \bar{u}_{yk,\tau}, \bar{u}_{zk,\tau}).$$

Wektory sil wezlowych oznacza sie podobnie:

$$\bar{\mathbf{F}}_{i,\tau} = \text{col}(\bar{F}_{xi,\tau}, \bar{F}_{yi,\tau}, \bar{F}_{zi,\tau}),$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{k,\tau} = \text{col}(\bar{F}_{xk,\tau}, \bar{F}_{yk,\tau}, \bar{F}_{zk,\tau}).$$

Biorac pod uwage, ze  $\sigma_{\tau} = S_{\tau}/A$ ,  $\varepsilon_{\tau} = \frac{1}{l_0} (\bar{u}_{xk,\tau} - \bar{u}_{xi,\tau})$ ,  $\bar{F}_{xi,\tau} = -S_{\tau}$ ,  $\bar{F}_{xk,\tau} = S_{\tau}$ , otrzymuje sie z (2.2) wzory transformacyjne dla sil brzegowych  $\bar{F}_{xi,\tau}$  i  $\bar{F}_{xk,\tau}$  w postaci:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{xi,\tau} = & \frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} (\bar{u}_{xi,\tau} - \bar{u}_{xk,\tau}) - \frac{Ac_{0,\tau}}{l_0 \gamma_{\tau}} (\bar{u}_{xi,\tau-1} - \bar{u}_{xk,\tau-1}) + \\ & + \left( \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} - 1 \right) S'_{\tau-1} + \frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{xk,\tau} = & -\frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} (\bar{u}_{xi,\tau} - \bar{u}_{xk,\tau}) + \frac{Ac_{0,\tau}}{l_0 \gamma_{\tau}} (\bar{u}_{xi,\tau-1} - \bar{u}_{xk,\tau-1}) - \\ & - \left( \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} - 1 \right) S'_{\tau-1} - \frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1}. \end{aligned}$$

Pozostale składowe sil wezlowych sa zalezne tylko od aktualnego polozenia odcinka „ik” cignia w przestrzeni:

$$\bar{F}_{yi,\tau} = \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\bar{u}_{yi,\tau} - \bar{u}_{yk,\tau}),$$

$$\bar{F}_{yk,\tau} = -\frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\bar{u}_{yi,\tau} - \bar{u}_{yk,\tau}),$$

(2.8)

$$\bar{F}_{zi,\tau} = \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\bar{u}_{zi,\tau} - \bar{u}_{zk,\tau}),$$

$$\bar{F}_{zk,\tau} = -\frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\bar{u}_{zi,\tau} - \bar{u}_{zk,\tau}).$$

Równania (2.7÷8) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_{\tau}^e &= \left[ \frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} \mathbf{J}_1 + \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\mathbf{J} - \mathbf{J}_1) \right] \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^e - \frac{A c_{0,\tau}}{l_0 \gamma_{\tau}} \mathbf{J}_1 \bar{\mathbf{u}}_{\tau-1}^e + \\ &+ \left[ \frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1} - \left( 1 - \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} \right) S'_{\tau-1} \right] \mathbf{J}_0, \\ \bar{\mathbf{F}}_{\tau}^e &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{i,\tau} \\ \bar{\mathbf{F}}_{k,\tau} \end{bmatrix}^e, \quad \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{i,\tau} \\ \bar{\mathbf{u}}_{k,\tau} \end{bmatrix}^e, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{I}_1 \\ -\mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_0 &= \text{col}(1,0,0, -1,0,0), \quad \mathbf{I} = \text{diag}(1,1,1), \quad \mathbf{I}_1 = \text{diag}(1,0,0).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Po przejściu do globalnego układu współrzędnych otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\tau}^e &= \mathbf{K}_{\tau}^e \mathbf{u}_{\tau}^e - c_{0,\tau} \mathbf{K}_{L,\tau}^e \mathbf{u}_{\tau-1}^e + \\ &+ \left[ \frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1} - \left( 1 - \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} \right) S'_{\tau-1} \right]_{\tau=1,2,\dots} \mathbf{H},\end{aligned}\tag{2.10}$$

Siły węzłowe i przemieszczenia w układzie globalnym zapisuje się bez nadkreślenia. W równaniu (2.10)  $\mathbf{K}_{\tau}^e = \mathbf{K}_{L,\tau}^e + \mathbf{K}_{G,\tau}^e$  jest macierzą sztywności elementu,  $\mathbf{K}_{L,\tau}^e$  — macierzą sztywności lepkosprężystej,  $\mathbf{K}_{G,\tau}^e$  — macierzą sztywności geometrycznej:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{L,\tau}^e &= \frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & -\mathbf{T} \\ -\mathbf{T} & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{G,\tau}^e = \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{T} & \mathbf{T} - \mathbf{I} \\ \mathbf{T} - \mathbf{I} & \mathbf{I} - \mathbf{T} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} n_x n_x & n_x n_y & n_x n_z \\ & n_y n_y & n_y n_z \\ \text{sym.} & & n_z n_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \text{col}(\mathbf{H}_1, -\mathbf{H}_1), \quad \mathbf{H}_1 = \text{col}(n_x, n_y, n_z),\end{aligned}$$

$n_x, n_y, n_z$  są współrzędnymi wektora  $\mathbf{n}^e$  w globalnym układzie współrzędnych  $(x, y, z)$ . Wektor  $\mathbf{n}^e$  jest wektorem jednostkowym, kolinearnym z osią  $x_e$ , skierowanym od węzła „i” do węzła „k”. Równanie (2.10) jest równaniem lepkosprężystego elementu ciągnowego w globalnym układzie współrzędnych zapisanym dla chwili  $t_{\tau}$ .

W każdej chwili  $t_{\tau}$  musi być spełnione równanie równowagi

$$\sum_e \mathbf{F}_{i,\tau}^e - \mathbf{P}_{i,\tau} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,\tag{2.11}$$

w którym  $\mathbf{P}_{i,\tau} = \text{col}(P_{x i,\tau}, P_{y i,\tau}, P_{z i,\tau})$  jest wektorem siły zewnętrznej działającej na węzeł „i” w chwili  $t_{\tau}$ , a sumowanie  $\sum_e$  obejmuje wszystkie elementy zbiegające się w węzle „i”.

Uwzględniając w (2.11), że

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{i,\tau}^e &= \left[ \frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} \mathbf{T} + \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \right] (\mathbf{u}_{i,\tau}^e - \mathbf{u}_{k,\tau}^e) - c_{0,\tau} \frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} \mathbf{T} (\mathbf{u}_{i,\tau-1}^e - \mathbf{u}_{k,\tau-1}^e) + \\ &+ \left[ \frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1} - \left( 1 - \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} \right) S'_{\tau-1} \right] \mathbf{H}_1,\end{aligned}\tag{2.12}$$

oraz warunek zgodności przemieszczeń  $u_{i,\tau}^e = u_{i,\tau}$  dla wszystkich elementów „e” zbiegających się w węzle „i”, otrzymuje się ogólnie znaną regułę agregacji macierzy globalnej. Macierz  $\mathbf{T}$  jest odnoszona w każdym kroku czasowym i w każdym kroku iteracyjnym do konfiguracji aktualnej.

Równanie macierzowo-rekurencyjne siatki lepkością można zapisać w postaci

$$\mathbf{K}_\tau \mathbf{u}_\tau = \mathbf{P}_\tau + c_{0,\tau} \mathbf{K}_{L,\tau} \mathbf{u}_{\tau-1} - \mathbf{Q}_{\tau-1}, \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

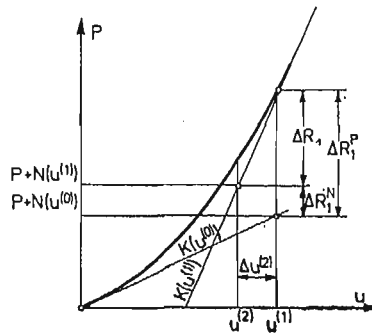
Stan układu z chwili poprzedniej  $t_{\tau-1}$  został doliczony do wektora obciążeń. Macierz  $\mathbf{Q}_{\tau-1}$  buduje się następująco:

$$\mathbf{Q}_{\tau-1} = \begin{bmatrix} \sum_e [\dots]^e \mathbf{H}_1^e & \text{dla wężła "1"} \\ \dots & \dots \\ \sum_e [\dots]^e \mathbf{H}_i^e & \text{dla wężła "i"} \\ \dots & \dots \\ \sum_e [\dots]^e \mathbf{H}_n^e & \text{dla wężła "n"} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$[\dots]^e = \left[ \frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_\tau} \Delta S_{\tau-1} - \left( 1 - \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_\tau} \right) S'_{\tau-1} \right]^e,$$

Macierz  $\mathbf{K}_\tau$  jest styczną macierzą sztywności przyporządkowaną aktualnej konfiguracji określonej przez nieznaną wektor  $\mathbf{u}_\tau$ . Równanie (2.13) należy więc rozumieć jako schemat wyjściowy do zastosowania iteracyjnej metody Newtona-Raphsona. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że człon obciążeniowy jest zależny od aktualnej konfiguracji (układ jest niezachowawczy), wobec czego metoda Newtona-Raphsona wymaga pewnej modyfikacji. Zmodyfikowany tok postępowania iteracyjnego ilustruje rys. 1. Jeżeli dla większej zwięzłości wywodu równanie (2.13) zapisane zostanie w postaci

$$K(u) \cdot u = P + N(u),$$



Rys. 1

a dla ułatwienia graficznej interpretacji ograniczymy układ do jednego stopnia swobody, to tok zmodyfikowanego postępowania iteracyjnego można przedstawić następująco:

Biorąc wartość wyjściową przemieszczenia  $u^{(0)}$  budujemy równanie  $K(u^{(0)}) \cdot u^{(1)} = P + N(u^{(0)})$ , z którego obliczamy  $u^{(1)}$ , a następnie  $N(u^{(1)})$ ,  $S^{(1)}$  oraz niezrównoważoną siłę  $\Delta R_1^P = P - S^{(1)}$ . Jednocześnie korygujemy poziom obciążenia o wartość  $\Delta R_1^N = N(u^{(1)}) - N(u^{(0)})$ . Obliczeniowa siła niezrównoważona jest więc równa  $\Delta R_1 = \Delta R_1^P + \Delta R_1^N$  (na rysunku 1 uwzględniono, że na ogół będzie  $\Delta R_1^P < 0$  i  $\Delta R_1^N > 0$ ). W drugim kroku



iteracyjnym rozwiązuje się równanie  $K(u^{(1)}) \cdot \Delta u^{(2)} = \Delta R_1$ , skąd:  $\Delta u^{(2)}$ ,  $u^{(2)} = u^{(1)} + \Delta u^{(2)}$ ,  $N(u^{(2)})$  i  $S^{(2)}$  oraz

$$\Delta R_2^P = P - S^{(2)}, \quad \Delta R_2^N = N(u^{(2)}) - N(u^{(1)}), \quad \Delta R_2 = \Delta R_2^P + \Delta R_2^N.$$

W trzecim kroku iteracyjnym rozwiązuje się równanie  $K(u^{(2)}) \cdot \Delta u^{(3)} = \Delta R_2$ , skąd oblicza się  $\Delta u^{(3)}$ , ... itd.

Jeśli w węźle „ $\tau$ ” na osi czasu pojawia się nieciągłość (skok) funkcji  $P_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), to skokowi  $\Delta P_{i,\tau}$  może towarzyszyć skok  $\Delta u_{i,\tau}$ . Będzie to zachodzić, jeśli  $a_1 \neq 0$  i  $b_1 \neq 0$ . W takim przypadku rozwiązuje się dodatkowo równanie

$$K_0 \Delta u_\tau = \Delta P_\tau, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

będące w istocie zwykłym równaniem statyki siatki sprężystej, w którym do macierzy sztywności wprowadza się  $E = 1/\gamma_0$ .

Warunek początkowy realizuje się przez wprowadzenie stanu wyjściowego („zerowego”). Stan „zerowy”, to znaczy stan dla  $t = 0 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , uzyskuje się za pomocą równania statyki dla siatki sprężystej

$$K u_0 = P_0. \quad (2.16)$$

Stan „zerowy” będzie na ogół stanem wywołanym tylko wstępnym napięciem i ciężarem własnym siatki. Równania (2.15) i (2.16) stanowią schematy wyjściowe do procesu iteracyjnego Newtona-Raphsona.

### 3. Program na EMC, przykłady obliczeń i analizy

W oparciu o podane w ust. 2 równania opracowany został program na EMC MERA 400 w języku FORTRAN<sup>1</sup>. Program wykorzystuje wyłącznie pamięć wewnętrzną, co ogranicza wielkość rozwiązywanego zadania do układu złożonego z nie więcej niż 35 cięgien lub mającego co najwyżej 60 stopni swobody. Taki rozmiar zadań jest wystarczający na etapie studialnym, mającym rozpoznać wpływ zjawisk reologicznych na pracę realnych siatek ciągnowych. Możliwość programu zwiększa łatwe przejście na EMC serii ODRA 1300.

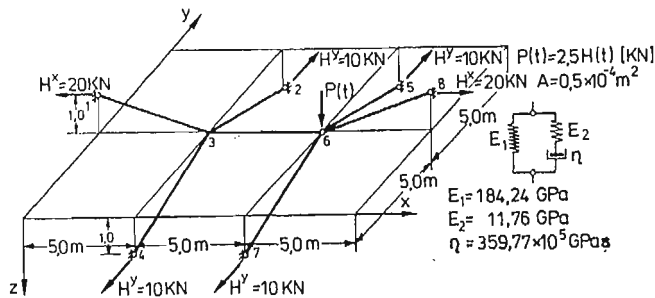
Dla każdej chwili  $t_\tau$  przemieszczenia węzłów konstrukcji wyznacza się iteracyjnie, wykorzystując metodę Newtona-Raphsona. Procedury tworzenia macierzy sztywności i rozwiązywania układów równań zaczerpnięto z wcześniej opracowanego programu obliczeń statycznych STAC-AM10<sup>2</sup>.

#### Przykład 1

Przeprowadzono analizę zachowania się w czasie siatki pokazanej na rysunku 2. Siatka jest obciążona w węźle 6 siłą  $P = 2,5$  kN nagle przyłożoną w chwili  $t = 0$  i następnie stałą w czasie. Wstępny naciąg i wstępna konfiguracja opisane są na rysunku. Siatka zbudowana jest z lin stalowych o przekroju  $A = 0,5 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>. W odniesieniu do parametrów reologicznych liny oparto się na danych zawartych w monografii I. Kisiela [7] i odnoszących

<sup>1</sup> Program napisał Marek Ratajczak.

<sup>2</sup> Program STAC-AM10 był przedstawiony w publikacji: J. Pulikowski, J. Rakowski, R. Świtka, Algorytm obliczeń statycznych konstrukcji ciągnowych, IV Konf. Nauk. nt. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, Koszalin 1979.



Rys. 2

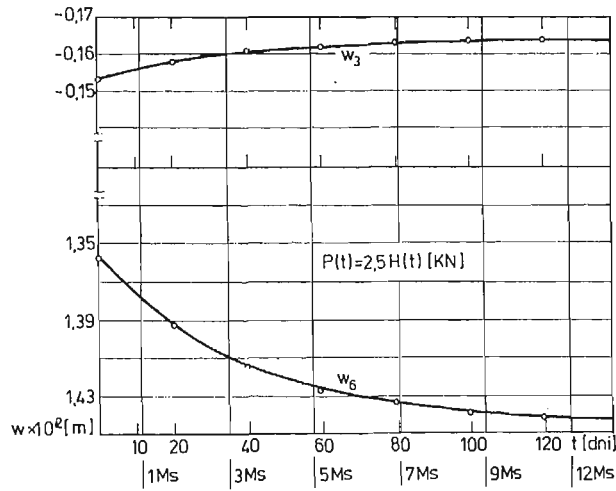
się do badań J. Kmity [6] nad liniami stalowymi stosowanymi do sprężania betonu. Przyjęto model standardowy Zenera z parametrami:  $E_1 = 184\,240$  MPa,  $E_2 = 11\,760$  MPa,  $\eta = 3,5977 \cdot 10^{10}$  MPa · s. Obliczenia wykonano w przedziale czasu (0,360 dni), czyli (0,31104 Ks) ze stałym krokiem  $\vartheta_\tau = \vartheta = 5$  dni = 0,432 Ms.

Wyniki obliczeń zawarte są w tabelicy 2 oraz na rysunkach 3 i 4. Obliczenia reologiczne starano się porównać z wynikami dla modelu sprężystego siatki. Przy takich porównaniach

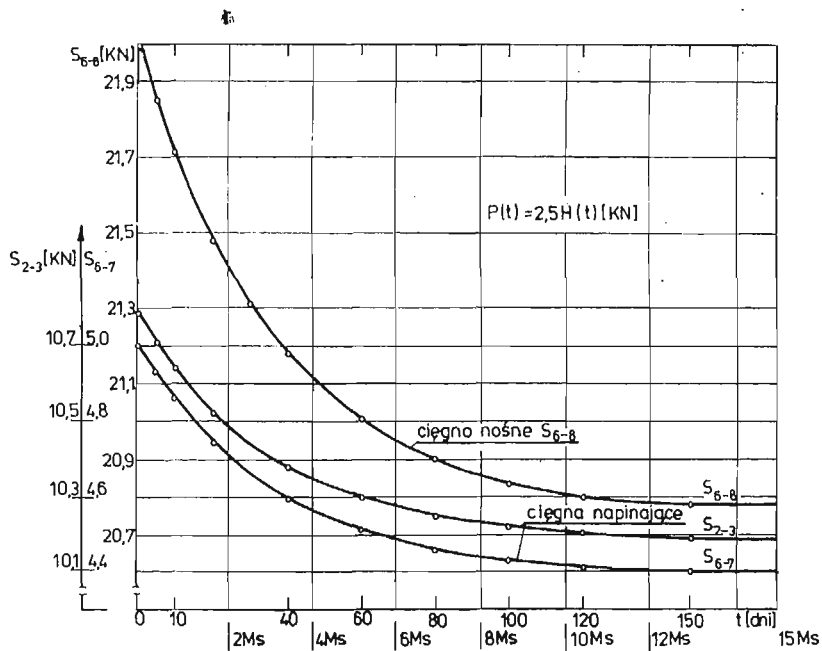
Tabela 2

		Ugięcie w $\times 10^2$ [m]		Siły wciągach [kN]		
		Węzeł nr 3	Węzeł nr 6	$S_{6-8}$	$S_{2-3}$	$S_{6-7}$
Wstępne sprężenie	$t = 0^-$	0,0	0,0	20,3961	10,1980	10,1980
	$t = 0^+$	-0,1544	1,3565	21,9981	10,7932	5,0113
Model lepko-sprężysty	$t = 30$ dni	-0,1599	1,4045	21,2889	10,4431	4,6591
	$t = 60$ dni	-0,1624	1,4262	20,9901	10,2935	4,5090
	$t = 150$ dni	-0,1642	1,4424	20,7846	10,1904	4,4059
	$t = 360$ dni	-0,1643	1,4440	20,7674	10,1818	4,3974
	Model sprężysty	$E = 145$ GPa	-0,1877 ( $\Delta = 12,5\%$ )	1,8133 ( $\Delta = 20,4\%$ )	22,0066 ( $\Delta = 5,6\%$ )	10,7263 ( $\Delta = 5,1\%$ )
$E = 175$ GPa		-0,1696 ( $\Delta = 3,1\%$ )	1,4603 ( $\Delta = 1,1\%$ )	22,0086 ( $\Delta = 5,6\%$ )	10,7628 ( $\Delta = 5,4\%$ )	5,0675 ( $\Delta = 13,2\%$ )

natrafia się na trudność w doborze modułu sprężystości liny. Autorzy odwołują się tu do obowiązujących w projektowaniu polskich norm. Według PN-80/B-03200 „Konstrukcje stalowe, obliczenia statyczne i projektowanie” dla lin z rdzeniem stalowym o profilu otwartym należy przyjmować  $E = 145$  GPa. Natomiast norma PN-76/B-03264 „Konstrukcje



Rys. 3



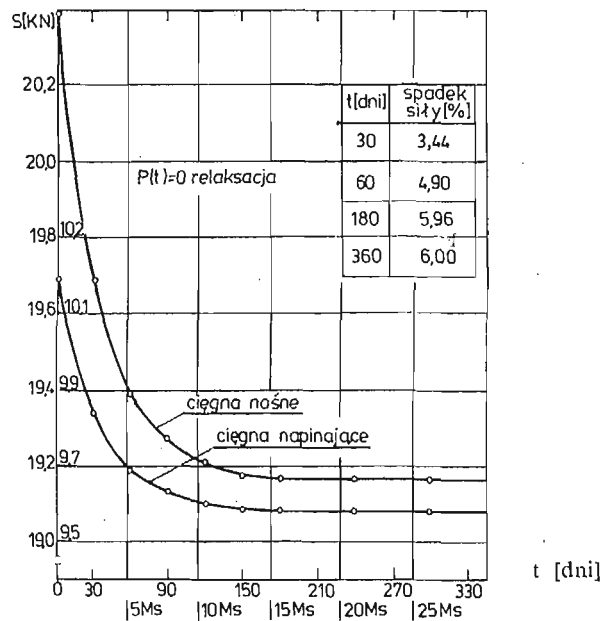
Rys. 4

betonowe, żelbetowe i sprężone, obliczenia statyczne i projektowanie” zaleca przyjmować dla lin stosowanych do sprężania betonu  $E = 175$  GPa. Z uwagi na znaczną rozpiętość zalecanych przez normy wielkości, obliczenia porównawcze wykonano dla  $E = 145$  GPa i dla  $E = 175$  GPa. Dla obu przypadków różnica między modelem lepkosprężystym a sprężystym jest dość istotna: w ugięciach przekracza odpowiednio 20% i 3%, w siłach — 14% i 13%.

**Przykład 2**

Dla siatki z przykładu 1 analizowano relaksację wstępnego napięcia ( $P(t) = 0$ ). Przebieg relaksacji ilustruje rys. 5. Można stwierdzić, że stabilizacja procesu relaksacji następuje po upływie 12÷15 Ms. Spadek wielkości sił po upływie 360 dni wyniósł 6%.

W przykładzie powyższym badano również wpływ długości kroku  $\vartheta$  na wyniki (tablica 3). Długość kroku w tym przypadku, praktycznie rzecz biorąc, nie ma znaczenia. Zgodność należy tłumaczyć niewielkim udziałem czynnika lepkiego w badanym układzie lepko-sprężystym.



Rys. 5

Tablica 3

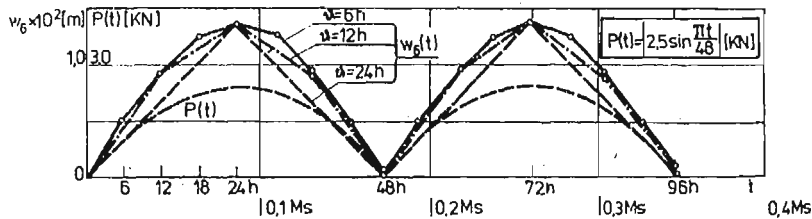
t [h]	Relaksacja w cięgnie 6—8, $S_{6-8}$ [KN]				
	$\vartheta = 6h$	$\vartheta = 24h$	$\vartheta = 120h$	$\vartheta = 240h$	$\vartheta = 720h$
0	20,3961	20,3961	20,3961	20,3961	20,3961
120	20,2348	20,2350	20,2350	—	—
240	20,0948	20,0950	20,0950	20,0950	—
720	19,6964	19,6969	19,6969	19,6968	19,6953
960	19,5672	19,5679	19,5678	19,5677	—
1440	19,3964	19,3972	19,3971	19,3970	19,3958
2160	19,2679	19,2687	19,2687	19,2686	19,2678
3600	19,1891	19,1900	19,1899	19,1900	19,1898

**Przykład 3**

W dalszym ciągu badano wpływ długości kroku na wyniki w przypadku siły zmieniającej się według wzoru:

$$P(t) = \left| 2,5 \sin \frac{\pi t}{48} \right| [kN].$$

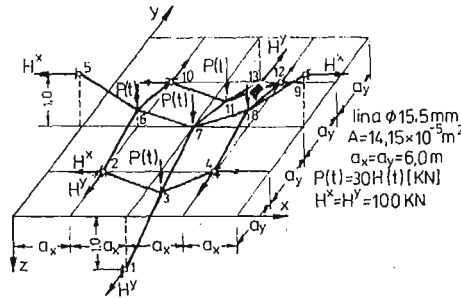
Przebieg w czasie obciążenia i przemieszczeń ilustruje wykres na rys. 6. Wyniki w analizowanym przedziale czasu (niewielkim, bo wynoszącym tylko 96 h) nie są obarczone zbyt dużym błędem nawet dla  $\vartheta$  równego 1/2 okresu obciążenia. Oczywiście długość kroku większa od 1/2 okresu siły, przy stosowanej aproksymacji liniowej, będzie dawać wyniki rozbieżne w czasie.



