

**P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J**

PL ISSN 0079-3701

**M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A**

**KWARTALNIK
TOM 21 · ZESZYT 2-3**

**WARSZAWA 1983
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E**

W następnym numerze ukażą się prace:

Od Redakcji

От. Редколлегии

From the Editors

- Z. OLESIAK, Utworzenie i początki działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej
Основание и первые года деятельности Польского Общества по Теоретической и прикладной Механике
Foundation and first years of activity of the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics
- List od profesora J. Mutermilcha
Письмо от профессора Е. Мутермильха
Letter from Professor J. Mutermilch
- U. BRZOSKA, Refleksje nad przyszłością PTMTS
Рефлексии над будущем Общества
Reflections upon future of the Society
- W. NOWACKI, Powstanie i działalność Międzynarodowego Centrum Nauk Mechanicznych w Udine (CISM)
Основание и деятельность Международного Центра Механических Наук в Удине (ЧИСМ)
Foundation and activity of the International Centre for the Mechanical Sciences in Udine (CISM)
- Z. KĄCZKOWSKI, O stosowaniu nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych
О применении не-прямоугольных временно-пространственных элементов
On applications of non-rectangular space-time elements
- M. DIETRICH, O modelowaniu w budowie maszyn
Моделирование в строительстве машин
Modelling in machine construction
- B. RADZISZEWSKI, Mechanika Teoretyczna — aktualne kierunki rozwoju
Теоретическая механика — современные направления в развитии
Theoretical mechanics — contemporary trends in development
- K. SOVCZYK, Metody stochastyczne w mechanice; stan i tendencje rozwojowe
Стохастические методы в механике — состояние и тенденции в развитии
Stochastical methods in mechanics — state and trends of development
- J. STURNICKI, Mechanika doświadczalna — problemy i kierunki rozwoju
Экспериментальная механика проблемы и направления развития
Experimental mechanics — problems and trends

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

TOM 21 ZESZYT 2-3

WARSZAWA 1983

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY
MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK—REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR
ANDRZEJ SZANIAWSKI—REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR
MONIKA WĄGROWSKA—REDAKTOR,
MAŁGORZATA JABŁOŃSKA—SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa pokój 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 530. Ark. wydawniczych 29. Ark. drukarskich 25. Papier druk. b. sat. kl. III, 71 g. 70 × 100.
Oddano do składania 19.VIII.1983 r. Druk ukończono w sierpniu 1984 r. Zam. 4953/12/83 Cena 71 160.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

PROFESOR CZESŁAW EIMER

WSPOMNIENIE POŚMIERTNE

Droga działalności naukowej Profesora Czesława Jerzego Alfreda Eimera była konsekwentnym zdobywaniem coraz szerszego horyzontu badawczego, bez sprzeniewierzenia się głównej dziedzinie jego zainteresowań, którą była nowoczesna teoria konstrukcji betonowych. Szczególną predylekcją darzył Profesor Eimer konstrukcje sprężone, w których widział przyszłość wielkich dzieł inżynierskich.

Studia na Wydziale Inżynierii Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie stworzyły podstawy dla jego rozwoju naukowego dzięki zdobytej wiedzy, ale również dzięki nawiązanemu kontaktowi z Profesorem Wacławem Olszakiem, z którym następnie wspólnie opracowali wiele ważnych prac naukowych.

Na Politechnice Krakowskiej w r. 1951 Profesor Eimer doktoryzuje się przedstawiając rozprawę pt.: "Elementy wstępnie sprężone pod działaniem sił podłużnych".

Od następnego roku przez 30 lat pracuje w Zakładzie Mechaniki Ośrodków Ciągłych Instytutu Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk. Od 1954 r. jest kierownikiem pracowni Teorii Konstrukcji Sprężonych, później pracowni Reologii Konstrukcji. Profesorem nadzwyczajnym zostaje w r. 1962, a 7 lat później profesorem zwyczajnym.

W problematyce konstrukcji wstępnie sprężonych dostrzegł Profesor Eimer utratę stateczności jako jeden z głównych czynników zagrażających trwałości tych, tak przecież oszczędnych materiałowo budowli. Spośród 19 prac dotyczących konstrukcji sprężonych 6 omawiało stateczność, a pozostałe głównie metodykę projektowania i dwa ważkie nowe rozwiązania techniczne, jak nagrodzony projekt sprężonej obudowy tuneli kolei podziemnej, czy też metodę ciągłej produkcji strunobetonu. Udział Profesora w opracowaniu dwu dużych monografii [1, 2], których był współautorem, był bardzo znaczny, tak w zakresie doboru i przedstawienia tematyki jak też opracowania i redakcji tekstu.

Już w latach 50-tych podejmuje Profesor Eimer tematykę reologii konstrukcji. Konstrukcje sprężone wystawione na działanie sił sprężających w całym okresie swego technicznego życia, odkształcają się powoli przez, jak mówimy, pełzanie, toteż zachodzące procesy reologiczne, jako ważkie ograniczenie możliwości realizacyjnych, stały się przedmiotem 9-ciu prac Profesora. Tematyka ta weszła również do wspomnianych monografii. Do grupy omawianych prac można jeszcze dołączyć artykuły z dziedziny nośności gra-

nicznej, takie jak: problemy poślizgu zbrojenia, czy wytrzymałości strefy zakotwienia kabli przenoszących wielkie siły sprężające. O ważkiej roli prac Profesora niech świadczy fakt powołania go na członka zespołu autorskiego opracowującego normę [3], gdzie znalazły wyraz jego osiągnięcia badawcze.

W latach 60-tych Profesor Eimer podejmuje tematykę ośrodków wielofazowych widząc w niej podstawową dyscyplinę dla opisanego zachowania betonu. Profesor zwraca uwagę na konieczność odmiennego formułowania zagadnień brzegowych (warstwa graniczna) dla takich ośrodków. Kolejno krok za krokiem analizuje w następnych pracach wpływ losowego składu ośrodka na jego zachowanie sprężyste, plastyczne, czy też zjawiska przy uszkodzeniu lub powstaniu spękań. Ta tematyka Profesora miała charakter głównie metodologiczny. W przeciwieństwie do lat wcześniejszych odchodzi tu Profesor od inżynierskich liczb i norm, co niektórzy recenzenci przyjmowali ze zdziwieniem. Była to świadoma decyzja, bowiem w światowej literaturze inżynierskiej obserwujemy do lat ostatnich i. zapewne jeszcze długo, zalew informacji faktograficznych, dla których ciągle jeszcze brak w pełni organizującej teorii. Nie odpowiadając już bezpośrednio na pytanie — jak projektować? — dążył Profesor do uzyskania odpowiedzi bardziej zasadniczej — jakie rządzą prawa? — wierząc, że na pierwsze pytanie znajdzie się w konsekwencji pełniejsza odpowiedź.

Profesor był członkiem założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, uczestniczył również w pracach Zarządu Głównego Towarzystwa.

W latach 70-tych był również przewodniczącym Polskiej Grupy I.A.B.S.E. (International Association for Bridge and Structural Engineering).

Równoległe z badaniami nad ośrodkami wielofazowymi prowadził Profesor w ostatnim dziesięcioleciu prace nad projektowaniem obudowy bezpieczeństwa reaktora jądrowego. W ramach dużego zespołu realizowaliśmy wspólnie zamierzenie wypracowania metodyki obliczeń statycznych (częściowo i dynamicznych) konstrukcji szkieletowo-powłokowych sprężonych.

W ramach tej współpracy kolejno stworzyliśmy oprogramowanie dla obliczania konstrukcji osiowo-symetrycznych, by w okresie następnym opracować metody obliczeniowe i oprogramowanie dla konstrukcji szkieletowo-powłokowych, jako nie posiadających już symetrii osiowej. Wczesna decyzja, aby stosować w obliczeniach rozwinięcia w szeregi funkcji własnych operatorów różniczkowych pozwoliła na daleko idące zbadanie numerycznej przydatności tych rozwinięć.

Trzeba, analizując tę wieloletnią współpracę wspomnieć, że Profesor Eimer był znakomitym kierownikiem zespołu. Nawyk intensywnej samodzielnej pracy (90 publikacji przez 30 lat) wykonywanej z ogromną starannością, wg z góry nakreślonego precyzyjnego planu, powodował, że potrafił właściwie rozkładać akcenty i, co nie mniej ważne, doceniać również wkład pracy innych członków zespołu. Zespołu tego jedyną więzią był sam Profesor, bowiem ramy organizacyjne były nad wyraz luźne i właściwie mało zobowiązujące. Tym większa była rola osobowości Profesora i jego zdolności integracyjnych. Jego stosunek do ludzi, nacechowany łagodnością i zrozumieniem, nie był pozbawiony elementów wytrwałości i zdolności do wytyczania jasno nakreślonych celów. Był on, trawstując jednego z dawnych myślicieli: „Człowiekiem Pokoju, który nieraz więcej dokona niż Człowiek Namiętności”.

W ostatnim okresie życia Profesor pracował nad monografią, w której zamierzał zawrzeć syntezę swoich przemyśleń nad teorią ośrodków wieloskładnikowych. Niestety śmierć przerwała tę pracę. Zmarł 15 maja 1982 r. w pełni sił twórczych mając zaledwie 60 lat. Część Jego pamięci.

Jacek Mączyński

Ważniejsze publikacje prof. Cz. Elmera

1. *Teoria konstrukcji sprężonych*, t. I - II (z W. Olszakiem, S. Kaufmanem i Z. Bychawskim), s. 1258, PWN, Warszawa 1961.
2. *Konstrukcje sprężone* (z W. Olszakiem i S. Kaufmanem), Budownictwo betonowe t. III, Arkady, Warszawa 1965.
3. *Konstrukcje z betonu sprężonego, obliczenia statyczne i projektowanie*. Polska norma PN-51/B-03320 (współautorzy: T. Kluz, W. Grzegorzewski, Z. Zieliński, W. Olszak, K. Zaleski).
4. *Stan obecny i perspektywy rozwoju teorii konstrukcji sprężonych*, Arch. Inż. Lądowej t. 12, z. 4, s. 539 - 555, 1966.
5. *The boundary effect in elastic multiphase bodies*, Arch. Mech. t. 20, z. 1, s. 87 - 93, 1968.
6. *Teoria ośrodków wielofazowych*, Mech. Teor. i Stos. t. 10, z. 2, s. 243 - 258, 1972.
7. *Tendencje rozwojowe mechaniki konstrukcji inżynierskich* (z Z. Waszczyszynem), Arch. Inż. Lądowej t. 20, z. 1, s. 3 - 22, 1974.
8. *On optimal shell prestressing* (z J. Mączyńskim), J. Struct. Mech. t. 4, z. 3, s. 289 - 305, 1976.
9. *Mechanika kompozytów betonowych w: Sympozjum ITB n.t. Kompozyty betonowe w budownictwie*, wyd. Inst. Techn. Bud. Warszawa 1979.
10. *Bulk constitutive relations for cracked materials*, Arch. Mech. t. 31, z. 4, str. 519 - 532, 1979.

The first of the year was a very dry one, and the crops were much injured. The weather was very hot, and the ground was very hard. The crops were much injured, and the yield was very small. The weather was very hot, and the ground was very hard. The crops were much injured, and the yield was very small.

The second of the year was a very wet one, and the crops were much injured. The weather was very cold, and the ground was very soft. The crops were much injured, and the yield was very small. The weather was very cold, and the ground was very soft. The crops were much injured, and the yield was very small.

The third of the year was a very dry one, and the crops were much injured. The weather was very hot, and the ground was very hard. The crops were much injured, and the yield was very small. The weather was very hot, and the ground was very hard. The crops were much injured, and the yield was very small.

The fourth of the year was a very wet one, and the crops were much injured. The weather was very cold, and the ground was very soft. The crops were much injured, and the yield was very small. The weather was very cold, and the ground was very soft. The crops were much injured, and the yield was very small.

The fifth of the year was a very dry one, and the crops were much injured. The weather was very hot, and the ground was very hard. The crops were much injured, and the yield was very small. The weather was very hot, and the ground was very hard. The crops were much injured, and the yield was very small.

The sixth of the year was a very wet one, and the crops were much injured. The weather was very cold, and the ground was very soft. The crops were much injured, and the yield was very small. The weather was very cold, and the ground was very soft. The crops were much injured, and the yield was very small.

III KONFERENCJA NAUKOWA

„Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowania”

Opole, 11—13 listopada, 1982

Inicjatorem trzeciej ogólnopolskiej konferencji naukowej na temat konstrukcji powłokowych była Sekcja Mechaniki Konstrukcji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, natomiast roli organizatora podjął się Instytut Inżynierii Lądowej Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu. W skład komitetu naukowego weszli: E. Bielewicz, O. Dąbrowski, J. Gołaś, S. Łukasiewicz, Z. Mazurkiewicz, W. Pietraszkiewicz, A. Sawczuk oraz Cz. Woźniak (przewodniczący), natomiast komitet organizacyjny działał pod przewodnictwem J. Gołasia. Nadesłano na konferencję 73 referaty indywidualne z których komitet naukowy wybrał 49 do prezentacji na konferencji. W obradach wzięły udział 102 osoby w tym: 21 osób z Warszawy, 20 z Opola, 16 z Krakowa, 11 z Gdańska, 10 z Wrocławia, 7 z Poznania, po 4 osoby z Łodzi, Gliwic i Mysłowic, 2 osoby z Częstochowy oraz po jednej osobie z Lublina, Bydgoszczy i Tarnowskich Gór. Z pośród uczestników: 78 osób reprezentowało wyższe uczelnie, 14 osób było z instytutów resortowych, biur projektowych oraz z przedsiębiorstwa „Chłodnie Kominowe” w Gliwicach, natomiast 10 uczestników było pracownikami instytutów PAN. Materiały konferencyjne, zawierające teksty wszystkich referatów indywidualnych, zostały opublikowane w osobnym Zeszycie Naukowym WSI w Opolu, Nr 89, seria: Konferencje, Budownictwo z. 18, liczącym 331 stron. Dużą zasługą organizatorów było przekazanie tych materiałów uczestnikom konferencji jeszcze przed rozpoczęciem obrad. W czasie konferencji wygłoszono także następujące referaty problemowe:

1. E. Bielewicz, M. Skowronek: Problemy losowe w teorii powłok,
2. M. Duszek: Powłoki plastyczne z uwzględnieniem stanów granicznych,
3. M. Golczyk: Metody wykonawstwa i montażu żelbetowych monolitycznych i prefabrykowanych konstrukcji powłokowych,
4. M. Kleiber: Numeryczne metody obliczania konstrukcji powłokowych.
5. O. Mateja, J. Gołaś: Przegląd prac ośrodka opolskiego z zakresu mechaniki powłok,
6. Z. Mazurkiewicz, Z. Rychter: Wybrane problemy wieloparametrowych liniowych teorii powłok,
7. Z. Waszczyszyn: Stateczność powłok,
8. M. Życzkowski, J. Krużelski: Problemy optymalizacji w teorii powłok.

W wymienionych referatach przedstawiono współczesny stan badań krajowych i zagranicznych nad teorią i zastosowaniami konstrukcji powłokowych. Prace indywidualne dotyczyły między innymi:

1. Podstaw matematycznych teorii, w tym teorii nieliniowych (7 prac),
2. Zagadnień stateczności (6 prac),
3. Analizy doświadczalnej (5 prac),
4. Projektowania i wykonawstwa (5 prac),
5. Powłok niesprężystych (4 prace),
6. Powłok grubych (4 prace),
7. Powłok siatkowych (4 prace),
8. Metod numerycznych (4 prace),
9. Dynamiki powłok (2 prace).

Z pośród 49 prac indywidualnych zakwalifikowanych na konferencję, Komitet Naukowy przeznaczył 25 prac do wygłoszenia na sesjach plenarnych oraz pozostałe 24 prace do prezentacji na tzw. sesji plakatowej. Do wygłoszenia przeznaczono, między innymi, wszystkie prace dotyczące analizy doświadczalnej, projektowania oraz wykonawstwa konstrukcji powłokowych. W ramach obrad plenarnych dyskutowano również nad pracami nie wygłaszanymi, przy czym podstawą dyskusji były teksty prac opublikowane w materiałach konferencyjnych. Sesja plakatowa umożliwiła natomiast dyskusje w małych grupach przy poszczególnych plakatach przygotowanych uprzednio przez autorów, których prace zostały zakwalifikowane na tą sesję.

W ramach obrad odbyła się również dyskusja okrągłego stołu pod nieco kontrowersyjnym hasłem „Powłoki grube”. Dyskusja miała swobodny przebieg i nie była także wolna od bardzo polemicznych wypowiedzi. Uczestnicy dyskusji zgadzali się raczej z faktem, że pojęcia „powłoka gruba” lub „powłoka cienka” są nieostre (oczywiście gdy mówimy o konstrukcji powłokowej a nie o teoriach powłok), natomiast różne możliwości „rozmywania” tych pojęć w odniesieniu do różnych teorii powłok i zakresu praktycznej stosowalności tych teorii prowadziły do wielu nieporozumień a nawet „utarczek” słownych.

Zdaniem piszącego te słowa, który miał zaszczyt podsumowania całej konferencji, spotkanie w Opolu należy uznać za udane, co jest również dużą zasługą opolskich organizatorów konferencji. Wydaje się, że nie tylko w zakresie teorii oraz metod numerycznych lecz także w zakresie badań eksperymentalnych (wyróżnić tu należy ośrodek opolski) oraz pomysłów realizacyjnych, stan wiedzy w Polsce oraz istniejące tendencje rozwojowe w najogólniej pojętej mechanice powłok nie odbiegają od poziomu światowego. Wydaje się także, że ogólnopolskie konferencje na temat konstrukcji powłokowych powinny być kontynuowane jako wspólne forum dyskusyjne dla inżynierów zajmujących się teorią, eksperymentem, metodami numerycznymi, projektowaniem i realizacją konstrukcji powłokowych a także dla matematyków działających w zakresie teorii i metod numerycznych.

Celem szerszego upowszechnienia polskich prac z teorii i zastosowań konstrukcji powłokowych, redakcja Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej wystąpiła z inicjatywą wydania osobnego zeszytu (w języku angielskim) zawierającego prace z mechaniki powłok prezentowane na konferencji. Zbyt mała liczba prac, które redakcja otrzymała (mimo

przedłużenia czasu potrzebnego na ich przygotowanie) uniemożliwiła niestety ten zamiar. W związku z tym otrzymywane prace będą włączane sukcesywnie do przygotowywanych numerów czasopisma; prace otrzymane w terminie Redakcja umieściła, po przeprowadzeniu zwykłego trybu kwalifikacyjnego (otrzymane prace podlegają recenzowaniu), w tym zeszycie czasopisma.

*Czesław Woźniak**

*) Omawiając konferencję autor wykorzystał materiały sprawozdawcze przygotowane przez J. Gołasia, przewodniczącego Komitetu Organizacyjnego Konferencji, które zostaną opublikowane niezależnie w innym czasopiśmie; za udostępnienie tych materiałów autor bardzo dziękuje.

Received of the Treasurer of the State of New York
the sum of \$1000.00 for the year 1875

John H. ...

Witness my hand and seal of office at Albany, New York, this 1st day of January, 1875

John H. ...
Treasurer of the State of New York

John H. ...

...

...

...

...

...

...

...

WYBRANE PROBLEMY WIELOPARAMETROWYCH LINIOWYCH TEORII POWŁOK SPRĘŻYSTYCH¹⁾

ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ
ZENON RYCHTER

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Zagadnienia liniowej teorii powłok sprężystych należą do tych klasycznych problemów mechaniki, które nadal stanowią przedmiot dość intensywnych badań. Punkt ciężkości rozważań przeniósł się z teorii Kirchhoffa-Love'a na teorie bardziej złożone, które w tej pracy nazywamy teoriami wieloparametrowymi. Obmyślenie tych teorii wynika z potrzeby dokładniejszego opisu takich problemów, dla których dokładność teorii Kirchhoffa-Love'a może być niezadowalająca. Przypomnimy, że teoria Kirchhoffa-Love'a oraz różne jej warianty dobrze aproksymuje stan trójwymiarowy w przypadku powłok cienkich, izotropowych, o gładkiej geometrii i równomiernym obciążeniu. Wymienione ograniczenia można w skrócie zapisać w postaci warunków $h/R \ll 1$, $(h/L)^2 \ll 1$, $(h/d)^2 \ll 1$, $E/E' \ll 1$, $G/G' \ll 1$, których lewe strony są bezwymiarowymi parametrami, zaś h , R , L , d , E , E' , G , G' oznaczają w kolejności grubość powłoki, najmniejszy promień krzywizny środkowej powierzchni powłoki, charakterystyczną długość fali deformacji tej powierzchni, odległość od brzegu (ściślej od miejsca z zaburzoną stanem naprężenia, tj. stanem silnie zmieniającym się na grubości powłoki) do rozważanego punktu powłoki, największy moduł Younga w płaszczyźnie stycznej do powierzchni środkowej i moduł Younga w kierunku poprzecznym oraz moduły ścinania w płaszczyźnie stycznej i normalnej do środkowej powierzchni. Stosunki modułów sprężystych E/E' i G/G' oczywiście nie wyczerpują wszystkich przypadków ogólnej anizotropii, ale charakteryzują często w praktyce spotykany typ anizotropii, w którym właściwości materiału powłoki są różne w kierunku stycznym i normalnym do powierzchni środkowej (np. materiał poprzecznie izotropowy, materiał ortotropowy, materiał warstwowy).

Dokładność teorii Kirchhoffa-Love'a maleje ze wzrostem wymienionych, bezwymiarowych parametrów geometrycznych i materiałowych i może być niezadowalająca w takich ważnych praktycznie zagadnieniach, jak:

— powłoki o średniej grubości ($h/R \sim 0.3$),

¹⁾ Praca była przedmiotem referatu problemowego na III-iej Ogólnopolskiej Konferencji „Konstrukcje Powłokowe. Teoria i Zastosowania”, (Opole, 1982).

- powłoki poddane działaniu obciążenia o dużej zmienności, zagadnienia kontaktowe, powłoki z otworami,
- powłoki o wyraźnej anizotropii — podatne na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne, tj. gdy $G/G' \gg 1$, $E/E' \gg 1$,
(np. powłoki z polimerów lub trójwarstwowe z miękkim wypełnieniem).

Do opisu m.in. takich problemów są stosowane teorie wieloparametrowe, przy czym pod pojęciem parametr rozumiemy przemieszczenie uogólnione, określone na środkowej podstawowej powierzchni powłoki i podwyższające rząd równań różniczkowych teorii.

Wprowadzenie określenia teorii n -parametrowej zezwala na formalne uporządkowanie różnych jej wariantów. Często bowiem różnice pomiędzy wariantami teorii sprowadzają się do odmiennego wywodu równań, przy praktycznie identycznej ich dokładności (np. jak to ma miejsce w teoriach trójparametrowych BUDIANSKY'EGO-SANDERSA-KOITERA [1,2] oraz NAGHDI'EGO-ZUDANSA [3-5]).

Niekiedy równania teorii nie są formułowane wyłącznie za pomocą przemieszczeń uogólnionych, lecz zawierają inne niewiadome, co utrudnia określenie liczby parametrów kinematycznych. W takim przypadku (poza teorią trójparametrową) połowę liczby równej rzędowi równań różniczkowych teorii można uważać za liczbę parametrów tej teorii (np. równania teorii pięcioparametrowych są dziesiątego rzędu, równania teorii sześcioparametrowych mają rząd dwunasty, itd). Teorie trójparametrowe (trzy składowe wektora przemieszczenia powierzchni podstawowej) są opisane równaniami ósmego rzędu.

Ogólne problemy teorii wieloparametrowych można ująć [6] następująco:

- (a) skonstruowanie dla danego przestrzennego zadania teorii sprężystości równań odniesionych do podstawowej powierzchni powłoki i zezwalających na uzyskanie przybliżonej informacji o stanie naprężeń i odkształceń,
- (b) analiza poprawności matematycznej równań teorii, zwłaszcza w zakresie istnienia i jednoznaczności rozwiązania,
- (c) określenie dokładności i zakresu stosowalności teorii powłok,
- (d) poszukiwanie efektywnych metod rozwiązywania równań.

W dalszej części pracy omówimy wieloparametrowe teorie powłok sprężystych w aspekcie powyższych, głównie (a, c, d) problemów.

2. Konstruowanie równań

Wyprowadzenie ogólnych równań teorii powłok jest, przy pominięciu trudnych problemów (b), (c), stosunkowo proste (por. np. [6 - 13]). Generalnie można wyróżnić dwie metody. Jedna polega na wykorzystaniu równań teorii sprężystości ciała trójwymiarowego, druga — zwana bezpośrednią — jest oparta na koncepcji dwuwymiarowej powierzchni sprężystej, o danej liczbie lokalnych stopni swobody. Zaletą metody bezpośredniej (por. np. [6, 14]) jest wyeliminowanie uproszczeń o charakterze analitycznym, a więc otrzymane tak równania można uważać za ścisłe. Wykorzystanie tych równań nie jest jednak możliwe bez ich porównania z równaniami teorii sprężystości w celu ustalenia sensu fizycznego sił wewnętrznych i określenia wielkości współczynników materiałowych (niekiedy są również niezbędne badania doświadczalne). Podobnie kłopotliwa jest [9] analityczna

ocea dokładności teorii otrzymanej metodą bezpośrednią. Zatem wywód równań teorii powłok z równań teorii sprężystości jest korzystniejszy. Ponadto wywód ten można w znacznym stopniu sformalizować wykorzystując aparat teorii aproksymacji funkcji [10, 13, 15, 16], analizę asymptotyczną [17, 18], lub metody mechaniki ośrodków z więzami [12].

Równania teorii pięcio- sześćo- ośmio- i dziewięcioparametrowych są najczęściej wyprowadzane przez uproszczenie równań teorii sprężystości za pomocą założeń (zwanych również [12] więzami modelowymi), dotyczących rozkładu przemieszczeń, odkształceń lub naprężeń na grubości powłoki. Wybór fizycznie odpowiednich założeń jest najtrudniejszym elementem takiego podejścia. Można się tu oprzeć na rozwiązaniach prostych zadań teorii belek, płyt i powłok. Główną przesłanką jest uwzględnienie pomijanych w teorii trójparametrowej efektów skończonej grubości powłoki, tj. podatności powłoki na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne, a często i zmienności metryki jako funkcji współrzędnej u^3 — normalnej do powierzchni środkowej (np. we wszystkich teoriach pięcioparametrowych są uwzględnione symetryczne względem powierzchni $u^3 = 0$ odkształcenia postaciowe w przekrojach poprzecznych, natomiast zmienność metryki na grubości powłoki uwzględniono w teorii REISSNERA-NAGHDI'EGO [19] i AMBARCUMIANA [20] a pominięto w teorii TIMOSZENKI [21, 22]).

Równania teorii o sześciu parametrach kinematycznych można otrzymać rozpatrując ośrodek Cosseratów [6], zakładając jednorodność stanu odkształcenia na grubości powłoki [11] lub postulując liniowy rozkład wektora przemieszczenia jako funkcji współrzędnej u^3 [13, 22 - 24]. Stan odkształcenia ujmuje w tej teorii m.in. niesymetryczną względem środkowej powierzchni, poprzeczną deformację postaciową oraz jednorodną na grubości powłoki poprzeczną deformację normalną. Wśród sił wewnętrznych występują w teorii sześcioparametrowej dwie wielkości nie wpływające na globalną równowagę elementu powłoki, a więc reprezentujące samozrównoważone stany naprężeń, o lokalnym znaczeniu.

W teoriach ośmio- [25 - 29] i dziewięcioparametrowych [30, 31] liczba sił wewnętrznych związanych z samozrównoważonymi stanami naprężeń wzrasta. Ponadto w teoriach tych, w odróżnieniu od teorii trój- pięcio- i sześcioparametrowej, rozkład przemieszczeń stycznych nie jest liniowy na grubości powłoki, a więc przekroje poprzeczne zdeformowanej powłoki nie są płaskie. Taki stan odkształcenia charakteryzuje np. powłoki warstwowe o niewielkiej liczbie warstw.

Konstruowanie równań teorii o przeliczalnej, teoretycznie nieskończonej liczbie parametrów jest oparte na twierdzeniu Weierstrassa o jednostajnym przybliżaniu funkcji ciągłej za pomocą szeregu wielomianów [7, 10, 13, 15, 16] lub na rozwinięciu funkcji w szereg Taylora [7, 32]. Ze względu na zbieżność i stabilność rozwiązań, przy wzroście liczby uwzględnionych parametrów i równań, za najlepsze uznaje się [15] rozwinięcie w szereg wielomianów Legendre'a [13, 15, 16], zaproponowane przez WEKURĘ. Rzadziej są stosowane rozwinięcia w „zwykłe” szeregi potęgowe [6, 10].

Efektywność numeryczną teorii z przeliczalną liczbą parametrów można znacznie zwiększyć uwzględniając fakt, że często są znane naprężenia na powierzchniach licowych powłoki. Zezwala to na skonstruowanie i wykorzystanie w obliczeniach -rozkładów poprzecznych naprężeń stycznych i normalnych, spełniających warunki brzegowe na wspomnianych powierzchniach przy dowolnej, ustalonej liczbie parametrów [10, 16]. Nato-

miast obliczenie tych naprężeń na podstawie związków konstytutywnych wymaga rozwiązania układu równań ze znacznie większą liczbą niewiadomych (por. [15]).

3. Dokładność teorii wieloparametrowych

Określenie dokładności równań teorii powłok, z założenia przybliżonych w stosunku do równań teorii sprężystości, jest trudnym zagadnieniem. Uzyskane dotychczas w tym zakresie wyniki o ogólnym charakterze są w zasadzie ograniczone do teorii trójparametrowej. W przypadku teorii o pięciu i więcej parametrach ocena dokładności jest najczęściej oparta na szczególnych przykładach liczbowych, dla których są znane rozwiązania równań teorii sprężystości. Taka ocena nie może być oczywiście w pełni miarodajna. Pożyteczną byłaby możliwość apriorycznego oszacowania błędu teorii powłok przy danych wartościach niektórych parametrów geometrycznych i materiałowych, np. h/R , h/L , E/E' , G/G' . Opracowanie ogólnego kryterium dającego odpowiedź na tak postawiony problem nie jest jednak możliwe, głównie ze względu na wpływ warunków brzegowych. Jak wiadomo, podstawą uproszczeń stosowanych w teorii powłok jest możliwość wydzielenia w cienkiej, sprężystej powłoce obszaru wewnętrznego i obszaru brzegowego. Podziałowi temu towarzyszy rozbicie stanu S naprężeń i odkształceń na dwa stany: wewnętrzny S_w , występujący w całym obszarze powłoki i opisany funkcjami o prostym przebiegu w kierunku normalnym do środkowej powierzchni oraz na stan brzegowy S_b , panujący w tzw. warstwie brzegowej i opisany funkcjami o dużej na ogół zmienności na grubości powłoki, zanikającymi od jej brzegu w kierunku wnętrza. Najczęściej stan brzegowy jest związany z faktem, że rozwiązanie równań teorii powłok nie spełnia danych warunków na powierzchni brzegowej, prostopadłej do powierzchni środkowej. Stan brzegowy występuje również w obszarach gwałtownej zmienności obciążenia, geometrii lub modułów sprężystych powłoki. Przykładem S_b jest tzw. zgięciowy efekt brzegowy występujący wtedy, gdy rozwiązanie równań teorii bezmomentowej nie spełnia warunków brzegowych teorii momentowej. Istnienie efektów brzegowych „wyższego rzędu” jest dodatkowo uwarunkowane podatnością powłoki na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne.

W cienkiej, sprężystej powłoce S_w dominuje ($S_w \gg S_b$) na ogół w obszarze wewnętrznym, natomiast intensywność S_b jest duża w obszarze brzegowym. Wniosek powyższy dotyczy m.in. ugięcia środkowej powierzchni powłoki i wypadkowych naprężeń. W rozkładzie naprężeń na grubości powłoki wpływ stanu brzegowego może przewyższać wpływ stanu wewnętrznego [33]. Należy też pamiętać, że ze wzrostem niektórych parametrów, np. h/R , G/G' , E/E' intensywność i zasięg przenikania efektów brzegowych znacznie wzrasta, aż do osiągnięcia stanu, w którym efekty te obejmują całą powłokę. Takie stany brzegowe, zwane zdegenerowanymi, zostały ostatnio zbadane dla powłoki sferycznej, z materiału poprzecznie izotropowego [34] oraz dla powłok o dowolnym kształcie, z materiału ortotropowego [35]. Wykazano m.in. [35], że zdegenerowany efekt brzegowy może powstać, gdy $G/G' \sim (h/R)^2$. Z przytoczonej relacji wynika, że w powłoce stosunkowo cienkiej (np. $h/R \sim 0.1$) możliwość wystąpienia zdegenerowanego efektu brzegowego jest niewielka, gdyż podatność powłoki na poprzeczne odkształcenia postaciowe musiałaby być duża ($G'/G \sim 0.01$), co w praktyce się nie zdarza. W powłoce o średniej grubości

(np. $h/R \sim 0.3$) stan zdegenerowany może się pojawić już przy stosunkowo słabej anizotropii ($G'/G \sim 0.1$). Oczywiście w takim przypadku rozwiązanie uzyskane na podstawie równań zagadnienia wewnętrznego teorii powłok może być w całym obszarze powłoki nieadekwatne do stanu rzeczywistego.

Z powyższych rozważań wynika generalny wniosek, że w zagadnieniach, w których zastosowanie teorii wieloparametrowej jest celowe (np. powłoki o średniej grubości), wpływ efektów brzegowych nie może być na ogół pominięty w obszarze wewnętrznym, co w znacznej mierze komplikuje problem oceny dokładności teorii wieloparametrowych. Zasadnicza trudność jest też związana z oszacowaniem niektórych wielkości brzegowych. Na krawędzi środkowej powierzchni powłoki można zadać w naturalny sposób tylko pięć wielkości (np. trzy składowe wektora siły i dwie składowe wektora momentu). Określenie dodatkowych wielkości, występujących w teoriach o sześciu i więcej parametrach, nie jest możliwe bez podania rozkładu naprężeń lub przemieszczeń na grubości powłoki, co w ogólnym przypadku wymaga rozważenia sprężystej współpracy powłoki z konstrukcją podporową [36]. Omawiana trudność nie dotyczy powłok zamkniętych, nieograniczonych, powłok o brzegu swobodnym lub zamocowanym w niepodatnej podporze.

Dokładność teorii wieloparametrowych można określić za pomocą znanych metod matematycznych. Przypomnijmy, że błąd można odnosić do dokładności równań lub do dokładności rozwiązań. Poza tym można porównywać ze sobą różne teorie powłok, albo odnosić teorię powłok do teorii sprężystości. Oszacowanie błędu może być aprioryczne, lub oparte na znajomości rozwiązania równań teorii powłok. Ponadto błąd można oceniać w sensie globalnym (np. błąd średni kwadratowy — w normie L_2) lub punktowo. Z oceną błędu teorii powłok wiąże się ściśle wymaganie spójności jej równań, oznaczające konieczność jednakowego traktowania przy uproszczeniach wszystkich członów tego samego rzędu w danym równaniu.

Systematyczne przejście od równań teorii sprężystości do równań teorii powłok może być oparte na metodzie asymptotycznej, zezwalającej na ocenę błędu w sensie punktowym [18], gdy korzystamy z równań różniczkowych teorii sprężystości i w sensie globalnym, co ma miejsce w metodzie wariacyjno-asymptotycznej, polegającej na aproksymacji funkcjonalów teorii sprężystości. W literaturze są najczęściej podawane równania pierwszego przybliżenia asymptotycznego. Ostatnio otrzymano [18] dla izotropowych powłok w stanie obrotowosymetrycznym rozwinięcie asymptotyczne gęstości energii sprężystej, zawierające m.in. drugie przybliżenie. Omawiane rozwinięcie jest odmienne dla trzech następujących przypadków: powłok o przeciętnej krzywiźnie i długości, powłok o słabym zakrzywieniu i przeciętnej długości oraz dla długich powłok o łagodnym zakrzywieniu.

Zagadnienie dokładności asymptotycznej zredukowanych warunków brzegowych teorii trójparametrowej zbadano [35] w odniesieniu do powłok ortotropowych o dowolnym kształcie. Przyjmując na powierzchni brzegowej układ współrzędnych $\{u^1, u^2, u^3\}$ z kierunkiem u^1 normalnym do tej powierzchni, kierunkiem u^2 stycznym do krawędzi powierzchni środkowej i z kierunkiem u^3 normalnym do powierzchni środkowej oraz ustalając warunki brzegowe teorii sprężystości w postaci

$$(1) \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = w_3 = 0, \quad (-h/2 \leq u^3 \leq h/2)$$

gdzie σ_{11} , σ_{12} , w_3 są odpowiednio składowymi tensora naprężenia i ugięciem powłoki,

otrzymano następujące, zredukowane warunki brzegowe teorii trójparametrowej, odpowiadające warunkom (1)

$$(2) \quad \begin{aligned} N_{11} + (h/R_2)(E_1/E_3)(\nu_{23}\nu_{32}/(1-\nu_{21}\nu_{12}))CN_{22} &= 0, \\ N_{12} - (h/A_2)(E_1/E_3)(\nu_{23}\nu_{32}/(1-\nu_{12}\nu_{21}))C\partial N_{22}/\partial u^2 &= 0, \quad (u_3 = 0) \\ M_{11} - D(h/A_2)\sqrt{G_{12}/G_{23}}\partial M_{12}/\partial u^2 &= 0, \quad w = 0. \end{aligned}$$

W równaniach (2) przez N, M, R, A, E, G, ν oznaczono wypadkową siłę i moment, promień krzywizny powierzchni środkowej, parametr Lamé'go na tej powierzchni, moduł Younga, moduł ścinania i liczbę Poissona - związane z odpowiednimi kierunkami współrzędnych; parametry C i D są rzędu jedności i mają charakter bezwymiarowych współczynników materiałowych.

Podkreślone wyrazy w równaniach (2) reprezentują stany brzegowe związane z podatnością powłoki na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne. W teorii Kirchhoffa-Love'a te stany nie są uwzględniane, co w ogólnym przypadku uniemożliwia otrzymanie za pomocą tej teorii zadowalającego rozkładu naprężeń w pobliżu powierzchni brzegowej. Warunki (2) wskazują, że dokładność teorii Kirchhoffa-Love'a maleje ze wzrostem stosunków $h/R, E_1/E_3$ i G_{12}/G_{23} , jeżeli natomiast $E_1 \ll E_3$ i $G_{12} \ll G_{23}$, to teoria ta jest asymptotycznie dokładna.

Spójne równania teorii powłok można otrzymać wykorzystując aprioryczne, globalne oszacowanie powierzchniowej gęstości energii sprężystej. Kryterium energetyczne zastosowano [37] do analizy poprawności teorii trój- pięcio- i sześcioparametrowych, w przypadku materiału poprzecznie izotropowego. Rozważono następujące wyrażenie powierzchniowej gęstości energii

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum &= \{(1/2)_0 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\eta} + (1/2)_2 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\eta} + {}_1 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\eta} \\ &+ (1/2)_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\delta} + (1/2)_2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\gamma\delta} + {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\gamma\delta} \\ &+ {}_2 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \gamma_{\alpha\beta} \mu_{\lambda\eta}\} [1 + O(\vartheta^4 2G/E^1)], \end{aligned}$$

gdzie $\gamma_{ij}, \kappa_{ij}, \mu_{\lambda\eta}$ ($i, j = 1, 2, 3; \alpha, \beta, \lambda, \eta = 1, 2$) są określonymi na środkowej powierzchni powłoki, kolejnymi współczynnikami w rozwinięciu składowych tensora odkształcenia w szereg potęgowej zmiennej u^3 — przebiegającej grubość powłoki, $\vartheta^2 = h/R + h^2/L^2$ jest małym parametrem, $O(\)$ oznacza wielkość rzędu $(\)$, ${}_n B^{ijkl}$ ($n = 0, 1, 2; i, j, k, l = 1, 2, 3$) — składowe tensorów sztywności, w których w znany [4], niejawnym sposobie uwzględniono wpływ poprzecznych odkształceń normalnych na energię sprężystą (błąd wynikający z eliminacji tych odkształceń podano w (3) w nawiasach kwadratowych).

Wprowadzając bezwymiarowy współczynnik δ

$$(4) \quad \gamma_{\alpha\beta} \sim \delta h \kappa_{\alpha\beta}, \quad \delta \gamma_{\alpha\beta} \sim h \kappa_{\alpha\beta},$$

zezwalający na wyróżnienie stanu bezmomentowego $\delta \gg 1$, momentowego $\delta \sim 1$ i silnie momentowego $\delta \ll 1$, otrzymano w [37] następujące oszacowanie składników wyrażenia

energii (3)

$$\Sigma \sim \left\{ \frac{1, \delta^{-2}, \delta^{-1}h/R}{n \geq 3}, \frac{(G/G')\vartheta^2\delta^{-2}, (G/G')\vartheta^2}{n \geq 5}, \frac{(G/G')\vartheta^2\delta^{-1}h/R}{n \geq 5}, \frac{[h/R + (G/G')(h/L)^2]}{n > 6} \right\} [1 + 0(\vartheta^4 2G/E' + h^2/R^2)]$$

gdzie liczba pod kreską wskazuje teorie n -parametrowe, w których dany człon pojawia się. Rozpatrując różne, wzajemne proporcje parametrów δ , h/R , h/L , G/G' i G/E' użytkano następujące wnioski:

- 1) Teoria trójparametrowa, w przypadku uwzględnienia tylko dwóch pierwszych członów w wyrażeniu (3), jest konsekwentną teorią pierwszego przybliżenia dla cienkich, równomiernie obciążonych powłok izotropowych, co wykazał wcześniej W. T. KOITER [2].
- 2) W tej samej klasie zagadnień, lecz przy zgięciowym stanie odkształcenia, teoria zawierająca wszystkie oprócz szóstego składniki (3) jest konsekwentną teorią drugiego przybliżenia (o nieustalonej liczbie parametrów). Odpowiednie rozwinięcie energii podał w tym przypadku W. PIETRASZKIEWICZ [24].
- 3) Teoria pięcioparametrowa jest poprawna w sensie energetycznym w zagadnieniach silnego zginania ($\delta \ll 1$) cienkich ($h/R \ll 1$) powłok anizotropowych - o dużej podatności na poprzeczne odkształcenia postaciowe ($G/G' \gg 1$) i o niezbyt dużej podatności na poprzeczne odkształcenia normalne ($2G/E' \sim 1$). W tym przypadku w rozwinięciu (3) należy pozostawić drugi i czwarty człon.
- 4) Teoria sześcioparametrowa nie jest na ogół poprawna energetycznie, tj. nie istnieje układ wartości parametrów δ , h/R , h/L , G/G' i G/E' gwarantujący wyższą dokładność aproksymacji energii w tej teorii w porównaniu z teorią trój- i pięcioparametrową. Zatem teoria sześcioparametrowa może być pożyteczna tylko w szczególnych przypadkach (w nie których obszarach powłoki, dla określenia wybranych składowych stanu naprężenia itp).

Znaczne możliwości apriorycznej, globalnej i punktowej oceny błędu wykazują metody teorii równań różniczkowych. F. JOHN [38] otrzymał formalne oszacowanie dowolnego rzędu pochodnych tensora naprężenia i tensora odkształcenia. Rozwijając składowe tych tensorów w szeregi potęgowe współrzędnej u^3 i uwzględniając oszacowania [38] można ocenić rząd wielkości współczynników szeregów i skonstruować równania teorii powłok o żądanej dokładności. Sugestia ta nie została dotychczas szerzej wykorzystana, z wyjątkiem cytowanej już pracy [24]. Oszacowania [38] obowiązują w obszarze wewnętrznym izotropowej powłoki, obciążonej na powierzchni brzegowej prostopadłej do powierzchni środkowej. W zagadnieniach powłok o wyraźnej anizotropii do zależności podanych w [38] należy wprowadzić moduły sprężyste, np. G/G' w przypadku powłok podatnych na poprzeczne odkształcenia postaciowe.

Efektywnym narzędziem oceny dokładności, zwłaszcza [39] w zagadnieniach liniowych, są dualne zasady wariacyjne, tj. zasada minimum energii potencjalnej i zasada maksimum energii dopełniającej [40 - 44]. Zasady te zezwalają na oszacowanie z góry i z dołu nieznanego rozwiązania równań teorii sprężystości za pomocą odpowiednio skonstruowanych, kinematycznie i statycznie dopuszczalnych pól naprężeń i przemieszczeń. Na ogół otrzymujemy w ten sposób globalną ocenę błędu. W przypadku, kiedy znana jest funkcja

Greena, można również znaleźć oszacowanie punktowe [39]. D. A. DANIELSON [41], poprawiając mniej dokładne oszacowanie W. T. KOITERA [40] wykazał, że przemieszczenia powłoki, określone na podstawie teorii trójparametrowej, różnią się w normie L_2 od rozwiązania równań teorii sprężystości o wielkość nie przekraczającą $\varepsilon = h/R + h^2/L^2$, przy założeniu tzw. regularnych warunków brzegowych, tj. warunków identycznych dla zagadnienia teorii sprężystości i dla zagadnienia teorii powłok. Skonstruowane w [41] pole przemieszczeń stycznych, zgodnie na środkowej powierzchni z rozwiązaniem równań teorii powłok, jest wielomianem trzeciego stopnia zmiennej u^3 , a więc nie pokrywa się z liniowym rozkładem przemieszczeń na grubości powłoki, zakładanym przy wywodzie równań teorii trójparametrowej.

Różne kryteria dokładności i miary błędu można wprowadzić w teorii powłok traktując przemieszczenia i naprężenia jako elementy przestrzeni umormowanych [45]. Jedną z możliwości jest unormowanie błędu residualnego, z jakim rozwiązanie równań teorii powłok spełnia równania równowagi i warunki brzegowe w naprężeniach teorii sprężystości. Na tej podstawie sformułowano kryterium fizycznej poprawności teorii powłok rozpatrywanej w ramach mechaniki ośrodków z więzami [12, 46].

4. Równania rozwiązujące

Równania teorii powłok można przedstawić w postaci różniczkowej lub wariacyjnej. Znalezienie analitycznych rozwiązań równań różniczkowych jest możliwe tylko w najprostszych przypadkach. Na ogół występuje konieczność stosowania metod przybliżonych — wtedy bardziej dogodne jest ujęcie wariacyjne.

Formułowanie równań rozwiązujących zostało najdalej zaawansowane w teorii trójparametrowej. Jednak nawet tutaj np. ogólne równania przemieszczeniowe są bardzo skomplikowane. W ograniczonych klasach zagadnień równania teorii trójparametrowej doprowadzono do stosunkowo prostej postaci, otrzymując m.in. równania zespolone (por. np. [47]), równania Meissnera i typu Meissnera (por. np. [48]) dla powłok obrotowych w stanie symetrii i antysymetrii obrotowej oraz równania powłok quasi-połogich [49, 50]. Dużo uzyskanych rozwiązań dotyczy powłok o szczególnych kształtach i obciążeniach, nad czym nie będziemy się jednak zatrzymywać. W dwóch najlepiej opracowanych wersjach teorii trójparametrowej: BUDIANSKY'EGO-SANDERSA-KOITERA [1, 2] oraz NAGHDI'EGO-ZUDANSA [3 - 5] wykazano istnienie analogii statyczno-geometrycznej oraz słuszność zasad wariacyjnych i twierdzeń o wzajemności, analogicznych do zasad i twierdzeń teorii sprężystości. Skonstruowano i zbadano własności ekstremalne różnych funkcjonałów teorii Budiansky'ego-Sandersa-Koitera, przy uwzględnieniu anizotropii i nieciągłości parametrów powłoki, w obszarach jedno- i wielospójnych [45].

Niektóre rodzaje równań teorii trójparametrowej uogólniono rozpatrując model pięcioparametrowy. W tzw. teorii Timoszenki uzyskano m.in. równania zespolone [21] i równania powłok o małej wyniosłości [21, 22], w teorii REISSNERA-NAHGDI'EGO [19] wyprowadzono równania izotropowych [51] i ortotropowych [52] powłok w stanie symetrii obrotowej. Dla powłok o łagodnie zmiennych krzywiznach otrzymano [53] układ równań dwunastego rzędu, podczas gdy poprawny układ równań teorii pięcioparametrowej

wej powinien być dziesiątego rzędu, co można osiągnąć przez wyrażenie sił poprzecznych za pomocą dwóch potencjałów skalarnych [22, 37]. Zbadano zagadnienie analogii statyczno-geometrycznej i zbudowano równania zespolone [21]. Rozważono też niektóre zagadnienia w ujęciu wariacyjnym [21, 22, 54].

Rezultaty uzyskane w teorii sześcioparametrowej są skromniejsze. WEKUA otrzymał [13] dla cienkich powłok izotropowych równania przemieszczeniowe o strukturze zezwalającej na poszukiwanie rozwiązania za pomocą metody funkcji zmiennej zespolonej. Dla powłok poprzecznie izotropowych o średniej grubości wyprowadzono uogólnione równania Meissnera i równania powłok quasi-połogich [37]. Zbadano zagadnienie analogii statyczno-geometrycznej [37]. Rozważono [22, 37, 55] niektóre funkcjonały wariacyjne. W zagadnieniach sprzężonej termosprężystości udowodniono [55] twierdzenie o wzajemności, zezwalające na przedstawienie poszukiwanego pola naprężeń lub nieznanego rozkładu temperatury w powłoce w postaci całki.

W teoriach ośmio- [25 - 29] i dziewięcioparametrowych [30, 31] uzyskano wyniki fragmentaryczne. Równania tych teorii są dość skomplikowane, a więc należałoby formułować je w sposób ukierunkowany na zastosowanie metod przybliżonych i numerycznych. Z tego punktu widzenia celowe jest zbadanie własności operatorów różniczkowych, co dotychczas zrobiono w odniesieniu do niektórych zagadnień teorii trójparametrowej [56, 57] i pięcioparametrowej [58].

5. Uwagi końcowe

Z przedstawionych rozważań wynika, że dużo niejasności wiąże się z dokładnością i zakresem stosowalności teorii wieloparametrowych. Nie opracowano dotychczas pełnej, konsekwentnej teorii drugiego przybliżenia np. energetycznego lub asymptotycznego. Mało uwagi poświęcono zagadnieniu zredukowanych warunków brzegowych. Nie są dostatecznie zbadane własności operatorów różniczkowych w równaniach teorii wieloparametrowych. Brak jest odpowiednio dobrej analizy wpływu efektów nieliniowych. Należy bowiem pamiętać, że ze wzrostem wymaganej dokładności teorii, maleje dopuszczalne obciążenie, przy którym równania liniowe są poprawne [18]. Z innych, nieopracowanych dotychczas problemów w teoriach wieloparametrowych należy wymienić zagadnienia termosprężystości i sprzężonych pól mechano-elektromagnetycznych. Mało jest również badań z zakresu stateczności sprężystej dźwigarów powierzchniowych, opisaną za pomocą równań teorii o większej niż trzy liczbie parametrów. Pozostają też do uwzględnienia w teoriach wieloparametrowych materiały sprężyste niejednorodne oraz materiały o innych związkach konstytutywnych, np. lepkosprężyste.

Wykaz literatury

1. B. BUDIANSKY, J. L. SANDERS, *On the best first order linear shell theory*, Progress in Appl. Mech., t. 192, McMillan, New York 1963, s. 129 - 140.
2. W. T. KOITER, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Theory of Thin Elastic Shells, Proc. IUTAM Symp. Delft 1959, North Holland, Amsterdam 1960, s. 12 - 33.
3. P. M. NAGHDI, *A new derivation of the general equations of elastic shells*, Int. J. Eng. Sci., 1963, nr 1, s. 509 - 522.

4. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, t. 4, 1963.
5. Z. ZUDANS, *New formulation and evaluation of elastic shell theory*, Univ. of Pennsylvania Ph. D., 1966.
6. P. M. NAGHDI, *The theory of shells and plates*, Handbuch der Physik t. VIa/2, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972.
7. Н. А. Кильчевский, *Основы аналитической механики оболочек*, Киев 1963.
8. А. К. Талинъш, *Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям*, Исслед. по теории пластин и оболочек, 1967, nr 5, s. 66-92, 1970, nr 6-7, s. 23-65.
9. W. T. KOITER, *Foundations and basic equations of shell theory*, A survey of recent progress, Theory of thin shells, IUTAM Symp. Copenhagen 1967, Springer Verlag 1969, s. 93 - 105.
10. L. LIBRESCU, *Elastostatics and kinetics of anisotropic and heterogeneous shell type structures*, Noordhof, Leyden 1975.
11. Cz. Woźniak, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.
12. Cz. Woźniak, M. Kleiber, *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN, Warszawa-Poznań 1982.
13. И. Н. Векуа, *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*, Наука, Москва 1982.
14. H. L. LANGHAAR, *Elastic surfaces and theories of shells*, Acta Mechanica 1974, t. 19, s. 109 - 128.
15. В. И. Гуляев, В. А. Баженов, П. П. Лизунов, *Неклассическая теория оболочек и её применение к решению инженерных задач*, Львов, Вища-Школа, 1978.
- В. Л. Пелех, И. А. Сухорольский, *Контактные задачи теории упругости анизотропных оболочек*, Наукова Думка, Киев 1980.
17. H. S. RUTTEN, *Asymptotic approximation in the threedimensional theory of thin and thick elastic shells*, Theory of thin shells, IUTAM Symp. Copenhagen 1967, Springer Verlag 1969, 115 - 134.
18. M. SAYIR, C. MITROPOULOS, *On elementary theories of linear elastic beams plates and shells* (review paper) ZAMP 1980 t. 31, nr 1, s. 1 - 55.
19. P. M. NAGHDI, *On the theory of thin elastic shells*, Quart. Appl. Math. 1957, t. 14, nr 4, s. 369 - 380.
20. С. А. Амбарцумян, *Общая теория анизотропных оболочек*, Наука, Москва 1974.
21. В. Л. Пелех, *Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью*, Наукова Думка, Киев 1973.
22. К. З. Галимов (red.), *Теория оболочек с учетом поперечного сдвига*, Издат. Казанск. Унив., Казань 1977.
23. L. M. НАВИР, *Theory of elastic shells in the reference state*, Ing. Archiv 1965, t. 34, s. 228 - 237.
24. W. PIETRASZKIEWICZ, *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*, PWN, Warszawa-Poznań 1979.
25. А. Н. Ульяшина, *Уравнения технической теории оболочек с учетом сдвиговой и поперечной деформаций*, Мех. Полим. 1977, nr 2, s. 270 - 277.
26. А. Н. Чьяшина, *К уточненной теории краевого эффекта в ортотропных цилиндрических оболочках*, Исслед. по уруг. и пласт. 1980, nr 13, s. 73 - 81.
27. А. О. Рассказов, *К теории колебаний многослойных оболочек*, Прикл. мех. 1977, t. 13, nr 8, s. 23 - 29.
28. А. П. Мукоед, *Об одном варианте уточненной теории оболочек*, Прикл. мех. 1979, t. 15, nr 12, s. 43 - 50.
29. Ю. И. Немчинов, *К теории анизотропных оболочек и пластин*, Прикл. мех. 1981, t. 17, nr 12, s. 57 - 64.
30. J. HAMMEL, *Geometrisch nichtlineare Schalengleichungen als Approximation des dreidimensionalen Kontinuums unter Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung*, Ing. Archiv 1978, t. 47, nr 2, s. 75 - 93.
31. А. В. Саченков, И. Ю. Красновский, *Изгиб цилиндрических оболочек и плит с учетом поперечной деформации*, Изв. Вузов, Мат. 1981, nr 11, s. 49 - 57.
32. Н. А. Базаренко, *Построение уточненных прикладных теорий для оболочек произвольной формы*, Прикл. мат. мех. 1980, t. 44, nr 4, s. 727 - 736.
33. S. NAIR, E. REISSNER, *Two- and three-dimensional results for rotationally symmetric deformations of circular cylindrical shells*, Int. J. Sol. Struct. 1978, t. 14, nr 11, s. 905 - 924.

34. Г. В. Виленская, *К вопросу построения теории сферических оболочек из трансверсально-изотропного материала*, Расчет оболочек и пластин, Ростов-Н/Д 1978, s. 37 - 44.
35. Л. А. АГАЛОВЯН, *О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий*, Докл. АН Арм. ССР 1979, nr 3, s. 151 - 156.
36. W. T. KOITER, J. G. SIMMONDS, *Foundations of shell theory*, Theor. Appl. Mech., Proc. 13th Int. Congr. Theor. Appl. Mech., Moscow Univ. 1972, Springer Verlag 1973, s. 150 - 176.
37. Z. RYCHTER, *Analiza statyczna powłok poprzecznie izotropowych o średniej grubości* (rozprawa doktorska), Politechnika Warszawska 1982.
38. F. JOHN, *Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations*, Comm. Pure Appl. Math. 1965, t. 18, s. 235 - 267.
39. H. STUMPF, *Some applications of convex analysis to non-linear elastic boundary value problems*, Kompleksnyj Analiz i Jego Pril. Nauka, Moskwa 1978, s. 608 - 617.
40. W. T. KOITER, *On the foundations of the linear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. 1970 ser B, t. 73, nr 3, s. 169 - 195
41. D. A. DANIELSON, *Improved error estimates in the linear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. 1971, ser. B, t. 74, s. 294 - 300.
42. C. L. HO, J. K. KNOWLES, *Energy inequalities and error estimates for torsion of elastic shells of revolution*, ZAMP 1970, t. 21, s. 352 - 377.
43. C. O. HORGAN, L. T. WHEELER, *Maximum principles and pointwise error estimates for torsion of shells of revolution*, CANSAM 77 Proc. 6th Can. Congr. Appl. Mech., Vancouver 1977, vol. 1, s. 37 - 38.
44. W. PRAGER, J. L. SYNGE, *Approximations in elasticity based on the concept of function space*, Quart. Appl. Math. 1947, t. 5, s. 241 - 269.
45. Н. П. АБОВСКИЙ, Н. П. АНДРЕЕВ, А. П. ДЕРУГА, *Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек*, Наука, Москва 1978.
46. Z. F. BACZYŃSKI, *Structure of equations and estimation of solutions in non-linear shell theory*, Arch. Mech. 1975, t. 27, nr 3, s. 375 - 384.
47. К. Ф. ЧЕРНЫХ, *Линейная теория оболочек т. 2*, Ленинград 1964.
48. В. С., ЧЕРНИНА, *Статика тонкостенных оболочек вращения*, Наука, Москва 1968.
49. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. 1966, ser. B, t. 69, nr 1, s. 1 - 54.
50. A. LUBAI, *On the nonlinear elastokinetics of shells and beams*, Journ. Aerosp. Sci. 1962, t. 29, s. 1190 - 1195.
51. P. M. NAGHDI, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic shells of revolution*, Quart. Appl. Math. 1957 - 58, t. 15, nr 1.
52. Z. MAZURKIEWICZ, R. NAGÓRSKI, *O równaniach teorii liniowej powłok z uwzględnieniem poprzecznych odkształceń postaciowych*, Rozprawy Inż. 1981, t. 29, nr 2, s. 321 - 342.
53. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w tarczach płytach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.
54. Л. Я. АЙНОЛА, *Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек*, Прикл. мат. мех. 1968, t. 32, nr 1, s. 154 - 158.
55. Р. Н. ШВЕЦ, В. М. ФЛЯЧУК, *Вариационные принципы и теорема взаимности в задачах динамики термоупругих анизотропных оболочек*, Мат. методы и физ.-мех. поля 1981, nr 14, s. 70 - 75.
56. В. Т. КОРНЕЕВ, *О дифференциальных операторах теории тонких оболочек и теории оболочек Рейсснера*, Исслед. по теории упруг. пластич. 1974, nr 10, s. 160 - 173.
57. Н. Т. МЕДВЕДЕВ, *О разрешимости задач теории ортотропных некруговых цилиндрических оболочек*, Докл. АН УССР, Сер. А, 1978, nr 10, s. 908 - 911.
58. Н. Т. МЕДВЕДЕВ, В. В. ЕМЕЛЬЯНЕНКО, *К обоснованию разрешимости задач теории ортотропных оболочек вращения с конечной сдвиговой жесткостью*, Прикл. мех. 1981, t. 17, nr 12, s. 122 - 125.

Резюме

ИЗБРАННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МУЛЬТИПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЙ
УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В работе рассмотрены следующие проблемы мультипараметрических линейных теорий упругих оболочек: конструкция уравнений, оценка точности, область применимости отдельных теорий, формулирование решающих уравнений. Приведены сведения о многих работах по этой проблематике.

Указаны также проблемы, которые по мнению авторов до сих пор не разработаны.

Summary

SELECTED PROBLEMS IN THE MULTI-PARAMETRIC LINEAR THEORIES OF ELASTIC
SHELLS

We deal with the following problems in the multi-parametric linear theories of elastic shells: construction of equations, accuracy estimation, the scope of application of respective theories, formulation of solving equations. Many papers concerning the subject have been discussed. Some problems which according to authors' knowledge have not been elaborated so far are also indicated.

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lipca 1983 roku

ONE-DIMENSIONAL CONTINUOUS MODEL OF LATTICE TYPE SURFACE STRUCTURES

ROMAN NAGÓRSKI

Politechnika Warszawska

1. Introduction

The equations of a one-dimensional continuous model of lattice-type structures with densely packed and regularly spaced lattice of elements are discussed in the paper. The equations are obtained by applying the concept of a continuum with internal constraints [1] to the equations of surface-type fibrous medium of Cosserats' type [2] which is a continuous, two-dimensional model of a structure [3].

Considerable costs of the numerical computations of the discret and discretized systems and the known difficulties with founding the solutions to the boundary-value problems are related to the partial equations in two dimensions. Therefore the construction of the one-dimensional model seems to be justified.

The aim of this paper is formulate the equations describing the one-dimensional model of a static problem of the linear (infinitesimal) theory of elastic structures with kinematic-type ideal constraints in their integrable form and with the regular basic surface of the medium. An example of a grid on a cylindrical surface with a circular cross-section and axial-circumferencial lattice-type prismatic bars is also presented.

The proposed constraint equations represent certain generalization of the hypthesis of flat cross-sections. We assume that the cross-sections perpendicular to the axis of the medium surface independently of the translations and rotations, can be subjected also to the homogeneous deformations in their plane.

The generalization of the forementioned approach which includes the cases of vibrations and stability as well as more general kinematic and kinetic constraints imposed on structures was also developed by the author, however exceeds the scope of this paper

2. Equations of a surface-type fibrous medium with kinematic internal constraints

The equilibrium equations and the static boundary conditions for linear surface-type fibrous medium of Cosserats' type with internal constraints can be presented as [1] - [3]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} p^{\beta\alpha} |_{\beta} - b_{\beta}^{\alpha} p^{\beta} + q^{\alpha} + r^{\alpha} &= 0, & p^{\alpha} |_{\alpha} + b_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} + q + r &= 0, \\ m^{\beta\alpha} |_{\beta} - b_{\beta}^{\alpha} m^{\beta} + e_{\beta}^{\alpha} p^{\beta} + h^{\alpha} + s^{\alpha} &= 0, & m^{\alpha} |_{\alpha} + b_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} + h + s &= 0, \end{aligned}$$

and

$$(2.2) \quad p^{\beta\alpha} n_\beta = \overset{*}{p}^\alpha + \varrho^\alpha, \quad p^\beta n_\beta = \overset{*}{p} + \varrho, \quad m^{\beta\alpha} n_\beta = \overset{*}{m}^\alpha + \sigma^\alpha, \quad m^\beta n_\beta = \overset{*}{m} + \sigma,$$

where $p^{\alpha\beta}$, p^α and $m^{\alpha\beta}$, m^α are components of the cross-sectional forces and moments, q^α , q , h^α , h and $\overset{*}{p}^\alpha$, $\overset{*}{p}$, $\overset{*}{m}^\alpha$, $\overset{*}{m}$ are components of external surface and boundary load, r^α , r , s^α , s and ϱ^α , ϱ , σ^α , σ are surface and boundary reactions of constraints, $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$ denote components of the metric and curvature tensors as well as those of Ricci's pseudotensor of the medium surface π , n_β are components of the unit vector normal to a boundary $\partial\pi$ and tangent to π , (...) stands for the surface covariant derivative ($\alpha, \beta = 1, 2$).

It is assumed that the constraints are ideal, i.e.

$$(2.3) \quad \int_\pi (r^\alpha \delta v_\alpha + r \delta v + s^\alpha \delta \vartheta_\alpha + s \delta \vartheta) d\pi + \int_{\partial\pi} (\varrho^\alpha \delta v_\alpha + \varrho \delta v + \sigma^\alpha \delta \vartheta_\alpha + \sigma \delta \vartheta) d(\partial\pi) = 0,$$

for any variations $\delta v_\alpha, \dots, \delta \vartheta$ of components of the displacement vector v_α, v and those of the rotation vector $\vartheta_\alpha, \vartheta$ compatible with constraints in their integrable form

$$(2.4) \quad [v_\alpha, v, \vartheta_\alpha, \vartheta](u^\beta) = \sum_{K=1}^N [v_{\alpha K}, v_K, \vartheta_{\alpha K}, \vartheta_K](u^\beta) \psi_K(u^1),$$

where $v_{\alpha K}, v_K, \vartheta_{\alpha K}, \vartheta_K$ are known, sufficiently regular functions of coordinates (u^β) on the surface π , while ψ_K are the unknown generalized displacements. It is also assumed that surface is generated by one-parameter family of any contours, provided that these contours have no common points and are piecewise smooth $\Gamma(u^1)$ ($u^1 \in \langle u_1^1, u_2^1 \rangle$) and can be defined by means of u^2 coordinate. Another assumption is, that if $\Gamma(u^1)$ is an open contour ($\partial\Gamma(u^1) \neq \emptyset$) then for the part $\partial\pi$ different from $\Gamma(u_2^1)$ the static boundary conditions are given. The boundary conditions on $\partial\pi = \Gamma(u_2^1)$ ($\Gamma(u_1^1) \neq \Gamma(u_2^1)$) can be static or kinematic compatible with constraints (2.4). Eqs. (2.4) can be relatively easily generalized to the case in which the components of the state of displacements are the functions of the derivatives of ψ_K with respect to u^1 . In such a case the form of the relevant equations and formulae becomes more complex.

The geometric relations can be formulated as follows [3]:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= v_{\beta|\alpha} - b_{\alpha\beta} v - e_{\alpha\beta} \vartheta, & \gamma_\alpha &= v|_\alpha + b_\alpha^\beta v_\beta + e_\alpha^\beta \vartheta_\beta, \\ \varkappa_{\alpha\beta} &= \vartheta_{\beta|\alpha} - b_{\alpha\beta} \vartheta, & \varkappa_\alpha &= \vartheta|_\alpha + b^\beta \vartheta_\beta, \end{aligned}$$

while the constitutive equations can be defined from the formulae

$$(2.6) \quad p^{\alpha\beta} = \frac{\partial e}{\partial \gamma_{\alpha\beta}}, \quad p^\alpha = \frac{\partial e}{\partial \gamma_\alpha}, \quad m^{\alpha\beta} = \frac{\partial e}{\partial \varkappa_{\alpha\beta}}, \quad m^\alpha = \frac{\partial e}{\partial \varkappa_\alpha}$$

where e is the elastic potential defined as follows

$$(2.7) \quad e = \frac{1}{2} (A^{\alpha\beta\varepsilon\eta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\varepsilon\eta} + A^{\alpha\varepsilon} \gamma_\alpha \gamma_\varepsilon + B^{\alpha\beta\varepsilon\eta} \varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{\varepsilon\eta} + B^{\alpha\varepsilon} \varkappa_\alpha \varkappa_\varepsilon),$$

where $A^{\alpha\beta\varepsilon\eta}, \dots, B^{\alpha\varepsilon}$ are elastic rigidity tensors.

If there is known a continuous lattice of Δ family of fibres on the surface then the coordinates of the state of strain of the fibres are defined as follows [3],

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \gamma_{\Delta} &= \gamma_{\alpha\beta} t_{\Delta}^\alpha t_{\Delta}^\beta, & \tilde{\gamma}_{\Delta} &= \gamma_{\alpha\beta} t_{\Delta}^\alpha \tilde{t}_{\Delta}^\beta, & \check{\gamma}_{\Delta} &= \gamma_\alpha t_{\Delta}^\alpha, \\ \varkappa_{\Delta} &= \varkappa_{\alpha\beta} t_{\Delta}^\alpha t_{\Delta}^\beta, & \tilde{\varkappa}_{\Delta} &= \varkappa_{\alpha\beta} t_{\Delta}^\alpha \tilde{t}_{\Delta}^\beta, & \check{\varkappa}_{\Delta} &= \varkappa_\alpha t_{\Delta}^\alpha. \end{aligned}$$

where $t_A^\alpha, \tilde{t}_A^\alpha$ are the components of a field of versors which are tangent and perpendicular to the curves from the Δ family ($\Delta = I, II, \dots$).

The internal stress densities in the Δ fibres can be described using the following formulae

$$(2.9) \quad \begin{aligned} p_\Delta &= R_\Delta \gamma_\Delta, & \tilde{p}_\Delta &= \tilde{R}_\Delta \tilde{\gamma}_\Delta, & \check{p}_\Delta &= \check{R}_\Delta \check{\gamma}_\Delta, \\ m_\Delta &= S_\Delta \varkappa_\Delta, & \tilde{m}_\Delta &= \tilde{S}_\Delta \tilde{\varkappa}_\Delta, & \check{m}_\Delta &= \check{S}_\Delta \check{\varkappa}_\Delta, \end{aligned}$$

where $R_\Delta, \dots, S_\Delta$ are measures of the elastic rigidity, and

$$(2.10) \quad \begin{aligned} p^{\alpha\beta} &= \sum_\Delta (p_\Delta t_A^\alpha t_A^\beta + \tilde{p}_\Delta \tilde{t}_A^\alpha \tilde{t}_A^\beta), & p_\alpha &= \sum_\Delta \check{p}_\Delta t_A^\alpha, \\ m^{\alpha\beta} &= \sum_\Delta (m_\Delta t_A^\alpha t_A^\beta + \tilde{m}_\Delta \tilde{t}_A^\alpha \tilde{t}_A^\beta), & m^\alpha &= \sum_\Delta \check{m}_\Delta t_A^\alpha. \end{aligned}$$

Substituting (2.8) to (2.9) and then to (2.10) and combining the obtained result with (2.6), (2.7) we arrive at [3]

$$(2.11) \quad \begin{aligned} A^{\alpha\beta\epsilon\eta} &= \sum_\Delta t_A^\alpha t_A^\epsilon (t_A^\beta t_A^\eta R + \tilde{t}_A^\beta \tilde{t}_A^\eta \tilde{R}_\Delta), & A^{\alpha\epsilon} &= \sum_\Delta t_A^\alpha t_A^\epsilon \check{R}, \\ B^{\alpha\beta\epsilon\eta} &= \sum_\Delta t_A^\alpha t_A^\epsilon (t_A^\beta t_A^\eta S_\Delta + \tilde{t}_A^\beta \tilde{t}_A^\eta \tilde{S}_\Delta), & B^{\alpha\epsilon} &= \sum_\Delta t_A^\alpha t_A^\epsilon \check{S}_\Delta, \end{aligned}$$

When the fibrous medium is a continuous model of a surface grid ($\Delta = I, II$ or $\Delta = I, II, III$) then

$$(2.12) \quad p_\Delta = \frac{P_\Delta}{\tilde{l}_\Delta}, \quad \tilde{p}_\Delta = \frac{\tilde{P}_\Delta}{\tilde{l}_\Delta}, \quad \check{p} = \frac{\check{P}_\Delta}{\tilde{l}_\Delta}, \quad m_\Delta = \frac{M_\Delta}{\tilde{l}_\Delta}, \quad \tilde{m} = \frac{\tilde{M}_\Delta}{\tilde{l}_\Delta}, \quad \check{m}_1 = \frac{\check{M}_\Delta}{\tilde{l}_\Delta},$$

where $P_\Delta, \tilde{P}_\Delta, \check{P}_\Delta$ are respectively longitudinal forces and shear tangent and normal to π , $M_\Delta, \tilde{M}_\Delta, \check{M}_\Delta$ are respectively torques and couples tangent and normal to π in the middle cross-sections of the bars of Δ family, and \tilde{l}_Δ is a distance between adjacent curves of a discret lattice of bars axes of the structure. Moreover

$$(2.13) \quad \begin{aligned} R &= \frac{E_\Delta A_\Delta}{\tilde{l}_\Delta}, & \tilde{R}_\Delta &= \frac{12E_\Delta \check{J}_\Delta}{\tilde{l}_\Delta \tilde{l}_\Delta^2}, & \check{R}_\Delta &= \frac{12E \check{J}_\Delta}{\tilde{l}_\Delta \tilde{l}_\Delta^2}, \\ S_\Delta &= \frac{G_\Delta J_\Delta}{\tilde{l}_\Delta}, & \tilde{S}_\Delta &= \frac{E_\Delta \check{J}_\Delta}{\tilde{l}_\Delta}, & \check{S}_\Delta &= \frac{E_\Delta \check{J}_\Delta}{\tilde{l}_\Delta}, \end{aligned}$$

where $E_\Delta, G_\Delta, l_\Delta, A_\Delta, J_\Delta, \check{J}_\Delta, \check{J}_\Delta$ are the Young moduls, the torsional modulus, the length, the cross-section surface area, the polar and principal moments respectively of the cross-sections of bars from the Δ family [3].

3. Equations of the one-dimensional continuous model

Eliminating from (2.1) - (2.3) the components of the constraint reactions and using (2.4) a generalized equilibrium equations and boundary conditions, i.e. Lagrange-type

equations of the second kind [1] are obtained

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Psi'_K + \Phi_K + F_K &= 0, \quad u^1 \in (u^1_1, u^1_2) \quad ((\dots)' = d(\dots)/du^1), \\ \Psi_K &= G_{K\alpha} \quad \text{or} \quad \psi_K = \psi_{K\alpha}, \quad u^1 = u^1_\alpha (K = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

where Ψ_K, Φ_K are the generalized internal forces, $F_K, G_{K\alpha}$ the external forces, $\psi_{K\alpha}$ the generalized boundary displacements

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Psi_K &= \int_{\Gamma(u^1)} (p^{1\alpha} v_{\alpha K} + p^1 v_K + m^{1\alpha} \vartheta_{\alpha K} + m^1 \vartheta_K) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \Phi_K &= \int_{\Gamma(u^1)} (p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta K} + p^\alpha \gamma_{\alpha K} + m^{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta K} + m^\alpha \varkappa_{\alpha K}) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ F_K &= \int_{\Gamma(u^1)} (q^\alpha v_{\alpha K} + q v_K + h^\alpha \vartheta_{\alpha K} + h \vartheta_K) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma + \\ &\quad + \sum (\overset{*}{p}^\alpha v_{\alpha K} + \overset{*}{p} v_K + \overset{*}{m}^\alpha \vartheta_{\alpha K} + \overset{*}{m} \vartheta_K) L, \\ G_{K\beta} &= (-1)^\beta \int_{\Gamma(u^1)} (\overset{*}{p}^\alpha v_{\alpha K} + \overset{*}{p} v_K + \overset{*}{m}^\alpha \vartheta_{\alpha K} + \overset{*}{m} \vartheta_K) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \end{aligned}$$

while

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta K} &= v_{\beta K|\alpha} - b_{\alpha\beta} v_K - e_{\alpha\beta} \vartheta_K, & \gamma_{\alpha K} &= v_K|\alpha + b^\beta_\alpha v_{\beta K} + e^\beta_\alpha \vartheta_K, \\ \varkappa_{\alpha\beta K} &= \vartheta_{\beta K|\alpha} - b_{\alpha\beta} \vartheta_K, & \varkappa_{\alpha K} &= \vartheta_K|\alpha + b^\beta_\alpha \vartheta_{\beta K} \end{aligned}$$

and $Ldu^1 = d(\partial\pi)$ on the part of $\partial\pi$ which different then $\Gamma(u^1_\alpha)$

$$(3.4) \quad L(u^1) = \sqrt{g_{11} + 2g_{12} \frac{du^2}{du^1} + g_{22} \left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2}.$$

Substituting RHS of Eqs (2.4) to Eqs (2.5) and then to the constitutive equations derived from Eqs (2.6), (2.7) we obtain the components of the strain and stress states as the functions of the generalized displacements ψ_K and their derivatives ψ'_K . After substituting these functions in formulae (3.2)_{1,2} we arrive at the constitutive equations of one-dimensional model

$$(3.5) \quad \Psi_K = \sum_{L=1}^N (\overset{1}{\Psi}_{KL} \psi_L + \overset{2}{\Psi}_{KL} \psi'_L), \quad \Phi_K = \sum_{L=1}^N (\overset{1}{\Phi}_{KL} \psi_L + \overset{2}{\Phi}_{KL} \psi'_L),$$

where $\overset{\alpha}{\Psi}_{KL}, \overset{\alpha}{\Phi}_{KL}$ ($\alpha = 1, 2; K, L = 1, 2, \dots, N$) are generalized elastic rigidities

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \overset{1}{\Psi}_{KL} &= \int_{\Gamma(u^1)} (A^{1\beta\xi\eta} \gamma_{\xi\eta L} v_{\beta K} + A^{1\xi} \gamma_{\xi L} v_K + B^{1\beta\xi\eta} \varkappa_{\xi\eta L} \vartheta_{\beta K} + B^{1\xi} \varkappa_{\xi L} \vartheta_K) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \overset{2}{\Psi}_{KL} &= \int_{\Gamma(u^1)} (A^{1\beta\xi\eta} v_{\eta L} v_{\beta K} + A^{11} v_L v_K + B^{1\beta\xi\eta} \vartheta_{\eta L} \vartheta_{\beta K} + B^{11} \vartheta_L \vartheta_K) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \overset{1}{\Phi}_{KL} &= \int_{\Gamma(u^1)} (A^{\alpha\beta\xi\eta} \gamma_{\eta\xi L} \gamma_{\alpha\beta K} + A^{\alpha\xi} \gamma_{\xi L} \gamma_{\alpha K} + B^{\alpha\beta\xi\eta} \varkappa_{\xi\eta L} \varkappa_{\alpha\beta K} + B^{\alpha\xi} \varkappa_{\xi L} \varkappa_{\alpha K}) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \end{aligned}$$

$$(3.6) \text{ [cont.]} \quad \Phi_{KL}^2 = \int_{I(u^i)} (A^{\alpha\beta 1 \eta} v_{\eta L} \gamma_{\alpha\beta K} + A^{\alpha 1} v_L \gamma_{\alpha K} + B^{\alpha\beta 1 \eta} \vartheta_{\eta L} \kappa_{\alpha\beta K} + B^{\alpha 1} \vartheta_L \kappa_{\alpha K}) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma.$$

Substituting RHS of Eqs (3.5) into Eqs (3.1) a system of the governing equations describing the model is obtained. This is a system of the ordinary linear differential equations and the boundary conditions. After solving the problem the components of the states of displacement, strain and stress in the medium can be obtained from Eqs (2.4) - (2.7). The constraint reactions, which can characterise the accuracy of the one-dimensional model [4] may be obtained from Eqs (2.1), (2.2). Using Eqs (2.4), (2.8), (2.9), (2.12) the displacements and rotations of structural nodes as well as the forces, couples and torques in the cross-sections of bars can be determined.

4. Cylindrical grid

A surface-type grid designed on a cylindrical surface and made of the two families of prismatic bars which represent a regular and dense axially-circumferential lattice will be considered in this section (see Fig. 1).

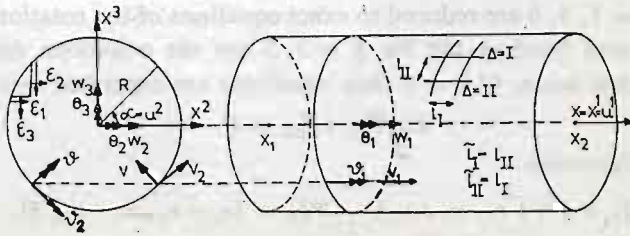


Fig. 1

In this case

$$(4.1) \quad t_i^j = t_j^i = t_{II}^i = -\tilde{t}_{II}^i = 1, \quad \tilde{t}_i^j = \tilde{t}_j^i = t_{II}^i = \tilde{t}_{II}^i = 0.$$

Using Eqs (4.1), (2.8), (2.10), (2.11) the governing relations of the cylindrical grid can be obtained easily.

Let us take into account the following form of the constraint equations (2.4) (see Fig. 1)

$$(4.2) \quad \begin{aligned} v_1 &= w_1 + R(\Theta_2 \sin \alpha - \Theta_3 \cos \alpha), \\ v_2 &= -w_2 \sin \alpha + w_3 \cos \alpha + R \left[\Theta_1 + \varepsilon_1 \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \sin 2\alpha \right], \\ v &= -w_2 \cos \alpha - w_3 \sin \alpha - R(\kappa_1 \sin 2\alpha + \kappa_2 \cos^2 \alpha + \kappa_3 \sin^2 \alpha), \\ \vartheta_1 &= \Theta_1 - \Theta + \xi_1 \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \xi \sin 2\alpha, \\ \vartheta_2 &= -\Theta_2 \sin \alpha + \Theta_3 \cos \alpha - R(\kappa_1 \sin 2\alpha + \kappa_2 \cos^2 \alpha + \kappa_3 \sin^2 \alpha), \\ \vartheta &= -\Theta_2 \cos \alpha + \Theta_3 \sin \alpha - \frac{R}{2} \left[\lambda + \kappa_1 \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (\kappa_2 - \kappa_3) \sin 2\alpha \right], \end{aligned}$$

where $\psi^T = [w_1, w_2, \dots, \lambda]$ are the generalized displacements, which are unknown functions the argument $u^1 = x$ ($u^2 = \alpha$), while $\psi_1^T = [w_1]$ is the parameter of extension, $\psi_2^T = [w_2, \theta_3]$ and $\psi_3^T = [w_3, \theta_2]$ the bending parameters, $\psi_4^T = [\theta_1, \theta, \lambda]$ the parameters of torsion, $\psi_5^T = [\varepsilon_1, \zeta_1, \kappa_1]$ the parameters of homogeneous shape deformation of the cross-section $x = \text{const}$, $\psi_6^T = [\varepsilon_2, \varepsilon_3, \kappa_2, \kappa_3, \xi]$ the parameters of homogeneous linear deformation of this cross-section. It is assumed that the cross-section of the structure is subjected to a rigid displacement and rotation defined by displacements w_i and rotations θ_i and to a homogeneous deformation in its plane described by ε_i ($i = 1, 2, 3$). The remaining parameters describe the "free" rotations $\vartheta_\alpha, \vartheta$ [3]. The conditions $\gamma_\alpha = 0$, $\gamma_{12} - \gamma_{21} = 0$ lead to the classical of the Kirchhoff-Love's theory of shells with continuous structure and to the Bernoulli-Timoshenko's flat cross-section hypotheses with adequate constraints imposed on parameters $\theta_2, \theta_3, \theta, \lambda, \zeta_1, \zeta, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$.

Applying the procedure described in Sec. 3 we obtain a system of equations

$$(4.3) \quad L_k \Psi_k + F_k = 0, \quad x \in (x_1, x_2); \quad \alpha_k \Psi_k = G_{k\alpha} \text{ lub } \Psi_k = \Psi_{k\alpha}, \quad x = x_\alpha,$$

with the matrices of the ordinary differential operators L_k and α_k with derivatives at most of the second and first order, respectively, and with the rigidity dependent coefficients $R_d, \tilde{R}_d, \dots, \tilde{S}_d$ (see (2.13)).

Eqs (4.3) for $k = 1, 4, 6$ are reduced to exact equations of the rotationally-symmetrical extension, torsion and bending [5], for $k = 2, 3$ are the equations describing bending of a Timoshenko-type beam. If $k = 6$ then equations are separated into two system

$$(4.4) \quad L_{6\alpha} \Psi_{6\alpha} + F_{6\alpha} = 0$$

for the unknown functions

$$(4.5) \quad \Psi_{61}^T = [\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \kappa_2 + \kappa_3], \quad \Psi_{62}^T = [\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \kappa_2 - \kappa_3, \xi].$$

References

1. C. WOŹNIAK, *Constrained continuous media I. General theory*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série. Techn., 21, 3, 1973
2. C. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media. I. II.*, Arch. of Mech. 17, 5-6, 1965
3. C. WOŹNIAK, *Lattice-type surface structures*, PWN, Warsaw 1970 (in polish)
4. C. WOŹNIAK, *On the tolerance approach to solid mechanics*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. (in print)
5. R. NAGÓRSKI, *Bending of cylindrical lattice shell under rotationally symmetric load*, AIL, 24, 4, 1978 (in polish)

Резюме

УРАВНЕНИЯ ОДНОРАЗМЕРНОЙ СПЛОШНОЙ МОДЕЛИ СЕТЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В данной работе выведены уравнения одноразмерной и сплошной модели плотных и регулярных сетчатых поверхностных конструкций. Эти уравнения получено, применяя идеи континуум с внутренними связями и уравнения волокнистой поверхностной среды типа Коссерат. Рассмотрено случай статики по линейной теории, интегрированные связи кинематического типа и стержневые конструкции. Рассмотрено также пример цилиндрической системы типа ростверка.

Streszczenie

JEDNOWYMIAROWY MODEL CIĄGŁY SIATKOWYCH DŹWIGARÓW POWIERZCHNIOWYCH

Przedmiotem referatu są równania jednowymiarowego modelu ciągłego sprężystych siatkowych dźwigarów powierzchniowych o gęstej regularnej siatce elementów. Równania te uzyskano stosując koncepcję kontinuum z więzami wewnętrznymi do równań powierzchniowego ośrodka włóknistego typu Cosseratów, będącego ciągłym dwuwymiarowym modelem dźwigara. W komunikacie ograniczono rozważania do przypadku statyki, teorii liniowej, idealnych więzów całkowalnych typu kinematycznego dla konstrukcji o powierzchni podstawowej w postaci jednoparametrowej rodziny konturów. Przykładowo rozpatrzono ruszt cylindryczny.

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1983 roku

ON LINEAR THEORY OF ANISOTROPIC SHELLS OF MODERATE THICKNESS

ZENON RYCHTER

Politechnika Warszawska

1. Introduction

The classical theory of thin elastic shells often referred as the Kirchhoff-Love (KL) theory may be unsatisfactory in some problems of practical importance such as moderately thick shells, shells with short wave length of the deformation pattern of the middle surface, shells with a high degree of anisotropy, etc. In this paper, limited to the statics of shells, such problems are considered within the framework of a theory engaging six unknown kinematical parameters defined on the midsurface. The theory called in the sequel the six parameter (SP) theory is based on the assumption of linear distribution of the displacement vector across the thickness, previously used in [1 - 4]. To a similar theory lead the supposition that the deformation in a vicinity of the middle surface is homogenous [5] and the concept of a Cosserat surface [6]. In the present paper the basic equations of SP are derived from the equations of three-dimensional elasticity via variational approach. Then the range of applicability and the accuracy of SP are investigated by evaluation of the strain energy density. Since SP proves not to be generally consistent with respect to the strain energy approximation it may only be useful in specific problems or in a limited region of a shell. As an illustration to this conclusion a numerical example is given concerning the rotationally-symmetric bending of an isotropic circular cylindrical shell loaded by an abruptly changing normal pressure.

2. Basic equations

Let us consider a shell of constant thickness h parametrized by usual normal coordinate system $\{x^k\} = \{x^\alpha, x^3 = z\}$ with the z axis perpendicular to the middle surface coordinate lines $\{x^\alpha\} = \{x^1, x^2\}$. In above and in the sequel the Latin and the Greek indices range over the integers $\{1, 2, 3\}$ and $\{1, 2\}$, respectively. Components of tensors related to the local basis on the middle surface ($z = 0$) and on an arbitrary surface ($z = \text{const.}$) are accordingly distinguished by the indices $\{i, j, k, l, p, q; \alpha, \beta, \lambda, \eta\}$ and $\{a, b, c, d; \varphi, \psi\}$. Indices preceded by a comma and by a vertical stroke denote partial and surface covariant derivatives in the middle surface metrix. The Kronecker symbols are denoted by $\delta_a^i, \delta_\alpha^\beta$, etc., b_α^β stands for the mixed components of the second metric tensor of the midsurface, H and K are the mean and Gaussian curvatures of that surface. The translators

μ_a^i, μ_i^a we define as composed of the above listed midsurface tensors

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mu_\varphi^\alpha &= \delta_\varphi^\beta (\delta_\beta^\alpha - z b_\beta^\alpha), & \mu_\alpha^\varphi &= (1/\mu) \delta_\beta^\varphi [\delta_\alpha^\beta + z (b_\alpha^\beta - 2H \delta_\alpha^\beta)], \\ \mu_3^3 &= 1, & \mu_\alpha^3 &= \mu_3^\alpha = 0, & \mu &= 1 - 2zH + z^2K. \end{aligned}$$

The basic equations of SP can be easily derived from the three-dimensional equations of elasticity. Starting from the HU-WASHIZU [7] variational theorem one only has to assume a distribution of the displacement $U_i(x^k)$ and the deformation $e_{ab}(x^k)$ across the shell thickness. Let us adopt for these quantities the following power series expansions

$$(2.2) \quad \begin{aligned} U_i(x^k) &= w_i + z\beta_i + \underline{z^2\delta_i} + \dots, \\ 2e_{\varphi\varphi}(x^k) &= (\mu_\varphi^\alpha \delta_\varphi^\beta + \mu_\varphi^\alpha \delta_\varphi^\beta) (\gamma_{\alpha\beta} + z\kappa_{\alpha\beta} + \underline{z^2\mu_{\alpha\beta}} + \dots), \\ 2e_{\varphi 3}(x^k) &= \delta_\varphi^\alpha (\gamma_{3\alpha} + z\kappa_{3\alpha} + \underline{z^2\mu_{3\alpha}} + \dots), & e_{33}(x^k) &= \gamma_{33} + \underline{z\kappa_{33}} + \dots, \end{aligned}$$

involving six generalized middle surface displacements w_i and β_i and thirteen middle surface and its vicinity strains $\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \gamma_{3\alpha}, \kappa_{3\alpha}$ and γ_{33} ; the underlined terms in (2.2) should be omitted throughout as far as SP is concerned.

Introduction of the hypotheses (2.2) into the three-dimensional Hu-Washizu functional [7] results in the following two-dimensional Hu-Washizu functional of SP

$$(2.3) \quad \begin{aligned} J &= \int_\tau \{ -N^{ij} \gamma_{ji} - M^{\alpha j} \kappa_{j\alpha} + (1/2)_0 B^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + {}_1 B^{ijk\alpha} \gamma_{ij} \kappa_{k\alpha} \\ &+ (1/2)_2 B^{\alpha\beta j} \kappa_{\alpha i} \kappa_{\beta j} + N^{\beta\alpha} (w_{\alpha,\beta} - b_{\alpha\beta} w_3) + N^{3\alpha} (\beta_{\alpha,\alpha} + w_{3,\alpha} + b_\alpha^i w_i) \\ &+ N^{33} \beta_3 + M^{\beta\alpha} (\beta_{\alpha,\beta} - b_{\alpha\beta} \beta_3) + M^{\alpha 3} \beta_{3,\alpha} - q^i w_i - m^i \beta_i \} d\tau \\ &- \int_{\partial\tau} (N^{\alpha i} w_i + M^{\alpha i} \beta_i) \nu_\alpha ds - \int_{\partial\tau} [N^{\alpha i} (w_i - w_i^*) + M^{\alpha i} (\beta_i - \beta_i^*)] \nu_\alpha ds, \end{aligned}$$

defined on the middle surface τ with the edge $\partial\tau$ and ν_α — the outward unit vector normal to $\partial\tau$; the starred quantities are prescribed on $\partial\tau$. Appearing in (2.3) the stress resultants N^{ij} and couples $M^{i\alpha}$, the stiffness tensors ${}_n B^{ijkl}$ and the reduced loadings q^i and m^i are defined as follows

$$(2.4) \quad \{N^{ij}, M^{ij}\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mu \sigma^{ab} \delta_a^i \delta_b^j \{1, z\} dz,$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} {}_n B^{ijkl} &= C^{ipkq} \delta_a^i \delta_b^j \int_{-h/2}^{+h/2} \mu \mu_p^\alpha \mu_q^\beta z^n dz, & {}_n B^{\alpha\beta\lambda 3} &= {}_n B^{333\alpha} = 0, \\ {}_n B^{ijkl} &= {}_n B^{klij}, & n &= 0, 1, 2., \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad \{q^i, m^i\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mu \mu_a^i F^a \{1, z\} dz + [\mu \mu_a^i \sigma^{a3} \{1, z\}] \Big|_{-h/2}^{+h/2},$$

where $\sigma^{ab}(x^k)$ is the stress tensor, $C^{ipkq}(x^\alpha)$ the elasticity tensor valid for shells having symmetry of elastic properties relative to the surfaces $z = \text{const.}$ (e.g. orthotropic shells), $F^a(x^k)$ denotes the density of the mass forces.

By requiring the functional (2.3) to be stationary under arbitrary variations of w_i , β_i , γ_{ij} , $\kappa_{i\alpha}$, N^{ij} and $M^{i\alpha}$ one obtains the basic equations of SP, to wit: the geometric eqs.

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= w_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} w_3, & \gamma_{\alpha 3} &= \beta_{\alpha} + w_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} w_{\lambda}, & \gamma_{33} &= \beta_3, \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \beta_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} \beta_3, & \kappa_{\alpha 3} &= \beta_{3,\alpha}, \end{aligned}$$

the equations of equilibrium

$$(2.8) \quad \begin{aligned} N^{\beta\alpha}_{|\beta} - b_{\lambda}^{\alpha} N^{\lambda 3} + q^{\alpha} &= 0, & N^{\alpha 3}_{|\alpha} + b_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha} + q^3 &= 0, \\ M^{\beta\alpha}_{|\beta} - N^{\alpha 3} + m^{\alpha} &= 0, & M^{\alpha 3}_{|\alpha} + b_{\alpha\beta} M^{\beta\alpha} - N_{33} + m^3 &= 0, \end{aligned}$$

the constitutive eqs.

$$(2.9) \quad \begin{aligned} N^{\beta\alpha} &= {}_0 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \gamma_{\lambda\eta} + {}_1 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \kappa_{\lambda\eta} + {}_0 B^{\alpha\beta 33} \gamma_{33}, \\ M^{\beta\alpha} &= {}_1 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \gamma_{\lambda\eta} + {}_2 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \kappa_{\lambda\eta} + {}_1 B^{\alpha\beta 33} \gamma_{33}, \\ N^{\alpha 3} &= {}_0 B^{\alpha 3\lambda 3} \gamma_{\lambda 3} + {}_1 B^{\alpha 3\lambda 3} \kappa_{\lambda 3}, & M^{\alpha 3} &= {}_1 B^{\alpha 3\lambda 3} \gamma_{\lambda 3} + {}_2 B^{\alpha 3\lambda 3} \kappa_{\lambda 3}, \\ N^{33} &= {}_0 B^{3333} \gamma_{33} + {}_0 B^{\alpha\beta 33} \gamma_{\alpha\beta} + {}_1 B^{\alpha\beta 33} \kappa_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

and the natural boundary conditions

$$(2.10) \quad N^{\alpha i} \nu_{\alpha} = N^{* \alpha i} \nu_{\alpha}, \quad M^{\alpha i} \nu_{\alpha} = M^{* \alpha i} \nu_{\alpha}, \quad w_i = w_i^*, \quad \beta_i = \beta_i^*.$$

Six equations of equilibrium (2.8) can be readily expressed in terms of six generalized displacements w_i and β_i by subsequent usage of (2.9) and (2.7). The total order of the resulting differential equations amounts twelve in accordance with the number of boundary conditions (2.10).

Having solved the two-dimensional equations (2.7) - (2.10) one may seek an approximation to the exact distributions of the displacement and stress across the shell thickness. This problem cannot, of course, be answered uniquely. For example, displacements can be calculated from our original hypothesis (2.2)₁. This linear distribution is undoubtedly the simplest possible but as shown in [8] not the most adequate. It is natural, that the stress distribution should from practical point of view be similar to that occurring in rods and plates. Furthermore, it ought to satisfy [6] the definition (2.4) of the stress resultants and couples, and the static boundary conditions at the shell faces $z = \pm h/2$. The following distributions

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \mu \delta_{\varphi}^{\beta} \mu_{\varphi}^{\lambda} \sigma^{\varphi\psi}(x^k) &= N^{\beta\lambda}/h + (12z/h^3) M^{\beta\lambda}, \\ \mu \delta_{\varphi}^{\alpha} \sigma^{\varphi 3}(x^k) &= (N^{\alpha 3}/2h + M^{\alpha 3} 30z/h^3) [1 - (2z/h)^2] \\ &\quad - (1/4) \{ \bar{\mu}^+ \sigma^{\varphi 3} \delta_{\varphi}^{\alpha} [1 + 3(2z/h) - 3(2z/h)^2 - 5(2z/h)^3] \\ &\quad + \bar{\mu}^- \sigma^{\varphi 3} \delta_{\varphi}^{\alpha} [1 - 3(2z/h) - 3(2z/h)^2 + 5(2z/h)^3] \}, \\ \mu \sigma^{33}(x^k) &= (3/2h) [1 - (2z/h)^2] N^{33} - (1/4) \{ \bar{\mu}^+ \sigma^{33} [1 - 3(2z/h) - 3(2z/h)^2 + (2z/h)^3] \\ &\quad + \bar{\mu}^- \sigma^{33} [1 + 3(2z/h) - 3(2z/h)^2 - (2z/h)^3] \}, \end{aligned}$$

possess the expected properties, where

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \bar{\mu}^+ &= \mu(z = h/2), & \bar{\mu}^- &= \mu(z = -h/2), & \bar{\sigma}^{+ \alpha 3} &= \sigma^{\alpha 3}(z = h/2), \\ & & & & \bar{\sigma}^{- \alpha 3} &= \sigma^{\alpha 3}(z = -h/2). \end{aligned}$$

Expressions similar to (2.11) were proposed in [6, 9, 10]. They, however, violate some of the requirements mentioned above.

For completeness of our derivation the integrals (2.5)₁ should be calculated. We omit here this simple procedure (see e.g. [13]) assuming only that all the terms up to the order h/R are preserved in the resulting formulae, which is important in the case of not-so-thin shells.

3. Evaluation of the strain energy

In order to establish whether SP furnishes a consistent approximation to the three-dimensional elasticity we shall examine the strain energy density integrated with respect to the thickness coordinate z . Such a global evaluation of the strain energy has been proposed by KOITER [11] who proved the Kirchhoff-Love type theory to form the first approximation, and then used by PIETRASZKIEWICZ [4] for construction of an energy functional of the second approximation. For the purpose of the present analysis let us consider the following twodimensional strain energy expression

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Sigma = & (1/2)_0 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\eta} + {}_1 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \gamma_{\alpha\beta} \varkappa_{\lambda\eta} + (1/2)_2 B^{\alpha\beta\lambda\eta} \varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{\lambda\eta} + (1/2)_0 B^{\alpha 3\eta 3} \gamma_{\alpha 3} \gamma_{\eta 3} \\ & + {}_1 B^{\alpha 3\eta 3} \gamma_{\alpha 3} \varkappa_{\eta 3} + (1/2)_2 B^{\alpha 3\eta 3} \varkappa_{\alpha 3} \varkappa_{\eta 3} + (1/2)_0 B^{3333} \gamma_{33} \gamma_{33} \\ & + {}_0 \underline{B^{\alpha\beta 33}} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{33} + {}_2 \underline{B^{\alpha\beta 33}} \varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{33} + {}_2 \underline{B^{\alpha\beta\lambda\eta}} \gamma_{\alpha\beta} \mu_{\lambda\eta} + \dots, \end{aligned}$$

where the underlined error terms should be neglected as far as SP is concerned.

The evaluation of (3.1) we start from observing, that for shells having symmetry of elastic properties with respect to the surfaces $z = \text{const.}$ (which was assumed in deriving (2.3) and (3.1)) two groups of elastic moduli can be distinguished (e.g. $\{G, E, \nu\}$ and $\{G', E', \nu'\}$), where the non-primed and the primed quantities are accordingly related to the planes tangential and normal to the surfaces $z = \text{const.}$ G denotes the shear modulus, E stands for the Young modulus and ν — the Poisson number. For a transversely isotropic material with its axis of isotropy coinciding with the z axis of the shell the components of the elasticity tensor C^{ijkl} (see e.g. [12]) have the following estimates

$$(3.2) \quad C^{\alpha\beta\lambda\eta} \sim G \sim E, \quad C^{\alpha\beta 33} \sim \nu' G, \quad C^{3333} \sim E', \quad C^{\alpha 3\eta 3} \sim G',$$

showing that only four elastic moduli (e.g. G, G', E', ν') are of consequence in our approximate analysis (at this level of generality the estimates (3.2) remain valid for orthotropic shells).

Before estimating the strains occurring in (3.1) let us define a dimensionless coefficient δ

$$(3.3) \quad \gamma_{\alpha\beta} \sim \delta h \varkappa_{\alpha\beta}, \quad \gamma_{33} \sim \delta h \varkappa_{33}, \quad \delta \gamma_{\alpha 3} \sim h \varkappa_{\alpha 3},$$

allowing for the specification of the bending theory $\delta \sim 1$, the membrane theory $\delta \gg 1$ and the inextensional bending theory $\delta \ll 1$. Defining by $\gamma \sim \gamma_{\alpha\beta}$ a typical value of the shell deformation the strain components can be estimated as below

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} \sim \gamma, \quad \gamma_{33} \sim (\nu' + \vartheta^2)(G/E')\gamma, \quad \gamma_{\alpha 3} \sim (G/G')(h/L)\gamma, \\ h^2 \mu_{\alpha\beta} \sim [h/R + (G/G')(h/L)^2 + (\nu' + \vartheta^2)(G/E)\vartheta^2]\gamma, \end{aligned}$$

where R is the typical radius of curvature of the middle surface, L — the characteristic wavelength of the deformation pattern of that surface and ϑ — the small parameter, given

as follows

$$(3.5) \quad b_{\alpha}^{\beta} \sim 1/R, \quad (\cdot)_{|\alpha} \sim (\cdot)/L, \quad \vartheta \sim (\sqrt{h/R} + h/L).$$

The estimation (3.4)₃ results from (2.8)₃ and (2.9)_{2,3} with the help of (2.5), (3.2), (3.4)₁ and (3.5). The relation (3.4)₂ follows from (2.9)₅ with $N^{33} \sim Gh\gamma\vartheta^2$ — implied by (2.8)₄. Having (3.4)₁₋₃ the estimation (3.4) can be deduced using the three-dimensional compatibility equations as done in [11] for isotropic shells.

Introduction of (2.5), (3.2), (3.4) and (3.3) into (3.1) yields

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \Sigma/(Gh\gamma^2) \sim 1 + (h/R)\delta^{-1} + \delta^{-2} + (G/G')(h/L)^2\delta^{-2} + \\ & + (G/G')(h/L)^2(h/R)\delta^{-1} + (G/G')(h/L)^2 + (\nu' + \vartheta^2)(G/E') + \nu'(\nu' + \vartheta^2)(G/E') + \\ & + \nu'(\nu' + \vartheta^2)(G/E')\delta^{-2} + \underline{[h/R + (G/G')(h/L)^2 + (\nu' + \vartheta^2)(G/E')\vartheta^2]} + \dots, \end{aligned}$$

which with the sequence of terms corresponding to that of (3.1) expresses an approximation to the strain energy in terms of the nondimensional parameters: geometric h/R , h/L , ϑ , δ and elastic G/G' , G/E' and ν' . Inspecting in (3.6) possible rates of the above listed parameters one can establish global energetical consistency of shell theories. It turns out that the KL theory forms (as well known [11]) within the relative error ϑ^2 the first approximation in the case of bending of isotropic thin shells subjected to uniform loads; accordingly the first and third term in (3.6) are of primary importance. The Reissner-Naghdi (RN) theory [9] and the Timoshenko-type (T) theory [3] (each including the transverse shear strain $\gamma_{\alpha 3}$) prove energetically consistent with regard to the inextensional bending of thin anisotropic shells, with a large ($G/G' \gg 1$) transverse shearing deformability; here only the third and fourth term in (3.6) should be retained. The SP theory owing to the absence in (3.6) of the two underlined terms cannot be consistent in general, i.e. when the analysis is solely based on the rather rough parameters involved in (3.6). Yet in some specific problems SP may, perhaps, yield a consistent approximation to the strain energy which conjecture, however, we are not able to prove rigorously. Instead of that observe that an inconsistent theory can still be expected to furnish with a desired accuracy selected components of the stress and displacement. We shall elaborate on that point of view and show by a physical argument and ensuing numerical example that SP compared with more elementary theories (e.g. RN, T, KL) offers a distinctly improved approximation of the transverse shear σ^{p3} and normal σ^{33} stress in certain shell regions such as the vicinity of the load discontinuity.

To this end let us focus attention on the equation of equilibrium (2.8)₄, the transverse shear couple $M^{\alpha 3}$ (also called [1] the splitting force) and the transverse normal stress resultant N^{33} . Since in planes normal to the middle surface N^{33} does not occur and $M^{\alpha 3}$ is self-equilibrated (to be exact, $M^{\alpha 3}$ tends to be self-equilibrated as h/R approaches zero) thus neither N^{33} nor $M^{\alpha 3}$ can affect significantly the global equilibrium of a shell element cut out across the thickness. Therefore in passing from SP to the more elementary theories which may be reached by the assumption $M^{\alpha 3} = 0$, the ensuing simplification of (2.8)₄ to the form

$$(3.7) \quad b_{\alpha\beta} M^{\beta\alpha} - N^{33} + m^3 = 0$$

and direct determination of N^{33} from (3.7), one cannot expect a noticeable disturbance

of the global shell behaviour (characterized for example by the normal deflection of the middle surface). Yet, as regards $N^{\alpha 3}$ and $M^{\alpha 3}$ (and consequently the stresses σ^{33} and $\sigma^{\varphi 3}$) the foregoing simplifications may obviously lead to a considerable change. In fact, it is readily verified that all the elements in $(2.8)_4$ have in general the same order of magnitude (see [4]), with the $M^{\alpha 3}_{|\alpha}$ contribution increasing in proportion with $(1/\delta)$ and $(1/L)$. Thus in regions characterized by a large index $(1/L)$ of variation of the deformation (such as the vicinity of the load discontinuity) we cannot expect the theories (e.g. RN) utilising (3.7) to approximate $\sigma^{\varphi 3}$ and σ^{33} with sufficient accuracy, whereas SP using the exact equation $(2.8)_4$ seems here far more promising.

Return to the first underlined term in (3.6). In most elementary theories (e.g. KL, RN, T) this term is implicitly taken into account by a simple algebraic elimination (see [12, 13]) of the transverse normal strain e_{33} . Such a procedure undoubtedly improving the strain energy approximation in those theories makes, however, the variational derivation of SP extremely awkward and precludes the possibility of improved approximation of $\sigma^{\varphi 3}$ and σ^{33} because of destruction of the crucial equation $(2.8)_4$. Thus we omit the relevant underlined term in (3.6) assuming that $(\nu')^2 \ll 1$, which holds for numerous elastic media.

It should be stressed that the foregoing equations of SP and their analysis refer to the interior shell problem, i.e. they lose their meaning in the boundary layer zone.

4. Numerical example

Let us consider (Fig. 1) an infinitely long circular cylindrical shell of constant thickness h , the outer surface radius r , made from an isotropic material characterized by the Poisson number ν and the Young's modulus E .

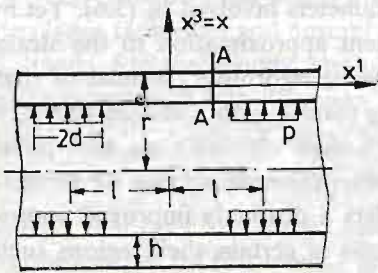


Fig. 1

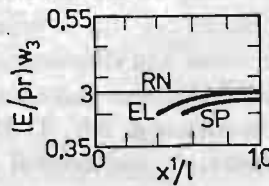


Fig. 2

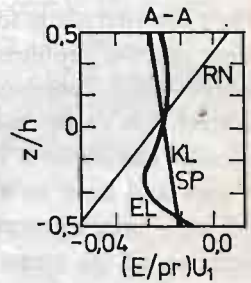


Fig. 3

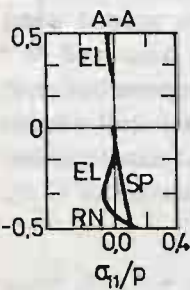


Fig. 4

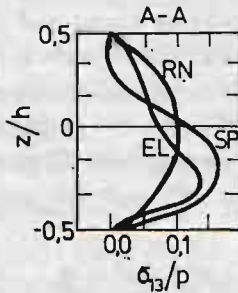


Fig. 5

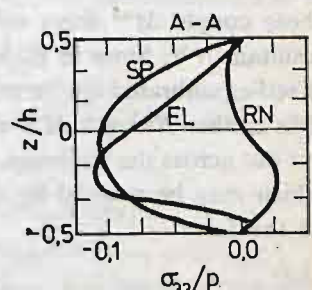


Fig. 6

The internal surface of the cylinder is subjected to a rotationally-symmetric band pressure p spaced in the longitudinal direction with the period $2l$ and having the band width $2d$. The normal force N_{11} directed along the generator is assumed to vanish throughout the shell and the longitudinal displacement U_1 to be zero in the plane $x^1 = 0$. The solution of the relevant equations of SP can be readily found in terms of the Fourier series expansions but we omit it here for the sake of brevity (the details are analogous to that given in [14, 15]). Computations have been carried out with the following data: $h/r = 0.3$, $d/l = 0.2$, $l/r = 0.2$ and $\nu = 0.3$ which describe a nonthin shell under a local load ($d/h = 0.13$). The results depicted in Fig. 2 - 6 (with distributions EL, RN and KL taken from [14], where EL denotes the three-dimensional elasticity solution) evidently confirm our expectations (sec. 3). To wit, in a vicinity (the cross-section A-A in Fig. 1, having the coordinate $x^1/l = 0.6$) of the load discontinuity (having the coordinate $x^1/l = 0.8$) SP approximates the transverse shear (Fig. 5) and normal (Fig. 6) stress distinctly more accurately than RN. At the same time, SP is only slightly more adequate than RN (or KL) in the case of the displacements (Fig. 2 and 3) and the normal stress along the generator (Fig. 4); the surprisingly poor approximation of the cross section rotation by RN (Fig. 3), disclosed in [14], does not occur virtually [15], i.e. is caused by some errors in [14].

References

1. I. N. VEKŪA, *Theory of thin shallow shells with variable thickness* (in Russian), Metzineraba, Tbilisi 1965.
2. L. M. HABIP, *Theory of elastic shells in the reference state*, Ing. Archiv 34, 1965.
3. K. Z. GALIMOV, *Theory of shells with transverse shear deformation* (in Russian), Kazan 1977.
4. W. PIETRASZKIEWICZ, *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*, Polish Scientific Publishers, Warszawa-Poznań 1979.
5. C. WOŹNIAK, *Non-linear theory of shells* (in Polish), PWN, Warszawa 1966.
6. P. M. NAGHDI, *The theory of plates and shells*, Handbuch der Physik, VIa/2, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972.
7. K. WASHIZU, *Variational methods in elasticity and plasticity*, Oxford, Pergamon Press 1968.
8. D. A. DANIELSON, *Improved error estimates in the linear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. B74, 1971.
9. P. M. NAGHDI, *On the theory of thin elastic shells*, Quart. Appl. Math. 4, 14, 1957.
10. W. ZERNA, *Matematisch strenge Theorie elastischer Schalen*, ZAMM 7/8, 142, 1962.
11. W. T. KOITER, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, IUTAM Symp. Delft 1959, North Holland, Amsterdam 1960.
12. L. LIBRESCU, *Elastostatics and kinetics of anisotropic and heterogenous shell-type structures*, Noordhof, Leyden 1975.
13. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics vol. 4, Amsterdam 1963.
14. J. M. KLOSNER, H. S. LEVINE, *Further comparison of elasticity and shell theory solutions*, AIAA J. 3, 4, 1966.
15. Z. RYCHTER, *Statical analysis of transversely isotropic shells of moderate thickness* (in Polish), dissertation, Politechnika Warszawska, Warszawa 1982.

Резюме

О ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Рассматривается в линейной постановке статика относительно толстых, упругих, анизотропных оболочек под действием быстроизменяющихся нагрузок. Вариационные и дифференциальные уравнения двумерной теории оболочек выведены из трехмерных уравнений упругости на основе предположения о линейном распределении вектора перемещений по толщине оболочки. Исследована точность аппроксимации упругой энергии для принятой модели оболочки и определена область применения уравнений этой модели. Дан пример расчета.

Streszczenie

O LINIOWEJ TEORII ANIZOTROPOWYCH POWŁOK O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

W pracy rozważono statyczne zagadnienie wewnętrzne liniowej teorii niezbyt cienkich, sprężystych powłok anizotropowych, poddanych szybkozmiennym obciążeniom. Równania wariacyjne i różniczkowe teorii dwuwymiarowej wyprowadzono z równań teorii sprężystości na podstawie założenia liniowego rozkładu wektora przemieszczenia na grubości powłoki. Zbadano dokładność aproksymacji energii sprężystej w przyjętym modelu powłoki i określono zakres stosowalności równań tego modelu. Podano przykład liczbowy.

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 stycznia 1983 roku

FINITE ELEMENT REPRESENTATION FOR STIFFENED THIN CYLINDRICAL SHELL INSTABILITY ANALYSIS

LECH NOGA

Politechnika Wroclawska

1. Introduction

Problems of the elastic instability analysis for thin shell structures are highly complex due to the nonlinear character of the actual buckling mechanism. In general, the instability investigation of such structures may include the solution of the problem of equilibrium bifurcation, and a nonlinear analysis based on tracing the nonlinear load-displacement path and determining singular points of load-displacement behavior see ([1], [2], [3]). The basic problem in the instability investigation of thin shells, therefore, lies in a determination of critical loads related to such points (bifurcation, limit point or the other points of decrease in stiffness). An approach to the resolution of the above-cited problems can be based on the finite element method.

The different levels of a nonlinearity can be considered for thin shell instability analysis. It leads to different numerical problems. A hierarchy of nonlinearity was made clear by MALLETT and MARCAL [4]. The objective of this paper, therefore, is not an extension of the finite element approach to the analysis of all the above-cited problems, but the attention is focused on the formulation of matrices appropriate to instability investigation of stiffened cylindrical shell, using for this purpose a ribbed curved element. Fundamental governing relations to be derived are in the class of geometrically nonlinear formulation. Then, the element is verified by comparing numerical results for the linear, stable analysis to the alternative solution for the same problem. The relevant matrices of the finite element model appropriate to the linear stability analysis are given by the explicit definition [5]. Herein, computational procedures are not developed for the nonlinear analysis. The explicit numerical procedures to be outlined are in the class of "linear bifurcational stability" formulation. The fundamental concept of the element model is, that a set of discrete stiffenings (stringers and rings) is considered in the element stiffness connections. The approach based upon the introduction of the stiffenings from within the finite element model is restricted to the thin and flexible ribs referred to as the second order stiffenings. Assuming that the real structure will be stiffened with large number of such ribs the local buckling is not taken into account. The number of the element ribs may be chosen arbitrarily. The ribs eccentricity is taken into account. Attention is restricted to linearly elastic material behavior.

2. Element geometry and displacement functions

A description of the element geometry is given in Fig. 1. The element consists of thin cylindrical panel and a set of thin flexible ribs. The radius of curvature (R) and thickness (t) are constant. The element nodes are corner points numbered from 1 to 4 as in Fig. 1. Let ξ, η represent a set of orthogonal curvilinear coordinates for the mid-surface and ζ the normal coordinate. The coordinates are defined as follows:

$$(2.1) \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{s}{R}, \quad \zeta = z,$$

where

- x — length along the axial direction,
- s — arc length along the parametric line η ,
- z — length along the normal direction.

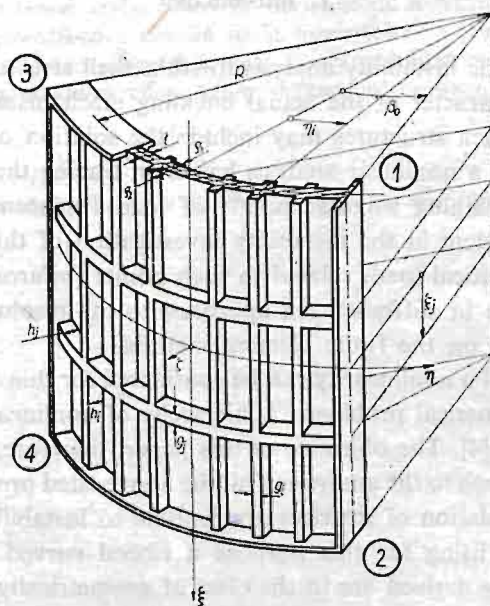


Fig. 1. Element Geometry

As the chosen nodal displacements we take the mid-surface translations u, v, w in the ξ, η, ζ directions and parameters $\frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$. Therefore, the total number of element degrees of freedom is 24. The displacement functions representing the element behavior are assumed in the form:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_6 \sin \eta - \alpha_{10} (\cos \eta - \cos \beta_0), \\ v &= -\alpha_5 (1 - \cos \eta \cos \beta_0) + \alpha_6 \xi \cos \eta + \alpha_7 \eta + \alpha_8 \xi \eta - \alpha_{10} \xi \sin \eta + \alpha_{11} \cos \eta + \alpha_9 \sin \eta, \\ w &= \alpha_9 \cos \eta + \alpha_{10} \xi \cos \eta + \alpha_{11} \sin \eta + \alpha_{12} \xi^2 + \alpha_{13} \xi \eta + \alpha_{14} \eta^2 + \alpha_{15} \xi^3 \\ &\quad + \alpha_{16} \xi^2 \eta + \alpha_{17} \xi \eta^2 + \alpha_{18} \eta^3 + \alpha_{19} \xi^3 \eta + \alpha_{20} \xi^2 \eta^2 + \alpha_{21} \xi \eta^3 + \alpha_{22} \xi^3 \eta^2 \\ &\quad + \alpha_{23} \xi^2 \eta^3 + \alpha_{24} \xi^3 \eta^3 + \alpha_5 \sin \eta \cos \beta_0 + \alpha_6 \xi \sin \eta. \end{aligned}$$

Similar functions was previously used by CANTIN and CLOUGH [6] to the linear static analysis of a thin cylindrical shell. The element is nonconforming since the employed displacement functions (2.2) do not satisfy required convergence conditions. ZIENKIEWICZ and CHEUNG [7] summarized conditions to be met by displacement function chosen in the representation of element behavior for the purpose of matrix displacement analyses. Reference [6] examines the violation of the above-mentioned conditions with the reference to a thin cylindrical shell element and, through numerical evaluation, conclude that such functions exhibit convergence for the linear case.

References [8], [9] conduct a similar study. GALLAGHER [1] concludes, that the finite element method, when based on variational principles, requires interelement continuity of derivatives up to one order lower than it appears in the associated functional, or energy. With a reference to the strain displacement relationships the highest derivative to appear in the nonlinear terms is the first. Thus, since the linear terms consist of the second order derivatives, this opens up the possibility of using the same or simplified field for the nonlinear terms as compared to the field used for linear terms. Since functions (2.2) exhibit convergence for the linear case, thus, there is no objection to application such field in nonlinear case and stability analysis.

3. Governing nonlinear equations

Define u and p as the mid-surface translation and external force intensity matrices, ε , ε_i , ε_j as the strain matrices referred to cylindrical panel, stringers and rings, respectively, and σ , σ_i , σ_j as the stress matrices corresponding to ε , ε_i , ε_j , expressed by

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u &= [uvw]^T, & p &= [p_\xi p_\eta p_\zeta]^T, \\ \varepsilon &= [\varepsilon_1^c \varepsilon_2^c \varepsilon_{12}^c]^T, & \varepsilon_i &= [\varepsilon_1^c 0 \varepsilon_{12}^c]^T, & \varepsilon_j &= [0 \varepsilon_2^c \varepsilon_{12}^c]^T, \\ \sigma &= [\sigma_1^c \sigma_2^c \sigma_{12}^c]^T, & \sigma_i &= [\sigma_1^c 0 \sigma_{12}^c]^T, & \sigma_j &= [0 \sigma_2^c \sigma_{12}^c]^T, \\ & & i &= 1, 2, \dots, n. & j &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

where

n — total number of element stringers,

m — total number of element rings,

$\varepsilon_1^c, \varepsilon_2^c$ — extensional strains in ξ, η directions,

ε_{12}^c — shear strain.

The stress components are shown in Fig. 2.

Let v be the strain energy per unit area of the middle surface, expressed by

$$(3.2) \quad v = V_0 + \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{j=1}^m V_j$$

where

V_0 — cylindrical panel strain energy density,

V_i — stringer strain energy density,

V_j — ring strain energy density.

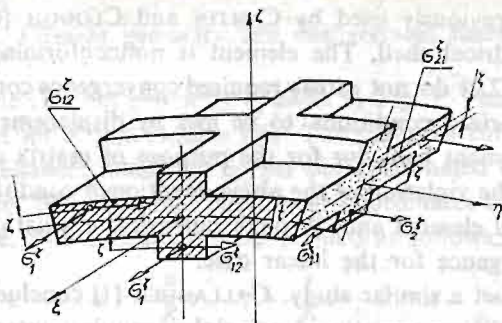


Fig. 2. Stress Components

The governing equilibrium equations are obtained by applying the Principle of Virtual Displacements which requires

$$(3.3) \quad \int_A \delta V_0 dA + \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \delta V_i dA_i + \sum_{j=1}^m \int_{A_j} \delta V_j dA_j = \int_A \delta u^T p dA,$$

and has to be satisfied for an arbitrary admissible variation δu . The formulae for the strain energy density can be written as follows

$$(3.4) \quad V_0 = \frac{1}{2} \int_{\xi} \varepsilon^T \sigma \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) d\zeta, \quad V_j = \frac{1}{2} \int_{\xi} \varepsilon_j^T \sigma_j \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) d\zeta.$$

The derived nonlinear strain—displacement relationships constitute a generalization of those due to NOVOZHILOV [10]:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1^{\zeta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 - \zeta \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \\ \varepsilon_2^{\zeta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 - \zeta \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right), \\ \varepsilon_{12}^{\zeta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \zeta \frac{2}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\right). \end{aligned}$$

After restricting our attention to the linearly elastic material behavior, the dependence of stress upon strain is assumed to be governed by

$$(3.6) \quad \sigma = D(\varepsilon - \varepsilon^0), \quad \sigma_i = E_i(\varepsilon_i - \varepsilon_i^0), \quad \sigma_j = E_j(\varepsilon_j - \varepsilon_j^0),$$

in which ε^0 , ε_i^0 , ε_j^0 contain the initial strains. The rigidity matrices are defined as follows

$$(3.7) \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad E_j = E_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu_j)} \end{bmatrix}$$

where

E, E_i, E_j — elastic modulus of cylindrical panel and ribs, respectively
 ν, ν_i, ν_j — Poisson's ratios of panel and ribs.

It is convenient to segregate the nonlinear terms in the expression for strains, thus, the strain matrices ε , ε_i , ε_j can be written as follows

$$(3.8) \quad \varepsilon = e + \epsilon + \zeta k, \quad \varepsilon_j = e_j + \epsilon_j + \zeta k_j,$$

in which e , e_i , e_j contain the linear terms of stretching deformations, ϵ , ϵ_i , ϵ_j contain the nonlinear terms and k , k_i , k_j contain the curvature changes. Substituting for u we obtain from Eq. (2.2)

$$(3.9) \quad u = A\alpha,$$

where A contains prescribed functions of the local coordinates and α contains unknown parameters α_i . Substituting this relation into Eq. (3.8) we are able to express the relevant matrices in the following form

$$(3.10) \quad \begin{aligned} e &= B\alpha, & e_i &= B_i\alpha, \\ \epsilon &= H\alpha, & \epsilon_j &= H_j\alpha, \\ k &= G\alpha, & k_j &= G_j\alpha. \end{aligned}$$

Note that H , H_i , H_j depend on α whereas B , B_i , B_j , G , G_i , G_j are independent of α . The relevant variations are

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \delta e &= B\delta\alpha & \delta e_j &= B_j\delta\alpha \\ \delta \epsilon &= 2H\delta\alpha & \delta \epsilon_j &= 2H_j\delta\alpha \\ \delta k &= G\delta\alpha & \delta k_j &= G_j\delta\alpha \\ \delta u &= A\delta\alpha \end{aligned}$$

Substituting Eqs. (3.10) and (3.11) into Eq. (3.3) and integrating over the element we obtain

$$(3.12) \quad \delta\alpha^T (\bar{k}_n\alpha + \bar{P}_n^0) = \delta\alpha^T \bar{P}_n.$$

Eq. (3.12) must be satisfied for an arbitrary admissible $\delta\alpha$, the equality of coefficients, therefore, leads to the equilibrium equations

$$(3.13) \quad \bar{k}_n\alpha + \bar{P}_n^0 = \bar{P}_n,$$

where k_n is the nonlinear stiffness matrix. The matrices \bar{P}_n^0 , and \bar{P}_n depend on the initial and external loadings, respectively. The above matrices are given explicit definitions in dissertation [5]. It remains to express the element parameters, α , in terms of the nodal displacement. Define u_l as the displacement matrix for node „ l “:

$$(3.14) \quad u_l = \left[u \ v \ w \ \frac{\partial w}{\partial \xi} \ \frac{\partial w}{\partial \eta} \ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right]^T, \\ l = 1, 2, 3, 4.$$

Let U denote the matrix containing the nodal displacement matrices u_l listed in a prescribed order

$$(3.15) \quad U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T.$$

Substituting Eq. (3.9) into the foregoing expression leads to the relation defining transformation matrix C

$$(3.16) \quad U = C\alpha,$$

Performing this transformation on Eq. (3.12) we obtain

$$(3.17) \quad k_n U + P_n^0 = P_n,$$

where

$$k_n = (C^{-1})^T \bar{k}_n C^{-1}, \quad P_n^0 = (C^{-1})^T \bar{P}_n^0, \quad P_n = (C^{-1})^T \bar{P}_n.$$

The system of equations for the complete structure can be obtained in the known manner (see [11]). Defining r as the system nodal displacement matrix while R_n^0 , R_n are the initial and external loading matrices, respectively, we can express the total system equations

$$(3.18) \quad K_n r + R_n^0 = R_n,$$

where K_n is the total nonlinear stiffness matrix.

4. Generation of tangent stiffness matrix

Herein, the definition of tangent stiffness matrix is obtained by applying the Trefftz criterion ([12], [13]). A necessary and sufficient condition for the stability of the prebuckled state is the existence of some nonvanishing but infinitesimally close perturbed configuration in which the energy increment is always non-negative. The critical point may be characterized by a positive, semidefinite, second variation of the potential energy. Thus, at the critical load there exist nonzero virtual displacements for which the second variation in the total potential energy vanishes. The total potential energy may be expressed as follows

$$(4.1) \quad \Pi = V + \Omega$$

where V is the strain energy and Ω is the potential energy of the external load. If the external loading is considered to be independent of the displacements, $\delta^2 \Pi$ reduced to $\delta^2 V$ and Trefftz criterion may be written as $\delta^2 V \geq 0$. Thus, the attention is turned here to the formulation of the second variation of this portion of the potential energy. According to Eqs. (3.2) and (3.3) the second variation of „ V ” can be expressed as

$$(4.2) \quad \delta^2 V = \int_A \delta^2 V_0 dA + \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \delta^2 V_i dA_i + \sum_{j=1}^m \int_{A_j} \delta^2 V_j dA_j,$$

Expanding the right-hand side of Eq. (4.2) we obtain

$$(4.3) \quad \delta^2 V = \delta\alpha^T \bar{k}_T \delta\alpha,$$

where \bar{k}_T is the element tangent stiffness matrix. The expression for \bar{k}_T takes the form

$$(4.4) \quad \bar{k}_T = \bar{k} + \bar{k}_\sigma + \bar{k}_l,$$

where \bar{k} is the linear stiffness matrix, \bar{k}_σ is referred to as the initial stress matrix and \bar{k}_l is the matrix of large deformations. The matrices are given explicit definitions in disser-

tation [5]. Applying the transformation (3.16) to Eq. (4.3) we obtain

$$(4.5) \quad \delta^2 V = \delta U^T k_T \delta U.$$

Therefore, the element tangent stiffness matrix k_T takes the form

$$(4.6) \quad k_T = (C^{-1})^T \bar{k}_T C^{-1},$$

the total tangent stiffness matrix for complete structure can be obtained in a known manner

$$(4.7) \quad K_T = \sum_g a_g^T k_T a_g,$$

where a_g is a Boolean matrix and „g” element number. According to Eq. (4.4) the total tangent stiffness matrix takes the form

$$(4.8) \quad K_T = K + K_\sigma + K_l$$

5. Calculation of bifurcation state

Herein, the previously outlined finite element formulation is applied to the linearized analysis of a bifurcation state of the shell. Since the external loading is considered to be independent of the displacement, the application of the Trefftz criterion to the complete structure leads to the relation $\delta^2 V_C \geq 0$ where „ V_C ” is the total strain energy of the system. The second variation of the total strain energy may be expressed as follows

$$(5.1) \quad \delta^2 V_C = \delta r^T K_T \delta r.$$

In the linearized stability analysis, the prebuckled geometry corresponds to the undeformed (initial) geometry. This assumption is introduced by disregarding the second order nonlinear terms, therefore, the matrix K_l is neglected. The total tangent stiffness matrix reduces to

$$(5.2) \quad K_T = K + K_\sigma$$

where K is the linear stiffness matrix and K_σ depends on the applied loading. If the distribution of internal forces in the structure does not change along the fundamental path the matrix K_σ may be assumed to vary linearly with the load level. If the loading R_0 is arbitrary, first we obtain the linear solution r_0 and then we generate K_σ . When the loading can be specified in terms of a single parameter, say λ , then K_σ can be written as

$$(5.3) \quad K_\sigma(r) = \lambda K_\sigma(r_0),$$

moreover

$$(5.4) \quad K_T = K + \lambda K_\sigma(r_0).$$

According to Eqs. (5.1) and (5.4) the bifurcation problem can be interpreted as a generalized eigenvalue problem, expressed by

$$(5.5) \quad K \delta r - \lambda K_\sigma \delta r = 0$$

Many research efforts have been devoted to solve the foregoing problem (see [14], [15], [16], [17]). Therefore, two independent computational procedures have been developed

for this purpose. The first procedure represents application of the Householder-Cholesky method, the second one, based upon Peters-Wilkinson approach may be referred to as the trial method. The basis of the trial method may be stated as follows:

“If the matrix K is positive definite then the number of eigenvalues of the problem (5.5) smaller than the chosen trial value of parameter λ , say λ_0 , equals to the number of negative diagonal elements of the top triangular matrix obtained from $(K - \lambda_0 K_0)$ by the Gauss elimination”

The number of negative diagonal elements displaying during the trial process enables sensible selection the succeeding values of parameter λ_0 during the calculation. These values can be introduced into computer storage simply via monitor. The trial process advances iteratively until the desirable accuracy of solution is accomplished.

6. Numerical examples and accuracy comparisons

In this section the previously described element is verified by comparing numerical results for the linear stability analysis to the alternative classical solution for the same problem. The basis for appropriate computations are the computer programs created in accordance with the methods applied to resolution of the eigenvalue problem. These programs were coded in FORTRAN for the computers ODRA 1305 and ODRA 1325. The explicit listings and a concise flow charts of these programs are given in dissertation [5]. The first example considered was a simply supported along the longitudinal edges,

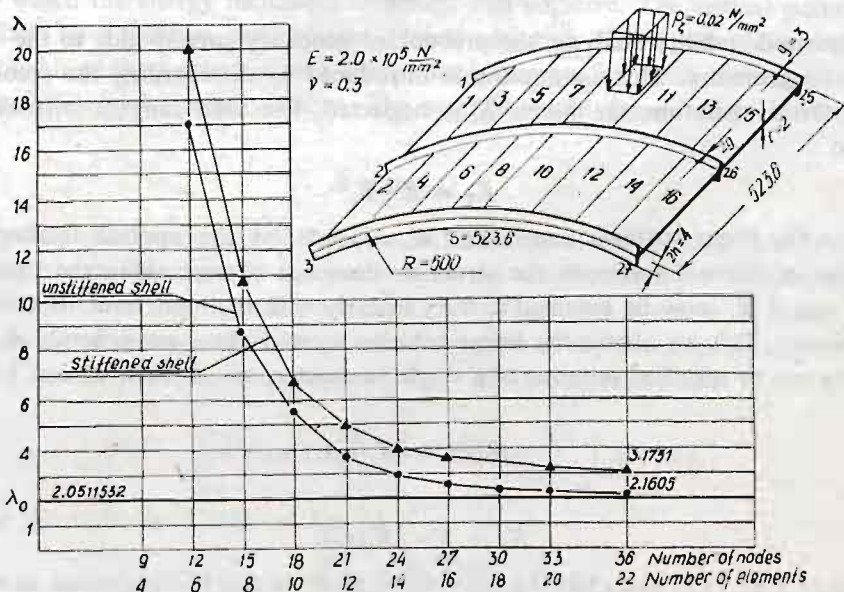


Fig. 3. Cylindrical panel under uniform normal pressure —
 — Accuracy Vs. Grid Refinement
 ● — unstiffened panel,
 ▲ — panel stiffened by the three rings,
 - - - classical solution

and free along the circular ends unstiffened cylindrical panel subjected to uniform normal pressure. Fig. 3 shows a comparison of the finite-element solution with the classical solution [18]. The same cylindrical panel stiffened, by the three rings (see Fig. 3) was studied next. Fig. 3 indicates a study of the convergence of the present method. The diagram shows that the non-dimensional buckling load „ λ ” converges quite rapidly. The difference between the present result and classical solution is approximately 5% for 22 elements.

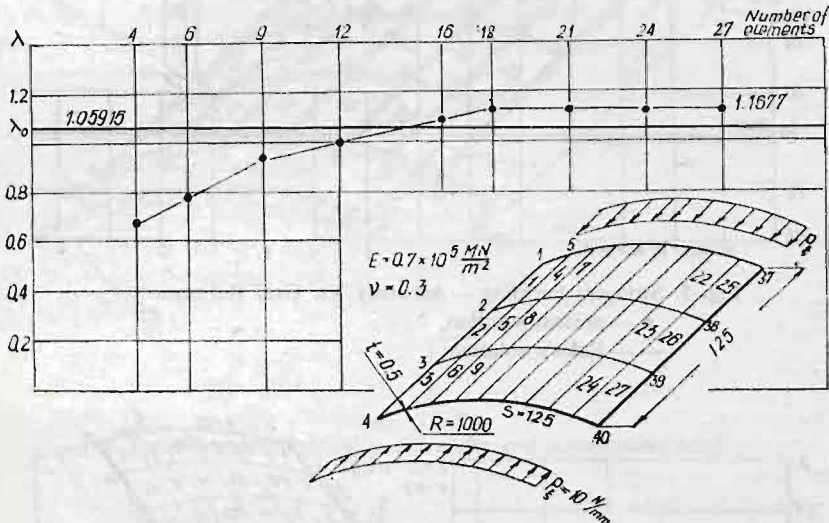


Fig. 4. Cylindrical panel under uniform compressive load —
 — Accuracy Vs. Grid Refinement
 • — present solution,
 — — classical solution

Figure 4 shows a simply supported on all four sides cylindrical panel under uniform end compressive load p_x . The non-dimensional buckling load is plotted against the number of discrete elements. The result for employed class of the finite element mesh division is compared with the classical Timoshenko's solution [18]. In this case the difference between the present result and those of Reference [18] is approximately 10%. The diagram shows that the buckling factor „ λ ” converges to value higher than those of Timoshenko, however, a finer, in longitudinal direction, type of the grid can be used, giving more accurate answer.

Another problem examined is the buckling of a set of stringers supported and loaded as shown in Fig. 5. The results prove to be in close agreement with the classical Euler's solution.

Fig. 6 indicates a study of the convergence of the present solution for the simply supported on all four sides cylindrical panel in the shear conditions. Volmir [19] has analyzed this problem using Galerkin's method. Volmir's results are compared with results of the present method. Ref. [19] predicts higher loads in comparison with "exact" solution, whereas the present method gives lower buckling loads. The difference between the results of foregoing solutions is approximately 8% for 24 elements.

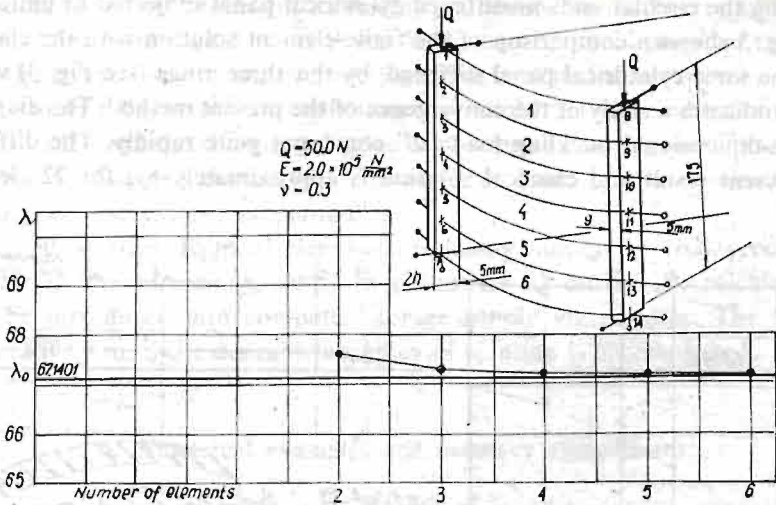


Fig. 5. Stringers buckling — Accuracy Vs. Grid Refinement

● — present solution,
 --- Euler's solution

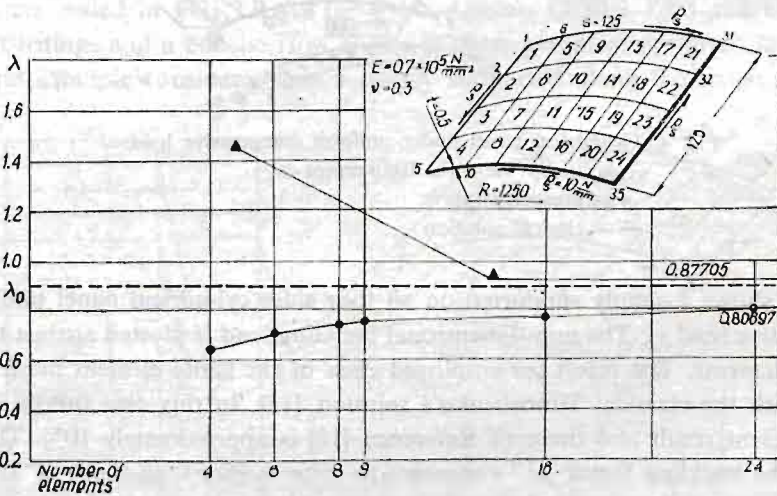


Fig. 6. Cylindrical panel in the shear conditions — Accuracy Vs. Grid Refinement

● — present solution,
 ▲ — Galerkin's method

Finally, a stiffened by 7 stringers and 5 rings cylindrical panel under uniform end compressive load is considered (see Fig. 7). The panel is simply supported on all sides. In the discrete element analysis, employing 24 elements the result obtained is $\lambda = 5.46066$. For this case the solution for Householder's method was compared with the employed trial method (see Ref. [20]). The results of the trial method prove to be in close agreement with Householder's solution also in the other cases examined [5].

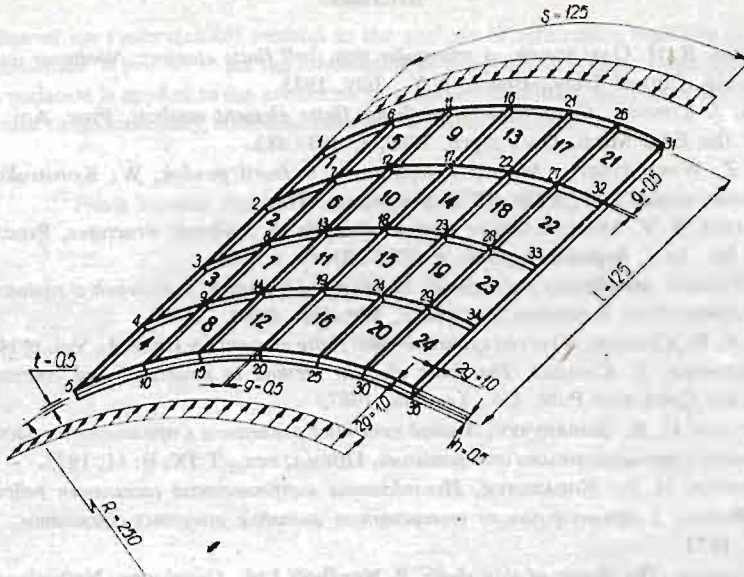


Fig. 7. Stiffened cylindrical panel under end compressive load

7. Conclusions

It is clear from the outlined convergence study, that present method assures convergence for the basic cases of loading. The convergence characteristics depend on these cases of loading. Appropriate curves can converge from opposite directions. It arises from the nature of the assumed displacement field. Namely, displacement function for the normal translation „ w ” satisfies the continuity condition, whereas the simpler functions for the „ u ” and „ v ” components are assumed. It causes that the violations of the continuity conditions for “in plane” translations are present in the element representation. If the normal translation is the dominant component in prebuckled state, the convergence characteristics, therefore, converge from the top direction. On the other hand if the “in plane” translations are in prebuckled state the dominant components the convergence occurs from the bottom direction. Ref. [5] gives more detailed convergence and accuracy analysis. Fairly good agreement was observed between the results of applied methods of solution of the buckling eigenvalue problem in all examined cases. The trial method seems to be very effective in such a class of the eigenvalue problem. Finally, it should be pointed out that discrepancies between the theoretically predicted classical bifurcation buckling loads and test results are always expected for thin-shell structures. The reason is that buckling of thin shells is very sensitive to initial imperfections. More accurate results may be obtained by applying nonlinear stability analysis. The derived nonlinear terms enable an extension of the present formulation for investigation of the nonlinear instability effects of the stiffened cylindrical shells.

References

1. G. R. THOMAS, R. H. GALLAGHER, *A triangular thin shell finite element: Nonlinear analysis*, Rep. No NASA, Cr-248, Cornell Univ., Ithaca, N.Y., July, 1975.
2. C. BREBBIA, J. CONNOR, *Geometrically nonlinear finite element analysis*, Proc. Am. Soc. Civ. Eng. EM2, J. of the Eng. Mech. Div., April, 1969, s. 463 - 483.
3. J. ORKISZ, Z. WASZCZYŻYŃ, *Metody komputerowe w teorii powłok*, W: Konstrukcje powłokowe-teoria i zastosowania. T. 1, PAN IPPT, Warszawa 1978.
4. R. H. MALLETT, P. V. MARCAL, *Finite element analysis of nonlinear structures*, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. of Str. Div., September, 1968, s. 2018 - 2105.
5. L. NOGA, *Wybrane zagadnienia stateczności uźebrowanych powłok walcowych z zastosowaniem metody elementůw skończonych*, Rozprawa doktorska, Wrocław, 1980.
6. G. CANTIN, R. W. CLOUGH, *A curved cylindrical-shell finite element*, A.I.A.A.J., Vol. 6, No 6, June, 1968.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. CHEUNG, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, Chapter 2, Mc Graw-Hill Publ. Co., London, 1967.
8. М. И. ДЛУГАЧ, Н. В. КОВАЛЬЧУК, *Метод конечных элементов в применении к расчету цилиндрических оболочек с прямоугольными отверстиями*, Прикл. мех., Т IX, В. 11, 1973.
9. М. И. ДЛУГАЧ, Н. В. КОВАЛЬЧУК, *Исследование напряженного состояния ребристых цилиндрических оболочек с прямоугольными отверстиями методом конечных элементов*, Прпкл. Мех., Т X, В10, 1974.
10. V. V. NOVOZHILOV, *The theory of thin shells*, P. Nordhoff Ltd., Groningen, Netherlands, 1964.
11. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementůw skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
12. H. L. LANGHAAR, *Energy methods in applied mechanics*, J. Wiley and Sons, N. Y., 1962.
13. D. R. NAVARATNA, T. H. H. PIAN, E. A. WITMER, *Stability analysis of shells of revolution by the finite element method*, A.I.A.A.J., Vol. 6, No 2, February, 1968, s. 355 - 361.
14. J. H. WILKINSON, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.
15. G. STRANG, G. J. FIX, *Теория метода конечных элементов*, MIR, Москва, 1977.
16. B. WRANA, *Rozwiązanie problemu własnego w dowolnym paśmie widma dużych układów dyskretnych*, Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, IV Konf. T. 1, Koszalin, 1979.
17. J. H. ARGYRIS i inni, *Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej*, PAN IPPT, Ossolineum, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk, 1977.
18. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa, 1963.
19. А. С. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем*, НАУКА, Москва, 1967.
20. L. NOGA, *Analiza stateczności uźebrowanych powłok walcowych z zastosowaniem metody elementůw skończonych*, W: Konstrukcje powłokowe — teoria i zastosowanie, III Konf., Opole, 1982.

Резюме

КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ В РАСЧЕТАХ УСТОЙЧИВОСТИ РЕБРИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В работе представлено использование метода конечных элементов в расчетах устойчивости ребристых цилиндрических оболочек. Для исследования устойчивости использован критерий Тревца. Алгоритм применяется в расчете общей потери устойчивости. В работе построены нелинейные матрицы конечного элемента.

Summary

An extension of the finite element method to the analysis of bifurcation buckling of cylindrical stiffened shells is presented. A procedure for the formulation of the problem is based upon the Trefftz criterion. The present formulation is applied to the prediction of general instabilities. Aspects of the element formulation which pertain to geometrically nonlinear behavior are also described.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1983 roku

THE ANALYSIS OF A VISCOELASTIC SHELL OF REVOLUTION PERIODICALLY LOADED

PIOTR KONDERLA

Wrocław

1. Introduction

The shell of revolution periodically loaded by mechanical forces or by the periodically forced displacement is analysed in the paper. The material of a shell is assumed to be linear. The problem will be solved on the basis of the technical theory of thin shells [1]. Under assumption that the displacements and deformations are small the problem is linear. It is also assumed that the loadings of the shell (mechanical and nonmechanical) are described by the harmonic functions with the circular frequency ω and are applied in the duration of the sufficient length. It allows to assume that the motion of the construction is stationary, i.e. that the displacements and internal forces vary periodically with the frequency ω . It enables searching of the solution without explicit time function.

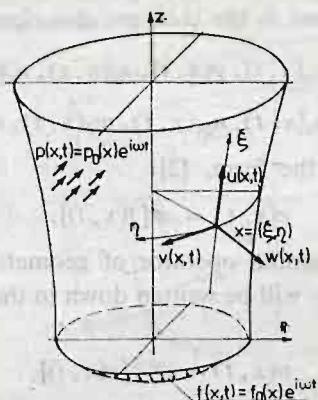


Fig. 1

The set of curvilinear coordinates $x = (\xi, \eta)$ (Fig. 1) is chosen in the middle surface of the shell. For simplification it is assumed that all loads are in the same phase and that the origin of the time axis is chosen so, that the phase angle is equal to zero. It does not restrict the generality of considerations because the problem is linear and the principle of superposition holds. For $\omega = 0$ the statical problem has been received.

The solution of the problem has been obtained numerically by Finite Element Method [2, 3]. The construction of the FEM algorithm for eight parameter conical elements are given in the paper. The solution formulated in this way has been applied to the analysis of the rubber construction of the seal of rotational shafts.

2. Basic definitions and linear viscoelasticity equations

Let the system of cylindrical coordinates $X = (r, z, \eta)$ be introduced in the Euclidean space. The middle surface of the shell immersed in this space occupies the region ϑ . The curvilinear coordinates $x = (\xi, \eta)$, interrelated with (r, z, η) by means of $X = [r(\xi), z(\xi), \eta]$, parametrize the surface. The material of the shell is isotropic with mass density ρ_0 and thickness distribution $h(\xi)$.

All functions which describe the motion, deformations and stresses in the shell will be described in terms of the physical coordinates of the two dimensional tensor fields on the middle surface of the shell. Keeping in mind the applied method of the solution we have assumed it in the form of vectors in the local set of coordinates (x, ζ) .

The motion of the middle surface is described by the displacement vector

$$(1) \quad f(x, t) = [u(x, t), v(x, t), w(x, t)]^T.$$

Moreover, the concept of the generalized vector of displacement is introduced

$$(2) \quad \tilde{f}(x, t) = [u(x, t), v(x, t), w(x, t), \varphi_\xi(x, t), \varphi_\eta(x, t)]^T,$$

where $\varphi_\xi(x, t), \varphi_\eta(x, t)$ are angles of rotations of the material fibre normal to the mid-surface.

The stresses and deformations in the shell are described by vectors

$$(3) \quad \varepsilon(x, t) = [\varepsilon_\xi(x, t), \varepsilon_\eta(x, t), \gamma(x, t), \varkappa_\xi(x, t), \varkappa_\eta(x, t), \chi(x, t)]^T,$$

$$(4) \quad \sigma(x, t) = [n_\xi(x, t), n_\eta(x, t), n_{\xi\eta}(x, t), m_\xi(x, t), m_\eta(x, t), m_{\xi\eta}(x, t)]^T.$$

Geometrical relations have the form, [2]

$$(5) \quad \varepsilon(x, t) = \mathcal{B}[f(x, t)],$$

where $\mathcal{B}[\dots]$ is the linear differential operator of geometrical relations for thin shells of revolution. Stress-strain relations will be written down in the form of the Volterra equation, [3]

$$(6) \quad \sigma(x, t) = \mathcal{F}^*[\varepsilon(x, t)].$$

For $\nu = \text{const}$ Eq. (6) can be rewritten in the form

$$(7) \quad \sigma(x, t) = D(\xi) \left[\varepsilon(x, t) - \int_0^t I(t-\tau) \varepsilon(x, \tau) d\tau \right],$$

where $I(t, \tau) \equiv I(t-\tau)$ is the relaxation speed function, while $D(\xi)$ is the elasticity matrix for the isotropic linear elastic body.

The equation of motion of the shell will be derived from the law of conservation of

the energy. For isothermic problems we have

$$(8) \quad \dot{K} + \dot{U} = \dot{L},$$

where: \dot{K} is the power of the kinetic energy

$$(9) \quad \dot{K} = \int_{\vartheta} [\dot{f}(x, t)]^T \varrho(\xi) \dot{f}(x, t) d\vartheta,$$

$$(10) \quad \varrho(\xi) = \text{diag}[\varrho_0, \varrho_0, \varrho_0, h^2 \varrho_0/12, h^2 \varrho_0/12],$$

\dot{U} is the power of the internal energy

$$(11) \quad \dot{U} = \int_{\vartheta} [\dot{\varepsilon}(x, t)]^T \sigma(x, t) dv,$$

and \dot{L} is the power of the external forces

$$(12) \quad \dot{L} = \int_{\vartheta} [f(x, t)]^T p(x, t) d\vartheta.$$

3. The algorithm of FEM

Let the shell be divided into a number of the conical finite elements and the lines of nodes coincide with the chosen parallels [2]. The nodal parameters in the node α ($\alpha = 1, 2$) are represented by the vector (Fig. 2)

$$(13) \quad \delta_{\alpha}^{(e)}(\eta, t) = [u_{\alpha}^{(e)}(\eta, t), v_{\alpha}^{(e)}(\eta, t), w_{\alpha}^{(e)}(\eta, t), \varphi_{\alpha}^{(e)}(\eta, t)]^T.$$

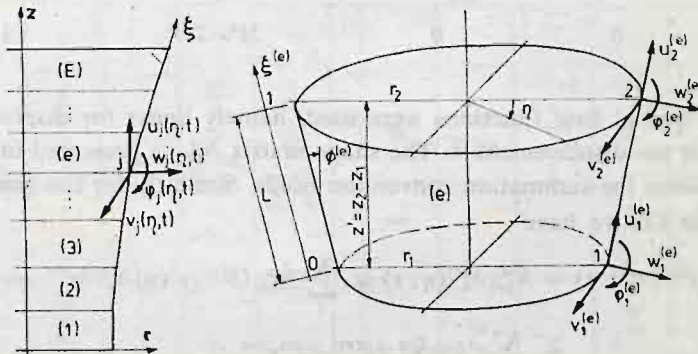


Fig. 2

Taking into account the axial symmetry of the structure, we are to expand the nodal parameters into the Fourier series along the η variable. If the motion is an effect of the periodical excitation with the frequency ω , then

$$(14) \quad \delta_{\alpha}^{(e)}(\eta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} y^l(\eta) \delta_{\alpha}^{l(e)} e^{i\omega t} = \sum_l y^l(\eta) (\bar{\delta}_{\alpha}^{l(e)} + i \bar{\delta}_{\alpha}^{l(e)}) e^{i\omega t},$$

where $y^l(\eta) = \text{diag } [c_l, s_l, c_l, c_l]$,

$$c_l = \begin{cases} \cos l\eta \\ \sin l\eta \end{cases}, \quad s_l = \begin{cases} \sin l\eta & \text{for even loads} \\ \cos l\eta & \text{for odd loads} \end{cases}$$

$\bar{\delta}_\alpha^l, \dot{\delta}_\alpha^l$ — real part and imaginary part (respectively) of the displacement vector of the α node.

Displacements of e-element will be written down in the form

$$(15) \quad f^{(e)}(x^{(e)}, t) = N_{(e)}^\alpha(\xi^{(e)}) \delta_\alpha^{l(e)}(\eta, t) = \sum_I N_{(e)}^\alpha(\xi^{(e)}) y^l(\eta) \delta_\alpha^{l(e)} e^{i\omega t} = \\ = \sum_I z^l(\eta) N_{(e)}^\alpha(\xi^{(e)}) \delta_\alpha^{l(e)} e^{i\omega t},$$

where: $x^{(e)} = (\xi^{(e)}, \eta) \in \vartheta^{(e)}$,

$$z^l(\eta) = \text{diag } [c_l, s_l, c_l].$$

Table 1

$N_{(e)}^1(\xi) =$	$1 - \xi$	0	0	0
	0	$1 - \xi$	0	0
	0	0	$1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$	$L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$
$N_{(e)}^2(\xi) =$	ξ	0	0	0
	0	ξ	0	0
	0	0	$3\xi^2 - 2\xi^3$	$L(-\xi^2 + \xi^3)$

In Eq. (15) typical base functions were used, namely linear for displacements u and v while cubic for the displacement w . The shape matrix $N_{(e)}^\alpha$ is presented in Table 1. Here and in what follows the summation convention holds. Similarly for the generalized vector of displacements (2) we have

$$(16) \quad \tilde{f}^{(e)}(x^{(e)}, t) = \tilde{N}_{(e)}^\alpha \delta_\alpha^{l(e)}(\eta, t) = \sum_I \tilde{N}_{(e)}^\alpha(\xi^{(e)}) y^l(\eta) \delta_\alpha^{l(e)} e^{i\omega t} = \\ = \sum_I z^l(\eta) \tilde{N}_{(e)}^\alpha(\xi^{(e)}) \delta_\alpha^{l(e)} e^{i\omega t}.$$

Geometrical relations in accordance with (5) have the form

$$(17) \quad \varepsilon^{(e)}(x^{(e)}, t) = \mathcal{B}[f^{(e)}(x^{(e)}, t)] = \mathcal{B} \left[\sum_I z^l(\eta) N_{(e)}^\alpha(\xi^{(e)}) \delta^{l(e)} e^{i\omega t} \right] = \\ = \sum_I z^l(\eta) B_{(e)}^{l\alpha}(\xi^{(e)}) \delta_\alpha^{l(e)} e^{i\omega t},$$

where: $\bar{z}(\eta) = \text{diag } [c_l, c_l, s_l, c_l, c_l, s_l]$,

Table 2

$-\frac{1}{L}$	0	0	0	0
$\frac{r'}{rL}(1-\xi)$	$\frac{\psi l}{r}(1-\xi)$	$\frac{z'}{rL}(1-3\xi^2+2\xi^3)$	$\frac{z'}{r}(\xi-2\xi^2+\xi^3)$	
$-\frac{\psi l}{r}(1-\xi)$	$-\frac{r'}{rL}(1-\xi)-\frac{1}{L}$	0	0	
0	0	$-\frac{1}{L^2}(-6+12\xi)$	$-\frac{1}{L}(-4+6\xi)$	
0	$\frac{\psi z' l}{r^2 L}(1-\xi)$	$-\frac{r'}{rL^2}(-6\xi+6\xi^2)+\frac{l^2}{r^2}(1-3\xi^2+2\xi^3)$	$-\frac{r'}{rL}(1-4\xi+3\xi^2)+\frac{l^2 L}{r^2}(\xi-2\xi^2+\xi^3)$	
0	$-\frac{2r'z'}{r^2 L^2}(1-\xi)-\frac{2z'}{rL^2}$	$-\frac{2r'\psi l}{r^2 L}(1-3\xi^2+2\xi^3)+\frac{2\psi l}{rL}(-6\xi+6\xi^2)$	$-\frac{2r'\psi l}{r^2}(\xi-2\xi^2+\xi^3)+\frac{2\psi l}{r}(1-4\xi+3\xi^2)$	
$\frac{1}{L}$	0	0	0	
$\frac{r'}{rL}\xi$	$\frac{\psi l}{r}\xi$	$\frac{z'}{rL}(3\xi^2-2\xi^3)$	$\frac{z'}{r}(-\xi^2+\xi^3)$	
0	$-\frac{r'}{Lr}\xi+\frac{1}{L}$	0	0	
$-\frac{r'z'}{L^2}\xi$	0	$-\frac{1}{L^2}(6-12\xi)$	$-\frac{1}{L}(-2+6\xi)$	
0	$\frac{\psi z' l}{r^2 L}\xi$	$-\frac{r'}{rL^2}(6\xi-6\xi^2)+\frac{l^2}{r^2}(3\xi^2-2\xi^3)$	$-\frac{r'}{rL}(-2\xi+3\xi^2)+\frac{l^2 L}{r^2}(-\xi^2+\xi^3)$	
0	$-\frac{2r'z'}{r^2 L^2}\xi+\frac{z'}{rL^2}$	$-\frac{2r'\psi l}{r^2 L}(3\xi^2-2\xi^3)+\frac{2\psi l}{rL}(6\xi-6\xi^2)$	$-\frac{2r'\psi l}{r^2}(-\xi^2+\xi^3)+\frac{2\psi l}{r}(-2\xi+3\xi^2)$	

$B_{(3)}^{11}(\xi) =$

$B_{(3)}^{12}(\xi) =$

$r = r(\xi); r' = r_2 - r_1; z' = z_2 - z_1; L = \sqrt{r^2 + z^2}; \psi = \begin{cases} 1 & \text{for even loads} \\ -1 & \text{for odd loads} \end{cases}$

$B_{(e)}^{l\alpha}(\xi^{(e)})$ — geometrical matrix is presented in Table 2.

After the conversion of Eq. (7) and substitution into Eq. (17) we have

$$(18) \quad \begin{aligned} \sigma^{(e)}(x, t) &= D(\xi^{(e)}) \left[\varepsilon^{(e)}(x^{(e)}, t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon^{(e)}(x^{(e)}, \tau) d\tau \right] = \\ &= D(\xi^{(e)}) \varepsilon^{(e)}(x^{(e)}, t) (\Gamma_c + i\Gamma_s) = \\ &= (\Gamma_c + i\Gamma_s) D(\xi^{(e)}) \sum_l z^l(\eta) B_{(e)}^{l\alpha}(\xi^{(e)}) \delta_\alpha^{l(e)} e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

where $\Gamma_c = 1 - \int_0^\infty \Gamma(z) \cos \omega z dz$, $\Gamma_s = \int_0^\infty \Gamma(z) \sin \omega z dz$.

The shell as an assemblage of elements $e = 1, 2, \dots, E$ occupies the region $\bar{\vartheta}$ which is different from the region ϑ . The total nodal parameters of the structure $\bar{\delta}_j^l$ are related to the local parameters of the element by the transformation

$$(19) \quad \delta_\alpha^{l(e)} = \Omega_\alpha^{j(e)} \delta_j^l, \quad \bar{\delta}_j^l = \bar{\delta}_j^l + i\bar{\delta}_j^l,$$

where

$$(20) \quad \Omega_\alpha^{j(e)} = \begin{cases} \lambda^{(e)} & \text{for } e + \alpha - 1 = j, \\ 0 & \text{in the all remaining cases,} \end{cases}$$

$$(21) \quad \lambda^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos \phi^{(e)} & 0 & \sin \phi^{(e)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi^{(e)} & 0 & \cos \phi^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applying the transformation (19) to Eqs. (15), (16), (17) and (18) we arrive at the expressions describing the state of displacement, deformations and stresses at each point of the region ϑ in the form

$$(22) \quad \begin{aligned} f(\bar{x}, t) &= \sum_{e=1}^E \sum_l z^l(\eta) N_{(e)}^\alpha \Omega_\alpha^{j(e)} \delta_j^l e^{i\omega t} = \sum_l z^l(\eta) N^j(\bar{\xi}) \delta_j^l e^{i\omega t}, \\ \tilde{f}(\bar{x}, t) &= \sum_e \sum_l z^l(\eta) \tilde{N}_{(e)}^\alpha \Omega_\alpha^{j(e)} \delta_j^l e^{i\omega t} = \sum_l z^l(\eta) \tilde{N}^j(\bar{\xi}) \delta_j^l e^{i\omega t}, \\ \varepsilon(\bar{x}, t) &= \sum_e \sum_l \bar{z}^l(\eta) B_{(e)}^{l\alpha}(\xi^{(e)}) \Omega_\alpha^{j(e)} \delta_j^l e^{i\omega t} = \sum_l \bar{z}^l(\eta) B^{lj}(\bar{\xi}) \delta_j^l e^{i\omega t}, \\ \sigma(\bar{x}, t) &= (\Gamma_c + i\Gamma_s) \sum_e D(\xi^{(e)}) \sum_l \bar{z}^l(\eta) B_{(e)}^{l\alpha}(\xi^{(e)}) \Omega_\alpha^{j(e)} \delta_j^l e^{i\omega t} = \\ &= (\Gamma_c + i\Gamma_s) \sum_l D(\bar{\xi}) \bar{z}^l(\eta) B^{lj}(\bar{\xi}) \delta_j^l e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

where $\bar{x} = (\bar{\xi}, \eta)$ and $\bar{\xi}$ — is the coordinate which coincides with the generator of the element.

Substituting RHS of Eqs. (22) into Eq. (8) and the performing simple conversions, we obtain the equation of equilibrium of the structure in the form

$$(23) \quad (\Gamma_c + i\Gamma_s)K^{ljn}\delta_n^l - \omega^2 M^{ljn}\delta_n^l = F^{lj},$$

for $l = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, E+1;$

where

$$(24) \quad K^{ljn} = \int_{\vartheta} [\bar{z}^l(\eta)B^{lj}(\bar{\xi})^T]D(\bar{\xi})\bar{z}^l(\eta)B^{ln}(\bar{\xi})d\vartheta,$$

$$M^{ljn} = \int_{\vartheta} [z^l(\eta)\tilde{N}^j(\bar{\xi})^T]^T \varrho(\bar{\xi})z^l(\eta)\tilde{N}^n(\bar{\xi})d\vartheta,$$

$$F^{lj} = \int_{\vartheta} [z^l(\eta)N^j(\bar{\xi})^T]^T p_0(\bar{\xi}, \eta)d\vartheta.$$

Comparing real and imaginary parts of Eq. (23) we obtain the conjugate system of equations with real roots

$$(25) \quad (\Gamma_c K^{ljn} - \omega^2 M^{ljn})\bar{\delta}_n^l - \Gamma_s K^{ljn}\bar{\delta}_n^l = \bar{F}^{lj},$$

$$-\Gamma_s K^{ljn}\bar{\delta}_n^l - (\Gamma_c K^{ljn} - \omega^2 M^{ljn})\bar{\delta}_n^l = \bar{F}^{lj},$$

for $l = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, E+1.$

Together with Eqs. (25) the suitable displacement boundary conditions have to be taken into account.

4. The numerical example

Forced vibrations of the shell of revolution being the model of the rubber construction of the seal of rotational shafts (Fig. 3) is analysed. The linear viscoelastic body, for which the velocity of relaxation function takes the form

$$(26) \quad \Gamma(t) = Ce^{-\beta t}t^{\alpha-1}, \quad \text{for } t > 0.$$

is assumed as the model of the material.

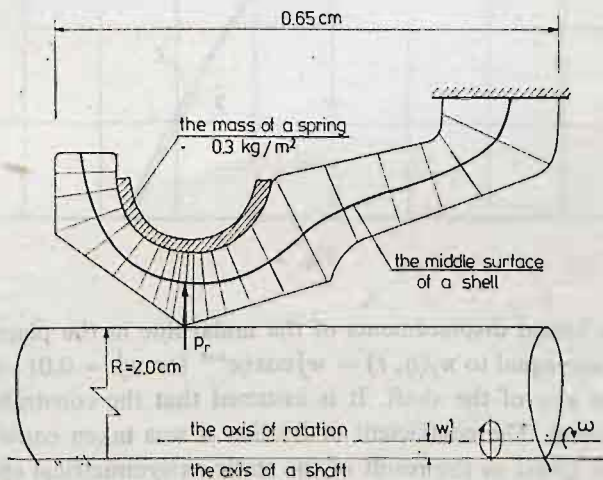


Fig. 3

The material constants were found on the basis of the laboratory tests: $C = 0,236$; $\beta = 0,01$; $\alpha = 0,1$; Youngs modulus of elasticity $E = 9,4$ MPa. The mass density of material is equal to $\rho_0 = 1250$ kg/m³.

The forced displacements of the structure are given by its loading as a result of the eccentric location of the axis of rotational shaft in the relation to the axis of rotation. The motion of the shaft can be decomposed into two simple harmonic motions in two perpendicular directions, displaced in relation to each other by phase angle equal $\pi/2$. Dynamical thrusts of the seal lip on the shaft are the most interesting values from the point of view of applications. On Fig. 4 the plot of amplitudes of the unitary thrusts of the seal lip as the function of angular velocity ω is given. The motion of the structure in which different influences are taken into account has been analysed:

- the motion of the structure in which the mass of the spring and the friction are neglected, (line 1 on Fig. 4),
- the motion of the structure with the influence of the mass of the spring and without the friction (line 2 on Fig. 4),
- the motion of the structure with the influence of the mass of the spring and the friction (line 3 on Fig. 4).

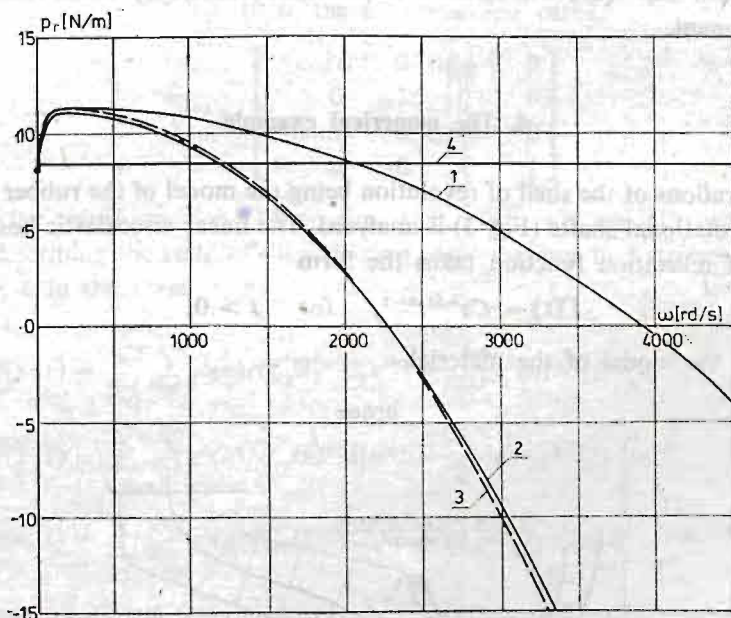


Fig. 4

In each case the forced displacements of the nodal line in the place of contact of the seal with the shaft are equal to $w_j(\eta, t) = w_j^0 \cos \eta e^{i\omega t}$ for $w_j^0 = 0,01$ cm, in the direction perpendicular to the axis of the shaft. It is assumed that the constraints in the place of the contact are bilateral. The coefficient of friction μ was taken equal to 0,1. Line 4 on Fig. 4 shows unitary thrust as the result of the static axisymmetrical extension of the seal lip by value $w_j^0 = 0,01$ cm.

Literature

1. W. FLUGE, *Powłoki, obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1972.
2. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
3. J. T. ODEN, *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
4. J. N. RABOTNOW, *Elementy najsłabstwieńnoy mechaniki twierdych tel*, Nauka, Moskwa, 1977.

Резюме

АНАЛИЗ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОЙ

В работе анализируются оболочки вращения циклически нагруженные механической нагрузкой или циклически вынужденным перемещением. Модель материала это тело линейно вязко-упругое. Проблемы решаются исходя из уравнений технической теории тонких оболочек пользуясь методом конечных элементов. Для иллюстрации анализируются вынужденные колебания оболочки вращения составляющей модель конструкции резинового уплотнения вращающихся валов.

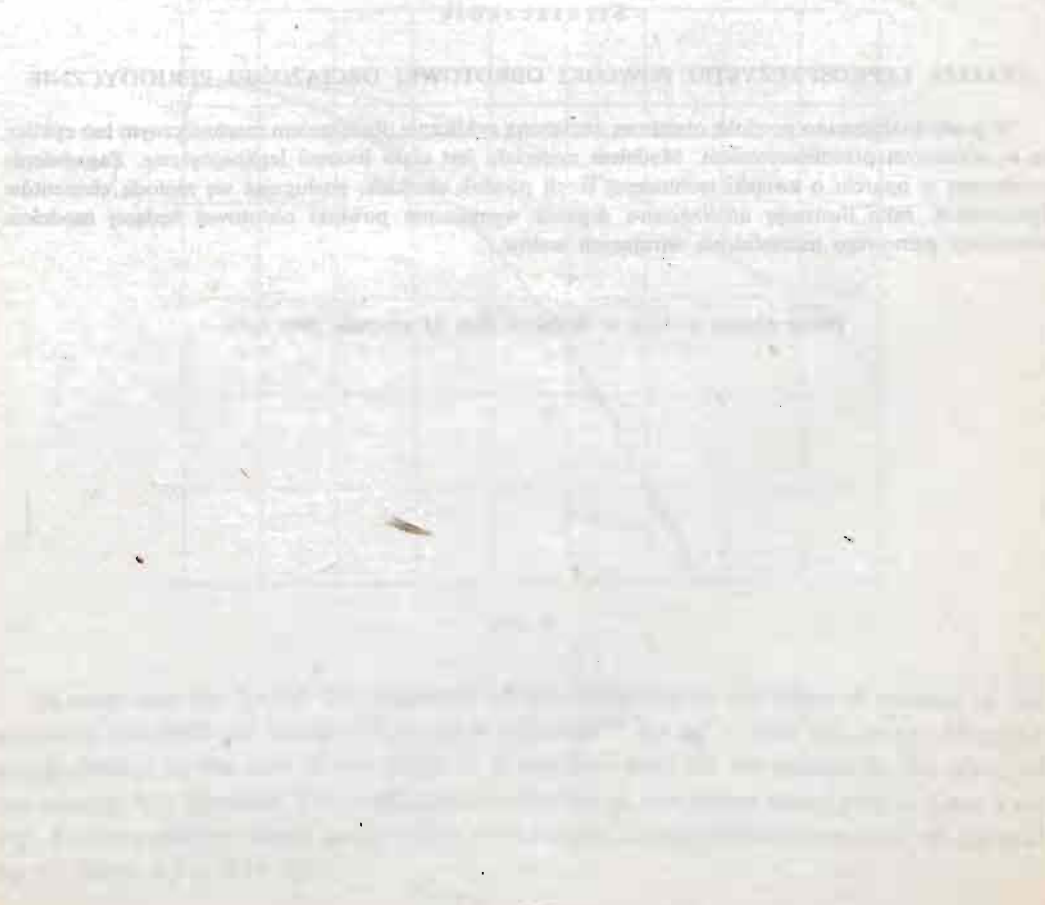
Streszczenie

ANALIZA LEPKOSPĘŻYSTEJ POWŁOKI OBROTOWEJ OBCIĄŻONEJ PERIODYCZNIE

W pracy analizowano powłokę obrotową obciążoną cyklicznie obciążeniem mechanicznym lub cyklicznie wymuszonym przemieszczeniem. Modelem materiału jest ciało liniowo lepkospężyste. Zagadnienie rozwiązano w oparciu o związki technicznej teorii powłok cienkich, posługując się metodą elementów skończonych. Jako ilustrację analizowano drgania wymuszone powłoki obrotowej będącej modelem konstrukcji gumowego uszczelnienia wirujących wałów.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1983 roku

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



NUMERICAL ANALYSIS OF LARGE DEFLECTION BEHAVIOUR OF ELASTIC-PLASTIC SHELLS OF REVOLUTION

MARIA RADWAŃSKA

Politechnika Krakowska

1. Introductory remarks and assumptions

Plastic deformations are admitted in many cases in order to exploit maximally the load carrying capacity of structures. Collapse of thin shells often occurs as a result of the instability before the large yielding zones are developed. This fact motivates the interest in analysis of the elastic-plastic behaviour of shell structures. A limit load of shells at which the snap-through phenomenon occurs, is investigated. This kind of critical load is typical for shallow ideal shells; in high shells such an instability occurs due to the initial imperfections.

Analysis of the lost of stability in the sense of snap-through and the post-critical behaviour is possible only on the basis of nonlinear formulation. Simultaneous considerations of the physical and geometrical nonlinearities complicate the problem, therefore the only way to achieve a solution is the application of numerical methods.

A number of papers on large deflections of elastic and elastic-plastic shells have been written. With respect to elastic-plastic shells different methods were applied. The multi-segment method of numerical integration was used in [1], finite differences were explored in [2] and finite element method was used in [3].

The presented paper is a generalization of the paper [4], where the shooting method was applied to the ideal sandwich cross-section. Comparing with the mentioned paper [4] a modification of the algorithm and improved subroutines have been given.

The following assumptions have been introduced:

1. The shell is thin (Kirchhoff-Love hypotheses are valid); constant thickness and ideal sandwich or full-walled cross-section, approximated by an equivalent multipoint cross-section are assumed.

2. The displacement field is rotationally symmetric.

3. The theory of small strains and large displacements is assumed.

4. The material of shell is isotropic, compressible, homogeneous, elastic-plastic of a general type of strain-hardening (yield surface can translate and/or extend at the same time).

5. The load is quasi-static.

In the present paper the semi-inverse method of numerical forward integration is

applied for solving differential equations. This method (shooting method) changes the two-point boundary value problem (BVP) into an initial value problem (IVP).

Assuming rotational symmetry one can confine the considerations to a geometric one-dimensional problem with independent variable λ measured along the meridian of the shell (Fig. 1a). Application of the plastic flow theory requires introduction of quasi-time variable τ .

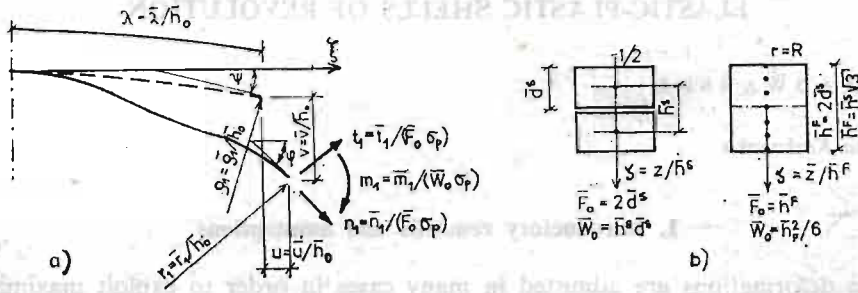


Fig. 1

From of a comprehensive numerical analysis only these examples will be mentioned in which the upper and lower critical loads for shallow spherical caps with various boundary conditions will be calculated.

2. Basic equations

Dimensionless quantities are used according to the notations in [4, 5]; components of the state vector y are shown in Fig. 1a.

Axisymmetric equilibrium state of elastic-plastic shell is described by the nonlinear set of partial differential equations;

$$(1) \quad \begin{aligned} y' &= f(y, p, \lambda), \\ \dot{Q} &= D(Q, q)\dot{q} \end{aligned}$$

and algebraic relations:

$$(2) \quad z = h(w, \lambda),$$

where the following vectors are used: the state vector y , the vector of generalized stresses Q and generalized strains q :

$$(3) \quad \begin{aligned} y &= \{u, v, \varphi, n_1, t, m_1\}, \\ Q &= \{n_1, n_2, m_1, m_2\}, \quad q = \{\vartheta_1, \vartheta_2, k_1, k_2\}. \end{aligned}$$

Additionally the vector displacement w and strains z are introduced:

$$(4) \quad w = \{u, \varphi\}, \quad z = \{\vartheta_2, k_2\},$$

which are not related to each other by differential relations.

The basic set of equations consists of the equilibrium equations, the geometrical and the physical relations. Detailed description of these equations for elastic-plastic shells

of revolution is given in Appendix A2 in [5]. The initial boundary value problem must be supplemented with appropriate boundary and initial conditions.

The set of equations is separated with respect to the spatial $(\dot{}) = \partial()/\partial\lambda$ and quasi-time derivatives $(\dot{}) = \partial()/\partial\tau$. Incremental physical relations require inversion of physical equations at each step of numerical integration at nodes $l = 1, \dots, L$.

In elastic-plastic shells the main problem lies in calculation of generalized stresses by numerical integration along the shell thickness. One of the possibilities to overcome difficulties is the application of the numerical integration concentrating shell properties at integration nodes. In this way we obtain full-walled cross-section, which will be called multipoint cross-section. Application of the Simpson quadrature formulae can correspond to the assumption of R -equally spaced points along thickness. As a special case we shall consider an ideal sandwich cross-section, when $R = 2$.

The cross-section stiffness matrices in terms of the physical relations

$$(5) \quad \dot{n}_j = D_{ojk} \dot{\epsilon}_k + D_{1jk} \cdot \dot{k}_k, \quad \dot{m}_j = D_{1jk} \dot{\epsilon}_k + D_{2jk} \cdot \dot{k}_k, \quad j, k = 1, 2,$$

assume the form

$$(6) \quad D_{ijk} = \int_{-1/2}^{1/2} E_{jk} \zeta^i d\zeta = \sum_{r=1}^R Z_r \cdot (E_{jk} \cdot \zeta^i)_r,$$

are calculated by using quadrature formulae, taking into account a current state of stresses and strains, history of the loading process and type of cross-section.

Incremental physical relations, given in detail in [4, 5] are referred to a material with the combined kinematic-isotropic strain hardening, where A and C stand for the coefficients of isotropic and kinematic strain-hardening. Thus, the equations enable us to describe the instantaneous motion of the centre of the yield locus (the interaction curve F) as well as the development of the locus. Let us assume that E_{jk} are elements of the local stiffness matrices, occurring in incremental physical equations. These matrices are definite at each point of the shell under assumption of the plane stress state. Elements E_{jk} can be computed on the ground of information on the type of process [4, 5].

3. Algorithm of the shooting method in elastic-plastic shells of revolution

Due to the separation of spatial $(\dot{}) = \partial/\partial\lambda$ and quasi-time $(\dot{}) = \partial/\partial\tau$ derivatives in the basic equations and to the approximation:

$$(7) \quad \dot{Q}_m \approx (Q_m - Q_{m-1})/\Delta\tau_m, \quad \dot{q} \approx (q_m - q_{m-1})/\Delta\tau_m,$$

the two-point symmetric BVP of range $r = 3$ can be computed at each time $\tau = \tau_m$. For the following values $\tau \geq \tau_0$ we can find points on the path of equilibrium states in the load-displacement space. As a quasi-time independent variable τ one of the monotonically increasing parameter of the BVP can be adopted. Dependence on the shape of the path, the load parameter or one of the components of the input vector y_0 is applied as the time τ .

The BVP can be solved iteratively using the shooting method by means of the multiple numerical forward integration and choice of free initial values X_0 at point $l = 1$, in order to satisfy the boundary conditions Y at the other boundary point $l = L$, ($X_0, Y \in R^3$).

The incremental formulation needs storing in the computer memory vector $Q_{m-1} = Q^*$, $q_{m-1} = q^*$ and information about the history of the loading process (development of elastic-plastic zones) for the whole structures.

With respect to the convergence and accuracy of the Newton-Raphson method as well as the time consumption and computer storage the choice of spatial $\Delta\lambda$ and time $\Delta\tau$ steps is essential. In many numerical experiments the density of spatial step near the shell ends is fixed. The step $\Delta\tau$ is automatically computed on the basis of the criterion, that the value of Odquist's parameter increment is within defined limit at each point of the structures [6, 7].

4. Inversion of physical equations

Considering elastic-plastic properties of the material the problem of inversion of physical relations appears at each step of the numerical integration λ_l , $l = 1, \dots, L$ at each time τ_m , $m = 1, \dots, M$. The knowledge of values n_1, m_1, ϱ_2, k_2 at each point λ_l results from the form the canonic set of equations. Appropriate procedure makes it possible to calculate the values of generalized strains $\varrho_1(n_1, m_1, \varrho_2, k_2)$ and $k_1(n_1, m_1, \varrho_2, k_2)$ beside generalized stresses $n_2(q)$ and $m_2(q)$. Apart from the type of cross-section, material properties, actual type or process should be taken into account in every quasi-time increment $\Delta\tau_m$. Information stored in the computer memory concerning the values $\varrho_2^*, k_2^*, n_1^*, m_1^*$ permits to calculate suitable increments of these quantities.

The passage from increments of strains $\dot{\varrho}_j, \dot{k}_j$ ($j = 1, 2$) at a point of the mid-surface to increments of strains $(\dot{e}_j)_r$ for each point $r = 1, \dots, R$ along the thickness is possible under the assumption of Kirchhoff-Love hypotheses:

$$(8) \quad (\dot{e}_j)_r = \dot{\varrho}_j + \dot{k}_j \zeta_r, \quad \zeta_r = z/\bar{h}_0, \quad \zeta \in [-1/2, 1/2].$$

In this way increments $(\Delta e_j)_r$ are obtained, and thus the calculation of increments stresses $(\Delta s_j)_r$ is feasible. The local cross-section stiffness matrices require knowledge of the most actual values $(E_{ij})_r$ for every point $r = 1, \dots, R$. Unlike the sandwich in the full-walled cross-section case we cannot easily pass from the increments of generalized quantities $\{\Delta n_j, \Delta m_j, \Delta \varrho_j, \Delta k_j\}$ to the increments of stresses $(\Delta s_j)_r$. In the case of full-walled cross-section approximated by the multipoint section, the stresses cannot be analysed separately for each point r , as it is possible for two layers of the sandwich cross-section. Only in an ideal sandwich there is an immediate passage from increments of generalized stresses $\Delta n_j, \Delta m_j$ to increments stresses Δs_j in the particular layer (+, -):

$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta n_j &= (\Delta s_j^+ + \Delta s_j^-)/2, & n_j &= \bar{n}_j/(\bar{h}^s \sigma_p), \\ \Delta m_j &= (\Delta s_j^+ - \Delta s_j^-)/2, & m_j &= \bar{m}_j/(\bar{d}^s h^s \sigma_p). \end{aligned}$$

Values n_1, m_1 are known in the numerical integration nodes in the mid-surface on the basis of the solution of the basic set of equations. Therefore in full-walled cross-section

the increments of stresses $(\Delta s_1)_r$, $r = 1, \dots, R$, calculated iteratively, added to stresses $(s_1^*)_r$, stored in the computer memory must agree with values n_1 i m_1 in point λ_1 :

$$\bar{n}_1 = \sigma_p \bar{h}^F \int_{-1/2}^{1/2} (s_1^* + \Delta s_1) d\zeta = \sigma_p \bar{h}^F \sum_{r=1}^R Z_r (s_1^* + \Delta s_1)_r, \quad (10)$$

$$\bar{m}_1 = \sigma_p [(\bar{h}^F)^2/6] \cdot \int_{-1/2}^{1/2} (s_1^* + \Delta s_1) \zeta d\zeta = \sigma_p [(\bar{h}^F)^2/6] \cdot \sum_{r=1}^R Z_r (s_1^* + \Delta s_1)_r \zeta_r.$$

Increments $(\Delta s_j)_r$ are computed currently for each point ζ_r and λ_1 and they depend both on the type of process and on attained yielding [4, 5].

For each point r along the shell thickness and for each node l of numerical integration the following four cases must be considered:

i). If the elastic material properties at the point r are noted in the computer, the increment of the effective stress $\Delta s_i < 0$ indicates, that the elastic process remains. This is shown in Fig 2a, where the state for time $\tau^* + \Delta\tau$ is represented by the vector $s_0^* + \Delta s$, the end of which is at point P inside yield curve F_0 . In this case only s_j^* and e_j^* are corrected, coordinates of centre of yield surface a_j^* and Odqvist's parameter remain unchanged.

ii). The curve F_0 is crossed by the vector Δs_x and the vector Δs_p leads to point P inside F_0 . Then an approximate procedure must be applied. It translates point P_* into P' along the path of proportional loading and a further increment $\Delta s''$ is calculated, as for an active process (Fig. 2b).

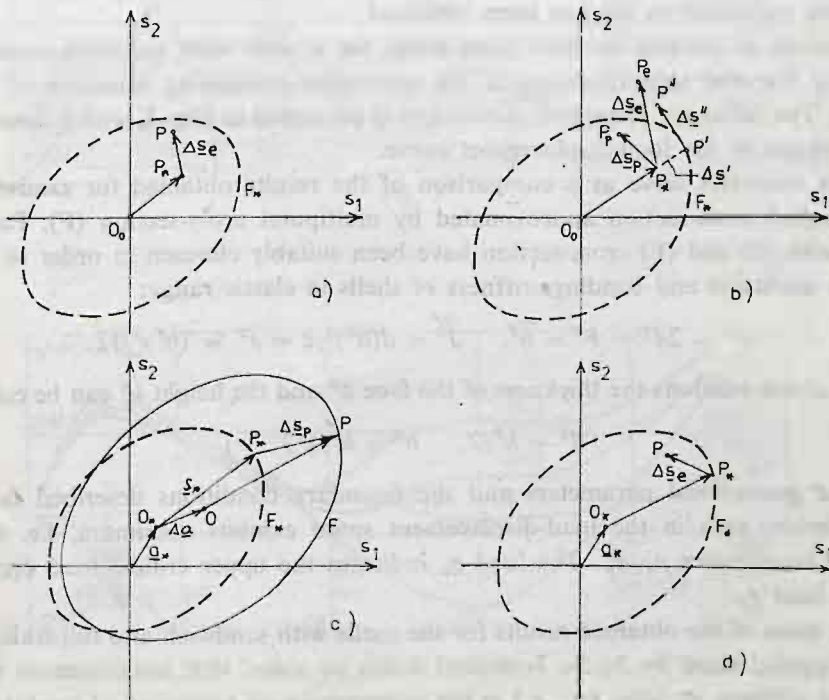


Fig. 2

iii). In the plastic zone an active process develops (Fig. 2c). Quantities s_j^* , e_j^* , a_j^* , \bar{e}_p^* are corrected.

iv). The passive process occurs in the initial plastic zone if $\Delta s_i < 0$ (Fig. 2d).

If the yield curve F_* is crossed at a single point ζ_r in a cross-section, it must be brought down again to the level of full cross-section. The same step $\Delta\tau$ is divided into subincrements to take into account at first the elastic and later the plastic properties at point r .

When the yield surface is crossed at several points, the most intensive point is looked for. It determines the way of division $\Delta\tau$ into subincrements. The number of iterations grows up when in the second stage it occurs, that curve F is crossed at the next point or simultaneously unloading can take place at another point r in the same cross-section.

If the boundary-value problem has been solved for time τ_m the information stored in the computer is repeated for the next time $\tau_{m+1} = \tau_m + \Delta\tau_{m+1}$.

5. Numerical analysis

The displacement field in a shell depends strongly on various parameters. Geometric shell parameters, boundary conditions, material properties have to be taken into account. A series of numerical examples for shells differing from one another in values of the mentioned parameters should be made with respect to the analysis of response of shells under applied load in the elastic-plastic range.

Elastic full-walled circular plate and spherical cap have been tested. A good agreement with results published in [8] has been obtained.

First series of calculation have been made for a shell with sandwich cross-section considering essential simplifications in the subroutine containing inversion of physical equations. The influence of various parameters is presented in Fig. 3, which demonstrates different shape of the load-displacement curve.

Further examples serve as a comparison of the results obtained for sandwich (S) and full-walled cross-section approximated by multipoint cross-section (F). Parameters of shells with (S) and (F) cross-section have been suitably chosen in order to have an equivalent extension and bending stiffness of shells in elastic range:

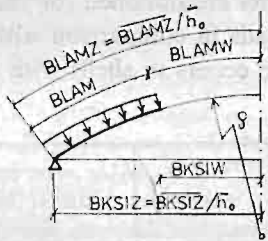
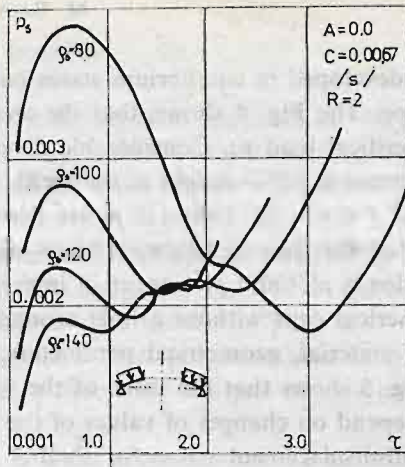
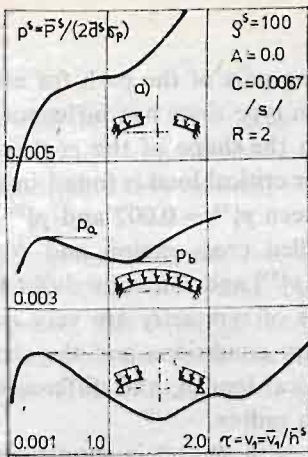
$$(11) \quad \bar{F}^S = 2\bar{d}^S = \bar{F}^F = \bar{h}^F, \quad \bar{J}^S = \bar{d}(\bar{h}^S)^3/2 = \bar{J}^F = (\bar{h}^F)^3/12.$$

From the above relations the thickness of the face \bar{d}^S and the height \bar{h}^S can be calculated:

$$(12) \quad \bar{d}^S = \bar{h}^F/2, \quad \bar{h}^S = \bar{h}^F/\sqrt{3}.$$

For the geometrical parameters and the boundary conditions described in Fig. 4. the equilibrium path in the load-displacement space exhibits maximum, i.e. the limit point with coordinates p_u , τ_u . The load p_u indicates the upper critical load opposite to the lower load p_l .

On the basis of the obtained results for the shells with sandwich and full-walled cross-section (approximated by 3-, 5-, 7- points) it can be stated that instantaneous reducing of the shell stiffness at point (p_u, τ_u) is the consequence of vanishing of the total elastic cross-section. Passive processes appear between p_u and p_l loads. Secondary yielding zones



	/s/	/F/
\bar{h}_0	\bar{h}^s	\bar{h}^F
\bar{d}	0.1	—
\bar{h}	0.1155	0.20
$\varphi = \bar{\varphi} / \bar{h}_0$	100	57.75
BKSIZ	20	11.55
BKSIW	10	5.77
BLAMZ	20.136	11.628
BLAMW	10.017	0.844

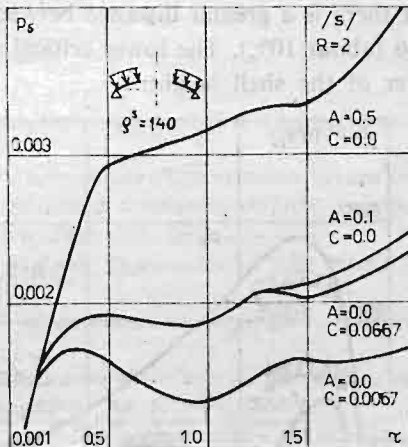


Fig. 3

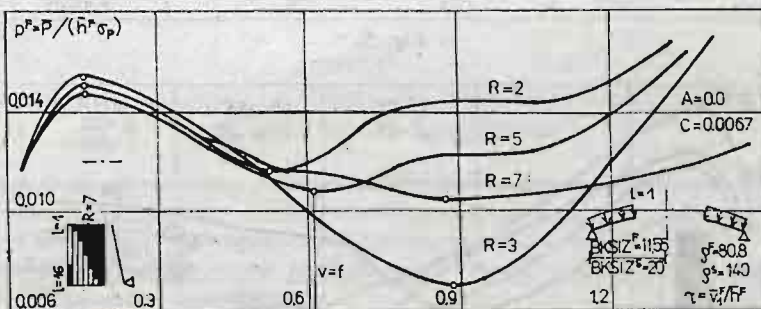


Fig. 4

have been developed in equilibrium states on the rising part of the path for every cross-section type. The Fig. 4 shows, that the cross-section type does not influence values of the upper critical load p_u . Considerable diversions in the shape of the $p(\tau)$ curve begin for deflections $v \approx f$ (f —height of the shell). The lower critical load is found in the deflection interval $f < v < 2f$. Values of p_l are limited between $p_l^{(3)} = 0.007$ and $p_l^{(5)} = 0.0115$, i.e. calculated for 3-point approximation of full-walled cross-section and ideal sandwich. The loads $p_l^{(5)}$ and $p_l^{(7)}$ occur in interval $[p_l^{(3)}, p_l^{(5)}]$ and mutually differ slightly.

The spherical caps without a hole around the axis of symmetry are very sensitive to changes of material, geometrical parameters, boundary conditions and the character of loading. Fig. 5 shows that the value of the upper critical load p_u and difference between p_u and p_l depend on changes of values of the meridian radius.

The load-displacement curve for shell *A* (Fig. 5) with $R = 5$ is supplemented with the equilibrium path calculated for 2, 3, 7 — point approximation of full-walled cross-section. The next diagram shows that the limit points are obtained for the same displacement but there is a greater distance between p_u loads in comparison with the example from Fig. 6 (about 10%). The lower critical pressure occurs in shells with displacements of the order of the shell height.

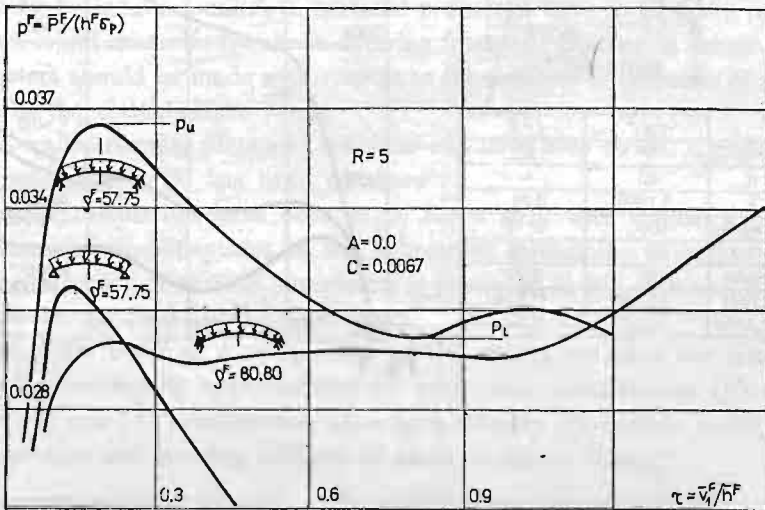


Fig. 5

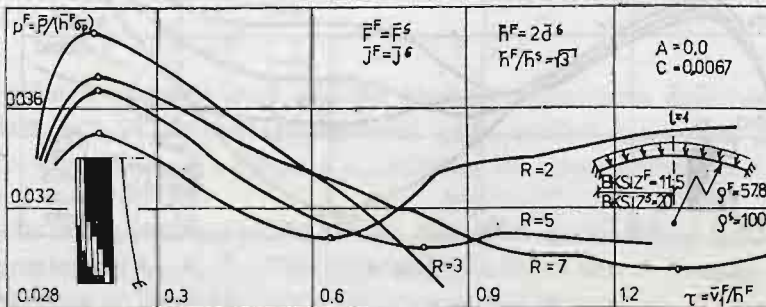


Fig. 6

5. Final remarks

On the basis of the shooting method and the incremental approach the algorithm and the computer program have been carried out. The program enables us to compute either idealized sandwich shells or shells with a full-walled cross-section with different boundary conditions.

The appropriate program has been written in FORTRAN-EXTENDED and implemented on the CDC-Computer CYBER-72. The program is efficient since only CPU memory is used, this shortens the computational time significantly.

Compared with the FEM the method applied in this program (semi-inverse method of numerical forward integration) is especially suitable for analysis of axisymmetric problems.

Numerical examples verify the 5-point equivalent cross-section as a good approximation of the full-walled cross-section.

References

1. J. C. GERDEEN, D. I. SIMONEN, D. I. HUNTER, *Large Deflection Analysis of Elastic-Plastic Shells Using Numerical Integration*, AIAA J. 9, 1971, 1012 - 1018.
2. M. TANAKA, M. HAMADA, *Incremental Analysis of Elasto-Plastic Shells of Revolution and its Application to Practical Design*, Physical Non-Linearities in Structural Mechanics, IUTAM Symposium, Senlis, 1980, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, 257 - 264.
3. M. KLEIBER, *SHELAX-Finite Elements Analysis of Large Deformation of Thin Elastic-Plastic Shells of Revolution* (in Polish) Proc. of IPPT PAN, 1977.
4. Z. WASZCZYNYN, *Calculation of Sandwich Shells of Revolution at Large Elastic-Plastic Deflections*, Archives of Mechanics, 24 1972, 483 - 498.
5. Z. WASZCZYNYN, M. RADWAŃSKA, E. PABISEK, *Application of the Initial Value Method to Analysis of Elastic-Plastic Plates and Shells of Revolution*, Comp&Stru. 16, 6, 1983, 761 - 771.
6. M. RADWAŃSKA, *Computation of Large Deflections of Elastic-Plastic Shells of Revolution* (in Polish) IV Conf. Computer Methods in Structural Mechanics, Koszalin 1979, Vol. 2, 225 - 239.
7. M. RADWAŃSKA, *Numerical Analysis of Postcritical Deflections Elastic-Plastic Shells of Revolution* (in Polish) V Conf. Computer Methods in Structural Mechanics, Wroclaw 1981, 177 - 184.
8. M. S. KORNIŠYN, S. S. ISANBAJEWA, *Flexible Plates and Panels*, Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).

Резюме

НУМЕРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Уравнения больших прогибов и малых деформаций применяются к анализу упруго-пластических оболочек. Предполагается двухслойное поперечное сечение типа „сэндвич” или аппроксимационо сплошного сечения эквивалентным многоточечным сечением.

Применяются уравнения теории пластического течения к материалу с комбинированным кинематическо-изотропным упрочнением.

К интегрированию уравнений записанных в квази-линейной форме и отдельных к отношению к пространственным и временным производным, применяется полуобратный метод численного интегрирования.

Для пологих оболочек потеря устойчивости связана с получением верхнего граничного давления. Нумерические вычисления для сферических оболочек нагруженных внешним давлением указывают, что в зависимости от параметров оболочки и упрочнения материала возможный хлопок. Послекритические прогибы зависят сильно от расширения пластических зон, внутренних упругих разгрузок и вторичных пластических деформаций.

Streszczenie

NUMERYCZNA ANALIZA DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH POWŁOK OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH

Równania dużych ugięć i małych odkształceń są przyjęte do analizy sprężysto-plastycznych powłok obrotowo-symetrycznych. Zakłada się dwuwarstwowy przekrój typu „sandwich” lub aproksymację pełnościennego przekroju równoważnym wielopunktowym przekrojem.

Przyjęto równania teorii płynięcia plastycznego dla materiału z mieszanym kinematyczno-izotropowym wzmocnieniem. Do całkowania równań, zapisanych w postaci quasi-liniowej i rozdzielonych względem przestrzennej i czasowej zmiennej przyjęto półodwrotną metodę numerycznego całkowania.

Dla małowyniosłych powłok utrata stateczności jest związana z osiągnięciem górnego obciążenia granicznego. Przykłady liczbowe dla powłok sferycznych obciążonych ciśnieniem zewnętrznym wskazują, że w zależności od parametrów powłoki i wzmocnienia materiału możliwy jest przeskok. Pozakrytyczne ugięcia silnie zależą od rozwoju stref plastycznych, lokalnych obciążeń i wtórnych uplastycznień.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 stycznia 1983 roku

SHALLOW SPHERICAL LATTICE-TYPE SHELL SUBJECTED TO NORMAL POINT LOAD-FUNDAMENTAL SOLUTION

T. LEWIŃSKI

Politechnika Warszawska

1. Introduction

Theoretical problems occurring in designing of the shell structures subjected to concentrated forces require special methods, which make it possible to examine stress concentrations around the loads. In particular, it is worth to consider specific problems of the lattice shells response, i.e. grid-, perforated-, or ribbed surface structures. In the present paper there will be presented: an approximate model of a lattice shell behaviour and its application to the special case of a spherical lattice-type elastic shell with an isotropic and centrosymmetric structure, being subjected to concentrated normal force. The proposed model is based on the lattice surface structure theory developed by C. Woźniak, [1]. Thus, the engineering problem considered here can be reduced to the analysis of one of the fundamental solutions of the theory. Before examining this solution an approximate set of governing equations is derived on the basis of the following assumptions often used when effect of local loads in the classical shell theory is considered, cf [2]:

- the boundary conditions have a neglecting effect on the local response of the shell,
- the deformations corresponding to the concentrated force vanish rapidly, hence the consideration can be confined to the small (comparing with the size of the shell) area around the point load.

The last assumption makes it possible to carry out the simplifications analogous to those used in Vlasov's shallow shell theory.

2. Fundamental equations and basic assumptions

Consider a point P and a vector \mathbf{n} normal at this point to the mid-surface of the shell, referred to the coordinate system x^α , $\alpha = 1, 2$. The plane normal to the vector \mathbf{n} containing P is denoted by π_P . A plane coordinate system \bar{x}^α (obtained via parallel projection of x^α in the direction \mathbf{n} on π_P) is assumed to be a one-to-one correspondence with the parametric lines x^α . The metric tensors in plane and surface coordinate systems will be denoted by $\bar{g}_{\alpha\beta}$ and $g_{\alpha\beta}$, respectively. In the course of the procedure the coordinate system \bar{x}^α is assumed to be orthogonal.

An actual configuration of the shell is determined by functions: u^α , u , v^α , v , which stand for the tangent and normal displacements and rotations, respectively.

The state of strain is described by the tensors of plane and antiplane deformation $\gamma_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$, i.e. by the stretching and bending strain tensors; γ_α denotes antiplane transverse deformations while κ_α — plane bending deformations.

The state of stress is determined by the membrane stress measures $p_{\alpha\beta}$, the bending (antiplane) moment tensor $m_{\alpha\beta}$, the transverse (antiplane) stresses p_α and the in-plane bending moment tensor (polar moments) m_α .

The mentioned quantities here satisfy the known system of equations due to Woźniak's lattice — type shell theory, [1].

The constitutive relations of the isotropic shell considered herein are assumed as follows

$$(2.1) \quad \begin{aligned} p_{\alpha\beta} &= \lambda_i \cdot g_{\alpha\beta} \gamma_{\sigma}^{\sigma} + 2\mu_i \gamma_{(\alpha\beta)} + 2\alpha_i \cdot \gamma_{[\alpha\beta]}, & m_\alpha &= C_i \cdot \kappa_\alpha, \\ m_{\alpha\beta} &= \lambda_p \cdot g_{\alpha\beta} \cdot \kappa_{\sigma}^{\sigma} + 2 \cdot \mu_p \cdot \kappa_{(\alpha\beta)} + 2\alpha_p \cdot \kappa_{[\alpha\beta]}, & p_\alpha &= C_p \cdot \gamma_\alpha. \end{aligned}$$

Moduli λ_i , μ_i , α_i , C_i characterize elastic properties related to the plane ($i = t$) and antiplane ($i = p$) deformations.

Inserting the relationships (2.1) into the equations of equilibrium and utilizing the strain-displacement relations, the governing set of equations is obtained. Taking into account the spherical shape of the shell and introducing all simplifications yielding from the approximation $\bar{g}_{\alpha\beta} \approx g_{\alpha\beta}$, we have

$$(2.2) \quad \begin{aligned} &[(\mu_t + \alpha_t)\nabla^2 - \underline{K^2 C_p}]u_\alpha + (\lambda_t + \mu_t - \alpha_t)\partial_\alpha \partial_\beta u_\beta + 2 \cdot \alpha_t \cdot e_{\alpha\beta} \partial_\beta v - K e_{\alpha\beta} v_\beta - \\ &\quad - K \cdot [2(\mu_t + \lambda_t) + C_p] \partial_\alpha u + b_\alpha = 0, \\ &2\alpha_t e_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta + [C_t \nabla^2 - 4\alpha_t - 4K^2 \cdot (\mu_p + \alpha_p)]v + K \cdot [C_t + 2(\mu_p + \lambda_p)] \partial_\alpha v_\alpha + h = 0, \\ &\quad C_p \cdot K e_{\alpha\beta} u_\beta - K \cdot [2(\mu_p + \lambda_p) + C_p] \partial_\alpha v + [(\mu_p + \alpha_p)\nabla^2 - C_p - \underline{K^2 C_t}]v_\alpha + \\ &\quad + (\mu_p + \lambda_p - \alpha_p) \partial_\alpha \partial_\beta v_\beta + C_p e_{\alpha\beta} \partial_\beta u + h_\alpha = 0, \\ &\quad K \cdot [2(\mu_t + \lambda_t) + C_p] \partial_\alpha u_\alpha + C_p e_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta + [C_p \nabla^2 - 4K^2(\mu_t + \lambda_t)]u + b = 0, \end{aligned}$$

where $\alpha, \beta, \sigma = 1, 2$, $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $e_{\alpha\beta}$ — Ricci tensor, $K = 1/R$, R — the radius of curvature. The components b_α, b, h_α, h denote resultants due to the effective external forces and couples measured per unit area of the middle surface, tangent and normal to it, respectively.

In the course of the derivation we shall confine ourselves to such shells, whose elastic properties and response under local load satisfy the conditions

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &\text{i. } C_t \ll \delta^2 \cdot C_p \ll \delta^3 \cdot \mu_t, \\ &\text{ii. } \delta/R \ll 1 \quad \text{iii. } L/R \ll 1 \end{aligned}$$

where δ — a parameter characterizing a geometry of "microstructure" of the lattice. $[\delta] = m$, L — the wave length of the deformation pattern.

It can be proved, that the assumptions (2.3) allow us to neglect the underlined terms in (2.2), dependent on the second powers of the radius of curvature. The underlined terms in the first two equations result from an influence of transverse stresses p_α . The neglected quantities in the fourth and the fifth equations result from the effect of polar moments m_α .

The assumed simplifications are weaker than those of Vlasov's applied in the shallow shell theory.

3. Normal point load — fundamental solution

The fundamental solution will be found by Fourier transform technique. After carrying out the double Fourier transformation of the equations (2.2) with the right-hand sides $b_\alpha = h_\alpha = h = 0$, $b = P \cdot \delta(x^1) \cdot \delta(x^2)$ and then expressing the inverse transforms in the polar coordinates r , ϑ ($x^1 = r \cos \vartheta$, $x^2 = r \sin \vartheta$) and finally carrying out the ϑ — integration, we obtain

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \frac{P \cdot K}{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} \cdot \int_0^\infty \frac{\gamma^2 [(2\mu_t + 2\lambda_t + C_p) \cdot (\mu_p + \alpha_p) \gamma^2 + 2C_p(\mu_t + \lambda_t)] \cdot J_1(\gamma \cdot r) d\gamma}{M(\gamma)}, \\ (3.1) \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} &= \frac{P \cdot C_p}{2 \cdot \pi} \begin{Bmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \end{Bmatrix} \cdot \int_0^\infty \frac{\gamma^2 [-(2\mu_t + \lambda_t) \gamma^2 + K^2(2\mu_t + 2\lambda_t + C_p)] \cdot J_1(\gamma \cdot r) d\gamma}{M(\gamma)}, \end{aligned}$$

$$v = 0,$$

$$u = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma [(2\mu_t + \lambda_t)(\mu_p + \alpha_p) \cdot \gamma^4 + (2\mu_t + \lambda_t)C_p \cdot \gamma^2 - K^2C_p^2] \cdot J_0(\gamma r) d\gamma}{M(\gamma)}$$

$$\begin{aligned} M(\gamma) &= (2\mu_t + \lambda_t) \cdot (\mu_p + \alpha_p) \cdot C_p \cdot \gamma^6 + K^2(\mu_p + \alpha_p) \cdot [4\mu_t \cdot (\lambda_t + \mu_t) - \\ &\quad - C_p(4\mu_t + 4\lambda_t + C_p)] \gamma^4 + 4K^2\mu_t \cdot (\mu_t + \lambda_t) C_p \cdot \gamma^2 - \\ (3.2) \quad &\quad - 4K^4C \cdot (\mu_t + \lambda_t), \end{aligned}$$

where J_ν are the Bessel functions of the first kind of order ν .

Let us introduce the dimensionless variables $\bar{r} = r/l_0$, $\bar{\gamma} = \gamma \cdot l_0$ where

$$(3.3) \quad l_0 = [((2\mu_t + \lambda_t)(\mu_p + \alpha_p))/(4K^4C_p \cdot (\mu_t + \lambda_t))]^{1/4}$$

The quantity l_0 exists, provided the elastic moduli satisfy the inequalities: $\mu_t + \lambda_t > 0$, $\mu_t > 0$, $\mu_p > 0$, $\alpha_p > 0$, $C_p > 0$, resulting from the positive definiteness of the elastic potential of the shell. Equations (3.1) take the form

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \frac{P \cdot l_0 [2(\mu_t + \lambda_t) + C_p] \cdot K}{2\pi \cdot C_p \cdot (2\mu_t + \lambda_t)} \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} \cdot \int_0^\infty \frac{\bar{\gamma}^2 \cdot (\bar{\gamma}^2 + c) \cdot J_1(\bar{\gamma} \cdot \bar{r}) d\bar{\gamma}}{W(\bar{\gamma})}, \\ (3.4) \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} &= \frac{P \cdot l_0}{2\pi \cdot (\mu_p + \alpha_p)} \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{Bmatrix} \cdot \int_0^\infty \frac{(\bar{\gamma}^4 - \bar{b}_0 \cdot \bar{\gamma}^2) \cdot J_1(\bar{\gamma} \cdot \bar{r}) d\bar{\gamma}}{W(\bar{\gamma})}, \\ u &= \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot C_p} \int_0^\infty \frac{(\bar{\gamma}^4 + \bar{d}_2 \bar{\gamma}^2 + \bar{d}_0) \cdot \bar{\gamma} \cdot J_0(\bar{\gamma} \cdot \bar{r}) d\bar{\gamma}}{W(\bar{\gamma})}, \end{aligned}$$

where

$$(3.5) \quad W(\bar{\gamma}) = \omega(\bar{\gamma}^2), \quad \omega(z) \equiv z^3 + \bar{a}_4 \cdot z^2 + \bar{a}_2 z - 1,$$

$$c = \frac{2C_p \cdot (\mu_t + \lambda_t) \cdot l_0^2}{(\mu_p + \alpha_p) \cdot (2\mu_t + 2\lambda_t + C_p)}, \quad \bar{b}_0 = \frac{[2\mu_t + 2\lambda_t + C_p] \cdot K^2 \cdot l_0^2}{(2\mu_t + \lambda_t)},$$

$$(3.6) \quad \bar{a}_4 = \frac{K^2 \cdot [4\mu_t(\mu_t + \lambda_t) - C_p \cdot (4\mu_t + 4\lambda_t + C_p)] \cdot l_0^2}{(2\mu_t + \lambda_t) \cdot C_p}, \quad \bar{d}_2 = \frac{C_p \cdot l_0^2}{(\mu_p + \alpha_p)},$$

$$\bar{a}_2 = \frac{4 \cdot K^2 \cdot \mu_t \cdot l_0^4 \cdot (\mu_t + \lambda_t)}{(2\mu_t + \lambda_t) \cdot (\mu_p + \alpha_p)}, \quad \bar{d}_0 = \frac{-K^2 \cdot C_p^2 \cdot l_0^4}{(2\mu_t + \lambda_t) \cdot (\mu_p + \alpha_p)}.$$

The series expansions of the integrals (3.4) with respect to the variable \bar{r} depend on the roots of the polynomial ω . In view of the obvious fact, that one of the real roots is positive, the polynomial ω can be written in the form

$$\omega(z) = (z^2 - a^2) \cdot (z^2 + c_2 \cdot z + c_0), \quad c_0 > 0.$$

Let us consider the three cases¹⁾

1. The polynomial $p(z) = z^2 + c_2 z + c_0$ has no real roots, so that the following inequality hold true

$$(3.7) \quad \left(\frac{1}{3} \bar{a}_2 - \frac{1}{9} \bar{a}_4^2 \right)^3 + \left[\frac{1}{6} (\bar{a}_2 \bar{a}_4 + 3) - \frac{1}{27} \bar{a}_4^3 \right]^2 > 0.$$

Thus the polynomial W can be written in the form

$$W(\bar{\gamma}) = (\bar{\gamma}^2 - a^2) \cdot (\bar{\gamma}^2 + s\bar{\gamma} + q) \cdot (\bar{\gamma}^2 - s \cdot \bar{\gamma} + q), \quad s, q \in R$$

2. The polynomial $p(z)$ has positive real roots. $W(\bar{\gamma})$ takes the form

$$W(\bar{\gamma}) = (\bar{\gamma}^2 - a^2) \cdot (\bar{\gamma}^2 - b^2) \cdot (\bar{\gamma}^2 - c^2), \quad b, c > 0.$$

3. The polynomial $p(z)$ has negative real roots. Hence, we have

$$W(\bar{\gamma}) = (\bar{\gamma}^2 - a^2) \cdot (\bar{\gamma}^2 + b^2) \cdot (\bar{\gamma}^2 + c^2), \quad b, c > 0.$$

To carry out a complete analysis of the behaviour of functions u^x, u, v^x , the cases 1 - 3 will be considered separately.

Ad. 1. Decomposing the integrands in (3.4) into a sum of simple fractions and using the definitions (1, 2) of special functions examined in the Appendix, we find

$$(3.8) \quad \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases} (\bar{r}, \vartheta) = \mathcal{L}(g_1(\bar{r}, a); h_{1,1}^{(R)}(\bar{r}; s, q); h_{1,0}^{(S)}(\bar{r}; s, q)) \cdot \begin{cases} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{cases},$$

$$\begin{cases} v_1 \\ v_2 \end{cases} (F, \vartheta) = \mathcal{L}(g_1(\bar{r}, a); h_{1,1}^{(R)}(\bar{r}; s, q); h_{1,0}^{(S)}(\bar{r}; s, q)) \cdot \begin{cases} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{cases},$$

$$u(\bar{r}, \vartheta) = \mathcal{L}(g_0(\bar{r}, a); h_{0,1}^{(S)}(\bar{r}; s, q); h_{0,0}^{(R)}(\bar{r}, s, q)), \quad v(\bar{r}, \vartheta) = 0.$$

The expression $\mathcal{L}(f_1; \dots; f_n)$ means the linear combination of the functions f_1, \dots, f_n .

Ad 2. Proceeding similarly as in the first case, the equations

¹⁾ The case of double roots is omitted.

$$(3.9) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\} (r, \vartheta) = \mathcal{L}(g_1(\bar{r}, a); g_1(\bar{r}, b); g_1(r, c)) \cdot \begin{cases} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{cases}, \\ \left\{ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\} (\bar{r}, \vartheta) = \mathcal{L}(g_1(\bar{r}, a); g_1(\bar{r}, b); g_1(\bar{r}, C)) \cdot \begin{cases} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{cases}, \\ u(\bar{r}, \vartheta) = \mathcal{L}(g_0(\bar{r}, a); g_0(\bar{r}, b); g_0(\bar{r}, c)), \quad v(\bar{r}, \vartheta) = 0, \end{cases}$$

are obtained.

Ad 3. In this case, we have

$$(3.10) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\} (\bar{r}, \vartheta) = \mathcal{L}(g_1(\bar{r}, a); f_1(\bar{r}, b); f_1(\bar{r}, c)) \begin{cases} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{cases}, \\ \left\{ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\} (\bar{r}, \vartheta) = \mathcal{L}(g_1(\bar{r}, a); f_1(\bar{r}, b); f_1(\bar{r}, c)) \cdot \begin{cases} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{cases}, \\ u(\bar{r}, \vartheta) = \mathcal{L}(g_0(\bar{r}, a); f_0(\bar{r}, b); f_0(\bar{r}, c)), \quad v(\bar{r}, \vartheta) = 0. \end{cases}$$

Strains and stresses can be found with the aid of the strain-displacement and constitutive equations.

The results obtained in the Appendix enable us to prove, that in each of the cases considered above functions u^α , u , v^α in the vicinity of point P can be approximated by

$$(3.11) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\} \sim \begin{cases} U_1 \cdot \cos \vartheta \\ U_2 \cdot \sin \vartheta \end{cases} \cdot r \cdot \ln r, \quad \left\{ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\} \sim \begin{cases} -V_1 \sin \vartheta \\ V_2 \cos \vartheta \end{cases} r \cdot \ln r, \quad u \sim U \cdot \ln r. \end{cases}$$

Hence, the following singularities of the components of the state of stress can be found

$$(3.12) \quad \begin{aligned} p_{\alpha\alpha} &\sim P_{\alpha\alpha} \cdot \ln r, & p_1 &\sim P_1 \cdot \frac{1}{r}, & p_{12} &= p_{21} = p_2 = 0, \\ m_{\alpha\beta} &\sim M_{\alpha\beta} \cdot \ln r, & m_2 &\sim M_2 \cdot r \cdot \ln r, & m_1 &= 0. \end{aligned}$$

4. Grid shell

The results obtained at Secs. 2 and 3 can be applied to the analysis of a grid shell of isotropic structure. The considerations will be confined to the so called geodesic lattice domes constructed by three families of bars, formed on the basis of icosahedron by means of the known methods, due to Fuller [3] or Tarnai [4], cf. [5]. The desired properties, namely the isotropy and centrosymmetry are satisfied with the sufficient accuracy for the engineering practice. Effective elastic moduli of such structures have been given in [1]; it is worth mentioning, that the relations $\lambda_i = \mu_i - \alpha_i$, $i = p, t$, hold true. In the case of slender bars, conditions (2.3)₁ are satisfied. Furthermore it can be proved, that for all real grid shells of this structure the inequality (3.7) is valid; thus displacements and rotations of nodes are approximated by means of the formulae (3.8).

A quantitative analysis of the response of geodesic grid shell subjected to normal point load will be presented in a separate paper.

5. Concluding remarks

In the paper one version of simplifications of the governing system of equations of Woźniak's lattice-type shell theory has been proposed. The aim of the model is to describe special type of deformations occurring in shells subjected to local loads. An analysis of the response of the spherical lattice shell to the normal point load confirmed, that the model is useful to both quantitative and qualitative considerations. In particular, it is possible to prove, that in the case considered, the singularities of the displacements and stresses are of the same order as those in the classical Keissner's type theory of shells, cf (3.11 - 3.12) and [2].

Nevertheless, the proposed model can not be used when boundary value problems of shallow lattice shells are considered since there the governing set of equations does not satisfy the strong ellipticity condition.

6. References

1. Cz. WOŹNIAK, *Lattice-type surface structures*, PWN, Warsaw 1970
2. St. ŁUKASIEWICZ, *Local loads in plates and shells*, PWN, Warszawa 1976
3. R. B. FULLER, *Geodesic Tent*, United States Patent Office, patent 2 914, 074, Nov. 24/1959
4. T. TARNAI, *Spherical Grids of Triangular Network*, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 76, 3-4, 1974, pp 307-336
5. *Manual for Metallic Structures Designing*, ed. W. Bogucki, vol. 2, Arkady, Warsaw 1982
6. F. OBERHETTINGER, *Tables of Bessel Transforms*, Springer Verlag, Berlin 1972
7. M. ABRAMOVITZ, I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics series 55, 1964
8. J. G. SIMMONDS, M. R. BRADLEY, *The fundamental solution for a shallow shell with an arbitrary quadratic midsurface*, J. of Appl. Mech., Trans. of the ASME, 1976, June, 286-290

Appendix

Evaluate the improper integrals

$$(1) \quad \begin{aligned} f_\nu(y, a) &= \int_0^\infty \frac{J_\nu(x \cdot y) \cdot x^{1-\nu} dx}{x^2 + a^2}, & g_\nu(y, a) &= \int_0^\infty \frac{J_\nu(x \cdot y) \cdot x^{1-\nu} dx}{x^2 - a^2} \\ h_{\nu, \mu}(y; r, q) &= \int_0^\infty \frac{J_\nu(x \cdot y) \cdot x^\mu dx}{x^2 + r \cdot x + q}, & \nu, \mu &= 0, 1, \quad a, q, r \in R \\ & & -4q + r^2 &< 0, \quad q > 0. \end{aligned}$$

In the paper the following functions are also used

$$(2) \quad \begin{aligned} h_{\nu, \mu}^{(S)}(y; r, q) &= h_{\nu, \mu}(y; r, q) + h_{\nu, \mu}(y; -r, q), \\ h_{\nu, \mu}^{(R)}(y; r, q) &= h_{\nu, \mu}(y; r, q) - h_{\nu, \mu}(y; -r, q). \end{aligned}$$

1. Integrals f_ν, g_ν ,

According to the tables [6], we have

$$(3) \quad f_0(y, a) = K_0(a \cdot y), \quad g_0(y, a) = -\frac{\pi}{2} \cdot Y_0(a \cdot y),$$

$$f_1(y, a) = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{a \cdot y} - K_1(a \cdot y) \right], \quad g_1(y, a) = -\frac{1}{a} \left[\frac{\pi}{2} \cdot Y_1(a \cdot y) + \frac{1}{a \cdot y} \right],$$

where Y_0, Y_1, K_0, K_1 are Bessel functions and modified Bessel functions of order zero and one, [6, 7]. Expansions of f_v, g_v in the vicinity of $y = 0$, take the form

$$(4) \quad f_0, g_0 \sim -\ln y, \quad f_1, g_1 \sim -\frac{1}{2} \cdot y \cdot \ln y.$$

2. The integrals $h_{v,\mu}$

The author has not found expansions of the integrals $h_{v,\mu}$ in the available monographs on the special functions. A method of evaluating of the integrals based on the Poisson's integral representation of Bessel functions is presented briefly. Some ideas of the procedure has been taken from the paper of Simmonds and Bradley, [8], where the integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)) d\alpha d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + i(\alpha^2 + k\beta^2)}, \quad k \in (0, 1),$$

has been examined.

Starting from the identity

$$(5) \quad x^\mu \cdot (x^2 + r \cdot x + q)^{-1} = \frac{a^\mu}{2bi} \cdot \left(\frac{1}{x - \zeta_1} - \frac{1}{x - \zeta_2} \right) + \frac{\delta_{1\mu}}{2} \cdot \left(\frac{1}{x - \zeta_1} - \frac{1}{x - \zeta_2} \right)$$

where:

$$\mu = 0, 1, \quad \zeta_1 = a + bi, \quad \zeta_2 = a - bi, \quad a = \frac{-r}{2}, \quad b = \left(q - \frac{r^2}{4} \right)^{1/2},$$

one obtains

$$(6) \quad h_{v,\mu}(y; r, q) = \frac{a^\mu}{2bi} (H_{v,\mu}^{(1)} - H_{v,\mu}^{(2)}) + \frac{1}{2} \cdot \delta_{1\mu} \cdot (H_{v,\mu}^{(1)} + H_{v,\mu}^{(2)}),$$

$$H_{v,\mu}^{(\lambda)} = \int_0^\infty \frac{J_\nu(xy) dx}{x - \zeta_\lambda}.$$

Recalling the integral representation of Bessel functions J_ν

$$(7) \quad J_\nu(x \cdot y) = \frac{i^\nu}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} e^{-ixy \cdot \cos \varphi} \cdot \cos \nu \varphi d\varphi, \quad \nu = 0, 1,$$

and interchanging of orders of integrations, we find

$$(8) \quad H_{v,\mu}^{(\lambda)} = \frac{i^\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \nu \varphi \cdot F_\mu^\lambda(\varphi) d\varphi, \quad F_\mu^\lambda(y, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\exp(i \cdot \omega(\varphi) \cdot x) dx}{x - \zeta_\lambda},$$

where $\omega(\varphi) = -y \cos \varphi$. The function F_μ^λ can be expressed by means of the complex exponential integral E_1

$$(9) \quad F_\mu^\lambda(y, \varphi) = e^{i\omega\zeta_\lambda} \left\{ E_1(i \cdot \omega \cdot \zeta_\lambda) + \frac{\pi \cdot i}{2} \cdot (1 + \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \zeta_\lambda)) \cdot (\operatorname{sgn} \omega + \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \zeta_\lambda)) \right\}.$$

For the sake of brevity the proof is omitted. Expanding E_1 into power series, inserting (9) to (8)₁ and carrying out the φ — integration with the aid of the equations

$$(10) \quad s_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 2^{-2k} \cdot \binom{2k}{k}, & n = 2k, \\ 0 & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

$$(11) \quad r_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^n x \cdot \ln |\cos x| dx = \begin{cases} \sum_{j=-k}^k c_j^k \cdot \tau_j, \quad c_j^k = \frac{2^{-2k} \cdot (2k)!}{(k+j)! \cdot (k-j)!} & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

where:

$$\tau_k = \begin{cases} -\ln 2 & k = 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{2 \cdot |k|} & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

$$(12) \quad v_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(-\cos x) \cdot \cos^n x dx = \begin{cases} 0 & n = 2k, \\ -\frac{2^{2k}}{2\pi} \cdot \frac{1}{k \cdot \binom{2k-1}{k-1}} & n = 2k+1 \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

the expansions of the complex functions $H_{\nu,\mu}^{(\lambda)}$ and real functions $h_{\nu,\mu}$ are found. Finally, we obtain

$$(13) \quad h_{0,0}(y; r, q) = \frac{1}{b} \cdot \ln y \cdot \sum_1^\infty s_{2n} \cdot f_{S_s}^{(n)}(\vartheta) \cdot \bar{y}^{2n} + \frac{\pi}{2b} \cdot \sum_0^\infty v_{2n+1} \cdot f_{S_c}^{(n)}(\vartheta) \cdot y^{2n+1} + \sum_0^\infty h_{0,0}^{(n)}(\vartheta) \cdot s_{2n} \cdot \bar{y}^{2n},$$

$$h_{1,0}(y; r, q) = -\frac{1}{b} \cdot \ln \bar{y} \cdot \sum_0^\infty f_{\delta_s}^{(n)}(\vartheta) \cdot s_{2n+2} \cdot \bar{y}^{2n+1} + \frac{\pi}{2 \cdot b} \cdot \sum_0^\infty f_{S_s}^{(n)}(\vartheta) \cdot v_{2n+1} \cdot y^{2n+1} + \sum_0^\infty h_{1,0}^{(n)}(\vartheta) \cdot s_{2n+2} \cdot \bar{y}^{2n+1},$$

$$\begin{aligned}
 h_{0,1}(y; r, q) &= \ln \bar{y} \cdot \sum_0^\infty \left(\frac{a}{b} \cdot f_{S_s}^{(n)}(\vartheta) - f_{C_c}^{(n)}(\vartheta) \right) \cdot s_{2n} \cdot \bar{y}^{2n} + \\
 (13) \text{ [cont.]} \quad &+ \frac{\pi}{2} \cdot \sum_0^\infty \left(\frac{a}{b} f_{S_c}^{(n)}(\vartheta) + f_{C_s}^{(n)}(\vartheta) \right) \cdot v_{2n+1} \cdot \bar{y}^{2n+1} + \sum_0^\infty h_{0,1}^{(n)} \cdot s_{2n} \cdot \bar{y}^{2n},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{1,1}(y; r, q) &= -\ln \bar{y} \cdot \sum_0^\infty \left(\frac{a}{b} f_{S_s}^{(n)}(\vartheta) + f_{C_s}^{(n)}(\vartheta) \right) \cdot s_{2n+2} \cdot \bar{y}^{2n+1} + \\
 &+ \frac{\pi}{2} \cdot \sum_0^\infty \left(\frac{a}{b} \cdot f_{S_s}^{(n)}(\vartheta) - f_{C_c}^{(n)}(\vartheta) \right) v_{2n+1} \cdot \bar{y}^{2n} + \sum_0^\infty h_{1,1}^{(n)} \cdot s_{2n+2} \cdot \bar{y}^{2n+1},
 \end{aligned}$$

where $\bar{y} = y \cdot \varrho$, $\varrho = q^{1/2}$, $\cos \vartheta = -r/2\sqrt{q}$, $\sin \vartheta > 0$.

The functions $f_{ij}^{(n)}(\vartheta)$, $i = S, C, j = s, c$ are the coefficients in the series expansions

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \text{Sh}(x \cdot \sin \vartheta) \cdot \left\{ \frac{\sin(x \cdot \cos \vartheta)}{\cos(x \cdot \cos \vartheta)} \right\} &= \sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{f_{S_s}^{(n)}(\vartheta)}{f_{C_c}^{(n)}(\vartheta)} \right\} \cdot x^{2n}, \\
 \text{Ch}(x \cdot \sin \vartheta) \cdot \left\{ \frac{\sin(x \cdot \cos \vartheta)}{\cos(x \cdot \cos \vartheta)} \right\} &= \sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{f_{C_s}^{(n)}(\vartheta) \cdot x}{f_{C_c}^{(n)}(\vartheta)} \right\} \cdot x^{2n}.
 \end{aligned}$$

In order to save space, the complex definitions of the coefficients $h_{\alpha,\beta}^{(n)}$ will not be given here.

In the neighbourhood of point $y = 0$ the series expansions (13) with the first few terms written out explicitly have the form

$$h_{0,0}(y; r, q) \sim \frac{\sin 2\vartheta}{4\varrho \cdot \sin \vartheta} \cdot \bar{y}^2 \cdot \ln \bar{y} + \frac{\pi - \vartheta}{\varrho \cdot \sin \vartheta} - \frac{1}{2\varrho} \cdot y,$$

$$h_{1,0}(y; r, q) \sim -\frac{1}{2\varrho} \cdot \ln \bar{y} \cdot \bar{y} + \frac{1}{2\varrho} \cdot [\text{ctg } \vartheta \cdot (\pi - \vartheta) + (\ln 2 - \gamma_E - 1)] \cdot \bar{y} - \frac{\sin 2\vartheta}{3\varrho \cdot \sin \vartheta} \cdot \bar{y}^2,$$

$$(15) \quad h_{0,1}(y; r, q) \sim -\ln y + \frac{\sin 3\vartheta}{4 \cdot \sin \vartheta} \cdot \bar{y}^2 \cdot \ln \bar{y} - \bar{y} \cdot \cos \vartheta,$$

$$h_{1,1}(y; r, q) \sim \cos \vartheta \cdot \bar{y} \cdot \ln \bar{y} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin \vartheta} [(\pi - \vartheta) \cdot \cos 2\vartheta + (\ln 2 - \gamma_E - 0,5) \cdot \sin 2\vartheta] \cdot \bar{y}$$

where $\gamma_E \cong 0.5772$ — Euler's constant. Hence, for $y = 0$

$$h_{0,0} = (\pi - \vartheta)/(\varrho \cdot \sin \vartheta), \quad h_{1,0} = 0, \quad h_{1,1} = 0,5.$$

The function $h_{0,1}$ has a logarithmic singularity at point $y = 0$.

Резюме

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ НА ПОЛОГУЮ,
СФЕРИЧЕСКУЮ СЕТЧАТУЮ ОБОЛОЧКУ-ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

В работе приводится статический анализ передачи нормальной сосредоточенной силы на сферическую сетчатую оболочку с изотропной и центросимметрической структурой. Применено теорико-сетчатых оболочек Возняка. Представлена проблема приводится к анализу одного из фундаментальных решений этой теории.

В первой части получены приближенные уравнения равновесия (в омещениях) базируя на предположениях относительно слабших од тих, при помощи которых В. З. Власов сформулировал теорию пологих, однородных оболочек.

Фундаментальное решение найдено с помощью интегральной трансформации Фурье. Проанализировано сингулярности перемещений, деформаций и напряжений.

Streszczenie

DZIAŁANIE NORMALNEJ SIŁY SKUPIONEJ NA MAŁO WYNIOSŁĄ SIATKOWĄ POWŁOKĘ
KULISTĄ — ROZWIĄZANIE PODSTAWOWE

Przedmiotem pracy jest analiza statyczna niewielkiego obszaru sferycznej powłoki siatkowej o strukturze izotropowej i centrosymetrycznej wokół punktu przyłożenia normalnej siły skupionej. Wykorzystano teorię powłok siatkowych Woźniaka. Postawiony problem sprowadza się do analizy jednego z rozwiązań podstawowych tej teorii.

W pierwszej części pracy wyprowadzono równania przemieszczeniowe mało wyniosłej, sferycznej powłoki siatkowej. Przyjęto założenia relatywnie słabsze od uproszczeń W. Z. Własowa będących podstawą teorii jednorodnych powłok połączonych.

Rozwiązanie podstawowe znaleziono za pomocą całkowitej transformacji Fouriera. Zbadano rzędy osobliwości składowych stanu przemieszczenia, odkształcenia i napięcia.

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 stycznia 1983 roku

NUMERICAL CALCULATIONS OF NONLINEAR EQUILIBRIUM PATHS FOR SPHERICAL CANTILEVER SHELLS

JERZY GOLAŚ

WSI Opole

ZYGMUNT KASPERSKI

WSI Opole

ANNA PEER-KASPERSKA

WSI Opole

1. Introduction

In the paper some results of the nonlinear static analysis for the axisymmetric elastic, thin spherical cantilever shell has been presented. It is assumed that the shell is subjected to the conservative load characterized by a single scalar parameter λ . The static analysis has been performed by means of the finite element method. In the algorithm the equations of the geometrically nonlinear SANDERS-KOITER shell theory are taken into account. Each point on the equilibrium path has been determined from the solution of the system of nonlinear equilibrium equations by NEWTON-RAPHSON method with the possibility of a change of control parameter [1].

2. Fundamental relations and equations

We outline below some relations and equations of a proposed algorithm. More details one can find in the unpublished paper [2].

We assume that the generating line of the rotational shell midsurface is given by equation $r = r(z)$, $z \in [z_1, z_{N+1}]$. Division into the finite elements is performed by the sequence of values z_1, \dots, z_{N+1} . Thus we obtain the finite element as a cone with curvilinear generatrix. In order to obtain fundamental relations for an element the local parametrization of generatrix $s = s(z)$ is introduced. For a case of axisymmetric load the displacement field of a shell midsurface is a function of one variable s only, $\tilde{u} = \hat{u}(s)$. Tangential and normal components of this field we denote by u and w , respectively. Defining the nodal displacement vector of on element by

$$(2.1) \quad \{q_e\}^T = [u_i, u'_i, w_i, \beta_{st}; u_{i+1}, u'_{i+1}, w_{i+1}, \beta_{st+1}]^T, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

we assume the approximation of components u and w of the displacement field for i -th element in the form of the 3-rd order polynomial with respect to s .

The potential energy of the shell is given by the sum

$$(2.2) \quad P(\tilde{u}) = U(\tilde{u}) + V(\tilde{u}) = \sum_N U^e + \sum_N V^e,$$

where

$$(2.3) \quad U^e = \pi \int_0^{L_i} \left\{ \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_s^2 + \epsilon_\theta^2 + 2\nu\epsilon_s\epsilon_\theta) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_s^2 + \kappa_\theta^2 + 2\nu\kappa_s\kappa_\theta) \right\} r ds,$$

is a strain energy of an element and

$$(2.4) \quad V^e = -2\pi \int_0^{L_i} (p_w w + p_u u) r ds = -2\pi \lambda \int_0^{L_i} (p w + q u) r ds,$$

is a potential energy of a conservative load with components: normal $p_w = \lambda p$ and tangential $p_u = \lambda q$.

The strain — displacement relations may be written in the form

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \epsilon_s &= \epsilon_s + \frac{1}{2} \beta_s^2, & \epsilon_\theta &= \epsilon_\theta, & \kappa_s &= -\beta'_s, & \kappa_\theta &= -\frac{\sin \Phi}{r} \beta_s, \\ \epsilon_s &= u' - \Phi' w, & \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} (u \sin \Phi + w \cos \Phi), & \beta_s &= w' + \Phi' u, & (') &= \frac{d}{ds} (\cdot), \end{aligned}$$

where Φ is the angle between axis of revolution and tangential to shell's meridian.

The strain energy (2.3) after substituting relations (2.5) can be expressed by $U^e = U_L^e + U_{NL}^e$ where term U_{NL}^e contains displacements and their derivatives to the power not exceeding two.

The equilibrium equations of a shell can be obtained from the stationarity condition of potential energy $\delta P(\tilde{u}, \lambda; \delta \tilde{u}) = 0$, where $\delta \tilde{u}$ is an arbitrary kinematically admissible variation of a displacement field. Hence

$$(2.6) \quad [K]\{q\} = \lambda\{Q\} - \{Q^*(\{q\})\},$$

where: $[K]$ is a classical stiffness matrix, $\{q\}$ is a vector of axisymmetric nodal displacements, $\{Q\}$ is a vector of unit loads, $\{Q^*\} = \left\{ \frac{\partial U_{NL}}{\partial q} \right\}$ is a vector of "pseudo-forces".

The system of nonlinear equations (2.6) is solved by the use the following version of an iterative NEWTON-RAPHSON method:

q^0 — initial approximation,

$$(2.7) \quad \left[K + \frac{\partial Q^*}{\partial q} (q^m) \right] \Delta q^{m+1} = -\{Kq^m + Q^*(q^m) - \lambda Q\}, \quad \text{for } m = 0, 1, 2, \dots,$$

where $\Delta q^{m+1} = q^{m+1} - q^m$.

We can distinguish two cases.

1° The matrix $\left[K + \frac{\partial Q^*}{\partial q} \right]$ is well — conditioned in the neighborhood of a solution $q = q(\lambda)$.

2° The matrix $\left[K + \frac{\partial Q^*}{\partial q} \right]$ is ill — conditioned.

In the first case we calculate displacements $q = q(\lambda)$ using iteration procedure (2.7). In the second case we assume that one component q_r of a vector q is given but λ is unknown. Then (2.7) can be written in the form

$$(2.8) \quad \left[\tilde{K} + \frac{\partial Q^*}{\partial q}(\tilde{q}^m) \right] \Delta \tilde{q}^{m+1} = -\{K\tilde{q}^m + Q^*(\tilde{q}^m) - q_r T\},$$

where: $[\tilde{K}]$ — is a modified matrix $[K]$ obtained via replacement of r -th column by vector $\{Q\}$, $\{T\}$ — r -th column of the matrix $[K]$

$$\tilde{q}^m = [q_1^m, \dots, q_{r-1}^m, \tilde{\lambda}^m, q_{r+1}^m, \dots, q_N^m]^T.$$

To obtain Δq^{m+1} , $\Delta \tilde{q}^{m+1}$ we use methods presented in details [1]. Initial iterate $q^0(\lambda)$ for a given $q(\lambda_1)$ and $q(\lambda_2)$ is calculated from the formula

$$(2.9) \quad q^0(\lambda) = q(\lambda_2) + \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \{q(\lambda_2) - q(\lambda_1)\}.$$

Using displacements $\{q\} = \{q(\lambda)\}$ we can calculate stress resultants in the usual manner.

3. Numerical examples

Using the forementioned algorithm and a computer program some numerical examples have been computed. Computer Odra 1204 was used. Calculations connected with the numerical integration of the stiffness matrix, aggregation of a matrix, boundary conditions etc. were based on methods presented in [3].

The shallow spherical cantilever shell subjected to the uniformly distributed load was considered (see Fig. 1).

In examples No 1 and No 2 the thickness of the shell is constant but heights H are different. In example No 3 we have linear thickness distribution. The shells are divided into ten finite elements. The displacement of the shell external node for the three mentioned

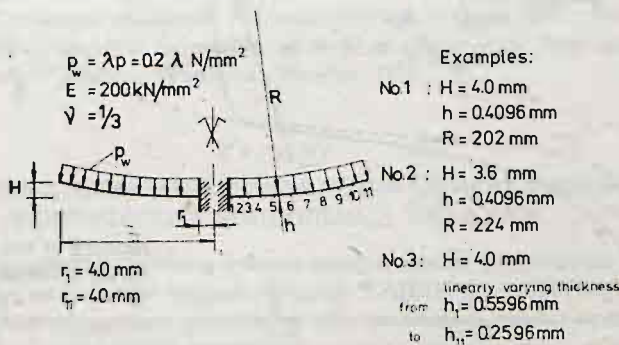


Fig. 1

examples is shown in Fig. 2. In the vicinity of the equilibrium path vertex the control parameter λ was replaced in (2.7) by component of displacement vector w_{11} , β_{11} and β_3 . Calculations for particular values of control parameter ended, when

$$\max[\Delta q_i^{m+1} - \Delta q_i^m] < 10^{-6}$$

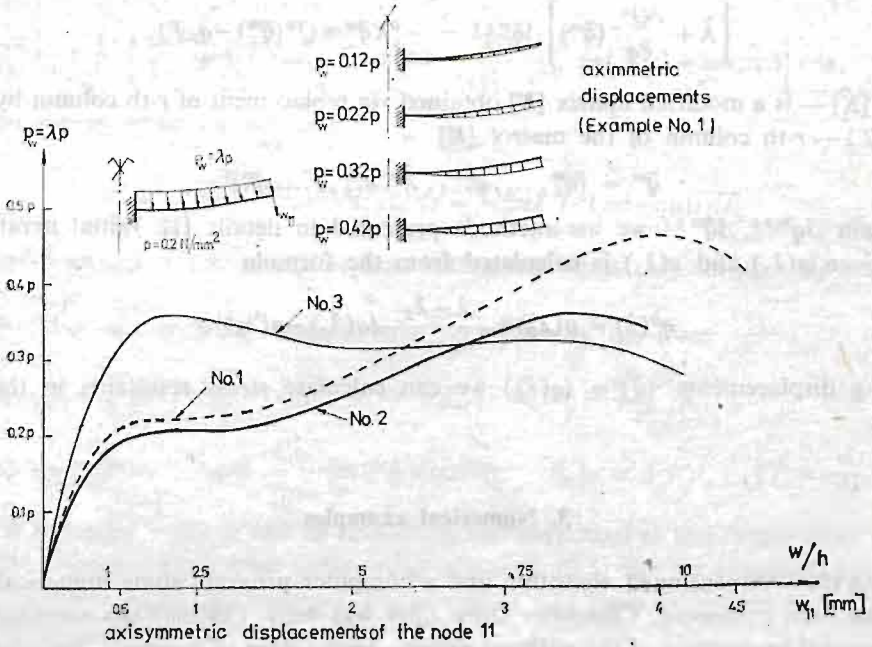


Fig. 2

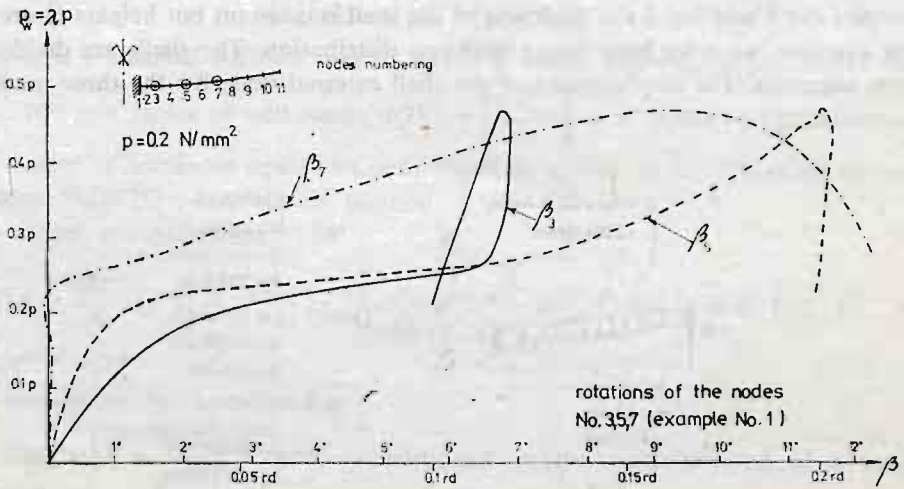


Fig. 3

where q_i^j — denotes the i -th component of displacement vector in j -th iteration step. For the error above defined each point on the path was calculated by means of 3 - 4 iteration (2.7). In Fig. 3 rotations β of nodes 3, 5 and 7 are shown. The values of the stress resultants for example No 1 are shown in Fig. 4, where by dashed line on the plots of bending moments M_s the values from the example No 3 are marked.

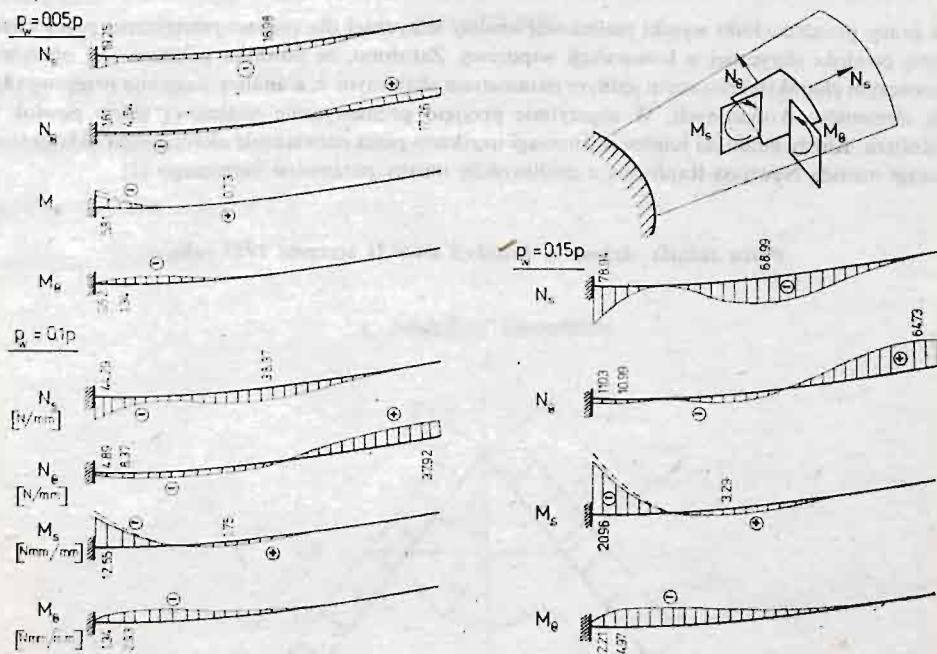


Fig. 4

References

1. Z. KASPERSKI, *Numerical computation of curvilinear equilibrium paths for onedimensional elastic systems*. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, (in Polish, to appear).
2. J. GOŁAŚ et al., *Numerical solutions of shells of revolution using linear and geometrically nonlinear theory of elastic and finite elements method*, Research supported by Polish Academy of Sciences under Grant 05.12, Department of Structural Mechanics, Polytechnic College in Opole, 1977 - 1980.
3. J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, *Numerical calculations of shells of revolution by finite element method*. (in Polish), Polish Scientific Publishers, Warszawa - Wrocław 1978.

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ КРИВОЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ КОНСОЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Представлены результаты численного анализа статки тонкой сферической оболочки. Принимается геометрически нелинейную теорию оболочек САНДЕРСА-КОЙТЕРА. Нагрузка оболочки описывается одним скалярным параметром λ , а численный анализ приводится методом конечных элементов. Все точки кривой равновесия найдены путем решения нелинейной системы уравнений методом НЬЮТОНА-РАФСОНА.

В программе на ЭВМ (I) существует возможность замены параметра λ произвольной неизвестной системы уравнений.

Streszczenie

NUMERYCZNE OBLICZANIE KRZYWOLINIOWYCH ŚCIEŻEK RÓWNOWAGI DLA POWŁOK SFERYCZNYCH O KONSTRUKCJI WSPORCZEJ

W pracy przedstawiono wyniki nieliniowej analizy statycznej dla osiowosymetrycznej pracy cienkiej, sprężystej powłoki sferycznej o konstrukcji wsporczej. Założono, że powłoka poddana jest obciążeniem zachowawczym charakteryzowanym jednym parametrem skalarnym λ , a analizę statyczną przeprowadzono metodą elementów skończonych. W algorytmie przyjęto geometrycznie nieliniową teorię powłok Sandersa-Koitera. Każdy punkt na ścieżce równowagi uzyskano przez rozwiązanie nieliniowego układu równań równowagi metodą Newtona-Raphsona z możliwością zmiany parametru sterującego [1].

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 stycznia 1983 roku

STABILITY PROBLEM OF A SHALLOW CONICAL SHELL UNDER LATERAL PRESSURE

STEFAN JONIAK

Politechnika Poznańska

FERDYNAND TWARDOSZ

Politechnika Poznańska

1. Stability Equations

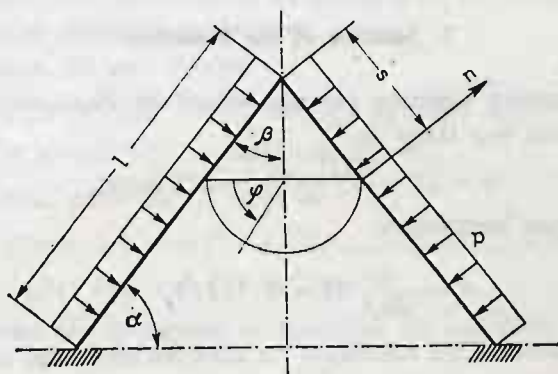


Fig. 1

The set of stability equations for a conical shell under external pressure is of the form:

$$(1) \quad \nabla^2 \nabla^2 F - Eh \left\{ \operatorname{ctg} \beta \frac{l}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right) \right]^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} = 0,$$

$$(2) \quad DV^2 \nabla^2 w + \operatorname{ctg} \beta \frac{l}{x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_1^2} \right) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} \right) +$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi_1} \right) \left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varphi_1} \right) +$$

$$+ pl^3 \operatorname{tg} \beta \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} \right) = 0,$$

where: $x = \frac{s}{l}$, $\varphi_1 = \varphi \sin \beta$ (see Fig. 1),

w — shell deflection,

F — force function,

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{x^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \varphi_1^2} + \frac{1}{x^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi_1^4} + \frac{2}{x} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{2}{x^3} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \varphi_1^2} + \frac{4}{x^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x^3} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Equations (1), and (2), given here in a transformed form, were derived for the conical shell of an arbitrary shape, c.f. [1]. In equation (2) $\underline{\rho l^4 \cos^4 \alpha}$ should be substituted instead of the underlined term for the stability problem of a shallow conical shell (for a shallow shell $\text{tg} \alpha < 0.2$).

In this paper the solution of the shallow conical shell stability problem is presented, where the equation (2) in a "full" (with under lined term included) and in a "simplified" form are used. It can be concluded from the analysis which of the equations of (1) and (2) are better in use. The analysis of the influence of shell dimensions on the critical load is also presented.

2. Solution of the Equations.

The strain compability equation (1) was solved by Papkowicz — type procedure. The deflection function was taken as

$$(3) \quad w = (x^2 - 1)^2 f + x^4 (x^2 - 1)^2 f_1 \cos n \varphi_1,$$

where: f, f_1 — unknown parameters,

$$n = \frac{k}{\sin \beta} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

The function (3) satisfies the conditions for clamped shell edge at $x = 1$, i.e.:

$$(4) \quad w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

When the deflection function (3) is introduced into right-hand side of equation (1), this can be written as follows:

$$(5) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = Eh(A_0 + A_n \cos n \varphi_1 + A_{2n} \cos 2n \varphi_1),$$

where A_0, A_n, A_{2n} are the functions of x .

The parameters of deflection function and shell dimensions are also included in these functions. The equations are of the form given in ref. [3]. The solution of equation (5) we accept in the form of power series

$$(6) \quad F(x_1 \varphi_1) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(x) \cos m \varphi_1.$$

The coefficients in equation (6) can be determined when the set of four differential

equations, obtained by substituting the function (6) into equation (5) and comparing by identity the corresponding terms of the left — and right-hand side, is solved. Thus the force function takes the form of

$$(7) \quad F(x, \varphi_1) = F_0 + F_n \cos n\varphi_1 + F_{2n} \cos 2n\varphi_1.$$

F_0, F_n, F_{2n} are functions of x and of deflection function parameters and they are of a complex structure. When the force function is known, then we can approximately solve the equilibrium equation (2) assuming a deflection function w .

A Bubnov-Galerkin-type procedure is used for solving the equation (2). The “full” and also the “simplified” equations are solved. Orthogonalization of equation (2) requires

$$(8) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^1 K(x, \varphi_1) x(x^2 - 1)^2 dx d\varphi_1 \sin \beta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 K(x, \varphi_1) x^5 (x^2 - 1)^2 \cos n\varphi_1 dx d\varphi_1 \sin \beta = 0,$$

where: $K(x, \varphi_1)$ is left — hand side of equation (2).

When the conditions (8) are expanded we obtain a set of two algebraic equations in the vector of deflection functions parameters.

For the “full” equation (2) one obtains

$$(9) \quad \begin{aligned} A_1 p^* \zeta_1 + A_2 \zeta_1 + A_3 \zeta_1^2 + A_4 \zeta_1^3 + A_5 \zeta_1 \zeta_2^2 + A_6 \zeta_2^2 &= 0, \\ B_1 p^* + B_2 + B_3 \zeta_1 + B_4 \zeta_1^2 + B_5 \zeta_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

and for the “simplified” equation (2) there is

$$(10) \quad \begin{aligned} A_1^1 p^* + A_2 \zeta_1 + A_3 \zeta_1^2 + A_4 \zeta_1^3 + A_5 \zeta_1 \zeta_2^2 + A_6 \zeta_2^2 &= 0, \\ \zeta_2 (B_2 + B_3 \zeta_1 + B_4 \zeta_1^2 + B_5 \zeta_2^2) &= 0. \end{aligned}$$

The next quantities are introduced in equations (9) and (10):

$$\zeta_1 = \frac{f}{h}, \quad \zeta_2 = \frac{f_1}{h}, \quad p^* = \frac{p}{E}.$$

The coefficients A_i and B_i include shell dimensions and parameter n . Their structure is very complicated. When parameter ζ_2 is eliminated from equations (9) we obtain an expression form which we calculate the pressure

$$(11) \quad p^* = K_0 \frac{\zeta_1^3 + K_2 \zeta_1^2 + K_3 \zeta_1 + K_4}{\zeta_1 + K_1}.$$

The same operation made on equations (10) gives

$$(12) \quad p^* = H_1 + H_2 \zeta_1 + H_3 \zeta_1^2 + H_4 \zeta_1^3.$$

Since the directions of the pressure and the deflection (see Fig. 1) in equation (11), and (12) are opposite one has to put $\zeta_1 \leq 0$.

3. Analysis of the Solution

The analysis has been performed for shells with $\frac{l}{h} = 100, 200, 300$ and with angle α varied ($\text{tg } \alpha$ was from 0.1 through 0.5 by step of 0.1).

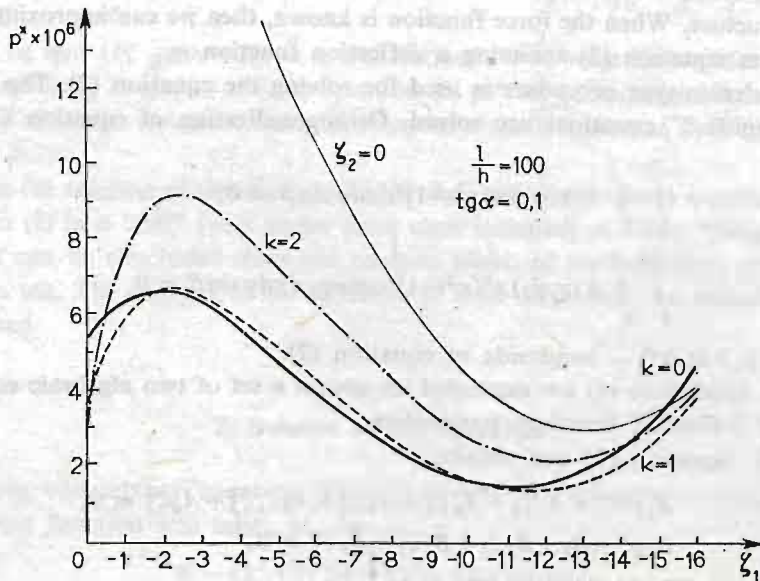


Fig. 2

From equations (11) and (12) for each pair of $\frac{l}{h}$ and $\text{tg } \alpha$ one obtains an infinite number of solutions, because they both include the parameter $n \left(n = \frac{k}{\sin \beta} \right)$. The only significant solution is the solution which gives a minimum p^* value.

Fig. 2 is a plot of curves obtained from the solutions of equation (11). They refer to a shell for which $\frac{l}{h} = 100$ and $\text{tg } \alpha = 0.1$. Each of the solutions brings two extremal values of the pressure. The lowest from maximum pressures is the upper critical load, signed p_g^* , the lowest taken from minimum pressures is the lower critical load p_d^* . The lowest pressures were obtained at $k = 1$. These are $p_g^* = 6.6489 \cdot 10^{-6}$ and $p_d^* = 1.4374 \cdot 10^{-6}$. The line for $\zeta_2 = 0$ is also presented.

It represents a symmetrical form of buckling and it is of a first approximation of the solution. The minimum value is $2.859 \cdot 10^{-6}$.

Change of dimensions and angle α do not influence the quality changes. The critical load is then obtained from the equation at $k = 0$.

The solutions of equation (12) are of the same form. However the buckling critical loads are much higher (for $k = 0$) here then buckling loads obtained from equation (11).

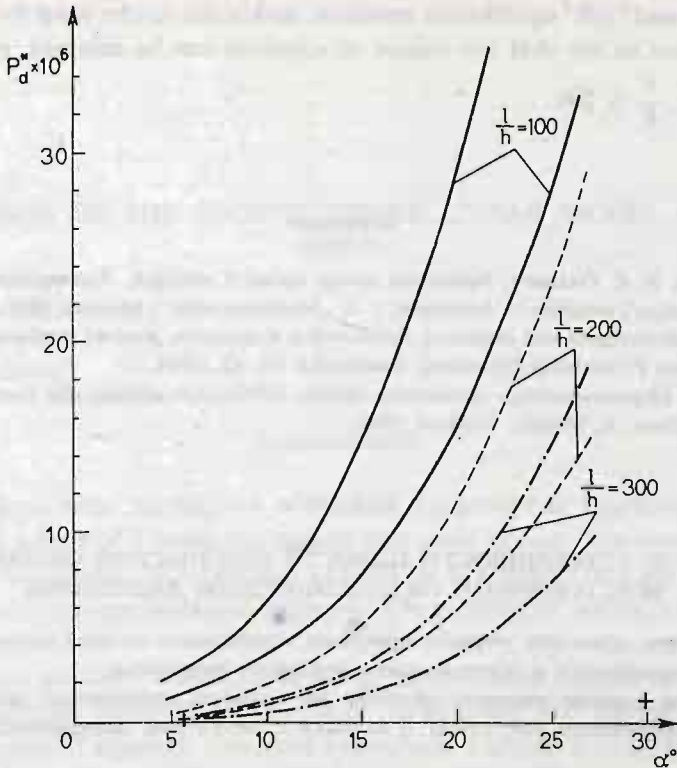


Fig. 3

Fig. 3 presents the lines of lower critical load p_d^* versus angle α for three different values of $\frac{l}{h}$. The lower of the two lines presented by the same type of line is referred to equation (11), the upper line is referred to equation (12). It is worth noting to show that by using the "full" equilibrium equation (2) one obtains in each case, the lower critical load smaller than the critical load of the "simplified" equation. The decrease is as much as 50% of the pressure obtained from "simplified" equation. The critical load increases rapidly with the increase of angle α but the increase is not so rapid when the $\frac{l}{h}$ ratio is larger.

To evaluate theoretical results the use is made of the experimental data given in ref. [4].

These data are pointed out by crosses in Fig. 3, and they refer to shells of $\frac{l}{h} = 200$, $\text{tg } \alpha = 0.1$ and of $\frac{l}{h} = 300$ and $\alpha = 30^\circ$.

The experimental result for a shallow shell is contained within the solutions of equations (11) and (12), but the result for a shell of $\alpha = 30^\circ$ differs very much from the theoretical predictions (when the latter are extrapolated for the angle of 30°). Since the other experimental data are not available the range of valid solutions is not resolvable correctly.

One may say with certainty that the accepted deflection, while using a Papkowicz-

-type procedure and "full" equilibrium equation, makes the results valid for shells of small angle α ; it is also to say that the regime of solutions can be enlarged up to $\text{tg} \approx 0.3$, especially when $\frac{l}{h} > 200$.

References

1. H. M. MUŠTARI, K. Z. GALIMOV, *Nelinejnaja teorija uprugich oboloček*, Tatknigizdat, Kazań, 1957.
2. Spravočnik *Pročnost', ustojčivost', kolebanija*, t. 3, „Mašinostroenie”, Moskwa 1968.
3. F. TWARDOSZ, *Rozważania nad nieliniową statecznością powłoki stożkowej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Mechanika VI, 43, 1963.
4. I. I. TRAPEZIN, *Eksperymentalnoje opredelenije wieličin kritičeskich davlenij dlja koničeskich oboloček*, Resčoty na pročnost' 6, Mašgiz, Moskwa 1960.

Резюме

ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО ВСЕСТОРОННИМ ГИДРАВЛИЧЕСКИМ ДАВЛЕНИЕМ

Работа содержит сравнение решений проблемы устойчивости пологой конической оболочки с применением упрощенного и неупрощенного уравнения равновесия.

Анализируется влияние размеров оболочки на стоимость критических давлений. Сравняются также теоретические результаты с взятыми с литературы экспериментальными результатами.

Streszczenie

ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI MAŁO WYNIOSŁEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ POD DZIAŁANIEM CIŚNIENIA

W pracy dokonano porównania rozwiązań zagadnienia stateczności powłoki stożkowej o małej wyniosłości przy zastosowaniu uproszczonego i nieuproszczonego równania równowagi. Przeanalizowano wpływ wymiarów i kształtu powłoki na wartość obciążeń krytycznych. Oceniono również przydatność otrzymanych wyników na podstawie danych doświadczalnych wziętych z literatury.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1983 roku

THE EQUATIONS OF THE SECOND ORDER LINEAR MODEL OF SURFACE GRIDS

PIOTR WIŚNIAKOWSKI

Politechnika Warszawska

1. Introduction

The paper deals with the method of finding the governing equations for a surface structure having a form of a dense and regular grid made of bars. The lateral deformation of elements of the system are taken into account. It is assumed that the material of the structure is elastic, homogeneous and isotropic. The problem of statics is analysed within the linear theory.

The numerical methods employed to solve the problems related to the considered systems were based on discret representation of the structure (see, among others [1, 2, 3]) and lead to a system of algebraic equations with a large number of unknowns. The dimensions of nodes, their deformability and the lateral deformability of structure's bars were not taken into account.

The application of a continuum model of a structure consists in an approximation of the multi-connected geometry of the system by a certain simply-connected and continuous model (see, among others [4, 5, 6]). The advantage of the discussed approach over the previous one lies in the fact that the analytical methods can be employed. The negative aspects are: a) considerable inaccuracy of results for not sufficiently dense grids, b) the required geometrical symmetry of the structure. An interesting idea of a continuum model of such structures based on the concept of a continuum with internal microstructure and higher order internal reactions is presented in [6]. In the present paper Cz. Woźniak's model will be applied to obtain equations of the second order theory. An energetic approach, different from the previously considered one, which will be employed makes it possible to describe in the explicit form all properties of the continuum model. As a special case (in which the higher order effects are neglected) equations of the first approximation will be obtained.

2. Basic assumptions

It is assumed that the structure consist of (homogeneously) deformable cubicoid nodes connected by means of the prismatic links of rectangular cross-sections (and subject to homogeneous deformation in their plane) and constitute the regular and orthogonal

surface grid made of bars (Fig. 1). The lengths of the elements of structure are small as compared with the lengths of the surface and its curvature radii.

A system of x^1, x^2 coordinates on the π surface on which the structure is shaped and a z coordinate in the direction normal to surface π were chosen in such a way that x^1, x^2, z axes represent a right-hand system of coordinates. It was assumed that the geometric centers of the nodes lie at intersections of parametric lines $x^1 = \text{const}, x^2 = \text{const}, z = 0$ and that the axes of the links coincide with directions of these parametric lines. A typical segment of such a structure is shown in Fig. 1.

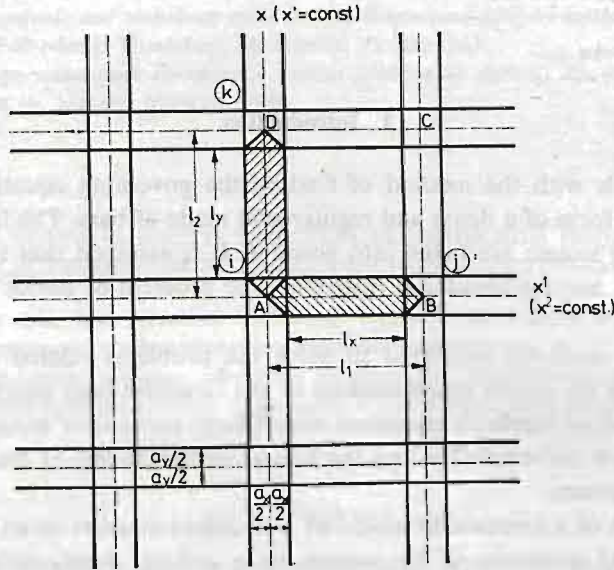


Fig. 1

We shall introduce twelve continuous, sufficiently smooth functions defined on the surface π of the structure. These functions represent translations, rotations, deformations along the coordinate axes and the shape deformations. The forementioned functions constitute unknown quantities of the model and have a physical sense only at the node centres. In every net mesh they can be treated as linear nature.

3. The analysis of the structure components

Node. When a structure is loaded a typical node is subjected to a homogeneous deformation having 12 degrees of freedom. Let (u_x, u_y, u_z) be the displacements, $(\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)$ — the components of an independent vector of rotation, $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ and $(\omega_{xy}, \omega_{xz}, \omega_{yz})$ — the linear and deviatoric components of a homogeneous deformation, respectively. Denoting by $\bar{w}_x, \bar{w}_y, \bar{w}_z$ displacements within the node area in directions x, y, z , respectively

the following formula hold

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{w}_x(x, y, z) &= u_x + \omega_x x + (\omega_{xy} - \vartheta_z) y + (\vartheta_y + \omega_{xz}) z, \\ \bar{w}_y(x, y, z) &= u_y + (\vartheta_z + \omega_{xy}) x + \omega_y y + (\omega_{yz} - \vartheta_x) z, \\ \bar{w}_z(x, y, z) &= u_z + (\omega_{xz} - \vartheta_y) x + (\vartheta_x + \omega_{yz}) y + \omega_z z. \end{aligned}$$

After applying the principle of ideal constraints we can arrive at 12 equations describing the node equilibrium with 6 generalized internal forces and 12 generalized external forces. From the equations of the linear theory of elasticity the general constitutive relations can be obtained together with a formula for the strain energy of a node.

Link. Let us take into account a typical element connecting the i -th and the j -th nodes situated on the $x^2 = \text{const}$ parametric line (see Fig. 1). Let w_x, w_y, w_z represent displacements of the link area in directions of a local coordinates x, y, z (see Fig. 2). It is assumed that the lateral cross-sections of a link are subjected to homogeneous deformations in their planes as well as to the rigid displacements (9 degrees of freedom). Hence:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} w_x(x, y, z) &= v_x(x) - y\varphi_z(x) + z\varphi_y(x), \\ w_y(x, y, z) &= v_y(x) + y\gamma_y(x) + z \left[\frac{1}{2} \gamma_{yz}(x) - \varphi_x(x) \right], \\ w_z(x, y, z) &= v_z(x) + y \left[\frac{1}{2} \gamma_{yz}(x) + \varphi_x(x) \right] + z\gamma_z(x), \end{aligned}$$

where v_x, v_y, v_z are dislocations, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ — rotations, $\gamma_y, \gamma_z, \gamma_{yz}$ — deformations of the cross-section of an element along the x coordinate.

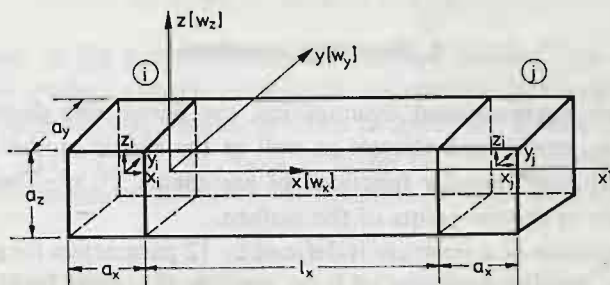


Fig. 2

The state of link area displacements is described by 9 functions of the variable x being the Lagrange's generalized displacements. The assumption (3.2) can be called the hypothesis of a flat, homogeneously deformable cross-section with independent rotations. This is a generalization of the well-known hypothesis of Bernoulli and Timoshenko for the classical model of a bar.

The constraints for stresses are assumed in the form

$$(3.3) \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0.$$

This assumption simplifies considerably the formulae given below. After applying the principle of ideal constraints of the static and kinematic types we shall obtain 9 equations

describing the equilibrium of the link with 10 generalized internal forces and 9 generalized external forces. Taking into account the known equations of the linear elasticity, the generalized constitutive equations and the formulae defining the strain energy of a link can be found.

Node-link-node system. A system consisting of the i -th node, the j -th node and the $(i-j)$ -th link connecting these two nodes is presented below (see Fig. 2).

From the equilibrium and constitutive equations describing the link, the differential equations for the generalized displacements can be obtained. The kinematic boundary conditions result from the assumption that the displacements of the appropriate boundaries of the i -th and j -th nodes have to be compatible with the displacements of the suitable boundaries of the link situated between them. In this way we obtain, functions $v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \gamma_y, \gamma_z, \gamma_{yz}$, which are expressed as the functions of the i -th node and the Δ operator defined as follows:

$$(3.4) \quad \Delta(\) = (\)^j - (\)^i.$$

These functions can be understood as certain shape functions of the bar treated as a three-dimensional body. The total elastic energy of the $(i-j)$ -th link is a function of parameters attributed to the i -th node and the Δ operator defined above.

The analogous procedure can be applied to link situated on the $x^1 = \text{const.}$ parametric line and connecting the i -th and the k -th nodes. Instead of the Δ operator we deal now with the $\tilde{\Delta}$ operator defined as follows:

$$(3.5) \quad \tilde{\Delta}(\) = (\)^k - (\)^i$$

4. Governing equations

According to the forementioned assumptions, the parameters describing the displacement, deformation, strains and stresses as well as the elastic moduli are described by the continuous, sufficiently regular functions of arguments x^1, x^2 . These functions have a physical sense only in certain points of the surface.

The displacement state of a structure is defined by 12 parameters for each node. A continuous, sufficiently regular extension of these discrete functions leads to the relations:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_1(x^1, x^2) &= u_x, & u_2(x^1, x^2) &= u_y, & u(x^1, x^2) &= u_z, \\ \vartheta_1(x^1, x^2) &= \vartheta_x, & \vartheta_2(x^1, x^2) &= \vartheta_y, & \vartheta(x^1, x^2) &= \vartheta_z, \\ \omega_{11}(x^1, x^2) &= \omega_x, & \omega_{22}(x^1, x^2) &= \omega_y, & \omega(x^1, x^2) &= \omega_z, \\ \omega_{12}(x^1, x^2) &= \omega_{21}(x^1, x^2) = \omega_{xy}, & \omega_1(x^1, x^2) &= \omega_{xz}, & \omega_2(x^1, x^2) &= \omega_{yz}. \end{aligned}$$

The strain energy of a typical structure segment (i.e. the energy of the $(i-j)$ -th and the $(i-k)$ -th links, $\frac{1}{2}$ energy of the i -th node, $\frac{1}{4}$ of energy of the j -th node, $\frac{1}{4}$ of energy of the k -th node) is related to ABCD surface segment with $l_1 \cdot l_2$ dimensions (see Fig. 1). This energy is a function of parameters assigned to the i -th node and involve Δ and $\tilde{\Delta}$ operators.

Assuming that:

$$(4.2) \quad \frac{1}{l_1} \Delta(\) = \frac{\partial}{\partial x^1} = (\)_{,1}, \quad \frac{1}{l_2} \tilde{\Delta}(\) = \frac{\partial}{\partial x^2} = (\)_{,2}$$

and that the density of elastic energy σ^0 is equal to the density of energy $\sigma^{(i)}$ in the i -th node, the basic relation of the continuum model of the considered structure in its explicit form was found:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sigma^0 = & \frac{1}{2} C^{KLMN} \varkappa_{KL} \varkappa_{MN} + \frac{1}{2} A^{KL} \gamma_K \gamma_L + G^{KLM} \varkappa_{KL} \gamma_M + F^{KLMN} \varkappa_{KL} \tau_{MN} + \\ & + D^{KL} \gamma_K \omega_L + H^{KLM} \varkappa_{KL} \omega_M + R^{KLM} \gamma_K \tau_{LM} + \frac{1}{2} G^{KLMN} \tau_{KL} \tau_{MN} + \frac{1}{2} G^{KL} \tau_K \tau_L + \\ & + \frac{1}{2} F^{KL} \omega_K \omega_L + \frac{1}{2} A \omega^2 + C^{KLM} \omega_K \tau_{LM} + A^K \tau_K \omega + \frac{1}{2} A^{KLMN} \gamma_{KL} \gamma_{MN} + \\ & + \frac{1}{2} C^{KL} \varkappa_K \varkappa_L + E^{KLM} \varkappa_K \gamma_{LM} + B^{KLMN} \gamma_{KL} \omega_{MN} + D^{KLMN} \varkappa_K \tau_{LMN} + \\ & + F^{KLM} \varkappa_K \omega_{LM} + A^{KLMNP} \gamma_{KL} \tau_{MNP} + \frac{1}{2} E^{KLMN} \omega_{KL} \omega_{MN} + 'E^{KLMN} \omega_{KL} \omega_{MN} + \\ & + \frac{1}{2} A^{KLMPRS} \tau_{KLM} \tau_{PRS} + 'A^{KLMPRS} \tau_{KLM} \tau_{PRS} + C^{KLMPR} \omega_{KL} \tau_{MPR} + \\ & + H^{KL} \omega_{KL} \omega + D^{KLM} \omega_{KL} \tau_M + B^{KLM} \tau_{KLM} \omega + H^{KLMN} \tau_{KLM} \tau_N. \end{aligned}$$

$K, L, M, N, P, R, S = 1, 2.$

The density of work of the external forces can be also defined. The relation (4.3) was originally expressed in the Cartesian coordinate system and then generalized to a curvilinear orthogonal system of coordinates in terms of which the surface system is described. The parameters: $\gamma_{KL}, \gamma_K, \varkappa_{KL}, \varkappa_K, \tau_{KLM} = \tau_{KML}, \tau_{KL}, \tau_K, \omega_{KL} = \omega_{LK}, \omega_K, \omega$ constitute generalized components of the state of deformation, with the geometric relations taking the form

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \gamma_{KL} &= u_L|_K - b_{LK} u + e_{LK} \vartheta, & \gamma_K &= u|_K + b_K^L u_L + e_{KL} \vartheta^L, \\ \varkappa_{KL} &= \vartheta_L|_K - b_{LK} \vartheta, & \varkappa_K &= \vartheta|_K + b_K^L \vartheta_L, \\ \tau_{KLM} &= \omega_{LM}|_K - b_{MK} \omega_L - b_{LK} \omega_M, \\ \tau_{KL} &= \omega_L|_K + b_K^N \omega_{NL} - b_{LK} \omega, & \tau_K &= \omega|_K + 2b_K^N \omega_N, \end{aligned}$$

where $b_{KL}, e_{KL}, (\)|_K$ represent the components of the second metric tensor of the surface, Ricci's bivector, and the symbol of covariant differentiation on the surface, respectively. The functions $A^{KLMPRS}, \dots, C^{KLM}, \dots, A^K, A$ stand for the tensor of elastic moduli of the structure and describe its geometric and physical properties.

The components of the stress state of the structure are given by the formulae

$$(4.5) \quad p^{KL} = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \gamma_{KL}}, \quad p^K = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \gamma_K}, \quad m^{KL} = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \varkappa_{KL}}, \quad m^K = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \varkappa_K},$$

$$(4.5) \text{ [cont.]} \quad s^{KLM} = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \tau_{KLM}}, \quad s^{KL} = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \tau_{KL}}, \quad s^K = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \tau_K},$$

$$r^{KL} = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \omega_{KL}}, \quad r^K = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \omega_K}, \quad r = \frac{\partial \sigma^0}{\partial \omega}.$$

We see that 12 from 30 introduced above components of the stress state is of the force type $(p^{KL}, p^K, r^{KL}, r^K, r)$, and the remaining 18 is of the couple type $(m^{KL}, m^K, s^{KLM}, s^{KL}, s^K)$.

With the aid of the principle of virtual work the equilibrium equations and the boundary conditions for the continuum model of the structure can be obtained in the form

$$(4.6) \quad p^{KL}|_K - b_K^L p^K + q^L = 0, \quad p^K|_K + b_{LK} p^{KL} + q = 0,$$

$$m^{KL}|_K - b_K^L m^K + e_K^L p^K + h^L = 0, \quad m^K|_K + e_{KL} p^{KL} + b_{LK} m^{KL} + h = 0,$$

$$s^{KLM}|_K - \frac{1}{2} (b_K^L s^{KM} + b_K^M s^{KL}) - r^{LM} + f^{LM} = 0,$$

$$s^{KL}|_K + 2b_{MK} s^{KLM} - 2b_K^L s^K - r^L + f^L = 0, \quad s^K|_K + b_{LK} s^{KL} - r + f = 0.$$

$$p^{KL} n_K - p^L = 0 \quad \text{or} \quad u_L = \overset{*}{u}_L; \quad p^K n_K - p = 0 \quad \text{or} \quad u = \overset{*}{u},$$

$$m^{KL} n_K - m^L = 0 \quad \text{or} \quad \vartheta_L = \overset{*}{\vartheta}_L; \quad m^K n_K - m = 0 \quad \text{or} \quad \vartheta = \overset{*}{\vartheta},$$

$$(4.7) \quad s^{KLM} n_K - s^{LM} = 0 \quad \text{or} \quad \omega_{LM} = \overset{*}{\omega}_{LM}; \quad s^{KL} n_K - s^L = 0 \quad \text{or} \quad \omega_L = \overset{*}{\omega}_L,$$

$$s^K n_K - s = 0 \quad \text{or} \quad \omega = \overset{*}{\omega}$$

where n_K represents the components of a unit normal vector to the boundary $\partial\Omega$ of the structure, $q^K, q, h^K, h, j^{KL}, f^K, f$ — are the densities of the surface-type external stress; $\overset{*}{p}^K, \overset{*}{p}, \overset{*}{m}^K, \overset{*}{m}, \overset{*}{s}^{KL}, \overset{*}{s}^K, \overset{*}{s}$ — are the densities of boundary stresses, $\overset{*}{u}^L, \overset{*}{u}, \overset{*}{\vartheta}^L, \overset{*}{\vartheta}, \overset{*}{\omega}_{LM}, \overset{*}{\omega}_L, \overset{*}{\omega}$ are the given values of generalized displacements within the $\partial\Omega$.

The equilibrium equations (4.6) and the boundary conditions (4.7) together with the constitutive (4.5) and geometric (4.4) relations form the basic system of equations describing the continuous model of the structure. This system enables us to calculate the displacement distribution in the link and node areas as well as the stress distribution.

It must be stressed that parameters $\gamma_K, \kappa_{KL}, \tau_{KL,K}, \omega_L$, [see (4.4)] define the components of the plate-like deformation state, while $\gamma_{KL}, \omega_{KL}, \kappa_K, \tau_{KLM}$ — the components of the plane-like deformation state. The components $\gamma_{KL}, \omega_{kl}, \kappa_K, \tau_{KLM}, \tau_k, \omega$ are defined exactly as in the 1st order model (see [6]), however the parameters which do not appear in that model, i.e. $\tau_{KLM}, \tau_{KL}, \tau_K, \omega_{KL}, \omega_K, \omega$ result from the deformability of a node and the deformability of link's lateral cross-sections.

The analysis of the influence of the second order parameters on the internal forces together with the suitable numerical calculation will be the subject of separate papers.

References

1. W. NOWACKI, *Problems related to the theory of flat grids*, Arch. Mech. Stos., 1, 6, 1954. (in Polish)
2. W. GUTKOWSKI, *Grid surface structures*, Mech. Teor. i Stos., 3, 3, 1965. (in Polish)
3. H. FRĄCKIEWICZ, *Deformation of a discrete set of points*, Arch. Mech. Stos., 3, 18, 1966.
4. M. T. HUBER, *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten*, Zurich 1929.
5. C. WOŹNIAK, *Introduction to mechanics of fibrous media*, Arch. Mech. Stos., 5, 16, 1964.
6. C. WOŹNIAK, *Lattice-type surface structures*, PWN, Warsaw 1970. (in Polish).

Резюме

УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВТОРОГО РЯДА УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ РОСТВОРОК

В работе представлено линейные уравнения статики упругих поверхностных растворок имеющих плотную и регулярную сетку элементов, которых деформированные, прямоугольные узлы соединенные между собой при помощи призматических стержней имеющих прямоугольное сечение.

Принимая исходные данные: уравнения линейной теории упругости, а также подходящие кинематические гипотезы получено вариационным методом уравнения сплошного модели прогона.

Работа содержит обобщение теории Возняка, выходящие за пределы теории I-го ряда, позволяющие учитывать эффекты „высших рядов“ (размеры узлов, их деформирование, деформирование поперечного сечения стержней соединяющих узлы).

Streszczenie

RÓWNANIA LINIOWEJ TEORII DRUGIEGO RZĘDU SPRĘŻYSTYCH RUSZTÓW POWIERZCHNIOWYCH

W pracy wyprowadzono liniowe równania statyki sprężystych rusztów powierzchniowych o gęstej i regularnej siatce elementów, których odkształcalne, prostopadłościennie węzły połączone są za pomocą przyzmatycznych prętów o przekroju prostokątnym.

Przyjmując za punkt wyjścia równania liniowej teorii sprężystości oraz zakładając odpowiednie hipotezy kinematyczne otrzymano na drodze wariacyjnej równania ciągłego modelu dźwigara.

Praca zawiera uogólnienie teorii Woźniaka, wykraczające poza teorię I-go rzędu, zezwalające na uwzględnienie efektów „wyższych rzędów“ (wymiary węzłów, ich odkształcalność, odkształcalność przekrojów poprzecznych prętów łączących węzły).

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 marca 1983 roku

CHAPTER I

W. P. ... in the ... of the ...
 ...
 ...
 ...

...
 ...
 ...

...
 ...
 ...
 ...

CHAPTER II

...
 ...
 ...

...
 ...
 ...

...
 ...
 ...

...
 ...
 ...

ANALYSIS OF THE STRESS STATE IN THE CYLINDRICAL SHELLS OF THE CONCRETE TANKS PRESTRESSED BY EXTERNAL TENDONS

ANDRZEJ SERUGA

Kraków

1. Introduction

The state of stress in cylindrical shells of the prestressed concrete tanks depends mainly on:

- the constructional and technological realization of the tank wall,
- the method of joining the wall and the tank bottom,
- the adapted method of prestressing of the cylindrical shell.

The knowledge of the intensity degree of the effect of the above mentioned agents on the statical work of the shell is very important in the process of the tank construction design. An especially essential problem is the determination of the amount of prestressing tendons (wires) as well as the arrangement thereof along the tank wall height. In the practice, hitherto this task was being solved by means of the determination of the envelope curve of the circumferential forces exerted by the pressure of a liquid under assumption that a determined value of friction coefficient in the joint of wall and the tank bottom exists. The analysis of stress state within the cylindrical shell is then reduced only to checking the circumferential stresses within the concrete for a prestressed tank, which is loaded by the liquid pressure, assuming that the load distribution due to the prestressing is of the sectional uniform type.

Moreover the resistance of concrete against the stress cracks for the maximum vertical bending moment results from the thrust of liquid or ground. However, the state of stress produced by the total or partial prestressing of the tank wall is not analysed. Such a method of design causes the following restrictions:

- the distribution of loads arising from the prestressing force is in fact a discontinuous one, thus an overloading of the shell may occur during prestressing,
- the effect of the prestressing technology on the distribution of the internal forces within the shell is not taken into account. It should be emphasized in this connection that the maximum vertical bending moments must not indispensably be originated, after the prestressing of all circumferential tendons has been completed.

Many cracks in cylindrical shells of concrete tanks during prestressing were observed in the practice. Such phenomena make it necessary to carry out an exact analysis of the effect of prestressing on the distribution of internal forces within the tank wall.

During the recent 15 years in the Institute of Materials and Building Structures, Technical University of Cracow, very intensive investigation works have been carrying out to explain and determine the range of influence of the agents mentioned above on the behaviour of the tank wall during prestressing as well as during its exploitation. The results of the above works can be found in papers [1, 2, 3, 4] in which the necessity of carrying out the proper analysis of stress state in the cylindrical shell of the tank was proved, assuming the load resulting from the prestressing consists of circular — symmetrical concentrated forces.

In the present paper the estimation of one of the most used constructional realizations was made, based on an example of a tank with a capacity of 5000 cu m.

2. Experimental investigations

2.1. Description of the construction. The constructional realization of the tank was to some extent reduced because of the necessity to adapt an existing tank for drinking water.

The design thickness for the floor slab was 0.40 m. The tank wall, with a height of $H = 5.6$ m, the internal radius being $R_i = 17.5$ m and the thickness being $t = 0.18$ m, was made in monolithic system: the concrete works being executed in subsequent sections and the circumference was divided into 8 fields and 8 pilasters. The individual segments of the wall were poured with the concrete using the platform — and — the movable formwork during one day cycle. The top of the wall between the pilasters was made thicker to execute — during the next stage of work — a roof ring beam of reinforced concrete. The pilasters of the dimensions $5.6 \times 1.2 \times 0.38$ m each were symmetrically arranged on the tank wall circumference.

The connection of the bottom slab with the cylindrical shell was executed as a sliding joint, the friction coefficient being assumed in statical calculations to be $\mu = 0.3$. The tank wall was set on the bottom of the groove of foundation ring, the depth being 0.2 m, using the slide layer made of two layers of bitumen board with glue. The internal chase of foundation ring was filled with tallow cord and Abizol KF putty first to prestressing the tank wall.

The prestressing of the tank wall was executed using double-bay external tendons of Freyssinet type 18 Ø 5 mm, running on the rolling pad of 12 mm dia.

2.2. Characteristic of the building materials used

Concrete

During pouring the concrete in the tank wall formwork, the test specimens of 15×30 cm cylinder were sampled to determine the compressive strength as well as the modulus of elasticity of the concrete just in the moment of prestressing the tank wall. The mean compressive strength of concrete determined using 62 specimens is equal to 37.8 MPa, the standard deviation being $s = 6.16$ MPa, whereas coefficient of variation was equal to $v = 16.31\%$ which would mean, that a concrete of B 35 class was obtained. The modulus of elasticity in compression was determined using 31 specimens, the full cycle of load being assumed. The obtained values are listed below.

$$\bar{E}_{0.2} = 28080 \text{ MPa}; s = 2339 \text{ MPa}; \nu = 8.33\%$$

$$\bar{E}_{0.3} = 27400 \text{ MPa}; s = 2220 \text{ MPa}; \nu = 8.10\%$$

$$\bar{E}_{0.4} = 26630 \text{ MPa}; s = 2044 \text{ MPa}; \nu = 7.67\%$$

$$\bar{E}_{0.5} = 25760 \text{ MPa}; s = 2257 \text{ MPa}; \nu = 8.76\%$$

$$\bar{E}_{0.6} = 24500 \text{ MPa}; s = 2410 \text{ MPa}; \nu = 9.84\%$$

The results in question refer to a concrete made of a granite aggregate, whereas the first two segments of walls between the pilasters No 3 and No 4 as well as No 4 ÷ 5, respectively were accomplished by use of basalt aggregate. The mean compressive strength of the concrete determined in analogous manner, is equal to 55.1 MPa, which means, that the concrete is of B 45 class. The modulus of elasticity in compression is $E_c = 36000$ MPa.

Prestressing steel.

Basing on the executed laboratory investigations the following mechanical properties of steel with 5 mm dia. were determined:

- the characteristic strength of steel,
- the proof stress $R_{e0.2}$,
- the modulus of elasticity
- the elongation of steel at rupture,
- the number of contraflexures

The strength of steel was determined using 38 samples taken at random, by means of multipurpose testing machine of ZD-50 type, the measurement accuracy being 250 N. The obtained main value, the standard deviation as well as the coefficient of variation are respectively equal to:

$$\bar{R} = 1721.7 \text{ MPa}; s = 69.4 \text{ MPa}; \nu = 4.03\%$$

The strength characteristic of prestressing steel is

$$R_{vk} = \bar{R} - 1.64 \cdot s = 1607.9 \text{ MPa}$$

whereas the calculated strength is equal to

$$R_r = \frac{1}{1.25} \cdot R_{vk} = 1286.3 \text{ MPa}$$

The proof stress $R_{e0.2}$ determined using 10 samples is 1478.3 MPa.

The modulus of elasticity of the prestressing steel was determined on the level of loads equal to 0.4 ÷ 0.6 of the tensile breaking stress. The adapted level of load (14 ÷ 20) kN corresponds approximately to the value 0.5 R_{vk} , which is below the admissible stress after immediate and rheological losses. The obtained results are as follows:

$$\bar{E}_r = 202625 \text{ MPa}; s = 3069.5 \text{ MPa}; \nu = 1.51\%$$

Elongation at rupture $A_{100} = 5.7\%$

Alternate bend test $\bar{n} = 5.35$

2.3. Program and methodology of the investigations. To estimate the static work of the shell the following investigations were considered to be necessary:

- measurement of the radial displacements of the tank wall at the level of its connection with the foundation ring,
- measurement of the radial displacements of the tank wall along the vertical section.
- measurement of the tank circumference shortening, i.e. the diminishing of the circumference exerted by the elimination of distances between the pilasters and tank wall segments coming mutually to contact due to the prestressing,
- measurement of the strains of the tank wall concrete in circumferential and vertical directions.

2.3.1 Measurement of the radial displacements of the tank wall at the level of its connection with the foundation ring. The experimental investigations were carried out for the connection sealed with the tallow cord, 50×50 mm, tamped therein, which then was covered with the Abizol KF type putty. The measurements were carried out using 60 dial gauges, the range being 0.01 m and the measurement accuracy being 0.01 mm, stabilised in foundation ring at the height of 0.25 m. The arrangement of measuring points is shown in Fig. 1.

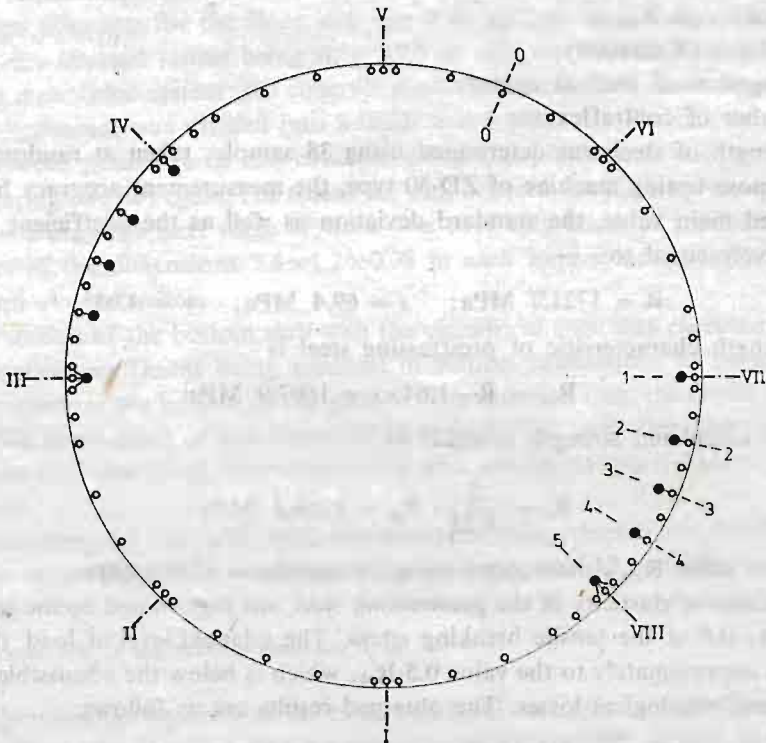


Fig. 1

2.3.2. Measurement of the radial displacements of tank wall along the vertical section. The values of the tank wall deflections were measured using dial gauges placed at the following heights: 0.25, 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0, 3.6, 4.2, 4.8, 5.2 and 5.6 m within ten sections, on two opposite fields of the tank. The arrangement of the measuring points was made possible owing to a steel

construction, made especially for this purpose, which could be connected with the floor slab in stable manner. The localization of the measuring positions is shown in Fig. 1.

2.3.3. Measurement of the tank circumference shortening. According to the adapted technology of tank wall execution there were 16 vertical work contacts. By use of the installed dial gauges the total values of radial displacements were measured. The author decided to measure additionally the tank circumference shortening and to reduce properly the displacement values. The shortening of the circumference was determined by means of DEMEC strain-gauge measurement base of which was 12 inch. The measuring points were placed at the following heights: 0.25, 0.65, 1.05, 1.45, 1.85, 2.25, 2.65, 3.05, 3.45, 3.85, 4.25, 4.65, 5.05, and 5.55 m.

2.3.4. Measurement of the strains of the tank wall concrete in circumferential and vertical directions. During the prestressing the concrete strains were determined by means of a standard DEMEC 8 inch strain-gauge. The measuring points were placed on the inside face of the tank wall in six vertical sections.

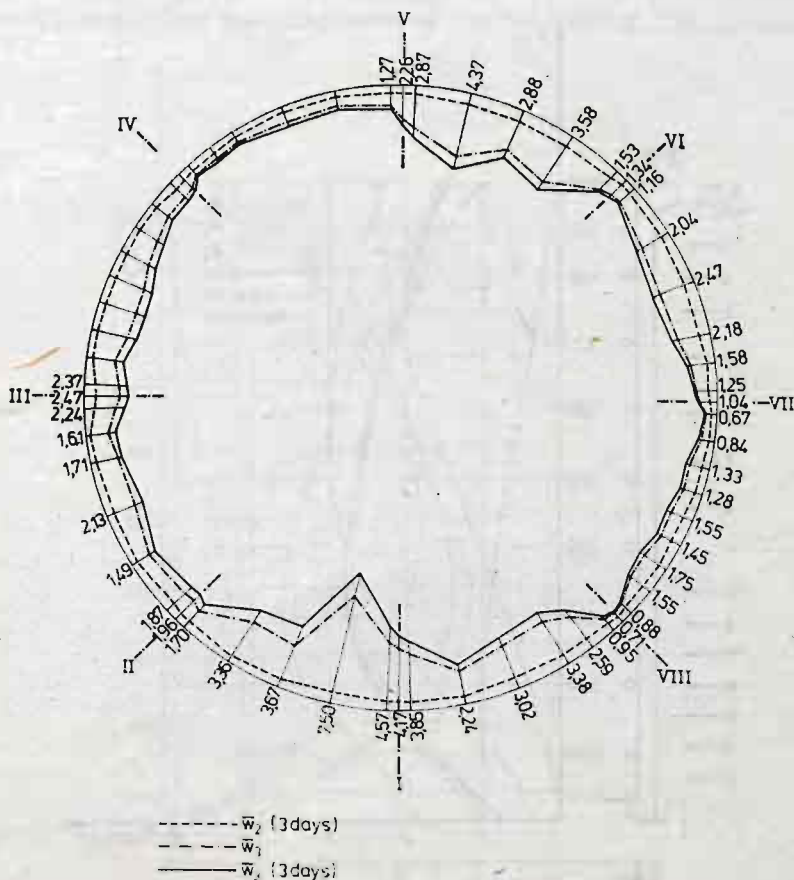


Fig. 2

The arrangement of the individual sections: 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 and 5-5, respectively is shown in Fig. 1. Additionally in the section 3-3 the measuring points on the outside face of the tank wall were placed between the prestressing tendons.

2.4. Results of the investigations. All readings of the displacements as well as of the concrete strains were carried out at the morning before the sunrise at a constant temperature: the prestressing of tank wall was executed during a fortnight.

2.4.1. The radial displacements of the tank wall at the level of 0.25 m. The prestressing of the tank wall was executed according to the sequence shown in Fig. 3, starting at the upper edge of shell. The measurements of the displacements were carried out as a rule in three stages, i.e. after 5, 10 and 15 tendon circumferences have been prestressed. The distribution of displacement values for the 2-nd and 3-rd stage is shown in Fig. 2. The displacements of the second stage, as well as the final ones of the third stage were read after a 3-days period of stabilization elapsed, whereas the initial displacements of the third stage were measured the next day after the prestressing completion. The mean values of displacements and the

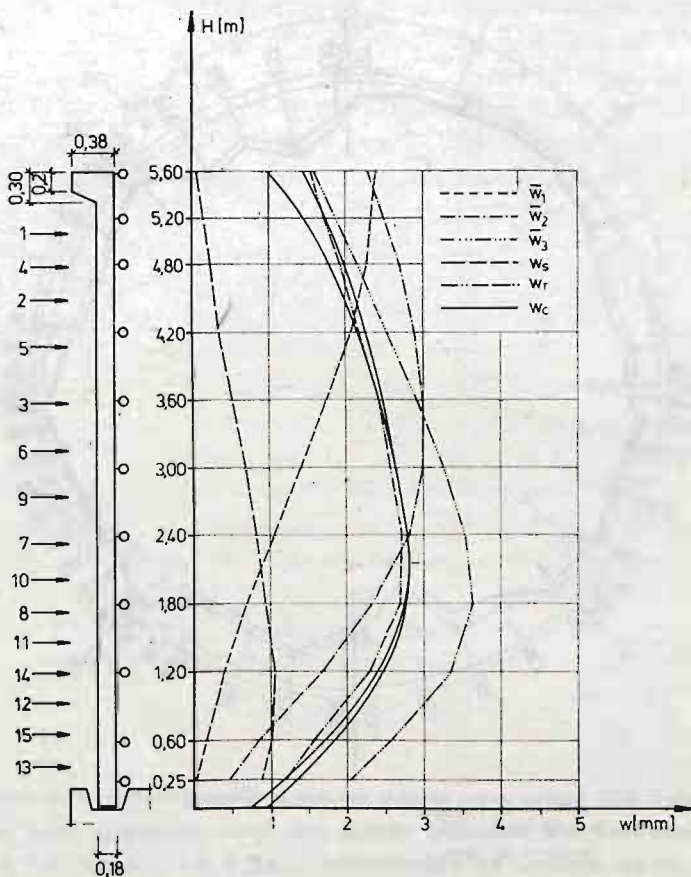


Fig. 3

distribution parameters corresponding with them are respectively:

$$\bar{w}_1 = 0.0467 \text{ mm}, s = 0.0632 \text{ mm}, \nu = 135.3\%$$

$$\bar{w}_2 = 0.4217 \text{ mm}, s = 0.1212 \text{ mm}, \nu = 28.75\% \text{ (3 days)}$$

$$\bar{w}_3 = 1.7333 \text{ mm}, s = 0.9809 \text{ mm}, \nu = 56.59\%$$

$$\bar{w}_3 = 2.0833 \text{ mm}, s = 1.1873 \text{ mm}, \nu = 56.99\% \text{ (3 days)}$$

2.4.2. The radial displacements of the tank wall along the vertical section. As the cracks were originated in the tank wall at the final stage of prestressing, e.g. on the circumference part between the pilasters No 7 and No 8, the measured displacement values were worked up in separate manner for opposite measurement positions. The obtained mean values of displacements for individual loading stages are listed in Table 1. Moreover, this table contains also the values of radial displacements corresponding with the measured shortening of the tank wall circumference as well as the reduced values of displacements for total prestressing of the cylindrical shell. The distribution of the mean values of displacements along the height of the tank wall is shown in Fig. 3 and Fig. 4 respectively.

2.4.3. Strains of the tank wall concrete. The measurements of concrete strains were carried out two times, i.e. firstly at the beginning of the prestressing and then after a three — days period of stabilization, since the completion of the prestressing. The obtained results

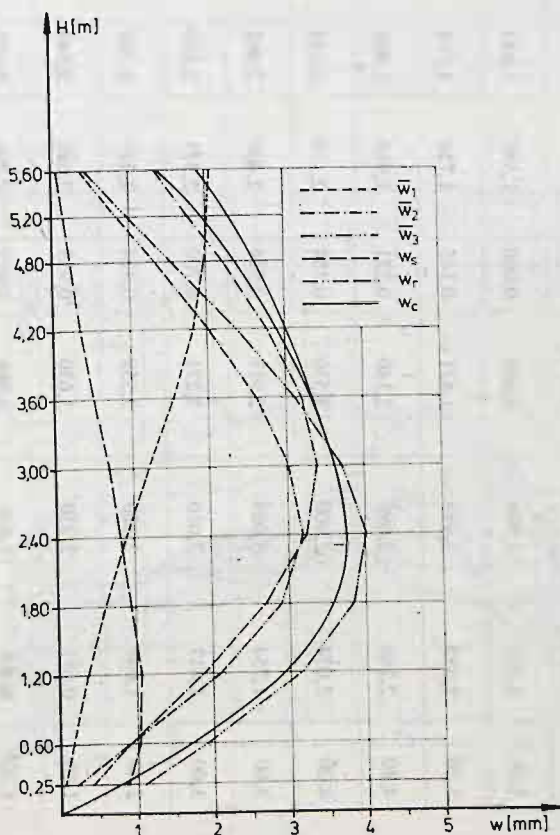


Fig. 4

Table 1. Radial displacements of the concrete tank wall w [mm]

Height of the tank wall H [m]	Concrete tank wall between pilasters No 3÷No 4					Concrete tank wall between pilasters No 7÷No 8					
	Number of tensioning tendons			$w_r = \bar{w}_3 - w_s$	w_c	Number of tensioning tendons			w_s	$w_r = \bar{w}_3 - w_s$	w_c
	\bar{w}_1 Stage I 5 × 4	\bar{w}_2 Stage II 10 × 4	\bar{w}_3 Stage III 15 × 4			\bar{w}_1 Stage I 5 × 4	\bar{w}_2 Stage II 10 × 4	\bar{w}_3 Stage III 15 × 4			
5,60	2,397	2,300	1,606	1,546	1,443	0,060	1,324	0,424	0,060	0,364	1,915
5,20	2,333	2,493	1,871	1,726	1,713	0,145	1,759	0,986	0,145	0,841	2,291
4,80	2,289	2,696	2,140	1,919	1,959	0,221	2,204	1,553	0,221	1,332	2,636
4,20	2,074	2,900	2,530	2,176	2,244	0,354	2,769	2,389	0,354	2,035	3,039
3,60	1,754	3,009	2,917	2,403	2,462	0,514	3,196	3,137	0,514	2,623	3,348
3,00	1,417	3,010	3,271	2,571	2,650	0,700	3,400	3,726	0,700	3,026	3,602
2,40	1,049	2,820	3,559	2,735	2,780	0,824	3,249	4,030	0,824	3,206	3,741
1,80	0,691	2,350	3,650	2,697	2,749	0,953	2,711	3,867	0,953	2,914	3,601
1,20	0,401	1,681	3,366	2,294	2,420	1,072	1,869	3,163	1,072	2,091	2,962
0,60	0,163	0,856	2,583	1,555	1,727	1,028	0,913	1,936	1,028	0,908	1,715
0,25	0,039	0,461	2,051	1,159	1,180	0,892	0,427	1,109	0,892	0,217	0,748
0,00					0,757						0,000

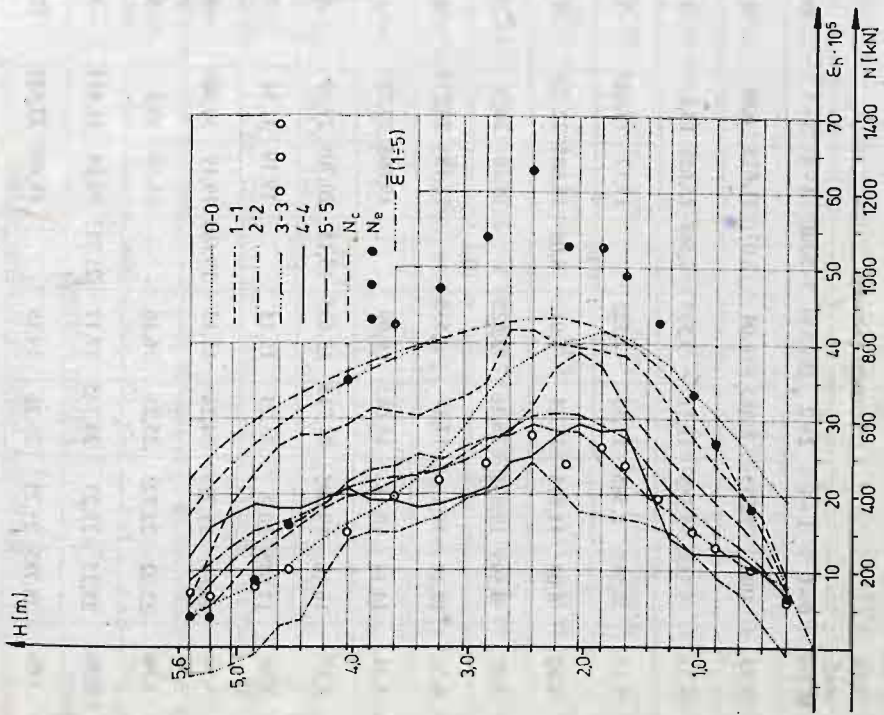


Fig. 5

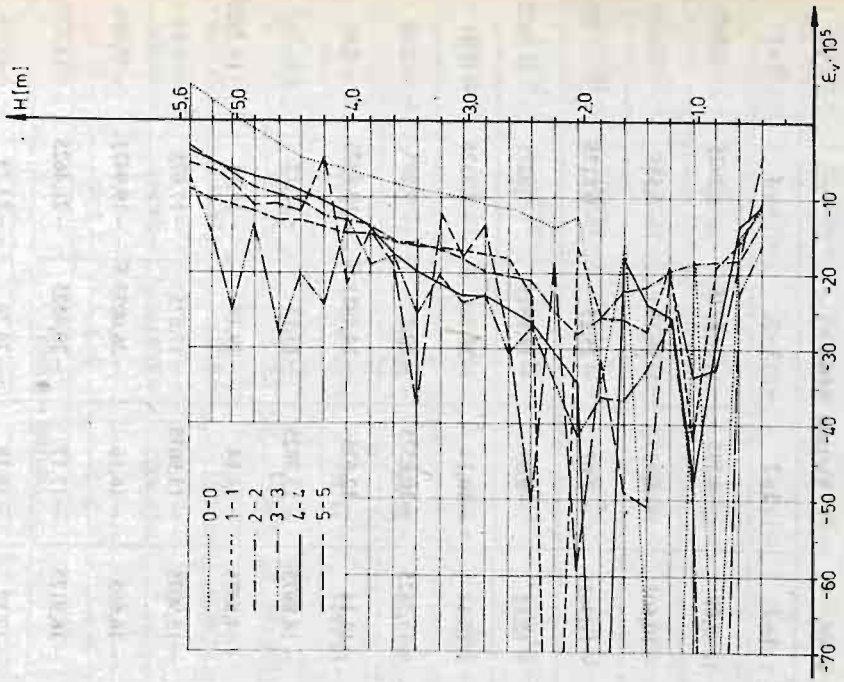


Fig. 6

Table 2. Strains of the concrete tank wall

Height of the tank wall H [m]	Horizontal strains of concrete $\epsilon_h \cdot 10^5$										Vertical strains of concrete $\epsilon_v \cdot 10^5$				
	Vertical sections										Vertical sections				
	0-0	1-1	2-2	3-3 in	3-3 out	4-4	5-5	0-0	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5		
5,53	4,04	3,535	8,585	7,07	11,615	6,06	4,2925	-9,09	-3,535	-7,8275	-4,2925	-5,8075			
5,33	5,555	5,555	11,11	6,565	15,655	13,13	3,535	-10,605	-5,555	-16,16	-5,555	-6,8175			
5,12	6,565	8,585	13,13	-2,525	17,17	18,685	0,505	-11,3625	-7,07	-25,25 c	-6,8175	-8,3325			
4,92	8,08	11,615	15,15	-1,01	18,685	22,725	-1,2625	-12,12	-9,09	-13,8875	-7,8275	-11,3625			
4,72	9,595	13,635	16,16	2,525	18,18	26,26	-3,2825	-13,13	-10,1	-28,785 c	-8,3325	-11,11			
4,51	12,12	16,16	17,17	3,535	18,18	27,775	-5,05	-13,3825	-10,8575	-20,2 c	-9,595	-12,12			
4,31	14,14	18,18	18,685	9,09	19,695	27,775	-5,8075	-14,14	-12,625	-24,4925 c	-10,8575	-5,05			
4,11	16,16	19,695	21,715	13,635	20,705	29,29	-6,8175	-14,8975	-13,3825	-13,13	-12,12	-21,715 c			
3,91	17,675	20,2	23,23	15,15	19,19	31,31	-7,575	-14,8975	-14,14	-19,19	-14,14	-14,3925			
3,70	19,695	21,715	24,24	15,15	19,695	30,805	-8,585	-15,9075	-15,9075	-17,675	-17,675	-19,19			
3,50	22,22	22,725	25,25	16,16	18,18	30,3	-9,3425	-16,665	-16,16	-26,0075 c	-19,9475	-37,875 c			
3,30	25,25	23,23	24,745	17,17	19,19	31,815	-9,8475	-16,9175	-17,17	-20,4525	-21,4625	-12,3725			
3,09	28,785	25,25	26,26	19,19	19,695	32,825	-10,3525	-17,17	-18,18	-24,24	-23,23	-18,18			
2,89	33,33	27,27	27,27	20,2	20,705	34,845	-11,3625	-17,675	-19,9475	-23,23	-23,23	-13,8875			

Height of the tank wall H [m]	Horizontal strains of concrete $\epsilon_x \cdot 10^5$										Vertical strains of concrete $\epsilon_y \cdot 10^5$																
	Vertical sections										Vertical sections																
	0-0	1-1	2-2	3-3 in	3-3out	4-4	5-5	0-0	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5	0-0	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5								
2.69	36,36	28,28	27,775	21,21		24,24	41,915	-11,8675	-18,18	-20,4525	-31,0575 c	-24,745	-28,785	38,38	31,815	29,29	24,24	27,775	25,25	41,915	-12,8775	-23,4825	-21,21	-27,27	-26,5125	-51,2575 c	
2.48	39,895	36,865	28,28	21,21		27,775	39,895	-14,14	-109,585 c	-25,25 c	-34,845	-30,805	40,4	38,885	28,28	21,21	24,24	27,775	25,25	41,915	-12,8775	-23,4825	-21,21	-27,27	-26,5125	-51,2575 c	
2.28	40,4	38,885	28,28	17,675		29,29	39,39	-12,625	-16,4125	-28,785 c	-42,1675 c	-34,5925 c	1.87	41,41	36,865	25,755	17,17	26,26	28,28	38,885	-34,5925 c	-26,0075	-26,26	-22,4725	-36,865	-13,13	-48,985 c
2.08	41,41	36,865	25,755	17,17		26,26	28,28	-16,25	-26,26	-22,4725	-36,865	-13,13	1.67	40,905	31,31	22,725	16,665	23,735	28,785	38,38	-16,25	-26,26	-22,4725	-36,865	-13,13	-48,985 c	
1.87	40,905	31,31	22,725	16,665		28,785	38,38	-74,235 c	-28,0275	-21,9675	-33,0775	-24,24	1.47	38,885	27,775	19,695	16,16	19,695	21,21	35,35	-74,235 c	-28,0275	-21,9675	-33,0775	-24,24	-51,005 c	
1.67	38,885	27,775	19,695	16,16		21,21	35,35	-126,5025 c	-19,695	-19,695	-26,5125	-26,0075	1.26	36,865	24,24	17,675	15,15	14,14	31,31	14,14	-126,5025 c	-19,695	-19,695	-26,5125	-26,0075	-19,4425	
1.26	36,865	24,24	17,675	15,15		14,14	31,31	-18,4325	-42,42 c	-18,685	-47,7225 c	-48,2275 c	1.06	33,33	21,715	15,15	12,12	15,15	12,12	27,27	-18,4325	-42,42 c	-18,685	-47,7225 c	-48,2275 c	-34,0875 c	
1.06	33,33	21,715	15,15	12,12		12,12	27,27	-83,0725 c	-19,19	-18,9375	-137,6125 c	-28,785	0.86	30,3	18,685	13,13	9,09	13,13	12,12	23,735	-83,0725 c	-19,19	-18,9375	-137,6125 c	-28,785	-32,825 c	
0.86	30,3	18,685	13,13	9,09		12,12	23,735	-15,4025	-15,9075	-18,18	-22,4725	-13,635	0.65	26,765	16,16	11,11	7,07	10,1	20,2	20,2	-15,4025	-15,9075	-18,18	-22,4725	-13,635	-17,17	
0.65	26,765	16,16	11,11	7,07		10,1	20,2	-10,8575	-10,605	-13,13	-15,9075	-10,8575	0.45	22,725	12,625	9,595	3,03	10,1	17,17	17,17	-10,8575	-10,605	-13,13	-15,9075	-10,8575	-3,7875	
0.45	22,725	12,625	9,595	3,03		17,17	17,17						0.25	19,19	7,575	7,575	-1,01	6,06	7,07	9,595							
0.25	19,19	7,575	7,575	-1,01		6,06	7,07																				

C — cracking of the concrete tank wall

of concrete strains in circumferential and vertical direction are listed in Table 2, whereas the distribution of strains along the height of the tank wall are shown in Fig. 5 and Fig. 6, respectively. The concrete strains on the outside face of the tank wall according to the section 3-3 were measured only in circumferential direction, as there occurred difficulties resulting from the use of band — shaped prestressing tendons.

3. The comparative analysis of the obtained results and the final conclusions

To carry out the analysis of the results of investigations the statical — and — strength calculations were made loading the tank wall with single prestressing tendons according to the accepted sequence of tensioning. The calculation method presented in the paper [2] was used for this purpose.

The value of the prestressing force N_v was determined basing on the measured strain values of the prestressing steel. The electric resistance wires were glued on three wires selected at random in each of the 15 tendons placed along the height of the tank wall between the pilasters No 7 and No 8.

The obtained results were worked up using statistical methods and the mean value, the standard deviation and the coefficient of variation were determined. Assuming that the mean value of strains to be decisive the value of effective prestressing force was calculated, which was equal to:

$$\bar{N}_v = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{E}_v \cdot 18 \cdot F_v = 280.56 \text{ kN}$$

Taking into account many cracks in the tank wall occurring on the inside face except of two segments of wall which were made of concrete using the basalt aggregate (No 3 to No 5), the statical calculations were carried out for two different calculations scheme.

Scheme I

The tank wall made of concrete using basalt aggregate, slidingly jointed to foundation ring the friction coefficient being $\mu = 0.7$ and $\mu = 0.8$. The modulus of elasticity of concrete in bending was $E_b = 30000 \text{ MPa}$

Scheme II

The tank wall made of concrete using granite aggregate was jointed in hinge type manner to the foundation ring. The modulus of elasticity of the concrete in bending was $E_b = 22500 \text{ MPa}$.

For both calculations schemes the tank wall was considered to be a cylindrical shell of a constant thickness $t = 0.18 \text{ m}$ at the height of $H = 5.6 \text{ m}$ as well as to be cylindrical shell of thickness t at the height $H = 5.35 \text{ m}$ with the top stiffening ring of $0.25 \times 0.38 \text{ m}$.

The obtained values of the tank wall displacements for both calculation schemes are given in the Table 1 as well as they are shown properly in Fig. 3 and 4.

The measured values of concrete strains in the compression along the section between the pilaster No 7 and 8 are shown in Fig. 5. When comparing the mean values of concrete strains with the distribution of circumferential forces the conformity of the nature of both curves is stated.

Taking into account the modulus of elasticity of concrete in compression to be $E = 27000 \text{ MPa}$ as well as the mean values concrete strains along the vertical section 3-3

(inside and outside of the tank wall) the experimental distribution of circumferential forces were determined and are shown in Fig. 5. The occurring differences may be explained by:

- the presence of pilasters, which bring disturbances in the static work of cylindrical shell,
- the increased strains of concrete, exerted by partial damage of the concrete structure due to the cracks appearing at several levels.

Basing on the executed analysis the following final conclusions can be presented:

- A special care must be taken of the quality of execution of the joint of wall and tank foundation ring. The effect of pilasters, which introduce considerable disturbances in the static work of shell can be eliminated to appreciable extent, if the sliding layer is executed carefully. The Fig. 2 exemplifies the comparison of radial displacements of the pilasters No 1 and No 8.
- The used sealing materials must not be used second time when further similar constructional and technological realizations are executed. Their presence within the joint of wall and bottom generated considerable increase of boundary disturbances corresponding with the coefficient of friction, $\mu = 0.7 \div 0.8$
- Prestressing of walls of the cylindrical tanks should be commenced at the bottom edge of the shell. If not, the discontinuity stresses, generated at the subsequent tensioning of tendons, combined with the boundary disturbances may exert the cracking of the tank wall, in spite of considerable displacements of the wall (see vertical section 0-0).

References

1. H. NOWAK, *The Influence of Deformability of the Bottom Edge of Shell on the Internal Forces Distribution in Concrete Tanks Prestressed by Separate Tendons Using Sectional System*, Ph. D. Thesis, Technical University of Cracow, 1971.
2. J. MICHNO, *Reaction of Prestressing Cable at the Cylindrical Tank Wall*, *Inżynieria i Budownictwo*, No 5, pp. 180 - 183, 1977.
3. A. SERUGA, *An Experimental Evaluation of the Internal Forces Distribution in Cylindrical Shells of Prestressed Concrete Reservoirs*, Ph. D. Thesis, Technical University of Cracow, 1978.
4. A. SERUGA, *Prefabricated Prestressed Concrete Tanks*, *Inżynieria i Budownictwo*, No 8 - 9, pp. 185 - 188, 1982.

Резюме

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ БЕТОННЫХ РЕЗЕРВУАРОВ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ВНЕШНИМИ КАБЛЯМИ

В публикации представлена оценка конструктивно-технологического решения цилиндрического резервуара емкостью $v = 5000 \text{ м}^3$, под действием нагрузки от предварительного напряжения внешними кабелями $18 \text{ } \varnothing 5 \text{ мм}$.

Сравнительный анализ экспериментальных и аналитических результатов дает основу для выводов относительно статической работы оболочек, а также технологии напряжения конструкции.

Streszczenie

ANALIZA STANU NAPRĘŻENIA W POWŁOKACH WALCOWYCH BETONOWYCH ZBIORNIKÓW SPRĘŻONYCH PASMOWYMI CIĘGNIAMI ZEWNĘTRZNYMI

W pracy przeprowadzono ocenę rozwiązania konstrukcyjno-technologicznego zbiornika cylindrycznego o pojemności $V = 5000 \text{ m}^3$, sprężonego pasmowymi cięgnami zewnętrznymi typu 18 \emptyset 5 mm.

W oparciu o dokonaną analizę porównawczą wyników otrzymanych z badań doświadczalnych z wartościami obliczonymi, wysunięto wnioski końcowe dotyczące dalszego stosowania podobnych rozwiązań a także technologii sprężania konstrukcji.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 marca 1983 roku

EQUATIONS OF THE SPHERICAL SHELL WITH AXIALLY SYMMETRIC, STOCHASTIC IMPERFECTIONS

GRAŻYNA BRYC

Politechnika Warszawska

1. Introduction

Realization of the shell construction often yields some deformations and since the changes in the geometry of the middle surface are unpredictable, it is convenient to consider the problem from the probabilistic point of view. There have been in the literature up to now a few approaches to the description of the stochastic shell. C. BRANICKI and M. SKOWRONEK [1] analyzed stochastically nonlinear static of a shallow spherical shell, which middle surface was a random function of a rather simple form. E. FILIPOW, J. WEKZER and P. WILDE [2] proposed a stochastic model for the dislocations of the surface of a cylindrical container based on the discretization of the problem. Random fields theory applicable to thin elastic shells was discussed in the expository paper of E. BIELEWICZ and P. WILDE [3].

The subject of this note is a statical analysis of the spherical shell loaded uniformly by its weight taking into consideration geometrical nonlinearity and axially symmetric random displacement. It is proposed to describe stochastic displacement by auxiliary six dimensional two parameter random field and the corresponding Meissner-type equations are derived.

2. Description of the random shell

Let the undeformed middle surface of the shell be given by the equations in the vector form

$$r = \vec{r}(\Theta, \varphi, \omega) = \vec{r}_0(\Theta, \varphi) + \vec{r}_s(\Theta, \varphi, \omega), \quad (1)$$

where \vec{r}_0 describes the points of the middle surface of the deterministic shell designed and \vec{r}_s is the stochastic initial deformation.

In order to describe the stochastically displaced shell by the equations close to the deterministic case, we rewrite equations (1) in the following equivalent form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Theta} &= \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \Theta} + \hat{t}_2(\Theta, \varphi, \omega), \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} &= \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} + \hat{t}_1(\Theta, \varphi, \omega), \end{aligned} \quad (2)$$

with the boundary condition

$$\begin{aligned}\bar{r}(\Theta_0, \varphi, \omega) &= \bar{r}_0(\Theta_0, \varphi), \\ \bar{r}(\Theta, 0, \omega) &= \bar{r}(\Theta, 2\pi, \omega).\end{aligned}\quad (3)$$

Here \hat{t}_1, \hat{t}_2 is a 6-dimensional 2-parameter random field satisfying the consistency condition

$$\frac{\partial \hat{t}_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial \hat{t}_1}{\partial \Theta}.\quad (4)$$

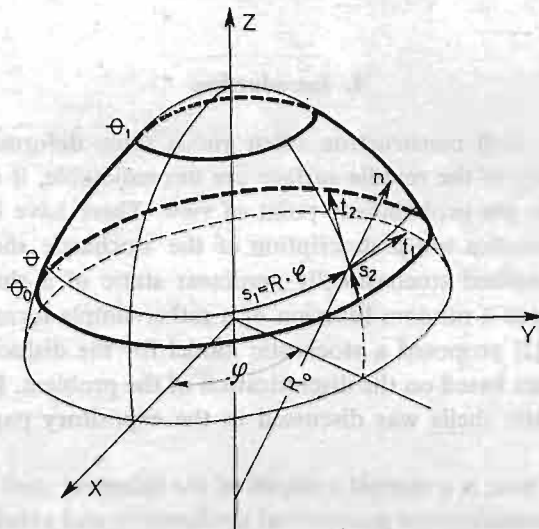


Fig. 1

In other words we assume that stochastic displacement is described by tangent vectors which are supposed to be a sum of deterministic tangent vectors and random vectors \hat{t}_1, \hat{t}_2 , the second ones will be taken small later. Note, that above description making use of random field \hat{t}_1, \hat{t}_2 can be translated into tensor language and that our assumption is slightly different from the on the first sight natural representation of the first metric form of the middle surface of the stochastic shell as a sum of a purely deterministic and stochastic part. Although for smaller random field \hat{t}_1, \hat{t}_2 both mentioned above approaches become closer, we found our approach as given by equations (2) more consistent with the intuition and therefore we will not deal in the sequel with the equations in the tensor form. Moreover we will restrict ourselves to axially symmetric random fields \hat{t}_1, \hat{t}_2 and we will look for the equations of the stochastically displaced spherical shell as given on fig. 1 loaded uniformly by its weight.

Further we assume that \hat{t}_2 is a vector tangent to the meridian of the middle surface

$$\hat{t}_2(\Theta, \varphi, \omega) = [-B_\Theta(\omega)\sin\Theta\cos\varphi, -B_\Theta(\omega)\sin\Theta\sin\varphi, B_\Theta(\omega)\cos\Theta]$$

where $B_\theta(\omega)$ is a scalar 1-parameter random field. In this case \hat{r}_1 is uniquely determined by (4) and the axial symmetry

$$\hat{r}_1(\theta, \varphi, \omega) = \left[\sin \varphi \int_{\theta_0}^{\theta} B_\theta \sin \Theta d\Theta, -\cos \varphi \int_{\theta_0}^{\theta} B_\theta \sin \Theta d\Theta, 0 \right]$$

Since we are in the axially symmetric case, we can use the well known Meissner-type equations in the form taking into account geometric nonlinearity, (c.f. [4]). Regarding an additional assumption, that \hat{r}_1 and \hat{r}_2 are small when compared with the radius of the shell (i.e. $B_\theta \ll R_0$) we get the following system of nonlinear second order differential equations

$$\begin{aligned} (D_+ + L)\psi + R_1 \psi \vartheta + N \psi \vartheta' + P_1 \vartheta + Q \vartheta' &= F_1(\theta, \omega) \\ D_- \vartheta + R_2 \vartheta \psi + P_2 \psi &= F_2(\theta, \omega) \end{aligned} \tag{5}$$

where D_\pm are the second order deterministic differential operators of the form

$$D_\pm = \cos \theta \frac{d^2}{d\theta^2} - \sin \theta \frac{d}{d\theta} - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \pm \nu \cos \theta \right) \tag{6}$$

L is the random differential operator

$$L = (-S^\theta - 2\delta_\theta \cos \theta) \frac{d^2}{d\theta^2} + (\delta_\theta \sin \theta - \delta'_\theta \cos \theta) \frac{d}{d\theta} - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} S^\theta + \nu \delta_\theta \cos \theta \right) \tag{7}$$

R_i, P_i, N are some deterministic functions and F_i are random functions.

Also we denote by R_0 radius of the spherical shell and $\delta_\theta = \frac{B_\theta}{R_0}, \delta'_\theta = \frac{d}{d\theta} \delta_\theta$.

$S^\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \delta_\theta \sin \Theta d\Theta$, ν is the Poisson coefficient.

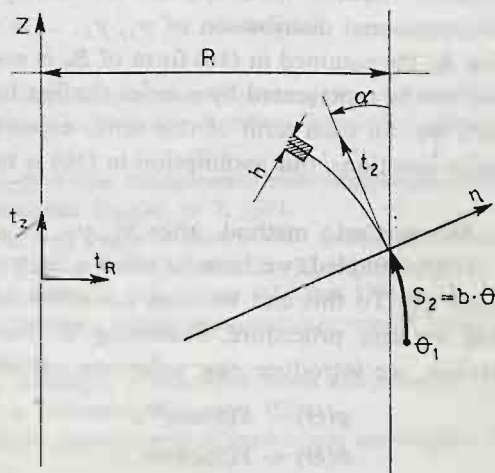


Fig. 2

Equations (5) contain the following unknown quantities, ϑ — is an increment of an angle α after deformation $\alpha^* = \alpha + \vartheta$ (fig. 2)

$$\psi = V \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^2}}, \quad V' = (1 + \delta_\theta) R_0 T_1 \quad (\text{fig. 3})$$

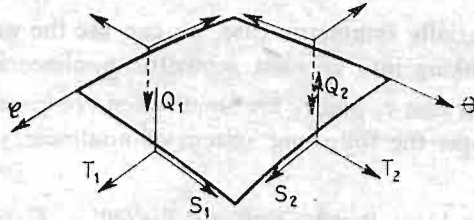


Fig. 3

3. Numerical solution

For the solution of the equations (5) we have to consider the boundary conditions e.g. we consider the shell with fixed lower boundary

$$\theta = \theta_0, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \vartheta = 0, \quad (8)$$

and with free upper boundary

$$\theta = \theta_1, \quad T_r = -T_1 \sin \alpha^* + Q_2 \cos \alpha^* \quad (\text{fig. 3}). \quad (9)$$

Determination of the mean value and the standard deviation of the random internal forces was achieved by Monte Carlo method. For this purpose we assumed that random function B_θ can be represented as a series

$$B_\theta = \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cos^n 2\theta \quad (10)$$

where γ_n are one dimensional random variables, not necessarily independent — in the dependent case the multidimensional distribution of $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ is needed. Note, that for Gaussian random function B_θ the assumed in (10) form of B_θ is not very much restrictive. Indeed, any Gaussian field can be represented by a series similar to (10) with independent random variables and then we can each term of this series expand into a Fourier series. Thus, up to the convergence questions, our assumption in (10) is that some of the Fourier coefficients are zero.

As it is usual in the Monte Carlo method, after $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ are sampled, i.e. finite approximation of B_θ in (10) is sampled, we have to solve a deterministic system of non-linear differential equations (5). To this end we used a combination of the power series method together with the iterative procedure. Following R. NAGÓRSKI [5] with slight changes to avoid singularities, we introduce new unknown variables X, Y defined by

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= X(x) \cos \theta, \\ \vartheta(\theta) &= Y(x) \cos \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

where $x = \cos 2\theta$.

After the change of variables in (5) we expand the right hand sides of the equations (5) in the power series with respect to x . Then we look for the coefficients in the power series expansion of X and Y by iterative procedure adopted from A. MAHMOUD [6]. The Mahmoud's approach lies on the transposition of the nonlinearities to the right hand sides of the equations (5) treating them as known. This applied to our problem gives the following separated recurrent equations with unknown X_n and Y_n

$$\begin{aligned}(4-4x^2)X_n'' + (6-10x)X_n' - (1-\nu)X_n &= G_-(x, X_{n-1}, Y_{n-1}), \\ (4-4x^2)Y_n'' + (6-10x)Y_n' - (1+\nu)Y_n &= G_+(x, X_{n-1}, Y_{n-1}).\end{aligned}\quad (12)$$

In (12) the right hand side functions G_{\pm} can be expanded in the power series of the convergence radius 1, thus the solutions of (12) are given by $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\pm} x^n$ (c.f. E. KAMKE [7]). Therefore we get the recurrent linear equations for unknown power series coefficients

$$\begin{aligned}a_{n+2}^{\pm} = -\frac{2n+3}{2n+4} a_{n+1}^{\pm} + \frac{4n^2 - (1 \pm \nu)}{4(n+1)(n+2)} a_n^{\pm} + \frac{2(n+1)(2n+1) - (1 \pm \nu)}{4(n+1)(n+2)} a_{n-1}^{\pm} + \\ + \frac{b_n^{\pm}}{4(n+1)(n+2)},\end{aligned}\quad (13)$$

where $G_{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{\pm} x^n$.

From (13) follows also, that the convergence radius of the series expansion of X_n and Y_n is equal 1.

Approximatively strict solutions of the system of nonlinear equations (5) are then determined by $X = \lim X_n$, $Y = \lim Y_n$ together with (11).

The author checked numerically the above procedure and it appeared, that iterative procedure with $X_0 = Y_0 = 0$ works nicely for small stochastic part (5 - 10 iterations are then sufficient).

References

1. C. BRANICKI, M. SKOWRONEK, *Losowe odchyłki geometrii w problemie statycznym malo-wyn ioslej powłoki sferycznej*, XXIV Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZiTB.
2. E. FILIPOW, J. WEKEZER, P. WILDE, *Stochastyczny model odchyłek powierzchni zbiorników cylindrycznych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, nr 7, 1973.
3. E. BIELEWICZ, P. WILDE, *Pola losowe w teorii powłok sprężystych*, Sympozjum na Temat Konstrukcje Powłokowe — Teoria i Zastosowania, Kraków 25 - 27. 04.1974.
4. E. L. AKSELRAD, *Gibkije obolocki*, Izd. Nauka, Moskwa 1976.
5. R. NAGÓRSKI, *Niektóre problemy statyki obrotowo-symetrycznych powłok siatkowych*, praca doktorska, W-wa 1977.
6. A. MAHMOUD, *Analiza wybranych równoległych metod hybrydowego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych*, praca doktorska, Warszawa 1981.
7. E. KAMKE, *Sprawocnik po obyknovennym differencjalnym uravnenyjam*, Izd. Nauka, Moskwa 1976.

Резюме

ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ СЛУЧАЙНОЕ СОСТОЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе представлены проблемы связанные со статикой тонкой сферической оболочки постоянной толщины, нагруженной собственным весом с учетом вращательно-симметричных случайных начальных перемещений вместе с геометрической нелинейностью.

Случайная часть проблемы решена методом симуляции. Численное решение возникнувшей детерминистической задачи проведено методом, который соединяет метод степенных рядов с итерационным методом.

Streszczenie

RÓWNANIA POWŁOKI KULISTEJ W PRZYPADKU OSIOWO SYMETRYCZNYCH
LOSOWYCH PRZEMIESZCZEŃ WSTĘPNYCH

W pracy zostały rozpatrzone zagadnienia statyki cienkiej powłoki kulistej o stałej grubości, obciążonej ciężarem własnym z uwzględnieniem obrotowo symetrycznych losowych przemieszczeń wstępnych oraz geometrycznej nieliniowości.

Stochastyczna część zagadnienia została rozwiązana metodą symulacji. Liczbowe rozwiązanie zagadnienia deterministycznego otrzymano metodą łączącą metodę szeregów potęgowych i iteracyjną.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1983 roku

ON A METHOD OF FORMULATION OF TWO-DIMENSIONAL THEORIES FOR ELASTIC SHELLS

WIESŁAW NAGÓRKO

Uniwersytet Warszawski

The purpose of the paper¹⁾ is to present a certain method of construction of such theories of shells, in which the two-dimensional solutions can be treated as the approximations (with a defined error) for three-dimensional displacements and stresses describing the state of equilibrium of an elastic body. The method is based on the assumption that the error of replacing the three-dimensional solution by a two-dimensional one should be the smallest in a certain domain of the tolerance solutions. In other words, the shell solution should minimize the error in this domain. We shall call this assumption the error minimization principle [1]. Two simplified two-dimensional approaches to elastic shells have been constructed on the basis of the assumption. Within these frames one is able to find tolerance solutions for displacements and stresses.

1. The error functional.

Consider the system

$$(1.1) \quad \mathcal{M} = \langle V^1, V^2, F, T, K \rangle,$$

where V^1 is a space of the vector functions

$$v^1: \Omega \rightarrow R^3, \quad \Omega \subset R^3,$$

including a displacements of the body, V^2 is a space of the symmetric tensor functions

$$v^2: \Omega \rightarrow R^{3 \times 3},$$

including stresses, F is a space of pairs (b, p) , where b is a body force and p is a surface traction

$$b: \Omega \rightarrow R^3, \quad p: \partial_1 \Omega \rightarrow R^3$$

and $\partial_1 \Omega \subset \partial \Omega$, whereas the operators $T: V^1 \rightarrow V^2$ and $K: V^2 \rightarrow F$ are taken in the form

$$(1.2) \quad T(v^1) = \frac{1}{2} C(\nabla v^1 + \nabla v^1 T), \quad K(v^2) = (\operatorname{div} v^2, v^2|_{\partial_1 \Omega n}),$$

¹⁾ This paper is an extended version of a lecture [1] delivered at the Third Conference „Shell structures — theory and applications”, Opole 1982.

and $C = (C_{ijkl})$ is the tensor of elastic moduli. The superposition KT will be referred to by M .

The system \mathcal{M} will be called *the equilibrium linear elasticity theory system* (or *structure*) [1] - [3].

Within the structure \mathcal{M} we are able to formulate the following problem:

Let $f_0 = (-b, p)$ be a known element in F ; find such $v^K \in V^K$, $K = 1, 2$, that

$$(1.3) \quad v^1|_{\partial_2\Omega} = u_0, \quad v^2 = T(v^1), \quad f_0 = K(v^2)$$

where u_0 is the given function, and $\partial_2\Omega$ is the subset, such that $\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega = \partial\Omega$, $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$.

The elements v_0^K , $K = 1, 2$, which satisfy the above conditions, will be called the solutions corresponding to f_0 . The solution v_0^1 is a solution in displacements and v_0^2 in stresses.

We introduce now the concept of an error functional.

For the sake of simplicity let W stands for V^1 or V^2 .

Let be known the functional

$$\delta: 2^{W \times W} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$$

such that

$$(1.4) \quad \begin{aligned} & \text{dom } \delta \neq \emptyset, \\ & (\forall \alpha \in \text{dom } \delta)(\forall w_1, w_2 \in W) [(w_1, w_2) \in \alpha \Rightarrow (w_2, w_1) \in \alpha, \\ & \quad (w_1, w_1) \in \alpha, \quad (w_2, w_2) \in \alpha], \\ & (\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \text{dom } \delta) [\alpha_1 \cup \alpha_2 \in \text{dom } \delta, \quad \alpha_1 \cap \alpha_2 \in \text{dom } \delta], \\ & \quad (\forall \alpha \in \text{dom } \delta) [\alpha = \text{id} \Rightarrow \delta(\alpha) = 0], \\ & \quad (\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \text{dom } \delta) [\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \delta(\alpha_1) \leq \delta(\alpha_2)]. \end{aligned}$$

The condition (1.4)₂ states, that each element in the domain of functional δ is a reflexive and symmetric relation whereas condition (1.4)₃ says that domain δ constitutes a lattice. Hence the elements of domain δ are tolerances [6] - [7].

In the special case when W is a set with a norm $\|\cdot\|$, functional δ can be defined as

$$(1.5) \quad \delta(\alpha) = \sup_{(w_1, w_2) \in \alpha} \|w_1 - w_2\|.$$

The set $\alpha \in \text{dom } \delta$ will be referred to as $A[w_1, w_2]$, so that $(w_1, w_2) \in \alpha$.

The number

$$(1.6) \quad \varepsilon(w_1, w_2) = \inf_{\alpha \in A[w_1, w_2]} \delta(\alpha),$$

is said to be the error of identification of the elements w_1 and w_2 . The relation (1.6) then determines the functional $\varepsilon: W \times W \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ which will be called the error functional. In particular we can assume that $\varepsilon(w_1, w_2) = \|w_1 - w_2\|$. However, the error does not have to be determined by norm. In mechanics there are many cases for which we are not interested in an error in the sense of the distance (as an example we can take the case in which only some components of the stress tensor have to be compared).

2. Error minimization principle

Let us assume that an elastic body constitutes a shell and that in system \mathcal{M} the reference configuration is of the form $\Omega = \pi \times (-h, h)$, $\varphi(\pi)$ being the midsurface of the shell and φ is the diffeomorphism of $\pi \times (-h, h)$ into the physical space. Apart from the system \mathcal{M} we consider two systems of the form

$$\mathcal{N}^K = \langle Y^K, G^K, N^K \rangle, \quad K = 1, 2,$$

which will be called *shell systems*. In these systems Y^K, G^K are the spaces of functions determined on π with the values in R^n , and N^K are operators $N^K: Y^K \rightarrow G^K$.

Moreover, let us assume that the structures \mathcal{N}^K are interrelated with system \mathcal{M} in such a way, that the spaces Y^K are the spaces of generalized coordinates for V^K , and G^K are the spaces of generalized forces for F . The operators

$$A^K: Y^K \rightarrow V^K, \quad B^K: F \rightarrow G^K,$$

have to be defined, (Fig. 1). The operators A^K determine the constraints in spaces V^K [5].

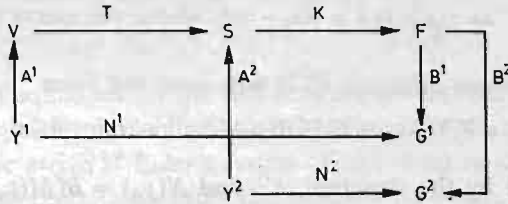


Fig. 1

In systems $\langle Y^K, G^K, N^K \rangle, K = 1, 2$ the problem of finding solutions can also be formulated:

Given $g_0^K \in G^K$, find $y^K, K = 1, 2$ such that

$$(2.1) \quad g_0^K = N^K(y^K).$$

Each y_0^K satisfying the above conditions will be called a solution corresponding to g_0^K .

If $g_0^K = B_0^K(f_0)$ and v_0^K are solutions (in displacements and stresses corresponding to f_0), then the solutions y_0^K and the constraints A^K determine in spaces V^K certain elements $v^K = A^K(y_0^K)$. The set of those elements will be denoted by $\tilde{V}^K = \{v^K; (\exists y_0^K, v_0^1) [v^K = A^K(y_0^K), N^K(y_0^K) = B^K(M(v_0^1))]\}$.

Let us define some non — empty sets of the solutions of problem (1.3) (sets of the exact solutions): $V_0^1 \subset \text{dom } M \subset V^1, V_0^2 \subset \text{dom } K \subset V^2$ and assume, that the structures \mathcal{N}^K together with operators $A^K, B^K, K = 1, 2$ satisfy the following conditions

$$(2.2) \quad (\forall v_0^K \in V_0^K) (\exists y_0^K \in Y^K) [N^K(y_0^K) = B^K(N(v_0^1)), \\ \varepsilon^K(A^K(y_0^K), v_0^K) = \min_{v^K \in \tilde{V}^K} \varepsilon^K(v^K, v_0^K), \quad K = 1, 2].$$

Condition (2.2) introduced for shell systems in the form of a postulate will be called *the error minimization principle*. This principle states that for the given structure \mathcal{M} and the given errors ε^K , the structures \mathcal{N}^K , together with the operators A^K, B^K should be such

that the solution y_0^K to problem (2.1) corresponding to generalized forces $B^K(M(v_0^1))$ has to minimize the error of identification of the elements $v^K \in \tilde{V}^K$ and the solutions v_0^K .

Each element $\tilde{v}^K, K = 1, 2$ belonging to the domains of operators K and T , respectively, and such that for known $a^K \geq 0, K = 1, 2$ we have

$$(2.3) \quad \varepsilon^K(\tilde{v}^K, A^K(y_0^K)) \leq a^K,$$

will be called a *tolerance solution* of problem (1.3). In particular $A^K(y_0^K)$ are tolerance solutions to this problem.

3. The error minimization principle in the displacement spaces

Let us define in space V^1 (in what follows we drop the index 1) the scalar product in the form

$$(3.1) \quad v_1 \cdot v_2 = \int_{\Omega} \nabla v_1^T C \nabla v_2 d\Omega + \sum_i v_1^i v_2^i$$

where $v_1^i = v_1(x^i), v_2^i = v_2(x^i), x^i \in \partial\Omega, i = 1, 2, \dots, n \geq 3$ and x^i are non-collinear. Let us take the error in V as $\varepsilon(v_1, v_0) = \|v_1 - v_0\|$ where the norm $\|\cdot\|$ is defined by the scalar product (3.1).

The error minimization principle (2.2) will have the form

$$(3.2) \quad (\forall v_0 \in V_0)(\exists y_0 \in Y) [\|A(y_0) - v_0\| = \min_{v \in V} \|v - v_0\|]$$

where \tilde{V} is determined by the structure \mathcal{N}^1 and $N(y_0) = B(M(v_0))$. Moreover $v^i = v_0^i, i = 1, 2, \dots, n$.

Let us denote by $V(\tilde{v}), \tilde{v} \in \tilde{V}$ the set of displacements admissible by the constraints. Now, condition (3.2) will be represented in the form

$$(3.3) \quad (\forall v_0 \in V_0)(\exists y_0 \in Y)(\forall v \in V(A(y_0)))[\partial_F \|A(y_0) - v_0\|^2(v) = 0]$$

Since

$$[\min_{v \in V} \|v - v_0\|]^2 = \min_{v \in V} \|v - v_0\|^2,$$

where ∂_F stands for the Frechet derivative.

Since $\|v + h\|^2 - \|v\|^2 = 2(v, h) + \|h\|^2$, then $[\partial_F \|\tilde{v}\|^2](v) = 2(\tilde{v}, v)$,

Using the last equation and (3.1) we have

$$\begin{aligned} (\tilde{v} - v_0, w) &= \int_{\Omega} (T(\tilde{v}) - T(v_0)) \nabla(w) d\Omega = \int_{\Omega} (T(\tilde{v}) \nabla(w) + \operatorname{div} T(v_0) w) d\Omega - \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} (T(v_0) n w) d\partial\Omega = \int_{\Omega} T(\tilde{v}) \nabla(w) d\Omega - \int_{\Omega} b w d\Omega - \int_{\partial\Omega} p n w d\partial\Omega. \end{aligned}$$

Substituting the right-hand side of the foregoing into (3.3) we have

$$(3.4) \quad (\forall v_0 \in V_0)(\exists y_0 \in Y)(\forall w \in V(A(y_0))) \left[\int_{\Omega} (T(A(y_0))) \nabla(w) d\Omega - \int_{\Omega} b w d\Omega - \int_{\partial\Omega} p n w d\partial\Omega = 0 \right]$$

where $p = T(v_0)|_{\partial\Omega}$.

The obtained relation represents the principle of virtual work. Thus the following conclusion can be drawn:

The principle of virtual work is a particular case of the error minimization principle (3.2), such that the norm defining the error (1.6) is defined by the scalar product (3.1).

Let us return to the shell structure \mathcal{N}^1 . Firstly we define space Y^1 as space of functions

$$q^\alpha: \pi \rightarrow R^3, \quad \alpha = 0, 1, \dots, l.$$

Space Y^1 is space of generalized coordinates and can be interpreted for instance as a space isomorphic to space V^1/\approx where \approx is an equivalence relation in V^1

$$v_1 \approx v_2 \Leftrightarrow v_1|_{\pi_\alpha} = v_2|_{\pi_\alpha}$$

and $\pi_\alpha \in \{\pi_\beta: \pi_\beta = \varphi(\pi \times \{y_\beta\}), -h = y_0 < y_1 < \dots < y_l = h\}$ whereas mapping φ is a diffeomorphism of the domain Ω into the physical space. In the case discussed above

$$q^\alpha(z^K) = v^1(z^K, y^\alpha), \quad v^1 \in V^1, \quad z^K \in \pi, \quad y^\alpha \in (-h, h).$$

Now we define the constraints i.e. operator A^1 . We consider the constraints representing certain given a priori kinematic hypotheses of the form

$$v^1(x) = \Phi(z^K, y, q^\alpha(z^K)), \quad x = (z^K, y).$$

The basic system of equations for the vector of the generalized coordinates is determined by the error minimization principle (3.4) (the principle of the virtual work). Applying the known procedure we arrive at Euler's system of equations in the form of equilibrium equations and constitutive equations. From this principle we obtain also the form of operator B^1 determining generalized forces f

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \operatorname{Div}^* H^\alpha + h^\alpha + f^\alpha &= 0, \\ H^\alpha &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla^* q^\alpha}, \quad h = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial q^\alpha}, \\ \varepsilon &= \int_{-h}^h \sigma(\nabla \Phi) dy, \end{aligned}$$

$$f^\alpha = \int_{-h}^h b \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha} dy + p \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha} \Big|_{y=-h} + p \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha} \Big|_{y=h},$$

where Div^* is the divergence in π and σ the strain energy function. Equations (3.5) should be fulfilled for each $z \in \pi$. On the other hand the geometric boundary conditions on $\partial\pi$ have to be satisfied

$$(3.6) \quad H^{\alpha*} \bar{n} = \int_{-h}^h p \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha} dy,$$

where \bar{n} is a unit normal vector to $\partial\pi$.

Functions q_0^α which satisfy (3.5), (3.6) are the solution to problem (2.1), whereas $\Phi(q_0^\alpha)$

are the tolerance solutions in V . Solution $\Phi(q_0^z)$ minimizes the error, which is defined by the scalar product (3.1).

Stresses $T(\Phi(q_0^z))$ which correspond to solution q_0^z in general do not minimize the error in V^2 . Thus we have to look for the tolerance solutions also in stresses. This problem will be the subject of the following Section.

4. Error minimization principle in the space of stresses

Notice that in the Hilbert space W for every $w_0 \in W$ two mutually orthogonal linear manifolds can be determined, such that for every $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ we have

$$(4.1) \quad (w_1 - w_0)(w_2 - w_0) = 0.$$

At the same time each element $w \in W$ can be represented in the form $w = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ where w_1, w_2 fulfill (4.1). Equality (4.1) is equivalent to the equality

$$(4.2) \quad \|w - w_0\| = \frac{1}{2} \|w_1 - w_2\|,$$

where $w = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$.

Now determine in the space of stresses V^2 (which is referred to as S) the scalar product in the form [4]:

$$(4.3) \quad s_1 \cdot s_2 = \int_{\Omega} s_1^T A s_2 d\Omega,$$

where $A = C^{-1}$ is the matrix of elastic moduli.

Let S_1 be a set of kinematically admissible stress, i.e.

$$(4.4) \quad s_1 \in S_1 \Leftrightarrow K(s_1) = (-b, p),$$

and S_2 be a set of statically admissible stresses

$$(4.5) \quad s_2 \in S_2 \Leftrightarrow (\exists v \in V_0) [s_2 = T(v)]$$

where V_0 is a set of displacements fulfilling the boundary conditions in displacements.

Using (4.3) it is easy to verify that:

$$(s_1 - s_0)(s_2 - s_0) = 0,$$

holds, where $s_2 = T(v), s_0 = T(v_0)$ is the exact solution in displacements of problem (1.3).

Error (1.6) will be assumed in the form

$$(4.6) \quad \varepsilon(s, s_0) = \frac{1}{2} \|s - s_0\|.$$

Nevertheless, according to (4.2) the error is also given by

$$\varepsilon(s, s_0) = \frac{1}{2} \|s_1 - s_2\|$$

where $s = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$ and s_0, s_1, s_2 satisfy condition (4.1).

The error minimization principle (2.2) in this case will have the form

$$\|\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2\| = \min_{\substack{s_1 \in \tilde{S}_1 \\ s_2 \in \tilde{S}_2}} \|s_1 - s_2\|$$

or, equivalently

$$(4.7) \quad \|\tilde{s}_1 - T(\tilde{v})\| = \min_{\substack{s_1 \in \tilde{S}_1 \\ v \in \tilde{V}}} \|s_1 - T(v)\|$$

where \tilde{S}_1, \tilde{S}_2 are determined by structure \mathcal{N}^2 in the terms of the subsets in S_1, S_2 and $\tilde{V} \subset V^1, \tilde{V} = \{v; T(v) \in \tilde{S}_2\}$, respectively.

Using (4.3), principle (4.7) can be written down in the form

$$(4.8) \quad \begin{aligned} V_p(\tilde{v}) &= \min_{v \in \tilde{V}} V_p(v), \\ V_k(\tilde{s}_1) &= \min_{s_1 \in \tilde{S}_1} V_k(s_1), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} V_p(v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} T(v)^T A T(v) d\Omega - \int_{\partial_1 \Omega} v p d\partial\Omega, \\ V_k(s_1) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} s_1^T A s_1 d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} s_1 n u_0 d\partial\Omega. \end{aligned}$$

Relations (4.8) describe the well known principles of the minimum of potential and complementary energy. Hence the conclusion:

The principle of minimum of potential and complementary energy (4.8) is the error minimization principle (2.2), in which the error is defined in form (4.3).

Now we proceed to structure \mathcal{N}^2 . Let us define operator B^2 as assigned to loading p (the body forces are to be neglected) the triplets of functions p^+, p^-, P where p^+, p^- are the loadings acting at the upper and lower surfaces of the shell, respectively, on the other hand $P: \partial_1 \pi \rightarrow R^3, \partial_1 \pi \subset \partial \pi$ is a mean loading

$$P = P(p|_{\partial_1 \pi \times (-h, h)}),$$

defined by

$$P = \int_{-h}^h p|_{\partial_1 \pi \times (-h, h)} dy.$$

Let the space Y^2 be a space of functions

$$m^\beta: \pi \rightarrow R^3, \quad \beta = 0, 1, \dots, t$$

and the constraints for statically admissible stresses will be defined by the operator $\Psi: Y^2 \rightarrow S$

$$(4.9) \quad s = \Psi(m^\beta).$$

Stresses (4.9) have to satisfy Eqs. (4.4), which characterize the interrelation between the forces $f \in F$ (it means that p^+, p^-, P) and the generalized coordinates m^β as well as

their gradients

$$(4.10) \quad \begin{aligned} d_\gamma(m^\beta, \nabla m^\beta; p^+, p^-) &= 0, \quad \gamma = 1, 2, \dots, r \\ b_\varrho(m^\beta, P) &= 0, \quad \varrho = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

where (4.9)₁ are defined in π and (4.9)₂ in $\partial_1\pi$

Substituting (4.9) into (4.8)₂ and assuming that the known displacements u_0 are defined on $\partial_2\Omega \subset \partial_2\pi \times (-h, h)$ we obtain

$$v_k(m^\beta) = \int_\pi \varepsilon(m^\beta) d\pi - \int_{\partial_2\pi} \omega(m^\beta) d\partial\pi,$$

where

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon(m^\beta) &= \int_{-h}^h \frac{1}{2} T(m^\beta) A \Psi(m^\beta) dy, \\ \omega(m^\beta) &= \int_{-h}^h \Psi(m^\beta) n u_0 dy. \end{aligned}$$

Functions (4.10), (4.11) are differentiable provided that the Lagrange multipliers theorem can be applied, the condition (4.8) will take the form

$$\delta v_k(m^\beta) + \int_\pi \lambda^\gamma \left(\frac{\partial d_v}{\partial m^\beta} m^\beta + \frac{\partial d_v}{\partial \nabla m^\beta} \nabla m^\beta \right) d\pi + \int_{\partial_1\pi} \mu^\varrho \frac{\partial b_\varrho}{\partial m^\beta} m^\beta d\partial\pi = 0$$

where δv_k is a variation of functional v_k and λ^γ , b_ϱ are Lagrange multipliers.

Applying appropriate calculations of the variational approach, we obtain

$$(4.12) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}^* \left(\lambda^\gamma \frac{\partial d_v}{\partial \nabla m^\beta} \right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m^\beta} + \lambda^\gamma \frac{\partial d_v}{\partial m^\beta} &= 0, \\ \lambda^\gamma \frac{\partial d_v}{\partial m^\beta} n + \mu^\varrho \frac{\partial b_\varrho}{\partial m^\beta} &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial m^\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Eqs. (4.12)₁ should be fulfilled almost every in π , whereas (4.12)₂ in $\partial_1\pi$ and (4.12)₃ in $\partial_2\pi$. Together with equations (4.10) they constitute the system of equations for the unknown functions. After solving the system of equations we find functions m_0^β which after substituting to (4.9) determine the admissible equilibrium stresses $\tilde{s}_1 = \Psi(m_0^\beta)$. In general this is not a solution that minimizes error (4.6). By virtue of the foregoing assumptions, the solution minimizing error (4.6) is $\tilde{s} = \frac{1}{2}(\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2)$ where \tilde{s}_2 should fulfill condition (4.7)₁. For such a solution of s_2 we can take the solution of system (3.5) transferred to the space S such that is $T(\Phi(q_0^\beta))$ it minimizes the potential energy in \tilde{V} . Thus the tolerance solution that minimizes the error (4.6) will be

$$(4.13) \quad \tilde{s} = \frac{1}{2} (\psi(m_0^\beta) + T(\Phi(q_0^\beta))).$$

Moreover, it should be noted that the error (4.6) can be effectively calculated without the knowledge of the exact solutions $v_0, s_0 = T(v_0)$ that is the solutions of the problem (1.3). According to (4.2)

$$\varepsilon(\tilde{s}, s_0) = \frac{1}{2} \|\Psi(m_0^\beta) - T(\Phi(q_0^\alpha))\|$$

and \tilde{s} are determined by (4.13).

5. Final remarks

In the paper a method of formulations of the basic system of equations for displacements and stresses which depend on certain functions defined on the midsurface of a shell have been discussed. The method is based on the error minimization principle resulting from replacing of an exact (three-dimensional) solution by a shell solution. In the case of displacements the principle is of the form of the principle of virtual work, and in the case of stresses has the form of the principle of minimum of potential and complementary energy. On the basis of these principles we have introduced the systems of equations for the two-dimensional generalized displacements and for the two-dimensional generalized stresses.

References

1. W. NAGÓRKO, *Zasada minimalizacji błędów a zagadnienia mechaniki powłok*, Zesz. Nauk. WSI Opole, nr 89 (1982), 159 - 163.
2. W. NAGÓRKO, *O błędzie rozwiązań przybliżonych w mechanice* Mech. Teoret. i Stos. 20 (1982).
3. W. NAGÓRKO, *On approximate structures in mechanics*, Arch. of Mech. 4, 35 (1983),
4. J. L. SYNGE, *The Hypercircle in Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1957.
5. Cz. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN, Warszawa, 1982,
6. Cz. WOŹNIAK, *Tolerance and fuzziness in problems of mechanics*, Arch. of Mech. 5-6 (1983)
7. E. C. ZEEMAN, *The Topology of the Brain and Visual Perception*, (in:) *Topology of 3- Manifolds, and Related Topics*, Englewood Cliffs, New York, 1962.

Резюме

О НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ КОНСТРУКЦИИ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Целью настоящей работы является представление некоторого метода конструкции таких теории оболочек, в которых трехмерные решения будут приближениями с определенной ошибкой для трехмерных перемещений и напряжений описывающих состояние равновесия упругого тела. Этот метод основан на предпосылке, что ошибка изменения трехмерного решения — двухмерным решением должна быть самой маленькой в некоторой области толеранционных решений.

Streszczenie

O PEWNEJ METODZIE KONSTRUKCJI TEORII POWŁOK SPRĘŻYSTYCH

Celem pracy jest przedstawienie pewnej metody konstrukcji takich teorii powłok, w których rozwiązania dwuwymiarowe będą przybliżeniami, z określonym błędem, dla trójwymiarowych przemieszczeń i naprężeń opisujących stan równowagi ciała sprężystego. Metoda ta oparta jest na założeniu, że błąd zastąpienia rozwiązania trójwymiarowego rozwiązaniem dwuwymiarowym powinien być najmniejszy w pewnej dziedzinie rozwiązań tolerancyjnych.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1983 roku

ON CERTAIN INEQUALITIES IN THE LINEAR SHELL PROBLEMS

ANDRZEJ GAŁKA

IPPT Warszawa

1. In the paper the weak formulations of the mixed boundary value problems of the linear elastostatics with constraints are presented. By constraints we mean here the known restrictions, imposed on the displacement and stress fields, represented by the closed convex sets in suitable linear spaces. It has been shown that the forementioned problems are equivalent to the saddle-point problems for the Reissner functional. Interrelations between different solutions to the problems under considerations are obtained. For the formulations of the shell boundary value problems, some special cases of constraints are proposed and detailed.

2. Now we are to state the three following problems:

- A — the mixed boundary value problem of the linear elasticity,
- B — the problem with constraints for deformations only,
- C — the problem with constraints for both deformation and stresses.

Let Ω be the open domain in R^3 with boundary $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Let $H^1(\Omega)$ be the Sobolev space of square integrable functions with square integrable first derivatives on Ω . Define

$$V = (H^1(\Omega))^3, \quad U = \{u \in V / u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0\}$$

$$W = \{\varepsilon / \varepsilon = (\varepsilon_{\alpha\beta}), \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3\},$$

Moreover, let U^* , W^* be the duals of U and W , respectively. Let us define the "deformation operator" $L: U \rightarrow W$ putting

$$(Lu)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (p_{,\alpha}^k, u_{k,\beta} + p_{,\beta}^k, u_{k,\alpha}),$$

where $p: \Omega \rightarrow R^3$ is the known smooth invertible mapping. Let the mapping $C: W \rightarrow W^*$ represents the strain-stress relation, being determined by the tensor of elastic moduli $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ satisfying the known assumptions

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \in L^\infty(\Omega), \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\delta\gamma} = C_{\gamma\delta\alpha\beta},$$

$$\exists c_0 > 0, \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} > c_0 \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \forall \varepsilon \in W.$$

The duality pairing on $W^* \times W$ and on $U^* \times U$ will be denoted by (\cdot, \cdot) and $\langle \cdot, \cdot \rangle$, respectively. The inner product on W^* is denoted by $[\cdot, \cdot]$. Let

$$(\sigma, \varepsilon) = \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dv,$$

$$[\sigma, \tau] = \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\delta} \tau_{\gamma\delta} dv$$

where $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ represent the operator which is inverse to C . The adjoint L^* of the operator L is defined via Gauss-Green's formula by

$$(\sigma, Lu) = \langle L^*\sigma, u \rangle = - \int_{\Omega} (p_{,\alpha}^k, \sigma_{\alpha\beta})_{,\beta} u_k dv + \int_{\Gamma_1} p_{,\alpha}^k \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} u_k ds.$$

The functional $F \in U^*$ is assumed to be given by body forces $f_k \in L^2(\Omega)$ and surface tractions $p_k \in L^2(\Gamma_1)$ and has the form

$$\langle F, u \rangle = \int_{\Omega} f_k u_k dv + \int_{\Gamma_1} p_k u_k ds.$$

The mixed boundary value problem of the linear elastostatics will be stated as follows:

Problem A. Find (u, σ) in $U \times W^*$ such that

$$(2.1) \quad \langle L^*\sigma - F, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in U,$$

$$(2.2) \quad [\sigma - CLu, \tau - \sigma] \geq 0, \quad \forall \tau \in W.$$

Variational inequalities in this problem are equivalent to the equations

$$(2.3) \quad L^*\sigma = F, \quad \sigma = CLu,$$

which constitute the stationary conditions for the Reissner functional

$$(2.4) \quad \mathcal{F}(v, \tau) = -\frac{1}{2} \|\tau\|^2 + \langle L^*\tau - F, v \rangle.$$

Let $K \subset U$ and $\Sigma \subset W^*$ be nonempty closed convex sets. Problem with constraints for deformations will be formulated as

Problem B. Find (u, σ) in $K \times W^*$ such that

$$(2.5) \quad \langle L^*\sigma - F, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K,$$

$$(2.6) \quad [\sigma - CLu, \tau - \sigma] \geq 0, \quad \forall \tau \in W^*.$$

Inequality (2.6) is equivalent to the equation

$$(2.7) \quad \sigma = CLu.$$

By problem with constraints for deformation and stresses we shall mean

Problem C. Find (u, σ) in $K \times \Sigma$ such that

$$(2.8) \quad \langle L^*\sigma - F, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K,$$

$$(2.9) \quad [\sigma - CLu, \tau - \sigma] \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma.$$

3. Now we are to observe that the problems A, B, C are equivalent to the suitable saddle points problems for the Reissner functional (2.4). It means that the pairs $(u_A, \sigma_A) \in U \times W^*$, $(u_B, \sigma_B) \in K \times W^*$, $(u_C, \sigma_C) \in K \times \Sigma$ are solutions of problems A, B, C , respectively if they are the saddle points of the Reissner functional defined on the sets

$U \times W^*$, $K \times W^*$, $K \times \Sigma$, respectively. It follows that the following inequalities have to hold

$$(3.1) \quad \mathcal{F}(u_A, \tau) \leq \mathcal{F}(u_A, \sigma_A) \leq \mathcal{F}(v, \sigma_A), \quad \forall (v, \tau) \in U \times W^*,$$

$$(3.2) \quad \mathcal{F}(u_B, \tau) \leq \mathcal{F}(u_B, \sigma_B) \leq \mathcal{F}(v, \sigma_B), \quad \forall (v, \tau) \in K \times W^*,$$

$$(3.3) \quad \mathcal{F}(u_C, \tau) \leq \mathcal{F}(u_C, \sigma_C) \leq \mathcal{F}(v, \sigma_C), \quad \forall (v, \tau) \in K \times \Sigma.$$

To observe this fact it can be easily seen that the left hand sides of (3.1), (3.2), (3.3) are derived from the constitutive relations (2.2), (2.6) and (2.9), while the right hand sides are obtained from equilibrium conditions (2.1), (2.5) (2.8), respectively. The sufficient condition follows directly from the definition of the Reissner functional (2.4).

Since

$$\mathcal{F}(v, CLv) - \mathcal{F}(v, \tau) = \frac{1}{2} \|\tau - CLv\|^2,$$

for $v \in U$ and $\tau \in W^*$, then $\mathcal{F}(v, CLv) \geq \mathcal{F}(v, \tau)$ for every $\tau \in W^*$ holds. Then from the right hand sides of (3.1), (3.2), (3.3) and after taking into account (2.3), (2.7) we conclude that

$$\mathcal{F}(u_A, \sigma_A) = \min_{v \in U} \mathcal{F}(v, CLv),$$

$$\mathcal{F}(u_B, \sigma_B) = \min_{v \in K} \mathcal{F}(v, CLv),$$

$$\mathcal{F}(u_C, \sigma_C) \leq \min_{v \in K} \mathcal{F}(v, CLv).$$

4. Some relations between solutions of problems A , B , C will be now derived. Let us denote by P_Σ the orthogonal projection from W^* on Σ . For any $\sigma \in W^*$, projection $P_\Sigma \sigma$ is the best approximation to σ in the closed set Σ given by

$$\|P_\Sigma \sigma - \sigma\| \leq \tau - \sigma\|, \quad \forall \tau \in \Sigma.$$

$P_\Sigma \sigma$ satisfies the variational inequality

$$[P_\Sigma \sigma - \sigma, \tau - P_\Sigma \sigma] \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma.$$

Therefore from (2.9) we have

$$(4.1) \quad \sigma_C = P_\Sigma CLu_C.$$

By virtue of the right hand side of (3.2) and taking into account (2.3) and (2.7) we conclude that

$$(4.2) \quad \sigma_B = P_{CLK} \sigma_A,$$

where CLK is the image of K under mapping CL . If $\sigma_A \in CLK$, then $\sigma_B = \sigma_A$. If $K \cap \text{Ker } CL \neq \emptyset$ then from inequalities (2.5) and (2.8) we have

$$(4.3) \quad \|\sigma_B\|^2 \leq \langle F, u_B \rangle = [\sigma_A, \sigma_B],$$

$$(4.4) \quad [\sigma_C, CLu_C] \leq \langle F, u_C \rangle = [\sigma_A, CLu_C].$$

By virtue of (4.3), $\|\sigma_B\| \leq \|\sigma_A\|$ holds.

From the inequality on the left hand side of (3.2) we obtain

$$\mathcal{F}(u_B, \sigma_A) \leq \mathcal{F}(u_B, \sigma_B),$$

hence

$$(4.5) \quad \|\sigma_A\|^2 \geq 2\langle F, u_B \rangle - \|\sigma_B\|^2.$$

Putting $v = u_C$ in (2.5) and $v = u_B$ in (2.8) and combining the obtained inequalities, we arrive at

$$\langle L^* \sigma_C - L^* \sigma_B, u_B - u_C \rangle \geq 0,$$

which can be transformed to the form

$$(4.6) \quad \left\| \sigma_B - \frac{1}{2} (\sigma_C + CLu_C) \right\| \leq \|\sigma_C - CLu_C\|.$$

The direct consequence of inequality (4.6) and equation (4.1) leads to the corollary: If $CLK \subset \Sigma$ then $\sigma_B = \sigma_C$.

5. Now we are to give the example of constraints for deformation and stresses leading to the boundary value shell problems. To this aid assume that: $\Omega = \Pi \times (-h, h)$, $\Gamma_1 = \partial_1 \Pi \times (-h, h) \cup \Pi \times \{-h\} \cup \Pi \times \{h\}$, $\Theta = (\Theta^1, \Theta^2) \in \Pi$, $\zeta \in (-h, h)$. Let us introduce linear spaces $\bar{V}, \bar{Y}, \dot{Y}$ by means of:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \{\bar{v}/\bar{v} = (\bar{v}^n), \quad \bar{v}^n \in H^1(\Pi), \quad \bar{v}^n = 0 \quad \text{on} \quad \partial_1 \Pi, \quad n = 1, \dots, N\}, \\ \bar{Y} &= \{\bar{\varepsilon}/\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_a), \quad \bar{\varepsilon}_a \in L^2(\Pi), \quad a = 1, \dots, A\}, \\ \dot{Y} &= \{\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon} = (\dot{\varepsilon}_i), \quad \dot{\varepsilon}_i \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, I\}. \end{aligned}$$

Let $\bar{V}^*, \bar{Y}^*, \dot{Y}^*$ stand for dual spaces of $\bar{V}, \bar{Y}, \dot{Y}$, respectively. The elements of \bar{Y}^* and \dot{Y}^* can be identified with the elements of \bar{Y} and \dot{Y} . Let us introduce the linear mapping $P: \bar{V} \rightarrow V$, putting

$$(5.1) \quad P(\bar{v}) = \gamma_n(X)\bar{v}^n,$$

where functions $\gamma_n: \Omega \rightarrow R^3, n = 1, \dots, N$, are known, $\gamma_n \in (L^\infty(\Omega))^3$. The adjoint P^* of P is defined by the relation

$$\langle P^*(F), \bar{v} \rangle = \langle F, P(\bar{v}) \rangle, \quad \forall \bar{v} \in \bar{V}.$$

Then for the functional $F \in V^*$ given by

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v dv + \int_{\Gamma_1} p v ds, \quad f \in (L^2(\Omega))^3, \quad p \in (L^2(\Gamma_1))^3,$$

we obtain

$$(5.2) \quad \langle P^*(F), \bar{v} \rangle = \int_{\Pi} \bar{f}_n \bar{v} ds + \int_{\partial_1 \Pi} \bar{p}_n \bar{v}^n dl,$$

where

$$\begin{aligned} \bar{f}_n &= \int_{-h}^h \gamma_n f d\zeta + [\gamma_n p]_{-h, h}, \\ \bar{p}_n &= \int_{-h}^h \gamma_n p d\zeta. \end{aligned}$$

Let \bar{K} be the closed, nonempty convex set in \bar{V} . If K in problem B is the image of \bar{K} under mapping P , $K = P(\bar{K})$, then problem B is to be reduced to the following shell problem:

Find $\bar{u} \in \bar{V}$ such that

$$(5.3) \quad \langle \bar{A}\bar{u} - \bar{F}, v - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \bar{K},$$

where

$$\bar{A} = P^*L^*CLP, \quad \bar{F} = P^*F.$$

Let the constraints for stresses be introduced by the mapping $Q^*: \bar{Y}^* \times \dot{Y}^* \rightarrow Y^*$

$$(5.4) \quad Q^*(\bar{\sigma}, \dot{\sigma}) = \mu\bar{\sigma} + \nu\dot{\sigma},$$

where $\mu: \bar{Y}^* \rightarrow Y^*$, $\nu: \dot{Y}^* \rightarrow Y^*$ are uniquely determined by the representations $\mu_a, \nu_i \in (L^\infty(\Omega))^6$.

The conjugate mapping $Q: Y \rightarrow \bar{Y} \times \dot{Y}$ is given by the relation

$$(Q(\varepsilon), (\bar{\sigma}, \dot{\sigma})) = (\varepsilon, Q^*(\bar{\sigma}, \dot{\sigma})), \quad \forall (\bar{\sigma}, \dot{\sigma}) \in \bar{Y}^* \times \dot{Y}^*;$$

hence

$$(Q(\varepsilon), (\bar{\sigma}, \dot{\sigma})) = (\mu^*\varepsilon, \bar{\sigma}) + (\nu^*\varepsilon, \dot{\sigma}).$$

Putting now $K = P(\bar{K})$ and $\Sigma = Q^*(\bar{\Sigma} \times \dot{Y}^*)$, where $\bar{\Sigma}$ is nonempty, closed, convex set in \bar{Y}^* , the problem C will be reduced to the following problem

Find $\bar{u} \in \bar{V}$ and $(\bar{\sigma}, \dot{\sigma}) \in \bar{\Sigma} \times \dot{Y}^*$ such that

$$(5.5) \quad \langle P^*L^*Q^*(\bar{\sigma}, \dot{\sigma}) - \bar{F}, v - \bar{u} \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \bar{K},$$

$$(5.6) \quad (QDQ^*(\bar{\sigma}, \dot{\sigma}) - QL\bar{P}\bar{u}, (\bar{\tau} - \bar{\sigma}, \dot{\tau} - \dot{\sigma})) \geq 0, \quad (\bar{\tau}, \dot{\tau}) \in \bar{\Sigma} \times \dot{Y}^*.$$

The inequality (5.6) yields

$$(5.7) \quad (\mu^*DQ^*(\bar{\sigma}, \dot{\sigma}) - \mu^*LP\bar{u}, \bar{\tau} - \bar{\sigma}) \geq 0 \quad \forall \bar{\tau} \in \bar{\Sigma},$$

$$(5.8) \quad \nu^*DQ^*(\bar{\sigma}, \dot{\sigma}) - \nu^*LP\bar{u} = 0.$$

By virtue of the definition of mapping Q^* , from Eq. (5.8) we see that

$$\nu^*D\nu\dot{\sigma} = \nu^*LP\bar{u} - \nu^*D\mu\dot{\sigma}$$

Hence, provided that $\det(\nu^*D\nu) \neq 0$ we obtain

$$(5.9) \quad \dot{\sigma} = \dot{C}\nu^*LP\bar{u} - \dot{C}\nu^*D\mu\dot{\sigma}$$

where $\dot{C} = (\nu^*D\nu)^{-1}$. Substituting the right hand side of Eq. (5.9) to (5.7) and taking into account (5.4) we arrive at

$$(5.10) \quad (\mu^*D(I - \nu\dot{C}\nu^*D)\mu\bar{\sigma} - \mu^*(I - D\nu\dot{C}\nu^*)LP\bar{u}, \bar{\tau} - \bar{\sigma}) \geq 0 \quad \forall \bar{\tau} \in \bar{\Sigma}.$$

Furthermore, substituting the right hand side of (5.9) to (5.5) we obtain

$$(5.11) \quad \langle P^*L^*(I - \nu\dot{C}\nu^*D)\mu\bar{\sigma} + P^*L^*\nu\dot{C}\nu^*LP\bar{u} - \bar{F}, v - \bar{u} \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \bar{K}.$$

The resulting inequalities (5.10) and (5.11) of the shell problem can be written down in the final form:

$$(5.12) \quad \langle \bar{L}^*\bar{\sigma} + \bar{R}\bar{u} - \bar{F}, v - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \bar{K},$$

$$(\bar{D}\bar{\sigma} - \bar{L}\bar{u}, \bar{\tau} - \bar{\sigma}) \geq 0 \quad \forall \bar{\tau} \in \bar{\Sigma},$$

where

$$\begin{aligned} L &= \mu^*(I - D\nu\dot{C}\nu^*)LP, \\ L^* &= P^*L^*(I - \nu\dot{C}\nu^*D)\mu, \\ R &= P^*L^*\nu\dot{C}\nu^*LP, \\ \bar{D} &= \mu^*D(I - \nu\dot{C}\nu^*D)\mu. \end{aligned}$$

Inequalities (5.12) were obtained by imposing the constraints for deformations and stresses, on the three-dimensional equilibrium problem of the linear elasticity. The constraints for deformations modify the equilibrium equations, while the constraints for stresses modify the constitutive relations. The constraints under consideration, (cf. [5], [1]), are different from those used in papers [2], [3], [4], which modify the constitutive relations only. From the abstract inequalities (5.12), by the specification of constraints, different boundary value shell problems can be obtained. The inequalities analogous to these given by Eqs. (5.12) can also be derived from a tolerance interpretation of the boundary-value problems of the classical elasticity. [6].

References

1. A. GAŁKA, *O formulowaniu dwuwymiarowych zagadnień brzegowych teorii sprężystości*, Mech. Teoret. Stos., 1, 19, (1981).
2. A. C. PIPKIN, *Constraints in linearly elastic materials*, J. Elasticity, 6, (1976).
3. R. ROSTAMIAN, *Internal constraints in boundary value problems of continuum mechanics*, Indiana Univ. J. Math. 27, (1978).
4. R. ROSTAMIAN, *Internal constraints in linear elasticity*, J. Elasticity, 1, (1981).
5. CZ. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN Warszawa 1982.
6. CZ. WOŹNIAK, *On the tolerance approach to free-boundary equilibrium problems for the linear-elastic structures*, Mech. Teoret. Stos.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В работе дана слабая формулировка смешанных граничных задач линейной теории упругости со связями. Доказано, что она равносильна задаче седловой точки для функционала Рейсснера. Выведено несколько соотношений между решениями сформулированных задач. Рассмотрено класс связи ведущих к проблемам теории оболочек.

Streszczenie

O PEWNYCH NIERÓWNOŚCIACH W LINIOWYCH ZAGADNIENIACH POWŁOK

W pracy podano słabe sformułowanie mieszanych zagadnień brzegowych w liniowej teorii sprężystości z więzami. Wykazano ich równoważność z zagadnieniem punktu siodłowego dla funkcjonału Reissnera. Wyprowadzono kilka relacji między rozwiązaniami sformułowanych zagadnień. Rozpatrzono klasę więzów prowadzącą do zagadnień teorii powłok.

ON THEORY OF LATTICE-REINFORCED SHELLS

KRZYSZTOF H. ŻMIJEWSKI

Politechnika Warszawska

1. Introduction

In the present paper a continuum approach for analysing elastic shells with lattice-type reinforcement is proposed.

The shell structures are widely used in engineering practice. In many cases (especially in the civil engineering) these structures require to be reinforced. Thus, from the theoretical point of view material of the shell ought to be treated as nonhomogeneous mixture of two components: reinforcement and matrix. Even if additional, simplifying assumptions of homogeneity and isotropy of both components are being utilised, the known composite and mixture theories lead to the complex mathematical models, which cannot be recommended for engineering practice (analysis). That is why in the majority of papers, authors do not apply the theories mentioned above and assume stronger simplifications: in most cases material of the shell is supposed to be homogeneous and anisotropic (or even isotropic); the crucial point is to determine effective moduli for the hypothetical material of the shell.

The purpose of this work is to generalize the energy functional for continuum shell by adding a term concerning elastic reinforcement energy and then deriving the equations of equilibrium as well as appropriate (in particular: natural) boundary conditions.

In the course of the paper, materials of both components are supposed to be linear-elastic, homogeneous and isotropic. Considerations are confined to the case of small strains and displacements. The state of strain of the reinforcement is described according to Woźniak's lattice-type shell theory [1]. The state of strain of the matrix is assumed according to generalised Reissner's hypothesis. Thus, both models belong to the six-parameter classes of surface structures theories and no additional constraints on the reinforcement are imposed.

Considerations concern the lattice reinforcement constructed of two or three families of intersecting bars, lying on a surface parallel to the middle surface of the shell. Compatibility conditions of matrix displacements and approximated displacements of lattice nodes are supposed to be satisfied.

2. Geometry of shell

The region of the shell is parametrised by two convected normal coordinate systems $\{x\}$ and $\{x^i\}$. At every point x_a^a of the fundamental surface π , $x^3 = 0$ a natural reference triplet (g_a) is fixed. Similarly, at all points x^i in the shell region marks (g_i) can be determined. Particularly, the surface $\tilde{\pi}$, $x^3 = \tilde{x}^3 = \text{const}$, which includes the axes of the reinforcement bars. The bases (\tilde{g}_i) refer to the point of this surface.

Base vectors q_i can be expressed by means of q_a vectors; the same can be stated about the reciprocal bases q^i and q^a . The mentioned relations have the forms

$$(2.1) \quad g_i = V_i^a g_a, \quad g^i = A_a^i g^a.$$

Eqs (2.1) yield from Weingarten formulae and make it possible to shift an arbitrary tensor object from the point x^u on $\tilde{\pi}$ along the normal to the point x^a on the reference fundamental surface.

The shifters V_i^a, A_a^i (cf. eg [2] [3]) are defined as follows

$$(2.2) \quad V_i^a = \delta_i^a + \delta_i^b g_b^a x^3, \quad V_i^a A_a^j = \delta_i^j, \quad V_i^b A_a^i = \delta_a^b,$$

hence

$$(2.3) \quad A_a^k = A \delta_b^k [(1 - 2Hx^3) \delta_a^b + x^3 g_a^b + (x^3)^2 \delta_a^3 \delta_b^3 K],$$

where

$$(2.4) \quad A = V^{-1}, \quad V = \det(V_a^k) = 1 - 2x^3 H + (x^3)^2 K,$$

and

$$(2.5) \quad g_b^a = -g_{3,b} g^a = g_3 g_a^b,$$

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(g_{\beta}^{\alpha}), \quad K = \det(g_{\beta}^{\alpha}).$$

It is easy to prove, that the relation

$$(2.6) \quad d\tilde{\pi} = V d\pi,$$

hold true.

3. Tensor fields and their derivatives

Values of any vector field v are elements of linear spaces. Thus they can be represented by their components either in the basis g_i or in the basis g_a as follows:

$$(3.1) \quad v = v_i g^i = v^i g_i = v_a g^a = v^a g_a.$$

From (2.1) it yields that different components of the same object are related by the formulae

$$(3.2) \quad v_i = V_i^a v_a, \quad v^i = A_a^i v^a.$$

Per analogiam one can obtain similar relation for any tensor of (p, q) valency. The appropriate formula takes the form

$$(3.3) \quad t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = A_{a_1}^{i_1} \dots A_{a_p}^{i_p} V_{j_1}^{b_1} \dots V_{j_q}^{b_q} t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}.$$

Applying spatial gradient operation to the tensor field t , and taking into account (2.1) one arrives at the following formulae for the components of tensor derivatives:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \hat{}_{|k} &= \delta_k^e A_{a_1}^{i_1} \dots A_{a_p}^{i_p} V_{j_1}^{b_1} \dots V_{j_p}^{b_p} t_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p} \\ t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \hat{}_{||k} &= \delta_k^e \delta_t^d A_{a_1}^{i_1} \dots A_{a_p}^{i_p} V_{j_1}^{b_1} \dots V_{j_p}^{b_p} \cdot (t_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p} \hat{}_{||cd} - \delta_n^e A_j^m V_{c||d} t_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p} \hat{}_{||e}), \end{aligned}$$

where

$$\hat{}_c^d = \delta_c^t V_i^d.$$

4. Displacements

The state of displacements in the shell region is assumed to be compatible with the generalised Reissner's kinematic hypothesis

$$(4.1) \quad u(x^*, x^3) = \hat{}_i u(x^*) + 'u(x^*) x^3$$

Additionally vector functions (cf. [1]) approximating displacements $\tilde{u} = \tilde{u}(x^*)$ and rotations $\tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}(x^*)$ of reinforcement lattice nodes are introduced. The meaning of \tilde{u}_k components is the same as in the continuum surface structure theory, whereas $\tilde{\vartheta}_x$ components describe the node rotations in the planes perpendicular to parametric lines $x^* = \text{const}$ and $\tilde{\vartheta}_3$ — its rotation in the plane tangent to π . The vector functions u and ϑ are supposed to be of C^1 — class of continuity. Obviously they can be interpreted as displacements only in the lattice nodes.

It is assumed, that interactions between the reinforcement and the material of the matrix (in which it is embedded) are caused by the ideal adherence; and therefore the compatibility displacement conditions are supposed to be valid. Moreover the latter relations are assumed to be weakened by substituting into them the approximated lattice displacements, instead of the real ones. Such procedure leads to the following formulae

$$(4.2) \quad \tilde{u} = u|_{x^3=\tilde{x}^3} \quad \text{and} \quad \tilde{\vartheta} = \vartheta|_{x^3=\tilde{x}^3},$$

where ϑ denotes an infinitesimal rotation vector. Hence

$$(4.3) \quad \vartheta = \frac{1}{2} r \hat{\otimes} t u = \frac{1}{2} \hat{e}^{klm} u_m \hat{\otimes} l g_k$$

where \hat{e}^{klm} — Ricci tensor on $\hat{\pi}$.

By virtue of (2.1) (3.3) (3.4) and (4.1) the components of lattice displacements can be referred to the basis on the fundamental, reference surface

$$(4.4) \quad \tilde{u}_k = \tilde{V}_k^a ({}^c u_a + 'u_a x^3) = \tilde{V}_k^a \tilde{u}_a,$$

$$(4.5) \quad \tilde{\vartheta}^k = \frac{1}{2} \delta_a^k \delta_c^i \epsilon^{abc} \tilde{V}_i^d \tilde{A} \tilde{u}_{d||b},$$

$$\tilde{\vartheta}_k = \frac{1}{2} g_{da} \delta_m^c \epsilon^{abc} \tilde{V}_k^d \tilde{A}_b^m \tilde{u}_{c||e}.$$

5. The state of strain

The state of strain of the lattice can be determined by means of the functions $e_{\kappa l}(x^\mu)$, $'e_{\kappa l}(x^\mu)$ as follows

$$(5.1) \quad \tilde{e}_{\kappa l} = \tilde{u}_{l|\kappa} + \tilde{\epsilon}_{l\kappa m} \tilde{\vartheta}^m, \quad 'e_{l\kappa} = \tilde{\vartheta}_{l|\kappa}.$$

By virtue of (4.2) and (4.3) we have

$$(5.2) \quad \tilde{e}_{\kappa l} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{l|\kappa} + \tilde{u}_{\kappa|l}), \quad 'e_{\kappa l} = \frac{1}{2} \epsilon_l^{mn} \tilde{u}_{n|m\kappa}.$$

Taking into account (3.4) and (2.1) and making some simple rearrangements the following formulae expressing the strains (5.2) can be obtained:

$$(5.3) \quad \tilde{e}_{\kappa l} = \frac{1}{2} \Phi_{\kappa l}^{ab} \tilde{u}_{a|b},$$

$$'e = \frac{1}{2} (\Psi_{\kappa l}^{abc} \tilde{u}_{a|bc} - \Theta_{\kappa l}^{ab} \tilde{u}_{a|b}),$$

with the denotations

$$(5.4) \quad \Phi_{\kappa l}^{ab} = \tilde{V}_\kappa^a \delta_l^b + \delta_\kappa^b \tilde{V}_l^a,$$

$$\Psi_{\kappa l}^{abc} = \delta_\kappa^c \epsilon_e^{da} V_l^e \tilde{A}_a^b,$$

$$\Theta_{\kappa l}^{ab} = \Psi_{\kappa l}^{ab\gamma} \Lambda_\gamma^b V_{d|\gamma}^e.$$

6. Potential energy of shell

The total potential energy of the shell is expressed by the formula

$$(6.1) \quad J = \int_{\tilde{\pi}} \tilde{\sigma} d\tilde{\pi} + \int_{\pi} (\sigma - q) d\pi - \int_{\partial\pi} \tau d(\partial\pi),$$

where σ and $\tilde{\sigma}$ denotes surface densities of the strain energy of the matrix and reinforcement, respectively; q and τ denotes densities of potential energy due to external surface and boundary loads.

Methods of determining the quantities σ , q , and τ can be found in papers devoted to so called six-parameter shell theories (cf. [4] [5])

In this paper attention is confined to the method of the derivation of the function

$$(6.2) \quad \tilde{J} = \int_{\tilde{\pi}} \tilde{\sigma} d\tilde{\pi} = \int_{\pi} \tilde{\sigma} \tilde{V} d\pi,$$

and — the stationary condition $dJ = 0$ of the variational theorem coupled with (6.1).

The density of reinforcement strain energy can be written in the form

$$(6.3) \quad \tilde{\sigma} = \frac{1}{2} (A^{\kappa l \mu \nu} \tilde{e}_{\kappa l} \tilde{e}_{\mu \nu} + C^{\kappa l \mu \nu} 'e_{\kappa l} 'e_{\mu \nu}).$$

Where, for the lattices under consideration

$$(6.4) \quad \begin{aligned} A^{xlmn} &= \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^x t_{(\Delta)}^m (t_{(\Delta)}^l t_{(\Delta)}^n R_{(\Delta)}^{(0)} + n_{(\Delta)}^l n_{(\Delta)}^n R_{(\Delta)}^{(1)} + \delta_3^l \delta_3^n R_{(\Delta)}^{(2)}), \\ C^{xlmn} &= \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^x t_{(\Delta)}^m (t_{(\Delta)}^l t_{(\Delta)}^n S_{(\Delta)}^{(0)} + n_{(\Delta)}^l n_{(\Delta)}^n S_{(\Delta)}^{(1)} + \delta_3^l \delta_3^n S_{(\Delta)}^{(2)}). \end{aligned}$$

The vectors $t_{(\Delta)}$ and $n_{(\Delta)}$ are referred to the plane $\tilde{\pi}$ and are tangent and normal to the axis of the bar (belonged to the Δ — family of bars), respectively.

The quantities $R_{(\Delta)}^{(T)}, S_{(\Delta)}^{(T)}, T = 0, 1, 2$ are stiffnesses of reinforcement rods.

Applying the Gauss-Stokes theorem in the form

$$(6.5) \quad \int_{\pi} v_{||\alpha}^x d\pi = - \int_{\pi} 2Hv^3 d\pi + \int_{\partial\pi} v^{\alpha} l_{\alpha} d(\partial\pi),$$

when stationary condition $dJ = 0$ is being examined, we arrive to the following set of equilibrium equations

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \delta^{\circ} u_d: \underline{t_{||e}^{de}} + 2Ht^{d3} + \underline{\circ \varepsilon^d} - \underline{\circ f^d} &= 0, \\ \delta' u_d: \tilde{x}^3 t^{de} + (2H\tilde{x}^3 - 1) \underline{t^{d3}} + \underline{\varepsilon^d} - \underline{f^d} &= 0, \end{aligned}$$

with boundary conditions

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \delta \tilde{u}_{d||\alpha}: r^{d\alpha\beta} l_{\beta} &= 0, \\ \delta^{\circ} u_d: -(t_{d\beta} - \underline{\lambda^{d\beta}}) l_{\beta} &= \underline{\circ t^d}, \\ \delta' u_d: (r^{d3\beta} - \tilde{x}^3 t^{d\beta} + \underline{\lambda^{d\beta}}) l_{\beta} &= \underline{t^d}. \end{aligned}$$

Underlined terms in (6.6) and (6.7) appear, when variation of appropriate terms in (6.1) is considered.

The vector l_{β} is tangent to π and is exteriorly normal to the boundary line $\partial\pi$.

Moreover following auxilliary quantities are introduced

$$(6.8) \quad r^{ab} = r_{||\alpha}^{ab\alpha} - s^{ab} - p^{ab},$$

and

$$\begin{aligned} p^{de} &= \frac{1}{4} \tilde{V} A^{xlmn} \Phi_{\mu n}^{de} \Phi_{xl}^{ab} \tilde{u}_{a||b}, \\ r^{de\gamma} &= \frac{1}{4} \tilde{V} C^{xlmn} \Psi_{\mu n}^{de\gamma} (\psi_{xl}^{ab\gamma} \tilde{u}_{a||b\gamma} - \Theta_{xl}^{ab} \tilde{u}_{a||b}), \\ r^{de3} &= 0, \\ s^{de} &= \frac{1}{4} \tilde{V} C^{xlmn} \Theta_{\mu n}^{de} (\Psi_{xl}^{ab\gamma} \tilde{u}_{a||b\gamma} - \Theta_{xl}^{ab} \tilde{u}_{a||b}). \end{aligned}$$

7. Conclusions

In the present paper the energy functional for the shells with lattice-type reinforcement is obtained. In the variational way equilibrium equations as well as natural boundary

conditions are derived. The assumed mathematical model makes it possible to consider an influence of reinforcement stiffness on resultant shell response in more systematic way than in the hitherto used approaches in which homogeneity of the structure is postulated. In the proposed model a geometry, directions, and full set of elastic features of the fibrous is taken into account.

In the case of slender reinforcement rods a formal resemblance of the proposed theory to the anisotropic model of Reissner's shell is worth mentioning.

Equations obtained in the paper can be applied in several other special cases.

Presented variational approach, in particular the energy functional (6.1) can be used for the finite element formulation of the problem considered.

References

1. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe* [Lattice-type surface structures, in Polish], PWN Warszawa (1970)
2. Cz. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok* [Nonlinear theory of shells, in Polish], PWN, Warszawa (1966)
3. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, in Progress in Solid Mechanics vol. 4, North—Holland P. C., Amsterdam (1963)
4. W. PIETRASZKIEWICZ, *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*, PWN, Warszawa-Poznań (1979)
5. И. Н. ВЕКУА, *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*.

[Some general methods of constructing different variants of shell theories, in Russian], Hayka, Moskba (1982)

Резюме

О ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК АРМИРОВАННЫХ СЕТКАМИ

В работе используя вариационный метод, построено уравнения теории упругих оболочек армированных сетками.

Изгиб силовой оболочки (матрицы) описано, принимая общую гипотезу Рейсснера. Деформация сетчатой арматуры согласно теории сетчатых оболочек Возняка.

Представлен в работе прием определения влияния арматуры на деформацию оболочки по характеру „технический“. Это следует из принятой идеализации структуры сетчатой арматуры как и ее непрерывного описания.

Streszczenie

О ТЕОРИИ POWŁOK ZBROJONYCH SIATKAMI

W pracy na drodze wariacyjnej uzyskano równania teorii powłok sprężystych zbrojonych siatkami.

Zginanie kontynuualnej powłoki (matrycy) opisano przyjmując uogólnioną hipotezę Reissnera, a deformację zbrojenia określono zgodnie z równaniami teorii powłok siatkowych Woźniaka [1].

Przedstawiona w pracy próba uwzględnienia zbrojenia na stan deformacji dźwigara ma charakter „techniczny” co wynika zarówno z założeń odnośnie struktury zbrojenia jak i z zastosowanego kontynuualnego opisu siatki.

PEWIEN MODEL MECHANICZNY KRĘGOSŁUPA ŁĘDŹWIOWO-KRZYŻOWEGO CZŁOWIEKA

MAREK DIETRICH

Politechnika Warszawska

PAWEŁ KUROWSKI

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Wzrastająca liczba chorych z bólowymi zespołami kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego stanowi poważny problem społeczny i leczniczy.

Jedną z najczęstszych przyczyn zespołów bólowych są różnego rodzaju zmiany patologiczne tego odcinka kręgosłupa, wpływające na jego własności mechaniczne. Groźnym schorzeniem występującym u ok. 5% populacji rasy białej jest pęknięcie łuków dolnych kręgów lędźwiowych (bądź ich bardzo duże deformacje), mogące prowadzić do poważnych konsekwencji neurologicznych.

Obserwacje kliniczne dają podstawę do przypuszczeń, że pęknięcia te są spowodowane czynnikami natury mechanicznej, a więc głównie obciążeniami tego odcinka kręgosłupa i naprężeniami w jego elementach, mającymi charakter zmęczeniowy.

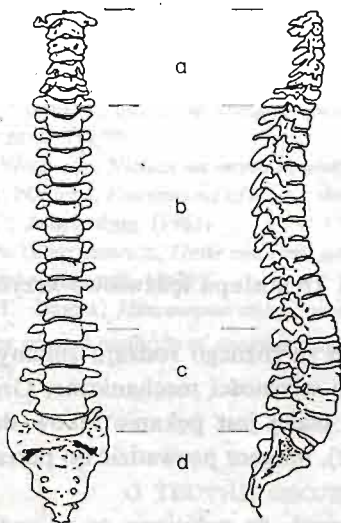
Natura pęknięć łuków dolnych kręgów lędźwiowych nie jest dostatecznie wyjaśniona. Pewne znane w medycynie hipotezy traktują obciążenia mechaniczne jako podstawowe czynniki powodujące uszkodzenia kręgosłupa, inne jako czynniki równoważne czynnikom biologicznym, jeszcze inne jako czynniki drugorzędne.

Celem tej pracy jest odpowiedź na pytanie, czy pęknięcia łuków dolnych kręgów lędźwiowych mogą być wywołane czynnikami natury mechanicznej, a także analiza czynników mechanicznych, które mogą wpływać na uszkodzenia tej części kręgosłupa. Jeśli bowiem rozkład obciążeń i naprężeń, przede wszystkim w kręgach, będzie przynajmniej jakościowo odpowiadał stwierdzanym klinicznie postaciom uszkodzeń, to świadczyć to będzie, że nie można wyeliminować czynników natury mechanicznej jako istotnych przyczyn tych uszkodzeń. W przeciwnym przypadku trzeba będzie uznać wpływ czynników mechanicznych za mało istotny.

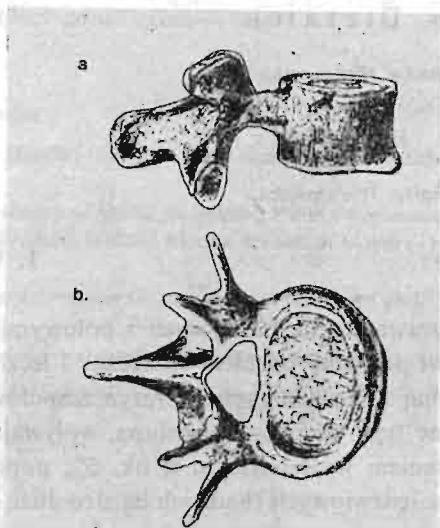
Ze względu na ograniczoną dostępność badań bezpośrednich a także niebezpieczeństwa związane z ich stosowaniem, jedynym sposobem umożliwiającym realizację postawionego celu pracy jest zbudowanie odpowiedniego modelu kręgosłupa i przeprowadzenie badań modelu.

2. Model mechaniczny kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego

Kręgosłup człowieka składa się z 33 - 34 kręgów, spośród których górne 24 są połączone ze sobą w sposób umożliwiający wzajemne przemieszczenia sąsiednich kręgów. Na te 24 ruchome kręgi połączone krążkami międzykręgowymi, stawami międzykręgowymi oraz systemem mięśni i więzadeł składają się: siedem kręgów szyjnych C_1, \dots, C_7 , dwanaście piersiowych Th_1, \dots, Th_{12} oraz pięć kręgów lędźwiowych L_1, \dots, L_5 . Krąg L_5 jest połączony z kością krzyżową powstałą ze zrośnięcia się pięciu kręgów krzyżowych S_1, \dots, S_5 i wchodzącą w skład miednicy (rys. 1).



Rys. 1 Kręgosłup człowieka widziany od przodu i z prawej strony; zaznaczony podział na część szyjną — *a*, piersiową — *b*, lędźwiową — *c* oraz kość krzyżową wraz z kością guziczną — *d*.



Rys. 2 Prawidłowy krąg lędźwiowy; *a* — widok z prawej strony
b — widok z góry.

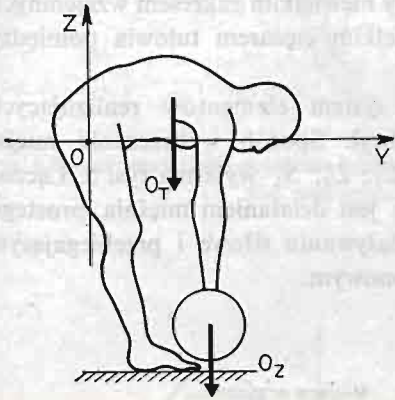
Każde dwa sąsiednie kręgi posiadające możliwość wzajemnych przemieszczeń, tworzą wraz z łączącymi je elementami tzw. segment ruchowy. Właściwy zakres tym przemieszczeniom zapewnia aparat więzadłowy i system krótkich mięśni międzykręgowych.

Mięśnie przy pomocy których realizowane są ruchy kręgosłupa, można zgrubnie podzielić na dwie antagonistyczne grupy: mięśnie grzbietu wśród których najważniejszym jest prostownik grzbietu i mięśnie przedniej ściany brzucha.

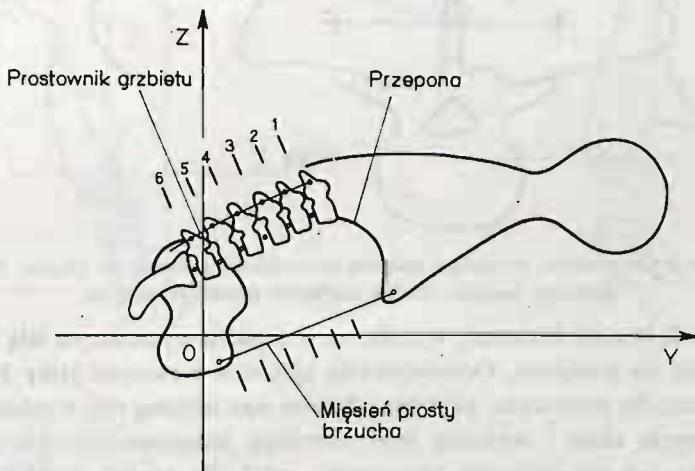
Odcinek lędźwiowy kręgosłupa składa się z 5 kręgów o zbliżonym kształcie (rys. 2). Budowa wyrostków stawowych sprawia, że możliwe są tu duże wzajemne przemieszczenia kątowe w płaszczyźnie strzałkowej (do kilkunastu stopni), zaś w pozostałych płaszczyznach są one ograniczone do kilku stopni.

Schorzenia kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego, w szczególności wspomniane już pęknięcia łuków kręgowych w obszarach węzin łuku (tzw. kręgoszczelina), występują w różnych grupach wiekowych i zawodowych, zarówno wśród sportowców jak i osób

prowadzących siedzący tryb życia. Wśród czynności ruchowych można wskazać takie, które wiążą się ze szczególnie dużym zagrożeniem wystąpienia kręgoszczeliny, a więc np. wiosłowanie, bieg przez płotki itp. Weryfikując jednak hipotezę o mechanicznej naturze pęknięć należy ze względu na powszechność zjawiska, przeanalizować obciążenia kręgów lędźwiowych występujące podczas normalnej aktywności ruchowej. Spośród czynności składających się na taką aktywność należy z kolei wybrać takie, po których można spodziewać się wystąpienia dużych obciążeń kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego. Codzienne doświadczenie uczy nas, że czynnością taką jest np. dźwiganie rękami ciężaru w pozycji skłonu do przodu (rys. 3).



Rys. 3 Dźwiganie ciężaru w pozycji skłonu do przodu;
 Q_T — ciężar ciała powyżej kręgosłupa lędźwiowego
 Q_Z — ciężar dźwigny w rękach.



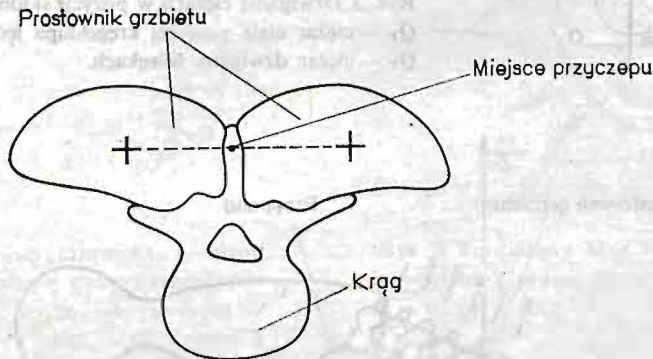
Rys. 4 Model mechaniczny kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego.

Zasadniczą rolę w dźwiganie ciężaru pełnią mięśnie obręczy barkowej i kończyn górnych, prostownik grzbietu, mięśnie brzucha, przepona oraz mięśnie utrzymujące w odpowiedniej pozycji miednicę i kończyny dolne. Model mechaniczny kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego służący do znalezienia obciążeń działających na kręgi w głębokim skłonie ciała do przodu i w innych pozycjach, celem przeprowadzenia porównań, musi uwzględniać prostownik grzbietu i mięśnie brzucha tj. główne grupy mięśniowe utrzymu-

jące ciało w równowadze w płaszczyźnie strzałkowej, a także efekt działania tłoczni brzusznej.

Ograniczenie rozważań do analizy czynności podczas których ciało pozostaje symetryczne względem płaszczyzny strzałkowej, pozwala zastąpić odcinek lędźwiowo-krzyżowy płaskim układem mechanicznym. Proponowany układ mechaniczny składa się z 7 brył sztywnych: części ciała powyżej krążka międzykręgowego Th_{12}/L_1 i przepony, pięciu kręgów lędźwiowych oraz miednicy podpartej przez kończyny dolne (rys. 4). Wszystkie bryły są szeregowo połączone przez nieodkształcalne przeguby w miejscach odpowiadających położeniu jąder miażdżystych (wewnętrzna część krążka międzykręgowego). Podział kręgosłupa w powyższy sposób jest uzasadniony niewielkim zakresem wzajemnych przemieszczeń kręgów w odcinku piersiowym, niewielkim ciężarem tułowia pomiędzy kręgami Th_{12} i S_1 i dużą sztywnością miednicy.

Prostownikowi grzbietu odpowiada w modelu system elementów realizujących oddziaływanie siłowe łączących wszystkie siedem brył. Sposób wyznaczania miejsc przyczepu prostownika grzbietu do kręgów $Th_{1,2}$, L_1 , L_3 , S_1 wyjaśnia rys. 5. Łączne działanie mięśni przedniej ściany brzucha zastąpione jest działaniem mięśnia prostego brzucha, imitowanego elementem realizującym oddziaływanie siłowe i przebiegającym pomiędzy wyrostkiem mieczykowatym a spojeniem łonowym.



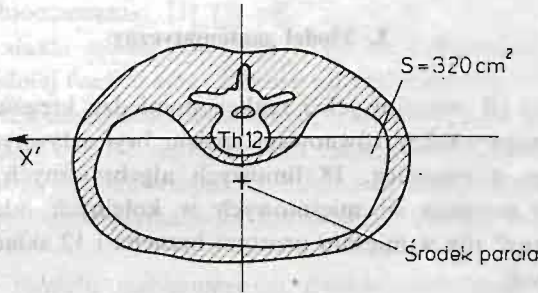
Rys. 5 Sposób znalezienia miejsc przyczepu mięśnia prostownika grzbietu do kręgów Th_{12} , L_1 , L_3 , S_1 . Krzyżyk oznacza środek ciężkości przekroju mięśnia.

Efekt działania tłoczni brzusznej wyraża się w modelu wypadkową siłą ciśnienia brzuszno działającą na przeponę. Oddziaływanie ciśnienia wewnątrz jamy brzucha na pozostałe ściany brzucha pominięto, gdyż nie odgrywa ono istotnej roli w odciążeniu kręgów.

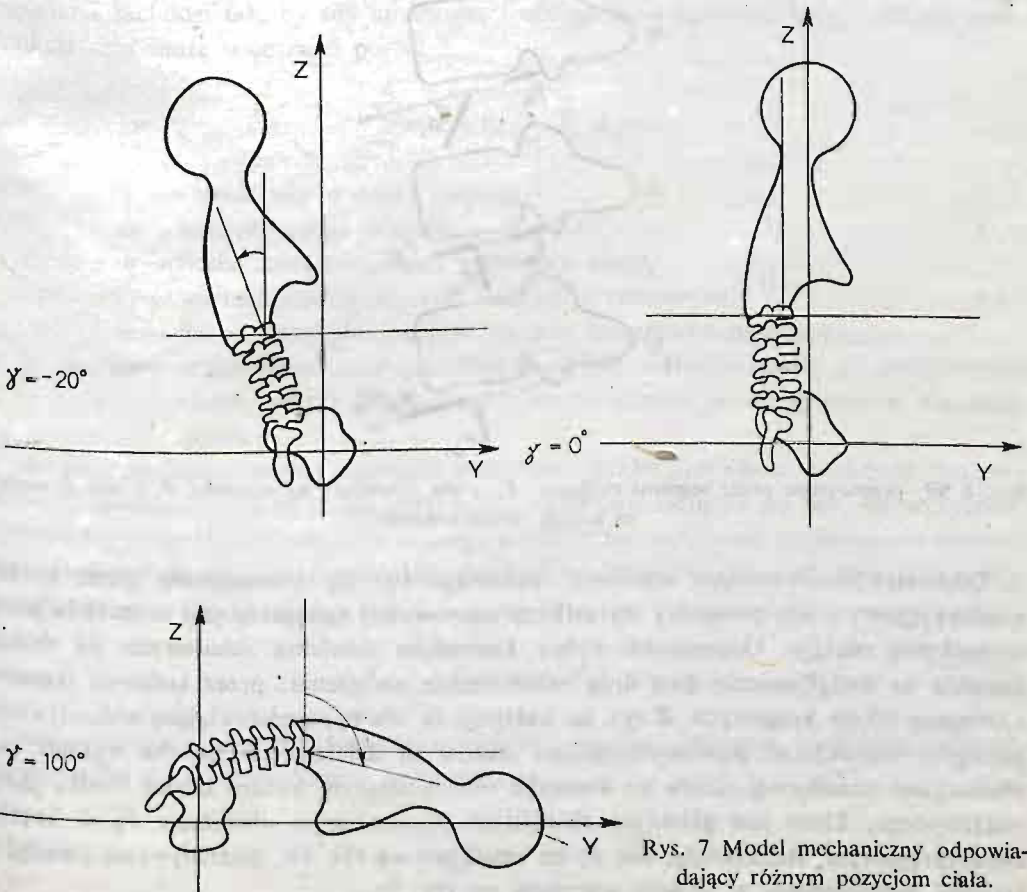
Przyjęta pozycja ciała i wymiary brył określają jednoznacznie kierunki działania sił mięśniowych oraz siły ciśnienia brzuszno, gdyż siła ta jest przyłożona w środku ciężkości rzutu przepony na poziomy przekrój tułowia (rys. 6) i działa równoległe do siły w mięśniu prostym brzucha. Sposób określenia kierunku wypadkowej siły ciśnienia brzuszno wynika z tego, że w analizowanych dalej pozycjach ciała, przepona zajmuje położenia, w których płaszczyzna rzutu przepony na część ciała powyżej kręgu L_1 przecina kierunek działania mięśnia prostego brzucha pod kątem zbliżonym do prostego.

Obciążenia kręgów lędźwiowych pochodzą od ciężaru własnego tułowia Q_T powyżej kręgu L_1 i ciężaru dźwiganego w rękach Q_Z . Punkty przyłożenia sił Q_T i Q_Z wyznaczone

zostały na podstawie pomiarów ciała. Wartość siły Q_r znaleziono na podstawie pracy [9]. Wymiary elementów modelu mechanicznego oraz jego konfigurację ustalono na podstawie zdjęć rentgenowskich i fotograficznych obejmujących pozycje ciała od skłonu do tyłu do głębokiego skłonu do przodu.



Rys. 6 Sposób znalezienia położenia środka parcia ciśnienia wewnątrzbrzuszego na przepone; S — pole rzutu przepony na płaszczyznę przekroju.



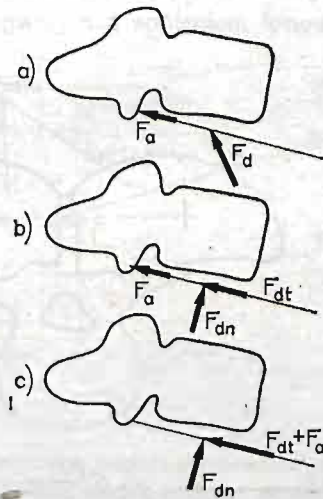
Rys. 7 Model mechaniczny odpowiadający różnym pozycjom ciała.

Pozycje ciała będą określane dalej poprzez kąt γ odchylenia górnej części tułowia od pionu (rys. 7). Pozycje w zakresie $\gamma = -20^\circ$ do $\gamma = 100^\circ$ wyznaczone zostały empirycznie, pozycje spoza tego zakresu zostały wytworzone sztucznie i wyniki ich analizy będą miały jedynie znaczenie poglądowe.

3. Model matematyczny

Znalezienie wartości sił mięśniowych i reakcji pomiędzy kręgami w modelu mechanicznym z rys. 4 wymaga analizy równowagi sześciu brył sztywnych względem układu odniesienia związanego z miednicą. 18 liniowych algebraicznych równań równowagi zawiera 6 nieznanymi wartości sił mięśniowych w kolejnych odcinkach prostownika grzbietu nieznaną wartość siły w mięśniu prostym brzucha i 12 składowych 6 nieznanymi reakcji międzykręgowych.

Łącznie mamy więc 19 niewiadomych, a jeśli za niewiadomą przyjmie się wartość siły ciśnienia wewnątrzbrzusznego, to ich liczba wzrośnie do 20.



Rys. 8 Siły przenoszone przez segment ruchowy: F_a — siła działająca na wyrostki, F_d — siła działająca na krążek międzykręgowy.

Oddziaływanie wewnątrz segmentu ruchowego (tj. siły przenoszone przez krążek międzykręgowy i siły pomiędzy wyrostkami stawowymi) zastąpione jest w modelu jedną wypadkową reakcją. Odpowiedni wybór kierunków działania składowych tej reakcji pozwala na uwzględnienie dwu dróg przenoszenia obciążenia: przez kolumnę trzonów i kolumnę łuków kręgowych. Z rys. 8a widzimy, że siła F_a przedstawiająca oddziaływanie pomiędzy wyrostkami stawowymi (suma rzutów sił działających na oba wyrostki na płaszczyznę strzałkową) działa na kierunku przechodzącym bardzo blisko środka jądra miazdżystego, które jest głównym elementem przenoszącym obciążenie F_d w krążku międzykręgowym. Rozkładając siłę F_d na składowe wg rys. 8b, oddziaływanie pomiędzy kręgami przedstawimy w sposób pokazany na rys. 8c.

Wyznaczenie wartości sił mięśniowych i reakcji międzykręgowych na podstawie 18 równań równowagi z 19 lub 20 niewiadomymi wymaga dodatkowych założeń. W tej pracy przyjmujemy założenie, że mięśnie są sterowane przez system nerwowy w sposób optymalny. Założenie takie, wynikające z istnienia ogólnej celowości budowy i funkcjonowania organizmów żywych, przyjmowali również inni autorzy budujący modele matematyczne z zakresu biomechaniki [1] [3] [6].

Optymalizacja działania mięśni człowieka wiąże się z dążeniem do nadania wartości ekstremalnej odpowiedniej funkcji celu, zależnej od realizowanego kryterium optymalnego sterowania. Dlatego też zbudowanie modelu optymalizacyjnego wymaga przyjęcia kryteriów optymalnego sterowania i zdefiniowania funkcji celu. Ze względu na brak metod pozwalających na pomiary sił we wszystkich mięśniach biorących udział w wykonywanej czynności, wybór kryterium optymalnego sterowania i funkcji celu musi być wyborem arbitralnym.

Uwzględnienie w modelu mechanicznym dwóch tylko grup mięśniowych ułatwia wybór kryterium optymalnego sterowania i definicję funkcji celu. Są to bowiem duże mięśnie, stosunkowo łatwe do obserwacji, m.in. dlatego, że ich działanie (i jego skutki np. zmęczenie) można sobie uświadomić.

Modelując czynność, w której bierze udział kręgosłup sądzić można, że sterowanie mięśniami zachodzi tak, by siły mięśniowe i obciążenia kręgosłupa były możliwie małe. Funkcja celu może więc mieć postać:

$$k_1 \sum_{i=1}^n v_i x_i + k_2 \sum_{j=1}^m F_j = \min, \quad (1)$$

gdzie: x_i — wartość siły w i -tym mięśniu
 v_i — objętość i -tego mięśnia
 n — liczba uwzględnionych w modelu mięśni
 F_j — wartość reakcji w j -tym segmencie ruchowym
 m — liczba uwzględnionych w modelu segmentów ruchowych
 k_1, k_2 — współczynniki uwzględniające wpływ wielkości sumy sił mięśniowych i sumy reakcji międzykręgowych na uciążliwość danej pozycji dla organizmu.

Analizie poddane zostaną czynności z zakresu zwykłej aktywności ruchowej, możemy się więc spodziewać, że w takim przypadku sterowanie odbywa się tak, by wykonanie czynności wymagało możliwie najmniejszego wysiłku (sterowanie nie ma tu na celu ochrony kręgosłupa) wiążącego się bezpośrednio z siłami mięśniowymi. Funkcję celu można więc przedstawić w postaci:

$$\sum_{i=1}^n v_i x_i = \min. \quad (2)$$

Zaproponowany model mechaniczny uwzględnia mięśnie zbliżone wielkością i dlatego funkcję celu wyrazimy w jeszcze prostszej postaci:

$$A = \sum_{i=1}^n x_i = \min. \quad (3)$$

Jest oczywiście możliwe rozwiązanie zagadnienia optymalizacyjnego przy bardziej złożonej funkcji celu. Wydaje się jednak, że nie znając prawdziwego kryterium, celowe jest stosowanie funkcji sensownej a możliwie prostej.

Siły mięśniowe nie mogą przyjmować wartości ujemnych, a krążki międzykręgowy nie powinny być rozciągane (groziłoby to ich zniszczeniem), i dlatego przyjmujemy następujące ograniczenia nierównościowe:

$$x_i \geq 0 \quad i \quad F_{dnj} \geq 0 \quad (4)$$

gdzie F_{dnj} ($j = 1, \dots, 6$) oznaczają składowe normalne reakcji międzykręgowych w sześciu segmentach ruchowych.

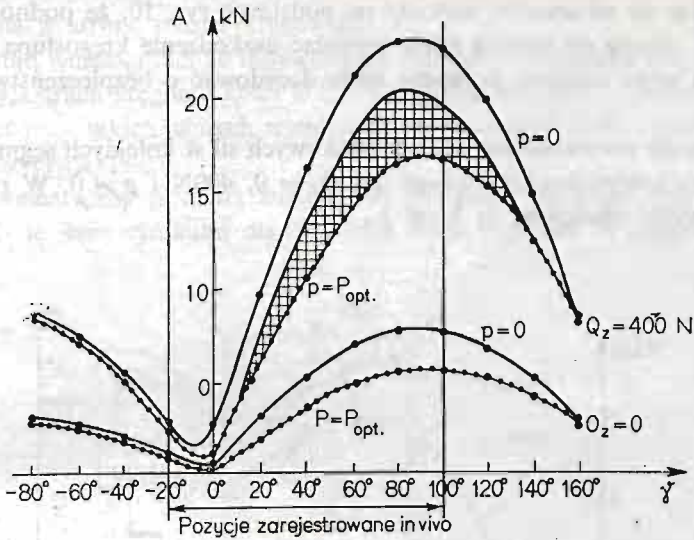
Model matematyczny opisujący równowagę układu mechanicznego składa się więc z 18 liniowych algebraicznych równań równowagi z 19 lub 20 niewiadomymi, liniowej funkcji celu (3) i warunków nierównościowych (4). Jest to zagadnienie z zakresu programowania liniowego, łatwe do rozwiązania przy użyciu standardowych metod, np. metody simpleksów.

4. Analiza modelu matematycznego

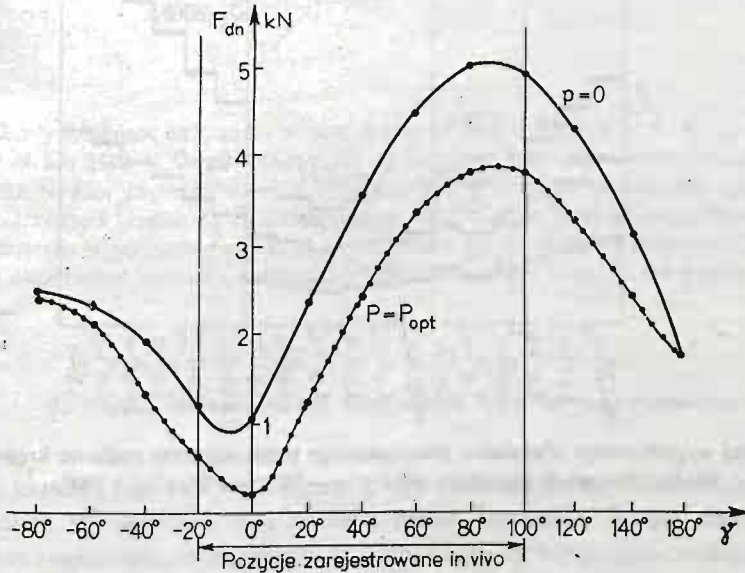
Model matematyczny będziemy badać w dwóch wariantach: Pierwszy pozwala na znalezienie optymalnego rozwiązania łącznie z optymalną wartością siły ciśnienia wewnątrzbrzusznego. W przypadku wysokiego obciążenia zewnętrznego (np. duży ciężar dźwigany w rękach) może jednak się okazać, że optymalna wartość ciśnienia jest za wysoka w stosunku do możliwości organizmu i rozwiązania zagadnienia optymalizacyjnego nie będzie można odnieść do rzeczywistego kręgosłupa.

W przypadku dużego obciążenia zewnętrznego spodziewać się można, że rzeczywiste (możliwe do wytworzenia) ciśnienie wewnątrzbrzuszne przyjmie maksymalną możliwą wartość. Przypadek ten, a również przypadek np. braku ciśnienia wewnątrzbrzusznego będziemy modelować modelem w wariacie 2, gdzie wartość ciśnienia brzuszego jest parametrem, przybierającym różne dane wartości. Wariant ten wymaga wykonywania obliczeń dla każdej z danych wartości ciśnień, i pozwala znaleźć ciśnienie najlepsze, możliwe do realizacji w naturze wtedy, gdy wytworzenie ciśnienia o optymalnej (ze względu na minimalizację funkcji celu 3) wartości nie jest możliwe.

Rys. 9 przedstawia wyznaczone wartości funkcji celu w zależności od pozycji ciała w dwóch przypadkach: dźwiganie ciężaru $Q_Z = 400\text{N}$ i bez obciążenia rąk. Dla obu wartości Q_Z linia górna odpowiada ciśnieniu brzuszemu równemu 0 (wariant 2, $p = 0$), linia „kropkowana” — ciśnieniu optymalnemu dla danej pozycji i obciążenia rąk (wariant 1, $p = p_{opt}$). Uwzględniając wyniki badań doświadczalnych, które nie wykazują ciśnień wewnątrzbrzusznych wyższych od ok. 0.03 MPa [5], rys. 9 zawiera jeszcze krzywą ograniczającą od góry pole zakreskowane (dla $Q_Z = 400\text{N}$). Krzywa ta przedstawia wartości funkcji celu z uwzględnieniem warunku wg którego nie jest możliwe wytworzenie ciśnienia wyższego od 0.024 MPa (wariant 2, $p \leq 0.024\text{ MPa}$). Przyjęta wartość ciśnienia 0.024 MPa wydaje się odpowiadać wartości możliwej do wytworzenia przez sprawnego fizycznie człowieka. W przypadku braku obciążenia rąk ($Q_Z = 0$) nie ma potrzeby wytworzenia ciśnienia wyższego od 0.024 MPa, stąd dla $Q_Z = 0$ brak jest na rys. 9 pola zakreskowanego.



Rys. 9. Wartość funkcji celu Z w zależności od pozycji ciała, obciążenia zewnętrznego i ciśnienia wewnątrz jamy brzusznej.

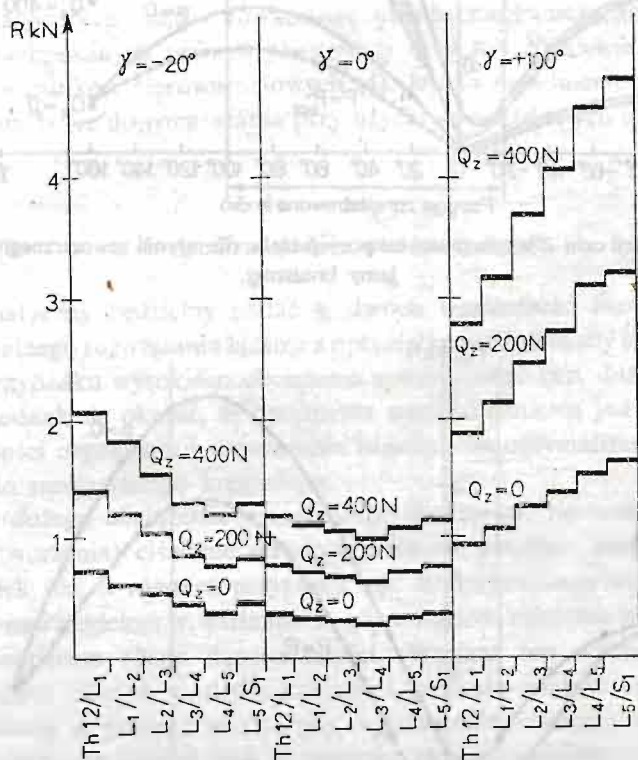


Rys. 10. Wartość siły normalnej F_{dn} (wg rys. 8) w segmencie ruchowym L_5/S_1 , dla różnych pozycji ciała podczas dźwigania ciężaru $Q_z = 400\text{ N}$ (znaczenie linii „kropkowanej” — jak na rys. 9).

Rys. 10 przedstawia zależność siły normalnej F_{dn} przenoszonej przez segment ruchowy L_5/S_1 od przyjętej pozycji ciała dla $Q_z = 400\text{ N}$ w dwóch przypadkach: braku ciśnienia wewnątrzbrzuszego i przy ciśnieniu o wartości optymalnej, możliwej do wytworzenia w naturze ($p \leq 0.024\text{ MPa}$). Wg [8] wytrzymałość trzonu kręgu lędźwiowego na ściskanie wynosi ok. 6500 N i wykazuje wysoką zmienność w zależności od wieku, stopnia osteo-

poroży itp. Mając to na uwadze widzimy na podstawie rys. 10, że podnoszenie ciężaru 400N w pozycji skłonu do przodu może wywołać uszkodzenie kręgosłupa lędźwiowego, a odciążenie go przez ciśnienie brzuszne może decydować o bezpieczeństwie wykonania tej czynności.

Rys. 11 pozwala porównać wartości wypadkowych sił w kolejnych segmentach ruchomych kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego dla $Q_z = 0, 400\text{N}$ i $p = 0$. W pozycji skłonu do przodu najwyżżej obciążone są kręgi L_4 i L_5 .



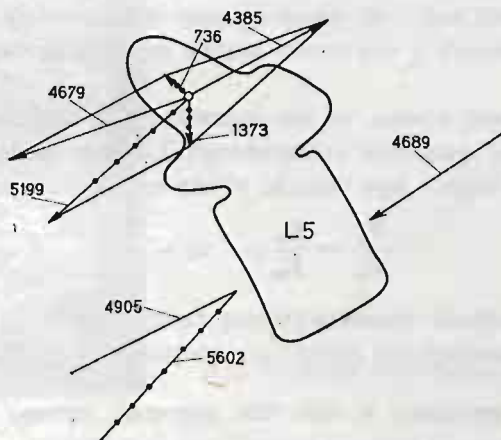
Rys. 11 Wartości wypadkowego obciążenia przenoszonego przez segmenty ruchome kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego w pozycjach ciała $\gamma = -20^\circ$, $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = +100^\circ$.

Rys. 12 przedstawia obciążenie kręgu L_5 w pozycji $\gamma = 80^\circ$, $Q_z = 400\text{N}$ i $p = 0$. Widzimy, że niewielka (rzędu 1 cm) zmiana miejsca przyczepu mięśnia prostownika grzbietu do kości krzyżowej spowodowana np. innymi wymiarami kości krzyżowej lub inną objętością mięśnia (lub zmianą względnego położenia kręgów L_5 i S_1), wywołująca zmianę kierunku działania siły w mięśniu prostowniku grzbietu pomiędzy kręgami L_5 i S_1 , wywołuje zasadniczą zmianę kierunku działania wypadkowej siły obciążającej łuk kręgu L_5 . W przypadku dużego kręgu S_1 wypadkowa ta działa ku tyłowi kręgu, w przy-

padku wymiarów mniejszych, znalezionych na podstawie radiogramów, wypadkowa siła jest skierowana w stronę trzonu kręgowego.

Możemy stąd wnioskować, że indywidualne różnice w przebiegu krzywizn kręgosłupa i różnice w wymiarach kręgów i kości krzyżowej mogą stanowić o różnych obciążeniach kręgów, nawet przy takich samych wymiarach zewnętrznych ciała, obciążeniach i przyjmowanych pozycjach.

Model matematyczny pozwala znaleźć siły działające na kręgi lędźwiowe, możemy więc posłużyć się jego wynikami dla zbadania stanu naprężeń w kręgach lędźwiowych.



Rys. 12 Siły działające na krąg L_5 w pozycji $\gamma = 80^\circ$, $Q_z = 400\text{N}$, $p = 0$. $F_{L_4/L_5} = 4689\text{N}$, $F_{L_5/S_1} = 4905\text{ N}$ lub 5602 N — wypadkowe siły przenoszone przez segmenty ruchowe, L_4/L_5 i L_5/S_1 , $F_{PGL_4/L_5} = 4385\text{ N}$, $F_{PGL_5/S_1} = 4679\text{N}$ lub 5199N — siły w mięśniu prostownika grzbietu pomiędzy wyrostkami kolczystymi kręgów L_4 i L_5 oraz kręgów L_5 i S_1 . Siła 736N jest wypadkowym obciążeniem wyrostka kolczystego w przypadku gdy krąg S_1 jest równy co do wielkości kręgowi L_5 . Siła 1373N jest wypadkowym obciążeniem wyrostka kolczystego w przypadku, gdy krąg S_1 ma wymiary mniejsze.

5. Model elastoptyczny kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego

Złożony kształt i budowa wewnętrzna kręgu praktycznie uniemożliwiają pełną analizę stanu naprężeń. Po realizacji celu naszych badań wystarczy jednak znalezienie miejsc o najwyższym zagrożeniu zniszczeniem, tj. tych, które wg hipotezy o mechanicznej naturze procesów prowadzących do kręgoszczeliny powinny podlegać procesom patologicznym.

Spośród pięciu kręgów lędźwiowych, do analizy stanu naprężeń wybierzemy krąg L_4 w którym, obok kręgu L_5 , notuje się pęknięcie łuku kręgowego. Miejsca zagrożone zniszczeniem znajdziemy stosując elastoptyczne metody zamrażania naprężeń, połączone z próbami zniszczeniowymi modeli.

Wnioskowanie o stanie naprężeń w rzeczywistym kręgu na podstawie wyników eksperymentów elastoptycznych wymaga zachowania podobieństwa pomiędzy stanem na-

prężen w modelu i w rzeczywistym kręgu. Krąg złożony jest z kości gąbczastej i korowej o różniących się własnościach mechanicznych. Uwzględnienie tych cech w modelu byłoby bardzo trudne, a co ważniejsze mogłoby uniemożliwić analizę efektów elastoptycznych. Różne własności mechaniczne materiału z reguły pozostają w związku z różną czułością elastoptyczną i rozszerzalnością cieplną. Niejednorodny materiał mógłby uniemożliwić usunięcie naprężeń własnych i związanych z nimi efektów optycznych. Z tego względu w badaniach stosujemy jednorodny materiał modelu elastoptycznego. Wymiary modelu zachowujemy identyczne z wymiarami rzeczywistego kręgu.

Stan naprężeń w kręgu zależy od działających na niego sił P , wymiarów liniowych l i kątowych α , sztywności materiału kręgu opisanej w najprostszy sposób modułem sprężystości E i liczbą Poissona ν , sztywności krążka międzykręgowego i chrząstek międzystawowych S .

Z analizy wymiarowej wynika, że dla zapewnienia podobieństwa modelowego, przy założeniu identyczności geometrii rzeczywistego kręgu i modelu oraz geometrycznie podobnym obciążeniu kręgu i jego modelu, należy spełnić następujące warunki:

$$\frac{S_0}{S_m} = \frac{E_0}{E_m}; \quad \nu_0 = \nu_m, \quad (5)$$

gdzie „0” oznacza wielkość charakteryzującą rzeczywisty krąg, „m” — modelu kręgu. Obciążając model elastoptyczny spełniający warunki (5) układem sił P_m spełniającym

zależności: $\frac{P_0}{P_m} = n$, uzyskamy w nim stan naprężeń, którego dowolna składowa σ_m będzie spełniać zależność $\sigma_m = \sigma_0/n$.

Dane potrzebne do zbudowania modelu elastoptycznego, a więc moduł sprężystości materiału kręgu, sztywności krążka międzykręgowego na ściskanie i na ścinanie oraz sztywność chrzątki międzystawowej zaczerpnięte zostały z prac [2] [7] [10].

Wartość ν_0 oszacowaliśmy jako bliską 0,5 ze względu na wypełnienie kręgu płynami ustrojowymi. Zastosowana w modelu żywica epoksydowa w temperaturze zamrażania wykazuje $\nu_m = 0,48$.

Zaznaczyć trzeba, że warunki (5) zapewniają jedynie z grubsza spełnienie praw podobieństwa modelowego, co jest konsekwencją opisanych wyżej uproszczeń zastosowanych przy budowie modelu elastoptycznego.

Model, którego elementy składowe posiadają własności mechaniczne spełniające warunki (5) składa się z dwu segmentów ruchowych: połówki kręgu L_3 , kręgu L_4 i połówki kręgu L_5 (rys. 13), odlanych z żywicy epoksydowej EPIDIAN 5 (+ utwardzacz A_1 stosowany do grubościennych odlewów) w podatnych formach. Paramodelami były kręgi prawidłowe anatomicznie.

Krążki międzykręgowo zastąpione są imitacją jądra miążdżystego (z gumy silikonowej), które jest głównym elementem przenoszącym obciążenie w krążku międzykręgowym. Przestrzenie międzystawowe wypełnione są imitacją chrzątki stawowej wykonaną z gumy silikonowej.

Wartości sił obciążających model elastoptyczny dobiera się tak, by uzyskać wyraźny efekt elastoptyczny lub zniszczenie modelu w przypadku prowadzenia próby zniszczeniowej.

Ze względu na bardzo dużą pracochłonność i wysokie koszty eksperymentów, ograniczymy się do analizy stanu naprężeń w pozycji głębokiego skłonu do przodu ($\gamma = 80^\circ$) i w pozycji stojącej ($\gamma = 0^\circ$).



Rys. 13 Model elastooptyczny.

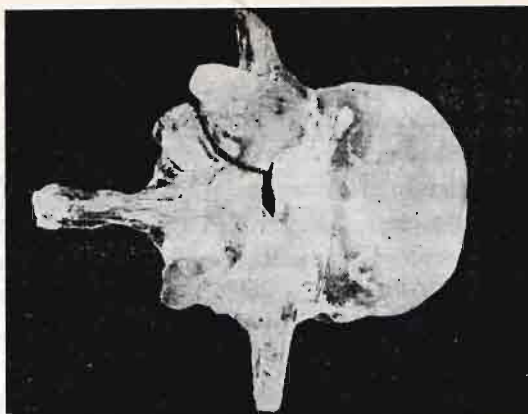
W badaniach stosujemy dwie metody: metodę cienkich płytek dla lokalizacji miejsc koncentracji naprężeń i metodę małych kostek [4] pozwalającą na porównanie wyężenia wg hipotezy Hubera w wybranych obszarach modelu. Zastosowanie hipotezy Hubera do materiału kości jest uzasadnione sprężysto-plastycznymi własnościami kości korowej [11], która jest głównym składnikiem tych obszarów kręgow, w których działają wysokie naprężenia. Każde zniszczenie musi więc wiązać się ze zniszczeniem kości korowej.

Łączne zastosowanie dwóch metod elastooptycznych pozwala na ilościową analizę trójwymiarowego stanu naprężeń w kręgu (metoda małych kostek) oraz na jakościową analizę koncentracji naprężeń w obszarach bliskich powierzchni modelu.

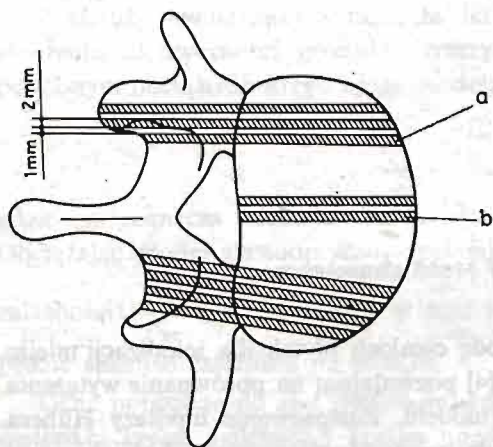
6. Analiza stanu naprężeń w kręgu L₄

Próby zniszczeniowe, prowadzone w temperaturze zamrażania naprężeń pod obciążeniem modelu odpowiadającym pozycji $\gamma = 80^\circ$, wywołały we wszystkich próbach zniszczenie węzin łuku kręgowego (rys. 14).

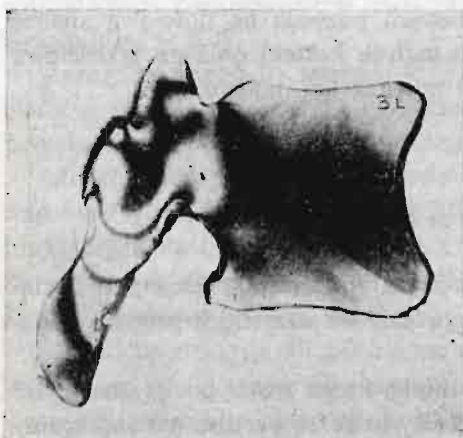
Do analizy koncentracji naprężeń, zamrożony model kręgu został pocięty na płytki grubości 2 mm w sposób przedstawiony na rys. 15. Rysunek 16 przedstawia izochromy połówkowe w płytce „a”, wykazujące najwyższe koncentracje naprężeń w obszarze węziny łuku kręgowego. Płytkę „b” (rys. 17) pochodzi z trzonu kręgowego i wykazuje koncentracje naprężeń w obszarach, gdzie materiał kręgu kontaktuje się z imitacją jądra miążdżystego.



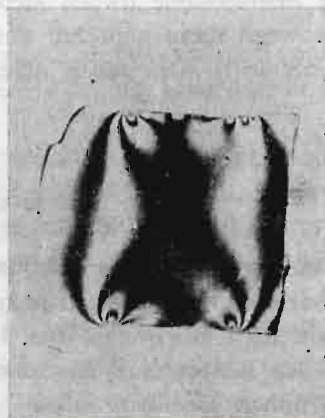
Rys. 14 Pęknięcie lewej wężyny uzyskane w wyniku przeprowadzenia próby zniszczeniowej modelu elastooptycznego.



Rys. 15 Sposób pocięcia kręgu L_4 na płytki.



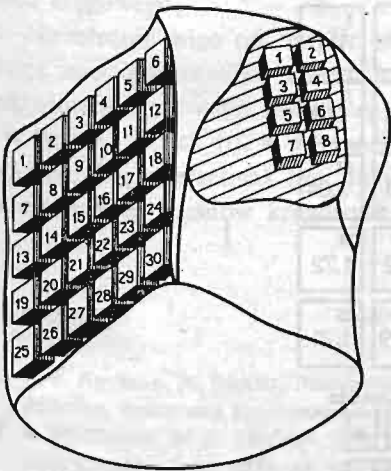
Rys. 16 Obraz izochrom połówkowych w płytce „a” z rys. 15.



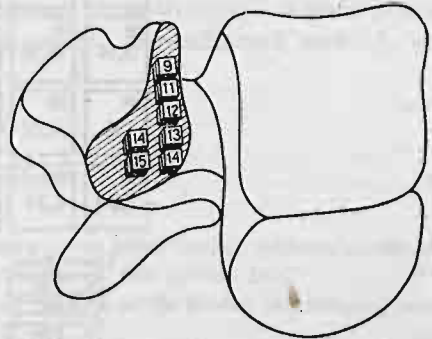
Rys. 17 Obraz izochrom połówkowych z płytce „b” z rys. 15.

Kolejny model kręgu L_4 po zamrożeniu naprężeń pod obciążeniem odpowiadającym pozycji $\gamma = 80^\circ$ posłużył do analizy wyteżenia metodą małych kostek. Analiza ta została poprzedzona badaniem kostek pochodzących z modelu bez naprężeń. Badania te wykazały, że ciepło powstające przy cięciu modelu (stosowane było intensywne chłodzenie) nie wpływa istotnie na stan optyczny materiału modelu.

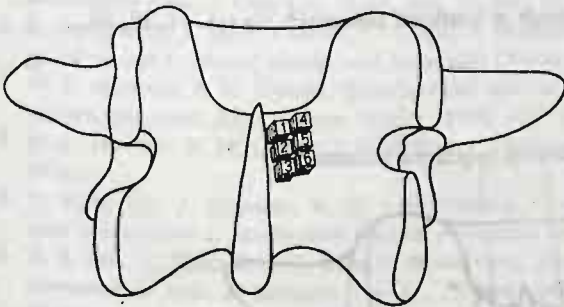
Sposób pocięcia modelu na kostki przedstawiają rys. 18, 19, 20. Kostki z lewej i z prawej wężyny nie są pobrane symetrycznie. Kostki z lewej wężyny pochodzą z wnętrza łuku, a kostki z prawej wężyny z okolic bliskich powierzchni łuku tj. stamtąd, skąd brały początek pęknięcia w próbach zniszczeniowych. Różnica w sposobie pobierania ma istotne znaczenie w interpretacji wyników badania tych kostek.



Rys. 18 Rozmieszczenie kostek pobranych z przekroju strzałkowego trzonu i z prawej nasady łuku kręgowego.



Rys. 19 Rozmieszczenie kostek pobranych z lewej wężyny łuku kręgowego.



Rys. 20 Rozmieszczenie kostek pobranych z prawej wężyny łuku kręgowego.

Wartości naprężeń zredukowanych (w pewnej umownej skali) w pobranych kostkach przedstawia rys. 21, z którego wynika, że najwyższe wyteżenie materiału w obrębie łuku kręgowego występuje w wężynie, w obszarze bliskim powierzchni łuku.

Najwyższe wyteżenie wykazują kostki pobrane z trzonu kręgowego. Pamiętając jednak o koncentracjach naprężeń w okolicach bliskich powierzchni łuku w obszarze wężyny

(wyniki analizy cienkich płytek) i o wynikach prób zniszczeniowych, stwierdzić należy, że najwyższe zagrożenie zniszczeniem występuje w górnych częściach węzin łuku.

Obok opisanej analizy stanu naprężeń w pozycji $\gamma = 80^\circ$, przeprowadziliśmy tymi samymi metodami analizę stanu naprężeń w kręgu L_4 w pozycji $\gamma = 0^\circ$ uzyskując podobne wyniki. Pozwala to stwierdzić, że w obu przypadkach najbardziej zagrożonymi zniszczeniem obszarami kręgu L_4 są górne części węzin łuku kręgowego (rys. 22).

POZYCJA $\gamma = 80^\circ$

TRZON KRĘGOWY

6 3.24	5 6.53	4 5.32	3 4.23	2 3.66	1 1.51
12 3.75	11 4.83	10 5.21	9 4.48	8 3.15	7 1.94
18 3.14	17 4.34	16 5.09	15 4.72	14 3.41	13 2.04
24 X	23 4.72	22 5.50	21 5.56	20 3.72	19 1.72
30 2.03	29 6.39	28 4.90	27 5.11	26 3.29	25 1;21

Lewa węzina

9 1.49	10 1.45
11 1.56	12 1.60
13 2.88	14 2.49

Prawa węzina

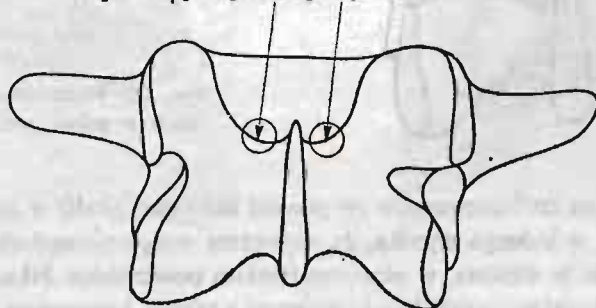
1 3.91	4 5.09
2 2.15	5 3.11
3 1.51	6 1.61

Prawa nasada

1 3.56	2 4.49
3 2.28	4 2.81
5 2.00	6 2.16
7 2.57	8 2.31

Rys. 21 Wartości naprężeń zredukowanych w kostkach pobranych wg rys. 18, 19, 20.

Miejsca kręgu najbardziej zagrożone zniszczeniem



Rys. 22

7. Wnioski

Połączenie modelowania matematycznego z eksperymentami na elastoptycznych modelach kręgosłupa pozwoliło na znalezienie obciążeń odcinka lędźwiowo-krzyżowego w różnych pozycjach ciała i przy różnych obciążeniach zewnętrznych a następnie na zlokalizowanie najbardziej zagrożonych zniszczeniem obszarów w kręgu lędźwiowym.

W pracy zostało wykazane, że dolne kręgi lędźwiowe są wysoko obciążone, a wartości obciążeń silnie zależą od wymiarów kręgów, kości krzyżowej i stopnia rozwoju umięśnienia.

Wysokie koncentracje naprężeń, wywołane złożonym kształtem łuku kręgowego, występujące w obszarach wężin łuku, mogą prowadzić do zmęczeniowego zniszczenia łuku kręgowego.

Niezależnie więc od innych czynników patogennych, czynniki natury mechanicznej mogą mieć podstawowe znaczenie w procesach prowadzących do schorzeń kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego, zwłaszcza dolnych kręgów lędźwiowych. Właśnie w tych kręgach i w tych miejscach (tj. w wężinach) najczęściej obserwuje się uszkodzenia mające postać pęknięć (kręgoszczelina) lub dużych odkształceń trwałych, prowadzących niekiedy do przemieszczeń trzonów kręgowych (kręgozmyk).

Literatura cytowana w tekście

1. R. J. ARVIKAR, A. SEIREG, *Distribution of spinal disc pressure in the seated posture subjected to impact*, Aviation, Space and Environmental Medicine, January 1978, vol. 49, No. 1, 166 - 169.
2. B. M. CYRON, W. C. HUTTON, J. R. R. STOTT, *The shearing stiffness on the lumbar intervertebral joint*, Acta Orthop. Belg. 1979, 45, 459 - 469.
3. R. D. CROWNSHIELD, R. C. JOHNSTON, J. G. ANDREWS, R. A. BRAND, *A biomechanical investigation of the human hip*, J. Biomech. vol. 11, 1978, 75 - 85,
4. J. W. DALLY, W. F. RILEY, *Experimental stress analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1965.
5. N. EIC, P. WEHN, *Measurement of the intra-abdominal pressure in relation to weight bearing of the lumbo-sacral spine*, J. Oslo City Hosp., vol. 12, No. 10, October 1962, 205 - 217.
6. S. GRACOVETSKY, H. F. FARFAN, C. LAMY, *A Mathematical model of the lumbar spine using an optimized system to control muscles and ligaments*, Orthop. Clin. N. A., vol. 8, No. 1, January 1977.
7. W. C. HUTTON, B. M. CYRON, *Spondylolysis. Role of the posterior elements in resisting intervertebral compressive force*, Acta Orthop. Scand., 1978, 607 - 609.
8. W. C. HUTTON, B. M. CYRON, J. R. R. STOTT, *The compressive strength of lumbar vertebrae*, J. Anat., 1979.
9. Y. KING LIU, J. MONROE, W. C. VAN BUSKIRK, *Inertial properties of a segmented cadaver trunk: their implications in acceleration injuries*, Aerospace Med., June 1971, 650 - 657.
10. H. S. LIN, Y. KING LIU, G. RAY, P. NIKRAVESH, *System identification for material properties of the intervertebral joint*, J. Biomech. vol. 11, 1978, 1 - 14.
11. M. NORDIN, V. M. FRANKEL, *Biomechanics of whole bones and bone tissue*, V. H. FRANKEL, M. NORDIN, *Basic biomechanics of the skeletal systems*, Lea and Febiger, Philadelphia 1, str. 15.

Резюме

МОДЕЛЬ ПОЯСНИЧНО-КРЕСТЦЕВОГО ПОЗВОНОЧНИКА ЧЕЛОВЕКА

Чтобы ответить на вопрос как часто появляющиеся заболевания поясничного позвоночника, особенно его нижних позвонков, могут возникать в следствие действия самих механических факторов, надо познать нагрузки элементов позвоночника. Анализ нагрузок и напряжений проведено употребляя методы моделирования.

Упрощенная механическая модель пояснично-крестцевого позвоночника представила возможным сделать математическую модель.

Результаты испытания математической модели использовано до конструкции фотоупругой модели состояния напряжений в поясничных позвонках.

Анализ концентрации напряжений (метод тонких пластинок) и анализ натяжения материала позвонка согласно гипотезе Губера (метод малых кубиков) показали результаты согласно с действительными трещинами и переломами поясничных позвонков. Это доказывает, что механические факторы влияют в большой степени на процессы ведущие к патологическим изменениям поясничного позвоночника человека.

Summary

MODEL OF THE HUMAN LUMBAR SPINE

To answer a question whether common disorders of the low lumbar vertebrae can be caused or developed by mechanical factors, authors analysed loads and stresses acting on human lumbar vertebrae using modelling methods. Simplified mechanical model was the first step to construct a mathematical model. Results of analysis of the mathematical model (forces acting on lumbar vertebrae) were used to load the three dimensional photoelastic model of a part of human lumbar spine.

Two different photoelastic methods: thin slices method to find stresses concentrations and small cubes method to find effective stresses according to criterion of Huber-von Mises, showed results which are in good agreement with modes of damage of real vertebrae.

The investigations presented in the paper have shown that mechanical factors can not be neglected in pathogenesis of the human lumbar spine.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 kwietnia 1983 roku

ENGINEERING APPLICATIONS OF PLANE AND GENERALIZED ISODYNE PHOTOELASTICITY

JERZY T. PINDERA,

*Department of Civil Engineering
University of Waterloo
Waterloo, Ontario, Canada N2L 3G1*

BOGDAN R. KRASNOWSKI

*Department of Civil Engineering
University of Waterloo
and
Institute of Aircraft Technology and Applied Mechanics
Warsaw Technical University, Warsaw, Poland*

Summary

Basic Concepts of Isodyne Photoelasticity

A new family of characteristic lines of plane stress fields has been introduced on the basis of Airy Stress Function and denoted as "Elastic Isodynes".

Isodynes are loci of points related to first derivatives of Airy Stress Function at which the total normal forces, acting on the corresponding sections, are constant. Being a derivative of a two-variable function, each isodyne field is related to a concrete direction called the "Characteristic Direction".

Isodynes directly yield values of the normal and shear stress components in chosen directions; — no additional relationships are needed. Basic analytical relations and characteristic features of the isodyne field are given in [3].

By using a measurement system called Isodyne Polariscope¹⁾, the theory of which is presented in several papers [1-4], it is possible to obtain fields of photoelastic isodynes directly related to the elastic isodynes. The photoelastic isodynes can only be obtained when the consequences following from the Rayleigh Model of Scattering are strictly observed and the corresponding transfer function is optimized: — e.g., the observation angles must be close to 90°, the azimuthal angles must be close to 0° or 180°, and the optical paths must be the same for all scattering points.

For three-dimensional stress states, the photoelastic isodynes are related to so-called generalized elastic isodynes. Such states occur in contact and stress concentration problems

¹⁾ Patent pending.

when the plane equilibrium equations are not valid — in such cases the isodyne photoelasticity yields data on the third normal stress components.

The overall transfer function of the isodyne polariscope has been designed to satisfy requirements following from the theory of the elastic and photoelastic isodynes, including the generalized isodynes. This function has been taken as the major component of the physical and mathematical models of the isodyne polariscope. When the design conditions are satisfied, the isodyne polariscope can be treated as a zero-order, time-invariant instrument.

Applications

Within the framework of the theoretical conditions and constraints the isodyne polariscope can be readily and inexpensively applied to determine and/or analyze various classes of important engineering problems. Some typical engineering applications are:

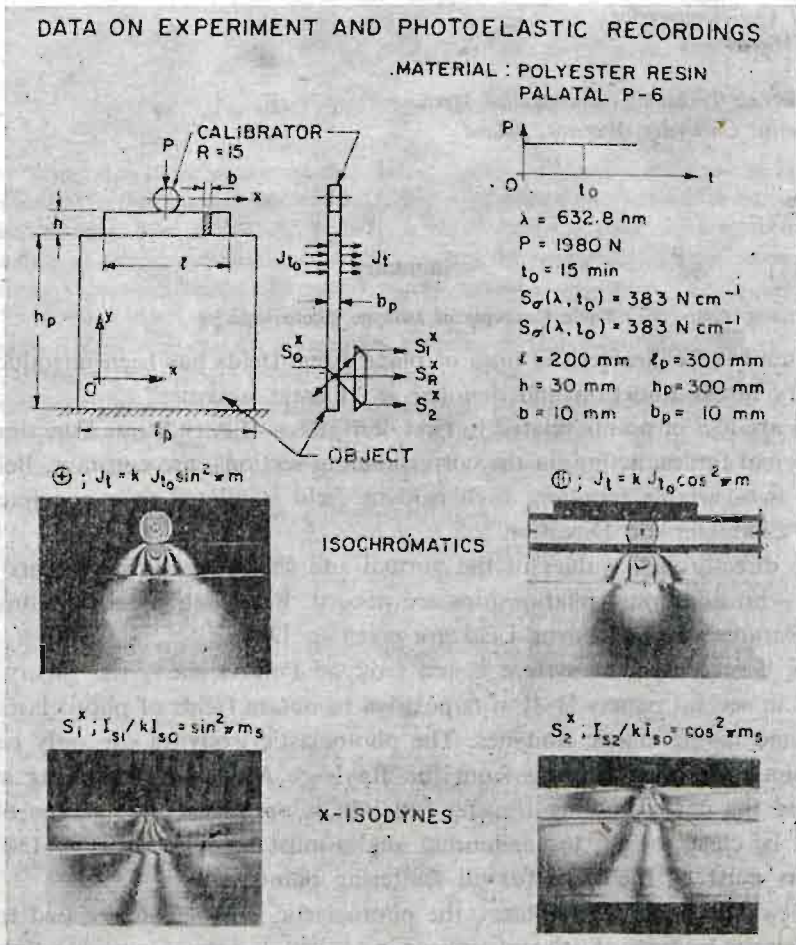


Fig. 1a A sample of analysis of a contact problem: a beam on a square plate. Set of complementary photoelastic data: transmission isochromatics and two complementary families of isodynes.

PHOTOELASTICALLY DETERMINED NORMAL STRESS COMPONENTS AND LINES SEPARATING COMPRESSIVE AND TENSILE STRESSES

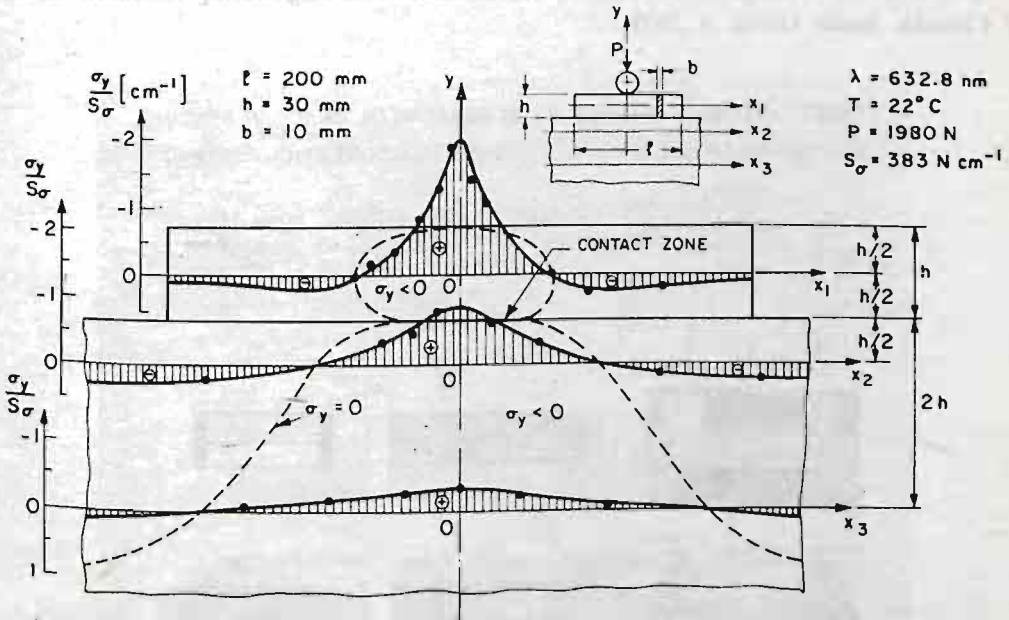


Fig. 1b A beam on a square plate. Evaluated relations: distribution of normal stress components along the beam axis and in two parallel cross-sections of plate; geometric loci of points in beam and plate where the normal stress component is equal to zero.

- verification of applicability of particular solutions of the theory of elasticity: analytical, numerical and hybrid evaluations;
- stress states in planè and three-dimensional contact problems;
- crack tip mechanics problems: fracture criteria including discussion of the concept of stress intensity factor;
- three-dimensional stress states in components of composite structures, including structures with internal cracks;
- thermal stresses: transient and stationary.

Examples of applications are given in Figures 1-6.

Conclusions

It has been demonstrated that the Isodyne Photoelasticity opens new horizons in experimental stress analysis, inaccessible to methods of classical transmission photoelasticity. However, because of the high sensitivity and resolution of isodyne photoelasticity methods, it is necessary to develop and apply stronger theoretical foundations of the interaction between the actual state of deformation and propagation of radiation; e.g., it is necessary to check in every concrete case of stress analysis whether the relations of plane elasticity are applicable.

Acknowledgement

This research is supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada, under Grant A 2939.

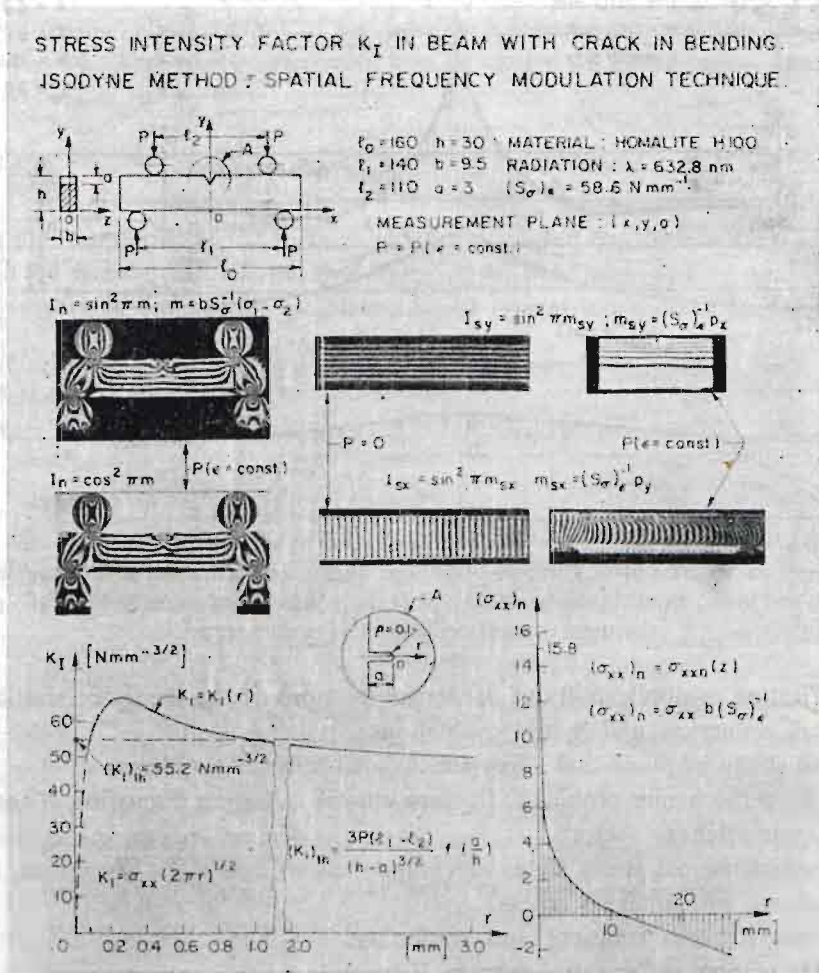


Fig. 2 Determination of stress intensity factor K_I in a beam with a crack, in bending, using the isodyne frequency modulation technique.

3D-STRESS DISTRIBUTION ALONG NOTCH TIP IN THICK BEAM

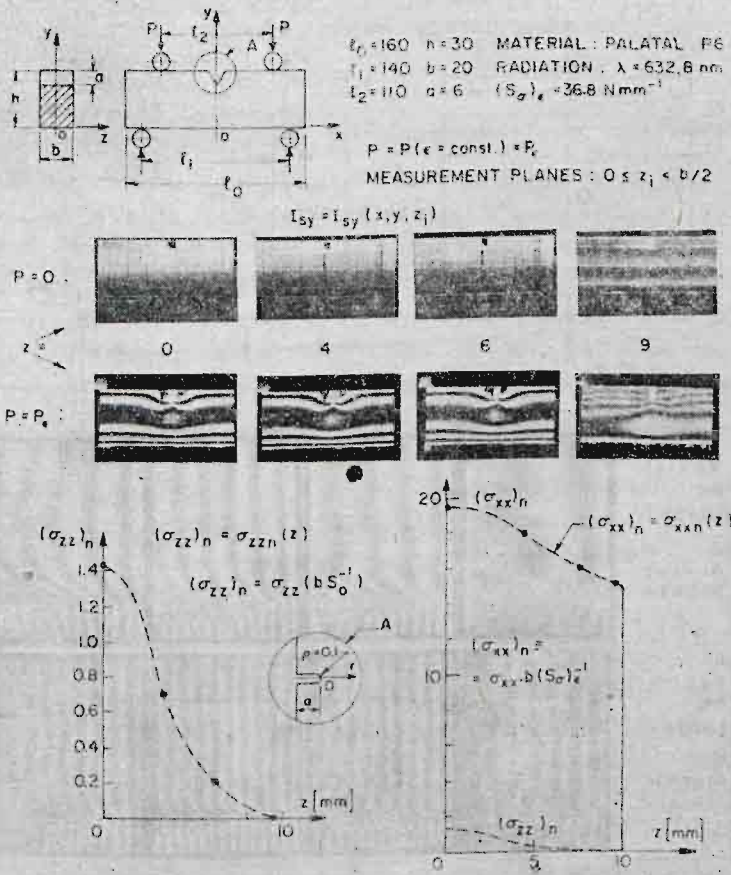


Fig. 3 Stress distribution at the notch tip in a beam in pure bending, along the beam thickness.

ISODYNE FIELDS IN OUTER PLYS OF A THREE-PLY STRUCTURE

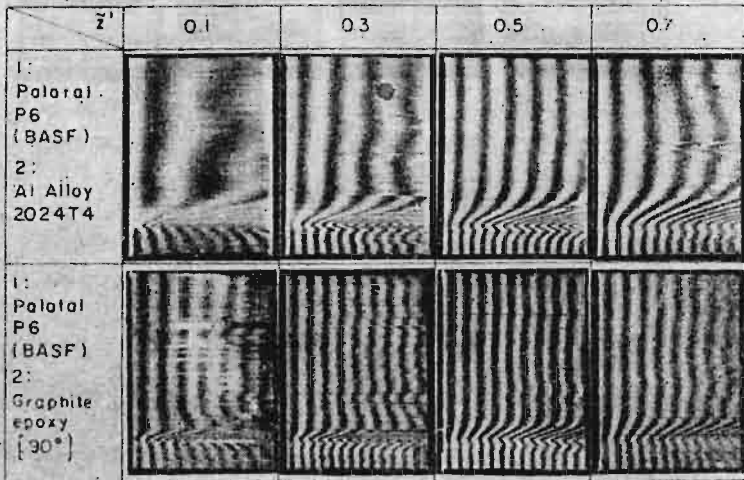
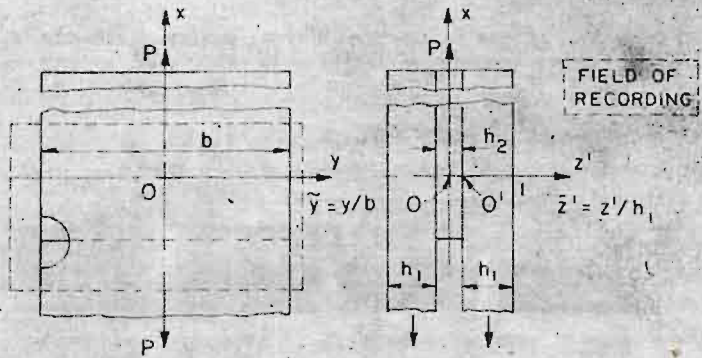


Fig. 4a Determination of interlaminar stresses in a composite structure: Isodyne fields in outer plies of a three-ply structure, at various distances from the interface.

PEEL STRESS AND AXIAL STRESS DISTRIBUTIONS CLOSE TO THE INTERFACE
ANALYTICAL-EXPERIMENTAL COMPARISON FOR
PALATAL-GRAPHITE/EPOXY-PALATAL SPECIMEN

1. $(\sigma_{xx})_n = \sigma_{xx}(x=0, \tilde{y}, \tilde{z}'=0^+) / (\sigma_{xx})_{\text{LAMINATION}}$

2. $(\sigma_{zz})_n = \sigma_{zz}(x=0, \tilde{y}, \tilde{z}'=0^+) / (\sigma_{xx})_{\text{LAMINATION}}$

3. $2(\tau_{13})_n = (\sigma_{xx})_n - (\sigma_{zz})_n$

RESULTS

--- EXPERIMENTAL

— ANALYTICAL

(Hsu, Herakovich)

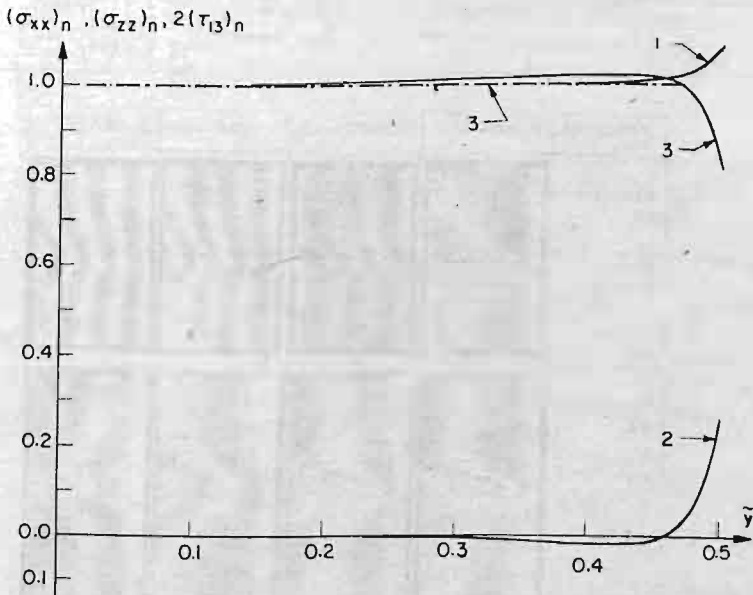


Fig. 4b Comparison of experimental and analytical results for stress distribution close to the interface.

ISODYNE FIELDS IN OUTER PLIES OF A THREE-PLY STRUCTURE WITH INTERNAL CRACK

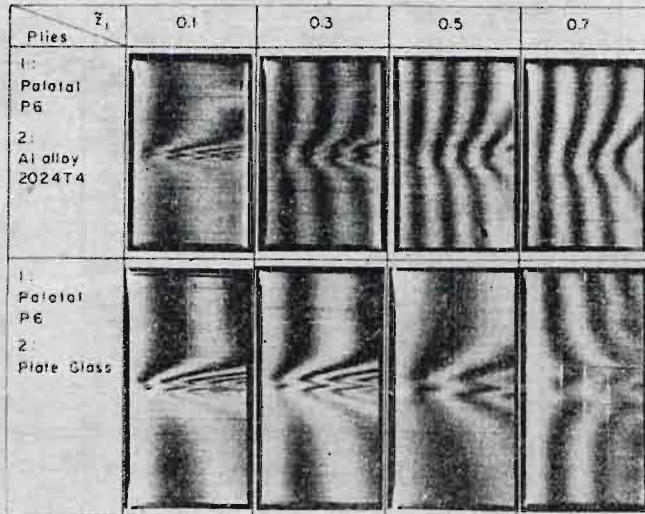
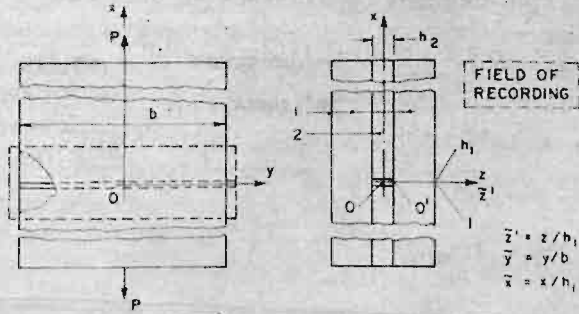


Fig. 5a Determination of stress distribution in a three-ply composite structure with internal crack. Scheme of a system and isodyne fields.

NORMALIZED STRESS DISTRIBUTIONS IN THE PALATAL-AI ALLOY-PALATAL SPECIMEN WITH A CRACK

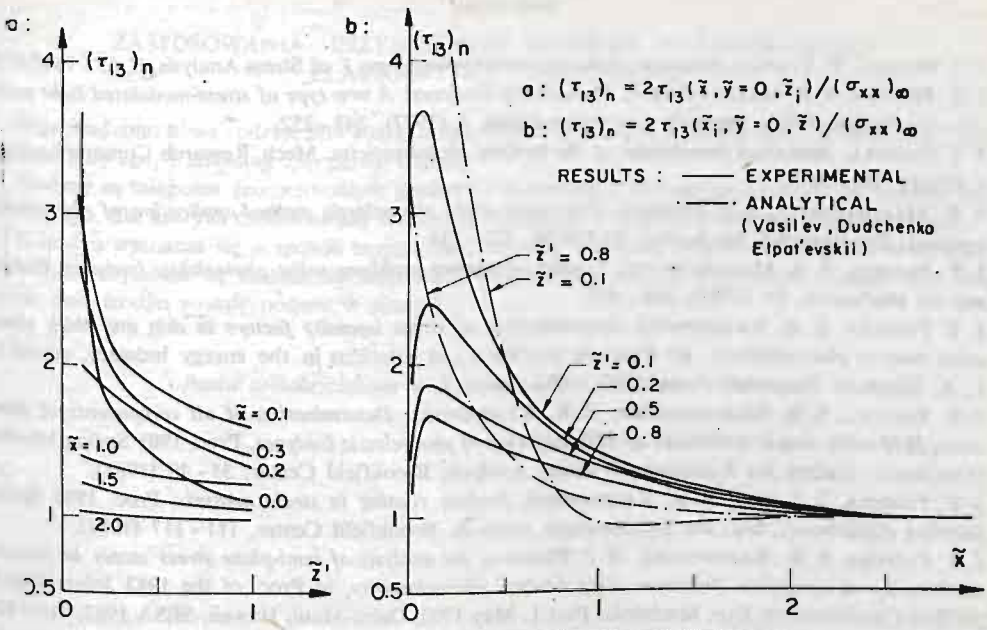


Fig. 5b Comparison of experimental and analytical results.

MODULATION OF THE RESIDUAL ISODYNE FIELD BY A LOCAL HEAT SOURCE

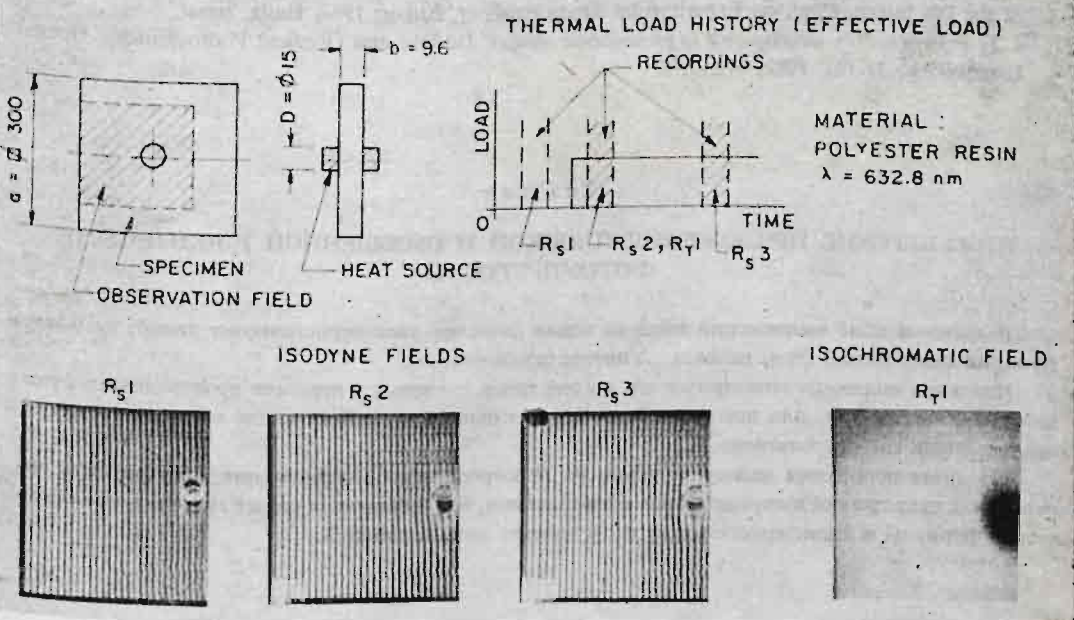


Fig. 6 Sample of application of isodyne photoelasticity to determination of components of thermally induced stresses, using the isodyne spatial frequency modulation technique.

References

1. J. T. PINDERA, P. STRAKA, *Response of the integrated polariscope*, J. of Stress Analysis, 8, 65 - 76 (1973).
2. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, *Photoelastic Isodynes: A new type of stress-modulated light intensity distribution*, Mech. Research Communications, 4 (1977), 247 - 252.
3. J. T. PINDERA, *Analytical foundations of the isodyne photoelasticity*, Mech. Research Communications, 8 (1981), 391 - 397.
4. S. B. MAZURKIEWICZ, J. T. PINDERA, *Integrated plane photoelastic method-application of photoelastic isodynes*, Experimental Mechanics, 19 (1979), 225 - 234.
5. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, *Studies of contact problems using photoelastic isodynes*, Experimental Mechanics, 21 (1981), 448 - 455.
6. J. T. PINDERA, B. R. KRASNOWSKI, *Determination of stress intensity factors in thin and thick plates using isodyne photoelasticity*, in: Fracture problems and solutions in the energy industry, edited by L. A. Simpson, Pergamon Press, 1982, 147 - 156.
7. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, B. R. KRASNOWSKI, *Determination of all components of plane stress field using simple techniques of differentiation of photoelastic isodynes*, Proc. 1981 Spring Meeting (Dearborn), Society for Experimental Stress Analysis, Brookfield Center, 35 - 40 (1981).
8. J. T. PINDERA, S. S. ISSA, B. R. KRASNOWSKI, *Isodyne coating in strain analysis*, Proc. 1981 Spring Meeting (Dearborn), Soc. for Experimental Analysis, Brookfield Center, 111 - 117 (1981).
9. J. T. PINDERA, B. R. KRASNOWSKI, M. J. PINDERA, *An analysis of semi-plane stress states in fracture mechanics and composite structures using isodyne photoelasticity*, in Proc. of the 1982 Joint (JSME/SESA) Conference on Exp. Mechanics Part 1, May 1982, Oahu-Maui, Hawaii, SESA 1982, 417 - 421.
10. J. T. PINDERA, B. R. KRASNOWSKI, M.-J. PINDERA, *Determination of interface stresses in composite structures*, in Proc. of the 1982 Joint (JSME/SESA) Conference on Exp. Mechanics, Part 1, May 1982, Oahu-Maui, Hawaii, SESA 1982, 18 - 22.
11. J. T. PINDERA, B. R. KRASNOWSKI, *Isodyne Photoelasticity - Principles and applications*, in Proc. of the 7th Intern. Conf. on Experimental Stress Analysis, August 1982, Haifa, Israel.
12. J. T. PINDERA, *New development in photoelastic studies: Isodyne and Gradient Photoelasticity*, Optical Engineering, 21 (4), 1982, 672 - 678.

Резюме

ИНЖЕНЕРСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ И ОБОБЩЕННОЙ ИЗОДЫНОВОЙ
ФОТОУПРУГОСТИ

В плоском поле напряжений введена новая фамилия характеристических линий, на основе функции напряжений Эри, названа „Упругие изодыны“.

Изодыны являются геометрическим местом точек связанных с первыми производными функции напряжений Эри, для которых общие нормальные силы, действующие в определенных сечениях являются постоянными.

Изодыны позволяют непосредственно на непосредственное определение нормальных и касательных напряжений в определенных направлениях, без добавочных связей. Основные аналитические формулы и характеристические поля изодын даны в работе 3.

Streszczenie

ZASTOSOWANIA INŻYNIERSKIE PŁASKIEJ I UOGÓLNIONEJ
ELASTOPTYKI IZODYNOWEJ

Wprowadzono nową rodzinę linii charakterystycznych w płaskim polu naprężeń, w oparciu o funkcję naprężeń Airy'ego, i nazwaną „sprężyste izodyny”.

Izodyny są miejscem geometrycznym punktów związanych z pierwszymi pochodnymi funkcji naprężeń Airy'ego, dla których całkowite siły normalne, działające w odpowiednich przekrojach są stałe.

Z izodyn wyznacza się w sposób bezpośredni normalne i styczne składowe naprężenia w wybranych kierunkach, zbyteczne są dodatkowe zależności. Podstawowe związki analityczne i cechy charakterystyczne pola izodyn zostały podane w pracy [3].

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 kwietnia 1983 roku

DOŚWIADCZALNA ANALIZA NAPRĘŻEŃ TERMOSPĘŻYSTYCH METODĄ ELASTOOPTYCZNA

ZDZISŁAW DYLAĞ

Politechnika białostocka

ZBIGNIEW ORŁOŚ

WAT Warszawa

1. Wprowadzenie

Analiza naprężeń termosprężystych ma duże znaczenie dla wielu dziedzin techniki. Między innymi naprężenia te należy uwzględniać w przypadku urządzeń i maszyn energetycznych; silników spalinowych, pojazdów mechanicznych, samolotów oraz elementów konstrukcji budowlanych. Naprężenia termosprężyste można określać metodami zarówno teoretycznymi, jak i doświadczalnymi.

Spśród metod teoretycznych wyróżniają się ze względu na rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej metody numeryczne z metodą elementów skończonych na czele.

Z metod doświadczalnych stosowanych w rozpatrywanych zagadnieniach można wymienić metodę opartą na zastosowaniu tensometrii elektrozestancyjnej [16] oraz metody optyczne [1] ÷ [15], [18]. W tych ostatnich najczęściej posługujemy się modelami wykonanymi z optycznie czułych materiałów prześwielanych światłem spolaryzowanym. Analiza otrzymanych w tego rodzaju badaniach prążków interferencyjnych przy równoczesnym pomiarze temperatur w różnych punktach modelu prowadzi do określenia naprężeń termosprężystych w stanach stacjonarnych i niestacjonarnych. Omawianą metodę stosowali autorzy w kilku pracach [4] ÷ [8], [19]. Niektóre z otrzymanych w nich wyników będą przykładowo zwięźle naświetlone i przedyskutowane dla uzyskania wniosków o przydatności i kierunkach rozwoju tej metody. Nie siląc się na chronologiczny opis prac w tej dziedzinie można wymienić niektóre bardziej charakterystyczne badania prowadzone przez różnych autorów. Z dawniejszych prac podstawowe znaczenie mają badania G. GERARDA, A. C. GILBERTA, H. TRAMPSCHA [1], [2]. Prace te dotyczyły zastosowania elastooptyki do rozwiązywania zarówno płaskich, jak i przestrzennych zagadnień termosprężystych.

Zagadnienie rozkładu naprężeń w elementach z karami podlegających nagłym obciążeniom cieplnym rozpatrywał H. BECKER w pracy [3]. W wyniku rozważań teoretycznych oraz przeprowadzonych doświadczeń elastooptycznych stwierdził, że w jednorodnych elementach płaskich górną granicę naprężenia termosprężystego stanowi wartość $\beta E \Delta T$.

gdzie: β — współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału,
 E — moduł sprężystości wzdłużnej,
 ΔT — przyrost temperatury.

H. Becker określił umownie tak zwaną odległość penetracji s temperatury w ciele, jako odległość od warstwy powierzchniowej warstwy wewnętrznej, w której występuje przyrost temperatury równy $0,02 \Delta T$. W przypadku gdy odległość s jest mniejsza od połowy promienia krzywizny karbu, zdaniem Beckera można nie liczyć się z działaniem karbu jako źródła spiętrzenia naprężeń.

W pracy [9] A. AJOVALASIT przedstawił badania elastooptyczne płaskich tarcz kołowych z otworami rozmieszczonymi na współśrodkowych okręgach. Każda tarcza była oziębiana na swym brzegu wewnętrznym za pomocą suchego lodu przy czym badano stan stacjonarny wyznaczając naprężenia na brzegach poszczególnych otworów.

Podsumowanie pewnego okresu badań do 1975 r. jest zawarte w pracy Ch. P. BURGERA [11] omawiającej niektóre problemy analizy naprężeń termosprężystych metodami elastooptycznymi. Wymieniony autor zajmuje się również zagadnieniem naprężeń wywołanych nagłym obciążeniem cieplnym [12] za pomocą wymienników zawierających ciekły azot względnie mieszaninę alkoholu z suchym lodem. Wyniki tych badań wskazują na trudności w praktycznej realizacji udaru cieplnego, co wyraża się faktem wystąpienia maksymalnej wartości naprężenia o pewnym krótkim okresie czasu od początku przyłożenia obciążenia. Stwierdzono również, że w przypadku płytek grubszych wartości te zbliżają się do teoretycznie możliwych do przewidzenia wartości naprężeń przy dwukierunkowym ograniczeniu swobody rozszerzania się warstwy brzegowej płytki.

M. TSUJI i M. ODA badali elastooptycznie naprężenia w tarczach zawierających kołowe otwory względnie wcięcia przykrawędziowe, stosowali przy tym podgrzewanie modelu [13]. Zagadnienie analizy niestacjonarnych naprężeń termicznych rozpatrywali w przypadku przykrawędziowych otworów eliptycznych J. MISKIOGLU i C. P. BURGER w pracy [17].

E. MATSUMOTO, S. SUMI oraz T. SEKIYA [10] badali elastooptycznie niestacjonarne naprężenia ciepłe w ażurowych ściankach dwuteowników podlegających chłodzeniu pólki.

W kolejnych pracach [14] i [15] F. A. KHAYYAT i P. STANLEY przedstawili wykorzystanie metody integralnych efektów optycznych dwójłomności wymuszonej do analizy stacjonarnych stanów naprężeń termosprężystych w tulejach zawierających wewnętrzne i zewnętrzne karby obrączkowe.

2. Podstawy doświadczalnej analizy naprężeń termosprężystych

W doświadczalnych metodach analizy naprężeń termosprężystych badania przeprowadza się za pomocą modeli geometrycznie podobnych do obiektu, z zachowaniem podobieństwa sposobu obciążenia cieplnego. Jest to z jednej strony zaletą metody z drugiej zaś pewnym utrudnieniem jej realizacji. Podstawową zaletą jest to, że badaniu podlegają modele wykonane z określonego tworzywa, w których występują zjawiska fizyczne o podobnym charakterze, jak ma to miejsce w obiektach rzeczywistych — prototypach. Ważną sprawą jest tu ustalenie pewnych kryteriów podobieństwa dla uzyskania możli-

wości ilościowej oceny wyników badań modelowych. Istotnym utrudnieniem jest konieczność uwzględnienia dość znacznej liczby czynników wpływających na przebieg rozpatrywanego zjawiska. Wśród czynników, od których zależą wartości naprężeń termosprężystych należy wyróżnić: geometrię i rozmiary obiektu, sposób jego podparcia, materiałowe charakterystyki mechaniczne i cieplne, sposób obciążenia cieplnego związany z określonym rodzajem wymiany ciepła, rozkład temperatur, czas i charakter przebiegu obciążenia cieplnego.

Jak zaznaczono poprzednio badane są modele geometrycznie podobne do obiektu. Z tego względu do określania rozmiarów przedmiotu (modelu względnie prototypu) wystarczy podać pewien jego charakterystyczny wymiar o wartości l . Do niezbędnych charakterystyk materiałowych uwzględnianych w analizie naprężeń termosprężystych zaliczymy: moduł sprężystości wzdłużnej E , współczynnik Poissona ν , współczynnik rozszerzalności liniowej β , współczynnik wyrównania ciepła λ , ciepło właściwe materiału c_p , gęstość materiału ρ , współczynnik przewodzenia temperatury $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$, którego wartość wynika z trzech podanych uprzednio charakterystyk materiałowych.

O wartościach naprężeń termosprężystych, które oznaczymy ogólnie symbolem σ decydują wartości zmian temperatury w poszczególnych punktach ciała oraz założone ograniczenia swobody przemieszczania się poszczególnych jego punktów. Z kolei pole temperatur w ciele wynika ze sposobu obciążenia cieplnego, w szczególności z warunków brzegowych i początkowych rozkładu temperatury. W przypadku konwekcyjnej wymiany ciepła stosuje się do ilościowej oceny ilości ciepła przechodzącego od ośrodka otaczającego ciało do jego wnętrza, tzw. współczynnik przejmowania ciepła α . Rozpatrując proces wymiany ciepła oraz zmienne w czasie t pole temperatury należy uwzględnić konieczność spełnienia kryteriów podobieństwa modelowego. W kryteriach tych ważną rolę odgrywają tak zwane liczby kryterialne, spośród których wymienimy liczbę Biota Bi oraz liczbę Fouriera Fo . Wielkości te wyrażają się wzorami

$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad (1)$$

$$Fo = \frac{at}{l^2}. \quad (2)$$

W badaniach modelowych należy dążyć do tego, aby liczby kryterialne były jednakowe dla modelu i dla prototypu.

Wymianione poprzednio charakterystyki materiałowe są na ogół funkcjami temperatury. W wielu przypadkach jednak dla uproszczenia przyjmuje się je za wielkości stałe w pewnym zakresie temperatur.

Wynikające ze zmiany temperatury ΔT względne odkształcenia liniowe ε_T wyrażają się wzorem

$$\varepsilon_T = \beta \Delta T, \quad (3)$$

gdzie:

β — współczynnik rozszerzalności liniowej materiału.

W zakresie ważności prawa Hooke'a składowe σ_{ij} tensora naprężenia są związane

ze składowymi ε_{ij} tensora odkształcenia wzorami

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} s \delta_{ij} \right) + \beta \Delta T \delta_{ij}, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2G} \left\{ \varepsilon_{ij} + \frac{1}{1-2\nu} [\nu \vartheta - (1+\nu) \beta \Delta T] \delta_{ij} \right\}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5)$$

gdzie:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ — moduł sprężystości poprzecznej materiału,}$$

E — moduł sprężystości wzdłużnej materiału,

ν — współczynnik Poissona

$$s = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\vartheta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Przy wykluczeniu swobody odkształcania się w kierunku 1 ($\varepsilon_{11} = 0$) rozpatrywanego obszaru i założeniu $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ otrzymujemy wzór na naprężenie termosprężyste σ_{11} w jednoosiowym stanie naprężenia.

$$\sigma_{11} = -E\beta\Delta T. \quad (6)$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia, przy wykluczeniu odkształceń w dwóch kierunkach 1 i 2 ($\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$) i założeniu $\sigma_{33} = 0$, wartości naprężeń termosprężystych σ_{11} i σ_{22} wyrażają się wzorem

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{E\beta\Delta T}{1-\nu}. \quad (7)$$

W przypadku trójosiowego stanu naprężenia przy trójosiowym ograniczeniu swobody odkształceń w kierunkach 1, 2 i 3 ($\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$) wartość naprężeń termosprężystych określa wzór

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{E\beta\Delta T}{1-2\nu}. \quad (8)$$

Przytoczone proste zależności (6)–(8) pozwalają na orientacyjną wstępną ocenę maksymalnych wartości naprężeń termosprężystych w różnych stanach ograniczenia swobody odkształcenia ciała sprężystego.

Wzór (5) znajduje zastosowanie m.in. przy wyznaczaniu naprężeń termosprężystych na podstawie pomiarów tensometrycznych.

W pracy [18] wyprowadzono warunek podobieństwa modelowego dla naprężeń termosprężystych w przypadku płaskiego stanu odkształcenia, w postaci ilorazu naprężeń

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_m} = \frac{E_p \beta_p (1-\nu_m)}{E_m \beta_m (1-\nu_p)} \frac{\Delta T_p}{\Delta T_m}, \quad (9)$$

gdzie indeksy m i p oznaczają wielkości dotyczące odpowiednio modelu i prototypu. Zależność (9) można uzyskać wprost dzieląc stronami naprężenie określone dla prototypu i modelu na podstawie związku (7). Łatwo również można oszacować wpływ różnicy wartości współczynników ν_p i ν_m na stosunek naprężeń w prototypie i modelu gdy mamy do czynienia z przypadkami wyrażonymi wzorami (7) i (8). Z wzorów (1) i (2) zastosowanych dla prototypu i modelu przy założeniu identyczności wartości liczb B_i i F_o wynikają

związki określające ściśle podobieństwo modelowe

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_m} = \frac{\lambda_p}{\lambda_m} \frac{l_m}{l_p}, \quad (10)$$

oraz

$$\frac{t_p}{t_m} = \frac{a_m}{a_p} \frac{l_m^2}{l_p^2}. \quad (11)$$

Wzór (11) umożliwia określenie wymaganego stosunku współczynników przejmowania ciepła dla prototypu i modelu. Ze wzoru (11) można obliczyć wartość czasu t_p dla prototypu odpowiadającego czasowi t_m mierzonemu dla modelu.

W praktyce zazwyczaj ściśle spełnienie wymienionych kryteriów podobieństwa jest bardzo trudne.

W analizie naprężeń termosprężystych wymagane jest określenie zmian pola temperatur występujących w badanym obiekcie. W tym celu stosuje się różne metody pomiarów temperatur. W metodach punktowych wykorzystuje się często miniaturowe termoelementy połączone z odpowiednimi różnymi układami rejestracji wartości temperatury w poszczególnych punktach pomiarowych [24].

Termoelementy zakłócają w pewnym stopniu badane pole temperatury ze względu na wystąpienie lokalnych nierównomierności warstwy powierzchniowej modelu, spowodowanych obecnością spojenia termoelementu oraz doprowadzaniem względnie odprowadzaniem ciepła z otoczenia przez jego przewody. Z ostatniego powodu należy przewody te prowadzić wzdłuż izoterm, przebieg których nie zawsze można przewidzieć.

Dobre usługi w analizie pola temperatury oddaje metoda termowizyjna. Ta bezkontaktowa metoda pozwala na szybkie uzyskanie układów izoterm w kolejnych fazach badania. Z przeprowadzonych badań własnych wynika, że w przypadku typowej aparatury firmy AGA lepsze wyniki, tzn. bardziej zróżnicowane i wyraziste izotermy, uzyskuje się dla pól temperatur o wartościach wyższych od temperatury pokojowej a więc przy zastosowaniu dodatnich źródeł ciepła.

3. Metody badań przy użyciu światła spolaryzowanego

Stosowane techniki elastooptycznych badań naprężeń termosprężystych stanowią obecnie wyspecjalizowane dziedziny metod mechaniki eksperymentalnej.

Ważne i wciąż jeszcze aktualne znaczenie mają badania modeli płaskich prześwietlanych na wskroś światłem spolaryzowanym. Ta metoda stosowana wielokrotnie w pracach własnych odznacza się względną prostotą realizacji i możliwością wykorzystania w rozwiązywaniu zagadnień niestacjonarnych. Od początku obciążenia cieplnego prowadzi się automatyczną rejestrację zmian temperatury w wybranych punktach modelu oraz fotografuje układy izochrom i izoklin w kolejnych chwilach czasowych. Na podstawie tych danych można określić wartości różnic naprężeń głównych oraz poszczególne naprężenia tam gdzie udaje je się wyznaczyć na podstawie uzupełniających informacji.

W badaniu elastooptycznym modeli płaskich obowiązuje zależność

$$\sigma_1 - \sigma_2 = K_{\sigma m}, \quad (12)$$

gdzie:

σ_1 i σ_2 — naprężenia główne w płaszczyźnie modelu,

K_{om} — elastoptyczna naprężeniowa stała modelowa, zależna od rodzaju materiału modelu, jego grubości oraz długości fali zastosowanego w polaryskopie światła,

m — rząd izochromy.

Wprowadzając elastoptyczną naprężeniową stałą materiałową K_σ otrzymujemy

$$K_\sigma = K_{om}h, \quad (13)$$

gdzie:

h — grubość modelu.

W termosprężystych badaniach elastoptycznych wprowadza się wielkość Q_t , którą określa się nazwą termosprężysty współczynnik jakości i wyraża wzorem:

$$Q_t = \frac{E\beta}{K_\sigma}. \quad (14)$$

Sens wymienionej wielkości można wyjaśnić zakładając przypadek jednoosiowego stanu naprężenia termosprężystego o wartości wyrażonej wzorem (6). Temu naprężeniu odpowiada pewien rząd izochromy m określony wzorem (12), przy czym jedno z występujących tam naprężeń jest równe zero. Przyjmując oznaczenia $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_2 = 0$ i uwzględniając zależności (6), (12) i (14)

$$m = -Q_t h \Delta T. \quad (15)$$

Z równania (15) wynika, że przy danej grubości modelu i różnicy temperatur rząd izochromy jest tym większy im większy jest współczynnik Q_t .

Zasada opisanej metody badań jest również wykorzystana w badaniu modeli przestrzennych przy zastosowaniu optycznie czulej warstwy wklejonej wewnątrz modelu między przylegającymi sklejonymi z nią filtrami polaryzacyjnymi oraz ćwierćfalowymi dla uzyskania polaryzacji kołowej. Tego typu warstwa z wymienionymi filtrami tworzy układ wewnętrznego polaryskopu w modelu, rejestrującego efekty dwójłomności wymuszonej w warstwie, przy wykluczeniu wpływu optycznego przezroczystych części modelu otaczających warstwę z filtrami.

Metoda jest szczególnie efektywna w badaniu elementów grubościennych posiadających płaszczyznę symetrii, w której usytuowuje się opisaną warstwę wraz z filtrami.

W analizie naprężeń termosprężystych ścian, których płaszczyzna środkowa nie jest płaszczyzną symetrii modelu przestrzennego, bądź też obciążenie cieplne nie jest rozłożone symetrycznie, optycznie czuła warstwa wraz z filtrami wklejona w płaszczyźnie środkowej rejestruje jedynie efekty odpowiadające płaskiemu stanowi naprężenia. Efekty ewentualnego zginania ściany zostają wyeliminowane. Rejestrowanie natomiast samego zginania, można przeprowadzić za pomocą modeli z wklejoną w powierzchni środkowej warstwą odbłaskową stosując metodę prześwietlania jednostronnego.

W badaniach odkształceń warstw zewnętrznych stosuje się metodę warstwy powierzchniowej. W tej metodzie do powierzchni badanego obiektu przykleja się optycznie czułą ciekłą warstwę z podkładem odbłaskowym. Powstałe efekty optyczne analizuje się za pomocą polaryskopów odbłaskowych. Dla uzyskania dostatecznej dokładności pomiaru

należy dążyć do stosowania warstw bardzo cienkich w porównaniu z rozmiarami modelu co jednak wydatnie zmniejsza czułość metody.

W badaniach brył osiowo symetrycznych wykorzystuje się również metodę elastooptyki integralnej, w której analizuje się efekty interferencyjne prześwietlania modelu światłem spolaryzowanym w kierunku prostopadłym do osi modelu (zmienna długość drogi promieni świetlnych w modelu).

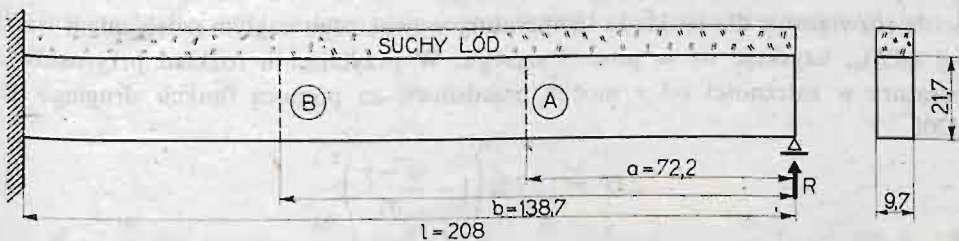
Metoda wymaga uzupełniających obliczeń analitycznych dla wyznaczenia poszczególnych składowych badanego stanu naprężenia.

4. Przykłady zrealizowanych badań

Przedstawione rozważania z zakresu eksperymentalnej analizy naprężeń termosprężystych metodą elastooptyczną zilustrujemy przykładami zaczerpniętymi z badań własnych.

Metoda umożliwi określanie naprężeń termosprężystych dla dowolnie skomplikowanych obiektów oraz w wielu przypadkach daje podstawę do opisu przebiegu rozpatrywanych zjawisk za pomocą względnie prostych zależności analitycznych.

4.1. **Belka statycznie niewyznaczalna.** Przedmiotem badań były niestacjonarne efekty elastooptyczne w modelu jednoprzęsłowej statycznie niewyznaczalnej belki o przekroju prostokątnym¹⁾. Model (rys. 1) był obciążony wzdłuż górnej krawędzi nagle przyłożonym ujemnym źródłem ciepła powodującym wystąpienie określonego spadku temperatury włókien skrajnych. Podczas badań rejestrowano obrazy izochrom wynikające równocześnie ze zmian temperatury belki wzdłuż jej wysokości oraz wystąpienia reakcji podporowej (rys. 2).



Rys. 1. Schemat badanej belki statycznie niewyznaczalnej

Przy założeniu jednoosiowego stanu naprężenia w belce oraz przyjęciu, że temperatura zmienia się jedynie wzdłuż wysokości przekroju można naprężenia σ_x w belce o jednym końcu utwierdzonym a drugim — swobodnym wyrazić wzorem

$$\sigma_x = -\beta E_{,1} T + \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \beta E_{,1} T dy + \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^c \beta E_{,1} T y dy, \quad (17)$$

¹⁾ W badaniach eksperymentalnych brał udział mgr inż. P. Kaidasz.

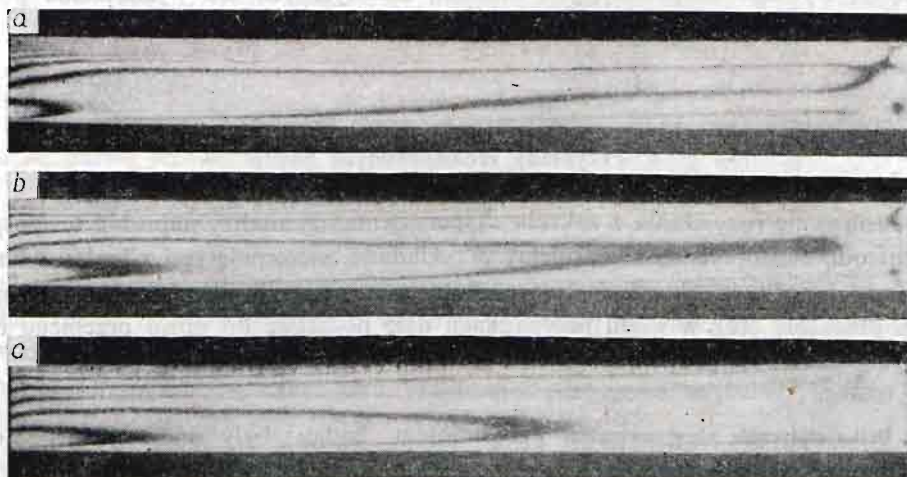
gdzie:

β i E — współczynnik rozszerzalności liniowej materiału modelu oraz moduł sprężystości wzdłużnej

ΔT — przyrost temperatury

y — odległość od osi belki

c — połowa wysokości poprzecznego przekroju belki.



Rys. 2. Obraz izochrom po czasie t od chwili przyłożenia obciążenia cieplnego

a) $t = 75$ s,

b) $t = 152$ s,

c) $t = 280$ s.

W celu przybliżonego określenia rozkładu temperatur założymy, że model jest izolowany cieplnie na ściankach bocznych i dolnej.

Ścisłe rozwiązanie dla rozkładu temperatury wywołanego nagłym oziębieniem warstwy górnej $(\Delta T)_0$, uzyskuje się w postaci szeregu. W przybliżeniu rozkład przyrostów ΔT temperatury w zależności od y można przedstawić za pomocą funkcji drugiego stopnia [20]

$$\Delta T = (\Delta T)_0 \left(1 - \frac{c-y}{q_1} \right)^2 \quad (18)$$

gdzie:

q_1 — odległość od warstwy skrajnej do pierwszej warstwy, w której w danej chwili czasowej t nie wystąpił przyrost temperatury ($\Delta T = 0$)

Wartość q_1 można wyrazić wzorem

$$q_1 = 3.36 \sqrt{at}, \quad (19)$$

gdzie:

a — współczynnik wyrównywania temperatury.

Przyjmując określoną wartość zmiennej czasowej t , liczonej od początku obciążenia cieplnego można po podstawieniu (18) do (17) wyznaczyć naprężenie σ_x w dowolnym punkcie.

Na podstawie wartości rzędów izochrom w skrajnych włóknach dwóch wybranych przekrojów belki można dla danej chwili czasowej wyznaczyć wartość statycznie niewyznaczalnej reakcji podporowej.

W pierwszej kolejności mnożąc zarejestrowane wartości rzędu izochromy dla skrajnych włókien górnych g i dolnych d przekrojów A i B (zredukowanych o wartość wstępnego efektu brzegowego) przez odpowiednią wartość naprężeniowej elastoptycznej stałej modelowej $K_{\sigma m}$ otrzymano wartości sumarycznych naprężeń σ_g^A , σ_d^A , σ_g^B i σ_d^B wywołanych łącznym wpływem temperatury i nadliczbowej reakcji podporowej R . Na wartości tych naprężeń składają się odpowiednie naprężenia od temperatury (T) i od nadliczbowej reakcji (R), czyli dla dowolnego przekroju:

$$\begin{aligned} \sigma_{Tg}^i + \sigma_{Rg}^i &= \sigma_g^i, \\ \sigma_{Td}^i + \sigma_{Rd}^i &= \sigma_d^i, \end{aligned} \quad (i = A, B), \quad (20)$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma_{Rg}^i &= \frac{Rl_i}{W}, \\ \sigma_{Rd}^i &= -\frac{Rl_i}{W}, \end{aligned} \quad (i = A, B), \quad (21)$$

gdzie:

W — wskaźnik wytrzymałości na zginanie przekroju beleczki.

Po podstawieniu (21) do (20) otrzymuje się cztery równania o 3 niewiadomych. Pozwala to na uśrednioną korektę wyników obserwacji elastoptycznych, ze względu na konieczność spełnienia warunku

$$\sigma_g^A + \sigma_d^A = \sigma_g^B + \sigma_d^B, \quad (22)$$

przy założeniu jednakowych wartości naprężeń σ_{Tg} i σ_{Td} w rozpatrywanych przekrojach dostatecznie oddalonych od końcowych przekrojów belki.

Ostatecznie uzyskuje się następujące wzory na poszukiwane naprężenia cieplne w belce swobodnie podpartej oraz reakcję podporową R belki statycznie niewyznaczalnej:

$$\begin{aligned} \sigma_{Tg} &= \frac{\sigma_g^A - \sigma_g^B}{b - a}, \\ \sigma_{Td} &= \frac{\sigma_d^A - \sigma_d^B}{b - a}, \end{aligned} \quad (23)$$

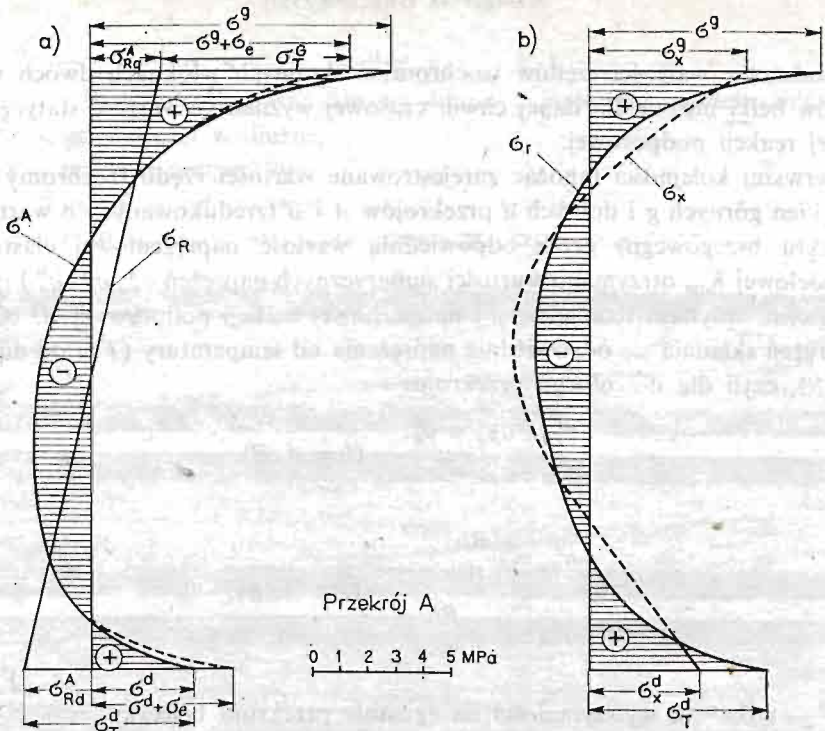
$$R = \frac{W}{a} (\sigma_g^A - \sigma_{Td}) = \frac{W}{a} (-\sigma_d^A + \sigma_{Td}) = \frac{W}{b} (\sigma_g^B - \sigma_{Tg}) = \frac{W}{b} (-\sigma_d^B + \sigma_{Td}), \quad (24)$$

gdzie:

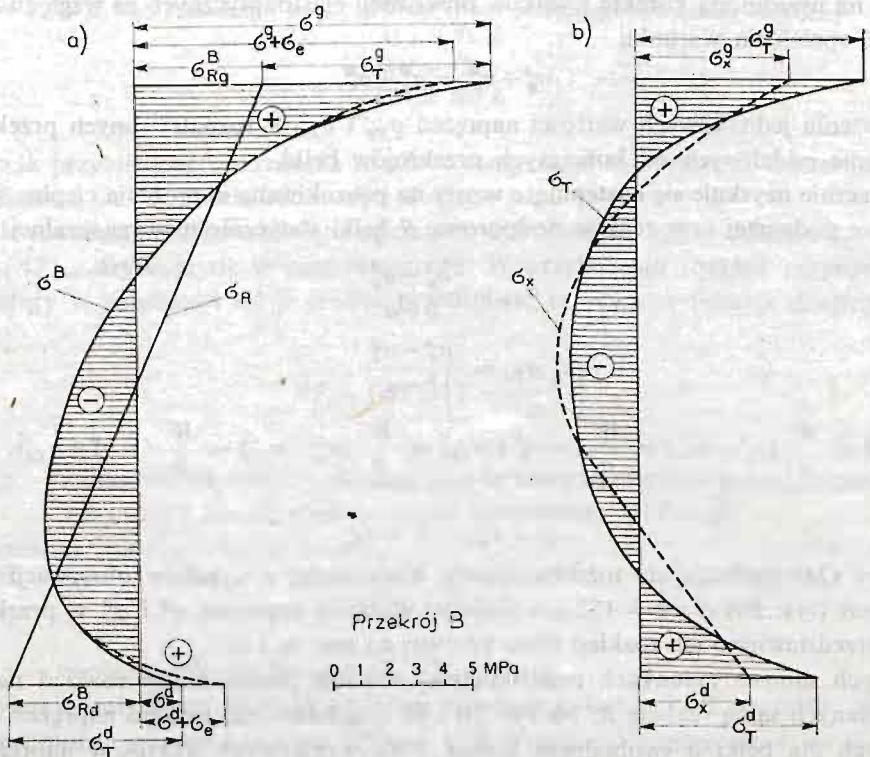
$$a = l_A, \quad b = l_B.$$

Wzory (24) spełniają się tożsamościowo. Korzystając z wyników obserwacji elastoptycznych (rys. 2b) dla $t = 152$ s wyliczono wartości naprężeń σ^A i σ^B w przekrojach A i B i przedstawiono ich rozkład (linie krzywe) na rys. 3a i 4a.

Na tych samych rysunkach przedstawiono również prostoliniowy rozkład naprężeń σ_R wywołanych samą reakcją R . Na rys. 3b i 4b przedstawiono rozkład naprężeń σ_T wyznaczonych dla belki o swobodnym końcu. Pola wynikowych wykresów naprężeń zakreskowano.



Rys. 3. Rozkłady naprężeń σ , σ_R , σ_T określonych doświadczalnie, oraz σ_x obliczonych dla przekroju A

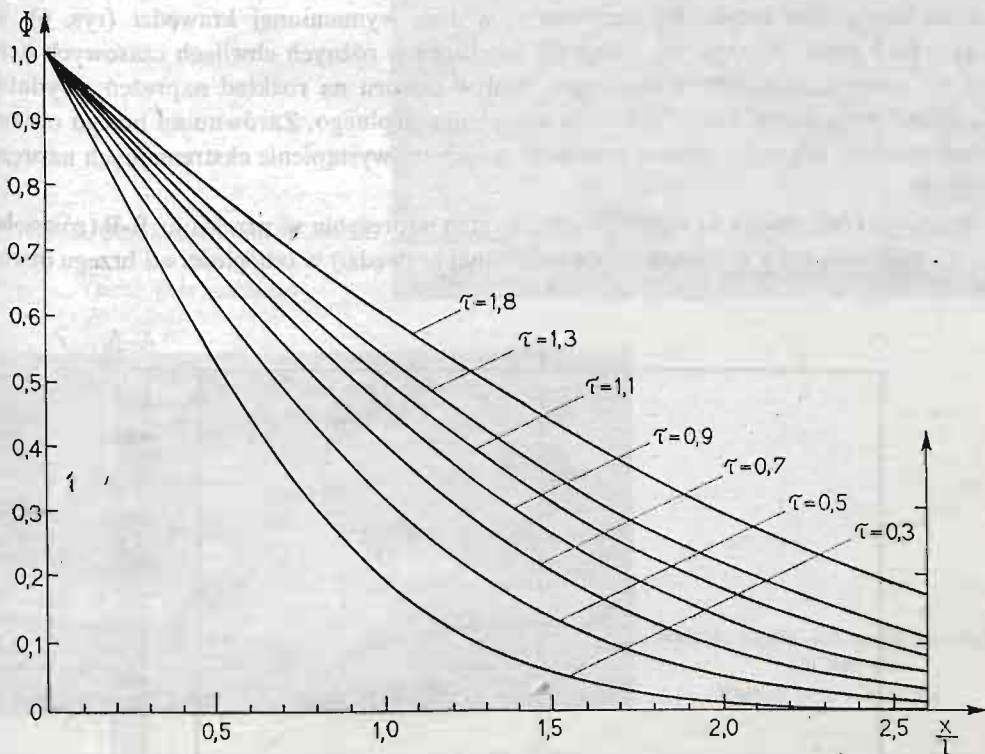


Rys. 4. Rozkłady naprężeń σ , σ_R , σ_T określonych doświadczalnie, oraz σ_x obliczonych dla przekroju B

Na rysunkach 3b i 4b przedstawiono dla $t = 152$ s rozkład naprężeń σ_x , określony teoretycznie wg wzorów (17) ÷ (19), w zestawieniu z rozkładem wyznaczonym doświadczalnie na podstawie badań elastooptycznych. Z rysunków widać, że mimo przyjętych założeń upraszczających wymienione rozkłady są podobne, co potwierdza słuszność podanej prostej metody oceny wartości rozważanych naprężeń termospęrzystych.

Widoczne różnice między wartościami naprężeń określonych doświadczalnie σ_T (linia ciągła) i teoretycznych σ_x (linia przerywana) można tłumaczyć uproszczonym przyjęciem niezależności modułu sprężystości i elastooptycznej naprężeniowej stałej materiałowej od temperatury.

4.2. Naprężenia ciepłe w półpłaszczyźnie z otworem. Naprężenia ciepłe w tarczach sprężystych z otworami były przedmiotem badań własnych [5], [6] i innych autorów [13], [17]. W badaniach własnych stosowano oziębianie w celu uniknięcia wystąpienia efektów niesprężystych.



Rys. 5. Przebiegi funkcji $\Phi\left(\frac{x}{l}\right)$ dla półprzestrzeni przy różnych wartościach τ

Weźmy pod uwagę tarczę jednostronnie ograniczoną brzegiem płaskim i obciążoną nagle na tym brzegu źródłem ciepła, wywołującym stałą w czasie temperaturę T_2 . Załóżmy, że ścianki tarczy są izolowane, a jej temperatura początkowa wynosi T_0 . Temperaturę

T punktu tarczy w odległości x od brzegu określa zależność

$$\Phi = \frac{T - T_0}{T_z - T_0} = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{at})}^{\infty} \exp(-u^2) du, \quad (25)$$

gdzie:

a — współczynnik wyrównywania temperatury

t — czas od chwili obciążenia cieplnego

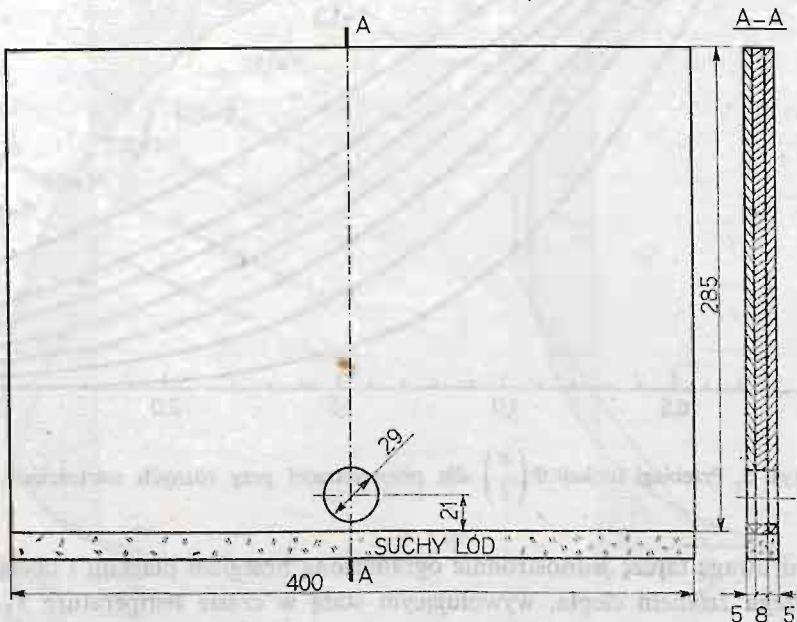
Oznaczając liczbę Fouriera Fo symbolem τ można wyrazić funkcję Φ w zależności od stosunku $\frac{x}{l}$ podstawiając w wyrażeniu (25):

$$\sqrt{at} = l\sqrt{\tau}$$

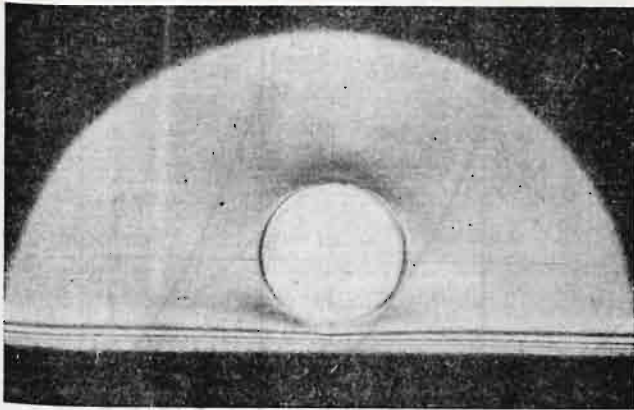
Na rys. 5 przedstawiono wykresy funkcji Φ w zależności od stosunku $\frac{x}{l}$, dla $l = 0,0065$ m i $a = 0,125 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

Weźmy obecnie pod uwagę model tarczy z otworem w pobliżu krawędzi, podlegający nagłemu obciążeniu cieplnemu (ozębieniu) wzdłuż wymienionej krawędzi (rys. 6) [6]. Na rys. 7÷9 podano przykłady fotografii izochrom w różnych chwilach czasowych liczonych od początku obciążenia cieplnego. Wpływ otworu na rozkład naprężeń uwydatnia się dopiero po pewnym czasie działania obciążenia cieplnego. Zarówno na brzegu otworu, jak i chłodzonej krawędzi można zauważyć miejscowe wystąpienie ekstremalnych naprężeń cieplnych.

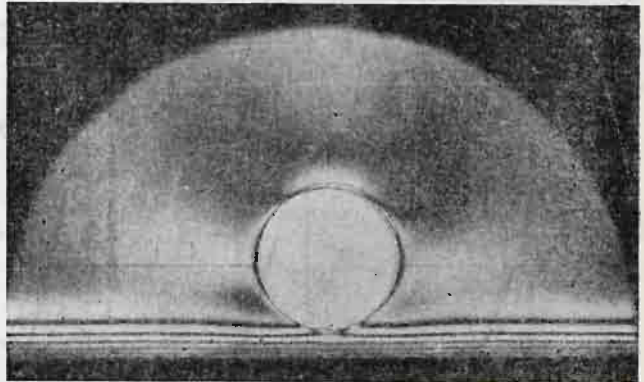
Warto zwrócić uwagę na wpływ otworu na stan naprężenia w przekroju B-B (równoległym do pionowej osi x prostopadłej do ozębianej krawędzi) w odległości od brzegu otworu



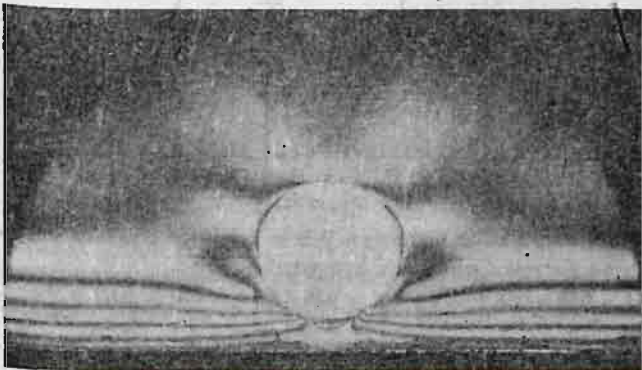
Rys. 6. Model elastooptyczny tarczy z otworem przykrawędziowym.



Rys. 7. Obraz izochrom po czasie
 $t = 180$ s.
(jasne pole widzenia)

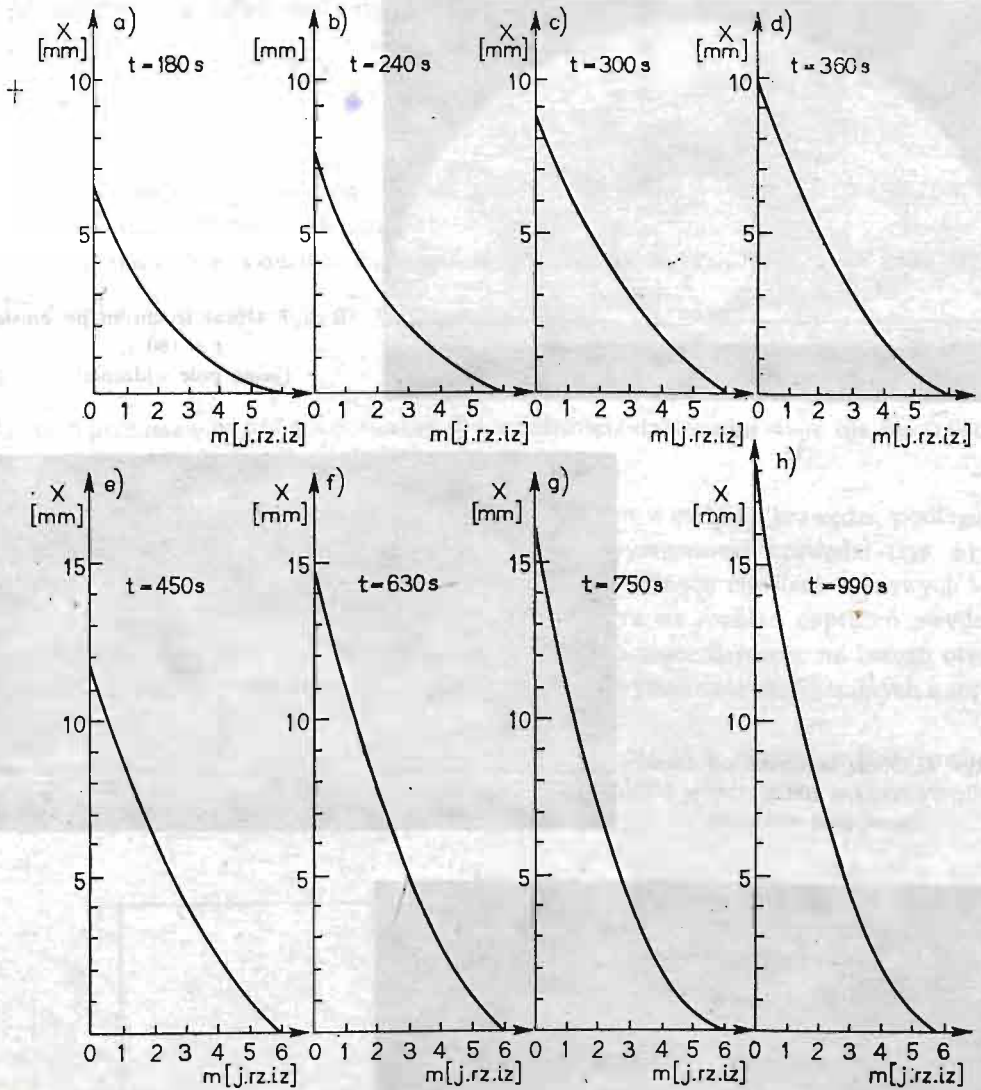


Rys. 8. Obraz izochrom po czasie
 $t = 300$ s
(jasne pole widzenia)



Rys. 9. Obraz izochrom po czasie
 $t = 990$ s
(jasne pole widzenia)

równej jego średnicy. Na rys. 10 przedstawiono rozkłady rzędów izochrom dla różnych chwil czasowych t . Na podstawie tych wykresów określono odległość x_0 , w której $m = 0$ i przedstawiono w zależności od czasu na rys. 11. W celu porównania wyznaczono teoretycznie rozkład naprężeń normalnych w przekroju prostopadłym do krawędzi półpłaszczyzny (bez otworu) dla chwili czasowej $t = 750$ s na podstawie rozkładu temperatur określonego wzorem (25). Wykres tych naprężeń oznaczono na rys. 12 literą N . Na tym

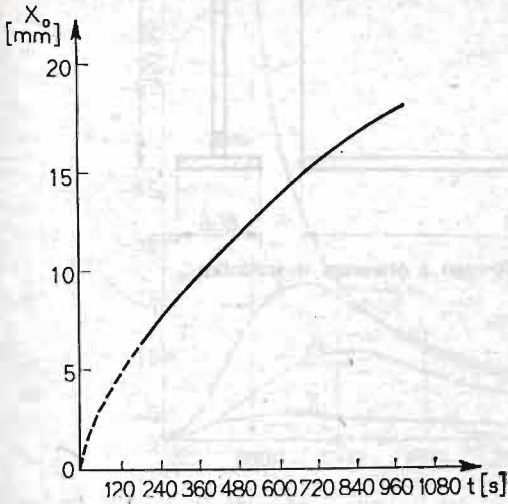


Rys. 10. Rozkłady wartości rzędów izochrom w przekroju pionowym B-B w kolejnych chwilach czasowych liczonych od początku oziębiania krawędzi:

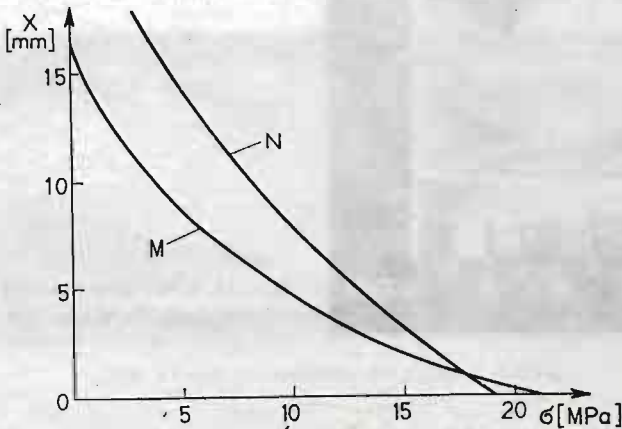
a) $t = 180$ s, b) $t = 240$ s, c) $t = 300$ s, d) $t = 360$ s, e) $t = 450$ s, f) $t = 630$ s, g) $t = 750$ s, h) $t = 990$ s.

samym rysunku podano wykres M naprężeń w omawianym poprzednio przekroju określonych na podstawie badań elastoptycznych.

Mimo podobieństwa wykresów M i N różnice rozkładów i wartości naprężeń są wyraźne. Można je tłumaczyć wpływem sąsiedztwa otworu oraz, co wydaje się mieć zasadnicze znaczenie — skończonymi rozmiarami modelu rzeczywistego w porównaniu z modelem teoretycznym w postaci nieograniczonej półpłaszczyzny. Należy zauważyć, że w modelu teoretycznym nie występuje punkt odpowiadający punktowi o zerowej wartości rzędu



Rys. 11. Odległości x_0 od oziębianej krawędzi punktów w przekroju $B-B$, w których $m = 0$ w funkcji czasu t



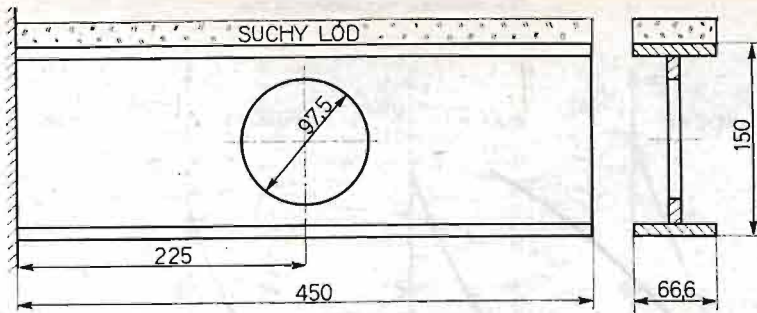
Rys. 12. Przykład rozkładu naprężeń w przekroju $B-B$ w chwili czasowej $t = 750$ s:
linia M — dla modelu
 N — dla nieograniczonej półpłaszczyzny

izochromy w modelu elastoptycznym. We wspomnianych rozważaniach uwzględniano zależność wartości charakterystyk mechanicznych i optycznych od temperatury.

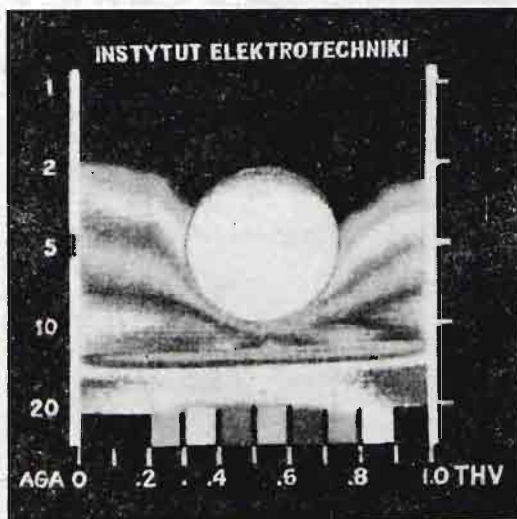
4.3. Blachownica z otworem. Na rys. 13 przedstawiono schemat modelu i obciążenia cieplnego modelu blachownicy z otworem kołowym.

W celu analizy pola temperatury w środniku stosowano badania termowizyjne za pomocą kamery AGA 680 LW²⁾ oraz punktowe pomiary zmian temperatury za pomocą przyklejonych termoelementów.

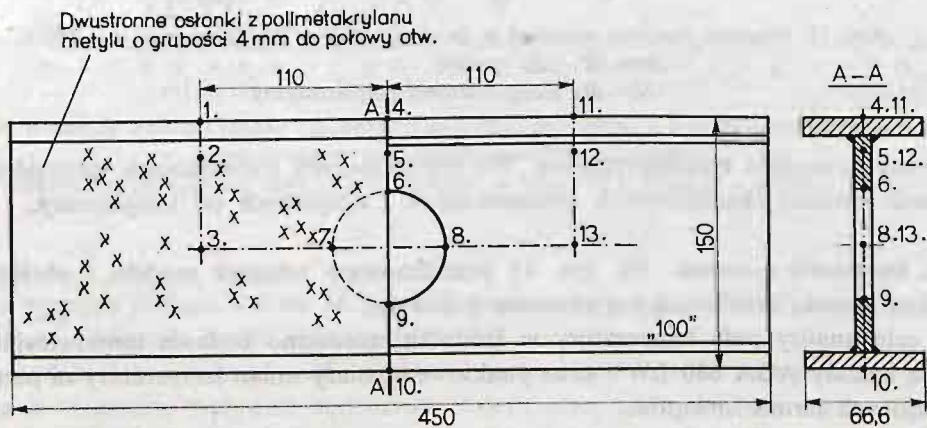
²⁾ W badaniach termowizyjnych współpracowali mgr inż. mgr inż. J. Zawiejski i W. Adamczewski z Instytutu Elektrotechniki. W badaniach elastoptycznych współpracowali: mgr inż. mgr inż. G. Galin, L. Kruska, A. Suchanek.



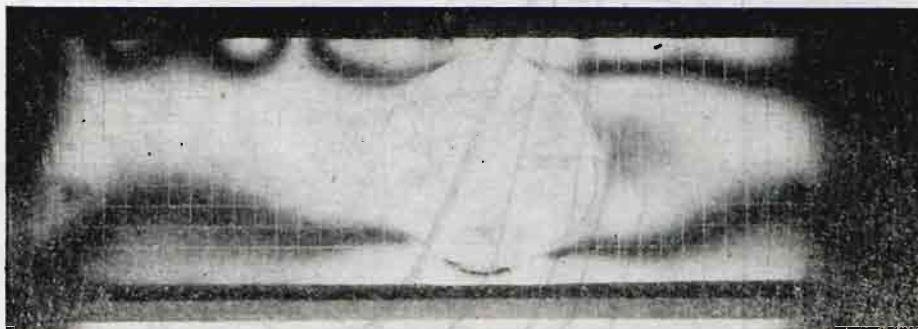
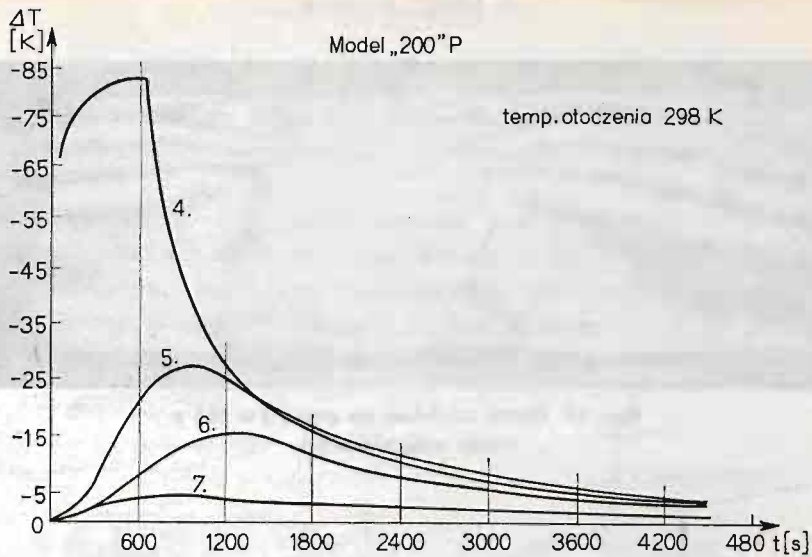
Rys. 13. Model dźwigara dwuteowego z otworem w środku



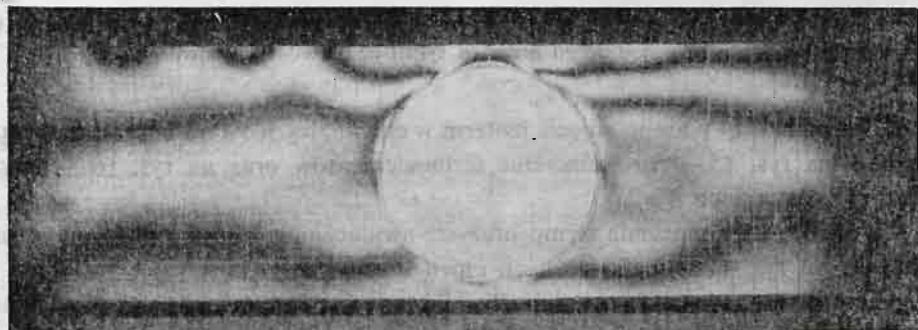
Rys. 14. Izotermi w obszarze przyotworowym środka w chwili $t = 565$ s



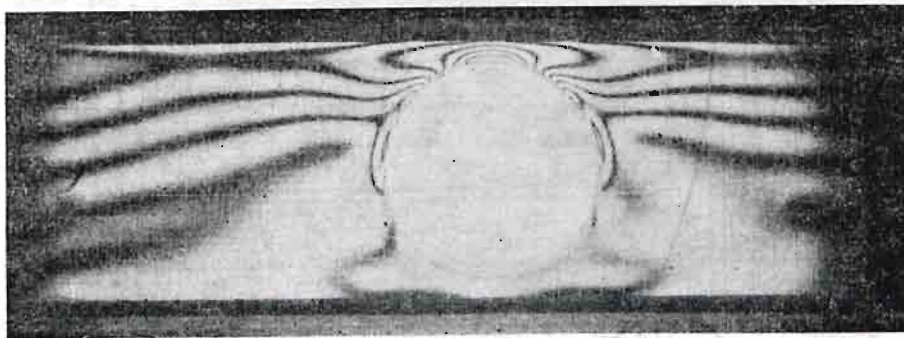
Rys. 15. Rozmieszczenie termocementów w modelu dźwigara dwuteowego z otworem



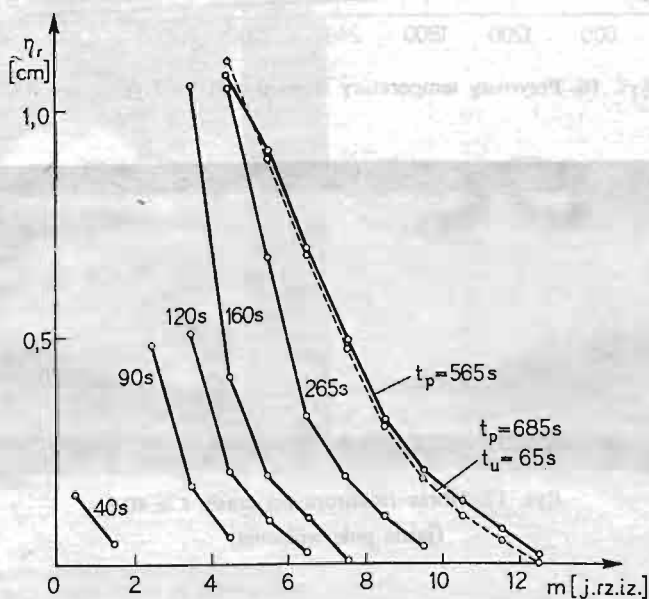
Rys. 17. Obraz izochrom po czasie $t = 40$ s
(jasne pole widzenia)



Rys. 18. Obraz izochrom po czasie $t = 90$ s
(jasne pole widzenia)



Rys. 19. Obraz izochrom po czasie $t = 565$ s
(jasne pole widzenia)



Rys. 20. Rozkłady wartości rzędów izochrom m w zależności od odległości η_r od krawędzi otworu, w górnej części przekroju przechodzącego przez oś symetrii, dla różnych chwil czasowych

Przykładowo na rys. 14 podano zdjęcia izoterm w chwili $t = 565$ s od początku obciążenia cieplnego, a na rys. 15 — rozmieszczenie termoelementów oraz na rys. 16 — przyrosty temperatury w punktach 4÷7.

Wpływ otworu na naprężenia termosprężyste uwidaczniają obrazy izochrom pokazane przykładowo na rys. 17÷19 dla różnych chwil czasowych.

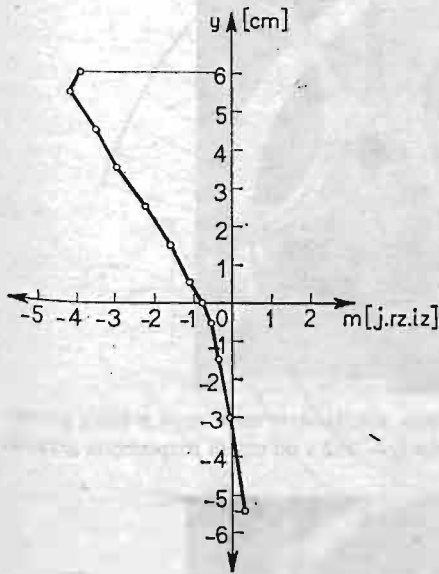
Wymienione układy izochrom umożliwiają między innymi wyznaczenie naprężeń normalnych wzdłuż krawędzi otworu [19] oraz naprężeń normalnych w poprzecznym przekroju obciążonego cieplnie dźwigara.

Obserwując rozkład izochrom w określonych chwilach czasowych od początku obciążenia cieplnego można zauważyć pewne charakterystyczne przekroje pionowe w środ-

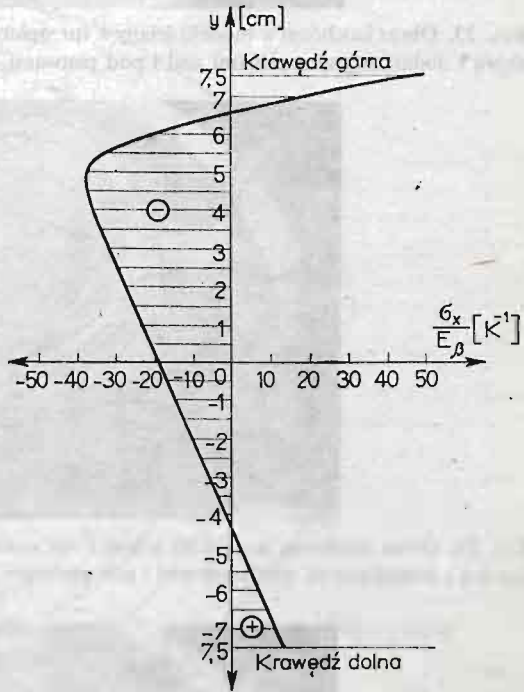
niku. Jeden z nich przechodzi przez oś symetrii otworu. W tym przekroju na brzegu otworu występują maksymalne naprężenia w środku od strony przyłożenia obciążenia cieplnego.

Na rysunku 20 przedstawiono rozkłady wartości rzędów izochrom m w omawianym przekroju, w zależności od odległości η_r od brzegu otworu, wyznaczonych w różnych czasach t_p od przyłożenia oraz — t_u od usunięcia obciążenia cieplnego.

Następne rozpatrzone przekroje znajdują się z dala od otworu — w odległości ± 14 cm od osi otworu, w strefie zanikającego wpływu tegoż.



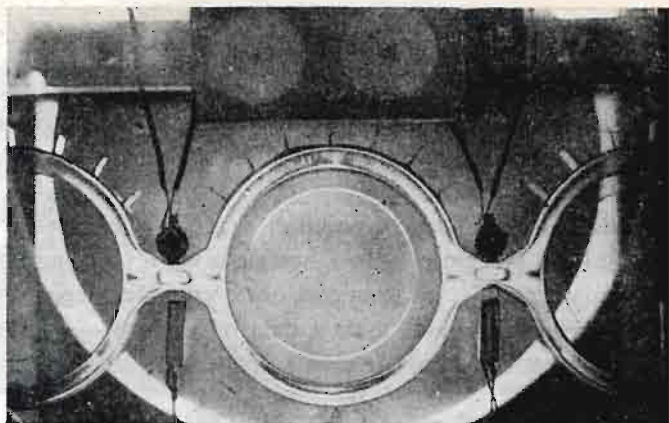
Rys. 21. Wartości rzędu izochromy dla pionowego przekroju odległego o 14 cm od osi otworu po czasie $t_p = 565$ s



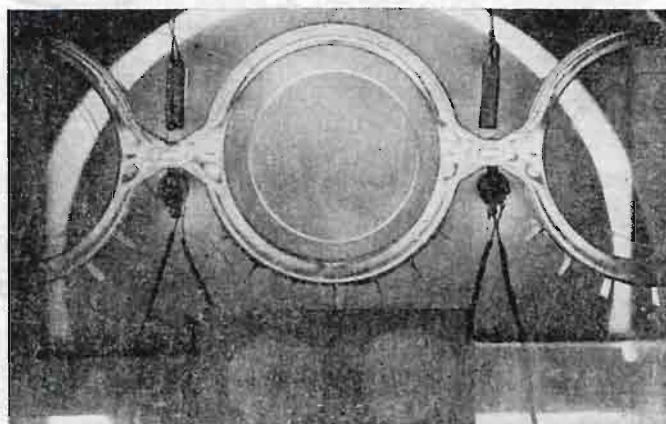
Rys. 22. Teoretyczny rozkład wartości $\sigma/E\beta$ dla przekroju poprzecznego dwuteowego dźwigara bez otworu, odpowiadający czasowi $t_p = 565$ s

Na rysunku 21 przedstawiono wykres wartości rzędów izochrom (w symetrycznie położonych wymienionych przekrojach) w obszarze środkowym dla czasu $t_p = 565$ s. W celach porównawczych określono teoretycznie, metodą zbliżoną do opisanej poprzednio w p. 4.1. rozkład naprężeń normalnych σ_x występujących w przekroju analizowanego dwuteownika lecz bez otworu odpowiadający czasowi $t_p = 565$ s. Wykres ilorazu tych naprężeń σ_x przez iloczyn $E\beta$ pokazany jest na rys. 22, gdzie E — moduł sprężystości podłużnej materiału α β — współczynnik rozszerzalności liniowej.

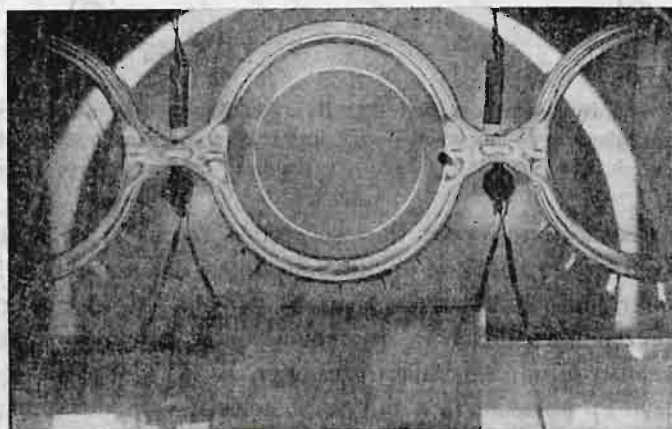
Porównanie rysunków 21 i 22 przy założeniu jednoosiowego stanu naprężenia w środku, pozwala stwierdzić podobieństwo charakteru rozkładu naprężeń w obszarze niezakłóconym otworem, określonego doświadczalnie i teoretycznie.



Rys. 23. Obraz izochrom w modelu ściany z rur oplewowych, obciążonym termicznie grzałką prostoliniową i dodatkowymi grzałkami nad i pod płetwami, po czasie $t_p = 123$ s od chwili rozpoczęcia grzania.



Rys. 24. Obraz izochrom w modelu ściany z rur oplewowych, obciążonym termicznie grzałką prostoliniową i dodatkowymi grzałkami nad i pod płetwami, po czasie $t_p = 362$ s od chwili rozpoczęcia grzania.

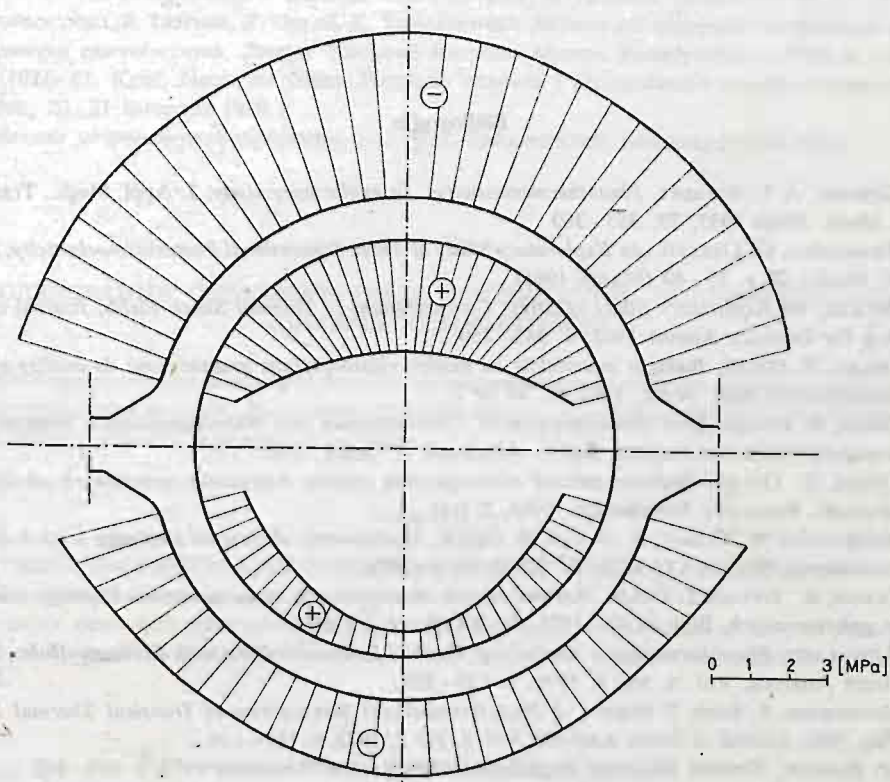


Rys. 25. Obraz izochrom w modelu ściany z rur oplewowych, obciążonym termicznie grzałką prostoliniową i dodatkowymi grzałkami nad i pod płetwami, po czasie $t_p = 604$ s od chwili rozpoczęcia grzania.

4.4. Ściana kotła z rur opletkowanych. Przykładem zastosowania dodatniego źródła ciepła mogą być badania modelu jednostronnie ogrzewanej ściany kotła energetycznego z rur opletkowanych [7], [8].

Na rysunkach 23 ÷ 25 przedstawiono obrazy izochrom w jednym z modeli fragmentu omawianej ściany dla wybranych chwil czasowych $t_p = 123$ s, 362 s i 604 s.

Zarejestrowane rozkłady izochrom umożliwiły m.in. określenie wartości termicznych naprężeń normalnych dla swobodnych krawędzi badanego modelu. Przykład rozkładu tych naprężeń odpowiadających chwili czasowej $t_p = 4800$ s pokazany jest na rys. 26.



Rys. 26. Rozkład naprężeń krawędziowych w modelu ściany z rur opletkowanych dla $t_p = 4800$ s.

5. Podsumowanie

Omówione metody badań i przedstawione przykłady świadczą o przydatności metody elastooptycznej do analizy naprężeń termosprężystych szczególnie w obiektach o skomplikowanej konfiguracji.

Badania wskazują na istotne znaczenie właściwie określonych i zrealizowanych warunków brzegowych i początkowych obciążenia cieplnego. Przedstawione sposoby badań mogą być stosowane zarówno dla stanów ustalonych jak i niustalonych.

Otrzymane tymi sposobami wyniki badań mogą służyć do weryfikowania teoretycznych

zależności analitycznych oraz wyników obliczeń numerycznych np. metodą elementów skończonych.

Przedstawione elastoptyczne badania modelowe nie wykluczają możliwości zastosowania innych ważnych metod doświadczalnej analizy naprężeń termosprężystych, a mianowicie: metody światła rozproszonego [21], elastoptyki integralnej [14], interferometrii holograficznej [22], [23], tensometrii elektrozystancyjnej [16] oraz stosowanej w badaniach stanów ustalonych metody zamrażania—rozmrężania [25].

Wymienione metody, mimo niekiedy znacznej pracochłonności w ich realizacji, mogą się wzajemnie uzupełniać.

Bibliografia

1. G. GERARD, A. C. GILBERT, *Photothermoelasticity: An exploratory study*, J. Appl. Mech., Trans. Am. Soc. Mech. Engrs 1957, 79, 355 - 360
2. H. TRAMOSCH, G. GERARD, *An Exploratory Study of Three Dimensional Photothermoelasticity*. Journal Appl. Mech., 28 s. 35 - 40 (March 1961).
3. H. BECKER, *An Exploratory Study of Stress Concentrations in Thermal Shock Fields*, Journal of Engineering for Industry August 1962, s. 343 - 350.
4. Z. DYŁĄG, Z. ORŁOŚ, *Badania materiałów na modele elastoptyczne przeznaczone do analizy naprężeń termosprężystych*, Biul. WAT, 1962 R. XI nr 2.
5. Z. ORŁOŚ, Z. DYŁĄG, *Über spannungsoptische Untersuchungen von Wärmespannungen*, Internationales spannungsoptisches Sympozjum. Berlin. Akademie — Verlag 1962.
6. Z. ORŁOŚ, Z. DYŁĄG. *Badania metodą elastoptyczną stanów naprężenia wywołanych obciążeniami termicznymi*, Rozprawy Inżynierskie, 1963, 2 (11).
7. J. BENDKOWSKI, W. CUDNY, Z. DYŁĄG, Z. ORŁOŚ, *Modelowanie obciążenia cieplnego ścian kotła z rur opletkowanych*, Biul. WAT, 1973, R. XXII, nr 3 (247).
8. W. CUDNY, Z. DYŁĄG, Z. ORŁOŚ, *Badanie metodą elastoptyczną stanu naprężenia cieplnego ścian kotła z rur opletkowanych*, Biul. WAT, 1974, R. XXIII, nr 2 (258).
9. A. AJOVALASIT, *Photothermoelastic Analysis of Thermal Stresses in Discs with Eccentric Holes*, Journal of Strain Analysis, Vol. 5, No 3, 1970, s. 223 - 229.
10. E. MATSUMOTO, S. SUMI, T. SEKIYA, *A Photothermoelastic Investigation of Transient Thermal Stresses in Wing Ribs*, Journal of Strain Analysis, Vol. 7, No 2, 1972, s. 117 - 124.
11. CH. P. BURGER, *Thermal Modeling*, Experimental Mechanics, November 1975, s. 430 - 442.
12. CH. P. BURGER, *Photoelastic Modeling of Stresses Caused by Thermal Shock*, Experimental Mechanics, March 1976, s. 95 - 99.
13. M. TSUJI, M. ODA, *Investigation of Photothermoelasticity by means of Heating*, Journal of Thermal Stresses, 2, 1979, s. 215 - 232.
14. F. A. KHAYYAT, P. STANLEY, *An Integrated Retardation Technique for Determination of Thermal Stresses in Rotationally Symmetrical Bodies*, Journal of Strain Analysis, Vol 14, No 3, 1979, s. 89 - 94.
15. F. A. KHAYYAT, P. STANLEY, *The Photoelastic Determination of Thermal Stress Concentrations in Grooved Cylinders with a Radial Temperature Gradient*, Journal of Strain Analysis, Vol. 14, No 3, 1979, s. 95 - 102.
16. Z. ORŁOŚ, K. TOMASZEWSKI, *Badania odkształceń i naprężeń termosprężystych metodą tensometrii elektrozystancyjnej*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 4, 16, 1978, s. 467 - 481.
17. J. MISKIOGLU, CH. P. BURGER, *Photothermoelastic Analysis of Transient Thermal Stresses*, Experimental Mechanics, March 1982, s. 89 - 95.
18. J. D. HOVENESIAN, H. C. KOWALSKI, *Similarity in Thermoelasticity*, Experimental Mechanics, 7 (2) 1967, s. 82 - 84.

19. Z. DYLAŁ, Z. ORŁOŚ, *Elastoptyczne badania modelowe stanów termospężystych*, Materiały X Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa 3-4 grudnia 1982 r.
20. B. A. BOLEY, J. H. WEINER, *Theory of Thermal Stresses*, New York, London, John Wiley and Sons. Inc. 1960.
21. J. D. FISHBURN, *Analysis of Thermal Stresses in Complex Models Using Scattered Light Photoelasticity*, Proceedings of the Fifth International Conference on Experimental Stress Analysis, Udine, Italy, 27 th - 31 st May 1974 s. 1.10 - 1.20.
22. Z. ORŁOŚ, M. J. MATCZAK, Z. KRASKA, *Analiza odkształceń i przemieszczeń metodą interferometrii holograficznej*, Przegląd Mechaniczny 16, (1973).
23. A. KICZKO, Z. ORŁOŚ, K. TOMASZEWSKI, *O pewnych zastosowaniach interferometrii holograficznej w mechanice ciał odkształcalnych*, Biuletyn WAT, R. XXV, nr 12 (292), 1976, s. 55 - 61.
24. S. DOBROCIŃSKI, P. LEITNER, Z. ORŁOŚ, K. TOMASZEWSKI, *Badania pól temperatur na modelach elementów maszyn energetycznych*, Zeszyty Naukowe Instytutu Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku 114 (1022) 81. Konf. Nauk. na temat: Problemy rozwoju i projektowanie maszyn energetycznych. Gdańsk, 20 - 21 listopada 1980 r.
25. *Issledovanie temperaturnych naprjaženij*, Red. N. I. PRIGOROWSKIJ, Moskwa, Nauka 1972.

Р е з ю м е

ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В статье представлены некоторые вопросы исследования температурных напряжений поляризационно-оптическим методом. Рассмотрен принцип метода. Изложены методы и примеры исследования нестационарных температурных задач.

S u m m a r y

PHOTOTHERMOELASTIC INVESTIGATIONS OF THERMAL STRESSES

The paper deals with some problems of photothermoelastic investigations of thermal stresses. The principles of the methods and some examples of investigations of transient thermoelastic problems are presented.

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 czerwca 1983 roku

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...
 ...the following information is given: ...

RECENT TRENDS IN EXPERIMENTAL ANALYSIS

KARL-HANS LEARMANN

Universitat Wuppertal, F.R.G.

1. Introduction

According to the fast developments in the past and still at present in computer techniques in hardware and especially in software with new numerical methods, e.g. the finite-element methods, the question is discussed worldwide, whether methods of experimental stress analysis are still necessary or not. It is argued that new generations of computers are developed with increasing capacity and apparently unlimited possibilities, to be adapted to almost every mechanical and structural problem. But despite these discussions methods of experimental stress analysis are introduced and applied to a larger extent than at any time before in research institutes as well as in the industry. They become more and more important just because of the tremendous extension and involvement of computer analysis. Experimental stress analysis is not only used to determine material behaviour and to predict the stress and strain state in structures or in parts of structures. The results of mathematical analysis and the validity of assumptions and suppositions, which generally are necessary to enable mathematical analysis, are checked experimentally. Methods of experimental stress analysis are introduced into systems control, for permanent supervisory operating systems like ships, airplanes, pressure vessels, dams, bridges, tall buildings, reactor plants and other industrial plants etc. Methods of experimental stress analysis are involved in product assembly, manufacture inspection and quality control.

There is a wider field of applications nowadays. Beyond the "classical" fields of static, dynamic and stability problems such problems are investigated experimentally, where even highly sophisticated numerical methods do not lead towards reliable results, if — for example — large deformations, load cycles, impact loads, wave propagation in solids, problems of fracture mechanics, fatigue problems are regarded. It also becomes more important to consider non-linear elastic, plastic, viscoelastic and viscoplastic as well as nonhomogeneous and non-isotropic response of material on the stress and strain state in structures. And until now there is not known any way to determine and to describe the response of material without experimental analysis.

2. Recent developments in experimental methods

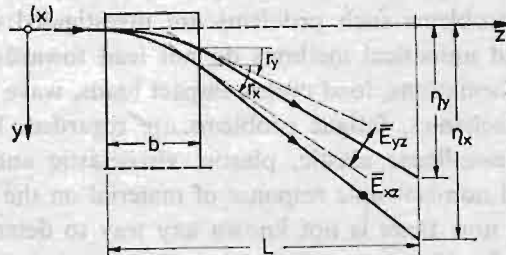
Generally speaking, there are no important and basic new developments in the principles of experimental methods, but to a large extent specific improvements of these methods [1].

Most common and applied are strain gage techniques, especially in industrial laboratories and in systems control. New types of strain gages are available to be used in the range of extremely low and of high temperatures as well as in elastic-plastic strain analysis. Higher precision and reliability is provided with advanced technologies of measuring devices. Semi-conductor techniques, large scale integrated circuits and microprocessors are introduced. Inductive and piezoelectric transducers are demagnified and can be adapted to different problems in experimental analysis.

Moiré techniques are involved in research laboratories mainly. New fields of application are opened because finer grids up to approx. some 1000 lines/cm are available, the application in high temperature ranges is possible as well as application to three-dimensional surfaces to determine their spatial deformations. These techniques are used to analyze elastic-plastic and viscoelastic strain states and dynamic processes, vibration problems as well as pulse effects.

Beside numerous attempts to transmit the principles of photoelasticity to photoplasticity and photoviscoelasticity, strong efforts are made to improve the three-dimensional photoelastic analysis in frozen stress techniques as well as in scattered light techniques. For a higher precision in the interpretation of observed optical phenomena, some activities should be mentioned to get better knowledge in non-linear optical response of model materials and in the effects of light propagation and radiation. The path of light transmitting through an inhomogeneous medium is curvilinear. The curvature increases with the increasing strain/stress gradient [2]. An approximated solution to determine the light propagation through solid body caused by strain/stress gradient is given in [3]. (fig. 1). Sometimes the principle axes of the stress state are rotating along the light path through the medium [4]. In such cases a more general solution can be found by introducing a finite mathematical solution [5] (fig. 2) to determine the stress state by the observed optical phenomena as the birefringence δ and the characteristic directions φ .

Regarding the methods of holography and speckle interferometry, no new fundamental developments have taken place in the methods themselves, but in numerous modifications of experimental setups, in evaluation methods of the originally obtained optical informations, and in specific forms of application. In basic research as well as in the industrial



$$r_x = \left. \frac{dv_x}{dz} \right|_{z=b} \approx \frac{1}{n_0 L} \eta_x ; \quad r_y = \left. \frac{dv_y}{dz} \right|_{z=b} \approx \frac{1}{n_0 L} \eta_y$$

$$(C_1 + C_2) \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{bL} (\eta_x + \eta_y)$$

$$(C_1 - C_2) \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - \sigma_x) = \frac{1}{bL} (\eta_y - \eta_x)$$

Fig. 1

$$\frac{d^2\{E\}}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\{\epsilon\}\{E\} = k\{\epsilon\}\{E\}$$

$$\{E_n\} = \{U_n\}\{U_{n-1}\} \dots \{U_v\} \dots \{U_1\}\{E_0\}$$

$$\{U_v\} = \frac{1}{2} \Delta A_v \{\bar{u}_v\}$$

$$\{E_0\} = \{E_{x0}; 0\} \Rightarrow E_{yn} = \frac{1}{2^n} A_n \cdot \bar{u}_{21} \cdot E_{x0}$$

$$A_n = \Delta A_n \cdot \Delta A_{n-1} \dots \Delta A_2 \cdot \Delta A_1$$

$$\bar{u}_{21} = \sum_{\nu=1}^{2^n} [G_{2\nu} \cdot \exp(\sum_{\lambda=1}^{\nu} \lambda_{1\nu} \Delta z + \sum_{\mu=1}^{\nu} \lambda_{2\nu} \Delta z)] ; \nu, \mu \in \{1/n\}; \nu \neq \mu; \nu + \mu = n$$

$$J = E_{yn} E_{yn}^* = \left(\frac{1}{2^n} A_n\right)^2 \bar{u}_{21} \bar{u}_{21}^* E_{x0} E_{x0}^*$$

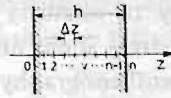


Fig. 2

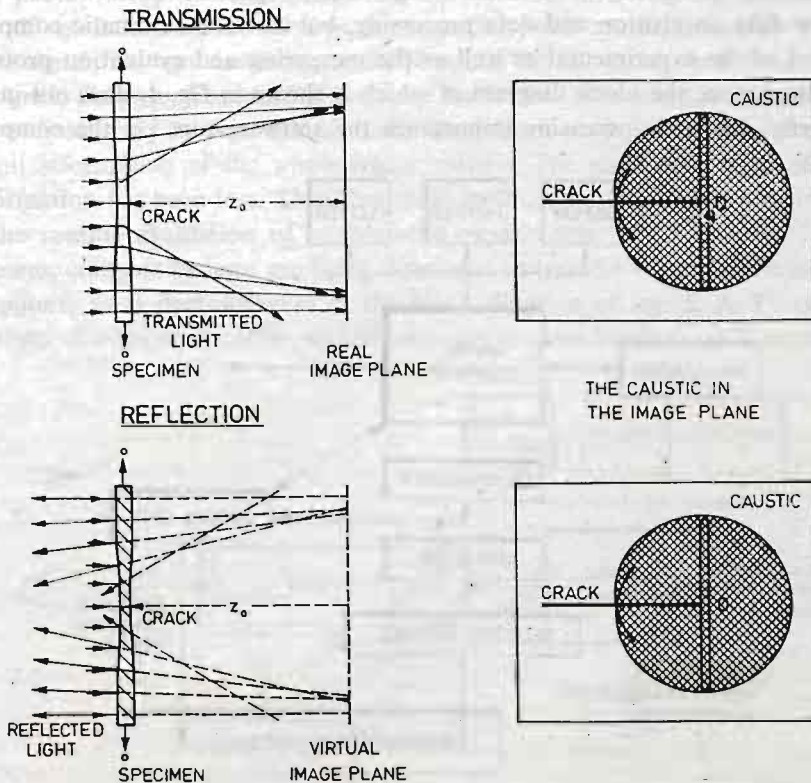


Fig. 3

field, even in quality control more advantage is taken of these methods, since complete experimental devices are available as well as new photographic material with higher resolving power, as for example thermo-film. Interferometric methods are very convenient to analyze the effects of impact loading and pulse propagation in solids.

Especially in fracture mechanics, the method of caustics has been brought to a state of development recently to intensify the practical application. This method allows to analyze singularities in stress states and areas of high stress concentration [6], (fig. 3).

The technique of roenthenography has reached a state of perfection now, so that the available goniometers are used in the industry for manufacture inspection and systems control as well as in laboratories to measure the stresses, especially the residual stresses on surfaces of structures or structural elements.

3. Recent developments in data acquisition and data processing

Based on the already known principles of experimental methods fast progress has been made in the development of measuring systems combined with digital computers of higher or less capacity, which can run on-line, computer-controlled.

Multiposition measuring devices on a high technological level have been produced not only for data acquisition and data processing, but also for automatic computer-operated control of the experimental as well as the measuring and evaluation process. Such an automatic system, the block diagram of which is shown in fig. 4, does not include the hardware only, but with increasing importance the software too, i.e. the computer pro-

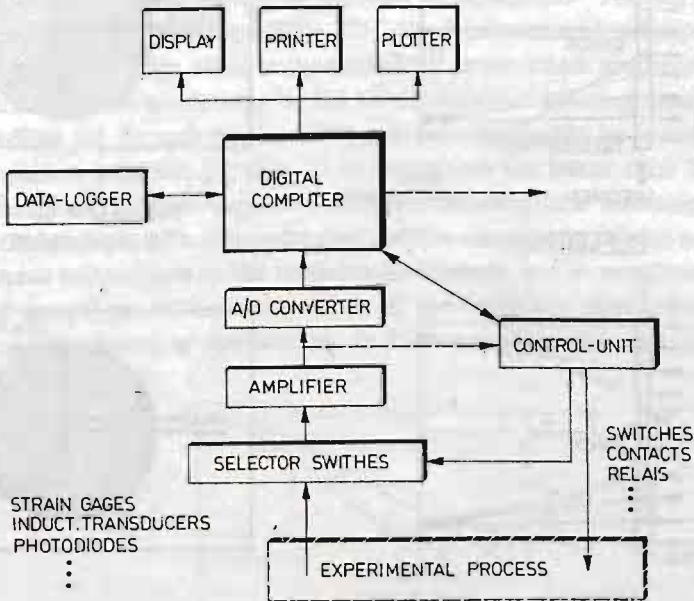


Fig. 4

grams for control, transmission, converting and processing up to the final output informations. Mechanical events, such as strains, deformations, temperature, light intensity, are picked up as electrical signals at some 100 measuring points, which are controlled automatically by selector switches. After amplifying, the signals are converted into digital signals and then transmitted to a digital computer where further processing takes place.

The final data or even the unprocessed data may be stored in a data logger to be recalled if needed. The output of the final results will be done with standard peripheral processors, such as displays, plotters or printers. It is also possible to transmit the information to a larger central processor.

Most remarkable is the closed control circuit to control the measuring process by the experimental events, or vice versa. The operational capability of such systems strongly depends on the software. They are organized to put in the data conveniently as to require minimum computer time for transmission and processing. All data should be reproducible accurately at any time during experiments.

Recent progress in diminution of electronic measuring devices has led to a rapid decrease of costs of the hardware. Proper plug-compatible interfaces allow direct connection via cable sets to standard peripheral devices and to a variety of computers. All timing, signal levels and pinouts are adaptable to those specified by computer manufactures.

Since the early sixties, numerous methods and apparatus have been developed for automatic pickup of optical data pointwise. The order of birefringence and the principal directions of refraction, the position of the regarded point are measured by transmitting the optical signal, i.e. light intensity, to an electrical signal, which then is converted into a digital signal. This may be recorded or stored for further processing in a small computer. But such a device may be regarded as insufficient, as it only permits partial automation and no full information of the whole fringe pattern. The great advantage of such full-field information has been lost. Therefore these methods have not been accepted in practice for the routine evaluation of photoelastic experiments.

At present, complex systems are being developed to transfer visual information directly into computers, as is demonstrated in the block diagram of fig. 5. A TV-camera uses a large variety of one-inch vidicons to detect images at wave length from X-ray to infrared.

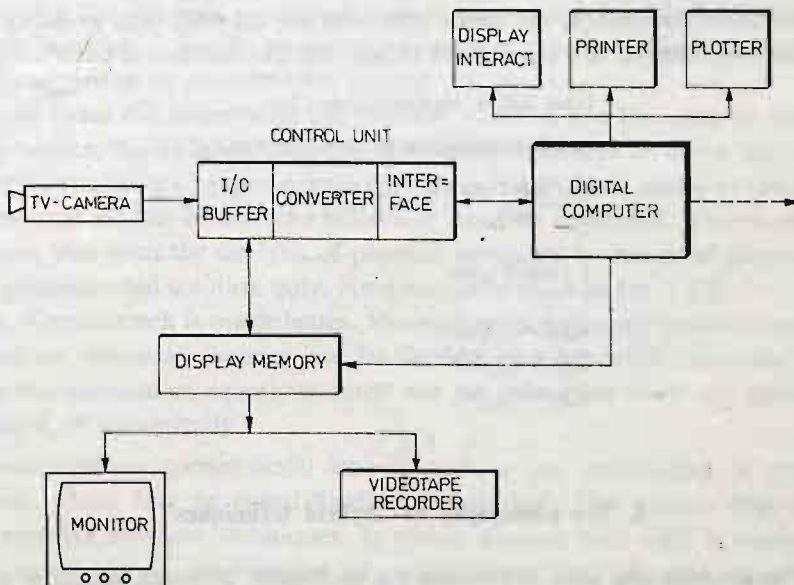


Fig. 5

Total fields of interference fringes, as produced by photoelasticity, holographic or other interferometric methods, by Moiré techniques, can be transformed into a composite analogous video-signal, which may be viewed on a monitor or recorded on standard videotape equipment.

Also, digital signals can be produced by an A/D-converter, which then are transmitted to a computer. The computer processes and analyzes the input data to produce the wanted information. The results may be displayed, printed or plotted. The transformed optical signals also may be stored in a display memory because of availability of data in TV-standards. Resolution up to 1024×1024 lines provides more than one million data points with 256 gray levels, which can be sampled to permit highly detailed examination of the field of view. Special attention is to be paid for the scanning of the isoclinics in the automatic process; as yet, a sufficient solution has not been discovered.

This system can also be used in connection with pulsed holographic interferometry, if the optical data is taken from the monitor after the high speed event has been recorded by the holographic camera system.

As the recent developments of methods and the increased resolving power of transducers, receivers, photographic and other recording materials and tools guarantee a higher accuracy of the measured values by reducing the errors to an extremely low level, the evaluation methods have to be improved in order not to lose the advantages of such progress. On the other hand, data processing by means of computers demands and allows more exact numerical evaluation methods. The amount of data available can be quite considerable. Contrary to mathematical solutions, the experimental analysis — similar to numerical methods — yields a set of data in discrete points, the distances of which may be shorter or longer, depending on the involved method and the equipment. The measured values are subject to random errors. So as to fit the "surfaces" to these data, spline functions are introduced for smoothing and balancing (fig. 6). If the basic measured values are to be differentiated, the spline functions are derived, thus avoiding error propagation. But one must be very careful not to run into the problem of overfitting.

Cubic Spline Approximation

$$\tilde{k}_{xi}(x-x_i) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{\tilde{k}_x(x_i) - k_{xi}}{dk_{xi}} \right)^2 \leq \epsilon, \epsilon \geq 0;$$

$$\int_{x_0}^{x_n} (\tilde{k}_x(x))^2 = \min$$

$$\tilde{k}_{xi}(x_i) = \tilde{k}_{x_{i-1}}(x_i)$$

$$\tilde{k}'_{xi}(x_i) = \tilde{k}'_{x_{i-1}}(x_i)$$

$$\tilde{k}''_{xi}(x_i) = \tilde{k}''_{x_{i-1}}(x_i)$$

Fig. 6

4. The philosophy of „hybrid techniques“

In order to describe any kind of process, e.g. biological, physical, social, or economical processes, models must be developed. Generally this means that such processes or events

must be transformed into an operational form by verbal descriptions, mathematical algorithms or by picturing and even by mapping one process on to another one. Then the reliability and accuracy of results of any investigation or of any analysis of a considered process strongly depends on the comprehensiveness of this "modelling". The model must describe the reality exactly or as exact as possible and in such a way, that the numerous parameters which have considerable influence on the real event are included in the model.

Despite the tremendous progress in scientific as well as in technological developments, there are still limitations in scientific capacity and in the technical possibilities. Therefore, so far it is not possible to model the real event exactly. All attempts are leading towards approximation processes only, and they are restricted to subsystems.

In stress analysis, the physical process in a real structure must be described in order to predict the response of this structure under random loading conditions to determine for example the stresses, strains, deformations, or the safety against failure, considering the environmental conditions as well as the material behaviour. Generally, it is impossible to formulate a "mathematical model", i.e. to derive "true" constitutive equations according to the real event or, if this should nevertheless be possible, to solve these constitutive equations. Assumptions and simplifications must be introduced on very different levels to find an operational model. This leads to an approach of the reality only. Very often the certainty and admissibility of such approaches are unknown or can hardly be estimated. Therefore the results obtained through mathematical analysis are uncreatin as well, despite introducing advanced numerical methods and computers with high capacity.

It seems to be possible, however, to use more realistic physical models of the regarded processes for experimental analysis. As such physical models the real structure, parts of the structure, a scaled-down replica, or an analogous physical process may be considered. The different reactions under the given load conditions may then be observed. But in stress analysis, the observed phenomena are in most cases not identical with the final informations. Therefore it is also necessary to introduce mathematical models for evaluation and transmission of experimental results.

As in many cases the material of the physical model is not the same as the material of the real structure, the different response of material must also be taken into consideration. For the transmission of experimental data from the physical model to the real event, proper operational models of material behaviour must be developed. Therefore it should be pointed out, that even the analysis of physical processes by means of physical models leads to an approximated solution only. An example is given in fig. 7 [7].

However, the approach is much better. More complex and more realistic mathematical models based on advanced theories can be derived and introduced into the analyzing processes as the constitutive equations must not be solved, or they are solved experimentally instead of numerically.

These considerations consequently lead towards a new philosophy of experimental stress analysis, which may be called "hybrid techniques". The pattern (fig. 8) demonstrates the meaning of these techniques. It makes obvious that only a combination of theory and experiment, a combination of mathematical and physical models yields a better knowledge of structure reactions and most reliable results in stress analysis. As

Transmission of results (plate in bending)

perturbation parameter: $\varepsilon = \mu - \mu_m$ (μ denotes „model“)

$$\text{general solution: } W(x,y,\mu) = \frac{1-\mu^2}{1-\mu_m^2} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j W(x,y,\mu_m^j);$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w_0 = -\frac{\rho(x,y)}{B_m};$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w_j = 0; \quad j \in \mathbb{N},$$

\Rightarrow internal forces

$$M_x = -B_m \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j [w_{j,xx} + (\mu_m + \varepsilon) w_{j,yy}],$$

$$M_y = -B_m \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j [w_{j,yy} + (\mu_m + \varepsilon) w_{j,xx}],$$

$$M_{xy} = -B_m (1 - \mu_m - \varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_{j,xy};$$

Fig. 7

Mathematical Model

$$[P] = [K] \cdot [U]$$

$$[P] = \begin{bmatrix} [P_1] \\ [P_2] \end{bmatrix} \text{ matrix of forces}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} [U_1] \\ [U_2] \end{bmatrix} \text{ matrix of displacements}$$

$$[K] \text{ stiffness matrix}$$

Physical Model

$$[W] = [D] \cdot [L]$$

$$[W] = \begin{bmatrix} [U_1] \\ [P_2] \end{bmatrix} \text{ matrix of measured data}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [P_1] \\ [U_2] \end{bmatrix} \text{ matrix of external loads and given displacements}$$

$$[D] \text{ model matrix}$$

input data:

$$[P_1], [U_2]$$

unit state of loads and displacements:

$$[L] = [I] \Rightarrow [\bar{W}] = [D] \cdot [I] = [D]$$

$$\begin{bmatrix} [U_1] \\ [P_2] \end{bmatrix} = [G] \cdot \begin{bmatrix} [P_1] \\ [U_2] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [U_1] \\ [P_2] \end{bmatrix} = [\bar{W}] \cdot \begin{bmatrix} [P_1] \\ [U_2] \end{bmatrix}$$

If mathematical model $\hat{=}$ physical model:

$$[G] \hat{=} [\bar{W}] \hat{=} [D]$$

Photoviscoelasticity

$$\text{experiment} = \delta(t), \varepsilon_{22}(t) \Rightarrow \text{evaluation} = C_N(t) = \frac{1}{\sigma_{11}} \cdot \frac{\delta(t)}{d(t)} = \frac{b_0}{\rho (1 + \varepsilon_{22}(t))}$$

optical creep function



$$\text{mathematical model: } C_N^*(t) = \frac{1}{C_N^*(0)} \left[1 - \int_0^t C_N^*(\tau) \cdot \dot{C}_N(t-\tau) d\tau \right]$$

optical relaxation function

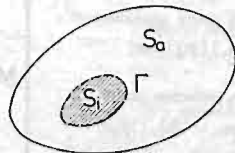


subroutine RELAX

Fig. 8

it is shown in fig. 8, under the assumption of linear elastic behaviour of material (as a mathematical model!) the mechanical process can be formulated generally by a mathematical as well as a physical model. Both these models describe the relations between external and internal forces (or stresses) and deformations (or strains) respectively. Normalizing the load conditions, the experimental analysis yields the stiffness matrix as the normalized model matrix of the physical model. Thus, the numerical simulation of the elastic continuum is replaced by a physical model, which is closer to reality than any mathematical model could be, and the most extensive and expensive part of the numerical calculation, even using computer methods, is avoided.

Considering a subdomain S_i of the whole system S (fig. 9), one may assume that the realistic mathematical modelling of this subdomain is not possible or at least very difficult. Then this subdomain S_i will be imaged by a physical model. For given external loadings and unit boundary conditions, the data $[W_i]_\Gamma$ along Γ will be taken by measu-



domaine S_i :
measured data of boundary values: $[W_i]_\Gamma$

domaine S_0 :
mathematical model: $[W_0]_\Gamma = [G]_\Gamma [L_{d0}] + [G]_\Gamma [L]_\Gamma$

$$[W_i]_\Gamma + [W_0]_\Gamma = 0$$

$$\Rightarrow [L]_\Gamma = -[G]_\Gamma^{-1} ([W_i]_\Gamma + [G]_\Gamma [L_{d0}])$$

$$\Rightarrow [W_0] = [G] \begin{Bmatrix} [L_{d0}] \\ [L]_\Gamma \end{Bmatrix}$$

Fig. 9

Circular Plate on a yielding Subgrade

mathematical model: extended plate theory (large deflection)

$$\left. \begin{aligned} B \nabla^2 \nabla^2 w &= p_b - p + h \cdot L(w, F) - w_{,rr} \cdot \Phi - \frac{h}{2} \cdot \Phi_{,rr} \\ \nabla^2 \nabla^2 F &= \frac{E}{2} L(w, w) + \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r} \Phi_{,r} - \mu \cdot \Phi_{,rr} \right) \\ &\Downarrow \\ [D] \cdot (m) &= -(p_b) + (p) - (n_r) \cdot (w') - (n_\varphi) \cdot (w'') + \frac{h}{2} (\Phi'') \\ [D] \cdot ((n_r) + (n_\varphi) + (\Phi)) &= E \cdot h \cdot (w') \cdot (w'') + (\Phi') \cdot (\Phi'') \end{aligned} \right\} M_S$$

L : diff. operator, F : stress function

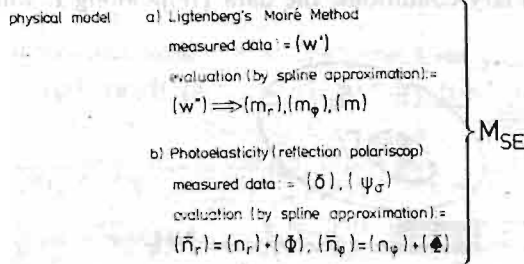
$$\Phi = - \int_{(r)} f(r) d\bar{r}$$

Fig. 10

rements. The mathematical model of S_a yields $[W_a]_r$ caused by the unit geometrical and statical boundary loadings and the external loads on S_a . The conditions of equilibrium and/or compatibility yield the matrix $[L]_r$ of the effective boundary condition along I' and furthermore the solution of the system S .

As an example, a thin plate on a yielding subgrade under large deflection is considered [8], [9]. Fig. 10 shows the constitutive equations of the fourth order, describing an advanced geometrically nonlinear plate theory as the mathematical model M_s . Obviously it seems to be very difficult to solve these equations numerically, especially as the boundary conditions are unknown. The physical model M_{se} (fig. 11), however, yields experimental data, and after evaluation of these data gives informations about the deflec-

Circular Plate on a yielding Subgrade



\Rightarrow results M_{SE} into constitut. eq. s of M_S :

$$\{t\} = [T^{-1}] \cdot [D] \cdot (\{\bar{n}_r\} + \{\bar{n}_\phi\}) + E \cdot h \cdot \{w^*\} \{w^*\}$$

$$\{p\} = \{p_a\} - B[D] \cdot (\{w^*\} + \{w^*\}) + \{n_r\} \cdot \{w^*\} + \{n_\phi\} \cdot \{w^*\}$$

Fig. 11

tion surface w and its derivations respectively as well as of the membrane stress state. These results are introduced into the constitutive equations of the mathematical model M_s and yield the final solution of the regarded problem. The block diagram demonstrates the procedure generally (fig. 12).

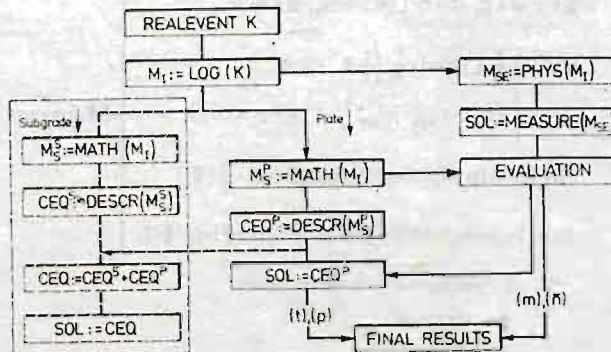


Fig. 12

Another example of the hybrid technique application is demonstrated in fig. 13 and 14. In order to study the influence of viscoelastic response of material on structures by photoviscoelastic experiments, a model of the material behaviour must be formulated. The mechanical and the optical creep function can be determined easily with proper testing methods. However, to determine the inverse functions, mathematical methods (Laplace's transform) are necessary. For the evaluation of stress-optical data, i.e. the order

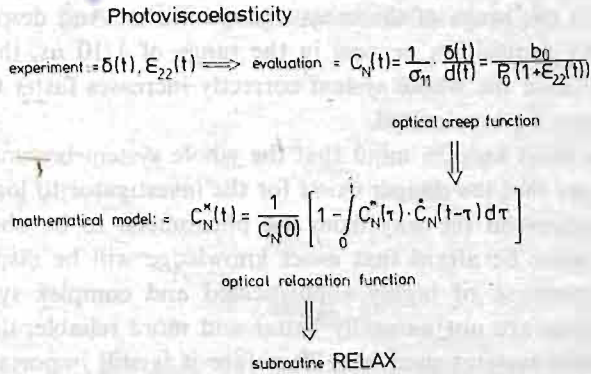


Fig. 13

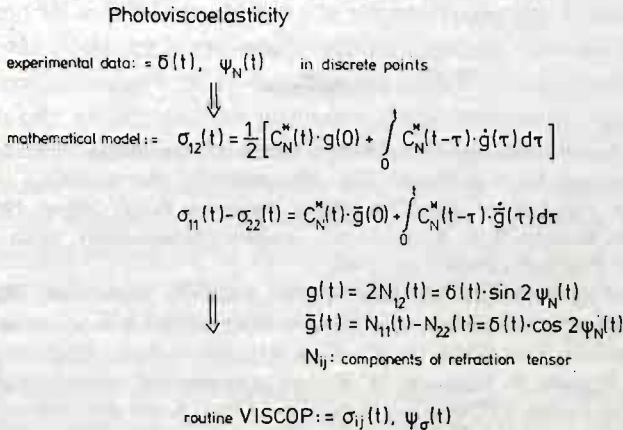


Fig. 14

of birefringence $\delta(t)$ and the angle of isoclinics $\psi_N(t)$, a mathematical model must then be derived, and furthermore advanced computer methods are needed. This example demonstrates very clearly the recent trend in experimental analysis to obtain more precise informations of the real structure behaviour by combining mathematical and physical models in a feed-back process, using all recent developments in measuring equipment, data acquisition equipment, and automatic data processing and computer methods.

But one should have in mind that the physical model together with the complete experimental setup is to be regarded as one system, which includes all measuring devices and

the necessary software. Beginning with the manufacturing of the model itself and model material, the light source (in photoelasticity, holography, Moiré technique, etc.) or the manufacturing of strain gages and their application, transducers, filters, amplifiers, the digital equipment, recording materials and recording devices have considerable influence on the results of measurement. And although recent technical developments guarantee an accuracy of the measured values, which is some potentials higher than ever before, the accumulated error caused by transition conditions and the superimposing of noise effects may be within the range of the measured quantities. And despite the rapid speed in the measuring and acquisition process in the range of $1/10 \mu\text{s}$, the time expenditure to adjust and to calibrate the whole system correctly increases faster than the automatic measuring process can be accelerated.

Furthermore one must keep in mind that the whole system becomes sort of a "black box". Doubtless to say that the danger exists for the investigator to lose contact and control about what happens on the way from the phenomena to be observed to the final output signal. One must be afraid that exact knowledge will be displaced by believing in the infallible correctness of highly sophisticated and complex systems. The results in experimental analysis are not naturally better and more reliable, the better and more complex the measuring systems used are. Therefore it is still important to use the conventional simple experimental equipments in dependency on the wanted information and the required precision.

References

1. K. H. LAERMANN, *Recent developments and further aspects of experimental stress analysis in the Federal Republic of Germany and Western Europe*, Exp. Mechanics, 21, No. 2, 1981.
2. M. BORN, W. WOLF, *Principles of optics*, 5th edition, Pergamon Press, Oxford, 1975.
3. J. T. PINDER, F. W. HECKER, B. R. KRASNOWSKI, *Gradient Photoelasticity*, Mech. Research Communications, Vol. 9 (3), Pergamon Press Ltd., 1982.
4. H. ABEN, *Integrated photoelasticity*, McGraw-Hill Int. Book Co. New York, 1979.
5. K. H. LAERMANN, *The principle of integrated photoelasticity applied to experim. analysis of plates with non-linear deformations*, Proc. VIIth Int. Conf. on Exp. Stress Anal., Haifa, 1982.
6. J. F. KALTHOFF, J. BEINERT, S. WINKLER, W. KLEMM, *Experimental Analysis of dynamic effects in different crack arrest specimens*, ASTM-E Symposium on „Crack Arrest Methodology and Applications”, Philadelphia, Pa., 1978.
7. A. HANUSKA, *Die Anwendung der Methode der Störungsrechnung für die Untersuchung des Einflusses der Querdehnzahl auf den Spannungszustand dünner Platten*, ZAMM 40, 1960.
8. K. H. LAERMANN, *Advanced theoretical and Experimental Analysis of plates in contact*, „New physical trends in experimental mechanics”, editor: J. T. Pindera, CISM Courses and Lectures No. 264, Springer-Verlag, Wien — New York, 1981.
9. K. H. LAERMANN, *Hybrid Analysis of Plate Problems*, Experimental Mechanics 21, No. 10, 1981.

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 lutego 1983 roku

WPLYW SZCZELINY PROSTOPADŁEJ DO BRZEGU NA ROZKŁAD NACISKÓW I STAN NAPRĘŻEŃ W KONTAKCIE

RYSZARD WÓJCIK

Politechnika Warszawska

JACEK STUPNICKI

Politechnika Warszawska

Wstęp

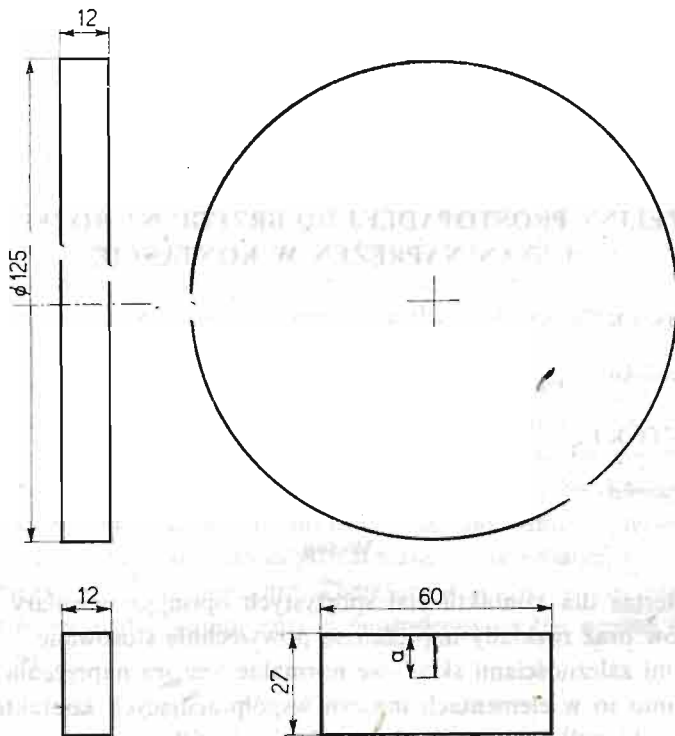
Zależności Hertza dla kontaktu ciał sprężystych opisujące wymiary pola kontaktu, rozkłady nacisków oraz rozkłady naprężeń są powszechnie stosowane.

Zgodnie z tymi zależnościami składowe normalne tensora naprężenia są ujemne (ściśkające), a pomimo to w elementach maszyn współpracujących kontaktowo, takich jak koła zębate, krzywki, rolki lub szyny obserwuje się zjawisko rozwoju pęknięć zmęczeniowych zwykle determinowanych przez istnienie naprężeń rozciągających. Panuje opinia, że w przypadkach gdy współpracujące powierzchnie są smarowane, rozwój szczeliny może być wywołany rozsadzającym działaniem oleju wypełniającego szczelinę. Autorzy pracy stawiają hipotezę, że rozwój pęknięcia może być również spowodowany przez istnienie innych mechanizmów związanych bezpośrednio ze stanem naprężeń w kontakcie. Mianowicie, stwierdzają pojawienie się na czole szczeliny leżącej w obszarze kontaktu naprężeń rozciągających, w istotny sposób odpowiedzialnych za rozwój szczeliny. Badanie przeprowadzono nad kontaktem walca z wycinkiem półpłaszczyzny, w której istniała szczelina o znanych wymiarach. (Rys. 1).

Ze względu na wymiary walca i wycinka półpłaszczyzny, można się było spodziewać, że w strefie kontaktu panował płaski stan naprężeń, jednakże w czole szczeliny istniał stan przestrzenny.

Głównym celem badań było poszukiwanie odpowiedzi na pytania: jakie są rozkłady nacisków na powierzchni kontaktu, w przypadku gdy jeden z elementów posiada szczelinę w warstwie wierzchniej oraz jakie są składowe tensora naprężenia w okolicy czoła szczeliny. Czy wierzchołek szczeliny w strefie kontaktu stanowi punkt niebezpieczny i czy może zaistnieć sytuacja sprzyjająca dalszemu rozwojowi szczeliny. Jeśli tak, to według którego z modeli Irwina zachodzi rozwój szczeliny w trakcie przetaczania się walca po elemencie ze szczeliną.

Badania prowadzono przy pomocy metody elementów skończonych, metody fotografii płamkowej dla modelu stalowego oraz metody elastooptycznej w świetle przechodzącym dla modelu z tworzywa optycznie czynnego.



Rys. 1. Kształt i wymiary walca i pryzmy ze szczeliną

Opis eksperymentu numerycznego. W MES obszar walca i płaskiej pryzmy ze szczeliną modelującej półpłaszczyznę podzielony został siatką elementów czworokątnych, przy czym gęstość siatki wzrastała w miarę zbliżania się do miejsca kontaktu i do szczeliny. Obliczenia prowadzone były trzema etapami. W etapie pierwszym wykorzystano standardowy program płaskiego zagadnienia teorii sprężystości. Dokonano obliczeń szeregu wariantów obciążeń węzłów kontaktowych na powierzchni styku walca z pryzmą oraz w szczelinie. Obciążenia dawano w postaci sił jednostkowych. W wyniku otrzymano macierze podatności i macierze naprężeń dla wszystkich węzłów.

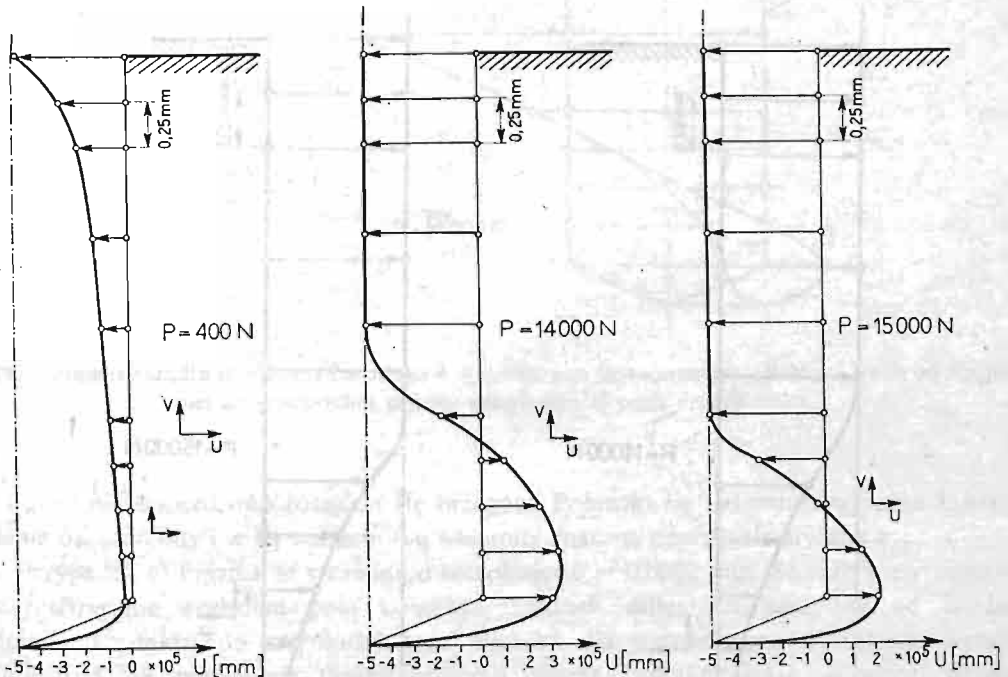
Etap drugi polegał na ułożeniu równań ciągłości przemieszczeń węzłów kontaktowych w wyniku czego wyznaczone zostały wartości sił z jakimi oddziaływały na siebie kontaktujące się ciała oraz sił wynikających z wejścia w kontakt brzegów szczeliny.

W etapie trzecim wykorzystano wyznaczone wartości sił do wyliczenia przemieszczeń i naprężeń w interesujących węzłach. Dokonano tego poprzez wymnożenie wektorów sił przez macierze uzyskane w etapie pierwszym.

Wyniki obliczeń numerycznych. Badano przypadki kontaktu ciał ze szczelinami o różnej szerokości usytuowanych symetrycznie i niesymetrycznie względem normalnej do powierzchni pryzmy przechodzącej przez środek walca.

Przypadek a) Pryzma ze szczeliną o szerokości $\delta = 0,0001$ mm leżąca symetrycznie względem pola kontaktu. Otrzymane w tym przypadku rozkłady nacisków są zbliżone

do eliptycznego rozkładu Hertza, pomimo że próbka osłabiona jest szczeliną. Uzyskane w tym przypadku deformacje szczeliny w kolejnych etapach obciążenia przedstawiono na rys. 2. Należy tu zwrócić uwagę na zjawisko zamykania się szczeliny na odcinku leżącym bezpośrednio pod powierzchnią kontaktu oraz charakterystyczne poszerzenie się szczeliny w obszarze leżącym w pobliżu wierzchołka. Proces ten narasta w kolejnych etapach obciążania. Dla przyjętych wymiarów szczeliny i przyjętego obciążenia uzyskano maksymalne rozszerzenie szczeliny o 60% w stosunku do szerokości pierwotnej. W koń-



Rys. 2. Zmiana kształtu szczeliny o szerokości $\delta = 0,0001$ mm usytuowanej symetrycznie względem pola kontaktu w trzech wybranych etapach obciążenia.

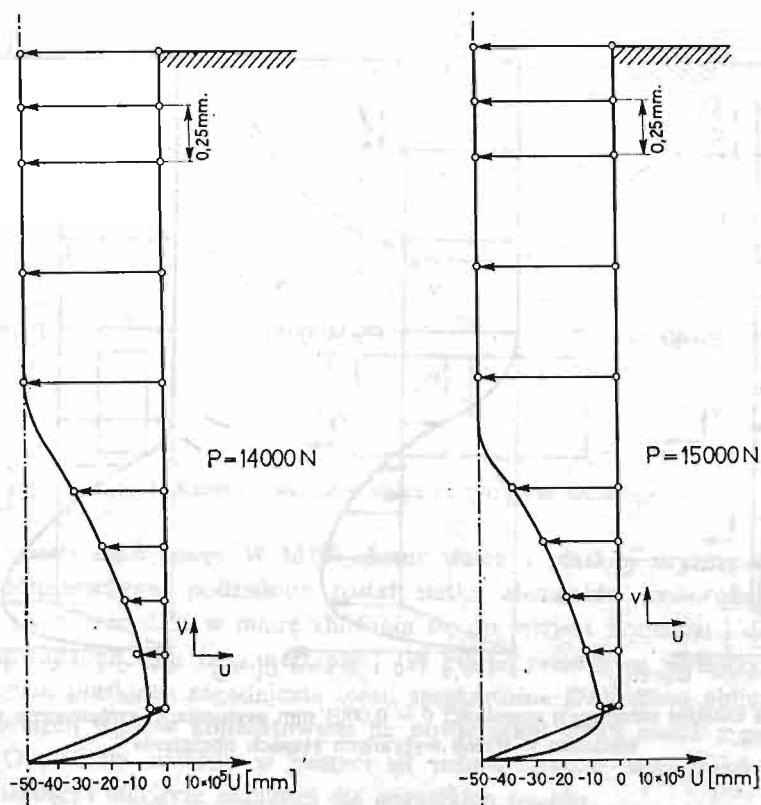
cowych etapach obciążenia szerokość szczeliny nieznacznie maleje wskutek wchodzenia w kontakt węzłów leżących w bliskiej odległości od wierzchołka szczeliny.

Opisane zjawisko jest bardzo ważne. Świadczy ono o istnieniu naprężeń rozciągających w strefie wierzchołka szczeliny. Wartości tych naprężeń zostały wyznaczone. Wyniki te są jednak obarczone dużym błędem, który spowodowany jest użyciem w obliczeniach typowych elementów nieuwzględniających rzeczywistej koncentracji naprężeń w ostrym karbie jakim jest szczelina.

Przypadek b) Pryzma ze szczeliną o szerokości dwukrotnie większej niż w przypadku poprzednim $\delta = 0,0002$ mm. Szczelina usytuowana symetrycznie względem pola kontaktu. Otrzymane w tym przypadku wyniki są jakościowo zbliżone do otrzymanych w poprzednim przypadku. Stwierdzono również rozejście się brzegów szczeliny w pobliżu wierzchołka, spowodowane naprężeniami rozciągającymi. Rozejście to jednak występuje przy większym obciążeniu niż w szczelinie wąskiej.

Przypadek c) Pryzma ze szczeliną o szerokości $\delta = 0,001$ mm. Szczelina usytuowana symetrycznie względem pola kontaktu. Rozkłady nacisków na powierzchni kontaktu są dla tego przypadku podobne, jak w przypadkach a i b. Przy porównaniu przypadków przyjmowano jako wielkość odniesienia szerokość kontaktu.

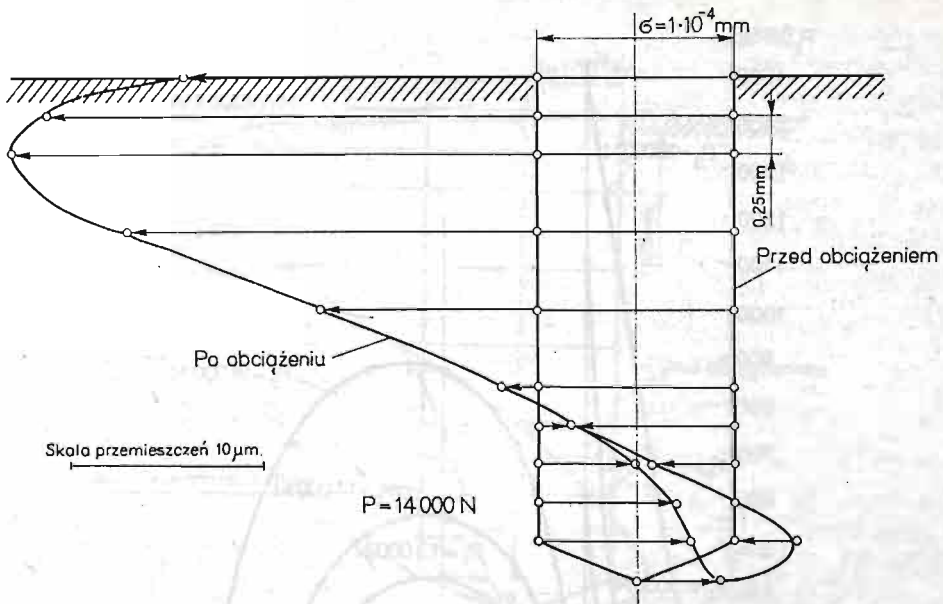
Dla rozpatrywanych przypadków stwierdzono istotną różnicę w zakresie deformacji szczelin (rys. 3).



Rys. 3. Zmiana kształtu szczeliny o szerokości $\delta = 0,001$ mm usytuowanej symetrycznie względem pola kontaktu w dwóch wybranych etapach obciążenia.

W przypadku c) zamknięcie szczeliny następuje na długości o około 10% mniejszej niż w przypadkach wąskich szczelin. Ponadto w przypadku c) nie stwierdzono rozszerzania się szczeliny w okolicy wierzchołka. Nie pojawiają się w związku z tym naprężenia rozciągające w tym obszarze.

Przypadek d) Pryzma ze szczeliną o szerokości $\delta = 0,0002$ mm. Szczelina usytuowana niesymetrycznie względem pola kontaktu. Stosunek odległości szczeliny od środka odcinka kontaktu do szerokości tego odcinka dla największego obciążenia wynosi: $x/b = 0,5$. Otrzymane rozkłady nacisków na powierzchni kontaktu są niesymetryczne, a ich wartość maksymalna odsunięta jest nieco od szczeliny tzn. w stronę węzłów o większej sztywności. Kształtu szczeliny przedstawia rys. 4. Szczeliny zamyka się w górnej części, natomiast

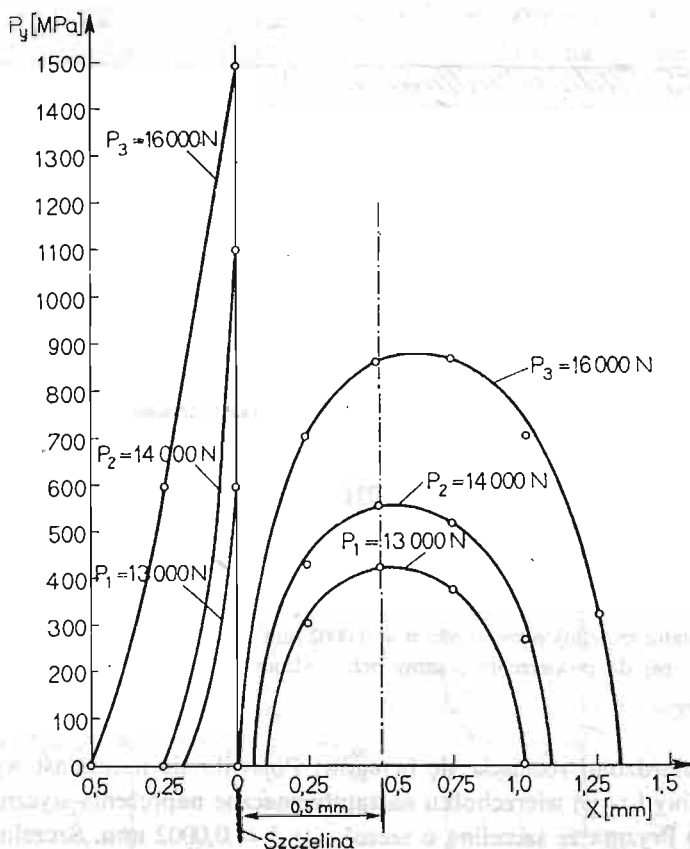


Rys. 4. Zmiana kształtu szczeliny o szerokości $\delta = 0,0002$ mm usytuowanej w odległości 1 mm od normalnej do powierzchni pryzmy przechodzącej przez środek walca.

w dolnej nie stwierdzono rozejścia się brzegów. Pojawiło się natomiast wyraźne zakrzywienie osi szczeliny i w jej wierzchołku nastąpiły znaczne naprężenia styczne τ_{xy} .

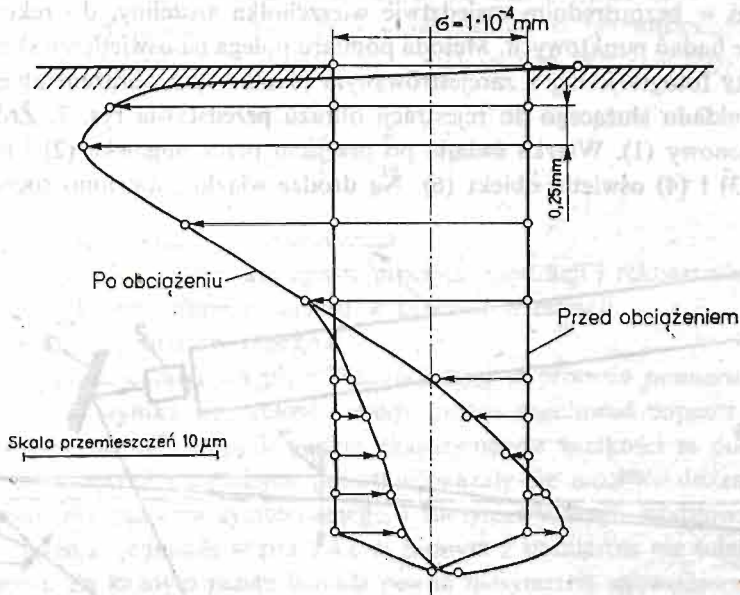
Przypadek e) Pryzma ze szczeliną o szerokości $\delta = 0,0002$ mm. Szczelina usytuowana niesymetrycznie względem pola kontaktu stosunek odległości szczeliny od środka odcinka kontaktu do szerokości tego odcinka dla największego obciążenia wynosi $x/b = 0,25$. W pierwszych fazach obliczeń obszar kontaktu leżał po jednej stronie od szczeliny, natomiast w fazach końcowych pole kontaktu obejmowało szczelinę. W tym przypadku istotny był moment wejścia w kontakt krawędzi szczeliny, gdyż wiąże się to z nagłą zmianą stanu naprężeń. Na rys. 5 przedstawiono dla tego etapu rozkłady nacisków na powierzchni kontaktu. W sytuacji gdy pole kontaktu leży po jednej stronie szczeliny, rozkłady te mają kształt zbliżony do eliptycznego, podobnie jak w poprzednich przypadkach. W chwili wejścia w kontakt drugiej (lewej) krawędzi szczeliny naciski rozkładają się po jej obydwu stronach. Maksymalne wartości nacisków przypadają na węzeł leżący na krawędzi szczeliny i maleją gwałtownie w miarę oddalania się od szczeliny. Według otrzymanych wyników wartości nacisków w tym punkcie przewyższają dwukrotnie wartości maksymalnych nacisków rozkładu eliptycznego.

Moment wejścia w kontakt krawędzi szczeliny widoczny jest również na rys. 6, przedstawiającym zmianę kształtu szczeliny w trakcie wzrostu obciążenia. Węzeł leżący na krawędzi szczeliny w początkowych etapach obciążenia doznaje przemieszczeń w lewo (od osi walca), a w chwili wejścia w kontakt przesuwa się on gwałtownie w prawo. Tym samym oś symetrii szczeliny przyjmuje kształt litery S. W wierzchołku szczeliny pojawia się w tym przypadku duża koncentracja naprężeń tnących.



Rys. 5. Rozkłady nacisków na powierzchni kontaktu walca z pryzmą. Szczelina o szerokości $\delta = 0,0002$ mm usytuowana w odległości 0,5 mm od normalnej do powierzchni pryzmy przechodzącej przez środek walca.

Wnioski wynikające z badań numerycznych. Zbadano pięć przypadków kontaktu walca z wycinkiem półpłaszczyzny osłabionej szczeliną, usytuowaną w różnych odległościach od osi działania obciążenia. Każdy z tych przypadków przedstawia sytuację jaka ma miejsce podczas przetaczania walca po krawędzi półpłaszczyzny. Na podstawie badań można stwierdzić, że: wąska szczelina usytuowana symetrycznie względem obciążenia doznaje rozwarcia w dolnej części. W okolicy wierzchołka szczeliny pojawiają się naprężenia rozciągające. Jest to wynik jakościowo nowy w porównaniu do rozkładów naprężeń w półpłaszczyźnie bez szczeliny. Jednocześnie należy stwierdzić, że rozwarcie szczeliny może być efektem skończonych wymiarów pryzmy i brakiem oddziaływań na bocznych swobodnych brzegach pryzmy. Badania pozwoliły stwierdzić, że tendencja do rozchodzenia się krawędzi szczeliny w pobliżu wierzchołka jest tym większa im węższa jest szczelina. Efekt ten najsilniej wystąpił w przypadku szczeliny o szerokości $\delta = 0,0001$ mm, nieco słabiej w przypadku szczeliny o szerokości $\delta = 0,002$ mm natomiast dla przyjętej szerokości pryzmy nie stwierdza się zjawiska rozchodzenia się brzegów szczeliny o szerokości $\delta = 0,001$ mm. W przypadku szerszej szczeliny zmniejsza się wzajemne oddziaływanie



Rys. 6. Zmiana kształtu szczeliny o szerokości $\delta = 0,0002 \text{ mm}$ usytuowanej w odległości 0,5 mm od normalnej do powierzchni pryzmy przechodzącej przez środek walca.

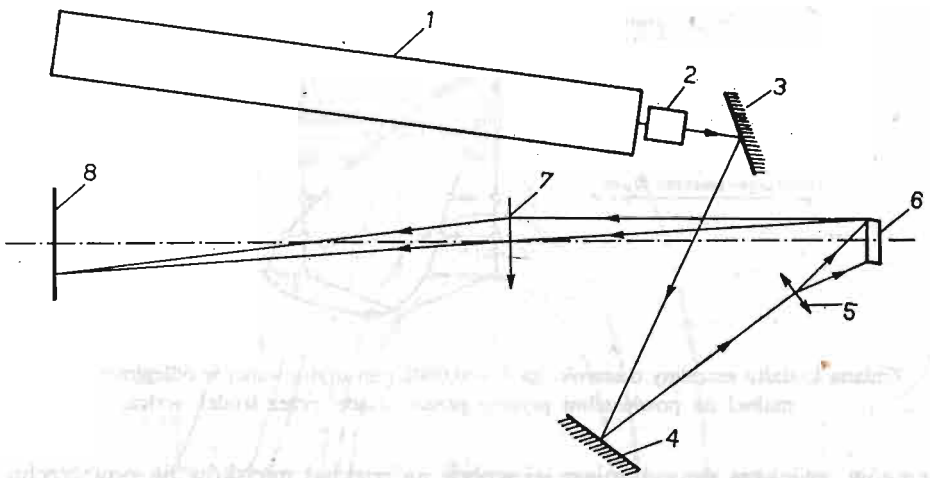
jej brzegów, zwiększa się natomiast jej wpływ na rozkład nacisków na powierzchni kontaktu. Jeśli chodzi o wartości naprężeń w wierzchołku szczeliny to uznano, że wyniki numeryczne odbiegają od rzeczywistości ze względu na użycie standardowych elementów nie uwzględniających osłabienia w wierzchołku szczeliny. Natomiast należy zwrócić uwagę na bardzo wysokie wartości nacisków na krawędzi szczeliny usytuowanej niesymetrycznie względem obciążenia. Istnieje więc możliwość wystąpienia na krawędzi odkształceń plastycznych lub wykruszenia krawędzi w tym miejscu.

Opis eksperymentu z wykorzystaniem metody fotografii plamkowej. Istota zastosowanej metody polega na wykorzystaniu zjawiska plamkowania jakie powstaje w wyniku oświetlenia obiektu światłem laserowym [1]. Podobnie jak inne metody holograficzne służące do pomiarów przemieszczeń jest to metoda podwójnej ekspozycji. W pierwszej ekspozycji dokonuje się rejestracji na płycie fotograficznej plamek dla obiektu nieodkształconego, w drugiej natomiast rejestrujemy obraz plamkowy obiektu odkształconego. W wyniku otrzymuje się nałożone na siebie dwa obrazy badanego obiektu, różniące się układem plamek, przemieszczonych na skutek obciążenia obiektu. Proces rekonstrukcji prowadzony może być metodą połową lub plamkową. W wyniku otrzymuje się informację o kierunku i wielkości składowej wektora przemieszczenia badanego punktu obiektu.

Objektem badań był obszar kontaktu stalowego walca ze stalowymi pryzmami posiadającymi prostopadle do powierzchni kontaktu szczeliny o różnej długości. Szczeliny te były rzeczywistymi szczelinami zmęczeniowymi powstałymi w wyniku poddania próbek jednostronnemu zginaniu na maszynie zmęczeniowej. Badano próbki ze szczelinami o długościach 1 mm, 3 mm, 5 mm. Ze względu na konieczność precyzyjnego wyznaczenia

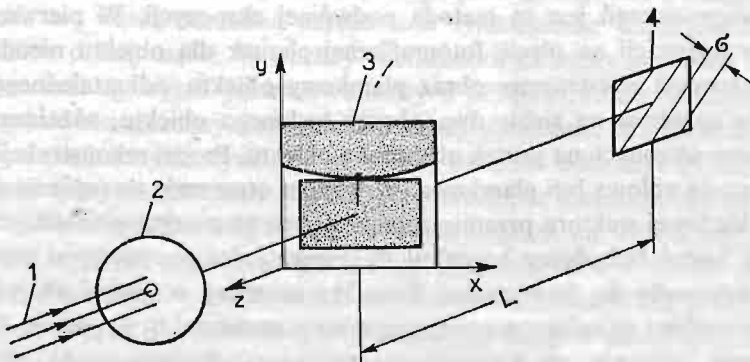
przemieszczeń w bezpośrednim sąsiedztwie wierzchołka szczeliny, do rekonstrukcji wybrano metodę badań punktowych. Metoda pomiaru polega na oświetleniu skupioną wiązką laserową płyty fotograficznej z zarejestrowanym plamkowym obrazem obiektu.

Schemat układu służącego do rejestracji obrazu przedstawia rys. 7. Źródłem światła był laser argonowy (1). Wiązka światła po przejściu przez migawkę (2) i po odbiciu od zwierciadeł (3) i (4) oświetla obiekt (6). Na drodze wiązki ustawiono soczewkę (5) for-



Rys. 7. Schemat układu do rejestracji obrazu plamkowego.

mującą rozbieżną wiązkę światła. Plamkowy obraz powierzchni próbki w płaszczyźnie płyty fotograficznej uzyskano za pomocą obiektywu (7). W badaniach stosowano dwukrotne powiększenie obrazu względem obiektu. Schemat układu pomiarowego służącego do wyznaczania przemieszczeń na powierzchni konstrukcji przedstawia rys. 8. W skład układu wchodzi: laser (1), diafragma (2), płyta fotograficzna z zarejestrowanym obrazem plamkowym obiektu (3) oraz ekran (4). Zadaniem diafragmy jest zmniejszenie średnicy wiązki laserowej, tak aby oświetlony obszar na płycie fotograficznej był jak najmniejszy.



Rys. 8. Schemat układu do punktowej rekonstrukcji obrazu plamkowego.

W wyniku interferencji wiązek, na ekranie tworzy się układ równoległych prążków będących odpowiednikiem prążków Younga i świadczących o przemieszczeniu badanego punktu, przez który w danej chwili przechodzi wiązka światła. Wielkość tego przemieszczenia wyznacza się z wyrażenia:

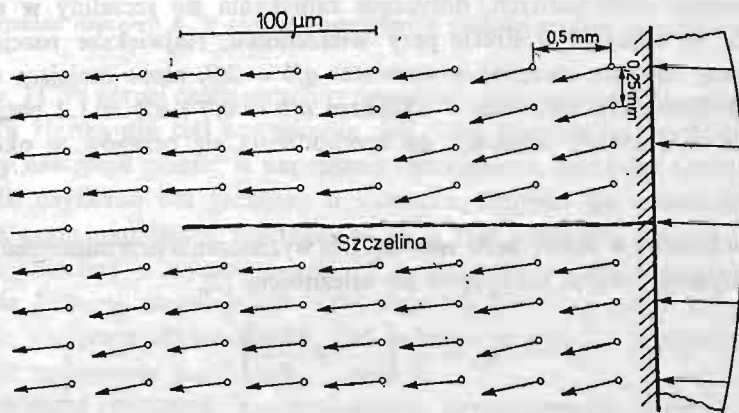
$$|\bar{d}| = \frac{\lambda \cdot L}{M \cdot \delta}, \quad (1)$$

gdzie:

- $|\bar{d}|$ — długość wektora przemieszczenia
- λ — długość fali światła użytego w procesie rejestracji i rekonstrukcji
- M — powiększenie obrazu obiektu w procesie rejestracji
- δ — zmierzony rozstaw prążków
- L — odległość ekranu od płyty fotograficznej w procesie pomiaru

Z zależności (1) wynika, że czułość metody można regulować poprzez dobór odległości L i powiększenia M . W opisywanym eksperymencie wielkości te dobrano tak, że przemieszczenia wszystkich badanych punktów okazały się możliwe do zmierzenia. Pomiar dotyczył przypadków symetrycznego i niesymetrycznego usytuowania szczeliny względem obciążenia, jednakże w praktyce w żadnym z pomiarów nie udało się uzyskać idealnej symetrii. Za każdym razem istniała pewna niesymetria spowodowana trudnością idealnego ustawienia walca względem szczeliny jak również tym, że szczeliny będące rzeczywistymi pęknięciami zmęczeniowymi rozwijającymi się w sposób przypadkowy nie miały kierunku idealnie prostopadłego do powierzchni pryzmy.

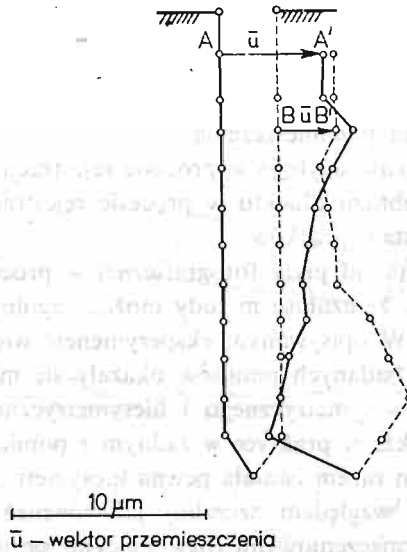
Wyniki pomiarów metodą fotografii plamkowej. Wektory przemieszczeń punktów wokół szczeliny usytuowanej symetrycznie względem obciążeń, dla której stosunek długości szczeliny do szerokości pola kontaktu wynosi $a/b = 1,2$ przedstawiono na rys. 9. Analo-



Rys. 9. Wektory przemieszczeń punktów wokół szczeliny o długości znormalizowanej $a/b = 1, 2$.

giczne obrazy przemieszczeń uzyskano dla szczelin o wymiarach $a/b = 0,4$ oraz $a/b = 2,0$, jak również dla szczeliny o stosunku $a/b = 1,2$ usytuowanej niesymetrycznie. Rozporządzając wektorami przemieszczeń możliwe było rozłożenie wektorów przemieszczeń na składowe równoległe i prostopadłe do osi szczeliny. Korzystając z prostopadłych składo-

wych przemieszczenia sporządzono wykresy zmian kształtu szczeliny. Kształt szczeliny usytuowanej symetrycznie, dla której $a/b = 1,2$ przedstawia rys. 10. Przyjęta szerokość szczeliny została wyznaczona jako średnia różnica przemieszczeń punktów prawego i le-



Rys. 10. Zmiana kształtu szczeliny o długości znormalizowanej $a/b = 1, 2$ wyznaczona metodą fotografii płamkowej.

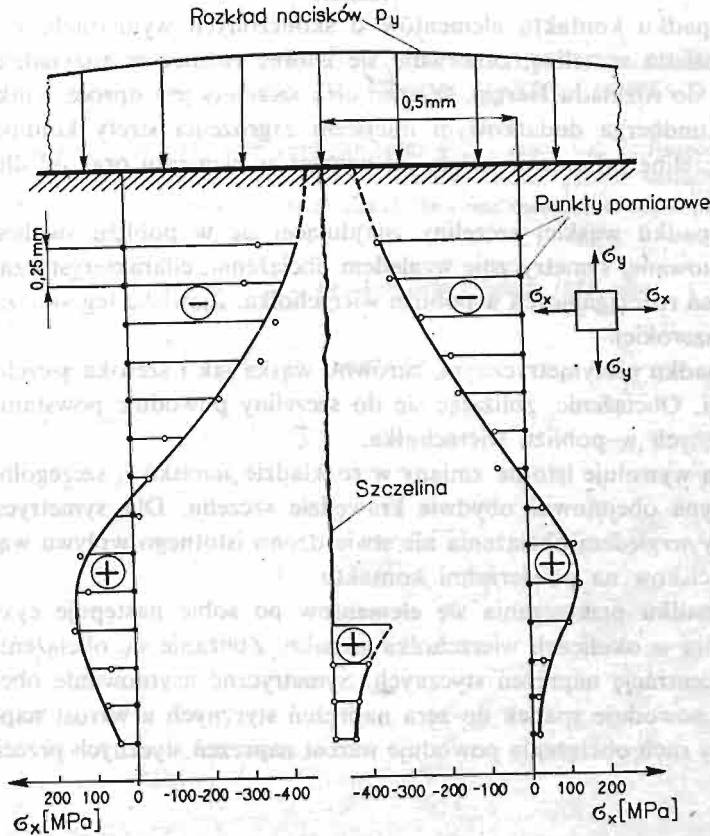
wego brzegu szczeliny. Opisana procedura powoduje, że w pewnych punktach brzegi szczeliny „zachodzą” na siebie. Uzyskane wyniki potwierdzają spostrzeżenia dokonane w trakcie obliczeń numerycznych, dotyczące zamykania się szczeliny w górnej strefie i rozchodzenia się brzegów w strefie przy wierzchołku. Największe rozejście brzegów stwierdzono przy badaniu szczeliny o wymiarze $a/b = 2,0$, nieco mniejsze w przypadku gdy $a/b = 1,2$. Natomiast szczelina o wymiarze $a/b = 0,4$ i $a/b = 1,2$ obciążona niesymetrycznie nie wykazywały tendencji do rozchodzenia się brzegów w okolicach czoła szczeliny.

Wyznaczenie naprężeń w okolicy czoła szczeliny. Dla wyznaczenia przemieszczeń i odkształceń powierzchni pryzmy i walca posłużono się zależnością [2].

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

Dla wyznaczenia naprężeń przyjęto założenie o sprężystości materiału dla płaskiego stanu naprężeń. Otrzymane składowe przemieszczeń interpolowano wielomianami przy użyciu metody najmniejszych kwadratów. Proces różniczkowania nie nastroczał w tej sytuacji trudności.

Spśród otrzymanych w punktach pomiarowych wartości naprężeń, najciekawsze z punktu widzenia celu badań były rozkłady naprężeń σ_x w punktach leżących wzdłuż osi szczeliny. Dla szczeliny usytuowanej symetrycznie, o wymiarze $a/b = 1,2$ rozkład ten



Rys. 11. Rozkład naprężeń σ_x w otoczeniu szczeliny o długości znormalizowanej $a/b = 1, 2$.

przedstawia rys. 11. W górnej części szczeliny naprężenia mają wartości ujemne, co pokrywa się z rozkładem Hertza dla ciał bez szczelin. Im bliżej wierzchołka wartości te zbliżają się do zera aby następnie przejść w naprężenia rozciągające, osiągając znaczne wartości. Podobny wynik uzyskano dla szczeliny o stosunku długości do szerokości kontaktu $a/b = 2,0$ przy czym naprężenia rozciągające są w tym wypadku znacznie większe niż w wierzchołku szczeliny o wymiarze $a/b = 1,2$. Istnienia naprężeń rozciągających nie stwierdzono dla krótszej szczeliny $a/b = 0,4$ oraz dla szczeliny $a/b = 1,2$ usytuowanej niesymetrycznie względem obciążenia. W tym ostatnim przypadku w wierzchołku dominowały znaczne naprężenia tnące.

Uzyskane wykresy naprężeń σ_x potwierdzają przewidywania wysnute w oparciu o zmiany kształtu szczelin. Są one również zgodne z wynikami otrzymanymi w drodze numerycznej. Badania doświadczalne wykazały istnienie znacznie większych wartości naprężeń rozciągających w pobliżu wierzchołka szczeliny niż w MES co jest uzasadnione i zgodne z przewidywaniami. Przyjęcie w MES zbyt prostych elementów w pobliżu wierzchołka szczeliny nie pozwoliło na uzyskanie rzeczywistej koncentracji naprężeń.

Metoda fotografii płamkowej jest jedną z niewielu metod, które pozwalają precyzyjnie wyznaczyć rozkłady naprężeń na obszarze tak niewielkim jakim jest strefa wokół szczeliny.

Wnioski:

1. W przypadku kontaktu elementów o skończonych wymiarach, z których jeden dodatkowo posiada szczelinę, obserwuje się istotne różnice w rozkładzie naprężeń σ_x w porównaniu do rozkładu Hertza. Wierzchołek szczeliny jest oprócz punktów Bielajewa i Palmgrena-Lundberga dodatkowym miejscem zagrożenia strefy kontaktu. Spowodowane przez szczelinę zaburzenie zależy od wymiarów elementu oraz od długości i szerokości szczeliny.

2. W przypadku wąskiej szczeliny znajdującej się w pobliżu swobodnej krawędzi obiektu i usytuowanej symetrycznie względem obciążenia, charakterystyczne jest istnienie dużych naprężeń rozciągających w pobliżu wierzchołka. Zjawiska tego nie zaobserwowano dla szczeliny szerokiej.

3. W przypadku niesymetrycznym, zarówno wąska jak i szeroka szczelina jest groźna dla konstrukcji. Obciążenie, zbliżając się do szczeliny powoduje powstanie koncentracji naprężeń stycznych w pobliżu wierzchołka.

4. Szczelina wywołuje istotne zmiany w rozkładzie nacisków, szczególnie gdy obszar kontaktu zaczyna obejmować obydwie krawędzie szczelin. Dla symetrycznego usytuowania szczeliny względem obciążenia nie stwierdzono istotnego wpływu wąskiej szczeliny na rozkład nacisków na powierzchni kontaktu.

5. W przypadku przetaczania się elementów po sobie następuje cykliczna zmiana stanu naprężenia w okolicach wierzchołka szczelin. Zbliżanie się obciążenia do szczeliny wywołuje koncentrację naprężeń stycznych. Symetryczne usytuowanie obciążenia względem szczeliny powoduje spadek do zera naprężeń stycznych a wzrost naprężeń normalnych σ_x . Dalszy ruch obciążenia powoduje wzrost naprężeń stycznych przeciwnego znaku.

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. ENNOS, *Speckle interferometry, Laser Speckle and Related Phenomena*, Topics in Applied Physics, Springer Verlag, V. 9, p. 203 - 252, 1975.
2. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*.

Резюме**ВЛИЯНИЕ ТРЕЩИНЫ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К БЕРЕГУ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ И СОСТОЯНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНТАКТЕ**

Исследовано контактную задачу между цилиндром и полупространством с трещиной. Представлено результаты полученные по методу конечных элементов и методу пятнистой фотографии. Определено распределения нагрузки на поверхности контакта и напряжений вокруг трещины. Развитие трещины в конструкции вызванное напряжениями обсуждается в работе.

Summary

THE INFLUENCE OF THE CRACK PERPENDICULAR TO THE EDGE ON THE LOAD DISTRIBUTION AND ON THE STRESS STATE IN CONTACT

The study of the contact between roller and half-plane with a crack was performed. The FEM and speckle photography method were used. The load distributions on the contact surface and strain near the crack tip were obtained. The crack propagation due to the stress variation is discussed.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1983 roku

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
5408 S. UNIVERSITY AVENUE
CHICAGO, ILLINOIS 60637

RECEIVED
JAN 15 1947

1. K. F. O'Leary, *Journal of Polymer Science*, **1**, 105 (1947)
2. K. F. O'Leary, *Journal of Polymer Science*, **1**, 115 (1947)

RECEIVED
JAN 15 1947

1. K. F. O'Leary, *Journal of Polymer Science*, **1**, 105 (1947)
2. K. F. O'Leary, *Journal of Polymer Science*, **1**, 115 (1947)

NISKOCYKLOWA TRWAŁOŚĆ ZMĘCZENIOWA STALI O PODWYŻSZONEJ WYTRZYMAŁOŚCI W UJĘCIU ENERGETYCZNYM

CZESŁAW GOSS

Wojskowa Akademia Techniczna

1. Wstęp

Rozważania energetyczne dają możliwość pełniejszego ujęcia trwałości zmęczeniowej, niż to wynika z uwzględnienia odkształceń lub naprężeń. Pewne próby określenia związków między energią wyznaczoną z pola pętli histerezy a żywotnością zmęczeniową zostały przedstawione, na przykład, w pracach [1] do [10]. Istniejące energetyczne kryteria zmęczenia mogą być podzielone na dwie grupy:

- kryteria oparte na pomiarze pracy odkształceń plastycznych określonej z pętli histerezy,
- kryteria uwzględniające termodynamiczne własności materiału i zakładające podobieństwo między zniszczeniem i stopieniem.

Rozważania zostaną ograniczone do kryteriów pierwszej grupy, w których jako warunek zniszczenia przyjmuje się osiągnięcie określonej wartości przez dysypację sumaryczną tzn. gdy energia nieodwracalnie rozproszona w materiale osiągnie wartość graniczną. Dysypacja jest uwzględniana nie tylko w kryteriach niszczenia elementów przy małej liczbie cykli obciążenia, ale ostatnio również w zakresie ograniczonej i nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej [9]. Z tego względu znajomość dysypacji odgrywa ważną rolę w charakterystyce stali w czasie cyklu obciążenia.

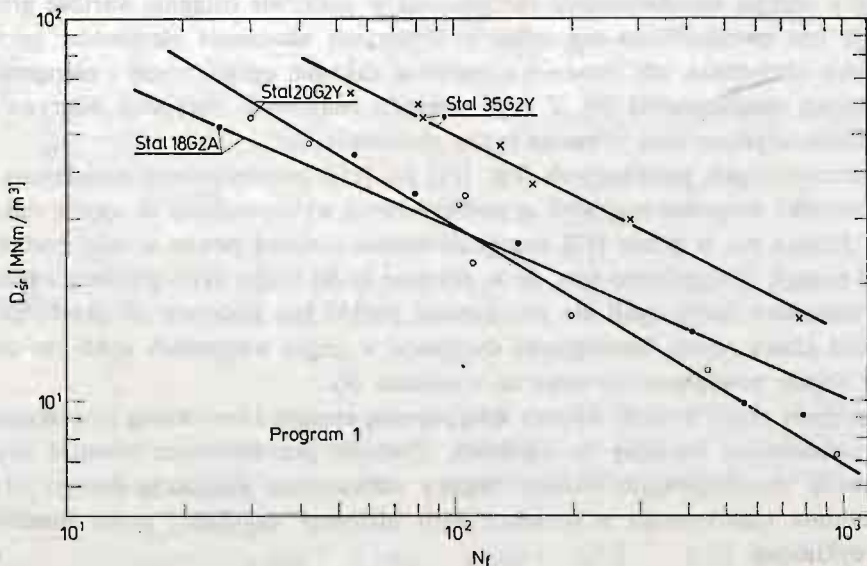
We wcześniejszych publikacjach (np. [11] do [15]) przedstawiono zasadniczo wyniki badań trwałości zmęczeniowej stali o podwyższonej wytrzymałości w ujęciu odkształceniowym. Jednak już w pracy [12] zasygnalizowano również pewne wyniki badań zmian dysypacji energii. Stwierdzono tam, że w zakresie małej liczby cykli przebieg zmian dysypacji ze wzrostem liczby cykli dla pojedynczej próbki jest podobny do przebiegu zmian odkształceń plastycznych. Sumaryczna dysypacja w czasie wszystkich cykli do zniszczenia N_f z reguły powiększa się wraz ze wzrostem N_f .

W niniejszej pracy związki między dysypowaną energią i trwałością zmęczeniową zostaną przedstawione bardziej szczegółowo. Zostanie przedstawione również kryterium porównawcze uwzględniające różnicę między sumaryczną dysypacją energii określoną doświadczalnie i otrzymaną z pomiaru pętli histerezy uzyskanej przez transformację krzywej cyklicznej.

2. Trwałość zmęczeniowa w ujęciu energetycznym

W pracach [11] do [15] przedstawiono metodykę i warunki badań zmęczeniowych niektórych gatunków stali produkcji krajowej w zakresie małej liczby cykli oraz uzyskane wyniki. We wszystkich tych pracach podstawę do dalszych rozważań stanowiły przebiegi cyklicznego odkształcenia ze zmianą liczby cykli przy danym obciążeniu o stałej amplitudzie naprężenia lub odkształcenia. Badania prowadzono przy wahadłowym rozciąganiu — ściskaniu o stałej amplitudzie odkształcenia całkowitego (program 1), przy odzerowo tętniącym rozciąganiu (program 2) i przy cyklu jednostronnym dodatnim o współczynniku amplitudy $R = 0,5$ (program 3). Na podstawie obserwacji zmian pętli histerezy i przez pomiar określonych wielkości uzyskano informacje o własnościach cyklicznych badanych stali oraz o trwałości zmęczeniowej określonej na podstawie analizy odkształceń. Znajomość przebiegu cyklicznego odkształcenia ze wzrostem liczby cykli pozwala również na obliczenie pól poszczególnych pętli histerezy a stąd wielkości energii dysypacji na jeden cykl D_N i sumarycznej dysypowanej energii w czasie wszystkich cykli do zniszczenia $\sum_{N=1}^{N_f} D_N$.

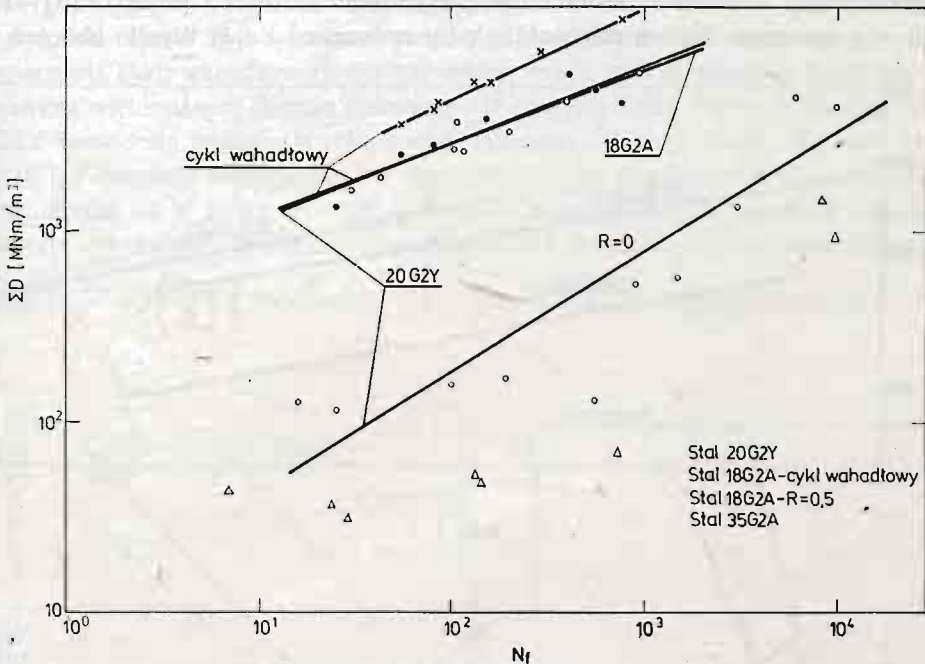
W pracy [6] stwierdzono, że związki między dysypacją sumaryczną a liczbą cykli do zniszczenia dla badanych stali niklowo-chromowych mogą być w układzie logarytmicznym aproksymowane liniami prostymi. Podobną własnością charakteryzowały się zależności, przedstawione we wspomnianej pracy, pomiędzy energią dysypacji na jeden cykl (mierzoną przy połowie żywotności) a liczbą cykli do zniszczenia. Dotyczy to również związków między maksymalnym naprężeniem cyklu σ_{\max} i dysypacją sumaryczną $\sum D$, przy czym wielkości te zostały przedstawione we współrzędnych bezwymiarowych $\frac{\sum D}{D_s}$ i $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_f}$, gdzie D_s jest energią dysypacji na jednostkę objętości, a σ_f rzeczywistym naprężeniem



Rys. 1

zerwania przy statycznym rozciąganiu. Dla uzyskania odpowiednich zależności dla badanych stali o podwyższonej wytrzymałości rozpatrzono następujące związki:

- między dysypacją na jeden cykl D_{sr} , przy liczbie cykli równej połowie żywotności $1/2 N_f$ a liczbą cykli do zniszczenia N_f ,
- między dysypacją sumaryczną $\sum D$ a liczbą cykli do zniszczenia N_f ,
- między amplitudą naprężenia cyklu ustalonego σ_a a dysypacją sumaryczną $\sum D$,
- między zakresem odkształcenia całkowitego $\Delta \varepsilon_{ac}$ a dysypacją sumaryczną $\sum D$,
- między zakresem odkształcenia plastycznego $\Delta \varepsilon_{apl}$ a dysypacją sumaryczną $\sum D$.



Rys. 2

Rozpatrzono również pewne związki we współrzędnych bezwymiarowych, a mianowicie zależność stosunku dysypacji sumarycznej do dysypacji pod krzywą statycznego rozciągania $\frac{\sum D}{D_s}$ od:

$\frac{\sum D}{D_s}$ od:

c₁) stosunku amplitudy naprężenia do wytrzymałości doraźnej $\frac{\sigma_a}{R_m}$,

d₁) stosunku zakresu odkształcenia całkowitego do odkształcenia plastycznego przy zerwaniu w statycznej próbie rozciągania $\frac{\Delta \varepsilon_{ac}}{\varepsilon_f}$,

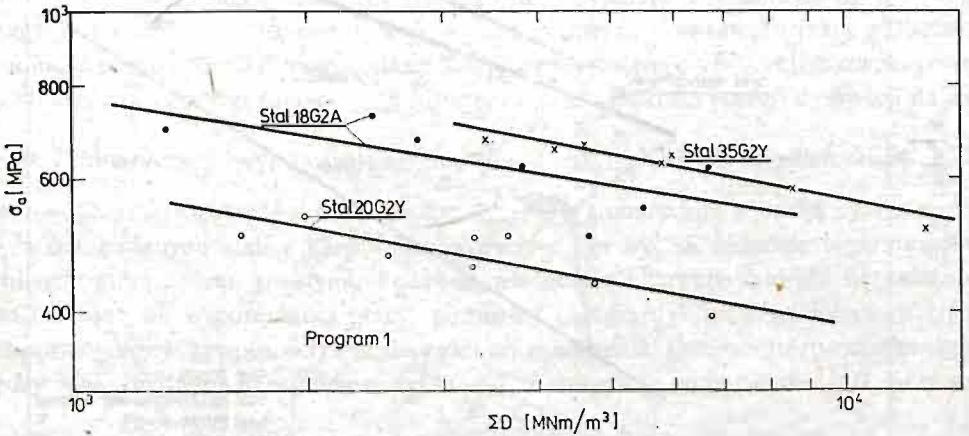
e₁) stosunku zakresu odkształcenia plastycznego do odkształcenia plastycznego przy zerwaniu w statycznej próbie rozciągania $\frac{\Delta \varepsilon_{apl}}{\varepsilon_f}$.

W oparciu o wyniki doświadczeń założono, że zależności te w układach logarytmicznych mogą być aproksymowane liniami prostymi. Obliczenia prowadzono wprowadzając

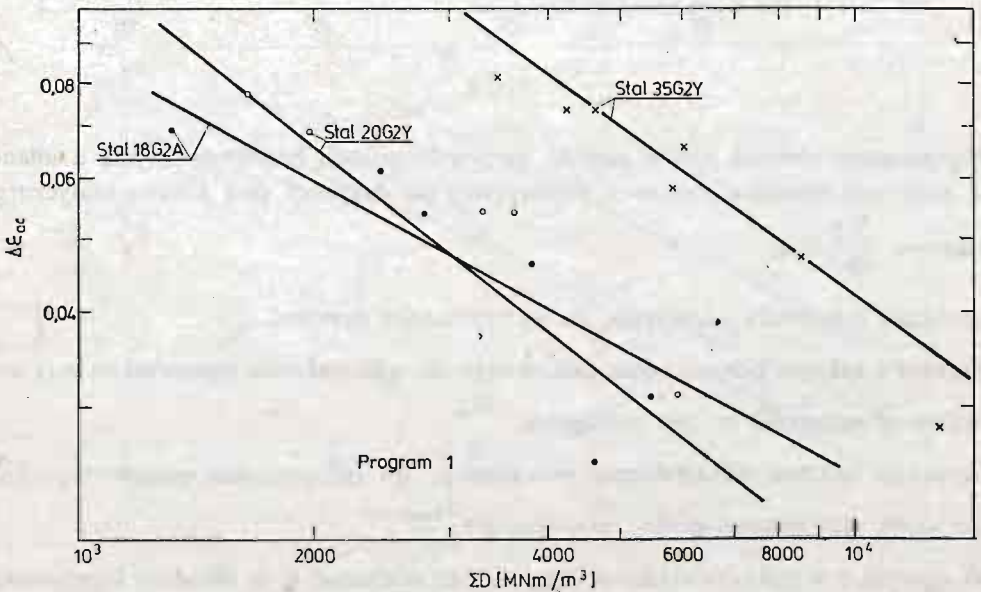
zmienne: X — logarytm odciętej badanych zależności, Y — logarytm rzędnej. Wtedy proste te można zapisać w postaci

$$Y = a + bX, \quad (1)$$

gdzie współczynniki a i b wyznaczamy z warunku, aby suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami wyznaczonymi z równania (1) i uzyskanymi z badań była minimalna. Współczynnik kierunkowy prostej (1) b nazywamy współczynnikiem regresji. Punkty uzyskane z badań nie leżą na ogół na prostej regresji i miarą ich rozproszenia względem tej prostej jest współczynnik korelacji r , który może przyjmować wartości z przedziału $(-1, 1)$. Gdy $|r| = 1$ występuje liniowa zależność między zmiennymi X i Y . Wyniki obliczeń wiel-

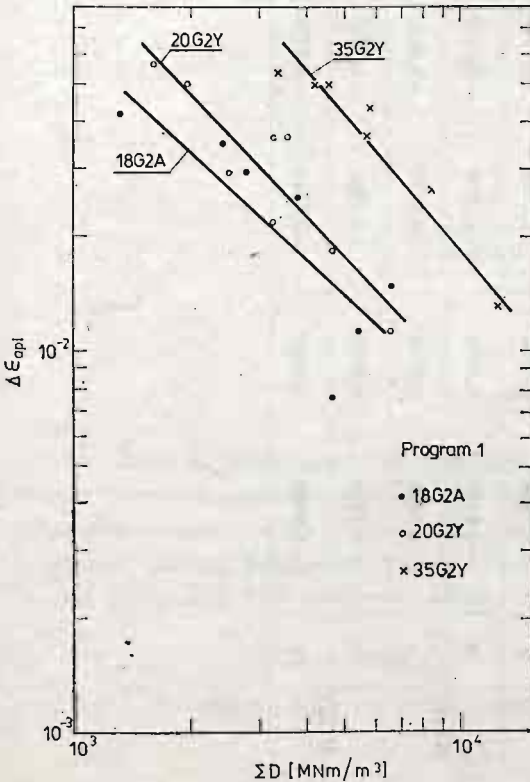


Rys. 3

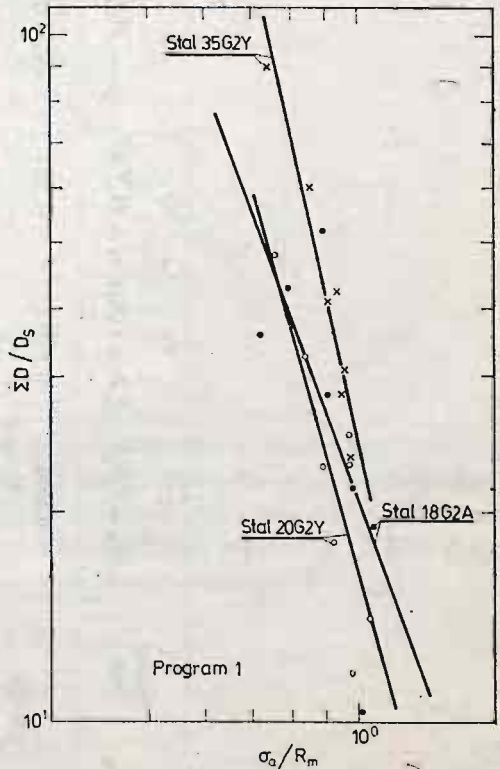


Rys. 4

kości b i r dla zależności od a do e_1 dla stali 18G2A, 20G2Y i 35G2Y zostały przedstawione w tabelicy 1, a odpowiednie wykresy na rysunkach od 1 do 10. Większość rozważanych zależności może być w układzie logarytmicznym z wystarczającą dla celów inżynierskich dokładnością aproksymowana liniami prostymi. Jedynie dla stali 18G2A dla cyklu o $R = 0,5$ uzyskano większe rozbieżności. Mogą one być spowodowane wadami materiałowymi i niedokładnością pomiarów ze względu na małe powierzchnie pętli przy cyklach niesymetrycznych. Odpowiednie wartości współczynników korelacji r dla cykli symetrycznych zostały podane w tabelicy 1. Większe rozbieżności uzyskano w przypadku zależności $\sum D = f(N_f)$ dla stali 18G2A dla trzeciego programu badań (rys. 2). Do aproksymacji tego wykresu celowe byłoby zastosowanie wielomianu przynajmniej drugiego stopnia. Natomiast dla cykli wahadłowych dla wszystkich trzech stali zależność ta może być aproksymowana wielomianem stopnia pierwszego (r powyżej 0,92). Proste te dla stali 18G2A i 20G2Y prawie się pokrywają. Natomiast odbiegają od nich wyniki dla stali 35G2Y. Na przebieg dysypacji sumarycznej ma zasadniczy wpływ współczynnik asymetrii cyklu R . Wykres obniża się w miarę wzrostu R . Spośród rozpatrywanych związków najmniejszą zależnością od rodzaju materiału i współczynnika asymetrii cyklu charakteryzują się wykresy $\frac{\sum D}{D_s} = f\left(\frac{\sigma_{\max}}{R_m}\right)$. Wykresy te dla badanych cykli niesymetrycznych ($R = 0$ i 0,5)



Rys. 5



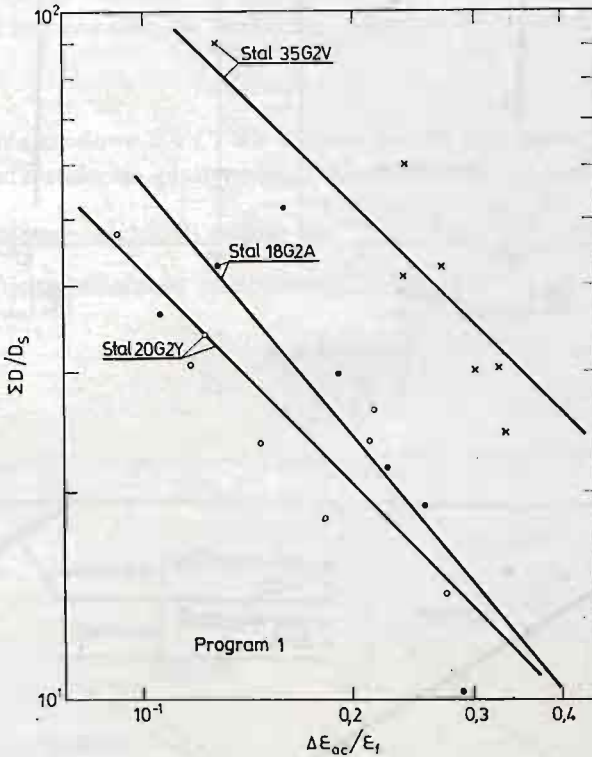
Rys. 6

Tablica 1

Nazwa stali	a) $\Delta D_{sr} = f(N_r)$	b) $\sum D = f(N_r)$	c) $\sigma_a = f(\sum D)$	d) $\Delta e_{ac} = f(\sum D)$	e) $\Delta e_{apt} = f(\sum D)$	c ₁₎ $\frac{\sum D}{D_s} = f\left(\frac{\sigma_a}{R_m}\right)$	d ₁₎ $\frac{\sum D}{D_s} = f\left(\frac{\Delta e_{er}}{\varepsilon_f}\right)$	e ₁₎ $\frac{\sum D}{D_s} = f\left(\frac{\Delta e_{apt}}{\varepsilon_f}\right)$	
18G2A	b	-0,4374	0,3931	-0,1651	-0,5473	-0,9273	-2,8313	-1,2362	-0,7010
	r	-0,7956	0,9202	-0,6783	-0,7340	-0,8085	-0,6887	-0,8254	-0,8158
20G2Y	b	-0,6135	0,3879	-0,1804	-0,8136	-1,1157	-3,8957	-1,0274	-0,7595
	r	-0,9824	0,9720	-0,8377	-0,9156	-0,8869	-0,8377	-0,9183	-0,9116
35G2Y	b	-0,5144	0,4860	-0,1961	-0,7355	-1,0944	-4,6645	-0,9858	-0,8470
	r	-0,9948	0,9929	-0,9344	-0,9778	-0,9636	-0,9618	-0,7090	-0,9618

mają przebieg zbliżony do równoległej do osi rzędnych. Przedstawione wykresy zależności $\sigma_a = f(\sum D)$, $\Delta \varepsilon_{apl} = f(\sum D)$ lub $\Delta \varepsilon_{ac} = f(\sum D)$ umożliwiają odczytanie dysypacji sumarycznej przy danym obciążeniu. Stąd z wykresu $\sum D = f(N_f)$ można określić liczbę cykli do zniszczenia N_f .

Te same rozważania można przeprowadzić w wielkościach bezwymiarowych $\frac{\sigma_a}{R_m}$, $\frac{\sum D}{D_s}$, $\frac{\Delta \varepsilon_{ac}}{\varepsilon_f}$ i $\frac{\Delta \varepsilon_{apl}}{\varepsilon_f}$. Obliczenia te możemy przeprowadzić również bez korzystania z wy-



Rys. 7

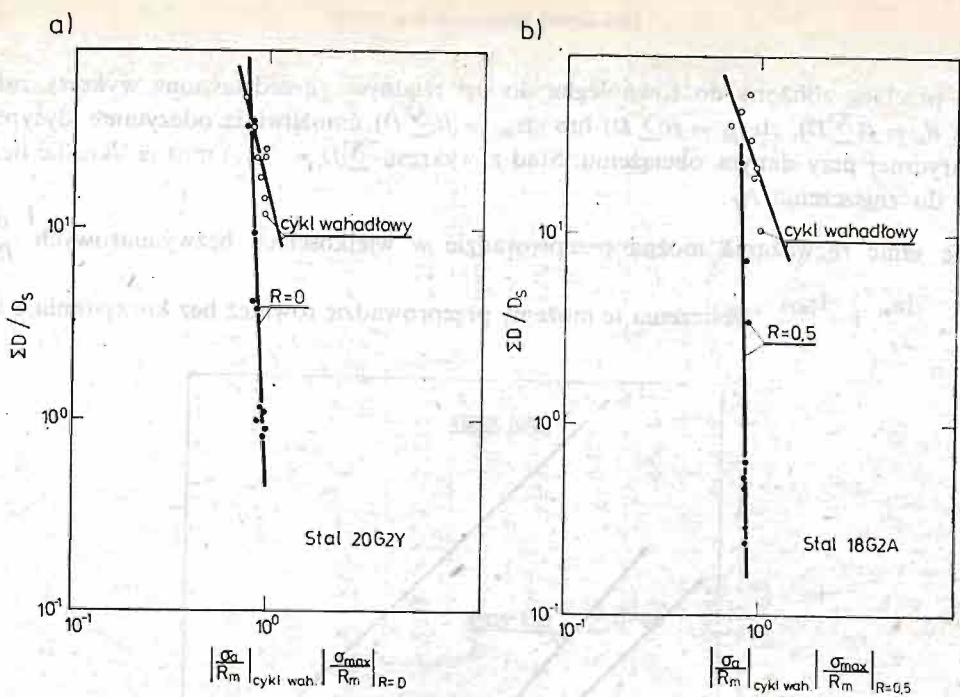
kresów, które ze względu na ich prostotę (są liniami prostymi w skali logarytmicznej) można łatwo przedstawić w postaci analitycznej. Znając przebieg dowolnej z omawianych zależności możemy łatwo uzyskać związek między opisywanymi przez nią wielkościami w postaci funkcji potęgowej. Prześledzimy to na przykładzie zależności $\sum D = f(N_f)$. W tym przypadku linia prosta w układzie logarytmicznym będzie miała postać

$$\log \sum D = b \log N_f + \log C_1, \quad (2)$$

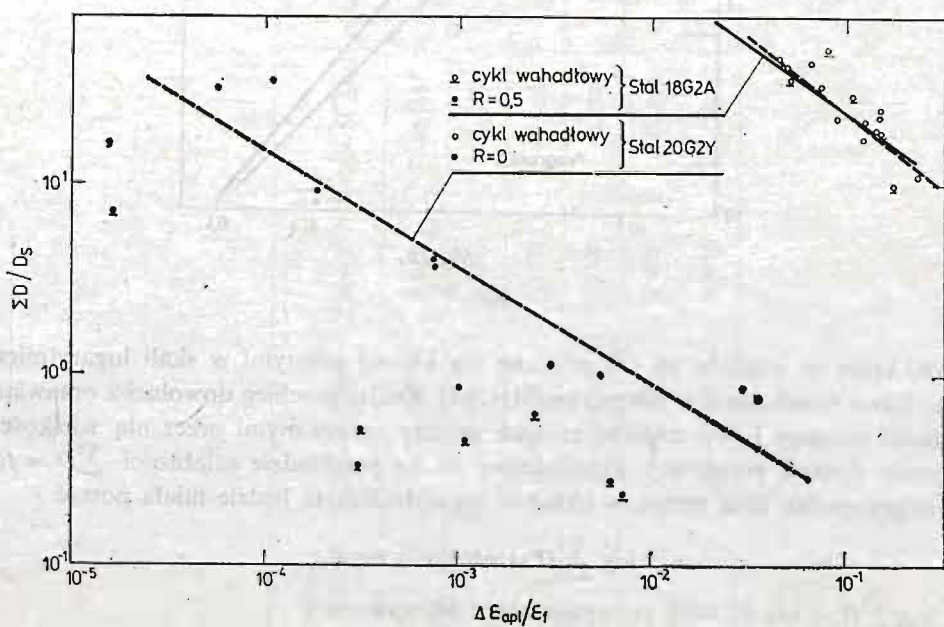
stąd $\log \sum D = \log C_1 N_f^b$ i po opuszczeniu logarytmów

$$\sum D = C_1 N_f^b, \quad (3)$$

gdzie b jest współczynnikiem regresji a $\log C_1$ jest równy parametrowi a w równaniu (1)



Rys. 8



Rys. 9

czyli

$$\log C_1 = \bar{Y} - b\bar{X}, \quad (4)$$

gdzie

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad \bar{Y}_i = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}. \quad (5)$$

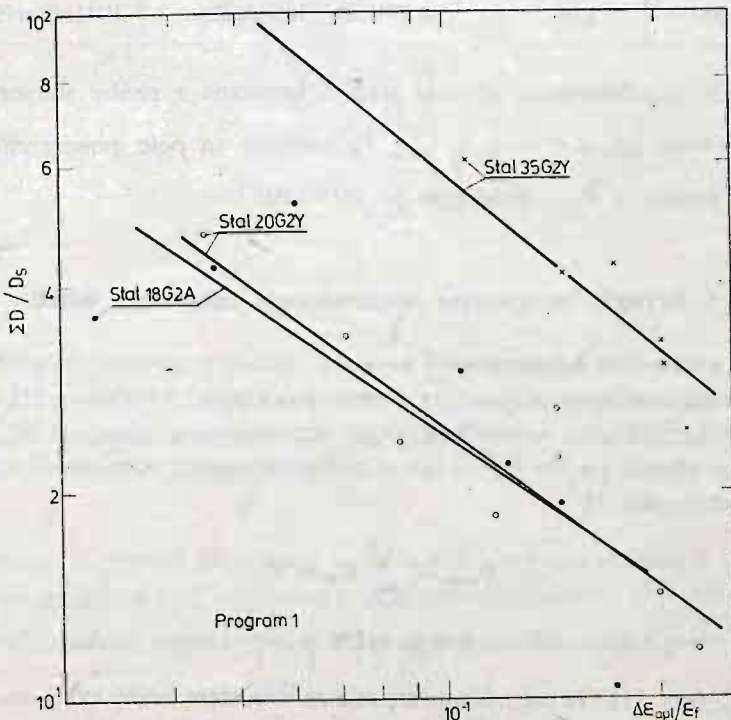
Dla badanych stali 18G2A, 20G2Y i 35G2Y uzyskano następujące wartości na C_1 : 468,57 MNm/m³, 474,68 MNm/m³ i 519,4 MNm/m³.

Otrzymane wyniki pozwalają na uzyskanie równania Mansona-Coffina

$$N_f^k \Delta \varepsilon_{apl} = C, \quad (6)$$

i wzorów na stałe materiałowe k i C . We wzorze tym N_f jest liczbą cykli do zniszczenia a $\Delta \varepsilon_{apl}$ zakresem odkształcenia plastycznego. Zgodnie z rys. 10 możemy w przybliżeniu założyć istnienie liniowej zależności między $\log \frac{\sum D}{D_s}$ i $\log \frac{\Delta \varepsilon_{apl}}{\varepsilon_f}$. Stąd po opuszczeniu logarytmów uzyskujemy zależność analogiczną do (3)

$$\frac{\sum D}{D_s} = C_2 \left(\frac{\Delta \varepsilon_{apl}}{\varepsilon_f} \right)^\lambda. \quad (7)$$



Rys. 10

Po odpowiednich przekształceniach i uwzględnieniu zależności (3) otrzymujemy

$$\frac{1}{f} \frac{b}{\lambda} \Delta \varepsilon_{apl} = \varepsilon_f \left(\frac{C_1}{C_2 D_s} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (8)$$

Jest to równanie Mansona-Coffina, w którym $k = -\frac{b}{\lambda}$, a $C = \varepsilon_f \left(\frac{C_1}{C_2 D_s} \right)^{\frac{1}{\lambda}}$. Obliczone według tych wzorów wartości stałych k i C zostały podane w tabelicy 2. Widzimy, że dla stali 18G2A i 20G2Y uzyskano wartości zbliżone do siebie, natomiast dla stali 35G2Y uzyskano na C wartość bardziej zbliżoną do oczekiwanej niż to uzyskano z analizy odkształceń, gdzie otrzymano wartość kilkakrotnie wyższą w porównaniu z innymi stalami. Znaczna różnica wartości C dla stali 35G2Y w porównaniu z pozostałymi stalami może wiązać się z cykliczną niestabilnością, jaką wykazywała ta stal w czasie badań.

Tabela 2

Nazwa stali	W y n i k i					
	z analizy odkształceń		z rozważań energetycznych		z próby statycznej	
	k	C	k	C	k	C
18G2A	0,588	0,383	0,561	0,349	0,5	0,444
20G2Y	0,615	0,567	0,511	0,314		0,569
35G2Y	0,887	2,98	0,574	0,621		0,503

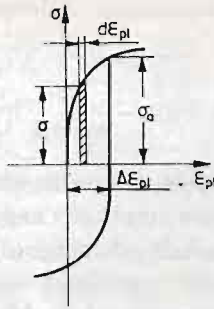
Dla porównania przedstawiono również wyniki uzyskane z próby statycznej, gdzie k przyjmuje się równe 0,5, a $C = \frac{1}{2} \ln \frac{F_0}{F_u}$; F_0 oznacza tu pole powierzchni przekroju początkowego próbki, a F_u — przekroju po zerwaniu.

3. Kryteria energetyczne zmęczeniowego zniszczenia metali

3.1. Ocena i zastosowanie dotychczasowych kryteriów. Jedną z prostszych prób określenia energii zniszczenia została przedstawiona w pracy FELTNERA i MORROWA [1]. Założyli oni, że w pierwszym przybliżeniu całkowita energia rozproszona w materiale D_{sum} w procesie jego cyklicznego obciążenia jest stała i równa energii dysypacji otrzymanej w czasie próby statycznego rozciągania D_s

$$D_{sum} = \sum_{N=1}^{N_f} D_N = D_s \quad (9)$$

Zakładając, że energię dysypacji dla N -tego cyklu symetrycznego można obliczyć ze wzoru $D_N = 2 \int_0^{\Delta \varepsilon_{pl}} \sigma d\varepsilon_{pl}$ (rys. 11) i że nie zmienia się ona ze wzrostem liczby cykli oraz przyjmując potęgową postać zależności między naprężeniami a odkształceniami plastycznymi $\varepsilon_{pl} =$



Rys. 11

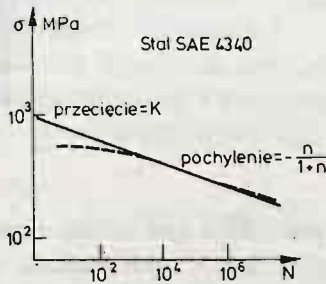
$= k(\sigma)^{1/n}$ uzyskali oni następujący związek między amplitudą naprężenia σ_a i liczbą cykli do zniszczenia N_f .

$$\log \sigma_a = K - \left(\frac{n}{1+n} \right) \log N_f, \quad (10)$$

gdzie: $K = \log \left[\frac{D_s(1+n)}{2k} \right]^{\frac{n}{n+1}}$

Ze względu na wspomniane uproszczenia poczynione dla otrzymania zależności (10) istnieją rozbieżności pomiędzy przebiegami obliczeniowymi a wykazywanymi przez niemodelowe materiały (linie kreskowe na rys. 12). W dalszych swych pracach Morrow zmienił kryterium (10) do następującej postaci

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} = \left(\frac{\sum D}{D_s} \right)^{-k}, \quad (11)$$



Rys. 12

gdzie σ_f oznacza rzeczywiste naprężenie w momencie zerwania próbki, a k jest stałą materiałową. Autorzy pracy [10] w wyniku przekształceń zależności (11) uzyskali równanie

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_f} \right)^{mk+1} = (2N_f)^{-k}, \quad (12)$$

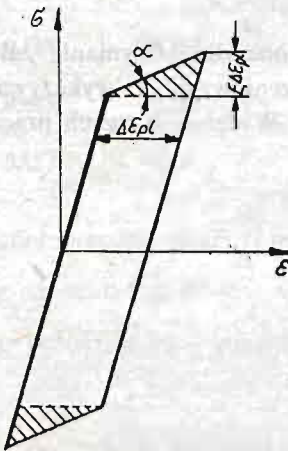
gdzie m można wstępnie określić ze wzoru $m = \frac{1+n}{n}$. Badania wykazały zależność tego

współczynnika od liczby cykli do zniszczenia. Zależność (12) może być po przelogarytmowaniu zapisana w postaci:

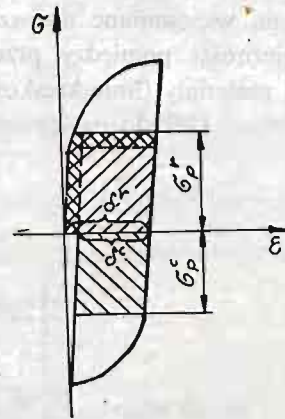
$$\log \sigma_a = \log \sigma_f - \frac{k}{mk+1} \log(2N_f). \quad (13)$$

Badania doświadczalne wskazują, że całkowita energia potrzebna do zniszczenia nie jest stała, lecz wzrasta ze zmniejszeniem amplitudy naprężenia. Ponadto, nawet dla zakresu małej liczby cykli, różni się ona znacznie od energii dysypacji przy statycznej próbie rozciągania. Dlatego czynione są próby wydzielenia energii zniszczenia z ogólnej energii dysypowanej podczas cyklicznej deformacji. D. E. MARTIN w pracy [2] przedstawił hipotezę, według której miarą energii zniszczenia jest energia związana z procesem umocnienia. Na wykresie pętli histerezy dla materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem liniowym (rys. 13) energia ta dla jednego cyklu została przedstawiona jako pole dwóch zakreśkowanych trójkątów

$$D_N = 2 \left(\frac{1}{2} E_1 \cdot \Delta \varepsilon_{pl} \cdot \Delta \varepsilon_{pl} \right) = E_1 (\Delta \varepsilon_{pl})^2, \quad (14)$$



Rys. 13



Rys. 14

gdzie E_1 jest tangensem kąta α pochylenia linii wzmocnienia, a $\Delta \varepsilon_{pl}$ — zakresem odkształcenia plastycznego w jednym cyklu. Dla N cykli wielkość tej energii wyniesie $NE_1(\Delta \varepsilon_{pl})^2$. Z założenia, że zniszczenie następuje wtedy, gdy energia dysypacji osiągnie pewną krytyczną wartość uzyskuje się warunek

$$NE_1(\Delta \varepsilon_{pl})^2 = C_1. \quad (15)$$

Stałą C_1 można wyznaczyć z warunku (15) dla statycznego rozciągania $\left(N = \frac{1}{2} \text{ i } \Delta \varepsilon_{pl} = \varepsilon_f \right)$

$$C_1 = \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_f^2, \quad (16)$$

gdzie ε_f jest odkształceniem plastycznym przy zerwaniu. Z zależności (15) i (16) uzyskuje

się równanie Mansona-Coffina (6)

$$N_f^{1/2} \Delta \varepsilon_{pl} = \frac{\varepsilon_f}{\sqrt{2}}, \quad (17)$$

w którym $k = 0,5$ i $C = \frac{\varepsilon_f}{\sqrt{2}}$.

Jeszcze inne rozumowanie przedstawiono w pracach [3] i [4]. Warunek zniszczenia został zaproponowany w postaci

$$D_s = \sum_0^{N_f} (D_1 - D_2), \quad (18)$$

gdzie D_1 i D_2 stanowią pola pętli histerezy dla półcyklu rozciągania i ściskania, a D_s — pole pod krzywą statycznego rozciągania. Wielkości te zgodnie z rys. 14 można obliczyć ze wzorów

$$D_1 = \int_0^{\delta^r} (\sigma_p^r + \sigma^*) d\delta, \quad (19)$$

$$D_2 = \int_0^{\delta^c} (\sigma_p^c + \sigma^{**}) d\delta,$$

gdzie σ_p^r i σ_p^c są granicami proporcjonalności (sprężystości) przy rozciąganiu i ściskaniu a $\sigma^* = \sigma^r - \sigma_p^r$, $\sigma^{**} = \sigma^c - \sigma_p^c$ przy czym σ^r i σ^c oznaczają bieżące wartości naprężeń w półcyklu rozciągania i ściskania. Uwzględniając zależności (19) warunek (18) można przedstawić w postaci

$$\sum_0^{N_f} \left[(\sigma_p^r \delta^r - \sigma_p^c \delta^c) + \left(\int_0^{\delta^r} \sigma^* d\delta - \int_0^{\delta^c} \sigma^{**} d\delta \right) \right] = \sigma_p^s \varepsilon_f + \int_0^{\varepsilon} (\sigma - \sigma_p^s) d\varepsilon, \quad (20)$$

gdzie σ_p^s — granica proporcjonalności przy zerowym półcyklu obciążenia.

ε — odkształcenie przy statycznym rozciąganiu,

δ^r i δ^c — szerokości pętli odpowiednio w półcyklu rozciągania i ściskania.

Po wyłączeniu z rozważań energii związanej z umocnieniem zarówno przy obciążeniu cyklicznym, jak i statycznym uzyskujemy z (20) następujący warunek

$$\sum_0^{N_f} (\sigma_p^r \delta^r - \sigma_p^c \delta^c) = \sigma_p^s \cdot \varepsilon_f. \quad (21)$$

Obciążenie wstępne można ująć w oddzielny człon uzyskując

$$\sigma_p^s \varepsilon^{(0)} + \sum_1^{N_f} (\sigma_p^r \delta^r - \sigma_p^c \delta^c) = \sigma_p^s \varepsilon_f. \quad (22)$$

Autor omawianych prac wykazał dobrą zgodność danych obliczeniowych z wynikami doświadczalnymi.

Niektóre kryteria uwzględniają energię mikroplastycznego odkształcenia. Do nich należy między innymi, koncepcja przedstawiona przez A. Esina (w/g [5]) zakładająca statystyczny charakter deformacji ciała polikrystalicznego. Energia pochłonięta przez

materiał została określona wzorem

$$D = p' \sum_1^{m'} P_k \int_0^{\Delta \varepsilon_k^p} K_k \varepsilon^n d\varepsilon, \quad (23)$$

gdzie p' — czynnik uwzględniający prawdopodobną liczbę płaszczyzn poślizgu,
 P_k — liczba jednakowo deformowanych elementów,
 $\Delta \varepsilon_k^p$ — odkształcenie k -tego elementu ($k = 1, 2, \dots, m$),
 K_k — współczynnik określony z zależności $\sigma = K_k \varepsilon^n$ dla k -tego elementu,
 n — współczynnik wzmocnienia.

Założono, że granice sprężystości pojedynczych ziarn i ich mikroplastyczne odkształcenia mają rozkład normalny. Wyniki badań sześciu gatunków stali wykazały dobrą zgodność przedstawionej teorii z eksperymentem. Natomiast autorzy pracy [6] na podstawie badań doświadczalnych zaproponowali następujące wzory dla określenia niskocyklicznej trwałości

$$\left(\frac{\sum D_{is}}{D_{is0}} \right)^{\gamma'} = \frac{\sigma_{is}}{\sigma_{is0}}, \quad (24)$$

dla kwasistatycznego typu zniszczenia

$$\left(\frac{\sum D}{D_s} \right)^{\gamma'} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_f}, \quad (25)$$

dla zmęczeniowego typu zniszczenia. We wzorach tych $\sum D_{is}$ jest energią dysypacji do wystąpienia przewężenia w próbce, a σ_{is} — naprężeniem przed wystąpieniem przewężenia, natomiast D_{is0} i σ_{is0} oznaczają te same wielkości dla obciążenia statycznego; $\sum D$ i D_s oznaczają sumaryczną energię dysypacji przy obciążeniu cyklicznym i energię dysypacji przy obciążeniu statycznym, σ_f — rzeczywiste naprężenie przy zniszczeniu statycznym, γ i γ' są stałymi materiałowymi. Badania przeprowadzone dla trzech materiałów wykazały, że dane eksperymentalne dobrze są opisywane równaniem (24) i we współrzędnych logarytmicznych leżą na jednej prostej niezależnie od rodzaju materiału. Natomiast pochylenie linii opisywanej równaniem (25) zależy od rodzaju materiału.

W pracy [9] zostało przedstawione kryterium, które uwzględnia część sumarycznej energii niezależnej od liczby cykli

$$\sum D = N_f \left[D - D_2 \left(\frac{D}{D_2} \right)^\alpha \right], \quad (26)$$

gdzie D — pole pętli histerezy,

D_2 — pole pętli histerezy przy naprężeniach równych granicy zmęczenia,

α — stały współczynnik dobierany w ten sposób, aby energia określona wzorem (26) była stała. Dla stali jest on równy około 0,9.

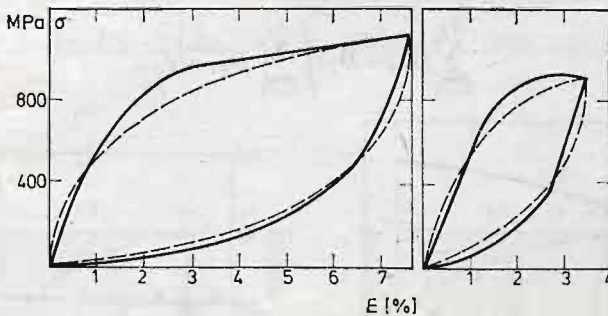
W pracy [7] przedstawiono następującą zależność między energią dysypacji $\sum D$ a maksymalnym naprężeniem rozciągającym σ_{\max}

$$\sum D = c(\sigma_{\max})^m \quad (27)$$

gdzie c i m są stałymi materiałowymi. Zależność (27) zmodyfikowano również dla przypadku obciążenia wielostopniowego.

Przedstawione kryteria określające związki między energią dysypacji i własnościami otrzymanymi z próby statycznej i zmęczeniowej wskazują na istnienie pewnych zależności typu energetycznego między statycznymi i cyklicznymi własnościami materiału. Opierają się one na różnych a czasem nawet sprzecznych założeniach, np. zależności (14) i (21). Uzyskiwane związki dla określenia trwałości zmęczeniowej zależą głównie od rodzaju materiału i sposobu obciążenia. W czasie różnych badań udało się jednak uzyskać wzory, które w pewnym stopniu wykazują niezależność od wspomnianych czynników. Należą do nich przede wszystkim omówione poprzednio zależności (24) i (26), a także przedstawiony w punkcie 2 związek $\frac{\sum D}{D_s} = f\left(\frac{\sigma_{\max}}{R_m}\right)$. Jednak problem określenia odpowiedniego kryterium uniwersalnego jest ciągle otwarty. Pewną nową próbę stanowi zaproponowane przez autora pracy kryterium porównawcze, które zostanie przedstawione w następnym punkcie.

3.2. Kryterium porównawcze. Z wcześniejszych badań wynika, że różnice w przebiegu pętli histerezy otrzymanych doświadczalnie i przez transformację skali z krzywej cyklicznej są większe przy mniejszej żywotności i maleją z jej wzrostem. Jest to widoczne na przykład z rys. 15, na którym przedstawiono przykładowe pętle histerezy dla stali 20G2Y przesu-



Rys. 15

nięte do początku układu współrzędnych przy dwóch wielkościach obciążenia. Linią ciągłą oznaczono pętli otrzymane doświadczalnie, a linią przerywaną pętli uzyskane z krzywej cyklicznej przez transformację skali. Nasunęło to pomysł przyjęcia kryterium, w którym miarą energii zniszczenia byłaby suma różnic pomiędzy rzeczywistą pętłą i pętłą uzyskaną z krzywej cyklicznej przez transformację skali

$$\sum_{N=1}^{N_f} D_{RN} = \sum_{N=1}^{N_f} (D_N - D_T), \quad (28)$$

gdzie D_N — pole pętli histerezy otrzymanej eksperymentalnie dla N -tego cyklu, D_T — pole pętli histerezy otrzymanej z krzywej cyklicznej przez transformację skali. Ma to pewne uzasadnienie w tym, iż są to różnice między energią dysypacji ciała rzeczywistego a jego modelem z równoległym uporządkowaniem podelementów. Dla stali o podwyższonej wytrzymałości, ze względu na szybkie ustalanie się pętli histerezy, możemy obliczyć dysy-

pację sumaryczną z wystarczającą dokładnością ze wzoru

$$\sum_{N=1}^{N_f} D_N = N_f D_{sr}, \quad (29)$$

gdzie D_{sr} jest polem pętli histerezy otrzymanym przy połowie żywotności próbki, aczkolwiek w rozpatrywanym przypadku pole to ustalało się po kilku cyklach; D_T jest zależne od materiału i wielkości obciążenia, a nie zależy od liczby cykli. Stąd z zależności (28) uzyskujemy:

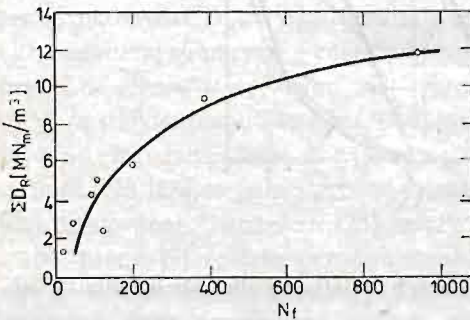
$$\sum_{N=1}^{N_f} D_{RN} = \sum_{N=1}^{N_f} D_N - N_f D_T = N_f D_{sr} - N_f D_T = N_f \bar{D}_r, \quad (30)$$

gdzie $\bar{D}_r = D_{sr} - D_T$. Jednak w czasie badań stali 20G2Y stwierdzono, że wielkość $\sum D_R$ wzrasta ze zwiększeniem liczby cykli do zniszczenia N_f (rys. 16). Ze względu na to, że

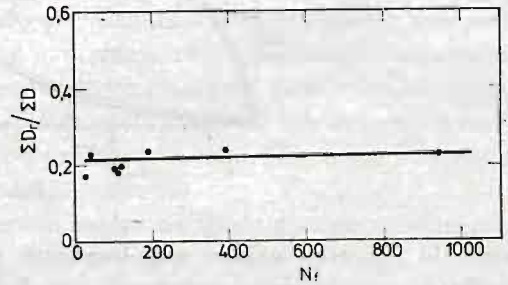
dysypacja sumaryczna $\sum_{N=1}^{N_f} D_N$ powiększa się również ze wzrostem liczby cykli, to istnieje

prawdopodobieństwo, że stosunek $\sum_{N=1}^{N_f} D_{RN} / \sum_{N=1}^{N_f} D_N$ będzie stały niezależnie od liczby cykli do zniszczenia N_f . Taki w przybliżeniu wynik uzyskano w badaniach stali 20G2Y (tablica 3 i rys. 17). Pewne różnice mieszczą się w granicach rozrzutu właściwych dla badań zmęczeniowych. Zatem można zapisać

$$\sum_{N=1}^{N_f} (D_N - D_T) / \sum_{N=1}^{N_f} D_N = c. \quad (31)$$



Rys. 16



Rys. 17

Tablica 3

Nr próbki	51	52	53	54	55	56	58	61
N_f	198	111	106	102	392	941	30	42
$D_r, \text{MNm/m}^3$	4,113	4,083	6,590	6,138	2,929	1,661	9,321	11,351
$\sum D_R$ MNm/m^3	814,374	453,213	698,54	626,076	1148,168	1563,001	279,63	476,742
$\sum D_R / \sum D$	0,2472	0,1796	0,1912	0,1888	0,243	0,232	0,1700	0,2401

Dla stali o krótkim okresie przejściowym (na przykład badane stale o podwyższonej wytrzymałości) zależność (31) można rozpatrywać z dobrym przybliżeniem dla pojedynczego cyklu ustalonego (na przykład w połowie żywotności)

$$(D_N - D_T)/D_N = c, \quad (32)$$

i stąd można określić stałą $c = 1 - \frac{D_T}{D_N}$

Stąd

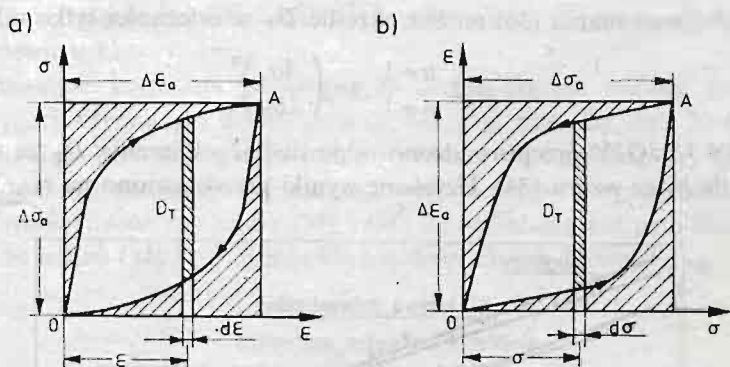
$$(1-c) \sum_{N=1}^{N_f} D_N = N_f D_T. \quad (33)$$

Podstawiając zależność (3) do (33) możemy wyznaczyć liczbę cykli do zniszczenia

$$N_f = \left(\frac{\alpha C_1}{D_T} \right)^{1/\xi} = \left(\frac{C_2}{D_T} \right)^{1/\xi}, \quad (34)$$

gdzie $\alpha = 1 - c$, $\xi = 1 - b$ i $C_2 = \alpha C_1$. W tym wzorze α , C_1 i ξ są stałymi materiałowymi. Dla stali 20G2Y wynoszą one 0,96, 474,7 MPa i 0,6121 oraz 0,96, 519,4 MPa i 0,514 dla stali 35G2Y. Pole pętli histerezy dla danej wielkości obciążenia uzyskujemy przez całkowanie funkcji określającej jej gałęzie. Zgodnie z rys. 18a

$$D_T = \Delta \varepsilon_a \Delta \sigma_a - 2 \left(\Delta \sigma_a \Delta \varepsilon_a - \int_0^{\Delta \varepsilon_a} \sigma d\varepsilon \right) = 2 \int_0^{\Delta \varepsilon_a} \sigma d\varepsilon - \Delta \sigma_a \Delta \varepsilon_a. \quad (35)$$

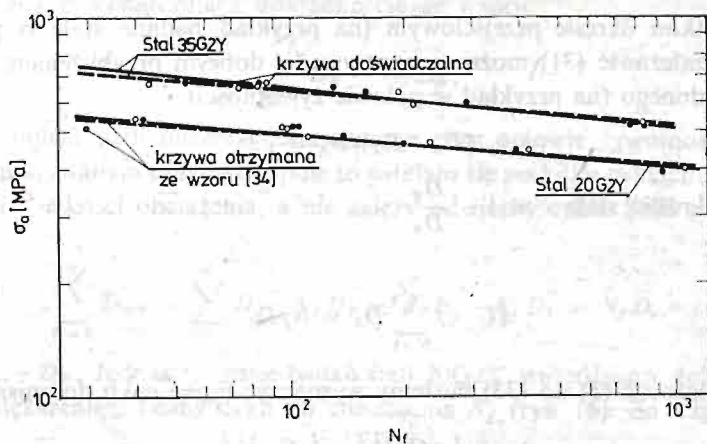


Rys. 18

Opis pętli histerezy został przedstawiony w pracy [12]. Został tam wykorzystany następujący wzór do opisu gałęzi pętli histerezy:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + 2 \left(\frac{\sigma}{2B_0} \right)^n, \quad (36)$$

w którym stałe E_0 , n i B_0 zostały określone z aproksymacji krzywej cyklicznego odkształcenia. Dla obliczenia D_T ze wzoru (35) przy wykorzystaniu do opisu pętli zależności (36) wygodnie jest dokonać zamiany zmiennych σ i ε (rys. 18b). Wtedy D_T możemy obliczyć



Rys. 19

z zależności

$$D_T = \Delta \varepsilon_a \Delta \sigma_a - 2 \int_0^{\Delta \sigma_a} \varepsilon d\sigma = \Delta \varepsilon_a \Delta \sigma_a - 2 \int_0^{\Delta \sigma_a} \left[\frac{\sigma}{E_0} + 2 \left(\frac{\sigma}{2B_0} \right)^n \right] d\sigma. \quad (37)$$

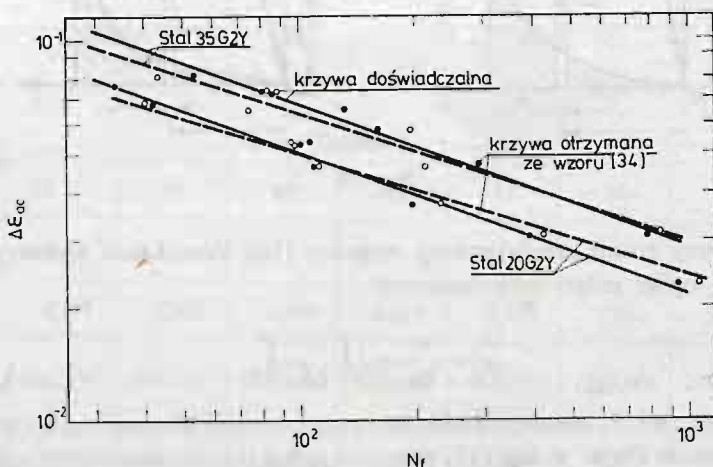
Po przeprowadzeniu obliczeń uzyskujemy:

$$D_T = \Delta \sigma_a \left[\Delta \varepsilon_a - \frac{\Delta \sigma_a}{E_0} - \frac{4}{n+1} \left(\frac{\Delta \sigma_a}{2B_0} \right)^n \right]. \quad (38)$$

Po określeniu $\Delta \varepsilon_a$ z równania (36) można określić D_T w zależności tylko od naprężeń

$$D_T = 2 \frac{n-1}{n+1} \Delta \sigma_a \left(\frac{\Delta \sigma_a}{2B_0} \right)^n \quad (39)$$

Dla stali 20G2Y i 35G2Y przeprowadzono odpowiednie obliczenia D_T ze wzorów (38) i (39) a następnie N_f ze wzoru (34). Uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 19 i 20 (linie



Rys. 20

przerwane), na których zostały naniesione również wykresy uzyskane z doświadczenia (linie ciągłe). Uzyskano dość dobrą zgodność obydwu przebiegów.

4. Wnioski końcowe

Szereg zależności dotyczących trwałości w ujęciu energetycznym w układach logarytmicznych można aproksymować liniami prostymi. Należą do nich między innymi następujące zależności:

- a) między dysypacją na jeden cykl D_{sr} przy liczbie cykli równej połowie żywotności a liczbą cykli do zniszczenia N_f ,
- b) między dysypacją sumaryczną $\sum D$ a liczbą cykli do zniszczenia N_f ,
- c) między amplitudą naprężenia cyklu ustalonego σ_a a dysypacją sumaryczną $\sum D$,
- d) między zakresami odkształcenia całkowitego $\Delta \varepsilon_{ac}$ i plastycznego $\Delta \varepsilon_{apl}$ a dysypacją sumaryczną $\sum D$.

Zostały określone nie tylko wykresy tych zależności, ale pokazano również na przykładzie związku b), jak zapisać je w postaci analitycznej, co jest szczególnie przydatne do obliczeń numerycznych. Na tej drodze uzyskano również postać równania Mansona-Coffina i wzory na stałe k i C .

Wyniki uzyskane z rozważań energetycznych są bardziej zbliżone do przewidywanych w porównaniu z wartościami uzyskanymi z analizy odkształceń.

Z przeprowadzonych badań wynika, iż sumaryczna dysypacja energii, przyjmowana przez niektórych autorów jako charakterystyczna wielkość określająca zniszczenie, nie jest dobrą miarą zmęczenia niskocyklicznego, gdyż zależy ona w sposób istotny od liczby cykli i asymetrii cyklu.

Zaproponowane kryterium porównawcze uwzględniające różnice dysypacji rzeczywistej i dysypacji otrzymanej dla modelu G. Masinga dało dla stali 20 G2Y i 35 G2Y wyniki wykazujące dość dobrą zgodność z wynikami doświadczeń. Wymaga ono jednak dalszych badań, aby można było wyciągnąć wnioski o jego przydatności dla innych materiałów. Wyprowadzone zależności (37) i (38) do obliczania pól pętli histerezy ułatwiają korzystanie ze wzoru (34) przy określaniu trwałości niskocyklowej.

Literatura cytowana w tekście

1. C. E. FELTNER, J. D. MORROW, *Microplastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue fracture*, Trans. ASME, Journ. Basic Eng., Vol. 83, 1961, Ser. D, s. 15 - 22.
2. D. E. MARTIN, *An energy criterion for low-cycle fatigue*. Journ. Basic Eng. Trans. ASME, Vol. 83, Ser. D, 1961, s. 565—571.
3. А. Н. РОМАНОВ, *Энергетические критерии разрушения при малоцикловом нагружении*, Сообщение 1: Энергия разрушения при малом числе циклов нагружения. Проблемы Прочности, № 1, 1974, с. 3 - 10.
4. А. Н. РОМАНОВ, *Энергетические критерии разрушения при малоцикловом нагружении*, Сообщение 2: Циклический эффект Баллингера и критерии разрушения. Проблемы Прочности № 1, 1974, с. 11 - 18.
5. А. Н. РОМАНОВ, *Энергетические критерии разрушения при циклическом нагружении* (обзор), Проблемы Прочности № 3, 1971, с. 3 - 9.

6. E. SHIRATORI, Y. OBTAYA, *Cyclic plastic strain energy and low-cycle fatigue strength of nickel-chrome steel*, Bull. ISME, nr 54, 1969, s. 1285 - 1291.
7. Y. OBTAYA, E. SHIRATORI, *Cumulative damage in the low cycle fatigue*, Bulletin of ISME, Vol. 16, nr 71, 1971, s. 418 - 426.
8. В. Т. ТРОЩЕНКО, А. И. АФОНИН, Л. А. ХАМАЗА, *Исследование энергетических критериев усталостного разрушения некоторых металлов на низкой и высокой частотах нагружения*. Проблемы Прочности, № 6, 1973, с. 3 - 7.
9. В. Т. ТРОЩЕНКО, *Деформационные и энергетические критерии усталостного разрушения металлов*, VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, PTMTiS, Warszawa 1978, s. 369 - 385.
10. В. Т. ТРОЩЕНКО, Л. А. ХАМАЗА, *Исследование некоторых энергетических критериев усталостного разрушения металлов*, Проблемы Прочности, № 4, 1969, с. 3 - 8.
11. S. KOSAŃDA, Cz. GOSS, *O osłabieniu stali 45 przy malej liczbie cykli zmian obciążenia*, Biuletyn WAT, nr 12, 1976, s. 107 - 116.
12. Cz. GOSS, S. KOSAŃDA, *Doświadczalny i analityczny opis własności stali o podwyższonej wytrzymałości w zakresie malej liczby cykli*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, nr 3, 1979, s. 339 - 356.
13. Cz. GOSS, S. KOSAŃDA, *Badania trwałości zmęczeniowej stali o podwyższonej wytrzymałości w zakresie malej liczby cykli*, VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, PTMTiS, Warszawa, 1978, s. 259 - 266.
14. Cz. GOSS, S. KOSAŃDA, *Badania zmęczeniowego zachowania się stali o podwyższonej wytrzymałości 20G2A w zakresie malej liczby cykli zmian obciążenia*. III Sympozjum Instytutu Pojazdów Mechanicznych WAT, Warszawa, 1977, s. 133 - 137.
15. S. KOSAŃDA, Cz. GOSS, *Badania zmęczeniowe stali 18G2A w zakresie malej liczby zmian obciążenia*, VII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, PTMTiS, Warszawa, 1976, s. 288 - 296.

Резюме

МАЛОЦИКЛОВАЯ УСТАЛОСТЬ ВЫСОКОПРОЧНЫХ СТАЛЕЙ ПОЛУЧЕННАЯ ИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ

В работе представлены диаграммы и аналитические зависимости для определения малоцикло-вой усталости полученные из энергетических условий. При этом было получено уравнение Мэнсона-Кохффа и правила расчета коэффициентов k и C выступающих в этом уравнении. Были проанализированы существующие энергетические критерии разрушения. На основании этого был предложен сравнительный критерий, учитывающий разницу между суммарной диссипацией энергии, установленной на основе эксперимента и полученной при измерении поля петли гистерезиса определенной путем трансформации циклической кривой.

Summary

LOW CYCLE FATIGUE OF HIGH-STRENGTH STEELS IN TERMS OF ENERGY

In the paper diagrams and analytical dependences have been given for determination of low-cycle fatigue from energy considerations. In this way Manson-Coffin equation and formulae for constant coefficients k and C given therein were obtained.

Analysis has been performed by means of energy criteria of fatigue life. From these considerations it has been proposed a new criterion based on the difference between cumulative dissipation of energy obtained from experiments and from area measurements of hysteresis loops, the latter being obtained by scale transformation method.

EXPERIMENTAL SIMULATION OF ANISOTROPIC DAMAGE

ANDRZEJ LITEWKA

Politechnika Poznańska

JOANNA STANISŁAWSKA

Politechnika Poznańska

1. Introduction

Internal cracks developed in materials due to straining have, as a rule, oriented character and do not represent solely sets of scalar voids distributions. A fissurated material becomes anisotropic in its response as well as anisotropy varies in the process of continuing damage. Evolution of continuously regularly distributed cracks in an originally isotropic and homogeneous material changes the overall mechanical properties of the material due to the increase in the oriented damage. A formulation of constitutive relations for a damaged material requires specification of its mechanical characteristics concerning both the stress-strain response and the damage evolution. KACHANOV [1] proposed to formulate the constitutive equation for damaged material as a tensor function including an independent variable called the crack density tensor or damage tensor accounting for the variation of the mechanical properties of the material due to the microcracks development. According to the definition proposed by RABOTNOV [2] in the case of random distribution of the microcracks the damage tensor is the second rank symmetric tensor. When the distribution of the fissuration appears regular the damage tensor should account both for the variation of the cracked material strength and for the development of the material anisotropy. Thus the form of the damage tensor depends not only on the microcracks density but also on their arrangement. Some of the attempts to derive the damage tensor and to formulate the constitutive equation were presented by MURAKAMI [3] and BETTEN [4] but due to the lack of the experimental results concerning the anisotropy of the damaged materials the theories available cannot be verified. Thus it seems worthwhile to determine the elastic and plastic characteristics of the material with regular array of the microcracks. Because of the complexity of the suitable analysis of the real damaged materials the special kind of modelling is proposed.

Generally the damage tensor is the function of the stress history but for the given well defined stages of the damage evolution this tensor depends on the actual mechanical properties of the damaged material only. The subject of this study is the experimental

simulation of the oriented damage at such stages of the cracks evolution and the analysis of the overall behavior of the model of the cracked material, thus the homogenization of the material response within the continuum mechanics. The attention is purposely given to the experimental side of the question. This results in an experimental homogenization for the materials with internal oriented structure.

To simulate an oriented damage sets of cracks of given length, orientation, arrangement and density were cut out in flat metal specimens. The load then was applied producing an overall uniaxial stress and the material response was recorded regarding the magnitude and direction of the overall strains as well as changes in the fissuration density, orientation and evolution. Such a method of experimental simulation of an oriented damage can be applied both to the elastic and plastic response, although the behavior on the level of a particular cell is evidently non-homogeneous and elastic as well as plastic zones develop in non-homogeneous manner.

2. Experimental technique

The present paper deals in particular with the elastic characteristics of the damaged material when damage pattern and fissuration length are prescribed. To determine the elastic properties for such a material fairly simple uniaxially loaded models can be used. The preliminary tests concerning only one crack length but different crack orientations, presented in [5] enabled us to improve the experimental technique. The aim of the experiments presented in this note is to establish a modification of the material constants of the damaged material when the cracks length and arrangement are variable. The tests were made on the specimens cut out of the sheets of an aluminium alloy PA2. The overall length of the specimens was 400 mm, width 70 mm and thickness 0.7 mm. The cracks arranged in square patterns were cut out in the central part of the specimen 210 mm long by means of a precise punching device. The details of the cracks geometry is presented in Fig. 1. The crack width is 1 mm and their length varies from 2 to 7 mm. The pitch of the square pattern of cracks equals to 10 mm thus the dimensionless crack length $\lambda = l/P$ was variable ranging from 0.2 to 0.7. Two different crack arrangements thus two types of an internal orientation of the material tested were considered, namely either the lon-

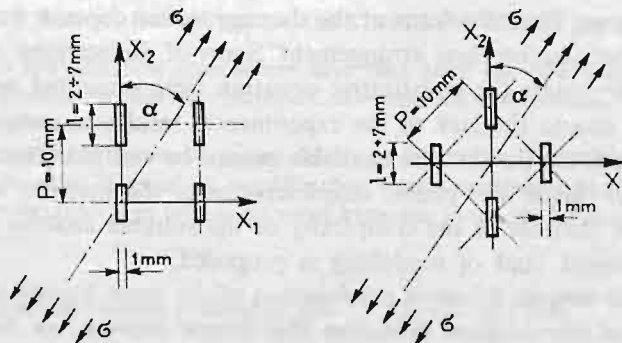


Fig. 1. Cracks arrangements.

longitudinal axis of the cracks coincides with the pitch or it makes an angle $\pi/4$ with the pitch. The specimens were cut out so as to make the overall principal stress direction and the cracks orientation variable. The specimens were subjected to axial loading but for various directions with respect to the symmetry axes of the crack pattern. The direction of loading was defined by the angles $\alpha = 0, \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12$ and $\pi/2$. In this way the oriented character of the induced damage is accounted for.

The specimens were uniaxially loaded in the testing machine and the longitudinal and lateral deformations were measured during the loading process. The strains within an elastic range were measured by means of the electric strain gauges 50 mm long. Then all the specimens were loaded to fracture and large plastic deformations were recorded employing the mechanical strain gauges. This furnished some information concerning the plasticity and fracture of the models of the damaged materials.

3. Results of the experiments

3.1. Elastic range. The overall mechanical response of the materials with the oriented damage shown in Fig. 1 corresponds to that observed for an orthotropic solid thus their elastic characteristics is described by nine material constants. According to the nomenclature employed in [6] these constants include three Young's moduli E_1, E_2, E_3 and three Poisson ratios $\nu_{21}, \nu_{32}, \nu_{13}$ determined for loading in the directions of the Cartesian coordinate system axes x_1, x_2, x_3 and three shear moduli G_{12}, G_{23}, G_{31} . The axes x_1 and x_2 are shown in Fig. 1 and the axis x_3 is perpendicular to the surface of the specimen. As the specimens were uniaxially loaded only some of those constants can be determined employing the results of this experiments.

Restricting the analysis to the plane state of the stress four constants E_1, E_2, ν_{21} and G_{12} must be determined. The three first constants and additionally Poisson ratio ν_{12} were

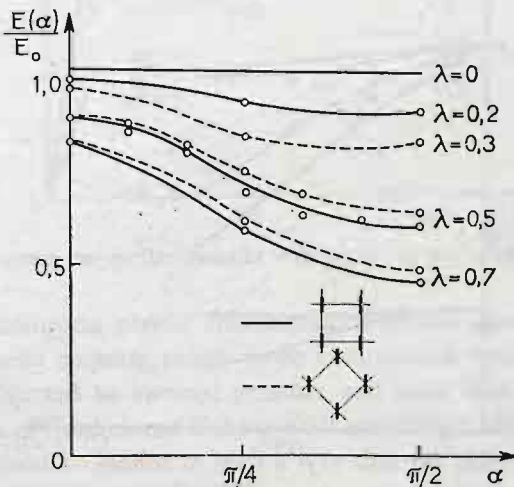


Fig. 2. Diagrams of the function $E(\alpha)$.

determined directly from the results obtained for the specimens subjected to axial load at the directions defined by the angles $\alpha = 0$ and $\pi/2$. The shear modulus G_{12} was calculated employing the effective Young's modulus measured for the specimen loaded in the direction inclined at the arbitrary angle α with respect to cracks orientation. The diagrams of the function $E(\alpha)$ for various crack length and orientation is shown in Fig. 2. The modification of the elastic constants for increasing crack length presents Fig. 3. The values of the Young's modulus E_3 shown in Fig. 3 were calculated from the relation $E_3 = \mu E$ where $\mu = 1 - \lambda/10$ is the reduction of the net area in the direction x_3 for the cracked material and $E = 67700$ MPa is the Young's modulus for the original material.

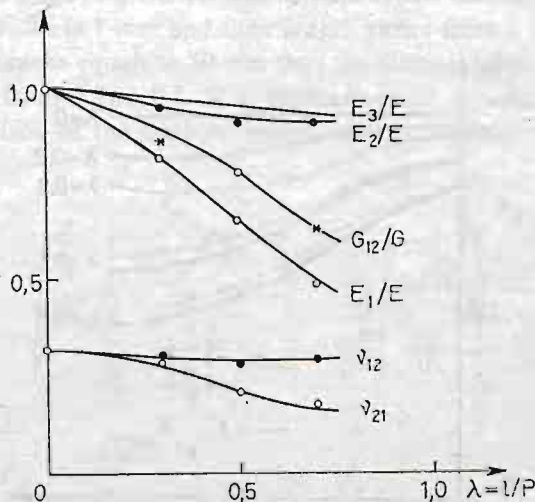
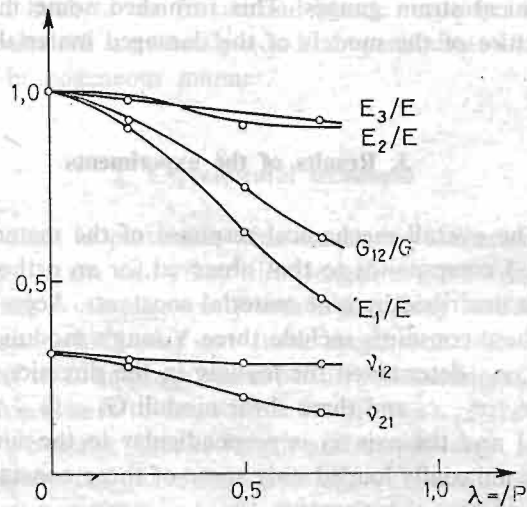


Fig. 3. Elastic constants versus the dimensionless crack length: a) cracks in the pitch direction, b) cracks in diagonal direction.

3.2. Plastic range. The plastic characteristics of the analysed models of the damaged materials includes six constants: three uniaxial yield stresses X_{11} , X_{22} , X_{33} for loading in the directions x_1 , x_2 , x_3 and three shear yield stresses X_{12} , X_{23} , X_{31} . The first two constants X_{11} and X_{22} can be easily determined employing the stress-strain curves for the specimens tested. These curves for various loading orientations and various dimensionless crack lengths are shown in Fig. 4 and 5. The results obtained show that the minimal strength of the cracked material models does not correspond to the loading direction defined by the angle $\alpha = \pi/2$. This is distinctly shown in Fig. 6 where the diagrams of the uniaxial yield stress versus the angle α are presented. The conventional uniaxial yield stresses were determined as the stress corresponding to the permanent strain equal 0.1%. The modification of the uniaxial yield stresses X_{11} , X_{22} and X_{33} for increasing crack length is shown in Fig. 7. The yield stress X_{33} was calculated similarly as E_3 from the relation $X_{33} = \mu\sigma_0$, where $\sigma_0 = 132$ MPa is the uniaxial yield stress for the original material without cracks.

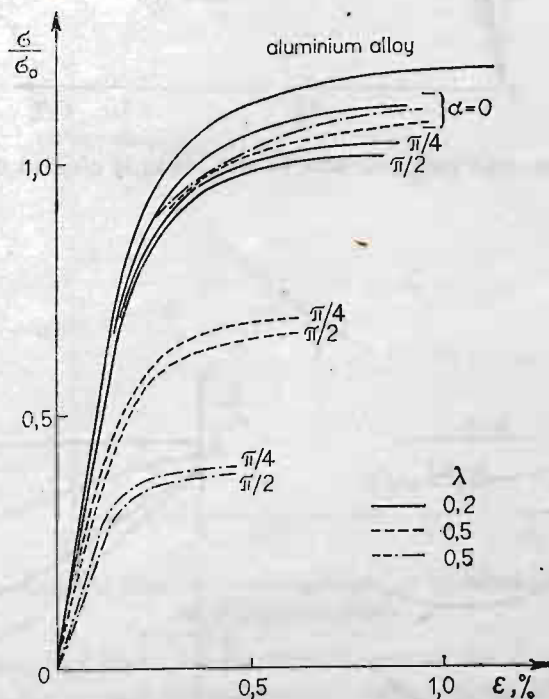


Fig. 4. Stress-strain curves for material with cracks in the pitch direction.

Determining the complete plastic characteristics of the damaged material even for the plane state of stress requires much more complicated experiments employing the tubular specimens subjected to internal pressure and axial load. The specimens should possess a given pattern of fissures and if the overall anisotropic response has to be determined the specimens should be loaded in such a way that the principal stress directions are inclined at various angles with respect to the symmetry axes of the material. Such exper-

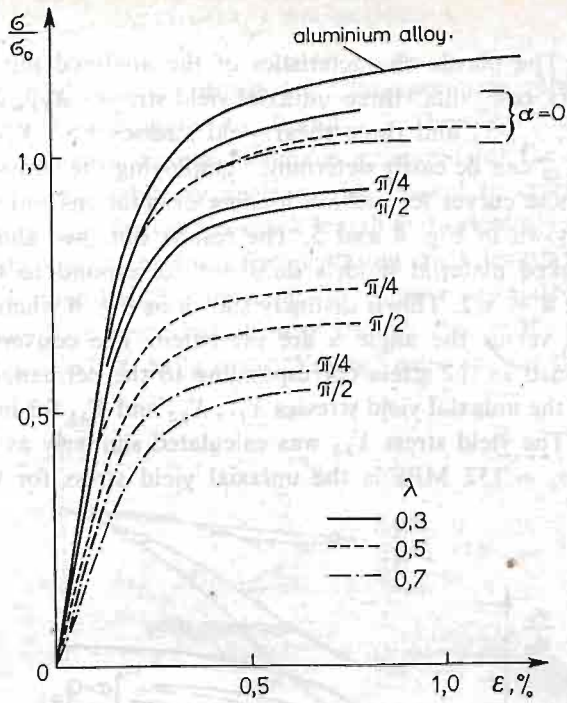


Fig. 5. Stress-strain curves for material with cracks in diagonal direction.

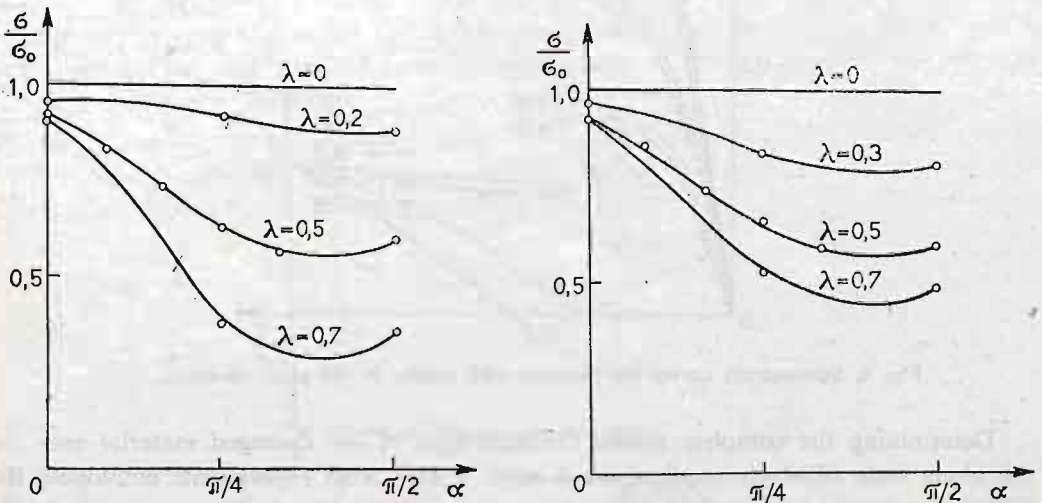


Fig. 6. Uniaxial yield stress versus the angle α : a) cracks in the pitch direction, b) cracks in diagonal direction.

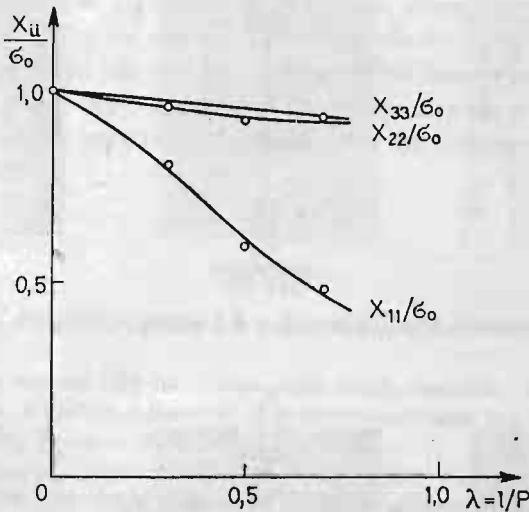
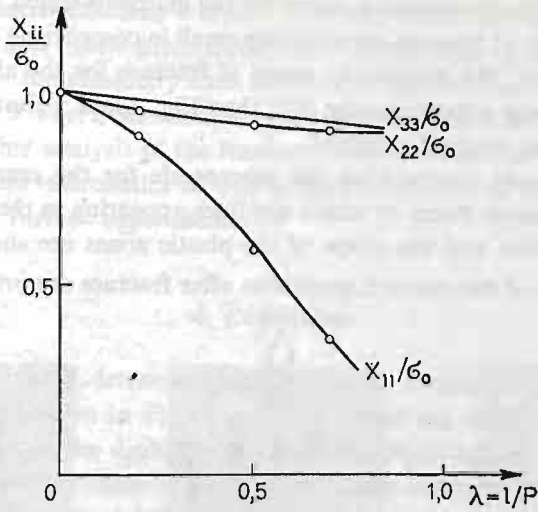


Fig. 7. Plastic constants versus the dimensionless crack length: a) cracks in the pitch direction, b) cracks in diagonal direction.

periments have not been performed for the specific case of the damaged material models but for this purpose can be used the experimental technique established when the plastic anisotropy of the perforated materials was analysed [7, 8]. When carrying the experiments as was described in [7] the material constants as well as the effective yield surfaces can be determined for various loading orientations with respect to the symmetry axes of the material.

3.3. Fracture of the specimens. All the models of the cracked materials were loaded to fracture what enabled to obtain some information concerning its behavior when large plastic strain occur in the plastic zones developed between the cracks. It is seen from

Fig. 4 and 5 presenting the stress-strain curves for the materials tested that the overall homogenized plastic strains at fracture are relatively small in comparison with those measured for the original material. The permanent strain at fracture for the aluminium alloy PA2 measured in this tests was approximately 10% thus Fig. 4 and 5 show only a part of the respective curve for the original material.

The relative brittleness observed on the macroscale for the cracked material is the result of very narrow plastic zones or rather slip lines appearing in the cells of the material structure. The localization and the shape of the plastic zones are shown in Fig. 8 and 9 where the photographs of the selected specimens after fracture are presented. Considering

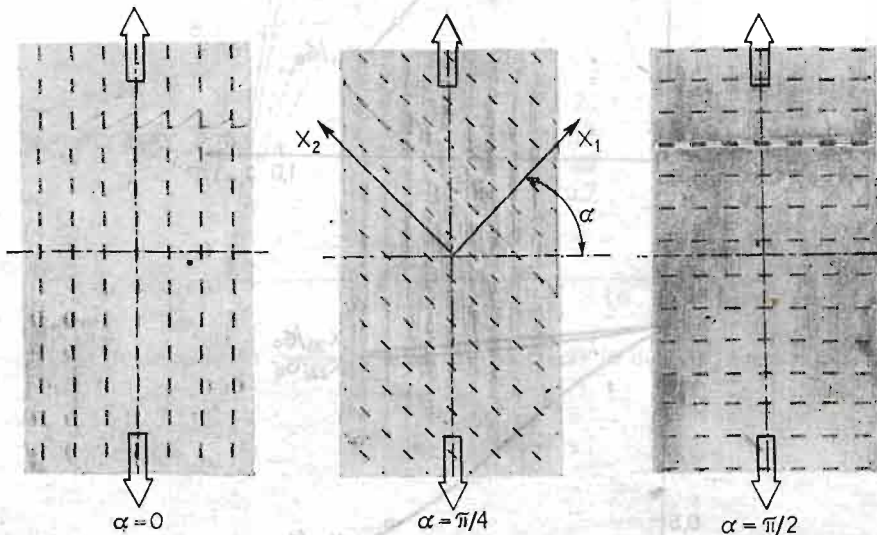


Fig. 8. Specimens after fracture ($\lambda = 0.5$ cracks in the pitch direction).

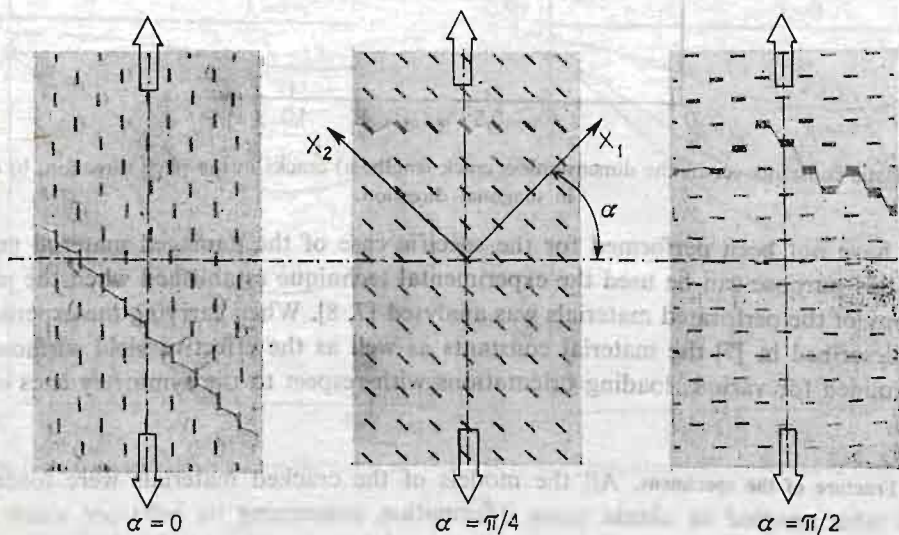


Fig. 9. Specimens after fracture ($\lambda = 0.5$, cracks in diagonal direction).

the problem on the macroscale only it is seen from Fig. 8 that the rupture of the specimens with the cracks arranged in the pitch direction is regular and occurs for all the loading orientations in one of the symmetry axes of the material structure. These regularities are not observed in Fig. 9 where the models with cracks arranged in the diagonal direction are shown. The detailed analysis of the fracture mechanism for the models of the cracked materials on macro and microscales as well as the formulation of the suitable criterion of the fracture requires further experiments.

4. Conclusions

The experiments enable determining the material constants for the models of the damaged materials. It is seen in Fig. 3 and Fig. 7 that the elastic and plastic constants determined for loading in the direction of the axes x_2 and x_3 are nearly identical. Thus the materials tested can be considered as the transversely isotropic solids with the isotropic properties in the plane defined by axes x_1 and x_3 .

The mechanical properties in the elastic range are almost the same for both crack arrangements what means that the overall elastic response for given crack pattern depends mainly on the reduction of the net area of the material but not on the cracks arrangement. As it is seen in Fig. 6 and 7 this conclusion does not concern the plastic range where the yield stresses determined for both cracks arrangements are different especially for increasing crack length.

References

1. M. KACHANOV, *Continuum model of medium with cracks*, Brown Univ., Porous Media Series, Rep. no. 16, 1972.
2. Y. N. RABOTNOV, *Creep rupture*, 12th Int. Congr. Appl. Mech. Stanford, 1968. 342 - 349.
3. S. MURAKAMI, N. OHNO, *A continuum theory of creep and creep damage*, 3rd IUTAM Symp., Creep in Structures, Leicester 1980, Springer, Berlin, 1981, 422 - 443.
4. J. BETTEN, *Damage tensors in continuum mechanics*, J. Mec. Theor. Appl., 1, 2 (1983).
5. A. LITEWKA, A. SAWCZUK, *Experimental evaluation of the overall anisotropic material response at continuous damage*, in: „Mechanic of material behavior. The D. C. Drucker anniversary volume”, G. J. Dvorak and R. T. Shield, ed., Elsevier Sci. Publ. Co., 1983, in press.
6. S. G. LEKHNIČIK, *Theory of elasticity for anisotropic solid*, Nauka, Moscow 1977, (in Russian).
7. A. LITEWKA, *Plastic anisotropy of perforated materials*, Rozprawy 111, Polit. Pozn., Poznań 1980, (in Polish).
8. A. LITEWKA, A. SAWCZUK, *A yield criterion for perforated sheets*, Ing.-Archiv, 50 (1981), 393 - 400

Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛОВ С ТРЕЩИНАМИ

В работе представляется моделирование материалов с регулярно расположенными трещинами и экспериментальную технику для определения упругих и пластических постоянных. Получены зависимости постоянных от длины трещин для их двух конфигураций. Представляются также некоторые результаты относительно разрушения образцов материалов с трещинами.

Streszczenie

DOŚWIADCZALNA SYMULACJA ANIZOTROPOWEGO USZKODZENIA MATERIAŁU

W pracy przedstawiony został sposób modelowania materiałów z regularnie rozmieszczonymi zarysowaniami oraz omówiona jest technika badań mająca na celu wyznaczenie stałych materiałowych w zakresie sprężystym i plastycznym. W wyniku badań otrzymano zależności stałych od długości szczelin dla ich dwóch konfiguracji. Przedstawione zostały również pewne wyniki dotyczące zniszczenia modeli materiałów z uszkodzeniami.

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 lutego 1983 roku

NOWA METODA WYZNACZANIA POŁA ODKSZTAŁCENIA W PRZYPADKU TRÓJWYMIAROWYM, WYKORZYSTUJĄCA ZJAWISKO ŚWIATŁA ROZPROSZONEGO W ELASTOOPTYCE

W. KARMOWSKI

Politechnika Krakowska

S. MAZURKIEWICZ

Politechnika Krakowska

1. Wstęp

Wykorzystanie zjawiska rozpraszania światła w elastoptyce zaproponowano po raz pierwszy w roku 1938, w pracy [1] a następnie w [2, 3], DRUCKER i MINDLIN [4] przedstawili analizę możliwości zastosowania zjawiska rozpraszania światła do badania trójwymiarowych stanów naprężenia, rozważając zagadnienie obrotu kierunków wtórnych naprężeń głównych (naprężeń optycznie czynnych) wzdłuż drogi światła, przebiegającego przez model. Analizie tego zjawiska poświęcone były dalsze prace [5, 6], co miało istotne znaczenie dla rozwoju tej metody.

W przypadku płaskim, gdy nie występuje rotacja wtórnych naprężeń głównych, uzyskuje się prostsze zależności. W pracach [7, 8, 9] a następnie [10, 11, 12, 13] podano teorię izodyn oraz ich własności, które pozwalają na pełne rozwiązanie zagadnienia płaskiego korzystając jedynie dodatkowo z warunków równowagi wewnętrznej. Istnieje już szereg prac, w których wykorzystano zjawisko światła rozproszonego do analizy płaskich zagadnień konstrukcyjnych [14, 15, 16, 17]. W przypadku trójwymiarowym wykorzystuje się konwencjonalną metodę zamrażania [18], metodę naprężeń stycznych [19] lub tzw. metodę podwójnej obserwacji [20, 21]. Dalszy rozwój tej metody wymaga głębszej analizy teorii rozpraszania światła, zjawiska dwójłomności w oparciu o równania Maxwella, jak również udoskonalenia techniki pomiarowej z zastosowaniem automatyzacji procesu pomiaru i metod numerycznych opracowania wyników pomiaru [22]. Jak wykazano w niniejszej pracy, zjawisko rozpraszania w modelach elastoptycznych pozwala na uzyskanie prawie pełnej informacji o stanie odkształcenia, przyjmując opisany równaniami Maxwella elektromagnetyczny model fali świetlnej, rozproszenie wg modelu Rayleigha oraz prostoliniowe propagowanie się promienia świetlnego w ośrodku quasiizotropowym [23].

Jak wiadomo zjawisko rozpraszania (scattering) jest szczególnym rodzajem dyfrakcji i występuje według prawa Rayleigha w przypadku, gdy stosunek wymiarów cząsteczki

do długości fali $a/\lambda < 0,05$. Fala promieniowania elektromagnetycznego wypromieniowana przez wzbudzoną do drgań cząsteczkę jest falą rozchodzącą się we wszystkich kierunkach, spolaryzowaną o rozkładzie intensywności będącej funkcją kierunku promieniowania. Efekt światła rozproszonego i dwójłomności wymuszonej opierają się na tym samym zjawisku zdolności do polaryzacji przez materię. Asymetria chmury elektronów otaczających cząsteczkę jest ściśle związana ze zdolnością cząsteczki do polaryzacji. Istnieją dwa rodzaje asymetrii — naturalna oraz spowodowana polem odkształceń. Światło rozproszone jest efektem obu tych rodzajów asymetrii.

W badaniach elastoptycznych, pierwszy z nich jest to błąd pomiarowy, a drugi to właściwa wielkość mierzona.

2. Przechodzenie światła przez ośrodek quasiizotropowy

Ośrodek quasiizotropowy definiujemy jako ośrodek, dla którego tensor stałej dielektrycznej niewiele się różni od tensora jednostkowego pomnożonego przez pewną liczbę. Jeżeli za normę tensora przyjmiemy:

$$\|\check{\chi}\| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{tr}(\check{\chi}^T \check{\chi})}{\text{tr} \check{I}}, \quad (1)$$

to warunek powyższy można wyrazić przez

$$\|\check{\chi} - \kappa_0\| \ll \kappa_0. \quad (2)$$

Przypadek ten występuje w ośrodkach izotropowych poddanych obciążeniu poniżej granicy sprężystości. Tensor stałej dielektrycznej można wtedy wyrazić przez [23]

$$\check{\chi} = \kappa_0 + \kappa_1 \check{\epsilon} + \kappa_2 \text{tr} \check{\epsilon}. \quad (3)$$

Z powyższego wzoru widać, że pomiar wielkości dielektrycznych takiego ośrodka pozwala na wyznaczenie wielkości mechanicznych scharakteryzowanych przez tensor odkształcenia. W praktyce analiza tensora dielektrycznego jest dokonywana przez pomiar parametrów opisujących płaską falę elektromagnetyczną, przechodzącą przez dany ośrodek. Fala płaska wchodząca do modelu scharakteryzowana jest przez: kierunek propagacji, częstotliwość i kierunek pola elektrycznego (prostopadły do kierunku propagacji). W omawianym przybliżeniu występuje modulowanie fazy, bez zmiany częstotliwości. Jak wynika z rozwiązań równań Maxwella dla fali elektromagnetycznej pola elektryczne można przedstawić w postaci równania fali

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cdot \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (4)$$

gdzie: \vec{r} — kierunek propagacji;

ω — częstotliwość fali;

\vec{k} — wektor falowy;

Wektor indukcji magnetycznej jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektor \vec{k} i \vec{E} . W przypadku ośrodka izotropowego kierunek propagacji (s) i kierunek wektora falowego są zgodne.

W ośrodku anizotropowym już tak nie jest. Wektor \vec{D} jest dalej prostopadły do wektora \vec{k} , a wektor \vec{E} do wektora \vec{s} , ale kierunek propagacji i kierunek wektora falowego są różne. W przypadku ośrodka quasiizotropowego, jaki będzie rozpatrywany, w pierwszym przybliżeniu można przyjąć jednak, że dalej zachodzi współliniowość wektorów \vec{k} i \vec{s} . Konsekwencją tego jest przyjęcie współliniowości obydwu promieni, na które rozszczepia się promień wchodzący. Interferują one wobec tego z sobą, podczas przechodzenia przez model oraz nie zachodzi zjawisko odchylenia promienia od prostoliniowości.

W drugim przybliżeniu należy efekt rozszczepiania promieni oraz efekt nieprostoliniowości uwzględnić, co wykorzystuje elastooptyka gradientowa [24]. W omawianym przybliżeniu wektor \vec{E} wskutek interferencji wiruje wokół promienia a koniec jego zakreśla elipsę. W granicznym przypadku elipsa redukuje się do odcinka a wektor \vec{E} pulsuje wokół jego środka (polaryzacja liniowa). Dowolny stan polaryzacji można opisać przez podanie następujących wielkości:

A — wielkość elipsy, spełnia ona zależność:

$$\overline{E^2} = A^2 \quad (5)$$

γ — moduł z tangensa γ , jest to stosunek półosi małej do dużej. Znak γ jest zależny od tego, czy wektor obraca się lewo (—) czy prawoskrętnie (+), γ zawiera się w gra-

$$\text{nicach } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

φ — kąt obrotu elipsy do położenia takiego, że duża półoś pokrywa się z kierunkiem osi „x”, a mała z kierunkiem osi „y”;

ψ — kąt pomiędzy końcem wektora \vec{E} a osią x;

Przyjmując wielkość bezwymiarową $\tau = \omega t$ oraz wektor czasowy $\vec{\Theta}(\cos \tau, \sin \tau)$ można zapisać wektor natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej propagującej się w kierunku „z” w postaci:

$$\vec{E} = \sqrt{2} A \check{T}^\varphi \check{D}^\psi \check{T} - \psi \vec{\Theta}, \quad (6)$$

gdzie: \check{T}^φ — tensor obrotu $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$$\check{D}^\psi — \text{macierz } \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi \end{pmatrix}$$

Zapisane wzorem (6) wyrażenie na natężenie pola elektrycznego pozwala na szczegółowe przeanalizowanie zmian tego pola w trakcie przechodzenia promienia przez model. Należy w tym celu znaleźć zależność pomiędzy wektorem falowym a tensorem dielektrycznym. W ogólnym przypadku zależność ta jest następująca:

$$\det(n^2 \delta_{ik} - n_i n_k - \kappa_{ik}) = 0, \quad (7)$$

gdzie n jest wektorem bezwymiarowym.

$$\vec{u} = \frac{c}{\omega} \vec{k}. \quad (8)$$

W wyrażeniach tych występuje bezwymiarowy tensor dielektryczny, jako stosunek właściwego tensora dielektrycznego do stałej dielektrycznej w próżni. Jeżeli oś „z” zostanie

wybrana wzdłuż wektora falowego, to w przypadku quasiizotropowym uzyskuje się proste wyrażenie

$$\det(n^2 \delta_{\alpha\beta} - \kappa_{\alpha\beta}) = 0. \quad (9)$$

Występuje w nim dwuwymiarowy tensor dielektryczny $\kappa_{\alpha\beta}$, będący projekcją tensora na płaszczyznę prostopadłą do wektora falowego. Przez obrót tej płaszczyzny wokół wektora falowego można doprowadzić macierz występującą w (9) do postaci diagonalnej. Uzyskane wtedy dwa rozwiązania na „ n ” są to współczynniki załamania dla fal propagujących się w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach, odpowiednie wektory \vec{E} , są to wektory własne macierzy w równaniach (9). Na ogół wartości własne „ n ” są różne, uzyskuje się dwie fale propagujące się w tym samym kierunku ale o zmiennej fazie wzajemnej. Kąt o jaki należy obrócić układ współrzędnych płaskich zmienia się od punktu do punktu. Różnica faz między obydwoma promieniami jest proporcjonalna do różnicy odkształceń głównych we wtórnym układzie współrzędnych płaskich. Współczynnik proporcjonalności nazywa się stałą elastoptyczną b . W dalszych rozważaniach przyjmuje się laboratoryjny układ współrzędnych, którego oś „ z ” jest skierowana wzdłuż promienia świetlnego, orientacja pozostałych osi natomiast jest dowolna ale niezmienna. Z powyższych rozważań wynika, że z pomiaru elastoptycznego możliwe jest uzyskanie informacji o różnicy wtórnych odkształceń głównych oraz o kącie pod jakim występuje układ główny względem układu laboratoryjnego. Odpowiada to w klasycznym eksperymencie elastoptycznym izochromom i izoklinom. Tam jednakże można uzyskiwać rozwiązania wyłącznie dla modeli płaskich, gdyż w technikach tych otrzymuje się pomiar wycalkowany po grubości modelu. Problemem do rozwiązania jest analiza elementu trójwymiarowego o dowolnym kształcie, interesujące są zwłaszcza przypadki trudno analizowalne przez metody numeryczne. Stosowana obecnie technika zamrażania, posiada szereg niedogodności i opiera się na uproszczeniach. Celowe jest wobec tego poszukiwanie technik optycznych, które nie wprowadzając zaburzeń do obiektu, pozwalałyby na uzyskiwanie informacji o istniejącym w nim polu odkształcenia. Nowe możliwości otwierają się dzięki wykorzystaniu zjawiska światła rozproszonego. W metodzie tej pomiarowi podlega jedynie natężenie światła rozproszonego w danym punkcie obiektu (pobudzonego do drgań przez promień świetlny), w kierunkach do tego promienia prostopadłych. Natężenie to jest proporcjonalne do wielkości emisji światła w tym punkcie. Anizotropia ośrodka wpływa jedynie na zmiany polaryzacji i fazy światła. Aby uzyskać zależności ilościowe należy przeanalizować natężenie pola elektrycznego wzdłuż biegu promienia padającego, wykorzystuje się tutaj wnioski z równania (9). Dla dwóch nieskończenie bliskich punktów zachodzi zależność

$$\vec{E}(z+dz, \tau) = \check{T}^0 \hat{\Lambda}(-\vec{k}dz) \check{T}^{-\vartheta} \vec{E}(z, \tau), \quad (10)$$

gdzie: $\hat{\Lambda}(\vec{\zeta})$ — operator przesunięcia fazy sinusoidy o wartość ζ_1 dla osi „ x ” i o ζ_2 dla osi „ y ”;

$\vec{\zeta}$ — para wielkości (ζ_1, ζ_2) ;

\check{T} — transformacja obrotu wokół osi „ z ” o kąt ϑ ;

Sens powyższego wzoru jest następujący. Z laboratoryjnego układu współrzędnych przechodzi się przez obrót o kąt — ϑ do układu wtórnych odkształceń głównych, tam

dokonuje się przesunięcia poszczególnych faz o $-\vec{k}dz$, po czym obrót o kąt ϑ przywraca orientację laboratoryjną. Po napisaniu \vec{E} w postaci (6) i wykonaniu działań uzyskuje się wyrażenie na $\vec{E}(z+dz, \tau)$ w postaci:

$$\vec{E}(z+dz, \tau) = \sqrt{2} A(\check{P}+dz\check{S}\check{T}^{\frac{\pi}{2}})\check{\Theta}^r, \quad (11)$$

gdzie: \check{P} — macierz $\check{T}^\varphi\check{D}^\psi\check{T}^{-\varphi}$ (12)

b — stała elastoptyczna

$$\check{S} — macierz $-\frac{b}{2} [\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + (\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)})\hat{T}^{2\vartheta}\check{V}]$ (13)$$

$$\check{V} — macierz \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Z drugiej zaś strony w punkcie $z+dz$ obowiązuje równanie

$$\vec{E}(z+dz, \tau) = \sqrt{2} (A+dA)\check{P}(z+dz)\check{\Theta}^r. \quad (15)$$

Przyrównanie prawych stron równań (11) i (15) i wyrugowanie wektora czasowego $\check{\Theta}^r$ daje równanie różniczkowe na parametry A, γ, φ, ψ charakteryzujące stan polaryzacji w danym punkcie na osi „z”.

$$(A+dA)\check{P}(z+dz) = A(\check{P}+dz\check{S}\check{T}^{\frac{\pi}{2}}). \quad (16)$$

Zamiast równaniem (16), wygodniej jest posługiwać się równaniem zsymetryzowanym z pominięciem wyrazów drugiego rzędu

$$(A^2+2A \cdot dA)(\check{P}\check{P}^T)_{(z+dz)} = A^2[\check{P}\check{P}^T+dz(\check{S}\check{T}^{\frac{\pi}{2}}\check{P}^T+\check{T}^{-\frac{\pi}{2}}\check{P}^T\check{S}^T)]. \quad (17)$$

W wyniku bezpośredniego rachunku uzyskuje się

$$(A^2+2A \cdot dA)(\check{P}\check{P}^T)_{(z+dz)} = A^2[\check{P}\check{P}^T-b(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})\sin 2\gamma\check{T}^{2\vartheta-\frac{\pi}{2}}\check{V}dz]. \quad (18)$$

Równanie to zawiera trzy wielkości niewiadome: A, γ, φ . Została wyeliminowana niemierzona faza ψ . Przyrównanie śladów macierzy po obydwu stronach równania (18) daje $dA = 0$, co jest konsekwencją przyjęcia braku strat podczas przechodzenia promienia przez model. Z pozostałych elementów macierzy wygodnie jest utworzyć jedno wyrażenie algebraiczne na wielkości zespolone.

Definiuje się funkcję macierzowo liczbową o postaci

$$\text{com}\check{H} \stackrel{\text{def}}{=} (H_{11}-H_{22})+i(H_{12}+H_{21}). \quad (19)$$

Przy jej pomocy można zapisać wyrażenie

$$\frac{d}{dz} [\text{com}(\check{P}\check{P}^T)] = -b(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})\sin 2\gamma \cdot \text{com}(\check{T}^{2\vartheta-\frac{\pi}{2}}\check{V}). \quad (20)$$

prowadzące do następującego równania różniczkowego

$$\frac{1}{\sin 2\gamma} \frac{d}{dz} (-i\cos 2\gamma e^{2\varphi i}) = b(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})e^{2\varphi i}. \quad (21)$$

W równaniu tym udało się dokonać podziału występujących wielkości na optyczne (po lewej stronie) i mechaniczne (po prawej). Można teraz zdefiniować jedną wielkość odpowiedzialną za zjawiska mechaniczne tzn.

$$\tilde{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} (e^{(1)} - e^{(2)})e^{2\beta i}. \quad (22)$$

(Wielkość tę proponujemy nazwać zespolonym odkształceniem kierunkowym — dotyczy wybranego kierunku osi „z”) oraz dwie wielkości odpowiedzialne za zjawiska elastooptyczne tzn.

$$Q = -i \cos 2\gamma e^{2\beta i} \quad \text{i} \quad s = \text{sgn} \gamma. \quad (23)$$

Wielkość „s” jest skrętnością obrotu wektora \vec{E} dokoła elipsy polaryzacji. Równanie może być teraz zapisane w postaci

$$b\tilde{\epsilon} = \frac{\dot{Q}}{s\sqrt{1-Q^*Q}}. \quad (24)$$

Nadaje się ono do bezpośredniego obliczania zespolonego parametru odkształcenia. Wielkość Q pochodzi z eksperymentu a \dot{Q} wyznacza się przez numeryczne różniczkowanie.

3. Wykorzystanie zjawiska rozpraszania Rayleigha do pomiaru wielkości elastooptycznych

Przekrój czynny na rozpraszanie Rayleigha można wyrazić jako

$$d\sigma = \frac{3\sigma_0}{8\pi} (\text{vers } \vec{E} \times \vec{N})^2 d\Omega, \quad (25)$$

gdzie \vec{N} jest wektorem kierunkowym od punktu rozpraszającego do punktu obserwacji. Najdokładniejsze pomiary uzyskuje się wtedy gdy wektor \vec{N} jest prostopadły do biegu promieni, czyli w przyjętym układzie współrzędnych ma postać $\vec{N}(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$. Ze względu na dużą częstość stosowanego promieniowania (np. laser He-Ne) pomiarowi podlega jedynie średnia wartość natężenia światła czyli wielkość

$$I \sim (\vec{N} \times \vec{E})^2. \quad (26)$$

Podstawiając w miejsce \vec{E} wyrażenie (6) i dokonując uśrednienia po czasie uzyskuje się wyrażenie wiążące natężenie światła rozpraszanego i wielkości elastooptyczne.

$$I(\alpha) = I_0 A^2 [1 - \cos 2\gamma \cdot \cos(2\varphi - 2\alpha)]. \quad (27)$$

We wzorze powyższym I_0 jest to stała proporcjonalności zależna od jasności źródła, częstości i zdolności do rozpraszania i pochłaniania światła w modelu. Dokonując pomiarów natężenia światła pod trzema kątami uzyskuje się trójkę liczb

$$I(0), \quad I\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad I\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (28)$$

Z tej trójki można utworzyć jedną wielkość

$$J = \frac{\left[I(0) + I\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2I\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] + i \left[I(0) - I\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]}{I(0) + I\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (29)$$

Jest to wielkość pomiarowa, wiąże ona obserwacje z parametrem elastoptycznym gdyż

$$J = Q. \quad (30)$$

Dokonując pomiarów natężenia światła dochodzącego do rejestratora (element fotoelektryczny) poprzez układ zobrazowania tak, aby rejestrować promieniowanie dochodzące z wybranego kierunku, można otrzymać funkcję parametru elastoptycznego z argumentem będącym punktem bieżącym drogi promienia.

Przez wprowadzenie wielkości tej do wyrażenia (24) można obliczać w każdym punkcie zespolone odkształcenie kierunkowe. Do wyznaczenia pozostaje jedynie skrętność s . Problem polega na tym, że po przejściu wartości γ przez zero nie wiadomo, czy wartość ta oddała się od zera w kierunku dodatnim czy ujemnym. Żaden pomiar w układzie tym nie daje informacji o znaku s . Można go jednak uzyskać przez wykonanie pomiarów analogicznych dla dwu różnych stanów polaryzacji wejściowej, tzn. przy dwu różnych wartościach γ . Wtedy te dwie wartości γ_1 i γ_2 nie osiągają zera równocześnie, można wobec tego określić przez pomiary równoległe skrętność w danym punkcie promienia świetlnego.

4. Pomiary stanu odkształcenia w przypadku trójwymiarowym

Przedstawiona w poprzednim rozdziale metoda pomiaru zespolonego odkształcenia kierunkowego pozwala na uzyskiwanie dwóch informacji o tensorze odkształcenia (różnica odkształceń głównych i kąt wtórny układu głównego) w danym układzie współrzędnych laboratoryjnych. Pomiary takie, przez obrót ciała lub obrót układu optycznego można dokonywać w różnych kierunkach.

Powstaje pytanie, czy dokonując tych obserwacji dla trzech kierunków można uzyskać pełną informację o tensorze odkształcenia. Odpowiedź jest negatywna, gdyż w przypadku odkształcenia hydrostatycznego (tensor odkształcenia jest liczbowy tzn. jednostkowy pomnożony przez liczbę) wszystkie pomiary mianowane są zerowe. Wynika stąd, że metoda daje odpowiedź na zadanie znalezienia tensora odkształcenia w stanie trójwymiarowym, z dokładnością jednakże do ciśnienia hydrostatycznego. Potrzebny do tego układ równań można uzyskać następująco: dokonuje się pomiarów elastoptycznych według podanego wyżej schematu w trzech kierunkach biegu promienia świetlnego, wzajemnie niewspółpłaszczyznowych. Dla danego kierunku oblicza się następnie kąt obrotu dokoła tego kierunku tak aby uzyskać wtórny układ główny. Wynik operacji można zapisać następująco:

$$\check{T}^{-1}\check{\varepsilon}\check{T} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)'} & 0 & \varepsilon'_{31} \\ 0 & \varepsilon^{(2)'} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{23} & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Po prawej stronie równości dana jest różnica $\varepsilon^{(1)'} - \varepsilon^{(2)'}$, ponieważ mierzona jest wielkość Q i obowiązuje (24). Otrzymuje się stąd dwa równania na niewiadome $\check{\varepsilon}$. Są to

$$\begin{aligned} (\check{T}^{-1}\check{\varepsilon}\check{T})_{12} &= 0, \\ (\check{T}^{-1}\check{\varepsilon}\check{T})_{11} - (\check{T}^{-1}\check{\varepsilon}\check{T})_{22} &= \varepsilon^{(1)'} - \varepsilon^{(2)'}. \end{aligned} \quad (32)$$

Tensor obrotów \check{T} jest złożeniem operacji obrotu układu laboratoryjnego do takiego

układu, w którym nowa oś „z” jest kierunkiem biegu promienia \check{T}_c i operacji obrotu do wtórnego układu głównego \check{T}^g .

$$\check{T} = \check{T}^g \check{T}_c. \quad (33)$$

Za macierze \check{T}_c wygodnie jest przyjąć macierze obrotów dokoła osi „x” i „y”.

$$\check{T}_{c1} = 1, \quad \check{T}_{c2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi & -\sin \xi \\ 0 & \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}, \quad \check{T}_{c3} = \begin{pmatrix} \cos \eta & 0 & \sin \eta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \eta & 0 & \cos \eta \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Uzyskuje się w ten sposób sześć równań o sześciu niewiadomych. Układ ten jest jednak nieokreślony, co zostało wyżej pokazane. Do tego układu dołączamy wobec tego siódme równanie o postaci

$$\text{tr} \check{\varepsilon} = 0. \quad (35)$$

Zakłada się tutaj, że odkształcenie hydrostatyczne jest zero. Nie zmienia to równań pozostałych, o czym można się przekonać dodając do tensora $\check{\varepsilon}$ dowolny tensor liczbowy. Zmianie ulega tylko równanie (35), które wobec tego kasuje nieoznaczoność. Otrzymany teraz układ równań jest układem nadokreślonym. Skreślenie któregośkolwiek równania poprzedniego jest niecelowe, gdyż traci się jedną informację. Należy wobec tego rozwiązywać otrzymany układ jako nadokreślony, przez minimalizację normy kwadratowej;

$$\|G\varepsilon - g\|, \quad (36)$$

gdzie: ε — układ liczb ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$)

G — macierz współczynników z trzech układów równań typu (32) dla $\check{T}_{c1}, \check{T}_{c2}, \check{T}_{c3}$,

g — układ wyrazów wolnych z prawych stron (32);

co daje równanie:

$$G^T G \varepsilon = G^T g. \quad (37)$$

5. Przypadek płaski

Wspólną cechą obydwu przypadków płaskich (PSO i PSN) jest zerowanie się dwu składowych mieszanych tensora odkształcenia. Jeżeli przepuszcza się promień świetlny przez model prostopadle do kierunku wyznaczającego stan płaski, to wtórny układ główny jest stały w całym modelu i zgodny z osiami układu laboratoryjnego.

Przyjmując, że oś „y” wyznacza układ płaski uzyskuje się następujące wyrażenie na tensor odkształcenia

$$\check{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{31} \\ 0 & k(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

gdzie współczynnik k jest równy 0 dla PSO a $\frac{-\nu}{1-\nu}$ dla PSN. Wtórny tensor odkształcenia

ma wtedy postać

$$\check{\varepsilon}_s = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Kąt ϑ wynosi wobec tego zero. Zespolone odkształcenie kierunkowe (wzdłuż osi „z”) jest wtedy rzeczywiste a co za tym idzie i pochodna parametru elastoptycznego. Po rozpisaniu równań otrzymuje się dwa równania

$$\begin{aligned} 2\dot{\varphi} &= b(\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}) \operatorname{tg} 2\gamma \cdot \cos 2\varphi, \\ 2\dot{\gamma} &= -b(\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (40)$$

Układ ten może być jednokrotnie przecałkowany analitycznie (w ogólnym przypadku) po wyrugowaniu $\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}$. Faktycznie, podzielenie obydwu powyższych równań przez siebie prowadzi do równania:

$$2\dot{\varphi} \operatorname{tg} 2\varphi = -2\dot{\gamma} \operatorname{tg} 2\gamma. \quad (41)$$

Całką tego równania jest zależność:

$$\cos 2\gamma |\cos 2\varphi| = \text{const}. \quad (42)$$

Wykorzystano tutaj fakt, że $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Jeżeli iloczyn ten dla promienia wnikającego do modelu będzie różny od zera, to $\cos 2\varphi$ będzie miał stały znak, np. plus i wtedy

$$\cos 2\gamma \cdot \cos 2\varphi = \cos 2\gamma_0 \cdot \cos 2\varphi_0, \quad (43)$$

(γ_0, φ_0 — są to wartości γ, φ dla promienia wchodzącego). Podstawiając powyższą zależność do równań (40) otrzymuje się równanie na γ :

$$\begin{aligned} \arcsin \left(\frac{\sin 2\gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 2\gamma_0 \cdot \cos^2 2\varphi_0}} \right) - \arcsin \left(\frac{\sin 2\gamma_0}{\sqrt{1 - \cos^2 2\gamma_0 \cdot \cos^2 2\varphi_0}} \right) &= \\ &= -b \int_0^z dz (\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}) \operatorname{sgn} \varphi. \end{aligned} \quad (43a)$$

Ze względu na praktyczne zastosowania interesujący jest przypadek $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, wtedy równania (40) upraszczają się do

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= 0 \\ \dot{\gamma} &= -\frac{b}{2} (\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}). \end{aligned} \quad (44)$$

Przypadek ten był już wcześniej realizowany zarówno teoretycznie jak i praktycznie [7, 8, 9] w technice izodyn.

Jeżeli układ pomiarowy jest wycechowany (wyznaczony iloczyn $I_0 A^2$) wystarczy zmierzyć intensywności pod jednym kątem. Ze wzoru (27) widać, że najkorzystniej robić to dla $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$. Na ewentualnie wykonanej fotografii z obrazu intensywności ukazują się czarne prążki będące miejscem geometrycznym punktów, dla których intensywność

jest zero. Wykonywanie jednakże pomiarów fotometrycznych jest korzystniejsze, gdyż pozwala zapisać na cyfrowym nośniku informacji (taśma magnetyczna lub tasiemka papierowa) liniowo dane o rozkładzie intensywności.

Odpowiednio przygotowany program umożliwi uzyskanie rozkładu różnicy odkształceń głównych w danym przypadku. Dla płaskiego stanu odkształcenia będzie to ε_{11} a płaskiego stanu naprężenia σ_{11} .

Drugi z tych przypadków był analizowany w np. pracach [7, 8], [9]. W. KARMOWSKI i S. MAZURKIEWICZ [7] wykorzystali informację o wartości σ_{11} do rozwiązania równań równowagi — równania te stają się określone a co więcej pozwalają na uzyskanie informacji o składowych pola naprężenia przez bezpośrednie całkowanie, rozpoczynając proces obliczania od miejsca wnikania promieni do modelu. Podane tam wzory pozwalają na praktyczne rozwiązanie zadania znalezienia pola odkształceń w przypadku płaskiego pola naprężenia.

Inną metodę przyjęto w pracach [25].

Wprowadzono tam pojęcie izodyn sprężystych, jako miejsc geometrycznych punktów, dla których dana składowa siły działającej między dwoma izoklinami jest stała. Definicja taka nie jest jednak jednoznaczna. Bardziej celowym wydaje się zdefiniowanie siły działającej na przekrój równoległy do danej osi układu współrzędnych od brzegu ciała do danej linii w następujący sposób:

$$f_i^{(x)}(x, y) = \int_{b(x)}^y d\eta \sigma_{xi}(x, \eta), \quad (45)$$

gdzie: $b(x)$ — równanie brzegu

$$i = x, y$$

Wielkość fizyczną $\vec{f}^{(x)}$ proponujemy nazwać dyną.

Izodyną natomiast będzie linia o stałej wartości składowej $f_i^{(x)}$. Oczywiście ze względu na izotropowość przestrzeni kierunek „ x ” i związany z nim „ y ” może być wybrany dowolnie. Pomiarowi elastooptycznemu podlega składowa normalna, czyli $f_x^{(x)}$. Wysoką elegancję wzorów metody izodyn uzyskuje się przez wyrażenie składowych naprężenia jako pochodnych funkcji Airy’ego [25].

Występuje tutaj również nieoznaczoność w funkcji Airy’ego. Można jej uniknąć przez zdefiniowanie tej funkcji dla danego stanu jako funkcji, która spełnia równanie biharmoniczne, warunki brzegowe na naprężenia oraz warunki początkowe w dowolnym punkcie brzegu (x_0, y_0) przyjętym za zerowy.

$$\Phi_0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_0 = 0. \quad (46)$$

Jest to możliwe ponieważ do funkcji Airy’ego można dodać dowolną funkcję liniową. Wtedy

$$f_x^{(x)}(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \int_0^l dl q_x, \quad (47)$$

gdzie \vec{q} jest obciążeniem brzegu a całkowanie przebiega prawoskrętnie od punktu zerowego

(x_0, y_0) do punktu na brzegu ciała, dla którego składowa x -sowa jest równa tej składowej dla badanego punktu.

Analogiczny wzór można napisać dla składowej $f_y^{(y)}$, który daje $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Wzory te pozwalają na uzyskiwanie funkcji Airy'ego Φ bez rozwiązywania równania biharmonicznego. Trzeba jednak dysponować ciągłym polem dyn $f_x^{(x)}, f_y^{(y)}$, co uzyskuje się np. metodą aproksymacji zastosowaną w [22].

6. Podsumowanie

Przedstawiona metoda analizy przestrzennego przypadku teorii sprężystości daje możliwość uzyskania informacji o polu odkształcenia w dowolnym punkcie modelu, jednak bez składowej hydrostatycznej. W problemach mechaniki ciał stałych takich jak ocena wyężenia, taka analiza jest wystarczająca. Przez zaproponowanie pomiarów równoległych, dla dwu różnych polaryzacji wejściowych promienia świetlnego uzyskano możliwość oceny znaku wielkości mechanicznych bez odwoływania się do dodatkowych eksperymentów, które przede wszystkim są trudne do interpretacji i nie dają się automatyzować, co przy ogromie pracy pomiarowej praktycznie wyklucza ich zastosowanie. Dla prawidłowego opisu zjawisk świetlnych w obszarze pomiarowym wprowadzono dwie nowe wielkości fizyczne tj. zespolone odkształcenie kierunkowe opisujące składowe tensora odkształcenia analizowane w danym kierunku oraz parametr elastooptyczny charakteryzujący stan polaryzacji światła w danym punkcie modelu na drodze promienia świetlnego. Podano efektywne wzory pozwalające na obliczanie składowych tensora odkształcenia w dowolnym punkcie modelu bez odkształcenia równomiernego. W drugiej części pracy przedstawiono przypadek płaski w nawiązaniu do stosowanej w tym zakresie techniki izodyn. Zostały podane zależności uściślające proponowane w innych pracach wielkości fizyczne.

Literatura cytowana w tekście

1. R. WELLER, J. K. BUSSEY, *Photoelastic Analysis of Threedimensional Stress Systems Using Scattered Light*, NACA Techn. Note 737 Nov. 1938.
2. R. WELLER, *Three Dimensional Photoelasticity Using Scattered Light*, J. Appl. Phys., 12 1941.
3. R. WELLER, *A New Method for Photoelasticity in Three-Dimensions*, J. of Appl. Phys., 10 (4) 1939.
4. D. C. DRUCKER, R. D. MINDLIN, *Stress Analysis by Threedimensional Photoelastic Method*, J. Appl. Phys., Vol. II, No I, 1940.
5. H. T. JESSOP, *The Scattered Light Method of Exploration of Stress in Two and Three-dimensional Models*, British J. of Appl. Phys., 2. 1951.
6. E. M. SALAME, *Three-dimensional Photoelastic Analysis by Scattered Light*, Proc. Soc. Exp. Stress. Analys., 5.N.2.
7. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, *Photoelastic Isodynes — A New Type of Stress-Modulated Light Intensity Distribution*, Mech. Res. Com., Vol. 4 (4) 1977.
8. S. B. MAZURKIEWICZ, J. T. PINDERA, *Integrated — plane Photoelastic Method-Application of Photoelastic Isodynes*, Exp. Mech., Vol. 19 No 7, July 1979.

9. J. T. PINDERA, *Analytical Foundation of The Isodyne Photoelasticity*, Mech. Res. Com., Vol. 8 (6) 1981.
10. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, R. B. KRASNOWSKI, *Assessment of the Reliability of Some Typical Mathematical Models of Plane Stress States Using Isodyne Photoelasticity*, CANCAM 1981, Moncton. June 1981.
11. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, *Optimization of Photoelastic Stress Analysis Using Isodynes Method*, Eight All-Union Conference on Photoelasticity, Tallin, Sept. 1979, Vol. I.
12. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, T. KEPICH, *Photoelastic Isodynes in Static and Dynamic Stress Analysis*, 7-th Congress on Material Testing, Budapest, IX 1978.
13. W. KARMOWSKI, S. B. MAZURKIEWICZ, *Application of The Isodyne Method to Determine the Components of Stress in Plane Stress State*, 8-th Congress on Material Testing, Budapest, IX 1982
14. S. MAZURKIEWICZ, *Zastosowanie metody światła rozproszonego w elastoptyce do badania zagadnień płaskich*. Czas. Techn., M-2.4.1977.
15. S. MAZURKIEWICZ, *O metodzie światła rozproszonego w elastoptyce*, Czas. Techn. Z. 2 (201) M. 1977.
16. S. MAZURKIEWICZ, L. KUC, M. SIKOŃ, *Rozpraszanie światła przy skośnym prześwietleniu w zastosowaniu do analizy naprężeń w szkłe hartowanym*, Mech. Teoret. i Stos., 3. 17 (1979).
17. S. MAZURKIEWICZ, *Zastosowanie metody światła rozproszonego do badania naprężeń w dwóch belkach obciążonych silami skupionymi*, VII Symp. Bad. Dośw. w Mech. Ciała Stałego, IX. 1976, W-wa.
18. M. M. FROCHT, R. GUERNSEY, *Further Work On The General Three-Dimensional Models*, J. of Appl. Mech., Vol. 22, June 1955.
19. M. M. FROCHT, L. S. SRINATH, *A non-destructive Method for Three-Dimensional Photoelasticity*, Proc. of the Third U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech., 1958 ASME, N. York.
20. Y. E. CHENG, *A Dual Observation Method for Determining Photoelastic Parameters in Scattered Light*, Exp. Mech., Vol. 7 No 3. 1967.
21. A. ROBERT, E. GILLEMENT, *New Scattered Light Method in Three-Dimensional Photoelasticity*, British J. of Appl. Phys., 15, 1964.
22. W. KARMOWSKI, *Aproksymacja funkcji określonej w obszarze płaskim zbiorem wartości eksperymentalnych w dowolnie rozmieszczonych punktach*, Konf. Problemy losowe w mechanice konstrukcji, Gdańsk 1980.
23. L. LANDAU, E. LIFSZYC, *Elektrodynamika ośrodków ciągłych* PWN, Warszawa 1960.
24. J. T. PINDERA, F. W. HECKER, B. R. KRASNOWSKI, *Gradient Photoelasticity*, Mech. Res. Com., Vol. 9 (3) 1982.
25. J. T. PINDERA, *Analytical Foundations of the Isodyne Photoelasticity*, Mech. Res. Com., vol. 8 (6) 1981.

Резюме

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ С УЧЕТОМ ЯВЛЕНИЯ РАССЕЯНОГО СВЕТА

В работе представляется новый метод фотоупругости, использующий явление рассеянного света для измерения тензора деформации в трехмерном состоянии. Определяются две новые физические величины, описывающие состояние деформации (комплексная направляющая деформация), а также состояние поляризации в данной точке объекта (параметр фотоупругости).

Получены эффективные сочетания соединяющие обе эти величины, которые делают возможным получение значений составляющих поля деформаций нумерическим путем.

Измерениям подвергаются значения интенсивности света по трем перпендикулярным направлениям к ходу лучей. Путем измерения двух состояний входной поляризации получается информация о знаке роста значения поля деформации. Рассматривается плоский случай, вводится понятие дин с помощью которого можно привести эффективные вычислительные формулы для этого случая, а также получить сочетания соединяющие значения фотоупругости и функцию Эри.

Summary

NEW METHOD OF STRAIN FIELD IN THREE-DIMENSIONAL STATE

The new method of photoelasticity with the use of light scattering phenomenon to measure 3-D strain tensor is presented. Two new physical quantities describing at any point of the object as well the strain state of the body (i.e. complex directional strain) as the polarization state (i.e. polarization parameter) have been defined. Relations between these two quantities have been obtained making it possible to solve strain problem by numerical procedure. Light intensities in three directions perpendicular to the light beam have to be measured in proposed method. These measurements have to be made for two input beams (with different polarization states) to evaluate the sign of strain change. New quantity (the dyne) which is effective in calculation formulae for 2-D case has been introduced. The relationships between the dyne and Airy's function has been obtained.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 marca 1983 roku

STATE OF NEW YORK
IN SENATE
January 11, 1911.

REPORT OF THE COMMISSIONERS OF THE LAND OFFICE
IN RESPONSE TO A RESOLUTION PASSED BY THE SENATE
MAY 15, 1908, AND A RESOLUTION PASSED BY THE SENATE
MAY 15, 1909, CONCERNING THE LANDS BELONGING TO THE STATE

The following report was presented to the Senate on January 11, 1911, by the Commissioners of the Land Office, in response to a resolution passed by the Senate on May 15, 1908, and a resolution passed by the Senate on May 15, 1909, concerning the lands belonging to the State.

The report contains a detailed statement of the lands belonging to the State, and a statement of the lands which have been sold or otherwise disposed of since the last report was made.

The total area of lands belonging to the State is 1,000,000 acres, and the total value is \$100,000,000. The lands are divided into three classes: (1) lands which have been sold or otherwise disposed of since the last report was made; (2) lands which have not been sold or otherwise disposed of since the last report was made; and (3) lands which have been reserved for the use of the State.

The report also contains a statement of the lands which have been sold or otherwise disposed of since the last report was made, and a statement of the lands which have not been sold or otherwise disposed of since the last report was made.

The report is divided into two parts: the first part contains a statement of the lands belonging to the State, and the second part contains a statement of the lands which have been sold or otherwise disposed of since the last report was made.

COMMISSIONERS OF THE LAND OFFICE
ALBANY, N. Y., JANUARY 11, 1911.

REPORT OF THE COMMISSIONERS OF THE LAND OFFICE
IN RESPONSE TO A RESOLUTION PASSED BY THE SENATE
MAY 15, 1908, AND A RESOLUTION PASSED BY THE SENATE
MAY 15, 1909, CONCERNING THE LANDS BELONGING TO THE STATE

APPLICATION OF THE MOIRÉ METHOD TO THE ANALYSIS OF FAILURE MODES OF METAL STRIPS

CEZARY AJDUKIEWICZ

Politechnika Warszawska

PRZEMYSŁAW JASTRZĘBSKI

Politechnika Warszawska

1. Introductory remarks

Since the exact determination of the limit load of structural elements is often difficult and sometimes even impossible it is the upper or the lower bound assesment, based on the extremum principles of the theory of plasticity, that is commonly regarded as satisfactory. The lower bound to the external forces causing plastic flow is obtained by assuming such a statically admissible stress field in an element which gives the highest possible loadcarrying capacity. The upper bound is obtained by assuming such a kinematically admissible deformation mechanism which gives the lowest possible load — carrying capacity.

In the latter approach the estimation of the limit load of structural elements depends largely on assuming the proper kinematically admissible deformation mechanism. Thus, the experimental verification of theoretical solutions is of particular interest. The frequently used method of etching (see [3]) has a disadvantage of showing only fully developed slipline patterns. This fact together with a certain amount of freedom in image interpretation makes the determination of the proper failure mode rather un — reliable. A layer of ferro — ferric oxide deposited during the metallurgical processing on the surface of rolled elements such as sheet metal forms a natural brittle coating which sometimes can be used effectively. However, specimens made of such materials are not always available. The method of photoelastic coating is, in turn, mainly applied to the investigation of propagation of plastic zones (see [4]).

In this paper an application will be proposed of the moiré method [6] for the determination of failure modes in plane elements. The advantage of the method consists in a possibility of observation of sliplines development almost from the beginning of their formation.

2. Experimental investigations

A characteristic moiré fringe pattern (fig. 1) can be observed on the surface of mild steel (ST3S) strip under axial tension at the onset of plastic flow. The fringe shown in fig. 1 takes place in the region, in which the stress state has been reached causing plastic flow. A point on the load — displacement curve corresponding to this state is marked



Fig. 1.

with „a” in fig. 2. The obtained fringe can be treated as a trace of slipline in the local neck as shown in fig. 3. It is possible to find a statically admissible stress field corresponding to such a deformation mechanism, thus obtaining a simple and well known exact solution.

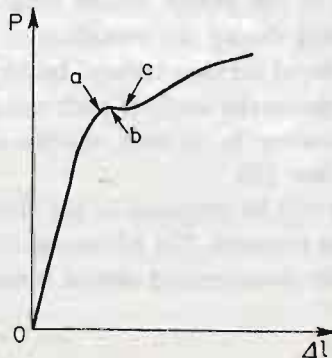


Fig. 2.

The fact that ST3S steel behaves in the investigated range approximately as an elastic — ideally plastic material can be utilized for investigating failure modes in notched metal strips in plane stress. An element well known both from theoretical ([1], [5]) and experimental [2] studies is a strip weakened by arrays of holes as shown in fig. 4. Such an element has been chosen as an example for demonstrating the presented method. An attempt is made to verify experimentally the failure mechanism shown in fig. 5 (denoted further as *A*) used for the upper bound assessment of the limit load of the strip, cf. among others, [1, 5]. Two series of tests were made, both on steel strips of thickness $g = 2$ mm weakened by holes of diameter $d = 10$ mm and spaced at $t = 35$ mm ($t/d = 3.5$). The distance s between the arrays of holes was $s = 15, 18, 21, 24, 27, 30$ mm and $s = 10.5, 14, 17.5, 21, 24.5$ mm for the first and the second series, respectively.

Cross line gratings of density 40 lines/mm were printed photographically on all the strips. Specimens were subjected to axial tension in the universal testing machine INSTRON/1251 with constant velocity of the longitudinal displacement 0.1 mm/min. The

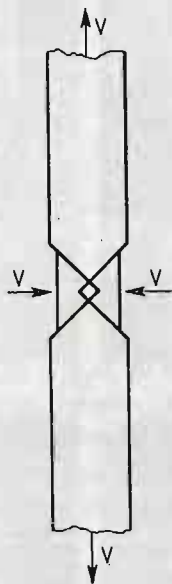


Fig. 3.

load — displacement curve was plotted automatically during the loading process. At the same time the photographs of the moiré patterns were taken, each photograph corresponding to a certain point on the load — displacement curve. The tests enabled us to make the following remarks:

A characteristic load — displacement curve, as shown in fig. 2, was obtained for all the strips tested. The process of formation of plastic zones for $s = 21$ mm ($s/t = 0.6$) is shown in fig. 6. Thin fringes appearing successively during the test will be treated, as previously (see fig. 1), as a manifestation of failure mechanism of a given element. Photographs shown in fig. 6 a, b, c correspond to the points a, b, c marked on the load — displacement curve shown in fig. 2. It is a typical process of reaching the limit state in steel

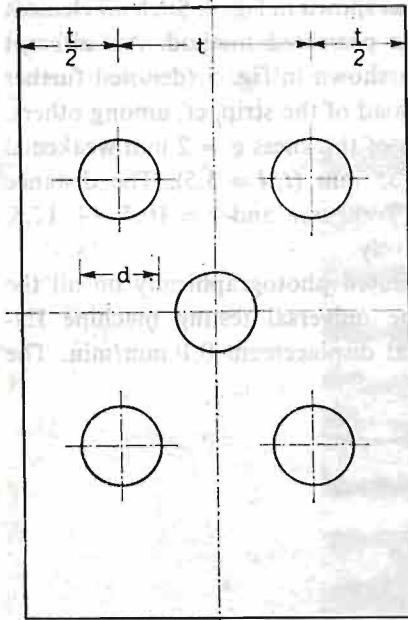
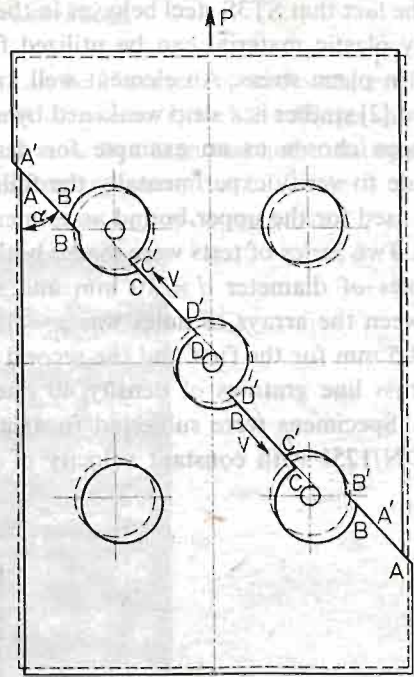


Fig. 4.



Mechanism A

Fig. 5.

strips revealed in all the test specimens up to $s = 21$ mm. Photographs for $s = 10.5$ mm ($s/t = 0.3$) and $s = 14$ mm ($s/t = 0.4$), selected as examples, are shown in fig. 7a, b, respectively. After the formation of a mechanism such as in fig. 6c mutual displacements of separate parts of the strip were observed as rapid changes in the moiré patterns. Some dissimilarities of the obtained mechanism as compared with the mechanism A shown in fig. 5, can be seen.

The generation of the failure mechanism for $s = 24.5$ mm ($s/t = 0.7$) is shown in fig. 8. Photographs in fig. 8a, b correspond to the points a, c on the load — displacement curve (fig. 2), respectively. At the same load level two mechanisms can be seen to be present. The first one consists of a local necking (see fig. 3) along the horizontal axes of lower and upper rows of holes, while the second is similar to that previously described (see fig. 6a).

For $s = 27$ mm ($s/t = 0.77$) the formation of each mechanism can be clearly distinguished. During the loading, the mechanism similar to that of fig. 8a appears first. The other one appears for considerably increased load. For $s = 30$ mm ($s/t = 0.86$) only the mechanism shown in fig. 8a is present. Thus, for $s \geq 27$ mm the mechanism shown in fig. 8a and fig. 3 is valid. The distance $s = 24.5$ mm ($s/t = 0.7$) is thus the so — called optimum value s_{opt} [5]. When $s = s_{opt}$ the limit state can be reached following any of the described patterns.

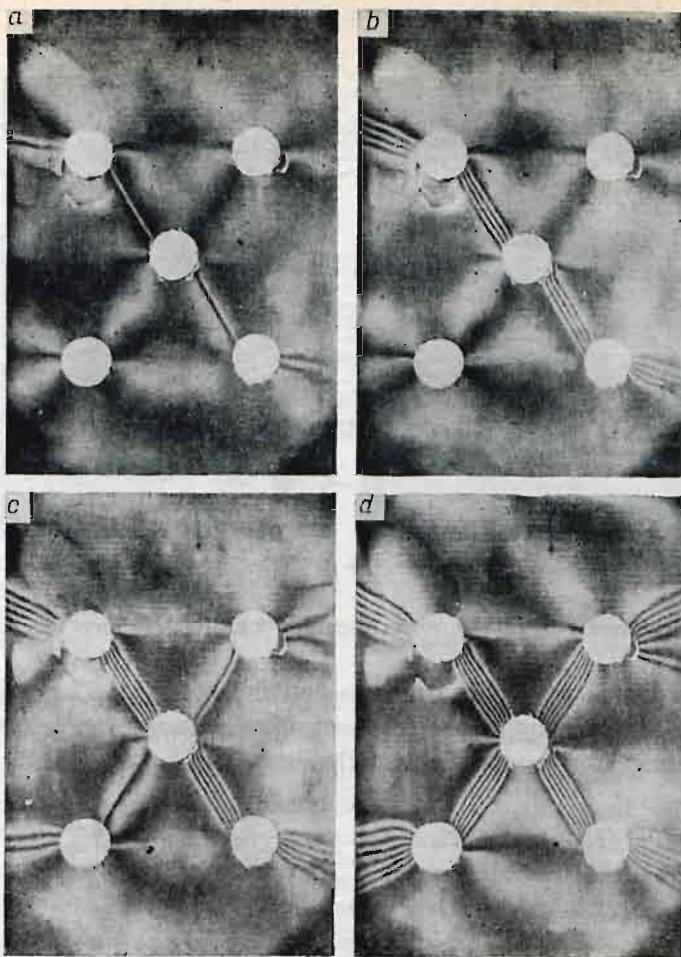


Fig. 6

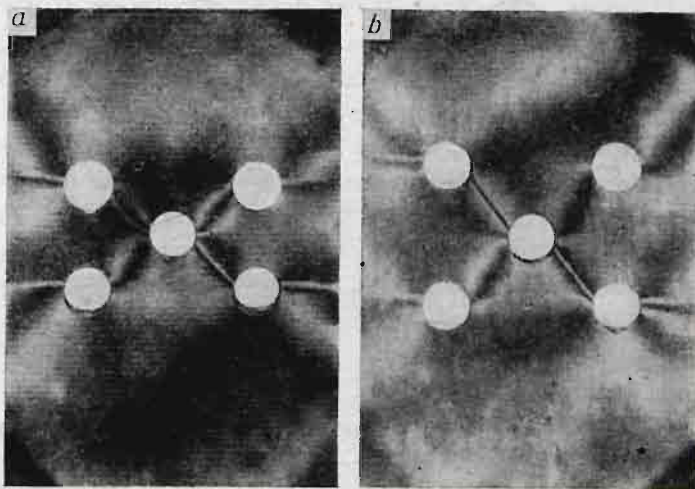


Fig. 7.

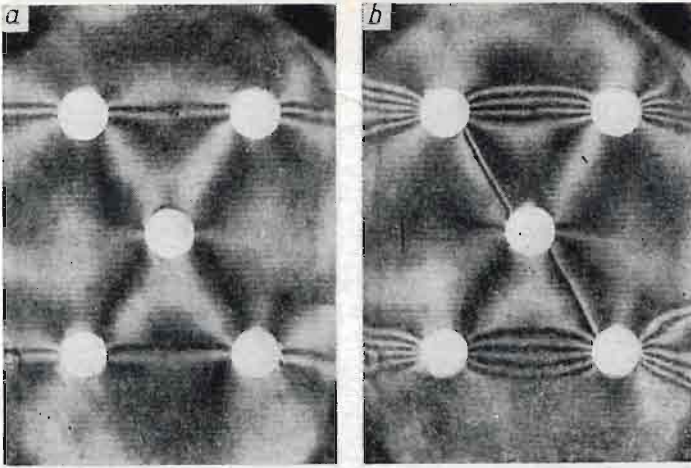


Fig. 8.

3. Theoretical analysis of the experimentally obtained failure mechanism

The failure mechanisms obtained in tests and shown in fig. 6 can be interpreted in two ways as it is shown in fig. 9a, b. The mechanism shown in fig. 9a can be considered as the initial stage of formation of the mechanism shown in fig. 9b. In both cases the

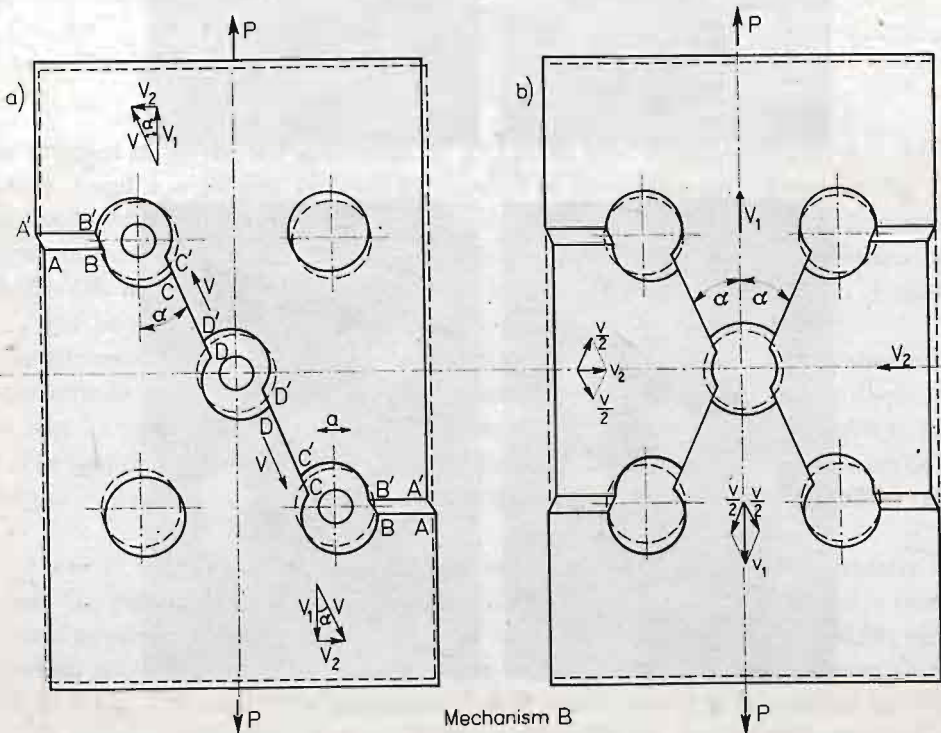


Fig. 9. a, b

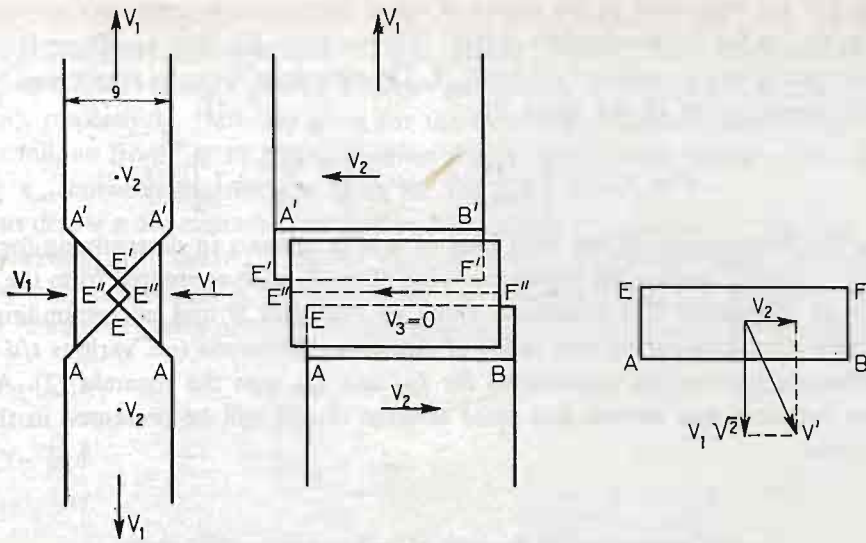


Fig. 9. c, d, e

virtual work principle furnishes the same upper bound to the limit load. Thus, only the mechanism shown in fig. 9a (denoted further as *B*) will be analysed. The failure, interpreted as the development of large plastic strains consists in mutual displacement of both parts of the strip parallel to the line inclined at an angle to the vertical axis. Such a displacement is generated along *CD* — lines. Along these lines the tangential stress has to be equal to the yield stress at pure shear, e.g. to $k = \sigma_{pl}/2$ according to the Coulomb — Tresca yield criterion. Along the lines *AB* a different mode, consisting in a combined local necking (see fig. 9c) and mutual horizontal displacement (see fig. 9d) takes place. Lines *AA'* and *BB'* are parallel to the lines *CD*, thus ensuring the continuity of deformation under combined action of both described mechanisms. Along the lines *AB* the yield stress at pure shear $k = \sigma_{pl}/2$ is also present, but its direction depends on the resultant velocity of the mutual displacements of the parts of the strip.

With the distance *s* and the angle α known, upper bound to the limit load is obtained by equating the increment of external work done to the increment of the work dissipated by internal forces in the shearing planes. Assuming that both parts of the strip move along the lines *CD* with the relative velocity $2v$, the velocity of their mutual displacement in the *AEFB* plane (fig. 9d, e) will be $v' = v\sqrt{2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$. Thus the following virtual work equation is obtained:

$$P \cdot 2v \cos \alpha = 2 \left[\frac{1}{2} \sigma_{pl} \cdot g \cdot l_{CD} \cdot 2v + \frac{1}{2} \sigma_{pl} \cdot 4 \cdot g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l_{AB} \cdot v \sqrt{2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \right] \quad (1)$$

where l_{AB} , l_{CD} denote the lengths of the lines *AB* and *CD*, respectively and *g* is the thickness of the element.

Given a certain configuration of holes, the angle α can easily be determined. Then, the minimum value of the force *P* can be computed from equation (1) by assuming such *CD* lines configuration which their minimum length. The latter condition is fulfilled when

the lines CD are tangential to the circles of equal diameter a located concentrically with the holes, e.g. as for the mechanism A (fig. 5) taken from [5]. This condition is also confirmed by tests as can be seen in fig 6 or fig. 7. The equation (1) can be rearranged to enable the direct computation of the force P :

$$P = \sigma_{p1} \cdot g \cdot \left[\frac{l_{CD}}{\cos \alpha} + l_{AB} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{tg^2 \alpha}{2} + 1} \right]. \quad (2)$$

Thus the computation of the limit load of a strip consists in determining for a given set of d , t , s such an angle α for which the value of the force P computed from the formula (2) is at its minimum. The minimum value of the force P and corresponding angles α have been computed for various ratios of elements dimensions (i.e. various t/d and s/t) by substituting appropriate expressions for l_{AB} and l_{CD} into the formula (2). A simple computer program was written and some selected results will be presented in the following section.

4. Comparison of theoretical and experimental results

One of the problems connected with the estimation of the limit load of strips weakened by several rows of holes is the determination of the least distance $s = s_{opt}$ (see fig. 4) between the rows for which the load — carrying capacity of a strip is equal to the load — carrying capacity of a strip weakened by only one row of holes. The limit load of such a strip is given by the formula:

$$P = 2 \cdot \sigma_{p1} \cdot g \cdot (t-d). \quad (3)$$

Theoretical solution to this problem obtained on the basis of both statically admissible stress field (lower bound) and kinematically admissible collapse mechanism A (fig. 5) (upper bound) was presented in [5]. The $s_{opt}(t)$ vs. t/d diagrams are shown in fig. 10.)

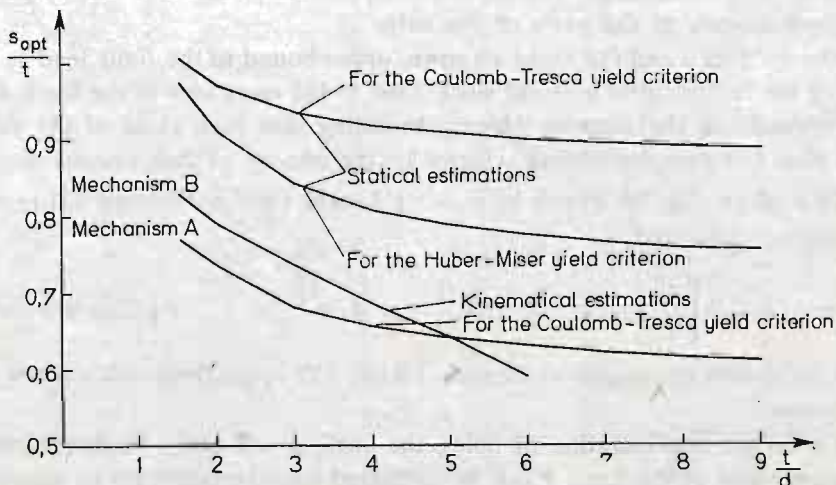


Fig. 10.

Statical (upper) estimations of the ratio s_{opt}/t , taken from [5], are given for the Coulomb — Tresca yield criterion and for the Huber — Mises one. Kinematical (lower) estimations of this ratio are given for failure mechanism *A* (fig. 5) and *B* (fig. 9) (curves *A* and *B*), respectively. Both are given for the Coulomb — Tresca yield criterion.

As it follows from fig. 10, the mechanism *B* gives better lower bound on the optimum distance s_{opt} between the rows of holes for $t/d < 5$.

Let us define a dimensionless factor $f = P/P_m$ where P is the load — carrying capacity of the weakened strip (as in fig. 4) and P_m is the load — carrying capacity of a strip weakened by only one row of holes. The factor f is called (see e.g. [1]) the load — carrying capacity increment factor although in our tests it was less than unity for the whole range of load.

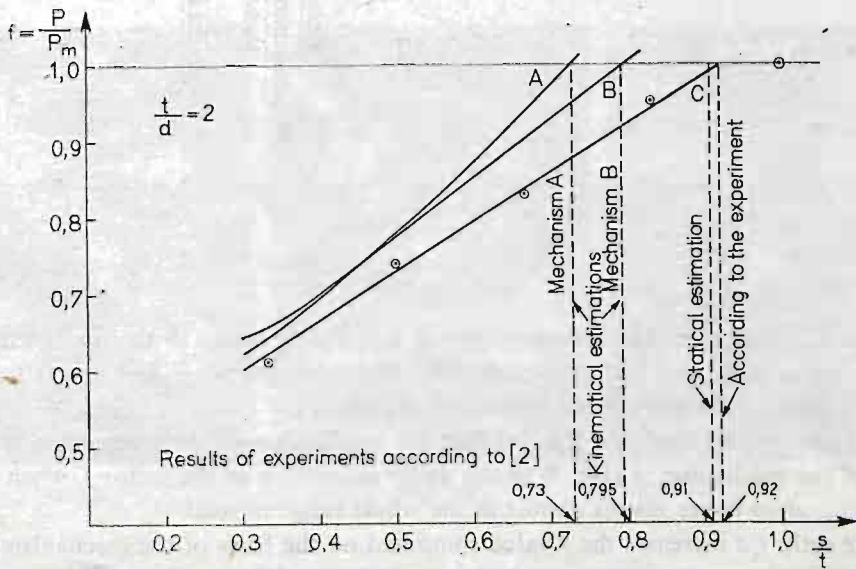


Fig. 11.

Theoretically obtained f vs. s/t diagrams plotted for $t/d = 2$ are presented in fig. 11. The ratio $t/d = 2$ was chosen so as to make the comparison of our results with those obtained by Dietrich [2]. The curves *A* and *B* are obtained for mechanisms *A* and *B*, respectively, the curve *C* was obtained in [2] by statical investigation of strips made of PA2 aluminium alloy.

Here we can see, as in fig. 10, that the application of experimentally obtained mechanism *B* considerably narrows the gap between kinematical and statical bounds. At the same time the lower estimation of the optimum value s_{opt} (for $f = 1$ we have $s/t = 0.795$ instead of 0.73) is closer to the obtained experimentally ratio $s/t = 0.92$.

The experiments also confirm the correctness of using the mechanism *B* for the estimation of s_{opt} . For the strips tested, e.g. for $t/d = 3.5$ (see fig. 12), the lower estimation of the optimum distance between the arrays of holes gives for theoretically assumed

mechanism *A* $s_{opt} = 23.4$ mm ($s/t = 0.67$) and for experimentally obtained mechanism *B* (fig. 9) $s_{opt} = 24.9$ mm ($s/t = 0.71$), both for the Coulomb — Tresca yield criterion. The upper estimation for the Huber — Mises yield criterion is $s_{opt} = 28.8$ mm ($s/t = 0.82$).

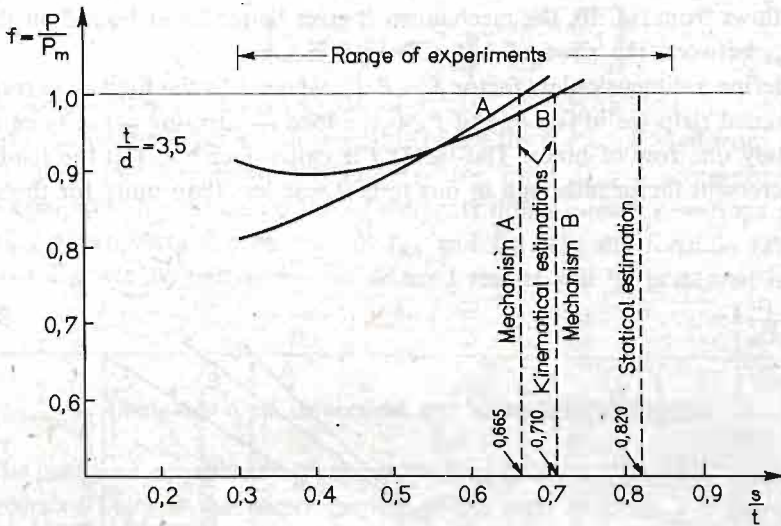


Fig. 12.

The value s_{opt} computed for the mechanism *B* is not only closer to the upper estimation but also agrees very well with experimentally obtained distance $s = 24.5$ mm ($s/t = 0.71$), what has already been pointed out at the end of section 2.

It is worth noting (see also fig. 11) that the application of the mechanism *B* (fig. 9) instead of the mechanism *A* (fig. 5) to the upper estimation of the factor f , when $t/d \leq 2$ for $s < s_{opt}$, gives better results almost in the whole range of load.

As the ratio t/d increases the f value computed on the basis of the mechanism *B* tend to be relatively larger than those computed on the basis of the mechanism *A*. An example of this tendency is shown in fig. 12 for $t/d = 3.5$, i.e. the ratio for which the tests were performed. In this case only in the small interval ($s/t > \sim 0.57$) curve *B* lies below curve *A*. Nevertheless it has to be stressed that for the whole range of s/t ratio, namely $0.3 \leq s/t \leq 0.7$, the formation of the mechanism *B* has been observed. For $t/d > 5$ (see also fig. 10) the application of the mechanism *B* (fig. 9) gives greater values of f than the application of the mechanism *A* (fig. 5) in the whole range of s/t ratio. The statical evaluation of the factor f resulting from our experiments is absent from the diagram (fig. 12) due to insufficiently numerous set of specimens tested. The ST3S mild steel used in our investigations is relatively nonhomogeneous material and gives considerable scatter of results.

5. Final remarks

The main purpose of this work is a presentation of a simple method for evaluation of the failure modes in notched plane metal elements. The application of the moiré method

in several tests has given a clear answer: for the presented examples (fig. 6 - 8) it is the experimentally obtained mechanism *B* (fig. 9) that is appropriate. Its application results in narrowing of the gap between the statical and the kinematical solutions.

It cannot be, of course, ruled out that for ratios of element dimensions (different s/t and t/d ratios) a different failure mode, possibly the mechanism *A* (fig. 5), would have been obtained. The moiré method remains, however, a suitable tool in an adequately equipped laboratory to arrive at reliable results by way of simple tests.

Finally, it is worth pointing out that the moiré method is also suitable for the examination of plastic zones propagation in plane elements of arbitrary shapes. Initial stages of these zones have already been shown in fig. 6a, b, c, d and in fig. 8b. Their further development is presented in fig. 13a, b, c.

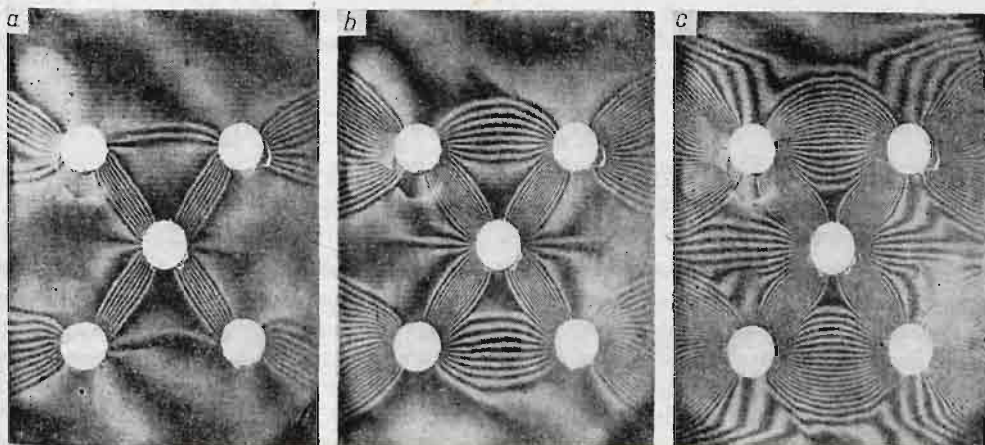


Fig. 13

Bibliography

1. L. DIETRICH, J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Nośność graniczna elementów konstrukcji*, PWN, Warszawa 1970.
2. L. DIETRICH, *Projektowanie plastyczne a wytrzymałość zmęczeniowa pasma z otworami*, Rozpr. Inż., T. 25, z. 4, Warszawa 1977, s. 659 - 670.
3. P. JASTRZĘBSKI, *Limit Load of Steel Strips with Circular Holes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., Vol XVIII, N 6, 1970.
4. J. KAPKOWSKI, *Propagacja obszarów plastycznych w warunkach płaskiego stanu naprężeń*, Prace Naukowe P.W. — Mechanika z. 50, Warszawa 1976.
5. W. SZCZEPIŃSKI, *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, Warszawa 1968.
6. P. JASTRZĘBSKI, J. KAPKOWSKI, J. WĄSOWSKI, S. WICHNIEWICZ, K. PATORSKI, *Zastosowania metody mory do badania elementów konstrukcji*, Skrypt wykładów, Komitet Mechaniki PAN, Warszawa-Jabłonna 1981.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУАРА ДЛЯ АНАЛИЗА КИНЕМАТИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ
РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОЛОС

В статье представляется способ использования метода муара для однозначного определения кинематического механизма пластического разрушения элементов с нарезками, которые находятся в плоском напряжённом состоянии. В работе показаны примеры экспериментальных исследований проведенных на стальных полосах с пятью круговыми отверстиями (рис. 4) расставленными в трёх рядах при переменном их размещении (10 вариантов). Указан факт, что полученный экспериментально механизм (рис. 9) отличается от прежде примененного для конкретных полос (рис. 5). Этот механизм описывается теоретически. Констатируется, что его применение позволяет на лучшую оценку верхней границы (кинематической) предельной нагрузки, чем применяемый до сих пор для практически важных пропорций размеров. Достоинством этого метода является возможность наблюдения кинематического механизма пластического разрушения (рис. 6 - 8) почти от начала его реализации и явлений связанных с его существованием. Кроме того существует возможность испытания развития области пластических деформаций соразмерно с приростом нагрузки.

Streszczenie

ZASTOSOWANIE METODY MORY DO ANALIZY KINEMATYCZNYCH MECHANIZMÓW
ZNISZCZENIA PASM METALOWYCH

W artykule przedstawiono sposób wykorzystania metody mory do jednoznacznego określania kinematycznych mechanizmów zniszczenia elementów z karami znajdujących się w płaskim stanie naprężenia. Podano przykłady badań doświadczalnych przeprowadzonych na pasmach stalowych z pięcioma otworami kolistymi (rys. 4) rozmieszczonymi w trzech rzędach, przy zmiennym ich rozstawieniu (10 wariantów). Wskazano na to, że otrzymany doświadczalnie mechanizm (rys. 9) różni się od stosowanego poprzednio [1, 5] dla takich pasm (rys. 5), a opisany teoretycznie daje dla praktycznie ważnych proporcji wymiarów lepsze oszacowanie górnej oceny (kinematycznej) nośności granicznej niż dotychczas stosowany. Zaletą tej metody jest możliwość obserwacji kinematycznego mechanizmu zniszczenia (rys. 6 - 8) niemal od początku jego realizacji oraz zjawisk związanych z jego powstaniem. Istnieje też możliwość badania rozwoju obszarów plastycznych w miarę wzrostu obciążenia (rys. 6, 8, 13).

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 marca 1983 roku

Praca wykonana w ramach Problemu Węzłowego 05.12.

PEWNE ASPEKTY ELASTOOPTYCZNYCH BADAŃ ODKSZTAŁCEN PLASTYCZNYCH W KONSTRUKCJACH STAŁOWYCH

JERZY LIETZ

IPPT PAN

BOGDAN MICHAŁSKI

IPPT PAN

W niniejszej pracy autorzy pragną zwrócić uwagę na pewne zjawiska występujące w procesie powstawania odkształceń plastycznych w elementach konstrukcji stalowych, z którymi spotkali się prowadząc badania na spawanych belkach dwuteowych i węzłach kratownic z wykorzystaniem metody warstwy elastooptycznej. Obserwując pole izochrom na powierzchni blach stalowych z nałożoną warstwą optycznie czułą stwierdzono, że proces rozwoju stref odkształceń plastycznych nie przebiega w sposób ciągły, a przejawia się nagłym występowaniem wąskich wydłużonych stref znacznych odkształceń trwałych, widocznych bardzo dobrze na obrazie izochrom. Strefy te z reguły układają się w postaci linii równoległych krzyżujących się pod kątem prostym z drugą rodziną analogicznych stref. Powstaje w ten sposób w pewnych obszarach ortogonalna siatka linii rozwiniętych odkształceń trwałych.

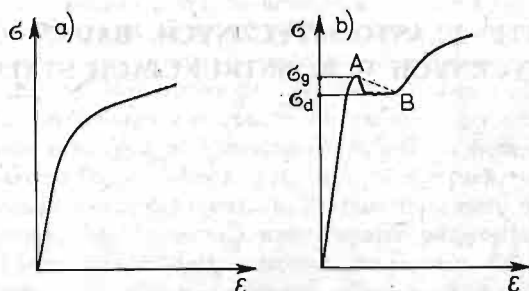
W dostępnych autorom publikacjach jedynie ZANDMAN [1] zamieszcza bez komentarza przykładowe zdjęcie obrazu izochrom na konstrukcji stalowej otrzymane metodą „Photostress”, na którym widać podobne zjawisko.

Warto tutaj podkreślić, że metoda elastooptyczna nadaje się szczególnie dobrze do śledzenia tego rodzaju procesów uplastycznienia, ponieważ dostarcza ona informacji o polu odkształceń na całej badanej powierzchni. Metody pomiarów punktowych (np. tensometryczne) mogą w tym wypadku dawać wyniki przypadkowe wykazujące duży rozrzut.

Elastooptyczne badania odkształceń plastycznych elementów metalowych były w ciągu ostatnich lat tematem wielu prac [2], [3]. Obszerną bibliografię tych badań podaje KAPKOWSKI [4]. Tematyka ta była również omawiana w wydanych ostatnio podstawowych monografiach metod elastooptycznych [5] i [6].

Z przeglądu tych publikacji wynika, że badania odkształceń plastycznych wykonywane były dotychczas przeważnie na takich metalach, jak aluminium, miedź, ołów lub ich stopy. Wszystkie one charakteryzują się monotonicznym wzrostem krzywej naprężenie-odkształcenie (rys. 1a), w wyniku czego narastanie odkształceń i propagacja sfer uplastycznienia

przebiegają w nich płynnie. Takie wyniki eksperymentalne można łatwo konfrontować z obliczeniami teorii plastyczności i plastycznego płynięcia, co jest znacznie trudniejsze przy badaniach na elementach stalowych, w których proces deformacji jest bardziej złożony, jak to przedstawiono na wstępie.



Rys. 1. Wykresy $\sigma - \epsilon$ odkształcania metali a) charakterystyka monotoniczna b) charakterystyka niestateczna

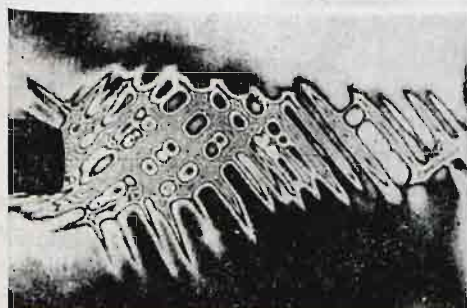
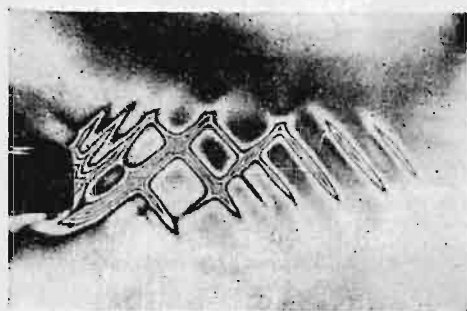
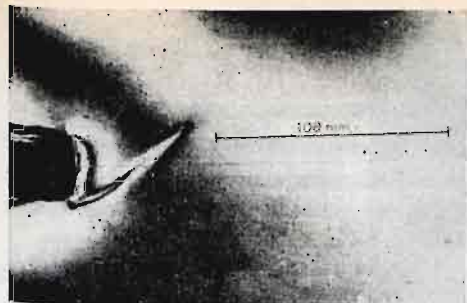
Wyjaśnienie przyczyn opisanego zjawiska upatrywać można w fakcie istnienia górnej σ_g i dolnej σ_d granicy plastyczności na wykresie krzywych odkształcenia stali (rys. 2b). W chwili, gdy stan naprężenia w ośrodku osiągnie wyężenie odpowiadające σ_g , materiał przechodzi na opadający (niestateczny) odcinek charakterystyki, co spowodować musi lokalny znaczny wzrost odkształceń przy malejących naprężeniach. Jeśli w konstrukcji ponadto skumulowana jest znaczna ilość energii sprężystej, lokalny wzrost odkształceń może mieć charakter nagłego przeskoku od punktu A do B na wykresie (rys. 1), gdyż energia ta oddawana jest w miejscu powstania lokalnej niestateczności.

Zjawiska takie autorzy obserwowali np na środniku dwuteowej blachownicy ze stali 18G2A o wysokości 900 mm poddanej czystemu zginaniu.

Blachownica ta składa się z dwóch części połączonych doczołowo na śruby sprężające. Na rys. 2 widoczne są obrazy izochrom w kolejnych stadiach wzrastających odkształceń w rozciągającym pasie blachownicy w pobliżu miejsca połączenia doczołowego. Rys. 3 przedstawia wysoko zaawansowany stan odkształcenia tej samej strefy blachownicy na granicy zniszczenia. Wystąpiły tu nawet widoczne na zdjęciu lokalne pęknięcia warstwy elastoptycznej. Na rys. 4 uwidoczniono stan odkształcenia blachy węzła kratownicy ze stali St3S w fazie jego zniszczenia z zaznaczeniem kierunku działającej na nią siły.

Analiza zamieszczonych zdjęć wykazuje pewne wspólne charakterystyczne cechy pola odkształceń. Wzajemnie prostopadłe strefy dużych odkształceń zorientowane są pod kątem 45° do kierunku przyłożonych obciążeń. Kierunki odkształceń głównych w obrębie stref tworzą kąt 45° z liniami przebiegu stref odkształceń. Stwierdzono to, badając pole izoklin w obrębie strefy.

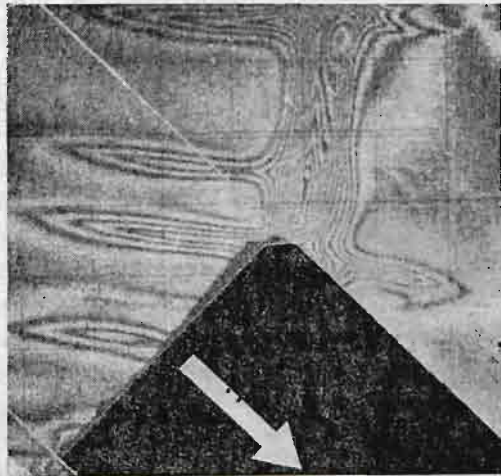
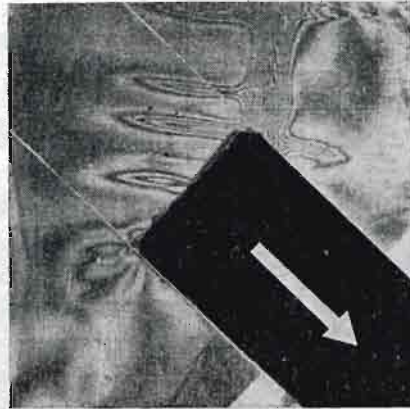
Pozwala to wnioskować, że wspomniane strefy odkształceń układają się w kierunkach maksymalnych naprężeń stycznych. Na podstawie znajomości granicy plastyczności użytych stali i własności warstwy optycznej określono w przybliżeniu rząd izochromy odpowiadający granicy strefy uplastycznienia równy 2,7. Na jednym ze zdjęć (rys. 2) zaznaczono izochromę rzędu 2, okalającą strefy uplastycznienia.



Rys. 2. Kolejne stadia rozwoju odkształceń plastycznych w rozciągany pasie blachownicy



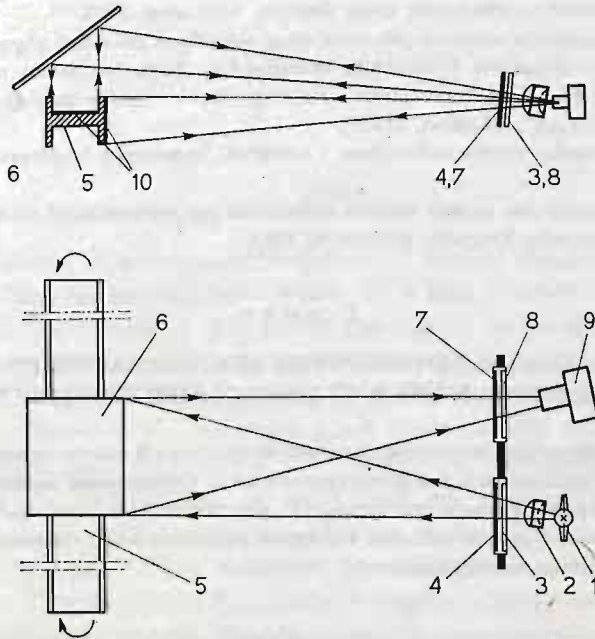
Rys. 3. Wysokozaawansowany stan odkształceń plastycznych w blachownicy z rys. 2.



Rys. 4. Stan odkształceń plastycznych w blasze węzłowej a) całość b) powiększony fragment (bok kwadratu siatki — 10 mm)

Z analizy przedstawionych obrazów izochrom uzyskać można pewne informacje ilościowe o polu odkształceń plastycznych. Metodę obliczania różnicy przemieszczeń (poślizgów) na granicy stref uplastycznienia na podstawie tych obrazów izochrom przedstawił W. ŁOZIŃSKI [7].

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na pewne szczegóły związane z techniką eksperymentu. Przy badaniach blachownic stosowano zwykły polaryskop do badań w świetle odbitym. W układzie optycznym użyto zwierciadła (6- rys. 5) pozwalającego na wykony-



Rys. 5. Schemat optyczny polaryskopu ze zwierciadłem

1 — rtęciowe źródło światła, 2 — kondensator, 3 — polaryzator, 4 — płytka ćwierćfalowa, 5 — belka, 6 — zwierciadło, 7 — płytka ćwierćfalowa, 8 — analizator, 9 — kamera fotograficzna, 10 — powierzchnia warstwa elastoopieczna

wanie zdjęć obu prostopadłych powierzchni (średnika i pasa) z jednego stanowiska. Natomiast przy badaniach węzłów w miejsce tradycyjnego polaryskopu zastosowano polaroid z płytką ćwierćfalową przykładany bezpośrednio do warstwy elastoopiecznej. Taki układ płytek pełni jednocześnie rolę polaryzatora i analizatora, umożliwiając bezpośrednią obserwację przy dowolnym źródle światła. Sposób ten ułatwia prowadzenie obserwacji i badań w trudniej dostępnych miejscach konstrukcji. Wynikające stąd ograniczenie badania tylko do izochrom całkowitych jest mało istotne ze względu na duże wartości badanych odkształceń. Przy tym sposobie badania wprowadzenie lepkiej cieczy imersyjnej między polaryzator a warstwę zmniejsza straty świetlne i wyraźnie poprawia jakość obrazu.

Autorzy uważają, że przedstawione tu spostrzeżenia i spektakularne wyniki badań mają niewątpliwie znaczenie poznawcze. Wyjaśniać one mogą różne anomalie, z jakimi spotykają się inżynierowie przy tensometrycznych badaniach konstrukcji stalowych.

Literatura cytowana w tekście

1. F. ZANDMAN, S. REDNER, J. W. DALLY, *Photoelastic Coatings*, SESA Monograph No. 3, published jointly by the Iowa State University Press, Ames, Iowa and Society for Experimental Stress Analysis, Westport, Connecticut, 1977.
2. J. KAPKOWSKI, J. STUPNICKI, *Badania sprężysto-plastycznych płaskich stanów naprężeń metodą pokryw optycznie czynnych*, Arch. Bud. Masz., 1, 18 (1971), 139 - 149.
3. J. KAPKOWSKI, J. STUPNICKI, M. ŚLIWOWSKI, *Rozwiązanie płaskich zagadnień sprężysto-plastycznych w oparciu o badania metodą optycznie czulej warstwy powierzchniowej*, Piąte Sympozjum z Zakresu Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa, 1972.
4. J. KAPKOWSKI, *Propagacja obszarów plastycznych w warunkach płaskiego stanu naprężenia*, rozprawa habilitacyjna, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Seria Mechanica nr. 50 (1978).
5. A. J. ALEKSANROV, M. CH. ACHMETZJANOV, *Polarizacionno-optičeskie metody mechaniki deformirujemogo tela*, Izd. „Nauka”, Moskwa, (1973).
6. Z. ORŁOŚ, *Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1977).
7. W. ŁOZIŃSKI, *Elastoptyczna metoda badania nieciągłości pól przemieszczeń*, praca doktorska, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Warszawa, 1982.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ФОТОУПРУГИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Представлены результаты экспериментальных исследований пластических деформаций в элементах стальных конструкций методом фотоупругого слоя. Обнаружены характеристические черты поля деформации проявляющего значительную неоднородность для скачко-образной пропагации пластических зон. Сделана попытка выяснить причины этого явления. Указаны возможности упрощения техники исследований.

Summary

CERTAIN ASPECTS OF PHOTOELASTIC INVESTIGATIONS OF PLASTIC STRAIN IN STEEL STRUCTURES

The authors have presented some results of the investigations of plastic deformations in component parts of steel structures obtained by means of photoelastic layer method. Attention was paid to characteristic features of the strain field exhibiting considerable non-uniformity with a stepwise yield zone propagation. Attempt was made to explain the sources of the phenomenon. Possible simplifications of experimental techniques have been indicated.

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 marca 1983 roku

ANALIZA OBROTU POWIERZCHNI PŁYNIĘCIA Z UWZGLĘDNIENIEM PAMIĘCI MATERIAŁU

HENRYK SKROCKI

*Uniwersytet Warszawski
Filia w Białymstoku*

1. Wstęp

Materiały plastyczne, wykazujące wzmocnienie, w wyniku odkształcenia plastycznego zmieniają swoje własności mechaniczne. Wiąże się z tym również zmiana kształtu powierzchni plastyczności. Charakter tych zmian jest zależny od kierunku obciążeń wstępnych. Istnieje szereg teorii opisujących zachowanie się powierzchni plastyczności pod wpływem obciążeń wstępnych. Do najczęściej stosowanych, a jednocześnie najprostszych, należą dwie z nich. Pierwsza to, wysunięta przez Prandtla [17], hipoteza izotropowego wzmocnienia. Zakłada ona równomierne rozszerzanie się powierzchni plastyczności we wszystkich kierunkach. Potwierdzenie tej teorii uzyskano w pracy [12]. Hipoteza druga, uwzględniająca efekt Bauschingera, zaproponowana przez E. MELANA [14], A. ISZLIŃSKIEGO [18] i W. PRAGERA [15], a następnie rozwinięta i zmodyfikowana w pracach R. T. SHIELDA i H. ZIEGLERA [16, 13], zakłada przesuwanie się powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń bez obrotu. Wymiary i kształt powierzchni pozostają bez zmian.

Obie te teorie, jak wykazano w pracy [9], mogą być efektywne przy opisie pamięci materiału.

Kompleksowe badania efektu pamięci rozpoczął J. Miastkowski. Polegają one na porównywaniu własności materiału odkształconego plastycznie wzdłuż drogi składającej się z dwóch etapów z własnościami materiału obciążanego tylko drugim etapem. Jeżeli drugi etap obciążenia jest stosunkowo mały, w porównaniu z etapem pierwszym, wtedy zauważa się wyraźny wpływ tego pierwszego na własności materiału. Przy wydłużaniu drugiego etapu wpływ ten maleje, czyli materiał „zapomina” o skutkach w nim wywołanych odkształceniami na drodze pierwszego etapu obciążenia.

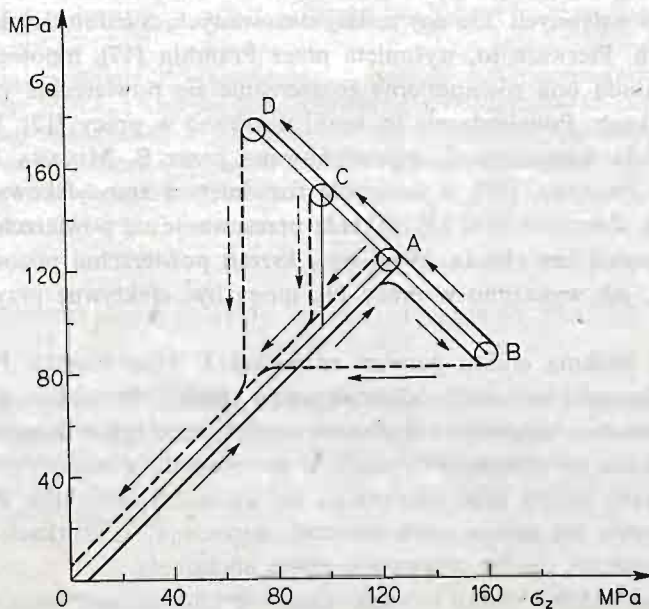
Dotychczasowe badania efektu pamięci materiału prowadzono zarówno na próbkach rurkowych [4], jak i płaskich [5]. Na efekt „pamięci” materiału zwrócono również uwagę w pracach [1, 2, 3].

W prezentowanej pracy przeprowadzono teoretyczną i doświadczalną analizę pamięci materiału obciążanego wstępnie wzdłuż dróg, które wywoływały obrót powierzchni plastyczności. Obrót powierzchni plastyczności uzyskano już wcześniej w pracy [7]. Podobny efekt można również zauważyć w pracach [8, 10].

2. Program badań

Przed przystąpieniem do badań efektu pamięci materiału wszystkie próbki podzielono na dwie grupy. Próbki odkształcano plastycznie wzdłuż złożonych, innych dla każdej z tych grup, dróg obciążenia. Różnica w realizacji dróg obciążenia polegała na wprowadzeniu dodatkowego, pierwszego etapu na początku drogi w grupie pierwszej. Etap ten wywierał określony wpływ na własności materiału. Dalszy ciąg drogi obciążenia, określony jako etap drugi, był taki sam jak w grupie drugiej. Przy realizacji takiego programu obciążeń z jednego, izotropowego w stanie wyjściowym, materiału otrzymywano „dwa nowe materiały” różne pod względem własności wytrzymałościowych. Wydłużając drugi etap obciążenia starano się uzyskać odpowiedź na pytanie — czy przy takim działaniu występuje zacieranie się różnic we własnościach „obu materiałów”, a tym samym „zapomnienie” wpływu pierwszego etapu na aktualne własności materiału.

Program badań, przeprowadzonych w tej pracy, składa się z ośmiu serii po siedem próbek w każdej. Próbki serii I wykorzystano do określenia powierzchni plastyczności materiału w stanie wyjściowym po wyżarzeniu. Dla każdej z pozostałych siedmiu serii, przed określeniem powierzchni płynięcia, próbki były odkształcane plastycznie złożonymi obciążeniami. Schematy dróg wstępnego obciążenia przedstawiono na rys. 1. Linia ciągłą



Rys. 1

zaznaczono drogi obciążeń wstępnych, natomiast linią przerywaną drogi odciążenia. Dla wszystkich serii obciążenie w pierwszej fazie przebiegało wzdłuż odcinka OA drogi leżącej na dłuższej osi teoretycznej elipsy Hubera-Misesa. Odcinek ten nie miał wpływu na obrót powierzchni plastyczności. Przebieg dalszego ciągu drogi odciążenia był uzależniony od tego, do której z dwóch grup należała dana seria próbek.

W grupie pierwszej, określonej jako materiał „pierwszy”, dalsze obciążenie składało się z dwóch etapów. Pierwszy etap wywoływał obrót powierzchni plastyczności w kierunku osi σ_z i przebiegał odcinek AB. Etap drugi rozpoczynał się w punkcie B, a kończył się, odpowiednio dla poszczególnych serii, w punktach: A (seria III), C (seria V) i D (seria VII).

W drugiej grupie próbek, określonej jako materiał „drugi”, schemat dróg obciążenia nie zawierał odcinka AB (pierwszego etapu), a obciążenie przebiegało wzdłuż części drogi drugiego etapu (począwszy od punktu A) wywołując obrót powierzchni w kierunku osi σ_θ . Obciążenie to kończyło się w tych samych, co w grupie pierwszej, punktach: A (seria IV), C (seria VI) i D (seria VIII). Z punktów tych (A, C, D) następowało odciążenie po linii łamanej do punktu 0 — jednakowo dla obu grup próbek.

3. Analiza teoretyczna

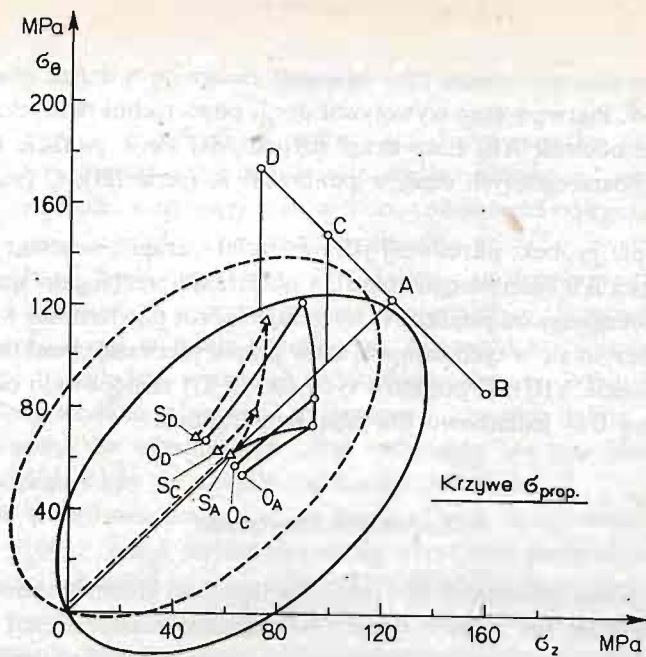
Analizę teoretyczną wykonano w oparciu o hipotezę kinematycznego wzmocnienia. Hipoteza ta wprawdzie nie opisuje obrotu powierzchni plastyczności, niemniej jednak daje korzystne rezultaty przy zastosowaniu jej do opisu pamięci materiału.

Obrót powierzchni plastyczności można opisać w oparciu o regułę anizotropowego wzmocnienia podaną przez A. BAŁTOWA i A. SAWCZUKA [11]. W tej teorii do opisu powierzchni plastyczności wykorzystuje się parametry aktualnego stanu naprężenia, natomiast nie uwzględnia się historii obciążenia. Dlatego też w takiej postaci reguła ta nie może być wykorzystana do opisu pamięci materiału.

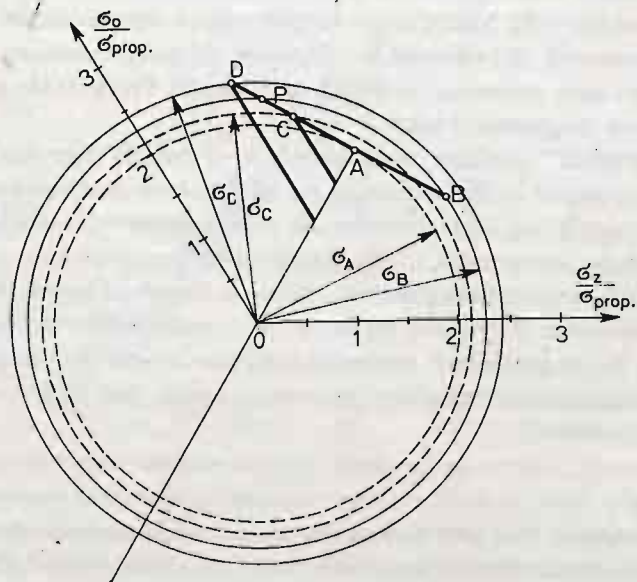
Pewne modyfikacje do omówionej reguły, uwzględniające historię obciążenia, wprowadził W. Ł. DANIŁOW [19]. Modyfikacje te polegają na wprowadzeniu pewnych współczynników wyznaczanych doświadczalnie. Wymaga to przeprowadzenia serii prób rozciągania i ściskania oraz skręcania w dwóch kierunkach. Próby takie nie były uwzględnione w założonym programie badań.

Efekt „zapominania” skutków wywołanych w materiale pierwszym etapem drogi obciążenia można również opisać opierając się na hipotezie izotropowego wzmocnienia. Jednak uzyskane wyniki są zbyt rozbieżne ze wskazaniami doświadczeń. Analizę tego zagadnienia pokazano na rysunku 3. Dla uproszczenia przedstawiono ją na płaszczyźnie oktaedrycznej, gdzie powierzchnie plastyczności mają kształt okręgów. W tym przypadku są to okręgi współosiowe. Z rysunku widać, że przy wydłużaniu odcinka drogi drugiego etapu obciążenia, już w punkcie P następuje pokrycie się porównywanych powierzchni, czyli całkowite „zapomnienie” skutków pierwszego etapu. Jest to sprzeczne z wynikami uzyskanymi doświadczalnie.

Analizę teoretyczną, opartą na hipotezie kinematycznego wzmocnienia, przedstawiono na rysunku 2. Linia ciągłą nakreślono tory środków powierzchni plastyczności materiału „pierwszego”, natomiast linią przerywaną dla materiału „drugiego”. Końcowe położenia tych środków oznaczono odpowiednio: dla materiału „pierwszego” O... z dolnym indeksem oznaczającym punkt, na drodze drugiego etapu, do którego prowadzono obciążenie oraz dla materiału „drugiego” S... z takim samym indeksem. Na rysunku tym narysowano przykładowo dwie powierzchnie plastyczności o środkach w punktach O_A i S_D



Rys. 2



Rys. 3

Jeżeli w wyniku wydłużania drogi drugiego etapu obciążenia materiał „zapomina” o etapie pierwszym, to porównywane powierzchnie powinny zbliżać się do siebie. Rys. 2 pokazuje, że w istocie tak jest. Dla drugiego etapu, równego odcinkowi BA, odległości środków powierzchni O_A i S_A są znaczne, przy wydłużeniu drugiego etapu do punktu C odległości środków O_C i S_C są nieco mniejsze, a przy wydłużeniu tego etapu do punktu D odległości O_D i S_D są już niewielkie.

4. Metodyka badań doświadczalnych

4.1. Materiał i próbki. Badania prowadzono na próbkach rurkowych ze stopu aluminium PA6Nta (AlCu4Mg1). Probki wycinano z cienkościennych rur ciągnionych. Przed dalszą obróbką przeprowadzono selekcję wymiarową próbek. Założono dopuszczalne tolerancje: dla średnicy 0,3% jej wartości średniej oraz dla grubości ścianki 3%, także jej wartości średniej. Wybrane próbki poddano wyżarzaniu w temperaturze $390^\circ \pm 10^\circ\text{C}$ w czasie 5 godzin. Wyżarzanie miało na celu usunięcie anizotropii, wywołanej odkształceniem plastycznym przy wykonywaniu rur ciągnionych, oraz polepszenie własności plastycznych materiału. W wyżarzonych próbkach formowano kołnierze przy pomocy specjalnego przyrządu, opisanego w pracy [9], zapewniającego nienaruszalność środkowej, pomiarowej strefy próbki. Po oczyszczeniu mechanicznym zewnętrznej powierzchni w strefie pomiarowej, dokładnie mierzono średnicę i grubość ścianki. Pomiary wykonywano dwukrotnie, przed i po obciążeniu wstępnym. Ostatnim zabiegiem w procesie przygotowania próbek było naklejanie tensometrów. Naklejano je na zewnętrznej stronie próbek, po dwa (symetrycznie na przeciwległych ich stronach) w obu kierunkach obciążenia.

4.2. Aparatura pomiarowa i sposób obciążania. Do zadawania obciążeń wstępnych wykorzystano przyrząd zbudowany w ZMOC IPPT PAN w Warszawie. Konstrukcja przyrządu umożliwia niezależne obciążanie próbek w kierunku wzdłużnym (osiowe rozciąganie) oraz obwodowym (ciśnienie wewnętrzne). Dzięki temu istnieje możliwość obciążania wzdłuż dowolnych proporcjonalnych dróg obciążenia w całej pierwszej ćwiartce płaszczyzny naprężeń $\sigma_z - \sigma_\theta$. Schemat i zasadę działania przyrządu można znaleźć w pracy [9].

Ze względu na skokową zmianę ciśnienia w układach obciążających, rzeczywiste drogi obciążenia nieco odbiegały od teoretycznych prostych proporcjonalnego obciążenia. Największe odchylenia od teoretycznych dróg nie przekraczały wartości 3 MPa.

Odkształcenia mierzono za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych, krato-wych typu RL-15/120/Z. Do pomiarów wykorzystano zestaw tensometryczny typu M1000 produkcji czechosłowackiej. Przy zastosowaniu wyżej omawianych tensometrów zestaw ten zapewniał dokładność odczytu rzędu $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-6}$.

5. Wyniki badań doświadczalnych

5.1. Metodyka określania powierzchni plastyczności. Do określania każdej powierzchni plastyczności używano po 7 próbek. Probki te obciążano wzdłuż proporcjonalnych dróg obciążenia wychodzących z początku układu współrzędnych. Dla każdej drogi obciążenia

znajdowano granicę plastyczności i jako punkt przenoszono ją na prostą przedstawiającą daną drogę. Łącząc punkty uzyskane dla różnych dróg otrzymano krzywą przedstawiającą przekrój powierzchni plastyczności płaszczyzną $\sigma_z - \sigma_\theta$. Krzywą tą zwykle określa się krótko — powierzchnia plastyczności. W tej pracy znajdowano szereg granic plastyczności, zdefiniowanych różną wartością trwałych odkształceń, wynoszącą odpowiednio $\varepsilon^p = 0,005\%$; $0,01\%$; $0,02\%$; $0,1\%$; $0,2\%$; $0,3\%$; $0,4\%$; $0,5\%$. Oprócz tego znajdowano granicę proporcjonalności. W związku z tym określono szereg powierzchni plastyczności, oznaczonych tak jak umowne granice plastyczności. Przyjęty sposób określania granic plastyczności był stosowany w pracach [1, 2, 7]. Do obliczania intensywności odkształceń plastycznych ε_t oraz intensywności naprężeń stycznych przyjęto zależności:

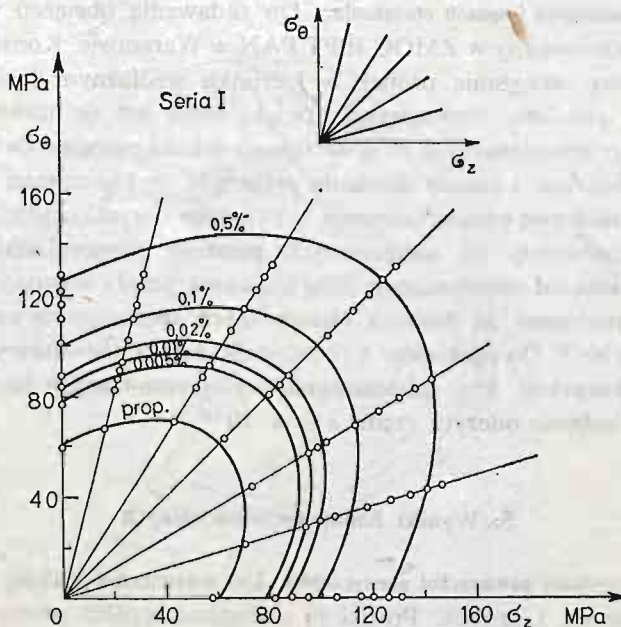
$$\varepsilon_t = \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_t^k$$

gdzie: $\Delta \varepsilon_t = \sqrt{\Delta \varepsilon_z^2 + \Delta \varepsilon_z \Delta \varepsilon_\theta + \Delta \varepsilon_\theta^2}$

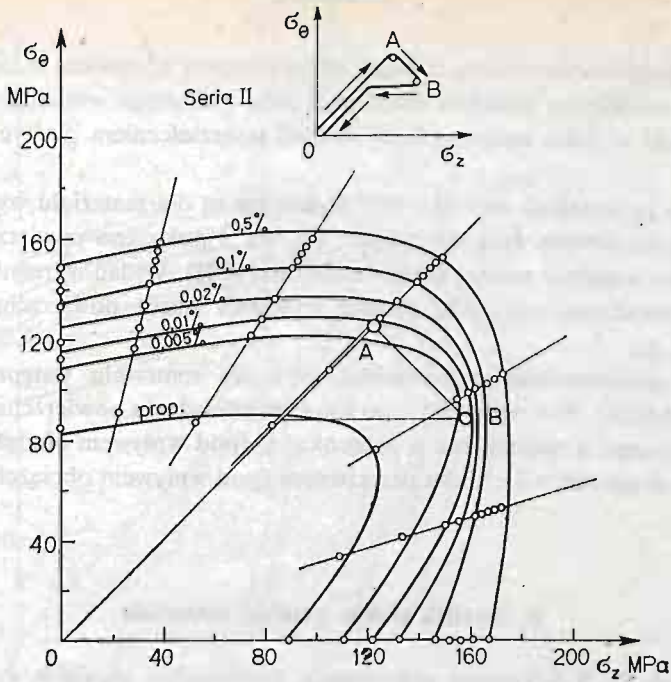
$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_r)^2]}$$

gdzie: $\sigma_r = -\frac{1}{2}p$ jest naprężeniem ściskającym, wywołanym działaniem ciśnienia oleju na wewnętrzną ściankę próbki.

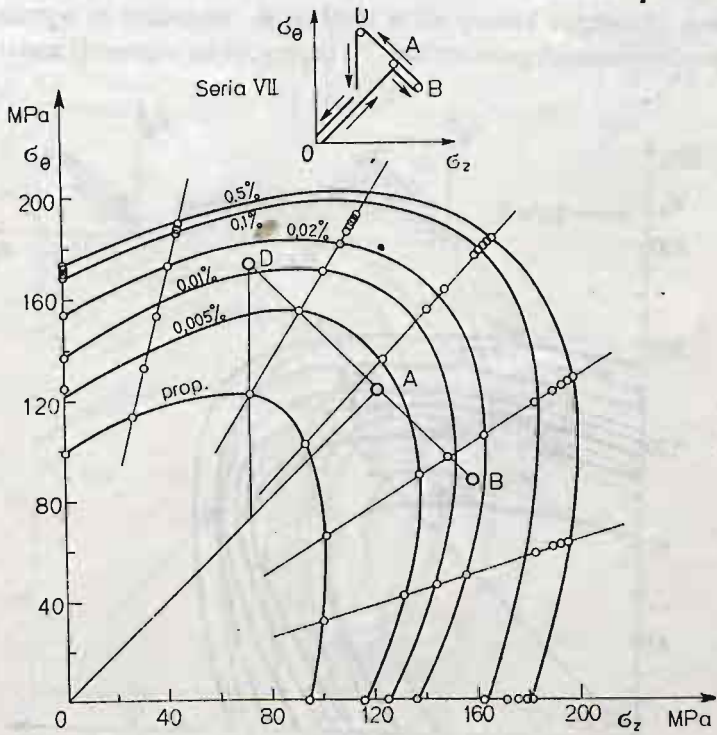
5.2. Analiza wyników pomiarów i obliczeń. Na rys. 4 pokazano powierzchnie plastyczności serii I dla materiału w stanie wyjściowym. Z rysunku widać, że doświadczalne punkty



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

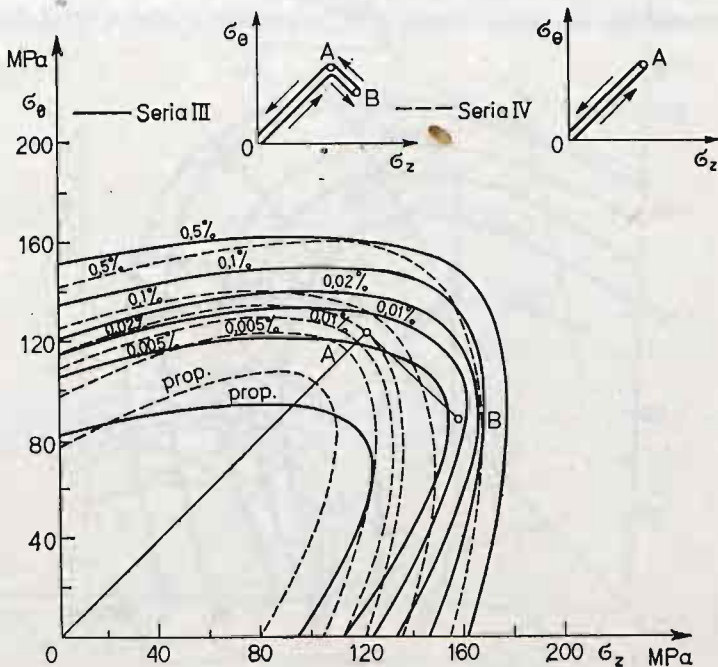
układają się w pobliżu teoretycznych elips, narysowanych w oparciu o hipotezę Hubera-Misesa. Pewne odchylenie punktów dla dwóch dróg obciążenia wskazuje na to, że wyrażanie nie usunęło w pełni anizotropii wywołanej odkształceniem plastycznym przy produkcji rur.

Powierzchnie pozostałych serii II ÷ VIII wykonane są dla materiału wstępnie odkształconego wzdłuż określonych dróg obciążenia. Na rys. 5 pokazano powierzchnie dla materiału obciążanego wstępnie wzdłuż drogi OABO (seria II). Widać wyraźnie, że obciążenie wstępne przeprowadzone po takiej drodze wywołuje obrót powierzchni plastyczności w kierunku osi σ_z .

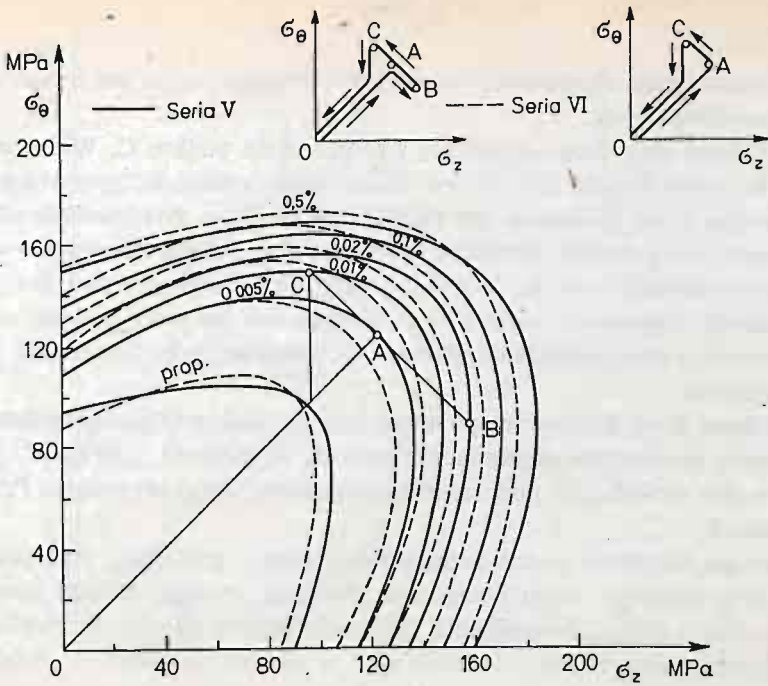
Na rys. 6 przedstawiono powierzchnie płynięcia materiału wstępnie obciążanego wzdłuż drogi OABDO. Pod wpływem tego sposobu obciążenia powierzchnia plastyczności doznaje dwukrotnego skręcenia, raz w kierunku σ_z (pod wpływem obciążenia pierwszego etapu AB) oraz drugi raz w kierunku przeciwnym (pod wpływem obciążeń drugiego etapu drogi BD).

6. Analiza efektu pamięci materiału

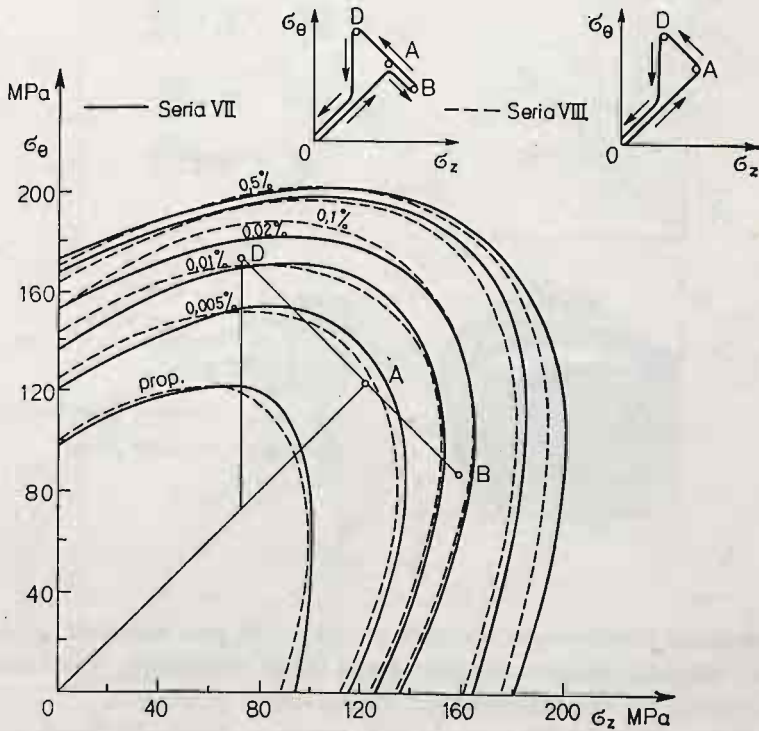
Na rysunkach 7 ÷ 9 dokonano porównania powierzchni płynięcia materiału „pierwszego” i „drugiego” w kolejnych stadiach drogi drugiego etapu obciążenia. Na rys. 7 drugi etap drogi obciążenia kończy się w punkcie A. Widoczne są wyraźne rozbieżności w położeniu porównywanych powierzchni. To znaczy, że na własności materiału ma wyraź-



Rys. 7



Rys. 8



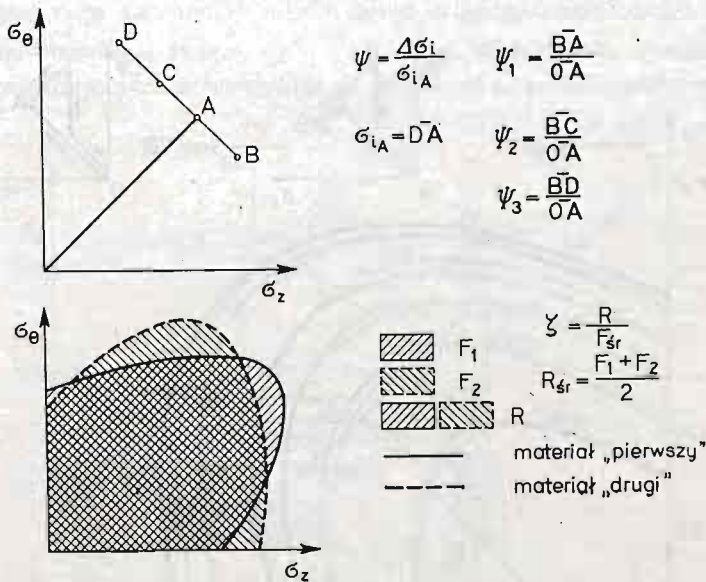
Rys. 9

ny wpływ pierwszy etap obciążenia, a odcinek BA drugiego etapu jest jeszcze zbyt krótki, by wpływ ten zlikwidować.

Na rys. 8 drugi etap drogi obciążenia wydłużono do punktu C. Widać wyraźnie, że wydłużenie to spowodowało zmianę we własnościach materiału „pierwszego”. Wpływ pierwszego etapu drogi obciążenia jest tu znacznie mniejszy. Powierzchnia plastyczności, zajmująca uprzednio położenie obrócone w stronę osi σ_z , uległa skręceniu w stronę przeciwną, to jest w kierunku osi σ_θ . Jednak odcinek drogi drugiego etapu jest jeszcze zbyt mały, by materiał „zapomniał” całkowicie o własnościach nabytych podczas odkształcenia na pierwszym etapie drogi obciążenia. Różnice (w położeniu porównywanych powierzchni są jeszcze wyraźne.

Po wydłużeniu drogi drugiego etapu obciążenia do punktu D nastąpiło dalsze zbliżenie porównywanych powierzchni płynięcia. Oznacza to, że materiał „pierwszy” „zapomniał” o skutkach w nim wywołanych podczas pierwszego etapu drogi obciążenia. Przedstawiono to na rysunku 9.

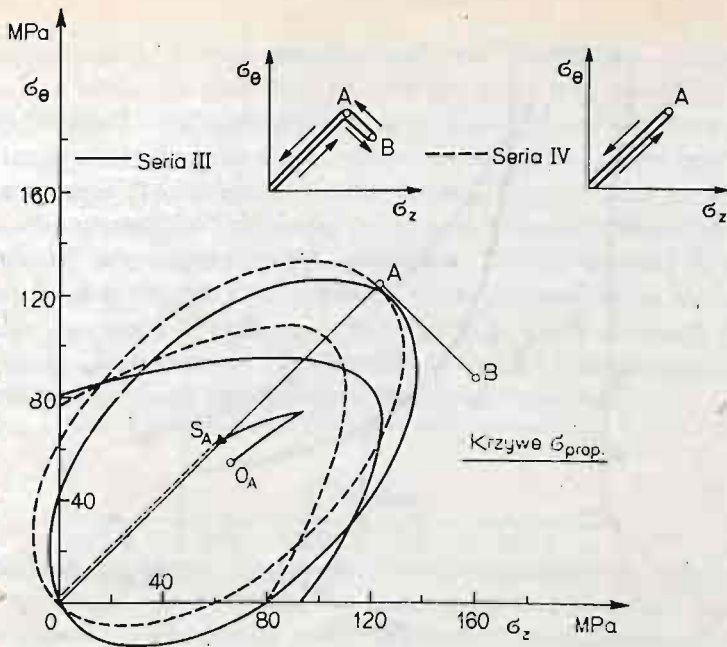
Efekt pamięci materiału można przedstawić w formie graficznej, jako pewną funkcję parametru drogi drugiego etapu obciążenia. Definicję przyjętej funkcji pamięci ζ oraz definicję parametru drogi „zapominania” ψ przedstawiono na rys. 10. Funkcja ζ jest to stosunek niepokrywających się pól uzyskanych w wyniku nałożenia na siebie porówny-



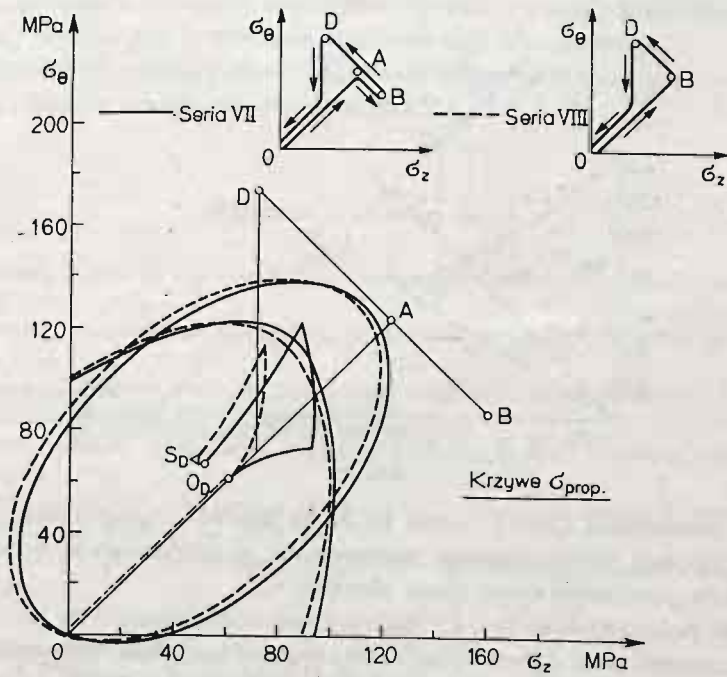
Rys. 10

wanych powierzchni płynięcia do wartości średniej tych pól. Parametr ψ jest określony jako stosunek długości odcinka drugiego etapu drogi obciążenia, wyrażanego w intensywnościach naprężenia, do intensywności naprężenia w punkcie A.

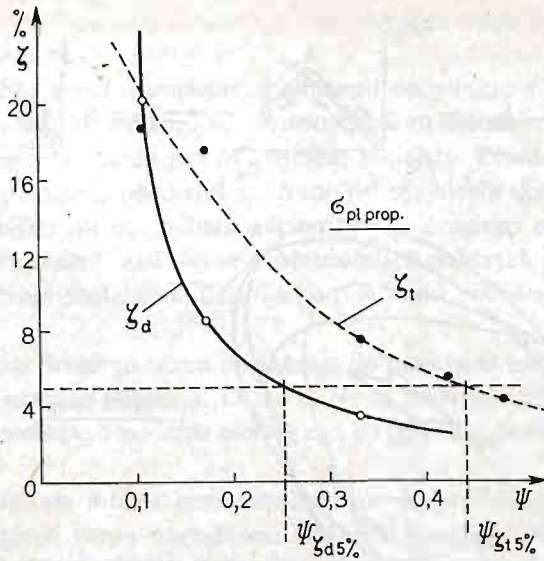
Omówioną funkcję $\zeta_d(\psi)$ dla otrzymanych wyników doświadczalnych przedstawiono na rys. 13. Dla porównania wykreślono również, zdefiniowaną w ten sam sposób, funkcję teoretyczną $\zeta_t(\psi)$. Z przebiegu otrzymanych krzywych widać, że funkcja $\zeta_d(\psi)$ leży w za-



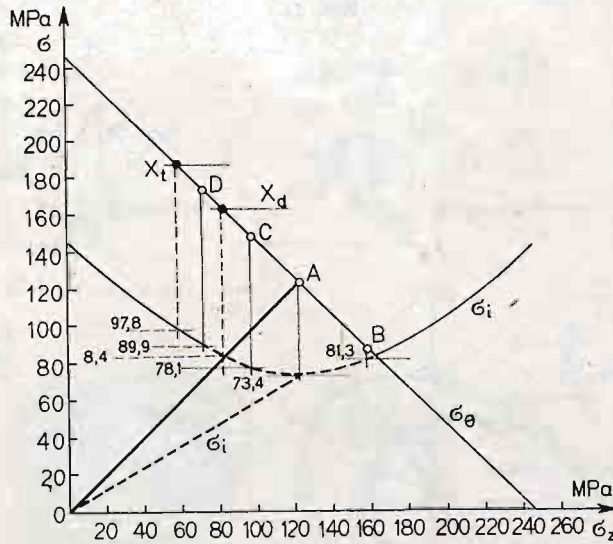
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

kresie funkcji teoretycznej $\zeta_t(\psi)$. Oznacza to, że na drodze „zapominania”, oszacowanej w oparciu o hipotezę kinematycznego wzmocnienia, w rzeczywistym materiale nastąpi zatarcie skutków pierwszego etapu drogi obciążenia.

Z przebiegu pokazanych na rys. 13 funkcji $\zeta_d(\psi)$ i $\zeta_t(\psi)$ wynika, że hipoteza kinematycznego wzmocnienia dość dobrze opisuje efekt pamięci materiału. Natomiast jeśli chodzi o kształt i wymiary powierzchni plastyczności, to różnice są istotne. Wskazują na to rys. 11 i 12, na których pokazano przykładowo porównanie wybranych powierzchni plastyczności.

Omówione uprzednio funkcje pamięci materiału umożliwiają oszacowanie drogi „zapominania”, to znaczy długości odcinka drugiego etapu drogi obciążenia, przy którym następuje „zapomnienie” własności uzyskanych na pierwszym etapie. Następuje to wtedy, gdy przy wydłużaniu tego drugiego etapu, własności materiałów „pierwszego” i „drugiego” pokryją się, a funkcja $\zeta(\psi)$ osiągnie wartość zerową. Dopuszczając pewien rozrzut we własnościach „obu materiałów” założono, że już przy wartości funkcji $\zeta(\psi) = 5\%$, nastąpiło „zapomnienie” poprzedniej historii obciążenia. Dla tej wartości funkcji, zarówno doświadczalnej $\zeta_d(\psi) = 5\%$, jak i teoretycznej $\zeta_t(\psi) = 5\%$, znaleziono wartość parametru ψ . Wartości tego parametru wyznaczają punkty X_d i X_t na drodze drugiego etapu, określające długość drogi „zapominania”. Przedstawia to rys. 14. Na rysunku tym pokazano również wykres intensywności naprężenia wzdłuż drogi obciążenia

7. Wnioski

1. Odształcenia plastyczne, materiału quasi-izotropowego w stanie wyjściowym, przy złożonych obciążeniach powodują przesunięcie, zmianę kształtu i wymiarów oraz, przy pewnych sposobach obciążenia, obrót powierzchni plastyczności.

2. Obrót ten jest szczególnie wyraźny dla powierzchni definiowanych granicą proporcjonalności oraz najmniejszymi wartościami trwałych odształceń plastycznych, jak $\varepsilon^p = 0$, $\varepsilon^p = 0,005\%$ i $0,01\%$. Dla większych wartości ε^p obrót ten jest mniej wyraźny.

3. Obciążenie wtórne o zwrocie przeciwnym do pierwotnego powoduje proces odwrotnego skręcenia powierzchni w kierunku tego wtórnego obciążenia.

4. Przy odpowiednio dużej wartości obciążenia wtórnego w materiale następuje zatarcie (zapomnienie) śladów obciążenia pierwotnego.

Literatura cytowana w tekście

1. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności*, Mech. Teoret. Stos., 4, 2, 1966, 5 - 16.
2. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności*, (część druga), Mech. Teoret. Stos., 6, 1, 1968, 3 - 31.
3. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI, *An Experimental Study of the Effect of Aluminium Alloy*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 16, 1968, pp. 153 to 162.
4. J. MIASTKOWSKI, *Analysis of the memory effect of plastically prestrained material*, Arch. Mech. Stos., 3, 20, 1968.
5. J. MIASTKOWSKI, *Doświadczalna analiza efektu pamięci materiału poddanego plastycznemu odształceniu*, Mech. Teoret. Stos., 3, 11, 1973, 297 - 314.
6. W. SZCZEPIŃSKI, *On the Effect of Plastic Deformation on Yield Condition*, Arch. Mech. Stos., 2, 15, 1963, 275 - 296.
7. J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odształconego mosiądzu*, Mech. Teoret. Stos., 3, 2, 1965, 55 - 66.
8. J. PARKER, M. B. BASSETT, *Plastic Stress-Strain Relationships — Some Experiments to Derive a Subsequent Yield Surface*, J. Appl. Mech., 4, 31, 1964.
9. J. MIASTKOWSKI, *Kryteria plastycznego płynięcia i hipotezy wzmocnienia metali w świetle badań doświadczalnych*, Prace IPPT PAN, 41/1973.

10. K. KANEKO, K. IKEGAMI, E. SHIRATORI, *The Yield Condition and Flow Rule of Metal for the Various Pre-Strain Path*, Bulletin of the JSME, vol. 19, No. 132, 1976.
11. A. BALDOW, A. SAWCZUK, *A rule of anisotropic hardening*, Acta Mech., vol. 1/2, 1965, 163 - 175.
12. G. J. TAYLOR and H. QUINNEY, *The plastic distortion of metals*, Phil. Trans. Roy. Soc., A230, 1931, 323 - 326.
13. H. ZIEGLER, *A Modification of Prager's Hardening Rule* Quart. Appl. Math., 17, 1959, 55 - 65.
14. E. MELAN, *Zur Plastizität des ramulichen Kontinuum*, Ing.-Arch., 9, 1938, 116 - 126.
15. W. PRAGER, *The theory of plasticity — a survey of recent achievements*, James Chayton Lecture, Proc. Inst. Mech. Engr., 169, 1955, 41 - 47.
16. R. T. SHIELD, H. ZIEGLER, *On Prager's hardening rule*, Zeits. Angew. Math. Phys., 1958, 260 - 276.
17. L. PRANDTL, *Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der Festen Körper*, ZAMM, 8, 1928, 85 - 106.
18. А. Ю. Ишлинский, *Общая теория пластичности с линейным упрочнением*, Укр. Мат. Журн. 3, 6, 1954.
19. В. Л. Данилов, *К формулировке закона деформационного упрочнения*, Известия А. Н. СССР Механика твердого тела, № 6, 1971.

Резюме

АНАЛИЗ ОБОРОТА ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ С УЧЕТОМ ПАМЯТИ МАТЕРИАЛА

В работе представлены ход и результаты экспериментальных исследований памяти материала при сложных нагрузках вынуждающих оборот поверхности пластичности. Исследования проведены на трубчатых образцах сделанных из сплава алюминия.

Теоретический анализ полученных результатов исследований проведен опираясь на гипотезу кинематического упрочнения.

Summary

ANALYSIS OF ROTATION OF YIELD SURFACE WITH CONSIDERATION OF THE MEMORY OF THE MATHERIAL

The procedure and results of experimental investigations of the memory of material at combined loadings exerting rotation of yield surface are presented in the paper. The investigations are performed on the tubular specimens made from aluminum alloy.

Theoretical analysis of the obtained results was performed on the basis of the kinematic work-hardening hypothesis.

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 marca 1983 roku

DRGANIA PRĘTÓW O LINIOWO ZMIENNEJ WYSOKOŚCI PRZEKROJU POPZRZECZNEGO

EDWARD J. KRYNICKI

*Department of Civil Engineering
University of Manitoba*

STANISŁAW MATYSIAK

*Uniwersytet Warszawski
czasowo
Department of Civil Engineering
University of Manitoba*

1. Wstęp

W projektowaniu konstrukcji inżynierskich spotykamy się z ustrojami złożonymi z elementów o zmiennych przekrojach poprzecznych. Najczęściej jednak mamy do czynienia z konstrukcjami, których wymiary przekrojów poprzecznych elementów zmieniają się liniowo w płaszczyźnie rysunku, natomiast drugi wymiar jest stały. Celowe staje się więc opracowanie odpowiednich wzorów umożliwiających łatwe wykonanie obliczeń dynamicznych tych ustrojów. Wprawdzie współczesna technika komputerowa pozwala rozwiązywać geometrycznie skomplikowane elementy konstrukcyjne to jednak znajomość wzorów transformacyjnych ułatwia budowę kanonicznych układów równań.

Jedną z metod, która ma szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień dynamicznych ustrojów prętowych (belek ciągłych, ram, łuków, itp.) jest metoda przemieszczeń. Zastosowanie jej do rozwiązywania układów o stałych przekrojach poprzecznych jest znane, wystarczy wymienić obszerne monografie St. BŁASZKOWIAKA i Zb. KĄCZKOWSKIEGO [1] oraz W. NOWACKIEGO [2].

W przypadku prętów o zmiennych przekrojach poprzecznych znane jest rozwiązanie ściśle drgań klinowej belki wspornikowej podane przez E. CRANCHA i A. ADLERA [3], przy czym cała ogólna równania opisującego to zagadnienie wyrażona jest za pomocą funkcji Bessela.

Zagadnienie drgań belki swobodnie podpartej o liniowo zmiennej wysokości zbadane zostało w pracy [4] przez zastosowanie metody Ritza. W rozprawie tej uzyskano przy użyciu szeregów Fouriera formalnie rozwiązanie ściśle.

W pracach [5], [6] wyprowadzono wzory transformacyjne metody przemieszczeń, umożliwiające rozwiązania zagadnień drgań poprzecznych, podłużnych i skrętnych ustrojów sprężystych złożonych z prętów prostych pełnych, których wymiary przekrojów po-

przeznaczonych zmieniają się liniowo tylko w płaszczyźnie zginania natomiast grubość pręta jest stała. Wyprowadzone wzory w wymienionych wyżej pracach nie pozwalają jednak rozwiązywać ustrojów przestrzennych z braku odpowiednich wyrażeń na drgania poprzeczne pręta w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zginania.

Praca [7] zawiera wzory transformacyjne dla pręta o liniowo zmiennych obu wymiarach przekroju. Interesujące wyniki zawiera praca [8] w której rozpatrzono drgania prętów o bardziej skomplikowanej geometrii.

W niniejszej pracy zajmujemy się zagadnieniami drgań poprzecznych pręta w kierunku osi stałego wymiaru pręta. Rozważania ograniczamy do drgań harmonicznym, które opisane są przez amplitudę spełniającą równanie różniczkowe zwyczajne liniowe o zmiennych współczynnikach. Rozwiązanie ogólne tego równania daje się przedstawić jedynie w postaci szeregów potęgowych, otrzymane więc w pracy wyniki stanowią formalnie dokładne a w praktyce przybliżone rozwiązanie analityczne stawianego problemu i pozwalają na łatwe otrzymanie rozwiązań dla przykładów liczbowych.

Wyprowadzone w tej pracy wzory wraz z wynikami podanymi w pracach [5], [6] mogą służyć do wyznaczenia drgań wymuszonych i własnych oraz sił przekrojowych belek ciągłych, ram płaskich i przestrzennych, rusztów, ram załamanych w planie, i.t.d. Podane rozwiązania mogą mieć również zastosowanie w przypadku ram fundamentowych ram podpierających stropy obciążone maszynami, konstrukcji wsporczych pod urządzenia wentylacyjne, silniki, itp., w konstrukcjach mostowych oraz w wielu innych konstrukcjach inżynierskich a szczególnie przemysłowych.

2. Drgania poprzeczne pręta

Rozważmy pręt prosty o stałej szerokości przekroju poprzecznego q oraz o wysokości $h(\xi)$ zmiennej liniowo wzdłuż osi pręta (rys. 1) opisanej wzorem:

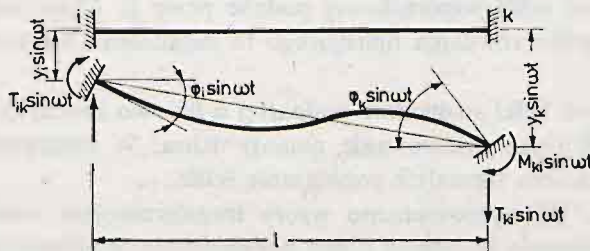
$$h(\xi) = h_s(\mu_l \xi' + \mu_k \xi), \quad (2.1)$$

gdzie:

$$h_s = \sqrt{h_l h_k}, \quad \mu_l = \frac{h_l}{h_s} = \sqrt{\frac{h_l}{h_k}},$$

$$\mu_k = \frac{h_k}{h_s} = \sqrt{\frac{h_k}{h_l}}, \quad \mu_l \mu_k = 1, \quad (2.2)$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \xi' = 1 - \xi.$$



Rys. 1

Symbolami h_i, h_k oznaczono tu wysokości przekrojów podporowych. Zmiennosć pola $A(\xi)$ przekroju poprzecznego pręta wyraża się następująco:

$$A(\xi) = A_s(\mu_i \xi' + \mu_k \xi), \quad (2.3)$$

gdzie:

$$A_s = \sqrt{A_i A_k}. \quad (2.4)$$

Zmiennosć momentu bezwładności $I(\xi)$ przekroju poprzecznego pręta przy drganiach poprzecznych w kierunku osi y (rys. 1), tj. prostopadle do rysunku ma postać:

$$I(\xi) = I_s(\mu_i \xi' + \mu_k \xi), \quad (2.5)$$

gdzie:

$$I_s = \sqrt{I_i I_k}. \quad (2.6)$$

Stałe μ_i, μ_k występujące we wzorach (2.3), (2.5) mają postać (2.2) lub, co jest równoważne

$$\mu_i = \sqrt{\frac{I_i}{I_k}}, \quad \mu_k = \sqrt{\frac{I_k}{I_i}}. \quad (2.7)$$

Symbolle A_i, A_k, I_i, I_k oznaczają pola oraz momenty bezwładności przekrojów podporowych

$$A_i = h_i q, \quad A_k = h_k q, \quad I_i = \frac{h_i q^3}{12}, \quad I_k = \frac{h_k q^3}{12}. \quad (2.8)$$

Równanie różniczkowe opisujące drgania własne poprzeczne pręta o zmiennej sztywności zginania ma postać:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[EI(\xi) \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right] + \rho A(\xi) l^4 \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.9)$$

gdzie $EI(\xi)$ oznacza sztywnosć zginania pręta, $\rho A(\xi)$ oznacza masę pręta na jednostkę długości.

Uwzględniając wzory (2.3) i (2.5), równanie (2.9) możemy zapisać w postaci

$$\frac{EI_s}{(\mu_i - \mu_k)^2} \frac{\partial^4 y(\xi, t)}{\partial \xi^4} - \frac{2EI_s}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)} \frac{\partial^3 y(\xi, t)}{\partial \xi^3} + \frac{\rho A_s l^4}{(\mu_i - \mu_k)^2} \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.10)$$

Dalej rozważania nasze ograniczymy do drgań harmoniczných. Po rozdzieleniu zmienných otrzymujemy następujące równanie różniczkowe opisujące amplitudę

$$\frac{1}{(\mu_i - \mu_k)^2} y^{IV}(\xi) - \frac{2}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)} y^{III}(\xi) - \left(\frac{\lambda}{2} \right)^4 y(\xi) = 0, \quad (2.11)$$

gdzie

$$\lambda^4 = \frac{16 \rho A_s l^4 \omega^2}{(\mu_i - \mu_k)^2 EI_s} \quad (2.12)$$

zaś ω oznacza kątową częstosć drgań.

Wprowadzając oznaczenia

$$\mu_i = a, \quad \mu_i - \mu_k = b, \quad (2.13)$$

równanie (2.11) można zapisać w następującej postaci

$$\frac{1}{b^2} y^{IV}(\xi) - \frac{2}{b(a-b\xi)} y^{III}(\xi) - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 y(\xi) = 0. \quad (2.14)$$

3. Rozwiązanie równania (2.14)

Równanie (2.14) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym jednorodnym rzędu czwartego o zmiennych współczynnikach, przy czym (ponieważ $a > b > 0$), współczynniki te są funkcjami ciągłymi dla $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$. Podstawiając do równania (2.14) zmienną η daną wzorem

$$\eta = a - b\xi, \quad (3.1)$$

oraz przyjmując

$$\tilde{y}(\eta) \equiv y(\xi) \quad (3.2)$$

dostajemy

$$\tilde{y}^{IV}(\eta) + \frac{2}{\eta} \tilde{y}^{III}(\eta) - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 \frac{1}{b^2} \tilde{y}(\eta) = 0. \quad (3.3)$$

Równanie (3.3) zostało rozpatrzone w pracy [9], gdzie autor zastosował metodę zmiennej zespolonej dla otrzymania rozwiązania przybliżonego. Wykorzystamy teraz bardziej klasyczną metodę, mianowicie poszukiwać będziemy rozwiązań szczególnych równania (3.3) w postaci szeregu potęgowego [10]:

$$\tilde{y}(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^{r+k}, \quad (3.4)$$

gdzie r jest nieznanym parametrem, który trzeba określić wraz ze współczynnikami c_k podstawiając (3.4) do równania (3.3). Prowadzi to do następującego równania algebraicznego

$$\begin{aligned} & c_0 r(r-1)^2(r-2)\eta^{r-4} + c_1(r+1)r^2(r-1)\eta^{r-3} + \\ & + c_2(r+2)(r+1)^2 r \eta^{r-2} + c_3(r+3)(r+2)^2(r+1)\eta^{r-1} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \{c_{k+4}(r+4+k)(r+3+k)^2(r+2+k) - Bc_k\} \eta^{r+k} = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie

$$B = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 \frac{1}{b^2}. \quad (3.6)$$

Równanie (3.5) powinno być spełnione tożsamościowo a zatem współczynniki przy dowolnej potęgze η powinny być równe zero. Przyjmujemy, że

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad (3.7)$$

oraz

$$r(r-1)^2(r-2) = 0, \quad (3.8)$$

co daje $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$.

Z równania (3.5) wynika ponadto, że jeśli spełnione są (3.7) i (3.8) to

$$c_{k+4}(r+4+k)(r+3+k)^2(r+2+k) - Bc_k = 0. \quad (3.9)$$

Podstawiając $r = 0$ do (3.4) i (3.9) otrzymujemy jedno z rozwiązań szczególnych równania (3.3) w postaci:

$$Y_1(\eta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n} \eta^{4n}, \quad (3.10)$$

gdzie dla $n \in N$ mamy

$$a_{4n} = \prod_{i=1}^n \frac{B^i}{[4(n-i)+4][4(n-i)+3]^2[4(n-i)+2]}, \quad (3.11)$$

$$a_0 = 1, \quad a_{4n+1} = a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0.$$

Dwa następne rozwiązania szczególne otrzymujemy podstawiając $r = 1$ oraz $r = 2$ do (3.4) i (3.9). Dają się one zapisać następująco:

$$Y_2(\eta) = \eta \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{4n} \eta^{4n} \right), \quad (3.12)$$

gdzie:

$$b_{4n} = \prod_{i=1}^n \frac{B^i}{[4(n-i)+5][4(n-i)+4]^2[4(n-i)+3]}, \quad (3.13)$$

$$b_0 = 1, \quad b_{4n+1} = b_{4n+2} = b_{4n+3} = 0, \quad n \in N,$$

oraz

$$Y_3(\eta) = \eta^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{4n} \eta^{4n} \right), \quad (3.14)$$

gdzie

$$c_{4n} = \prod_{i=1}^n \frac{B^i}{[4(n-i)+6][4(n-i)+5]^2[4(n-i)+4]}, \quad (3.15)$$

$$c_0 = 1, \quad c_{4n+1} = c_{4n+2} = c_{4n+3} = 1, \quad n \in N.$$

Ponieważ $r = 1$ jest pierwiastkiem podwójnym równania (3.8), czwartego rozwiązania

szczególnego poszukujemy w postaci [10]:

$$Y_4(\eta) = Y_2(\eta) \ln \eta + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \eta^{n+1}, \quad (3.16)$$

gdzie $Y_2(\eta)$ dane jest wzorem (3.12). Podstawiając (3.16) do równania (3.3) otrzymujemy wzory określające współczynniki d_n

$$d_{4n} = \prod_{i=2}^n \frac{B^{n-1} d_4}{(4i)^2(4i+1)(4i-1)} - \frac{32n^2-1}{2n(4n+1)(4n-1)} b_{4n} \quad (3.17)$$

dla $n > 1$ oraz

$$d_4 = -\frac{11}{10} b_4, \quad d_{4n+1} = d_{4n+2} = d_{4n+3} = 0.$$

Z (3.17) i (3.16) wynika, że

$$Y_4(\eta) = Y_2(\eta) \ln \eta + \sum_{n=1}^{\infty} d_{4n} \eta^{4n+1}, \quad (3.18)$$

gdzie d_{4n} są określone wzorem (3.17).

Podsumowując, otrzymaliśmy cztery rozwiązania szczególne $Y_i(\eta)$ równania (3.3). Można sprawdzić, że są one liniowo niezależne, zatem rozwiązanie ogólne równania (3.3) możemy przedstawić w postaci

$$\hat{y}(\eta) = \sum_{i=1}^4 C_i Y_i(\eta), \quad (3.19)$$

gdzie C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ są dowolnymi stałymi zaś Y_i dane są wzorami (3.10), (3.12), (3.14) oraz (3.18). Stałe C_i można wyznaczyć z warunków brzegowych. Rozwiązanie ogólne równania (2.14) dostajemy podstawiając do (3.19) zmienną η daną we wzorze (3.1) i uwzględniając (3.2).

4. Warunki brzegowe i wzory transformacyjne

Rozpatrzmy następujące warunki brzegowe

$$\begin{aligned} y(0) &= y_l, & y'(0) &= l\varphi_l, \\ y(1) &= y_k, & y'(1) &= l\varphi_k, \end{aligned} \quad (4.1)$$

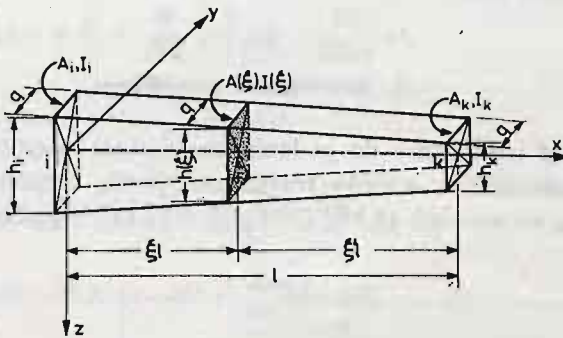
gdzie y_l , y_k , $l\varphi_l$, $l\varphi_k$ są stałymi oznaczającymi amplitudy przemieszczeń liniowych i kątowych. Ponieważ wygodniej jest operować funkcją $\tilde{y}(\eta)$ więc wykorzystując oznaczenia (3.1) i (3.2) możemy warunki brzegowe (4.1) zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \tilde{y}(a) &= y_l, & \left. \frac{d\tilde{y}}{d\eta} \right|_{\eta=a} &= -\frac{l}{b} \varphi_l, \\ \tilde{y}(a-b) &= y_k, & \left. \frac{d\tilde{y}}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} &= -\frac{l}{b} \varphi_k. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Podstawiając rozwiązanie ogólne (3.19) do warunków brzegowych (4.2) otrzymujemy układ czterech równań algebraicznych liniowych określających nieznanne stałe C_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 C_i Y_i(a) &= y_1, \\ \sum_{i=1}^4 C_i Y_i(a-b) &= y_2, \\ \sum_{i=1}^4 C_i \frac{dY_i}{d\eta} \Big|_{\eta=a} &= -\frac{l}{b} \varphi_1, \\ \sum_{i=1}^4 C_i \frac{dY_i}{d\eta} \Big|_{\eta=a-b} &= -\frac{l}{b} \varphi_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Znając stałe C_i mamy na podstawie wzoru (3.19) funkcję $\tilde{y}(\eta)$ a uwzględniając (3.1) i (3.2) otrzymujemy $y(\xi)$. Warunki brzegowe (4.1) mają charakter ogólny, pozwalają również znaleźć rozwiązanie zagadnienia gdy dane są na końcach pręta momenty zginające lub siły poprzeczne poprzez rozwiązanie odpowiedniego układu równań algebraicznych. Momenty zginające i siły poprzeczne w końcach pręta wyrażają się wzorami [5] (rys. 2):



Rys. 2

$$\begin{aligned} M_{1k} &= -\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0}, \\ M_{k1} &= \frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=l}, \\ T_{1k} &= -\frac{d}{ld\xi} \left[\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] \Big|_{\xi=0}, \\ T_{k1} &= -\frac{d}{ld\xi} \left[\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] \Big|_{\xi=l}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Zastępując ξ przez η zaś $y(\xi)$ przez $\tilde{y}(\eta)$ oraz uwzględniając (2.5), (2.2) oraz (2.13) to wzory (4.4) można zapisać następująco

$$\begin{aligned} M_{ik} &= -\frac{EI_s a}{l^2} b^2 \frac{d^2 y}{d\eta^2} \Big|_{\eta=a}, \\ M_{ki} &= \frac{EI_s (a-b)}{l^2} b^2 \frac{d^2 \tilde{y}}{d\eta^2} \Big|_{\eta=a-b}, \\ T_{ik} &= \frac{Eb^3 I_s}{l^3} \left[\frac{d^2 y}{d\eta^2} + \eta \frac{d^3 y}{d\eta^3} \right] \Big|_{\eta=a}, \\ T_{ki} &= \frac{Eb^3 I_s}{l^3} \left[\frac{d^2 \tilde{y}}{d\eta^2} + \eta \frac{d^3 \tilde{y}}{d\eta^3} \right] \Big|_{\eta=a-b}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Jeśli dane warunki brzegowe wyrażają momenty zginające i siły poprzeczne lub są typu mieszanego to można otrzymać rozwiązanie stosując (3.19), gdzie C_i spełniają układ równań (4.3), przyjmując $y_i, y_k, l\varphi_i, l\varphi_k$ jako nieznanne, które trzeba wyznaczyć z zadanych warunków brzegowych i wzorów (4.5).

Z układu równań (4.3) wynika, że stałe C_i są w postaci kombinacji liniowych wartości przemieszczeń liniowych i kątowych danych na brzegu pręta, czyli

$$C_n = a_{n1} y_i + a_{n2} y_k + a_{n3} l\varphi_i + a_{n4} l\varphi_k,$$

gdzie $a_{nm}, n, m = 1, 2, 3, 4$ są stałymi. Z powyższego wniosku oraz na podstawie (3.19) i (4.5) wynika, że siły poprzeczne i momenty zginające są również kombinacjami liniowymi wartości $y_i, y_k, l\varphi_i$, oraz $l\varphi_k$.

5. Rozwiązanie przybliżone

Ograniczymy teraz rozważania do podania rozwiązania przybliżonego oraz, odpowiadającym temu rozwiązaniu, wzorów transformacyjnych. Współczynniki a_{4n}, b_{4n}, c_{4n} oraz d_{4n} występujące we wzorach (3.15), (3.11), (3.13) i (3.17) podaje następująca tabela

Tabela 1

n	1	2	3
a_{4n}	$\frac{B}{72}$	$\frac{B^2}{200064}$	$\frac{B^3}{50400 \cdot 200064}$
b_{4n}	$\frac{B}{240}$	$\frac{B^2}{967680}$	$\frac{B^3}{65280 \cdot 967680}$
c_{4n}	$\frac{B}{600}$	$\frac{B^2}{3888000}$	$\frac{B^3}{82232 \cdot 3888000}$
d_{4n}	$-\frac{11B}{2400}$	$-B^2 \frac{11}{9696800} + \frac{127}{252 \cdot 967680}$	$-\frac{11B^3}{20592 \cdot 2400} - \frac{287}{858} b_{12}$

Dalej, mając na celu zilustrowanie wyników podanych w rozdziale 4 pracy, ograniczamy się do następujących przybliżeń dla $Y_i(\eta)$ (wykorzystujemy wzory (3.10), (3.12), (3.14) i (3.18)):

$$Y_1(\eta) \approx 1 + a_4 \eta^4 = 1 + \frac{B}{72} \eta^4,$$

$$Y_2(\eta) \approx \eta + b_4 \eta^5 = \eta + \frac{B}{240} \eta^5,$$

$$Y_3(\eta) \approx \eta^2 + c_4 \eta^6 = \eta^2 + \frac{B}{600} \eta^6,$$

$$Y_4(\eta) \approx (\eta + b_4 \eta^5) \ln \eta + d_4 \eta^5 = \left(\eta + \frac{B}{240} \eta^5 \right) \ln \eta - \frac{11}{2400} \eta^5.$$

(5.1)

Dokładność rozwiązania przybliżonego można poprawić biorąc w rozwiązaniach szczególnych więcej wyrazów szeregów opisujących $Y_i(\eta)$. Współczynniki a_{4n} , b_{4n} , c_{4n} , d_{4n} dość szybko maleją do zera.

Wprowadzając oznaczenia

$$f_{11} = Y_1(a) \approx 1 + \frac{B}{72} a^4, \quad f_{12} = Y_2(a) \approx a + \frac{B}{240} a^5,$$

$$f_{13} = Y_3(a) \approx a^2 + \frac{B}{600} a^6,$$

$$f_{14} = Y_4(a) \approx \left(a + \frac{B}{240} a^5 \right) \ln a - \frac{11}{2400} a^5,$$

$$f_{21} = Y_1(a-b) \approx 1 + \frac{B}{72} (a-b)^4,$$

$$f_{22} = Y_2(a-b) \approx a-b + \frac{B}{240} (a-b)^5,$$

$$f_{23} = Y_3(a-b) \approx (a-b)^2 + \frac{B}{600} (a-b)^6,$$

$$f_{24} = Y_4(a-b) \approx \left[a-b + \frac{B}{240} (a-b)^5 \right] \ln(a-b) - \frac{11}{2400} (a-b)^5,$$

$$f_{31} = \left. \frac{dY_1}{d\eta} \right|_{\eta=a} \approx \frac{B}{18} a^3, \quad f_{32} = \left. \frac{dY_2}{d\eta} \right|_{\eta=a} \approx 1 + \frac{B}{48} a^4,$$

(5.2)

$$f_{33} = \left. \frac{dY_3}{d\eta} \right|_{\eta=a} \approx 2a + \frac{B}{100} a^5,$$

$$f_{34} = \left. \frac{dY_4}{d\eta} \right|_{\eta=a} \approx \left(1 + \frac{B}{48} a^4 \right) \ln a + 1 - \frac{3}{160} a^4,$$

$$f_{41} = \left. \frac{dY_1}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} \approx \frac{B}{18} (a-b)^3,$$

$$\begin{aligned}
 f_{42} &= \left. \frac{dY_2}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} \approx 1 + \frac{B}{48} (a-b)^4, \\
 f_{43} &= \left. \frac{dY_3}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} \approx 2(a-b) + \frac{B}{100} (a-b)^5, \\
 f_{44} &= \left. \frac{dY_4}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} \approx \left[1 + \frac{B}{48} (a-b)^4 \right] \ln(a-b) + 1 - \frac{3}{160} (a-b)^4,
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

możemy układ równań (4.3) zapisać następująco

$$\sum_{m=1}^4 f_{jm} C_m = g_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{5.3}$$

gdzie

$$g_1 = y_i, \quad g_2 = y_k, \quad g_3 = -\frac{l}{b} \varphi_i, \quad g_4 = -\frac{l}{b} \varphi_k. \tag{5.4}$$

Stosując rozwiązanie przybliżone (5.1) możemy wyrazić wzory transformacyjne (4.5) w postaci

$$\begin{aligned}
 M_{ik} &= -\frac{EI_s ab^2}{l^2} \left[C_1 \frac{B}{6} a^2 + C_2 \frac{B}{12} a^3 + C_3 \left(2 + \frac{B}{20} a^4 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + C_4 \left(\frac{B}{12} a^3 \ln a + \frac{7}{240} a^3 \right) \right], \\
 M_{ki} &= \frac{EI_s b^2 (a-b)}{l^2} \left\{ C_1 \frac{B}{6} (a-b)^2 + C_2 \frac{B}{12} (a-b)^3 + C_3 \left[2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{B}{20} (a-b)^4 \right] + C_4 \left[\frac{B}{12} (a-b)^3 \ln(a-b) + \frac{7}{240} (a-b)^3 \right] \right\}, \\
 T_{ik} &= -\frac{b}{la} M_{ik} + \frac{EI_s ab^3}{l^3} \left[C_1 \frac{B}{3} a + C_2 \frac{B}{4} a^2 + C_3 \frac{B}{5} a^3 + \right. \\
 &\quad \left. + C_4 \left(\frac{B}{4} a^2 \ln a - \frac{19}{240} a^2 \right) \right], \\
 T_{ki} &= \frac{b}{l(a-b)} M_{ki} + \frac{EI_s b^3 (a-b)}{l^3} \left\{ C_1 \frac{B}{3} (a-b) + C_2 \frac{B}{4} (a-b)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + C_3 \frac{B}{5} (a-b)^3 + C_4 \left[\frac{B}{4} (a-b)^2 \ln(a-b) - \frac{19}{240} (a-b)^2 \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Rozwiązując teraz układ równań (5.3) możemy wyznaczyć C_k a następnie podstawiając je do (3.19) (gdzie Y_i są dane wzorami (5.1)) oraz do (5.5) otrzymamy poszukiwane rozwiązanie.

W przypadku drgań własnych, przyjmując, że pręt jest sztywno zamocowany, co oznacza przyjęcie na brzegach zerowych przemieszczeń liniowych $y_i = y_k = 0$ oraz zerowych przemieszczeń kątowych $l\varphi_i = l\varphi_k = 0$, układ równań (5.3) staje się układem równań

liniowych jednorodnych i posiada niezerowe rozwiązanie gdy

$$\det[f_{jm}] = 0 \quad (5.6)$$

Równanie (5.6) jest równaniem na częstość drgań własnych ω wchodzącą do niego poprzez wartość B (wzory (2.12) i (3.6)). Podstawiając przybliżone wartości f_{jm} dane wzorami (5.2) do (5.6) otrzymujemy równanie algebraiczne stopnia czwartego na niewiadomą B i można je rozwiązać numerycznie.

Zastosowanie podanych wyżej rozwiązań przybliżonych zilustrujemy na przykładach liczbowych.

Przykład 1: Znajdziemy częstość drgań własnych dla pręta o następujących danych

$$l = 4,00 \text{ m}, \quad q = 1,20 \text{ m}, \quad h_i = 2,40 \text{ m}, \quad h_k = 1,20 \text{ m}, \\ \rho = 2400 \text{ kg/m}^3, \quad E = 23 \cdot 10^3 \text{ MPa}. \quad (5.7)$$

Stosując wzory (2.2), (2.7), (2.8), (2.13) i (5.7) otrzymujemy

$$a = 1,4142, \quad b = 0,7071 \quad (5.8)$$

następnie, podstawiając (5.8) do wzorów (5.2) i rozwiązując równanie (5.6) dostajemy

$$B = 19,5291 \quad (5.9)$$

co daje, na podstawie (3.6) i (2.12) częstość drgań własnych dla rozpatrywanego przypadku

$$\omega = 209,44 \text{ s}^{-1}. \quad (5.10)$$

Przykład 2: Rozpatrzmy teraz drgania wymuszone pręta o wymiarach podanych we wzorze (5.7) przyjmując częstość obciążeń wymuszających

$$\omega = 314,16 \text{ s}^{-1}, \quad (5.11)$$

co odpowiada 3000 drgań/min. Na podstawie wzorów (2.12) i (3.6) mamy dla tego przypadku

$$B = 43,94, \quad (5.12)$$

następnie, podstawiając (5.12) i (5.8) do wzorów (5.2) otrzymujemy liczbowe wartości współczynników f_{jm} dla układu równań (5.3). Podajemy je w postaci macierzy:

$$F = \begin{bmatrix} 3,4409 & 2,4498 & 2,5857 & 0,8231 \\ 1,1525 & 0,7394 & 0,5090 & -0,2571 \\ 6,9039 & 4,6614 & 5,3138 & 2,4955 \\ 0,8629 & 1,2288 & 1,4919 & 0,5691 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

gdzie

$$F = [f_{jm}] \quad (5.14)$$

Rozwiązanie układu równań (5.3) możemy zapisać w postaci

$$C_1 = 13,8822y_i - 9,7928y_k + 4,5955 \frac{l}{b} \varphi_i + 4,3511 \frac{l}{b} \varphi_k. \quad (5.15)$$

$$C_2 = -106,2118y_i + 76,6061y_k - 36,7801 \frac{l}{b} \varphi_i - 26,9438 \frac{l}{b} \varphi_k, \quad (5.15)$$

$$C_3 = 98,1271y_i - 70,2163y_k + 34,2566 \frac{l}{b} \varphi_i + 23,4296 \frac{l}{b} \varphi_k, \quad [\text{cd.}]$$

$$C_4 = -48,9577y_i + 33,5132y_k - 17,3563 \frac{l}{b} \varphi_i - 11,5984 \frac{l}{b} \varphi_k.$$

Na podstawie wzorów (3.2), (3.1), (3.19), (5.1), (5.8) i (5.12) możemy przedstawić amplitudę drgań $y(\xi)$ w postaci

$$y(\xi) = C_1 [1 + 0,6103(1,4142 - 0,7071\xi)^4] + C_2 [1,4142 - 0,7071\xi + 0,1831(1,4142 - 0,7071\xi)^5] + C_3 [(1,4142 - 0,7071\xi)^2 + 0,0732(1,4142 - 0,7071\xi)^6] + C_4 \{ [1,4142 - 0,7071\xi + 0,1831(1,4142 - 0,7071\xi)^5] \ln(1,4142 - 0,7071\xi) - 0,0045(1,4142 - 0,7071\xi)^5 \}, \quad (5.16)$$

gdzie C_i są dane wzorami (5.15).

Podstawiając parametry charakteryzujące pręt (5.7) oraz wzory (5.15) do (5.5), otrzymujemy następującą postać wzorów transformacyjnych:

$$M_{ik} = -0,0216 E \left(-17,7047y_i + 15,4154y_k - 7,7320 \frac{l}{b} \varphi_i - 5,1135 \frac{l}{b} \varphi_k \right), \quad (\text{Nm}),$$

$$M_{ki} = 0,0108 E \left(183,8750y_i - 129,6104y_k + 63,7763 \frac{l}{b} \varphi_i + 45,6078 \frac{l}{b} \varphi_k \right), \quad (\text{Nm}),$$

$$T_{ik} = \frac{E}{l} \left(0,2269y_i - 0,0687y_k - 3,1495 \frac{l}{b} \varphi_i - 0,1443 \frac{l}{b} \varphi_k \right),$$

$$T_{ki} = \frac{E}{l} \left(1,6989y_i - 0,4542y_k + 0,5842 \frac{l}{b} \varphi_i + 0,4381 \frac{l}{b} \varphi_k \right). \quad (5.17)$$

gdzie $E = 23 \times 10^3$ MPa, $l = 4,00$ m, y_i, y_k są amplitudami przemieszczeń liniowych zaś $l\varphi_i, l\varphi_k$ są amplitudami przemieszczeń kątowych na końcach pręta.

Literatura cytowana w tekście

1. S. BŁASZKOWIAK, Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda Crossa*, PWN, Warszawa, 1959.
2. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa, 1961.
3. E. CRANCH, A. ADLER, *Journ. Appl. Mech.*, ASME, 23, 1, 1956.
4. E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Journ. Appl. Mech.*, ASME, 29, 9, 1962.
5. E. KRYNICKI, *Arch. Inż. Łąd.*, 12, 1, 1966.
6. E. KRYNICKI, *Arch. Inż. Łąd.*, 12, 3, 1966.

7. J. GOŁEĆ, Arch. Inż. Łąd., 26, 2, 1980.
8. D. O. BANKS, G. J. KUROWSKI, Journ. Appl. Mech., ASME, 44, 3, 1977.
9. D. E. NEVEL, *The general solution of a wedge on an elastic foundation*, CRREL Research Report 227, Nov., 1968.
10. M. COLOMB, M. SHANKS, *Elements of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill Company, 1965.

Р а з ю м е

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С ЛИНЕЙНО ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе рассмотрено задачу колебаний прямых стержней с постоянной толщиной, которых размеры поперечных сечений изменяются линейно в плоскости изгиба. Рассмотрены гармонические поперечные колебания стержня в направлении постоянного размера поперечного сечения. Получено общее решение уравнения амплитуда в виде степенного ряда, а в дальнейшем приближенное решение для амплитуда и трансформационных формул. Полученные результаты иллюстрированы двумя численными примерами: в первом найдено частоту собственных колебаний, во втором рассмотрено вынужденные колебания.

S u m m a r y

VIBRATIONS BARS WITH LINEARLY VARIABLE CROSS-SECTIONAL HEIGHT

The paper deals with problems of vibrations of straight bars with constant width. The height varies linearly in the plane of bending. We consider harmonic transverse vibrations of the bar in the direction of the constant dimension. A general solution of the amplitude equation is obtained in the form of the power series. From this an approximate solution is determined for the amplitude and slope-deflection equations. The obtained results are illustrated by two examples. In the first the natural frequency is determined while in the second forced vibrations are obtained.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 maja 1982 roku

O PEWNYCH WIĘZACH BRZEGOWYCH W KLASYCZNEJ TEORII PŁYT

KAZIMIERZ MYŚLECKI

Politechnika Wroclawska

1. Wstęp

W pracy rozpatruje się, w sposób ogólny, zagadnienie współpracy cienkiej płyty z innymi konstrukcjami np. powłoką, belką, prętem cienkościennym itp. Zakłada się, że połączone są one z płytą na jej brzegu. Analiza takiej złożonej konstrukcji jest często niemożliwa, pomimo dysponowania dobrym aparatem numerycznym (metodą elementów skończonych). Rozmiar zagadnienia przekracza zwykle wtedy możliwości dostępnego sprzętu obliczeniowego. Dlatego też istotne jest niezależne rozwiązanie poszczególnych elementów złożonej konstrukcji z uwzględnieniem ich współpracy.

W połączeniach płyty z innymi dźwigarami powierzchniowymi można przyjmować, z dobrym przybliżeniem w wielu przypadkach, sztywne zespolenie dźwigara z płytą (ze względu na dużą sztywność dźwigarów powierzchniowych w niektórych kierunkach). Natomiast oparcie płyty na belce jest swego rodzaju podparciem sprężystym.

Analitycznym narzędziem, które zastosujemy do rozwiązania przedstawionego wyżej zagadnienia jest mechanika ciała stałego z więzami [1, 2, 3, 4]. Punktem wyjścia będzie klasyczna teoria płyt [5].

2. Podstawowe równania klasycznej teorii płyt

Na płaszczyźnie środkowej S cienkiej płyty o grubości h przyjmujemy krzywoliniowy układ współrzędnych Θ^1, Θ^2 . Współrzędne tensora metrycznego oznaczamy przez $A^{\alpha\beta}$, współrzędne alternatora $-\varepsilon_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$), a różniczkowanie kowariantne kreską pionową. Wówczas zagadnienie zginania płyty poddanej obciążeniu $q(\Theta^1, \Theta^2)$ prostopadłemu do płaszczyzny środkowej można opisać grupami równań:

warunek równowagi dla tensora napięć momentowych $M_{\alpha\beta}$

$$(2.1) \quad M^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} + q = 0,$$

związki geometryczne

$$(2.2) \quad \kappa_{\alpha\beta} = -w_{|\alpha\beta},$$

relacje konstytutywne

$$(2.3) \quad M^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta},$$

gdzie w jest ugięciem płyty, a $\varkappa_{\gamma\delta}$ — tensorem zmian krzywizny płaszczyzny środkowej. Tensor sprężystości $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ dla płyty izotropowej o sztywności zgięciowej D przyjmuje postać

$$(2.4) \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = D \left[\nu A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + \frac{1-\nu}{2} (A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma}) \right]^{1)}$$

Na krzywej C będącej śladem płaszczyzny środkowej S na powierzchni brzegowej płyty zadaje się geometryczne i statyczne warunki brzegowe. Krzywą C parametryzujemy współrzędną długości łuku λ i określamy wektor n_α normalny do C .

Definiujemy następujące operatory:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi_n(\cdot) &= \frac{\partial}{\partial n}(\cdot), \\ M_n(\cdot) &= n_\alpha n_\beta(\cdot), \\ V_n(\cdot) &= n_\beta(\cdot) \Big|_\alpha - \frac{\partial}{\partial \lambda} [\varepsilon_{\alpha\gamma}(\cdot) n_\beta n^\gamma], \end{aligned}$$

które służą do określenia geometrycznych

$$(2.6) \quad \begin{aligned} w &= w_0, \\ \varphi_n(w) &= \varphi_0, \end{aligned}$$

i statycznych warunków brzegowych

$$(2.7) \quad \begin{aligned} M_n(M^{\alpha\beta}) &= m_0, \\ V_n(M^{\alpha\beta}) &= p_0, \end{aligned}$$

gdzie w_0 , φ_0 , m_0 i p_0 są znanymi funkcjami określonymi na C .

W dalszych rozważaniach, w celu uproszczenia wzorów, będziemy pomijać argumenty operatorów brzegowych (2.5).

3. Równania więzów brzegowych i zasada idealności więzów

Rozpatrzmy dwa rodzaje więzów brzegowych danych na częściach C_1 i C_2 krzywej C .

Pierwszy rodzaj więzów opisuje współpracę płyty ze sztywną konstrukcją i można go przedstawić przy pomocy równań

$$(3.1) \quad \alpha_i(\lambda, w, \varphi_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \text{ na } C_1.$$

Nieznane parametry $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M$ nie zależą od współrzędnej λ .

Na krzywej C_2 przyjmujemy równania więzów

$$(3.2) \quad \gamma_i(\lambda, M_n, V_n, \varphi_n, \Delta\varphi_n, \dots, \nabla^k \varphi_n, w, w, \dots, \nabla^L w) = 0. \\ (i = 1, 2, \dots, s)$$

Opisują one wiele przypadków sprężystego współdziałania płyty z innymi elementami

¹⁾ Równania (2.1)÷(2.3) z tensorem sprężystości (2.4) można sprowadzić do jednego różniczkowego równania zginania płyty $\Delta\Delta w = q/D$ ($\Delta\Delta$ — bilaplasjan)

konstrukcyjnymi na brzegu C_2 . Operatory ∇^j oznaczają różniczkowanie po λ ($\nabla^j(\cdot) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j}(\cdot)$)

Funkcje α_i , γ_i są liniowymi funkcjami swoich argumentów (z wyjątkiem argumentu λ).

Równania więzów (3.1), (3.2) modyfikują warunki brzegowe (2.6), (2.7) na C_1 i C_2 , które można obecnie zapisać w postaci [4]

$$(3.3) \quad \begin{aligned} M_n &= m_r + m_0, \\ V_n &= p_r + p_0 \quad \text{na } C_1, \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} w &= -w_r + w_0, \\ \varphi_n &= -\varphi_r + \varphi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n &= m_r + m_0, \\ V_n &= p_r + p_0 \quad \text{na } C_2. \end{aligned}$$

Nieznanne funkcje φ_r , w_r , m_r i p_r są przemieszczeniami i siłami reakcyjnymi na krzywych C_1 i C_2 powstałymi na wskutek nałożenia więzów (3.1) i (3.2).

Dla więzów (3.1) i (3.2) przyjmujemy zasadę idealności więzów [3, 4]

$$(3.5) \quad \int_{C_1} (m_r \delta \varphi_n + p_r \delta w) d\lambda + \int_{C_2} (m_r \delta \varphi_n + p_r \delta w + \varphi_r \delta M_n + w_r \delta V_n) d\lambda + \\ + \sum_{N=0}^{K-1} [M_r^N \delta \nabla^N \varphi_n]_{\lambda_0}^{\lambda_k} + \sum_{N=0}^{L-1} [P_r^N \delta \nabla^N w]_{\lambda_0}^{\lambda_k} = 0.$$

Nawiasem kwadratowym w ostatnich składnikach (3.5) oznaczono różnicę wyrażenia w nawiasie na końcach krzywej C_2 ($\lambda = \lambda_0$ i $\lambda = \lambda_k$), a M_r^N ($N = 0, 1, \dots, K-1$) i P_r^N ($N = 0, 1, \dots, L-1$) są występującymi tam reakcjami.

Przemieszczenia i siły wirtualne w (3.5) (oznaczone symbolem δ) spełniają równania [4]

$$(3.6) \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial w} \delta w + \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_n} \delta \varphi_n + \sum_{N=1}^M \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_N} \delta \beta_N = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad \text{na } C_1,$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial M_n} \delta M_n + \frac{\partial \gamma_i}{\partial V_n} \delta V_n + \sum_{N=0}^K \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nabla^N \varphi_n} \delta \nabla^N \varphi_n + \\ + \sum_{N=0}^L \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nabla^N w} \delta \nabla^N w = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad \text{na } C_2.$$

Oznaczmy przez $\psi_i = \psi_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) i $\mu_i = \mu_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) mnożniki Lagrange'a na C_1 i C_2 oraz pomnożmy przez nie równania (3.6) i (3.7) wykonując jednocześnie sumowanie po i . W pierwszym przypadku otrzymamy

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^P \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial w} \delta w + \sum_{i=1}^P \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_n} \delta \varphi_n + \sum_{i=1}^P \sum_{N=1}^M \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_N} \delta \beta_N = 0.$$

Natomiast w drugim — po stosownych przekształceniach mamy

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial M_n} \delta M_n + \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial V_n} \delta V_n + (a + \nabla X^0) \delta \varphi_n - \nabla \left(\sum_{N=0}^{K-1} X^N \nabla \delta \varphi_n \right) + \\ + (b + \nabla Y^0) \delta w - \nabla \left(\sum_{N=0}^{L-1} Y^N \nabla \delta w \right) = 0.$$

We wzorach (3.9) uwzględniono oznaczenia

$$(3.10) \quad a = \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \varphi_n}, \\ X^N = - \sum_{i=1}^S \sum_{J=0}^{K-1-N} (-1)^J \nabla^J \left(\mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nabla^{N+J+1} \varphi_n} \right)$$

$$(3.11) \quad b = \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial w}, \\ Y^N = - \sum_{i=1}^S \sum_{J=0}^{L-1-N} (-1)^J \nabla^J \left(\mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nabla^{N+J+1} w} \right).$$

Całkując (3.8) i (3.9) odpowiednio po krzywych C_1 i C_2 i dodając następnie do równania (3.5) możemy, po wykorzystaniu lematu du Bois-Reymonda, otrzymać przemieszczenia i siły reakcyjne [1]

$$(3.12) \quad m_r = \sum_{i=1}^P \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_n}, \\ p_r = \sum_{i=1}^P \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial w},$$

$$\sum_{i=1}^P \int_{C_1} \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_N} d\lambda = 0 \quad (N = 1, 2, \dots, M) \text{ na } C_1$$

i

$$(3.13) \quad m_r = a + \nabla X^0, \quad p_r = b + \nabla Y^0, \\ \varphi_r = \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial M_n}, \quad w_r = \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial V_n} \text{ na } C_2$$

oraz

$$(3.14) \quad \begin{aligned} M_r^J &= -X^J \quad (J = 0, 1, \dots, K-1), \\ P_r^J &= -Y^J \quad (J = 0, 1, \dots, L-1) \end{aligned}$$

na końcach krzywej C_2 ($\lambda = \lambda_0$ i $\lambda = \lambda_k$).

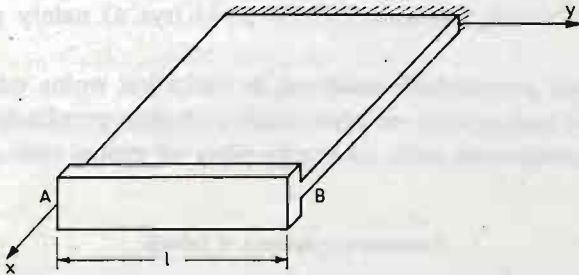
Równania (3.1), (3.2), (3.4), (3.3), (3.12), (3.13) i (3.14) łącznie ze związkami (2.1), (2.2) i (2.3) stanowią kompletny układ równań, który może służyć do rozwiązania zagadnienia zginania płyt z więzami (3.1) i (3.2).

Zauważmy, że więzy typów (3.1) i (3.2) mogą być dane na tej samej części brzegu C ($C_1 = C_2$), co nieznacznie modyfikuje przedstawione wyżej rozważania.

4. Przykłady więzów brzegowych

Weźmy najpierw pod uwagę więzy opisywane równaniami (3.1). W tym celu rozpatrzymy płytę prostokątną, na której jednym boku jest przymocowana sztywna belka (rys. 1). Więzy (3.1) mają tutaj postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \alpha^1: \varphi_n - \beta_3 &= 0, \\ \alpha_2: w - \beta_1 y - \beta_2 &= 0, \end{aligned}$$



Rys. 1

gdyż ugięcie sztywnej belki jest funkcją liniową, a kąt obrotu względem osi belki jest stały. Z równań (3.12) obliczamy siły reakcyjne

$$(4.2) \quad \begin{aligned} m_r &= \psi_1, \\ p_r &= \psi_2 \text{ na odcinku } AB \end{aligned}$$

oraz

$$(4.3) \quad \int_0^l \psi_1 dy = 0, \quad \int_0^l \psi_2 dy = 0, \quad \int_0^l \psi_2 y dy = 0.$$

Warunki (4.3) wobec (4.2) są równaniami równowagi sił reakcyjnych działających na sztywną belkę.

Przykładem konstrukcji z więzami (3.2) jest płyta z rys. 1 połączona ze sprężystą belką

o sztywności skrętej D_s i giętej D_g . Wówczas równania więzów można przyjąć w postaci

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \gamma_1: D_s \frac{d^2 \varphi_n}{dy^2} + M_n &= 0, \\ \gamma_2: D_g \frac{d^4 w}{dy^4} + V_n &= 0. \end{aligned}$$

Siły brzegowe M_n i V_n występują w równaniach (4.4) w miejscu obciążeń skręcanej i zginanej belki. Na podstawie odpowiednich wzorów z rozdziału 3. otrzymujemy przemieszczenia i siły reakcyjne

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \varphi_r &= \mu_1, & w_r &= \mu_2, \\ m_r &= D_s \frac{d^2 \mu_1}{dy^2}, & p_r &= D_g \frac{d^4 \mu_2}{dy^4} \text{ na odcinku } AB \end{aligned}$$

oraz

$$(4.6) \quad \begin{aligned} M_r^0 &= -D_s \frac{d\mu_1}{dy}, & M_r^1 &= D_s \mu_1, \\ P_r^0 &= -D_g \frac{d^3 \mu_2}{dy^3}, & P_r^1 &= D_g \frac{d^2 \mu_2}{dy^2}, \\ P_r^2 &= -D_g \frac{d\mu_2}{dy}, & P_r^3 &= D_g \mu_2 \text{ w punktach } A \text{ i } B. \end{aligned}$$

Gdy weźmie się pod uwagę swobodę końców belki (rys. 1) należy przyjąć $M_r^0 = P_r^0 = P_r^1 = 0$.

W obu powyższych przykładach założono, że belka jest wolna od obciążeń zewnętrznych (z wyjątkiem sił reakcyjnych od płyty) oraz w drugim przykładzie pominięto wpływ przesunięcia osi przyrzutowej belki od brzegu płyty na postać równania (4.4)₁.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Non-linear mechanics of constrained material continua*. I., Arch. Mech., 1, 26, 1974.
2. Cz. WOŹNIAK, *On the Elastodynamics of Material Continua with Internal Constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., vol. XXII, No. 7-8, 1974.
3. Cz. WOŹNIAK, *Elastic Bodies with Constraints Imposed on Deformations, Stresses and Momenta*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., vol. XXII, No. 7-8, 1974.
4. Cz. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN, Warszawa-Poznań 1982.
5. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty — obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1980.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ СВЯЗЯХ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

В работе рассматривается „в обобщенном виде” проблема сотрудничества пластины с другими типами конструкции (балкой, оболочкой и т.п.) соединенными с пластиной на ее краях. Этот вопрос решается с точки зрения механики конструкции со связями. В настоящей работе подробно исследованы два примера краевых связей.

Summary

ON CERTAIN BOUNDARY CONSTRAINTS IN CLASSICAL THEORY OF PLATES

The problem of co-operation of bent plate with other elements (beam, shell etc.) connected on the edge with the plate is discussed. The problem is solved as a case of the structural mechanics with constraints. Two examples of boundary constraints are given and analysed.

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1983 roku

OPTIMALIZACJA PARAMETRYCZNA UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O NIECIĄGŁYCH CHARAKTERYSTYKACH

JERZY ŁUCZKO

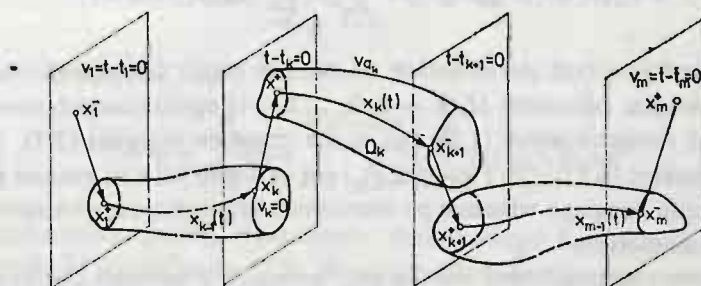
Politechnika Krakowska

1. Wstęp

Zagadnienie doboru optymalnych parametrów układu dynamicznego przy założonej jego strukturze jest zadaniem optymalizacji z ograniczeniami w postaci równań różniczkowych. Uzyskanie jawnej zależności funkcji celu od parametrów jest możliwe tylko dla nielicznej grupy problemów. Większość zagadnień praktycznych wymaga rozwiązania silnie nieliniowych równań różniczkowych rzędu wyższego niż drugi. Wiąże się to z koniecznością stosowania metod numerycznych przy wykorzystaniu EMC. Duży czas obliczeń związany z rozwiązaniem zadania optymalizacji skłania do przyjmowania uproszczonych modeli zjawiska, ujmujących jednak wpływ istotnych parametrów na stan układu. Uproszczenia te mogą polegać na określeniu charakterystyk elementów istotnie nieliniowych za pomocą funkcji nieciągłych lub dystrybucji. Prowadzi to do zagadnienia optymalizacji dynamicznej układu opisanego nieciągłym wektorem stanu. Rozwiązanie powyższego problemu uzyskano, bazując na ideach rachunku wariacyjnego [7].

2. Sformułowanie problemu

Rozważmy zagadnienie znalezienia optymalnych wartości parametrów $a_i (i = 1, 2 \dots l)$ układu dynamicznego przy ustalonej jego strukturze. Niech ruch badanego układu będzie opisany nieciągłym n — wymiarowym wektorem stanu $x(t)$. Zdefiniujemy przez $x_k (k = 1, 2, \dots, m-1)$ ciągłe odcinki trajektorii układu, zaś przez Ω_k obszary, w których są one zawarte (rys. 1).



Rys. 1

Wprowadźmy powierzchnie:

$$V_{g_k}(x_k, t, a) = 0 \quad g_k = 1, 2, \dots, s_k, \quad (2.1)$$

ograniczające obszary Ω_k . Oznaczmy dalej przez $\vartheta_k (k = 1, 2, \dots, m)$ te z powierzchni (2.1), które są kolejno przecinane trajektorią układu. Ograniczymy się przy tym do rozpatrzenia zadania z ustalonymi końcami tzn. przyjmiemy:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= t - t_1, \\ \vartheta_m &= t - t_m, \end{aligned}$$

Załadajmy teraz spełnienia wewnątrz obszarów Ω_k układu równań różniczkowych w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{jk} &= f_{jk}(x_k, t, a) \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

zaś w punktach $t = t_k$ przecięcia powierzchni (2.1) trajektorią układu niech będą dane warunki:

$$\begin{aligned} x_{jk}^+ &= \omega_{jk}(x_k^-, t_k, a), \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} x_{jk}^- &= x_j(t_k - 0) = x_{j, k-1}(t_k), \\ x_{jk}^+ &= x_j(t_k + 0) = x_{jk}(t_k). \end{aligned}$$

Dla $t = t_k$ zachodzą związki:

$$\vartheta_k(x_k^-, t_k, a) = 0. \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

Zadajmy ponadto warunki jakie winny spełniać końce trajektorii układu

$$\varphi_j(x_1^-, t_1, x_m^+, t_m, a) = 0. \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Zadanie optymalizacji można sformułować następująco:

Należy znaleźć wektor stałych sterowań $a_i (i = 1, 2, \dots, l)$, zapewniający minimum funkcjonału w postaci:

$$J = \varphi_0(x_1^-, t_1, x_m^+, t_m, a) + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} f_{0k}(x_k, t, a) dt, \quad (2.6)$$

przy czym odpowiadające tym sterowaniom odcinkami ciągłe funkcje $x_j(t) / j = 1, 2, n$ winny spełniać wewnątrz obszarów $\Omega_k (k = 1, 2, \dots, m-1)$ ograniczonych powierzchniami (2.1) układ równań różniczkowych (2.2), zaś na ich brzegach warunki (2.3), (2.4), (2.5).

Założymy, że funkcje f_{jk} i f_{0k} , φ_j i φ_0 oraz ϑ_k i ω_{jk} są ciągłe wraz ze swoimi pochodnymi cząstkowymi do rzędu drugiego włącznie po wszystkich argumentach wewnątrz odpowiednich obszarów domkniętych.

Ponadto założymy, że trajektorie układu przy przejściu z jednego obszaru do następnego przecinają tylko jedną z powierzchni (2.1) i nie dochodzą do nich stycznie tzn. jest

spełniony warunek:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_{jk-1}} f_{jk-1} + \frac{\partial \vartheta_k}{\partial t} \Big|_{t=t_k-0} \neq 0 \quad (2.7)$$

$$k = 1, 2 \dots m$$

3. Warunki konieczne minimum funkcjonału

Rozpatrywane zagadnienie jest zadaniem na ekstremum warunkowe przy czym nałożone ograniczenia w postaci równań różniczkowych winny być spełnione we wszystkich przedziałach (t_k, t_{k+1}) gdzie $k = 1, 2 \dots m-1$, zaś warunki (2.3), (2.4), (2.5) w punktach $t = t_k (k = 1, 2 \dots m)$.

W celu znalezienia warunków koniecznych minimum funkcjonału wprowadzimy zmienne w czasie mnożniki Lagrange'a $\lambda_{kj}(t)$ dla równań (2.2) oraz stałe mnożniki ν_k, μ_{kj} oraz ϱ_j odpowiednio dla związków (2.4), (2.3) i (2.5).

Utworzymy funkcjonał pomocniczy:

$$I = J + \sum_{j=1}^n \varrho_j \varphi_j + \sum_{k=1}^m \left[\nu_k \vartheta_k + \sum_{j=1}^n \mu_{kj} (x_{jk}^+ - \omega_{jk}) \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \lambda_{kj} (\dot{x}_{jk} - f_{jk}) dt.$$

Wprowadzimy oznaczenia:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{j=1}^n \varrho_j \varphi_j$$

$$\Theta_k = \nu_k \vartheta_k + \sum_{j=1}^n \mu_{kj} (x_{jk}^+ - \omega_{jk}) \quad k = 1, 2 \dots m \quad (3.1)$$

$$H_k = -f_{0k} + \sum_{j=1}^n \lambda_{kj} f_{jk} \quad k = 1, 2 \dots m-1$$

i zapiszemy go następująco:

$$I = \varphi + \sum_{k=1}^m \Theta_k + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{kj} \dot{x}_{jk} - H_k \right) dt \quad (3.2)$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum warunkowego funkcjonału (2.6) jest zerowanie się wariacji ΔJ funkcjonału (3.2). Wyznamy najpierw wariacje poszczególnych składników występujących we wzorze (3.2)

$$\Delta\varphi = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j1}^-} \Delta x_{j1}^- + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{jm}^+} \Delta x_{jm}^+ \right)$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial t_m} \delta t_m + \sum_{i=1}^l \frac{\partial\varphi}{\partial a_i} \delta a_i$$

$$\Delta\Theta_k = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\Theta_k}{\partial x_{jk}^-} \Delta x_{jk}^- + \frac{\partial\Theta_k}{\partial x_{jk}^+} \Delta x_{jk}^+ \right)$$

$$+ \frac{\partial\Theta_k}{\partial t_k} \delta t_k + \sum_{i=1}^l \frac{\partial\Theta_k}{\partial a_i} \delta a_i,$$

$$\Delta \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{kj} \dot{x}_{jk} - H_k \right) dt = f_{0k} \delta t \Big|_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} +$$

$$\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\lambda_{kj} \delta \dot{x}_{jk} + \left(\dot{x}_{jk} - \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{kj}} \right) \delta \lambda_{kj} - \frac{\partial H_k}{\partial x_{jk}} \delta x_{jk} \right] - \sum_{i=1}^l \frac{\partial H_k}{\partial a_i} \delta a_i \right\} dt.$$

Po scałkowaniu przez części wyrażenia:

$$\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \lambda_{kj} \delta \dot{x}_{jk} dt = \lambda_{kj} \delta x_{jk} \Big|_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} - \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \dot{\lambda}_{kj} \delta x_{jk} dt$$

i wykorzystaniu związków:

$$\Delta x_{jk}^+ = \Delta x_{jk}(t_k+0) = \delta x_{jk}(t_k+0) + \dot{x}_{jk}(t_k+0) \delta t_k$$

$$\Delta x_{jk}^- = \Delta x_{jk-1}(t_k-0) = \delta x_{jk-1}(t_k-0) + \dot{x}_{jk-1}(t_k-0) \delta t_k$$

wariację funkcjonału (3.2) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \Delta I = & \sum_{i=1}^l \left[\frac{\partial\varphi}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial\Theta_k}{\partial a_i} - \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \frac{\partial H_k}{\partial a_i} dt \right] \delta a_i \\ & + \sum_{k=2}^{m-1} \left\{ \left(H_k^+ - H_k^- + \frac{\partial\Theta_k}{\partial t_k} \right) \delta t_k + \sum_{j=1}^n \left[\left(\lambda_{jk}^- + \frac{\partial\Theta_k}{\partial x_{jk}^-} \right) \Delta x_{jk}^- + \left(-\lambda_{kj}^+ + \frac{\partial\Theta_k}{\partial x_{jk}^+} \right) \Delta x_{jk}^+ \right] \right\} \\ & + \left(H_1^+ + \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} + \frac{\partial\Theta_1}{\partial t_1} \right) \delta t_1 + \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j1}^-} + \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_{j1}^-} \right) \Delta x_{j1}^- + \left(-\lambda_{1j}^+ + \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_{j1}^+} \right) \Delta x_{j1}^+ \right] \\ & + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_m} - H_m^- + \frac{\partial\Theta_m}{\partial t_m} \right) \delta t_m + \sum_{j=1}^n \left[\left(\lambda_{mj}^- + \frac{\partial\Theta_m}{\partial x_{jm}^-} \right) \Delta x_{jm}^- + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{jm}^+} + \frac{\partial\Theta_m}{\partial x_{jm}^+} \right) \Delta x_{jm}^+ \right] \\ & + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \left(\dot{\lambda}_{kj} + \frac{\partial H_k}{\partial x_{jk}} \right) \delta x_{jk} dt. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Wprowadzono tu oznaczenia:

$$\begin{aligned}\lambda_{kj}^- &= \lambda_{k-1, j}(t_k-0), & \lambda_{kj}^+ &= \lambda_{kj}(t_k+0), \\ H_k^- &= H_{k-1}(t_k-0), & H_k^+ &= H_k(t_k+0),\end{aligned}\quad (3.4)$$

oraz wykorzystano równania stanu (2.2) zapisane w postaci:

$$\dot{x}_{jk} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{kj}}, \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \dots n \\ k = 1, 2 \dots m-1 \end{matrix}$$

Występujące we wzorze (3.3) wariacje $\delta x_{jk}(t)$, Δx_{jk}^- , Δx_{jk}^+ oraz δt_k nie są niezależne między sobą i winny spełniać związki: (2.2), (2.3), (2.4) i (2.5). W związku z tym należy tak wybrać mnożniki Lagrange'a $\lambda_{kj}(t)$, v_k , μ_{kj} oraz ρ_j , aby zerowały się wyrażenia stojące przy zależnych wariacjach. Korzystając z tego warunku można wyznaczyć układ równań sprzężonych:

$$\dot{\lambda}_{kj} = -\frac{\partial H_k}{\partial x_{jk}} \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \dots n \\ k = 1, 2 \dots m-1 \end{matrix} \quad (3.5)$$

określający zmienne współczynniki Lagrange'a $\lambda_{kj}(t)$. Odpowiedni układ warunków brzegowych i zarazem równań na mnożniki ρ_j otrzymamy, przyrównując do zera wyrażenia przy wariacjach Δx_{jk}^- , Δx_{jk}^+ i δt_k dla $k = 1$ oraz $k = m$. Pozostałe równania (dla $k = 2 \dots m-1$) tzw. warunki Weierstrassa Erdmana:

$$\begin{aligned}\lambda_{kj}^- &= -\frac{\partial \Theta_k}{\partial x_{jk}^-} \\ \lambda_{kj}^+ &= \frac{\partial \Theta_k}{\partial x_{jk}^+} \\ H_k^+ + H_k^- + \frac{\partial \Theta_k}{\partial t_k} &= 0 \quad \begin{matrix} k = 2 \dots m-1 \\ j = 1, 2 \dots n \end{matrix}\end{aligned}\quad (3.6)$$

dają związki dla rozwiązań $\lambda_{kj}(t)$ równań sprzężonych w punktach nieciągłości $t = t_k$ oraz pozwalają wyznaczyć mnożniki v_k i μ_{kj} . Przy spełnieniu powyższych warunków wzór na wariację funkcjonału przyjmie prostą postać:

$$\Delta I = \sum_{i=1}^l \frac{\partial I}{\partial a_i} \delta a_i$$

gdzie

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Theta_k}{\partial a_i} - \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \frac{\partial H_k}{\partial a_i} dt \quad (3.7)$$

$$i = 1, 2 \dots l,$$

jest gradientem funkcjonału (3.2).

Wariacje δa_i ($i = 1, 2 \dots l$) są niezależne, warunkiem koniecznym ekstremum funkcjonału jest więc zerowanie się wyrażen (3.7).

4. Metoda numeryczna rozwiązania zagadnienia

Rozwiązanie przedstawionego powyżej problemu można praktycznie uzyskać jedynie na drodze obliczeń numerycznych. Należy w tym celu zastosować jedną ze znanych metod gradientowych optymalizacji [2], [4] przykładowo metodą zmiennej metryki Fletchera-Powella-Davidona. Metody te wymagają na każdym kroku iteracji podania wartości funkcji celu (2.6) oraz jej gradientu (3.7). Wyznaczenie tych wielkości związane jest ściśle z czasochłonnym rozwiązywaniem zagadnienia brzegowego odpowiednio dla równań wyjściowych (2.2) i sprzężonych (3.5). Pojawia się ponadto problem istnienia rozwiązania zagadnienia brzegowego zwłaszcza dla nieliniowych równań stanu. Warunki brzegowe (2.5) oraz pozostałe ograniczenia wyznaczają pewien obszar parametrów, w którym to obszarze istnieje rozwiązanie postawionego zadania.

W trakcie iteracyjnego procesu optymalizacji dobierane parametry mogą wykraczać poza ten obszar. Dlatego też wskazane jest traktowanie tego zadania jako optymalizacji z ograniczeniami w postaci warunków brzegowych. Można się tu posłużyć metodami funkcji kary, polegającymi na modyfikacji funkcji celu przez wprowadzenie do niej wyrażenia reprezentującego karę za przekroczenie ograniczeń. Według metody Powella z przesuwaną funkcją kary [2] można przyjąć

$$J_p = J + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \gamma_j (\varphi_j - \alpha_j)^2, \quad (4.1)$$

przy czym γ_j i α_j ($j = 1, 2 \dots n$) są wektorami współczynników i przesunięć kary, zmienianymi w trakcie procesu obliczeniowego. Poszukiwanie ekstremum warunkowego odbywa się poprzez ciąg kolejnych minimalizacji bezwarunkowych zmodyfikowanej funkcji celu (4.1), zaś dobieranymi parametrami są teraz wektor szukanych parametrów oraz wektor warunków początkowych, zapewniający rozwiązanie zagadnienia brzegowego. Uwzględnienie warunków (2.5) w zmodyfikowanej funkcji celu (4.1) powoduje istotną zmianę postaci funkcji φ (wzór 3.1). Zapiszemy ją następująco:

$$\varphi = \varphi_p + \sum_{j=1}^n \varrho_j (x_{j1} - a_{l+j}), \quad (4.2)$$

przy czym w miejsce φ_0 wprowadzono tu wyrażenie:

$$\varphi_p = \varphi_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \gamma_j (\varphi_j - \alpha_j)^2.$$

Jak widać problem optymalizacji polega na znalezieniu $(l+n)$ wymiarowego wektora parametrów, minimalizującego funkcjonal (4.1).

Jednakże przyjęcie funkcji φ w postaci (4.2) prowadzi do zagadnienia początkowego dla równań wyjściowych i zagadnienia brzegowego z warunkami na końcu dla równań sprzężonych. To ostatnie można, wprowadzając zmienną $\tau = t_m - t$, również sprowadzić do dużo prostszego w rozwiązywaniu zagadnienia początkowego. Dla tak postawionego zagadnienia optymalizacji algorytm wyznaczenia gradientu funkcjonału (4.1) można przedstawić w następujących punktach:

I. Wprowadźmy dla ujednoczenia zapisu oznaczenia

$$H_m^+ = \frac{\partial \varphi}{\partial t_m} = f_{om}^+, \quad f_{jm}^+ = 0,$$

$$\lambda_{mj}^+ = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{jm}^+}, \quad j = 1, 2 \dots n.$$

Przy przyjęciu funkcji φ w postaci (4.2) wyrażenia te nie zależą od mnożników ρ_j .
Podstawmy $k \leftarrow m$

II. Wykorzystując warunki Weierstrassa-Erdmana (3.6) oraz związki (3.1) należy wyznaczyć mnożniki μ_{kj} i v_k . Są one równe:

$$\begin{aligned} \mu_{kj} &= \lambda_{kj}^-, \quad j = 1, 2 \dots n, \\ v_k &= \left(\sum_{s=1}^n \mu_{ks} w_{sk} - w_{ok} \right) / v_k, \end{aligned} \quad (4.3)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} w_{ok} &= f_{ok}^- - f_{ok}^+, \\ w_{jk} &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_{sk}^-} f_{sk}^- + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial t_k} - f_{sk}^+, \\ v_k &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial \theta_k}{\partial x_{sk}^-} f_{sk}^- + \frac{\partial \theta_k}{\partial t_k}. \end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie na mocy założenia (2.7) jest różne od zera.

Następnie należy określić:

$$\lambda_{kj}^- = \sum_{s=1}^n \mu_{ks} \frac{\partial \omega_{sk}}{\partial x_{jk}^-} - v_k \frac{\partial \theta_k}{\partial x_{sk}^+}, \quad j = 1, 2 \dots n, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial a_i} = -\sum_{s=1}^n \mu_{ks} \frac{\partial \omega_{sk}}{\partial a_i} + v_k \frac{\partial \theta_k}{\partial a_i}, \quad i = 1, 2 \dots l. \quad (4.5)$$

Podstawmy $k \leftarrow k-1$

III. Po wprowadzeniu zmiennej $\tau = t_m - t$ można, wykorzystując związki (4.4), scałkować równania sprzężone w przedziale $(t_m - t_{k+1}, t_m - t_k)$

$$\dot{\lambda}_{kj}(\tau) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{sk}}{\partial x_{jk}} \lambda_{ks}(\tau) - \frac{\partial f_{ok}}{\partial x_{jk}}, \quad j = 1, 2 \dots n,$$

oraz określić wyrażenia:

$$\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \frac{\partial H_k}{\partial a_i} dt = \int_{t_m-t_{k+1}+0}^{t_m-t_k-0} \left[\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{sk}}{\partial a_i} \lambda_{ks}(\tau) - \frac{\partial f_{ok}}{\partial a_i} \right] d\tau \quad (4.6)$$

$$i = 1, 2 \dots l$$

IV. W celu wyznaczenia gradientu (3.7) funkcjonału należy powtarzać czynności określone w punktach (II) i (III) aż do osiągnięcia przez k wartości jeden.

Dla $k = 1$ zdefiniujemy:

$$H_{\bar{1}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} = -f_{\bar{0}1}, \quad f_{\bar{j}1} = 0, \quad (4.7)$$

$$\lambda_{\bar{1}j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\bar{j}1}}, \quad j = 1, 2 \dots n.$$

W oparciu o wzory (4.3) można określić wyrażenia (4.4) i (4.5), a następnie, porównując (4.4) i (4.7) z uwzględnieniem (4.2), wyznaczyć wartości mnożników ρ_j .

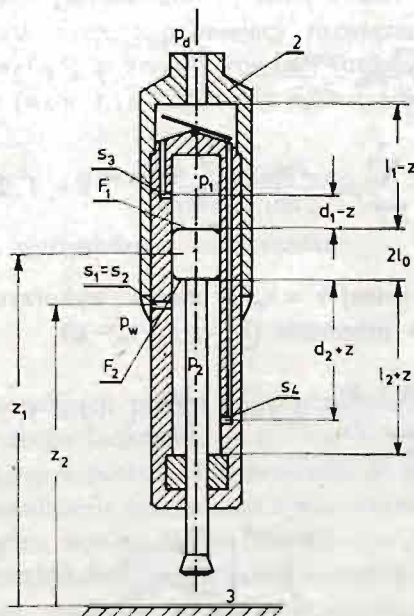
$$\rho_j = \lambda_{\bar{1}j} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_{\bar{j}1}}, \quad j = 1, 2 \dots n. \quad (4.8)$$

Łatwe jest teraz obliczenie pochodnych funkcji (4.2) podług odpowiednich parametrów $a_i (i = 1, 2 \dots l+n)$.

Sumując dodatkowo wartości kolejnych wyrażeń (4.5) i (4.6) można ostatecznie określić gradient funkcjonału (4.1).

5. Przykład

W formie przykładu rozważmy zagadnienie optymalizacji konstrukcji pneumatycznych narzędzi wibroudarowych [1], [6] prowadzonej w celu zmniejszenia poziomu drgań przekazywanych na człowieka. Intensywność emitowanych wibracji określimy wartością średnią energii kinetycznej drgań korpusu 2 narzędzia (rys. 2):



Rys. 2

$$E_w = \frac{m_2}{2T} \int_0^T \dot{z}_2^2(t) dt, \quad (5.1)$$

przy czym ograniczymy się do zbadania stanów ustalonych drgań. Optymalizację przeprowadzimy w przedziale czasu $(0, T)$, wyznaczonym kolejnymi zderzeniami bijaka 1 z tzw. ogranicznikiem ruchu 3. Wprowadzimy także wyrażenie:

$$E_u = \frac{1}{2} m_1 [\dot{z}_1^2(T-0) - \dot{z}_1^2(T+0)]$$

określające wartość energii straconej w trakcie zderzenia i będące miarą efektywności pracy urządzenia. Po wykorzystaniu zgodnie z hipotezą Newtona współczynnika restytucji r przyjmie ona postać:

$$E_u = \frac{1}{2} m_1 (1-r^2) \dot{z}_1^2(T-0). \quad (5.2)$$

Rozpatrując dalej ruch układów w płaszczyźnie pionowej i zastępując oddziaływanie człowieka stałą siłą Q można uzyskać następujące związki na przemieszczenia bezwzględne $z_i(t)$:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \mu_2 z + \frac{1}{2} q t(T-t), \\ z_2(t) &= -\mu_1 z + \frac{1}{2} q t(T-t), \end{aligned} \quad t \in (0, T), \quad (5.3)$$

przy czym przemieszczenia względne $z = z_1 - z_2$ musi spełniać równanie różniczkowe w postaci:

$$M\ddot{z} + B\dot{z} + F_1(p_1 - p_w) - F_2(p_2 - p_w) = \mu_1 Q. \quad (5.4)$$

Wprowadzono tu oznaczenia:

$$M = m_1 m_2 / m, \quad m = m_1 + m_2,$$

$$\mu_i = m_i / m, \quad i = 1, 2$$

$$q = Q/m + g,$$

zaś pozostałe wielkości zaznaczono na rys. 2. Rozwiązanie zadania minimum wyrażenia (5.1) przy ograniczeniu w postaci równania różniczkowego (5.4) umożliwia optymalny dobór tylko niektórych parametrów konstrukcyjnych urządzenia. Pozostałe parametry określające np. położenia zaworów dolotowych lub wylotowych można wyznaczyć rozpatrując dodatkowo układ równań, opisujących zmiany ciśnienia $p_i(t)$ w odpowiedniej komorze narzędzia. Przy założeniu przemiany izotermicznej [5] równania te mają postać:

$$\frac{d}{dt} \{ [l_i + (-1)^i z] F_i p_i \} = k [f_{i+2} \Phi(p_i/p_d) - f_i p_i \Phi(p_w/p_i)], \quad i = 1, 2, \quad (5.5)$$

gdzie stała k charakteryzuje czynnik roboczy (powietrze) wypełniający komory narzędzia. Przyjmijmy tu dwa zasadnicze dla dalszych rozważań założenia:

— funkcje $f_i (i = 1, \dots, 4)$ opisujące zmiany pola przekroju odpowiedniego zaworu wylo-

towego bądź dolotowego określimy przy pomocy pewnych nieciągłych funkcji ψ_i

$$f_i = s_i \psi_i(p_1, p_2, z),$$

— przyjmujemy tzw. przepływ nadkrytyczny przez zawory [3], [5], co rozwiązane jest z założeniem stałości funkcji $\Phi(p)$.

Zdefiniujemy następujące współrzędne wektora stanu:

$$x_1 = p_1(l_1 - z),$$

$$x_2 = p_2(l_2 + z),$$

$$x_3 = z,$$

$$x_4 = \dot{z},$$

i poprzez nie określimy wyrażenia $\psi_i (i = 1, \dots, 4)$

Postać tych funkcji zależy od przyjętego rozwiązania układu rozrzędu narzędzia. Dla układu przedstawionego na rys. 2 dopływ powietrza sterowany jest głównie różnicą ciśnień $p_1 - p_2$, zaś wypływ zależy od przemieszczenia względnego x_3 .

Wprowadzając pomocniczo funkcje:

$$V_i = (-1)^i x_3 - l_0,$$

$$V_{i+2} = (-1)^i x_3 + d_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.6)$$

określające położenia zaworów wylotowych i dolotowych, a także:

$$V_{i+4} = (-1)^i [x_1/(l_1 - x_3) + x_2/(l_2 + x_3)], \quad i = 1, 2, \quad (5.7)$$

można funkcje ψ_i wyrazić następująco poprzez funkcje nieciągłe typu Heavisida'a:

$$\psi_i = H(V_i),$$

$$\psi_{i+2} = H(V_{i+2})H(V_{i+4}), \quad i = 1, 2 \quad (5.8)$$

Układ równań różniczkowych opisujących ruch badanego układu przyjmie postać:

$$\dot{x}_{1k} = k \left(s_3 \psi_{3k} - s_1 \psi_{1k} \frac{x_{1k}}{l_1 - x_{3k}} \right) / F_1,$$

$$\dot{x}_{2k} = k \left(s_4 \psi_{4k} - s_2 \psi_{2k} \frac{x_{2k}}{l_2 + x_{3k}} \right) / F_2, \quad (5.9)$$

$$\dot{x}_{3k} = x_{4k}$$

$$\dot{x}_{4k} = \left(Q_0 - Bx_{4k} - \frac{F_1 x_{1k}}{l_1 - x_{3k}} + \frac{F_2 x_{2k}}{l_2 + x_{3k}} \right) / M,$$

gdzie:

$$Q_0 = \mu_1 Q + (F_1 - F_2) p_w$$

przy czym przez ψ_{ik} oznaczono wartości funkcji (5.8) w obszarach w których wyrażenia (5.6), (5.7) nie zmieniają znaku. Tak więc otrzymany układ równań jest układem o nieciągłych prawych stronach, zapisanym w jednolitej postaci. Punkty nieciągłości t_k wyznaczone są poprzez miejsca zerowe funkcji $V_i (i = 1, \dots, 6)$

Powrócimy teraz do drugiego z przyjętych założeń.

Wprowadzimy wyrażenia:

$$V_{i+6} = p_d - \frac{x_i}{l_i + (-1)^i x_3}, \quad (5.10)$$

$$V_{i+8} = \frac{x_i}{l_i + (-1)^i x_3} - p_w, \quad i = 1, 2.$$

Przyjęcie założenia upraszczającego odnośnie funkcji Φ ogranicza zakres ważności równań (5.9) do obszarów, w których:

$$V_{i+6} > 0 \wedge V_i < 0 \vee V_{i+8} > 0 \wedge V_i > 0.$$

W pozostałych obszarach zmienne $p_i(t)$ winny być stałe, równe wartości p_d ciśnienia powietrza zasilającego układ lub wartości p_w ciśnienia otoczenia.

Przyjmując w tym przypadku za współrzędne $x_i(t)$ zmienne $p_i(t)$ oraz zastępując odpowiednio z równań (5.9) równaniem:

$$\dot{x}_i = 0$$

doprowadzimy zagadnienie optymalizacji do zadania z nieciągłym wektorem stanu, przy czym w punktach $t = t_k$, w których zerują się wyrażenia (5.10) muszą być spełnione związki:

$$x_{ik}^+ = \frac{x_{ik}^-}{l_i + (-1)^i x_{3k}^-}, \quad (5.11)$$

oraz dla $V_i = 0$

$$x_{ik}^+ = x_{ik}^- [l_i + (-1)^i x_{3k}^-], \quad (5.12)$$

ze względu na ciągłość zmiennej $p_i(t)$.

Pozostałe współrzędne wektora stanu są ciągłe.

Nieciągłość współrzędnej x_4 , będącą wynikiem przyjętej hipotezy odnośnie zderzenia, uwzględnimy w warunkach brzegowych przyjmując, że zderzenia następują w chwilach $t_1 = 0$ i $t_m = T$. Po wykorzystaniu związków (5.3), warunków okresowości ruchu oraz hipotezy Newtona warunki brzegowe przyjmą postać:

$$\begin{aligned} q_j &= x_{jm}^+ - x_{j1}^- = 0, \quad j = 1, 2, 3 \\ q_4 &= x_{4m}^+ - x_{41}^- + qT/\mu_1 = 0, \\ q_5 &= x_{41}^- + \frac{1}{2} qT \left[\frac{1-r}{1+r} \frac{1}{\mu_2} - \frac{2r}{1+r} \frac{1}{\mu_1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Za funkcjonal jakości (2.6) przyjmiemy wyrażenie (5.1). Po przecałkowaniu przez części z wykorzystaniem związków (5.3) można go przedstawić w ostatecznej postaci:

$$J = m_2 \left[\frac{1}{24} q^2 T^2 + \frac{1}{2} \mu_1 q (x_{3m}^+ + x_{31}^-) + \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} \mu_1^2 x_4^2 - \mu_1 q x_3 \right) dt \right]. \quad (5.14)$$

Postawione zadanie optymalizacji układu dynamicznego (5.9) z nałożonymi warunkami brzegowymi (5.13) oraz warunkami (5.11) lub (5.12) w punktach nieciągłości wektora stanu, przy przyjęciu funkcjonału jakości (5.14), jest równoważne wcześniej sformułowanemu zagadnieniu optymalizacji.

Szukany wektorem stałych sterowań „a” może tu być wektor parametrów konstrukcyjnych rozpatrywanego narzędzia udarowego. W przedstawionych poniżej wynikach za współrzędne dobieranego wektora przyjęto następujące wielkości:

$$a_1 = F_2/F_1, \quad a_2 = \mu_1/\mu_2, \quad a_3 = l_2/l_1, \\ a_4 = l_0/l, \quad a_5 = d_1/l_1, \quad a_6 = d_2/l_2,$$

przy czym ustalono całkowitą długość:

$$2l = l_1 + 2l_0 + l_2,$$

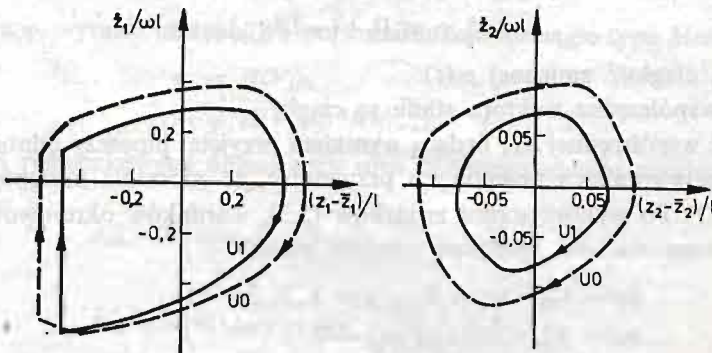
oraz masę „m” narzędzia. Optymalizację przeprowadzono dla zadanej wartości okresu drgań:

$$T = 0.8 \sqrt{l/g}$$

odpowiadającej w przybliżeniu okresowi pracy tzw. ubijaków formierskich. Także wartości pozostałych parametrów przyjęto w oparciu o istniejące rozwiązania konstrukcyjne wymienionych narzędzi.

Przy numerycznym rozwiązywaniu sformułowanego zadania optymalizacji wykorzystano podany w poprzednim punkcie algorytm rozwiązania wyznaczania gradientu funkcjonału.

Uzyskane rezultaty przedstawiamy w sposób poglądowy, nie wchodząc w szczegółowe rozważania, zawarte w pracy [6], a dotyczące np. wpływu poszczególnych parametrów na wartość przyjętej funkcji celu.



Rys. 3

Na rys. 3 pokazano ruch układu istniejącego U0 i optymalnego U1 na płaszczyznach fazowych (wprowadzono tu wartości średnie \bar{z}_1 i \bar{z}_2 współrzędnych $z_1(t)$ i $z_2(t)$ oraz częstość drgań $\omega = 2\pi/T$, zaś w tab. 1 zestawiono wartości parametrów charakteryzujących powyższe układy, a także dwa inne optymalne rozwiązania otrzymane dla zadanych wartości parametru a_1 .

Można tu zauważyć, że dysponując dostatecznie dużą ilością parametrów podlegających optymalizacji można zaprojektować różne układy (np. U2, U3) określone tylko nieznacznie gorszym od optymalnego (U1) wskaźnikiem jakości działania (5.1). Ze wzrostem wartości parametru a_1 rośnie wprawdzie wartość funkcji celu (5.1), ale równocześnie wzrasta wyrażenie (5.2), zaś stosunek tych wielkości pozostaje prawie stały.

Tabela I

Wielkość \ Układ	Tabela I			
	U0	U1	U2	U3
a_1	0.600	0.466	0.600	0.700
a_2	0.333	0.292	0.276	0.262
a_3	1.000	0.888	0.736	0.705
a_4	0.250	0.313	0.303	0.282
a_5	0.667	0.629	0.759	0.826
a_6	0.667	0.639	0.679	0.688
E_w/mgl	0.120	0.061	0.065	0.068
E_u/mgl	2.203	2.417	2.527	2.614
E_u/E_w	18.4	39.6	38.9	38.4

Tak więc, w zależności od tego czy bardziej pożądane jest zmniejszenie poziomu wibracji czy też zwiększenie efektywności pracy urzędnika, różne z tych rozwiązań mogą być uważane za optymalne.

Wnioski

Z powyższych rozważań i przeprowadzonych obliczeń numerycznych nasuwają się następujące wnioski:

— Zaproponowana metoda może być zastosowana do rozwiązania zagadnienia optymalizacji dla dość szerokiej klasy dyskretnych układów dynamicznych.

Zaletą metody, dzięki wykorzystaniu analitycznych związków (3.7) określających gradient funkcjonu, jest fakt, że czas obliczeń w ramach jednej iteracji nie zależy praktycznie od ilości parametrów, zależy od niej jedynie ilość iteracji.

W przypadku układów, dla których rozwiązanie zagadnienia brzegowego jest łatwe do uzyskania (np. układów odcinkami liniowych), polecane jest sporządzanie odrębnego algorytmu obliczeniowego, opartego bezpośrednio na wzorze (3.3) i zabezpieczającego spełnienie zagadnienia brzegowego na każdym kroku iteracji. W ten sposób można obniżyć wymiar szukanego wektora parametrów (nie będą dobierane wartości początkowe wektora stanu) i poprzez zmniejszenie ilości iteracji skrócić czas obliczeń numerycznych.

W przypadku bardziej złożonych problemów optymalizacji wskazane jest wstępne określenie węższego obszaru parametrów w którym leży minimum globalne.

Można tu wykorzystać znane [2], [4] bezpośrednie metody optymalizacji lub też rezultaty analizy układu. Inaczej mówiąc pożądane jest nałożenie pewnych ograniczeń na parametry układu, w tym także na warunki początkowe. Winny być one między innymi

wprowadzane w ten sposób, aby zapewnić stałą liczbę punktów nieciągłości w kolejnych iteracjach procesu obliczeniowego, co gwarantuje jego lepszą zbieżność.

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. ASZAWSKIJ, A. J. WOLPERT, W. S. SZEJNBAUM, *Silowe impulsnyje systemy*, Maszynostroenie, Moskwa, 1978.
2. W. FINDEISEN, J. SZYMANOWSKI, A. WIERZBICKI, *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, PWN, Warszawa, 1977.
3. E. W. GERC, G. E. KREJNIN, *Teoria i rasczet silowych pneumaticzeskich ustrojst*, Izd. AN SSSR, Moskwa, 1960.
4. D. HIMMELBLAU, *Prokladnoje nelinejnoe programmirowanie*, Mir, Moskwa, 1975.
5. M. Z. KOŁOWSKIJ, *Awtomaticzeskoe uprawlenie wibrozasczitynymi sistemami*, Nauka, Moskwa, 1976.
6. J. ŁUCZKO, *Analiza dynamiczna i optymalizacja parametryczną pewnych modeli pneumaticznych narzędzi wibroudarowych*, Kraków, 1981 (rozprawa doktorska).
7. W. TROICKIJ, *Optimalnyje processy kolebanij mechaniczeskich sistem*, Maszynostroenie, Leningrad, 1976.

Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 — „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

Резюме

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В предложенной работе исследуется проблема параметрической оптимизации динамических систем для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и разрывными координатами. Необходимые условия минимума функционала принимаются на основе вариационного исчисления. Предложенный численный метод решения задачи и определен алгоритм градиента функционала. В конкретном численном примере рассматривается параметрическая оптимизация пневмоударников.

Summary

PARAMETRICAL OPTIMIZATION OF DYNAMIC SYSTEMS WITH DISCONTINUOUS CHARACTERISTICS

The paper presents the problem of optimal choice of parameters of non-linear dynamic system. The mathematical model can be described by means of system of ordinary differential equations, whose right sides are discontinuous.

The author suggests the numerical gradient method for solving problem of optimization and proposes algorithm calculation of the functionals gradient. The preconditions of the minimum have been found with the aid of the variational calculus methods. The example refers to parametrical optimization of pneumatic, hand-held percussive tools.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 stycznia 1981 roku

NUMERYCZNE OBLICZANIE KRZYWOLINIOWYCH ŚCIEŻEK RÓWNOWAGI DLA JEDNOWYMIAROWYCH UKŁADÓW SPRĘŻYSTYCH

ZYGMUNT KASPERSKI

WSI Opole

W pracy podaje się metodę obliczeń punktów równowagi dla jednowymiarowych układów sprężystych. Przykładem takich układów są pręty (łuki) lub powłoki obrotowe obciążone osiowosymetrycznie. Obliczanie krzywoliniowych ścieżek równowagi jest podstawowym elementem nieliniowej analizy konstrukcji. Dodatkowo zakłada się, że rozważany układ jest poddany obciążeniom zachowawczym, charakteryzowanym jednym parametrem skalarnym λ . Metoda rozwiązania nieliniowych układów równań równowagi wykorzystuje wszystkie własności macierzy występujących w analizie tych konstrukcji metodą elementów skończonych i charakteryzuje się dużą stabilnością oraz stosunkowo krótkim czasem obliczeń. Dodatkową ceną zaletą jest w przybliżeniu liniowy wzrost czasu obliczeń w zależności od liczby elementów podziału konstrukcji. Podaje się szereg przykładów liczbowych dla powłok obrotowych, a dla zachowania względnej spójności opracowania podstawowe informacje o dyskretyzacji powłoki podano w Uzupełnieniu.

1. Sformułowanie problemu

Będziemy rozważać jednowymiarowe układy sprężyste, których pole przemieszczeń jest funkcją jednej zmiennej $u = u(\xi)$, $\xi \in [\xi_a, \xi_b]$. Załóżmy ponadto, że rozważany układ jest poddany obciążeniom zachowawczym charakteryzowanym parametrem skalarnym λ . Energia potencjalna takiego układu może być zapisana w postaci

$$(1.1) \quad P(u, \lambda) = U(u) + \lambda V(u),$$

gdzie $U(u)$ jest energią sprężystą, a $V(u)$ energią potencjalną obciążeń. W stanie równowagi energia potencjalna jest stacjonarna, tj. wariacja (różniczka Gateaux) jest równa zero

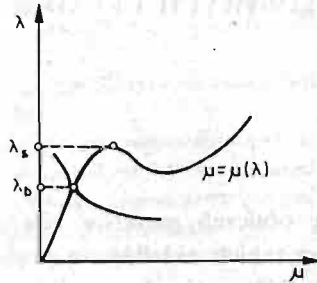
$$(1.2) \quad \delta P(u, \lambda; \delta u) = 0,$$

dla każdej, kinematycznie dozwolonej wariacji δu pola przemieszczeń. Równania Eulera-Lagrange'a zagadnienia wariacyjnego (1.2) stanowią układ równań różniczkowych, w ogólnym przypadku nieliniowych, który w zapisie operatorowym ma postać

$$(1.3) \quad F(u, \lambda) = 0.$$

Podstawowym zagadnieniem analizy omawianych układów jest wyznaczenie wszystkich

rozwiązań (w tym osobliwych) $u = u(\lambda)$ równania (1.3) dla wartości parametru λ z pewnego przedziału oraz zbadania stabilności tych rozwiązań. Szczególnie ważnym jest wyznaczenie tych wartości λ_b , które odpowiadają punktom rozgałęzienia oraz tych λ_s , które odpowiadają punktom maksimum lub minimum obciążenia, tj. w których $\frac{du}{d\lambda} = 0$ (rys. 1).



Rys. 1

Tak postawiony problem jest obszerny i na ogół trudny. Do jego rozwiązania stosuje się zwykle jedną z bezpośrednich metod rachunku wariacyjnego. Wówczas niewiadomym jest wektor uogólnionych współrzędnych bądź przemieszczeń węzłowych q . Dobrym przykładem jest tutaj metoda elementów skończonych zastosowana do obliczeń powłok obrotowych obciążonych osiowoosymetrycznie.

Dla przyjętych funkcji bazowych (funkcji kształtu) otrzymuje się

$$u(\xi) = N(\xi)q,$$

a wówczas energia potencjalna jest funkcją N zmiennych $q_i (i = 1, 2, \dots, N)$ współrzędnych wektora $q^T = [q_1, q_2, \dots, q_N]$, tj.

$$(1.4) \quad P(q, \lambda) = U(q) + \lambda V(q).$$

Energę sprężystą U można zapisać w postaci sumy

$$(1.5) \quad U(q) = U_L(q) + U_{NL}(q),$$

gdzie

$$(1.6) \quad U_L(q) = \frac{1}{2} q^T K q,$$

a w części $U_{NL}(q)$ składowe wektora q występują w potęgach wyższej niż dwa. Symetryczna macierz K w (1.6) o wymiarach $N \times N$ jest nazywana macierzą sztywności, a forma kwadratowa (1.6) jest nieujemna, tj. $U_L(q) \geq 0$ dla każdego $q \in R^N$, a dla warunków brzegowych uniemożliwiających sztywny ruch układu jest dodatnio określona, to znaczy $U_L(q) > 0$ dla $q \neq 0$.

Jeśli ograniczymy się do tzw. obciążeń typu martwego, to energia potencjalna $V(q)$ jest funkcją liniową

$$(1.7) \quad V(q) = q^T Q,$$

gdzie stały wektor $Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N]$ jest tzw. wektorem obciążeń jednostkowych. Obliczając teraz wariację funkcjonału (1.4) w klasie kinematycznie dozwolonych wariacji wektora q otrzymamy

$$(1.8) \quad \delta P(q, \lambda; \delta q) = \delta q^T f(q, \lambda) = 0,$$

a stąd układ równań równowagi przyjmuje postać

$$(1.9) \quad f(q, \lambda) \equiv Kq + \frac{\partial U_{NL}}{\partial q}(q) - \lambda Q = 0,$$

lub definiując tzw. wektor pseudo-sił

$$(1.10) \quad R(q) = \frac{\partial U_{NL}}{\partial q}(q),$$

postać

$$(1.11) \quad Kq + R(q) = \lambda Q,$$

gdzie $R(q) = [R_1(q), R_2(q), \dots, R_N(q)]^T$.

W ten sposób znalezienie ścieżki równowagi sprowadza się do rozwiązania nieliniowego układu równań algebraicznych (1.11).

2. Numeryczne rozwiązanie nieliniowych układów równań

Weźmy pod uwagę układ (1.11) i ustalając wartość parametru $\lambda = \tilde{\lambda}$ zastosujemy do niego iteracyjną metodę Newtona-Raphsona [7]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & q^0 \text{ — przybliżenie początkowe,} \\ & q^{m+1} = q^m - \left[K + \frac{\partial R}{\partial q}(q^m) \right]^{-1} \{ Kq^m + R(q^m) - \tilde{\lambda} Q \} \end{aligned}$$

dla $m = 0, 1, 2, \dots$ (m oznacza numer iteracji).

Jeśli metoda (2.1) jest zbieżna, to w granicy otrzymamy rozwiązanie

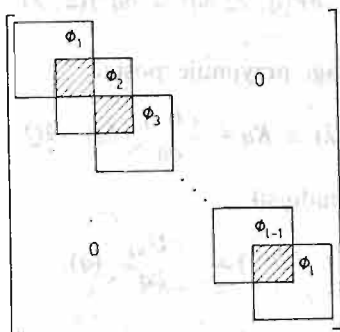
$$q(\tilde{\lambda}) = \lim_{m \rightarrow \infty} q^m.$$

We wzorze (2.1) macierz $\frac{\partial R}{\partial q}$ jest macierzą funkcyjną postaci

$$(2.2) \quad \frac{\partial R}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial q_1} & \frac{\partial R_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial q_N} \\ \frac{\partial R_2}{\partial q_1} & \frac{\partial R_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial R_2}{\partial q_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial R_N}{\partial q_1} & \frac{\partial R_N}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial R_N}{\partial q_N} \end{bmatrix}$$

a jej wartości liczbowe są w punktach q^m .

W jednowymiarowych układach macierze K i (2.2) mają postać przedstawioną na rys. 2, gdzie podmacierze $\Phi_j (j = 1, 2, \dots, l)$ są macierzami odpowiadającymi podziałowi powłoki na elementy, a wyrazy zakreskowane na rysunku są dodawane.



Rys. 2

Zgodnie z zasadą dodawania macierzy, taką samą strukturę ma również macierz $K + \frac{\partial R}{\partial q}$.

W dalszym ciągu tego rozdziału założymy, że elementy macierzy K i wektora Q są dane oraz znany jest algorytm obliczania wartości $R(q)$ i $\frac{\partial R}{\partial q}(q)$ dla dowolnego $q \in R^N$.

Przy nieliniowym zachowaniu się konstrukcji dla pewnych wartości parametru λ macierz $\frac{\partial R}{\partial q} + K$ jest macierzą źle uwarunkowaną, a nawet osobliwą [5]. W tych przypadkach (szczególnie interesujących z fizycznego punktu widzenia) nie można stosować metody Newtona-Raphsona w postaci (2.1). Zapiszmy (2.1) w innej równoważnej postaci:

q^0 — przybliżenie początkowe,

$$(2.3) \quad \left[K + \frac{\partial R}{\partial q}(q^m) \right] \Delta q^{m+1} = - \{ K q^m + R(q^m) - \tilde{\lambda} Q \},$$

gdzie $\Delta q^{m+1} = q^{m+1} - q^m$ dla $m = 0, 1, 2, \dots$ i rozważmy dwa możliwe przypadki:

- 1) macierz $K + \frac{\partial R}{\partial q}$ w pewnym otoczeniu rozwiązania $q = q(\tilde{\lambda})$ jest macierzą dobrze uwarunkowaną,
- 2) macierz $K + \frac{\partial R}{\partial q}$ jest macierzą bliską osobliwej.

(Praktyczne kryteria rozróżniania tych przypadków zostaną podane przy omawianiu przykładów obliczeń).

W pierwszym przypadku każdy krok iteracyjny metody Newtona-Raphsona wymaga rozwiązania liniowego układu równań (2.3), którego macierz współczynników $K + \frac{\partial R}{\partial q}$

jest postaci podanej na rys. 2. Bardzo efektywna metoda rozwiązania tego typu układów jest opisana w pracy [3]. Tutaj ograniczymy się jedynie do podania informacji, że jest to

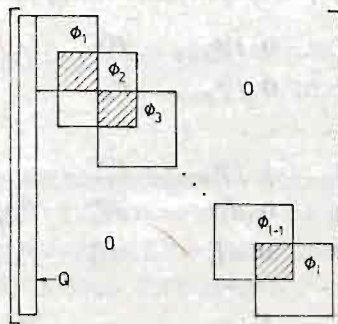
odpowiednio dostosowana metoda eliminacji z wyborem elementu głównego i że wszystkie operacje przeprowadza się jedynie na elementach niezerowych macierzy. W trakcie obliczeń wymagany jest niewielki obszar pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej. Macierz układu nie musi być macierzą symetryczną.

W drugim przypadku niekorzystną sytuację można ominąć, jeśli parametr λ potraktujemy jako jedną z niewiadomych układu (1.11), natomiast dowolnie wybraną składową q_r wektora q ($1 \leq r \leq N$) przyjmiemy jako daną. Mówi się wówczas o tzw. zamianie parametru sterującego [5]. Przy takiej zamianie wzór (2.3) przyjmie postać

$$(2.4) \quad \left[\tilde{K} + \frac{\partial R}{\partial q} (\tilde{q}^m) \right] \Delta \tilde{q}^{m+1} = - \{ K \tilde{q}^m + R(\tilde{q}^m) - q_r T \},$$

w którym macierz \tilde{K} powstaje z macierzy K przez zastąpienie r -tej kolumny wektorem Q wektor T jest r -tą kolumną macierzy K , natomiast

$$\tilde{q}^m = [q_1^m, \dots, q_{r-1}^m, \tilde{\lambda}^m, q_{r+1}^m, \dots, q_N^m]^T.$$



Rys. 3

W tym przypadku macierz $K + \frac{\partial R}{\partial q}$ jest postaci przedstawionej na rys. 3, gdzie bez zmniejszenia ogólności rozważań przyjęto $r = 1$. Ze względu na pojawienie się niezerowej kolumny w macierzy $\tilde{K} + \frac{\partial R}{\partial q}$ nie można stosować procedury opisanej w [3]. Można natomiast podać prostą modyfikację tej procedury, która będzie przydatna do rozwiązywania układów o macierzach w postaci przedstawionej na rys. 3, zachowując wszystkie pożądane własności (m.in. operacje tylko na niezerowych elementach). W tym celu, podobnie jak w pracy [3] założymy, że podmacierze Φ_i są wymiarów $n \times n$ (n -liczba parzysta) i wprowadzimy następujące oznaczenia:

$p = \frac{1}{2}n$, f_{ts}^i — element leżący w t -tym wierszu i s -tej kolumnie podmacierzy Φ_i ($t, s = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, l$).

Eliminację niewiadomych układu (2.4) będziemy przeprowadzać w l etapach. W i -tym etapie eliminacji potrzebne są podmacierze Φ_i oraz Φ_{i+1} . Fragment macierzy $K + \frac{\partial R}{\partial q}$

zawierający te podmacierze przed eliminacją wygląda następująco:

$$\begin{array}{cccccccc}
 Q_t & \dots & 0 & f_{11}^i & f_{12}^i & \dots & f_{1p}^i & f_{1,p+1}^i \dots f_{1n}^i \\
 Q_{t+1} & \dots & 0 & f_{21}^i & f_{22}^i & \dots & f_{2p}^i & f_{2,p+1}^i \dots f_{2n}^i & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 Q_{t+p} & \dots & 0 & f_{p1}^i & f_{p2}^i & \dots & f_{pp}^i & f_{p,p+1}^i \dots f_{pn}^i \\
 Q_{t+p+1} & \dots & 0 & f_{p+1,1}^i & f_{p+1,2}^i & \dots & f_{p+1,p}^i & d_{11}^i \dots d_{1p}^i & f_{1,p+1}^{i+1} \dots f_{1n}^{i+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 Q_{t+n} & \dots & 0 & f_{n1}^i & f_{n2}^i & \dots & f_{np}^i & d_{p1}^i \dots d_{pp}^i & f_{p,p+1}^{i+1} \dots f_{pn}^{i+1} \\
 Q_{t+n+1} & & & & & & & f_{p+1,1}^{i+1} \dots f_{p+1,p}^{i+1} & f_{p+1,p+1}^{i+1} \dots f_{p+1,n}^{i+1} \\
 \vdots & & & 0 & & & & \dots & \dots \\
 Q_{t+n+p} & & & & & & & f_{n1}^{i+1} \dots f_{np}^{i+1} & f_{n,p+1}^{i+1} \dots f_{nn}^{i+1}
 \end{array}$$

gdzie $d_{iq}^i = f_{iq}^{i+1} + f_{i+p,q+p}^i$ ($t, q = 1, 2, \dots, p$).

Eliminując metodą Jordana [7] p pierwszych niewiadomych z tego fragmentu otrzymamy:

$$\begin{array}{cccccccc}
 Q_t^* & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & f_{1,p+1}^{i*} \dots f_{1n}^{i*} \\
 Q_{t+1}^* & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & f_{2,p+1}^{i*} \dots f_{2n}^{i*} & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 Q_{t+p}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & f_{p,p+1}^{i*} \dots f_{pn}^{i*} \\
 Q_{t+p+1}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{11}^{i*} \dots d_{1p}^{i*} & f_{1,p+1}^{i+1} \dots f_{1n}^{i+1} \\
 Q_{t+p+2}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{21}^{i*} \dots d_{2p}^{i*} & f_{2,p+1}^{i+1} \dots f_{2n}^{i+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 Q_{t+n}^* & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{p1}^{i*} \dots d_{pp}^{i*} & f_{p,p+1}^{i+1} \dots f_{pn}^{i+1} \\
 Q_{t+n+1} & & & & & & & f_{p+1,1}^{i+1} \dots f_{p+1,p}^{i+1} & f_{p+1,p+1}^{i+1} \dots f_{p+1,n}^{i+1} \\
 \vdots & & & & 0 & & & \dots & \dots \\
 Q_{t+n+p} & & & & & & & f_{n1}^{i+1} \dots f_{np}^{i+1} & f_{n,p+1}^{i+1} \dots f_{nn}^{i+1}
 \end{array}$$

(Symbolem * oznaczono te elementy, które ulegają zmianie w procesie eliminacji niewiadomych układu).

W ten sposób po wykonaniu l etapów zostaną wyeliminowane wszystkie niewiadome za wyjątkiem λ . Wyliczając niewiadome w kolejności $\Delta \tilde{q}_N^m, \Delta \tilde{q}_{N-1}^m, \dots, \Delta \tilde{q}_2^m$ wyrazimy je wszystkie jako funkcje liniowe λ , a następnie po wyliczeniu λ z pierwszego równania otrzymamy rozwiązanie Δq^{m+1} układu (2.4). Zwróćmy uwagę na fakt, że układy (2.3) i (2.4) są rozwiązywane dużą ilością razy (dla każdego punktu na ścieżce wielokrotnie), wobec tego szybkie i numerycznie stabilne metody rozwiązywania takich układów mają istotne znaczenie dla całego procesu obliczeń. Autorowi nieznane są efektywniejsze niż opisane wyżej metody rozwiązywania tego typu układów. Korzystanie z wzoru (2.1) jest w tym przypadku niewskazane, ze względu na to, że przy odwracaniu macierzy zatracają się ich strukturę przedstawioną na rysunkach 2 i 3.

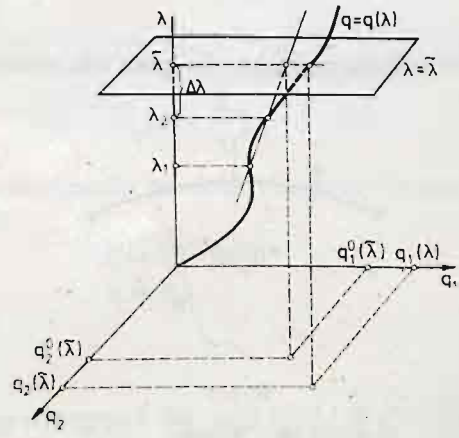
3. Obliczanie przybliżeń początkowych

Punkty na ścieżce równowagi oblicza się w ten sposób, że po rozwiązaniu układu (1.11) dla $\lambda = \tilde{\lambda}$ (lub dla $q_r = \tilde{q}_r$) przechodzi się do rozwiązania tego układu dla $\lambda = \tilde{\lambda} + \Delta\lambda$ ($q_r = \tilde{q}_r + \Delta q_r$) metodą (2.3) lub (2.4). W każdym z tych przypadków należy wybrać przybliżenie początkowe q^0 (lub q^0). Jak wiadomo, w metodzie Newtona-Raphsona bardzo istotne znaczenie ma właściwy wybór przybliżenia początkowego. Jeśli np. za przybliżenie początkowe dla $\lambda = \tilde{\lambda} + \Delta\lambda$ przyjmiemy $q^0 = q(\tilde{\lambda})$, to w przypadkach dużych przyrostów przemieszczeń znajdzie konieczność zmniejszenia $\Delta\lambda$ (co wydłuża czas obliczeń) gdyż w przeciwnym razie można otrzymać proces iteracyjny rozbieżny bądź ominąć część krzywej na ścieżce równowagi. Analogiczna sytuacja występuje w przypadku sterowania parametrem q_r . Dobre rezultaty daje następujący sposób obliczania przybliżeń początkowych: założmy, że mamy rozwiązania $q(\lambda_1)$ i $q(\lambda_2)$ dla dwóch parametrów λ_1 i λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) (w początkowej części ścieżki dla λ bliskich zeru rozwiązania takie otrzymuje się łatwo). Wówczas dla $\tilde{\lambda} = \lambda_2 + \Delta\lambda$ przybliżenie $q^0(\tilde{\lambda})$ otrzymuje się z wzorów

$$(3.1) \quad q_j^0(\tilde{\lambda}) = q_j(\lambda_2) + \Delta\lambda \frac{q_j(\lambda_2) - q_j(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

dla $j = 1, 2, \dots, N$.

Analogiczny wzór na przybliżenie początkowe wektora $\tilde{q}^0(q_r)$ można podać w przypadku sterowania składową q_r (wystarczy zamienić λ z q_r). Wzór (3.1) stanowi liniową ekstrapolację rozwiązania dla znanych dwóch poprzednich rozwiązań na ścieżce równowagi, a jego geometryczną interpretację w przypadku $N = 2$ przedstawia rys. 4.



Rys. 4

Oczywiście można podać wzory ekstrapolacyjne wyższych stopni, jednakże liczne przykłady obliczeń dla powłok obrotowych wskazują na wystarczająco dobre przybliżenia rozwiązań wg (3.1).

Mnożąc skalarnie stronami równanie (1.11) przez wektor Q , otrzymamy

$$(3.2) \quad \lambda = \frac{\langle Kq + R(q), Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle},$$

gdzie symbol $\langle \dots \rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów. Oznacza to, że jeśli q jest rozwiązaniem układu (1.11), to odpowiadająca mu wartość parametru λ wyraża się wzorem (3.2). W przypadku sterowania składową q_r , dla zadanego $\Delta\lambda$ oblicza się wielkości q_j^0 wg wzoru (3.1), a następnie przybliżenie początkowe $\tilde{\lambda}^0$ niewiadomej λ wg (3.2), wstawiając w miejsce q wektor q^0 .

4. Przykłady obliczeń ścieżek równowagi dla powłok obrotowych

W rozdziale tym podamy przykłady obliczeń dla powłok obrotowych. Wszystkie one liczone były na EMC Odra 1204. Obliczenia związane z całkowaniem numerycznym macierzy sztywności, składaniem macierzy, uwzględnianiem warunków brzegowych itp. wykonuje się przy pomocy metod opisanych szczegółowo w [2].

Wzory (2.3) i (2.4) opisują proces iteracyjny, który należy zakończyć, gdy osiągnięto zadaną dokładność obliczeń składowych wektora Δq (lub $\Delta \tilde{q}$). Najczęściej jako kryterium dokładności obliczeń przyjmuje się spełnienie przez kolejne wektory Δq^{m-1} i Δq^m relacji

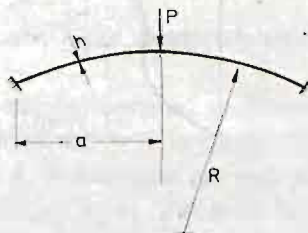
$$(4.1) \quad \|\Delta q^m - \Delta q^{m-1}\| < \varepsilon,$$

gdzie ε — zadana liczba dodatnia, a symbol $\|q\|$ oznacza normę wektora $q = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T$. We wszystkich przykładach przyjęto normę

$$(4.2) \quad \|q\| = \max_{1 \leq i \leq N} |q_i|$$

oraz $\varepsilon = 10^{-6}$.

Przykład 1. Małowyniosła powłoka sferyczna obciążona siłą skupioną w wierzchołku (rys. 5).



Rys. 5

Dane: $R = 4,76$ m

$E = 2 \cdot 10^5$ N/mm²

$a = 0,9$ m

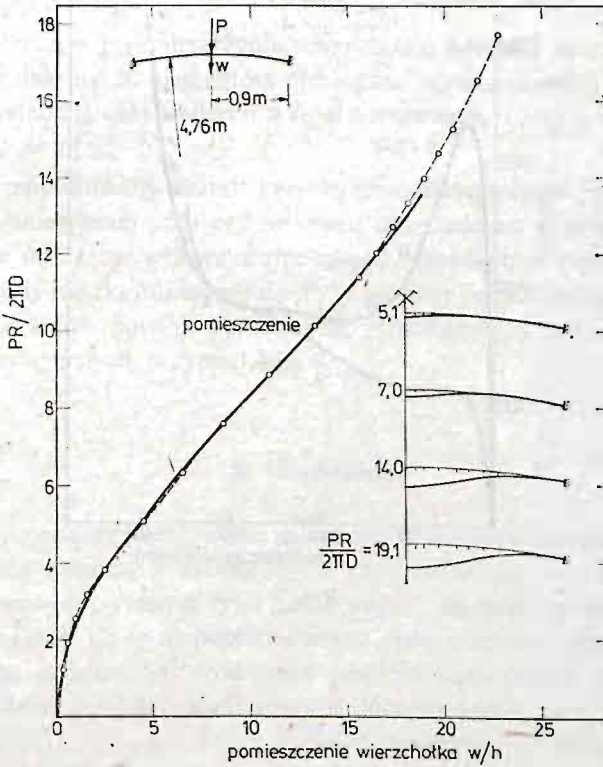
$\nu = \frac{1}{3}$

$H = 85,89$ mm

$h = 4,637$ mm

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2}$ — sztywność zgięciowa powłoki.

Na rys. 6 przedstawiono przemieszczenie wierzchołka powłoki otrzymane przy podziale na 10 równych elementów. Linią ciągłą zaznaczono rozwiązanie otrzymane w pracy [1]. Ze względu na brak wierzchołków, takie przykłady rozwiązuje się łatwo, bez konieczności zamiany parametru sterującego. Każdy punkt na ścieżce obliczono wykonując 3-4 iteracje wg wzoru (2.3) i przybliżenia początkowego (3.1).



Rys. 6

Przykład 2. Małowyniosła powłoka sferyczna obciążona pierścieniowo.

Liczba elementów — 10.

Dane: $R = 4,758 \text{ in}$

$E = 10^7 \text{ lb/in}^2$

$a = 0,9 \text{ in}$

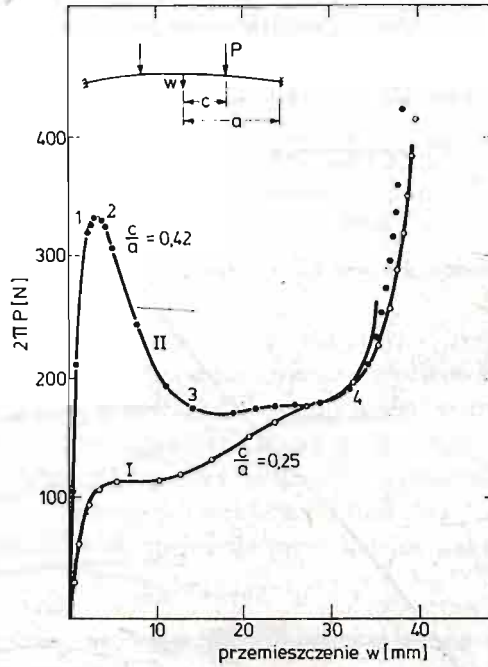
$\nu = 0,3$

$H = 0,08589 \text{ in}$

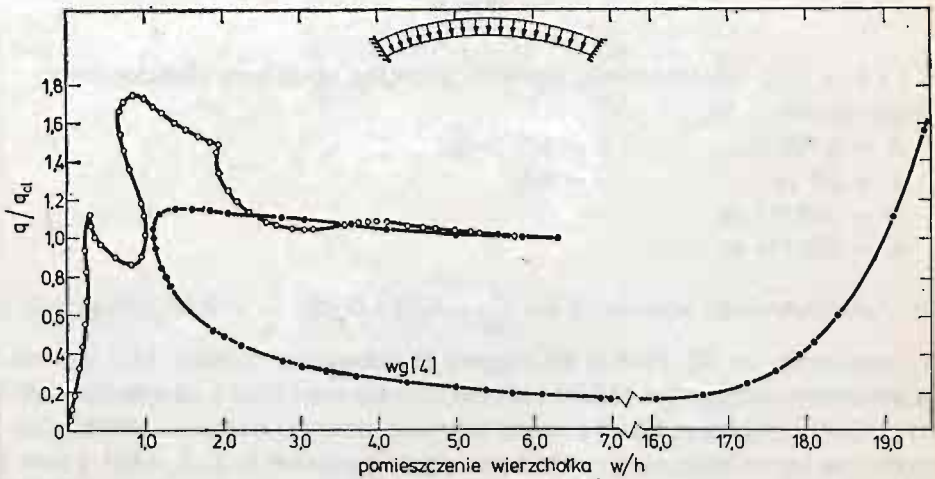
$h = 0,01576 \text{ in}$

Na rys. 7 przedstawiono wykresy: I dla $\frac{c}{a} = 0,25$ i II dla $\frac{c}{a} = 0,42$. Linią ciągłą zaznaczono rozwiązanie wg [6]. Punkty na krzywej II zaznaczone cyframi 1, 2, 3, 4 oznaczają zmianę parametru sterującego. Odcinki krzywej między punktami 1 - 2 oraz 3 - 4 obliczono wg wzoru (2.4) przyjmując jako parametr sterujący przemieszczenie w wierzchołku. Charakterystyczną cechą obliczeń przy zbliżaniu się do punktów 1, 2, 3, 4 był wzrost liczby iteracji potrzebnych do obliczeń przemieszczeń z dokładnością (4.1). W programie istnieje

możliwość automatycznej zmiany sterowania jeśli liczba iteracji przekracza zadaną wartość lub małym przyrostom parametru odpowiadają duże przyrosty przemieszczeń (oznacza to np. możliwość pominięcia odcinka 2-4 na krzywej II, rys. 7).



Rys. 7



Rys. 8

Przykład 3. Małowyniosła powłoka sferyczna obciążona równomiernie.

$$\text{Dane: } R = 202 \text{ mm} \quad E = 2 \cdot 10^{+5} \text{ N/mm}^2$$

$$a = 40 \text{ mm} \quad \nu = \frac{1}{3}$$

$$H = 4 \text{ mm}$$

$$h = 0,4096 \text{ mm}$$

$$q_{ct} = \frac{2}{3(1-\nu^2)^{1/2}} \frac{Eh^2}{R^2} = 1,007 \text{ N/mm}^2 \text{ — klasyczne obciążenie krytyczne.}$$

Na rys. 8 przedstawiono przemieszczenie wierzchołka powłoki przy podziale na 10 elementów. Przy podziale na 20 elementów otrzymano wyniki niewiele różniące się (na rysunku nierozróżnialne), a czas obliczeń wzrósł dwukrotnie. Linią ciągłą zaznaczono rozwiązania uzyskane w pracy [4].

Ze względu na skomplikowany kształt krzywej przedstawionej na rys. 8 jest to przykład dość trudny do numerycznej analizy i wymaga doświadczeń w prowadzeniu tego typu obliczeń. Jednakże umiejętne wykorzystanie metod opisanych w punktach 2 i 3 pozwala liczyć takie przykłady z dużą dokładnością. Przy pomocy opracowanego programu liczono szereg innych przykładów powłok obrotowych, jednakże tutaj zamieszczono wyniki najbardziej charakterystycznych przypadków.

5. Uzupelnienie

W uzupełnieniu podamy podstawowe zależności i równania algorytmu obliczeń powłok obrotowych metodą elementów skończonych, przy założeniu, że powłoka poddana jest obciążeniom osiowosymetrycznym typu „martwego”. Bardziej szczegółowe opracowanie tych zagadnień znajduje się w niepublikowanych opracowaniach [8].

Niech tworząca powierzchni środkowej powłoki dana będzie równaniem $r = r(z)$, $z \in [z_1, z_{N+1}]$. Podział powłoki na elementy skończone jest dokonywany przez ustalenie ciągu wartości z_1, z_2, \dots, z_{N+1} . W ten sposób otrzymuje się element skończony jako stożek o krzywoliniowej tworzącej $r = r(z)$, $z \in [z_i, z_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, N$. W celu otrzymania zależności na poziomie elementu, wprowadza się lokalną parametryzację łukową tworzącej

$$(5.1) \quad s(z) = \int_{z_1}^z \alpha_z dz, \quad \alpha_z^2 = \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 + 1, \quad s \in [0, L_i],$$

gdzie L_i jest długością tworzącej i -tego elementu. Dla przypadku obciążenia osiowosymetrycznego pole przemieszczeń powierzchni środkowej powłoki jest funkcją zmiennej s , $\tilde{u} = \tilde{u}(s)$. Składową styczną i składową normalną tego pola oznaczmy odpowiednio przez u i w . Energia potencjalna powłoki jest sumą energii sprężystej U i energii potencjalnej V obciążenia

$$(5.2) \quad P(\tilde{u}) = U(\tilde{u}) + V(\tilde{u}).$$

W dalszym ciągu zakładając będziemy, że powłoka jest cienka, materiał powłoki jest jednorodny i izotropowy, a odkształcenia w powłoce są małe. Wówczas energia sprężysta wy-

nosi

$$(5.3) \quad U(\bar{u}) = \pi \int \{C(\epsilon_s^2 + \epsilon_\theta^2 + 2\nu\epsilon_s\epsilon_\theta) + D(\kappa_s^2 + \kappa_\theta^2 + 2\nu\kappa_s\kappa_\theta)\} r ds,$$

$$(5.4) \quad C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

gdzie h oznacza grubość powłoki, E i ν są odpowiednio modułem sprężystości i współczynnikiem Poissona.

Ograniczając się do teorii powłok Sandersa-Koitera, związki między odkształceniami i przemieszczeniami mają postać

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \epsilon_s &= \epsilon_s + \frac{1}{2} \beta_s^2, \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_\theta, \\ \kappa_s &= -\beta_s, \\ \kappa_\theta &= -\frac{\sin \Phi}{r} \beta_s', \quad ()' = \frac{d}{ds} () \end{aligned}$$

gdzie liniowe odkształcenia błonowe oraz parametr obrotu wyrażają się przez przemieszczenia następująco:

$$(5.6) \quad \epsilon_s = u' - \Phi'w, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} (\sin \Phi u + \cos \Phi w), \quad \beta_s = w' + \Phi'u.$$

Na podstawie związków (5.5) energię sprężystą (5.3) można zapisać w postaci

$$(5.7) \quad U = U_L + U_{NL},$$

gdzie

$$(5.8) \quad U_L = \pi \int \{C(\epsilon_s^2 + \epsilon_\theta^2 + 2\nu\epsilon_s\epsilon_\theta) + D(\kappa_s^2 + \kappa_\theta^2 + 2\nu\kappa_s\kappa_\theta)\} r ds,$$

$$(5.9) \quad U_{NL} = \pi \int C \left\{ (\epsilon_s + \nu\epsilon_\theta) \beta_s^2 + \frac{1}{4} \beta_s^4 \right\} r ds.$$

Oznaczając przez $q(i)$ p składowe normalną i styczną obciążenia powierzchniowego, energia potencjalna tego obciążenia wynosi

$$(5.10) \quad V(\bar{u}) = -2\pi \int (pu + qw) r ds.$$

Definiując wektor przemieszczeń węzłowych elementu

$$(5.11) \quad \{q_e\}^T = [u_i, u_i', w_i, \beta_{s1}, u_{i+1}, u_{i+1}', w_{i+1}, \beta_{s,i+1}]$$

oraz przyjmując wielomianową aproksymację składowych przemieszczenia wewnątrz elementu

$$(5.12) \quad \begin{aligned} u(s) &= \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3, \\ w(s) &= \alpha_5 + \alpha_6 s + \alpha_7 s^2 + \alpha_8 s^3, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$(5.13) \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [P][A]\{q_e\},$$

gdzie macierz $[P]$ zależy tylko od parametru s , a macierz $[A]$ zależy tylko od parametrów geometrycznych elementu. Korzystając teraz z (5.13) można wyrazić liniowe odkształcenia oraz parametr obrotu przez wektor przemieszczeń węzłowych elementu

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = [B_1][A]\{q_e\}, \\ \{\varkappa\} &= \begin{Bmatrix} \varkappa_s \\ \varkappa_\theta \end{Bmatrix} = [B_2][A]\{q_e\}, \\ \beta_s &= [b][A]\{q_e\}. \end{aligned}$$

Równania równowagi elementu otrzymane z warunku stacjonarności energii potencjalnej mają postać

$$(5.15) \quad [K]\{q_e\} = \{Q_e\} - \{Q_e^*(\{q\}_e)\},$$

gdzie macierz sztywności elementu $[K]$, wektor obciążeń węzłowych $\{Q_e\}$ oraz tzw. wektor pseudo-sił $\{Q_e^*\}$ wyznacza się wykorzystując zależności (5.13) i (5.14) oraz postać energii sprężystej (5.7), (5.8) i (5.9) i energii potencjalnej obciążenia (5.10):

$$(5.16) \quad [K] = [A]^T 2\pi \int_0^{L_i} ([B_1]^T [C][B_1] + [B_2]^T [D][B_2]) r ds [A],$$

$$(5.17) \quad \{Q_e\} = [A]^T 2\pi \int_0^{L_i} [P]^T \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} r ds,$$

$$(5.18) \quad \{Q_e^*\} = [A]^T \pi \int_0^{L_i} C \left\{ \beta_s^2 [B_1]^T \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \end{bmatrix} + (2(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta) \beta_s + \beta_s^3) \cdot [b]^T \right\} r ds.$$

We wzorze (5.16) macierz $[C]$ i $[D]$ są zdefiniowane następująco:

$$(5.19) \quad [C] = C \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad [D] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując teraz postać (5.18) wektora pseudo-sił możemy wyznaczyć macierz $\frac{\partial \{Q_e\}}{\partial q}$ elementu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{Q_e\}}{\partial q} &= [A]^T \pi \int_0^{L_i} C \left\{ 2\beta_s \left([B_1]^T \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \end{bmatrix} [b] + [b]^T [1 \ \nu] [B_1] \right) + \right. \\ &\quad \left. + (2(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta) + 3\beta_s^2) [b]^T [b] \right\} r ds [A]. \end{aligned}$$

Literatura cytowana w tekście

1. J. R. FITCH, *The buckling and post-buckling behavior of spherical caps under concentrated load*, Int. J. Solids Struct., vol. 4 (1968), 421 - 446.
2. J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, *Obliczenia numeryczne powłok obrotowych metodą elementów skończonych*, PWN, Warszawa-Wrocław 1978.
3. Z. KASPERSKI, *The solution of a certain linear equation system*, Applicationes Mathematicae., XVI, 2 (1978).
4. J. MESCOLL, *Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution*, AIAA J., vol. 4 (1966), 2041 - 2043.
5. Z. WASZCZYŻYŃ, *Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych*, Wykłady Konferencji Szkoleniowej, Janowice 1980.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, The 3rd ed., Mc Graw-Hill Book Co. Limited 1977.
7. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN Warszawa 1976.
8. J. GOŁAŚ i inni, *Numeryczne rozwiązanie powłok obrotowych w oparciu o liniową i geometrycznie nieliniową teorię powłok sprężystych oraz metodę elementów skończonych*, prace w ramach problemu węzłowego 05.12, Zakład Mechaniki Konstrukcji WSI w Opolu

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ РАВНОВЕСИЯ В СЛУЧАЕ
ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

В работе представлен численный метод исследования точек равновесия в случае одномерных упругих систем. Примерами таких систем являются стержни (арки) или оболочки вращения, нагруженные осесимметрично. Предполагается, что система нагружена консервативно и описывается скалярным параметром λ .

Метод решения нелинейных систем уравнений равновесия использует все свойства матриц, которые появляются во время решения задачи методом конечных элементов. Достоинством метода является также и то, что время вычислений на ЭВМ меняется приблизительно линейно в зависимости от количества конечных элементов конструкции. Статья содержит ряд численных примеров, касающихся оболочек вращения, а основные сведения о дискретизации оболочки поданы в Приложении.

Summary

NUMERICAL CALCULATION OF THE NON-LINEAR EQUILIBRIUM PATHS OF THE
ONE-DIMENSIONAL ELASTIC SYSTEMS

A method of calculation of the equilibrium states of the onedimensional elastic systems like rods (arches) and shells of revolution under axisymmetric loading is presented. It is assumed that loads are conservative and intensity of loads is characterized by single parameter λ . The solution method of the non-linear equilibrium equations utilizes all properties of matrices is stable and less time consuming. The main feature of this method is that computation time approximately grows linearly with the number of finite elements. Numerical examples of shells of revolution and basic relations are presented.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1982 roku

ZDERZENIE W UKŁADZIE O WIELU STOPNIACH SWOBODY

WIESŁAW GRZESIKIEWICZ

Politechnika Warszawska

ANDRZEJ WAKULICZ

Instytut Matematyczny PAN

1. Wstęp

Rozważany jest układ mechaniczny złożony z nieodkształcalnych ciał, skrzepowanych geometrycznymi stacjonarnymi więzami jednostronnymi. Położenie układu opisuje wektor $x \in R^N$, a więzy mają postać

$$f_i(x) \geq 0,$$

jeśli

$$f_i \in C^1(R^N), \quad i = 1, \dots, n \leq N.$$

Rozpatrywana jest chwila czasu t , w której układ zajmuje położenie takie, że

$$f_i(x(t)) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n,$$

natomiast prędkości układu są takie, że istnieje co najmniej jeden więź, na przykład o numerze k ($1 \leq k \leq n$) taki, że

$$\lim_{\tau \rightarrow t-0} G_k^T \dot{x}(\tau) < 0,$$

gdzie

$$G_k := \text{grad} f_k(x(t)) = \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_N} \right]^T.$$

W opisanej sytuacji następuje równoczesne zderzenie układu z kilkoma więzami. Zgodnie z teorią zderzenia ciał sztywnych w efekcie zderzenia nastąpi skokowa zmiana prędkości, którą spowodują popędy reakcji więzów.

Jeżeli $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są nieujemnymi liczbami charakteryzującymi popędy reakcji odpowiednich więzów, zaś

$$\dot{x}(t \pm 0) := \lim_{\tau \rightarrow t \pm 0} \dot{x}(\tau),$$

to prawo zmienności pędu układu dane jest przez następujący związek

$$(1) \quad M[\dot{x}(t+0) - \dot{x}(t-0)] = G\lambda,$$

gdzie

$\lambda := [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T \in R^N$ — nieujemny wektor charakteryzujący wartości popędów reakcji więzów

$G := [G_1, \dots, G_n] \in R^{N \times n}$ — macierz prostokątna rzędu n , to znaczy że wektory G_1, \dots, G_n są liniowo niezależne;

$M \in R^{N \times N}$ — macierz symetryczna dodatnio określona, charakteryzująca bezwładność układu.

Wektor prędkości układu po zderzeniu $\dot{x}(t+0)$ powinien spełniać następujący oczywisty warunek

$$(2) \quad G^T \dot{x}(t+0) \geq 0,$$

który wynika z równań więzów.

Jednakże warunki (1) i (2) nie wystarczają do jednoznacznego wyznaczenia $\dot{x}(t+0)$. Aby uniknąć tej niejednoznaczności w przypadku skalaru, to znaczy gdy $n = 1$, uzupełnia się warunki (1) i (2) następującą hipotezą [1], [3], [4].

W zjawisku zderzenia występują dwie fazy. W pierwszej fazie następuje nałożenie więzu, a w drugiej oswobodzenie z tego z więzu; oswobodzenie z więzu następuje pod wpływem impulsu siły, którego wartość — zgodnie z hipotezą Poissona [3] — jest proporcjonalna do wartości popędu reakcji więzu nałożonego w pierwszej fazie.

2. Model zderzenia

Przedstawiona wyżej hipoteza, która dotyczy zderzenia dwóch ciał, nie wystarcza do analizowania równoczesnego zderzenia w układzie, w którym $n \geq 2$. W tym przypadku proponujemy rozważyć następujący model zderzenia.

W pierwszej fazie następuje nałożenie więzów (zderzenie plastyczne), a w wyniku tego powstają reakcje wynoszące $R = G\lambda_I$, które powodują zmianę początkowej prędkości układu $\dot{x}(t-0)$ na prędkość V_0 .

Pierwszą fazę zderzenia opisują relacje

$$(3) \quad M[V_0 - \dot{x}(t-0)] = G\lambda_I,$$

$$(4) \quad \lambda_I \geq 0,$$

$$(5) \quad G^T V_0 \geq 0,$$

$$(6) \quad (e_i^T G^T V_0)(e_i^T \lambda_I) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

jeśli

$$e_i^T := [\delta_{i,1} \dots, \delta_{i,n}],$$

gdzie: $\delta_{i,j}$ — symbol Kroneckera.

W drugiej fazie zderzenia następuje oswobodzenie układu z więzów pod wpływem impulsów $G\lambda_{II}$, jeśli

$$\lambda_{II} = \varepsilon \lambda_I,$$

gdzie:

ε — współczynnik restytucji zderzenia taki, że

$$0 \leq \varepsilon \leq 1;$$

zatem druga faza zderzenia opisana jest związkami

$$(7) \quad M[\dot{x}(t+0) - V_0] = \varepsilon G \lambda_1.$$

Model zderzenia opisany relacjami (3) - (7) pozwala na jednoznaczne wyznaczenie wektora $\dot{x}(t+0)$. Fakt ten wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Jeżeli $F: R^N \rightarrow R^1$ jest funkcjonałem określonym następująco:

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T M x,$$

to V_0 spełnia relacje (3) - (6) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(8) \quad F(V_0 - \dot{x}(t-0)) = \min [F(z - \dot{x}(t-0)) | Gz \geq 0]$$

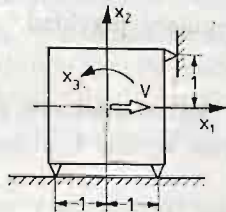
Dowód. Jeśli V_0 jest rozwiązaniem zadania (8), to na mocy twierdzenia Kuhna-Tuckera spełnia relacje (3) - (6) (porównaj [5]). Z drugiej strony, na mocy założenia symetrii i dodatniej określoności macierzy M funkcjonał F jest ściśle wypukły i różniczkowalny zatem warunki (3) - (6) pociągają za sobą (8) (porównaj [5]). ■

Ponieważ funkcjonał F jest ściśle wypukły, ciągły i koercywny ($\lim F(u) = \infty \Rightarrow \lim \|u\| = \infty$), to na mocy znanego twierdzenia [2] zadanie (8) posiada jednoznaczne rozwiązanie, a na mocy twierdzenia 1 wzory (3) - (7) wyznaczają jednoznacznie λ_1 oraz $\dot{x}(t+0)$. Prędkości układu po zderzeniu w kierunkach więzów wynoszą

$$G^T \dot{x}(t+0) = (1 + \varepsilon) G^T V_0 - \varepsilon G^T \dot{x}(t-0)$$

Przykład 1:

Należy wyznaczyć prędkości bryły sztywnej po zderzeniu idealnie sprężystym z więzami jednostronnymi; schemat bryły i więzów pokazano na rys. 1, gdzie zaznaczono również współrzędne x_1, x_2, x_3 , opisując położenie bryły. Masa i moment bezwładności



Rys. 1

bryły są równe jedności, to znaczy że

$$M = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

prędkości bryły przed zderzeniem są takie, że

$$\dot{x}(t-0) = [V, 0, 0]^T, \quad V > 0$$

równania i macierze więzów, wynikające z rys. 1 mają postać

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &\geq 0 \\ x_2 - x_3 &\geq 0; \\ x_2 + x_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad G = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ prędkości bryły w kierunkach więzów wynoszą

$$G^T \dot{x}(t-0) = V \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

to nastąpi zderzenie bryły z więzami.

Na podstawie relacji (3) - (6) otrzymujemy

$$\lambda = V \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_0 = V \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

a ze wzoru (7) otrzymujemy prędkości bryły po zderzeniu ($\varepsilon = 1$)

$$\dot{x}(t+0) = V \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix};$$

Stąd mamy prędkości bryły w kierunkach więzów po zderzeniu

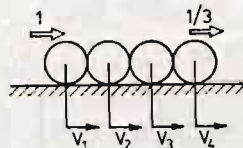
$$G^T \dot{x}(t+0) = V \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4/3 \end{bmatrix},$$

które spełniają warunek (2).

Niestety, zaproponowany tu model zderzenia, który opisują relacje (3) - (7) nie zawsze ma własność (2) co pokazuje następujący przykład.

Przykład 2:

Rozpatrywane jest jednoczesne proste środkowe zderzenie czterech idealnie sprężystych ciał (rys. 2). Masa każdego ciała wynosi 1, a prędkości tych ciał przed zderzeniem są równe $v(t-0) = [1, 0, 0, 1/3]^T$



Rys. 2

Macierz więzów, która wynika z rysunku 2, ma postać

$$G = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Jedynym wektorem v_0 spełniającym relacje (3 - 6) jest

$$v_0 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]^T,$$

wtedy

$$\lambda = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right]^T,$$

a ze wzoru (7), jeśli $\varepsilon = 1$, otrzymuje się prędkości kul po zderzeniu

$$v(t+0) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right]^T,$$

a stąd prędkości kul w kierunkach więzów

$$G^T v(t+0) = \left[1, 0, -\frac{1}{3} \right]^T.$$

Powyższy wektor nie spełnia warunku (2).

Przytoczony przykład wskazuje na to, że w modelu (3) - (7) mogą powstać prędkości $\dot{x}(t+0)$, które w dalszym ciągu powodują zderzenie z więzami, to znaczy że nie spełniają warunku więzów (2). Dlatego też zaproponowany model jednoczesnego zderzenia układu z więzami powinien być skorygowany, tak aby prędkości po zderzeniu $\dot{x}(t+0)$ spełniały warunek więzów (2).

3. Rozszerzony model zderzenia

Proponujemy następujący rozszerzony model jednoczesnego zderzenia.

Proces jednoczesnego zderzenia w układzie o wielu stopniach swobody można podzielić na etapy, składające się z dwóch faz. W pierwszej fazie każdego etapu następuje nałożenie więzów (zderzenie plastyczne), a w drugiej oswobodzenie z więzów. Jeżeli po oswobodzeniu z więzów prędkości układu nie spełniają warunków więzów, to następuje kolejny etap zderzenia.

Jeżeli przez $y_k \in R^N$ oznaczymy wektor prędkości układu na początku k -tego etapu zderzenia lub po zakończeniu $(k-1)$ -tego etapu, a przez w_k wektor prędkości układu po zakończeniu pierwszej fazy k -tego etapu zderzenia, to opis matematyczny zaproponowanego wyżej modelu zderzenia jest następujący

$$(9) \quad y_0 := \dot{x}(t-0),$$

$$(10) \quad M(w_k - y_k) = G\lambda^{(k)},$$

$$(11) \quad \lambda^{(k)} \geq 0,$$

$$(12) \quad G^T w_k \geq 0,$$

$$(13) \quad (e_i^T G^T w_k)(e_i^T \lambda^{(k)}) = 0; \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(14) \quad M(y_{k+1} - w_k) = \varepsilon G\lambda^{(k)},$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Jeżeli powtórzymy rozumowanie prowadzone dla relacji (3) - (7), to zauważymy, że ciągi $\{y_k\}$ i $\{w_k\}$ są jednoznacznie wyznaczone. Zachodzi przeto następujące twierdzenie

Twierdzenie 2. Jeżeli ciągi $\{y_k\}$, $\{w_k\}$ są wyznaczone relacjami (9) - (14), to są one zbieżne, przy czym

$$(15) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k := y = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k, \\ G_y^T \geq 0;$$

szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)}$ jest zbieżny, to znaczy

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)} := \lambda < \infty$$

oraz

$$(16) \quad M(y - y_0) = (1 + \varepsilon)G\lambda.$$

Dowód. Na wstępie pokażemy, że ciąg $\{y_k\}$ jest ograniczony w normie.

Ponieważ macierz M jest nieosobliwa zatem związki (10) i (14) dają

$$(17) \quad y_{k+1} = (1 + \varepsilon)w_k - \varepsilon y_k,$$

a stąd w oparciu o definicję funkcjonału F mamy

$$(18) \quad F(y_{k+1}) = (1 + \varepsilon)^2 F(w_k) + \varepsilon^2 F(y_k) - \varepsilon(1 + \varepsilon)w_k^T M y_k.$$

Dla funkcjonału F zachodzi tożsamość

$$(19) \quad F(w_k - y_k) = F(w_k) + F(y_k) - w_k^T M y_k.$$

Z drugiej strony, korzystając z wzorów (10) i (13) mamy

$$(20) \quad 2F(w_k - y_k) = 2F(y_k) - w_k^T M y_k.$$

Z wzorów (19) i (20) wynika, że

$$(21) \quad F(w_k - y_k) = F(y_k) - F(w_k),$$

zaś z (18), (19) i (21)

$$(22) \quad F(y_{k+1}) = (1 - \varepsilon^2)F(w_k) + \varepsilon^2 F(y_k).$$

Ponieważ funkcjonal F przyjmuje jedynie wartości nieujemne zatem z (21) wynika

$$F(w_k) \leq F(y_k),$$

co pociąga za sobą na mocy (22)

$$(23) \quad F(y_{k+1}) \leq F(y_k),$$

gdyż: $\varepsilon \in [0, 1]$.

Niech α_0, α_1 ($0 < \alpha_0 \leq \alpha_1$) będą odpowiednio najmniejszą i największą wartością własną macierzy M . Wtedy z definicji funkcjonału F wynika, że

$$\frac{1}{2} \alpha_0 \|z\|_2^2 \leq F(z) \leq \frac{1}{2} \alpha_1 \|z\|_2^2,$$

dla każdego $z \in R^N$.

Z nierówności (23), która zachodzi dla $k = 0, 1, 2 \dots$ otrzymujemy zatem

$$\|y_k\|_2^2 \leq \frac{2}{\alpha_0} F(y_k) \leq \frac{2}{\alpha_0} F(y_0) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \|y_0\|_2^2$$

co dowodzi, że ciąg $\{y_k\}$ jest ograniczony w normie.

Dalszym etapem dowodu będzie pokazanie, że ciąg $\{G^T y_k\}_{k=0}^\infty$ jest zbieżny.

Niech

$$\eta_k := G^T y_k \in R^n,$$

$$\xi_k := (G^T M^{-1} G)^{-1} \eta_k \in R^n,$$

dla $k = 1, 2, \dots$

Ciąg $\{\xi_k\}$ jest dobrze określony, gdyż macierz $G^T M^{-1} G$ jest nieosobliwa (rząd $G = n$).

Z wzorów (10) i (14) mamy

$$(24) \quad M(y_{k+1} - y_k) = (1 + \varepsilon) G \lambda^{(k)},$$

a stąd

$$(25) \quad \xi_{k+1} - \xi_k = (1 + \varepsilon) \lambda^{(k)},$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Zatem na skutek nieujemności $\lambda^{(k)}$

$$\xi_{k+1} \geq \xi_k \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

ponadto

$$\|\xi_k\|_{L_2(R^n)} \leq \|(G^T M^{-1} G)^{-1} G^T\|_{L(L_2(R^n), L_2(R^n))} \|y_k\|_{L_2(R^n)} < \infty$$

Zatem ciąg $\{\xi_k\}$ jako rosnący i ograniczony posiada granicę, a więc ciąg $\{\eta_k\}$ posiada również granicę

$$\eta := \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k.$$

Wprowadźmy ciąg pomocniczy $\{\zeta_k\}_{k=0}^\infty$

$$(26) \quad \zeta_k := y_k - M^{-1} G \xi_k \in R^N.$$

Udowodnimy, że

$$(27) \quad \zeta_k = \zeta_0 = y_0 - M^{-1} G (G^T M^{-1} G)^{-1} G^T y_0.$$

Istotnie z równości (24) i (26) otrzymujemy

$$M(\zeta_{k+1} - \zeta_k) + G(\xi_{k+1} - \xi_k) = (1 + \varepsilon) \lambda^{(k)},$$

zaś z (25)

$$G(\xi_{k+1} - \xi_k) = (1 + \varepsilon) \lambda^{(k)},$$

co na skutek nieosobliwości macierzy M dowodzi wzoru (27). W ten sposób pokazujemy, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = M^{-1} G (G^T M^{-1} G)^{-1} (\eta - G^T y_0) + y_0.$$

oznaczając

$$y := M^{-1} G (G^T M^{-1} G)^{-1} (\eta - G^T y_0) + y_0,$$

otrzymujemy pierwszą część tezy.

Ze wzoru (17) mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = y$$

i na mocy (12)

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} G^T w_k = G^T y.$$

Ze wzoru (25) wynika, że

$$\lambda := (G^T M^{-1} G)^{-1} (\eta - \eta_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} (\xi_{p+1} - \xi_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^p (\xi_{j+1} - \xi_j) = \lim_{p \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon) \sum_{j=0}^p \lambda^{(j)},$$

co dowodzi zbieżności szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)}.$$

Ostatnia zależność w tezie (16) wynika bezpośrednio z definicji λ oraz wzoru (24). W ten sposób twierdzenie 2 zostało udowodnione. ■

Udowodnione powyżej twierdzenie 2 ma kluczowe znaczenie, albowiem pozwala w sposób jednoznaczny wyznaczyć popędy reakcji więzów wywołane zderzeniem oraz prędkości układu po zderzeniu. Zmianę prędkości układu, wywołaną jednoczesnym zderzeniem układu z kilkoma więzami, określa następujący wzór

$$(28) \quad \dot{x}(t+0) - \dot{x}(t-0) = \lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - y_0),$$

zaś popędy reakcji więzów wynoszą:

$$(29) \quad G \lambda$$

gdzie

$$\lambda := (1 + \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)}.$$

Ciągi wektorów $\{y_k\}$, $\{\lambda^{(k)}\}$ określone są jednoznacznie wzorami (9) - (14).

W wielu przypadkach proces zderzenia kończy się po $K \geq 1$ etapach, wówczas ciągi te mają postać taką, że

$$\lambda^{(K-1+m)} = 0,$$

$$y_{K+m} = y_K,$$

jeśli

$$m = 1, \dots, \infty.$$

Przykład 3:

Przedstawiony model zderzenia wykorzystamy do wyznaczenia popędów reakcji więzów oraz prędkości ciał po zderzeniu, które opisano w przykładzie 2.

W rozpatrywanym przypadku zderzenie kończy się po dwóch etapach ($K = 2$). Na podstawie relacji (9) - (14) można wyznaczyć pierwsze wyrazy ciągów $\{y_k\}_{k=0}^K$, $\{w_k\}_{k=0}^{K-1}$, $\{\lambda^{(k)}\}_{k=0}^{K-1}$, opisujące prędkości układu i popędy reakcji więzów, powstające w trakcie

zderzenia

$$\{y_k\} = \left\{ \begin{array}{c|c|c} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 4/9 \\ 0 & 2/3 & 4/9 \\ \hline 1/3 & 1/3 & 7/9 \end{array} \right\};$$

$$\{w_k\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 5/9 \\ 1/3 & 5/9 \\ \hline 1/3 & 5/9 \end{array} \right\};$$

$$\{\lambda^{(k)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/9 \\ 0 & 2/9 \end{array} \right\}.$$

Prędkości ciał po zakończeniu zderzenia wynoszą:

$$v(t+0) = y_2 = [-1/3, 4/9, 4/9, 7/9]^T,$$

a prędkości kul w kierunkach więzów

$$G^T v(t+0) = [7/9, 0, 1/3]^T,$$

spełniają warunek (2).

Według wzoru (29) można obliczyć popędy reakcji więzów, które wynoszą ($\varepsilon = 1$)

$$\lambda = [4/3, 8/9, 4/9]^T,$$

Pokażemy teraz, że zaproponowany model zderzenia spełnia zasadę zachowania energii. W tym celu wyznaczmy zmianę energii kinetycznej układu w czasie zderzenia.

Zgodnie z twierdzeniem Kelvina zmiana energii kinetycznej układu w poszczególnych fazach każdego etapu zderzenia wynosi:

$$(30) \quad \begin{aligned} \Delta T_I^{(k)} &= -\frac{1}{2} (G\lambda^{(k)})^T (w_k + y_k), \\ \Delta T_{II}^{(k)} &= \frac{\varepsilon}{2} (G\lambda^{(k)})^T (y_{k+1} + w_k), \end{aligned}$$

gdzie:

$\Delta T_I^{(k)}$ — zmniejszenie energii kinetycznej układu w pierwszej fazie etapu;

$\Delta T_{II}^{(k)}$ — przyrost energii kinetycznej układu w drugiej fazie etapu.

Po wykonaniu przekształceń otrzymuje się wzory, stanowiące uogólnioną postać wzorów Carnota na zmianę energii kinetycznej układu

$$(31) \quad \begin{aligned} \Delta T_I^{(k)} &= -\frac{1}{2} (w_k - y_k)^T M (w_k - y_k), \\ \Delta T_{II}^{(k)} &= \frac{1}{2} (y_{k+1} - w_k)^T M (y_{k+1} - w_k), \end{aligned}$$

lub

$$(32) \quad \begin{aligned} \Delta T_I^{(k)} &= -\frac{1}{2} (G\lambda^{(k)})^T M^{-1} (G\lambda^{(k)}), \\ \Delta T_{II}^{(k)} &= \frac{\varepsilon^2}{2} (G\lambda^{(k)})^T M^{-1} (G\lambda^{(k)}). \end{aligned}$$

Całkowita zmiana energii kinetycznej układu po K etapach zderzenia wynosi

$$(33) \quad \Delta T = \sum_{k=0}^{K-1} (\Delta T_I^{(k)} + \Delta T_{II}^{(k)}),$$

a stąd po podstawieniu wzorów (31) lub (32) mamy

$$(34) \quad \Delta T = -\frac{1}{2} y_0^T M y_0 + \frac{1}{2} y_K^T M y_K,$$

lub

$$(35) \quad \Delta T = -\frac{1-\varepsilon^2}{2} \sum_{k=0}^{K-1} (G\lambda^{(k)})^T M^{-1} (G\lambda^{(k)}).$$

Ze wzoru (35) wynika, że w przypadku zderzenia niesprężystego ($0 \leq \varepsilon < 1$) energia kinetyczna zmniejsza się, a w przypadku zderzenia sprężystego ($\varepsilon = 1$) energia kinetyczna nie zmienia się. Oznacza to, że model zderzenia spełnia zasadę zachowania energii.

4. Rodzina modeli zderzenia

Przedstawiony w rozdziale 3 model zderzenia jest jednym z wielu możliwych modeli które wynikają z następujących relacji

$$(36) \quad \frac{1}{2} \dot{x}^T(t+0) M \dot{x}(t+0) = \eta \frac{1}{2} \dot{x}^T(t-0) M \dot{x}(t-0),$$

$$(37) \quad M[\dot{x}(t+0) - \dot{x}(t-0)] = G\lambda,$$

$$(38) \quad G^T \dot{x}(t+0) \geq 0,$$

$$(39) \quad \lambda \geq 0,$$

gdzie:

η — wskaźnik strat energii taki, że $0 \leq \eta \leq 1$, przy czym w przypadku zderzenia sprężystego $\eta = 1$.

Relacje (36) - (39) opisują prawo zachowania energii (36), prawo zachowania pędu (37), warunek zgodności więzów i prędkości układu po zderzeniu (38) oraz warunek zgodności więzów i reakcji więzów (39). Na podstawie tych relacji nie można jednoznacznie wyznaczyć prędkości układu po zderzeniu, to znaczy że relacje te opisują rodzinę modeli zderzenia, a model zaproponowany w rozdziale 3 jest jednym z wielu możliwych modeli. Dla zilustrowania tej tezy rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład 4:

W dwie stojące i stykające się kule uderza kula trzecia z prędkością równą 1; kule są jednakowe, a masa każdej jest równa m . Należy wyznaczyć wszystkie prędkości kul po zderzeniu oraz reakcje więzów, które spełniają relacje (36) - (39), przy założeniu $\eta = 1$.

Z założeń zadania wynika, że

$$M = m \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{x}(t-0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poszukiwane są wektory

$$\dot{x}(t+0) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix},$$

spełniające relacje (36) - (39). Wektory te dane są wzorami

$$\lambda = m\mu,$$

$$\dot{x}(t+0) = \dot{x}(t-0) + G\mu,$$

o ile tylko $\mu = [\mu_1, \mu_2]^T$ spełnia następujące relacje

$$\mu \geq 0,$$

$$(40) \quad 2\dot{x}^T(t-0)G\mu + \mu^T G^T G\mu = 0,$$

$$G^T \dot{x}(t-0) + G^T G\mu \geq 0.$$

Po rozpisaniu relacji (40) otrzymujemy

$$(41) \quad \begin{aligned} \mu_1 &\geq 0, & \mu_2 &\geq 0, \\ -1 + 2\mu_1 - \mu_2 &\geq 0, \\ -\mu_1 + 2\mu_2 &\geq 0, \\ -\mu_1 + \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 + \mu_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z wzorów (41) wynika, że $\mu_1 \geq \frac{1}{2}$. Zatem każde rozwiązanie (41) jest postaci

$$\mu_1 = \frac{1}{1-s},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1-s} t,$$

przy czym t oraz s spełniają związki

$$(42) \quad -\frac{1}{2} \leq s < 1,$$

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 1+s,$$

$$t^2 - t + s = 0.$$

Łatwo wyliczyć, że zbiór wszystkich rozwiązań (42) jest dany przez

$$t = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1-4s}), \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4}.$$

Stąd wniosek, że zbiór dopuszczalnych rozwiązań (36) - (39) dany jest wzorami

$$1 \leq z \leq \frac{4}{3},$$

$$\lambda = m \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{2} (z + \sqrt{4z - 3z^2}) \end{bmatrix}.$$

$$\dot{x}(t+0) = \begin{bmatrix} 1-z \\ \frac{1}{2}(z - \sqrt{4z-3z^2}) \\ \frac{1}{2}(z + \sqrt{4z-3z^2}) \end{bmatrix}.$$

W przypadku, gdy $z = \frac{4}{3}$ oraz $m = 1$ otrzymujemy

$$\lambda = \left[\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right]^T, \quad \dot{x}(t+0) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]^T.$$

Identyczny rezultat można otrzymać na podstawie zaproponowanego modelu zderzenia, który opisują relacje (3) - (7) przy założeniu $\varepsilon = 1$.

5. Zakończenie

Przedstawiony model jednoczesnego uderzenia w układzie o wielu stopniach swobody został wykorzystany do analizy ruchów wzdłużnych wagonów, wchodzących w skład długiego pociągu towarowego. Podczas rozruchu i hamowania takiego pociągu w urządzeniach sprzęgających wagony powstają duże siły i bardzo często dochodzi do całkowitego ściśnięcia amortyzatorów, znajdujących się między wagonami tak, że dalsze oddziaływanie między wagonami odbywa się poprzez sztywne korpusy amortyzatorów. Opisany tu model zderzenia ciał sztywnych został użyty do wyznaczania gwałtownych zmian prędkości wagonów, które powstają w okresie całkowitego ściśnięcia amortyzatorów.

Literatura cytowana w tekście

1. R. GRYBOŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969 r.
2. J. EKELAND, R. TEMAM, *Courex-analysis and variational problems*, North-Holland, 1976
3. J. LEYKO, *Dynamika układów materialnych*, PWN, Warszawa 1959 r.
4. G. K. SUSŁOW, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1960 r.
5. W. I. ZANGWILL, *Programowanie nieliniowe*, WNT, Warszawa 1974 r.

Резюме

СОУДАРЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В СИСТЕМАХ С МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В статье рассматриваются вопросы теории одновременных соударений между абсолютно твердыми телами. Предложено метод определения скоростей тел после удара и импульсивных реакций односторонних связей. Для определения неизвестных послесударных скоростей использовано гипотезу Пуассона о коэффициенте восстановления.

Summary

SOLID BODIES IMPACTS WITH MULTI-DEGREES OF FREEDOM SYSTEMS

Problems of the theory of simultaneous impacts between ideal solid bodies are considered. A method for evaluating of postshock velocities of bodies and reactions of unilateral constraints is presented. Poisson's restitution coefficient principle is used for postshock velocities evaluation.

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 marca 1983 roku

STILLBORNEN DER FAMILIE VON ...

... der Familie ...

... der Familie ...

... der Familie ...

... der Familie ...

... der Familie ...

... der Familie ...

... der Familie ...

... der Familie ...

NUMERYCZNA SYMULACJA KORKOCIĄGU SAMOŁOTU

JERZY MARYNIAK

Politechnika Warszawska

WOJCIECH BLAJER

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

W pracy podjęto się próby numerycznej symulacji ruchu samolotu podczas wykonywania korkociągu. Samolot traktowano jako sztywny układ mechaniczny o sześciu stopniach swobody. Przyjęto, że zmiany wychyleń sterów mają wpływ jedynie na wartości sił i momentów aerodynamicznych działających na samolot w locie.

Równania ruchu wyprowadzono w quasi-współrzędnych układu odniesienia związanego z samolotem, stosując równania Boltzmana-Hamela [4] dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych. Równania te uzupełniono związkami kinematycznymi uzależniającymi prędkości uogólnione samolotu od quasi-prędkości. Uwzględniono też zmianę gęstości powietrza ze zmianą wysokości lotu. W ostatecznej formie rozpatrywano nieautonomiczny układ dwunastu równań różniczkowych o postaci normalnej [5].

Równania Boltzmana-Hamela są uogólnionymi równaniami Lagrange'a II rodzaju, wyrażonymi w quasi-współrzędnych i quasi-prędkościach. W rozpatrywanym przypadku quasi-prędkościami są kinematyczne parametry ruchu określone w centralnym układzie odniesienia, sztywno związanym z samolotem. Parametrami tymi są prędkości kątowe samolotu P , Q , R i prędkości liniowe jego środka masy U , V , W , [2, 3, 4, 6, 7]. Współrzędnymi uogólnionymi samolotu są współrzędne środka masy samolotu x_1 , y_1 , z_1 w układzie związanym z ziemią i kąty samolotowe Φ , Θ , Ψ wyznaczające konfigurację samolotu w przestrzeni, [2, 4, 6]. Prędkościami uogólnionymi są pochodne tych wielkości względem czasu.

Przyjęto, że oddziaływania zewnętrzne działające na samolot w korkociągu są pochodzenia aerodynamicznego, od zespołu napędowego i od siły ciężkości samolotu. Siły i momenty aerodynamiczne wyznaczano jako sumę oddziaływań od skrzydła, kadłuba, usterzeń poziomego i pionowego, w odniesieniu do całości samolotu. Dodatkowo skrzydło podzielono na $N = 20$ pasków. Opierając się głównie na pracy [3] uwzględniano wzajemny wpływ części samolotu na siebie. Oddziaływania aerodynamiczne na usterzeniach i poszczególnych paskach płata liczone były przy uwzględnieniu lokalnych warunków opływu, a następnie odnoszone do środka masy samolotu. Podejście takie pozwoliło na przybliżone uwzględnienie wpływu prędkości kątowych samolotu na siły i momenty aerodynamiczne.

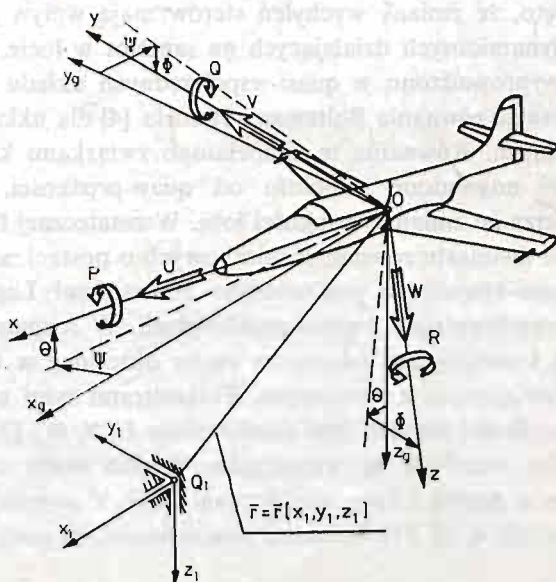
Oddziaływania od zespołu napędowego ograniczono do przypadku jednosilnikowego samolotu o napędzie turboodrzutowym. Źródłem tych oddziaływań były siła ciągu i momenty gyroskopowe.

Obliczenia przykładowe wykonano dla przypadku samolotu TS-11 „Iskra” według własnych programów w Ośrodku Obliczeniowym Politechniki Warszawskiej.

2. Przyjęte układy odniesienia

Do opisu ruchu samolotu w korkociągu przyjęto następujące układy odniesienia:

1. Układ inercjalny $O_1 x_1 y_1 z_1$ związany z ziemią o osi $O_1 z_1$ zgodnej z kierunkiem działania siły ciężkości,
2. Układ $Ox_g y_g z_g$ zaczepiony w środku ciężkości samolotu, o osiach równoległych do osi układu $O_1 x_1 y_1 z_1$,
3. Układ własny $Oxyz$ sztywno związany z samolotem,
4. Układ aerodynamiczny $Ox_a y_a z_a$ związany z przepływem (układ prędkościowy).



Rys. 1 Układy odniesienia $Oxyz$, $Ox_g y_g z_g$, $O_1 x_1 y_1 z_1$ oraz prędkości liniowe i kątowe w układzie własnym.

W każdej chwili położenie samolotu jako ciała sztywnego wyznaczone jest jednoznacznie poprzez położenie środka masy obiektu $\bar{r}_1 = \bar{r}_1[x_1, y_1, z_1]$ w układzie inercjalnym $O_1 x_1 y_1 z_1$ oraz poprzez kąty obrotu samolotu Φ , Θ , Ψ . Kąty te wyznaczają jednoznacznie położenie układu własnego samolotu $Oxyz$ względem układu $Ox_g y_g z_g$ (rys. 1). Są to kąty quasi-eulerowskie (zwane samolotowymi) i noszą nazwy: Φ — kąt przechylenia, Θ — kąt pochylenia, Ψ — kąt odchylenia.

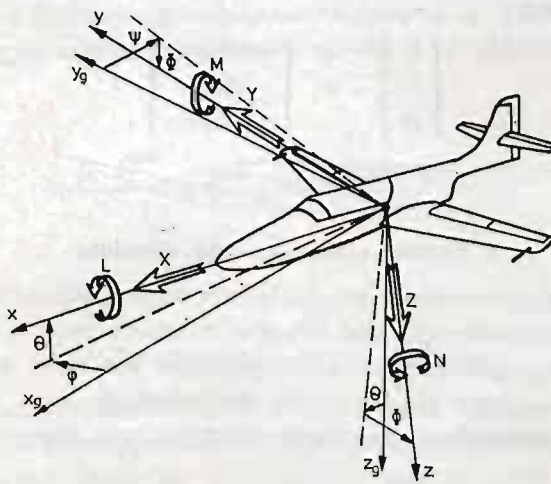
W układzie własnym $Oxyz$ wektory prędkości liniowej V , i kątowej $\bar{\Omega}$ samolotu rozkładają się następująco:

$$\bar{V}_c = U \cdot \bar{i} + V \cdot \bar{j} + W \cdot \bar{k}, \quad (1)$$

gdzie: U — prędkość podłużna, V — prędkość boczna, W — prędkość pionowa,

$$\bar{\Omega} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}, \quad (2)$$

gdzie: P — kątowa prędkość przechylania, Q — kątowa prędkość pochylenia, R — kątowa prędkość odchylenia.



Rys. 2 Składowce sił i momentów zewnętrznych działających na samolot zapisane w układzie własnym $Oxyz$.

Wektory sił zewnętrznych F i momentów zewnętrznych μ działających na samolot w układzie $Oxyz$ rozkładają się na (rys. 2):

$$F = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}, \quad (3)$$

gdzie: X — siła podłużna, Y — siła boczna, Z — siła pionowa,

$$\bar{\mu} = L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k}, \quad (4)$$

gdzie: L — moment przechylający, M — moment pochyłający, N — moment odchyłający.

Prędkości uogólnione $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}$ związane są z quasi-prędkościami U, V, W, P, Q, R poprzez związki liniowe o współczynnikach zależnych od współrzędnych uogólnionych Φ, Θ, Ψ i mają postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi \operatorname{tg}\Theta & \cos\Phi \operatorname{tg}\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \frac{\sin\Phi}{\cos\Theta} & \frac{\cos\Phi}{\cos\Theta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = A_D \times \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta\cos\psi & \sin\Phi\sin\Theta\cos\psi & \cos\Phi\sin\Theta\cos\psi \\ \cos\Theta\sin\psi & \sin\Phi\sin\Theta\sin\psi & \cos\Phi\sin\Theta\sin\psi \\ -\sin\Theta & \sin\Phi\cos\Theta & \cos\Phi\cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, \quad (5) \text{ [c.d.]}$$

czyli:

$$\text{col}[\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1] = A_v \times \text{col}[U, V, W]. \quad (6)$$

Układ aerodynamiczny $Ox_a y_a z_a$ (oś Ox_a układu jest zgodna z kierunkiem niezakłóconego przepływu, czyli z kierunkiem wektora \vec{V}_c) najczęściej wiązany jest z układem $Oxyz$ poprzez zależność:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = V_c \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha \\ \sin\beta \\ \cos\beta\sin\alpha \end{bmatrix}, \quad (7)$$

gdzie: α — kąt natarcia, β — kąt ślizgu.

3. Ogólne równania ruchu samolotu

Równania ruchu wyprowadzono w quasi-współrzędnych układu własnego $Oxyz$ przy użyciu równań Boltzmana-Hamela dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych. Dokładne wyprowadzenie równań zamieszczone jest m.in. w pracy [1]. Poniżej przytoczono ostateczną formę równań ruchu dla dowolnego ciała sztywnego o sześciu stopniach swobody, opisanych w dowolnym układzie $Oxyz$ sztywno związanym z tym ciałem.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & m & 0 & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & m & S_y & -S_x & 0 \\ 0 & -S_z & S_y & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ S_z & 0 & -S_x & -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -R & Q & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & -P & 0 & 0 & 0 \\ -Q & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W & V & 0 & -R & Q \\ W & 0 & -U & R & 0 & -P \\ -V & U & 0 & -Q & P & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & m & 0 & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & m & S_y & -S_x & 0 \\ 0 & -S_z & S_y & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ S_z & 0 & -S_x & -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \times \quad (8)$$

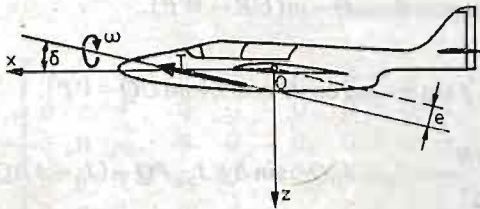
$$\times \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q\ddot{v} \\ Q\ddot{\psi} \\ Q\ddot{w} \\ Q\ddot{p} \\ Q\ddot{q} \\ Q\ddot{r} \end{bmatrix},$$

gdzie: m — masa samolotu, S_x, S_y, S_z — masowe momenty statyczne, J_x, J_y, \dots, J_{yz} — momenty bezwładności główne i dewiacyjne w układzie $Oxyz$, $Q^* = \text{col} [Q_1^*, \dots, Q_n^*]$ — wektor sił uogólnionych.

4. Wektor sił uogólnionych

Przyjęto, że siły i momenty działające na samolot w locie są pochodzenia aerodynamicznego, od zespołu napędowego i od siły ciężkości.

Oddziaływania od zespołu napędowego wyprowadzono dla przypadku jednosilnikowego samolotu turboodrzutowego. Źródłem tych oddziaływań są siła ciągu (działająca w płaszczyźnie Oxz) i momenty gyroskopowe. Założono, że wektor prędkości kątowej obrotu części wirujących silnika ma kierunek zgodny z kierunkiem działania siły ciągu (rys. 3).



Rys. 3 Oddziaływanie zespołu napędowego.

Siły i momenty aerodynamiczne wyznaczano według następującej metody. Liczono oddzielnie oddziaływania aerodynamiczne od skrzydła, kadłuba oraz usterzeń pionowego i poziomego, a następnie odnoszono je do środka masy samolotu. Dodatkowo skrzydło podzielono na $N = 20$ pasków. Lokalne oddziaływania aerodynamiczne (dla poszczególnych pasków skrzydła i usterzeń) liczono przy uwzględnieniu lokalnych warunków opływu. Opierając się na pracy [3] uwzględniano też szacunkowo wpływ poszczególnych części samolotu na siebie. Opisana metoda pozwoliła na przybliżone uwzględnienie wpływu prędkości kątowej obrotu samolotu na siły i momenty aerodynamiczne. Bliższy opis metody zawarty jest w [1].

W ostatecznej formie wektor sił uogólnionych Q zapisano następująco:

$$Q^* = \begin{bmatrix} X_a + T \cos \delta - m \cdot g \cdot \sin \theta \\ Y_a + m \cdot g \cdot \sin \Phi \cos \theta \\ Z_a - T \cdot \sin \delta + m \cdot g \cdot \cos \Phi \cos \theta \\ L_a - J_0 \cdot Q \omega \sin \delta \\ M_a + T \cdot e + J_0 \omega (R \cos \delta + P \sin \delta) \\ N_a - J_0 \cdot Q \cdot \omega \cos \delta \end{bmatrix} \quad (9)$$

gdzie: $Q_a^* = \text{col} [X_a, Y_a, Z_a, L_a, M_a, N_a]$ — wektor sił uogólnionych od oddziaływań aerodynamicznych,

T — siła ciągu,

δ — kąt działania linii ciągu względem osi Ox ,

e — oddalenie linii działania ciągu od środka masy (rys. 3),

J_0 — moment bezwładności części wirujących silnika,

ω — prędkość obrotu silnika, inne oznaczenia jak poprzednio.

5. Pełny układ równań różniczkowych do całkowania numerycznego

Równania ruchu w formie (8), w przypadku centralnego układu $Oxyz$, dla którego płaszczyzna Oxz jest płaszczyzną symetrii, ulegają znacznemu uproszczeniu z racji, że:

$$S_x = S_y = S_z = 0,$$

$$J_{xy} = J_{yz} = 0.$$

Równania te uzupełnione zostały związkami (5) i (6). Po uwzględnieniu postaci sił uogólnionych (9), pełne równania do całkowania numerycznego przyjęto w postaci:

$$m \frac{dU}{dt} = X_a + T \cos \delta - mg \sin \Theta + m(VR + WQ), \quad (a)$$

$$m \frac{dV}{dt} = Y_a + mg \sin \Phi \cos \Theta - m(UR - WP), \quad (b)$$

$$m \frac{dW}{dt} = Z_a - T \sin \delta + mg \cos \Phi \cos \Theta + m(UQ - VP), \quad (c)$$

$$J_x \frac{dP}{dt} - I_{xz} \frac{dR}{dt} = L_a - J_0 Q \omega \sin \delta + J_{xz} PQ - (J_z - J_y) QR, \quad (d)$$

$$J_y \frac{dQ}{dt} = M_a + Te + J_0 \omega (R \cos \delta + P \sin \delta) - J_{xz} (P^2 - R^2) + (J_z - J_x) PR, \quad (e)$$

$$J_z \frac{dR}{dt} - J_{xz} \frac{dP}{dt} = N_a - J_0 Q \omega \cos \delta - J_{xz} QR - (J_y - J_x) PQ, \quad (f)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = P + (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \operatorname{tg} \Theta, \quad (g)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad (h)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \Theta} (Q \sin \gamma \Phi + R \cos \Phi), \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = & U \cos \Theta \cos \psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi) + \\ & + W(\cos \Phi \sin \Theta \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi), \end{aligned} \quad (j)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} = & U \cos \Theta \sin \psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \sin \psi + \cos \Phi \cos \psi) + \\ & + W(\cos \Phi \sin \Theta \sin \psi - \sin \Phi \cos \psi), \end{aligned} \quad (k)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = -U \sin \Theta + V \sin \Phi \cos \Theta + W \cos \Phi \cos \Theta. \quad (l)$$

Równania (a-f) stanowią zbiór sześciu podstawowych równań ruchu samolotu zapisanych w układzie własnym $Oxyz$. Równania (g-l) są związkami kinematycznymi, uzależniającymi prędkości uogólnione od quasi-prędkości. Należy zauważyć, że pierwszych osiem równań (a-h) jest niezależnych od pozostałych czterech (i-l). Śledzenie toru lotu

samolotu oraz zmian jego konfiguracji w locie wymaga wyznaczania przebiegów wszystkich współrzędnych uogólnionych. Rozpatrywać należy zatem pełny układ równań.

W pracy uwzględniono zmianę gęstości powietrza w zależności od wysokości lotu. Gęstość powietrza liczono ze wzoru:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{H_0 - z_1}{44300} \right)^{4.256}, \quad (11)$$

gdzie: ρ_0 — gęstość powietrza na wysokości O ,

H_0 — początkowo wysokość lotu, od której liczone jest z_1 (oś $O_1 z_1$ skierowana jest pionowo).

Układ równań (10) zapisać można w postaci macierzowej:

$$A \times \dot{X} = B, \quad (12)$$

gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & 0 & -J_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{xz} & 0 & J_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$X = \text{col } [U, V, W, P, Q, R, \Phi, \Theta, \Psi, x_1, y_1, z_1]$ — wektor stanu,

B — wektor prawych stron układu równań (10).

Równanie (12) przekształcić można do postaci:

$$\dot{X} = F(X, \delta, T^1, \rho), \quad (14)$$

gdzie: $F = A^{-1} \times B$ — funkcja wektorowa prawych stron,

$\delta = [\delta_H, \delta_V, \delta_L]$ — wektor wychyleń sterów,

T^1 — oznacza wpływ zespołu napędowego.

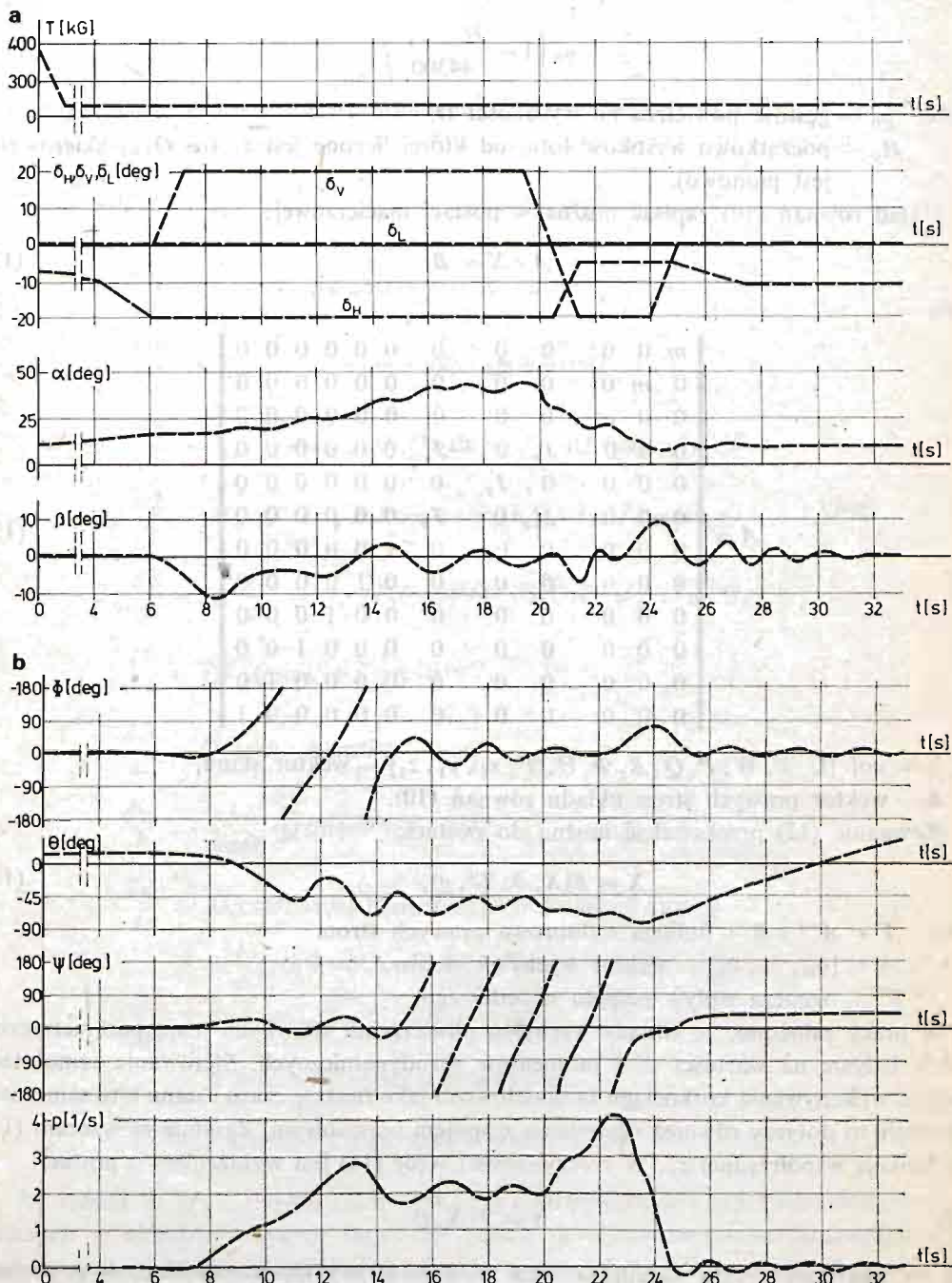
W pracy założono, że zmiany wychyleń powierzchni sterowych mają parametryczny wpływ jedynie na wartości sił i momentów aerodynamicznych. Sterowanie samolotem podczas wykonywania korkociągu zamodelowano jako funkcję czasu i stanu lotu samolotu. Założenie to dotyczy również sterowania zespołem napędowym. Zgodnie ze wzorem (11) jest funkcją współrzędnej z_1 . W rzeczywistości wzór (14) jest wyrażeniem o postaci:

$$(15) \quad \dot{X} = F(X, t).$$

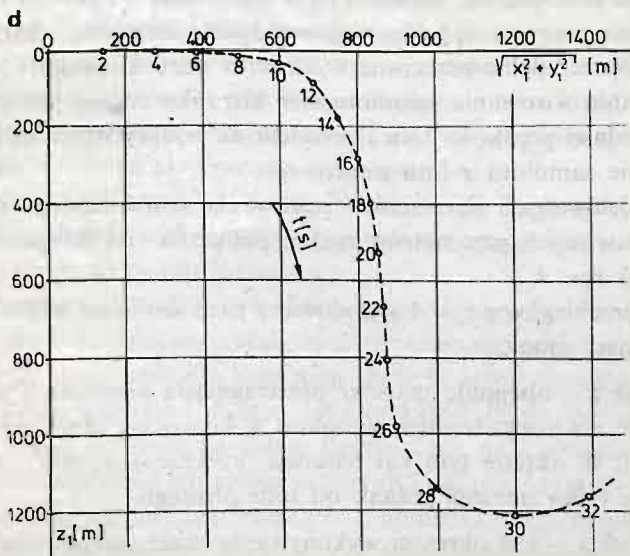
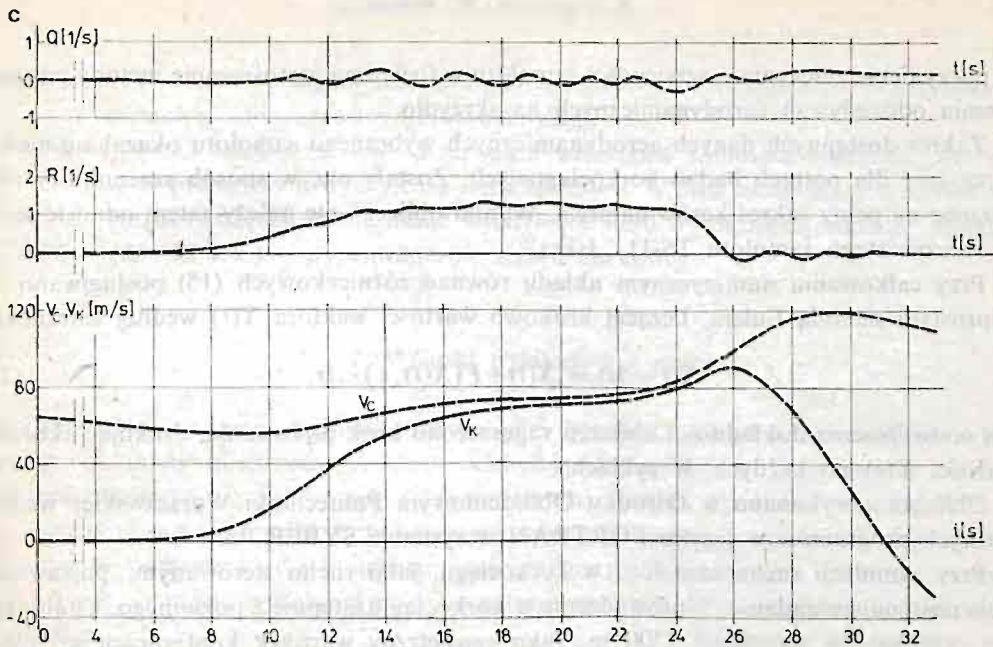
Jest to wektorowy zapis układu równań różniczkowych nieautonomicznych o postaci normalnej.

6. Obliczenia przykładowe

Obliczenia przykładowe przeprowadzono dla przypadku samolotu TS-11 „Iskra”. Jest to samolot o napędzie turbododrutowym, średniopłat o klasycznej, zwartej konstrukcji, znacznym wydłużeniu skrzydeł i ich małym skosie. Te parametry konstrukcyjne pozwoliły



Rys. 4 a, b



Rys. 4 Wyniki symulacji korkociągu samolotu.

na poczynienie założenia o sztywności samolotu w locie i na zastosowanie metody pasowej liczenia oddziaływań aerodynamicznych na skrzydło.

Zakres dostępnych danych aerodynamicznych wybranego samolotu okazał się niewystarczający dla potrzeb badań korkociągowych. Zostały one w sposób szacunkowy rozszerzone na pełny zakres kątów natarcia. Wyniki obliczeń nie należy zatem odnosić ściśle do rzeczywistego samolotu TS-11 „Iskra”.

Przy całkowaniu numerycznym układu równań różniczkowych (15) posługiwano się najprostszą metodą Eulera, liczącej krokowo wartości wektora $X(t)$ według zależności:

$$X(t+\Delta t) = X(t) + F(X(t), t) \cdot \Delta t. \quad (16)$$

Dla podwyższenia dokładności obliczeń zagęszczono krok całkowania, drukując aktualne wartości $X(t)$ po każdym M cyklach.

Obliczenia wykonano w Ośrodku Obliczeniowym Politechniki Warszawskiej według własnych programów w języku FORTRAN w systemie SYBER 73.

Przy symulacji ruchu samolotu w korkociągu, jako ruchu sterowanym, postawiono sobie następujące zadanie. Wprowadzenie w korkociąg następuje z poziomego, ustalonego lotu prostego na wysokości 1500 m. Jako zewnętrzny warunek konfiguracji samolotu narzucono początkowy kąt natarcia $\alpha_0 = 11^\circ$. W chwili $t = 0$ następuje manewr redukcji ciągu silnika i rozpoczyna się faza zmniejszania prędkości w locie prostym (odpowiednio do stanu lotu samolotu ściąganie drążka sterowego ruchem na siebie). Po przekroczeniu $\alpha = \alpha_{kr}$ dalsze utrzymywanie lotu prostego staje się niemożliwe. Jest to moment rozpoczęcia manewru sterem kierunku (pełne wychylenie w stronę zamierzonego korkociągu) i w ślad za tym ściągnięcie drążka sterowego ruchem na siebie do oporu.

Po wejściu samolotu w korkociąg postawiono wymóg wykonania dwu pełnych zwitek, co jest równoważne dwu pełnym obrotom kąta odchylenia ψ . Jest to faza ruchu niesterowanego. Następnie przewidziano fazę wyprowadzenia samolotu z korkociągu. Manewr realizowany jest poprzez pełne przeciwne wychylenie steru kierunku i „oddanie” drążka sterowego. Po ustaniu wirowania samolotu ster kierunku cofany jest do neutrum, a po uzyskaniu odpowiedniej prędkości lotu i przejścia na podkrytyczne kąty natarcia, następuje wyprowadzenie samolotu z lotu nurkowego.

Przebieg zamodelowanych parametrów sterowania samolotem w czasie oraz na ich tle przebiegi podstawowych parametrów ruchu, położenia i konfiguracji samolotu prezentują wykresy na rys. 4.

Na podstawie przebiegów z rys. 4 symulowany ruch samolotu w korkociągu podzielić można na następujące etapy.

ETAP1 — (0 - 8 sek.) — obejmuje manewr przeciągnięcia samolotu i wszelkie manewry związane z wprowadzeniem samolotu w korkociąg (dalej ruch jest już niesterowany). W okresie tym kąt natarcia przekracza wartość krytyczną, lot nieznacznie tylko odbiega jednak od lotu prostego.

ETAP2 — (8 - 14 sek.) — jest okresem wykonywania przez samolot dwu niekontrolowanych obrotów autorotacyjnych (rodzaj niesterowanych beczek autorotacyjnych). Tor lotu samolotu pochyła się, wzrasta wartość kąta pochylenia samolotu i kąta natarcia. Zwiększa się też wyraźnie prędkość kątowa obrotu samolotu.

ETAP3 — (14 - 19 sek) — wykonanie dwu pełnych zwitek korkociągu o osi w przybliżeniu pionowej (nieprzerwany obrót odchylający).

ETAP4 — (19 - 25 sek.) — manewr przerwania wirowania samolotu polegający na pełnym przeciwnym wychyleniu steru kierunku. W ślad za manewrem sterem kierunku następuje zmniejszenie wychylenia steru wysokości („oddanie” drążka).

ETAP5 — (25 - 32 sek.) — wyprowadzenie z lotu nurkowego.

7. Wnioski wynikające z pracy

Zamodelowany samolot prawidłowo wchodzi i wychodzi z korkociągu. Wejście w korkociąg rozwinięty (nieprzerwany obrót odchylający) poprzedzane jest dwoma niesterowanymi obrotami (rodzaj beczek autorotacyjnych). Jest to zjawisko charakterystyczne dla tego typu samolotów [8]. Przy wyprowadzeniu z korkociągu opóźnienie zaprzestania obrotów w odniesieniu do momentu przeciwnego wychylenia steru kierunku, wynosi ok. 1.5 sek., a utrata wysokości podczas całego manewru wyprowadzenia z korkociągu ok. 700 m.

Uzyskane wyniki są zbliżone do parametrów korkociągu wykonywanego przez rzeczywisty samolot TS-11 „Iskra”, [8].

Wyniki przedstawionej pracy świadczą, że przy dysponowaniu odpowiednio szerokim zestawem danych aerodynamicznych samolotu możliwa jest symulacja jego ruchu w korkociągu.

Przedstawiona metoda symulacji ruchu jest bardzo plastyczna. Pozwala na śledzenie przebiegów parametrów ruchu, położenia i konfiguracji samolotu w przestrzeni. Umożliwia to ocenę podstawowych własności samolotu w korkociągu, a w szczególności prawidłowości wejścia i wyjścia samolotu z korkociągu.

Metoda wydaje się być szczególnie użyteczną na etapie badań modelowych nad nową konstrukcją. Możliwe jest wówczas przebadanie wpływu zmian konstrukcyjnych na własności korkociągowe samolotu. Metoda umożliwia też przebadanie przypadków lotu nie przewidzianych normalną eksploatacją samolotu.

Nawet gdy otrzymane wyniki obliczeń obarczone są błędem, otrzymane tą drogą wiadomości o własnościach korkociągowych samolotu, mogą okazać się bardzo istotne dla pilota oblatującego nowy typ samolotu.

Aparat matematyczny metody i oprogramowanie numeryczne są uniwersalne i posłużyć mogą do symulacji dowolnego innego, nieustalonego ruchu samolotu.

Metoda wymaga dysponowania zestawem danych aerodynamicznych samolotu dla pełnego zakresu kątów natarcia i dużego zakresu kątów ślizgu. Należy też uwzględniać wzajemny wpływ części samolotu na siebie. Rozdzielenie oddziaływań aerodynamicznych na pochodzące od poszczególnych części samolotu i pasków skrzydła, pozwoliło jednak na stosowanie tylko danych aerodynamicznych z dmuchań statycznych [1].

Uzyskanych wyników obliczeń nie należy odnosić ściśle do rzeczywistego samolotu TS-11 „Iskra”. Dane aerodynamiczne przyjęte do obliczeń zostały tylko w przybliżeniu rozszerzone na cały zakres kątów natarcia. Zastosowanie techniczne metody wymaga uściślenia tych danych.

Literatura cytowana w tekście

1. W. BLAJER, *Badanie dynamiki samolotu w korkociągu*, praca doktorska Politechniki Warszawskiej (nie publikowana), Warszawa 1982.
2. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York 1972.
3. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, PWN, Łódź-Warszawa 1961.
4. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
6. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, wyd. PW, Warszawa 1975.
7. J. MARYNIAK, M. ZŁOCKA, *Stateczność boczna samolotu i drgania lotek z uwzględnieniem odkształcalności giętnej skrzydeł i sprężystości układu sterowania*, *Mech. Teoret. i Stos.*, 14, 1 (1976).
8. T. PIĘTAK, *Eksploatacja samolotu TS-11 „Iskra” w szczególnych przypadkach lotu*, *Cykl Techniki Lotniczej*, WOSL — 106/74, Dęblin 1974.

Резюме

ЧИСЛЕННАЯ ИМИТАЦИЯ ШТОПОРА САМОЛЁТА

Представлено численный метод имитации движения самолёта во время штопора. Уравнения движения выведено для жёсткого самолёта с шестью степенями свободы. Принято, что отклонение поверхности рулёв управления имеет влияние только на величину аэродинамических сил и моментов. По этому методу сделано вычисления штопора для самолёта TS-11 „Iskra”.

Summary

DIGITAL COMPUTER SIMULATION OF AN AIRCRAFT, MOTION IN SPIN

A method of digital computer simulation for an aircraft in spin is presented. Differential motion equations have been established for a rigid airplane having six degrees of freedom. Deflections of control surfaces were assumed to have an influence only on aerodynamic forces and moments. Test calculations were carried out for Polish training aircraft TS-11 „Iskra”.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1983 roku

KSZTAŁTOWANIE PŁASKICH USTROJÓW NOŚNYCH O NAJWIĘKSZEJ SZTYWNOŚCI¹⁾

JÓZEF KAPLANEK

Politechnika Gliwicka

1. Wstęp

Współczesne projektowanie powinno uwzględniać aspekt optymalizacji konstrukcji z uwagi na spełnienie określonych kryteriów. Wymogi natury technicznej często formułuje się w postaci kryteriów wyrównanego wyężenia lub największej sztywności. Optymalizację prowadzi się najczęściej na zadanym szkielecie geometrycznym konstrukcji. Przez szkielet geometryczny rozumie się tu układ osi podłużnych prętów stanowiących o konfiguracji połączeń węzłów prętowego ustroju nośnego, a w przypadku tarcz powierzchnię środkową ograniczoną przez jej kontur. O ile dla kratownic można znaleźć prace, w których poszukuje się optymalnego szkieletu geometrycznego [3], o tyle w układach ramowych w szczególności hiperstatycznych prace ograniczają się do poszukiwania optymalnych przekrojów poprzecznych pozostawiając na ogół dobór konfiguracji prętów intuicji konstruktora. W przypadku tarcz zagadnienie wymaga opisu w kategoriach teorii sprężystości. Wynikłe stąd trudności analityczne najczęściej pokonuje się na drodze rozwiązań numerycznych [2, 3, 8]. Ogólne sformułowanie problemu optymalizacyjnego dla zagadnień płaskich prowadzi do równania różniczkowego czwartego rzędu o pochodnych cząstkowych [3, 8]. Równanie takie zawiera dwie niewiadome: funkcję naprężeń oraz zmienną grubość tarczy. Formułując dodatkowe równanie wynikające z przyjętego kryterium optymalizacji otrzymuje się układ równań, którego ogólne rozwiązanie nie jest znane.

Odrębnym zagadnieniem jest dobór metody optymalizacji. Ogólnie można stwierdzić, że nie ma dotychczas metody uniwersalnej nadającej się do rozwiązywania szerokiej klasy zagadnień optymalizacyjnych.

2. Sformułowanie problemu

W pracy rozważa się optymalizację płaskich ustrojów ze względu na spełnienie kryterium największej sztywności przy założonej stałej objętości tworzywa. Pod pojęciem płaskich ustrojów należy rozumieć tu szeroką klasę płaskich układów zarówno prętowych, jak i tarczowych.

¹⁾ Praca jest częścią rozprawy doktorskiej przygotowanej pod kierunkiem prof. dr inż. Antoniego Jakubowicza

Przy niezmiennym układzie obciążeń i więzów sztywność ustroju można mierzyć pracą sił na przemieszczeniach równoważną energii sprężystej.

Problem optymalizacji płaskich ustrojów można wówczas sformułować następująco:

znaleźć zbiór grubości $x_i \in X$
 wyznaczający postać ustroju płaskiego $UP_j \subset UP$
 przy stałej objętości $V = \text{const}$

taki, by:

energia sprężysta $U = \text{MIN}(U_j)$.

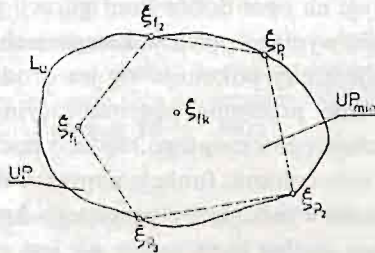
Należy zauważyć, że w wyniku zerowania się niektórych elementów zbioru X może zmie-
 niać się kontur tarczy UP .

W szczególności istnieje możliwość przejścia z początkowego na ogół jednopójnego
 obszaru UP do obszaru wielospójnego.

3. Metoda rozwiązania

Przeprowadzona analiza różnych metod rozwiązania problemu na gruncie teorii
 sprężystości wskazuje, że najbardziej efektywną jest tu metoda przemieszczeń [1]. W zwią-
 zku z tym rozwiązania poszukuje się na drodze numerycznej wprowadzając do opisu
 dyskretyzację ośrodka ciągłego, a w konsekwencji wykorzystanie metody elementów
 skończonych [10].

Płaski ustrój dany jest w postaci zbioru geometrycznego UP ograniczonego początko-
 wym konturem L_u (rys. 1).



Rys. 1

Zbiór ten musi zawierać punkty ξ_j , w których skupione jest obciążenie zewnętrzne oraz punkty ξ_p , gdzie na ustrój narzucono więzy geometryczne. Wnętrze konturu L_u wypełniono elementami skończonymi. Każdemu elementowi można przyporządkować pewną zmienną grubość ustroju w tym elemencie. Dla tak zadanego zbioru geometrycznego określa się zbiór obciążeń, zbiór więzów oraz zbiór własności tworzywa traktując je jako niezmiennie. Zbiór geometryczny elementów może być w czasie kształtowania modyfikowany tak, by zachować jego stałą objętość. Celem tych przekształceń jest uzyskanie ustroju nośnego o największej sztywności.

Kształtowanie można prowadzić w skończonej n -wymiarowej przestrzeni R^n , w której każdej osi przyporządkowano zmienne grubości poszczególnych elementów skończonych. Zmienne te tworzą wektor grubości $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Każdy punkt przestrzeni

optymalizacyjnej przedstawia określony ustrój płaski, zaś każdy wektor $\{X\}$ zawierający się w dopuszczalnym obszarze tej przestrzeni przedstawia tarczę utworzoną przez zbiór elementów skończonych stanowiących rozwiązanie dopuszczalne.

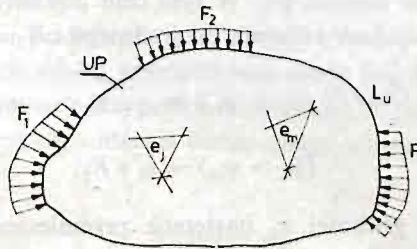
Dla porównania poszczególnych wektorów $\{X\}$ wprowadzono funkcję celu w postaci energii sprężystej jako sumę energii sprężystej elementów skończonych:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i. \quad (1)$$

Miarą tak określonej funkcji celu może być potencjał sprężysty:

$$\psi = \frac{U}{V}. \quad (2)$$

Dla spełnienia kryterium kształtowania zastosowano twierdzenie Wasiułyńskiego o wyrównaniu potencjale sprężystym [9].



Rys. 2.

Załóżmy istnienie w ustroju takich dwóch elementów e_j i e_m (rys. 2), w których potencjały jednostkowe ψ_j i ψ_m są różne i ponadto

$$\psi_j > \psi_m. \quad (3)$$

Ujęcie w elemencie „m” małej objętości tworzywa ΔV spowoduje w tym elemencie wzrost energii sprężystej

$$\Delta U_m = \frac{1}{2} \psi_m \Delta V, \quad (4)$$

zaś dodanie tej samej objętości do elementu „j” spowoduje spadek energii sprężystej w tym elemencie

$$\Delta U_j = -\frac{1}{2} \psi_j \Delta V. \quad (5)$$

Całkowita zmiana energii sprężystej w ustroju będzie sumą zmian w tych elementach

$$\Delta U = \Delta U_j + \Delta U_m = -\frac{1}{2} (\psi_j - \psi_m) \Delta V, \quad (6)$$

a więc jest ujemna z założenia

$$\Delta U < 0. \quad (7)$$

Ustrój płaski złożony z n elementów skończonych osiągnie minimum energii sprężystej wówczas, gdy potencjały sprężyste wszystkich elementów będą wyrównane.

Dla zadanego układu obciążeń i więzów nałożonych na tarczę określono metodą elementów skończonych składowe przemieszczeń w_{ij} oraz sił f_{ij} poszczególnych węzłów. Stanowi to podstawę obliczenia potencjału sprężystego elementu

$$\psi_i = \frac{1}{V_i} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 w_{ij} f_{ij}, \quad (8)$$

jak i potencjału średniego całego ustroju płaskiego

$$\psi_{sr} = \frac{1}{V} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^6 w_{ij} f_{ij}. \quad (9)$$

Przejsięcie do ustroju nośnego o niższym stanie energetycznym odbywa się przez modyfikację grubości x_i poszczególnych elementów skończonych przy równoczesnym zachowaniu warunku stałej objętości ustroju [6]. W tym celu podzielono wszystkie elementy na dwa podzbiory: E_1 o potencjałach niższych od średniego i E_2 o potencjałach wyższych od średniego

$$\begin{aligned} \bigwedge_{e_i} (\psi_i < \psi_{sr}) &\Rightarrow e_i \in E_1, \\ \bigwedge_{e_k} (\psi_k > \psi_{sr}) &\Rightarrow e_k \in E_2. \end{aligned} \quad (10)$$

W trakcie modyfikacji grubości x_i następuje przemieszczenie tworzywa ze zbioru E_1 do zbioru E_2 . Ten iteracyjny proces może odbywać się według zależności

$$\begin{aligned} \bigwedge_{e_i} e_i \in E_1 &\Rightarrow x_i^{(r+1)} = x_i^{(r)} - h^{(r)} \\ \bigwedge_k e_k \in E_2 &\Rightarrow x_k^{(r+1)} = \frac{\psi_k^{(r)} - \psi_{sr}^{(r)}}{\Delta\psi^{(r)}} \frac{\Delta V^{(r)}}{A_k} + x_k^{(r)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta\psi^{(r)} = \sum_{k=1}^m (\psi_k^{(r)} - \psi_{sr}^{(r)}),$$

gdzie:

r — numer iteracji,

$h^{(r)}$ — zmiana grubości r -tej iteracji,

$\Delta V^{(r)}$ — sumaryczna objętość tworzywa przekazywana w r -tej iteracji ze zbioru E_1 do E_2 ,

A_k — pole powierzchni k -tego elementu.

Proces ten przebiega aż do osiągnięcia żądanej dokładności różnicy ekstremalnych potencjałów sprężystych.

Efektom takiego kształtowania jest tarcza o zmiennej grubości. Rozkład grubości tarczy w wielu przypadkach pozwala wyznaczyć optymalny szkielet geometryczny płaskiej konstrukcji prętowej. Wymaga to wprowadzenia dodatkowego warunku w wyniku zastosowania którego, eliminuje się elementy o grubościach mniejszych od założonej grubości minimalnej. Uzyskuje się wówczas kontur tarczy na ogół wielospójny. Stanowi on wytyczną określenia poszukiwanego szkieletu geometrycznego konstrukcji prętowej [5, 6, 7].

4. Związek kryterium kształtowania na największą sztywność z kryterium kształtowania według wyrównanych wyteżeń

Chcąc porównywać kształtowanie na największą sztywność z kształtowaniem na wyrównany stan wyteżenia należy przyjąć w obu działaniach optymalizacyjnych te same ograniczenia. Dotyczą one niezmienności objętości ustroju. Optymalizacja ze względu na wyrównany stan wyteżenia odbywać się może w identyczny sposób jak w opisanej metodzie przez przemieszczenie tworzywa w obrębie określonego konturu początkowego. Mimo analogicznego sposobu kształtowania nie zawsze musi prowadzić to do konstrukcji takich samych. Kształt płaskiego ustroju o wyrównanym stanie wyteżenia uzależniony jest od rodzaju tworzywa oraz od przyjętej hipotezy wyteżeniowej. Zbieżność obu kryteriów wystąpi wówczas, gdy jako miarę wyteżenia σ_{red} przyjmie się potencjał sprężysty ψ co ma miejsce w hipotezie Beltramiego [4].

$$\sigma_{red} = \sqrt{2E\psi}, \quad (12)$$

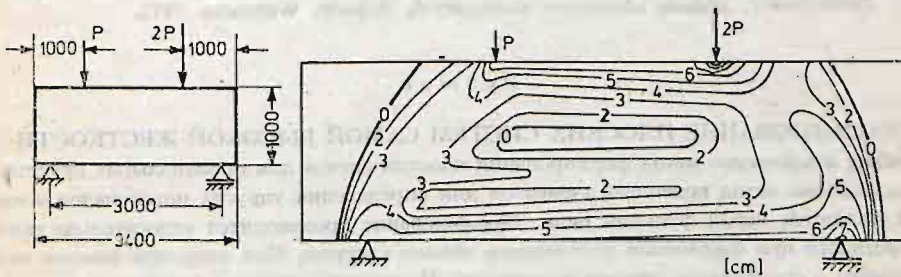
gdzie:

E — moduł sprężystości podłużnej.

Dla tworzyw, w których miarą wyteżenia nie może być jednostkowy potencjał sprężysty, zbieżność taka w ogólnym przypadku nie istnieje. W przypadku płaskich zagadnień różnice są jednak z punktu widzenia technicznego nieznaczne.

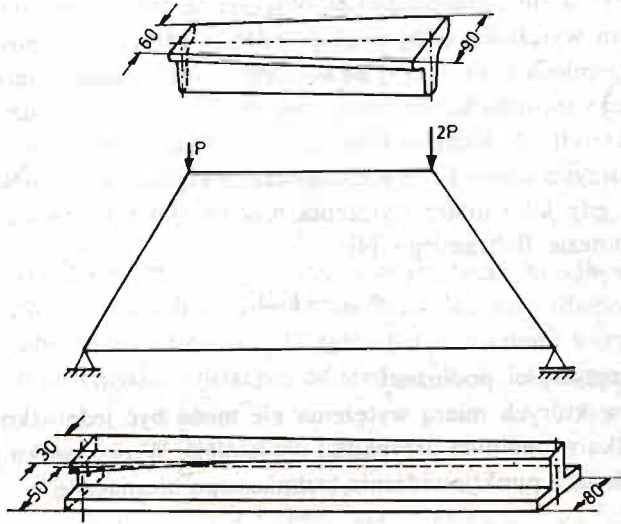
5. Przykład

Tarcza o wymiarach $3,4 \times 1,0$ m i początkowej stałej grubości $h = 30$ mm podparta jest w dwóch punktach i obciążona siłami $P = 10$ kN i $2P = 20$ kN jak pokazano na rysunku 3. W wyniku kształtowania na największą sztywność uzyskano kształt tarczy przedstawiony warstwicami grubości (rys. 3). Kształtowanie pozwoliło obniżyć całkowitą energię sprężystą układu z wartości $U_0 = 11,3$ Nm do $U_k = 5,6$ Nm oraz zmniejszyć różnicę ekstremalnych potencjałów sprężystych z $\Delta\psi_0 = 0,78$ N/m² do $\Delta\psi_k = 0,04$ N/m². Maksymalna różnica naprężeń zredukowanych w układzie o stałej grubości wynosi $\Delta\sigma_{red}^0 = 31,28$ MPa, zaś w układzie końcowym $\Delta\sigma_{red}^k = 7,69$ MPa. Rozkład masy tworzywa w tarczy przedstawionej na rysunku 3 pozwala wnioskować o szkielecie geometrycznym ewentualnego ustroju prętowego. Szkielet ten złożony z czterech prętów sztywno połączo-



Rys. 3.

nych przedstawia rysunek 4. Ponadto rozkład warstwic grubości pozwala wnioskować o wstępnej postaci geometrycznej dwóch równoległych pasów nośnych. Tak określony teoretyczny ustrój prętowy może podlegać dalszej optymalizacji na gruncie teorii prętów, w szczególności w celu określenia ich wymiarów przekrojów poprzecznych.



Rys. 4.

Literatura cytowana w tekście

1. A. BORKOWSKI, *Programowanie matematyczne w analizie i optymalizacji konstrukcji*, Mechanika i Komputer, 3, 1980.
2. A. M. BRANDT, *Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji*, PWN, Warszawa 1977.
3. A. M. BRANDT, *Podstawy optymalizacji elementów konstrukcji budowlanych*, PWN, Warszawa 1978.
4. M. M. FILONIENKO-BORODICZ, *Mechaniczkie teorii prochnosti*, Izd. Mosk. Uniw., 1961.
5. A. JAKUBOWICZ, J. KAPLANEK, *Metoda doboru szkieletu geometrycznego płaskich ustrojów prętowych*, Sympozjon „Modelowanie w mechanice”, Wisła 1983.
6. A. JAKUBOWICZ, J. KAPLANEK, *Shaping of disks with regard to highest stiffness*, 4-th Seminar about finite element method and variational method, Plzeń 1981.
7. J. KAPLANEK, *Rozprawa doktorska*, Politechnika Śląska 1981.
8. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.
9. Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, Akad. Nauk Techn., Warszawa 1939.
10. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

ФОРМИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ СИСТЕМ САМОЙ ВЫСОКОЙ ЖЕСТКОСТИ

В работе предложено метод формирования плоских систем для произвольных краевых условий. Использован метод конечных элементов для определения упругих потенциалов элементов, которые являются мерой функции цели. Формирование производится относительно самой высокой жесткости при сохранении неизменного объема системы. При этом использован критерий Васютинского о сравненном упругом потенциале. Исключая элементы, которых толщины являются маленькими — получаем контур стержневой системы.

Summary

SHAPING OF DISCS WITH RESPECT TO MAXIMUM STIFFNESS

A method for geometric shaping of planar beam structure for arbitrary boundary conditions has been described. The finite element method has been used and the elastic potentials of elements which were a measure of objective function have been defined. Beam shaping with respect to maximum stiffness with invariable structure volume has been carried out.

Wasiutyński's criterion of the comparative elastic potential has been used. By elimination of elements of small thickness a profile of beam structure can be obtained.

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1983 roku

THE HISTORY OF THE DISTRICT OF COLUMBIA

The history of the District of Columbia is a story of struggle and triumph. It begins with the first European explorations in the early 17th century, followed by the establishment of the first permanent settlements. The city's growth was hindered by the British occupation during the American Revolutionary War, but it emerged as a more prominent center in the early 19th century. The city's role as the nation's capital was solidified in 1800, and it has since become a symbol of American democracy and progress.

THE HISTORY OF THE DISTRICT OF COLUMBIA

The history of the District of Columbia is a story of struggle and triumph. It begins with the first European explorations in the early 17th century, followed by the establishment of the first permanent settlements. The city's growth was hindered by the British occupation during the American Revolutionary War, but it emerged as a more prominent center in the early 19th century. The city's role as the nation's capital was solidified in 1800, and it has since become a symbol of American democracy and progress.

The history of the District of Columbia is a story of struggle and triumph. It begins with the first European explorations in the early 17th century, followed by the establishment of the first permanent settlements. The city's growth was hindered by the British occupation during the American Revolutionary War, but it emerged as a more prominent center in the early 19th century. The city's role as the nation's capital was solidified in 1800, and it has since become a symbol of American democracy and progress.

The history of the District of Columbia is a story of struggle and triumph. It begins with the first European explorations in the early 17th century, followed by the establishment of the first permanent settlements. The city's growth was hindered by the British occupation during the American Revolutionary War, but it emerged as a more prominent center in the early 19th century. The city's role as the nation's capital was solidified in 1800, and it has since become a symbol of American democracy and progress.

SPRAWOZDANIE z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej za 1982 rok

I. Działalność organizacyjna

W roku 1982 liczba członków PTMTS zwiększyła się z 1001 do 1007 osób.

Odbyły się 4 zebrania Prezydium Zarządu Głównego oraz 3 zebrania Plenarne Z. Gł. Główna Komisja Rewizyjna zebrała się 2 razy.

W dniu 22 października 1982 roku odbył się Zjazd Delegatów, w którym uczestniczyło 89 osób (w tym 88 delegatów).

W Oddziałach Towarzystwa odbyło się łącznie 50 zebrań Zarządów.

II. Działalność naukowa

Na zebraniach naukowych, które odbyły się w Oddziałach Towarzystwa wygłoszone zostały następujące referaty:

Bydgoszcz

— „Trójskładnikowa funkcja opisująca i jej zastosowanie do badań układów dynamicznych”
dr inż. Andrzej Golik 24.06.82 r.

Częstochowa

— „Racjonalne podstawy eksploatacji urządzeń technicznych”
doc. dr Seweryn Lewandowski 24.06.82 r.

— „Obliczanie elementów konstrukcyjnych w warunkach obciążeń stochastycznych”
doc. dr hab. Józef Szala 10.11.82 r.

— „O pewnej klasie przepływów w kanałach o przepuszczalnych i ruchomych ścianach”
prof. dr Andrzej Szaniawski 12.11.82 r.

Gdańsk

— „Tłumienie drgań w żelbetowych belkach zarysowanych”
mgr inż. Ryszard Włazło 12.02.82 r.

Gliwice

— „O mechanice w Uniwersytecie prowincji Alberta”
prof. dr hab. Józef Wojnarowski 11.05.92 r.

— „Uzupełnione prawo Newtona oraz rozszerzona zasada d’Alamberta jako podstawowe prawo mechaniki”
dr inż. Alfred Stępniewski 25.06.82 r.

— „Kształtowanie płaskich ustrojów nośnych o największej sztywności”
dr inż. Józef Kaplańek 1.06.82 r.

— „Teoria identyfikacji stałych sprężystości ośrodków anizotropowych metodą statyczną”
dr inż. Bronisław Radzik 21.10.82 r.

— „Niezawodność układów maszynowych”
dr inż. Remigiusz Ćwik 9.11.82 r.

— „Możliwości wykorzystania nowych technik badawczych do oceny jakości materiału na przykładzie stali 25 HGNM”
dr inż. Andrzej Warchol 17.11.82 r.

Kraków

— „Metody informatyczne w mechanicie”
dr inż. Waclaw Przybyło 18.11.82 r.

Lublin

— Brak danych dotyczących dwóch zebrań naukowych.
— „Drgania układu samowzbudnego z wymuszeniem parametrycznym i nieliniową sprężystością”
doc. dr Kazimierz Szabelski 18.11.82 r.

— „O pewnym nowym układzie równań wyznaczania naprężeń i odkształceń w ośrodkach kontynualnych”

prof. dr hab. Jerzy Grycz 16.12.82 r.

— „Wariacyjne sformułowanie analizy wrażliwości i jej zastosowanie w mechanicie konstrukcji”
dr hab. Krzysztof Dęms 17.05.82 r.

— „O jednowymiarowym zagadnieniu identyfikacji strumienia ciepła na brzegu warstwy płaskiej”
dr Krzysztof Grysa i mgr inż. Zbigniew Kozłowski 3.06.82 r.

— „Wykorzystanie metod analizy wrażliwości do badania układów mechanicznych opisywanych liniowymi i nieliniowymi równaniami Mathieu”

dr inż. Bogusław Skierczyński 3.06.82 r.

— „Analiza stanu zakrytycznego swobodnie podpartej tarczy prostokątnej poddanej działaniu mimośrodowego ściskania i jej zastosowanie do przybliżonego obliczania cienkościennego dźwigara skrzynkowego”

dr inż. Sewer Jakubowski 3.06.82 r.

— „Zbiory rozmyte i systemy tolerancyjne w mechanicie”
prof. dr Czesław Woźniak 11.06.82 r.

— „Metody pomiarów przepływów dwufazowych”
prof. dr Zbigniew Orzechowski 2.12.82 r.

— „Zagadnienia pomiarowe struktury pęcherzykowej przepływu dwufazowego”

— „Zastosowanie piezoelektrycznej sondy igłowej do badania struktury złoża dwufazowego”
mgr inż. Stanisław Bobrzyk 2.12.82 r.

Opole

— „Analiza dynamiczna powłok obrotowych metodą elementów skończonych”
mgr inż. Edward Sadowski 14.04.82 r.

Poznań

— „Anizotropia plastyczna materiałów perforowanych”
doc. dr hab. Andrzej Litewka 3.05.82 r.

— „Zagadnienia maszyn energetycznych”
prof. dr hab. Edmund Tuliszka 1.12.82 r.

Szczecin

— „Fizyczny i matematyczny model tarcia mieszane”
doc. dr hab. Karol Grudziński 29.11.82 r.

— „Badania doświadczalne dynamicznych właściwości obrabiarek przy użyciu sygnałów zdeterminowanych”

dr inż. Tadeusz Iglantowicz 22.12.82 r.

Warszawa

— „Miejsce techniki w studiach wyższych, w szczególności technicznych”
prof. dr Roman Gutowski 14.12.82 r.

Zielona Góra

— „Kryteria optymalizacji konstrukcji”

mgr inż. S. Pryputniewicz

— „Bryła sztywne na półprzestrzeni sprężystej. Rozwiązanie metodą elementów skończonych”

mgr inż. G. Cyrok

— „Podstawy rachunku tensorowego”

mgr inż. W. Czarnecki

W roku 1982 odbyły się następujące sympozja naukowe:**Głiwice**

— XXI Sympozjum „Modelowanie w mechanice”

Liczba: referatów — 46, uczestników — 63, 3 - 6.05.82 r.

Poznań

— X Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”

Referatów — 83, uczestników — 99, 19 - 22.05.82 r.

Warszawa

— X Sympozjum „Doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego”

Referatów — 27 (na sesjach plenarnych), 54 (typu plakatowego), uczestników — 88 (w tym 2 gości z zagranicy), 3 - 4.12.82 r.

Seminarja i kursy zorganizowały następujące Oddziały:**Gdańsk**

— Cykl wykładów wygłoszonych przez dr hab. inż. Mirosława Skowronka — „Podstawy nieliniowej mechaniki ośrodków ciągłych”.

Czas trwania: X—XII 1982 r., liczba uczestników — 15.

Szczecin

— Kontynuacja seminarium naukowego prowadzonego przez doc. dr M. Kmiecika na temat „Podstawy współczesnych metod numerycznych oraz mechaniki pęknięcia”. IV kw. 1982 r.

Przeciętna frekwencja około 20 osób.

Opole

— „Język FORTRAN IV — zastosowania w mechanice”

— dwutygodniowy kurs prowadzony przez mgra inż. Lesława Kwiatkowskiego w lutym 1982 r.

Poznań

— Kurs na temat „Miary stanu naprężenia w mechanice ośrodków ciągłych”, oraz „Zasady zachowania na powierzchni nieciągłości”. Wykłady wygłoszone przez dr Janinę Ostrowską-Maciejewską z IPPT PAN W-wa, 9 i 16 czerwca 1982 r. Liczba uczestników — 15.

Konkursy naukowe zorganizowały:**Częstochowa**

— III Ogólnopolski Konkurs nt. „Mechanika płynów”.

Liczba nadesłanych prac: 4, nagrody: II, III i jedno wyróżnienie.

Łódź

— Ogólnopolski Konkurs na najlepszą pracę z dziedziny mechaniki teoretycznej zorganizowany w 1981 roku został rozstrzygnięty w lutym 1982 roku.
Nagrody: II i dwie III i jedno wyróżnienie.

Na działalność wydawniczą składają się:

— kwartalnik „Mechanika Teoretyczna i Stosowana”, w roku 1982 wydano 2 zeszyty z 1980 i 1981 r. o objętości 26 ark. wydawniczych. Wydane zeszyty zawierają oryginalne prace naukowe oraz Biuletyn Informacyjny. W roku 1982 złożono do druku 2 zeszyty podwójne o łącznej objętości 25 arkuszy wydawniczych — materiały wydane przez Oddziały z okazji sympozjów.

W ramach działalności Oddziałów wydano: Gliwice — Zbiór referatów XXI Sympozjonu „Modelowanie w mechanice” z. 46, Gliwice 1982, ss 445. Poznań — Streszczenie referatów wygłoszonych na X Sympozjone nt. „Drgania w układach fizycznych” — Wydawnictwo Politechnika Poznańska, 1982, objętość 22 ark. wyd.

Ponadto Oddział Częstochowa zorganizował 2 sesje środowiskowe:

1. Połączona sesja naukowa PTMTS z Częstochowskim Towarzystwem Naukowym nt. „Przepływy turbulentne”, w ramach której wygłoszono 4 referaty:

- J. W. Elsner. Historia rozwoju i ogólna problematyka badań turbulencji przepływów.
- S. Drobniak. Wykorzystanie współczesnych technik cyfrowej analizy sygnałów stochastycznych do wykrywania struktur koherentnych w przepływach turbulentnych.
- J. W. