

**P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J**

PL ISSN 0079-3761

**M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A**

**KWARTALNIK
TOM 22 • ZESZYT 3-4**

WARSZAWA 1984

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

Cz.	Woźniak, Constraints in constitutive relations of mechanics Связи в определяющих уравнениях механики. Więzy w porównaniach konstytutywnych mechaniki	325
E.	Włodarczyk, Zamknięte rozwiązanie problemu propagacji niestacjonarnej płaskiej fali uderzeniowej w suchym gruncie piaszczystym. Замкнутое решение проблемы распространения нестационарной плоской ударной волны в сухом песчаном грунте. Closed form solution to the propagation problem of a non-stationary plane shock wave in a dry sandy soil.	343
S.	Wiśniewski, Stateczność drgań parametrycznych wału napędzającego mechanizmy rozmieszczone rzędowo. Устойчивость параметрических колебаний вала ведущего рядово расположенные механизмы. Parametric vibration stability of a drive shaft for mechanisms spaced in a row.	355
W.	Walczak, M. Kotelko, Stateczność prostokątnych płyt przekładkowych o zmiennej sztywności wypełniacza. Устойчивость прямоугольных, трехслойных пластин о переменной жесткости заполнителя. Stability of rectangular sandwich plates at variable rigidity of the plate core.	363
E.	Walicki, J. Sawicki, Numeryczna analiza przepływu MHD w kanale z niesymetrycznym rozszerzeniem. Численный анализ течения МГД в канале с несимметричным расширением. Numerical analysis of MHD flow in the channel with a unsymmetrical cavity.	379
T.	Lewiński, Two versions of Woźniak's continuum model of hexagonal-type grid plates. Две континуальные модели (по Возняку) гексагональных сетчатых пластинок. Dwa kontynualne modele (typu Woźniaka) heksagonalnych tarcz siatkowych.	389
T.	Lewiński, Differential models of hexagonal-type grid plates. Дифференцированные модели гексагональных сетчатых пластинок Różniczkowe modele heksagonalnych tarcz prętowych.	407
J.	Zielnica, Linearized equations of stability of elastic-plastic conical shell including the effects of passive processes. Линеризация уравнений упруго-пластической устойчивости конической оболочки с учетом разгрузки. Linearyzacja równań stateczności sprężysto-plastycznej powłoki stożkowej z uwzględnieniem procesów biernych.	423
J.	Maryniak, K. Michalewicz, Z. Winczura, Wpływ warunków zrzutu na ruch zasobnika w pobliżu nosiciela i parametry upadku. Влияние условий сброса на движение авиационного контейнера близко носителя и параметры его падения Influence of the dropping conditions on the container motion near carrier and on the impact parameters.	433
W.	Blajer, Badanie stateczności samolotu w ustalonym korkociągu. Испытания устойчивости самолета во время установившегося штопора. A study of airplane motion stability in steady spin.	445
A.	Dąbrowski, Z. Burda, Dynamika jednokulkowego korektora pionu sztucznego horyzontu. Динамический анализ механического корректора вертикали по авиагоризонту Dymical analysis of the mechanical Erector for Gyro-Vertical.	453

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 2 Z E S Z Y T 3 - 4

W A R S Z A W A 1 9 8 4

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY
MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,

JÓZEF WIĘCKOWSKI,

ZBIGNIEW OLESIK—REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR
ANDRZEJ SZANIAWSKI—REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR
ZOFIA DYŚKO—REDAKTOR,
LILIANA JEZIEWSKA—DRABOWSKA—REDAKTOR TECHNICZNY
BARBARA MICHALSKA—CZACHÓR SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa pokój 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 530. Ark. wydawniczych 22,5 Ark. drukarskich 21. Papier druk. sat. kl. IV, 71 g. 70×100
Oddano do składania 31.VIII.1984 r. Druk ukończono we wrześniu 1985 r. Zam. 6799/12/84 Cena zł 160.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

CONSTRAINTS IN CONSTITUTIVE RELATIONS OF MECHANICS

CZESŁAW WOŹNIAK (Warszawa)

*University of Warsaw
Faculty of Mathematics, Computer Sciences and Mechanics
Institute of Mechanics*

Introduction

Constraints in mechanics are usually understood as the known restrictions imposed on the class of motions of a certain material system; they are due either to internal properties of a system (internal constraints) or to the influence of certain exterior objects or external fields (external constraints). Moreover, constraint imposed on motions is maintained by what are called reaction forces which can be internal (for internal constraints) or external (in the case of external constraints). As a rule, kinematic constraints together with the suitable reaction forces are analysed within the theory of constitutive relations of mechanics, i.e., within relations which characterize either internal (material) properties of the body under consideration or interactions between the body and its exterior.

So far, different special cases of constraints have been analysed independently in different problems of mechanics; the complete list of pertinent references is rather extensive and will not be given here. For the discussion of constraints in Hamiltonian and Lagrangian mechanics the reader is referred to [1] where the further references can be found. Internal constraints have been studied within the theory of constitutive relations of continuum mechanics; for the basic assumptions of the theory cf. [2]. The concept of constraints has been also applied in order to simplify the analytical form of problems in the elasticity theory, [3], and to obtain relations of structural mechanics (cf. [4], where the list of suitable references is given).

The main aim of the paper is to develop a general approach to the concept of constraints in discrete and continuum mechanics and to obtain and analyse the general form of constitutive relations in which the constraints are involved. It must be stressed that constitutive relations we are to deal with, describe not only material properties of bodies but also interactions between a body and external fields. The main attention in the paper will be given to these aspects of constitutive relations which are due to the constraints.

The concepts of constraint and that of the constitutive relations subject to constraints will be introduced and analysed in their abstract form, i.e., independently of any special class of problems in mechanics. Such approach, after suitable interpretations of the obtained relations, enables to formulate problems in which constraints are imposed not only on the kinematical fields but also on the internal and external forces as well as on any other

field encountered in mechanics. Moreover, putting aside certain non physical situations, no regularity of any kind will be imposed on the sets of fields which are admissible by constraints. Hence different problems with involved form of constraints can be formulated on the basis of the general results obtained in the paper. The method of constraints which is developed here, constitutes the useful tool for the formation of new constitutive relations by imposing constraints on the known constitutive relation. The proposed approach is applied in order to obtain certain new classes of ideal materials within continuum mechanics; for further applications the reader is referred to [5] where some examples of unilateral internal constraints for strains and stress are discussed. Applications to structural mechanics will be given in papers [6, 7].

1. Constraints and reactions

We start from a class of mappings which are assumed to describe within mechanics all time evolutions of a quantity related to a certain material system. Throughout the paper we shall confine ourselves to mappings which can be represented by finite systems of real-valued functions defined on the time axis R and which are continuous and have continuous time derivatives for a.e. $t \in R^1$. To introduce the class of mappings under consideration we shall assume that there is known the n -th dimensional manifold M of the class C^1 . The tangent bundle to M will be denoted by TM , the cotangent bundle by T^*M ; for every $m \in M$ the suitable tangent and cotangent spaces will be denoted by T_mM , T_m^*M , respectively. Moreover, τ_M and τ_M^* will stand for the natural projections of TM , T^*M , respectively, onto M . The dual pairing between T_mM and T_m^*M (for an arbitrary $m \in M$) will be denoted by $(T_mM, \langle \cdot, \cdot \rangle, T_m^*M)$. Let all mappings describing a time evolution of a certain quantity related to the material system under consideration be represented by elements of the known (topological) space $\Phi(R, M)$ of functions defined a.e. on R and with values in M . Hence the mappings we are to deal with are

$$\varphi: R \ni t \rightarrow \varphi(t) \in M \quad (1.1)$$

for some $\varphi \in \Phi(R, M)$. We shall also assume that the R.H.S. derivatives $\varphi'(t)$ exist for every $t \in R$.

The intuitive concept of constraints is closely related to the fact that in many problems under consideration not every $\varphi \in \Phi(R, M)$ describes certain physical situation and that in different situations we have to deal with different subsets of $\Phi(R, M)$. Thus, from a formal point of view, we are tempted to define constraints as certain proper subsets of $\Phi(R, M)$. However, such treatment of constraints is not based on the physical meaning of this concept. Firstly, not every restriction of $\Phi(R, M)$ has the physical sense of constraints²⁾. Secondly, the choice of the space $\Phi(R, M)$ itself can be interpreted as introducing constraints in their intuitive meaning. To avoid any ambiguity, we shall introduce the following definition of constraints.

¹⁾ Thus within continuum mechanics we confine ourselves to the situations in which there is involved only sufficiently small neighborhood of an arbitrary but fixed material particle.

²⁾ Such restriction can be introduced, for example, by imposing extra smoothness conditions on the space $\Phi(R, M)$ of mappings (1.1).

Definition 1. By *TM*-constraint we shall mean the multifunction

$$\mathcal{C}: R \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) \subset TM, \tag{1.2}$$

such that, under the denotations

$$\begin{aligned} A(m, t) &\equiv \mathcal{C}(t) \cap T_m M, & (m, t) \in M \times R, \\ DA(t) &\equiv \{m \in M \mid A(m, t) \neq \emptyset\} = \tau_M \mathcal{C}(t), & t \in R, \end{aligned} \tag{1.3}$$

the following conditions hold

$$\begin{aligned} (\forall t \in R) (\forall m \in DA(t)) (\forall v \in A(m, t)) (\exists f \in C^1(-\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon > 0) [m = \\ = f(0), v = f'(0), f'(\lambda) \in A(f(\lambda), t + \lambda) \text{ for every } \lambda \in [0, \varepsilon)], \\ (\forall t \in R) [DA(t) \neq \emptyset]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

The multifunction

$$A: M \times R \ni (m, t) \rightarrow A(m, t) \subset TM, \tag{1.5}$$

such that

$$(\forall (m, t) \in M \times R) [A(m, t) \subset T_m M] \tag{1.6}$$

and satisfying Eqs. (1.4), will be called *TM*-constraint multifunction.

Corollary 1. Every *TM*-constraint multifunction defines *TM*-constraint and conversely. *TM*-constraint determined by *TM*-constraint multifunction *A* will be denoted by \mathcal{C}_A .

Corollary 2. Every *TM*-constraint multifunction (1.5) determines the subset $\Phi_A(R, M)$ of $\Phi(R, M)$ defined by

$$\Phi_A(R, M) := \{\varphi \in \Phi(R, M) \mid \varphi(t) \in DA(t), \quad \varphi'(t) \in A(\varphi(t), t), \quad t \in R\}, \tag{1.7}$$

where, by virtue of Eq. (1.4), the subset $\Phi_A(R, M)$ is not empty.

Remark 1. If *M* is a differentiable submanifold of a certain C^1 -manifold M_1 , then *TM*-constraint can also be interpreted as TM_1 -constraint. Analogously, if M_0 is a differentiable submanifold of *M*, then *TM*-constraint can be interpreted as TM_0 -constraint provided that $\mathcal{C}(t) \subset TM_0$ for every $t \in R$. Thus the concept of constraint is strictly related to the choice of the differentiable manifold *M*. This manifold in problems of mechanics, as a rule, is introduced by the known class $\Phi(R, M)$ of mappings³⁾. The *TM*-constraint \mathcal{C} we deal with will be called generalized since no regularity of any kind (apart from conditions given by Eq. (1.4)) is imposed on the non-empty subsets $\mathcal{C}(t)$ of *TM*.

Remark 2. In many problems of mechanics we deal with situations in which *TM*-constraint \mathcal{C} (or *TM*-constraint multifunction *A*) is not known a priori but depends on certain element of a non empty set \mathcal{E} , i.e., $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\xi, \xi \in \mathcal{E}$. If $\overline{\mathcal{E}} > 1$ then $\mathcal{C}_\xi, \xi \in \mathcal{E}$, will be referred to as the implicit *TM*-constraints and if \mathcal{E} is one element set then we return to Definition 1 of (explicit) *TM*-constraint. For implicit constraints instead of *TM*-constraint multifunction (1.5) we shall introduce implicit *TM*-constraint multifunction

$$A: M \times R \times \mathcal{E} \ni (m, t, \xi) \rightarrow A(m, t, \xi) \subset TM, \tag{1.8}$$

such that $A(\cdot, \cdot, \xi)$ is, for every $\xi \in \mathcal{E}$, the known constraint multifunction.

The concept of constraints in mechanics is related not only to the restrictions imposed on the class of mappings (leading from $\Phi(R, M)$ to $\Phi_A(R, M)$), but also to the existence

³⁾ That is why *TM*-constraints \mathcal{C} will be identified neither with TM_1 -constraint nor with TM_0 -constraint.

of certain fields which are treated as „maintaining” the constraint and are said to be „reactions” to constraint. In order to introduce such „reactions” we shall firstly define the sets

$$T_{A(m,t)}(v) := \{w \in T_v(T_m M) \mid w = g'(0), \quad v = g(0), \quad g(\lambda) \in A(m,t) \\ \text{for every } \lambda \in [0, \varepsilon), \varepsilon > 0, \text{ and some } g \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), T_m M)\},$$

and then, taking into account the canonical isomorphisms $\lambda_v: T_v(T_m M) \rightarrow T_m M$, we obtain the cones

$$K_{A(m,t)}(v) \equiv \lambda_v T_{A(m,t)}(v) \quad (1.9)$$

of directions tangent to $A(m,t)$ in $T_m M$ at the points $v \in A(m,t)$. Mind, that cones $K_{A(m,t)}(v)$ are empty if $v \in T_m M \setminus A(m,t)$ or $m \in M \setminus DA(t)$. Now we shall formulate the following

Definition 2. By a reaction cone of TM -constraints $\mathcal{C}: R \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) \subset TM$ at a time instant $t \in R$, at a point $m \in DA(t)$ and for an element $v \in A(m,t)$, we shall mean a cone in $T_m^* M$ given by

$$K_{A(m,t)}^*(v) := \{v^* \in T_m^* M \mid \langle w, v^* \rangle \geq 0 \quad \text{for every } w \in K_{A(m,t)}(v)\}, \quad (1.10)$$

where, as usual, $A(m,t) = \mathcal{C}(t) \cap T_m M$, $m \in M$, $t \in R$.

Remark 3. Elements of every non-empty reaction cone for TM -constraint will be called reactions to constraint. It can be seen that every reaction cone $K_{A(m,t)}^*(v)$ is closed in $T_m^* M$ and conjugate to the cone $K_{A(m,t)}(v)$ of directions tangent to $A(m,t)$ at $v \in A(m,t)$. For an arbitrary time instant $t \in R$ these cones are not empty if and only if $m \in DA(t)$, $v \in A(m,t)$.

Example of interpretation. Let M be a configuration space and $\varphi: R \ni t \rightarrow \varphi(t) \in M$ stands for a motion of a certain material system. For an arbitrary TM -constraint \mathcal{C}_A we interpret $DA(t)$ as a set of all configurations which are „admissible” by constraint \mathcal{C}_A at a time instant $t \in R$. At the same time $A(m,t)$ is a set of all velocities which are „admissible” by constraint \mathcal{C}_A at a configuration $m \in DA(t)$. Every motion φ is „admissible” by constraint \mathcal{C}_A if and only if $\varphi \in \Phi_A(R, M)$; we can here assume that $\Phi(R, M) = D^1(R, M)$. Elements of $K_{A(m,t)}(v)$ now play the role of what can be called „virtual displacements”. The cones of „virtual displacements” have been introduced only in order to define conjugate cones $K_{A(m,t)}^*(v)$ in $T_m^* M$, $m \in M$, which are called the reaction cones. Elements of $K_{A(m,t)}^*(v)$, for a certain motion $\varphi \in \Phi_A(R, M)$ and for $m = \varphi(t)$, $v = \dot{\varphi}(t)$, can be interpreted as reactions due to the constraints, which can act on the moving material system under consideration at the time instant t (at the configuration $\varphi(t)$ and the generalized velocity $v = \dot{\varphi}(t)$). Hence we see that now elements of $T_m^* M$ can be interpreted as certain generalized forces which can act on the moving system in its configuration $m = \varphi(t)$.

To complete the Section we discuss different cases of TM -constraints from the point of view of reactions. TM -constraint $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$ will be called taut or stretched at $t \in R$, $m \in DA(t)$ and for $v \in A(m,t)$, if and only if $\{0\}$ is a proper subset of the reaction cone $K_{A(m,t)}^*(v)$; otherwise the relation $K_{A(m,t)}^*(v) = \{0\}$ holds and \mathcal{C}_A will be called untaut or unstretched at $t \in R$, $m \in DA(t)$ and for $v \in A(m,t)$. Define

$$K^*(m,t) \equiv \bigcup_{v \in A(m,t)} K_{A(m,t)}^*(v).$$

TM -constraint \mathcal{C}_A will be termed reactive at $t \in R, m \in DA(t)$, if $K^*(m, t) \supset \supset \{0\}$, and will be termed unreactive if $K^*(m, t) = \{0\}$. TM -constraint \mathcal{C}_A will be called non-reactive if it is nonreactive for every $t \in R$ and every $m \in DA(t)$; otherwise it will be called reactive.

Corollary. TM -constraints are nonreactive if $\tau_M^{-1}(\tau_M \mathcal{C}(t)) = \mathcal{C}(t)$ for every $t \in R$ or if $A(m, t) = T_m M$ for every $m \in DA(t)$ and every $t \in R$.

It must be emphasized that the term „constraint” in the known terminology of mechanics is reserved, as a rule, for situations in which TM -constraint is reactive.

Let TM -constraint \mathcal{C}_A at $t \in R, m \in DA(t)$ and for $v \in A(m, t)$ be taut. Then the constraint will be called:

- 1° bilateral if $K_{A(m, t)}^*(v)$ is a linear subspace of $T_m^* M$ and $K_{A(m, t)}^*(v) \neq \{0\}$,
- 2° unilateral if $K_{A(m, t)}^*(v)$ does not contain any linear subspace of $T_m^* M$ different from $\{0\}$ and $K_{A(m, t)}^*(v) \neq \{0\}$,
- 3° combined if $K_{A(m, t)}^*(v)$ is not a linear subspace of $T_m^* M$ but contains such a subspace different from $\{0\}$.

This terminology is based on the terminology used in analytical mechanics. In mechanics we also deal with what are called „ideal” constraints, in which the total work of the reaction of these constraints on any virtual displacement is equal to zero. This case in a general approach given in the paper is represented by the condition: $\langle w, v^* \rangle = 0$ for every $w \in K_{A(m, t)}(v)$, where $v^* \in K_{A(m, t)}^*(v)$ and $v \in A(m, t)$. Hence it follows that the ideal constraint coincides with the bilateral constraint in the sense which was introduced above. However, from the point of view of applications of the theory developed in the paper, it is better to introduce the term „ideal constraints” as describing all situations in which „constraints” of the form: $v \in A(m, t), m \in DA(t)$, are „maintained” by the reactions $v^* \in K_{A(m, t)}^*(v)$. Thus the theory we are to develop can be treated as the theory of „ideal” constraints.

2. Constitutive relations

Time evolutions of material systems in mechanics are described by what are called dynamical processes; throughout the paper we shall confine ourselves to the processes represented by pairs of functions $(\varphi, \psi) \in \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$, such that $\psi(t) \in T_{\varphi(t)}^* M$ for every $t \in R$, where $\Psi(R, T^*M)$ is the known functional (topological) space of functions defined a.e. on R and with values in T^*M . Thus every dynamical process under consideration, will be represented by

$$R \ni t \rightarrow (\varphi(t), \psi(t)) \in M \times T^*M, \tag{2.1}$$

where $\varphi \in \Phi(R, M)$, $\psi \in \Psi(R, T^*M)$ and $\psi(t) \in T_{\varphi(t)}^* M$ for a.e. $t \in R$. Moreover, in problems under consideration, every process (2.1) has to satisfy certain relation $\varrho \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$ which, roughly speaking, characterizes properties of the physical object or phenomenon which is analysed in this problem. Thus we shall assume that

$$(\varphi, \psi) \in \varrho \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M), \tag{2.2}$$

and refer ϱ to as the constitutive relation. To be more exact, to every material system we shall assign certain set \mathcal{R} of constitutive relations of the form (2.2)⁴⁾ such that:

1° Every $\varrho \in \mathcal{R}$ is either the internal constitutive relation, i.e., it describes the „material” properties of the system (i.e., all these properties which are independent of any external field), or the external constitutive relation, describing the interaction between the system and its exterior.

2° Every $\varrho \in \mathcal{R}$ satisfies the principle of determinism, i.e., for every $\varrho \in \mathcal{R}$ there exist relations

$$\eta_t \subset \Phi(\bar{R}_+, M) \times \Psi(\bar{R}_+, T^*M), \quad t \in R,$$

such that $(\varphi, \psi) \in \varrho$ if and only if $(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}) \in \eta_t$ for almost every $t \in R$, where $\varphi^{(t)}(s) \equiv \varphi(t-s)$, $\psi^{(t)}(s) \equiv \psi(t-s)$, $s \geq 0$. If ϱ is an internal relation then, as a rule, η_t is assumed to be constant for every $t \in R$.

Remark 1. Constitutive relation, apart from $\varphi \in \Phi(R, M)$ and $\psi \in \Psi(R, T^*M)$, can also involve elements δ of a certain set Δ which is not specified here. To take this fact into account we shall tacitly assume that $\varrho = \varrho_\delta$ for some $\delta \in \Delta$. Thus the constitutive relation involving δ will be represented not by a single relation ϱ but rather by a family ϱ_δ , $\delta \in \Delta$, of such relations.

Remark 2. The term „constitutive relation” is usually restricted to the description of material properties only of the system under consideration. Throughout the paper the constitutive relations are not restricted to relations describing internal properties of bodies (as internal constitutive relations) but also describe interactions between the body and external fields or objects (external constitutive relations).

In the sequel we shall deal only with what will be called *TM*-constrained constitutive relations.

Definition 3. Constitutive relation $\varrho \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$ will be termed *TM*-constrained if and only if there exists *TM*-constraint $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$ (here A is a constraint multifunction), such that $\text{dom } \varrho = \Phi_A(R, M)$, where $\Phi_A(R, M)$ is a nonempty subset of $\Phi(R, M)$ given by Eq. (1.7).

The foregoing definition yields an interrelation between the concept of a constraint and that of a constitutive relation (internal or external). From now on by a constitutive relation we shall mean *TM*-constrained constitutive relation, including also the trivial case in which $\Phi_A(R, M) = \Phi(R, M)$, i.e., in which $A(m, t) = T_m M$ for every $m \in M$, $t \in R$.

Now the question arises what restrictions have to be imposed on the form of constitutive relations due to the existence of constraints. To answer this question we shall formulate the following:

Principle of Constraints. Every *TM*-constrained constitutive relation $\varrho \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$, $\text{dom } \varrho = \Phi_A(R, M)$, has to satisfy the condition

$$(\forall \varphi \in \Phi_A(R, M)) (\forall r \in R_A(\varphi)) [[(\varphi, \psi) \in \varrho] \Rightarrow [(\varphi, \psi \pm r) \in \varrho]], \quad (2.3)$$

where we have denoted

$$R_A(\varphi) := \{r \in \Psi(R, T^*M) | r(t) \in K_{A^*(\varphi(t), t)}(\varphi'(t)) \text{ for a.e. } t \in R\}, \quad (2.4)$$

⁴⁾ For different constitutive relations sets M , $\Phi(R, M)$, $\Psi(R, T^*M)$ can be different.

and where the sign „+” (the sign „-”) has to be used if ϱ is an external (an internal) constitutive relation.

The principle of constraints emphasizes the formal difference between external and internal constitutive relations; roughly speaking, the external constitutive relation is „unsusceptible” on the reaction $r \in R_A(\varphi)$ to constraints \mathcal{C}_A , while the internal constitutive relation is „unsusceptible” on any „action” on constraints $-r(t)$, $t \in R$, where $r \in R_A(\varphi)$. Hence, from a purely formal point of view, to every external constitutive relation $(\varphi, \psi) \in \varrho$ we can uniquely assign the internal constitutive relation $\tilde{\varrho}$, putting $(\varphi, \tilde{\psi}) \in \tilde{\varrho}$ iff $(\varphi, -\tilde{\psi}) \in \varrho$, i.e., replacing function ψ by a function $\tilde{\psi}$.

To discuss the consequences of the principle of constraints let us introduce the multiplier

$$Mr\varrho: \Phi(R, M) \rightarrow 2^{\Psi(R, T^*M)},$$

putting

$$Mr\varrho(\varphi) := \{\psi \in \Psi(R, T^*M) \mid (\varphi, \psi) \in \varrho\}.$$

It follows that for every $r \in R_A(\varphi)$ we obtain $\psi \pm r \in Mr\varrho(\varphi)$ provided that $\psi \in Mr\varrho(\varphi)$, where the sign „+” (the sign „-”) is related to the external (the internal) constitutive relation. Introducing now an arbitrary multifunction

$$\tilde{E}: \Phi(R, M) \rightarrow 2^{\Psi(R, T^*M)}, \tag{2.5}$$

such that

$$\text{dom } \tilde{E} := \{\varphi \in \Phi(R, M) \mid \tilde{E}(\varphi) \neq \emptyset\} = \Phi_A(R, M), \tag{2.6}$$

we obtain $Mr\varrho(\varphi) = \tilde{E}(\varphi) \pm R_A(\varphi)$ and arrive at the following form of TM -constrained constitutive relation

$$\psi \in \tilde{E}(\varphi) \pm R_A(\varphi), \quad \varphi \in \Phi_A(R, M), \tag{2.7}$$

where the sign „+” and „-” are related to the case in which we deal with an external or internal constitutive relation, respectively. Mind, that relation (2.7), in which $\tilde{E}(\cdot)$ is an arbitrary multifunction (2.5) satisfying Eq. (2.6), fulfils identically the principle of constraints.

Using the principle of determinism, mentioned above, we assume that there exist the multifunctions

$$(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \rightarrow E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \subset T_m^*M, \quad m \in M, \quad t \in R, \tag{2.8}$$

such that $\varphi(t) = m$ and

$$\psi(t) \in E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \pm r(t) \quad \text{for some } r \in R_A(\varphi), \quad t \in R.$$

Taking into account Eqs. (2.4), (1.7) we obtain finally the following general form of TM -constrained external constitutive relation⁵⁾

$$\begin{aligned} \psi(t) &\in E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) + K_{A(\varphi(t), t)}^*(\varphi'(t)), \\ \varphi(t) &\in DA(t), \quad \varphi'(t) \in A(\varphi(t), t); \quad t \in R. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Moreover, for internal constitutive relations, the subsets $E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))$ of $T_{\varphi(t)}^*M$, for an arbitrary but fixed history $\varphi^{(t)}$, are time independent. For such relations we also assume that

⁵⁾ Mind, that $E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))$ is a subset of $T_{\varphi(t)}^*M$.

the time does not enter the constraint: $A(m, t) = A(m)$, $t \in R$. Thus the general form of TM -constrained internal constitutive relation is given by

$$\begin{aligned} \psi(t) &\in E(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) - K_{A(\varphi(t))}^*(\varphi'(t)), \\ \varphi(t) &\in DA, \quad \varphi'(t) \in A(\varphi(t)); \quad t \in R, \end{aligned} \quad (2.10)$$

where

$$(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \rightarrow E(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \subset T_m^*M, \quad m = \varphi(t),$$

constitutes a special case of a multioperator (2.8). Summing up, we formulate the following

Proposition. Every TM -constrained external constitutive relation $(\varphi, \psi) \in \rho \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$ has a form (2.9) in which $A: M \times R \ni (m, t) \rightarrow A(m, t) \subset TM$ is TM -constraint multifunction and $E_t(\cdot)$ are multioperators such that $E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \neq \phi$ if $\varphi^{(t)} \in \Phi(\bar{R}_+, M)$ and $\varphi(t-s) \in DA(t-s)$, $\varphi'(t-s) \in A(\varphi(t-s), t-s)$ for every $t \in R$ and $s \geq 0$. Every TM -constrained internal constitutive relation $(\varphi, \psi) \in \rho \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$ has a form (2.10), in which $A: M \ni m \rightarrow A(m) \subset TM$ is TM -constraint (time independent) multifunction and $E(\cdot)$ is a multioperator such that $E(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \neq \phi$ if $\varphi^{(t)} \in \Phi(\bar{R}_+, M)$ and $\varphi(t-s) \in DA$, $\varphi'(t-s) \in A(\varphi(t-s))$ for every $t \in R$ and $s \geq 0$.

Conclusion 1. If for a certain TM -constrained constitutive relation the suitable TM -constraints are nonreactive, then the principle of constraints is satisfied identically. In this case TM -constrained external constitutive relation is given by

$$\psi(t) \in E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)), \quad \varphi(t) \in DA(t), \quad \varphi'(t) \in A(\varphi(t), t),$$

for a.e. $t \in R$, and TM -constrained internal constitutive relation has a form

$$\psi(t) \in E(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)), \quad \varphi(t) \in DA, \quad \varphi'(t) \in A(\varphi(t)),$$

for a.e. $t \in R$.

Conclusion 2. If TM -constrained constitutive relation $\rho \in \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$ is a functional relation (defined on the subset $\Phi_A(R, M)$ of $\Phi(R, M)$, i.e., if $\psi = \rho\varphi$, $\varphi \in \Phi_A(R, M)$), then TM -constraints \mathcal{C}_A are unreactive.

Example of interpretation. To illustrate the foregoing analysis we can assume that M is a space of all 3×3 symmetric matrices and that DA is a subset of all positive definite matrices representing the values $\varphi(t)$ of the Cauchy-Green deformation tensor at an arbitrary time instant. Moreover, let every $\psi(t)$ be treated as the value of the second Piola-Kirchhoff stress tensor. Then Eqs. (2.10) represent constraints for deformations and Eq. (2.10)₁ stands for a suitable stress-strain relations.

Remark 3. Conditions (2.9)₂, (2.10)₂ are implied by conditions (2.9)₃, (2.10)₃, respectively, since

$$DA(t) := \{m \in M \mid A(m, t) \neq \phi\},$$

$$DA := \{m \in M \mid A(m) \neq \phi\}.$$

Remark 4. The requirements formulated in the foregoing proposition represent only necessary conditions imposed on constrained constitutive relations. The sufficient conditions can be formulated only for some special classes of constitutive relations.

At the end of the Section we shall formulate some alternative forms of *TM*-constrained constitutive relations for the case in which

$$[E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \neq \phi] \Rightarrow [E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) = \{F_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))\}],$$

$$[E(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \neq \phi] \Rightarrow [E(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) = \{F(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))\}],$$

for every $t \in R$ i.e., in which $E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))$, $E(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))$ are singletons or empty sets only. Combining together external and internal relations, we obtain from Eqs. (2.9), 2.10

$$\psi(t) = F_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \pm r(t), \quad r(t) \in K_{A(\varphi(t), t)}^*(\varphi'(t)),$$

$$\varphi(t) \in DA(t), \quad \varphi'(t) \in A(\varphi(t), t); \quad t \in R, \tag{2.11}$$

where for internal relations the sign „-” has to be taken into account and F_t , $DA(t)$, $A(\varphi(t), t)$ have to be replaced by F , DA and $A(\varphi(t))$, respectively. Analogously, we also obtain

$$\psi(t) = F_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) - r(t),$$

$$\langle w, r(t) \rangle \geq 0, \quad w \in K_{A(\varphi(t), t)}(\varphi'(t)),$$

$$\varphi(t) \in DA(t), \quad \varphi'(t) \in A(\varphi(t), t); \quad t \in R, \tag{2.12}$$

for an internal constitutive relation. If *TM*-constraints in constitutive relations (2.11) - (2.14) are nonreactive then we obtain $\psi(t) = F_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))$ or $\psi(t) = F(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))$ for the external or internal *TM*-constrained constitutive relation, respectively.

3. The method of constraints

The principle of constraints postulated in Sec. 2 makes it possible to formulate an approach leading from the known constitutive relation $\varrho \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$, to a new relation $\varrho_B \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$, where $B: M \times R \ni (m, t) \rightarrow B(m, t) \subset TM$ is a certain *TM*-constraint multifunction. The general idea of this approach is based, roughly speaking, on the imposing *TM*-constraint \mathcal{C}_B on the relation ϱ . The approach outlined below will be referred to as the method of constraints and can be treated as a certain generalization of the method of internal constraints, [3].

We start from the known *TM*-constrained constitutive relation ϱ which will be given by

$$\varphi \in Mr\varrho(\varphi), \tag{3.1}$$

with $\text{dom } \varrho = \Phi_A(R, M)$ and where $A: M \times R \ni (m, t) \rightarrow A(m, t) \subset TM$ is the known *TM*-constraint multifunction. Putting

$$\mathcal{C}_A(t) = \bigcup_{m \in M} A(m, t), \quad t \in R,$$

we obtain *TM*-constraint $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$.

Now assume that there is known the *TM*-constraint multifunction $B: M \times R \ni (m, t) \rightarrow B(m, t) \subset TM$. This multifunction, for every $t \in R$, determines the non-empty subset \mathcal{C}_B of *TM*:

$$\mathcal{C}_B(t) = \bigcup_{m \in M} B(m, t), \quad t \in R.$$

Let us also assume that the conditions

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_A(t) \cap \mathcal{C}_B(t) &\neq \emptyset, \\ \mathcal{C}_A(t) \cap \mathcal{C}_B(t) &\text{ is closed in } \mathcal{C}_A(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

hold for every $t \in R$, and $\mathcal{C}_A(t) \cap \mathcal{C}_B(t) \subset \subset \mathcal{C}_A(t)$ for some $t \in R$. Define the relation $\varrho|_B \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$, putting

$$(\varphi, \psi) \in \varrho|_B \Leftrightarrow [(\varphi, \psi) \in \varrho] \wedge [\varphi \in \Phi_B(R, M)]. \quad (3.3)$$

Relation $\varrho|_B$ is not empty and may be not TM -constrained constitutive relation since it may not satisfy the principle of constraints.

Taking into account Eq. (3.3) we shall define the new relation $\varrho_B \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$ by means of

$$(\varphi, \psi) \in \varrho_B \Leftrightarrow (\exists r \in R_B(\varphi)) [(\varphi, \psi \pm r) \in \varrho|_B], \quad (3.4)$$

where we use the sign „+” if ϱ is the internal relation and the sign „-” if ϱ is the external relation. Introducing the multioperator

$$Mr\varrho|_B(\varphi) := \{\psi \in \Psi(R, T^*M) | (\varphi, \psi) \in \varrho|_B\},$$

we obtain from Eq. (3.4) that

$$\psi \pm r \in Mr\varrho|_B(\varphi) \quad \text{for some } r \in R_B(\varphi)$$

with the same meaning of sign as in Eq. (3.4).

Thus we conclude that $(\varphi, \psi) \in \varrho_B$ if and only if

$$\psi \in Mr\varrho|_B(\varphi) \pm R_B(\varphi), \quad (3.5)$$

where now the sign „+” (the sign „-”) is valid if ϱ is the external (the internal) constitutive relation. By virtue of Eqs. (2.7), (3.2) ÷ (3.5) we can formulate now the following

Conclusion. Relation ϱ_B , obtained from TM -constrained constitutive relation ϱ by means of Eqs. (3.3), (3.4), is TM -constrained (constitutive) relation with reacting TM -constraint $\mathcal{C} = \mathcal{C}_B$ ⁶⁾.

The procedure leading from TM -constrained constitutive relation $\varrho \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$ to TM -constrained constitutive relation $\varrho_B \subset \Phi(R, M) \times \Psi(R, T^*M)$ will be called the method of constraints. Roughly speaking, the relation ϱ_B has been obtained by imposing TM -constraints \mathcal{C}_B on the relation ϱ .

Now taking into account Eqs. (2.9) and applying to Eq. (3.5) the procedure analogous to that leading from Eq. (2.7) to Eqs. (2.9), we obtain

$$\begin{aligned} \psi(t) &\in E_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))|_B + K_{A(\varphi(t), t)}^*(\varphi'(t)) + K_{B(\varphi(t), t)}^*(\varphi'(t)), \\ \varphi(t) &\in DA(t) \cap DB(t), \quad \varphi'(t) \in A(\varphi(t), t) \cap B(\varphi(t), t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

for $t \in R$. Eqs. (3.6) represent an external TM -constrained constitutive relation ϱ_B ; here multioperator $E_t(\cdot)|_B$ is obtained from $E_t(\cdot)$ by restricting its domain only to such

⁶⁾ We can only assume that ϱ_B is the constitutive relation if ϱ is such a relation. In fact ϱ_B satisfies only sufficient conditions of being constitutive relation, formulated in Sec. 2.

$\varphi \in \Phi(R, M)$ which satisfy Eqs. (3.6)_{2,3}. Analogously, taking into account Eqs. (2.10), (3.5) we arrive at

$$\begin{aligned} \psi(t) &\in E(\varphi^{(t)}, \varphi'(t))|_B - K_{A(\varphi(t), t)}^*(\varphi'(t)) - K_{B(\varphi(t), t)}^*(\varphi'(t)), \\ \varphi(t) &\in DA \cap DB, \quad \varphi'(t) \in A(\varphi(t)) \cap B(\varphi(t)), \end{aligned} \tag{3.7}$$

for $t \in R$. Eqs. (3.7) represent an internal *TM*-constrained constitutive relation ϱ_B .

Summing up, we conclude that the method of constraints leads from constitutive relations (2.9) and (2.10) to constitutive relations (3.6) and (3.7), respectively. Let us also observe, that to *TM*-constrained relation ϱ_B are assigned *TM*-constraints $\mathcal{C}_{A \cap B}$, given by $\mathcal{C}_{A \cap B}(t) \equiv \mathcal{C}_A(t) \cap \mathcal{C}_B(t)$, $t \in R$, where $A \cap B$ stands here for *TM*-constraint multifunction defined by

$$(A \cap B)(m, t) \equiv A(m, t) \cap B(m, t), \quad (m, t) \in M \times R.$$

The foregoing multifunction also enables to rewrite Eqs. (3.6)₁, (3.7)₁ to more compact form corresponding to that of Eqs. (2.9)₁, (2.10)₁, respectively.

4. Special cases of constraints

So far we have analysed *TM*-constraints \mathcal{C} in which the subsets $\mathcal{C}(t)$ of *TM* were restricted exclusively by condition (1.4). In this Section we are to define and to discuss more special cases of constraints which are often encountered in different problems of mechanics.

To begin with we shall introduce the important concept of what are called holonomic constraints. Roughly speaking, by holonomic *TM*-constraint we shall mean the constraint \mathcal{C} in which for every $t \in R$ all subsets $A(m, t) = \mathcal{C}(t) \cap T_m M$ are uniquely defined by means of a certain non-empty subset $H(t)$ of M , $t \in R$. To be more exact, let us assume that there is known the multifunction

$$H: R \ni t \rightarrow H(t) \subset M \tag{4.1}$$

and define for every $t \in R$, $m \in M$, the subsets $F_H(m, t)$ of $C^1(R, M)$, given by

$$\begin{aligned} F_H(m, t) &:= \{f \in C^1(R, M) | f(t) = m, \quad f(t + \lambda) \in H(t + \lambda) \\ &\text{for } \lambda \in [0, \varepsilon) \text{ and some } \varepsilon > 0\}. \end{aligned}$$

For every $m \in M \setminus H$ there is $F_H(m, t) \neq \phi$, $t \in R$.

Definition 4. *TM*-constraint $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$ will be called holonomic if and only if constraint multifunction $A(\cdot)$ is defined by

$$A(m, t) := \{v \in T_m M | v = f'(t) \text{ for some } f \in F_H(m, t)\}, \tag{4.2}$$

where $H: R \ni t \rightarrow H(t) \subset M$ is a multifunction satisfying the condition

$$(\forall t \in R) (\forall m \in H(t)) [F_H(m, t) \neq \phi]. \tag{4.3}$$

TM-constraint \mathcal{C} will be called scleronomic if and only if $\mathcal{C}(t)$ is constant for every $t \in R$; otherwise they will be called rheonomic. *TM*-constraint will be called holonomic — scleronomic if it is both holonomic and scleronomic.

Conclusion. Holonomic — scleronomic *TM*-constraint is uniquely determined by an arbitrary non-empty subset H of M .

Proposition 1. The holonomic-scleronomic TM -constraint multifunction is given by

$$A(m, t) = A(m) = T_H(m), \quad t \in R, \quad m \in M, \quad (4.4)$$

where H is an arbitrary non-empty subset of M and $T_H(m)$ is a cone of all directions tangent to H at m (empty if $m \in M \setminus H$):

$$T_H(m) := \{v \in T_m M \mid v = g'(0), \quad m = g(0), \quad g(\lambda) \in H \\ \text{for every } \lambda \in [0, \varepsilon], \varepsilon > 0, \quad \text{and some } g \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon, \varepsilon), M)\}.$$

Eq. (4.4) can be obtained from Eq. (4.2) and from a definition of a set $F_H(m, t)$, taking into account that $H(t) = H$ for every $t \in R$. It must be emphasized that in general no regularity of any kind has to be imposed on the non-empty subset H of M , which uniquely determines holonomic-scleronomic constraint.

Corollary 1. If H is a differentiable submanifold of M determining holonomic-scleronomic constraint \mathcal{C} then $\mathcal{C} = TH$ and $\tau_H^{-1}(\tau_H \mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

From now on we are to deal exclusively with holonomic-scleronomic TM -constraints.

Proposition 2. If for some $m \in H$ the cone $A(m) = T_H(m)$ is convex in $T_m M$, then the reaction cones $K_{A(m)}^*(v)$, $v \in A(m) = T_H(m)$, are determined by

$$K_{A(m)}^*(v) := \{v^* \in T_m^* M \mid \langle u, v^* \rangle \geq \langle v, v^* \rangle \quad \text{for every } u \in T_H(m)\}. \quad (4.5)$$

In order to prove the foregoing proposition let us observe that for every $v \in A(m) = T_H(m)$, where $A(m)$ is convex in $T_m M$, we obtain (cf. Eq. (1.9)):

$$K_{A(m)}(v) = \text{con}[T_H(m) - v],$$

where we have used the known denotation

$$\text{con}\Omega := \{x \in V \mid x = \lambda \bar{x}, \bar{x} \in \Omega, \lambda \geq 0\},$$

for an arbitrary subset Ω in a vector space V . Now taking into account Eq. (1.10) we also conclude that $v^* \in K_{A(m)}^*(v)$ if and only if

$$\langle w, v^* \rangle \geq 0 \quad \text{for every } w \in \text{con}[T_H(m) - v],$$

i.e., $K_{A(m)}^*(v) = \text{con}^*[T_H(m) - v]$, $A(m) = T_H(m)$, where $\text{con}^*\Omega$ stands for a closed cone conjugate to $\text{con}\Omega$. The ultimate condition leads directly to Eq. (4.5).

Corollary 2. Under the assumptions of Proposition 2 the following equality

$$\langle v, v^* \rangle = 0, \quad v^* \in K_{A(m)}^*(v) \quad (4.6)$$

holds for every $v \in A(m)$. Hence

$$v^* \in K_{A(m)}^*(v) \quad \text{if } \langle v, v^* \rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle u, v^* \rangle \geq 0 \quad \text{for every } u \in A(m), \quad (4.7)$$

holds for every $v \in A(m) = T_H(m)$.

Equality (4.6) can be obtained from Eq. (4.5) by substituting $u = kv$ with $k \geq 0$. Then $(k-1)\langle v, v^* \rangle \geq 0$ for every $k \geq 0$ and hence we arrive at Eq. (4.6).

Now assume that M is (finite dimensional) linear space and H is convex in M . Then

$$A(m) = T_H(m) = \overline{\text{con}}(H - m)$$

for every $m \in H$, where $\overline{\text{con}}(\cdot)$ stands for a closure of $\text{con}(\cdot)$ in M . Taking into account Eq. (4.7) we arrive at the following final

Conclusion. If a non-empty set H is convex in a finite dimensional linear space M and H determines holonomic-scleronomic TM -constraints, then

$$\begin{aligned} \langle u, v^* \rangle &\geq \langle m, v^* \rangle \quad \text{for every } u \in H, \\ \langle v, v^* \rangle &= 0, \\ v &\in \overline{\text{con}}(H-m), \quad m \in H, \end{aligned} \tag{4.8}$$

if and only if $v^* \in K_{A(m)}^*(v)$, where $A(m) = \overline{\text{con}}(H-m)$.

From now on we shall confine ourselves to holonomic-scleronomic TM -constraints in which M is a finite dimensional linear space, $M = R^n$, and TM -constraints are determined by a non-empty convex subset H of M . Let us take into account constitutive relations given by Eqs. (2.11) or (2.12). Combining together Eqs. (2.11) and (4.8) we arrive at the following TM -constrained constitutive relations

$$\begin{aligned} \psi(t) &= F_t(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) \pm r(t), \\ \langle u, r(t) \rangle &\geq \langle \varphi(t), r(t) \rangle \quad \text{for every } u \in H, \\ \langle \varphi'(t), r(t) \rangle &= 0, \\ \varphi(t) &\in H, \end{aligned}$$

for $t \in R$. Let us confine ourselves to the internal constitutive relations only, putting $F_t = F$ for every $t \in R$ and taking into account the sign „-“ in the first from the foregoing relations. Let us also take into account Remark 1 of Sec. 2 and Remark 2 of Sec. 1, assuming that $F = F^\delta$, $\delta \in \Delta$ and $H = H_\xi$, $\xi \in \Xi$ (implicit constraints). Then we finally arrive at the following special form of TM -constrained constitutive relations⁽⁷⁾

$$\begin{aligned} \psi(t) &= F^\delta(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) - r(t), \quad \delta \in \Delta, \\ \langle u, r(t) \rangle &\geq \langle \varphi(t), r(t) \rangle \quad \text{for every } u \in H_\xi, \\ \langle \varphi'(t), r(t) \rangle &= 0, \\ \varphi(t) &\in H_\xi, \quad \xi \in \Xi, \end{aligned} \tag{4.9}$$

which has to hold for $t \in R$ and where Δ, Ξ are the known sets. If Δ, Ξ are singletons then the indices δ, ξ , respectively, drop out from Eqs. (4.9).

TM -constrained internal constitutive relations (4.9) will be the basis in Sec. 5 for analysis of different special cases of internal constraints in different ideal materials.

5. Materials with constraints

Formulas (4.9) represent the abstract form of TM -constrained internal constitutive relations (with holonomic-scleronomic implicit constraints in which H_ξ is convex in $M = R^n$ for every $\xi \in \Xi$), i.e., the form which is independent of any special class of ideal materials. Interpretations of Eqs. (4.9) in mechanics (as well as interpretations of any other relation of Secs. 1 - 4) will be realized by assigning the physical meaning to elements of manifolds M and T^*M and to elements of sets Δ and Ξ (provided that they are not singletons). At the same time we shall specify the families of mappings F^δ and sets H_ξ .

⁷⁾ If $s \rightarrow \varphi(t+s)$ is differentiable in $(-\varepsilon, \varepsilon)$, then Eqs. (4.9)₂ imply Eq. (4.9)₃. Mind, that Eqs. (4.9) hold only if H_ξ is convex in $M = R^n$ for every $\xi \in \Xi$.

Let $M = R^{\delta}$ be interpreted as a space of all (symmetric) second Piola-Kirchhoff stress tensors and let every $T_m^* M = R^{\delta}$ be a space of all (symmetric) strain-rate tensors. Moreover, assume that Δ, Ξ are singletons (i.e. $F^{\delta} = F, H_{\xi} = H$) and

$$F(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) = L(\varphi(t))\varphi'(t), \quad (5.1)$$

where $L(m): R^{\delta} \rightarrow R^{\delta}$ is the linear continuous operator (known for every $m \in M$). Introducing the denotations

$$\dot{e}(t) \equiv \psi(t), \quad \sigma(t) \equiv \varphi(t), \quad \dot{\sigma}(t) \equiv \varphi'(t), \quad \varepsilon(t) \equiv -r(t),$$

we shall rewrite Eqs. (4.9) to the form

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= L(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) + \varepsilon(t), \\ \langle \tau, \varepsilon(t) \rangle &\leq \langle \sigma(t), \varepsilon(t) \rangle \quad \text{for every } \tau \in H, \\ \langle \dot{\sigma}(t), \varepsilon(t) \rangle &= 0, \\ \sigma(t) &\in H. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Under the forementioned interpretation it can be observed that Eqs. (5.2) may represent constitutive relations of an arbitrary elastic-ideal plastic material provided that ∂H is the loading surface (yield surface) and $L(\sigma) = \partial^2 \gamma(\sigma) / \partial \sigma^2$, $\sigma \in R^{\delta}$, where $\gamma(\cdot)$ is a potential characterizing a hyperelastic material. In this case Eq. (5.2)₁ are the Prandtl-Reuss equations with $\varepsilon(t)$ as a plastic and $L(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)$ as an elastic parts of the strain rate tensor, respectively. At the same time formula (5.2)₄ includes the yield condition and formula (5.2)₂ represents Hill's principle of maximum plastic work⁸⁾. Let us also observe that Eqs. (5.2) can be obtained from the constitutive functional relation

$$\dot{e}(t) = L(\sigma(t))\dot{\sigma}(t), \quad (5.3)$$

by the method of constraints. It can be seen that Eq. (5.3) is the constitutive relation of a certain rate-type material. Thus we shall arrive at the conclusion that the convex explicit constraints imposed on the constitutive relations of rate-type materials lead to the constitutive relations of ideal plastic materials. The character of yielding is uniquely determined by the subset H , i.e., it is due entirely to the effect of constraints.

Now let $M = R^{\delta}$ as above, but M be interpreted as a space of all (symmetric) strain tensors of the linear elasticity. Let every $T_m M = R^{\delta}$ be a space of all (symmetric) stress tensors. Let us also assume that

$$F(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) = L\varphi(t), \quad (5.3)$$

where $L: R^{\delta} \rightarrow R^{\delta}$ is the tensor of elastic moduli of the linear elasticity. Introducing the denotations

$$\sigma(t) \equiv \psi(t), \quad e(t) \equiv \varphi(t), \quad \tau(t) \equiv -r(t),$$

we rewrite Eqs. (4.9) (in the sequel we shall neglect Eq. (4.9)₃, cf. Footnotes 7) and 8) to the form

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= Le(t) + \tau(t), \\ \langle \varepsilon, \tau(t) \rangle &\leq \langle e(t), \tau(t) \rangle \quad \text{for every } \varepsilon \in H, \\ e(t) &\in H. \end{aligned} \quad (5.4)$$

⁸⁾ This principle implies also Eq. (5.2)₃, provided that $t \rightarrow \sigma(t)$ is differentiable, cf. Footnote (7).

If $\text{int} H \neq \emptyset$ and $0 \in \text{int} H$, then Eqs. (5.4) can be interpreted as the constitutive relations of Prager's locking materials. Eqs. (5.4) can be also obtained from the linear stress-strain relation

$$\sigma(t) = L e(t) \tag{5.5}$$

by the method of constraints. Hence it follows that the constitutive relations of ideal locking materials can be obtained by imposing suitable constraints on stress-strain relations (5.5) of the linear elasticity theory.

Let $M = R^d$ be interpreted now as the space of all (symmetric) strain rate tensors and $T_m^* M = R^d$ be a space of all (symmetric) stress tensors. Let us also assume that \mathcal{E} is a non empty subset in a space Δ of all right Cauchy-Green deformation tensors (strain tensors) Introducing the denotation

$$\sigma(t) \equiv \varphi(t), \quad \dot{e}(t) \equiv \varphi(t), \quad e(t) \equiv \delta, \quad \tau(t) \equiv -r(t),$$

and assuming that

$$F(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) = F^d(\varphi^{(t)}, \varphi'(t)) = E(\delta), \tag{5.6}$$

where $E: R^d \rightarrow R^d$ is the known function ⁹⁾, we obtain from Eqs. (4.9)

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E(e(t)) + \tau(t), \\ \langle \varepsilon, \tau(t) \rangle &\leq \langle \dot{e}(t), \tau(t) \rangle \quad \text{for every } \varepsilon \in H_{e(t)}, \\ \dot{e}(t) &\in H_{e(t)}, \quad e(t) \in \mathcal{E}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

The foregoing constitutive relations can be treated as obtained by the method of constraints from the constitutive relations

$$\sigma(t) = E(e(t)), \quad e(t) \in \Delta, \tag{5.8}$$

which can be postulated as stress relations of the non-linear elasticity; here Δ is the set of all symmetric strain tensors in the space R^d . A set \mathcal{E} in Eqs. (5.7) can be not convex but has to be closed in Δ (but not in R^d)¹⁰⁾. We shall also assume that

$$H_{e(t)} = T_{\mathcal{E}}(e(t)), \quad e(t) \in \mathcal{E}, \tag{5.9}$$

where $T_{\mathcal{E}}(e)$ is a convex cone of all directions tangent to \mathcal{E} at e , $e \in \mathcal{E}$ (cf. Sec. 1). Hence we see that Eqs. (5.7), (5.9) represent the constitutive relations of elastic materials with an arbitrary holonomic (scleronomic) internal constraints for the strain measures $e(t)$. Mind, that the form of these implicit constraints (cf. Remark 2 of Sec. 1) is rather general since no regularity conditions are imposed on the set \mathcal{E} apart from those that $T_{\mathcal{E}}(e)$ are convex for every $e \in \mathcal{E}$ and that \mathcal{E} is closed in the set Δ of all strain tensors.

If \mathcal{E} is a differentiable manifold embedded in R^d then, by virtue of Eq. (5.8), every $H_{e(t)}$ is a linear subspace of R^d . In this case we obtain

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E(e(t)) + \tau(t), \\ \langle \varepsilon, \tau(t) \rangle &= 0 \quad \text{for every } \varepsilon \in T_{e(t)}\mathcal{E}, \\ e(t) &\in \mathcal{E}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

⁹⁾ We have assumed here that $E(\cdot)$ is independent of the history $\varphi^{(t)}$ and the velocity $\varphi'(t)$.

¹⁰⁾ cf. the basic assumptions of the method of constraints in Sec. 3.

where

$$T_{e(t)}\mathcal{E} = T_{\mathcal{E}}(e(t))$$

is the space tangent to \mathcal{E} at $e(t)$, $e(t) \in \mathcal{E}$. Thus we have obtained the case of smooth bilateral internal constraints well known in the present literature.

Returning to the general case of holonomic constraints imposed on the stress relation of nonlinear elasticity (5.8), let us observe that the „maximum” principle (5.7)₂ can be represented by the formula (cf. Sec. 4)

$$\langle \varepsilon, \tau(t) \rangle \leq 0 \quad \text{for every } \varepsilon \in \text{con}[T_{\mathcal{E}}(e(t)) - \dot{e}(t)], \quad (5.11)$$

and hence

$$\begin{aligned} E(e(t)) - \sigma(t) &\in \text{con}^*[T_{\mathcal{E}}(e(t)) - \dot{e}(t)], \\ e(t) &\in \mathcal{E}, \quad \dot{e}(t) \in T_{\mathcal{E}}(e(t)), \end{aligned} \quad (5.12)$$

where $\text{con}^*[\cdot]$ is a cone conjugate to the cone $\text{con}[\cdot]$. Eqs. (5.12) constitute an alternative form of Eqs. (5.7). From Eq. (5.12)₁ it follows that the elastic materials by imposing the constraints for deformations, in the general case, have lost their elastic properties; this is due to the fact that the „reaction” part $\tau(t)$ of the stress tensor can depend not only on the strain tensor $e(t)$ but also on the strain rate tensor $\dot{e}(t)$. Such situation does not take place for the smooth bilateral constraints since the strain rate tensor $\dot{e}(t)$ does not enter Eqs. (5.10).

Eqs. (5.6), (5.7), (5.10), (5.12) can be easily generalized. To this aid the assumption that Δ is a set of all strain tensors has to be replaced by the assumption that Δ is a set of all strain histories. In this case instead of Eqs. (5.7), (5.9) we obtain

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E(e^{(t)}) + \tau(t), \\ \langle \varepsilon, \tau(t) \rangle &\leq \langle \dot{e}(t), \tau(t) \rangle \quad \text{for every } \varepsilon \in T_{\mathcal{E}}(e(t)), \\ e(t) &\in \mathcal{E}, \quad \dot{e}(t) \in T_{\mathcal{E}}(e(t)). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Hence we conclude that Eqs. (5.13) can be treated as a result of imposing constraints (determined by the TM -constraint multifunction $T_{\mathcal{E}}(e)$, $e \in \mathcal{E}$) on the constitutive relation of simple materials

$$\sigma(t) = E(e^{(t)}), \quad e^{(t)} \in \Delta, \quad t \in R. \quad (5.14)$$

The alternative form of Eqs. (5.13) will be obtained by substituting response functional $E(e^{(t)})$ in Eqs. (5.12) on the place of response function $E(e(t))$ ¹¹. Moreover, if \mathcal{E} is a differentiable manifold we obtain the generalization of Eqs. (5.10) to the form

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E(e^{(t)}) + \tau(t), \\ \langle \varepsilon, \tau(t) \rangle &= 0 \quad \text{for every } \varepsilon \in T_{e(t)}\mathcal{E}, \\ e(t) &\in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

which represents the well known constitutive relations of simple materials with smooth internal constraints.

To conclude the Section let us discuss the case in which $M = R^{\sigma}$ be interpreted as a space

¹¹ Symbol $E(\cdot)$ in Eqs. (5.13) stands for a response functional and in Eqs. (5.12) for a response function.

of all (symmetric) stress rate tensors. and $T^*M = R^d$ as the space of all (symetric) strain rate tensors. Moreover, let \mathcal{E} be the closed (but in general not convex) subset of R^d . Then from Eqs. (4.9), under notation

$$\dot{\varepsilon}(t) \equiv \psi(t), \quad \dot{\sigma}(t) \equiv \varphi(t), \quad \varepsilon(t) \equiv -r(t),$$

we obtain¹²⁾

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= L(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) + \varepsilon(t), \\ \langle \tau, \varepsilon(t) \rangle &\leq \langle \dot{\sigma}(t), \varepsilon(t) \rangle \quad \text{for every } \tau \in H_{\sigma(t)}, \\ \sigma(t) &\in \mathcal{E}, \quad \dot{\sigma}(t) \in H_{\sigma(t)}. \end{aligned}$$

Taking into account that every $H_{\sigma(t)}$ is a convex cone and putting

$$H_{\sigma(t)} = T_{\mathcal{E}}(\sigma(t)),$$

we arrive finally at the constitutive relations

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= L(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) + \varepsilon(t), \\ \langle \tau, \varepsilon(t) \rangle &\leq \langle \dot{\sigma}(t), \varepsilon(t) \rangle \quad \text{for every } \tau \in T_{\mathcal{E}}(\sigma(t)), \\ \dot{\sigma}(t) &\in T_{\mathcal{E}}(\sigma(t)), \quad \sigma(t) \in \mathcal{E}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

which can be also written down in a form

$$\begin{aligned} E(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) - \dot{\varepsilon}(t) &\in \text{con}^*[T_{\mathcal{E}}(\sigma(t)) - \dot{\sigma}(t)], \\ \sigma(t) &\in \mathcal{E}, \quad \dot{\sigma}(t) \in T_{\mathcal{E}}(\sigma(t)). \end{aligned} \tag{5.16}$$

We deal here with the rate-type materials with the holonomic constraints (\mathcal{E} is closed in R^d but not convex in general) for stresses. Assuming that $\mathcal{E} = H$, where H is convex, we arrive again at Eqs. (5.2). Assuming that \mathcal{E} is a differentiable manifold in R^d , we obtain

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= L(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) + \varepsilon(t), \\ \langle \tau, \varepsilon(t) \rangle &= 0 \quad \text{for every } \tau \in T_{\sigma(t)}\mathcal{E}, \\ \sigma(t) &\in \mathcal{E}, \quad \dot{\sigma}(t) \in T_{\sigma(t)}\mathcal{E}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

where

$$T_{\sigma(t)}\mathcal{E} = T_{\mathcal{E}}(\sigma(t))$$

is a space tangent to \mathcal{E} at $\sigma(t) \in \mathcal{E}$. Thus Eqs. (5.2) and (5.17) constitute two different special cases of the constitutive relations (5.15) of the rate-type materials (of the hyperelastic materials if $L(\sigma) = \partial^2\gamma(\sigma)/\partial\sigma^2$) with holonomic (scleronomic) constraints for stresses.

Conclusions and final remarks.

Summing up we conclude that the abstract form (4.9) of TM -constrained internal constitutive relations (with convex implicit constraints) is an appropriate basis for obtaining constitutive internal relations for a large class of ideal materials. In this way we have obtained the known relations (5.13) for simple materials with internal constraints for deformations, the known relations (5.2) for elastic-ideal plastic materials and relations

¹²⁾ Here $L(\sigma(t))$ has the same meaning as in Eq. (5.3).

(5.4) for ideal locking materials. Thus we have shown that the elastic-ideal plastic materials and ideal locking materials can be treated as the rate type materials with constraints for stresses and as the linear elastic materials with constraints for strains, respectively. We have also derived, using the method of constraints, new classes of ideal materials. They are simple materials with convex implicit constraints, defined by Eqs. (5.13), and rate type materials with convex implicit constraints, defined by Eqs. (5.15) or (5.16). The new classes of ideal materials, which have been obtained by the method of constraints, are also given by Eqs. (5.12) and Eqs. (5.17) (they are the subclasses of materials with internal constraints defined by Eqs. (5.13) and Eqs. (5.15), respectively).

Examples of applications of the general approach to the problem of constraints in constitutive relations of mechanics have been restricted here only to problems of ideal materials with internal constraints. However, it can be observed that the method of constraints is a useful tool of the formation of new constitutive relations of mechanics on the basis of the known constitutive relations. This method can be applied not only to the theory of ideal materials, i.e., to internal constitutive relations, but also to the problems of interactions between a body and its exterior, i.e., to the formation of external constitutive relations. The form of constraints which are described within an approach outlined in the paper is very general; as a matter of fact no restrictions of any kind are imposed on the sets of states¹³⁾ which are admissible by constraints. Due to this fact certain new classes of constitutive internal relations have been obtained. More special classes of materials with internal constraints, obtained by the method of constraints, are discussed in [5]. Some applications of this method to the problems in structural mechanics will be given in forthcoming papers [6, 7].

References

1. J. SŁAWIANOWSKI, *Geometry of the Phase Space* [*Geometria przestrzeni fazowych*, in Polish [PWN, Warszawa 1965].
2. C. TRUESDELL; *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, The Johns Hopkins University, Baltimore 1972.
3. E. VOLTERRA, *Equations of motion for curved elastic bars by the use of the „method of internal constraints”*, Ing. Arch. 23, 402 - 409, (1955).
4. Cz. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Nonlinear Structural Mechanics* [*Nieliniowa mechanika konstrukcji*, in Polish], PWN, Warszawa 1982.
5. Cz. WOŹNIAK, *Materials with generalized constraints*, Arch. Mech., 4/84.
6. S. KONIECZNY, Cz. WOŹNIAK, *Generalized constraints in the plate theory*, Mech. Teor. i Stos., to appear.
7. A. GAŁKA, Cz. WOŹNIAK, *Composite materials with unilateral constraints for deformations and stresses*, Mech. Teor. i Stos., to appear.

¹³⁾ If $R \ni t \rightarrow \varphi(t) \in M$ is a mapping restricted by constraints, then $(\varphi(t), \varphi'(t))$, $\varphi'(t) \in T_{\varphi(t)}M$, is said to be a state at $t \in R$.

Резюме

СВЯЗИ В ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ МЕХАНИКИ

В статье представленный общий подход к понятию связей в определяющих уравнениях механики дискретных сплошных систем. Получено общий вид определяющих уравнений их связями и проведено метод формулирования новых определяющих уравнений при помощи связей. Таким способом получено некоторые новые классы материалов с внутренними связями.

Streszczenie

WIĘZY W PORÓWNIANIACH KONSTITUTYWNYCH MECHANIKI

W pracy przedstawiono ogólne podejście do pojęcia więzów w relacjach mechaniki układów dyskretnych i ośrodków ciągłych. Uzyskano ogólną postać równań konstytutywnych z więzami oraz zaproponowano metodę formułowania nowych relacji konstytutywnych za pomocą nakładania więzów na znane relacje konstytutywne. Na tej drodze otrzymano pewne nowe klasy materiałów idealnych z więzami wewnętrznymi

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1984 roku

ZAMKNIĘTE ROZWIĄZANIE PROBLEMU PROPAGACJI NIESTACJONARNEJ PŁASKIEJ FALI UDERZENIOWEJ W SUCHYM GRUNCIE PIASZCZYSTYM

EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

Wojskowa Akademia Techniczna

1. Wstęp

Problem rozprzestrzeniania się oraz oddziaływania fal uderzeniowych na różnego rodzaju ośrodki i obiekty konstrukcyjne lub ich elementy był przedmiotem badań wielu autorów i posiada bogatą literaturę. Obszerny opis zjawisk wraz z przeglądami piśmiennictwa z tej dyscypliny nauki zamieszczony jest, między innymi, w monografiach [1 - 17] oraz w pracy przeglądowej [18].

Dość szczegółowo przebadane są zagadnienia graniczne dotyczące propagacji oraz oddziaływań stacjonarnych fal uderzeniowych z nieciągłościami kontaktowymi w ośrodkach jedno- i wieloskładnikowych. Rozpatrzono, między innymi, propagację i odbicie fal stacjonarnych od różnego rodzaju przegród [6, 10, 11, 15, 16, 18, 19 - 23], refrakcję tych fal na granicy ośrodków [24 - 30] oraz rozpady dowolnych nieciągłości [31 - 35]. W wymienionych przypadkach uzyskano zamknięte rozwiązania poszczególnych zagadnień granicznych.

Niewiele zamkniętych rozwiązań udało się skonstruować dla fal niestacjonarnych. Przede wszystkim należy tu wymienić samopodobne rozwiązania dla fal koncentrycznych [36 - 38] oraz rozwiązanie dla silnego punktowego wybuchu [39 - 41]. W pracy [42] przedstawiono przybliżoną, analityczną metodę konstrukcji rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych, dotyczących rozprzestrzeniania się i odbicia płaskich fal uderzeniowych w ośrodkach ciągłych. Autorzy tej pracy, mimo wprowadzenia daleko idących uproszczeń (odcinkowa linearyzacja związku fizycznego oraz nieuwzględnienie zmian w czasie i przestrzeni zaburzeń odbitych od frontu fali), uzyskali zamknięte rozwiązanie tylko dla obciążenia nagle przyłożonego i następnie liniowo malejącego w czasie do zera. Podobne rozwiązania dla modelu ze sztywnym odciążeniem uzyskano w pracach [43 i 44]. Z kolei w pracy [45] rozwiązano *explicite* zagadnienie propagacji niestacjonarnej, płaskiej fali uderzeniowej w niejednorodnym ośrodku politropowym, ze stałym lub słabo zmiennym oporem falowym i liniowo sprężystym odciążeniem. Problem formowania się i rozprzestrzeniania niestacjonarnych fal uderzeniowych obciążenia i odciążenia w ośrodku biliniowym rozwiązano w zamkniętej postaci w pracy [46]. Wreszcie w pracy [47] rozwiązano w zamkniętej postaci dość złożone zagadnienie rozprzestrzeniania się fali odciążenia słabej nieciągłości sprężonej z uderzeniową falą odciążenia w przecie sprężysto-plastycznym.

W niniejszej pracy przedstawimy kolejne, zamknięte rozwiązanie problemu propagacji niestacjonarnej płaskiej fali uderzeniowej w suchym gruncie piaszczystym, wygenerowanej nagle przyłożonym i następnie dowolnie malejącym w czasie obciążeniem. Grunt będziemy modelować jednorodnym ośrodkiem dwuskładnikowym, złożonym z powietrza i ziaren kwarcu. Szczegółowy opis modelu ośrodka podamy w następnym rozdziale.

2. Sformułowanie problemu

Zbadamy ruch półprzestrzeni wypełnionej suchym gruntem piaszczystym. Fizyko-mechanicznie właściwości gruntu modelować będziemy następującym równaniem stanu:

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = h(\alpha_1), \quad (2.1)$$

gdzie ϱ_0 jest gęstością gruntu w stanie niezaburzonym, natomiast ϱ oznacza gęstość gruntu w danej chwili. Symbol α_1 oznacza objętościową zawartość powietrza w gruncie niezaburzonym.

Funkcję $h(\alpha_1)$ określimy z modeli G. M. Lachowa [3] i Ch. A. Rachmatulina [48], które w ogólnej postaci można przedstawić wzorem:

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \Psi(p), \quad (2.2)$$

gdzie funkcja $\Psi(p)$ przyjmuje postać:

$$\Psi_L(p) = \alpha_1 \left[\frac{\gamma_1}{\varrho_1 c_1^2} (p - p_0) + 1 \right]^{-\frac{1}{\gamma_1}} + \alpha_3 \left[\frac{\gamma_3}{\varrho_3 c_3^2} (p - p_0) + 1 \right]^{-\frac{1}{\gamma_3}}; \quad (2.3)$$

— dla modelu G. M. Lachowa oraz

$$\Psi_R(p) = \alpha_1 \frac{\kappa p_0 + p}{p_0 + \kappa p} + \alpha_3 \left[\frac{\gamma_3}{\varrho_3 c_3^2} (p - p_0) + 1 \right]^{-\frac{1}{\gamma_3}} \quad (2.4)$$

— dla modelu Ch. A. Rachmatulina.

Ponadto mamy:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}, & \alpha_1 + \alpha_3 &= 1, \\ \varrho_0 &= \alpha_1 \varrho_1 + \alpha_3 \varrho_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie α_i są objętościowymi zawartościami; γ_i — wykładnikami izentrop; ϱ_i — gęstościami właściwymi; c_i — prędkościami propagacji dźwięku w poszczególnych składnikach gruntu przy ciśnieniu atmosferycznym p_0 ; p — aktualne ciśnienie w gruncie.

Komponenty suchego gruntu piaszczystego stanowią powietrze i ziarna kwarcu. W dalszym ciągu rozważań będziemy oznaczać indeksem $i = 1$ parametry powietrza, natomiast indeksem $i = 3$ — parametry kwarcu. Na ogół w obliczeniach liczbowych przyjmuje się

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1,29 \text{ kg/m}^3, & c_1 &= 330 \text{ m/s}, \\ \rho_3 &= 2650 \text{ kg/m}^3, & c_3 &= 4500 \text{ m/s}, \\ \gamma_1 &= 1,4, & \gamma_3 &= 3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Zatem dla gruntu dwuskładnikowego, z ogólnych wyrażeń (2.3) i (2.4), po uwzględnieniu wartości (2.6), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Psi_L(p) &= \alpha_1 [10,285(p-p_0) + 1]^{-0,7143} + \alpha_3 [5,59 \cdot 10^{-5}(p-p_0) + 1]^{-1/3} \\ \Psi_R(p) &= \alpha_1 \frac{6p_0 + p}{p_0 + 6p} + \alpha_3 [5,59 \cdot 10^{-5}(p-p_0) + 1]^{-1/3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dla fal intensywnych ($p > 10$ MPa) wyrażenia (2.7) można uprościć (przy założeniu, że $\alpha_1 \ll 1$) do postaci:

$$\begin{aligned} \Psi_L(p) &= \alpha_3 [5,59 \cdot 10^{-5}(p-p_0) + 1]^{-1/3}, \\ \Psi_R(p) &= \frac{1}{6} \alpha_1 + \Psi_L(p). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Z kolei jeśli $p < 10^3$ MPa, to funkcję (2.8) można zastąpić wyrażeniami:

$$\begin{aligned} \Psi_L &= 1 - \alpha_1 = h_L(\alpha_1), \\ \Psi_R &= 1 - \frac{5}{6} \alpha_1 = h_R(\alpha_1). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Z przytoczonych rozważań wynika, że równania

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \alpha_1 \quad \text{lub} \quad \frac{e_0}{e} = 1 - \frac{5}{6} \alpha_1 \quad (2.10)$$

dobrze opisują właściwości suchego gruntu piaszczystego w zakresie ciśnień (10 - 1000) MPa. Przykładowe charakterystyki dla takiego gruntu opisanego modelem Lachowa przedstawiono na rys. 1.

Wrócimy obecnie do dalszego formułowania problemu. Zgodnie z prawami zachowania masy, pędu i energii na froncie fali uderzeniowej mamy:

$$v_1 = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) d, \quad (2.11)$$

$$p_1 - p_0 = \rho_0 v_1 d, \quad (2.12)$$

$$e_1 - e_0 = \frac{p_1 + p_0}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}\right), \quad (2.13)$$

gdzie symbole d , e , p , ρ i v odpowiednio oznaczają: prędkość propagacji frontu fali, energię właściwą ośrodka, ciśnienie, gęstość i prędkość przemieszczania się ośrodka. Wartość parametrów przed frontem fali oznaczyliśmy indeksem „0”, a na jej froncie indeksem „1”.

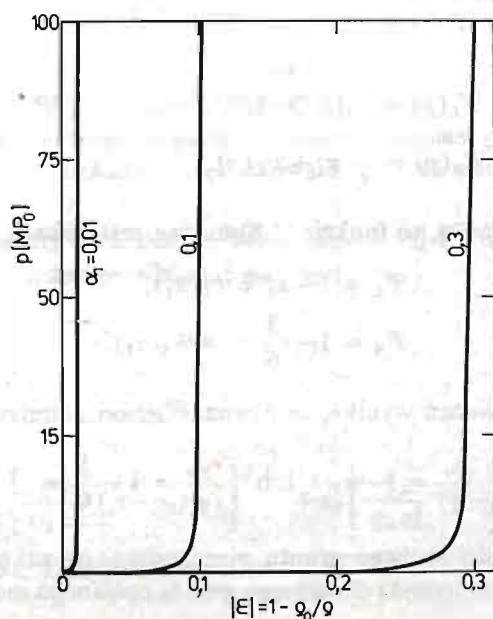
Ponadto na froncie fali spełnione jest również równanie stanu (2.1). W tej sytuacji równanie (2.13) nie sprzęga się z pozostałymi związkami; służy do określenia strat energii na froncie fali uderzeniowej.

Za frontem fali uderzeniowej, ciągłym ruchem gruntu rządzą równania różniczkowe wyrażające lokalne prawa zachowania masy i pędu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho} - 1, \quad (2.14)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.15)$$

uzupełnione równaniem stanu (2.1). x jest współrzędną Lagrange'a, skierowaną w głąb półprzestrzeni, natomiast t oznacza czas; symbol u oznacza przemieszczenie ośrodka.



Rys. 1

Fale generowane są równomiernie rozłożonym na powierzchni półprzestrzeni ciśnieniem, nagle przyłożonym i następnie monotonicznie malejącym do ciśnienia atmosferycznego. Zatem warunek brzegowy na powierzchni półprzestrzeni przyjmuje postać:

$$p(0, t) = g(t), \quad \frac{dg}{dt} = \dot{g}(t) \leq 0 \quad (2.16)$$

Zakładamy, że grunt do chwili $t = 0$ znajduje się w stanie niezaburzonym. Mamy zatem:

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (2.17)$$

Tym samym problem został jednoznacznie określony. Rozwiążemy go w następnym rozdziale.

3. Rozwiązanie problemu

Ze wzorów (2.10) wynika, że uproszczone modele G. M. Lachowa i X. A. Rachmatulina różnią się tylko stałym współczynnikiem. Dlatego w dalszym ciągu rozważań posługiwac się będziemy równaniem stanu w ogólnej postaci:

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = 1 - a, \quad (3.1)$$

przy czym $a = \alpha_1$ dla modelu Lachowa oraz $a = \frac{5}{6} \alpha_1$ dla modelu Rachmatulina.

Z równań (2.14) i (3.1) wynika, że

$$u(x, t) = -ax + f(t), \quad (3.2)$$

gdzie funkcja $f(t)$ oznacza przemieszczenie powierzchni półprzestrzeni.

Z kolei podstawiając wyrażenie (3.2) do równania (2.15) mamy:

$$\varrho_0 \ddot{f}(t) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.3)$$

a po scałkowaniu i wykorzystaniu warunku brzegowego (2.16) otrzymujemy:

$$p(x, t) = -\varrho_0 \ddot{f}(t)x + g(t). \quad (3.4)$$

Przejdziemy obecnie do realizacji warunków zgodności (kinetycznego (2.11) i dynamicznego (2.12)) na froncie fali uderzeniowej. W tym celu równanie frontu fali zapiszemy w postaci:

$$x = \varphi(t) \quad (3.5)$$

lub

$$\frac{dx}{dt} = \dot{\varphi}(t) = d. \quad (3.6)$$

Dalej z wyrażenia (3.2) wynika, że:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v(x, t) = \dot{f}(t). \quad (3.7)$$

Z kolei podstawiając (3.1), (3.6) i (3.7) do warunku (2.11) mamy:

$$v_1(t) = \dot{f}(t) = a\dot{\varphi}(t). \quad (3.8)$$

Z jednorodnych warunków początkowych (2.17) i wyrażenia (3.2) wynika, że

$$f(0) = 0. \quad (3.9)$$

Zatem z (3.8), po scałkowaniu i uwzględnieniu (3.9), otrzymujemy:

$$f(t) = a\varphi(t). \quad (3.10)$$

Następnie, podstawiając wyrażenia (3.4), (3.6), (3.8) i (3.10) do dynamicznego warunku zgodności (2.12), po przekształceniach otrzymujemy:

$$f(t)\ddot{f}(t) + \dot{f}^2(t) = \frac{a}{\varrho_0} [g(t) - p_0] \quad (3.11)$$

lub

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{2} f^2(t) \right] = \frac{a}{\rho_0} [g(t) - p_0].$$

Po scałkowaniu równania (3.11) i uwzględnieniu warunku początkowego (3.9) otrzymujemy zamknięty wzór na funkcję $f(t)$, rozwiązującą badany problem:

$$f(t) = \left\{ 2 \frac{a}{\rho_0} \int_0^t \int_0^{t_1} [g(t_2) - p_0] dt_2 dt_1 \right\}^{1/2}. \quad (3.12)$$

4. Przykład

Określmy parametry stanu i ruchu gruntu piaszczystego wypełniającego półprzestrzeń obciążoną na powierzchni naciśnieniem zmieniającym się w czasie wg następującego przepisu funkcyjnego:

$$\Delta p(t) = g(t) - p_0 = \begin{cases} p_m \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, & \text{jeśli } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{jeśli } t \geq \tau. \end{cases}$$

W celu uproszczenia dalszych obliczeń i unikacji wyników numerycznych wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a_0 \tau}, & \eta &= \frac{t}{\tau}, & u(\xi, \eta) &= \frac{u[x(\xi), t(\eta)]}{a_0 \tau}, \\ V(\xi, \eta) &= \frac{v[x(\xi), t(\eta)]}{a_0}, & F(\eta) &= \frac{f[t(\eta)]}{a_0 \tau}, \\ \dot{F}(\eta) &= \frac{\dot{f}[t(\eta)]}{a_0}, & \ddot{F}(\eta) &= \frac{\ddot{f}[t(\eta)]}{a_0} \tau, & \Phi(\eta) &= \frac{\varphi[t(\eta)]}{a_0 \tau}, \\ P(\xi, \eta) &= \frac{p[x(\xi), t(\eta)]}{p_0}, & P_m &= \frac{p_m}{p_0}, & G(\eta) &= \frac{g[t(\eta)]}{p_0}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie

$$a_0 = \sqrt{p_0 / \rho_0}. \quad (4.3)$$

Ze wzorów (3.2) ÷ (3.12), po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych (4.2), otrzymamy:

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) &= -a\xi + F(\eta), \\ V(\xi, \eta) &= V_e(\eta) = \dot{F}(\eta), \\ P(\xi, \eta) &= -\xi \ddot{F}(\eta) + G(\eta), \\ \Delta P_e(\eta) &= \frac{\dot{F}^2(\eta)}{a}, \\ \Phi(\eta) &= \frac{1}{a} F(\eta). \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 F(\eta) &= \sqrt{\frac{2a}{n+1} P_m \left\{ \frac{1}{n+2} [(1-\eta)^{n+2} - 1] + \eta \right\}}, \\
 \dot{F}(\eta) &= \frac{1}{F(\eta)} \left\{ \frac{a}{n+1} P_m [1 - (1-\eta)^{n+1}] \right\}, \\
 \ddot{F}(\eta) &= \frac{1}{F(\eta)} [aP_m(1-\eta)^n - \dot{F}(\eta)^2], \\
 G(\eta) &= P_m(1-\eta)^n,
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

dla $0 \leq \eta \leq 1$ oraz

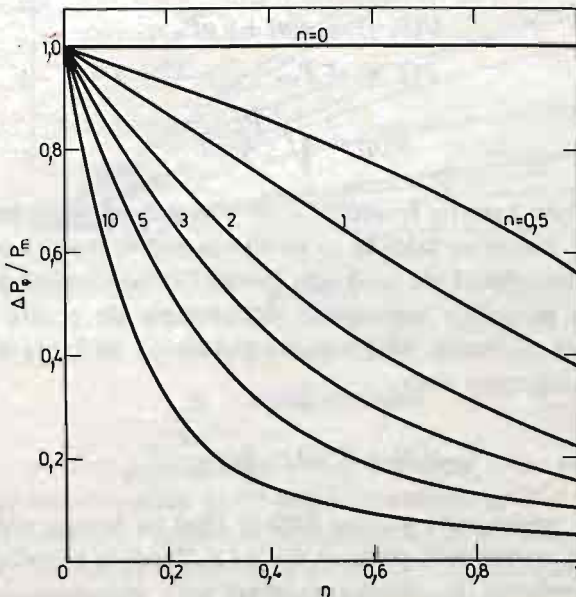
$$\begin{aligned}
 F(\eta) &= \frac{2a}{n+2} P_m = \text{const}, \\
 \dot{F}(\eta) &= \ddot{F}(\eta) = G(\eta) = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

dla $\eta > 1$.

Ciekawym wnioskiem wynikającym z przedstawionych wzorów jest fakt, że nadciśnienie na froncie fali nie zależy od zawartości składnika gazowego. Rzeczywiście, podstawiając wyrażenia (4.5)₁ i (4.5)₂ do wzoru (4.4)₄ otrzymamy:

$$\Delta P = \frac{P_m}{2(n+1)} \frac{[1 - (1-\eta)^{n+1}]^2}{\frac{1}{n+2} [(1-\eta)^{n+2} - 1] + \eta}.
 \tag{4.7}$$

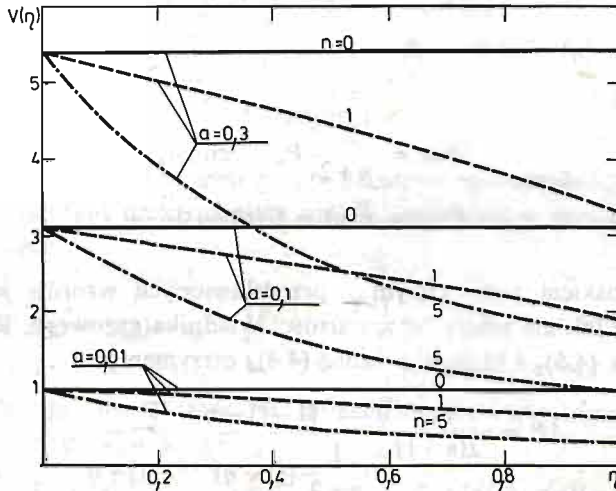
Zmianę wielkości $\Delta P/P_m$ w funkcji η dla różnych wartości parametru n pokazujemy na rys. 2.



Rys. 2

Prędkość przemieszczania się ośrodka rośnie wprost proporcjonalnie do \sqrt{a} (wynika to bezpośrednio ze wzorów (4.4)₂, (4.5)₁ i (4.5)₂). Zmianę wielkości $V(\eta)$ w funkcji η przy różnych zawartościach powietrza i różnych wartościach parametru n pokazujemy na rys. 3. Zwróćmy uwagę na fakt, że dla $n = 0$, co oznacza obciążenie stałe w czasie — „prostokątne”, prędkość zachowuje również stałą wartość równą:

$$V(\eta) = \sqrt{aP_m}. \quad (4.8)$$



Rys. 3

Pozostałe wielkości dla tego przypadku odpowiednio wynoszą:

$$U(\xi, \eta) = -a\xi + \sqrt{aP_m} \eta,$$

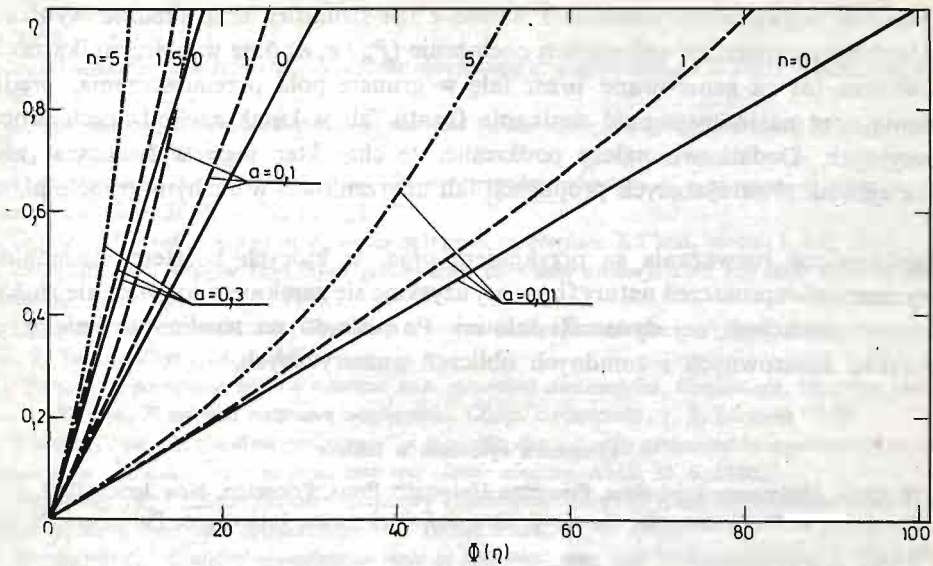
$$P(\xi, \eta) = P_m,$$

$$\Phi(\eta) = \sqrt{\frac{P_m}{a}} \eta. \quad (4.9)$$

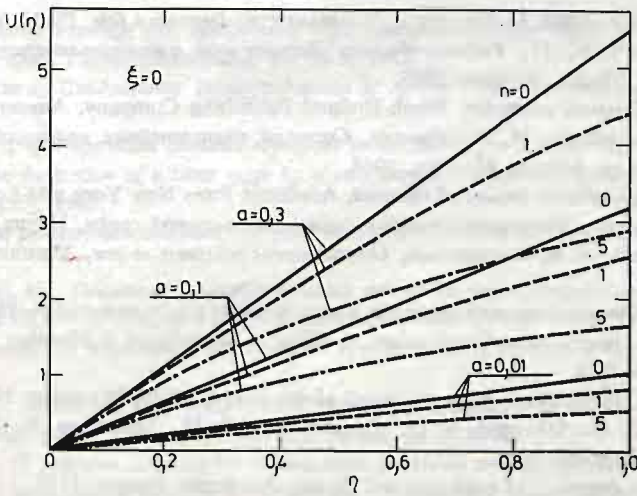
Na rys. 4 wykreślono kształty frontów fal dla różnych wartości współczynnika a i wkładnika n . Zwróćmy uwagę na fakt, że ze wzrostem współczynnika zawartości powietrza dość intensywnie maleje głębokość wnikania frontu fali uderzeniowej w ośrodek. Wzrost zawartości powietrza powoduje intensywne nagrzewanie się gruntu na froncie fali, co powoduje szybkie jego zanikanie. Maksymalną głębokość, na którą wnika front fali uderzeniowej, określa następujący wzór:

$$\Phi_{\max}(\eta) = \Phi(1) = \sqrt{\frac{2P_m}{(n+2)a}}. \quad (4.10)$$

Z kolei na rys. 5 pokazujemy zmianę funkcji $U(n)$ na brzegu półprzestrzeni ($\xi = 0$), przy kilku ustalonych wartościach parametrów a i n . Zgodnie z fizyką badanego zjawiska wzrost zawartości powietrza w ośrodku zwiększa jego przemieszczenie — ośrodek staje się bardziej podatny na odkształcenia.



Rys. 4



Rys. 5

5. Wnioski końcowe

Zaproponowana w pracy uproszczona postać równania stanu ośrodka dwuskładnikowego (3.1), które dobrze modeluje zachowanie się suchego gruntu piaszczystego pod obciążeniem nagle przyłożonym i następnie malejącym do zera z amplitudą zawartą w przedziale ($10 < \Delta p < 1000$ MPa) (patrz wykresy na rys. 1), pozwoliła na skonstruowanie zamkniętego rozwiązania dość złożonego problemu propagacji niestacjonarnej fali uderzeniowej w takim ośrodku. Wyprowadzone wzory mają prostą budowę i nadają się do

praktycznych inżynierskich obliczeń. Ponadto z ich struktury bezpośrednio wynika charakter wpływu parametrów opisujących obciążenie (P_m , τ , n) oraz współczynnika zawartości powietrza (a) na generowane przez falę w gruncie pola przemieszczenia, prędkości i ciśnienia oraz na intensywność zanikania frontu fali wskutek zachodzących procesów dysypacyjnych. Dodatkowo należy podkreślić, że charakter tego wpływu jest zgodny z fizyką zjawisk towarzyszących propagacji fali uderzeniowej w suchym gruncie piaszczystym.

Przedstawione rozważania są przykładem prac, w których kosztem uzasadnionych eksperymentalnie uproszczeń natury fizycznej uzyskuje się zamknięte rozwiązanie złożonych problemów niestacjonarnej dynamiki falowej. Pozwala to na wyeliminowanie w pracy inżynierskiej kosztownych i żmudnych obliczeń numerycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. R. H. COLE, *Underwater explosions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1948.
2. R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic flow and shock waves*, Interscience Publishers, New York 1956.
3. Г. М. Ляхов, *Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах*, Недра 1964.
4. X. A. РАХМАТУЛИН, А. Я. САГОМОНЯН, Н. А. АЛЕКСЕЕВ, *Вопросы динамики грунтов*, МГУ, Москва 1964.
5. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
6. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Наука, Москва 1966.
7. N. CRISTESCU, *Dynamic plasticity*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1967.
8. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, Москва, 1968.
9. R. KINSLOW, *High-velocity impact phenomena*, Academic Press New York and London 1970.
10. К. П. Станюкович, *Неустановившиеся движения сплошной среды*, Наука, Москва 1971.
11. Г. М. Арутюнян, Л. В. Карчевский, *Отраженные ударные волны*, Машиностроение, Москва 1973.
12. Г. М. Ляхов, *Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах*, Недра, Москва 1974.
13. G. V. WHITHAM, *Linear and nonlinear waves*, A Wiley — Interscience Publication, New York, London, Sydney, Toronto 1974.
14. W. K. NOWACKI, *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1974.
15. Ф. А. Баум, Л. П. Орленко, К. П. Станюкович, В. П. Чельшев, Б. И. Шехтер, *Физика взрыва*, Наука, Москва 1975.
16. J. HENRYCH, *The dynamics of explosion and its use*, Academia, Prague, 1979.
17. M. A. MEYERS, L. E. MURR, *Shock waves and high strain-rate phenomena in metals*, New York and London 1981.
18. Л. В. Альтшулер, *Применение ударных волн в физике высоких давлений*, Успехи Физических Наук, 85, вып. 2, 1965.
19. Z. ŁĘGOWSKI, E. WŁODARCZYK, *Regular reflection of an oblique stationary shock wave from an indeformable plane partition in saturated soil*, Proc. Vibr. Probl. 15, 2, 1974.
20. E. WŁODARCZYK, *Shock wave reflection from a plane partition moving in gas*, J. Techn. Phys., 21, 4, 1980.
21. E. WŁODARCZYK, *Reflection of a strong detonation wave from a moving non-deformable partition*, J. Techn. Phys., 21, 4, 1980.
22. E. WŁODARCZYK, *Stationary — shock — wave reflection from a solid partition by deformable damping systems*, J. Techn. Phys., 22, 2, 1981.
23. E. WŁODARCZYK, *Reflection of a stationary shock wave from a rigid partition in a three-component medium*, J. Techn. Phys., 23, 3 - 4, 1982.

24. А. И. ГУБАНОВ, *Отражение и преломление ударных волн на границе двух сред*, Ж.Т.Ф., 29, в. 5, 1959.
25. L. F. HENDERSON, *The refraction of a plane shock wave at a gas interface*, J. Fluid. Mech., vol. 26, p. 3 1966.
26. L. F. HENDERSON, *On expansion waves generated by the refraction of a plane shock at a gas interface*, JFM, v. 30, p. 2, 1967.
27. L. F. HENDERSON, A. K. MACPHERSON, *On the irregular refraction of a plane shock wave at a Mach number interface*, JFM, v. 32, p. 1, 1968.
28. R. G. JAHN, *The refraction of shock waves at a gaseous interface*, J. Fluid, Mech., 1, 457, 1956.
29. E. WŁODARCZYK, *Wpływ fizycznych parametrów ośrodków gazowych na refrakcję płaskiej fali uderzeniowej*, Biul. WAT 25, 5, 1976.
30. Z. ŁĘGOWSKI, E. WŁODARCZYK, *Boundary solutions to regular refraction of plane shock waves in ideal gas*, J. Techn. Phys., 22, 1, 1981.
31. Б. РИМАН, *О распространении плоских волн конечной амплитуды*, Сочинения, Москва 1948.
32. Н. Е. КОЧИН, *К теории разрывов жидкости*, Сбор. сочинений, т. 2, Москва 1948.
33. E. WŁODARCZYK, *On the disintegration of an arbitrary discontinuity generated by a centrally cumulated simple wave finite deformations in an isotropic elastic medium*, AMS, 32, 6, 1980.
34. E. WŁODARCZYK, *Collision between stationary synchronous waves of finite deformations in the isotropic elastic medium, isentropic approximation*, J. Techn. Phys., 22, 2, 1981.
35. E. WŁODARCZYK, *Centered compression-wave in polytropic gas, and its disintegration*, J. Techn. Phys. 22, 3, 1981.
36. Л. Д. ЛАНДАУ, К. П. СТАНОКОВИЧ, *Об изучении детонации конденсированных ВВ*, ДАН, 46, № 9, 1945.
37. G. GUDERLEY, *Starke kugelige und zylindrische Verdichtungstösse in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse*, Luftfahrtforschung, 19, № 9, 1942.
38. Р. И. НИГМАТУЛИН, *Сходящиеся цилиндрические и сферические детонационные волны*, ПММ, в. I, 1967.
39. Л. И. СЕДОВ, *Распространение сильных взрывных волн*, ПММ, т. 9, вып. 2, 1946.
40. J. G. TAYLOR, *The formation of a blast wave by a very intense explosion*, Ministry of Home Security R. C. 210 [115 - 153], 1941.
41. J. G. TAYLOR, *The propagation and decay of blast waves*, British Civilian Defence Research Committee 1944.
42. Г. М. ЛЯХОВ, Н. И. ПОЛЯКОВА, *Приближенный метод расчета ударных волн и их взаимодействий*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 2, 1959.
43. Л. В. ЗВОЛИНСКИЙ, *Об изучении упругой волны при сферическом взрыве в гурнте*, ПММ, 24, I, 1960.
44. S. KALISKI, W. K. NOWACKI, E. WŁODARCZYK, *On a certain closed solution for the shock-wave with rigid unloading*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 15, 5, 1967.
45. E. WŁODARCZYK, *O pewnym zamkniętym rozwiązaniu problemu propagacji płaskiej fali uderzeniowej w niejednorodnym plastycznym ośrodku politropowym z liniowosprężystym odcieżeniem*, MTS, 16, 2, 1978.
46. E. WŁODARCZYK, *Exact solution to the formation and propagation problem of non-stationary shock wave in bilinear media*, J. Techn. Phys., 22, 4, 1981.
47. E. WŁODARCZYK, *Double unloading wave in an elastic-plastic medium*, J. Techn. Phys. 24, 4, 1983
48. Х. А. РАХМАТУЛИН, *О распространении волн в многокомпонентных средах*, ПММ, т. 33, в. II, 1969.

Резюме

ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗПРОСТРАНЕНИЯ

НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СУХОМ ПЕСЧАНОМ ГРУНТЕ

В работе предложен упрощенный вид уравнения состояния двухкомпонентной среды, которое довольно хорошо моделирует поведение сухого песчаного грунта под нагрузкой

внезапно приложенной и затем убывающей к нулю с амплитудой содержащейся в интервале ($10 < \Delta p < 1000$) МПа. Это уравнение дало возможность построить замкнутое решение проблемы распространения нестационарной плоской ударной волны в полупространстве, заполненном сухим песчаным грунтом. Выведенные формулы имеют простое строение и пригодны для практических инженерных расчетов. Кроме этого из их структуры непосредственно вытекает характер влияния параметров, описывающих нагрузку (p_m, τ, n), а также объемного коэффициента содержания воздуха (a), на генерированные волной в грунте поля перемещения, скорости и давления, а также на интенсивность затухания фронта волны вследствие происходящих диссипативных процессов. Дополнительно следует подчеркнуть, что характер этого влияния совпадает с физикой явлений сопутствующих распространению ударной волны в сухом песчаном грунте.

S u m m a r y

CLOSED FORM SOLUTION TO THE PROPAGATION PROBLEM OF A NON-STATIONARY PLANE SHOCK WAVE IN A DRY SANDY SOIL

A simplified form is suggested of the equation of state of a binary medium, this equation modelling fairly well the behaviour of a dry, sandy soil under load suddenly applied and subsequently decreasing to zero with the amplitude contained within the interval of ($10 < \Delta p < 1000$) MPa. This equation enabled the closed-form solution to be constructed to the propagation problem of a non-stationary, plane shock-wave in half-space filled with dry sandy soil. The formulae derived are of a simple structure and lend themselves to practical engineering calculations. Further-more, from their structure directly results the character of the effect of the parameters describing the load (P_m, τ, n), as well as of the volumetric coefficient of air content (a) upon the generated by the wave in the soil fields of displacement, of velocity and of pressure, as well as upon the decay intensity of the wave-front as a result of the dissipation processes. In addition it should be emphasized that the character of this effect is in agreement with the physics of the phenomena that accompany the shock-wave propagation in a dry, sandy soil.

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 grudnia 1983 roku

STATECZNOŚĆ DRGAŃ PARAMETRYCZNYCH WAŁU NAPĘDZAJĄCEGO MECHANIZMY ROZMIESZCZONE RZĘDOWO

STANISŁAW WIŚNIEWSKI (POZNAŃ)

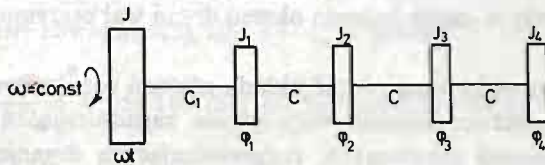
Politechnika Poznańska

W pracy rozpatrzono zagadnienie stateczności drgań parametrycznych wału skręcanego siłami bezwładności napędzanych przez niego czterech jednakowych mechanizmów rozmieszczonych rzędowo. Wyznaczono dwa główne obszary niestateczności drgań.

Aby zachować większą ogólność rozważań, przyjmuje się, że mechanizmy mogą mieć dowolną strukturę. Są jednak płaskie i wykonują ruch ciągły o okresie równym okresowi wału napędowego.

Płaszczyzny ruchu mechanizmów, podobnie jak w silnikach tłokowych, przyjęto prostopadle do osi wału napędowego równomiernie rozłożone, przy czym napęd mechanizmów środkowych, tzn. 2 i 3-go, przyjęto przesunąć w fazie o pół obrotu wału.

Model rozpatrywanego układu przedstawia rys. 1.



Rys. 1

Momenty bezwładności zredukowanych do osi wału mechanizmów jako funkcje ciągłe są przedstawione w postaci skończonych szeregów Fouriera. Zakładając stałą prędkość kątową ω koła zamachowego wału o momencie bezwładności J , możemy zatem napisać:

$$J_1(t) = J_4(t) = \sum_{i=0}^n A_i \cos(i\omega t + \delta_i) \quad (1)$$

$$J_2(t) = J_3(t) = \sum_{i=0}^n A_i (-1)^i \cos(i\omega t + \delta_i).$$

Jest to oczywiste, gdyż kąty skręcania wału spowodowane reakcjami napędzanych mechanizmów są pomijalnie małe w porównaniu z jego kątem obrotu.

Zakładając jednakowe sztywności na skręcanie c odcinków wału zawartych między zredukowanymi masami mechanizmów, równania różniczkowe ruchu drgającego wału, bez udziału sił technologicznych, mają postać:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + \dot{J}_1 \dot{\varphi}_1 + (c_1 + c) \varphi_1 - c \varphi_2 &= -\dot{J}_1 \omega, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + \dot{J}_2 \dot{\varphi}_2 + 2c \varphi_2 - c(\varphi_1 + \varphi_3) &= -\dot{J}_2 \omega, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + \dot{J}_3 \dot{\varphi}_3 + 2c \varphi_3 - c(\varphi_2 + \varphi_4) &= -\dot{J}_3 \omega, \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 + \dot{J}_4 \dot{\varphi}_4 + c \varphi_4 - c \varphi_3 &= -\dot{J}_4 \omega, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, oraz φ_4 są kątami skręcenia wału w miejscach odpowiednich mechanizmów.

Otrzymane równania stanowią sprzężony układ równań różniczkowych liniowych o okresowo zmiennych współczynnikach.

W dalszych rozważaniach zajmiemy się wyznaczeniem obszarów rezonansu drgań parametrycznych, a zatem prędkości kątowych wału, przy których będzie następował nieograniczony wzrost całek równań jednorodnych układu (2).

Ze względów użytecznych dla konstruktorów projektujących tego typu napędy zajmiemy się wyznaczeniem obszarów rezonansowych, jakie mogą zachodzić między określonymi harmonicznymi wymuszenia parametrycznego a określoną postacią drgań swobodnych wału. Z uwagi na liniowy charakter równań różniczkowych ruchu (2) jest to oczywiście możliwe.

Rozpatrując k -tą harmoniczną wymuszenia, wyznaczmy granice rezonansu z najbardziej podatną na to wymuszenie harmoniczną drgań swobodnych wału, to jest $k/2$. Jest to oczywiste, gdyż wtedy w czasie jednego okresu drgań wał otrzymuje dwukrotnie energię z zewnątrz.

Ze względu na skomplikowaną postać układu równań różniczkowych ruchu (2) zostanie zastosowana przybliżona metoda rozwiązania zagadnienia, a mianowicie metoda ortogonalizacji. Rozwiązań granicznych, rozgraniczających drgania rosnące od malejących, poszukiwać będziemy w postaci:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \sum_{\nu=1,3,5} \theta_{1,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_2(t) &= \sum_{\nu=1,3,5} \theta_{2,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_3(t) &= \sum_{\nu=1,3,5} \theta_{3,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_4(t) &= \sum_{\nu=1,3,5} \theta_{4,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t. \end{aligned} \quad (3)$$

W wyniku ortogonalizacji z układem równań różniczkowych w obszarze $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{k\omega}$,

otrzymuje się układ równań jednorodnych liniowych względem amplitud θ_{1v} , θ_{2v} , θ_{3v} , i θ_{4v} .

Z warunku nietrywialności rozwiązań otrzymanych równań algebraicznych, dla $\nu = 1$, otrzymuje się równanie jednej z gałęzi głównego obszaru niestateczności w postaci

$$\begin{vmatrix} -p^2(1+\eta)+4(1+\varepsilon); & -4 & ; & 0 & ; & 0 \\ -4 & ; & -p^2[1+(-1)^k\eta]+8; & -4 & ; & 0 \\ 0 & ; & -4 & ; & -p^2[1+(-1)^k\eta]+8; & -4 \\ 0 & ; & 0 & ; & -4 & ; & -p^2(1+\eta)+4 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

gdzie dla uproszczenia zapisu oznaczono

$$\eta = \frac{A_k}{A_0} \cos \delta_k; \quad \varepsilon = \frac{c_1}{c} \quad \text{oraz} \quad p^2 = \frac{A_0 k^2 \omega^2}{c}.$$

Po rozwiązaniu wyznacznika otrzymuje się równanie

$$\begin{aligned} & p^8(1+0,5\eta)^2[1+0,5(-1)^k\eta]^2 - 4p^6(1+0,5\eta)[1+0,5(-1)^k\eta] \times \\ & \times \{4(1+0,5\eta) + (2+\varepsilon)[1+0,5(-1)^k\eta]\} + 16p^4 \{3(1+0,5\eta)^2 + \\ & + 2(3+2\varepsilon)(1+0,5\eta)[1+0,5(-1)^k\eta] + (1+\varepsilon)[1+0,5(-1)^k\eta]^2\} + \\ & - 64p^2(2+3\varepsilon)\{2+0,5\eta[1+(-1)^k]\} + 256\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Dla $\eta = 0$ równanie (5) staje się równaniem częstości własnych drgań skrętnych wału. Częstość podstawowa dla $\varepsilon = 1$ wynosi

$$\Omega_0 = \sqrt{0,120\,615 \frac{c}{A_0}}. \quad (6)$$

Przedstawiamy dalej równanie (5), dla $\varepsilon = 1$, w postaci

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^8 0,054\,180\,78(1+0,5\eta)^2[1+0,5(-1)^k\eta]^2 + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^6 (1+0,5\eta)[1+0,5(-1)^k\eta] \{1,796\,817\,3(1+0,5\eta) + \\ & + 1,347\,612\,96[1+0,5(-1)^k\eta]\} + \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^4 \{11,172\,847\,28(1+0,5\eta)^2 + \\ & + 37,242\,824\,25(1+0,5\eta)[1+0,5(-1)^k\eta] + 7,448\,564\,86[1+0,5(-1)^k\eta]^2\} + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^2 154,3872\{2+0,5[1+(-1)^k]\eta\} + 256 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie częstość drgań wymuszonych parametrycznie k -tą harmoniczną oznaczono $\Omega = k\omega$.

Otrzymane równanie (7), jest szukaną gałęzią pierwszego głównego obszaru niestateczności.

Drugą gałąź głównego obszaru niestateczności otrzymamy poszukując całek równań różniczkowych jednorodnych układu (2) w postaci:

$$\varphi_1(t) = \theta_{11} \cos \frac{k\omega}{2} t, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \theta_{21} \cos \frac{k\omega}{2} t, \\ \varphi_3(t) &= \theta_{31} \cos \frac{k\omega}{2} t, \\ \varphi_4(t) &= \theta_{41} \cos \frac{k\omega}{2} t.\end{aligned}\tag{8}$$

[cd.]

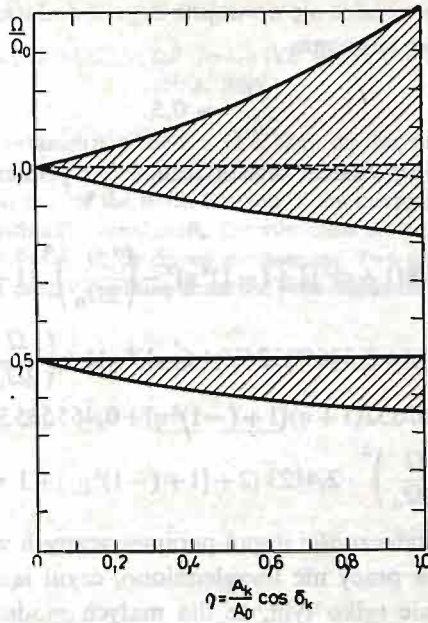
W wyniku analogicznego postępowania krzywa zamykająca główny obszar niestateczności, także dla $\varepsilon = 1$, przybiera postać przedstawioną wzorem (9):

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^8 0,05418078(1-0,5\eta)^2[1-0,5(-1)^k\eta]^2 + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^6 (1-0,5\eta)[1-0,5(-1)^k\eta]\{1,7968173(1-0,5\eta) + \\ & + 1,34761296[1-0,5(-1)^k\eta]\} + \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^4 \{11,17284728(1-0,5\eta)^2 + \\ & + 37,24282425(1-0,5\eta)[1-0,5(-1)^k\eta] + 7,44856486[1-0,5(-1)^k\eta]^2\} + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^2 \cdot 154,3872\{2-0,5[1+(-1)^k\eta]\} + 256 = 0.\end{aligned}\tag{9}$$

W tabeli 1 oraz na rys. 2 przedstawiono wyniki obliczeń dla wałów o parametrze $\varepsilon = 1$. Górny obszar przedstawia główną strefę rezonansową z dowolną harmoniczną wymuszenia parametrycznego — szeroki dla k parzystego, wąski — zaznaczony linią przerywaną dla k nieparzystego. Drugi obszar niestateczności przedstawiono na wykresie tylko dla harmonicznym parzystych. Dla harmonicznym nieparzystych drugi obszar niestateczności praktycznie sprowadza się do prostej $\frac{\Omega}{2\Omega_0} = 0,5$.

Tabela 1

		η	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{\Omega}{2\Omega_0}$	I obszar	$k = 2n$	1	1,054	1,116	1,195	1,291	1,415
				0,952	0,913	0,877	0,845	0,816
		$k = 2n+1$	1	1,009	1,005	1,002	1,001	0,999
				0,998	0,995	0,992	0,979	0,971
	II obszar	$k = 2n$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
				0,456	0,422	0,395	0,372	0,353
$k = 2n+1$		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	
			0,5	0,5	0,498	0,495	0,491	



Rys. 2

Drugi obszar niestateczności drgań, wymuszonych także k -tą harmoniczną, otrzymano dla drgań swobodnych o dwukrotnie mniejszym niż poprzednio okresie, a mianowicie:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{1,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t; & \varphi_2(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{2,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_3(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{3,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t; & \varphi_4(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{4,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \end{aligned} \tag{10}$$

oraz

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{1,\nu} \cos \frac{\nu k \omega}{2} t; & \varphi_2(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{2,\nu} \cos \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_3(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{3,\nu} \cos \frac{\nu k \omega}{2} t; & \varphi_4(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{4,\nu} \cos \frac{\nu k \omega}{2} t. \end{aligned} \tag{11}$$

W wyniku analogicznego postępowania dla funkcji (10) otrzymuje się równanie o postaci (dla $\varepsilon = 1$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^8 - 14,508975 \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^6 + 64,441944 \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^4 - 89,046338 \times \\ \times \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^2 + 18,45673 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Jest to równanie częstości drgań skrętnych wału. Zatem jedna z krzywych granicznych

poszukiwanego obszaru sprowadza się do najniższego z dodatnich pierwiastków równania (12), a zatem do prostej o równaniu

$$\frac{\Omega}{2\Omega_0} = 0,5. \quad (13)$$

Zamykająca krzywa drugi obszar niestateczności, wyznaczona dla funkcji (11), ma natomiast postać (dla $\varepsilon = 1$):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^8 0,05418078(1+\eta)^2 [1+(-1)^k \eta]^2 - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^6 (1+\eta) [1+(-1)^k \eta] \times \\ & \times \{0,44920432(1+\eta) + 0,33690324 [1+(-1)^k \eta]\} + \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^4 \{0,69830295 \times \\ & \times (1+\eta)^2 + 2,32767652(1+\eta) [1+(-1)^k \eta] + 0,4655353 [1+(-1)^k \eta]^2\} + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^2 \cdot 2,4123 \{2 + [1+(-1)^k \eta]\} + 1 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Dalszych obszarów niestateczności drgań parametrycznych wału nie wyznaczono, gdyż dyssypacja energii, której w pracy nie uwzględniono, czyni je niegroźnymi.

Jest to spowodowane nie tylko tym, że dla małych modulacji są one obcięte przez dyssypację, ale jako wąskie na skutek małej ilości dostarczanej energii z zewnątrz w czasie jednego cyklu drgań i nisko położone, są łatwe do przekroczenia przy stosunkowo małej zmianie prędkości kątowej ω .

Dla wałów rozpatrywanego typu — szczególnie wałów korbowych silników spalinyowych lub sprężarek tłokowych — częstość podstawowa Ω_0 drgań skrętnych, przy zredukowanych masach napędzanych mechanizmów do stałego wyrazu A_0 , jest bardzo wysoka

Zredukowane momenty bezwładności (1) są sumami bardzo szybko zbieżnych szeregów Fouriera. Jeżeli jednak istnieją nie pomijalnie małe amplitudy względne $\frac{A_k}{A_0} \cos \delta_k$ dla wyższych harmonicznym parzystego rzędu, np. dla $k = 6$, to wtedy drugi obszar niestateczności, a właściwie jego dolna krzywa, może realnie ograniczać maksymalną prędkość kątową ω wału.

W obecnych konstrukcjach rozpatrywanego typu obszar stateczności zawarty między drugim i pierwszym (głównym) obszarem niestateczności nie jest wykorzystywany.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА ВЕДУЩЕГО РЯДОВО РАСПОЛОЖЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ

В работе рассмотрено проблему устойчивости параметрических колебаний вала ведущего рядово расположенные механизмы.

Исследовано случаи четырех одинаковых механизмов непрерывного движения с периодом равным периоду оборотов вала, расположенных идентично как в четырехтактном двигателе внутреннего сгорания с плоским коленчатым валом. Параметрические вынужденные колебания осуществляются крутящим моментом происходящим из-за сил инерции ведомых механизмов.

Определено две главные области неустойчивости колебаний и обнаружено опасную роль четных гармоник параметрического вынуждения.

S u m m a r y

PARAMETRIC VIBRATION STABILITY OF A DRIVE SHAFT FOR MECHANISMS SPACED
IN A ROW

A problem of stability of parametric vibrations of a shaft driving the mechanisms spaced in a row is considered. Investigation is limited to the case of four identical mechanisms exhibiting continuous motion with the period equal to that of the shaft. Spacing of the mechanisms is assumed to be the same as in a I.C. fourstroke engine with a flat crankshaft. The vibrations are being forced parametrically by the torques induced by the inertial forces of the driven mechanisms. Two main regions of instability of the vibrations are determined. The danger resulting from the even harmonics of the parametric forcing has been indicated.

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 października 1980 roku

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
1155 EAST 58TH STREET
CHICAGO, ILLINOIS 60637

A report of the work done in the laboratory of the Department of Chemistry during the year 1961-1962. The work was carried out by the following persons: [names listed]

The work was supported by the National Science Foundation, Grant No. [number]. The work was carried out in the laboratory of the Department of Chemistry, University of Chicago.

The work was carried out in the laboratory of the Department of Chemistry, University of Chicago. The work was supported by the National Science Foundation, Grant No. [number].

The work was carried out in the laboratory of the Department of Chemistry, University of Chicago. The work was supported by the National Science Foundation, Grant No. [number].

The work was carried out in the laboratory of the Department of Chemistry, University of Chicago. The work was supported by the National Science Foundation, Grant No. [number].

The work was carried out in the laboratory of the Department of Chemistry, University of Chicago. The work was supported by the National Science Foundation, Grant No. [number].

The work was carried out in the laboratory of the Department of Chemistry, University of Chicago. The work was supported by the National Science Foundation, Grant No. [number].

The work was carried out in the laboratory of the Department of Chemistry, University of Chicago. The work was supported by the National Science Foundation, Grant No. [number].

STATECZNOŚĆ PROSTOKĄTNYCH PŁYT PRZEKŁADKOWYCH O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI WYPEŁNIACZA

WŁADYSŁAW WALCZAK, MARIA KOTELKO (ŁÓDŹ)

Politechnika Łódzka

1. Wstęp

Konstrukcje cienkościenne, w których głównymi elementami nośnymi są jednowarstwowe płyty izotropowe bądź cienkie trójwarstwowe płyty przekładkowe, znajdują obecnie coraz większe zastosowanie nie tylko w przemyśle lotniczym, lecz również i w innych dziedzinach techniki. W wielu przypadkach płytowe elementy tych konstrukcji pracują przy obciążeniach typu tarczowego i wówczas poziom obciążenia całej konstrukcji limitowany jest na ogół poziomem obciążeń krytycznych tych elementów.

W przypadku płyt jednowarstwowych, pracujących przy obciążeniach typu tarczowego, skutecznym sposobem podwyższenia ich nośności jest zastosowanie odpowiedniego uźebrowania. Sposób ten, wprawdzie możliwy do zastosowania również w przypadku płyt przekładkowych, nie jest jednak tak powszechny jak w przypadku płyt jednowarstwowych. Zastosowanie bowiem wewnętrznego uźebrowania wzmacniającego, tj. uźebrowania umieszczonego pomiędzy okładzinami zewnętrznymi płyty przekładkowej (wewnątrz wypełniacza), wiąże się z trudnościami natury technologicznej, natomiast zastosowanie uźebrowania zewnętrznego jest w wielu konstrukcjach przekładkowych bardzo niepożądane. Z tego względu w ostatnich latach zrodziła się koncepcja podwyższenia nośności płyt przekładkowych, pracujących w warunkach obciążenia tarczowego nie przez stosowanie żeber wzmacniających, lecz przez odpowiednią zmianę sztywności ich wypełniacza.

W przypadku lekkich wypełniaczy, np. typu pianki poliuretanowej, zmianę sztywności uzyskuje się przez odpowiednią, racjonalną zmianę gęstości wypełniacza. Jak bowiem wynika z danych literaturowych oraz badań własnych, moduł sprężystości postaciowej G_w pianki poliuretanowej jest — w przybliżeniu — kwadratową funkcją jej gęstości.

Zagadnienie wzrostu obciążalności płyt przekładkowych przez zastosowanie lekkich wypełniaczy typu piankowego o zmiennej sztywności jest jednakże rozpoznane w bardzo skromnym zakresie. Z dostępnych opracowań wymienić tu można prace [3], [4] i [5]. Z wymienionych prac dwie, pierwsze dotyczą obciążeń krytycznych prostokątnych tarcz przekładkowych z wypełniaczem, którego sztywność zmienia się wzdłuż przekroju poprzecznego tarczy. Na szczególną uwagę zasługują rozpatrzone w pracy [3] przypadki tarcz o skokowo zmiennej sztywności wypełniacza, poddanych działaniu równomiernego, jednokierunkowego ściskania. Rozpatrzono w niej teoretyczny przypadek tarczy trój-

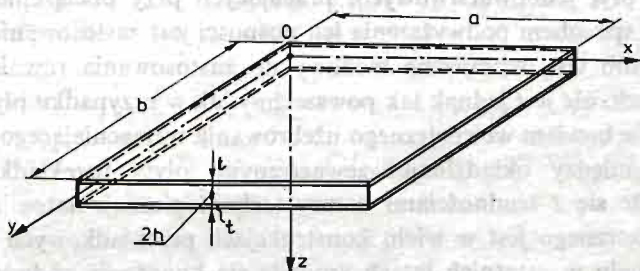
warstwowej o nieskończonej szerokości, a także trójwarstwowej tarczy prostokątnej, której sztywność wypełniacza zmieniała się w kierunku równoległym do kierunku ściskania.

W pracy [5] rozpatrzono natomiast przypadek zmiany sztywności wypełniacza w kierunku prostopadłym do płaszczyzny środkowej tarczy. Stanowi to jednak odrębne zagadnienie, dotyczące głównie grubych tarcz, ulegających lokalnej utracie stateczności.

Jak wynika z procesu technologicznego, istnieje możliwość uzyskania zmiany gęstości, a zatem i modelowania sztywności piankowych wypełniaczy płyt przekładkowych w stosunkowo łatwy sposób. Z tego względu przeprowadzenie analizy wpływu rozkładu sztywności wypełniacza na poziom obciążeń krytycznych cienkich, prostokątnych płyt przekładkowych z lekkim wypełniaczem oraz wykorzystanie wyników tej analizy do optymalnego modelowania sztywności wypełniacza ma duże znaczenie zarówno poznawcze, jak i aplikacyjne.

2. Przyjęte założenia i podstawowe równania

Przedmiotem rozważań jest prostokątna trójwarstwowa płyta przekładkowa z lekkim wypełniaczem o długościach krawędzi a i b . Zakłada się, że płyta jest cienka, tj. grubość całkowita $g_c = 2(h+t)$ płyty jest mała w stosunku do długości jej krawędzi. Rozpatrywaną płytę opisano w prostokątnym układzie współrzędnych $0, x, y, z$ (rys. 1).



Rys. 1. Podstawowe oznaczenia trójwarstwowej płyty prostokątnej.

W przypadku ogólnym równanie stateczności tak opisanej płyty — otrzymane w wyniku zredukowania układu równań równowagi, wyrażonych w przemieszczeniach [2] — ma postać:

$$2B \left(h + \frac{t}{2} \right)^2 \nabla^4(w) + \left(1 - \frac{Bh}{G_w} \nabla^2 \right) \left[2D \nabla^4(w) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = 0, \quad (1)$$

gdzie:

- N_x, N_y i N_{xy} — siły przekrojowe będące z założenia funkcjami zmiennych x oraz y ;
- $w = w(x, y)$ — składowa przemieszczenia dowolnego punktu płyty w kierunku osi z ;
- G_w — moduł sprężystości postaciowej materiału wypełniacza;

$$B = \frac{Et}{1-\nu^2} \text{ — sztywność okładziny;}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \text{ — płytowa sztywność zginania okładziny;}$$

E — moduł sprężystości Younga materiału okładziny;

ν — współczynnik Poissona materiału okładziny.



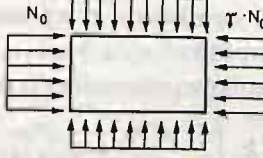

Wymienione wyżej siły przekrojowe N_x , N_y oraz N_{xy} mogą być wyrażone za pomocą jednego tylko parametru obciążenia N_0 . Wprowadzając mianowicie funkcje $F_w = F_w(x, y)$, $F_p = F_p(x, y)$ oraz $F_t = F_t(x, y)$, siły te można przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} N_x &= F_w(x, y) \cdot N_0; & N_y &= F_p(x, y) \cdot N_0; \\ N_{xy} &= F_t(x, y) \cdot N_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Postacie funkcji $F_w(x, y)$, $F_p(x, y)$ oraz $F_t(x, y)$ zależą od charakteru tarczowego obciążenia płyty. Dla kilku przykładowo wybranych typów obciążenia płyty, podano je w tabelicy 1.

Tablica 1

Funkcje $F_w(x, y)$, $F_p(x, y)$ i $F_t(x, y)$ dla wybranych przypadków obciążenia płyty.

Lp	Charakter obciążenia płyty	$F_w(x, y)$	$F_p(x, y)$	$F_t(x, y)$
1.	Równomierne, jednokierunkowe ściskanie 	-1	0	0
2.	Jednokierunkowe, niejednakowe ściskanie z udziałem ścinania 	$-\left[\eta - (\eta - 1) \frac{x}{a}\right]$	0	$-\frac{(1-\eta)b}{2a} \cdot 1 - 2 \frac{y}{b}$
3.	Dwukierunkowe równomierne ściskanie 	-1	$-\gamma$	0
4.	Jednokierunkowe liniowo zmienne ściskanie ze ścinaniem 	$-\left(1 - \alpha \frac{y}{b}\right)$	0	γ

W celu uproszczenia obliczeń oraz uogólnienia ich wyników wprowadzono bezwymiarowe współrzędne:

$$\xi = \frac{\pi x}{a} \quad \text{i} \quad \theta = \frac{\pi y}{b} \quad (3)$$

oraz bezwymiarowe współczynniki:

— kształtu płyty

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad (4)$$

— obciążenia

$$\varphi = \frac{N_0 b^2 (1-\nu^2)}{2\pi^2 E t \left(h + \frac{t}{2} \right)^2}, \quad (5)$$

— podatności wypełniacza

$$k_0 = \frac{E t h}{(1-\nu^2) G_w} \cdot \frac{\pi^2}{b^2}. \quad (6)$$

W zastosowanej metodzie rozwiązania zagadnienia przyjmuje się założenie, że moduł sprężystości postaciowej G_w wypełniacza jest funkcją zmiennej x względnie zmiennej y ; znaczy to, że ulega on zmianie wzdłuż długości lub szerokości płyty. Tym samym współczynnik k_0 podatności wypełniacza jest również odpowiednią funkcją zmiennej x lub y . Należy zaznaczyć, że przyjęcie zmienności współczynnika k_0 oznacza możliwość rozpatrzenia zarówno zmienności modułu G_w , jak i zmienności innych parametrów, występujących w wyrażeniu (6), tj. sztywności okładzin B , a także grubości wypełniacza $2h$. Największe jednak znaczenie praktyczne ma przypadek zmiennej sztywności samego wypełniacza, tj. zagadnienie rozkładu zmienności modułu sprężystości postaciowej G_w .

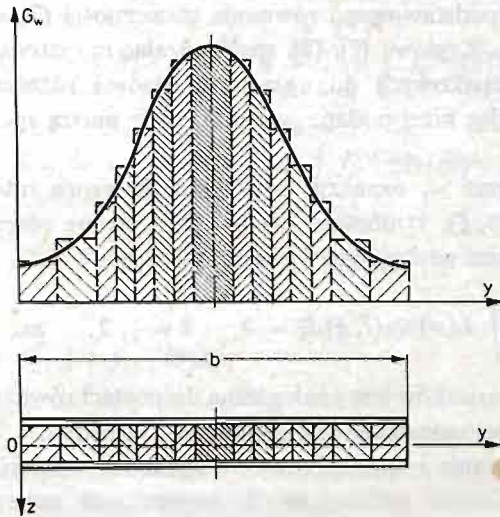
W rzeczywistości moduł G_w może ulegać zmianie, ale w sposób ciągły, wzdłuż określonego kierunku. W dalszych rozważaniach przyjęto założenie, że wartość modułu G_w zmienia się jedynie wzdłuż osi y , przy czym rzeczywistą zmianę tego modułu przedstawiono za pomocą zastępczej, skokowo zmiennej funkcji y (rys. 2). Funkcja ta może być tak przyjęta, aby była określonym przybliżeniem rzeczywistej funkcji ciągłej. Przy takim przyjęciu współczynnik k_0 jest również skokową funkcją zmiennej y , tj. $k_0 = k_0(y)$.

Równanie (1) ulega uproszczeniu przez pominięcie w nim płytowej sztywności zginania D samych okładzin jako pomijalnie małej. Błąd wynikający z wprowadzenia takiego uproszczenia nie przekracza 5% [6]. Wówczas, po wprowadzeniu bezwymiarowych współrzędnych ξ i θ oraz wyżej zdefiniowanych współczynników, równanie (1) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} & \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \lambda^2 \varphi \left[k_0 \left(\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] F_w(\xi, \theta) + \varphi \left[k_0 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] F_p(\xi, \theta) + \\ & + 2\varphi \lambda \left[k_0 \left(\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \theta} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \theta^3} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} \right] F_i(\xi, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Wartości własne powyższego równania są poszukiwanymi w analizie stateczności współczynnikami obciążenia krytycznego płyty, oznaczonymi dalej symbolami φ_{kr} .

Przyjęto dalej, że rozpatrywana płyta jest zamocowana wzdłuż całego swego obwodu. Uwzględniono przy tym dwa warianty podparcia zewnętrznych krawędzi płyty: podparcie przegubowe na całym obwodzie oraz podparcie przegubowe krawędzi $x = 0$ i $x = a$, przy jednoczesnym utwierdzenia krawędzi $y = 0$ i $y = b$.



Rys. 2. Modelowanie rzeczywistej zmiany modułu G_w wypełniacza płyty za pomocą funkcji skokowo zmiennej

Zgodnie z powyższymi założeniami, rozwiązanie równania (7) musi spełniać następujące warunki brzegowe odnoszące się do funkcji $w = w(\xi, \theta)$, opisującej kształt ugiętej — po utracie stateczności — powierzchni płyty:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{— dla } \xi = 0, \pi, \tag{8}$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{— dla } \theta = 0, \pi;$$

— gdy tarcza jest swobodnie podparta wzdłuż obwodu, lub

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{— dla } \xi = 0, \pi, \tag{9}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad \text{— dla } \theta = 0, \pi;$$

— gdy krawędzie $y = 0$ ($\theta = 0$) oraz $y = b$ ($\theta = \pi$) płyty są utwierdzone, a pozostałe podparte swobodnie.

3. Rozwiązanie zagadnienia

Uwzględniając przyjęte uprzednio warianty podparcia zewnętrznych krawędzi płyty, rozwiązanie równania (7) założono w następującej postaci ogólnej:

$$w(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^m f_i(\theta) \cdot \sin(i\xi), \quad (10)$$

gdzie $f_i(\theta)$ są nieznanymi funkcjami zmiennej (θ) . Tak przyjęta funkcja $w = w(\xi, \theta)$ spełnia założone warunki brzegowe na krawędziach $x = 0$ i $x = a$ ($\xi = 0$ i $\xi = \pi$) płyty.

W celu rozwiązania podstawowego równania stateczności (7) zastosowano przybliżoną metodę Kantorowicza-Kryłowa [7], [8], sprowadzając rozpatrywane równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych do układu m równań różniczkowych zwyczajnych. Uzyskano je wykorzystując niżej podane warunki, jakie muszą spełniać nieznane funkcje $f_i(\theta)$.

Jeżeli mianowicie przez w_i oznaczyć i -ty składnik wzoru interpolacyjnego (10), tj. wyrażenie $w_i = f_i(\theta) \sin(i, \xi)$, symbolem $L(w)$ — lewą stronę równania (7), to nieznane funkcje $f_i(\theta)$ muszą spełniać następujące warunki:

$$\int_0^{\pi} L(w) \sin(l, \xi) d\xi = 0, \quad l = 1, 2, \dots m. \quad (11)$$

Postać powyższych warunków jest analogiczna do postaci równań otrzymywanych przy zastosowaniu metody ortogonalizacyjnej Bubnowa-Galerkina.

Po wykonaniu całkowania i uporządkowaniu wyrazów warunki (11) przyjmują postać następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu względem funkcji f_i :

$$\sum_{i=1}^m L_{ii}(f_i, f_i', f_i'', f_i''', f_i'''') = 0, \quad i = 1, 2, \dots m. \quad (12)$$

W równaniach tych symbolem L_{ii} oznaczono następujące wyrażenia:

$$L_{ii} = \varphi \{ \lambda^2 i^2 (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}'' f_i - 2\lambda i (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}' f_i' - [k_0 \lambda^2 i^2 F_{ii}'' + (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}'] f_i'' + 2k_0 \lambda i F_{ii}' f_i''' + k_0 F_{ii}' f_i'''' \} \quad \text{dla } i \neq 1 \quad (13)$$

oraz

$$L_{ii} = \frac{\pi}{4} \lambda^2 i^2 \left[2\lambda^2 i^2 + \frac{4}{\pi} \varphi (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}'' \right] f_i - 2\varphi \lambda i (1 + k_0 \varphi \lambda^2 i^2) F_{ii}' f_i' + \\ - \left[\pi \lambda^2 i^2 \left(1 + \frac{1}{\pi} k_0 \varphi F_{ii}'' \right) + \varphi (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}' \right] f_i'' + 2k_0 \varphi \lambda i F_{ii}' f_i''' + \left(\frac{\pi}{2} + k_0 \varphi F_{ii}' \right) f_i'''' \quad \text{dla } i = 1. \quad (14)$$

W powyższych wyrażeniach

$$F_{ii}'' = \int_0^{\pi} [F_w(\xi, \theta) \sin(i\xi) \sin(l\xi)] d\xi, \\ F_{ii}' = \int_0^{\pi} [F_p(\xi, \theta) \sin(i\xi) \sin(l\xi)] d\xi, \\ F_{ii}' = \int_0^{\pi} [F_i(\xi, \theta) \cos(i\xi) \sin(l\xi)] d\xi. \quad (15)$$

W dalszym postępowaniu układ równań różniczkowych (12) zostaje przekształcony w układ równań całkowych.

Uwzględniając ogólną postać warunków brzegowych przy $\theta = 0$ (dla obydwu przyjętych warunków podparcia krawędzi $y = 0$ i $y = b$ płyty) oraz wykorzystując ich jednorodność, poszukiwane funkcje $f_i = f_i(\theta)$ można wyrazić przez ich czwarte pochodne:

$$\begin{aligned}
 f_i &= \frac{1}{\alpha} C_{2i} \cdot \theta^\alpha + C_{1i} \frac{\theta^3}{6} + \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^4, \\
 f_i' &= C_{2i} \cdot \theta^\beta + C_{1i} \frac{\theta^2}{2} + \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^3, \\
 f_i'' &= C_{2i} \cdot \beta + C_{1i} \cdot \theta + \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^2, \\
 f_i''' &= C_{1i} + \int_0^\theta f_i''''(\theta) d\theta,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

gdzie: $\alpha = 1$ oraz $\beta = 0$ — przy założeniu warunków brzegowych (8), $\alpha = 2$ oraz $\beta = 1$ — przy założeniu warunków brzegowych (9). Wartości stałych C_{1i} i C_{2i} wyznacza się z warunku brzegowego dla $\theta = \pi$, tj. dla krawędzi $y = b$ płyty.

Wprowadzając zależności (16) do układu równań (12) otrzymuje się następujący układ równań całkowych.

$$\sum_{i=1}^m L_{il} [A_i^{(1)}(\theta), A_i^{(2)}(\theta), A_i^{(3)}(\theta), A_i^{(4)}(\theta)] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m,
 \tag{17}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 A_i^{(1)}(\theta) &= \int_0^\theta f_i''''(\theta) d\theta, \\
 A_i^{(2)}(\theta) &= \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^2, \\
 A_i^{(3)}(\theta) &= \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^3, \\
 A_i^{(4)}(\theta) &= \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^4.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Układ równań całkowych (17) rozwiązuje się następnie metodą sum skończonych [4], stosując macierze całkowania [9]. Przy zastosowaniu tej metody przedział całkowania $[\theta, \pi]$ dzieli się na n podprzedziałów, otrzymując w ten sposób $(n+1)$ punktów obliczeniowych θ_j , przy czym $j = 1, 2, \dots, (n+1)$. Funkcję ciągłą $k_0 = k_0(\theta)$, przedstawiającą zmianę współczynnika podatności płyty, zastępuje się funkcją skokowo zmienną, która w każdym z podprzedziałów obliczeniowych ma stałą wartość $(k_0)_j$. Dobierając odpowied-

nio liczbę podprzedziałów całkowania n , można z określoną dokładnością odwzorować przebieg ciągłej funkcji k_0 za pomocą przebiegu skokowo zmiennej.

W wyniku zastąpienia całek, występujących w układzie równań (17), przybliżonymi wyrażeniami zawierającymi sumy skończone [9] otrzymuje się układ algebraicznych równań jednorodnych względem niewiadomych $x_{ij} = f_i''''(\theta_j)$. Układ ten ma postać:

$$\sum_{k=1}^{m(n+1)} b_{ik} x_{ik} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m(n+1), \quad (19)$$

gdzie współczynniki b_{ik} są zależne od parametrów geometrycznych i materiałowych płyty, a także jej obciążenia.

Aby układ równań (19) miał niezerowe rozwiązanie, jego wyznacznik charakterystyczny musi być równy zero. Z warunku tego można obliczyć ciąg wartości własnych φ równania (1). Najmniejsza z tych wartości jest poszukiwaną wartością krytyczną współczynnika φ , oznaczoną dalej jako φ_{kr} .

Przedstawioną powyżej metodę wykorzystano do rozwiązania równania stateczności trójwarstwowych płyt przekładkowych o zmiennej sztywności wypełniacza. Realizowany w praktyce ciągły rozkład tej sztywności, związany z ciągłym rozkładem gęstości wypełniacza, zastąpiono równoważnym w przybliżeniu rozkładem zmiennym skokowo, zachowując określoną dokładność odwzorowania.

Dla przeprowadzenia odpowiednich obliczeń numerycznych opracowano specjalny program na e.m.c. w języku FORTRAN. Program ten umożliwia wyznaczanie wartości krytycznych wszystkich podstawowych obciążeń typu tarczowego dla prostokątnych płyt przekładkowych o dowolnym, skokowo zmiennym rozkładzie sztywności wypełniacza. Jedynym ograniczeniem jest dopuszczalna — ze względu na obszar pamięci zajmowany przez program w e.m.c. — liczba n podprzedziałów obliczeniowych.

4. Przykładowe wyniki obliczeń

Przykładowe obliczenia numeryczne przeprowadzono dla prostokątnych płyt przekładkowych z lekkim wypełniaczem o zmiennej gęstości, swobodnie podpartych wzdłuż obwodu i poddanych działaniu jednokierunkowego obciążenia ściskającego. Rozpatrzono trzy różne przypadki obciążenia płyt, dla których znane są rozwiązania dotyczące ich obciążeń krytycznych, przy założeniu stałej gęstości wypełniacza: przypadek równomiernego ściskania [2] niejednakowego ściskania z udziałem ścinania [10] oraz szczególnie przypadek liniowo-zmiennego ściskania, a mianowicie zginania tarczowego [11].

Dla każdego z tych przypadków obciążenia przyjęto w obliczeniach takie warianty rozkładu gęstości wypełniacza, a tym samym funkcji $k_0 = k_0(y)$ lub $k_0 = k_0(x)$ jego podatności, aby uzyskać możliwie największy wzrost wartości współczynnika φ_{kr} obciążenia krytycznego płyty.

W przypadku jednokierunkowego, równomiernego ściskania (poz. 1 tablicy 1), tj. gdy współczynnik obciążenia $\eta = 1$, a także niejednakowego ściskania z jednoczesnym ścinaniem (poz. 2 tablicy 1), tj. gdy $\eta \neq 1$, najszluszniejsze było przyjęcie, że gęstość wypełniacza zmienia się skokowo w kierunku osi y , ale z zachowaniem symetrii względem

osi symetrii płyty — równoległej do kierunku ściskania. Jak wykazała wstępna analiza, dla wszystkich wartości współczynnika η najbardziej racjonalnym był wariant, gdy w wypełniaczu płyty przyjmowano jedno tylko pasmo o podwyższonej gęstości, leżące wzdłuż wspomnianej osi symetrii płyty. Pasma takie o zmniejszonej podatności stanowiło pewną analogię wzmocnienia tarczy jednorodnej symetrycznym żebrzem podłużnym, równoległym do kierunku ściskania.

Zagadnienie rozpatrzono przyjmując różne szerokości ρb pasma ($0 \leq \rho \leq 1$) o zwiększonej gęstości i różne wartości współczynnika wzmocnienia q , zdefiniowanego wzorem:

$$q = \frac{(G_w)_2}{(G_w)_1} = \frac{(k_o)_1}{(k_o)_2}, \quad (20)$$

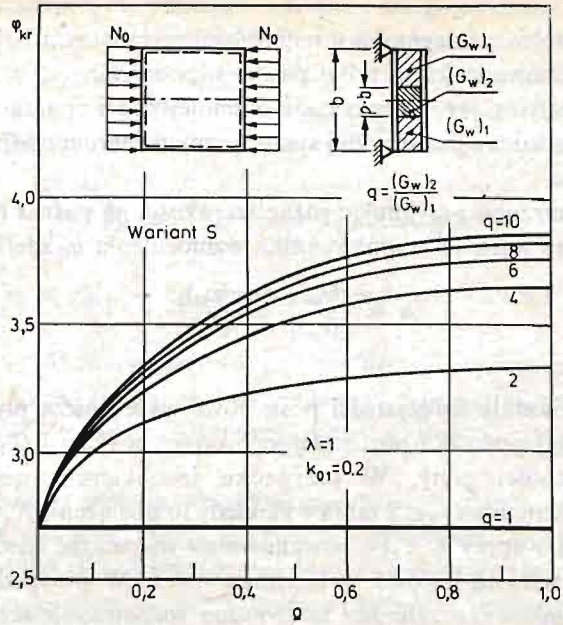
gdzie:

$(G_w)_2$ i $(G_w)_1$ — moduły sprężystości postaciowe wypełniacza płyty odpowiednio dla pasma o podwyższonej gęstości i pozostałej jego części, a $(k_o)_2$ i $(k_o)_1$ — odpowiadające współczynniki podatności płyty. W przypadku jednokierunkowego, niejednakowego ściskania z udziałem ścinania (poz. 2 tablicy 1), kiedy to obciążenie N_x jest liniowo rosnącą funkcją współrzędnej x (przy $\eta < 1$), postanowiono rozpatrzeć również przypadek, gdy gęstość wypełniacza wzrasta liniowo w kierunku osi x . W przypadku obciążenia płyty w postaci jednokierunkowego zginania tarczowego rozpatrzono skokowo zmienny rozkład gęstości wypełniacza wzdłuż osi y — z jednym pasmem o zwiększonej gęstości. Pasma to usytuowano równoległe do osi x po stronie ściskanej płyty, zgodnie z zasadą racjonalnego żebrzenia płyt jednorodnych poddanych działaniu zginania tarczowego. Przyjęto, że szerokość tego pasma wynosi $b_o = 0,1b$, a jego oś symetrii znajduje się w odległości y' od ściskanej krawędzi płyty.

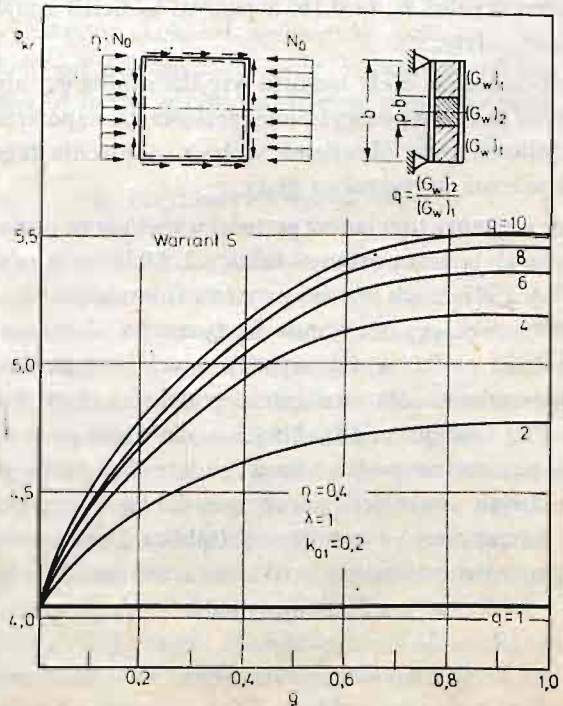
W tym przypadku obciążenia, efekt wzrostu współczynnika φ_{kr} obciążenia krytycznego płyty zależy od położenia pasma o podwyższonej gęstości, tj. współrzędnej y' . Z tego względu celem tej części obliczeń było określenie wpływu położenia tego pasma na wartość współczynnika φ_{kr} obciążenia krytycznego płyty.

Przyjęte do obliczeń warianty rozkładów gęstości wypełniacza odpowiadające wymienionym wyżej obciążeniom płyty zestawiono w tablicy 2. Obliczenia numeryczne przeprowadzono na e.m.c. Odra 1305, a ich wyniki przedstawiono w postaci wykresów, ilustrujących zależność współczynnika φ_{kr} obciążenia krytycznego płyty, od odpowiednich parametrów rozkładu gęstości — dla wyżej wymienionych przypadków obciążenia płyty. Wszystkie wykresy sporządzono dla swobodnie podpartej płyty kwadratowej, o współczynniku kształtu $\lambda = 1$, oraz przy jednakowej — dla każdego z rozpatrywanych przypadków — wartości parametru podstawowej podatności płyty $(k_o)_2 = 0,2$. Wykresy $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(\rho)$ — dla różnych wartości współczynnika q — odpowiadające rozkładowi gęstości wypełniacza, oznaczonego symbolem S (tablica 2) przedstawiono odpowiednio: dla jednokierunkowego, równomiernego ściskania — na rys. 3 oraz dla jednokierunkowego niejednakowego ściskania z udziałem ścinania — przy wartości parametru obciążenia $\eta = 0,4$ — na rys. 4.

Dla tego ostatniego przypadku obciążenia płyty, na rys. 5 przedstawiono przebieg zmian wartości współczynnika φ_{kr} , odpowiadający liniowej zmianie modułu sprężystości postaciowej G_w wypełniacza wzdłuż osi x (symbol rozkładu P w tablicy 2).



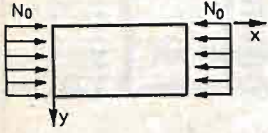
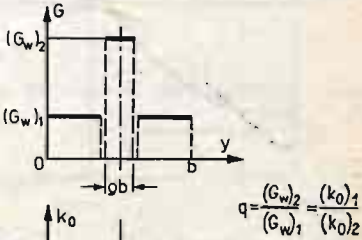

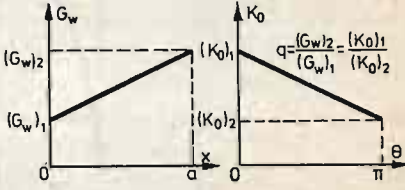
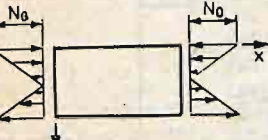
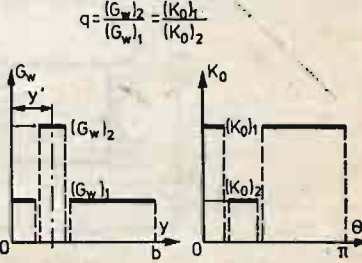
Rys. 3. Wykresy zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(q)$ dla płyty poddanej działaniu równomiernego ściskania (poz. 1 — tablica 2)



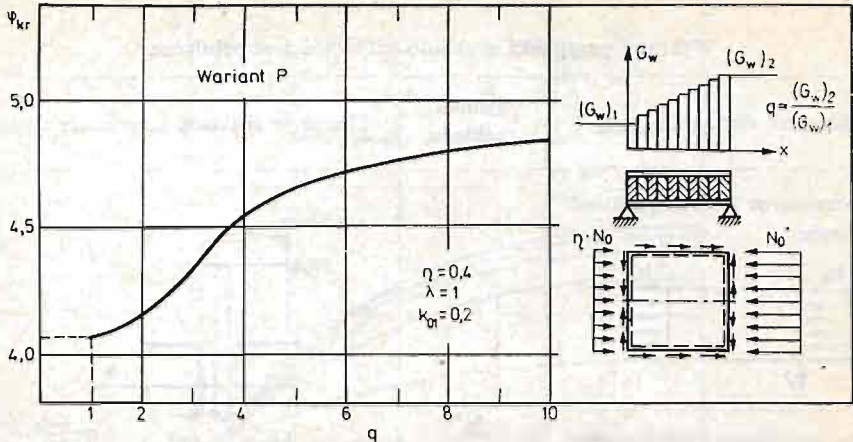
Rys. 4. Wykresy zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(q)$ dla płyty poddanej działaniu jednokierunkowego, niejednorodnego ściskania z udziałem ścinania (poz. 2 — tablica 2)

Tablica 2

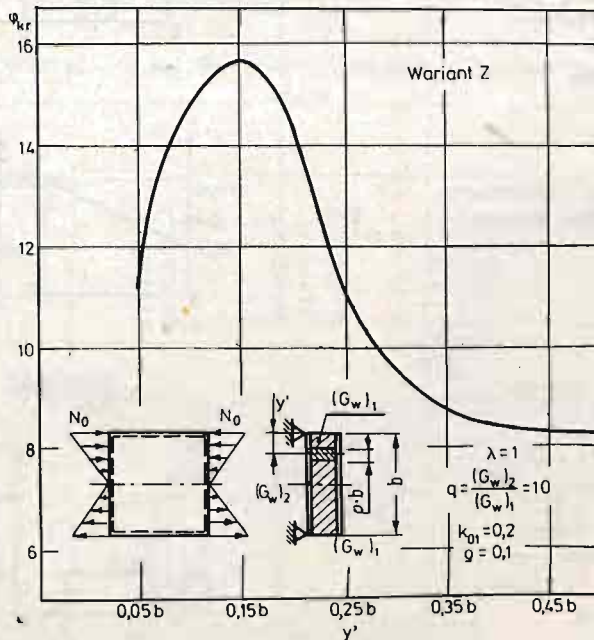
Wybrane przypadki rozkładu sztywności wypełniacza

Lp	charakter obciążenia płyty	Symbol rozkładu	Charakter rozkładu sztywności wypełniacza
1.	Równomierne jednokierunkowe ściskanie 	„S”	
2.	Jednokierunkowe niejednakowe ściskanie z udziałem ścinania 		
3.	Jednokierunkowe, niejednakowe ściskanie z udziałem ścinania (szkic j.w.)	„P”	
4.	Jednokierunkowe liniowo zmienne ściskanie (zginanie tarczowe) 	„Z”	

Na rysunku 6 przedstawiono wykres zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(y')$, odpowiadający przypadkowi czystego zginania tarczowego przy przyjętych uprzednio założeniach, dla przykładowej wartości współczynnika $q = 10$. Wyniki obliczeń numerycznych, przedstawione w postaci wykresów pokazanych na rysunkach 3÷6, otrzymano przy założeniu funkcji powierzchni wyboczenia płyty zgodnie z wyrażeniem (10), biorąc do obliczeń w każdym, kolejnym punkcie obliczeniowym wyrażenie o liczbie wyrazów $m = 1$ do $m = 5$. W przypadkach jednokierunkowego, równomiernego ściskania ($\eta = 1$) oraz niejednakowego



Rys. 5. Wykres zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(q)$ dla płyty poddanej działaniu jednokierunkowego, niejednakowego ściskania z udziałem ścinania (poz. 3 — tablica 2)



Rys. 6. Wykres zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(y')$ dla płyty poddanej zginaniu tarczowemu (poz. 4 — tablicy 2)

ściskania z udziałem ścinania ($\eta = 0,4$) wystarczającą dokładność obliczeń otrzymano dla funkcji jednowyrazowej ($m = 1$). W przypadku czystego zginania tarczowego wystarczającą dokładność otrzymano dla funkcji trójwyrazowej ($m = 3$).

Z punktu widzenia projektowania konstrukcji przekładkowych interesujące jest również — oprócz analizy wpływu rozkładu gęstości wypełniacza na poziom obciążenia krytycznego — rozpatrzenie wpływu tego rozkładu ma ciężar konstrukcji, a ściślej na sto-

sunek siły krytycznej do ciężaru elementu tarczowego. Za kryterium optymalizacyjne można wówczas przyjąć współczynnik lekkości tarczy zdefiniowany wzorem:

$$\xi = \frac{(N_0)_{kr}}{Q}, \quad (21)$$

gdzie $(N_0)_{kr}$ jest wartością siły krytycznej, a Q — ciężarem tarczy.

Współczynnik ten można również określić za pomocą wzoru o następującej ogólnej postaci:

$$\xi = C\kappa. \quad (22)$$

W wyrażeniu tym C jest współczynnikiem, zależnym jedynie od parametrów materiałowych i wymiarów geometrycznych płyty:

$$C = \frac{\pi^2 \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \right)^2 a \cdot E}{(1 - \nu^2) \psi^3 t \cdot \gamma_w}, \quad (23)$$

gdzie: γ_w — ciężar właściwy materiału wypełniacza o najmniejszej gęstości.

$$\varepsilon = \frac{h}{t}; \quad \psi = \frac{b}{t}.$$

Współczynnik zaś κ wyraża się następującymi wzorami — zależnie od rozkładu gęstości wypełniacza płyty:

$$\kappa = \frac{\varphi_{kr}}{\varepsilon + K} \quad (24a)$$

— dla płyty z wypełniaczem o stałej sztywności,

$$\kappa = \frac{\varphi_{kr}}{\varepsilon \left[1 + \rho \left(\sqrt{q} - 1 \right) \right] + K} \quad (24b)$$

— dla płyty, której gęstość wypełniacza zmienia się według schematu S oraz Z (poz. 1 i 3 tablicy 2),

$$\kappa = \frac{\varphi_{kr}}{\varepsilon \left(1 + \frac{\sqrt{q} - 1}{2} \right) + K} \quad (24c)$$

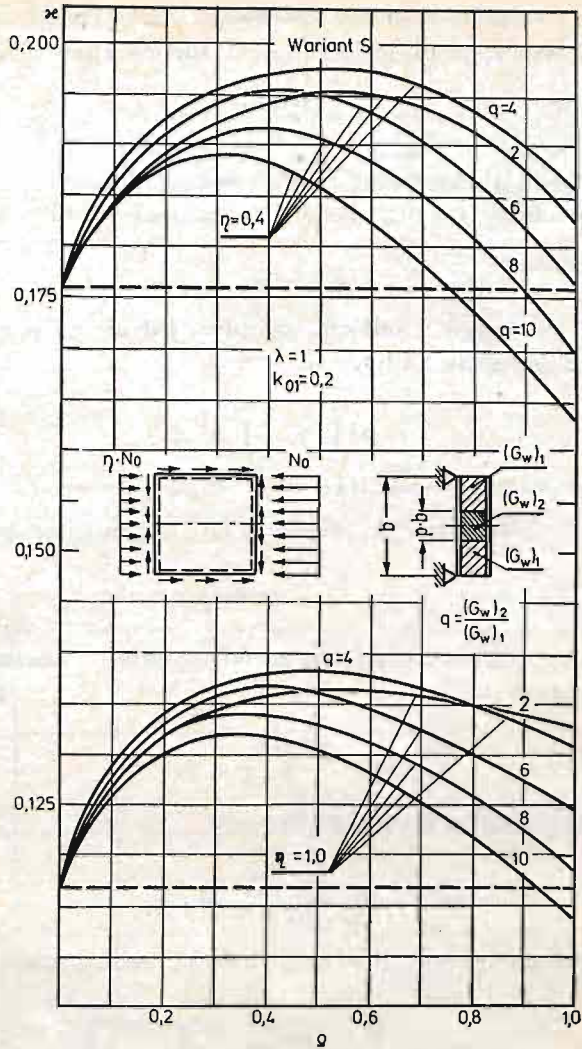
— dla płyty, o liniowo zmiennej gęstości wypełniacza (poz. 2 w tablicy 2).

We wzorach tych

$$K = \frac{\gamma_{okl}}{\gamma_w},$$

gdzie γ_{okl} — ciężar właściwy materiału okładzin.

Przykładowo, na rys. 7 przedstawiono wykresy współczynnika H odpowiadające przypadkowi tarczy poddanej działaniu równomiernego ściskania ($\eta = 1,0$) oraz jednokierunkowego niejednakowego ściskania z udziałem ścinania przy parametrze obciążenia $\eta = 0,4$ — w przypadku rozkładu gęstości wypełniacza typu S . Wykresy sporządzono przy następujących założeniach:



Rys. 7. Wykresy zależności współczynnika $\kappa = \kappa(q)$ dla płyty poddanej działaniu równomiernego ściskania tarczowego ($\eta = 1$) oraz niejednakowego ściskania z udziałem ścinania ($\eta = 0,4$)

$\varepsilon = 5$ oraz $K = 18$, co odpowiada przypadkowi tarczy z okładzinami duralowymi ($\gamma_{okl} = 2700$ [kg/m³]) oraz wypełniaczem o ciężarze właściwym $(\gamma_w)_1 = 150$ [kg/m³].

5. Wnioski

1. Przedstawiona metoda obliczeniowa pozwala na przeprowadzenie analizy stateczności tarcz przekładkowych z lekkim wypełniaczem o zmiennej sztywności w szerokim zakresie wariantów rozkładu tej sztywności, w podstawowych przypadkach obciążenia typu tarczowego.

2. Z przytoczonych przykładów obliczeniowych wynika, że racjonalna zmiana sztywności wypełniacza w znaczący sposób wpływa na wzrost obciążenia krytycznego.

3. Odpowiednie kształtowanie rozkładu zmienności sztywności wypełniacza może być w pewnych przypadkach skutecznym narzędziem optymalizacji z punktu widzenia stosunku nośności elementu tarczowego do jego ciężaru.

4. Z przebiegu krzywych przedstawionych na rys. 7 wynika, że efekt racjonalnego kształtowania gęstości wypełniacza, mierzony wartością współczynnika κ , a tym samym i współczynnika lekkości ξ , jest znacznie wyraźniejszy w przypadku płyt poddanych działaniu jednokierunkowego niejednakowego ściskania z udziałem ścinania ($\eta \neq 1$) niż w przypadku płyt poddanych działaniu równomiernego ściskania tarczowego ($\eta = 1$)

Literatura cytowana w tekście

- [1] F. ROMANÓW, L. STRICKER, J. TEYSSEYRE, *Stateczność konstrukcji przekładkowych*. Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1972.
- [2] A. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Издат. „Наука”, Москва 1967.
- [3] В. Н. РАЙМУШИН, Н. К. ГАЛИМОВ, И. Н. СОТОВ, *Устойчивость трехслойных пластин с заполнителем переменной жесткости* — Труды Семинара по теории оболочек, Казань 1974.
- [4] А. М. ГОЛЬДЕНСТЕЙН, *Устойчивость безконечно широкой пластины с заполнителем переменной жесткости при сжатии* — Изв. ВУЗ, Строительство и Архитектура, Нр. 1, 1977.
- [5] F. ROMANÓW, *Obciążenia krytyczne konstrukcji wielowarstwowych*. Prace naukowe I-tu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej, Nr 36 seria 8, Monografie, Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1979.
- [6] K. H. НАНН, *Über die statische Stabilität einer einseitig gedrückten, mit einer mittigen Längsrippe versteiften rechteckigen Sandwichscheibe bei unterschiedlichen Randlagerungsarten*, praca doktorska, Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej, Łódź 1979.
- [7] З. В. КАНТОРОВИЧ, В. И. КРЫЛОВ, *Приближенные методы высшего анализа* — Гос. Издат. Техн. — Теорет. Лит., Москва, Ленинград, 1952.
- [8] З. В. КАНТОРОВИЧ, *Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла* — Изв. Ак. Наук СССР, II серия, Ир. 5, 1933.
- [9] М. В. ВАХИТОВ, *Интегрирующие матрицы — аппарат численного решения дифференциальных уравнений стержневой механики* — Изв. ВУЗ. Авиационная техника, Нр. 3, 1965.
- [10] М. КОТЕЛКО, *Stateczność prostokątnej płyty trójwarstwowej z miękkim wypełniaczem poddanej działaniu nierównomiernego ściskania*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej Nr 393, Mechanika z. 62, Łódź 1981
- [11] W. WALCZAK, R. MANIA, *Stateczność prostokątnej płyty trójwarstwowej poddanej działaniu jednokierunkowego, liniowo zmiennego ściskania przy różnych warunkach podparcia krawędzi płyty* — Arch. Budowy Maszyn Tom XXIX, z. 3-4, P.W.N., Warszawa 1982.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ, ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН О ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ЗАПОЛНИТЕЛЯ

В работе исследуется влияние переменной жесткости легкого заполнителя пенного типа на устойчивость „в целом” прямоугольной пластины. При рассмотрении задачи используется численный метод, благодаря которому является возможным определение коэффициентов критического усилия пластины в случае дискретно переменной жесткости заполнителя. В работе представлены результаты численных вычислений для некоторых случаев нагрузки дискового типа.

Summary

STABILITY OF RECTANGULAR SANDWICH PLATES AT VARIABLE RIGIDITY
OF THE PLATE CORE

In the paper an influence of variable rigidity of the core on general stability of rectangular sandwich plates was considered. In considerations the special numerical method was utilised. Application of the method allowed for determination of coefficients φ_{kr} of the plate critical loading at the assumption that the rigidity of a plate core is discretely varying. Exemplary results of numerical computations, carried out for some chosen cases of a disk loading, were also presented.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 czerwca 1983 roku

NUMERYCZNA ANALIZA PRZEPLYWU MHD W KANAŁE Z NIESYMETRYCZNYM ROZSZERZENIEM

EDWARD WALICKI, JERZY SAWICKI

1. Wstęp

Przepływy MHD w kanałach płaskich i okrągłych o niesymetrycznych kształtach, występujące w różnych urządzeniach technicznych, budzą od dawna duże zainteresowanie wielu badaczy.

W pracy [1] dokonano przeglądu zagadnień przepływów MHD w kanałach o różnych kształtach i przekrojach poprzecznych — omawiając rozwiązania analityczne, uzyskane przy pewnych dość znacznych założeniach upraszczających. Prace [11, 12, 13] podają przykłady analizy przepływu płynnych metali w zakrzywionych kanałach, w obecności prostopadłego zewnętrznego pola magnetycznego.

Badaniami płaskich przepływów MHD w kanałach o niesymetrycznych rozszerzeniach lub przepływów, które do takiego modelu dały się sprowadzić, zajmowano się w pracach [2, 7, 8].

Celem tej pracy jest uzyskanie numerycznego rozwiązania zagadnienia ustalonego płaskiego przepływu MHD w kanale z niesymetrycznym uskokiem, wywołanego gradientem ciśnienia bądź ruchem ścianki ograniczającej przepływ (rys. 1).

Przyjęto następujące założenia upraszczające, dotyczące właściwości płynu: gęstość $\rho = \text{const}$, lepkość dynamiczna $\mu = \text{const}$, przewodność elektryczna $\sigma = \text{const}$.

Tak zdefiniowany płyn lepki i przewodzący elektrycznie będziemy dalej określać mianem „płynu magnetycznego”.

Dodatkowo zakładamy, że wektor pola magnetycznego $\vec{B} (0, B_0, 0)$ jest prostopadły do ruchomej ścianki kanału.

Równaniami określającymi stan „mechaniczny” przepływającej cieczy są przy tych założeniach¹⁾:

- równanie ciągłości,
- magnetohydrodynamiczne równanie Naviera-Stokesa,
- równania Maxwella,
- prawo Ohma.

Badania przepływu płynu magnetycznego przeprowadzono dla przypadków:

- przepływu wywołanego gradientem ciśnienia, tzw. przepływu Poiseuille'a,

¹⁾ Równania te przedstawiono w następnym punkcie pracy.

Przechodząc do płaskiego ustalonego przepływu płynu magnetycznego będącego tematem pracy i uwzględniając jednocześnie tzw. przybliżenie hydrodynamiczne, to znaczy zakładając: małe wartości wektora natężenia pola elektrycznego $\bar{E}^{(2)}$, oraz małe wartości magnetycznej liczby Reynoldsa, sprowadzamy równania (1) i (2) do postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u - \sigma B_0^2 u, \quad (6)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v.$$

przy czym uwzględniono (4).

Równań tych użyjemy teraz do opisu przepływu płynu magnetycznego w rozpatrywanym kanale (rys. 1).

Wprowadzając funkcję prądu określoną zależnościami:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7)$$

oraz eliminując ciśnienie z układu równań (6) otrzymamy:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \Delta \zeta, \quad (8)$$

gdzie ζ jest wirowością. Jest ona związana z funkcją prądu Ψ zależnością:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta, \quad (9)$$

przy czym Δ oznacza operator Laplace'a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Aby uzyskane rozwiązanie układu równań (8) i (9), równoważnego układowi (6), było dogodnie w praktycznych zastosowaniach, wprowadźmy zmienne bezwymiarowe:

$$x = Lx', \quad y = Ly', \quad u = Uu', \quad v = Uv',$$

$$p = \frac{1}{2} \rho U^2 p', \quad \Psi = UL\Psi', \quad \zeta = \frac{U}{L} \zeta', \quad \text{Re} = \frac{UL}{\nu}, \quad (10)$$

$$H = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}},$$

przy czym sens oznaczeń jest następujący:

U — średnia prędkość przepływu cieczy w węższej części kanału,

L — szerokość kanału w węższej jego części,

Re — liczba Reynoldsa,

H — liczba Hartmana.

²⁾ Inaczej mówiąc spełniona jest zależność: $\bar{E}/(\bar{V} \times \bar{B}) \ll 1$.

Wprowadzając zależności (10) do równań (6) lub do równań (8), (9) otrzymamy bezwymiarową postać równań ruchu. Opuszczając w tych równaniach (dla uproszczenia zapisu) kreski przy wielkościach bezwymiarowych otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \text{Re} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \cdot H^2 = \Delta \zeta \quad (11)$$

$$\Delta \Psi = \zeta. \quad (12)$$

3. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla równań (11) i (12), dotyczące granic obszaru przepływu, wynikają z następujących założeń:

- a) płyn na „wejściu” i „wyjściu” z kanału porusza się ruchem laminarnym,
- b) składowe prędkości na ścianie nieruchomej:

$$u = 0, \quad v = 0; \quad (13)$$

stąd wynikają warunki

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0, \quad \Psi = \text{const.} \quad (14)$$

na ściankach kanału $\left(\frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial s} \right)$ oznaczają pochodne w kierunku normalnej i stycznej do ścianki),

- c) składowa prędkości na ścianie ruchomej:

$$u = U, \quad v = 0; \quad (15)$$

wynika stąd warunek

$$\Psi = \text{const.}$$

na tej ściance³⁾.

Uwzględniając warunki (13), (14) i (15) oraz wykorzystując zależności (7) i (9) otrzymamy następujące wyrażenia⁴⁾:

— dla funkcji prądu

$$\Psi = \frac{A}{H^3} \left[\text{sh } H\eta - \frac{(\text{ch } H - 1)}{\text{sh } H} \text{ch } H\eta - H\eta \right] - \frac{B}{H} (\text{sh } H\eta - \text{cth } H \text{ch } H\eta), \quad (16)$$

— dla wirowości

$$\zeta = \frac{A}{H} \left[\text{sh } H\eta - \frac{(\text{ch } H - 1)}{\text{sh } H} \text{ch } H\eta \right] - B \cdot H (\text{sh } H\eta - \text{cth } H \text{ch } H\eta). \quad (17)$$

³⁾ Warunek ten związany jest ze sposobem obrania układu współrzędnych.

⁴⁾ Parametry A i B są wielkościami zależnymi od przyczyny wywołującej ruch płynu: np. $A = 12$, $B = 0$ oznacza przepływ wywołany gradientem ciśnienia, zaś $A = 0$, $B = 2$ — przepływ wywołany ruchem ścianki.

4. Schemat różnicowy równań ruchu

Pokrywając obszar przepływu siatką prostych, równoległych odpowiednio do osi współrzędnych (por. rys. 1):

$$x = x_0 + ih, \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$y = y_0 + jh, \quad (j = 1, 2, \dots),$$

otrzymamy kwadratową siatkę o kroku równym h .

Zastępując pochodne występujące w równaniach (11) i (12) prostymi wyrażeniami różnicowymi [6] otrzymamy wzory dla $\Psi_{i,j}$ oraz $\zeta_{i,j}$ w punkcie „0”, w zależności od wartości tych funkcji w węzłach sąsiednich:

$$\zeta_{i,j} = \frac{1}{4}(\zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j-1} + \zeta_{i+1,j} + \zeta_{i-1,j} - \frac{\text{Re}}{16} [(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j})(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) + (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1})]) + \frac{H^2}{4}(\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}), \quad (18)$$

$$\Psi_{i,j} = \frac{1}{4}(\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) - \frac{1}{4}h^2\zeta_{i,j}. \quad (19)$$

5. Rozwiązanie równań różnicowych

Otrzymane w poprzednim punkcie pracy przybliżone równania różnicowe rozwiązano metodą iteracji.

Wartości funkcji prądu i wirowości na granicach obszaru obliczeniowego, tzn. na „wejściu” i „wyjściu” z kanału są znane i stałe w ruchu ustalonym. Na ściankach natomiast znane są tylko wartości funkcji prądu.

Wartości wirowości na ściankach są początkowo (jak w całym obszarze obliczeń) założone możliwie blisko przewidywanych, a następnie przybliżane w toku procesu iteracyjnego.

Do poprawienia wartości ζ na brzegach obszaru (tj. w węzłach oznaczonych przykładowo „krzyżykami” na rys. 1) wykorzystano zależność wyprowadzoną w pracy [9].

$$\zeta_0 = \frac{3(\Psi_2 - \Psi_0)}{h^2} - \frac{\zeta_2}{2} - \frac{3U}{h}. \quad (20)$$

Aby uniknąć nieustalonych oscylacji pola wartości funkcji wirowości nie stosuje się w nowym cyklu iteracji wartości bezpośrednio wyliczonych z wzoru (20), lecz jej kombinację liniową z wartością z poprzedniego cyklu. Dla nieruchomej ścianki będzie

$$\zeta_0^{(n)} = \zeta_0^{(n-1)} + \frac{1}{2}[\zeta_0 - \zeta_0^{(n-1)}], \quad (21)$$

gdzie:

$\zeta_0^{(n-1)}$ — poprzednia wartość brzegowa,

ζ_0 — nowa wartość brzegowa,

$\zeta_0^{(n)}$ — wartość brzegowa wprowadzona do nowego cyklu iteracyjnego.

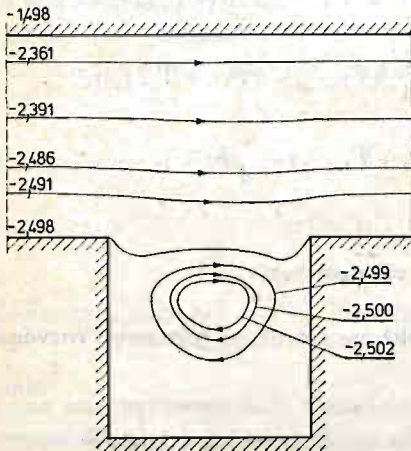
Osobnego traktowania wymagają naroża występujące w obszarze przepływu.

Dla naroża wklęsłego wartości brzegowe w punktach 6 i 7 poziomej ścianki oraz w punktach 8 i 9 pionowej ścianki naroża wyliczono posługując się zależnością (21) zastosowaną odpowiednio do punktów 5, 10, 11. Wartość w punkcie 12 naroża musi być równa:

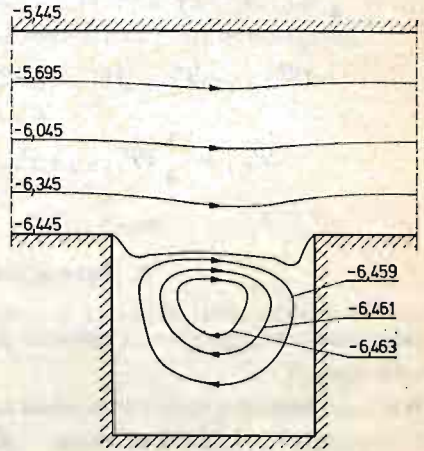
$$\zeta_{12} = \zeta_6 = \zeta_8. \quad (22)$$

Dla naroża wypukłego wyprowadzono dwie różne wartości z powodu dużego gradientu wirowości. Jedną z nich wyliczono przy użyciu zależności (21) i odpowiednich wartości w punktach 1 i 4, drugą przy użyciu odpowiednich wartości z punktu 1 i 3.

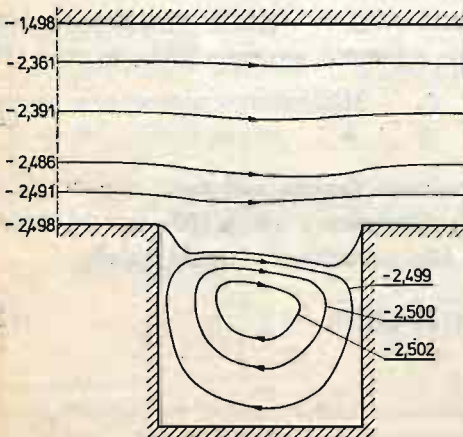
Przepływ płynu wywołany gradientem ciśnienia $A = 12$, $B = 0$



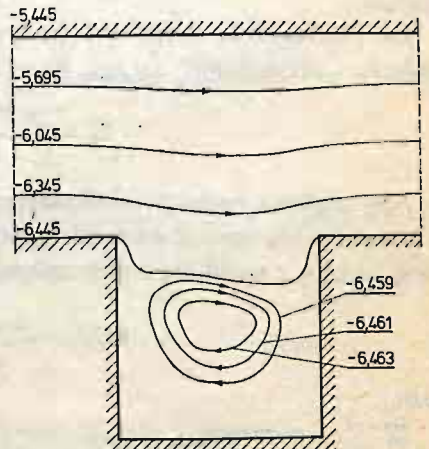
Rys. 2. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20$, $H = 0,5$,
 $d \times b = 2 \times 1$



Rys. 3. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 2 \times 1$



Rys. 4. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50$, $H = 0,5$,
 $d \times b = 2 \times 1$



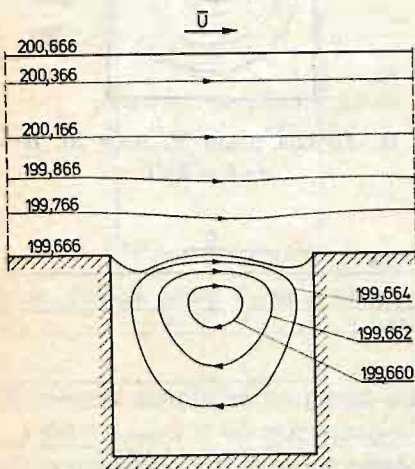
Rys. 5. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 2 \times 1$

6. Wyniki obliczeń. Wnioski

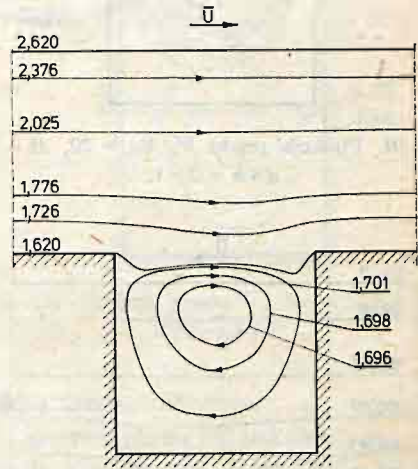
Zastosowany w pracy schemat różnicowy dla magnetohydrodynamicznych równań Naviera-Stokesa charakteryzuje się dla małych liczb Reynoldsa dobrą stabilnością i zbieżnością.

Obliczenia przeprowadzono dla liczb Reynoldsa $Re = 0, 1, 5, 10, 20, 50$, liczb Hartmana $H = 0,1, 0,5, 1$, kroku siatki $h = 0,1$, wymiary kanału przyjęto: $d \times b = 2 \times 1, 3 \times 1$. Rysunki 2÷15 przedstawiają sporządzone na podstawie obliczeń wykresy linii

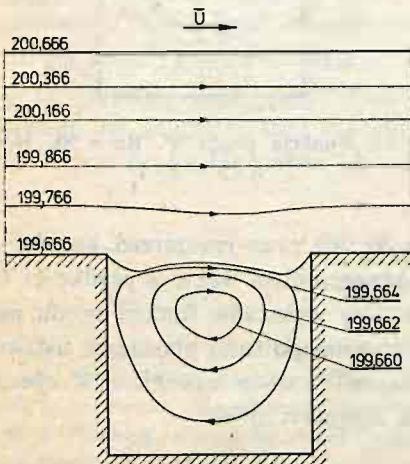
Przepływ wywołany ruchem ścianki $A = 0, B = 2,$



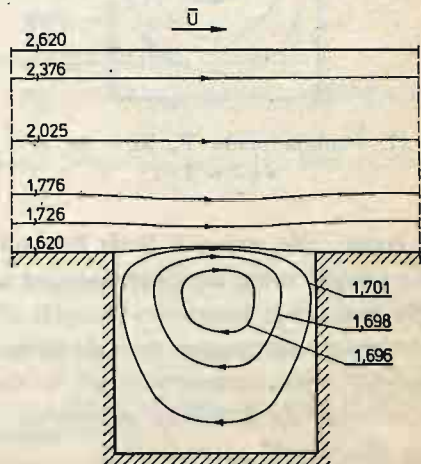
Rys. 6. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20, H = 0,1,$
 $d \times b = 2 \times 1$



Rys. 7. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20, H = 1,0$
 $d \times b = 2 \times 1$

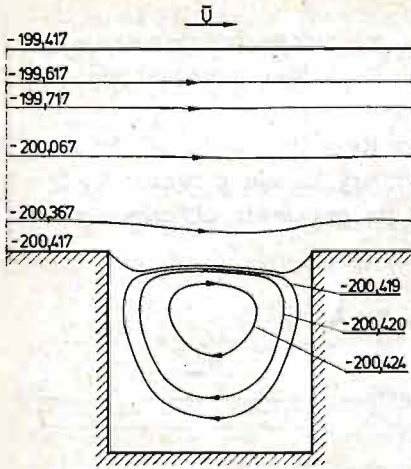


Rys. 8. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50, H = 0,1,$
 $d \times b = 2 \times 1$

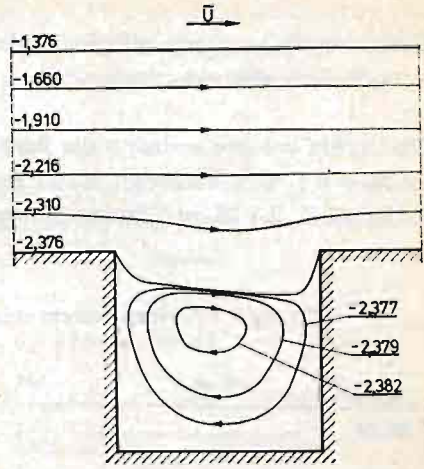


Rys. 9. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50, H = 1,0,$
 $d \times b = 2 \times 1$

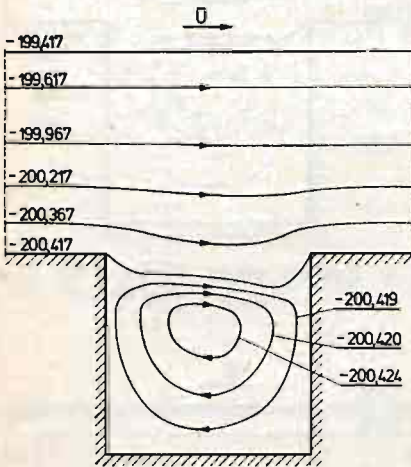
Przepływ wywołany ruchem ścianki i gradientem ciśnienia $A = 6, B = 1$



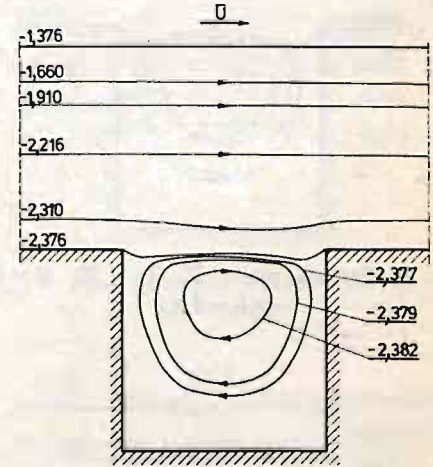
Rys. 10. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20$, $H = 0,1$,
 $d \times b = 2 \times 1$,



Rys. 11. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 2 \times 1$



Rys. 12. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50$, $H = 0,1$,
 $d \times b = 2 \times 1$



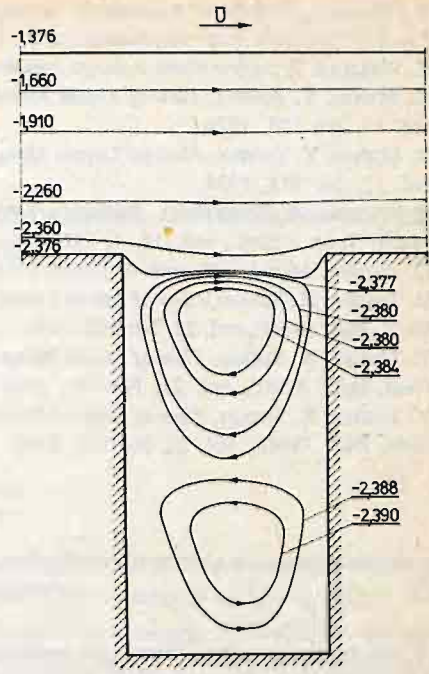
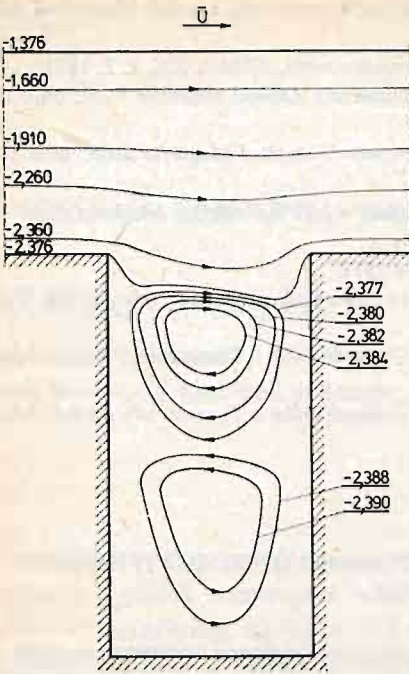
Rys. 13. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 2 \times 1$

$\Psi = \text{const.}$, dla różnych liczb Reynoldsa ($Re = 20, 50$) oraz rozszerzeń kanału. Fakt ruchu ścianki został uwidoczniony na wykresach zaznaczeniem wektora prędkości \bar{U} .

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń i analizy wykresów funkcji prądu można sformułować następujące wnioski dotyczące przedstawionego tutaj płaskiego, ustalonego przepływu płynu magnetycznego w kanale z niesymetrycznym uskokiem w obecności poprzecznego do kierunku przepływu płynu pola magnetycznego:

— dla ścianki nieruchomej

a) linia oderwania charakteryzuje się wyraźną symetrią względem osi geometrycznej uskoku dla $Re > 20$,



Rys. 14. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 3 \times 1$

Rys. 15. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 3 \times 1$

- b) obszar zastoju ze wzrostem liczby Reynoldsa nieznacznie rośnie,
- c) środek wiru w obszarze zastoju leży blisko geometrycznej osi uskoku,
- d) wzrost liczby Hartmana powoduje powstanie wyraźnej asymetrii linii oderwania,
— dla ścianki ruchomej i przepływu bezgradientowego:
- e) obszar zastoju ze wzrostem liczby Reynoldsa nieznacznie wzrasta,
- f) środek wiru ze wzrostem liczby Hartmana oddala się od geometrycznej osi uskoku
zgodnie z kierunkiem przepływu,
— dla ścianki ruchomej i przepływu wywołanego gradientem ciśnienia:
- g) ze wzrostem liczby Reynoldsa linia oderwania charakteryzuje się wyraźną symetrią
względem osi geometrycznej uskoku,
- h) wzrost liczby Hartmana powoduje powstanie wyraźnej asymetrii linii oderwania.

Literatura cytowana w tekście

1. A. B. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер, *Магнитогидродинамические течения в каналах*, Изд. Наука, Москва 1970.
2. А. Б. Цинобер, *Магнитогидродинамическое обтекание тел*, Изд. Зинатне, Рига 1970.
3. W. J. PROSNAK, *Mechanika płynów*, t. 1, PWN, Warszawa 1970.
4. H. PEYRET, J. LADEVESE, *Resolution numerique de l'ecoulement dans un canal avec elargissement brusque*, Euromech Coll. 27 on Numerical methods for solving the Navier-Stokes equations, Aug. 16-19, 1972, Jabłonna, Polska.

5. E. WALICKI, *Stabilność i zbieżność prostego schematu różnicowego dla równań Naviera — Stokesa* Zeszyty Naukowe P. Ł. Mechanika, z. 29, Łódź 1972.
6. E. WALICKI, *Przepływ płynu lepkiego kanałem o nagłym rozszerzeniu*, ABM t. XX, z. 2, 1973.
7. K. SUDON, Y. TOMITA, *Flow of Liquid Metals with a Transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 17, No 108, 1974.
8. K. SUDON, Y. TOMITA, *Flow of Liquid Metals with a transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 17, No 114, 1974.
9. E. WALICKI, A. TOPOLIŃSKI, *Powolny przepływ cieczy lepkiej w kanale o nagłym lokalnym rozszerzeniu*. Mech. Teor. i Stos., vol. 14, 1, 1976.
10. D. POTTER, *Metody obliczeniowe fizyki*, PWN, Warszawa 1977.
11. Y. TOMITA, K. SUDON, *Flow of Liquid Metals in Curved Channels under a Transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 22, No 167, 1979.
12. Y. TOMITA, K. SUDON, *Flow of Liquid Metals in Curved Channels under a Transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 22, No 173, 1979.
13. Y. TOMITA, K. SUDON, *Flow of Liquid Metals in Curved Channels under a Transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 23, No 176, 1980.

Резюме

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ МГД В КАНАЛЕ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ
РАСШИРЕНИЕМ

В работе представлено численное решение, соответствующее течению электропроводной жидкости при малых значениях числа Рейнольдса и Гартмана в канале с местным несимметричным расширением. МГД уравнения Навье-Стокса для плоского течения решены методом конечных разностей. Рассмотрено течение в каналах с разными размерами расширения. Результаты вычисления для чисел Рейнольдса $Re \leq 50$ и чисел Гартмана $H \leq 1,0$ представлены в виде графиков линий тока.

Summary

NUMERICAL ANALYSIS OF MHD FLOW IN THE CHANNEL WITH A UNSYMMETRICAL
CAVITY

In the paper the numerical solution fitted of the electrical-conductance fluid flow with low Reynolds number and low Hartman number in the channel with unsymmetrical cavity is described. The method of finite differences is used to solve the MHD Navier-Stokes equations for plane flow. The flow through channels with different dimensions of cavity is considered. The results of numerical investigations for Reynolds number $Re \leq 50$ and Hartman number $H \leq 1,0$ are shown in graphs of streamlines.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1981 roku

TWO VERSIONS OF WOŹNIAK'S CONTINUUM MODEL OF HEXAGONAL-TYPE GRID PLATES

TOMASZ LEWIŃSKI (WARSZAWA)

Politechnika Warszawska

Instytut Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich

1. Introduction

The subject of the considerations are plane-stress statical problems of dense, elastic, hexagonal grid plates, constructed from bars, Fig. 1. The structures of this type are widely used in civil engineering, cf. [1] as well as in aerospace technology. Difficulties occurring, when exact solutions of statical problems of lattice-type plates are being sought, justify attempts endeavouring to formulate approximate continuum approaches.

The most simple, asymptotic (in Woźniak's meaning, [2]) model has been established by Horvay, cf. [3, 4]. In these papers effective Young modulus and Poisson's ratio for honeycomb plates have been obtained and exhibited by means of the appropriate diagrams.

The aim of the present paper is to discuss continuum descriptions of the analysed plate response by means of the two-dimensional Cosserat's media with fibrous structure, utilized by Woźniak in his lattice-type shell theory, [2]. In the most general among many of Woźniak's concepts, the deformation of the grid surface structure consisted of nodes („elements”) and rods („ligaments”) is approximated by means of a model of a regular system of bodies, cf. [2], part I. The „elements” of the structure act as the bodies of the system. The interactions between the bodies are transmitted by the „ligaments”. One of the basic assumptions of the theory is the existence of the potential of binary interactions. This assumption (see (3.4), p. 39, [2]) restricts the applications of the theory to a certain class of surface structures, that will be further called the structures of simple layout, in which any two directly interacting elements, being joined by one ligament only (cf. [2], p. 50).

The behaviour of a complementary class of structures, which will be called the structures of complex layout, cannot be examined (without additional justifications) by means of the regular system of bodies theory. Continuum approach to the lattice-type plates of complex layout has been presented in the paper [5] of Klemm and Woźniak. The authors assume, that also in the case of complex structure the Woźniak's theory of grid shells and

¹⁾ By means of this term, grid structures constructed from bars connected in rigid nodes are understood in the paper.

plates (based on the regular system of bodies theory) can be applied. The complex geometry implies modifications of constitutive equations only.

Constitutive equations of the theory of complex layout grid plates are not uniquely definite. Several topics resulting from this fact are discussed in the paper. An analysis is exemplified by the case of honeycomb grids which belong to the complex ones.

Thus the internal forces, i.e. stress $p^{\alpha\beta}$ and couple stress m^α tensors are not uniquely determined, because of the arbitrariness of the definitions of elastic plate potential σ . Two ways of computing this function will be presented. The first one has been proposed by Klemm and Woźniak, [6]. It is thought appropriate to recall, to correct (an isotropy of the model has not been revealed) and to generalise Klemm and Woźniak's results by taking into account transverse shear deformations of the lattice rods.

In Sec. 4 a new method of defining the plate potential σ leading to the new version of constitutive equations is presented.

Some of effective elastic moduli (so called micropolar moduli) can not be uniquely defined. This has been noted by Woźniak, Pietras and Konieczny in the papers [7 - 9] pertaining to the discrete elasticity theory. This lack of uniqueness follows from an inadequacy of the relatively simple continuum Cosserat's model when deformations of discrete two-dimensional structure are being analysed. Nevertheless such a model is undoubtedly more accurate than Horvay's asymptotic theory.

2. Formulation of the problem

2.1 Basic assumptions. The grid is assumed to be composed of straight bars whose axes constitute a plane, regular, equilateral honeycomb (hexagonal) layout, the internode spacings being equal to l , see Fig. 1. Although the lattice bars need not to be prismatic they are required to possess two symmetry axes. The structure is made of an elastic, isotropic and homogeneous material elastic properties of which being characterized by Young modulus E and Poisson's ratio ν . Considerations are confined to the grids constructed by bars sufficiently slender so as to the conventional, improved (by taking

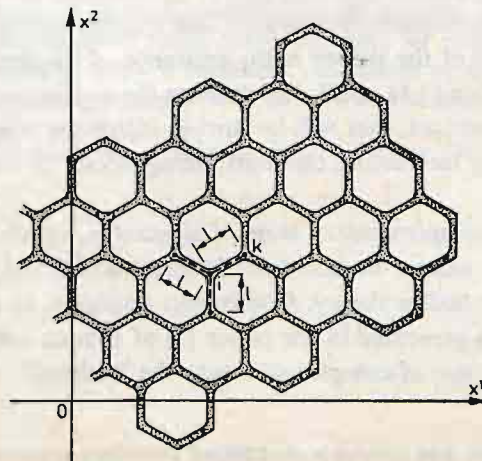


Fig. 1

into account transverse shear deformations of bars) theory of elastic rods can be applied. Moreover the thickness of the grid is assumed to be of unit depth. The loads considered: in-plane tangent forces and moments normal to the mid-surface are concentrated in nodes.

Consider a bar $i-k$, cf. Fig. 2. Generalized forces and displacements at both nodes i and k are given in Fig. 3; slope deflection equations, cf. [10], read

$$M_{ik} = -\frac{EJ}{l} [s\varphi_i + r\varphi_k - (s+r)\Psi_{ik}], \quad M_i = \frac{EJ}{l} \left(\frac{s-r}{2} \right) (\varphi_k - \varphi_i),$$

$$T_{ik} = -T_i = 2(s+r) \frac{EJ}{l^2} \left[\Psi_{ik} - \frac{1}{2} (\varphi_i + \varphi_k) \right], \tag{2.1}$$

$$N_{ik} = N_i = 12\eta p \frac{EJ}{l^2} \cdot \gamma_{ik} = 2(s+r)\bar{\eta} \frac{EJ}{l^2} \cdot \gamma_{ik},$$

where

$$\eta = Al^2/12J, \quad \bar{\eta} = 6\eta \cdot p/(s+r), \tag{2.2}$$

$$s = \varphi_{ii}/\Delta, \quad r = -\varphi_{ik}/\Delta, \quad \Delta = \varphi_{ii}^2 - \varphi_{ik}^2,$$

$$\varphi_{ii} = 2c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{\kappa(1+\nu)}{3\eta}c_3, \tag{2.3}$$

$$\varphi_{ik} = 2c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{\kappa \cdot (1+\nu)}{3\eta}c_3,$$

$$c_1 = \int_0^{1/2} \frac{\bar{\xi}^2 J}{\bar{J}(\bar{\xi})} d\bar{\xi}, \quad c_2 = \int_0^{1/2} \frac{J d\bar{\xi}}{\bar{J}(\bar{\xi})}, \quad c_3 = \frac{1}{2} \cdot p = \int_0^{1/2} \frac{A d\bar{\xi}}{A(\bar{\xi})}.$$

Functions $\bar{A}(\bar{\xi})$ and $\bar{J}(\bar{\xi})$ express cross section area and moment of inertia whereas A and J denote auxiliary effective quantities. In the considered case of rectangular cross sections

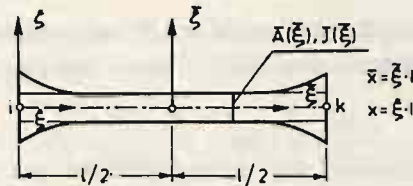


Fig. 2

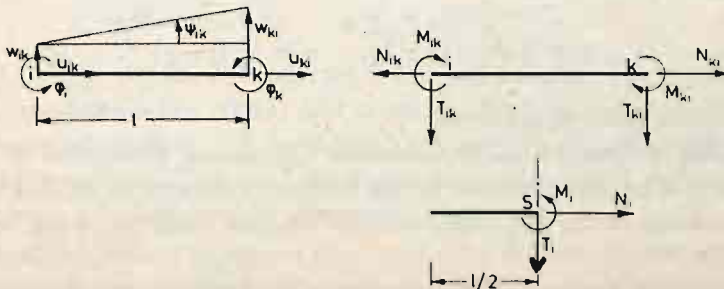


Fig. 3

of the rods, the coefficient κ is equal to 1.2, cf. [10]. The slope deflection ψ_{ik} and the extension γ_{ik} of the member $i-k$ are defined as follows

$$\Psi_{ik} = (w_k - w_i)/l, \quad \gamma_{ik} = (u_k - u_i)/l. \quad (2.4)$$

Setting the effective quantities A and J so as to

$$p = 2c_3 = 1, \quad c_2 = 1/2, \quad (2.5)$$

the simplified versions of the relations (2.1)

$$\begin{aligned} M_{ik} &= -\frac{EJ}{l} \frac{1}{\bar{\eta}} [(3\eta + \bar{\eta})\varphi_i + (3\eta - \bar{\eta})\varphi_k - 6\eta\Psi_{ik}], \\ M_i &= -\frac{EJ}{l} (\varphi_k - \varphi_i), \quad N_{ik} = N_i = 12\eta \cdot \frac{EJ}{l^2} \cdot \gamma_{ik}, \\ T_{ik} &= -T_i = 12\frac{\eta}{\bar{\eta}} \frac{EJ}{l^2} \cdot \left[\Psi_{ik} - \frac{1}{2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

are found, where the formulae

$$s+r = 6\eta/\bar{\eta}, \quad s-r = 2, \quad (2.7)$$

are used

In the case of $\bar{A}(\xi) = 1 \cdot h = \text{const}$, $\bar{J}(\xi) = 1 \cdot h^3/12 = \text{const}$ (where h stands for a height of bars) we have

$$c_1 = 1/24, \quad c_2 = 1/2, \quad c_3 = p/2 = 1/2, \quad (2.8)$$

hence

$$\bar{\eta} = \eta + 12\zeta, \quad \zeta = (1+\nu)/5, \quad \eta = \frac{l^2}{h^2}, \quad \frac{EJ}{l^3} = \frac{E}{12\eta\sqrt{\eta}} \quad (2.9)$$

If the lattice bars are sufficiently slender ($hl < 1/6$, say) and influence of shear deformations of the bars can be neglected thus

$$\bar{\eta} = \eta, \quad s = 4, \quad r = 2. \quad (2.10)$$

In the course of the procedure one more ratio ϱ (defined as a quotient of the diameter of the circle inscribed in the hexagonal opening to the spacing of the centres of neighbouring openings) is employed. We have

$$\varrho = (\sqrt{3\eta} - 1)/\sqrt{3\eta}, \quad \eta = \frac{1}{3}(1-\varrho)^{-2}. \quad (2.11)$$

The ratio ϱ varies from zero to one.

2.2 Foundations of Woźniak's continuum approach. Continuum description of a response of the considered grid structure is based on the Woźniak's concept [5, 6]. It is worth recalling here the basic ideas of the approach, exemplifying the methods by the specific case of hexagonal plate.

Proceeding in this way as in [4], the nodes of the lattice are divided into two families of main and intermediate nodes, Fig. 4. The division depends on the observation, i.e.

on the fixed coordinate system. Displacements of main nodes are assumed to be approximated by functions: $x^\alpha \rightarrow u^\alpha, \varphi, \alpha = 1, 2$, which are supposed to be regular and sufficiently smooth, so as to in the vicinities $r \leq l\sqrt{3}$ of the nodes linear approximation can be applied. The grid plate can be divided (by various ways) into repeated segments. Fig. 4 shows two types of hexagonal segments: with the centres in the intermediate joints (type I) or in the main ones (type II). Assuming the function u^α, φ to be linear in the segments' areas, displacements of the main nodes (adjoining the centre of the segment) can be expressed by means of the values of functions u^α, φ and their first derivatives $\partial_\alpha u^\beta, \partial^\alpha \varphi$, referred to the segments' centre. Then an energy of the segment (i.e. the energy due to de-

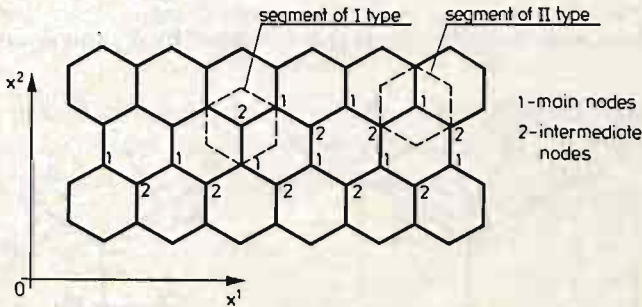


Fig. 4

formations of the rods belonging to the segment) can be found. Dividing this energy by the area P of the segment „ i ”, $i = I, II$, an energy density $\sigma(i)$ is obtained. The function $\sigma(i)$ can be expressed (as it will be shown further) in terms of components of strain measures

$$\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u_\beta - e_{\alpha\beta} \varphi, \quad \kappa_\alpha = \partial_\alpha \varphi, \quad \partial_\alpha = \partial / \partial x^\alpha \tag{2.12}$$

($e_{\alpha\beta}$ denote Ricci tensor) and external loads subjected to intermediate nodes. Internal forces $p_{(i)}^{\alpha\beta}$ and $m_{(i)}^\alpha$, i.e. stresses and stress couples, which are defined as follows

$$p_{(i)}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \sigma_{(i)}}{\partial \gamma_{\alpha\beta}}, \quad m_{(i)}^\alpha = \frac{\partial \sigma_{(i)}}{\partial \kappa_\alpha} \tag{2.13}$$

satisfy (see [2]) the equations of equilibrium

$$\partial_\alpha p_{(i)}^{\alpha\beta} + p_{(i)}^\beta = 0, \quad \partial_\alpha m_{(i)}^\alpha + e_{\alpha\beta} p_{(i)}^{\alpha\beta} + Y_{(i)}^3 = 0, \tag{2.14}$$

where $p_{(i)}^\beta, Y_{(i)}^3$ denote densities of external forces and couples. The equations of equilibrium (2.14), constitutive Eqs. (2.13) and strain — displacements relations (2.12) constitute the system of equations of the lattice-type plate theory. By adding appropriate boundary conditions, (see [2] Ch. IV) the theory is completed and well-established; thus the boundary value problems for finite domains can be examined.

The topics of the present paper are concerned with the constitutive equations (2.13). In the subsequent sections two versions of these equations, resulting from two methods of defining the density of strain energy of the lattice, will be presented.

3. Constitutive equations due to Woźniak and Klemm (variant I)

The derivation presented in [5] will be recalled here; considerations are generalised to the case of deep bars, for which the slope deflection equations (2.6) hold true. The starting point of the procedure is a division of the plate into repeated segments of the type I, the intermediate nodes „a” being the centres of them, Fig. 5. Three main nodes S_i , $i = I, II, III$ lie on the vertices of the hexagon. With the each bar $a-S_i$ a local base $t_{(i)}$, $\tilde{t}_{(i)}$ is associated, cf. Fig. 5. We have

$$t_{(i)}^1 = \tilde{t}_{(i)}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{i2}, \quad t_{(i)}^2 = -\tilde{t}_{(i)}^1 = \frac{1}{2} (1 - 3 \cdot \delta_{i2}), \quad (3.1)$$

where Kronecker delta and the difference $(i-j)$ are denoted by δ_{ij} and ε_{ij} , respectively.

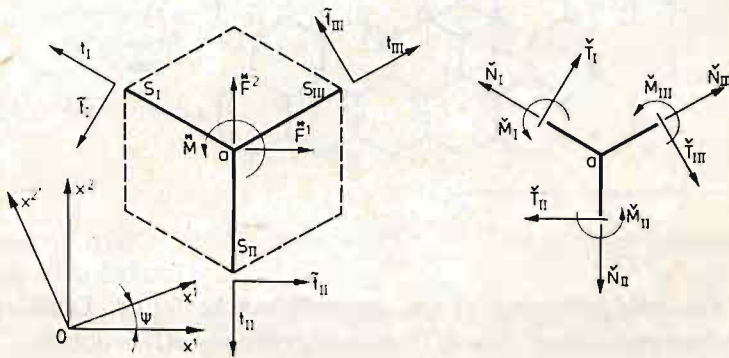


Fig. 5

By using of the assumption of the segment-wise linear behaviour of displacement functions, the displacements of S_i points can be determined by means of the values of u^α and φ functions and their first derivatives computed in the point „a”

$$u_{(i)}^\alpha = u^\alpha|_{(a)} + \partial_\beta u^\alpha|_{(a)} \cdot t_{(i)}^\beta \cdot l, \quad \varphi_{(i)} = \varphi|_{(a)} + \partial_\alpha \varphi|_{(a)} \cdot t_{(i)}^\alpha \cdot l.$$

In order to simplify notations the values of a certain function f in a point „a” will be denoted by the sign „v”, i.e. $f|_{(a)} = \check{f}$. Thus the above relations can be rewritten to the form

$$u_{(i)}^\alpha = \check{u}^\alpha + \partial_\beta \check{u}^\alpha \cdot t_{(i)}^\beta \cdot l, \quad \varphi_{(i)} = \check{\varphi} + \partial_\alpha \check{\varphi} \cdot t_{(i)}^\alpha \cdot l.$$

Quantities \check{u}^α and $\check{\varphi}$ ought not to be misinterpreted as displacements of the „a” node; the latters are denoted by u_a^α, φ_a . By means of appropriate projections of $u_{(i)}^\alpha$ and u_a^α on the directions of $t_{(i)}$ and $\tilde{t}_{(i)}$ vectors the displacements of the ends of the bar $a-S_i$, referred to the local base $t_{(i)}, \tilde{t}_{(i)}$, can be calculated as follows

$$\begin{aligned} u_{aI} &= t_{(I)}^\alpha u_a^\beta \delta_{\alpha\beta}, & u_{Ia} &= t_{(I)}^\alpha u_a^\beta \delta_{\alpha\beta}, \\ w_{aI} &= \tilde{t}_{(I)}^\alpha u_a^\beta \delta_{\alpha\beta}, & w_{Ia} &= \tilde{t}_{(I)}^\alpha u_a^\beta \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Then the slope deflection $\psi_{(i)}$ and the extension $\gamma_{(i)}$ of the bar $a-S_i$, defined by

$$\psi_{(i)} = (w_{Ia} - w_{aI})/l, \quad \gamma_{(i)} = (u_{Ia} - u_{aI})/l,$$

can be easily rearranged to the form

$$\begin{aligned} \psi_{(i)} &= \delta u_a^\alpha \tilde{t}_{(i)}^\beta \delta_{\alpha\beta} + \tilde{t}_{(i)}^\alpha t_{(i)}^\beta \check{\gamma}_{\beta\alpha} + \check{\varphi}, \\ \gamma_{(i)} &= \delta u_a^\alpha t_{(i)}^\beta \delta_{\alpha\beta} + t_{(i)}^\alpha t_{(i)}^\beta \check{\gamma}_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

and, similarly,

$$\Delta\varphi_{(i)} \equiv \varphi_a - \varphi_l = \delta\varphi - \check{\chi}_\alpha t_{(i)}^\alpha \cdot l,$$

where

$$\delta u^\alpha = (\check{u}^\alpha - u_a^\alpha)/l, \quad \delta\varphi = \varphi_a - \check{\varphi},$$

and, the components of the state of strain referred to the point „a” read

$$\check{\gamma}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \check{u}_\beta - e_{\alpha\beta} \check{\varphi}, \quad \check{\chi}_\alpha = \partial_\alpha \check{\varphi}.$$

If one inserts the quantities $\psi_{(i)}$, $\gamma_{(i)}$ and $\Delta\varphi_{(i)}$ into slope-deflection equations, the internal forces $M_{(i)}$, $T_{(i)}$, $N_{(i)}$ (referred to the middles of bars $a-S_i$, cf. Fig. 3.1), expressed in terms of strain components $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$ and $\check{\chi}_\alpha$, and with the aid of $\delta\varphi$, δu^α

$$\begin{aligned} \check{M}_{(i)} &= \frac{r-s}{2} \frac{EJ}{l} [\delta\varphi - t_{(i)}^\alpha \check{\chi}_\alpha \cdot l], \\ \check{N}_{(i)} &= 2(r+s) \frac{EJ}{l^2} [t_{(i)}^\alpha \delta u^\beta \delta_{\alpha\beta} + t_{(i)}^\alpha t_{(i)}^\beta \check{\gamma}_{\alpha\beta}], \\ \check{T}_{(i)} &= -2(r+s) \cdot \frac{EJ}{l^2} \left[\tilde{t}_{(i)}^\alpha \delta u^\beta \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta\varphi + \tilde{t}_{(i)}^\beta t_{(i)}^\alpha \check{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} t_{(i)}^\alpha \check{\chi}_\alpha l \right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

are obtained. The quantities δu^α , $\delta\varphi$ can be expressed in terms of strain components and the loads F^* , M^* , subjected to the node „a”. To this end, consider the equations of equilibrium of the node „a”, see Fig. 5

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (\check{N}_{(i)} t_{(i)}^\alpha - \check{T}_{(i)} \tilde{t}_{(i)}^\alpha) + F^\alpha &= 0, \\ \sum_{i=1}^m \check{M}_{(i)} - \frac{l}{2} \cdot \sum_{i=1}^m \check{T}_{(i)} + M^* &= 0. \end{aligned}$$

By substituting the formulae (3.2) into above equations and by making use of (3.1), we arrive at the diagonal set of algebraic equations, the solutions of which read

$$\begin{aligned} \delta u^1 &= \frac{1}{2(1+\bar{\eta})} \cdot [-l \cdot \check{\chi}_2 + (1-\bar{\eta}) \cdot (\check{\gamma}_{12} + \check{\gamma}_{21})] - \frac{F^1 l^2}{3(1+\bar{\eta})(r+s)EJ}, \\ \delta u^2 &= \frac{1}{2(1+\bar{\eta})} \cdot [l \check{\chi}_1 + (1-\bar{\eta}) \cdot (\check{\gamma}_{11} - \check{\gamma}_{22})] - \frac{F^2 l^2}{3(1+\bar{\eta}) \cdot (r+s)EJ}, \\ \delta\varphi &= \frac{r+s}{2s} \cdot (\check{\gamma}_{12} - \check{\gamma}_{21}) + \frac{M^* l}{3sEJ}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

By inserting the above equations into (3.2), the internal forces $\check{M}_{(k)}$, $\check{T}_{(k)}$, and $\check{N}_{(k)}$ as functions of strain measures

$$\begin{aligned} \check{M}_{(k)} &= \frac{r-s}{4s} \cdot \frac{EJ}{l} \left[-ls\sqrt{3} \varepsilon_{k2} \check{\alpha}_1 + ls(3\delta_{k2}-1)\check{\alpha}_2 + (s+r)(\check{\gamma}_{12}-\check{\gamma}_{21}) \right] + \frac{r-s}{6 \cdot s} \cdot \check{M}^*, \\ \check{T}_{(k)} &= \frac{-(r+s)EJ}{l^2} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\bar{\eta}}{\bar{\eta}+1} \cdot l \cdot \varepsilon_{k2} \cdot \check{\alpha}_1 + \frac{\bar{\eta}}{2(1+\bar{\eta})} \cdot l \cdot (3\delta_{k2}-1)\check{\alpha}_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{3} \cdot \bar{\eta}}{1+\bar{\eta}} \varepsilon_{k2} \cdot (\check{\gamma}_{11}-\check{\gamma}_{22}) + \left[-\frac{r+s}{2s} + \frac{1}{1+\bar{\eta}} - (2+3\delta_{k2}) \frac{\bar{\eta}}{1+\bar{\eta}} \right] \check{\gamma}_{12} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{s+r}{2s} - \frac{1}{1+\bar{\eta}} - 3\delta_{k2} \frac{\bar{\eta}}{1+\bar{\eta}} \right] \check{\gamma}_{21} \right\} + \frac{(3\delta_{k2}-1)}{3 \cdot (1+\bar{\eta})} \cdot \check{F}^1 + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{1+\bar{\eta}} \varepsilon_{k2} \check{F}^2 + \frac{s+r}{3 \cdot s} \frac{\check{M}^*}{l}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} N_{(k)} &= \frac{(s+r)\bar{\eta}}{(1+\bar{\eta})} \frac{EJ}{l^2} \left\{ -\frac{1}{2} (3\delta_{k2}-1)l\check{\alpha}_1 - l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{k2} \check{\alpha}_2 + [\bar{\eta} + (2-3\delta_{k2})]\check{\gamma}_{11} + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\eta} + 3\delta_{k2})\check{\gamma}_{22} + \sqrt{3} \varepsilon_{k2} (\check{\gamma}_{12} + \check{\gamma}_{21}) \right\} - \frac{\sqrt{3} \bar{\eta}}{3(1+\bar{\eta})} \varepsilon_{k2} \check{F}^1 + \frac{\bar{\eta}}{3(1+\bar{\eta})} (3\delta_{k2}-1) \check{F}^2. \end{aligned}$$

are finally found. Strain energy of the rods $a-S_i$, $i = I, II, III$, belonging to the segment can be calculated as follows

$$\begin{aligned} E_{(I)} &= \sum_{i=I}^{III} E_i, \quad E_i = E_i^M + E_i^T + E_i^N, \quad \text{where} \\ E_i^M &= \int_0^{l/2} \frac{(\check{M}_{(i)} - \bar{x} \cdot \check{T}_{(i)})^2 d\bar{x}}{2 \cdot EJ(\bar{x})} + \int_0^{l/2} \frac{(\check{M}_{(i)} + \bar{x} \check{T}_{(i)})^2 d\bar{x}}{2EJ(\bar{x})}, \\ E_i^N &= 2 \int_0^{l/2} \frac{\check{N}_{(i)}^2 d\bar{x}}{2EA(\bar{x})}, \quad E_i^T = 2 \cdot \int_0^{l/2} \frac{\kappa \check{T}_{(i)}^2}{2GA(\bar{x})} d\bar{x}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

The potential $\sigma_I \equiv \sigma_{(v)} = E_{(I)}/P$, $P = 1.5 \cdot \sqrt{3} l^2$.

Carrying out the integration we obtain

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \sigma_I^0 + \sigma_I^*, \quad \sigma_I^0 = \frac{1}{2} \check{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} \check{\gamma}_{\alpha\beta} \check{\gamma}_{\gamma\delta} + \check{B}^{\alpha\beta\gamma} \check{\gamma}_{\alpha\beta} \check{\alpha}_\gamma + \frac{1}{2} \check{C}^{\alpha\beta} \check{\alpha}_\alpha \check{\alpha}_\beta, \\ \sigma_I^* &= \check{p}^{\alpha\beta} \check{\gamma}_{\alpha\beta} + \check{m}^{\alpha} \check{\alpha}_\alpha. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tensors \check{A} , \check{B} , \check{C} , \check{p}^* , \check{m}^* take the form

$$\begin{aligned} \check{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \check{\lambda} \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + (\check{\mu} + \check{\alpha}) \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + (\check{\mu} - \check{\alpha}) \cdot \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma}, \\ \check{B}^{111} &= -\check{B}^{122} = -\check{B}^{221} = -\check{B}^{212} = B, \quad \text{the others} \quad \check{B}^{\alpha\beta\gamma} = 0, \\ \check{C}^{\alpha\beta} &= \check{C}^{\delta\alpha\beta}, \quad \check{p}^{\alpha\beta} = 0, \quad \check{m}^{\alpha} = 0 \quad \forall (F^{\alpha}, M), \end{aligned} \quad (3.7)$$

where moduli $\check{\lambda}$, $\check{\mu}$, $\check{\alpha}$, \check{B} and \check{C} are defined as follows

$$\check{\lambda} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \eta(\bar{\eta}-1)}{(\bar{\eta}+1)} \frac{EJ}{l^3}, \quad \check{\mu} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \eta}{1+\bar{\eta}} \cdot \frac{EJ}{l^3}, \tag{3.8}$$

$$\check{\alpha} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \eta}{\bar{\eta}+3\eta} \frac{EJ}{l^3}, \quad \check{B} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \eta}{\bar{\eta}+1} \cdot \frac{EJ}{l^2}, \quad \check{C} = \frac{\sqrt{3} \cdot (3\eta+\bar{\eta}+1)}{3(1+\bar{\eta})} \cdot \frac{EJ}{l}.$$

The quantities A and J are fixed acc. to (2.5). The parameters η and $\bar{\eta}$ are defined by (2.9) provided the bars are prismatic. Moreover, if the grid members are slender one can substitute $\eta = \bar{\eta}$ into (3.8), cf. (2.10), to obtain effective moduli independent of l^2

$$\check{\lambda}/E = \frac{\sqrt{3}(\eta-1)}{6\sqrt{\eta}(\eta+1)}, \quad \check{\mu}/E = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\eta} \cdot (1+\eta)}, \quad \check{\alpha}/E = \frac{\sqrt{3}}{24\eta\sqrt{\eta}} \tag{3.9}$$

and „micropolar” constants

$$\check{B}/E = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{\eta}(1+\eta)} l, \quad \check{C}/E = \frac{\sqrt{3} \cdot (4\eta+1)}{36\eta\sqrt{\eta} \cdot (1+\eta)} \cdot l^2, \tag{3.10}$$

proportional to l^1 and l^2 respectively.

Thus the elastic properties of the hexagonal plate in the plane-stress state are described by the tensors \check{A} , \check{B} , and \check{C} . The tensors \check{A} and \check{C} are isotropic because the geometry of the lattice (observing, say, a rotation of it around the fixed main node) is invariant under the rotation at the angles $2/3\pi n$, $n = 1, 2, \dots$. Tensors of the second and the fourth orders, which are invariant under such transformations, have isotropic forms, invariant under arbitrary change of the coordinate system. Thus the components of the tensors \check{A} and \check{C} do not vary provided the main nodes are defined as intermediate and vice versa. One can say that these tensors do not depend of the choice of main nodes.

The \check{B} tensor is characterised by different properties. It can be shown that the components of \check{B} , referred to the cartesian coordinate system x^α rotated at an angle ψ (cf. Fig. 5), can be written as follows

$$\check{B}^{\alpha'\beta'\gamma'} = \check{B} \cdot \chi^{\alpha'\beta'\gamma'}, \tag{3.11}$$

where components of the tensor χ read

$$\begin{aligned} \chi^{1'1'1'} &= -\chi^{1'2'2'} = -\chi^{2'2'1'} = -\chi^{2'1'2'} = \cos 3\psi, \\ \chi^{2'2'2'} &= -\chi^{1'1'2'} = -\chi^{1'2'1'} = -\chi^{2'1'1'} = \sin 3\psi. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Components of the tensor \check{B} depend on the choice of the coordinate system as well as on the choice of main nodes; namely, an interchanging of main and intermediate nodes imply changes of signs of all components $\check{B}^{\alpha\beta\gamma}$. The tensor \check{B} couples constitutive equations. Its existence results from the lack of centrosymmetry of the lattice, i.e. from the noncentrosymmetry of the vicinity of the each lattice node. Thus the continuum description of the honeycomb plate requires to apply the uncentrosymmetrical models, cf. [11].

²⁾ Horvay's results [3, 4] yield the same definitions of the effective moduli $\check{\lambda}$ and $\check{\mu}$.

The tensors $\check{\mathbf{p}}^*$ and $\check{\mathbf{m}}^*$ are identically equal to zero for the fixed (cf. Fig. 1) coordinate system x^α . Thus the mentioned tensors vanish in an arbitrary coordinate system.

The following factors have inclined the author to recall the Klemm-Woźniak, [6], derivation of constitutive equations:

- a) some of the components of the tensor $\check{\mathbf{A}}$ obtained in [6] are incorrect, so that an isotropy of this tensor as well as its relation to Horvay's results could not be revealed
- b) considerations have been generalised by taking into account the transverse shear deformations of the lattice (not necessarily prismatic) rods
- c) tensors $\check{\mathbf{p}}^*$ and $\check{\mathbf{m}}^*$ vanish. This fact has not been shown in [6].

4. The second version of constitutive equations (variant II)

New procedure, based on the second (II) method (see Sec. 2.2), of defining the strain energy density σ , is proposed here. A starting point is a division of the grid plate into repeated segments of the II type, their centres being in main nodes. Consider the circular vicinity ($r \leq l\sqrt{3}$) of the main node „i”, Fig. 6. Six main nodes A_k , $A = I, II, k = 1, 2, 3$ lie on the circumference $r = l\sqrt{3}$. The functions u^α , φ are assumed to be linear in the circle $r \leq l\sqrt{3}$. Displacements of main nodes adjoining the node „i” can be expressed by means

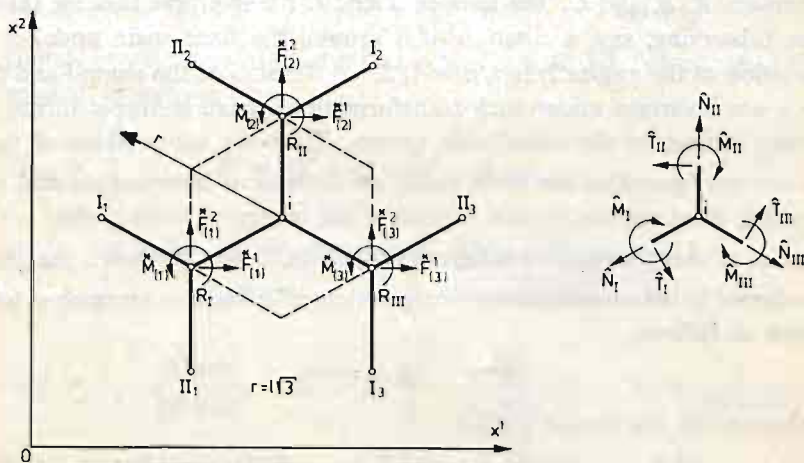


Fig. 6

of the values of functions u^α , φ and their first derivatives in this point. Displacements of the intermediate nodes R_k , $k = I, II, III$, can be found with the aid of the conditions of their equilibrium, analogously to the derivation outlined in Sec. 3. Tiresome rearrangements prove that also the latter displacements can be expressed in terms of the functions u^α , φ , $\partial_\beta u^\alpha$ and $\partial_\beta \varphi$ referred to the point „i”. Then on substituting these expressions into slope-deflection Eqs. (2.6) the internal forces $\hat{M}_{(k)}$, $\hat{N}_{(k)}$ and $\hat{T}_{(k)}$ in the middles of the rods $i - R_k$ (see Fig. 6)

$$\hat{M}_{(k)} = \frac{r-s}{4s} \frac{EJ}{l} \left[-\sqrt{3}rl\epsilon_{k2}\hat{\gamma}_1 + rl(1-3\delta_{k2})\hat{\gamma}_2 - (r+s)(\hat{\gamma}_{21} - \hat{\gamma}_{12}) \right] + \frac{r-s}{6s} \hat{M}_{(k)}^* \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{(k)} = & \frac{-(r+s)EJ}{l^2} \left\{ l \left(\frac{1}{1+\bar{\eta}} - \frac{r}{s} \right) \cdot \left[\frac{1}{2} (3\delta_{k2} - 1) \hat{\kappa}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{k2} \hat{\kappa}_1 \right] + \right. \\ & + \left[\frac{r+s}{2s} - \frac{1}{1+\bar{\eta}} + (3\delta_{k2} - 2) \frac{\bar{\eta}}{1+\bar{\eta}} \right] \hat{\gamma}_{12} + \left[\frac{-(r+s)}{2s} + \right. \\ & + \left. \frac{1}{(1+\bar{\eta})} + 3\delta_{k2} \frac{\bar{\eta}}{1+\bar{\eta}} \right] \hat{\gamma}_{21} - \frac{\sqrt{3} \cdot \bar{\eta}}{1+\bar{\eta}} \varepsilon_{k2} (\hat{\gamma}_{11} - \hat{\gamma}_{22}) \left. \right\} + \\ & - \frac{(r+s)}{s3l} M_{(k)} - \frac{1}{3(1+\bar{\eta})} (3\delta_{k2} - 1) F_{(k)}^* + \frac{\sqrt{3}}{3(1+\bar{\eta})} \varepsilon_{k2} F_{(k)}^{*2}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

[cont.]

$$\begin{aligned} N_{(k)} = & \frac{(r+s)\bar{\eta}}{1+\bar{\eta}} \frac{EJ}{l^2} \left\{ \frac{1}{2} (1 - 3\delta_{k2}) l \hat{\kappa}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{k2} l \hat{\kappa}_2 + \right. \\ & + \left. [\bar{\eta} + (2 - 3\delta_{k2})] \hat{\gamma}_{11} + (\bar{\eta} + 3\delta_{k2}) \hat{\gamma}_{22} - \sqrt{3} \varepsilon_{k2} (\hat{\gamma}_{12} + \hat{\gamma}_{21}) \right\} + \\ & - \frac{\bar{\eta}}{3(1+\bar{\eta})} (3\delta_{k2} - 1) F_{(k)}^{*2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\bar{\eta}}{1+\bar{\eta}} \varepsilon_{k2} F_{(k)}^{*1} \end{aligned}$$

are obtained. For details the reader is referred to [12]. The components of the state of strain computed in the point „i” are denoted by $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ and $\hat{\kappa}_\alpha$.

Compare Eqs. (3.4) and (4.1). Neglecting differences in signs, which depend on the numbering of the nodes, we have

$$\check{M}_{(k)}(\check{\gamma}_{\alpha\beta}, \check{\kappa}_\alpha) = \hat{M}_{(k)}(\hat{\gamma}_{\alpha\beta}, \hat{\kappa}_\alpha), \quad \check{T}_{(k)}(\check{\gamma}_{\alpha\beta}, \check{\kappa}_\alpha) = \hat{T}_{(k)}(\hat{\gamma}_{\alpha\beta}, \hat{\kappa}_\alpha),$$

provided there is inserted $\check{\gamma}_{\alpha\beta} = \hat{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\check{\kappa}_\alpha = \hat{\kappa}_\alpha = 0$; and

$$\check{N}_{(k)}(\check{\gamma}_{\alpha\beta}, \check{\kappa}_\alpha) = \hat{N}_{(k)}(\hat{\gamma}_{\alpha\beta}, \hat{\kappa}_\alpha),$$

provided one substitutes $\check{\gamma}_{\alpha\beta} = \hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ and $\check{\kappa}_\alpha = \hat{\kappa}_\alpha$. Therefore, Eqs. (3.4) and (4.1) have different right hand sides, if κ_α exist. This fact implies, what will be shown further, that the second version analysed herein leads to the different tensors of elastic moduli from those obtained via Woźniak-Klemm’s method.

Proceeding similarly as in Sec. 3 an energy E_{II} accumulated in the rods $i - R_k$, belonging to the segment of the type II (cf. Fig. 4), can be evaluated. The energy density $\sigma_{II} = \sigma_{(A)}$ is defined as a quotient E_{II}/P , $P = 1.5\sqrt{3}l^2$. After appropriate rearrangements we finally obtain

$$\begin{aligned} \sigma_{II} = & \check{\sigma}_{II} + \sigma_{II}^*, \quad \sigma_{II}^* = \hat{p}^{*\alpha\beta} \hat{\gamma}_{\alpha\beta} + \hat{m}^{*\alpha} \hat{\kappa}_\alpha, \\ \check{\sigma}_{II} = & \frac{1}{2} \hat{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{\gamma}_{\alpha\beta} \hat{\gamma}_{\gamma\delta} + \hat{B}^{\alpha\beta\gamma} \hat{\gamma}_{\alpha\beta} \hat{\kappa}_\gamma + \frac{1}{2} \hat{C}^{\alpha\beta} \hat{\kappa}_\alpha \hat{\kappa}_\beta. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Tensors \hat{A} , \hat{B} and \hat{C} have the forms

$$\hat{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \check{A}^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \hat{B}^{\alpha\beta\gamma} = \hat{B} \chi^{\alpha\beta\gamma}, \quad \hat{C}^{\alpha\beta} = \hat{C} \delta^{\alpha\beta}, \tag{4.3}$$

where

$$\hat{B} = \frac{2\sqrt{3}\eta(3\eta - \bar{\eta})}{(1+\bar{\eta})(3\eta + \bar{\eta})} \frac{EJ}{l^2}, \quad \hat{C} = \frac{\sqrt{3} [(3\eta - \bar{\eta})^2 + (3\eta + \bar{\eta})]}{3(1+\bar{\eta})(\bar{\eta} + 3\eta)} \frac{EJ}{l}. \tag{4.4}$$

Quantities A, J and $\bar{\eta}$ are fixed according to Eqs. (2.5) and (2.9). The tensors \mathbf{A} and χ are defined in Sec. 3. In the case of the grid constructed from slender rods ($\bar{\eta} \approx \eta$), we have

$$\hat{B} = \frac{1}{2} \check{B}, \quad \hat{C} = \frac{1+\eta}{1+4\eta} \check{C} \approx \frac{1}{4} \check{C}, \tag{4.5}$$

where \check{B} and \check{C} are defined by Eqs. (3.8)_{4,5}.

The components of tensors \hat{p}^* and \hat{m}^* depend, in a complicated way, on the external loads $F_{(k)}^*$, $M_{(k)}^*$, $k = \text{I, II, III}$, subjected to intermediate nodes. For the sake of brevity, these formulae (obtained in [12]) will not be reported here. However, it is worth mentioning that $\hat{p}^{*\alpha\beta} \neq 0$ and $\hat{m}^{*\alpha} \neq 0$, provided the loads in the intermediate joints exist.

5. Estimations of elastic moduli (resulting from the positive determination of the strain energy)

Obtained in the preceding sections the sets of elastic moduli $(\lambda, \mu, \alpha, \hat{B}, \hat{C})$ and $(\lambda, \mu, \alpha, \check{B}, \check{C})$ satisfy the conditions which yield from the positive definition of the quadratic forms $\check{\sigma}_I \equiv \check{\sigma}_{(v)}$, $\check{\sigma}_{II} \equiv \check{\sigma}_{(\wedge)}$ defined by

$$\check{\sigma}_{(\tau)} = \frac{1}{2} A^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\delta} + B^{\alpha\beta\gamma} \gamma_{\alpha\beta} \varkappa_{\gamma} + \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha} \varkappa_{\beta}, \quad \tau = v, \wedge. \tag{5.1}$$

This fact follows from the derivation of $\check{\sigma}_{(\tau)}$: e.g., when $\tau = \text{I}$, the RHS of the Eq. (3.5)₁, which defines an energy $E_{(I)}$ accumulated in the rods belonging to a segment, is expressed by means of integrals with positive integrand functions; thus the energy $E_{(v)}$ is positive definite for all arbitrary values of components $\gamma_{\alpha\beta}$ and \varkappa_{α} . Nevertheless, the explicit form of energy estimations, which impose certain restrictions on the values of effective elastic moduli, is worth considering.

Let us transform the function $\check{\sigma}$ (an index τ is neglected now), to the convenient form for the further analysis

$$\check{\sigma} = \frac{1}{2} \mathcal{E}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha} \eta_{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6, \tag{5.2}$$

where $\eta_1 = \gamma_{11}, \eta_2 = \gamma_{22}, \eta_3 = \gamma_{12}, \eta_4 = \gamma_{21}, \eta_5 = \varkappa_1, \eta_6 = \varkappa_2$. A coordinate system is fixed as in Fig. 1. The matrix \mathcal{E} can be written in the form

$$\mathcal{E} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2\mu + \lambda & \lambda & & & \mathbf{B} & \\ \hline \lambda & 2\mu + \lambda & & & -\mathbf{B} & \\ \hline & & \mu + \alpha & \mu - \alpha & & -\mathbf{B} \\ \hline & & \mu - \alpha & \mu - \alpha & & -\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B} & -\mathbf{B} & & & \mathbf{C} & \\ \hline & & -\mathbf{B} & -\mathbf{B} & & \mathbf{C} \\ \hline \end{array}$$

By applying Sylvester theorem the following necessary and sufficient conditions for the matrix Ξ to be positive definite

$$\mu > 0, \quad \alpha > 0, \quad \mu + \lambda > 0, \quad C > 0, \quad B^2 < C\mu \quad (5.3)$$

are obtained. Positive definition of the quadratic form (5.2) does not depend of the choice of a coordinate system. Therefore, the inequalities (5.3) are sufficient for δ to be positive determined. Note yet that the sign B (which depends on the choice of main nodes) does not affect in (5.3). The inequality (5.3)₅ shows that the moduli B and C are not arbitrary; this estimation can be treated as an upper bound for B or a lower one for C .

6. Effective Young moduli and Poisson's ratios

The tensor A (symmetrised in respect to both pairs of indices) can be written in the form

$$A^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \cdot \left[\frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + \frac{1}{2} (\delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma}) \right] \quad (6.1)$$

similar to that known from a classical theory of a plane-stress state.

Moduli E_1 and ν_1 , being effective Young and Poisson constants, can be expressed by means of Horvay's [3] formulae

$$E_1 = \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} = \frac{4}{\sqrt{3\eta(\eta + 3)}} \cdot E, \quad (6.2)$$

$$\nu_1 = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} = \frac{\bar{\eta} - 1}{\bar{\eta} + 3}.$$

Energy inequalities (5.3) imply estimations

$$E_1 > 0, \quad -1 < \nu_1 < 1, \quad (6.3)$$

weaker, than those known from a classical three-dimensional theory of elasticity: $E > 0$, $-1 < \nu < 1/2$. Effective Young and Poisson's moduli can be defined in different way, taking as a starting point the reverse form of the constitutive equations (2.13)

$$\gamma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} p^{\gamma\delta} + B_{\alpha\beta\gamma}^{-1} m^\gamma + \gamma_{\alpha\beta}^*, \quad (6.4)$$

$$\kappa_\alpha = B_{\alpha\beta\gamma}^{-1} p^{\beta\gamma} + C_{\alpha\beta}^{-1} m^\beta + \kappa_\alpha^*$$

Displaying the symmetrized part of the tensor A in the form

$$A_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}^{-1} = -\frac{\nu_2}{E_2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \frac{1 + \nu_2}{2E_2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}),$$

we obtain

$$E_2 = \frac{4(\lambda + \mu)(\mu - B^2/C)}{2\mu + \lambda - B^2/C}, \quad \nu_2 = \frac{\lambda + B^2/C}{2\mu + \lambda - B^2/C}. \quad (6.5)$$

It is not difficult to prove that constants $E_\alpha, \nu_\alpha, \alpha = 1, 2$, satisfy inequalities

$$E_2 < E_1, \quad \nu_2 > \nu_1 \quad (6.6)$$

and

$$E_2 > 0, \quad -1 < \nu_2 < 1, \quad (6.7)$$

the latter of which are identical with (6.3). Note that moduli E_2 and ν_2 do not depend of α constant. In the case of $B = 0$, we have $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$, of course.

Moduli E_2 and ν_2 depend on the choice of the version (I or II) of constitutive relations; this dependence is weak in the case of slender lattice rods (cf. Figs. 7, 8) since then, according to (4.5) one obtains $\hat{B}^2/\hat{C} \approx \check{B}^2/\check{C}$. The patterns of variation of effective moduli

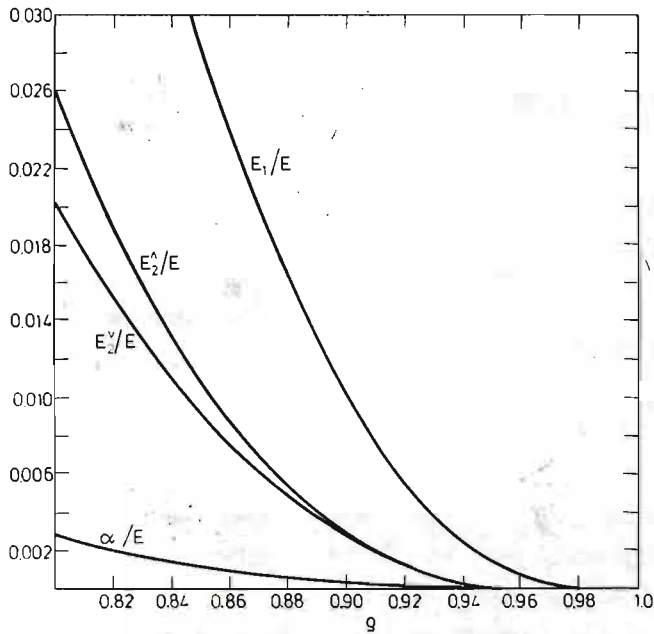


Fig. 7

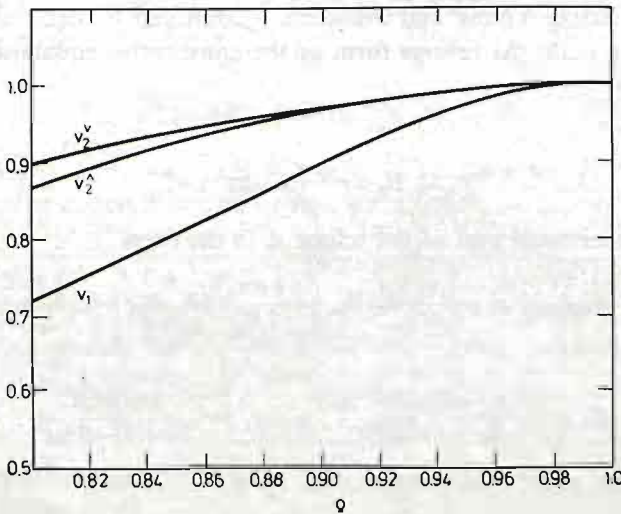


Fig. 8

$E_1, \nu_1, \check{E}_2, \check{\nu}_2, \hat{E}_2, \hat{\nu}_2$ and α depending on the ratio ρ are shown in Figs. 7, 8. The diagrams were made under the the assumption $\eta = \bar{\eta}$. It is readily seen that

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} E_\alpha(\rho) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 1} \nu_\alpha(\rho) = 1, \quad \alpha = 1, 2.$$

An analysis of variation of moduli B and C will be presented in a separate paper.

7. Governing equations in terms of displacements. Boundary value problems

Consider a lattice-type honeycomb plate, Fig. 9, whose mid-surface is referred to cartesian coordinate system x^α . Assume the family of main nodes according to Fig. 9. A part Γ_1 of the boundary is loaded by forces and couples: \bar{p}^α and \bar{m} . On Γ_2 — displacements \bar{u}^α and $\bar{\varphi}$ are known. The loads subjected to internal main nodes are approximated by functions p^α, Y^3 . The loads in intermediate nodes are characterized by tensors \mathbf{p}^* and \mathbf{m}^* .

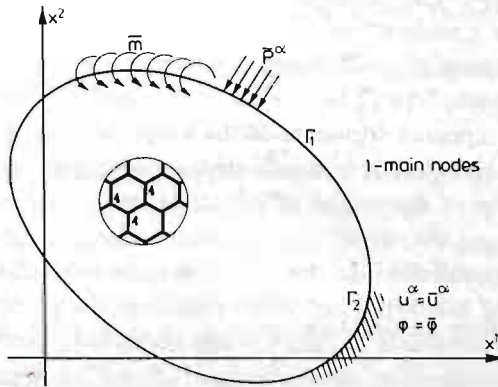


Fig. 9

Substituting constitutive Eqs. (2.13) into equations of equilibrium (2.14) (where $\sigma_{(i)}$ has the form (3.6), provided $i = I$ or (4.2), provided $i = II$), and taking into account strain-displacement relations (2.12), the governing set of equilibrium equations in terms of displacements

$$\begin{aligned} & [(2\mu + \lambda) \partial_1^2 + (\mu + \alpha) \partial_2^2] u_1 + [(\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 \partial_2] u^2 + [B(\partial_1^2 - \partial_2^2) + 2\alpha \partial_2] \varphi + 'p^1 = 0, \\ & [(\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 \partial_2] u^1 + [(2\mu + \lambda) \partial_2^2 + (\mu + \alpha) \partial_1^2] + [-2B \partial_1 \partial_2 - 2\alpha \partial_1] \varphi + 'p^2 = 0, \quad (7.1) \\ & [B(\partial_1^2 - \partial_2^2) - 2\alpha \partial_2] u^1 + [-2B \partial_1 \partial_2 + 2\alpha \partial_1] u^2 + [C(\partial_1^2 + \partial_2^2) - 4\alpha] \varphi + 'Y^3 = 0, \end{aligned}$$

where

$$'p^\alpha = p^\alpha + \partial_\beta p^{*\beta\alpha}, \quad 'Y^3 = Y^3 + \partial_\alpha m^* + e_{\alpha\beta} p^{*\alpha\beta} \quad (7.2)$$

are obtained. The mixed boundary value problems are formulated due to Woźniak [2]: find the functions u^α and φ satisfying Eqs. (7.1) and boundary conditions

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \bar{u}_\alpha, \quad \varphi = \bar{\varphi} \quad \text{on } \Gamma_2 \\ p^{\alpha\beta} n_\beta &= \bar{p}^\alpha, \quad m^\alpha n_\alpha = \bar{m} \quad \text{on } \Gamma_1, \end{aligned} \quad (7.3)$$

where n^α denote components of a unit vector normal to the boundary.

8. Final remarks

Two versions of the lattice-type hexagonal plate theory (in plane-stress state) based on the various ways of defining density of strain energy of the structure have been derived. It is worth distinguishing between similarities and differences of the presented variants by Woźniak-Klemm and by the present author.

i) stress tensors $(\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{m}})$ and $(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{m}})$, and strain measures $(\check{\gamma}, \check{\kappa})$, $(\hat{\gamma}, \hat{\kappa})$ as well as displacements u^α , φ are referred to intermediate (version I) or to main nodes (version II). This is not in contradiction with the fact, that in both cases, functions u^α , φ approximate displacements of main nodes

ii) in both versions constitutive equations have similar form; specifically, tensors $\check{\mathbf{A}}$ and $\hat{\mathbf{A}}$ are identical. The components of \mathbf{A} are expressed by moduli λ , μ and α which do not depend of the length „ l ” of the bars, but depend on the slenderness ratio η , only. The qualitative differences occur between the tensors \mathbf{B} and \mathbf{C} , dependent explicitly on „ l ” and „ l^2 ”, respectively. The mentioned moduli describe a „microstructure” of the grid plate and determine a scale effect

iii) The physical meaning of equilibrium Eqs. (2.14) is different in both versions. In Klemm-Woźniak's approach, Eqs. (2.14) can be understood as approximate conditions of equilibrium of all of the repeated segments of the I type (cf. Fig. 4); thus the equilibrium of intermediate nodes is satisfied. It is worth emphasising, that the latter conditions have been utilised in the course of derivation of the stress-strain relations. Equilibrium of the segments (I) does not imply the equilibrium of main nodes. Therefore, only the necessary equilibrium conditions are satisfied. In the second version, Eqs. (2.14) express equilibrium conditions of segments of (II) type, hence the equilibrium equations of main nodes are fulfilled. The equilibrium equations of intermediate nodes have been satisfied in the course of the derivation of stress-strain relations. Therefore both sufficient and necessary conditions are fulfilled

iv) the essential quantitative difference between two analysed approaches results from the fact, that in the II (second) version tensors $\check{\mathbf{p}}$ and $\check{\mathbf{m}}$ do not vanish, whereas in the first one these tensors are equal to zero. Therefore, in II variant, constitutive equations depend on the loads subjected to intermediate nodes of the lattice, whereas the loads in main nodes occur in the RHS of equilibrium equations. In the governing equations (7.1) all of the loads have effect.

In version I difficulties occur, when loads in main nodes are taken into account, because in the RHS of (2.14) only these loads, which are subjected within the segment (I), can be included. Therefore, perhaps, in the first variant the loads in main nodes cannot be considered.

In the subsequent papers an attempt will be made to evaluate the range of applicability of the considered versions of Woźniak's lattice-type, honeycomb plate theory. It will be shown that valuable results can be obtained using the methods of solid state physics cf. [13].

References

1. J. B. OBRĘBSKI, *Statics of hexagonal lattice-type structures*, IPPT Reports, 36, 1972.
2. C. WOŹNIAK, *Lattice-type shells and plates* (in Polish), PWN, Warsaw 1970.
3. G. HORVAY, *Thermal stresses in perforated plates*, Proc. First US National Congress in Appl. Mech., 247 - 258, 1952.
4. G. HORVAY, N. Y. SCHENECTADY, *The plane-stress problem of perforated plates*, J. Appl. Mech., 19, 355 - 360, 1952.
5. C. WOŹNIAK, P. KLEMM, *The elasticity of dense grids of composite structure* (in Polish), Engng. Trans., 18, 3, 415 - 440, 1970.
6. P. KLEMM, C. WOŹNIAK, *Dense elastic lattices of hexagonal type*, (in Polish), Mech. Teoret. Stos., 8, 3, 277 - 293, 1970.
7. C. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech., 23, 6, 1971.
8. C. WOŹNIAK, *Discrete elastic Cosserat media*, Arch. Mech., 25, 2, 119 - 136, 1973.
9. S. KONIECZNY, F. PIETRAS, C. WOŹNIAK, *On linear problems in discrete theory of elasticity*, Engng. Trans. 20, 2, 1972.
10. ST. BŁASZKOWIAK, Z. KĄCZKOWSKI, *Cross Method*, PWN, Warsaw 1959 (in Polish).
11. W. NOWACKI, *Theory of unsymmetrical elasticity*, PWN, Warsaw 1981 (in Polish).
12. T. LEWIŃSKI, *Continuum models of lattice-type hexagonal plates*, Doctors Thesis, Tech. Univ. in Warsaw, 1983 (in Polish).
13. I. A. KUNIN, *Theory of elastic media with microstructure* (in Russian) Nauka, Moscow 1981.

Р е з ю м е

ДВЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ (ПО ВОЗНЯКУ) ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ СЕТЧАТЫХ ПЛАСТИНОК

В работе выводятся две концепции континуальной описи густых, упругих, гексагональных сетчатых пластинок. Обе версии базируются на теории Возняка, в которой поведение сетчатых поверхностных конструкций описывается при помощи модели Коссера с волоконистой структурой. Первая версия является обобщением и развитием трудов Клемма и Возняка посвященных сетчатым пластинкам со структурой сотов меда. Во второй версии приняты иные предположения касающиеся метода определения упругого потенциала пластинки. Полученные модели дают разные „микрполярные“ константы (B, C), вызывающие масштабные эффекты.

Исследованы ограничения вытекающие из положительности энергии деформации и показано, что модели B и C связанные неравенством $B^2 < C\mu$, где μ — эффективный модуль Ляме.

В работе выводятся уравнения в смещениях и соответствующие краевые условия.

Streszczenie

DWA KONTYNUALNE MODELE (TYPU WOŹNIAKA) HEKSAGONALNYCH TARCZ SIATKOWYCH

W pracy przedstawiono dwie koncepcje opisu kontynualnego gęstych, sprężystych, heksagonalnych tarcz siatkowych. Obie wersje bazują na teorii Woźniaka — aproksymacji zachowania się dźwigarów siatkowych za pomocą modelu matematycznego dwuwymiarowego ośrodka Cosseratów o włóknistej strukturze. Pierwsza wersja stanowi uogólnienie i rozwinięcie wyników pracy Klemma i Woźniaka dotyczącej siatek o strukturze plastra miodu. W drugiej wersji przyjęto nieco inne założenia dotyczące sposobu definiowania potencjału sprężystego tarczy. Otrzymane wersje prowadzą do innych zestawów stałych „mikropolarnych” (B, C) odpowiadających za efekt skali. Zbadano ograniczenia wynikające z warunku dodatniej określoności energii odkształcenia i wykazano, że stałe B i C powinny spełniać nierówność $B^2 < C\mu$, gdzie μ — zastępczy moduł Lamégo. Wyprowadzono równania „przemieszczeniowe” i sformułowano dopuszczalne warunki brzegowe.

Praca została złożona w Redakcji 26 kwietnia 1983 roku

DIFFERENTIAL MODELS OF HEXAGONAL-TYPE GRID PLATES

TOMASZ LEWIŃSKI (WARSZAWA)

Politechnika Warszawska

Institut Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich

1. Introduction

The subject of the present paper is an analysis of various differential models approximating deformations of dense, elastic, hexagonal-type (honeycomb) plates in plane-stress state.

The simplest mathematical model describing honeycomb plate response is, so called in engineering literature, technical isotropy, cf. [1, 2]. Elastic properties are determined by two effective moduli e.g. effective Young modulus and effective Poisson's ratio. These characteristics have been found by Horvay (see [1]) in 1952; some adjustments concerning the deformability of nodes have been proposed in [2].

More accurate approximation yields from Woźniak's models of grid surface structures based on the two-dimensional Cosserats' media theory, [3]. Among many papers pertaining to the response of lattice-type plates of simple and complex layout (the list of them has been published in [3]) the only one [4] is devoted to hexagonal surface structures. Generalisation and extension of Klemm's and Woźniak's results are presented in [5]. However, in the latter work, some new questions occur concerning the existence of two different variants resulting from Woźniak's approach. One aim of the present work is to elucidate, why more than one version (in a frame of one Cosserats' model) can exist. In order to achieve the answer a new look at the problem is necessary.

„Phenomenological” approaches (resembling to that of Woźniak, for instance) will not be applied here. Differential approximations for difference equilibrium equations of the lattice will be found by means of Rogula and Kunin quasicontinuum method, [6, 10], analogy between the mentioned difference equations (yielded from the well known displacement method) and crystal lattice equations resulting from harmonic approximation [6, 7] being utilised. Such a method makes it feasible to carry out a consequent accuracy analysis of the proposed models and in particular allows a new look at Woźniak's theory; a separate paper will be devoted to the latter problem. Derivations performed via the Rogula-Kunin approach result from physically clear approximations. Nevertheless the obtained differential models of higher order than zero do not satisfy stability conditions (in the spirit of Kunin [6], for example). Thus the derived models cannot be used for analysis of boundary value problems. A simple method of formulating a stable,

well established Cosserats' type model derived from Rogula-Kunin's differential approximations will be presented in a separate paper. In the prepared work a comparison of Woźniak's and modified Rogula-Kunin's Cosserat models will be carried out.

It is worth emphasising that more complicated (of higher order than one) continuum descriptions of hexagonal-type grid plates can be formulated as stable models via appropriate generalisation of Kunin's methods [6]; but the mentioned topics exceed the scope of the present paper.

2. Preliminaries. Basic assumptions

Consider elastic grid plate (in plane-stress state), cf. Fig. 2.1 in [5], axes of the rods constitute a honeycomb layout. A thickness of the plate is assumed to be of unit size. Rods' axes form hexagons the length of sides being equal to l . The rods are assumed to have two axes of symmetry, cross section areas and moments of inertia can vary. Lattice rods are made of elastic homogeneous and isotropic material whose elastic properties are determined by Young modulus E and Poisson's ratio ν . Considerations are confined to the grids composed of sufficiently slender bars so as to their deflections could be described by means of the improved theory of rods, where transverse shear deformations are taken into account. External loads are assumed to be subjected in-plane and concentrated in nodes only.

Notations, sign conventions of the external loads (forces and moments), of displacements and of internal forces as well as slope deflection equations are assumed as in the previous paper [5].

Proceeding analogously as in [4,5] two families of nodes: main and intermediate are distinguished, Fig. 1. To each main node a pair of integer numbers $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ is assigned. Cartesian coordinates $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$ of a node \mathbf{m} and a vector \mathbf{m} are interrelated by means of the formula

$$\mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{\Omega} = b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \quad b = l\sqrt{3}. \quad (2.1)$$

Main node displacements are denoted as follows

$$w_{\mathbf{m}}^1 = u_{\mathbf{m}} = u^1(\mathbf{x}^{\mathbf{m}}), \quad w_{\mathbf{m}}^2 = v_{\mathbf{m}} = u^2(\mathbf{x}^{\mathbf{m}}), \quad w_{\mathbf{m}}^3 = \varphi_{\mathbf{m}} = \varphi(\mathbf{x}^{\mathbf{m}}). \quad (2.2)$$

Forces and moments subjected to main \mathbf{m} and intermediate \mathbf{m}' nodes are denoted by

$$F_{\alpha}^{\mathbf{m}} = F^{\alpha}(\mathbf{x}^{\mathbf{m}}), \quad F_3^{\mathbf{m}} = M(\mathbf{x}^{\mathbf{m}}), \quad F_{\alpha}^{\mathbf{m}'} = F^{\alpha}(\mathbf{x}^{\mathbf{m}'}), \quad F_3^{\mathbf{m}'} = M(\mathbf{x}^{\mathbf{m}'}), \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.3)$$

Each main node \mathbf{m} is surrounded by six main nodes \mathbf{m}_J , $J = I, \dots, VI$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{m}_J} = \mathbf{x}^{\mathbf{m}} - \mathbf{t}_J \quad (2.4)$$

which lie on the circumference of the circle $r = b = l\sqrt{3}$ (\mathbf{t}_J vectors are shown in Fig. 1) and by intermediate nodes \mathbf{m}'_J , $J = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{m}'_J} = \mathbf{x}^{\mathbf{m}} - \mathbf{z}_J, \quad J = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}.$$

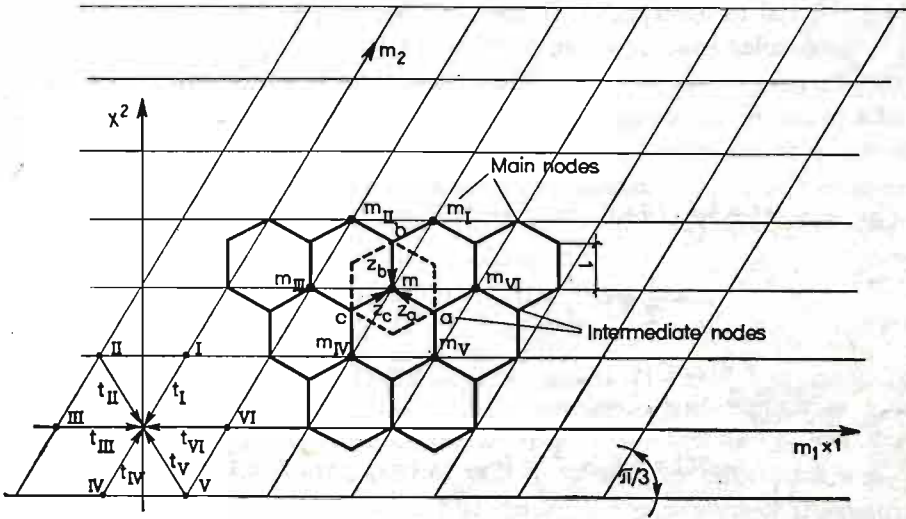


Fig. 1

Without afraid of misunderstandings one can write also

$$m - m_J = t_J, \quad m - m'_J = z_J,$$

where

$$\begin{aligned} t_I &= (0, -1), & t_{II} &= (+1, -1), & t_{III} &= (1, 0), \\ t_{IV} &= (0, 1), & t_V &= (-1, 1), & t_{VI} &= (-1, 0), \end{aligned}$$

and

$$z_a = (-2/3, 1/3), \quad z_b = (0, -2/3), \quad z_c = (2/3, 1/3).$$

In the course of the procedure a discrete Fourier transform (cf. [9], [10]) will be applied. Discrete Fourier transform of a discrete argument function f^m is defined with the aid of the formula*)

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = P \cdot \sum_m e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}^m} \cdot f^m, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2) \tag{2.5}$$

where $P = 1,5 \sqrt{3}l^2$ denotes a hexagon's area indicated by a dot line in Fig. 1.

3. Difference equilibrium equations referred to mains nodes

Slope deflection equations (which express internal forces in terms of displacements, see (2.6), [5]) make it possible to find equilibrium equations of each node of the grid. However, these difference formulae vary depending on intermediate nodes. By utilising equilibrium conditions of the latter it is feasible to eliminate displacements and rotations of the intermediate nodes and then to arrive at main nodes' equilibrium equations involving displacements of main nodes only. These formulae will be called difference

*) Notations used in Rogula's paper included in [10].

equations referred to main nodes. A brief derivation of these equations is presented beneath; more detailed procedure can be found in [12].

A starting point of the derivation is a set of equilibrium conditions of the intermediate **a**, **b** and **c** nodes which surround the main node **m**. Equations of equilibrium of the node **a** have the form (the proof is omitted here)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}(1+3\bar{\eta}) \cdot (\tilde{u} + \tilde{u}_{VI}) - 2\tilde{u}_V + 3 \cdot (1 + \bar{\eta})\tilde{u}_a + \frac{\sqrt{3}}{2}(\bar{\eta}-1)(\tilde{v} - \tilde{v}_{VI}) + \\
 & \quad - \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\varphi_{VI} + \varphi_V - \frac{\bar{\eta}}{6\eta} \cdot \frac{l^2}{EJ} \cdot F_a^* = 0, \\
 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\bar{\eta}-1) \cdot (\tilde{u} - \tilde{u}_{VI}) - \frac{1}{2}(\bar{\eta}+3) \cdot (\tilde{v} + \tilde{v}_{VI}) - 2\bar{\eta} \cdot \tilde{v}_V + \\
 & \quad + 3(1 + \bar{\eta})\tilde{v}_a + \frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi_{VI} - \varphi) - \frac{\bar{\eta}}{6\eta} \cdot \frac{l^2}{EJ} \cdot F_a^* = 0, \\
 & \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{u}_{VI} - 2\tilde{u}_V) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\tilde{v} - \tilde{v}_{VI}) + \frac{3\eta + \bar{\eta}}{2\eta} \cdot \varphi_a + \\
 & \quad + \frac{3\eta - \bar{\eta}}{6\eta} \cdot (\varphi + \varphi_{VI} + \varphi_V) - \frac{\bar{\eta}}{6\eta} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot M_a^* = 0,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

where

$$\begin{aligned}
 (\tilde{u}, \tilde{u}_i, \tilde{u}_j; \tilde{v}, \tilde{v}_i, \tilde{v}_j) &= (u_m, u_{m_i}, u_j; v_m, v_{m_i}, v_j)/l, \\
 \varphi &= \varphi_m, \quad \varphi_i = \varphi_{m_i}, \quad i = I, \dots, VI, \quad j = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Quantities η and $\bar{\eta}$ stand for slenderness ratios of grid bars, EJ denotes an effective flexural stiffness (cf. [5], Sec. 2.1).

Note that the set of equations (3.1) is decoupled with respect to u_a , v_a and φ_a unknowns. Thus it is easy to express these quantities in terms of displacements of main nodes **m**, m_V and m_{VI} and in terms of the loads subjected to **a**.

The equations of equilibrium of **b** and **c** nodes assume an analogous form (which will not be reported here). Thus the intermediate nodes' displacements w_j , $j = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, can be expressed by means of main nodes' displacements w_m and w_{m_i} , $i = I, \dots, VI$ and with the aid of the loads subjected to intermediate joints, i.e. the functions h_j^α

$$w_j^\alpha = h_j^\alpha(w_m^\sigma; w_{m_i}^\sigma; F_j^\sigma, M_j^*), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \sigma = 1, 2, \quad j = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \quad i = I, \dots, VI \tag{3.2}$$

are known, where, according to (2.2), $w^1 = u$, $w^2 = v$, $w^3 = \varphi$.

Let us write equilibrium equations of the **m**'s node

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}(1+3\bar{\eta})(\tilde{u}_a + \tilde{u}_c) - 2\tilde{u}_b + 3(1 + \bar{\eta})\tilde{u} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\bar{\eta}-1)(\tilde{v}_a - \tilde{v}_c) + \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\varphi_a + \varphi_c - 2\varphi_b) - \frac{\bar{\eta}}{6\eta} \cdot \frac{l^2}{EJ} \cdot F^1 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\tilde{u}_a - \tilde{u}_c) - \frac{1}{2}(\bar{\eta}+3) \cdot (\tilde{v}_a + \tilde{v}_c) + 3(1 + \bar{\eta})\tilde{v} - 2\bar{\eta} \cdot \tilde{v}_b + \frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi_a - \varphi_c) - \frac{\bar{\eta}}{6\eta} \cdot \frac{l^2}{EJ} \cdot F^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}(\tilde{u}_a - 2\tilde{u}_b + \tilde{u}_c) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\tilde{v}_a - \tilde{v}_c) + \frac{3\eta + \bar{\eta}}{2\eta} \cdot \varphi + \\
 & + \frac{3\eta - \bar{\eta}}{6\eta} (\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c) - \frac{\bar{\eta}}{6\eta} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot M = 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

[cont.]

By inserting (3.2) into (3.3) the sought equilibrium equations of the \mathbf{m} 's node referred to main nodes only (i.e. to \mathbf{m} and \mathbf{m}_i , $i = I, \dots, VI$ nodes) are arrived at. These equations can be displayed in the following discrete-convolution form

$$-P \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\mathbf{n}} \Phi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{m}-\mathbf{n})} w_{\mathbf{n}}^{\beta} + P \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\mathbf{m}'} S_{\alpha\beta}^{(\mathbf{m}-\mathbf{m}')} \cdot F_{\beta}^{*\mathbf{m}'} + F_{\alpha}^{\mathbf{m}} = 0, \tag{3.4}$$

where $\alpha, \beta = 1, 2, 3$; \mathbf{n}, \mathbf{m} denote main nodes. Summation with respect to \mathbf{n} extends (for the \mathbf{m} fixed) on seven vectors: $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ and six vectors such that $|\mathbf{m} - \mathbf{n}| = b$. For other pairs (\mathbf{m}, \mathbf{n}) $\Phi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{m}-\mathbf{n})} = 0$. Summation with respect to \mathbf{m}' concerns three vectors $\mathbf{m}' = \mathbf{m} - z_J$, $J = a, b, c$. For others $S_{\alpha\beta}^{(\mathbf{m}-\mathbf{m}')} = 0$. Nonvanishing components of the matrix $\Phi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{m})}$ read

$$\begin{aligned}
 \Phi_{11}^{(0)} &= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\eta}{\bar{\eta}} \left(\frac{\bar{\eta}^2 + 6\bar{\eta} + 1}{\bar{\eta} + 1} - \frac{3\eta}{\bar{\eta} + 3\eta} \right) \cdot \frac{EJ}{l^5}, \\
 \Phi_{11}^{(I)} &= \Phi_{11}^{(IV)} = \Phi_{11}^{(II)} = \Phi_{11}^{(V)} = \frac{4\eta}{\sqrt{3} \cdot \bar{\eta}} \left(\frac{\eta}{\bar{\eta} + 3\eta} - \frac{1 + 3\bar{\eta}}{3(1 + \bar{\eta})} \right) \cdot \frac{EJ}{l^5}, \\
 \Phi_{11}^{(III)} &= \Phi_{11}^{(VI)} = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\eta^2}{\bar{\eta}(\bar{\eta} + 3\eta)} + \frac{4\eta}{6\sqrt{3} \bar{\eta}} \cdot \frac{(-3\bar{\eta}^2 - 6\bar{\eta} + 1)}{1 + \bar{\eta}} \right] \frac{EJ}{l^5}, \\
 \Phi_{12}^{(I)} &= -\Phi_{12}^{(V)} = \frac{-4\eta}{\bar{\eta}} \cdot \left[\frac{\eta}{2(\bar{\eta} + 3\eta)} - \frac{(\bar{\eta} - 1)^2}{6(\bar{\eta} + 1)} \right] \cdot \frac{EJ}{l^5}, \\
 \Phi_{12}^{(II)} &= -\Phi_{12}^{(VI)} = -\frac{4\eta}{\bar{\eta}} \left[\frac{\eta}{3\eta + \bar{\eta}} + \frac{\bar{\eta} - 1}{3(\bar{\eta} + 1)} \right] \cdot \frac{EJ}{l^5}, \\
 \Phi_{12}^{(III)} &= -\Phi_{12}^{(IV)} = \frac{-4\eta(\bar{\eta} - 1)}{3(\bar{\eta} + 1)} \cdot \frac{EJ}{l^5}, \\
 \Phi_{13}^{(I)} &= \Phi_{13}^{(V)} = \frac{2\eta}{3\sqrt{3} \bar{\eta}} \left[\frac{\bar{\eta} - 3\eta}{\bar{\eta} + 3\eta} + \frac{1 - 3\bar{\eta}}{1 + \bar{\eta}} \right] \cdot \frac{EJ}{l^4}, \\
 \Phi_{13}^{(II)} &= \Phi_{13}^{(VI)} = \frac{2\eta}{3\sqrt{3} \bar{\eta}} \left[\frac{\bar{\eta} - 3\eta}{\bar{\eta} + 3\eta} + \frac{1 + 3\bar{\eta}}{1 + \bar{\eta}} \right] \cdot \frac{EJ}{l^4}, \\
 \Phi_{13}^{(III)} &= \Phi_{13}^{(IV)} = \frac{4\eta}{3\sqrt{3} \cdot \bar{\eta}} \left[\frac{3\eta - \bar{\eta}}{3\eta + \bar{\eta}} - \frac{1}{1 + \bar{\eta}} \right] \cdot \frac{EJ}{l^4}, \\
 \Phi_{21}^{(I)} &= \begin{cases} \Phi_{12}^{(I, III)} & \text{for } J = I, II, III \\ \Phi_{12}^{(I, III)} & \text{for } J = IV, V, VI, \end{cases} \\
 \Phi_{22}^{(0)} &= \frac{4\eta}{\sqrt{3} \bar{\eta}} \left[\frac{\bar{\eta}^2 + 6\bar{\eta} + 1}{\bar{\eta} + 1} - \frac{3\eta}{3\eta + \bar{\eta}} \right] \cdot \frac{EJ}{l^5},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{22}^{(I)} &= \Phi_{22}^{(II)} = \Phi_{22}^{(IV)} = \Phi_{22}^{(V)} = \frac{-4\eta(\bar{\eta}+3)}{3\sqrt{3} \cdot (\bar{\eta}+1)} \cdot \frac{EJ}{l^5}, \\ \Phi_{22}^{(III)} &= \Phi_{22}^{(VI)} = \frac{2\eta}{\sqrt{3} \cdot \bar{\eta}} \cdot \left[\frac{3\eta}{3\eta+\bar{\eta}} + \frac{\bar{\eta}^2-6\bar{\eta}-3}{3 \cdot (1+\bar{\eta})} \right] \cdot \frac{EJ}{l^5}, \\ \Phi_{23}^{(IV)} &= -\Phi_{23}^{(III)} = \frac{+4\eta}{3 \cdot (\bar{\eta}+3\eta)} \cdot \frac{EJ}{l^4}, \\ \Phi_{23}^{(IV)} &= -\Phi_{23}^{(V)} = \frac{2\eta}{3\bar{\eta}} \cdot \left[\frac{\bar{\eta}-1}{\bar{\eta}+1} - \frac{\bar{\eta}-3\eta}{\bar{\eta}+3\eta} \right] \cdot \frac{EJ}{l^4}, \\ \Phi_{23}^{(I)} &= -\Phi_{23}^{(II)} = \frac{4\eta}{3(\bar{\eta}+1)} \cdot \frac{EJ}{l^4}, \\ \Phi_{3\beta}^{(I)} &= \begin{cases} \Phi_{\beta 3}^{(I+III)} & \text{for } J = I, II, III \\ \Phi_{\beta 3}^{(I-III)} & \text{for } J = IV, V, VI \end{cases} \\ \beta &= 1, 2, \\ \Phi_{33}^{(0)} &= \left[\frac{-4\eta}{\sqrt{3} \cdot \bar{\eta} \cdot (1+\bar{\eta})} + \frac{2(\bar{\eta}+3\eta)}{\sqrt{3} \cdot \bar{\eta}} - \frac{2(\bar{\eta}-3\eta)^2}{3\sqrt{3} \bar{\eta}(\bar{\eta}+3\eta)} \right] \cdot \frac{EJ}{l^3}, \\ \Phi_{33}^{(I)} &= \left[\frac{2\eta}{3\sqrt{3} \cdot \bar{\eta} \cdot (1+\bar{\eta})} - \frac{2(\bar{\eta}-3\eta)^2}{9\sqrt{3} \cdot \bar{\eta} \cdot (\bar{\eta}+3\eta)} \right] \cdot \frac{EJ}{l^3}, \quad J = I, \dots, VI \end{aligned} \tag{3.5}$$

[cont.]

Nonvanishing components of $S_{\alpha\beta}^{(n)}$ have the form

$$\begin{aligned} S_{11}^{(Z_a)} &= S_{11}^{(Z_c)} = \frac{(1+3\bar{\eta})}{9\sqrt{3} \cdot (1+\bar{\eta})} \cdot l^{-2}, & S_{11}^{(Z_b)} &= \frac{4}{9\sqrt{3} \cdot (1+\bar{\eta})} \cdot l^{-2}, \\ S_{12}^{(Z_a)} &= -S_{12}^{(Z_c)} = \frac{(1-\bar{\eta})}{9(1+\bar{\eta})} \cdot l^{-2}, & S_{21}^{(Z_a)} &= -S_{12}^{(Z_c)} = S_{12}^{(Z_a)}, \\ S_{13}^{(Z_a)} &= S_{13}^{(Z_c)} = -2S_{13}^{(Z_b)} = \frac{2\eta}{3\sqrt{3} \cdot (\bar{\eta}+3\eta)} \cdot l^{-3}, \\ S_{22}^{(Z_a)} &= S_{22}^{(Z_c)} = \frac{(\bar{\eta}+3)}{9\sqrt{3} \cdot (\bar{\eta}+1)} \cdot l^{-2}, & S_{22}^{(Z_b)} &= \frac{4\bar{\eta}}{9\sqrt{3} \cdot (\bar{\eta}+1)} \cdot l^{-2}, \\ S_{23}^{(Z_a)} &= -S_{23}^{(Z_c)} = \frac{2\eta}{3(\bar{\eta}+3\eta)} \cdot l^{-3}, \\ S_{31}^{(Z_a)} &= S_{31}^{(Z_c)} = -2S_{31}^{(Z_b)} = \frac{1}{9\sqrt{3} \cdot (1+\bar{\eta})} \cdot l^{-1}, \\ S_{32}^{(Z_a)} &= -S_{32}^{(Z_c)} = 1/9l, \\ S_{33}^{(Z_a)} &= S_{33}^{(Z_b)} = S_{33}^{(Z_c)} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{3\eta-\eta}{3\eta+\bar{\eta}} \cdot l^{-2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

4. Main node equilibrium equations in k-representation

A formal derivation of equilibrium equations in k-representation, similar to that of Rogula and Kunin, see [6, 10], concerning crystal lattices, will be presented herein. On performing the discrete Fourier transform (cf. (2.5)) of Eqs. (3.4), algebraic equations

$$-\sum_{\beta=1}^3 \hat{\Phi}_{\alpha\gamma\beta}(\mathbf{k}) \hat{w}^{\beta}(\mathbf{k}) + \sum_{\beta=1}^3 \bar{S}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \tilde{F}_{\beta}(\mathbf{k}) + \hat{F}_{\alpha}(\mathbf{k}) = 0, \quad (4.1)$$

where

$$\begin{aligned} \check{\Phi}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) &= P \sum_{\mathbf{m}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{m}}} \Phi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{m})}, & \hat{w}^{\beta}(\mathbf{k}) &= P \sum_{\mathbf{m}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{m}}} \cdot w_{\mathbf{m}}^{\beta}, \\ \bar{S}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) &= P \sum_{\mathbf{s}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{s}}} S_{\alpha\beta}^{(\mathbf{s})}, & F_{\beta}(\mathbf{k}) &= P \cdot \sum_{\mathbf{m}'} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{m}'}} \cdot F_{\beta}^{*(\mathbf{m}')}, \\ \hat{F}_{\alpha}(\mathbf{k}) &= P \sum_{\mathbf{m}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{m}}} \cdot F_{\alpha}^{(\mathbf{m})}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

are obtained. Vectors \mathbf{s} assume all the values $\mathbf{m} - \mathbf{m}'$. The Eqs. (4.1) have been found with the aid of the theorem on the transform of convolution equations, cf. [10]. The summations in definitions of $\hat{\Phi}_{\alpha\beta}$ and $\bar{S}_{\alpha\beta}$ are finite. By virtue of (2.4) we arrive at

$$P^{-1} \cdot \hat{\Phi}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \sum_{J=1}^{VI} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}_J} \cdot \Phi_{\alpha\beta}^{(-\mathbf{t}_J)} + \Phi_{\alpha\beta}^{(0)}. \quad (4.3)$$

Similarly

$$P^{-1} \cdot \bar{S}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \sum_{J=\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_J} \cdot S_{\alpha\beta}^{(-\mathbf{z}_J)}. \quad (4.4)$$

5. Formulation of differential approximate models

A set of k-representation Eqs. (4.1) is a starting point (cf. [6]) to obtain differential equations approximating discrete argument functions being solutions of (3.4). The known functions $\hat{\Phi}_{\alpha\beta}$ and $\bar{S}_{\alpha\beta}$ can be expanded in power series with respect to the variables ik_1, ik_2

$$\begin{aligned} -P^{-1} \cdot \hat{\Phi}_{\alpha\beta}(k_{\sigma}) &= C_{\alpha\beta}^{\psi^{\mu}} w_{\psi^{\mu}}, & S_{\alpha\beta}(k_{\sigma}) &= S_{\alpha\beta}^{\psi^{\mu}} w_{\psi^{\mu}}, \\ w_{\psi^{\mu}} &= i^{\mu} k_{\psi^{\mu}}, & i &= \sqrt{-1}, \quad (\text{not summed}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

where μ denotes a multiindex, cf. [11] p. 77. Substituting Eqs. (5.1) into (4.1) and then carrying out an inverse integral Fourier transformation, differential equations of equilibrium in x-representation

$$C_{\alpha\beta}^{\psi^{\mu}} \partial_{\psi^{\mu}} w^{\beta}(x^{\sigma}) + P \cdot S_{\alpha\beta}^{\psi^{\mu}} \partial_{\psi^{\mu}} \tilde{p}^{\beta}(x^{\sigma}) + p^{\beta}(x^{\sigma}) = 0, \quad \alpha, \beta, \sigma = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

where

$$\tilde{p}^{\beta} = P^{-1} \cdot \tilde{F}_{\beta}, \quad p^{\beta} = P^{-1} \cdot F_{\beta} \quad (5.3)$$

are arrived at. In order to avoid misunderstandings let us display first few terms of the expansion

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta}^{\nu\mu} \partial_{\nu\mu} w^\beta(x^\sigma) &= \sum_{\beta=1}^3 C_{\alpha\beta} w^\beta(x^\sigma) + \sum_{\beta=1}^3 (C_{\alpha\beta}^1 \partial_1 w^\beta + C_{\alpha\beta}^2 \partial_2 w^\beta) + \\
 &+ \sum_{\beta=1}^3 (C_{\alpha\beta}^{11} \partial_1^2 w^\beta + (C_{\alpha\beta}^{12} + C_{\alpha\beta}^{21}) \partial_1 \partial_2 w^\beta + C_{\alpha\beta}^{22} \partial_2^2 w^\beta) + \\
 &+ \sum_{\beta=1}^3 \sum_{k,l,m} C_{\alpha\beta}^{klm} \partial_k \partial_l \partial_m w^\beta + \sum_{\beta=1}^3 \sum_{k,l,m,n} C_{\alpha\beta}^{klmn} \partial_k \partial_l \partial_m \partial_n w^\beta + \dots
 \end{aligned}$$

Coefficients $C_{\alpha\beta}^{\nu\mu}$ are proportional to consecutive powers of the quantity b which express a spacing of main nodes of the grid. The Eqs. (5.2) will be assumed to be of p -order provided the coefficients $C_{\alpha\beta}^{\nu\mu}$ proportional to b^s , $s \leq p$, are retained. It will be said that Eqs. (5.2) are of p -order with respect to the displacement u (v or φ) provided all the terms involving u (v or φ) proportional to b^s , $s \leq p$, are taken into account and the other terms are assumed to be negligible.

Substitution of infinite series of Eq. (5.2) by polynomials of p -order with respect to differential operators ∂_α amounts to assuming that deformation patterns of wave lengths being shorter than some value L_p have a negligible effect on resulting lattice plate response. It is always required here that $L_p \geq 2b$, hence $|k_\alpha b| \leq \pi$. Thus physical facet of the problem restricts a domain of variation of the wave vector \mathbf{k} to a certain circular neighbourhood of point $\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

The smaller the parameter p is, the longer the deformation waves can be admitted. In the limiting case of $p = 0$ a zero-order approximation, so-called long-wave approximation, is obtained the solutions of which are quantitatively different from those yielding from the more complex models. In particular, the simplest model does not describe dispersion of waves, cf. [6]. It will be shown below that in this model the hexagonal lattice is considered as a point-wise centrosymmetrical structure so that an interchange of main and intermediate nodes do not change the governing equations of the theory. Nevertheless, the formulation of this model is not a main goal of the paper. This work ought to be treated rather as an introduction to further considerations (see [13]) pertaining to Cosserat-type models of hexagonal grids, i.e. to the models of the same mathematical structure as those of Woźniak's-type outlined in [5].

6. Second order approximation equations

By neglecting in (5.2) the terms dependent on the powers b^s , $s \geq 3$, second-order equations (with respect to all displacements) are found. Appropriate rearrangements give

$$[(\mu + \alpha) \nabla^2 u + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1^2 u] + l^2 \left[\frac{3}{16} (\mu + \alpha) \nabla^4 u + \frac{1}{4} (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1^4 u \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 \partial_2 v + l [\delta \cdot \partial_1 (\partial_1^2 - 3\partial_2^2) v] + l^2 \left[\frac{1}{8} (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 \partial_2 (\partial_1^2 + 3\partial_2^2) v \right] + \\
& \quad + 2\alpha \partial_2 \varphi + l\beta (\partial_1^2 - \partial_2^2) \varphi + l^2 \left(\frac{3}{4} \alpha \partial_2 \nabla^2 \varphi \right) + 'p^1 = 0, \\
& (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 \partial_2 u + l [-\delta \partial_1 (\partial_1^2 - 3\partial_2^2) u] + l^2 \left[\frac{1}{8} (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 \partial_2 (\partial_1^2 + 3\partial_2^2) u \right] + \quad (6.1) \\
& + (\mu + \alpha) \nabla^2 v + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_2^2 v + \frac{3}{16} l^2 \left[(\mu + \alpha) \nabla^4 v + (\lambda + \mu - \alpha) \left(-\frac{1}{3} \partial_1^4 + \partial_2^4 + 2\partial_1^2 \partial_2^2 \right) v \right] - \\
& \quad - 2\alpha \partial_1 \varphi + l (-2\beta \partial_1 \partial_2 \varphi) + l^2 \left(-\frac{3}{4} \alpha \partial_1 \nabla^2 \varphi \right) + 'p^2 = 0, \\
& -2\alpha \partial_2 u + l\beta (\partial_1^2 - \partial_2^2) u - l^2 \left(\frac{3}{4} \alpha \partial_2 \nabla^2 u \right) + 2\alpha \partial_1 v + l [-2\beta \partial_1 \partial_2 v] + \\
& \quad + l^2 \left(\frac{3}{4} \alpha \partial_1 \nabla^2 v \right) - 4\alpha \cdot \varphi + l^2 (\gamma \nabla^2 \varphi) + 'Y^3 = 0,
\end{aligned}$$

where functions $u(x^\sigma)$, $v(x^\sigma)$ and $\varphi(x^\sigma)$ are equal to $w^1(x^\sigma)$, $w^2(x^\sigma)$ and $w^3(x^\sigma)$, respectively. The following definitions of effective elastic moduli, depending on slenderness ratios η and $\bar{\eta}$ only,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2\sqrt{3}\eta(\bar{\eta}-1)}{(\bar{\eta}+1)} \cdot \frac{EJ}{l^3}, \quad \mu = \frac{4\sqrt{3}}{(1+\bar{\eta})} \cdot \frac{EJ}{l^3}, \quad \alpha = \frac{2\sqrt{3}\cdot\eta}{\bar{\eta}+3\bar{\eta}} \cdot \frac{EJ}{l^3}, \\
\beta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\eta}{\bar{\eta}} \left[\frac{3\bar{\eta}-\eta}{3\bar{\eta}+\bar{\eta}} + \frac{3\bar{\eta}-1}{\bar{\eta}+1} \right] \cdot \frac{EJ}{l^3}, \\
\delta &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\eta}{\bar{\eta}} \cdot \left[\frac{(\bar{\eta}-1)^2}{3(\bar{\eta}+1)} - \frac{\eta}{\bar{\eta}+3\bar{\eta}} \right] \cdot \frac{EJ}{l^3}, \\
\gamma &= \frac{\sqrt{3}}{\bar{\eta}} \left[\frac{(3\bar{\eta}-\bar{\eta})^2}{3(\bar{\eta}+3\bar{\eta})} - \frac{\eta}{\bar{\eta}+1} \right] \cdot \frac{EJ}{l^3},
\end{aligned} \quad (6.2)$$

are introduced, where, in the case of prismatic rods, see [5], Eq. (2.9)₄

$$\frac{EJ}{l^3} = \frac{E}{12\eta\sqrt{\eta}}.$$

Two first definitions expressing effective Lamé moduli λ and μ are exactly consistent with Horvay's results [1]. Moreover, the same expressions for λ and μ have been obtained in [5] by means of two different approaches resulting from the general concept of Woźniak.

Functions $'p^\alpha$ and $'Y^3$ depend on the loads subjected to both intermediate and main nodes. Their form is complex (see [12]) and will not be given here.

Note that displacements u , v and rotations φ are involved in different ways in the second order equilibrium equations (6.1). Two first equations involve the fourth order derivatives of functions u and v at coefficients proportional to l^2 , whereas the fourth order

derivatives of φ do not occur in (6.1). Thus the considered set of equations is not consequent with respect to orders of powers of the parameter l . In order to make the system of Eqs. (6.1) consistent in the mentioned meaning the last Eq. (6.1)₃ should be substituted by the relation of order three with respect to u , v and of fourth order with respect to φ :

$$\begin{aligned} & -2\alpha\partial_2 u + l \cdot \beta(\partial_1^2 - \partial_2^2)u - l^2 \left(\frac{3}{4} \alpha \partial_2 \nabla^2 u \right) + l^3 \left[\frac{\beta}{16} (5\partial_1^4 - 3\partial_2^4 - 6\partial_1^2 \partial_2^2)u \right] + \\ & + 2\alpha\partial_1 v + l[-2\beta\partial_1 \partial_2 v] + l^2 \left[\frac{3}{4} \alpha \partial_1 \nabla^2 v \right] + l^3 \left[-\frac{1}{4} \beta \partial_1 \partial_2 (\partial_1^2 + 3\partial_2^2)v \right] + \quad (6.3) \\ & - 4\alpha \cdot \varphi + l^2 (\gamma \nabla^2 \varphi) + l^4 \left(\frac{3}{16} \gamma \nabla^4 \varphi \right) + Y^3 = 0. \end{aligned}$$

Stability

It will be shown that both systems of Eqs. (6.1) and (6.1)_{1,2}, (6.3) do not allow us to formulate boundary value problems, e.g. these sets are not well-established since they do not satisfy stability conditions. The stability Kunin's criterion [6], means positive determination of the matrix $\Phi_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k})$ (for the arbitrary wave vector \mathbf{k}), associated with the second order approximation. One of the necessary conditions reads

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot \Phi_{11}^{(2)} = & (\mu + \alpha) \cdot (k_1^2 + k_2^2) + (\lambda + \mu - \alpha) \cdot k_1^2 - l^2 \cdot \left[\frac{3}{16} \cdot (\mu + \alpha) \cdot (k_1^2 + k_2^2)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (\lambda + \mu - \alpha) \cdot k_1^4 \right] > 0 \quad \forall k_1, k_2 \in R. \quad (6.4) \end{aligned}$$

Let $k_1 = |\mathbf{k}| \cos \theta$, $k_2 = |\mathbf{k}| \sin \theta$, $\tilde{\varrho} = |\mathbf{k}|l$. The condition (6.4) takes the form

$$\tilde{\varrho}^2 \left\{ (\mu + \alpha) + (\lambda + \mu - \alpha) \cos^2 \theta - \frac{\tilde{\varrho}^2}{4} \left[\frac{3}{4} (\mu + \alpha) + (\lambda + \mu - \alpha) \cos^4 \theta \right] \right\} > 0$$

for arbitrary $\theta \in (0, 2\pi)$ and $\tilde{\varrho} > 0$. Inserting $\theta = \pi/2$, we have $\tilde{\varrho} < 4\sqrt{3}/3$, $|\mathbf{k}| \cdot l < 2,31$. Thus, the analysed inequality is satisfied in some vicinity of $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ vector: $|\mathbf{k}| < k_{\text{crit}}$. Moreover it can be proved that such k_{crit} exists that in the region $|\mathbf{k}| < k_{\text{crit}}$ the stability condition of second order equations is satisfied.

In the case of sufficiently long wave deformation patterns (sufficiently small $|\mathbf{k}|$), an application of the second order equations is justified. However, the mentioned equations are not correct in general so that they lose their sense in the case of particularly short wave lengths.

Elimination of rotation unknowns

Proceeding similarly to the Kunin's method (cf. [10], Sec. III, p. 134), function (which stands for rotations of nodes) will be eliminated from Eqs. (6.1). To this end the last of the latter equations is expressed in k — representation

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{(4\alpha + l^2 |k|^2 \cdot \gamma)} \left\{ \left[-2\alpha i k_2 + l\beta(k_2^2 - k_1^2) + \frac{3}{4} l^2 \alpha k_2 i(k_1^2 + k_2^2) \right] \hat{u} + \right. \\ \left. + \left[2\alpha \cdot k_1 i + 2\beta l \cdot k_1 \cdot k_2 - \frac{3}{4} l^2 \cdot \alpha \cdot k_1 \cdot i \cdot (k_1^2 + k_2^2) \right] \hat{v} + 'Y^3 \right\}.$$

Provided $|\mathbf{k}| < 2\sqrt{\alpha/\gamma}$ the RHS of the above equation can be expanded in convergent power series with respect to k_α . Retaining terms of lower order than second and transforming the obtained formula into x -representation, we arrive at

$$\varphi(x^\alpha) \approx \left[\frac{1}{2} (\partial_1 v - \partial_2 u) + \frac{1}{4\alpha} \cdot 'Y^3 \right] + l \cdot \frac{\beta}{4\alpha} [(\partial_1^2 - \partial_2^2)u - 2\partial_1 \partial_2 v] + \\ + l^2 \left\{ \left(\frac{3}{16} + \frac{\gamma}{8\alpha} \right) \nabla^2 (\partial_1 v - \partial_2 u) + \frac{\gamma}{16\alpha^2} \cdot \nabla^2 'Y^3 \right\}.$$

Substituting the RHS of the above equation into two first of Eqs. (6.1) and neglecting the terms involving the powers $l^s, s \geq 3$, we finally find

$$[(2\mu + \lambda) \partial_1^2 + \mu \partial_2^2]u + \frac{l^2}{16} [(7\mu + 4\lambda - \alpha + 4\beta^2 \alpha^{-1}) \partial_1^4 + (3\mu - 8\alpha - 4\gamma + 4\beta^2 \alpha^{-1}) \partial_2^4 + \\ + (6\mu - 6\alpha - 4\gamma - 8\beta^2 \alpha^{-1}) \partial_1^2 \partial_2^2]u + [(\lambda + \mu) \partial_1 \partial_2]v + l(\delta + \beta/2) \partial_1 (\partial_1^2 - 3\partial_2^2)v + \\ + \frac{l^2}{8} \cdot \partial_1 \partial_2 [(5\alpha + \lambda + \mu + 2\gamma - 4\beta^2 \alpha^{-1}) \partial_1^2 + (3\lambda + 3\mu + 3\alpha + 2\gamma + 4\beta^2 \alpha^{-1}) \partial_2^2]v + \check{p}^1 = 0, \\ (\lambda + \mu) \partial_1 \partial_2 u - l(\delta + \beta/2) \partial_1 (\partial_1^2 - 3\partial_2^2)u + \frac{l^2}{8} \partial_1 \partial_2 [(5\alpha + \lambda + \mu + 2\gamma - 4\beta^2 \alpha^{-1}) \cdot \partial_1^2 + \\ + (3\lambda + 3\mu + 3\alpha + 2\gamma + 4\beta^2 \alpha^{-1}) \partial_2^2]u + [(2\mu + \lambda) \partial_2^2 + \mu \partial_1^2]v + \frac{l^2}{16} [(2\mu - \lambda - 8\alpha - 4\gamma) \partial_1^4 + \\ + (6\mu + 3\lambda) \partial_2^4 + (12\mu + 6\lambda - 12\alpha - 4\gamma + 16\beta^2 \alpha^{-1}) \partial_1^2 \partial_2^2]v + \check{p}^2 = 0, \tag{6.5}$$

where

$$\check{p}^\alpha = 'p^\alpha + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \partial'_\beta Y^3 + l \cdot \frac{\beta}{4\alpha} \cdot G_{\sigma\mu}^\alpha \partial_\sigma \partial'_\mu Y^3 - l^2 \left(\frac{\gamma}{8\alpha} + \frac{3}{16} \right) \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha \nabla^2 Y^3 \tag{6.6}$$

and $G_{11}^1 = -G_{22}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^2 = 1$, the other $G_{\sigma\mu}^\alpha = 0$, $\epsilon_{\alpha\beta}$ denotes a permutation symbol.

It can be shown that the obtained system of Eqs. (6.5) is not stable.

7. First order approximation

By neglecting the underlined terms in Eqs. (6.1) we arrive at the first order approximation equations. The functions $'p^\alpha, 'Y^3$ take the form

$$'p^1 = (p^1 + \check{p}^1) + \frac{3\eta}{3\eta + \bar{\eta}} \partial_2 Y^{*3} + l \left[-\frac{(\bar{\eta} - 1)}{2(\bar{\eta} + 1)} \partial_2 \check{p}^1 - \right. \\ \left. - \frac{(\bar{\eta} - 1)}{2(\bar{\eta} + 1)} \partial_1 \check{p}^2 - \frac{3}{4} \frac{\eta}{\bar{\eta} + 3\eta} (\partial_1^2 - \partial_2^2) Y^{*3} \right], \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
 'p^2 &= (p^2 + \overset{*}{p}^2) - \frac{3\eta}{3\eta + \bar{\eta}} \partial_1 \overset{*}{Y}^3 + l \left[-\frac{\bar{\eta} - 1}{2(\bar{\eta} + 1)} \partial_1 \overset{*}{p}^1 + \frac{(\bar{\eta} - 1)}{2(\bar{\eta} + 1)} \partial_2 \overset{*}{p}^2 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{\bar{\eta} + 3\eta} \partial_1 \partial_2 \overset{*}{Y}^3 \right], \\
 'Y^3 &= -\frac{3\eta - \bar{\eta}}{3\eta + \bar{\eta}} \overset{*}{Y}^3 + Y^3,
 \end{aligned} \tag{7.1} \text{ [cont.]}$$

where $\overset{*}{Y}^3 = \overset{*}{p}^3$, $Y^3 = p^3$, see Eqs. (5.3).

The last equation allows us to express the function φ in terms of functions u , v , their derivatives and — function $'Y^3$ depending on moment loads. The elimination of rotations does not require here any additional assumptions and leads to equations involving two functions u and v only

$$\begin{aligned}
 [(2\mu + \lambda) \partial_1^2 + \mu \partial_2^2] u + (\lambda + \mu) \partial_1 \partial_2 v + l(\delta + \beta/2) \partial_1 (\partial_1^2 - 3\partial_2^2) v + ''p^1 &= 0, \\
 [(\lambda + \mu) \partial_1 \partial_2] u - l(\delta + \beta/2) \partial_1 (\partial_1^2 - 3\partial_2^2) u + [(2\mu + \lambda) \partial_2^2 + \mu \partial_1^2] v + ''p^2 &= 0, \\
 ''p^\alpha &= 'p^\alpha + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \partial'_\beta Y^3 + l \frac{\beta}{4\alpha} G_{\sigma\mu}^\alpha \partial_\sigma \partial_\mu 'Y^3.
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

However, it can be proved that Eqs. (7.2) are not stable.

The derived model (and the obtained before too) takes into account the lack of centrosymmetry of the neighbourhoods of nodes. This is revealed in Eqs. (7.2) by terms involving the third derivatives of the displacement functions. These terms include constants δ and β , the signs of which depend on the choice of main nodes. Thus the first order equations are sensitive to the division of the nodes on two families of intermediate and main nodes.

8. Zero-order equations (Horvay's model)

Zero-order equations are obtained by neglecting of all the terms of first and second order in Eqs. (6.1) and (7.1). Hence, we have

$$\begin{aligned}
 [(\mu + \alpha) \nabla^2 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1^2] u + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 \partial_2 v + 2\alpha \partial_2 \varphi + \overset{\circ}{p}^1 &= 0, \\
 [(\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 \partial_2] u + [(\mu + \alpha) \nabla^2 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_2^2] v - 2\alpha \partial_1 \varphi + \overset{\circ}{p}^2 &= 0, \\
 -2\alpha \partial_2 u + 2\alpha \partial_1 v - 4\alpha \cdot \varphi + \overset{\circ}{Y}^3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

where

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{p}^\alpha &= p^\alpha + \overset{*}{p}^\alpha + \frac{3\eta}{3\eta + \bar{\eta}} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \overset{*}{Y}^3, \\
 \overset{\circ}{Y}^3 &= Y^3 + \frac{-3\eta + \bar{\eta}}{3\eta + \bar{\eta}} \cdot \overset{*}{Y}^3.
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

The last equilibrium equation can be rearranged to the form

$$\varphi = \frac{1}{2} (\partial_1 v - \partial_2 u) + \frac{1}{4\alpha} \cdot \overset{\circ}{Y}^3. \tag{8.3}$$

Making use of the above formula the function φ can be eliminated from Eqs. (8.1)_{1,2}, and, the classical equations (involving u and v only) of isotropic plate in a plane-stress

state occur. They can be associated with the name of Horvay to honour of his pioneer achievements concerning effective moduli (cf. remarks in Sec. 6)

$$\begin{aligned} [(2\mu + \lambda) \partial_1^2 + \mu \partial_2^2] u + (\lambda + \mu) \partial_1 \partial_2 v + \bar{p}^1 &= 0, \\ (\lambda + \mu) \partial_1 \partial_2 u + [(2\mu + \lambda) \partial_2^2 + \mu \partial_1^2] v + \bar{p}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\bar{p}^\alpha = \check{p}^\alpha + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \check{Y}^3.$$

The system (8.4)_{1,2} is stable, provided

$$2\mu + \lambda > 0, \quad \mu > 0. \quad (8.5)$$

By inserting the definitions (6.2)_{1,2} into above inequalities it is clear that by virtue of positiveness of Young modulus and slenderness ratio η the conditions (8.5) are fulfilled for all real hexagonal-type lattices.

Note that \bar{p}^α do not depend of η . Substituting (8.2) into (8.4)₃ one obtains

$$\bar{p}^\alpha = (p^\alpha + \check{p}^\alpha) + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta (Y^3 + \check{Y}^3). \quad (8.6)$$

It is worth emphasising a fact that external: main as well as intermediate loads affect in (8.6) in an equal manner. Thus the zero-order approximation does not distinguish between main and intermediate nodes: both Eqs. (8.4) as well as (8.6) retain their forms if one choose a family of main nodes by an opposite way to the way previously assumed. The lack of centrosymmetry of neighbourhoods of nodes is „a priori” ignored.

9. Final remarks

It has been shown that only one zero-order version leads to a stable, well established mathematical model, which makes it feasible to examine boundary value problems of the hexagonal-type grid plates. The other models can be applied to analysis of local effects, for instance.

The unstable differential equations can be transformed into stable ones. In the subsequent paper [13] a derivation of such a model of a mathematical structure analogous to that known from the micropolar plane-stress theory will be proposed. On the other hand such models have been considered by Woźniak, [3]. Thus there are two ways of constructing Cosserats'-type approximations: the first due to Woźniak, obtained via variational calculus, and the second one resulting from Rogula-Kunin's methods. As it will be shown in [13], it is difficult to indicate the best version satisfying both conditions of stability and approximation.

In the present paper our attention has been focused on the specific plate of honeycomb layout. Nevertheless, the presented procedure does not lose its value for all dense regular grid plates; in particular it is not difficult to examine by the same method lattices constructed of two families of orthogonal bars or of three families of bars intersecting at an angle 60° . The mentioned structures belong to the class of simple layout grids, the centrosymmetry of the vicinities of nodes being fulfilled. It can be proved, that an essential

difference exists between the lattices of simple geometry and the considered hexagonal structure, namely, an effective modulus, γ (cf. (6.2)₆), which is positive in the latter case, and takes a negative value in case of simple layout structures. This fact is of significant interest, because in the Cosserats'-type approximation the modulus γ determines a fluxural stiffness corresponding to polar couples. Specific problems concerning Cosserats' continuum models of hexagonal-type grids will be a subject of the prepared paper [13].

References

1. G. HORVAY, N. Y. SCHENECTADY, *The plane-stress problem of perforated plates*, J. Appl. Mech., 19, 355 - 360, 1952.
2. T. LEWIŃSKI, *On asymptotic theory of perforated hexagonal-type plates*, (in Polish) XXVIII Conference on Actual Civil Engineering Problems, vol. I, Theory of structures, p. 91 - 97, Krynica 1982.
3. C. WOŹNIAK, *Lattice-type shells and plates*, (in Polish), PWN, Warsaw 1970.
4. P. KLEMM, C. WOŹNIAK, *Dense elastic lattices of hexagonal-type* (in Polish) Mech. Teoret. Stos. 8, 3, 277 - 293, 1970.
5. T. LEWIŃSKI, *Two versions of Woźniaks' continuum model of hexagonal-type grid plates*, Mech. Teoret. Stos., 23, 3-4, 389-405, 1984.
6. I. A. KUNIN, *Theory of elastic media with microstructure* (in Russian), Nauka, Moskwa 1975.
7. M. BORN, K. HUANG, *Dynamical Theory of Crystal Lattices*, University Press, Oxford 1954.
8. S. BŁASZKOWIAK, Z. KĄCZKOWSKI, *Cross Method*, (in Polish), PWN, Warsaw 1959.
9. I. BABUŠKA, *The Fourier transform in the theory of difference equations and its applications*, Arch. Mech. Stos., 11, 4, 1959.
10. W. W. KOSTROW, I. A. KUNIN, D. ROGULA, *Theory of defects in solid media* (in Polish) Ossolineum, Wrocław 1973.
11. C. WOŹNIAK, *Foundations of dynamics of deformable solids* (in Polish) PWN, Warsaw 1969.
12. T. LEWIŃSKI, *Continuum models of lattice-type hexagonal plates* (in Polish) Doctor's Thesis, Technical University of Warsaw 1983
13. T. LEWIŃSKI, *Physical correctness of Cosserat models of honeycomb grid plates*, Mech. Teoret. Stos. 24, 1, 1985.

Резюме

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ СЕТЧАТЫХ ПЛАСТИНОК

В работе выводятся и анализируются дифференциальные модели аппроксимирующие поведение густых, упругих, гексагональных стержневых пластинок. Дифференциальные аппроксимации разностных уравнений равновесия стержневой решетки получены методом Рогули и Кунина, используя аналогию между этими уравнениями и уравнениями теории кристаллических решеток. Примененный подход дает возможность представить консеквентный анализ точности формулированных математических моделей, получить уравнения в смещениях путем элиминации углов поворота узлов и, кроме того, позволяет выявить физический смысл приближений в к-репрезентации.

В работе доказывается, что среди обсуждаемых приближенных версий, только один вариант нулевой аппроксимации дает стабильные уравнения и потому только в том случае могут быть корректно поставлены краевые задачи для ограниченных решеток. Остальные модели могут быть полезны при анализе локальных эффектов.

Представленные исследования можно использовать для анализа физической корректности моделей типа Коссера (которые были приспособлены Возняком в его монографии посвященной сетчатым поверхностным конструкциям).

Streszczenie

RÓŻNICZKOWE MODELE HEKSAGONALNYCH TARCZ PRĘTOWYCH

W pracy wyprowadzono i przeanalizowano modele różniczkowe aproksymujące deformację gęstych, sprężystych, heksagonalnych tarcz prętowych. Różniczkowe przybliżenia dyskretnych równań równowagi siatki prętowej otrzymano metodą Roguli i Kunina wykorzystując analogię między w/w równaniami i równaniami teorii siatek krystalicznych. Zastosowane podejście zezwala na: konsekwentną analizę dokładności formułowanych modeli, modyfikację równań polegającą na eliminacji przemieszczeń kątowych i umożliwia ponadto fizyczną interpretację przybliżeń dokonywanych na równaniach w k -reprezentacji.

W pracy wykazano, że spośród omawianych wersji jedynie wariant zerowego przybliżenia prowadzi do równań stabilnych. Zatem tylko w tym przypadku można poprawnie formułować zagadnienia brzegowe dla tarcz ograniczonych. Pozostałe modele mogą służyć do badania zjawisk lokalnych.

Przedstawione w pracy wywody zezwalają na analizę fizycznej poprawności modeli typu Cosseratów wykorzystanych przez Woźniaka w jego monografii [3] dotyczącej dźwigarów siatkowych.

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1983 roku

LINEARIZED EQUATIONS OF STABILITY OF ELASTIC-PLASTIC CONICAL SHELL INCLUDING THE EFFECTS OF PASSIVE PROCESSES

JERZY ZIELNICA (POZNAŃ)

Politechnika Poznańska

1. Introduction

Buckling loads of elastic-plastic shells can be determined by means of two approaches. In the first one, called the constant load approach, it is assumed that the external load does not change in post-buckling state this is accompanied by arising local unloading regions (passive processes). In the second one, the so called SHANLEY approach is assumed [2, 3], i.e. that the load increases in the post-buckling state, and the passive processes develop only as a result of post-critical deflections. In paper [4] the SHANLEY approach has been used for calculating bifurcation loads of conical shells. The presented procedure account for the stability analysis of elastic-plastic shells basing on the two fundamental plasticity theories, i.e.: the incremental (plastic flow) theory, and the total strain (deformation) theory. It is also possible to use the results of paper [4] for analyzing elastic shells. The problem is quite complicated when including the effects of unloading. This leads to nonlinear differential equations; although geometrical linearity is assumed. It is the purpose of this paper to linearize these equations for a simply supported conical shell, with the assumption of a two-parametrical external load and a linear stress-deformation material hardening relation.

2. Stability equations and physical relations

The basic stability equations for a conical shell, according to linear shell theory, are as follows [4]:

$$\begin{aligned}
 & F_{,xx} \sin \beta + \delta M_{x,xx} x \cos \beta + 2 \delta M_{x,x} \cos \beta + \frac{1}{x \cos \beta} \delta M_{\varphi,\varphi\varphi} - \\
 & - \delta M_{\varphi,x} \cos \beta + \frac{2}{x} \delta M_{x\varphi,\varphi} + 2 \delta M_{x\varphi,x\varphi} + \left(\frac{1}{x \cos \beta} w_{,\varphi\varphi} + w_{,x} \cos \beta \right) N_{20} + \\
 & + x \cos \beta w_{,xx} N_{10} + 2 \left(w_{,x\varphi} - \frac{1}{x} w_{,\varphi} \right) T_{10} = 0, \quad (2.1) \\
 & w_{,xx} \sin \beta - \delta \gamma_{12,x\varphi} - \frac{1}{x} \delta \gamma_{12,\varphi} + \delta \varepsilon_{2,xx} x \cos \beta + \frac{1}{x \cos \beta} \delta \varepsilon_{1,\varphi\varphi} + \\
 & + 2 \delta \varepsilon_{2,x} \cos \beta - \delta \varepsilon_{1,x} \cos \beta = 0,
 \end{aligned}$$

where $\delta M_{\alpha\beta}$ are the additional buckling moments per unit length, $N_{\alpha\beta}$ are the membrane forces, and w is the normal deflection. Eq: (2.1)₁ is the equilibrium equation with introduced force function F , and eq. (2.1)₂ is the strain compatibility equation.

According to the constant load concept the local unloading regions appear at the moment of buckling; so the three main zones are distinguished (see I, II, III in Fig. 2). In the first zone, a part of the shell that was deformed into the plastic state before buckling,

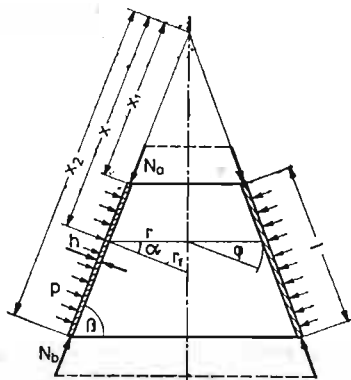


Fig. 1

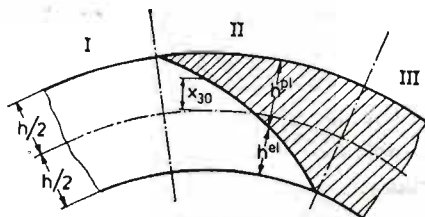


Fig. 2

returns to the elastic state; it is governed by physical relations of generalized Hooke's law. The second zone (II) is so distinguished that before buckling material is deformed plastically, but in post buckling the state a part of the material returns into the elastic state and the rest remains plastic. So, active and passive processes develop here. In the third zone (III) the plastic deformations hold for the pre-and post-buckling states; the unloading does not take place here. The physical relations in the first and in the third zones are evident, i.e. the generalized Hooke's law and appropriate plasticity relations, respectively.

Assuming the Kirchhoff-Love hypotheses the additional forces and moments during buckling in the shell are:

$$\delta N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad \delta M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3. \tag{2.2}$$

When calculating the forces and the moments in the second zone each of the integrals (2.2) should be divided into two, i.e.: $\left\langle -\frac{h}{2}, x_{30} \right\rangle$, and $\left\langle x_{30}, +\frac{h}{2} \right\rangle$; x_{30} is a coordi-

nate of active and passive processes boundary. We have for example

$$\begin{aligned} \delta N_1 - \frac{1}{2} \delta N_2 = & \frac{Eh}{2} \int_{-1}^{\bar{x}_{30}} (\delta \varepsilon_1 - \delta \bar{\kappa}_1 \bar{x}_3) d\bar{x}_3 + \frac{h}{2} (E_s - E_t) \bar{\sigma}_x^0 \bar{\kappa} \times \\ & \times \int_{\bar{x}_{30}}^{+1} (\bar{x}_3 - \bar{x}_{30}) d\bar{x}_3 + \frac{E_s h}{2} \int_{\bar{x}_{30}}^{+1} (\delta \varepsilon_1 - \delta \bar{\kappa}_1 \bar{x}_3) d\bar{x}_3, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where $\bar{x}_3 = 2x_3/h$ — dimensionless variable, and E_s, E_t are secant and tangent modules respectively. When appropriate calculations are made, for the total strain (deformation) theory one obtains:

$$\begin{aligned} \delta N_1 = & B_1 \left(\delta \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \delta \varepsilon_2 \right) + D_1 \left(\delta \kappa_1 + \frac{1}{2} \delta \kappa_2 \right) + B_2 \bar{\sigma}_x \delta \kappa, \\ \delta N_2 = & B_1 \left(\delta \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \delta \varepsilon_1 \right) + D_1 \left(\delta \kappa_2 + \frac{1}{2} \delta \kappa_1 \right) + B_2 \bar{\sigma}_\varphi \delta \kappa, \\ \delta N_{12} = & B_1 \delta \gamma_{12} + \frac{1}{2} D_1 \delta \kappa_{12} + B_2 \bar{\tau}_{x\varphi} \delta \kappa, \\ \delta M_1 = \delta M_x = & -D_1 \left(\delta \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \delta \varepsilon_2 \right) - C_2 \left(\delta \kappa_1 + \frac{1}{2} \delta \kappa_2 \right) + C_3 \bar{\sigma}_x \delta \kappa, \\ \delta M_2 = \delta M_\varphi = & -D_1 \left(\delta \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \delta \varepsilon_1 \right) - C_2 \left(\delta \kappa_2 + \frac{1}{2} \delta \kappa_1 \right) + C_3 \bar{\sigma}_\varphi \delta \kappa, \\ \delta M_{12} = \delta M_{x\varphi} = & -D_1 \delta \gamma_{12} - \frac{1}{2} C_2 \delta \kappa_{12} + C_3 \bar{\tau}_{x\varphi} \delta \kappa, \end{aligned} \quad (2.4)$$

where $B_1, B_2, D_1, C_1,$ and C_2 are the stiffnesses of the shell, given by the formulas:

$$\begin{aligned} B_1 = \frac{2}{3} Eh [2 - f_\omega (1 - \bar{x}_{30})], \quad B_2 = \frac{1}{8} Eh^2 (f_k - f_\omega) (1 - \bar{x}_{30})^2, \\ D_1 = \frac{1}{6} Eh^2 f_\omega (1 - \bar{x}_{30}^2), \quad C_2 = \frac{1}{18} Eh^3 [2 - f_\omega (1 - \bar{x}_{30}^3)], \\ C_3 = \frac{1}{48} Eh^3 (f_k - f_\omega) (1 + \bar{x}_{30}^2) (2 + \bar{x}_{30}), \quad \bar{x}_{30} = \frac{2x_{30}}{h} < 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

The quantities in (2.5) are as follows:

$$\begin{aligned} f_\omega = 1 - \frac{E_s}{E}, \quad f_k = 1 - \frac{E_t}{E}, \quad \bar{\sigma}_x = \sigma_x \sigma_i^{-1}, \quad \bar{\sigma}_\varphi = \sigma_\varphi \sigma_i^{-1}, \\ \bar{\tau}_{x\varphi} = \bar{\tau}_{x\varphi} \sigma_i^{-1}, \quad \delta \kappa = \bar{\sigma}_x \delta \kappa_1 + \bar{\sigma}_\varphi \delta \kappa_2 + 2\bar{\tau}_{x\varphi} \delta \kappa_{12}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

If before buckling the plastic deformations are small with comparison to elastic deformations one may put $f_\omega = 0$, then Eqs. (2.5) are reduced to the form:

$$\begin{aligned} B_1 = \frac{4}{3} Eh, \quad B_2 = \frac{1}{8} Eh^2 f_k (1 - \bar{x}_{30})^2, \quad D_1 = 0, \quad C_2 = D = \frac{Eh^3}{9}, \\ C_3 = \frac{1}{48} Eh^3 f_k (1 + \bar{x}_{30})^2 (2 - \bar{x}_{30}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

The physical relations (2.4) are coupled and nonlinear, because the position parameter \bar{x}_{30} , denoting the boundary between elastic and plastic region, is a variable and it depends on the unknown functions [2]:

$$\bar{x}_{30} = 1 - 2\zeta, \quad \zeta = \frac{1 - \bar{x}_{30}}{2} = \frac{h^{pl}}{h} = \left[1 - \sqrt{(1-f_k)(1+\phi)}\right] f_k^{-1}, \quad (2.8)$$

$$\phi = \frac{f_k}{(1-f_k)Eh\delta\bar{x}} \left[\left(\bar{\sigma}_x - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_\varphi \right) \delta N_1 + \left(\bar{\sigma}_\varphi - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_x \right) \delta N_2 + 3\bar{\tau}_{x\varphi} \delta N_{12} \right].$$

From the first three equations of (2.2) deformations $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ may be expressed in terms of the force function F . Substituting $\delta M_{\alpha\beta}$ (expressing the curvatures $\delta\kappa_{\alpha\beta}$ by the deflection w) and $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ from (2.2) into stability equation (2.1) we obtain a set of two nonlinear differential equations for the deflection w and the force function F , to analyse the stability of an elastic-plastic conical shell under small deflections including effects of passive processes:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{D} F_{,xx} \sin\beta + \alpha_1 w_{,xxxx} + \alpha_2 w_{,xxx} + \alpha_3 w_{,xx} + \alpha_4 w_{,x} + \alpha_5 w_{,xx\varphi\varphi} + \\ & + \alpha_7 w_{,x\varphi\varphi} + \alpha_9 w_{,\varphi\varphi} + \alpha_{10} w_{,\varphi\varphi\varphi\varphi} + \frac{2}{D} \left(\frac{1}{x \cos\beta} w_{,\varphi\varphi} + \right. \\ & \left. + \cos\beta w_{,x} \right) \frac{px}{\text{tg}\beta} + \frac{2}{D} \cos\beta w_{,xx} \left[\frac{p}{2\text{tg}\beta} (x_1^2 - x^2) - N_a x_1 \right] + \\ & + \alpha_{11} F_{,xxxx} + \alpha_{12} F_{,xxx} + \alpha_{13} F_{,xx} + \alpha_{14} F_{,x} + \alpha_{15} F_{,xx\varphi\varphi} + \alpha_{17} F_{,x\varphi\varphi} + \\ & + \alpha_{19} F_{,\varphi\varphi} + \alpha_{20} F_{,\varphi\varphi\varphi\varphi} = 0, \quad (2.9) \\ & Eh w_{,xx} \sin\beta + \beta_1 F_{,xxxx} + \beta_2 F_{,xx\varphi\varphi} + \beta_3 F_{,\varphi\varphi\varphi\varphi} + \beta_4 F_{,x\varphi\varphi} + \\ & + \beta_5 F_{,xxx} + \beta_6 F_{,\varphi\varphi} + \beta_7 F_{,xx} + \beta_8 F_{,x} + \beta_{11} w_{,xxx} + \beta_{12} w_{,xx\varphi\varphi} + \\ & + \beta_{13} w_{,\varphi\varphi} + \beta_{14} w_{,x\varphi\varphi} + \beta_{15} w_{,xxx} + \beta_{16} w_{,\varphi\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Now we come to linearizing the above equations. In the formulae for ζ (2.8) under the square root there is the function Φ . For elastic deformations $\Phi = 0$, for pure plastic deformations $\Phi = -f_k$. It can be proved that $|\Phi| < f_k < 1$. Substituting ζ from (2.8) to the eqs. (2.9) we expand the characteristic terms in series, with respect to powers of Φ .

$$(f_k - f_\omega) \zeta^2 (3 - 2\zeta) = \left[\frac{f_k - f_\omega}{f_k} \lambda_{10} + \frac{f_k - f_\omega}{f_k} \lambda_{10}^* \Phi \right] + \frac{(1-f_k)^2}{f_k^3} (f_k - f_\omega) \Phi^3 + \dots \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} (f_k - f_\omega) \frac{\zeta^2}{1 - f_\omega \zeta} &= \frac{f_k - f_\omega}{f_k^2} \frac{2 - f_k - 2\sqrt{1-f_k}}{1 - \frac{f_\omega}{f_k} + \frac{f_\omega}{f_k} \sqrt{1-f_k}} + \frac{f_k - f_\omega}{1-f_k} \frac{2f_k - f_\omega - f_\omega \sqrt{1-f_k}}{2(f_k - f_\omega + f_\omega \sqrt{1-f_k})^2} \times \\ &\times (1 - f_k - \sqrt{1-f_k}) \Phi + \dots, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \lambda_{10} &= \left[-8 + 12f_k - 3f_k^2 + 8(1-f_k)^2 \right] f_k^{-2}, \\ \lambda_{10}^* &= (1-f_k) [3f_k - 6 + 6\sqrt{1-f_k}] f_k^{-2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

In eqs. (2.9) terms there are also which cannot be linearized. However, their influence

is so small, when plastic deformations are smaller than the elastic ones. So the nonlinearity parameter \bar{x}_{30} we put $\bar{x}_{30} = -1$ on one hand, or with the Iliushin hypothesis [2] assuming zero values of force variations in the shell middle surface $\delta N_1 = \delta N_2 = \delta N_{12} = 0$ we take a \bar{x}_{30} value accordingly on the other hand. In such an approach we obtain two different values of buckling load, and the set of equations (2.9) is linear with variable coefficients.

3. Method of Solution

The basic functions, i.e. the deflection w , and the force function F are taken as:

$$w(x, \varphi) = w_0 \sin \frac{m\pi}{l} (x - x_1) \cos n\varphi, \quad F(x, \varphi) = F_0 \sin \frac{m\pi}{l} (x - x_1) \cos n\varphi, \quad (3.1)$$

where m , and n are parameters. The functions (3.1) satisfy kinematic boundary conditions for simply supported shell edges, but the static boundary conditions are satisfied in part only. The previous investigations show that it is insignificant for shells of medium and large lengths whether all of the boundary conditions are satisfied. The linearized set of equations (2.9) we integrate using the GALERKIN type procedure. When F_1 , and F_2 are the left-hand side of the eqs. (2.9) one may put

$$\int_0^{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} F_1(x, \varphi) w(x, \varphi) dx r d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, \varphi) F(x, \varphi) dx r d\varphi = 0. \quad (3.2)$$

In the plastic range it is not possible to integrate analytically the equations, since not all of the calculated functions have an explicit form; a numerical procedure must be used. If appropriate transformations are made, a set of two algebraic equations is obtained. The resulting set of two equations is linear with respect to the vector of unknowns $U = U(w_0, F_0)$.

Using the static stability criterion, i.e. that the determinant of the above mentioned set of equations must be equal to zero, we obtain

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{mn} = & \frac{2Eh}{D} \tilde{C}^2 - (\tilde{A}_1 + n^2 \tilde{A}_2 + n^4 \tilde{A}_3)(\tilde{B}_1 + n^2 \tilde{B}_2 + n^4 \tilde{B}_3) + \\ & + (\tilde{A}_{10} + n^2 \tilde{A}_{20} + n^4 \tilde{A}_{30})(\tilde{B}_{10} + n^2 \tilde{B}_{20} + n^4 \tilde{B}_{30}) - \\ & - \tilde{C} [Eh(\tilde{A}_{10} + n^2 \tilde{A}_{20} + n^4 \tilde{A}_{30}) + \frac{2}{D} (\tilde{B}_{10} + n^2 \tilde{B}_{20} + n^4 \tilde{B}_{30})] = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

The buckling criterion, eq. (3.3) is transcendental and quite complicated, and it cannot be solved exactly; a numerical procedure must be used. The critical load can be calculated as the smallest positive root of eq. (3.3); however, it is necessary to minimize it with respect to parameters m and n . The integrals \tilde{A}_i , \tilde{B}_i , \tilde{A}_{i0} , \tilde{B}_{i0} are calculated numerically, where for example

$$\tilde{A}_1 = A_0 + \tilde{A}_1 \cos \beta, \quad (3.4)$$

$$A_0 = \frac{p(x_2 - x_1) \cos \beta}{2D \operatorname{tg} \beta} \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left[x_1^2 \left(1 - \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{\alpha_N} \right) - \frac{1}{3l} (x_2^3 - x_1^3) \right] \right\} +$$

$$+ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos \beta e_{12} |x_1^2, \quad \alpha_N = \frac{px_1}{\alpha a},$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{cases} \tilde{A}_1^{el}, & \text{for } \sigma_i < \sigma_{pl} \\ \tilde{A}_1^{pl}, & \text{for } \sigma_i \geq \sigma_{pl}, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\tilde{A}_1^{el} = \int_{x_1}^{x_2} 2 \left\{ - \left[x \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{1}{x} \right] \sin^2 \frac{m\pi}{l} (x - x_1) + \frac{l}{m\pi} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2x^2} \right] \sin \frac{2m\pi}{l} (x - x_1) \right\} dx,$$

$$\tilde{A}_1^{pl} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 x e_{11} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (x - x_1) + \frac{m\pi}{2l} (e_{12} + e_{21}) \sin \frac{2m\pi}{l} (x - x_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{x} e_{22} \cos^2 \frac{m\pi}{l} (x - x_1) \right\} dx, \dots$$

here σ_i is effective stress, σ_{pl} is plastic limit, e_{ij} are the shell stiffnesses (e_{ij} depend on the load).

4. Numerical Results and Conclusions

A research procedure elaborated by the Author [4] to find the buckling load from the buckling criterion, eq. (3.3), is used. In this procedure we evaluate the critical load numerically from the buckling criterion by searching for zero points of eq. (3.3) according to Newton's iteration technique; the integrals were evaluated by Simpson's rule. The buckling load is the lowest buckling load of many buckling loads for a specified range of m and n . The calculations were made on the computer Odra 1305. Let us consider a circular conical shell loaded as in Fig. 1. In the presented series of investigations the following basic data have been assumed: $x_1 = 34.635$ cm, $x_2 = 77.635$ cm, $\beta = 20^\circ$, $\alpha_N = px_1/N_a = 8$. We assume a linear stress hardening material with an isotropic strain hardening in which: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $E_t = 10000$ MPa, $\alpha_{pl} = 70$ MPa.

Fig 3 is a plot of curves representing the zero points p^* of the stability criterion (3.3), versus n , ($m = 1$), for different assumptions accepted in this paper. A minimum of each p^* curve is the buckling load. In Fig. 3 the present solutions are also compared with the author solutions [4] using the SHANLEY approach. Comparison of the results shows (see Fig. 3), that the inclusion of the effects of passive processes gives a higher critical load than the SHANLEY concept (the deformation theory in both cases is used); this was also stated previously in the analysis of plate stability [3]. The assumption of $\bar{x}_{30} = -1$ gives the results which are in better agreement with the SHANLEY concept, than using the ILIUSHIN hypothesis which says that the normal forces variations in the shell middle surface vanish in the moment of buckling. When we use the simplified physical equations,

eqs (2.7), i.e. $f_\omega = 0$. then the results are comparable with the ILIUSHIN hypothesis $\delta N_{\alpha\beta} = 0$.

We shall next obtain an elastoplastic solution of the cases in which a shell thickness parameter h is varied, with the rest of parameters taken constant, except of the angle β .

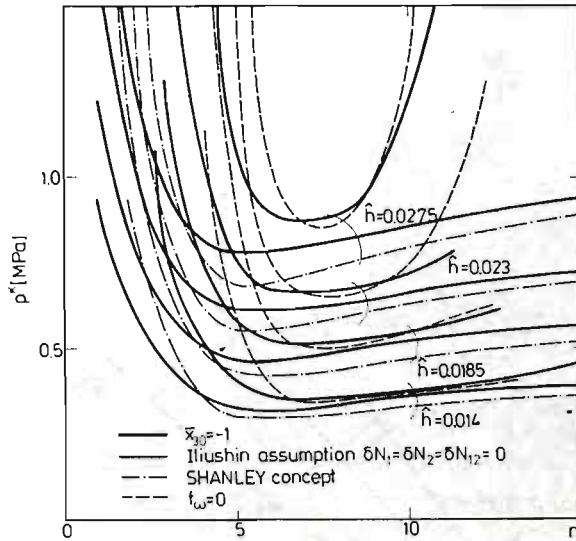


Fig. 3

Fig. 4 shows a plot of critical load as a function of shell thickness for different β using the simplified physical relations, $f_\omega = 0$ (2.7). It was ascertained, that a shell thickness increase is accompanied by the critical load increase; the curve shapes are approximately linear within the range of investigations. When angle β is increased, there is also an increase in the buckling load. The change of these two parameters did not affect the buckling form; $m = 1$, $n = 7$ (or 8).

Fig. 5 presents the results of calculations for different h and β , using non-simplified physical relations (2.5), where $f_\omega \neq 0$. For comparison Fig. 5 shows also the curves obtained on the basis of the Shanley concept for deformation theory (TD), and plastic flow theory (TPF), for $\beta = 20^\circ$. Here one can see that when including the unloading and deformation theory of plasticity (as in this paper), the critical loads turn to be higher than when using the SHANLEY approach (unloading not included). However, the SHANLEY concept and incremental theory give critical loads (dotted line in Fig. 5) higher than in the case of deformation theory and the SHANLEY concept; but these are slightly different as to compare with critical loads obtained when including the unloading effects (see Fig. 5).

The obtained results were also the basis for plotting the diagram, Fig. 6, in coordinates p , N_a , that presents instability regions (ultimate load) of the shell for different coefficients α_N . The points contained within an area limited by the coordinate axes and the curves refer to a stable condition, and for combination of p and N_a which corresponds to the position on the curve or the position outside the stability region, the shell is found to be in an unstable condition. It is seen that the curves for the SHANLEY approach and for ILIUSHIN concept of $\delta N_{\alpha\beta} = 0$, differ somewhat in form; the inclusion of the effects

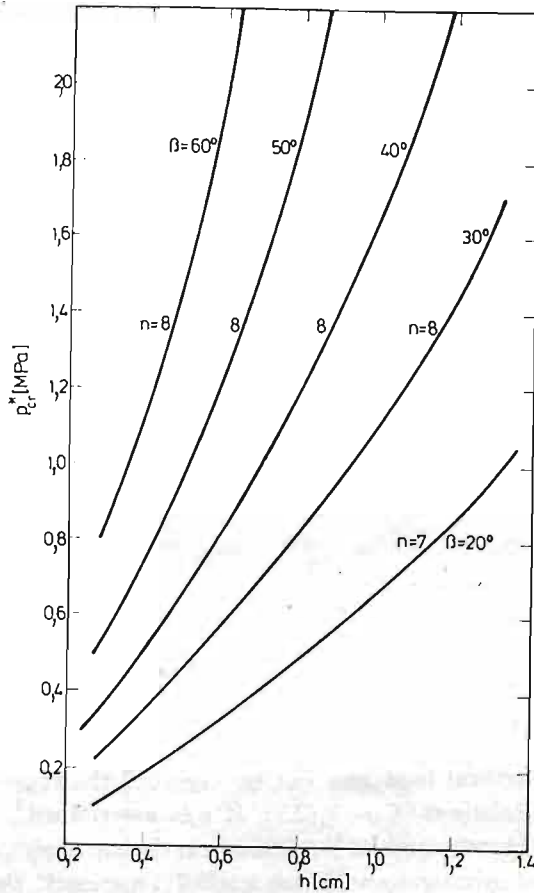


Fig. 4

of unloading gives higher critical loads, but the discrepancies are larger when the coefficient α_N is small.

It is worthnoting that the effects of passive processes on the inelastic buckling strength of conical shells subjected to axial compression and external pressure are significant for some cases, and these effects may be determined by the procedure given in this paper. The computer program developed in this research can also treat a linear elastic problem, because the terms resulting from plastic deformations are neglected automatically by conditional transfers in the program.

References

- [1] E. M. SMETANINA, A. B. SACHENKOV, *Elastic-plastic stability of thinwalled plates and shells* (in Russian), Investigations in theory of plates and shells, 5, 1967.
- [2] B. I. KOROLEW, *Elastic-plastic deformations of shells* (in Russian), Mashinostrojenie, Moscow 1971.
- [3] A. C. WOLMIR, *Stability of deformable structures* (in Russian), Ed. „Science”, Moscow 1967.
- [4] J. ZIELNICA, *Critical state of elastoplastic conical shell* (in Polish), Engineering Transactions, 22, 2, 1982.
- [5] H., RAMSEY, *Plastic buckling of conical shells under axial compression*, International Journal of Mechanical Sciences, 19, 5, 1977.

Резюме

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ УПРУГО ПЛАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ РАЗГРУЗКИ

В работе рассмотрен проблем упруго-пластической устойчивости оболочки в виде усеченного конуса под действием равномерного поперечного давления и осевого сжатия. Уравнения задачи построены на основе деформационной теории пластичности и теории пластического течения. Эти уравнения получены с учетом разгрузки материала, и их линеаризация сделана с помощью расложения в степенные ряды нелинейных членов. Линеаризованные уравнения решены методом Бубнова-Галеркина. Результаты могут быть использованы для определения критических нагрузок в упругих, упруго-пластических и чисто-пластических состояниях.

Streszczenie

LINEARYZACJA RÓWNAŃ STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ POWŁOKI
STOŻKOWEJ Z UWZGLĘDNIENIEM PROCESÓW BIERNYCH

W pracy przedstawiono analizę i przykłady obliczeń numerycznych stateczności sprężysto-plastycznej powłoki stożkowej obciążonej bocznym ciśnieniem równomiernym i ściskającą siłą wzdłużną. Uwzględniono odciążenie materiału w chwili utraty stateczności, a wyprowadzone równania zlinearyzowano przez rozłożenie w szereg potęgowy członów nieliniowych. Równania rozwiązano metodą ortogonalizacyjną Galerкина. W przykładach obliczeń numerycznych przedstawiono porównanie wyników uzyskanych w oparciu o różne podejścia stosowane w teorii stateczności konstrukcji plastycznych.

Praca została złożona w Redakcji 15 stycznia 1983 roku

WPLYW WARUNKÓW ZRZUTU NA RUCH ZASOBNIKA W POBLIŻU NOSICIELA I PARAMETRY UPADKU

JERZY MARYNIAK
KAZIMIERZ MICHAŁEWICZ
ZYGMUNT WINCZURA
Politechnika Warszawska

1. Wstęp

W celu zbadania osobliwości lotu obiektów zrzuconych z samolotów w zakresie prędkości poddźwiękowych, rozpatrzono dynamikę zasobnika w chwili zrzutu z nosiciela oraz wpływ warunków początkowych na parametry lotu w punkcie upadku.

Obiekt traktowano jako układ mechaniczny sztywny [2, 4, 8] o sześciu stopniach swobody składowe prędkości: podłużna U poprzeczna W i boczna V oraz przemieszczenia kątowe; kąty przechylenia Φ , pochylenia θ i odchylenia Ψ .

Wyprowadzono równania ruchu zasobnika i opracowano programy [7] do obliczeń na EMC, stosując numeryczne całkowanie równań za pomocą metody Mersona. Charakterystyki aerodynamiczne uzyskano w wyniku badań modelowych w aerodynamicznym tunelu poddźwiękowym w Instytucie Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej. Charakterystyki masowe wyznaczono na drodze obliczeń teoretycznych.

2. Dynamiczne równania ruchu obiektu

Do opisu ruchu obiektu zrzucanego z nosiciela przyjęto następujące układy odniesienia [4, 5, 8, 9, 10, 11, 13];

- układ sztywno związany z poruszającym się obiektem $Oxyz$ rys. (1 i 2).
- układ prędkościowy związany z kierunkiem przepływu ośrodka $Ox_a y_a z_a$ (rys. 2).
- układ grawitacyjny związany z poruszającym się obiektem $Ox_g y_g z_g$ (rys. 1). równoległy do układu $Ox_1 y_1 z_1$.
- nieruchomy układ grawitacyjny związany z Ziemią $Ox_1 y_1 z_1$ (rys. 1).

Badając ruch klasycznego zasobnika lotniczego założono, że jest on ciałem sztywnym osiowosymetrycznym, a stałej masie [1, 2, 5, 8, 9, 10, 11, 13].

Układ różniczkowych równań ruchu zasobnika lotniczego, uwzględniający nieliniowości geometryczne kinematyczne i aerodynamiczne w zapisie macierzowym ma postać [8, 11, 13]:

$$P\dot{\mathbf{x}}(t) + N(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -m(t)(RV - QW) + m(t)g \sin \theta - X_Q Q - X \\ -m(t)(PW - RU) - m(t)g \cos \theta \sin \Phi - Y_R R - Y \\ -m(t)(QU - PV) - m(t)g \cos \theta \cos \Phi - Z_Q Q - Z \\ -L_p P - L \\ [J_x(t) - J_z(t)] PR - M_Q Q - M \\ [J_y(t) - J_x(t)] PQ - N_R R - N \\ -P \cos \theta - (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \sin \theta \\ -Q \cos \Phi + R \sin \Phi \\ -Q \sin \Phi + R \cos \Phi. \end{bmatrix} \quad (4)$$

W celu uzyskania pełnego układu równań uzupełniano równania (1) następującymi związkami kinematycznymi [4, 8, 11, 13]:

$$\text{col}[\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1] = \Lambda_V^{-1} \text{col}[U, V, W], \quad (5)$$

$$\text{col}[\dot{\Phi}, \dot{\theta}, \dot{\Psi}] = \Lambda_D^{-1} \text{col}[P, Q, R], \quad (6)$$

gdzie Λ_V, Λ_D macierze transformacji [4, 8, 13].

Kąty: natarcia α i ślizgu γ zdefiniowano jako:

$$\alpha = \arcsin \frac{W}{\sqrt{U^2 + W^2}}, \quad (7)$$

$$\gamma = \arcsin \frac{V}{V_c}, \quad (8)$$

gdzie:

$$V_c^2 = U^2 + V^2 + W^2. \quad (9)$$

Pochodne aerodynamiczne X_Q, Y_R, Z_Q, M_Q, N_R występujące w macierzy \mathbf{N} (4) badanego zasobnika przedstawiono w pracach [11, 13].

3. Przykład liczbowy i wnioski

Numeryczne rozwiązanie równań (1) ÷ (9) otrzymano na maszynie cyfrowej ODRA, wykorzystując do całkowania metodą Mersona [7]. Analizę numeryczną przeprowadzono w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych.

Obliczenia wykonano dla następujących warunków początkowych:

- prędkości zrzutu $V_p = 175$ [m/s],
- wysokości zrzutu $H = 500$ [m],
- kąta pochylenia toru $\theta_0 = 2^\circ; 1^\circ; 0^\circ; -1^\circ; -2^\circ$,
- kąta natarcia $\alpha_p = 2^\circ; 1^\circ; 0^\circ; -1^\circ; -2^\circ$,
- kąta odchylenia $\Psi_p = 0^\circ; 1^\circ; 2^\circ$,

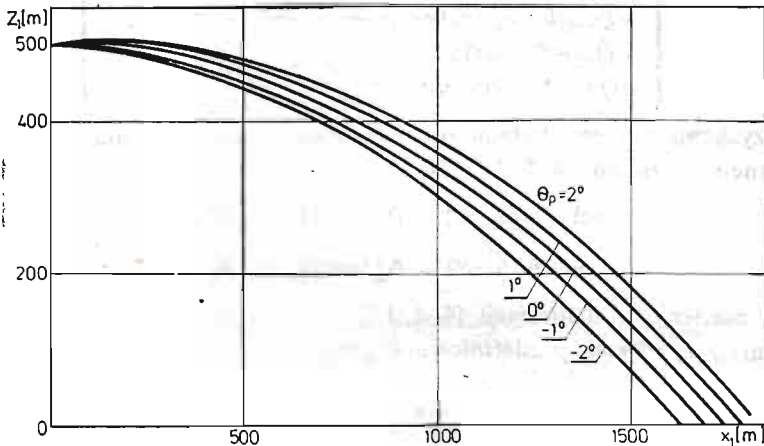
dla zasobników o różnej masie oraz przy zachowaniu stałych charakterystyk geometrycznych i aerodynamicznych.

Charakterystyczne wyniki obliczeń badanego obiektu przedstawiono na wykresach rys. 3 ÷ 14.

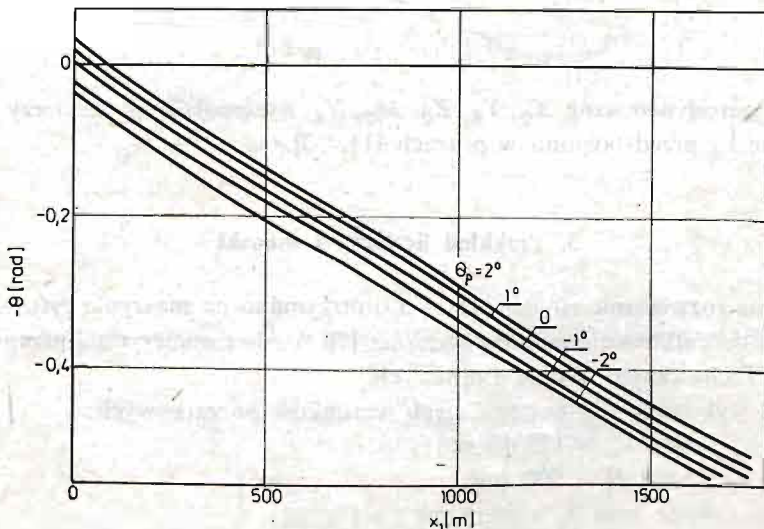
Z analizy uzyskanych rezultatów obliczeń wynika, że profil toru lotu zasobnika $z_1 =$

$= z_1(x_1)$ i $y_1 = y_1(x_1)$ silnie uzależniony jest od parametrów lotu samolotu w chwili oddzielenia (rys. 3, 5, 9, 11, 12), jak również charakterystyk masowych zasobnika (rys. 11, 12).

Początkowy kąt pochylenia zasobnika θ_p ma istotny wpływ na zasięg (rys. 3) oraz na kąt upadku θ_k (rys. 4), przy czym wzrost kąta θ_p powoduje zwiększenie zasięgu i kąta



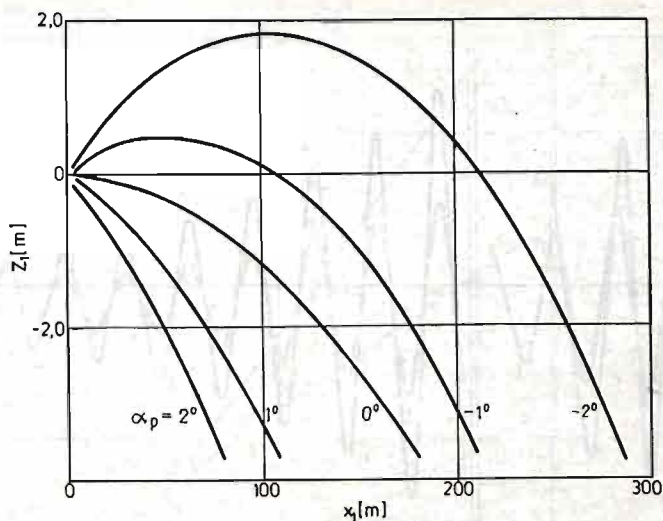
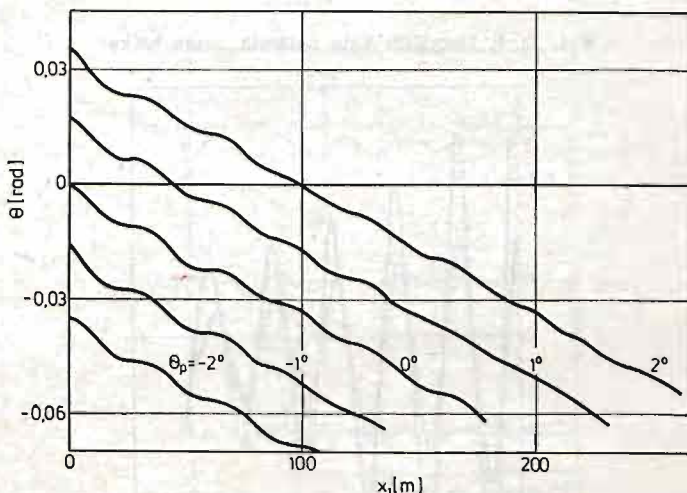
Rys. 3. Torzy lotu zasobnika przy różnych początkowych kątach pochylenia θ_p



Rys. 4. Zmiany kąta pochylenia zasobnika θ

upadku. Istotny wpływ na profil toru zasobnika w pobliżu nosiciela ma początkowy kąt natarcia α_p .

Z rys. 5 wynika, że przy małej masie zasobnika $m = 50$ kg i ujemnym kącie natarcia $\alpha_p = -2^\circ$ następuje przewyższenie toru nosiciela o ok. 1,75 m, co może spowodować kolizję z samolotem.

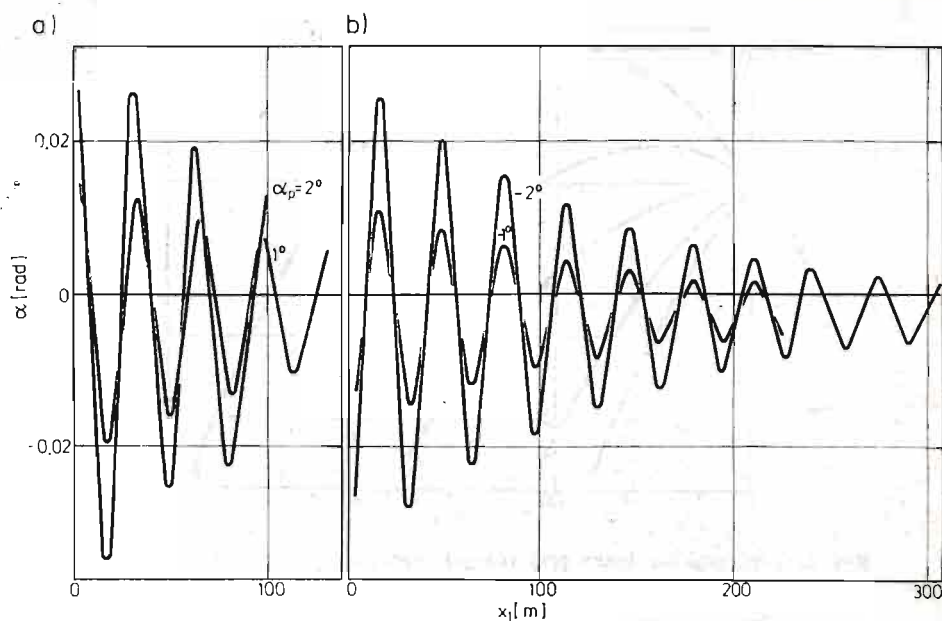
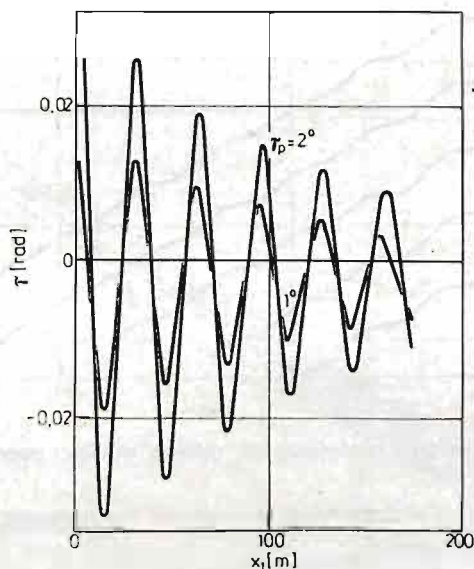
Rys. 5. Torzy lotu zasobnika przy różnych początkowych kątach natarcia α_p Rys. 6. Zmiany kąta pochylenia dla różnych wartości początkowych θ_p

Na rys. 6 przedstawiono zmianę kąta pochylenia θ zasobnika w pobliżu nosiciela dla różnych wartości początkowych θ_p .

Kolejne wykresy przedstawiają oscylację kąta natarcia α zasobnika (rys. 7a, b) oraz kąta ślizgu γ (rys. 8) przy różnych wartościach początkowych tych parametrów. Wynika z nich, że ruch zasobnika na torze ma charakter oscylacji tłumionych, a amplituda oscylacji zależy od wartości początkowych kątów α_p i γ_p .

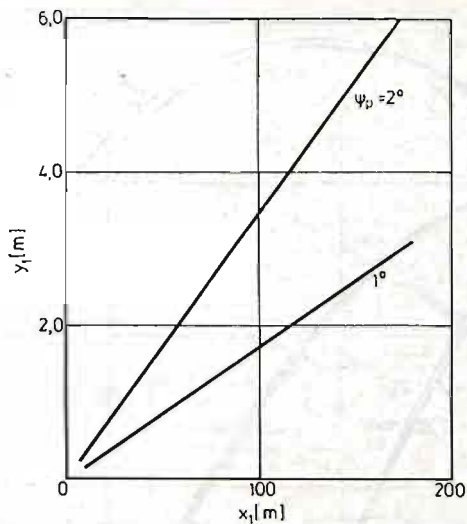
Z wykresu toru lotu zasobnika w płaszczyźnie Ox_1y_1 (rys. 9) wynika, że odchyła się on od płaszczyzny rzutu, przy czym zboczenie to jest uzależnione od początkowego kąta odchylenia Ψ_p . Większy początkowy kąt odchylenia powoduje większe znoszenie boczne.

Na rys. 10 przedstawiono oscylacje kąta odchylenia Ψ zasobnika przy różnych jego

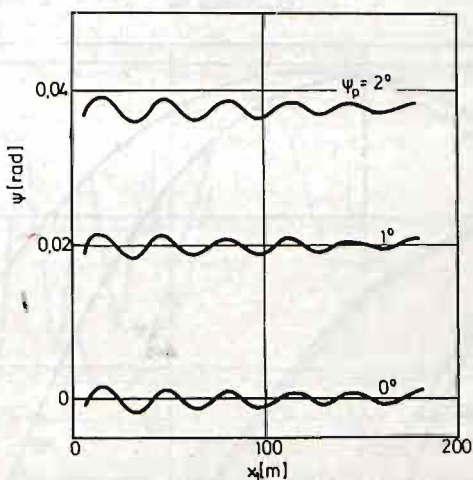
Rys. 7a, b. Oscylacje kąta natarcia α zasobnikaRys. 8. Oscylacje kąta ślizgu γ zasobnika

wartościach początkowych $\psi_p = 0^\circ, 1^\circ$ i 2° . Wykonuje on jedynie słabe oscylacje odchylenia wokół ustalonej wartości początkowej kąta ψ_p , bez zmiany jego średniej wartości.

Kolejne wykresy przedstawiają profil toru lotu zasobników o różnej masie dla różnych wartości początkowych kątów pochylenia (rys. 11). Profil ten zależy zarówno od warunków zrzutu, jak również od charakterystyk masowych zasobników przy niezmiennych charakterystykach geometrycznych. Zasobnik o większej masie charakteryzuje się większą



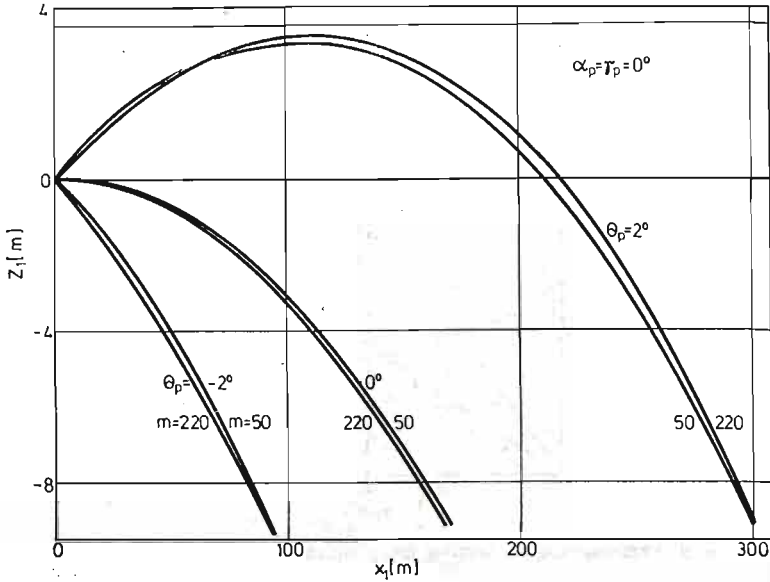
Rys. 9. Przesunięcie środka masy obiektu w płaszczyźnie bocznej

Rys. 10. Zmiany kąta odchylenia ψ'

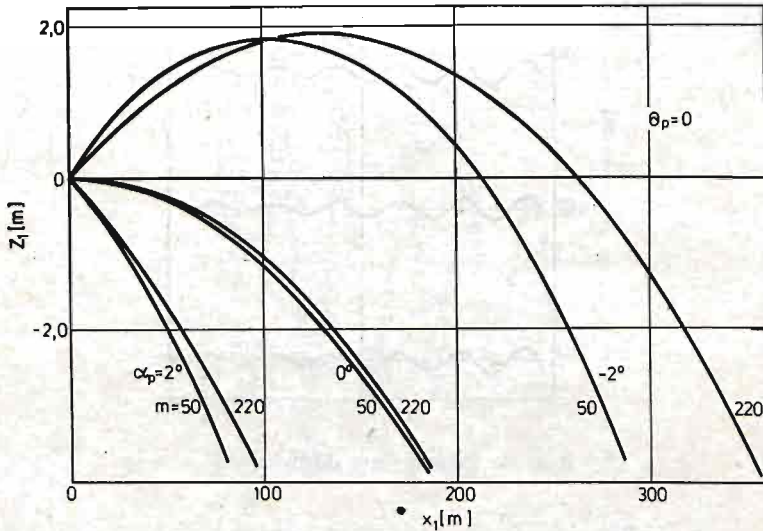
donośnością, co uzależnione jest od stosunku działających sił aerodynamicznych do sił masowych.

Charakter zmian kąta pochylenia zasobników o różnych masach, dla różnych wartości początkowych θ_p , przedstawia rys. 13. Ruch zasobnika o mniejszej masie $m = 50$ kg charakteryzuje się oscylacjami o większej częstotliwości i mniejszej amplitudzie niż zasobnika o masie dużej.

Przebieg zmian kąta natarcia na torze lotu (rys. 14) wyraźnie wskazuje na oscylacyjny charakter ruchu zasobnika. Ruch zasobnika o masie $m = 50$ kg jest silnie tłumiony, co wynika z dużego stosunku sił aerodynamicznych do sił masowych.



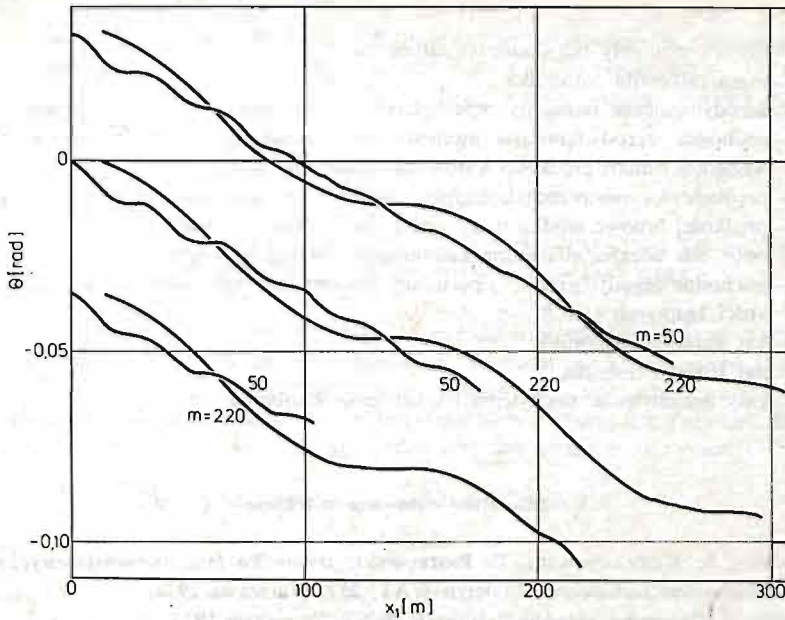
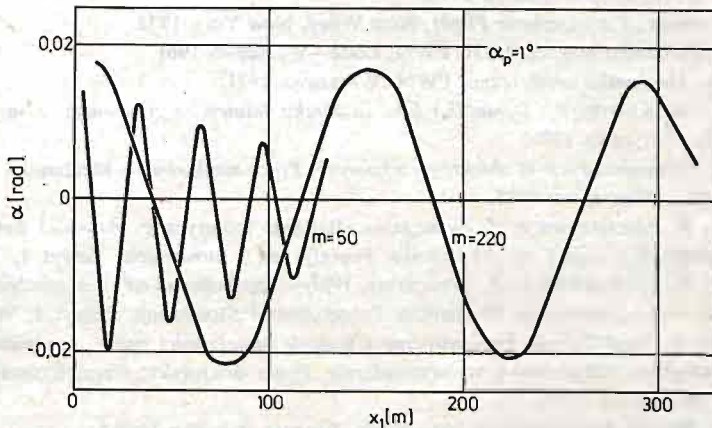
Rys. 11. Początkowe odcinki torów lotu zasobników o różnych masach dla różnych początkowych kątów pochylenia θ_p



Rys. 12. Początkowe odcinki torów lotu zasobników o różnych masach dla różnych początkowych kątów natarcia α_p

4. Wnioski ogólne

Wyniki analizy własności dynamicznych zasobnika lotniczego w chwili oddzielenia od nosiciela wskazują, że małe odchyłki od założonych parametrów rzutu dają duże błędy w punkcie upadku (x_1, z_1, θ_k), jak również w przebiegu lotu swobodnego. Wynika stąd konieczność stosowania na samolotach czujników mierzących kąt położenia oraz prędkości kątowne, kąty natarcia i ślizgu oraz wprowadzania tych danych do układów celowniczych.

Rys. 13. Oscylacje kąta pochylenia θ zasobników o różnych masachRys. 14. Oscylacje kąta natarcia α zasobników o różnych masach

Innym problemem wynikającym z przedstawionej analizy jest zagadnienie zrzutu oraz pierwszej fazy lotu zasobników o małej masie, a dużych siłach i momentach aerodynamicznych. Obliczenia, jak również praktyka wykazały, że zasobnik o małej masie po zrzucie z samolotu przy kątach natarcia $\alpha_p \neq 0$ może zderzyć się z nosicielem. Powstaje więc kwestia stosowania wymuszonego oddzielania zasobników od nosiciela, bądź rozwiązań technicznych eliminujących możliwości kolizji.

Przedstawiona metoda badania własności dynamicznych zasobników lotniczych umożliwia analizę zachowania się zasobników lotniczych o dowolnym schemacie konstrukcyjnym na całym torze lotu swobodnego, począwszy od zrzutu, przez fazę odejścia od nosiciela do punktu upadku.

Ważniejsze oznaczenia

- J_x, J_y, J_z — osiowe momenty bezwładności zasobnika,
 m — masa całkowita zasobnika,
 L, M, N — aerodynamiczne momenty przechylające, pochyłające i odchylające zasobnika,
 L_p, M_Q, N_r — pochodne aerodynamiczne momentu przechylającego, pochyłającego i odchylającego względem zmian prędkości kątowych zasobnika,
 P, Q, R — prędkości kątowe przechylenia, pochylenia i odchylenia zasobnika, w układzie związanym.
 U, V, W — prędkości liniowe środka masy zasobnika w układzie związanym,
 X, Y, Z — opór, siła boczna, siła nośna zasobników w układzie związanym,
 X_o, Y_R, Z_o — pochodne aerodynamiczne oporu, siły bocznej i nośnej zasobnika względem zmian prędkości kątowych Q i R .
 α — kąt natarcia zasobnika,
 γ — kąt ślizgu zasobnika,
 Φ, θ, Ψ — kąty przechylenia, pochylenia i odchylenia zasobnika.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. DŻYGADŁO, A. KRZYŻANOWSKI, E. PIOTROWSKI, *Dynamika lotu osiowo-symetrycznego ciała ze sztywnym urządzeniem hamującym*, Biuletyn WAT, 257, Warszawa 1974.
2. R. H. CANON jr, *Dynamika układów fizycznych*, WNT, Warszawa 1973.
3. S. DUBIEL, *Więzy uogólnione i ich zastosowanie do badania sterowalności obiektów latających*. Dodatek do Biuletynu WAT, 256, Warszawa 1973.
4. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York 1972.
5. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, cz. I i II, PWN, Łódź—Warszawa 1961.
6. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
7. A. KRUTKOW, A. KRUTKOW *Dynamika lotu zasobnika lotniczego zrzuczonego z samolotu*, Program KAMI, ITWL, Warszawa 1978.
8. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe — Mechanika Nr 32, Politechnika Warszawska, Warszawa 1975.
9. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, *Badanie teoretyczne własności dynamicznych lotu obiektów zrzucanych z samolotu*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Zeszyt 1, Warszawa 1977.
10. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, *Wpływ spadochronu na ruch zasobnika osiowo-symetrycznego zrzuczonego z samolotu*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Zeszyt 1, Warszawa 1978.
11. K. MICHAŁEWICZ, *Modelowanie matematyczne i badanie stateczności ruchu przyspieszanych obiektów zrzucanych z samolotu hamowanych aerodynamicznie*, Praca doktorska, niepublikowana, Politechnika Warszawska, Warszawa 1978.
12. I. N. NIELSEN, *Missile Aerodynamics*, New York, Toronto, London 1960.
13. Z. WINCZURA, *Badanie teoretyczne własności dynamicznych obiektów osiowo-symetrycznych z rakietywym układem hamującym przyspieszającym zrzucanych z samolotu*, Praca doktorska, niepublikowana, Politechnika Warszawska, Warszawa 1978.
14. T. ZAWADZKI, *Balistyka zewnętrzna raket*, cz. II, WAT, Warszawa 1976.
15. S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, tom I i II, PWN, Warszawa 1957.

Резюме

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ СБРОСА НА ДВИЖЕНИЕ АВИАЦИОННОГО КОНТЕЙНЕРА БЛИЗКО НОСИТЕЛЯ И ПАРАМЕТРЫ ЕГО ПАДАНИЯ

Испытано особенности полёта объектов, сбрасываемых из самолетов при дозвуковых скоростях. Рассмотрено, динамические свойства авиационного контейнера в момент сброса из носи-

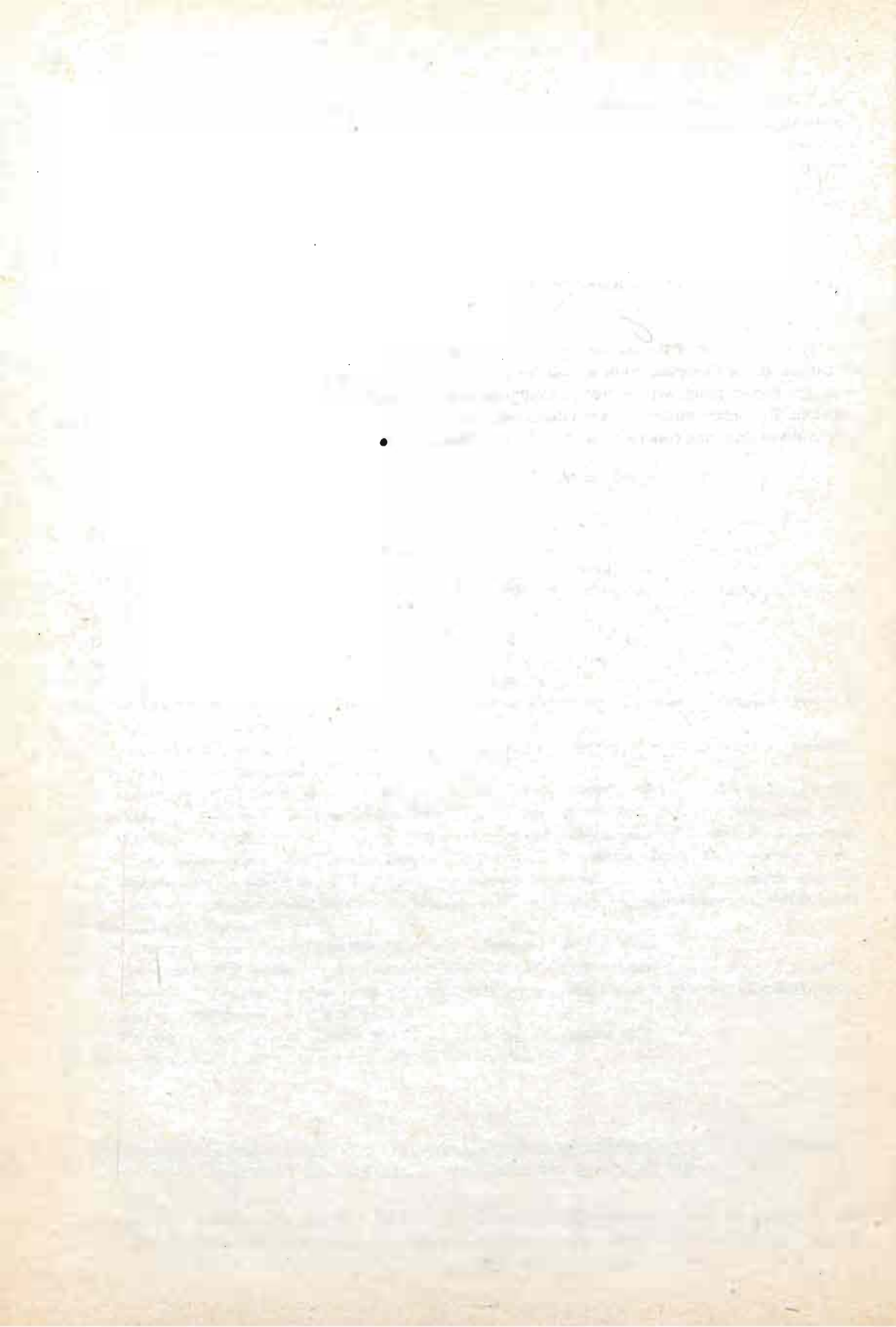
теля, а также влияние начальных условий на динамику контейнера в точке падения. Авиационный контейнер принято как механическую систему о шести степенях свободы. Выведено уравнения движения и примерно сделано вычисления. Из численных результатов видно, что малые отклонения принятых параметров сброса дают крупные ошибки в точке падения и влияют на траекторию свободного полёта контейнера.

Summary

INFLUENCE OF THE DROPPING CONDITIONS ON THE CONTAINER MOTION NEAR CARRIER AND ON THE IMPACT PARAMETERS

Peculiar feature of the container flight, dropped from the subsonic aircraft were studied. Container dynamics at the dropping point as well as influence of the initial conditions on the flight parameters near the impact point were evaluated. Container was considered as a rigid object having six degrees of freedom. Exemplary numerical calculations were performed. It was found that the small divergence from the assumed dropping conditions lead to the significant deviation of the impact point.

Praca została złożona w Redakcji 2 lutego 1983 roku



BADANIE STATECZNOŚCI SAMOLOTU W USTALONYM KORKOCIĄGU

WOJCIECH BLAJER

Wyższa Szkoła Inżynierska

1. Wstęp

W pracy przedstawiono metodę badania stateczności ruchu samolotu w ustalonym korkociągu. Samolot traktowano jako sztywny układ mechaniczny o sześciu stopniach swobody. Badano stateczność położenia równowagi samolotu w korkociągu o osi pionowej względem ziemi dla ustalonej wysokości i przy ustalonych parametrach sterowania.

Niniejsza praca stanowi rozwinięcie pracy [3], podejmującej zagadnienie wyznaczania warunków równowagi ustalonego korkociągu samolotu. Stan lotu samolotu w korkociągu ustalonym stanowi bazę wyjściową przedstawionej metody badania stateczności położenia równowagi.

Równania do badania stateczności ruchu samolotu w korkociągu ustalonym otrzymano z ogólnych równań ruchu samolotu wyrażonych w quasi-współrzędnych układu własnego [2, 3, 6], wyprowadzonych z równań Boltzman-Hamela [5] dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych. Równania te uzupełniono niezbędnymi związkami kinematycznymi.

Matematyczną stronę zagadnienia oparto na pracy [4]. Ograniczono się do wyznaczania wartości własnych macierzy Jacobiego układu równań ruchu samolotu, określonej w punkcie równowagi korkociągu. Za warunek stateczności przyjęto ujemne wartości rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy Jacobiego.

Oddziaływania zewnętrzne działające na samolot w locie rozpatrywano analogicznie jak w pracach [2, 3, 6]. Są oddziaływania aerodynamiczne, od zespołu napędowego i od siły ciężkości. Oddziaływania aerodynamiczne liczono rozdzielając je na pochodzące od skrzydła, kadłuba i usterzeń poziomego i pionowego. Skrzydło zostało dodatkowo rozdzielone na $N = 20$ pasków. Uwzględnienie lokalnych warunków opływu poszczególnych pasków skrzydła i usterzeń pozwoliło na przybliżone uwzględnienie wpływu prędkości kątowych samolotu na siły i momenty aerodynamiczne. Uwzględniono też wpływ poszczególnych części samolotu wzajemnie na siebie.

Obliczenia przykładowe przeprowadzono dla przypadku samolotu TS-11 „Iskra” według własnych programów w Ośrodku Obliczeniowym Politechniki Warszawskiej. Wykorzystano część oprogramowania użytego poprzednio do obliczeń w pracach [3, 6].

2. Założenia matematyczne

Rozważmy układ równań różniczkowych o postaci normalnej. Załóżmy dodatkowo, że jest to układ autonomiczny, tzn. równania nie zależą jawnie od czasu. Układ taki można zapisać w postaci [4]:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}), \quad (1)$$

gdzie: $\mathbf{Y} = \text{col}[y_1, y_2, \dots, y_n]$, a wektor prawych stron $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \text{col}[f_1(\mathbf{Y}), f_2(\mathbf{Y}), \dots, f_n(\mathbf{Y})]$ ma ciągłe drugie pochodne w pewnym obszarze $\|\mathbf{Y}\| < H$, H — stała. Jeśli

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}_0) = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad \|\mathbf{Y}_0\| < H, \quad (2)$$

to wektor $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0$ wyznacza stan równowagi układu (1).

W położeniu $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{X}$, gdzie \mathbf{X} oznacza wektor małego wychYLENIA z położenia równowagi, równanie (1) przekształca się do postaci:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + o(\|\mathbf{X}\|), \quad (3)$$

gdzie: $\mathbf{A} = \mathbf{F}'(\mathbf{Y}_0)$ — macierz Jacobiego określona w położeniu równowagi, $o(\|\mathbf{Y}\|)$ — reszta z rozwinięcia funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ w szereg Taylora wokół punktu \mathbf{Y}_0 .

Ponieważ z ciągłości drugich pochodnych funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ wynika ciągłość $o(\|\mathbf{Y}\|)$ w założonym obszarze oraz ponieważ:

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow 0} \frac{o(\|\mathbf{X}\|)}{\|\mathbf{X}\|} = 0, \quad (4)$$

równanie (3) jest równaniem quasi-liniowym i ma jedyne rozwiązanie zerowe $\mathbf{X} = 0$.

Dla równania quasi-liniowego (3), korespondującego z równaniem (1) wg powyższych zależności, słuszne jest twierdzenie (wg twierdzenia Lapunowa) o następującej treści. Jeśli wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego $\mathbf{F}'(\mathbf{Y}_0)$ mają ujemne części rzeczywiste, to stan równowagi $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0$ nieliniowego układu autonomicznego (1) jest asymptotycznie stateczny w sensie Lapunowa przy $t \rightarrow \infty$.

3. Równania do badania stateczności położenia równowagi samolotu w ustalonym korkociągu

Zgodnie z pracami [1, 2, 3, 6] przyjęto następujące równania ruchu samolotu:

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{m \cdot V_c \cos \beta} [- (X_a + T \cos \delta - mg \sin \theta) \sin \alpha + (Z_a - T \sin \delta + mg \cos \Phi \cos \theta) \cos \alpha] + Q - (R \sin \alpha + P \cos \alpha) \tan \beta, \quad (a)$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{m V_c} [- (X_a + T \cos \delta - mg \sin \theta) \cos \alpha \sin \beta + (Y_a + mg \sin \Phi \cos \theta) \cos \beta + - (Z_a - T \sin \delta + mg \cos \Phi \cos \theta) \sin \alpha \sin \beta] - R \cos \alpha + P \sin \alpha, \quad (b)$$

$$\dot{V}_c/V_c = \frac{1}{mV_c} [(X_a + T \cos \delta - mg \sin \theta) \cos \alpha \cos \beta + (Y_a + mg \sin \Phi \cos \theta) \sin \beta + (Z_a - T \sin \delta + mg \cos \Phi \cos \theta) \sin \alpha \cos \beta], \quad (c)$$

$$\dot{P} = K \left[\frac{L_a}{J_x} + \frac{K_1}{J_z} (N_a - J_0 Q \omega) + K_4 P Q - K_5 Q R \right], \quad (d)$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{J_y} (M_a + T e + J_0 R \omega) + K_6 P R - K_2 (P^2 - R^2), \quad (e)$$

$$\dot{R} = K \left[\frac{K_3}{J_x} L_a + \frac{1}{J_z} (N_a - J_0 Q \omega) + K_7 P Q - K_8 Q R \right], \quad (f)$$

$$\dot{\Phi} = P + (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \operatorname{tg} \theta, \quad (g)$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad (h)$$

gdzie: $[X_a, Y_a, Z_a, L_a, M_a, N_a]$ — wektor sił uogólnionych od oddziaływań aerodynamicznych, T — siła ciągu, δ — kąt pomiędzy linią działania siły ciągu i osią Ox układu własnego samolotu, J_0 — moment bezwładności części wirujących silnika, ω — prędkość kątowa obrotu silnika, α, β — kąty natarcia i ślizgu, m — masa samolotu, V_c — prędkość liniowa, P, Q, R — prędkości kątowe przechylenia, pochylenia, i odchylenia, Φ — kąt przechylenia, θ — kąt pochylenia samolotu, K, K_1, \dots, K_8 — współczynniki o poniższej postaci, J_x, J_y, J_z, J_{xz} — momenty bezwładności i dewiacyjny samolotu w układzie własnym.

$$K = \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}}, \quad K_1 = \frac{J_{xz}}{J_x}, \quad K_2 = \frac{J_{xz}}{J_y},$$

$$K_3 = \frac{J_{xz}}{J_z}, \quad K_4 = \left(1 - \frac{J_y - J_x}{J_z} \right) \frac{J_{xz}}{J_x}, \quad K_6 = \frac{J_z - J_x}{J_y},$$

$$K_5 = \frac{J_z - J_y}{J_x} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}, \quad K_7 = \frac{J_y - J_x}{J_z} - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z},$$

$$K_8 = \left(1 - \frac{J_z - J_y}{J_x} \right) \frac{J_{xz}}{J_z}.$$

Oznaczając:

$$\mathbf{Y} = \operatorname{col}[\alpha, \beta, V_c, P, Q, R, \Phi, \theta],$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \operatorname{col}[\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{V}_c/V_c, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}, \dot{\Phi}, \dot{\theta}]. \quad (6)$$

Układ równań różniczkowych (5) sprowadzamy do postaci:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}). \quad (7)$$

Zgodnie z treścią rozdziału 2, przy badaniu stateczności samolotu w położeniu równowagi \mathbf{Y}_0 , zamiast równania (7) wystarczy rozpatrywać stateczność równania zlinearyzowanego:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}_0) \cdot \mathbf{X}, \quad (8)$$

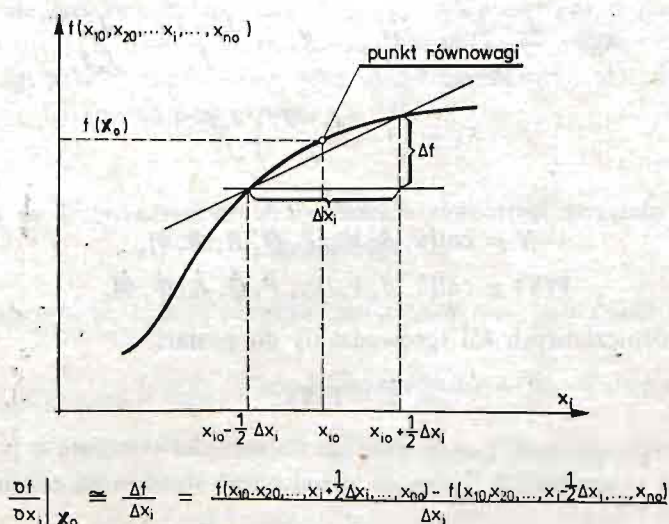
gdzie: \mathbf{X} — wektor małego wychylenia z położenia równowagi, \mathbf{A} — macierz Jacobiego układu (7) określona w punkcie równowagi \mathbf{X} wg wzoru (9).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \theta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Wzory na liczenie współczynników macierzy \mathbf{A} przytoczono w pracy [2]. We wzorach tych występują pochodne sił i momentów aerodynamicznych względem α , β , V_c , P , Q , R , określone w punkcie równowagi. Jest to macierz \mathbf{B} o postaci:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_a}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_a}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial X_a}{\partial R} \\ \frac{\partial Y_a}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y_a}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial Y_a}{\partial R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_a}{\partial \alpha} & \frac{\partial N_a}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial N_a}{\partial R} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Wyznaczenie elementów macierzy \mathbf{A} wymaga uprzedniego wyznaczenia elementów macierzy \mathbf{B} . W pracy elementy macierzy \mathbf{B} liczone przy pomocy maszyny cyfrowej, jako ilorazy różnicowe względem kolejnych zmiennych, rozwinięte wokół punktu równowagi. Sposób ten zaprezentowany jest na rys. 1.



Rys. 1. Przybliżona metoda liczenia pochodnych funkcji wielu zmiennych

Warunek posiadania drugich pochodnych ciągłych przez funkcję $F(\mathbf{Y})$ nakłada ten sam warunek na przebiegi funkcji sił i momentów aerodynamicznych. Narzuca to odpowiednie wymagania na przebiegi danych aerodynamicznych przyjmowanych do obliczeń.

Macierz \mathbf{B} jest innymi słowy macierzą pochodnych aerodynamicznych samolotu określonych w punkcie równowagi. Nadkrytyczne kąty natarcia, niesymetryczny opływ, duże prędkości kątowe obrotu samolotu wykluczają możliwość liczenia tych pochodnych klasycznymi metodami spotykanymi w mechanice lotu.

4. Obliczenia przykładowe

Obliczenia przykładowe dla samolotu TS-11 „Iskra” wykonano według własnych programów w języku FORTRAN w Ośrodku Obliczeniowym Politechniki Warszawskiej. Do obliczeń wykorzystane były wyniki pracy [3], podejmującej się wyznaczania parametrów ustalonego korkociągu samolotu. Program na potrzeby niniejszej pracy był w zasadzie rozszerzeniem programu liczącego warunki równowagi samolotu w korkociągu. Wartości własne macierzy \mathbf{A} , stanowiące wyniki obliczeń, uzyskiwane były przy użyciu standardowych procedur systemu CYBER 73.

Wybrane warianty obliczeń zaprezentowano w tablicy 1. Ograniczono się przy tym tylko do prezentacji obliczeń dla różnych przypadków sterowania. Każda wersja różni się od podstawowej (std) tylko zmianą wyszczególnioną w pierwszej kolumnie tablicy. Dane masowe, geometryczne i aerodynamiczne samolotu są we wszystkich przypadkach jednako- we i przyjęte jak w pracach [2, 3, 6]. W wersji std dane sterowania samolotem przyjęto następująco:

$$\delta_H = -20^\circ, \quad \delta_V = 20^\circ, \quad \delta_L = 0^\circ;$$

T i ω — parametry biegu jałowego.

5. Wnioski wynikające z pracy

Uzyskane wyniki świadczą, że ruch samolotu w ustalonym korkociągu jest niestateczny we wszystkich prezentowanych przypadkach. Decydują o tym dodatnie wartości części rzeczywistych wartości własnych $\xi_{1,2}$.

Uznając, że większa wartość dodatnia $\text{Re}(\xi_{1,2})$ oznacza silniejszą niestateczność położenia równowagi, stwierdzić można, że najsilniejszą niestateczność stwierdzono dla $\delta_H = -13^\circ$, najmniejszą dla $\delta_H = -30^\circ$. Zmiany wartości wychylenia steru wysokości wpływają też na zmiany wartości $\text{Re}(\xi_{1,2})$ silniej niż analogiczne zmiany wartości wychylenia steru kierunku.

Stwierdzenie niestateczności ruchu samolotu w ustalonym korkociągu świadczy, że w rzeczywistości samolot w ruchu niesterowanym nigdy nie osiągnie tego stanu lotu. W ruchu rzeczywistym samolot będzie oscylować wokół położenia równowagi.

Wyniki metody są trudne do oszacowania ilościowego. Stwierdzenie niestateczności (lub stateczności) nie wnosi też wielu informacji o własnościach korkociągowych samolotu. Rozbudowany aparat matematyczny, skomplikowane wzory na liczenie współczynników

Tablica 1

Zmiany parametrów sterowania	Parametry punktu równowagi $\alpha(\text{deg}), \beta(\text{deg})$ $V_c(\text{m/s}), \Omega(1/\text{s})$ $\Phi(\text{deg}), \Theta(\text{deg})$	Wartości własne
std	$\alpha = 38,6, \beta = -3,0$ $V_c = 68,8, \Omega = 2,54$ $\Phi = 1,0, \Theta = -51,3$	$\xi_{1,2} = 0,452 \pm 3,673i$ $\xi_{3,4} = -0,116 \pm 2,679i$ $\xi_{5,6} = -0,186 \pm 1,562i$ $\xi_7 = -0,803, \xi_8 = -0,005$
$\delta_V = 30^\circ$	$\alpha = 46,6, \beta = -2,8$ $V_c = 62,5, \Omega = 2,32$ $\Phi = 0,5, \theta = -43,4$	$\xi_{1,2} = 0,346 \pm 3,381i$ $\xi_{3,4} = -0,120 \pm 2,446i$ $\xi_{5,6} = -0,497 \pm 1,559i$ $\xi_7 = -0,318, \xi_8 = -0,006$
$\delta_V = 10^\circ$	$\alpha = 32,5, \beta = -2,2$ $V_c = 79,5, \Omega = 3,04$ $\Phi = 5,2, \Theta = -57,2$	$\xi_{1,2} = 0,438 \pm 4,055i$ $\xi_{3,4} = -0,098 \pm 3,143i$ $\xi_{5,6} = -0,144 \pm 1,540i$ $\xi_7 = -0,668, \xi_8 = -0,006$
$\delta_H = -30^\circ$	$\alpha = 38,8, \beta = -2,8$ $V_c = 69,5, \Omega = 2,27$ $\Phi = 1,8, \theta = -51,1$	$\xi_{1,2} = 0,217 \pm 3,472i$ $\xi_{3,4} = -0,129 \pm 2,615i$ $\xi_{5,6} = -0,309 \pm 1,619i$ $\xi_7 = -0,533, \xi_8 = -0,005$
$\delta_H = -13^\circ$	$\alpha = 39,3, \beta = -3,1$ $V_c = 67,8, \Omega = 2,66$ $\Phi = 0,5, \theta = -50,6$	$\xi_{1,2} = 0,491 \pm 3,593i$ $\xi_{3,4} = -0,106 \pm 2,392i$ $\xi_{5,6} = -0,318 \pm 1,547i$ $\xi_7 = -0,702, \xi_8 = -0,005$

macierzy Jacobiego [2] i ostre wymagania co do ciągłości drugich ciągłości współczynników sił i momentów aerodynamicznych samolotu przyjmowanych do obliczeń, sprawiają, że w zastosowaniach technicznych wartość uzyskiwanych wyników obliczeń może okazać się niewspółmierna do nakładów pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. W. M. ADAMS, *Analytic Prediction of Airplane Equilibrium Spin Characteristics*, NASA TN D-6926, November 1972.
2. W. BLAJER, *Badanie dynamiki samolotu w korkociągu*, praca doktorska Politechniki Warszawskiej, (nie publikowana), Warszawa 1982.
3. W. BLAJER, J. MARYNIAK, *Ustalony korkociąg samolotu, warunki równowagi*, Mech. Teoret. i Stos., 22, 1/2, 1984.
4. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
6. J. MARYNIAK, W. BLAJER, *Numeryczna symulacja korkociągu*, Mech. Teoret. i Stos., 21, 2/3, 1983.

Резюме

ИСПЫТАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ САМОЛЁТА ВО ВРЕМЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ
ШТОПОРА

Представлено метод испытания устойчивости движения самолёта во время установившегося штопора. Самолёт принят как жёсткое тело с шестью степенями свободы. Вычисления сведены к определению собственных значений и собственных векторов матрицы Якоби системы уравнений движения в точке равновесия. Приведены вычисления сделано для самолёта TS-11 „Iskra”.

Summary

A STUDY OF AIRPLANE MOTION STABILITY IN STEADY SPIN

A method investigating stability of an airplane motion in steady spin is presented. An airplane has been treated as a rigid body having six degrees of freedom. The method corresponds to examining eigenvalues of Jakobian matrix of the system of motion equations, defined at the equilibrium point. Test calculations have been carried out for Polish training airplane TS-11 „Iskra”.

Praca została złożona w Redakcji 2 lutego 1983 roku

DYNAMIKA JEDNOKULKOWEGO KOREKTORA PIONU SZTUCZNEGO HORYZONTU

ALEKSANDER DĄBROWSKI (WARSZAWA)

ZBIGNIEW BURDA

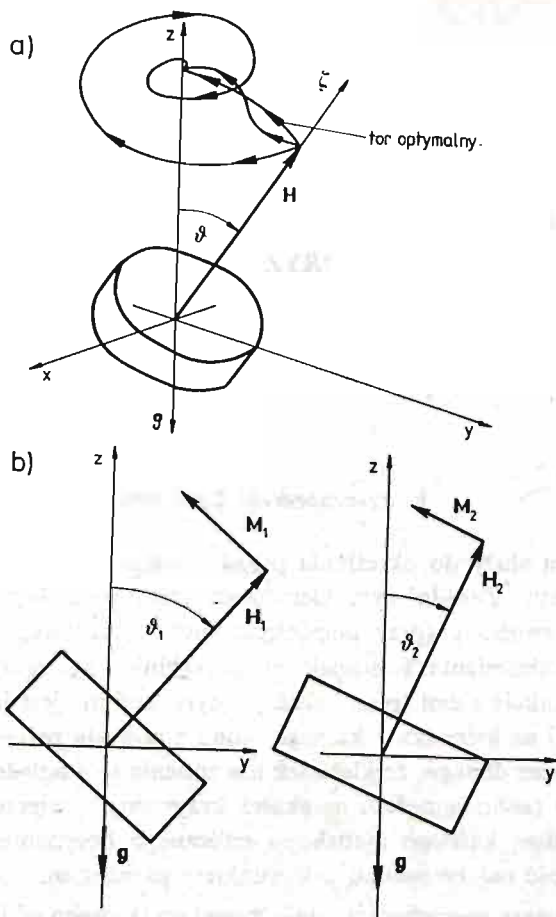
Politechnika Warszawska

1. Przeznaczenie korektora

Sztuczny horyzont służy do określania przestrzennego położenia samolotu względem płaszczyzny horyzontu. Zasadniczym elementem sztucznego horyzontu jest żyroskop o dwóch stopniach swobody (przy pominięciu ruchu obrotowego wirnika żyroskopu), którego oś jest osią odniesienia. Kierunek tej osi powinien być zgodny z kierunkiem pionowym w danym punkcie ziemi (pion lokalny). Żyroskop nie jest jednak w stanie utrzymać swej osi głównej na kierunku lokalnego pionu z powodu precesji wywołanej tarciami w łożyskach ramki oraz dlatego, że kierunek ten zmienia swe położenie względem układu inercjalnego podczas ruchu samolotu na skutek krzywizny powierzchni ziemi. Toteż niezbędnym wyposażeniem każdego żyroskopu sztucznego horyzontu jest korektor pionu wymuszający zgodność osi żyroskopu z kierunkiem pionowym.

Na rys. 1a przedstawiono schematycznie żyroskop, którego oś jest odchylona od kierunku pionowego o kąt ϑ . Zadaniem korektora jest wymuszenie ruchu żyroskopu w kierunku pokrycia się osi żyroskopu O_c z osią oz równoległą do wektora g natężenia pola grawitacyjnego. Ruch ten może być opisany kinematycznie torem dowolnego punktu osi żyroskopu o_c (różnego od punktu O — środka ruchu kulistego żyroskopu), np. punktem określającym koniec wektora H momentu pędu.

Dla optymalnej korekcji tor powinien leżeć w płaszczyźnie wyznaczonej przez oś żyroskopu O_c i oś wektora H . Na podstawie tzw. elementarnej teorii żyroskopu można powiedzieć, że aby taki ruch następował, na żyroskop musi działać moment zewnętrzny o kierunku stale prostopadłym do wektora H momentu pędu, leżący również w płaszczyźnie II_z , (rys. 1b). Prędkość opisanego powyżej ruchu precesyjnego jest ściśle zależna od modułu wektora momentu. Oczywiście jest rzeczą, że dla $\vartheta = 0$ moment ten powinien zanikać. Wynika stąd bezpośrednio, że zadaniem korektora jest wykrycie odchylenia osi żyroskopu od kierunku pionowego i wytworzenie momentu o odpowiednim zwrocie i module — wymuszającego precesję żyroskopu na kierunek pionowy. Moment ten nazywany jest momentem korekcyjnym.

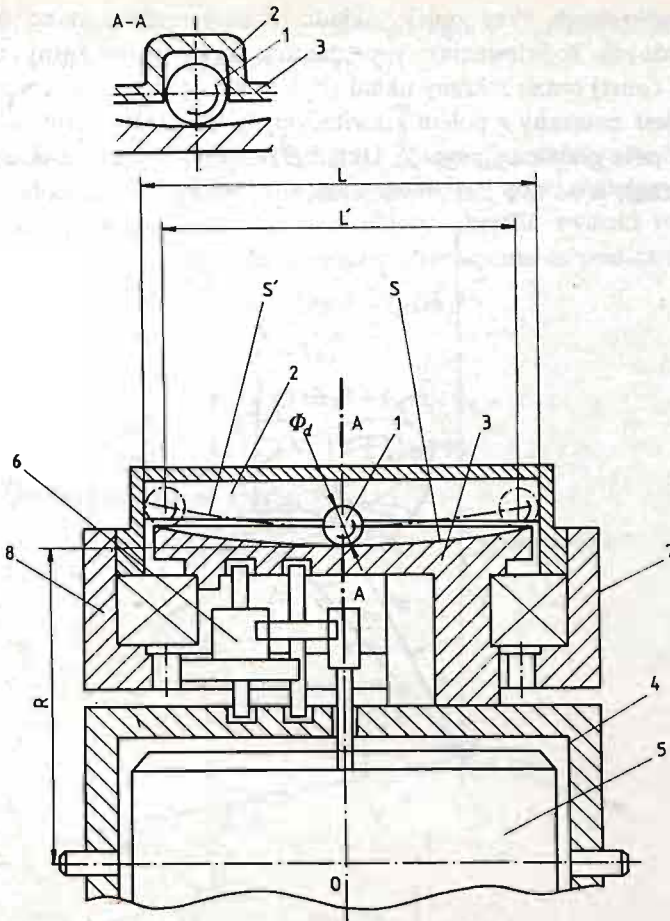


Rys. 1

2. Opis konstrukcji korektora jednokulkowego

Jednym z prostszych konstrukcyjnie rozwiązań korektora pionu sztucznego horyzontu jest, opatentowany w roku 1974 w ZSRR, korektor jednokulkowy o oznaczeniu Z.F. Całkowity brak w literaturze fachowej opisu zjawisk dynamicznych zachodzących podczas działania tego typu korektora uniemożliwiał dotąd zastosowanie go w wytwarzanych przez przemysł krajowy sztucznych horyzontach. Niniejsza praca, której podjęcie zostało zainicjowane sugestiami kierownictwa jednego z krajowych biur konstrukcyjnych przemysłu lotniczego, stwarza możliwości zaprojektowania korektora, który dzięki swej małej masie i prostej konstrukcji jest szczególnie predystynowany do wykorzystania w sztucznych horyzontach małych samolotów i szybowców, tak licznie wytwarzanych przez krajowy przemysł lotniczy.

Szczegóły konstrukcyjne korektora jednokulkowego są przedstawione na rys. 2. Kulka 1 umieszczona jest wewnątrz rowka prowadnicy 2 stanowiącej górną część ruchomego korpusu 8. Kulka spoczywa na wklęsłej (promień krzywizny S) powierzchni bieżni 3 związanej sztywno z ramką 4 żyroskopu. Korpus 8 ułożyskowany jest na ramce przy po-



Rys. 2

mocy łożyska 7 i napędzany przez żyroskop za pośrednictwem wielostopniowej przekładni zębatej 6.

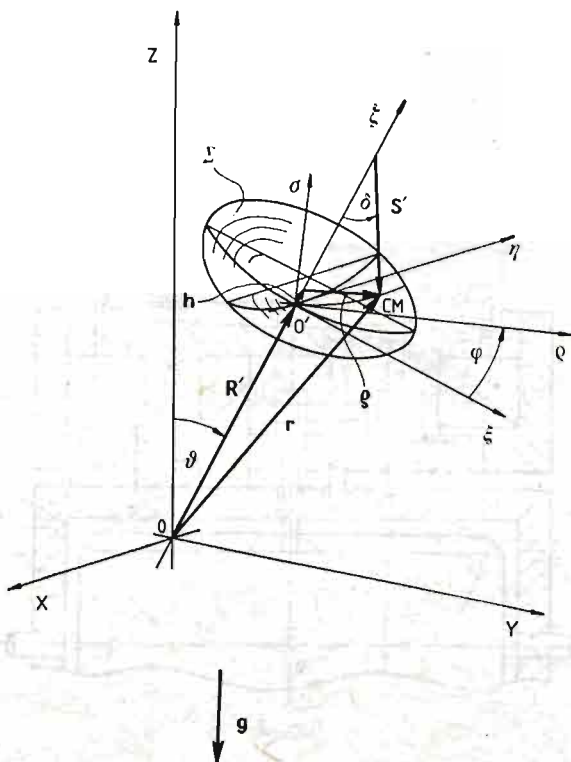
3. Analiza dynamiczna jednokulkowego korektora pionu

3.1. Założenia wstępne. Opis układu został wykonany w inercjalnym układzie odniesienia. Odpowiada to sytuacjom, w których samolot wraz z zamontowanym na nim sztucznym horyzontem porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, lub też, gdy badamy zachowanie się sztucznego horyzontu z korektorem w warunkach laboratoryjnych. Są to zatem te wszystkie przypadki, w których pion pozorny pokrywa się z pionem rzeczywistym (kierunkiem g). Założono dalej, że oś żyroskopu sztucznego horyzontu wychylona jest o stały kąt od kierunku pionowego. Dla takiej sytuacji napisane są równania ruchu kulki oraz dyskusja i obliczenia momentu korekcyjnego.

Wreszcie jeżeli chodzi o dynamikę żyroskopu, oparto się na tzw. przybliżonej teorii zjawisk żyroskopowych (1) i (2). Wszystkie wzory zawarte w pracy są typu wielkościowego.

3.2. Układy współrzędnych. Przy opisie układu zostały wykorzystane trzy nieruchome układy współrzędnych (odniesienia): prostokątny $Oxyz$, prostokątny $O'\xi\eta\zeta$, sferyczny $QS'\delta\varphi$ (dla $S' = \text{const}$) oraz ruchomy układ $O'\rho\sigma$ leżący stale w płaszczyźnie $\Pi\xi\eta$ (rys. 3).

Układ $Oxyz$ jest związany z polem grawitacyjnym, a ujemny zwrot osi Oz jest równoległy do wektora pola grawitacyjnego ζ' . Układ $O\xi\eta\zeta$ jest związany z obudową żyroskopu (ramką wewnętrzną), a oś $O'\xi$ jest równoległa do wektora momentu pędu H żyroskopu.



Rys. 3

Punkt O układu $Oxyz$ pokrywa się ze środkiem ruchu kulistego żyroskopu (z punktem przecięcia się osi ramek zawieszenia kardanowego żyroskopu). Oś $O\xi$ i Oz przecinają się ze sobą w punkcie O tworząc kąt ϑ . Punkt O' jest oddalony od punktu O o odległość $R+d/2$ (por. rys. 2). Ruchomy układ $O'\rho\sigma$ jest związany z korpusem δ (rys. 2), a oś $O'\rho$ jest równoległa do osi podłużnej rowka prowadnicy 2 (rys. 2).

Powierzchnia sferyczna Σ stanowi miejsce geometryczne możliwych położenia środka kulki. Chwilowe położenie środka kulki opisuje w układzie XYZ wektor \mathbf{r} , który może być przedstawiony w postaci sumy (składniki sumy zostaną objaśnione później):

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}' + \mathbf{h} + \boldsymbol{\rho}. \quad (1)$$

W układzie sferycznym położenie to określone jest jednoznacznie przez kąty δ, φ ($S' = \text{const}$).

Kąt δ jest kątem pomiędzy ujemnym zwrotem osi $O'\zeta$ a wektorem wodzącym S' środka kulki poprowadzonym ze środka krzywizny Q powierzchni sferycznej Σ . Kąt φ jest kątem

między osią $O'\xi$ a osią $O'\rho$. Pochodna czasowa kąta φ jest równa prędkości kątowej, z jaką obraca się korpus z prowadnicą 2 (rys. 2):

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{const.} \quad (2)$$

Równanie (2) nakłada więzy na współzrzedną φ . Zatem przy założeniu, że kulka toczy się po bieźni bez poślizgu, ma ona jeden stopień swobody, odpowiadający współzrzednej δ .

Przed przystąpieniem do dalszej analizy należy określić związki między wersorami układów $OXYZ$, $O'\xi\eta\zeta$ i $O\rho\sigma$. Związki te zostały wyznaczone na podstawie rys. 4:

$$\mathbf{1}_\xi = \mathbf{1}_Y \cos \vartheta - \mathbf{1}_Z \sin \vartheta, \quad (3)$$

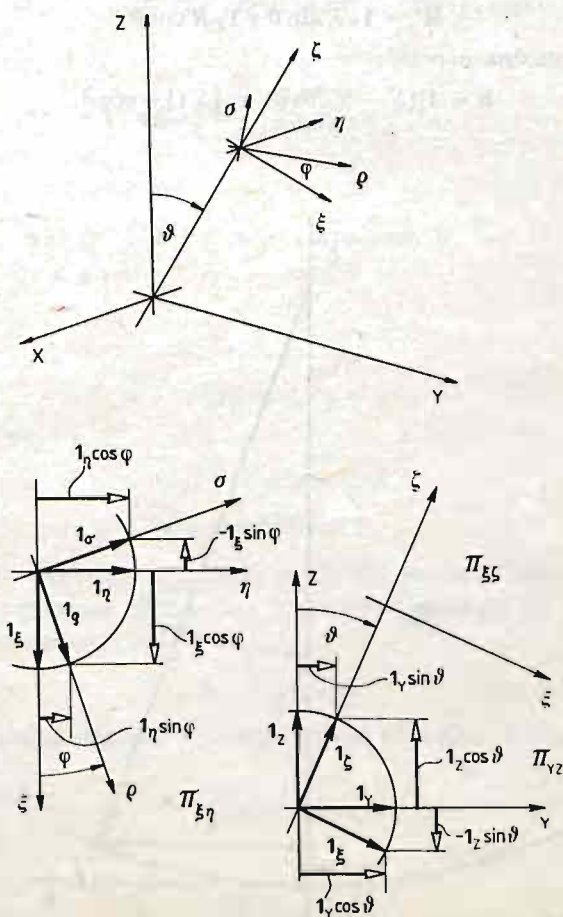
$$\mathbf{1}_\eta = -\mathbf{1}_X, \quad (4)$$

$$\mathbf{1}_\zeta = \mathbf{1}_Y \sin \vartheta + \mathbf{1}_Z \cos \vartheta, \quad (5)$$

$$\mathbf{1}_\rho = \mathbf{1}_\xi \cos \varphi + \mathbf{1}_\eta^* \sin \varphi, \quad (6)$$

a po podstawieniu (3) i (4) do (6) otrzymamy:

$$\mathbf{1}_\rho = -\mathbf{1}_X \sin \varphi + \mathbf{1}_Y \cos \vartheta \cos \varphi - \mathbf{1}_Z \sin \vartheta \cos \varphi. \quad (7)$$



Rys. 4

Podobnie:

$$\mathbf{1}_\sigma = \mathbf{1}_\eta \cos \varphi - \mathbf{1}_\xi \sin \varphi, \quad (8)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_x \cos \varphi - \mathbf{1}_y \cos \vartheta \sin \varphi + \mathbf{1}_z \sin \vartheta \sin \varphi. \quad (9)$$

Jak to wykazano we wzorze (1), wektor \mathbf{r} można przedstawić jako sumę wektorów \mathbf{R}' , \mathbf{h} i ρ , gdzie:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{1}_\zeta \left(R + \frac{d}{2} \right). \quad (10)$$

3.3. Kinematyka układu. Aby wyrazić położenie środka kulki (określone przez wektor \mathbf{r}) przy pomocy zmiennych δ i φ , co będzie potrzebne do wyznaczenia funkcji opisującej energię kulki, należy dokonać podanych dalej przekształceń. Podstawiając (5) do (6) otrzymano następujący związek:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{1}_y \left(R + \frac{d}{2} \right) \sin \vartheta + \mathbf{1}_z \left(R + \frac{d}{2} \right) \cos \vartheta. \quad (11)$$

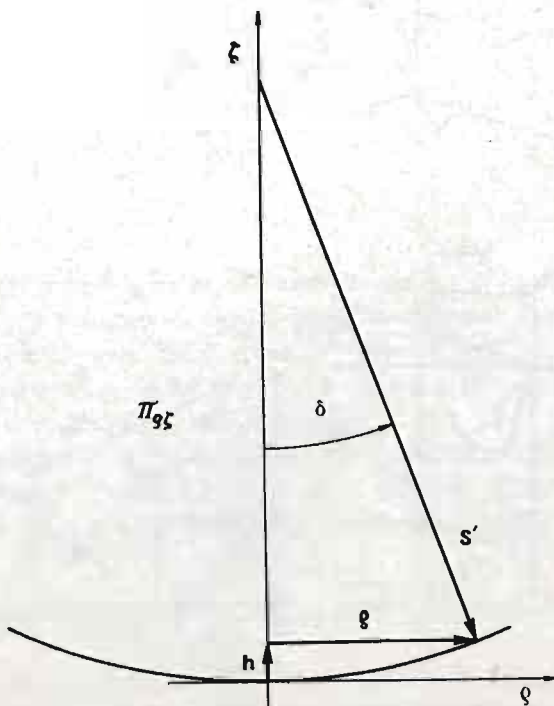
Wprowadzając do (11) $R' = R + \frac{d}{2}$ otrzymano ostatecznie:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{1}_y R' \sin \vartheta + \mathbf{1}_z R' \cos \vartheta. \quad (12)$$

Na podstawie rys. 5 można napisać:

$$\mathbf{h} = \mathbf{1}_\zeta (S' - S' \cos \delta) = \mathbf{1}_\zeta S' (1 - \cos \delta), \quad (13)$$

gdzie: $S' = S - \frac{d}{2}$.



Rys. 5

Po wstawieniu (5) do (13) otrzymamy:

$$\mathbf{h} = \mathbf{1}_Y S(1 - \cos \delta) \sin \vartheta + \mathbf{1}_Z S'(1 - \cos \delta) \cos \vartheta \quad (14)$$

oraz

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1}_\rho S' \sin \delta \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varrho} = S' \sin \delta \quad (16)$$

a po podstawieniu w miejsce $\mathbf{1}_\rho$ wyrażenia (7)

$$\boldsymbol{\rho} = -\mathbf{1}_X S' \sin \delta \sin \varphi + \mathbf{1}_Y S' \sin \delta \cos \vartheta \cos \varphi - \mathbf{1}_Z S' \sin \delta \sin \vartheta \cos \varphi. \quad (17)$$

Po podstawieniu do (1) związków (11), (14) i (17) otrzymano ostateczną postać wyrażenia określającego wektor \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = -\mathbf{1}_X S' \sin \delta \sin \varphi + \mathbf{1}_Y [R' \sin \vartheta + S'(1 - \cos \delta) \sin \vartheta + S' \sin \delta \cos \vartheta \cos \varphi] + \mathbf{1}_Z [R' \cos \vartheta + S'(1 - \cos \delta) \cos \vartheta - S' \sin \delta \sin \vartheta \cos \varphi]. \quad (18)$$

Prędkość środka kulki może być wyznaczona przez zróżniczkowanie względem czasu wyrażenia (18). Łatwiej jednak jest tę prędkość (a właściwie jej moduł) wyrazić bezpośrednio przez pochodne współrzędne układu sferycznego.

Prędkość środka kulki \mathbf{v}_{CM} można przedstawić w postaci sumy:

$$\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e, \quad (19)$$

gdzie:

\mathbf{v}_r — prędkość środka kulki względem układu $O'\varrho\zeta$,

\mathbf{v}_e — prędkość unoszenia.

Korzystając z rys. 6 napiszemy:

$$\mathbf{v}_r = \dot{\boldsymbol{\delta}} \times S' \boldsymbol{\delta} \text{ ma zwrot przeciwny do osi } O'\sigma \text{ (por. rys. 3)} \quad (20)$$

$$|\mathbf{v}_r| = \omega \cdot S' \quad (21)$$

oraz

$$\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (22)$$

$$|\mathbf{v}_e| = \omega \cdot \varrho, \quad (23)$$

Ponieważ $\mathbf{v}_r \perp \mathbf{v}_e$, więc

$$|\mathbf{v}_{CM}| = \sqrt{\omega^2 \varrho^2 + \dot{\boldsymbol{\delta}}^2 S'^2}, \quad (24)$$

$$\mathbf{v}_{CM}^2 = \omega^2 \varrho^2 + \dot{\boldsymbol{\delta}}^2 S'^2. \quad (25)$$

Przy wyznaczaniu bezwzględnej chwilowej prędkości kątowej kulki zakładamy, że prędkość kątowa kulki względem układu $\varrho\sigma\zeta$ jest stale równoległa do osi $O'\sigma$. Po przyjęciu tego założenia otrzymujemy:

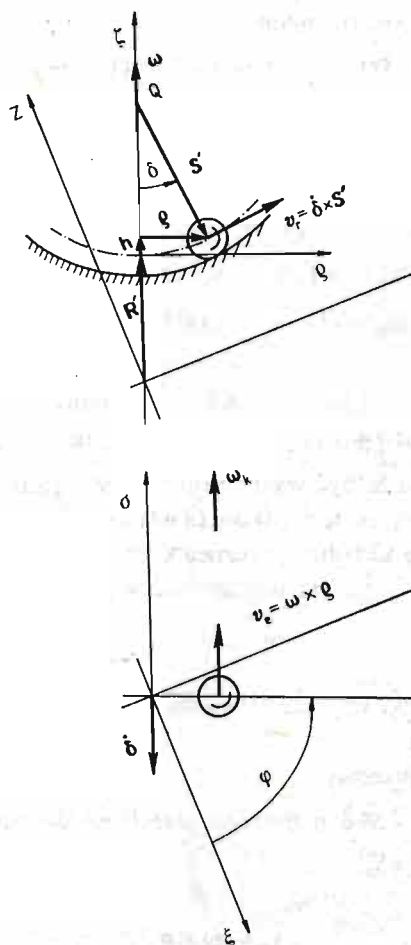
$$\boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\omega}_k + \boldsymbol{\omega}. \quad (26)$$

Zgodnie z powyższym założeniem $\boldsymbol{\omega}$ ma zwrot osi $O'\sigma$. Dla wyznaczenia $\boldsymbol{\omega}_k$ posłużymy się równaniem

$$\mathbf{v}_r = \dot{\boldsymbol{\delta}} S', \quad (27)$$

z drugiej zaś strony

$$v_r = \omega_k \frac{d}{2}, \quad (28)$$



Rys. 6

czyli

$$\dot{\delta}S' = \omega_k \frac{d}{2}. \quad (29)$$

Stąd

$$\omega_k = \frac{2}{d} \dot{\delta}S'. \quad (30)$$

Wobec tego, że $\omega_k \perp \omega$, można napisać:

$$\omega_c^2 = \frac{4}{d^2} \dot{\delta}^2 S'^2 + \omega^2. \quad (31)$$

3.4. Energia układu. Równanie (18) pozwala określić z-tową składową położenia środka kulki względem układu $OXYZ$:

$$r_z = \mathbf{1}_z [R' \cos \theta + S' (1 - \cos \delta) \cos \vartheta - S' \sin \sigma \sin \vartheta \cos \varphi], \quad (32)$$

$$r_z = R' \cos \vartheta + S' (1 - \cos \delta) \cos \vartheta - S' \sin \delta \sin \vartheta \cos \varphi. \quad (33)$$

Oznaczmy przez V energię potencjalną kulki i przyjmijmy jej zerową wartość dla $r_z = \cos \vartheta R'$

$$V_{(r_z = \cos \vartheta R')} = 0.$$

Będzie wtedy

$$V = mg[S'(1 - \cos \delta)\cos \vartheta - S'\sin \delta \sin \vartheta \cos \varphi], \quad (34)$$

gdzie:

m — masa kulki,

g — natężenie pola grawitacyjnego.

Energię kinetyczną można wyznaczyć następująco:

$$E = \frac{1}{2}mv^2_{CM} + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_c^2. \quad (35)$$

gdzie:

E — energia kinetyczna,

I_{CM} — moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez środek, $I_{CM} = 0,1 md^2$.

Po podstawieniu do (35), (25) i (31) otrzymamy:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\varrho^2 + \frac{7}{10}m\dot{\delta}^2S'^2 + \frac{1}{20}md^2\omega^2. \quad (36)$$

A podstawiając (16) do (36) otrzymamy ostatecznie:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2S'^2\sin^2\delta + \frac{7}{10}m\dot{\delta}^2S'^2 + \frac{1}{20}md^2. \quad (37)$$

Po założeniu, że dla δ przyjętej jako współrzędna uogólniona nie występują siły niepotencjalne ($Q_\delta = 0$), a więc że ruch kulki względem prowadnicy jest ruchem nietłumionym, równanie Lagrange'a II rodzaju opisujące układ przybierze następującą postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0. \quad (38)$$

Wyznamy poszczególne składniki (38)

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}} = \frac{7}{5}mS'^2\dot{\delta},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}} \right) = \frac{7}{5}mS'^2\ddot{\delta}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \delta} = m\omega^2S'^2\sin \delta \cos \delta, \quad (40)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = mg[S'\sin \delta \cos \vartheta - S'\cos \delta \sin \vartheta \cos \varphi]. \quad (41)$$

Po wstawieniu (39), (40), (41) do (38) otrzymamy ostatecznie

$$\frac{7}{5}mS'^2\ddot{\delta} - m\omega^2S'^2\sin \delta \cos \delta + mgS'\sin \delta \cos \vartheta - mgS'\cos \delta \sin \vartheta \cos \varphi = 0. \quad (42)$$

Jest to równanie ruchu kulki ściśle, przy wszystkich dotychczasowych założeniach.

Obecnie, dla uwzględnienia rozproszenia energii, założmy, że ruch kulki tłumiony jest siłą proporcjonalną do prędkości środka kulki względem zabieraka-prowadnicy. Równanie (42) wzbogaci się wtedy o składnik $\nu S' \dot{\delta}$. Współczynnik ν charakteryzuje intensywność tłumienia:

$$\frac{7}{5} m S'^2 \ddot{\delta} - m \omega^2 S'^2 \sin \delta \cos \delta + m g S' \sin \delta \cos \vartheta - m g S' \cos \delta \sin \vartheta \cos \varphi + \nu S' \dot{\delta} = 0.$$

Ponieważ $\varphi = \omega t$, możemy więc napisać:

$$\frac{7}{5} m S'^2 \ddot{\delta} + \nu S' \dot{\delta} + m \omega^2 S'^2 \sin \delta \cos \delta + m g S' \sin \delta \cos \vartheta = m g S' \cos \delta \sin \vartheta \cos(\omega t). \quad (43)$$

Dla uproszczenia dalszej analizy równanie (43) zlinearyzujemy w otoczeniu punktu $\delta = 0$. Otrzymamy:

$$\frac{7}{5} m S'^2 \ddot{\delta} + \nu S' \dot{\delta} - m \omega^2 S'^2 \delta + m g S' \cos \vartheta \delta = m g S' \sin \vartheta \cos(\omega t), \quad (44)$$

$$\frac{7}{5} m S'^2 \ddot{\delta} + \nu S' \dot{\delta} + m S' (g \cos \vartheta - \omega^2 S') \delta = m g S' \sin \vartheta \cos(\omega t). \quad (45)$$

Dla uproszczenia postaci równania wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\tilde{I} = \frac{7}{5} m S'^2,$$

$$\tilde{b} = \nu S',$$

$$\tilde{k} = m S' (g \cos \vartheta - \omega^2 S'),$$

$$\tilde{M} = m g S' \sin \vartheta.$$

Po ich podstawieniu do równania (45) otrzymamy:

$$\tilde{I} \ddot{\delta} + \tilde{b} \dot{\delta} + \tilde{k} \delta = \tilde{M} \cos \omega t, \quad (46)$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe o stałych współczynnikach. Rozwiązanie jego można przedstawić w postaci sumy rozwiązań opisujących ruch wymuszony i ruch swobodny. Aby ruch swobodny, a zatem i wypadkowy, był ruchem nierozbieżnym, musi być spełniony warunek:

$$\tilde{k} > 0$$

Stąd wynika, że

$$\omega^2 < \frac{g \cos \vartheta}{\delta'}.$$

A zakładając

$$\vartheta_{\max} = \frac{\pi}{4}$$

otrzymamy warunek w postaci:

$$\omega^2 < \frac{g \sqrt{2}}{2 \delta'} \quad (47)$$

Dla $\tilde{k} > 0$ składowa opisująca ruch swobodny, ze względu na tłumienie, po upływie czasu równego kilku stałym czasowym zmniejsza się do zera. Dlatego też w rozwiązaniu uwzględniamy tylko składową wymuszoną.

Rozwiązaniem (46) będzie:

$$\delta = \delta_m \cos(\omega t + \psi), \quad (48)$$

gdzie: δ_m — amplituda; ψ — kąt przesunięcia fazowego,

$$\delta_m = \left| \frac{\tilde{M}}{-\tilde{I}\omega^2 + j\tilde{b}\omega + \tilde{k}} \right|,$$

$$\psi = \arg\left(\frac{\tilde{M}}{-\tilde{I}\omega^2 + j\tilde{b}\omega + \tilde{k}}\right),$$

lub w postaci rzeczywistej:

$$\delta_m = \frac{\tilde{M}}{\sqrt{(\tilde{k} - \tilde{I}\omega^2)^2 + (\tilde{b}\omega)^2}}, \quad (49)$$

$$\psi = -\arctg \frac{\tilde{b}\omega}{\tilde{k} - \tilde{I}\omega^2}. \quad (50)$$

Efekt korekcji będzie maksymalny dla kąta przesunięcia fazowego $\psi = -\frac{\pi}{2}$ i zerowy dla $\psi = 0$ lub $\psi = -\pi$. Warunek ten pozwala wyznaczyć prędkość kątową ω , z jaką powinna być napędzana prowadnica 2 (rys. 2):

$$-\frac{\pi}{2} = -\arctg \frac{b\omega}{\tilde{k} - \tilde{I}\omega^2},$$

czyli

$$\tilde{k} - \tilde{I}\omega^2 = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{I}},$$

a po podstawieniu uprzednio przyjętych oznaczeń:

$$\omega^2 = \frac{5}{12} \frac{g \cos \vartheta}{S'}. \quad (51)$$

Ponieważ układ jako całość pracuje w otoczeniu ($\delta = 0$) i spełnia warunek określony przez nierówność (47), można przyjąć:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{5}{12} \frac{g}{S'}}. \quad (52)$$

W dalszym ciągu tę właśnie wartość częstotliwości będziemy oznaczali ω_r (pulsacja rezonansowa).

3.5. Trajektorla kulki. Amplituda δ_m dla $\omega = \omega_r$ wyniesie:

$$\delta_{m(r)} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{b}\omega_r} = \sqrt{\frac{12}{5} \frac{S'}{g}} \frac{m g \sin \vartheta}{\nu}. \quad (53)$$

Rozwiązanie (53) dla $\omega = \omega_r$ przybierze następującą postać:

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_{m(r)} \cos(\omega_r t + \varphi_r), \\ \delta &= \sqrt{\frac{12}{5} \frac{S'}{g} \frac{mg}{\nu}} \sin \vartheta \cos\left(\omega_r t - \frac{\pi}{2}\right), \\ \delta &= \sqrt{\frac{12}{5} \frac{S'}{g} \frac{mg}{\nu}} \sin \vartheta \sin(\omega_r t).\end{aligned}$$

Oznaczmy:

$$A = \sqrt{\frac{12}{5} \frac{S'}{g} \frac{mg}{\nu}}; \quad (54)$$

wtedy:

$$\delta = A \sin \vartheta \sin(\omega_r t). \quad (55)$$

Wstawiając (55) do (18) otrzymamy wektorowe równanie trajektorii środka kulki w układzie $OXYZ$. Trajektoria ta jest krzywą leżącą na powierzchni sferycznej Σ .

Przeanalizujemy teraz, jak przedstawia się równanie trajektorii środka kulki w układzie $O'\xi\eta\zeta$, a właściwie, przy pominięciu składowej h , w płaszczyźnie $O'\xi\eta$ (rzut trajektorii na płaszczyznę $O'\xi\eta$).

W płaszczyźnie $O'\xi\eta$ położenie środka rzutu kulki opisane jest wektorem ρ (16), a w przybliżeniu (por. rys. 5)

$$\rho = \mathbf{1}_\rho S' \delta. \quad (56)$$

Moduł wektora ρ jest określony następująco:

$$|\rho| = S' \delta = S' A \sin \vartheta \sin(\omega_r t).$$

Trajektoria środka kulki w płaszczyźnie $O'\xi\delta$ dana jest równaniami parametrycznymi:

$$\begin{aligned}\varphi &= \omega_r t, \\ \varrho &= S' A \sin \vartheta \sin(\omega_r t).\end{aligned}$$

Po wyrugowaniu t otrzymamy:

$$\varrho = S' A \sin \vartheta \sin \varphi. \quad (57)$$

Równanie to możemy napisać w postaci:

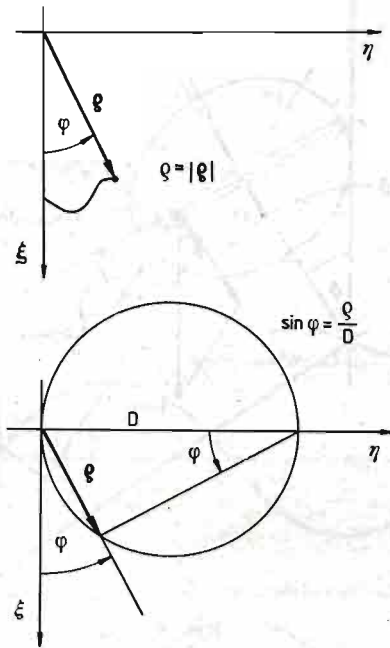
$$\sin \varphi = \frac{\varrho}{S' A \sin \vartheta} = \frac{\varrho}{D}. \quad (58)$$

Jest to biegunowe równanie rodziny okręgów o średnicy $D = S' A \sin \vartheta$ zależnej od kąta ϑ (rys. 7).

3.6. Wyznaczenie momentu korekcyjnego. W poniższych obliczeniach zakładamy, że żyroskop jest całkowicie wyważony dynamicznie i że układy: żyroskop-ramka wewnętrzna (obudowa) oraz żyroskop-ramka wewnętrzna-ramka zewnętrzna są idealnie wyważone statycznie względem środka ruchu kulistego żyroskopu (żyroskop astatyczny). Wynika stąd, że jedynym źródłem niewyważenia będzie przemieszczanie się kulki (1 rys. 2) korektora.

Na kulkę (w układzie inercjalnym, np. $OXYZ$) działają siły: ciężkości i reakcje prowadzącej oraz bocznej powierzchni zabieraka. Założmy, że boczne powierzchnie zabieraka-

przewodnicy są równoległe do osi żyroskopu, a co za tym idzie, reakcja kulki na powierzchnię boczną zabieraka jest prostopadła do tej osi. Moment tej reakcji względem punktu O (środek ruchu kulistego żyroskopu) jest wektorem leżącym na osi momentu pędu żyroskopu (osi żyroskopu) i jako taki nie może zmienić kierunku wektora momentu pędu. Stanowi on natomiast dodatkowe obciążenie silnika żyroskopu.



Rys. 7

Moment korekcyjny (moment powodujący precesję osi żyroskopu na kierunku pionowy) będzie zatem momentem reakcji kulki na powierzchnię prowadzącą (bieżnię 3, rys. 2). Reakcja ta jest sumą reakcji statycznej i dynamicznej. Ponieważ składową przyspieszenia kulki równoległą do osi $O\xi$ można pominąć, zatem również składową dynamiczną wyżej wspomnianej reakcji pominiemy w dalszych obliczeniach.

Statyczna składowa tej reakcji jest równa składowej siły ciężkości równoległej do osi $O\xi$ (rys. 8):

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}_\zeta = -1_\zeta mg \cos \vartheta. \quad (59)$$

Moment chwilowy tej siły względem punktu O wyniesie:

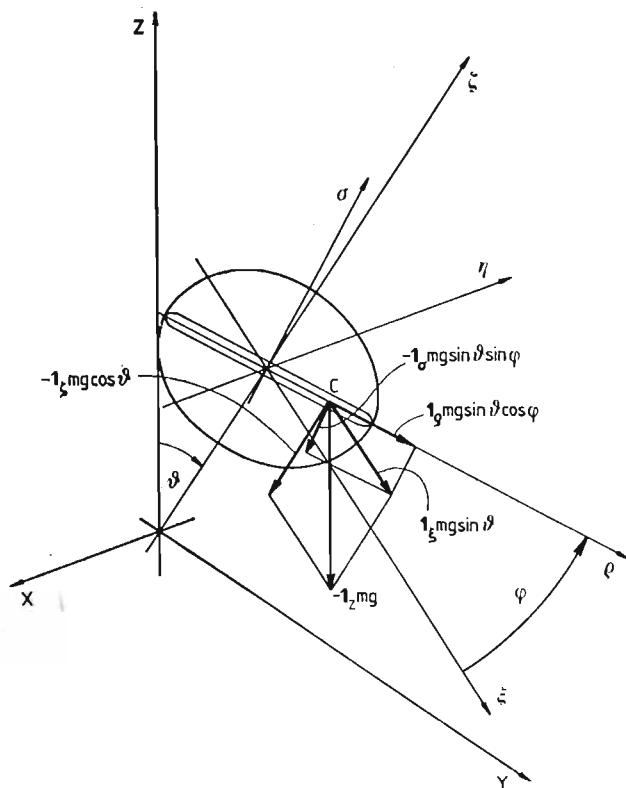
$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{P} \quad (60)$$

a ponieważ $[\mathbf{R}' + \mathbf{h}] \parallel O\xi$ (rys. 3), więc:

$$\mathbf{M}_0(t) = \boldsymbol{\rho}(t) \times \mathbf{P}. \quad (61)$$

Podstawiając (56) i (59) do (61) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0(t) &= [\mathbf{1}_\rho S' \delta(t)] \times [-1_\zeta mg \cos \vartheta], \\ \mathbf{M}_0(t) &= \mathbf{1}_\sigma S' \delta(t) mg \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (62)$$



Rys. 8

a podstawivszy (55):

$$\mathbf{M}_0(t) = \mathbf{1}_\sigma S' mg A \sin \vartheta A \sin \vartheta \sin(\omega_r t) \quad (63)$$

oraz

$$|\mathbf{M}_0(t)| = \frac{1}{2} S' mg A \sin 2\vartheta \sin(\omega_r t). \quad (64)$$

Aby wyrazić $\mathbf{M}_0(t)$ w układzie nieruchomym, podstawiamy (8) do (63):

$$\mathbf{M}_0(t) = [-\mathbf{1}_\xi \sin(\omega_r t) + \mathbf{1}_\eta \cos(\omega_r t)] \frac{1}{2} S' mg 2 \sin \vartheta \sin(\omega_r t),$$

a po przekształceniu

$$\mathbf{M}_0(t) = -\mathbf{1}_\xi \frac{1}{4} S' mg A \sin 2\vartheta [1 - \cos(2\omega_r t)] + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{4} S' mg A \sin 2\vartheta \sin(2\omega_r t) \quad (65)$$

Równanie (65) przedstawia rozkład chwilowego momentu korekcyjnego na sumę momentów względem osi $O'\xi$ i $O'\eta$.

Na rys. 9 przedstawiono przebiegi składowych tych momentów. Z równania (65) Z równania (65) widać, że przebiegi zmienności składowych momentu korekcyjnego mają

okres podstawowy $T/2$, gdzie $T = \frac{2\pi}{\omega_r}$. Wyznaczmy impuls momentu korekcyjnego za jeden okres ($T/2$):

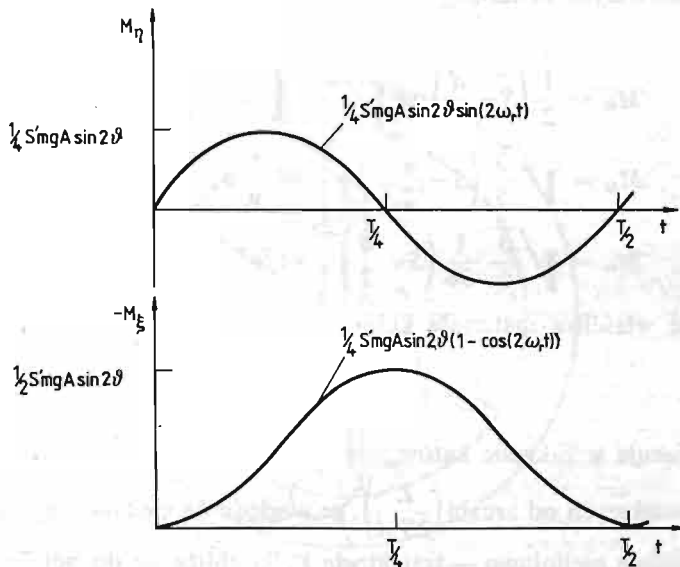
$$\Pi\left(\mathbf{M}_0, \frac{T}{2}\right) = \int_0^{T/2} \mathbf{M}_0(t) dt;$$

analogicznie

$$\Pi_{\xi/\eta}\left(\mathbf{M}_0, \frac{T}{2}\right) = \int_0^{T/2} \mathbf{M}_{\xi/\eta}(t) dt.$$

Impuls całkowity jest sumą składowych:

$$\Pi = \Pi_{\xi} + \Pi_{\eta}.$$



Rys. 9

Składowe impulsy momentu korekcyjnego można wyznaczyć z poniższych związków:

$$\Pi_{\eta} = \int_0^{T/2} \mathbf{1}_{\eta} \left[\frac{1}{4} S'mgA \sin 2\vartheta \sin(2\omega_r t) \right] dt = 0,$$

$$\Pi_{\xi} = \int_0^{T/2} -\mathbf{1}_{\xi} \left[\frac{1}{4} S'mgA \sin 2\vartheta (1 - \cos(2\omega_r t)) \right] dt =$$

$$= -\mathbf{1}_{\xi} \frac{1}{4} S'mgA \sin 2\vartheta \int_0^{T/2} (1 - \cos(2\omega_r t)) dt =$$

$$= -\mathbf{1}_{\xi} \frac{1}{4} S'mgA \sin 2\vartheta \frac{T}{2} = -\mathbf{1}_{\xi} \frac{1}{8} S'mgA \sin 2\vartheta T.$$

Ostatecznie impuls całkowity będzie równy Π_{ξ} :

$$\Pi(M_0, T/2) = -1_{\xi} \frac{1}{8} S' mg A \sin 2\vartheta \cdot T. \quad (66)$$

Załóżmy, że tego samego impulsu udzielałyby stały moment $M_{sr} = -1_{\xi} M_{sr}$ (w tym samym czasie),

$$\Pi = -1_{\xi} M_{sr} \frac{T}{2} = -1_{\xi} \frac{1}{8} S' mg A \sin 2\vartheta \cdot T \Rightarrow M_{sr} = \frac{1}{4} S' mg A \sin 2\vartheta$$

dla niewielkich odchyłeń osi żyroskopu od pionu

$$M_{sr} = \frac{1}{2} S' mg A \vartheta.$$

Powracając do pierwszych oznaczeń (14) i (54) otrzymamy

$$\begin{aligned} M_{sr} &= \frac{1}{2} \left(S - \frac{d}{2} \right) mg \sqrt{\frac{12}{5}} \sqrt{\frac{S - \frac{d}{2}}{g} \frac{mg}{v}} \cdot \vartheta, \\ M_{sr} &= \sqrt{\frac{3}{5}} \left(S - \frac{d}{2} \right)^{3/2} g^{3/2} m^2 \frac{1}{v} \vartheta, \\ M_{sr} &= \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{1}{36} \left(S - \frac{d}{2} \right)^{3/2} g^{3/2} \varrho^2 \pi^2 d^6 \frac{1}{v} \vartheta, \end{aligned} \quad (67)$$

gdzie ϱ — gęstość właściwa materiału kulki.

$$0 < \vartheta < \arcsin \frac{L'}{2S'A}.$$

Wzór (67) obowiązuje w zakresie kątów: j.w.

Dla kątów ϑ większych od $\arcsin \left(\frac{L'}{2S'A} \right)$, ze względu na ograniczoną długość prowadnicy, korektor pracuje nieliniowo — trajektoria kulki zbliża się do półokręgu o średnicy L' (rys. 10). Moment korekcyjny wyraża się wtedy wzorem (dla części obwodowej trajektorii)

$$M_{0_n} = 1_{\sigma} L' mg \cos \vartheta \quad M_{0_n} \text{ — moment nasycenia),}$$

a po podstawieniu (8)

$$M_{0_n} = 1_n \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \cos \varphi - 1_{\xi} \frac{1}{2} L' mg \cos \nu \sin \varphi. \quad (68)$$

Impuls momentu za pół obrotu zabieraka wyniesie (przy pominięciu impulsu „wytwarzanego” na prostoliniowej części trajektorii):

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \int_0^{T/2} M_{0_n}(t) dt, \quad (\Pi_n \text{ — impuls nasycenia}) \\ \Pi_{\xi/n_n} &= \int_0^{T/2} M_{\xi/n_n} dt, \end{aligned}$$

$$\Pi_n = \Pi_{\xi_n} + \Pi_{\eta_n},$$

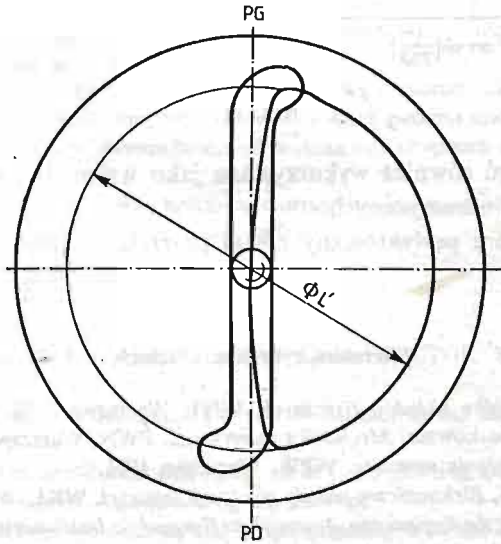
$$\Pi_{\eta_n} = 1_\eta \cdot \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \int_0^{T/2} \cos(\omega_r t) dt = 0,$$

$$\Pi_{\xi_n} = -1_\xi \cdot \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \int_0^{T/2} \sin(\omega_r t) dt = -1_\xi \cdot \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \cdot \frac{T}{\pi},$$

$$\Pi_n = -1_\xi \cdot \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \cdot \frac{T}{\pi},$$

$$M_{sr_n} = \frac{L'}{\pi} mg \cos \vartheta,$$

gdzie: M_{sr_n} — moment średni nasycenia.



Rys. 10

Ponieważ

$$m = \frac{1}{6} \rho \pi d^3,$$

otrzymamy:

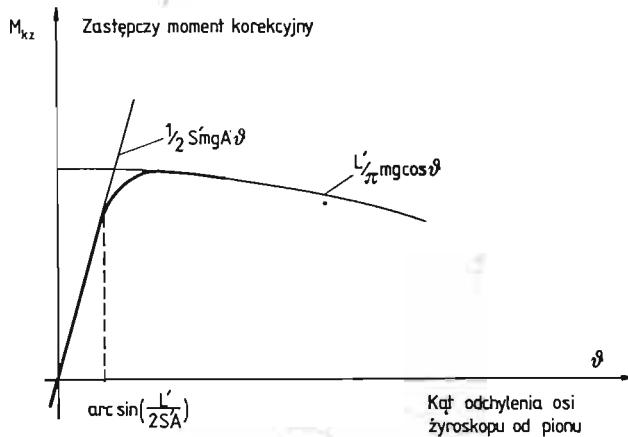
$$M_{sr_n} = \frac{1}{6} \frac{L'}{\pi} \rho \pi d^3 g \cos \vartheta. \quad (69)$$

Charakterystykę momentu średniego korekcyjnego przedstawia rys. 11.

4. Uwagi końcowe

Stworzony w niniejszej pracy model matematyczny korektora oraz jego analiza dająca szczegółowy opis zasady działania tego typu korektora, a nadto zbudowanie funkcji opi-

sującej moment korekcyjny „wytwarzany” przez korektor, w zależności od kąta odchylenia osi żyroskopu od kierunku pionowego i parametrów konstrukcyjnych, wzbogacone o pewne dane doświadczalne, powinny stanowić pomoc przy projektowaniu tego typu



Rys. 11

urządzeń. Mogą one być również wykorzystane jako wstęp do bardziej zaawansowanej analizy lub do obliczeń numerycznych.

Wybór typu korektora podyktowany został potrzebami przemysłu krajowego.

Literatura cytowana w tekście

1. R. H. CANNON, Jr *Dynamika układów fizycznych*, WNT, Warszawa 1973.
2. W. RUBINOWICZ, W. KRÓLIKOWSKI, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1980.
3. A. STEFANOWICZ, *Wyposażenie samolotu*, WPW, Warszawa 1981.
4. M. KAYTON, W. R. FRIED, *Elektroniczne układy nawigacji lotniczej*, WKŁ, Warszawa 1976.
5. E. J. SIFF, C. L. EMMERICH, *An Engineering Approach to Gyroscopic Instruments*, Robert Speller and Sons, Publishers, Inc, New York 1960.
6. P. H. SAVET, *Gyroscopes: Theory and Design*, Mc Graw Hill, Bode Co, Inc, New York 1961.
7. J. B. SCARBOROUGH, *The Gyroscope: Theory and Applications* Interscience Publishers, Inc, New York 1958
- 8 P. DEVERGNE, *Horizons Gyroscopiques de conception française en production industrielle* W: Air Techniques, vol. 4, 1963.

Patenty

- P1. Horyzot sztuczny, G01c 15/4 Nr 2425, Polska, 1935.
- P2. Aufrichtvorrichtung für Kreiselhorizonte, 42c 25/50 Nr 863 422, RFN, 1950.
- P3. Kugelaufrichter für Vertikalkreisel, 42 c 25/50 Nr 11466663, RFN, 1958.
- P4. Improvements in Erectors of Gyro-verticals, G61c 19/50 Nr 34086, Anglia, 1965.
- P5. Devices for Reducing the Action of Pendulous Erectors on Gyro-verticals, G01 c 19/54 Nr 34613, Anglia, 1965.
- P6. Aufrichtvorrichtung mit Pendelm für Vertikalkreisel, 42 c 25/50 Nr 1498027, RFN, 1965.
- P7. Gyro Erection System, G01c 19/30, 19/46. Nr 3, 498, 146, USA, 1966.
- P8. A. Device for Suppressing the Erection in Gyro Horizons for Aircraft, G01c 19/54.
- P9. Ustrojstvo korekcji girovertikali, G01 C 19/50, Nr 583372, ZSRR, 1974.

- P10. Dispositif de correction mécanique d'une centrale gyroscopique de verticale, G01 C 19/42.Nr76 26712, Francja, 1976.
- P11. Erecteur de gyroscope de verticale, G01 C 19/50. Nr 78 06250, Francja 1978.
- P12. Korektor giroskopu pionowego, G01 C 19/50. Nr 213824, Polska, 1979.
- P13. Einrichtung zum Aufrichten und Stützen eines Lotkreisels, G01 C 19/50 Nr 28 38 740, RFN, 1978.
- P14. Dispositif pour le redressement et le soutien d'un gyroscope gravitationnel, G01 C 19/50 Nr 79 06176, Francja, 1979.
- P15. Device for Erecting and Stabilizing a Gyro Vertical, G 01 C 19/50 Nr 4, 294, 128, USA, 1979.
- P16. Vorrichtung zum Aufrichten und Stützen eines Lotkreisels, G01 C 19/46 Nr 30 00 265, RFN, 1980.
- P17. Dispositif de redressement et de soutien d'un gyroscope gravitationnel, G01 C 19/46 Nr 8100109, Francja, 1981.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКОГО КОРРЕКТОРА ВЕРТИКАЛИ ПО АВИАГОРИЗОНТУ

В статье приводится динамический анализ механического корректора вертикали по авиагоризонту.

Описывается назначение корректора и выполненные им функции. Дана также классификация систем коррекции, предложенная авторами. Основная часть работы посвящена конструкции анализу и подробному рассмотрению математической модели одношарного корректора с прямолинейной направляющей.

Авторы приняли ряд положений, которые считают теоретической основой для разработки систем коррекции с учетом реальных условий работы.

Summary

DYNAMICAL ANALYSIS OF THE MECHANICAL ERECTOR FOR GYRO-VERTICAL

The subject of the paper is a dynamical analysis of the mechanical Erector for Gyro-Vertical (for Artificial Horizon).

The paper informs about application and functions of Gyro-Erecting Devices. It also includes classification of Gyro-Erecting Systems — proposed by the authors.

The main part — covers design, analysis and detailed discussion of the math, model of one ball type Gyro-Erector with straight-line guideway.

Authors have taken into account a number of principles treated as theories in working out solutions to real situations in the work of Erector for Gyro-Vertical.

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1982 roku

THERMAL STRESSES IN A TRANSVERSELY ISOTROPIC LAYER CONTAINING AN ANNULAR CRACK. TENSILE- AND SHEAR-TYPE CRACK

BOGDAN ROGOWSKI (Łódź)

*Politechnika Łódzka
Instytut Inżynierii Budowlanej*

The thermal stress problem for an annular crack contained in a transversely isotropic layer is investigated using the technique of Hankels transforms, triple integral equations and series solutions. For symmetrical constant temperature over the crack surfaces and for two cases of antisymmetrical thermal loadings namely a prescribed temperature applied to the surfaces of the layer and uniform heat flow disturbed by an insulated crack, expressions for the crack shapes, the normal and shearing thermal stresses in the crack plane and the mode I and II stress intensity factors are obtained. Results are presented illustrating the effect of the physical properties of the material on the stress intensity factors.

1. Introduction

The penny-shaped crack in a temperature field was treated by Olesiak and Sneddon, who showed that the crack opens; the problem was symmetrical with respect to the crack plane [1]. The features of antisymmetry were presented by Florence and Goodier in the linear thermoelastic problem of uniform heat flow disturbed by a penny-shaped insulated crack [2]. The thermal stress problem for an annular crack contained in a transversely isotropic medium [3 - 5] is investigated in the present work. The thermal conditions considered are symmetrical [1] and antisymmetrical [2] (two cases of thermal loadings) with respect to the crack plane. Assuming the heat flux on the crack surface as a Fourier cosine series (with singularities at the tips of the crack) in symmetrical problem or the temperature on the crack surface in the form of Fourier sine series in antisymmetrical one, and axial or radial displacement, respectively, as a Fourier sine series, we have reduced the triple integral equations of the heat conduction and thermoelastic problems to the solution of infinite sets of linear simultaneous equations for the coefficients introduced in the series representations. Thus, the mode I and II thermal stress intensity factors are easily evaluated in terms of the coefficients of series expansions of the physical quantities.

2. The potentials of thermoelastic displacements

The thermoelastic displacement potentials $\varphi_i(r, z)$ ($i = 0, 1, 2$) satisfying the foregoing equilibrium equations are defined [6] as:

$$u = \partial_r(k\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_0), \quad \vartheta = 0, \quad w = \partial_z(\varphi_1 + k\varphi_2 + k_1\varphi_0), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -G_1(k+1)\partial_z^2(\varphi_1 + \varphi_2) - 2Gr^{-1}u - G_1s_0^2\kappa(1+k_1)T, \\ \sigma_\theta &= -G_1(k+1)\partial_z^2(\varphi_1 + \varphi_2) - 2G\partial_ru - G_1s_0^2\kappa(1+k_1)T, \\ \sigma_z &= G_1(k+1)\partial_z^2(s_1^{-2}\varphi_1 + s_2^{-2}\varphi_2) + G_1\kappa(1+k_1)T, \\ \sigma_{rz} &= G_1(k+1)\partial_r\partial_z(\varphi_1 + \varphi_2) + G_1(1+k_1)\partial_r\partial_z\varphi_0, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{z\theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + s_i^{-2}\partial_z^2)\varphi_i(r, z) &= 0, \quad (i = 0, 1, 2), \\ s_0^{-2}\partial_z^2\varphi_0(r, z) &= \kappa T(r, z), \end{aligned} \quad (2.3)$$

where the symbols ∂_r, ∂_z etc. denote partial differentiation and

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\beta_r(c_{13} + c_{44}) - \beta_z(c_{11} - s_0^2c_{44})}{\beta_r(c_{33}s_0^2 - c_{44}) - \beta_zs_0^2(c_{13} + c_{44})}, \\ \kappa &= \frac{\beta_r(c_{33}s_0^2 - c_{44}) - \beta_zs_0^2(c_{13} + c_{44})}{s_0^2(c_{13} + c_{44})^2 - (c_{11} - s_0^2c_{44})(c_{33}s_0^2 - c_{44})}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\beta_r = (c_{11} + c_{12})\alpha_r + c_{13}\alpha_z, \quad \beta_z = 2c_{13}\alpha_r + c_{33}\alpha_z, \quad s_0^{-2} = \lambda_z/\lambda_r.$$

The temperature field in the medium in a steady state is governed by the following equation:

$$(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + s_0^{-2}\partial_z^2)T(r, z) = 0. \quad (2.5)$$

In above equations, the z -axis is along the axis of symmetry of the material that has five elastic constants c_{ij} and u, v, w are the radial, circumferential and axial components of the displacement, σ_r, σ_θ etc. are the components of the tensor stress, T is the deviation of the absolute temperature from the temperature of the medium in a state of zero stress and strain, G and G_1 are the shear moduli in the planes of isotropy and along the z -axis respectively, λ_z, λ_r and α_z, α_r are the coefficients of thermal conductivity and the linear thermal expansion along the z -axis and in the planes of isotropy, respectively, and s_1, s_2, k are the material parameters [6].

3. Statement of the problem and temperature fields

The geometry is illustrated in Fig. 1. The middle plane of the layer is taken as the plane $z = 0$ ($\zeta = 0$) in cylindrical polar coordinates, the annular crack extending over the region $a \leq r \leq b$ ($\lambda \leq \varrho \leq 1$). The crack is opened by the application of constant temperature $-T_0$ to its flat surfaces and the heat flux is zero outside the crack in the middle plane (Fig. 1a — symmetrical problem). Two cases of antisymmetrical thermal loadings also are to be considered (Fig. 1b — antisymmetrical problem).

First case concerns the temperature, odd in z , applied on the layer surfaces. The pro-

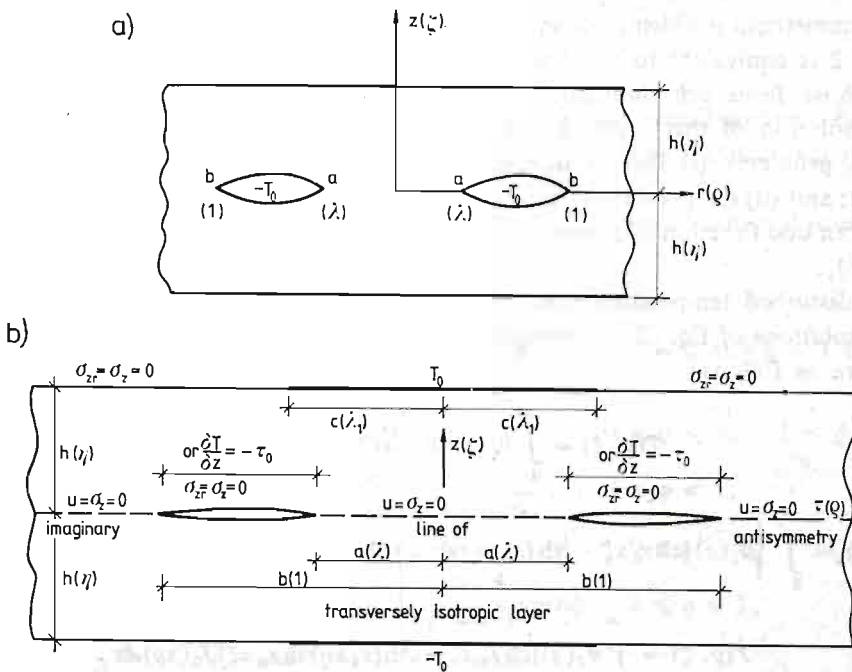


Fig. 1a, Geometry and coordinate system;

Fig. 1b, Geometry, coordinate system and boundary conditions

blem of uniform heat flow disturbed by a crack whose faces are thermally insulated in second case is considered. Because of symmetry, attention may be restricted to the region $0 \leq \zeta \leq \eta$.

The thermal conditions inside and outside the annulus $\zeta = 0$, $\lambda \leq \rho \leq 1$ and at $\zeta = \eta$ are as follows:

$$T(\rho, 0) = -T_0, \quad \lambda \leq \rho \leq 1, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta}(\rho, 0) = 0, \quad 0 \leq \rho < \lambda, \quad 1 < \rho, \quad (3.2)$$

$$T(\rho, \eta) = 0, \quad \rho \geq 0,$$

in symmetrical problem and

case 1:

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta}(\rho, 0) = 0, \quad \lambda < \rho < 1, \quad (3.3)$$

$$T(\rho, 0) = 0, \quad 0 \leq \rho < \lambda, \quad 1 < \rho,$$

$$T(\rho, \eta) = \begin{cases} T_0, & 0 \leq \rho < \lambda_1, \\ 0, & \lambda_1 < \rho, \end{cases} \quad (3.4)$$

case 2:

$$\frac{\partial T}{b \partial \zeta}(\rho, 0) = -\tau_0, \quad \lambda < \rho < 1, \quad (3.5)$$

$$T(\rho, 0) = 0, \quad 0 \leq \rho < \lambda, \quad 1 < \rho,$$

$$T(\rho, \eta) = 0, \quad \rho \geq 0, \quad (3.6)$$

in antisymmetrical problem, where T_0 and τ_0 are constants. The boundary condition for the case 2 is equivalent to the problem of uniform heat flow disturbed by the annular crack whose faces are thermally insulated.

The solution of this problem can be obtained by superposing the solutions of the following problems. (i) The problem of crack-free region having temperature distribution $T = \tau_0 z$; and (ii) the problem of the annular crack with a temperature distribution $T(r, z)$ which is an odd function of z , vanishes at the edges of the medium and satisfies the condition (3.5)₁.

The disturbed temperature field is $\tau_0 z + T(r, z)$.

The solutions of Eq. (2.5), appropriate to the conditions (3.2), (3.4) and (3.6), respectively, are as follows:

$$T(\varrho, \xi) = \int_0^{\infty} \theta_0(x) \operatorname{sh} s_0 x (\zeta - \eta) J_0(x\varrho) dx, \quad (3.7)$$

$$T(\varrho, \xi) = \int_0^{\infty} \left\{ \theta_1(x) [\operatorname{ch} s_0 x \zeta - \operatorname{cth}(s_0 x \eta) \operatorname{sh} s_0 x \zeta] + \lambda_1 T_0 J_1(x\lambda_1) \frac{\operatorname{sh} s_0 x \zeta}{\operatorname{sh} s_0 x \eta} \right\} J_0(x\varrho) dx, \quad (3.8)$$

$$T(\varrho, \zeta) = \int_0^{\infty} \theta_2(x) [\operatorname{ch} s_0 x \zeta - \operatorname{cth}(s_0 x \eta) \operatorname{sh} s_0 x \zeta] J_0(x\varrho) dx, \quad (3.9)$$

where $J_n(x\varrho)$ is the Bessel function of the first kind in order n . The unknown functions $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, can be found from Eqs. (3.1), (3.3), (3.5), which lead to the following triple integral equations:

$$\int_0^{\infty} \theta_0(x) \operatorname{sh}(s_0 x \eta) J_0(x\varrho) dx = T_0, \quad \lambda \leq \varrho \leq 1, \quad (3.10)$$

$$\int_0^{\infty} x \theta_0(x) \operatorname{ch}(s_0 x \eta) J_0(x\varrho) dx = 0, \quad 0 \leq \varrho < \lambda, \quad 1 < \varrho,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x \theta_1(x) [1 + h_0(x\eta)] J_0(x\varrho) dx = \\ = \lambda_1 T_0 \int_0^{\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} s_0 x \eta} J_1(x\lambda_1) J_0(x\varrho) dx, \quad \lambda < \varrho < 1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\int_0^{\infty} \theta_1(x) J_0(x\varrho) dx = 0, \quad 0 \leq \varrho < \lambda, \quad 1 < \varrho,$$

$$\int_0^{\infty} x \theta_2(x) [1 + h_0(x\eta)] J_0(x\varrho) dx = \tau_0 b s_0^{-1}, \quad \lambda < \varrho < 1, \quad (3.12)$$

$$\int_0^{\infty} \theta_2(x) J_0(x\varrho) dx = 0, \quad 0 \leq \varrho < \lambda, \quad 1 < \varrho,$$

with $h_0(x\eta)$ being defined as

$$h_0(x\eta) = 2[\exp(2s_0 x\eta) - 1]^{-1}. \quad (3.13)$$

The above triple integral equations correspond to the symmetrical problem, Eqs. (3.10), and antisymmetrical one in the case 1, Eqs. (3.11), and in the case 2, Eqs. (2.12), of thermal conditions.

We use here the series expansion method to solve the above triple integral equations [7]. Interchanging the variable ϱ in $\lambda \leq \varrho \leq 1$ to ϕ in $0 \leq \phi \leq \pi$

$$2\varrho^2 = 1 + \lambda^2 - (1 - \lambda^2)\cos\phi \quad (3.14)$$

the variables ϱ and ϕ correspond each other and $\varrho = \lambda$ is $\phi = 0$ and $\varrho = 1$ to $\phi = \pi$.

The following integral formulas are to be utilized [8]:

$$I_n = \int_0^\infty x Z_n(x) J_0(x\varrho) dx = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varrho < \lambda, \quad 1 < \varrho, \\ \frac{4}{\pi(1-\lambda^2)} \cdot \frac{\cos n\phi}{\sin\phi}, & \lambda < \varrho < 1, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$I_{n-1} - I_{n+1} = \int_0^\infty C_n(x) J_0(x\varrho) dx = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \quad 1 \leq \varrho, \\ \frac{8}{\pi(1-\lambda^2)} \sin n\phi & \lambda \leq \varrho \leq 1, \end{cases}$$

where

$$Z_n(x) = J_n\left(x \frac{1+\lambda}{2}\right) J_n\left(x \frac{1-\lambda}{2}\right), \quad C_n(x) = x[Z_{n-1}(x) - Z_{n+1}(x)]. \quad (3.16)$$

Then, the unknown functions $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ and $\theta_2(x)$ can be expressed by series:

$$\theta_0(x) \operatorname{ch}(s_0 x\eta) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a'_n Z_n(x), \quad (3.17)$$

$$\theta_1(x) = \lambda_1 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} b'_n C_n(x), \quad (3.18)$$

$$\theta_2(x) = \tau_0 b s_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c'_n C_n(x), \quad (3.19)$$

where $a'_0, a'_1, \dots, b'_1, b'_2, \dots$ and c'_1, c'_2, \dots are unknown parameters.

Thus, the appropriate series representations (3.17) - (3.19) satisfied two of the three equations exactly. Substituting Eqs. (3.17), (3.18) and (3.19) into Eqs. (3.10)₁, (3.11)₁ and (3.12)₁, respectively, and using the Neumann's formula [9]

$$J_0(x\varrho) = Z_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(x) \cos m\phi, \quad \lambda \leq \varrho \leq 1, \quad (3.20)$$

we get the following infinite sets of simultaneous equations for the determination of the coefficients a'_n, b'_n, c'_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n \int_0^\infty [1 - g_0(x\eta)] Z_n(x) Z_m(x) dx = \delta_{0m}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \int_0^{\infty} [1 + h_0(x\eta)] C_n(x) C_m(x) dx = \\ = \int_0^{\infty} \frac{1}{\text{sh } s_0 x \eta} J_1(x\lambda_1) C_m(x) dx, \quad (m = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n \int_0^{\infty} [1 + h_0(x\eta)] C_n(x) C_m(x) dx = \delta_{1m}, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (3.23)$$

where δ_{0m} and δ_{1m} are Kronecker's deltas and

$$g_0(x\eta) = 2[1 + \exp(2x\eta s_0)]^{-1}. \quad (3.24)$$

In terms of coefficients a'_n , b'_n , c'_n it is found that

$$T(\varrho, \zeta) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } s_0 x (\zeta - \eta)}{\text{ch } s_0 x \eta} Z_n(x) J_0(x\varrho) dx, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} T(\varrho, \zeta) = \lambda_1 T_0 \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b'_n C_n(x) [\text{ch } s_0 x \zeta - \text{cth}(s_0 x \eta) \text{sh } s_0 x \zeta] + \right. \\ \left. + J_1(x\lambda_1) \frac{\text{sh } s_0 x \zeta}{\text{sh } s_0 x \eta} \right\} J_0(x\varrho) dx, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$T(\varrho, \zeta) = \tau_0 b s_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \int_0^{\infty} C_n(x) [\text{ch } s_0 x \zeta - \text{cth}(s_0 x \eta) \text{sh } s_0 x \zeta] J_0(x\varrho) dx, \quad (3.27)$$

in the symmetrical and antisymmetrical (case 1 and 2) problems, respectively.

At the plane $\zeta = 0$ we have:

$$T(\varrho, 0) = -T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a'_n [I_0^n - 2G_0^n], \quad 0 \leq \varrho \leq \lambda, \quad 1 \leq \varrho, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta}(\varrho, 0) = \frac{4T_0 s_0}{\pi(1-\lambda^2)} \cdot \frac{1}{\sin \phi} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \cos(n\phi), \quad \lambda < \varrho < 1,$$

for symmetrical thermal loading and

$$T(\varrho, 0) = \frac{8T_0 \lambda_1}{\pi(1-\lambda^2)} \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin(n\phi), \quad \lambda \leq \varrho \leq 1, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \zeta}(\varrho, 0) = \frac{8T_0 \lambda_1 s_0}{\pi(1-\lambda^2)} \sum_{n=1}^{\infty} n b'_n \left[I_0^n + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^n - 2H_0^n \right] + \\ + \lambda_1 T_0 s_0 \int_0^{\infty} \frac{x}{\text{sh } s_0 x \eta} J_1(x\lambda_1) J_0(x\varrho) dx, \quad 0 \leq \varrho < \lambda, \quad 1 < \varrho, \end{aligned}$$

$$T(\varrho, 0) = \frac{8\tau_0 b}{\pi(1-\lambda^2)s_0} \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \sin(n\phi), \quad \lambda \leq \varrho \leq 1, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta}(\varrho, 0) = \frac{8\tau_0 b}{\pi(1-\lambda^2)} \sum_{n=1}^{\infty} n c'_n \left[I_0^n + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^n - 2H_0^n \right], \quad 0 \leq \varrho < \lambda, \quad 1 < \varrho$$

in the case 1 and 2 of the antisymmetrical problem.

In above equations:

$$I_0^n = \int_0^{\infty} J_0(x\varrho) Z_n(x) dx,$$

$$G_0^n = \int_0^{\infty} [\exp(2x\eta s_0) + 1]^{-1} J_0(x\varrho) Z_n(x) dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.31)$$

$$H_0^n = \int_0^{\infty} [\exp(2x\eta s_0) - 1]^{-1} J_0(x\varrho) x \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} dx, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

The integrals I_0^n can be presented analytically by Gaussian hypergeometric series and a Gamma function [10]. The integrals G_0^n and H_0^n can be easily evaluated numerically, because those integrands decrease exponentially to zero. The heat-flux on the plane $\zeta = 0$ has singularities of the form $(\varrho - \lambda)^{-1/2}$ at $\varrho = \lambda$ and $(1 - \varrho)^{-1/2}$ at $\varrho = 1$ in the symmetrical problem and $(\lambda - \varrho)^{-1/2}$ and $(\varrho - 1)^{-1/2}$ in antisymmetrical one (see Appendix to [10]).

In the limiting case of a penny-shaped crack problem ($\lambda = 0$) in the infinite medium ($\eta \rightarrow \infty, g_0(x\eta) = h_0(x\eta) = 0$) we obtain from the above results the closed-form solutions:

$$a'_n = -\frac{4}{\pi(1 + \delta_{n0})} \cdot \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad b'_n = 0, \quad c'_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n}{4n^2 - 1} \quad (3.32)$$

and at $\zeta = 0$

$$\begin{aligned} T(\varrho, 0) &= -\frac{2}{\pi} T_0 \arcsin\left(\frac{1}{\varrho}\right), \quad \varrho \geq 1, \\ \frac{\partial T}{\partial \zeta}(\varrho, 0) &= \frac{2}{\pi} T_0 s_0 \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}, \quad 0 \leq \varrho < 1, \end{aligned} \quad (3.33)$$

in the symmetrical problem and

$$\begin{aligned} T(\varrho, 0) &= \frac{2}{\pi} \tau_0 b s_0^{-1} \sqrt{1-\varrho^2}, \quad 0 \leq \varrho \leq 1, \\ \frac{\partial T}{\partial \zeta}(\varrho, 0) &= \frac{2}{\pi} \tau_0 b \left[\frac{1}{\sqrt{\varrho^2-1}} - \arcsin\left(\frac{1}{\varrho}\right) \right], \quad 1 < \varrho, \end{aligned} \quad (3.34)$$

n the uniform heat-flux problem.

4. The thermoelastic problem

The solutions of Eqs. (2.3) appropriate to our problems are:

$$\varphi_i(\varrho, \zeta) = \frac{s_{i \pm 1} b^2}{G_1(k+1)(s_1 - s_2)} \int_0^\infty x^{-2} [A_i(x) \operatorname{sh} s_i x \zeta + B_i(x) \operatorname{ch} s_i x \zeta] J_0(x\varrho) dx, \quad (4.1)$$

$$\varphi_0(\varrho, \zeta) = b^2 \kappa \int_0^\infty x^{-2} \theta_0(x) \operatorname{sh} s_0 x (\zeta - \eta) J_0(x\varrho) dx, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(\varrho, \zeta) = b^2 \kappa \int_0^\infty x^{-2} \left\{ \theta_1(x) [\operatorname{ch} s_0 x \zeta - \operatorname{cth}(s_0 x \eta) \operatorname{sh} s_0 x \zeta] + \right. \\ \left. + \lambda_1 T_0 J_1(x \lambda_1) \frac{\operatorname{sh} s_0 x \zeta}{\operatorname{sh} s_0 x \eta} \right\} J_0(x\varrho) dx, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\varphi_0(\varrho, \zeta) = b^2 \kappa \int_0^\infty x^{-2} \theta_2(x) [\operatorname{ch} s_0 x \zeta - \operatorname{cth}(s_0 x \eta) \operatorname{sh} s_0 x \zeta] J_0(x\varrho) dx. \quad (4.4)$$

The potentials (4.1) and (4.2) are used to solve the boundary conditions (Fig. 1a):

$$\sigma_z(\varrho, 0) = 0, \quad \lambda < \varrho < 1, \quad (4.5)$$

$$w(\varrho, 0) = 0, \quad 0 \leq \varrho \leq \lambda, \quad 1 \leq \varrho,$$

$$\sigma_{zr}(\varrho, 0) = \sigma_z(\varrho, \eta) = \sigma_{zr}(\varrho, \eta) = 0, \quad \varrho \geq 0, \quad (4.6)$$

which correspond to tensile-type crack problem in the layer with traction-free surfaces and the potentials (4.1) and (4.3) or (4.4) to solve the boundary conditions (Fig. 1b):

$$\sigma_{zr}(\varrho, 0) = 0, \quad \lambda < \varrho < 1, \quad (4.7)$$

$$u(\varrho, 0) = 0, \quad 0 \leq \varrho \leq \lambda, \quad 1 \leq \varrho,$$

$$\sigma_z(\varrho, 0) = \sigma_z(\varrho, \eta) = \sigma_{zr}(\varrho, \eta) = 0, \quad \varrho \geq 0, \quad (4.8)$$

which correspond to shear-type crack problem.

5. The triple integral equations

At first we consider the mode I tensile-type crack problem. Substituting Eqs. (4.1) and (4.2) into Eqs. (2.2) and (2.1) the stress and displacement components can be obtained in terms of the four unknown functions $A_1(x)$, $A_2(x)$ etc. The conditions (4.6) yield equations:

$$\begin{aligned} A_2(x) &= -A_1(x) - \beta s_0 (s_1 s_2)^{-1} G_1 \kappa (1 + k_1) \theta_0(x) \operatorname{ch} s_0 x \eta, \\ \Delta_0(x\eta) B_1(x) &= -A_1(x) (\operatorname{ch} \alpha x \eta + \alpha \beta^{-1} \operatorname{ch} \beta x \eta - 2s_1 \beta^{-1}) - \\ &\quad - 2\kappa s_0 s_2^{-1} G_1 (1 + k_1) \theta_0(x) (\operatorname{ch} s_2 x \eta - \operatorname{ch} s_0 x \eta), \\ \Delta_0(x\eta) B_2(x) &= A_1(x) (\operatorname{ch} \alpha x \eta - \alpha \beta^{-1} \operatorname{ch} \beta x \eta + 2s_2 \beta^{-1}) + s_0 (s_1 s_2)^{-1} \kappa G_1 \times \\ &\quad \times (1 + k_1) \theta_0(x) [\operatorname{ch}(s_0 x \eta) (\beta \operatorname{ch} \alpha x \eta - \alpha \operatorname{ch} \beta x \eta) + 2s_2 \operatorname{ch} s_1 x \eta], \end{aligned} \quad (5.1)$$

where

$$\Delta_0(x) = \text{sh } \alpha x + \alpha \beta^{-1} \text{sh } \beta x, \quad \{\alpha, \beta\} = s_1 \pm s_2. \quad (5.2)$$

The functions $A_2(x)$, $B_1(x)$ and $B_2(x)$ are expressed in terms of $A_1(x)$, and hence they can be eliminated from the rest of analysis. On the crack plane $\xi = 0$ Eqs. (5.1), (4.1), (4.2), (2.1) and (2.2) give:

$$w(\varrho, 0) = -(G_1 C)^{-1} b \int_0^\infty \{A_1(x) + \kappa s_0 C G_1 (k - k_1) (k + 1)^{-1} \theta_0(x) \text{ch } s_0 x \eta\} x^{-1} J_0(x \varrho) dx,$$

$$\sigma_z(\varrho, 0) = \int_0^\infty \{[1 - g_1(x \eta)] A_1(x) + s_0 s_2^{-1} \kappa G_1 (1 + k_1) \theta_0(x) \text{ch } s_0 x \eta \times$$

$$\times [1 - g_2(x \eta) - g_3(x \eta)] - G_1 \kappa (1 + k_1) \theta_0(x) \text{sh } s_0 x \eta\} J_0(x \varrho) dx, \quad (5.3)$$

where

$$g_i(x) = \frac{1}{\Delta_0(x)} \begin{cases} 1 + \alpha^2 \beta^{-2} (\text{ch } \beta x - 1) + \alpha \beta^{-1} \text{sh } \beta x - e^{-\alpha x}, & i = 1, \\ \alpha \beta^{-1} (\text{sh } \beta x + \text{ch } \beta x) - 2 s_2 \beta^{-1} - e^{-\alpha x}, & i = 2, \\ 2 s_2 \beta^{-1} (\text{ch } s_1 x - \text{ch } s_2 x) / \text{ch } s_0 x, & i = 3, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$C = (k + 1) (k - 1)^{-1} (s_2^{-1} - s_1^{-1}). \quad (5.5)$$

Substituting Eqs. (5.3) into Eqs. (4.5) we obtain

$$\int_0^\infty [A_1(x) + \kappa s_0 G_1 C (k - k_1) (k + 1)^{-1} \theta_0(x) \text{ch}(s_0 x \eta)] x^{-1} J_0(x \varrho) dx = 0,$$

$$0 \leq \varrho \leq \lambda, \quad 1 \leq \varrho, \quad (5.6)$$

$$\int_0^\infty \{[1 - g_1(x \eta)] A_1(x) + s_0 s_2^{-1} \kappa G_1 (1 + k_1) \theta_0(x) \text{ch}(s_0 x \eta) [1 - g_2(x \eta) -$$

$$- g_3(x \eta)]\} J_0(x \varrho) dx = G_1 \kappa (1 + k_1) T_0, \quad \lambda < \varrho < 1, \quad (5.7)$$

where in the second equation the relation (3.10)₁ is used. Next, for the case 1 of the thermal conditions in antisymmetrical problem we have:

$$s_1 B_2(x) = -s_2 B_1(x) - G_1 \kappa (1 + k_1) \beta \theta_1(x),$$

$$\Delta_1(x \eta) A_1(x) = -B_1(x) (\text{ch } \alpha x \eta - \alpha \beta^{-1} \text{ch } \beta x \eta + 2 s_2 \beta^{-1}) +$$

$$+ G_1 \kappa (1 + k_1) (s_2 \text{sh } s_0 x \eta)^{-1} [2 (s_0 \text{sh } s_2 x \eta - s_2 \text{sh } s_0 x \eta) \theta_1(x) +$$

$$+ T_0 \lambda_1 J_1(x \lambda_1) (\gamma_1 \text{sh } \gamma_2 x \eta - \gamma_2 \text{sh } \gamma_1 x \eta)], \quad (5.8)$$

$$\Delta_1(x \eta) A_2(x) = B_1(x) s_2 s_1^{-1} (\text{ch } \alpha x \eta + \alpha \beta^{-1} \text{ch } \beta x \eta - 2 s_1 \beta^{-1}) -$$

$$- G_1 \kappa (1 + k_1) (s_1 \text{sh } s_0 x \eta)^{-1} \{ [2 s_0 \text{sh } s_1 x \eta - \text{sh } s_0 x \eta (\alpha \text{ch } \beta x \eta +$$

$$+ \beta \text{ch } \alpha x \eta)] \theta_1(x) + T_0 \lambda_1 J_1(x \lambda_1) (\delta_1 \text{sh } \delta_2 x \eta - \delta_2 \text{sh } \delta_1 x \eta) \},$$

where

$$\Delta_1(x) = \text{sh } \alpha x - \alpha \beta^{-1} \text{sh } \beta x, \quad \gamma_{1,2} = s_2 \mp s_0, \quad \delta_{1,2} = s_1 \mp s_0. \quad (5.9)$$

The boundary conditions (4.7) lead to the triple integral equations:

$$u(\varrho, 0) = -b (G_1 C s_1)^{-1} \int_0^\infty [B_1(x) - s_1 G_1 C \kappa (k_1 - k) \times$$

$$\times (k + 1)^{-1} \theta_1(x)] x^{-1} J_1(x \varrho) dx = 0, \quad 0 \leq \varrho \leq \lambda, \quad 1 \leq \varrho, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\rho, 0) = & s_2 \int_0^\infty B_1(x) [1 - h_1(x\eta)] J_1(x\rho) dx - \\ & - G_1 \kappa(1 + k_1) \int_0^\infty \{ \theta_1(x) [s_2(1 + h_3(x\eta)) - s_0(1 + h_0(x\eta))] + \\ & + \lambda_1 T_0 J_1(x\lambda_1) h_2(x\eta) \} J_1(x\rho) dx = 0, \quad \lambda < \rho < 1, \end{aligned} \tag{5.11}$$

where

$$h_i(x) = \frac{1}{\Delta_1(x)} \begin{cases} 1 - \alpha^2 \beta^{-2} (1 - \operatorname{ch} \beta x) - \alpha \beta^{-1} \operatorname{sh} \beta x - e^{-\alpha x}, & i = 1, \\ (\operatorname{sh} s_0 x)^{-1} [s_1 \beta^{-1} (\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2 x - \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 x) - \\ \quad - s_2 \beta^{-1} (\delta_1 \operatorname{sh} \delta_2 x - \delta_2 \operatorname{sh} \delta_1 x) + s_0], & i = 2, \\ e^{-\alpha x} + \alpha \beta^{-1} (\operatorname{ch} \beta x + \operatorname{sh} \beta x - 2s_1 \alpha^{-1}) + \\ \quad + 2s_0 (s_2 \beta \operatorname{sh} s_0 x)^{-1} (s_1 \operatorname{sh} s_2 x - s_2 \operatorname{sh} s_1 x), & i = 3. \end{cases} \tag{5.12}$$

The unknown functions $B_2(x)$, $A_1(x)$ and $A_2(x)$ and the triple integral equations of the case 2 of thermal conditions can be obtained by replacing $\theta_1(x)$ by $\theta_2(x)$ in Eqs. (5.8), (5.10) and (5.11) and setting $J_1(x\lambda_1) = 0$.

6. Infinite sets of linear simultaneous equations

Using the formula (3.15)₂, the unknown function $A_1(x)$ in Eq. (5.6) can be expressed by series

$$A_1(x) = G_1 M \kappa T_0 x \sum_{n=1}^\infty a_n C_n(x) - \kappa s_0 G_1 C(k - k_1) (k + 1)^{-1} \theta_0(x) \operatorname{ch}(s_0 x \eta), \tag{6.1}$$

where a_n are the arbitrary coefficients and

$$M = (1 + k_1)(1 - s_0 s_2^{-1}) + C(k - k_1)(k + 1)^{-1} s_0 \tag{6.2}$$

is the material parameter.

Thus, the equations (5.6) are satisfied exactly, while the equation (5.7) leads to

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty a_n \int_0^\infty [1 - g_1(x\eta)] x C_n(x) J_0(x\rho) dx = & 1 + \sum_{n=1}^\infty a'_n \int_0^\infty \{ (1 - m_0) g_0(x\eta) - \\ & - m_1 g_1(x\eta) + m_2 [g_2(x\eta) + g_3(x\eta)] \} Z_n(x) J_0(x\rho) dx, \quad \lambda < \rho < 1 \end{aligned} \tag{6.3}$$

where the result (3.17) is used and

$$m_0 = (1 + k_1) M^{-1}, \quad m_1 = C s_0 (k - k_1) [(1 + k) M]^{-1}, \quad m_2 = s_0 (1 + k_1) (s_2 M)^{-1} \tag{6.4}$$

are the material parameters.

Substituting the relation (3.20) into Eq. (6.3) and equating the coefficients of $\cos(m\phi)$ in both sides we obtain infinite system of algebraic equations with respect to the unknown coefficients a_n . Subtracting the $(m + 2)$ -th of these from the m -th, we obtain

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \int_0^\infty [1 - g_1(x\eta)] C_n(x) C_m(x) dx = \delta_{1m} + \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \int_0^{\infty} \{ (1-m_0)g_0(x\eta) - m_1g_1(x\eta) + m_2[g_2(x\eta) + \\
 & + g_3(x\eta)] \} Z_n(x) [Z_{m-1}(x) - Z_{m+1}(x)] dx, \quad (m = 1, 2, \dots). \tag{6.5}
 \end{aligned}$$

[cont.]

The matrix of the system (6.5) in l.h.s. is symmetrical with respect to m and n and in r.h.s. is not. The functions $g_0(x\eta)$, $g_1(x\eta)$ etc. are continuous for all of x and tend exponentially to zero as $x\eta$ tends to infinity. For the case of infinite medium these functions are identically zero and the system (6.5) reduces to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} C_n(x) C_m(x) dx = \delta_{1m}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \tag{6.6}$$

Next, in antisymmetrical problem, using [8]

$$\int_0^{\infty} J_1(x\varrho) Z_n(x) dx = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \quad 1 \leq \varrho, \\ \frac{\sin n\phi}{\pi n\varrho}, & \lambda \leq \varrho \leq 1, \quad (n = 1, 2, \dots), \end{cases} \tag{6.7}$$

from Eq. (5.10) we obtain

$$B_1(x) = s_1 CG_1 \kappa(k_1 - k)(k + 1)^{-1} \left[\theta_1(x) + \lambda_1 T_0 x \sum_{n=1}^{\infty} b_n Z_n(x) \right], \tag{6.8}$$

where b_n are the arbitrary coefficients.

Substituting Eq. (6.8) into Eq. (5.11), using the solution for $\theta_1(x)$ and the formula corresponding to Neumann's addition theorem [9]

$$xJ_1(x\varrho) = \frac{8\varrho}{(1-\lambda^2)\sin\phi} \sum_{m=1}^{\infty} mZ_m(x)\sin m\phi, \quad \lambda < \varrho < 1, \tag{6.9}$$

it is found that the set of linear simultaneous equations of the thermoelastic problem of the shear-type crack in the case 1 of thermal conditions is

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} [1 - h_1(x\eta)] Z_n(x) Z_m(x) dx & = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \int_0^{\infty} [Z_{n-1}(x) - \\
 & - Z_{n+1}(x)] Z_m(x) [-1 + m_3 \gamma_1 + h_1(x\eta) + s_2 m_3 h_3(x\eta) - \\
 & - s_0 m_3 h_0(x\eta)] dx + m_3 \int_0^{\infty} x^{-1} J_1(x\lambda_1) h_2(x\eta) Z_m(x) dx, \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

where

$$m_3 = (1 + k_1)(k - 1)\beta^{-1}(k_1 - k)^{-1}. \tag{6.11}$$

For the case 2 of thermal conditions the set of simultaneous equation can be obtained by replacing b_n and b'_n by c_n and c'_n , respectively, and setting $J_1(x\lambda_1) = 0$ in Eqs. (6.10). The unknown function $B_1(x)$ in this case can be obtained by replacing $\theta_1(x)$, $\lambda_1 T_0$ and b_n by $\theta_2(x)$, $\tau_0 b s_0^{-1}$ and c_n , respectively, in Eq. (6.8).

7. Thermal crack shape

The Eqs. (5.3)₁, (6.1) and the formula (3.15)₂ give the following crack shape in the case when the applied temperature is symmetrical with respect to the crack plane

$$w(\varrho, 0) = -\frac{8T_0 b \kappa M}{\pi(1-\lambda^2)C} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\phi), \quad \lambda \leq \varrho \leq 1. \quad (7.1)$$

For the cases of antisymmetrical problem the following thermal crack shapes we obtain:

$$u(\varrho, 0) = -\frac{1}{\pi} T_0 b \lambda_1 \kappa (k_1 - k) (k+1)^{-1} \varrho^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sin(n\phi), \quad \lambda \leq \varrho \leq 1, \quad (7.2)$$

$$u(\varrho, 0) = -\frac{1}{\pi} \tau_0 b^2 s_0^{-1} \kappa (k_1 - k) (k+1)^{-1} \varrho^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \sin(n\phi), \quad \lambda \leq \varrho \leq 1, \quad (7.3)$$

in the case 1 and 2 of the thermal conditions, respectively.

8. Thermal stress distribution

The normal stress in Eq. (5.3), with the aid of Eq. (6.1) and the solution (3.17) may be rewritten to the form

$$\begin{aligned} \sigma_z(\varrho, 0) = & G_1 M \kappa \left\{ T(\varrho, 0) + T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n [1 - g_1(x\eta)] x C_n(x) J_0(x\varrho) dx - \right. \\ & - T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \int_0^{\infty} [(1 - m_0) g_0(x\eta) - m_1 g_1(x\eta) + \\ & \left. + m_2 (g_2(x\eta) + g_3(x\eta))] \cdot Z_n(x) J_0(x\varrho) dx \right\}. \quad (8.1) \end{aligned}$$

Using the formulas

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \frac{8n}{1-\lambda^2} \cdot \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x}, \\ \int_0^{\infty} x C_n(x) J_0(x\varrho) dx &= -\frac{8n}{1-\lambda^2} \left(I_0^n + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^n \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

and the result (3.28)₁, we obtain

$$\begin{aligned} \sigma_z(\varrho, 0) = & -G_1 M \kappa T_0 \left\{ \frac{8}{1-\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \left(I_0^n + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^n + \bar{G}_1^n \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} a'_n [I_0^n - 2m_0 G_0^n - m_1 G_1^n + m_2 (G_2^n + G_3^n)] \right\}, \quad (8.3) \end{aligned}$$

where

$$G_j^n = \int_0^\infty g_j(x\eta) Z_n(x) J_0(x\rho) dx, \quad j = 1, 2, 3, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\bar{G}_1^n = \int_0^\infty g_1(x\eta) x J_0(x\rho) \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} dx, \quad (n = 1, 2, \dots),$$
(8.4)

are the convergent integrals.

The normal stress $\sigma_z(\rho, 0)$ involves singularities of the form $(\lambda - \rho)^{-1/2}$ and $(\rho - 1)^{-1/2}$ ($\partial I_0^n / \partial \rho$, see Appendix to [10]).

Employing Eqs. (6.8) and (3.18) in Eq. (5.11), using the formula (8.2)₁ and integrating by parts, we obtain the shearing stress for the case 1 of antisymmetrical of thermal loading

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}(\rho, 0) = & -T_0 \lambda_1 s_1 s_2 G_1 C \kappa (k_1 - k) (k + 1)^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^\infty b_n \left(\frac{\partial I_0^n}{\partial \rho} + H_1^n \right) + \right. \\ & + \frac{4(1 - m_3 \gamma_1)}{1 - \lambda^2} \rho \sum_{n=1}^\infty n b'_n (I_0^n - I_2^n) + \frac{8m_3}{1 - \lambda^2} \sum_{n=1}^\infty n b'_n h_1^n + \\ & \left. + m_3 \int_0^\infty J_1(x\lambda_1) h_2(x\eta) J_1(x\rho) dx \right\}, \end{aligned}$$
(8.5)

where

$$I_l^n = \int_0^\infty J_l(x\rho) Z_n(x) dx, \quad l = 0, 2,$$

$$H_1^n = \int_0^\infty h_1(x\eta) x Z_n(x) J_1(x\rho) dx,$$

$$h_1^n = \int_0^\infty [s_2 h_3(x\eta) + m_3^{-1} h_1(x\eta) - s_0 h_0(x\eta)] J_1(x\rho) \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} dx,$$
(8.6)

are convergent integrals.

The shearing stress involves a square-root singularity at the crack tips. The singularity of $\sigma_{zr}(\rho, 0)$ is included in term $\partial I_0^n / \partial \rho$, while the remaining terms are nonsingular.

Replacing, in Eq. (8.5), $\lambda_1 T_0, b_n, b'_n$ by $\tau_0 b s_0^{-1}, c_n, c'_n$, respectively and setting, in Eq. (8.5), $J_1(x\lambda_1) = 0$ we obtain the shearing stress for the case 2 of antisymmetrical problem.

9. The stress intensity factors (SIFs)

To determine the singularities of the normal stress, the transform in Eq. (8.1) is calculated for C_n given in Eq. (8.2)₁ and the asymptotic formula [9]

$$x \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} - \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \lambda^2}} [\lambda \sin x \lambda - (-1)^n \cos x] + O(x^{-1}),$$
(9.1)

as follows:

$$\sigma_z(\varrho, 0) \sim -\frac{16G_1 M\kappa T_0}{(1-\lambda^2)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} na_n \left[\frac{\lambda H(\lambda-\varrho)}{\sqrt{\lambda^2-\varrho^2}} + (-1)^{n+1} \frac{H(\varrho-1)}{\sqrt{\varrho^2-1}} \right], \quad (9.2)$$

where the nonsingular terms have been neglected and $H(\cdot)$ denotes Heaviside unit functional.

Defining the mode I „thermal” stress intensity factors as:

$$\begin{aligned} K_{I\text{in.}}^T &= \sqrt{2b} \lim_{\varrho \rightarrow \lambda^-} \sqrt{\lambda-\varrho} \{\sigma_z(\varrho, 0)\}_{\varrho < \lambda}, \\ K_{I\text{out.}}^T &= \sqrt{2b} \lim_{\varrho \rightarrow 1^+} \sqrt{\varrho-1} \{\sigma_z(\varrho, 0)\}_{\varrho > 1}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

we obtain

$$\begin{aligned} K_{I\text{in.}}^T &= -\frac{16G_1 M\kappa T_0 \sqrt{a}}{\pi(1-\lambda^2)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} na_n, \\ K_{I\text{out.}}^T &= -\frac{16G_1 M\kappa T_0 \sqrt{b}}{\pi(1-\lambda^2)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} na_n. \end{aligned} \quad (9.4)$$

The SIFs in shear at $\varrho = \lambda^-$ and $\varrho = 1^+$ can be obtained from equation (8.5) Using

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x J_1(x\varrho) Z_n(x) dx &= -\frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^n, \\ x Z_n(x) &\doteq \frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} [\cos \lambda x + (-1)^n \sin x] + O(x^{-1}), \end{aligned} \quad (9.5)$$

we have as $\varrho \rightarrow 1^+$ and $\varrho \rightarrow \lambda^-$

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}(\varrho, 0) &\sim -\frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} s_1 s_2 G_1 C\kappa(k_1-k)(k+1)^{-1} \lambda_1 T_0 \varrho^{-1} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{\lambda H(\lambda-\varrho)}{\sqrt{\lambda^2-\varrho^2}} + (-1)^{n+1} \frac{H(\varrho-1)}{\sqrt{\varrho^2-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Both case 1 and case 2 thermal loadings give the following SIFs:

$$\begin{aligned} K_{II\text{in.}}^T &= -\frac{2\sqrt{a}}{\pi \lambda \sqrt{1-\lambda^2}} G_1 C s_1 s_2 \kappa(k_1-k)(k+1)^{-1} \lambda_1 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \\ K_{II\text{out.}}^T &= -\frac{2\sqrt{b}}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} G_1 C s_1 s_2 \kappa(k_1-k)(k+1)^{-1} \lambda_1 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \end{aligned} \quad (9.7)$$

for the temperature T_0 applied at the surfaces of the layer and

$$\begin{aligned}
 K_{II\text{in.}}^T &= -\frac{2\sqrt{a}}{\pi\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} G_1 C s_1 s_2 \kappa(k_1 - k)(k+1)^{-1} \tau_0 b s_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \\
 K_{II\text{out.}}^T &= -\frac{2\sqrt{b}}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}} G_1 C s_1 s_2 \kappa(k_1 - k)(k+1)^{-1} \tau_0 b s_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n,
 \end{aligned}
 \tag{9.8}$$

for uniform heat flow τ_0 disturbed by an annular crack.

10. The special cases

(a) Cracks in an infinite medium

Particulary, taking $\eta \rightarrow \infty$, we have $g_i(x\eta) = G_i^n = 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$) and $\text{sh } s_0 x(\zeta - \eta) / \text{ch } s_0 x\eta = -\exp(-s_0 x\zeta)$.

Using preceding results in Eqs. (3.21), (3.25) and (3.28) we obtain easily the temperature field in infinite medium under symmetrical loading. From Eqs. (6.6), (7.1), (8.3) and (9.4) we obtain the solution of thermoelastic problem of the mode I tensile-type crack.

Next, taking $\eta \rightarrow \infty$ in antisymmetrical problem, we have $h_i(x\eta) = h_i^n = H_i^n = 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$). In this case the r.h.s. in Eq. (3.22) degenerates to zero and b'_n are identically zero. Consequently, the solutions b_n of Eqs. (6.10) are equal zero and both the SIFs approach zero for infinite medium in the case 1 of thermal loading. For uniform heat flow disturbed by an annular crack the infinite sets of linear algebraic equations are:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \int_0^{\infty} C_n(x) C_m(x) dx &= \delta_{1m}, \quad (m = 1, 2, \dots), \\
 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^{\infty} Z_n(x) Z_m(x) dx &= (-1 + m_1 \gamma_1) \sum_{n=1}^{\infty} c'_n [Z_{n-1}(x) - Z_{n+1}(x)] Z_m(x) dx.
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

In the classical case of a penny-shaped crack problem ($\lambda = 0$) in the infinite medium the thermal fields and the coefficients a'_n, b'_n, c'_n are given in closed-form by formulas (3.32)-(3.34). For the mode I tensile-type penny-shaped crack problem the equations (6.6) have a closed-form solution: $a_n = 2n/\pi(4n^2 - 1)$ and the normal components $w(\rho, 0), \sigma_z(\rho, 0)$ and the SIF are:

$$\begin{aligned}
 w(\rho, 0) &= -2\pi^{-1} T_0 b \kappa M C^{-1} (1 - \rho^2)^{1/2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \\
 \sigma_z(\rho, 0) &= -2\pi^{-1} T_0 \kappa G_1 M (\rho^2 - 1)^{-1/2}, \quad \rho > 1, \\
 K_I^T &= -2\pi^{-1} T_0 b^{1/2} \kappa G_1 M.
 \end{aligned}
 \tag{10.2}$$

On the other hand, if $\lambda = a/b \rightarrow 0$ but b is bounded, the SIF $K_{I\text{out.}}^T$ tends to the result of a penny-shaped crack and $K_{I\text{in.}}^T$ tends to infinity, while if $\lambda \rightarrow 1 - 2\varepsilon$ (ε - a small value) the „thermal” SIFs become equal: $K_{I\text{out.}}^T \rightarrow K_{I\text{in.}}^T \approx -G_1 \kappa M T_0 \sqrt{b\varepsilon}$ and tend to zero as ε is zero.

For the uniform heat flow disturbed by a penny-shaped insulated crack in an infinite

transversely isotropic medium the temperature field is given by Eqs. (3.34) and the SIF assume the value

$$K_{II}^T = \frac{2}{3\pi} \tau_0 b^{3/2} G_1 C s_1 s_2 \kappa (k_1 - k) (k + 1)^{-1} s_0^{-1} (1 - m_3 \gamma_1). \quad (10.3)$$

(b) Isotropic medium

A limiting case of isotropic state gives:

$s_1 \rightarrow 1, \quad s_2 \rightarrow 1, \quad s_0 = 1, \quad k \rightarrow 1, \quad \alpha = \gamma_2 = \delta_2 = 2, \quad \beta \rightarrow 0, \quad \gamma_1 \rightarrow 0,$
 $\delta_1 \rightarrow 0, \quad \beta_r = \beta_z, \quad \alpha_r = \alpha_z, \quad G_1 = G, \quad k_1 \rightarrow 3 - 2\nu, \quad \kappa \rightarrow (1 + \nu) \alpha_r / (1 - \nu),$
 $m_0 = m_2 = -m_3 = -2(2 - \nu), \quad m_1 = 1, \quad C = (1 - \nu)^{-1}, \quad M = -1, \quad \kappa(k_1 - k) \times$
 $(k + 1)^{-1} = (1 + \nu) \alpha_r, \quad G_1 C s_1 s_2 \kappa (k_1 - k) (k + 1)^{-1} = G \alpha_r (1 + \nu) / (1 - \nu)$ and the boundary function are:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 2[\exp(2x) + 1]^{-1}, \\ g_i(x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} 2x + 2x} \begin{cases} 1 + 2x(1 + x) - \exp(-2x), & i = 1 \\ 1 + 2x - \exp(-2x), & i = 2 \\ 2x + \operatorname{th} x, & i = 3 \end{cases} \\ h_0(x) &= 2[\exp(2x) - 1]^{-1} \\ h_2(x) &= 0 \\ h_i(x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} 2x - 2x} \begin{cases} 1 + 2x(x - 1) - \exp(-2x), & i = 1 \\ 1 + 2x(1 - \operatorname{cth} x) + \exp(-2x), & i = 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.4)$$

From preceding equations, we note that the boundary functions do not depend on the physical properties of the material in the case of isotropic medium, while in the transversely isotropic case depend, as shown Eqs. (5.4) and (5.12).

The results (10.2) and (10.3) agree with those in the case of the penny-shaped crack in isotropic medium, where are given by Olesiak and Sneddon [1], and Florence and Goodier [2].

11. Numerical results and discussion

Solving the infinite systems of linear algebraic equations (3.21)–(3.23) and (6.5), (6.10) in both cases numerically and by truncation, we have examined the effects of geometrically parameters and physical properties of the medium on the stress intensity factors. The integrals involving the product of four Bessel function can be evaluated by the similar method as in the previous papers [10, 11]. The first ten roots of the sets of algebraic equations give the desired accuracy.

The value of normalized stress intensity factors $-K_I^T / G_1 M \kappa T_0 \sqrt{b}$ versus $\lambda = a/b$ are shown in Fig. 2, for infinite medium. Both SIFs increases monotonically with the decrease a/b and become infinity or $2/\pi$, respectively, as $a/b \rightarrow 0$. Since $K_{I_{in}}^T > K_{I_{out}}^T$, growth of the crack under mode I thermal loading would tend to occur at the inner edge suggesting that an annular crack will develop into a penny-shaped crack. In contrast to

the results of the crack in infinite medium under mode I [11] and III [10] mechanical loading, the intensity of the local thermal stresses depends on the physical properties of the material. The effect of the material dissimilarity is used by the parameters $\kappa G_1 M$. The crack opens if $T_0 \kappa M < 0$.

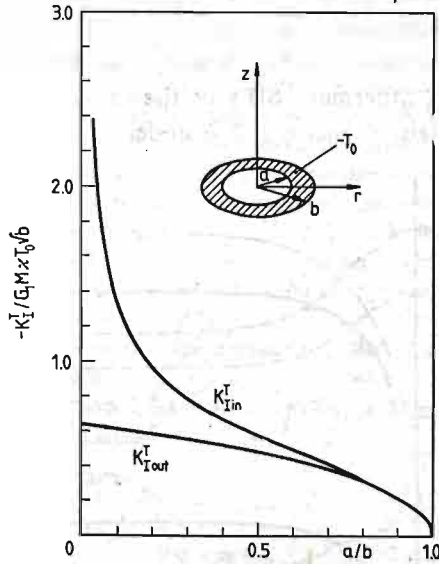


Fig. 2 Stress intensity factors for annular crack under uniform temperature

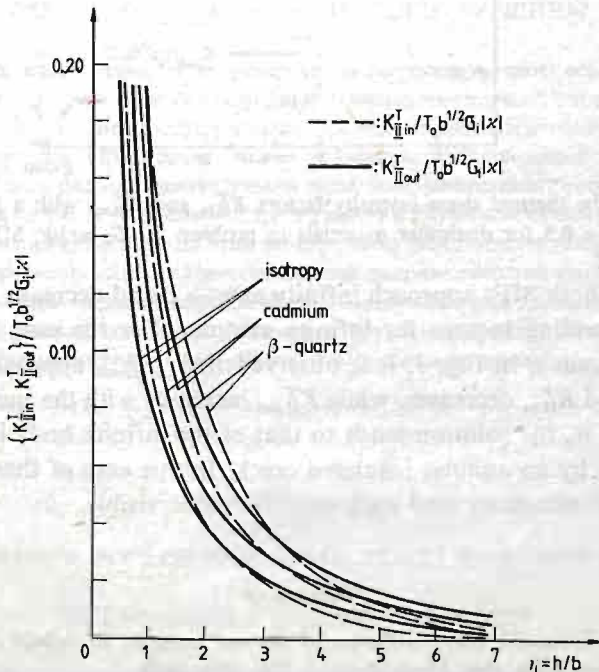


Fig. 3 Variation of the thermal stress intensity factors $K_{II}^T_{in}$ and $K_{II}^T_{out}$ with a layer thickness under $\lambda = 0,5$ and $\lambda_1 = 2,0$ for dissimilar materials in problem I; $G_1 = 10^4 \text{MPa}$

For the mode II shear-type crack problem numerical computations were done for cadmium and β -quartz crystals and comparative isotropic material ($G_I = 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0,30$). The values of elastic constants c_{ij} , coefficients of linear expansion α_x, α_z and the ratio of the thermal conductivity coefficients s_0^{-2} are taken from references [12]. The anisotropic thermal and elastic properties of materials were presented in [13] for metallic substances and in [14] for composite materials. The results for the antisymmetrical thermal conditions of the case 1 are shown in Fig. 3 and those for the case 2 shown in Fig. 4. Fig. 3 shows the mode II „thermal” SIFs at the inner and outer tips of the annular crack, in presented materials, versus $\eta = h/b$ under $\lambda = a/b = 0,5$ and $\lambda_1 = c/b = 2,0$.

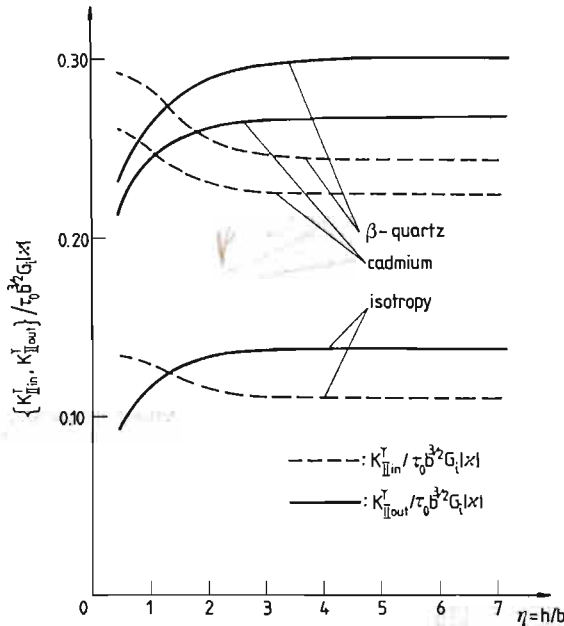


Fig. 4 Variation of the thermal stress intensity factors $K_{II in}^T$ and $K_{II out}^T$ with a layer thickness under $\lambda = 0,5$ for dissimilar materials in problem II; $G_I = 10^4 \text{ MPa}$

It is observed, that both SIFs approach infinity as $\eta \rightarrow 0$ and decrease monotonically with the increase of η tending to zero for infinite medium. For the case 2 and $\lambda = 0,5$, the SIFs are plotted versus η in Fig. 4. It is observed that, $K_{II out}^T$ approaches zero as $\eta \rightarrow 0$ but $K_{II in}^T$ doesn't and $K_{II in}^T$ decreases, while $K_{II out}^T$ increases with the increase of η . When η is larger then some η_0 the solution tends to that of the infinite body in which is uniform heat flow disturbed by an annular insulated crack. In this case of thermal conditions the effect of material dissimilarity and anisotropy is more visible.

References

1. Z. OLESIAK, I. N. SNEDDON, *The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack*, Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 238 - 254, 1960.
2. A. L. FLORENCE, J. N. GOODIER, *The linear thermoelastic problem of uniform heat flow disturbed by a penny-shaped crack*, Int. J. Engng Sci. 1, 533 - 540, 1963.

3. Y. MORI, Y. SHINDO, A. ATSUMI, *Thermal stresses in a slab containing an annular crack*, Int. J. Engng. Sci. 18, 1161 - 1172, 1980.
4. K. MURATA, A. ATSUMI, *Thermal stresses in a transversely isotropic cylinder containing a penny-shaped crack*, Lett. Appl. Engng. Sci. 5, 173 - 185, 1977.
5. D. K. RAM, H. K. PARHI, A. K. PAUL, *Thermal stresses in a transversely isotropic solid containing an annular crack*, Indian J. Tech. 18, 437 - 443, 1980.
6. B. ROGOWSKI, *Uogólnione równania termosprężystych zagadnień grubych płyt ortotropowych*. Zeszyty Naukowe PŁ, Nr 309, Budownictwo z. 21, 209 - 222, 1978.
7. T. SHIBUYA, I. NAKAHARA, T. KOZUMI, *The axisymmetric distribution of stresses in an infinite elastic solid containing a flat annular crack under internal pressure*, ZAMM 55, 395 - 402, 1975.
8. A. ERDELYI (Editor), *Tables of integral transforms*, Vol. 2 Mc Graw-Hill, New York 1954.
9. G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions*, 2nd Ed., Cambridge University Press, London 1966.
10. B. ROGOWSKI, *Mixed boundary value problems of a transversely isotropic layer under torsion and various boundary conditions*, Rozprawy Inżynierskie, 31, 3, 293 - 315, 1983.
11. B. ROGOWSKI, *An annular crack in layered composites with transversely isotropic constituents*, ZAMM.
12. H. B. HUNTINGTON, *The elastic constants of crystals*, *Solid state physics* (F. Seitz, D. Turnbull, Eds.), 7, 213 - 351, Academic Press, New York 1957.
13. J. L. NOWIŃSKI, *Theory of thermoelasticity with applications*, *Sijthoff and Noordhoff*, Alphen ann den Rijn, The Netherlands, p. 118, 1978.
14. R. M. CHRISTENSEN, *Mechanics of composite materials*, Wiley, p. 311, New York 1979.

Резюме

ТЕПЛОВЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ С КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ. РАСКРЫТИЕ И СДВИГ ТРЕЩИНЫ

Задачу тепловых напряжений в трансверсально-изотропном слое ослабленном кольцевой трещиной и подверженном действию симметричной и антисимметричной тепловой нагрузки сформулировано как решение тройных интегральных уравнений соответствующих задачам теплопроводности и термоупругости. До решения выше указанных предположено такие представления искомым функций в виде рядов с неизвестными пока коэффициентами, которые удовлетворяют два из трех уравнений точно, в то время как третье водит к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов. Соответствующие суммы этих коэффициентов определяют коэффициенты интенсивности напряжений при раскрыти и сдвиге трещины, а образобанные при их помощи ряды Фурье определяют вид трещины в задачах. Результаты бычислений, представлены графически, иллюстрируют коэффийиенты интенсивности напряжений и эффект физических свойств материалов в процессе разрушения.

Streszczenie

NAPRĘŻENIA CIEPLNE W POPRZECZNIE IZOTROPOWEJ WARSTWIE Z PIERŚCIENIOWĄ SZCZELINĄ. ROZWIERANIE I ŚCINANIE SZCZELINY

Zagadnienie naprężeń cieplnych w warstwie poprzecznie izotropowej osłabionej pierścieniową szczeliną i poddanej działaniu symetrycznego i antysymetrycznych obciążeń termicznych sformułowano jako rozwiązanie dwóch układów potrójnych równań całkowitych, odpowiadających zagadnieniom przepływu

ciepła i termosprężystemu. W celu rozwiązania tych ostatnich zaproponowano takie przedstawienia poszukiwanych funkcji w postaci szeregów z nieznanymi współczynnikami, które spełniają dwa z trzech równań ściśle, podczas gdy trzecie prowadzi do dwóch nieskończonych układów równań algebraicznych liniowych względem tych współczynników. Odpowiednie sumy tych współczynników wyznaczają współczynniki intensywności naprężenia przy rozwieraniu i ścinaniu szczeliny, a utworzone z ich pomocą szeregi Fouriera określają kształt szczeliny w obu zagadnieniach. Przedstawiono graficznie wyniki ilustrujące współczynniki intensywności naprężenia i efekt fizycznych właściwości materiałów w procesie pęknięcia.

Praca została złożona w Redakcji 8 czerwca 1983 roku

STRUCTURES ON THE PARTLY ELASTIC SUBSOIL

MICHAŁ ŻUKOWSKI (Łódź)
„Transbud”

Introduction

The aim of the present paper is the analysis of interactions between the structure footing and the subsoil, surface of which undergoes subsequent changes of configuration. The influence of the deformation of subsoil upon the structure behaviour has a deep significance in the problems concerning the foundation of buildings on the grounds suffering mining damage. Elastic plates and beams as well as arbitrary deformable structures of rigid footings were considered. The following two facts were taken into account: 1° — the possibility of losing the contact between the structure foundation and the subsoil, 2° — a different character of the reaction of subsoil in primary and secondary deformations of the subsoil, according to the concept of a partly elastic subsoil, given in [1]. The solutions were obtained for the special case of structures with a rigid footing.

Denotations. The symbol \tilde{a}_n stands for the sum $a_0 + a_1 + \dots + a_n$, at the same time $\tilde{a}_0 = a_0$ for $n = 0$. Thus, $a_n = \tilde{a}_n - \tilde{a}_{n-1}$ are increments of quantities \tilde{a}_{n-1} for $n = 1, 2, \dots, K-1$. The quantities a_0, a_1, \dots, a_n are referring to subsequent states of the structure foundation, the subsoil, as well as their mutual interactions. The subsequent states are distinguished by indices $0, 1, \dots, K$. The state distinguished by the index 0 is an initial state, the states denoted by the indices $1, 2, \dots, K-1$ are subsequent intermediate states, whereas the state denoted by the index K is a final state. It is assumed that with the passage from the n -th state to the state $n+1$, at least one of the quantities occurring in the problem under consideration is changed.

1. Deformations of the subsoil boundary surface

The subject of consideration will be now the deformations of the subsoil boundary surface, which will occur in geological processes or mining exploit i.e. without any outer loads acting at the subsoil from the structure. Let us consider Fig. 1, where Δ_0 is the boundary surface of the underformed subsoil in the vicinity of the building structure we are interested in. It is assumed that Ω is a regular region on the plane Ox_1x_3 . Each point $P(x_1, x_3)$ in the region Ω can be projected along x_2 — axis on the boundary surface Δ_0 of the undeformed subsoil. Hence Δ_0 will be given by the formula

$$x_2 = \tilde{u}_0(x_1, x_3); \quad (x_1, x_3) \in \Omega. \quad (1.1)$$

It is assumed that:

1° — Δ_0 is a smooth surface, i.e. there exist the derivatives

$$\tilde{u}_{0,1} \equiv \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_1}, \quad \tilde{u}_{0,3} \equiv \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_3}.$$

2° — Δ_0 is a shallow surface, i.e.

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_\alpha} \ll 1, \quad \alpha = 1, 3.$$

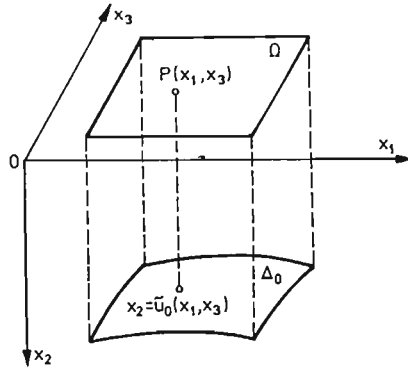


Fig. 1

The conditions given above concerned the boundary surface Δ_0 of the initially undeformed subsoil. Let us deal now with a description of the unloaded but deformed subsoil boundary surface, due to the effects of n subsequent changes of geological processes, where $n = 1, 2, \dots, K$. This boundary surface will be denoted by Δ_n , being the result of n subsequent subsoil deformations, cf. Fig. 2. The parametric equation of the surface Δ_n is:

$$x_2 = \tilde{u}_n(x_1, x_3), \quad (x_1, x_3) \in \Omega, \quad n = 1, 2, \dots, K. \tag{1.2}$$

Like in the case of the surface Δ_0 , it is demanded here, as well, that the surface Δ_0 be smooth, i.e.:

$$\tilde{u}_{n,1} \equiv \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_1}, \quad \tilde{u}_{n,3} \equiv \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_3},$$

and shallow

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_\alpha} \ll 1, \quad \alpha = 1, 3.$$

Increments $\tilde{u}_n(x_1, x_3) - \tilde{u}_{n-1}(x_1, x_3)$ for $n = 1, 2, \dots, K$ will be designated by $u_n(x_1, x_3)$ i.e.

$$u_n(x_1, x_3) \equiv \tilde{u}_n(x_1, x_3) - \tilde{u}_{n-1}(x_1, x_3), \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, K$$

assuming also that $u_0(x_1, x_3) = \tilde{u}_0(x_1, x_3)$ (compare the denotations in the beginning of the paper).

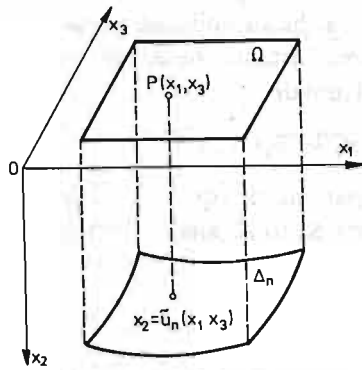


Fig. 2

2. Deformations of the structure foundation footing

Let us assume, on the basis of Fig. 3, that in the region Ω the building structure projection Π upon the plane $x_2 = 0$ was given. In the projection those structure elements are neglected which cannot have a contact with the subsoil. Moreover it is assumed that Π is a subregion of Ω , $\Pi \subset \Omega$. The structure footing after it is founded on the surface subsoil Δ_0 is designated by S_0 . The parametric equation of the footing S_0 will be

$$x_2 = \tilde{w}(x_1, x_3), \quad (x_1, x_3) \in \Pi. \quad (2.1)$$

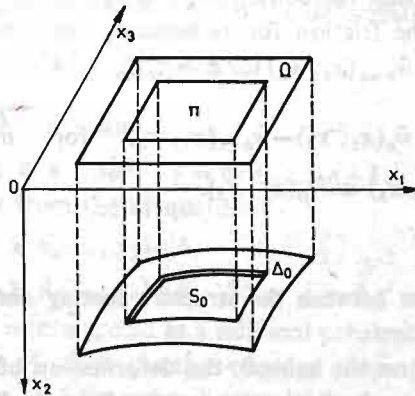


Fig. 3

Like in the case of deformations of the boundary subsoil surface, it will be assumed that:

1' — S_0 must constitute a smooth surface, i.e. there exist the derivatives

$$\tilde{w}_{0,1} \equiv \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial x_1}, \quad \tilde{w}_{0,3} \equiv \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial x_3},$$

2' — S_0 is a shallow surface, i.e.

$$\frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial x_\alpha} \ll 1, \quad \alpha = 1, 3.$$

Founding a building structure on the subsoil and assuming that the possibility of its being loaded can occur at many time instants, deformations shown in Fig. 4 will take place and instead of (2.1) we shall obtain

$$x_2 = \tilde{\omega}_n(x_1, x_3), \quad (x_1, x_3) \in \Pi, \quad (2.2)$$

The above formula being the parametric equation of the surface S_n . It can be seen that the structure footing will pass from S_0 to S_n and the subsoil boundary surface will pass from Δ_0 to Δ_n . In both cases $n = 1, 2, \dots, K$. It is required here, as well, that each S_n should have the properties 1', 2'.

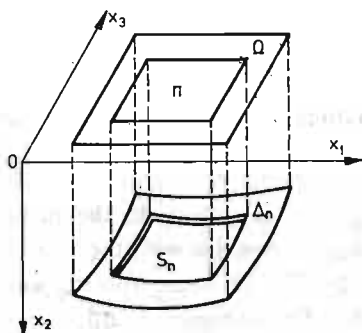


Fig. 4

It is to be pointed out that the consequence of the assumptions 2° and 2' will be the possibility of neglecting the friction forces between the subsoil and structure footing.

Increments $\tilde{w}_n(x_1, x_3) - \tilde{w}_{n-1}(x_1, x_3)$ for $n = 1, 2, \dots, K$ will be designated by $w_n(x_1, x_3)$ i.e.

$$w_n(x_1, x_3) = \tilde{w}_n(x_1, x_3) - \tilde{w}_{n-1}(x_1, x_3) \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, K, \quad (2.3)$$

assuming also that $w_0(x_1, x_3) \equiv \tilde{w}_0(x_1, x_3)$.

3. Interaction between the structure footing and the subsoil

Founding the structure on the subsoil, the deformation of the subsoil is caused. The cause of the deformation can be both, the action of external forces transferred through the structure footing on the subsoil, as well as the deformations of the subsoil boundary surface resulting from the mining exploit. The first subsoil deformation due to the loadings is distinguished as a primary one and occurring after it, a secondary one. The notion of a subsoil primary deformation is usually treated as a certain stipulated notion, being not strictly defined. Namely, there appear some doubts whether the very small subsoil displacement, caused by the foundation transferring only small loads, can be recognized as primary. In such a case, the soil porosity remains practically the same after the deformation as it was before. Such cases occur seldom in practice. For practical purposes a minimal penetration h of the structure footing in a subsoil should be taken into account, which, in a sufficient way, would condition the possibility of treating further subsoil deformation

as secondary. Having taken into account the above remark, a definition of primary subsoil deformations will be formulated, cf. Fig. 5.

By the subsoil deformation at the point $P(x_1, x_3) \in \Pi$ after the n -th change of its configuration we shall mean the number $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3)$ defined by

$$\tilde{\delta}_n(x_1, x_3) \equiv \tilde{w}_n(x_1, x_3) - \tilde{u}_n(x_1, x_3), \quad n = 0, 1, \dots, K, \quad (3.1)$$

assuming that it is not negative. When $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3) < 0$ then the subsoil deformation is assumed to be equal to zero.

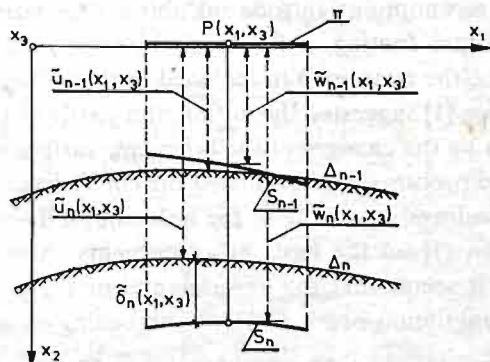


Fig. 5

By the primary deformation (or more precisely h -primary, where $h > 0$ is a given number) at the point $(x_1, x_3) \in \Pi$ we shall mean the deformation $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3)$ fulfilling the conditions:

$$\text{for } n = 0 \quad \tilde{\delta}_0(x_1, x_3) > h$$

$$\text{for } n > 0 \quad \begin{cases} \tilde{\delta}_n(x_1, x_3) > h & \text{and} \\ \tilde{\delta}_l(x_1, x_3) \leq h & \text{for } l = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

The above conditions result from the inequalities

$$\tilde{w}_n(x_1, x_3) > \tilde{u}_n(x_1, x_3) + h,$$

$$\tilde{w}_l(x_1, x_3) \leq \tilde{u}_l(x_1, x_3) + h \quad \text{for } l = 0, 1, \dots, n-1,$$

where the positive number h is interpreted as a minimal penetration of the structure footing in the subsoil, the exceeding of which changes physical properties of the foundation.

Let us designate by $p_n(x_1, x_3)$ the subsoil reaction to structure footing after the n -th change of its configuration, $\tilde{p}_n(x_1, x_3) \leq 0$. The reaction increments for $n = 1, 2, \dots, K$ will be denoted by $p_n(x_1, x_3)$ i.e. $p_n(x_1, x_3) \equiv \tilde{p}_n(x_1, x_3) - \tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3)$ for $n = 1, 2, \dots, K$ assuming also that $p_0(x_1, x_3) \equiv \tilde{p}_0(x_1, x_3)$.

Analogously, the deformation increments will be defined by $\delta_n(x_1, x_3) \equiv \tilde{\delta}_n(x_1, x_3) - \tilde{\delta}_{n-1}(x_1, x_3)$. Let us introduce the following basic assumptions about the interaction between the structure footing and the subsoil:

1° — if $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3)$ is a primary deformation at the point $(x_1, x_3) \in \Pi$ then the reaction increment at this point is equal to:

$$p_n(x_1, x_3) = -k(x_1, x_3) \delta_n(x_1, x_3)$$

where k denotes the known Winkler coefficient.

2° — if $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3)$ is not a primary deformation at the point but it is positive, $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3) > 0$, then the reaction increment of this point is equal to:

$$p_n(x_1, x_3) = -\kappa k(x_1, x_3) \delta_n(x_1, x_3)$$

where κ , $\kappa > 1$ designates the subsoil inelasticity coefficient [1].

3° — if $\delta_n(x_1, x_3)$ is not positive at the point $(x_1, x_3) \in \Pi$, $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3) \leq 0$, then the total reaction at this point is equal to:

$$\tilde{p}_n(x_1, x_3) = 0 \quad \text{i.e.} \quad p_n(x_1, x_3) = -\tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3).$$

On the basis of the assumptions introduced above it is possible to call the subsoil interacted with the structure footing, a partly elastic subsoil (or more precisely the h -partly elastic subsoil since the quantity h is included in the definition of this subsoil).

J. Kwiatek in his paper [1] suggested the notion of a partly elastic subsoil affected both by outer loads as well as by the changes of the boundary surface subsoil curvatures under the structure footing, and proposed and evaluated the coefficient κ , which is to be applied both at the secondary loadings as well as at the unloadings. The numerical values of the coefficient κ was given in [1] on the basis of experiments. According to the theoretical model suggested above, it seems that the experimental model penetration should be defined to a conventional minimum depth h , $h > 0$, according to the interpretation of this quantity accepted above.

In many problems it can be assumed that the condition $\tilde{\delta}_0(x_1, x_3) > h$ occurs for each $(x_1, x_3) \in \Pi$ i.e. the primary deformation can only take place before the first change of the configuration i.e. for $n = 0$. It seems that such an assumption was silently accepted in the paper [1]. In this case the reaction $p(x_1, x_3)$ of the foundation after the n -th change of its configuration is determined by the conditions:

$$1' \quad \tilde{p}_0(x_1, x_3) = k(x_1, x_3) \tilde{\delta}_0(x_1, x_3) \quad \text{for each} \quad (x_1, x_3) \in \Pi,$$

$$2' \quad \text{if} \quad \tilde{\delta}_n(x_1, x_3) > 0 \quad \text{then} \quad p_n(x_1, x_3) = -\kappa k(x_1, x_3) \delta_n(x_1, x_3),$$

$$3' \quad \text{if} \quad \tilde{\delta}_n(x_1, x_3) \leq 0 \quad \text{then} \quad \tilde{p}_n(x_1, x_3) = 0 \quad \text{i.e.} \quad p_n(x_1, x_3) = -\tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3).$$

Conditions 2', 3' hold only if $n = 1, 2, \dots, K$, where K is the number of all changes of the subsoil configurations and changes of the loadings.

4. Elastic plates on the partly elastic subsoil

We are to confine ourselves to the linear theory of thin elastic plates, cf. [2]. It is assumed here that the plate deflections are relatively small as compared with the plate thickness. We also assume that the plate edges can shift freely in the plate middle plane. We restrict ourselves to the equilibrium plate problems. The scheme of plate loadings and deformations is given on Fig. 6, i.e. after the n -th change of the subsoil configuration, q_n being the n -th change of the plate load (thus the possibility of subsequent K changes of the plate load is assumed).

The governing equation of the plate normal displacement, plate being made of homogeneous isotropic material, has a known form

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D},$$

where: w is the plate deflection, q is the load, $D = Eg^3/12(1-\nu^2)$ is the rigidity of the plate in which g is the thickness of the plate, E is Young's modulus, and ν is the Poisson's ratio. In the Cartesian coordinates x_1, x_3 this equation is

$$w_{,3333} + 2w_{,3311} + w_{,1111} = \frac{q}{D},$$

where $w = w(x_1, x_3)$; $(x_1, x_3) \in \Pi$. The deflection w is to fulfill the above equation at each point of the region Π . This equation has to be complemented with the boundary conditions on the free edge $\partial\Pi$, of the region Π , given at the end of this section.

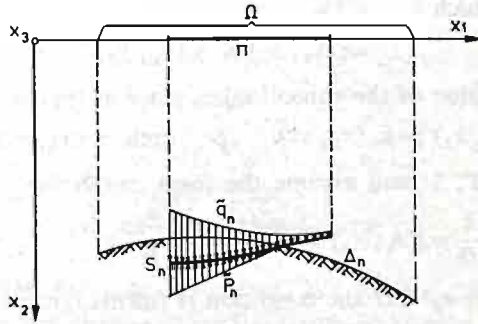


Fig. 6

In the case of taking into consideration the reaction of the subsoil, the plate equation will have the form:

$$\nabla^4 \tilde{w}_n(x_1, x_3) = \frac{\tilde{q}_n(x_1, x_3) + \tilde{p}_n(x_1, x_3)}{D} \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, K, \quad (x_1, x_3) \in \Pi,$$

thus, it will also hold for the increment

$$\nabla^4 w_n(x_1, x_3) = \frac{q_n(x_1, x_3) + p_n(x_1, x_3)}{D} \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, K, \quad (x_1, x_3) \in \Pi$$

together with the conditions on the free edge $\partial\Pi$.

On the basis of the formulae cited above, we shall determine the equation for the elastic plate on the partly elastic subsoil. And so we shall get:

1° — if the deformation $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3)$ is primary at the point $(x_1, x_3) \in \Pi$, then

$$\nabla^4 w_n(x_1, x_3) + \frac{k}{D} w_n(x_1, x_3) = \frac{q_n(x_1, x_3) + k u_n(x_1, x_3)}{D},$$

for such $(x_1, x_3) \in \Pi$, for which

$$\begin{aligned} \tilde{w}_n(x_1, x_3) &> \tilde{u}_n(x_1, x_3) + h \quad \text{and} \\ \tilde{w}_l(x_1, x_3) &\leq \tilde{u}_l(x_1, x_3) + h \quad \text{for } l = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

2° — if the deformation $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3)$ is not primary at the point $(x_1, x_3) \in \Pi$ and it is positive, then

$$\nabla^4 \omega_n(x_1, x_3) + \frac{\kappa k}{D} w_n(x_1, x_3) = \frac{q_n(x_1, x_3) + \kappa k u_n(x_1, x_3)}{D},$$

for such $(x_1, x_3) \in \Pi$, for which

$$\tilde{\omega}_n(x_1, x_3) > \tilde{u}_n(x_1, x_3) + h$$

and for which there is such l , $0 \leq l < n$, that

$$\tilde{\omega}_l(x_1, x_3) > \tilde{u}_l(x_1, x_3) + h.$$

3° — if the deformation at the point $(x_1, x_3) \in \Pi$ does not occur i.e. $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3) \leq 0$, then

$$\nabla^4 w(x_1, x_3) = \frac{q_n(x_1, x_3) - p_{n-1}(x_1, x_3)}{D}$$

for such (x_1, x_3) for which

$$\tilde{\omega}_n(x_1, x_3) \leq \tilde{u}_n(x_1, x_3).$$

If a primary deformation of the subsoil takes place at the first loading, i.e. if

$$\tilde{\omega}_0(x_1, x_3) > \tilde{u}_0(x_1, x_3) \quad \text{for each } (x_1, x_3) \in \Pi,$$

then the conditions 1°, 2°, 3° will assume the form, respectively:

$$1^\circ - \nabla^4 w_0(x_1, x_3) + \frac{k}{D} w_0(x_1, x_3) = \frac{q_0(x_1, x_3) + k u_0(x_1, x_3)}{D}$$

assuming that for all $(x_1, x_3) \in \Pi$ the condition is fulfilled

$$\omega_0(x_1, x_3) \geq u_0(x_1, x_3) + h$$

which should be checked after the solution of the problem (after finding $w_0(x_1, x_3)$, $(x_1, x_3) \in \Pi$).

$$2^\circ - \nabla^4 \omega_n(x_1, x_3) + \frac{\kappa k}{D} \omega_n(x_1, x_3) = \frac{q_n(x_1, x_3) + \kappa k u_n(x_1, x_3)}{D}$$

for such $(x_1, x_3) \in \Pi$ and $n = 1, 2, \dots, K$ for which

$$\tilde{w}_n(x_1, x_3) > \tilde{u}_n(x_1, x_3).$$

$$3^\circ - \nabla^4 w_n(x_1, x_3) = \frac{q_n(x_1, x_3) - \tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3)}{D}$$

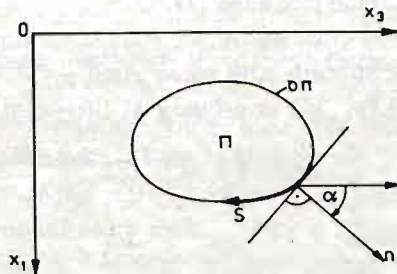


Fig. 7

for such $(x_1, x_3) \in \Pi$ and $n = 1, 2, \dots, K$ for which

$$\tilde{w}_n(x_1, x_3) \leq \tilde{u}_n(x_1, x_3).$$

Each of the cases considered is to be complemented, according to the theory of plates, with the following two boundary conditions (viz. Fig. 7):

$$M_3^n \cos^2 \alpha + M_1^n \sin^2 \alpha - 2M_{31}^n \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$(Q_3^n \cos \alpha + Q_1^n \sin \alpha) - \frac{\partial}{\partial S} [M_{31}^n (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (M_3^n - M_1^n) \sin \alpha \cos \alpha] = 0 \quad (4.1)$$

in which the following were designated

$$M_3^n \equiv -D \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x_3^2} + \nu \frac{\partial w_n}{\partial x_1^2} \right),$$

$$M_1^n \equiv -D \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial w_n}{\partial x_3^2} \right),$$

$$M_{31}^n \equiv -M_{13}^n = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad (4.2)$$

$$Q_3^n \equiv -D \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_1^2} \right),$$

$$Q_1^n \equiv -D \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_1^2} \right),$$

S being on are co-ordinate along the boundary. We are still maintaining the convention that the quantity after the n -th change of configuration or loading is overlined by a „tilde” over it, while the quantity increments do not have a „tilde” over them.

The solution of the plate problem lies in determining the function $w_n = w_n(x_1, x_3)$, $n = 0, 1, \dots, K$, fulfilling for each $(x_1, x_3) \in \Pi$ one of the conditions: 1°, 2° or 3°, and such that the boundary conditions (4.1) are fulfilled for all those $(x_1, x_3) \in \Pi$ for which the unit normal n exist. After determining $w_n(x_1, x_3)$ from the formulae (4.2), bending couples \tilde{M}_1^n and \tilde{M}_3^n and torques \tilde{M}_{13}^n can be calculated from Eqs. (4.2). If, having determined $w_0(x_1, x_3)$ it will turn out that for each $(x_1, x_3) \in \Pi$ exists $w_0(x_1, x_3) > u_0(x_1, x_3) + h$ then we can only apply the conditions 2' and 3' further on, instead of 1°, 2°, 3°.

5. Elastic beams on a partly elastic subsoil

The equilibrium of elastic beams on a partly elastic subsoil is treated like the equilibrium of elastic plates, the basic equation has the form (Fig. 8 for $x = x_1$)

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ} \quad \text{for } l_1 < x < l_2$$

in which the plate rigidity D was replaced by the beam rigidity EJ , and

$$w = w(x) = w(x_1, 0).$$

The boundary conditions have now the form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0,$$

for $x_1 = l_1$ and $x_2 = l_2$ (Fig. 8). The interaction conditions 1°–3° and 1'–3' for the plate

also hold for the beam if $x_1 \equiv x$ and if the dependence of the function $w_n, q_n, u_n, n = 0, 1, \dots, K$ on the variable x_3 is neglected.

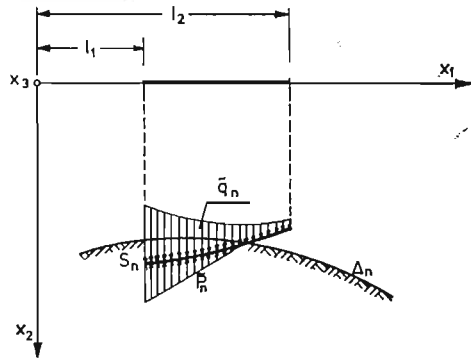


Fig. 8

6. Structures with rigid footing on a partly elastic subsoil

Let us assume according to Fig. 9 that any point $P(x_1, x_3) \in II$, of the structure on a rigid footing, is displaced under the influence of structure load and subsoil configuration changes. Since the structure undergoes only rigid deformations, the position of the point $P(x_1, x_3)$ is determined by

$$\tilde{w}_n(x_1, x_3) = \tilde{\vartheta}_n + x_3 \tilde{\varphi}_n - x_1 \tilde{\psi}_n. \tag{6.1}$$

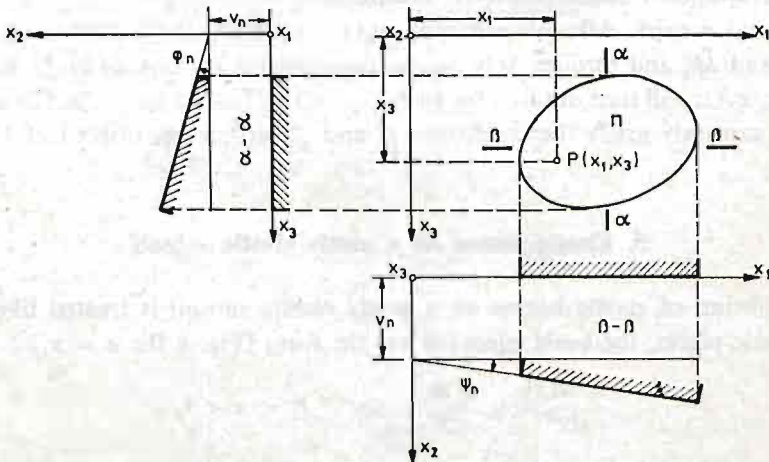


Fig. 9

The equilibrium condition of the forces acting upon the structure footing has the form

$$\tilde{R}_n + \int_{II} \tilde{p}_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 = 0, \tag{6.2}$$

where \tilde{R}_n is a resultant (in the direction of the axis x_2) of the loads acting from the structure on its footing.

The remaining equilibrium conditions are

$$\begin{aligned}\tilde{M}_n^{(3)} + \int_{\Pi} \tilde{p}_n(x_1, x_3) x_1 dx_1 dx_3 &= 0, \\ \tilde{M}_n^{(1)} + \int_{\Pi} \tilde{p}_n(x_1, x_3) x_3 dx_1 dx_3 &= 0,\end{aligned}\quad (6.3)$$

where $\tilde{M}_n^{(3)}$, $\tilde{M}_n^{(1)}$ are the couples (with respect to the axis x_3 and x_1 respectively) due to the loadings acting from the structure upon its footing. It is assumed that that equations of equilibrium not mentioned here are fulfilled identically, i.e. all the forces act parallel to the axis x_2 . Equilibrium conditions analogical to (6.1) and (6.2) as well as (6.3) also hold for the increments:

$$w_n(x_1, x_3) = \vartheta_n + x_3 \varphi_n - x_1 \psi_n, \quad (6.4)$$

and

$$\begin{aligned}R_n + \int_{\Pi} p_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 &= 0, \\ M_n^{(3)} + \int_{\Pi} p_n(x_1, x_3) x_1 dx_1 dx_3 &= 0, \\ M_n^{(1)} + \int_{\Pi} p_n(x_1, x_3) x_3 dx_1 dx_3 &= 0.\end{aligned}\quad (6.5)$$

The basic unknowns are now the numbers ϑ_n , φ_n , ψ_n for each $n = 0, 1, \dots, K$. Each of the triples of these number will be determined from the three equations (6.5) assuming that R_n (the increment of the resultant of normal loads acting upon the structure footing) and $M_n^{(3)}$ and $M_n^{(1)}$ (the couples increments acting upon the structure footing after the n -th change of its configuration) are known. The increment of the subsoil reaction $p_n(x_1, x_3)$ is to be distinguished here, by the conditions 1°, 2°, 3° included in section 3. It leads to the equations:

$$\begin{aligned}R_n + \int_{\Pi_n^1} -k[\vartheta + x_3 \varphi_n - x_1 \psi_n - u_n(x_1, x_3)] dx_1 dx_3 + \\ + \int_{\Pi_n^2} -\kappa k[\vartheta + x_3 \varphi_n - x_1 \psi_n - u_n(x_1, x_3)] dx_1 dx_3 - \int_{\Pi_n^3} \tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3) dx_1 dx_3 &= 0, \\ M_n^{(3)} + \int_{\Pi_n^1} -kx_1[\vartheta + x_3 \varphi_n - x_1 \psi_n - u_n(x_1, x_3)] dx_1 dx_3 + \\ + \int_{\Pi_n^2} -\kappa kx_1[\vartheta + x_3 \varphi_n - x_1 \psi_n - u_n(x_1, x_3)] dx_1 dx_3 - \int_{\Pi_n^3} \tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3) x_1 dx_1 dx_3 &= 0, \\ M_n^{(1)} + \int_{\Pi_n^1} -kx_3[\vartheta + x_3 \varphi_n - x_1 \psi_n - u_n(x_1, x_3)] dx_1 dx_3 + \\ + \int_{\Pi_n^2} -\kappa kx_3[\vartheta + x_3 \varphi_n - x_1 \psi_n - u_n(x_1, x_3)] dx_1 dx_3 - \int_{\Pi_n^3} \tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3) x_3 dx_1 dx_3 &= 0,\end{aligned}$$

where Π_n^1 is a set of all those $(x_1, x_3) \in \Pi$ for which $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3)$ is primary and M_n^2 is a set of all those $(x_1, x_3) \in \Pi$ for which $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3)$ is not primary but is positive, and M_n^3

is a set of all those $(x_1, x_3) \in \Pi$ for which $\tilde{\delta}_n(x_1, x_3) \leq 0$. It is to be pointed out that in the general case the regions $\Pi_n^1, \Pi_n^2, \Pi_n^3$ are disjoint and not known a priori. For all $(x_1, x_3) \in \Pi_n^2$ there is no contact of the structure footing with the subsoil, i.e. $\tilde{p}(x_1, x_3) = 0$ if $n = 0$ then $R_0 = \tilde{R}_0, M_0^{(3)} = \tilde{M}_0^{(3)}, M_0^{(1)} = \tilde{M}_0^{(1)}$ and for $n = 0$ it is to be assumed $\tilde{p}_{n-1} \equiv 0$, both in the above and further equations. The above conditions lead to the set of equations:

$$\begin{aligned}
 & \vartheta_n \left(\int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) dx_1 dx_3 + \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) dx_1 dx_3 \right) + \varphi_n \left(\int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) x_3 dx_1 dx_3 + \right. \\
 & \quad + \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) x_3 dx_1 dx_3 \left. \right) + \psi_n \left(- \int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) x_1 dx_1 dx_3 - \right. \\
 & \quad - \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) x_1 dx_1 dx_3 \left. \right) = R_n + \int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) u_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 + \\
 & \quad + \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) u_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 - \int_{\Pi_n^3} \tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3) dx_1 dx_3. \\
 & \vartheta_n \left(\int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) x_1 dx_1 dx_3 + \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) x_1 dx_1 dx_3 \right) + \\
 & \quad + \varphi_n \left(\int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) x_1 x_3 dx_1 dx_3 + \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) x_1 x_3 dx_1 dx_3 \right) + \\
 & \quad + \varphi_n \left(- \int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) (x_1)^2 dx_1 dx_3 - \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) (x_1)^2 dx_1 dx_3 \right) = M_n^{(3)} + \\
 & \quad + \int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) x_1 u_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 + \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) x_1 u_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 - \\
 & \quad - \int_{\Pi_n^3} \tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3) x_1 dx_1 dx_3. \\
 & \vartheta_n \left(\int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) x_3 dx_1 dx_3 + \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) x_3 dx_1 dx_3 \right) + \\
 & \quad + \varphi_n \left(\int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) (x_3)^2 dx_1 dx_3 + \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) (x_3)^2 dx_1 dx_3 \right) + \\
 & \quad + \psi_n \left(- \int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) x_1 x_3 dx_1 dx_3 - \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) x_1 x_3 dx_1 dx_3 \right) = M_n^{(1)} + \\
 & \quad + \int_{\Pi_n^1} k(x_1, x_3) x_3 u_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 + \kappa \int_{\Pi_n^2} k(x_1, x_3) x_3 u_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 - \\
 & \quad - \int_{\Pi_n^3} \tilde{p}_{n-1}(x_1, x_3) x_3 dx_1 dx_3
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

for $\vartheta_n, \varphi_n, \psi_n$. The total values of the displacements and rotations are equal to $\tilde{\vartheta}_n = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \dots + \vartheta_n$; $\tilde{\varphi}_n = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_n$; $\tilde{\psi}_n = \psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_n$, respectively. The final position of the structure footing will be determined by Eq. (6.1).

Essential difficulty in solving the above three equations lies in the fact that regions

$\Pi_n^1, \Pi_n^2, \Pi_n^3$ are not known in advance but are expressed by the conditions given in Sec. 3.

This means that:

- 1 — $(x_1, x_3) \in \Pi_n^1$
for $n = 0$ $\tilde{w}_0(x_1, x_3) > \tilde{u}_0(x_1, x_3) + h$
for $n \geq 0$ $\tilde{w}_n(x_1, x_3) > \tilde{u}_n(x_1, x_3)$ and $\tilde{w}_l(x_1, x_3) \leq \tilde{w}_l(x_1, x_3) + h$.
- 2 — $(x_1, x_3) \in \Pi_n^2$
if $\tilde{w}_n(x_1, x_3) > \tilde{u}_n(x_1, x_3)$ and (x_1, x_3) does not belong to Π_n^1 .
- 3 — $(x_1, x_3) \in \Pi_n^3$

if $\tilde{w}_n(x_1, x_3) < \tilde{u}_n(x_1, x_3)$ i.e. the contact between the footing and subsoil does not take place.

The above problem can be solved in an elementary way, if the deformations are primary for each $(x_1, x_3) \in \Pi$ before the first change of subsoil configuration. Thus

$$\vartheta_0 + x_3 \varphi_0 - x_1 \psi_0 \geq u_0(x_1, x_3) + h \text{ for each } (x_1, x_3) \in \Pi. \quad (6.7)$$

The second condition is the lack of contact loss of the structure footing with the subsoil i.e.

$$\tilde{\vartheta}_n + x_3 \tilde{\varphi}_n - x_1 \tilde{\psi}_n \geq \tilde{u}_n(x_1, x_3) \text{ for each } (x_1, x_3) \in \Pi, \quad n = 1, 2, \dots, K. \quad (6.8)$$

These conditions can be checked, however, only after the problem has been solved, since $\vartheta_0, \varphi_0, \psi_0$ and $\tilde{\vartheta}_n, \tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n, n = 1, 2, \dots, K$ occurring only in the conditions (6.7), (6.8) are unknown. When the conditions (6.7), (6.8) are fulfilled, then in Eqs. (6.6) for $n = 0$ integrals over Π_n^2 do not occur (because for $n = 0$ only primary deformations take place) and $\Pi_n^1 = \Pi$ as there is no loss of contact of the structure footing with the subsoil. By analogy, for $n = 1, 2, \dots, K$ integrals over Π_n^1 do not occur and $\Pi_n^2 = \Pi$.

Let's assume that the assumptions (6.7) and (6.8) are fulfilled and let's take the coordinate system $0x_1x_3$ on the plane in such a way that:

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_3 dx_1 dx_3 &= 0, & \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_1 dx_1 dx_3 &= 0, \\ \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_1 x_3 dx_1 dx_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Moreover, let us denote

$$\begin{aligned} A &\equiv \int_{\Pi} k(x_1, x_3) dx_1 dx_3, & I_1 &\equiv \int_{\Pi} k(x_1, x_3) (x_3)^2 dx_1 dx_3, \\ I_3 &\equiv \int_{\Pi} k(x_1, x_3) (x_1)^2 dx_1 dx_3. \end{aligned} \quad (6.10)$$

If $k(x_1, x_3) = k = \text{const.}$ for each $(x_1, x_3) \in \Pi$ i.e. if Winkler's coefficient is constant, then the coordinate axes on the plane $x_2 = 0$ are obviously the main central axes of the region Π and $A/k, I_1/k, I_3/k$ are a surface of the region Π , and the main central inertia moments of this region, respectively. The co-ordinate system x_1x_3 fulfilling the above conditions always exists because of $k(x_1, x_3) > 0$ the numbers A, I_1, I_3 are always po-

sitive. The set of equilibrium equations (6.6) for $n = 0$ will have the following form now

$$\begin{aligned}\vartheta_0 A &= \tilde{R}_0 + \int_{\Pi} k(x_1, x_3) u_0(x_1, x_3) dx_1 dx_3, \\ \varphi_0 I_1 &= \tilde{M}_1^{(0)} + \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_3 u_0(x_1, x_3) dx_1 dx_3, \\ -\psi_0 I_3 &= \tilde{M}_3^{(0)} + \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_1 u_0(x_1, x_3) dx_1 dx_3\end{aligned}$$

and for the increments $n = 1, 2, \dots, K$

$$\begin{aligned}\vartheta_n \kappa A &= R_n + \kappa \int_{\Pi} k(x_1, x_3) u_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3, \\ \varphi_n \kappa I_1 &= M_n^{(3)} + \kappa \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_3 u_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3, \\ -\psi_n \kappa I_3 &= M_n^{(1)} + \kappa \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_1 u_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3.\end{aligned}$$

From the above formulae we shall obtain

$$\begin{aligned}\vartheta_0 &= \tilde{\vartheta}_0 = \frac{1}{A} \left[\tilde{R}_0 + \int_{\Pi} k(x_1, x_3) u_0(x_1, x_3) dx_1 dx_3 \right], \\ \varphi_0 &= \tilde{\varphi}_0 = \frac{1}{I_1} \left[\tilde{M}_0^{(3)} + \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_3 u_0(x_1, x_3) dx_1 dx_3 \right], \\ \psi_0 &= \tilde{\psi}_0 = -\frac{1}{I_3} \left[\tilde{M}_0^{(1)} + \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_1 u_0(x_1, x_3) dx_1 dx_3 \right].\end{aligned}\quad (6.11)$$

For $n = 1, 2, \dots, K$, on the other hand, we shall get

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}_n &= \vartheta_0 \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) + \frac{1}{\kappa A} \left[\tilde{R}_n + \kappa \int_{\Pi} k(x_1, x_3) \tilde{u}_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 \right], \\ \tilde{\varphi}_n &= \varphi_0 \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) + \frac{1}{\kappa I_1} \left[\tilde{M}_n^{(3)} + \kappa \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_1 \tilde{u}_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 \right], \\ \tilde{\psi}_n &= \psi_0 \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) + \frac{1}{\kappa I_3} \left[\tilde{M}_n^{(1)} + \kappa \int_{\Pi} k(x_1, x_3) x_3 \tilde{u}_n(x_1, x_3) dx_1 dx_3 \right].\end{aligned}\quad (6.12)$$

It is to be emphasized that the formulae (6.11) and (6.12) are to hold only when the conditions (6.7) and (6.8) are fulfilled. If the conditions (6.7) and (6.8) are not satisfied, then the formulae (6.11) and (6.12) do not represent the solution of the problem and cannot be applied.

In order to draw attention to inelastic features of the subsoil let us consider a case in which $\tilde{u}_K = 0$ and let us assume that $\tilde{R}_K = 0$, $\tilde{M}_K^{(1)} = 0$ and $M_K^{(3)} = 0$.

This means that we have taken the whole load off the structure under consideration.

Then, according to the formulae (6.12), for $n = K$ we shall get

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}_K &= \vartheta_0 \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right), \\ \tilde{\varphi}_K &= \varphi_0 \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right), \\ \tilde{\psi}_K &= \psi_0 \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right).\end{aligned}\tag{6.13}$$

In the above formulae $\vartheta_0, \varphi_0, \psi_0$ characterize primary deformations of the subsoil caused by the action of the rigid construction loaded with the resultant force R_0 and the resultant couples $M_0^{(1)}, M_0^{(3)}$ (according to the formulae (6.11) while $\tilde{\vartheta}_K, \tilde{\varphi}_K, \tilde{\psi}_K$ characterize analogous deformation of the not loaded structure (as we have assumed $\tilde{R}_K = 0, \tilde{M}_K^{(1)} = 0, \tilde{M}_K^{(3)} = 0$). Thus, it can be seen that $\tilde{\vartheta}_K, \tilde{\varphi}_K, \tilde{\psi}_K$ characterize inelastic deformations, i.e. deformations that are not accompanied by any forces. Thus, the formulae (6.13) characterize a certain effect of inelasticity of the subsoil which will always occur when $\varkappa \neq 1$.

If x_1 is the symmetry axis of the region II and when the loads are symmetric in relation to that axis, and the subsoil surfaces after deformations are cylindrical surfaces of constant curvatures and independent of x_3 , then $\tilde{M}_n^{(1)} = 0, \tilde{\psi}_n = 0, n = 1, 2, \dots, K$ and we shall get the special case of the considered problem, which was discussed in [1], where four states of the subsoil were considered (i.e. $K = 3$), assuming $u_0 = 0, u_1 = u_1(x_1), u_2 = u_2(x_1), u_3 = 0$, where $u_1(x_1)$ and $u_2(x_1)$ being assumed as the cylindrical surfaces of constant curvature of a different sign.

7. Finals remarks

In sections 4,5 and 6 general formulae were introduced describing the footing structure behaviour on a partly elastic subsoil which undergoes subsequent deformations. The solution of the problem was obtained only for a special case of the rigid footing, the interaction of which with the subsoil is described by the conditions (6.7) and (6.8). These conditions can be checked, however only obtaining after the solution. If the conditions (6.7), (6.8) are not fulfilled, then it is generally not possible to get a solution with elementary methods of the considered problem. Similarly, with elementary methods one is not able to obtain solutions for elastic plates and beams on a partly elastic subsoil; the formulae given in Sections 4 and 5 are limited only to formulate the problem, leaving open the methods of its solution. The analytic difficulties in obtaining solutions result from the fact that the problems discussed are characterized not only by equations, but also by inequalities. The analysis of the problems described with equations and inequalities simultaneously can be found e.g. in the monograph [3]. It is to be pointed out, however, that methods of solving problems of that kind numerically are known, and can be successfully applied for the equations and inequalities given in Secs. 4, 5, 6. Furthermore the case solved at the end of Sec. 6, in spite of a very special character, has a practical meaning in many engineering problems. In other cases an approximate approaches

can be applied, for example those discussed in the monograph [4] and making use of the notion of discretization of problems.

References

- [1] J. KWIATEK, *The Long Strip Fooling on a Partly Elastic Subsoil in the Mining Regions* (in Polish), *Inżynieria, i Budownictwo* 1 - 4, 1982.
- [2] S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells*, Mc Graw-Hill, New York-Toronto-London 1959.
- [3] G. DUVAUT, J. L. LIONS, *Les inequations en mecanique et en physique*, Dunod, Paris 1972.
- [4] C. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Non-linear Structural Mechanics* (in Polish), PWN, Warsaw-Poznań 1982.

Резюме

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОНСТРУКЦИЙ С ЧАСТИЧНО УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

Целью работы является описание поведения конструкций посаженных на основании, которое изменяет конфигурацию. Учет влияния деформаций основания на поведение конструкций имеет практическое значение в задачах посадки объектов в районах убытков угольной промышленности. Рассмотрено упругие плиты и балки а также деформируемые конструкции, имеющие жесткие основания. Учтено: 1 — возможность потери контакта основы конструкций с основанием, 2 — разное качество отпора основания описанного в [1]. Получено решения в частном случае конструкций с жестким основанием имеющим практическое значение.

Streszczenie

WSPÓLPRACA KONSTRUKCJI Z CZĘŚCIOWO SPRĘŻYSTYM PODŁOŻEM

Celem pracy jest opis zachowania się konstrukcji spoczywających na podłożu doznającym zmian konfiguracji. Uwzględnienie wpływu deformacji podłoża na zachowanie się konstrukcji ma bowiem znaczenie praktyczne w problemach posadowienia obiektów na terenach objętych uszkodzeniami górniczymi. Rozpatrywano sprężyste płyty i belki oraz konstrukcje o sztywnych podstawach. Uwzględniono możliwość utraty podstawy konstrukcji z podłożem oraz różny charakter odporu podłoża przy odkształceniach pierwotnych i wtórnych, zgodnie z koncepcją podaną w [1]. Otrzymano rozwiązania dla przypadku szczególnego konstrukcji o sztywnej podstawie, mającego znaczenie praktyczne.

Praca została złożona w Redakcji 8 czerwca 1983 roku

FALE SPRĘŻONE MECHANO-TERMO-ELEKTRYCZNE W STAŁYM OŚRODKU PIEZOELEKTRYCZNYM

KRYSTYNA MAJORKOWSKA-KNAP (WARSZAWA)

Politechnika Warszawska

1. Wprowadzenie

Ostatnie lata świadczą o wciąż wzrastającym zainteresowaniu zagadnieniami pól sprężonych. Badania zarówno teoretyczne, jak i doświadczalne zachowania się sprężonego ciała stałego, które znajduje się we wzajemnym oddziaływaniu z polem elektromagnetycznym, a często również z polem temperatury, stały się bardzo popularne z powodu olbrzymiego zapotrzebowania ze strony techniki. Można powiedzieć, że piezoelektryczność — dziedzina zajmująca się sprężeniem pola deformacji z polem elektromagnetycznym oraz termo-piezoelektryczność, włączająca ponadto pole temperatury, są na etapie dynamicznego rozwoju.

Cztery lata temu minęła setna rocznica odkrycia zjawiska piezoelektrycznego przez braci Piotra i Pawła Curie. W 1880 r. odkryli oni prosty efekt piezoelektryczny w krystalicznym kontinuum [1] — wytwarzanie elektrycznej polaryzacji, a więc i pola elektrycznego przez mechaniczne naprężenie. Odwrotny efekt piezoelektryczny — pojawianie się naprężeń i odkształceń kryształu wskutek zastosowania zewnętrznego pola elektrycznego był przewidziany teoretycznie przez G. Lippmana [2] w 1881 r. jako konsekwencja termodynamiczna prostego efektu. W tym samym roku bracia Curie zweryfikowali eksperymentalnie to odkrycie [3]. Obydwa efekty zostały udowodnione i doświadczalnie zademonstrowane w anizotropowych niecentrosymetrycznych kryształach, np. [4, 5] w pewnych syntetycznych materiałach, np. ceramice piezoelektrycznej, np. [6, 7], w tzw. piezoelektrycznych teksturach (np. drewno [89], skóra [9], kość [10]), w ceramice ferroelektrycznej [11], w płynnych kryształach [12]. Obszerną bibliografię dotyczącą znanych, piezoelektrycznych materiałów można znaleźć w [13]. Badania eksperymentalne wykazują że efekt piezoelektryczny występuje również w centrosymetrycznych kryształach, np. [14, 15].

Najbardziej ściśle sformułowanie zależności między piezoelektrycznością i strukturą kryształów zostało podane przez Woldemara Voigta. On właśnie ustalił, w których z 32 klas krystalograficznych może istnieć efekt piezoelektryczny, i podał dla każdej klasy, które z osiemnastu współczynników piezoelektrycznych mogą mieć wartość różną od zera.

W roku 1894 została opracowana przez W. Voigta fenomenologiczna liniowa teoria piezoelektryczności [16] oparta na zasadach termodynamicznych sformułowanych przez Kelvina

Przez ponad 35 lat od odkrycia piezoeфекtu nie przywiązywano żadnej wagi do jego praktycznego znaczenia. Praktyczne zastosowania zapoczątkowała praca P. Langevina, który w 1917 roku użył przetwornik kwarcowy do wzbudzenia fal akustycznych w wodzie. Następnie powstały pierwsze generatory, rezonatory i filtry piezoelektryczne dzięki pracom P. Langevina, W. G. Cady, A. M. Nicolsona i K. S. Van Dykea. W roku 1919 W. G. Cady pierwszy zastosował kryształy piezoelektryczne do kontroli częstotliwości generatora drgań. Następnie stosowali je G. W. Pierce i Miller. Około dziesięciu milionów generatorów kontrolowanych dzięki piezoeфекtowi w kryształach było używanych podczas II wojny światowej w łączności między czołgami, ziemią i samolotami. W tych zastosowaniach wykorzystywano element piezoelektryczny drgający w zmiennym polu elektrycznym.

Wyjaśnienie własności piezoelektrycznych kryształów umożliwiły badania ich struktury za pomocą promieni Röntgena.

Dalszy dynamiczny rozwój zastosowań praktycznych (takich jak: w przyrządach rejestrujących dźwięk, w przyrządach pomiarowych ciśnień szczególnie gwałtownych eksplozji, a również ciśnienia krwi, naprężeń w inżynierskich elementach konstrukcyjnych, do retransmisji i mierzenia prędkości światła, w telewizji, komputerach, do wykonywania wzorców czasu, w różnych typach broni ogniowej i artyleryjskiej) powodował intensyfikację zarówno badań podstawowych, jak i aplikacyjnych.

W omówionych zastosowaniach wykorzystywano objętościowe fale piezoelektryczne.

Olbrzymie zastosowanie techniczne piezoelektrycznych fal powierzchniowych spowodowało, że skupiają one wciąż na sobie wiele uwagi badaczy. Ze względu na ich bardzo niską prędkość oraz bardzo małą długość w porównaniu z falami elektromagnetycznymi tej samej częstotliwości (redukcja w wymiarze zarówno prędkości jak i długości około 10^{-5}) znajdują zastosowanie m.in. w nieniszczących oszacowaniach sejsmologicznych, w obróbce sygnałów z ważnymi zastosowaniami m.in. do radaru, telekomunikacji, elektronowej techniki wojskowej. Akustoelektronika powstała w ciągu ostatnich 20 lat jako osobna gałąź nauki i techniki bazuje na piezoelektrycznych falach powierzchniowych. Odkryto, zbadano i zastosowano szereg typów fal powierzchniowych - od dawno znanych fal Rayleigha [17], Love'a [17], Stoneleya [18] do stosunkowo niedawno odkrytych, np. Bleusteina-Gulajewa [19, 20], typu „leaky” [21, 22], występujących zarówno na płaskich, jak i zakrzywionych (sferycznych bądź cylindrycznych) powierzchniach.

W niniejszej pracy skoncentrowano się na wybranych zagadnieniach dynamicznych, a mianowicie interesujących typach fal (o przebiegach harmonicznym w czasie i w przestrzeni) w ośrodku piezoelektrycznym.

2. Fale harmoniczne w ośrodku piezoelektrycznym — teoria W. Voigta

Klasyczne sformułowanie teorii piezoelektryczności bazujące na podstawowych równaniach liniowych wyprowadzonych przez W. Voigta zawiera fundamentalna literatura: prace z lat 50-tych W. G. Cady [4] (pierwsze wydanie 1946 r.), W. P. Masona [5], z lat 60 ÷ 70-tych W. P. Masona [23], H. F. Tierstena [24, 25] oraz wydana w 1983 r. monografia W. Nowackiego [26].

Liniowa teoria piezoelektryczności W. Voigta w quasi-statycznym przybliżeniu [26]

reprezentowana jest przez następujące podstawowe związki i równania napisane w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych:

— równania ruchu i równanie pola elektrycznego

$$\sigma_{j1,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad D_{i,l} = 0, \quad \mathbf{x} \in B, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

— związki konstytutywne

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i &= e_{iki} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k, \quad E_k = -\varphi_{,k} \end{aligned} \quad (2.2)$$

— definicję tensora odkształcenia

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.3)$$

gdzie: \mathbf{u} — wektor przemieszczenia, δ_{ij} — tensor naprężenia, \mathbf{X} — wektor sił masowych, ρ — gęstość ciała, D — wektor indukcji elektrycznej, \mathbf{E} — wektor natężenia pola elektrycznego, φ — potencjał elektryczny, stałe materiałowe: c_{ijkl} — współczynniki sztywności sprężystej (dla $E_i = \text{const}$), e_{kij} — współczynniki piezoelektryczne, ε_{ik} — współczynniki dielektryczne (dla $\varepsilon_{ij} = \text{const}$).

Należy tu nadmienić, że równania elektrostatyki (2.1)₂ i (2.2)₃ zostały otrzymane dzięki redukcji równań elektrodynamiki Maxwella ((3.2) (3.3) pkt. 3) przy założeniu nieskończenie małego prądu przewodzenia $\mathbf{I} = 0$ i magnetyzacji $\mathbf{M} = 0$ oraz braku ładunków elektrycznych $\rho_e = 0$ dla ciała piezoelektrycznego, a ponadto zaniedbania indukcji magnetycznej (przyjmujemy $\mathbf{B} = 0$) w stosunku do innych wielkości charakteryzujących pole elektromagnetyczne na podstawie rozważań H. F. Tierstena [25].

Podstawowe równania różniczkowe piezoelektryczności:

— równania ruchu i równanie quasi-statycznego pola elektrycznego otrzymujemy w wyniku wstawienia (2.2) do (2.1) przy wykorzystaniu (2.3) mamy:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} u_{k,lj} + e_{kij} \varphi_{,kj} + X_i &= \rho \ddot{u}_i, \\ e_{iki} u_{k,li} - \varepsilon_{ik} \varphi_{,ki} &= 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Do równań (2.4) dochodzą warunki brzegowe i początkowe. Na powierzchni ∂B ograniczającej obszar B jednorodnego odkształcalnego ciała anizotropowego mogą być dane przemieszczenia albo obciążenia, potencjał elektryczny albo ładunki powierzchniowe:

$$\begin{aligned} u_i &= U_i(\mathbf{x}, t), \quad q_i = \sigma_{ji}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}), \\ \varphi &= \Phi(\mathbf{x}, t), \quad D_k n_k = -\kappa_e, \quad \mathbf{x} \in \partial B \end{aligned} \quad (2.5)$$

W chwili początkowej $t = 0$ pole przemieszczeń dane jest rozkładem funkcji $g_i(\mathbf{x})$, a pole ich prędkości rozkładem funkcji $h_i(\mathbf{x})$

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = g_i(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = h_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B. \quad (2.6)$$

W warunkach (2.5), (2.6) \mathbf{n} jest jednostkowym normalnym wektorem na brzegu ∂B , κ_e — jest powierzchniową gęstością ładunku elektrycznego, \mathbf{q} — jest wektorem sił powierzchniowych, U_i , Φ , g_i i h_i są danymi funkcjami.

Układ równań (1.4) jest układem równań sprzężonych. Widać, że skutek oddziaływań zewnętrznych (siły masowe i powierzchniowe, dane na powierzchni ciała przemieszczenia,

przyczyny natury elektrycznej), które są funkcjami położenia i czasu, w rozpatrywanym ciele powstaje pole przemieszczeń $u(x, t)$, które wywołuje zmianę pola elektromagnetycznego.

Rozwiązanie równań (2.4) pozwala na wyznaczenie wektora przemieszczenia u i potencjału elektrycznego φ . Następnie z (2.2)₃ i (2.3) można wyznaczyć natężenie pola elektrycznego E i odkształcenia ε_{ij} , z (2.2)_{1,2} naprężenie σ_{ij} i indukcję elektryczną D , w końcu wektor polaryzacji elektrycznej P ze związku konstytutywnego

$$P_i = D_i - \varepsilon_0 E_i, \quad (2.7)$$

gdzie ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni.

Poszukując rozwiązania równań piezoelektryczności w ośrodku nieograniczonym w postaci fali płaskiej o danym kierunku propagacji otrzymujemy trzy rozwiązania odpowiadające falom objętościowym czysto mechanicznym (quasi-podłużna i dwie quasi-poprzeczne) usztywnionym piezoelektrycznie, bowiem potencjał i stowarzyszone z nim pole elektryczne są w znacznej mierze ich składową częścią.

Dla fal objętościowych istnieją pewne kierunki, w których krystaliczna symetria wymaga modów czysto podłużnych oraz czysto poprzecznych. W pracy F. E. Borgnisa [27] podane są kierunki, w których mogą być propagowane czysto podłużne fale dla różnych klas krystalograficznych kryształów anizotropowych.

Fale objętościowe w kryształach trygonalnych, tetragonalnych i jednoskośnych rozpatrywane są w pracy R. Meiera i K. Schustera [28]. Te zagadnienia również omawiane są w pracy zbiorowej pod redakcją A. A. Olinera [29] oraz w pracy S. Epsteina [30].

Przejdźmy teraz do piezoelektrycznych fal powierzchniowych. Najprostszym przykładem ośrodka, w którym mogą rozchodzić się te fale, jest półprzestrzeń piezoelektryczna.

Z uwagi na łatwość techniki wzbudzenia jest użyteczne badanie niesprzężonych czystych modów prostszej formy propagujących się na swobodnej powierzchni półnieskończonego kryształu. Efekty piezoelektryczne, jako mechanizmy sprzęgające mechaniczne fale z zewnętrznym obwodem elektrycznym, powodują wytwarzanie: usztywnionych modów Rayleigha [17], fal Bleusteina-Gulajewa [19], [20], jak również innych, np: typu „leaky” [21], [22].

Występowanie niezależnych modów zależy od kombinacji symetrii ośrodka utrzymującego falę, kierunku propagacji fali oraz od warunków brzegowych, które mogą nie pozwalać na istnienie pewnych modów albo wprowadzać sprzężenie pomiędzy modami nie połączonymi przez siatkę krystaliczną [31]. Odpowiednie dane dla 32 klas krystalograficznych można znaleźć w pracach G. A. Farnella [32] i C. Lardata, C. Maerfelda, P. Tournoisa [33].

Piezoelektryczne mody Rayleigha były przedmiotem wielu prac, m.in.: S. Kaliskiego, J. Kapelewskiego, Z. Makowskiego [34], C. C. Tsenga [35], E. Danickiego [36]. Te niedyspersyjne fale, o głębokości penetracji w głąb kryształu około kilku długości fali, mają prędkość nieco większą niż klasyczna prędkość Rayleigha wskutek korekcji wynikającej z elektromagnetycznego sprzężenia. Przy zastosowaniu powleczenia swobodnej powierzchni kryształu doskonale przewodzącą warstwę materiału, dość cienką, że niezmienione pozostają mechaniczne warunki brzegowe, następuje zmiana prędkości fali.

Na tej zmianie bazuje kryterium osądzenia względnej wydajności wzbudzenia tych fal: mówi o tym praca J. J. Campbella i W. R. Jonesa [37].

Fale Bleusteina-Gulajewa, zwyrondniałe fale rodziny SH, bez odpowiednika w czysto sprężystym jednorodnym materiale tej samej symetrii sprężystej co piezoelektryk były badane przez odkrywców J. L. Bleusteina i W. Gulajewa [19], [20], a następnie C. C. Tsenga [38], G. Koerbera, R. Vogela [39], [40], W. Solucha [41]. Te niedispersyjne fale o znacznie większej penetracji w głąb materiału (10 - 1000 długości fali [42]) niż fale Rayleigha przenoszące też znacznie większą energię znalazły bardzo duże zastosowanie w powierzchniowo-falowych urządzeniach wysokiej częstotliwości. Wymienić tu należy prace W. Pajewskiego np. [43]. Analiza teoretyczna i numeryczna zachowania się fal *B-G* propagujących się w sinusoidalnie pofałdowanym kryształcie jest przedmiotem pracy Makoto Tsutsumi, Nobuaki Kumagal [44].

Całkowite sformułowanie teoretyczne dla fal powierzchniowych w półnieskończonej przestrzeni zawierające kryteria istnienia, przykłady nieistnienia oferują prace J. Lothe, D. M. Barnetta [45 ÷ 47] oraz W. N. Lubimowa, W. I. Alszica, J. Lothe [48]. Warto odnotowania są również rozważania na temat powierzchni opóźnienia fal powierzchniowych zawarte w pracach Hirokimi Shirasaki, Toshio Makimoto [49 ÷ 51]. Metoda nieiteracyjna używająca ortonormalną bazę dla wyrażenia pola dystrybucji przedstawiona jest w pracy S. Datty, B. J. Hunsingera [52]. Zastosowanie metody wariacyjnej, dającej górne granice na parametry 3-wymiarowego problemu do oszacowania zasięgu istnienia SH modu, zawiera praca R. F. Vogela [53].

Zastosowanie programów komputerowych do oszacowania parametrów fal powierzchniowych zastosowano w pracach J. J. Campbella W. R. Jonesa [37], [54] L. P. Soliego [55] oraz M. Koška [56]. Ogólnie sformułowanie macierzowe dla obliczeń numerycznych problemu fal powierzchniowych w jednorodnej półprzestrzeni podane jest w pracy D. B. Taylora, S. Crampina [57].

Propagacja powierzchniowych fal w warstwowych ośrodkach w szczególności składających się z cienkiej warstwy na leżącym poniżej grubym podłożu jest ważna w mikrofalowej akustyce. Problem ten skupiał przez lata wiele uwagi geodynamików z uwagi na wyjaśnienie większości sejsmicznych zjawisk za pomocą takiego modelu matematycznego. W przypadku piezoelektrycznej warstwy i piezoelektrycznego podłoża badanie propagacji fali powierzchniowej jest złożone, bowiem może egzystować duża liczba dyspersyjnych modów, pociągających za sobą mechaniczne przemieszczenia ze składowymi wzdłuż trzech osi współrzędnych; wzbudzenie jednego z nich jest trudne bez wzbudzenia innych. W zasadzie wskazana jest numeryczna analiza takich struktur. Zastosowania programów komputerowych liczących charakterystyki dyspersji fal w wielowarstwowym ośrodku podane są w pracy G. A. Armstronga, S. Crampina [58], a dla podłoża z jedną warstwą w pracy L. P. Soliego [55].

Niesprężone czyste mody falowe są czterech typów [29]; nieusztynione Rayleigha i Love'a mody, które są uogólnieniami izotropowych modów, niezależnych od stałych piezoelektrycznych ośrodka, usztynione Rayleigha mody, które sprzęgają potencjały elektryczne z przemieszczeniami mechanicznymi ograniczającymi się do płaszczyzny strzałkowej (tj. płaszczyzny utworzonej przez wektor propagacji i jednostkowy normalny

do ograniczającej płaszczyzny), usztywnione Love'a mody z potencjałami sprzężonymi z poprzecznymi przemieszczeniami prostopadłymi do płaszczyzny strzałkowej.

W zastosowaniach akustoelektroniki jest istotna generacja powierzchniowych fal w niepiezoelektrycznych podłożach przez zastosowanie piezoelektrycznej warstwy.

Usztywnione mody Love'a w ośrodku składającym się z piezoelektrycznej warstwy klasy 42 m (pokrytej nieskończenie cienką metaliczną powłoką) spoczywającej na izotropowej sprężystej półprzestrzeni były przedmiotem pracy K. Majorkowskiej-Knap [59]. Podano w niej związek dyspersyjny dla fal Love'a istniejących w przypadku, gdy prędkość rozchodzenia się fali poprzecznej w podłożu (o orientacji zgodnej z falą powierzchniową) jest większa niż w warstwie. Otrzymane wyrażenia dla przemieszczeń i potencjału elektrycznego wskazują, że usztywniona piezoelektrycznie fala jest prowadzona przez warstwę, ale równocześnie penetruje podłoże. Możliwa jest seria wyższych rzędów modów propagacji.

Zagadnienie propagacji fal piezoelektrycznych w ośrodkach warstwowych jest rozpatrywane również w pracy zbiorowej pod red. A. A. Olinera [29] w pracy G. A. Farnella [32], C. Lardata, K. Maerfelda, P. Tournoisa [33] oraz N. Liachowa i R. M. Taziewa [60].

Sformułowanie problemu fal powierzchniowych propagujących się wzdłuż płaszczyzny granicznej pomiędzy dwoma ośrodkami rozciągającymi się nieograniczenie nad i pod powierzchnią graniczną jest podobne do problemu ostatnio rozpatrywanego. Jeśli przynajmniej jeden z ośrodków jest piezoelektrykiem, fale powierzchniowe mogą być rozseparowane na mody typu Stoneleya [18] i mody z przemieszczeniami prostopadłymi do płaszczyzny strzałkowej, które badane są w pracach C. Maerfelda, C. Lardata, P. Tournoisa [61], J. M. Gelfgata, E. S. Syrkina [62], A. K. Moroczy [63].

3. Sprężenie fal mechanicznych i elektromagnetycznych

Sprężenie fal mechanicznych i fal elektromagnetycznych w ośrodku piezoelektrycznym [64] przy założeniu braku ładunków elektrycznych i magnetycznej polaryzacji ($\epsilon_e = 0$, $\mathbf{M} = 0$) jest opisywane przy pomocy równań ruchu

$$\sigma_{jL,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in B, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

oraz równań Maxwella pola elektromagnetycznego [65]

$$\text{rot} \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad (3.2)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = 0, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.3)$$

gdzie \mathbf{H} , \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{I} — oznaczają odpowiednio wektory: natężenia pola magnetycznego, natężenia pola elektrycznego, indukcji elektrycznej, indukcji magnetycznej i natężenia prądu przewodzenia (pomija się prąd konwekcyjny).

Wektory charakteryzujące pole elektromagnetyczne są powiązane równaniami konstytutywnymi

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.4)$$

Tutaj \mathbf{P} jest wektorem polaryzacji elektrycznej, ϵ_0 oznacza przenikalność elektryczną

próżni, μ_0 przenikalność magnetyczną próżni, σ jest przewodnością elektryczną właściwą. (Założyliśmy tu proporcjonalność wektorów \mathbf{I} i \mathbf{E} oraz izotropowość materiału, jeśli chodzi o przewodność elektryczną).

W wyniku wykonania operacji rotacji na równaniu (3.2)₂ przy wykorzystaniu (3.2)₁ i związku (3.4)₂ dochodzimy do równania:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \mu_0 \ddot{\mathbf{D}} - \mu_0 \sigma \dot{\mathbf{E}} \quad (3.5)$$

Mamy więc do rozwiązania układ równań (3.1) i (3.5). Po wstawieniu do niego związków konstytutywnych dla zagadnienia quasi-statycznego (2.2) przy wykorzystaniu definicji tensora odkształcenia (2.3) otrzymamy układ sześciu równań, w wyniku rozwiązania którego wyznaczamy składowe wektora przemieszczenia u_i i składowe natężenia pola elektrycznego E_i , co pozwoli na obliczenie pozostałych wielkości charakteryzujących sprzężone pola. Nie podajemy warunków brzegowych i początkowych, gdyż będziemy zajmować się w dalszej kolejności jedynie ciałem nieograniczonym z warunkami regularności w nieskończoności.

Jednowymiarowy problem propagacji fal w nieograniczonym ośrodku piezoelektrycznym był analizowany w pracy J. J. Kayma [64] i M. Ahmeda [66]. Warto odnotować, że w ramach tej teorii możliwych jest pięć fal płaskich dla danego kierunku propagacji, ale dwie z nich są mało interesujące pod kątem zastosowań; mają bowiem prędkość bliską prędkości fal elektromagnetycznych w dielektrykach. Pozostałe trzy interesujące nas są właśnie tymi, których przybliżone prędkości daje uproszczenie quasi-statyczne.

Badanie sprzężeń towarzyszących propagacji fal sprężystych i elektromagnetycznych w kryształach tetragonalnym klasy 4 mm było przedmiotem badań K. Majorkowskiej-Knap [67]. Porównanie dwu różnych przypadków przy uwzględnieniu bądź pominięciu prądu przewodzenia (jest jedynie prąd przesunięcia) wskazuje na pojawienie się efektów dyspersji i tłumienia fal w pierwszym z nich.

Propagacji czystych modów fal powierzchniowych na powierzchni półnieskończonego piezoelektryka były poświęcone m.in. prace C. C. Tsenga [68, 69].

Zagadnienie wzbudzania fal mechanicznych w niepiezoelektrycznym ośrodku poprzez wzbudzenie fal elektromagnetycznych w przylegającej warstwie piezoelektrycznej było badane teoretycznie w pracy F. Bardati, G. Barzilal, G. Gerosa [70].

4. Płaskie fale harmoniczne w nieograniczonym ośrodku termopiezoelektrycznym

Ważnym uzupełnieniem fal piezoelektrycznych są fale termopiezoelektryczne. W termopiezoelektryczności (podstawowe równania R. D. Mindlin [71], rozwinięcie teorii W. Nowacki [72]) opieramy się na termosprężystości [73] i elektrodynamice ośrodków ciągłych [65, 74]. Ciało sprężyste, na które działają siły masowe i źródła ciepła, obciążenia zewnętrzne i pole elektryczne oraz oddziaływania termiczne, doznaje deformacji. Powstaje w nim pole przemieszczeń $u(x, t)$ i sprzężone z nim pole temperatury, której przyrost $\theta = T - T_0$, gdzie $T > 0$, a T_0 jest temperaturą stanu naturalnego w skali Kelvina. Wymienione pola powodują zmianę pola elektromagnetycznego. W quasi-statycznym przybliżeniu liniowej teorii termopiezoelektryczności dysponujemy:

— równaniami ruchu i równaniem pola elektrycznego

$$\sigma_{jI,j} + X_I = \rho \ddot{u}_I, \quad D_{I,i} = 0 \quad (4.1)$$

— związkami konstytutywnymi

$$\sigma_{IJ} = c_{IJKl} \varepsilon_{kl} - \gamma_{IJ} \theta - e_{klj} E_k, \quad (4.2)$$

$$S = \gamma_{IJ} \varepsilon_{IJ} + \frac{c_E}{T} \theta + p_i E_i,$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + p_i \theta + \varepsilon_{ik} E_k, \quad E_k = -\varphi_{,k}$$

— definicją tensora odkształcenia

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2} (u_{I,J} + u_{J,I}) \quad (4.3)$$

oraz zlinearyzowanym równaniem przewodnictwa cieplnego

$$k_{IJ} \theta_{,IJ} - c_E \dot{\theta} - T_0 (\gamma_{IJ} \dot{\varepsilon}_{IJ} - p_i \varphi_{,i}) = -W \quad (4.4)$$

gdzie: S — oznacza entropię, W — jest intensywnością ciepła,

c_{IJKl} — współczynniki sztywności sprężystej (przy $E_i = \text{const}$, $\theta = \text{const}$),

e_{ijk} — współczynniki piezoelektryczne (przy $\theta = \text{const}$),

ε_{ij} — współczynniki dielektryczne (przy $\varepsilon_{ij} = \text{const}$, $\theta = \text{const}$),

γ_{IJ} — współczynniki ciśnienia termicznego (przy $E_i = \text{const}$),

c_E — ciepło właściwe (przy $\varepsilon_{ij} = \text{const}$, $E_i = \text{const}$),

p_i — współczynniki piroelektryczne (przy $\varepsilon_{ij} = \text{const}$),

k_{IJ} — współczynniki przewodnictwa cieplnego.

Wstawiając równania (4.2)_{1,3} do (4.1) przy wykorzystaniu (4.3) otrzymujemy następujący układ równań:

$$c_{IJKl} u_{k,IJ} + e_{klj} \varphi_{,kj} - \gamma_{IJ} \theta_{,J} + X_I = \rho \ddot{u}_I, \quad (4.5)$$

$$e_{ikl} u_{k,II} - \varepsilon_{ik} \varphi_{,ki} + p_i \theta_{,i} = 0.$$

Równania (4.4) i (4.5) tworzą komplet sprzężonych ze sobą równań różniczkowych termopiezoelektryczności. Występują w nich nieznanne wielkości u_i , φ i θ . Do równań tych dochodzą warunki brzegowe i początkowe. Nie podajemy ich, bowiem w dalszej kolejności będziemy się zajmować jedynie ciałem nieograniczonym z warunkami regularności w nieskończoności.

Jednowymiarowemu problemowi propagacji płaskiej fali harmoniczej w nieograniczonym ośrodku termopiezoelektrycznym poświęcona jest praca K. Majorkowskiej-Knap [75]. W przykładowo rozważanym kryształcie jednoskośnym propagowane są fale mechaniczne sprzężone ze sobą, ale nie związane z dodatkowo występującymi falami termosprężystymi usztywnionymi piezoelektrycznie, tłumionymi i ulegającymi dyspersji, powodującymi ponad to zmianę potencjału reprezentującego pole elektryczne.

A. K. Pal bada teoretycznie propagację fal powierzchniowych termopiezoelektrycznych na swobodnej powierzchni półnieskończonego ośrodka — jednoskośnego kryształu w pracy [76] oraz heksagonalnego ośrodka, który jest również półprzewodnikiem w naturze w pracy [77].

5. Fale harmoniczne w ośrodku piezoelektrycznym — teoria R. D. Mindlina

Klasyczna teoria piezoelektryczności ma pewne mankamenty. Przy porównywaniu szczegółowych rozwiązań analogicznych problemów przy użyciu tej teorii oraz nowoczesnych teorii siatek krystalicznych są duże rozbieżności. Teoria klasyczna nie ujmuje pewnych anomalii należnych do piezoeffektu, np. obserwowanych przez C. A. Meada przy pomiarach pojemności cienkich dielektrycznych warstwek [78]. Nie ujmuje efektu piezoelektrycznego w materiałach z centrosymetrią oraz pewnych fizycznych zjawisk ważnych w technice, które włączają efekty fotosprężyste, aktywność optyczną kryształów i in.

Wymienione niedostatki teorii klasycznej zostały usunięte w uogólnionym modelu, na którym bazuje teoria R. D. Mindlina. [78, 79]. Teoria ta powstała w oparciu o ogólną nieliniową teorię sprężystych dielektryków R. A. Toupin [80, 81] zawierającą w sobie jako przypadek szczegółowy liniową teorię W. Voigta. Teoria R. D. Mindlina włącza gradient polaryzacji do energii deformacji i polaryzacji dielektryka, która w klasycznym ujęciu była funkcją tylko odkształcenia i polaryzacji (dodatkowe elektromechaniczne wzajemne oddziaływanie reprezentowane jest w energii przez iloczyn odkształcenia i gradientu polaryzacji).

Rozszerzone równania teorii z gradientem polaryzacji stanowią ciągłe przybliżenie równań jednowymiarowej teorii siatek krystalicznych W. Cochra [82, 83], bazującej na warstwowym modelu atomu B. J. Dicka i A. W. Overhausera [84]. Mówią o tym prace R. D. Mindlina [85] oraz A. Askara, P. C. Lee, A. S. Cakmaka [86]. Zatem teoria ta redukuje „szczelinę” pomiędzy teoriami „kontinuum” i teoriami siatkowymi. Ujmuje ona dokładniej aspekty struktury i międzyatomowego wzajemnego oddziaływania, mieści w sobie godne uwagi obserwowane zjawiska fizyczne nie wytłumaczone przez teorię klasyczną, włącza efekt piezoelektryczny w obu niecentro- i centro-symetrycznych kryształach, nawet o najwyższej symetrii (centro-symetrycznych izotropowych). W naszych rozważaniach ograniczymy się jedynie do ciała centrosymetrycznego izotropowego. W tym przypadku na podstawie równania gradientowej teorii piezoelektryczności [26] składają się:

— równania Eulera

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{j1,j} + X_t &= \rho \ddot{u}_t, \\ E_{j1,j} + E_t^t - \varphi_{,t} + E_t^0 &= 0 \\ -\epsilon_0 \varphi_{,tt} + P_{t,t} &= \rho_e \\ \varphi_{,tt} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{dla } \mathbf{x} \in B \\ \text{dla } \mathbf{x} \in B' \end{array} \quad (5.1)$$

gdzie (5.1)₁ — to równania ruchu, (5.1)₂ — równanie bilansu siły wewnątrzcząsteczkowej — fundamentalny warunek równowagi powłoki (zewnątrznych elektronów) pod działaniem rdzenia (nukleonów i wewnętrznych elektronów) tego samego atomu i otaczającego pola elektromagnetycznego oraz dodatkowe działanie sąsiednich atomów na powłokę. (5.1)₃ — równanie pola elektromagnetycznego, do którego bezpośrednio prowadzi wstawienie do $D_{i,t} = \rho_e$ związków $D_i = \epsilon_0 E_i + P_i$ oraz $E_i = -\varphi_{,i}$,

— równania konstytutywne

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{12} u_{k,k} \delta_{ij} + c_{44} (u_{i,j} + u_{j,i}) + a_{12} P_{k,k} \delta_{ij} + d_{44} (P_{j,t} + P_{t,j}), \\ E_{ij} + d_{12} u_{k,k} \delta_{ij} + d_{44} (u_{i,j} + u_{j,i}) + b_{12} P_{k,k} \delta_{ij} + b_{44} (P_{j,t} + P_{t,j}) + b_{77} P_{j,t} - P_{t,j} + b^0 \delta_{ij}, \\ E_t^t &= -a P_t. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wstawienie związków (5.2) do równań (5.1) prowadzi do następującego układu sprzężonych równań piezoelektryczności

$$\begin{aligned} c_{44}\nabla^2\mathbf{u} + (c_{12} + c_{44})\text{grad div}\mathbf{u} + d_{44}\nabla^2\mathbf{P} + (d_{12} + d_{44})\text{grad div}\mathbf{P} + \mathbf{X} &= \rho\ddot{\mathbf{u}}, \\ d_{44}\nabla^2\mathbf{u} + (d_{12} + d_{44})\text{grad div}\mathbf{u} + (b_{44} + b_{77})\nabla^2\mathbf{P} + \\ + (b_{12} + b_{44} - b_{77})\text{grad div}\mathbf{P} - a\mathbf{P} - \text{grad}\varphi + \mathbf{E}^0 &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0\nabla^2\varphi + \text{div}\mathbf{P} &= \rho_e, & \text{dla } \mathbf{x} \in B, \\ \nabla^2\varphi &= 0, & \text{dla } \mathbf{x} \in B', \end{aligned}$$

Dla równań dochodzą warunki brzegowe

$$\sigma_{jnnj} = q_i, \quad E_{jnnj} = 0, \quad [-\varepsilon_0|\varphi_{,i}| + P_i]n_i = 0, \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \partial B. \quad (5.4)$$

Nowo wprowadzone oznaczenia występujące we wzorach (5.1 ÷ 5.4): E_{ij} — tensor elektromagnetyczny, \mathbf{E}^L — wektor lokalnej siły elektrycznej, \mathbf{E}^0 — wektor natężenia zewnętrznego pola elektrycznego, stałe materiałowe: c_{12}, c_{44} (przy $P_i = \text{const}, P_{i,j} = \text{const}$) (d_{12}, d_{44}) (przy $P_i = \text{const}$), b_{12}, b_{44}, b_{77} (przy $\varepsilon_{ij} = \text{const}, P_i = \text{const}$), a — współczynnik polaryzacji (przy $P_{i,j} = \text{const}, \varepsilon_{ij} = \text{const}$), b^0, B — obszar ciała dielektrycznego ograniczonego powierzchnią ∂B , która oddziela go od próżni B' , $|\varphi_{,i}|$ skok funkcji $\varphi_{,i}$ na powierzchni ∂B , δ_{ij} delta Kroneckera, ∇^2 — operator Laplace'a.

W wyniku rozwiązania sprzężonych — poprzez stałe d_{12}, d_{44} — równań (5.3) wyznaczamy nieznanne funkcje: przemieszczenie \mathbf{u} , polaryzację \mathbf{P} oraz potencjał elektryczny φ . Należy tu zwrócić uwagę na swobodę w warunkach brzegowych; na brzegu może być dana zarówno polaryzacja, jak i potencjał elektryczny. Stałe materiałowe b_{12}, b_{44}, b_{77} i d_{12}, d_{44} pochodzą od wzajemnego oddziaływania pomiędzy sąsiednimi atomami (powłoka-powłoka) i wewnątrzatomowego oddziaływania (rdzeń-powłoka). Stałą b^0 można traktować jako wartość początkową wprowadzoną do ciała w stanie naturalnym.

Niewiele zagadnień dynamicznych rozwiązano w ramach teorii R. D. Mindlina. Omówione poniżej prace ograniczają się do rozpatrywania ośrodka dielektrycznego izotropowego i centrosymetrycznego.

Zagadnienie propagacji fal objętościowych w nieograniczonym ośrodku dielektrycznym rozpatrywane jest w pracy K. Majorkowskiej-Knap [87]. Dla kierunku propagacji wzdłuż wybranej przykładowo osi x_1 otrzymano trzy rozwiązania odpowiadające podłużnej i dwóm poprzecznym dyspersyjnym falom mechanicznym zaburzonym przez quasi-statyczne pole elektryczne. W wyniku tego ruchu falowego następuje zmiana polaryzacji elektrycznej.

Falom Love'a propagującym się w ośrodku składającym się z dielektrycznej warstwy wspartej na sprężystej półprzestrzeni poświęcona jest praca K. Majorkowskiej-Knap [88].

Zarys rozwiązania dla powierzchniowych fal Rayleigha propagujących się na swobodnej powierzchni dielektrycznej półprzestrzeni podany jest w monografii W. Nowackiego [26].

Płaskie zagadnienie Lamba dla półprzestrzeni dielektrycznej było przedmiotem prac K. Majorkowskiej-Knap [89, 90]. Przy użyciu wykładniczej transformacji całkowitej Fouriera otrzymano ogólne rozwiązania dla obciążenia zmieniającego się w sposób harmoniczny w czasie, normalnego i stycznego do płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń.

Problem mechanicznej fali objętościowej (podłużnej, poprzecznej SH i SV) padającej

skośnie na powierzchnię graniczną pomiędzy półprzestrzenią dielektryczną i próżnią albo dwoma półprzestrzeniami dielektrycznymi o różnych stałych materiałowych był szczególnie badany w pracach K. Majorkowskiej-Knap [91 ÷ 94].

Zagadnienia falowe w nieograniczonej przestrzeni dielektrycznej oraz półprzestrzeni dielektrycznej w ramach teorii termo-piezo-elektryczności z gradientem polaryzacji [26] były rozpatrywane w pracach J. P. Nowackiego, P. G. Glocknera [95, 96].

6. Uwagi końcowe

Niniejsza praca przeglądowa zawiera jedynie wybrane zagadnienia dynamiczne, a mianowicie interesujące typy fal harmonicznych w stałym ośrodku piezoelektrycznym w ujęciu teorii liniowych. W większości przypadków ciekawych z technicznego punktu widzenia liniowy model krystalicznego kontinuum zadowalająco opisuje występujące zjawiska fizyczne.

Należy odnotować, że w ostatnich latach rozwijane są również teorie nieliniowe piezoelektryczności i termopiezoelektryczności, o czym świadczą prace: M. Laxa, D. F. Nelsona [97], D. F. Nelsona [98], P. G. Glocknera, K. L. Chowdhury [99 ÷ 101], K. L. Chowdhury, M. Epsteina, P. G. Glocknera [102]. Zagadnienia falowe w nieliniowych ośrodkach dielektrycznych rozpatrują B. Collet [103, 104], A. Alippi [105], M. Planad, D. Hauden [106] oraz S. Dost [107].

Literatura cytowana w tekście

1. J. P. CURIE, Bull. Soc. Min., 3, 90, 1880.
2. G. LIPPMANN, An. Chim. Phys., Series, 5, 24, 145, 1881.
3. J. i P. CURIE, Compt. Rend., 93, 1137, 1881.
4. W. G. CADY, *Piezoelectricity*, Dover, New York 1964.
5. W. P. MASON, *Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics*, Van Nostrand, Princeton. New Jersey, 1950.
6. B. JAFFE, W. R. COOK, Jr i H. JAFFE. *Piezoelectric Ceramics*, Academic Press, New York, 1971.
7. D. BERLINCOURT, *Piezoelectric ceramics: characteristics and applications*, J. Acoust. Soc. Am., 70, 6, 1586, 1981.
8. E. FUKADA, „Piezoelectricity of wood”, J. Phys. Soc. Japan, 10, 149, 1955.
9. M. H. SHAMOS i L. S. LAVINE, „Piezoelectricity as a fundamental property of biological tissues” Nature, London, 213, 267, 1967.
10. E. FUKADA i I. J. YASUDA, „On the piezoelectric effect of bone”, J. Phys. Soc. Japan, 12, 1158, 1957.
11. J. GRINDLAY, *An Introduction to Phenomenological Theory of Ferroelectricity*, Pergamon Press, London 1971.
12. Y. KAGAWA i T. HATAKEYAMA, „Piezoelectric effect in liquid crystals”, J. Sound Vib., 53, 585, 1977.
13. D. T. HAWKINS, *Absolute configuration of piezoelectrics — A bibliography II*, Ferroelectrics, 15, 77, 1977.
14. J. S. ZHELUDOV, *Aspects of symmetry in the electric polarization of anisotropic media under external influences*, Ferroelectrics, 43, 1 - 2, p. 69, 1982.
15. G. A. SMOLEŃSKI i in., *Piezoëlektričeskoe vozbuźdenie uprugich voln v centrosimetričnom kristalle tantalata kalija*, Doklady AN SSSR, 26, 9, 605, 1981.
16. W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1910.
17. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.

18. W. M. EWING, W. S. JARDETZKY, F. PRESS, *Elastic waves in layered media*, Mc. Graw-Hill Book Company, Inc. New York-Toronto-London, 1957.
19. J. L. BLEUSTEIN, A new surface wave in piezoelectric materials, *Appl. Phys. Letters*, 13, 12, 412, 1968.
20. V. GULJAEV, Poverchnostnye elektrozvukovye volny v tverdykh telach, *Pis'ma ŽETF*, 9, 1, 63, 1969.
21. A. TAKAYANAGI, K. YAMANOUCHI, K. SHIBAYAMA, Piezoelectric leaky surface wave in Li NbO_3 , *Appl. Phys. Letters*, 17, 5, 225 (1970).
22. J. A. VIKTOROV, *Tipy zvukovykh poverchnostnykh voln v tverdykh telach*, *Akust. Žurn.*, 25, 1, 1, 1979.
23. W. P. MASON, *Crystal Physics of Interaction Processes*, Academic Press, New York 1966.
24. H. F. TIERSTEN, *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, Plenum Press, New York 1969.
25. H. F. TIERSTEN, *The radiation and confinement of electromagnetic energy accompanying the oscillations of piezoelectric crystal plates*, *Rec. Advances in Eng. Science*, Part 1, ed. A. C. Bringen, Gordon and Breach Science Publ., New York 1970.
26. W. NOWACKI, *Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych*, PWN Warszawa 1983.
27. F. E. BORGNIS, *Specific directions of longitudinal wave propagation in anisotropic media*, *Physical Review*, 9S, 4, 1955.
28. R. MEIER i K. SCHUSTER, Zur Theorie der Schallausbreitung in piezoelektrischen Kristallen, *Annalen der Physik*, 6, 11, 1953.
29. Praca zbiorowa pod red. A. A. Olinera, *Acoustic surface Waves*, Springer — Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
30. S. EPSTEIN, *Elastic-wave formulation for electroelastic waves in unbounded piezoelectric crystals*, *Phys. Rev. B. Solid St.* 4, 1636. 1973.
31. G. KOERBER, *Uncoupled piezoelectric surface-wave modes*, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.* SU-18,2, 73, 1971.
32. G. A. FARNELL, *Symmetry considerations for elastic layer modes propagating in anisotropic piezoelectric crystals*, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.* SU-17, 4, 229, 1970.
33. C. LARDAT, C. MAERFELD; P. TOURNOIS. *Theory and performance of acoustical dispersive surface wave delay lines*, *Proc. IEEE*, 59, 3, 355, 1971.
34. S. KALISKI, J. KAPELEWSKI, Z. MAKOWSKI, *Surface waves in piezoquartz*, *Proc. Vibr. Probl.*, 4, 7, 403, 1966.
35. C. C. TSENG, Piezoelectric surface waves in cubic crystals, *J. Appl. Phys.*, 41, 6, 2270, 1970.
36. E. DANICKI, Fale powierzchniowe, *Biul. WAT*, 11, 1975.
37. J. J. CAMPBELL, W. R. JONES, *A method for estimating optimal crystal cuts and propagation directions for excitation of piezoelectric surface waves*, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, SU-15, 4, 209, 1968.
38. C. C. TSENG, *Piezoelectric surface waves in cubic and orthorhombic crystals*, *Appl. Phys. Letters*, 16, 6, 253, 1970.
39. G. KOERBER, R. VOGEL, Generalized Bleustein modes, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.* SU-19, 1, 3, 1972.
40. G. KOERBER, R. VOGEL, *SH-mode piezoelectric surface waves on rotated cuts*, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.* SU-20, 1, 9, 1973.
41. W. SOLUCH, Bleustein-Gulyaev waves in LiLO_3 , *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn.*, 21, 2, 23, 1973.
42. J. POUGET, G. A. MAUGIN, *Bleustein-Gulyaev surface modes in elastic ferroelectrics*, *J. Acoust. Soc. Am.*, 69, 5, 1304, 1981.
43. W. PAJEWSKI, *Transversal Bleustein-Gulayev surface waves on a piezoelectric ceramic*, *Arch. Acoust.*, 2, 3, 197, 1977.
44. MAKOTO TSUTSUMI, NOBUAKI KUMAGAL, *Behavior of B-G waves in a periodically corrugated piezoelectric crystal*, *IEEE Trans. Micr. Th. Techn.* MTT-28, 6, 627, 1980.
45. J. LOTHE, D. M. BARNETT, *Integral formalizm for surface waves in piezoelectric crystals. Existence considerations* *J. Appl. Phys.* 47, 5, 1799, 1976.
46. J. LOTHE, D. M. BARNETT, *Further development of the theory for surface waves in piezoelectric crystals*, *Phys. Norvegica*, 8, 4, 239, 1977.

47. J. LOTHE, D. M. BARNETT, *On the existence of surface wave solutions in piezoelectric crystals an example of non existence*, Wave Motion, 1, 107, 1979.
48. V. N. LJUBIMOV, V. I. AL'ŠIC, J. LOTE, *Ob ob'emych i poverchnostnykh kvaziob'emnykh volnakh v polybeskonečnoj p'ezoëlektričeskoj srede*, Kristall., 25, 1, 33, 1980.
49. HIROKIMI SHIRASAKI, TOSHIO MAKIMOTO, *Energy propagation of piezoelectric surface waves on cubic crystals*, J. Appl. Phys., 49, 2, 658, 1978.
50. HIROKIMI SHIRASAKI, TOSHIO MAKIMOTO, *Asymptotic expressions for piezoelectric surface waves excited by the buried mechanical and electrical point*, J. Appl. Phys., 49, 2, 861, 1978.
51. HIROKIMI SHIRASAKI, TOSHIO MAKIMOTO, *Gaussian curvature of the slowness surface for piezoelectric surface waves on a cubic crystal*, J. Appl. Phys., 50, 4, 2795, 1979.
52. S. DATTA, B. J. HUNSINGER, *Analysis of surface waves using orthogonal functions*, J. Appl. Phys., 49, 2, 476, 1978.
53. R. F. VOGEL, *Variational limits on piezoelectric problem parameters*, IEEE Trans. Sonics Ultrason. SU-26, 4, 315, 1979.
54. J. J. CAMPBELL, W. R. JONES, *Propagation of piezoelectric surface waves on cubic and hexagonal crystals*, J. Appl. Phys., 41, 7, 2796, 1970.
55. L. P. SOLIE, *Piezoelectric waves on layered substrates*, J. Appl. Phys., 44, 2, 619, 1973.
56. M. KOŠEK, *The surface acoustic wave in a piezoelectric anisotropic medium*, Acta Phys. Slov., 32, 1, 91, 1982.
57. D. B. TAYLOR, S. CREMPIN, *Surface waves in anisotropic media: propagation in a homogeneous piezoelectric halfspace*, Proc. R. Soc. Lond., A, 364, 161, 1978.
58. G. A. ARMSTRONG, S. CRAMPIN, *Piezoelectric surface-wave calculations in multilayered anisotropic media*, Electronic Letters, 8, 21, 521, 1972.
59. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Surface waves in piezoelectric materials of the class 42 m*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 28, 9/10, 417, 1980.
60. N. Z. LJACHOV, R. M. TAZIEV, *Približennoe disperzionnoe uravnenie dlja poverchnostnoj akustičeskoj volny v sisteme tonkaja p'ezoëlektričeskaja plenka — poluprostranstvo*, Akust. Žurn., 28, 3, 375, 1982.
61. C. MAERFELD, P. TOURNOIS, *Pure shear elastic surface wave guided by the interface of two semi-infinite media*, Appl. Phys. Lett., 19, 4, 117, 1971.
62. J. M. GEL'FGAT, E. S. SYRKIN, *O suščesovanii poperečnykh akustičeskich voln, likalizovannykh u ploskoj granicy razdela dvuch tverdykh sred*, Akust. Žurn., 28, 3, 426, 1982.
63. A. K. MOROCA, *K teorii rasprostranjenija čisto poperečnykh akustičeskich voln vdol'granicy razdela dvuch p'ezoëlektričeskich sred*, Akust. Žurn., 28, 5, 665, 1982.
64. J. J. KAYME, *Conductivity and viscosity effects on wave propagation in piezoelectric crystals*, J. Acoust. Soc. Am., 26, 6, 990, 1954.
65. A. N. MATWIEJEV, *Teoria pola elektromagnetycznego*, PWN, Warszawa 1967.
66. M. AHMED, *The response of piezoelectric face plates used in ultrasonic imaging systems*, IEEE Trans. Sonics. Ultrason. SU-25, 6, 330, 1978.
67. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Coupling of mechanical elastic and electromagnetic waves in a piezoelectric medium*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 27, 8/9, 673, 1979.
68. C. C. TSENG, R. M. WHITE, *Propagation of piezoelectric and elastic surface waves on the basal plane of hexagonal piezoelectric crystals*, J. Appl. Phys., 38, 11, 4274, 1967.
69. C. C. TSENG, *Elastic surface waves on free surface and metallized surface of CdS, ZnO, and PZT-4*, J. Appl. Phys., 38, 11, 4281, 1967.
70. F. BARDATI, G. BARZILAL, G. GEROSA, *Elastic wave excitation in piezoelectric slabs*, IEEE Trans. Sonics Ultrason. SU-15, 4, 193, 1968.
71. R. D. MINDLIN, *On the equations of motion of piezoelectric crystals*, Problem of Continuum Mechanics, Muskhelishvili Anniversary Volume. p. 282. Soc. Ind. Appl. Math. Philadelphia 1961.
72. W. NOWACKI, *A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals*, Proc. Vibr. Probl., 6, 1, 3, 1965.
73. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1966.
74. L. LANDAU, E. LIFSIC, *Elektrodynamika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1960,

75. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Dynamical problems of thermo-piezoelectricity*, Bull. Acad. Polon. Sci, Sér. Sci. Techn., 27, 2, 139, 1979.
76. A. K. PAL, *Surface waves in a thermo-piezoelectric medium of monoclinic symmetry*, Czech. J. Phys., B29, 1271, 1979.
77. A. K. PAL, *Propagation and amplification of surface waves in a thermopiezo-semiconducting medium*, Acta Physica Polonica, A64, 3, 323 1983.
78. R. D. MINDLIN, *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric films*, Int. J. Solids Structures, 5, 1197, 1969.
79. R. D. MINDLIN, *Polarization gradient in elastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures, 4, 637, 1968.
80. R. A. TOUPIN, *The elastic dielectrics*, J. Rat. Mech. Anal., 5, 849, 1956.
81. R. A. TOUPIN, *A dynamical theory of elastic dielectrics*, Int. J. Engr. Sci., 1, 1, 101, 1963.
82. K. B. TOLPYGO, *Fizičeskie svojstva rešetki tipa kamennoj soli postroennoj iz deformiruemych ionov*, Ž.E.T.S., 20, 497, 1950.
83. W. COCHRAN, *Lattice vibrations*, Rep. Prog. Phys., 26, 1, 1963.
84. B. J. DICK i A. W. OVERHAUSER, *Theory of the dielectric constants of alkali halide crystals*, Phys. Rev., 112, 90, 1958.
85. R. D. MINDLIN, *Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics*, J. of Elasticity, 2, 4, 217, 1972.
86. A. ASKAR, P. C. LEE, A. S. CAKMAK, *Lattice dynamics appraach to the theory of elastic dielectrics with polarization gradient*, Phys. Rev. B., 1, 8, 3525, 1970.
87. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Coupled mechano-electric fields in solid dielectrics I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Techn., 27, 4, 377, 1979.
88. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Love's waves in elastic isotropic solid dielectrics*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., 28, 11/12, 615, 1980.
89. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Coupled mechano-electric fields in solid dielectrics II*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Techn., 27, 5/6, 471, 1979.
90. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Coupled mechano-electric fields in solid dielectrics III*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 27, 7, 581, 1979.
91. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Wave reflection and refraction in solid elastic dielectrics I*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 29, 7/8, 787, 1981.
92. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Wave reflection and refraction in solid elastic dielectrics II*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 29, 7/8, 387, 1981.
93. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Wave reflection and refraction in solid elastic dielectrics III*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 29, 9/10, 459, 1981.
94. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Wave reflection and refraction in solid elastic dielectrics IV*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 29, 9/10, 465, 1981.
95. J. P. NOWACKI, P. G. GLOCKNER, *Some dynamical problems of thermoelastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures, 15, 183, 1979.
96. J. P. NOWACKI, P. G. GLOCKNER, *Propagation of waves in the interior of a thermoelastic dielectric half-space*, Int. J. Engng. Sci., 19, 603, 1981.
97. M. LAX, D. F. NELSON, *Linear and nonlinear electrodynamics in elastic anisotropic dielectrics*, Phys. Rev. B, 4, 3694, 1971.
98. D. F. NELSON, *Theory of nonlinear electroacoustics of dielectric, piezoelectric and pyroelectric crystals*. J. Aconst. Soc. Am., 63, 1738, 1978.
99. P. G. GLOCKNER, K. L. CHOWDHURY, *Non-linear compatibility equations and Bianchi-type identities for elastic dielectrics*, Int. J. Non-Linear Mechanics, 13, 4, 205, 1978.
100. K. L. CHOWDHURY, P. G. GLOCKNER, *On thermorigid dielectrics*, J. of Thermal Stresses, 2, 73, 1979.
101. K. L. CHOWDHURY, P. G. GLOCKNER, *Hyperelastic dielectrics with saturated polarization*, Int. J. Non, Linear Mechanics, 15, 1, 31, 1980.
102. K. L. CHOWDHURY, M. EPSTEIN, P. G. GLOCKNER, *On the thermodynamics of non-linear elastic dielectrics*, Int. J. Non-Linear Mechanics, 13, 311, 1979.
103. B. COLLET, *One-dimensional acceleration waves in deformable dielectrics with polarization gradients*. Int. J. Engng. Sci., 19, 389, 1981.

104. B. COLLET, *Shock waves in deformable dielectrics with polarization gradients*, Int. J. Engng. Sci., 20, 10, 1145, 1982.
105. A. ALIPPI, *Nonlinear acoustic propagation in piezoelectric crystals*, Ferroelectrics, 42, 1/2/3/4, 109, 1982.
106. M. PLANAD, D. HAUDEN, *Non-Linear properties of bulk and surface acoustic waves in piezoelectric crystals*, Ferroelectrics, 42, 1/2/3/4, 117, 1982.
107. S. DOST, *Acceleration waves in elastic dielectrics with polarization gradient effects*, Int. J. Engng. Sci., 21, 11, 1305, 1983.

Р е з ю м е

СОПРЯЖЕННЫЕ МЕХАНО-ТЕРМО-ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ
В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Обзор касается гармонических сопряженных механо-электрических и механо-термо-электрических волн в твердых упругих средах находящихся во взаимодействии с электромагнитным полем (в большинстве случаев сведенным к электрическому) а возможно с полем температуры.

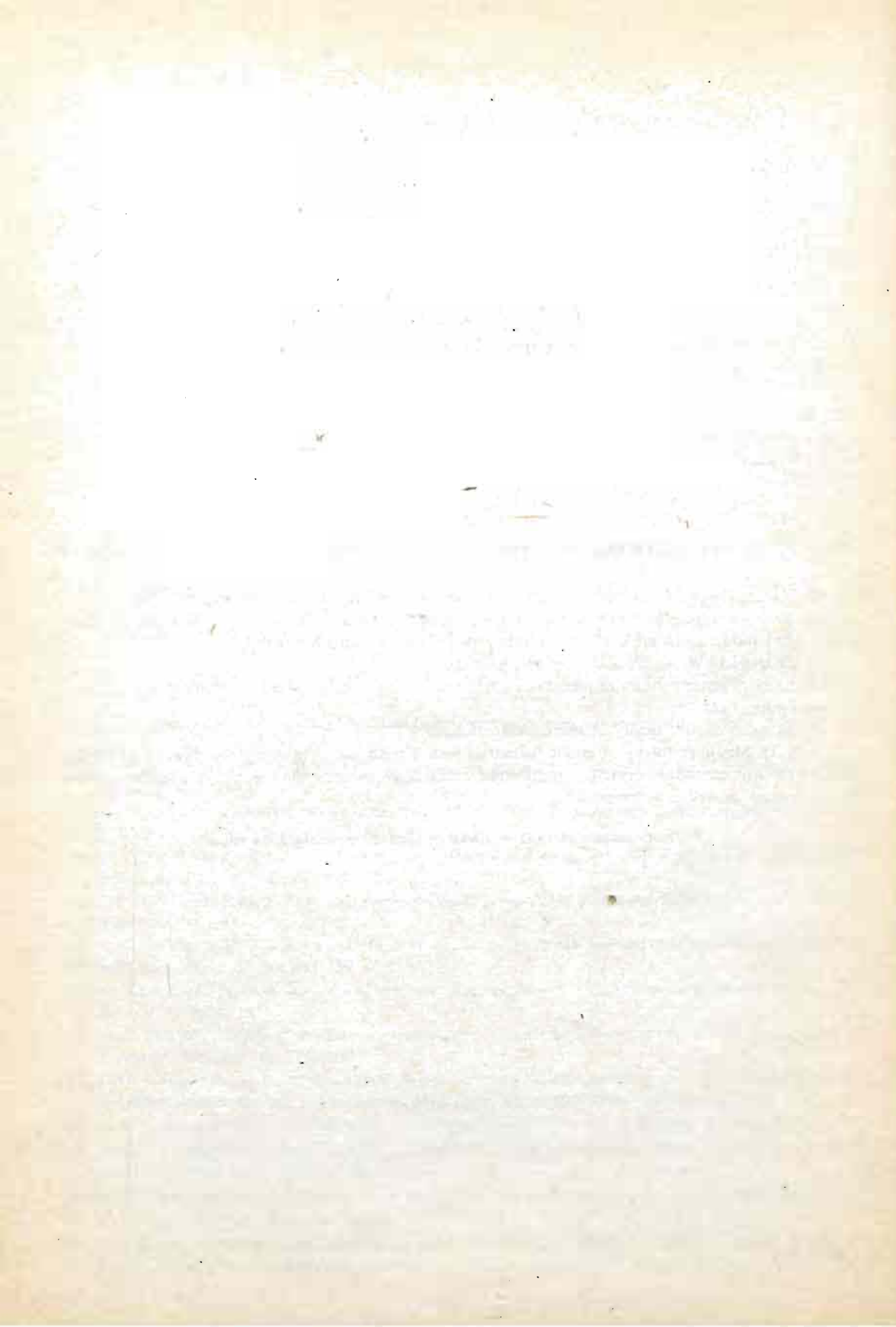
S u m m a r y

COUPLED MECHANO-THERMO-ELECTRIC WAVES IN SOLID PIEZOELECTRIC CONTINUUM

We present the problem of coupled mechanical elastic, thermal and electromagnetic fields (the latter most of the cases reduces to the electric field) in a piezoelectric medium in the case of the harmonic plane waves. The considerations are conducted on the basis of the following linear theories:

- the classical W. Voight theory of piezoelectricity,
- the more general theory of piezoelectricity based on the coupling of the electromagnetic field with the mechanical field
- the quasi-electric theory of thermo-piezoelectricity
- R. D. Mindlin's theory of elastic dielectrics with a polarization gradient, the theory formulating both the electromechanical interaction in materials with centrosymmetry and the surface effects pertaining to deformation as well as polarization.

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 stycznia 1984 roku



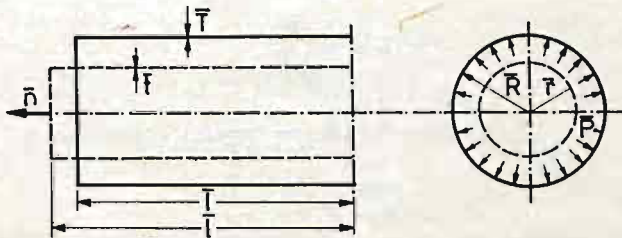
ANALIZA STATECZNOŚCI PROCESU DUŻYCH ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYSTYCH POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ PRZY DWUKIERUNKOWYM ROZCIĄGANIU

JAN BIELSKI, JACEK SKRZYPEK (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Celem pracy jest analiza procesu dużych odkształceń sprężystych cienkiej powłoki cylindrycznej rozciąganej siłą osiową \bar{n} i ciśnieniem normalnym \bar{p} (rys. 1) oraz wyznaczenie obszarów stateczności tego procesu i kresów możliwości jego realizacji (tj. kresów istnienia rozwiązania przy zadanej ścieżce sterowania) [2, 4].

Założono materiał sprężysty spełniający prawo Hooke'a, uogólnione na przypadek skończonych odkształceń (w logarytmicznej mierze Hencky'ego) i naprężeń rzeczywistych [3], [8]. Założono dalej nieściśliwość materiału, płaski stan naprężenia oraz równomierny rozkład naprężeń wzdłuż grubości powłoki. Rozważania ograniczono do osiowo symetrycznych jednorodnych stanów odkształcenia. W tej klasie poszukiwano również punktów bifurkacji z uwagi na parametr ścieżki sterowania.



Rys. 1. Geometria i obciążenie powłoki

Rozpatrzono trzy możliwości realizacji omawianego procesu:

- przez sterowanie „siłowe” czyli zadanie zależności pomiędzy ciśnieniem \bar{p} i siłą osiową \bar{n} ;
- przez sterowanie „kinematyczne”; czyli zadanie zależności pomiędzy odkształceniami osiowym ϵ_z^c i radialnym ϵ_r^c ;
- przez sterowanie „mieszane” czyli zadanie zależności między ciśnieniem \bar{p} i odkształceniem ϵ_z^c .

W każdym z tych sterowań odpowiednio inna wielkość pełni rolę umownego czasu.

Przypadek ogólniejszy powyższego zagadnienia rozpatrywany był w pracy [5] i dotyczył materiału sprężysto-plastycznego oraz sztywno-idealnie plastycznego, a także ogólniejszego

niejszego sterowania polegającego na założeniu dowolnego związku między czterema wielkościami $\varepsilon_z^c, \varepsilon_\varphi^c, \bar{p}, \bar{n}$. Jako jeden z przykładów omówione zostało sterowanie, w którym za umowy czas przyjęto objętość powłoki.

2. Układ równań podstawowych

2.1. Oznaczenia i ubezwymiarowanie. W przyjętych oznaczeniach litera duża oznacza wielkość odniesioną do konfiguracji początkowej, a mała do aktualnej.

Nadkreślenie oznacza wielkość wymiarową w odróżnieniu od wielkości bezwymiarowych, bez nadkreśleń.

- \bar{R}, \bar{r} — promień powierzchni środkowej,
- \bar{L}, \bar{l} — długość powłoki,
- \bar{T}, \bar{t} — grubość ścianki,
- \bar{V}_0 — objętość powłoki,
- $\varepsilon_z^c, \varepsilon_\varphi^c$ — odkształcenia w mierze Cauchy'ego,
- $\varepsilon_\varphi^H, \varepsilon_z^H$ — odkształcenia w mierze Hencky'ego,
- $\bar{\sigma}_\varphi, \bar{\sigma}_z$ — naprężenia rzeczywiste,
- \bar{G} — moduł Kirchhoffa,
- \bar{p} — ciśnienie wewnętrzne odniesione do jednostki powierzchni aktualnej,
- \bar{N}, \bar{n} — siła osiowa,
- $d^2 \bar{w}$ — praca nadwyżkowa.

Przyjęto do obliczeń następująco zdefiniowane wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned}\sigma_{z,\varphi} &= \frac{\bar{\sigma}_{z,\varphi}}{\bar{G}}, \\ p &= \bar{p} \frac{\bar{R}}{\bar{G}\bar{T}}, \\ n &= \bar{n} \frac{1}{2\pi\bar{G}\bar{R}\bar{T}}, \\ d^2 w &= d^2 \bar{w} \frac{1}{\bar{G}\bar{V}_0}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Wielkości geometryczne i kinematyczne odniesiono do promienia \bar{R} powierzchni środkowej w konfiguracji początkowej zgodnie z przepisem

$$A_j = \frac{\bar{A}_j}{\bar{R}}.$$

2.2. Równania podstawowe. Związki fizyczne przyjęto w postaci liniowego, logarytmicznego prawa Hooke'a dla płaskiego stanu naprężeń

$$\begin{aligned}\varepsilon_\varphi^H &= \frac{1}{6\bar{G}} (2\bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_z), \\ \varepsilon_z^H &= \frac{1}{6\bar{G}} (2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_\varphi),\end{aligned}\tag{2.2}$$

gdzie odkształcenia zdefiniowane są jako

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi}^H &= \ln(1 + \varepsilon_{\varphi}^c), & \varepsilon_{\varphi}^c &= \frac{\bar{r} - \bar{R}}{\bar{R}}, \\ \varepsilon_z^H &= \ln(1 + \varepsilon_z^c), & \varepsilon_z^c &= \frac{\bar{l} - \bar{L}}{\bar{L}}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Równania równowagi mają postać

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\varphi} &= \frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{t}, \\ \bar{\sigma}_z &= \frac{\bar{n}}{2\pi r t}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Po wyeliminowaniu naprężeń i wykorzystaniu warunku nieściśliwości

$$\bar{r}t\bar{l} = \bar{R}\bar{T}\bar{L}\quad (2.5)$$

oraz związków (2.1) otrzymamy bezwymiarowe zależności pomiędzy wielkościami siłowymi p i n oraz geometrycznymi ε_z^c i ε_{φ}^c :

$$p = \frac{2 \ln x}{x}, \quad (2.6)$$

$$n = \frac{2 \ln y}{\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}}, \quad (2.7)$$

gdzie przez x i y oznaczono

$$x = (1 + \varepsilon_{\varphi}^c)^2 (1 + \varepsilon_z^c), \quad (2.8)$$

$$y = (1 + \varepsilon_{\varphi}^c) (1 + \varepsilon_z^c)^2. \quad (2.9)$$

Do tych równań dołączamy równanie ścieżki sterowania

$$f(\varepsilon_{\varphi}^c, \varepsilon_z^c, p, n) = 0 \quad (2.10)$$

oraz definicję parametru będącego umownym czasem (np. odkształcenie ε_z^c , siła n , objętość nieściśliwej cieczy wypełniającej powłokę itp.).

3. Analiza stateczności

Analizę stateczności przeprowadzono wyłącznie dla procesów sterowanych w sposób czysto „siłowy”. W przypadku, gdy chociaż jeden z parametrów sterujących jest kinematyczny (ε_z^c , ε_{φ}^c), należy w wyrażeniu na pracę drugiego rzędu uwzględnić elementy związane z układem wymuszającym.

Za kryterium stateczności przyjęto za Druckerem [1] warunek dodatniej sumarycznej pracy nadwyżkowej wykonanej na wszystkich parach stowarzyszonych obciążeniach — przemieszczeniach.

Praca nadwyżkowa wyraża się w przypadku rozpatrywanych obciążeń następująco:

$$d^2\bar{w} = d\bar{p} \cdot d\bar{r} \cdot \bar{s} + \bar{p} \cdot d\bar{r} \cdot d\bar{s} + d\bar{n} \cdot d\bar{l}, \quad (3.1)$$

lub po uwzględnieniu przyjętych ubezwimiarowań (2.1):

$$d^2w = dp \cdot d\varepsilon_\varphi^c(1 + \varepsilon_\varphi^c)(1 + \varepsilon_z^c) + pd\varepsilon_\varphi^c[(1 + \varepsilon_\varphi^c)d\varepsilon_z^c + (1 + \varepsilon_z^c)d\varepsilon_\varphi^c] + dnd\varepsilon_z^c. \quad (3.2)$$

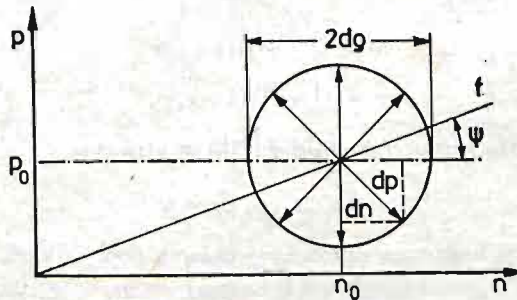
Analiza stateczności przeprowadzona została według metody zaproponowanej w pracy [6]. Polega ona na badaniu wartości pracy nadwyżkowej dla wszystkich możliwych zaburzeń położenia równowagi. Z [6] zaczerpnięto również definicje stateczności bezwzględnej oraz stateczności w kierunku ścieżki. W przypadku sterowania wieloparametrowego mówimy, że położenie równowagi układu jest bezwzględnie stateczne, jeżeli przy wszystkich możliwych jego zaburzeniach praca nadwyżkowa zewnętrzna jest nieujemna (w dopuszczalnej klasie form odkształcenia konstrukcji). Położenie równowagi jest stateczne w kierunku ścieżki „f”, jeżeli przy zaburzeniu w jej kierunku praca nadwyżkowa jest nieujemna (mimo iż w pozostałych kierunkach może być ujemna).

Wprowadzimy prostą parametryzację zaburzeń ścieżki sterowania (rys. 2)

$$\begin{aligned} dn &= dq \cos \psi, \\ dp &= dq \sin \psi, \\ \psi &\in [0; 2\pi), \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie dq jest promieniem zaburzenia. Praca nadwyżkowa związana z jednostkowym promieniem zaburzenia jest zatem dla danego punktu na ścieżce równowagi funkcją kąta ψ :

$$\frac{d^2w}{(dq)^2} = C_1 \sin^2 \psi + C_2 \cos^2 \psi + C_3 \sin \psi \cos \psi. \quad (3.4)$$



Rys. 2. Parametryzacja zaburzeń ścieżki sterowania

Stałe C_1 , C_2 , C_3 zależą od współrzędnych punktu na ścieżce równowagi i wyrażają się

$$C_1 = \frac{x^2}{3A} \left(1 + \frac{px}{6A} \right) + \frac{x\sqrt[3]{xyn}}{12AB} \left(\sqrt[3]{xy} - x\sqrt[3]{xy} \frac{p}{6A} - \frac{xy pn}{12AB} \right), \quad (3.5)$$

$$C_2 = \frac{y\sqrt[3]{xy}}{B} \left(\frac{1}{x} - \frac{p}{4B} \right), \quad (3.6)$$

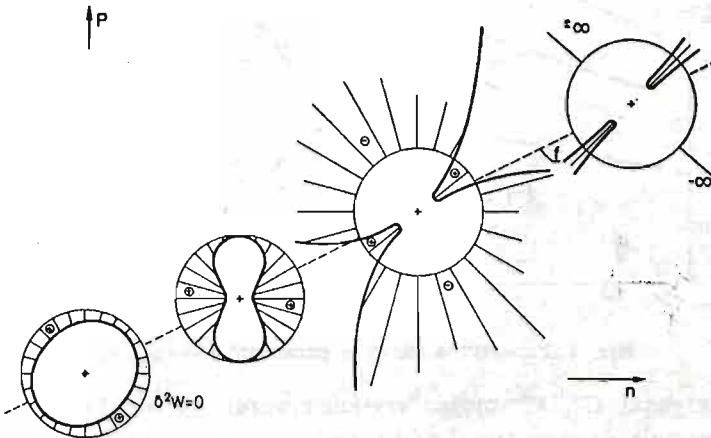
$$C_3 = \frac{\sqrt[3]{xy}}{12AB} \left(x\sqrt[3]{xy} p + \frac{xy pn}{B} - 2yn \right) - \sqrt[3]{x^2 y^2} \left(\frac{1}{2B} + \frac{1}{6A} \right), \quad (3.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \ln x, \\ B &= 3 - 2 \ln y, \end{aligned} \quad (3.8)$$

a x i y są rozwiązaniami układu równań przestępnych (2.6) i (2.7).

Rys. 3 przedstawia interpretację podanych definicji stateczności bezwzględnej i w kierunku, jak również pojęcia nośności maksymalnej (końca procesu wzdłuż zadanej ścieżki sterowania) wiążącej się z osobliwościami pracy nadwyżkowej ($d^2w \rightarrow \pm \infty$).



Rys. 3. Rozkład pracy nadwyżkowej w wybranych punktach procesu

Zaznaczone krzywe oznaczają rozkład pracy nadwyżkowej wokół punktu na ścieżce równowagi. Wartość d^2w jest na tym rysunku proporcjonalna do długości odcinka odmierzzonego wzdłuż promienia zaznaczonego koła od jego okręgu przyjętego jako poziom zero. Odcinek odłożony na zewnątrz okręgu oznacza $d^2w < 0$, do wewnątrz — $d^2w > 0$.

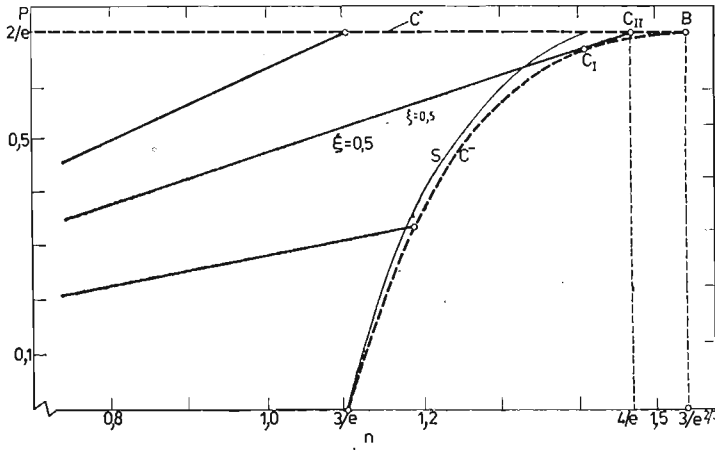
Na początku procesu praca nadwyżkowa jest we wszystkich kierunkach dodatnia. Punkt, w którym krzywa rozkładu d^2w jest styczna do okręgu $d^2w = 0$, jest ostatnim bezwzględnie statecznym na ścieżce sterowania. Utrata stateczności w kierunku ścieżki zachodzi, gdy d^2w dla kierunku wyznaczonego przez ścieżkę sterowania jest równa zero. Koniec procesu wzdłuż zadanej ścieżki sterowania łączy się z osiągnięciem przez d^2w wartości ∞ , co wynika ze zmierzania przyrostu zmiennej niezależnej do zera (nośność maksymalna).

Wykresy zależności odkształcenia ϵ_z^c od siły n (rys. 5) oraz odkształcenia ϵ_ϕ^c od ciśnienia p (rys. 6) sporządzono przyjmując równanie ścieżki sterowania procesem w postaci:

$$p = \xi_1 \cdot n, \quad (3.9)$$

gdzie ξ_1 jest współczynnikiem proporcjonalności. Rolę umownego czasu pełni siła osiowa n . Rys. 4 przedstawia płaszczyznę zmiennych sterowania $p-n$. Na wymienionych rysunkach krzywe C^+ i C^- oznaczają końce procesów (nośności maksymalne odpowiednio dla p i n). Praca nadwyżkowa zmierza wraz ze zbliżaniem się punktu na ścieżce równowagi do tych krzywych odpowiednio do $+\infty$ lub $-\infty$. Krzywa S oznacza punkty utraty stateczności bezwzględnej. Zauważmy, że praca nadwyżkowa przyjmuje po raz pierwszy wartość ujem-

ną, jeżeli zaburzenie ścieżki opisane jest parametrem $\psi = 0$ (wzór 3.3). Oznacza to, że kontynuacja procesu po utracie stateczności bezwzględnej przy stałym ciśnieniu ($dp = 0$) odbywałaby się w sposób niestateczny. Związane jest to z ujemną wartością drugiego składnika we wzorze (3.1) ($d\bar{r} < 0$).



Rys. 4. Płaszczyzna siłowych parametrów sterujących

Równania krzywych C^+ i C^- można uzyskać z warunków osobliwości odwzorowania przestrzeni sterowania do przestrzeni zachowania

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

lub równoważnie z warunku zmierzania d^2w do nieskończoności (wzory 3.5 ÷ 3.8)

$$A = 0 \quad \text{lub} \quad B = 0. \quad (3.11)$$

Otrzymujemy dwa równania krzywych nośności maksymalnej w płaszczyźnie sterowania (rys. 4):

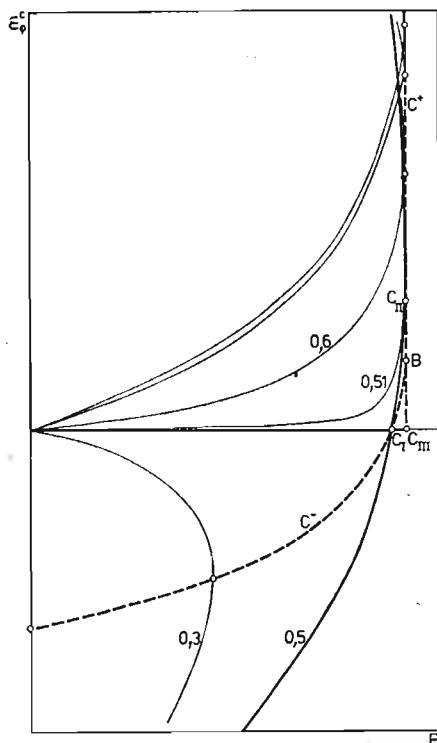
$$C^+: p = \frac{2}{e}, \quad (3.12)$$

$$C^-: p = \frac{6 \ln \frac{en}{3}}{\left(\frac{en}{3}\right)^3}. \quad (3.13)$$

Krzywa C^- jest wklęsła.

Kres istnienia rozwiązywania wzdłuż zadanej ścieżki sterowania odpowiada jednej z poniższych możliwości:

1) dla $0 \leq \xi_1 \leq 0.5$ (wzór 3.9) wykres $\varepsilon_z^c = \varepsilon_z^c(n)$ kończy się pionową styczną „w górę” $\left(\frac{\partial \varepsilon_z^c}{\partial n} \rightarrow +\infty\right)$, a wykres $\varepsilon_\varphi^c = \varepsilon_\varphi^c(p)$ — pionową styczną „w dół” $\left(\frac{\partial \varepsilon_\varphi^c}{\partial p} \rightarrow -\infty\right)$



Rys. 6. Zależność $\varepsilon_{\varphi}^c = \varepsilon_{\varphi}^c(p)$, sterowanie siłowe

Przykładową krzywą sterującą zapewniającą powyższe jest parabola o równaniu

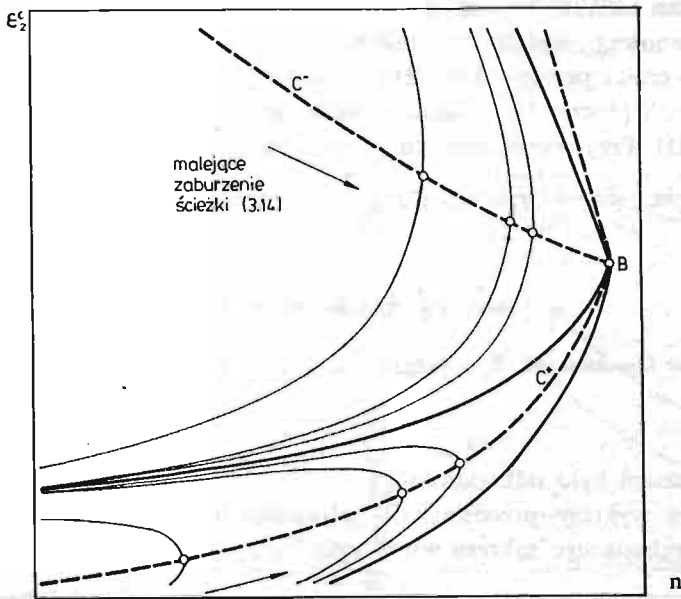
$$p = -\frac{2\sqrt[3]{e}}{9}n^2 + \frac{4}{3\sqrt[3]{e}}n. \quad (3.14)$$

Kontynuacja procesu z punktu B przy malejącym parametrze czasu (siły n) możliwa jest (oprócz powrotu po ścieżce podstawowej) w dwóch różnych kierunkach: $\varepsilon_z^c \rightarrow \infty$ i $\varepsilon_{\varphi}^c \rightarrow -1$ lub $\varepsilon_z^c \rightarrow -1$ i $\varepsilon_{\varphi}^c \rightarrow \infty$ (rys. 7). Prowadząc obliczenia dla zaburzonej ścieżki typu (3.14) otrzymujemy przebiegi wpisujące się w krzywe niezaburzone (rys. 7).

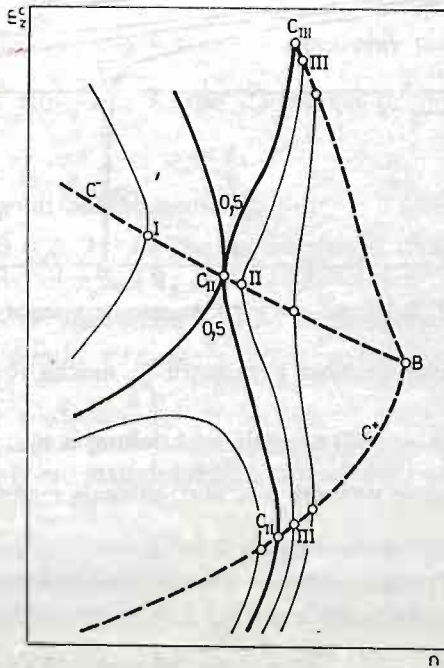
Charakter tych przebiegów, jak również rozdwojenie ścieżki po osiągnięciu nośności maksymalnej sugeruje, że punkt B jest punktem bifurkacji ze względu na parametr ścieżki sterowania. Obie formy równowagi odpowiadające rozdwojonej ścieżce położeń równowagi są przy tym symetryczne (zgodnie z dopuszczoną klasą rozwiązań) i prowadzą w konsekwencji do różnych mechanizmów zniszczenia cylindra. Wracając do analizy ścieżek prostoliniowych w płaszczyźnie sił należy jeszcze zwrócić uwagę na takie, dla których parametr ścieżki spełnia warunek

$$\frac{2}{3e^{2/3}} < \xi_1 < 0,5 \quad (3.15)$$

Dla parametru z tego przedziału ścieżka sterująca przecina krzywą nośności maksymalnej C^- (w dwóch punktach I i II (rys. 8), a krzywą C^+ w punkcie III.



Rys. 7. Fragment płaszczyzny sterowania i zachowania; sterowanie siłowe paraboliczne (3.14)



Rys. 8. Fragment płaszczyzny sterowania i zachowania dla ścieżek typu (3.15)

Ponieważ stan układu, ze względu na konserwatywność, nie zależy od drogi dojścia do punktu równowagi, można po dojściu drogą krzywoliniową kontynuować proces wzdłuż drugiej części prostej (3.9). Rys. 8 pokazuje fragment płaszczyzny $(n - \varepsilon_z^c)$ dla tych przebiegów. Widoczne jest osiągnięcie przez krzywą minimum (punkt II) oraz maksimum (punkt III). Przy współczynniku ξ_1 zmierzającym do 0,5 punkty I i II łączą się w jeden, natomiast gdy ξ_1 zmierza do $\frac{2}{3e^{2/3}}$, punkty II i III zbiegają do punktu B.

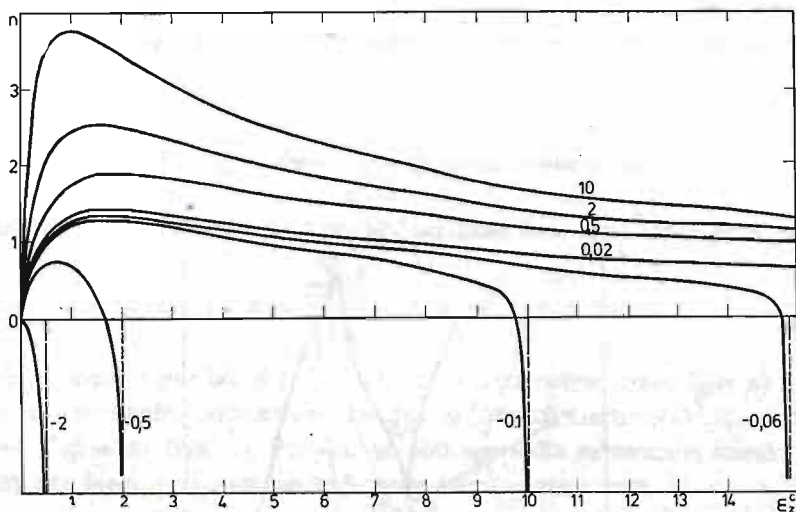
4. Sterowanie kinematyczne i mieszane

4.1. Sterowanie kinematyczne. Rozważano procesy, których ścieżkę sterowania wybrano w postaci:

$$\varepsilon_\varphi^c = \xi_2 \cdot \varepsilon_z^c, \quad (4.1)$$

a umownym czasem było odkształcenie ε_z^c .

Odpowiednie wykresy przedstawiają zależności $n = n(\varepsilon_z^c)$ (rys. 9) oraz $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$ (rys. 10) dla przebadanego zakresu współczynnika ξ_2 .



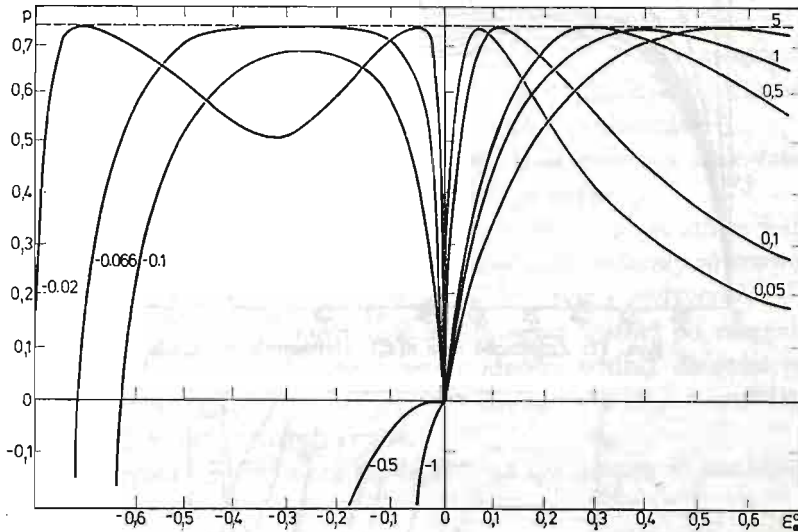
Rys. 9. Zależność $n = n(\varepsilon_z^c)$; sterowanie kinematyczne

W zależności od przyjętej wartości parametru ξ_2 można rozróżnić następujące przypadki:

1) dla $\xi_2 > 0$ wykresy $n = n(\varepsilon_z^c)$ osiągają maksimum, a następnie zbiegają asymptotycznie do $n = 0$. Odpowiednie wykresy $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$ osiągają maksimum $p_{\max} = \frac{2}{e}$, po czym również zbiegają asymptotycznie do $p = 0$.

2) dla $\xi_2 < 0$ ograniczeniem realizacji procesu jest zmierzanie odkształcenia ε_φ^c do wartości -1 . Wykresy $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$ oraz $n = n(\varepsilon_z^c)$ kończą się wtedy asymptotami pionowymi odpowiednio $\varepsilon_\varphi^c = -1$ i $\varepsilon_z^c = -\frac{1}{\xi_2}$, co oznacza, że ciśnienie p i siła n zbiegają do $-\infty$.

Dla $-0,066 \leq \xi_2 < 0$ wykres zależności $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$ posiada dwa maksima, a zależności $n = n(\varepsilon_z^c)$ — dwa punkty przegięcia. Procesy, dla których ξ_2 jest bliskie $-0,066$, przebiegają w pewnym przedziale wartości odkształcenia ε_φ^c przy prawie stałym ciśnieniu (bardzo płaski przebieg zależności $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$).



Rys. 10. Zależność $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$; sterowanie kinematyczne

Graniczna wartość współczynnika $\xi_2 = -0,066$ została wyznaczona numerycznie, jako taka, przy której równanie $\frac{\partial p}{\partial \varepsilon_\varphi^c} = 0$ posiada potrójny pierwiastek $\varepsilon_\varphi^c < 0$.

4.2. Sterowanie mieszane. Równanie ścieżki sterowania przyjęto w postaci

$$p = \xi_3 \cdot \varepsilon_z^c, \tag{4.2}$$

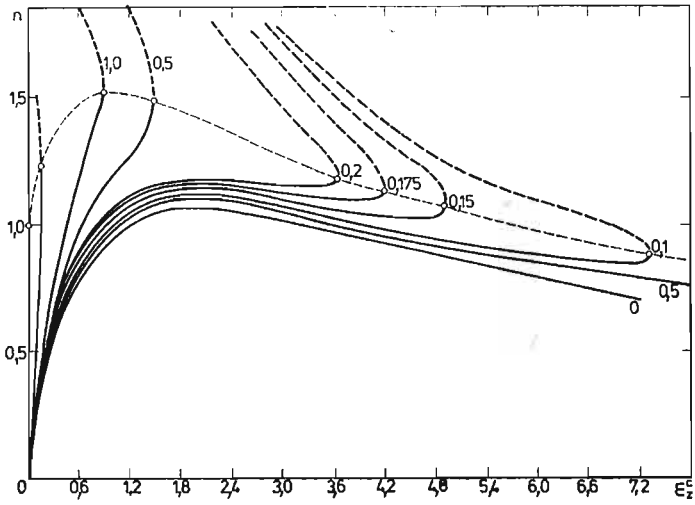
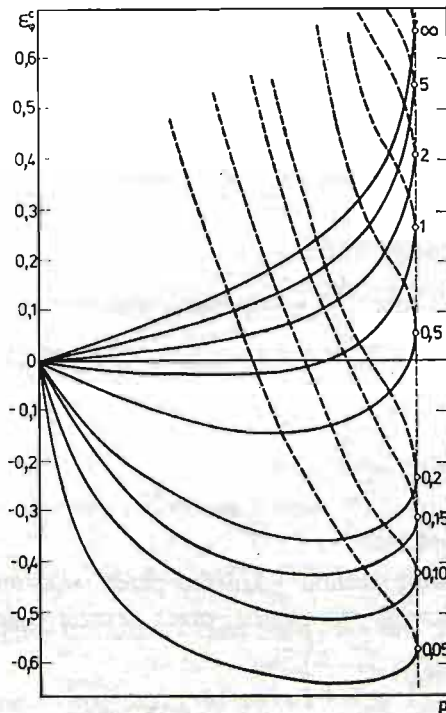
a rolę umownego czasu pełni odkształcenie ε_z^c .

Na wykresie $n = n(\varepsilon_z^c)$ (rys. 11) można zaobserwować dwa odmienne przebiegi krzywych w zależności od współczynnika ξ_3 (wzór (4.2)).

1) Dla $\xi_3 < 0,25$ krzywe przechodzą kolejno przez maksimum, minimum oraz osiągają kres wzdłuż danej ścieżki sterowania przez wyczerpanie nośności maksymalnej (ciśnienie p osiąga wtedy wartość $\frac{2}{e}$).

2) Dla $\xi_3 \geq 0,25$ krzywe nie mają lokalnych ekstremów i osiągają wprost opisany wyżej kres.

Przy rosnącym parametrze sterującym (wzdłuż danej ścieżki) proces osiąga kres w punkcie, w którym ciśnienie osiąga wartość maksymalną. Może on być dalej kontynuowany wzdłuż tej samej ścieżki jedynie przy malejącej wartości tego parametru. Możliwe są przy tym również nowe położenia równowagi układu będące przedłużeniem poprzednich rozwiązań (linia przerywana rys. 11 i 12).

Rys. 11. Zależność $n = n(\epsilon_2^c)$; sterowanie mieszaneRys. 12. Zależność $\epsilon_\varphi^c = \epsilon_\varphi^c(p)$; sterowanie mieszane

5. Wnioski

Badano kresy istnienia rozwiązań dla cienkiej powłoki cylindrycznej rozciąganej dwukierunkowo przy różnych wariantach sterowania procesem.

1. W przypadku sterowania kinematycznego ograniczeniem realizacji procesu jest

zmierzanie odkształcenia ε_{φ}^c do wartości -1 (promień \bar{r} powłoki zmierza do zera), co łączy się z osobliwościami wielkości siłowych.

2. Przy sterowaniu siłowym istnieją dwa rodzaje kresów istnienia rozwiązania wzdłuż zadanej ścieżki sterowania — obydwa przez wyczerpanie nośności maksymalnej.

Jednym z nich jest nośność maksymalna ze względu na ciśnienie p (dla $\xi_1 > 0,5$; praca nadwyżkowa zmierza do $+\infty$), a drugim — nośność maksymalna ze względu na siłę osiową n (dla $\xi_1 < 0,5$; praca nadwyżkowa zmierza do $-\infty$).

Przy parametrze $\xi_1 = 0,5$ istnieje w związku z tym niestabilność rozwiązania w punkcie bifurkacji C_I , polegająca na tym, że dowolnie małe jego odchylenie (od wartości $\xi_1 = 0,5$) może spowodować dwa różne rodzaje kresu istnienia rozwiązania.

3. Możliwa jest kontynuacja procesu po osiągnięciu nośności maksymalnej wzdłuż zadanej ścieżki przy malejącym parametrze umownego czasu.

4. Przy odpowiednim doborze sterowania krzywoliniowego możliwe jest osiągnięcie punktu bifurkacji B (podwójnej nośności maksymalnej). Obie formy równowagi odpowiadające rozdwojonej ścieżce położenia równowagi są przy tym symetryczne.

5. Należy zwrócić uwagę, że możliwość rozdwojenia ścieżki po osiągnięciu punktu bifurkacji może spowodować zaburzenie jednorodności wzdłuż długości powłoki (np. przez równoczesną realizację różnych form równowagi w różnych częściach powłoki). Efekty takie nie były w pracy rozpatrywane.

6. Krzywa (nośności maksymalnej ze względu na siłę osiową n) jest wklęsła w płaszczyźnie sterowania $p-n$.

Literatura

1. D. C. DRUCKER, *On the postulate of stability in the mechanics of continua*, J. de Mecanique, 2, 3, 235 - 249, 1964.
2. W. FLUGGE, *Die stabilität der Kreiscylindershale*, Ing. Arch. 5, 3 463 - 506 (1932).
3. F. D. MURNANGHAN, *The compressibility of solids under extreme pressures*, Kármán Anniv. 121 - 136, 1961.
4. Ch. M. MUSZTARI, A. W. SAWCZENKO, *Ob ustojczivosti cylindriczeskich i koniczeskich oboloczek kruzogogo seczenija pri sowmestnom diejstwji osiewogo szatija i wnieszniego normalnogo dawlenija*, Prikl. Mat. Miecz., 6, 18, 667 - 669, 1954.
5. A. MUC, J. SKRZYPEK, *Duże odkształcenia sprężysto-plastyczne powłok walcowych obciążonych ciśnieniem i siłą osiową przy różnych wariantach sterowania procesem* (w druku).
6. J. SKRZYPEK, *Odkształcenia plastyczne i analiza form utraty nośności geometrycznie nieliniowych powłok toroidalnych*. Zeszyty Nauk. Polit. Krak., Podst. Nauki Techn., 2, 1 - 194, 1979.
7. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
8. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *Principles of classical mechanics and field theory*, Handbuch der Physik 3/1, Springer-Verlag, Berlin 1960.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В СЛУЧАЕ ДВУНАПРАВЛЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ

Рассмотрен процесс двунаправленного растяжения тонкостенной цилиндрической оболочки продольной силой и внутренним давлением. Предположен материал выполняющий закон Гука, обобщенный для случая логарифмических деформаций и действительных напряжений.

Определены зависимости между силовыми и геометрическими величинами для разных вариантов управления процессом. В случае силового управления определены точки потери абсолютной устойчивости используя критерий работы второго порядка. Определены также кривые максимальной несущей способности, а также точки бифуркации для принятых дорожек управления

Summary

STABILITY OF THE PROCESS OF LARGE ELASTIC STRAINS OF A CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO BIAXIAL TENSION

Process of biaxial tension of thin cylindrical shell loaded by the axial force and internal pressure has been analysed. The material has been described by Hooke's law generalized for the logarithmic strains and true stresses.

The relations between forces and geometrical quantities have been determined for the different variants of control of the process. In the case of force-controlled process the points of the loss of absolute stability have been found on the basis of second-order work criterion. Curves of maximal carrying capacity and bifurcation points also have been determined.

Autorzy wyrażają podziękowanie prof. dr hab. inż. Michałowi Życzkowskiemu za cenne sugestie w trakcie realizacji pracy.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 września 1982 roku

IDEALNIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA TARCZA O PROFILU HIPERBOLICZNYM

KRZYSZTOF SZUWALSKI — (KRAKÓW)

1. Wstęp

Ogólne zagadnienie teorii plastyczności polega na transformacji zależności między naprężeniem i odkształceniem na poziomie punktu, na zależność między obciążeniem zewnętrznym a pewnym charakterystycznym uogólnionym przemieszczeniem na poziomie całego ciała. Dokonuje się tej transformacji wykorzystując warunki równowagi, odpowiednie warunki brzegowe, prawa fizyczne i związki geometryczne. Najczęściej na poziomie punktu dopuszcza się nieograniczony wzrost odkształceń, jak to ma miejsce w przypadku ciał idealnie i asymptotycznie idealnie plastycznych. Jak długo przemieszczenia są określone jednoznacznie, układ może przenosić obciążenia, czyli pracuje jako konstrukcja nośna. Jeżeli w jakimś punkcie przemieszczenia stają się nieokreślone, oznacza to, że pojawił się pewien mechanizm zniszczenia i została wyczerpana nośność graniczna układu.

Określenie nośności granicznej układu należy do najważniejszych zadań teorii plastyczności. Nie zawsze jednak istnieje rozwiązanie tego zadania. Przykłady zagadnień, w których nie można było wyznaczyć nośności granicznej układu bez przyjęcia pewnych, niedopuszczalnych nieciągłości pola przemieszczeń podał Shoemaker [2, 3]. Życzkowski i Szuwalski [4] zaproponowali nazwać obciążenie, przy którym pojawiają się niedopuszczalne nieciągłości przemieszczeń (nieciągłości przemieszczeń w kierunku normalnym do powierzchni nieciągłości) — nośnością rozdzielczą układu. Nazwa ta ma uzasadnienie w fakcie, że niedopuszczalne nieciągłości przemieszczeń prowadzą do dekohezji — rozdzielenia dwóch części układu. Zatem nośność rozdzielcza określa faktyczną nośność układu jako całości.

W pracach Szuwalskiego można znaleźć rozwiązania problemu wyznaczania nośności rozdzielczej dla statycznie niewyznaczalnych układów prętowych [6] i dla płaskich tarcz ze sztywną inkluzją [5]. W obu przypadkach rozpatrywano możliwość ewentualnej dalszej pracy układu dekohezji. Szczególnego znaczenia nabiera nośność rozdzielcza w przypadku obciążeń czysto cieplnych [8], kiedy nośność graniczna układu w ogóle nie istnieje w wyniku wzajemnego kompensowania się odkształceń cieplnych i plastycznych.

W dotychczasowych badaniach [5] i [8] efekt dekohezji w układach tarczowych był wynikiem niejednorodności stanów naprężenia i odkształcenia wywołanych niejednorodnością samej tarczy — idealnie sztywną inkluzją. Celem niniejszej pracy jest zbadanie wpływu na nośność rozdzielczą zmiennej w sposób ciągły grubości tarczy, jak również wpływu podatności części środkowej tarczy.

2. Zakres sprężysty i nośności sprężysta

Warunek równowagi wewnętrznej dla tarczy kołowo-symetrycznej o zmiennej grubości $h(r)$, po wyrażeniu występujących w nim naprężeń przez przemieszczenie promieniowe u , przy pomocy prawa Hooke'a, przyjmuje ogólną postać

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \right) \frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \nu \frac{r}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \right) u = 0. \quad (2.1)$$

Równanie to, w którym ν oznacza liczbę Poissona, daje się scałkować w sposób ścisły tylko dla tarczy płaskiej lub tarczy o profilu hiperbolicznym. Rozwiązania dla tych przypadków podaje między innymi S. D. Ponomariew [1]. Przy założeniu, że grubość tarczy zmienia się zgodnie z prawem

$$h(r) = h_0 \left(\frac{r}{h_0} \right)^{-\kappa}, \quad (2.2)$$

w którym wykładnik potęgowy κ jest liczbą dodatnią, całka ogólna równania (2.1) jest równa

$$u = Cr^m + \frac{D}{r^n}, \quad (2.3)$$

przy czym dodatnie wykładniki potęgowe równają się

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} + \nu\kappa + 1} + \frac{\kappa}{2}, \\ n &= \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} + \nu\kappa + 1} - \frac{\kappa}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Naprężenia w takiej tarczy opisane są wzorami

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[C(m+\nu)r^{m-1} + \frac{D(\nu-n)}{r^{n+1}} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[C(1+\nu m)r^{m-1} + \frac{D(1-\nu n)}{r^{n+1}} \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

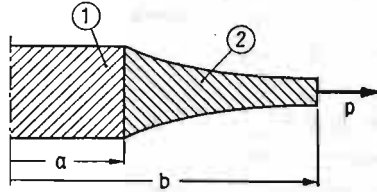
gdzie E oznacza moduł Younga. Naprężenie w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej tarczy σ_z przyjmujemy równe zero. Stałe całkowania C i D należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Przedstawione powyżej rozwiązanie ma poważną nieściśłość, gdyż założenie płaskiego stanu naprężenia stoi w wyraźnej sprzeczności z bardzo szybką zmianą grubości tarczy w pobliżu jej środka, gdzie zmierza ona do nieskończoności. W celu wyeliminowania tej sprzeczności zajmiemy się tarczą złożoną z połączonych trwale dwóch części: środkowej o stałej grubości i zewnętrznego pierścienia, w którym grubość zmienia się hiperbolicznie zgodnie z prawem (2.2) — rys. 1. Rozważymy najogólniejszy przypadek, kiedy każda z części wykonana jest z innego materiału. Wielkości odnoszące się do części płaskiej będą oznaczane indeksem 1, a dotyczące części hiperbolicznej — 2.

Przy założeniu sprężystości odkształceń dla części płaskiej dla $0 \leq r \leq a$ obowiązują znane rozwiązania Lamégo — we wzorach (2.3) i (2.5) należy przyjąć $m = n = 1$, nato-

miast dla części hiperbolicznej dla $a \leq r \leq b$ wykładniki potęgowe m i n określają wzory (2.4). Do wyznaczenia stałych C_1 i D_1 w części środkowej oraz C_2 i D_2 w pierścieniu zewnętrznym posłużą nam następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \text{dla } r = 0 \quad & \sigma_{r_1} = \sigma_{\theta_1} \rightarrow D_1 = 0; \\ \text{dla } r = a \quad & \sigma_{r_1} = \sigma_{r_2}; \quad u_1 = u_2; \\ \text{dla } r = b \quad & \sigma_{r_2} = p. \end{aligned} \quad (2.6)$$



Rys. 1

Jak z nich wynika, w płaskiej części występuje jednorodny stan naprężenia, natomiast w interesującej nas części hiperbolicznej rozkład naprężeń jest określony wzorami:

$$\begin{aligned} \sigma_{r_2} &= p \frac{\varrho^{m-1} [(m+\nu_2) + \eta(1-\nu_1)] - \varrho^{-n-1} [\eta(1-\nu_1) - (n-\nu_2)]}{\beta^{m-1} [(m+\nu_2) + \eta(1-\nu_1)] - \beta^{-n-1} [\eta(1-\nu_1) - (n-\nu_2)]} \\ \sigma_{\theta_2} &= p \frac{\varrho^{m-1} n [(m+\nu_2) + \eta(1-\nu_1)] + \varrho^{-n-1} m [\eta(1-\nu_1) - (n-\nu_2)]}{\beta^{m-1} [(m+\nu_2) + \eta(1-\nu_1)] - \beta^{-n-1} [\eta(1-\nu_1) - (n-\nu_2)]} \end{aligned} \quad (2.7)$$

w których η oznacza stosunek modułów sprężystości, β — promieni, ϱ zaś — bezwymiarowy promień:

$$\eta = \frac{E_1}{E_2}; \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad \varrho = \frac{r}{a}. \quad (2.8)$$

W celu ustalenia nośności sprężystej tarczy obliczymy kwadrat intensywności naprężeń wg hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego:

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \frac{p^2}{M^2} \{ \varrho^{2m-2} [(m+\nu_2) + \eta(1-\nu_1)]^2 (1-n+n^2) + \varrho^{-2n-2} [\eta(1-\nu_1) - \\ & - (n-\nu_2)]^2 (1+m^2+m) + \varrho^{m-n-2} [\eta(1-\nu_1) + (m+\nu_2)] \cdot \\ & \cdot [\eta(1-\nu_1) - (n-\nu_2)] (2mn-2-m+n) \}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

przez M oznaczono tutaj mianownik wzorów (2.7). Ponieważ ta funkcja nie ma maksimum w przedziale $1 \leq \varrho \leq \beta$, przeto proces uplastycznienia może się zacząć tylko na jednym z brzegów, dla $\varrho = 1$ lub $\varrho = \beta$. Intensywności naprężeń na brzegach są równe:

$$\begin{aligned} \sigma_{e(r=a)} &= \frac{p(m+n)}{M} \{ 1 - [\nu_2 + \eta(1-\nu_1)] + [\nu_2 + \eta(1-\nu_1)]^2 \}^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_{e(r=b)} &= \frac{p}{M} \{ \beta^{2m-2} (1-n+n^2) [m+\nu_2 + \eta(1-\nu_1)]^2 - \beta^{m+n-2} (1-2\nu_2) \cdot \\ & \cdot [\eta^2(1-\nu_1)^2 + \eta(1-\nu_1)(\nu_2 - 2\nu_2) - (1-\nu_2)^2] + \beta^{-2n-2} (1+m+m^2) [\eta(1-\nu_1) - (n-\nu_2)] \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

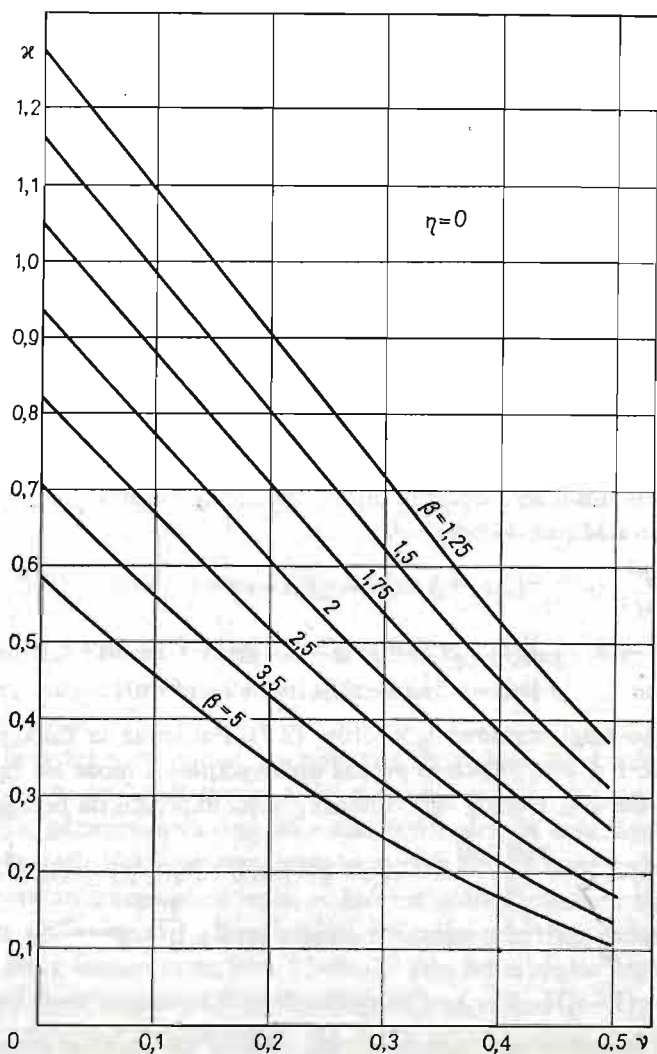
Przyrównanie prawej strony jednego z tych równań do wartości granicy plastyczności σ_0 pozwala określić nośność sprężystą tarczy. Aby ustalić, które z równań należy wyko-

rzystać, porównamy intensywności naprężeń na obu brzegach części hiperbolicznej tarczy, co prowadzi do równania:

$$\beta^{2(m+n)}(1-n+n^2)[m+\nu_2+\eta(1-\nu_1)]-\beta^{m+n}\kappa(1-2\nu_2)[\eta^2(1-\nu_1)^2-(1-\nu_2)^2+\eta(1-\nu_1)(\kappa-2\nu_2)]+\beta^{2n-2}(m+n)^2\{1-[\nu_2+\eta(1-\nu_1)]+[\nu_2+\eta(1-\nu_1)]^2\}+(1+m+m^2)[\eta(1-\nu_1)-(n-\nu_2)]^2=0 \quad (2.11)$$

Łatwo sprawdzić, że w szczególnym przypadku, dla tarczy jednorodnej, gdy $\eta = 1$ i $\nu_1 = \nu_2$, równanie to może być spełnione wyłącznie dla wykładnika potęgowego $\kappa = 1$, a co za tym idzie, $m = n = 1$, czyli dla tarczy płaskiej. Uplastyczni się wtedy równocześnie cała tarcza i układ osiągnie swoją nośność graniczną. Równanie (2.11) było rozwiązywane numerycznie. Poszukiwano wykładnika potęgowego κ spełniającego to równanie dla różnych wartości parametrów β , η i $\nu_1 = \nu_2$. Wyniki zostały przedstawione graficznie.

Wykres (rys. 2) przedstawiony na płaszczyźnie $\eta = 0$ (środek idealnie sztywny) obra-

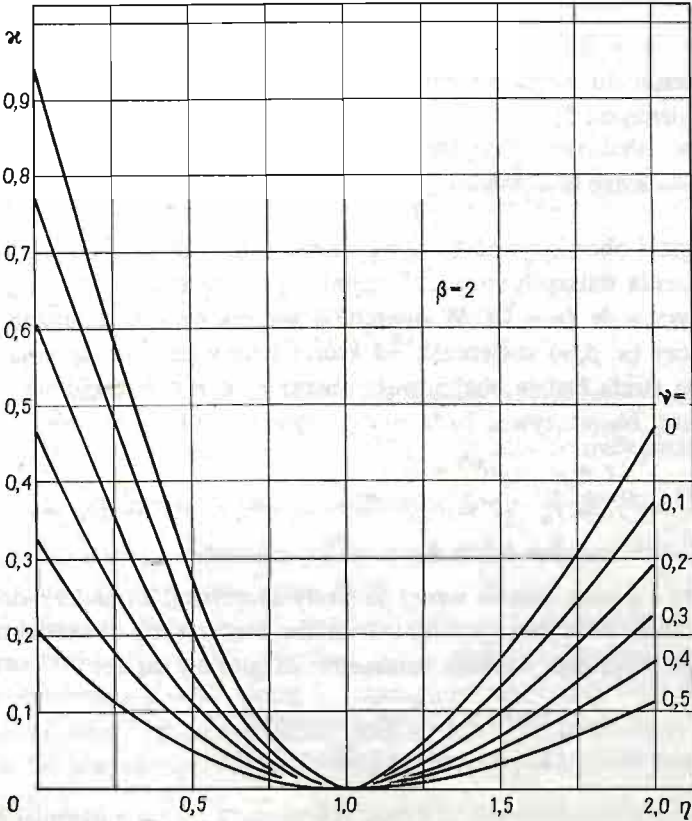


Rys. 2

zuje zależność κ od liczby Poissona ν . Na tym wykresie, jak i na następnym, gdy wykładnik potęgowy będzie większy od leżącego na linii granicznej, uplastycznienie rozpocznie się od strony promienia zewnętrznego b , natomiast dla κ mniejszych (tarcza bardziej płaska) strefa plastyczna będzie się rozwijała od promienia a . Z wykresu wynika, że graniczna wartość κ obniża się bardzo wyraźnie ze wzrostem stopnia nieściśliwości materiału.

Również zwiększenie β (stosunkowo szerszy pierścień hiperboliczny) wpływa na zmniejszenie granicznego κ .

Przebieg linii stałego ν na wykresie (rys. 3) (dla $\beta = 2$) wskazuje, że zarówno środek sztywniejszy od części zewnętrznej ($\eta < 1$), jak i podatniejszy ($\eta > 1$) powoduje zwiększe-



Rys. 3

nie wyężenia na brzegu wewnętrznym dla $r = a$. Aby osiągnąć takie samo wyężenie na brzegu zewnętrznym, należy tam ująć nieco materiału, tym więcej, im bardziej η różni się od 1 i im ściśliwszy jest materiał. Wszystkie krzywe osiągają dla $\eta = 1$ minimum równe zero (tarcza płaska, jednorodna).

3. Zakres sprężysto-plastyczny i nośność rozdzielcza

Dalszy wzrost obciążenia ponad nośność sprężystą \bar{p} może spowodować pojawienie się strefy odkształceń plastycznych, chociaż nie zawsze ta strefa będzie się mogła rozwinąć,

co dalej zostanie wykazane. W strefie plastycznej przyjmujemy jako obowiązujący warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego, Wykorzystamy trygonometryczną parametryzację tego warunku typu Nadai-Sokołowskiego:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \zeta, \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\zeta + \frac{\pi}{3} \right), \quad (3.1)$$

gdzie ζ jest parametrem, którego rozkład w funkcji promienia należy określić. Dokonamy tego w oparciu o warunek równowagi wewnętrznej, który dla tarczy hiperbolicznej przyjmuje postać:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r(1-\nu) + \sigma_\theta = 0. \quad (3.2)$$

Po podstawieniu do niego wzorów (3.1) i po scałkowaniu można znaleźć zależność odwrotną: promienia od ζ :

$$r = k \exp \left(\frac{\sqrt{3} \zeta}{2\nu^2 - 2\nu + 2} \right) \sin \left(\frac{2\nu - 1}{2\nu^2 - 2\nu + 2} \right) \left[\zeta + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\nu - 1} \right) \right]. \quad (3.3)$$

W strefie sprężystej obowiązywać będą wyprowadzone wcześniej wzory (2.3)÷(2.5).

Dla uproszczenia dalszych rozważań zajmujemy się tarczą hiperboliczną osadzoną na idealnie sztywnym wale ($\eta = 0$). W oparciu o wykres na rys. 2 można dla ustalonych parametrów tarczy (ν, β, ν) stwierdzić, od której strony zacznie się pojawiać strefa plastyczna. Jeżeli ta strefa będzie obejmowała obszar $r_* \leq r \leq b$, część zaś wewnętrzna pozostanie sprężysta, obowiązywać będą następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} r = a & \quad u^{(e)} = 0 \\ r = r_* & \quad \zeta = \zeta_*, \quad \sigma_r^{(e)} = \sigma_r^{(p)}, \quad \sigma_\theta^{(e)} = \sigma_\theta, \\ r = b & \quad \zeta = \zeta_b, \quad \sigma_r^{(p)} = p = q\sigma_0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

w których indeks e u góry określa wzory ze strefy sprężystej, a indeks p dotyczy wielkości w strefie plastycznej. Po wykorzystaniu warunków brzegowych dochodzimy do równania przestępnego, określającego wartość parametru na granicy stref:

$$\frac{(2m+1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \zeta_*)(n-\nu)a^{m+n}}{(2n-1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \zeta_*)(m+\nu)r_*^{m+n}} = 1, \quad (3.5)$$

przy czym

$$r_* = b \exp \left[\frac{\sqrt{3} (\zeta_* - \zeta_b)}{2\nu^2 - 2\nu + 2} \right] \frac{\left[\sin \left[\zeta_* + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\nu - 1} \right) \right] \right]^{\left(\frac{2\nu - 1}{2\nu^2 - 2\nu + 2} \right)}}{\left[\sin \left[\zeta_b + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\nu - 1} \right) \right] \right]}. \quad (3.6)$$

Wartość parametru na promieniu zewnętrznym ζ_b jest określona przez obciążenie:

$$\zeta_b = \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} q \right). \quad (3.7)$$

W przypadku gdy w miejscu pierwszego uplastycznienia spełniony będzie warunek,

że naprężenie promieniowe będzie dwa razy większe od obwodowego, wówczas w tym miejscu odkształcenie promieniowe będzie zmierzać do nieskończoności, na co zwrócił uwagę Życzkowski [7]. Kontynuacja procesu musiałaby się wiązać ze skokową zmianą w tym miejscu przemieszczenia promieniowego. Ponieważ jest to nieciągłość niedopuszczalna, wystąpi kres ciągłego rozwiązania. Układ osiągnie swą nośność rozdzielczą pokrywającą się z nośnością sprężystą. Warunek natychmiastowej dekohezji, aby w miejscu pierwszego uplastycznienia parametr ζ był równy $\frac{\pi}{2}$, przyjmie postać:

$$\beta^{m+n} = \frac{(1+2m)(\nu-n)}{(1-2n)(m+\nu)}. \quad (3.8)$$

W szczególnym przypadku dla pełnej tarczy hiperbolicznej ($\beta \rightarrow \infty$) warunek ten będzie spełniony dla $n = \frac{1}{2}$.

Ponieważ dyskutujemy przypadek, gdy pierwsze uplastycznienie wystąpi na promieniu zewnętrznym b , zatem odpowiednią nośność rozdzielczą określi wzór (3.7) z podstawieniem $\zeta_b = \frac{\pi}{2}$:

$$\hat{q} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{2} = 1,1546. \quad (3.9)$$

Jeśli parametr ζ na brzegu zewnętrznym ma wartość różną od $\frac{\pi}{2}$, dalszy wzrost obciążenia będzie powodował powstawanie w pobliżu promienia b strefy plastycznej. W miarę jej rozwoju wartość parametru ζ_b będzie się zbliżała do $\frac{\pi}{2}$. Z chwilą gdy wartość ta zostanie osiągnięta, proces zostanie zakończony, gdyż układ osiągnie swą nośność rozdzielczą i zawsze będzie ona określona przez (3.9).

Jak można odczytać z wykresu 2, przy odpowiednich parametrach geometrycznych tarczy α i β oraz liczbie Poissona ν , możliwe jest rozpoczęcie procesu uplastycznienia od promienia wewnętrznego a . Dla tarczy osadzonej na sztywnym wale ($\eta = 0$) stosunek naprężeń promieniowego do obwodowego jest w zakresie sprężystym na promieniu a stały i równy ν . Do natychmiastowej dekohezji na promieniu a może więc dojść tylko dla materiału nieściśliwego $\nu = \frac{1}{2}$, co pokrywa się z wynikami dla tarczy płaskiej [5]. W przypadku materiału ściśliwego, wyczerpanie nośności rozdzielczej będzie zawsze poprzedzone wcześniejszym rozwojem strefy uplastycznionej.

4. Uwagi końcowe

Nie zawsze dopuszczenie możliwości nieograniczonego wzrostu odkształceń na poziomie punktu ciała pozwala na osiągnięcie nośności granicznej — dowolnie dużych przemieszczeń. W przypadku niejednorodności stanu odkształcenia zależność między obciążeniem zewnętrznym a przemieszczeniem może być ograniczona. Niejednorodność stanu

одkształcenia może być wywołana w przypadku jednorodnego materiału przez jego odpowiednie ukształtowanie.

W pracy posłużono się modelem ciała idealnie sprężysto-plastycznego. Należy się jednak spodziewać, że podobne efekty będzie można uzyskać dla niektórych praw asymptotycznie idealnej plastyczności, tj. praw, w których zmierzaniu do nieskończoności odkształcenia odpowiada ciągły wzrost naprężenia, które asymptotycznie zbliża się do pewnej ustalonej wartości.

W przypadku dostatecznie szybkiego zmierzania naprężeń do granicznej wartości również może wystąpić kres istnienia rozwiązania ciągłego.

Dalszym krokiem w kierunku uściślenia badań nad efektem nośności rozdzielczej byłoby zastosowanie teorii odkształceń skończonych. Wynika to z wewnętrznej niespójności teorii stosowanej, gdzie stojąc na gruncie teorii odkształceń małych badamy zjawisko zmierzania odkształceń do nieskończoności. Jednakże zastosowanie ściślejszej teorii nie wprowadzi żadnych istotnych zmian jakościowych, a nawet spowoduje obniżenie nośności rozdzielczej [9].

Spis literatury

1. S. D. PONOMARIEW, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, PWN, Warszawa 1957.
2. B. M. SHOEMAKER, *Some paradoxes associated with elastic-plastic limit load analysis*. Arch. Mech. Stos., 4, 20, 1963.
3. B. M. SHOEMAKER, *On velocity discontinuities in elastic-plastic boundary value problems*, Arch. Mech. Stos., 26, 1974.
4. K. SZUWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *On the phenomenon of decohesion in perfect plasticity*, Int. J. Solide Struct. vol., 9, 85 - 98, 1973.
5. K. SZUWALSKI, *Nośność rozdzielcza pierścieniowej tarczy kolowo-symetrycznej ze sztywną inkluzją*, MTiS 4, 17, 589 - 602, 1979.
6. K. SZUWALSKI, *Nośność rozdzielcza statycznie niewyznaczalnych układów prętowych z materiału asymptotycznie idealnie plastycznego*, R. I., 2, 28, 177 - 189, 1980.
7. M. ŻYCZKOWSKI, *Certain general equations for plane circularly symmetrical plastic states*, Arch. Mech. Stos., 10, 1958.
8. M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI, *Decohesive carrying capacity in thermal stress problems*, Trans. „3-rd. Int. Conf.” Structural Mechanics in Reactor Technology” vol. 5, part. L, paper L/2/4, London 1973.
9. M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI, *On the Termination of the Process of Finite Plastic Deformations*, Journal de Mecanique Theorique et Appliquee, Numero Special, 175 - 186, 1982.

Резюме

ИДЕАЛЬНО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ДИСК ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Для диска, которого толщина изменяется гиперболическим образом, определена нагрузка при которой выступает прерывность радиальных перемещений, из-за направления к бесконечности радиальных деформаций. Согласно предложению К. Шувальского и М. Жичковского [4] эта нагрузка определяет перерасщепление такого диска. Для избежания бесконечной толщины диска в ее середине, рассматривается диск состоящий из двух частей: центральной постоянной толщины и наружной гиперболической. Для общего случая, когда обе части выполнены из разных материалов, рассмотрена возможность возникновения процесса пластификации снаружи ли-

бо на стыковке обеих частей. Для обоих случаев определены условия возникновения несущей способности системы, с особенным учетом непременной декогезии, без развития пластифицированной зоны.

S u m m a r y

PERFECTLY ELASTIC-PLASTIC HYPERBOLIC DISK

For a disk with hyperbolically variable thickness, the loading parameter at which inadmissible discontinuities of radial displacement u occur, is evaluated. These discontinuities result from an infinite increase of the radial strain ϵ_r . K. Szuwalski and M. Życzkowski [4] proposed to call that loading parameter the „decohesive carrying capacity”. To avoid infinitely large thickness at the centre of the disk, the paper considers a disk consisting of two parts: the inner of constant thickness, and the outer of hyperbolic profile. For a general case, when both parts are made of different materials, the possibility of initiation of the plastification process from either the radius of connection of both parts or the outer radius is investigated. For both cases the conditions of occurring inadmissible discontinuities of displacements are formulated, particularly when the plastic zone does not spread.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lutego 1980 roku

TERMODYNAMIKA BETONU W WARUNKACH POŻAROWYCH

PIOTR WITAKOWSKI

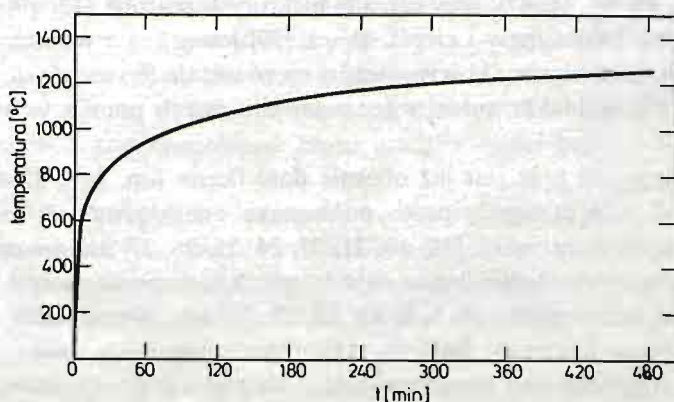
ELŻBIETA KAMIENOBRODZKA-OLSZEWSKA (WARSZAWA)

Ippt Techpan

1. Wstęp

W odróżnieniu od konstrukcji drewnianych i stalowych konstrukcje betonowe i żelbetowe wykazują znacznie większą odporność ogniową. Wynika to z faktu, że beton jest materiałem niepalnym, a ewentualne wkładki stalowe są osłonięte otuliną betonową, która zabezpiecza stal przed szybką utratą nośności. Niemniej jednak stwierdzono szereg awarii, jakim ulegały konstrukcje żelbetowe na skutek pożaru — awarii tym bardziej groźnych, że występują one bez wcześniejszego zasygnalizowania płomieniem (jak to ma miejsce w konstrukcjach drewnianych) lub dużymi ugięciami (jak to ma miejsce w konstrukcjach stalowych). Awarie konstrukcji betonowych i żelbetowych spowodowane pożarem polegają na trwałej i niewidocznej często gołym okiem utracie własności wytrzymałościowych przez beton, a niekiedy na gwałtownym zawaleniu się konstrukcji jeszcze podczas trwania pożaru, co stwarza ogromne niebezpieczeństwo dla ekip ratowniczych. Sytuacja ta doprowadziła do wzmożonego w ostatnich latach zainteresowania odpornością ogniową konstrukcji betonowych i żelbetowych.

Czynnik sprawczy, tj. wzrost temperatury podczas pożaru, został, jak się wydaje, dostatecznie już rozpoznany, czego dowodem może być ustalenie normą [38] rozwoju temperatury podczas pożaru w postaci tzw. krzywej pożarowej (rys. 1) jako obowiązującej we wszelkich badaniach eksperymentalnych i analizach teoretycznych zjawisk wystę-



Rys. 1. Wykres krzywej pożarowej „temperatura — czas”

pujących podczas pożaru. Przez warunki pożarowe rozumieć będziemy warunki, w których temperatura otoczenia zmienia się wg tej krzywej.

Inaczej rzecz ma się z bezpośrednimi skutkami wzrostu temperatury w betonie. Wiadomo, że w temperaturach występujących podczas pożaru beton ulega skomplikowanym przemianom fizyko-chemicznym, skutkiem czego ulegają zmianie wszystkie jego własności. Przegląd wyników eksperymentalnych badań w tym zakresie daje praca [28]. Trzeba podkreślić, że dotychczasowe badania wskazują na zależność wyników od metodyki badawczej, a w szczególności od faktu, czy próbki są jednocześnie ogrzewane i obciążane mechanicznie, czy też oba te rodzaje obciążeń są przykładane rozdzielnie w czasie. Podsumowując — poszczególne wyniki badań podawane w literaturze nie są ze sobą porównywalne i trudno je obecnie uogólniać. Dają one wprawdzie orientacyjny obraz zmian poszczególnych własności betonu, lecz jednocześnie wskazują na zależność tych zmian od rodzaju betonu i warunków badania, a co za tym idzie, na konieczność każdorazowego ustalania własności betonu w wysokich temperaturach w zależności od parametrów wyjściowych i od warunków badania.

Z powyższego wynika pilna potrzeba zbudowania ogólnej teorii opisującej zjawiska zachodzące w betonie w warunkach pożarowych, która umożliwiłaby przewidywanie zachowania się konstrukcji, a jednocześnie implikowałaby metodykę badań eksperymentalnych niezbędnych dla ustalenia odpowiednich współczynników materiałowych. Trzeba podkreślić, że teoria taka musi ujmować jednocześnie zjawiska mechaniczne, termiczne i dyfuzyjne, z uwzględnieniem wewnętrznych źródeł ciepła i wilgoci, jakie pojawiają się na skutek desorpcji i dehydratacji w wysokich temperaturach.

Jak do tej pory brak jest takiej teorii. Istnieje jednak bogata literatura teoretyczna, która łącznie z wynikami badań eksperymentalnych daje podstawy do jej stworzenia. Literaturę tę można podzielić na dwie grupy prac:

- prace poświęcone ogólnej analizie matematycznej transportu ciepła i masy oraz
- prace teoretyczne i analityczne dotyczące zachowania się betonu z uwzględnieniem wpływu wysokich lub podwyższonych temperatur.

Poniżej omówimy pokrótce obie te grupy.

Analiza transportu ciepła i masy jest już szeroko rozwiniętą dziedziną fizyki. Istnieje wiele prac naukowych dotyczących tej problematyki w ciałach stałych [np. 2, 13, 14, 20, 29, 36, 37, 39, 42, 43, 44, 45, 47], przy czym w niektórych pracach [12, 19] uwzględnia się również wewnętrzne źródła masy i ciepła. Praca [39] jest jedną z pierwszych, w których na podstawie praw termodynamiki wyprowadzono równanie termodyfuzji. Uogólnieniem jej są prace [36, 37]. Jednakże autor w rozważaniach swych pomija wewnętrzne źródła ciepła i masy.

Również druga grupa prac jest już obecnie dość liczna [np. 1, 9, 32, 40, 41, 46]. Na wyróżnienie wśród niej zasługują prace poświęcone analizie numerycznej odporności ogniowej konkretnych konstrukcji [11, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 31] oparte na wynikach badań eksperymentalnych. Ogólniejszym zagadnieniom transportu masy i ciepła w betonie poświęcone są m.in. prace [4, 6, 9, 15, 17, 22, 30, 48]. Wśród nich na szczególną uwagę zasługują prace Łykowa i Bażanta, które omówimy dokładniej.

A. Łykowski wyprowadził [30] równanie dyfuzji wilgoci i przewodnictwa ciepła dla betonu w podwyższonych temperaturach dzieląc beton na „beton suchy” i wilgoć podlega-

jąca dyfuzji. Równania te nie uwzględniają jednak źródeł wilgoci, jakie pojawiają się w betonie w wysokich temperaturach na skutek desorpcji i dehydratacji, a co za tym idzie, równania te mają zastosowanie jedynie dla temperatur niewiele wyższych od 100°C.

Z. Bażant wyprowadził [9] równania dyfuzji wilgoci i przewodnictwa ciepła dla betonu w wysokich temperaturach dzieląc beton na „beton suchy”, wodę swobodną i wodę związaną adsorpcyjnie. Jednakże równania te obarczone są błędem wynikającym z pominięcia energii unoszonej przez strumień wilgoci. Ponadto przyjęty przez autora podział betonu na fazy składowe nie daje możliwości eksperymentalnego ustalania współczynników materiałowych, a w sensie przyjętym w pracy [9] „beton suchy” w ogóle nie istnieje.

Niniejsza praca stawia sobie za cel zbudowanie spójnej teorii termo-dyfundo-mechanicznej, która pozwalałaby na ogólną analizę zjawisk zachodzących w betonie podczas pożaru. W pracy położono szczególny nacisk na użyteczność teorii. Wymagało to ścisłego powiązania budowanych równań, a w szczególności występujących w nich współczynników z możliwościami badawczymi, eksperymentalnymi. Tę podstawową zasadę fenomenologizmu starano się zachować na każdym etapie pracy. Zrezygnowano tu z budowy „kompleksowej”, ogólnej teorii, tzn. starano się o pominięcie zjawisk nieistotnych, a jednocześnie o opis zjawisk istotnych w sposób maksymalnie zgodny z wynikami eksperymentalnymi. Odrzucono opis szczegółowo analizujący poszczególne teoretyczne parametry fizyczne i przyjęto opis zawierający wyłącznie te parametry, które są mierzalne w sensie aktualnych możliwości eksperymentowania, zwracając szczególną uwagę na zgodność teoretycznego sensu poszczególnych parametrów z metodyką ich badania eksperymentalnego. Z tych też powodów zrezygnowano z ustalania równań dyfuzji w oparciu o drugą zasadę termodynamiki, a za podstawową przyjęto pierwszą zasadę uwzględniając transport masy.

2. Założenia

Budowa wyżej wymienionej teorii sprowadza się do ułożenia równań stanowiących matematyczny model materiału. Równania takie buduje się na podstawie różnego rodzaju praw bilansu — masy, energii, entropii, sił itp., do czego dochodzą związki geometryczne. Jednakże stosowalność tak utworzonego modelu zależy od tego, jakie czynniki i zjawiska zostaną uwzględnione w bilansie. Z reguły sprawa ta — najistotniejsza dla wartości modelu — rozstrzygana jest arbitralnie i bez wyjaśnień. Ponieważ zjawiska fizyko-chemiczne występujące w betonie w wysokich temperaturach są liczne i skomplikowane, należy wyjaśnić, że celem będzie zbudowanie teorii umożliwiającej badanie pól:

- a) temperatury T ,
- b) wilgotności w i związanego z nim ciśnienia pary wodnej p ,
- c) przemieszczenia u oraz związanych z nim odkształceń ϵ i naprężeń δ .

W modelu uwzględniono wyłącznie te zjawiska, które mają bezpośredni wpływ na te pola, a cały model został zbudowany na gruncie termodynamiki kontinuum materialnego przy przyjęciu następujących założeń.

Założenie 1. Ośrodek jest ciągły. Założenie to stoi w jaskrawej sprzeczności z faktem, że beton jest ośrodkiem porowatym. Nie umniejsza ono jednak możliwości opisu wszyst-

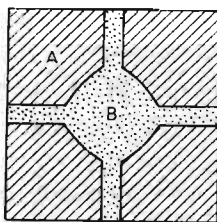
kich zjawisk związanych z dyfuzją wilgoci, natomiast pozwala na stosowanie klasycznej analizy matematycznej i całego aparatu pojęciowego mechaniki ośrodków ciągłych.

Założenie 2. Ośrodek jest jednorodny. Założenie to również stoi w sprzeczności z rzeczywistą strukturą betonu, którego własności różnią się przy przejściu od punktu do punktu (ziarna kruszywa, kamień cementowy, pory). Jest jednak ono dopuszczalne w sytuacji, gdy opisujemy zjawiska zachodzące w obszarze o średnicy kilkakrotnie większej od średnicy ziaren kruszywa. Dopuszczalność tego założenia dla konstrukcji budowlanych potwierdzona jest wieloletnią praktyką konstrukcyjną. Należy podkreślić, że z założenia tego nie wynika jeszcze (jak w klasycznej mechanice ośrodków ciągłych) niezależność współczynników materiałowych od zmiennej przestrzennej, a jedynie niezależność od tej zmiennej dyspozycji materiałowych¹⁾. W danej chwili możliwe są różnice własności materiałowych w różnych punktach, w zależności od historii pól temperatury, wilgotności i odkształcenia w tych punktach.

Założenie 3. Ośrodek jest dwufazowy. Przyjmujemy, że beton składa się z:

- a) fazy stałej — którą będziemy nazywać matrycą,
- b) fazy gazowej — porów wypełnionych parą wodną, przy czym każda z faz stanowi przestrzeń spójną.

W związku z założeniem jednorodności założenie dwufazowości wymaga rozróżnienia obu faz już na poziomie elementu nieskończenie małego. Ilustruje to rysunek 2.



Rys. 2. Struktura betonu. *A* — matryca, *B* — para wodna

Z założeniem tym wiążą się dwa podstawowe pojęcia — wilgotność w i porowatość η . Oba te pojęcia definiujemy w sposób odbiegający od klasycznego ich rozumienia w teorii betonu, natomiast dostosowany do sformułowanego powyżej celu. Dlatego.

— przez wilgotność w będziemy rozumieć masę pary wodnej zawartej w jednostce objętości betonu (a nie masę wody odparowalnej w temperaturze 105°C),

— przez porowatość η będziemy rozumieć objętość porów dostępnych dla pary wodnej zawartych w jednostce objętości betonu.

W niniejszym opracowaniu interesować nas będzie również porowatość powierzchniowa betonu, tzn. stosunek powierzchni porów do powierzchni betonu w dowolnym przekroju. Porowatość powierzchniową będziemy oznaczać symbolem η_p . Łatwo wykazać, że dla materiału izotropowego zachodzi związek:

$$\eta_p = \eta^{\frac{2}{3}}. \quad (1)$$

Takie przyjęcie definicji wilgotności i porowatości wynika, podkreślamy jeszcze raz, z celu,

¹⁾ Funkcjonałów konstytutywnych.

jaki stawiamy modelowi. Jest ono jednak dostosowane również do możliwości eksperymentalnej ustalania współczynników materiałowych i weryfikacji doświadczalnych wyników.

Nie dokonujemy tu rozdziału betonu na „wodę” i „suchy beton” (jak to uczyniono np. w pracy [30]), lecz na parę wodną i „resztę”, z pełną świadomością, że ta reszta zawiera wodę w różnych postaciach (swobodną, adsorpcyjną i związaną). Rzecz w tym, że w temperaturach powyżej 100°C nie ma możliwości eksperymentalnego badania „suchego betonu”, lecz tylko tej reszty (łącznie z zawartą w niej wodą). W miarę wzrostu temperatury ta reszta — matryca — traci poszczególne rodzaje wody. Woda ta przechodzi więc z fazy stałej (matrycy) do fazy gazowej (pary). Należy jednak podkreślić, że wilgotność w nie oznacza w naszym modelu całkowitej zawartości wody, lecz jedynie zawartość fazy gazowej. Wilgotność w decyduje więc zgodnie z równaniem stanu gazu o ciśnieniu pary w porach. Ciśnienie atmosferyczne powietrza, jako samorzównoważone, całkowicie pomijamy w dalszych rozważaniach.

Założenie 4. Ośrodek jest izotropowy. W niniejszej pracy pomijamy wszystkie efekty anizotropowe związane z kierunkiem betonowania.

Założenie 5. Własności ośrodka nie zależą od czasu w sposób jawny. Założenie to wyklucza możliwość opisu zjawisk związanych z dojrzewaniem betonu, ale równocześnie daje możliwość opisu wpływu zmian pola temperatury i wilgoci w miarę upływu czasu. Dopuszczalność tego założenia wynika ze stosunkowo krótkiego czasu trwania pożaru (kilka godzin) w stosunku do wieku konstrukcji — minimum 28 dni.

Założenie 6. Temperatura T , wilgotność w i odkształcenie ϵ stanowią zamknięty układ parametrów stanu ośrodka dla danego materiału (tzn. dla ustalonego składu betonu i jego wieku).

Zakładamy tu, że znajomość wielkości T , w , ϵ pozwala na ustalenie wszystkich innych parametrów stanu (np. ciśnienia pary wodnej, naprężenia) oraz wszystkich aktualnych własności materiałowych, jeśli ulegają one zmianom wraz ze zmianą wyżej wymienionych parametrów. Należy podkreślić, że zgodnie z tym założeniem własności materiałowe nie zależą od historii parametrów stanu, co w ogólności dla betonu nie odpowiada prawdzie. Jednakże dla badania betonu w warunkach pożarowych jest to dopuszczalne, gdyż zgodnie z [38] historia obciążenia termicznego jest tu ustalona, a wynikające z niej zmiany temperatury są na tyle wolne, że wszelkie przemiany wewnętrzne zachodzą bez opóźnień. Założenie to sprowadza badany problem (w zakresie części mechanicznej) na grunt nieliniowej teorii sprężystości.

Założenie 7. W trakcie pożaru siły zewnętrzne nie wykonują żadnej pracy, a energia kinetyczna ruchu jest pomijalna.

Założenie to sprowadza zagadnienie do problemu quasistatycznego. Uzasadnione jest ono tym, że chcemy analizować jedynie stany poprzedzające zniszczenie. Dla stanów takich fazę stałą (matrycę) można uważać za nieruchomą. Faza gazowa (para wodna) wykazuje ruch, lecz ze względu na niewielką masę i prędkość (można wykazać, że prędkość ta jest porównywalna z prędkością otaczającego powietrza) jej energia kinetyczna jest pomijalna.

Założenie 8. Efekty mechaniczne nie wpływają na efekty termiczno-wilgotnościowe.

Założenie to jest konsekwencją założenia małych prędkości ruchu, co sprowadza zagadnienie na grunt teorii analogicznej do teorii naprężeń cieplnych.

Założenie 9. Ośrodek jest geometrycznie liniowy. Założenie to jest uzasadnione niewielkimi odkształceniami — jak wiadomo, graniczne odkształcenia betonu są rzędu 10^{-4} .

3. Podstawowe równania

Rozpatrujemy ośrodek spełniający założenia wymienione w p. 1. W ośrodku tym wydzielamy myślowo obszar o objętości V ograniczony powierzchnią ∂V . Zakładamy jedynie, że obszar ten jest jednorodny.

3.1. Równania bilansu masy. W trakcie pożaru matryca na skutek zachodzących przemian fizykochemicznych (parowanie, desorpcja, dehydratacja) traci masę (por. rys. 3) — woda zawarta w matrycy przechodzi stopniowo do fazy gazowej. A więc w matrycy istnieją ujemne źródła masy równe co do ilości źródłom w fazie gazowej, lecz przeciwne co do znaku. Wewnątrz fazy stałej (matrycy) nie ma transportu masy, natomiast faza gazowa podlega dyfuzji. Uwzględniając powyższe uwagi zbudujemy obecnie równania bilansu masy dla obu poszczególnych faz — stałej i gazowej.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

- ρ — gęstość betonu (g/cm^3); gęstość tę można utożsamiać z masą matrycy zawartą w jednostce objętości betonu ze względu na znikomą masę fazy gazowej,
- w — wilgotność, tj. ilość pary wodnej w jednostce objętości betonu (g/cm^3),
- Z_w — intensywność źródeł wilgoci, tj. ilość pary wodnej wytworzonej w jednostce objętości betonu i jednostce czasu ($\text{g/cm}^3 \text{ s}$),
- \mathbf{J} — wektor strumienia wilgoci ($\text{g/cm}^2 \text{ s}$),
- \mathbf{n} — wersor normalnej zewnętrznej do powierzchni V ,
- t — czas (s).

Przy tych oznaczeniach można natychmiast napisać równanie bilansu masy dla matrycy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + Z_w = 0. \quad (2)$$

Równanie to może posłużyć do wyznaczenia funkcji źródeł wilgoci $Z_w = Z_w(T)$ — zakładamy tu, że funkcja ta nie zależy od pozostałych parametrów stanu. Mamy bowiem:

$$Z_w(T) = - \frac{\partial \rho(T(t))}{\partial t} = - \frac{\partial \rho(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

Funkcję $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ można określić eksperymentalnie za pomocą badań derywatograficznych [28, 49]. Przykładowy wynik badań derywatograficznych przedstawia rysunek 3.

Równanie bilansu masy dla fazy gazowej zgodnie z wcześniejszymi uwagami musi uwzględniać 3 efekty:

- zmianę wilgotności $\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)$,
- istnienie źródeł wilgoci (Z_w),
- dyfuzję wilgoci ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$).

Równanie bilansu masy fazy gazowej dla obszaru V ma więc postać:

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \int_V Z_w dV - \int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d(\partial V). \quad (4)$$

Przekształcając całkę powierzchniową w powyższym równaniu zgodnie z twierdzeniem Gaussa-Ostrogradskiego otrzymamy

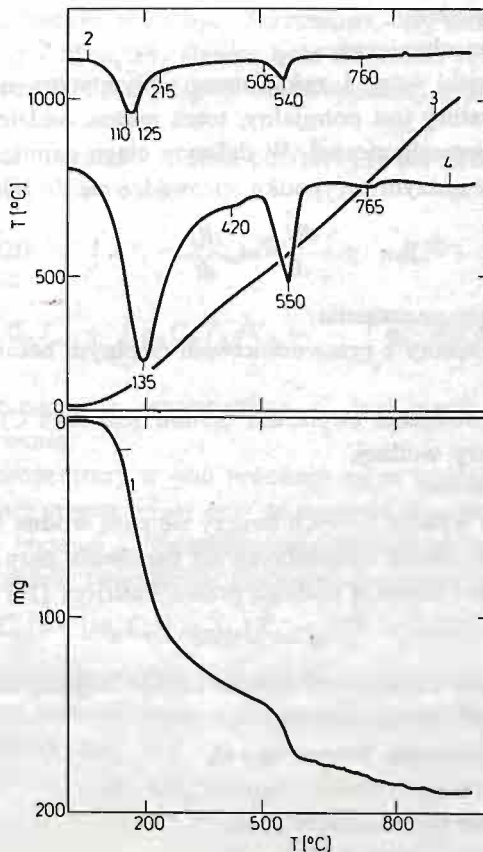
$$\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} - Z_w \right) dV = 0, \quad (5)$$

co ze względu na dowolność objętości V pozwala zapisać równanie bilansu masy dla fazy gazowej w postaci lokalnej:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial w}{\partial t} + Z_w. \quad (6)$$

Co do strumienia wilgoci \mathbf{J} zakładamy, że podlega on prawu Darcy'ego [16], a więc że spełnia on równanie

$$\mathbf{J} = - \lambda_1 \nabla p, \quad (7)$$



Rys. 3. Wynik badań derywatograficznych zaczynu cementowego:

1 — zmiana ciężaru, 2 — zmiana ciężaru — krzywa różnicowa, 3 — zmiana temperatury, 4 — zmiana temperatury — krzywa różnicowa (wynik badań udostępniony przez doc. D. Czamarską)

gdzie: λ_1 — współczynnik przepuszczalności pary wodnej w betonie (/s),
 p — ciśnienie pary wodnej w porach betonu (N/cm^2).

3.2. Równanie bilansu energii. Równanie bilansu energii zbudujemy w postaci łącznej dla obu faz. Jest to kluczowe równanie modelu. Ujmuje ono bowiem sprzężenie efektów termicznych i wilgotnościowych. Do wyprowadzenia tego równania wykorzystamy pierwsze prawo termodynamiki procesów nieodwracalnych [34]:

$$\frac{d}{dt} (K + U) = L + \frac{dQ}{dt}, \quad (8)$$

gdzie: U — energia wewnętrzna,
 K — energia kinetyczna,
 L — moc sił zewnętrznych,
 $\frac{dQ}{dt}$ — moc dostarczana do ciała na sposób niemechaniczny.

Energię wewnętrzną rozdzielimy na dwie części

$$U = U_m + U_c,$$

gdzie: U_m — energia naprężenia,
 U_c — energia niemechaniczna.

Zgodnie z poczynionymi w p. 1 założeniami wpływ stanu naprężenia na dynamikę wilgoci i rozkład temperatury jest pomijalny, toteż można oddzielnie rozpatrywać bilans energii mechanicznej i niemechanicznej. W dalszym ciągu zajmiemy się bilansem energii niemechanicznej, który w naszym przypadku sprowadza się do bilansu energii cieplnej

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{dQ}{dt}. \quad (9)$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

q — strumień ciepła związany z przewodnictwem cieplnym betonu ($\text{cal/cm}^2 \text{ s}$),
 T — temperatura ($^{\circ}\text{C}$),
 λ — współczynnik przewodzenia ciepła dla betonu ($\text{cal/cm s}^{\circ}\text{C}$),
 C_w — ciepło właściwe pary wodnej,
 C — ciepło właściwe betonu,
 C_r — ciepło przemian, w wyniku których tworzy się para wodna (cal/g),
 Z_i — gęstość mocy źródeł ciepła niezależnych od tworzenia pary ($\text{cal/cm}^3 \text{ s}$).
 Zakładamy też, że strumień ciepła q podlega prawu Fouriera [16]

$$q = -\lambda \nabla T. \quad (10)$$

Zgodnie z poczynionymi założeniami zmiana energii cieplnej betonu powodowana jest następującymi czynnikami zewnętrznymi:

- przewodnictwem cieplnym betonu ($q \cdot n$),
- unoszeniem ciepła przez strumień wilgoci ($C_w T J \cdot n$),

oraz następującymi czynnikami wewnętrznymi:

- zmianą temperatury betonu ($\rho C \dot{T}$),
- wewnętrznymi źródłami ciepła (Z_i),
- tworzeniem pary wodnej ($C_r Z_w$).

Na tej podstawie bilans energii cieplnej (9) dla objętości V można napisać w postaci:

$$\int_V \rho C \dot{T} dV = \int_V Z_t dV - \int_V C_r Z_w dV - \int_{\partial V} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} + C_w T \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) d(\partial V). \quad (11)$$

Stosując do całki powierzchniowej w tym równaniu twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego otrzymamy

$$\int_V (\rho C \dot{T} - Z_t + C_r Z_w + \nabla \cdot \mathbf{q} + C_w \mathbf{J} \cdot \nabla T + C_w T \nabla \cdot \mathbf{J}) dV = 0, \quad (12)$$

co ze względu na dowolność V pozwala zapisać równanie bilansu energii w postaci lokalnej:

$$\rho C \dot{T} - Z_t + C_r Z_w + \nabla \cdot \mathbf{q} + C_w \mathbf{J} \cdot \nabla T + C_w T \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (13)$$

Wielkość $Z_t - C_r Z_w$ można wyznaczyć z badań derywatograficznych [49]. Należy w tym celu ogrzewać równocześnie 2 próbki — badaną, w której mają być określone źródła ciepła i wilgoci, oraz porównawczą, w której brak jest źródeł, lecz która ma tą samą masę i ciepło właściwe (może to być próbka z wcześniej wyżarzonego tego samego betonu). W badaniu derywatograficznym obie próbki mają bardzo małe masy. Umieszczone są w identycznych naczyniach pomiarowych i identycznych warunkach termicznych. Ponadto przed badaniem próbka badana musi być rozkruszona, aby umożliwić swobodne odprowadzanie pary, a co za tym idzie, aby słuszne było założenie, że w każdej chwili ilość wytworzonej wilgoci jest równa ilości wilgoci odprowadzanej z próbki, a w konsekwencji, że $w = \text{const}$.

Przy tych założeniach równania bilansu energii (11) dla próbki badanej i próbki porównawczej mają odpowiednio postać

$$m_n C_n \dot{T}_{sr} + \int_V \rho C \dot{T} dV = \int_V (Z_t - C_r Z_w) dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d(\partial V) - \int_{\partial V} C_w T \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d(\partial V), \quad (14)$$

$$m_n C_n \dot{T}_{psr} + \int_{V_p} \rho_p C_p \dot{T}_p dV_p = - \int_{\partial V_p} \mathbf{q}_p \cdot \mathbf{n} d(\partial V_p),$$

gdzie m_n oznacza masę naczynia pomiarowego, C_n jego ciepło właściwe, a indeks „sr” wskazuje na wartość średnią.

Uwzględniając, że temperatury w obu próbkach są ze względu na małe wymiary niewiele zależne od zmiennej przestrzennej oraz że warunki wymiany ciepła z otoczeniem są takie same dla próbki badanej i porównawczej, dostaniemy po odjęciu stronami obu równań (14) i wykorzystaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego

$$(mC + m_n C_n) \dot{T} - (m_p C_p + m_n C_n) \dot{T}_p = V(Z_t - C_r Z_w - C_w T \nabla \cdot \mathbf{J}), \quad (15)$$

gdzie m i m_p oznaczają masy obu próbek, a V objętość próbki badanej przed rozkruszeniem.

Uwzględniając z kolei równość masy i ciepła właściwego obu próbek i wykorzystując związki (2) i (6) dostaniemy stąd

$$Z_t - C_r Z_w = \rho C_d (\dot{T} - \dot{T}_p) - C_w T \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (16)$$

gdzie

$$C_d = \frac{mC + m_n C_n}{m}. \quad (17)$$

Z badania derywatograficznego otrzymuje się

$$\begin{aligned} f_1(T_p) &= \frac{dm}{dT_p}, \\ f_2(T_p) &= \frac{d(T-T_p)}{dT_p} \end{aligned} \quad (18)$$

(f_1 krzywa 2, f_2 pochodna krzywej 4 na rys. 3). Uwzględniając, że $T \cong T_p$, możemy na tej podstawie zapisać

$$Z_t - C_r Z_w = \varrho C_d f_2 \dot{T} - \frac{\varrho}{m} C_w f_1 T \dot{T}. \quad (19)$$

Równania (7) i (13) stanowią sprzężony układ równań opisujących zagadnienie transportu pary wodnej i ciepła w betonie.

3.3. Równanie konstytutywne. Naprężenie definiuje się jako stosunek wypadkowej sił wewnętrznych rozmieszczonych na elemencie powierzchniowym ciała odkształconego do powierzchni tego elementu [35].

Zgodnie z przyjętymi założeniami powierzchnia dowolnego przekroju betonu składa się z powierzchni porów i powierzchni matrycy. Pory zajmują η_p powierzchni jednostkowej, a matryca $1 - \eta_p$ (por. rys. 2).

W konsekwencji założenia jednorodności ośrodka należy jako naprężenie przyjąć średnią ważoną z naprężeń w obu fazach, uwzględniając przy tym porowatość ośrodka. Zatem naprężenie σ w dowolnym punkcie będzie miało następującą postać:

$$\sigma = (1 - \eta_p) \sigma^M + \eta_p \sigma^P, \quad (20)$$

gdzie σ^M — naprężenie w matrycy, σ^P — naprężenie w porach.

Rozpatrzmy element betonowy, w którym odkształcenie jest równe ϵ . Ponieważ w porach występuje ciśnienie hydrostatyczne p pary wodnej, naprężenie w porach ma postać

$$\sigma^P = p \delta. \quad (21)$$

Natomiast zgodnie z poczynionymi założeniami przyjmujemy, że materiał matrycy spełnia równania termosprężystości

$$\epsilon = C^{TM} \sigma^M + \gamma_T^M \theta \delta,$$

co prowadzi do znanych równań Duhamela-Neumanna:

$$\sigma^M = C^M \epsilon - \gamma_T^M C^M \theta \delta, \quad (22)$$

gdzie: C^M — macierz stałych materiałowych matrycy,

γ_T^M — współczynnik rozszerzalności termicznej matrycy,

$\theta = T - T_0$, T_0 — temperatura stanu beznaprężeniowego,

δ — symbol Kroneckera.

Wstawiając (21 - 22) do (20) otrzymujemy

$$\sigma = (1 - \eta_p) C^M \epsilon - (1 - \eta_p) \gamma_T^M C^M \theta \delta + \eta_p p \delta. \quad (23)$$

Oznaczając $C = (1 - \eta_p) C^M$, dostaniemy

$$\sigma = C \epsilon - \gamma_T^M C \theta \delta + \eta_p p \delta. \quad (24)$$

Jeśli przeprowadzimy badania betonu w warunkach $\theta = 0$, $p = 0$, wówczas z (24) widać, że

$$\sigma = C\epsilon. \quad (25)$$

Świadczy to o tym, że macierz C jest macierzą sprężystych współczynników materiałowych dla betonu. Elementy jej mogą być określone drogą klasycznych badań materiałowych.

Z kolei prowadząc badanie betonu w warunkach $\sigma = 0$, $p = 0$, z (24) widać, że wówczas

$$0 = C\epsilon - \gamma_T^M C \theta \delta,$$

a stąd

$$\gamma_T^M \delta = \frac{1}{\theta} \epsilon. \quad (26)$$

Ze wzoru (26) widać, że γ_T^M odpowiada liczbowo współczynnikowi rozszerzalności termicznej betonu, co zapiszemy

$$\gamma_T^M = \gamma_T,$$

i daje się również określić za pomocą klasycznych badań materiałowych betonu.

Ostatecznie więc związek konstytutywny dla betonu przyjmujemy w postaci

$$\sigma = C\epsilon - \gamma_T C \theta \delta + \eta_p p \delta, \quad (27)$$

gdzie współczynniki C , γ_T i η_p oznaczają odpowiednie współczynniki materiałowe dla betonu. Należy podkreślić, że współczynniki te zależą od temperatury.

Naprężenie jest więc sumą naprężenia związanego z odkształceniem sprężystym oraz dodatkowego naprężenia pochodzenia termowilgotnościowego.

Podobnie definiuje się tensor naprężeń w innych teoriach pól sprzężonych, np. w magneto-termosprężystości [34].

3.4. Równanie stanu dla fazy gazowej. Para wodna jest gazem, zatem podlega prawom termodynamiki gazów. W dziedzinie tej wyprowadza się różne, bardziej lub mniej dokładne, równania opisujące stan pary wodnej. Można do tego celu wykorzystać równanie Van der Waalsa.

Rozpatrzmy jednostkową objętość betonu. Wówczas równanie Van der Waalsa przyjmuje postać

$$w = \frac{\mu(p + b/\eta^2)(\eta - a)}{RT}, \quad (28)$$

gdzie: a, b — stabilizowane parametry dla pary wodnej,

R — stała gazowa,

μ — masa molowa,

η — objętościowa porowatość betonu.

Równanie (28) ustala związek między masą pary zawartej w porach a parametrami stanu pary. W miejsce tego równania można posługiwać się bezpośrednio tablicami fizycznymi wiążącymi parametry stanu dla pary wodnej (np. K. Ražnjević „Tablice ciepłne z wykresami”).

3.5. Równania równowagi. Równania równowagi dla betonu wyprowadza się bardzo prosto z zasady zachowania pędu [34] i mają one postać

$$\nabla \cdot \sigma = 0. \quad (29)$$

3.6. Związki geometryczne. Zgodnie z założeniem 9, zależność odkształceń i przemieszczeń przyjmuje się w następującej postaci

$$\epsilon = \frac{1}{2} \text{sym} \nabla \mathbf{u}. \quad (30)$$

4. Wnioski

W pracy niniejszej wyprowadzony został następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\rho}{m} f_1 \dot{T}, \\ J &= -\lambda_1 \nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{q} &= \rho(C_d f_2 - C) \dot{T} - C_w \left(\frac{\rho}{m} f_1 T \dot{T} + \mathbf{J} \nabla T + T \nabla \cdot \mathbf{J} \right), \\ \mathbf{q} &= -\lambda \nabla T, \\ w &= \frac{\mu(p + b/\eta^2)(\eta - a)}{RT}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0, \\ \boldsymbol{\sigma} &= C\boldsymbol{\epsilon} - \gamma_T \theta C \cdot \boldsymbol{\delta} + \eta_p p \boldsymbol{\delta}, \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{2} \text{sym} \nabla \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (31)$$

Otrzymany układ składa się z 24 równań, w których zmiennymi są $\boldsymbol{\sigma}$, ϵ , \mathbf{u} , \mathbf{q} , T , \mathbf{J} , p , w (24 wielkości). Widać więc, że układ jest zamknięty. Należy podkreślić, że układ złożony z dziewięciu pierwszych równań może być rozwiązany niezależnie od pozostałych.

Otrzymane równania stanowią układ równań różniczkowych cząstkowych ze zmiennymi współczynnikami. Sposób ich wyprowadzenia gwarantuje, że uwzględniają one te i tylko te czynniki i zjawiska, które uznano za istotne dla badanego problemu (por. p. 2). Równania te dają możliwość obliczania odporności ogniowej konkretnych konstrukcji dopiero po uzupełnieniu ich właściwymi warunkami początkowymi i brzegowymi dla pól T , p , \mathbf{u} i $\boldsymbol{\sigma}$. Sprawa ta nie jest banalna i każdorazowo musi być wnikliwie przeanalizowana.

W odniesieniu do warunków początkowych można stwierdzić krótko, że muszą one oddawać warunki przedpożarowe. Naturalną jest rzeczą przyjąć, że temperatura początkowa odpowiada średniej temperaturze eksploatacyjnej, ciśnienie początkowe odpowiada ciśnieniu atmosferycznemu, a naprężenia początkowe w konstrukcji odpowiadają naprężeniom eksploatacyjnym. Przemieszczenia początkowe można przyjąć za zerowe.

Warunki brzegowe muszą oddawać szczegóły konstrukcyjne, a w szczególności istnienie lub brak powierzchniowych izolacji termicznych i wilgotnościowych. Z reguły przy braku tych izolacji wystarczy stawiać dla pól temperatury i ciśnienia warunki brzegowe pierwszego rodzaju. W przypadku potrzeby dokładniejszych obliczeń lub w przypadku istnienia izolacji powierzchniowych należy je zastąpić warunkami trzeciego rodzaju, przy czym współczynnik. przewodzenia ciepła i wilgoci muszą oddawać własności konkretnych izolacji.

Może to wymagać wcześniejszych eksperymentalnych badań tych własności. Brzegowe warunki mechaniczne wystarczy przyjmować tak jak w teorii sprężystości.

Zarówno sam układ równań obowiązujących wewnątrz ośrodka, jak również postać warunków brzegowych i początkowych wskazują, że rozwiązanie nawet najprostszych zadań metodami analitycznymi jest tu praktycznie niemożliwe. Niezbędne staje się zastosowanie metod numerycznych i wykorzystanie elektronicznej techniki cyfrowej. W tym celu najbardziej właściwe wydaje się zastosowanie metody elementów skończonych.

Literatura cytowana w tekście

1. S. W. ALEKSANDROWSKII, *Rascziot bietonnych i żelazobetonnych konstrukcji na tiempieratirnyje i własnosnyje wozdziejstwa (s uciogom polzuczesti)*, Moskwa 1966.
2. J. H. ARGYRIS, L. E. VAZ, K. J. WILLAM, *Higher order methods for transient diffusin analysis*, Comp. Meth. in Appl. Mech., Eng., v. 12, no. 2, 1977.
3. Z. P. BAŻANT, *Constitutive equation for concrete creep and shrinkage based on thermodynamics of multiphase systems*, 13, Rilem 1970.
4. Z. P. BAŻANT, L. J. NAJJAR, *Drying of concrete as a nonlinear diffusion problem*, Cement and Concrete Res., v. 1, no 5, Sept. 1971.
5. Z. P. BAŻANT, *Thermodynamics of interacting continua with surfaces and crrep analysis of concrete structures*, 1 st. Int. Conf. SMiRT, Berlin 1971.
6. Z. P. BAŻANT, L. J. NAJJAR, *Nonlinear Water Diffusion in Nonsaturated Concrete*, 25, Rilem 1972.
7. Z. P. BAŻANT, S. T. WU, *Thermoviscoelasticity of Aging Concrete*, J. Eng. Mech. Div. E.M.3, v. 100, June 1974.
8. Z. P. BAŻANT, *Theory of Creep and Shrinkage in Concrete Structures*, Mechanics today, Pergamon 1975.
9. Z. P. BAŻANT, W. THONGUTHAI, *Pore pressure and drying of concrete at high temperature*, J. Eng. Mech. Div. E. M. 5, Oct. 1978.
10. Z. P. BAŻANT, *Advances in Triaxial Constitutive Modeling of Concrete*, 6th Inf. SMiRT, Paryż 1981.
11. J. M. BECKER, B. BRESLER, *Reinforced concrete frames in fire environments*, J. Struct. Div. Jan. 1977.
12. K. J. BEUKEMA, S. BRUIN, J. SCHENK, *Three-dimensional natural convection in a confinen porous medium with internal heat generation*, Int. J. Heat and Mass Transf., v. 26, no. 3, 1983.
13. C. CORTAZAR, *The application of dissipative operators to nonlinear diffusion equations*, J. of Diff. Eqs., 47, no. 1, Jan. 1983.
14. T. J. CHUNG, J. L. PRATER, *A constitutive theory for anisotropic hygrothermoelasticity with finite element applications*, J. Therm. s. 3, 1980.
15. A. DAYAN, E. L. GLUEKLER, *Heat and Mass Transfer During the Drying of a Planar Concrete Structure*, 6th Int. Conf. SMiRT, v. H, Paryż 1981.
16. S. R. De GROOT, P. MAZUR, *Nonequilibrium thermodynamics*, 1962.
17. G. L. ENGLAND, *Migration of moisture and pore pressure in heated concrete*, 1 st. Int. Conf. SMiRT, v.H, Berlin 1971.
18. R. FITT *Fire floors*, Build Materials, Jan. 1968.
19. R. D. GASSER, M. S. KAZIMI, *Onset of convection in a porous medium with internal heat generation*, J. Heat Transf., v. 98, ser. C, no. 1, Feb. 1976.
20. R. J. HARTRANFT, G. C. SIH, *The influence of the Soret and Dufour effects on the diffusion of heat and moisture in solids*, Int. J. Eng. Sci., v. 18, no. 12, 1980.
21. H. M. HAYDL, A. N. Sherbourne, *Simplified stress analysis of heated reinforced concrete cylinders*, J. ACI, no. 6, v. 77, 1980.
22. C. L. D. HUANG, H. H. SIANG, P. G. KIRMSER, *Moisture transfer in a concrete slab*, 5th Int. Conf. SMiRT, v. H, Berlin 1979.
23. A. I. JAKOVLEV, L. V. SEJNINA, *Odporność ogniowa wewnętrznych płyt ściennych wykonanych z betonu krzemowego (ros.)*, VNIPO, 2, 1972.

24. A. I. JAKOVLEV, A. T. APOSTOLOV, *Określenie granicy odporności ogniowej sprężonych zbrojonych betonów krzemowych przy uwzględnieniu deformacji rozgrzanego betonu z wykorzystaniem maszyny cyfrowej* (ros.), VNIPO, 2, 1974.
25. A. I. JAKOVLEV, L. V. SEJNINA, *Określenie odporności ogniowej trójwarstwowych płyt ściennych przy wykorzystaniu maszyny cyfrowej* (ros.), VNIPO, 2, 1974.
26. A. I. JAKOVLEV, L. V. P. BUSEV, F. A. LEVITES, *Zagrożenie pożarowe budynków mieszkalnych i biurowych wykonanych z lekkich materiałów konstrukcyjnych* (ros.), VNIPO, 2, 1974.
27. A. I. JAKOVLEV, L. V. SEJNINA, A. N. SOROKIN, *Określenie termofizycznych charakterystyk betonów na drodze rozwiązania odwrotnego zadania przewodnictwa ciepła na maszynie cyfrowej*, (ros.), VNIPO, 3, 1975.
28. E. KAMIENOBRODZKA-OLSZEWSKA, *Zmiany charakterystyk betonu poddanego działaniu wysokich temperatur*, (w przygotowaniu).
29. H. W. LORD, Y. SHULMAN, *A generalized dynamical theory of thermoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 15, 1967.
30. A. B. ЛЬКОВ, *Тепло и массообмен в процессах сушки*, Москва 1956.
31. A. H. MORCHERTES, R. W. SEIDENSTICKER, Z. P. BAŽANT, *Design of top Closures of Concrete Reactor Vessels with Very High Energy Absorption Capability*, 6th Int. Conf. SMIRT, Paryż 1981.
32. K. D. NIEKRASOW, B. B. ŽUKOW, B. F. GULAJEWA *Tiażolyj bieron w usłowijach powyszennych temperatur*, Moskwa 1972.
33. A. M. NEVILLE, *Properties of concretes*, 1977.
34. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1966.
35. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
36. W. NOWACKI „Dynamic problems of thermodiffusion in elastic solids”, Proc. Vibr. Problems., v. XV, no. 2, 1974.
37. W. NOWACKI, *Termodyduzja w ciele stałym*, MTiS, T. 13, z. 2, 1975.
38. PN-64/B-02851 *Metoda badania odporności ogniowej elementów konstrukcji budowlanych*.
39. S. PODSTRIGACZ, W. S. PAWLINA, *Osnowyje urawnienija ploskoj zadaczi tiermodifuzji* (ros), Prikl. Micch. T. I, b. 3, 1965.
40. Z. PRUZIŃSKI, *Beton i żelbet zwykły nagrzewany do wysokich temperatur*, Budownictwo Przemysłowe nr 10, 1956.
41. Z. PRUZIŃSKI, *Konstrukcje betonowe i żelbetonowe narażone na wysokie temperatury*, Arkady, Warszawa 1964.
42. A. A. RAPIS, *Ansteady free convective flow through a porous medium*, Int. J. Eng. Sci., v. 21, no. 4, 1983,
43. G. C. SIH, M. T. SHIH, S. C. CHOU, *Transient hydrothermal stresses in composites: coupling of moisture and heat with temperature varying diffusivity*, Int. J. Eng. Sci., v. 18, no. 1, 1980.
44. G. C. SIH, A. OGAWA, *Transient thermal change a solid surface: coupled diffusion of heat and moisture*, J. Thermal Stresses, v. 5, July-Dec. 1982.
45. R. T. SOLOUKHIN, O. G. MARTYENKO, *Heat and mass transfer bibliography — soviet works*, Int. J. Heat Mass. Transf., v. 26, np. 3, 1983.
46. Б. Ф. ТРОУПЯНСКИЙ, *Прогнозь и дефершатиwность железобетонных конструкций*, Харьков 1969.
47. J. R. WELTY, C. E. WICKS, R. E. WILSON, *Fundamentals of heat and mass transfer*, 1969.
48. J. WYRWAŁ, *Zasada wariacyjna dla procesu wymiany ciepła i wilgoci w betonie poddanym obróbce termicznej*, AIL (w druku).
49. Derivatograph OD 102 — instrukcja obsługi.

Резюме

ТЕРМОДИНАМИКА БЕТОНА В ПОЖАРНЫХ УСЛОВИЯХ

Работа представляет математическую модель бетона в пожарных условиях. Первая часть содержит предположения о рассматриваемой среде. Во второй части представлено фундаментальные уравнения: уравнение баланса массы, уравнение баланса энергии, конститутивное уравнение,

Уравнение состояния для газовой фазы, уравнения равновесия и геометрические связи для бетона в пожарных условиях. Выведенные уравнения вместе с краевыми условиями дают возможность вычисления напряжений выступающих в бетонных конструкциях в условиях пожара.

S u m m a r y

THERMODYNAMICS OF CONCRETE IN FIRE CONDITIONS

The mathematical model of concrete in fire conditions is considered the paper. At the beginning we discuss the assumptions referring to the solid. Then the fundamental equations have been derived, namely: equations of conservation of mass and energy constitutive equations, equation of state of steam, equilibrium equations and geometrical relationships. These equations with corresponding boundary conditions enable us to compute the stresses in concrete structures in fire conditions.

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 września 1983 roku

NIEJEDNORODNOŚĆ PLASTYCZNA STOPU PA2 W PROCESIE WYCISKANIA

JAN PIWNIK (BIAŁYSTOK)

1. Wprowadzenie

Rozwój zaawansowanych metod obliczeniowych procesów obróbki plastycznej jest oparty na rozwiązaniach zagadnień brzegowych teorii niejednorodnej plastyczności [1, 2, 3, 4]. Rozwiązując dane zagadnienie brzegowe przyjmujemy jako znane wartości granicy plastyczności w poszczególnych punktach obszaru plastycznego. Rozkład granicy plastyczności w uplastycznionym polu utożsamiany z niejednorodnością plastyczną jest możliwy obecnie do wyznaczenia tylko na drodze doświadczalnej. Podstawą jest przyjęcie hipotez o zgodności związków aktualnej granicy plastyczności, branej dalej jako intensywność naprężeń σ_i , z intensywnością odkształceń e_i lub twardością H w prostych i złożonych stanach naprężeń. Praktyczne wykorzystanie związku σ_i z innymi wielkościami fizycznymi, na przykład optycznymi lub elektrycznymi, jest jeszcze z braku podstaw doświadczalnych niemożliwe.

Celem tej pracy jest omówienie hipotez wykorzystywanych przy wyznaczaniu pól niejednorodności plastycznej. Szerzej poruszono zastosowanie pomiarów twardości do analizy rozkładu granicy plastyczności w strefie deformacji plastycznej dwuczęściowego modelu.

Metodę zilustrowano wynikami badań własnych dla procesu wyciskania pręta cylindrycznego przez matryce stożkowe [5].

2. Podstawy doświadczalne hipotez stosowanych przy wyznaczaniu pól niejednorodności plastycznej

Dotychczas stosowano najczęściej dwie metody określania pola niejednorodności plastycznej [1, 2, 3, 4, 5]

a) metoda oparta na przyjęciu hipotezy uogólnionej krzywej płynięcia $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$ [1, 2],

b) metoda oparta na hipotezie związku granicy plastyczności z twardością $\sigma_i = \sigma_i(H)$ [3, 4, 5].

Metoda wykorzystująca związek $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$ polega na wyznaczeniu rozkładu intensywności naprężeń σ_i w odciążonym elemencie po przez obliczenie intensywności odkształceń e_i z pomiarów zdeformowanej, początkowo kwadratowej siatki. Siatka ta jest najczęściej

nanoszona w środkowej płaszczyźnie dwuczęściowego modelu. Następnie dla pomierzonej, w danym punkcie strefy deformacji, wartości e_i należy przyporządkować odpowiadającą jej wartość σ_i wziętą z krzywej materiałowej $\sigma_i - e_i$. Krzywą materiałową otrzymujemy w jednoosiowej próbie rozciągania lub ściskania. Poważnym problemem jest tu jednak fakt, że związku $\sigma_i - e_i$ nie można uważać za uniwersalne prawo wzmocnienia, lecz za przybliżoną zależność opisującą wzmocnienie materiału [6]. Obecnie brakuje dostatecznej ilości faktów doświadczalnych potwierdzających istnienie wspólnej krzywej płynięcia w prostych i złożonych stanach naprężeń niezależnej od rodzaju stanu naprężenia, postaci dewiatora, historii obciążenia, prędkości odkształcenia i innych efektów. Inną poważną niedogodnością jest bardzo duża pracochłonność przy opracowywaniu wyników doświadczeń i dokładnym nanoszeniu siatek na powierzchni przekroju dwuczęściowego modelu. Pomimo tych wad, metoda wyznaczania pól niejednorodności plastycznej oparta na hipotezie $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$ znalazła rozpowszechnienie w metodach obliczeniowych obróbki plastycznej uwzględniających wzmocnienie materiału [1, 2, 3, 4]. Najważniejszą zaletą tej metody jest możliwość przedstawienia związku $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$ w postaci analitycznej.

Twardość większości metali poddanych odkształceniom plastycznym ulega zmianie. Zjawisko to wykorzystano do poszukiwania ilościowych związków twardości z granicą plastyczności. Użycie związków różnych miar twardości z właściwościami fizycznymi materiału do analizy złożonych procesów obróbki plastycznej metalu wzbudza szereg wątpliwości. Niejasność w tej sprawie wynika z braku podstaw fizycznych opisujących bardzo złożony proces zagłębiania kulki, piramidy czy stożka w materiał. Pomimo to pojęcie twardości ze względu na lokalność próby i prosty pomiar jest cennym instrumentem badawczym w mechanice ciała stałego [7, 8, 9]. Z fizycznego punktu widzenia nierozwiązanym problemem w interpretacji twardości jest uzyskanie odpowiedzi na pytanie, jak zależy twardość, rozumiana jako średnie ciśnienie na powierzchni odcisku, od stanu naprężenia i historii naprężenia. Szukając odpowiedzi na to pytanie należy opisać anizotropię własności realnego materiału wywołaną deformacją plastyczną zależną od stanu naprężenia i historii obciążenia, przy których przebiega odkształcenie plastyczne. Następnie należałoby rozwiązać zadanie o wciskaniu osiowo symetrycznego, sztywnego stempla w umacniający się i anizotropowy materiał. Wobec tego, że materiał nabył już cech anizotropowych, w ogólnym przypadku zagadnienie nie jest już osiowo-symetryczne. Aktualnie teoria plastyczności nie dysponuje rozwiązaniem takich przypadków. Dlatego też zadanie o istnieniu wspólnych związków pomiędzy liczbą twardości i intensywnością naprężenia dla różnych stanów naprężenia i trajektorii obciążenia w realnych materiałach wymaga skomplikowanych badań doświadczalnych na maszynach, w których możliwe jest uzyskanie złożonych stanów naprężeń. W monografiach Diela [3, 4] przedstawiono wyniki badań doświadczalnych dla ośmiu różnych materiałów. W tym celu wykonywano doświadczenia na próbkach rurkowych poddanych różnym kombinacjom siły rozciągającej, momentu skręcającego i ciśnienia wewnętrznego. Obciążenia realizowano przyrostami według danego programu i po odciążeniu wykonywano wzdłuż powierzchni zewnętrznej 10 pomiarów twardości Vickersa, przyjmując ostatecznie wartość średniej arytmetycznej twardości. Z doświadczeń wyznaczono wykresy twardości w funkcji intensywności naprężenia i intensywności odkształcenia. Dla wszystkich badanych materiałów rozrzuty punktów doświadczalnych dla różnych stanów naprężenia nie przekroczyły 15% na wykresie

$HV = f(\sigma_i)$ i 20% na wykresie $HV = f(e_i)$ w stosunku do wykresu cechującego otrzymanego przy jednoosiowym stanie naprężenia. Związki między różnymi miarami twardością a trwałym odkształceniem czy wywołującym je stanem naprężenia są związkami empirycznymi, i ich jednoznaczność jest ciągle jeszcze sprawą dyskusyjną. Wynika to z innego charakteru pomiarów twardości i pomiarów odkształceń przy jednoosiowym rozciąganiu czy ściskaniu. Dokładność pomiarów twardości zależy w dużym stopniu od właściwego przygotowania próbek. Uzyskanie jednorodnego rozkładu twardości nawet w niezdeformowanej próbce stanowi istotny problem i wymaga zastosowania specjalnych zabiegów [9]. W pracach [3, 4] uważa się, że twardość jest jednoznaczną funkcją intensywności naprężenia wywołującego odkształcenia plastyczne. Natomiast związek między twardością a intensywnością odkształceń plastycznych wynika z hipotezy o jednej krzywej wzmocnienia. Innego zdania są autorzy pracy [8]. Uważają oni, że twardość jest jednoznaczną funkcją intensywności odkształceń, niezależną od sposobu, w jaki te odkształcenia otrzymano. Zaletą tego sposobu weryfikacji zależności $H = H(e_i)$ jest możliwość przeprowadzenia badań w dużym zakresie odkształceń na jednej próbce.

Związek między różnymi miarami twardości a granicą plastyczności został zauważony doświadczalnie jeszcze w XIX wieku. Wyznaczając empiryczne zależności między intensywnością naprężenia a twardością dla różnych materiałów przyjmowano najczęściej liniową zależność w postaci

$$\sigma_i = C \cdot H, \quad \sigma_i \geq \sigma_0$$

gdzie C — współczynnik proporcjonalności, σ_0 granica plastyczności.

W pracy [10] podano rozwiązanie statyczne przy wciskaniu kulki w plastyczną półprzestrzeń. Zależność pomiędzy granicą plastyczności ciała izotropowego idealnie plastycznego i twardością Brinella ma postać

$$\sigma_i = 0,383 \text{ HB.}$$

Wyznaczenie pola niejednorodności σ_i w dwuwymiarowych zagadnieniach plastycznego płynięcia polega na pomiarze twardości w odkształconym obszarze odciążonego elementu. Następnie z krzywej cechującej dla danego materiału $H = H(\sigma_i)$ bierzemy te wartości σ_i , które odpowiadają pomierzonym wartościom twardości. Uwzględniony przy tym w przybliżeniu efekt wzmocnienia jest typu izotropowego. Funkcja wzmocnienia izotropowego będzie miała inny przebieg, niż to ma miejsce w hipotezie jednej krzywej $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$. Ocena tej różnicy może być dokonana tylko na drodze doświadczalnej i jest w dalszym ciągu otwarta z powodu małej liczby danych eksperymentu [3, 5, 8].

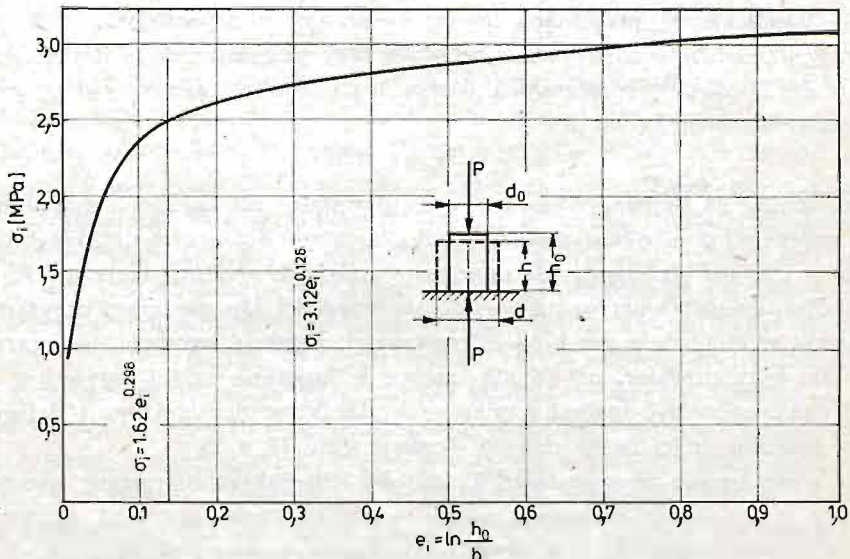
Zdając sobie sprawę ze wszystkich niejasności i niedokładności oceny własności mechanicznych materiału na podstawie próby twardości trzeba przyznać, że metoda ma wiele zalet. Pomiar twardości jest stosunkowo prosty, a jego wykorzystanie do analizy niejednorodności plastycznej i stanu naprężenia może być stosowane nie tylko do modeli, lecz również do rzeczywistych detali. Kierując się tymi zaletami wykorzystano metodę pół twardości do analizy niejednorodności plastycznej w procesie wyciskania.

3. Badania doświadczalne

Próby wyciskania przeprowadzono w temperaturze normalnej na przyrządzie własnej konstrukcji z dwuczęściową komorą, w której umieszczono próbki złożone z dwóch pół-

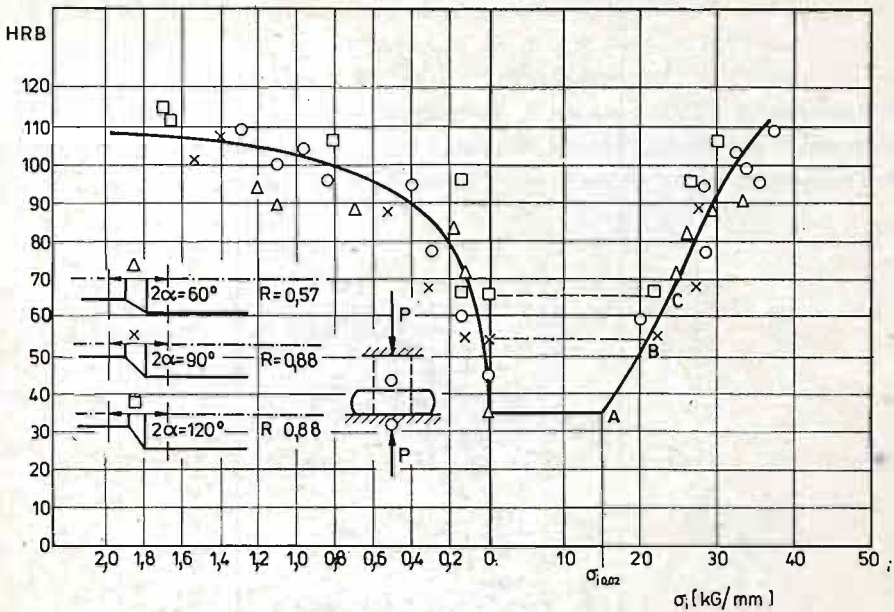
cylindrycznych połówek [5]. Próbkę wykonano ze stopu aluminium PA2 i były one przed wyciskaniem wyżarzone. Proces prowadzono bez smarowania, ale z wysoką gładkością na powierzchni styku narzędzia z materiałem. Średnica wyjściowa próbek wynosiła 50 mm. Dalej pokazane będą reprezentatywne wyniki dla trzech próbek wyciskanych przez matryce stożkowe o kątach rozwarcia i stopniach redukcji odpowiednio $2\alpha = 60^\circ$, $R = 0,57$ oraz $2\alpha = 90^\circ$ i 120° , $R = 0,88$. Stopień redukcji $R = 1 - d/D^2$, przy czym D — średnica początkowa a d — średnica po redukcji. W środkowej płaszczyźnie dwuczęściowych próbek była naniesiona początkowo kwadratowa siatka, z deformacji której obliczano intensywność odkształceń w poszczególnych punktach obszaru uplastycznionego [5]. Wyznaczanie rozkładu niejednorodności plastycznej poprzedzono sporządzeniem krzywych cechujących $e_i = H$ i $H - \sigma_i$ oraz wykonaniem pomiarów twardości HRB w płaszczyźnie podziału próbek.

3.1. Krzywe cechowania e_i —HRB— σ_i . Do sporządzenia doświadczalnej krzywej cechującej, wyrażającej zależność pomiędzy intensywnością odkształceń i twardością, wartości twardości Rockwella HRB brano z bezpośredniego otoczenia węzłów siatki w których obliczano e_i . Punkty te leżały w otoczeniu osi symetrii wyciskanych próbek. Wartości σ_i w tych punktach wyznaczono z krzywej materiałowej na ściskanie $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$, którą pokazano na rys. 1 [5]. Rys. 2 przedstawia obydwie krzywe cechujące, tj. σ_i — HRB i HRB — e_i , które powstały z naniesienia punktów doświadczalnych wziętych z obliczeń



Rys. 1

intensywności odkształceń oraz pomiarów twardości w otoczeniu osi symetrii środkowych płaszczyzn trzech wyciskanych próbek. Dodatkowo naniesiono punkty na krzywe cechujące otrzymane z doświadczenia przy jednoosiowym ściskaniu. Pomiary twardości w ściskanych próbkach wykonywano w środku powierzchni czołowych po odkształceniu plastycznym [5]. W ten sposób otrzymano wykorzystaną dalej uśrednioną, doświadczalną



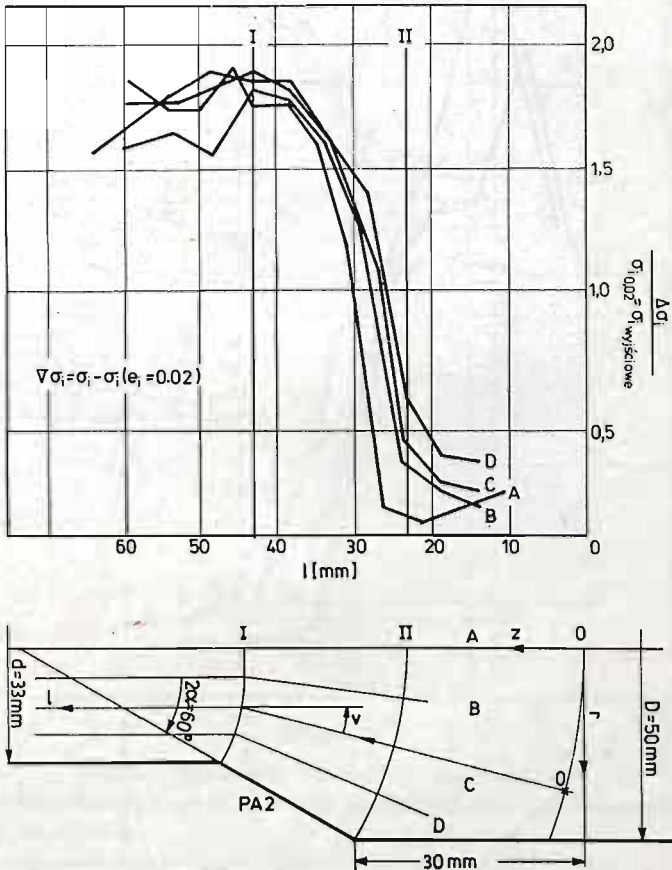
Rys. 2

krzywą HRB — σ_i . Powstała ona z przyjęcia trzech hipotez, tj. $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$, $\text{HRB} = f(e_i)$, $\text{HRB} = f(\sigma_i)$. Zapewnia to większą dokładność metody. Daje również możliwość porównywania przebiegów krzywych cechujących w prostych i złożonych stanach naprężeń. Charakter krzywych cechujących (rys. 2) e_i — HRB — σ_i wskazuje na większą zgodność przebiegów zależności σ_i — HRB w złożonym (osiowo-symetrycznym) i jednoosiowym stanie naprężenia, w porównaniu ze znacznymi różnicami w przebiegach związków HRB — e_i .

3.2. Doświadczalne pola intensywności naprężeń. Budowa pól $\sigma_i(r, z)$ we współrzędnych cylindrycznych r, z obszaru uplastycznienia odbywa się w ten sposób, że z krzywej cechującej bierzemy te wartości σ_i , które odpowiadają wartościom pomierzonych twardości. Pomiar twardości kulką wymaga szeregu zabiegów przygotowawczych. Po obróbce frezem walcowo-czołowym z chłodzeniem denaturatem przy dużych obrotach i małym posuwie powierzchnie środkowe próbek polerowano [5]. Twardość badano wzdłuż współrzędnych biegunowych w odstępach zapewniających uniknięcie wzajemnego wpływu stref wzmocnienia. Celem uzyskania możliwie dużej dokładności w odczytaniu zmian twardości w jednej płaszczyźnie mierzono przeciętnie twardość $60 \div 100$ punktów. Pomiary twardości wykonano dla trzech próbek [5]. Jako przykład podano rozkład twardości w polu uplastycznym próbki o parametrach $2\alpha = 60^\circ$ i $R = 0,57$. Rezultat pomiarów pokazano na rys. 3. Na rysunkach 4, 5, 6 zestawiono przebiegi wykresów przyrostu intensywności naprężeń odniesionych do umownej granicy plastyczności $\sigma_i(e_i = 0,02)$ materiału niezdeformowanego (wyjściowego) wzdłuż linii ABCDE, które są liniowymi współrzędnymi układu biegunowego l, ϑ . We wszystkich próbkach pokazane przebiegi zależności $\Delta\sigma_i/\sigma_i$ ($e_i = 0,02$) można w przybliżeniu uważać za bezwymiarowy rozkład wzmocnienia w strefie deformacji plastycznej. Wzmocnienie ulega znacznym zmianom w kierunku promie-

$e_i - H - \sigma_i$ i krzywą materiałową $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$. Przyjmuje się, że związki te mają tę samą postać w prostych i złożonych stanach naprężeń. Słuszność hipotez tych jest ciągle sprawą dyskusyjną z braku dostatecznej ilości danych eksperymentu.

2. Przebiegi umownych funkcji wzmocnienia $\Delta\sigma_i/\sigma_i(e_i = 0,02)$ w obszarach uplastycznienia wyciskanych próbek z PA 2 wskazują na istotne różnice we własnościach mechanicznych pomiędzy materiałem znajdującym się w otworze stożka matrycy a pozostałą

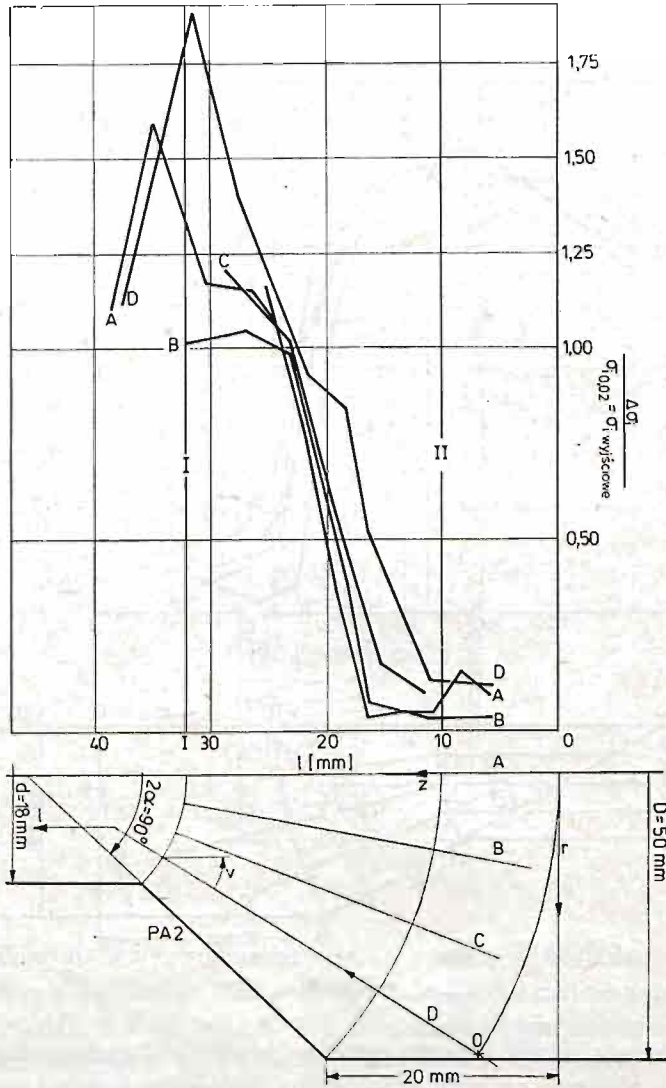


Rys. 4

częścią próbki. Zwraca uwagę znaczna niejednorodność materiału w strefie deformacji plastycznej. Jest to związane z niejednorodnością wyjściową materiału i silną niejednorodnością dużych odkształceń plastycznych powstałych w procesie wyciskania.

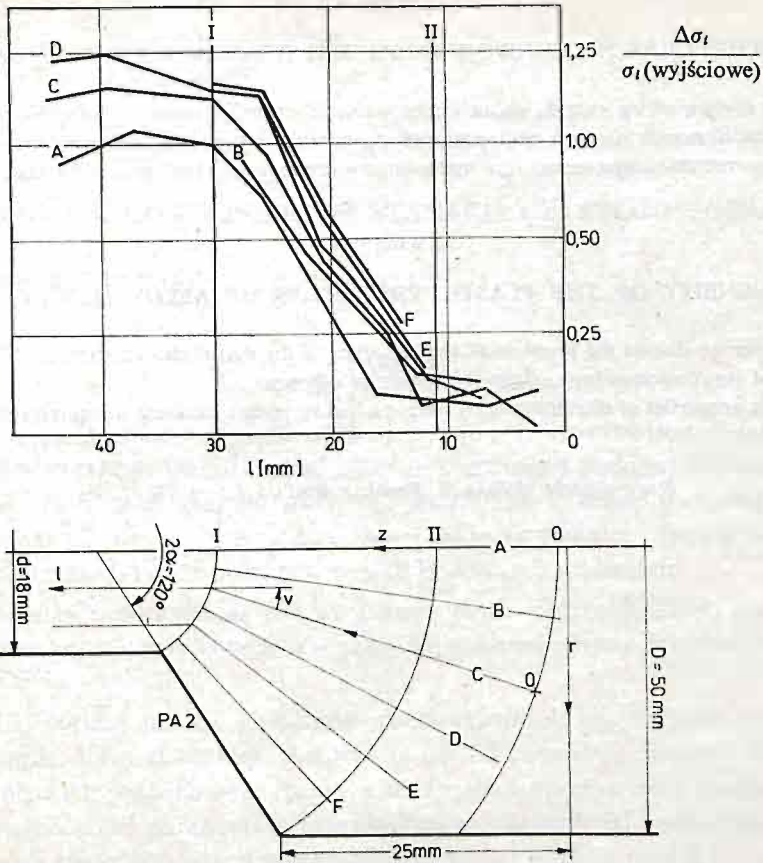
3. Nieuwzględnienie niejednorodności plastycznej, związanej ze wzmocnieniem, w obliczeniach procesów obróbki plastycznej prowadzi do poważnych błędów jakościowych. Pominięcie wzmocnienia w obliczeniach procesu wyciskania metodą wizjoplastyczności [1] daje jakościowo inny rozkład rozciągających naprężeń osiowych. Uważa się [1, 3, 4], że kształt i objętość tej części materiału, w której działają naprężenia rozciągające, decyduje o skłonności do środkowych pęknięć w wyciskanych prętach.

4. Badanie pól niejednorodności plastycznej wymaga opracowania nowych metod fizycznych. Metody te powinny umożliwić bezpośredni pomiar intensywności naprężeń w obszarze uplastycznienia. Jest to jednak zadanie trudne. Stąd należy prowadzić badania metodami, które przedstawiono powyżej. Przemawia za tym mało danych w literaturze



Rys. 5

na temat niejednorodności plastycznej materiałów poddawanych obróbce plastycznej [1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 12]. Metody oparte na hipotezach jednej krzywej płynięcia i jednego związku $H - \sigma_1$ są z konieczności przybliżone, pozwalają jednak dostarczyć dostatecznie pewnych danych o rozkładzie wzmocnienia w strefie deformacji plastycznej.



Rys. 6

Literatura

1. A. H. SHABAİK, F. G. THOMSEN, *Flow studies in extrusions*, Annals of the C.I.R.P. XVII, 1969.
2. L. DIETRICH, *Uwzględnienie wzmocnienia materialu w analizie złożonych procesów plastycznego płynięcia*, Prace I.P.P.T. PAN 52/1977.
3. G. D. DIEL, *Opriedielenije napriazienij w plasticzeskojoblasti po raspriedieleniju twiordosti*. Maszynostrojenije 1971.
4. G. D. DIEL, *Tiechnologiczeskaja miechanika*. Maszynostrojenije 1978.
5. J. PIWNIK, *Metody obliczeń złożonych procesów obróbki plastycznej w świetle badań doświadczalnych*, Prace I.P.P.T. PAN 14, 1979.
6. J. MIASTKOWSKI, *Kryteria plastycznego płynięcia i hipotezy wzmocnienia metali w świetle badań doświadczalnych*, Prace I.P.P.T. PAN 41, 1973.
7. W. K. GRIGOROWICZ, *Twiordost' i mikrotwiordost' mietallow*, I. Nauka. Moskwa 1976.
8. J. N. ROBINSON, A. H. SHABAİK, *The determination of the relationship between strain and microhardness by means of visioelasticity*, Metallurgical Trans., 4, 9, 1973.
9. Z. JASIEŃSKI, *Wplyw nierównomierności odkształcenia na zależność naprężenia właściwego od stopnia deformacji w szyjce rozciąganej próbki metalowej*, Arch. Hut., X, 2, 1965.
10. A. J. ISZLIŃSKI, *Osiesimmietrycznaja zadacza i proba Briniella*. P.M.M. 8. wyp. 3. 1944.
11. L. E. FARMER, S. W. CONNING, *Numerical smoothing of flow patterns*, Int. J. Mech. Sci. Vol. 21. 1979.
12. W. A. BACKOFEN, *Deformation Processing*, Massachusetts Institute of Technology 1972.

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ ПРИ ПРЕССОВАНИИ СПЛАВА ПА 2

В работе сделан обзор статей, касающихся методов исследования интенсивности напряжений ($\sigma_i(r, z)$) в пластической области деформируемого металла. Экспериментально исследовано твердость и интенсивность напряжений при прессовании стержней из сплава алюминия ПА 2.

Summary

NONHOMOGENEITY OF THE PLASTIC PROPERTIES OF ALLOY DURING EXTRUSION

In the paper we discuss the problem of the influence of the plastic deformation in cold extrusion on the intensity of shear stresses ($\sigma_i(r, z)$) in the sphere of deformation.

The plastic properties of aluminum alloy were studied by means hardness measurements in the plastic zone.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1984 roku

DWOISTOŚĆ RÓWNOWAGI W STANACH CZYSTEGO ZGINANIA

TOMASZ SADOWSKI (LUBLIN)

1. Wstęp

Istotnym zagadnieniem z punktu widzenia analizy konstrukcji jest określenie możliwości utraty pożądanego kształtu przez element konstrukcji poddany działaniu obciążeń zewnętrznych. Ta zmiana kształtu może być rozumiana w sensie dosłownym (np. wypukłość powłok, wybaczanie prętów ściskanych itp.), jak również i jako przewężenia powstające w prętach i płaskich próbkach ze stali poddanych rozciąganiu.

Zagadnienie to rozwiązywane jest na gruncie teorii bifurkacji, której podstawy sformułował Hill w końcu lat 1950-tych, a w pracy [1] dokonał syntezy dotychczas uzyskanych wyników.

Wiele prac dotyczy analizy elementów konstrukcyjnych znajdujących się w płaskich stanach naprężeń lub odkształceń. Autorzy pracy [2] rozważają zjawisko bifurkacji powstające w płaskich próbach rozciągania w materiałach sprężystych i sprężysto-plastycznych. W zależności od parametrów charakteryzujących materiał rozdwojenie może wystąpić w dwóch postaciach: 1) w postaci geometrycznej (diffuse mode), gdy punkt bifurkacji wystąpi dla naprężeń niższych od wywołujących maksymalne obciążenie próbki; 2) w postaci zlokalizowanego przewężenia (localized shear mode), gdy materiał próbki traci stateczność. Uzupełnieniem [2] jest opracowanie [3] dotyczące płaskich prób ściskania, gdzie bifurkacja objawia się wygięciem próbki (diffuse mode).

Problemem rozdwojenia w przypadku dwuosowego stanu rozciągania cienkich próbek metalowych wykonanych z materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem zajmowano się w pracy [4]. Autorzy uogólnili deformacyjną teorię plastyczności na zakres dużych odkształceń przy uwzględnieniu hipotezy, że w procesie aktywnego obciążenia na powierzchni płynięcia pojawiają się naroża [5]. Dla przyjętego materiału z potęgowym wzmocnieniem zbudowali oni model hypoelastyczny, przy wykorzystaniu którego określili stan obciążenia charakteryzujący powstanie zlokalizowanego przewężenia w próbce.

W zakresie zagadnień czystego zginania w pracy [6] rozważono możliwość wystąpienia rozdwojenia w oparciu o dwa modele konstytutywne: hypoelastyczny [4] i hyperelastyczny wynikający ze związków nieliniowej sprężystości. Zginana płyta wykonana jest z materiału sprężysto-plastycznego scharakteryzowanego powyżej granicy plastyczności krzywą potęgową. Dla tak przyjętego prawa autor analizuje zjawisko bifurkacji zaznaczając, że już przy niewielkich krzywiznach zgięcia w pewnych obszarach konstrukcji następuje odciążenie, tzn. proces obciążenia konstrukcji nie jest procesem aktywnym.

W niniejszej pracy w odróżnieniu od [6] przyjęto, że materiał sprężysto-plastyczny scharakteryzowany jest liniowym wzmocnieniem, spełniając w ten sposób wymagania aktywnego obciążenia konstrukcji. Rozważania przeprowadzono dla modelu hypoelastycznego, dla którego autorzy [4] dopuszczają alternatywną możliwość wprowadzenia innego prawa wzmocnienia niż potęgowe. Dla tak poczynionych założeń wyznaczono krzywizny krytyczne odpowiadające pojawieniu się pierwszych punktów bifurkacji w zależności od parametrów definiujących przyjęty materiał: modułu Younga, granicy plastyczności i współczynnika liniowego wzmocnienia. W rozważanym przypadku zginania pasma najpierw pojawiają się krótkofalowe powierzchnie rozdwojenia w postaci zamarszczenia się strefy ściskanej. Podobnie do schematu wprowadzonego w [2] podzielono obszar rozważanej konstrukcji na podobszary w zależności od tego, czy równanie podstawowe ma rozwiązanie w zakresie eliptycznym, czy parabolicznym. W przypadku gdy współlistnieją różne podobszary, wykreślono linie charakterystyczne. Uzyskane rezultaty porównano z wynikami pracy [6].

2. Sformułowanie problemu

2.1. Kryterium dwolistości. Załóżmy, że położenie punktu materialnego ciała jest określone przez współrzędne konwekcyjnego układu odniesienia. W konfiguracji początkowej ciało ma objętość V_0 i powierzchnię F_0 , a współrzędne układu konwekcyjnego oznaczmy X^K , jego zaś kontrawariantne tensory metryczne G^{KL} . W konfiguracji aktualnej, w chwili t , współrzędne tegoż układu oznaczmy x^i , tensor metryczny c^{ij} , a objętość i powierzchnię ciała odpowiednio przez V i F .

Zakładamy, że proces deformacji ciała opisany jest parametrem prostego obciążenia lub przemieszczenia λ , którego wartość w szczególnym przypadku zależy od czasu. W chwili przyjętej za początkową na części ciała $F_0^{(T)}$ działają martwe siły powierzchniowe $\bar{T}^L(X, \lambda_0) = \lambda_0 \bar{T}_{(s)}^L(X)$, a na części $F_0^{(U)}$ dane jest pole przemieszczeń $\bar{U}_K(X, \lambda_0) = \lambda_0 \bar{U}_K^{(s)}(X)$. λ_0 oznacza tu początkową wartość prostego parametru obciążenia $\bar{T}_{(s)}^L(X)$ lub przemieszczenia $\bar{U}_K^{(s)}(X)$. Zadane obciążenia i przemieszczenia zewnętrzne na F_0 wywołują w rozważanym ciele stan naprężenia, który w opisie Lagrange'a określamy I lub II tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa odpowiednio $T^{iK}(\lambda)$, $S^{KL}(\lambda)$, a stan odkształcenia tensorem Greena $E_{KL}(\lambda)$. Przyjmujemy, że w trakcie wzrostu parametru λ od wartości 0 do λ_0 rozwiązanie w naprężeniach i odkształceniach jest jednoznaczne. Oznaczmy je symbolami $\hat{T}^{iK}(\lambda)$, $\hat{S}^{KL}(\lambda)$, $\hat{E}_{KL}(\lambda)$ i nazwiemy rozwiązaniem fundamentalnym.

W zagadnieniu bifurkacji interesuje nas, czy wzrost deformacji jest opisany jednoznacznie. Założymy więc, że parametr λ wzrasta od wartości λ_0 do $\lambda_0 + \lambda dt$. Pociąga to za sobą wzrost rozwiązania fundamentalnego o wielkości $\overset{\circ}{v}_K$, $(\overset{\circ}{T}^L)$, $(\overset{\circ}{S}^{KL})$ i $(\overset{\circ}{E}_{KL})$. Przyjmujemy, że dla rozważanego stanu deformacji i poziomu naprężeń możliwe jest wystąpienie również innego rozwiązania przyrostowego, które nazwiemy bifurkacyjnym i oznaczmy $\hat{\overset{\circ}{v}}_K$, $(\hat{\overset{\circ}{T}}^L)$, $(\hat{\overset{\circ}{S}}^{KL})$ i $(\hat{\overset{\circ}{E}}_{KL})$. Wówczas różnice pomiędzy tymi rozwiązaniami wyrażą się związkami:

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}_K = \hat{\bar{v}}_K - \overset{\circ}{v}_K \\ \Delta \dot{\bar{T}}^L = (\hat{\bar{T}}^L)^\cdot - (\overset{\circ}{T}^L)^\cdot \\ \Delta \dot{\bar{S}}^{KL} = (\hat{\bar{S}}^{KL})^\cdot - (\overset{\circ}{S}^{KL})^\cdot \\ \Delta \dot{\bar{E}}_{KL} = (\hat{\bar{E}}_{KL})^\cdot - (\overset{\circ}{E}_{KL})^\cdot \end{cases} \quad (2.1)$$

Dla rozważanego przyrostowego problemu brzegowego możemy sformułować zasadę prac przygotowanych w poniższej postaci [1]:

$$\int_{F_0} \Delta \dot{\bar{T}}^L \Delta \bar{V}_L dF = \int_{V_0} (\Delta \dot{\bar{S}}^{KL} \Delta \dot{\bar{E}}_{KL} + \dot{\bar{S}}^{KL} \Delta \bar{V}_{M,K} \Delta \bar{V}_L^M) dV, \quad (2.2)$$

gdzie $\Delta \dot{\bar{E}}_{KL}$ wyraża się:

$$\Delta \dot{\bar{E}}_{KL} = \frac{1}{2} (\Delta \bar{V}_{K,L} + \Delta \bar{V}_{L,K}) + \frac{1}{2} (\bar{U}_{,K}^N \Delta \bar{V}_{N,L} + \bar{U}_{,L}^N \Delta \bar{V}_{N,K}). \quad (2.3)$$

Zasadę (2.2) możemy zapisać posługując się wielkościami odniesionymi do bazy konwekcyjnej w stanie zdeformowanego ciała o powierzchni bocznej F i objętości V . Otrzymujemy wówczas:

$$\int_F \Delta \dot{\bar{T}}^i \Delta v_i dF = \int_V (\Delta i^{ij} \Delta d_{ij} + i^{ij} \Delta v_{n,i} \Delta v_{,j}^n) dV. \quad (2.4)$$

$\dot{\bar{T}}^i$ oraz v_i są odpowiednio przyrostami sił powierzchniowych i prędkością przemieszczeń. i^{ij} jest tensorem naprężeń Kirchhoffa, którego składowe znajdujemy z zależności:

$$i^{ij} = x_{,K}^i x_{,L}^j \dot{\bar{S}}^{KL}, \quad (2.5)$$

ważnej dla ośrodków nieściśliwych. Pochodna konwekcyjna tensora Kirchhoffa związana jest z pochodną II tensora Pioli-Kirchhoffa wzorem:

$$\dot{i}^{ij} = x_{,K}^i x_{,L}^j \dot{\bar{S}}^{KL}, \quad (2.6)$$

a tensor prędkości deformacji d_{ij} z tensorem $\dot{\bar{E}}_{KL}$ zależnością:

$$d_{ij} = X_{,i}^K X_{,j}^L \dot{\bar{E}}_{KL}. \quad (2.7)$$

W związkach (2.5), (2.6) i (2.7) $x_{,K}^i$ oraz $X_{,i}^K$ oznaczają gradienty deformacji.

Jeżeli do (2.4) wprowadzimy związek konstytutywny o ogólnej postaci:

$$i^{ij} = B^{ijkl} d_{kl}, \quad (2.8)$$

gdzie B^{ijkl} charakteryzuje materiał w konfiguracji aktualnej, a

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (2.9)$$

to otrzymamy funkcjonał:

$$\tilde{F}(\lambda, \Delta v_n) = \int_V (B^{ijkl} \Delta d_{ij} \Delta d_{kl} + i^{ij} \Delta v_{n,i} \Delta v_{,j}^n) dV. \quad (2.10)$$

Funkcjonał ten jest dodatnio określony dla jednoznacznego rozwiązania rozważanego.

przyrostowego problemu brzegowego. Jeśli dla pewnej wartości krytycznej λ_{kr} spełnione zostaną warunki zerowania się funkcjonału \tilde{F} oraz jego pierwszej wariacji:

$$\tilde{F}(\lambda_{kr}, \Delta \bar{v}_n) = 0, \quad (2.11)$$

$$\delta \tilde{F}(\lambda_{kr}, \Delta \bar{v}_n) = 0, \quad (2.12)$$

to rozpatrywane zagadnienie wzrostu deformacji traci jednoznaczność, a tym samym związki (2.11) i (2.12) określają punkt bifurkacji. $\Delta \bar{v}_n$ oznacza tu funkcję własną odpowiadającą λ_{kr} .

2.2. Charakterystyka materiału. Rozważania dotyczą konstrukcji wykonanych z nieściśliwych materiałów plastycznych scharakteryzowanych liniowym wzmocnieniem powyżej granicy plastyczności. Najogólniejsza postać równania konstytutywnego dla ośrodka ciągłego w konfiguracji odkształconej wyraża się związkiem dewiatorowym:

$$(t'^{ij})^{\nabla J} = A^{ijkl} d_{kl}, \quad (2.13)$$

gdzie $(t'^{ij})^{\nabla J}$ jest pochodną Jaumanna dewiatora naprężenia Kirchhoffa. A^{ijkl} jest tensorem charakteryzującym własności materiału w stanie deformacji, który przyjmujemy w następującej postaci [4]:

$$A^{ijkl} = \bar{h} \left[\frac{1}{2} (c^{ik} c^{jl} + c^{jk} c^{il}) - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{h}{\bar{h}} \right) \frac{\sigma'^{ij} \sigma'^{kl}}{\sigma_e^2} \right], \quad (2.14)$$

gdzie $h = \frac{2}{3} E_s$, $\bar{h} = \frac{2}{3} E_t$, a σ'^{ij} są składowymi dewiatora naprężenia Cauchyego, natomiast E_s i E_t odpowiednio siecznym i stycznym modułem wzmocnienia, które otrzymujemy z krzywej naprężenie-odkształcenie dla jednoosiowego rozciągania w punkcie określonym zależnością:

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} (\sigma'_i \sigma'_i), \quad (2.15)$$

gdzie σ'_i są wartościami głównymi dewiatora naprężeń Cauchyego.

Związek konstytutywny możemy przedstawić wzorem równoważnym ze wzorem (2.13), wprowadzając pochodną konwekcyjną tensora naprężeń Kirchhoffa:

$$t'^{ij} = B^{ijkl} d_{kl} + \dot{p} c^{ij}, \quad (2.16)$$

gdzie tensor B^{ijkl} charakteryzuje własności materiału [7]:

$$B^{ijkl} = A^{ijkl} - t'^{kj} c^{il} - t'^{ki} c^{jl}, \quad (2.17)$$

a \dot{p} jest prędkością zmian ciśnienia hydrostatycznego.

Po wprowadzeniu (2.16) do zasady prac przygotowanych (2.4) otrzymujemy funkcjonał o postaci (2.10) przy uwzględnieniu, że dla materiałów nieściśliwych zachodzi:

$$c^{ij} \Delta d_{ij} = \Delta v^i_{,i} = 0. \quad (2.18)$$

Analizowane elementy konstrukcyjne wykonane są z materiałów, które można było opisać jak w [4] uogólnioną na duże odkształcenia deformacyjną teorią plastyczności,

dla której przyjęto w stanie jednoosiowym naprężeń model sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem:

$$\varepsilon_e = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{2\mu} & \text{dla } \sigma_e \leq \sigma_y \\ \frac{1}{2\bar{\mu}} \left[\sigma_e - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu} \right) \sigma_y \right] & \text{dla } \sigma_e > \sigma_y \end{cases}, \quad (2.19)$$

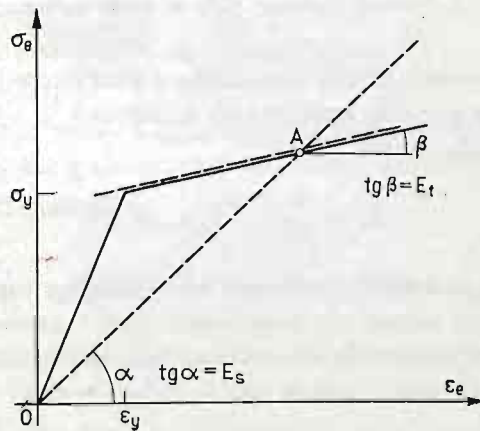
gdzie 2μ jest modułem Younga, $2\bar{\mu}$ modułem stycznym w strefie plastycznej, σ_y — granicą plastyczności. Stąd w prosty sposób otrzymujemy wyrażenia na E_s i E_t :

$$E_s = \begin{cases} 2\mu & \text{dla } \sigma_e \leq \sigma_y \\ 2\bar{\mu} \frac{\sigma_e}{\left[\sigma_e - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu} \right) \sigma_y \right]} & \text{dla } \sigma_e > \sigma_y \end{cases} \quad (2.20)$$

oraz

$$E_t = \begin{cases} 2\mu & \text{dla } \sigma_e \leq \sigma_y \\ 2\bar{\mu} & \text{dla } \sigma_e > \sigma_y \end{cases} \quad (2.21)$$

Na rys. 1 pokazano sposób wyznaczania modułów E_s i E_t .



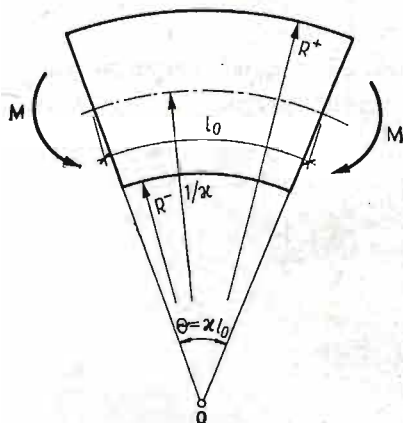
Rys. 1. Wykres naprężenie-odkształcenie pokazujący sposób wyznaczania modułu stycznego E_t i modułu siecznego E_s w punkcie A

3. Stan naprężenia pasma płytowego znajdującego się w warunkach czystego zginania

Możliwe są dwa podejścia do przeprowadzenia analizy stanu deformacji pasma. Pierwsze z nich określa plastyczne deformacje na bazie związków liniowej sprężystości przez wprowadzenie logarytmicznej miary odkształceń. Drugie podejście zaproponowane przez Sawczuka i Mielniczuka [8] oparte zostało na nieliniowej teorii sprężystości dużych deformacji przez uwzględnienie zmian konfiguracji odkształconego pasma. W pracy wykorzystamy pierwszy ze sposobów, a uzyskane wyniki porównamy z otrzymanymi w [8].

Rozważmy w warunkach płaskiego stanu odkształcenia płytę o początkowej długości l_0 i wysokości h_0 wykonaną z materiału nieściśliwego, izotropowego, sprężysto-plastycznego,

poddaną stanowi czystego zginania jak na rys. 2. Deformację analizowanej konstrukcji opisujemy w układzie współrzędnych walcowych, który jest zbieżny w tym przypadku z kierunkami głównymi odkształceń i naprężeń. Wartości główne wzdłuż promienia r oznaczmy indeksem 1, a wzdłuż kierunku θ indeksem 2.



Rys. 2. Przekrój podłużny płyty w stanie deformacji

Niech κ oznacza krzywiznę włókna obojętnego o początkowej długości l_0 . Wówczas wydłużenia w dowolnym punkcie materialnym oddalonym o wielkość r od początku układu współrzędnych będą równe:

$$\lambda_1 = \frac{1}{r\kappa}, \quad \lambda_2 = r\kappa. \quad (3.1)$$

Główne wartości odkształceń wyznaczamy wprowadzając logarytmiczną miarę odkształceń, którą najczęściej stosuje się przy opisie prób i testów metalurgicznych [1], w trakcie których materiał deformuje się w ten sposób, że kierunki główne osadzone są w materiale i deformują się wraz z nim w trakcie całego procesu obciążania [4]:

$$\varepsilon_\alpha = \ln \lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.2)$$

Dla materiałów izotropowych nieściśliwych gęstość energii dopełniającej wyraża się zależnością:

$$W_c = \frac{3}{4E_s} \Pi_{\sigma'}, \quad (3.3)$$

gdzie $\Pi_{\sigma'}$ — drugi niezmiennik wartości głównych dewiatora naprężeń Cauchyego. Stąd uzyskujemy równanie konstytutywne:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_i} = \frac{\sigma'_i}{\frac{2}{3} E_s} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

σ'_i jest tutaj wartością główną dewiatora naprężeń Cauchyego.

W płaskim stanie odkształcenia $\varepsilon_3 = 0$, stąd z (3.4) otrzymujemy, że:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (3.5)$$

i wówczas z (2.15) i (3.5) mamy równoważne wyrażenie na σ_e :

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|. \quad (3.6)$$

Dowolny element płyty znajduje się w stanie równowagi, który sprowadza się do równania:

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma r} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r} = 0. \quad (3.7)$$

Wprowadzając (3.2), (3.4), (3.5) i (2.15) do (3.7) uzyskujemy:

$$\frac{d(\sigma_1/2\tau_y)}{d(\ln \kappa r)} = \frac{4\mu}{3\tau_y} \ln \kappa r \quad (3.8)$$

dla strefy sprężystej, oraz:

$$\frac{d(\sigma_1/2\tau_y)}{d(\ln \kappa r)} = \frac{4\bar{\mu}}{3\tau_y} \ln \kappa r \pm \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \quad (3.9)$$

dla strefy plastycznej. Znak minus w (3.9) obowiązuje dla strefy ściskanej, znak plus zaś dla strefy rozciąganej. τ_y jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu.

Po scałkowaniu (3.8) dostajemy:

$$\frac{\sigma_1}{2\tau_y} = \frac{2\mu}{3\tau_y} (\ln \kappa r)^2 + c \quad \text{dla} \quad |\ln \kappa r| \leq \frac{3\tau_y}{4\mu} \quad (3.10)$$

dla obszaru sprężystego, natomiast po scałkowaniu (3.9) otrzymujemy:

$$\frac{\sigma_1}{2\tau_y} = \frac{2\bar{\mu}}{3\tau_y} (\ln \kappa r)^2 \pm \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \ln \kappa r + d \quad \text{dla} \quad |\ln \kappa r| \geq \frac{3\tau_y}{4\mu} \quad (3.11)$$

Zależność (3.11) dotyczy plastycznego obszaru konstrukcji. Stałe całkowe c i d w powyższych wzorach znajdujemy z warunków brzegowych.

Oznaczmy promienie włókien zewnętrznych przez R^+ i R^- (rys. 2). Z warunku ciągłości naprężeń σ_1 oraz ich zanikania na powierzchniach nieobciążonych mamy:

$$\kappa R^+ = \frac{1}{\kappa R^-}. \quad (3.12)$$

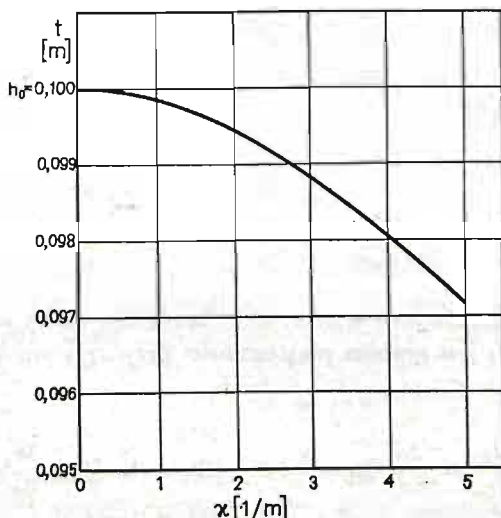
Z warunku nieściśliwości materiału uzyskujemy drugą zależność pomiędzy R^+ i R^- :

$$(R^+)^2 - (R^-)^2 = \frac{2h_0}{\kappa}. \quad (3.13)$$

Dwa równania (3.12) i (3.13) po rozwiązaniu dają wzory do wyznaczania promieni włókien zewnętrznych:

$$\begin{aligned} R^+ &= \frac{1}{\kappa} \{ \kappa h_0 + [(\kappa h_0)^2 + 1]^{1/2} \}^{1/2}, \\ R^- &= \frac{1}{\kappa} \{ [(\kappa h_0)^2 + 1]^{1/2} - \kappa h_0 \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Umożliwiają one sporządzenie wykresu zmian grubości w zależności od stanu deformacji (rys. 3). Przyjęto, że początkowa grubość płyty wynosi 10 cm. Podobne zagadnienie zginanego pasma płytowego wykonanego z tworzywa hipersprężysto-plastycznego, ale przy zastosowaniu drugiego sposobu podejścia rozważano w [8]. Autorzy uzyskali zbliżone zmiany grubości pasma.



Rys. 3. Zmiany grubości pasma w ciągu procesu zginania

Znając wartości R^+ i R^- dla dowolnego κ możemy wyznaczyć stałe całkowe c i d , określając w ten sposób pole naprężeń występujące w stanie obciążenia konstrukcji. Zależy ono od zmiennej krzywizny κ , stałych charakteryzujących materiał konstrukcji, tzn. μ , $\bar{\mu}$, σ_y , oraz od początkowej wysokości h_0 :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{4\mu}{3} [\ln \kappa r]^2 - \frac{4\bar{\mu}}{3} [\ln \kappa R^+]^2 + \\ &\quad + 2\tau_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu} \right) \left(\frac{3\tau_y}{4\mu} - \ln \kappa R^+ \right), \\ \sigma_2 &= \frac{4\mu}{3} [\ln \kappa r]^2 - \frac{4\bar{\mu}}{3} [\ln \kappa R^+]^2 + \frac{8}{3} \mu \ln \kappa r + \\ &\quad + 2\tau_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu} \right) \left(\frac{3\tau_y}{4\mu} - \ln \kappa R^+ \right) \end{aligned} \right. \quad (3.15a)$$

dla

$$\frac{3\tau_y}{4\mu} \geq \ln \kappa r \geq 0 \quad \text{strefa rozciągana,}$$

$$0 \geq \ln \kappa r \geq -\frac{3\tau_y}{4\mu} \quad \text{strefa ściskana}$$

oraz

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{4\bar{\mu}}{3} [(\ln \kappa r)^2 - (\ln \kappa R^+)^2] + \\ \quad + 2\tau_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) [\pm \ln \kappa r - \ln \kappa R^+], \\ \sigma_2 = \frac{4\bar{\mu}}{3} [(\ln \kappa r)^2 - (\ln \kappa R^-)^2] + \\ \quad + 2\tau_y \left\{ \left[\pm \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) + \frac{4}{3} \frac{\bar{\mu}}{\tau_y} \right] \ln \kappa r + \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) [\pm 1 - \ln \kappa R^+] \right\} \end{array} \right. \quad (3.15b)$$

dla

$$\ln \kappa R^+ \geq \ln \kappa r \geq \frac{3\tau_y}{4\mu} \quad \text{strefa rozciągana,}$$

$$-\frac{3\tau_y}{4\mu} \geq \ln \kappa r \geq \ln \kappa R^- \quad \text{strefa ściskana.}$$

Zależności (3.15a) odnoszą się do obszaru sprężystego, natomiast (3.15b) do obszaru plastycznego. Kilka przykładowych wykresów naprężeń sporządzono w pracy [9].

W uzyskanym rozwiązaniu warunków plastycznego obciążenia wyraża się wzorem:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{4\sqrt{3}\mu}{3} \|\ln \kappa r\| \geq \sigma_y, \quad (3.16)$$

bowiem rozważania obejmują materiał sprężysto-plastyczny. W monografii [10] podano ogólną teorię zginanego pasma płytowego wykonanego z materiału idealnie plastycznego. dla którego odpowiednikiem (3.16) jest:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_y. \quad (3.17)$$

Stąd po uwzględnieniu (3.17) w warunku równowagi (3.7) uzyskano wyrażenia na σ_1 i σ_2 , które nie zależą od κ i są funkcjami $\ln r$ w pierwszej potędze.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w rozważanym zagadnieniu położenie osi obojętnej określamy jako średnią arytmetyczną promieni włókien skrajnych R^+ i R^- , natomiast w analizie Sawczuka i Mielniczuka [8] oś obojętna nie pokrywa się z osią symetrii pasma, a przesunięta jest nieco ku środkowi krzywizny. Oprócz osi obojętnej możemy wyróżnić jeszcze jedno włókno scharakteryzowane zerowaniem się intensywności naprężeń σ_e . Jest ono poddane wszechstronnemu równomiernemu ściskaniu, a promień jego wyznaczamy z zależności $\rho = \sqrt{R^+ R^-}$. Włókno to w stosunku do osi obojętnej przesunięte jest nieco ku środkowi krzywizny.

4. Analiza bifurkacji

4.1. Sformułowanie podstawowych zależności. W interesującym nas zagadnieniu czystego zginania parametrem λ , wraz z którym narastają obciążenia będzie krzywizna włókna obojętnego κ . Wówczas dla płaskiego stanu odkształceń w krzywoliniowym układzie odniesienia funkcjonał (2.10) przyjmuje postać:

$$\tilde{F}(\kappa, \Delta v_i) \equiv \int_0^{\kappa_0} \int_{R^-}^{R^+} (B^{\alpha\beta\gamma\delta} \Delta d_{\alpha\beta} \Delta d_{\gamma\delta} + i^{\alpha\beta} \Delta v_{n,\alpha} \Delta v_{n,\beta}^n) r dr d\theta. \quad (4.1)$$

Występujące w (4.1) wielkości są składowymi fizycznymi tensorów. Składowe fizyczne $\Delta v_{i,j}$ we współrzędnych walcowych są następujące:

$$\begin{cases} \Delta v_{1,1} = \frac{\partial \Delta v_1}{\partial r}; & \Delta v_{1,2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta v_1}{\partial \theta} - \frac{\Delta v_2}{r}; \\ \Delta v_{2,1} = \frac{\partial \Delta v_2}{\partial r}; & \Delta v_{2,2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta v_2}{\partial \theta} + \frac{\Delta v_1}{r}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Dla materiałów nieściśliwych spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \Delta v_1) + \frac{\partial \Delta v_2}{\partial \theta} = 0. \quad (4.3)$$

Zakładamy, że istnieje potencjał, który określa prędkości na podstawie następujących zależności:

$$\Delta v_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta}; \quad \Delta v_2 = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r}. \quad (4.4)$$

Przez wprowadzenie potencjału upraszczamy rozwiązanie zagadnienia, bowiem w funkcjonał (4.1) wystąpi jedna nieznaną funkcją $\tilde{\Phi}$.

Składowe tensora $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ wyznaczmy posługując się (2.17), (2.14), (2.20) i (2.21):

$$\begin{cases} B^{1111} = \frac{\bar{h}}{2} \left(1 + \frac{h}{\bar{h}}\right) - 2\sigma_1; \\ B^{2222} = \frac{\bar{h}}{2} \left(1 + \frac{h}{\bar{h}}\right) - 2\sigma_2; \\ B^{1122} = B^{2211} = \frac{\bar{h}}{2} \left(1 - \frac{h}{\bar{h}}\right); \\ B^{1212} = B^{2112} = B^{1221} = B^{2121} = \frac{\bar{h}}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Po wprowadzeniu (4.2), (4.4), (4.5) do funkcjonału bifurkacji (4.1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\kappa, \tilde{\Phi}) = & \int_0^{\kappa_0} \int_{R^-}^{R^+} \left[(2h - \sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r \partial \theta} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} (\bar{h} - \sigma_1 - \sigma_2) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \right)^2 + \\ & \left. + \sigma_1 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r^2} \right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \right)^2 \right] r dr d\theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Zagadnienie pojawiania się bifurkacji rozwiążemy dla warunków brzegowych, gdy moment względem włókna obojętnego na obu końcach płyty kontrolowany jest w ciągu procesu deformacji. Odpowiada to następującym warunkom brzegowym:

$$\Delta \dot{T}^\alpha = 0 \quad \text{dla} \quad \theta = 0, \kappa l_0; \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.7)$$

gdzie \dot{T}^α oznacza wzrost fizycznych składowych wektorów sił powierzchniowych. Ponadto, ponieważ pozostałe powierzchnie wyznaczone promieniami R^- i R^+ są wolne od obciążeń, zatem:

$$\Delta \dot{T}^\alpha = 0 \quad \text{dla} \quad r = R^-, R^+; \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.8)$$

Dla wyróżnionych warunków brzegowych dowolny potencjał $\tilde{\Phi}$ można przedstawić w najogólniejszej postaci za pomocą rozwinięcia w szeregi trygonometryczne Fouriera, co umożliwi oddzielne rozpatrywanie powierzchni niestabilności scharakteryzowanych dowolną wartością n :

$$\tilde{\Phi}(r, \theta) = \Phi_{c0}(r) + \sum \left[\tilde{\Phi}_{cn}(r) \cos\left(\frac{2\pi n\theta}{\kappa l_0}\right) + \tilde{\Phi}_{sn}(r) \sin\left(\frac{2\pi n\theta}{\kappa l_0}\right) \right] \quad (4.9)$$

dla $n = 1, 2, 3 \dots$, a $\tilde{\Phi}_{cn}(r)$, $\tilde{\Phi}_{sn}(r)$ są ciągłymi różniczkowalnymi funkcjami r . Jeśli (4.9) wprowadzimy do funkcjonału (4.6) i scałkujemy względem θ , to $\tilde{F}(n, \Phi)$ możemy zapisać w postaci:

$$\tilde{F}(n, \tilde{\Phi}) = \tilde{F}_0(n, \Phi_{c0}) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{F}_n(n, \Phi_{sn}) + \tilde{F}_n(n, \Phi_{cn})], \quad (4.10)$$

gdzie \tilde{F}_n dane jest zależnością:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(n, \Phi) = & \int_{R^-}^{R^+} \left\{ (2h - \sigma_1 - \sigma_2) \left[\frac{2\pi n}{\kappa l_0} \frac{\Phi}{r^2} - \frac{2\pi n}{\kappa l_0} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right]^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} (\bar{h} - \sigma_1 - \sigma_2) \left[\left(\frac{2\pi n}{\kappa l_0} \right)^2 \frac{\Phi}{r^2} + \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right]^2 + \\ & \left. + \sigma_1 \left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} \right)^2 + \sigma_2 \left[\left(\frac{2\pi n}{\kappa l_0} \right)^2 \frac{\Phi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right]^2 \right\} r dr \\ & n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

Poszukiwana krzywizna krytyczna pierwszego punktu rozdwojenia dana jest przez najmniejszą wartość własną każdego z funkcjonałów \tilde{F}_n , dla wszystkich wartości n . Odpowiadająca moda własna wyrażona jest przez $\Phi(r) \cos(2\pi n\theta/\kappa l_0)$ lub $\Phi(r) \sin(2\pi n\theta/\kappa l_0)$.

4.2. Określenie obszarów rozwiązania równania różniczkowego. W podobny sposób jak w [2] przeprowadzimy klasyfikację obszarów rozwiązania równania bifurkacji, dla materiałów opisanych związkiem konstytutywnym (2.13). Rozdwojenie nastąpi, gdy zostaną spełnione dwa warunki:

$$\tilde{F}(\kappa_{kr}, \tilde{\Phi}) = 0, \quad (4.12)$$

$$\delta \tilde{F}(\kappa_{kr}, \tilde{\Phi}) = 0. \quad (4.13)$$

W przypadku niejednorodnego przedbifurkacyjnego pola naprężeń wykorzystanie warunku (4.13) przy uwzględnieniu (4.6) prowadzi do równania Eulera:

$$(\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial^4 \tilde{\Phi}}{\partial r^4} + 2(2h - \bar{h}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \tilde{\Phi}}{\partial r^2 \partial \theta^2} + (\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^4} + Q[\tilde{\Phi}] = 0 \quad (4.14)$$

(4.14) jest liniowym cząstkowym równaniem różniczkowym czwartego rzędu względem potencjału $\tilde{\Phi}(r, \theta)$. $Q[\tilde{\Phi}]$ stanowi tu operator różniczkowy trzeciego rzędu, którego nie będziemy wyszczególniali. Wprowadzając charakterystyki postaci $\varphi(r, \theta) = c$ możemy dla (4.14) napisać równanie charakterystyczne:

$$(\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + 2(2h - \bar{h}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^2 \partial \theta^2} + (\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^4} = 0. \quad (4.15)$$

Jeśli przejdziemy z postaci uwikłanej charakterystyki $\varphi(r, \theta) = 0$ do postaci jawnej $\theta = f(r)$, to pochodną tej funkcji możemy wyrazić:

$$\theta' = - \frac{r d\theta}{dr}, \quad (4.16)$$

i wówczas otrzymujemy równanie charakterystyczne (4.15) w formie:

$$(\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2)(\theta')^4 + 2(2h - \bar{h})(\theta')^2 + (\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) = 0. \quad (4.17)$$

Gdy (4.17) ma pierwiastki rzeczywiste, możemy zbudować potencjał $\tilde{\Phi}$, który spełnia (4.14) i ma ciągle pochodne drugiego rzędu wzdłuż charakterystyk. Klasyfikację obszarów rozwiązania równania różniczkowego (4.14) dokonamy wprowadzając określenia stosowane w analizie układów równań cząstkowych. Mianowicie punkt pasma płytowego znajduje się w obszarze eliptycznym, jeżeli (4.17) nie ma pierwiastków rzeczywistych. Jeżeli (4.17) ma dwa lub cztery pierwiastki rzeczywiste, to rozważany punkt znajduje się odpowiednio w obszarze parabolicznym lub hiperbolicznym.

W przypadku materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem występują tylko dwa obszary w płycie: eliptyczny i paraboliczny, podczas gdy dla materiału scharakteryzowanego krzywą potęgową wystąpił również i obszar hiperboliczny [6].

Obszar eliptyczny. Równanie (4.17) nie ma pierwiastków rzeczywistych, co równoważne jest warunkami:

$$-2(2h - \bar{h}) \pm \sqrt{\Delta} < 0 \quad (4.18)$$

lub w szczegółowej postaci:

$$\begin{aligned} & - \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \pm \\ & \pm \sqrt{\left[- \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\right]^2 - \frac{3}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{9}{4} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| - \right.} \\ & \left. - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2} < 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dla materiału o charakterystykach $\bar{\mu} = 0,1 \mu = 1,05 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$ i $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2 \text{ MN/m}^2$ obszar eliptyczny zawiera się w granicach:

$$|\ln \kappa r| < 0,5. \quad (4.20)$$

Obszar paraboliczny. Równanie (4.17) ma dwa pierwiastki rzeczywiste gdy:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) + \\
 & \pm \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\right]^2 - \frac{3}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{9}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \right.} \\
 & \left. - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2} = \begin{cases} > 0 \text{ strefa ściskana} \\ < 0 \text{ strefa rozciągana.} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

We wzorach (4.19) i (4.21) znak plus dotyczy strefy ściskanej, minus strefy rozciąganej.

Dla materiału o charakterystykach $\bar{\mu} = 0,1$, $\mu = 1,05 \cdot 10^4$ MN/m² i $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2$ MN/m² możemy określić obszar paraboliczny:

$$|\ln \kappa r| > 0,5. \quad (4.22)$$

4.3. Charakterystyki równania różniczkowego bifurkacji. Równania charakterystyk dla (4.17) są następujące:

$$\theta' = \pm \sqrt{\frac{\bar{h} - 2h \pm \sqrt{(\bar{h} - 2h)^2 - (\bar{h})^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}}{\bar{h} - (\sigma_2 - \sigma_1)}} \quad (4.23)$$

Stąd dla przyjętego materiału otrzymujemy:

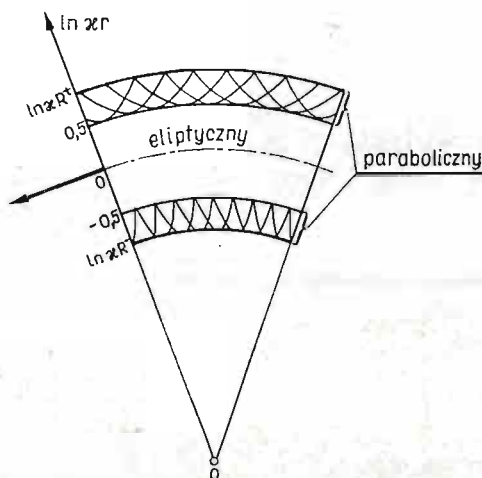
$$\begin{aligned}
 \theta = \pm \int \sqrt{\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \pm \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\right]^2 + \frac{9}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \frac{9}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \frac{1}{2\bar{\mu}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\sigma_y\right] \frac{3}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)}}} + \\
 - \frac{3}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{9}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2} \quad \text{dln} \kappa r
 \end{aligned} \quad (4.24)$$

W przypadku materiału $\bar{\mu} = 0,1$, $\mu = 1,05 \cdot 10^4$ MN/m² i granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2$ MN/m² naszkicowano na rys. 4 kilka reprezentatywnych charakterystyk. Są one w strefie rozciąganej styczne do granicy $E-P$, natomiast w strefie ściskanej prostopadłe.

W przykładzie podanym w pracy [6] płyta podzielona została na trzy podobszary, przy czym obszar hiperboliczny występuje między parabolicznym i eliptycznym. Charakterystyki w strefie rozciąganej są prostopadłe do granicy $H-E$, natomiast w strefie ściskanej styczne.

Podstawową własnością charakterystyk w omawianym zagadnieniu jest ich występowanie po osiągnięciu pierwszego punktu bifurkacji. To stwierdzenie można wyrazić następująco: jeżeli w pewnym stanie deformacji określonym przez krzywiznę κ , część ciała znajduje się w obszarze parabolicznym, wtedy istnieje przynajmniej jeden punkt rozdwojenia dla $\kappa_{kr} \leq \kappa$. Zostało ono dowiedzione w [6]. Podobne stwierdzenie podano i udowodniono w pracy [11] dla przypadku jednorodnego przedbifurkacyjnego pola naprężeń.

Autorzy pracy [2] badając zjawisko rozdzielenia w płaskich próbach rozciągania używali w przypadku postaci geometrycznej (diffuse mode), podobnie jak w niniejszej pracy podział obszaru rozwiązania podstawowego równania bifurkacji na dwie części: eliptyczną i paraboliczną. W analizowanym przez nich przypadku bifurkacja jest możliwa, gdy przechodzimy z obszaru eliptycznego do parabolicznego, a granica między tymi obszarami jest miejscem akumulacji punktów wartości własnych.



Rys. 4. Krzywe charakterystyczne oraz obszary rozwiązania równania różniczkowego

4.4. Krótkofalowe powierzchnie niestabilności. Jak stwierdzono w paragrafie 4.1 moda własna wyrażona jest w formie $\Phi(r)\cos(2\pi n\theta/\kappa l_0)$ lub $\Phi(r)\sin(2\pi n\theta/\kappa l_0)$. Dla krótkich długości fal, tzn. $n \rightarrow \infty$, krzywiznę krytyczną κ_{kr} , jak również i asymptotyczną formę mody własnej można wyrazić analitycznie.

Wariacyjna forma równania bifurkacji odpowiadająca parametrowi n jest postaci $\delta\tilde{F}_n = 0$, gdzie \tilde{F}_n dane jest przez (4.11). Stosując podstawienie $x = \ln \kappa r$ otrzymujemy następujące równanie Eulera:

$$\begin{aligned}
 & [n^4(\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) + 0(n^2)]\Phi + 0(n^2)\frac{d\Phi}{dx} + [2n^2(\bar{h} - 2h) + \\
 & + 0(1)]\frac{d^2\Phi}{dx^2} + 0(1)\frac{d^3\Phi}{dx^3} + [\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2]\frac{d^4\Phi}{dx^4} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

wraz z warunkami brzegowymi:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & [n^2(\bar{h} - \sigma_1 - \sigma_2)]\Phi + 0(1)\frac{d\Phi}{dx} + (\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0, \\
 & 0(n^2)\Phi + [n^2(-4h + \bar{h} + \sigma_1 + \sigma_2) + 0(1)]\frac{d\Phi}{dx} + \\
 & + 0(1)\frac{d^2\Phi}{dx^2} + [\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2]\frac{d^3\Phi}{dx^3} = 0,
 \end{aligned} \right. \tag{4.26}$$

dla $x = x^+ = \ln \kappa R^+$ i $x = x^- = \ln \kappa R^-$.

Dla dużych wartości n $\Phi(x)$ przyjmuje asymptotyczną reprezentację:

$$\Phi(x) = A \exp[n^j f_j(x) + \dots + n f_1(x) + f_0(x) + n^{-1} f_{-1}(x) + \dots]. \quad (4.27)$$

Z równania Eulera i warunków brzegowych grupując wyrażenia z tymi samymi potęgami n dochodzimy do wniosku, że dla $j > 1$ $f_j(x) = 0$, natomiast dla $j = 1$ $f_1(x)$ spełnia:

$$(\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) + 2(\bar{h} - 2h) \left(\frac{df_1}{dx} \right)^2 + (\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{df_1}{dx} \right)^4 = 0. \quad (4.28)$$

Rozwiązanie równania (4.25) spełniające warunki brzegowe (4.26) można przedstawić dla dużych wartości n następująco:

$$\Phi(x) = A \exp[n f_{1a}(x)] + B \exp[n f_{1b}(x)], \quad (4.29)$$

gdzie $f_{1a}(x)$ i $f_{1b}(x)$ są dwoma rozwiązaniami (4.28). W rozważanym zagadnieniu funkcja $\Phi(x)$ musi być jednoznacznie ograniczona dla wszystkich wartości n . Pociąga to za sobą spełnienie warunku $\text{Re}[f_1(x)] < 0$. Gdy całe pasmo płytowe znajduje się w obszarze eliptycznym, nie mamy pierwiastków rzeczywistych i rozwiązania (4.28) czynią wówczas zadość:

$$\text{Re} \left[\frac{df_1}{dx} \right] < 0. \quad (4.30)$$

Do dalszych rozważań wprowadzimy skrócony zapis:

$$\frac{df_{1a}(x^-)}{dx} = \varrho_a; \quad \frac{df_{1b}(x^-)}{dx} = \varrho_b. \quad (4.31)$$

Z warunków brzegowych (4.26) dla $x = x^-$, uwzględniając (4.29) i (4.31), otrzymujemy:

$$(1 + \varrho_a^2)A + (1 + \varrho_b^2)B = 0, \quad (4.32)$$

$$[(\bar{h} - 4h + \sigma_2)\varrho_a + (\bar{h} - \sigma_2)\varrho_a^3]A + [(\bar{h} - 4h + \sigma_2)\varrho_b + (\bar{h} - \sigma_2)\varrho_b^3]B = 0.$$

Zerowanie się wyznacznika podstawowego układu (4.32) zapewnia istnienie rozwiązań niezerowych:

$$(\bar{h} - 4h + \sigma_2)(1 - \varrho_a \varrho_b) + (h - \sigma_2)(\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_a \varrho_b + \varrho_a^2 \varrho_b^2) = 0. \quad (4.33)$$

Z równania (4.28) przy oznaczeniach ϱ_a i ϱ_b dostajemy zależność:

$$\varrho_a \varrho_b = \sqrt{\frac{\bar{h} + \sigma_2}{h - \sigma_2}}, \quad \varrho_a^2 + \varrho_b^2 = \frac{2(2h - \bar{h})}{\bar{h} - \sigma_2}, \quad (4.34)$$

które w połączeniu z (4.33) umożliwia sformułowanie zależności:

$$\sqrt{\frac{\bar{h} - \sigma_2}{\bar{h} + \sigma_2}} = 1 - \frac{2h}{\sigma_2} \quad \text{dla} \quad r = R^- \quad (4.35)$$

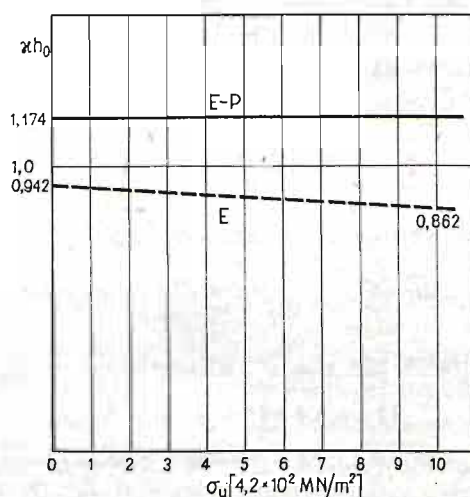
Warunki brzegowe (4.26) na końcu $x = x^+$ są również asymptotycznie spełnione, ponieważ $\text{Re}[f_1(x)] < 0$, a więc dla dużych wartości n $\Phi(x)$ i jego pochodne dążą do zera, zanikając w wąskiej strefie w pobliżu $x = x^-$.

Identyczne rozważania możemy przeprowadzić dla brzegu $x = x^+$.

Uwzględniając (2.20), (2.21), (3.15) w (4.35) otrzymujemy wzór do wyznaczenia krzywizny krytycznej odpowiadającej początkowemu punktowi bifurkacji:

$$\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = \frac{\frac{8}{3}\bar{\mu}(x-1) \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)}{\frac{8}{3}\bar{\mu}x \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)}, \quad (4.36)$$

gdzie znak plus dotyczy strefy rozciąganej, natomiast minus strefy ściskanej. Rozwiązując (4.36) znajdujemy pierwiastki odpowiadające niejednoznaczności procesu deformacji i możliwości pojawienia się powierzchni niestabilności. Zależności (4.36) pokazano na rys. 5, zależność zaś od parametru wzmocnienia materiału $\bar{\mu}$ przedstawiono na rys. 6.

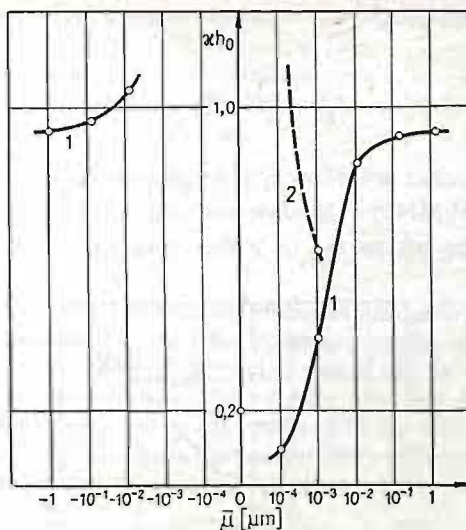


Rys. 5. Krzywizny krytyczne $\kappa_{kr} h_0$ odpowiadające pierwszym punktom bifurkacji dla materiału o charakterystykach $\bar{\mu} = 0,1$ $\mu = 1,05 \cdot 10^4$ MN/m²

Z rys. 6 widać, że jeśli w płycie pojawi się pierwsza krótkofalowa powierzchnia niestabilności, to zawsze będzie ona zlokalizowana w strefie ściskanej.

Dla rozważanego materiału sprężysto-plastycznego nie uzyskano początkowego punktu bifurkacji w przedziale $\langle -10^{-3}\mu; 0 \rangle$, tzn. gdy współczynnik liniowego wzmocnienia $\bar{\mu}$ bliski jest zeru i materiał może być traktowany jako idealnie plastyczny. Zagadnieniem jednoznaczności zginania zajmowano się również w pracy [12] dla przypadku idealnej plastyczności. Stwierdzono, że niejednoznaczność może wystąpić, gdy kąt zgięcia określony ilorazem R^+/R^- przekroczy wartość graniczną 1,25, co odpowiada stanowi zgięcia scharakteryzowanemu w niniejszej pracy przez $\kappa_{kr} = 2 \cdot 1/m$ lub $\kappa_{kr} h_0 = 0,2$.

Lewa strona rys. 6 dotyczy materiału niestabilnego w sensie Druckera, tzn. parametru wzmocnienia $\bar{\mu}$ ma ujemną wartość, co możemy interpretować jako fakt, że stan naprężenia w konstrukcji osiągnął wartość powodującą np. degradację materiału konstrukcji, i wówczas proces deformacji pasma następuje po drodze niestatecznej.



Rys. 6. Krzywizny krytyczne $\kappa_{kr} h_0$ odpowiadające pierwszym punktom bifurkacji dla materiału o granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2 \text{ MN/m}^2$ oraz $\mu = 1,05 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$

5. Omówienie wyników i wnioski

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że pierwsza powierzchnia niestabilności może pojawić się, gdy cała płyta znajduje się w obszarze eliptycznym rozwiązania podstawowego równania różniczkowego (4.14), podobnie jak w pracy [6]. Również w pracy [13] badając poddane ciśnieniu wydrążenie kuliste w nieskończonym ośrodku sprężysto-plastycznym stwierdzono, że krótkofalowa powierzchnia niestabilności jest pierwszym punktem bifurkacji pojawiającym się w ciągu procesu deformacji.

W rozważanym przypadku ciała wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem uzyskano zależność (4.36) określającą krzywiznę krytyczną odpowiadającą pierwszym punktom rozdzielenia jako funkcję cech fizycznych materiału σ_y , μ , $\bar{\mu}$ (rys. 5, rys. 6). Analiza wpływu σ_y na wartość krzywizny krytycznej wskazuje, że wraz ze wzmocnieniem się materiału, zależnym od historii obciążenia, występuje w przypadku czystego zginania zmniejszenie się κh_0 . Obniżenie się wartości krzywizny krytycznej następuje również wraz ze zmniejszeniem się współczynnika $\bar{\mu}$ z wyłączeniem przedziału $\langle -10^{-3}\mu; 0 \rangle$.

Odpowiadająca krzywiznie krytycznej pierwsza powierzchnia niestabilności zawsze pojawia się najpierw w obszarze ściskanim pasma, podobnie jak w pracy [6].

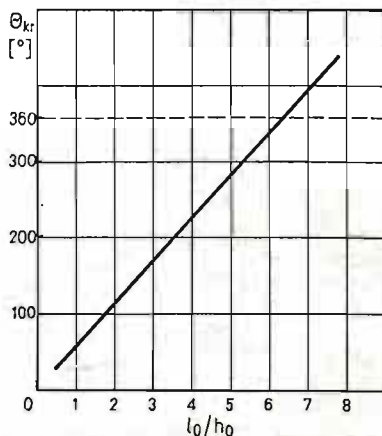
Uzyskane rozwiązanie ograniczone jest geometrią odkształcenia. Kąt zgięcia nie może przekraczać 360° . Graniczna krzywizna wynosi:

$$(\kappa h_0)_{gr} \frac{l_0}{h_0} \leq 2\pi. \quad (5.1)$$

Wartość kąta odpowiadającego dowolnej krzywiznie krytycznej możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$\theta_{kr} = (\alpha_{kr} h_0) \frac{l_0}{h_0}, \quad (5.2)$$

gdzie l_0 i h_0 są długością oraz wysokością początkową pasma. Dla materiału o granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2 \text{ MN/m}^2$ i module wzmocnienia $\bar{\mu} = 0,1$ $\mu = 1,05 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$ zależność (5.2) ma przebieg jak na rys. 7, z którego wynika, że jeżeli l_0/h_0 wynosi 2, to



Rys. 7. Kąt krytyczny θ_{kr} określający pierwszy punkt bifurkacji

krytyczny kąt zgięcia odpowiadający możliwości wystąpienia pierwszej powierzchni niestabilności jest równy 107° . Ponadto, gdy l_0/h_0 jest większe od 6,5, to pasmo możemy zgiąć do 360° bez obawy o utratę jednoznaczności procesu deformacji.

Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *Aspect of Invariance in Solid Mechanics*, Advances in Applied Mechanics, 18, 1978.
2. R. HILL, J. W. HUTCHINSON, *Bifurcation Phenomena in the Plane Tension Test*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 4/5, 23, 1975.
3. N. J. B. YOUNG, *Bifurcation Phenomena in the Plane Compression Test*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1, 24, 1976.
4. S. STÖREN, J. R. RICE, *Localized Necking in Thin Sheets*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 6, 23, 1975.
5. R. HILL, *The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2, 15, 1967.
6. N. TRIANTAFYLIDIS, *Bifurcation Phenomena in Pure Bending*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 3/4, 28, 1980.
7. M. DUSZEK, *Problems of Geometrically Non-linear Theory of Plasticity*, Institut für Mechanik Ruhr-Universität Bochum, 21, 1980.
8. A. SAWCZUK, J. MIELNICZUK, *On Yielding of Hyperelastic Solids*, ZAMM, 1, 55, 1975.
9. T. SADOWSKI, *Dwoistość równowagi w stanach czystego zginania*, IFTR Reports, 2, 1982.
10. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford, 1950.

11. J. R. RICE, *The Localization of Plastic Deformation*, Proceedings of the 14th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Delft, September 1976.
12. J. MIELNICZUK, *Praca doktorska*, IPPT PAN, Warszawa 1973.
13. J. L. BASSANI, D. DURBAN, J. W. HUTCHINSON, *Bifurcations at a Spherical Hole in an Infinite Elastoplastic Medium*, Math. Proc. Camb. Soc., 1980.

Резюме

БИФУРКАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ В СОСТОЯНИЯХ ЧИСТОГО ИЗГИБА

В работе исследована задача бифуркации несжимаемой пластины подверженной чистому изгибу. Анализ производим применив гипопругий фундаментальный модель. Сохранение упруго-пластического материала в линейном напряженном состоянии описано законом с линейным упрочнением. Осуществлено классификацию пространства уравнения бифуркации. Проведено асимптотический анализ, чтобы установить критические условия деформации плитовой полосы для коротковолновой поверхностной неустойчивости. Рассматриваемая коротковолновая поверхность неустойчивости в зоне сжатия определяет первую бифуркационную точку в процессе деформации пластинки.

Summary

BIFURCATION EQUILIBRIUM IN PURE BENDING STATES

In the paper the bifurcation problem of an incompressible plate subjected to pure bending is studied. The analysis is carried out using a hypoelastic constitutive model. The elastic-plastic material behaviour in uniaxial states is described by the linear work-hardening law. A classification of regimes of the bifurcation equation is also performed. An asymptotic analysis has been carried out to establish the critical condition of the deformation plate strip for short wavelength surface instability. The considered short wavelength surface instability in the compressive zone defines the first bifurcation point in the deformation process of the plate.

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 czerwca 1983 roku

OSIOWO SYMETRYCZNE ZAGADNIENIA MIKROPOLARNEJ TEORII PLASTYCZNOŚCI

MONIKA WĄGROWSKA (WARSZAWA)

*Institut Mechaniki
Uniwersytet Warszawski*

1. Wstęp

W pracy tej rozpatrujemy mikropolarny ośrodek sprężysto-plastyczny, który może przenosić naprężenia zarówno siłowe, jak i momentowe. Ośrodek taki może być matematycznym modelem np. kompozytów o strukturze ziarnistej. Wyróżniamy ośrodki ze związanymi obrotami i ze swobodnymi obrotami. Jeżeli ośrodek jest ze związanymi obrotami, to ziarenka mogą się obracać o tyle, na ile pozwala im pole przemieszczeń. Z kolei, gdy na ziarna działają momenty, ich obrót określa zmianę przemieszczeń. Uplastycznienie takiego ośrodka podobne jest do uplastycznienia ośrodka klasycznego, z tym, że należy uwzględnić wpływ naprężeń momentowych. Warunki uplastycznienia dla ośrodków ze związanymi obrotami badali M. Miścicu [5] i A. Sawczuk [7].

Jeżeli ośrodek charakteryzuje się swobodnymi obrotami, jego zachowanie nie daje się sprowadzić do ośrodka klasycznego. W tym przypadku obroty ziarenek kompozytu mogą spowodować zarówno zmiany w polu przemieszczeń w macierzy jak i być niezależne od odkształceń, czy przemieszczeń macierzy. Zgodnie z założeniami teorii sprężystości, po zdjęciu obciążeń, przemieszczenia i obroty powrócą do położenia początkowych, czyli stanu naturalnego. W przypadku przekroczenia określonych wartości naprężeń siłowych bądź (oraz) momentowych, pewien obszar rozpatrywanego ciała lub w przypadku szczególnym całe ciało może ulec uplastycznieniu. Dla ośrodków ze swobodnymi obrotami będziemy mogli wyróżnić niezależne przekroczenie granicy sprężystości ze względu na przemieszczenia, jak to ma miejsce w teorii klasycznej, jak i ze względu na obroty. Wyróżnimy więc dwa niezależne sposoby uplastycznienia częściowego i skonstruujemy dwa kryteria uplastycznienia, a mianowicie kryterium uplastycznienia poślizgowego, gdy po zdjęciu obciążeń nie znika symetryczna część tensora odkształcenia, oraz rotacyjnego związanego z nieznikaniem tensora skręcenia i antysymetrycznej części tensora odkształcenia. Podobnie ośrodek będzie ulegał uplastycznieniu całkowitemu, gdy równocześnie zostaną przekroczone wartości obu kryteriów.

W strefie sprężystej przyjmiemy jako model matematyczny takiego ciała ośrodek typu Cosseratów, centrosymetryczny, izotropowy i jednorodny. Następnie wprowadzimy odpowiednie kryteria uplastycznienia częściowego i całkowitego i wyprowadzimy odpowiednie równania konstytutywne w zakresach plastycznych. Należy wspomnieć, że ośro-

dek plastyczny typu Cosseratów rozpatrywał H. Lippmann [6], nie specyfikując liczby kryteriów uplastycznienia; mogła się ona zmieniać od 1 do 18. W przykładzie przyjęto 2 warunki. Szczegółowo rozpatrzmy zagadnienia osiowo symetryczne, pokażemy wpływ naprężeń momentowych na powstawanie i zasięg strefy uplastycznienia poślizgowego.

W pracy będziemy stosować następujące oznaczenia [1]: $\lambda, \mu, \alpha, \gamma, \beta, \varepsilon$ — stałe materiałowe, $\sigma, \mu, \gamma, \kappa, \mathbf{l}$ — tensory, odpowiednio, naprężeń siłowych, naprężeń momentowych, odkształcenia, skręcenia i jednostkowy, $\sigma_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ij}, \delta_{ij}$ — składowe powyższych tensorów, odpowiednio, w układzie współrzędnych x^i ($i = 1, 2, 3$).

2. Kryteria uplastycznienia

Rozpatrzmy ośrodek mikropolarny, centrosymetryczny, izotropowy i jednorodny. W tym przypadku poczwórna wartość gęstości energii sprężystej przyjmuje postać następującą:

$$4U = \frac{1}{\mu} \sigma_{(ij)} \sigma_{(ij)} + \frac{1}{\alpha} \sigma_{\langle ij \rangle} \sigma_{\langle ij \rangle} - \frac{\lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \sigma_{ii} \sigma_{kk} + \frac{1}{\gamma} \mu_{(ij)} \mu_{(ij)} + \frac{1}{\varepsilon} \mu_{\langle ij \rangle} \mu_{\langle ij \rangle} - \frac{\beta}{\gamma(2\gamma + 3\beta)} \mu_{ii} \mu_{kk}. \quad (2.1)$$

Energia ta jest sumą energii objętościowej oraz drugiego składnika, który jest uogólnieniem energii odkształcenia postaciowego

$$U = U_v + U_p, \quad (2.2)$$

gdzie

$$4U_p = \frac{1}{\mu} s_{(ij)} s_{(ij)} + \frac{1}{\alpha} s_{\langle ij \rangle} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{\gamma} m_{(ij)} m_{(ij)} + \frac{1}{\varepsilon} m_{\langle ij \rangle} m_{\langle ij \rangle} + \frac{2}{3(2\gamma + 3\beta)} \mu_{ii} \mu_{kk}, \quad (2.3)$$

$t_{(ij)}, t_{\langle ij \rangle}$ — odpowiednio symetryczna i antysymetryczna część tensora o składowych t_{ij}, s_{ij} — składowe dewiatora tensora naprężeń siłowych, m_{ij} — składowe dewiatora tensora naprężeń momentowych. Dokonajmy rozkładu U_p na dwa składniki

$$U_p = U_{p1} + U_{p2}, \quad (2.4)$$

gdzie

$$4U_{p1} = \frac{1}{\mu} s_{(ij)} s_{(ij)}, \quad (2.5)$$

jest gęstością energii odkształcenia postaciowego poślizgowego oraz

$$4U_{p2} = \frac{1}{\alpha} s_{\langle ij \rangle} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{\gamma} m_{(ij)} m_{(ij)} + \frac{1}{\varepsilon} m_{\langle ij \rangle} m_{\langle ij \rangle} + \frac{2}{3(2\gamma + 3\beta)} \mu_{ii} \mu_{kk}, \quad (2.6)$$

jest gęstością energii odkształcenia postaciowego rotacyjnego. Przyjmujemy warunki uplastycznienia w następującej postaci:

kryterium uplastycznienia poślizgowego

$$U_{p1} = k_0^2 \wedge U_{p2} < I_0^2, \quad (2.7)$$

kryterium uplastycznienia rotacyjnego

$$U_{p1} < k_0^2 \wedge U_{p2} = l_0^2, \quad (2.8)$$

oraz kryterium uplastycznienia całkowitego

$$U_{p1} = k_0^2 \wedge U_{p2} = l_0^2. \quad (2.9)$$

Powyższe kryteria spełniają wszystkie warunki wynikające z teorii niezmienników.

W ośrodkach mikroplarnych, centrosymetrycznych w przypadku modelu sprężysto plastycznego mogą wystąpić pod wpływem działających obciążeń następujące strefy:

a) strefa sprężysta, b) strefa sprężysta i uplastycznienia poślizgowego, c) strefa uplastycznienia poślizgowego, d) strefa sprężysta i uplastycznienia rotacyjnego, e) strefa uplastycznienia rotacyjnego, f) strefa sprężysta i uplastycznienia poślizgowego oraz rotacyjnego o pustym przecięciu stref uplastycznienia, g) strefa sprężysta i uplastycznienia poślizgowego i rotacyjnego o niepustym przecięciu; wtedy pojawia się strefa uplastycznienia całkowitego, h) strefa sprężysta i wyłącznie całkowitego uplastycznienia, i) strefa całkowitego uplastycznienia.

3. Równania konstytutywne teorii plastyczności odkształceniowej

W dalszym ciągu pracy będziemy rozpatrywać zagadnienia szczegółowe, w których wykorzystamy teorię odkształceniową. Dlatego nie będziemy tu rozpatrywać równań konstytutywnych teorii płynięcia, a sformułujemy równania konstytutywne teorii odkształceniowej, w poszczególnych strefach uplastycznienia.

Zakładamy brak wzmocnienia, izotropowość, centrosymetrię i jednorodność w strefie sprężystej. Odkształcenia objętościowe są tylko sprężyste.

3.1. Strefa uplastycznienia poślizgowego. Zakładamy tu, że dewiator symetrycznej części tensora odkształcenia jest proporcjonalny do odpowiadającego mu dewiatora symetrycznej części tensora naprężenia siłowego. Odkształcenia skręcenia i antysymetryczna część odkształcenia są sprężyste. Przy tych założeniach otrzymujemy następujące stowarzyszone równania konstytutywne w ośrodku uplastycznym poślizgowo:

$$\begin{aligned} 2\mu\Gamma_{\langle IJ \rangle} &= (1 + \varphi_1)s_{\langle IJ \rangle}, \quad 2\alpha\Gamma_{\langle IJ \rangle} = s_{\langle IJ \rangle}, \\ (2\mu + 3\lambda)\gamma_{kk} &= \sigma_{kk}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$2\kappa_{IJ} = \frac{1}{\gamma}\mu_{\langle IJ \rangle} + \frac{1}{\varepsilon}\mu_{\langle IJ \rangle} - \frac{\beta}{\gamma(2\gamma + 3\beta)}\mu_{kk}\delta_{IJ},$$

lub w postaci równoważnej

$$\Gamma_{\langle IJ \rangle} + \Gamma_{\langle IJ \rangle} + \frac{1}{3}\gamma_{kk}\delta_{IJ} = \gamma_{IJ} = \frac{1 + \varphi_1}{2\mu}s_{\langle IJ \rangle} + \frac{1}{2\alpha}s_{\langle IJ \rangle} + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)}\sigma_{kk}\delta_{IJ}, \quad (3.2)$$

oraz (3.1)₄ bez zmiany.

Γ_{IJ} są składowymi dewiatora tensora odkształcenia γ , $\frac{1 + \varphi_1}{2\mu}$ jest współczynnikiem materiałowym ośrodka uplastycznego; należy go wyznaczyć dla każdego ośrodka oddzielnie. $\varphi_1 \rightarrow 0$, gdy przechodzimy do ośrodka sprężystego, Również równania (3.2) stają się wtedy równaniami konstytutywnymi ośrodka Cosseratów.

3.2. Strefa uplastycznienia rotacyjnego

dotatkowe postulaty:

— równania konstytutywne w ramach symetrycznej części tensora odkształcenia są analogiczne jak w ramach strefy sprężystej,

— antysymetryczna część tensora odkształcenia oraz tensor skrętno-giętny będą powiązane z tensorami opisującymi stan naprężenia nowymi zależnościami

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_2}{2\alpha} s_{\langle ij \rangle} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1+\varphi_z}{2\gamma} \mu_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_z}{2\varepsilon} \mu_{\langle ij \rangle} - \frac{(1+\varphi_z)\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \mu_{kk} \delta_{ij},\end{aligned}\quad (3.3)$$

gdzie: $1+\varphi_z$ jest wielkością bezwymiarową, która wpływa na modyfikację równań konstytutywnych. Należy ją wyznaczyć dla każdego ośrodka oddzielnie. $\varphi_z \rightarrow 0$, gdy przechodzimy od strefy uplastycznienia rotacyjnego do strefy sprężystej.

3.3. Strefa całkowitego uplastycznienia. W obszarze uplastycznionym całkowicie przestały być sprężyste zarówno przemieszczenia, jak i obroty; została zaburzona całkowicie struktura materiału. W strefie uplastycznienia całkowitego obowiązują jednocześnie wszystkie postulaty dotyczące stref uplastycznienia poślizgowego i rotacyjnego, tzn.:

— odkształcenia objętościowe są sprężyste,

— dewiator symetrycznej części tensora odkształcenia jest proporcjonalny do dewiatora symetrycznej części tensora naprężenia,

— antysymetryczna część tensora odkształcenia jest proporcjonalna do antysymetrycznej części tensora naprężenia,

— odpowiednie części tensora skręcenia są proporcjonalne do odpowiednich części tensora naprężeń momentowych.

Przy tych założeniach równania konstytutywne dla obszaru ośrodka uplastycznionego całkowicie przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij} &= \frac{1+\varphi_1}{2\mu} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_1}{2\alpha} s_{\langle ij \rangle}, \\ \gamma_{kk} &= \frac{1}{2\mu+3\lambda} \sigma_{kk}, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1+\varphi_2}{2\gamma} \mu_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_2}{2\varepsilon} \mu_{\langle ij \rangle} - \frac{(1+\varphi_2)\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \mu_{kk} \delta_{ij},\end{aligned}\quad (3.4)$$

Równania te możemy przedstawić w równoważnej postaci:

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{1+\varphi_1}{2\mu} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_2}{2\alpha} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{3(2\mu+3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1+\varphi_2}{2\gamma} \mu_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_2}{2\varepsilon} \mu_{\langle ij \rangle} - \frac{(1+\varphi_2)\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \mu_{kk} \delta_{ij},\end{aligned}\quad (3.5)$$

$\varphi_1(\cdot)$ i $\varphi_2(\cdot)$ są funkcjami bezwymiarowymi, które z chwilą przejścia do granicy tej strefy ze strefą: sprężystą — dążą jednocześnie do zera, ze strefą uplastycznienia poślizgowego $\varphi_2 \rightarrow 0$, ze strefą uplastycznienia rotacyjnego $\varphi_1 \rightarrow 0$. Proponowane równania łączą

bezpośrednio stan naprężenia ze stanem odkształcenia w postaci skończonych związków — spełniają one zasadę obiektywności materiałowej oraz inne zasady, które powinny spełniać równania konstytutywne (spełnienie tych zasad od razu wynika z postaci równań — różnią się one od równań w strefie sprężystej tylko współczynnikami).

Zespół równań równowagi w połączeniu ze związkami geometrycznej zgodności wraz z odpowiednim dla danej strefy kryterium uplastycznienia oraz równaniami konstytutywnymi stanowi zamknięty układ równań, z którego przy odpowiednich warunkach brzegowych jesteśmy w stanie wyznaczyć naprężenia, odkształcenia oraz zasięg danej strefy uplastycznienia.

Dla ośrodków mikropolarnych uplastycznionych jesteśmy w stanie podać również postać równań konstytutywnych w ramach teorii plastycznego płynięcia [4].

4. Zagadnienia osiowo symetryczne

W przypadku zagadnień dwuwymiarowych i osiowej symetrii odkształcenia ciała są funkcjami tylko promienia i opisane są przez wektory $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, 0)$, $\boldsymbol{\varphi} = (0, 0, \varphi_z)$ i ich pochodne. Równania równowagi w każdej ze stref przyjmują postać

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + X_r &= 0, \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} + X_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{r0} - \sigma_{\theta r} + \mu_{rz,r} + \frac{\mu_{rz}}{r} + Y_z = 0.$$

Układ równań geometrycznej zgodności redukuje się w naszym przypadku do postaci

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} - \gamma_{\theta\theta} &= r\gamma_{\theta\theta,r}, \\ r\gamma_{r\theta,r} - r\kappa_{rz} &= -(\gamma_{r\theta} + \gamma_{\theta r}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

W ramach strefy sprężystej równania równowagi można zredukować do postaci, która jest uogólnieniem równań Naviera klasycznej teorii sprężystości [1]:

$$\begin{aligned} (2\mu + \alpha) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) u_r + X_r &= 0, \\ (\mu + \alpha) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) u_\theta - 2\alpha \frac{d\varphi_z}{dr} + X_\theta &= 0, \\ \gamma + \varepsilon \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \varphi_z - 4\alpha\varphi_z + \frac{2\alpha}{r} (ru_{\theta,r} + u_\theta) + Y_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Z takim stanem przemieszczeń i obrotów związany jest następujący stan naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu_{rz} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= (2\mu + \lambda)u_{r,r} + \frac{\lambda}{r}u_r, & \sigma_{\theta\theta} &= (2\mu + \lambda)\frac{1}{r}u_r + \lambda u_{r,r}, \\
 \sigma_{zz} &= \lambda\left(u_{r,r} + \frac{1}{r}u_r\right), & \sigma_{r\theta} &= \mu\left(u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \alpha\left(u_{\theta,r} + \frac{u_\theta}{r}\right) - 2\alpha\varphi_z, \\
 \sigma_{\theta r} &= \mu\left(u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r}\right) - \alpha\left(u_{\theta,r} + \frac{1}{r}u_\theta\right) + 2\alpha\varphi_z, \\
 \kappa_{zr} &= (\gamma - \varepsilon)\varphi_{z,r}, & \kappa_{rz} &= (\gamma + \varepsilon)\varphi_{z,r}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Obszar ośrodka ulegnie uplastycznieniu, gdy spełniony zostanie jeden z warunków uplastycznienia:

a) poślizgowego

$$\frac{1}{3}(\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz}) + \frac{1}{4}(\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})^2 = 2\mu k^2, \tag{4.6}$$

b) rotacyjnego

$$\frac{1}{\gamma}(\mu_{rz} + \mu_{zr})^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\mu_{rz} - \mu_{zr})^2 = 8l^2, \tag{4.7}$$

c) całkowitego, gdy równocześnie są spełnione warunki (4.6) i (4.7).

Stowarzyszone związki konstytutywne w ramach teorii plastyczności odkształceniowej przyjmą postać

a) w strefie uplastycznienia poślizgowego

$$(\gamma + \varepsilon)\kappa_{rz} = \mu_{rz}, \quad \kappa_{zr} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\theta r} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu}\sigma_{\langle\theta r\rangle} + \frac{1}{2\alpha}\sigma_{\langle\theta r\rangle}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu}\sigma_{\langle r\theta\rangle} + \frac{1}{2\alpha}\sigma_{\langle r\theta\rangle}, \\
 \gamma_{rr} &= \frac{1 + \varphi_I}{6\mu}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 \gamma_{\theta\theta} &= \frac{1 + \varphi_I}{6\mu}(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 \gamma_{zz} &= \frac{1 + \varphi_I}{6\mu}(2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}),
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

b) w strefie uplastycznej rotacyjnie otrzymamy

$$\begin{aligned}
 2\mu\gamma_{rr} &= \sigma_{rr} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 2\mu\gamma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 2\mu\gamma_{zz} &= \sigma_{zz} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 2\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{\mu}\sigma_{\langle r\theta\rangle} + \frac{1 + \varphi_2}{\alpha}\sigma_{\langle r\theta\rangle},
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$2\gamma_{0r} = \frac{1}{\mu} \sigma_{(0r)} + \frac{1 + \varphi_2}{\alpha} \sigma_{\langle 0r \rangle}, \quad (4.9)$$

[cd.]

$$2\kappa_{rz} = \frac{1 + \varphi_2}{\gamma} \mu_{(rz)} + \frac{1 + \varphi_2}{\varepsilon} \mu_{\langle rz \rangle}, \quad \kappa_{zr} = 0,$$

c) w strefie całkowitego uplastycznienia

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \frac{1}{3} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\ \gamma_{\theta\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{6\mu} (2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\ \gamma_{zz} &= \frac{1 + \varphi_1}{6\mu} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \sigma_{(r\theta)} + \frac{1 + \varphi_2}{2\alpha} \sigma_{\langle r\theta \rangle}, \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \sigma_{(0r)} + \frac{1 + \varphi_2}{2\alpha} \sigma_{\langle 0r \rangle}, \\ \kappa_{rz} &= \frac{1 + \varphi_2}{2\gamma} \mu_{(rz)} + \frac{1 + \varphi_2}{2\varepsilon} \mu_{\langle rz \rangle}, \quad \kappa_{zr} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

5. Wpływ naprężeń momentowych na powstanie strefy uplastycznienia poślizgowego

Rozpatrzmy grubościenny nieskończony cylinder znajdujący się w pewnym polu mikropolarnych momentów objętościowych $Y = (0, 0, \gamma_2)$ przy jednoczesnym braku sił objętościowych działających na niego oraz wszelkich obciążeń działających na jego wewnętrznej poboczniczy. Przyjmując do opisu walcowy układ współrzędnych przy dodatkowym założeniu o niezależności przyczyn od kąta θ i zmiennej z otrzymujemy, że cylinder będzie znajdował się w płaskim stanie odkształcenia przy dodatkowej osiowej symetrii. Przy-

mując γ_z w postaci $Hlu \frac{b}{r}$ zespół przyczyn możemy przedstawić w postaci:

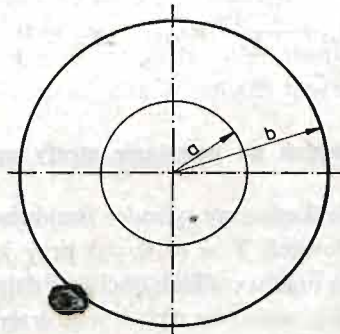
$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a) &= 0, & \sigma_{rr}(b) &= 0, \\ \mu_{rz}(a) &= 0, & \mu_{rz}(b) &= 0, \\ \sigma_{r\theta}(a) &= 0, & u_\theta(b) &= 0, \\ X &= (0, 0, 0), & Y &= (0, 0, Y_z), \end{aligned} \quad (5.1)$$

W strefie sprężystej wektory przemieszczenia i obrotu wyrażają się następująco $u = (0, u_\theta, 0)$, $\varphi = (0, 0, \varphi_z)$, gdzie

$$\begin{aligned} u_\theta &= A_2 r + \frac{1}{r} B_2 + \frac{2\alpha}{(\mu + \alpha)\eta^2} \left[A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) - \frac{H}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{2} r \left(\ln \eta r - \frac{1}{H} \right) \right], \\ \varphi_z &= \frac{1}{\eta} A_1 I_0(\eta r) - \frac{1}{\eta} B_1 K_0(\eta r) - \frac{H}{(\gamma + \varepsilon)\eta^2} \ln \eta r + \frac{1}{4\alpha} (4\alpha A_2 - H \ln \eta b), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$A_i, B_i (i = 1, 2)$ są stałymi, które wyznaczamy z warunków brzegowych, $\eta^2 = \frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}$, $I_0(\cdot), I_1(\cdot)$ są funkcjami Bessela urojonego argumentu, zerowego i pierwszego rzędu, $K_0(\cdot)$ i $K_1(\cdot)$ funkcjami MacDonalda. Powyższym wektorom przemieszczenia i obrotu odpowiada następujący stan naprężeń siłowych i momentowych:

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta} &= -2B_2 \frac{\mu}{r^2} - (\gamma + \varepsilon) \frac{1}{r} [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] - \frac{H}{4} + \frac{H}{2} \ln(\eta^2 r b), \\ \sigma_{\theta r} &= -2B_2 \frac{\mu}{r^2} - \frac{\gamma + \varepsilon}{r} [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] + \\ &\quad + \frac{4\alpha}{(\mu + \alpha)\eta} [A_1 I_0(\eta r) - B_1 K_0(\eta r)] - \frac{H}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln(\eta^2 r b) \right), \\ \mu_{rz} &= (\gamma + \varepsilon) [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] - \frac{H}{r(\gamma + \varepsilon)\eta^2} J, \\ \mu_{zr} &= (\gamma - \varepsilon) [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] - \frac{H}{r(\gamma + \varepsilon)\eta^2} J.\end{aligned}\quad (5.3)$$



Rys. 1

Przyjmując konkretne wartości stałych materiałowych oraz promieni wewnętrznej i zewnętrznej pobocznic walca $a = 0,3$, i $b = 1,0$

$$\lambda = 0,3, \quad E = 2 \cdot 10^6, \quad \alpha = 0,1, \quad \xi = 0,2, \quad \vartheta = 2 \cdot 10^3, \quad \varepsilon = 0,1,$$

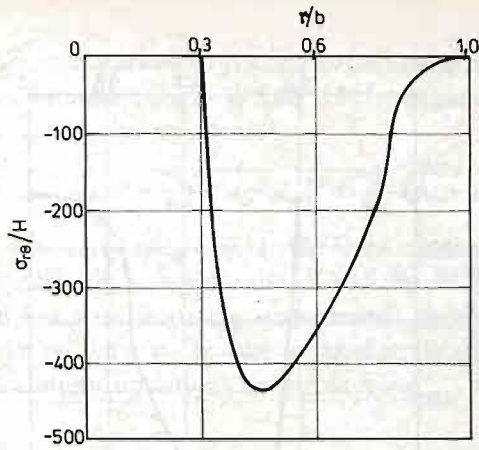
gdzie

$$\vartheta = \frac{\gamma(2\gamma + 3\beta)}{\gamma + \beta}, \quad \xi = \frac{\beta}{2(\gamma + \beta)},$$

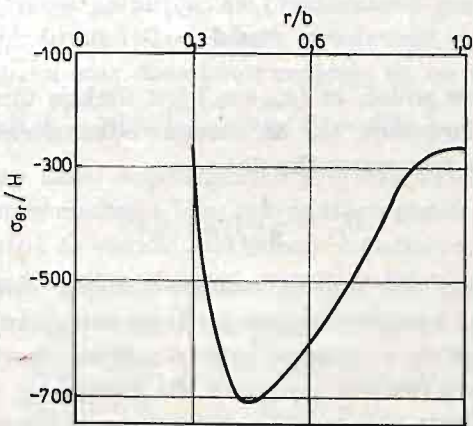
otrzymujemy następujące wartości liczbowe dla pozostałych stałych materiałowych i stałych całkowania:

$$\begin{aligned}\gamma &= 833,3, \quad \eta^2 = 4,79 \cdot 10^{-4}, \quad \mu = 7,69, \\ A_1 &= -15,07, \quad B_1 = 0,0587, \quad B_2 = 135,46.\end{aligned}$$

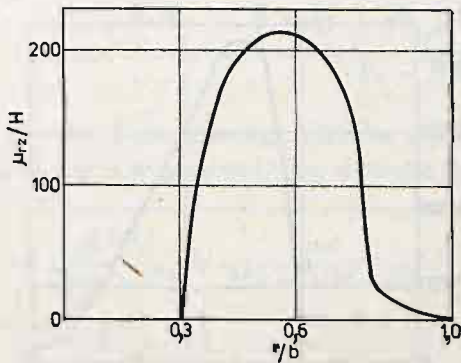
Wykresy naprężeń siłowych i momentowych dla $a = 0,3$, $b = 1,0$ pokazano na rysunkach 2 - 5.



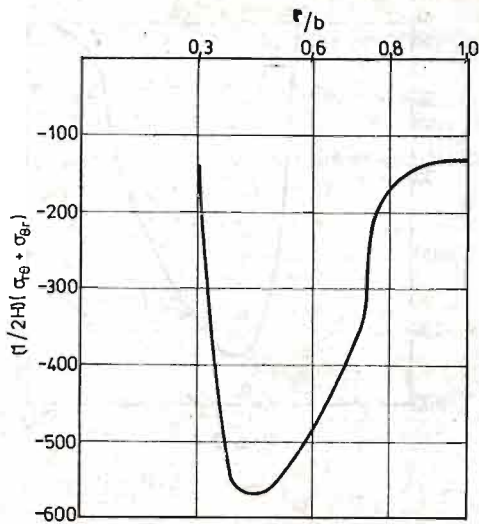
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



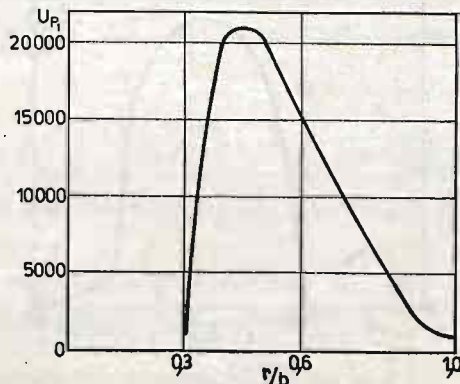
Rys. 5

Z uzyskanych wyników widać, że $(\sigma_{r0} + \sigma_{0r})$ jest funkcją ujemną osiągającą dla $\varrho \in (0,3, 1,0)$ minimum. Powoduje to, że energia odkształcenia postaciowego poślizgowego redukująca się w tym przypadku do:

$$U_{p1} = \frac{1}{8\mu} (\sigma_{r0} + \sigma_{0r})^2 \quad (4.14)$$

w ramach strefy sprężystej jest funkcją rosnąco-malejącą, osiągającą maksimum dla $r = \varrho$. Oznacza to, zgodnie z przyjętym przez nas kryterium uplastycznienia poślizgowego, że jeśli wcześniej nie pojawi się w cylindrze uplastycznienie rotacyjne, to dla odpowiednio dużej wartości H dla $r = \varrho$ (wartość promienia dla którego u_{p1} osiąga maksimum) pojawi się strefa uplastycznienia poślizgowego, która wraz ze wzrostem wartości H będzie rozwijała się w kierunku wewnętrznej i zewnętrznej poboczniczy cylindra. Przyjmując

$k = \frac{2}{10^2 \sqrt{\sigma\mu}}$, $l = \frac{2}{100}$ uzyskamy, że dla $H = 2,06 \cdot 10^{-5}$ energia odkształcenia posta-



Rys. 6

ciowego poślizgowego osiągnie wartość krytyczną oznaczającą pojawienie się strefy uplastycznienia poślizgowego, natomiast dla $H \leq 2,06 \cdot 10^{-5}$ energia odkształcenia rotacyjnego redukująca się w tym przypadku do wyrażenia:

$$\frac{1}{8\alpha} (\sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r})^2 + \frac{1}{8\sigma} (\mu_{rz} + \mu_{zr})^2 + \frac{1}{8\varepsilon} (\mu_{rz} - \mu_{zr})^2 \quad (4.15)$$

nie osiągnie nigdy wartości krytycznej $l_0 = 2 \cdot 10^{-2}$, co oznacza niemożność powstania w ośrodku strefy uplastycznionej rotacyjnie dla $H = 2,06 \cdot 10^{-5}$.

Taki zespół obciążeń jest więc ilustracją stwierdzenia, że w wyniku działających obciążeń typu momentowego możemy w ośrodku uzyskać strefę uplastycznioną poślizgowo, przy jednoczesnym braku strefy uplastycznionej rotacyjnie.

6. Wpływ mikropolarnych momentów objętościowych na zasięg strefy uplastycznionej poślizgowo

Rozpatrzmy dwa identyczne geometrycznie i materiałowo grubościennie nieskończone cylindry, z których na jeden działa tylko ciśnienie wewnętrzne, na drugi natomiast działa to samo ciśnienie wewnętrzne oraz dodatkowo znajduje się on w polu mikropolarnych momentów objętościowych $\mathbf{Y} = (0, 0, \gamma_z)$, gdzie $Y_z = H \ln \frac{b}{r}$.

Wprowadzając walcowy układ współrzędnych przy założeniu niezależności przyczyn od kąta θ i zmiennej z otrzymujemy w obu przypadkach płaski stan odkształcenia przy dodatkowej osiowej symetrii. O ośrodku zakładamy dodatkowo, że jest nieściśliwy. Zespół warunków brzegowych odpowiadających naszym założeniom jest następujący:

$$\begin{array}{llll} I \quad \sigma_{rr}(a) = -p, & \sigma_{rr}(b) = 0, & II \quad \sigma_{rr}(a) = -p, & \sigma_{rr}(b) = 0, \\ \sigma_{r\theta}(a) = 0, & u_\theta(b) = 0, & \sigma_{r\theta}(a) = 0, & u_\theta(b) = 0, \\ \sigma_{rz}(a) = 0, & \sigma_{rz}(b) = 0, & \sigma_{rz}(a) = 0, & \sigma_{rz}(b) = 0, \\ \mu_{rz}(a) = 0, & \mu_{rz}(b) = 0, & \mu_{rr}(a) = 0, & \mu_{rr}(b) = 0, \\ \mu_{r\theta}(a) = 0, & \mu_{r\theta}(b) = 0 & \mu_{r\theta}(a) = 0, & \mu_{r\theta}(b) = 0, \\ \mu_{rr}(a) = 0, & \mu_{rr}(b) = 0 & \mu_{rz}(a) = 0, & \mu_{rz}(b) = 0 \\ \mathbf{X} = (0, 0, 0) & \mathbf{Y} = (0, 0, 0) & \mathbf{X} = (0, 0, 0), & \mathbf{Y} = (0, 0, Y_z) \end{array}$$

$$Y_z = H \ln \frac{b}{r}$$

Obciążenia działające na cylinder I nie wywołują efektów mikropolarnych [3] — zachowuje się on jak ośrodek klasyczny, a więc rozwiązanie w strefie sprężystej przyjmuje znaną postać [2]:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{pa^2 b^2 r}{2\mu(b^2 - a^2)} + \frac{pa^2}{2(\mu + \lambda)(b^2 - a^2)} \frac{1}{r}, \\ \sigma_{rr} &= -\frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Upłastycznienie rozpoczyna się od wewnętrznej pobocznic walca. Wartość ciśnienia, dla którego zaczyna się pojawiać strefa upłastycznienia poślizgowego, wyznaczamy ze wzoru

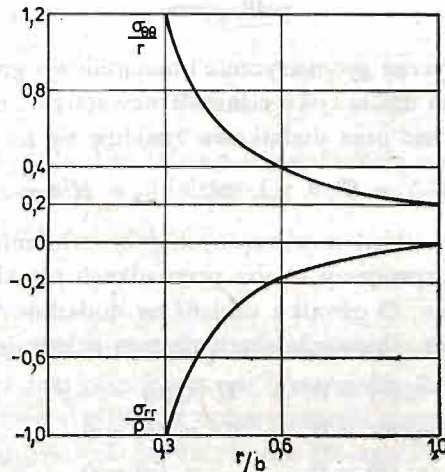
$$U_{p1} = \frac{1}{8\mu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 = k^2, \quad (6.3)$$

podstawiając w nim $r = a$. Wynosi ona [2] $p_0 = \frac{\sqrt{2\mu k}}{b^2} (b^2 - a^2)$. Przyjmując następnie wartości stałych materiałowych

$$E = 2 \cdot 10^6, \quad \nu = 2 \cdot 10^3, \quad \alpha = 0,1, \quad \lambda = 0,5, \quad \xi = 0,2, \quad \varepsilon = 0,1,$$

skąd

$$\mu = 6,6 \cdot 10^5, \quad \gamma = 833,33, \quad \eta^2 = 4,79 \cdot 10^{-4},$$



Rys. 7

i podstawiając wartości promieni pobocznic walca $a = 0,3$, $b = 1,0$, otrzymujemy wartość ciśnienia $p_0 = 1,06 \cdot 10^3$, dla $k = \frac{1}{3} 10^3 \frac{1}{\sqrt{\mu}}$. Dla $p < p_0$ cały ośrodek jest sprężysty, dla $p \geq p_0$ pojawia się strefa upłastycznienia poślizgowego, o promieniu zależnym od p .

Wykorzystując rozwiązanie [4] dla $p > p_0$ otrzymujemy następujące równanie na zasięg strefy plastycznej

$$2kb^2\sqrt{2\mu} \ln \frac{\varrho}{a} = pb^2 - b^2k\sqrt{2\mu} + k\varrho^2\sqrt{2\mu}. \quad (6.4)$$

Podstawiając do równania (6.4) przyjęte wartości $a = 0,3$, $b = 1,0$ otrzymamy

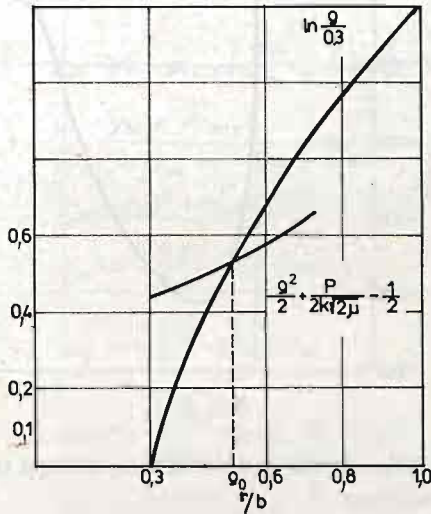
$$\ln \varrho = \frac{1}{2} \varrho^2 + \frac{p}{2k\sqrt{2\mu}} - \frac{1}{2} + \ln 0,3, \quad (6.5)$$

skąd dla $p = 2,1 \cdot 10^3$ otrzymamy $\varrho \cong 0,52$.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, gdy na cylinder działają ciśnienia wewnętrzne

oraz momenty objętościowe. Rozwiązanie układu równań z warunkami brzegowymi (6.1)_{II} przyjmie postać następującą:

$$\begin{aligned}
 u_r &= A_3 r + \frac{1}{r} B_3, \\
 u_\theta &= A_2 r + \frac{1}{r} B_2 - \frac{2\alpha}{(\mu + \alpha)\eta^2} \left[A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) - \frac{H}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{2} r \left(\ln \eta r - \frac{1}{2} \right) \right], \\
 \eta \varphi_z &= A_1 I_0(\eta r) - B_1 K_0(\eta r) - \frac{H}{(\gamma + \varepsilon)\eta} \ln \eta r + \eta \left(A_2 - \frac{H}{4} \ln \eta b \right), \\
 u_z &= \varphi_r = \varphi_\theta = 0,
 \end{aligned} \tag{6.6}$$



Rys. 8

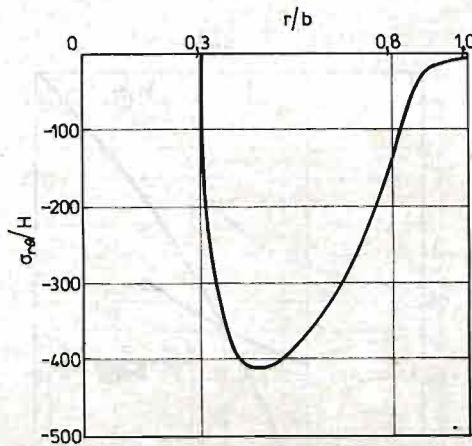
oraz

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r0} &= (\gamma + \varepsilon) \frac{1}{r} [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) + \frac{H}{4} [2 \ln(\eta^2 r b) - 1] - 2B_2 \frac{\mu}{r^2}], \\
 \sigma_{\theta r} &= \frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)\eta} [A_1 I_0(\eta r) - B_1 K_0(\eta r)] - \frac{H}{4} [1 + 2 \ln(\eta^2 r b)] \\
 &\quad - \frac{\gamma + \varepsilon}{r} [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] - 2B_2 \frac{\mu}{r^2}, \\
 \sigma_{rr} &= 2\mu \left(A_3 - \frac{1}{r^2} B_3 \right) + 2\lambda A_3, \\
 \sigma_{\theta\theta} &= 2(\mu + \alpha) A_3 + \frac{1}{r^2} (2\mu + \lambda) B_3, \\
 2\sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta},
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \mu_{rz} &= (\gamma + \varepsilon) \left[A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) - \frac{H}{r} \frac{1}{(\gamma + \varepsilon) \eta^2} \right], \\ \mu_{zr} &= (\gamma - \varepsilon) \left[A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) - \frac{H}{r} \frac{1}{(\gamma + \varepsilon) \eta^2} \right], \end{aligned} \quad (6.7) \quad [\text{cd.}]$$

gdzie stałe $A_i, B_i (i = 1, 2)$ wyznaczamy z warunków brzegowych.

Jeżeli wartości stałych materiałowych będą takie same jak w przypadku I, to funkcje σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$ nie ulegną zmianie. Wykresy funkcji $\sigma_{r\theta}$ i μ_{rz} przedstawiamy na rys. 9. Łatwo zauważyć, że dla $p < p_0$, nawet bliskiego p_0 , oraz $H < 10^3$, wartości naprężeń σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$ są dużo większe od wartości naprężeń $\sigma_{r\theta}$ i $\sigma_{\theta r}$.



Rys. 9

Gdy na cylinder działa tylko ciśnienie wewnętrzne, energia odkształcenia postaciowego poślizgowego wyraża się wzorem

$$U_{p1} = \frac{1}{8\mu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 = \frac{p^2 a^4 b^4}{2\mu r^4 (b^2 - a^2)^2}. \quad (6.8)$$

Jeżeli na ten sam cylinder działa ciśnienie p oraz dodatkowo mikropolarny moment objętościowy $Y_2 = H \ln \frac{b}{r}$, energia ta przyjmie postać następującą:

$$\begin{aligned} U_{p1} &= \frac{1}{8\mu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + \frac{1}{8\mu} (\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})^2 = \\ &= \frac{p^2 a^4 b^4}{2\mu r^4 (b^2 - a^2)^2} + \frac{1}{8\mu} (\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ze względu na to, że ciśnienie działające w obu przypadkach jest takie samo, energia poślizgowego odkształcenia postaciowego przyjmuje wyższe wartości, gdy działają dodatkowe mikropolarne momenty objętościowe. Wynika stąd oczywisty wniosek, że uplastycznienie poślizgowe w walcu poddanym działaniu objętościowych momentów mikropolarnych zostanie osiągnięte przy niższych wartościach ciśnienia działającego na pobocznicy walca.

Założmy, że strefa uplastycznienia poślizgowego występuje, tzn. $p > p_0$. Dla $p = 2,1 \cdot 10^3$ oraz $Y_2 = H \ln \frac{b}{r}$, $H = 10^{-7}$ wyznaczmy zasięg strefy uplastycznienia w obu przypadkach, gdy działa wyłącznie ciśnienie wewnętrzne i z dodatkowo działającymi momentami mikropolarnymi.

W obszarze uplastycznionym poślizgowo otrzymamy następujący układ równań (równowagi, geometrycznej zgodności odkształceń, kryterium uplastycznienia, oraz równania konstytutywne):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} &= 0, \\ \sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r} + \mu_{rz,r} + \frac{\mu_{rz}}{r} + H \ln \frac{b}{r} &= 0, \\ \gamma_{rr} - \gamma_{\theta\theta} &= r\gamma_{\theta\theta,r} \\ r\gamma_{\theta r,r} - r\kappa_{rz} &= -(\gamma_{r\theta} + \gamma_{\theta r}), \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})^2 &= 8k^2\mu, \\ \gamma_{rr} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \\ \gamma_{\theta\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \sigma_{(r\theta)} + \frac{1}{2\alpha} \sigma_{\langle r\theta \rangle}, \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \sigma_{(\theta r)} + \frac{1}{2\alpha} \sigma_{\langle \theta r \rangle}, \\ \mu_{rz} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{rz}, \\ \mu_{zr} &= (\gamma - \varepsilon)\kappa_{zr}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\text{gdzie } U_{p_2} = \frac{1}{8\alpha} (\sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r})^2 + \frac{1}{8\gamma} (\mu_{rz} + \mu_{zr})^2 + \frac{1}{8\varepsilon} (\mu_{rz} - \mu_{zr})^2 < I^2,$$

Ze związków (6.10)₁₋₃ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} &= -r\sigma_{rr,r}, \\ -r\sigma_{r\theta,r} &= \sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}, \\ 2\sigma_{\langle r\theta \rangle} &= 2\sigma_{r\theta} - 2\sigma_{(\theta r)} = 2\sigma_{r\theta} + r\sigma_{r\theta,r}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Podstawiając związki (6.11) do pozostałych równań układu oraz zastępując odkształcenia przez naprężenia w związkach geometrycznych zgodności otrzymujemy następujący zredukowany układ równań:

$$2\sigma_{r\theta} + r\sigma_{r\theta,r} + \mu_{rz,r} + \frac{\mu_{rz}}{r} + H \ln \frac{b}{r} = 0, \quad (6.12)$$

$$(\sigma_{rr,r})^2 + (\sigma_{\theta\theta,r})^2 = \frac{8k^2\mu}{r^2}, \quad (6.12)$$

[cd.]

$$-\frac{1+\varphi_1}{2\mu} r\sigma_{rr,r} = r \left[\frac{1+\varphi_1}{4\mu} r\sigma_{rr,r} \right]_{,r}$$

$$\left[\frac{1+\varphi_1}{2\mu} r\sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{\alpha} \sigma_{\langle r\theta \rangle} + \frac{1}{2\alpha} r\sigma_{\theta r,r} \right]_{,r} + \frac{2\mu_{rz}}{\gamma + \varepsilon} = -\frac{1+\varphi_1}{\mu} \sigma_{r\theta,r}.$$

Układ powyższych równań udaje się sprowadzić do jednego nieliniowego równania różniczkowego zwyczajnego na zmienną μ_{rz} :

$$\frac{8\mu k^2 Cr(r^3 \mu_{rz,rr} - r^2 \mu_{rz,r} + r \mu_{rz} + 4D)}{\left[8\mu k^2 r^4 - \left(-r^2 \mu_{rz,r} + r \mu_{rz} + r^2 \frac{H}{2} + 2D_1 \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\mu_{rz}}{\gamma + \varepsilon} = \quad (6.13)$$

$$= \frac{1}{4\alpha} \left[\mu_{rz,rr} + \frac{1}{r} \mu_{rz,r} - \frac{1}{r^2} \mu_{rz} - \frac{H}{r} \right].$$

Po rozwiązaniu równania różniczkowego (6.13) rozwiązujemy kolejno równania układu (6.12)₁, (6.12)₃ i (6.12)₂. Równanie (6.13) można zlinearyzować, sprowadzając je do liniowego równania różniczkowego zwyczajnego o współczynnikach funkcyjnych. W tym celu należy wykorzystać fakt, że dla $H = 10^{-7}$, $\sigma_{rr,r} \gg \sigma_{r\theta,r}$. Otrzymujemy w ten sposób równanie

$$\left(\frac{C}{\sqrt{2\mu}kr^2} + \frac{1}{2\alpha} \right) \frac{d^2m}{dr^2} + \left(\frac{C}{\sqrt{2\mu}kr^3} + \frac{3}{2\alpha r} \right) \frac{dm}{dr} - \frac{2m}{\gamma + \varepsilon} + \frac{4CD}{\sqrt{2\mu}kr^6} - \frac{H}{2\alpha r^2} = 0, \quad (6.14)$$

gdzie $rm = \mu_{rz}$, C, D — stałe całkowania.

Dla bardzo małych wartości H zwiększenie zasięgu strefy uplastycznionej poślizgowo można wykazać w sposób uproszczony. Przyjmując, że dla zadanych obciążeń p oraz H suma $\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}$ jest mała wobec różnicy $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ oraz zakładając pewną wartość stałą $\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r} = A_0 = -2,7 \cdot 10^{-7}$ (na przykład) łatwo zauważymy, że zamiast rozwiązywać pełny układ równań (6.10), możemy poprzestać na wykorzystaniu pierwszych dwóch równań równowagi oraz warunku plastyczności:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0,$$

$$\sigma_{r\theta,r} + \frac{A_0}{r} = 0, \quad (6.15)$$

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + A_0^2 = 8\mu k^2.$$

Rozwiązaniem układu równań (6.15), po uwzględnieniu warunków brzegowych, jest następujący układ funkcji:

$$\sigma_{rr} = \sqrt{8\mu k^2 - A_0^2} \ln \frac{r}{a} - p, \quad (6.16)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sqrt{8\mu k^2 - \Lambda_0^2} \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right) - p, \tag{6.16}$$

[cd.]

$$\sigma_{r\theta} = -\Lambda_0 \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_{\theta r} = \Lambda_0 \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right),$$

określający rozkład naprężeń w ramach strefy uplastycznionej poślizgowo.

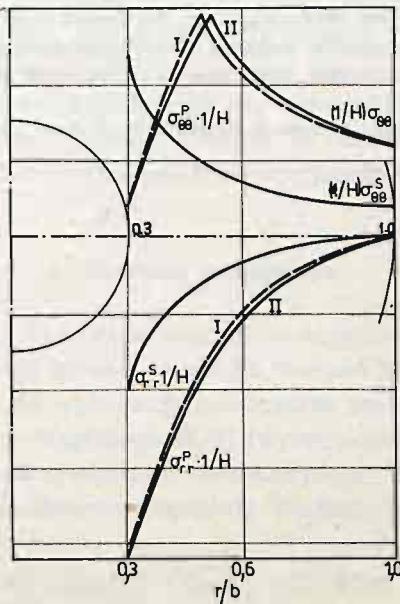
W celu przybliżonego wyznaczenia zasięgu strefy uplastycznionej poślizgowo znajdziemy w pierw rozkład naprężeń dla strefy sprężystej otaczającej strefę plastyczną, a następnie wykorzystamy wyrażenie na energię odkształcenia postaciowego poślizgowego, która w strefie sprężystej osiągnie wartość krytyczną dla $r = \varrho$. W naszym przypadku równanie na poszukiwany promień przyjmie postać

$$4 \left(\sqrt{8\mu k^2 - \Lambda_0^2} \ln \frac{\varrho}{a} - p \right)^2 b^4 = (8\mu k^2 - \Lambda_0^2) (b^2 - \varrho^2)^2, \tag{6.17}$$

czyli, dla $a = 0,3$, $b = 1,0$

$$\sqrt{8\mu k^2 - \Lambda_0^2} \ln \frac{\varrho}{a} = p + \frac{1}{2} (\varrho^2 - 1) \sqrt{8\mu k^2 - \Lambda_0^2}. \tag{6.18}$$

Porównując powyższe równanie z równaniem (6.5), widzimy, że różni się ono od niego tylko współczynnikiem przy p , przy czym w równaniu (6.5) współczynnik ten jest mniejszy. Wynika stąd, że wyznaczone w tym przypadku ϱ jest większe niż poprzednio, tzn. dla cylindra, na który działa tylko ciśnienie. Przybliżając $\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}$ przez najmniejszą wartość sumy otrzymujemy już efekt, wskazujący na zwiększenie zakresu strefy uplastycznionej poślizgowo w wyniku obciążeń objętościowych momentami mikropolarnymi. Zmianę zakresu strefy uplastycznienia pokazaliśmy na rys. 10.



Rys. 10

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN 1970, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, Wyd. 2 poprawione i rozszerzone, 1981.
2. L. M. KACHANOV, *Foundations of the theory of plasticity*, North-Holland Publishing Company — Amsterdam, Londyn 1971.
3. Z. OLESIAK, M. WĄGROWSKA, *Zagadnienia mikropolarnej sprężystej rury grubościennej*, MTiS, 14, 1976.
4. M. WĄGROWSKA, *Zagadnienia uplastycznionego ośrodka mikropolarnego*, rozprawa doktorska, 1983. Uniwersytet Warszawski. Inst. Mech.
5. M. MIȘICU, *On theory of asymmetric plastic and viscoplastic plastic solids*, Revu Rou. Sci. tech. Sér. de Mech Appl. 9, 1969.
6. H. LIPPMANN, *Eine Cosserat Theorie des Plastischen Fließens*, Acta Mechanica, 8, 1969.
7. A. SAWCZUK, *On yielding of Cosserat Continua*, Arch. Mech. Stos. 3, 19, 1967.

Резюме

АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В рамках сред с свободными внутренними оборотами мы рассматриваем упруго-пластические цилиндрические тела. Средства переносить также моментные напряжения. Представлены условия текучести, определяющие уравнения, а также уравнения аксиально симметричных двухмерных задач для упруго-пластических тел. Как частный случай мы рассматриваем влияние микрополярных массовых моментов на размер пластической зоны.

Summary

AXIALLY SYMMETRIC PROBLEMS OF THE MICROPOLAR THEORY OF PLASTICITY

Within the frames of the continuum with free rotations we consider elastic-plastic cylindrical bodies. The continuum is capable of carrying moment stresses. We present yield criteria, constitutive equations, and the equations for the axially symmetric problems of two-dimensional elastic-plastic bodies. As a special case we discuss the effect of micropolar mass moments on the extent of the plastic zone.

Praca została złożona w Redakcji 26 stycznia 1984 roku

ZREDUKOWANE LINIOWE RÓWNANIA POWŁOK O WOLNO ZMIENNYCH KRZYWIZNACH

ZENON RYCHTER (BIAŁYSTOK)

1. Wstęp

Zginanie sprężystych, izotropowych powłok o małej wyniosłości można opisać w ramach liniowej teorii typu Kirchhoffa-Love'a za pomocą układu dwóch równań względem funkcji naprężeń i ugięcia, otrzymanych przez Donnella [1], Musztari [2] i Własowa [3]. Równania te obowiązują także dla powłok wyniosłych, jeżeli odkształcenia są szybko zmiennymi funkcjami współrzędnych na środkowej powierzchni powłoki (por. [4]). Libai [5] wykazał, że wspomniane równania są również ważne w klasie powłok quasi-połogich, dla których iloczyn krzywizny Gaussa i kwadratu długości fali deformacji jest wielkością pomijalną wobec jedności. Koiter [6] wprowadził w miejsce ugięcia jako niewiadomą funkcję odkształceń, uzyskując równania o strukturze identycznej z równaniami [5]. Łukasiewicz rozwinął w szeregu prac, np. [7], koncepcję powłok o wolno zmiennych krzywiznach, osłabiając założenia przyjęte w [1 - 6]. Jednak otrzymane w [7] dwa równania dla funkcji naprężeń i ugięcia są znacznie bardziej skomplikowane niż równania [1 - 6]. Usunięcie tej niedogodności jest celem niniejszej pracy. Wykażemy, że zginanie powłok o wolno zmiennych krzywiznach można opisać za pomocą prostych równań rozwiązujących teorii powłok quasi-połogich [6]; pewnej komplikacji ulegają przy tym tylko warunki brzegowe oraz wzory na odkształcenia i siły wewnętrzne. Wywód równań powłok o wolno zmiennych krzywiznach, „zredukowanych” w stosunku do [7], oprzemy na założeniach upraszczających nieco odmiennych od przyjętych w [7], ale nie silniejszych.

2. Równania podstawowe

Środkową powierzchnię powłoki parametryzujemy za pomocą krzywoliniowych współrzędnych x^{δ} , przy czym indeksy greckie przyjmują wartości ze zbioru (1, 2). Jako miary odkształceń i sił wewnętrznych wybieramy symetryczne tensory $\gamma_{\alpha\beta}(x^{\delta})$, $\varkappa_{\alpha\beta}(x^{\delta})$, $N_{\alpha\beta}(x^{\delta})$ i $M_{\alpha\beta}(x^{\delta})$, wprowadzone przez Naghdiego [8, 9] (wymienione tensory mają w [8, 9] dodatkowo falę umieszczoną nad symbolem), charakteryzujące odpowiednio odkształcenia błonowe, zmiany krzywizn, siły błonowe i momenty. Wielkości te czynią zadość równaniom równowagi [8]

$$\begin{aligned} B_{\delta}^{\alpha} &= N_{\delta\beta}^{\beta\alpha} - 2b_{\nu}^{\alpha} M_{\delta\beta}^{\nu\beta} - b_{\nu\delta}^{\alpha} M_{\delta}^{\nu\beta} + q_{\delta}^{\alpha} - b_{\nu}^{\alpha} m_{\delta}^{\nu} = 0, \\ B &= b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} b_{\nu}^{\alpha} M^{\nu\beta} + q + m_{\alpha}^{\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

(z których w zwykły sposób wyeliminowano siły poprzeczne), warunkom nierozdzielności [9]

$$\begin{aligned} A^\nu &= d^{\beta\eta} [d^{\alpha\varphi} \kappa_{\alpha\beta|\eta} + (d^{\alpha\varphi} b_\beta^\lambda \gamma_{\lambda\alpha|\eta} + d^{\alpha\delta} b_\delta^\nu \gamma_{\alpha\beta|\eta}) + d^{\alpha\varphi} b_{\beta|\eta}^\lambda \gamma_{\lambda\alpha}] = 0, \\ A &= d^{\alpha\lambda} d^{\beta\eta} (-b_{\lambda\eta} \kappa_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta|\eta\lambda} - b_{\lambda\eta} b_\beta^\nu \gamma_{\nu\alpha}) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

oraz równaniom konstytutywnym [8]

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{Eh} [(1+\nu)N_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} N^\lambda_\lambda], \\ M_{\alpha\beta} &= D[(1-\nu)\kappa_{\alpha\beta} + \nu a_{\alpha\beta} \kappa^\lambda_\lambda], \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4)$$

We wzorach tych $q^\alpha(x^\delta)$ jest obciążeniem stycznym, $q(x^\delta)$ obciążeniem normalnym, $m^\alpha(x^\delta)$ zaś obciążeniem parą sił, przy czym wielkości te są odniesione do jednostki pola środkowej powierzchni powłoki; $a_{\alpha\beta}(x^\delta)$, $b_{\alpha\beta}(x^\delta)$ i $d_{\alpha\beta}(x^\delta)$ oznaczają tensor metryczny, tensor krzywizny i tensor permutacyjny, symbol $(\)_{|\alpha}$ oznacza powierzchniowe różniczkowanie kowariantne. Ponadto E jest modułem Younga, h zaś grubością powłoki; wielkości te są w niniejszej pracy stałe.

Uproszczenia równań podstawowych oprzemy na apriorycznych oszacowaniach ich składników. W tym celu zakładamy, że współrzędne x^δ mają wymiar długości. Wówczas składowe kowariantne, kontrawariantne i mieszane dowolnego tensora mają wymiar składowych fizycznych. W szczególności dla składowych tensora metrycznego i permutacyjnego słuszne są wtedy związki

$$a_{\alpha\beta} = 0(1), \quad d_{\alpha\beta} = 0(1), \quad (5)$$

gdzie symbol $A = 0(B)$ oznacza istnienie takiej stałej dodatniej d , że zachodzi $|A| \leq d|B|$.

Liczby R , γ i κ , charakteryzujące amplitudy krzywizn, odkształceń błonowych i odkształceń zgięciowych, definiujemy następująco

$$|b_{\alpha\beta}(x^\delta)| \leq 1/R, \quad |\gamma_{\alpha\beta}(x^\delta)| \leq \gamma, \quad |\kappa_{\alpha\beta}(x^\delta)| \leq \kappa. \quad (6)$$

Pochodne krzywizn oraz miar odkształceń błonowych i zgięciowych względem współrzędnych x^δ można ocenić za pomocą długości fal L_R , L_N i L_M , zgodnie ze wzorami

$$|b_{\alpha\beta}(x^\delta)_{|\eta}| \leq \frac{1}{RL_R}, \quad |\gamma_{\alpha\beta}(x^\delta)_{|\eta}| \leq \frac{\gamma}{L_N}, \quad |\kappa_{\alpha\beta}(x^\delta)_{|\eta}| \leq \frac{\kappa}{L_M}, \quad (7)$$

przy czym przy szacowaniu wyższych pochodnych długości fal nie ulegają zmianie, np.

$$|b_{\alpha\beta}(x^\delta)_{|\eta\lambda}| \leq \frac{1}{RL_R^2}, \quad |\gamma_{\alpha\beta}(x^\delta)_{|\eta\lambda}| \leq \frac{\gamma}{L_N^2}, \quad |\kappa_{\alpha\beta}(x^\delta)_{|\eta\lambda}| \leq \frac{\kappa}{L_M^2}.$$

Z równań konstytutywnych (3) otrzymujemy za pomocą (5) i (6) oszacowania sił wewnętrznych

$$N_{\alpha\beta} = 0(Eh\gamma), \quad M_{\alpha\beta} = 0(Eh^3\kappa) \quad (8)$$

i ich pochodnych

$$N_{\alpha\beta|\eta} = 0(Eh\gamma/L_N), \quad M_{\alpha\beta|\eta} = 0(Eh^3\kappa/L_M). \quad (9)$$

Ze związków (5) - (9) będziemy dalej korzystać bez szczegółowego odwoływania się. Za ich pomocą znajdujemy oszacowania składników równań równowagi (1) (bez członów obciążeniowych)

$$\begin{aligned} B^{\alpha}: & \frac{Eh\gamma}{L_N} \left[0(1) - 0 \left(\frac{h}{R} \frac{h\kappa}{\gamma} \frac{L_N}{L_M} \right) - 0 \left(\frac{h}{R} \frac{h\kappa}{\gamma} \frac{L_N}{L_R} \right) \right], \\ B: & \frac{Eh\gamma}{R} \left[0(1) + 0 \left(\frac{h}{R} \frac{R^2}{L_M^2} \frac{h\kappa}{\gamma} \right) - 0 \left(\frac{h}{R} \frac{h\kappa}{\gamma} \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

i warunków nierozdzielności (2)

$$\begin{aligned} A^{\nu}: & \frac{\kappa}{L_M} \left[0(1) + 0 \left(\frac{h}{R} \frac{\gamma}{h\kappa} \frac{L_M}{L_N} \right) + 0 \left(\frac{h}{R} \frac{\gamma}{h\kappa} \frac{L_M}{L_R} \right) \right], \\ A: & \frac{\kappa}{R} \left[-0(1) + 0 \left(\frac{h}{R} \frac{R^2}{L_N^2} \frac{\gamma}{h\kappa} \right) - 0 \left(\frac{h}{R} \frac{\gamma}{h\kappa} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

3. Równania podstawowe powłok o wolno zmiennych krzywiznach

Formułowanie założeń umożliwiających redukcję równań podstawowych do równań powłok o wolno zmiennych krzywiznach zacznijmy od stwierdzenia, że równania konstytutywne (3) nie są dokładne, ich residualny błąd względny jest wielkością rzędu $h/R + h^2/L^2$ (L jest mniejszą z liczb L_N, L_M), co wykazał Koiter [10]. Człony tego rzędu możemy więc pomijać względem jedności we wszystkich równaniach, co zapisujemy w postaci warunków:

$$h/R \leq \vartheta^2, \quad h/L_N \leq \vartheta, \quad h/L_M \leq \vartheta, \quad \vartheta^2 \ll 1, \quad (12)$$

gdzie ϑ oznacza pomocniczy bezwymiarowy parametr, którego kwadrat i wyższe potęgi są pomijalnie małe wobec jedności; warunkom (12) odpowiadają powłoki cienkie i niezbyt silnie zakrzywione, których deformacje zmieniają się odpowiednio wolno jako funkcje współrzędnych x^{β} .

Drugie człony w równaniach $(10)_2$ i $(11)_2$ są pomijane w ramach teorii bezmomentowej i przy zginaniu izometrycznym. W teorii zgięciowej, aby zachować te człony, musimy założyć, że

$$\frac{h}{R} \frac{R^2}{L_N^2} \frac{h\kappa}{\gamma} > \vartheta^2, \quad \frac{h}{R} \frac{R}{L_M^2} \frac{\gamma}{h\kappa} > \vartheta^2. \quad (13)$$

W przypadku powłok o wolno zmiennych krzywiznach wyrazy zawierające pochodne krzywizn należy odrzucić w równaniach $(10)_1$ i $(11)_1$, co jest możliwe przy spełnieniu warunków

$$\frac{h}{R} \frac{h\kappa}{\gamma} \frac{L_N}{L_R} \leq \vartheta^2, \quad \frac{h}{R} \frac{\gamma}{h\kappa} \frac{L_M}{L_R} \leq \vartheta^2. \quad (14)$$

Rozwiązania ogólne równań $(1)_1$ i $(2)_1$ można wyrazić za pomocą funkcji naprężeń (por. [7]) i funkcji odkształceń (por. [6]), przy czym residualny błąd względny tych rozwiązań nie przekroczy ϑ^2 , gdy

$$L_N^3 |K| / L_R \leq \vartheta^2, \quad L_M^3 |K| / L_R \leq \vartheta^2, \quad (15)$$

gdzie $|K|$ jest maksymalną wartością absolutną krzywizny Gaussa $K(x^\theta)$. Klasę powłok quasi-połogich określa warunek $L^2|K| \leq \vartheta^2$ [6]. W szerszej klasie powłok o wolno zmiennych krzywiznach należy przyjąć słabsze ograniczenie, a więc

$$L_N^2|K| > \vartheta^2, \quad L_M^2|K| > \vartheta^2. \quad (16)$$

Po uwzględnieniu (16), z nierówności (15) otrzymujemy

$$L_N/L_R \leq 1, \quad L_M/L_R \leq 1. \quad (17)$$

Krzywizna Gaussa dana jest wzorem $K = 1/(R_1 R_2)$, gdzie $R_1(x^\theta)$, $R_2(x^\theta)$ są promieniami głównych krzywizn. Z definicji charakterystycznego promienia krzywizny R mamy $R \leq |R_1|$ i $R \leq |R_2|$, a więc $|K|$ można przedstawić w postaci $|K| = \theta/R^2$, gdzie $\theta \leq 1$. Wprowadzenie parametru θ zezwala na następującą klasyfikację: $\theta \simeq 1$ odpowiada powłokom zbliżonym do sfery, $\theta \ll 1$ charakteryzuje powłoki walcowe i stożkowe, pośrednie wartości θ odnoszą się do powłok elipsoidalnych. Po uwzględnieniu, że $|K| = \theta/R^2$, warunki (15) przyjmują postać

$$\frac{L_N^2}{R^2} \frac{L_N}{L_R} \theta \leq \vartheta^2, \quad \frac{L_M^2}{R^2} \frac{L_M}{L_R} \theta \leq \vartheta^2. \quad (18)$$

W równaniach powłok o małej wyniosłości odrzucane są wobec jedności człony rzędu L^2/R^2 (por. [4]). W przypadku powłok o łagodnie zmiennych krzywiznach człony tego rzędu należy zachować, tj. przyjąć

$$L_N^2/R^2 > \vartheta^2, \quad L_M^2/R^2 > \vartheta^2. \quad (19)$$

Spełnienie warunków (12) - (19) jest konieczne do otrzymania nietrywialnych (ogólniejszych niż znane równania teorii bezmomentowej, równania powłok o małej wyniosłości i powłok quasi-połogich) i konsekwentnie uproszczonych (przez odrzucenie członów rzędu $\vartheta^2 \ll 1$ i mniejszych) równań powłok o wolno zmiennych krzywiznach. We wspomnianych warunkach występuje szereg bezwymiarowych parametrów. Wartości sześciu z nich można zadać niezależnie (np. h/R , hx/γ , θ , L_N/L_M , L_N/R , L_N/L_R). Dalej nie będziemy analizować wszystkich możliwych przypadków, lecz przyjmiemy

$$h/R = \vartheta^2, \quad hx/\gamma = 1, \quad L_N = L_M = L. \quad (20)$$

Pierwszy z tych warunków oznacza, że powłoka jest cienka (nadając też sens fizyczny parametrowi ϑ), z pozostałych wynika, że deformacja powłoki jest zgięciowa. Po wykorzystaniu (20), warunki (12) - (19) znacznie się redukują, przyjmując postać

$$\vartheta < L/R < 1, \quad (L/R)^2(L/L_R)\theta \leq \vartheta^2, \quad L/L_R \leq 1, \quad \theta \leq 1. \quad (21)$$

Nierówności (21), uczynimy zadość kładąc

$$L/R = \sqrt{\vartheta}, \quad (22)$$

co odpowiada deformacjom o umiarkowanej zmienności (dla porównania: $L/R = 1$ oznacza deformacje wolno zmienne, występujące w teorii bezmomentowej, $L/R = \vartheta$ charakteryzuje odkształcenia szybkozmienne, opisywane równaniami powłok o małej wyniosłości). Po uwzględnieniu (22), warunki (21) ulegają uproszczeniu do postaci

$$(L/L_R)\theta \leq \vartheta, \quad L/L_R \leq 1, \quad \theta \leq 1. \quad (23)$$

Czyniąc zadość zależnościom (23), otrzymujemy dwa fizycznie interesujące przypadki

$$(\theta = 1, \quad L/L_R \leq \vartheta), \quad (\theta \leq \vartheta, \quad L/L_R = 1). \quad (24)$$

Warunkom (24)₁ odpowiadają powłoki o prawie równych krzywiznach głównych (zblżone do sferycznych), zmieniających się wolniej niż odkształcenia. W przypadku (24)₂ mamy do czynienia z powłokami o różnych krzywiznach głównych (np. wydłużone elipsoidy), których zmienność jest taka sama jak zmienność deformacji.

Ostatecznie klasę rozważanych w tej pracy powłok o wolno zmiennych krzywiznach określają warunki (20), (22), (24), przy których oszacowania (10), (11) składników równań podstawowych przyjmują postać:

$$B^\alpha: \frac{Eh\gamma}{L} [0(1) - \underline{0(\vartheta^2)} - \underline{0(\vartheta^{3,2})}],$$

$$B: \frac{Eh\gamma}{R} [0(1) + 0(\vartheta) - \underline{0(\vartheta^2)}]$$
(25)

oraz

$$A^\vartheta: \frac{\varkappa}{L} [0(1) + \underline{0(\vartheta^2)} + \underline{0(\vartheta^{3,2})}],$$

$$A: \frac{\varkappa}{R} [-0(1) + 0(\vartheta) - \underline{0(\vartheta^2)}],$$
(26)

gdzie wykładnik przed przecinkiem odpowiada przypadkowi (24)₁, a po przecinku — (24)₂. W obu przypadkach podkreślone człony są pomijalnie małe wobec jedności; odzuczając ich odpowiedniki w (1) i (2), otrzymujemy

$$B^\alpha = N_{|\alpha}^{\beta\alpha} + q^\alpha - b_\nu^\alpha m^\nu = 0,$$

$$B = b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + M_{|\alpha\beta}^{\alpha\beta} + q + m_{|\alpha}^\alpha = 0$$
(27)

oraz

$$A^\vartheta = d^{\beta\eta} d^{\alpha\vartheta} \varkappa_{\alpha\beta|\eta} = 0,$$

$$A = d^{\alpha\lambda} d^{\beta\eta} (-b_{\lambda\eta} \varkappa_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta|\eta\lambda}) = 0.$$
(28)

Są to zredukowane równania równowagi i warunki nierozdzielności powłok o wolno zmiennych krzywiznach. Formalnie, równania te nie różnią się od równań powłok połogich i quasi-połogich, jednak otrzymano je przy słabszych założeniach, prowadzących do odmiennych rozwiązań.

4. Równania rozwiązujące

Siły wewnętrzne i odkształcenia można wyrazić za pomocą funkcji naprężeń $\Phi(x^\delta)$ i funkcji odkształceń $\Psi(x^\delta)$, tak aby równania (27)₁ i (28)₁ były spełnione tożsamościowo. W tym celu rozważmy wyrażenia

$$N^{\beta\alpha} = -d^{\beta\lambda} d^{\alpha\mu} \Phi_{\mu\lambda} - a^{\alpha\beta} K\Phi + P^{\beta\alpha}, \quad \varkappa_{\alpha\beta} = -\Psi_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} K\Psi, \quad (29)$$

gdzie $P^{\beta\alpha}(x^\delta)$ jest całką szczególną (27)₁. Podstawiając (29) do (27)₁ i (28)₁, i korzystając ze znanych związków geometrycznych (por. [8])

$$d^{\beta\lambda} d^{\alpha\mu} = a^{\beta\alpha} a^{\lambda\mu} - a^{\beta\mu} a^{\lambda\alpha}, \quad d^{\beta\lambda} v_{\alpha|\beta\lambda} = K d_{\lambda\alpha} v^\lambda, \quad (30)$$

gdzie $v_\alpha(x^\delta)$ jest dowolnym wektorem, otrzymujemy w (27)₁ i (28)₁ residualny błąd bezwzględny rzędu $0(\Phi|K|/L_R)$ i $0(\Psi|K|/L_R)$, przy czym największe wyrazy w tych równaniach są rzędu $0(\Phi/L^3)$ i $0(\Psi/L^3)$. Zatem residualny błąd względny jest wielkością rzędu $0(L^3|K|/L_R)$, którą zgodnie z założeniami (15) można pominąć wobec jedności. Po podstawieniu (29) do (3) i uwzględnieniu (30)₁ oraz $a_\alpha^\alpha = 2$, znajdujemy wzory uzależniające od Φ i Ψ pozostałe odkształcenia i siły wewnętrzne

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} [-a_{\alpha\beta} \Delta \Phi + (1+\nu) \Phi_{|\alpha\beta} - (1-\nu) a_{\alpha\beta} K \Phi + (1+\nu) P_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} P_{\lambda\lambda}^{\lambda}], \quad (31)$$

$$M_{\alpha\beta} = D[-\nu a_{\alpha\beta} \Delta \Psi - (1-\nu) \Psi_{|\alpha\beta} - (1+\nu) a_{\alpha\beta} K \Psi],$$

gdzie $\Delta(\) = (\)_{|\alpha}^\alpha$ jest operatorem Laplace'a.

Podstawiając (29) i (31) do (27)₂ i (28)₂ i korzystając z (30), otrzymujemy równania rozwiązujące dla funkcji Φ i Ψ

$$B: D \Delta \Delta \Psi + \Delta_K \Phi = q + m_{|\alpha}^\alpha + b_{\alpha\beta} P^{\alpha\beta}, \quad (32)$$

$$A: \Delta \Delta \Phi - Eh \Delta_K \Psi = \Delta P_\alpha^\alpha - (1+\nu) P_{|\alpha\beta}^{\alpha\beta},$$

gdzie

$$\Delta_K(\) = b_\alpha^\alpha \Delta(\) - b^{\alpha\beta}(\)_{|\alpha\beta}. \quad (33)$$

W trakcie przekształceń odrzucono małe człony zawierające krzywiznę Gaussa. Korzystając z (30)₂ zmieniano też porządek różniczkowania kowariantnego (np. $\Psi_{|\beta\alpha}^{\alpha\beta} = \Delta \Delta \Psi [1 + 0(|K|L^2)]$), a ponieważ przy naszych założeniach mamy $|K|L^2 \leq \vartheta$ oraz $D \Delta \Delta \Psi = 0(\vartheta \Delta_K \Phi)$, to wpływ podkreślonego członu jest w równaniu B nie większy niż ϑ^2 , a więc pomijalny).

Równania rozwiązujące uzupełnimy statycznymi warunkami brzegowymi (por. np. [11])

$$Q^\alpha = N^{\beta\alpha} \nu_\beta + 0(Eh^3 \kappa/R),$$

$$Q = M_{|\alpha}^{\alpha\beta} \nu_\beta + (M^{\alpha\beta} \nu_\alpha t_\beta)_{|\delta} t^\delta, \quad (34)$$

$$M = M^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta,$$

w których na krawędzi środkowej powierzchni powłoki z jednostkowym wektorem stycznym t_β i normalnym ν_α zadano dwie składowe Q^α siły stycznej do powierzchni środkowej, skalar Q stanowiący kombinację siły poprzecznej i pochodnej w kierunku t_β momentu skręcającego oraz moment zginający M ; we wzorze na Q^α pominięto mały człon rzędu $0(\vartheta^2 Q^\alpha)$. Podobnie upraszczają się znane (por. [11]) deformacyjne warunki brzegowe

$$\mu^\alpha = t^\delta \Delta^{\alpha\beta} \kappa_{\delta\beta} + 0(\gamma/R),$$

$$\mu = t^\beta \Delta^{\alpha\delta} \gamma_{\alpha\beta|\delta} + (t^\beta \nu^\delta \gamma_{\delta\beta})_{|\alpha} t^\alpha, \quad (35)$$

$$\eta = t^\alpha t^\beta \gamma_{\alpha\beta},$$

w których dane są składowe μ^α , μ wektora zmian krzywizn konturu powłoki oraz wydłużenie konturu η . Korzystając z (29) i (31) nietrudno jest wyrazić prawe strony warunków brzegowych (34) i (35) przez funkcje Φ i Ψ .

Wyznaczenie przemieszczeń stycznych $u_\alpha(x^\delta)$ i ugięcia $w(x^\delta)$ wymaga scałkowania związków geometrycznych [8]

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}w, \quad (36)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -w_{|\alpha\beta} + b_\beta^\gamma b_{\gamma\alpha}w - b_\beta^\gamma u_{\nu|\beta} - b_\alpha^\nu u_{\nu|\beta} - b_{\alpha|\beta}^\nu u_\nu,$$

co w ogólnym przypadku jest trudnym zadaniem.

Równania rozwiązujące (32) są bardzo proste i identyczne z równaniami znanymi dla powłok quasi-połogich i połogich (w ostatnim przypadku funkcję odkształceń zastępuje ugięcie, por. [4]), natomiast warunki brzegowe (34), (35) oraz wzory na odkształcenia i siły wewnętrzne (29), (31) są z powodu obecności członów $K\Phi$ i $K\Psi$ nieco bardziej złożone niż odpowiednie warunki i wzory dotyczące powłok o małej wyniosłości i powłok quasi-połogich. W pracy [7] otrzymano dla powłok o wolno zmiennych krzywiznach dwa równania z funkcją naprężeń i ugięciem, znacznie bardziej skomplikowane od równań (32), przy analogicznych założeniach upraszczających (jedyna różnica polega na uwzględnieniu w [7] członów rzędu h/R , które w tej pracy pominięto wobec jedności ze względu na dokładność równań konstytutywnych, por. [10]).

Literatura cytowana w tekście

1. L. H. DONNELL, *Stability of thin-walled tubes under torsion*, NACA, Rep. No. 479, 1933.
2. X. M. МУШТАРИ, *Некоторые обобщения теории тонких оболочек*, Изв. Физ. Мат. Казанск. Унив., 2, сер. 8, 1938.
3. В. З. ВЛАСОВ, *Общая теория оболочек*, Москва — Ленинград 1949.
4. К. З. ГАЛИМОВ (ред.), *Теория оболочек с учетом поперечного сдвига*, Издат. Казанск. Унив., 1977.
5. A. LIBAI, *On the nonlinear elastokinetics of shells and beams*, Journ. Aersp. Sci., 29, 1190 - 1195, 1962.
6. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., 1, B69, 1966.
7. S. ŁUKASIEWICZ, *Równania liniowej zgięciowej teorii powłok o wolno zmiennych krzywiznach*, Mech. Teor. Stos., 2, 19, 1981.
8. P. M. NAGHI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, vol. 4, 1963.
9. P. M. NAGHI, *A new derivation of the general equations of elastic shells*, Int. J. Eng. Sci., 1, 1963.
10. W. T. KOITER, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. IUTAM Symp. Delft 1959, North-Holland, Amsterdam 1960.
11. Н. П. АБОВСКИЙ, Н. П. АНДРЕЕВ, А. П. ДЕРУГА, *Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек*, Наука, Москва 1978.

Резюме

УПРОЩЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КРИВИЗНАМИ

Рассмотрена линейная теория Кирхгофа — Лява тонких упругих оболочек с медленно изменяющимися кривизнами. Приведены два простые уравнения для функции усилий и функции деформаций, подобные уравнениям пологих оболочек [1 - 6], с несколько усложненными выражениями деформаций, усилий, моментов и граничных условий. Предлагаемые уравнения значительно проще, чем уравнения оболочек с медленно изменяющимися кривизнами С. Лукаевича [7].

Summary

REDUCED LINEAR EQUATIONS OF SHELLS WITH SLOWLY VARYING CURVATURES

The linear Kirchhoff-Love type theory of thin elastic shells with slowly varying curvatures is dealt with. Two simple governing equations in terms of a stress function and a strain function are derived, similar to those of shallow and quasi-shallow shells [1 - 6], with only slightly more complex expressions for the strains, internal forces and the boundary conditions. The equations are considerably reduced as compared to the equations of shells with slowly varying curvatures due to Łukasiewicz [7].

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 września 1983 roku

WYBOCZENIE PRĘTÓW STAŁOWYCH PODDANYCH WSTĘPNYM WYDŁUŻENIOM TRWAŁYM

JAN GRABOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Wpływ wstępnych odkształceń plastyczności na własności mechaniczne metali oraz na zachowanie się powierzchni plastyczności jest zagadnieniem bardzo istotnym dla właściwego poznania i wykorzystania materiału, dlatego też problemom tym poświęcono wiele prac zarówno doświadczalnych, jak i teoretycznych. Jak wiadomo, materiał początkowo izotropowy lub prawie izotropowy zmienia swoje właściwości mechaniczne pod wpływem odkształceń plastycznych. W literaturze można znaleźć przykłady podnoszenia własności mechanicznych materiałów pracujących w warunkach osiowego rozciągania przez nadanie wstępnych wydłużeń trwałych, np. [1, 2]. Znane są również prace, w których analizowano wpływ wstępny odkształceń plastycznych na nośność elementów zginanych, wytrzymałość zmęczeniową i inne własności materiału, np. [3, 4, 5, 6, 7, 8].

Celem przedstawionej pracy jest doświadczalna analiza wpływu wstępnych wydłużeń trwałych, powstających niezależnie od procesów fabrycznego kształtowania elementu, na zależność $R_k - \lambda$ (naprężenie krytyczne — smukłość) dla wybranej stali konstrukcyjnej R35. Pierwsze prace dotyczące tego zagadnienia przeprowadzone przez P. Jastrzębskiego [9] oraz prace własne [10, 11] wykazały złożoność badanego problemu. Z jednej strony istotny wpływ ma tu zjawisko Bauschingera, a z drugiej naturalna niejednorodność oraz niedoskonałości geometryczne materiału i ich ujawnianie się w procesie wydłużania. Rozwiązanie tych problemów można znaleźć tylko na podstawie badań doświadczalnych; taki też charakter ma przedstawiona praca.

Podstawową część pracy poprzedzono obszernymi badaniami zjawiska Bauschingera dla wybranej do dalszych badań stali R35. Było to konieczne dla właściwego ustalenia programu badań zasadniczych, szczególnie, iż w świetle dotychczasowych doświadczeń istnieją poważne rozbieżności poglądów zarówno co do zakresu, jak i charakteru tego zjawiska; np. [12, 13, 14, 15]. Ponadto większość dotychczasowych prac nie dotyczyła materiałów technicznych. Nieliczne badania przeprowadzone dla takich właśnie materiałów wykazały bardzo zróżnicowany charakter tego zjawiska. Należy również zauważyć, że w pracach tych określano na ogół tylko zmiany granicy plastyczności, natomiast brak w nich informacji co do wpływu wstępnych odkształceń trwałych na wartość granicy proporcjonalności oraz przebieg zależności $\sigma - \varepsilon$ (szczególnie początkowego odcinka zakresu sprężysto-plastycznego). Cechy te, jak wiadomo, mają podstawowy wpływ na wartość naprężeń krytycznych przy wyoboczeniu.

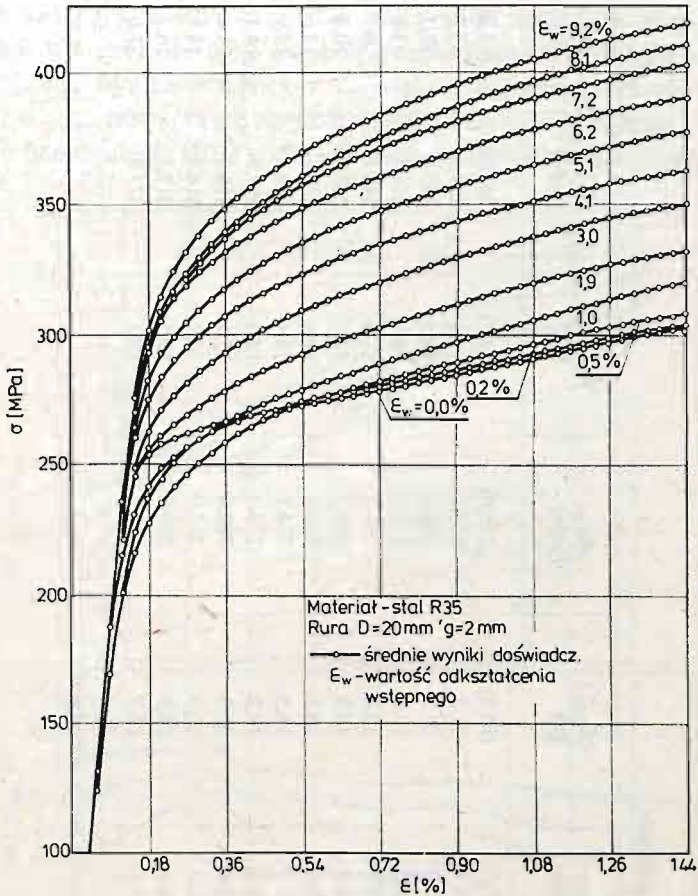
2. Badania zjawiska Bauschingera

2.1. Zakres i metodyka badań. Jak wiadomo, zjawisko Bauschingera występuje dla różnych przypadków obciążenia wstępnego i wtórnego. Ze względu jednak na kierunek badań zasadniczych, badania zjawiska Bauschingera ograniczono tylko do przypadku jednoosiowego stanu naprężenia, przy drodze obciążenia rozciąganie-ściskanie. Do badań użyto rur o średnicy zewnętrznej $D = 20$ mm i grubości ścianki $g = 2$ mm. Próbkę pobrano z pięciu losowo wybranych z partii prętów o długości około 4 m. W skład każdej serii wchodziło pięć próbek o długości 300 mm, przy czym każda z nich pochodziła z innego pręta. Poszczególnym seriom próbek nadawano odpowiednie wydłużenia wstępne o następujących wartościach: $\bar{\epsilon}_w = 0, 0,2, 0,5, 1, 2, 3 \dots 9\%$. Wydłużenia kontrolowano zarówno w trakcie procesu wydłużania, jak i po odciążeniu. W tym celu każda próbka była odpowiednio skalowana, co umożliwiało dokładne pomiary wydłużeń trwałych wzdłuż ich długości, jak również ustalenie rozkładu tych wydłużeń na odcinku próbki przeznaczonym do dalszych badań. Próbkę do prób ściskania o długości $l = 5D = 100$ mm wycinano z uprzednio rozciąganych odcinków o długości 300 mm. Przyjęcie takich wymiarów próbki pozwalało na uzyskanie jednorodnego stanu naprężenia w jej części środkowej, gdzie dokonywano pomiaru odkształceń, przy jednoczesnym uniknięciu wyboczenia próbki w badanym zakresie obciążeń. Podobną metodykę przeprowadzenia badań dla stopów aluminium zastosował autor w pracy [12].

Przeprowadzone doświadczenia pozwoliły na określenie wpływu wstępnych wydłużeń trwałych na przebieg zależności $\sigma - \epsilon$ przy ściskaniu oraz na wartości umownych granic plastyczności $R_{\epsilon_{p1}}$, zdefiniowanych różnymi wartościami odkształcenia plastycznego $\epsilon_{p1} = 0,02, 0,05, 0,1, 0,2\%$. Przyjęcie takich wartości ϵ_{p1} pozwoliło określić zmiany najbardziej istotnych z punktu widzenia inżynierskiego charakterystyk mechanicznych. Wartości $R_{0,02}$ i $R_{0,05}$ przyjmowane są na ogół jako umowne granice sprężystości oraz wartości $R_{0,1}$ i $R_{0,2}$ przyjmowane są jako umowne granice plastyczności materiału. Porównano również zależności $\sigma - \epsilon$ przy ściskaniu i rozciąganiu. Wyniki doświadczeń poddano analizie statystycznej korzystając z rozkładu t-Studenta. Przyjęto poziom ufności $p = 0,975$. Wszystkie obliczenia wykonano przy użyciu EMC, wykorzystując przygotowany przez autora program, pozwalający na kompleksowe opracowanie wyników prób ściskania lub rozciągania.

2.2. Analiza wyników badań. Zgodnie z normowymi własnościami mechanicznymi stal R35 powinna mieć wyraźną granicę plastyczności. W trakcie doświadczeń okazało się jednak, że wytypowane do badań pręty cechy tej nie miały. O ile w próbie rozciągania wyraźna granica plastyczności w niektórych wypadkach dawała się zaobserwować, o tyle w próbie ściskania zjawiska tego nie obserwowano. Średnie krzywe doświadczalne $\sigma_k - \epsilon_k$ otrzymane przy rozciąganiu i ściskaniu były kształtem bardzo zbliżone do siebie, chociaż zaobserwowano wyraźnie wcześniejsze pojawienie się odkształceń plastycznych przy ściskaniu. Stąd też otrzymano przy ściskaniu mniejsze wartości analizowanych granic $R_{\epsilon_{p1}}$ (por. tabl. 1). Nie stwierdzono istotnych różnic w szerokości pasm ufności dla obu wykresów. Średnie zależności $\sigma_k - \epsilon_k$ wyznaczono na podstawie doświadczalnych zależności $\sigma_{ij} - \epsilon_{ij}$, obliczając drogą interpolacji liniowej wartości σ_{ik} odpowiadające ustalonym wartościom $\epsilon_k = k\Delta\epsilon$, a następnie obliczając wartości σ_k jako średnią artmetyczną

z n wartości σ_{ik} . Obliczanie naprężeń σ_{ik} drogą interpolacji liniowej znacznie upraszcza i przyspiesza obliczenia w porównaniu z metodą interpolacji krzywoliniowej. Przy założeniu dostatecznie dużego zagęszczenia punktów doświadczalnych sposób ten daje dobrą dokładność i jest najczęściej stosowany. W obliczeniach przyjęto wartość $\Delta\varepsilon = 0,0003$. Na rys. 1 porównano średnie zależności $\sigma_k - \varepsilon_k$ otrzymane dla poszczególnych serii ściskanych próbek. Jak widać z rysunku, wszystkie krzywe $\sigma_k - \varepsilon_k$ dla serii próbek



Rys. 1

wydłużanych wstępnie charakteryzują się znacznie mniejszą krzywizną początkowego odcinka zakresu sprężysto plastycznego, przy czym krzywe dla serii wydłużanych wstępnie do wartości $\bar{\varepsilon}_w = 0,2 \div 1\%$ leżą w znacznej części poniżej krzywej dla materiału nieodkształconego. Daje się również zauważyć bardzo wyraźne obniżenie granicy proporcjonalności, które w wypadku serii $\bar{\varepsilon}_w = 0,5\%$ wynosi około 25%. Przy dalszym wzroście wydłużeń wstępnych następuje wzmocnienie materiału i stopniowe podwyższanie się granicy proporcjonalności. W tabelicy 1 zestawiono wartości umownych granic plastyczności $R_{\varepsilon_{p1}}$ dla $\varepsilon_{p1} = 0,02, 0,05, 0,1, 0,2\%$ wraz ze współczynnikami zmienności $\nu(R_{\varepsilon_{p1}})$ dla poszczególnych serii. Maksymalne obniżenie umownej granicy plastyczności ($R_{\varepsilon_{p1}}$) niezależnie

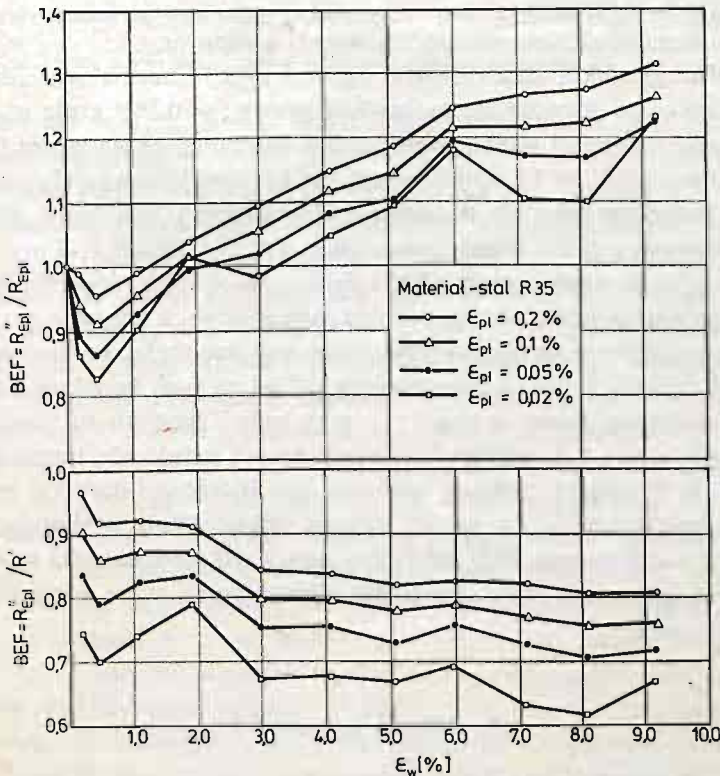
Tablica 1. Zestawienie wyników prób ściskania

Odkształcenie wstępne ε_w [%]	$R_{0,02}$ [MPa]	$\nu(R_{0,02})$ [%]	$R_{0,05}$ [MPa]	$\nu(R_{0,05})$ [%]	$R_{0,1}$ [MPa]	$\nu(R_{0,1})$ [%]	$R_{0,2}$ [MPa]	$\nu(R_{0,2})$ [%]
0	(260.1)	(15.3)	(265.0)	(14.7)	(267.9)	(13.3)	(271.7)	(12.6)
0.19	234.4	21.2	253.2	16.8	259.4	15.2	265.0	13.5
0.48	201.9	27.5	226.7	22.5	245.0	18.3	262.1	15.2
1.09	193.5	14.9	218.2	15.0	236.4	13.6	253.4	13.1
1.93	211.7	12.4	234.4	10.8	248.5	9.7	262.1	9.6
3.01	238.4	14.9	252.2	12.4	262.9	10.4	275.1	9.2
4.10	230.6	18.8	258.2	15.4	273.8	13.6	289.6	12.1
5.11	245.7	16.3	274.1	14.4	289.3	12.9	304.3	11.8
6.01	256.5	19.2	279.4	16.5	297.3	14.1	314.6	12.6
7.15	277.0	22.3	302.4	17.1	314.9	15.4	330.1	13.7
8.13	259.2	15.5	297.0	14.6	314.8	14.6	336.0	12.5
9.23	258.1	24.9	296.0	19.1	317.1	16.2	337.8	13.8
	289.1	22.2	310.8	19.1	327.8	17.0	348.8	14.5

Liczby podane w nawiasach dotyczą próby rozciągania

od wartości odkształcenia trwałego (ϵ_{pl}), jakie przyjmujemy do kryterium płynięcia, występuje przy odkształceniach wstępnych $\bar{\epsilon}_w = 0,5\%$. Przy większych wydłużeniach wstępnych następuje monotoniczny wzrost tych wartości. Można również zauważyć, że począwszy od pewnej wartości wydłużenia wstępnego wartość granicy plastyczności jest większa od granicy plastyczności dla materiału pierwotnego; tak więc wzmocnienie materiału następuje przy obciążeniu przeciwnym do wstępnego.

Przeprowadzone doświadczenia ujawniły bardzo dużą niejednorodność własności mechanicznych badanej stali R35. Średnie współczynniki zmienności $\nu(\sigma_k)$ dla poszczególnych serii próbek wynosiły ok. 10%, a współczynniki zmienności $\nu(R_{\epsilon_{pl}})$ wahały się w granicach 10 - 20%. Jak wynika z tablicy 1, największą dyspersję wykazała granica $R_{0,02}$, stąd też dla $\epsilon_{pl} = 0,02$ zaznacza się znaczna nieregularność w przebiegu zależności współczynnika efektu Bauschingera (BEF) od wartości wstępnych wydłużeń trwałych (por. rys. 2).



Rys. 2

Przyczyn tego należy upatrywać zarówno w niejednorodności materiału, jak i w zmienionej w tym wypadku, względnej dokładności pomiaru. Należy podkreślić, że przeprowadzone w ostatnich latach badania statystyczne [16] cech mechanicznych rur ze stali R35 wykazały również bardzo duże rozrzuty tych cech. Przykładowo, obliczony na podstawie ok. 400 prób współczynnik zmienności granicy plastyczności dla rur o małych średnicach i o grubości ścianki 1 ÷ 3 mm, a więc podobnych do rur użytych w opisywanych badaniach, wyniósł 13,1%.

Ze względu na fakt, że zjawisko Bauschingera bywa różnie interpretowane (por. np. [12, 13]), na rys. 2 przedstawiono wyniki badań przy przyjęciu dwóch najczęściej stosowanych kryteriów oceny efektu Bauschingera. Jako kryterium ilościowej oceny tego zjawiska przyjęto współczynnik efektu Bauschingera (BEF — Bauschinger effect factor) zdefiniowany następującymi zależnościami

$$\text{BEF}(\varepsilon_{p1}) = \frac{R'_{\varepsilon_{p1}}}{R'_{\varepsilon_{p1}}} \quad (2.1)$$

$$\text{BEF}(\varepsilon_{p1}) = \frac{R'_{s_{p1}}}{R'} \quad (2.2)$$

gdzie:

$R'_{\varepsilon_{p1}}$ — umowna granica plastyczności materiału pierwotnego,

$R'_{\varepsilon_{p1}}$ — umowna granica plastyczności przy obciążeniu o zwrocie przeciwnym do obciążenia wstępnego,

R' — maksymalne naprężenie przy obciążeniu wstępnym.

Przyjmując definicję efektu Bauschingera wg wzoru (2.1) można stwierdzić, że w badanej stali zjawisko to ujawnia się najbardziej przy $\varepsilon_w = 0,5\%$, a dla ε_w rzędu $2 \div 3\%$ zanika. Obliczając natomiast współczynnik efektu Bauschingera wg wzoru (2.2) widać, że począwszy od wartości $\varepsilon_w = 3\%$ współczynnik ten jest mniej więcej stały i zależy tylko od wartości ε_{p1} . Otrzymane rezultaty wykazują pod względem jakościowym dobrą zgodność z wynikami otrzymanymi dla stopów aluminium PA7N i PA4N [12].

Z rys. 2 wynika, że współczynnik efektu Bauschingera (BEF) jest tym mniejszy (efekt większy), im mniejsza jest wartość ε_{p1} przyjęta jako kryterium umownej granicy plastyczności. Jest to niezależne od przyjęcia definicji tego współczynnika. Istotna różnica wynikająca z przyjętej definicji zjawiska Bauschingera polega na tym, że wg wzoru (2.1) istnieje dla badanego materiału pewna wartość ε_w , przy której zjawisko to zanika, przy czym zanikanie następuje przy tym większych odkształceniach wstępnych, im mniejszą przyjmie się wartość ε_{p1} do kryterium płynięcia (por. rys. 2a). Biorąc zaś definicję wg wzoru (2.2), efekt Bauschingera występuje dla każdej wartości odkształcenia wstępnego, z tym że od pewnej wartości współczynnik BEF jest stały i zależy tylko od wartości ε_{p1} (por. rys. 2b). W dalszej części pracy pod pojęciem efektu Bauschingera autor rozumie to zjawisko zgodnie z definicją 2.1.

3. Badania stateczności

3.1. Zakres i metodyka badań. Badania stateczności przeprowadzono dla rur o średnicy zewnętrznej $D = 20$ mm i dwóch różnych grubościach ścianek $g = 1$ mm oraz $g = 2$ mm. Wartości wydłużeń wstępnych, które nadawano poszczególnym seriom próbek (por. tabl. 2), ustalono na podstawie analizy wyników badań zjawiska Bauschingera. Kierowano się z jednej strony dążeniem do ustalenia wpływu zjawiska Bauschingera ujawniającego się bardzo wyraźnie przy małych odkształceniach wstępnych na nośność pręta osiowo ściskanego, co może mieć w pewnych wypadkach istotny wpływ na bezpieczeństwo konstrukcji. Z drugiej zaś strony badania miały wyjaśnić, czy nadanie odpowiednio dużego wydłużenia wstępnego, przy którym nie ujawnia się zjawisko Bauschingera, pozwoli uzyskać podwyż-

Tablica 2. Badania stateczności — zakres i liczebność serii

Rodzaj pręta	Założone wartości wydłużenia wstępnego $\varepsilon_w(\%)$	Liczba serii	Liczebność serii	Liczba próbek	Liczba próbek kontrolnych*
$g = 1\text{mm}$	0	10	8	80	12(12)
	4	10	8	80	16
$g = 2\text{mm}$	0	10	8	80	12(12)
	0,5	10	8	80	16
	4	10	8	80	16
Ogółem:				400	72(24)

*) Próbki przeznaczone do statycznej próby ściskania i rozciągania. Liczba próbek odpowiada liczbie prętów z których pobrano próbki danej serii.

W nawiasach podano liczbę próbek przeznaczonych do statycznej próby rozciągania.

szczenie naprężeń krytycznych, a więc oddziaływać korzystnie na pręt narażony na niebezpieczeństwo wyboczenia.

Doświadczenia przeprowadzono w przedziale smukłości $10 \div 105$, a więc praktycznie obejmowały cały zakres wyboczenia niesprężystego, w którym można było spodziewać się istotnego wpływu wstępnego wydłużenia na wartość naprężeń krytycznych. Program badań obejmował 400 prób stateczności oraz znaczną liczbę doświadczeń o charakterze podstawowym w celu określenia własności mechanicznych oraz doświadczalnej zależności $\sigma_k - \varepsilon_k$ dla danej partii materiałów (por. tabl. 2). Doświadczenia przeprowadzono przy założeniu schematu pręta obustronnie utwierdzonego, stosując specjalnie zaprojektowane uchwyty. Naprężenia krytyczne (nośność pręta), zgodnie z powszechnie przyjętym poglądem, obliczano jako wartość stosunku największej siły uzyskanej w doświadczeniu do pola przekroju poprzecznego pręta. Wydłużenia wstępne nadawano oddzielnie każdej próbce o określonej smukłości. Taka metodyka przygotowania materiału wymagała co prawda znacznego nakładu pracy, ale zapewniała uzyskanie próbek znacznie bardziej jednorodnych pod względem wartości wydłużenia wstępnego niż w wypadku przeciągania całych prętów o długości $4 \div 5$ m następnie wycinania odpowiednich próbek, jak to miało miejsce np. w pracy [9]. Kontrolę wydłużeń prowadzono podobnie jak w przypadku badań zjawiska Bauschingera zarówno w trakcie procesu wydłużania, jak i po odciążeniu. W zależności od długości próbki nanoszono od 1 do 3 baz pomiarowych o długości 10 cm. Pomiaru długości baz dokonywano za pomocą mikroskopu warsztatowego z dokładności do 0,01 mm. Ze względu na zagadnienie starzenia materiału starano się zachować stały dla wszystkich serii próbek przedział czasu wynoszący ok. 15 dni pomiędzy procesem przeciągania a próbami stateczności.

Wszystkie wyniki doświadczalne poddano opracowaniu statystycznemu. Przyjęto założenie, że zarówno własności mechaniczne materiału, jak i naprężenia krytyczne podlegają rozkładowi normalnemu. Warto zwrócić uwagę, że badania przeprowadzone przez Europejski Konwent Konstrukcji Metalowych (C.E.C.M.) [17] w celu doświadczalnej weryfikacji hipotezy, że rozkład naprężeń krytycznych jest normalny, nie potwierdziły w pełni tego założenia. Mimo to Konwent zarówno w ramach komisji konstrukcji stalo-

wych, jak i aluminiowych przyjął taki rozkład do analizy wyników badań stateczności [17, 18, 19]. Ze względu na niewielką liczebność poszczególnych prób ($n = 8 \div 12$) korzystano podobnie jak w wypadku badań zjawiska Bauschingera z rozkładu t-Studenta. Przyjęto poziom ufności $p = 0,975$ zalecany przez C.E.C.M. [18, 19].

3.2. Analiza wyników badań. Przebieg i wyniki doświadczeń wykazały, że zastosowane uchwyty zapewniały we wszystkich wypadkach te same warunki przyłożenia siły oraz dobrze realizowały założony schemat pręta obustronnie całkowicie utwierdzonego. Przeprowadzone pomiary geometrii prętów oraz początkowych krzywizn ich osi geometrycznych wykazały, że wszelkiego typu odchylenia wymiarów od wartości nominalnych mieszczą się w granicach przewidzianych dość tolerancyjną normą [20]. Również podstawowe własności mechaniczne obu rodzajów prętów określone na podstawie prób rozciągania (tabl. 3) spełniają wymagania normy [21]. Pozwala to stwierdzić, że wszystkie wytypowane do badań pręty reprezentowały materiał konstrukcyjny spełniający wymagania stawiane dla danego gatunku i wyrobu.

Tablica 3. Średnie własności mechaniczne przy rozciąganiu

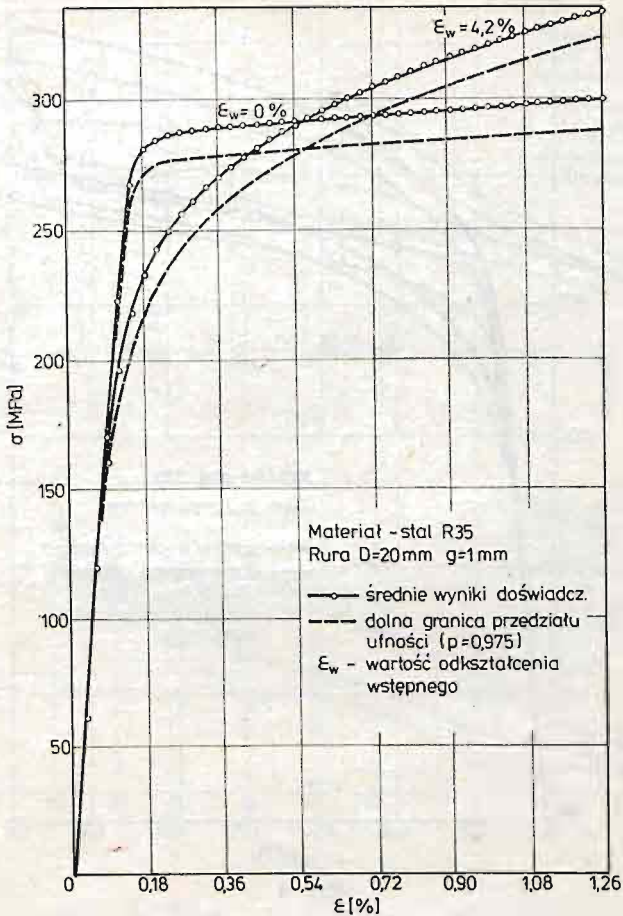
Rodzaj pręta	Liczba próbek	R_r [MPa]	$R_{0,2}$ [MPa]	a_5 [%]
$g = 1 \text{ mm}$	12	410,8	280,3	33,9
$g = 2 \text{ mm}$	12	409,4	273,1	30,7

Rzeczywiste smukłości poszczególnych próbek zarówno wydłużanych, jak i niewydłużanych wstępnie były dla wszystkich serii bardzo bliskie wartościom założonym. W tablicy 4 na podstawie wyników prób ściskania próbek kontrolnych podano dla poszczególnych serii teoretyczne wartości smukłości granicznych. Należy zaznaczyć, że wartości granic proporcjonalności R_H obliczono na podstawie średnich wartości $R_{0,02}$ i $R_{0,05}$ drogą ekstrapolacji liniowej. Jak widać z tablicy, doświadczenia obejmowały cały obszar wybożenia niesprężystego.

Tablica 4. Smukłości graniczne przy wybożeniu gętnym

Rodzaj pręta	ε_w [%]	R_H [MPa]	λ_{gr}
$g = 1 \text{ mm}$	0	262,1	84,3
	4,2	186,8	99,0
$g = 2 \text{ mm}$	0	238,2	93,4
	0,5	185,3	105,8
	4,1	236,5	93,7

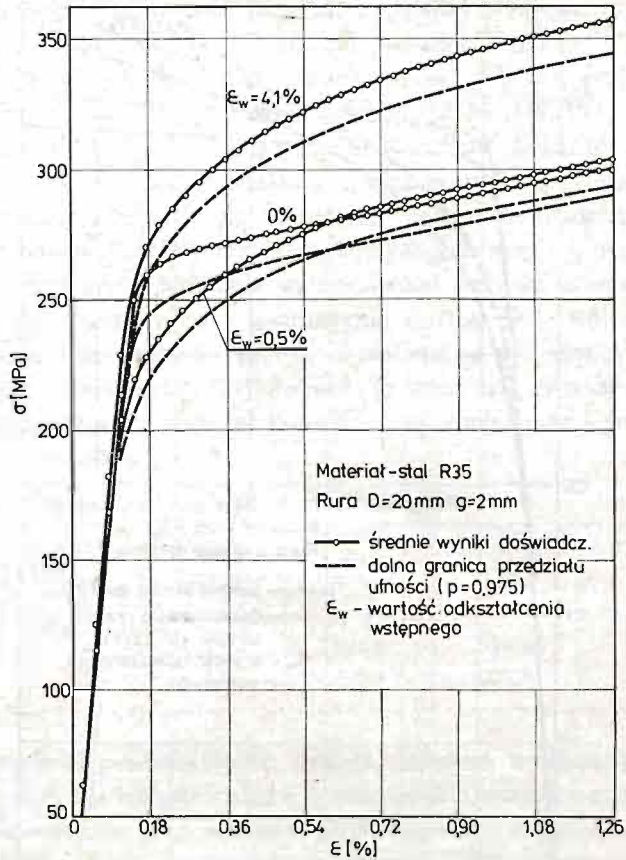
Wyniki prób ściskania uzyskane dla próbek kontrolnych o grubości ścianki $g = 1 \text{ mm}$ i $g = 2 \text{ mm}$ (rys. 3 i rys. 4) wykazują istotne różnice własności mechanicznych obu partii materiałów, przy czym dotyczy to zarówno materiału pierwotnego, jak i wydłużonego wstępnie. Różnice ujawniały się także w trakcie procesu nadawania wydłużeń; zaobserwo-



Rys. 3

wano mniejszą zdolność do wydłużeń równomiernych prętów o $g = 1$ mm, czego efektem były w niektórych wypadkach znaczne różnice wydłużeń trwałych (ϵ_w) na poszczególnych odcinkach pomiarowych próbki. Należy jednak pamiętać o tym, że wydłużenie trwałe pręta jest bardzo czułe na wszelkie formy niejednorodności typu geometrycznego i strukturalnego. Nawet najmniejsza niejednorodność, pozostająca niemal bez wpływu na inne własności mechaniczne materiału, powoduje znaczne zmiany wartości wydłużenia trwałego. Zagadnienie to szczegółowo analizował Marciniak [22, 23].

Przebieg zależności $\sigma_k - \epsilon_k$ dla próbek o $g = 1$ mm i $\epsilon_w = 0\%$ ma charakter zbliżony jak dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego, a krzywa dla materiału wydłużonego ($\epsilon_w = 4,2\%$) leży w znacznej części poniżej krzywej pierwotnej (rys. 3). Obserwuje się więc, mimo znacznej wartości wydłużenia wstępnego, bardzo wyraźny wpływ efektu Bauschingera (przykładowo wartość R_H obniża się o ok. 29%, por. tabl. 4). W wypadku prętów o grubszej ściance ($g = 2$ mm) charakter krzywych $\sigma_k - \epsilon_k$ jest taki, jakiego należało oczekiwać na podstawie wyników badań zjawiska Bauschingera dla danej stali. Krzywa dla materiału wydłużonego wstępnie do 0,5% leży prawie całkowicie poniżej



Rys. 4

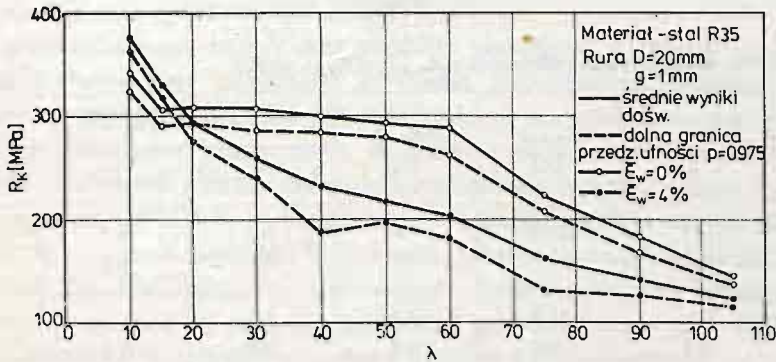
krzywej dla materiału nieodkształconego, a wartość granicy proporcjonalności obniża się o ok. 23%. Natomiast krzywa dla materiału odkształconego wstępnie do wartości $\epsilon_w = 4,1\%$ leży w całym zakresie powyżej krzywej dla materiału pierwotnego, a więc następuje tu wzmocnienie materiału.

Porównanie średnich krzywych $R_k - \lambda$ otrzymanych dla obu rodzajów prętów nieodkształconych wstępnie pokazano na rys. 5. Obie krzywe wykazują podobieństwo kształtu przy $\lambda = 15 \div 105$, obserwuje się jednak istotne różnice ilościowe, co jest zgodne z charakterem zależności $\sigma_k - \epsilon_k$ dla obu partii materiału. Warto tu zwrócić uwagę na to, że podstawowe własności mechaniczne (normowe) — $R_r, R_{0,2}, a_5$, są w obu wypadkach bardzo zbliżone (por. tabl. 3).

Wpływ wydłużenia wstępnego na zależność $R_k - \lambda$ (rys. 6) w wypadku prętów o $g = 1$ mm jest wyraźnie niekorzystny w całym badanym zakresie smukłości (max. obniżenie wartości R_k przy $\lambda = 60$ wynosi ok. 30%), tylko dla małych smukłości $\lambda = 10 \div 15$ następuje niewielkie podwyższenie naprężeń krytycznych. Obserwuje się także zmianę charakteru wykresu $R_k - \lambda$, oraz większą dyspersję wyników (współczynniki zmienności $\nu(R_k)$ dla serii $\bar{\epsilon}_w = 0$ wahały się w granicach 4,5 ÷ 9,1%, a dla $\bar{\epsilon}_w = 4\%$ w granicach 3,6 ÷ 19,3%). W wypadku prętów o grubszej ścianie ($g = 2$ mm) występuje dla serii $\bar{\epsilon}_w =$



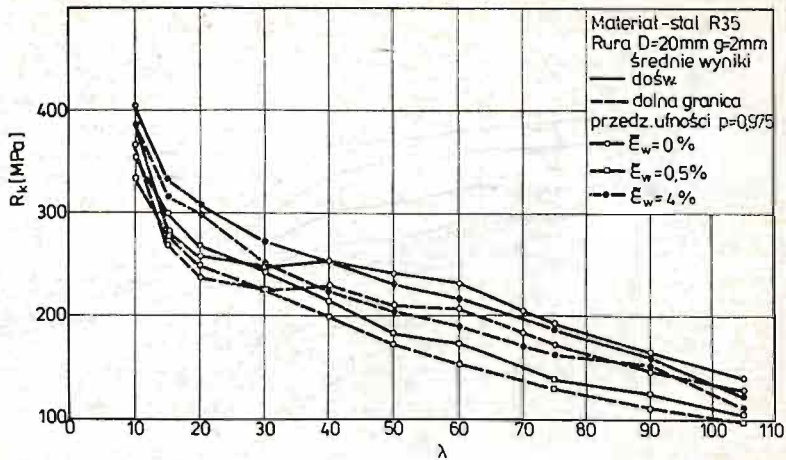
Rys. 5



Rys. 6

= 4% podwyższenie naprężeń krytycznych w zakresie smukłości $\lambda = 10 \div 30$ o ok. 5 ÷ 20%, a dla większych smukłości różnice między obu krzywymi są bardzo nieznaczne i biorąc pod uwagę szerokość przedziałów ufności — można je uznać za nieistotne (por. rys. 7). Daje się natomiast zauważyć bardzo istotne obniżenie naprężeń krytycznych prawie w całym badanym zakresie smukłości dla serii $\bar{\epsilon}_w = 0,5\%$, a maksymalny spadek wartości R_k wynosi ok. 30% przy $\lambda = 105$. Tak więc widać w tym wypadku bardzo wyraźne skutki występowania efektu Bauschingera. W tabelicy 5 zestawiono średnie współczynniki zmienności $\nu(R_k)$ obliczone dla wszystkich badanych serii. Podano również średnie współczynniki $\nu(R_k)$ z uwzględnieniem podziału smukłości na dwie grupy oraz współczynniki $\nu(R_{0,02})$ i $\nu(R_{0,2})$. Należy zwrócić uwagę, że dla wszystkich serii próbek o grubszej ścianie nie obserwuje się istotnych różnic w dyspersji wyników, co świadczy o tym, że wydłużenie wstępne nie spowodowało zwiększenia niejednorodności materiału. Natomiast w wypadku prętów cieńszych następuje wyraźne zwiększenie współczynników zmienności dla materiału wydłużonego, a zatem wzrost jego niejednorodności.

Trudno jest autorytatywnie odpowiedzieć na pytanie, gdzie leży przyczyna, że dla poszczególnych partii tego samego materiału obserwuje się różną ich zdolność do odkształceń równomiernych oraz zdecydowanie odmienny wpływ wstępnego wydłużenia. Napewno



Rys. 7

Tablica 5. Średnie współczynniki zmienności $\nu(R_{0.02})$, $\nu(R_{0.2})$, $\nu(R_k)$

Rodzaj pręta	ε_w [%]	$\nu(R_{0.02})$ [%]	$\nu(R_{0.2})$ [%]	$\nu(R_k)$ [%]		
				$\lambda = 10 \div 105$	$\lambda = 10 \div 50$	$\lambda = 60 \div 105$
$g = 1 \text{ mm}$	0	12.7	4.6	6.2	5.3	7.6
	4.2	13.7	7.3	8.6	8.2	11.4
$g = 2 \text{ mm}$	0	11.9	6.6	8.6	7.9	9.7
	0.5	10.8	6.8	8.0	7.0	9.1
	4.1	11.9	7.8	8.2	7.0	9.9

jednym z czynników, który może mieć istotny wpływ na zdolność materiału do wydłużeń równomiernych jest grubość ścianki próbki (ogólnie — pole przekroju). Im mniejszy jest bowiem przekrój próbki, tym większe procentowo różnice powierzchni przekroju na długości próbki przy tej samej klasie dokładności jej wykonania (niejednorodność geometryczna) [22]. Tym między innymi można tłumaczyć negatywny wpływ wydłużeń wstępnych na zależność $R_k - \lambda$ dla badanych prętów o grubości ścianki $g = 1 \text{ mm}$. Czynnikiem mającym wpływ na to zagadnienie jest także długość próbki. Przy dłuższych próbkach większe jest bowiem prawdopodobieństwo wystąpienia niekorzystnych czynników niż w próbkach krótkich. Tym można tłumaczyć brak wzrostu wartości R_k przy większych smukłościach dla prętów o grubości ścianki $g = 2 \text{ mm}$, mimo iż należało tego oczekiwać na podstawie przebiegu zależności $\sigma_k - \varepsilon_k$. Doświadczenia potwierdzają wpływ wymienionych czynników; jednak niejednorodność technicznego, a nie wyidealizowanego materiału ma charakter bardzo złożony i poza wymienionymi, są inne czynniki, których wpływ nie jest z góry znany. Oczywiście istotny wpływ mogą mieć odmienne warunki produkcji obu materiałów. Dokładne wyjaśnienie tych problemów wymagałoby przeprowadzenia specjalnych badań wraz z badaniami strukturalnymi oraz uwzględnienia procesów technologicznych i reologicznych. Problemy te oczywiście wykraczały poza ramy

niniejszej pracy, której celem była analiza zachodzących zjawisk i ich wpływ na konkretne zagadnienie inżynierskie — wyoboczenie.

4. Uwagi i wnioski końcowe

Przeprowadzone doświadczenia potwierdziły wniosek wysunięty w pracy [12], że ujawnianie się efektu Bauschingera w materiałach technicznych może mieć odmienny charakter nie tylko dla poszczególnych materiałów, lecz istotne różnice mogą występować nawet w ramach jednego stopu. Istotnym czynnikiem mającym wpływ na to zjawisko jest jednorodność materiału i jego zdolność do równomiernych odkształceń plastycznych. W wypadku materiału niejednorodnego, zjawisko Bauschingera nie ma tendencji do zanikania wraz ze wzrostem wydłużenia, czego przyczyną jest zwiększająca się równocześnie niejednorodność materiału. Prowadzi to w konsekwencji do obniżenia jego własności mechanicznych i naprężeń krytycznych (por. rys. 3 i rys. 6).

Wyniki przedstawionych badań oraz rezultaty otrzymane w innych pracach [9, 10] wykazały, że podstawowym warunkiem uzyskania podwyższenia naprężeń krytycznych przez nadanie wstępnego wydłużenia jest jednorodność materiału oraz jego zdolność do równomiernych odkształceń plastycznych. W takim wypadku wartość wydłużenia wstępnego musi być odpowiednio duża, aby zniwelować ujemny wpływ zjawiska Bauschingera.

Bardzo istotnym wnioskiem z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji jest zauważone znaczne obniżenie naprężeń krytycznych prętów poddanych niewielkim wydłużeniom ($\bar{\epsilon}_w = 0,5\%$). Przyczyną tego jest zjawisko Bauschingera. Ma to szczególne znaczenie ze względu na fakt, że maksymalny spadek wartości R_k (ok. 20÷30%) występuje dla często stosowanych w praktyce smukłości, a odkształcenia plastyczne tego rzędu mogą powstać w konstrukcji na przykład przy przypadkowym przeciążeniu. Również w elementach projektowanych z uwzględnieniem sprężystoplastycznych właściwości materiału, czy to metodą stanów granicznych czy też metodą przyrostową co w ostatnich latach zaczyna być powszechnie stosowane — przedstawione problemy mogą mieć istotne znaczenie i wpływać korzystnie lub niekorzystnie na bezpieczeństwo konstrukcji.

Przeprowadzone doświadczenia wykazały również, że celowe jest prowadzenie badań na materiałach technicznych i wyrobach stosowanych w konstrukcjach, gdyż ich rzeczywiste własności mogą często znacznie odbiegać od własności założonych.

Literatura cytowana w tekście

1. M. KOSIOREK, L. SŁOWAŃSKI: *O wpływie wstępnego przeciążenia na podstawowe charakterystyki mechaniczne drutu i lin do konstrukcji sprężonych*. Inż. i Bud., nr 1, s. 28 - 30, 1973.
2. E. DRESCHEROWA: *Wpływ wstępnego odkształcenia plastycznego na energię udarowego zrywania*. Mech. Teor. i Stos., 1, 5, 1967, s. 103 - 111.
3. Z. DYLAĞ, Z. ORŁOŚ: *Badanie wpływu wstępnych odkształceń trwałych na wytrzymałość zmęczeniową pewnej stali niskowęglowej*. Biul. WAT, nr 9/1960, s. 53 - 71.
4. J. KUBISSA, M. STRZELCZYK: *Twardość i udarność stali wstępnie trwale wydłużonej*. Inż. i Bud. nr 4 1979, s. 148 - 149.

5. J. KUBISSA: *Nośność zginanych elementów ze stali wstępnie trwale wydłużonej*. Inż. i Bud. nr 8 - 9, s. 174 - 177, 1982.
6. Z. MARCINIAK: *Badanie wpływu wstępnych odkształceń plastycznych na przebieg wzmocnienia metali metodą rozciągania niejednorodnych próbek*. Prace IPPT PAN, nr 45, 1971.
7. W. SZCZEPIŃSKI: *On the Effect of Plastic Deformation on Yield Condition*. Arch. Mech. Stos., 15, 2, 1963.
8. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI: *An Experimental Study of the Effect of the Prestraining History on the Yield Surfaces of an Aluminium Alloy*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 16, 1968.
9. P. JASTRZĘBSKI: *Influence des allongemens initiaux permanents sur le flambement de barres métalliques dans la zone des petits elancements*. Arch. Inż. Łąd. nr 1, s. 259 - 268, 1980.
10. J. GRABOWSKI: *Wyboczenie prętów metalowych poddanych wstępnym wydłużeniem trwałym*. Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1978.
11. J. GRABOWSKI: *Wpływ wstępnego wydłużenia plastycznego na nośność krytyczną ściskanych prętów ze stopów aluminium*. Inż. i Bud. nr 11 - 12, s. 345 - 348, 1981.
12. J. GRABOWSKI: *The Bauschinger effect in structural aluminum alloys*. Rozpr. Inż. 31, 3, 1983.
13. J. MIASTKOWSKI: *Kryteria plastycznego płynięcia i hipotezy wzmocnienia metali w świetle badań doświadczalnych*. Prace IPPT PAN, nr 41, 1973.
14. J. NEMEC, *Wytrzymałość i sztywność części stalowych*. WNT, Warszawa 1968.
15. N. N. MALININ, J. RZYSKO: *Mechanika Materiałów*. PWN, Warszawa 1981.
16. W. WŁODARCZYK: *Statystyczna ocena wytrzymałości obliczeniowych rur stalowych*. Arch. Inż. Łąd, nr 4, s. 667 - 675, 1981.
17. J. JACQUET: *Essais de flambement et exploitation statistique*. Construction Metallique, nr 3, 1970.
18. A. BERNARD, F. FREY, J. JAUSS, Ch. MASSONNET: *Recherches sur le comportement au flambement de barres en aluminium*. Mémoires de L'A.I.P.C., vol. 33 - I, Zurich 1973.
19. A. BERNARD, Ch. MASSONNET: *Comparaison d'essais de flambement français avec la simulation sur ordinateur*. Mémoires de L'A.I.P.C., vol. 33 - I, Zurich 1973.
20. PN - 73/H - 7420 — *Rury stalowe bez szwu walcowane lub ciągnione na zimno. Wymagania i badania*.
21. PN - 75/H - 84024 — *Stal do wyrobu rur. Gatunki*.
22. Z. MARCINIAK: *Wydłużenie równomierne próbek o kilku szczególnych rodzajach niejednorodności*. Arch. Hut., 3, 11, s. 273 - 285, 1966.
23. Z. MARCINIAK: *Odkształcenia graniczne przy tłoczeniu blach*. WNT, Warszawa 1971.

Резюме

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПОДВЕРГНУТЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ СТОЙКИМ УДЛИННЕНИЯМ

Работа содержит экспериментальный анализ влияния пластических деформаций на потерю устойчивости стальных стержней. Исследования были проведены на стержнях кольцевого сечения, выполненных из малоуглеродистой стали R 35. Эксперименты проводились в пластической области потери устойчивости ($10 \leq \lambda \leq 105$).

Основной частью работы предшествовали обширные исследования эффекта Баушингера. Результаты исследований были проанализированы с учетом двух разных подходов.

Исследования потери устойчивости позволили сделать вывод, что небольшие предварительные растяжения ($\epsilon_w \approx 0,5\%$) ведут к заметному понижению критических напряжений. Это происходит из-за существенных, с точки зрения инженерной практики, величин гибкости. В случае введения больших деформаций эффект Баушингера исчезает, и в некоторых случаях это ведёт к повышению критических напряжений.

Summary

BUCKLING OF STEEL BARS INITIALLY OVERSTRAINED IN TENSION

This work is an experimental analysis of the influence of initial overstrain in tension on buckling strength of steel bars. Circular tubes of carbon steel (R35) were used for that purpose. The investigation was done for the inelastic stress range ($10 \leq \lambda \leq 105$).

The basic part of this work was preceded by extensive tests for the Bauschinger effect. The results of the tests were shown according to two different approaches concerning the definition of the Bauschinger effect.

The experiments of stability have shown that small initial overstrain ($\varepsilon_w = 0.5\%$) make flexural buckling strength decreased within the range of slenderness, which is important from the technical point of view. In case of considerable initial overstrain the Bauschinger effect disappears and in some cases an increase in buckling strength may occur.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 stycznia 1984 roku

ODPOWIEDŹ NA LIST J. WACŁAWIKA DO REDAKCJI MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

E. BOBULA

Po zapoznaniu się z listem J. Waclawika do Redakcji [1] stwierdzam, że zawarte tam uwagi zawierają błędne sformułowania.

Ad. 2.1: W punkcie 2.1 ma miejsce pomylenie pojęć. W [2] rozwiązuję równanie

$$\{2\} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (c \cdot p) + 2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + c \cdot p \right)_{x=0} \cdot \delta_0,$$

a zatem równanie

$$\{3\} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Wobec tego wszystkie wnioski wypływające z ostatniego równania nie powinny stanowić przyczyny zdziwienia, iż własności rozwiązań obu równań są inne. Dla uzyskania równania {2} założyłem, że istnieje skończony czas τ_1 w którym nie istnieje $\frac{\partial p}{\partial x}$ dla $x = 0$ (powód tego założenia omówiłem w {2}). W efekcie zniknął paradoks nieskończonej prędkości impulsu. Czy natomiast równanie {2} posiada źródło? Zacytujmy [3] str. 243: „rezultat działania źródła ciepła o wydajności $w(x, y, z)$ w jednostce objętości na jednostkę czasu ... powoduje, że równanie przewodnictwa przyjmie postać

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{w}{c\rho}.$$

Jak widać, w równaniu parabolicznym istnieje źródło, gdy pojawi się tam funkcja niezależna od rozwiązania. W {2} takiej funkcji brak. Czy natomiast równanie {2} ma inne punkty osobliwe w obszarze rozwiązań niż $x = 0$? Cytuję [2] str. 18: „zgodnie z doświadczeniem będziemy rozważać dyfuzję w obszarze skończonym”, str. 35: „uzyskany opis transportu w przestrzeni dystrybucji umożliwi rozważanie zjawiska dyfuzji w obszarze skończonym” w całej pracy omawiano rozwiązanie w obszarze $-\lambda(t) < x < \lambda(t)$ lub z powodu symetrii $0 < x < \lambda(t)$, np. str. 29 w. 4d., str. 26 w. 6d., str. 25 w. 1d., str. 24 w. 6d, etc. Zatem rozwiązywano problem Fouriera. (Co to jest rozwiązanie Fouriera można sprawdzić np. w [4] str. 125). Dla $|x| > |\lambda(t)|$ położyłem $p(x, t) \equiv 0$ (co ciekawe, takie p spełnia równanie {2} we wspomnianym obszarze). Zatem w obszarze $-\lambda(t) < x < \lambda(t)$ brak innych punktów osobliwych niż $x = 0$. Cytowane następnie „twierdzenie” J. Szarskiego dotyczy innego równania i w innym obszarze niż dla równania

{2}. Z listu wynika, że J. Waćławik znalazł błąd w dowodzie „twierdzenia” Szarskiego, jednak brak w liście nie tylko dowodu, ale jakiegokolwiek dalszej wzmianki na ten temat.

Ad 2.2. Postać strumienia użytego w mej pracy (2): $\Phi = -K \left[\frac{\partial p}{\partial x} + c(x, t)p(x, t) \right]$.

Smoluchowski natomiast używa innej postaci strumienia $\Phi = -K \frac{\partial p}{\partial x} + u \pm p$, $k > 0$,

$u > 0$. Po porównaniu mamy $F = -\frac{c(x, t) \cdot K}{u}$, co jest wnioskiem z wyłączenia wspól-

nego czynnika przed nawias. Weźmy następnie $c(x, t) = \frac{x}{2(r-t)}$. Widać, że dla $x < 0$ mamy $F > 0$ i dla $x > 0$ mamy $F < 0$; ponadto $\lim_{t \rightarrow r} c(x, t) = \infty$. Zatem działa siła z obu stron ku punktowi $x = 0$ i jest dowolnie duża dla $t \rightarrow r$. Powoduje ona więc odwrócenie procesu dyfuzji. Fakt ten nazywa J. Waćławik „kwestionowaniem lokalnego ujęcia II zasady termodynamiki”.

Ad 2.3. Autor listu pisze: „W zależności {5} drugi składnik nie zależy od współczynnika dyfuzji”. Jest to sprawa czysto formalna. Weźmy w odpowiedzi $ax + by = a \left(x + \frac{b}{a} y \right)$.

Otóż wyłączeniu a przed nawias nie przeszkadza niezależność b od a .

Ad 2.4. Można by oczywiście cytować bardzo obszerną literaturę, jednak przed [2] nikt nie uzyskał rozwiązania równania parabolicznego dyfuzji zerującego się w skończoności i zachowującego całkę energii.

Literatura cytowana w tekście

1. J. WAĆŁAWIK List do Redakcji Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej t. 20 z. 1.2.
2. E. BOBULA, *Równanie zachowawczej dyfuzji w przestrzeni dystrybucji a możliwość wpływu na jej przebieg*. Zesz. Nauk. AGH Ser. Gór. z. 104, 1979 lub Scheadae Math. Acta SC. Univ. Jagell. z. 22. 1981, Zentralblatt für Mat. 1982, Math. Rev. 1982.
3. J. WAĆŁAWIK, *Mechanika Płynów i Termodynamika*, Skrypt AGH, 1976.
4. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu II-go*. PWN, Warszawa 1957.

NOTA REDAKCYJNA

W sprawie artykułu Daniela Bugajnego, Mariana Ostwalda i Wacława Szycy pt. „Styczne ciśnienie niszczące membranę z promieniowymi karbami”, opublikowanego w *Mechanice Teoretycznej i Stosowanej* 20 (1982) nr 1—4 str. 383—393.

Po ukazaniu się w druku wymienionego artykułu do naszej Redakcji wpłynął list od dr Tadeusza Wegnera ze stwierdzeniem wraz z krótkim uzasadnieniem, że praca ta nosi cechy podobieństwa do wcześniej opublikowanego artykułu Autora listu („Wyznaczanie ciśnienia niszczącego cienkie membrany kołowe z promieniowymi rowkami”. *Archiwum Budowy Maszyn* 28 (1881), 1 str. 183—191).

Na skutek działań Redakcji otrzymaliśmy opinię w tej sprawie p. Recenzenta, list z wyjaśnieniami od panów D. Bugajnego, M. Ostwalda i M. Szycy, list od p. M. Ostwalda i ponowny list od p. T. Wegnera. Wreszcie odbyło się w Poznaniu spotkanie panów D. Bugajnego, W. Szycy i T. Wegnera z Redaktorem *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* przy udziale prof. J. Stefaniaka.

Ustaliliśmy następujące fakty:

1. Zespół 5 autorów, a mianowicie D. Bugajny, M. Ostwald, W. Szyc, T. Wegner i J. Wolke, w ramach działalności umownej w Instytucie Mechaniki Technicznej Politechniki Poznańskiej wykonał prac dla Centralnego Laboratorium Przemysłu Ziemniaczanego w Poznaniu. Tytuł pracy: „Dobór optymalnych parametrów typoszeregów membran i półkolistych osłon zasobników do zabezpieczeń przeciwwybuchowych (etap II)”, nr 21-065/78. Pracę ukończono w grudniu 1979 r. Już wtedy wystąpiły nieporozumienia między Autorami polegające na początkowym braku uhonorowania wkładu pracy T. Wegnera.
2. W marcu 1980 roku T. Wegner bez porozumienia się z pozostałymi Autorami opracowania złożył do druku w *Archiwum Budowy Maszyn* pracę, której treść stanowiła część teoretyczna, przykład liczbowy i porównanie z wynikami doświadczalnymi. W spisie literatury Autor powołał się na opracowanie 5 Autorów dla C.L.P.Z. Część teoretyczna była autorstwa p. T. Wegnera, wykorzystany został również fragment zaczerpnięty z opracowania 5 Autorów. Dr D. Bugajny wysłał pismo do Redakcji *Arch. Budowy Maszyn*, jeszcze przed opublikowaniem artykułu Dr T. Wegnera z zarzutami merytorycznymi.
3. We wrześniu 1981 do Redakcji *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* wpłynęła praca trzech Autorów. Recenzja pracy została opracowana w listopadzie 1981 r., jeszcze przed ukazaniem się pracy T. Wegnera w kolportażu (styczeń, lub luty 1892 r.). Autorzy tej pracy nie powołali się ani na publikację T. Wegnera złożoną do druku w A.B.M., o której świetnie wiedzieli, ani na wspólne opracowanie dla C.L.P.Z. Wprowadzili w ten sposób w błąd zarówno p. Recenzenta jak i Redakcję. Część teoretyczna tej pracy w niewielkim stopniu różni się od części teoretycznej pracy T. Wegnera. Geometryczna część modelu matematycznego jest identyczna. Część fizyczna różni się w tym, że T. Wegner korzysta

z hipotezy de Saint-Venanta, a D. Bugajny ze współautorami z hipotezy maksymalnej energii odkształcenia postaciowego. Praca trzech Autorów jest nieco szersza i zawiera również opis przeprowadzonych badań doświadczalnych oraz analizę porównawczą wyników również dla membran kwadratowych, Nie ma jednak wątpliwości, że obie prace relacjonują, jedynie w nieco odmienny sposób, wyniki tej samej pracy zespołowej.

4. Dr M. Ostwald oświadczył w liście do Redakcji, że zajmował się, jako członek zespołu badawczego, konstruowaniem stanowiska badawczego i uczestniczył w realizacji badań doświadczalnych. Z częścią teoretyczną pracy na żadnym jej etapie nie miał nic do czynienia.

W związku z tym, że na łamach *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* ukazała się praca, której oryginalność budzi zastrzeżenia, Redakcja wyraża wobec naszych Czytelników ubolewanie. Uważamy, że dobre obyczaje powinny nakazywać, by publikacje będące wynikiem zespołowych prac badawczych były uzgadniane ze wszystkimi członkami zespołu. Tego żadna ze stron nie dopełniła, zabrakło tendencji do zachowania elementarnych zasad współpracy i należytego traktowania partnerów — kolegów z tego samego zespołu. Opisane praktyki są nie do przyjęcia w ogóle, a tym bardziej w zespołach naukowo-badawczych, w których skład wchodzi nauczyciele akademicy.

BIULETYN INFORMACYJNY

Na ogłoszony w 1983 r. konkurs Oddziału Łódzkiego PTMTS na najlepszą pracę teoretyczną z mechaniki technicznej wpłynęło 10 prac z następujących ośrodków:

Gdańsk	— 2
Warszawa	— 1
Bydgoszcz	— 1
Opole	— 1
Poznań	— 4
Łódź	— 1

Wszystkie prace wysłane zostały do recenzentów.

Sąd Konkursowy pracował w składzie: prof. dr Jerzy Leyko — przewodniczący
prof. dr Zdzisław Orzechowski,
prof. dr hab. Jerzy Sułocki
doc. dr Janusz Lipiński.

Członkowie postanowili nie przyznawać nagrody I stopnia; przyznano dwie równorzędne nagrody II stopnia za prace: pt. „Graniczne zagadnienia odwrotne dla równania falowego” — autor Krzysztof Grysa — Poznań, „Wpływ oscylacji na konwekcyjne przekazywanie ciepła w zastosowaniu do zbiorników okrętowych” — autor Stefan Doerffer — Gdańsk. Wysokość nagrody 10 000 zł. Sąd Konkursowy przyznał nagrodę III stopnia za pracę „Określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej kompozytu o jednokierunkowo ułożonych włóknach metodą kolokacji brzegowej” — autor Jan A. Kołodziej — Poznań. Wysokość nagrody 6 500 zł.

Przyznał też wyróżnienie za pracę „Zginanie belek lepkosprężystych na podłożu reologicznym” — autor Tadeusz Smoleń — Opole. Wysokość wyróżnienia 3 500 zł.

SPRAWOZDANIE

z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej
w roku 1983

I. Działalność organizacyjna

W 15 oddziałach PTMTS liczba członków PTMTS zwiększyła się. Na koniec 1983 r. wynosiła łącznie 1016. Odbyły się dwa zebrania Plenum Zarządu Głównego.

II. Działalność naukowa

Odbyły się 73 zebrania naukowe o następującej tematyce:

Oddział w Bielsku Białej

1. Przemysław Wasilewski „Kierunki działalności naukowej zespołu odlewnictwa Instytutu Technologiczno-Samochodowego” 8.04.83
2. Maksymilian Dudyk „Wpływ procesów topienia na właściwości mechaniczne siłuminów odlewanych do form piaskowych” 8.04.83

3. Zbigniew Krajewski „Wpływ konwekcji swobodnej na zapłon ośrodka porowatego” 18.09.83
 4. Roman Błocki „Komentarz do filmu z badań spalania w komorze silnika wysokoprężnego przeprowadzonych przez Instytut Ricardo w Anglii” 18.09.83

Oddział w Bydgoszczy

5. Mirosław Malec „Opis ruchu ciała o zmiennej masie” 14.04.83
 6. R. Gutowski „Rola współczesnej matematyki w badaniach mechaniki” 9.09.83

Oddział w Częstochowie

7. Piotr Kulski, Witold Lewandowski „Komórkowo-kominowy charakter konwekcji swobodnej od izotermicznych, poziomych powierzchni wymieniających ciepło w przestrzeni nieograniczonej” 24.02.83
 8. Marek Janik „Swobodna turbulentna struga izotermiczna w polu oddziaływań akustycznych” 24.02.83
 9. Roman Klajny „Nieizotermiczna struga osiowo-symetryczna w polu akustycznym” 10.02.83
 10. Tadeusz Tarnowski „Analiza charakterystyk aerodynamicznych profili turbinowych” 24.03.83
 11. S. Bednarek „Wpływ parametrów wlotowej warstwy przyściennej na stratę brzegową palisady łopatkowej” 28.04.83
 12. M. Foltynski „Kinematyka i dynamika maszyn z krążącym tłokiem” 30.06.83
 13. Henryk Kudela „Modelowanie przepływów metodą dyskretnych wirów” 24.11.83
 14. Janusz Rybak „Spójny system obliczeń narzędzi obwiedniowych do ewolwentowych uzębień walcowych” 8.12.83

Oddział w Gdańsku

15. Wacław Przybyło „Metody informatyczne w statyce i dynamice dużych układów konstrukcyjnych” 23.02.83
 16. Jacek Błocki „Zagadnienia wytrzymałościowe segmentowych powłok obrotowych z żebrami” 11.03.83
 17. Marek Szwabowicz „Geometryczna nieliniowa teoria cienkich powłok sprężystych w opisie Langerange'a” 23.03.83
 18. A. Beckers RFN „Utilization of solar and exhaust energy by organic Rankine cycle” 25.10.83
 19. W. K. Nowacki „Dynamika ośrodków plastycznych” 9.12.83
 20. Aleksander Badower „Metoda zbiorów rozmytych w teorii niezawodności konstrukcji” 13.06.83
 21. Kazimierz Wrześniowski „Zastosowanie metod numerycznych w mechanice konstrukcji jednowymiarowych” 24.06.83

Oddział w Gliwicach

22. Kazimierz Kutarba „Materiały i przemysł w budowie elektrowni jądrowych w Polsce” 17.01.83
 23. Franciszek Romanów „Trójkierunkowy stan przemieszczenia izotropowego rdzenia w konstrukcji przekładowej” 1.03.83
 24. Zbigniew Olesiak „Prof. Maksymilian Tytus Huber — twórca Stereomechaniki” 29.04.83
 25. Stanisław Dubiel „Asymptotyczność w sensie Ważewskiego i sterowalność w układzie mechanicznym” 24.05.83

Oddział w Krakowie

26. R. Gutowski „Współczesne metody matematyczne w mechanice” 17.11.83

Oddział w Lublinie

27. St. Fijałkowski „Pewne aspekty zastosowania łożysk gazowych w budowie ciepłych maszyn przepływowych” 20.01.83
 28. Ryszard Targowski „Nowe koncepcje funkcji kształtu w Metodzie Elementów Skończonych” 20.01.83
 29. Jarosław Skrynicki „Efekt Kaysera w ośrodkach wielofazowych” 17.02.83
 30. Ryszard Ostapiuk „Aspekty energetyczne urabiania skał” 17.02.83
 31. Jan Golec „Zagadnienia naprężeń termicznych w rurze grubościennych” 17.03.83
 32. Elżbieta Polonis „Identyfikacja naprężeń w wielowarstwowych taśmach przenośnikowych” 21.04.83

33. Tadeusz Banek „Skończenie wielowymiarowa filtracja dla pewnych nieliniowych procesów dyfuzji” 19.05.83
34. Waldemar Samodulski „Drgania nieliniowego układu dyskretnego o zmiennej okresowo sztywności i kinematycznym wymuszeniu”
35. Waldemar Marcinkowski „Numeryczne badania płaskiego oderwania na podstawie równania NAVIERA—TOKESA”

Oddział w Łodzi

36. Sławomir Kruciński „Metoda elementu brzegowego w geotechnice” 5.05.83
37. Jacek Leźnicki „Metoda różnic skończonych w postaci niejawnej, uwikłanej w zastosowaniu do nieliniowych zagadnień przepływów nieustalonych wód gruntowych” 5.05.83
38. Sewer Jakubowski „Stateczność dźwigarów skrzynkowych przy złożonych obciążeniach” 16.06.83
39. Andrzej Żeligowski „Stateczność dynamiczna cewki transformatorowej dużej mocy” 16.06.83
40. Mieczysław Jaronik „Badania elastooptyczne kompozytów z uwzględnieniem mechaniki zniszczenia” 24.11.83
41. Bogdan Rogowski „O pewnych rozwiązaniach zagadnień mechaniki kontaktu ciał stałych” 24.11.83
42. J. Cybulski, R. Przytułski, J. Ziółkowski „Wibroizolacja krosna pneumatycznego” — P125A” 15.12.83
43. Bogdan Wilczyński „Optymalizacja konstrukcji obciążonych dynamicznie na przykładzie napędu okrętu” 15.12.83

Oddział w Opolu

44. Maria Duszek „Geometrycznie nieliniowe zagadnienie teorii powłok plastycznych” 9.03.83
45. Jerzy Makowski „Nieliniowa analiza stateczności sprężystej cienkich powłok” 18.05.83
46. Jerzy Nowak „Rozwiązanie numeryczne drgań własnych wstępnie naprężonych powłok obrotowych” 7.09.83

Oddział w Poznaniu

47. Michał Kleiber „Metody komputerowe w technice” 17.01.83
48. Ryszard Ganowicz „Przegląd problematyki badawczej Katedry Mechaniki i Techniki Ciepłej AR w Poznaniu” 7.03.83
49. Andrzej Neimitz „Wprowadzenie do mechaniki pękania” 15.04.83
50. Zbigniew Wesolowski „Fale w ośrodku sprężystym” 23.05.83
51. Rastko Čukić z Belgradu „Dyfuzja wodoru w płytach metalowych” 7.06.83
52. Krzysztof Wilmański „Termodynamika układów wieloskładnikowych” 14.06.83
53. A. Green z Nottingham „Bending waves in Strongly anisotropic plates” 7.09.83
54. Gottfried Meltzer z Karl Marxstadt „Investigation of the dynamical behaviour of the human body” 17.10.83
55. Kazimierz Wrzesiński „Przegląd problematyki badawczej Zakładu Wytrzymałości materiałów ITiKB Polit. Poznańskiej” 27.10.83
56. Roman Gutowski „Rola matematyki współczesnej w problematyce mechaniki” 8.11.83
57. Yannis Dafalias z USA „Inelastic model of concrete-like materials” 7.12.83

Oddział w Szczecinie

58. Witold Paczkowski „Kształtowanie optymalne kratownic przestrzennych” 27.01.83
59. Grzegorz Szwegier „Statyczne obliczanie przewodnic w obrabiarkach” 24.02.83
60. Alfred Jazukiewicz „Nieliniowa analiza wytrzymałości płaskich konstrukcji płytowo-belkowych, poddanych działaniu złożonego obciążenia na EMC Riad” 31.03.83
61. Tadeusz Jastrzębski „Analiza wytrzymałości płyt w zakresie sprężysto-plastycznym z odkształceniami wstępnymi” 26.05.83
62. H. Pfau z Wismaru „Teoretyczne i praktyczne znaczenie funkcji Greena w mechanice ciała stałego” 1.06.83
63. W. Tiedt „Warunki brzegowe w zagadnieniach płytowych” 1.06.83
64. Karol Grudziński „Nauczanie mechaniki w szkołach wyższych” (zebranie dyskusyjne) 13.11.83

Oddział w Warszawie

65. Jerzy Rutkowski „Rola przedmiotów podstawowych w planie studiów wydziałów mechanicznych politechnik” 1.03.83
66. Zbigniew Kączkowski „Formy działalności PTMTS w minionym 25-leciu” i „Trójkątne elementy czasoprzestrzenne” 8.11.83
67. Andrzej Olędzki, Kazimierz Kędzior, Marek Bijak-Żochowski „Wybrane działy mechaniki na wyższych technicznych uczelniach amerykańskich” 30.11.83

Oddział we Wrocławiu

68. Edward Gawrych-Żukowski „Dyady w analizie konstrukcji” 23.02.83
69. Paweł Śniady „Punktowe procesy stochastyczne w dynamice konstrukcji” 23.03.83
70. Augustyn Borcz „W sprawie nowej teorii żelbetu” 27.04.83
71. Ryszard Żuchowski „Praca właściwa jako kryterium zniszczenia” 18.05.83
72. Jacek Wojciechowski „Sprężyste przemieszczenia z boczna wyrobiska odkrywkowego” 29.06.83
73. „Nauczanie mechaniki” (zebranie dyskusyjne) 21.11.83

III. Sympozja i konferencje naukowe:

- Oddział w Gliwicach — zorganizował XXII Sympozjum pod hasłem „Modelowanie w Mechanice” odbyte w dniach 7 - 17.02.83 w Wiśle.
Uczestniczyło 133+17 osób towarzyszących.
Wygłoszono 62 referaty.
Dyskutowało 216 osób.
Opublikowanych 66 prac w zbiorze referatów.
W ramach sympozjum „Modelowanie w Mechanice” zorganizowano sesję naukową „Poliptymalizacja”.
Wygłoszono 15 referatów, z których opublikowano w ZN Pol. Śl. 13, a w zbiorze referatów sympozjum — 3. Głos w dyskusjach nad referatami zabrało 50 osób.
- Oddział w Krakowie — zorganizował w dn. 16 - 18.09.83 III Krajowe Sympozjum nt. „Wpływ wibracji na otoczenie”, które zostało zorganizowane wspólnie z Instytutem Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej.
Uczestniczyło 50 osób. Wygłoszono 27 referatów.
W dyskusji wzięło udział 29 osób.
W ramach Sympozjum odbyła się Sesja Naukowa nt. „Potrzeby i możliwości wykorzystania mechaniki we współczesnej technice”.
Uczestniczyło 30 osób.

IV. Seminarium i Kursy:

- Oddział w Gdańsku — „Podstawy stosowanej analizy funkcjonalnej” prelegent — Eugeniusz Bielewicz.
I - IV kw. 83 r. uczestników 9. Seminarium.
- Oddział w Częstochowie — Zespół zmęczenia i mechaniki pęknięcia materiałów i konstrukcji w dn. 12 - 14. V.83, liczba uczestników — 68 osób.
- Oddział w Poznaniu — Kursy wykładowe — 4 wykłady Michała Kleibera z IPPT PAN W-wa nt. „O zastosowaniach metody elementów skończonych w liniowych i nieliniowych zagadnieniach mechaniki w terminach 3, 10, 17 i 18.01.83, uczestników — 154 osoby.
4 wykłady K. Wilmańskiego z IPPT PAN w dn. 25 - 28.11.83 oraz 5 i 12.12.83 nt. „Modelowanie termodynamiczne układów fizycznych” — 17 - 23 osób na każdym wykładzie.
- Oddział w Szczecinie — Oddział PTMTS Szczecin wspólnie z Zakładem Konstrukcji i Mechaniki Okrętów Instytutu Okrętowego Politechniki Szczecińskiej zorganizował cykl

wykładów nt. „Zastosowanie rachunku tensorowego w mechanice ośrodków ciągłych”. Wykłady wygłosił Chr. Reissmann z Uniwersytetu im. Piecka w. Rostoku. Odbyło się 10 dwugodzinnych wykładów w okresie 21.10. - 25.11.83 r.

Wykłady były prowadzone w j. angielskim.

W dn. 14.12.83 r. zorganizowano polsko-niemieckie (NRD) seminarium n.t. „Wpływ imperfekcji na wytrzymałość konstrukcji cienkościowych”. Wygłoszono 10 referatów w j. angielskim. Uczestniczyło 20 osób.

Oddział w Zielonej Górze — Seminarium szkoleniowe nt. „Metody komputerowe w dynamice układów dyskretnych”. Seminarium prowadził Leszek Szloch w WSJ w Zielonej Górze, terminy spotkań: 4.05., 11.05., 1.06., 15.06., 29.06.83 r. Uczestników 33.

V. Konkursy naukowe:

Oddział w Częstochowie — ogłoszono konkurs p.n. „Ogólnokrajowy konkurs na prace doświadczalne z mechaniki ciała stałego” (nie odbył się z powodu zbyt małej liczby nadesłanych prac).

Oddział w Łodzi — W IV kw. 83 r. rozstrzygnięty został konkurs na najlepszą pracę z dziedziny mechaniki technicznej (wpłynęło 10 prac). Nagrody I stopnia nie przyznano. Dwie II nagrody przyznano Krzysztofowi Grysie za pracę nt. „Graniczne zagadnienia odwrotne dla równania falowego” i Stefanowi Doerfferowi za pracę „Wpływ oscylacji na konwekcyjne przekazywanie ciepła w zastosowaniu do zbiorników okrętowych”. III nagroda — Jan Kołodziej za pracę „Określenie poprzecznej efektywności przewodności cieplnej kompozytu o jednokierunkowo ułożonych włóknach metodą kollokacji brzegowej”. Wyróżnienie — Tadeusz Smoleń za pracę „Zginanie belek lepkosprężystych na podłożu reologicznym”.

VI. Działalność wydawnicza

Zeszyt MTiS

W roku 1983 ukazały się drukiem następujące zeszyty kwartalnika MTiS:

tom 19 zeszyt 3/81 w lutym 83

tom 20 zeszyt 1 - 2/82 w kwietniu 83

tom 20 zeszyt 3 - 4 /82 we wrześniu 83

Oddział w Gliwicach — 1 Zbiór referatów XXII Sympozjum „Modelowanie w Mechanice” z. 48 Gliwice 1983 r. ss 487.
— Zbiór referatów Sesji naukowej Polioptymalizacja W: ZN. Pol. Śl. s. Automatyka, s. 67.
— Gliwice 1983, ss. 143. Współudział Gliwickiego Oddziału PTMTS.

XVI JUGOSŁOWIAŃSKI KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Becłci (Czarnogóra, Jugosławia) 28 maja — 2 czerwca 1984

XVI Kongres był jubileuszowy, bowiem od momentu założenia Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki upłynęło 30 lat. Z tej to okazji Jugosłowiańskie Towarzystwo Mechaniki zostało odznaczone, w uznaniu swoich zasług, przez Prezydium Socjalistycznej Federacyjnej Republiki Jugosławii Orderem Pracy ze złotym wieńcem. W latach 1954 - 78 Kongresy i zarazem zjazdy delegatów odbywały się co dwa

lata, w następnym okresie co trzy lata. Jugosłowiańskie Towarzystwo Mechaniki zostało założone 13 lutego 1954 przez 46 członków założycieli, z których ponad połowa już nie żyje. Obecnie Towarzystwo zrzesza około 600 członków w Serbii, Słowenii, Chorwacji, Macedonii, Bośni i Hercegowinie oraz w Wojwodinie. Od roku 1983 przewodniczącym Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki jest prof. Luka Vujašević, a sekretarzem generalnym (od r. 1982) prof. Jovo Jarić. Na XVI Kongresie objął zostali wybrani na następną trzyletnią kadencję.

Na program Kongresu składały się ceremonie otwarcia i zamknięcia, 4 referaty generalne oraz referaty 15 minutowe w liczbie 251 (przyjętych do wygłoszenia 280) w następujących działach: A. mechanika ogólna — 53 referaty, B. mechanika płynów — 64, C. mechanika ciała stałego odkształcalnego — 134. Każdy z powyższych działów był podzielony na 3 podgrupy: 1, metody analityczne, 2. metody numeryczne i 3. metody doświadczalne. Najwięcej referatów przedstawiono w dziale C; do mechaniki ogólnej zakwalifikowane prace z mechaniki ośrodków ciągłych.

W Kongresie wzięło udział 314 uczestników z Jugosławii (zgłoszonych było 340) i 21 z zagranicy (zgłoszonych 82). Przyjechali przedstawiciele 13 państw, a mianowicie: Austria 1, Belgia 1, Czechosłowacja 1, Grecja 1, Kanada 2, NRD 1, Polska 3, RFN 1, Stany Zjednoczone A.P. 2, Węgry 1, W. Brytania 2, Włochy 2 i ZSRR 3.

W dziale A. mechanika ogólna wyróżnione zostały następujące grupy zagadnień: A1 — zasady, optymalizacja, mechanika relatywistyczna, A2 — mechanika ośrodków ciągłych, A3 — drgania i dynamika układów. W dziale C. mechanika ciała stałego odkształcalnego, wyróżnione następujące problemy: C1 — sprężystość, C2 — sprężysto-plastyczność i plastyczność, C3 — lepkość sprężystość, C4 — stateczność konstrukcji, C5 — dynamika konstrukcji, C6 — mechanika pęknięcia, C7 — metody numeryczne, C8 — metody doświadczalne, C9 — inne. Najbardziej szczegółowy podział dotyczył działu B. mechanika płynów. Było tu 15 grup tematycznych od turbulencji, zagadnień warstwy przyściennej, wpływu pola magnetycznego, przepływów lepkich, kawitacji, udaru hydraulicznego, stabilności przepływów aż do zagadnień aplikacyjnych dotyczących przepływów w maszynach i technik doświadczalnych.

Na otwarciu Kongresu przemawiali: przewodniczący Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki, prof. L. Vujašević, przedstawiciele władz jugosłowiańskich, prof. Jurgen Zierp — przewodniczący GAMM (w przyszłym roku konferencja i zjazd *Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik* ma się odbyć w Dubrowniku), następnie akademik W. Rumiancew ze ZSRR oraz niżej podpisany, który w imieniu PTMTS przekazał Zarządowi Głównemu Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki medal 25 lecia naszego Towarzystwa, znaczki PTMTS i życzenia z okazji jubileuszu 30 lecia.

Wykład pt. *30-lecie Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki* wygłosił prof. Vlatko Brčić. Referaty generalne zostały wygłoszone w pierwszym dniu obrad Kongresu, były to:

1. Stjepan Ječić, *Nowe osiągnięcia optyki w doświadczalnej analizie naprężeń*,
2. Kemal Hanjalić, *Nowe osiągnięcia w modelowaniu i obliczaniu turbulentnych procesów*,
3. Apostol Poceski, *Krytyczny przegląd podstaw metody elementów skończonych*,
4. Klaus-Jurgen Bathe i Milš Kojić, *Ostatnie osiągnięcia w nieliniowej analizie konstrukcji powłokowych*.

Obrady odbywały się równocześnie w 4 sekcjach, co często powodowało trudność wyboru referatów. Wymieni tu subiektywnie kilka spośród interesujących referatów wygłoszonych na Kongresie:

W. Rumiancew, *O pewnych zagadnieniach dynamiki sterowania*, A. M. Kowalew, *Parametryczna identyfikacja nieliniowych drgań układów mechanicznych*,

F. L. Czernouszko, *Dynamika układów z elementami sprężystymi i dysypatywnymi*,

M. Mičunović, *O warunkach płynięcia materiałów anizotropowych*,

W. A. Green i D. Milosavljević, *Fale zginania w silnie anizotropowych płytach i powłokach sprężystych*,

J. Jarić, *Szybkość zwolnienia energii w kwazistatycznej propagacji szczeliny w ośrodku sprężystym i calka J*.

W wielu pracach, zwłaszcza z termosprężystości, termodyfuzji, teorii plastyczności, powoływano się na prace autorów polskich. Tytuł jednej z prac, autorstwa N. Ja. Cyganowej, niestety nie wygłoszony, brzmiał: *O pracach A. Przeborskiego w mechanice analitycznej*.

Na zebraniu Delegatów 30 maja 1984 profesor Witold Nowacki został wybrany członkiem honorowym Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki. Był to dopiero trzeci przypadek takiego wyboru. W po-

przednich latach wybrano honorowymi członkami zagranicznymi N. I. Muscheliszwilego oraz L. G. Łojcjańskiego ze ZSRR. Lista zasłużonych członków honorowych, obywateli jugosłowiańskich, zawiera 11 nazwisk. Wniosek w sprawie wyboru prof. W. Nowackiego podpisało 20 osób, a uchwałę podjęto jednomyślnie.

Zarząd Główny Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki zaproponował nawiązanie kontaktów dwustronnych z PTMTS w postaci wspólnych konferencji naukowych. Pierwsza konferencja polsko-jugosłowiańska miałaby się odbyć w Jugosławii w r. 1986, a jej tematem będą zagadnienia mechaniki ośrodków ciąglych ciała stałego.

W czasie XVI Kongresu polscy uczestnicy wygłosili 2 referaty. W. Choromański wygłosił referat o zastosowaniu procesów Markowa w modelowaniu i badaniu mechanicznych układów pojazd-szyny (referat wspólny z J. Kisilowskim i B. Raciborskim). Z. Olesiak mówił o modelowaniu momentowej teorii plastyczności.

Kongres był świetnie zorganizowany, w luksusowych warunkach, przynajmniej porównując z naszymi standardami, w trzech hotelach nad Adriatykiem. Tematyka Kongresu przypominała konferencje typu dorocznych zjazdów GAMM. Przedstawione referaty reprezentowały szeroki wachlarz zagadnień, a ich liczba odpowiadała dużym wielotematycznym konferencjom międzynarodowym. Przyjechało mniej niż zwykle uczestników zagranicznych. Na zakończenie Kongresu wręczono dyplomy pięciu młodym, do lat 35, Jugosłowianom za wyróżniające prace z dziedziny mechaniki. Nagroda ta nosi imię „Rastko Stojanovića”, przedwcześnie tragicznie zmarłego wybitnego mechanika jugosłowiańskiego.

Z. Olesiak

Wykaz władz

Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w XXI kadencji (od 10 maja 1984 r.)

Przewodniczący Zarządu Głównego	— Prof. dr hab. Józef Wojnarowski Oddział Gliwice
Wiceprzewodniczący ZG	— Prof. dr hab. Eugeniusz Brzuchowski Oddział Wrocław
Wiceprzewodniczący ZG	— Prof. dr hab. Wiesław Krzyś Oddział Kraków
Sekretarz Generalny	— Prof. dr hab. Zbigniew Dźygałdo Oddział Warszawa
Zastępca Sekretarza Generalnego	— Doc. dr Janusz Lipiński Oddział Łódź
Skarbnik ZG	— Prof. dr hab. Andrzej Wilczyński Oddział Warszawa
Zastępca Skarbnika ZG	— Doc. dr hab. Ryszard Parkitny Oddział Częstochowa
Członek Zarządu	— Prof. dr hab. Kazimierz Sobczyk Oddział Warszawa
Członek Zarządu	— Prof. dr hab. Bogdan Skalmierski Oddział Gliwice
Członek Zarządu	— Prof. dr Mieczysław Wizmur Oddział Gdańsk

Sympozja IUTAM w r. 1985

- 1 Mixing in a Stratified Fluid 1985, Perth, Australia, Przewodniczący: Prof. J. Imberger, University of Western Australia, Dept. of Mathematics, Nedlands, Western Australia 6009 oraz Prof. G. Batchelor, University of Cambridge, Dept. of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Silver Street, Cambridge CB3 9EW, UK.
- 2 Hydrodynamics of Ocean Wave-Energy Utilization. 1985, Lisbona, Portugalia Przewodniczący: Prof. A. F. de O. Falcão, Instituto Superior Técnico, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Rovisco Pais, 1096 Lisboa Codex, Portugal oraz Dr. D. V. Evans, University of Bristol, School of Mathematics, University Walk, Bristol BS8 1TW, UK.
- 3 Aero- and Hydroacoustics. 1985, Lyon, Francja Przewodniczący: Prof. G. Comte-Bellot, Ecole Centrale de Lyon, Laboratoire de Mécanique des Fluides, B. P.No. 163, F-69131 Ecully Cedex, France oraz Prof. J. E. Ffows Williams, University of Cambridge, Dept. of Engineering, Trumpington Street, Cambridge CB2 1PZ, UK.
- 4 Interaction between Shock Waves and Turbulent Dissipative Layers. 1985, Paryż, Francja Przewodniczący: Prof. J. Delery, Ecole Nationale Supérieure de l'Aeronautique et de l'Espace, ONERA, F-92320 Chatillon, France, 29, av. de la Division Leclerc
- 5 Single- and Multi-Phase Fluid Flow through Heterogeneous Permeable Materials. 1985, Lower Hutt, Nowa Zelandia Przewodniczący: Dr. I. G. Donaldson, Dept. of Scientific and Industrial Research, Physics and Engineering Laboratory, Private Bag, Lower Hutt, New Zealand.
- 6 Inelastic Behaviour of Plates and Shells. 1985, Rio de Janeiro, Brazylia. Przewodniczący: Prof. L. Bevilacqua, Pontificia Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil oraz Prof. A. Sawczuk, Centre National de la Recherche Scientifique, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, B.P. 71, F-13277 Merseille Cedex 9, France.
- 7 Dynamics of Multibody Systems. 1985, Udine, Włochy. IUTAM/IFTtoMM Przewodniczący: Prof. G. Bianchi, Istituto di Meccanica Applicata, Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci 32, I-20133 Milano, Italy oraz Prof. W. Schiehlen, Institut B für Mechanik, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 9, D-7000 Stuttgart 80, BRD
- 8 Macro- and Micromechanics of High Velocity Deformation and Fracture 1985, Tokio, Japonia Przewodniczący: Prof. K. Kawata, Institute of Interdisciplinary Research, University of Tokio, Faculty of Engineering, 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153 Japan
- 9 Mechanics of Damage and Fatigue. 1985, Haifa, Israel. Przewodniczący: Prof. S. R. Bodner, Technion — Israel Institute of Technology, Technion City, Haifa 32000, Israel oraz Prof. Z. Hashin, Tel-Aviv University, School of Engineering, Dept. of Solid Mechanics, Materials and Structures, Ramat-Aviv, Tel-Aviv 69978, Israel.
- 10 Thermal Shock. 1985, Miejsce nieokreślone. Przewodniczący: Dr. T. Broom, Director General Technology Planning and Research Division, Central Electricity Generating Board, Courtenay House, 18 Warwick Lane, London EC4P 4EB, UK.

P r o t o k ó l

z XX Zjazdu Delegatów Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej odbytego 22 października 1982 r. w Warszawie

W Zjeździe uczestniczyło 88 delegatów, oraz 1 członek Zarządu Głównego, który nie był równocześnie delegatem.

Obecni byli:

- | | |
|---|--|
| 1. Prof. dr hab. Marek Dietrich | — przewodniczący ZG i Delegat O/W-wa |
| 2. Prof. dr Zbigniew Olesiak | — wiceprzewodniczący ZG i Delegat O/W-wa |
| 3. Prof. dr hab. Józef Wojnarowski | — Sekretarz Generalny ZG i Delegat O/Gliwice |
| 4. Prof. dr hab. Anfrzej Tylikowski | — Skarbnik Z. G. i Delegat O/W-wa |
| 5. Doc. dr Waldemar Bachmacz | — Z-ca Skarbnika ZG i Delegat O/Częstochowa |
| 6. Prof. dr hab. Kazimierz Biernatowski | — Członek Zarządu Głównego O/Wrocław |
| 7. Doc. dr Władysław Walczak | — Członek Zarządu Głównego O/Łódź |
| 8. Prof. dr Zbigniew Kączkowski | — Przewodniczący Gl. Kom. Rew. i Członek Honorowy
PTMTS |
| 9. Prof. dr hab. Szczepan Borkowski | — Z-ca Przew. Gl. K.R. I Delegat O/Gliwice |
| 10. Prof. dr hab. Henryk Mikołajczyk | — Członek Gl. Kom. Rew. i Delegat O/Poznań |
| 11. Prof. dr hab. Stanisław Gdula | — Przewodniczący i Delegat O/Bielsko Biała |
| 12. Doc. dr hab. Edward Walicki | — Przewodniczący i Delegat O/Bydgoszcz |
| 13. Prof. dr hab. Janusz Elsner | — Przewodniczący i Delegat O/Częstochowa |
| 14. Doc. dr hab. Wojciech Pietraszkiewicz | — Przewodniczący i Delegat O/Gdańsk |
| 15. Doc. dr Walery Szuścik | — Przewodniczący i Delegat O/Gliwice |
| 16. Dr inż. Elżbieta Polanis | — Delegat O/Lublin |
| 17. Doc. dr hab. Waldemar Kobza | — Przewodniczący i Delegat O/Łódź |
| 18. Dr hab. inż. Ryszard Dziecielak | — Przewodniczący i Delegat O/Poznań |
| 19. Prof. dr hab. Wiesław Krzyś | — Przewodniczący i Delegat O/Kraków |
| 20. Prof. dr hab. Stanisław Dubiel | — Przewodniczący i Delegat O/Warszawa |
| 21. Prof. dr hab. Eugeniusz Brzuchowski | — Przewodniczący i Delegat O/Wrocław |
| 22. Doc. dr inż. Edward Goss | — Przewodniczący i Delegat O/Zielona Góra |
| 3. Doc. dr hab. Kazimierz Maczyński | — Delegat O/Bielsko-Biała |
| 24. Doc. dr hab. Marek Trombski | — Delegat O/Bielsko-Biała |
| 25. Dr inż. Mirosław Małec | — Delegat O/Bydgoszcz |
| 26. Doc. dr inż. Bronisław Siołkowski | — Delegat O/Bydgoszcz |
| 27. Doc. dr inż. Krzysztof Wernerowski | — Delegat O/Bydgoszcz |
| 28. Doc. dr inż. Kazimierz Kleja | — Delegat O/Częstochowa |
| 29. Dr inż. Adam Bokota | — Delegat O/Częstochowa |
| 30. Doc. dr inż. Seweryn Lewandowski | — Delegat O/Częstochowa |
| 31. Prof. dr hab. Tadeusz Lechowski | — Delegat O/Częstochowa |
| 32. Dr inż. Sławomir Bednarek | — „ „ |
| 33. Doc. dr hab. Ryszard Parkitny | — „ „ |
| 34. Doc. dr inż. Stefania Stachura | — „ „ |
| 35. Doc. dr hab. Lech Tomski | — „ „ |
| 36. Prof. dr hab. Zbigniew Cywiński | — Delegat O/Gdańsk |
| 37. Prof. dr Roman Kazimierzak | — „ „ |
| 38. Prof. dr hab. Jan Kruszewski | — „ „ |
| 39. Dr inż. Mirosław Skowronek | — „ „ |
| 40. Dr inż. Edmund Wittbrodt | — „ „ |
| 41. Dr inż. Jan Adamczyk | — „ O/Gliwice |
| 42. Doc. dr inż. Zbigniew Bogucki | — „ „ |
| 43. Dr inż. Andrzej Buchacz | — „ „ |
| 44. Dr inż. Remigiusz Ćwik | — „ „ |

45. Dr inż. Jerzy Kuczyński	--	„	„
46. Dr inż. Adam Kwaśnicki	—	„	„
47. Dr inż. Stanisław Mięka	—	„	„
48. Dr inż. Wojciech Pillich	—	„	„
49. Doc. dr hab. Bohdan Mochnacki	—	„	„
50. Dr inż. Henryk Skowron	—	„	„
51. Doc. dr Zbigniew Gębicki	—	„	„
52. Dr inż. Józef Suchoń	—	„	„
53. Doc. dr inż. Zdzisław Sulimowski	—	„	„
54. Doc. dr inż. Wojciech Tarnowski	—	„	„
55. Prof. dr. Janusz Dietrych	—	Członek Honorowy PTMTS O/Gliwice	
56. Doc. dr hab. Stanisław Bednarz	—	Delegat O/Kraków	
57. Dr inż. Jerzy Wapiennik	—	„	„
58. Doc. dr hab. Jakub Mames	—	Delegat O/Lublin	
59. Doc. dr Zdzisława Rotter	—	„	„
60. Doc. dr Kazimierz Szabelski	—	„	„
61. Doc. dr hab. Jerzy Gluza	—	Delegat O/Łódź	
62. Doc. dr Kazimierz Grossman	—	„	„
63. Mgr inż. Tadeusz Jeske	—	„	„
64. Doc. dr Janusz Lipiński	—	„	„
65. Dr inż. Andrzej Młotkowski	—	„	„
66. Prof. dr hab. Czesław Cempel	—	„	O/Poznań
67. Doc. dr hab. Andrzej Litewka	—	„	„
68. Dr inż. Jerzy Rakowski	—	„	„
69. Dr inż. Andrzej Świder	—	„	O/Rzeszów
70. Prof. dr Zbigniew Brzoska	—	Członek Honorowy PTMTS O/W-wa	
71. Prof. dr Jan Oderfeld	—	Członek Honorowy PTMTS O/Warszawa	
72. Doc. dr hab. Przemysław Jastrzębski	—	Delegat O/Warszawa	
73. Prof. dr hab. Stanisław Kocańda	—	„	„
74. Prof. dr hab. Jerzy Maryniak	—	„	„
75. Dr inż. Maciej Mróz	—	„	„
76. Prof. dr hab. Zbigniew Orłoś	—	„	„
77. Prof. dr hab. Zbigniew Osipiński	—	„	„
78. Dr inż. Stanisław Radkowski	—	„	„
79. Prof. dr hab. Bogumił Staniszewski	—	„	„
80. Dr inż. Aleksander Wielgus	—	„	„
81. Doc. dr hab. Andrzej Wilczyński	—	„	„
82. Doc. E. Gawrych-Żukowski	—	„	O/Wrocław
83. Prof. dr inż. Adam Negrusz	—	„	„
84. Dr inż. Zdzisław Sysak	—	„	„
85. Doc. dr hab. Mirosław Werszko	—	„	„
86. Doc. Jerzy Dorobczyński	—	„	O/Szczecin
87. Dr inż. Jerzy Honczarenko	—	„	„
88. Doc. dr inż. Marian Kmicik	—	„	„
89. Doc. dr inż. Roman Sobański	—	„	„
90. Doc. dr inż. Leszek Szeloch	—	Delegat O/Zielona Góra	
91. Dr. inż. Marian Pearsona	—	Delegat O/Wrocław	

Obrady otworzył Przewodniczący Zarządu Głównego profesor Marek Dietrich, który powitał przybyłych delegatów oraz zaproszonych gości, członków Honorowych PTMTS, profesorów: Zbigniewa Brzoskę, Janusza Dietrycha, Zbigniewa Kączkowskiego i Jana Oderfelda.

Przyjęto następujący porządek obrad:

1. Otwarcie Zjazdu. Wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarza Zjazdu.

2. Przyjęcie protokołu z XIX Zjazdu Delegatów PTMTS odbytego w Błażejewku k/Poznań.
3. Powołanie Komisji: Matki, Skrutacyjnej i Uchwałowej.
4. Złożone sprawozdania z działalności Towarzystwa.
5. Złożenie sprawozdania finansowego.
6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
7. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęto ich oraz postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem.
8. Wybory:
 - a) przewodniczącego,
 - b) członków Zarządu Głównego,
 - c) Głównej Komisji Rewizyjnej.
9. Uchwalenie generalnych wytycznych działalności PTMTS na następną kadencję.
10. Zamknięcie Zjazdu Delegatów.

ad 1

Na przewodniczącego Zjazdu powołano profesora S. Dubiela (Warszawa). Na wiceprzewodniczących Zjazdu wybrano profesorów: S. Gdulę (Bielsko Biala) i J. Elsnera (Częstochowa). Na sekretarza Zjazdu wybrano doktora M. Mroza (Warszawa).

Na wniosek przewodniczącego obrad prof. S. Dubiela zebrani uczcili minutą ciszy pamięć zmarłych w okresie XIX-ej kadencji członków Towarzystwa, kolegów: doc. dr Jerzego Sobolewskiego, prof. zw. dr Marcina Boreckiego, prof. dr hab. Czesława Graczyka, prof. dr hab. Jerzego Bukowskiego, dr Aleksandra Szowego, prof. dr Stanisława Huckela, prof. dr Bolesława Kordasa, prof. dr Romana Mromlińskiego, prof. dr Tadeusza Opolskiego i doc. mgr Mieczysława Pizsa.

ad 2

Wobec wcześniejszego rozdania delegatom protokołu z XIX Zjazdu zaproponowano nie odczytywać go, a jedynie poddać pod dyskusję. Protokół został przyjęty wraz z poprawkami.

ad 3

Komisję Matkę powołano w następującym składzie: prof. K. Biernatowski (Wrocław), dr R. Dzieciela (Poznań), doc. W. Kobza (Łódź), doc. W. Pietraszkiewicz (Gdańsk), doc. W. Szusiak (Gliwice). Komisję Skrutacyjną powołano w składzie: doc. J. Dorobczyński (Szczecin), doc. S. Bednarz (Kraków) i doc. E. Goss (Zielona Góra). Komisję Mandatową powołano w składzie: doc. Z. Rotter (Lublin), prof. W. Krzys (Kraków), doc. K. Szabelski (Lublin). Komisję Uchwałową w składzie: dr W. Pillich (Gliwice), dr A. Wielgus (Warszawa), dr E. Wittbrodt (Gdańsk).

ad 4

W związku z opublikowaniem sprawozdania za okres XIX kadencji i doręczeniem go wcześniej delegatom, Przewodniczący prof. Marek Dietrich ograniczył się do krótkiego komentarza. Wyraził potrzebę zwrócenia uwagi Delegatów na wybrane aspekty działalności Towarzystwa w minionej kadencji. Podkreślił, że ostatnie dwa lata były najtrudniejszym okresem w pracy i życiu Towarzystwa, co wynikało z wyjątkowo intensywnych przemian społeczno-politycznych w naszym kraju. Wszystko tu odsuwało na dalszy plan działalność naukową. Aktywność członków i Oddziałów osłabła. Wyłaniały się trudności organizacyjne, a także były zakłócenia w gospodarce finansowej Towarzystwa. Obowiązujące w tym czasie procedury formalno-prawne utrudniały kontakty z kolegami zagranicznymi. Powstały opóźnienia w druku czasopisma „Mechanika Teoretyczna i Stosowana”. Zarządzenie PAN zmniejszyło liczbę arkuszy wydawniczych MTiS do połowy. Zarząd Główny wystąpił do PAN o zatwierdzenie wyboru członków Zagranicznych Towarzystwa. Przewodniczący Towarzystwa wyraził opinię, że w sumie udało się utrzymać działalność Towarzystwa zgodnie z zasadami statutu. Skierował serdeczne podziękowanie członkom i zespołom, których praca zdecydowała o takiej właśnie ocenie. Podkreślił szczególnie duży wkład pracy prof. Z. Oleśniaka. Sprawozdanie z działalności PTMTS w ostatniej kadencji zostało przyjęte przez aklamację.

ad 5

Sprawozdanie finansowe złożył skarbnik prof. A. Tylikowski (Szczegółowy tekst włączony został do akt Zjazdu). Podsumowując wystąpienie zaapelował o zwiększenie dyscypliny w opłacaniu składek członkowskich.

ad 6

Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył jej Przewodniczący prof. Z. Kączkowski. (Tekst włączono do akt Zjazdu). Podsumowując wystąpienie stwierdził, iż ujednoczenie we wszystkich Oddziałach wymaga sposób sporządzania sprawozdań finansowych działalności Zarządów, sympozjum, seminariów, konferencji itp. Informacje w sprawozdaniach bardzo często są niepełne, błędne — bo często przekazywane drogą telefoniczną. Protokoły np. nie zawsze zawierają stwierdzenia o udzielaniu absolutorium ustępującemu Zarządowi. Przew. Głównej Kom. Rewizyjnej, prof. Z. Kączkowski, stwierdził, że komisja ocenia działalność Zarządu Głównego jako zgodną ze statutem PTMTS i postawił wniosek o udzielenie Zarządowi absolutorium. Wniosek został przyjęty przez aklamację.

ad 7

W dyskusji nad sprawozdaniami zabrali głos: prof. E. Brzuchowski, doc. E. Goss, prof. J. Wojnarowski, prof. Z. Kączkowski, prof. M. Dietrich, doc. M. Kmieciak, prof. Z. Cywiński, prof. J. Elsner, prof. S. Dubiel, doc. A. Wilczyński, dr R. Izbiński, doc. W. Bachmacz. Dyskutanci podkreślali, że Towarzystwo działa samorządnie, a zaangażowanie i bezinteresowność są cechami jego działalności. Wysoko oceniono jego działalność merytoryczną — zwłaszcza zebrania naukowe w formie dyskusji „okrągłego stołu”. Zwrócono uwagę na potrzebę rozszerzenia roli Zarządu Głównego o dalsze formy działalności, jak: sesje wyjazdowe, centralne kursy (np. w Jabłonnej) oraz pomoc udzielaną Zarządowi Oddziałowym w zachowaniu i rozwijaniu swej indywidualności naukowej. Poruszono między innymi sprawę obchodów 25-lecia PTMTS w roku 1983 i ewentualnej dorocznej nagrody (symbolicznej) za działalność naukową w Towarzystwie. Ponadto wyrażono uznanie dla pracy Zarządu Głównego.

Po zakończeniu dyskusji prof. Z. Kączkowski postawił wniosek o udzielenie absolutorium ustępującemu Zarządowi Głównemu.

Wniosek przyjęto w głosowaniu jawnym przy 1 głosie wstrzymującym się.

ad 8

Przewodnicząca Komisji Mandatowej, doc. Z. Rotter, poinformowała, że na Zjazd przybyło 89 osób (z których 88 jest Delegatami), w związku z czym uchwały są prawomocne.

Przewodniczący Komisji Matki, doc. W. Pietraszkiewicz, przedstawił kandydatury na przewodniczącego Zarządu Głównego: prof. Zbigniewa Olesiaka (nie wyraził zgody na kandydowanie), prof. Zbigniewa Osińskiego i prof. Józefa Wojnarowskiego.

Rozpoczęto czynności wyborcze.

Po przerwie w obradach Przewodniczący Komisji Skrutacyjnej doc. S. Bednarz przedstawił wyniki wyborów: oddano 86 głosów ważnych, w tym na kandydaturę prof. Z. Osińskiego padły 42 głosy, na kandydaturę prof. J. Wojnarowskiego padły również 42 głosy. Ponieważ żaden z kandydatów nie otrzymał wymaganej większości głosów, postanowiono wybory powtórzyć. W tej sytuacji prof. M. Dietrich zaproponował rozszerzenie listy kandydatów o osobę prof. Z. Olesiaka, który tym razem zgodził się kandydować. Doc. Z. Sulimowski zaproponował, aby kandydaci przedstawili swój program działalności Towarzystwa. Zgodnie z tym wnioskiem zabrali głos kolejno: prof. Z. Osiński, prof. J. Wojnarowski, prof. Z. Olesiak.

Prof. Osiński w swoim wystąpieniu zauważył, że głównym celem i zadaniem Towarzystwa jest rozwijanie w społeczeństwie Mechaniki. Teoretycznej i Stosowanej poprzez zaznaczenie roli mechaniki, w interdyscyplinarnym wykształceniu młodych adeptów nauki, popieranie twórczości młodych pracowników oraz poszukiwanie form działalności Towarzystwa zarówno poprzez patronat nad instytucjami krajowymi mającymi znamiona działań na rzecz rozwoju mechaniki, jak i poprzez uzupełnienie ich działalności.

Prof. Wojnarowski nawiązał do swego poprzedniego wystąpienia (w dyskusji), rozszerzając propozycje programowe Towarzystwa na przyszłą kadencję o następujące postulaty:

- potrzebę działań nad utrwaleniem autorytetu Towarzystwa w środowisku inżyniersko-naukowym,
- należy wzbogacić formy działania w Oddziałach i Zarządzie Głównym, aby sprzyjały potrzebom przemian społecznych w kraju,
- rozwijać osobowość naukową Oddziałów, wytyczać kierunki ich rozwoju naukowego z położeniem akcentu na badania doświadczalne,
- Obchody 25-cia wykorzystać do utrwalenia tradycji Towarzystwa, w czym dużą rolę przypisuje kwartalnikowi Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Prof. Olesiak — w swoim wystąpieniu nawiązał krótko do historii Towarzystwa, zwracając uwagę na rolę autorytetu moralnego, który szczególnie obecnie jest niezbędny.

Wytwarzanie postaw moralnych jest ważne, w życiu społecznym, a w działalności naukowej jest niezbędne. W autorytecie moralnym, troskliwie utrwalanym widzi ważny sens istnienia Towarzystwa. Takie cechy Towarzystwa jak: niezależność, samorządność i samodzielność, stosowane i rozwijane, podnoszą autorytet moralny i naukowy.

Przedstawił propozycję włączenia do statutu ordynacji wyborczej Towarzystwa oraz przypomniał, że w dalszym ciągu jest aktualna sprawa uzupełniania Statutu o członkostwo wspierające. Uważa, iż należy wydawać Biuletyn Informacyjny Zarządu Głównego, uczcić 25-cie Towarzystwa medalem pamiątkowym.

Pięknie rozwijająca się mechanika, w kraju może ulec degradacji (zwłaszcza jej nauczania), jeśli nie zostaną podjęte działania zapobiegające. Dużą rolę w tym przypisuje działalności informacyjnej, wydawniczej i społecznej, chociaż możliwości ocenia jako skromne. Dlatego postulat wykorzystania wsparcia członków zagranicznych w zwiększeniu publikacji pozostaje ciągle aktualny. Pilnego wsparcia wymaga młoda kadra, tak w publikowaniu, prac, jak i umożliwieniu wygłaszania referatów na zebraniach, sympozjach i konferencjach.

Doc. S. Bednarz — przedstawił wyniki drugiego głosowania. Tym razem oddano 84 głosy, wszystkie ważne. Na kandydaturę prof. Z. Olesiaka padło 39 głosów, na kandydaturę prof. J. Wojnarowskiego padło 28 głosów oraz na kandydaturę prof. Z. Osińskiego padło 17 głosów.

Prof. Z. Osiński — podziękował za okazane mu zaufanie i wycofał swoją kandydaturę z dalsze części wyborów. Odbyło się trzecie tajne głosowanie, w którym wzięło udział 83 delegatów. Wszystkie głosy były ważne. Prof. Z. Olesiak otrzymał 42 głosy, prof. J. Wojnarowski 40 głosów, 1 głos był wstrzymujący się. Tym samym na przewodniczącego PTMTiS został wybrany prof. Zbigniew Olesiak.

Prof. Zbigniew Olesiak podziękował za zaufanie i wybór na stanowisko przewodniczącego Zarządu Głównego.

Następnie Przewodniczący Komisji Matki przedstawił kandydatury do Zarządu Głównego: doc. W. Bachmacz, prof. E. Brzuchowski, prof. R. Gutowski, doc. S. Kasprzyk, prof. J. Kruszewski, doc. J. Lipiński, doc. R. Parkitny, doc. Z. Rotter, doc. Z. Sulimowski, doc. M. Trombski, doc. W. Walczak, doc. A. Wilczyński, prof. J. Wojnarowski. Do Głównej Komisji Rewizyjnej: prof. C. Cempel, dr R. Ćwik, prof. D. Dąbrowski, prof. J. Dietrich, prof. R. Kazimierzak, doc. J. Mames, prof. A. Tylikowski i doc. K. Wernerowski.

W wyniku tajnego głosowania do Zarządu Głównego wybrano następujących kolegów: doc. W. Bachmacza (48 głosów), prof. E. Brzuchowskiego (44 głosy), prof. R. Gutowskiego (60 głosów), doc. S. Kasprzyka (41 głosów), prof. J. Kruszewskiego (61 głosów), doc. Z. Sulimowskiego (39 głosów), doc. W. Walczaka (49 głosów), doc. A. Wilczyńskiego (46 głosów), prof. J. Wojnarowskiego (67 głosów) oraz zastępców członków Zarządu:

doc. J. Lipińskiego (38 głosów), doc. R. Parkitnego (38 głosów) i doc. M. Trombskiego (37 głosów).

Do Głównej Komisji Rewizyjnej wybrano:

prof. Cz. Cempla (51 głosów), prof. D. Dąbrowskiego (57 głosów), prof. J. Dietrycha (52 głosy), prof. R. Kaźmierczaka (49 głosów), prof. A. Tylikowskiego (61 głosów).

ad 9

Projekt tekstu uchwały odczytał przewodniczący Komisji Uchwalowej — dr inż. A. Wielgos.

Delegaci głosowali na każdy punkt uchwały. Uchwałę przyjęto większością głosów.

Podjęto następującą Uchwałę XX Zjazdu Delegatów PTMTS:

Zjazd podkreślając, że główną siłą stymulującą działanie i rozwój Towarzystwa jest bezinteresowna praca członków i wynikająca z niej niezależność, samorządność i samodzielność postanawia:

1. W zakresie realizowania podstawowych merytorycznych celów statutowych Towarzystwa zobowiązać Zarządy: Główny i Oddziałowe do:

1.1. Przeanalizowania dotychczasowych form działalności naukowej w kierunku ich uatrakcyjnienia, a także przejawiania inicjatywy w rozwijaniu nowych form: jak sesje wyjazdowe, kursy interdyscyplinarne i międzyoddziałowe. Dewizą działania Towarzystwa powinna być skromność i go-

spodarność, służebna rola wobec rozwoju mechaniki w Kraju i potrzeba integracji środowiska naukowego mechaników.

- 1.2. Opracowanie i wydanie zeszytu informacyjnego o 25-letniej działalności Towarzystwa, rozważenie możliwości wydawania Biuletynu Informacyjnego Zarządu Głównego.
- 1.3. Przedsięwzięcie działań w kierunku:
 - wypracowania właściwej pozycji mechaniki w studiach wyższych,
 - większego wpływu na rozwój młodej kadry mechaników w nauce i przemyśle,
 - zapobiegnięcia degradacji roli mechaniki w życiu Kraju.
2. W zakresie spraw organizacyjnych Zarząd Główny i Zarządy Oddziałów skupią uwagę na:
 - 2.1. Wspomaganiu przez Zarząd Główny Zarządów Oddziałów w ich aktywizacji, rozwoju, zachowaniu autentyczności i indywidualności naukowej.
 - 2.2. Gromadzeniu (opracowaniu) i publikowaniu informacji o bieżącej działalności i tradycjach Towarzystwa.
 - 2.3. Skrupulatnym prowadzeniu dokumentacji Towarzystwa, terminowym ich sporządzaniu i przesyłaniu, a także na ujednoczeniu form dokumentacji i dbaniu o jej kompletność i rzetelność.
 - 2.4. Likwidacja zaległości w opłacaniu składek członkowskich, uregulowaniu bieżących spraw finansowych stosowania do aktualnych warunków z zachowaniem racjonalnych form oszczędzania.
(Pełny tekst Uchwały został włączony do akt Zjazdu).

ad 10

Przewodniczący PTMTS prof. Z. Olesiak podziękował Przewodniczącemu Zjazdu — prof. S. Dubielowi, Jego Zastępcy, Sekretarzowi i Komisji Zjazdu za sprawne prowadzenie obrad. Podziękował również Delegatom za liczne przybycie, dyskutantom za aktywny udział w obradach Zjazdu.

Na tym obrady XX Zjazdu Zakończono.

Sekretarz XX Zjazdu Delegatów
PTMTS

Przewodniczący XX Zjazdu
Delegatów PTMTS

(—) dr inż. Maciej Mróz

(—) Prof. dr hab. inż. Stanisław Dubiel

The 6th European Conference on Fracture
(6-ta Europejska Konferencja Mechaniki Pękania)
15—20 June 1986
Rai Congress Centre
Amsterdam, the Netherlands

Scientific secretariat
H. C. van Elst c/oTNO Corporate Communication Department
P. O. Box 297 2501 BD The Hague, Holandia

KONFERENCJE „EUROMECH” 1985r.

- 191 The physics of dispersions of small particles
1—4 kwietnia 1985
Cambridge, Wlk. Brytania
Dr E. J. Hinch
Department of Applied Mathematics and
Theoretical Physics University of Cambridge
Silver Street, Cambridge CB3 9EW, oraz Dr
R. Blanc, Marseille
- 192 Transport of suspended solids in open channels
11—15 czerwca 1985
München-Neubiberg, RFN
Professor W. Bechteler
Hydromechanik und Hydrologie
Hochschule der Bundeswehr München 8014
Neubiberg oraz Professor H. J. Vollmers
Neubiberg
- 193 Dynamics of ship structures
18—21 czerwca 1985
Jabłonna, Polska
Professor J. Więckowski
Ship Research Institute Technical University
Gdańsk Majakowskiego 11 Gdańsk oraz
Professor J. Kruszewski Gdańsk
- 194 Simultaneous heat and mass transfer in unsaturated porous media 2—5
2—5 lipca 1985
Nancy, Francja
Professor M. G. Martin
Institut National Polytechnique de Lorraine
Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et
de Mécanique 2, rue de la Citadelle 54011
Nancy Cedex, France
- 195 Rarefield flows and hypersonic flight
2—5 września 1985
Marseille, Francja
Professor R. Brun
Laboratoire de Dynamique et Thermophysiques des Fluides Université de Provence
Centre St Jérôme 13397 Marseille Cedex 13,
France
- 196 Rock and soil rheology
10—13 września 1985
Bukareszt, Rumunia
Professor N. Cristescu
University of Bucharest Faculty of Mathematics
str. Academiei 14 Bucharest 70109
Romania oraz Dr H. I. Ene, Bucharest
- 197 Finite rotations in non-linear structural mechanics
17—20 września 1985
Jabłonna, Polska
Professor W. Pietraszkiewicz
Institute of Fluid-Flow Machinery Polish
Academy of Sciences ul. Fizyka 14 80-952
Gdańsk
- 198 Physical-numerical modelling in non-linear fracture mechanics
11—12 września 1985
Stuttgart, RFN
Professor J. H. Argyris
Institut für Statik und Dynamik der Luft-und
Raumfahrtkonstruktionen Pfaffenwaldring 27
7000 Stuttgart 80, Germany oraz Dr Sommer,
Freiburg
- 199 Direct and large eddy simulation of turbulent flows
30 września — 1 października 1985
München, RFN
Professor R. Friedrich
am Lehrstuhl für Strömungsmechanik Technische
Universität München Arcisstrasse
21 8000 München 2, Germany oraz Priv. —
Doz. Dr Ing. U. Schumann, Wessling
- 200 Post-buckling behaviour of elastic structures
Professor J. Szabó
Technical University of Budapest Dept. of

- 5—7 października 1985
Mátrafüred, Węgry
- 201 Applications of the mechanics of granular materials in geophysics
13—18 października 1985
Interlaken, Szwajcaria
- 202 Measurement techniques in low-speed turbulent flows
7—9 października 1985
Marknesse, Holandia
- 203 Combustion theory
2—4 grudnia 1985
Cranfield, Wlk. Brytania
- 204 Structure and crack propagation in brittle matrix composite materials
12—15 listopada 1985
Jabłonna, Polska
- 205 Free surface waves in shallow water
6—8 maja 1985
Grenoble, Francja
- Civil Engineering Mechanics Budapest Müegyetem rkp. 3, 1111 Hungary
- Dr K. Hutter
Versuchsanstalt für Wasserbau Hydrologie und Glaziologie ETH-Zentrum 8092 Zürich, Switzerland oraz Professor S. B. Savage, Montreal
- Dr B. van der Berg
National Aerospace Laboratory NLR Voorsterweg 31 8316 Marknesse, The Netherlands oraz Dr A. Bertelrud, Stockholm
- Professor J. F. Clarke
Department of Aerodynamics College of Aeronautics Cranfield Institute of Technology Cranfield Beds. MK43 OAL, U.K.
- Professor A. M. Brandt
Institute of Fundamental Technological Research Polish Academy of Sciences Świętokrzyska 21 00-049 Warsaw oraz Dr I. H. Marshall, Scotland
- Professor J. P. Germain
Institut de Mécanique de Grenoble Domaine Universitaire 38402 St. Martin d'Heres Cedex France

Druga Konferencja Europejskich Reologów odbędzie się w Pradze, Czechosłowacja, w dniach 17—20 czerwca 1986 r.

Organizatorzy: Group of Rheology of the Czechoslovak Chemical Society Institute of Hydrodynamics, Czechoslovak Academy of Sciences

Scope of the Conference:

The Conference will be concerned with results in the following subject areas: Theory, Transport phenomena in rheological systems, Rheometry, Solids and composites, Rubber, Suspensions, Polymers, Polymer processing, Biorheology and medical applications, Food rheology and processing, Tribology, General.

Submission of papers:

Authors should send title and short summary (about 30 words) to the Conference Committee not later than June 30th, 1985. A registration form is available on the request. The official language of the Conference is English.

Address for Correspondence:

2nd EURO-RHEO Conference

Institute of Hydrodynamics, Czechoslovak Akad. of Sciences Podbabska 13, 166 12 Prague, Czechoslovakia.

- B. Rogowski, Thermal stresses in a transversely isotropic layer containing an annular crack. Tensile - and shear — type crack. 473
 Тепловые напряжения в трансверально-изотропном слое с кольцевой трещиной. Раскрытие и сдвиг трещины.
 Naprężenia cieplne w poprzecznie izotropowej warstwie z pierścieniową szczeliną. Rozwieranie i ścinanie szczeliny.
- M. Żukowski, Structures on the partly elastic subsoil. 493
 Взаимодействие конструкций с частично упругим основанием.
 Współpraca konstrukcji z częściowo sprężystym podłożem.
- K. Majorkowska-Knap, Fale sprzężone mechano-termo-elektryczne w stałym ośrodku piezoelektrycznym. 509
 Сопряженные механо-термо-электрические волны в пьезоэлектрических средах.
 Coupled mechano-thermo-electric waves in solid piezoelectric continuum.
- J. Bielski, J. Skrzypek, Analiza stateczności procesu dużych odkształceń sprężystych powłoki cylindrycznej przy dwukierunkowym rozciąganiu. 525
 Устойчивость процесса больших упругих деформаций цилиндрической оболочки в случае двунаправленного растяжения.
 Stability of the process of large elastic strains of a cylindrical shell at biaxial tension.
- K. Szuwalski, Idealnie sprężysto-plastyczna tarcza o profilu hiperbolicznym. 539
 Идеально упруго-пластический диск гиперболического профиля
 Perfectly elastic-plastic hyperbolic disk.
- P. Witakowski, E. Kamienobrodzka-Olszewska, Termodynamika betonu w warunkach pożarowych. 549
 Термодинамика бетона в пожарных условиях
 Thermodynamics of concrete in fire conditions.
- J. Piwnik, Niejednorodność plastyczna stopu PA2 w procesie wyciskania. 565
 Пластическая неоднородность при прессовании сплава ПА 2.
 Nonhomogeneity of the plastic properties of alloy PA2 during extrusion.
- T. Sadowski, Dwoistość równowagi w stanach czystego zginania. 575
 Бифуркационное равновесие в состояниях чистого изгиба.
 Bifurcation Equilibrium in Pure Bending States.
- M. Wagrowska, Osiowo symetryczne zagadnienia mikropolarnej teorii plastyczności. 595
 Аксиально симметричные задачи микрополярной теории пластичности.
 Axially symmetric problems of the micropolar theory of plasticity.
- Z. Rychter, Zredukowane liniowe równania powłok o wolno zmiennych krzywiznach. 613
 Упрощенные линейные уравнения оболочек с медленно изменяющимися кривизнами.
 Reduced linear equations of shells with slowly varying curvatures.
- J. Grabowski, Wyboczenie prętów stalowych poddanych wstępnym wydłużeniom trwałym. 621
 Потеря устойчивости стальных стержней подвергнутых предварительным стойким удлинением.
 Buckling of steel bars initially overtrained in tension.
- E. Bobula, Odpowiedź na list J. Waclawika do Redakcji Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. 637
 Nota Redakcyjna 639
 Biuletyn Informacyjny. 641