Rys. 6

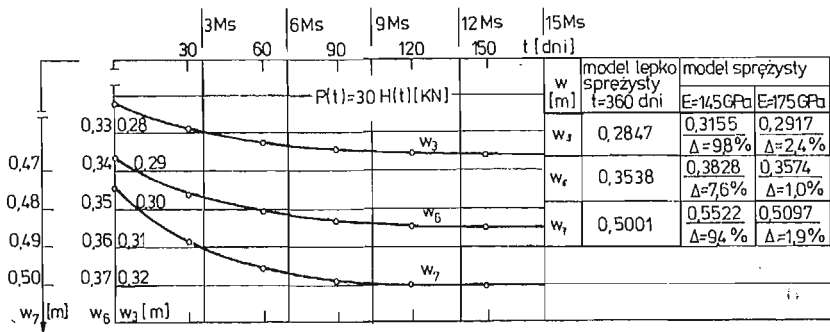
**Przykład 4**

Wykonano obliczenia wstępnie napiętej siatki przedstawionej na rysunku 7. Siatka jest wykonana z lin stalowych  $\varnothing 15,5$  mm ( $A = 14,15 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ ) i każdy jej węzeł (swobodny) jest obciążony siłą pionową  $P = 30$  kN, przyłożoną nagle w chwili  $t = 0$ . Parametry

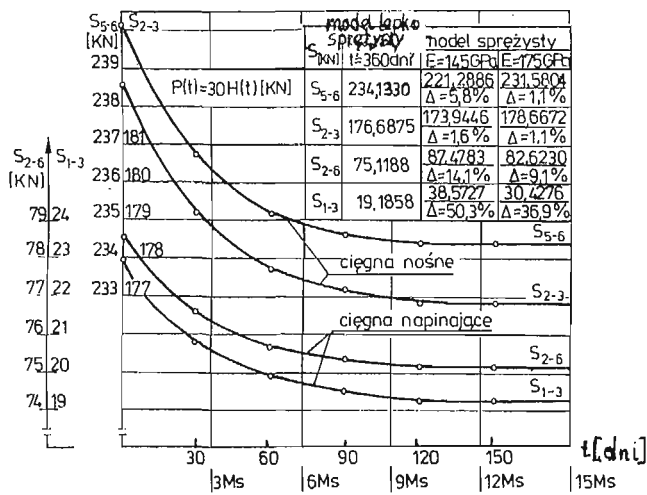


Rys. 7

lepkosprężystości przyjęto jak w przykładzie 1. Konfigurację początkową (dla  $t = 0 - \epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ) i końcową (dla  $t = 360$  dni) zestawiono w tabelicy 4. Przebieg składowych pionowych przemieszczeń węzłów („ugięć”) w czasie przedstawia rys. 8, przebieg sił — rys. 9. Na dołączonej do rysunku tabelicy zestawiono wyniki dla modelu lepkosprężystego i dla modelu sprężystego. Różnice, jak widać, są w tym przypadku bardzo duże.



Rys. 8



Rys. 9

Tablica 4

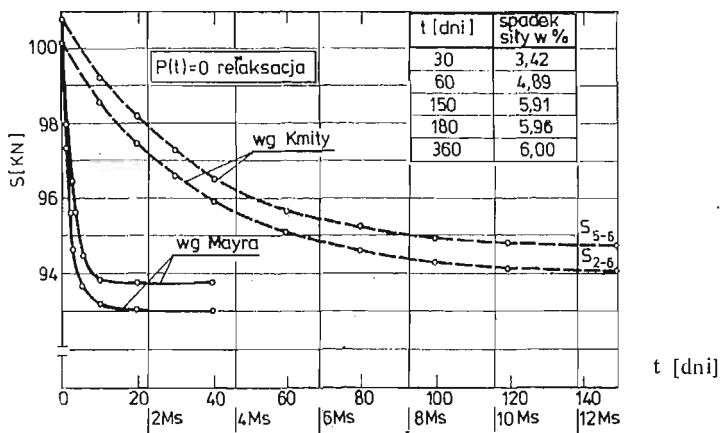
Numer węzła	Konfiguracja siatki [m]								
	Początkowa t = 0 <sup>-</sup>			Model sprężysty					
	Model lepko sprężysty t = 360 dni			E = 145 GPa			E = 175 GPa		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
3	12,0 12,0	6,0 6,0116	0,25 0,5347	12,0	6,0126	0,5655 (Δ = 5,4%)	12,0	6,0118	0,5417 (Δ = 1,3%)
6	6,0 5,9772	12,0 12,0	-0,25 0,1038	5,9757	12,0	0,1328 (Δ = 21,8%)	5,9771	12,0	0,1074 (Δ = 3,4%)
7	12,0 12,0	12,0 12,0	0,0 0,5001	12,0	12,0	0,5522 (Δ = 9,4%)	12,0	12,0	0,5097 (Δ = 1,9%)

### Przykład 5

Dla liny o geometrii i obciążeniu jak w przykładzie 4 wykonano obliczenia relaksacji wstępnego napięcia dla dwóch wariantów parametrów lepkosprężystych.

Wariant pierwszy odnosi się do danych z przykładu 1 (wg badań Kmity), natomiast w wariantcie drugim przyjęto parametry wyznaczone w pracy [5] w oparciu o badania G. Mayra [4]. Krzywe relaksacji pokazuje rysunek 10 (linia przerywana — wariant pierwszy, linia ciągła — wariant drugi).

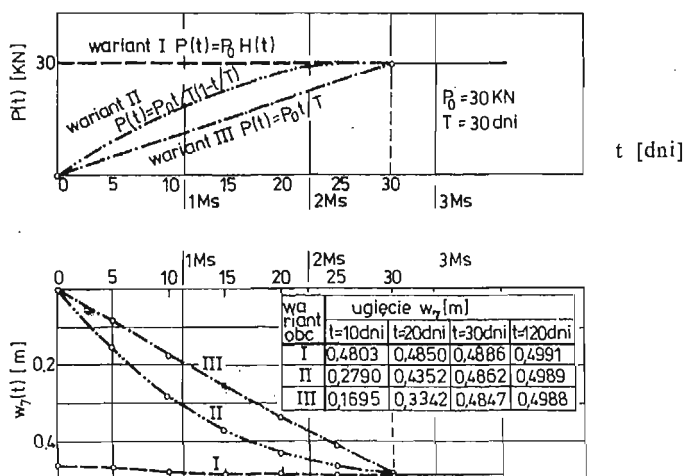
Relaksacja liny badanej przez G. Mayra, jakkolwiek znaczna (spadek siły przekracza 6,8% po 2 Ms) jest wybitnie krótkotrwała. Jest to niewątpliwie wynikiem właściwej technologii.



Rys. 10

### Przykład 6

Na zakończenie zbadano wpływ początkowej historii obciążenia na zachowanie się układu. Siatkę cięgnową z przykładu 4 poddano trzem wariantom przebiegu obciążenia:



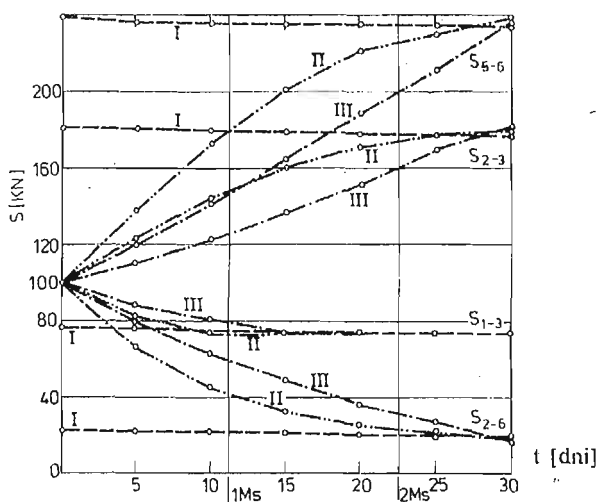
Rys. 11

— wariant I:  $P(t) = P_0 H(t)$ ;

— wariant II:  $P(t) = \begin{cases} P_0 \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T, \\ P_0, & t \geq T, \end{cases}$

— wariant III:  $P(t) = \begin{cases} P_0 \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ P_0, & t \geq T, \end{cases}$

Czas obciążenia konstrukcji  $T$  przyjęto równy 30 dniom. Wyniki zestawiono na rysunkach 11 i 12 oraz w tabeli 5. Wpływ sposobu obciążania konstrukcji istotny w trakcie trwania obciążania, okazuje się mało istotny już w chwili zakończenia obciążania i zupełnie nieistotny dla czasu przekraczającego znacznie czas obciążania.



Rys. 12

Tablica 5

Cięgno	Wariant obciążenia	Siła w ciągu [kN]			
		t = 10 dni	t = 20 dni	t = 30 dni	t = 120 dni
Nośne S <sub>5-6</sub>	I	238,6904	237,5867	236,7536	234,3565
	II	174,7402	222,4009	237,3135	234,4040
	III	142,7650	190,1778	237,6478	234,4323
Napinające S <sub>2-6</sub>	I	22,0682	21,3448	20,8034	19,3067
	II	46,6523	25,9568	20,4790	19,2796
	III	64,5446	38,1216	20,2634	19,2616



#### 4. Wnioski

Opisana w pracy metoda okazuje się efektywnym narzędziem obliczania wstępnie napiętych siatek ciągnowych o właściwościach lepkosprężystych. Podstawową zaletą metody jest jej mała czułość na długość kroku. W wielu przypadkach krok może być bardzo długi, co jest niezwykle ważne przy badaniu skutków długotrwałych obciążeń.

Właściwości reologiczne lin stalowych, na pozór nieznaczne, mogą mieć istotne znaczenie dla pracy konstrukcji ciągnowych. Wpływ pełzania na zmiany w aktualnej konfiguracji siatki jest rzędu kilku procent, w pewnych przypadkach może przekraczać 20%. Wpływ ten na zmiany sił w ciągnach jest poważniejszy i może się wahać od kilku do ponad 50%.

Relaksacja wstępnego napięcia (dla siatki nieobciążonej) powoduje spadki sił o ok. 6%. Warto zwrócić uwagę na niebezpieczeństwo spadku sił w ciągnach napinających; nie można wykluczyć wyłączenia się ciągów na skutek rozwoju procesów reologicznych.

Z przeprowadzonych badań można więc wyciągnąć wniosek generalny, że zjawiska reologiczne w sposób istotny wpływają na pracę wstępnie napiętych siatek ciągnowych wykonanych z lin stalowych i powinny być uwzględniane przy ich projektowaniu. Wynika stąd potrzeba opracowania dalszych, bardziej doskonałych i bardziej efektywnych metod i programów obliczeń siatek lepkosprężystych, oraz potrzeba prowadzenia bardziej systematycznych badań nad właściwościami reologicznymi lin.

#### Literatura

1. J. HAJDUK, J. OSIECKI, *Ustroje ciągnowe, teoria i obliczanie*, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa 1970.
2. M. KOSIOREK, *Właściwości reologiczne stali do konstrukcji sprężonych*, Inżynieria i Budownictwo 1, 1975.
3. E. ENGBERG, L. WALLIN, *Kryprelaxation sprovmed höghallfast förspannigtråd under lång tid*, Nordisk Betong 3, 1966.
4. G. MAYR, *Untersuchungen an verschlossenen Spiralseilen, Weitgespannte Fläche tragwerke*, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1973.
5. A. BORUSZAK, B. HUSIAR, R. ŚWITKA, *O wyznaczeniu parametrów lepkosprężystości lin stalowych*, III Konf. Nauk. WBL PP, Prace Instytutu Technologii i Konstrukcji Budowlanych, Poznań 1980.
6. J. КМИТА, *Z badań nad relaksacją lin stosowanych w kablobetonie*, II Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Wrocław 1964.
7. I. KISIEL, *Reologia w budownictwie*, „Arkady”, Warszawa 1967.
8. R. ŚWITKA, B. HUSIAR, *Dyskretna analiza modeli reologicznych*, Mechanika Teoret. i Stosowana 22, 1/2, 1984

#### Резюме

#### РЕОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЕТОК, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ СТАЛЬНЫХ КАНАТОВ

В настоящей работе обсуждается численный метод расчёта вязкоупругих сеток. Этот метод может быть использован при весьма длинном шаге, что представляет большой интерес при исследовании продолжительных реологических процессов. Анализ различных расчётов предварительно напряжённых тяговых сеток, изготовленных из стальных канатов показываем, что ползучесть и релаксация имеют существенное влияние на актуальную конфигурацию сетки, также на величину и соотношение сил.

## S u m m a r y

## REOLOGICAL ANALYSIS OF NET STRUCTURES MADE OF STEEL CABLES

The numerical method of calculating viscoelastic nets is presented. The method can be applied for a long step of time which is important in the study of long reological processes. The analysis of stressed net structures made of steel cables indicates, that the creep and relaxation are important for a actual configuration of net and for the size and force distribution.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1983 roku*

---

## WPLYW OSCYLACJI NA KONWEKCYJNE PRZEKAZYWANIE CIEPŁA W ZASTOSOWANIU DO ZBIORNIKÓW OKRĘTOWYCH

STEFAN DOERFFER

*Instytut Maszyn Przepływowych  
PAN w Gdańsku*

W pracy rozważono wpływ oscylacji ośrodka płynnego na średnią w czasie wymianę ciepła przy ścianie pionowej zbiornika okrętowego. Zbudowano model matematyczny zjawiska bazujący na równaniach warstwy przyściennej. Analizę przeprowadzono wykorzystując metodę małych zaburzeń. Uzyskano zadowalającą zgodność wyników teoretycznych i eksperymentalnych.

### Oznaczenia

- $a$  — współczynnik wyrównywania temperatury,
- $A_0$  — amplituda kołysań zbiornika,
- $b$  — połowa szerokości zbiornika,
- $L$  — wymiar charakterystyczny, długość ściany,
- $t$  — czas,
- $T$  — temperatura,
- $T^*$  — okres oscylacji,
- $u, v$  — składowe prędkości w warstwie,
- $U$  — prędkość przepływu zewnętrznego,
- $\alpha$  — współczynnik przejmowania ciepła,
- $\delta$  — grubość warstwy przyściennej,
- $\Theta$  — różnica temperatur,
- $\lambda$  — współczynnik przewodnictwa cieplnego,
- $\nu$  — współczynnik lepkości kinematycznej,
- $\omega$  — częstotliwość kołowa oscylacji,

### Indeksy dotyczą

- $m$  — wartości średniej wzdłuż ściany,
- $o$  — składowej stacjonarnej,
- $T$  — termicznej warstwy przyściennej,
- $w$  — ściany,
- $\infty$  — parametrów na zewnątrz warstwy przyściennej,

- l — składowej pulsacyjnej,  
 + — wielkości bezwymiarowych,  
 < > — wielkości uśrednionych w czasie jednego okresu drgań.

Liczby podobieństwa:

$$(\text{Nu}) = \frac{\alpha L}{\lambda} \text{ — liczba Nusselta,}$$

$$(\text{Gr}) = \frac{gL^3\beta\theta_w}{\nu^2} \text{ — liczba Grashofa,}$$

$$(\text{Pr}) = \frac{\nu}{a} \text{ — liczba Prandtla,}$$

$$(\text{Fr}) = \frac{A_0\omega b}{\sqrt{gL}} \text{ — liczba Froude'a,}$$

$$(\text{Re}) = \frac{A_0\omega bL}{\nu} \text{ — liczba Reynoldsa,}$$

$$(\text{Ra}) = (\text{Gr})(\text{Pr}) \text{ — liczba Rayleigha,}$$

$$(\text{Sh}) = \frac{L}{A_0b} \text{ — liczba Strouhala.}$$

## 1. Wstęp

W wielu zastosowaniach praktycznych istotna jest znajomość wpływu oscylacji na wymianę ciepła. Dotyczy to między innymi zbiorników okrętowych, w których transportuje się ciecze wymagające ogrzewania podczas rejsu. Kołysania statku wymuszają ruch cieczy w zbiornikach, który zmienia mechanizm wymiany ciepła między cieczą a ścianami. Względny ekonomiczny szczególnie w odniesieniu do dużych statków wymagają dokładnej znajomości tego zagadnienia, aby móc precyzyjnie projektować systemy grzewcze.

W pracy rozwiązano jedno z podstawowych zagadnień — przejmowanie ciepła przez pionową płytę, wzdłuż której ma miejsce laminarny przepływ oscylacyjny o małych częstotliwościach. Płyta modeluje te ściany ładowni zbiornikowca (burty), które mają największy udział w odprowadzaniu ciepła do otoczenia.

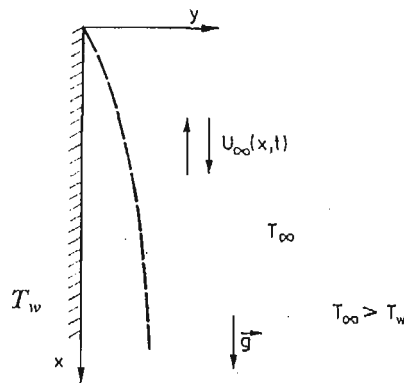
W przeciwieństwie do wielu rozważań literaturowych, np. [1, 2, 3], główny nacisk w pracy położono na określenie średnich w czasie zmian w wymianie ciepła wywołanych oscylacjami harmonicznymi. Zagadnienie rozwiązano w oparciu o metodę uśrednień układu równań zachowania.

Do zweryfikowania tej teorii skorzystano z wyników badań japońskich opisanych w [4], dotyczących przepływu laminarnego. Ze względu na obecne potrzeby okrętownictwa przeprowadzono własne badania eksperymentalne [5] dla zbiorników, w których występuje turbulenta wymiana ciepła. Ma ona miejsce głównie w ładowniach wielozadaniowych statków, np. typu OBO. Z uwagi na to, że w przepływie turbulentnym formuje się laminarna podwarstwa przyścienna, która stanowi główny opór przepływu ciepła, przedstawiona teoria może być również wykorzystana do analizy warstwy turbulenta.

## 2. Model matematyczny

W celu określenia wpływu oscylacji harmoniczných na średnią w czasie wymianę ciepła przyjęto:

- płaską, pionową płytę pokazaną na rys. 1,
- istnienie dwuwymiarowej, laminarnej warstwy przyściennej, na granicy której panuje przepływ  $U_\infty(x, t)$ ,
- jednakową i stałą temperaturę płyty  $T_w$  oraz płynu poza warstwą  $T_\infty$ , przy czym  $T_\infty > T_w$ ,
- płyn nieściśliwy o stałych własnościach,
- pomijalny wpływ dyssypacji energii,
- jako dominujący ruch w warstwie przyściennej ruch wywołany przepływem  $U_\infty(x, t)$ .



Rys. 1

Przepływ ten wynika ze specyficznych ruchów cieczy w zbiorniku poddanym drganiom harmonicznym [6].

W myśl przyjętych założeń zjawisko opisuje następujący układ równań:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \frac{\partial U_\infty}{\partial t} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

łącznie z warunkami brzegowymi:

$$\left. \begin{aligned} y = 0 \quad u = v = 0, \quad \Theta = \Theta_w, \\ y \rightarrow \infty \quad u = U_\infty(x, t), \quad \Theta = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Przepływ oscylacyjny ma postać:

$$U_\infty(x, t) = U_0(x) \cdot \cos \omega t \quad (3)$$

gdzie amplituda  $U_0(x) = f$  (geometrii zbiornika,  $A_0, \omega, x$ ) podaną w [6].

Rozwiązania poszukuje się w postaci:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y) + u_1(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y) + v_1(x, y, t), \\ \theta(x, y, t) &= \theta_0(x, y) + \theta_1(x, y, t), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

w których funkcje z indeksem „zero” stanowią średnie w czasie wartości tych rozwiązań, a oznaczone „1” są składowymi pulsacyjnymi. Średnia w okresie drgań  $T^*$  wartość składowych pulsacyjnych wynosi zero:

$$\langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle = \langle \theta_1 \rangle = 0.$$

Podstawiając (4) do układu (1); uśredniając równania w okresie drgań  $T^*$ , otrzymuje się układ równań określający średnie w czasie składowe rozwiązania (4). Równania pozwalające na obliczenie składowych pulsacyjnych otrzymuje się z odjęcia równań uśrednionych w czasie od równań pełnych [3].

Pole prędkości w warstwie przyściennej wywołane oscylacyjnym przepływem  $U_\infty(x, t)$  określa się z uproszczonej postaci równania ruchu dla składowych pulsacyjnych w postaci:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial U_\infty}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (5)$$

równania ciągłości:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

i warunków brzegowych:

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \quad u_1 = v_1 = 0, \\ y \rightarrow \infty, \quad u_1 = U_\infty(x, t). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Uzyskane rozwiązania mają postać:

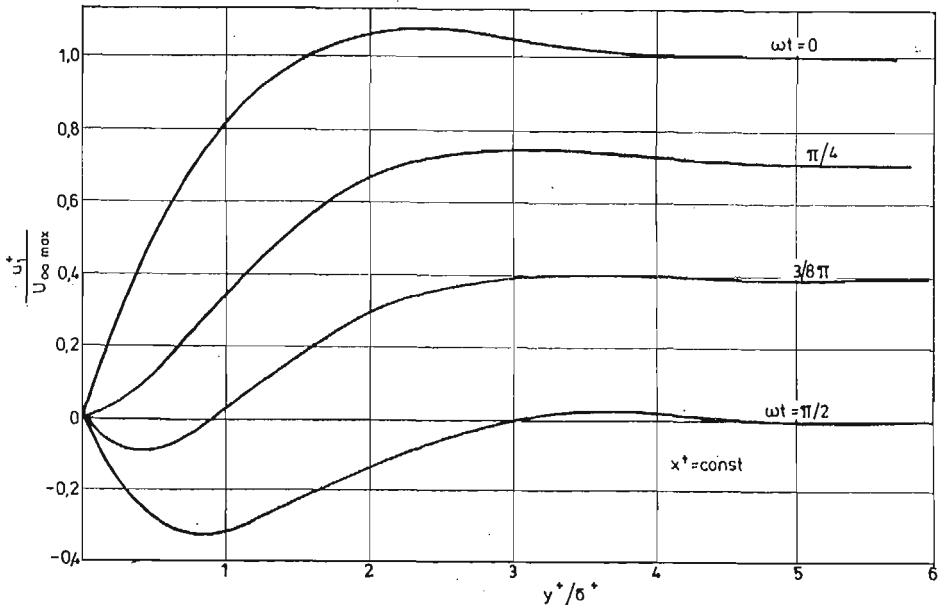
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= U_0 \left[ \cos \omega t - e^{-\frac{y}{\delta}} \cos \left( \omega t - \frac{1}{\delta} y \right) \right], \\ v_1 &= \frac{dU_0}{dx} \left[ -y \cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\delta}{\sqrt{2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-\frac{y}{\delta}} \cos \left( \omega t - \frac{y}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

gdzie  $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$  może być traktowana jako grubość hydraulicznej warstwy przyściennej przy wzdluznym oplywie oscylacyjnym plaskiej plyty. Zmienność składowej  $u_1^+ / U_\infty^+_{\max}$  w funkcji odległości od ściany przedstawiono na rys. 2.

Poszukiwane pole temperatury określa się z równań:

— dla składowej pulsacyjnej  $\theta_1$  w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \\ + v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \left\langle u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right\rangle = a \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (9)$$



Rys. 2

— dla składowej średniej w czasie  $\Theta_0$  w postaci:

$$u_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} + \left\langle u_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} \right\rangle = a \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2} \quad (10)$$

i warunków brzegowych:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \quad \Theta_0 = \Theta_w, \quad \Theta_1 = 0, \\ y = \delta_T \quad \Theta_0 = 0, \quad \Theta_1 = 0. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Rozwiązań (9) i (10) z warunkami (11) poszukuje się w sposób przybliżony zakładając, że:

$$\Theta_0(x, y) = \Theta'_0(x, y) + \Theta''_0(x, y), \quad (12)$$

gdzie  $\Theta'_0$ , jako pierwsze przybliżenie, stanowi rozkład temperatury dla swobodnej konwekcji a  $\Theta''_0$  uwzględnia wpływ oscylacji. Przyjmuje się ponadto:

$$\Theta'_0 \gg \Theta''_0$$

oraz że średnie w czasie pole prędkości w warstwie przyściennej  $u_0$ ,  $v_0$  pochodzi od swobodnej konwekcji.

W rezultacie otrzymuje się profil temperatury, a następnie zależność na lokalną liczbę Nusselta opisującą wymianę ciepła dla rozważanego zjawiska:

$$(Nu)_{x^+, t^+} = (Nu'_0)_{x^+} + (Nu''_0)_{x^+} + (Nu_1)_{x^+, t^+}. \quad (13)$$

W zależności (13) pierwszy człon opisuje wymianę ciepła przy czystej, swobodnej konwekcji. Natomiast

$$(Nu''_0)_{x^+} = - \left. \frac{\partial (\Theta''_0)^+}{\partial y^+} \right|_{y^+=0} = f_1[(Re), (Pr); (Sh), x^+] \quad (14)$$

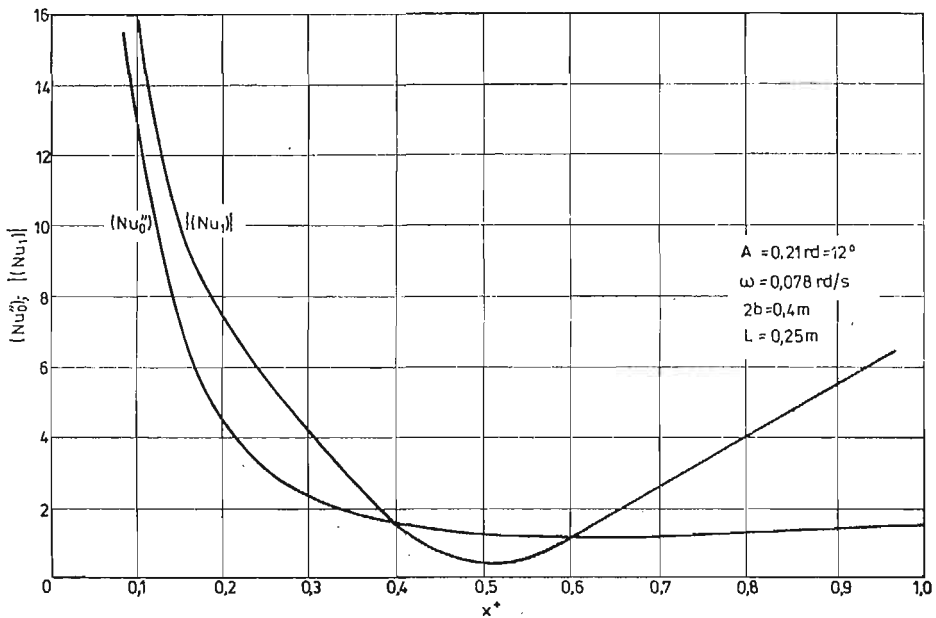
stanowi poszukiwany, stacjonarny przyrost liczby ( $Nu$ ) spowodowany oscylacjami przepływu:

$$(Nu_1)_{x^+, t^+} = - \left. \frac{\partial \theta_1^+}{\partial y^+} \right|_{y^+=0} = f_2[(Re), (Pr), (Sh), x^+, t^+] \quad (15)$$

jest składową pulsacyjną liczby ( $Nu$ ).

Funkcje  $f_1, f_2$  stanowiące złożone wyrażenia analityczne, podane są w pracy [6].

Dla ilustracji pokazano na rys. 3 zmienność  $(Nu_0'')$  i  $|(Nu_1)|$  — amplitudy składowej pulsacyjnej ( $Nu_1$ ) w funkcji współrzędnej  $x^+$ , obliczone na emc.



Rys. 3

### 3. Badania eksperymentalne

Badania przeprowadzono na modelu zbiornika o wymiarach  $0.4 \times 0.3 \times 0.5$  m (szerokość  $\times$  długość  $\times$  wysokość), wykonanym ze szkła organicznego. Zbiornik poddany był rotacyjnym wymuszeniom harmonicznym o amplitudach kątowych  $A_0 \in (0 - 0.175 \text{ rd}) = (0 - 10^\circ)$  i okresach  $T^* \in (0.7 - 3.6 \text{ s})$  względem osi obrotu leżącej w płaszczyźnie symetrii zbiornika. Wymuszenie ruchu zbiornika realizowano odpowiednim napędem hydraulicznym. Cieczami modelującymi ciecz rzeczywiste, tj. ropy naftowe, paliwa, oleje, były woda destylowana i olej wrzecionowy.

Badania przeprowadzono zmieniając napełnienie zbiornika, położenie osi obrotu, amplitudę i okres kołysań oraz stany cieplne zachowując warunki turbulentnej wymiany ciepła, tj.  $(Gr) \cdot (Pr) > 2 \cdot 10^7$ . Parametry geometryczne stanowiska badawczego oraz parametry jego pracy określono z zasad podobieństwa zjawisk.



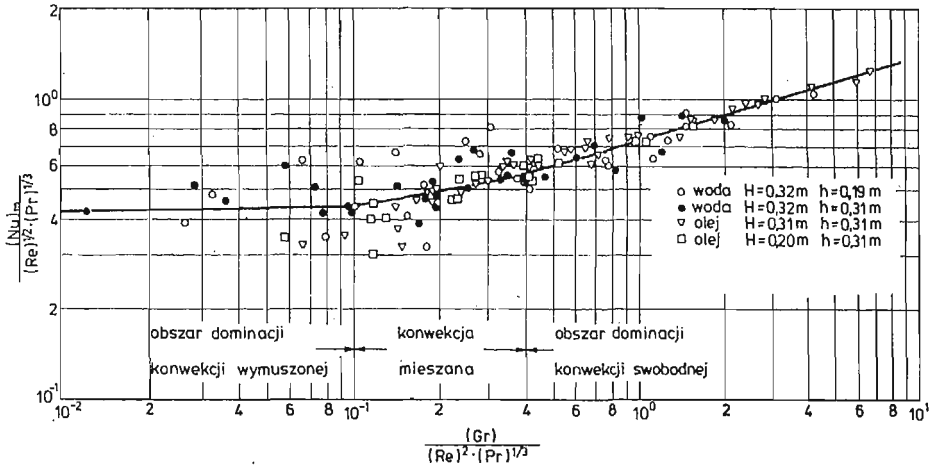
Do opisu rozważanego zjawiska uzyskano następujące równanie kryterialne:

$$(Nu) = f[(Re), (Pr), (Gr), (Fr), (Sh)]. \quad (16)$$

Wyniki badań przejmowania ciepła przez ścianę pionową przedstawiono w układzie:

$$\frac{(Nu)}{(Re)^{1/2}(Pr)^{1/3}} = f \left[ \frac{(Gr)}{(Re)^2(Pr)^{1/3}} \right] \quad (17)$$

i pokazano je na rys. 4.



Rys. 4

Badane zjawisko jest konwekcją mieszaną, a stosunek  $(Gr)/(Re)^2$  jest miarą udziału konwekcji swobodnej do konwekcji wymuszonej w tymże zjawisku. Stąd przedstawienie wyników badań w układzie (17) (zmodyfikowanym o liczbę  $(Pr)$ ) pozwala określić obszary dominacji konwekcji swobodnej czy wymuszonej w badanym zjawisku i dla każdego z nich poszukać odpowiedniej korelacji. Natomiast parametr  $(Gr)/(Re)^2 \cdot (Pr)^{1/3}$  pozwala uznać jako kryterium rozstrzygające o charakterze zjawiska i określające obszar jego występowania.

Dla wartości parametru

$$\frac{(Gr)}{(Re)^2(Pr)^{1/3}} > 0,4$$

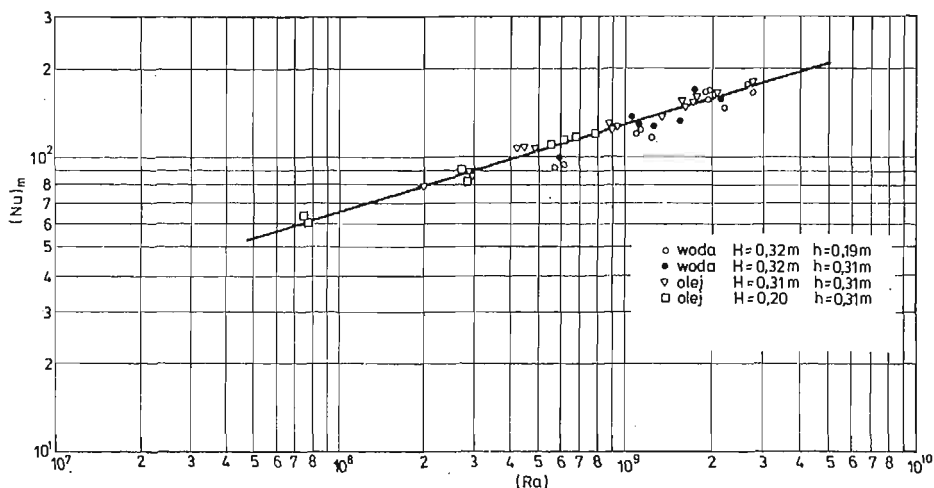
określono dominację konwekcji swobodnej. W obszarze tym obowiązuje korelacja:

$$(Nu)_m = 0.31(Ra)^{0.291}. \quad (18)$$

Przebadany zakres zmienności liczb kryterialnych wynosił:

$$\begin{aligned} (Ra) \in (7 \cdot 10^7, 3 \cdot 10^9), & \quad (Pr) \in (2.8, 233), \\ (Re) \in (3.2 \cdot 10^2, 2.8 \cdot 10^4), & \quad (Sh) \in (8.9, 36.7), \\ (Fr) \in (1.03 \cdot 10^{-2}, 4.12 \cdot 10^{-2}), & \end{aligned}$$

Wyniki badań tego obszaru przedstawiono na rys. 5. Na rysunku tym oznaczono przez  $H$  — wysokość cieczy w zbiorniku, a przez  $h$  — położenie osi obrotu w stosunku do dna zbiornika.



Dla wartości parametru  $0.1 < \frac{(Gr)}{(Re)^2(Pr)^{1/3}} < 0.4$  określono występowanie konwekcji mieszanej opisane zależnością:

$$(Nu)_m = 2,882 \cdot 10^{-2} (Re)^{0,503} (Pr)^{1/3} (Ra)^{0,15} (Fr)^{0,15} (Sh)^{0,1}. \quad (19)$$

Rys. 5

Przebadany zakres zmienności liczb kryterialnych wyniósł:

$$(Re) \in (7 \cdot 10^2, 6 \cdot 10^4), \quad (Pr) \in (2,7, 220), \quad (Ra) \in (7,6 \cdot 10^7, 2,9 \cdot 10^9), \\ (Sh) \in (5,7, 36,7), \quad (Fr) \in (1,71 \cdot 10^{-2}, 6,3 \cdot 10^{-2}).$$

Dla wartości parametru  $\frac{(Gr)}{(Re)^2(Pr)^{1/3}} < 0.1$  określono obszar dominacji konwekcji wymuszonej opisanej przez:

$$(Nu)_m = 0,185 \cdot (Re)^{0,605} (Pr)^{1/3} (Fr)^{0,15} (Sh)^{0,1}.$$

Przebadany zakres zmienności liczb kryterialnych dla tego obszaru wyniósł:

$$(Re) \in (10^3, 5 \cdot 10^4), \quad (Pr) \in (3,9, 249), \quad (Ra) \in (8,6 \cdot 10^7, 8,8 \cdot 10^8), \\ (Sh) \in (8,9, 36,7), \quad (Fr) \in (2,47 \cdot 10^{-2}, 6,51 \cdot 10^{-2}),$$

#### 4. Porównanie wyników teoretycznych i eksperymentalnych

Jedynymi, znanymi badaniami eksperymentalnymi nad wpływem oscylacyjnego przepływu, o charakterze rozważanym w niniejszej pracy, na laminarną swobodną konwekcję są wspomniane badania [4]. Służyć one mogą za materiał do weryfikacji przedstawionej teorii. Teoria opracowana została dla małych zaburzeń, stąd jej zasięg obejmuje jedynie dolny zakres badań [4]. Porównanie wyników dla dwóch zbadanych cieczy zawarto w tabeli 1.

Tabela 1

Czynnik	Eksperyment		Teoria
	$(Nu)_m$	$(Nu'_0)_m$	$(Nu'_0)_m$
Woda	14,54	0,672	0,677
Olej	18,92	0,258	0,255

Opracowany model teoretyczny nie nadaje się do bezpośredniej analizy turbulentnej wymiany ciepła, jednak pozwala na uproszczoną, jakościową analizę tych przypadków. Jest to możliwe przy założeniu, że całkowity opór cieplny ma miejsce w podwarstwie laminarnej. Na tej podstawie oszacowano grubość rozpatrywanej warstwy:

$$(\delta_T^{\pm})_m = \frac{(\delta_T)_m}{L} = \frac{\lambda}{\alpha_m L} = \frac{1}{(Nu)_m}. \quad (21)$$

Korzystając z tej wielkości poddano analizie kilka punktów pomiarowych obejmowanych przez teorię, a uzyskanych we własnych badaniach. Wyniki przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

nr. p. pom.	czynnik	Eksperyment			Teoria
		$(Gr)/(Re)^2 \cdot (Pr)^{1/3}$	$(Nu)_m$	$(Nu'_0)_m$	$(Nu'_0)_m$
63	woda	3.081	157.77	161.7	0.648
88	olej	0.398	119.54	117.9	2.666
145	woda	0.099	115.19	104.9	3.823

## 5. Zakończenie

Przedstawiony model teoretyczny pozwala określić średni w czasie wpływ oscylacji harmoniczných przepływu wzdłuż pionowej ściany zbiornika okrętowego na swobodną konwekcję. Porównanie jego wyników z eksperymentem japońskim [4] przedstawione w tabeli 1 jest zadowalające. Model odnosi się do laminarnego charakteru wymiany ciepła. Wyniki przedstawione w tabeli 2 świadczą również o jego przydatności do analizy turbulentnej wymiany ciepła, i to zarówno pod względem jakościowym, jak i ilościowym. Tendencja zmian wielkości  $(Nu'_0)_m$  jest zgodna z wynikami badań — rys. 4, tzn. ze zmniejszaniem się wartości parametru  $\frac{(G)}{(Re)^2 \cdot (Pr)^{1/3}}$  wzrasta udział składnika ujmującego wpływ oscylacji w całkowitej wymianie ciepła.

Rozwiązanie uzyskano dla małych zaburzeń pola temperatury, przyjmując ponadto, jako pierwszą iterację, że wielkości stacjonarne są takie, jakie wynikają ze swobodnej konwekcji. Dla małych zaburzeń przybliżenie to uznano za wystarczające. Rozwiązań w szerszym zakresie zmian parametrów poszukiwano na drodze eksperymentalnej, modelując zjawisko pod kątem wykorzystania wyników badań w okrętownictwie.

Bardzo istotne przy opracowywaniu wyników badań okazało się kryterium  $\frac{(Gr)}{(Re)^2 \cdot (Pr)^{1/3}}$ .

Pozwoliło ono wyróżnić obszary dominacji swobodnej lub wymuszonej konwekcji w badanym zjawisku konwekcji mieszanej a przez to uzyskać poprawne korelacje dla poszczególnych obszarów. Uzyskane korelacje bezwymiarowych liczb kryterialnych mogą być przydatne w praktyce projektowej.

Zaprezentowane w pracy części: teoretyczna i eksperymentalna dają pewien spójny obraz zjawisk wymiany ciepła podczas oscylacji zbiornika i to zarówno pod względem ilościowym, i jakościowym oraz w pewnym stopniu wypełniają lukę w tej dziedzinie wiedzy.

#### 6. Literatura

1. S. ESHGHY, V. S. ARPACI, J. A. CLARK — *The effect of longitudinal oscillations on free convection from vertical surfaces*, Journal of Applied Mechanics, March 1965.
2. R. S. NANDA, V. P. SHARMA — *Free convection laminar boundary layers in oscillatory flow*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 15 part 3, 1963.
3. V. M. GALICIEJSKI, A. RYŻOW, E. JAKUS — *Tieplowe i gidradinamiceskie procesy w kolebajuscichsja potokach*, Masinostroenie, Moskwa 1977
4. H. KATŌ — *Effect of rolling on the heat transfer from cargo oil tankers*, J. SNAY, wol. 126, Dec. 1969
5. S. DOERFFER — *Wyniki badań eksperymentalnych wymiany ciepła w zbiorniku podlegającym wymuszeniom harmonicznym*, Zeszyty Naukowe IMP PAN Gdańsk 110/1007/81, 1981
6. S. DOERFFER — *Zagadnienia wpływu oscylacji ośrodka płynnego na konwekcyjne przekazywanie ciepła w zastosowaniu do zbiorników okrętowych transportujących ciecze o dużych lepkościach*, IMP PAN Gdańsk 1983 — praca doktorska

#### Резюме

#### ТЕПЛООБМЕН В КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ЦИСТЕРНАХ

В статье рассматривается влияние колебаний жидкости на теплоотдачу от вертикальной стенки цистерны. Течение жидкости принято таким, какое следует из гармонических колебаний цистерны. В статье описано влияние таких колебаний на средние по времени значения полей скоростей и температуры, которые описывают теплообмен. Для этого построена математическая модель явления, основанная на уравнениях пограничного слоя. Решение модели получено для ламинарного пограничного слоя и для малых возмущений температурного поля. Теоретические результаты при сравнении с экспериментальными показали удовлетворительную сходимость. Приведенный метод может быть применен для тепловых расчетов судовых цистерн.

#### Summary

#### HEAT TRANSFER IN OSCILLATING TANK

The effect of liquid oscillations on the heat transfer to a vertical wall of a tank is considered. The liquid flow along the wall which has been assumed results from rotational, harmonic oscillations of the tank. The influence of these oscillations on the time-averaged quantities i.e. velocity and temperature fields, describing heat transfer is determined. To obtain these quantities a mathematical model based on conservation equations is developed. Solutions for the laminar boundary layer and for small perturbations of the temperature field have been sought. Theoretical results have been compared with experimental ones and there has been obtained satisfactory agreement. This method may be useful for thermal calculations of ship tanks.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1984 roku

# B I U L E T Y N I N F O R M A C Y J N Y

## III Niemiecko-Polskie Sympozjum Naukowe „Mechanics of Inelastic Solids and Structures”, Bad Honnef (RFN)

W dniach 9 - 15 września 1984 roku w miejscowości Bad Honnef (RFN) odbyło się trzecie niemiecko-polskie sympozjum naukowe z zakresu mechaniki, obejmujące zagadnienia mechaniki niesprężystych ciał stałych i konstrukcji. Sympozja te odbywają się co trzy lata (dwa poprzednie miały miejsce kolejno w Warszawie oraz także w Bad Honnef), a ich celem jest utrzymanie współpracy naukowej (oraz rozszerzenie zakresu tej współpracy) między specjalistami z Polski i RFN zajmującymi się mechaniką ciał niesprężystych. Warto nadmienić, że ze strony polskiej inicjatorem tych spotkań był, niedawno zmarły, prof. Antoni Sawczuk, którego działalność organizacyjna i szerokie międzynarodowe kontakty naukowe przyczyniły się zarówno do pomyślnego przebiegu poprzednich sympozjów, jak i do realizacji sympozjum w bieżącym roku. W sympozjum tym strona polska była reprezentowana przez 29 osób, w tym: 18 osób z PAN, 8 osób z różnych polskich politechnik, 2 osoby z WAT oraz jedna osoba (piszący to sprawozdanie) z Uniwersytetu Warszawskiego. Strona RFN-owska była reprezentowana przez 28 osób, z większości czołowych ośrodków naukowych z zakresu mechaniki w RFN. Na sympozjum wygłoszono łącznie 47 referatów; po każdym referacie odbywała się dyskusja. Poziom naukowy zdecydowanej większości referatów był wysoki, co świadczy o starannej selekcji prac zgłoszonych do sympozjum, tak ze strony polskiej, jak i niemieckiej. Tematyka prac obejmowała problemy: pęknięcia, zniszczenia, pełzania, modelowania konstytutywnego, stabilności, plastyczności, dynamiki oraz rozchodzenia się fal w ośrodkach niesprężystych. Szereg prac było rezultatem już uprzednio nawiązanych kontaktów naukowych między pracownikami nauki obu krajów. Na uwagę zasługuje doskonała organizacja samego sympozjum. Referowane tam prace mają zostać opublikowane w osobnym numerze Archiwum Mechaniki Stosowanej.

*Czesław Woźniak*

## V-te Polsko-Francuskie Sympozjum Nielineowe Zagadnienia Mechaniki, (Rydzyna k. Leszna, 25 - 30.VI.1984 r.)

Istotne przedsięwzięcia mające na celu rozwój mechaniki w Polsce podejmuje i realizuje Komitet Mechaniki PAN. Jedną z form działalności tego Komitetu jest organizowanie międzynarodowych i dwustronnych spotkań naukowych. Świadczą o tym dobitnie odbyte dotychczas sympozja: polsko-brytyjskie, polsko-francuskie, polsko-radzieckie, polsko-szwedzkie, polsko-włoskie oraz sympozja na temat mechaniki niesprężystych ośrodków i konstrukcji organizowane przez mechaników polskich i zachodnio-niemieckich.

Poprzednie, IV Sympozjum Polsko-Francuskie odbyło się w roku 1980 w Marsylii. Tradycyjnie już sympozja polsko-francuskie odbywają się co trzy lata, na zmianę w Polsce i we Francji.

Sympozjum odbyło się w Ośrodku Stowarzyszenia Inżynierów i Mechaników Polskich w Rydzynie k. Leszna. Ośrodek ten mieści się w pięknym pałacu, pamiętającym czasy króla Stanisława Leszczyńskiego.

Wszystkie dotychczasowe sympozja polsko-francuskie odbywały się pod patronatem W. Nowackiego z PAN-u i P. Germain, będącego Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences. Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego V Sympozjum był W. K. Nowacki, sekretarz naukowy Komitetu Mechaniki PAN. W skład Komitetu Organizacyjnego wchodził: W. Szczepiński, przewodniczący Komitetu Mechaniki PAN i M. Życzkowski z Politechniki Krakowskiej. Sekretarzem był J. J. Telega z Instytutu Podstawowych Pro-

bleniów Techniki PAN. Przewodniczącym delegacji francuskiej był J. M. Pierrard z Instytutu Mechaniki w Grenoble. W sposób istotny do zorganizowania Sympozjum przyczynił się Zakład Teorii Konstrukcji IPPT PAN oraz International Centre for Mechanical Sciences (Udine, Włochy).

W obradach wzięło udział 51 uczestników z wielu ośrodków naukowych, co uwydatnia znaczenie, jakie obydwie strony przywiązywały do tego przedsięwzięcia. Uczestników z Polski było 35 (Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Instytut Geofizyki PAN, Politechnika Krakowska, Politechnika Łódzka, Uniwersytet Warszawski, Wojskowa Akademia Techniczna). Z Francji wzięło udział 16 osób (Institut de Mécanique de Grenoble, Electricité de France — Département Mécanique et Modeles Numeriques (Clamart), Ecole Polytechnique (Palaiseau), Université Pierre et Marie Curie (Paris), Université de Franche-Comté (Besançon), Université des Sciences et Technique du Languedoc (Montpellier), Laboratoire de Mécanique et Technologie — ENSET (Cachan), Institut National Polytechnique de Grenoble, Ecole Centrale de Lyon). Jednym z uczestników był doktorant z Wietnamu, który w ostatnich latach przygotowywał doktorat w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN.

W imieniu Komitetu Organizacyjnego uczestników powitał jego przewodniczący, W. K. Nowacki. Następnie głos zabrał, w imieniu Komitetu Mechaniki PAN, W. Szczepiński. Podkreślił on ważność kontaktów naukowych mechaników polskich i francuskich, czego jednym z dowodów jest i to, już piąte z kolei, sympozjum. Sporo uwagi poświęcił zmarłym ostatnio dwóm wybitnym uczonym: J. Mandelowi z Francji i A. Sawczukowi z Polski. Ten ostatni był aktywnym organizatorem sympozjów polsko-francuskich od samego ich początku, czyli od 1971 roku. W imieniu strony francuskiej na rozpoczęcie obrad głos zabrał przewodniczący delegacji francuskiej, J. M. Pierrard. Omówił on zwięźle rolę tych sympozjów oraz podkreślił żywe kontakty naukowe istniejące pomiędzy różnymi ośrodkami francuskimi i polskimi.

W czasie Sympozjum wygłoszono 42 referaty, w tym sześć 45-cio minutowych, a pozostałe 25-cio minutowe, z tego 10 referatów w języku francuskim, a 32 — w jęz. angielskim. Trzy referaty były wspólne, polsko-francuskie; ponadto przedstawiono jeden referat polsko-niemiecki i jeden polsko-wietnamski. Obrady podzielono na 7 sesji, a problematyka poruszona w czasie Sympozjum dotyczyła: zniszczenia, uszkodzenia, pęknięcia, stowarzyszonej i niestowarzyszonej plastyczności przy małych i dużych odkształceniach, lepkoplastyczności, lepkosprężystości, homogenizacji rozmaitych ośrodków o strukturze periodycznej i quasi-periodycznej, ośrodków ziarnistych i mechaników gruntów, tomografii, zagadnień unilateralnych i kontaktowych, propagacji fal w ośrodkach nieliniowych, cieczy nie-newtonowskich, nośności granicznej i optymalizacji.

Pierwszą sesję otworzył 45-cio minutowy referat P. Suqueta (Montpellier) na temat plastyczności silnie niejednorodnych ośrodków, przy czym przedyskutowano głównie niejednorodności periodyczne i quasi-periodyczne przy zastosowaniu metod homogenizacji. Drugi 45-cio minutowy referat wygłosił H. Petryk (Warszawa), który na bazie wprowadzonego przez siebie kryterium stateczności procesu deformacji przedstawił wynikające stąd, dosyć silne, ograniczenia na związki konstytutywne dla ośrodków plastycznych.

W czasie obrad wszystkie dyskusje, oczywiście te oficjalne, odbywały się tuż po wygłoszeniu referatu. Podczas pierwszej, najkrótszej sesji głos zabrało 4 uczestników (6 wypowiedzi), którzy prosili o wyjaśnienia, komentowali i uzupełniali wygłoszone referaty, a czasem krytykowali przedstawione rezultaty. Było tak przez cały czas trwania obrad.

P. Perzyna (Warszawa) rozpoczął sesję drugą 45-cio minutowym referatem dotyczącym lokalizacji odkształceń plastycznych i zjawiska zniszczenia jako szczególnych etapów procesów niesprężystego płynięcia. Dwa dalsze referaty dotyczyły: jakościowej analizy jednowymiarowego równania ewolucji, opisującego zachowanie się pokrytyczne i zniszczenie ciał dyssypatywnych (P. Perzyna, A. Drabik — Warszawa), trzech typów bifurkacji w ośrodkach geologicznych i ziarnistych modelowanych jako materiały niestandardowe, czyli materiały o niestowarzyszonym prawie płynięcia (B. Loret — Palaiseau). Pozostałe cztery referaty wiązały się z różnymi zagadnieniami homogenizacji (uśredniania); w szczególności prace te dotyczyły: związków konstytutywnych dla ośrodka plastycznego ze wzmocnieniem otrzymanych na bazie prostego micromechanizmu Franka-Reada (D. Leguillon — Paris), makroskopowego związku konstytutywnego opisującego kompozyt z uszkodzeniami w przypadku uproszczonego opisu kontaktu pomiędzy matrycą a włóknami (D. Leguillon, F. Léné — Paris), dynamicznej analizy kompozytu sprężystego o strukturze periodycznej w przypadku gdy długość fali jest znacznie większa od charakterystycznego wymiaru okresu (J. L. Auriault, G. Bonnet — Grenoble), liniowo-sprężystego ośrodka splekanego w przypadku periodycznego

go rozkładu szczelin (W. S. Barański, O. Gajl — Łódź). W dyskusji zabrało głos 9 uczestników (18 wypowiedzi i komentarzy).

Trzecią sesję otworzył 45-cio minutowy referat na temat konstrukcji niesprężystych poddanych obciążeniom zmiennym, przy czym omówiono również zagadnienie śrutowania, które sprowadzono do problemu dynamicznego przystosowania (G. Inglebert — Palaiseau). W następnym referacie, przedstawionym przez W. Szczepińskiego (Warszawa), omówiono teoretyczne i doświadczalne wyniki badania modeli opisujących zniszczenie ciągliwc materiałów plastycznych w przypadku regularnego układu szczelin. Referat Q. S. Nguyena (Palaiseau) i M. Potier-Ferry'ego (Paris) stanowił próbę jednolitego podejścia do opisu niestateczności plastycznej i zagadnienia rozciągania szczelin. Cztery pozostałe referaty przedstawione w trakcie tej sesji poświęcone były zagadnieniom unilateralnym i kontaktowym. W szczególności przedstawiono: teorię nośności granicznej w przypadku jednostronnych warunków brzegowych z tarciami i bez tarcia, przy czym subbróznikowe prawo tarcia dopuszcza anizotropię i niewypukłość warunku plastyczności (J. J. Telega — Warszawa), problemy istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia quasi-statycznej ewolucji dla ciał liniowo-sprężystych w przypadku nieliniowo-lepkiego prawa tarcia (C. Licht — Montpellier), sformułowanie dualne w sensie Mosco — w postaci nierówności quasi-wariacyjnej — dla zagadnienia Signoriniego z ogólnym prawem tarcia dla ośrodka liniowo-sprężystego oraz trzy różne podejścia do formułowania zadania dualnego dla płyt von Kármána (W. Bielski, J. J. Telega — Warszawa), możliwości zastosowania analizy niestandardowej do ogólnej analizy zagadnienia sprężystości w przypadku jednostronnych więzów na naprężenia i odkształcenia oraz zastosowanie operatorów maksymalnie monotonicznych do dowodu istnienia rozwiązań dla takich zagadnień (Cz. Woźniak, Z. Naniewicz — Warszawa). W dyskusji głos zabrało 9 uczestników co dało 14 wypowiedzi.

J. Supel (Warszawa) rozpoczął sesję czwartą 45-cio minutowym referatem na temat badań doświadczalnych z zakresu kruszenia i kontaktu ziaren w ośrodkach ziarnistych. Dalsze wystąpienia dotyczyły: syntetycznej analizy związków konstytutywnych opisujących grunty (Z. Mróz — Warszawa), dynamicznego wpływu materiału ziarnistego ze zbiornika stożkowego, przy czym materiał opisywany jest przez niestowarzyszone prawo plastycznego płynięcia (J. Zawidzki — Warszawa, E. Degny — Grenoble), niektórych teoretycznych i doświadczalnych aspektów jedno- i dwuwymiarowego pełzania aluminium w warunkach podwyższonych temperatur (C. L'excellent — Besançon), pomiaru energii dyssypowanej w postaci ciepła przez sprężysto-plastyczne próbki poddane rozciąganiu w zakresie dużych odkształceń (A. Chrysochoss — Montpellier), nowszych rezultatów z zakresu geometrycznego opisu wzmocnienia plastycznego metali (M. Życzkowski, T. Kurtyka — Kraków), wpływu efektów drugiego rzędu na pokrytyczne zachowanie się konstrukcji plastycznych (M. Duszek — Warszawa). W trakcie dyskusji głos zabrało 8 uczestników (20 wypowiedzi).

Sesję piątą rozpoczął nie przewidziany w programie, przedstawiony przez G. Inglebert, referat J. F. Arrould (Palaiseau) na temat modelowania uszkodzenia w kompozytach warstwowych. Modelowanie anizotropowego uszkodzenia w betonie przedstawiono w referacie F. Sidoroffa i F. Supartono (Lyon). Cztery dalsze referaty dotyczyły: związków konstytutywnych opisujących izotropowe materiały sprężysto-plastyczne w zakresie dużych odkształceń i przy dowolnych ciśnieniach hydrostatycznych (B. Raniecki — Warszawa, Nguyen Hun Viem — Hanoi), konstrukcji powierzchni plastyczności dla monokryształów w przypadku poślizgu ołówkowego (J. L. Raphanel, J.-H. Schmitt — Grenoble), modelowania sprzężenia pomiędzy starzeniem a mechanicznym zachowaniem się metali (D. Marquis, J. Dufailly — Cachan), półanalizycznej metody elementów skończonych w zastosowaniu do analizy stateczności powłok obrotowych (Y. Bamberger, Y. Merabet — Clamart). Referat A. Cagnasso, H.J. Latière'a (Marseille) i A. SAWCZUKA (Warszawa)

na temat możliwości zastosowania tomografii do pomiaru gęstości ośrodka odkształconego przedstawił R. Wojnar (Warszawa). Nie przewidzianą w programie pracę P. Beresta i Nguyen Minch Duca (Palaiseau), dotyczącą analizy ośrodka wokół wyrobiska w skale solnej modelowanej jako ośrodek sprężysto-lepkoplastyczny, przedstawił B. Loret. W dyskusji głos zabrało 10 uczestników (12 wypowiedzi).

45-cio minutowy referat na temat propagacji fal przyspieszenia w przypadku dużych odkształceń ośrodków sprężysto-plastycznych o pamięci dyskretnej, rozpoczął sesję szóstą (P. Guélin, S. Han — Grenoble; W. K. Nowacki — Warszawa; P. Pegon, B. Wack — Grenoble). Następne dwa referaty również dotyczyły zagadnień dynamicznych, a mianowicie: analizy wpływu opóźnienia plastycznego na dynamiczne płynięcie materiałów sprężysto-lepkoplastycznych (G. Bąk, A. Stolarski — Warszawa), dynamiki jednowymiarowych modeli liniowych i nieliniowych kompozytów sprężystych z uwzględnieniem solitonów (Z. We-

solowski — Warszawa). W kolejnym referacie rozpatrzono zagadnienie numerycznego modelowania procesu formowania włókien szklanych (J. R. Clermont, C. Godet, J. M. Pierrard — Grenoble). Dwa pozostałe referaty przedstawione na tej sesji dotyczyły pewnych zagadnień związanych z przepływami cieczy ni-newtonowskich; i tak S. Zahorski (Warszawa) rozpatrzył dwuwymiarową warstwę graniczną dla cieczy „prawie” nieściśliwej zaś M. Gosiewski (Warszawa) — przepływ cieczy nieściśliwej w warstwie pomiędzy dwoma niewspółosiowymi walcami. W dyskusji głos zabrało 8 uczestników (10 wypowiedzi).

Ostatnią, siódmą sesję rozpoczął referat na temat metod numerycznych przydatnych w rozwiązywaniu pewnej klasy zagadnień liniowych i nieliniowych, w których czas występuje jawnie (Cz. Rymarz, I. Winnicki — Warszawa). Pozostałe referaty dotyczyły: analizy i optymalizacji ram plastycznych w przypadku pól losowych (K. A. Sikorski, A. Borkowski — Warszawa), badań doświadczalnych nad przystosowaniem rur obciążonych ciśnieniem wewnętrznym i zmiennym polem temperaturowym (J. A. König — Warszawa, K. Leers — Hannover, O. Mahrenholtz — Hamburg), różnego rodzaju oszacowań, w tym przemieszczeń maksymalnych, dla ciał sprężysto-plastycznych przy uwzględnieniu pękania (S. Dorosz — Warszawa). Ostatni referat, nie przewidziany w programie, stanowił uzupełnienie i rozszerzenie przedstawionych na sesji piątej rezultatów dotyczących możliwości zastosowania tomografii w mechanice ciała stałego (A. Chrysochoos — Montpellier). W ramach dyskusji głos zabrało 8 uczestników.

Należy zaznaczyć, że podczas wszystkich sesji dyskusje były żywe i bardzo rzeczowe.

Na zakończenie obrad jako pierwszy głos zabrał P. Perzyna, przewodniczący ostatniej sesji, który był uczestnikiem wszystkich dotychczasowych sympozjów polsko-francuskich. Przypomniał on historię czterech poprzednich sympozjów oraz mocno podkreślił inspirującą rolę A. Sawczuka jak i jego starania o współpracę z wiodącymi ośrodkami naukowymi we Francji. Ponadto zwrócił uwagę na istotną rolę odgrywaną przez mechaników francuskich w dziedzinie badań doświadczalnych i w zastosowaniach analizy funkcjonalnej do rozwiązywania zagadnień brzegowych i początkowo-brzegowych jakie stawia współczesna mechanika ciała stałego. Jako członek Redakcji Archiwum Mechaniki Stosowanej poinformował uczestników o tym, że przewidywane jest wydanie specjalnego numeru tego czasopisma zawierającego prace przedstawione na Sympozjum. Następnie głos zabrał członek Komitetu Organizacyjnego, M. Życzkowski. Podziękował on uczestnikom za udział w Sympozjum i za stworzenie odpowiedniej do takich obrad atmosfery. Według niego, prace przedstawione w czasie obrad obejmowały następujące dziedziny: sprężystość, plastyczność, reologia, uszkodzenie, mechanikę zniszczenia, ośrodki ziarniste, metody matematyczne. Jako ostatni zabrał głos J. M. Pierrard, przewodniczący delegacji francuskiej. Przedstawił on własne impresje, bardzo pozytywne, dotyczące prac przedstawionych na Sympozjum jak i samej organizacji tego spotkania. Wspomniał o zauważalnym w ostatnich latach renesansie mechaniki francuskiej. Ze względu na istniejące trudności w rozwiązywaniu zagadnień numerycznych, polscy mechanicy zwrócili swoje zainteresowania w kierunku problemów teoretycznych i zagadnień analitycznych. Jest to jeszcze jeden powód do zacieśniania wspólnej współpracy, która w przyszłości może dać wiele interesujących rezultatów.

*Józef Joachim TELEGA*

#### Konferencje Naukowe

1. Badania Konstrukcji Budowlanych i Inżynierskich, Szklarska Poręba 1986-03- 21 i 22. Organizatorzy: Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Politechnika Wroclawska. Adres Komitetu Organizacyjnego: Politechnika Wroclawska, Instytut Budownictwa, Plac Grunwaldzki 11, bud. C-7, p. 506, 50—370 Wrocław.
2. European Turbulence Conference, Ecole Centrale Lyon, 1986-07-01 do 04. Adres: Professor J. Mathieu, lub Professor G. Comte-Bellot, Ecole Centrale de Lyon, Laboratoire de Mecanique des Fluides, B. P. 133, F-69131, Ecully, Cedex, France. Zgłoszenia do 15 grudnia 1985 r.



### III Sympozjum Brytyjsko-Polskie z Mechaniki

W dniach od 30 marca do 2 kwietnia 1985 odbyło się w Glasgow III Sympozjum Brytyjsko-Polskie z Mechaniki (Third British-Polish Mechanics Symposium), organizowane przez Uniwersytet Strathclyde w Glasgow. Sympozja te dotyczą mechaniki ciała stałego i mechaniki konstrukcji, przy czym zasadniczym tematem omawianego sympozjum była mechanika kompozytów. Ze strony polskiej udział wzięło 11 pracowników nauki reprezentujących: IPPT PAN (8 osób), WAT (jedna osoba), Uniwersytet Warszawski (jedna osoba) i Politechnikę Łódzką (jedna osoba). Ze strony brytyjskiej udział wzięło 9 pracowników, reprezentujących uniwersytety w Nottingham (3 osoby), Glasgow (2 osoby), Bath (2 osoby) oraz Norwich i Coventry (po jednej osobie). Wygłoszono 21 referatów godzinnych lub półgodzinnych, z których trzy nie dotyczyły bezpośrednio bądź pośrednio mechaniki kompozytów. Z pośród 18 referatów na temat mechaniki kompozytów, tylko dwa omawiały wyniki prac eksperymentalnych i realizacji inżynierskich; tym samym obrady i dyskusje po referatach, jak również dyskusja okrągłego stołu poświęcona tendencjom rozwojowym mechaniki kompozytów, dotyczyły przede wszystkim zagadnień teoretycznych. Dyskusje te wykazały zbieżność kierunków badawczych nad teorią kompozytów prowadzonych w Polsce i w Wielkiej Brytanii, przy czym prowadzone prace dotyczą w większym stopniu zagadnień modelowania konstytutywnego i rozwiązywania zagadnień o znaczeniu technicznym niż zagadnień o charakterze matematycznym (matematyczna teoria homogenizacji). Dużą uwagę poświęcono zwłaszcza związkowi między mechaniką „mikro” i „makro” oraz zagadnieniom rozchodzenia się fal w materiałach lub ciałach kompozytowych.

Czesław Woźniak

### Odślonięcie tablicy pamiątkowej poświęconej pamięci Profesora Witolda Wierzbickiego

W uznaniu zasług Profesora Witolda Wierzbickiego w gmachu Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej została wmurowana piękna tablica pamiątkowa. Z inicjatywy profesora Jerzego Mutermilcha i szeregu osób starania w tej sprawie podjęła Rada Wydziału Inżynierii Lądowej oraz specjalnie powołany Komitet Organizacyjny. 30 stycznia 1985 r. upłynęła dwudziesta już rocznica śmierci Profesora W. Wierzbickiego — pierwszego Prezesa Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Urząd ten piastował od chwili powstania Towarzystwa w roku 1958 do chwili śmierci.

W dniu 25 czerwca 1985 r. odbyło się uroczyste odsłonięcie tablicy pamiątkowej, którego dokonała Profesor Karyna Wierzbicka-Michalska, córka Profesora. Po uroczystości odsłonięcia tablicy członkowie Rady Wydziału i liczne grono gości, złożone z przyjaciół, współpracowników i uczniów Profesora oraz osób oficjalnych uczestniczyło w specjalnym posiedzeniu Rady poświęconym pamięci Profesora Witolda Wierzbickiego. Zebranych powitał Dziekan Wydziału Docent Andrzej Gomuliński. Referat pt. *Witold Wierzbicki — Życie i Dzieło* wygłosił Profesor Jerzy Mutermilch. Krótkie przemówienia wygłosili J. M. Rektor Politechniki Warszawskiej Profesor Władysław Findeisen, Przewodniczący PTMTS Profesor Józef Wojnarowski, oraz Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego Profesor Przemysław Jastrzębski. Odczytany został list od Profesora Romana Ciesielskiego, Przewodniczącego Rady Głównej Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego. Dziekan Andrzej Gomuliński wręczył wielu uczestnikom zebrania kopie pięknego medalu pamiątkowego wybitego dla uczczenia pamięci Profesora W. Wierzbickiego.

Wydrukowana została broszura pt. *Witold Wierzbicki 1890—1965* zawierająca artykuł pióra Profesora Jerzego Mutermilcha, zdjęcie portretowe Profesora Wierzbickiego, listę wyprzemowanych przez niego doktorów nauk technicznych, bibliografię publikacji i fotografię medalu pamiątkowego. Warto wspomnieć przy tej okazji że Profesor Wierzbicki opublikował artykuły o PTMTS w *Nauce Polskiej* (nr 3, 1963 s. 139—144) i w języku angielskim w *Rev. Pol. Akad. Sc.* (nr 3, 1963 s. 73—76). W *Mechanice Teoretycznej i Stosowanej* ukazała się Jego praca pt. *Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany* 2, 1964 s. 7—34) i wspomnienie o profesorze Kazimierzu Zarankiewiczu w *Biuletynie MT i S* (1959, s. 1—3)

W ramach cyklu „sylwetki profesorów Politechniki Warszawskiej” ukazał się życiorys Profesora Witolda Wierzbickiego pióra Profesora P. Jastrzębskiego (*Prace Historyczne B. G. P. W.* nr 30). Wspomnienie pośmiertne o Profesorze Witoldzie Wierzbickim opublikowaliśmy w *Mechanice Teoretycznej i Stosowanej* wraz ze spisem prac naukowych i zdjęciem portretowym w 1/1966, s. 1—8.

Zbigniew Olesiak

### ERRATA

do: K. Majorkowska-Knap, Fale sprzężone mechano-termo-elektryczne w stałym ośrodku piezoelektrycznym, Mech. Teoret. i Stos., 22, 3/4 (1984), 509—523.

Str.	Wiersz	Jest	Powinno być
509	w tytule	sprężone	sprężone
509	12 od dołu	[89]	[8]
511	10 od góry	$\delta_{ij}$	$\sigma_{ij}$
514	12 od dołu	$\epsilon_e$	$Q_e$
514	9 i 2 od dołu	<b>J</b>	<b>I</b>
514	1 od dołu	$\epsilon_0$	$\epsilon_0$
516	17 od dołu	$u_{k,ij}$	$u_{k,ij}$
517	2 od dołu	$E_{ij} + d_{12} u_{k,k} \delta_{ij} + \dots$	$E_{ij} = d_{12} u_{k,k} \delta_{ij} + \dots$
518	6 od góry	$-\epsilon_0 \nabla^2 \varphi$	$\epsilon_0 \nabla^2 \varphi$
518	9 od góry	$\sigma_{jnnj}$	$\sigma_{j1n1j}$
		$E_{jnnj}$	$E_{j1n1j}$
		$-\epsilon_0$	$-\epsilon_0$
	13 od góry	$(d_{12}, d_{44})$	$d_{12}, d_{44}$
	1 od dołu	mechanicznej	sprężystej
520	12 od dołu	LiLO <sub>3</sub>	LiIO <sub>3</sub>
521	21 od dołu	A. K. Moroca	A. K. Moroča

Cena zł 100,—

Warunki prenumeraty  
Cena prenumeraty krajowej  
rocznie zł 400,—  
półrocznie zł 200,—

Prenumeratę na kraj przyjmuje się:

- do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Instytucje i zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11, w terminach podanych dla prenumeraty krajowej. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland. Our bankers: BANK HANDLOWY WARSZAWA S.A.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa p. 309).*

Mech. Teor. T. 23, z. 1, s. 1—168, Warszawa 1985, Indeks 36523

---