

Jⁿ 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701



**M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A**

KWARTALNIK
TOM 22 ZESZYT 1-2

W A R S Z A W A 1984
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

534

SPIS TREŚCI

T. LEHMANN, Some considerations on the constitutive law in thermoplasticity Рассуждения о конститутивных законах в термопластичности. Rozważania o prawach konstytutywnych w termoplastyczności.	3
K. P. HERMANN, J. M. MIHOVSKY, Plastic zone size of Dugdale type cracks in a self—stressed two-phase medium with partially plastified matrix material Размер пластичной зоны трещины, типа Дагдейля, в предварительно напряженной двухфазной среде, с частично пластическим материалом матрицы. Zasięg strefy uplastycznienia szczelin typu Dugdale'a we wstępnie naprężonym ośrodku dwufazowym z częściowo uplastycznionym materiałem matrycy	25
E. WŁODARCZYK, A. WIŚNIEWSKI, O propagacji frontu fali bocznej rozprężenia gazowych produktów detonacji w ładunku kumulacyjnym, О распространении фронта волны бокового расширения газовых продуктов детонации в кумуляционном заряде. Propagation of lateral-expansion wave front of gaseous detonation products in a cumulative charge	41
J. T. PINDERA Isodyne photoelasticity and gradient photoelasticity: Physical and mathematical models, efficacy, applications Изодинная и градиентная фотоупругость. Физические и математические модели, возможности и применения. Elastooptyka izodynowa i gradientowa. Modele fizyczne i matematyczne, możliwości i zastosowanie,	53
P. WESOŁOWSKI, Some practical problems of displacement and strain measurement by incoherent superposition of interferograms Некоторые практически проблемы измерений перемещений и деформаций при некогерентной суперпозиции интерферограмм Pewne problemy pomiarów przemieszczeń i odkształceń przy niekoherentnej superpozycji interferogramów	69
M. LECH, J. MRUK, J. STUPNICKI, Badania chropowatości powierzchni metodą immersyjną interferometrii holograficznej Исследования шероховатости поверхностей иммерсионным методом голографической интерферометрии Investigations of surface roughness by use of immersion method of holographic interferometry	77
P. KUBSKI, W. LEWANDOWSKI, Komórkowo-kominowy charakter konwekcji swobodnej od izotermicznych, poziomych powierzchni wymieniających ciepło w przestrzeni nieorganicznej Ячейко-трубный характер естественной конвекции от изотермических поверхностей до неопределенного пространства Cellular—plumer character of natural convection from isothermal, horisontal surfaces in unlimited space	93
J. ZIELIŃSKI, Procesy turbulentnego transportu, pędu i ciepła w przepływie zapalısadowym Процессы турбулентного транспорта количества движения и тепла в течении за решеткой плит. The turbulent heat and momentum transfer behind a row of blades.	107
J. SIELECKA, S. KONIECZNY, Equations of the shells with inclusions order along of the parameter lines Уравнение оболочек с инклюдиями вдоль одного семейства параметрических линий Równania powłok z inkluzjami wzdłuż jednej rodziny linii parametrycznych	115
B. MICHAŁAK, Metoda elementów skończonych dla płyt warstwowych o wyższego rzędu rozkładzie funkcji ruchu po grubości płyty Метод конечных элементов для уточненной теории слоистых пластин, The finite element method for laminated plates with a high-order theory of plate deformation	125
W. OSTASNOWICZ, Hybrydowa metoda elementów skończonych w zagadnieniu kontaktowym	135

J^u 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 2 • Z E S Z Y T 1 - 2

W A R S Z A W A 1 9 8 4

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY
MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK—REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR
ANDRZEJ SZANIAWSKI—REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR
MONIKA WĄGROWSKA—REDAKTOR,
MAŁGORZATA JABŁOŃSKA—SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 530. Ark. wydawniczych 23,5, Ark. drukarskich 20. Papier druk. mat. kl. IV, 70 g. 70×100
Oddano do składania 30.XII.1983 r. Druk ukończono w marcu 1985 r. Zam. 6049/12/84. Cena zł 160.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

SOME CONSIDERATIONS ON THE CONSTITUTIVE LAW IN THERMOPLASTICITY

Th. LEHMANN

*Ruhr-Universität, Lehrstuhl für
Mechanik*

1. Introduction

This paper deals with a phenomenological theory of large, non-isothermic deformations of solid bodies which can be considered as classical continua. We suppose that the thermodynamical state of each material element is uniquely defined by the values of a finite set of state variables even in irreversible processes. Such a phenomenological theory is, of course, restricted to a limited class of materials on the one hand and to processes running not too far from thermodynamical equilibrium on the other hand.

A thermo-mechanical process starts in the initial state \mathcal{L} of the body which is characterized by the initial configuration and by the initial thermodynamical state of each material element. The process is determined by the history of the independent process variables. These are the prescribed thermo-mechanical boundary conditions and the prescribed body forces and energy sources acting inside the body. The course of the process is governed by the material independent field equations (balance equations) and by the constitutive law of the material. We focus our considerations to the constitutive law which governs the local thermo-mechanical process within the thermodynamical state space.

Concerning these local thermo-mechanical processes we can distinguish on the first level:

1. strictly reversible processes governed uniquely by thermodynamical state equations,
2. other processes.

From the phenomenological point of view we can subdivide the second class into four subclasses:

- 2.a) plastic deformations characterized by constraint equilibrium states,
- 2.b) internal processes leading to changes of the internal structure of the material,
- 2.c) thermal activated processes (without constraint equilibrium states) leading to unlimited creep processes (high temperature creep or long time creep)
- 2.d) viscous (damping) processes.

The internal processes 2.b) may be coupled with processes of the kind 2.a) or 2.c). However, they can also occur independently like, for instance, solid phase transformations, recrystallization, or recovery. They may or may not be connected with deformations. Damping processes finally may be correlated to all other kinds of processes including reversible processes as, for instance, in viscoelastic deformations.

These considerations suggest a material model as shown in fig. 1. The particular structure

and the mutual arrangement of the different elements is determined by the respective constitutive laws. Some particular cases of such constitutive laws will be discussed later.

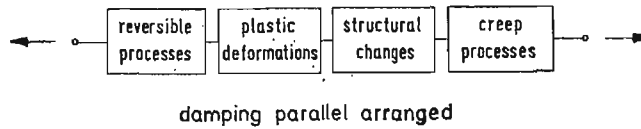


Fig. 1. Material model

The real thermo-mechanical process carries the body from the initial state \mathcal{L}° into the actual state \mathcal{L} . All physical quantities are acting in the respective current configuration of the body. We attach to the actual state \mathcal{L} of the body an accompanying fictitious reference state \mathcal{L}^* by means of a fictitious reversible process which carries each material element from its actual thermodynamical state into an unstressed state at reference temperature \bar{T} (see fig. 2). During this fictitious process the internal variables are kept constant in order to ensure a unique definition of reversible energy [1, 2].

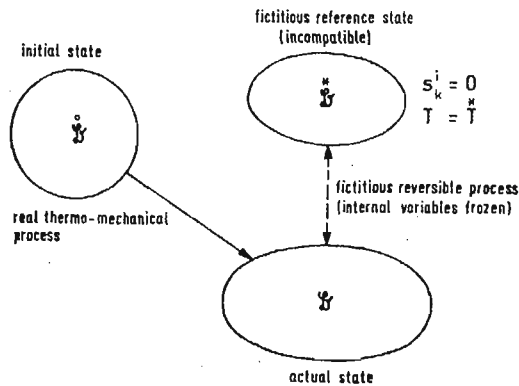


Fig. 2. Thermo-mechanical process

There is no real or fictitious process leading from the initial state \mathcal{L}° to the reference state \mathcal{L}^* . Therefore it becomes unnecessary to introduce any strain tensor defining the non-reversible deformations uniquely. We need, however, a unique decomposition of mechanical work rate into its reversible part and its remaining parts. This means at the same time a unique decomposition of the deformation rate into corresponding parts. Furthermore we require a unique measure for the reversible strain serving as thermodynamical state variable.

In the following we shall at first discuss the mechanical and thermodynamical frame for the formulation of the constitutive law in our sense of a phenomenological theory. Then we shall compare some different constitutive laws. We shall also discuss by which experiments the material parameters and functionals entering the constitutive laws can be determined. Finally we shall point to certain coupling effects occurring in some thermo-mechanical processes.

2. Mechanical and thermodynamical frame for the formulation of the constitutive law

A thermo-mechanical process in a body can be described with respect to an independent Euklidian space of observation endowed with a space-fixed coordinate system x^α . However, we can also relate the process description to a comoving and codeforming body-fixed coordinate system ξ^i . Many authors prefer the first possibility. Concerning the formulation of constitutive laws, however, the second way offers many advantages. This cannot be discussed in all details. Only some aspects may be emphasized.

The initial position of a material point at time t may be denoted by

$$\overset{\circ}{x}^\alpha = x^\alpha(t). \quad (1)$$

The base vectors and the metric of the space-fixed coordinate system in this position are

$$\overset{\circ}{g}_\alpha = g_\alpha(\overset{\circ}{x}^\rho), \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\overset{\circ}{x}^\rho). \quad (2)$$

At time t the actual position of the same material point is

$$x^\alpha = x^\alpha(\overset{\circ}{x}^\rho, t). \quad (3)$$

(3) describes the motion of body in the space of observation. The base vectors and the metric of the space-fixed coordinate system in the actual position are

$$g_\alpha = g_\alpha(x^\rho), \quad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^\rho). \quad (4)$$

The velocity of the material point in the space of observation is

$$v^\alpha = \dot{x}^\alpha(\overset{\circ}{x}^\rho, t) \quad (5)$$

where $\dot{}$ means the substantial time derivative ($\overset{\circ}{x}^\rho$ kept fixed). The so-called deformation gradient is defined by

$$\underline{F} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}^\beta} g_\alpha \overset{\circ}{g}_\beta. \quad (6)$$

It represents the basis for the description of the deformations of the body within the space of observation. For simplicity we restrict ourselves in the following to a representation which is related to the actual state of the body. The polar decomposition of the deformation gradient leads in this case to

$$\underline{F} = \underline{V} \cdot \underline{Q} \quad (7)$$

where \underline{Q} means a proper orthogonal tensor. Using this decomposition we derive from the deformation gradient left Cauchy tensor:

$$\underline{B} = \underline{V} \cdot \underline{V} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}^\rho} \overset{\circ}{g}^{\rho\sigma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \overset{\circ}{x}^\sigma} g_\alpha g_\beta = B^{\alpha\beta} g_\alpha g_\beta, \quad (8)$$

deformation rate:

$$\underline{D} = \{\dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\}_S = \frac{1}{2} \{v^\alpha|_\beta + v_\beta|^\alpha\} g_\alpha g_\beta = d_\beta^\alpha g_\alpha g_\beta, \quad (9)$$

spin tensor:

$$\underline{W} = \{\dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\}_A = \frac{1}{2} \{v^\alpha|_\beta - v_\beta|^\alpha\} \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta = \omega^\alpha{}_\beta \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta. \quad (10)$$

In these formulas mean

- F^T : transposed of F ,
- $\{\}_S$: symmetric part,
- $\{\}_A$: antimetric (skew-symmetric) part,
- $|_\beta$: covariant derivation in the actual position.

From (8) we can derive different strain tensors.

This is well known. We refer to [3, 4].

The true stress measured in the actual configuration, the so-called Cauchy stress tensor, is

$$\underline{\Sigma} = \sigma^{\alpha\beta} \underline{g}_\alpha \underline{g}_\beta = \sigma^\alpha_\beta \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta. \quad (11)$$

With respect to energy considerations we introduce the weighted Cauchy stress tensor

$$\underline{S} = \frac{\rho}{\varrho} \underline{\Sigma} = \frac{\rho}{\varrho} \sigma^\alpha_\beta \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta = s^\alpha_\beta \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta. \quad (12)$$

Then we can write the specific work rate in the form

$$\dot{w} = \frac{1}{\varrho} \underline{S} : \underline{D} = \frac{1}{\varrho} s^\alpha_\beta d^\beta_\alpha. \quad (13)$$

Using a body-fixed coordinate system a material point keeps its coordinate ξ^i during the whole process. The base vectors and the metric in the initial configuration of the body are denoted by

$$\underline{\hat{g}}_i = \underline{g}_i(\xi^r, t), \quad \underline{\hat{g}}_{ik} = g_{ik}(\xi^r, t). \quad (14)$$

The corresponding quantities in the actual configuration are

$$\underline{g}_i = \underline{g}_i(\xi^r, t), \quad g_{ik} = g_{ik}(\xi^r, t). \quad (15)$$

The deformation of the body can be measured by the quantities [1, 3]

$$q^i_k = \hat{g}^{ir} g_{rk}, \quad (q^{-1})^i_k = g^{ir} \hat{g}_{rk}. \quad (16)$$

Relating q^i_k to the actual configuration, we obtain the tensor

$$\underline{q} = q^i_k \underline{g}_i \underline{g}^k. \quad (17)$$

From (17) we can derive arbitrary strain tensors by means of isotropic tensor functions [1, 3]. Furthermore the deformation rate is expressible in the form

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (q^{-1})^i_r (\dot{q})^r_k \underline{g}_i \underline{g}^k = d^i_k \underline{g}_i \underline{g}^k. \quad (18)$$

$(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t}$ denotes the material derivative with respect to time (ξ^i held fixed) which is different from the substantial time derivative in the space-fixed coordinate system. It corresponds to one of the Oldroyd-derivations [4 to 7, 1]. This material time derivative is objective in contradiction to the substantial time derivative, since the rigid body rotations

are eliminated from the very beginning by the introduction of a body-fixed coordinate system.

Using the definition (18) for the deformation rate and relating the weighted Cauchy stress tensor to the actual configuration of body-fixed coordinate system, i.e.

$$\underline{S} = s_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (19)$$

the specific work rate can be written

$$\dot{w} = \frac{1}{\varrho} \underline{S} : \underline{D} = \frac{1}{\varrho} s_r^i (q^{-1})_k^r \frac{1}{2} (\dot{q})^k{}_i. \quad (20)$$

This means

$$\tilde{S}^i{}_k = S_r^i (q^{-1})_k^r \quad \text{and} \quad \frac{1}{2} \dot{q}_i^k \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} (q_i^k - \delta_i^k) \quad (21)$$

can be considered as a conjugated pair of stress and strain [1].

The total work rate can be decomposed into the rate of reversible work $\dot{w}_{(r)}$ and the rate of remaining work $\dot{w}_{(i)}$ according to

$$\dot{w} = \dot{w}_{(r)} + \dot{w}_{(i)}. \quad (22)$$

If the reversible processes are without damping we obtain from (22) also a corresponding additive decomposition of the deformation rate. In this case holds

$$\frac{1}{\varrho} \underline{S} : \underline{D} = \dot{w} = \dot{w}_{(r)} + \dot{w}_{(i)} = \frac{1}{\varrho} \underline{S} : \underline{D}_{(r)} + \frac{1}{\varrho} \underline{S} : \underline{D}_{(i)}. \quad (23)$$

This means

$$\underline{D} = \underline{D}_{(r)} + \underline{D}_{(i)}. \quad (24)$$

For thermodynamical reasons the rate of reversible work must also be expressible as the double scalar product of a suitable defined stress tensor and the time derivative of the conjugated strain tensor. At the same time this strain tensor must fulfill certain physical requirements in order to define the reversible deformations independent of accompanying non-reversible deformations. In many papers this problem is discussed from different points of view (see, for instance, [8 to 18] and [3]). Concerning the possible decompositions of total deformation and total deformation rate we shall only discuss two approaches.

An often used procedure starts with the multiplicative decomposition of the deformation gradient ([8] to [10] and [13 to 15])

$$\underline{F} = \underline{F}_{(r)} \cdot \underline{F}_{(i)} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^e} \underline{g}_\alpha \underline{g}^e \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\beta} \underline{g}_\sigma \underline{g}^\beta \right). \quad (25)$$

The superscribed * relates to the accompanying reference state \mathcal{L}^* (often called intermediate state). The polar decomposition of $\underline{F}_{(r)}$ leads to

$$\underline{F}_{(r)} = \underline{V}_{(r)} \cdot \underline{Q}_{(r)} \quad (26)$$

\underline{Q} , however, cannot be uniquely determined since the reference state \mathcal{L}^* is a geometrically incompatible state. From (25) we derive an additive decomposition of the total deformation rate

$$\underline{D} = \{\dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\}_s = \left\{ \frac{\dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\}_s + \left\{ \frac{\underline{F} \cdot \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{F}^{-1}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{t})} \tilde{(\tilde{t})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\}_s. \quad (27)$$

Using the polar decomposition the first term on the right hand side reads

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\}_s &= \left\{ \frac{\dot{\underline{V}} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{V}^{-1}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\}_s + \left\{ \frac{\underline{V} \cdot \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{V}^{-1}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\}_s \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\underline{V}} \cdot \underline{V}^{-1} + \underline{V}^{-1} \cdot \dot{\underline{V}}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\underline{V} \cdot \underline{W} \cdot \underline{V}^{-1} - \underline{V}^{-1} \underline{W} \cdot \underline{V}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

We see this expression depends on the arbitrary (local) spin of the reference configuration. The reason is that the substantial time derivative entering this expression is not objective. If, however, the reversible behaviour of the material is isotropic the expression for the work rate reduces to

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{1}{\varrho} \underline{S} : \underline{D} = \frac{1}{\varrho} \underline{S} : \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\underline{V}} \cdot \underline{V}^{-1} + \underline{V}^{-1} \cdot \dot{\underline{V}}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\} + \frac{1}{\varrho} \underline{S} : \left\{ \frac{\underline{F} \cdot \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{F}^{-1}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{t})} \tilde{(\tilde{t})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\}_s \\ &= \frac{1}{\varrho} (\underline{S} \cdot \underline{V}^{-1}) : \frac{\dot{\underline{V}}}{\tilde{(\tilde{r})}} + \frac{1}{\varrho} \underline{S} : \left[\underline{Q} \cdot \left\{ \frac{\dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1}}{\tilde{(\tilde{t})} \tilde{(\tilde{t})}} \right\}_s \cdot \underline{Q}^T \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

This means that the first term on the right hand side and therefore also the second term become independent of the rotation of the reference configuration.

In this case we can define

$$\underline{D} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\underline{V}} \cdot \underline{V}^{-1} + \underline{V}^{-1} \cdot \dot{\underline{V}}}{\tilde{(\tilde{r})} \tilde{(\tilde{r})}} \right\}, \quad (30)$$

as reversible deformation rate and

$$\tilde{\underline{S}} = \underline{S} \cdot \underline{V}^{-1} \quad \text{and} \quad \underline{V} \quad (31)$$

as conjugated pair of stress and strain with respect to the reversible deformations. However, it must be emphasized once more that this is only possible in the case of isotropy of the reversible deformations [4].

We avoid these restrictions when we base our considerations on a multiplicative decomposition of the tensor \underline{q} writing

$$\begin{aligned} q_k^i &= \tilde{g}^{im*} \tilde{g}_{mr}^* \tilde{g}^{rs} g_{sk} = q_{(i)r}^i q_k^r \\ &\text{with } q_k^r = \tilde{g}^{rs} g_{sk} \quad \text{and} \quad q_{(i)r}^i = \tilde{g}^{im*} \tilde{g}_{mr}^*. \end{aligned} \quad (32)$$

This leads again to an additive decomposition of the total deformation rate according to

$$d_k^i = \frac{1}{2} (q^{-1})_{(i)r}^i (\dot{q})_{(r)k} = \frac{1}{2} \left(q^{-1} \right)_{(r)}^i \left(\dot{q} \right)_{(i)k}^r + \frac{1}{2} (q^{-1})_{(i)r}^i \left(\dot{q} \right)_{(r)k}^s q_k^s = d_{(i)k}^i + d_{(i)k}^i. \quad (33)$$

The partial deformation rates $d_{(r)}^i{}_k$ and $d_{(t)}^i{}_k$ are in general unsymmetric tensors. However, their sum is symmetric and only their symmetric parts enter the respective expressions for the partial work rates.

Therefore we can write

$$\dot{w}_{(r)} = \frac{1}{\varrho} s_k^i d_{(r)}^k{}_i = \frac{1}{\varrho} s_r^i \left(q^{-1} \right)_k^r \frac{1}{2} \left(\dot{a} \right)_{(r),i}^k. \quad (34)$$

This means we can

$$\tilde{S}^i{}_k = S_r^i \left(q^{-1} \right)_k^r \quad \text{and} \quad \frac{1}{2} q_{(r)}^i{}_k, \quad (35)$$

consider as conjugated pair of stress and strain with respect to the reversible deformations even in the anisotropic case [19]. In the case of isotropy $\tilde{S}^i{}_k$ becomes symmetric. Then we can also write

$$\dot{w}_{(r)} = \tilde{S}^i{}_k \frac{1}{2} \nabla_{(r)}^k q_{(r)}^i, \quad (36)$$

where

$$\nabla_{(r)}^k q_{(r)}^i = \left(\dot{q} \right)_{(r),i}^k + d_r^k q_i^r - d_i^r q_r^k = \{ (\dot{q})_{.i}^k \}_s, \quad (37)$$

represents the covariant time derivative which corresponds to the Zaremba-Jaumann (objective) time derivative in the space-fixed coordinate system [1, 20]. In the isotropic case also holds [1, 3]

$$\dot{w}_{(r)} = \frac{1}{\varrho} s_k^i \varepsilon_{(r)}^k \nabla_{(r)}^i, \quad (38)$$

with the logarithmic strain tensor

$$\varepsilon_{(r)}^i{}_k = \frac{1}{2} \left(\ln q \right)_{(r),k}^i. \quad (39)$$

For simplicity in the following we restrict ourselves to isotropy of the reversible processes using s_k^i and $\varepsilon_{(r)}^i{}_k$ as conjugated pair of stress and strain.

The first law of thermodynamics states

$$\dot{u} = \dot{w} - \frac{1}{\varrho} q^i|_i + r = \dot{w}_{(r)} + \dot{w}_{(t)} - \frac{1}{\varrho} q^i|_i + r. \quad (40)$$

Herein denote

u : specific internal energy,

q^i : energy flux,

r : specific energy sources.

The energy flux comprehends heat flux and other energy fluxes which may, for instance, due to diffusion of selfequilibrated microstress fields. These other energy fluxes may be mostly small in solid bodies and therefore negligible in many cases. We shall neglect them in the sequel.

Within the frame of our phenomenological theory u must be expressible as a unique function of a finite set of thermodynamical state variables. This set may consist of

ε_k^i : reversible strain,
(r)

s : specific entropy,

b, β_k^i : representative set of internal variables.

Then we can write

$$u = u \left(\varepsilon_k^i, s, b, \beta_k^i \right). \quad (41)$$

Replacing ε_k^i and s by their conjugated state variables, i.e. by the stress s_k^i and the temperature T , by means of Legendre transformations we obtain the specific free enthalpy

$$\psi = u - \frac{1}{\varrho} s_k^i \varepsilon_k^i - Ts = \psi(s_k^i, T, b, \beta_k^i), \quad (42)$$

as thermodynamic state function. From (42) we derive thermic state equation:

$$\varepsilon_k^i = -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial s_k^i} = \varepsilon_k^i(s_k^i, T, b, \beta_k^i) \quad (43)$$

caloric state equation:

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = s(s_k^i, T, b, \beta_k^i). \quad (44)$$

Concerning the changes of the specific free enthalpy we obtain from the equations (42) and (40) the two expressions

$$\dot{\psi} = \dot{w}_{(r)} + \dot{w}_{(i)} - \frac{1}{\varrho} q^i |_{i+r} - \frac{1}{\varrho} s_k^i \varepsilon_k^i - \frac{1}{\varrho} s_k^i \varepsilon_k^i - \dot{T}s - T\dot{s} \quad (45a)$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial s_k^i} s_k^i + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \dot{b} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta_k^i} \beta_k^i. \quad (45b)$$

From the equations (43), (44), (45a) and (45b) we finally derive: balance equation for specific reversible work:

$$\dot{w}_{(r)} = \frac{1}{\varrho} s_k^i \varepsilon_k^i = -s_k^i \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_s^r \partial s_k^i} s_s^r + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial s_k^i} \dot{T} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial b \partial s_k^i} \dot{b} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta_s^r \partial s_k^i} \beta_s^r \right\}, \quad (46)$$

balance equation for remaining specific energy supply:

$$\begin{aligned} \dot{w}_{(i)} - \frac{1}{\varrho} q^i |_{i+r} &= -T \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_k^i \partial T} s_k^i + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \right\} \dot{b} + \frac{\partial}{\partial \beta_k^i} \left\{ \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \right\} \beta_k^i, \end{aligned} \quad (47)$$

balance equation for specific entropy (Gibbs equation):

$$T\dot{s} = \dot{w}_{(i)} - \frac{1}{\varrho} q^i |_{i+r} - \frac{\partial \psi}{\partial b} \dot{b} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta_k^i} \beta_k^i. \quad (48)$$

In the balance equation (48) we have to decompose the evolution of the specific entropy into its reversible part $\dot{s}_{(r)}$ and its irreversible, dissipative part $\dot{s}_{(d)}$ (entropy production):

$$T\dot{s} = T\dot{s}_{(r)} + T\dot{s}_{(d)}. \quad (49)$$

Concerning this decomposition within the frame of a phenomenological theory we have to distinguish four different classes of processes:

- a) strictly reversible, non-dissipative processes governed by state equations and representing a sequence of equilibrium states;
- b) irreversible, dissipative processes characterized essentially by non-equilibrium states;
- c) dissipative processes appearing as a sequence of equilibrium states;
- d) non-dissipative processes appearing as a sequence of equilibrium states but not-governed by state equations.

On the micro-level only the classes a) and b) occur which can be treated within the frame of the classical theory of reversible or irreversible processes, respectively. The existence of class c) is due to the fact that some irreversible processes on the micro-level may have very short relaxation times. Thus these dissipative processes appear on the macro-level as a sequence of equilibrium states as, for instance, plastic deformations. The occurrence of processes of class d) is a consequence of the fact that on the macro-level we are dealing in a so-called small (incomplete) state space. Therefore certain non-dissipative processes become dependent on the history of the processes as, for instance, anisotropic hardening (and softening) due to inelastic deformations and connected with storing and restoring of mechanical energy.

From these facts it follows that the contributions to the entropy production have to be defined within the constitutive law. These contributions comprehend:

1. the immediately dissipated specific work

$$\dot{w}_{(d)} = \dot{w} - \dot{w}_{(i)}, \quad (50)$$

where $\dot{w}_{(i)}$ denotes the specific mechanical work stored in changes of the internal structure of the material,

2. the irreversible part of heat flux

$$-\frac{1}{\varrho T} q^i T|_i,$$

3. the entropy production $T\dot{\eta}$ due to other dissipative processes which may be involved in internal processes, in energy supply by sources, and (as far as not negligible) in energy fluxes different from heat.

According to the second law of thermodynamics the entropy production cannot become negative. This means

$$T\dot{s}_{(d)} = \dot{w}_{(d)} - \frac{1}{\varrho T} q^i T|_i + T\dot{\eta} \geq 0. \quad (51)$$

The dissipative (rate dependent and rate independent) processes can be treated by means of so-called dissipative potentials. How this can be done shall not be discussed here. We refer to [21].

Within the thermodynamical frame which is given by the relations (42) and (46) to (51) the constitutive law has to be defined. It consists of

- a) state function for the specific free enthalpy governing also immediately the reversible processes,
- b) evolution laws for the non-reversible deformations,
- c) evolution laws for the internal variables,
- d) flux laws for energy (heat flux and possibly other fluxes)
- e) laws of entropy production $(\dot{w}, T\dot{\eta})$.

As already mentioned we shall disregard energy fluxes different from heat. In this case the evolution laws for the internal variables degenerate to first order ordinary differential equations in time of the form

$$\dot{b} = \dot{b}(s_k^i, T, b, \beta_k^i, \overset{\nabla}{s}_k^i, \dot{T}), \quad (52a)$$

$$\overset{\nabla}{\beta}_k^i = \overset{\nabla}{\beta}_k^i(s_k^i, T, b, \beta_k^i, \overset{\nabla}{s}_k^i, \dot{T}). \quad (52b)$$

Otherwise they represent first order partial differential equations containing also the gradients of the state variables (for more details see [1]).

3. Some different models concerning the constitutive law in thermoplasticity

Many different models of constitutive laws are introduced in order to describe the inelastic behaviour of solid bodies, particularly of polycrystalline metals. Some of them are more directed to small deformations occurring in creep and relaxation processes. Others aim at large deformations in general processes. Another group deals with special problems connected with solid phase transformations occurring in quenching processes [22 to 24] or in deformations of so-called memory-alloys [25, 26]. All these models fit the frame of the general material model given in fig. 1. They emphasize special features respectively. In this paper we cannot give a comprehensive survey of all existing theories. Only four of them are selected to demonstrate some different points of view.

3.1 Krempl's and Cernocky's theory of thermo-viscoplasticity. Krempl's and Cernocky's theory of thermo-viscoplasticity [27], [28] relates primarily to creep and relaxation processes. Therefore it takes into account only small strains. The central constitutive equation reads

$$m[\sigma_{ik}, \varepsilon_{ik}, T]\dot{\psi}_{ik} - k[\sigma_{ik}, \varepsilon_{ik}, T]\dot{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik} - G_{ik}[\varepsilon_{rs}, T], \quad (53)$$

with

$$\psi_{ik} = \frac{\nu \varepsilon_{nn}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ik} + \frac{\varepsilon_{ik}}{1+\nu} - \frac{\alpha}{1-2\nu} (T - \dot{T}) \delta_{ik}, \quad (54)$$

$\nu[\varepsilon_{ik}, T]$: Poisson's ratio,

$\alpha[T]$: coefficient of thermal expansion.

Assuming

$$\frac{m[\sigma_{ik}, \varepsilon_{ik}, T]}{k[\sigma_{ik}, \varepsilon_{ik}, T]} = E[T] \quad (55)$$

equation (53) can be transformed into an equivalent integral equation

$$\sigma_{ik} = G_{ik}[\varepsilon_{rs}, T] + \int_{\sigma}^{\dot{\sigma}} \left\{ E[T(\tau)] \frac{d\psi_{ik}}{d\varepsilon_{rs}} - \frac{dG_{ik}}{d\varepsilon_{rs}} \right\} \left\{ \exp - \int_{\tau}^{\dot{\sigma}} \frac{ds}{k[s]} \right\} \dot{\varepsilon}_{rs} d\tau. \quad (56)$$

$$m[\sigma_{ik}, \varepsilon_{ik}, T], \quad k[\sigma_{ik}, \varepsilon_{ik}, T], \quad G_{ik}[\varepsilon_{rs}, T], \quad \nu[\varepsilon_{ik}, T], \quad \text{and} \quad \alpha[T]$$

have to be determined experimentally.

This theory which does not contain any yield condition is presented in functional form avoiding the introduction of internal variables. The disadvantage of such a theory, however, is that it can not include such phenomena like recrystallization or solid phase transformations, since in that case m and k do not depend any more on the total strain uniquely.

3.2 Hart's theory of thermo-viscoplasticity. Hart's theory of thermo-viscoplasticity [29 to 31] intends to cover the whole field of non-elastic deformations, i.e. as well viscoplastic processes as thermally activated creep and relaxation processes. The theory is based on a material model whis is scetched in fig. 3 using the customary rheological diagram representations.

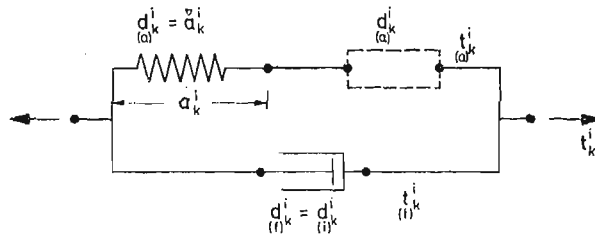


Fig. 3. Hart's material model

The constitutive law consists of the following set of equations (omitting the reversible processes)

$$d_{(i)k}^i = d_{(f)k}^i = \frac{d}{\sigma} \frac{(\dot{f})}{(f)} t_{(f)k}^i, \quad (57)$$

$$d_{(a)k}^i = \frac{d}{\sigma} \frac{(\dot{\alpha})}{(\alpha)} t_{(a)k}^i, \quad (58)$$

$$t_{(a)k}^i = M \alpha_{(a)k}^i, \quad (59)$$

$$d_{(i)k}^i = g(T) \left(\frac{\sigma}{M} \right)^n \frac{(\dot{f})}{(f)}, \quad (60)$$

$$\ln \left(\frac{\sigma^*}{\sigma} \right) = \left\{ \frac{f}{d} \left(\frac{\sigma^*}{G} \right)^m e^{-\frac{Q}{RT}} \right\}^\lambda \quad (61)$$

$$\text{for } \frac{\sigma^*}{\sigma} > 1,$$

$$\frac{\dot{\sigma}^*}{\sigma^*} = \frac{dI(\sigma^*, \sigma)}{(\alpha)} \quad (62)$$

In these formulas denote

$$t_k^i = s_k^i - \frac{1}{3} s_r^r \delta_k^i: \text{ stress deviator}$$

$$\sigma = \sqrt{t_k^i t_k^i}: \text{ stress invariant}$$

$$d = \sqrt{d_k^i d_k^i}: \text{ deformation rate invariant}$$

$$\sigma^* \text{ (hardness): scalar-valued internal variable}$$

a_k^i (stored anelastic strain): tensor-valued internal variable

G : shear modulus

R : gas constant

Q : activation energy

M, m, n, λ, f : constants } to determine

$g(T), I(\sigma^* \sigma)$: material functions } experimentally

t_k^i or t_k^i respectively are not additional internal variables. They are determined by the relations

$$t_k^i = t_k^i + t_k^i \quad (63)$$

and

$$d_k^i = d_k^i = d_k^i + d_k^i = d_k^i + \nabla a_k^i, \quad (64a)$$

or

$$d_k^i = \frac{d}{\sigma} t_k^i = \frac{d}{\sigma} t_k^i + \frac{1}{M} \nabla t_k^i, \quad (64b)$$

which result from the material model (fig. 3).

The system of constitutive equations (57) to (64) is derived from the evaluation of experimental results rather than from fundamental thermodynamical considerations. The scalar-valued constants and material functions can be determined from uniaxial experiments with different loading histories. The integration of the constitutive equations becomes rather complicated in arbitrary processes. The theory simplifies when the viscous overstresses t_k^i can be assumed remaining small.

3.3 Raniecki's theory of thermoplasticity. Raniecki's theory of thermoplasticity [21] is based on the thermodynamical frame given in chapter 2. It is restricted to non-isothermic elastic-plastic deformations. Changes of the internal structure independent of plastic deformations and creep or relaxation processes are not considered. The frame of the theory, however, allows for such extensions.

In the particular case which is fully treated in [21] the specific free enthalpy is assumed in the form

$$\psi = \psi^*(S_k^i, T) + \psi^{**}(T, a, b, \beta_k^i). \quad (65)$$

where a, b, β_k^i represent internal variables.

The corresponding Gibbs equation (48) reads

$$T\dot{s} = \frac{1}{\rho} s_k^i d_{(i)}^k - \frac{1}{\rho} q^i |_{i+r} - \frac{\partial \psi^{**}}{\partial a} \dot{a} - \frac{\partial \psi^{**}}{\partial b} \dot{b} - \frac{\partial \psi^{**}}{\partial \beta_k^i} \overset{\nabla}{\beta}_k^i. \quad (66)$$

The 14 quantities

$$Z_{(r)}: \frac{1}{\rho} s_k^i, \quad -A = -\frac{\partial \psi^{**}}{\partial a}, \quad -B = -\frac{\partial \psi^{**}}{\partial b}, \quad -B_k^i = -\frac{\partial \psi^{**}}{\partial \beta_k^i} \quad (67)$$

are considered as dissipative thermodynamic forces. The conjugated rates (fluxes) are

$$\dot{Z}_{(r)}: d_{(i)}^k, \dot{a}, \dot{b}, \overset{\nabla}{\beta}_k^i. \quad (68)$$

The existence of a dissipation potential $\Phi(\dot{Z}_{(r)})$ with the property

$$Z_{(r)} = \frac{\partial \Phi(\dot{Z}_{(r)})}{\partial \dot{Z}_{(r)}} \quad (69)$$

is assumed defining the entropy production. For rate independent plastic behaviour Φ must be a homogenous function of order one with respect to $\dot{Z}_{(r)}$.

Now the existence of additional yield conditions in the space of the dissipative thermodynamic forces is assumed which may also depend explicitly on the state variables. They are chosen in the special form:

$$F^{(1)} = [(t_k^i - B_k^i)(t_k^i - B_k^i)]^{1/2} - Y^{(1)}(A, b, T) = 0, \quad (70a)$$

$$F^{(2)} = [B_k^i B_k^i]^{1/2} - Y^{(2)}(B, T) = 0. \quad (70b)$$

The resulting rate equations (evolution laws) read

$$d_{(i)}^k = \begin{cases} \lambda^{(1)} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial s_k^i} & \text{if } F^{(1)} = 0, \quad \lambda^{(1)} > 0, \\ 0 & \text{if } F^{(1)} < 0, \end{cases} \quad (71a)$$

$$\overset{\nabla}{\beta}_k^i = \begin{cases} d_{(i)}^k - \lambda^{(2)} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial B_k^i} & \text{if } F^{(1)} = F^{(2)} = 0, \quad \lambda^{(1)} > 0, \quad \lambda^{(2)} > 0, \\ d_{(i)}^k & \text{if } F^{(1)} = 0, \quad \lambda^{(1)} > 0, \quad F^{(2)} < 0, \\ -\lambda^{(2)} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \beta_k^i} & \text{if } F^{(2)} = 0, \quad \lambda^{(2)} > 0, \quad F^{(1)} < 0, \\ 0 & \text{if } F^{(1)} < 0, \quad \lambda^{(2)} < 0, \end{cases} \quad (71b)$$

$$\dot{a} = \begin{cases} -\lambda^{(1)} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial A} & \text{if } F^{(1)} = 0, \quad \lambda^{(1)} > 0, \\ 0 & \text{if } F^{(1)} < 0, \end{cases} \quad (71c)$$

$$\dot{b} = \begin{cases} -\lambda^{(2)} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial B} & \text{if } F^{(2)} = 0 \quad \lambda^{(2)} > 0 \\ 0 & \text{if } F^{(2)} < 0. \end{cases} \quad (71d)$$

The quantities $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ can be calculated from the consistency conditions $\dot{F}^{(1)} = 0$ or $\dot{F}^{(2)} = 0$, respectively.

The inelastic behaviour is completely governed by the two yield conditions (70a) and (70b). It should be emphasized that $F^{(2)}$ does not depend on the stresses. Therefore it does not represent a yield condition in the stress space.

If the general form of the yield conditions is given as proposed by (70a) and (70b) then the constitutive law can be determined immediately from experimental investigations of simple cyclic processes. Therefore this theory may prove its ability particularly for such cyclic processes .

3.4 Another proposal for the constitutive law of thermoplasticity. The author has proposed a generalized constitutive law as well for elastic-plastic as for elastic-viscoplastic behaviour [1, 2]. Changes of the internal structure of the material as, for instance, by recrystallization or solid phase transformations can be included. Long time creep and relaxation processes represent a separate mechanism which can be added as indicated in the material model fig. 1. This will not be treated here.

The theory is embedded in the frame developed in chapter 2. The specific free enthalpy is assumed to be given in the form (42) which can be specialized in many cases to

$$\begin{aligned} \psi(s_k^i, T, b, \beta_k^i, \alpha_k^i) &= \psi^*(s_k^i, T) + \psi^{**}(T, b, B, A) \\ \text{with } B &= \beta_k^i \beta_k^k \quad \text{and} \quad A = \alpha_k^i \alpha_k^k. \end{aligned} \quad (72)$$

b , β_k^i , and α_k^i represent internal variables. From (72) we derive by means of the thermic state equation (43) the incremental law for the reversible deformations

$$d_{(r)}^i = d_{(r)}^i(s_k^i, T, s_k^i, T). \quad (73)$$

In many cases it can be approximated by a linear hypoelastic law [1, 32]

$$d_{(r)}^i = \frac{1}{2G} \nabla_k^i t_k^i + \left\{ \frac{1}{qK} \dot{s}_r^i + \alpha \dot{T} \right\} \delta_k^i. \quad (74)$$

Concerning the balance equation for the remaining specific energy supply (47) we obtain from (72)

$$\underbrace{\dot{w}}_{(h)} + \underbrace{\dot{w}}_{(d)} - \frac{1}{\rho} q^i |_{i+r} = c_p \dot{T} + B_i^k \nabla_k^i s_k^i + h \dot{b} + g \dot{B} + d \dot{A}$$

$$\text{with} \quad c_p = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}, \quad B_i^k = -T \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial s_k^i \partial T} \quad (75)$$

$$h(T, b, B, A) = \frac{\partial i}{\partial b}, \quad g(T, b, B, A) = \frac{\partial i}{\partial B}, \quad d(T, b, B, A) = \frac{\partial i}{\partial A},$$

$$i = \psi^{**} - T \frac{\partial \psi^{**}}{\partial T}.$$

With respect to the inelastic deformations apart from thermally activated creep and relaxation processes we assume that two different mechanisms contribute to these deformations. Therefore we put

$$d_k^i = d_{(p)}^i + d_{(s)}^i \quad (76)$$

and accordingly

$$\dot{w} = \frac{1}{\varrho} s_k^i d_{(i)}^k = \frac{1}{\varrho} s_k^i d_{(p)}^k + \frac{1}{\varrho} s_k^i d_{(s)}^k = \dot{w}_{(p)} + \dot{w}_{(s)}. \quad (77)$$

$d_{(p)}^i$ represents the plastic or viscoplastic deformations resulting from slip processes which are governed by the actual stress state. $d_{(s)}^i$ is connected with certain rearrangements of the distribution of lattice defects due to stress increments. In principle we assume that these two different mechanism depend on different yield surfaces $F^{(p)}$, $F^{(s)}$ which are defined in the space of the thermodynamic state variables and can be interpreted as yield conditions in the stress space (depending on the remaining state variables). Restricting ourselves for the present to plastic deformations we can write

$$F^{(p)} = F^{(p)}(s_k^i, T, b, \beta_k^i) = 0, \quad (78)$$

$$F^{(s)} = F^{(s)}(s_k^i, T, b, \alpha_k^i) = 0. \quad (79)$$

The introduction of an additional internal variable α_k^i into (79) is necessary in order to allow for independent changes of (78) and (79).

Concerning the corresponding deformation rates we assume

$$d_{(p)}^i = \lambda \frac{\partial F^{(p)}}{\partial s_k^i}, \quad (80)$$

$$d_{(s)}^i = R \overset{\nabla}{(t_k^i - \alpha_k^i)}, \quad R(t_k^i, T, b, A). \quad (81)$$

This means that $d_{(p)}^i$ is governed by the normality rule and that $d_{(s)}^i$ depends primarily on the changes of the effective stress

$$\tilde{t}_k^i = t_k^i - \alpha_k^i. \quad (82)$$

The internal variables α_k^i , β_k^i represent the so-called back-stresses. Concerning the evolution laws of the internal variables we suppose that they reflect an interaction between hardening or softening processes due to inelastic deformations $d_{(p)}^i$ and $d_{(s)}^i$ on the one hand and certain annealing processes (recrystallization, recovery) on the other hand. Therefore we write

$$\dot{b} = \frac{\delta}{\varrho} (t_k^i - \alpha_k^i) d_{(s)}^k + \frac{\mu}{\varrho} (t_k^i - \beta_k^i) d_{(p)}^k - b \vartheta(s_k^i, T, b, B, A), \quad (83a)$$

$$\beta_k^i = \nu d_{(p)}^i - \beta_k^i \vartheta(s_k^i, T, b, B), \quad (83b)$$

$$\alpha_k^i = \zeta d_{(s)}^i - \alpha_k^i \vartheta(s_k^i, T, b, A). \quad (83)$$

Decomposing the specific work rate \dot{w} into the immediately dissipated part $\dot{w}_{(d)}$ and the stored part $\dot{w}_{(h)}$ according to

$$\dot{w}_{(p)} + \dot{w}_{(s)} = \dot{w}_{(i)} = \dot{w}_{(d)} + \dot{w}_{(h)} \quad (84)$$

(see eq. (50)) and defining the entropy production $T\dot{\eta}$ due to internal processes we obtain from the balance equation (75) certain restrictions for the evolution laws (83a) to (83c) for the internal variables. Putting the resulting expressions into the consistency condition for the plastic deformations

$$\dot{F}^{(p)} = 0 \quad (85)$$

we can calculate the factor λ in (80).

The requirement $\lambda > 0$ leads to the so-called loading condition. For details see [1].

The theory simplifies when we assume coinciding yield conditions

$$F^{(p)} = F^{(s)} = F. \quad (86)$$

Then the additional internal variable α_k^l is dispensable. This case is treated fully in [1]. There also the extension of this approach to elastic-viscoplastic behaviour can be found. The material functions and parameters entering this approach can not be determined only from simple monotonic or cyclic experimental tests since the theoretical frame supposes two independent yield mechanisms. Therefore additional experiments with non-proportional loading pathes are needed as shown in [33].

4. Some additional remarks

The approach described in 3.4 introduces in common with Raniecki's theory an additional yield condition. In contradiction to Raniecki's theory this second yield condition contains also the stresses. Furthermore in the approach 3.4 the corresponding yield mechanism is not governed by the normality rule. This leads to the appearance of an additional term (81) in the evolution law for the inelastic deformations. A similar term appears also in Hart's theory as equation (64b) shows. Therefore the approach 3.4 combines some features of Hart's and Raniecki's theory, whereas Krempl's and Vernocki's theory follows another concept.

Experimental investigations with regard to the constitutive law concern the determination of subsequent yield conditions after different pre-loading histories on the one hand and inquiries on stress-strain-temperature relations (yield mechanisms) in different loading processes on the other hand. The investigation of subsequent yield conditions leads to different results depending on the method of determination [34 to 40].

Experiments with partial unloading [35 to 39] may result in definitions of yield conditions which don't enclose the stress origin as fig. 4 shows. On the other hand experiments with total unloading [39 to 40] may lead to concave yield conditions (see fig. 5)

Yield conditions which do not enclose the stress origin cannot be associated with deformation rates governed by the normality rule if the corresponding yield mechanism

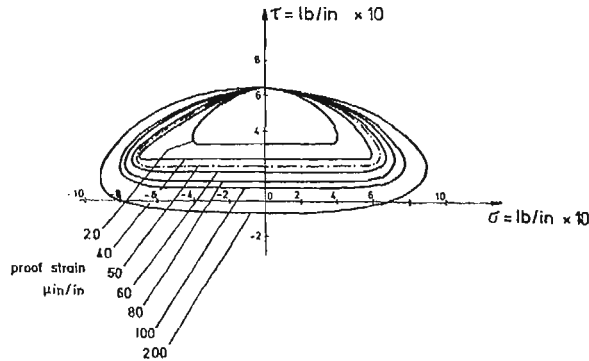


Fig. 4. Effect of proof strain on subsequent yield surface after partial unloading (IKEGAMI [39])

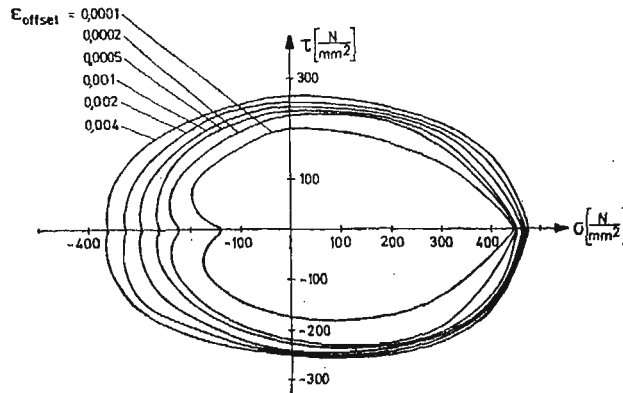


Fig. 5. Effect of proof strain on subsequent yield surface after total unloading (GUPTA, LAUERT [40])

is considered to be essentially dissipative. This would contradict the second law of thermodynamics.

Therefore the experimental facts suggest an approach with two different yield mechanisms as discussed in 3.4. One main aspect is sketched in fig 6. The inner yield condition $F^{(s)}$ belongs to (small) deformation rates \dot{d}_k^i which are not governed by the normality rule. These deformations are connected with certain rearrangements of the distribution of lattice defects and represent essentially nondissipative processes. The outer yield condition $F^{(p)}$ corresponds to the usual definition of plastic yielding. Within the stress space between $F^{(s)}$ and $F^{(p)}$ we obtain apart from the strictly reversible deformations represented by $\dot{d}_k^{(r)}$ only small additional deformations represented by $\dot{d}_k^{(s)}$ until also the yield condition $F^{(p)}$ is fulfilled. This cooperation between $F^{(s)}$ and $F^{(p)}$ can explain the hysteresis loop in unloading — reloading and the difference in the behaviour at reloading and at loading in the opposite direction after unloading.

However, it may be emphasized once more that independent of the respective correlation of the two yield conditions, even if they coincide, an influence of the existence

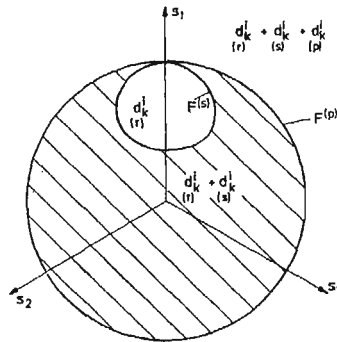


Fig. 6. Yield surfaces $F^{(s)}$ and $F^{(p)}$

of a second yield mechanism remains with respect to the stress-strain relations in complex loading histories loading to certain (small) deviations from the normality rule.

The existence of a second yield mechanism is also suggested by the experiments of Feigen [41] repeated and extended by Mazilu and Damm [42]. Fig. 7 shows that in the immediate transition from pure tension to an additive torsion in stress-controlled experiments with thin-walled tubes the shear modulus appears reduced (see also [43]). This transition represents a neutral loading independent of the special shape of the plastic yield condition supposed it is regular. According to the classical theory of plasticity the response of the material should be purely elastic.

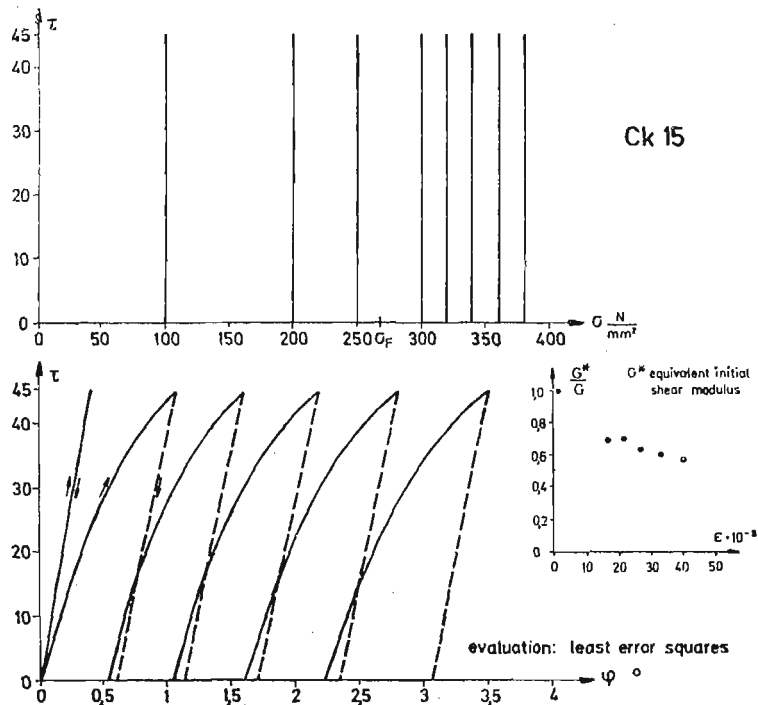


Fig. 7. Stress-controlled tension-torsion experiment (see also FEIGEN [41])

The difference between the material response in neutral loading and in unloading which is obvious from the experimental facts shown in fig. 7 suggests immediately to suppose the existence of an additional yield mechanism as assumed in the approach 3.4. Other physical facts which support this approach are the better agreement between theoretical and experimental results in bifurcation problems and other problems with complex loading histories [33].

In bifurcation problems also the coupling between thermal and mechanical processes becomes important. The beginning of localization of inelastic deformations leads also to a certain concentration of heat production. This can influence the further development of localization very strongly.

References

1. Th. LEHMANN, *General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic plastic and elastic-viscoplastic deformations*; in: The constitutive law in thermoplasticity (ed. Th. Lehmann), CISM Courses and Lectures No. Springer-Verlag Wien/New York (1983).
2. Th. LEHMANN, *Einige Aspekte der Thermoplastizität*; ZAMM 63 (1983), T. 3/13.
3. K. THERMANN, *Foundations of large deformations*; in: The constitutive law in thermoplasticity (ed. Th. Lehmann), CISM Courses and Lectures No. Springer-Verlag Wien/New York (1983).
4. D. B. MACVEAN, *Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs — und Verzerrungstensoren*, ZAMP 19 (1968), 157/85.
5. J. G. OLDROYD, *On the formulation of the rheological equations of state*, Proc. R. Soc. A 200, 523/41 (1950).
6. Th. LEHMANN, *Einige Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der Klassischen Kontinuumsmechanik*, Ing. Arch. 29 (1960), 316/30.
7. Th. LEHMANN, *Einige ergänzende Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der Klassischen Kontinuumsmechanik*, Ing. Arch. 31 (1962), 371/84.
8. J. MANDEL, *Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte*, Int. J. Sol. Struct. 17 (1981), 873/78.
9. J. MANDEL, *Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal*, Journ. Méc. theor. et appl. 1 (1982), 7/23.
10. F. SIDOROFF, *The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain*, Arch. Mech. 25 (1973), 299/308.
11. S. NEMAT-NASSER, *Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity*, Int. J. Sol. Struct. 15 (1979), 155/66.
12. S. NEMAT-NASSER, *On finite deformation elasto-plasticity*, Int. J. Sol. Struct. 18 (1982), 857/72.
13. E. H. LEE and R. M. McMEEKING, *Concerning elastic and plastic components of deformation*, Int. J. Sol. Struct. 16 (1980) 715/21.
14. V. A. LUBARDA and E. H. LEE, *A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance*, J. Appl. Mech. 48 (1981) 35/40.
15. E. H. LEE, *Some comments on elastic-plastic analysis*, Int. J. Sol. Struct. 17 (1981) 859/72.
16. L. I. SEDOV, *Introduction to the mechanics of a continuous medium* (translated from Russian), Addison-Wesley, London, 1965.
17. A. E. GREEN and P. M. NAGHDI, *A general theory of an elastic-plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal. 18 (1965) 261/81.
18. A. E. GREEN and P. M. NAGHDI, *Some remarks on elasti-plastic deformation at finite strain*, Int. J. Eng. Sci. 9 (1971) 1219/29.
19. Th. LEHMANN, *Some remarks on the decomposition of deformations and mechanical work*, Int. J. Eng. Sci. 20 (1982) 281/88.

20. Th. LEHMANN, *Formänderungen eines Klassischen Kontinuums in vierdimensionaler Darstellung*, in: Proc. XI Int. Congr. Appl. Mech. München 1964 (ed. H. Görtler), 376/82, Springer-Verlag Berlin (Heidelberg) New York 1966.
21. B. RANIECKI, *Thermodynamic aspects of cyclic and monotone plasticity*, in: The constitutive law in thermoplasticity (ed. Th. Lehmann), CISM Courses and Lectures No Springer-Verlag Wien/New York (1983).
22. HAN-JONG YU, *Berechnung von Abkühlungs-, Umwandlungs-, Schweiss-owie Verformungseigen-spannungen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente*, Diss. Univ. Karlsruhe 1977.
23. T. INOUE and B. RANIECKI, *Determination of thermal-hardening stress in steels by use of thermoplasticity*, J. Mech. Phys. Sol. 26 (1978), 187/212.
24. T. INOUE, S. NAGAKI, T. KISHINO and M. MONKAWA, *Description of transformation kinetics, heat conduction and elastic-plastic stress in the course of quenching and tempering of some steels*, Ing. Arch. 50 (1981), 315/27.
25. I. MILLER, *Thermodynamic theories thermoplasticity and special cases of thermoplasticity*, in: CISM Courses and Lectures No. Springer-Verlag Wien/New York 1983.
26. L. DELANG, R. V. KRISHAN, H. TAS and H. WARLIMONT, *Thermoelasticity, pseudoplasticity and the memory effects associated with martensitic transformations*, J. Mat. Sci. 9 (1974), 1521/35, 1536/44, 1545/55.
27. E. P. CERNOCKY and E. KREMPL, *A theory of viscoplasticity based on infinitesimal total strain*, Acta Mech. 36 (1980), 263/89.
28. E. P. CERNOCKY and E. KREMPL, *A theory of thermoviscoplasticity based on infinitesimal total strain* Int. J. Sol. Struct. 16 (1980), 723/41.
29. E. W. HART, *Constitutive relations for the nonelastic deformation of metals*, Trans. ASME J. Eng. Matls. Techn. 98 (1976), 193/202.
30. E. W. HART, *Constitutive relations for non-elastic deformations*, Nucl. Eng. Design 46 (1978), 179/85.
31. E. W. HART, *The effects of material rotations in tension-torsion testing*, Int. J. Sol. Struct. 18 (1982), 1031/42.
32. Th. LEHMANN, *On large elastic-plastic deformations*; in: Foundations of plasticity (A. Sawczuk ed.) Nordhoff Publ. Comp., Leyden (1973), 571/85.
33. Th. LEHMANN, *Some theoretical considerations and experimental results concerning elastic-plastic stress-strain relations*, Ing. Arch. 52 (1982), 391/403.
34. W. M. MAIR and H. L. D. PUGH, *Effect of prestrain on yield surfaces in copper*, J. Mech. Eng. Sci. 6 (1964), 150/63.
35. A. PHILLIPS and R. L. SIERAKOWSKI, *On the concept of yield surface*, Acta Mech. 1 (1965), 29/35.
36. R. L. SIERAKOWSKI and A. PHILLIPS, *The effect of repeated loading on the yield surface*, Acta Mech. 6 (1968) 217/31.
37. A. PHILLIPS, *The foundations of thermoplasticity — experiments and theory*, in: Topics in applied continuum mechanisc (J. L. Zeman and F. Ziegler, ed.) Springer-Verlag Wien) New York (1974).
38. A. PHILLIPS and CHONG-WON LEE, *Yield surfaces and loading surfaces; experiments and recommendations*, Int. J. Sol. Struct. 15 (1979), 715/29.
39. K. IREGAMI, *Experimental plasticity on the anisotropy of metals*, in: Mechanical behaviour of anisotropic solids, Proc. Euromech. Coll. 115 (J. P. Boehler, ed.) Ed. CNRS Paris (1982), 201/42.
40. N. K. GUPTA and H.-A. LAUERT, *A study of yield surface upon reversal of loading under biaxial stress*, ZAMM 63 (1983).
41. M. FEIGEN, *Inelastic behaviour under combined tension and torsion*, Proc. 2 US Nat. Cong. Appl. Mech. 1954. 469/76.
42. P. MAZILU and U. DAMM, *Some studies to Feigen's experiments*, Internal Report of the Institute of Mechanics, Ruhr-Universität Bochum, unpublished as yet.
43. P. MAZILU, *Verringerung des Anfang-Schubmoduls mit zunehmender axialer Dehnung erklärt mit Hilfe eines plastischhypoelastischen Modells*, ZAMM 64 (1984).

Р е з ю м е

РАССУЖДЕНИЯ О ЗАКОНАХ КОНСТИТУТИВНЫХ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ

В работе обсуждено феноменологическую теорию больших неизотермических деформаций твердых тел, которые можно рассматривать как классические среды. Мы принимаем, что термодинамическое состояние каждого элемента материала однозначно определяется значениями конечного множества переменных состояния, даже в необратимых процессах. Такая феноменологическая теория конечно ограничена до узкого класса материалов и до процессов пробегающих не слишком далеко от термодинамического равновесия.

Streszczenie

ROZWAŻANIA O PRAWACH KONSTITUTYWNYCH W TERMOPLASTYCZNOŚCI

W pracy rozpatrzono fenomenologiczną teorię dużych, nie-izotermicznych odkształceń ciał stałych, które można uważać za ośrodki klasyczne. Zakładamy, że stan termodynamiczny każdego z materialnych elementów jest jednoznacznie zdefiniowany przez wartości skończonego zbioru zmiennych stanu, nawet w procesach nieodwracalnych. Tego rodzaju teoria fenomenologiczna jest oczywiście ograniczona do wąskiej klasy materiałów i do procesów przebiegających niezbyt daleko od równowagi termodynamicznej.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 sierpnia 1983 roku

PLASTIC ZONE SIZE OF DUGDALE TYPE CRACKS IN A SELF-STRESSED TWO-PHASE MEDIUM WITH PARTIALLY PLASTIFIED MATRIX MATERIAL

KLAUS P. HERRMANN and IVAN M. MIHOVSKY¹

*Institute of Mechanics
University of Paderborn
4790 Paderborn, Federal Republic of Germany*

Abstract

Different boundary-value problems are considered concerning the elastic-plastic and fracture behaviour of brittle fibres-ductile matrix composites under thermal loading conditions in both the cases of absence and presence of cracks within the matrix phase. A model of the plastic deformation process is proposed with regard to a single unit cell of the fibre-reinforced composite. Numerous details of the deformation process within this unit cell are investigated by use of the above mentioned model including the possible failure mechanisms of the fibre-matrix bond. If applied together with the known crack model of the Dugdale type the proposed model for the plastic deformation process of a composite unit cell is shown to imply useful conclusions concerning the thermal crack growth of radial Dugdale type cracks within the matrix phase.

Introduction

The investigation of the interaction between the stress fields caused by the presence of different inhomogeneities is a problem of great practical importance. This is actually the basic problem of the mechanics of the composite materials. Of special interest from the point of view of fracture mechanics of the composite structures are the questions concerning the interaction between the structural components and existing cracks within these structures. Both the cases of mechanical and thermal loading of cracked composites have been since long studied and different models of interaction have been already considered by means of both micromechanical analysis and macromechanical theories. The essential features of these two different approaches were characterized in a paper by SMITH [1]. The fibre-reinforced composites consisting of ductile matrices strengthened by continuous brittle fibres form a large class of the commonly used composite materials.

¹ On leave from *the Department of Mathematics and Mechanics, Sofia University, Sofia 1090, Bulgaria*

Thereby numerous investigations concerning the plastic behaviour of fibre-reinforced composites have been performed for example in the papers of HILL [2], SPENCER [3], MULHERN et al. [4], COOPER and PIGGOTT [5]. Comprehensive surveys about the state of the art are given in the Conference Proceedings of the 1975 ASME Winter Annual Meeting [6] as well as in the books of SPENCER [7], KOPIOV and OVCINSKIJ [8] and PIGGOTT [9]. Further, a problem of basic interest represents the micromechanical aspect in thermal cracking of unidirectionally reinforced composites. Thereby, definite progress has been already made in a series of papers by HERRMANN [10 - 12] and HERRMANN and associates [13 - 15] concerning the elastic and viscoelastic behaviour of a cracked unit cell of a low fibre concentration composite under the conditions of different thermal loading. In a recent work by HERRMANN and MIHOVSKY [16] the plastic behaviour of an uncracked unit cell and the mechanisms of failure of the fibre-matrix interface have been analyzed for the case of isothermal longitudinal extension of the composite. The model of the plastic deformation process proposed in [16] is especially attractive for the study of the behaviour of cracks situated within the matrix phase. It is shown in the present paper that this model is applicable to the problem of thermal loading of the composite. Moreover, if combined with the Dugdale model solution of HERRMANN [11] for a crack situated within the matrix phase this above mentioned model of the plastic deformation process implies useful conclusions concerning the fracture behaviour of the considered unit cell of a unidirectionally reinforced composite.

Statement of the problem

A unidirectionally reinforced fibrous composite with continuous fibres and relatively small fibre volume fraction is considered. The fibre material is linear elastic with Young's modulus E_f , Poisson's ratio ν_f and the thermal expansion coefficient α_f . The material of the matrix is elastic-perfectly plastic with corresponding elastic constants E_m and ν_m , thermal expansion coefficient α_m and tensile yield stress σ_y . The thermoelastic properties of the fibre and matrix materials as well as the yield stress of the latter are assumed to be temperature independent.

A unit cell of this fibre-reinforced composite in the sense of the well-known model of two coaxial fibre-matrix cylinders is studied in the following where if referred to a cylindrical coordinate system (r, θ, z) the fibre and the matrix occupy the regions $(0 \leq r \leq r_f, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty)$ and $(r_f \leq r \leq r_m, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty)$, respectively. Thus, equation $r = r_f$ is the equation of the fibre-matrix interface.

The following is assumed with regard to the cracked composite unit cell. The crack is situated within the matrix phase and is presented in the cross section of the unit cell (cf. Fig. 1) by a straight line cut along the polar axis $\theta = 0$. The crack occupies the segment $r_l \leq r \leq r_r$ so that r_l and r_r denote the radial coordinates of the left and the right crack tip, respectively. The crack length of the actual crack is $2l = r_r - r_l$.

The well-known elastic-plastic model of a crack proposed by DUGDALE [17] will be applied in the following analysis. The crack of length $2L = R_r - R_l$ shown in Fig. 1 presents the imaginary crack in the sense of this model. The segments $R_l \leq r \leq r_l$ and $r_r \leq r \leq R_r$,

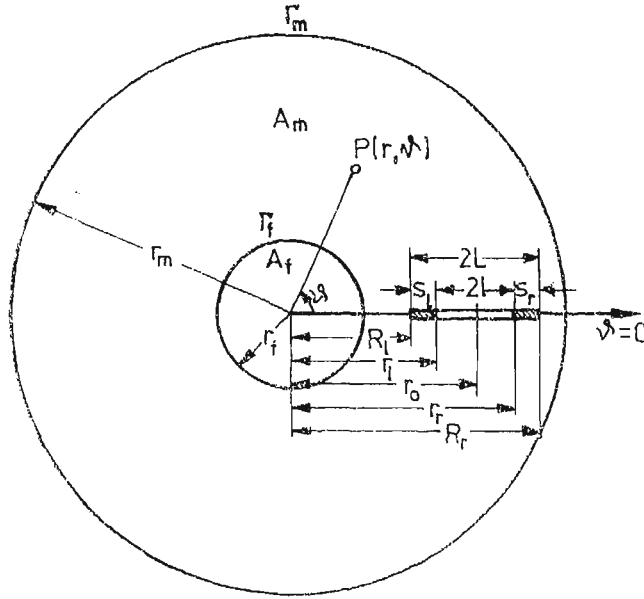


Fig. 1. Dugdale type crack configuration in the cross section of a composite unit cell

present the thin plastic zones at the tips of the actual crack. The plastic zone lengths at the left and the right crack tips are thus $s_l = r_l - R_l$ and $s_r = R_r - r_r$, respectively.

A quasi-static thermal loading of the unit cell will be considered which implies a temperature distribution over the cross section of the form (cf. Fig. 1 for notation)

$$T(r, \theta) = \begin{cases} T_f, & 0 \leq r \leq r_f \\ T_m, & r_f \leq r \leq r_m \end{cases} \quad (1)$$

The temperatures T_f and T_m do not depend on the axial coordinate z and are constants at each given instant of the deformation process so that the latter is viewed as a sequence of stress-strain states of the cell corresponding to a sequence of stationary temperature distributions of the form (1).

From the viewpoint of a quasi-static crack propagation behaviour such loading conditions are of interest only which result in the appearance of tensile circumferential stresses within the uncracked matrix phase. According to HERRMANN [18] these conditions are satisfied for the elastic state of the unit cell provided the inequality

$$(1 + \nu_f) \alpha_f (T_f - T_0) - (1 + \nu_m) \alpha_m (T_m - T_0) > 0, \quad (2)$$

holds true where T_0 is the temperature of the unstressed initial state. Under the simplifying assumption $T_0 = 0$ relation (2) is obviously satisfied if, for example, $T_f = 0$ and $T_m < 0$. This case will be actually considered in the following calculations. The thermal loading process will be thus viewed as a process of monotonous quasi-static decrease of the itself negative temperature of the matrix phase. The accepted loading conditions provide obviously an axisymmetric state of stress within the uncracked composite cell. The axial symmetry together with the standard assumptions of perfect fibre-matrix contact and

generalized plane strain imply the evident result that the normal stresses within the uncracked unit cell are at the same time principal ones and depend on the radial coordinate only.

The elastic state of the considered unit cell for both cases of absence and presence of a crack in the matrix phase has been described in detail by Herrmann [11, 18]. These elastic solutions concern a cell with a traction-free external surface $r = r_m$ and traction-free or partially loaded crack surfaces in the sense of the applied Dugdale model. These same conditions are supposed to apply in the here considered elastic-plastic problem as well.

The condition of axial symmetry together with the assumed scheme of loading implies certain obvious features of the elastic-plastic state of the uncracked unit cell in accordance with the above mentioned elastic solution [11]. These are that the plastic zone presents itself an infinitely long cylinder ($r_f \leq r \leq r_c$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$; $r_c \leq r_m$) and spreads with developing thermal loading, i.e. with decreasing matrix temperature, into the matrix coating. The equation of the current elastic-plastic boundary could be then written in the form $r_c = r_c(T_m)$.

Finally, it will be assumed that the crack length $2l$ is small compared with the radius r_m and that the crack itself is situated relatively far-away from the fibre. This implies the possibility of neglecting the effect of the crack on the stress-strain state within the matrix region just surrounding the fibre where the plastic deformation process actually develops. Then, the latter could be viewed as an axisymmetric one as in the case of an uncracked unit cell.

With this in mind the thermal stress field within the cracked matrix phase could be considered to be a superposition of the following two fields. The first one is the elastic-plastic stress field for the uncracked unit cell while the second one is the field resulting from the presence of a Dugdale type crack.

The plastic deformation process

The model of the plastic deformation process proposed in [16] will be generalized in the present paper with regard to the considered thermal loading problem. The possibility for such a generalization follows from the fact that this model is based in general upon certain effects of the fibre-reinforcement which are common for both the isothermal [16] and the here considered thermal problem. Firstly, to these effects belongs the so-called „shrinkage effect”, i.e. the appearance of compressive radial stresses over the fibre-matrix interface. One comes up with this effect provided relation (2) is satisfied which is actually the here considered case. Secondly, in accordance with the elastic solution [18] the fibre acts as a stress concentrator. Because of the local nature of this stress concentration effect one could expect that especially for the considered composites with low fibre volume fractions intensive plastic deformation and even fracture processes may develop within the immediate surrounding of a fibre whereas at a certain distance from the fibre-matrix interface the matrix material may deform still elastically. Thirdly, it is well-known from experimental observations that because of the strengthening effect of the fibre the be-

haviour of the composite „in the fibre direction” is rather elastic-like than perfectly-plastic. This implies the reasonable assumption that the fibre, consisting itself of linearly elastic material with a high stiffness, contributes due to the assumed perfect fibre-matrix contact to the development of a relatively large elastic part ε_z^e of the total axial strain ε_z within the plastificated region and prevents thus the occurrence of a corresponding large plastic part ε_z^p . In other words in the course of the deformation process one should permanently account for the current elastic part of the axial strain. It is obvious that for the considered regime of thermal loading both the ε_z^e - and ε_z^p -strains should be monotonously increasing in absolute value functions in dependence of the absolute value of the matrix temperature. A reasonable restriction concerning the behaviour of the ε_z^e -strain is associated with the assumption that the matrix material is a perfectly-plastic one and its elastic response is thus limited. One should expect correspondingly that for the considered unit cell and type of loading there exists a certain critical value ε_z^{*e} of ε_z^e such that upon reaching this value the current increments of the ε_z^e -strain become negligible with respect to the corresponding increments of ε_z^p . Due to the concentration effect of the fibre this critical value ε_z^{*e} should be first achieved over the fibre-matrix interface.

The account for the just introduced limiting characteristic ε_z^{*e} implies the following natural description of the plastic deformation process. The plastic deformations appear first over the fibre-matrix interface and the plastic zone $r_f \leq r \leq r_c$ spreads consequently into the matrix phase. Within this zone both the ε_z^e - and ε_z^p -strains increase simultaneously up to the instant when $\varepsilon_z^e|_{r=r_f} = \varepsilon_z^{*e}$. At this instant a second plastic zone $r_f \leq r \leq R_c$ where $R_c < r_c$ appears within which the relation $\varepsilon_z^e = \varepsilon_z^{*e}$ holds true while the ε_z^p -strain further increases. The second plastic zone also spreads into the matrix phase having the first one, which occupies now the region $R_c \leq r \leq r_c$, at its front $r = R_c$.

The model of the plastic deformation process just considered implies a simple possible scheme of an approximate analysis of the elastic-plastic behaviour of the uncracked composite cell.

Analysis of the uncracked unit cell

In accordance with the standard assumption of the plasticity theory the total axial strain at each instant of the plastic deformation process is a sum of an elastic and a plastic part. As usually it will be assumed that the matrix material is plastically incompressible which implies the validity of the following relation within the plastic zone

$$\varepsilon_{z_{\text{total}}}^e = e_z^e + \frac{1}{3} \varepsilon^{(\text{str})} + \frac{1}{3} \varepsilon^{(\text{temp})}, \quad (3)$$

where e_z^e is the deviatoric axial elastic strain and $\varepsilon^{(\text{str})}$ and $\varepsilon^{(\text{temp})}$ are the relative volume changes associated with the thermal stresses and the thermal expansion respectively, i.e.

$$\varepsilon^{(\text{str})} = -\frac{1-2\nu_m}{E_m} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z), \quad (4)$$

$$\varepsilon^{(\text{temp})} = 3\alpha_m T_m. \quad (5)$$

In equation (4) as well as in the following analysis σ_i , $i = r, \theta, z$ denote the normal stresses within the plastic zone.

It will be further accepted that the stresses and the elastic strains are as usually related by the Hooke's law so that one has in particular

$$\sigma_z = E_m \varepsilon_z^e + \nu_m (\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (6)$$

In equation (6) as well as in the rest of the paper the notation

$$\varepsilon_z^e = \varepsilon_z^e + \frac{1}{3} \varepsilon^{(str)}, \quad (7)$$

is used so that ε_z^e means (cf. equation (3)) the part of the axial elastic strain due to the thermal stresses.

Let the matrix material obey the von Mises' yield condition, i.e. let the stresses σ_i , $i = r, \theta, z$ satisfy the relation

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2\sigma_y^2. \quad (8)$$

Upon substituting for the σ_z -stress from equation (6) into the latter relation one obtains

$$\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{E_m \varepsilon_z^e}{1 - 2\nu_m} \right)^2 \frac{(1 - 2\nu_m)^2}{3} = \frac{\sigma_y^2}{3}. \quad (9)$$

Now it is a matter of simple computation to show that equation (9) is identically satisfied provided the stresses are presented in the form

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = \frac{E_m \varepsilon_z^e}{1 - 2\nu_m} + \frac{\sigma_y}{\sqrt{3} \sin \phi} \cos(\omega \pm \phi), \quad (10)$$

where the notations are used

$$\sin \omega = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}, \quad (11)$$

$$\cotan \phi = \frac{\sqrt{3}}{1 - 2\nu_m}. \quad (12)$$

Equations (10) reflect the implicit assumption that $\sigma_\theta \geq \sigma_r$, which implies in accordance with equation (11) that $0 \leq \omega \leq \pi$.

Substituting now for the stresses σ_r and σ_θ from equations (10) into the equilibrium equation

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (13)$$

one obtains the equation

$$\frac{E_m}{1 - 2\nu_m} \frac{d\varepsilon_z^e}{dr} - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3} \sin \phi} \sin(\omega + \phi) \frac{d\omega}{dr} - \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \frac{\sin \omega}{r} = 0, \quad (14)$$

where ε_z^e is an unknown function of the radial coordinate r and therefore the integration of equation (14) cannot be performed. But an approximate solution of equation (14) can be obtained which is valid at least within the immediate surrounding of the fibre.

This solution is based upon the assumption that within this region the elastic parts of the ε_r - and ε_θ -strain components due to the thermal stresses are negligible with respect to the corresponding plastic parts ε_r^p and ε_θ^p . This implies the relation

$$\varepsilon_z^e = \varepsilon^{str}. \quad (15)$$

Equation (15) together with equations (4), (6) and (10) gives now

$$\frac{\sigma_y(1+\nu_m)}{E_m} \cos\omega = -\varepsilon_z^e \quad (16)$$

The latter relation applies as assumed in a thin layer surrounding the fibre and over the fibre-matrix interface $r = r_f$ in particular where the condition $\varepsilon_z^e = \varepsilon_z^{*e}$ is first achieved. The corresponding value $\omega^* \equiv \omega(\varepsilon_z^{*e})$ of the angle ω follows from equation (16) to be

$$\omega^* = \arccos \left[-\frac{E_m \varepsilon_z^{*e}}{\sigma_y(1+\nu_m)} \right] \quad (17)$$

According to the model of the plastic deformation process proposed in section 3 above a further increase in thermal loading which corresponds to a further decrease in the matrix temperature T_m results in the appearance of a second plastic zone $r_f \leq r \leq R_c$ over the outer boundary of which equation (17) is valid. Finally, assuming that for the considered unit cell and the given scheme of loading the quantity ε_z^{*e} , respectively ω^* (cf. equation (17)) is approximately constant and introducing the angle ω_{R_c} as

$$\omega_{R_c} = \omega(R_c), \quad (18)$$

one obtains

$$\omega_{R_c} = \omega^* \quad (19)$$

where ω^* is a constant now.

Now the latter assumption makes equation (14) integrable within the whole second plastic zone $r_f \leq r \leq R_c$. The result of this integration with the boundary condition $\omega|_{r=R_c} = \omega_{R_c}$ reads

$$\frac{R_c^2}{r^2} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_{R_c}} \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{1-2\nu_m} (\omega - \omega_{R_c}) \right]. \quad (20)$$

Moreover, it could be easily verified that the set of equations (6), (10), (17), (19) and (20) defines the stress state entirely within the second plastic zone $r_f \leq r \leq R_c$, where R_c has still to be determined.

The stress state defined above allows certain important conclusions concerning the fracture behaviour of the considered unit cell. To this end we consider the shrinkage effect again. It is clear from most general positions that this effect is due to the difference in the lateral contraction of the fibre and matrix materials. Because of the plastic incompressibility of the matrix material this difference should be expected to increase in the course of the deformation process. In other words developing plastic deformations should further contribute to the shrinkage effect or, equivalently, the radial stress $\sigma_r|_{r=r_f}$ acting over the fibre-matrix interface should decrease with increasing loading, i.e. with decreasing temperature of the matrix phase. The latter means in accordance with equations (10) that the angle ω_{r_f} should increase in the course of the deformation process remaining

obviously larger than the angle ω^* . Moreover, equations (10) show that there exists a natural limitation of the shrinkage effect in the sense that this effect achieves its maximum at a value of $\omega_{r_f} = \pi - \phi$.

The value R_c^* of the radius R_c at this instant, that is

$$R_{c1}^* = R_c|_{\omega_{r_f}} = \pi - \phi, \quad (21)$$

follows from equation (20) to be

$$R_c^{*2} = r_f^2 \frac{\sin \phi}{\sin \omega_{R_c}} \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{1 - 2\nu_m} (\pi - \phi - \omega_{R_c}) \right]. \quad (22)$$

The model of the process applied here leads thus to the conclusion that further decrease in $\sigma_r|_{r=r_f}$ as well as increase in R_c is impossible. Further, it would be of interest to examine the velocity field corresponding to this limiting state of the plastic deformation process within a unit cell.

To this regard the known concept of the associated flow rule will be applied with the yield function (9) serving as a plastic potential. Simple computations show that in accordance with this concept and the plastic incompressibility condition the plastic strain rates ξ_i , $i = r, \theta, z$ satisfy the relation

$$\xi_z = -\xi_\theta \frac{\Sigma_\theta + \Sigma_r}{\Sigma_\theta}, \quad (23)$$

within the second plastic zone where

$$\left. \begin{matrix} \Sigma_r \\ \Sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \sin(\phi \mp \omega). \quad (24)$$

It is easily observed from the latter equations that $\xi_r|_{r=r_f} \rightarrow +\infty$ when $\omega_{r_f} \rightarrow \pi - \phi$. This result means physically that at this state free plastic flow tends to take place within a thin layer immediately surrounding the fibre. The behaviour of the composite at this state will obviously depend upon the interaction between this tendency and the strengthening effect of the fibre which tends itself to prevent the occurrence of such a singular velocity field. The very nature of these two competing effects implies the reasonable assumption that their interaction results in the occurrence of shearing stresses over the fibre-matrix interface. Moreover, these shearing stresses should be equal for obvious reasons to the shear yield stress $\tau_y = \sigma_y/\sqrt{3}$ of the matrix material.

Let τ_s be the shear strength of the fibre-matrix interface. If $\tau_s \leq \tau_y$, then the very reaching of the considered critical state will obviously result in the immediate failure of the fibre-matrix interface by the so-called debonding effect. If, on the contrary, $\tau_s > \tau_y$, then the known mechanism of fibres pull-out (see, for example [9]) will develop, most probably together with a process of fibre breaking.

Plastic zone size and associated problems

In order to close the solution of the problem for the uncracked unit cell one should complete the results of the previous section with the temperature dependence of the radius of the plastic zone. Moreover, when dealing with a given composite material one should specify the actual value of ε_z^* which should be used in the computations.

The model of the plastic deformation process proposed above implies a simple approach to the latter problem. Starting point for this approach is the additional assumption that the first plastic zone presents itself a thin layer and thus one may consider the relation $R_c = r_c$ to hold approximately true. This assumption appears as acceptable one for the following reasons. Firstly, because of the local nature of the fibre concentration effect and since a low fibre volume fraction composite is considered. Therefore, both the R_c - and r_c -radii should be small compared with the value of r_m . Secondly, because of the low resistance of the matrix material with respect to the occurrence of intense plastic deformation such as the deformations within the second plastic zone are. Thus, one may expect that the transition zone between the elastically deformed matrix region and the second plastic zone is really a thin one. If so, then the first plastic zone could be simply considered to play the role of an elastic-plastic boundary, the latter having the form of a thin layer. Further, because of the thin layer shape of the elastic-plastic boundary a softened version of fulfillment of the standard elastic-plastic transition conditions of continuity of stresses and displacements could be applied, namely the following.

Firstly, because of the layer thinness one should not expect a substantial change of the radial stress within the layer itself which implies the relation

$$\sigma_r|_{r=R_c} = \sigma_r^e|_{r=R_c}, \quad (25)$$

where σ_i^e , $i = r, \theta, z$ are the stresses acting within the elastic region $R_c \leq r \leq r_m$ of the matrix phase. Secondly, these stresses should satisfy the yield condition, equation (8), over the elastic-plastic boundary, that is

$$[(\sigma_r^e - \sigma_\theta^e)^2 + (\sigma_\theta^e - \sigma_z^e)^2 + (\sigma_z^e - \sigma_r^e)^2]|_{r=R_c} = 2\sigma_y^2. \quad (26)$$

In accordance with the general form of the elastic solution of the problem [11, 18] and the results of the previous section one may present the latter equations in the form

$$\frac{E_m}{1+\nu_m} C \left(\frac{1}{r_m^2} - \frac{1}{R_c^2} \right) = \frac{E_m \varepsilon_z^*}{1-2\nu_m} + \frac{\sigma_y}{\sqrt{3} \sin \phi} \cos(\omega_{R_c} + \phi), \quad (27)$$

$$3 \frac{C^2}{R_c^4} = \frac{\sigma_y^2 (1+\nu_m)^2}{E_m^2} - \left[\frac{C(1-2\nu_m)}{r_m^2} - (1+\nu_m)(\varepsilon_z - \alpha_m T_m) \right]^2, \quad (28)$$

where the constant C has to be determined actually.

The remaining elastic-plastic transition conditions could be now viewed as satisfied as well in this way that the corresponding stresses and displacements change continuously within the layer between their values on its „elastic” and „plastic” surface. Thus, the equations (27) and (28), respectively, present the just mentioned softened version of the elastic-plastic transition conditions.

If solved for the unknowns R_c and C the set of equations (27) and (28) implies as a matter of fact the temperature dependence of both R_c and C , respectively, in the form

$$R_c = R_c(T_m, \varepsilon_z; \varepsilon_z^*, E_m, \nu_m, \alpha_m, r_m, \sigma_y), \quad (29)$$

$$C = C(T_m, \varepsilon_z; \varepsilon_z^*, E_m, \nu_m, \alpha_m, r_m, \sigma_y), \quad (30)$$

where ε_z itself is a still unknown function of the matrix temperature T_m .

It is important to mention at this point that with R_c and C once determined from the set of equations (27) and (28) one may consider the axial stresses σ_z and σ_z^e acting within the plastic and elastic regions of the matrix phase, respectively, to be known functions of the same parameters as those in the presentations (29) and (30). The corresponding expressions for these stresses can be easily given by

$$\sigma_z = \frac{1}{1-2\nu_m} (E_m \varepsilon_z^* + 2\sigma_y \cos \omega), \quad r_f \leq r \leq R_c, \quad (31)$$

$$\sigma_z^e = E_m \varepsilon_z + \frac{2\nu_m E_m C}{(1+\nu_m)r_m^2}, \quad R_c \leq r \leq r_m, \quad (32)$$

where both R_c and C can be considered now as known functions of the form given by the equations (29) and (30), respectively.

Further, it is a matter of a simple verification that upon satisfying the continuity condition for the radial stresses over the fibre-matrix interface, i.e. the equation

$$\sigma_r^m|_{r=r_f} = \sigma_r^f|_{r=r_f}, \quad (33)$$

one may construct the expressions for the stresses σ_i^f , $i = r, \theta, z$ acting within the fibre. Thereby the expression for the axial stress σ_z^f reads

$$\sigma_z^f = E_f \varepsilon_z + 2\nu_f \left[\frac{E_m \varepsilon_z^e}{1-2\nu_m} + \frac{\sigma_y}{\sqrt{3} \sin \phi} \cos(\omega_{r_f} + \phi) \right], \quad 0 \leq r \leq r_f, \quad (34)$$

where the value of ω_{r_f} follows from equation (20) with $r = r_f$ and with the quantity R_c given in the form of equation (29).

It is easily observed that the axial stresses as presented by the equations (31), (32) and (34) can be considered now as known functions of T_m and ε_z and the remaining parameters of the problem, i.e. ε_z^e , σ_y and $E_i, \nu_i, \alpha_i, r_i$ where $i = f, m$. These stresses have to satisfy the equilibrium condition for the forces, acting in the axial direction, which in our self-stress problem is given by the following condition of self-equilibrium

$$\sigma_z^f \cdot r_f^2 = 2 \int_{r_f}^{R_c} \sigma_z r dr + (r_m^2 - R_c^2) \sigma_z^e. \quad (35)$$

By substituting for R_c from equation (29) into equation (35) leads to a relation of the form

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z(T_m; \varepsilon_z^e, E_i, \nu_i, \alpha_i, r_i, \sigma_y), \quad (36)$$

where $i = f, m$. Equation (36) represents in fact the equation of the theoretical ε_z versus T_m curve in the framework of the proposed model for the considered two-phase material.

Upon substituting for ε_z from equation (36) into equation (29) one obtains the desired dependence of the plastic zone radius R_c on the matrix temperature T_m . This dependence is obviously of the form

$$R_c = R_c(T_m; \varepsilon_z^e, E_i, \nu_i, \alpha_i, r_i, \sigma_y), \quad (37)$$

where again $i = f, m$.

Note that by applying equation (37) to the critical state of the unit cell, i.e. if $R_c = R_c^*$ (cf. equation (22)), one obtains the critical temperature T_m^* at which one of the

failure modes of the fibre-matrix interface described in section 4 occurs. This critical temperature appears to be of the form

$$T_m^* = T_m^*(R_c^*, \varepsilon_z^e, E_i, \nu_i, \alpha_i, r_i, \sigma_y); \quad i = f, m. \quad (38)$$

Equation (38) implies itself a simple criterion of failure of the fibre-matrix interface of the form

$$T_m = T_m^* \quad (39)$$

Now it is easily observed that the actual value of ε_z^e can be determined by means of a comparison of the theoretically predicted $\varepsilon_z(T_m)$ -curve, equation (36), with a corresponding curve obtained experimentally for the considered composite material.

A simpler approach to the problem consists in the determination of ε_z^e from equation (38) provided the T_m^* - and R_c^* -values in this equation are the values which have been observed experimentally.

The scheme described above does not imply a closed form solution for the quantities R_c and ε_z^e but the associated numerical treatment of the problem is not very complicated. With this in mind one may consider that the whole problem concerning the elastic-plastic behaviour of the uncracked unit cell has been solved completely.

The cracked unit cell

It should be remembered in the following that as accepted in section 2 the thermal stress field within the cracked matrix phase can be considered as a superposition of an elastic-plastic stress field for the uncracked unit cell and a corrective stress field caused by the presence of a crack situated along the segment $R_l \leq r \leq R_r$, $\theta = 0$ of the symmetry line of the cross section of the unit cell. Now the first stress field is known from the preceding analysis, sections 4 and 5. The second stress field will be examined as already mentioned in the framework of the Dugdale crack model [17].

The thermal stress field in the uncracked elastically deformed matrix region is given by the following expressions

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r^e \\ \sigma_\theta^e \end{matrix} \right\} = \frac{E_m}{1+\nu_m} C \left(-\frac{1}{r_m^2} \mp \frac{1}{r^2} \right), \quad R_c \leq r \leq r_m, \quad (39a)$$

$$\sigma_z^e = E_m(\varepsilon_z - \alpha_m T_m) + \frac{2\nu_m E_m}{1+\nu_m} C \frac{1}{r_m^2},$$

where $C = C(T_m, \dots)$ and $R_c = R_c(T_m, \dots)$ can be considered as known functions of the temperature T_m in accordance with the results of the previous section.

The corrective stress field σ_{ij}^e , $i, j = r, \theta, z$ can be obtained from the solution of the following mixed boundary-value problem for a Dugdale type crack with an actual length $2l = r_r - r_l$ and a fictitious length $2L = R_r - R_l$ (cf. Fig. 1 for notation)

$$\sigma_{\theta\theta}^e(r, 0) = \begin{cases} -\sigma_\theta^e, & r_l \leq r \leq r_r, \\ -\sigma_\theta^e + \sigma_y, & R_l \leq r \leq R_l \quad \text{and} \quad r_r \leq r \leq R_r, \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^c(r, 0) &= 0, & \theta &= 0, \quad \forall r, \\ u_\theta(r, 0) &= 0, & \theta &= 0, & R_r \leq r \leq R_l.\end{aligned}\tag{41}$$

The boundary-value problem (40) - (42) has been analyzed in detail by HERRMANN [11]. Applying the results obtained in [11] together with those presented above one immediately obtains the desired plastic zone lengths s_l and s_r (cf. Fig. 1) for our case from the solutions of the equation

$$\frac{E_m C}{2(1+\nu_m)r_m^2} \left\{ 1 + \frac{r_m^2[r_0 \pm (l+s)]}{[r_0^2 - (l+s)^2]^{3/2}} \right\} - \frac{\sigma_y}{\pi} \arccos \frac{l}{l+s} = 0,\tag{43}$$

where s is the unknown and $r_0 = (r_r + r_l)/2$. The quantities s_l and s_r correspond to the upper and lower signs, respectively, in the brackets in equation (43).

Upon solving equation (43) one obtains the plastic zone lengths as functions of the temperature T_m and the actual crack length $2l$, i.e. the relations

$$s_i = s_i(T_m, l), \quad i = r, l.\tag{44}$$

It is well understood that each of the quantities s_i , $i = r, l$ depends in addition on the remaining parameters of the problem as well so that the representations (44) are actually schematic ones. They imply in an obvious way the relations

$$R_i = R_i(T_m, l), \quad i = r, l.\tag{45}$$

The equations (45) present the dependence of the positions of the left and the right tip of the imaginary crack on the current matrix temperature. That dependence could be now considered as known from the solution of equation (43). The latter solution could be itself obtained by means of a numerical treatment [11].

Crack and cell behaviour

As already accepted (cf. equation (38)) let T_m^* be the value of the matrix temperature at which one of the two modes of failure of the fibre-matrix interface (cf. section 4) occurs and let R_l^* be the value of R_l corresponding to this value of the temperature (cf. equation (45)). Then R_l^* defines in fact the position of the left plastic zone tip at the instant of failure of the fibre-matrix interface. Further, let \bar{R}_l be the value of R_l at which the crack begins to grow in accordance with a certain crack growth criterion and let \bar{T}_m be the corresponding matrix temperature, i.e.

$$\bar{R}_l = R_l(\bar{T}_m, l).\tag{46}$$

Then equation (46) corresponds to the equation (45) but now applied to the instant of crack growth initiation. It is assumed implicitly that due to the fibre concentration effect the crack will start to propagate from its left tip toward the fibre.

It follows from the whole scheme of analysis that the values of both quantities R_l^* and \bar{R}_l , respectively, appear as specific ones for each given cracked unit cell or, equivalently, for a given composite material. Thereby both values could be defined from the present analysis provided the corresponding crack growth criterion is given. The latter concerns obviously the determination of \bar{R}_l . Once evaluated for a certain unit cell with

a given crack configuration these R_l^* - and \bar{R}_l -values imply immediately the following evident conclusions concerning the behaviour of the cracked unit cell. If $R_l^* > \bar{R}_l$ then the fibre-matrix interface fails while the crack is still in rest. If on the contrary $R_l^* < \bar{R}_l$ then the crack growth initiation precedes the failure of the fibre-matrix interface. In this case the whole scheme of analysis remains further valid (up to the possible failure of the interface) provided the crack propagates quasi-statically and $2l$ is its current length upon which both R_l^* and \bar{R}_l depend. Finally, if $R_l^* = \bar{R}_l$ then the fibre-matrix interface fails simultaneously with the initiation of the crack propagation. The further behaviour of the crack and the unit cell in this case as well as in the first one where $R_l^* > \bar{R}_l$ needs a new approach since the present considerations are based upon the assumption of a perfect fibre-matrix contact.

It should be mentioned that these simple conclusions are valid under the assumptions made earlier that both the crack length $2l$ and the plastic zone radius R_c are small compared with the geometrical quantities r_m and r_0 , respectively. That means the crack should not influence the stress state within the plastic zone $r_f \leq r \leq R_c$ where the solution of section 4 is thus expected to apply. Moreover, it has been shown in [19] that the approximate analytical elastic solution of the considered thermal crack problem in a composite unit cell obtained in [11] remains still valid even if the restrictions concerning the quantities $2l$, r_0 , r_m and r_f (the latter quantity plays the role of R_c in the elastic case) are somehow violated. One may consequently expect that the results of the present elastic-plastic analysis will also remain valid when the restrictions mentioned above are somehow softened since the values of R_l , $i = r, l$ used in our considerations are actually obtained from the same elastic solution [11]. If so, then one comes easily up with a couple of further implications of the analysis concerning the crack and cell behaviour.

Let \tilde{T}_m be the temperature at which both plastic zones, i.e. the annulus $r_f \leq r \leq R_c$ and the segment $R_l \leq r \leq r_l$ join each other, and let $\tilde{R}_c = R_c(\tilde{T}_m)$ and $\tilde{R}_l = R_l(\tilde{T}_m, l)$ be the corresponding values of the quantities R_c and R_l , respectively. Further, let us assume the validity of the relations $\tilde{T}_m > T_m^*$ and $\tilde{T}_m > \bar{T}_m$ (note that the temperatures T_m^* , \tilde{T}_m and \bar{T}_m are negative) for the considered unit cell. That means that the two plastic zones meet each other before the conditions for the failure of the fibre-matrix interface and for crack growth initiation are fulfilled. Upon reaching this instant, that is with the two plastic zones adjoined, the behaviour of the cracked unit cell will depend essentially on the interaction between the plastic mechanism of failure of the entirely plastificated segment $r_f \leq r \leq r_l$, $\theta = 0$ and the brittle mechanism of crack growth at the right crack tip $r = r_r$. A possible approach to this problem could be based upon the application of the rigid-plastic body model and the limit load concept associated with this model (see, for example [20]). When applying the latter concept to the plastificated segment $r_f \leq r \leq r_l$, $\theta = 0$ one may expect that further thermal loading, i.e. further decrease of T_m , will result in the activation of the crack propagation mechanism at the right crack tip.

Another case of interest is the one for which $\tilde{T}_m \leq \bar{T}_m$ and $\tilde{T}_m > T_m^*$. In this case both plastic zones join each other again but the segment $R_l \leq r \leq r_l$, $\theta = 0$ presents now the plastic zone at the left tip of the running crack. Depending upon the plastic zone thickness $d = R_c - r_f$ and the crack velocity the crack may stop before reaching the elastic-plastic boundary or at the boundary or may traverse partially or entirely the plastificated

annulus around the fibre. Depending in addition on the fibre-matrix contact the crack may stop at the fibre-matrix interface in order to traverse it or to create an interface crack. The investigation of all these possibilities, being a problem of definite interest, is associated with considerable difficulties arising from the necessity of solving boundary-value problems for cracks partially situated within plastificated regions as well as of applying reasonable criteria of crack propagation and arrest.

Concluding remarks

The analysis presented above implies certain definite conclusions concerning the behaviour of a cracked unit cell of a fibre-reinforced composite material under the conditions of thermal loading. The analysis could be easily transformed to the more general case $T_f \neq 0$ if the temperature difference $\hat{T} = T_m - T_f$ will actually play the role of the quantity T_m used in the preceding calculations. In that case the linear coefficient of thermal expansion α_f will influence the processes of plastification and fracture as well.

The model of the plastic deformation process proposed leads to both closed form results and to a relatively simple procedure concerning the numerical treatment of the problem on the whole. The analysis shows that the entire solution of the considered problem is associated with the necessity of directed experimental investigations concerning the determination of the specific measure of elastic response ε_x^* for the fibrous composite materials.

Acknowledgement

The support of the Alexander von Humboldt Foundations for one of the authors (I.M.M.) is gratefully acknowledged.

References

1. C. W. SMITH, *Limitations of Fracture Mechanics as Applied to Composites*, In C. T. Herakovich (Ed.), *Inelastic Behavior of Composite Materials*, AMD-vol. 13, ASME, New York, pp. 157 - 175, 1975.
2. R. HILL, *Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials*, II. Inelastic Behaviour, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 12, pp. 213 - 218, 1964.
3. A. J. M. SPENCER, *A Theory of The Failure of Ductile Materials Reinforced by Elastic Fibres*, *Int. J. Mech. Sciences*, vol. 7, pp. 197 - 209, 1965.
4. J. F. MULHERN, T. G. ROGERS and A. J. M. SPENCER, *A Continuum Model for Fibre-Reinforced Plastic Materials*, *Proc. Royal Society, A* 301, pp. 473 - 492, 1967.
5. G. A. COOPER and M. R. PIGGOTT, *Cracking and Fracture of Composites*, In D. M. R. Taplin (Ed.), *Fracture 1977*, University of Waterloo Press, vol. 1, pp. 557 - 605, 1977.
6. C. T. HERAKOVICH (Ed.), *Inelastic Behavior of Composite Materials*, AMD-vol. 13, ASME, New York, pp. 157 - 175, 1975.
7. A. J. M. SPENCER, *Deformations of Fibre-Reinforced Materials*, Clarendon Press, Oxford, 1972.
8. I. M. KOPIOV and A. S. OVCINSKI, *Fracture of Fibre-Reinforced Metals*, Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).

9. M. R. PIGGOTT, *Load Bearing Fibre Composites*, Pergamon Press, Oxford, 1980.
10. K. HERRMANN, *Self-Stress Fracture in a Thermoelastic Two-Phase Medium*, Mech. Research Communications, vol. 2, pp. 85 - 90, 1975.
11. K. HERRMANN, *Interaction of Cracks and Self-Stresses in a Composite Structure*, In J. W. Provan (Ed.), SM Study No. 12 „Continuum Models of Discrete Systems”, University of Waterloo Press, pp. 313 - 338, 1978.
12. K. HERRMANN, *Quasistatic Thermal Crack Growth in the Viscoelastic Matrix Material of a Brittle Fiber Reinforced Unit Cell*, Mech. Research Communications, vol. 8, pp. 97 - 104, 1981.
13. K. HERRMANN and A. FLECK, *Thermal Fracture in Compound Materials*, In D. M. R. Taplin (Ed.), Fracture 1977, University of Waterloo Press, vol. 3, pp. 1047 - 1054, 1977.
14. K. HERRMANN, H. BRAUN and P. KEMENY, *Comparison of Experimental and Numerical Investigations Concerning Thermal Cracking of Dissimilar Materials*, Intern. J. Fracture, vol. 15, R 187 - 190, 1979.
15. H. BRAUN and K. HERRMANN, *Analysis of Thermal Cracking of Unidirectionally Reinforced Composite Structures in the Micromechanical Range*, In D. Francois (Ed.), Advances in Fracture Research, Pergamon Press, vol. 1, pp. 485 - 493, 1981.
16. K. HERRMANN and I. M. MIHOVSKY, *Plastic Behaviour of Fibre-Reinforced Composites and Fracture Effects*, Proceedings of the Fourth National Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Varna/Bulgaria, vol. 1 pp. 431 - 436, 1981.
17. D. S. DUGDALE, *Yielding of Steel Sheets Containing Slits*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 8, pp. 100 - 104, 1960.
18. K. HERRMANN, *Über Eigenspannungen im diskontinuierlich inhomogenen Festkörper*, in K. Schröder (Ed.), Beiträge zur Spannungs- und Dehnungsanalyse, Akademie Verlag, Berlin, vol. 6, pp. 21 - 52, 1970.
19. H. BRAUN, A. FLECK and K. HERRMANN, *Finite Element Analysis of a Quasistatic Crack Extension in a Unit Cell of a Fiber-Reinforced Material*, Intern. J. Fracture, vol. 14, R 3 - 6, 1978.
20. L. M. KACHANOV, *Foundations of the Theory of Plasticity*, North Holland, Amsterdam, 1971.

Р е з ю м е

РАЗМЕР ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ТРЕЩИНЫ, ТИПА ДАГДЕЙЛЯ, В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ, С ЧАСТИЧНО ПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛОМ МАТРИЦЫ

Предлагается модель пластической деформации касающийся одной ячейки композита усиленного волокнами. Мы исследовали процесс деформации ячейки при учете возможного разрушения в месте соединения матрицы и волокна. При учете модели Дагдейля мы сделали выводы касающиеся термического возраста радиальных трещин в матрице.

Streszczenie

ZASIĘG STREFY UPLASTYCZNIENIA SZCELIN TYPU DUGDALE'A WE WSTĘPNIE NAPRĘŻONYM OŚRODKU DWUFAZOWYM Z CZĘŚCIOWO UPLASTYCZNIONYM MATERIAŁEM MATRYCY

Proponujemy model odkształcenia plastycznego dotyczący pojedynczej komórki kompozytu wzmoczonego włóknami. Zbadany został proces odkształcenia komórki przy uwzględnieniu możliwego mechanizmu pęknięcia w miejscu połączenia matrycy i włókna.

Przy uwzględnieniu modelu Dugdale'a wyciągnięto wnioski dotyczące termicznego wzrostu szczelin promieniowych w matrycy.

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 czerwca 1983 roku

O PROPAGACJI FRONTU FALI BOCZNEGO ROZPRĘŻENIA GAZOWYCH PRODUKTÓW DETONACJI W ŁADUNKU KUMULACYJNYM

EDWARD WŁODARCZYK

WAT

ADAM WIŚNIEWSKI

WITU

Wstęp

Podwyższone lokalne działanie ładunków kumulacyjnych znane już było od ponad stu lat. Przez długi okres czasu nie zwracano na ten efekt uwagi. Znalazł on szerokie zastosowanie w pociskach i minach dopiero podczas drugiej wojny światowej. Obecnie, obok wojskowych zastosowań, wykorzystuje się zjawisko kumulacji również w technice, a szczególnie przy wydobywaniu ropy naftowej.

Poważne, eksperymentalne i teoretyczne badania nad zjawiskiem kumulacji prowadzone były w latach drugiej wojny światowej przez radzieckich [1 - 3] i amerykańskich uczonych [4 - 10]. Główny wkład do opracowania hydrodynamicznej teorii kumulacji wnieśli M. A. ŁAWRIENTIEW [1]. G. TAYLOR, G. BIRKHOFF i inni [4]. Dalszy rozwój tej teorii znalazł również odbicie w pracach G. I. PIOTROWSKIEGO, F. A. BAUMA i K. P. STANIUKOWICZA [11]. W Polsce badaniami w zakresie kumulacji zajmowali się między innymi W. BABUL [12], D. SMOLEŃSKI i H. NOWAK [13].

Z dostępnych danych literaturowych [1 - 13] oraz analizy własnych wyników eksperymentalnych można wnioskować, że właściwości ładunków kumulacyjnych w istotny sposób zależą, między innymi, od położenia, geometrii i masy przesłony. Wymienione elementy ładunku mają wpływ na ciśnienie w pewnej odległości od frontu detonacji oraz na warunki propagacji fali bocznej rozprężania produktów wybuchu. To z kolei kształtuje odpowiednio impuls ciśnienia, który odpowiedzialny jest za redukcję wkładki kumulacyjnej.

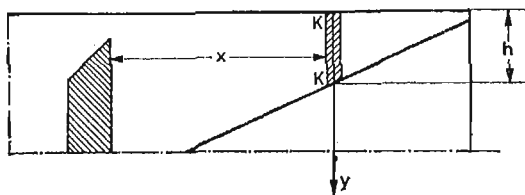
Mimo dość licznych prac poświęconych zjawisku kumulacji, problem ten nie został jeszcze do końca rozwiązany i w szczególności wyjaśniony. Między innymi brak jest odpowiednich wzorów analitycznych i analiz numerycznych, które pozwoliłyby optymalizować na przykład rozmieszczenie przesłony względem wkładki kumulacyjnej.

W niniejszej pracy rozwiążemy w zamkniętej postaci, przy pewnych uproszczeniach modelowych, problem propagacji frontu fali bocznej rozprężania gazowych produktów detonacji GDP w płaskim ładunku kumulacyjnym. Wyprowadzimy analityczne wzory, które wiążą front fali bocznej rozprężania GPD z parametrem określającym położenie

przesłony względem wkładki kumulacyjnej. Zbadamy dość szczegółowo wpływ wykładnika politropy GPD na prędkość propagacji frontu fali bocznego rozprężania się tych gazów.

2. Sformułowanie problemu

Zbadamy proces propagacji frontu fali bocznego rozprężania się GDP w ładunku kumulacyjnym. W tym celu podzielimy ładunek na płaskie segmenty płaszczyznami prostopadłymi do osi ładunku rys. 1. Z kolei zastosujemy do tych segmentów teorię płaskich



Rys. 1

przekrojów A. A. ILJUSZINA [14]. Dalej przyjmiemy, że proces detonacji materiału wybuchowego w danym segmencie zachodzi jednocześnie w całej jego objętości. Należy zauważyć, że przy tak sformułowanym zagadnieniu, parametry stanu gazów powybuchowych będą zmieniały się w czasie w danym segmencie K-K, położonym w odległości x od przesłony (x jest współrzędną Eulera). Charakter tych zmian jest zdeterminowany przez proces poosiowego rozprężania się gazów powybuchowych w ładunku kumulacyjnym. Dlatego w pierwszej kolejności rozwiążemy problem rozlotu GDP w kierunku osiowym z uwzględnieniem oddziaływania powietrza otaczającego ładunek. W rozważaniach tych pomijamy wpływ masy przesłony na proces rozlotu produktów wybuchu.

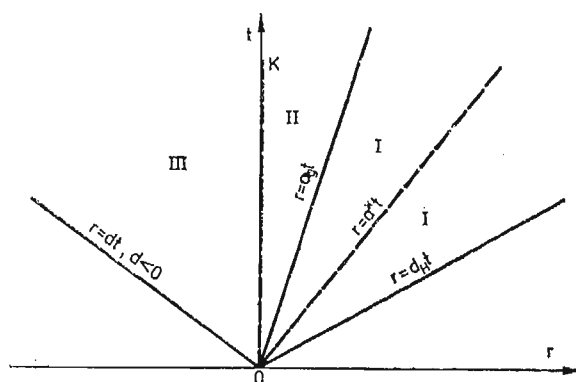
3. Płaskie rozprężenie się GDP w powietrzu

Zakładamy, że proces detonacji rozpoczyna się jednocześnie w każdym punkcie swobodnej powierzchni półprzestrzeni wypełnionej materiałem wybuchowym MW, graniczącej z powietrzem będącym w chwili początkowej w spoczynku. W takich warunkach konfiguracja frontów fal na płaszczyźnie fizycznej r, t (r — współrzędna Lagrange'a) przyjmuje postać pokazaną na rys. 2.

Zanim przejdziemy do konstrukcji rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia w pierwszej kolejności omówimy w skrócie obraz falowy przedstawiony na rys. 2. Zgodnie z klasyczną teorią detonacji [15 - 17] w rozpatrywanym przypadku swobodna powierzchnia MW i sąsiadujące z nią powietrze nie oddziałują na przebieg procesu detonacji.

Front detonacji, niezależnie od warunków brzegowych, propaguje się z prędkością:

$$d_H = \frac{r}{t}, \quad (3.1)$$



Rys. 2

która determinowana jest przez fizykochemiczne właściwości MW. Za frontem fali detonacyjnej zachodzi proces rozprężania gazów powybuchowych. Tworzy się pęk prostych charakterystyk rozbieżnych o dodatnich współczynnikach kierunkowych. Wśród tej rodziny prostych należy wyróżnić charakterystykę o równaniu:

$$r = a^*t, \quad (3.2)$$

wzdłuż której następuje całkowite wyhamowanie gazów powybuchowych $v_1 = 0$. Od tej charakterystyki poczynając gazy powybuchowe poruszają się w przeciwnym kierunku w stosunku do frontu detonacji. Proces rozprężania gazów powybuchowych kończy się na charakterystyce granicznej

$$r = a_g t \quad (3.3)$$

Współczynnik kierunkowy tej charakterystyki a_g określamy z warunku ciągłości ciśnienia i prędkości na granicy obszarów I i II.

Ruchoma granica gazów powybuchowych (nieciągłość kontaktowa OK) spełnia rolę płaskiego tłoka, który generuje w powietrzu front fali uderzeniowej o równaniu

$$r = dt, \quad \text{przy czym} \quad d < 0 \quad (3.4)$$

Z przedstawionego opisu wynika, że będziemy badać ruch ośrodka gazowego z pojedynczą nieciągłością kontaktową (styk gazów powybuchowych z powietrzem — linia OK) oraz frontami silnych nieciągłości (fala uderzeniowa i detonacyjna).

Ciągłym płaskim przepływem GPD rządzą następujące równania:

$$\begin{aligned} \rho_e u_{1,t} &= -p_{1,r}, \\ \rho_e &= \rho_1 (1 + u_{1,r}), \\ p_1 &= \rho_e S \left(\frac{\rho_1}{\rho_e} \right)^k, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie poszczególne wielkości p_1 , ρ_1 , u_1 i k odpowiednio oznaczają: ciśnienie, gęstość, przemieszczenie i wykładnik politropowy GPD, natomiast ρ_e jest gęstością MW. S jest pewną funkcją entropii.

Równania charakterystyk układu (3.5) mają postać

$$dr = \pm a_1(u_{1,r}) dt, \quad (3.6)$$

$$du_{1,t} = \pm a_1(u_{1,r}) du_{1,r} - \delta_1 dt, \quad (3.7)$$

gdzie:

$$a_1(u_{1,r}) = \left[\frac{kS}{(1+u_{1,r})^{k+1}} \right]^{1/2}, \quad \delta_1 = \frac{S_{,r}}{(1+u_{1,r})^k}. \quad (3.8)$$

Ponieważ ekspansja produktów detonacji przebiega w sposób izentropowy ($S = \text{const}$), zatem $\delta_1 = 0$ i związki na charakterystykach (3.7) można scałkować. Po wykonaniu tego działania otrzymujemy:

$$u_{1,t} - (u_{1,t})_p = \pm \frac{2\sqrt{kS}}{k-1} \left\{ (1+u_{1,r})^{-\frac{k-1}{2}} - [1+(u_{1,r})_p]^{-\frac{k-1}{2}} \right\}, \quad (3.9)$$

gdzie indeksem p oznaczono wartości początkowe odpowiednich parametrów.

Oznaczmy przez $(u_{1,t})_H$, $(u_{1,r})_H$ i S_H wartości tych wielkości na froncie fali detonacyjnej. Wówczas wzdłuż pęku dodatnich charakterystyk w obszarze I mamy:

$$u_{1,t} - (u_{1,t})_H = \frac{2\sqrt{kS_H}}{k-1} \left\{ (1+u_{1,r})^{-\frac{k-1}{2}} - [1+(u_{1,r})_H]^{-\frac{k-1}{2}} \right\}. \quad (3.10)$$

Na charakterystyce, wzdłuż której $u_{1,t} = u_{1,t}^* = 0$, zgodnie z (3.10) zachodzi:

$$-\frac{k-1}{2} (u_{1,t})_H = \left\{ \frac{kS_H}{[1+(u_{1,r})_H]^{k-1}} \right\}^{1/2} \left[\left[\frac{1+(u_{1,r})_H}{1+u_{1,r}^*} \right]^{\frac{k-1}{2}} - 1 \right],$$

stąd

$$1+u_{1,r}^* = [1+(u_{1,r})_H] \left\{ 1 - \frac{k-1}{2} \frac{(u_{1,t})_H}{a_H} [1+(u_{1,r})_H]^{-1} \right\}^{-\frac{2}{k-1}},$$

lub

$$a^* = a_H \left\{ 1 - \frac{k-1}{2} \frac{(u_{1,t})_H}{a_H} [1+(u_{1,r})_H]^{-1} \right\}^{\frac{k+1}{k-1}}, \quad (3.11)$$

gdzie:

$$a_H = \left\{ \frac{kS_H}{[1+(u_{1,r})_H]^{k+1}} \right\}^{1/2}, \quad a^* = \left[\frac{kS_H}{(1+u_{1,r}^*)^{k+1}} \right]^{1/2}. \quad (3.12)$$

Na froncie fali detonacyjnej mamy [11, 17]:

$$(u_{1,t})_H = \frac{d_H}{k+1}, \quad c_H = \frac{k}{k+1} d_H, \quad (3.13)$$

$$1+(u_{1,r})_H = \frac{\rho_e}{\rho_H} = \frac{k}{k+1}, \quad p_H = \frac{1}{k+1} \rho_e d_H^2,$$

gdzie C_H jest prędkością dźwięku na froncie fali detonacyjnej.

Z wzorów (3.12) i (3.13) otrzymujemy:

$$a_H = d_H, \quad (3.14)$$

$$a^* = \left(\frac{k+1}{2k} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} d_H.$$

Przejdziemy obecnie do określenia parametrów stanu GPD w centrowanej fali rozrzedzenia (w obszarze I rys. 2). Z równania pęku charakterystyk

$$\frac{r}{t} = a_1 = \left[\frac{kS_H}{(1+u_{1,r})^{k+1}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

wynika, że

$$(1+u_{1,r})^{-1} = \left(\frac{r}{t\sqrt{kS_H}} \right)^{\frac{2}{k+1}},$$

a ponieważ

$$\sqrt{kS_H} = d_H [1 + (u_{1,r})_H]^{\frac{k+1}{2}}$$

zatem

$$(1-u_{1,r})^{-1} = \left(\frac{r}{d_H t} \right)^{\frac{2}{k+1}} [1 + (u_{1,r})_H]^{-1}. \quad (3.15)$$

Stąd, po wykorzystaniu (3.5) otrzymujemy

$$\varrho_1(r, t) = \varrho_H \left(\frac{r}{d_H t} \right)^{\frac{2}{k+1}}. \quad (3.16)$$

Dalej z równania politropy mamy:

$$p_1 = p_H \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_H} \right)^k,$$

lub

$$p_1(r, t) = p_H \left(\frac{r}{d_H t} \right)^{\frac{2k}{k+1}}. \quad (3.17)$$

Wyrażenie na prędkość otrzymujemy ze związku (3.10). Podstawiając do niego wzory (3.13) i (3.15), po przekształceniach otrzymujemy:

$$v_1(r, t) = u_{1,r}(r, t) = \frac{d_H}{k-1} \left[\frac{2k}{k+1} \left(\frac{r}{d_H t} \right)^{\frac{k-1}{k+1}} - 1 \right]. \quad (3.18)$$

Na charakterystyce o zerowej prędkości przepływu mamy:

$$\begin{aligned} \varrho_1^* &= \varrho_H \left(\frac{a^*}{d_H} \right)^{\frac{2}{k+1}} = \frac{k+1}{k} \varrho_e \left(\frac{k+1}{2k} \right)^{\frac{2}{k-1}} = 2 \left(\frac{k+1}{2k} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \varrho_e, \\ p_1^* &= p_H \left(\frac{a^*}{d_H} \right)^{\frac{2k}{k+1}} = \frac{\varrho_e d_H^2}{k+1} \left(\frac{k+1}{2k} \right)^{\frac{2k}{k-1}} = \frac{1}{2k} \left(\frac{k+1}{2k} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \varrho_e d_H^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Obszar centrowanej fali rozrzedzenia GPD ograniczony jest z lewej strony charakterystyką

$$\frac{r}{t} = a_g. \quad (3.20)$$

Wartość granicznej prędkości a_g można określić korzystając ze związków na froncie fali uderzeniowej $r = dt$ propagującej się w powietrzu [18]:

$$\begin{aligned} \frac{v_3}{d} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{a_0^2}{d^2}\right), \\ \frac{p_3 - p_0}{\rho_0 d^2} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{a_0^2}{d^2}\right), \\ 1 - \frac{\rho_0}{\rho_3} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{a_0^2}{d^2}\right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

oraz warunków ciągłości ciśnienia i prędkości na granicy kontaktowej OK:

$$p_3 = p_2 = p_g, \quad v_3 = v_2 = v_g, \quad (3.22)$$

gdzie

$$a_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

p_0 i ρ_0 są parametrami początkowego stanu powietrza natomiast γ oznacza wykładnik izotropowy dla powietrza; d jest prędkością propagacji frontu fali uderzeniowej w powietrzu (rys. 2.)

Z równości (3.22), po wykorzystaniu (3.17), (3.18), (3.20) i (3.21), otrzymujemy:

$$p_g = p_H \left(\frac{a_g}{d_H}\right)^{\frac{2k}{k+1}} = \frac{p_0}{\kappa} \left[(1+\kappa) \left(\frac{d}{a_0}\right)^2 - 1 \right], \quad (3.23)$$

$$v_g = \frac{d_H}{k-1} \left[\frac{2k}{k+1} \left(\frac{a_g}{d_H}\right)^{\frac{k-1}{k+1}} - 1 \right] = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{a_0^2}{d} \left[\left(\frac{d}{a_0}\right)^2 - 1 \right], \quad (3.24)$$

gdzie: $\kappa = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$

Z równości (3.23) wynika, że:

$$\frac{d}{a_0} = - \left\{ \frac{1}{1+\kappa} \left[\kappa \frac{p_H}{p_0} \left(\frac{a_g}{d_H}\right)^{\frac{2k}{k+1}} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.25)$$

Podstawiając wyrażenie (3.25) do równości (3.24) otrzymamy przestępne równanie na wielkość a_g/d_H w następującej postaci:

$$\frac{\sqrt{1+\kappa}}{(\kappa-1)(k-1)} \frac{d_H}{a_0} \left[\frac{2k}{k+1} \left(\frac{a_g}{d_H}\right)^{\frac{k-1}{k+1}} - 1 \right] = \frac{1 - \frac{p_H}{p_0} \left(\frac{a_g}{d_H}\right)^{\frac{2k}{k+1}}}{\left[\kappa \frac{p_H}{p_0} \left(\frac{a_g}{d_H}\right)^{\frac{2k}{k+1}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.26)$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$A_g = \left(\frac{a_g}{d_H}\right)^{\frac{1}{k+1}}, \quad D_H = \frac{d_H}{a_0}, \quad D = \frac{d}{a_0}, \quad R_e = \frac{\rho_e}{\rho_0}. \quad (3.27)$$

Jeśli uwzględnić, że

$$\frac{p_H}{p_0} = \frac{\frac{1}{k+1} \rho_e d_H^2}{\frac{\rho_0 a_0^2}{\gamma}} = \frac{\gamma}{k+1} R_e D_H^2, \quad (3.28)$$

to po wykorzystaniu wielkości bezwymiarowych (3.27) i (3.28) z równania (3.26) otrzymujemy:

$$\frac{\sqrt{1+\kappa}}{\kappa-1} \frac{D_H}{k-1} \left(2A_g^{k-1} - \frac{k+1}{k} \right) = \frac{\frac{k+1}{k} - R_e D_H^2 A_g^{2k}}{\left(\kappa \frac{k}{k+1} R_e D_H^2 A_g^{2k} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.29)$$

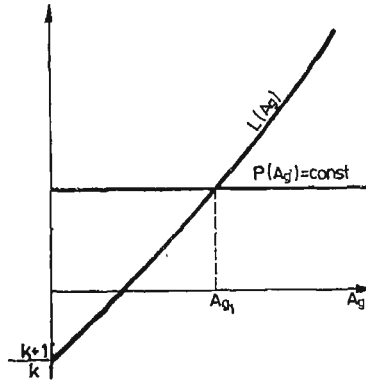
lub

$$\frac{2\sqrt{1+\kappa}}{\kappa-1} \frac{D_H}{k-1} A_g^{k-1} + \frac{R_e D_H^2 A_g^{2k} - \frac{k+1}{k}}{\left(\kappa \frac{k}{k+1} R_e D_H^2 A_g^{2k} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{k+1}{k(k-1)} \frac{\sqrt{1+\kappa}}{\kappa-1} D_H. \quad (3.30)$$

Jeśli $k = 1$ (gaz izotermiczny), wówczas z (3.29) po przejściu granicznym otrzymujemy:

$$\frac{\sqrt{1+\kappa}}{\kappa-1} D_H (2 \ln A_g + 1) = \frac{2 - R_e D_H^2 A_g^2}{(0,5 \kappa R_e D_H^2 A_g^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.31)$$

Równania (3.30) i (3.31) mają tylko po jednym pierwiastku rzeczywistym A_{g1} . Wynika to bezpośrednio z rys. 3, na którym wykreślono w sposób jakościowy lewą $L(A_g)$ i prawą

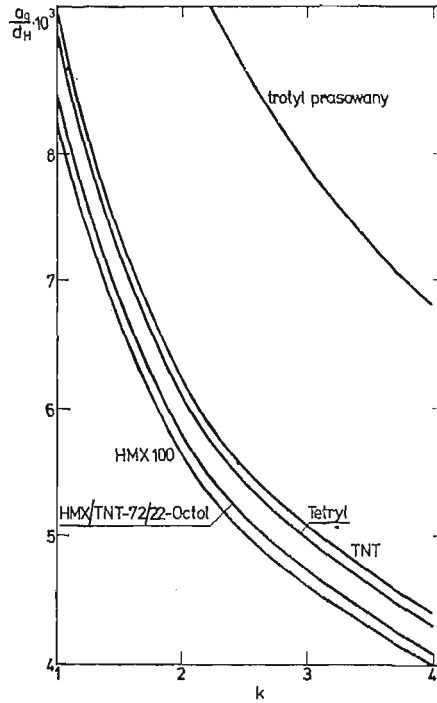


Rys. 3

$P(A_g)$ stronę równania (3.30). Z kolei na rys. 4 przedstawiamy zmianę wielkości stosunku a_g/d_H w funkcji wykładnika politropy k dla kilku wybranych MW o następujących charakterystykach.

HMX100: $\rho_0 = 1894 \text{ kg/m}^3$, $d_H = 9110 \text{ m/s}$

HMX/TNT-72/22-Octol: $\rho_e = 1821 \text{ kg/m}^3$, $d_H = 8480 \text{ m/s}$



Rys. 4

Tetryl: $\rho_e = 1680 \text{ kg/m}^3$, $d_H = 7500 \text{ m/s}$

TNT: $\rho_e = 1630 \text{ kg/m}^3$, $d_H = 6940 \text{ m/s}$

Trotyl usypowy: $\rho_e = 800 \text{ kg/m}^3$, $d_H = 4340 \text{ m/s}$.

Jak widać z zamieszczonych wykresów stosunek a_0/d_H maleje dość intensywnie wraz ze wzrostem wykładnika politropy k .

Dalej, zgodnie z teorią rozpadu dowolnej nieciągłości parametry stanu GPD w obszarach II i III zachowują stałe wartości i odpowiednio wynoszą:

$$\begin{aligned} p_3(r, t) &= p_2(r, t) = p_0 = p_H A_0^{2k}, \\ v_3(r, t) &= v_2(r, t) = v_0 = \frac{d_H}{k-1} \left(\frac{2k}{k+1} A_0^{k-1} - 1 \right), \\ \rho_2(r, t) &= \rho_H A_0^2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\rho_3(r, t) = \rho_0 \left[1 - \frac{2}{\gamma+1} (1 - D^{-2}) \right]^{-1},$$

gdzie:

$$D^2 = \frac{d^2}{d_0^2} = \frac{1}{1+\kappa} \left(\kappa \frac{p_H}{p_0} A_0^{2k} + 1 \right).$$

Tym samym uzyskaliśmy zamknięte rozwiązanie problemu płaskiego rozlotu GPD w powietrzu we współrzędnych Lagrange'a r, t .

4. Określenie postaci frontu fali bocznego rozprężania GPD

W tym rozdziale będziemy wykorzystywać do opisu badanych zjawisk współrzędne Eulera (x, t) . Dokonując transformacji układu współrzędnych wg wzoru

$$x = r + \int_{\frac{r}{d_H}}^t v_i(r, \tau) d\tau, \quad (4.1)$$

otrzymamy, że w obszarze I (rys. 2) mamy:

$$x = \frac{d_H t}{k-1} \left[k \left(\frac{r}{d_H t} \right)^{\frac{k-1}{k+1}} - 1 \right], \quad (4.2)$$

lub

$$\frac{r}{d_H t} = \left\{ \frac{1}{k} \left[(k-1) \frac{x}{d_H t} + 1 \right] \right\}^{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Podstawiając wyrażenie (4.2)₂ do wzorów (3.16) i (3.17) otrzymamy:

$$p_1(x, t) = p_H \left\{ \frac{1}{k} \left[(k-1) \frac{x}{d_H t} + 1 \right] \right\}^{\frac{2k}{k-1}}, \quad (4.3)$$

$$\varrho_1(x, t) = \varrho_H \left\{ \frac{1}{k} \left[(k-1) \frac{x}{d_H t} + 1 \right] \right\}^{\frac{2}{k-1}},$$

Prędkość propagacji frontu fali rozrzedzenia w segmencie K-K rys. 1 wynosi

$$c_1(x, t) = \left[k \frac{p_1(x, t)}{\varrho_1(x, t)} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{d_H}{k+1} \left[(k-1) \frac{x}{d_H t} + 1 \right], \quad (4.4)$$

Zatem front fali rozrzedzenia przyjmuje postać:

$$y(x, t) = \int_{\frac{x}{d_H}}^t c_1(x, \tau) d\tau = \frac{1}{k+1} \left[(k-1)x \ln \frac{d_H t}{x} + d_H t - x \right], \quad (4.5)$$

dla

$$\frac{x}{d_H} < t \leq \frac{x}{a_g}, \quad (4.6)$$

oraz

$$y(x, t) = \frac{1}{k+1} \left[(k-1)x \ln \frac{d_H t_g}{x} + d_H t_g - x \right] + \frac{k}{k+1} A_g^{k-1} d_H (t - t_g), \quad (4.7)$$

dla

$$t > \frac{x}{a_g}, \quad (4.8)$$

gdzie:

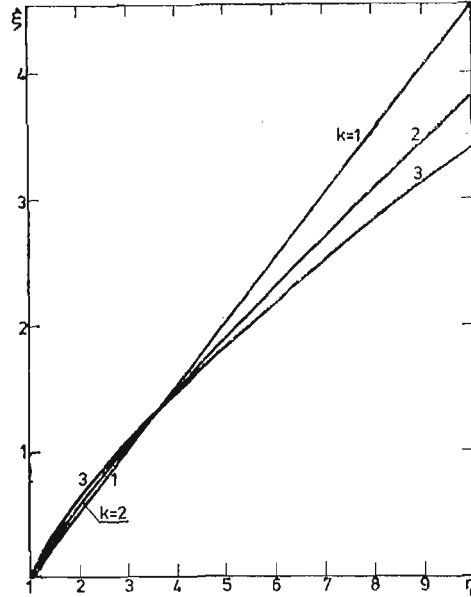
$$t_g = \frac{x}{a_g}, \quad (4.9)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że dla $k = 1$ (gaz izotermiczny) prędkość propagacji frontu fali bocznej rozprężania się GPD jest wartością stałą

$$c_1 = \frac{d_H}{2}. \quad (4.10)$$

W tym przypadku front fali jest linią prostą o równaniu

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(d_H t - x). \quad (4.11)$$



Rys. 5

Na rys. 5 pokazujemy w formie bezwymiarowej

$$\xi = \frac{1}{k+1}[(k-1)\ln \eta + \eta - 1], \quad \xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = \frac{d_H t}{x}, \quad (4.12)$$

fronty fal rozrzedzenia dla kilku wartości wykładnika politropy k . Okazuje się, że fronty fal dla różnych wykładników k mają dwa wspólne punkty przecięcia dla $\eta = \eta_1 = 1$ oraz dla

$$\ln \eta_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 - 1) \rightarrow \eta_2 = 3.51. \quad (4.13)$$

Z analizy przedstawionych na rys. 5 frontów fal wynika, że można je aproksymować z wystarczającą dla celów praktyki inżynierskiej dokładnością dwoma odcinkami prostymi. W przedziale $1 \leq \eta \leq 3.51$ dla wszystkich wartości wykładnika politropy k wziętych z przedziału $1 < k < 4$ front fali można aproksymować linią o równaniu:

$$\xi = \frac{1}{2}(\eta - 1). \quad (4.14)$$

Taka aproksymacja frontu fali rozrzedzenia pozwala skonstruować zamknięte rozwiązanie problemu napędzania obudowy ładunku oraz wkładki kumulacyjnej. Zagadnieniami tymi zajmiemy się w oddzielnej publikacji. Na zakończenie pragniemy serdecznie podziękować Koledze R. Trębińskiemu za cenne uwagi wniesione przy dyskusji badanego problemu.

Literatura cytowana w tekście

1. М. А. Лаврентьев, УМН 12, вып. 4, 1957.
2. Г. И. Покровский, *Боевое применение направленного взрыва*, Воениздат, 1944
3. Ф. А. Королев, Г. И. Покровский, ДАН СССР 27, 6, 1944
4. G. VIRKHOFF et al, J. Appl. Phys. 19, 563, 1948.
5. Г. БИРКГОФ, *Гидродинамика*, ил., 1954.
6. E. PUGH et al, J. Appl. Phys. 23, 532, 1952.
7. J. CLARK, J. Appl. Phys. 20, 363, 1949.
8. SINGH SAMPOORAN, Proc. Nat. Inst. Sci. India 19, 583, 1953.
9. J. WALSH et al, J. Appl. Phys. 24, 349, 1953.
10. W. KOSKI et al, J. Appl. Phys. 23, 1300, 1952.
11. Ф. А. БАУМ и др, *Физика взрыва*, Москва, 1975
12. W. BABUL, S. ZIEMBA, *Materialy wybuchowe w technologicznych procesach obróbki tworzyw*. Warszawa, 1972.
13. H. NOWAK, D. SMOLEŃSKI, *Ładunki kumulacyjne w wojsku, przemyśle i górnictwie*. Warszawa, 1974.
14. А. А. Ильюшин, ПММ, 30, 6, 1956.
15. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанец, *Теория детонации*. Москва 1955.
16. Ф. А. БАУМ, Л. П. Орленко, К. П. Станюкович, В. П. Чельшев, Б. И. Шехтер, *Физика взрыва*, Москва, 1975.
17. К. П. Станюкович, *Неустановившиеся движения сплошной среды*. Москва, 1971.
18. E. WŁODARCZYK, J. Techn. Phys., 22, 2, 1981.

Резюме

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ФРОНТА ВОЛНЫ БОКОВОГО РАСШИРЕНИЯ ГАЗОВЫХ ПРОДУКТОВ ДЕТОНАЦИИ В КУМУЛЯЦИОННОМ ЗАРЯДЕ

В работе решена в замкнутом виде проблема распространения фронта волны бокового расширения газовых продуктов детонации (ГПД) в плоском кумуляционном заряде. Решение построено опираясь на теорию плоских сечений А. А. Ульюшина. Выведены аналитические формулы, которые связывают фронт волны бокового расширения ГПД с координатой, определяющей положение диафрагмы. Подробно исследовано влияние показателя политропы ГПД на скорость распространения фронта волны бокового расширения этих газов. Из полученных результатов следуют интересные выводы, которые могут быть использованы при оптимизации конструкции кумуляционных зарядов.

S u m m a r y

PROPAGATION OF LATERAL-EXPANSION WAVE FRONT OF GASEOUS
DETONATION PRODUCTS IN A CUMULATIVE CHARGE

The propagation problem has been solved in closed form of the lateral expansion wave front of gaseous detonation-products (GDP) in a plane hollowed charge. The solution has been constructed on the strength of the A. A. Ilyushin's theory of plane sections. The analytical formulae have been derived that bind the GDP lateral-expansion wave front to the co-ordinate defining the position of the diaphragm. The effect has been examined in detail of the GDP polytropic exponent upon the propagation velocity of the GDP lateral-expansion wave front. From the results obtained interesting conclusions can be drawn that can be made use of when optimizing the desing of the hollowed charges.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 czerwca 1981 roku

ISODYNE PHOTOELASTICITY AND GRADIENT PHOTOELASTICITY: PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODELS, EFFICACY, APPLICATIONS

JERZY T. P I N D E R A

*University of Waterloo,
Dept. of Civil Engineering Waterloo, Ontario,
Canada N2L 3G1*

Abstract

The term „isodynes” has been proposed by Pindera and Mazurkiewicz to denote a new family of characteristic lines of plane stress fields. These lines carry information on total normal forces acting on related cross sections and yield the distribution and values of related normal and shear stress components. Two families of isodynes related to two characteristic directions yield the values of all three components of a plane stress field and additional redundant information. The concept of photoelastic isodynes is the result of generalization of the theory of a particular kind of scattered light fringes presented by Pindera and Straka.

Distinction should be made between the concept of photoelastic isodynes mentioned above, the concept of elastic isodynes introduced by Pindera, and the concept of generalized isodynes introduced by Pindera and Krasnowski.

Isodyne photoelasticity methods can be applied to determine all three stress components in photoelastic models, and in original machine or structural parts using isodyne coatings.

The term „gradient photoelasticity” has been proposed by Pindera and Hecker to denote a new method of photoelasticity which utilizes relationship between the curvature of light paths in a photoelastic object and the gradients of symmetrical and distortional parts of stress/strain tensors. Utilizing basic mathematical model of photoelastic effect presented by Ramachandran and Ramaseshan, gradient photoelasticity yields the momentary values of absolute and relative photoelastic coefficients, and their dependence on the wavelength of electromagnetic radiation.

Both methods can be applied to determine the values of stress intensity factors for arbitrary cracks, and all stress components in composite structures.

1. Introduction

One of the major tasks of stress analysis is determination of stress components of plane stress field and of surface stress/strain field. The rapid growth of fracture mechanics and the introduction of concept of stress intensity factor developed interest in methods directly yielding values of normal stress components in direction of crack propagation.

Table 1 Characteristics of Physical Models of Contemporary Photoelasticity

BASIC FEATURES OF SOME PARTICULAR METHODS OF PHOTOELASTICITY

Basic Mathematical Model	Alteration of dielectric tensor, representing optical response of material, is a linear, homogeneous function of stress/strain tensor.
Simplified Mathematical Model	Alteration of index tensor, representing phase velocity of radiation in stressed material, is a linear, homogeneous function of stress/strain or strain rate tensors.

GROUP 1: EACH OBJECT IS COMPOSED OF SINGLE MACROSCOPICALLY HOMOGENEOUS MATERIAL — AXES OF STRESS AND STRAIN TENSORS ARE COLLINEAR
 stress/strain fields are given by independent boundary conditions.

Method Feature	TRANSMISSION	SCATTERING	ISODYNE	GRADIENT	SPECIAL (Samples)
Quantity being measured	Modulation of light intensity caused by chromatic interference.	Intensity of light scattered at a point depending on primary or secondary modulation.	Intensity distribution of light scattered at points of a selected plane at constant scattering parameters.	Deflection of light beam passing a stressed object caused by curvature of light path.	a) Reflected light intensity and polarization state. b) Bent light intensity. c) Evanescent light intensity.
Measurement principle	Interference of polarized wave fronts, warped by stress state. Birefringence is accumulated along thickness of object. Incidence: normal and oblique.	State of polarization of beam scattered at points along primary beam.	State of birefringence in a plane. Values of scattering parameters and optical path are constant. Birefringence is accumulated along characteristic distance.	Bending and resolving of light beams by stress gradients. Normal and oblique incidence results in disparate rotations of both wave fronts.	a) Stress reflectivity. b) Mirage effect allows residual stress evaluation c) Evanescent wave (surface wave) carries information on stress birefringence.

Table 1 c.d.

Basic assumptions (conditions, constraints)	Light path is rectilinear. Corresponding rays in both related wave fronts are collinear. Geometric optics is applicable.	Rayleigh model of scattering is applicable.	Curvature of light path is small-relations are practically linear.	Known basic mathematical models of interaction between radiation and inhomogeneous, anisotropic bodies, and of processes at boundaries are applicable. Simplified assumptions (e.g. rectilinear propagation) are acceptable only when justified. Transfer function of the total system must be known.
Corresponding parameters of mathematical models	Axes of birefringence Amount of accumulated spectral birefringence. Mechanical & optical creep compliance, and relaxation modulus. Elastic constants, when applicable.	Observation angle. Aximuthal angle. Total retardation along specimens. Length of optical path.	Curvatures of both paths of bent light beams and related axes of polarization.	a) Real and imaginary parts of refractive index. b) Total birefringence along surface section. c) Total birefringence along surface section.
Character of measurements	Point-wise Plane-wise	Plane-wise Line-wise Point-wise	Point-wise Line-wise,	Depends on chosen technique
Information yield optically	Two independent relations for plane stress field (3 unknown quantities).	Four independent relations for plane stress field.	Two independent relations for gradients of volumetric and deviatoric parts of stress tensor.	Depends on chosen technique.
Typical object geometry	Plates (disk problems). 3-D objects	Plates (disk problems).	3-D symmetrical objects	Any.
Materials of objects	Solid or liquid dielectrics, transparent in the ultraviolet — microwave band: e.g.: glass, polymers, semiconductors (germanium, silicon), ceramics	Solid or liquid dielectrics, transparent in the ultraviolet — microwave band: e.g.: glass, polymers, semiconductors (germanium, silicon), ceramics	Solid or liquid dielectrics, transparent in the ultraviolet — microwave band: e.g.: glass, polymers, semiconductors (germanium, silicon), ceramics	Dielectrics. Metals. Semiconductors.
Evaluated quantities	Load-induced stresses or strains fields in solids, or velocity vector fields in liquids.	Load-induced stresses or strains fields in solids, or velocity vector fields in liquids.	Load-induced stresses or strains fields in solids, or velocity vector fields in liquids.	Surface stresses. Residual stresses.

Table 1 c.d.

GROUP 2: EACH OBJECT IS COMPOSED OF DIFFERENT MATERIALS — AXES OF STRESS AND STRAIN TENSORS ARE COLLINEAR
 Stress fields are induced by imposed strain fields, or interacting strain fields.

BASIC METHOD	TRANSMISSION	SCATTERING	ISODYNE	GRADIENT	SPECIAL (Sample)
Samples of Typical Methods	Photoelastic coatings. Plates in bending. Integrated photoelasticity.	Scattering. Speckle.	Isodyne coating. Contact problems. Determination of stress-intensity factors in fracture mechanics. Determination of interface stresses. Studies of elastic-plastic deformation fields.	Determination of stresses in crack regions in fracture mechanics. Determination of all photoelastic coefficients.	Photoelastic studies of propagation of ultrasonic radiation.
Typical features	Elementary relations of mechanics not always applicable.	More advanced mathematical models of optical phenomena are necessary.	Elementary mathematical models of mechanics and optics are not applicable.	Elementary optics and elementary relations of mechanics not always applicable.	Elementary optics not applicable.

However, no convenient method exists to determine reliably and inexpensively all three stress components of plane stress field, related to arbitrary Cartesian coordinate system. The classical methods of transmission photoelasticity yield only two independent pieces of information, whole field-wise: isochromatic and isoclinics. The needed third piece of information can be obtained using numerous auxiliary methods, either analytical, numerical, experimental, or mixed. These methods are often tedious, and usually compound the measurement and evaluation errors.

Very promising is the utilization of scattered light. The classical scattered light techniques of experimental stress analysis are basically point-wise or line-wise techniques. To obtain reliable and accurate results, in a convenient manner, using scattered light techniques, it is necessary to apply rather sophisticated instrumentation [1 - 3]. Information on stress field contained in typical wholefield recordings of scattered radiation intensities, which are obtained by using sheets of light, can not be reliably retrieved without additional pieces of information. — Particularly important are data on values of the observation and azimuthal angles at all scattering points, and information on the transfer function of measurement systems [4 - 6], including data on the actual viscoelastic responses of materials [7 - 8]. Knowledge of time-dependence of the optical creep compliance and the optical relaxation modulus are of major importance.

Classical methods of photoelasticity — the transmitted, and scattered light methods are based on several simplifying assumptions regarding the interaction between radiation and matter, patterns of light propagation, validity of analytical solutions for stress/strain states, distinction between the thin and thick plate problems, etc. A summary of some basic features of typical theoretical and empirical approaches, presented in a manner compatible with the scope and objective of this paper, is given in Table 1. The components (or parameters) of the basic physical and mathematical models of the interaction between deformed bodies and flow of various forms of energy, listed in Table 1, must be understood and discussed within the framework of fundamental physical phenomena.

Experimental and analytical methods of stress analysis utilize the concept of characteristic lines of plane stress field, such as:

- isochromatics
- isopachics
- principal stress trajectories (isostatics)
- maximal shear stress trajectories
- isoclinics
- singular lines (points), etc.

It is shown in this paper that it is useful to introduce a new family of characteristic lines of plane stress field and to call them isodynes.

It is also shown, that it is desirable to depart from the very simplifying assumption that the light propagation in a stressed body is rectilinear. It has been known for a long time that this assumption is not correct and leads to unnecessary errors, because the actual light path can be noticeably curved under influence of inhomogeneity produced by stress state.

Since the curvature of the light path carries information on the stress gradients and on the photoelastic material coefficients, it is worthwhile to depart from the elementary

mathematical models of photoelastic effects and to base the theory of photoelastic experiments on more comprehensive physical and mathematical models.

2. Isodyne photoelasticity

2.1 Elastic Isodynes — A New Family of Characteristic Lines of Plane Stress Field. Let us choose an arbitrary direction in a plane stress field, Fig. 1, and call it characteristic direction; a characteristic line is any line collinear with characteristic direction; characteristic section is the length of characteristic line between two chosen points.

It is understood that a plane stress field is characterized by the following condition:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \text{where } i, j = 1, 2 \quad (0)$$

Let us define isodynes as geometric loci of points at which total normal force intensity (total normal force per unit thickness) Δp_n , acting on characteristic section between two isodynes is constant and proportional to an increase of the order of isodyne, Δm_s ,

$$\Delta p_n = S_s \Delta m_s = \text{const}, \quad (1)$$

and the corresponding normal force, ΔP_n , acting on characteristic section thickness b is:

$$\Delta P_n = b \Delta p_n = b S_s \Delta m_s = \text{const}$$

where S_s is a constant coefficient to be calculated or determined experimentally.

Two-dimensional stress states in elastic plates can be conveniently characterised by Airy stress function, $\phi(x, y)$, which — in the absence of body forces — yields the known expressions for the stress components with respect to a Cartesian coordinate system, (x, y, z) :

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \Phi_x(x, y); \quad \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = \Phi_y(x, y), \quad (2a)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_x, \quad (2b)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \Phi_x = -\frac{\partial}{\partial x} \Phi_y. \quad (2c)$$

There exist particular relations between the stress components σ_{ij} , the intensities p_i of normal forces acting on sections between isodynes, and the functions Φ_x , Φ_y , [9]:

$$\int \sigma_{yy} dx = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = \Phi_x + f_{xx}(y) = p_y(x, y_0) = S_s m_{xxx}(x, y_0), \quad (3a)$$

$$\int \sigma_{xx} dy = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy = \Phi_y + f_{yy}(x) = p_x(x_0, y) = S_s m_{yyy}(x_0, y), \quad (3b)$$

ELASTIC AND PHOTOELASTIC ISODYNES: DEFINITIONS, DERIVED QUANTITIES

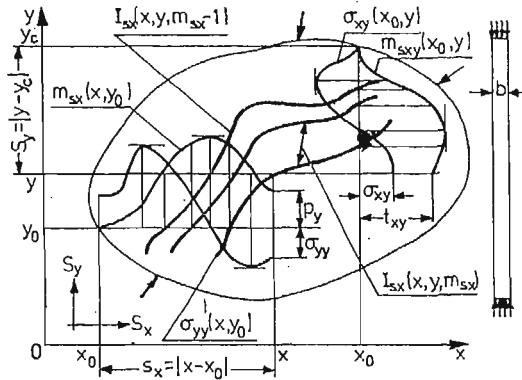


Fig. 1. Concept of plane isodynes

MAJOR FEATURE

ISODYNES ARE RELATED TO CHOSEN CHARACTERISTIC DIRECTIONS:

$$I_{sx} = I_{sx}(x, y, m_{sx}) = \text{const.}; \quad I_{sy} = I_{sy}(x, y, m_{sy}) = \text{const.}$$

CHARACTERISTIC CROSS-SECTIONS THROUGH ISODYNE FIELDS

$$m_{sxx} = m_{sxx}(x, y_0) = S_x^{-1} P_{yy}(x, y_0) = (bS_x)^{-1} P_{yy}(x, y_0)$$

$$m_{sxy} = m_{sxy}(x_0, y) = S_y^{-1} T_{xx}(x_0, y) = (bS_y)^{-1} [T_{xx}(x_0, y) + C(y)]$$

$$m_{syy} = m_{syy}(x_0, y) = S_y^{-1} P_{xx}(x_0, y) = (bS_y)^{-1} P_{xx}(x_0, y)$$

$$m_{syx} = m_{syx}(x, y_0) = S_x^{-1} T_{yy}(x, y_0) = (bS_x)^{-1} [T_{yy}(x, y_0) + C(x)]$$

CONDITIONS:

— HOOKE'S BODY

— RAMACHANDRAN-RAMASESHAN BODY

— PLANE STRESS FIELD

SYMBOLS:

I_{sx}, I_{sy} : x - O y -ISODYNES

m : ORDER (PARAMETER) OF ISODYNE

S_x : x -CHARACTERISTIC DIRECTION

S_y : ELASTIC ISODYNE FACTOR $\left[\frac{\text{FORCE}}{\text{LENGTH}} \right]$

P_y : TOTAL NORMAL FORCE ON SECTION s_x

p_y : NORMAL FORCE INTENSITY ($= b^{-1}P_y$)

T_{xy} : TOTAL SHEAR FORCE ON SECTION s_y

t_{xy} : SHEAR FORCE INTENSITY ($= b^{-1}T_{xy}$)

σ_{ij} : STRESS COMPONENTS ($i, j = x, y$)

f, C : BOUNDARY CONDITIONS FUNCTION

RELATIONS FOR STRESS COMPONENTS

$$1. \quad \sigma_{yy}(x, y_0) = S_x \frac{d}{dx} m_{sxx}(x, y_0)$$

$$2. \quad \sigma_{xx}(x_0, y) = S_y \frac{d}{dy} m_{syy}(x_0, y)$$

$$3. \quad \sigma_{xy}(x_0, y) = -S_y \frac{d}{dy} m_{sxy}(x_0, y) + f'_{yy}(x)$$

$$4. \quad \sigma_{yx}(x, y_0) = -S_x \frac{d}{dx} m_{syx}(x, y_0) + f'_{xx}(y)$$

and

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_x = \frac{d}{dx} p_y = S_s \frac{d}{dx} m_{sxx}(x, y_0), \quad (3c)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y = \frac{d}{dy} p_x = S_s \frac{d}{dy} m_{syy}(x, y_0) \quad (3d)$$

where p_y and p_x denote intensities of normal forces acting on cross sections collinear with the corresponding directions x and y , and m_{sxx} and m_{syy} denote cross sections through x - and y - isodyne fields in the x - and y -directions. Followingly, the equation of isodynes can be presented in the form:

$$I_{sx} = I_{sx}(x, y, m_{sx}) = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = p_y(x, y, m_{sx}) = S_s m_{sx}(x, y) = \text{const}, \quad (4a)$$

$$I_{sy} = I_{sy}(x, y, m_{sy}) = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy = p_x(x, y, m_{sy}) = S_s m_{sy}(x, y) = \text{const}. \quad (4b)$$

The loci of points described by relations (4a) and (4b) can be called „elastic isodynes” because they represent lines of constant values of normal forces acting on corresponding cross-sections. The arbitrary directions x and y , to which elastic isodynes are related, can be conveniently called „characteristic directions”, S_x and S_y . The functions Φ_x and Φ_y could be called „generalized isodynes”:

$$\Phi_x(x, y, m_{sx}) = I_{sx}(x, y, m_{sx}) - f_{xx}(y) = \text{const}, \quad (5a)$$

$$\Phi_y(x, y, m_{sy}) = I_{sy}(x, y, m_{sy}) - f_{yy}(x) = \text{const}. \quad (5b)$$

Functions $f_{xx}(y)$ and $f_{yy}(x)$ can be determined from the boundary conditions. The generalized isodynes Φ_x and Φ_y are simply related to the corresponding isodyne fields characterized by the isodyne orders m_{sx} and m_{sy} :

$$\Phi_x = S_s m_{sx}(x, y) - f_{xx}(y) = \text{const}, \quad (6a)$$

$$\Phi_y = S_s m_{sy}(x, y) - f_{yy}(x) = \text{const}. \quad (6b)$$

Relations (6a, b) can be used to determine the shear stress components σ_{xy} and σ_{yx} , and their intensities t_{xy} and t_{yx} .

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial y} \Phi_x = -\frac{\partial}{\partial y} m_{sx}(x, y) + \frac{d}{dy} f_{xx}(y) = -S_s \frac{d}{dy} m_{sxy}(x, y) + \\ &+ f'_{xx}(y) = \frac{d}{dy} t_{xy}(x, y), \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yx} &= -\frac{\partial}{\partial x} \Phi_y = -\frac{\partial}{\partial x} m_{sy}(x, y) + \frac{d}{dx} f_{yy}(x) = -S_s \frac{d}{dx} m_{syx}(x, y) + \\ &+ f'_{yy}(x) = \frac{d}{dx} t_{yx}(x, y), \end{aligned} \quad (7b)$$

$$t_{xy} = t_{xy}(x, y, m_{sxy}) = \int \sigma_{xy} dy = -\int \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} dy = -S_s m_{sxy}(x, y) + f_{xx}(y) + C_1, \quad (8a)$$

$$t_{yx} = t_{yx}(x, y, m_{syx}) = \int \sigma_{yx} dx = -\int \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} dx = -S_s m_{syx}(x, y) + f_{yy}(x) + C_2 \quad (8b)$$

Obviously,

$$T_{xy} = bt_{xy} \quad \text{and} \quad T_{yx} = bt_{yx}. \quad (9a,b)$$

At any chosen point $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, thus

$$S_s \left[\frac{d}{dy} m_{syx}(x, y) - \frac{d}{dx} m_{syx}(x, y) \right] = f'_{xx}(y) - f'_{yy}(x). \quad (10)$$

Relations (10) can be used to check the accuracy of determination of the functions $f'_{xx}(y)$ and $f'_{yy}(x)$.

According to relations (3a, b) and (7a, b) two families of isodynes related to two different — preferably mutually perpendicular — directions, for instance, $I_{sx}(x, y)$ and $I_{sy}(x, y)$ or shortly (x, y) — isodynes, yield four independent pieces of information on the values of the normal and shear stress components, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} and σ_{yx} , where $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. In additional, the fields of (x, y) — isodynes are related by the condition

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_2$$

thus the equation of isopachics may be presented in the form:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi_x + \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y = S_s \left(\frac{d}{dx} m_{sxx} + \frac{d}{dy} m_{syy} \right) = S_s m_i = \text{const}, \quad (11)$$

where m_i denotes the order of isopachics and S_s denotes the elastic coefficient of isopachics.

It is convenient to use the term „characteristic lines of plane stress fields” to denote a set of functions characterizing the stress fields, such as the isostatics, isoclinics, isochromatics, isopachics etc. [10], [11]. Within such a framework the elastic isodynes represent a new family of the characteristic lines of plane stress fields.

The four independent pieces of information given by (x, y) -isodynes describe three independent stress components, σ_{xx} , σ_{yy} , $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$; one piece of information is redundant and can be used to increase the accuracy of experimental evaluation of stress components. Various known techniques of differentiation of isodyne fields can be applied or adapted, to determine the quantities of interest.

2.2 Photoelastic Isodynes. It has been shown [12] that it is possible to produce a particular whole field scattered light intensity modulations related to chosen characteristic direction x , when the following conditions are satisfied:

- a) primary beam is co-planar with the (σ_1, σ_2) -plane;
- b) angle between polarization axis of primary beam and (σ_1, σ_2) -plane is $\pi/4$.
- c) at each point of the scattering plane:
 - observation angle is equal to $\pi/2$;
 - azimuthal angles are equal to 0 or $\pi/2$, respectively;
 - optical paths between corresponding points in the object and the image planes are the same.

The light intensity modulation can be described using the concept of constant intensity lines, related to chosen characteristic directions x and y :

$$I_{s1,2}/kI_0 = (I_s)_n = F_{s1,2}(x, y) = \text{const}, \quad (12)$$

where the subscripts 1, 2 denote light beams S_1 and S_2 scattered under the azimuthal angles 0 and $\pi/2$, respectively, Fig. 2.f

TRANSMISSION PHOTOELASTICITY. ISODYNE PHOTOELASTICITY DEFINITIONS.
SAMPLAS OF RECORDINGS PROBLEM: STRESS DETERMINATION IN ARBITRARY SECTIONS

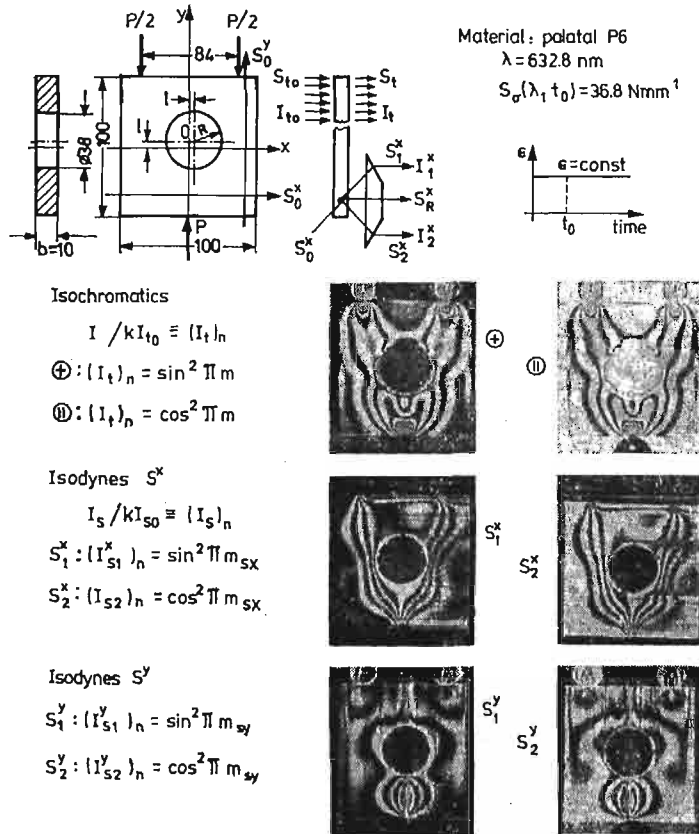


Fig. 2. Square plate with an unsymmetric hole loaded by three forces: scheme of experiment, and isochromatics and isodyne fields

It is easy to show that the intensities of scattered beams S_1 and S_2 depend on the state of polarization at scattering points and therefore carry information on the magnitude of the relative retardation produced along the path of primary beam S_0 :

$$(I_{s1}^x)_n = \sin^2 \pi m_{sx} = \sin^2 \frac{\psi_{sx}}{2} = 0.5(1 - \cos 2\pi m_{sx}) = 0.5(1 - \cos \psi_{sx}) = F_{s1}^x(x, y), \quad (13)$$

$$(I_{s2}^x)_n = \cos^2 \pi m_{sx} = \cos^2 \frac{\psi_{sx}}{2} = 0.5(1 + \cos 2\pi m_{sx}) = 0.5(1 + \cos \psi_{sx}) = F_{s2}^x(x, y), \quad (14)$$

CHARACTERISTIC LINES OF PLANE STRESS FIELD BY ISODYNE PHOTOELASTICITY:

- LINES OF CONSTANT NORMAL FORCE: $P_y(x, y) = \text{constant}$
- DISTRIBUTION OF NORMAL FORCE IN A CROSS-SECTION: $P_y = P_y(x, c)$
- DISTRIBUTION OF NORMAL STRESS IN A CROSS-SECTION: $\sigma_y = \sigma_y(x, c)$

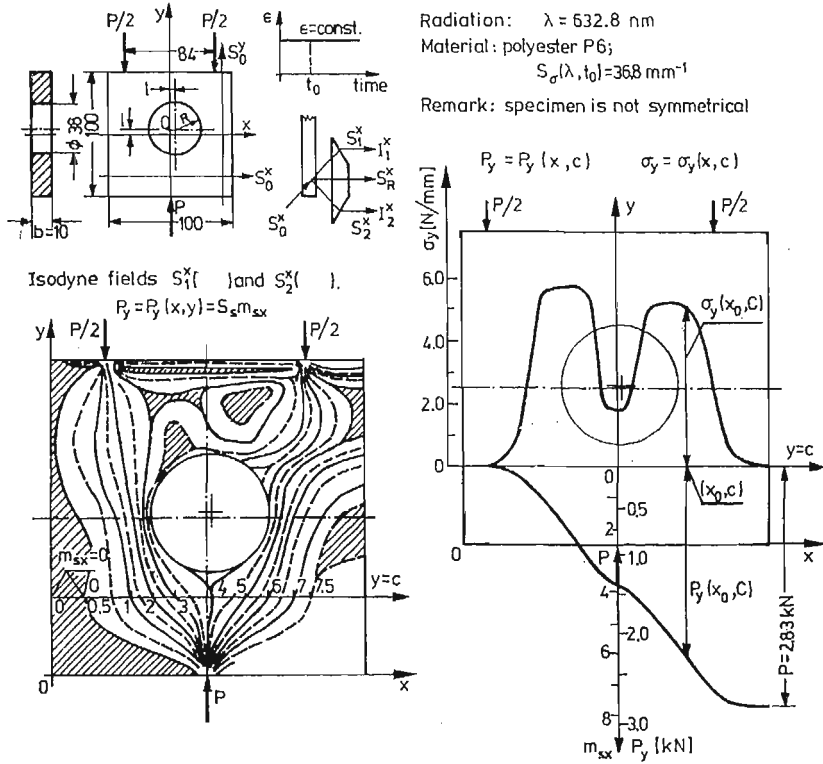


Fig. 3. Square plate with an unsymmetric hole loaded by three forces: isodyne stress analysis in selected cross-sections

where the rate of wavefront separation is given by

$$dR_x = \lambda dm_{sx} = \frac{1}{2\pi} \lambda d\psi_{sx} = (n'_1 - n'_3) dx = C_\sigma (\sigma_1 - \sigma_3) dx = C_\sigma C_y dx, \quad (15)$$

or

$$\sigma_y = \frac{\lambda}{C_\sigma} \frac{dm_{sx}}{dx} = S_\sigma \frac{dm_{sx}}{dx} = \frac{1}{2\pi} S_\sigma \frac{d\psi_{sx}}{dx}, \quad (16)$$

and

$$P_y(0, x) = \int_0^x b \sigma_y dx = b S_\sigma m_{sx} = S_\sigma m_{sx}. \quad (17)$$

Obviously, the elastic and photoelastic isodynes are formally identical,

$$(I_{sx})_{\text{elastic}} \equiv (I_{sx})_{\text{photoelastic}}, \quad (18)$$

$$(I_{sy})_{\text{elastic}} \equiv (I_{sy})_{\text{photoelastic}}.$$

When the boundary conditions are such that the functions $f_{xx}(y)$, $f_{yy}(x)$, C_1 and C_2 vanish then the elastic and photoelastic isodynes are identical with the first derivatives of Airy stress function.

More information on the theory and technique of isodyne photoelasticity is given in References [6, 9, 12 - 26, 31].

2.3 Examples of Applications. Isodyne photoelasticity allows to determine — reliably, easily, and inexpensively — all components of plane stress fields in chosen cross sections. This method is particularly suitable to collect information on stress fields needed to evaluate stress intensity factors, three-dimensional stress states in regions of notches and cracks, interlaminar stresses in composite structures, residual stresses, thermal stresses, etc.

Figures 2 and 3 illustrate the theory, technique, and applicability of the isodyne photoelasticity.

It appears that the isodyne photoelasticity is particularly suitable to determine ranges of applicability of analytical methods of stress analysis.

Isodyne photoelasticity makes it possible to develop new techniques for determination of surface stress components in engineering prototypes, The related method of isodyne coatings is presented in [19].

3. Gradient photoelasticity

3.1 Basic Relations. It has been known for a very long time that the path of light propagating through inhomogeneous bodies is not rectilinear — light path is curved. A particular example of this phenomenon is the well known mirage.

It has been observed that a noticeable mirage effect is produced by stress state in photoelastic objects [21 - 23]. This effect limits the resolution of photoelastic measurements [21], and obscures isochromatic fields in regions of high birefringence gradients [22], Fig. 4. However, this effect can be utilized to measure particular residual stress states [23]. It has been shown recently that the optical anisotropy caused by an inhomogeneous stress state produces a noticeable separation of each curved light beam; this effect can be used to determine the gradients of some linear functions of stress components and the values of absolute stress-optic coefficients [24 - 27].

It is common to present the influence of the optical inhomogeneity of a body on the geometry of the path of light propagating in this body by the simplified relation [28]:

$$\bar{K} = \frac{1}{\varrho_1} \bar{\nu} = \frac{1}{n} \left(\text{grad} n - \frac{dn}{ds} \bar{s} \right) = \text{grad} \ln n - \frac{1}{n} \frac{dn}{ds} \bar{s} \quad (19)$$

The most general phenomenological mathematical model of the stress/strain produced optical anisotropy presents an alteration of an optical parameter as a linear homogeneous function of the components of the stress or strain tensors, [29]. The relations presented in [29], together with the relation (19), lead to the following relationships between the curvatures of both ray components propagating with the velocities v_1 , v_2 and the stress

LIGHT PROPAGATION THROUGH A SOLID BODY:
INFLUENCE OF INHOMOGENEITY GRADIENT, AND ANISOTROPY GRADIENT
CAUSED BY STRAIN/STRESS GRADIENTS

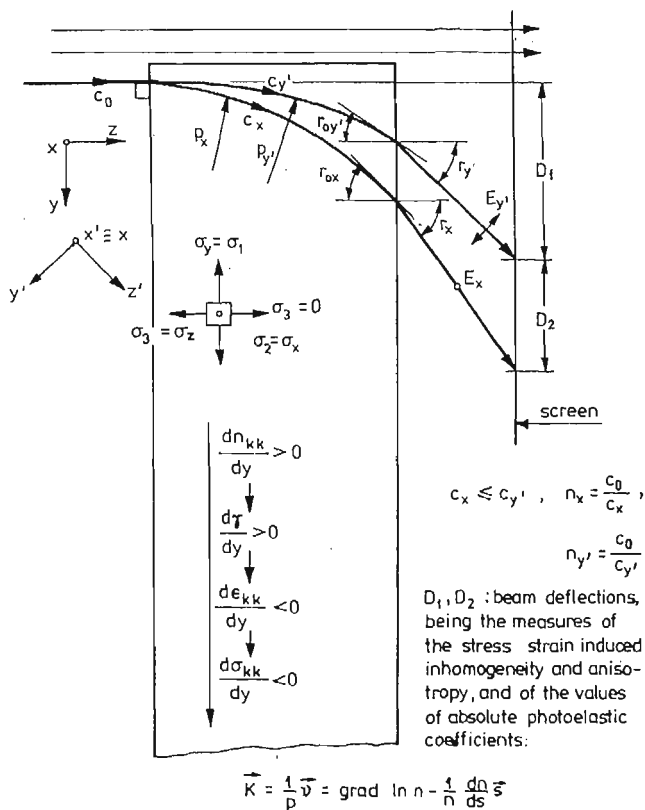


Fig. 4. Paths of light in a body which became inhomogeneous, optically and mechanically, under influence of an inhomogeneous stress field: influence of gradients of the sum and differences of principal stresses

tensor components:

$$\bar{K}_1 = \frac{1}{\rho_1} \bar{v} = \frac{1}{n_1} \left(\text{grad} n_1 - \frac{dn_1}{ds} \bar{s} \right), \quad (20)$$

where

$$n_1 = n_0 + C_1 \sigma_1 + C_2 (\sigma_2 + \sigma_3), \quad (21)$$

and

$$\bar{K}_2 = \frac{1}{\rho_2} \bar{v} = \frac{1}{n_2} \left(\text{grad} n_2 - \frac{dn_2}{ds} \bar{s} \right), \quad (22)$$

where

$$n_2 = n_0 + C_1 \sigma_2 + C_2 (\sigma_3 + \sigma_1). \quad (23)$$

These equations can be used as a foundation of a mathematical model relating deflections of a light beam traversing a body to gradients of the sum and difference of principal stresses.

LIGHT PROPAGATION THROUGH SOLID BODY, DEFLECTIONS IN FUNCTION OF MEAN STRESS GRADIENTS

$$\frac{1}{2}(\Delta D_x + \Delta D_y) = f_s \left(\frac{dS}{dy} \right), S = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

material: polyester resin P6

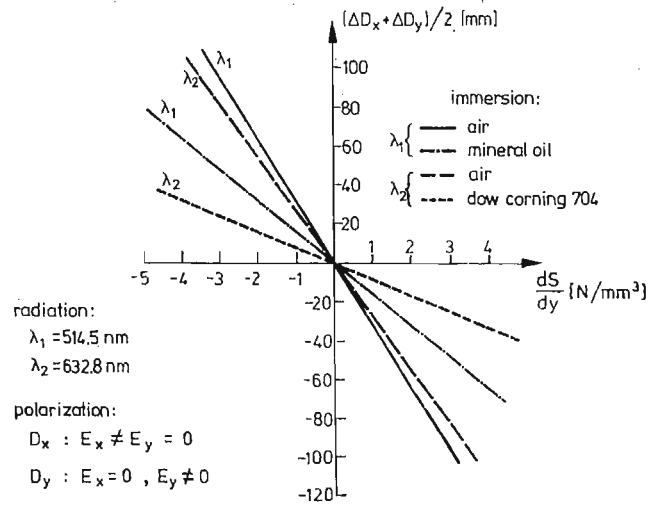
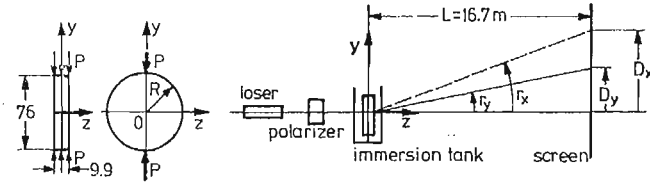


Fig. 5. Gradient photoelasticity: example of the dependence of light deflection on gradient of the sum of principal stresses

This model, when applied to plane stress states, yields simple linear equations between the deflections, stress gradients and values of the absolute and relative stress-optic coefficients C_1 , C_2 and $C_\sigma = C_1 - C_2$ where, of course,

$$C_1, C_2, C_\sigma = C(\lambda) \tag{24}$$

Transmission photoelasticity yields:

$$C_\sigma = C_1 - C_2 = \frac{n_1 - n_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \tag{25}$$

3.2 Examples of Mirage Effect Applications. Typical form of the mirage effect produced in a photoelastic object is presented in Fig. 4, [22]. The magnitude of the mirage effect depends on the orientation of polarization axis, Fig. 4. In a general case, the impinging unpolarized beam is resolved into two polarized beams, curvature of which is approximated by relations (20) and (22).

Using measurement system depicted in Fig. 5 it is easy to derive relations between deflections D_1 , D_2 , $D_1 - D_2$, Fig. 4, and corresponding gradients of the symmetrical and deviatoric parts of a stress tensor. Typical results are presented in Fig. 5. Obviously, the magnitude of effect depends on the wavelength of radiation.

Gradient photoelasticity yields directly data on values of gradients of the sum and difference of principal stresses, which are of particular interest in regions of high stress gradients, e.g., in regions of notches or crack tips.

An analysis of the method of integrated photoelasticity from the point of view of gradient photoelasticity is given in [30].

Acknowledgment

Presented examples were evaluated in cooperation with F. W. Hecker, B. R. Krasnowski, H. J. Beyer, H. H. Reddemann. Research has been supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada, under Grant No. A 2939.

References

1. A. ROBERT and J. ROYER, C. R. Ac., Sc., 281 (27 Oct. 1975), Serie B.
2. A. LAGARDE, P. OHEIX and H. BRILAUD, Mech. Res. Comm. 4(2), 107 (1976).
3. R. DESAILLY and A. LAGARDE, Mech. Res. Comm. 4(2), 99 (1977).
4. J. T. PINDER, Proc. Acad. Nauk. Estonskoi SSR 7, Vol. 1, 48 (1971).
5. J. T. PINDER, Trans. CSME, 2(1), 21 (1973 - 74).
6. J. T. PINDER and Peter STRAKA, Journ. Strain Analysis 8 (1), 65 (1973).
7. J. T. PINDER and Peter STRAKA, Rheol. Acta 13 (3), 338 (1974).
8. J. T. PINDER, P. STRAKA and A. R. KRISHNAMURTHY, Proc. CISM 5, 2.85 - 2.98 (1974).
9. J. T. PINDER, Mech. Res. Comm. 8 (6), 391 (1981).
10. A. PIRARD, *La Photoelasticite*, Dunod, Paris (1947).
11. J. T. PINDER, *Outline of Photoelasticity* (in Polish), PWT, Warszawa (1953).
12. J. T. PINDER and S. B. MAZURKIEWICZ, Mech. Res. Comm. 4 (4), 247 (1977).
13. J. T. PINDER, S. B. MAZURKIEWICZ and T. Y. KEPICH, Proc. Hun. Sc. Soc. Mech. Eng. 7, Vol. 2, 637 (1978).
14. S. B. MAZURKIEWICZ and J. T. PINDER, Exp. Mech. 19 (7), 225 (1979).
15. J. T. PINDER, *Optical Methods in Mechanics of Solids* (ed. Alexis Lagarde), 103, Sijthoff & Noordhoff (1981).
16. J. T. PINDER and S. B. MAZURKIEWICZ, Proc. Acad. Nauk. Estonskoi SSR 8, Vol. 1, 144 (1979).
17. J. T. PINDER, Proc. Acad. Nauk Estonskoi SSR 8, Vol. 1, 130 (1979).
18. J. T. PINDER and S. B. MAZURKIEWICZ, Exp. Mech. 21 (12), 448 (1981).
19. J. T. PINDER, S. S. ISSA and B. R. KRASNOWSKI, Proc. SESA, 111 (1981).
20. J. T. PINDER and B. R. KRASNOWSKI, *Fracture Problems & Solutions in the Energy Industry* (ed. L. A. Simpson), 147 - 156. Pergamon Press, Toronto, 1982.
21. M. F. BOKSHEIN, Zhurnal Tekh. Fiziki 19 (10), 1103 (1949).
22. J. T. PINDER, Rozprawy Inzynierskie 3 (1), 109 (1955).
23. P. ACLOQUE and G. GUILLEMENT, Proc. Inst. Physics, 71 (1959).
24. F. W. HECKER and J. T. PINDER, Proc. GESA and SESA, 745 (1978).
25. F. W. HECKER, T. Y. KEPICH and J. T. PINDER, Proc. Acad. Nauk Estonskoi SSR 8, Vol. 1, 117 (1979).
26. F. W. HECKER, T. Y. KEPICH and J. T. PINDER, *Optical Methods in Mechanics of Solids* (ed. Alexis Lagarde) 123, Sijthoff & Noordhoff (1981).
27. J. T. PINDER, F. W. HECKER and B. R. KRASNOWSKI, Mech. Res. Comm., 197 (1982).

28. M. BORN and W. WOLF, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford (1975).
 29. G. N. RAMACHANDRAN and S. RAMASESHAN, *Chap. 1, Handbuch der Physik* (ed. S. Flugge), Springer Verlag, Berlin (1961).
 30. H. ABEN, B. KRASNOWSKI, J. PINDERA, *Izvestia Akademii Nauk Estonskoi SSR* Vol. 31 (1), 65 (1982).
 31. J. T. PINDERA, *Optical Engineering*, Vol. 21 (4), 672 (1982).

Р е з ю м е

ИЗОДИННАЯ И ГРАДИЕНТНАЯ ФОТОУПРУГОСТЬ. ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЗМОЖНОСТИ И ПРИМЕНЕНИЯ

Под термином изодины предложенным Пиндером и Мазуркевичем понимаем новое семейство линий характерных плоскому напряженному состоянию. Из этих линий возникают информации относительно целой нормальной силы, действующей в определенном сечении модели.

Два семейства изодин определенные для двух характерных направлений делают возможным определить значения всех трех составляющих плоского напряженного состояния. Замысел изодин является результатом предложенного Пиндером и Старком обобщения теории рассеяного света.

Метод изодин можно применять как для анализа фотоупругих моделей так и используя метод фотоупругости слоя к действительным деталям машин.

Термин градиентная фотоупругость предложенный Пиндером и Хекером обозначает новый фотоупругий метод, использующий зависимость искривления луча света в фотоупругом объекте от градиентов сферической и наклонной составляющих тензора напряжений или деформации. Используя основную математическую модель фотоупругого эффекта, предложенную Рамахан-драном и Рамаишаном, градиентная фотоупругость ведет непосредственно к абсолютным и относительным значениям фотоупругих коэффициентов в зависимости от длины волны электромагнитного излучения.

Оба метода можно применить, примерно, к определению коэффициента интенсивности напряжения или составляющих напряжения в конструкциях из композитов.

Streszczenie

ELASTOOPTYKA IZODYNOWA I GRADIENTOWA.
MODELE FIZYCZNE I MATEMATYCZNE, MOŻLIWOŚCI I ZASTOSOWANIE.

Termin izodyna został zaproponowany przez Pindere i Mazurkiewicza i oznacza nową rodzinę linii charakterystycznych dla płaskiego stanu naprężenia. Linie te dostarczają informacji o całkowitej sile normalnej, działającej na określonym przekroju modelu. Dwie rodziny izodyn wyznaczone dla dwóch charakterystycznych kierunków pozwalają wyznaczyć wartości wszystkich trzech składowych płaskiego stanu naprężenia. Pomysł izodyn jest rezultatem prezentowanego przez Pindere i Starke uogólnienia teorii światła rozpraszanego.

Metoda izodyn może być stosowana dla modeli elastoptycznych jak również rzeczywistych elementów maszyn wykorzystując metodę warstwy elastoptycznej.

Termin elastoptyka gradientowa został zaproponowany przez Pindere i Heckera dla oznaczenia nowej metody elastoptycznej, wykorzystującej zależności pomiędzy zakrzywieniem promieni światła w obiekcie elastoptycznym a gradientami składowej kulistej i składowej skośnej tensora naprężenia lub odkształcenia. Wykorzystując podstawowy model matematyczny efektu elastoptycznego przedstawiony przez Ramachandrana i Ramaseshana, elastoptyka gradientowa daje natychmiast wartości absolutnych i względnych współczynników elastoptycznych w zależności od długości fali promieniowania elektromagnetycznego.

Obydwie metody mogą być stosowane np. do wyznaczenia współczynnika intensywności naprężeń a również do wyznaczenia składowych naprężenia w konstrukcjach z kompozytów.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1983 roku

SOME PRACTICAL PROBLEMS OF DISPLACEMENT AND STRAIN MEASUREMENT BY INCOHERENT SUPERPOSITION OF INTERFEROGRAMS

PIOTR WESOŁOWSKI

*Institute of Physics
Technical University
Budapest*

In this paper the suitability of using the regulated pathlength interferometer due to automatization of 3-D displacement and surface strain measurement as well as problems faced in dealing with the accuracy of the measurements are examined. Data needed for determining all three components of displacement vector are stored on single plate. The displacement and deformation of surface point of a disc subjected to diametral compression was measured to investigate the effectiveness of this technique.

Introduction

The quantitative investigation of displacement vector fields by holographic interferometry requires recording in at least three different interferograms. The conventional multiple hologram method [3] gives different perspectives for views through each of the plates.

Considering the automatization of the evaluation of holograms (the first problem-automatization of fringe counting) the important problem is, what kind of interferometer should be used. In this experiment such an interferometer was chosen, which records independent interferograms simultaneously by incoherent superposition of holograms [6]. The most important property from a point of view of automatic fringe inspection is an accurate identification of corresponding object points on each of interferograms; this is because of the same observational direction for all the interferograms.

Regarding the methods of evaluation of the displacement vector, the authors [2] examining the Haines and Hildebrand method, the Bronch-Bruevich single hologram method as well as the improved version of the latter (Dhir-Sikora method), have arrived at a conclusion that by comparing theoretical and experimental results, the most suitable and with the smallest error is the Dhir-Sikora's. This method uses at least four observation points to obtain an overdetermined set of linear simultaneous equations relating the fringe shifts with three unknown components of displacement and obtains the result by the least square principle [11]. The discrete values of displacement components are smoothed out by cubics splines, after this strains are computed.

The most important properties of regulated pathlength interferometer

The recording of different interferograms on a single plate for evaluation of 3-D displacements is made simultaneously. Independency of interferograms is a result of the absence of correlation between beams not belonging together. The uncorrelation can be realized by producing an optical pathlength difference among corresponding beams, which is larger than the coherence length of the laser used in the experiment. In order to be able to reconstruct interferograms separately there must be present so much reference beams as illumination beams.

Holographic displacement measurement

Let us investigate the problem in Descartes orthogonal coordinates:

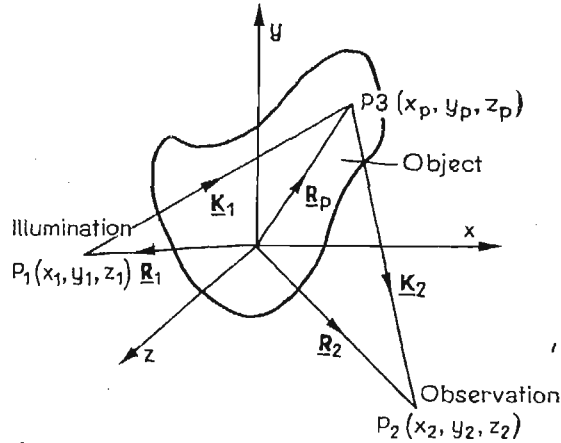


Fig. 1

A displacement vector:

$$\underline{L} = L_x \underline{i} + L_y \underline{j} + L_z \underline{k}. \quad (1)$$

P_3 is a point on the object corresponding to a space vector \underline{R}_p , for the object illuminated from a point source defined by \underline{R}_1 , the reconstructed image can be observed from a point described by \underline{R}_2 .

Let us define the illumination vector \underline{K}_1 and the observation vector \underline{K}_2 :

$$\underline{R}_p = x_p \underline{i} + y_p \underline{j} + z_p \underline{k}, \quad (2)$$

$$\underline{K}_1 = k \frac{\underline{R}_p - \underline{R}_1}{|\underline{R}_p - \underline{R}_1|} = k \frac{(x_p - x_1) \underline{i} + (y_p - y_1) \underline{j} + (z_p - z_1) \underline{k}}{[(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2 + (z_p - z_1)^2]^{1/2}} = k \cdot \hat{\underline{K}}_1, \quad (3)$$

$$\underline{K}_2 = k \frac{\underline{R}_2 - \underline{R}_p}{|\underline{R}_2 - \underline{R}_p|} = k \frac{(x_2 - x_p) \underline{i} + (y_2 - y_p) \underline{j} + (z_2 - z_p) \underline{k}}{[(x_2 - x_p)^2 + (y_2 - y_p)^2 + (z_2 - z_p)^2]^{1/2}} = k \cdot \hat{\underline{K}}_2 \quad (4)$$

where $\hat{\underline{K}}_1, \hat{\underline{K}}_2$ are the unit illumination and observation vectors, respectively, and

$$|\underline{K}_1| = |\underline{K}_2| = k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (5)$$

is the magnitude of these vectors, with the wavelength λ of the laser light. The phase shift due to observations of the virtual image from different directions can be written as:

$$\delta = \underline{K} \cdot \underline{L} = 2\pi \underline{N}. \quad (6)$$

where

$$2\pi \underline{N} = \underline{\Omega} \quad (7)$$

is fringe locus function.

\underline{K} matrix consist of m different sensitivity vectors:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}^1 \\ \underline{K}^2 \\ \underline{K}^3 \\ \vdots \\ \underline{K}^m \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad \begin{aligned} \underline{K}^1 &= \underline{K}_2^1 - \underline{K}_1^1, \\ \underline{K}^2 &= \underline{K}_2^2 - \underline{K}_1^2, \\ &\vdots \\ \underline{K}^m &= \underline{K}_2^m - \underline{K}_1^m, \end{aligned} \quad (8)$$

and $m \geq 3$, means number of observations.

Independent on how carefully and how many observations are made, there will be always some errors E .

$$\underline{E} = \underline{K} \cdot \underline{L} - \underline{\Omega}. \quad (9)$$

The purpose of the analysis is to minimalize all of the errors squared, that is:

$$\underline{E}^2 = (\underline{K} \cdot \underline{L} - \underline{\Omega})^2. \quad (10)$$

In order to minimize the square of error the partial derivates of Eq. (10) must be zero:

$$\frac{\partial}{\partial L_i} \left\{ \sum_{m=1}^r [(\underline{K}_2^m - \underline{K}_1^m) \cdot \underline{L} - \underline{\Omega}^m]^2 \right\} = 0, \quad (11)$$

where $i = x, y, z$

$m = 1, 2, 3, \dots, r$ is number of all observations.

The solution of Eq. (11) in matrix form is:

$$\underline{L} = (\underline{K}^T \cdot \underline{K})^{-1} \cdot \underline{K}^T \cdot \underline{N} \cdot 2\pi \quad (12)$$

where \underline{K}^T is transposed matrix of \underline{K} .

Experiment

As a model there was used a plexiglass disc with diameter 90 mm, thickness $h = 10$ mm ($E = 3.2 \cdot 10^4$ N/m², $\mu = 0.385$) subjected to diametral compression [4].

The optical elements used in experiment: M-mirrors, BS-beamsplitters, COLL.-collimators, PL-microscope lens with pinholes, H-holographic plate (Agfa Geavert 8E75), O-object, L-He-Ne laser with output power of 50 mW.

In the measurement the „zerofringe” method was applied by using an elastic strip,

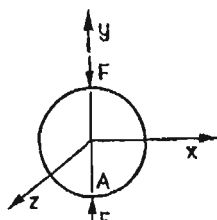


Fig. 2

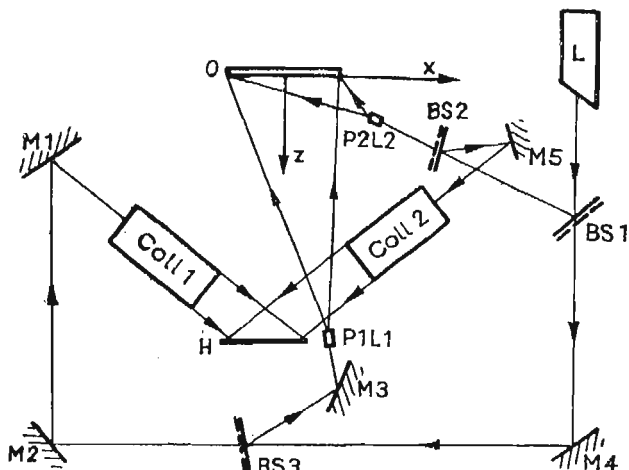


Fig. 3

which was stuck between the loading framework and the holographic slab. Two collimators (Carl Zeiss Jena make) were used for producing two plane wave references (\varnothing 50 mm).

The basic principle of building of holographic interferometers is to maximise its sensitivity on the smallest displacement component and to decrease its sensitivity on the largest displacement component. The illumination points (P1L1, P2L2) were chosen accordingly to sensitivity of the L_z component and L_x, L_y components, respectively. The difference of the optical pathlengths between corresponding beams was $\Delta l = 1820$ mm.

Evaluation of interferograms

Interferograms were recorded in double-exposure method. They were evaluated along horizontal as well as vertical diameter. In the reconstruction process the holographic plate was illuminated by original reference beams; the two independent interferograms were photographed through six observational points (Fig. 4)

Typical fringe pattern belonging to different references are shown on Fig. 5. The numbers of the fringe order were determined semiautomatically on the basis of photographs with interference patterns. In each of investigated points twelve sets of fringe order data were given (six different observational point belong to one reference).

The determination of the number of the fringe order looks as follows: the observer marks the geometrical centre on each fringe (black and white) along the investigated line and then with the aid of a drawing digitizer puts the geometrical data and integer fringe number to a computer connected via interface card. The program based on the least square principle chooses an appropriate polynomial and evaluates fractional fringe order numbers at the required points.

Displacement components along the horizontal diameter were determined using the Eq. 12. Displacement components: L_x, L_y, L_z along the horizontal diameter were computed in 17 points and are shown on Fig. 6. Displacement components along the vertical diameter are shown on Fig. 7. For further derivatives $\varepsilon_y = \frac{\partial(L_y)}{\partial y}$ only the central range of $y \in$

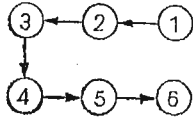


Fig. 4

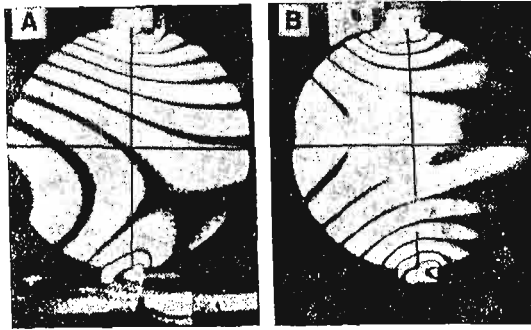


Fig. 5

$\epsilon \in (-28.125; 28.125)$ is considered because of boundary disturbances due to applied forces. From the Fig. 7 can be seen, that point $A(0; -45; 0)$ practically didn't move so the orthogonal coordinates can be reduced at that point. The rigid body motions are expressed in rotations $\theta_{x'}$, $\theta_{y'}$, $\theta_{z'}$.

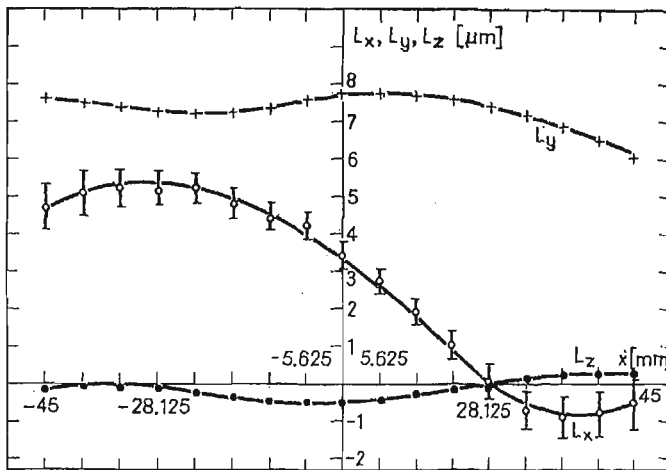


Fig. 6

From the plots of Fig. 6 and Fig. 7: $\theta_{x'} = 3.67 \cdot 10^{-5}$ (rad), $\theta_{y'} = 6.1 \cdot 10^{-6}$ (rad), $\theta_{z'} = 3.15 \cdot 10^{-5}$ (rad).

To obtain the value of deformation the values of $L_x(x, y = \text{const})$, $L_y(x, y = \text{const})$, $L_x(x = \text{const}, y)$, $L_y(x = \text{const}, y)$ at discrete points of the surface are needed; afterwards there is a need to smooth the data by fitting an appropriate curve to it. Smoothed spline functions [1], [8] are appropriate choice for fitting the displacement data as the objective of subsequent differentiation. They are attractive for three reasons: their definition is based on the theory of mechanical deformation, second derivatives are understood a priori, and their application to interferometric determination of strain has been studied [13]. The values ϵ_x evaluated along horizontal diameter are shown on Fig. 8 and the values of ϵ_y are shown on Fig. 9.

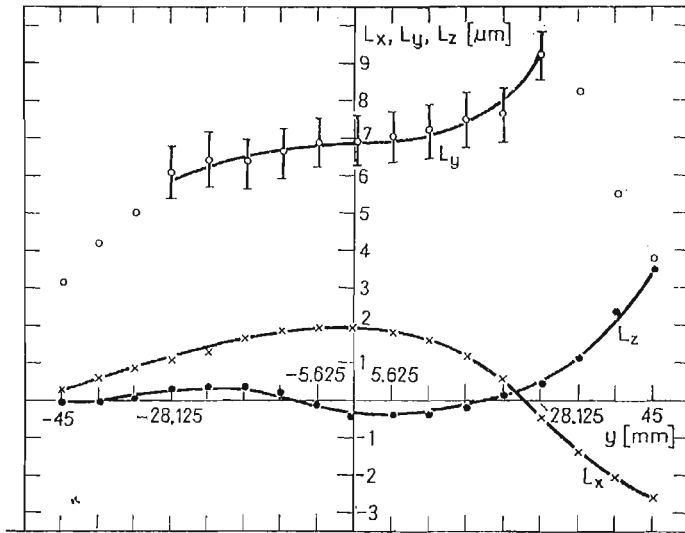


Fig. 7

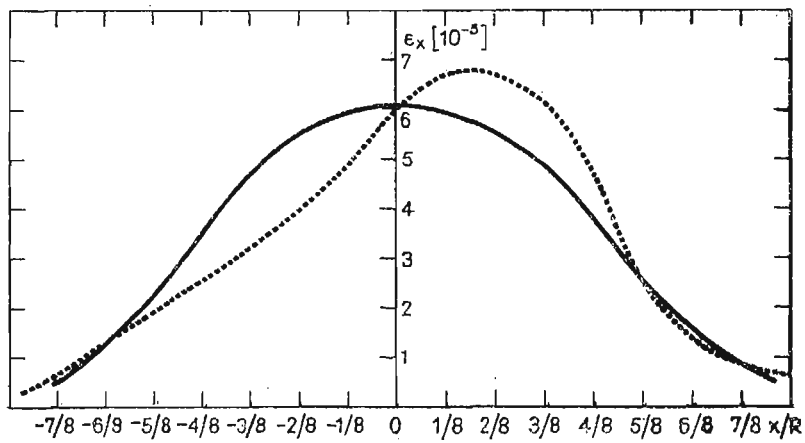


Fig. 8

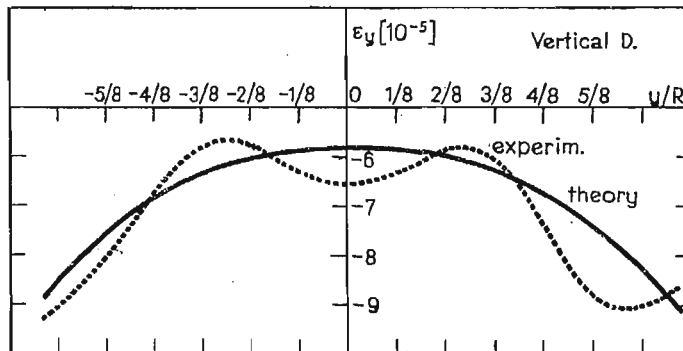


Fig. 9

Discussion about accuracy of the measurement

There are two main error sources:

- a) errors associated with measuring the system geometry
- b) inaccurate determination of fringe order values.

Two inequalities corresponding to these errors are as follows (8):

$$\frac{\|\underline{\Delta L}\|}{\|\underline{L}\|} \leq \text{cond}(\underline{K}) \cdot \frac{\|\underline{\Delta K}\|}{\|\underline{K}\|}, \quad \frac{\|\underline{\Delta L}\|}{\|\underline{L}\|} \leq \text{cond}(\underline{K}) \cdot \frac{\|\underline{\Delta N}\|}{\|\underline{N}\|}, \quad (13), (14)$$

where $\text{cond}(\underline{K}) = \|\underline{K}\| \cdot \|\underline{K}^{-1}\|$, (15)

is the value characteristic of the sensitivity of interferometer, and

$$\|\underline{K}\| = (\max \cdot \text{eigchvalue of } \underline{K}^T \cdot \underline{K})^{1/2}, \quad (16)$$

where \underline{K}^T is transpose matrix of \underline{K} .

For quick determination of the error, which is found by evaluation of displacement vector components another way was proposed [12]:

$$\delta L_k = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \Delta\varphi_k \cdot \text{tg} \frac{\varphi_k}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta N_{ij}(k)}{N_{ij}(k)}\right)^2} \quad (17)$$

where φ_k is an angle between $(-\underline{K}_1^k)$ and \underline{K}_2^k vectors and $\Delta N_{ij}(k)$ is an absolute error occurred by reading fringe order values.

Here:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\varphi_k = 1^\circ (0.17 \text{ rad}) \\ N_{ij}(k) = 0.25 \\ \varphi_{k_{\max}} = 62.3^\circ \end{array} \right|$$

So depending on the fringe order, the accuracy changes in range of $8\% \leq \delta L_k \leq 13.5\%$; for the central part of disc $\delta L_k \leq 9\%$. Obviously, a lower fringe order results in higher error. This error is transported into deformation countings. But, knowing the character of displacement by choosing a sufficient „smooth factor” [1] the spline functions can be better fit to discrete points of displacement. However, if the character of displacement is unknown, there is a custom to give for smooth factor value of standard deviation [13].

Recapitulation Suggestions

The difference between theoretical and experimental results can be explained at first by small size of the hologram plate (6×9 cm), which caused too small shifts of fringe order by changing observational points. The second main reason considered, could be found in the model loading system, which didn't load the disc pointwise as it is assumed in theory. Small rotations were observed, but their influence on the strains are negligible. By examining small models it would be worth testing the usefulness of reflection holograms in evaluating displacement field. Using reflection hologram in setup similar to proposed (only the hologram plate is closer to model), large fringe order shifts can be obtained which results in higher accuracy.

Acknowledgment

The author thanks Z. Füzessy, for helpful discussions and proofreading the manuscript and acknowledges the contribution of G. Szarvas, who provided frequent helpful consultations. This work was done in Institute of Physics at Technical University, Budapest.

References

1. Ch. H. REINSCH, *Smoothing by spline functions*, Numerische Mathematik 10, 177-183, 1967,
2. R. J. PRZYPUTNIEWICZ, W. W. BOLEY, *Techniques of holographic displacement measurement; an experimental comparison*, Applied Optics, vol. 17, nr. 11,
3. A. E. ENNOS, *Measurement of in plane strain by hologram interferometry*, J. Sci. Instrum., Ser. II, 1, 731-746, 1968,
4. C. A. SCIAMARELLA, J. A. GILBERT, *Strain analysis of a disc subjected to diametral compression by means of holographic interferometry*, Applied Optics, vol. 12, nr. 8,
5. R. E. ROWLANDS, T. LIBER, I. M. DANIEL, P. G. ROSE, *Higher—order numerical differentiation of experimental information*, Exp. Mechanics, March 1973,
6. Z. FÜZESSY, *Methods of holographic interferometry for industrial measurements*, Periodica Polytechnica, vol. 21, nr. 3-4,
7. A. G. KOZACSKO, G. A. KEZERASHVILI, Yu. A. RAKUSHIN, Yu. N. SOLODKIN, *Izmerenje deformacij i napriazhenij mietodami golograficheskij interferometrii*, Golograficheskije Izmeritelnyje Sistiemy, 58-75 Novosibirsk, 1976,
8. Ch. M. VEST, *Holographic interferometry*, Johny Wiley and Sons, 1979,
9. N. I. MUSKHELISHVILI, *Theory of elasticity*, P. Noordhoff Ltd. Groningen-Holland, 1953,
10. J. E. SOLLID, K. A. STETSON, *Strains from holographic data*, Experimental Mechanics, June 1978,
11. S. K. DHIR, J. P. SIKORA, *An Improved method for obtaining the General displacement field form holographic interferogram*, Exp. Mechanics, 323-327, 1972,
12. Yu. SOLODKIN, *Golograficheskij interferometr kak izmeritelnyj priyor*, Avtomietria 64, 1973, Nr. 5,
13. L. H. TAYLOR, G. B. BRANDT, *An error analysis of holographic strains determined by cubic splines*, Exp. Mechanics, 534-548, 1973.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕРЕНИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИНКОГЕРЕНТНОЙ СУПЕРПОЗИЦИИ ИНТЕРФЕРОГРАММ

Информация о механических характеристиках объектов в экспериментальной механике получается из экспериментов по определению полей деформаций и напряжений. Для таких исследований могут быть использованы методы голографической интерферометрии. В этой работе показано определение поля перемещения точек поверхности объекта используя интерферометр с регулируемой оптикой путем, который дает возможность автоматической инспекции интерферограмм. Дискретное поле перемещения аппроксимировано с помощью сплайн-функций третьего порядка и определено деформацию для диаметрально сжатого диска.

Streszczenie

PEWNE PROBLEMY PRAKTYCZNE POMIARÓW PRZEMIESZCZEŃ I ODKSZTAŁCENŃ PRZY NIEKOHERENTNEJ SUPERPOZYCJI INTERFEROGRAMÓW

Pokazano przykład zastosowania interferometrii holograficznej do pomiaru przemieszczeń i odkształceń za pomocą interferometru z dwiema wzajemnie niespójnymi wiązkami odniesienia. Możliwość obserwacji tego samego punktu badanego ciała na różnych interferogramach — zmieniając wiązki odniesienia pozwala na automatyzację odczytu prążka bez konieczności identyfikacji punktów powierzchni. Przeprowadzony eksperyment ma na celu zbadanie efektywności tej techniki.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1983 roku

BADANIA CHROPOWATOŚCI POWIERZCHNI METODĄ IMMERSYJNĄ INTERFEROMETRII HOLOGRAFICZNEJ

MAREK L E C H

Politechnika Warszawska

IRENA M R U K

Politechnika Warszawska

JACEK Ś T U P N I C K I

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Praca prezentuje wyniki uzyskane w efekcie przystosowania metody immersyjnej interferometrii holograficznej (IMHI) do badania mikronierówności powierzchni technicznych. Stanowi kontynuację wcześniejszych prac autorów w tej dziedzinie [1], [2], [3].

Rozwój techniki budowy maszyn i postęp technologiczny wymaga nowych, coraz dokładniejszych metod badania topografii powierzchni. Podstawowe znaczenie dla procesów zużycia, smarowania granicznego, wytrzymałości zmęczeniowej, przewodnictwa elektrycznego i cieplnego kontaktu ciał ma tekstura powierzchni będąca końcowym efektem obróbki oraz docierania i zużycia.

Niezbędny postęp w metodyce badań topografii powierzchni powinien jak się wydaje, iść w kierunku nieniszczących, bezdotykowych metod badań, łatwych do automatyzacji, o zakresie pomiarowym zmiennym w szerokich granicach, dających się łatwo zastosować do obiektów będących w eksploatacji dla umożliwienia obserwacji procesów zużycia.

Do oceny własności trybologicznych powierzchni najczęściej dotychczas stosuje się metody oparte o badania profilometryczne. Na podstawie profilogramów wyznaczane są rozkłady wierzchołków, dolin, promieni zaokrąglenia, pochyłości stoków mikronierówności. Według zgodnej opinii badaczy najbardziej przydatne do jednoznacznego opisu złożonej konfiguracji powierzchni są dwuwymiarowe mapy warstwiczne [4], [5]. Mapy takie są tworzone dotychczas na podstawie danych z wielu przekrojów uzyskiwanych najczęściej metodą profilografometryczną.

Udoskonalona metoda immersyjna interferometrii holograficznej wykorzystująca przezroczyste repliki badanych powierzchni, specjalnie skonstruowaną kuwetę immersyjną oraz układ mikroskopu holograficznego umożliwia otrzymywanie w sposób bezpośredni dwuwymiarowych map warstwicznych nierówności powierzchni.

Mapy warstwiczne odwzorowujące mikrotopografię badanych powierzchni w kilkusetkrotnym powiększeniu umożliwiają opis geometrii oraz wznaczenie nowych para-

metrów trybologicznych, charakteryzujących anizotropię powierzchni, opory przepływu smaru lub nośność powierzchni jak np. powierzchniowa krzywa nośności.

W pracy zawarte jest też porównanie wyników uzyskanych metodą immersyjną z wynikami pomiarów mikrogeometrii tych powierzchni metodą profilografometryczną przy użyciu Talysurf 5.

W przypadku stosowania replik do badania chropowatości podstawowym zagadnieniem jest określenie wierności odtwarzania szczegółów powierzchni przez materiał repliki [6].

Wierność odtwarzania mikronierówności przez użyte do badań przezroczyste repliki z gumy silikonowej została sprawdzona przez porównanie map warstwicznych na powierzchniach przełomów szklanych i zdjętych z nich replikach oraz przez porównanie określonych na tej podstawie parametrów geometrii powierzchni i jej repliki. Opisywana bezdotykowa metoda immersyjna interferometrii holograficznej (IMHI) do badania mikronierówności powierzchni posiada szereg zalet w stosunku do rozpowszechnionych metod profilografometrycznych. Możliwość znacznego zwiększenia dokładności warstwicowania i skomputeryzowania procesu opracowania map warstwicznych podnosi konkurencyjność tej metody.

Wykaz oznaczeń:

- λ — długość fali światła użytego w badaniach;
- n_1, n_2 — współczynniki załamania światła płynów immersyjnych;
- ΔZ — różnica głębokości między kolejnymi warstwicami;
- $R_{\max}/(R_{\max})_p/$ — największa wysokość chropowatości spośród wszystkich pododcinków lub fragmentów pól pomiarowych;
- $R_{TM}/(R_{TM})_p/$ — średnia wartość R_{\max} pięciu kolejnych pododcinków lub fragmentów pól pomiarowych;
- $R_T/(R_T)_p/$ — największa wysokość chropowatości na całym odcinku lub polu pomiarowym.

2. Technika eksperymentalna

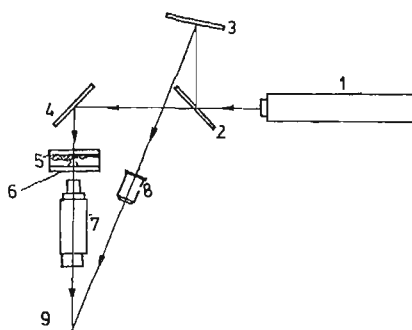
Metoda holograficznego warstwicowania powierzchni (IMHI) wykorzystuje zjawisko interferencji frontów falowych, które zachodzi podczas rekonstrukcji hologramu zarejestrowanego metodą podwójnej ekspozycji [2]. W tym przypadku każda z dwu ekspozycji jest dokonywana po napełnieniu kuwety płynem immersyjnym o innym współczynniku załamania światła.

Zrekonstruowany obraz holograficzny powierzchni pokryty jest siecią interferencyjnych prążków warstwicznych o względnej różnicy głębokości między nimi:

$$\Delta Z = Z_{N+1} - Z_N = \frac{\lambda}{n_1 - n_2}$$

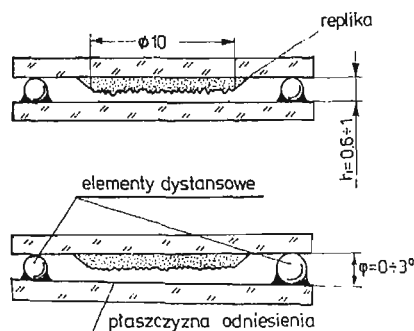
ΔZ zależy od długości fali λ użytego światła laserowego oraz od różnicy współczynników załamania światła n_1 i n_2 płynów immersyjnych. W celu uzyskania map warstwicznych badanych powierzchni zastosowano udoskonaloną przez autorów metodę immersyjną.

interferometrii holograficznej (IMHI). Zaprojektowano w tym celu nowy układ optyczny i kuwetę immersyjną nowej konstrukcji [1].



Rys. 1. Układ badawczy do warstwicowania replik w świetle przechodzącym. 1 — laser He-Ne, 2 — polaryzacyjny dzielnik wiązki, 3, 4 — zwierciadła 100%, 5 — przezroczysta replika, 6 — kuweta immersyjna, 7 — mikroskop holograficzny, 8 — obiektyw, 9 — płyta holograficzna

Schemat układu badawczego przedstawionego na rys.1. Wiązka światła lasera helowo-neonowego (1) o długości fali $\lambda = 632,8$ nm zostaje podzielona w polaryzacyjnym dzielniku wiązki (2) na wiązkę przedmiotową i wiązkę odniesienia. Wiązka przedmiotowa po odbiciu od zwierciadła 100% (4) przechodzi przez kuwetę immersyjną (6) i umieszczoną w niej przezroczystą replikę (5). Następnie jest rzutowana przy pomocy układu optycznego (7) na płytę holograficzną (9). Wiązka odniesienia po odbiciu od zwierciadła 100% (3) zostaje przekształcona przez obiektyw (8) w wiązkę kulistą i pada bezpośrednio na płytę holograficzną (9). Rejestracja hologramu i rekonstrukcja obrazu holograficznego odbywa się w tym przypadku w wiązkach kulistych tworzonych z wiązki światła wychodzącej z lasera za pomocą obiektywów mikroskopowych. Zastosowana do tych badań



Rys. 2. Kuweta immersyjna

nowa kuweta immersyjna (rys. 2) umożliwiła szybką zmianę replik i łatwą identyfikację punktów pomiarowych. Średnica przestrzeni pomiarowej kuwety wynosi $\varnothing 26$ mm, a odległość między płaskorównoległymi szklanymi ścianami kuwety jest regulowana za pomocą kulek dystansowych o średnicy od dziesiątych części milimetra do kilku milimetrów.

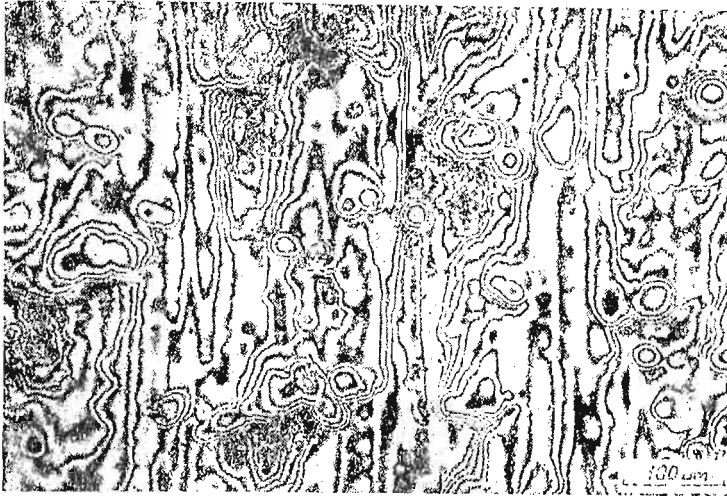
Odległość ta jest uzależniona od grubości repliki i wymaganych pochyłeń jej powierzchni względem płaszczyzny odniesienia, którą stanowi przednia ściana kuwety. Kuweta jest przystosowana do mocowania w typowych uchwytach z zestawów holograficznych produkcji P.Z.O.

Repliki badanych powierzchni wykonano z przezroczystej gumy silikonowej Polastosil M2000 metodą odlewania mieszaniny gumy z utwardzaczem na interesującym fragmencie oczyszczonej powierzchni. Do uformowania repliki o odpowiednich wymiarach używa się pierścienia metalowego o dokładnie wykonanych, płaskorównoległych powierzchniach podstawy, wewnętrznej średnicy \varnothing 10 mm i grubości 0,5 mm. Tak wykonany pierścień jest nałożony na dokładnie oczyszczoną badaną powierzchnię. Objętość wewnątrz pierścienia wypełnia się płynną gumą silikonową a następnie dociska się płaskorównoległą płytką szklaną stanowiącą tylną ścianę kuwety. Po utwardzeniu gumy silikonowej oddziela się płytkę ze znajdującą się na niej repliką od badanej powierzchni i umieszcza w kuwecie. W badaniach używano jako płynów immersyjnych: powietrza o współczynniku załamania światła $n = 1,00029$, alkoholu etylowego o współczynniku załamania światła $n = 1,36140$ co przy użyciu światła lasera He—Ne daje różnicę głębokości między kolejnymi warstwicami $\Delta Z = 1,75 \mu\text{m}$. Dla powierzchni o małych chropowatościach zastosowano inny zestaw płynów immersyjnych; powietrze ($n = 1,00029$) oraz wzorcową ciecz immersyjną IMF o współczynniku załamania światła $n = 1,618$, co przy tej samej długości fali świetlnej daje różnicę głębokości między warstwicami $\Delta Z = 1,024 \mu\text{m}$. Powietrze jako płyn immersyjny nie zanieczyszcza powierzchni repliki, a cienka warstwa wzorcowego płynu immersyjnego IMF lub alkoholu zawarta między powierzchnią repliki a płaszczyzną odniesienia utrzymuje się dzięki napięciu powierzchniowemu. Zastosowany w układzie optycznym mikroskop holograficzny pozwala na otrzymanie w płaszczyźnie płyty holograficznej kilkusetkrotnie powiększonego obrazu holograficznego powierzchni repliki. Zrekonstruowany wiązką odniesienia obraz holograficzny pojawiający się w płaszczyźnie płyty holograficznej, charakteryzuje się dużą jasnością i bardzo dobrą czytelnością pokrywających go prążków interferencyjnych. Obraz taki może być zarejestrowany aparatem fotograficznym lub może być obserwowany za pomocą mikroskopu optycznego, o ile wymagane są jeszcze większe powiększenia.

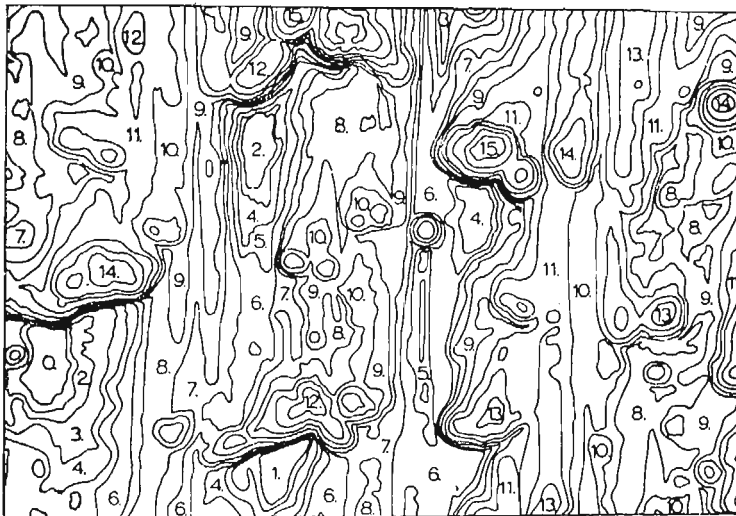
3. Zastosowanie holograficznych map warstwicowych do określania parametrów trybologicznych powierzchni

Dla wykazania przydatności metody warstwicowania holograficznego do określania parametrów trybologicznych powierzchni technicznych poddano badaniom szereg powierzchni metalowych o różnych sposobach i różnej dokładności obróbki. Dla powierzchni tych wykonano repliki, a następnie w opisanym powyżej układzie optycznym uzyskano mapy warstwicowe mikronierówności powierzchni.

Między innymi badano mikrogeometrię powierzchni tytanu po obróbce struganiem. Urozmaicony charakter mikronierówności tej powierzchni pozwolił wyeksponować zalety holograficznego warstwicowania powierzchni. Na rys. 3 przedstawiono mapę warstwicową na fragmencie repliki tej powierzchni przy różnicy głębokości między warstwicami

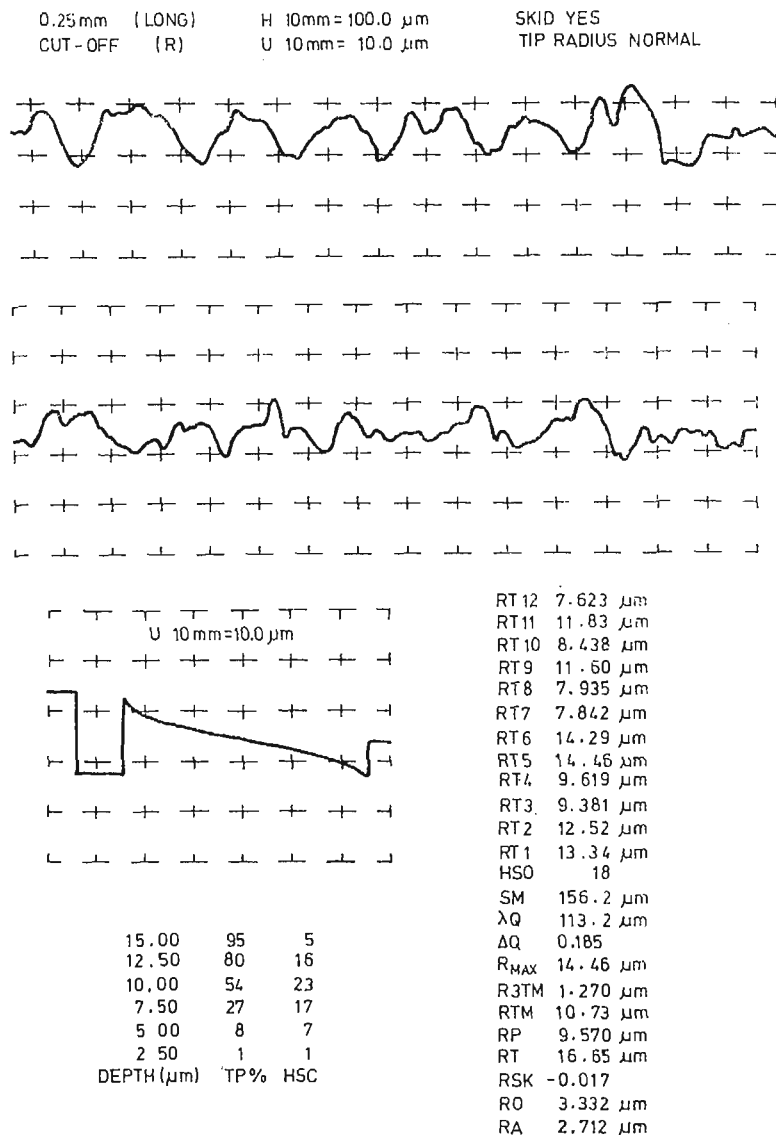


Rys. 3. Układ warstwic powierzchni struganej próbki tytanowej. Różnica głębokości między warstwicami $\Delta z \cong 1,75 \mu\text{m}$



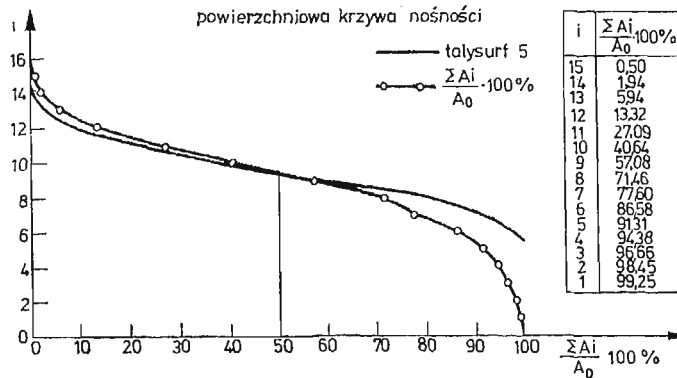
Rys. 4. Mapa warstwicowa opracowana na podstawie obrazu prążków interferencyjnych (rys. 3)

$\Delta Z = 1,75 \mu\text{m}$. Na podstawie obrazu linii interferencyjnych z rys. 3 wykreślono mapę warstwicową i oznaczono rzędy warstwic (rys. 4). Jednocześnie przy użyciu przyrządu Talysurf 5 otrzymano profilogram powierzchni wraz z wydrukiem parametrów chropowatości powierzchni (rys. 5). Mapa warstwicowa (rys. 4) posłużyła do wyznaczenia wartości niektórych parametrów chropowatości oraz powierzchniowej krzywej nośności, które porównano następnie z wartościami parametrów zmierzonymi profilografometrem Talysurf 5. Na rys. 6 pokazano przebieg powierzchniowej krzywej nośności uzyskanej na podstawie mapy warstwicowej oraz liniowej krzywej nośności tej powierzchni wykreślonej za pomocą profilografometru Talysurf 5.



Rys. 5. Profilogram i wydruk parametrów chropowatości uzyskanych przy użyciu Talysurf 5 dla tej samej powierzchni próbki tytanowej, którą opisuje mapa warstwicowa na rys. 3

Można stwierdzić, że liniowa krzywa nośności jest bardziej płaska i zbliżona do powierzchniowej krzywej nośności, jedynie dla średnich wartości udziału nośnego. Natomiast dla wartości udziału nośnego mniejszych od 20% i większych od 60% występują istotne różnice w charakterze obu krzywych. W przedziałach tych powierzchniowa krzywa nośności dokładniej określa rzeczywistą powierzchnię kontaktu przez uwzględnienie najwyższych szczytów i najniższych dolin, które stylus profilografometru zazwyczaj omija (między innymi wskutek ograniczonej sztywności i określonego promienia stylusa). W ten sam sposób można wytłumaczyć fakt, iż wartości parametrów chropowatości wyznaczone na



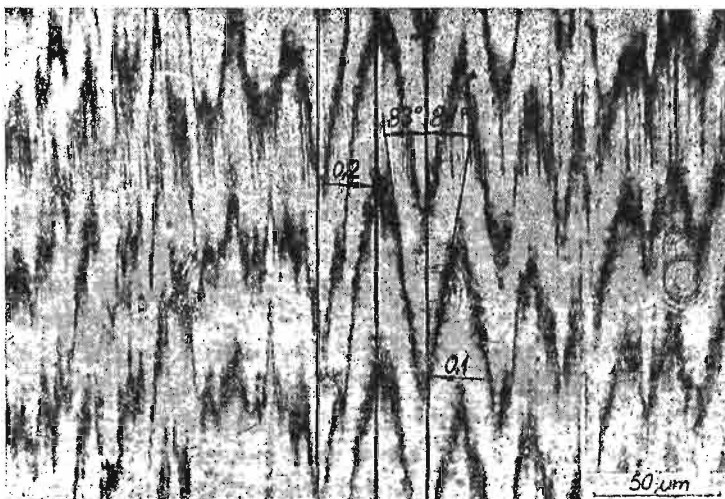
Rys. 6. Wykres powierzchniowej krzywej nośności sporządzonej na podstawie mapy z rys. 5 oraz odpowiadający tej powierzchni wykres liniowej krzywej nośności otrzymanej z Talysurf 5

	IMHI	TALYSURF 5/T-H/	R_{IMHI}/R_{T-H}
$R_{R_{max}}/(R_{max})_p$	24,5 μm	14,46 μm	169 %
$R_{R_{TM}}/(R_{TM})_p$	18,9 μm	10,73 μm	176 %
$R_T/(R_T)_p$	26,2 μm	16,65 μm	158 %

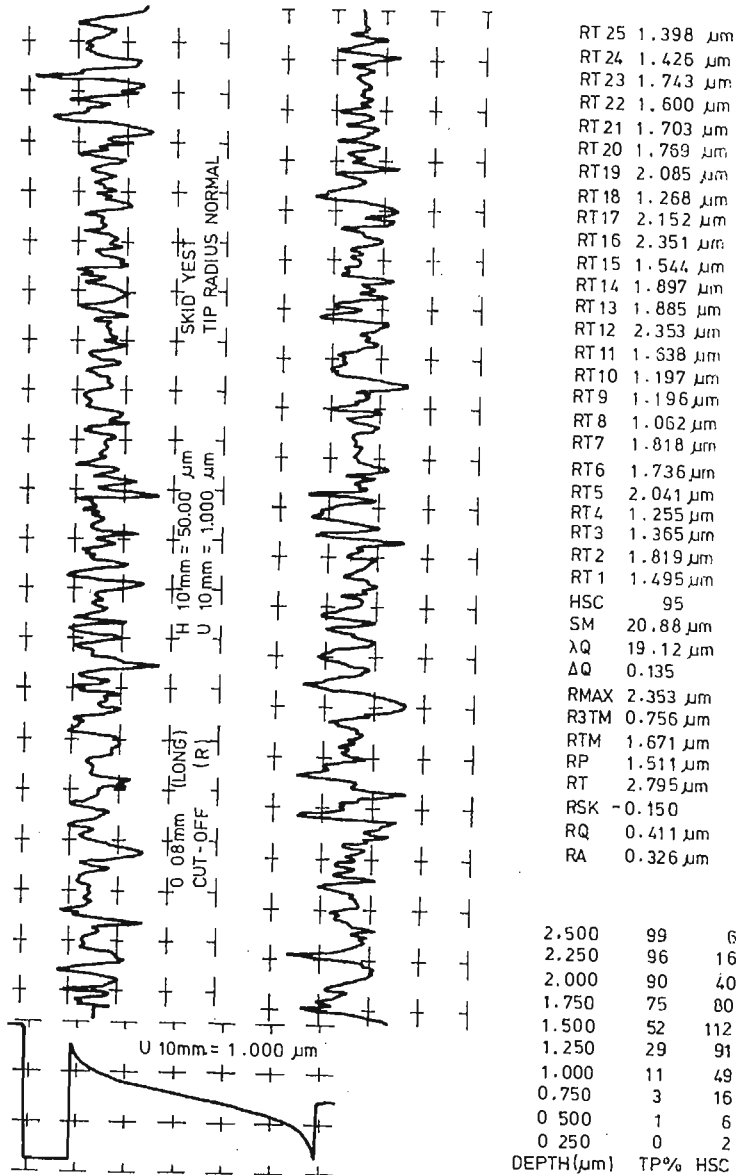
Rys. 7. Porównanie wartości niektórych parametrów chropowatości powierzchni struganej próbki tytanowej wyznaczonych przy użyciu map warstwicowych i zmierzonych profilometrem Talysurf 5

podstawie mapy warstwicowej są większe niż zmierzone profilografometrem, co dla omawianej powierzchni ilustruje tabela na rys. 7.

Mapa warstwicowa pozwala również na łatwe wyznaczenie kątów pochylenia stoków mikronierówności powierzchni, promieni zaokrąglenia wierzchołków i dolin, kierunkowości struktury oraz kształtu i drożności kanałów smarnych pomiędzy mikronierównoś-



Rys. 8. Układ warstwic na szlifowanej powierzchni próbki stalowej



Rys. 9. Profilogram i zestawienie parametrów chropowatości szlifowanej powierzchni próbki stalowej (rys. 8) uzyskane za pomocą Talysurf 5

ciałami w dowolnym przekroju. W przypadku powierzchni o wyraźnej kierunkowości struktury i ustalonym profilu np. po obróbce szlifowaniem, struganiem lub frezowaniem ustawienie płaszczyzny odniesienia (przednia ściana kuwety) równoległe do środkowej powierzchni zarysu powoduje, że powstające prążki warstwicowe są względem siebie równoległe, co utrudnia analizę obrazu warstwicowego. Celowym w tym przypadku jest pochylenie płaszczyzny odniesienia pod niewielkim kątem. Linie warstwicowe jakie wów-

czas powstają na całym obszarze obserwacji mają charakter profilogramów, ale są wolne od błędów systematycznych profilogramów otrzymanych przy pomocy stylusa.

Profilogramy te pozwalają wyznaczyć pewne cechy geometryczne powierzchni jak np. promienie zaokrąglenia wierzchołków i dolin, pochylenie stoków, anizotropię, zmienności przekroju bruzd oraz uwidaczniają bezpośrednio regularność, bądź nieregularność struktury. Przykład tego rodzaju mapy warstwicowej na replice zdjętej ze stalowej powierzchni szlifowanej przedstawiono na rys. 8. Na rysunku tym zaznaczono promienie zaokrąglenia niektórych wierzchołków i dolin mikronierówności oraz kąty pochylenia stoków odniesione do przekroju normalnego. Odpowiadający tej powierzchni wydruk parametrów chropowatości otrzymany za pomocą Talysurf 5 przedstawia rys. 9. Porównanie parametrów chropowatości określonych metodą warstwicowania holograficznego i wyznaczonych przy użyciu Talysurf 5 dla powierzchni szlifowanej przedstawiono w tabeli na rys. 10. Również w przypadku tej powierzchni pomimo regularności jej struktury IMHI dała większe wartości parametrów niż z odczytu profilogramu.

	IMHI	TALYSURF 5/T-H/	R_{IMHI}/R_{T-H}
$R_{max}/(R_{max})_p/$	2,6 μm	2,353 μm	112 %
$R_{TM}/(R_{TM})_p/$	2,0 μm	1,671 μm	118 %
$R_T/(R_T)_p/$	3,4 μm	2,795 μm	122 %

Rys. 10. Porównanie wartości niektórych parametrów chropowatości dla powierzchni szlifowanej, wyznaczonych przy użyciu map warstwicowych i zmierzonych profilometrem Talysurf 5

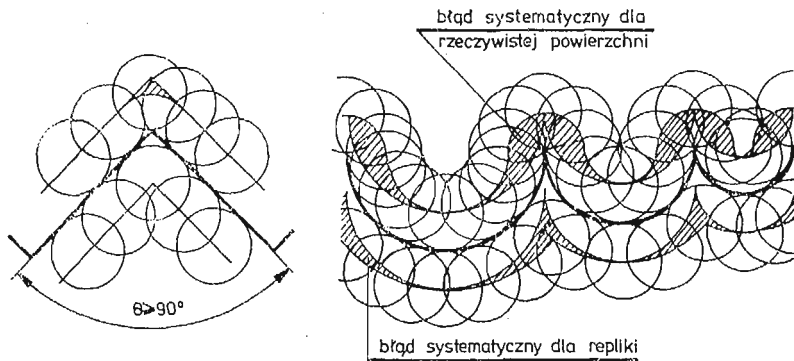
4. Badanie wierności odtwarzania przez repliki

Z uwagi na istotne zalety stosowania przezroczystych replik do badania mikronierówności powierzchni np. dużych obiektów, bez potrzeby ich demontażu i umieszczenia w kuwecie, jak również szczególną przydatność tego rodzaju replik do badań metodami optycznymi, niezbędne jest określenie wierności odwzorowania rzeczywistych mikronierówności przez ich repliki.

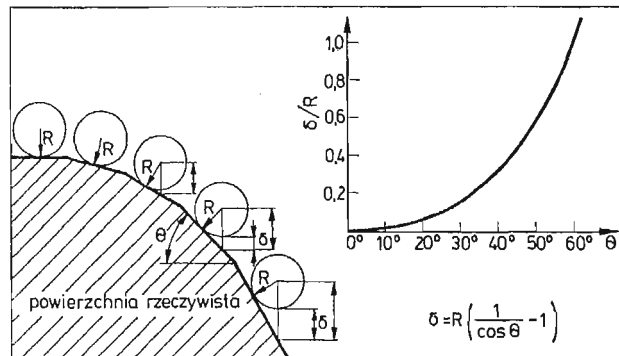
Rozpowszechnione w badaniach chropowatości metody profilografometryczne są stosowane do badania wierności replik [6], pomimo, że nie nadają się do tego celu, gdyż są obarczone błędami systematycznymi. Błędy te wynikają z różnic odwzorowania tych samych szczegółów powierzchni rzeczywistych i replik (rys. 11), zależą od kąta pochylenia profilu (rys. 12) oraz od różnicy podatności materiału repliki i rzeczywistej powierzchni na naciski stylusa profilografometru.

W przypadku stosowania replik wykonanych z bardzo miękkich materiałów np. z gumy silikonowej, nie jest możliwe jakiegokolwiek badanie ich powierzchni metodami dotykowymi.

Metoda immersyjna interferometrii holograficznej (IMHI) eliminująca wymienione błędy i ograniczenia może być bezpośrednio zastosowana do badania wierności odtwarzania użytych replik. Jako rzeczywistych powierzchni do badań wierności odtwarzania użyto przełomy przezroczystej płyty szklanej, dla których opisaną poprzednio techniką



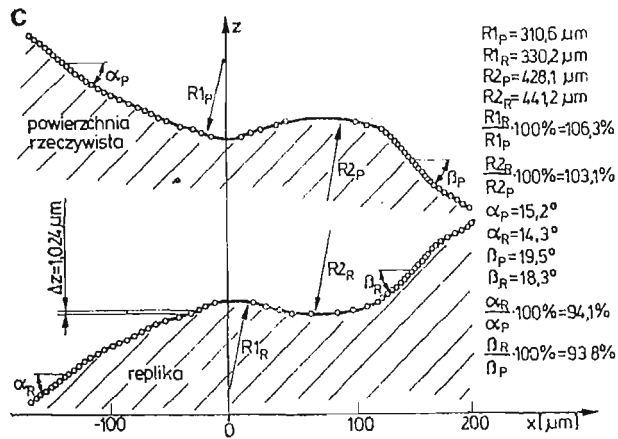
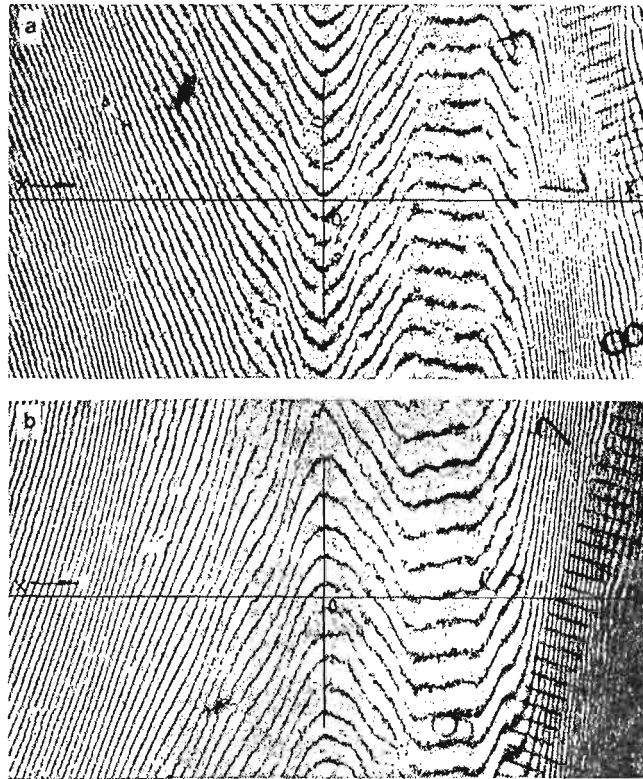
Rys. 11. Błędy systematyczne przy odwzorowywaniu metodami profilografometrycznymi rzeczywistych powierzchni i ich replik



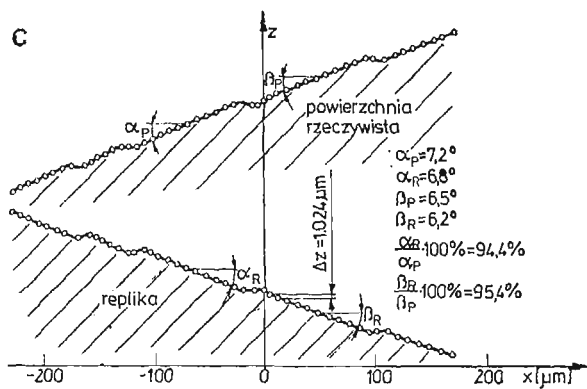
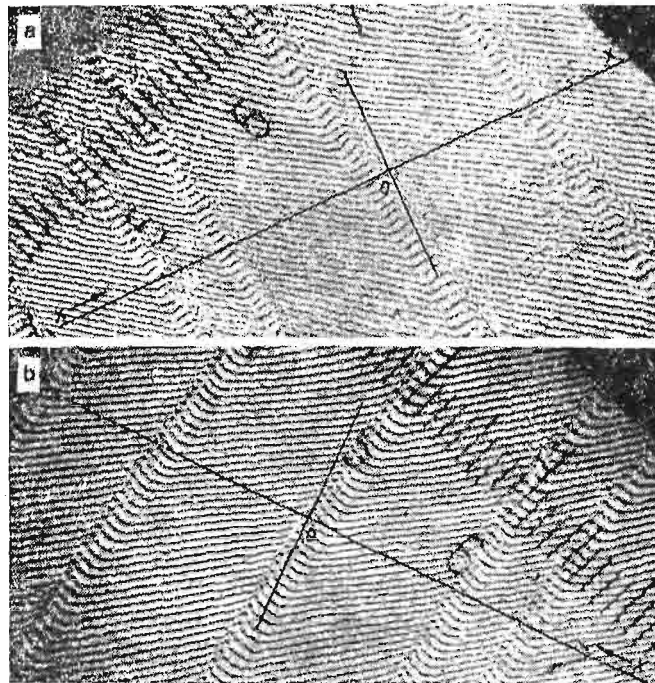
Rys. 12. Zależność błędów odwzorowania metodami profilografometrycznymi od kąta pochylenia profilu

wykonano repliki. Następnie w tym samym układzie optycznym uzyskano odpowiadające sobie mapy warstwicowe przełomów szklanych i ich replik. Na rys. 13a przedstawiono układ warstwic na powierzchni pierwszego z czterech badanych przełomów szklanych, a na rys. 13b układ warstwic na powierzchni jego repliki w tym samym miejscu. Dla uzyskania informacji o stopniu odwzorowania powierzchni przez replikę wykonano na podstawie map warstwicowych wykresy zarysu powierzchni przełomu i jego repliki wzdłuż tej samej osi $x-x$ (rys. 13c). W niektórych punktach profilu obliczono rzeczywiste wartości promieni zaokrąglenia wierzchołków i dolin oraz kątów pochylenia stoków mikro nierówności. Jako kryterium wierności odtwarzania rzeczywistej powierzchni przez jej replikę przyjęto stosunki wartości odpowiednich promieni zaokrąglenia i kątów pochylenia zarysu przełomu i jego repliki.

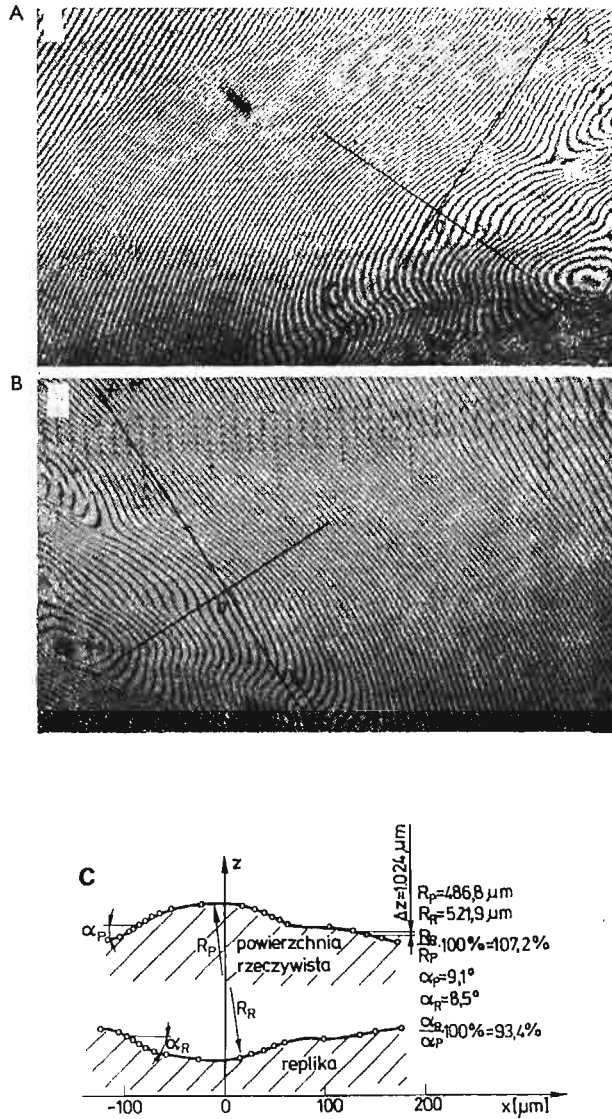
Analogicznie opracowano wyniki badań pozostałych trzech przełomów (rys. 14, 15, 16). Już tylko jakościowe porównanie charakteru warstwic na rzeczywistych powierzchniach i odpowiadających im replikach wskazuje na dobrą zgodność szczegółów obu powierzchni. Porównanie wykresów zarysu oraz obliczonych parametrów potwierdza zadowalającą wierność odtwarzania przez użyte do badań repliki z gumy silikonowej Polastosil M2000.



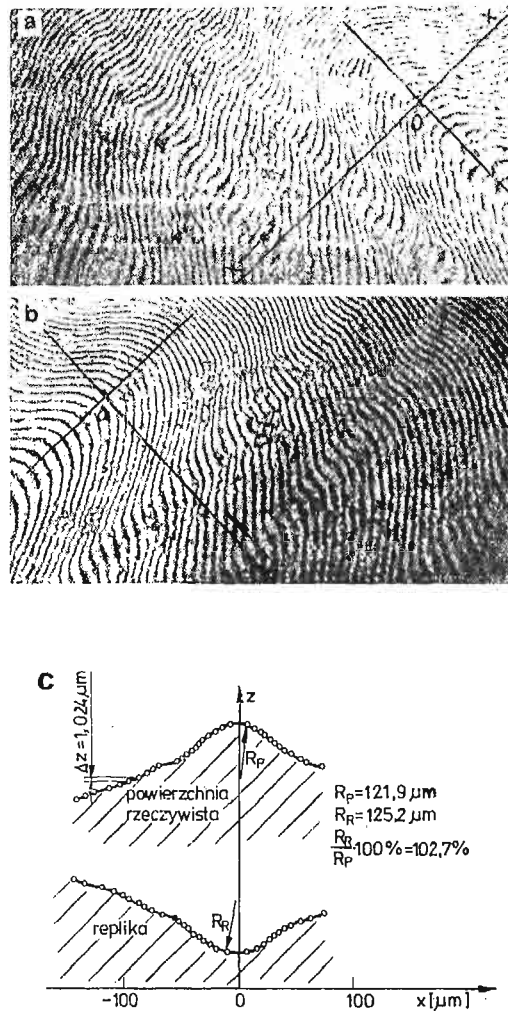
Rys. 13. a) Mapa warstwicowa na powierzchni przelomu nr I, b) Mapa warstwicowa na powierzchni repliki przelomu nr I, c) Porównanie zarysu powierzchni przelomu nr I i jego repliki w przekroju $x-x$



Rys. 14. a) Mapa warstwicowa na powierzchni przelomu nr II, b) Mapa warstwicowa na powierzchni repliki przelomu nr II, c) Porównanie zarysu powierzchni przelomu nr II i jego repliki w przekroju $x-x$



Rys. 15. a) Mapa warstwiczna na powierzchni przelomu nr III, b) Mapa warstwiczna na powierzchni repliki przelomu nr III, c) Porównanie zarysu powierzchni przelomu nr III i jego repliki w przekroju $x-x$



Rys. 16. a) Mapa warstwicowa na powierzchni przelomu nr IV, b) Mapa warstwicowa na powierzchni repliki przelomu nr IV, c) Porównanie zarysu powierzchni przelomu nr IV i jego repliki w przekroju $x-z$

5. Wnioski

Badanie mikronierówności powierzchni metodą immersyjną interferometrii holograficznej stwarza możliwości pełniejszego opisu chropowatości powierzchni i jej cech trybologicznych niż metody dotychczas stosowane. W tym przypadku wszystkie parametry mikronierówności powierzchni istotne ze względów trybologicznych odniesione są do obserwowanej powierzchni, a nie do kolejnych przekrojów i nie zawierają błędów systematycznych integralnie związanych z metodą stylusa. Poza ogólnie znanymi błędami systematycznymi metod profilografometrycznych związanymi z kształtem ostrza stylusa, kalibracją układu, krzywizną ślizgacza typowe metody nie pozwalają na stosowanie rep-

lik ze względu na powstające wtedy błędy systematyczne związane z badaniem negatywu powierzchni. Ponadto w przypadku stosowania replik z miękkich materiałów nie jest możliwe zastosowanie metod dotykowych. Uzyskane wyniki potwierdzają wysoką przydatność metody immersyjnej interferometrii holograficznej do badania mikronierówności powierzchni technicznych oraz wierności odtwarzania użytych replik. Jak wykazano, parametry chropowatości określone na podstawie map warstwicznych mają większą wartość niż wyznaczone profilometrem. Wynika to z zarejestrowania najwyższych szczytów i najniższych dolin występujących w całym badanym obszarze nierejestrowanych zazwyczaj przez profilometr ze względu na jego przypadkową ścieżkę przejścia, skończony promień zaokrąglenia stylusa i jego ograniczoną sztywność boczną. Stosowana zazwyczaj krzywa nośności Abbota-Firestona może być zastąpiona, dzięki uzyskaniu map warstwicznych, powierzchniową krzywą nośności charakteryzującą stosunek powierzchni na określonym poziomie do całkowitej powierzchni obszaru pomiarowego. Powierzchniowa krzywa nośności odwzorowuje dokładniej nośność powierzchni, szczególnie w zakresie wierzchołków i dolin, co jest istotne ze względu na zjawiska kontaktu.

Stosując pochylenie płaszczyzny odniesienia uzyskuje się warstwicę w postaci serii „profilogramów” pokrywających cały badany obszar. Pozwalają one w sposób bezpośredni określić niektóre parametry trybologiczne, jak kąty pochylenia stoków mikronierówności, promienie zaokrąglenia wierzchołków i dolin, drożność kanałów i prostoliniowość grzbietów. Zastosowana metoda warstwiczowania powierzchni przy wykorzystaniu ich przezroczystych replik w świetle przechodzącym eliminuje szereg ograniczeń bezpośredniego badania mikronierówności powierzchni obiektów rzeczywistych. Metoda ta jest dotychczas również jedynym obecnie wiarygodnym sposobem sprawdzenia wierności odtwarzania przezroczystych replik. Pojawiający się w trakcie rekonstrukcji w płaszczyźnie płyty holograficznej, kilkusetkrotnie powiększony obraz holograficzny charakteryzuje się dużą jasnością i bardzo dobrą czytelnością prążków warstwicznych. Możliwe jest zatem dalsze zmniejszenie różnicy głębokości między warstwicami do kilku dziesiątych części mikrometra używając światła o mniejszej długości fali i płynu immersyjnego o większym współczynniku załamania światła. W szczególnych przypadkach dokładność map może być wielokrotniona metodą multiplikacji prążków warstwicznych, bądź przy pomocy ekwidensytometrycznej analizy obrazów interferencyjnych.

W chwili obecnej uzyskanie informacji o powierzchni metodą immersyjną interferometrii holograficznej jest bardziej pracochłonne niż uzyskanie podobnych informacji metodą profilografometryczną, szczególnie gdy korzysta się ze standardowych programów na maszyny cyfrowe dla wyznaczenia parametrami powierzchni.

Zdaniem autorów metoda immersyjna nie może w obecnej chwili zastąpić metody profilografometrycznej, szczególnie w badaniach rutynowych, gdy zależy nam na danych porównawczych powierzchni. Jednakże w badaniach, w których konieczne jest uwzględnienie rzeczywistych kształtów chropowatości i rzeczywistych charakterystyk powierzchni, metoda immersyjna może okazać się niezastąpiona. Dla zwiększenia efektywności metody podjęto próbę automatyzacji etapu odczytywania i analizy obrazów interferencyjnych.

Literatura cytowana w tekście

1. M. LECH, I. MRUK, J. STUPNICKI, *Comparison of tribological parameters of surfaces determined by stylus method and immersion method of holographic interferometry*. II International Conference on Metrology and Properties of Engineering Surfaces, 14 - 16 April 1982, Leicester, England.
2. M. LECH, I. MRUK, J. STUPNICKI, *Holographic measurement of topography of engineering surfaces by use of transparent replicas*, III International Tribology Congress Eurotrib'81, Warsaw 1981.
3. M. LECH, I. MRUK, J. STUPNICKI, *Running — in process of porous bearings observed by use of holographic interferometry*, 8 th Leeds — Lyon Symposium on Tribology, Lyon, 1981.
4. B. NOWICKI, *Badania mikrostruktury geometrycznej powierzchni obrabianych i metod jej oceny*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika z. 70, 1980, Warszawa.
5. T. TSUKADA, K. SASAJIMA, *A three — dimensional measuring technique for surface asperities*, „Wear” vol. 71, no 1, 1981.
6. K. NARAYANASAMY, V. RADHAKRISHNAN, R. G. NARAYANAMURTHI, *Analysis of surface reproduction characteristics of different replica materials*, „Wear”, no 57, 1979.

Р е з ю м е

ИССЛЕДОВАНИЯ ШЕРЕХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ИММЕРСИОННЫМ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИ

В работе представлен иммерсионный метод голографической интерферометрии примененный для исследования шереховатости технических поверхностей, в котором использованы прозрачные реплики этих поверхностей и новая оптическая система. Получены этим методом микрофотографические карты исследованных поверхностей с расстояниями между изогипсами $\Delta Z \cong 1$ мкм, делают возможным подробнейшее описание их геометрии и определение новых трибологических параметров. В частности исследованы металлические поверхности после строгания и шлифования. Определенные голографическим методом некоторые параметры поверхностей сравнено с параметрами измеренными профилометром Талисурф 5. Предложено новый метод испытания подлинности реплик, сравнивая карты изогипсов на прозрачных стеклянных изломах и их репликах.

S u m m a r y

INVESTIGATIONS OF SURFACE ROUGHNESS BY USE OF IMMERSION METHOD OF HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY

Paper presents the investigations of the surface roughness by use of the immersion method of the holographic interferometry with application of the transparent replicas and new designed optical system. Two — dimensional contour maps of the investigated surfaces with intervals between contour lines $\Delta z \cong 1 \mu\text{m}$ permit detailed description of their geometry and determining new tribological parameters. The measurements were carried out on various metal surfaces machined, for example, by shaping and grinding. Some parameters of the surfaces determined by the immersion method were compared with those measured by Talysurf 5. A new method of inspection of the replica's fidelity by comparison of the contour maps on cracked glass surfaces and their replicas was proposed.

KOMÓRKOWO-KOMINOWY CHARAKTER KONWEKCJI SWOBODNEJ
OD IZOTERMICZNYCH, POZIOMYCH POWIERZCHNI
WYMIENIAJĄCYCH CIEPŁO W PRZESTRZENI NIEOGRANICZONEJ

PIOTR KUBSKI

Politechnika Gdańska

WITOLD MAREK LEWANDOWSKI

Politechnika Gdańska

Spis ważniejszych oznaczeń

- a — współczynnik wyrównywania temperatury,
- C — stała, równanie (3),
- c_p — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu,
- g — przyspieszenie grawitacyjne,
- K — współczynnik, równanie (23),
- k — współczynnik wyrażający stosunek masy płynów,
- l — wymiar liniowy, szerokość strumienia płynu,
- m — strumień masy,
- Q — strumień ciepła,
- q — gęstość strumienia ciepła,
- p — ciśnienie,
- t — temperatura,
- ΔT — różnica temperatury płyty i płynu w obszarze niezaburzonym,
- w — prędkość płynu,
- x, y, z — współrzędne przestrzenne,
- α — współczynnik przejmowania ciepła,
- β — współczynnik rozszerzalności objętościowej,
- δ — grubość warstwy przyściennej,
- λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego,
- ν — kinematyczny współczynnik lepkości,
- ρ — gęstość.

Ważniejsze indeksy dotyczą

- k — komórki konwekcyjnej,
- h — strumienia ciepłego (wznoszącego),

∞ — strumienia zimnego,
 w — ścianki grzejszej.

Liczby podobieństwa

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} \text{ — Nusselta,}$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} \text{ — Prandtla,}$$

$$\text{Ra} = \frac{g \cdot \beta \Delta T l^3}{\nu a} \text{ — Rayleigha.}$$

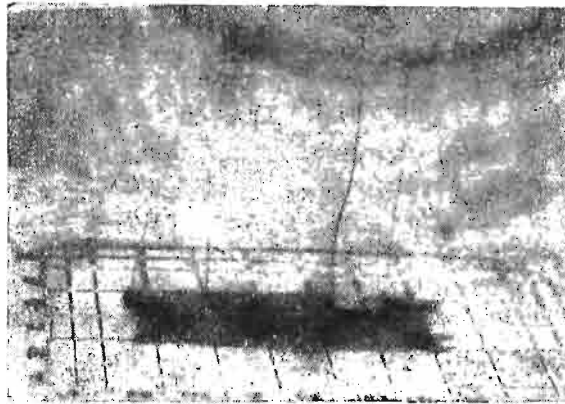
Wstęp

Biorąc, jako kryterium, oddziaływanie ścian rozpatrywanego układu na przejmowanie ciepła, ogół praktycznych przypadków konwekcji swobodnej można podzielić na dwa zasadnicze typy: konwekcję w przestrzeni ograniczonej i nieograniczonej. W pierwszym typie przypadków tworzą się heksagonalne struktury komórkowe, sfotografowane przez BÉNARDA (1901), których rozmiar i charakter badali m.in. BLOCK (1956), PEARSON (1958), NIELD (1964), LORTZ (1965), CHEN (1966), KOSCHMIEDER (1966), TANO (1974), HWANG (1976), TVEITEREID (1977)... W badaniach tych uzależniono rozmiar komórek od grubości warstwy płynu lub wysokości i szerokości szczeliny, określono charakterystyczny wymiar liniowy oraz zaproponowano mechanizm i strukturę powstawania komórek konwekcyjnych; [1].

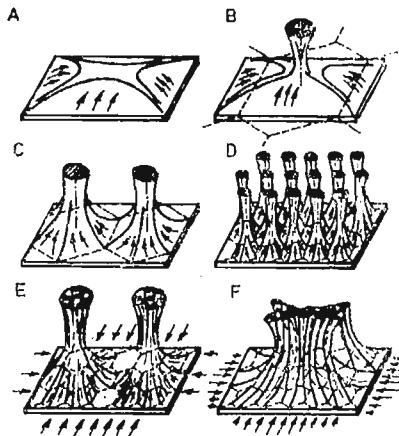
Konwekcją swobodną w przestrzeni nieograniczonej zajmowali się: BURDE (1872),, TIEN (1968), MOCHOLOV (1970), FUJII (1972), HAMMEKE (1975), PARMENTIER (1978), MILLER (1978) i inni. Wykryli oni wiry swobodne tworzące się nad geometrycznym środkiem płyty lub nad jej przekątnymi. Nie określono jednak ani rozmiarów, ani mechanizmów powstawania tych struktur, zaś uzyskane zależności kryterialne znacznie różnią się między sobą, [2].

1. Opis modelu fizycznego

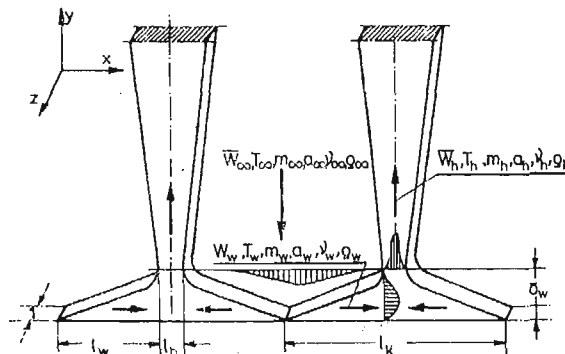
Wstępne badania wizualne wykazały, że także w przestrzeni nieograniczonej tworzą się nad poziomą płytą komórki konwekcyjne (Rys. 1). Są one wprawdzie rozmywane bocznym napływem zimnego płynu, ale przy małych wartościach strumienia ciepła można je jednak zaobserwować. W tym celu należy na powierzchnię grzejszą nanieść roztwór barwnika o temperaturze warstwy przysiennej. Zaobserwowany mechanizm powstawania konwekcji i jej kontynuację przedstawiono schematycznie na rysunku (Rys. 2A, B, C, D, E, F). W pierwszej fazie, po przekroczeniu zakresu przewodnictwa rozpoczyna się narastanie warstwy przysiennej, której grubość w miarę zbliżania się do środka płyty rośnie (Rys. 2A). Po przekroczeniu krytycznej liczby Rayleigha, której odpowiada krytyczna grubość warstwy przysiennej, następuje przerwanie jej ciągłości i powstaje wir swobodny (Rys. 2B).



Rys. 1. Przykład struktur komórkowych i wirów kominowych, woda destylowana, $\Delta T = 1,2[\text{K}]$, $q = 802,4 [\text{W}/\text{m}^2]$



Rys. 2. Schemat powstawania komórek konwekcyjnych i przekształcania ich w wiry kominowe

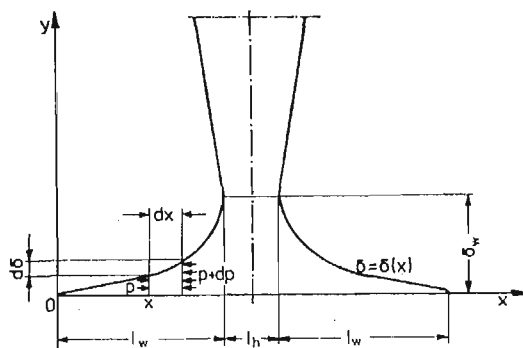


Rys. 3. Wycinek o jednostkowej szerokości, komórek konwekcyjnych w ujęciu modułarnym zjawiska

W miarę wzrostu strumienia ciepła warstwa przyścienna narasta szybciej i przerwanie jej ciągłości nastąpi bliżej niż w środku geometrycznym płyty (Rys. 2C). Przy dalszym wzroście strumienia ciepła ilość komórek konwekcyjnych na powierzchni płyty powiększa się, ich wielkość natomiast maleje (Rys. 2D). Przedstawiony model jest schematem uproszczonym, w rzeczywistości występuje jeszcze boczny napływ zimnego płynu nad powierzchnię płyty, który powoduje rozmywanie i łączenie poszczególnych strumieni swobodnych w wiry kominowe (Rys. 2E). Inną formę wirów kominowych, związanych także z intensywnością strumienia ciepła, przedstawiono na kolejnym rysunku (Rys. 2F). Do dalszych rozważań teoretycznych wybrano model idealny, zakładając, że to co dzieje się w warstwie przyściennej ma decydujące znaczenie na wymianę ciepła. Ze struktury komórkowej (Rys. 2D) „wycięto” pasek o jednostkowej szerokości, zawierający wycinki dwóch sąsiednich komórek (Rys. 3).

2. Model analityczny

Celem analizy jest określenie rozmiaru komórki konwekcyjnej, który uzależniony jest od grubości warstwy przyściennej, narastającej nad płaską powierzchnią grzejną (Rys. 4). Analiza oparta jest na pracy [3] i sprowadza się do rozwiązania równań warstwy przyściennej, wyznaczenia grubości warstwy, a w dalszej kolejności wyrażenia rozmiaru komórki poprzez jej grubość.



Rys. 4. Model komórki konwekcyjnej

Poniższe rozważania uwzględniają następujące założenia upraszczające:

- ruch płynu omywającego płytę jest laminarny,
- siły bezwładności płynu można zaniedbać,
- prędkość płynu na powierzchni płyty jest równa zero,
- przepływ ciepła przez warstwę płynu odbywa się wyłącznie poprzez przewodzenie i to prostopadłe do powierzchni płyty,
- temperatura powierzchni płyty t_w i temperatura płynu niezaburzonego t_∞ są stałe,
- własności fizyczne płynu omywającego płytę: gęstość ρ , dynamiczny współczynnik lepkości μ , współczynnik przewodzenia ciepła λ , ciepło właściwe c_p , oraz w strumieniu ciepłym (wznoszącym) $\rho_n, \mu_n, \lambda_n, c_{p_n}$ i w strumieniu zimnym (opadającym) $\rho_\infty, \mu_\infty, \lambda_\infty, c_{\infty}$ są stałe.

Przy uprzednich założeniach upraszczających, równanie ruchu w kierunku osi x dla płynu nieściśliwego stykającego się z płytą grzejącą, przyjmuje postać:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2} \right).$$

Jej przybliżeniem matematycznym, wobec relacji

$$\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2}$$

dopuszczalnej z racji pominięcia sił bezwładności jest równanie

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

opisujące profil prędkości $W_x(y)$ w warstwie przyściennej. Gradient ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial x}$ wywołany przez zmianę ciśnienia hydrostatycznego na grubości warstwy przyściennej można uzależnić od różnicy gęstości $(\rho - \rho_\infty)$ płynu oraz od przyrostu grubości warstwy przyściennej wzdłuż płyty $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, jako

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -g(\rho - \rho_\infty) \frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (2)$$

By z równania (1) po uwzględnieniu zapisu (2) wyznaczyć profil prędkości $W_x(y)$ w warstwie przyściennej, zastąpiono wyrażenie $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ jego wartością średnią $\frac{\bar{\partial \delta}}{\partial x}$, stałą dla rozpatrywanego odcinka l_w , na którym narasta warstwa przyścienna, czyli

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\bar{\partial \delta}}{\partial x} = C = \text{idem}, \quad (3)$$

przy czym stała C zostanie wyznaczona w dalszej analizie, a równanie (1) sprowadzono do postaci równania różniczkowego zwyczajnego:

$$\frac{d^2 W_x}{dy^2} = C \frac{g}{\mu} (\rho_\infty - \rho). \quad (4)$$

Jako warunki brzegowe przyjęto:

$$\left. \begin{array}{l} \text{— na powierzchni płyty: dla } y = 0, W_x(0) = 0 \\ \text{— na granicy warstwy przyściennej: dla } y = \delta, W_x(\delta) = 0, \frac{\partial W_x(\delta)}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

i otrzymano rozwiązanie:

$$W_x(y) = C \frac{g}{\mu} (\rho_\infty - \rho) \delta^2 \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2. \quad (6)$$

Średnia, na grubości δ , wartość prędkości płynu w warstwie przyściennej:

$$\bar{W}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta W_x(y) dy = \frac{C}{12} \frac{g}{\mu} (\rho_\infty - \rho) \delta^2,$$

pozwała wyznaczyć strumień płynu przypadający na jednostkę szerokości płyty, przechodzący przez przekrój określony współrzędną x :

$$m = \bar{W}_x \cdot \varrho \cdot 1 \cdot \delta = \frac{C}{12} \frac{g}{\nu} (\varrho_\infty - \varrho) \delta^3, \quad (7)$$

przy czym wprowadzono kinematyczny współczynnik lepkości

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho}$$

Zmianę strumienia płynu na odcinku dx określono jako

$$dm = \frac{\partial m}{\partial \delta} d\delta = \frac{C}{4} \frac{g}{\nu} (\varrho_\infty - \varrho) \delta^2 d\delta.$$

Powyższa zmiana strumienia płynu związana jest ze zmianą strumienia ciepła dQ na powierzchni płyty o jednostkowej szerokości i długości dx , zależnością

$$dQ = c_p \Delta T dm = \frac{C}{4} \frac{g}{\nu} (\varrho_\infty - \varrho) \Delta T C_p \delta^2 d\delta, \quad (8)$$

gdzie różnica temperatury ΔT ścianki i płynu wynosi

$$\Delta T = t_w - t_\infty. \quad (9)$$

Przy przyjętych uprzednio założeniach upraszczających, równanie energii płynu omijającego płytę ma postać:

$$\frac{d^2 t}{dy^2} = 0, \quad (10)$$

zaś warunki brzegowe przyjęto:

$$\text{dla } \left. \begin{array}{l} y = 0, \quad t = t_w \\ y = \delta \quad t = t_\infty \end{array} \right\} \quad (11)$$

Rozwiązanie równania (10) przy warunkach (11)

$$\frac{dt}{dy} = \frac{\Delta T}{\delta},$$

przy czym wykorzystano związek (9), pozwala wyznaczyć lokalną wartość współczynnika przejmowania ciepła, jako

$$\alpha = \alpha(x) = \frac{\lambda}{\Delta T} \frac{dt}{dy} = \frac{\lambda}{\delta(x)} = \frac{\lambda}{\delta}$$

Wyrażając strumień ciepła dQ poprzez gęstość strumienia ciepła i powierzchnię, otrzymano:

$$dQ = q \cdot 1 \cdot dx = \alpha \cdot \Delta T dx = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T dx. \quad (12)$$

Porównując stronami wyrażenia (8) i (12), otrzymano równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych, opisujące zmienność grubości warstwy przyściennej ze współrzędną x , które po scałkowaniu i uwzględnieniu warunku:

$$\text{dla } x = 0, \quad \delta = 0,$$

proceedzi do związku:

$$\delta = \delta(x) = 2 \left[\frac{1}{C} \frac{\nu \lambda}{g(\varrho_\infty - \varrho)} \cdot x \right]^{1/4}, \quad (13)$$

przy czym grubość warstwy δ jest określona poprzez nieznaną stałą C . Można ją wyznaczyć przez następujące uśrednienie:

$$C = \frac{d\bar{\delta}}{dx} = \frac{1}{l_w} \int_0^{l_w} \frac{d\delta}{dx} dx = \frac{1}{l_w} \delta|_0^{l_w}. \quad (14)$$

Podstawiając do zależności (14) związek (13) i wprowadzając oznaczenia:

— współczynnik wyrównywania temperatury $a = \frac{\lambda}{c_r \cdot \varrho}$

— termiczny współczynnik rozszerzalności objętościowej $\beta = \frac{\varrho_\infty - \varrho}{\varrho} \cdot \frac{1}{\Delta T}$

otrzymano wartość stałej:

$$c = 2^{4/5} \left(\frac{\nu a}{g\beta\Delta T} l_w^3 \right)^{1/5}, \quad (15)$$

która pozwala określić maksymalną grubość warstwy przyściennej w miejscu o współrzędnej $x = l_w$:

$$\delta_w = 2^{4/5} \left(\frac{\nu a}{g\beta\Delta T} \right)^{1/5} \cdot l_w^{2/5} \quad (16)$$

Zgodnie z rysunkiem 4 rozmiar komórki konwekcyjnej l_k wynosi:

$$l_k = 2l_w + l_n \quad (17)$$

Wprowadzając współczynniki k_1 i k_2 , które określają stosunki mas strumieni:

$$k_1 = \frac{2l_w}{l_n} \cdot \frac{\varrho_\infty}{\varrho_n} \cong \frac{2l_w}{l_n} \cdot \frac{\varrho_\infty}{\varrho}, \quad (18)$$

$$k_2 = \frac{l_w}{\delta_w} \cdot \frac{\varrho_\infty}{\varrho}, \quad (19)$$

do równania (17) uzyskuje się

$$l_k = 2l_w \left(1 + \frac{1}{k_1} \frac{\varrho_\infty}{\varrho} \right) \quad (20)$$

Z układu dwóch równań (19) i (16) z dwiema niewiadomymi δ_w i l_w można wyznaczyć:

$$l_w = \left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty} \right)^{5/3} \cdot k_2^{5/3} \cdot 2^{4/3} \cdot \left(\frac{\nu a}{g\beta\Delta T} \right)^{1/3} \quad (21)$$

a następnie

$$l_k = 2^{7/3} \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty} \right)^{5/3} \cdot k_2^{5/3} \cdot \left(\frac{\nu \cdot a}{g\beta\Delta T} \right)^{1/3} \cdot \left[1 + \left(\frac{\varrho_\infty}{\varrho} \right) \frac{1}{k_1} \right] \quad (22)$$

Wprowadzając oznaczenie — współczynnik K

$$K = 2^{7/3} \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right)^{5/3} \cdot k^{5/3} \cdot \left[1 + \left(\frac{\varrho_\infty}{\varrho}\right) \frac{1}{k_1}\right], \quad (23)$$

ostatni zapis przyjmie postać:

$$l_k = K \left(\frac{\nu a}{g\beta\Delta T}\right)^{1/3}. \quad (24)$$

W szczególnym przypadku, w chwili rozpoczęcia ruchu w komórkach konwekcyjnych można założyć, że:

$$\frac{\varrho}{\varrho_\infty} \rightarrow 1, \quad k_1 \rightarrow 1, \quad k_2 \rightarrow 1, \quad (25)$$

wówczas wartość współczynnika K we wzorze (23) wynosi

$$K_I = 2^{10/3} = 10.08. \quad (26)$$

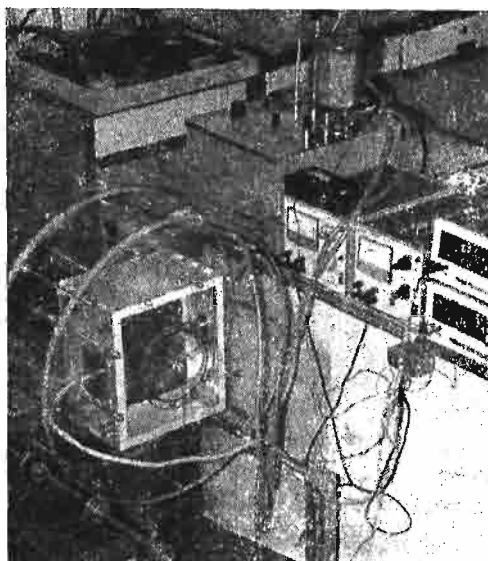
Traktując wymiar komórki (24) jako charakterystyczny wymiar liniowy zagadnienia i podstawiając go do liczby Rayleigha uzyskuje się krytyczną jej wartość, począwszy od której rozpoczyna się ruch konwekcyjny

$$Ra_{cr_I} = \frac{g\beta\Delta T}{\nu a} l_k^3 = K_I^3 = 1024.00 \quad (27)$$

Tak określona wartość jest niższa od liczby $Ra_{cr} = 1710$, podanej w 1916 roku przez Rayleigha. Jest natomiast zbliżona do wartości $Ra_{cr} = 1100$ podanej przez Madejskiego [10], charakterystycznej dla konwekcji w przypadku swobodnej powierzchni cieczy. Należy jednak pamiętać, że Reyleigh badał struktury heksagonalne, odkryte w przestrzeni zamkniętej lub cienkich warstwach płynu i zwanych komórkami Bénarda. Natomiast prezentowane rozwiązanie dotyczy przestrzeni nieograniczonej.

3. Badania eksperymentalne

Badania przeprowadzono w prostopadłościennym zbiorniku (Rys. 5) o wymiarach: $0.2 \times 0.3 \times 0.3$ [m] i pojemności 0.02 [m³], którego ściany były termostatowane. Znajdująca się wewnątrz płyta grzejna o wymiarach: 0.1×0.06 i 0.05 [m] posiadała dwie grzałki: główną i pomocniczą kompensującą strumień strat ciepłych. Do pomiaru gradientu temperatur w ok. 240 punktach pomiarowych nad płytą, stosowano termoparę o średnicy 0.1×10^{-3} [m] i ustawianą specjalnie skonstruowanym przyrządem [5]. Dokładność określania współrzędnych punktu pomiarowego wynosiła: $\Delta x = \Delta y = 0.1 \times 10^{-3}$ [m] i $\Delta z = 0.1 \times 10^{-4}$ [m]. Stanowisko badawcze wraz ze skalowaniem i metodykę badań przedstawiono w pracach [6], [7]. Przebadano wodę destylowaną, glicerynę 100 [%], glicerynę techniczną i olej sojowy. Zakres zmienności eksperymentów przedstawia tablica 1. Wykonano także badania wizualne polegające na fotografowaniu śladów barwnika, którego termostatowane roztwory w badanym płynie nanoszono na powierzchnię płyty.



Rys. 5. Widok stanowiska badawczego podczas skalowania (plyta grzejna ustawiona pionowo)

Tabela 1. Wykaz badanych płynów oraz zakresów zmienności najważniejszych parametrów

	ΔT [K]	T_{sr} [°C]	Pr [-]	Nu [-]	Ra [-]
woda destylowana	0.1 ÷ 8.2	13.1 ÷ 40.4	4 ÷ 9	23.5 ÷ 79.3	$9.27 \cdot 10^4 \div 4.86 \cdot 10^7$
gliceryna techniczna	0.5 ÷ 16.9	11.0 ÷ 32.5	$1.2 \cdot 10^3 \div 4.2 \cdot 10^3$	6.2 ÷ 20.9	$1.46 \cdot 10^4 \div 5.89 \cdot 10^6$
gliceryna 100 [%]	0.5 ÷ 5.7	16.5 ÷ 37.1	$3 \cdot 10^3 \div 1.3 \cdot 10^4$	3.2 ÷ 16.0	$4.48 \cdot 10^3 \div 9.67 \cdot 10^5$
olej sojowy	6.2 ÷ 8.9	20.2 ÷ 34.5	400 ÷ 750	20.6 ÷ 25.8	$1.47 \cdot 10^6 \div 3.56 \cdot 10^6$

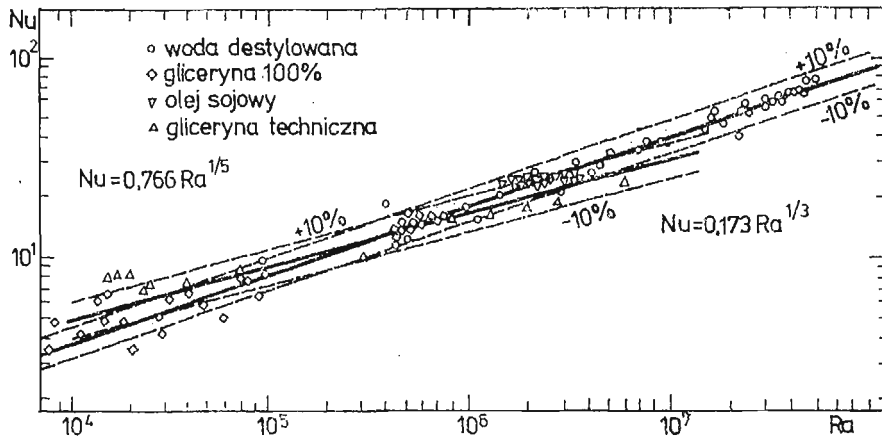
4. Wyniki badań

Uzyskane dane umożliwiły wyliczenie zależności kryterialnych w oparciu o krótszy bok płyty, jako charakterystyczny wymiar liniowy.

$$Nu = 0,766 (Ra)^{1/5}, \quad \text{dla } 10^4 \leq Ra \leq 10^7, \quad (28)$$

$$Nu = 0,173 (Ra)^{1/3}, \quad \text{dla } 10^5 \leq Ra \leq 10^8. \quad (29)$$

Uzyskane wyniki przedstawiono w formie graficznej na rysunku (Rys. 6). Przedział rozbieżności wyników eksperymentalnych (co uwidacznia (Rys. 6)) wynosi ± 20 [%], dla zakresu laminarnego i ± 10 [%] dla obszaru przejściowego i turbulentnego. Otrzymane zależności mieszczą się w środku przedziału błędów innych autorów, czyli są wiarygodne.



Rys. 6. Wyniki eksperymentalne przedstawione w układzie: liczba Nusselta, liczba Rayleigha. Jako wymiar charakterystyczny przyjęto zgodnie z dotychczas stosowaną zasadą — wymiar liniowy płyty

Nie wnoszą jednak nic nowego, poza stwierdzeniem, że zakres laminarny nadal obarczony jest największym błędem. Uzyskane równania kryterialne (wzór 28 i 29) różnią się między sobą, oprócz współczynników i wykładników potęg także i tym, że wymiar liniowy dla zakresu turbulentnego redukuje się i nie jest ważne, jak został ten wymiar zdefiniowany. W obszarze konwekcji laminarnej istotne znaczenie ma poprawność interpretacji charakterystycznego wymiaru liniowego; dotychczasowe powiązanie go z wielkością i geometrią płyty, w świetle przeprowadzonych badań, nie wydaje się słuszne. Wiadomo też, że kształt badanych płyt był różny (koło, prostokąt, kwadrat i trójkąt), również i wielkość płyty grzejnej nie była stała i wg danych literaturowych zmieniała się w granicach: 0.01 ÷ 1.5 [m]. Ponieważ dla tego przypadku wymiar liniowy nie redukował się, mogło to być przyczyną różnic w zależnościach kryterialnych. Dalsze opracowanie wyników eksperymentalnych, pod kątem znalezienia wymiaru komórki konwekcyjnej, przeprowadzono w oparciu o zależność (28), do której w miejsce wymiaru płyty podstawiono równanie (24). W efekcie uzyskano:

$$\frac{\alpha}{\lambda} \cdot K \cdot \left(\frac{a \cdot \nu}{g\beta\Delta T} \right)^{1/3} = 0,766 K^{3/5}, \quad (30)$$

$$K = \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{5/2} \cdot \left(\frac{g\beta\Delta T}{a\nu} \right)^{5/6} \cdot 0,5135. \quad (31)$$

Wstawiając dane eksperymentalne do równania (31) i uśredniając otrzymane wyniki uzyskano wartość współczynnika K (równanie (32)).

$$K = 41.25. \quad (32)$$

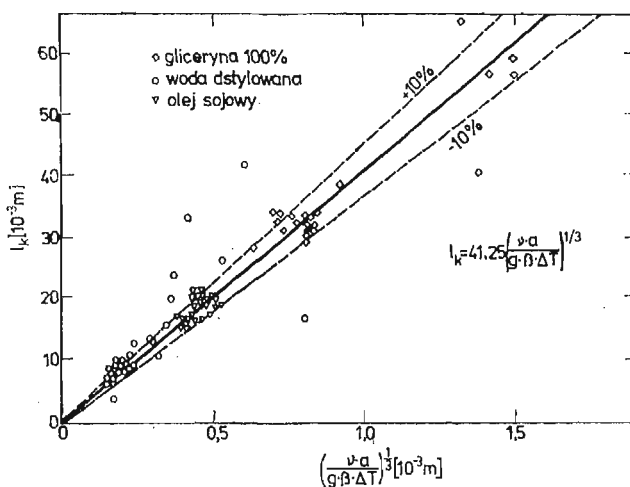
Wymiar komórki konwekcyjnej, uzyskany przez wprowadzenie zależności (32) do równania (24) przyjmie postać:

$$l_k = 41.25 \left(\frac{a \cdot \nu}{g\beta\Delta T} \right)^{1/3}. \quad (33)$$

Oparta na tym wymiarze liczba Rayleigha, jest wartością drugiej krytycznej liczby zjawiska konwekcji w przestrzeni nieograniczonej:

$$Ra_{crII} = \frac{g\beta\Delta T \cdot l_k^3}{\alpha \cdot \nu} = (41.25)^3 \approx 70\,200. \quad (34)$$

Pierwsza poprzednio obliczona krytyczna liczba Rayleigha, równanie (27), określa początek ruchów konwekcyjnych, powstających w wyniku przzerwania ciągłości warstwy przyściennej i przekształceniu się jej w pionowe wiry swobodne. Druga eksperymentalnie znaleziona krytyczna liczba Rayleigha, Ra_{crII} określa ustabilizowany ruch w komórce konwekcyjnej.



Rys. 7. Eksperymentalnie wyznaczony wymiar komórki konwekcyjnej przedstawiony w funkcji własności płynu i różnicy temperatur

Na rysunku (Rys. 7) przedstawiono graficzny sposób wyznaczenia wartości współczynnika K . W układzie współrzędnych: — wymiar komórki konwekcyjnej oraz własności fizyczne płynu i różnica temperatur, zaprezentowane wyniki eksperymentalne wykazują dobrą zgodność [8], [9]. Szukając innych możliwości przedstawienia wyników badań przekształcono równanie (31), przy uwzględnieniu równania (32), do postaci:

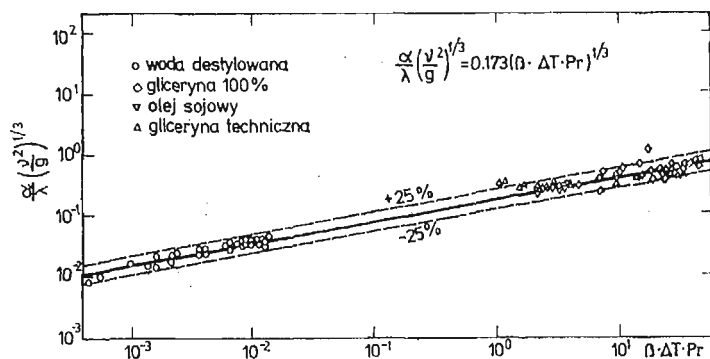
$$\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\bar{\nu} a \cdot \nu}{g \cdot \beta \cdot \Delta T} \right)^{1/3} = 0.173. \quad (35)$$

Mnożąc i dzieląc ostatnie równanie przez kinematyczny współczynnik lepkości ν użykuje się zależność (36) a następnie (37):

$$\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{a \cdot \nu^2}{g \beta \Delta T \cdot \nu} \right)^{1/3} = 0.173, \quad (36)$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{1/3} = 0.173 (\beta \Delta T \cdot \text{Pr})^{1/3}. \quad (37)$$

Otrzymane równanie przypomina swoją budową dotychczas stosowaną zależność kryterialną, posiada jednak nad nią tę przewagę, że nie występuje w niej wymiar liniowy zwią-



Rys. 8. Wyniki badań eksperymentalnych przedstawione w układzie współrzędnych opisanych równaniem (31)

zany z wielkością płyty grzejnej. Na rysunku (Rys. 8) przedstawiono jeszcze raz wyniki badań eksperymentalnych, tym razem w układzie współrzędnych opisanych równaniem (37). W granicach ± 25 [%] mieści się 93 [%] wyników eksperymentalnych, jest to typowa dokładność dla badań wymiany ciepła. Otrzymana zależność jest słuszna zarówno dla zakresu laminarnego, jak i turbulentnego.

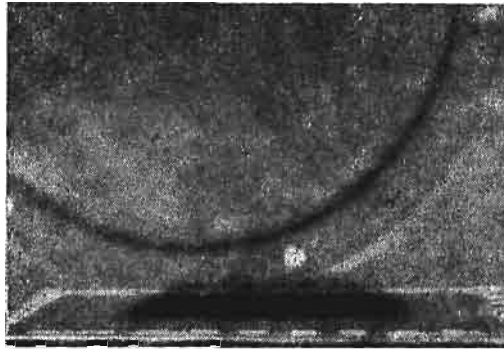
5. Dyskusja wyników, wnioski

Jak wykazały badania eksperymentalne, których wyniki mieszczą się w granicach błędu innych autorów, zaproponowany model komórkowo-kominowej konwekcji naturalnej jest słuszny. Potwierdziły to także badania wizualne: Rys. 9, Rys. 10 i Rys. 11.

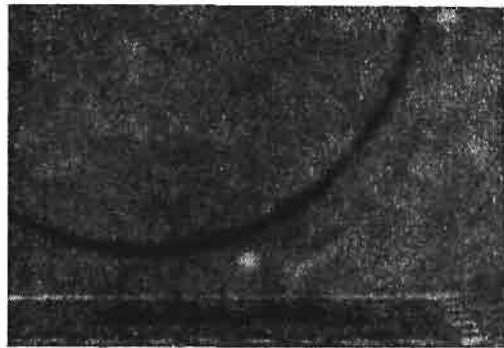


Rys. 9. Faktura tworząca się w warstwie przyściennej w końcowej fazie wypłukiwania barwnika z płyty przez ruchy konwekcyjne

- Z faktu przyjęcia słuszności przedstawionej koncepcji wynikają następujące wnioski:
- wielkość płyty wpływa tylko pośrednio na intensywność wymiany ciepła;
 - wymiar komórki konwekcyjnej ma zasadniczy wpływ na ilość przekazywanego ciepła;
 - im więcej komórek przypada na jednostkę powierzchni grzejnej, tym proces wymiany ciepła przebiega gwałtowniej;
 - intensywność wymiany ciepła jest odwrotnie proporcjonalna do lepkości płynu;
 - wraz ze wzrostem średniej temperatury płynu maleje wielkość komórek;



Rys. 10. Przerwanie ciągłości warstwy przyściennej i powstawanie wirów swobodnych



Rys. 11. Przykład przekształcania wirów swobodnych w wiry kominowe w wyniku oddziaływania bocznego napływu zimnego płynu nad powierzchnię płyty

— ze spadkiem temperatury płynu wielkość komórek konwekcyjnych rośnie, zdążając w temperaturze zamarzania do nieskończoności, natomiast intensywność wymiany ciepła maleje zdążając do zera.

W świetle przedstawionych badań oraz wypływających z nich wniosków, zastosowanie w zależności kryterialnej wymiaru komórki konwekcyjnej, w miejsce dotychczas używanego wymiaru liniowego, związanego z geometrią płyty, jest celowe i słuszne z następujących powodów:

- opis zjawisk wymiany ciepła uwzględniający wymiar komórki konwekcyjnej jest opisem naturalnym i bliższym rzeczywistości, niż dotychczas stosowana forma;
- uzależnienie się od własności fizycznych płynu, będących funkcją jego temperatury i jednoznacznie przez wszystkich interpretowanych, jest bezpieczniejsze, niż wiązanie zależności kryterialnych z wymiarem płyty;
- poprawieniu ulegnie wówczas powtarzalność wyników oraz zmniejszy się, tak znaczny dla płyty poziomej, rozrzut końcowych korelacji.

Literatura cytowana w tekście

1. W. M. LEWANDOWSKI, *Systematyczne badania przejmowania ciepła od płyty poziomej do cieczy, w warunkach konwekcji naturalnej w przestrzeni nieograniczonej*. Praca doktorska, Gdańsk, 1980.
2. W. M. LEWANDOWSKI, P. KUBSKI, *The Action of Natural Convection from Isothermal Horizontal Surfaces* (w redakcji Wärme — und Stoffübertragung).
3. P. KUBSKI, *Blonowa wymiana ciepła*, Mat. Symp. Wymiany Ciepła i Masy, Jabłonna, 1979.
4. J. K. MANDI, R. H. PLETTCHER, *Prediction of Turbulent Forced Plumes Issuing Vertically Into Stratified or Uniform Ambients*, J. Heat Transfer Transactions of the ASME, 2, 99 - 104, 1977.
5. W. M. LEWANDOWSKI, *Urządzenie do ustawiania sondy pomiarowej w przestrzeni hermetycznie zamkniętej*, Zgł. Pat. P-213749, 1979.
6. W. M. LEWANDOWSKI, P. KUBSKI, *Badania eksperymentalne konwekcji swobodnej od poziomej płyty skierowanej powierzchnią grzejącą w górę*, X Konf. Nauk. Inż. Chem. i Proces. Łódź, 1980.
7. W. M. LEWANDOWSKI, P. KUBSKI, *Urządzenie do określania przestrzennego rozkładu wielkości fizycznych w układach otwartych i hermetycznie zamkniętych*, PAK, 3, 1980.
8. P. KUBSKI, W. M. LEWANDOWSKI, *Wymiar komórki konwekcyjnej jako wymiar charakterystyczny konwekcji swobodnej nad poziomą płytą*, XI Zjazd Termodynamików, Szczecin—Swinoujście, 1981.
9. A. I. LEONTIEV, A. G. KIRDYASHKIN, *Experimental Study of Flow Patterns and Temperature Fields in Horizontal Free Convection Liquid Layers*, Int. J. Heat Mass Transfer, 11, 1461 - 1466, 1966.
10. J. MADEJSKI, *Teoria wymiany ciepła*, PWN, Warszawa, Poznań, 1963.

Резюме

ЯЧЕЙКО-ТРУБНОЙ ХАРАКТЕР ВЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ОТ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТИ ДО НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

В статье представлено ячейко-трубную концепцию естественной конвекции в неопределённом пространстве. В этой концепции заключено развитие ячейковой структуры в пограничном слое и далее преобразование этих структур в перпендикулярную трубную форму.

На характер и интенсивность теплообмена имеет влияние только число ячеек в единице поверхности.

Величину конвекционной ячейки определено аналитическим методом. Полученные результаты проверено в эксперименте и сравнено с данными по литературе.

Summary

CELLULAR-PLUMER CHARACTER OF NATURAL CONVECTION FROM ISOTHERMAL, HORIZONTAL SURFACES IN UNLIMITED SPACE

The paper presents the cellular-plumer conception of natural convection in unlimited space. This conception includes a phase of the cellular structure creation in the boundary layer and next the transformation of these structures into vertical plumes.

The character of the heat transfer depends on the processes inside the boundary layer, thus not the plate dimension, but the quantity of the plate, determines the intensity of natural convection.

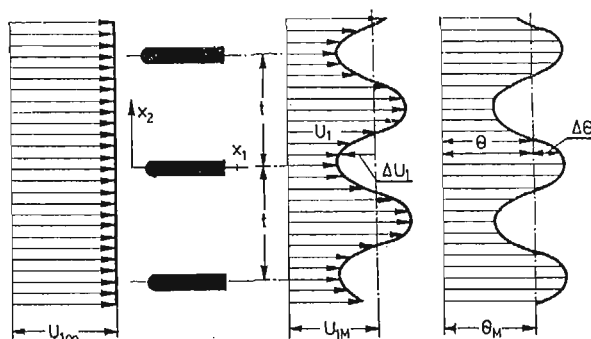
The convection cell dimension has been analytically calculated on the base of the proposed physical model. The obtained results have been verified by the experimental investigations and compared to literature data.

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 stycznia 1983 roku

PROCESY TURBULENTNEGO TRANSPORTU PĘDU I CIEPŁA W PRZEPLYWIE ZAPALISADOWYM

JACEK ZIELIŃSKI

Jednym ze szczególnych zagadnień turbulencji jest ruch płynu w śladach aerodynamicznych za umieszczonymi w przepływie ciałami stałymi. O ile zagadnienie śladów izotermicznych ma już bogatą literaturę przedmiotu o tyle problematyka śladów temperaturowych generowanych przez pojedyncze lub okresowo w przestrzeni rozłożone źródła ciepła jest rozpoznana w znacznie mniejszym stopniu. Typowym przykładem jest tu przepływ burzliwy za palisadą ogrzewanych ciał symetrycznych modelujących nie tylko okresowe pole prędkości, ale również okresowo zmienne w sensie przestrzennym pole temperatur. Oprócz aspektów czysto poznawczych rozważany przypadek posiada również pewne znaczenie praktyczne np. w ogrzewnictwie (przepływ za nagrzewnicami rurowymi) lub aerodynamice maszyn przepływowych gdzie jednak przy wewnętrznym chłodzeniu łopatek turbin gazowych kierunek przepływu ciepła jest odwrotny.



Rys. 1

Jednymi z niewielu pozycji poświęconych analizie procesów zachodzących w nieizotermicznych przepływach zapalisdowych są eksperymentalne prace TAMAKI i OSHIMY [4] oraz KÜHNA [2]. Autorzy pierwszej z nich w odniesieniu do pól prędkości i temperatur średnich wykazali, że ich niejednorodność — określona przez głębokości śladów obu wielkości fizycznych — zmniejsza się hiperbolicznie w kierunku przepływu, natomiast współczynniki lepkości burzliwej ν_T i turbulentnej dyfuzji ciepła a_T mają zbliżoną wartość i pozostają w przybliżeniu niezmiennie w poprzecznych przekrojach strugi, zmniejszając się w kierunku przepływu. Próbkę analitycznego opisu pól prędkości i temperatury w tego

typu przepływie przedstawiono natomiast w [1]. Analiza rzędów wartości równań turbulentnego transportu pędu i ciepła wykazała, że w dostatecznie dużej odległości za palisadą mogą być one zapisane zgodnie z oznaczeniami z rys. 1 w uproszczonej postaci

$$\begin{aligned} U_{1M} \frac{\partial(\Delta U_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} &= 0, \\ U_{1M} \frac{\partial(\Delta \Theta)}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2 \vartheta} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

w której wielkość U_{1M} oznacza prędkość uśrednioną w poprzecznym przekroju strugi i stałą w rozważanym obszarze przepływu. Układ równań (1) uzupełniony zostaje zaproponowanymi przez Boussinesq'a związkami określającymi turbulente naprężenia styczne i gęstość strumienia ciepła w kierunku osi x_1 .

$$\overline{u_1 u_2} = \nu_T \frac{\partial U_1}{\partial x_2}; \quad \overline{u_2 \vartheta} = a_T \frac{\partial \Theta}{\partial x_2}. \quad (2)$$

Skalarowe wielkości ν_T i a_T określane jako współczynniki turbulentnej dyfuzji pędu ν_T i ciepła a_T charakteryzują intensywność procesów transportu w rozważanym przepływie. Należy zaznaczyć, że bardziej subtelna analiza prowadzona przez niektórych autorów np. [3] pozwala sądzić, że w ogólnym przypadku przepływów trójwymiarowych właściwszym byłoby traktowanie współczynników dyfuzji jako tensorów 2-go rzędu. Dla potrzeb analizowanego tu przepływu płaskiego, w którym gradient tak prędkości jak i temperatury średniej występuje jedynie w kierunku x_2 przyjąć jednak można — jak się to czyni powszechnie — proste zależności (2), które wprowadzone do równań (1) pozwalają wyrazić je w innej nieco formie

$$\begin{aligned} U_{1M} \frac{\partial(\Delta U_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\nu_T \frac{\partial(\Delta U_1)}{\partial x_2} \right] &= 0, \\ U_{1M} \frac{\partial(\Delta \Theta)}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[a_T \frac{\partial(\Delta \Theta)}{\partial x_2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Załóżmy, że zgodnie z wynikami pracy [4] współczynniki ν_T i a_T wykazują stałość w poprzecznym przekroju strugi oraz, że w rozważanym przepływie istnieje obszar, w którym pola prędkości i temperatury średniej mogą być opisane przy użyciu skal $U_*(x_1)$, $\Theta_*(x_1)$ oraz bezwymiarowych funkcji F i f współrzędnej względnej $\eta = x_2/t$ w postaci

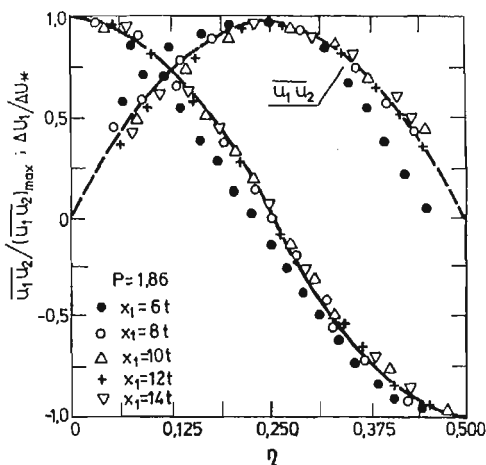
$$\Delta U_1(x_1, x_2) = U_*(x_1) f(\eta) \quad \Delta \Theta(x_1, x_2) = \Theta_*(x_1) F(\eta). \quad (4)$$

Jeżeli przyjmiemy ponadto, że zmienność skal U_* i Θ_* wykazuje w pewnej odległości $x_1 > x_{10}$ charakter potęgowy

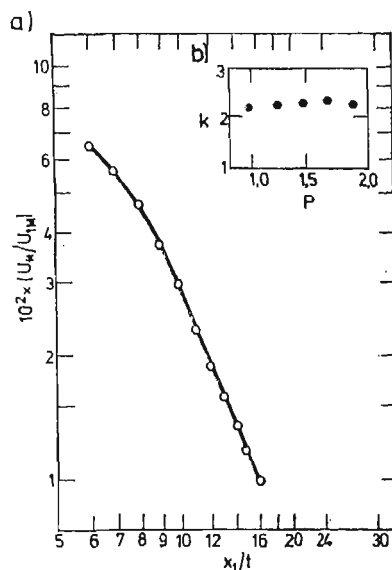
$$\frac{U_*}{(U_*)_0} = \left(\frac{x_1}{x_{10}} \right)^{-k} \quad \frac{\Theta_*}{(\Theta_*)_0} = \left(\frac{x_1}{x_{10}} \right)^{-\kappa}, \quad (5)$$

wówczas uwzględnienie związków (4) i (5) w równaniach transportu (3) pozwala wyrazić współczynniki turbulentnej dyfuzji pędu i ciepła w formie

$$\begin{aligned} \nu_T &= \frac{-kt^2}{x_{10}} U_{1M} \frac{f}{F''} \left(\frac{x_1}{x_{10}} \right)^{-1}, \\ a_T &= \frac{-\kappa t^2}{x_{10}} \cdot U_{1M} \frac{F}{F''} \left(\frac{x_1}{x_{10}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$



Rys. 2



Rys. 3

Iloraz tych współczynników określa wartość turbulentnej liczby Prandla Pr_T . Liczba ta w odróżnieniu od molekularnej liczby Prandla $Pr = \nu/a$ nie jest cechą fizyczną płynu i zależy może od różnych czynników, w pierwszym jednak rzędzie od struktury turbulencji.

Z równań (6) wynika bezpośrednio, że turbulentna liczba Prandla

$$Pr_T = \frac{\nu_T}{a_T} = \frac{k}{\kappa} \frac{fF''}{f''F}, \quad (7)$$

zachowuje stałość w całym rozważanym obszarze przepływu zależąc jednak poprzez wykładniki k i κ od warunków wlotowych, na przykład od turbulencji wstępnej przepływu przed palisadą. Podkreślić należy, że do wyznaczenia wartości współczynników dyfuzji (równania 6) oraz liczby Pr_T wystarczająca jest znajomość ewolucji jedynie pól wielkości średnich mimo iż zgodnie ze związkami (2) współczynniki ν_T i a_T oraz ich iloraz

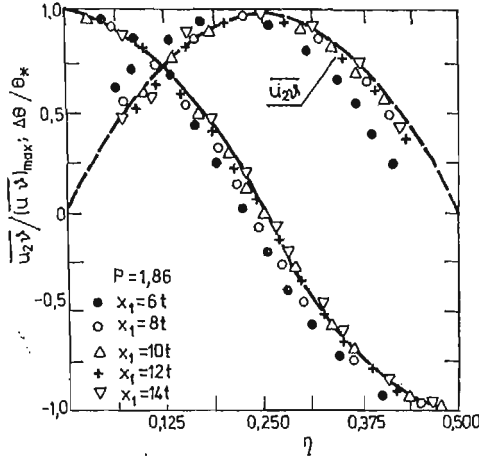
$$Pr_T = \frac{\overline{u_1 u_2}}{u_2 \vartheta} \frac{\partial \Theta / \partial x_2}{\partial U_1 / \partial x_2}, \quad (8)$$

zawierają w sobie informacje o turbulentnych fluktuacjach prędkości i temperatury.

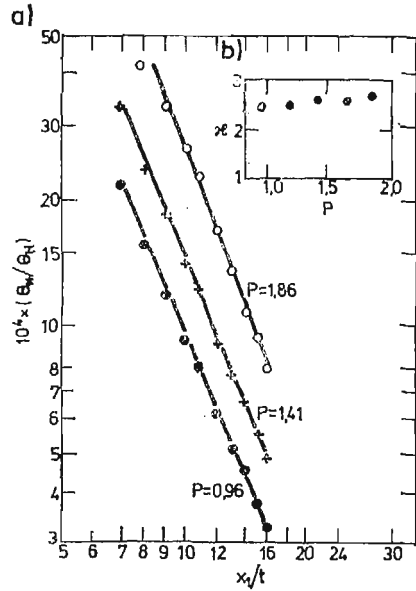
Dla eksperymentalnej weryfikacji związków (6) i (7) przeprowadzono w tunelu aerodynamicznym analizę przepływu za palisadą podgrzewanych płytek (rys. 1) przy czym w trakcie pomiarów zmieniono stopień przegrzewu strugi P definiowany zależnością

$$P = \frac{N/bI}{\rho U_\infty (c_p \Theta_\infty + U_\infty^2/2)}$$

w której N oznacza moc elektryczną doprowadzoną do każdej z płytek o długości b . W trakcie pomiarów parametr P zawarty był w granicach $P = (0,97 - 1,86) \%$ co klasy-



Rys. 4



Rys. 5

fikuje badany przepływ do grupy strug słabo nieizotermicznych i usprawiedliwia przyjęcie w analizie równań transportu stałej gęstości czynnika. Badaniami objęto obszar strugi $6t < x_1 < 15t$, w którym zgodnie z pracami innych autorów jak i wynikami badań własnych nie występuje już deformacja rozkładu ciśnienia statycznego i spełniony jest warunek $P = \text{const}$.

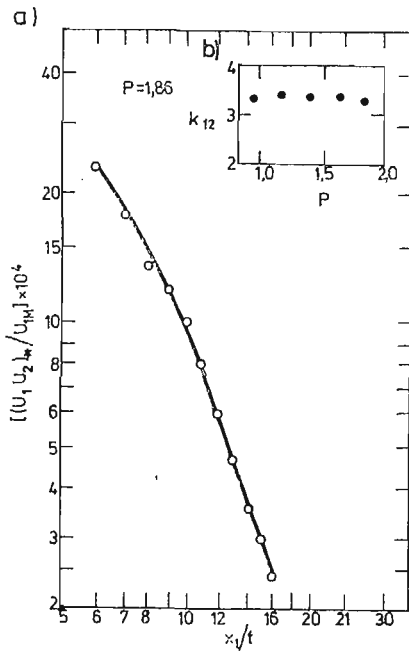
Materiał pomiarowy obrazujący rozkład funkcji $f(\eta) = \Delta U_1(x_1 x_2)/U_*$ przedstawiono na rys. 2 przy czym w charakterze skali prędkości przyjęto maksymalną różnicę prędkości $U_* = (U_{1\text{max}} - U_{1\text{min}})/2$. Naniesione tu punkty doświadczalne wykazują, że dla $x_1 > 8t$ profile prędkości średniej uniwersalizują się i z dobrym przybliżeniem aproksymowane być mogą funkcją $f(\eta) = \cos 2\pi\eta$.

Rys. 3 na którym stopień niejednorodności pola prędkości średniej $\beta_v = \Delta U_{1\text{max}}/U_{1M}$ linearyzuje się w podwójnie logarytmicznym układzie współrzędnych począwszy od $x_1 = 9t$ potwierdza jednocześnie słuszność związku (5) o potęgowym charakterze zanikania skali prędkości $U_*(x_1)$ w kierunku przepływu. Wykładnik potęgowy k nie zależy przy tym praktycznie od stopnia przegrzewu strugi, na co wskazują dane z rys. 3b.

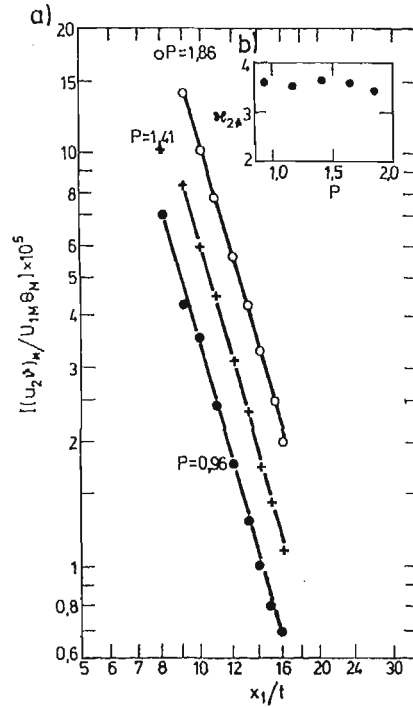
Analogiczne wyniki dotyczące rozwoju pola temperatury średniej przedstawione zostały na rys. 4 i 5. Zredukowane rozkłady tej wielkości począwszy od $x_1 = (8 \div 10)t$ przybierają również kształt cosinusoidy $F(\eta) = \cos 2\pi\eta$, a rolę skali temperaturowej θ_* spełnia wartość $\Delta\theta_{\text{max}}$.

Identyczność zależności funkcyjnych $f(\eta)$ i $F(\eta)$ sprawia, że prawa strona równania (7) przestaje być zależna od zredukowanej współrzędnej poprzecznej $\eta = x_2/t$ i turbulentną liczbę Prandtla określa bardzo prosta formuła postaci

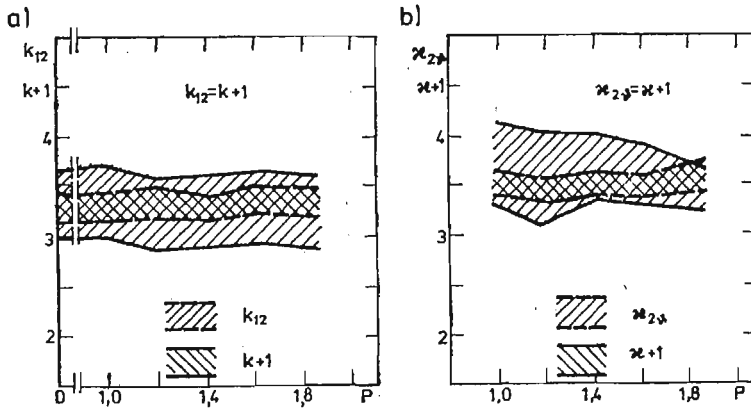
$$\text{Pr}_T = \frac{k}{\alpha} \quad (7a)$$



Rys. 6

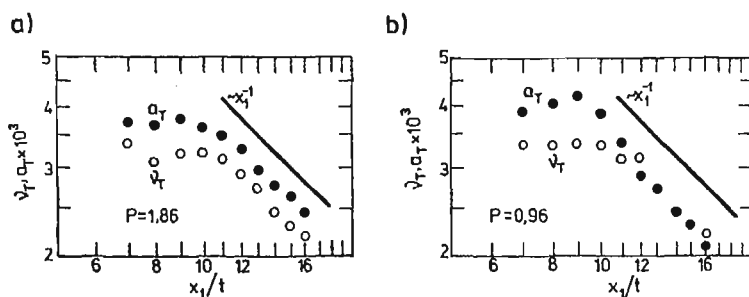


Rys. 7

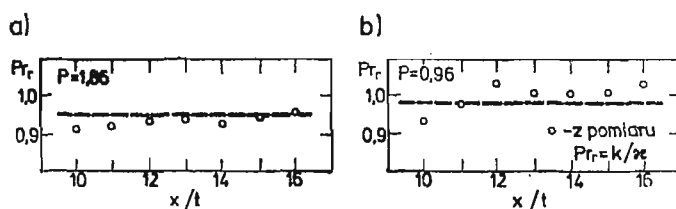


Rys. 8

Na rys. 2 i 4 zawarto ponadto informacje o przestrzennym rozkładzie korelacji $\overline{u_1 u_2}$ (rys. 2) oraz $\overline{u_2 \vartheta}$ (rys. 4) określonych przy użyciu 3 — kanałowej aparatury termooanemometrycznej DISA 55M. Naniesione tu dane wykazują, że dla $x_1 > 8t$ po zredukowaniu względem wartości odpowiednio $(\overline{u_1 u_2})_{max}$ i $(\overline{u_2 \vartheta})_{max}$ punkty pomiarowe podporządkowane różnym odległościom od palisady grupują się wokół wspólnych krzywych. Świadczy to o tym, że w pełni rozwiniętym przepływie zapaliskowym przestrzenne rozkłady naprężeń styc-



Rys. 9



Rys. 10

nych $\overline{u_1 u_2}$ i turbulentnego strumienia ciepła $\overline{u_2 \vartheta}$ mogą być również opisane przy użyciu skal $(u_1 u_2)_*$, $(u_2 \vartheta)_*$ oraz bezwymiarowych funkcji współrzędnej η w postaci

$$\overline{u_1 u_2}(x_1, x_2) = (u_1 u_2)_*(x_1) f_{12}(\eta); \quad \overline{u_2 \vartheta}(x_1, x_2) = (u_2 \vartheta)_*(x_1) F_{2\vartheta}(\eta), \quad (9)$$

analogicznej do zależności (4). Rolę skal spełniają tutaj maksymalne w danym przekroju wartości naprężeń stycznych lub turbulentnych strumieni ciepła. Ewolucję tych skal w kierunku przepływu dla różnych stopni podgrzewu strugi zilustrowano na rys. 6 i 7. Linearyzacja przebiegów pokazanych tu w układzie podwójnie logarytmicznym stanowi jednocześnie wyraz ich potęgowej zależności od współrzędnej wzdłużnej x_1 zgodnie ze związkami

$$\frac{(u_1 u_2)_*}{(u_1 u_2)_{*0}} = \left(\frac{x_1}{x_{10}} \right)^{-k_{12}}; \quad \frac{(u_2 \vartheta)_*}{(u_2 \vartheta)_{*0}} = \left(\frac{x_1}{x_{10}} \right)^{-\kappa_{2\vartheta}}. \quad (10)$$

Dane z rys. 6 oraz 6b i 7b świadczą również o braku zauważalnego wpływu stopnia przegrzewu na skalę $(u_1 u_2)_*$ i wykładniki k_{12} i $\kappa_{2\vartheta}$ przy oczywistym zwiększaniu się wartości skali $(u_2 \vartheta)_*$ ze wzrostem parametru P .

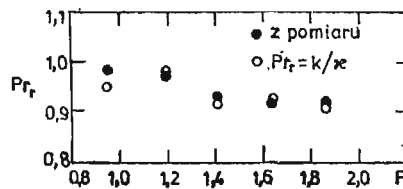
Uwzględnienie związków (5) i (10) w równaniach przyjętego modelu turbulencji (2) i zależnościach (6) nakłada na wartości wykładników skal ruchu średniego i fluktuacyjnego następujące warunki:

$$k+1 = k_{12} \quad \text{i} \quad \kappa+1 = \kappa_{2\vartheta}. \quad (11)$$

W celu ich weryfikacji na rys. 8 zestawiono w funkcji współczynnika P sumaryczne wartości wykładników skal stojących po lewej i prawej stronie związków (11). Przytoczone tu wyniki wskazują, że w 95% przedziale ufności warunki te są spełnione dla wszystkich zastosowanych w pracy stopni podgrzewu strugi.

Uzyskane dane pomiarowe pozwoliły na określenie z równań (2) rozkładów współczynników turbulentnej dyfuzji pędu i ciepła w rozważanym obszarze przepływu. Oba współczynniki zachowują praktyczną niezależność od współrzędnej poprzecznej x_2 , a w przedziale $x_1 > 10t$ zanikają hiperbolicznie w funkcji współrzędnej x_1 (rys. 9) co potwierdza tendencję wyrażoną związkami (6).

Znajomość określonych w pomiarach wartości ν_T i a_T pozwala na wyznaczenie turbulentnej liczby Prandtla Pr_T . Wyniki pomiarów porównano na rys. 10 z rezultatami wyprowadzonego przez autora wzoru (7a) wykazują nie tylko zaskakującą zgodność ale i potwierdzają przestrzenną niezmienność liczby Pr_T , niezależną przy tym praktycznie (rys. 11) od stopnia przegrzewu strugi.



Rys. 11

Przytoczone w pracy rozważania wykazały, że współczynniki turbulentnego transportu pędu ν_T i ciepła a_T są praktycznie stałe w poprzecznych przekrojach strugi. Zanikają w kierunku przepływu odwrotnie proporcjonalnie do współrzędnej x_1 ze współczynnikami proporcjonalności odpowiednio k i α mogącymi zależeć od warunków wlotowych np. poziomu turbulencji wstępnej. Wyprowadzony w pracy wzór (7a) daje dobre oszacowanie turbulentnej liczby Prandtla i pozwala ją wyznaczyć z kształtu pól wielkości średnich odpowiednio prędkości i temperatury.

Spis ważniejszych oznaczeń

- a_T — współczynnik turbulentnej dyfuzji ciepła
- b — szerokość obszaru pomiarowego
- k — wykładnik potęgowy
- t — podziałka palisady
- U_1 — prędkość średnia przepływu
- Θ — temperatura średnia
- u_1, u_2 — składowe fluktuacyjne prędkości
- ϑ — składowa fluktuacyjna temperatura
- α — wykładnik potęgowy
- ν_T — współczynnik lepkości burzliwej

Indeksy

- ∞ — dotyczy parametrów strugi dolotowej
- M — dotyczy wartości uśrednionych w zakresie jednej podziałki palisady

Literatura cytowana w tekście

1. J. W. ELSNER, J. ZIELIŃSKI, *Stadium pól prędkości i temperatury za palisadą podgrzewanych ciał symetrycznych*. Materiały sympozjum „Doświadczalne Badania Przepływów”, Częstochowa, 1974.
2. W. KÜHN, *Untersuchungen zum turbulenten Wärmetransport in Abhängigkeit von der Grobstruktur der Turbulenz*, opracowanie pod redakcją M. Hoffmeister'a, Berlin 1979, Akademie-Verlag.
3. J. O. HINZE, *Turbulence, Second Edition*, Mc Graw Hill N. Y. 1975.
4. H. TAMAKI, K. OSHIMA, *Experimental Studies on the Wake Behind a Row of Heated Parallel Rods*, Proceedings of the 1-st Congress for App. Mech., 1951.

Р е з ю м е

ПРОЦЕССЫ ТУРБУЛЕНТНОГО ТРАНСПОРТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ
И ТЕПЛА В ТЕЧЕНИИ ЗА РЕШЕТКОЙ ПЛИТ

Представлены результаты экспериментальных исследований изменчивости коэффициентов турбулентного транспорта количества движения и тепла области основного неизотермического течения за решеткой.

Экспериментальные данные сравнено с результатами вычислений вытекающих из семи-подобия турбулентных течений.

S u m m a r y

THE TURBULENT HEAT AND MOMENTUM TRANSFER BEHIND A ROW OF BLADES

The paper presents the results of experiments concerning the behaviour of the coefficient of turbulent momentum and heat transfer in the fully developed, nonisothermal flow behind a row of blades the results obtained have been compared with the predictions based on the self — similarity concept.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 maja 1983 roku

EQUATIONS OF THE SHELLS WITH INCLUSIONS ALONG ONE OF THE PARAMETER LINES

IWONA CIELECKA
SYLWESTER KONIECZNY

*Politechnika Łódzka
Instytut Inżynierii Budowlanej*

1. Basic equations of shells

In the paper of Cz. WOŹNIAK [1], [2] bases of analytical mechanics of material continuum have been given and among other things equations of motion and boundary conditions have been formulated for shells as a body with internal constraints.

For static problems, taking the function of motion defined by the equation

$$\chi(X, t) = \psi(Z, t) + d(Z, t)Y, \quad \begin{array}{l} X \in B_R = \Pi \times F \\ Z = (Z^1, Z^2) \in \Pi, \quad Y \in F \end{array} \quad (1)$$

the equations of motion have the form [1]

$$\begin{array}{l} H^{kK}{}_{,K} + h^k + f^k = 0, \\ M^{kK}{}_{,K} + m^k + e^k = 0, \end{array} \quad Z \in \Pi \quad (2)$$

and the boundary conditions are defined by the following relations [1]

$$\begin{array}{l} H^{kK}n_K = p^k + \mu^e \frac{\partial \beta_e}{\partial \psi_k} - \frac{d}{ds} \left(\mu^e \frac{\partial \beta_e}{\partial \psi_{k,s}} \right), \\ M^{kK}n_K = c^k + \mu^e \frac{\partial \beta_e}{\partial d_k} - \frac{d}{ds} \left(\mu^e \frac{\partial \beta_e}{\partial d_{k,s}} \right). \end{array} \quad Z \in \partial \Pi \quad (3)$$

The functions ψ and d may be dependent on each other and satisfy certain conditions [1]

$$\begin{array}{l} \alpha_r(Z, \psi(Z, t), d(Z, t), \bar{\nabla} \psi(Z, t), \bar{\nabla} d(Z, t)) = 0, \quad Z \in \Pi \\ \beta_e(Z, \psi(Z, t), d(Z, t), \partial \psi(Z, t), \partial d(Z, t)) = 0, \quad Z \in \partial \Pi. \end{array} \quad (4)$$

2. Kinetic contact conditions for shells with inclusions

In order to take into account the influence of the inclusion on the motion of the shell, we also handle the inclusion as material continuum [3].

Let us assume that the notion of inclusion from the reference configuration I_R to the actual configuration is described by the function $x = \tilde{\chi}(X, t)$, $X = (X^V) \in I_R$.

In accordance with the analytical mechanics of material continuum, the field of external body loads \tilde{b} and the field of external surface loads \tilde{p}_R and the field of internal contact forces $\tilde{t}_R \equiv \tilde{T}_R n_R$ (T_R is the first Piola-Kirchhoff tensor of stress) should satisfy the principle of virtual work [2]

$$\int_{I_R} \tilde{\rho}_R (\tilde{b} - \ddot{\tilde{\chi}}) \cdot \delta \tilde{\chi} dv_R + \int_{\partial I_R} \tilde{p}_R \cdot \delta \tilde{\chi} d\sigma_R = \int_{I_R} \tilde{T}_R \cdot \nabla (\delta \tilde{\chi}) dv_R, \quad (5)$$

where $\tilde{\rho}_R$ is the mass density of material of the inclusion in the reference configuration

We put that the field of external surface loads affecting the boundary of inclusion ∂I_R or its part is given by the field of internal forces of the shell

$$\tilde{p}^k = \tilde{T}^{kV} n_V, \quad (6)$$

where $n_R = (n)_V$ is a unit normal vector in the place of contact of the shell with the boundary of inclusion. Assuming that the inclusion is closely connected with the shell, the functions of motion for the shell χ and the inclusion $\tilde{\chi}$ have the same values on the common surface $S_R \equiv \partial B_R \cap \partial I_R$.

Let the motion of arbitrary particle of inclusion be given in the following form:

$$\tilde{\chi}(X, t) = \varphi(Z^1, t) + d_A(Z^1, t) Z^A, \quad Z^1 \in \tilde{I}, \quad Z = (Z^2, Z^3) \in \tilde{F}, \quad (7)$$

where $I_R = \tilde{I} \times \tilde{F}$ is the region occupied by the inclusion in the reference configuration; \tilde{I} is the set of material particles being on the axis of inclusion, \tilde{F} — the set of particles being in the cross-section of inclusion.

Putting that the dimensions of the cross-section of inclusion are $h \times l$ ($Z^2 \in (-0,5l; 0,5l)$, $Z^3 \in (-0,5h; 0,5h)$) and taking into account the condition (6) we obtain

$$\begin{aligned} \left[\int_{-0,5h}^{0,5h} \tilde{p}^k dZ^3 \right]_{-0,5l}^{0,5l} &= \left[\int_{-0,5h}^{0,5h} \tilde{T}^{kL} n_L dZ^3 \right]_{-0,5l}^{0,5l} = [H^{kl}] n_L, \\ \left[\int_{-0,5h}^{0,5h} \tilde{p}^k Z^2 dZ^3 \right]_{-0,5l}^{0,5l} &= \left[Z^2 \int_{-0,5h}^{0,5h} \tilde{T}^{kL} n_L dZ^3 \right]_{-0,5l}^{0,5l} = [Z^2 H^{kl}] n_L, \\ \left[\int_{-0,5h}^{0,5h} \tilde{p}^k Z^3 dZ^3 \right]_{-0,5l}^{0,5l} &= \left[\int_{-0,5h}^{0,5h} \tilde{T}^{kL} Z^3 n_L dZ^3 \right]_{-0,5l}^{0,5l} = [M^{kL}] n_L, \end{aligned} \quad (8)$$

The integrals in the relations (8) denote the jumps of the internal resultant forces in the section of the shell oriented by a unit vector n_P while crossing the axis of the inclusion.

Using the principle of virtual work (5) and putting the relations (7), (8) and applying to (5) the du Bois-Reymonda lemma we obtain the equations of motion for the inclusion in the following form

$$\begin{aligned} [H^{kL}] n_L &= -(\tilde{H}^{k1},_1 + \tilde{f}^k), \\ [H^{kL} Z^2] n_L &= -(\tilde{H}^{2k1},_1 + \tilde{h}^{2k} + \tilde{f}^{2k}), \\ [M^{kL}] n_L &= -(\tilde{H}^{3k1},_1 + \tilde{h}^{3k} + \tilde{f}^{3k}), \end{aligned} \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}^{k1} &\equiv \int_{-0,5l}^{0,5l} \int_{-0,5h}^{0,5h} \tilde{T}^{k1} dZ^3 dZ^2, \\
 \tilde{H}^{Ak1} &\equiv \int_{-0,5l}^{0,5l} \int_{-0,5h}^{0,5h} \tilde{T}^{k1} Z^A dZ^3 dZ^2, \\
 \tilde{H}^{Ak} &\equiv \int_{-0,5l}^{0,5l} \int_{-0,5h}^{0,5h} \tilde{T}^{kA} dZ^3 dZ^2, \\
 \tilde{f}^k &\equiv \left[\int_{-0,5l}^{0,5l} \tilde{p}^k dZ^2 \right]_{-0,5h}^{0,5h}, \\
 \tilde{f}^{Ak} &\equiv \left[\int_{-0,5l}^{0,5l} \tilde{p}^k Z^A dZ^2 \right]_{-0,5h}^{0,5h}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

The equations (9) are kinetic constant conditions for the shells in the place of the occurrence of the inclusion and they include its influence on the motion of the shell. We determine the generalized internal forces \tilde{H}^{k1} , \tilde{H}^{Ak1} assuming the appropriate form of constitutive equations and for the inclusion being a hyperelastic body $\tilde{T}^{kV} = \tilde{q}_R \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\chi}_{k,V}}$; $\tilde{\sigma}$ is the strain energy function.

Equations of motion (2), boundary conditions (3) and kinetic contact conditions (9) describe the boundary value problem being discussed.

3. Cylindrical shells with ring inclusions loaded axially symmetrically

We write the equations formulated above in the cylindrical coordinates R , X^1 , X^2 assuming that the considered values do not depend on variable X^1 (fig. 1).

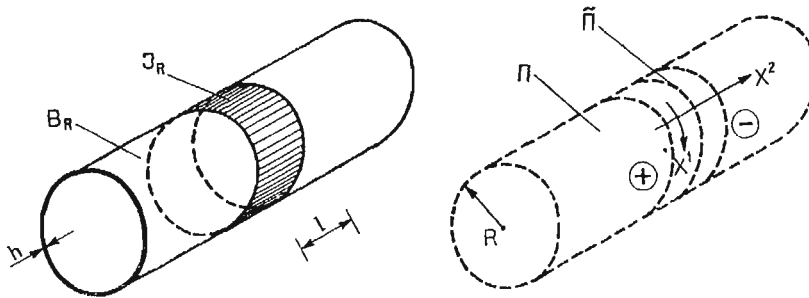


Fig. 1

We put that the shell and the inclusion are made of isotropic material. The equations given below will refer to the case in which the constraints (4) are determined

$$\alpha_1 = d^V d_V - 1 = 0 \tag{11}$$

which by the linearization leads to $d^3 = d_3 = 1$. The constraints assumed so describe the Reissner theory of shells.

From the equations of motion given by eq. (2) we obtain four differential equations for cylindrical shells loaded axially symmetrically

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -D^{2222} & 0 & -\bar{D}^{2222} \\ 0 & D^{3232} & 0 \\ -\bar{D}^{2222} & 0 & \bar{\bar{D}}^{2222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{2,22} \\ \bar{\psi}_{3,22} \\ \bar{d}_{2,22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -D^{223} & 0 \\ -D^{223} & 0 & D^{322} \\ 0 & D^{322} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{2,2} \\ \bar{\psi}_{3,2} \\ \bar{d}_{2,2} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R}D^{113} & 0 \\ 0 & 0 & D^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_3 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f^2 \\ f^3 \\ -e^2 \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

and

$$2\lambda_1 - 'D^{223}\bar{\psi}_{2,2} + \bar{D}^{3232}\bar{\psi}_{3,2} + (\bar{D}^{322} - 'D^{223})\bar{d}_{2,2} - D^{33}\bar{\psi}_3 + e^3 = 0$$

where λ^1 is Lagrange multiplier which corresponds to eq. (11). In the above system equations the components of function of motion are denoted in the following manner

$$\bar{\psi}_\nu \equiv \psi_\nu - \dot{\psi}_\nu, \quad \bar{d}_\nu \equiv d_\nu - \dot{d}_\nu, \quad (13)$$

where $\dot{\psi} = (0, X^2, R)$, $\dot{d} = (0, 0, 1)$. The factors at the unknown components of function of motion depend on Lamé constants μ , λ and thickness h and radius R of the cylindrical shell.

$$\begin{aligned} 'D^{223} &= \frac{6R}{h^2}, \quad 'D^{223} = RD^{223} = h\lambda, \\ D^{3232} &= D^{322} = D^{22} = \frac{12R}{h^2}\bar{D}^{3232} = \frac{12R}{h^2}\bar{D}^{322} = h\mu, \\ D^{2222} &= \frac{12}{h^2}\bar{\bar{D}}^{2222} = 12R\bar{D}^{2222} = h(\lambda + 2\mu), \\ D^{113} &= \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2R}\right)^4 + \dots \right] \frac{h}{R}(\lambda + 2\mu) \\ D^{33} &= -\left[\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2R}\right)^4 + \dots \right] \frac{h}{R}(\lambda + 2\mu) + \frac{h}{R}\lambda. \end{aligned} \quad (14)$$

The kinetic contact conditions for shell (9) should be reduced to the form including the components of the function of motion of shell ψ and d only. Taking into account the equality of the deformation functions of the shell and of the inclusion on the common surface S_R we obtain the mentioned below relations between components

$$\bar{\psi}_\nu = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_\nu^+ + \bar{\psi}_\nu^-), \quad \bar{d}_{2\nu} = -\frac{1}{l}(\bar{\varphi}_\nu^+ - \bar{\psi}_\nu^-), \quad \bar{d}_{3\nu} = \frac{1}{2}(\bar{d}_\nu^+ + \bar{d}_\nu^-). \quad (15)$$

We determine with sing „+” the components of the vector of motion for the part of shell which is oriented by the positive unit normal vector n_R while crossing the axis of the inclusion and with sing „-” those for the one oriented by the vector $-n_R$. The kinetic contact conditions by the application of the relations (15) have the form

$$\begin{bmatrix}
D^{2222} & 0 & \bar{D}^{2222} & -D^{2222} & 0 & -\bar{D}^{2222} \\
0 & D^{3232} & 0 & 0 & D^{3232} & 0 \\
-\frac{l}{2}D^{2222} & 0 & -\frac{l}{2}\bar{D}^{2222} & -\frac{l}{2}D^{2222} & 0 & -\frac{l}{2}\bar{D}^{2222} \\
0 & -\frac{l}{2}D^{3232} & 0 & 0 & -\frac{l}{2}D^{3232} & 0 \\
\bar{D}^{2222} & 0 & \bar{\bar{D}}^{2222} & -\bar{D}^{2222} & 0 & -\bar{\bar{D}}^{2222} \\
0 & \bar{D}^{3232} & 0 & 0 & -\bar{D}^{3232} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\bar{\psi}_{2,2}^+ \\
\bar{\psi}_{3,2}^+ \\
\bar{d}_{2,2}^+ \\
\bar{\psi}_{2,2}^- \\
\bar{\psi}_{3,2}^- \\
\bar{d}_{2,2}^-
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & D^{223} & 0 & 0 \\
\frac{1}{l}L^{322} & -\frac{1}{2R}L^{113} & D^{322} & -\frac{1}{l}L^{322} \\
\frac{1}{l}L^{2222} & -\frac{l}{2}D^{223} - \frac{1}{2}L^{322} & 0 & -\frac{1}{l}L^{2222} \\
0 & \frac{1}{l}L^{2323} & -\frac{l}{2}D^{322} - \frac{1}{2}L^{3232} & 0 \\
0 & \frac{1}{l}L^{2332} & -\frac{1}{2}L^{3232} & 0 \\
\frac{1}{l}L^{2233} & -\frac{1}{2}L^{333} & \bar{D}^{322} & -\frac{1}{l}L^{2233} \\
-\frac{1}{2}D^{223} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2R}L^{113} & -D^{322} & 0 & 0 \\
-\frac{l}{2}D^{223} - \frac{1}{2}L^{322} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{l}L^{2323} & -\frac{l}{2}D^{322} - \frac{1}{2}L^{3223} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{l}L^{2332} & -\frac{1}{2}L^{2332} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2}L^{333} & -\bar{D}^{322} & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\psi_2^+ \\
\psi_3^+ \\
\bar{d}_2^+ \\
\psi_2^- \\
\psi_3^- \\
\bar{d}_2^-
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\tilde{f}^2 \\
\tilde{f}^3 \\
\tilde{f}^{22} \\
\tilde{f}^{23} \\
\tilde{f}^{32} \\
\tilde{f}^{33}
\end{bmatrix}
= [0] \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^2 &= \left[\int_{-0,5l}^{0,5l} \tilde{p}^2 dZ^2 \right]_{-0,5h}^{0,5h}, & \tilde{f}^3 &= \left[\int_{-0,5l}^{0,5l} \tilde{p}^3 dZ^2 \right]_{-0,5h}^{0,5h}, \\
\tilde{f}^{22} &= \left[\int_{-0,5l}^{0,5l} \tilde{p}^2 Z^2 dZ^2 \right]_{-0,5h}^{0,5h}, & \tilde{f}^{23} &= \left[\int_{-0,5l}^{0,5l} \tilde{p}^3 Z^2 dZ^2 \right]_{-0,5h}^{0,5h}, \\
\tilde{f}^{32} &= \left[\int_{-0,5l}^{0,5l} \tilde{p}^2 Z^3 dZ^2 \right]_{-0,5h}^{0,5h}, & \tilde{f}^{33} &= \left[\int_{-0,5l}^{0,5l} \tilde{p}^3 Z^3 dZ^2 \right]_{-0,5h}^{0,5h},
\end{aligned} \quad (17)$$

and

$$\begin{aligned}
L^{113} &= \frac{lh}{R} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right] (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}), \\
L^{333} &= \frac{lh}{R} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right] (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) + \frac{lh}{R} \tilde{\lambda}, \\
L^{2323} &= \frac{l^3 h}{12R^2} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right] + lh\tilde{\mu}, \\
L^{2222} &= lh(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}), \\
L^{2233} &= RL^{322} = lh\tilde{\lambda}, \\
L^{3232} &= L^{2332} = L^{3223} = lh\tilde{\mu},
\end{aligned} \tag{18}$$

$\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$ — Lamé constants for material of the inclusion:

The first three equations (12) together with kinetic contact conditions (16) and suitable boundary conditions let us calculate the components of the function of motion of the shell and the internal resultant forces in the shell and the inclusion and also the reaction forces of constraints loading the shell which secure the deformation consistent with the assumed constraints. The internal resultant forces may be calculated from relations given in [3] and for the shell being considered they have the following form

$$\begin{aligned}
M^{11} &= \frac{\lambda h^3}{12} d_{2,2} - (\lambda + 2\mu)h \left[\frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right] \bar{\psi}_3, \\
M^{22} &= \frac{(\lambda + 2\mu)h^3}{12R} \bar{\psi}_{2,2} + \frac{(\lambda + 2\mu)h^3}{12} \bar{d}_{2,2}, \\
M^{32} &= \frac{\mu h^3}{12R} (\bar{\psi}_{3,2} + \bar{d}_2), \\
H^{11} &= \lambda h \bar{\psi}_{2,2} + \frac{(\lambda + 2\mu)h}{R} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right] \bar{\psi}_3 \\
H^{22} &= (\lambda + 2\mu)h \bar{\psi}_{2,2} + \frac{(\lambda + 2\mu)h^3}{12R} \bar{d}_{2,2} + \frac{\lambda h}{R} \bar{\psi}_3, \\
H^{32} &= \mu h \bar{\psi}_{3,2}. \\
M^{12} &= M^{21} = M^{31} = H^{12} = H^{21} = H^{31} = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

The internal forces in the inclusion which are different from zero are determined by the relations

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{11} &= \frac{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})lh}{2R} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right] (\bar{\psi}_3^+ + \bar{\psi}_3^-) - \tilde{\lambda}h(\bar{\psi}_2^+ - \bar{\psi}_2^-), \\
\tilde{H}^{31} &= -\frac{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})lh}{2} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right] (\bar{\psi}_3^+ + \bar{\psi}_3^-).
\end{aligned} \tag{20}$$

The reaction forces of constraints for the shell may be calculated from [1] and for this shell they have the form

$$\bar{r}^1 = 0$$

$$\bar{r}^2 = -\left(\frac{\lambda + \mu}{R} \bar{\psi}_{3,2} + \frac{\mu}{R} \bar{d}_2\right) \left[1 - \frac{Y}{R} + \left(\frac{Y}{R}\right)^2 - \left(\frac{Y}{R}\right)^3 + \dots\right] - (\lambda + 2\mu)(\bar{\psi}_{2,2} + Yd_{2,2}),$$

$$\bar{r}^3 = -(\lambda + \mu)\bar{d}_{2,2} - \mu\bar{\psi}_{3,2,2} + \frac{\lambda + 2\mu}{R^2} \left[1 - 2\frac{Y}{R} + 3\left(\frac{Y}{R}\right)^2 - 4\left(\frac{Y}{R}\right)^3 + \dots\right] \bar{\psi}_3,$$

$$\bar{s}^1 = 0,$$

$$\bar{s}^2 = \mu(\bar{d}_2 + \bar{\psi}_{3,2}) - p^2,$$

$$\bar{s}^3 = \frac{\lambda}{h} \left[1 + \frac{h}{2R} + \left(\frac{h}{2R}\right)^2 + \left(\frac{h}{2R}\right)^3 + \dots\right] \bar{\psi}_3 + \lambda \left(\bar{\psi}_{2,2} - \frac{h}{2} \bar{d}_{2,2}\right) - p^3, \quad \text{for } Y = -\frac{h}{2},$$

$$\bar{s}^3 = \frac{\lambda}{h} \left[1 - \frac{h}{2R} + \left(\frac{h}{2R}\right)^2 - \left(\frac{h}{2R}\right)^3 + \dots\right] \bar{\psi}_3 + \lambda \left(\bar{\psi}_{2,2} + \frac{h}{2} \bar{d}_{2,2}\right) - p^3, \quad \text{for } Y = \frac{h}{2}.$$

4. Example

Let us consider a cylindrical shell of length L in which two rings have been placed. The Young's modulus for the material of rings is 20% greater than that for the material of the shell but the Poisson's ratios are the same. The shell is loaded a uniform load p along its length (fig. 2) and simple-supported at its ends. It is assumed that the thickness of shell is $h = 0,04$ m, the radius of the middle surface of shell $R = 0,60$ m and the width of a ring $l = 0,03$ m.

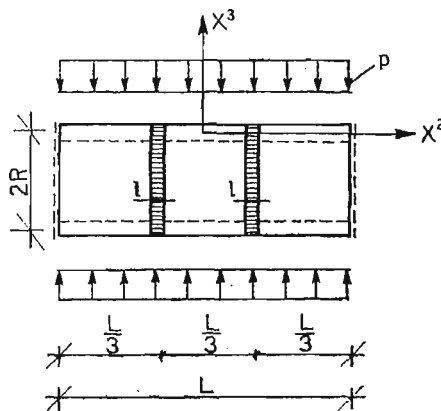


Fig. 2

Solving this example, the region occupied by shell in the reference configuration has been assumed as the sum of three regions $B_R^I, B_R^{II}, B_R^{III}$ (fig. 3).

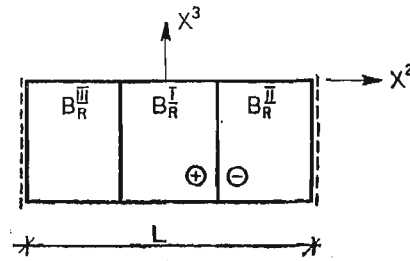


Fig. 3

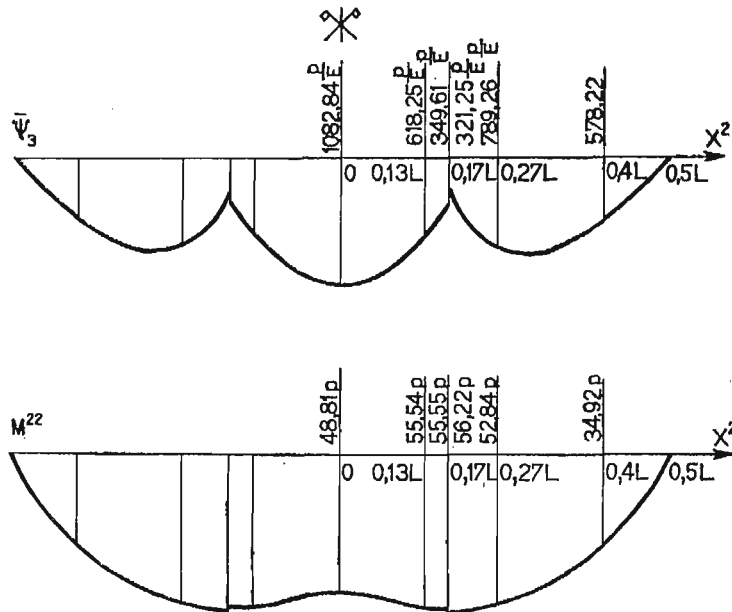


Fig. 4

After calculations vertical displacements of the points of the middle surface of the cylindrical shell with two ring inclusions and the change of bending couple M^{22} along the length of the shell have been shown on fig. 4 as an example.

Reference

1. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego*, Cz. I., Kontinua z więzami geometrycznymi, IPPT PAN W-wa 1975.
2. Cz. WOŹNIAK, *Constrained Continuous Media*, I, II, III, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. 21. 1973.
3. I. CIELECKA, S. KONIECZNY, *Równania powłok o skokowej niejednorodności*, Zeszyty Naukowe PŁ., Budownictwo z. 27, 1981.

Резюме

УРАВНЕНИЕ ОБОЛОЧЕК С ИНКЛЮЗИЯМИ ВДОЛЬ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА
ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Исходя из уравнений теории сплошных сред с связями сформулированной Ч. Возняком [1, 2] предлагаем математическую модель оболочек из материала с скачкообразными свойствами. Области занятые материалом с свойствами разных от свойств основного материала названы инклюдиями.

Решение проблемы с скачкообразными неоднородностями сведено к решению проблемы для однородного материала с некоторыми связями для состояния напряжения. Получены уравнения можно применить для вычисления оболочек с гибкими инклюдиями вдоль одного семейства параметрических линий на срединной поверхности оболочки.

Streszczenie

RÓWNANIE POWŁOK Z INKLUZJAMI WZDŁUŻ JEDNEJ RODZINY
LINII PARAMETRYCZNYCH

Korzystając z równań teorii ośrodków ciągłych z więzami sformułowanej przez Cz. Woźniaka [1, 2], skonstruowano matematyczny model powłok ze skokowymi nieciągłościami własności materiałowych. Obszary zajęte przez materiał mający różne własności od materiału podstawowego nazwano inkluzjami. W sformułowanym modelu rozwiązanie problemu ze skokowymi niejednorodnościami sprowadzone zostało do rozwiązania problemu jak dla materiału jednorodnego, lecz z pewnymi więzami dla stanu naprężenia.

Otrzymane równania mogą być zastosowane do obliczenia powłok z wiotkimi inkluzjami wzdłuż jednej rodziny linii parametrycznych na środkowej powierzchni powłoki.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1983 roku

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DLA PŁYT WARSTWOWYCH O WYŻSZEGO RZĘDU ROZKŁADZIE FUNKCJI RUCHU PO GRUBOŚCI PŁYTY

BOHDAN MICHAŁAK

Politechnika Łódzka

1. Wstęp

W analizie grubych płyt znacznie bliższe rzeczywistości jest przyjęcie, że przekrój poprzeczny jest niepłaski i nieprostopadły do powierzchni środkowej. Efekty te występują bardziej wyraźnie dla płyt warstwowych i to o stosunkowo niedużym stosunku grubości do rozpiętości [6]. Rozkład po grubości struktury można wybrać dowolnego rzędu, przyjęcie zbyt małego rzędu rozkładu da niewystarczającą dokładność, natomiast rozkład zbyt dużego rzędu może być zbędny a powodować tylko zwiększenie liczby nieznanych składowych funkcji ruchu. W teorii zaproponowanej w pracy Lo [5] przemieszczenia w płaszczyźnie płyty i w kierunku poprzecznym są przyjęte jako funkcje odpowiednio sześciennic i kwadratowe współrzędnej w kierunku grubości. Ta wyższego rzędu teoria płyt była porównana w [4] i [5] z innymi teoriami i może być uważana za lepszą w zakresie dokładności i obszaru zastosowań.

Dla uzyskania rozwiązań tak przyjętego modelu zastosowano, podobnie jak w artykule [7] metodę elementów skończonych. Jeżeli w pracy [7] przyjęto do rozważań jedynie jednowymiarowy element belkowy, to w przedstawionym artykule rozważa się dwuwymiarowy element płytowy. Równania równowagi metody elementów skończonych uzyskano traktując rozpatrywany model jako ośrodek z dyskretyzacyjnymi więzami wewnętrznymi [8]. Podobny sposób uzyskania równań metody elementów skończonych dla ośrodka trójwymiarowego z wykorzystaniem zasad mechaniki ośrodków z więzami wewnętrznymi wykorzystano w pracach [3], [4].

2. Płyty dyskretyzowane

Przedstawmy obszar zajęty przez płytę w postaci iloczynu kartezyjskiego dwóch zbiorów Π i F ; $B = \Pi \times F$. Zbiór Π jest skończoną sumą rozłącznych obszarów Π_a ,
$$\Pi = \bigcup_{a=1}^b \Pi_a, \quad \Pi_a \cap \Pi_b = \emptyset \quad (\text{obszary } \Pi_a \text{ nazywać będziemy elementami skończonymi}).$$
Niech (X^k, Z) będzie kartezyjskim układem współrzędnych w płycie, gdzie $x = (X^k) \in \Pi$ są współrzędnymi na powierzchni środkowej płyty, a $Z \in \left\langle -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right\rangle$, gdzie h jest grubością

plyty w konfiguracji początkowej. Wyrażmy funkcję ruchu płyty przez pewne funkcje zależne tylko od czasu,

$$\chi_k(X^k, Z, t) = \phi_{ak}(Z, \psi(X^k, q_i(t))) \quad x \in \Pi_a \times F. \quad (1)$$

Do uzyskania równań równowagi wykorzystamy zasadę idealności więzów [8],

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^l \left(\int_{\Pi_a} \int_F r_a^k \cdot \delta \chi_k \cdot dV + \int_{\partial \Pi_a \cap \partial \Pi} \int_F s_a^k \cdot \delta \chi_k \cdot dS + \right. \\ & \left. + \int_{\Pi_a} \int_{\partial F} s_a^k \cdot \delta \chi_k \cdot dS \right) + \sum_{a=1}^{l-1} \sum_{b=a+1}^l \int_{\partial \Pi_a \cap \partial \Pi_b} \int_F s_{ab}^k \cdot \delta \chi_k \cdot dS = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Oznaczając przez b i p odpowiednio gęstość sił masowych i powierzchniowych mamy następujące równania określające siły reakcji więzów [8].

$$\begin{aligned} T_{a,\alpha}^{k\alpha} + \varrho_a b_a^k + r_a^k &= \varrho_a \ddot{\chi}_k, \quad x \in \Pi_a \times F, \\ T_{a,K}^{kK} \cdot n_{aK} &= p_a^k + s_a^k, \quad x \in (\partial \Pi_a \cap \partial \Pi) \times F, \\ T_a^{k3} \cdot n_{a3} &= p_a^k + s_a^k, \quad x \in \Pi_a \times \partial F, \\ T_a^{kK} \cdot n_{aK} + T_b^{kK} \cdot n_{bK} &= s_{ab}^k, \quad x \in (\partial \Pi_a \cap \partial \Pi_b) \times F. \end{aligned} \quad (3)$$

Przyjmijmy, że rozpatrywany materiał płyty jest materiałem sprężystym, stąd

$$T_{a,\alpha}^{k\alpha} = \varrho \frac{\partial \sigma}{\partial \chi_{k,\alpha}} \quad (4)$$

Określając ze związku (1) przemieszczenie wirtualne $\delta \chi_k = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i$ możemy prze-

kształcić zasadę idealności więzów (2) do następującej postaci

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^l \left(\int_{\Pi_a} \int_F T_a^{k\alpha} \frac{\partial \phi_{k,\alpha}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \cdot dV - \int_{\Pi_a} \int_F \varrho_a b_a^k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \cdot dV + \right. \\ & \left. + \int_{\Pi_a} \int_F \varrho_a \ddot{\phi}_a^k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \cdot dV - \int_{\Pi_a} \int_{\partial F} P_a^k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \cdot dS - \right. \\ & \left. - \int_{\partial \Pi_a \cap \partial \Pi} \int_F P_a^k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \cdot dS \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Po zdefiniowaniu następujących wielkości

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \int_F \varrho_a \sigma dF, \quad \bar{b}_{at} = \int_F \varrho_a b_a^k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} dF \\ \bar{P}_{at} &= \left[P_a^k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}, \quad \bar{P}_{at} = \int_F P_a^k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} dF, \\ \bar{i}_{at} &= \int_F \varrho_a \ddot{\phi}_a^k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} dF, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $\left[\frac{h}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$ oznacza różnicę zawartego wyrażenia dla $z = \frac{h}{2}$ i $z = -\frac{h}{2}$, równanie (5) ma postać

$$\sum_{a=1}^l \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \int_{\Pi_a} \bar{\varepsilon} \delta q_i d\Pi_a - \int_{\Pi_a} \bar{b}_{ai} \delta q_i d\Pi_a - \int_{\Pi_a} \bar{P}_{ai} \delta q_i d\Pi_a + \int_{\Pi_a} \bar{i}_{ai} \delta q_i d\Pi_a - \int_{\partial \Pi_a} \hat{P}_{ai} \delta q_i d(\partial \Pi_a) \right) = 0. \quad (7)$$

Zgodnie z Lemmatem du Bois-Reymonda równość (7) zachodzi wtedy gdy

$$\sum_{a=1}^l (h_{ai} + b_{ai} + p_{ai}) = \sum_{a=1}^l i_{ai}, \quad (8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} h_{ai} &= -\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial q_i}, & \varepsilon_a &= \int_{\Pi_a} \bar{\varepsilon} d\Pi_a, \\ b_{ai} &= \int_{\Pi_a} \bar{b}_{ai} d\Pi_a, & P_{ai} &= \int_{\Pi_a} \bar{P}_{ai} d\Pi_a, \\ i_{ai} &= \int_{\Pi_a} \bar{i}_{ai} d\Pi_a. \end{aligned} \quad (9)$$

Przyjmijmy funkcję ruchu w postaci

$$\begin{aligned} \chi_k(X^k, Z, t) &= \psi_k(X^k, q_i(t)) + \sum_{A=1}^3 (Z)^A \cdot d_k^A(X^k, q_i(t)) = \\ &= \psi_k(X^k, q_i(t)) + Z \cdot d_k^I(X^k, q_i(t)) + Z^2 \cdot d_k^{II}(X^k, q_i(t)) + Z^3 \cdot d_k^{III}(X^k, q_i(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Ze związku (10) otrzymujemy

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} + Z \cdot \frac{\partial d_k^I}{\partial q_i} + Z^2 \cdot \frac{\partial d_k^{II}}{\partial q_i} + Z^3 \cdot \frac{\partial d_k^{III}}{\partial q_i}. \quad (11)$$

Podstawiając zależność (11) do związków (6) i (9) otrzymujemy następujące wyrażenia na siły uogólnione

$$\begin{aligned} b_{ai} &= \int_{\Pi_a} \left(B^k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} + M_i^k \frac{\partial d_k^I}{\partial q_i} + M_{ii}^k \frac{\partial d_k^{II}}{\partial q_i} + M_{iii}^k \frac{\partial d_k^{III}}{\partial q_i} \right) d\Pi_a, \\ p_{ai} &= \int_{\Pi_a} [p^k]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} d\Pi_a + \int_{\Pi_a} m_{\lambda}^k \frac{\partial d_k^A}{\partial q_i} d\Pi_a, \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie

$$\begin{aligned} B^k &= \int_F \varrho_R b^k dF, & M_{\lambda}^k &= \int_F \varrho_R b^k (Z)^{\lambda} dF, \\ m_{\lambda}^k &= [p^k (Z)^{\lambda}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Energia odkształcenia na jednostkę powierzchni jest zgodnie z (6.1) równa sumie energii odkształcenia na jednostkę powierzchni każdej z warstw płyty. Przyjmijmy, że każda z warstw jest ośrodkiem sprężystym z płaszczyzną symetrii $z = \text{const}$. Energia odkształcenia płyty analogicznie do danej w (2) jest określona związkiem

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \chi^T A \chi - \chi^{0T} A \chi^0 + \frac{1}{2} \chi A \chi^0,$$

gdzie:

$$\chi = [\psi_{T,M} \psi_3, \tau d_{T,M}^A, \bar{d}_{3,T}^A, d_3^A d_3^A]$$

Symbol „o” oznacza, że wielkości te są określone dla konfiguracji wyjściowej. Macierz sprężystości A ma następującą budowę

$$A = \begin{bmatrix} D^{KLMN} & 0 & D_A^{KLMN} & 0 & 0 & D_A^{KL33} \\ 0 & D^{3K3M} & 0 & D_A^{K3M3} & \bar{D}_A^{K3M3} & 0 \\ D_A^{KLMN} & 0 & D_{AB}^{KLMN} & 0 & 0 & D_{AB}^{KL33} \\ 0 & D^{3K3M} & 0 & D_{AB}^{K3M3} & \bar{D}_{AB}^{K3M3} & 0 \\ 0 & \bar{D}^{3K3M} & 0 & \bar{D}_{AB}^{K3M3} & \bar{\bar{D}}_{AB}^{K3M3} & 0 \\ D_A^{33MN} & & D_{AB}^{33MN} & & & D_{AB}^{3333} \end{bmatrix},$$

Dla płyty utworzonej z n warstw o łącznej grubości $h = \sum_{w=1}^n h(w)$ elementy macierzy A mają budowę

$$\begin{aligned} D^{KLMN} &= \int_F C^{KLMN}(w) \cdot dF = \sum_{w=1}^n \int_{-\frac{h}{2} + \sum_{m=1}^w h(m)}^{-\frac{h}{2} + \sum_{m=1}^w h(m)} C^{KLMN}(w) \cdot dz, \\ D_A^{KLMN} &= \int_F C^{KLMN}(w) \cdot (Z)^A \cdot dz, \\ D_{AB}^{KLMN} &= \int_F C^{KLMN}(w) \cdot (Z)^{A+B} \cdot dz, \\ D_A^{KL33} &= \int_F C^{KL33}(w) \cdot A \cdot (Z)^{A-1} \cdot dz, \\ D_{AB}^{KL33} &= \int_F C^{KL33}(w) \cdot B \cdot (Z)^{A+B-1} \cdot dz, \quad A, B = 1, 2, 3 \\ D^{K3M3} &= \int_F C^{K3M3}(w) \cdot dz, \\ D^{K3M3} &= \int_F C^{K3M3}(w) \cdot (Z)^A \cdot dz, \\ D_{AB}^{K3M3} &= \int_F C^{K3M3}(w) \cdot (Z)^{A+B} \cdot dz, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\bar{D}_A^{K3M3} &= \int_F C^{K3M3}(w) \cdot A \cdot (Z)^{A-1} \cdot dz, \\ \bar{D}_{AB}^{K3M3} &= \int_F C^{K3M3}(w) \cdot B \cdot (Z)^{A+B-1} \cdot dz, \\ \bar{\bar{D}}_{AB}^{K3M3} &= \int_F C^{K3M3}(w) \cdot A \cdot B \cdot (Z)^{A-1+B-1} \cdot dz, \\ D_{AB}^{3333} &= \int_F C^{3333}(w) \cdot A \cdot B \cdot (Z)^{A-1+B-1} dz.\end{aligned}$$

Całkowanie po grubości płyty w powyższych wyrażeniach można przeprowadzić zgodnie z zasadą podaną w związku (17.1). Współczynniki $C^{klmn}(w)$ określamy dla każdej warstwy „w” jako wyraz macierzy sprężystości dla ciała z płaszczyzną symetrii $z = \text{const.}$ [1]

$$C = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & 0 & 0 & C^{1112} \\ & C^{2222} & C^{2233} & 0 & 0 & C^{2212} \\ & & C^{3333} & 0 & 0 & C^{3312} \\ & & & C^{2323} & C^{2331} & 0 \\ & & & & C^{3131} & 0 \\ & & & & & C^{1212} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Po zdefiniowaniu następującego funkcjonału

$$W = \int_{\Pi_a} (\bar{\varepsilon} + B^k \cdot \psi_k + M_A^k \cdot d_k^A + [P^k]^{\frac{h}{2}} \cdot \psi_k + m_A^k \cdot d_k^A) \cdot d\Pi_a, \quad (19)$$

statyczne równania równowagi pojedynczego elementu „a” możemy zapisać następująco

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = 0. \quad (20)$$

3. Równania dla elementu skończonego

W rozdziale tym zapiszemy równania dla pojedynczego elementu skończonego. Globalny układ równań równowagi można uzyskać zgodnie z wzorem (8) jako sumę równań dla poszczególnych elementów skończonych.

Funkcja ruchu χ wewnątrz elementu „a” jest dana przez funkcję kształtu N i „n” wartości węzłowych q_i funkcji ruchu

$$\begin{aligned}\psi &= N_\psi \cdot q_\psi, \\ d^A &= N_d \cdot q_d^A.\end{aligned} \quad (21)$$

Wektor gradientu funkcji ruchu dany wzorem (15) jest wówczas równy

$$\chi = R \cdot q = \begin{bmatrix} R_\psi & 0 \\ 0 & R_{dA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\psi \\ q_{dA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{dI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{dII} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{dIII} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\psi \\ q_{dI} \\ q_{dII} \\ q_{dIII} \end{bmatrix} \quad (22)$$

gdzie R jest macierzą, wyrazy której są pochodnymi funkcji kształtu względem współrzędnych X^k . Zgodnie ze wzorem (14) możemy określić gęstość energii odkształcenia na jednostkę powierzchni elementu

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} q^T R^T A R q - q^T R^T A \chi^0 + \frac{1}{2} \chi^{0T} A \chi^0. \quad (23)$$

Energia odkształcenia elementu „a” określoną wzorem (9.2) możemy zapisać następująco

$$\varepsilon = \frac{1}{2} q^T K q - q^T K^0 + D \quad (24)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K &= \int_{\Pi_a} R^T A R d\Pi_a = \begin{bmatrix} K^\psi & K_A^{\psi d} \\ K_A^{d\psi} & K_{AB}^d \end{bmatrix}, \\ K^0 &= \int_{\Pi_a} R^T A \chi^0 d\Pi_a = \begin{bmatrix} K^{0\psi} \\ K_B^{0d} \end{bmatrix}, \\ D &= \int_{\Pi_a} \frac{1}{2} \chi^{0T} A \chi^0 d\Pi_a. \end{aligned} \quad (25)$$

Natomiast funkcjonal W zdefiniowany wzorem (19) ma następującą budowę

$$W = \frac{1}{2} q^T K q - q^T K^0 + D + q_\psi^T \cdot (B + p) + q_d^{AT} \cdot (M_A + m_A) \quad (26)$$

gdzie wektory sił są zdefiniowane w następujący sposób

$$\begin{aligned} B &= \int_{\Pi_a} N_\psi^T \cdot \bar{B} d\Pi_a, \\ M_A &= \int_{\Pi_a} N_d^T \cdot \bar{M}_A d\Pi_a, \\ p &= \int_{\Pi_a} N_\psi^T \cdot [\bar{p}] \frac{h}{-2} d\Pi_a, \\ m_A &= \int_{\Pi_a} N_d^T \bar{m}_A d\Pi_a. \end{aligned} \quad (27)$$

Różniczkując odpowiednio funkcjonal W względem q_ψ i q_d^A otrzymujemy zgodnie z (20) równania równowagi dla elementu „a”

$$\begin{aligned} K^\psi q_\psi + K_B^{\psi d} \cdot q_d^B - K^{0\psi} + B + p &= 0 \\ K_A^{d\psi} \cdot q_\psi + K_{AB}^d \cdot q_d^B - K_A^{0d} + M_A + m_A &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

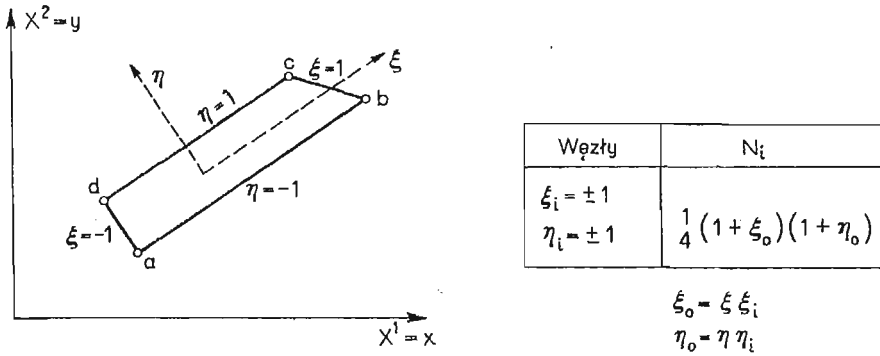
4. Elementy izoparametryczne

Rozważania przeprowadzono dla elementu izoparametrycznego o czterech węzłach (rys. 1)

Geometria elementu jest interpolowana jako

$$\begin{aligned} x &= [N_a, N_b, N_c, N_d] \cdot X^e = N \cdot X^e, \\ y &= N \cdot Y^e, \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie X^e , Y^e są współrzędnymi węzłów elementu. Dla elementu izoparametrycznego funkcje ruchu ψ i d^A są podobnie zdefiniowane w zależności od ich wartości węzłowych



Rys. 1

q_ψ i q_d^A ,

$$\begin{aligned} \psi &= N_\psi q_\psi, \\ d^A &= N_d q_d^A. \end{aligned} \tag{30}$$

Wektory wielkości węzłowych użyte w związkach (30) są zdefiniowane w następujący sposób

$$\begin{aligned} q_\psi &= [\psi_1^a \psi_2^a \psi_3^a \psi_1^b \psi_2^b \psi_3^b \psi_1^c \psi_2^c \psi_3^c \psi_1^d \psi_2^d \psi_3^d]^T, \\ q_d^A &= [d_1^{Aa} d_2^{Aa} d_3^{Aa} d_1^{Ab} d_2^{Ab} d_3^{Ab} d_1^{Ac} d_2^{Ac} d_3^{Ac} d_1^{Ad} d_2^{Ad} d_3^{Ad}]^T. \end{aligned} \tag{31}$$

W konfiguracji wyjściowej składowe funkcji ruchu mają następujące wartości

$$\begin{aligned} \psi_1^0 &= X^1 = x, & \psi_2^0 &= X^2 = y, & \psi_3^0 &= 0, \\ d_1^{A0} &= d_2^{A0} = 0, & d_3^{A0} &= 1, & d_3^{II0} &= d_3^{III0} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Macierze R i R_d^A z (22) określające wektor gradientu funkcji ruchu o składowych

$$\chi = [\psi_{1,1} \psi_{1,2} \psi_{2,1} \psi_{2,2} \psi_{3,1} \psi_{3,2} d_{1,1}^A d_{1,2}^A d_{2,1}^A d_{2,2}^A d_{3,1}^A d_{3,2}^A d_1^{AA} d_2^{AA} d_3^{AA}]^T \tag{33}$$

zapiszemy w zależności od węzłowych podmacierzy

$$\begin{aligned} R_\psi &= [R_\psi^a, \dots, R_\psi^d], \\ R_d^A &= [R_d^{Aa}, \dots, R_d^{Ad}], \end{aligned} \tag{34}$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_\psi^i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}^T \\ R_d^{ii} &= R_d^{III} = R_d^{IIII} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{35}$$

Relacje pomiędzy różniczkowaniem funkcji kształtu N względem współrzędnych ξ i η a względem współrzędnych globalnych x, y potrzebne do tworzenia macierzy R_v i R_A^d są dane poprzez macierz I_c

$$I_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Jeżeli różniczkowania funkcji kształtu N względem współrzędnych ξ i η są zapisane jako

$$\begin{aligned} G_\xi &= \left[\frac{\partial N_a}{\partial \xi}, \frac{\partial N_b}{\partial \xi}, \frac{\partial N_c}{\partial \xi}, \frac{\partial N_d}{\partial \xi} \right]^T \\ G_\eta &= \left[\frac{\partial N_a}{\partial \eta}, \frac{\partial N_b}{\partial \eta}, \frac{\partial N_c}{\partial \eta}, \frac{\partial N_d}{\partial \eta} \right]^T, \end{aligned} \quad (37)$$

wtedy macierz I_c może być zapisana

$$I_c = \begin{bmatrix} G_\xi^T \cdot X^e & G_\eta^T \cdot X^e \\ G_\xi^T \cdot Y^e & G_\eta^T \cdot Y^e \end{bmatrix} \quad (38)$$

Wektory określające pochodne funkcji kształtu N względem współrzędnych x, y są określone następująco

$$\begin{aligned} G_x^T &= \left[\frac{\partial N_a}{\partial x}, \frac{\partial N_b}{\partial x}, \frac{\partial N_c}{\partial x}, \frac{\partial N_d}{\partial x} \right] = \frac{\partial \xi}{\partial x} G_\xi^T + \frac{\partial \eta}{\partial x} G_\eta^T, \\ G_y^T &= \left[\frac{\partial N_a}{\partial y}, \frac{\partial N_b}{\partial y}, \frac{\partial N_c}{\partial y}, \frac{\partial N_d}{\partial y} \right] = \frac{\partial \xi}{\partial y} G_\xi^T + \frac{\partial \eta}{\partial y} G_\eta^T, \end{aligned} \quad (39)$$

gdzie różniczkowania ξ i η względem x, y są otrzymane z I_c^{-1} . Macierz sprężystości A daną w (16) możemy zbudować z czterech podmacierzy

$$A = \begin{bmatrix} A^v & A_A^{vd} \\ A_B^{dv} & A_{BA}^d \end{bmatrix}, \quad (40)$$

które mają następującą budowę

$$A^v = \begin{bmatrix} D^{1111} & D^{1112} & D^{1121} & D^{1122} & 0 & 0 \\ D^{1211} & D^{1212} & D^{1221} & D^{1222} & 0 & 0 \\ D^{2111} & D^{2112} & D^{2121} & D^{2122} & 0 & 0 \\ D^{2211} & D^{2212} & D^{2221} & D^{2222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{3131} & D^{3132} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{3231} & D^{3232} \end{bmatrix},$$

$$A_A^{vd} = \begin{bmatrix} D_A^{1111} & D_A^{1112} & D_A^{1121} & D_A^{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{1133} \\ D_A^{1211} & D_A^{1212} & D_A^{1221} & D_A^{1222} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{1233} \\ D_A^{2111} & D_A^{2112} & D_A^{2121} & D_A^{2122} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{2133} \\ D_A^{2211} & D_A^{2212} & D_A^{2221} & D_A^{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{2233} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{3131} & D_A^{3132} & \bar{D}_A^{3131} & \bar{D}_A^{3132} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{3231} & D_A^{3232} & \bar{D}_A^{3231} & \bar{D}_A^{3232} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_B^{d\psi} = (A_A^{\psi d})^T. \quad (41)$$

$$A_{AB}^d = \begin{bmatrix} D_{AB}^{1111} & D_{AB}^{1112} & D_{AB}^{1121} & D_{AB}^{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{1133} \\ D_{AB}^{1211} & D_{AB}^{1212} & D_{AB}^{1221} & D_{AB}^{1222} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{1233} \\ D_{AB}^{2111} & D_{AB}^{2112} & D_{AB}^{2121} & D_{AB}^{2122} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{2133} \\ D_{AB}^{2211} & D_{AB}^{2212} & D_{AB}^{2221} & D_{AB}^{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{2233} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{1313} & D_{AB}^{1323} & \bar{D}_{AB}^{1313} & \bar{D}_{AB}^{1323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{2313} & D_{AB}^{2323} & \bar{D}_{AB}^{2313} & \bar{D}_{AB}^{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{AB}^{1313} & \bar{D}_{AB}^{1323} & \bar{D}_{AB}^{1313} & \bar{D}_{AB}^{1323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{AB}^{2313} & \bar{D}_{AB}^{2323} & \bar{D}_{AB}^{2313} & \bar{D}_{AB}^{2323} & 0 \\ D_{AB}^{1133} & D_{AB}^{1233} & D_{AB}^{2133} & D_{AB}^{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{3333} \end{bmatrix}$$

Znając budowę macierzy R i A możemy z wzoru (25) określić macierz sztywności K elementu skończonego

$$\begin{aligned} K^v &= \int_{\Pi_a} R_v^T \cdot A^v \cdot R_v d\Pi_a, \\ K_A^{\psi d} &= \int_{\Pi_a} R_A^T \cdot A_A^{\psi d} \cdot R_{dA} d\Pi_a, \\ K_A^{d\psi} &= \int_{\Pi_a} R_{dA}^T \cdot A_A^{d\psi} \cdot R_v d\Pi_a = (K_A^{\psi d})^T, \\ K_{AB}^d &= \int_{\Pi_a} R_{dA}^T \cdot A_{AB}^d \cdot R_{dB} d\Pi_a. \end{aligned} \quad (42)$$

Globalną macierz sztywności struktury otrzymamy zgodnie z wzorem (8) sumując odpowiednio elementy macierzy sztywności poszczególnych elementów.

5. Uwagi końcowe

W przedstawionej pracy podano sposób rozwiązania grubych płyt warstwowych z wykorzystaniem metody elementów skończonych i przyjęciem funkcji ruchu dowolnego punktu jako funkcji trzeciego stopnia zmiennej w kierunku grubości płyty. Potraktowanie płyty jako ciała z wiązami dyskretyzacyjnymi pozwala w prosty sposób uzyskać równania równowagi elementów skończonych przy dowolnej budowie funkcji ruchu. Pozwala to również po znalezieniu rozwiązania określić siły reakcji więzów wewnętrznych, które można wykorzystać do sterowania dyskretyzacją ciała (4).

Jak pokazano w pracy [6] zastosowanie wyższego rzędu rozkładu wzdłuż grubości płyty daje znacznie dokładniejsze wyniki dla płyt warstwowych o niezbyt dużym stosunku grubości do rozpiętości, bo wynoszącym 0,25.

Literatura cytowana w tekście

1. R. M. CHRISTENSEN, *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley Sons, New—York 1979.
2. S. KONIECZNY, B. MICHAŁAK, *Ciała z cienką warstwą na powierzchni brzegowej*, Zesz. Nauk. Pł., Budow. Z. 27 1981 s. 31 - 43.

3. W. KUFEL, F. PIETRAS, *Ocena dokładności rozwiązań problemów brzegowych sprężystych ciał dyskretyzowanych*, Rozpr. Inżyn. 22/1974 s. 427 - 434.
4. W. KUFEL, *Sterowana dyskertyzacja płyt i powłok*, Mech. Teor. i Stos. 14 (1976) s. 19 - 31.
5. K. H. LO, R. M. CHRISTENSEN, E. M. WU, *A High-Order Theory of Plate Deformation*, Part 1. Jour. of App. Mech. Vol. 44, Trans. ASME Vol 99 Series E 1977 s. 663 - 668.
6. K. H. LO, R. M. CHRISTENSEN, E. M. WU, *A High-Order Theory of Plate Deformation*, Part 2. Jour. of App. Mech. Vol 44, Trans. ASME Vol 99 Series E 1977 s. 669 - 676.
7. R. L. SPILKER, N. I. MUNIR, *Comparison of hybrid-stress element throughthickness distributions corresponding to a High-Order Plate theory*, Comp. Stru. 1980 s. 579 - 586.
8. Cz. WOŹNIAK, *Constrained Continuous Media II Discretized Formulation of the Continuous Media Theory*, Bull. Acad. Polon Sci. Sér. Sci Techn Vol 21 (1973) s. 167 - 175.

Резюме

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Метод конечных элементов использован в работе для представления решения для уточненной теории слоистых пластин. Уравнения равновесия для конечных элементов получены из теории тел с ограничивающими связями, механика которых была построена Ч. Возняком. В работе указана матрица жесткости для изопараметрических элементов.

Summary

THE FINITE ELEMENT METHOD FOR LAMINATED PLATES WITH A HIGH-ORDER THEORY OF PLATE DEFORMATION

The finite element method is applied to solution of laminated thick plates with a high-order theory of plate deformation. In order to derive the equilibrium equations of elements the theory of constrained bodies has been applied. The mechanics of such bodies was formulated by Cz. Woźniak. Paper describes stiffness matrices for isoparametric elements.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1982 roku

HYBRYDOWA METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ZAGADNIENIU KONTAKTOWYM

WIESŁAW OSTACHOWICZ

Politechnika Gdańska

1. Wstęp

W pracy przedstawiono metodę określania nacisków w sprężystych elementach konstrukcyjnych, które znajdują się w stanie fizycznego kontaktu pod wpływem obciążeń zewnętrznych lub odkształceń początkowych.

Zakładamy, że układ rzeczywisty modelujemy jednocześnie odkształcalnymi elementami skończonymi i sztywnymi elementami skończonymi (KRUSZEWSKI, [1]), czyli stosujemy hybrydową metodę elementów skończonych.

Zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązania zagadnienia kontaktowego przedstawiono między innymi w pracy PARSONSA i WILSONA, [2]. CHAN i TUBA, [3] oraz OHTE, [4] stosowali metodę elementów skończonych do rozwiązywania płaskich zagadnień kontaktowych. W pracy SCHAFFERA, [5] przedstawiono specjalny element kontaktowy, który stosowano w rozpatrywanym tam modelu tarcia.

Modelowanie układów rzeczywistych jednocześnie odkształcalnymi elementami skończonymi i sztywnymi elementami skończonymi umożliwia analizę konstrukcji, której poszczególne elementy cechuje duża rozpiętość sztywności.

Stosowanie hybrydowej metody elementów skończonych jest bardziej uzasadnione z punktu widzenia dokładności obliczeń, [1].

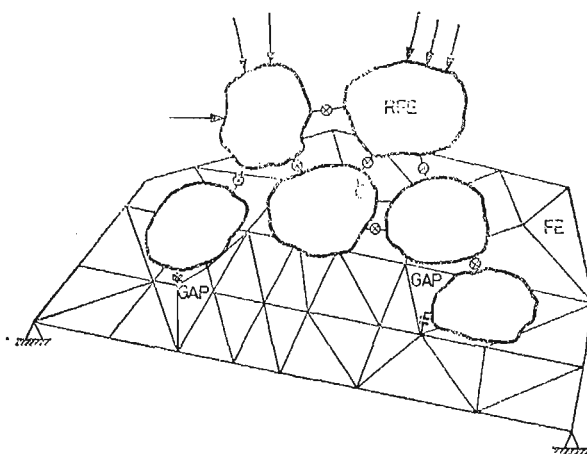
Zakładamy, że własności sprężyste elementów konstrukcyjnych określa prawo Hooke'a. Zgodnie z tym prawem dopuszczalne są małe przemieszczenia układu oraz liniowa zależność między naprężeniami i odkształceniami elementów.

Do określenia stanu naprężeń na powierzchniach styku stosujemy kryterium Coulomba. Na podstawie obliczeń sił węzłowych na powierzchni styku określamy jeden z trzech przypadków: poślizg, brak kontaktu lub adhezję.

Na podstawie przedstawionych założeń opracowano algorytm obliczeń oraz program komputerowy przystosowany do analizy zagadnienia przestrzennego.

2. Sformułowanie problemu

Model rozpatrywanego układu przedstawiono na rys. 1. Układ dyskretny składa się ze sztywnych elementów skończonych, oznaczonych dalej przez RFE (Rigid Finite Element)



Rys. 1. Model dyskretny układu rzeczywistego

oraz odkształcalnych elementów skończonych, oznaczanych przez DFE (Deformable Finite Element). Sposób przeprowadzenia dyskretyzacji układu rzeczywistego w tym przypadku przedstawiono w pracach KRUSZEWSKIEGO [1, 6]. Szytywne elementy skończone połączone są elementami sprężysto-tłumiącymi, których opis podano w pracy [1]. Odkształcalne elementy skończone połączone są w węzłach według powszechnie znanych zasad. Zakładamy ponadto możliwość łączenia sztywnych elementów skończonych między sobą oraz RFE i DFE innym typem elementu zwanym GAP (z ang. przerwa).

Rozpatrzmy punkty p i r znajdujące się na powierzchniach dwóch elementów (RFE lub DFE). Jeżeli istnieje możliwość styku elementów w tych punktach to przyjmujemy, że łączy je wspomniany element o nazwie GAP (rys. 2). Warunki kontaktu rozpatrywane są przy założeniu kryterium poślizgu Coulomba. Dla elementu GAP przewiduje się trzy możliwe rodzaje warunków kontaktu: adhezja (brak możliwości poślizgu), poślizg i utrata kontaktu.

W przypadku adhezji lub poślizgu GAP odkształca się niezależnie w trzech kierunkach, \bar{n} , \bar{t} , \bar{s} (rys. 3). Model GAP przyjmujemy zatem jako układ trzech sprężyn łączących wspomniane wyżej punkty p i r . Osie tych sprężyn określają kierunki \bar{n} , \bar{t} oraz \bar{s} .

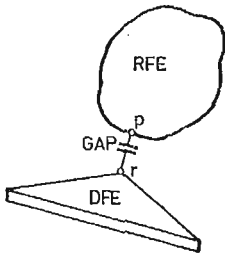
Zakładamy dalej, że sprężyny te mają własności liniowe. Różnicę przemieszczeń końców tych sprężyn określa wektor

$$\{\Delta u\} = \text{col}[\Delta u_t, \Delta u_s, \Delta u_n], \quad (2.1)$$

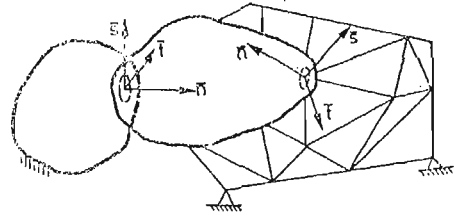
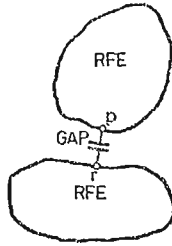
gdzie Δu_t i Δu_s oznaczają różnicę przemieszczeń w kierunku osi \bar{t} i \bar{s} , Δu_n w kierunku \bar{n} .

Oznaczamy przez k_t , k_s i k_n współczynniki sztywności sprężyn odpowiednio w kierunkach stycznych i kierunku normalnym. GAP może być obciążony w kierunku osi \bar{t} i \bar{s} obciążeniem, które powoduje rozciąganie lub ściskanie sprężyn o sztywności k_t i k_s , natomiast sprężyna o sztywności k_n przenosi jedynie obciążenia ściskające.

2.1 Siły normalne. Rozpatrzmy przypadek styku ciał w punktach p i r (rys. 2). Jeżeli sprężyna o sztywności k_n jest ściskana to siła normalna \bar{N} ma znak ujemny. W tym przy-



Rys. 2. Element GAP łączący elementy skończone (DFE, RFE)



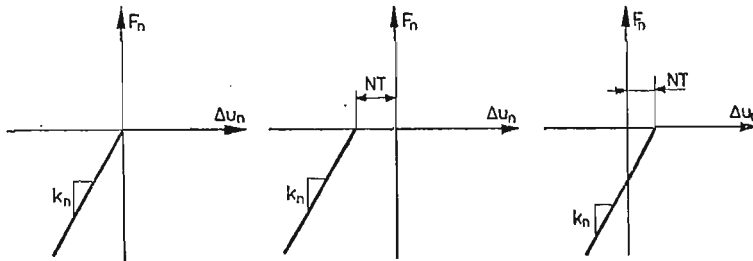
Rys. 3. Układy współrzędnych związane z GAP

padku możliwa jest adhezja lub poślizg na płaszczyźnie styku. Jeżeli siła \bar{N} ma wartość dodatnią, kontakt między ciałami jest przerwany.

Różnicę przemieszczeń końców sprężyny o sztywności k_n określamy związkiem

$$\Delta u_n = u_{np} - u_{nr} + NT, \quad (2.2)$$

gdzie u_{np} i u_{nr} oznaczają przemieszczenia punktów p oraz r w kierunku normalnym \bar{n} , NT (normal translation) oznacza luz wstępny (dla $NT > 0$) lub odkształcenie wstępne (gdy $NT < 0$). Zależność funkcyjną między obciążeniem i przemieszczeniem końców sprężyny o sztywności k_n przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Zależność obciążenia od odkształcenia sprężyny o sztywności k_n

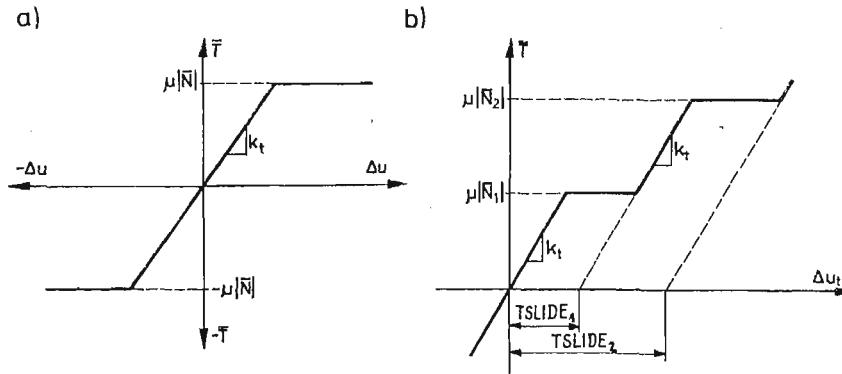
2.2 Siły styczne. Siły styczne w GAP, \bar{T} i \bar{S} , określone są tylko wówczas gdy $\bar{N} < 0$. Jeżeli wartości bezwzględne sił \bar{T} i \bar{S} są mniejsze od iloczynu $\mu|N|$, (gdzie μ oznacza współczynnik tarcia Coulomba) w rozważanym GAP nie występuje poślizg. Jest to przypadek adhezji i wówczas siły wzajemnego oddziaływania ciał powodują przyrost przemieszczeń końców sprężyn o sztywności k_t i k_s .

Różnicę przemieszczeń końców sprężyn w kierunku stycznym określamy związkiem

$$\begin{aligned} \Delta u_t &= u_{tp} - u_{tr} - TSLIDE, \\ \Delta u_s &= u_{sp} - u_{sr} - SSLIDE, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie u_{tp} , u_{sp} oraz u_{tr} , u_{sr} oznaczają przemieszczenia punktów p i r w kierunkach \bar{s} i \bar{t} , $TSLIDE$ i $SSLIDE$ określają poślizg wstępny GAP odpowiednio w kierunku \bar{t} i \bar{s} .

Na rys. 5a przedstawiono zależności funkcyjne między obciążeniem i różnicą przemieszczeń końców sprężyny o sztywności k_t w przypadku, gdy $TSLIDE = 0$. Na rys. 5b przed-



Rys. 5. Zależność obciążenia od odkształcenia sprężyny o sztywności k_t

stawiono tę samą zależność w przypadku poślizgu wstępnego. Zaznaczone na rysunku wielkości $TSLIDE_i$ obliczamy iteracyjnie ze związku

$$TSLIDE_i = (u_{tp} - u_{tr})_i - (\mu|N_i|/k_t), \quad (2.4)$$

gdzie i oznacza kolejny krok iteracji.

Analogiczne zależności funkcyjne opisują przemieszczenie GAP w kierunku osi \bar{s} . Poślizg $SSLIDE_i$ określa związek

$$SSLIDE_i = (u_{sp} - u_{sr})_i - (\mu|N_i|/k_s). \quad (2.5)$$

Proces iteracyjny określania stanu GAP trwa do chwili gdy w kolejnych dwóch iteracjach różnica między wynikami obliczeń (obciążenie GAP i jego ewentualny poślizg) mieści się w przedziale z góry określonej tolerancji.

3. Tworzenie macierzy sztywności

Macierz sztywności układu określamy sumując energię odkształcenia elementów sprężystych łączących RFE, energię odkształcenia DFE oraz elementów typu GAP. Poszczególne elementy skończone (RFE, DFE i GAP) opisujemy w lokalnych układach współrzędnych. Przyjmujemy nieruchome, prawoskrętne układy kartezjańskie.

W przypadku RFE początki układów lokalnych pokrywają się w stanie równowagi ze środkami mas elementów, [1]. W pracy [1] podano szczegółowo sposób tworzenia macierzy sztywności elementu. Sposób opisu DFE w jego lokalnym układzie współrzędnych podano w pracy BATHE i WILSONA, [7]. Tam też przedstawiono sposób tworzenia macierzy sztywności różnych typów elementów.

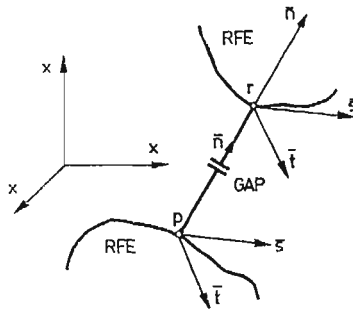
Położenie modelu dyskretnego w przestrzeni określamy w układzie globalnym współrzędnych (X_1, X_2, X_3) . W układzie tym opisujemy przemieszczenia uogólnione środków mas wszystkich RFE, przemieszczenia wszystkich węzłów DFE oraz przemieszczenia węzłów GAP. Istnieje zatem konieczność transformacji macierzy sztywności elementów z ich układów lokalnych do układu globalnego. Transformacja polega na obustronnym mnożeniu lokalnej macierzy sztywności przez macierz współczynników kierunkowych.

Macierz ta w przypadku metody RFE przyjmuje postać

$$[\Theta_r] = \begin{bmatrix} \Theta_{r11} & \Theta_{r12} & \Theta_{r13} & 0 & 0 & 0 \\ & \Theta_{r22} & \Theta_{r23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Theta_{r33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Sym.} & & & \Theta_{r11} & \Theta_{r12} & \Theta_{r13} \\ & & & & \Theta_{r22} & \Theta_{r23} \\ & & & & & \Theta_{r33} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

gdzie: $\Theta_{r\alpha\beta} = \cos(X_{r\alpha}, X_\beta)$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$,
 $X_{r\alpha}$ — oś układu lokalnego,
 X_β — oś układu globalnego.

W metodzie DFE transformacji dokonujemy analogicznie jak w metodzie RFE mnożąc lokalne macierze sztywności przez macierz współczynników kierunkowych [7].



Rys. 6. Wzajemne usytuowanie osi układów współrzędnych $\bar{t}, \bar{s}, \bar{n}$ oraz X_1, X_2, X_3

Macierz sztywności GAP tworzymy na podstawie równania równowagi tego elementu w lokalnym układzie współrzędnych. Rozpatrzmy punkty p i r (rys. 6). Na rysunku tym przedstawiono wzajemne usytuowanie lokalnych współrzędnych $\bar{t}, \bar{s}, \bar{n}$ i globalnych X_1, X_2, X_3 . Zakładamy, że kierunki osi $\bar{t}, \bar{s}, \bar{n}$ w punktach, które łączy GAP są takie same. Oznacza to, że macierz współczynników kierunkowych każdego z dwóch układów lokalnych związanych z GAP są takie same.

Równanie równowagi GAP w lokalnym układzie współrzędnych przyjmuje postać

$$\{F_L\} = [K_L] \{u_L\}, \quad (3.2)$$

gdzie

$$\{F_L\}^T = [\bar{T}_p, \bar{S}_p, \bar{N}_p, \bar{T}_r, \bar{S}_r, \bar{N}_r],$$

$$\{u_L\}^T = [u_{tp}, u_{sp}, u_{np}, u_{tr}, u_{sr}, u_{nr}],$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} k_t & 0 & 0 & -k_t & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 0 & k_n & 0 & 0 & -k_n \\ -k_t & 0 & 0 & k_t & 0 & 0 \\ 0 & -k_s & 0 & 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & -k_n & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

Równanie (3.2) sprowadzamy do układu globalnego. Na podstawie rys. 6 otrzymujemy

$$\{u_L\} = [\Theta_i] \{u_G\}, \quad (3.3)$$

gdzie

$$\{u_G\}^T = [u_{1p}, u_{2p}, u_{3p}, u_{1r}, u_{2r}, u_{3r}],$$

$$[\Theta_i] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Theta_{i11} & \Theta_{i12} & \Theta_{i13} & 0 & 0 & 0 \\ & \Theta_{i22} & \Theta_{i23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Theta_{i33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \Theta_{i11} & \Theta_{i12} & \Theta_{i13} \\ \text{Sym.} & & & & \Theta_{i22} & \Theta_{i23} \\ & & & & & \Theta_{i33} \end{array} \right],$$

przy czym

$$\begin{aligned} \Theta_{i1\beta} &= \cos(\bar{t}, X_\beta), \\ \Theta_{i2\beta} &= \cos(\bar{s}, x_\beta), \\ \Theta_{i3\beta} &= \cos(\bar{n}, X_\beta), \\ \beta &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wektor sił węzłowych w globalnym układzie współrzędnych przyjmuje postać

$$\{F_G\} = [\Theta_i]^T \{F_L\}, \quad (3.4)$$

gdzie

$$\{F_G\}^T = [F_{1p}, F_{2p}, F_{3p}, F_{1r}, F_{2r}, F_{3r}],$$

a wektor $\{F_L\}$ określa związek (3.2).

Mnożąc lewostronnie równanie (3.2) przez macierz $[\Theta_i]^T$ na podstawie (3.4) otrzymujemy

$$\{F_G\} = [\Theta_i]^T [K_L] \{u_L\}. \quad (3.5)$$

Podstawiając (3.3) do związku (3.5) otrzymujemy

$$\{F_G\} = [K_G] \{u_G\}, \quad (3.6)$$

gdzie $[K_G]$ jest globalną macierzą sztywności elementu typu GAP o postaci

$$[K_G] = [\Theta_i]^T [K_L] [\Theta_i]. \quad (3.7)$$

Jeżeli jeden z punktów elementu typu GAP (p lub r) znajduje się na powierzchni RFE, to wektor przemieszczeń tego punktu przedstawiamy w funkcji współrzędnych uogólnionych RFE za pomocą związku

$$\{u_L\} = [\Theta_{ri}] [B_{ri}] \{q_r\}, \quad (3.8)$$

gdzie

$$[\Theta_{ri}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Theta_{ri1,1} & \Theta_{ri1,2} & \Theta_{ri1,3} & 0 & 0 & 0 \\ & \Theta_{ri2,2} & \Theta_{ri2,3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Theta_{ri3,3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \Theta_{ri1,1} & \Theta_{ri1,2} & \Theta_{ri1,3} \\ \text{Sym.} & & & & \Theta_{ri2,2} & \Theta_{ri2,3} \\ & & & & & \Theta_{ri3,3} \end{array} \right],$$

$$[B_{ri}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{ri3} & -b_{ri2} \\ 0 & 1 & 0 & -b_{ri3} & 0 & b_{ri1} \\ 0 & 0 & 1 & b_{ri2} & -b_{ri1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\{q_r\}^T = [q_{r1}, \dots, q_{r6}],$$

przy czym

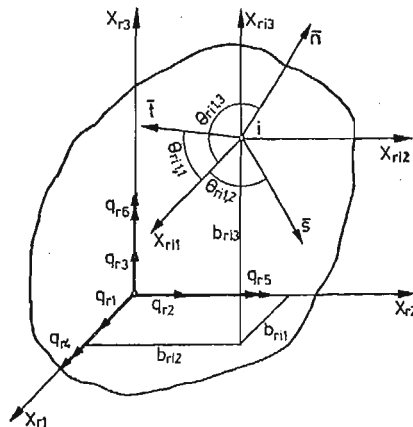
$$\theta_{ri\beta,1} = \cos(X_{L\beta}, \bar{t}),$$

$$\theta_{ri\beta,2} = \cos(X_{L\beta}, \bar{s}),$$

$$\theta_{ri\beta,3} = \cos(X_{L\beta}, \bar{n}),$$

dla $\beta = 1, 2, 3$.

Elementy wektora $\{q_r\}$ określają współrzędne uogólnione RFE, $X_{L\beta}$ i $b_{ri\beta}$ ($\beta = 1, 2, 3$) odpowiednio osie współrzędnych lokalnych RFE i współrzędne punktu zamocowania GAP (rys. 7).



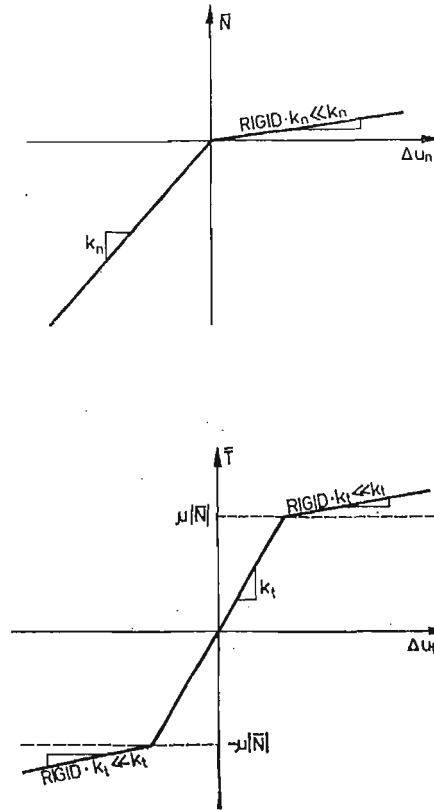
Rys. 7. Układ osi \bar{t} , \bar{s} , \bar{n} oraz X_{r1} , X_{r2} , X_{r3}

W przypadku modelowania styku brył z elementem odkształcalnym przyjmujemy, że jeden z końców GAP znajduje się w węźle DFE, stąd przemieszczenie tego punktu jest zgodne z przemieszczeniami węzła.

Macierz sztywności całego układu tworzymy sumując lokalne macierze sztywności, transformowane do układu globalnego, według powszechnie znanych zasad [1, 7].

4. Model poślizgu GAP

Przypadek poślizgu GAP wymaga innego sposobu modelowania sztywności elementu. Zależności funkcyjne, na podstawie których modelowano przypadek adhezji (rys. 4, 5) wymagają modyfikacji koniecznej z punktu widzenia skuteczności obliczeń numerycznych.



Rys. 9. Zmodyfikowana zależność obciążenia i odkształcenia sprężyny o sztywności k_i

W przypadku rozwarcia punktów styku nie można przyjąć, że sprężyny obciążone w kierunku normalnym i kierunkach stycznych mają zerową sztywność ponieważ prowadzi to do niestabilności procedury iteracyjnej.

W sytuacji, gdy siła normalna osiąga wartość dodatnią przyjmujemy, że sprężyna ma niewielką sztywność (w stosunku do sztywności k_n). Podobnie, gdy siły styczne osiągną wartości $\mu|N|$ przyjmujemy niewielką sztywność sprężyn stycznych (w stosunku do sztywności k_t i k_s). Zmodyfikowane zależności funkcyjne między obciążeniem i przyrostami przemieszczeń końców sprężyn przedstawiono na rys. 8 i 9. Na podstawie tych zależności siły normalne i styczne, które obciążają GAP przyjmują wartości

$$\begin{aligned} N &= k_n \cdot \Delta u_n, & \text{dla } \Delta u_n < 0, \\ N &= \text{RIGID} \cdot k_n \cdot \Delta u_n, & \text{dla } \Delta u_n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

oraz

$$\begin{aligned} T &= 0, & \text{dla } \Delta u_t \geq 0, \\ T &= k_t \cdot \Delta u_t, & \text{dla } |k_t \cdot \Delta u_t| \leq \mu|N|, \\ T &= \text{sign} \left[\mu|N| + \text{RIGID} \cdot k_n \cdot \left(|\Delta u_t| - \frac{\mu|N|}{k_n} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{gdzie } \text{sign} &= +1, & \text{dla } \Delta u_t &\geq 0, \\ \text{sign} &= -1, & \text{dla } \Delta u_t &< 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 0, & \text{dla } \Delta u_s &\geq 0, \\ S &= k_s \cdot \Delta u_s, & \text{dla } |k_s \cdot \Delta u_s| &\leq \mu|N|, \\ S &= \text{sign} \left[\mu|N| + \text{RIGID} \cdot k_s \cdot \left(|\Delta u_s| - \frac{\mu|N|}{k_n} \right) \right], & & (4.3) \\ \text{gdzie } \text{sign} &= +1, & \text{dla } \Delta u_s &\geq 0, \\ \text{sign} &= -1, & \text{dla } \Delta u_s &< 0. \end{aligned}$$

5. Zbieżność iteracji

Zbieżność procedury może być określona na podstawie obserwacji stanu każdego GAP oraz każdego elementu skończonego, czyli modelu dyskretnego konstrukcji. Obserwacja dotyczy stanu naprężeń i przemieszczeń w węzłach elementów oraz stanu wszystkich GAP w kolejnych iteracjach.

Stan GAPu oznaczony przez IFLAG określamy następująco

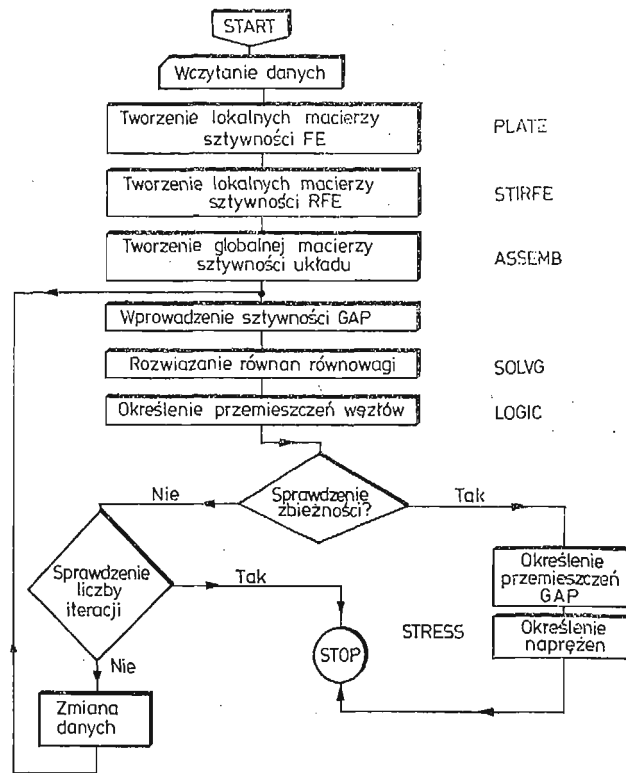
$$\begin{aligned} \text{IFLAG} &= 1 & \text{przypadek adhezji,} \\ \text{IFLAG} &= 2 & \text{przypadek poślizgu,} \\ \text{IFLAG} &= 0 & \text{przypadek utraty kontaktu.} \end{aligned}$$

Zakończenie procedury obliczeń następuje w momencie, gdy w kolejnych dwóch iteracjach różnica między wynikami obliczeń (obciążenie GAP i jego stan) mieści się w przedziale z góry określonej tolerancji.

6. Komputerowy program obliczeń

Na rysunku 10 przedstawiono schemat blokowy programu komputerowego. Program ten składa się z 9 modułów i w obecnej wersji stosowany był do analizy układu hybrydowego, złożonego z RFE i DFE typu płytowego. Moduły programu napisano w języku Fortran-4. Program PLARFE jest programem głównym. W programie tym podaje się dane wielkości fizycznych i geometrycznych, które opisują kontaktujące się ciała. Określamy w nim również współrzędne wszystkich potencjalnych punktów styku ciał (elementów GAP). Podajemy współczynniki sztywności sprężyn każdego GAP, współczynniki tarcia, luzy wstępne oraz ewentualnie wstępny poślizg. Ponadto określamy maksymalną liczbę iteracji oraz zakres tolerancji zbieżności wyników.

Lokalne macierze sztywności elementów typu DFE tworzymy w podprogramie PLATE a macierze sztywności RFE określa podprogram STIFRE. Podprogram PLATE opracowano na podstawie algorytmu przedstawionego w pracy DESAI, [8]. Podprogram PLATE współpracuje z modułami CARVDE i SIMUL, które realizują operację odwracania i mnożenia macierzy.



Rys. 10. Schemat blokowy programu komputerowego

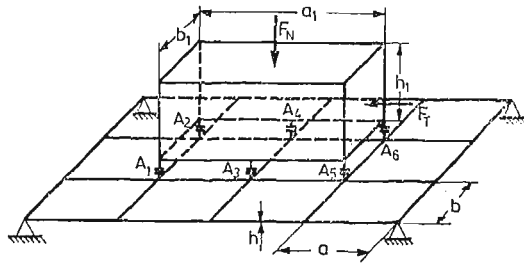
Globalną macierz sztywności określa podprogram ASSEMB. W kolejnym etapie realizacji obliczeń rozwiązujemy równania równowagi układu. Zadanie to realizuje podprogram SOLVG, który opracowano na podstawie metody rozwiązywania układu liniowych równań algebraicznych (metodą eliminacji Gaussa).

Na podstawie wyników podprogramu SOLVG podprogram LOGIC określa przemieszczenia i obciążenia elementów typu GAP. Ponadto określa on stan GAP, czyli parametr IFLAG. Podprogram LOGIC zmienia sztywność GAP według zależności funkcyjnych z rys. 8 i 9.

Obliczenia stanu GAP mają charakter iteracyjny. Proces ten kończy się w przypadku gdy wyniki dwóch kolejnych kroków iteracji mieszczą się w określonym zakresie tolerancji. Wówczas podprogram STRESS oblicza naprężenia w wybranych punktach i kończy się realizacja programu. Program kończy obliczenia również w przypadku, gdy liczba iteracji przewyższa z góry założoną wartość.

7. Przykład

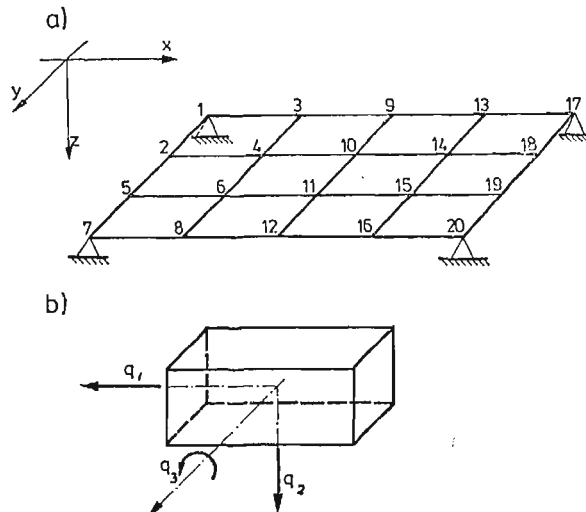
Określić przemieszczenia węzłów elementów typu DFE, elementu RFE oraz GAP układu przedstawionego na rys. 11. Ponadto określić siły normalne i styczne w punktach



Rys. 11. Model dyskretny układu obliczeniowego

A1-A6 oraz ich stan (parametr IFLAG). Wymiary elementów DFE i RFE przedstawiono na rys. 11. Przyjęto następujące dane liczbowe

- długość DFE $a = 0,1$ m
- szerokość DFE $b = 0,1$ m
- grubość DFE $h = 0,015$ m
- długość RFE $a_1 = 0,2$ m
- szerokość RFE $b_1 = 0,1$ m
- wysokość RFE $h_1 = 0,1$ m
- moduł Young'a $E = 0,21 \cdot 10^{12}$ N/m²
- liczba Poissona $\nu = 0,3$



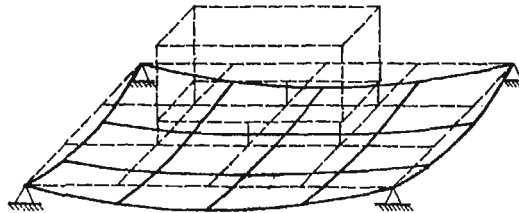
Rys. 12. Numery węzłów DFE oraz przemieszczenia RFE

Elementy typu DFE mają jednakowe wymiary i własności fizyczne. Są to płytowe elementy prostokątne, czterowzłowe, o trzech stopniach swobody w węzle. Opis tego elementu znajduje się w pracy ZIENKIEWICZA, [9].

Sztywny element skończony RFE obciążają dwie siły, w kierunku stycznym \bar{F}_T i kierunku normalnym \bar{F}_N (rys. 11). Przyjęto stałą wartość siły $F_N = 2 \cdot 10^5$ N. Wartość siły F_T zmienia się według tablicy 3.

Tablica 1

Numer węzła	I iteracja			V iteracja		
	z_i	$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_i$	$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_i$	z_i	$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_i$	$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_i$
i	cm	rad	rad	cm	rad	rad
1	0,000	0,0565	-0,0548	0,000	0,0501	-0,0854
2	0,483	0,0291	-0,0303	0,430	0,0260	-0,0594
3	0,480	0,0299	-0,0337	0,769	0,0221	-0,0584
4	0,754	0,0175	-0,0128	0,989	0,0147	-0,0419
5	0,483	-0,0291	-0,0303	0,430	-0,0260	-0,0594
6	0,755	-0,0175	-0,0128	0,989	-0,0147	-0,0419
7	0,000	-0,0565	-0,0548	0,000	-0,0501	-0,0854
8	0,480	-0,0299	-0,0337	0,769	-0,0220	-0,0584
9	0,636	0,0101	0,0013	1,060	0,0079	0,0018
10	0,741	0,0075	0,0030	1,170	0,0086	0,0039
11	0,741	-0,0075	0,0030	1,170	-0,0086	0,0039
12	0,636	-0,0101	0,0013	1,060	-0,0079	0,0018
13	0,463	0,0265	0,0336	0,746	0,0176	0,0584
14	0,706	0,0155	0,0156	0,924	0,0121	0,0455
15	0,706	-0,0155	0,0156	0,924	-0,0121	0,0455
16	0,463	-0,0265	0,0336	0,746	-0,0176	0,0584
17	0,000	0,0497	0,0523	0,000	0,0411	0,0820
18	0,425	0,0256	0,0308	0,354	0,0214	0,0601
19	0,425	-0,0256	0,0308	0,354	-0,0214	0,0601
20	0,000	-0,0497	0,0523	0,000	-0,0411	0,0820



Rys. 13. Przemieszczenia węzłów płyty w I iteracji

Własności sprężyste elementów typu GAP są jednakowe i wynoszą odpowiednio

$$k_N = 0,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m},$$

$$k_T = 0,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}.$$

Współczynnik tarcia GAP przyjęto równy

$$\mu = 0,1.$$

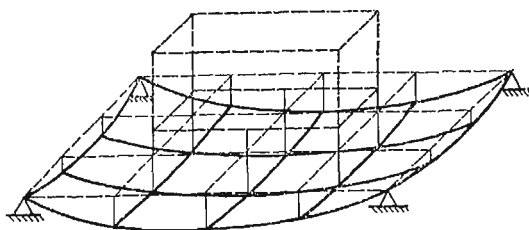
W tablicach 1 - 3 przedstawiono wyniki obliczeń. W tablicy 1 zestawiono przemieszczenia węzłów elementów skończonych dla obciążenia $F_T = 18 \cdot 10^3 \text{ N}$. Numerację węzłów przedstawiono na rys. 12a. W pierwszej kolumnie tej tablicy oraz na rys. 13 przedstawiono wyniki pierwszego kroku iteracji. W drugiej kolumnie zestawiono wyniki piątego kroku iteracji. Wyniki te przedstawiono graficznie na rys. 14.

Tablica 2

Iteracja	Przemieszczenia		
	q_1	q_2	q_3
	cm	cm	rad
I	0,0140	0,7350	0,00246
V	0,0188	0,9590	0,00326

Tablica 3

GAP	A1	A2	A3	A4	A5	A6
$F_T = 12\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	51 500	51 500	0	0	48 500	48 500
\bar{T} [N]	3 000	3 000	0	0	3 000	3 000
IFLAG	1	1	0	0	1	1
$F_T = 14\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	51 750	51 750	0	0	48 250	48 250
\bar{T} [N]	3 500	3 500	0	0	3 500	3 500
IFLAG	1	1	0	0	1	1
$F_T = 16\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	52 000	52 000	0	0	48 000	48 000
\bar{T} [N]	4 000	4 000	0	0	4 000	4 000
FLAG	1	1	0	0	1	1
$F_T = 18\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	52 250	52 250	0	0	47 750	47 750
\bar{T} [N]	4 500	4 500	0	0	4 500	4 500
IFLAG	1	1	0	0	1	1
$F_T = 20\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	52 500	52 500	0	0	47 500	47 500
\bar{T} [N]	0	0	0	0	0	0
IFLAG	2	2	0	0	2	2



Rys. 14. Przemieszczenia węzłów płyty w V iteracji

W tablicy 2 przedstawiono przemieszczenia RFE w pierwszym i piątym kroku iteracji dla obciążenia jak wyżej. Przemieszczenia q_i ($i = 1, 2, 3$) przyjęto zgodnie z rys. 12b.

W tablicy 3 zestawiono wyniki obliczeń dla pięciu wariantów obciążenia. Elementy typu GAP oznaczono jak na rys. 11. Siłę normalną w GAP oznaczono przez \bar{N} natomiast siłę styczną przez \bar{T} . Stan GAP określamy parametrem IFLAG zdefiniowanym w rozdz. 5. Wyniki obliczeń zamieszczone w tablicy 3 otrzymano po 5 krokach iteracji. Obliczenia przeprowadzono na komputerze ICL-4. Łączny czas obliczeń całego procesu iteracyjnego nie przekroczył 3 minut.

Literatura cytowana w tekście

1. J. KRUSZEWSKI i inni, *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1975.
2. S. PARSONS, E. A. WILSON, *Finite element analysis of elastic contact problem using differential displacements*, Int. Jour. for Num. Meth. in Eng., vol. 2, 1970, str. 387 - 395.
3. S. K. CHAN, T. S. TUBA, *A finite element method for contact problems of solid bodies — Parts I, II*, Int. Jour. Mech. Sci., vol. 13, 1971, str. 615 - 639.
4. S. OHTE, *Finite element analysis of elastic contact problems*, Bull. of JSME, vol. 16, 1973, str. 797 - 804.
5. H. SCHÄFER, *A contribution to the solution of contact problems with the aid of bound elements*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., vol. 6, 1975, str. 335 - 354.
6. J. KRUSZEWSKI i inni, *HESAS — system obliczeń konstrukcji oparty na metodach elementów skończonych*, Mechanika i Komputer, t. 1, 1978, str. 81 - 100.
7. K. J. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1976.
8. C. S. DESAI, *Finite Element Methods*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.

Резюме

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

В работе представлено метод определения контактных давлений в упругих элементах конструкций, которые находятся в состоянии физического контакта под влиянием внешних нагрузок или начальных деформаций.

Реальная система моделирована одновременно при помощи конечных элементов и жестких конечных элементов.

Во всех случаях когда существует возможность контакта тел, мы вводим частный конечный элемент обозначенный GAP.

Процедура определения состояния напряжения и деформации GAP итерационного характера. Проведена программа на ЭВМ, а также пример вычислений.

S u m m a r y

HYBRID FINITE ELEMENT METHOD IN CONTACT PROBLEMS

In the paper a method of finding distributions of tractions in elastic structural elements being in the contact under the influence of external loads have been proposed. The real structures have been represented by a system of rigid as well as deformable finite elements. On surfaces where the possibility of a contact between structural elements can occur, the special finite element, referred to as GAP, have been introduced. The procedure of calculating the stresses and deformation of GAP is of an iterative character. The description of the program for computers and the example of application have been given.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1982 roku

UPROSZCZONA ANALIZA USTALONEGO KORKOCIĄGU SAMOŁOTU

WOJCIECH B L A J E R

Politechnika Warszawska

JERZY M A R Y N I A K

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

W pracy przedstawiono uproszczoną metodę wyznaczania warunków równowagi ustalonego korkociągu samolotu. Metoda w przybliżony sposób określa kąt pochylenia samolotu θ , prędkość kątową obrotu Ω , prędkość opadania V_k oraz promień korkociągu r_k i kąt pochylenia linii śrubowej toru przemieszczania się środka masy samolotu γ .

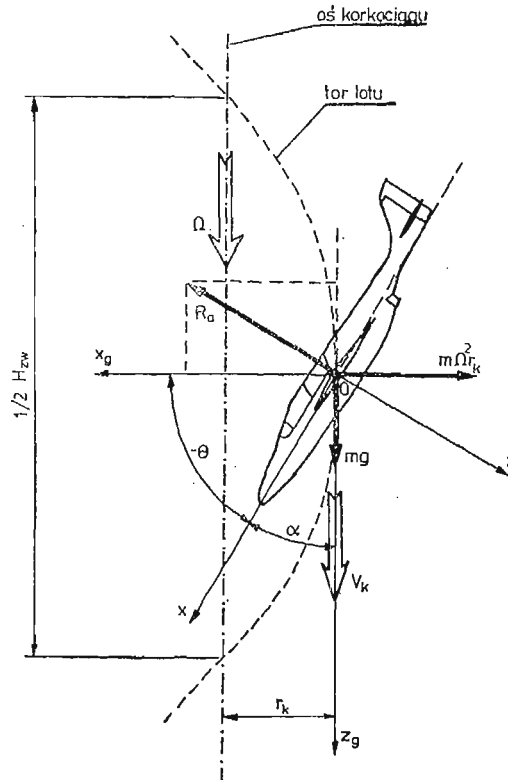
Samolot potraktowano jako sztywny układ mechaniczny o sześciu stopniach swobody. Przyjęto następujące podstawowe założenia dotyczące stanu lotu samolotu w korkociągu ustalonym: oś korkociągu jest pionowa względem ziemi, mały kąt przechylenia samolotu, mały kąt ślizgu, taka konfiguracja samolotu, że oś korkociągu leży w przybliżeniu w płaszczyźnie symetrii samolotu. Dodatkowo założono, że dla $\alpha > \alpha_{kr}$, wartość współczynnika całkowitej siły aerodynamicznej c_{Ra} samolotu jest w przybliżeniu stała [6, 7].

Wyniki obliczeniowe uzyskane w pracy dla przypadku samolotu TS-11 „Iskra”, odnoszone są do wyników uzyskanych dla tego samego samolotu w pracy [3], w której rozpatrywano warunki równowagi ustalonego korkociągu samolotu przy uwzględnieniu pełnych równań ruchu samolotu.

2. Wzory wynikające z równowagi sił działających na samolot w korkociągu

W pracy zamodelowano, że samolot w korkociągu ustalonym porusza się po stromej linii śrubowej o osi pionowej względem ziemi. Ruch jest niesterowany i rozpatrywany jest dla ustalonej wysokości lotu. Ruch ten stanowi nałożenie się na siebie opadania samolotu z prędkością V_k i obrotu wokół osi korkociągu z prędkością kątową Ω , rys. 1.

Kąt przechylenia samolotu w korkociągu jest zwykle mały, rzędu kilku stopni [1, 2, 3, 5]. Kąt odchylenia osi Ox samolotu ku osi korkociągu jest natomiast rzędu 88° , czyli oś Ox przebiega bardzo blisko osi korkociągu [2, 3, 6, 7]. Z pewnym przybliżeniem można więc przyjąć, że oś korkociągu leży w płaszczyźnie symetrii samolotu Oxz . Całkowita siła aerodynamiczna działająca na samolot w korkociągu, z racji małego kąta ślizgu, jest w przybliżeniu prostopadła do płaszczyzny płatów i zawiera się w płaszczyźnie symetrii



Rys. 1. Model ustalonego korkociągu samolotu. Oznaczenia: α — kąt natarcia, Θ — kąt pochylenia, m — masa samolotu, g — przyspieszenie ziemskie, V_k — prędkość opadania pionowego, Ω — prędkość kątowa obrotu samolotu, r_k — promień korkociągu, H_{zw} — wysokość tracona przez samolot w jednej zwłoczce korkociągu, R_a — wypadkowa siła aerodynamiczna działająca na samolot

samolotu Oxz [4, 6, 7]. Oznacza to w przybliżeniu działanie siły R_a wzdłuż osi Oz samolotu (rys. 1). Przy takich założeniach siła nośna samolotu równoważy siłę odśrodkową, a siła oporu samolotu równoważy jego ciężar.

Dla większości samolotów obserwuje się zjawisko, że dla nadkrytycznych kątów natarcia, wartość współczynnika całkowitej siły aerodynamicznej samolotu c_{Ra} jest pewną stałą wielokrotnością maksymalnego współczynnika siły nośnej samolotu c_{zmax} [5, 6, 7]. Można to zapisać jako:

$$c_{Ra} = k_R c_{zmax}. \quad (1)$$

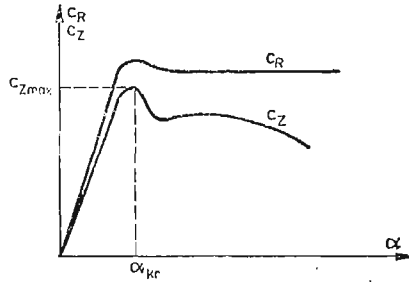
Zjawisko to ilustruje rys. 2. W zależności od typu samolotu $k_R = 1.0-1.3$.

Z równowagi sił na rys. 1 wynikają zależności:

$$m\Omega^2 r_k + R_a \sin \Theta = 0, \quad (2)$$

$$mg - R_a \cos \Theta = 0, \quad (3)$$

gdzie: m — masa samolotu, Ω — kątowa prędkość obrotu samolotu, r_k — promień korkociągu, R_a — całkowita siła aerodynamiczna działająca na samolot, Θ — kąt pochylenia samolotu (Θ ma wartość ujemną jak na rys. 1), g — przyspieszenie ziemskie.



Rys. 2. Graficzne przedstawienie zależności (1)

Dzieląc wzory (2) i (3) przez siebie otrzymujemy:

$$r_k = -\frac{g \operatorname{tg} \Theta}{\Omega^2}. \quad (4)$$

Wstawiając (1) do (3) i uwzględniając, że dla małych kątów przechylenia samolotu Φ :

$$\alpha = 90^\circ - \Theta, \quad (5)$$

otrzymujemy:

$$mg - \frac{1}{2} \rho S V_c^2 k_R c_{z \max} \sin \alpha = 0,$$

stąd po przekształceniach:

$$V_c = \sqrt{\frac{2mg}{\rho \cdot S \cdot k_R \cdot c_{z \max} \cdot \sin \alpha}} = \frac{V_{\min}}{\sqrt{k_R \sin \alpha}}, \quad (6)$$

gdzie: ρ — gęstość powietrza, S — powierzchnia nośna samolotu,

V_{\min} — minimalna prędkość samolotu, inne oznaczenia jak uprzednio.

Wzory (4) i (6) są jedynymi dającymi się wyprowadzić z warunków równowagi sił działających na samolot w korkociągu. Nie wyznaczają one jednak żadnego z parametrów korkociągu bezpośrednio.

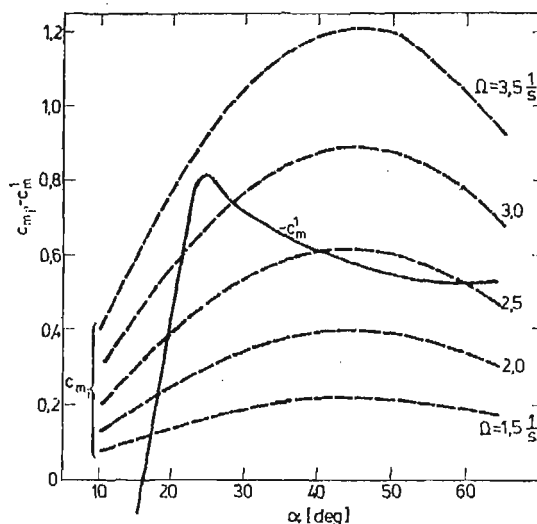
3. Równowaga momentów

Decydujący wpływ na postać ustalonego korkociągu samolotu ma równowaga momentów pochylających [1, 2, 3, 4]. Przy pominięciu wpływu od zespołu napędowego i uznając wartość dewiacyjnego momentu bezwładności samolotu J_{xz} za małą, równowagę momentów pochylających działających na samolot sprowadzić można do postaci:

$$M_a + (J_z - J_x) P \cdot R = 0, \quad (7)$$

gdzie: M_a — aerodynamiczny moment pochylający samolotu, J_x , J_z — momenty bezwładności samolotu w układzie własnym $Oxyz$.

P , R — prędkości kątowe przechylenia i odchylenia w układzie $Oxyz$.



Rys. 3. Warunek równowagi (10) przedstawiony na wykresie

Zgodnie z [1, 2, 3, 4] prędkości kątowe samolotu w układzie $Oxyz$, dla przypadku korkociągu o osi pionowej można zapisać:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} -\sin \Theta \\ \cos \Theta \sin \Phi \\ \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Dla małej wartości kąta przechylenia Φ , $\cos \Phi \cong 1$. Stąd:

$$M_a + \frac{1}{2} \Omega^2 (J_z - J_x) \sin(-2\Theta) = 0. \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę, że $M_a = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot V_c^2 \cdot c_a \cdot c_m$ oraz uwzględniając wzory (5) i (6), równanie (9) przekształcić można do postaci:

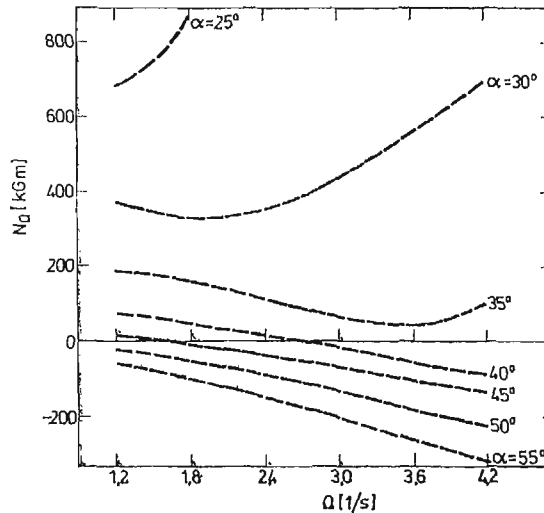
$$\frac{J_z - J_x}{\rho \cdot S \cdot V_{min}^2 c_a} \Omega^2 \cdot \sin(2\alpha) + \frac{c_m}{k_R \sin \alpha} = 0. \quad (10)$$

gdzie: c_a — średnia cięciwa aerodynamiczna skrzydła, c_m — współczynnik aerodynamicznego momentu pochylającego samolotu.

Zakładając, że współczynnik c_m w niewielkim stopniu zależy od prędkości kątowej obrotu samolotu Ω , warunek równowagi (10) przedstawić można na wykresie. Oznaczywszy pierwszy człon sumy przez c_{m_i} , a drugi przez c_m^1 , wykres taki przedstawiono dla przypadku samolotu TS-11 „Iskra” na rys. 3. Dane masowe, geometryczne i aerodynamiczne samolotu przyjęto przy tym jak w pracach [2, 3]. Stałą k_R założono równą 1.0, a dane sterowania samolotem przyjęto następująco:

$$\delta_H = -20^\circ, \quad \delta_V = 20^\circ, \quad \delta_L = 0^\circ.$$

gdzie: δ_H , δ_V , δ_L — odpowiednio wychylenie steru wysokości, kierunku i lotek.



Rys. 4. Zależność $N_{\Omega} = f(\Omega)$ dla różnych wartości kąta natarcia samolotu α

Na podstawie analizy wykresu z rys. 3 niemożliwym jest jednak ściśle odczytanie położenia punktu równowagi. Należy posłużyć się warunkiem dodatkowym, warunkiem równowagi momentów działających na samolot o kierunku wektora równoległym do osi korkociągu.

$$N_{\Omega} = -L_a \sin \Theta + M_a \sin \Phi \cdot \cos \Theta + N_a \cos \Phi \cos \Theta = 0. \quad (11)$$

Przy założeniu małego kąta przechylenia samolotu Φ oraz przy uwzględnieniu wzoru (5), warunek (11) upraszcza się do zależności:

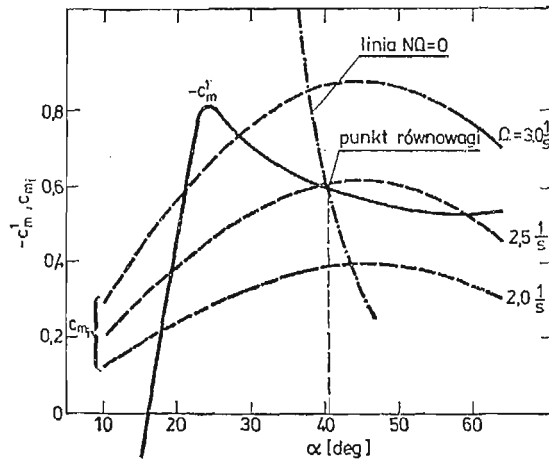
$$N_{\Omega} = L_a \cdot \cos \alpha + N_a \cdot \sin \alpha = 0. \quad (12)$$

Jeżeli dla danej wartości kąta natarcia α istnieje taka wartość prędkości kątowej Ω , dla którego $N_{\Omega} = 0$, to możliwym jest utworzenie wykresu $\Omega_{N_{\Omega}=0} = f(\alpha)$. Narzucają się dwie możliwe metody otrzymywania takiego wykresu, poprzez obliczenia i drogą dmuchań modelowych dla modelu wirującego.

W pracy wykonano obliczenia numeryczne w celu otrzymania przebiegów $N_{\Omega} = f(\Omega)$ dla różnych kątów natarcia samolotu. Przy obliczeniach zakładano $\beta = 0^\circ$, a prędkość liniową samolotu dla danego kąta α liczono z zależności (6). Wyniki obliczeń dla rozpatrywanego samolotu TS-11 „Iskra” prezentuje wykres na rysunku 4.

Z rys. 4 wynika, że poszukiwany punkt równowagi znajdować winien się w zakresie kąta natarcia od 32° do 43° . Dla każdej wartości kąta α z tego zakresu istnieje taka wartość Ω , dla której $N_{\Omega} = 0$. Możliwym jest więc utworzenie wykresu w funkcji kąta natarcia $\Omega_{N_{\Omega}=0} = f(\alpha)$.

Powracając do wykresu z rys. 3, dla każdego α znając wartość Ω , dla której możliwe jest $N_{\Omega} = 0$, na wykres nanieść można linię $N_{\Omega} = 0$. Będzie to linia łącząca punkty z krzywych c_{mi} wybranych tak, że dla każdego α wybrana będzie krzywa dla wartości Ω odpowiadającej warunkowi $N_{\Omega} = 0$. Przecięcie utworzonej linii z przebiegiem c_m^1 wyznaczy



Rys. 5. Graficzne wyznaczenie punktu równowagi samolotu w korkociągu

w przybliżeniu położenie punktu równowagi samolotu w korkociągu. Dla wybranego samolotu zaprezentowane jest to na rys. 5.

Z rys. 5 odczytać można następujące parametry punktu równowagi samolotu w korkociągu: $\alpha = 40.5^\circ$, $\Omega = 2.45$ 1/s. Ze wzorów (4), (5) i (6) wyliczyć można pozostałe istotne parametry ustalonego korkociągu samolotu.

Tablica 1

	Metoda przybliżona	Obliczenia numeryczne ¹⁾
α (deg)	40,5	38,6
β (deg)	0 ²⁾	-3,0
V (m/s)	65,1	68,8
Ω (1/s)	2,45	2,54
Φ (deg)	0 ²⁾	1,0
Θ (deg)	-49,5	-51,3
r_k (m)	1,91	1,72

1) — obliczenia za pomocą [3], dla pełnego układu równań ruchu samolotu,

2) — wielkości przyjęte z założenia.

W tablicy 1 zestawiono uzyskane w pracy wyniki w porównaniu z wynikami otrzymanymi w pracy [3], które uzyskane były dla tego samego zestawu danych i sterowania samolotu TS-11 „Iskra” poprzez rozpatrywanie warunku równowagi pełnego układu równań samolotu.

4. Wnioski wynikające z pracy

Z wyników uzyskanych w pracy (tabl. 1) wynika, że metoda uproszczona daje dość dobre przybliżenie w porównaniu z obliczeniami numerycznymi dla pełnego układu równań. Należy jednak zauważyć, że w obu przypadkach przyjęto identyczne dane aerody-

namiczne samolotu, a wykresy $N_D = f(\Omega)$ otrzymane były przy wykorzystaniu części oprogramowania użytego w pracy [3]. Miało to istotny wpływ na zbliżenie wartości uzyskanych wyników w obu przypadkach.

Metoda jest prosta i szybka. Pozwala na zorientowanie się w podstawowych własnościach korkociągów samolotu. Wyniki metody dają się łatwo interpretować na wykresach, a uzyskać je można bez konieczności angażowania kosztownych obliczeń numerycznych.

Zwraca uwagę mały zakres aerodynamicznych danych samolotu niezbędnych do obliczeń opisaną metodą. Wymagane są przebiegi współczynników c_x i c_z (lub c_{Ra}) oraz c_m samolotu dla pełnego zakresu kątów natarcia. Zależność $\Omega_{N_D=0} = f(\alpha)$ najdogodniej wydaje się otrzymać na drodze dmuchań modelowych w tunelu pionowym przy zastosowaniu modelu wirującego [2].

Metoda jest przybliżoną i dobrze jest zdawać sobie sprawę z wagi czynionych założeń upraszczających. Przy otrzymywaniu zależności $\Omega_{N_D=0} = f(\alpha)$ drogą dmuchań modelowych, z góry skazujemy się na błąd wynikający z faktu założenia, że $r_k = 0$. Metoda ta z góry zakłada też, że $\Phi = 0^\circ$ oraz, że oś korkociągu przecina się z osią Ox samolotu. Konsekwencją tych faktów jest pominięcie małej zwykle wartości kąta ślizgu samolotu w ustalonym korkociągu. Należałoby też zweryfikować doświadczalnie założenie $c_{Ra} = k_R \cdot c_{z_{max}}$. Nawet jednak gdy założenie to nie jest spełnione, tzn. $c_{Ra} = f(\alpha)$ dla całego zakresu kątów natarcia, wykonanie obliczeń powyższą metodą jest możliwe (zmiana we wzorze (6)).

Zaproponowaną metodę należy traktować jako pierwsze przybliżenie problemu. Jej szybkość i ograniczony zakres wymaganych danych aerodynamicznych samolotu stanowią jej poważne zalety.

Literatura cytowana w tekście

1. W. M. ADAMS, *Analytic Prediction of Airplane Equilibrium Spin Characteristics*, NASA TN D-2669, November 1972.
2. W. BLAJER, *Badanie dynamiki samolotu w korkociągu*, praca doktorska Politechniki Warszawskiej (nie publikowana), Warszawa 1982.
3. W. BLAJER, J. MARYNIAK, *Ustalony korkociąg samolotu, warunki równowagi*, Mech. Teoret. i Stos., 22, 1/2, 1984.
4. B. W. McCORMIC, *Equilibrium Spinning of a Typical Single-Engine Low-Wing Light Aircraft*, Journal of Aircraft, vol., 18, March 1981.
5. S. B. GRAFTON, E. L. ANGLIN, *Dynamic Stability Derivatives at Angles of Attack from -5° to 90° for a Variable-Sweep Fighter Configuration with Twin Vertical Tails*, NASA TN D-6909, October 1972.
6. М. Г. Котик, *Динамика штопора самолёта*, Машиностроение, Москва 1976.
7. М. Г. Котик, *Критические режимы сверхзвукового самолёта*, Машиностроение, Москва 1967.

Резюме

УПРОЩЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ШТОПОРА САМОЛЁТА

Представлено упрощенный, графический метод определения установившегося штопора самолёта. Самолёт принято как жёсткое тело. Принято, вертикальную ось штопора, углы крена

и скольжения малые, ось штопора лежит в плоскости симметрии самолёта. По этому методу сделано как пример, вычисления для самолёта TS-11 „Iskra”

S u m m a r y

SIMPLIFIED STUDY OF AIRPLANE STEADY SPIN

An estimative, graphical method for predicting steady spin modes of an airplane is presented. An airplane has been treated as a rigid body. It has been assumed that spin axis is vertical, roll angle and angle of attack are small, and that spin axis belongs to the symmetry plane of an airplane. Test calculations have been carried out for Polish training airplane TS-11 „Iskra”.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1983 roku

USTALONY KORKOCIĄG SAMOLOTU, WARUNKI RÓWNOWAGI

WOJCIECH BLAJER

Politechnika Warszawska

JERZY MARYNIAK

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

W pracy przedstawiono metodę badania własności korkociągowych samolotu, polegającą na wyznaczeniu jego punktu równowagi w korkociągu o osi pionowej. Samolot traktowano przy tym jako sztywny układ mechaniczny o sześciu stopniach swobody.

Przy poszukiwaniu stanu lotu samolotu w ustalonym korkociągu założono, że średni kąt natarcia płatów jest większy od krytycznego, a ruch odbywa się po stromej linii śrubowej o osi pionowej względem ziemi. Rozpatrywano ruch niesterowany (ustalone parametry sterowania) dla zadanej wysokości lotu.

Równania do wyznaczania punktu równowagi samolotu w korkociągu wyprowadzono z ogólnych równań ruchu samolotu jako ciała sztywnego [2, 8], otrzymanych w quasi-współrzędnych układu własnego samolotu przy zastosowaniu równań Boltzmana-Hamelela [5] dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych.

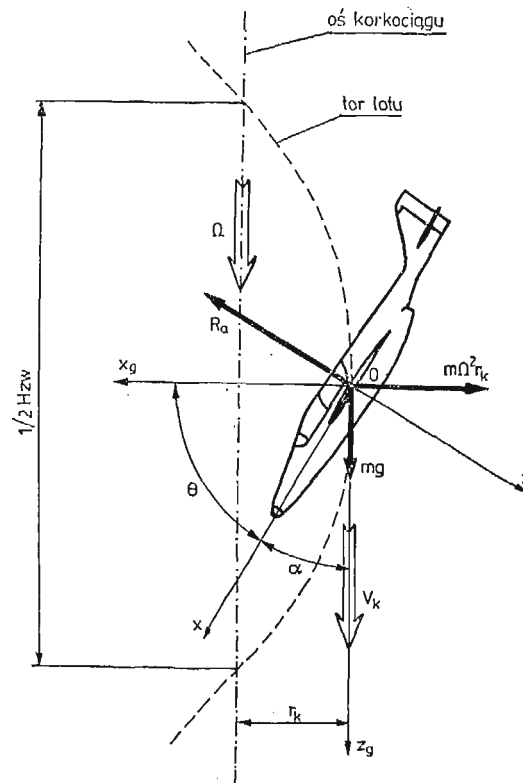
Oddziaływania zewnętrzne na samolot w korkociągu wyznaczono analogicznie jak w pracach [2, 8]. Przyjęto, że są one pochodzenia aerodynamicznego, od zespołu napędowego i od siły ciężkości. Oddziaływania aerodynamiczne liczono rozdzielając je na pochodzące od skrzydła, kadłuba oraz usterzeń pionowego i poziomego. Przy wyznaczaniu oddziaływań od skrzydła zastosowano metodę pasową, dzieląc je dodatkowo na $N = 20$ pasków. Dla każdego z pasków skrzydła i usterzeń jako całości, oddziaływania liczono przy uwzględnieniu lokalnych warunków opływu. Oddziaływania te odnoszono następnie do środka masy samolotu. Opierając się na pracy [4] uwzględniano również wpływ części samolotu na siebie. Metoda ta pozwoliła na przybliżone uwzględnienie wpływu prędkości kątowych samolotu na siły i momenty aerodynamiczne. Oddziaływania od zespołu napędowego wyprowadzono dla przypadku jednosilnikowego samolotu turbodrzutowego.

Obliczenia przykładowe wykonano dla przypadku samolotu TS-11 „Iskra” według własnych programów w Ośrodku Obliczeniowym Politechniki Warszawskiej.

2. Sformułowanie zagadnienia i opis przyjętych układów odniesienia

Formułując model ustalonego korkociągu przyjęto następujące podstawowe założenia (porównaj prace [1, 3, 10]):

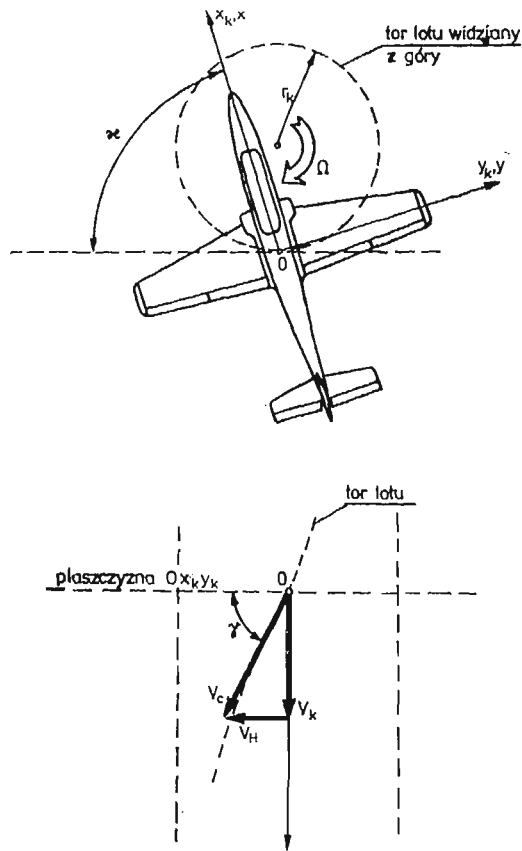
1. Lot samolotu odbywa się w zakresie nadkrytycznym średniego kąta natarcia płatów,
2. Opadanie samolotu następuje po stromej linii śrubowej o osi pionowej względem ziemi, przy jednoczesnym obrocie wokół tej osi,
3. Ruch jest niesterowany i rozpatrywany jest dla zadanej wysokości lotu,
4. Ruch jest ustalony. Oznacza to, że wszystkie parametry ruchu, toru przemieszczania się środka masy i konfiguracji samolotu względem osi linii śrubowej są ustalone.



Rys. 1. Model korkociągu ustalonego. Oznaczenia: α — kąt natarcia, θ — kąt pochylenia, m — masa samolotu, g — przyspieszenie ziemskie, V_k — prędkość opadania pionowego, Ω — prędkość kątowa obrotu, r_k — promień korkociągu, H_{zw} — wysokość tracona przez samolot w jednej zwitce, R_a — wypadkowa siła aerodynamiczna

Do opisu ruchu samolotu w korkociągu ustalonym użyto następujących układów odniesienia:

1. Układ $Ox_g y_g z_g$ zaczepiony w środku masy samolotu o osiach równoległych do inercjalnego układu $O_1 x_1 y_1 z_1$ związanego z ziemią. Oś Oz_g (również oś $O_1 x_1$) jest pionowa, tzn. zgodna z kierunkiem działania siły ciężkości,



Rys. 2. Układ korkociągowy $Ox_k y_k z_k$ dla korkociągu o osi pionowej. Oznaczenia: V_c — prędkość całkowita, V_k — prędkość opadania pionowego, V_H — prędkość styczna, γ — kąt pochylenia linii śrubowej, α — kąt odchylenia samolotu ku osi korkociągu

2. Centralny układ własny samolotu $Oxyz$, taki, że płaszczyzna Oxz jest płaszczyzną symetrii samolotu,
3. Układ aerodynamiczny (prędkościowy) $Ox_a y_a z_a$ związany z kierunkiem niezakłóconego przepływu,
4. Układ korkociągowy $Ox_k y_k z_k$ (rys. 2). Oś Oz_k tego układu jest pionowa (pokrywa się z osią Oz_θ), a osie Ox_k i Oy_k stanowią rzuty osi Ox i Oy na płaszczyznę poziomą $Ox_\theta y_\theta$.

Opisy trzech pierwszych układów zawarte są m.in. w pracach [2, 7, 8, 9]. Układ korkociągowy [1, 2] wprowadzony został w celu ułatwienia analizy konfiguracji samolotu w korkociągu oraz toru lotu jego środka masy. Układ zaczepiony jest w środku masy samolotu. Oś Oz_k jest przez cały czas równoległa do osi korkociągu (z założenia pionowa), natomiast osie Ox_k i Oy_k wyznaczają płaszczyznę prostopadłą do osi linii śrubowej i są rzutami odpowiednio osi Ox i Oy układu własnego na tę płaszczyznę. Zgodnie z założeniami przyjętymi powyżej, oś Oz_k pokrywa się z osią Oz_θ , a osie Ox_k i Oy_k zawierają się w płaszczyźnie $Ox_\theta y_\theta$.

Zależność pomiędzy układami $Ox_k y_k z_k$ i $Oxyz$ można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Phi \sin \Theta & \cos \Phi \sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ -\sin \Theta & \sin \Phi \cos \Theta & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_k \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie: Φ — kąt przechylenia, Θ — kąt pochylenia samolotu.

3. Równania do wyznaczania punktu równowagi samolotu w korkociągu

Poszukiwane równania wyprowadzone zostały z ogólnych równań ruchu samolotu sztywnego w quasi-współrzędnych [5] centralnego układu własnego samolotu $Oxyz$, dla którego płaszczyzna Oxz jest płaszczyzną symetrii samolotu. Równania te mają postać [2, 4, 8]:

$$m \frac{dU}{dt} + m(WQ - VR) = Q_U^*, \quad (a)$$

$$m \frac{dV}{dt} + m(UR - WP) = Q_V^*, \quad (b)$$

$$m \frac{dW}{dt} + m(VP - UQ) = Q_W^*, \quad (c)$$

$$J_x \frac{dP}{dt} - J_{xz} \frac{dR}{dt} + (J_z - J_y)QR - J_{xz}PQ = Q_P^*, \quad (d)$$

$$J_y \frac{dQ}{dt} - (J_z - J_x)PR + J_{xz}(P^2 - R^2) = Q_Q^*, \quad (e)$$

$$J_z \frac{dR}{dt} - J_{xz} \frac{dP}{dt} + (J_y - J_x)PQ + J_{xz}QR = Q_R^*, \quad (f)$$

gdzie: m — masa samolotu, J_x, J_y, J_z, J_{xz} — momenty bezwładności główne i dewiacyjny, U, V, W — prędkości liniowe w układzie $Oxyz$, P, Q, R — prędkości kątowe w układzie $Oxyz$, $Q^* = \text{col}[Q_U^*, Q_V^*, \dots, Q_R^*]$ — wektor sił uogólnionych.

Zgodnie z założeniami, wektor całkowitej prędkości kątowej samolotu Ω skierowany jest wzdłuż pionowej osi korkociągu, stąd:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} -\sin \Theta \\ \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Trzy pierwsze równania układu (2) w postaci $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}$ zastąpić można wyrażeniami $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{V}_c$ według zależności:

$$\dot{\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\arctg \frac{W}{U} \right) = \frac{1}{V_c \cos \beta} (\dot{W} \cos \alpha - \dot{V} \sin \alpha), \quad (4)$$

$$\dot{V}_c = \frac{d}{dt} (\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}) = \dot{U} \cos \beta \cos \alpha + \dot{V} \sin \beta + \dot{W} \cos \beta \sin \alpha, \quad (5)$$

$$\dot{\beta} = \frac{d}{dt} \left(\arcsin \frac{V}{V_c} \right) = \frac{\dot{V} - \dot{V}_c \sin \beta}{V_c \cos \beta}. \quad (6)$$

Za pracami [2, 8] wektor sił uogólnionych przyjęć można w postaci:

$$Q^* = \begin{bmatrix} X_a + T \cdot \cos \delta - m \cdot g \cdot \sin \Theta \\ Y_a + m \cdot g \cdot \sin \Phi \cos \Theta \\ Z_a - T \cdot \sin \delta + m \cdot g \cdot \cos \Phi \cos \Theta \\ L_a \\ M_a + T \cdot e + J_0 \cdot R \cdot \omega \\ N_a - J_0 \cdot Q \cdot \omega \end{bmatrix}, \quad (7)$$

gdzie: $Q_a^* = \text{col}[X_a, Y_a, Z_a, L_a, M_a, N_a]$ — wektor sił uogólnionych pochodzenia aerodynamicznego, T — ciąg silnika, δ — kąt pomiędzy linią działania ciągu silnika i osią Ox układu własnego, e — oddalenie linii działania siły ciągu od środka masy samolotu, ω — prędkość kątowna obrotów silnika, założono, że wektor ω jest równoległy do osi Ox , J_0 — moment bezwładności części wirujących silnika.

Ostatecznie równania do wyznaczania punktu równowagi samolotu w korkociągu wyprowadzono w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{1}{\cos \beta} (-C_x \sin \alpha + C_z \cos \alpha) + \Omega \cos \Theta \sin \Phi + \\ &\quad - \Omega \text{tg} \beta (\cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha - \sin \Theta \cos \alpha), \quad (a) \\ \dot{\beta} &= -C_x \cdot \cos \alpha \sin \beta + C_y \cdot \cos \beta - C_z \cdot \sin \alpha \sin \beta + \\ &\quad + \Omega (\sin \Theta \sin \alpha - \cos \Theta \cos \Phi \cos \alpha), \quad (b) \\ \frac{\dot{V}_c}{V_c} &= C_x \cdot \cos \alpha \cos \beta + C_y \cdot \sin \beta + C_z \cdot \sin \alpha \cos \beta, \quad (c) \\ \dot{P} &= K[C_l + K_1 C_n - \Omega^2 \sin \Phi \cos \Theta (K_4 \sin \Theta + K_5 \cos \Theta \cos \Phi)], \quad (d) \\ \dot{Q} &= C_m + \Omega^2 \left[\frac{1}{2} K_6 \sin 2\Theta \cos \Phi - K_2 (\sin^2 \Theta - \cos^2 \Theta \cos^2 \Phi) \right], \quad (e) \\ \dot{R} &= K[K_3 C_l + C_n + \Omega^2 \sin \Phi \cos \Theta (K_7 \sin \Theta - K_8 \cos \Theta \cos \Phi)], \quad (f) \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{X_a + T \cdot \cos \delta - m \cdot g \cdot \sin \Theta}{m \cdot V_c}, \\ C_y &= \frac{Y_a + m \cdot g \cdot \sin \Phi \cos \Theta}{m \cdot V_c}, \\ C_z &= \frac{Z_a - T \cdot \sin \delta + m \cdot g \cdot \cos \Phi \cos \Theta}{m \cdot V_c}, \\ C_l &= \frac{L_a}{J_x}, \quad C_n = \frac{N_a - J_0 \cdot \Omega \cdot \omega \cdot \cos \Theta \sin \Phi}{J_z}, \\ C_m &= \frac{M_a + T \cdot e + J_0 \cdot \Omega \cdot \omega \cdot \cos \Theta \cos \Phi}{J_y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x \cdot J_z}}, & K_1 &= \frac{J_{xz}}{J_x}, & K_2 &= \frac{J_{xz}}{J_y}, \\
 K_3 &= \frac{J_{xz}}{J_z}, & K_4 &= \left(1 - \frac{J_y - J_x}{J_z}\right) \frac{J_{xz}}{J_x}, \\
 K_5 &= \frac{J_z - J_y}{J_x} + \frac{J_{xz}^2}{J_x \cdot J_z}, & K_6 &= \frac{J_z - J_x}{J_y}, \\
 K_7 &= \frac{J_y - J_x}{J_z} - \frac{J_{xz}^2}{J_x \cdot J_z}, & K_8 &= \left(1 - \frac{J_z - J_y}{J_x}\right) \frac{J_{xz}}{J_z}.
 \end{aligned}$$

Układ równań (8) jest układem sześciu nieliniowych równań różniczkowych $F = \text{col}[\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{V}_c/V_c, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}]$ o sześciu niewiadomych $X = \text{col}[\alpha, \beta, V_c, \Omega, \Phi, \Theta]$. Punkt równowagi układu jest to taki punkt, czyli taki wektor X , dla którego prawe strony układu są równe zeru, czyli wektor F jest wektorem zerowym. W zagadnieniach technicznych warunek ten jest równoważny stwierdzeniu, że w punkcie równowagi X , odpowiednio zdefiniowana norma wektora F musi być mniejsza od zadanej wartości ε . Na przykład:

$$J(F) = \sum_i |f_i(X)| = |\dot{\alpha}(X)| + \dots + |\dot{R}(X)|. \quad (9)$$

Metoda wyznaczania punktu równowagi tłumaczy dlaczego zamiast układu $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}$ rozpatrywano układ równań o postaci $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{V}_c/V_c, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}$ oraz dlaczego zamiast równania \dot{V}_c rozpatrywano go w postaci \dot{V}_c/V_c . Z punktu widzenia prawidłowości i szybkości znajdowania punktu równowagi układu, pożądane jest by wszystkie składniki sumy (9) miały zbliżoną do siebie wartość. Wartości liczbowe U, V, W są zazwyczaj o co najmniej rząd większe od wartości liczbowych osiąganym przez P, Q, R . To samo dotyczy może również pochodnych tych wielkości. Rząd wielkości liczbowych α, β (w radianach) i $V_c/V_c = 1$ jest natomiast zbliżony do rzędu wartości P, Q, R . Z tego względu norma wektora F dla układu równań o postaci $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{V}_c/V_c, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}$ wydaje się lepiej określona niż dla układu $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}$.

Jeśli punkt równowagi istnieje, czyli $J(X) < \varepsilon$, wektor $X = \text{col}[\alpha, \beta, V_c, \Omega, \Phi, \Theta]$ jednoznacznie charakteryzuje stan lotu ustalonego korkociągu samolotu. Warto jednak pokusić się o dodatkowe informacje dotyczące ruchu środka masy samolotu i jego konfiguracji w korkociągu. Tymi dodatkowymi informacjami mogą być: γ — kąt pochylenia linii śrubowej, r_k — promień korkociągu i \varkappa — kąt odchylenia samolotu ku osi korkociągu (rys. 2).

Z rys. 2 wynikają zależności:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \\ \dot{z}_k \end{bmatrix} = V_c \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \varkappa \\ -\cos \gamma \sin \varkappa \\ \sin \gamma \end{bmatrix} = V_c \cdot A. \quad (10)$$

Natomiast ze znanych wzorów wynika, że:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = V_c \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \\ \cos \beta \sin \alpha \end{bmatrix} = V_c \cdot B. \quad (11)$$

Porównując wzory (1), (10), (11) otrzymujemy:

$$A(3) = \sin \gamma = \sum_i A_k(3, i) \times B(i),$$

$$A(2) = -\cos \gamma \sin \kappa = \sum_i A_k(2, i) \times B(i).$$

Stąd:

$$\gamma = \arcsin \left(\sum_i (A_k(3, i) \times B(i)) \right), \quad (12)$$

$$\kappa = \arcsin \left(-\frac{1}{\cos \gamma} \sum_i A_k(2, i) \times B(i) \right). \quad (13)$$

Promień korkociągu r_k wyznaczyć można z zależności:

$$r_k = \frac{V_c \cos \gamma}{\Omega}. \quad (14)$$

4. Obliczenia przykładowe

Obliczenia przykładowe wykonano dla przypadku samolotu TS-11 „Iskra” w Ośrodku Obliczeniowym Politechniki Warszawskiej według własnych programów napisanych w języku FORTRAN. Przy wyznaczaniu punktu równowagi układu (8) posłużono się gotowymi procedurami standardowymi.

Obliczenia wykonane zostały dla wielu wersji danych samolotu i sterowania i zebrane są w tablicy 1. Wszystkie wersje obliczeń różnią się od wersji podstawowej (std) tylko parametrami wyszczególnionymi w tablicy. Umożliwia to przybliżoną ocenę wpływu zmian poszczególnych parametrów na własności korkociągowe samolotu. W wersji podstawowej, najważniejsze dane samolotu i sterowania przyjęto następująco:

$m = 3240 \text{ kg}$	$\delta_H = -20$
$J_x = 778 \text{ kG m s}^2$	$\delta_V = 20$
$J_y = 1338 \text{ kG m s}^2$	$\delta_L = 0$
$J_z = 1972 \text{ kG m s}_s$	T i ω — parametr biegu jałowego silnika
$I_{xz} = 77 \text{ kG m s}_s$	
$S_H = 3.54 \text{ m}^2$	$\bar{x} = 0.25 \bar{c}_a$
$S_V = 2.25 \text{ m}^2$	$\rho = 1.108 \text{ kG m}^{-4} \text{ s}^2$
$(x_H, z_H) = (5.4, 1.2) \text{ m}$	(wysokość $H = 1000 \text{ m}$)
$(x_V, z_V) = (5.3, 1.6) \text{ m}$	

gdzie: S_H, S_V — powierzchnie usterzeń poziomego i pionowego, (x_H, z_H) oraz (x_V, z_V) — współrzędne środków parcia usterzeń poziomego i pionowego w układzie $Oxyz$, \bar{x} — wyważenie samolotu, \bar{c}_a — średnia cięciwa aerodynamiczna samolotu, inne dane jak poprzednio.

5. Omówienie wyników obliczeń i wnioski

Wyniki obliczeń zebrano w tabl. 1. Oceniając wyniki w wersji podstawowej (std), stwierdzić można, że zamodelowany samolot ma tendencję do wykonywania korkociągu pochyłego (kąt pochylenia $\Theta = -51.3^\circ$). Kąt ślizgu jest niewielki ($|\beta| = 3^\circ$), mała jest też wartość kąta przechylenia samolotu ($\Phi = 1^\circ$). Zwracają uwagę mała wartość promienia korkociągu (rzędu 1/4 rozpiętości), duża wartość kąta pochylenia linii śrubowej ($\gamma = 86.4^\circ$) i duża wartość kąta odchylenia samolotu ku osi korkociągu ($\kappa = 88.2^\circ$). Dodać należy, że na uzyskane wyniki rzutować mogły wartości szacunkowo określonych danych aerodynamicznych przyjętych do obliczeń.

Porównując poszczególne wersje obliczeń, z wyników uzyskanych dla wersji 2 wynika, że wzrost wartości wychylenia steru wysokości ma minimalny wpływ na postać ustalonego korkociągu. Jest to wynikiem małej skuteczności steru wysokości dla $\alpha > \alpha_{kr}$.

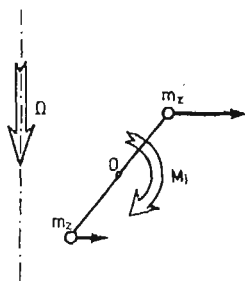
Tablica 1

		Parametry punktu równowagi								
	Wyszczególnienie zmian	α deg	β deg	V_c m/s	Ω 1/s	Φ deg	Θ deg	γ deg	κ deg	r_k m
1	std	38.6	-3.0	68.8	2.54	1.0	-51.3	86.4	88.2	1.72
2	$\delta = -30^\circ$	38.8	-2.8	69.5	2.27	1.8	-51.1	86.1	87.1	2.11
3	$\delta = 30^\circ$	46.6	-2.8	62.5	2.32	0.5	-43.4	86.9	88.6	1.48
4	$\delta = 10^\circ$	32.5	-2.2	75.9	3.04	5.2	-57.2	86.2	86.5	1.65
5	$\delta = 15^\circ$	37.5	-3.1	70.1	2.64	1.1	-52.6	86.7	88.5	1.53
6	$m = 2600$ kg	35.3	-3.6	65.0	2.41	1.9	-54.6	85.3	87.2	2.23
7	$J_y = 1850,$ $J_z = 2500$ (kGms ²)	46.7	-2.8	61.0	1.89	0.3	-43.3	86.3	88.5	2.13
8	$J_y = 1300,$ $J_z = 2500$ (kGms ²)	40.1	-3.1	67.5	2.48	0.7	-49.8	86.5	88.4	1.70
9	$x = 0.25 c_a$	37.3	-2.9	70.2	2.82	0.8	-52.6	86.6	88.4	1.48
10	$S_H = 5.3$ m ²	37.2	-3.3	68.9	2.93	0.1	-52.8	86.7	89.2	1.39
11	$S_V = 3.4$ m ²	38.5	-3.0	68.8	2.54	1.0	-51.4	86.4	88.2	1.71
12	$x_H = 8.0,$ $x_V = 7.9$ (m)	30.7	-1.9	79.1	3.49	2.9	-59.2	86.6	85.1	1.35
13	wysokość lotu $H = 1000$ m	43.5	-2.4	79.0	2.40	0.5	-46.5	87.3	88.7	1.57

Duży wpływ na postać korkociągu ustalonego ma natomiast wartość wychylenia steru kierunku, wersje 3 i 4. Silne wychylenie steru wpływa na wypłaszczenie postaci korkociągu (zmniejszenie wartości bezwzględnej kąta pochylenia samolotu) przy jednoczesnym zmniejszeniu wartości prędkości liniowej V_c i kątowej obrotu Ω . Niepełne wychylenie steru wystramia korkociąg i powoduje wzrost V_c i Ω . Zjawisko to należy tłumaczyć tym, że opływ usterzenia pionowego podczas wykonywania korkociągu przez samolot jest taki, że siła nośna (boczna) powstająca na nim jest mała [2]. Inaczej mówiąc kąt natarcia na usterzeniu jest zbliżony do wartości kąta zerowej siły nośnej dla ustalonej wartości wychylenia steru. Każda zmiana wychylenia steru powodować będzie więc zmianę warunków opływu usterzenia, a więc zmianę postaci korkociągu.

Wartość wychylenia lotek ma niewielki wpływ na postać korkociągu ustalonego, wersja 5. Potwierdza to małą skuteczność lotek dla $\alpha > \alpha_{kr}$.

Zmniejszenie masy samolotu (wersja 6) wywołało wystromienie postaci korkociągu. Należy jednak zauważyć, że obliczenia prowadzone były przy założeniu, że zmiana masy samolotu pozostawała bez wpływu na wartości momentów bezwładności i wyważenie.



Rys. 3. Równowaga momentów pochylających

Wzrost oddalenia mas zastępczych wzdłuż osi Ox (wersja 7) wywołuje silne wypłaszczenie postaci korkociągu. Wy tłumaczyć to można analizując równowagę momentów pochylających samolotu, mającą decydujący wpływ na postać ustalonego korkociągu samolotu [1, 2, 3, 10]. Warunek równowagi w przybliżeniu, po pominięciu członów mniej znaczących, daje się zapisać jako:

$$M_a + (J_z - J_x)PR = 0. \quad (15)$$

Wzrost oddalania mas zastępczych wzdłuż osi Ox wywołuje wzrost momentu od sił bezwładności, a co za tym idzie do wzrostu kąta natarcia (wypłaszczanie korkociągu). Wzrost kąta natarcia wywołuje z kolei wzrost wartości aerodynamicznego momentu pochylającego samolotu M_a , co zapewnia istnienie punktu równowagi dla większej wartości kąta natarcia α (w porównaniu z wersją std).

Wzrost oddalania mas zastępczych wzdłuż osi Oy (wersja 8) powoduje jednoczesny wzrost momentów J_z i J_x . Wpływ na równowagę momentów pochylających (15) jest więc mały.

Wpływ zmiany wyważenia samolotu w przyjętym zakresie (wersja 9) i zmian powierzchni usterzeń poziomego i pionowego (wersja 10 i 11) okazują się mieć mało istotny wpływ na postać ustalonego korkociągu samolotu. Wzrost wartości usterzenia poziomego wy-

wołuje przy tym wyraźny wzrost wartości prędkości kątowej obrotu Ω . Znikomy wpływ zmiany wartości powierzchni usterzenia pionowego na postać korkociągu tłumaczyć należy specyficznymi warunkami opływu usterzenia pionowego, dla których powstająca siła nośna usterzenia ma małą wartość (mówiono już o tym przy opisie wyników wersji 3 i 4).

Z tym samym zjawiskiem związane jest wystromienie postaci korkociągu przy wzroście oddalenia usterzeń od środka masy samolotu. Bardziej stroma postać korkociągu związana jest przy tym ze zwiększonymi prędkościami liniową V_c i kątową Ω .

Zmiana wysokości lotu, co jest związane ze zmniejszeniem gęstości powietrza, powoduje wypłaszczenie postaci korkociągu, a obserwowany wzrost prędkości V_c jest wynikiem zmiany ρ . Powodem zmian postaci korkociągu samolotu jest w tym przypadku (wersja 13) zmiana proporcji pomiędzy oddziaływaniami masowymi i aerodynamicznymi.

6. Wnioski ogólne

Przedstawiona w pracy metoda pozwala na wyznaczanie warunków ustalonego korkociągu samolotu. Punkt równowagi wyznaczany jest jednoznacznie, a konfiguracja samolotu w korkociągu określana jest bardzo plastycznie. Wyniki metody odnosić mogą się tylko do własności korkociągowych samolotu w korkociągu rozwiniętym. Metoda nie dostarcza informacji o istotnych własnościach samolotu podczas wejścia i wyjścia z korkociągu.

Wyniki obliczeń przedstawioną metodą dają się łatwo interpretować, a możliwość przeprowadzania obliczeń dla różnych danych samolotu i sterowania, pozwala na oszacowanie wpływu różnych czynników na własności korkociągowe samolotu. Umożliwić to może zorientowanie się w czynnikach mających najbardziej istotny wpływ na te własności oraz na uniknięcie niepożądanych własności korkociągowych samolotu na etapie jego konstruowania.

Obliczenia w przedstawionej pracy wymagają pełnego zakresu danych aerodynamicznych samolotu ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Zaprezentowane wyniki uzyskane były dla zestawu danych aerodynamicznych przyjętych, w zakresie $\alpha > 25^\circ$, przyjętych szacunkowo (brak dostępnych danych dla tego zakresu), [2, 8]. Wyników obliczeń nie należy zatem odnosić ściśle do rzeczywistego samolotu TS-11 „Iskra”.

Uzyskane wyniki dowodzą, że wypłaszczenie postaci korkociągu związane jest ze zmniejszeniem prędkości opadania i kątowej obrotu. Wystromienie postaci wywołuje efekt odwrotny. Zmiany te są związane w przypadku zmian prędkości opadania samolotu ze zmianami oporu samolotu, a w przypadku zmian prędkości kątowej obrotu ze zmianami efektu autorotacyjnego. Dla mniejszych, zakrytycznych kątów natarcia, efekt ten jest silniejszy.

Literatura cytowana w tekście

1. W. M. ADAMS, *Analytic Prediction of Airplane Equilibrium Spin Characteristics*, NASA TN D-6926, November 1972.
2. W. BLAJER, *Badanie dynamiki samolotu w korkociągu*, praca doktorska Politechniki Warszawskiej (nie opublikowana), Warszawa 1982.

3. B. W. McCORMIC, *Equilibrium Spinning of a Typical Single — Engine Low — Wing Light Aircraft*, Journal of Aircraft, vol. 18, March 1981.
4. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, PWN, Warszawa—Łódź 1961.
5. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
6. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
7. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, wyd. PW, Warszawa 1975.
8. J. MARYNIAK, W. BLAJER, *Numeryczna symulacja korkociągu samolotu*, Mech. Teoret. i Stos., 22, 1/2, 1984.
9. J. MARYNIAK, M. ZŁOCKA, *Stateczność boczna samolotu i drgania lotek z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydeł i sprężystości układu sterowania*, Mech. Teoret. i Stos. 13, 4 (1975).
10. М. Г. Котик — *Динамика штопора самолёта*, Машиностроение, Москва 1976.

Р е з ю м е

УСТАНОВИВШИЙСЯ ШТОПОР САМОЛЁТА, УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

Представлено метод определения точки равновесия самолёта во время штопора. Уравнения определения условий равновесия самолёта во время штопора выведено для жёсткого самолёта. Принято что центр массы самолёта, во время штопора движется по винтовой траектории. Принято, вертикальную ось винтовой траектории а радиус траектории отвечает радиусу штопора. Примерно, сделано вычисления штопора для самолёта TS-11 „Iskra”

S u m m a r y

EQUILIBRIUM CONDITIONS OF AIRPLANE STEADY SPIN

A method for predicting an airplane spin equilibrium is presented. Equations for predicting steady spin modes have been established for a rigid airplane and on assumption that the path of the centre of gravity of a spinning airplane prescribes a helix as the airplane descends. The axis of the helix has been taken vertical and the radius of the helix has been referred to as the spin radius. Test calculations have been carried out for Polish training airplane TS-11 „Iskra”.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1983 roku

DRGANIA UKŁADU SAMOWZBUDNEGO Z WYMUSZENIEM PARAMETRYCZNYM I NIELINIOWĄ SPRĘŻYSTOŚCIĄ

KAZIMIERZ SZABELSKI

Politechnika Lubelska

W pracy rozpatrzono drgania z miękkim samowzbudzeniem, wymuszeniem parametrycznym oraz nieliniową charakterystyką sprężystości typu sześciennego. Rozważając problemy istnienia i stateczności rozwiązań równania różniczkowego, określono efekty wzajemnego oddziaływania drgań samookresowych. Stwierdzono między innymi zaniknięcie drgań samowzbudnych w określonym przedziale częstości wymuszenia parametrycznego. Badania analityczne przeprowadzono przy pewnych założeniach upraszczających a ich wpływ na wyniki określono na drodze modelowania analogowego.

1. Wstęp

W zagadnieniach drgań mechanicznych wyodrębnić można układy o zmiennych okresowo parametrach z jednoczesną możliwością generowania drgań samowzbudnych. W przypadkach takich następuje wzajemne oddziaływanie dwóch rodzajów drgań samookresowych: parametrycznych i samowzbudnych. Problemami takimi zajmowali się N. MINORSKI [1], W. O. KONONIENKO i P. S. KOWALCZUK [2], [3] oraz A. TONDL [4]. Drgania tego typu charakteryzuje — dla określonych warunków — zaniknięcie drgań samowzbudnych. Z tego względu, zjawisko to może mieć istotne znaczenie praktyczne. Przytoczyć można wiele układów, których drgania opisują równania różniczkowe zawierające człony równania Rayleigha lub Van der Pola oraz równania Mathieu lub Hilla. Należą do nich między innymi układy mechaniczne, których modele fizyczne przedstawić można w postaci wahadła Frouda [4], [5] z okresowo zmiennym w kierunku pionowym położeniem punktu zawieszenia bądź w postaci pręta, ściskanego siłą zmienną okresowo z jednoczesnym jego opływem przez gazowy lub ciekły ośrodek [4].

Przyczyny powstawania drgań samowzbudnych w układach mechanicznych [6], mogą być różne: tarcie suche, smarowanie łożysk ślizgowych cienką warstwą oleju, wewnętrzna histereza wałów, bądź przejawiać się w postaci flutteru, wężykowania kół pojazdów lub drgań podczas skrawania. Drgania parametryczne powstają najczęściej na skutek okresowo zmiennej sztywności lub periodycznie zmiennego masowego momentu bezwładności. Tak więc, zakres układów w których oddziałują na siebie oba rodzaje tych drgań jest dość

znaczny. Do przypadków takich należą między innymi: drgania sprzężone wirującego w łożyskach ślizgowych wału którego sztywność przy zginaniu jest okresowo zmienna na skutek różnych głównych momentów bezwładności przekroju, drgania podczas toczenia przyzmatycznego pręta, drgania skrętne wałów korbowych przy uwzględnieniu określonego momentu tarcia w łożyskach ślizgowych oraz zmiany momentu bezwładności mas układu korbowo-tłokowego, drgania sprzężone przedniego koła samochodu przy okresowo zmiennej sztywności promieniowej ogumienia, spowodowanej niejednorodnością budowy opony [7].

W konkretnym przypadku układu, efekty oddziaływania obu rodzajów drgań samo-okresowych zdeterminowane będą strukturą modelu matematycznego oraz wartością współczynników sprzęgających poszczególne współrzędne uogólnione. Rozpatrzmy drgania układu opisane równaniem różniczkowym zawierającym człony równania Van der Pola [4], [5], [8] i równania Mathieu [5], [6] oraz nieliniową siłą sprężystości typu sześciennego

$$m\ddot{x}_1 - (a_0 - a_1 x_1^2)\dot{x}_1 + (c - c_0 \cos 2\omega t)x_1 + c_1 x_1^3 = 0, \quad (1)$$

gdzie:

m — masa,

a_0 i a_1 — współczynniki tłumienia Van der Pola,

c — sztywność średnia,

c_0 — amplituda modulacji sztywności,

c_1 — współczynnik nieliniowości,

ω — częstość wymuszenia parametrycznego.

Wprowadzając czas bezwymiarowy

$$\tau = \omega t,$$

oraz oznaczenia

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{c}{m}; & \mu &= \frac{c_0}{c}; \\ \gamma &= \frac{c_1 x_0^2}{c}; & \alpha &= \frac{a_0}{mp}; \\ \beta &= \frac{a_1 x_0^2}{mp} \\ x &= \frac{x_1}{x_0}; & x_0 &= \frac{mg}{c}, \\ \lambda &= \frac{\omega}{p}, \end{aligned} \quad (2)$$

równanie (1) przyjmuje postać zapisaną we współrzędnej bezwymiarowej

$$\lambda^2 \overset{||}{x} - \lambda(\alpha - \beta x^2) \overset{||}{x} + (1 - \mu \cos 2\tau)x + \gamma x^3 = 0, \quad (3)$$

gdzie

$$\overset{||}{x} = \frac{d^2 x}{d\tau^2}.$$

2. Badania drgań metodą analityczną

Przeprowadźmy analizę drgań układu w zakresie głównego rezonansu parametrycznego. Z tego względu przyjmujemy rozwiązanie równania (3) w postaci

$$x = A \cos \Omega \tau + B_1 \cos \tau + B_2 \sin \tau \quad (4)$$

w którym (drgania samowzbudne aproksymowano funkcją harmoniczną)

A — amplituda drgań samowzbudnych,

B_1 i B_2 — składowe amplitudy drgań parametrycznych,

Ω — częstość drgań samowzbudnych.

Podstawiając rozwiązanie (4) do równania (3), po przekształceniach i uwzględnieniu że amplituda drgań parametrycznych określona jest zależnością

$$R = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

a następnie przyrównując do zera wyrazy z $\cos \tau$, $\sin \tau$, $\cos \Omega \tau$, $\sin \Omega \tau$, otrzymujemy

$$A \left[1 - \Omega^2 \lambda^2 + \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{1}{2} A^2 + R^2 \right) \right] = 0, \quad (5)$$

$$A \Omega \lambda \left[\alpha - \frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{2} A^2 + R^2 \right) \right] = 0, \quad (6)$$

$$\left[1 - \frac{1}{2} \mu - \lambda^2 + \frac{3}{2} \gamma \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_1 + \lambda \left[-\alpha + \frac{1}{2} \beta \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_2 = 0, \quad (7)$$

$$\lambda \left[\alpha - \frac{1}{2} \beta \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_1 + \left[1 + \frac{1}{2} \mu - \lambda^2 + \frac{3}{2} \gamma \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_2 = 0. \quad (8)$$

Z powyższych zależności wynika, że istnieją rozwiązania:

trywialne dla którego $A = 0$; $B_1 = B_2 = R = 0$

półtrywialne $A \neq 0$; $R = 0$

półtrywialne $A = 0$; $R \neq 0$

nietrywialne $A \neq 0$; $R \neq 0$.

Podstawiając w równaniach (5) i (6) $R = 0$, znajdujemy

$$A = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (9)$$

oraz

$$\Omega = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 + 3\gamma \frac{\alpha}{\beta}}. \quad (10)$$

Skąd częstość drgań samowzbudnych w czasie rzeczywistym wynosi

$$\Omega_r = p \sqrt{1 + 3\gamma \frac{\alpha}{\beta}} = \text{const.} \quad (11)$$

W przypadku rozwiązania nietrywialnego, amplituda drgań samowzbudnych — po wykorzystaniu równania (6) — wynosi

$$A = \sqrt{2 \left(2 \frac{\alpha}{\beta} - R^2 \right)}. \quad (12)$$

Uwzględniając również zależność (5) znajdujemy częstość drgań samowzbudnych dla $A \neq 0$; $R \neq 0$ w postaci (10). Oznacza to, że poszukiwana częstość drgań samowzbudnych jest dla danego układu stała i nie zależy od częstości wymuszenia parametrycznego. Z równania (12) wynika, że amplituda drgań samowzbudnych zależy od amplitudy drgań parametrycznych.

Drgania samowzbudne zanikną gdy

$$R \geq \sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}, \quad (13)$$

natomiast będą istniały w przypadku spełnienia warunku

$$R < \sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}. \quad (14)$$

Zamiast parametru λ wprowadźmy

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{\omega}. \quad (15)$$

Równanie różniczkowe (1) przyjmuje wtedy postać

$$\ddot{x} - \lambda_1(\alpha - \beta x^2)\dot{x} + \lambda_1^2[(1 - \mu \cos 2\tau)x + \gamma x^3] = 0. \quad (16)$$

Przedstawmy zależność (15) w formie

$$\lambda_1^2 = 1 + \delta; \quad \lambda_1 \approx 1 + \frac{\delta}{2}, \quad (17)$$

gdzie δ jest wariacją częstości wymuszenia parametrycznego. Podstawiając wyrażenia (17) do (16) przy uwzględnieniu, że α , β , γ , μ , δ są znacznie mniejsze od jedności, otrzymujemy

$$\ddot{x} - (\alpha - \beta x^2)\dot{x} + (1 + \delta - \mu \cos 2\tau)x + \gamma x^3 = 0. \quad (18)$$

W przypadku tym pominięto wyrazy zawierające iloczyny dwóch małych parametrów układu. Ponieważ wartości tych wyrazów determinują również wielkości kinematyczne drgań, dlatego porównajmy wyniki badań równania (18) względem (16). Tak więc ujęte zagadnienie, umożliwia także ocenę wpływu pomijania tego typu wyrazów na wyniki badań. Podstawiając rozwiązanie (4) do równania (18) po przekształceniach znajdujemy

$$A \left[1 + \delta - \Omega^2 + \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{1}{2} A^2 + R^2 \right) \right] = 0, \quad (19)$$

$$A \Omega \left[\alpha - \frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{2} A^2 + R^2 \right) \right] = 0, \quad (20)$$

$$\left[-\frac{1}{2} \mu + \delta + \frac{3}{2} \gamma \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_1 + \left[-\alpha + \frac{1}{2} \beta \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_2 = 0, \quad (21)$$

$$\left[\alpha - \frac{1}{2} \beta \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_1 + \left[\frac{1}{2} \mu + \delta + \frac{3}{2} \gamma \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_2 = 0. \quad (22)$$

Dla rozwiązań $A \neq 0$, $R = 0$ oraz $A \neq 0$, $R \neq 0$ z równań (19) i (20) znajdujemy wyrażenie określające amplitudę drgań samowzbudnych — identyczne jak w przypadkach (9)

oraz (12). Częstość drgań samowzbudnych w tym przypadku oznaczymy przez Ω_1 , określając zależność

$$\Omega_1 = \sqrt{1 + \delta + 3\gamma \frac{\alpha}{\beta}}, \quad (23)$$

lub w czasie rzeczywistym

$$\Omega_r^{(1)} = p \sqrt{1 + \frac{3\gamma\alpha}{\beta(1+\delta)}}. \quad (24)$$

W odróżnieniu od (11), w ujęciu tym częstość drgań samowzbudnych wyrażona jest również przez wariację częstości wymuszenia parametrycznego. Podkreślić należy, że odchylenie względne obliczonej z (24) częstości drgań samowzbudnych w odniesieniu do (11) jest nieznaczne, gdyż o jego wartości decyduje tylko iloczyn $\beta\delta$.

W przypadku $A = 0$, $R \neq 0$ z równań (21) i (22) otrzymujemy

$$\delta^2 + \frac{3}{2} \gamma R^2 \delta + \frac{1}{16} (9\gamma^2 + \beta^2) R^4 + \alpha \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta R^2 \right) - \frac{1}{4} \mu^2 = 0,$$

skąd znajdujemy

$$\delta_{1,2} = -\frac{3}{4} \gamma R^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \mu^2 - \left(\alpha - \frac{1}{4} \beta R^2 \right)^2}, \quad (25)$$

lub

$$R_{1,2}^2 = \frac{4[(\alpha\beta - 3\delta\gamma) \pm 2\sqrt{\Delta_1}]}{9\gamma^2 + \beta^2}$$

gdzie

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{9}{2} \gamma^2 \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \alpha^2 \right) + \left[\frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \delta^2 \right) - 3\alpha\delta\gamma \right] \beta \right\}.$$

Dla rozwiązania nietrywialnego, wykorzystując zależność (12) z równań (21) i (22) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} &= 3\gamma \left(\frac{3}{4} R^2 - 2\frac{\alpha}{\beta} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \mu^2 - \left(\alpha - \frac{3}{4} \beta R^2 \right)^2}, \\ R_{1,2}^2 &= \frac{\left\{ 3 \left[\frac{1}{2} \alpha\beta + \gamma \left(\frac{3}{2} \delta + 9\gamma \frac{\alpha}{\beta} \right) \right] \pm \sqrt{\Delta_2} \right\}}{9(9\gamma^2 + \beta^2)}, \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie

$$\Delta_2 = \frac{9}{2} \left\{ \frac{9}{2} \gamma^2 \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \alpha^2 \right) + \left[\frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \delta^2 \right) - 3\alpha\delta\gamma \right] \beta \right\}.$$

Aby amplitudy drgań były rzeczywiste, muszą być spełnione warunki

$$\Delta_1 \geq 0; \quad \Delta_2 \geq 0,$$

co prowadzi do wspólnej nierówności

$$\frac{9}{2} \gamma^2 \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \alpha^2 \right) + \left[\frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \delta^2 \right) - 3\alpha\delta\gamma \right] \beta \geq 0.$$

W rezultacie znajdujemy

$$\begin{aligned} \delta &\leq -3\gamma \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2} \mu \sqrt{1 + 9 \frac{\gamma^2}{\beta^2}}, \\ \delta &\geq -3\gamma \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2} \mu \sqrt{1 + 9 \frac{\gamma^2}{\beta^2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

3. Zagadnienie stateczności

Zbadajmy metodą analityczną stateczność rozwiązania $A = 0$; $R \neq 0$. Przypadek $A \neq 0$; $R = 0$ — z miękkim samowzbudzeniem — odpowiada niestatecznemu położeniu równowagi i statecznemu cyklowi granicznemu [1].

Wprowadźmy do rozwiązania $x(\tau)$ zaburzenie $\delta x = y(\tau)$, po czym otrzymamy

$$\bar{x}(\tau) = x(\tau) + y(\tau)$$

Wykorzystując równanie (18) znajdujemy

$$\ddot{y} - (\alpha - \beta x^2) \dot{y} + 2\beta x \dot{x} y + (1 + \delta - \mu \cos 2\tau + 3\gamma x^2) y = 0.$$

Podstawiając następnie

$$x = B_1 \cos \tau + B_2 \sin \tau,$$

równanie w wariacjach przyjmuje postać

$$\ddot{y} + y = (r_0 + r_1 \cos 2\tau + r_2 \sin 2\tau) \dot{y} + (s_0 + s_1 \cos 2\tau + s_2 \sin 2\tau) y, \quad (28)$$

gdzie

$$\begin{aligned} r_0 &= \alpha - \frac{1}{2} \beta R^2; & r_1 &= -\frac{1}{2} \beta (B_1^2 - B_2^2), \\ r_2 &= -\beta B_1 B_2; & s_0 &= -\left(\delta + \frac{3}{2} \gamma R^2 \right), \\ s_1 &= \mu - \frac{3}{2} \gamma (B_1^2 - B_2^2) - 2\beta B_1 B_2; \\ s_2 &= \beta (B_1^2 - B_2^2) - 3\beta B_1 B_2, \end{aligned} \quad (29)$$

lub w formie skróconej

$$\ddot{y} + y = f_1(\tau) \dot{y} + f_2(\tau) y.$$

Podstawiając

$$y = e^{q\tau} \cdot z(\tau),$$

otrzymujemy równanie

$$\ddot{z} + z = [f_1(\tau) - 2q] \dot{z} + [f_1(\tau)q + f_2(\tau) - q^2] z,$$

dla którego, wykorzystując

$$z = a \cos \tau + b \sin \tau,$$

znajdujemy

$$(s_0 - \varrho^2)^2 - \frac{1}{4} (s_1 - r_2)^2 + (r_0 - 2\varrho)^2 - \frac{1}{4} (r_1 + s_2)^2 = 0.$$

Rozwiązując powyższe równanie, otrzymujemy

$$2\varrho = r_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4} [(s_1 - r_2)^2 + (r_1 + s_2)^2 - s_0^2]},$$

W rezultacie, warunki stateczności przyjmują postać

$$r_0 < 0; \quad r_0^2 > \frac{1}{4} [(s_1 - r_2)^2 + (r_1 + s_2)^2] - s_0^2. \quad (30)$$

Uwzględniając związki

$$B_1^2 - B_2^2 = \pm \frac{2}{\mu} R^2 \sqrt{M},$$

$$B_1 B_2 = \frac{1}{\mu} \left(-\alpha + \frac{1}{4} \beta R^2 \right) R^2,$$

gdzie

$$M = \frac{1}{4} \mu^2 - \left(\alpha - \frac{1}{4} \beta R^2 \right)^2,$$

po wykorzystaniu zależności (29), znajdujemy warunki stateczności rozwiązania

$$R > \sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}, \quad (31)$$

$$\pm 3\gamma \sqrt{M} + \beta \left(\alpha - \frac{1}{4} \beta R^2 \right) < 0. \quad (32)$$

4. Przykłady liczbowe i badania analogowe

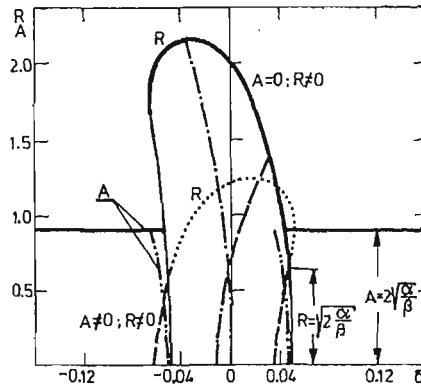
W celu ilustracji wyników badań analitycznych obliczono amplitudy drgań w funkcji wariacji częstości wymuszenia parametrycznego.

Przyjęto następujące wartości współczynników bezwymiarowych

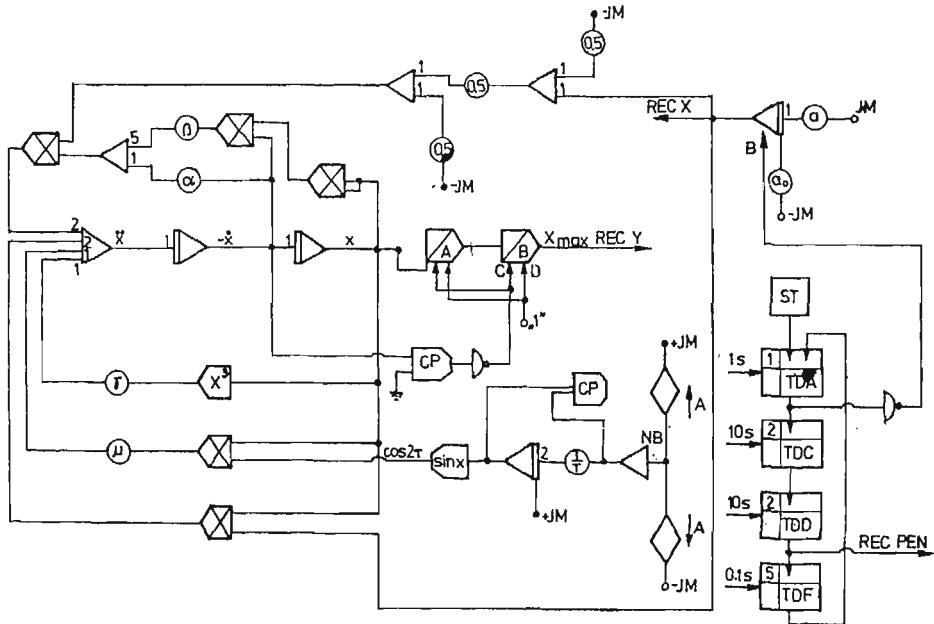
$$\alpha = 0,01; \quad \beta = 0,05; \quad \gamma = 0,01; \quad \mu = 0,1.$$

Wyniki obliczeń ilustruje rys. 1.

W określonym zakresie częstości wymuszenia parametrycznego nie występują drgania samowzbudne, natomiast krzywe amplitudowe dla rozwiązań $A = 0$, $R \neq 0$ oraz $A \neq 0$, $R \neq 0$ przecinają się dla amplitudy drgań parametrycznych $R = \sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}$. Od tej wartości — zgodnie z warunkiem (31) — dla rozwiązania $A = 0$, $R \neq 0$ drgania stateczne dotyczą części krzywej amplitudowej zaznaczonej linią grubą. Granica stateczności określona jest na wykresie $R(\delta)$ styczną pionową (32). Podkreślić należy, że wzrostowi δ od-



Rys. 1



Rys. 2

powiada małe częstotliwości wymuszenia parametrycznego (15), (17) i odwrotnie. Tak więc, charakter przebiegu $R(\delta)$ dla $A = 0$; $R \neq 0$ odpowiada sztywnej charakterystyce sprężystości.

Równania (16) i (18) poddano także analizie na maszynie analogowej. W obu przypadkach, równania maszynowe przyjmują postać

$$\ddot{x} = \alpha \varepsilon_1 \frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} x - \beta \varepsilon_1 \frac{s^{(2)}}{[s^{(0)}]^2 s^{(1)}} x^2 \dot{x} - \varepsilon_2 \frac{s^{(2)}}{s^{(0)}} x + \mu \frac{s^{(2)}}{s^{(0)}} x \cos 2\tau - \gamma \frac{s^2}{[s^{(0)}]^3} x^3,$$

gdzie: $s^{(n)}$ — współczynniki skali amplitud, ($n = 0, 1, 2$)

Dla równania (16) $\varepsilon_1 = 1 + \frac{\delta}{2}$; $\varepsilon_2 = 1 + \delta$, zaś dla (18) $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 1 + \delta$. Schemat maszynowy zawierający układy: pomiaru amplitudy, zmiany parametru δ oraz sterowania logicznego przedstawia rys. 2.

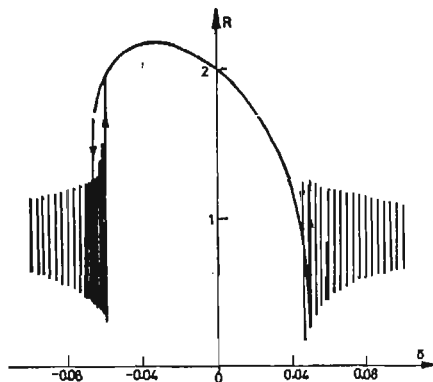
Badania przeprowadzono na maszynie analogowej MEDA 43H przy automatycznym sterowaniu zmianą parametru δ . Pisak rejestrował graniczne wartości wychyleń, w przypadku drgań dwuczęstościowych zakresłał pewną powierzchnię [9], natomiast dla drgań jednoczęstościowych wyznaczał krzywą gładką — obwiednię amplitud. W celu określenia przedziałów dwuznaczności rozwiązań, rejestrację przeprowadzono przy zwiększaniu a następnie zmniejszaniu wartości δ . W badaniach analogowych przyjęto dane liczbowe zamieszczone w tabl. 1.

Tablica 1. Drgania układu samowzbudnego z wymuszeniem parametrycznym i nieliniową sprężystością

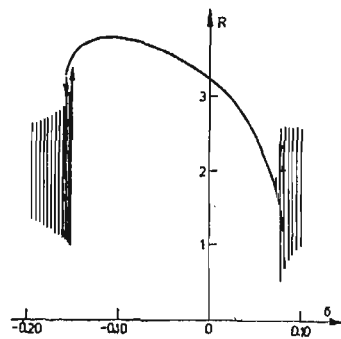
Wariant	α	β	μ	γ
I	0,01	0,05	0,1	0,01
II	0,04	0,04	0,2	0,01
III	0,01	0,05	0,1	0
IV	0,05	0,01	0,2	-0,01

W przypadkach I, II i IV badania analogowe przeprowadzono dla równania (16) oraz (18). Rezultaty dotyczące obu równań zamieszczono — w celach porównawczych — na tych samych rysunkach.

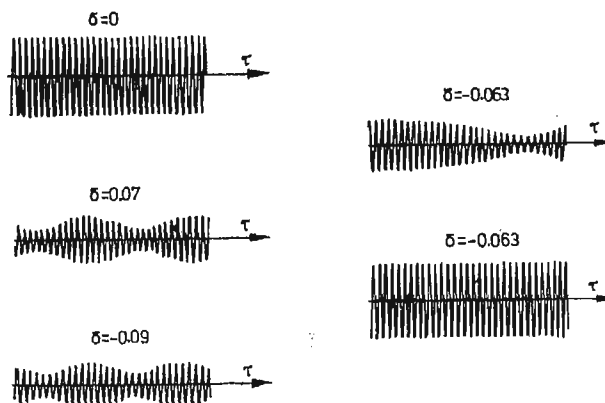
Zupełną zgodność wyników tych badań otrzymano dla wariantów I (rys. 3) oraz II (rys. 4).



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Układ odpowiadający wariantowi I poddano na podstawie (18) również badaniom dodatkowym. Dla niektórych wartości parametru δ zarejestrowano przebiegi czasowe drgań (rys. 5).

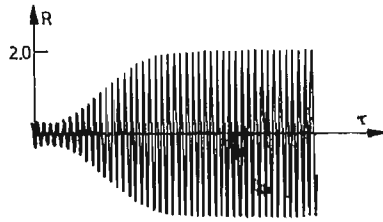
Wyniki obliczeń częstości drgań samowzbudnych przy wykorzystaniu (10) oraz (23) zamieszczono w tabl. 2. Określono również odchylenie względne wartości Ω_1 w stosunku do Ω wykorzystując przy tym zależność

$$\varepsilon = \left| 1 - \frac{\Omega_1}{\Omega} \right| 100\%.$$

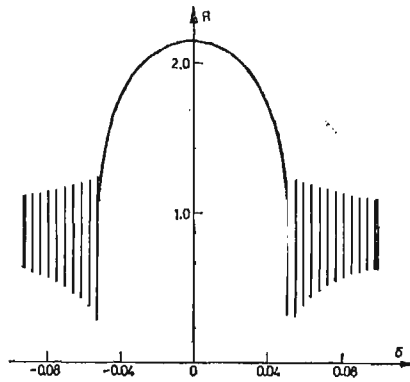
Tablica 2. Drgania układu samowzbudnego z wymuszeniem parametrycznym i nieliniową sprężystością

Wariant	δ	Ω	Ω_1	ε [%]	Ω_1/p
I	0,070	1,039	1,037	0,19	1,0029
	-0,063	0,972	0,971	0,11	
	-0,090	0,959	0,957	0,21	
IV	0,400	1,152	1,118	2,95	0,9219

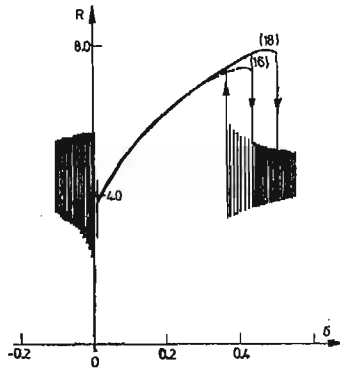
Porównując wyniki badań analitycznych i analogowych (wariant I, rys. 1 i rys. 3) podkreślić należy dobrą zgodność wyników badań. Różnią się one w przypadkach: maksymalnej amplitudy drgań parametrycznych o 1%, amplitudy drgań samowzbudnych o 2,5%, oraz szerokości przedziału δ w którym nie występują drgania samowzbudne o 4%. W rezultacie obu rodzajów badań, stwierdzono występowanie dwóch przedziałów wartości δ dla których istnieją półtrywialne rozwiązania stateczne $A \neq 0, R = 0$ oraz $A = 0, R \neq 0$. Zależnie od kierunku zmiany parametru δ odpowiadają im dudnienia lub okresowe drgania parametryczne (rys. 5).



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

W tego rodzaju badaniach nie wystąpiły drgania odpowiadające rozwiązaniu $A \neq 0$, $R \neq 0$, podobnie jak dla analogicznych układów w [4]. Ponadto obliczono odpowiadające temu rozwiązaniu warunki początkowe dla $\delta = -0,0315$ i zbadano na maszynie analogowej drgania układu. W przypadku tym układ nie realizował drgań zgodnych z rozwiązaniem nietrywialnym natomiast jego ruch ustalony odpowiadał krzywej amplitudowej $A = 0$, $R \neq 0$ (rys. 6).

Rys. 7 przedstawia wyniki badań analogowych dla układu z liniową charakterystyką sprężystości.

Zgodnie z rezultatami badań analitycznych, krzywa szkieletowa jest tutaj liniową pionową tj. niezależną od częstości wymuszenia parametrycznego. Wyniki badań analogowych równań (16) i (18) w przypadku IV przedstawia rys. 8.

Dla określonego zakresu wartości δ ujawnia się tutaj wpływ poczynionych uproszczeń w równaniu różniczkowym na wartość amplitud drgań parametrycznych. Maksymalne amplitudy tych drgań różnią się w tym przypadku o około 7%. Stąd również wynika wpływ na szerokość przedziału wartości δ w którym występują rozwiązania półtrywialne. Z badań obu równań stwierdzić należy dobrą zgodność szerokości przedziałów częstości wymuszenia parametrycznego w których nie występują drgania samowzbudne. Krzywa amplitudowa odpowiada miękkiej charakterystyce sprężystości.

5. Podsumowanie

Drgania układów z miękkim samowzbudzeniem i wymuszeniem parametrycznym charakteryzuje zaniknięcie drgań samowzbudnych w określonych przedziałach częstości odpowiadających głównemu rezonansowi parametrycznemu. Badając układy z nieliniową — symetryczną charakterystyką sprężystości stwierdzono, że na zewnątrz przedziału częstości wymuszenia parametrycznego w którym drgania samowzbudne nie występują, znajdują się przylegające obustronnie dwa przedziały niejednoznaczności określenia amplitud odpowiadające zjawisku „histerezy drgań”. Wewnątrz tych przedziałów występują stateczne drgania parametryczne bądź samowzbudne. Powyższe wyniki należy interpretować jako efekt wzajemnego oddziaływania obu rodzajów drgań samookresowych (parametrycznych i samowzbudnych) bowiem dla tego typu układów nie zachodzi zasada superpozycji.

W pracy ograniczono się do problemów istnienia i stateczności drgań, nie rozpatrzono natomiast zagadnienia obszarów przyciągania. Powyższe rezultaty są zgodne z wynikami analizy drgań tego typu układów [2], [4] uzyskanymi innymi sposobami badań analitycznych. Stwierdzono, że wprowadzone uproszczenia modelu matematycznego nie zmieniają wyrażen określających amplitudy drgań samowzbudnych natomiast mają nieznaczny wpływ ilościowy na częstość tych drgań. W wyniku badań analitycznych rozwiązań równania uproszczonego oraz badań analogowych drgań na podstawie równania bez uproszczeń — przy pewnych parametrach układu — uzyskano zgodność wartości amplitud statecznych drgań parametrycznych.

Nieznaczne różnice maksymalnych wartości tych amplitud (wariant IV) mają wpływ na zakres częstości wymuszenia parametrycznego, w którym występują stateczne drgania parametryczne bądź samowzbudne.

Uproszczenia modelu matematycznego nie mają istotnego wpływu na szerokość przedziału częstości wymuszenia parametrycznego, w którym drgania samowzbudne nie występują.

Przedstawione w pracy badania analityczne można w rozpatrywanych przypadkach traktować jako sposób otrzymania rozwiązań przybliżonych.

Literatura cytowana w tekście

1. N. MINORSKI, *Drgania nieliniowe*, PWN Warszawa 1967.
2. W. O. KONONIENKO, P. S. KOWALCZUK, *Wozdziejstwie parametricznego wozbuzdzenia na awtokolebatielnuju systemu*, Prikladnaja miechanika, t. VII, w. 6, 1971 r.
3. W. O. KONONIENKO, P. S. KOWALCZUK, *Wozdziejstwie wnieszniej garmoniczskoi sily na awtokolebatielnuju systemu s izmienlajuszczimsja parametrom*, Prikladnaja miechanika, t. VII, w. 10, 1971.
4. A. TONDL, *On the interaction between self—excited and parametric vibrations*, Bechavice, Nat. Res. Inst. for Machine Design, Monographs and Memoranda, No 25, 1978.
5. N. N. BOGOLJUBOW, J. A. MITROPOLSKI, *Asimptoticzeskije metody w teorii nieliniowych kolebanii*. Gosudarstvennoje izdatielstwo fizyko-matiematiczeskoj literatury, Moskwa 1958.
6. J. P. DEN HARTOG, *Drgania mechaniczne*, PWN Warszawa.
7. M. MITSCHE, *Dynamika samochodu*, W.K.Ł., Warszawa 1977.
8. R. Ł. HATFMAN, *Dinamika*, Nauka, Moskwa 1972.
9. A. TONDL, *Awtokolebanija mechaniczeskich sistem*, MiR, Moskwa 1979.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ САМОВОЗБУЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ
С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ И НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТЬЮ

В работе рассмотрели колебания системы с мягким самовозбуждением, параметрическим возбуждением а также нелинейную характеристику упругости кубического типа. Рассматривая проблемы существования и устойчивости решений дифференциального уравнения определили эффекты взаимного воздействия периодических колебаний. Констатировали между прочим, что в определенных интервалах частоты параметрического вынуждения самовозбуждающие колебания не выступают. Аналитические исследования провели учитывая опрощающие исходные данные а их влияние на результаты определили путем аналогового моделирования.

Summary

THE VIBRATIONS OF THE SELF-EXCITED SYSTEM WITH THE PARAMETRIC INPUT AND
NON-LINEAR ELASTICITY

In this work there were considered the vibrations of a system with the soft self-excitation, the parametric input and with a non-linear characteristic of the cubical type elasticity. Considering the problems of the existance and stability of the issues of the differential equation there were defined the effects of the mutual influence of self-periodic vibrations in the determinate range of the parametric force's frequency. Analytical researches were proceeded under the certain, simplifying conditions, which influence was defined with the method of an analogue modelling.

JEDNOMODALNA I DWUMODALNA OPTIMALIZACJA ŚCISKANYCH PRĘTÓW DRGAJĄCYCH¹⁾

BOHDAN BOCHENEK

Politechnika Krakowska

ANTONI GAJEWSKI

Politechnika Krakowska

1. Uwagi wstępne

Do niedawna w pracach dotyczących optymalizacji drgających i narażonych na utratę stateczności elementów konstrukcji, kształtowanie przeprowadzane było jedynie z uwagi na wybraną pojedynczą wartość własną (częstość drgań, siłę krytyczną). Jednak w wielu przypadkach takie sformułowanie (jednomodalne) okazuje się niewystarczające. Ma to miejsce wtedy, gdy element ukształtowany z uwagi na początkowo najniższą wartość własną, związaną z pewną określoną formą drgań lub wyboczenia, posiada niższą wartość drugiej wartości własnej, związanej z inną formą drgań lub wyboczenia. Należy wówczas stosować dwumodalne sformułowanie problemu optymalizacji, polegające na optymalnym kształtowaniu z uwagi na podwójną wartość własną, związaną równocześnie z dwiema formami drgań (lub wyboczenia).

Konieczność zastosowania takiego sformułowania została zauważona po raz pierwszy w pracy N. OLHOFFA i S. H. RASMUSSENA [1], w której znaleziono optymalny kształt obustronnie, sztywnie utwierdzonego pręta ściskanego siłą osiową.

Sformułowanie dwumodalne staje się z reguły konieczne w przypadku optymalizacji łuków drgających i narażonych na utratę stateczności; szereg rozwiązań dotyczących sprężystych łuków, znajdujących się w bezmomentowym stanie przedwyboczeniowym o osi nierozciągliwej, otrzymano w pracy J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [2]. Podobna sytuacja pojawia się w przypadku prostej ramy portalowej ściskanej siłami skupionymi działającymi w kierunku osi nieodkształconych słupów. Zwrócili na to uwagę E. F. MASUR i Z. MRÓZ [3], którzy przedstawili proste przybliżone rozwiązanie dla pręta i ramy portalowej, złożonej z elementów o przekrojach sandwiczowych. Kompletnie rozwiązanie zagadnienia jednomodalnej i dwumodalnej optymalizacji ze względu na wyboczenie sprężystej ramy portalowej, złożonej z elementów o zmiennych przekrojach (w sposób ciągły lub skokowy) zawarte jest w pracy B. BOCHENKA i A. GAJEWSKIEGO [4].

Charakterystyczne cechy zjawiska optymalizacji dwumodalnej przedstawiono również

¹ Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego PW. 05-12.

w pracy S. PRAGERA i W. PRAGERA [5] na przykładzie modelu pręta ściskanego, składającego się z kilku sztywnych prętów, połączonych ze sobą oraz z podporami za pomocą sprężystych przegubów. Model ten został również wykorzystany w pracy A. GAJEWSKIEGO [6] w celu zademonstrowania dwumodalnej optymalizacji pręta ściskanego z uwagi na podstawową częstość jego drgań poprzecznych. Zawiera ona również sformułowanie (jednak bez szczegółowych obliczeń) problemu jedno- i dwumodalnej optymalizacji rzeczywistego pręta ściskanego.

W końcu należy zauważyć, że w pracy J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [7] podjęto próbę wykorzystania dwumodalnego sformułowania optymalizacji w niekonserwatywnych problemach stateczności w celu znalezienia optymalnego kształtu pręta ściskanego siłą śledzącą.

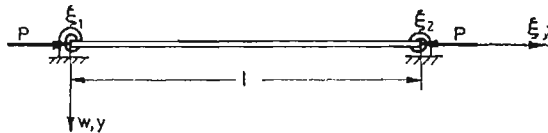
Celem niniejszej pracy jest szczegółowe rozwiązanie zagadnienia (sformułowanego w pracy [6]) optymalizacji kształtu pręta ściskanego, obustronnie sprężyste utwierdzonego, z uwagi na podstawową częstość jego drgań poprzecznych. Zagadnienie to mieści się, jako przypadek szczególny, w ogólnym sformułowaniu problematyki optymalnego kształtowania drgających prętów ściskanych, przedstawionym w pracy J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [7] oraz W. G. GRINIEWA i A. P. FILIPPOWA [8].

W celu ułatwienia czytania pracy przytoczymy tu podstawowe wyprowadzenia wzorów, jednak tylko w odniesieniu do badanego szczególnego przypadku.

2. Sformułowanie zagadnienia

2.1. Równania stanu i warunki brzegowe. W niniejszej pracy rozważamy drgania pręta obustronnie sprężyste utwierdzonego, ściskanego stałą siłą osiową P , przedstawionego na rys. 1. Całkowita objętość pręta o długości l jest równa V . Załóżmy, że w każdym przekroju poprzecznym obowiązuje następująca zależność między momentem bezwładności i polem powierzchni przekroju:

$$I(\xi) = \bar{c}[A(\xi)]^\nu, \quad (2.1)$$



Rys. 1

gdzie \bar{c} jest pewną stałą a wykładnik ν przyjmuje, w najczęściej spotykanych przypadkach, wartości 1,2 lub 3 ($\nu = 1$ dla płaskozbieżnych prętów o stałej wysokości przekroju, $\nu = 2$ dla prętów wszechstronnie równomiernie zbieżnych, $\nu = 3$ dla płasko-zbieżnych prętów o stałej szerokości). Gdy $\nu = 2$, stała $\bar{c} = 1/12$ dla kwadratu lub $\bar{c} = 1/4\pi$ dla koła.

Równanie różniczkowe małych drgań poprzecznych pręta ściskanego:

$$[EI(\xi)w''']' + Pw'' + \rho A(\xi)\ddot{w} = 0, \quad (2.2)$$

po rozdzieleniu zmiennych czasowej i przestrzennej za pomocą przedstawienia:

$$w = v(\xi)e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

oraz wprowadzeniu następujących stałych i zmiennych bezwymiarowych:

$$\begin{aligned} x &= \xi/l, & y(x) &= v(x)/l, & \Phi(x) &= A(x)/A_0, \\ \beta &= \frac{Pl^{\nu+2}}{cEV^{\nu}}, & \Omega &= \frac{\rho l^{\nu+3}}{cEV^{\nu-1}} \omega^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

możemy przedstawić w formie układu równań stanu:

$$\begin{cases} y'_i = \varphi_i, \\ \varphi'_i = -\frac{m_i}{\Phi^{\nu}}, \\ m'_i = q_i + \beta \varphi_i, \\ q'_i = -\Omega_i \Phi y_i. \end{cases} \quad (2.5)$$

Wielkości wymiarowe, występujące w związkach (2.4) oznaczają: ξ — zmienną niezależną, mierzoną wzdłuż nieodkształconej osi pręta, $w(\xi, t)$ — ugięcie pręta w punkcie ξ w chwili t , P — ściskającą siłę osiową, E — moduł Younga, ω — częstość drgań, ρ — gęstość materiału pręta. β — oznacza tu bezwymiarową siłę ściskającą, a Ω — bezwymiarowy kwadrat częstości drgań.

W procesie optymalizacji będą interesowały nas dwie pierwsze wartości własne (częstość lub siły krytyczne) oraz odpowiadające im zmienne stanu (istotne jest przy tym ich rozróżnienie). Dlatego też w równaniach (2.5) wprowadzono wskaźnik „ i ”, który wskazuje na zmienne stanu związane odpowiednio z pierwszą lub drugą wartością własną: $i = 1$ lub 2 .

Przekrój odniesienia A_0 został tu zdefiniowany następująco:

$$A_0 = V/l, \quad (2.6)$$

wobec czego bezwymiarowa funkcja $\phi(x)$, określająca przekrój poprzeczny pręta musi spełniać warunek unormowania:

$$\int_0^1 \phi(x) dx = 1. \quad (2.7)$$

Do układu równań (2.5) należy dołączyć odpowiednie warunki brzegowe. W dalszym ciągu wyróżniamy dwa przypadki szczególne: a. symetryczne zamocowanie końców pręta.

W takim przypadku całkowanie równań (2.5) wystarczy przeprowadzić w przedziale $(0, 1/2)$ a warunki brzegowe zadać dla $x = 0$ oraz $x = 1/2$. Formę drgań związaną z pierwszą wartością własną (symetryczną) wyznaczają wtedy następujące warunki ($i = 1$):

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0, & \varphi_1(1/2) &= 0, \\ m_1(0) + \frac{1}{\xi} \varphi_1(0) &= 0, & q_1(1/2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

natomiast dla drugiej formy drgań (antymetrycznej, $i = 2$):

$$\begin{aligned} y_2(0) &= 0, & y_2(1/2) &= 0, \\ m_2(0) + \frac{1}{\xi} \varphi_2(0) &= 0, & m_2(1/2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

b. niesymetryczne zamocowanie końców pręta.

W tym przypadku całkowanie przeprowadzamy dla $x \in (0, 1)$ i nie mamy możliwości rozróżnienia form drgań poprzez zadanie odpowiednich warunków brzegowych. Warunki brzegowe dla obu form drgań są takie same:

$$\begin{aligned} y_i(0) = 0, \quad y_i(1) = 0, \\ m_i(0) + \frac{1}{\xi_1} \varphi_1(0) = 0, \quad m_i(1) + \frac{1}{\xi_2} \varphi_1(1) = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

natomiast rozróżnienie form drgań następuje poprzez liczbę miejsc zerowych linii ugięcia (linia ugięcia odpowiadająca pierwszej wartości własnej nie ma miejsc zerowych a odpowiadająca drugiej ma jedno miejsce zerowe). Występujące w związkach (2.8), (2.9), (2.10) parametry ξ , ξ_1 , ξ_2 , charakteryzują zamocowanie końców pręta. Gdy parametry te są równe zero wówczas końce pręta są sztywnie utwierdzone, gdy natomiast zmierzają do nieskończoności pręt jest przegubowo zamocowany.

2.2. Warunek konieczny optymalności. Problem polega na znalezieniu funkcji $\Phi(x)$ spełniającej równania stanu (2.5), warunki brzegowe (2.8), (2.9) albo (2.10), warunek unormowania (2.7), geometryczne warunki ograniczające:

$$\phi_0 \leq \phi \leq \phi_1, \quad (2.11)$$

która minimalizuje objętość przy ustalonej częstotliwości drgań lub, w sformułowaniu dualnym, maksymalizuje częstotliwość drgań przy stałej objętości.

2.2.1. Optymalizacja jednomodalna $i = 1$ albo $i = 2$. Warunek konieczny dla ekstremum funkcjonału objętości pręta wyprowadzimy w oparciu o teorię sterowania optymalnego, wykorzystując „zasadę maksimum” Pontriagina. Wprowadzając dodatkową zmienną stanu $y_0(x)$, spełniającą warunki:

$$y_0'(x) = \Phi(x), \quad y_0(1) = 1, \quad y_0(0) = 0, \quad (2.12)$$

oraz wektor stanu sprzężonego:

$$\phi = (\psi_{y_1}, \psi_{\varphi_1}, \psi_{m_1}, \psi_{q_1}, \psi_0), \quad (2.13)$$

otrzymamy Hamiltonian w następującej postaci:

$$\begin{aligned} H = \psi_{y_1} \varphi_1 + \psi_{\varphi_1} (-m_1 / \phi^v) + \psi_{m_1} (q_1 + \beta \varphi_1) + \\ + \psi_{q_1} (-\Omega_1 \phi y_1) + \psi_0 \phi, \quad i = 1 \quad \text{albo} \quad i = 2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Układ równań sprzężonych:

$$\begin{aligned} \psi_{y_1}' = \Omega_1 \phi \psi_{q_1}, \quad \psi_{m_1}' = \psi_{\varphi_1} / \phi^v \\ \psi_{\varphi_1}' = -\psi_{y_1} - \beta \psi_{m_1}, \quad \psi_{q_1}' = -\psi_{m_1}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

może być w naszym przypadku sprowadzony do równań stanu za pomocą podstawień:

$$\psi_{y_1} = kq_1, \quad \psi_{m_1} = k\varphi_1, \quad \psi_{\varphi_1} = -km_1, \quad \psi_{q_1} = -ky_1, \quad (2.16)$$

w którym k jest dowolną stałą różną od zera. Również odpowiednie warunki brzegowe, wyznaczone z warunków transwersalności przyjmują identyczną postać z równaniami (2.8), (2.9), (2.10). Mówimy wówczas, że układ równań stanu jest samosprężony w silnym sensie a hamiltonian (2.14) przyjmuje postać:

$$H = k(2q_1 \varphi_1 + m_1^2 / \phi^v + \beta \varphi_1^2 + \Omega_1 \phi y_1^2) + \psi_0 \phi. \quad (2.17)$$

Poszukiwany warunek konieczny optymalności jest warunkiem ekstremum hamiltonianu (2.17) względem zmiennej sterowania; $\partial H/\partial \phi = 0$;

$$\phi(x) = \left(\frac{m_i^2}{\lambda + \Omega_i y_i^2} \right)^{1/(1+\nu)}, \quad \text{gdzie: } \lambda = \psi_0/k, \quad i = 1, 2. \quad (2.18)$$

2.2.2. Optymalizacja dwumodalna $i = 1, 2$. W tym przypadku dopuszczamy możliwość równoczesnego wystąpienia obu form wyboczenia, odpowiadających tej samej wartości własnej — częstości drgań Ω . Hamiltonian po uwzględnieniu własności samosprężenia przyjmuje postać:

$$H = \sum_{i=1}^2 k_i (2q_i \varphi_i + m_i^2 / \phi^\nu + \beta q_i^2 + \Omega_i \phi y_i^2) + \psi_0 \phi \quad (2.19)$$

gdzie k_1 i k_2 są dowolnymi stałymi różnymi od zera.

Warunek ekstremum hamiltonianu (2.19) prowadzi do następującego warunku optymalności:

$$\phi(x) = \left\{ \frac{\nu[(1-\mu)m_1^2 + \mu m_2^2]}{\lambda + (1-\mu)\Omega_1 y_1^2 + \mu\Omega_2 y_2^2} \right\}^{1/(1+\nu)} \quad (2.20)$$

gdzie wprowadzono nowe stałe:

$$\lambda = \psi_0/(k_1 + k_2), \quad \mu = k_2/(k_1 + k_2). \quad (2.21)$$

Stałą λ dobieramy tak aby spełniony był warunek unormowania (2.7), a stałą μ tak, aby częstość drgań otrzymana w rozwiązaniu układu (2.5) dla $i = 1$ była równa częstości otrzymanej z rozwiązania tego układu dla $i = 2$.

3. Metoda rozwiązania zagadnienia

Poszukiwanie optymalnego kształtu pręta opiera się na iteracyjnej metodzie numerycznej szeroko stosowanej przez W. B. GRINIEWA i A. P. FILIPPOWA [9] i wykorzystywanej również w pracach J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [2], [7]. Schemat obliczeń zależy od rodzaju optymalizacji.

a. Optymalizacja jednomodalna.

Zakładamy wstępnie $\phi^{(0)} = 1$ (pręt pryzmatyczny). Następnie całkujemy układ równań (2.5) z odpowiednimi warunkami brzegowymi i wyznaczamy odpowiednią częstość drgań. Z warunku optymalności (2.18) i z warunków (2.7), (2.11) określamy poprawiony kształt $\phi^{(1)}$, który podstawiamy do układu (2.5) i powtórnie całkujemy. Gdy wartości częstości otrzymane w dwóch kolejnych powtórzeniach procesu będą (z przyjętą dokładnością) bliskie sobie proces kończymy.

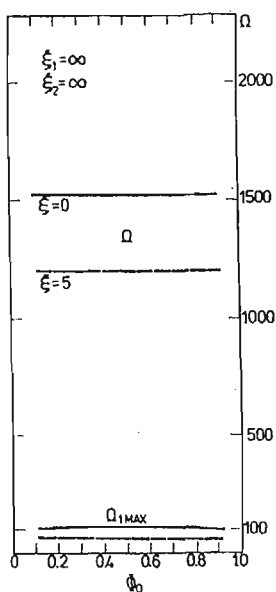
b. Optymalizacja dwumodalna.

Zakładając początkową postać funkcji $\Phi^{(0)}$ całkujemy układ równań (2.5) dla $i = 1$, a następnie dla $i = 2$ oraz wyznaczamy odpowiednie częstości $\Omega_1^{(0)}$, $\Omega_2^{(0)}$. Przyjmując pewną wartość μ wyznaczamy z warunku optymalności (2.20) poprawioną funkcję $\Phi^{(1)}$, którą podstawiamy do równań stanu i powtórnie całkując otrzymujemy częstości (na

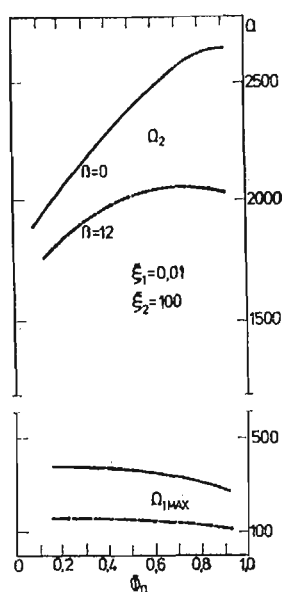
ogół różne od siebie). Odpowiedni dobór wartości μ pozwala zrównać częstości w danej iteracji. Kolejne iteracje kończymy gdy podwójna częstość w danej iteracji nie różni się (z przyjętą dokładnością) od podwójnej częstości w iteracji poprzedniej.

4. Analiza wyników

Opisane powyżej metody zastosowano do przykładowych obliczeń w przypadku pręta równomiernie wszechstronnie zbieżnego, tzn. dla: $\nu = 2$. Dla różnych wartości ξ_1 , ξ_2 oraz β znalezione zostały optymalne kształty i odpowiadające im częstości drgań. Ponadto w każdym z przypadków zmieniano dolne ograniczenie geometryczne $\phi_0 = \phi_1$ w przedziale (0, 1). Rezultaty obliczeń przedstawiają rysunki 2, 3, 5, 6, 8, 9, na których oznaczono: $\Omega_{1\max}$ — maksymalną częstość odpowiadającą pierwszej formie drgań, Ω_2 — doliczoną do otrzymanego optymalnego kształtu częstość odpowiadającą drugiej formie drgań. Na Rys. 4, 7, 10 przedstawiono optymalne kształty dla wybranych wartości ograniczenia Φ_0 , odpowiadające pierwszej formie drgań.

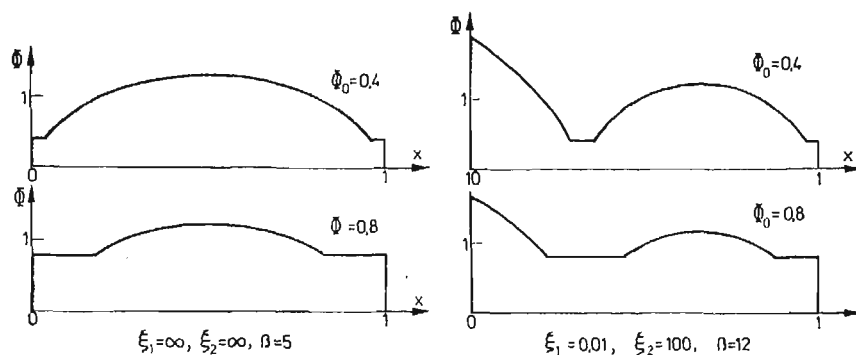


Rys. 2

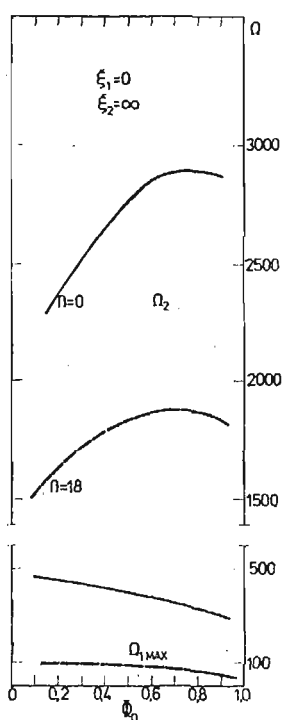


Rys. 3

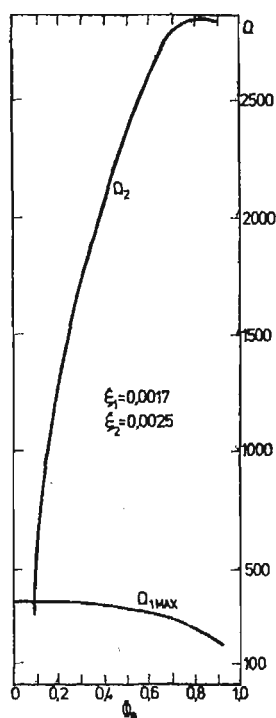
Okazuje się jednak, że dla pewnych przypadków, przedstawionych na Rys. 6, 8, 9 krzywe $\Omega_{1\max}(\Phi_0)$ i $\Omega_2(\Phi_0)$ przecinają się. Dla ograniczeń mniejszych od ograniczenia odpowiadającego punktowi przecięcia, otrzymane kształty nie mogą być traktowane jako optymalne [1] [6]. Zachodzi wtedy konieczność zastosowania optymalizacji dwumodalnej. Graniczny przypadek zamocowania końców pręta $\xi_1 = \xi_2 = 0$ (pręt obustronnie sztywnie utwierdzony) jest analizowany bardziej szczegółowo. Rys. 9 przedstawia pary krzywych $\Omega_{1\max}$, Ω_2 dla różnych wartości β ; dodatkowo naniesiono krzywą przedstawiającą za-



Rys. 4

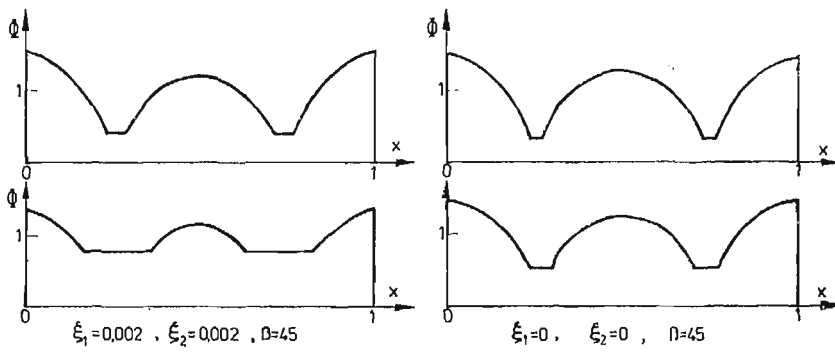


Rys. 5

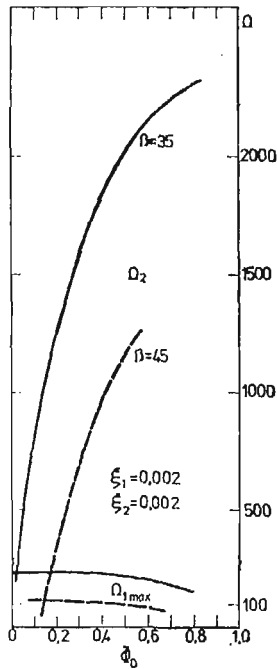


Rys. 6

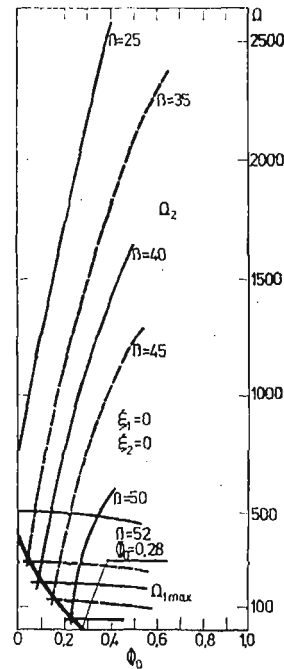
leżność wartości częstości, odpowiadającej punktowi przecięcia tych krzywych od wartości ograniczenia, dla którego krzywe przecinają się. Rys. 11a przedstawia zależność ograniczenia, odpowiadającego punktowi przecięcia tych krzywych od β , natomiast Rys. 11b zależność częstości, odpowiadającej punktowi przecięcia od β . Widoczne jest przejście graniczne do przypadku utraty stateczności, dla którego $\Omega = 0$, $\Phi_0 = 0.28$, $\beta = 52$ (dokładna wartość β znaleziona w pracy [1] wynosi 52.36).



Rys. 7

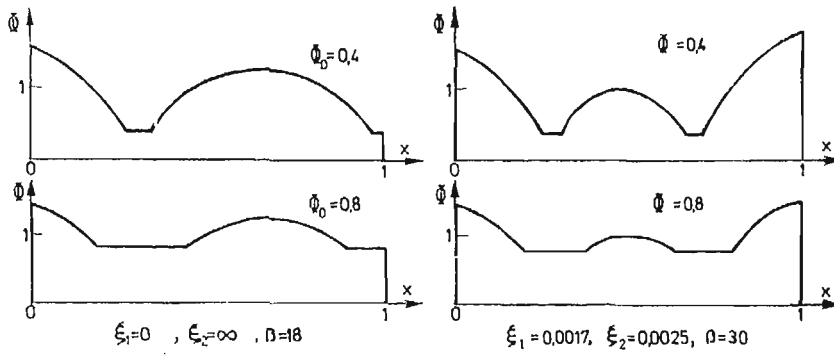


Rys. 8

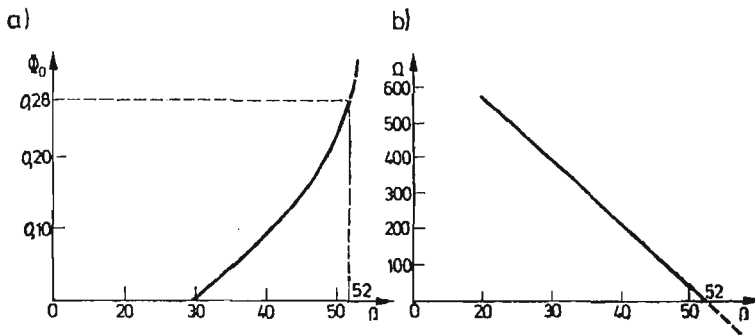


Rys. 9

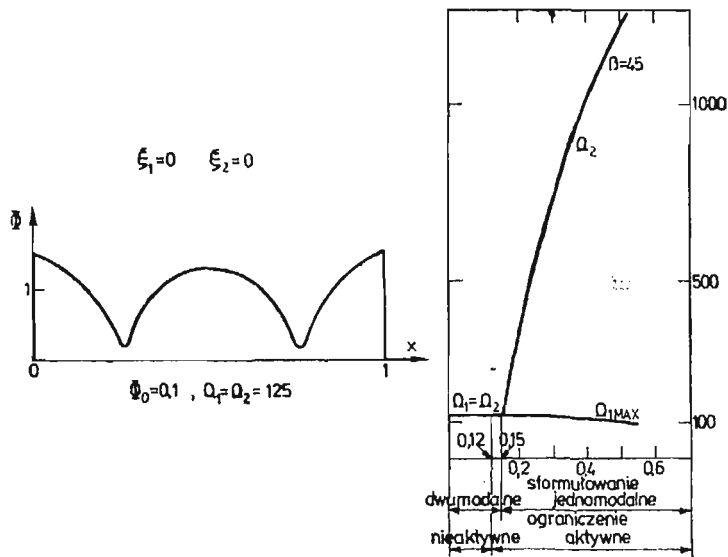
Z zależności powyższych możemy odczytać również, iż konieczność stosowania optymalizacji dwumodalnej do kształtowania pręta obustronnie utwierdzonego z uwagi na częstość drgań, zachodzi dla $\beta \in (30, 52)$. Przykładowy rezultat otrzymany z uwzględnieniem takiego właśnie sformułowania przedstawia Rys. 12. Charakterystyczne jest to, iż począwszy od pewnego ograniczenia kształty optymalne nie zależą od niego (ograniczenie jest nieaktywne); kształt optymalny jest również przedstawiony na rysunku.



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

5. Uwagi końcowe

Niniejsza praca zawiera szczegółowe rozwiązanie numeryczne problemu optymalnego kształtowania drgającego pręta ściskanego siłą osiową, z uwagi na podstawową częstość jego drgań. Dopuszczono możliwość istnienia asymetrii układu, spowodowanej różnymi wartościami parametrów charakteryzujących sprężystość utwierdzeń końców pręta. Wykazano konieczność stosowania optymalizacji dwumodalnej dla pewnych przypadków zamocowania końców pręta i pewnych wartości siły osiowej. Bardziej szczegółowo zbadano przypadek pręta obustronnie sztywnie utwierdzonego.

Literatura cytowana w tekście

1. N. OLHOFF, S. H. RASMUSSEN, *On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns*, Int. J. Solids Structures, 7, 13, 1977, 605 - 614.
2. J. BŁACHUT, A. GAJEWSKI, *On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches*, Int. J. Solids Structures, 7, 17, 1981, 653 - 667.
3. E. F. MASUR, Z. MRÓZ, *Singular solutions in structural optimization problems*, Proc. IUTAM Conf. on „Variational Methods in Solid Mechanics”, Northwestern University, Sept. 1978, ed. S. Nemat-Nasser, 337 - 343. New York: Pergamon Press, 1980.
4. B. BOCHENEK, A. GAJEWSKI, *Jednomodalna i dwumodalna optymalizacja ramy portalowej*, Rozpr. Inż., 1, 30, 1982, 21 - 36.
5. S. PRAGER, W. PRAGER, *A note on optimal design of columns*, Int. J. Mech. Sci., 4, 21, 1979, 249 - 251.
6. A. GAJEWSKI, *A note on unimodal and bimodal optimal design of vibrating compressed columns*, Int. J. Mech. Sci., 1, 23, 1981, 11 - 16.
7. J. BŁACHUT, A. GAJEWSKI, *A unified approach to optimal design of columns*, Solid Mech. Arch., 4, 5, 1980, 363 - 413.
8. W. B. GRINIEW, A. P. FILIPPOV, *Optimizacja stierżniej po spektrum sobstwiennykh znachenij*, Naukowa Dumka, Kijew, 1979.
9. W. B. GRINIEW, A. P. FILIPPOV, *Ob optimalnykh otcertanijach stierżniej w zadaczach ustojczivosti*, Stroit. Mech. i Rasz. Sooruz., 2, 1975, 21 - 27.

Резюме

ОДНОМОДАЛЬНАЯ И БИМОДАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ СЖИМАЕМОГО СТЕРЖНЯ

Целью настоящей работы является подробное решение задачи оптимизации формы сжимаемого стержня, двухсторонне упруго защемленного из-за основной частоты его поперечных колебаний.

Допускается возможность существования асимметрии системы, произведенной разными значениями параметров характеризующих упругость защемлений концов стержней. Доказывается необходимость применения бимодальной оптимизации для некоторых случаев защемления концов стержня и некоторых значений осевой силы.

Более подробно исследован случай стержня двухсторонне жестко защемленного.

Summary

SINGLE AND BIMODAL OPTIMIZATION OF VIBRATING COMPRESSED BAR

The paper is concerned with a detailed solution of the shape optimization problem of the elastically clamped-clamped compressed bar with respect to the fundamental frequency of its transverse vibration.

The asymmetry of system exerted by different values of the clamping elasticity parameters on each bar end is admissible.

Necessity of using bimodal optimization for certain cases of bar ends clamping as well as for certain values of axial force has been pointed out.

The case of rigidly clamped-clamped bar has been investigated in details.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 czerwca 1981 roku

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE MODELU ŁUKU O OSI ŚCIŚLIWEJ¹⁾

BOGDAN BOCHENEK

Politechnika Krakowska

1. Uwagi wstępne

W przypadku optymalnego kształtowania niektórych drgających i narażonych na utratę stateczności elementów konstrukcji okazuje się, że element ukształtowany z uwagi na podstawową wartość własną, związaną z odpowiednią formą drgań lub wybożenia (optymalizacja jednomodalna) posiada niższą wartość drugiej wartości własnej związanej z inną formą drgań lub wybożenia.

Jako pierwszy zaobserwował ten fakt J. KIUSALAAS [6] w przypadku optymalizacji ściskanego pręta na sprężystym podłożu. Jednak dopiero N. OLHOFF i S. H. RASMUSSEN w pracy [9] dotyczącej optymalnego kształtowania obustronnie utwierdzonego pręta ściskanego siłą osiową przeprowadzili szczegółową analizę problemu oraz sformułowali poprawny w takim przypadku warunek optymalności. Autorzy zaproponowali aby w razie stwierdzenia niewystarczalności sformułowania jednomodalnego stosować sformułowanie dwumodalne optymalizacji polegające na kształtowaniu z uwagi na podwójną wartość własną związaną z dwiema formami drgań lub wybożenia.

Od czasu ukazania się pracy N. Olhoffa i S. H. Rasmussena rozwiązanych zostało wiele zadań optymalizacji z uwzględnieniem dwumodalnego sformułowania. I tak m.in. S. PRAGER i W. PRAGER [11], A. GAJEWSKI [5], B. BOCHENEK i A. GAJEWSKI [4] rozwiązali problem dla drgających prętów, E. F. MASUR i Z. MRÓZ [8], B. BOCHENEK i A. GAJEWSKI [3] dla narażonej na utratę stateczności ramy natomiast J. BŁACHUT i A. GAJEWSKI [1] [2] oraz N. OLHOFF i R. H. PLAUT [10] dla drgających i narażonych na utratę stateczności łuków. W niemal wszystkich wymienionych pracach wykorzystano liniowe ujęcie problemu, co w przypadku analizy stateczności układu sprowadza się do uwzględnienia jedynie utraty stateczności przez bifurkację. Jedynie praca [2] zawiera ujęcie nieliniowe (uwzględnienie utraty stateczności przez przeskoki), ale rozwiązanie problemu wymaga wykorzystania skomplikowanej i pracochłonnej procedury numerycznej.

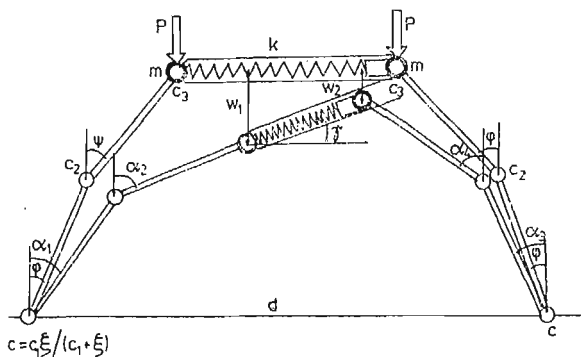
W niniejszej pracy w celu przedstawienia charakterystycznych cech optymalnego kształtowania łuku o osi ściśliwej (w ujęciu nieliniowym) zastąpimy rzeczywisty łuk prostym układem prętowym o czterech stopniach swobody, a problem kształtowania sprowadzimy do optymalizacji parametrycznej.

Rezultatem dwumodalnej optymalizacji w przypadku rozważania obu możliwych form utraty stateczności jest zrównanie się punktów odpowiadających bifurkacji i przeskokowi (na podstawowej ścieżce obciążenia).

¹⁾ Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego PW. 05-12.

2. Równania podstawowe

Rozważmy układ przedstawiony na rys. 1 (podobny układ wykorzystali A. D. KERR i M. T. SOIFER w pracy [7]). Złożony jest on z pięciu prętów połączonych przegubami sprężystymi, przy czym dla uproszczenia zakładamy, że tylko jeden pręt jest ściśliwy (ściśliwość pręta modelowana jest sprężyną o sztywności k). Sposób zamocowania końców pręta charakteryzuje parametr ξ , który dla przegubowego zamocowania jest równy zero, a dla sztywnego utwierdzenia zmierza do nieskończoności. Ten dyskretny układ modelo-

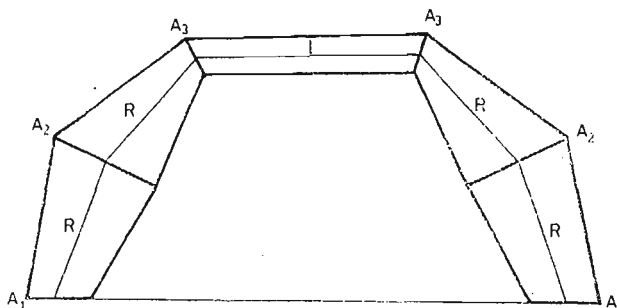


Rys. 1

wać ma sprężystie zamocowany rzeczywisty łuk o zmieniającym się w sposób ciągły polu powierzchni przekroju poprzecznego A . Zakładamy ponadto, że sztywności przegubów są proporcjonalne do pola powierzchni przekroju poprzecznego układu rzeczywistego.

$$c_i = \text{const } A_i^\nu \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

gdzie wykładnik ν w typowych przypadkach przyjmuje wartości 1, 2, 3 oraz, że wzdłuż długości prętów zmiana pola powierzchni przekroju poprzecznego jest liniowa (rys. 2).



Rys. 2

Równania opisujące zachowanie się układu (nieliniowe drgania) wyprowadzamy w oparciu o równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

Energię potencjalną równą różnicy energii sprężystości sprężyny i przegubów oraz pracy sił zewnętrznych na przemieszczeniach w_1 , w_2 przedstawia równanie

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2} c(\alpha_1 - \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_2(\alpha_2 - \alpha_1 - \psi + \varphi)^2 + \\ & + \frac{1}{2} c(\alpha_3 - \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_2(\alpha_4 - \alpha_3 - \psi - \varphi)^2 + \\ & + \frac{1}{2} c_3(\psi - \alpha_2 - \gamma)^2 + \frac{1}{2} c_3(\psi - \alpha_4 + \gamma)^2 - P(w_1 + w_2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

natomiast energię kinetyczną mas skupionych równanie

$$\begin{aligned} \pi_k = & \frac{1}{2} m \left\{ \left[\frac{d}{dt} (R \sin \alpha_1 + R \sin \alpha_2) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (R \cos \alpha_1 + R \cos \alpha_2) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{d}{dt} (d - R \sin \alpha_3 - R \sin \alpha_4) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (R \cos \alpha_3 + R \cos \alpha_4) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

W równaniach (2.2) i (2.3) wprowadzono następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} w_1 &= R(\cos \varphi - \cos \alpha_1 + \cos \psi - \cos \alpha_2), \\ w_2 &= R(\cos \varphi - \cos \alpha_3 + \cos \psi - \cos \alpha_4), \\ \lambda &= \frac{R}{l}, \\ \kappa &= 1 + \lambda(2 \sin \varphi + 2 \sin \psi - \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 - \sin \alpha_3 - \sin \alpha_4), \\ \Delta l &= l \left(1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right), \\ \gamma &= \arctg \frac{\lambda}{\kappa} (\cos \alpha_3 + \cos \alpha_4 - \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Parametr λ charakteryzuje wyniosłość modelowanego łuku.

Wstawiając (2.2) i (2.3) do równań

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \pi_k}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) - \frac{\partial \pi_k}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.5)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & mR^2 [\ddot{\alpha}_1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \ddot{\alpha}_2 + \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_2^2] + \\ & + k l R \left(1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right) \cos(\alpha_1 + \gamma) + c(\alpha_1 - \varphi) - c_2(\alpha_2 - \alpha_1 - \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$- \psi + \varphi) + c_3(\alpha_2 - \alpha_4 + 2\gamma) \frac{\lambda}{\kappa} \cos \gamma \sin(\alpha_1 + \gamma) - P R \sin \alpha_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} & mR^2 [\ddot{\alpha}_2 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \ddot{\alpha}_1 - \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1^2] + \\ & + k l R \left(1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right) \cos(\alpha_2 + \gamma) + c_2(\alpha_2 - \alpha_1 - \psi + \varphi) - \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$- c_3 \left[(\psi - \alpha_2 - \gamma) - \frac{\lambda}{\kappa} (\alpha_2 - \alpha_4 + 2\gamma) \cos \gamma \sin(\alpha_2 + \gamma) \right] - P R \sin \alpha_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& mR^2 [\ddot{\alpha}_3 + \cos(\alpha_3 - \alpha_4) \ddot{\alpha}_4 + \sin(\alpha_3 - \alpha_4) \dot{\alpha}_4^2] + \\
& + kIR \left(1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right) \cos(\alpha_3 - \gamma) + c(\alpha_3 - \varphi) - c_2(\alpha_4 - \alpha_3 - \\
& - \psi + \varphi) + c_3(\alpha_4 - \alpha_2 - 2\gamma) \frac{\lambda}{\kappa} \cos \gamma \sin(\alpha_3 - \gamma) - PR \sin \alpha_3 = 0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
& mR^2 [\ddot{\alpha}_4 + \cos(\alpha_3 - \alpha_4) \ddot{\alpha}_3 - \sin(\alpha_3 - \alpha_4) \dot{\alpha}_3^2] + \\
& + kIR \left(1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right) \cos(\alpha_4 - \gamma) + c_2(\alpha_4 - \alpha_3 - \psi + \varphi) - \\
& - c_3 \left[(\psi - \alpha_4 + \gamma) - \frac{\lambda}{\kappa} (\alpha_4 - \alpha_2 - 2\gamma) \cos \gamma \sin(\alpha_4 - \gamma) \right] - PR \sin \alpha_4 = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Aby zbadać różne formy utraty stateczności, poprzez badanie częstości małych liniowych drgań, nałożonych na nieliniowe statyczne ugięcie rozwijamy zmienne α_i , γ w szereg

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \alpha_{i0} + \epsilon \alpha_{i1} + \dots \\
\gamma &= \gamma_0 + \epsilon \gamma_1 + \dots \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Indeks „0” odpowiada symetrycznemu nieliniowemu statycznemu ugięciu, „1” małym liniowym drganiom wokół położenia równowagi a ϵ jest małym parametrem.

Uwzględniając (2.10) w równaniach (2.5) po wykorzystaniu związków (2.2) i (2.3) otrzymujemy dwa układy czterech równań. Pierwszy, opisujący statyczne ugięcie po wykorzystaniu warunków symetrii

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} &= \alpha_{30}, \quad \alpha_{20} = \alpha_{40}, \\
\gamma_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

redukuje się do dwóch równań przestępnych

$$\begin{aligned}
& K(1 - \kappa_0) \cos \alpha_{10} + c_1^* \frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} (\alpha_{10} - \varphi) - \\
& - c_1^* a (\alpha_{20} - \alpha_{10} - \psi + \varphi) - P^* R \sin \alpha_{10} = 0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
& K(1 - \kappa_0) \cos \alpha_{20} + c_1^* a (\alpha_{20} - \alpha_{10} - \psi + \varphi) - \\
& - c_1^* b (\psi - \alpha_{20}) - P^* \sin \alpha_{20} = 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

W równaniach (2.12) i (2.13) wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe

$$K = \frac{kIR}{c_0}, \quad c_1^* = \frac{c_1}{c_0}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{c_0}, \tag{2.14}$$

$$P^* = \frac{PR}{c_0}, \quad a = \frac{c_2}{c_1}, \quad b = \frac{c_3}{c_1},$$

$$\kappa_0 = 1 + 2\lambda(\sin \varphi + \sin \psi - \sin \alpha_{10} - \sin \alpha_{20}), \tag{2.15}$$

c_1^* jest bezwymiarową sztywnością przegubu w miejscu zamocowania, natomiast ξ^* bezwymiarowym parametrem charakteryzującym sposób zamocowania.

Małe drgania układu opisują równania różniczkowe drugiego rzędu otrzymane przez przyrównanie do zera współczynników przy \in

$$mR^2 [\ddot{\alpha}_{11} + \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})\ddot{\alpha}_{21}] - kIR[\kappa_1 \cos \alpha_{10} + (1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10}(\alpha_{11} + \gamma_1)] + c\alpha_{11} - c_2(\alpha_{21} - \alpha_{11}) + c_3 \frac{\lambda \sin \alpha_{10}}{\kappa_0} (\alpha_{21} - \alpha_{41} + 2\gamma_1) - PR \cos \alpha_{10} \cdot \alpha_{11} = 0, \quad (2.16)$$

$$mR^2 [\ddot{\alpha}_{21} + \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})\ddot{\alpha}_{11}] - kIR[\kappa_1 c \cos \alpha_{20} + (1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20}(\alpha_{21} + \gamma_1)] + c_2(\alpha_{21} - \alpha_{11}) + c_3 \left[(\alpha_{21} + \gamma_1) + \frac{\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} (\alpha_{21} - \alpha_{41} + 2\gamma_1) \right] - PR \cos \alpha_{20} \cdot \alpha_{21} = 0 \quad (2.17)$$

$$mR^2 [\ddot{\alpha}_{31} + \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})\ddot{\alpha}_{41}] - kIR[\kappa_1 \cos \alpha_{10} + (1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10}(\alpha_{31} - \gamma_1)] + c\alpha_{31} - c_2(\alpha_{41} - \alpha_{31}) + c_3 \frac{\lambda \sin \alpha_{10}}{\kappa_0} (\alpha_{41} - \alpha_{21} - 2\gamma_1) - PR \cos \alpha_{10} \cdot \alpha_{31} = 0, \quad (2.18)$$

$$mR^2 [\ddot{\alpha}_{41} + \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})\ddot{\alpha}_{31}] - kIR[\kappa_1 \cos \alpha_{20} + (1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20}(\alpha_{41} - \gamma_1)] + c_2(\alpha_{41} - \alpha_{31}) + c_3 \left[(\alpha_{41} - \gamma_1) + \frac{\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} (\alpha_{41} - \alpha_{21} - 2\gamma_1) \right] - PR \cos \alpha_{20} \cdot \alpha_{41} = 0, \quad (2.19)$$

$$\kappa_1 = -\lambda [\cos \alpha_{10}(\alpha_{11} + \alpha_{31}) + \cos \alpha_{20} \cdot (\alpha_{21} + \alpha_{41})], \quad (2.20)$$

Aby rozdzielić powyższy układ czterech równań na dwa układy dwóch równań, z których jeden opisywał będzie drgania według formy symetrycznej a drugi według formy antymetrycznej odejmujemy i dodajemy stronami odpowiednio równania (2.16) (2.18) oraz (2.17) (2.19) a następnie podstawiamy

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{31} &= A_1 e^{i\omega t}, \\ \alpha_{11} - \alpha_{31} &= A_2 e^{i\omega t}, \\ \alpha_{21} + \alpha_{41} &= A_3 e^{i\omega t}, \\ \alpha_{21} - \alpha_{41} &= A_4 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Przyrównując do zera wyznaczniki uzyskanych w ten sposób jednorodnych układów równań otrzymujemy dwa równania kwadratowe. I tak pierwiastkami równania

$$\begin{aligned} &\Omega^2 \sin^2(\alpha_{10} - \alpha_{20}) + \Omega \left\{ K[(1 - \kappa_0)(\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20}) - \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda(\cos^2 \alpha_{20} + \cos^2 \alpha_{10})] + P^*(\cos \alpha_{20} + \cos \alpha_{10}) - \right. \\ &\quad \left. - c_1^* \left[\frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} + 2a + b \right] + 2\cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})(2\lambda K \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{20} - \right. \\ &\quad \left. - ac_1^*) \right\} + \left\{ K[(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10} - 2\lambda \cos^2 \alpha_{10}] - c_1^* \left(\frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a \right) + P^* \cos \alpha_{10} \right\} \left\{ K[(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20} - 2\lambda \cos^2 \alpha_{20}] - \right. \\ &\quad \left. - c_1^*(a + b) + P^* \cos \alpha_{20} \right\} - (2\lambda K \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{20} - c_1^* a)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

są częstości drgań symetrycznych, natomiast pierwiastkami równania

$$\begin{aligned}
 & \Omega^2 \sin^2(\alpha_{10} - \alpha_{20}) + \Omega \left\{ K(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10} \left(1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{10} \right) - \right. \\
 & \quad - c_1^* \left(\frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} + a \right) - c_1^* b \frac{4\lambda^2}{\kappa_0^2} \sin^2 \alpha_{10} + P^* \cos \alpha_{10} + \\
 & \quad + K(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20} \left(1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) - c_1^* (a + b) - \\
 & \quad - c_1^* b \frac{4\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) + P^* \cos \alpha_{20} - 2 \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20}) \times \\
 & \quad \times \left[K \frac{2\lambda(1 - \kappa_0)}{\kappa_0} \sin \alpha_{10} \sin \alpha_{20} + c_1^* a - c_1^* b \frac{2\lambda \sin \alpha_{10}}{\kappa_0} \left(1 + \frac{2\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} \right) \right] \Big\} \\
 & + \left\{ \left[K(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10} \left(1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{10} \right) - c_1^* \left(\frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} + a \right) - c_1^* b \frac{4\lambda^2}{\kappa_0^2} \sin^2 \alpha_{10} + \right. \right. \\
 & \quad + P^* \cos \alpha_{10} \Big] \left[K(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20} \left(1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) - c_1^* (a + b) - \right. \\
 & \quad \left. \left. - c_1^* b \frac{4\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) + P^* \cos \alpha_{20} \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \left[K \frac{2\lambda(1 - \kappa_0)}{\kappa_0} \sin \alpha_{10} \sin \alpha_{20} + c_1^* a - c_1^* b \frac{2\lambda \sin \alpha_{10}}{\kappa_0} \left(1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) \right]^2 \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

częstości drgań antymetrycznych.

3. Sformułowanie problemu optymalizacji oraz metoda rozwiązania

Problem optymalizacji formułujemy następująco. Poszukujemy takiego rozkładu masy układu (takich wartości sztywności przegubów), który przy założonej stałej objętości zapewni maksimum siły krytycznej dla $\Omega = \text{const}$ lub maksimum podstawowej częstości drgań dla $P = \text{const}$

Warunek stałej objętości przedstawia równanie

$$V = 2 \frac{A_1 + A_2}{2} R + 2 \frac{A_2 + A_3}{2} R + A_3 l = \text{const}, \tag{3.1}$$

lub po wykorzystaniu (2.1) i (2.14)

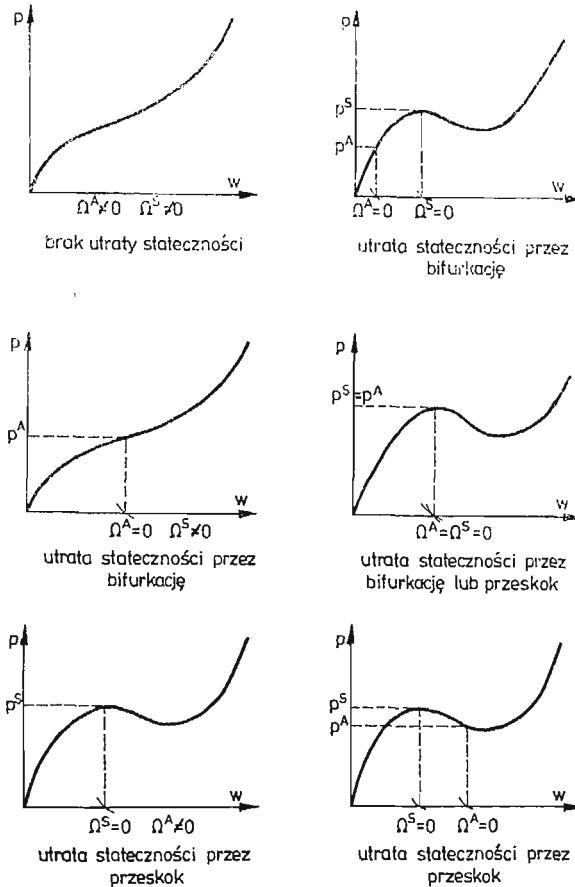
$$c_1^v [(1 + 2a^v + b^v) \lambda + b^v] = \frac{V}{l} = c_0^v = \text{const}. \tag{3.2}$$

Dla ustalonych wartości a , b z równania tego możemy wyznaczyć

$$c_1^* = [(1 + 2a^v + b^v) \lambda + b^v]^{-\frac{1}{v}}. \tag{3.3}$$

Praktycznie więc problem optymalizacji sprowadza się do znalezienia takich wartości a oraz b , które zapewnią spełnienie przyjętego kryterium.

Do rozwiązania tak postawionego problemu zastosujemy bardzo prostą metodę (nie wymagającą stosowania złożonych procedur numerycznych) pozwalającą w szybki sposób otrzymać rozwiązanie. Dla ustalonych wart ościparametrów a, b budujemy rodzinę wykresów P^*, Ω^s, Ω^A w funkcji statycznego ugięcia w , otrzymując wartości siły P^* z równań (2.12) (2.13) natomiast częstości drgań symetrycznych Ω^s i antymetrycznych Ω^A odpowiednio z równań (2.22) (2.23)



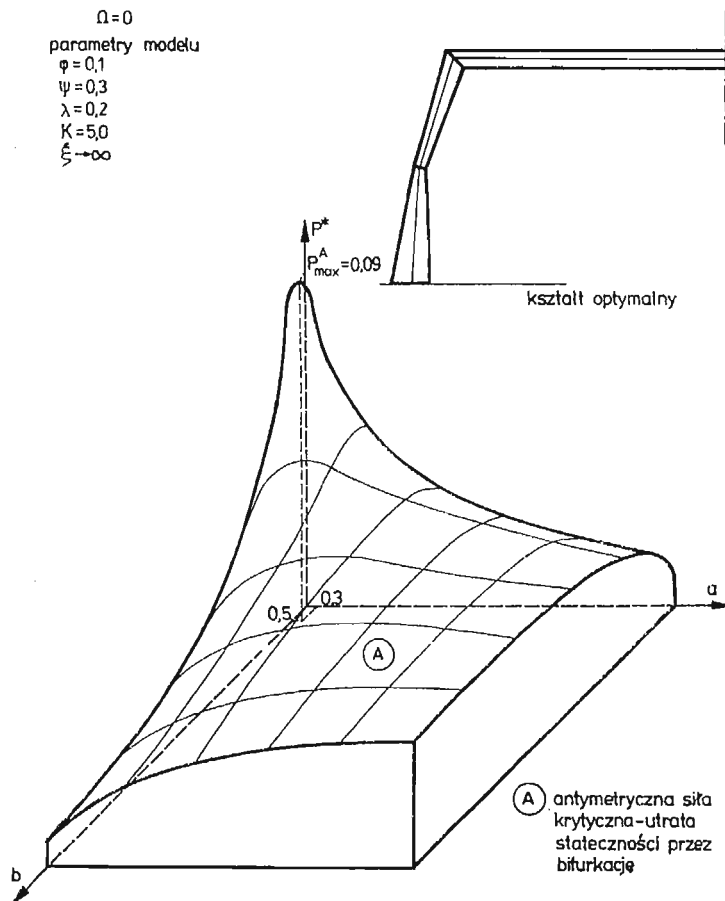
Rys. 3

W przypadku badania stateczności układu ($\Omega = 0$) wartości sił krytycznych odpowiadających przeskokowi bądź bifurkacji odczytujemy z wykresu dla rzędnych w odpowiadających $\Omega^s = 0$ lub $\Omega^A = 0$. Możliwe przypadki przedstawia rys. 3. Znajdując w ten sposób wartości sił krytycznych dla różnych kombinacji parametrów a, b możemy zbudować powierzchnię stateczności $P_{kr}^* = f_1(a, b)$. Wartości a oraz b dla których P_{kr}^* osiąga maksimum są zgodnie z przyjętym kryterium poszukiwanymi wartościami optymalnymi. Analogicznie postępujemy przy rozważaniu drgań układu. Z wykresu dla $P^* = \text{const}$ odczytujemy Ω^s, Ω^A przy czym optymalizowana jest wartość niższa. Dla różnych kombinacji

a , b oraz odpowiadających im wartości podstawowej częstości drgań budujemy powierzchnię $\Omega = f_2(a, b)$. Optymalne wartości a , b otrzymujemy dla maksymalnej wartości podstawowej częstości drgań.

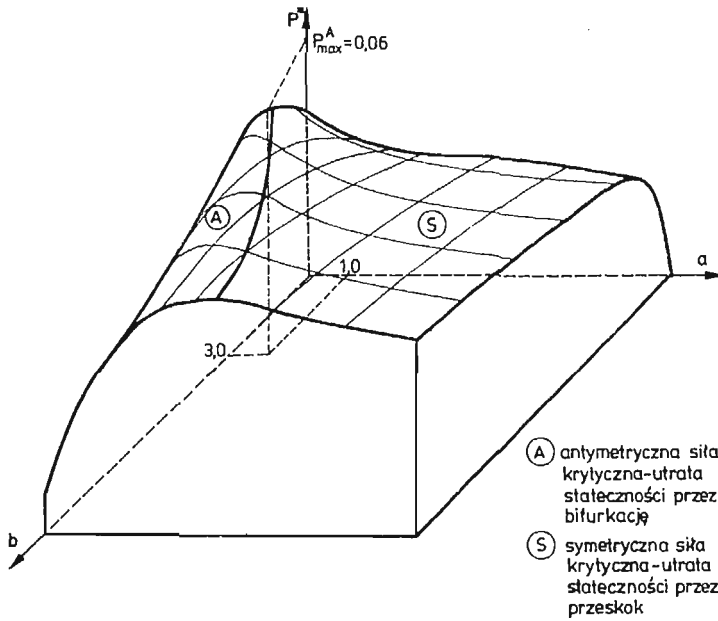
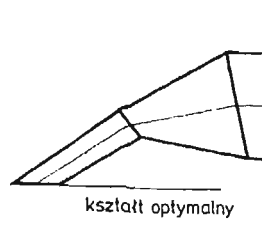
4. Analiza wyników

Opisaną w rozdziale poprzednim metodę zastosowano do znalezienia optymalnego kształtu rozważanego modelu. Dla danych parametrów geometrycznych sporządzone zostały wykresy $P_{kr}^* = f_1(a, b)$ lub $\Omega = f_2(a, b)$ i na ich podstawie znalezione optymalne wartości a , b . Uzyskane powierzchnie oraz kształty przedstawiono na rys. 4, 5, 6. Na rys. 5 oraz 6 na powierzchniach wyodrębniono obszary, dla których podstawowa (najniższa) jest symetryczna (antymetryczna) siła krytyczna (częstość drgań). Możemy wyciągnąć wniosek, że nie jest możliwe kształtowanie układu tylko z uwagi na jedną siłę krytyczną (częstość drgań) — czyli, że dla pewnych parametrów geometrycznych modelu jednomodalne sformułowanie problemu optymalizacji jest niewystarczające. Punkty leżące na krzywych



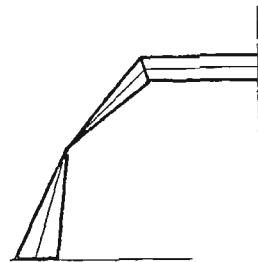
Rys. 4

$\Omega = 0$
 parametry modelu
 $\varphi = 1,0$
 $\psi = 1,4$
 $\lambda = 2,0$
 $K = 1,0$
 $\xi \rightarrow \infty$

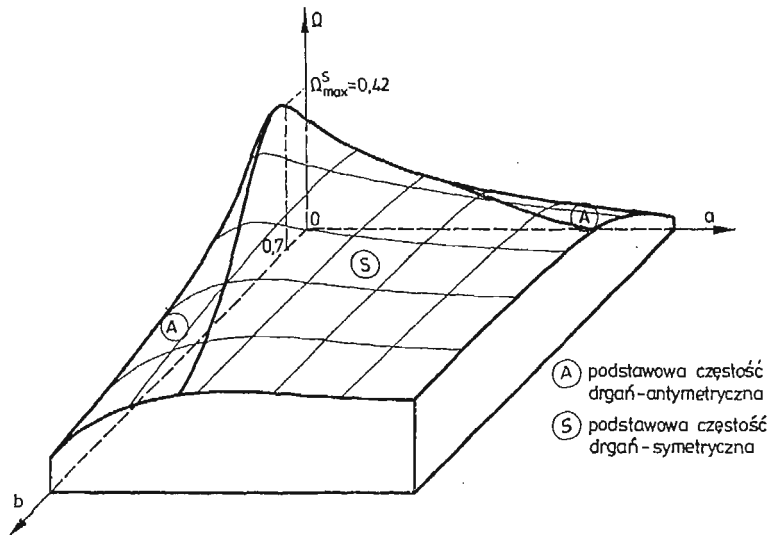


Rys. 5

$P^* = 0$
 parametry modelu
 $\varphi = 0,3$
 $\psi = 0,8$
 $\lambda = 0,5$
 $\kappa = 0,2$
 $\xi \rightarrow \infty$

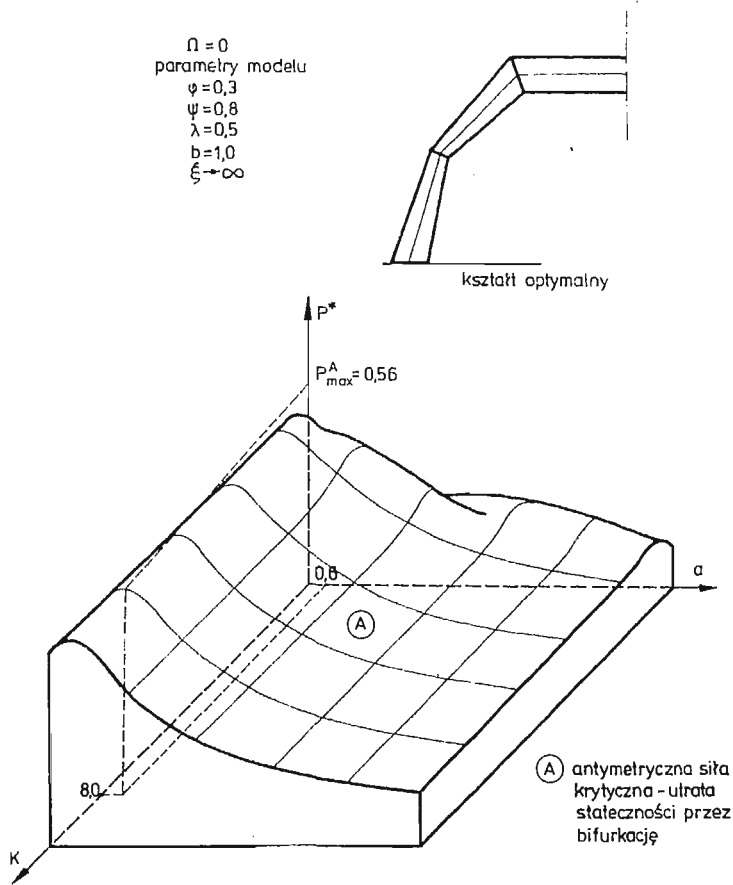


kształt optymalny



- (A) podstawowa częstość drgań - antymetryczna
- (S) podstawowa częstość drgań - symetryczna

Rys. 6



Rys. 7

rozgraniczających obszary są geometryczną ilustracją wyniku optymalizacji dwumodalnej dla tych punktów wartości sił krytycznych (częstości drgań) odpowiadających formie symetrycznej i antymetrycznej są równe sobie.

We wszystkich omówionych przykładach zmiennymi optymalizacji były wartości a , b . Możliwe jest oczywiście przyjęcie innych zmiennych i tak rys. 7 przedstawia rezultat poszukiwania optymalnych wartości a oraz K przy ustalonej wartości parametru b .

Literatura cytowana w tekście

1. J. BŁACHUT, A. GAJEWSKI, *On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches*, Int. J. Solids Struct. 17, 653 - 667 (1981).
2. J. BŁACHUT, A. GAJEWSKI, *Unimodal and bimodal optimal design of extensible arches with respect to buckling and vibrations*, Optimal Control Appl. & Meth. vol. 2, 384 - 402 (1981).
3. B. BOCHENEK, A. GAJEWSKI, *Jednomodalna i dwumodalna optymalizacja ramy portalowej*, Rozpr. Inż. 1, 30 (1981).
4. B. BOCHENEK, A. GAJEWSKI, *Jednomodalna i dwumodalna optymalizacja ściskanych prętów drgających*, Mech. Teor. i Stos. 22, 1/2 (1984).

5. A. GAJEWSKI, *A note on unimodal and bimodal optimal design of vibrating compressed columns*, Int. J. Mech. Sci. 23, 11 - 16 (1981).
6. J. KJUSALAAS, *Optimal design of structures with buckling constraints*, Int. J. Solids Struct. 9, 7 863 - 878 (1973).
7. A. D. KERR, M. T. SOIFER, *The linearization of the prebuckling state and its effect on the determined instability loads*, J. Appl. Mech. 775 - 783 (1969).
8. E. F. MASUR, Z. MRÓZ, *Singular solutions in structural optimization problems*, IUTAM Conf. Northwestern Univer. (1978).
9. N. OLSHOFF, S. H. RASMUSSEN, *On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns*, Int. J. Solids Struct. 13, 605 - 616 (1977).
10. N. OLSHOFF, R. H. PLAUT, *Bimodal optimization of vibrating shallow arches*, DCAMM Rep. No. 242 (1982).
11. S. PRAGER, W. PRAGER, *A note on optimal design of columns*, Int. J. Mech. Sci. 21, 249 - 251 (1979).

Р е з ю м е

ОПТИМИЗАЦИЯ АРКИ СО СЖИМАЕМОЙ ОСЬЮ

Настоящая работа, с целью представления характерных черт оптимизации арки со сжимаемой осью, заменяет действительную арку прямой стержневой системой с четырьмя степенями свободы. Исследовались разные формы потери устойчивости (перекрытие, бифуркация) путем испытания частоты малых линейных колебаний наложенных на нелинейный статический прогиб системы.

Формулирована и решена проблема оптимизации состоящая в поисках такой формы системы, которая при постоянном объеме даст максимум критической силы или частоты колебаний. Для некоторых геометрических параметров модели доказана нехватка одномодальной формулировки проблемы оптимизации.

S u m m a r y

OPTIMIZATION OF AN ARC WITH COMPRESSIBLE AXIS

In order to present the characteristic features of the optimization of an arc with compressible axis the arc has been replaced by a bar system of four degrees of freedom. Various forms of the lack of stability have been obtained (snap, bifurcation) by investigation of the frequency of small linear vibrations imposed on nonlinear static deflection of the system.

The optimization of the form of the system has been formulated and solved such that for conserved constant volume the maximum of the critical force or that of the vibration frequency is assured. It has been proved that for certain geometrical parameters of the model a single modal formulation of the optimization problem is insufficient.

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1982 roku

DYSKRETNA ANALIZA MODELI REOLOGICZNYCH¹⁾

ROMUALD ŚWITKA,
BOGDAN HUSIAR

Poznań, Politechnika Poznańska

1. Wstęp

Problemy związane z wyznaczaniem naprężeń i odkształceń w ciałach lepkosprężystych komplikują się przede wszystkim z powodu reologicznych równań stanu, które występują z reguły w postaci związków różniczkowych bądź całkowych [1÷5]. Trudności z tym związane rozwiązuje najogólniej znana analogia sprężysto-lepkosprężysta ALFREY'a i LEE [2]. Analogia ta dotyczy podobieństwa pomiędzy transformacjami Laplace'a związków opisujących ciało lepkosprężyste a równaniami teorii sprężystości. Tą drogą możliwe jest rozwiązanie niektórych podstawowych zadań, co unaocznia znana monografia NOWACKIEGO [2]. Jednakże możliwości tej analogii są ograniczone trudnościami natury matematycznej, które pojawiają się przy wyznaczaniu transformacji odwrotnej.

Rozwiązania większości problemów praktycznych lepkosprężystości należy więc szukać na drodze metod numerycznych.

PEDACHOWSKI [6] zaproponował pewną metodę „kontinualno-dyskretną” opartą na znajomości funkcji pełzania. Sumując przyrosty odkształceń reologicznych otrzymał on związek między odkształceniem w danej chwili a naprężeniami we wszystkich chwilach poprzednich.

Do rozwiązywania zadań lepkosprężystych w ujęciu metody elementów skończonych powszechnie stosowane są metody iteracyjne. Spośród nich można wymienić sposób naprężeń początkowych i sposób odkształcenia początkowego, obydwa opisane przez ZIENKIEWICZA [7]. Sposób odkształcenia początkowego był stosowany przez wielu autorów, m.in. przez ZIENKIEWICZA [8] oraz ARGYRISA [9].

Do rozwiązywania problemów reologii mają też szerokie zastosowanie metody numerycznego całkowania liniowych i nieliniowych równań ruchu. Metody te, a mają one również charakter iteracyjny, dzieli się na proste (explicit) i złożone (implicit). Do metod prostych zalicza się np. metodę Eulera i metodę Rungego-Kutty, do złożonych m.in. metodę stycznych [10] i metodę czasoprzestrzennych elementów skończonych KĄCZKOW-

¹⁾ Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych” — koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk.

SKIEGO [11]. Ta ostatnia metoda stwarza, jak się wydaje, nowe możliwości również w dziedzinie lepkosprężystości.

Autorzy niniejszego opracowania wybrali inną drogę. Opierając się na opisie ciała lepkosprężystego za pomocą związku różniczkowego aproksymują przebieg naprężeń w poszczególnych przedziałach czasu wielomianem. Takie ujęcie pozwala na opis zjawisk pełzania w ciałach liniowo lepkosprężystych. W rezultacie otrzymuje się związki rekurencyjne, w których odkształcenie w danej chwili jest określone przez naprężenie w tejże chwili i przez stan układu w chwili poprzedniej. Przedłożoną metodę można więc zakwalifikować do metod prostych. Przedział czasu dzielący obie chwile może być, w wielu przypadkach dowolnie długi, co jest zaletą metody, w pozostałych — długość przedziału czasowego należy regulować w oparciu o kryterium dokładności. Powyższa metoda była już stosowana w pracach [12, 13].

W niniejszej pracy problem został uogólniony przez dopuszczenie nieciągłości funkcji $\sigma(t)$ i jej pochodnej $\dot{\sigma}(t)$ oraz funkcji $\varepsilon(t)$ i $\dot{\varepsilon}(t)$. Zastosowano aproksymację liniową i kwadratową funkcji $\sigma(t)$. Przeprowadzono analizy wyników dla podstawowych modeli reologicznych (Kelvin-Voigt, Zener, Burgers) i analizy błędów obliczeń w zależności od aproksymacji i długości kroku.

Jakkolwiek ograniczono analizy tylko do modeli reologicznych, to jednak uzyskane wyniki pozwalają na dalsze zastosowanie metody w złożonych układach lepkosprężystych. Jako przykład można podać wstępnie napiętą siatkę ciągnową. Nad problemem pełzania siatki ciągnowej są prowadzone obecnie prace.

2. Równanie konstytutywne ciała lepkosprężystego w ujęciu dyskretnym

Równanie konstytutywne dla materiału lepkosprężystego można przedstawić w postaci związku różniczkowego [2]

$$P(D)\sigma(t) = Q(D)\varepsilon(t) \quad (2.1)$$

w którym $D = d/dt$ jest operatorem różniczkowania względem czasu t , $P(D)$ i $Q(D)$ są liniowymi operatorami różniczkowymi (wielomianami argumentu D w ogólności stopnia n , przy czym stopień może być niższy, jeśli część współczynników wielomianu będzie równa zero), σ jest naprężeniem i ε — odkształceniem.

Na osi czasu wyodrębniamy chwile t_τ ($\tau = 0, 1, 2, \dots$) dzieląc oś na przedziały $\vartheta_\tau = t_\tau - t_{\tau-1}$.

Przyjęto, że przebieg naprężenia w czasie jest funkcją niekoniecznie ciągłą. Miejsca nieciągłości będą węzłami na osi czasu. Poza tym inne węzły rozmieszcza się stosownie do potrzeb obliczeniowych. Tak więc w ogólności w węźle τ naprężenie może doznawać przyrostu o

$$\Delta\sigma_\tau = \sigma'_\tau - \sigma_\tau,$$

a prędkość naprężenia — skoku o

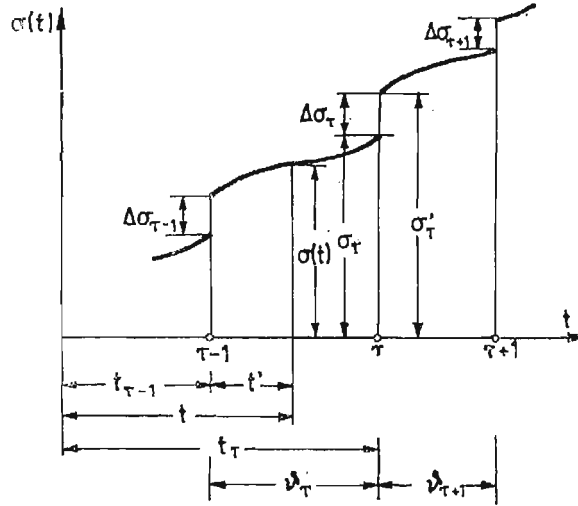
$$\Delta\dot{\sigma}_\tau = \dot{\sigma}'_\tau - \dot{\sigma}_\tau.$$

Wprowadzono oznaczenia

$$\sigma_{\tau} = [\sigma(t)]_{t=t_{\tau}-0}, \quad \sigma'_{\tau} = [\sigma(t)]_{t=t_{\tau}+0},$$

$$\dot{\sigma}_{\tau} = \left[\frac{d\sigma(t)}{dt} \right]_{t=t_{\tau}-0}, \quad \dot{\sigma}'_{\tau} = \left[\frac{d\sigma(t)}{dt} \right]_{t=t_{\tau}+0}.$$

Podział osi czasu i przebieg funkcji $\sigma(t)$ ilustruje rys. 1.



Rys. 1

Napężenie $\sigma(t)$ w przedziale czasu $\vartheta_{\tau} = t_{\tau} - t_{\tau-1}$ można aproksymować za pomocą wielomianu stopnia m :

$$\sigma(t') = \alpha_0 + \alpha_1 t' + \alpha_2 (t')^2 + \dots + \alpha_m (t')^m, \quad (2.2)$$

$$t' = t - t_{\tau-1}, \quad t' \in (0, \vartheta_{\tau}).$$

Jeśli $m = 1$ (aproksymacja liniowa), to

$$\alpha_0 = \sigma'_{\tau-1}, \quad \alpha_1 = \frac{\sigma_{\tau} - \sigma'_{\tau-1}}{\vartheta_{\tau}}. \quad (2.3)$$

Jeśli $m = 2$ (aproksymacja kwadratowa), to

$$\alpha_0 = \sigma'_{\tau-1}, \quad \alpha_1 = \dot{\sigma}'_{\tau-1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\vartheta_{\tau}^2} (\sigma_{\tau} - \sigma'_{\tau-1} - \dot{\sigma}'_{\tau-1} \vartheta_{\tau}). \quad (2.4)$$

Z wyższych stopni wielomianu (2.2) w niniejszej pracy nie korzystano. Krzywe aproksymujące funkcję $\sigma(t)$ przedstawiono na rysunkach 2 (aproksymacja liniowa) i 3 (aproksymacja kwadratowa).

Rozwiązanie równania (2.1), w którym $\sigma(t')$ dane jest wzorem (2.2), będziemy poszukiwać w przedziale $t' \in (0, \infty)$, przyjmując najpierw, że funkcje $\sigma(t')$ i $\varepsilon(t')$ są w całym tym przedziale określone i są funkcjami rzędu wykładniczego, co pozwala na zastosowanie transformacji całkowej Laplace'a. Z przedziału $(0, \infty)$ można następnie wyodrębnić

przedział $(0, t_r)$. Po wykonaniu transformacji Laplace'a na równaniach (2.1) i (2.2) otrzymuje się

$$\begin{aligned} P(p)\tilde{\sigma}(p) - P_0(p, D)\sigma(0) &= Q(p)\tilde{\varepsilon}(p) - Q_0(p, D)\varepsilon(0), \\ \tilde{\sigma}(p) &= \frac{1}{p}\alpha_0 + \frac{1}{p^2}\alpha_1 + \frac{2}{p^3}\alpha_2 + \dots + \frac{m}{p^{m+1}}\alpha_m. \end{aligned} \quad (2.5)$$

W równaniach (2.5) $\tilde{\sigma}(p)$ i $\tilde{\varepsilon}(p)$ są transformatami Laplace'a funkcji $\sigma(t')$ i $\varepsilon(t')$, p jest parametrem całkowania, a wielomiany P , Q , P_0 i Q_0 mają postać:

$$\begin{aligned} P(p) &= \sum_{j=0}^n a_j p^j, & Q(p) &= \sum_{j=0}^n b_j p^j, \\ P_0(p, D) &= \sum_{j=1}^n (a_j + a_{j+1}p + \dots + a_n p^{n-j}) D^{j-1}, \\ Q_0(p, D) &= \sum_{j=1}^n (b_j + b_{j+1}p + \dots + b_n p^{n-j}) D^{j-1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Operację $D^{j-1}\sigma(0)$ lub $D^{j-1}\varepsilon(0)$, $j = 1, 2, \dots, n$ należy rozumieć jako granicę lewostronną funkcji i ich pochodnych w punkcie $t' = 0$:

$$D^{j-1}\sigma(0) = \left[\frac{d^{j-1}\sigma(t)}{dt^{j-1}} \right]_{t=t_r-0}, \quad D^{j-1}\varepsilon(0) = \left[\frac{d^{j-1}\varepsilon(t)}{dt^{j-1}} \right]_{t=t_r-0}.$$

Jest to związane z nieciągłością funkcji transformowanych w punkcie $t = t_r$. Można się tu powołać na rozważania zawarte np. w [14] str. 75 - 76²⁾

Z równania (2.5)₁ oblicza się transformatę $\tilde{\varepsilon}(p)$. Dalsze rozważania wymagają bliższych ustaleń w odniesieniu do związku konstytutywnego (2.1) i aproksymacji (2.2). Przyjęto model reologiczny co najwyżej pięcioparametrowy, to znaczy model opisany równaniem

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = b_0\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon}, \quad (2.7)$$

w którym niektóre współczynniki a_i i b_i mogą być równe zero, oraz aproksymację co najwyżej kwadratową ($m = 2$). W równaniu (2.7) występuje 6 współczynników, z których jednakże tylko 5 jest niezależnych.

Rozwiązanie zadania będzie tak ujęte, że wyniki będą słuszne również dla modeli niższych rzędów.

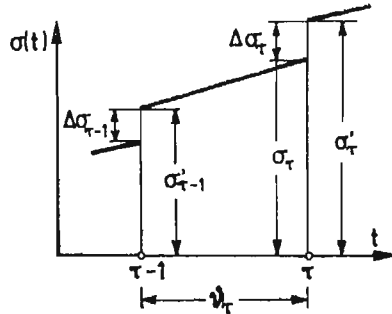
²⁾ Dobrym przykładem istoty problemu jest funkcja Heaviside'a $H(t)$. Transformata Laplace'a pochodnej funkcji Heaviside'a jest równa

$$\mathcal{L}[H'(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1.$$

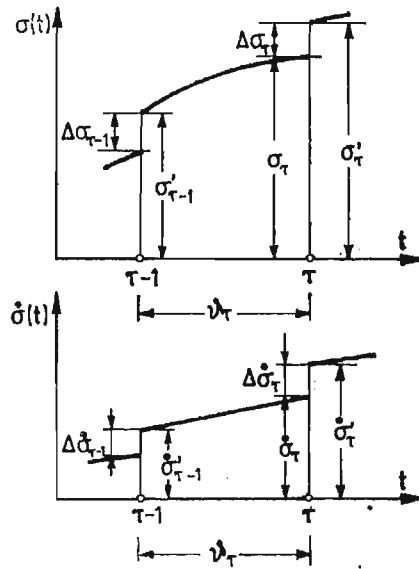
Taki sam wynik uzyskamy na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu oryginału

$$\mathcal{L}[H'(t)] = p\mathcal{L}[H(t)] - H(0) = 1 - H(0)$$

jeśli przyjmie się $H(0) = H(0^-) = 0$.



Rys. 2



Rys. 3

Uwzględniając w (2.5) powyższe uwagi oraz warunki początkowe $\sigma(0) = \sigma_{\tau-1}$, $\dot{\sigma}(0) = \dot{\sigma}_{\tau-1}$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_{\tau-1}$, $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_{\tau-1}$, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(p) = & \tilde{c}_0(p) \varepsilon_{\tau-1} + \tilde{c}_1(p) \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \tilde{c}_2(p) (2a_2 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_0 \alpha_0) + \\ & + \tilde{c}_3(p) (2a_1 \alpha_2 + a_0 \alpha_1) + \tilde{c}_4(p) 2a_0 \alpha_2 + \\ & + [a_1 \tilde{c}_5(p) + a_2 \tilde{c}_6(p)] (\alpha_0 - \sigma_{\tau-1}) + a_2 \tilde{c}_5(p) (\alpha_1 - \dot{\sigma}_{\tau-1}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

We wzorze (2.8):

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0(p) = \frac{b_1 + b_2 p}{Q(p)}, \quad \tilde{c}_1(p) = \frac{b_2}{Q(p)}, \quad \tilde{c}_2(p) = \frac{1}{p Q(p)}, \\ \tilde{c}_3(p) = \frac{1}{p^2 Q(p)}, \quad \tilde{c}_4(p) = \frac{1}{p^3 Q(p)}, \quad \tilde{c}_5(p) = \frac{1}{Q(p)}, \\ \tilde{c}_6(p) = \frac{p}{Q(p)}, \quad Q(p) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Tablica 1. Wartości współczynników $c_{i,\tau}$

Lp.	Przypadek	$c_{0,\tau}$	$c_{1,\tau}$	$c_{2,\tau}$	$c_{3,\tau}$	$c_{4,\tau}$	$c_{5,\tau}$	$c_{6,\tau}$
1	$b_0 \neq 0, b_1 = 0, b_2 = 0$	0	0	$\frac{1}{b_0}$	$\frac{1}{b_0} \vartheta_\tau$	$\frac{1}{2b_0} \vartheta_\tau^2$	$\frac{1}{b_0} \delta(\vartheta_\tau)$	$\frac{1}{b_0} \delta(\vartheta_\tau)$
2	$b_0 = 0, b_1 \neq 0, b_2 = 0$	1	0	$\frac{1}{b_1} \vartheta_\tau$	$\frac{1}{2b_1} \vartheta_\tau^2$	$\frac{1}{6b_1} \vartheta_\tau^3$	$\frac{1}{b_1}$	$\frac{1}{b_1} \delta(\vartheta_\tau)$
3	$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	1	ϑ_τ	$\frac{1}{2b_2} \vartheta_\tau^2$	$\frac{1}{6b_2} \vartheta_\tau^3$	$\frac{1}{24b_2} \vartheta_\tau^4$	$\frac{1}{b_2} \vartheta_\tau$	$\frac{1}{b_2}$
4	$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	1	$\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \vartheta_\tau})$	$\frac{1}{b_1} (\vartheta_\tau - c_{1,\tau})$	$\frac{1}{2b_1} \frac{\vartheta_\tau^2 - c_{2,\tau}}{\lambda}$	$\frac{1}{6b_1} \frac{\vartheta_\tau^3 - c_{3,\tau}}{\lambda}$	$\frac{1}{b_1} (1 - e^{-\lambda \vartheta_\tau})$	$\frac{1}{b_2} e^{-\lambda \vartheta_\tau}$
5	$b_0 \neq 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	$\cos \omega_0 \vartheta_\tau$	$\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \vartheta_\tau$	$\frac{1}{b_0} (1 - c_{0,\tau})$	$\frac{1}{b_0} (\vartheta_\tau - c_{1,\tau})$	$\frac{1}{2b_0} \frac{\vartheta_\tau^2 - c_{2,\tau}}{\omega_0^2}$	$\frac{1}{b_2} c_{1,\tau}$	$\frac{1}{b_2} c_{0,\tau}$
6	$b_0 \neq 0, b_1 \neq 0, b_2 = 0$	$e^{-\alpha \vartheta_\tau}$	0	$\frac{1}{b_0} (1 - c_{0,\tau})$	$\frac{1}{b_0} \vartheta_\tau - \alpha$	$\frac{1}{2b_0} \frac{\vartheta_\tau^2 - c_{3,\tau}}{\alpha}$	$\frac{1}{b_1} e^{-\alpha \vartheta_\tau}$	$\frac{1}{b_1} [\delta(\vartheta_\tau) - \alpha e^{-\alpha \vartheta_\tau}]$
7	$b_0 \neq 0, D = 1$	$\lambda c_{1,\tau} + (1 - \omega_0 \vartheta_\tau) e^{-\omega_0 \vartheta_\tau}$	$\vartheta_\tau e^{-\omega_0 \vartheta_\tau}$					
8	$b_1 \neq 0, D < 1$	$\lambda c_{1,\tau} + \frac{\omega_0}{\varphi_1} e^{-D\omega_0 \vartheta_\tau} \sin \varphi_1$	$\frac{1}{\varphi_1} e^{-D\omega_0 \vartheta_\tau} \sin \varphi_1 \vartheta_\tau$	$\frac{1}{b_0} (1 - c_{0,\tau})$	$\frac{1}{b_0} (\vartheta_\tau - \frac{1}{b_1} c_{1,\tau})$	$\frac{1}{b_0} (\frac{\vartheta_\tau^2}{2} - \frac{1}{b_1} c_{3,\tau} - \frac{1}{b_2} c_{2,\tau})$	$\frac{1}{b_2} c_{1,\tau}$	$\frac{1}{b_2} c_{0,\tau} - \lambda c_{1,\tau}$
9	$b_2 \neq 0, D > 1$	$\lambda c_{1,\tau} + \frac{\omega_0}{\varphi_2} e^{-D\omega_0 \vartheta_\tau} \sinh \varphi_2$	$\frac{1}{\varphi_2} e^{-D\omega_0 \vartheta_\tau} \sinh \varphi_2 \vartheta_\tau$					

$$\alpha = \frac{b_0}{b_1}, \quad \lambda = \frac{b_1}{b_2}, \quad \omega_0^2 = \frac{b_0}{b_2} = \lambda \alpha, \quad D = \frac{\lambda}{2\omega_0}$$

$$\varphi_1 = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}, \quad \psi_1 = \arctg \frac{\varphi_1}{(-D\omega_0)}, \quad \Phi_1 = \varphi_1 \vartheta_\tau + \psi_1,$$

$$\varphi_2 = \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}, \quad \psi_2 = \operatorname{artgh} \frac{\varphi_2}{(-D\omega_0)}, \quad \Phi_2 = \varphi_2 \vartheta_\tau + \psi_2.$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymuje się

$$\begin{aligned} \varepsilon(t') = & c_0(t') \varepsilon_{\tau-1} + c_1(t') \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + c_2(t') (2a_2 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_0 \alpha_0) + \\ & + c_3(t') (2a_1 \alpha_2 + a_0 \alpha_1) + c_4(t') 2a_0 \alpha_2 + \\ & + [a_1 c_5(t') + a_2 c_6(t')] (\alpha_0 - \sigma_{\tau-1}) + a_2 c_5(t') (\alpha_1 - \dot{\sigma}_{\tau-1}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podstawiając $t' = \vartheta_\tau$ i uwzględniając, że $\varepsilon(\vartheta_\tau) = \varepsilon_\tau$, dostajemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau = & c_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + c_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + c_{2,\tau} (2a_2 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_0 \alpha_0) + \\ & + c_{3,\tau} (2a_1 \alpha_2 + a_0 \alpha_1) + c_{4,\tau} \cdot 2a_0 \alpha_2 + \\ & + (a_1 c_{5,\tau} + a_2 c_{6,\tau}) (\alpha_0 - \sigma_{\tau-1}) + a_2 c_{5,\tau} (\alpha_1 - \dot{\sigma}_{\tau-1}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dla prostoty zapisu oznaczono:

$$c_{i,\tau} = c_i(\vartheta_\tau), \quad i = 0, 1, \dots, 6.$$

Zestawienie współczynników $c_{i,\tau}$ dla różnych postaci wielomianu $Q(D)$ zawiera tablica 1.

Wykorzystanie tej tablicy i dobór współczynników a_0 , a_1 i a_2 we wzorze (2.11) pozwala wykorzystać ten związek dla każdego modelu co najwyżej pięcioparametrowego.

Związek rekurencyjny (2.11) pozwala obliczyć ε w chwili t_τ jeśli jest w tejże chwili określone σ oraz jeśli dany jest stan układu w chwili poprzedniej $t_{\tau-1}$. W równaniu (2.11) występuje również prędkość odkształcenia $\dot{\varepsilon}$ i niezbędny jest wzór dla jej obliczenia. Prędkość odkształcenia otrzymamy obliczając pochodną $\dot{\varepsilon}(t')$ ze wzoru (2.10) i podstawiając $t' = \vartheta_\tau$. W wyniku otrzymuje się

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau = & \dot{c}_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \dot{c}_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \dot{c}_{2,\tau} (2a_2 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_0 \alpha_0) + \\ & + \dot{c}_{3,\tau} (2a_1 \alpha_2 + a_0 \alpha_1) + \dot{c}_{4,\tau} \cdot 2a_0 \alpha_2 + \\ & + (a_1 \dot{c}_{5,\tau} + a_2 \dot{c}_{6,\tau}) (\alpha_0 - \sigma_{\tau-1}) + a_2 \dot{c}_{5,\tau} (\alpha_1 - \dot{\sigma}_{\tau-1}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\dot{c}_{i,\tau} = \left[\frac{dc_i(t')}{dt'} \right]_{t'=\vartheta_\tau}, \quad i = 0, 1, \dots, 6.$$

Współczynniki $\dot{c}_{i,\tau}$ zestawiono w tablicy 2. Wzory (2.11) i (2.12) są słuszne zarówno dla aproksymacji kwadratowej, jak i liniowej. W tablicach 1 i 2 zostały zestawione współczynniki $c_{i,\tau}$ i $\dot{c}_{i,\tau}$ dla wszystkich możliwych teoretycznie kombinacji współczynników b_0 , b_1 i b_2 . Niekoniecznie musi to oznaczać, że wszystkie podane kombinacje są fizycznie możliwe. Np. pod pozycją 1 przypadek $b_0 \neq 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ oznaczałby w ogólności, że odkształcenie jest kombinacją liniową σ , $\dot{\sigma}$, $\ddot{\sigma}$, co raczej wydaje się być przypadkiem fizycznie niemożliwym. Jeśli jednakże przyjąć, że $a_0 \neq 0$ i $a_1 = a_2 = 0$, to przypadek 1 doprowadzi nas do ciała Hooke'a. Podobnie pojawianie się dystrybucji $\delta(\vartheta_\tau)$ i jej pochodnych przy niektórych współczynnikach $c_{6,\tau}$ trudne jest do fizycznego zinterpretowania. Należy jednak zwrócić uwagę, że współczynnik $c_{6,\tau}$ występuje w iloczynie ze współczynnikiem a_2 . Można by więc postawić pytanie, czy istnieją takie modele reologiczne, dla których występuje w równaniu stanu przyspieszenie naprężenia i jednocześnie współczynniki b_0 , b_1 i b_2 odpowiadają przypadkom poz. 2 i poz. 6 omawianych tablic.? Na to pytanie brak jest w tej pracy odpowiedzi, choć autorzy sądzą, że odpowiedź byłaby negatywna. Do takiego sądu skłania analiza wszystkich znanych autorom modeli reologicznych. W dalszych rozważaniach przyjmuje się więc, że jeśli zachodzi przypadek 2 lub 6, to $a_2 = 0$.

Tablica 2. Wartości współczynników $\dot{c}_{i,r}$

Lp.	Przypadek	$\dot{c}_{0,r}$	$\dot{c}_{1,r}$	$\dot{c}_{2,r}$	$\dot{c}_{3,r}$	$\dot{c}_{4,r}$	$\dot{c}_{5,r}$	$\dot{c}_{6,r}$
1	$b_0 \neq 0, b_1 = 0, b_2 = 0$	0	0	0	$\frac{1}{b_0}$	$\frac{1}{b_0} \theta_r$	$\frac{1}{b_0} \delta'(\theta_r)$	$\frac{1}{b_0} \delta''(\theta_r)$
2	$b_0 = 0, b_1 \neq 0, b_2 = 0$	0	0	$\frac{1}{b_1}$	$\frac{1}{b_1} \theta_r$	$\frac{1}{2b_1} \theta_r^2$	0	$\frac{1}{b_1} \delta'(\theta_r)$
3	$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	0	1	$\frac{1}{b_2} \theta_r$	$\frac{1}{2b_2} \theta_r^2$	$\frac{1}{6b_2} \theta_r^3$	$\frac{1}{b_2}$	0
4	$b_0 = 0, b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$	0	$e^{-\lambda \theta_r}$	$\frac{1}{b_1} (1 - \dot{c}_{1,r})$	$\frac{1}{b_1} \theta_r - \frac{1}{\lambda} \dot{c}_{2,r}$	$\frac{1}{2b_1} \theta_r^2 - \frac{1}{\lambda} \dot{c}_{3,r}$	$\frac{1}{b_2} e^{-\lambda \theta_r}$	$\frac{\lambda}{b_2} e^{-\lambda \theta_r}$
5	$b_0 \neq 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	$-\omega_0 \sin \omega_0 \theta_r$	$\cos \omega_0 \theta_r$	$-\frac{1}{b_0} \dot{c}_{0,r}$	$\frac{1}{b_0} (1 - \dot{c}_{1,r})$	$\frac{1}{b_0} \theta_r - \frac{1}{\omega_0^2} \dot{c}_{2,r}$	$\frac{1}{b_2} \dot{c}_{1,r}$	$\frac{1}{b_2} \dot{c}_{0,r}$
6	$b_0 \neq 0, b_1 \neq 0, b_2 = 0$	$-\alpha e^{-\alpha \theta_r}$	0	$-\frac{1}{b_0} \dot{c}_{0,r}$	$\frac{1}{b_0} - \frac{1}{\alpha} \dot{c}_{2,r}$	$\frac{1}{b_0} \theta_r - \frac{1}{\alpha} \dot{c}_{3,r}$	$\frac{\alpha}{b_1} e^{-\alpha \theta_r}$	$\frac{1}{b_1} [\delta'(\theta_r) + \alpha^2 e^{-\alpha \theta_r}]$
7	$b_0 \neq 0$	$\lambda \dot{c}_{1,r} - \omega_0 (2 - \omega_0 \theta_r) e^{-\omega_0 \theta_r}$	$(1 - \omega_0 \theta_r) e^{-\omega_0 \theta_r}$					
8	$b_1 \neq 0$	$\lambda \dot{c}_{1,r} + \omega_0 e^{-D\omega_0 \theta_r} (\cos \Phi_1 - \frac{D\omega_0}{\varphi_1} \sin \Phi_1)$	$(\cos \varphi_1 \theta_r - \frac{D\omega_0}{\varphi_1} \sin \varphi_1 \theta_r) e^{-D\omega_0 \theta_r}$					
	$D < 1$	$\lambda \dot{c}_{1,r} + \omega_0 e^{-D\omega_0 \theta_r} (\cosh \Phi_2 - \frac{D\omega_0}{\varphi_2} \sinh \Phi_2)$	$(\cosh \varphi_2 \theta_r - \frac{D\omega_0}{\varphi_2} \sinh \varphi_2 \theta_r) e^{-D\omega_0 \theta_r}$					
9	$b_2 \neq 0$			$-\frac{1}{b_0} \dot{c}_{0,r}$	$\frac{1}{b_0} (1 - \frac{1}{b_1} \dot{c}_{2,r} - \dot{c}_{1,r})$	$\frac{1}{b_0} (\theta_r - \frac{1}{b_1} \dot{c}_{3,r} - \frac{1}{b_2} \dot{c}_{2,r})$	$\frac{1}{b_2} \dot{c}_{1,r}$	$\frac{1}{b_2} (\dot{c}_{0,r} - \lambda \dot{c}_{1,r})$

W przypadku aproksymacji liniowej podstawia się α_0 i α_1 zgodnie ze wzorami (2.3) oraz uwzględnia się, że $\alpha_2 = 0$. Po przekształceniach otrzymuje się następujący związek rekurencyjny dla odkształcenia

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau = & c_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + c_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \gamma_\tau \sigma_\tau + (a_0 c_{2,\tau} - \gamma_\tau) \sigma'_{\tau-1} + \\ & + (a_1 c_{5,\tau} + a_2 c_{6,\tau}) \Delta \sigma_{\tau-1} - a_2 c_{5,\tau} \frac{1}{\vartheta_{\tau-1}} (\sigma_{\tau-1} - \sigma'_{\tau-2}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

We wzorze (2.13):

$$\begin{aligned} \gamma_\tau = & \frac{1}{\vartheta_\tau} (a_0 c_{3,\tau} + a_1 c_{2,\tau} + a_2 c_{5,\tau}), \\ \Delta \sigma_\tau = & \sigma'_\tau - \sigma_\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

We wzorze (2.13) występuje ponadto prędkość odkształcenia, którą oblicza się wzorem

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau = & \dot{c}_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \dot{c}_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \dot{\gamma}_\tau \sigma_\tau + (a_0 \dot{c}_{2,\tau} - \dot{\gamma}_\tau) \sigma'_{\tau-1} + \\ & + (a_1 \dot{c}_{5,\tau} + a_2 \dot{c}_{6,\tau}) \Delta \sigma_{\tau-1} - a_2 \dot{c}_{5,\tau} \frac{1}{\vartheta_{\tau-1}} (\sigma_{\tau-1} - \sigma'_{\tau-2}), \\ \dot{\gamma}_\tau = & \frac{1}{\vartheta_\tau} (a_0 \dot{c}_{3,\tau} + a_1 \dot{c}_{2,\tau} + a_2 \dot{c}_{5,\tau}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

W przypadku aproksymacji kwadratowej otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau = & c_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + c_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \bar{\gamma}_\tau \sigma_\tau + (a_0 c_{2,\tau} - \bar{\gamma}_\tau) \sigma'_{\tau-1} + \\ & + (a_0 c_{3,\tau} + a_1 c_{2,\tau} - \vartheta_\tau \bar{\gamma}_\tau) \dot{\sigma}'_{\tau-1} + \\ & + (a_1 c_{5,\tau} + a_2 c_{6,\tau}) \Delta \sigma_{\tau-1} + a_2 c_{5,\tau} \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\bar{\gamma}_\tau = \frac{2}{\vartheta_\tau^2} (a_0 c_{4,\tau} + a_1 c_{3,\tau} + a_2 c_{2,\tau}),$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau = & \dot{c}_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \dot{c}_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \dot{\bar{\gamma}}_\tau \sigma_\tau + (a_0 \dot{c}_{2,\tau} - \dot{\bar{\gamma}}_\tau) \sigma'_{\tau-1} + \\ & + (a_0 \dot{c}_{3,\tau} + a_1 \dot{c}_{2,\tau} - \vartheta_\tau \dot{\bar{\gamma}}_\tau) \dot{\sigma}'_{\tau-1} + \\ & + (a_1 \dot{c}_{5,\tau} + a_2 \dot{c}_{6,\tau}) \Delta \sigma_{\tau-1} + a_2 \dot{c}_{5,\tau} \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}, \end{aligned}$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_\tau = \frac{2}{\vartheta_\tau^2} (a_0 \dot{c}_{4,\tau} + a_1 \dot{c}_{3,\tau} + a_2 \dot{c}_{2,\tau}), \quad (2.17)$$

$$\dot{\sigma}_\tau = \frac{2}{\vartheta_\tau} (\sigma_\tau - \sigma'_{\tau-1}) - \dot{\sigma}'_{\tau-1},$$

$$\dot{\sigma}'_\tau = \frac{2}{\vartheta_\tau} (\sigma_\tau - \sigma'_{\tau-1}) + \Delta \dot{\sigma}_\tau - \dot{\sigma}'_{\tau-1}.$$

Wzory (2.13) i (2.16) pozwalają obliczyć ε_τ , to znaczy granicę lewostronną funkcji $\varepsilon(t)$ w punkcie $t = t_\tau$. Jeśli funkcja jest w tym punkcie nieciągła, to zachodzi potrzeba obliczenia również granicy prawostronnej ε'_τ . Granicę tę obliczymy za pomocą wzoru (2.10), bowiem $\varepsilon(0) = \varepsilon'_{-1}$.

Można wykazać, że wyłączwszy przypadek 1 w tablicy 1 jako mogący prowadzić tylko do ciała Hooke'a, dla wszystkich pozostałych przypadków otrzymuje się $c_0(0) = 1$,

$c_1(0) = c_2(0) = c_3(0) = c_4(0) = 0$ oraz $c_5(0) = \frac{1}{b_1}$, jeśli $b_1 \neq 0$ i $b_2 = 0$ oraz $c_5(0) = 0$ jeśli $b_2 \neq 0$. W końcu $c_6(0) = \frac{1}{b_2}$ jeśli $b_2 \neq 0$, a w przypadkach 2 i 6 uzasadnione zostało już, że $a_2 = 0$. Otrzymuje się więc w postaci ogólnej

$$\varepsilon'_{\tau-1} = \varepsilon_{\tau-1} + [a_1 c_5(0) + a_2 c_6(0)] \Delta \sigma_{\tau-1},$$

lub, z uwzględnieniem powyższych wywodów

$$\varepsilon'_\tau = \varepsilon_\tau + \frac{a_1}{b_1} \Delta \sigma_\tau, \quad (2.18)$$

jeśli $b_1 \neq 0$ i $b_2 = 0$, oraz

$$\varepsilon'_\tau = \varepsilon_\tau + \frac{a_2}{b_2} \Delta \sigma_\tau, \quad (2.19)$$

jeśli $b_2 \neq 0$.

Wzory (2.18 - 2.19) są słuszne dla aproksymacji liniowej i kwadratowej. Ze wzorów tych wynika też, że funkcja $\varepsilon(t)$ jest ciągła (mimo nieciągłości funkcji $\sigma(t)$), jeśli $a_1 = 0$ w przypadkach 2 i 6, lub $a_2 = 0$ w przypadkach pozostałych. Jest tak np. w modelu Kelvina-Voigta (przyp. 6), w którym $a_1 = 0$. Dla modelu Maxwella (przyp. 2) jest $a_1 = \frac{1}{E}$ i skok funkcji $\sigma(t)$ powoduje nieciągłość $\varepsilon(t)$.

W podobny sposób można określić granice prawostronne funkcji $\dot{\varepsilon}(t)$ jeśli jest nieciągła. Otrzymuje się:

$$\dot{\varepsilon}'_\tau = \dot{\varepsilon}_\tau + \frac{a_0 - \alpha a_1}{b_1} \Delta \sigma_\tau + \frac{a_1}{b_1} \Delta \dot{\sigma}_\tau, \quad (2.20)$$

jeśli $b_1 \neq 0$ i $b_2 = 0$, oraz

$$\dot{\varepsilon}'_\tau = \dot{\varepsilon}_\tau + \frac{a_1 - \lambda a_2}{b_2} \Delta \sigma_\tau + \frac{a_2}{b_2} \Delta \dot{\sigma}_\tau, \quad (2.21)$$

jeśli $b_2 \neq 0$.

3. Dyskretna analiza modeli reologicznych

3.1. Model Kelvina-Voigta. Własności fizyczne ciała Kelvina-Voigta opisuje związek różniczkowy

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (3.1)$$

w którym występują dwa parametry: E i η .

Model Kelvina-Voigta jest więc przypadkiem szczególnym modelu opisanego równaniem (2.7), w którym należy przyjąć: $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_0 = E$, $b_1 = \eta$, $b_2 = 0$.

W ujęciu dyskretnym równanie stanu ciała Kelvina-Voigta ma postać

$$\varepsilon_\tau = e^{-\alpha \delta \tau} \varepsilon_{\tau-1} + \gamma_\tau \sigma_\tau + \left[\frac{1}{E} (1 - e^{-\alpha \delta \tau}) - \gamma_\tau \right] \sigma'_{\tau-1}, \quad (3.2)$$

w przypadku aproksymacji liniowej, oraz

$$\varepsilon_\tau = e^{-\alpha\vartheta_\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \bar{\gamma}_\tau \sigma_\tau + \left[\frac{1}{E} (1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}) - \bar{\gamma}_\tau \right] \sigma'_{\tau-1} + \frac{\vartheta_\tau}{E} \left(1 - E \bar{\gamma}_\tau - \frac{1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}}{\alpha\vartheta_\tau} \right) \dot{\sigma}'_{\tau-1} \quad (3.3)$$

w przypadku aproksymacji kwadratowej. We wzorach (3.2) i (3.3)

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &= \frac{1}{E} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}}{\alpha\vartheta_\tau} \right), \\ \bar{\gamma}_\tau &= \frac{1}{E} \left[1 - \frac{2}{\alpha\vartheta_\tau} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}}{\alpha\vartheta_\tau} \right) \right], \quad \alpha = \frac{E}{\eta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.1. Wyznaczmy krzywą pełzania przyjmując w tym celu

$$\sigma(t) = \sigma^0 H(t), \quad (3.5)$$

$H(t)$ — funkcja Heaviside'a.

Rozwiązanie ściśle jest ogólnie znane

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (3.6)$$

Ponieważ dla $t > 0$ jest $\dot{\sigma}(t) = 0$, więc $\dot{\sigma}'_{\tau-1} = 0$ oraz $\sigma'_{\tau-1} = \sigma_\tau = \sigma^0$, wobec czego

$$\varepsilon_\tau = e^{-\alpha\vartheta_\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \frac{\sigma^0}{E} (1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}), \quad (3.7)$$

zarówno dla aproksymacji liniowej, jak też kwadratowej. Wyniki uzyskane za pomocą wzoru (3.7) pokrywają się dokładnie z wynikami ścisłymi wg (3.6) i to niezależnie od doboru długości kroku ϑ_τ w (3.7).

3.1.2. Przebieg naprężeń w przedziale $t \in \left(0, \frac{\pi}{\omega}\right)$ dany jest funkcją

$$\sigma(t) = \sigma^0 \sin \omega t. \quad (3.8)$$

Rozwiązanie ściśle ma postać [1]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \left[\frac{\omega}{\alpha} e^{-\alpha t} + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \sin(\omega t - \varphi) \right], \quad (3.9)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega}{\alpha}.$$

Do dalszych obliczeń przyjęto dane według monografii [15] s. 170 zawierające wyniki badań J. Kmity nad parametrami lepkosprężystymi lin stalowych: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\eta = 4\,249\,000$ kGdni/cm² = $42,49 \cdot 10^4$ MPa dni = $102 \cdot 10^5$ MPah. Przyjęto, że wolnozmiennie obciążenie przebiega w przedziale (0; 14 dni) wg półfali sinusoidy; $\omega = \frac{\pi}{14 \text{ dzień}} = \frac{\pi}{24 \cdot 14} \text{ h}^{-1}$, $\sigma^0 = 6 \cdot 10^{-3}$ MPa.

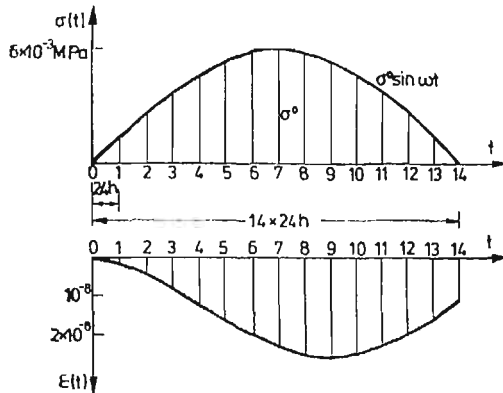
Obliczenia wykonano

1° według wzoru ścisłego (3.9);

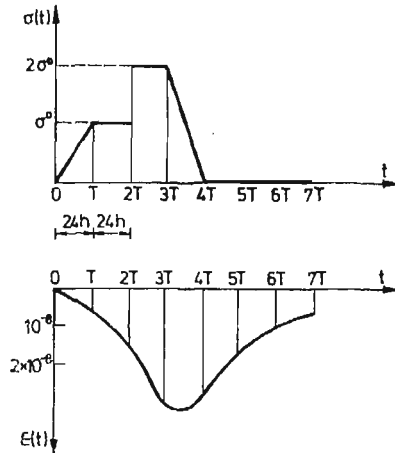
2° według związku rekurencyjnego (3.2) (aproksymacja liniowa) ze stałym krokiem równym kolejno: $\vartheta = 24h$, $\vartheta = 2 \cdot 24h$, $\vartheta = 4 \cdot 24h$;

Tablica 3

t [dni]	$\sigma(t) \times 10^3$ [MPa]	$\varepsilon(t) \times 10^9$											
		Wartość dokładna wg (3.9)	aproksymacja liniowa				aproksymacja kwadratowa						
			$\phi = 1$ dzień	$\phi = 2$ dni	$\phi = 4$ dni	$\phi = 7$ dni	$\phi = 1$ dzień	$\phi = 2$ dni	$\phi = 4$ dni	$\phi = 7$ dni			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1,335126	1,351084	0	1,351084	0	1,354597	0	1,354597	0	1,354597	0	0	0
2	2,603304	4,633433	4,583307	4,633433	4,628131	4,652984	4,628131	4,652984	4,628131	4,652984	4,628131	4,628131	4,628131
3	3,740940	8,968880	8,931960	8,931960	8,967508	8,967508	8,967508	8,967508	8,967508	8,967508	8,967508	8,967508	8,967508
4	4,690986	13,618750	13,402390	13,562380	12,893022	13,619720	13,633330	13,619720	13,633330	13,619720	13,633330	13,619720	13,633330
5	5,405814	18,074830	17,999750	17,999750	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760
6	5,849568	21,930030	21,838720	21,838720	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260
7	6,0	24,876360	24,772590	24,772590	24,875510	24,875510	24,875510	24,875510	24,875510	24,875510	24,875510	24,875510	24,875510
8	5,849568	26,694450	26,582910	26,582910	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850
9	5,405814	27,248350	27,134350	27,134350	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670
10	4,690986	26,482480	26,371460	26,371460	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960
11	3,740940	24,417620	24,315100	24,315100	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960
12	2,603304	21,146513	21,057520	21,057520	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020
13	1,335126	16,826360	16,755320	16,755320	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660
14	0	11,669530	11,619980	11,619980	11,664690	11,664690	11,664690	11,664690	11,664690	11,664690	11,664690	11,664690	11,664690



Rys. 4



Rys. 5

3° według związku rekurencyjnego (3.3) (aproksymacja kwadratowa) ze stałym krokiem równym kolejno $\vartheta = 24h$, $\vartheta = 2 \cdot 24h$, $\vartheta = 4 \cdot 24h$, $\vartheta = 7 \cdot 24h$.

Wyniki zestawiono w tabelicy 3 oraz na rysunku 4. Widoczny jest wpływ długości kroku na dokładność obliczeń oraz przewaga aproksymacji kwadratowej nad liniową. Niemniej można stwierdzić, że aproksymacja liniowa daje dostatecznie dokładne dla celów praktycznych wyniki nawet przy znacznej długości kroku.

3.1.3. Przebieg naprężeń jest funkcją nieciągłą przedstawioną na rysunku 5:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^0 \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ \sigma^0, & T \leq t < 2T, \\ 2\sigma^0, & 2T < t \leq 3T, \\ 2\sigma^0 \left(4 - \frac{t}{T}\right), & 3T \leq t \leq 4T, \\ 0, & t \geq 4T. \end{cases} \quad (3.10)$$

Otrzymuje się następujące rozwiązanie ścisłe:

$$\begin{aligned}
 t \in [0, T]: \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \frac{1}{\alpha T} (e^{-\alpha t} + \alpha t - 1), \\
 t \in [T, 2T]: \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \left(1 - \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} e^{-\alpha t} \right), \\
 t \in (2T, 3T]: \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \left[2 - \left(\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} + e^{2\alpha T} \right) e^{-\alpha t} \right], \\
 t \in [3T, 4T]: \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \left[8 + \frac{2}{\alpha T} (1 - \alpha t) - \left(\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} + e^{2\alpha T} + \frac{2}{\alpha T} e^{3\alpha T} \right) e^{-\alpha t} \right], \\
 t \in [4T, \infty): \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \frac{1}{\alpha T} (1 - e^{\alpha T} - \alpha T e^{2\alpha T} - 2e^{3\alpha T} + 2e^{4\alpha T}) e^{-\alpha t}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

W ujęciu dyskretnym przyjmujemy $\vartheta_r = T$ uwzględniając się, że

$$\begin{aligned}
 \sigma'_0 &= 0, \quad \sigma_1 = \sigma'_1 = \sigma^0, \quad \sigma_2 = \sigma^0, \quad \sigma'_2 = 2\sigma^0, \quad \sigma_3 = \sigma'_3 = 2\sigma^0, \\
 \sigma_4 &= \sigma'_4 = 0, \quad \sigma_5 = \sigma'_5 = 0, \dots, \text{ oraz} \\
 \dot{\sigma}'_0 &= \frac{\sigma^0}{T}, \quad \dot{\sigma}'_1 = 0, \quad \dot{\sigma}'_2 = 0, \quad \dot{\sigma}'_3 = -\frac{2\sigma^0}{T}, \quad \dot{\sigma}'_4 = 0, \quad \dot{\sigma}'_5 = 0, \dots
 \end{aligned}$$

Dla aproksymacji liniowej otrzymuje się związek rekurencyjny w postaci

$$\varepsilon_r = e^{-\alpha T} \varepsilon_{r-1} + \frac{\sigma_r}{E} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) + \frac{\sigma'_{r-1}}{E} \left(\frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} \right), \tag{3.12}$$

skąd, przy warunku początkowym $\varepsilon_0 = 0$, oblicza się kolejno:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{\sigma^0}{E} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right), \\
 \varepsilon_2 &= \frac{\sigma^0}{E} \left(1 - \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} e^{-2\alpha T} \right), \\
 \varepsilon_3 &= \frac{\sigma^0}{E} \left(2 - e^{-\alpha T} - \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} e^{-3\alpha T} \right), \\
 \varepsilon_4 &= \frac{\sigma^0}{E} \left[\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} (2e^{-\alpha T} - e^{-4\alpha T}) - e^{-2\alpha T} \right], \\
 \varepsilon_5 &= \frac{\sigma^0}{E} \left[\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} (2e^{-2\alpha T} - e^{-5\alpha T}) - e^{-3\alpha T} \right], \dots
 \end{aligned}$$

Stosując aproksymację kwadratową otrzymuje się związek rekurencyjny

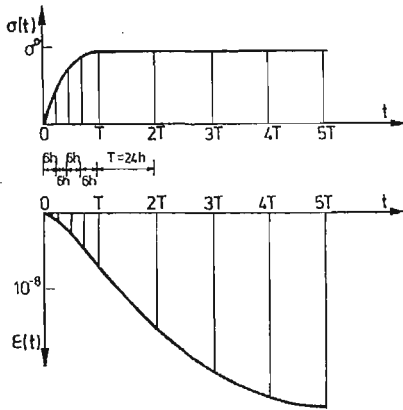
$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= e^{-\alpha T} \varepsilon_{r-1} + \frac{\sigma_r}{E} \left[1 - \frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \right] + \\
 &+ \frac{\sigma'_{r-1}}{E} \left[\frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) - e^{-\alpha T} \right] + \\
 &+ \frac{\dot{\sigma}'_{r-1} T}{E} \left[\frac{2}{\alpha T} - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \left(1 + \frac{2}{\alpha T} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Wyniki otrzymane za pomocą wzoru (3.13) są identyczne z otrzymanymi ze wzoru (3.12) oraz, jak łatwo sprawdzić, z wynikami rozwiązania ścisłego (3.11).

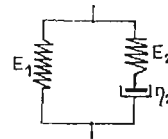
3.1.4. Przebieg naprężeń dany jest funkcją

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma^0}{T^2} t(2T-t), & 0 \leq t \leq T, \\ \sigma^0, & t \geq T. \end{cases} \quad (3.14)$$

W tabelicy 4 zestawiono wartości funkcji $\varepsilon(t)$. Aproksymacja kwadratowa daje wyniki pokrywające się ze ścisłymi, ponieważ dokładnie opisuje przebieg naprężeń w całym zakresie zmienności t . Wykresy $\sigma(t)$ i $\varepsilon(t)$ pokazane są na rysunku 6.



Rys. 6



Rys. 7

Tabela 4

t [godz.]	$\sigma(t) \times 10^3$ [MPa]	$\varepsilon(t) \times 10^9$		
		wartość dokładna	aproksymacja liniowa	% błędu
0	0	0	0	
6	2,625	0,77750	0,74282	4,46
12	4,500	2,71353	2,64802	2,41
18	5,625	5,26316	5,17024	1,76
24	6,000	7,94196	7,82468	1,48
48	6,000	16,22330	16,15007	0,45
72	6,000	21,39553	21,34982	0,21
96	6,000	24,62593	24,59740	0,12
120	6,000	26,64352	26,62573	0,07
144	6,000	27,90364	27,89255	0,04

3.2. Model Zenera (rys. 7)

Równanie stanu ma postać

$$\frac{E_2}{\eta_2} \sigma(t) + \dot{\sigma}(t) = \frac{E_1 E_2}{\eta_2} \varepsilon(t) + (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon}(t). \quad (3.15)$$

Przyjmując stały krok $\vartheta_r = T$, otrzymuje się dla aproksymacji liniowej

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = e^{-\alpha T} \varepsilon_{r-1} + \frac{\sigma_r}{E_1} \left(1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) + \\ + \frac{\sigma'_{r-1}}{E_1} \left(\frac{E_2}{E_1 + E_2} \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} \right) + \frac{\Delta \sigma_{r-1}}{E_1 + E_2} e^{-\alpha T}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

oraz dla aproksymacji kwadratowej

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = e^{-\alpha T} \varepsilon_{r-1} + \frac{\sigma_r}{E_1} \left[1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \right] + \\ + \frac{\sigma'_{r-1}}{E_1} \left[\frac{E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) - e^{-\alpha T} \right] + \\ + \frac{\sigma'_{r-1} T}{E_1} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[\frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right] + \frac{\Delta \sigma_{r-1}}{E_1 + E_2} e^{-\alpha T}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

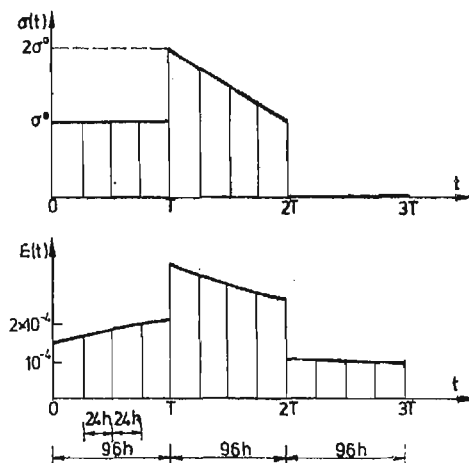
$$\alpha = \frac{E_1 E_2}{\eta_2 (E_1 + E_2)}.$$

Dla granicy prawostronnej otrzymuje się wzór

$$\varepsilon'_r = \varepsilon_r + \frac{\Delta \sigma_r}{E_1 + E_2}. \quad (3.18)$$

Niech przebieg naprężeń przedstawia wykres na rysunku 8. To znaczy

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^0, & 0 < t < T, \\ \sigma^0 \left(3 - \frac{t}{T} \right), & T < t < 2T, \\ 0, & 2T < t < \infty. \end{cases} \quad (3.19)$$



Rys. 8

Rozwiązanie ściśle ma postać:

$$t \in (0, T):$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E_1} \left(1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} e^{-\alpha t} \right),$$

$$t \in (T, 2T):$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E_1} \left\{ 3 - \frac{t}{T} + \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[\frac{1}{\alpha T} - \left(1 + e^{-\alpha T} + \frac{1}{\alpha T} \right) e^{-\alpha(t-T)} \right] \right\}, \quad (3.20)$$

$$t \in (2T, \infty):$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E_1} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[1 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} (1 + e^{-\alpha T}) \right] e^{-\alpha(t-2T)}.$$

W ujęciu dyskretnym przyjmujemy stały krok $\vartheta_\tau = T$ i uwzględniamy w obliczeniach, że $\sigma'_0 = \sigma^0$, $\Delta\sigma_0 = \sigma^0$, $\sigma_1 = \sigma^0$, $\sigma'_1 = 2\sigma^0$, $\Delta\sigma_1 = \sigma^0$, $\sigma_2 = \sigma^0$, $\sigma'_2 = 0$, $\Delta\sigma_2 = -\sigma^0$, $\sigma_3 = \sigma'_3 = \dots = 0$; $\dot{\sigma}'_0 = \dot{\sigma}'_1 = 0$, $\dot{\sigma}'_1 = \dot{\sigma}'_2 = -\frac{\sigma^0}{T}$, $\dot{\sigma}'_2 = \dot{\sigma}'_3 = \dot{\sigma}'_4 = \dots = 0$.

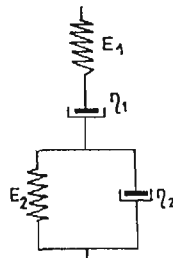
Aproksymacja liniowa (3.16) i kwadratowa (3.17) dają identyczne następujące wyniki:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma^0}{E_1} \left(1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} e^{-\alpha T} \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma^0}{E_1} \left\{ 1 + \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[\frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} (1 + e^{-\alpha T}) \right] \right\}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma^0}{E_1} \cdot \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[1 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} (1 + e^{-\alpha T}) \right] e^{-\alpha T}, \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Granice prawostronne funkcji $\varepsilon(t)$ są równe:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_0 &= \frac{\sigma^0}{E_1 + E_2}, & \varepsilon'_1 &= \varepsilon_1 + \frac{\sigma^0}{E_1 + E_2}, \\ \varepsilon'_2 &= \varepsilon_2 - \frac{\sigma^0}{E_1 + E_2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Łatwo można sprawdzić, że za pomocą wzorów ścisłych (3.20) otrzymana się identyczne wartości odkształceń w chwilach $t_\tau = T^\pm, 2T^\pm, 3T, \dots$. W celu sporządzenia wykresu $\varepsilon(t)$ zagęszczono węzły na osi czasu przyjmując $\vartheta_\tau = \frac{1}{4}T$. Wyniki obliczeń dla $T = 96 \text{ h}$, $\sigma^0 = 5 \text{ MPa}$, $E_1 = 9,5 \cdot 10^3 \text{ MPa}$, $E_2 = 22,5 \cdot 10^3 \text{ MPa}$, $\eta_2 = 49,92 \cdot 10^5 \text{ MPah}$ ilustruje wykres na rysunku 8. Powyższe dane zostały wzięte z monografii I. KISIELA [15] według badań A. Mitzla i A. Dziendziela dotyczących betonu.



Rys. 9

3.3. Model Burgersa (rys. 9)

W czteroparametrowym modelu Burgersa jest $a_0 = 1$,

$$a_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_2} + \frac{\eta_1}{E_1}, \quad a_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2}, \quad b_0 = 0,$$

$$b_1 = \eta_1, \quad b_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2}.$$

Przyjmując stały krok $\vartheta_\tau = T$ otrzymuje się dla aproksymacji liniowej

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau &= \varepsilon_{\tau-1} + \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \left(\frac{T}{2\eta_1} + \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \frac{1}{E_2} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma_\tau + \\ &+ \left[\frac{T}{2\eta_1} - \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \left(\frac{T}{\eta_1} - \frac{1}{E_2} \right) \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right] \sigma'_{\tau-1} + \\ &+ \left[\frac{1}{E_1} + \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \right] \Delta \sigma_{\tau-1} - \frac{1}{E_1} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} (\sigma_{\tau-1} - \sigma'_{\tau-2}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau &= e^{-\lambda T} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \left(\frac{1}{E_1 T} + \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma_\tau - \\ &- \left(\frac{1}{E_1 T} + \frac{1}{\eta_1} e^{-\lambda T} + \frac{1}{\eta_2} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma'_{\tau-1} + \\ &+ \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) e^{-\lambda T} \Delta \sigma_{\tau-1} - \frac{1}{E_1} \frac{e^{-\lambda T}}{T} (\sigma_{\tau-1} - \sigma'_{\tau-2}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dla aproksymacji kwadratowej otrzymuje się

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau &= \varepsilon_{\tau-1} + \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \left[\frac{T}{3\eta_1} + \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \frac{2}{E_2} \frac{1}{\lambda T} \left(1 - \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \right] \sigma_\tau - \\ &- \left[\frac{T}{3\eta_1} + \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \left(\frac{T}{\eta_1} + \frac{2}{E_2 \lambda T} \right) \left(1 - \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \right] \sigma'_{\tau-1} + \\ &+ \left[\frac{T^2}{6\eta_1} + \frac{2}{E_2 \lambda} - \left(\frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} + \frac{2}{E_2 \lambda T} \right) \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \right] \ddot{\sigma}'_{\tau-1} + \\ &+ \left[\frac{1}{E_1} + \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \right] \Delta \sigma_{\tau-1} + \frac{1}{E_1} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau &= e^{-\lambda T} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{2}{T} \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \frac{2}{E_2 T} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma_\tau - \\ &- \left(\frac{1}{\eta_1} e^{-\lambda T} + \frac{2}{T} \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \frac{2}{E_2 T} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma'_{\tau-1} + \\ &+ \left[\frac{2}{E_2} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} - \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} (1-e^{-\lambda T}) \right] \ddot{\sigma}'_{\tau-1} + \\ &+ \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) e^{-\lambda T} \Delta \sigma_{\tau-1} + \frac{1}{E_1} e^{-\lambda T} \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\lambda = \frac{E_2}{\eta_2}.$$

3.3.1. Dla obciążenia

$$\sigma(t) = \sigma^0 H(t) \quad (3.27)$$

otrzymuje się

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{b_1} \left[t + \left(a_1 - \frac{1}{\lambda} \right) (1 - e^{-\lambda t}) + a_2 \lambda e^{-\lambda t} \right]. \quad (3.28)$$

Jest to wynik ścisły. Identyczne wyniki otrzymuje się za pomocą wzorów rekurencyjnych, co wynika stąd, że każda aproksymacja opisuje dokładnie funkcję typu (3.27). Krok ϑ_τ może być dowolnie długi.

W aproksymacji liniowej w pierwszym kroku należy przyjąć: $\varepsilon_0 = 0$, $\dot{\varepsilon}_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma'_0 = \sigma^0$, $\Delta\sigma_0 = \sigma^0$, $\sigma_1 = \sigma^0$, czyli dla $\tau = 1$ ($\vartheta_\tau = T$):

$$\varepsilon_1 = \sigma^0 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{T}{\eta_1} + \frac{T}{\eta_2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \sigma^0 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} e^{-\lambda T} \right).$$

Granice prawostronne odkształcenia i prędkości odkształcenia dla $t = 0$ obliczamy wzorem (2.19)

$$\varepsilon'_0 = \frac{\sigma^0}{E_1},$$

i wzorem (2.21)

$$\dot{\varepsilon}'_0 = \sigma^0 \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2}.$$

Identyczne wyniki otrzymamy z (3.28)

Dla $\tau = 2, 3, \dots$ otrzymuje się

$$\varepsilon_\tau = \varepsilon_{\tau-1} + \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \frac{\sigma^0 T}{\eta_1} \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_\tau = e^{-\lambda T} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \frac{\sigma^0}{\eta_1} (1 - e^{-\lambda T}).$$

Dla aproksymacji kwadratowej należy dodatkowo przyjąć $\Delta\dot{\sigma}_\tau = 0$ dla wszystkich τ .

3.3.2. Przyjęto program obciążenia

$$\sigma(t) = \sigma^0 \sin \omega t. \quad (3.29)$$

Bezpośrednie rozwiązanie równania różniczkowego metodą transformacji Laplace'a daje wynik

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{b_2} \left[\frac{1}{\omega \lambda} + A e^{-\lambda t} - \left(\frac{1}{\omega \lambda} + A \right) \cos \omega t + \left(a_2 + \frac{\lambda}{\omega} A \right) \sin \omega t \right], \quad (3.30)$$

$$A = \frac{\omega}{\lambda} \cdot \frac{a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 - 1}{\omega^2 + \lambda^2}.$$

Tablica 5

t [godz]	$\sigma(t)$ [MPa]	$\varepsilon(t) \times 10^4$											
		wartość dokładna wg (3.30)				Aproksymacja liniowa				Aproksymacja kwadratowa			
		$\theta = 0,2h$	$\theta = 0,4h$	$\theta = 1h$	$\theta = 1,2h$	$\theta = 0,2h$	$\theta = 0,4h$	$\theta = 1h$	$\theta = 1,2h$	$\theta = 0,2h$	$\theta = 0,4h$	$\theta = 1h$	$\theta = 1,2h$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0,2	1,85410	5,65747	10,87733	18,42131	18,11828	5,65786	10,88268	18,46182	19,07510	18,35592	0	0	
0,4	3,52671	10,88331	17,96569	18,45242	16,00894	10,88550	17,99321	18,46316	12,04843	10,88268	0	0	
0,6	4,85410	15,14230	19,13947	16,00894	12,04566	15,14216	18,46316	16,02053	6,92320	15,14216	17,99166	17,99321	
0,8	5,70634	17,99154	18,46300	12,03380	6,91206	17,98492	18,46300	12,04584	1,15196	17,99166	19,13939	18,46182	
1,0	6,0	19,13947	16,00894	6,91206	1,14215	19,13065	16,00894	6,92320	1,15196	19,13939	18,46316	18,46182	
1,2	5,70634	18,46300	12,03380	6,91206	1,14215	18,45242	12,03380	6,92320	1,15196	18,46316	18,46182	18,46182	
1,4	4,85410	16,00894	6,91206	1,14215	1,15180	16,00894	6,91206	1,14215	1,15196	16,02053	12,04843	12,04843	
1,6	3,52671	12,04566	6,91206	1,14215	1,15180	12,04566	6,91206	1,14215	1,15196	12,04584	12,04843	12,04843	
1,8	1,85410	6,92325	1,15180	1,14215	1,15180	6,92325	1,15180	1,14215	1,15196	6,92320	1,15093	1,27686	
2,0	0	1,15180	1,14215	1,15180	1,15180	1,15180	1,14215	1,15180	1,15196	1,15093	1,27686	1,27686	
2,2	-1,85410	-4,70587	-10,09684	-17,35997	-18,49547	-4,70587	-10,09684	-17,35997	-18,49547	-10,07569	-18,66377	-9,82924	
2,4	-3,52671	-10,07794	-14,43967	-17,36493	-18,56796	-10,08256	-14,43967	-17,36493	-18,56812	-10,07569	-18,66377	-9,82924	
2,6	-4,85410	-14,43967	-17,36493	-18,56796	-18,56796	-14,44126	-17,36493	-18,56796	-18,56812	-17,36692	-18,66377	-9,82924	
2,8	-5,70634	-17,36493	-18,56796	-18,56796	-18,56796	-17,36352	-18,56796	-18,56796	-18,56812	-17,36692	-18,66377	-9,82924	
3,0	-6,0	-18,56796	-18,56796	-18,56796	-18,56796	-18,56387	-18,56796	-18,56796	-18,56812	-17,36692	-18,66377	-9,82924	
3,2	-5,70634	-17,93142	-15,51795	-11,56401	-6,45680	-17,92525	-15,51795	-11,56401	-6,45699	-17,93045	-18,66377	-9,82924	
3,4	-4,85410	-15,51795	-11,56401	-6,45680	-0,69048	-15,51046	-11,56401	-6,45680	-0,69048	-17,93045	-18,66377	-9,82924	
3,6	-3,52671	-11,56401	-6,45680	-0,69048	-0,69048	-11,55612	-6,45680	-0,69048	-0,69048	-11,56694	-18,66377	-9,82924	
3,8	-1,85410	-6,45680	-0,69048	-0,69048	-0,69048	-6,44946	-0,69048	-0,69048	-0,69048	-11,56694	-18,66377	-9,82924	
4,0	0	-0,69048	-0,69048	-0,69048	-0,69048	-0,69048	-0,69048	-0,69048	-0,69048	-0,69564	-0,67351	-11,86399	

Obliczenia numeryczne wykonano przyjmując dla polistyrenu KA w temperaturze 293 K ($\sim 20^\circ\text{C}$) za [16] następujące dane:

$$E_1 = 3,32 \cdot 10^3 \text{ MPa}, \quad E_2 = 4,30 \cdot 10^4 \text{ MPa},$$

$$\eta_1 = 6,45 \cdot 10^8 \text{ MPa} \cdot \text{s}, \quad \eta_2 = 9,62 \cdot 10^7 \text{ MPa} \cdot \text{s}.$$

Przyjęto różne długości kroku w celu zbadania, jaki to ma wpływ na dokładność obliczeń ($\vartheta = 0,2h, \vartheta = 0,4h, \vartheta = 1h, \vartheta = 1,2h$). Przyjęto nadto $\sigma = 6 \text{ MPa}$ i $\omega = \frac{\pi}{2} h^{-1}$.

W pierwszym kroku należy przyjąć następujące wartości początkowe: $\varepsilon_0 = 0, \dot{\varepsilon}_0 = 0, \sigma_0 = \sigma'_{-1} = \sigma'_0 = 0, \Delta\sigma_0 = 0, \dot{\sigma}'_0 = \omega\sigma^0, \Delta\dot{\sigma}'_0 = \omega\sigma^0$. Granicę prawostronną prędkości odkształcenia dla $t = 0$ oblicza się wzorem:

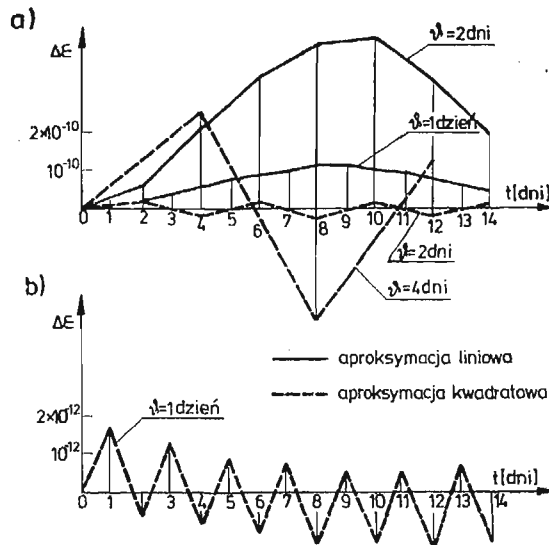
$$\varepsilon'_0 = \frac{\omega\sigma^0}{E_1}.$$

Wyniki zestawiono w tabelicy 5. Widoczne jest, że aproksymacja kwadratowa daje przy tej samej długości kroku znacznie dokładniejsze wyniki.

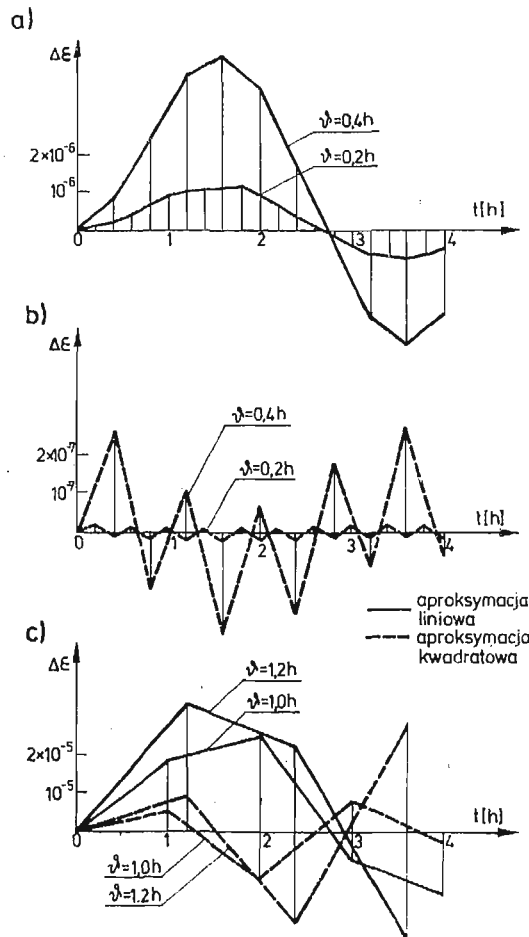
4. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda pozwala opisać zjawisko pełzania materiałów, przy czym w niniejszej pracy ograniczono się do jednoosiowego stanu naprężenia. Metoda jest dobrze przystosowana do skończonej liczby nieciągłości funkcji $\sigma(t)$ i jej pochodnej $\dot{\sigma}(t)$. Punkty nieciągłości muszą być węzłami na osi czasu.

Metoda jest obciążona tylko błędem aproksymacji przebiegu naprężeń. Oznacza to, że jeśli funkcja $\sigma(t)$ jest odcinkami liniowa lub paraboliczna i jeśli węzły umieści się przy-



Rys. 10

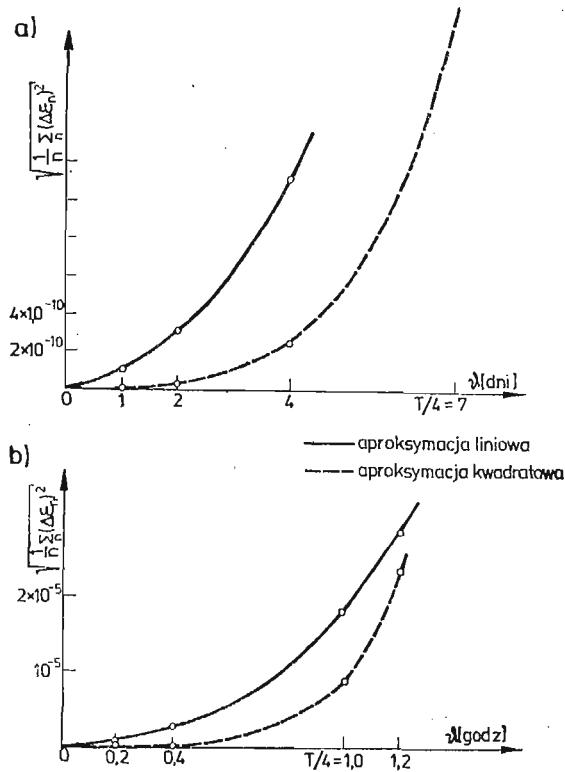


Rys. 11

najmniej we wszystkich punktach nieciągłości funkcji $\sigma(t)$ i jej pochodnej $\dot{\sigma}(t)$, to otrzymamy we wszystkich węzłach wyniki ściśle niezależnie od długości kroku.

Przebieg naprężeń w ogólności może być bardziej złożony. W takim przypadku otrzymuje się wyniki obarczone błędem zależnym od długości kroku. Problem ten został przeanalizowany dla przebiegu sinusoidalnego w przypadku modelu Kelvina-Voigta opisanym w pkt. 3.1.2 i w tabelicy 3 (rys. 10) oraz w przypadku modelu Burgersa opisanym w pkt. 3.3.2 i w tabelicy 5 (rys. 11).

Na wykresach przedstawiono błąd bezwzględny $\Delta \epsilon$ (różnica między rozwiązaniem ścisłym a rozwiązaniem wg opisanej metody) jako funkcję czasu (lub ściślej: wskaźnika kolejnych chwil τ) oraz w zależności od rodzaju aproksymacji i długości kroku. Z wykresów tych wynika oczywista zresztą przewaga aproksymacji kwadratowej nad liniową i wyraźna stabilność metody. Jest charakterystyczne, że przebieg błędu aproksymacji liniowej jest w przybliżeniu proporcjonalny do przebiegu funkcji aproksymowanej, natomiast przy aproksymacji kwadratowej błąd oscyluje zmieniając znak krok za krokiem. „Amplituda”



Rys. 12

tej „krzywej oscylującej” jest, praktycznie rzecz biorąc, stała w całym badanym przedziale czasu. O stabilności metody świadczy też przebieg błędu zanotowany w tabelicy 4.

Na rysunku 12 przedstawiono średni błąd kwadratowy jako funkcję długości kroku. Dla modelu Kelvina-Voigta i danych dotyczących lin stalowych średni błąd kwadratowy obliczono w przedziale czasu (0, 14 dni). Krok $\vartheta = 7$ dni odpowiada ćwiartce sinusoidy przebiegu naprężeń $\left(\frac{1}{4} T\right)$. Widoczne jest na rysunku 12a, że jeśli długość kroku zbliża

się do $\frac{1}{4} T$, to błąd metody szybko rośnie nawet przy zastosowaniu aproksymacji kwadratowej.

Wykresy na rys. 12b dotyczą modelu Burgersa i danych przyjętych dla polistyrenu KA. Średni błąd kwadratowy obliczono w przedziale czasu (0, 4h). Należy zwrócić uwagę na zjawisko zbliżania się obu krzywych błędu do siebie dla $\vartheta > \frac{T}{4}$, co się tłumaczy tym, że przy tak długim w stosunku do okresu funkcji kroku, aproksymowanie sinusoidy odcinkami parabol staje się równie mało przydatne, jak aproksymowanie jej odcinkami prostych.

Stąd należy wnosić postulat takiego doboru długości kroku żeby w przedziale $(t_{\tau-1}, t_{\tau})$ funkcja aproksymowana i jej pochodna były monotoniczne.

Длгоść кроку можна więc на огół przyjmować znaczną, co ma istotne znaczenie przy badaniu długotrwałych процесов пелзання і stanowi залетę opisanej metody.

Literatura cytowana w tekście

1. W. DERSKI, S. ZIEMBA, *Analiza modeli reologicznych*, PWN, Warszawa 1968.
2. W. NOWACKI, *Teoria пелзання*, Arkady, Warszawa, 1963.
3. I. KISIEL, *Reologiczne równania stanu оórodków quasiliniowych*, Wyd. PAN Oddz. we Wrocławiu, 1980.
4. F. J. LOCKETT, *Nonlinear Viscoelastic Solids*, Academic Press, London, New York, 1972.
5. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stalego*, PWN, Warszawa 1969.
6. И. И. ПЕДАХОВСКИЙ, *Дискретно-континуальный метод в линейной теории упруго-ползучего тела*, Применение электронных вычислительных машин в строительной механике, Наука Думка, Киев, 1968.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, M. WATSON, I. P. KING, *A numerical method of visco-elastic stress analysis*, Int. J. of Mech. Sci., 1968.
9. J. H. ARGYRIS, H. BALMER, J. S. DOLTSINIS, *Nieliniowość materiału w analizie metodą elementów skończonych*, *Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej*, Ossolineum, 1977.
10. *Zastosowanie metody elementów skończonych w geotechnice*, праца zbiorowa, Ossolineum, 1980, s. 130 - 135.
11. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., 22, 3, 1976.
12. B. HUSIAR, R. ŚWITKA, *Quasistatyczne пелзание цięгна lepkosprężystego w ujęciu dyskretnym*, Arch. Inż. Łąd., 25, 1, 1979.
13. B. HUSIAR, R. ŚWITKA, *Statyka lepkosprężystej siatki cięgnowej ze wstępnym napięciem*, Zesz. Nauk. PP, Budownictwo Łądowe nr 24, 1979.
14. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, Warszawa, 1964.
15. I. KISIEL, *Reologia w budownictwie*, Arkady, Warszawa, 1967.
16. J. ZAWADZKI, *Problemy wyteżenia i znużenia polimerów jako tworzyw konstrukcyjnych*, PWN, Warszawa, 1978.

Резюме

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В работе представляется метод дискретизации уравнения состояния линейно-вязкоупругих тел. Метод состоит в разделении оси времени на интервалы, в которых напряжение аппроксимируется линейной или квадратичной функцией. Конститутивное уравнение вязкоупругого тела принято в виде дифференциальной зависимости, в которую входят не больше второй производные по времени. Допускается конечное число разрывностей функции $\sigma(t)$, а также производной $\dot{\sigma}(t)$. Уравнение состояния для данной аппроксимации в произвольном интервале можно решить точно. В результате получаем рекуррентную формулу, в которой деформация в данном моменте выражается через напряжение в том самом моменте и через состояние системы в предшествующем моменте. Формула обременена только ошибкой аппроксимации. Это обозначает, что для линейного или параболического пробега напряжений квадратичная аппроксимация доставляет точные результаты независимо от длины шага. В других случаях длина интервала регулируется на основе признака точности может быть значительной, а это имеет существенное значение при испытаниях длительных процессов ползучести.

Проведено ряд испытательных вычислений для разных реологических моделей (Кельвина — Фойгта, Зинера, Бургера) и для разных программ нагружения. Проведено анализ ошибок для частных аппроксимаций и для разных длин шага.

Summary

DISCRETE ANALYSIS OF RHEOLOGICAL MODELS

The discretization method of the equation of state for the linear visco-elastic materials has been proposed. The time axis has been divided into separate time intervals; within each time interval the stresses have been approximated by means of the linear or quadratic functions. The constitutive relation for a visco-elastic material has been assumed in the form of a differential relation with the time derivatives at most of the second order. It has been assumed that the number of points at which functions $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ suffer discontinuities is finite. The constitutive relation for the given approximation can be solved in the exact form.

As a result the recurrence relation has been obtained for which the state of deformation at a given instant is determined by the state of stress at the same instant and by the state of the body in the preceding (discrete) time instant. Thus for the linear and parabolic time distributions of stress, the quadratic approximation leads to the exact results for any length of steps. In other cases the length of the step, controlled by the criterion of accuracy, can be rather big; this fact plays an essential role when long time creep processes are considered.

A number of test calculations for different rheological models (Kelvin-Voigt, Zener, Burgers) and for different loading programs have been performed. The error analysis for some special approximations and different step lengths has been given.

PRZYROSTOWE RÓWNANIA NIELINIOWEJ TEORII PŁYT Z NAPRĘŻENIAMI I UGIĘCIAMI POCZĄTKOWYMI W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM MATERIAŁU

MARIAN K M I E C I K

Politechnika Szczecińska

1. Wstęp

Badania doświadczalne [1] płyt ściskanych osiowo z naprężeniami wstępnymi i ugięciami początkowymi wskazują na ich nieliniowe zachowanie się. Nie zachodzi bowiem proporcjonalność pomiędzy zewnętrznym obciążeniem ściskającym, a wywołanym nim ugięciem, nawet w zakresie sprężystym. Granica plastyczności zostaje osiągnięta przy obciążeniach znacznie niższych od obciążeń maksymalnych, jakie może przenieść płyta. Maksymalna nośność płyty występuje przy ugięciach przekraczających wielokrotnie grubość płyty i przy znacznym uplastycznieniu materiału. Uwzględnienie naprężeń wstępnych i ugięć początkowych w obliczeniach wytrzymałościowych płyt ściskanych osiowo pociąga więc za sobą konieczność uwzględnienia zarówno nieliniowości fizycznej, jak i geometrycznej. Efektywne rozwiązywanie zagadnień nieliniowych wymaga sformułowań przyrostowych [2, 3, 4]. Poniżej, opierając się na wariacyjnym sformułowaniu równań równowagi oraz teorii plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa, wyprowadzone zostały przyrostowe równania nieliniowej teorii płyt z naprężeniami wstępnymi i ugięciami początkowymi. Podano także stosowne wyrażenia przyrostowe dla rozwiązywania zagadnienia metodą elementu skończonego.

2. Przyrostowe związki konstytutywne w zakresie sprężysto-plastycznego materiału

Rozpatrzone zostaną płyty z materiału izotropowego. Zakłada się także wzmocnienie izotropowe po przekroczeniu granicy plastyczności. Przyjmujemy ponadto, że spełniony jest postulat Druckera [5] wykluczający przyrost odkształcenia plastycznego przy spadku wartości naprężenia. Cechę tę posiada większość materiałów konstrukcyjnych, w tym stale okrętowe. W powszechnym zastosowaniu są dwie teorie plastyczności: odkształceniowa i plastycznego płynięcia. Dalsze rozważania będą oparte na tej ostatniej. Jest ona bowiem teorią bardziej ogólną. Teoria odkształceniowa daje poprawne wyniki i zgodne z wynikami uzyskanymi na bazie teorii plastycznego płynięcia tylko przy obciążeniu

prostym, czyli proporcjonalnym, które zdefiniował ILIUSZIN [6]. W związku z tym wyniki oparte na teorii plastycznego płynięcia są na ogół bardziej zgodne z eksperymentem [7]. Istotnym jest także przyrostowy charakter tej teorii, bardziej odpowiedni do rozwiązywania złożonych problemów nieliniowych.

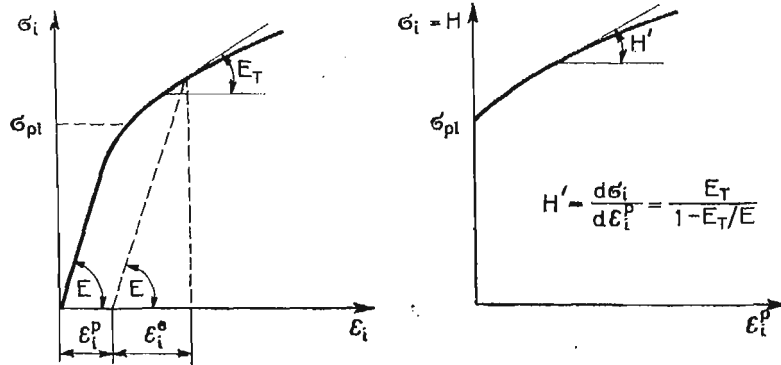
Postulat Druckera zapewnia jednoznaczność uzyskiwanych rozwiązań [8], a jego spełnienie wymaga wypukłej powierzchni płynięcia plastycznego oraz ortogonalności do tej powierzchni wektora przyrostu odkształcenia plastycznego [5, 8]. Najczęściej stosowany w praktyce warunek plastyczności Hubera-Misesa należy także do tych, które dostarczają wypukłą powierzchnię płynięcia. Zgodnie z tym warunkiem powierzchnię tą można określić następująco:

$$f = \sigma_i - H(\kappa) = 0, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

Natomiast $H(\kappa)$ — granica plastyczności zależna od parametru wzmocnienia κ . Parametr wzmocnienia jest tak określony, że przy braku odkształceń plastycznych $\kappa = 0$. W związku z tym $H(\kappa = 0)$ — jest wartością początkowej granicy plastyczności σ_{pl} (rys. 2.1).



Rys. 2.1

Istnieją dwa sposoby wyznaczania parametru κ . Pierwszy zakłada, że jego miarą jest praca odkształcenia plastycznego

$$\kappa = W^p = \int_0^{\epsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad (2.3)$$

lub

$$\kappa = W^p = \int_0^{\epsilon_i^p} \sigma_i d\epsilon_i^p, \quad (2.4)$$

gdzie:

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2 + \frac{3}{2} (d\gamma_{xy}^p)^2 + \frac{3}{2} (d\gamma_{yz}^p)^2 + \frac{3}{2} (d\gamma_{zx}^p)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

W sposobie drugim

$$\kappa = \varepsilon_i^p = \int_0^{\varepsilon_i^p} d\varepsilon_i^p \quad (2.6)$$

Dowodzono, że dla warunku plastyczności Hubera-Misesa obie drogi prowadzą do tego samego rezultatu [9].

W dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń powierzchnia f oddziela stan sprężysty od plastycznego. W związku z tym $f < 0$ jest stanem sprężystym, $f = 0$ — stanem plastycznym, natomiast $f > 0$ — stanem niedopuszczalnym.

Zgodnie z (2.1) i (2.6) różniczka funkcji uplastycznienia

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i^p} d\varepsilon_i^p \quad (2.7)$$

Stąd w stanie plastycznym ($f = 0$)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad \text{— oznacza odciążenie} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad \text{— obciążenie neutralne,} \quad (2.9)$$

natomiast

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad \text{— obciążenie prowadzące do nowej powierzchni płynięcia} \quad (2.10)$$

Ponieważ f jest powierzchnią ekwipotencjalną gradient tej powierzchni jest do niej ortogonalny a jego składowymi są pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}}$, co przy ortogonalności do powierzchni także wektora przyrostu odkształcenia plastycznego o module $d\varepsilon_i^p$ pozwala na określenie jego składowych w oparciu o związek

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_i^p. \quad (2.8)$$

W zapisie macierzowym wektor składowych przyrostów odkształceń plastycznych

$$\{d\varepsilon_{ij}^p\} = \{d\varepsilon^p\} = \{d\varepsilon_x^p d\varepsilon_y^p d\varepsilon_z^p d\gamma_{xy}^p d\gamma_{yz}^p d\gamma_{zx}^p\} = \left\{ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} \right\} d\varepsilon_i^p \quad (2.12)$$

gdzie, zgodnie z (2.2)

$$\left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = \left\{ \frac{3\sigma'_x}{2\sigma_i} \frac{3\sigma'_y}{2\sigma_i} \frac{3\sigma'_z}{2\sigma_i} \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \frac{3\tau_{yz}}{\sigma_i} \frac{3\tau_{zx}}{\sigma_i} \right\}. \quad (2.13)$$

natomiast σ'_x , σ'_y , σ'_z są składowymi dewiatora;

$$\sigma'_x = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad \text{i.t.d.} \quad (2.14)$$

W zakresie sprężysto-plastycznym odkształcenia całkowite ε_{ij} można traktować jako sumę odkształceń sprężystych ε_{ij}^e i plastycznych ε_{ij}^p rys. (2.1), za tym

$$\{d\varepsilon^e\} = \{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}, \quad (2.15)$$

oraz

$$\{d\sigma_{ij}\} = \{d\sigma\} = [E]\{d\varepsilon^e\} = [E](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}), \quad (2.16)$$

gdzie $[E]$ jest konwencjonalną macierzą stałych sprężystości. Przy panującym w płytach cienkich płaskim stanie naprężeń

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & & \\ \nu & 1 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & 1-\nu & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Po wymnożeniu lewostronnym równania (2.16) przez $\left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T$ i mając na uwadze związek

$$(2.12), \text{ a także } d\sigma_i = \left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \{d\sigma_{ij}\} = H' d\varepsilon^p \quad (\text{rys. 2.1}).$$

$$d\varepsilon^p = \frac{\left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\} [E]}{H' + \left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T [E] \left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\}} \{d\varepsilon\}. \quad (2.18)$$

Wykorzystanie (2.18) w związku (2.12), a uzyskany w ten sposób rezultat następnie w związku (2.16) dostarcza:

$$\{d\sigma\} = \left([E] - \frac{[E] \left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T [E]}{H' + \left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T [E] \left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\}} \right) \{d\varepsilon\} = [E_{ep}] \{d\varepsilon\}. \quad (2.19)$$

Macierz $[E_{ep}]$ ma bardzo duże znaczenie praktyczne. Pozwala bowiem określić przyrosty naprężeń w zakresie sprężysto-plastycznym w oparciu o przyrosty odkształceń całkowitych, a więc w sposób podobny, jak w zakresie sprężystym. Macierz tę wykorzystano w opracowanym algorytmie i programie nieliniowej analizy paneli [10]. Pierwszy podał ją YAMADA z innymi w [11] w 1968 r. Wyprowadził ją także niezależnie, na nieco innej drodze, Zienkiewicz z innymi [12] w 1969 r. Łatwo zauważyć, że macierz może być także wykorzystana w modelach materiałów idealnie sprężysto-plastycznych, dla których $H' = 0$.

Dla płaskiego stanu naprężeń [2]:

$$[E_{ep}] = \frac{E}{Q} \begin{bmatrix} \sigma'_y \sigma'_y + 2P & -\sigma'_x \sigma'_y + 2\nu P & -\frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{1+\nu} \\ \sigma'_x \sigma'_x + 2P & -\frac{\sigma'_y + \nu \sigma'_x}{1+\nu} \tau_{xy} & \\ & & \frac{R}{2(1+\nu)} + \frac{2H'}{9E} (1-\nu) \sigma_i^2 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

gdzie:

$$P = \frac{2H'}{9E} \sigma_i^2 + \frac{\tau_{xy}^2}{1+\nu},$$

$$Q = R + 2(1-\nu)P,$$

$$R = \sigma'_x \sigma'_x + 2\nu \sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_y.$$

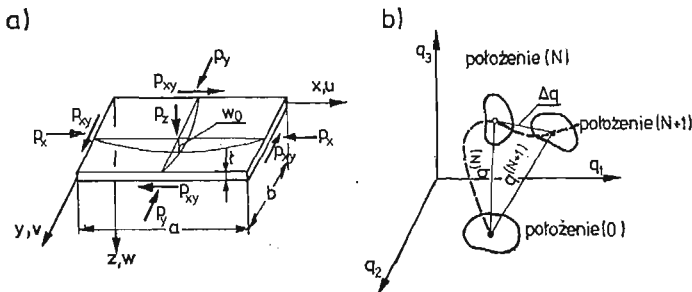
3. Przyrostowe wariacyjne sformułowanie stanów równowagi

Zgodnie z zasadą prac przygotowanych w dowolnym stanie równowagi płyty (rys. 3.1) przy pominięciu sił masowych

$$\int_{Vol} \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma_\epsilon\} dV - \int_S \{\delta q\}^T \{p\} dS = 0 \quad (3.1)$$

gdzie:

- { $\delta \epsilon$ } — wektor wariacji składowych tensora odkształceń,
- { σ } — wektor składowych tensora naprężeń,
- { δq } — wektor wariacji składowych pomieszczeń,
- { p } — wektor powierzchniowych obciążeń zewnętrznych.



Rys. 3.1

W płytach cienkich istotne znaczenie mają tylko trzy składowe tensora odkształceń $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}$ i naprężeń ($\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$). Przy istnieniu ugięć początkowych w_0 i dużych ugięciach płyty

$$\epsilon_x = u_{,x} - z w_{,xx} + w_{0,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2,$$

$$\epsilon_y = v_{,y} - z w_{,yy} + w_{0,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2,$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - 2z w_{,xy} + w_{0,x} w_{,y} + w_{0,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y}.$$
(3.2)

Jeżeli założymy, że istnieje taka funkcja stanu U , że

$$\{\sigma\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right\}, \quad (3.3)$$

to równanie (3.1) można także przedstawić w postaci

$$\int_{vol} \delta U dV - \int_S \{\delta q\}^T \{p\} dS = 0, \quad (3.4)$$

czyli

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.5)$$

gdzie:

$$\Pi = \int_{vol} U dV - \int_S \{q\}^T \{p\} dS, \quad (3.6)$$

nazwiemy potencjałem układu.

Równanie (3.5) jest znanym wariacyjnym sformułowaniem stanu równowagi, zgodnie z którym dowolny stan równowagi charakteryzuje się stacjonarnością potencjału Π , ponieważ różniczka potencjału w tym stanie jest równa zeru.

W zakresie liniowym materiału

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} + \{\sigma^0\}, \quad (3.7)$$

gdzie:

$\{\sigma^0\}$ — wektor składowych tensora samorzównoważonych naprężeń początkowych

Stąd, zgodnie z (3.3)

$$U = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma^0\}, \quad (3.8)$$

oraz

$$\Pi = \int_{vol} \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma^0\} \right) dV - \int_S \{q\}^T \{p\} dS. \quad (3.9)$$

Równanie (3.5) łącznie ze związkami (3.9) i 3.2) może stanowić podstawę wielu algorytmów analizy płyt w zakresie sprężystym. Zastosowanie wariacyjnych równań Eulera sprowadza (3.5) do znanych nieliniowych równań dużych ugięć płyt von Kármána, które następnie mogą być rozwiązywane stosowanymi metodami analitycznymi lub numerycznymi [13, 14]. Wykorzystanie natomiast w równaniu (3.5) wyrażen różnicowych na pochodne cząstkowe stanowi podstawę numerycznych metod wariacyjno-różnicowych [15], a wprowadzenie do tych równań stosowanych funkcji opisujących przemieszczenia elementów płyty za pomocą przemieszczeń ich węzłów — to znana i powszechnie już stosowana metoda elementu skończonego [2.16].

Jak już zaznaczono; przy rozwiązywaniu zadań nieliniowych w mechanice ciał stałych stosuje się zazwyczaj przyrostowy opis zagadnień brzegowo-początkowych. W zakresie sprężystym materiału i problemie tylko geometrycznie nieliniowym ujęcie takie jest jednym z możliwych, podczas, gdy przy przyrostowych związkach konstytutywnych, na które zdecydowano się wyżej, jest ono nieuniknione. Traktując stan równowagi (N)

(rys. 3.1b) jako stan odniesienia dla stanu równowagi ($N+1$), zgodnie z zasadą prac przygotowanych winno być spełnione równanie [17]:

$$\int_{vol} \{\delta \Delta \mathbf{e}\}^T (\{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} + \{\Delta \boldsymbol{\sigma}\}) dV - \int_S \{\delta \Delta \mathbf{q}\}^T (\{\mathbf{p}^{(N)}\} + \{\Delta \mathbf{p}\}) dS = 0, \quad (3.10)$$

któremu, wzorując się na (3.3) i (3.4 - 6), można także nadać postać:

$$\delta(\Delta II) = 0, \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\Delta II = \int_{vol} \Delta U dV - \int_S \{\Delta \mathbf{q}\}^T (\{\mathbf{p}^{(N)}\} + \{\Delta \mathbf{p}\}) dS, \quad (3.12)$$

$\{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\}$ i $\{\mathbf{p}^{(N)}\}$ — wektory naprężeń i obciążeń w stanie (N), przy czym

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} = \{\boldsymbol{\sigma}^0\} + \{\boldsymbol{\sigma}_p^{(N)}\}, \quad (3.13)$$

jest stanem naprężeń w N wywołanym naprężeniami początkowymi $\{\boldsymbol{\sigma}^0\}$ oraz obciążeniem $\{\mathbf{p}^{(N)}\}$.

Dla ostatecznie małych przyrostów odkształceń, zgodnie z (2.16)

$$\{\Delta \boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] (\{\Delta \mathbf{e}\} - \{\Delta \mathbf{e}^p\}), \quad (3.14)$$

wobec tego

$$\Delta U = \frac{1}{2} \{\Delta \mathbf{e}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}\} - \{\Delta \mathbf{e}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} + \{\Delta \mathbf{e}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} \quad (3.15)$$

a na tej podstawie

$$\begin{aligned} \Delta II = & \int_{vol} \left(\frac{1}{2} \{\Delta \mathbf{e}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}\} - \{\Delta \mathbf{e}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} + \{\Delta \mathbf{e}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} \right) dV - \\ & - \int_S \{\Delta \mathbf{q}\}^T (\{\mathbf{p}^{(N)}\} + \{\Delta \mathbf{p}\}) dS, \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdzie:

$$\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\Delta \varepsilon_x \Delta \varepsilon_y \Delta \gamma_{xy}\}, \quad \{\Delta \mathbf{e}^p\} = \{\Delta \varepsilon_x^p \Delta \varepsilon_y^p \Delta \gamma_{xy}^p\},$$

natomiast w oparciu o (3.2)

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x &= \Delta u_x - z \Delta w_{,xx} + w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \frac{1}{2} \Delta w_{,x}^2 \\ \Delta \varepsilon_y &= \Delta v_y - z \Delta w_{,yy} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \frac{1}{2} \Delta w_{,y}^2 \\ \Delta \gamma_{xy} &= \Delta u_{,y} + \Delta v_{,x} - 2z \Delta w_{,xy} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \Delta w_{,x} \cdot \Delta w_{,y}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

W powyższych związkach

$$w_0^{(N)} = w_0 + w. \quad (3.18)$$

Jest to suma ugięcia początkowego w_0 oraz ugięcia w wywołanego obciążeniem w położeniu równowagi (N). Suma ta stanowi więc ugięcie początkowe dla przyrostu obciążenia

$\{\Delta p\}$. Podobnie, jak w zakresie sprężystym, na bazie równania (3.11) oraz związków (3.16) i (3.17) można budować algorytmy w technice przyrostowej. Zastosowanie wariacyjnych równań Eulera dostarcza przyrostowych różniczkowych równań równowagi nieliniowej teorii płyt z uwzględnieniem uplastycznienia materiału. Równania te mogą być następnie rozwiązywane na drodze obliczeniowej. Bezpośrednie wykorzystanie w równaniu (3.11) związków różnicowych na pochodne cząstkowe jest podstawą algorytmów o technice wariacyjno-różnicowej, natomiast opis wektora $\{\Delta \varepsilon\}$ za pomocą stosownych funkcji kształtu prowadzi do metody elementu skończonego.

4. Przyrostowe równania różniczkowe równowagi nieliniowej teorii płyt z naprężeniami wstępnymi i ugięciami początkowymi w zakresie sprężysto-plastycznym

W przyrostach odkształceń (3.17) wyróżnimy część liniową $\{\Delta \varepsilon^I\}$ i nieliniową $\{\Delta \varepsilon^{nl}\}$ oraz przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_x &= \Delta \varepsilon_x^I + \Delta \varepsilon_x^{II} + \Delta \varepsilon_x^{III} + \Delta \varepsilon_x^{IV} = \Delta \varepsilon_x^I + \Delta \varepsilon_x^{nl}, \\ \Delta \varepsilon_y &= \Delta \varepsilon_y^I + \Delta \varepsilon_y^{II} + \Delta \varepsilon_y^{III} + \Delta \varepsilon_y^{IV} = \Delta \varepsilon_y^I + \Delta \varepsilon_y^{nl}, \\ \Delta \gamma_{xy} &= \Delta \gamma_{xy}^I + \Delta \gamma_{xy}^{II} + \Delta \gamma_{xy}^{III} + \Delta \gamma_{xy}^{IV} = \Delta \gamma_{xy}^I + \Delta \gamma_{xy}^{nl},\end{aligned}\quad (4.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_x^I &= \Delta u_{,x}, \Delta \varepsilon_y^I = \Delta v_{,y}, \Delta \gamma_{xy}^I = \Delta u_{,y} + \Delta v_{,x}, \\ \Delta \varepsilon_x^{II} &= -z \Delta w_{,xx}, \Delta \varepsilon_y^{II} = -z \Delta w_{,yy}, \Delta \gamma_{xy}^{II} = -2z \Delta w_{,xy}, \\ \Delta \varepsilon_x^{III} &= w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x}, \Delta \varepsilon_y^{III} = w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y}, \Delta \gamma_{xy}^{III} = w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x}, \\ \Delta \varepsilon_x^{IV} &= \frac{1}{2} \Delta w_{,x}^2, \Delta \varepsilon_y^{IV} = \frac{1}{2} \Delta w_{,y}^2, \Delta \gamma_{xy}^{IV} = \Delta w_{,x} \Delta w_{,y}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_x^{nl} &= \Delta \varepsilon_x^{II} + \Delta \varepsilon_x^{III} + \Delta \varepsilon_x^{IV}, \Delta \varepsilon_y^{nl} = \Delta \varepsilon_y^{II} + \Delta \varepsilon_y^{III} + \Delta \varepsilon_y^{IV}, \\ \Delta \gamma_{xy}^{nl} &= \Delta \gamma_{xy}^{II} + \Delta \gamma_{xy}^{III} + \Delta \gamma_{xy}^{IV}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Korzystając z równań wariacyjnych Eulera można dowieść, że

$$\delta \left(\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon\}^T \{\sigma^{(N)}\} dV - \int_S \{\Delta q\}^T \{p^{(N)}\} dS \right) = 0 \quad (4.4)$$

wobec tego wyrażenie na przyrost potencjału (3.16) przyjmuje postać następującą:

$$\Delta \Pi = \int_{Vol} \left(\frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \varepsilon\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} + \{\Delta \varepsilon^{nl}\}^T \{\sigma^{(N)}\} \right) dV - \int_S \{\Delta q\}^T \{\Delta p\} dS \quad (4.5)$$

Po uwzględnieniu związków (4.1), wartości poszczególnych członów pierwszej całki powyższego wyrażenia wyniosą:

$$\int_{Vol} \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon\} dV = \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^I\} dV + \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{II}\} dV + \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV + \\
&+ \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV + \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV + \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

[cd.]

W wyrażeniu tym pominięto człony zawierające składowe wektora $\{\Delta \varepsilon^{II}\}$ w pierwszej potęgze. Składowe te są zależne od z (4.2), a więc wartości całek, w których one występują są równe zero.

$$\begin{aligned}
\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} dV &= \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} dV + \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} dV + \\
&+ \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} dV + \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} dV. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{ni}\}^T \{\sigma^{(N)}\} dV = \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{IV}\}^T \{\sigma^{(N)}\} dV. \quad (4.8)$$

Korzystając z kolei z zależności (4.2) oraz przyjętych oznaczeń na rys. (3.1a)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^I\} dV = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}t}{1-\nu^2} \int_S \left[(\Delta u_{,x} + \nu \Delta v_{,y}) \Delta u_{,x} + (\nu \Delta u_{,x} + \Delta v_{,y}) \Delta v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x})^2 \right] dS, \quad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{II}\} dV &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}t^3}{12(1-\nu^2)} \int_S [(\Delta w_{,xx} + \nu \Delta w_{,yy}) \Delta w_{,xx} + \\
&+ (\nu \Delta w_{,xx} + \Delta w_{,yy}) \Delta w_{,yy} + 2(1-\nu) \Delta w_{,xy}^2] dS. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV &= \frac{\mathbf{E}t}{1-\nu^2} \int_S \left[(\Delta u_{,x} + \nu \Delta v_{,y}) w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + (\nu \Delta u_{,x} + \Delta v_{,y}) w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \right. \\
&+ \left. \frac{1-\nu}{2} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x}) (w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x}) \right] dS, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}t}{1-\nu^2} \int_S [(\Delta u_{,x} + \nu \Delta v_{,y}) \Delta w_{,x}^2 + \\
&+ (\nu \Delta u_{,x} + \Delta v_{,y}) \Delta w_{,y}^2 + (1-\nu) (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x}) \Delta w_{,x} \Delta w_{,y}] dS, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\} [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}t}{1-\nu^2} \int_S \left[(w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \nu w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y}) w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \right. \\
&+ (\nu w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y}) w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \\
&+ \left. \frac{1-\nu}{2} (w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x})^2 \right] dS. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\} dV = \frac{1}{8} \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S [(\Delta w_{,x}^2 + \nu \Delta w_{,y}^2) \Delta w_{,x}^2 + (\nu \Delta w_{,x}^2 + \Delta w_{,y}^2) \Delta w_{,y}^2 + 2(1-\nu) (\Delta w_{,x} \Delta w_{,y})^2] dS, \quad (4.14)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S \left[(\Delta \varepsilon_x^{bp} + \nu \Delta \varepsilon_y^{bp}) \Delta u_{,x} + (\nu \Delta \varepsilon_x^{bp} + \Delta \varepsilon_y^{bp}) \Delta v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} \Delta \gamma_{xy}^{bp} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x}) \right] dS, \quad (4.15)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S [(\Delta m_x^p + \nu \Delta m_y^p) \Delta w_{,xx} + (\nu \Delta m_x^p + \Delta m_y^p) \Delta w_{,yy} + (1-\nu) \Delta m_{xy}^p \Delta w_{,xy}] dS, \quad (4.16)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S \left[(\Delta \varepsilon_x^{bp} + \nu \Delta \varepsilon_y^{bp}) w_{\delta,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + (\nu \Delta \varepsilon_x^{bp} + \Delta \varepsilon_y^{bp}) w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \frac{1-\nu}{2} \Delta \gamma_{xy}^{bp} (w_{\delta,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x}) \right] dS, \quad (4.17)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = \frac{1}{2} \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S [(\Delta \varepsilon_x^{bp} + \nu \Delta \varepsilon_y^{bp}) \Delta w_{,x}^2 + (\nu \Delta \varepsilon_x^{bp} + \Delta \varepsilon_y^{bp}) \Delta w_{,y}^2 + (1-\nu) \Delta \gamma_{xy}^{bp} \Delta w_{,x} \Delta w_{,y}] dS, \quad (4.18)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} dV = \int_S \left(\frac{1}{2} N_x^{(N)} \Delta w_{,x}^2 + \frac{1}{2} N_y^{(N)} \Delta w_{,y}^2 + N_{xy}^{(N)} \Delta w_{,x} \Delta w_{,y} \right) dS, \quad (4.19)$$

$$\int_S \{\Delta \mathbf{q}\}^T \{\Delta \mathbf{p}\} dS = \int_S [\Delta p_z \Delta w + t \Delta p_x \Delta u_{,x} + t \Delta p_y \Delta v_{,y} + t \Delta p_{xy} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x})] dS, \quad (4.20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^{bp} &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \varepsilon_x^p dz, & \Delta \varepsilon_y^{bp} &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \varepsilon_y^p dz, & \Delta \gamma_{xy}^{bp} &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \gamma_{xy}^p dz, \\ \Delta m_x^p &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \varepsilon_x^p \cdot z dz, & \Delta m_y^p &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \varepsilon_y^p \cdot z dz, & \Delta m_{xy}^p &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \gamma_{xy}^p \cdot z dz, \\ N_x^{(N)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x^{(N)} dz, & N_y^{(N)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y^{(N)} dz, & N_{xy}^{(N)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy}^{(N)} dz. \end{aligned}$$

Zsumowanie wszystkich całek (4.9 - 20) z uwzględnieniem znaków występujących w równaniu (4.5) daje funkcjonał

$$\phi = \phi(\Delta u_{,x}, \Delta u_{,y}, \Delta v_{,x}, \Delta v_{,y}, \Delta w_{,x}, \Delta w_{,y}, \Delta w_{,xx}, \Delta w_{,yy}, \Delta w_{,xy}), \quad (4.22)$$

zgodnie z którym

$$\Delta \Pi = \int_S \phi \, dS \quad (4.23)$$

Zgodnie z zasadami rachunku wariacyjnego, przyrostowy warunek równowagi (3.11), $\delta(\Delta \Pi) = 0$, jest równoważny spełnieniu przez funkcjonał następujących równań Eulera [18]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \Delta u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Delta u_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Delta u_{,y}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \Delta v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Delta v_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Delta v_{,y}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \Delta w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,y}} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,yy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,xy}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dwa pierwsze równania Eulera dostarczają związków:

$$\begin{aligned} (\Delta N_x - t \Delta p_x)_{,x} + (\Delta N_{xy} - t \Delta p_{xy})_{,y} &= 0, \\ (\Delta N_{xy} - t \Delta p_{xy})_{,x} + (\Delta N_y - t \Delta p_y)_{,y} &= 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

natomiast trzecie

$$\begin{aligned} D(\Delta w_{,xxxx} + 2\Delta w_{,xxyy} + \Delta w_{,yyyy}) &= \\ = \Delta p_z + N_x^{(N)} \Delta w_{,xx} + N_y^{(N)} \Delta w_{,yy} + 2N_{xy}^{(N)} \Delta w_{,xy} + t[\Delta F_{,xx}(w_0^{(N)} + \Delta w)_{,yy} + \\ + \Delta F_{,yy}(w_0^{(N)} + \Delta w)_{,xx} - 2\Delta F_{,xy}(w_0^{(N)} + \Delta w)_{,xy}] - \frac{Et}{1-\nu^2} [(\Delta m_x^p + \nu \Delta m_y^p)_{,xx} + \\ + (\nu \Delta m_x^p + \Delta m_y^p)_{,yy} + (1-\nu) \Delta m_x^p], \end{aligned} \quad (4.26)$$

gdzie: $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

F — funkcja naprężeń Airy'ego, zgodnie z którą

$$\Delta N_x = t \Delta F_{,yy}, \quad \Delta N_y = t \Delta F_{,xx}, \quad \Delta N_{xy} = -t \Delta F_{,xy}$$

Równania (4.25) są znanymi różniczkowymi warunkami równowagi Naviera dla płaskiego stanu naprężeń, nie dotyczą więc naszego zagadnienia. Równanie (4.26) wiąże przyrosty funkcji ugięć Δw z przyrostami funkcji naprężeń błonowych ΔF , powstałe w wyniku przyrostu obciążenia Δp_z , przy zadanym stanie naprężeń i ugięć płyty w położeniu równowagi (N). Jest to więc równanie z dwoma niewiadomymi, bowiem przyrosty odkształceń plastycznych, których miarą w tym równaniu są Δm_x^p , Δm_y^p , Δm_{xy}^p , zależą także od Δw i ΔF .

Dodatkowe równanie wiążące obie te wielkości otrzymamy na bazie równania nierozdzielności odkształceń de Saint-Venanta odniesionego do płaszczyzny środkowej płyty [19].

$$(\Delta \varepsilon_x^b)_{,yy} + (\Delta \varepsilon_y^b)_{,xx} - (\Delta \gamma_{xy}^b)_{,xy} = 0. \quad (4.27)$$

Mając na uwadze, że (3.17)

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^b &= \Delta \varepsilon_x(z=0) = \Delta u_{,x} + w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \frac{1}{2} \Delta w_{,x}^2, \\ \Delta \varepsilon_y^b &= \Delta \varepsilon_y(z=0) = \Delta v_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \frac{1}{2} \Delta w_{,y}^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\Delta \gamma_{xy}^b = \Delta \gamma_{xy}(z=0) = \Delta u_{,y} + \Delta v_{,x} + w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x} + \Delta w_{,x} \Delta w_{,y},$$

ą także

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^b &= \Delta \varepsilon_x^{be} + \Delta \varepsilon_x^{bp}, \\ \Delta \varepsilon_y^b &= \Delta \varepsilon_y^{be} + \Delta \varepsilon_y^{bp}, \\ \Delta \gamma_{xy}^b &= \Delta \gamma_{xy}^{be} + \Delta \gamma_{xy}^{bp}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

oraz

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^{be} &= \frac{\Delta F_{,yy}}{E} - \nu \frac{\Delta F_{,xx}}{E}, \\ \Delta \varepsilon_y^{be} &= \frac{\Delta F_{,xx}}{E} - \nu \frac{\Delta F_{,yy}}{E}, \\ \Delta \gamma_{xy}^{be} &= -2(1+\nu) \frac{\Delta F_{,xy}}{E}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

równanie (4.27) dostarcza:

$$\begin{aligned} \Delta F_{,xxxx} + 2\Delta F_{,xxyy} + \Delta F_{,yyyy} &= \\ &= E\{(\Delta w_{,xy}^2 - \Delta w_{,xx} \Delta w_{,yy}) - (w_{0,xx}^{(N)} \Delta w_{,yy} + w_{0,yy}^{(N)} \Delta w_{,xx} - \\ &\quad - 2w_{0,xy}^{(N)} \Delta w_{,xy} - [(\Delta \varepsilon_x^{bp})_{,yy} + (\Delta \varepsilon_y^{bp})_{,xx} - (\Delta \gamma_{xy}^{bp})_{,xy}]\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Równanie (4.31) można również otrzymać na drodze wariacyjnej, jeżeli wykorzystana zostanie znana zasada stacjonarności potencjału komplementarnego [19, 20]. Oba równania natomiast, tzn. (4.26) i (4.31) jednocześnie, można uzyskać także, ale po wprowadzeniu do zasady prac przygotowawczych mnożników Lagrange'a czyli w oparciu o zasadę wariacyjną Hellingera-Reissnera [20, 21, 22]. Łatwo dostrzec, że w zakresie sprężystym, i gdy nie istnieją naprężenia początkowe, a przyrost obciążenia Δp i ugięcia Δw potraktujemy jako obciążenie i ugięcie całkowite (tylko jeden przyrost obciążenia), równania (4.26) i (4.31) przyjmują postać znanych równań nieliniowej teorii dużych ugięć płyt:

$$\begin{aligned} D(w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) &= p_z + t[F_{,xx}(w_0 + w)_{,yy} + F_{,yy}(w_0 + w)_{,xx} - 2F_{,xy}(w_0 + w)], \\ F_{,xxxx} + 2F_{,xxyy} + F_{,yyyy} &= E[(w_{,xy}^2 - w_{,xx} \cdot w_{,yy}) - \\ &\quad - (w_{0,xx} \cdot w_{,yy} + w_{0,yy} \cdot w_{,xx} - 2w_{0,xy} w_{,xy})]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Równania te dla płyt bez ugięć początkowych ($w_0 = 0$) zostały wprowadzone w roku 1910 przez von Kármána, natomiast postać podaną wyżej nadał im znacznie później, bo w 1937 r., Marguerre [23].

Równania (4.26) i (4.31) stanowią więc uogólnienie, w ujęciu przyrostowym, nieliniowej teorii dużych ugięć płyt cienkich von Kármána na obszar sprężysto-plastyczny z uwzględnieniem zarówno naprężeń, jak i ugięć początkowych.

5. Przyrostowe równania równowagi nieliniowej teorii płyt z naprężeniami i ugięciami początkowymi w zakresie sprężysto-plastycznym materiału w metodzie elementu skończonego

Zgodnie z (4.2)

$$\{\Delta \varepsilon^I\} = \{\Delta \varepsilon_x^I \Delta \varepsilon_y^I \Delta \gamma_{xy}^I\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u(x, y) \\ \Delta v(x, y) \end{Bmatrix} = [A^I] \{\Delta g(x, y)\}, \quad (5.1)$$

Dla każdego elementu płyty dobieramy odpowiednią funkcję opisującą przemieszczenia jego płaszczyzny środkowej w postaci:

$$\{g(x, y)\} = [B^I(x, y)] \{u\}, \quad (5.2)$$

gdzie $\{u\}$ jest wektorem przemieszczeń liniowych punktów węzłowych elementu.

Stąd

$$\{\Delta g(x, y)\} = [B^I(x, y)] \{\Delta u\}, \quad a, \quad (5.3)$$

$$\{\Delta \varepsilon^I\} = [A^I] [B^I] \{\Delta u\} = [C^I] \{\Delta u\}. \quad (5.4)$$

Wobec tego (4.5)

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [E] \{\Delta \varepsilon^I\} dV = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta u\}^T [C^I]^T [E] [C^I] \{\Delta u\} dV = \frac{1}{2} \{\Delta u\}^T [k_b] \{\Delta u\}, \quad (5.5)$$

gdzie:

$$[k_b] = \int_{Vol} [C^I] [E] [C^I] dV \quad (5.6)$$

jest znaną liniową macierzą sztywności błonowej elementu płyty [16].

Ponieważ (4.2)

$$\{\Delta \varepsilon^{II}\} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \Delta w(x, y) = [A^{II}] \Delta w(x, y) \quad (5.7)$$

więc po doborze odpowiedniej funkcji opisującej ugięcia elementu płyty w postaci:

$$w(x, y) = [\mathbf{B}^{II}(x, y)] \{w\}, \quad (5.8)$$

gdzie $\{w\}$ jest wektorem przemieszczeń liniowych i kątowych punktów węzłowych elementu, wówczas

$$\Delta w(x, y) = [\mathbf{B}^{II}(x, y)] \{\Delta w\}, \quad a, \quad (5.9)$$

$$\{\Delta \varepsilon^{II}\} = [\mathbf{A}^{II}] [\mathbf{B}^{II}] \{\Delta w\} = [\mathbf{C}^{II}] \{\Delta w\}. \quad (5.10)$$

Stąd (4.10)

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{II}\} dV = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta w\}^T [\mathbf{C}^{II}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{C}^{II}] \{\Delta w\} dV = \frac{1}{2} \{\Delta w\}^T [\mathbf{k}_z] \{\Delta w\}, \quad (5.11)$$

gdzie:

$$[\mathbf{k}_z] = \int_{Vol} [\mathbf{C}^{II}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{C}^{II}] dV, \quad (5.12)$$

jest natomiast znaną liniową macierzą sztywności na zginanie elementów płyty [16].

Kontynuując określanie w podobny sposób wartości następnych całek (4.11 - 20) przy założeniu, że ugięcia początkowe dla stanów równowagi (N), $w_0^{(N)}$ będą wyznaczone w oparciu o zbliżone lub identyczne funkcje kształtu, jak w wyrażeniu (5.8) otrzymamy:

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV = C_1(\{w_0^{(N)}\}, \{\Delta u\}, \{\Delta w\}), \quad (5.13)$$

gdzie, zgodnie z (4.11) elementy wektorów $\{w_0^{(N)}\}$, $\{\Delta u\}$, $\{\Delta w\}$ w tej całce wystąpią w pierwszej potędze.

Następnie

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV = C_2(\{\Delta u\}, \{\Delta w^2\}) \quad (5.14)$$

gdzie z kolei, zgodnie z (4.12) elementy wektora $\{\Delta u\}$ wystąpią w pierwszej, natomiast wektora $\{\Delta w\}$ w drugiej potędze. I dalej:

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV = C_3(\{w_0^{(N)2}\}, \{\Delta w^2\}), \quad (5.15)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV = C_4(\{w_0^{(N)}\}, \{\Delta w^3\}), \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV = C_5(\{\Delta w^4\}), \quad (5.17)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} dV = C_6(\{\Delta \varepsilon^{b^p}\}, \{\Delta u\}), \quad (5.18)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} dV = C_7(\{\Delta m^p\}, \{\Delta w\}), \quad (5.19)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = C_8(\{\Delta \mathbf{e}^{bp}\}, \{\mathbf{w}_0^{(N)}\}, \{\Delta \mathbf{w}\}), \quad (5.20)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = C_9(\{\Delta \mathbf{e}^{bp}\}, \{\Delta \mathbf{w}^2\}), \quad (5.21)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} dV = C_{10}(\{N^{(N)}\}, \{\Delta \mathbf{w}^2\}), \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \int_S \{\Delta \mathbf{q}\}^T \{\Delta \mathbf{p}\} dS &= \int_S \Delta p_z \Delta w dS + t \int_S [\Delta p_x \Delta u_{,x} + \Delta p_y \Delta v_{,y} + \Delta p_{xy} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x})] dS = \\ &= C_{11}(\Delta p_z, \{\Delta \mathbf{w}\}) + C_{12}(\{\Delta \mathbf{p}_b\}, \{\Delta \mathbf{u}\}) \end{aligned} \quad (5.23)$$

W powyższych całkach przez $\{\Delta \mathbf{e}^{bp}\}$, $\{\Delta \mathbf{m}^p\}$, $\{N^{(N)}\}$, $\{\Delta \mathbf{p}_b\}$ oznaczono następujące wektory:

$$\begin{aligned} \{\Delta \mathbf{e}^{bp}\} &= \{\Delta \varepsilon_x^{bp} \Delta \varepsilon_y^{bp} \Delta \gamma_{xy}^{bp}\}, \quad \{N^{(N)}\} = \{N_x^{(N)} N_y^{(N)} N_{xy}^{(N)}\}, \\ \{\Delta \mathbf{m}^p\} &= \{\Delta m_x^p \Delta m_y^p \Delta m_{xy}^p\}, \quad \{\Delta \mathbf{p}_b\} = \{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_{xy}\} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ponieważ winno być $\delta(\Delta II) = 0$, a przyrost potencjału jest funkcją wektorów $\{\Delta \mathbf{u}\}$, $\{\Delta \mathbf{w}\}$ przeto:

$$\delta(\Delta II) = \sum^n \left[\frac{\partial(\Delta II)}{\partial\{\Delta \mathbf{u}\}} \delta(\{\Delta \mathbf{u}\}) + \frac{\partial(\Delta II)}{\partial\{\Delta \mathbf{w}\}} \delta(\{\Delta \mathbf{w}\}) \right] = 0, \quad (5.25)$$

gdzie przez n oznaczono liczbę elementów płyty.

Stąd

$$\sum^n \frac{\partial(\Delta II)}{\partial\{\Delta \mathbf{u}\}} = 0, \quad \sum^n \frac{\partial(\Delta II)}{\partial\{\Delta \mathbf{w}\}} = 0. \quad (5.26)$$

Warunki (5.26) dostarczają poniższe nieliniowe równania algebraiczne, w oparciu o które można wyznaczyć $\{\Delta \mathbf{u}\}$ i $\{\Delta \mathbf{w}\}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_b] \{\Delta \mathbf{u}\} + ([\mathbf{K}_{bz}^I(\{\mathbf{w}_0^{(N)}\})] + [\mathbf{K}_{bz}^{II}(\{\Delta \mathbf{w}\})]) \{\Delta \mathbf{w}\} &= \{\Delta p_b^I\} + \Delta p_b^{II}(\{\Delta \mathbf{e}^{bp}\}), \\ ([\mathbf{K}_{zb}^I(\{\mathbf{w}_0^{(N)}\})] + [\mathbf{K}_{zb}^{II}(\{\Delta \mathbf{w}\})]) \{\Delta \mathbf{u}\} + ([\mathbf{K}_z^I] + [\mathbf{K}_z^{II}(\{\mathbf{w}_0^{(N)2}\})] + [\mathbf{K}_z^{III}(\{\mathbf{w}_0^{(N)}\}, \{\Delta \mathbf{w}\})] + \\ + [\mathbf{K}_z^{IV}(\{\Delta \mathbf{w}^2\})] + [\mathbf{K}_z^V(\{\Delta \mathbf{e}^{bp}\})] + [\mathbf{K}_z^{VI}(\{N^{(N)}\})]) \{\Delta \mathbf{w}\} &= \{\Delta p_z^I\} \\ + \{\Delta p_z^{II}(\{\Delta \mathbf{m}^p\})\} + \{\Delta p_z^{III}(\{\mathbf{w}_0^{(N)}\}, \{\Delta \mathbf{e}^{bp}\})\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

gdzie:

$[\mathbf{K}_b]$ — liniowa macierz sztywności błonowej płyty

$[\mathbf{K}_z^I]$ — liniowa macierz sztywności na zginanie płyty

$\{\Delta \mathbf{u}\}$ — wektor przyrostów przemieszczeń błonowych płyty (przemieszczenia liniowe w kierunku osi x i y , rys. 3.1a)

$\{\Delta \mathbf{w}\}$ — wektor przyrostów przemieszczeń wywołanych zginaniem płyty (przemieszczenia liniowe wzdłuż osi z i kątowe względem x i y)

$\{\Delta p_b^I\}$ — wektor przyrostu ekwiwalentnych zewnętrznych obciążeń błonowych płyty

$\{\Delta p_z^I\}$ — wektor przyrostu ekwiwalentnych zewnętrznych obciążeń poprzecznych płyty.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{bz}^I(\{w_0^{(N)}\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_1}{\partial \{\Delta u\}}, \\
[\mathbf{K}_{zb}^I(\{w_0^{(N)}\})] \{\Delta u\} &= \sum^n \frac{\partial C_1}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_{bz}^{II}(\{\Delta w\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_2}{\partial \{\Delta u\}}, \\
[\mathbf{K}_{zb}^{II}(\{\Delta w\})] \{\Delta u\} &= \sum^n \frac{\partial C_2}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^{III}(\{w_0^{(N)2}\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_3}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^{III}(\{w_0^{(N)}, \{\Delta w\}\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_4}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^{IV}(\{\Delta w^2\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_5}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^V(\{\Delta \varepsilon^{bp}\})] \{\Delta w\} &= - \sum^n \frac{\partial C_9}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^{VI}(\{N^{(N)}\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_{10}}{\partial \{\Delta w\}}, \\
\{\Delta p_b^I\} &= \sum^n \frac{\partial C_{12}}{\partial \{\Delta u\}}, \quad \{\Delta p_b^{II}(\{\Delta \varepsilon^{bp}\})\} = \sum^n \frac{\partial C_6}{\partial \{\Delta u\}}, \\
\{\Delta p_z^I\} &= \sum^n \frac{\partial C_{11}}{\partial \{\Delta w\}}, \quad \{\Delta p_z^{II}(\{\Delta m^p\})\} = \sum^n \frac{\partial C_7}{\partial \{\Delta w\}}, \\
\{\Delta p_z^{III}(\{\{w_0^{(N)}\}, \{\Delta \varepsilon^{bp}\})\})\} &= \sum^n \frac{\partial C_9}{\partial \{\Delta w\}}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

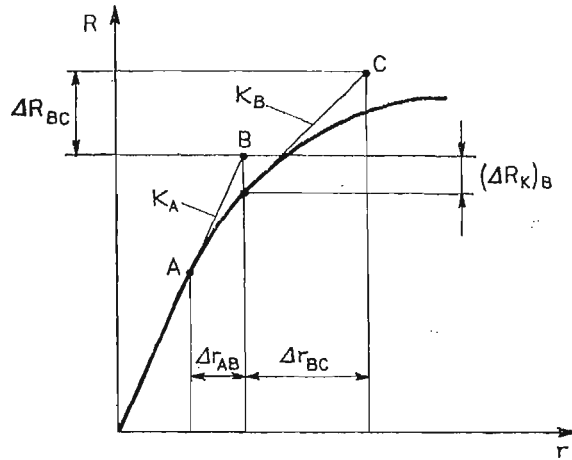
Bardziej zwięzła postać równań (5.27) przystosowana do powszechnie już używanej w zagadnieniach nieliniowych procedury numerycznej Newtona-Raphsona z siłami korekcyjnymi [2.3] jest następująca:

$$[\mathbf{K}]_B \{\Delta r\}_{BC} = \{\Delta R\}_{BC} + \{\Delta R_K\}_B, \tag{5.29}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}]_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{K}_b \\ \mathbf{K}_{zb}^I & \mathbf{K}_z^I + \mathbf{K}_z^{II} + \mathbf{K}_z^{VI} \end{bmatrix}, \quad \{\Delta r\}_{BC} = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \end{Bmatrix} \\
\{\Delta R\}_{BC} &= \begin{Bmatrix} \Delta p_b^I \\ \Delta p_z^I \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta R_K\}_B = \begin{Bmatrix} \Delta p_b^{II} \\ \Delta p_z^{II} + \Delta p_z^{III} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{bz}^{II} \\ \mathbf{K}_{zb}^{II} & \mathbf{K}_z^{III} + \mathbf{K}_z^{IV} + \mathbf{K}_z^V \end{bmatrix} \{\Delta r\}_{AB}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Znaczenie poszczególnych symboli w równaniu (5.29) wyjaśnia rys. 5.1



Rys. 5.1

Dla dostatecznie małych kroków obciążeń równania (5.27) można nieco uprościć na drodze ich linearyzacji, czyli przez pominięcie członów zależnych od iloczynów przyrostów składowych poszczególnych wektorów, względnie przyrostów składowych wektorów w potęgach drugiej i wyższych. Wówczas $K_{bz}^{II} = K_{zb}^{II} = K_z^{III} = K_z^{IV} = K_z^V = 0$. W konsekwencji tego siły korekcyjne zależą tylko od ugięć początkowych oraz stopnia uplastycznienia materiału:

$$\{\Delta R_K\}_B = \left\{ \frac{\Delta p_b^{II}(\{\Delta \varepsilon^{bp}\})}{\Delta p_z^{II}(\{\Delta m^p\}) + \Delta p_z^{III}(\{w_0^{(N)}\}, \{\Delta \varepsilon^{bp}\})} \right\}_B. \quad (5.31)$$

W odniesieniu do przyrostowych różniczkowych równań (4.26) (4.31) takie uproszczenie jest równoznaczne wyeliminowaniu iloczynów $\Delta F_{,xx} \Delta w_{,yy}$, $\Delta F_{,yy} \Delta w_{,xx}$, $2\Delta F_{,xy} \Delta w_{,xy}$, w równaniu (4.26) oraz $\Delta w_{,xy}^2 - \Delta w_{,xx} \Delta w_{,yy}$ w równaniu (4.31). Dla tych samych rezultatów prowadzi zaniechanie w wektorze $\{\Delta \varepsilon\}$ w wyrażeniu (4.5) jego składowych nieliniowych $\frac{1}{2} \Delta w_{,x}^2$, $\frac{1}{2} \Delta w_{,y}^2$, $\Delta w_{,x} \Delta w_{,y}$ na początku wszelkich działań.

Przyrostowa nieliniowa teoria płyt w zakresie sprężysto-plastycznych odkształceń materiału oraz metoda elementu skończonego stanowiły podstawę algorytmu i programu obliczeń nośności granicznej płyt, których szczegółowy opis zamieszczono w pracy [10]. Program opracowano w ramach problemu międzyresortowego MRI-27. Jest on wykorzystywany do analizy wpływu naprężeń i ugięć początkowych na nośność graniczną płyt poszycia statków przy ściskaniu osiowym. Uzyskane wyniki badań będą przedmiotem kolejnych publikacji.

Literatura cytowana w tekście

1. M. KMIECIK, *Badania modelowe nośności granicznej osiowo-ściskowych wzdłużnie usztywnionych płyt okrętowych*, Zeszyty Problemowe Techniki Okrętowej, Zeszyt Nr 1. Budownictwo Okrętowe, Gdańsk, 1972.

2. R. D. COOK, *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley Sons, Inc. 1974.
3. M. KLEIBER, *Nieliniowa, styczna i dynamiczna analiza powłok metodą elementów skończonych*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Tom 18, Zeszyt 2, PWN — Warszawa, 1980.
4. C. S. SMITH, J. BÄCKLUND, P. G. BERGAN, Y. FUJITA, N. JONES, M. КМІЕЦІК, P. MAJERS, P. T PEDERSEN, K. A. RECKLING, A. B. STAVOVY, *Nonlinear structural response*. Proceedings of the Seventh International Ship Structures Congress, Vol. I, Institute de Recherches de la Construction Navale — Paris, 1979.
5. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod redakcją: W. OLSZAKA, P. PERZYNY i A. SAWCZUKA, PWN — Warszawa, 1965.
6. A. A. ILIUSZIN, *Plasticznost*, Gostechizdat — Moskwa, 1948.
7. N. N. MELININ, J. RZYSKO, *Mechanika materiałów*, PWN — Warszawa, 1981.
8. J. B. MARTIN, *Plasticity: Fundamentals and general results*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.
9. R. HILL, *Mathematical theory of plasticity*, Oxford, 1950.
10. A. JAZUKIEWICZ, M. КМІЕЦІК, *Opis programu PLAMES do nieliniowej analizy usztywnionych płyt z uwzględnieniem odkształceń i naprężeń spawalniczych metodą elementu skończonego*. Opracowanie Nr 37-S. Politechnika Szczecińska, Instytut Okrętowy, Zakład Konstrukcji i Mechaniki Okrętów, Szczecin, 1981.
11. Y. YAMADA, N. YOSHIMURA, T. SAKARAI, *Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method*, IJMSci, Vol. 10, No. 5, 1968.
12. O. C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPPAN, I. P. KING, *Elastoplastic solutions of engineering problems*, Initial stress, Finite element approach, IJNME, Vol 1, No. 1, 1969.
13. M. КМІЕЦІК, *Metody rozwiązywania równań nieliniowej teorii płyt*, Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 162, Szczecin, 1981.
14. H. PFAU, M. КМІЕЦІК, H. J. KNAPPE, *Ein Beitrag zur Berechnung der Verformungen und Spannungen in druckbelasteten isotropen Rechteckplatten grosser Ausbiegung unter Verwendung von Geeigneten Differenzenmethoden*, Schiffbau Forschung 5/6, 1978.
15. J. DANKERT, *Numerische Methoden der Mechanik*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1977.
16. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady — Warszawa, 1972.
17. K. WASHIZU, *Complementary variational principles in elasticity*; Praca zamieszczona w: „Duality and complementarity in mechanics of solids”, PAN IPPT, Ossolineum, 1979.
18. J. COLVILLE, *A general solution of the von Kármán plate equations by finite element method*, University Microfilms, A XEROX Company, Ann Arbor, Michigan, 1971.
19. T. KOZŁOWSKI, *Zarys teorii sprężystości*, Arkady — Warszawa, 1968.
20. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN — Warszawa, 1970.
21. T. H. RICHARDS, *Energy methods in stress analysis*, Applied Science Publishers Ltd, London, 1977.
22. H. PFAU, U. HÄR, *Mathematische Modelle zur Berechnung von axial und normal belasteten, vorverformten Rechteckplatten grosser Verformung mittels Differenzenmethoden*, Schiffbau Forschung, 3/1980.
23. S. WOLMIR, *Gibkije plastinki i oboloczki*, Moskwa, 1956.

Резюме

ИНКРИМЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК
С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ПРОГИБАМИ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ
ОБЛАСТИ

Эффективное решение нелинейных задач требует инкриментной формулировки. В работе, на основе вариационной формулировки уравнений равновесия и теории течения Прандтля-Рейсса выведены инкриментные уравнения нелинейной теории пластинок с начальными напряжениями и прогибами. Таким способом получено инкриментное обобщение нелинейной теории пластинок фон Кармана на упругопластическую область. Даны также соответственные выражения для решения обобщенной теории методом конечных элементов.

S u m m a r y

INCREMENTAL EQUATIONS OF NONLINEAR THEORY OF PLATES WITH
INITIAL DEFLECTIONS AND STRESSES IN ELASTIC-PLASTIC RANGE

Incremental approach is necessary for effective solution of nonlinear problems of structural mechanics. The incremental equations of finite deflection theory of plates have been derived on the base of variational formulation of equilibrium equations taking into account Prandtl-Reuss flow theory.

Initial deflections and stresses have also been into account. In this way an incremental generalization on elastic-plastic range of von Kármán nonlinear theory of plates has been derived. Finite element solution of the generalization has been demonstrated.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1982 roku

WPLYW PARAMETRU WZMOCNIENIA NA ZACHOWANIE SIĘ
GRUBOŚCIENNEJ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ KULI
OBCIĄŻONEJ GRADIENTEM TEMPERATURY

ZDZISŁAW ŚLÓDERBACH

TADEUSZ SAWICKI

ZMOC — ZTK, IPPT PAN

Warszawa,

Oznaczenia i skróty

- $\bar{\varepsilon}_r, \bar{\varepsilon}_\theta$ — składowe tensora odkształcenia
 σ_r, σ_θ — składowe tensora naprężenia
 ε_p — zredukowane (zastępcze) odkształcenie plastyczne
 r — promień bieżący kuli
 r_c — promień strefy sprężysto-plastycznej
 a — promień wewnętrzny kuli
 b — promień zewnętrzny kuli
 T — temperatura bieżąca (na promieniu bieżącym)
 T_a — temperatura na promieniu wewnętrznym
 T_b — temperatura na promieniu zewnętrznym
 σ_0 — początkowa granica plastyczności
 σ_e — naprężenie zredukowane według hipotezy H-M-H
 r_e — promień bieżący w sprężystej części kuli
 E — moduł sprężystości Younga
 E^T — moduł wzmocnienia plastycznego

Wielkości bezwymiarowe

- m — liniowy parametr wzmocnienia
 ϱ — promień bieżący
 ϱ_c — promień strefy sprężysto-plastycznej
 β — parametr geometrii kuli
 β_c — parametr geometrii kuli dla strefy sprężysto-plastycznej
 ϱ_e — promień bieżący w części sprężystej kuli
 S_r, S_θ — składowe tensora naprężenia
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ — składowe tensora odkształcenia

- τ — temperatura bieżąca
- ε^p — zastępcze odkształcenie plastyczne
- ε_p^0 — część plastyczna składowej obwodowej i promieniowej tensora odkształcenia
- S_{rc} — składowa promieniowa tensora naprężenia działająca na promieniu ϱ_c
- τ_0 — temperatura na promieniu wewnętrznym kuli
- τ_c — temperatura na promieniu strefy sprężysto-plastycznej
- τ_{0c} — temperatura na promieniu wewnętrznym potrzebna do uplastycznienia kuli do promienia ϱ_c

1. Wstęp

Celem pracy jest zbadanie wpływu współczynnika wzmocnienia na zachowanie się grubościennej, sprężysto-plastycznej kuli obciążonej gradientem temperatury. Analizuje się wpływ parametru wzmocnienia m na rozkład temperatur, odkształceń, naprężeń (w tym również naprężeń resztkowych po procesie czysto sprężystego odciążenia) oraz na położenie strefy sprężysto-plastycznej. Określa się również wartości krytyczne parametru geometrii ($\beta = b/a$) dla przypadku gdy druga strefa plastyczna rozpoczyna się na zewnętrznym promieniu badanej kuli.

Naprężenia i odkształcenia w kuli spowodowane są polem temperatury — por wyr. (2.8). Tak określony rozkład temperatur był już cytowany w literaturze, np. w pracach [1]÷[5]. Powierzchnia zewnętrzna kuli posiada stałą temperaturę i bez tracenia ogólności rozwiązania przyjęto ją jako równą zero, por. np. [5]. Powierzchni wewnętrzna i zewnętrzna kuli wolne są od obciążeń mechanicznych, np. ciśnieniem. Zakłada się, że kula jest w początkowym stanie jednorodna i wolna od naprężeń resztkowych. Materiał kuli przyjęto jako sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem oraz nieściśliwy plastycznie. Maksymalna wartość parametru wzmocnienia m użyta w pracy wynosi 0.4 i wartość taka była już przyjmowana w literaturze, np. w [6]. Jako warunek plastyczności przyjęto hipotezę Hubera-Misesa, przy czym założono, że granica plastyczności nie zależy od temperatury. Do analizy powyższego zagadnienia przyjęto teorię małych odkształceń w stosunkowo dużym zakresie zmian temperatur. Zakłada się, że ciepło powstałe podczas procesu deformacji nie zmienia pola temperatur, co wiąże się z wykorzystaniem równań konstytutywnych niesprężonej termosprężystości i termoplastyczności. Zakłada się ponadto, że wartości stałych materiałowych nie ulegają zmianie.

Dalszych badań wymaga przypadek gdy na zewnętrznym promieniu kuli rozpoczyna się propagacja drugiej strefy plastycznej. Przypadek taki omawia się w pracy [5] lecz dla materiału bez wzmocnienia. Bardziej ogólną analizę sprężysto-plastycznych kul dla materiału ze wzmocnieniem, przeprowadzić można podobnie jak w pracach [3], [4], dodając do obciążenia termicznego obciążenie ciśnieniem wewnętrznym o stosunkowo dużym zakresie zmian. Można by w ten sposób sporządzić odpowiednie trójparametrowe nomogramy w miejsce dotychczasowych dwuparametrowych. Rolę trzeciego parametru odgrywałby współczynnik wzmocnienia m . Problem analizy grubościennych sprężysto-plastycznych kul jest licznie cytowany w literaturze, por. np. [2]÷[16].

Nowe wyniki otrzymane w niniejszej pracy na drodze numerycznej przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów i tabel.

2. Podstawowe równania wyjściowe

Wykorzystując prawa symetrii kulistej równania zapiszemy we współrzędnych sferycznych: promieniowych r , obwodowych θ , oraz w odpowiednich wielkościach bezwymiarowych.

Równania równowagi i nierozdzielności odkształceń wyglądają następująco:

$$\frac{dS_r}{d\varrho} + \frac{2(S_r - S_\theta)}{\varrho} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{d\varrho} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\varrho} = 0. \quad (2.2)$$

Zakładając nieściśliwość plastyczną materiału, otrzymamy:

$$\varepsilon_r^p + 2\varepsilon_\theta^p = 0. \quad (2.3)$$

Warunek plastyczności H-M-H ma postać,

$$|S_r - S_\theta| = |S|, \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\varepsilon^p \neq 0 \quad \text{dla} \quad |S| > 1$$

$$\varepsilon^p = 0 \quad \text{dla} \quad |S| \leq 1.$$

Warunek $|S| = 1$ określa początkową granicę plastyczności przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu. Odkształcenie zastępcze ε^p , po uwzględnieniu (2.3) jest następujące,

$$\varepsilon^p = |\varepsilon_r^p|. \quad (2.5)$$

Związki konstytutywne wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= S_r - 2\nu S_\theta + (1-\nu)\tau + \varepsilon_r^p \\ \varepsilon_\theta &= (1-\nu)S_\theta - \nu S_r + (1-\nu)\tau + \varepsilon_\theta^p \end{aligned} \quad (2.6)$$

Równania plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa dla przyjętego w pracy monotonicznego obciążenia gradientem temperatury, po scałkowaniu przyjmują postać następującą [2],

$$\varepsilon_r^p = \varepsilon^p \frac{S_r - S_\theta}{|S_r - S_\theta|} = \varepsilon^p \operatorname{sgn}(S_r - S_\theta). \quad (2.7)$$

Równanie dla pola temperatury przyjęto w następującej formie, por. np. [2] ÷ [5], [10] ÷ [11]:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\beta - 1} \left(\frac{\beta}{\varrho} - 1 \right), \quad \text{dla} \quad T_b = 0, \quad (2.8)$$

gdzie:

$\tau_0 = \frac{E\alpha T_a}{(1-\nu)\sigma_0}$ — jest bezwymiarową temperaturą działającą na wewnętrznej powierzchni kuli, oraz:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{b}{a}, \quad \varrho = \frac{r}{a}, \quad S_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad S_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}, \\ \varepsilon_r &= \frac{E\bar{\varepsilon}_r}{\sigma_0}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{E\bar{\varepsilon}_\theta}{\sigma_0}, \quad \tau = \frac{E\alpha T}{(1-\nu)\sigma_0}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Jak wiadomo w przypadku symetrii kulistej warunki plastyczności Huberta-Misesa i Treski pokrywają się, więc z (2.4) otrzymać można następujące wyrażenie,

$$S = S_{\theta} - S_r. \quad (2.10)$$

3. Wyprowadzenie podstawowych równań

Z analizy przeprowadzonej w pracach [3], [4], [11] oraz z przesłanek fizycznych wynika, że pierwsza strefa plastyczna pojawi się zawsze na wewnętrznym promieniu ($\varrho = 1$) dla kul obciążonych tylko promieniowym gradientem temperatury.

Podstawiając równanie konstytutywne (2.6) do związku nierozdzielności (2.2), wykorzystując równanie równowagi (2.1) oraz przeprowadzając całkowanie otrzyma się następujące równania, por. [2]:

$$S_r = -\frac{2}{\varrho^3} \int_1^{\varrho} \xi^2 \tau(\xi) d\xi + \frac{1}{1-\nu} \int_1^{\varrho} \frac{\varepsilon_r^p}{\xi} d\xi + \left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right) C_1, \quad (3.1)$$

$$S_{\theta} = -\tau(\varrho) + \frac{1}{\varrho^3} \int_1^{\varrho} \xi^2 \tau(\xi) d\xi + \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon_r^p + \frac{1}{1-\nu} \int_1^{\varrho} \frac{\varepsilon_r^p}{\xi} d\xi + \left(1 + \frac{1}{2\varrho^3}\right) C_1.$$

Po uwzględnieniu (2.10) oraz (3.1), otrzyma się,

$$S = -\tau + \frac{3}{\varrho^3} \int_1^{\varrho} \xi^2 \tau(\xi) d\xi + \frac{\varepsilon_r^p}{2(1-\nu)} + \frac{3}{2\varrho^3} C_1. \quad (3.2)$$

Stałą całkowania C_1 wyznacza się z następujących warunków brzegowych:

$$S_r(1) = 0, \quad S_r(\beta) = 0. \quad (3.3)$$

skąd,

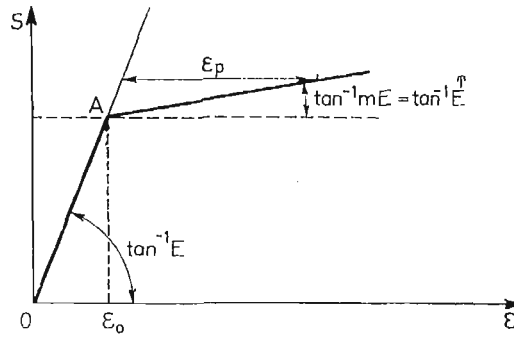
$$C_1 = \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} \left[\frac{2}{\beta^3} \int_1^{\beta} \xi^2 \tau(\xi) d\xi - \frac{1}{1-\nu} \int_1^{\beta} \frac{\varepsilon_r^p}{\xi} d\xi \right]. \quad (3.4)$$

Oznaczmy symbolem τ'_{0c} temperaturę przyłożoną na wewnętrznej powierzchni kuli ($\varrho = 1$) i potrzebną do pierwszego uplastycznienia tej powierzchni. Wówczas po przekroczeniu tej temperatury strefa sprężysto-plastyczna osiągnie promień oznaczony ϱ_c , a odpowiadającą mu temperaturę na wewnętrznym promieniu oznaczmy przez τ_{0c} . Wewnątrz strefy plastycznej $1 \leq \varrho \leq \varrho_c$ warunek plastyczności (2.4) jest spełniony, zatem obwodowe naprężenia S_{θ} będą większymi a promieniowe naprężenia S_r będą mniejszymi naprężeniami ściskającymi. Stąd, por. [2] ÷ [5]:

$$\begin{aligned} S_{\theta} - S_r &< -1 & \text{dla } 1 \leq \varrho < \varrho_c, \\ S_{\theta} - S_r &= -1 & \text{dla } \varrho = \varrho_c. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Przyjmując liniowy charakter wzmocnienia plastycznego materiału przedstawiony w zmienionych — (S , ε^p) — rys. 1, por. np. [2], możemy napisać,

$$\varepsilon^p = \frac{1-m}{m} (|S| - 1), \quad (3.6)$$



Rys. 1. Krzywa naprężenie-odkształcenie dla liniowego wzmocnienia

gdzie $m = E^T/E$ jest parametrem liniowego wzmocnienia materiału. Wówczas z zależności (2.4), (2.7), (3.5), wyznaczyć można następujący związek,

$$\varepsilon_r^p = \frac{m-1}{m} (S+1), \quad \text{dla} \quad \frac{S}{|S|} = -1, \quad (3.7)$$

ostatecznie z (2.1), (2.10) i (3.7) otrzymamy:

$$\int_1^{\rho} \frac{\varepsilon_r^p}{\xi} d\xi = \begin{cases} \frac{m-1}{m} \ln \varrho + \frac{m-1}{2m} S_r(\varrho) & \text{dla } \varrho < \varrho_c, \\ \frac{m-1}{m} \ln \varrho_c + \frac{m-1}{2m} S_r(\varrho_c) & \text{dla } \varrho \geq \varrho_c, \end{cases} \quad (3.8)$$

gdzie: $S_r(\varrho) = S_r$, $S_r(\varrho_c) = S_{rc}$.

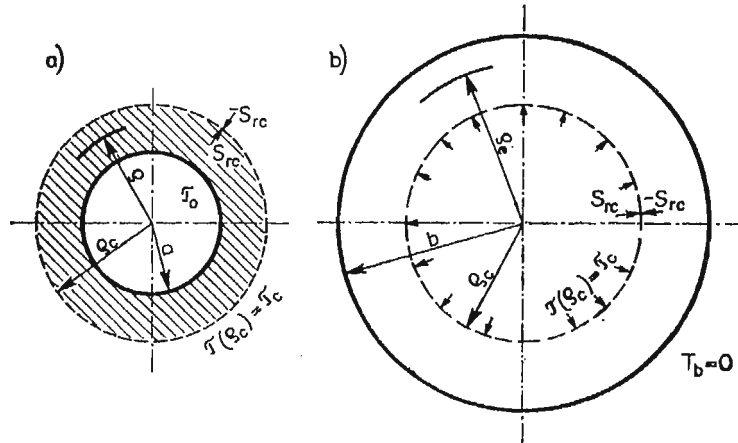
Aby wyznaczyć rozkład temperatury τ , który z kolei pozwoli określić stan naprężenia, deformacji oraz krytyczne wartości parametru geometrii kuli β , należy z równań (3.1), (3.2), (3.4) i (3.8) wyznaczyć stałą C_1 , naprężenie S_{rc} oraz temperaturę τ_{0c} . W tym celu uwzględnia się również następujący warunek brzegowy,

$$S = -1 \quad \text{dla} \quad \varrho = \varrho_c. \quad (3.9)$$

Stałą C_1 wyznaczyć można po podstawieniu warunku brzegowego (3.9) do równania (3.2). Następnie porównując tak wyznaczoną wartość C_1 ze wzorem (3.4) i po uwzględnieniu w nim wyrażenia (3.8) po przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{\beta^3}{\beta^3-1} \left[\frac{2}{\beta^3} \int_1^{\beta} \varrho^2 \tau(\varrho) d\varrho - \frac{m-1}{1-\nu} \left(\ln \varrho_c + \frac{1}{2} S_r(\varrho_c) \right) \right] = \frac{2}{3} \varrho_c^3 \left[\tau(\varrho_c) - \frac{3}{\varrho_c^3} \int_1^{\varrho_c} \varrho^2 \tau(\varrho) d\varrho - 1 \right]. \quad (3.10)$$

Aby określić z zależności (3.10) wartość τ_{0c} , należy wcześniej wyznaczyć zależność $S_r(\varrho_c) = S_{rc}$. W tym celu w kuli uplastycznionej do promienia $\varrho = \varrho_c$ rozpatrzmy kulę z wewnętrznym promieniem ϱ_c i parametrem geometrii β_c znajdującą się w stanie sprężystym —



Rys. 2. Schemat kuli z dwiema strefami rozdzielonymi powierzchnią: strefą plastyczną do (i strefą sprężystą powyżej)

rys. 2. Dla kuli zewnętrznej — sprężystej, wprowadzić należy nowe bezwymiarowe wielkości analogiczne jak w (2.9), mianowicie:

$$\beta_c = \frac{b}{r_c} = \frac{\beta}{\varrho_c}, \quad \varrho_c = \frac{r_c}{a}, \quad \varrho_e = \frac{r_e}{r_c}, \quad (3.11)$$

$$\tau_e = \frac{\tau_c}{\beta_c - 1} \left(\frac{\beta_c}{\varrho_e} - 1 \right), \quad \tau_c = \tau(\varrho_c), \quad \text{gdzie } \varrho_c \leq \varrho_e \leq \beta.$$

Rozpisując równania termosprężystości, por. [2] ÷ [5], [16] ÷ [20] oraz uwzględniając (3.11), otrzymamy równania dla sprężystej części kuli analogiczne do równań (3.1), wiedząc, że $\varepsilon^p = 0$. Wykorzystując następnie te równania, warunek brzegowy oraz biorąc pod uwagę parametry (3.11) otrzymać można dla sprężystej części kuli następujące wyrażenie,

$$S_{rc} = \frac{2(\beta_c^3 - 1) - \tau_c \beta_c (2\beta_c^2 - \beta_c - 1)}{3\beta_c^3}, \quad (3.12)$$

gdzie $\tau_c = \frac{\tau_{0c}}{\beta - 1} (\beta_c - 1)$. Jest to wyrażenie na naprężenie promieniowe na promieniu ϱ_c kuli, natomiast dla kuli sprężystej jest to ciśnienie wewnętrzne działające wraz z temperaturą τ_c . Podstawiając wyrażenie (3.12) do równości (3.10) i uwzględniając wyrażenie (2.8) po wykonaniu operacji całkowania oraz po żmudnych przekształceniach otrzymamy następujące wyrażenie na τ_{0c} :

$$\tau_{0c} = \frac{A - B}{C - D + F}, \quad (3.13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= 2\beta^3(\beta - 1) \cdot (m - 1) \cdot (3\beta_c^3 \ln \varrho_c + \beta_c^3 - 1), \\ B &= 4\varrho_c^3(\beta^3 - 1) \cdot (1 - \nu) m \beta_c^3 (\beta - 1), \\ C &= \beta^3(m - 1) \beta_c \cdot (2\beta_c^3 - 3\beta_c^2 + 1), \\ D &= 2(\beta^3 - 1) \cdot (1 - \nu) m \beta_c^3 \{ 2\varrho_c^3(\beta_c - 1) - [3\beta(\varrho_c^2 - 1) - 2(\varrho_c^3 - 1)] \}, \\ F &= 2(1 - \nu) m (\beta - 1) \beta_c^3 (\beta^2 + \beta - 2). \end{aligned}$$

Kładąc w wyrażeniu na τ_{0c} — (3.13) wartość współczynnika wzmocnienia $m = 0$, otrzymać można następujące równanie, analogiczne do równania przedstawionego w pracy [5] oraz [3], mianowicie:

$$\tau_{0c}|_{m=0} = \frac{2(\beta-1) \cdot (3\beta_c^3 \ln \varrho_c + \beta_c^3 - 1)}{\beta_c(2\beta_c^3 - 3\beta_c^2 + 1)}, \quad (3.14)$$

z tym, że wyrażone w odpowiednio innych parametrach. Podstawiając zaś do wyrażenia (3.13) wartość $\varrho_c = 1$ i uwzględniając wielkości (3.11) po przekształceniach otrzymamy:

$$\tau_{0c}|_{\varrho_c=1} = \tau'_{0c} = \frac{2(\beta^2 + \beta + 1)}{\beta(2\beta + 1)}. \quad (3.15)$$

Jest to wyrażenie określające temperaturę potrzebną do zapoczątkowania pierwszego plastycznego płynięcia na wewnętrznej powierzchni kuli. Tego rodzaju zależność była już wyprowadzona w pracach [2], [5] dla przypadku materiału bez wzmocnienia. W przypadku zewnętrznej — sprężystej części kuli (rys. 2) określonej bezwymiarowymi wielkościami (3.11) i w przypadku obciążenia jej tylko gradientem temperatury ($S_{rc} = S_{\theta c} = 0$), analogiczne wyrażenie otrzyma się kładąc do (3.15) zamiast β odpowiednio β_c . Należy podkreślić w zakończeniu tego punktu, że wyprowadzone równania i warunki słuszne są tylko do momentu pojawienia się drugiej strefy plastycznej na promieniu zewnętrznym kuli.

3.1. Analiza strefy plastycznej ($1 \leq \varrho \leq \varrho_c$). Stan naprężenia określa się na podstawie równań (3.1) w których uwzględnić należy wyrażenia (2.8), (3.8), (3.13) oraz stałą całkowania C_1 , którą z kolei otrzymamy z równania (3.2) po uwzględnieniu (2.8) i (3.9). Wyniesie ona,

$$C_1 = \tau_{0c} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\varrho_c^3}{\beta-1} (\beta_c - 1) - \frac{2}{\beta-1} \left[\frac{1}{2} \beta (\varrho_c^2 - 1) - \frac{1}{3} (\varrho_c^3 - 1) \right] \right\} - \frac{2}{3} \varrho_c^3. \quad (3.16)$$

Rozkład deformacji wyznaczmy z równań (2.6), (2.10), (3.7) po uprzednim określeniu stanu naprężenia — S_r , S_θ , S . Rozkład temperatury, po obliczeniu wartości τ'_{0c} (temperatura przyłożona do wewnętrznej powierzchni w chwili gdy rozpoczyna się drugie plastyczne płynięcie na zewnętrznym promieniu kuli) wyznaczyć należy z (2.8). Naprężenia reszkowe pozostałe po procesie sprężystego odciążenia, znajdziemy z następujących związków, por. [2], [3]:

$$S'_r = S_r + S''_r, \quad S'_\theta = S_\theta + S''_\theta, \quad (3.17)$$

gdzie:

$$S''_r = 2 \frac{\varrho^3 - 1}{\varrho^3(\beta^3 - 1)} \int_1^\beta \xi^2 \tau(\xi) d\xi - \frac{2}{\varrho^3} \int_1^\varrho \xi^2 \tau(\xi) d\xi,$$

$$S''_\theta = \frac{2\varrho^3 + 1}{\varrho^3(\beta^3 - 1)} \int_1^\beta \xi^2 \tau(\xi) d\xi + \frac{1}{\varrho^3} \int_1^\varrho \xi^2 \tau(\xi) d\xi - \tau(\varrho),$$

$$\tau = -\frac{\tau_{0c}}{\beta-1} \left(\frac{\beta}{\varrho} - 1 \right), \quad C'_1 = \frac{2}{\beta^3 - 1} \int_1^\beta \xi^2 \tau(\xi) d\xi.$$

3.2. Analiza strefy sprężystej ($\varrho_c \leq \varrho \leq \beta$). Stan naprężenia określimy z równań (3.1), w których odpowiednio uwzględnia się wyrażenia (2.8), (3.8), (3.12), (3.13) oraz stałą całkowania C_1 , która jest taka sama jak w strefie plastycznej — wzór (3.16). Rozkład temperatury wyznaczmy podobnie jak w strefie plastycznej ze związku (2.8) przy znajomości τ''_{0c} , natomiast stan deformacji odpowiednio z równań (2.6) i (2.8). Naprężenia resztkowe otrzymamy także z równań (3.17), przy czym naprężenia S_r i S_θ należy wziąć ze strefy sprężystej.

3.3. Druga — zewnętrzna strefa plastyczna. Warunek uplastycznienia zewnętrznej powierzchni kuli będącej w stanie sprężystym, por. np. [2], [3] ÷ [5] jest następujący:

$$S = 1 \quad \text{dla} \quad \varrho = \beta, \quad (3.18)$$

gdzie S wyrażone jest równaniem (2.10) oraz równaniami na naprężenia S_r oraz S_θ w strefie sprężystej. Odpowiadającą temu stanowi temperaturę τ''_{0c} po dokonaniu odpowiednich przekształceń przedstawić można następująco,

$$\tau''_{0c} = \frac{2(\beta - 1) \cdot \left[\left(\frac{\beta}{\varrho'_c} \right)^3 + 1 \right]}{\left(\frac{\beta}{\varrho'_c} \right) \cdot \left[\left(\frac{\beta}{\varrho'_c} \right)^2 - 1 \right]}, \quad (3.19)$$

gdzie ϱ'_c jest promieniem strefy sprężysto-plastycznej w chwili gdy na zewnętrznej powierzchni kuli pojawi się drugie uplastycznienie, to znaczy gdy spełniony będzie warunek (3.18). Wartość promienia ϱ'_c określimy podstawiając w równaniu (3.13) w miejsce wartości ϱ_c wartość ϱ'_c i porównując je następnie z wyrażeniem (3.19). Korzystamy zatem ze związku $\tau_{0c}(\varrho_c = \varrho'_c) = \tau''_{0c}$. Z takiego porównania wynika, że w przeciwieństwie do materiału bez wzmocnienia — [3] ÷ [5], [11], temperatura τ''_{0c} lub co jest równoważne promień ϱ'_c — zależy nie tylko od parametru geometrii kuli β lecz także od współczynnika wzmocnienia m oraz od współczynnika Poissona ν . Dla przypadku materiału bez wzmocnienia ($m = 0$), promień ϱ'_c określić można po podstawieniu $\varrho_c = \varrho'_c$ we wzorze (3.14) oraz po porównaniu tego wzoru z (3.19). Czyli [5]:

$$\varrho'_{c|m=0} = \exp \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{\beta}{\varrho'_c} \right)^2 - 2 \left(\frac{\beta}{\varrho'_c} \right) + 1}{\left(\frac{\beta}{\varrho'_c} \right)} \right]. \quad (3.20)$$

Otrzymanie wyrażenia analogicznego do (3.20) lecz dla materiału ze wzmocnieniem nie jest możliwe ze względu na złożony i uwikłany charakter funkcji $\tau_{0c} = f(\varrho_c)$ — por. (3.13). W pracy [3] analizując problem uplastycznienia pierwszej i drugiej strefy plastycznej grubościennych kul, autorzy rozpatrzyli między innymi warunki występowania tych stref. Z uzyskanych przez tych autorów rezultatów wynika, że dla kul obciążonych tylko gradientem temperatury istnieją dwie możliwości pojawienia się drugiej strefy plastycznej i które to zależą tylko od parametru geometrii kuli β . Gdy mianowicie β jest większe od pewnego β_{cr} ($\beta \geq \beta_{cr}$), to drugie uplastycznienie pojawi się w ścianie kuli, natomiast gdy β jest mniejsze od tej wartości ($\beta \leq \beta_{cr}$) to uplastycznienie to pojawi się na zewnętrz-

nej powierzchni kuli i będzie propagować się do wewnątrz. W przypadku materiału bez wzmocnienia wartości $\beta_{cr} = 2.791$ była pierwszy raz określona w pracy [5] a następnie cytowana i używana w pracach [3] ÷ [4]. Dla przyjętego w obecnej pracy materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem, wartość β_{cr} zależy dodatkowo od współczynnika wzmocnienia m i od współczynnika Poissona ν . Wartości β_{cr} i odpowiadające im temperatury τ''_{ocr} lub co jest równoważne — odpowiadające im promienie strefy sprężysto-plastycznej ϱ'_{cr} dla danego m i ν określa się z następującej zależności:

$$\frac{\partial S(\tau''_{ocr}, \varrho, m, \beta, \nu)}{\partial \varrho} \Big|_{\varrho=\beta} = \frac{\partial S(\varrho'_{cr}, \varrho, \beta, m, \nu)}{\partial \varrho} \Big|_{\varrho=\beta} = 0, \quad (3.21)$$

oraz z równań (3.13) i (3.19).

Funkcję S we wzorze (3.21) wyznaczyć należy z zależności (2.10) i równań naprężeniowych S_r , S_θ termosprężystości określonych dla górnej — sprężystej części badanej kuli. Otrzymane na drodze numerycznej rezultaty są przedstawione w tabeli pierwszej, dla wybranych wartości współczynnika wzmocnienia m z przedziału $\langle 0 \div 0.4 \rangle$ i dla przyjętego we wszystkich dalszych obliczeniach wartości współczynnika Poissona $\nu = 0.3$. Jest to jakościowo jeden z zasadniczych rezultatów uzyskanych w niniejszej pracy.

Tabela 1

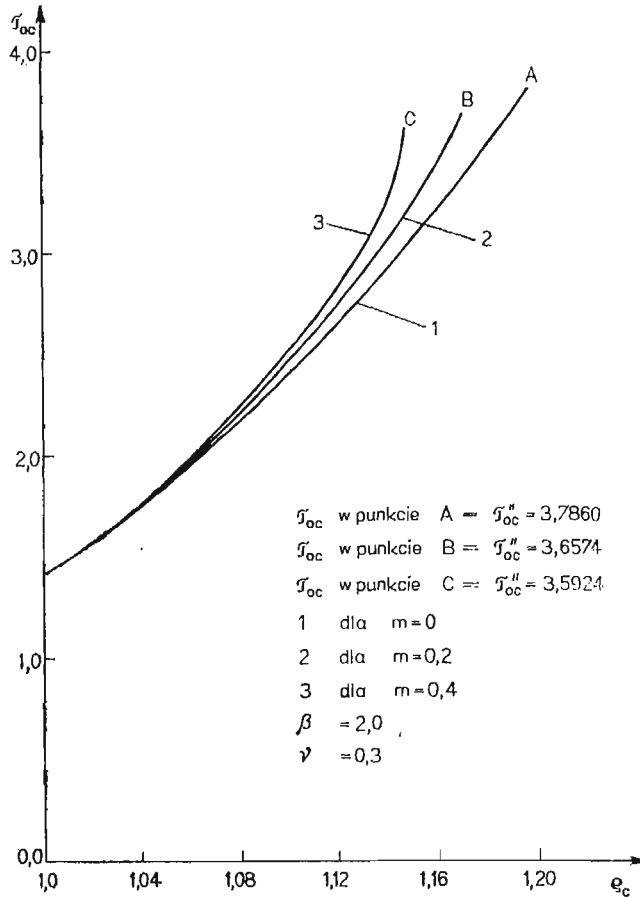
Współczynnik Poissona $\nu = 0.3$			
m	β_{cr}	τ''_{ocr}	ϱ'_{cr}
0.00	2.7910	5.3640	1.3950
0.10	2.6214	4.8643	1.3107
0.20	2.5453	4.6359	1.2726
0.30	2.4983	4.4948	1.2492
0.40	2.4655	4.3964	1.2328

Jak widać z powyższej tabeli, wyznaczone wartości β_{cr} , τ''_{ocr} , oraz ϱ'_{cr} maleją wraz ze wzrostem współczynnika wzmocnienia m .

4. Analiza otrzymanych wyników

Z tabeli pierwszej wynika, że dla przyjętego do obliczeń parametru geometrii kuli $\beta = 2$ oraz dla współczynnika Poissona $\nu = 0.3$, drugie uplastycznienie pojawi się na zewnętrznej powierzchni badanej kuli, co jest w zgodności z nałożonymi warunkami brzegowymi wyprowadzonych w punkcie trzecim równań.

Na rysunku trzecim wykreślono zależność τ_{oc} od ϱ_c dla trzech wybranych wartości parametru wzmocnienia m . Punkty „A”, „B”, „C”, oznaczają wartości temperatur τ_{oc} i odpowiednio wartości promienia ϱ_c w chwili gdy zaczyna się drugie plastyczne płynięcie na zewnętrznej powierzchni kuli. Jak widać temperatura τ'_{oc} maleje wraz ze wzrostem współczynnika wzmocnienia. Maleć będzie więc także temperatura τ'_c , oraz maleć będzie promień strefy sprężysto-plastycznej ϱ'_c . Dokładne określenie powyższych wielkości znaj-

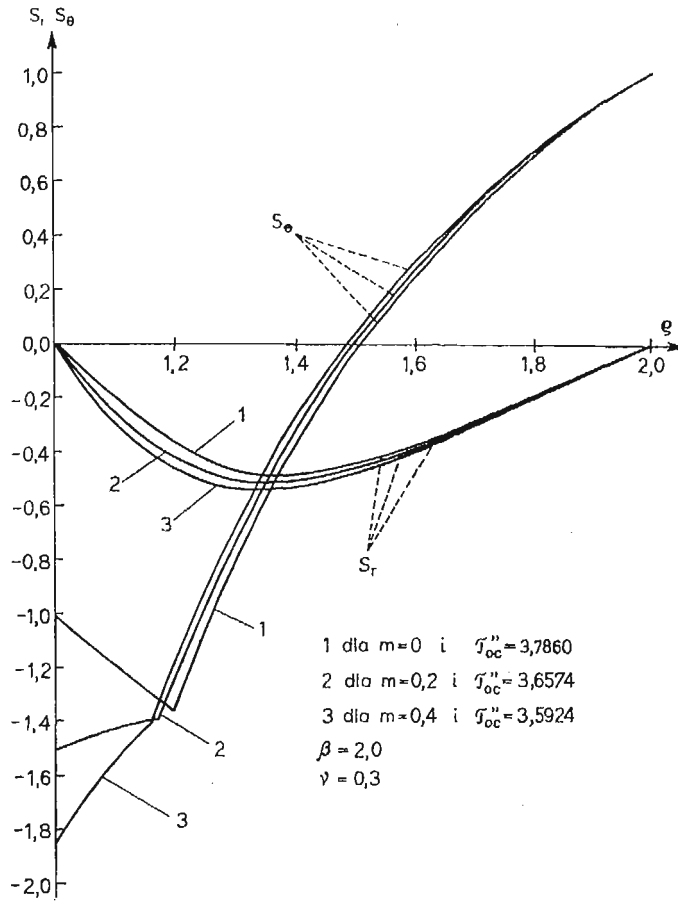


Rys. 3

duje się w tabeli drugiej, dla przyjętych wartości współczynnika geometrii kuli i współczynnika Poissona. Rysunki czwarty i piąty przedstawiają odpowiednio rozkład naprężeń i odkształceń w ściance kuli podczas procesu obciążania i dla wybranych wartości parametru wzmocnienia m .

Tabela 2

m	$\bar{\sigma}_{oc}''$	τ_c''	e_c'
0.00	3.7860	2.5400	1.1970
0.10	3.7078	2.5662	1.1820
0.20	3.6574	2.5856	1.1727
0.30	3.6207	2.6004	1.1640
0.40	3.5924	2.6123	1.1579

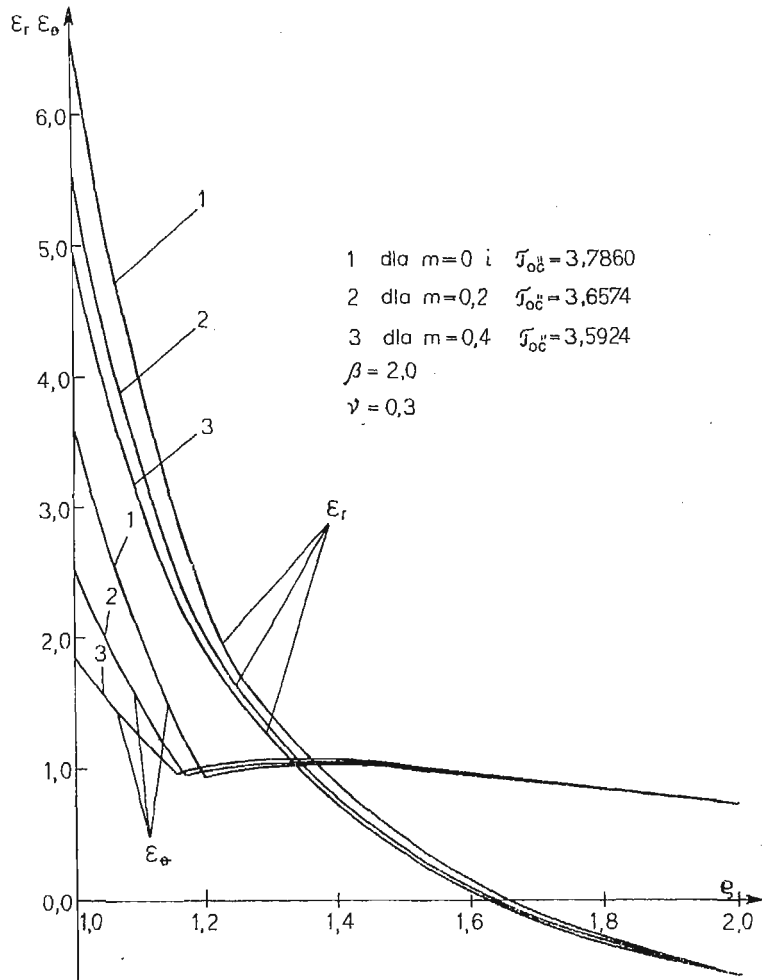


Rys. 4

Rozkład naprężeń resztkowych powstałych po procesie czystego sprężystego odciążenia zilustrowano na rysunku szóstym. Warunek aby proces odciążania przebiegał czysto sprężysto otrzymać można z równania na S_{θ}'' — (3.17)₄, po uwzględnieniu w nim wyrażenia (3.17)₅ i po przeprowadzeniu całkowania. Otrzymamy wówczas, por. np. [3]:

$$\tau''_{0c} = \frac{4(\beta^2 + \beta + 1)}{\beta(2\beta + 1)} (-S_{\theta})|_{\rho=1} \geq \tau''_{0c}, \quad (4.1)$$

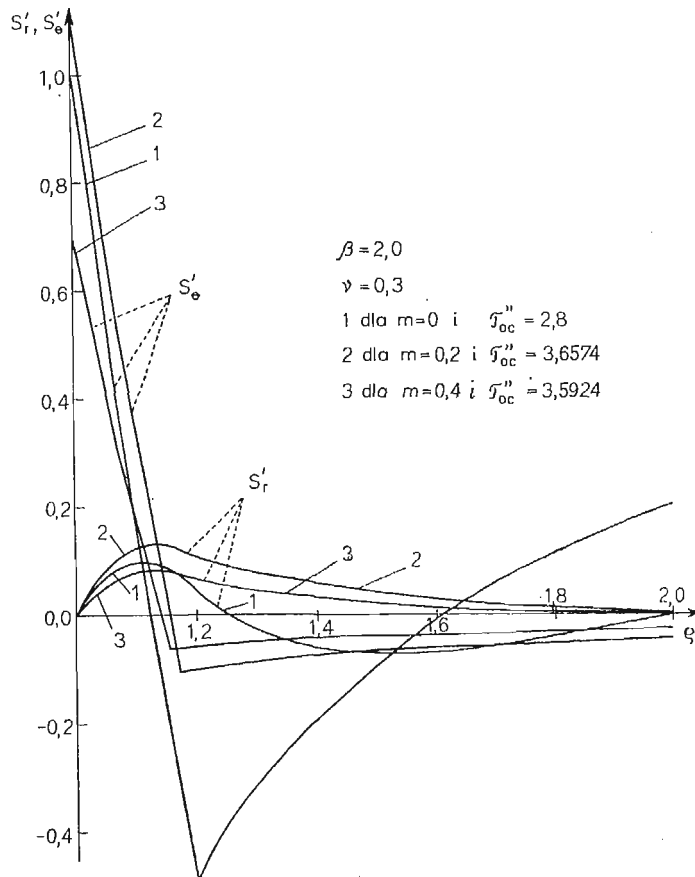
gdzie τ''_{0c} oznacza maksymalną wartość temperatury jaką należy przyłożyć do wewnętrznej powierzchni kuli bez obawy, że w procesie odciążenia zachodzą będą lokalne procesy plastycznego płynięcia. W wyniku przeprowadzonych obliczeń z równania (4.1) wynika, że gdy $m \geq 0.11436$, to wówczas można przyłożyć temperaturę τ''_{0c} w miejsce τ''_{0c} aby zachodził proces czysto sprężystego odciążania. Powyższe przedstawiono w tabeli trzeciej. Dla przypadku materiału bez wzmocnienia mamy $(-S_{\theta})|_{\rho=1} = 1$, więc wartość temperatury τ''_{0c} jest dwukrotnie większa od wartości temperatury potrzebnej do pierwszego



Rys. 5

Tabela 3

$\beta = 2.0 \quad \nu = 0.3$		
m	τ''_{0c}	τ''_{0c}
0.00	2.8000	3.7860
0.10	3.6000	3.7078
0.11436	3.6994	3.6994
0.20	4.2318	3.6574
0.30	4.7555	3.6207
0.40	5.2021	3.5923



Rys. 6

uplastycznienia wewnętrznej powierzchni kuli τ'_{0c} . Zatem wiedząc, że $\tau'_{0c} = 1.4$, mamy, por. np. [3]:

$$\tau''_{0c} = 2\tau'_{0c} = 2.8. \quad (4.2)$$

Dalsze rozwinięcie zagadnienia naprężeń resztkowych można przeprowadzić badając materiał kuli, w którym granica plastyczności zależy od temperatury. Takie próby były podejmowane lecz jedynie dla materiału bez wzmocnienia. W rozważanym przypadku przyjęcie granicy plastyczności jako niezależnej od temperatury jest uproszczeniem, gdyż otrzymane na podstawie równania (2.8) wymiarowe temperatury $T_a(m)$ wynoszą:

$$T_a = \begin{cases} 459 \text{ C}^\circ & \text{dla } m = 0.0, \\ 443 \text{ C}^\circ & \text{dla } m = 0.2, \\ 435 \text{ C}^\circ & \text{dla } m = 0.4. \end{cases} \quad (4.3)$$

Temperatury te odpowiadają punktom „A”, „B”, „C” z rysunku drugiego. Do obliczeń przyjęto: granicę plastyczności materiału $\sigma_0 = 4000 \text{ kG/cm}^2$, moduł Younga $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kG/cm}^2$, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$, oraz współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$.

W zakończeniu warto dodać, że w przypadku kuli z materiału ze wzmocnieniem, podobnie jak w przypadku kuli z materiału bez wzmocnienia [5], pełne uplastycznienie ścianki kuli nastąpi dla temperatury τ_{0c} osiągającej wartość nieskończenie wielką.

Literatura cytowana w tekście

1. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford, 1947.
2. A. MENDELSON, *Plasticity: Theory and Application*, The Macmillan Company, New York 1968.
3. W. JOHNSON and P. B. MELLOR, *Elastic-plastic behaviour of thick-walled spheres of non-work-hardening material subject to a steady-state radial temperature gradient*, Int. Journal of Mech. Sciences, Vol. 4, 147, March - April 1962.
4. F. DRABBLE and W. JOHNSON, *The development of the Zones of Yielding in Thick-walled Spherical Shells of Non-work hardening Material Subjected to a Steady State Radial Temperatures Gradient and on Internal or External Pressure*. Conf. on Thermal Loading and Creep, Paper 19, Inst. Mech. Engrs., 1964.
5. G. R. COWPER, *The Elastoplastic Thick-Walled Sphere Subjected to a Radial Temperature Gradient*, Transaction of the ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., Vol. 27, Ser. E, No. 3, 1960.
6. H. A. NIED and S. C. BATTERMAN, *On Coupled Thermoelasticity: An Exact Solution for a Spherical Domain*, Israel Journal of Technology, Vol. 9, Nos. 1 - 2, 1971 pp. 37 - 46.
7. B. RANIECKI, *Naprężenia w sprężysto-plastycznej kuli z pustką kulistą znajdującej się w zmiennym polu temperatur*, Rozpr. Inż. 3, 14, 1966.
8. B. RANIECKI, *A Quasistatic, Spherically Symmetric Problem of Thermoelasticity*, Bull. Acad. Sci., Ser. Sci. Techn., 2, 13, 1965.
9. H. PARKUS, *Spannungen beim Abkühlen einer Kugel*, Ing.-Arch., 28, 1959, pp. 251 - 254.
10. P. PERZYNA and A. SAWCZUK, *Problems of Thermoelasticity*, Nuclear Engineering and Design, 24, 1973, 1 - 55, North-Holland Publ. Comp.
11. M. G. DERRINGTON and W. JOHNSON, *The Onset of Yield in a Thick Spherical Shell Subject to Internal Pressure and Uniform Heat Flow*. Appl. Sci. Research, Series A, 7, 408, 1968.
12. W. JOHNSON and P. B. MELLOR, *Engineering Plasticity*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1973.
13. A. SAWCZUK, *A note on plastic expansion of irradiated spherical shells*, Nucl. Struct. Engn., 1, pp. 155 - 158, 1965.
14. R. S. BODNER, *Elasto-plastic Stress Analysis of Thick-Walled Spherical Shells Subjected to Radial Temperature Gradient*, AVCOR and D, Division, Lawrence, Mass, Report, No, RADT — R-2-57-25, 1957.
15. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1950.
16. M. SOKOŁOWSKI, *Naprężenia cieplne w powłoce kulistej oraz cylindrycznej w przypadku materiałów o własnościach zależnych od temperatury*, Rozprawy Inżynierskie, Tom VIII, zeszyt 4, pp. 641 - 669, 1960.
17. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1962.
18. W. NOWACKI, *Dynamiczne Zagadnienia Termosprężystości*, PWN, Warszawa, 1966.
19. J. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, N.Y., second edition, 1956, pp. 362 - 364.
20. B. A. BOLEY and J. H. WEINER, *Theory of Thermal Stress*, Wiley, New York, 1960.

Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА УПРОЧНЕНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ШАРА ПОД НАГРУЗКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

В работе исследовано влияние линейного параметра упрочнения на поведение толстостенного шара подвергнутого нагрузкой температуры. Изучено влияние параметра упрочнения на распределение температуры деформации, напряжения а также на положение упруго-пластической зоны.

Определено также критические величины геометрического параметра β для случая когда другая пластическая зона появляется снаружи шара.

S u m m a r y

ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOUR OF THICK-WALLED SPHERE OF WORK-HARDENING MATERIAL SUBJECT TO A RADIAL TEMPERATURE GRADIENT

The paper consider the influence of strain-hardening on the behaviour of elastic-plastic thick walled sphere under temperature load. The distributions of temperature, strain, stress and localisation of elastic-plastic bound for various values of strain-hardening parameter are given. Critical values of geometrical parameter β for which form the second plastic zone are defined.

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 listopada 1982 roku

OPTIMALIZACJA PRZY JAWNEJ ZALEŻNOŚCI RÓWNAŃ STANU OD WARTOŚCI BRZEGOWYCH ZMIENNYCH STANU

B. LECHOWICZ,
Z. PIEKARSKI

Politechnika Krakowska

1. WSTĘP

Przedstawiona praca składa się z dwóch części. Pierwsza, ogólna dotyczy problemu optymalizacji w przypadku, gdy różniczkowe równania stanu układu zależą jawnie od nieokreślonych wartości brzegowych zmiennych stanu. Rozwiązanie tak postawionego problemu optymalizacji sprowadza się do całkowania, w ogólności nieliniowych równań różniczkowo-całkowych typu Fredholma.

Druga część jest ilustracją pierwszej i stanowi sformułowanie równań optymalizacji małych drgań geometrycznie nieliniowej belki.

2. Postawienie i rozwiązanie problemu

W dowodzie przedstawionego zagadnienia optymalizacji stosować będziemy teorię rachunku wariacyjnego wykorzystywaną szeroko np. w [1]. W ogólności przyjmujemy, że równania stanu układu mają postać:

$$w_j' = f_j(w, u, x, w(x_0), w(x_k)), \quad (1)$$

gdzie:

$$(\quad)' \equiv \frac{d}{dx}$$

u_i — współrzędne wektora sterowania u
 $i = 1, 2, \dots, m$

W równaniach (1) wielkości $w(x_0)$, $w(x_k)$ oznaczają nieokreślone wartości zmiennych stanu $w(x)$ w punktach początkowym i końcowym. przedziału optymalizacji $x_0 \leq x \leq x_k$. Ograniczenia na sterowanie u przyjmujemy w formie ograniczeń równościowych

$$\begin{aligned} \psi_k(u, x) &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, r < m, \end{aligned} \quad (2)$$

do której to formy można sprowadzić ograniczenia typu nierównościowego przez rozszerzenie wymiaru przestrzeni sterowania (jak np. w [1]). Warunki brzegowe dla ustalonego przedziału optymalizacji $x_0 \leq x \leq x_k$ można ogólnie zapisać wzorami:

$$\begin{aligned} \varphi_l(w(x_0), w(x_k)) &= 0, \\ l &= 1, 2, \dots, p \leq 2n. \end{aligned} \quad (3)$$

Jako funkcję celu przyjmujemy dla prostoty rozważań wyrażenie:

$$J = g(w(x_0), w(x_k)) = \text{minimum}. \quad (4)$$

Całkową funkcję celu, jak wiadomo, można zapisać również w postaci (4). Dla dowodu wprowadzamy pomocniczy funkcjonał (w którym obowiązuje konwencja sumacyjna):

$$F = \varphi + \int_{x_0}^{x_k} (\lambda_j w'_j - H) dx. \quad (5)$$

Funkcja brzegowa φ ma formę:

$$\varphi = g + \varrho_l \varphi_l, \quad (6)$$

zaś hamiltonian H

$$H = \lambda_j f_j + \mu_k \psi_k \quad (7)$$

gdzie:

$\lambda_j = \lambda_j(x)$ są zmiennymi sprzężonymi

ϱ_l, μ_k — stałe wielkości

Przy wszystkich powyższych założeniach pełna wariacja funkcjonału (5) ma postać:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial w_j(x_0)} - \lambda_j(x_0) - \int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial H}{\partial w_j(x_0)} dx \right\} \Delta w_j(x_0) + \\ &+ \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial w_j(x_k)} + \lambda_j(x_k) - \int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial H}{\partial w_j(x_k)} dx \right\} \Delta w_j(x_k) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_k} \left\{ \left(w'_j - \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \right) \delta \lambda_j - \left(\lambda'_j + \frac{\partial H}{\partial w_j} \right) \delta w_j - \right. \\ &\left. - \frac{\partial H}{\partial u_l} \delta u_l - \frac{\partial H}{\partial \mu_k} \delta \mu_k \right\} dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Korzystając, jak w [1], ze wzorów (1) i (2), dobierając odpowiednio λ_j , oraz korzystając z niezależności od siebie wariacji $\delta w_j(x_0)$, $\delta w_j(x_k)$, δu_l , warunek stacjonarności

$$\Delta F = 0. \quad (9)$$

jest słuszny przy spełnieniu dodatkowych wyrażeń

a) równań sprzężonych

$$\lambda'_j = - \frac{\partial H}{\partial w_j}, \quad (10)$$

b) warunków transwersalności (warunków brzegowych dla λ_j) nowego typu

$$\begin{aligned}\lambda_j(x_0) &= \frac{\partial \varphi}{\partial w_j(x_0)} - \int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial H}{\partial w_j(x_0)} dx, \\ \lambda_j(x_k) &= -\frac{\partial \varphi}{\partial w_j(x_k)} + \int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial H}{\partial w_j(x_k)} dx.\end{aligned}\quad (11)$$

gdzie w warunkach tych dodatkowo występują składniki w postaci całek. Dla problemu klasycznego, w którym funkcje f_j nie zależą od $w(x_0)$ i $w(x_k)$ całki we wzorach (11) są tożsamościowo równe zero. Otrzymujemy wtedy problem optymalizacji rozpatrywany np. w [1].

c) warunków optymalności

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0. \quad (12)$$

Aby zakończyć dowód postawionego zagadnienia należy jeszcze zapisać konieczny warunek Weierstrassa istnienia silnego minimum funkcjonału (4). Jak wynika z [1] warunek ten sprowadza się do nierówności

$$H(x)_{\text{optym}} \geq H(x) \quad (13)$$

gdzie optymalny hamiltonian H_{op} określony jest dla optymalnego sterowania $U = U_{op}^{(x)}$, natomiast hamiltonian H dla sterowania U dowolnego, ale dopuszczalnego.

Rozwiązanie rozważanego problemu sterowania optymalnego sprowadza się do rozwiązania równań (1) i (10) z warunkami brzegowymi (3) i (11), przy ograniczeniach (2) i (13). Od dotychczas rozpatrywanych problemów optymalizacji przedstawione zagadnienie różni się postacią warunków transwersalności (11), gdzie dodatkowo występują składniki w postaci całek. Przedstawione rozważania można łatwo uogólnić na przypadek zmiennego obszaru optymalizacji.

3. Przykład

Dla ilustracji powyższych wyników sformułowane zostały równania optymalizacji małych drgań geometrycznie nieliniowej belki. Przy zmiennym przekroju można metodą podaną w [2] otrzymać nieliniowe równanie drgań poprzecznych belki z uwzględnieniem wstępnego, osiowego naciągu:

$$(EJw'')'' - \frac{E}{l} w'' \int_0^l Fu' dx - \frac{E}{2l} w'' \int_0^l Fw'^2 dx + \rho F\ddot{w} = 0, \quad (14)$$

gdzie:

$$(\cdot)' \equiv \frac{\partial}{\partial t} \quad (\cdot)' \equiv \frac{\partial}{\partial x}$$

$$0 \leq x \leq l$$

ρ, F, I, l, E — odpowiednio: gęstość, przekrój, moment bezwładności, długość, moduł Young'e'a

$w(x, t)$ — przemieszczenie poprzeczne

$u(x, t)$ — przemieszczenie podłużne

Wzór (14) otrzymujemy przy założeniu, że szybkość zmian w czasie przemieszczeń osiowych u jest mała.

W dalszych rozważaniach przyjmować będziemy, że przemieszczenie

$$u(x, t) = u(x), \quad (15)$$

jest z góry zadane. Aby móc w (14) rozdzielić zmienne zakładamy, że na duże odkształcenia statyczne zostały nałożone małe drgania:

$$w(x, t) = y_1(x) + \varepsilon w_1(x) T(t), \quad (16)$$

ε — mały parametr

Zaniedbując wyrazy z ε^2 i wyższe, po wstawieniu (16) do (14) otrzymujemy układ równań różniczkowo całkowych postaci

$$(Iy_1'')'' - \frac{1}{l} y_1'' \int_0^l Fu' dx - \frac{1}{2l} y_1'' \int_0^l Fy_1'^2 dx = 0, \quad (17)$$

$$(Iw_1'')'' - \frac{1}{l} w_1'' \int_0^l Fu' dx - \frac{1}{2l} w_1'' \int_0^l Fy_1'^2 dx -$$

$$- \frac{1}{l} y_1'' \int_0^l Fy_1' w_1' dx - \frac{\rho\omega^2}{E} Fw_1 = 0,$$

oraz

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0. \quad (19)$$

Przez wprowadzenie nowych, dodatkowych zmiennych można różniczkowo-całkowe równania (17) i (18) sprowadzić do postaci (1) i zastosować przedstawioną w punkcie 2 metodę optymalizacji. Rozważać będziemy mianowicie zmienne typu

$$y_5 = \int_0^x Fy_1'^2 ds,$$

$$w_5 = \int_0^x Fy_1' w_1' ds, \quad (20)$$

$$z = \int_0^x Fu' ds.$$

Pozwala to równania (17) i (18) i związki (20) sprowadzić do 11-tu równań różniczkowych 1-go rzędu:

a) dla statycznego ugięcia

$$\begin{aligned}
 y_1' &= y_2, \\
 y_2' &= \frac{1}{I} y_3, \\
 y_3' &= y_4, \\
 y_4' &= \frac{z(l)}{l} \frac{1}{I} y_3 + \frac{y_5(l)}{2I} y_3, \\
 y_5' &= Fy_2^2, \\
 z' &= Fu'.
 \end{aligned} \tag{21}$$

b) dla małych drgań

$$\begin{aligned}
 w_1' &= w_2, \\
 w_2' &= \frac{1}{I} w_3, \\
 w_3' &= w_4, \\
 w_4' &= \frac{z(l)}{l} \frac{1}{I} w_3 + \frac{y_5(l)}{2l} \frac{1}{I} w_3 + \frac{w_5(l)}{l} \frac{1}{I} y_3 + \frac{\rho\omega^2}{E} Fw_1, \\
 w_5' &= Fy_2 w_2.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Równania powyższe są typu (1), występują w nich bowiem nieokreślone wartości $z(l)$, $y_5(l)$, $w_5(l)$ zmiennych stanu w punkcie końcowym przedziału optymalizacji.

Dla prostoty rozważać będziemy belkę obustronnie podpartą. Wtedy warunki brzegowe dla (21) i (22) będą po wykorzystaniu (16) i (20) następujące:
dla zmiennej $w(x)$

$$\begin{aligned}
 w_1(0) &= w_3(0) = w_5(0) = 0, \\
 w_1(l) &= w_3(l) = 0,
 \end{aligned} \tag{23}$$

dla zmiennej $y(x)$

$$\begin{aligned}
 z(0) &= y_1(0) = y_3(0) = y_5(0) = 0, \\
 y_1(l) &= y_3(l) = 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Jako funkcję celu przyjmujemy minimum masy belki przy stałej częstotliwości drgań

$$\begin{aligned}
 \int_0^l F dx &= \min. \\
 \omega &= \text{const.}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Sterowanie F podlega ograniczeniu nierównościowemu

$$F_1 \leq F \leq F_2. \tag{26}$$

Ograniczenie to można, przez wprowadzenie dodatkowego sterowania v , sprowadzić do typu równościowego (jak w [1]):

$$\psi = (F - F_1)(F_2 - F) - v^2 = 0. \tag{27}$$

Przyjmujemy, że optymalizacji podlegać będą małe drgania, tzn. optymalizacja przeprowadzona będzie w oparciu tylko o układ równań (22). Należy więc znaleźć optymalne rozwiązanie układu (22) z warunkami brzegowymi (23) przy założeniu (25) oraz ograniczeniach (27) pamiętając, że muszą być spełnione równania (21) z warunkami (24).

W celu rozwiązania wprowadzamy funkcję brzegową φ oraz hamiltonian H .

Z (23) mamy związek (6) w postaci:

$$\varphi = \varrho_1 w_1(0) + \varrho_2 w_3(0) + \varrho_3 w_5(0) + \varrho_4 w_1(l) + \varrho_5 w_3(l), \quad (28)$$

natomiast z (22) i (25) wyrażenie jest (7) w postaci:

$$\begin{aligned} H = & -F + \lambda_1 w_2 + \lambda_2 \frac{1}{I} w_3 + \lambda_3 w_4 + \lambda_4 \frac{\varrho \omega^2}{E} F w_1 + \\ & + \lambda_4 \left(\frac{z(l)}{l} + \frac{y_5(l)}{2l} \right) \frac{1}{I} w_3 + \lambda_4 \frac{w_5(l)}{l} \frac{1}{I} y_3 + \\ & + \lambda_5 F y_2 w_2 + \mu (F - F_1) (F_2 - F) - \mu v^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Za pomocą hamiltonianu (29) można wprowadzić równania sprzężone (10) w formie:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= -\frac{\varrho \omega^2}{E} F \lambda_4, \\ \lambda'_2 &= -\lambda_1 - F y_2 \lambda_5 \\ \lambda'_3 &= -\frac{1}{I} \lambda_2 - \left(\frac{z(l)}{l} + \frac{y_5(l)}{2l} \right) \frac{1}{I} \lambda_4, \\ \lambda'_4 &= -\lambda_3, \\ \lambda'_5 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Za pomocą funkcji brzegowej (28) wprowadzamy warunki brzegowe do równań (30) typu (11):

$$\begin{aligned} \lambda_2(0) = \lambda_4(0) = \lambda_2(l) = \lambda_4(l) &= 0, \\ \lambda_5(l) &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{I} y_3 \lambda_4 dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Z warunków optymalności (12) przy założeniu $I = aF^n$ (32) dostajemy

$$2\eta v = 0. \quad (33)$$

Z równania (33) i warunku (27) wynika

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \mu \neq 0, \quad v = 0, \\ & F = F_1 \quad \text{lub} \quad F = F_2, \\ \text{b)} \quad & \mu = 0, \quad v \neq 0, \\ & F_1 < F < F_2, \\ \text{c)} \quad & \mu = 0, \quad v = 0, \\ & F = F_1 \quad \text{lub} \quad F = F_2. \end{aligned} \quad (34)$$

W przypadkach b) i c) z drugiego warunku optymalności $\frac{\partial H}{\partial F} = 0$ otrzymujemy

$$F^{n+1} = \frac{n \left[\frac{\lambda_2 w_3}{a} + \left(z(l) + \frac{y_5(l)}{2} \right) \frac{\lambda_4 w_3}{la} + w_5(l) \frac{\lambda_4 y_3}{la} \right]}{\left[-1 + \rho \frac{\omega^2}{E} \lambda_4 w_1 + y_2 \lambda_5 w_2 \right]} \quad (35)$$

Za pomocą wzorów (34) i (35) określamy optymalny przekrój rozpatrywanej belki.

Ostatecznie, aby rozwiązać problem optymalizacji, trzeba rozwiązać równania (22) i (30) z warunkami (23) i (31), z warunkiem optymalności (35), zakładając, że mamy (15) oraz stałe w (32) przy jednoczesnym spełnieniu (21) z (24).

Literatura cytowana w tekście

1. W. A. ТРОИЦКИЙ, *Оптимальные процессы колебаний механических систем*, Leningrad 1976.
2. S. KALISKI, *Drgania i fale w ciałach stałych* Warszawa 1966.

Резюме

ОПТИМАЛИЗАЦИЯ ПРИ ЗАВИСИМОСТИ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ОТ КРАЕВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

В работе, опираясь на классическом вариационном исчислении представляется метод оптимального управления системами, описанными системой дифференциальных уравнений зависящих от неопределенных значений переменных состояния в начальной и конечной точках предела оптимизации.

Summary

OPTIMIZATION FOR A DEPENDENCE BETWEEN STATE EQUATIONS AND BOUNDARY VALUES OF STATE VARIABLE

In this paper a method of optimal design of systems given by a set of differential equations has been developed. The set of differential equations straight depends on boundary values of state variables. The method is based on classical variational calculus.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 września 1982 roku

A TRANSVERSELY ISOTROPIC LAYER PRESSED ONTO A RIGID BASE WITH A PROTRUSION OR PIT

BOGDAN R O G O W S K I

*Łódź, Technical University
Institute of Construction Engineering*

The author solves problem pointed out in the title, in which the effects of transverse anisotropy and body forces are taken into account, by means of Hankels transforms and the displacement potentials. The three-part mixed boundary value contact problem is reduced to the solution of triple integral equations and some conditions. These equations are solved by expansion of the function describing the displacement and stress states into a Fourier cosine series, which leads to two infinite sets of linear simultaneous algebraic equations. The part of the lower surface of the plate which does not contact with the base, is an annulus, the inner or outer radii of which are not known a priori and are determined.

Numerical results are shown for the relation among the pressure and weight of the layer, its thickness, the annular region and the magnitudes of the protrusion or pit of the base in cadmium and magnesium single crystals and fiber-reinforced composite materials. They are compared with these of the isotropic layer to show the effect of anisotropy. The variation of the stress concentration factors at the adges of the contact are plotted versus the ratio of the radii of the contact regions for dissimilar materials and layer thickness.

1. Introduction

The indentation problems of an elastic, isotropic half-space by a rigid cone [1], sphere [2] or truncated cone [3], in the case of circular contact region, contact problems of a isotropic half-space or layer pressed onto a rigid base with a protrusion or a pit [4, 5], pressed by a concave rigid punch (a transversely isotropic case) [6], problem of two isotropic half-space pressed against each other with a rigid paraboloidal inclusion between them [7] problems involving annular contact or uncontact region, and a two-dimensional cases [8, 9], have been analyzed.

In the present paper, the axisymmetric contact problems of a transversely-isotropic layer pressed onto a rigid base with a cylindrical protrusion (Problem I) or a pit (Problem II) are considered.

2. Basic equations and displacement functions

We denote as usual the cylindrical polar coordinates of a point by (r, θ, z) where the z -axis is chosen as the axis of geometric and elastic symmetry. In the case of the torsionless axisymmetric problems the stress-strain relations for a transversely isotropic solid are as follows:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11}e_{rr} + c_{12}e_{\theta\theta} + c_{13}e_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}e_{rr} + c_{11}e_{\theta\theta} + c_{13}e_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}(e_{rr} + e_{\theta\theta}) + c_{33}e_{zz}, \\ \sigma_{rz} &= c_{44}e_{rz}, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta z} = 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

where

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r},\tag{2.2}$$

u, θ, w are radial, circumferential and axial components of the displacement vector and c_{ij} are elastic constants.

Let $\gamma = \rho_1 g$ be the body force density acting vertically, where ρ_1 is the mass density and g the gravitational constant.

The displacement equations of equilibrium are:

$$\begin{aligned}c_{11} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \\ c_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \gamma.\end{aligned}\tag{2.3}$$

The particular part of the displacement components corresponding to γ and the clamping uniform pressure p_0 in the z direction may be obtained separately as:

$$\begin{aligned}u(r) &= \frac{c_{13}}{2c} r(2p_0 + \gamma h), \\ w(z) &= \frac{1}{2c_{33}} z\gamma(z-h) - \frac{c_{11} + c_{12}}{2c} z(2p_0 + \gamma h),\end{aligned}\tag{2.4}$$

where h is a geometric and c material parameter

$$c = (c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2.\tag{2.5}$$

This gives the stress state

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(z) = \sigma_{\theta\theta}(z) &= \frac{c_{13}}{2c_{33}} \gamma(2z-h), \\ \sigma_{zz}(z) &= -p_0 - \gamma(h-z), \\ \sigma_{rz} &= 0,\end{aligned}\tag{2.6}$$

which satisfies the conditions

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(h) = -p_0, \quad \sigma_{zz}(0) = -p_0 - \gamma h = -p_0, \\ \int_0^h \sigma_{rr}(z) dz = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

and in addition

$$w(r, 0) = 0, \quad w(r, h) = -\frac{c_{11} + c_{12}}{2c} h(2p_0 + \gamma h). \tag{2.8}$$

To solve the homogeneous equilibrium equations (2.3) we introduce the displacement potentials $\varphi_1(r, z)$ and $\varphi_2(r, z)$ as defined by [10]

$$u = \frac{\partial}{\partial r} (k\varphi_1 + \varphi_2), \quad w = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1 + k\varphi_2). \tag{2.9}$$

Eqs. (2.3) are satisfied if [10]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_i(r, z) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{2.10}$$

where

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \frac{1}{2} (\alpha \pm \beta), \quad \alpha = \varepsilon \sqrt{2(\kappa+1)}, \quad \beta = \varepsilon \sqrt{2(\kappa-1)}, \\ \varepsilon &= \left(\frac{c_{11}}{c_{33}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}} \left[\frac{1}{2} \frac{c_{11}}{c_{44}} - \frac{c_{13}}{c_{33}} \left(\frac{1}{2} \frac{c_{13}}{c_{44}} + 1 \right) \right], \\ k &= q + \sqrt{q^2 - 1}, \quad q = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{2c_{44}(c_{13} + c_{44})} - 1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

are dimensionless parameters of the material.

The stress components corresponding to Eqs. (2.9) are:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} &= -G_1(k+1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi_1 + \varphi_2) - 2G \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \end{pmatrix} (k\varphi_1 + \varphi_2), \\ \sigma_{zz} &= G_1(k+1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (s_1^{-2} \varphi_1 + s_2^{-2} \varphi_2), \\ \sigma_{rz} &= G_1(k+1) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned} \tag{2.12}$$

where G and G_1 denote the shear moduli in the z -plane and along the z -axis, respectively.

The displacement functions $\varphi_1(r, z)$ and $\varphi_2(r, z)$ may be taken in the following forms, noting some symmetries of the stress state, the condition at infinity and the conditions

$$\sigma_{zr}(r, 0) = \sigma_{zr}(r, h) = 0:$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(\varrho, \zeta) = & (-1)^{i+1} \frac{s_{1\pm 1}}{G_1(k+1)\beta} \int_0^\infty \left\{ \frac{p(x)}{x} \left[e^{-s_1 x \zeta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\text{sh } s_1 x} (e^{-s_1 x} \text{ch } s_1 x \zeta - g_1(x) \text{ch } s_1 x (1-\zeta)) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\omega(x)}{x \text{sh } s_1 x} [\text{ch } s_1 x \zeta - g_2(x) \text{ch } s_1 x (1-\zeta)] \right\} J_0(x\varrho) dx, \quad i = 1, 2 \quad (2.13) \end{aligned}$$

where $\varrho = r/h$, $\zeta = z/h$ and $J_0(x\varrho)$ is Bessel function of the first kind of order zero, $p(x)$ and $\omega(x)$ are unknown functions which are to be determined by the boundary conditions and the functions $g_1(x)$ and $g_2(x)$ are defined as follows

$$g_i(x) = \frac{1}{\text{sh } \alpha x + \alpha \beta^{-1} \text{sh } \beta x} \begin{cases} \text{ch } \beta x + \alpha \beta^{-1} \text{sh } \beta x - e^{-\alpha x}, & i = 1 \\ 2\beta^{-1}(s_1 \text{sh } s_1 x - s_2 \text{sh } s_2 x), & i = 2. \end{cases} \quad (2.14)$$

The displacement w and stresses σ_{zz} , σ_{rz} of interest which correspond to Eqs. (2.9), (2.12) and (2.13) are:

$$\begin{aligned} w(\varrho, \zeta) = & \frac{s_1 s_2}{G_1(k+1)\beta h} \int_0^\infty \left\{ p(x) \left[k e^{-s_2 x \zeta} - e^{-s_1 x \zeta} + e^{-s_1 x} \frac{\text{sh } s_1 x \zeta}{\text{sh } s_1 x} - \right. \right. \\ & \left. \left. - k e^{-s_2 x} \frac{\text{sh } s_2 x \zeta}{\text{sh } s_2 x} + g_1(x) \left(\frac{\text{sh } s_1 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_1 x} - k \frac{\text{sh } s_2 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_2 x} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \omega(x) \left[\frac{\text{sh } s_1 x \zeta}{\text{sh } s_1 x} - k \frac{\text{sh } s_2 x \zeta}{\text{sh } s_2 x} + g_2(x) \left(\frac{\text{sh } s_1 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_1 x} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - k \frac{\text{sh } s_2 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_2 x} \right) \right] \right\} J_0(x\varrho) dx + \frac{\gamma h^2}{2c_{33}} \zeta(\zeta-1) - \frac{c_{11} + c_{12}}{2c} h \zeta(2p_0 + \gamma h), \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\varrho, \zeta) = & \frac{1}{\beta h^2} \int_0^\infty \left\{ p(x) \left[s_2 e^{-s_1 x \zeta} - s_1 e^{-s_2 x \zeta} + s_2 e^{-s_1 x} \frac{\text{ch } s_1 x \zeta}{\text{sh } s_1 x} - \right. \right. \\ & \left. \left. - s_1 e^{-s_2 x} \frac{\text{ch } s_2 x \zeta}{\text{sh } s_2 x} - g_1(x) \left(s_2 \frac{\text{ch } s_1 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_1 x} - s_1 \frac{\text{ch } s_2 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_2 x} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \omega(x) \left[s_2 \frac{\text{ch } s_1 x \zeta}{\text{sh } s_1 x} - s_1 \frac{\text{ch } s_2 x \zeta}{\text{sh } s_2 x} - g_2(x) \left(s_2 \frac{\text{ch } s_1 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_1 x} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - s_1 \frac{\text{ch } s_2 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_2 x} \right) \right] \right\} x J_0(x\varrho) dx - p_0 - \gamma h(1-\zeta), \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}(\varrho, \zeta) = & -\frac{s_1 s_2}{\beta h^2} \int_0^\infty \left\{ p(x) \left[e^{-s_2 x \zeta} - e^{-s_1 x \zeta} + e^{-s_1 x} \frac{\text{sh } s_1 x \zeta}{\text{sh } s_1 x} - e^{-s_2 x} \frac{\text{sh } s_2 x \zeta}{\text{sh } s_2 x} - \right. \right. \\ & \left. \left. - g_1(x) \left(\frac{\text{sh } s_2 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_2 x} - \frac{\text{sh } s_1 x (1-\zeta)}{\text{sh } s_1 x} \right) \right] + \omega(x) \left[\frac{\text{sh } s_1 x \zeta}{\text{sh } s_1 x} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{\text{sh}s_2x\zeta}{\text{sh}s_2x} - g_2(x) \left\{ \frac{\text{sh}s_2x(1-\zeta)}{\text{sh}s_2x} - \frac{\text{sh}s_1x(1-\zeta)}{\text{sh}s_1x} \right\} \Bigg\} xJ_1(x\rho) dx; \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (2.17)$$

The displacement u and stresses σ_{rr} and $\sigma_{\theta\theta}$ may be expressed similarly.

Superimposing Eqs. (2.4), (2.6) and (2.15) - (2.17) we obtain the representations for the stress and displacement. Especially, the displacement w and the stresses σ_{zz} and σ_{zr} on the layer surfaces $\zeta = 0$ and $\zeta = 1$ are given as:

$$\begin{aligned} G_1hw(\rho, 0) &= C^{-1} \int_0^\infty \{p(x)[1-g_1(x)] - \omega(x)g_2(x)\} J_0(x\rho) dx, \\ G_1hw(\rho, 1) &= -C^{-1} \int_0^\infty \omega(x)J_0(x\rho) dx - G_1h^2 \frac{c_{11} + c_{12}}{2c} (p_0 + p_e), \\ \sigma_{zz}(\rho, 0) &= -h^{-2} \int_0^\infty xp(x)J_0(x\rho) dx - p_e, \\ \sigma_{zz}(\rho, 1) &= -h^{-2} \int_0^\infty x \{p(x)g_2(x) + \omega(x)[1-g_3(x)]\} J_0(x\rho) dx - p_0, \\ \sigma_{zr}(\rho, 0) &= \sigma_{zr}(\rho, 1) = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

where

$$p_e = p_0 + \gamma h, \quad (2.19)$$

$$g_3(x) = 1 - \frac{(1-g_2)(1+g_2)}{1-g_1} = 1 - \frac{\text{ch}\alpha x - 1 - \alpha^2\beta^{-2}(\text{ch}\beta x - 1)}{\text{sh}\alpha x + \alpha\beta^{-1}\text{sh}\beta x}, \quad (2.20)$$

$$C = (k+1)(k-1)^{-1}(s_2^{-1} - s_1^{-1}), \quad (2.21)$$

are pressure, known function and material parameter, respectively.

3. Boundary conditions

Consider axisymmetric contact problem of a thick plate of height h pressed onto a rigid base with a cylindrical protrusion (Problem I, Fig. 1a) or a pit (Problem II, Fig. 1b).

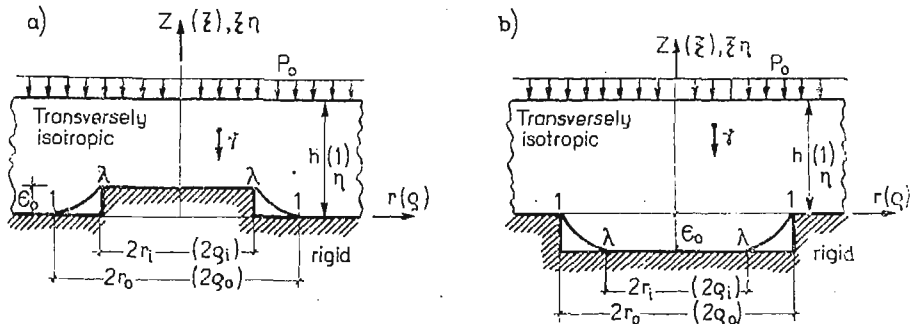


Fig. 1. Geometry of the problems (a) Problem I (b) Problem II

The layer is pressed by uniform pressure and the effect of gravity is also taken into account. We assume, that the magnitude of depth ϵ_0 is small.

In the second problem, if the pressure is small (without the body force) and the lower surface of the plate does not make contact with the bottom of the pit, the stress state of the plate is equivalent to that of the plate with a penny-shaped crack, which is analyzed by COLLINS [11] and author [12] for isotropic and transversely isotropic cases, respectively.

In the present paper we analyze, in the second problem, a three-part mixed boundary value problem where the applied pressure and the weight of the layer are so large, that a part of the lower surface of the layer $0 \leq \varrho \leq \varrho_i$, makes contact with the bottom of the pit.

The uncontact region is annular and its inner ϱ_i or outer ϱ_0 radius is not known a priori in second or first problem, respectively.

The radii ϱ_i and ϱ_0 depend on p_0 , γ , ϵ_0 , h and ϱ_0 or ϱ_i , respectively, and on the material properties of the layer.

The boundary conditions are:

$$w(\varrho, 0) = \begin{cases} \pm \epsilon_0, & 0 \leq \varrho \leq \varrho_i, \\ 0, & \varrho_0 \leq \varrho, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\sigma_{zz}(\varrho, 0) = 0, \quad \varrho_i < \varrho \leq \varrho_0 \quad \text{or} \quad \varrho_i \leq \varrho < \varrho_0, \quad (3.2)$$

$$\frac{dw(\varrho, 0)}{d\varrho} = 0, \quad \varrho = \varrho_0 \quad \text{or} \quad \varrho = \varrho_i, \quad (3.3)$$

$$\sigma_{zr}(\varrho, 0) = \sigma_{zr}(\varrho, 1) = 0, \quad \varrho \geq 0, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{zz}(\varrho, 1) = -p_0, \quad \varrho \geq 0, \quad (3.5)$$

where the upper and the lower of the double signs denote the cases of the first and second problems, respectively. With the help of Eqs. (2.18) for the shearing stresses the boundary conditions (3.4) are satisfied automatically.

4. The triple integral equations

Get a new unknown function $t(x)$ and set as follows:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= -g_2(x)t(x), \\ p(x) &= [1 - g_3(x)]t(x), \end{aligned} \quad (4.1)$$

the boundary values of the displacement and stresses which correspond to Eqs. (2.18) are then given by

$$\begin{aligned} G_1 h w(\varrho, 0) &= C^{-1} \int_0^{\infty} t(x) J_0(x\varrho) dx, \\ \sigma_{zz}(\varrho, 0) &= -h^{-2} \int_0^{\infty} x t(x) [1 - g_3(x)] J_0(x\varrho) dx - p_e, \\ G_1 h w(\varrho, 1) &= C^{-1} \int_0^{\infty} t(x) g_2(x) J_0(x\varrho) dx - G_1 h^2 \frac{c_{11} + c_{12}}{2c} (p_0 + p_e), \\ \sigma_{zz}(\varrho, 1) &= -p_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

with the aid of the relation (2.20) in the first Eq. (2.18). The condition (3.5) is satisfied automatically.

The remaining boundary conditions (3.1) - (3.3) lead to the triple integral equations with the unknown function $t(x)$:

$$w(\varrho, 0) = (G_1 Ch)^{-1} \int_0^\infty t(x) J_0(x\varrho) dx = \begin{cases} \pm \epsilon_0, & 0 \leq \varrho \leq \varrho_i, \\ 0 & \varrho_0 \leq \varrho, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\sigma_{zz}(\varrho, 0) = -h^{-2} \int_0^\infty xt(x) [1 - g_3(x)] J_0(x\varrho) dx - p_e = 0, \quad \varrho_i < \varrho \leq \varrho_0 \quad \text{or} \quad \varrho_i \leq \varrho < \varrho_0, \quad (4.4)$$

under condition

$$\frac{dw(\varrho, 0)}{d\varrho} = -(G_1 Ch)^{-1} \int_0^\infty xt(x) J_1(x\varrho) dx = 0, \quad \varrho = \varrho_0 \quad \text{or} \quad \varrho = \varrho_i. \quad (4.5)$$

We use here the series expansion method to solve the above integral equations. This technique reduces the mixed boundary value problem to the solution of an infinite set of simultaneous linear algebraic equations [4], which are easier to solve than complicated integral equations.

5. Analysis

We employ a nondimensional geometric parameters

$$\lambda = \frac{r_i}{r_0}, \quad \eta = \frac{h}{r_0}. \quad (5.1)$$

These parameters describe the contact regions and are generally unknown quantities, because r_i or r_0 are unknown in the second and first problems, respectively.

Then, Eqs. (4.3) and (4.4), and condition (4.5) can be rewritten to the form

$$w(\varrho, 0) = (G_1 Cr_0)^{-1} \int_0^\infty t(x) J_0(x\varrho) dx = \begin{cases} \pm \epsilon_0, & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \\ 0, & 1 \leq \varrho, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\sigma_{zz}(\varrho, 0) = -r_0^{-2} \int_0^\infty xt(x) [1 - g_3(x\eta)] J_0(x\varrho) dx - p_e = 0, \quad \lambda < \varrho \leq 1 \quad \text{or} \quad \lambda \leq \varrho < 1, \quad (5.3)$$

$$\frac{dw(\varrho, 0)}{d\varrho} = -(G_1 Cr_0)^{-1} \int_0^\infty xt(x) J_1(x\varrho) dx = 0, \quad \varrho = 1 \quad \text{or} \quad \varrho = \lambda. \quad (5.4)$$

The function $g_3(x\eta)$ tends exponentially to zero as $x\eta$ tends to infinity, is continuous for any $x \in (0, \infty)$, because $\alpha \in R_+$ and its limit is equal unity for $x\eta \rightarrow 0$.

When η tends to infinity i.e. in the case of the half-space, then the function $g_3(x\eta)$ identically equals zero. For the isotropic solid, i.e. when $s_2 \rightarrow s_1 \rightarrow 1$ and $k \rightarrow 1$, the function $g_3(x)$ assumes the form:

$$g_3(x) = 2 \frac{x + x^2 + e^{-x} \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x + 2x} \quad (5.5)$$

and does not depend on the material properties of the solid. For our solid the boundary functions $g_3(x)$, $g_1(x)$ and $g_2(x)$ depend on the material properties and the solution of the integral equations depends on the anisotropic properties of the material.

Now, interchanging the variable ϱ in $\lambda \leq \varrho \leq 1$ to Φ in $0 \leq \Phi \leq \pi$

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + \lambda^2 - (1 - \lambda^2) \cos \Phi]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.6)$$

the variables ϱ and Φ correspond each other and $\varrho = \lambda$ is $\Phi = 0$ and $\varrho = 1$ to $\Phi = \pi$.

We put the function $t(x)$ in the form of integral as follows:

$$t(x) = \int_0^\pi F(\psi) J_1(xR) d\psi, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + \lambda^2 - (1 - \lambda^2) \cos \psi]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.7)$$

where $F(\psi)$ is an arbitrary continuous function in the interval $0 \leq \psi \leq \pi$.

Substituting Eq. (5.7) into $w(\varrho, 0)$ of Eq. (5.2) and $dw(\varrho, 0)/d\varrho$ of Eq. (5.4), we obtain:

$$w(\varrho, 0) = (G_1 Cr_0)^{-1} \int_0^\pi \frac{1}{R} F(\psi) H(R - \varrho) d\psi, \quad (5.8)$$

$$\frac{dw(\varrho, 0)}{d\varrho} = -(G_1 Cr_0)^{-1} \int_0^\pi \frac{1}{R} F(\psi) \delta(R - \varrho) d\psi. \quad (5.9)$$

Since the argument of the delta function is $R - \varrho \neq 0$ in the intervals $0 \leq \varrho < \lambda$ and $1 < \varrho$ because of $\lambda \leq R \leq 1$, the radial gradient of the displacement $w(\varrho, 0)$ is always equal to zero on the contact surface $< 0, \lambda) \cup (1, \infty)$ independent of the function $F(\psi)$. On the other hand, using

$$H(R - \varrho) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varrho \leq \lambda, & (0 \leq \lambda \leq R \leq 1), \\ 0, & 0 \leq \psi < \phi, & (R < \varrho), \\ 1, & \phi \leq \psi \leq \pi, & (R \geq \varrho), \\ 0, & 1 \leq \varrho, & (\lambda \leq R \leq 1 \leq \varrho), \end{cases} \quad (5.10)$$

we see that the displacement $w(\varrho, 0)$ is equal constant in the interval $0 \leq \varrho < \lambda$, is a function of ϱ in the interval $\lambda \leq \varrho \leq 1$ and equals zero in the remaining one $1 \leq \varrho$, independent of the function $F(\psi)$.

Integrating in Eq. (5.9), we obtain

$$\frac{dw(\varrho, 0)}{d\varrho} = -\frac{4}{G_1 Cr_0(1 - \lambda^2)} \cdot \frac{F(\Phi)}{\sin \Phi}, \quad 0 < \Phi < \pi \quad (5.11)$$

and zero in the contact region.

Because the layer contacts smoothly at the edges $\varrho = 1$ or $\varrho = \lambda$ with the rigid base in the first and second problems, respectively, the gradient of $w(\varrho, 0)$ must be finite at $\varrho \rightarrow 1$ or $\varrho \rightarrow \lambda$, respectively. That is equivalent to the conditions (5.4), which lead to

$$F(\pi) = 0 \quad \text{or} \quad F(0) = 0 \tag{5.12}$$

in the first and second problems, respectively.

The integral representation of the function $t(x)$ by Eq. (5.7) satisfies the displacement conditions, if the function $F(\psi)$ satisfies first or second Eq. (5.12), respectively. It should be noted that, rigorously speaking, we have two unknown functions $F_+(\psi)$ and $F_-(\psi)$ for first and second problems, respectively. We assume also, that these unknown functions take a finite and non-zero positive or negative values in the intervals $0 < \psi \leq \pi$ or $0 \leq \psi < \pi$ in the first and second problems, respectively. Then the displacement $w(\varrho, 0)$ is continuous in the interval $\lambda \leq \varrho \leq 1$, its gradient takes definite and non-zero values negative or positive in $\lambda < \varrho < 1$, tends to minus infinity at contact edge $\varrho \rightarrow \lambda^+$ or infinity at $\varrho \rightarrow 1^-$, and equals to zero for $\varrho = 1$ or $\varrho = \lambda$ in the first and second problem respectively, and consequently, the slope of $w(\varrho, 0)$ at contact edges $\varrho = \lambda$ and $\varrho = 1$ coincides with that of the contact face.

The function $F(\psi)$ can be expressed by a Fourier cosine series

$$F(\psi) = \frac{1}{\pi} p_e r_0^2 R \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\psi. \quad 0 \leq \psi \leq \pi, \tag{5.13}$$

where a_n are unknown coefficients, which are to be determined by the boundary conditions (5.3), and for which from the conditions (5.12), we obtain

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = 0 \quad \text{or} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0. \tag{5.14}$$

Substituting Eq. (5.13) into Eq. (5.8) and integrating, we obtain the displacement:

$$w(\varrho, 0) = \begin{cases} \frac{p_e r_0 a_0}{G_1 C} = \pm \epsilon_0, & 0 \leq \varrho \leq \lambda, \\ \frac{p_e r_0 a_0}{G_1 C} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \left[\Phi + \frac{1}{a_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin n\phi \right] \right\}, & \lambda \leq \varrho \leq 1 \\ 0, & 1 \leq \varrho \end{cases} \tag{5.15}$$

and the relation

$$\epsilon_0 = \pm \frac{p_e r_0 a_0}{G_1 C}. \tag{5.16}$$

Eq. (5.16) gives the relation between p_e , ϵ_0 , r_0 or r_i and a_0 where a_0 depends on the parameters of the contact regions λ and η and on the properties of the material.

Substituting Eq. (5.13) into Eq. (5.7) and the result into Eqs. (5.3), and using some relations for Bessel functions, we obtain:

$$t(x) = -p_e r_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x}, \tag{5.17}$$

$$\sigma_{zz}(\varrho, 0) = p_e \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [1 - g_3(x\eta)] \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} x J_0(x\varrho) dx - p_e, \quad (5.18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [1 - g_3(x\eta)] \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} x J_0(x\varrho) dx = 1, \quad \lambda < \varrho \leq 1 \quad \text{or} \quad \lambda \leq \varrho < 1, \quad (5.19)$$

where

$$Z_n(x) = J_n \left[\frac{x}{2} (1 + \lambda) \right] J_n \left[\frac{x}{2} (1 - \lambda) \right]. \quad (5.20)$$

Multiplying the both sides of Eq. (5.19) by ϱ , using the formula $x\varrho J_0(x\varrho) = \partial[\varrho J_1(x\varrho)]/\partial\varrho$, integrating with respect to ϱ and using the formula $\partial[J_0(x\varrho)]/\partial x = -\varrho J_1(x\varrho)$, we obtain:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [1 - g_3(x\eta)] \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial J_0(x\varrho)}{\partial x} dx = -\frac{1}{2} \varrho^2 - c_1, \quad \lambda < \varrho \leq 1$$

or $\lambda \leq \varrho < 1, \quad (5.21)$

where c_i ($i = 1, 2$) are unknown integral constants.

Using the Neumann's formula [13]

$$J_0(x\varrho) = Z_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(x) \cos m\varphi, \quad \lambda \leq \varrho \leq 1 \quad (5.22)$$

in Eq. (5.21), we get

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [1 - g_3(x\eta)] \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} \left\{ \frac{\partial Z_0(x)}{\partial x} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial Z_m(x)}{\partial x} \cos m\varphi \right\} dx = \\ = -\frac{1}{4} [1 + \lambda^2 - (1 - \lambda^2) \cos \varphi] - c_1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Assuming the coefficients a_n as

$$a_n = a'_n - c_1 a''_n, \quad i = 1, 2 \quad (5.24)$$

and equating the coefficients of $\cos m\varphi$ in both sides of Eq. (5.23), we obtain two infinite systems of simultaneous equations for the determination of the coefficients a'_n and a''_n)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n A_{mn} &= -\frac{1}{4} \left[(1 + \lambda^2) \delta_{0m} - \frac{1}{2} (1 - \lambda^2) \delta_{1m} \right], \\ \sum_{n=0}^{\infty} a''_n A_{mn} &= \delta_{0m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.25)$$

where A_{mn} denote the symmetrical matrix given by

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} [1 - g_3(x\eta)] \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} \frac{\partial Z_m(x)}{\partial x} dx, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

and δ_{0m}, δ_{1m} are Kronecker's delta.

The constants c_i are determined from Eqs. (5.14) and (5.24) as:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a'_n - c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a''_n = 0, \tag{5.27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n - c_2 \sum_{n=0}^{\infty} a''_n = 0$$

in the first and second problems, respectively.

The presented three-part mixed boundary value problem given by Eqs. (5.2) and (5.3) under condition (5.4) is, therefore, reduced to one of solving two infinite systems of simultaneous equations (5.25). Solving these equations for dissimilar parameters λ and η of the contact regions and given material, we obtain the coefficients a_n from Eqs. (5.27) and (5.24) in both problems.

The other quantities of physical interest will be determined in the next sections.

6. Displacement and stress components on the surfaces of the layer

The displacement of the lower surface of the layer is given by Eqs. (5.15) and of the upper surface by Eqs. (4.2) and (5.17)

We have

$$w(\varrho, 1) = -\frac{p_e r_0}{G_1 C} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_2^n - \frac{c_{11} + c_{12}}{2c} (p_0 + p_e) h, \tag{6.1}$$

where

$$G_2^n = \int_0^{\infty} g_2(x\eta) J_0(x\varrho) \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{6.2}$$

are the convergent integrals.

The stress $\sigma_{zz}(\varrho, 1) = -p_0$ and $\sigma_{zz}(\varrho, 0)$ corresponding to Eq. (5.18) is:

$$\sigma_{zz}(\varrho, 0) = -p_e \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(G_3^n + I_0^n + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0^n \right) \right], \tag{6.3}$$

where

$$G_3^n = \int_0^{\infty} g_3(x\eta) x J_0(x\varrho) \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} dx, \tag{6.4}$$

$$I_0^n = \int_0^{\infty} J_0(x\varrho) Z_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

are the convergent integrals.

The integrals I_0^n can be evaluated by the results in the paper of the author [14] where they are presented in analytical form by Gaussian hypergeometric functions. Since the continuous functions $g_2(x\eta)$ and $g_3(x\eta)$ converge exponentially to zero as the value of

x becomes large, the integrals G_2^n and G_3^n can be easily evaluated numerically, for example by the second rule of Simpson's numerical integral formula.

For the half-space problem ($\eta \rightarrow \infty$) these integrals are equal to zero. In this case the values of the solutions of two infinite sets of linear equations and the stress $\sigma_{zz}(\varrho, 0)$ do not depend on the material properties and the effect of transverse isotropy includes in the displacement w and relation (5.16) by the material constant $G_1 C$.

To determine a singularity of the contact stress, we consider its behaviour near the contact edges into material regions. Using the asymptotic expansion of $J_n(x\varrho)$ with large value of x [13], we obtain

$$x \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} = - \frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} [\lambda \sin x \lambda - (-1)^n \cos x] + O(x^{-1}). \quad (6.5)$$

Thus Eq. (5.18) can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\varrho, 0) = & -p_e \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_3^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \left[x \frac{\partial Z_n(x)}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} (\lambda \sin x \lambda - (-1)^n \cos x) \right] J_0(x\varrho) dx + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \varrho^2}} H(\lambda - \varrho) \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - 1}} H(\varrho - 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \right] \right\}. \quad (6.6) \end{aligned}$$

It is apparent from Eq. (6.6) that the stress has the singular parts such as $(\lambda - \varrho)^{-1/2}$ in the first or $(\varrho - 1)^{-1/2}$ in the second problem because of the conditions (5.14). The infinite integrals with respect to x in Eq. (6.6) are convergent because their integrands are $O(x^{-3/2})$ as $x \rightarrow \infty$. In addition, in the first problem $\sigma_{zz}(r_0, 0)$ equals zero, whereas in the second $\sigma_{zz}(r_1, 0)$ equals zero. Using Eq. (6.6) we can easily evaluate the stress concentration factors.

7. The stress concentration factors

In analogy with the stress intensity factors in the annular crack problem, we define the stress concentration factors at the edges of the contact regions by the expressions:

$$\begin{aligned} N_1 &= \lim_{\varrho \rightarrow \lambda^-} \sqrt{2r_0(\lambda - \varrho)} \{ \sigma_{zz}(\varrho, 0) \}_{\varrho < \lambda}, \\ N_0 &= \lim_{\varrho \rightarrow 1^+} \sqrt{2r_0(\varrho - 1)} \{ \sigma_{zz}(\varrho, 0) \}_{\varrho > 1}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

or in terms of the coefficients a_n :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{2p_e \sqrt{r_1}}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \\ N_0 &= \frac{2p_e \sqrt{r_0}}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n. \end{aligned} \quad (7.2)$$

for the inner contact edge and the outer one in the first and second problems, respectively. In the first problem $\sigma_{zz}(r_0, 0)$ equals zero, whereas in the second $\sigma_{zz}(r_i, 0)$ is zero.

8. The critical loads

Let $p_{cr} = (\gamma h \pm p_0)_{cr}$ be the indented load giving the state in which the layer contacts the bottom of the pit only in the point $r = 0$.

Then, Eqs. (5.16) and (2.19), give:

$$(\gamma h \pm p_0)_{cr} = - \frac{\epsilon_0 G_1 C}{r_0 a_0 (\lambda = 0)}, \tag{8.1}$$

where the upper and the lower of the double sings denote the cases of pressure and tension, respectively. When the load $p_e = \gamma h \pm p_0$ is above the critical value, the uncontacting area in the second problem will be an annulus $\lambda < \varrho < 1$, the inner circumference of which will shrink with a decreasing load, and when the load is less than a critical value, the uncontacting region will be a circle. After determining a_0 by Eqs. (5.25), (5.24) and (5.27)₂ for $\lambda = 0$ and known η , we obtain the critical load.

For the special case $r_0 = \text{const}$, $r_i \rightarrow 0$ and $\eta \rightarrow \infty$ (the half-space problem), Eq. (5.19) can be rewritten as follows

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[J_n^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right] x J_0(x\varrho) dx = 1, \quad 0 \leq \varrho < 1. \tag{8.2}$$

Using the formula

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} x J_0(x\varrho) \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = -1, \quad 0 \leq \varrho < 1, \tag{8.3}$$

we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^2 \left(\frac{x}{2} \right) = - \frac{2}{\pi} \frac{\sin x}{x}. \tag{8.4}$$

Making use of the formulae [13]

$$\int_0^{\pi/2} J_0(x \sin \Theta) \sin \Theta d\Theta = \frac{\sin x}{x}, \tag{8.5}$$

$$J_0(x \sin \Theta) = J_0^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2 \left(\frac{x}{2} \right) \cos 2n\Theta,$$

we see that

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^2 \left(\frac{x}{2} \right) &= - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[J_0^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2 \left(\frac{x}{2} \right) \cos 2n\Theta \right] \sin \Theta d\Theta = \\ &= - \frac{2}{\pi} J_0^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} J_n^2 \left(\frac{x}{2} \right). \end{aligned} \tag{8.6}$$

It is apparent from Eq. (8.6) that

$$a_0 = -\frac{2}{\pi}, \quad a_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.7)$$

are the solution of Eq. (8.2).

The solution (8.7) satisfies the second condition (5.14). Substituting the value $a_0 = -2/\pi$ into Eq. (8.1), we get for larger values of h/r_0

$$(\gamma h \pm p_0)_{cr} = \frac{\pi}{2} G_1 C \frac{\epsilon_0}{r_0}. \quad (8.8)$$

Especially, if

$$p_0 \geq p_{0cr} = \frac{\pi}{2} G_1 C \frac{\epsilon_0}{r_0}, \quad (8.9)$$

or

$$p_0 \leq p_{0cr} = \gamma h - \frac{\pi}{2} G_1 C \frac{\epsilon_0}{r_0}, \quad (8.10)$$

for the pressure p_0 without the body force and for the tension p_0 and the weight γh , respectively a part of the lower surface of the thick plate is in contact with the bottom of the pit. When $\eta = h/r_0$ decreases, then the critical load also decreases. In the limiting case of $\eta \rightarrow 0$ the function $g_3(x\eta)$ tends to unity and the solution a_0 tends to infinity, and consequently the critical value of the load tends to zero.

If $p_e < \pi C G_1 \epsilon_0 / 2r_0$ the elastic body does not make contact with the bottom of the pit and the solutions are as follows:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{2}{\pi} p_e r_0^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right), \\ w(\varrho, 0) &= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{p_e r_0}{G_1 C} \sqrt{1 - \varrho^2} H(1 - \varrho), \\ \sigma_{zz}(\varrho, 0) &= -p_e \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{1}{\varrho} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - 1}} \right] H(\varrho - 1), \\ N_0 &= \frac{2p_e \sqrt{r_0}}{\pi}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

The formulas (8.11) agree with the results for the solid with a penny-shaped crack if we replace p_e by p_0 , which are given by Collins [11] and author [12] for isotropic, i.e. $C = 1/(1-\nu)$, and transversely isotropic case, respectively. In the special case for a half-space problem and $r_i = 0$, the contact stress and the stress concentration factor N_0 do not depend on anisotropy of the material, whereas the displacement depends. In the layer contact problem, the stress and displacement fields, and the stress concentration factor depend on the material properties of the solid. By means of results present in the paper, the effect of transverse isotropy may be examined.

9. Numerical calculations

At present, we must determine the values $\lambda = r_i/r_0$ for given p_e , ϵ_0 , h , r_i or r_0 and material constants. However, it is considerably difficult to determine the unknown ratio λ by the above procedure. Therefore, we determine the relationship among p_e , ϵ_0 and h from Eq. (5.16) under the condition that the ratios of the inner to outer radius $\lambda = r_i/r_0$ and $\eta = h/r_0 = h\lambda/r_i$ are given and solving the simultaneous equations (5.25).

To solve these equations we evaluate the infinite integrals A_{mn} involving the product of four Bessel functions by the following method. The element A_{mn} of m -th row and n -th column can be rewritten as

$$A_{mn} = \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} [Z_m(x)] \frac{\partial}{\partial x} [Z_n(x)] dx + A'_{mn} - \int_0^{x_0} g_3(x\eta) \frac{\partial}{\partial x} [Z_m(x)] \frac{\partial}{\partial x} [Z_n(x)] dx, \quad (9.1)$$

where

$$A'_{mn} = \int_{x_1}^0 \frac{\partial}{\partial x} [Z_m(x)] \frac{\partial}{\partial x} [Z_n(x)] dx \approx \frac{4}{\pi^2(1-\lambda^2)} \left\{ \frac{\lambda^2 \sin^2 \lambda x_1}{x_1} - \lambda^3 \text{si}(2\lambda x_1) + (-1)^{m+n} \left[\frac{\cos^2 x_1}{x_1} + \text{si}(2x_1) \right] - \lambda [(-1)^m + (-1)^n] \left[\frac{\sin \lambda x_1 \cos x_1}{x_1} - \frac{1}{2} (1+\lambda) \text{ci}[x_1(1+\lambda)] + \frac{1}{2} (1-\lambda) \text{ci}[x_1(1-\lambda)] \right] \right\}, \quad (9.2)$$

and x_1 , is taken to be a very large value, and x_0 a large value.

The second term A'_{mn} is obtained by using the asymptotic approximation of Bessel function, integrating Eq. (9.2) by parts and using sine and cosine integral functions $\text{si}(x)$ and $\text{ci}(x)$. The first and third terms on the right hand side of Eq. (9.1) are integrated numerically with sufficient convergence by means of Simpson's rule taking $x_1 = 500$ and $x_0 = 20/\alpha\eta$. The algebraic equations are solved by truncation, i.e. we calculate only the first n roots of them. We can get numerically good results, taking $n = 15$ or $n = 10$ for $\lambda \leq 0,2$ or $\lambda > 0,2$ and $\eta \geq 1$, respectively, and $n = 20$ or $n = 15$ in the case $\lambda \leq 0,2$ or $\lambda > 0,2$ and $\eta < 1$. With a decreasing degree of anisotropy (E/E_1 , G/G_1) the convergence in the numerical calculation becomes slower. For $E/E_1 \ll 1$ and $G/G_1 \ll 1$ we must take more equations, respectively for E/E_1 , $G/G_1 \gg 1$ we can take less.

10. Numerical results

Numerical results show the relations between p_e , ϵ_0 , h , r_i , and r_0 (in Problems I and II) in cadmium and magnesium single crystals and fiber-reinforced composite materials such as E glass-epoxy and graphite-epoxy with fiber direction along z-axis, and they are

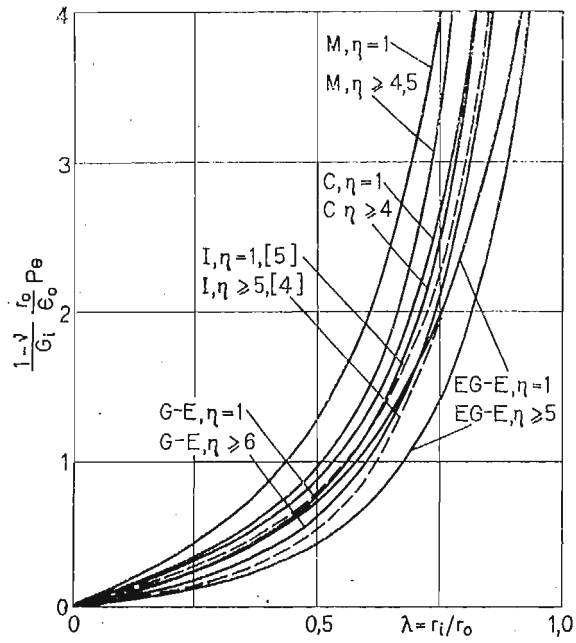


Fig. 2. Relations of p_0 , ϵ_0 , h , r_i and r_0 for dissimilar materials in Problem I

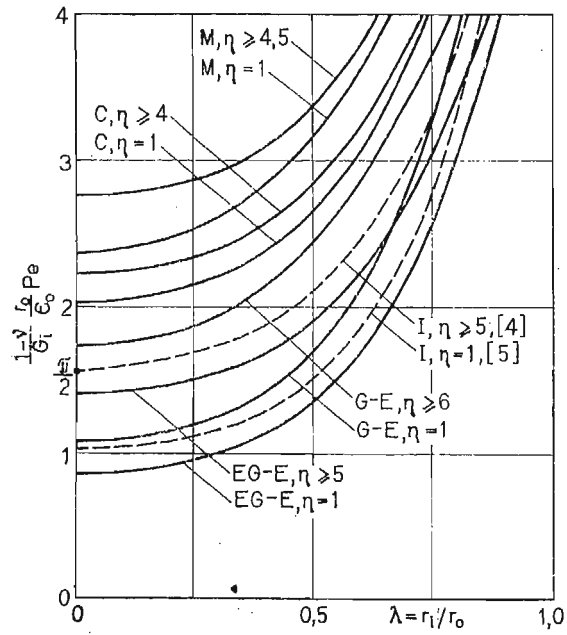


Fig. 3. Relations of p_0 , ϵ_0 , h , r_i and r_0 for dissimilar materials in Problem II

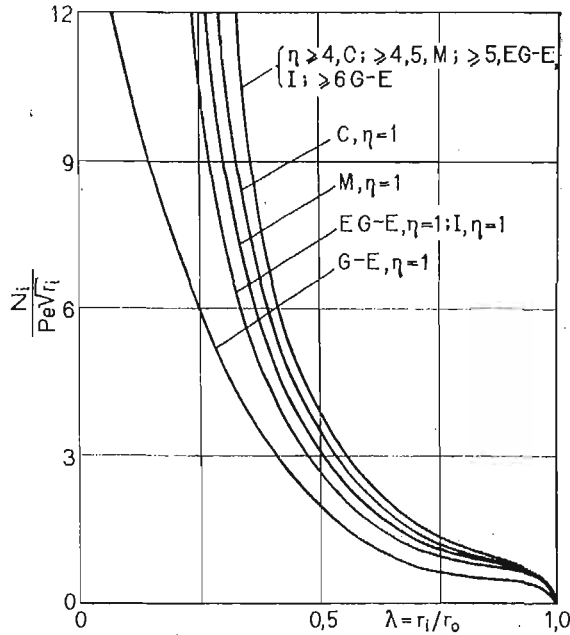


Fig. 4. The variation of N_i with λ for dissimilar materials and $\eta = h/r_0$ in Problem I

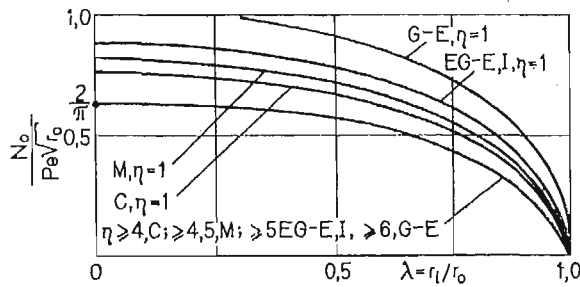


Fig. 5. The variation of N_0 with λ for dissimilar materials and $\eta = h/r_0$ in Problem II

compared with those of the isotropic material [4] to show the effect of anisotropy. The stress concentration factors are also shown graphically.

The elastic constant c_{ij} given by HUNTINGTON [15] and CHEN [16] are used. The values of s_1, s_2, k are

1,58;	0,98;	1,85	1,41;	0,70;	2,78
1,67;	0,34;	12,7	1,36;	0,23;	21,4

for cadmium, magnesium, E glass-epoxy, graphite-epoxy, respectively and for isotropic material 1; 1; 1; $G_i = 10^{10} \text{ N/m}^2, \nu = 0,30$.

As shown in Figs. 2 and 3 in each case, $(1-\nu)p_e r_0 / G_i \epsilon_0$ increases with an increasing $\lambda = r_i / r_0$ and tends to the case of an elastic half-space, with corresponding material, with an increasing $\eta = h / r_0$. In each figure, the results indicated by the chain line, show those

for isotropic material. These results agree with the ones of Refs. [4.5], where the weight is omitted ($p_e \rightarrow p_0$). Figs 4 and 5 show the variation of the stress concentration factors with $\lambda = r_i/r_0$ and $\eta = h/r_0$ for dissimilar materials. N_i (for the protrusion) is always greater than N_0 (for the pit) and becomes very large when $\lambda \rightarrow 0$. With the increasing of λ , N_i decreases and N_0 decreases slowly. The stress concentration factors are different for presented material and become small (N_0) or larger (N_i) as the layer becomes thick under the same protrusion or pit dimension, converging to the same values for an infinite body.

References

1. A. E. LOVE, Quart. J. Math. Oxford, 10 - 39 pp. 161 - 175, 1939.
2. B. ANN, Trans. JSME 24 - 147 pp. 757 - 766, 1958.
3. T. SHIBUYA, *An elastic contact problem of a half-space indented by a truncated conical stamp*, Bull ISME 22, 163 pp. 16 - 20, 1979.
4. T. SHIBUYA, T. KOIZUMI, I. NAKAHARA, T. HARA, *Elastic contact problem of a half-space pressed onto a rigid base with a cylindrical protrusion or pit*, Int. J. Engng Sci. 17, 4, pp. 349 - 356, 1979.
5. T. SHIBUYA, T. KOIZUMI, K. IIDA, T. HARA, *Contact stresses of an elastic plate pressed onto a rigid base with a cylindrical protrusion or pit*, Bull. JSME 24, 198, pp. 2067 - 2073, 1981.
6. B. ROGOWSKI, *Indentation of an elastic transversely isotropic body by a concave rigid punch*, Zeszyty Naukowe PŁ Budownictwo z. 31 s., 81 - 99, 1984.
7. G. M. J. DAMEN, *On the three-dimensional contact problem of a rigid inclusion pressed between two elastic half-spaces*, Rozprawy Inżynierskie, 25, 3 pp. 483 - 493, 1977.
8. J. TWEDD, *The stress intensity factor of a Griffith crack which is opened by a thin symmetric wedge*, J. of Elasticity 1, pp. 29 - 35, 1971.
9. M. MAITI and S. S. PALIT, *Stress distribution due to a Griffith crack opened by a thin symmetric wedge*, Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. XXV, № 8 pp. 273 - 280, 1977.
10. B. ROGOWSKI, *Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego*, Mech. Teoret. i Stos. 1, 13 69 - 83, 1975.
11. W. D. COLLINS, *Some axially symmetric stress distribution in elastic solids containing penny-shaped cracks I. Cracks in an infinite solid and a thick plate*, Proc. Roy. Soc. ser. A, Vol. 266, № 1326, pp. 359 - 386, 1962.
12. B. ROGOWSKI, *Zagadnienie szczeliny w ciele poprzecznie izotropowym*, Zeszyty Naukowe PŁ Budownictwo z. 25 s. 7 - 20, 1979.
13. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge, 1944.
14. B. ROGOWSKI, *Mixed boundary value problems of a transversely isotropic layer under torsion and various boundary conditions*, Rozprawy Inżynierskie 31, 3 pp. 293 - 315, 1983.
15. H. B. HUNTINGTON, *Solid state physics*, (Eds. F. Seitz and D. Turnbull), Vol. 7 pp. 213 - 351, New York, Academic Press 1957.
16. C. H. CHEN and S. CHENG, *Mechanical properties of anisotropic fiber-reinforced composites*, J. Appl. Mech. Trans. ASME ser. E 37, 1 pp. 186 - 189, 1970.

Резюме

ТРАНСВЕРТАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫЙ СЛОЙ ПРИЖИМАЕМЫЙ К ЖЕСТКОМУ ОСНОВАНИЮ С ВЫСТУПОМ ИЛИ ВПАДИНОЙ

Автор решил сформулированные в заглавии задачи, в которых принял во внимание эффекты трансвертальной анизотропии и собственного веса, при помощи интегральных преобразований Ханкеля и потенциалов перемещения. Смешанную краевую задачу сведено к тройным интеграль-

ным уравнениям и некоторым условиям. В результате представления неизвестной функции в виде ряда Фурье с неопределенными пока коэффициентами эти уравнения приводятся к решению двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда Фурье.

В каждой из указанных задач контактные давления имеют сингулярность на одной из границ области контакта. Область контакта распадается на два участка, разделяемых кольцевой областью с неизвестными внешним либо внутренним радиусами.

Численные результаты представляют зависимости между сжатием и собственным весом пластинки, ее толщиной, кольцевой областью и величинами выступа или впадины основания в кристаллах кадмия и магния и в композитных материалах армированных волокнами. Сравнено их с результатами для изотропной среды, чтобы выявить эффект анизотропий. Графически иллюстрируется изменение коэффициентов концентрации напряжения на краях выступа или впадины в зависимости от соотношения радиусов контактной области для разных материалов и толщин пластинки.

Streszczenie

WARSTWA POPRZECZNIE IZOTROPOWA DOCISKANA DO SZTYWNEGO PODŁOŻA Z WZNIESIENIEM ALBO ZAGŁĘBIENIEM

Autor rozwiązał sformułowane w tytule zagadnienia, w których uwzględnił efekty poprzecznej anizotropii i siły masowej, za pomocą transformacji Hankela i potencjałów przemieszczenia. Mieszane zagadnienie brzegowe sprowadzono do rozwiązania potrójnych równań całkowych i pewnych warunków. Te z kolei sprowadzono do dwóch układów nieskończonych równań algebraicznych liniowych za pomocą rozkładu funkcji określającej stany naprężenia i przemieszczenia w kosinusowy szereg Fouriera. Część dolnej powierzchni płyty, która nie kontaktuje się z podłożem, jest pierścieniem, którego promienie wewnętrzny albo zewnętrzny nie są znane a priori i zostały wyznaczone.

Wyniki liczbowe przedstawiają zależności między ciśnieniem i ciężarem płyty, jej grubością, pierścieniowym obszarem i wielkościami wzniesienia albo zagłębienia podłoża w materiałach z kadmu, magnezu i kompozytów zbrojonych włóknami. Porównywano je z wynikami dla ciała izotropowego w celu wyjaśnienia efektu anizotropii. Graficznie pokazano także jak zmieniają się współczynniki koncentracji naprężenia na brzegach wzniesienia lub zagłębienia w zależności od stosunku promieni określających obszary kontaktu dla różnych materiałów i grubości warstwy.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1982 roku

FUZZY SETS IN ADEQUACY DESCRIPTION OF MATHEMATICAL MODELS OF MECHANICAL SYSTEMS

MARIAN S A R N A

Politechnika Łódzka

In this paper an attempt towards elaborating adequacy description of mathematical models of technical mechanical systems considering vague adequacy problems has been presented. For this purpose the notions of L. A. Zadeh's fuzzy sets [2], fuzzy measure and fuzzy integral [18] have been applied. A hierarchical arrangement of fuzzy sets on the level of physical variables, sets of physical variables, system relations and sequences of relations has been formed. The method presented here enables carrying out adequacy estimations of mathematical models both comparative and aiming at a goal in a formal way.

1. Introduction

Mathematical modelling technical mechanical systems (t.m.s.) requires adjustment of formal mathematical apparatus to the description of actual reality on one hand, and to the replacement of which would be possible describe in a formal way on the other. Through the last twenty years strong tendencies to search for mathematical formalism would be useful in the description of some vague (not precise) properties of physical reality can be noted. One should mention here, among others, the theory of fuzzy sets [2 ÷ 7], and among conceptions of great importance in mechanics, the conception of tolerance spaces [8, 9, 10]. The theory of fuzzy sets initiated by L. A. ZADEH [2] in 1965 undergoes intense development [11 ÷ 15]. This has been expressed, among other things, in a large number of publications of basic and applicable significance since the time of the first publication, the bibliographic specifications for the ten year period recorded 1150 items which was incomplete list [14]. Fuller specification from a latter period (1979) contains 1799 items [15]. At the present stage periodicals to dealing exclusively with theory and applications of fuzzy sets are edited, for example: „An International Journal Fuzzy Sets and Systems” and „Fuzzy Mathematics”.

The idea of fuzzy sets comprises many fields of knowledge and technique. Here are some of them:

— technique: control engineering (power plants, boilers, heat exchangers), inexact measurement, fuzzy control algorithms, fuzzy robots,

- physics: fuzzy spin spaces, scattering particles in fuzzy phase space, localizability of relativistic particles in fuzzy phase space, measurement in quantum mechanics as stochastic processes on spaces of fuzzy events,
- mathematics and cybernetics: topology, algebra, graphs, functions, differential equations, groups, relations, category theory, fuzzy information theory, fuzzy simulation of processes, classification theory, fuzzy sets, pattern recognition, clustering,
- philosophy and logic of imprecision and vagueness,
- linguistic and language sings,
- social sciences, e.g. psychology of human behaviour,
- biology and medicine, e.g. model of brain tissue,
- behavioral geography,
- air pollution, e.g. fuzzy programming to air pollution regulation problem.

The paper refers to the interpretation and application of the fuzzy sets theory notions and methods for the mathematical models adequacy description of t.m.s. with modelled mechanical object while taking into account vague problems of this adequacy. Justification of this problem from the pragmatic point of view has been analysed in the paper [1].

2. Mathematical modelling of technical mechanical systems

2.1. Real system. We notice the investigated technical mechanical object as consisting of certain parts which are „essential elements”. The way of division and the number of separated elements depends on the aim of investigating an object, kinds of examined properties as well as the level of thoroughness of the analysis. In order to formalise these facts let's introduce the following assumptions and definitions. Let's have:

- (i) finite set $X, x_k \in X, k \in K, K$ is a finite set of indices,
- (ii) mapping $\alpha: X \ni x_k \rightarrow \alpha(x_k) \ni (X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{j_k k})$, where $x_{jk} \subset R, j \in J_k, J_k$ is a finite set of indices, and R is a set of real numbers,
- (iii) set of relations $\bar{R} \equiv \{R_{x_2}, R_{x_3}, \dots, R_{x_p}\}$ on Cartesian products: $R_{x_2} \subset X_{j_k} \times X_{j'k'}$, $R_{x_3} \subset X_{j_k} \times X_{j'k'} \times X_{j''k''}, \dots, R_{x_p} \subset X_{j_k} \times \dots \times X_{j_k \hat{k}}$, where $k, k', k'', \dots, \hat{k} \in K, j \in J_k, j' \in J_{k'}, \dots, j \in J_{\hat{k}}$. R_{x_p} is a p^{th} product, whereas $p = \sum_{k \in K} \text{card } J_k$
- (IV) sequence of relations $R_x = (R_{x_{n_i}})$ where $i \in I_x, I_x$ is a finite set of indices, and $R_{x_{n_i}} \ni \ni (x_1, x_2, \dots, x_{n_i}); x_1, x_2, \dots, x_{n_i} \in X = \cup X_{j_k}$ for $k \in K$ and $j \in J_k$.

Definition 1. The pair

$$S_x = \langle X, R_x \rangle, \quad (2.1)$$

we shall call a real system.

In α mapping we attribute to elements („essential elements”) sequences of sets of real numbers which have been given physical meaning (physical quantities).

Relation R_x constitute all kinds of actual (real) relationship among physical quantities. In mechanical objects these are spatial relationships, relationships of hierarchy (constituting a part) and of interactions of a mechanical nature (acting of forces, mass and energy flows).

2.2. Ideal system. A mathematical model of a technical mechanical object is created by simplifications and idealization of mental „picture” of an object [1]. Simplifications result from complexity of object on one hand, and from possibilities of mathematical physics methods on the other and are compromise between the destiny of the model, possibilities of mathematical formalism and the complexity of reality. Simplifications consist in leaving out components of quantities attributed to them, weak couplings, weak reactions, etc. The simplified object is replaced by an ideal substitute (physical model) consisting of ideal components such as particles, undeformable bodies, deformable mass zones, massless connecting links: rigid, elastic, viscous, etc.

In order to formalise these facts let's have:

- (i) set $Y = \bigcup_{q \in Q} Y_q$, $Y_q \subset R$, Q is a finite set of indices,
(ii) set of relations $R_y \equiv \{\bar{R}_{y_2}, R_{y_3}, \dots, R_{y_r}\}$ on Cartesian products: $R_{y_2} \subset Y_q \times Y_{q'}$; $R_{y_3} \subset Y_q \times Y_{q'} \times Y_{q''}$; ... $R_{y_r} \subset Y_q \times \dots \times Y_{q_r}$, where $q, q', q'', \dots, \hat{q} \in Q$; R_{y_r} is an r^{th} product, r is a maximum element of Q ,
(iii) sequence of relations $R_y = (R_{y_{m_i}})$, $i \in I_y$, where $R_{y_{m_i}} \ni (y_1, y_2, \dots, y_{m_i})$; $y_1, y_2, \dots, y_{m_i} \in Y$, I_y is a finite set of indices.

Definition 2. The pair

$$S_y = \langle Y, R_y \rangle \quad (2.2)$$

we shall call an ideal system.

Definition 3. An ideal system S_y will be called a mathematical model of a real system S_x if there exists a mapping $\Gamma \subset X \times Y$ such that when $R_{x_{n_i}} \ni (x_1, x_2, \dots, x_{n_i}) \& ((x_1, y_1) \in \Gamma) \& ((x_2, y_2) \in \Gamma) \dots \& ((x_{n_i}, y_{m_i'}) \in \Gamma) \Rightarrow R_{y_{m_i'}} \ni (y_1, y_2, \dots, y_{m_i'})$, where $x_1, x_2, \dots, x_{n_i} \in X$; $y_1, y_2, \dots, y_{m_i'} \in Y$; $i' \in I_x$, $i'' \in I_y$.

The formed ideal system S_y (mathematical model) is a mathematical description of the real system S_x . Forming of an ideal system S_y may be carried out in many ways, not only by means of a mathematical description of the so-called physical model; it is an activity a priori in character and it is characterized by an action of diverse meaning. The diversity of meaning asserts itself in the possibility of constructing many reasonable models describing the investigated properties. The formed a priori system S_y to be a model the mapping Γ between S_x and S_y must take place. This mapping means that a few relations R_{x_n} may be „modelled” by the relation R_{y_m} or that one relation R_{x_n} may be „modelled” by a few relations R_{y_m} . Besides, the relations R_{x_n} and R_{y_m} may differ from each other in the number of variables and usually $n \geq m$.

3. Adequacy of mathematical model

3.1. Physical aspects of the adequacy of a mathematical model. By the adequacy of a mathematical model S_y in relation to the examined object S_x we shall understand measurable property of mapping Γ („degree” of mapping) which we shall assign from comparing R_x and R_y .

An ideal case of adequacy of the object S_x and the model S_y takes place when the mapping $\bar{\Gamma}$ becomes isomorphous mapping Γ . This means there exists a bijection $\bar{\Gamma}: S_x \leftrightarrow S_y$,

such that: $R_{x_{n_i}} \ni (x_1, x_2, \dots, x_{n_i}) \Rightarrow R_{y_{m_i}} \ni (\bar{\Gamma}(x_1), \bar{\Gamma}(x_2), \dots, \bar{\Gamma}(x_{n_i})), R_{y_{m_i}} \ni (y_1, y_2, \dots, y_{m_i}) \Rightarrow R_{x_{m_i}} \ni (\bar{\Gamma}^{-1}(y_1), \bar{\Gamma}^{-1}(y_2) \dots \bar{\Gamma}^{-1}(y_{m_i}))$, where $m_i = n_i$ and $x_1, x_2, \dots, x_{n_i} \in X; y_1, y_2, \dots, y_{m_i} \in Y$. In the practice of technical mechanical systems modelling the mathematical model is not an isomorphous mapping of the investigated object and the problem of adequacy becomes more complex. Physical quantities, determined by measurement on the object „in concreto”, forming set \tilde{X} , differ from X , the difference resulting from measurement errors possible or impossible to determine (\tilde{R}_x different from R_x , \tilde{R}_x -sequence of relations determined within the same spaces as R_x). Numerical sets \tilde{X} are discrete sets and can be replaced by a continuous „representation”. Incomplete measurement investigation of a technical object (a finite number of point of measurements and readings) requires „extending” of the empirically established compatibility between R_y and \tilde{R}_x to R_y and R_x which, in turn, requires the usage of unreliable empirical inference [1].

The idea of the presented concept is an attempt at such an adequacy description based on the notions and methods of the fuzzy set theory which would be „extending compatibility measures \tilde{R}_x and R_y ” to „the reality R_x and R_y ”.

3.2. Adequacy of a mathematical model of the level of physical variables. By a physical variable we shall understand each set $Y_q, y_q \in Y_q \subset R, q \in Q$, if Y_q has physical meaning (physical dimension has been attributed).

Lets have:

- (i) metric space (Z, ϱ) where $Z \equiv X \cup Y; \varrho: Z \times Z \rightarrow \bar{R}_+$,
- (ii) subset M of Cartesian product $M \subset X \times Y$ such that $(x, y) \in M \Rightarrow (x, y) \in \Gamma; M = \Gamma$ when $n_i = m_i$, (see Def. 3),
- (iii) function $\varrho_\Gamma: X \times Y \rightarrow \bar{R}_+$ such that for $z_1, z_2 \in Z, [\varrho_\Gamma(z_1, z_2) = \varrho(z_1, z_2)] \Leftrightarrow [(z_1, z_2) \in \Gamma \subset X \times Y]$,
- (IV) function $f_A: \Gamma \ni (x, y) \rightarrow f_A(x, y) \in [0, 1]$ such that:
 - 1° for $(x, y) \in M, [f_A(x, y) = 1] \Leftrightarrow x = y$,
 - 2° for $(x', y'), (x'', y'') \in M, [\varrho_\Gamma(x', y') \leq \varrho_\Gamma(x'', y'')] \Leftrightarrow [f_A(x', y') \geq f_A(x, y)]$,
 - 3° for $(x, y) \in \Gamma \setminus M, [f_A(x, y) = 0]$.

Let A_f denote a fuzzy set:

$$A_f = \text{graph} f_A \ni \{(\gamma, f_A(\gamma)) | \gamma \in \Gamma\}, \tag{3.1}$$

where $\gamma \equiv (x, y) \in \Gamma$, function $f_A(\gamma)$ is a membership function of the fuzzy set A_f .

The requirements put forward for f_A are general and determine membership function family \mathcal{F}_A :

$$\mathcal{F}_A(\Gamma) = \{f_A(x, y) | f_A: \Gamma \rightarrow [0, 1]\}$$

An example of the f_A function meeting the above requirements may be $f_A = \frac{A(x, y)}{V(x, y)}$

when $(x, y) \in R_+$ or $(x, y) \in R_-$, $A(x, y)$ and $V(x, y)$ denote a choice of a smaller or a larger element respectively. This function resembles proportional determining of deviations. Membership degree of pairs (x, y) in a fuzzy set, determined by values of the so selected membership function f_A , may be interpreted as an indicator of what we understand by the notion of adequacy of a mathematical model.

It can easily be noticed that if for $\forall (x, y) \in \Gamma$ takes place $f_A(x, y) = 1$ then from the condition 1° and 3° for f_A results that $\Gamma = M$, ($n_i = m_i$) and for $\forall (x, y) \in M$ holds $x = y$ and $R_{x m_i} \ni (x_1, x_2, \dots, x_{m_i}) \Leftrightarrow R_{y m_i} \ni (y_1, y_2, \dots, y_{m_i})$, for $\forall i \in I_x$ and $\forall i \in I_y$. Hence isomorphous mapping S_x to S_y takes place, relations $R_{y m_i}$ are „fully adequate”.

From the condition 2° for f_A results that with the increase in value of $\varrho_\Gamma(x, y)$, the values of membership function f_A decrease which we interpret as diminishing „adequacy degree” of a mathematical model. The fuzzy set A_f is a „picture of adequacy” of a mathematical model on the level physical variables.

3.3. Adequacy of a mathematical model on the level of sets of physical variables Y_u . Let's pick out for $R_{y m_i} \ni (y_1, y_2, \dots, y_{m_i})$ in set Γ subsets Γ_u such that $(x_u, y_u) \in \Gamma_u$ and $x_u \in X_u, y_u \in Y_u$, where $u = 1, 2, \dots, m_i$. Let's denote fuzzy set A_f on Γ_u by:

$$A_u = \text{graph } f_A \ni \{(\gamma, f_A(\gamma)) | \gamma \in \Gamma_u\}$$

Let's make cuts $\Gamma_{u\alpha}$ of set Γ_u :

$$\Gamma_{u\alpha} = \{\gamma \in \Gamma_u | f_A(\gamma) \geq \alpha\} \quad \text{for } \forall \alpha \in [0, 1].$$

Let distance specification be given: $\varrho_Y: Y \times Y \rightarrow \bar{R}_+$

Let's denote diameter of set Γ_u as $D_u: D_u = \sup_{Y_u} \varrho_Y(y', y'')$ while diameter of cut $\Gamma_{u\alpha}$ as

$$D_{u\alpha} = \sup_{Y_{u\alpha}} \varrho_Y(y', y'').$$

Let's form fuzzy measure [16, 17] of set $\Gamma_{u\alpha}$:

$$g(\Gamma_{u\alpha}) = \frac{\max\{D_{u\alpha}\}}{D_u} \quad (3.2)$$

Additionally, let it satisfy condition: if $D_u = 0$ and $D_{u\alpha} = 0$ then $g(\Gamma_{u\alpha}) = 1$. Let's perform fuzzy integration [18] of membership function $f_A(\gamma)$ over set Γ_u to regard of fuzzy measure $g(\Gamma_{u\alpha})$:

$$\Theta_u = \int_{\Gamma_u} f_A(\gamma) \circ g(\Gamma_{u\alpha}) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \wedge g(\Gamma_{u\alpha})] \quad (3.3)$$

where \wedge denotes choice of smaller element. Let's notice, that

$$\Theta_u = \Theta_A(\Gamma_u): \Gamma \rightarrow [0, 1].$$

Fuzzy set A_Θ will be defined as:

$$A_\Theta = \text{graph } \Theta_u \ni \{(\Gamma_u, \Theta_u(\Gamma_u)) | \Gamma_u \subset 2^\Gamma\}. \quad (3.4)$$

It can easily be seen that the fuzzy measure (3.2) has the following properties:

1° $g(\Gamma_{u\alpha}) = 0$ when $\Gamma_{u\alpha} = \phi$ or $D_{u\alpha} = 0, D_u \neq 0$

2° $g(\Gamma_{u\alpha}) = 1$ when $\alpha = 0$

Let the cuts: $\Gamma'_{u\alpha} \subset \Gamma_{u\alpha}, \Gamma''_{u\alpha} \subset \Gamma_{u\alpha}$ be given.

If $\Gamma'_{u\alpha} \subset \Gamma''_{u\alpha}$ then $g(\Gamma'_{u\alpha}) \leq g(\Gamma''_{u\alpha})$ which may be interpreted that the „range” of mapping of variable Y_u on the level α is for the „model $\Gamma'_{u\alpha}$ ” smaller than for the „model $\Gamma''_{u\alpha}$ ”. Measure $g(\Gamma_{u\alpha})$ assigns relative mapping range of variable Y_u on the level α in the considered mathematical model. From the properties of a fuzzy integral results that:

1° If $\Gamma'_u \subset \Gamma''_u$ where $\Gamma'_u \subset \Gamma_u, \Gamma''_u \subset \Gamma_u$ then $\Theta_u(\Gamma'_u) \leq \Theta_u(\Gamma''_u)$ which means that together with enlargement of „scope” of physical variable in model the value Θ_u increases.

- 2° If $f_1(\gamma) \geq f_2(\gamma)$ then $\int_I f_1(\cdot) \circ g(\cdot) \geq \int_I f_2(\cdot) \circ g(\cdot)$, which means that with increase of membership function value, the value Θ_u increases.
- 3° $\Theta_u = 1$ when [for $\forall \gamma \in \Gamma_u, f_A(\gamma) = 1$],
- 4° $\Theta_u = 0$ when [for $\forall \gamma \in \Gamma_u, f_A(\gamma) = 0$],
- 5° $\Theta_u (\Gamma'_u \cup \Gamma''_u) \neq \Theta_u(\Gamma'_u) + \Theta_u(\Gamma''_u)$.

Membership function Θ_u of a fuzzy set A_Θ maps to each pair of sets (X_u, Y_u) a number from the interval $[0, 1]$. This number is the closer to one the greater values the membership function $f_A(x, y)$ assumes and the greater the diameter of the subset $\Gamma_{u\alpha}$ on which $f_A(x, y)$ reaches these values ($\alpha = f_A(x, y)$). So the membership function Θ_u may be interpreted as „adequacy measure” of particular sets of physical variables Y_u whose elements are in the investigated relation R_{ym_i} .

3.4. Mathematical model adequacy on the level of relation R_{ym_i} . Let's assume that we are given a fuzzy set for i^{th} relation R_{ym_i} , whose membership function Θ_u assumes values: $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{m_i}$. We attribute for $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{m_i}$ weights $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_i}$ such that $0 \leq \mu_u \leq 1$ for $u = 1, 2, \dots, m_i$. Let's form a sequence $\Theta_i = (\mu_u \Theta_u)$ where $u = 1, 2, \dots, m_i$, and set

$$\bar{\Theta} = \{\bar{\Theta}_i | i \in I_y\}.$$

Let's form a functional:

$$\phi_A: \bar{\Theta} \ni \bar{\Theta}_i \rightarrow \phi_A(\bar{\Theta}_i) \in [0, 1], \tag{3.5}$$

satisfying conditions:

- 1° $\Phi_A(\bar{\Theta}_i) = 1$ when [for $u = 1, 2, \dots, m_i, \mu_u \Theta_u = 1$],
- 2° $\Phi_A(\bar{\Theta}_i) = 0$ when [for $u = 1, 2, \dots, m_i, \mu_u \Theta_u = 0$],
- 3° $\Phi_A(\bar{\Theta}'_i) \geq \phi_A(\bar{\Theta}''_i)$ when [for $u = 1, 2, \dots, m_i, \mu_u \Theta'_u \geq \mu_u \Theta''_u$]

Fuzzy set A_Φ is expressed as

$$A_\Phi = \text{graph } \Phi_A \ni \{(\bar{\Theta}_i, \Phi_A(\bar{\Theta}_i)) | \bar{\Theta}_i \in 2^{\bar{\Theta}}\}, \tag{3.6}$$

where $\phi_A(\cdot)$ is a membership function.

Weights μ_1, μ_2, \dots attributed to particular physical quantities occurring in the investigated relation R_{ym_i} enable us to give these quantities subjective meaning in the description of the adequacy of a model. As a functional (3.5) we may take in particular

$$\phi_A(\bar{\Theta}_i) = \mu_1 \Theta_1 + \mu_2 \Theta_2 + \dots + \mu_{m_i} \Theta_{m_i}, \tag{3.7}$$

where weights satisfy an additional condition $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{m_i} = 1$. Values of the functional $\phi_A(\bar{\Theta}_i)$ mapped to particular relations R_{ym_i} , may be interpreted as „adequacy indices” of particular relations of a mathematical model. Fuzzy set A_Φ is then an „adequacy picture” of a model on relation level.

3.5. Adequacy of a mathematical model on the level of relation sequences R_y^* . Let's assume we are given a fuzzy set A_Φ whose membership function assumes for the sequence $R_y = (R_{ym_i}), i \in I_y$ values $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{i_0}$. We attribute for $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{i_0}$ weights $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_{i_0}$ such that $0 \leq \bar{\mu}_i \leq 1$ for $i = 1, 2, \dots, i_0$.

Let's form a sequence $\Phi_w = (\bar{\mu}_i \phi_i)$, $i = 1, 2, \dots, i_{0w}$.

Let's assume that a sequence (R_y^w) , $w = 1, 2, \dots, w_0$, is given whose elements are sequences R_y . Let's form set of sequences:

$$\bar{\phi} = \{\Phi_w; w = 1, 2, \dots, w_0\},$$

and a functional:

$$\psi_A: \bar{\phi} \in \Phi_w \rightarrow \psi_A(\Phi_w) \in [0, 1], \quad (3.8)$$

satisfying conditions:

1° $\psi_A(\Phi_w) = 1$ when [for $i = 1, 2, \dots, i_{0w}$, $\bar{\mu}_i \phi_i = 1$],

2° $\psi_A(\Phi_w) = 0$ when [for $i = 1, 2, \dots, i_{0w}$, $\bar{\mu}_i \phi_i = 0$],

3° $\psi_A(\Phi'_w) \geq \psi_A(\Phi''_w)$ when [for $i = 1, 2, \dots, i_{0w}$, $\bar{\mu}_i \phi'_i \geq \bar{\mu}_i \phi''_i$].

Fuzzy set A_ψ will be defined by:

$$A_\psi = \text{graph } \psi_A \ni \{(\bar{\varphi}_w, \psi_A(\bar{\varphi}_w)) | \bar{\varphi}_w \in 2^{\bar{\phi}}\}, \quad (3.9)$$

where $\psi_A(\cdot)$ is a membership function of set A_ψ .

A fuzzy set A_ψ has been formed in a similar way to the set A_σ . Weights $\bar{\mu}_i$ attributed to particular relations R_{ym_i} enable us to give them subjective meaning in the description of the adequacy of a model. In particular we can define as a functional:

$$\psi_A(\Phi_w) = \bar{\mu}_1 \phi_1 + \bar{\mu}_2 \phi_2 + \dots + \bar{\mu}_{w_0} \phi_{w_0}, \quad (3.10)$$

where weights $\bar{\mu}_u$ satisfy the condition $\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \dots + \bar{\mu}_{w_0} = 1$

We shall interpret values of the functional $\psi_A(\Phi_w)$ mapped to particular sequence of relations $R_y = (R_{ym_i})$ as „adequacy indices” for particular sequences of relations. In particular, if for a given mathematical model, we present the examined relations as one sequence, ψ_A will attribute for this sequence a number from the interval $[0, 1]$ which be an „index of the adequacy” of the model. Fuzzy set A_ψ is then the „picture of adequacy” of the model on the level of relation sequences (the level of a mathematical model).

4. Example

In order illustrate the presented concept of forming fuzzy sets „describing adequacy” of a mathematical model we shall consider the problem of inducing vibrations of collecting electrodes of an electrical precipitator [19, 20]. A physical model of the considered system has been presented in fig. 1. A movable rod the length l strikes a stationary fixed rod with the speed v_0 . The induced wave of stresses in the rod influences particular solids linked with the immobile base by a spring. Let's introduce the following notation:

$$\begin{aligned} l - [m] & \text{— length of the striking rod,} \\ v_0 - \left[\frac{m}{s} \right] & \text{— speed of the striking rod,} \\ \tau - [s] & \text{— duration of the collision,} \\ m - [kg] & \text{— mass of harmonic oscillator,} \\ k - \left[\frac{N}{m} \right] & \text{— rigidity of spring,} \end{aligned}$$

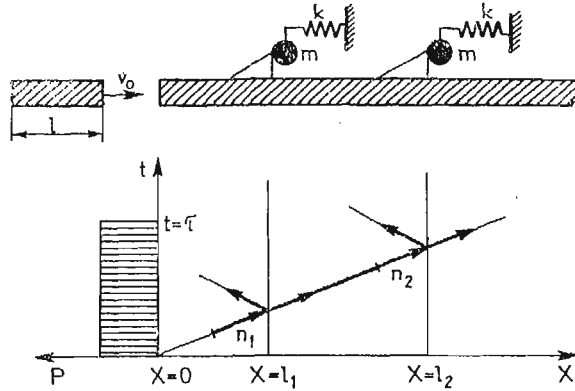


Fig. 1. Model of induction of vibrations to electrostatic precipitator collection electrodes

$\rho - \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ — density of material,

$S - [\text{m}^2]$ — cross-section area of the rod,

$P_1, P_2 - [\text{N}]$ — force of acting of the rod on harmonic oscillators, $x = l_1, x = l_2$,

$\Pi_1, \Pi_2 - [\text{N}]$ — „pression” in front of the wave reaching the cross-section of the rod
 $x_1 = l_1, x = l_2$,

$a - \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ — speed of longitudinal wave in the rod.

In appropriate assumptions are satisfied [19, 20] together with $\frac{k}{m} \ll h^2 = \rho^2 a^2 \frac{S^2}{m^2} \Rightarrow \Rightarrow \rho^2 a^2 S^2 \gg km$ the investigated mechanical system is defined by interrelations:

$$R_{y6_1}: P_0(t) = \rho a v_0 S \quad \text{for } 0 \leq t \leq \tau \text{ as well as } P(t_0) = 0 \text{ for } t > \tau,$$

$$R_{y7_2}: P_1(t) = 2P_0(t) - 4h \int_0^t P_0(s) \exp[-2h(t-s)] ds,$$

$$R_{y7_3}: P_2(t) = 2P_1(t) - 4h \int_0^t P_1(s) \exp[-2h(t-s)] ds,$$

$$R_{y5_4}: \rho^2 a^2 S^2 \gg km$$

So we investigate the relations $R_{ym_i}, i = 1, 2, 3, 4$:

$$R_{y6_1} \ni (P_0, \rho, a, v_0, S, t),$$

$$R_{y7_2} \ni (P_1, P_0, \rho, a, S, m, t),$$

$$R_{y7_3} \ni (P_2, P_1, \rho, a, S, m, t),$$

$$R_{y5_4} \ni (\rho, a, S, k, m).$$

Lets assume we have at our disposal empirical data for the modelled object i.e. physical quantities which are in the following relations:

$$\tilde{R}_{x6_1} \ni (\tilde{P}_0, \tilde{\rho}, \tilde{a}, \tilde{V}_0, \tilde{S}, \tilde{t}),$$

$$\tilde{R}_{x7_2} \ni (\tilde{P}_1, \tilde{P}_0, \tilde{\rho}, \tilde{a}, \tilde{S}, \tilde{m}, \tilde{t}),$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{x7_3} &\ni (\tilde{P}_2, \tilde{P}_1, \tilde{\varrho}, \tilde{a}, \tilde{S}, \tilde{m}, \tilde{t}), \\ \tilde{R}_{x5_4} &\ni (\tilde{\varrho}, \tilde{a}, \tilde{S}, \tilde{k}, \tilde{m}). \end{aligned}$$

Relations R_{y6_1} , R_{y7_2} , R_{y7_3} , R_{y5_4} and \tilde{R}_{x6_1} , \tilde{R}_{x7_2} , \tilde{R}_{x7_3} , \tilde{R}_{x5_4} are of course defined within the same spaces but between the physical quantities which are in these relations mapping Γ takes place, and mapping Γ_u takes place in distinguishing particular variables, where $u = P_0, P_1, P_2, \varrho, a, V_0, S, t, m, k$, (see Def. 3). For simplification sake we assume that the subsets Γ_u are the same for the given variable „ u ” irrelevant of the fact in which of the examined relations this variable appears.

In order to form a set A_f lets denote $\gamma_u = (\tilde{x}, y)$, $\gamma_u \in \Gamma_u$ while $\gamma_{P_0} = (\tilde{P}_0, P_0), \dots, \gamma_k = (\tilde{k}, k)$. Let's define membership function as follow $f_A(\gamma_u) = \frac{A(x, y)}{V(x, y)}$, (see p. 3.2) where $\gamma_u = (\tilde{x}, y) \in R_+$ or $\gamma_u \in R_-$ and for $\tilde{x} = y = 0$ takes place $f_A(\gamma_u) = 1$. We shall denote the fuzzy set A_f over the subsets Γ_u as:

$$A_u = \text{graph } f_A \ni \{(\gamma_u, f_A(\gamma_u)) | \gamma_u \in \Gamma_u\},$$

whereas the set A_f over Γ as:

$$A_u = \text{graph } f_A \ni \{(\gamma, f_A(\gamma)) | \gamma \in \Gamma\},$$

where $\gamma = (\tilde{x}, y)$.

In order to form the set A_Θ we perform fuzzy integration over the sets Γ_u of appropriate physical variables which are in the relations R_{y6_1} , R_{y7_2} , R_{y7_3} , R_{y5_4} :

$$\Theta_u = \int_{\Gamma_u} f_A(\gamma_u) \circ g(\Gamma_{u\alpha}) = \delta_u,$$

where: $u = P_0, P_1, P_2, \varrho, a, V_0, S, t, m, k$.

For the shake of physical motivation it seems reasonable for $\delta_\varrho = 1, \delta_a = 1, \delta_t = 1, \delta_m = 1, \delta_k = 1$. A detailed example of calculating the fuzzy integral Θ_u has been presented in paper [1]. The sets A_Θ , corresponding to particular relations R_{y6_1} , R_{y7_2} , R_{y7_3} , R_{y5_4} , we shall put down as follows:

$$\begin{aligned} A_{\Theta_1} &= \{(\Gamma_u, \delta_u) | u = P_0, \varrho, a, v_0, S, t\}, \\ A_{\Theta_2} &= \{(\Gamma_u, \delta_u) | u = P_1, P_0, \varrho, a, S, m, t\}, \\ A_{\Theta_3} &= \{(\Gamma_u, \delta_u) | u = P_2, P_1, \varrho, a, S, m, t\}, \\ A_{\Theta_4} &= \{(\Gamma_u, \delta_u) | u = \varrho, a, S, k, m\}, \end{aligned}$$

whereas set A_Θ for all considered relations as follows:

$$A_\Theta = \{(\Gamma_u, \delta_u) | u = P_0, P_1, P_2, \varrho, a, v_0, S, t, m, k\}.$$

In order to form set A_Φ let's attribute particular weights μ_u to the physical variables which are in the relations R_{y6_1} , R_{y7_2} , R_{y7_3} , R_{y5_4} . For physical variables in the relation R_{y6_1} let it be: $\mu_{P_0} = 0,5; \mu_\varrho = 0, \mu_a = 0, \mu_{v_0} = 0,5; \mu_t = 0$.

This signifies that it is of vital importance for us to determine correct values of the force P_0 as well as the speed of striking v_0 . Weights μ_u satisfy the condition $\mu_{P_0} + \mu_\varrho + \mu_a + \mu_{v_0} + \mu_t = 1$. For physical variables in the relation R_{y7_2} let's assume in an

analogous way that: $\mu_{P_1} = 0,5$; $\mu_{P_0} = 0,5$; $\mu_Q = 0$, $\mu_a = 0$, $\mu_s = 0$, $\mu_m = 0$, $\mu_t = 0$; for physical variables in relation $R_{y_{73}}$: $\mu_{P_2} = 0,5$; $\mu_{P_1} = 0,5$; $\mu_Q = 0$, $\mu_a = 0$, $\mu_s = 0$, $\mu_m = 0$, $\mu_t = 0$; for physical variables in relation $R_{y_{54}}$: $\mu_Q = 0,2$; $\mu_a = 0,2$; $\mu_s = 0,2$; $\mu_k = 0,2$; $\mu_m = 0,2$.

Appropriate sequences $\bar{\Theta}_u$ expressed as:

$$\bar{\Theta}_1 = (0,5\delta_{P_0}; 0\delta_Q; 0\delta_a; 0,5\delta_{V_0}; 0\delta_s; 0\delta_t),$$

$$\bar{\Theta}_2 = (0,5\delta_{P_1}; 0,5\delta_{P_0}; 0\delta_Q; 0\delta_a; 0\delta_s; 0\delta_m; 0\delta_t),$$

$$\bar{\Theta}_3 = (0,5\delta_{P_2}; 0,5\delta_{P_1}; 0\delta_Q; 0\delta_a; 0\delta_s; 0\delta_m; 0\delta_t),$$

$$\bar{\Theta}_4 = (0,2\delta_Q, 0,2\delta_a; 0,2\delta_s; 0,2\delta_k; 0,2\delta_m),$$

Accepting the membership function in the set A_ϕ , given by the proposition (3.7), we shall write down the following:

$$\phi_A(\bar{\Theta}_1) = 0,5(\delta_{P_0} + \delta_{V_0}) = \varepsilon_1; \phi(\bar{\Theta}_2) = 0,5(\delta_{P_1} + \delta_{P_0}) = \varepsilon_2;$$

$$\phi_A(\bar{\Theta}_3) = 0,5(\delta_{P_2} + \delta_{P_1}) = \varepsilon_3; \phi(\bar{\Theta}_4) = 0,2(\delta_Q + \delta_a + \delta_s + \delta_k) = \varepsilon_4.$$

The fuzzy set A_ϕ assumes form:

$$A_\phi \equiv \{(\bar{\Theta}_i, \varepsilon_i) | i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Values $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ of the membership function of the set A_ϕ are adequacy indices for particular relations $R_{y_{m_i}}$.

In order to form the set A_ψ let's attribute the following weights: $\bar{\mu}_1 = 0,25$; $\bar{\mu}_2 = 0,25$; $\bar{\mu}_3 = 0,25$; $\bar{\mu}_4 = 0,25$ to the particular relations $R_{y_{61}}, R_{y_{72}}, R_{y_{73}}, R_{y_{54}}$. This means that each the investigated relations has the same significance in the investigated mathematical model. Let's formulate a sequence

$$\Phi_1 = (\mu_i \phi_i) = (0,25\varepsilon_1; 0,25\varepsilon_2; 0,25\varepsilon_3; 0,25\varepsilon_4).$$

Accepting the membership function of the set A_ψ , given by the proposition (3.10), we can put down: $\psi_A(\Phi_1) = 0,25\varepsilon_1 + 0,25\varepsilon_2 + 0,25\varepsilon_3 + 0,25\varepsilon_4 = \varphi_1$. The fuzzy set A_ψ will be as follows:

$$A_\psi \equiv \{(\phi_w, \varphi_w) | w = 1\}.$$

Value φ_1 of the membership function constitutes a fuzzy index the investigated mathematical model.

5. Final remarks

The considerations presented above constitute a modification of the problem of identification of mathematical models of technical mechanical systems including the problems of vagueness. In order to describe the adequacy of a mathematical model of technical mechanical system a hierarchic arrangement of fuzzy sets has been formed on the level of physical variables, sets of physical variables, system relations and sequences of relations. The presented formalism enables a description of adequacy on various level of minuteness of detail analysis and for models having various degree of mathematical complexity.

This description may serve the purposes of making comparative evaluations as those aiming at a goal of the adequacy of the model when the aim of the model has been presented in the form of a fuzzy set of type 2 [21]. A relevant algorithm of the adequacy evaluation of the model, resolving the problem into inclusion of fuzzy sets has been presented in paper [1].

6. Basic notions and properties concerning fuzzy sets

When fuzzy sets are given:

$$A = \text{graph } f_A \ni \{(x, f_A(x)) | x \in X, f_A(x) \in [0, 1]\},$$

$$B = \text{graph } f_B \ni \{(x, f_B(x)) | x \in X, f_B(x) \in [0, 1]\},$$

hence their sum $A \cup B = C$ is a fuzzy set:

$$C = \text{graph } f_C \ni \{(x, f_C(x)) | x \in X\}, \text{ where,}$$

$$f_C(x) = \max(f_A(x), f_B(x)).$$

The fuzzy set $D = \text{graph } f_D \ni \{(x, f_D(x)) | x \in X\}$ is the product of $A \cap B = D$ when $f_D = \min(f_A(x), f_B(x))$.

Inclusion of fuzzy sets $A \subset B$ means that $f_A(x) \leq f_B(x)$ for $\forall x \in X$.

If the set X and Borel field β of set X are given then function $g(\cdot)$ defined on β and satisfying the following three conditions will be the fuzzy measure of the set:

$$1^\circ g(\emptyset) = 0, g(X) = 1,$$

$$2^\circ \text{ If } A, B \in \beta \text{ and } A \subset B \text{ then } g(A) \leq g(B),$$

$$3^\circ \text{ If } A_n \in \beta \text{ for } 1 \leq n \leq \infty \text{ and } A_n \text{ is monotonic in the sense of inclusion then } \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n).$$

Given a fuzzy set A , cut F_α of set A : $F_\alpha \equiv \{x | f_A(x) \geq \alpha \in [0, 1]\}$ and $F_\alpha \in \beta$, where β is Borel field, by a fuzzy integral of the $f_A(x)$ function over the set $E \subset X$ to regard of the fuzzy measure $g(\cdot)$ we shall understand: $\int_E f_A(x) \circ g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \wedge g(E \cap F)]$, where

\wedge denotes the choice of a smaller element.

References

1. M. SARNA, *Adekwatność modelowania matematycznego technicznych systemów mechanicznych w języku teorii zbiorów rozmytych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej nr 412, Rozprawy Naukowe 48, 1982.
2. L. A. ZADEH, *Fuzzy sets.*, Information and Control, Vol. 8, No 3, June 1965.
3. A. KAUFMAN, *Introduction a la theorie des sous — ensembles flows, 1: Elements theoretiques de base*, Masson Et CJE, Paris 1973.
4. A. KAUFMAN, *Introduction a la theorie des sous — ensembles flows, 1: Applications a la linguistique et a la semantique*, Masson Et CJE, Paris 1975.
5. A. KAUFMAN, *Introduction a la theorie des sous — ensembles flows, 3: Applications a la classification et la reconnaissance des formes, aux automates et aux systems, aux choix des critaires*, Masson Et CIE, Paris 1975.

6. A. KAUFMAN, *Introduction to the theory of fuzzy subsets vol. 1*, Academic Press, New—York 1975.
7. D. DUBOIS M. PRADE, *Fuzzy sets and systems*, Acad. Press. New-York 1980.
8. Cz. WOŹNIAK, *Towards tolerance, fuzziness and indiscernibility in solids mechanics*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* (in print).
9. Cz. WOŹNIAK, *On the tolerance approach to solid mechanics*, *Archiwum Mechaniki Stosowanej* (in print).
10. Cz. WOŹNIAK, *Tolerancyjna interpretacja nieklasycznych zagadnień brzegowych liniowej teorii powłok*, *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu*, 1982.
11. K. RAGADE, M. M. GUPTA, *Fuzzy set theory and applications: A. Synthesis*; in book: *Advances in fuzzy set theory and applications*, North-Holland Publishing Comp. — 1979.
12. D. DUBOIS, M. PRADE, *Outline et fuzzy set theory: An introduction*, in book: *Advances in fuzzy set theory and applications*, North — Holland Publishing Comp. 1979.
13. D. RALESCU, *A Survey of the representation of fuzzy concepts and its applications*; in book: *Advances in fuzzy set theory and applications*, North — Holland Publishing Comp. 1979.
14. B. R. GAINES. L. I. KOHOUT, *The fuzzy decade: a bibliography of fuzzy systems and closely related topics*. *Int. J. Man — Machine Studies* 9, 1977.
15. A. KANDEL, R. R. YAGER, *A 1979 bibliography on fuzzy sets, their applications, and related topics*. In book: *Advances in fuzzy set theory and applications*; ed. by Madau M. Gupta, North — Holland Publishing Company 1979.
16. M. SUGENO, *Fuzzy measures and fuzzy integrals*; a survey in book: *Fuzzy automata and decision processes*, North — Holland, New-York 1977.
17. G. BANON, *Distinction between several subsets of fuzzy measures*, *Fuzzy Sets and Systems* 5 (1981).
18. M. SUGENO, *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Ph. D. Thesis. Tokyo Institute of Technology 1974.
19. M. SARNA, *Optimization problem of induction of vibrations to electrostatic precipitator collection electrodes*; *Staub-Reinhalt, Luft* 35, (1975) Nr 10 October.
20. M. SARNA, *Analiza i synteza dyskretno ciągłego układu mechanicznego*, *Rozprawy Inżynierskie* 24, 1, 1976.
21. K. MIZUMOTO M. TANAKA, *Some properties of fuzzy sets of type 2*, *Inf. and Control* 31, 1976.

Р е з ю м е

РАЗМЫТИЕ МНОЖЕСТВА В ОПИСАНИИ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе проведено описание адекватности математических моделей технических механических систем, которое принимает во внимание нечеткие проблемы адекватности. Использовано понятия размытых множеств Л. А. Заде, размытой меры и размытого интеграла. Сообразовано иерархическую систему размытых множеств на уровне физических переменных, множеств физических переменных, отношений системы и кортежей отношений. Представленный метод описания адекватности делает возможным формальное проведение сравнительных и направленных на цель оценок адекватности математических моделей о различной степени математического усложнения.

Streszczenie

ZBIORY ROZMYTE W OPISIE ADEKWATNOŚCI MODELI MATEMATYCZNYCH TECHNICZNYCH SYSTEMÓW MECHANICZNYCH

W pracy przedstawiono próbę opisu aдекватności modeli matematycznych technicznych systemów mechanicznych uwzględniającego nieostre problemy адекватności. Wykorzystano do tego celu pojęcia zbiorów rozmytych L. A. Zadeha [2], rozmytej miary i rozmytej całki [18]. Utworzono hierarchiczny

układ zbiorów rozmytych na poziomie zmiennych fizycznych, zbiorów zmiennych fizycznych, relacji systemowych i ciągów relacji. Przedstawiona metoda opisu adekwatności umożliwia formalizację dokonywania ocen porównawczych i docelowych adekwatności modeli matematycznych o różnym stopniu złożoności matematycznej.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 maja 1983 roku

B I U L E T Y N I N F O R M A C Y J N Y

KONFERENCJA GAMM 1983

Doroczna konferencja naukowa GAMM (Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik) odbyła się w tym roku w Hamburgu w dniach 28 - 31 marca. W Konferencji wzięło udział około 530 osób, nie licząc osób towarzyszących. W tym uczestników z Austrii było 17, z Belgii 1, z Bulgarii 4, Brazylii 3, Czechosłowacji 7, Finlandii 2, Grecji 3, Holandii 4, Indii 1, Iranu 1, Jugosławii 19, Kanady 1, NRD 2, Polski 11, Szwajcarii 11, Tunezji 1, Węgier 13, W. Brytanii 1, Włoch 3, St. Zjednoczonych A.P. 2, Arabii Saudyjskiej 2. W ramach konferencji wygłoszony został wykład inauguracyjny, wykład specjalny poświęcony pamięci L. Prandtla, wykład popularny, 7 generalnych wykładów 1 godzinnych na zaproszenie organizatorów, oraz prawie 300 komunikatów w siedmiu sekcjach.

Wykład inauguracyjny wygłosił prof. K. Nickel z Freiburga, tematem był rozwój metod matematycznych w teorii warstwy przyściennej w ostatnim ćwierćwieczu. Prelegent zacytował interesującą myśl L. Prandtla: „Nie ma nic lepszego dla praktyki od dobrej teorii”.

Wykład specjalny o kinematyce strumienia spływu przedstawił prof. K. Wieghardt z Hamburga. Chodziło w nim o zachowanie się strumienia wody przy opływie statku. Praca miała wyraźny charakter aplikacyjny w budowie okrętów. Publiczny wykład popularny pod tytułem „Zabawki fizyczne — zabawa na serio stosowanej matematyki i mechaniki” wygłosił prof. W. Bürger z Karlsruhe. Tematyka ta była poprzednio przedstawiana w Polsce w czasie pobytu prof. W. Bürgera w naszym kraju, najbardziej szczegółowo na semestrze mechaniki w Centrum Banacha w Warszawie w r. 1981.

Wykłady generalne były następujące:

H. Buggish, Karlsruhe, Zagadnienia mechaniki płynów w technice procesów,

S. Falk, Brunszwik, Macierzowe zagadnienia wartości własnych w mechanice,

R. Leis, Bonn, Zagadnienia początkowe i brzegowe w teorii drgań termosprężystych. Autora bardziej interesowała ścisłość matematyczna niż sens fizyczny zagadnienia. W zasadzie chodziło o podanie rozwiązania zagadnienia drgań wymuszonych w nieograniczonej przestrzeni termosprężystej. Pominięte zostały prace innych autorów z termosprężystości, z wyjątkiem dwóch prac matematycznych.

H. Mang, Wiedeń, Obliczanie nośności granicznej żelbetowych dźwigarów powierzchniowych,

F. Natterer, Münster, Przyczynki do tomografii komputerowej,

A. Prekopa, Budapeszt, Statystyczne decyzje i stochastyczna optymalizacja,

W. Törnig, Darmstadt, Monotoniczne metody iteracyjne w wielkich nieliniowych układach równań i zastosowania w teorii równań różniczkowych.

Wykłady 20 minutowe odbywały się w następujących siedmiu równoległych sekcjach. Drgania i zagadnienia stateczności — 45 wykładów, teoria sprężystości i plastyczności — 53, mechanika płynów — 61, numeryczne metody w równaniach różniczkowych — 19 (ogólne) oraz — 18 metoda elementów skończonych, optymalizacja, teoria decyzji, stochastyka — 23, analiza stosowana i zagadnienia fizyki matematycznej — 47, analiza numeryczna — 25.

Polscy uczestnicy wygłosili 9 referatów naukowych w 4 sekcjach (teoria sprężystości — 4, drgania — 2, mechanika płynów — 2 i mat. stosowana — 1). W czasie trwania konferencji odbyło się w salach ratusza spotkanie uczestników konferencji z niektórymi członkami Senatu Hamburga, koncert kameralnej muzyki barokowej, zwiedzanie miasta, zwiedzanie portu statkiem, wizyta w fabryce fortepianów i pianin Steinway i Synowie.

Odbyło się również sprawozdawczo-wyborcze walne zgromadzenie członków Towarzystwa. Do Władz GAMM wchodzi prof. Zbigniew Wesołowski.

Zbigniew Olesiak

MIĘDZYNARODOWY KONGRES MATEMATYKÓW
Warszawa — ICM 1982

Z rocznym opóźnieniem odbył się w Warszawie w dniach 16 - 24 sierpnia 1983 Międzynarodowy Kongres Matematyków, pierwszy raz w Polsce. W Kongresie uczestniczyło 2400 matematyków z całego świata. Przyjechała bardzo reprezentatywna, ok. 300 osobowa grupa matematyków radzieckich, znacznie mniej niż pierwotnie oczekiwano przyjechało matematyków ze Stanów Zjednoczonych A.P. Obrady odbywały się w salach Pałacu Kultury i Nauki w tym w Sali Kongresowej i salach kinowych. Patronat nad Kongresem objął Prezes PAN prof. Aleksander Gieysztor, Przewodniczącym Kongresu został wybrany Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego prof. Cz. Olech. Otwarcie Kongresu było połączone z wręczeniem medali młodym matematykom za najwybitniejsze osiągnięcia w ostatnim okresie, oraz z koncertem chóru „Harfa”.

Na zaproszenie Międzynarodowego Komitetu Konsultatywnego ogłoszono 13 plenarnych wykładów jednogodzinnych (z 16 planowanych). Ponadto zaproszono 136 matematyków z całego świata do wygłoszenia 45 minutowych wykładów sekcyjnych, ogłoszono 114 wykładów sekcyjnych. Obrady odbywały się w 19 następujących sekcjach:

- 1 Logika matematyczna i podstawy matematyki (25),
- 2 Algebra (69),
- 3 Teoria liczb (32),
- 4 Geometria (52),
- 5 Topologia (52),
- 6 Geometria algebraiczna (17),
- 7 Analiza zespolona (43),
- 8 Grupy Liego i reprezentacje (7),
- 9 Rzeczywista i funkcjonalna analiza (130),
- 10 Prawdopodobieństwo i statystyka matematyczna (80),
- 11 Równania różniczkowe cząstkowe (60),
- 12 Równania różniczkowe cząstkowe i układy dynamiczne (72),
- 13 Fizyka matematyczna i mechanika (48),
- 14 Sterowanie i optymalizacja (43),
- 15 Metody numeryczne (53),
- 16 Kombinatoryka i programowanie matematyczne (27),
- 17 Komputery i nauki informatyczne (16),
- 18 Nowe zastosowania matematyki (12),
- 19 Historia i oświata (24).

W nawiasach podalem liczby zgłoszonych referatów 15 minutowych w sekcjach. Do wygłoszenia takiego referatu upoważniony był każdy uczestnik Kongresu, który opłacił wpisowe, bez żadnej selekcji. Z powyższego zestawienia widać, że w matematyce światowej istnieje znacznie większa tendencja niż u nas uprawiania matematyki stosowanej. Prace z mechaniki, lub na jej pograniczu można było spotkać nie tylko w sekcji 13, ale również w sekcjach 11, 12, 14, 15, 18 oraz 19. Wykład plenarny pt. „Osobliwości układów promieniowych” wygłosił W. I. Arnold, był to wykład zamykający obrady merytoryczne Kongresu. Interesujące mechaników wykłady sekcyjne wygłosili między innymi:

- O. Ładyżenskaja „O symetrycznych rozwiązaniach wariacyjnych zagadnień teorii pola”,
- J. M. Ball „Konfiguracje z minimum energii w nieliniowej teorii sprężystości”,
- J. B. Serrin „Struktura praw termodynamiki”,
- L. A. Caffarelli „O geometrycznie związanych zagadnieniach wariacyjnych”,
- L. A. Tachtajan „Całkowalne modele w klasycznej i kwantowej teorii pola”,
- M. Aizenman „Stochastyczna geometria w kwantowej teorii pola i w mechanice statystycznej”.

Znaczące były referaty kolegów radzieckich wygłoszone w ramach sekcji 13, doliczyłem się zaledwie 5 referatów polskich z mechaniki. Komunikat B. Skalmierskiego „O teorii budowy skrzypiec” znalazł się w sekcji 18 — Nowe zastosowania matematyki. Odniosłem wrażenie, że Kongres nie został uwzględniony w planach uczestnictwa przez wiele naszych kolegów pracujących w dziedzinie metod matematycz-

nych w mechanice. Nawet termin Konferencji Mechaniki Ciała Stałego zachodził na termin trwania Kongresu.

Abstrakty komunikatów zostały wydane techniką powielaczową w liczbie 400 egzemplarzy. Sprawozdania z Kongresu zawierające referaty generalne i sekcyjne zostaną wydane drukiem w formie książkowej. Zmiany i wiadomości były podawane uczestnikom Kongresu w postaci powielanych biuletynów (było ich 8). Poczta Polska wydała serię znaczków z polskimi matematykami (S. Zaremba, W. Sierpiński, Z. Janiszewski i S. Banach) oraz oddzielnie znaczek z T. Banachiewiczem i znaczek upamiętniający złamanie kodu Enigmy przez polskich matematyków. Miesięcznik „Delta” wydał numer 7, 1983 w języku angielskim. Wydawnictwo Springer-Verlag wydało efektowny plakat przedstawiający zdjęcia i krótkie charakterystyki naszych najwybitniejszych matematyków. Można było również kupić „Księgę Szkołą” związaną z lwowską szkołą matematyczną okresu międzywojennego, wydaną w języku angielskim, niestety tylko za pieniądze w walucie „twardej”.

Oprócz planowanych obrad Kongresu odbyły się równoległe sympozjum i seminaria ICMI (Międzynarodowa Komisja Nauczania Matematyki), zorganizowano kilkanaście seminariów spontanicznych, ogłaszanych w Biuletynach.

Odbył się bankiet wydany przez Prezesa PAN w salach Urzędu Rady Ministrów. Dla uczestników Kongresu wystąpił zespół „Śląsk”, odbyły się dwa recitale skrzypcowe w wykonaniu A. Błaszczaka. Piknik w sobotę i w niedzielę połączony był z prezentacją wesela w stylu krakowskim i pokazem koni. W czasie trwania Kongresu i po nim „Orbis” oferował wycieczki po Warszawie, okolicy i po Polsce.

Zbigniew Olesiak

V NATIONAL AND II INTERNATIONAL MEETING ON COMPOSITE MATERIALS

20 - 22 kwietnia 1983 r., Mediolan

W konferencji brało udział ogółem 145 uczestników w tym 28 z pozostałych krajów europejskich, Związku Radzieckiego, Kanady, Stanów Zjednoczonych oraz Argentyny. Wygłoszono ogółem 40 komunikatów. Materiały konferencyjne zostały wydane w formie kserokopii maszynopisów prac złożonych przez autorów. Organizatorami konferencji były: Centro Materiali Compositi oraz Associazione Meridionale di Meccanica. Obowiązki przewodniczącego sprawował prof. Ignazio Crivelli Visconti z Uniwersytetu Neapolitańskiego.

Konferencja miała charakter raczej techniczno technologiczny. Większość doniesień dotyczyła zastosowań (11 prac), właściwości kompozytów (11 prac), technologii produkcji (7 prac) oraz nowych materiałów kompozytowych (4 prace). Z tego zakresu na podkreślenie zasługują doniesienia dotyczące rozmaitych specjalistycznych zastosowań materiałów kompozytowych w różnych dziedzinach przemysłu jak również prace relacjonujące postępy technologii kierunkowej krystalizacji stopów eutektycznych.

Prace poświęcone mechanice kompozytów i technice badań eksperymentalnych miały stosunkowo niewielki udział w konferencji (7 prac oraz 4 prace odpowiednio). W tej grupie tematycznej przeważały problemy mechaniki zniszczenia i zastosowań termografii do badania stanu naprężenia materiałów kompozytowych.

W. Barański

KONFERENCJA PROBLEMOWA MECHANIKA MATERIAŁÓW KOMPOZYTOWYCH

22 - 24.09.1983 r., Konopnica

Głównym celem Konferencji zorganizowanej z inicjatywy Sekcji Mechaniki Ciała Stałego Komitetu Mechaniki PAN oraz Instytutu Inżynierii Budowlanej Politechniki Łódzkiej była wymiana poglądów

specjalistów zajmujących się mechaniką materiałów kompozytowych na aktualne tendencje rozwoju omawianej problematyki. Wygłoszono sześć referatów przeglądowych relacjonujących najnowsze osiągnięcia strukturalnego i fenomenologicznego ujęcia teorii kompozytów. W ramach ujęcia strukturalnego rozważano przede wszystkim zagadnienia oceny makroskopowych modeli materiałów kompozytowych. Omawiano zarówno metody klasyczne oceny modeli mikroskopowych wynikające z teorii homogenizacji i analizy krzywych dyspersyjnych fal Floquet-Blocha jak i niestandardowe posilujące się w matematycznie rygorystyczny sposób pojęciem wielkości „różnych rzędów”.

Ponadto wygłoszono osiem komunikatów na ogół tematycznie związanych z fenomenologicznym bądź strukturalnym podejściem do mechaniki kompozytów.

XVI SYMPOZJUM „WSPÓŁCZESNE PROBLEMY I METODY MECHANIKI PŁYNÓW”

XVI Sympozjum na temat „Współczesne Problemy i Metody Mechaniki Płynów” odbyło się w dniach 4 - 10 września 1983 roku w Spale koło Tomaszowa Mazowieckiego na terenie ośrodka wypoczynkowego FWP. Sympozjum to było kolejnym ze spotkań organizowanych co dwa lata przez Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie, a jego współprzewodniczącymi byli prof. dr Władysław Fiszdon i prof. dr Henryk Zorski.

W XVI Sympozjum wzięło udział około 180 pracowników naukowych z 21 krajów, w tym z Polski około 110 osób. Najliczniejsze delegacje zagraniczne przybyły z RFN (14 osób), NRD, W. Brytanii i USA (po 7 osób), oraz Włoch (6 osób), Holandii (5 osób) i ZSRR (4 osoby). Przybyli też uczestnicy z tak odległych krajów jak Chińska Republika Ludowa i Japonia.

Zgodnie z ustaloną tradycją Sympozjum nie miało charakteru specjalistycznego, lecz stanowiło szeroki przegląd różnych kierunków badawczych uprawianych w ramach Mechaniki Płynów. Oficjalnym językiem obrad był język angielski.

W programie Sympozjum znalazło się 10 następujących jednogodzinnych referatów przeglądowych, wygłoszonych na zaproszenie Komitetu Organizacyjnego Sympozjum przez wybitnych specjalistów z różnych krajów:

1. G. I. Barenblatt (ZSRR) — Turbulence phenomena in stratified fluids,
2. W. Ebeling (NRD) — Fokker-Planck equations for non-linear kinetic processes and their solution,
3. B. U. Felderhof (RFN) — Electrodynamics of ions and molecules in polar fluids,
4. J. Hinch (W. Brytania) — Problems of fluid mechanics in the oil industry,
5. D. Homentcovschi (Rumunia) — New results in Oseen flow,
6. N. G. van Kampen (Holandia) — Fluctuations in hydrodynamics,
7. K. Kirchgässner (RFN) — Nonlinear waves and homoclinic bifurcations,
8. W. Schneider (Austria) — Asymptotic analysis of jet flows,
9. L. van Wijngarden (Holandia) — On multiple solutions and other phenomena in rotating fluids,
10. T. Y. Wu (USA) — Three dimensional nonlinear long waves in water, their generation and propagation.

Ponadto zaprezentowano 89 komunikatów, z których 61 zostało wygłoszonych na 13 sesjach problemowych, pozostałe 28 przedstawiono na dwóch sekcjach plakatowych. Czas przeznaczony na komunikat wynosił 20 minut, łącznie z dyskusją, zaś czas trwania sesji plakatowej wynosił 2 godziny. Największa liczba komunikatów dotyczyła przepływów mieszanin wielofazowych i cieczy lepkich (po 15) oraz przepływów ściśliwych (14). W dalszej kolejności była dynamika gazów rozrzedzonych (11), turbulencja (10) oraz stabilność hydrodynamiczna, przepływy cieczy nienewtonowskich i inne kierunki.

Atrakcyjne położenie Spały i plenerowe warunki w jakich odbywało się Sympozjum umożliwiły stworzenie wśród uczestników swobodnej nieformalnej atmosfery, ułatwiającej wzajemne kontakty i dyskusje poza oficjalnym programem Sympozjum. Urozmaiceniem Sympozjum były imprezy towarzyskie i turystyczne, z których można tu wymienić wycieczkę do Częstochowy i zwiedzenie klasztoru na Jasnej Górze.

Dorobek naukowy Sympozjum zawarty zostanie w pokonferencyjnych wydawnictwach, przy czym referaty przeglądowe będą opublikowane w XII tomie „Fluid Dynamics Transactions”, zaś komunikaty w oddzielnym zeszycie „Archives of Mechanics”.

A. Zachara

XXIV POLSKA KONFERENCJA MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO Jachranka, 22 - 27 sierpnia 1983 r.

Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego ma już wieloletnią tradycję, która wskazuje, że impreza ta stale cieszy się uznaniem w środowisku mechaników w kraju i za granicą. Podstawowym zadaniem Konferencji jest stworzenie właściwych warunków dla wymiany doświadczeń między specjalistami w dziedzinie mechaniki ciała stałego i teorii konstrukcji.

Obowiązki organizatora teoretycznej Konferencji przypadły w udziale Zakładowi Teorii Konstrukcji IPPT, który w tym zakresie otrzymał wsparcie Komitetu Mechaniki PAN. Obrady 24 Konferencji odbywały się w okresie od 22 do 27 sierpnia 1983 r. w Ośrodku Szkoleniowo-Wypoczynkowym PKS „Warszawianka”, położonym nad Zalewem Zegrzyńskim, w Jachrance k/Warszawy.

W Konferencji uczestniczyły 222 osoby, w tym 43 naukowców zagranicznych reprezentujących następujące kraje: Chiny, Czechosłowacja, Dania, Finlandia, Francja, Indie, Japonia, Kanada, NRD, RFN, Szwecja, Turcja, Wielka Brytania, Wietnam, Związek Radziecki. Fakt ten potwierdza słuszność podjętej dziesięć lat temu przez IUTAM decyzji o formalnym przyznaniu Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego statusu międzynarodowej imprezy naukowej.

Wydaje się, że dwuletnia przerwa, jaka dzieliła poprzednią i obecną konferencję była przyczyną nie tylko wzrostu liczby zgłoszonych referatów, lecz także zauważalnego podniesienia średniego poziomu prezentowanych w czasie obrad prac.

Zwiększona liczba prac oraz konieczność skrócenia (z uwagi na koszty) do sześciu dni okresu trwania Konferencji stały się przyczyną wprowadzenia przez organizatorów, po raz pierwszy w historii Konferencji, sesji plakatowej. Ten nowy element organizacyjny mimo początkowych zastrzeżeń, uzyskał w końcu wśród uczestników bardzo pozytywną ocenę. Prawdopodobnie wpłynęła na nią specyfika tego rodzaju sesji, stwarzająca idealne warunki dla bezpośredniego kontaktu między autorem pracy i osobą faktycznie zainteresowaną daną pracą. Takich warunków nie może zapewnić wygłaszanie referatu przed gronem słuchaczy zgromadzonych w zaciemnionej zwykle sali. W przypadku tegorocznej Konferencji pewien wpływ na tę ocenę wywarła dodatkowo atrakcyjność pomieszczenia, jakie przeznaczono na sesję plakatową.

Na Konferencji przedstawiono 168 prac, w tym 60 na sesji plakatowej. Wygłoszenie tak znacznej liczby referatów, było możliwe dzięki wprowadzeniu dwóch równocześnie obradujących sesji, dla których wspólne były jedynie referaty generalne.

Problematykę Konferencji podzielono na siedem grup tematycznych, reprezentowanych przez następujące hasła:

- plastyczność, pełzanie, zniszczenie
- beton, skały, ośrodki rozdrobnione
- mechanika niesprężystych konstrukcji
- mechanika sprężystych i lepkosprężystych konstrukcji, optymalizacja
- fale
- pola sprzężone, ośrodki mikropolarne
- fizyczne i matematyczne aspekty badań ciała stałego.

Wzorem ubiegłych lat organizatorzy zaprosili wybitnych specjalistów z kraju i zagranicy, reprezentujących różne gałęzie mechaniki ciała stałego, celem wygłoszenia wykładów generalnych. Zadaniem tego rodzaju wykładów jest zwięzle przedstawienie aktualnego stanu badań w danej dziedzinie i wskazanie głównych tendencji rozwojowych. W czasie obrad 24 Konferencji wygłoszono 16 wykładów generalnych. Zwięzłą informację o treści tych wykładów zawiera następujące zestawienie:

- H. D. BUT — Prawa zachowania i dysypacja energii w mechanice zniszczenia.
- D. GROSS — Koncepcje mechaniki zniszczenia.
- T. INOUE, ZHI-GANG WANG — Prawo konstytutywne termosprężystości uwzględniające przejście fazowe niezbędne w analizie procesów hartowania i spawania.
- W. JOHNSON — Plastyczność stosowana: zginanie płyty ze sprężynowaniem, formowanie proszków i modelowanie penetracji wysokoprędkościowej.
- Th. LEHMANN — Rozważania na temat praw konstytutywnych w termoplastyczności.
- G. A. MAUGIN — Utrata symetrii w mechanice ciała stałego.
- Z. MRÓZ — Postacie statystycznego i dynamicznego zniszczenia konstrukcji z materiałów kruchoplastycznych.
- N. G. OHLSON — Propagacja pęknięcia zmęczeniowego w przypadku złożonych postaci obciążenia.
- P. PERZYNA — O modelowaniu konstytutywnym procesów płynięcia plastycznego, niestateczności i zniszczenia w dysypatywnych ciałach stałych.
- A. R. S. PONTER — Odkształcenie konstrukcji pod wpływem ciągłych zmian temperatury.
- D. ROGULA — Nielasyczne, materialne ośrodki ciągłe.
- J. N. SZEWCZENKO — Model strukturalny ciała stałego dla złożonych, nieizotermicznych procesów obciążenia wzdłuż dowolnych trajektorii.
- B. STORAKERS — O zmianie obciążeń krytycznych, pierwszego rzędu, spowodowanej przez zaburzenie geometrii konstrukcji przy wyboczeniu bifurkacyjnym.
- W. SZCZEPAŃSKI — O eksperymentalnym modelowaniu wzajemnego oddziaływania efektów wzmocnienia i osłabienia w metalach.
- V. TVERGAARD — Przełom ciągliwy i efekty lokalizacji.
- M. ŻYCZKOWSKI, T. KURTYKA — Rozwój matematycznego opisu anizotropowego wzmocnienia plastycznego.

Z zamieszczonych tu informacji wynika, że problematyka tegorocznej Konferencji obejmowała szeroki krąg zagadnień, wśród których znalazły się zarówno zagadnienia podstawowe, wymagające operowania zaawansowanym aparatem matematycznym, jak też kwestie, których rozstrzygnięcia oczekuje codzienna praktyka inżynierska. Znaczna część spośród prezentowanych prac dotyczyła badania zjawisk sprzężonych, w których obok efektów mechanicznych uwzględnia się ich wzajemne oddziaływanie z polem temperatury lub polem elektromagnetycznym. Fakt ten odzwierciedla tendencje obserwowane w rozwoju współczesnej mechaniki.

Na podkreślenie zasługuje atmosfera rzeczowej dyskusji naukowej, jaka towarzyszyła obradom Konferencji. Dyskusja nie ograniczała się do czasu przewidzianego programem i często kontynuowano ją w czasie wolnym od obrad. W ten sposób można było uniknąć zakłóceń w realizacji bardzo napiętego programu. Nawiązując do samego programu, warto zastanowić się, czy czas 20 min., jaki przeznaczono w tym roku na wygłoszenie referatu i dyskusję jest okresem wystarczającym do tego celu?

Miłym akcentem tegorocznych obrad był akt wręczenia Dyplomu Honorowego Członka PTMTiS profesorowi Th. Lehmannowi przez przewodniczącego Towarzystwa profesora Z. Olesiaka.

Program imprez towarzyszących Konferencji był w tym roku skromny i ograniczył się do parogodzinnej wycieczki, której celem było zwiedzanie Warszawy.

Korespondencja od uczestników Konferencji, napływająca do Komitetu Organizacyjnego po jej zakończeniu oraz wypowiedzi, z jakimi spotykali się organizatorzy w okresie trwania jej obrad, upoważniają do wyciągnięcia wniosku, że spełniła ona należycie wyznaczoną jej rolę.

Krzysztof Podolak

INSTRUKCJE DLA AUTORÓW

Ogólne

W *Mechanice Teoretycznej i Stosowanej* drukowane są prace przeglądowe oraz oryginalne teoretyczne i doświadczalne z zakresu mechaniki ciała stałego oraz cieczy i gazów. Publikujemy również dyskusję naukową oraz polemikę dotyczącą prac z mechaniki, które ukazały się w *MTiS* lub w innych czasopismach naukowych.

W *Biuletynie Informacyjnym* drukujemy sprawozdania z konferencji naukowych z zakresu mechaniki w kraju i za granicą oraz z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Praca może być złożona do druku w *MTiS* pod warunkiem jej nieopublikowania w innym czasopiśmie.

Drukujemy w języku polskim oraz na życzenie autorów w języku angielskim pod warunkiem złożenia pracy w tym języku.

Prace należy nadsyłać na adres Redakcji bądź jednego z redaktorów, w dwóch egzemplarzach (oryginał+kopia).

Praca złożona do druku podlega recenzji.

Wszelkie zmiany (poprawki autorskie) po zakwalifikowaniu artykułu do druku i przekazaniu go do drukarni mogą być dokonane tylko w czasie 1 korekty (na koszt autora).

Po opublikowaniu autorzy otrzymują 25 egzemplarzy odbitek swojego artykułu.

Szczegółowe

- Prace składane do publikacji w *MTiS* powinny zawierać (wg. kolejności)
 - Tytuł
 - Imię, Nazwisko z podaniem miejsca pracy
 - Abstrakt (w języku polskim)
 - Właściwą pracę
 - Spis literatury
 - Streszczenia w języku
 - praca w języku polskim — rosyjskim w naszym piśmie i angielskim
 - praca w języku angielskim — polskim i rosyjskim.
- Tekst powinien być napisany po jednej stronie (nie na papierze kredowym) z zachowaniem podwójnych odstępów i obustronnych marginesów — z lewej 3 cm, z prawej 1 cm.
- Wzory należy wpisywać czytelnie, w kolorze czarnym, z zachowaniem numeracji po stronie prawej (należy zwrócić szczególną uwagę na rozróżnienie 1 oraz litery l, zera i litery o oraz literę q i p).
- Życzenia autorów dotyczące formy graficznej pracy w tym kroju czcionki, liter greckich itp. powinny być dołączone na osobnej kartce, bądź na marginesie (ołówkiem).
- Tablice występujące w tekście należy dołączyć na oddzielnych kartkach (jedna na stronie).
- Podpisy pod rysunkami powinny być wyszczególnione oddzielone, a nie pod rysunkami.
- Prosimy o sporządzanie wykazu literatury w sposób następujący: W. Nowacki, *Teoria Sprężystości*, Warszawa PWN, 1970.
- Odnośniki należy numerować kolejno w całej pracy, a nie wg strony.
- Obowiązuje stosowanie układu jednostek SI.

- Гибридный метод конечного элемента в контактных задачах
Hybrid finite element method in contact problems
- W. BŁAJER, J. MARYNIAK, Uproszczona analiza ustalonego korkociągu samolotu 151
Упрощенный анализ установившегося штопора самолета,
Simplified study of airplane steady spin
- W. BŁAJER, J. MARYNIAK, Ustalony korkociąg samolotu. Warunki równowagi 159
Установившейся штопор самолета, условия равновесия
Equilibrium conditions of airplane steady spin
- K. SZABELSKI, Drgania układu samowzbudnego z wymuszeniem parametrycznym i nieliniową 171
sprężystością
Колебания самовозбуждающей системы с параметрическим возбуждением и нелинейной
упругостью
The vibrations of the self-excited system with the parametric extortion and non-linear elasticity
- B. ВОСНЕНЕК, А. ГАЛЕВСКИ, Jednomodalna i dwumodalna optymalizacja ściskanych prętów drga- 185
jących,
Одномодельная и бимодальная оптимализация колеблющегося сжимаемого стержня
Single and bimodel optimization of vibrating compressed bar
- B. ВОСНЕНЕК, Optymalne kształtowanie modelu łuku o osi ściśliwej 187
Оптимизация арки со сжимаемой осью
Optimization of an arc with compressible axis
- R. ŚWITKA, B. HUSIAR, Dyskretna analiza modeli reologicznych 209
Дискретный анализ реологических моделей
Discrete analysis of reological models
- M. КМЕСИК, Przyrostowe równania nieliniowej teorii płyt z naprężeniami i ugięciami początkowy- 235
mi w zakresie sprężysto-plastycznym materiału
Инкрементные уравнения нелинейной теории пластинок с начальными напряжениями
и прогибами в упругопластической области
Incremental equations of nonlinear theory of plates with initial deflections and stresses in el-
astic-plastic range
- Z. ŚLÓDERWACH, T. SAWICKI, Wpływ parametru wzmocnienia na zachowanie się grubościennej sprę- 255
żysto-plastycznej kuli obciążonej gradientem temperatury
Влияние параметра упрочнения на поведение толстостенного упруго-пластического шара
под нагрузкой температуры
Elastic-plastic behaviour of thick-walled sphere of work — hardening material subject to a radial
temperature gradient
- B. LESNOWICZ, Z. RYKARSKI, Optymalizacja przy jawnej zależności równań stanu od wartości brzego- 271
wych zmiennych stanu
Оптимализация при зависимости уравнений состояния от краевых значений перемен-
ных состояния
Optimization for a dependence between state equations and boundary values of state variable
- B. ROGOWSKI, A transversely isotropic layer pressed onto a rigid base with a protrusion or pit 279
Трансверсально-изотропный слой прижимаемый к жесткому основанию с выступом или
впадиной
Warstwa poprzecznie izotropowa dociskana do sztywnego podłoża z wzniesieniem albo za-
głębieniem
- M. SARNA, Fuzzy sets in adequacy description of mathematical models of mechanical systems 229
Размытые множества в описании адекватности математических моделей технических
механических систем
Zbiory rozmyte w opisie adekwatności modeli matematycznych technicznych systemów me-
chanicznych

Cena zł 160,—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 320,—
półrocznie zł 160,—

Prenumeratę na kraj przyjmuje się:

- do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Instytucje i zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11, w terminach podanych dla prenumeraty krajowej. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland. Our bankers: BANK HANDLOWY WARSZAWA S.A.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa p. 309).

Mech. Teor. T. 22, z. 1—2, s. 1—320, Warszawa 1984, Indeks 36523
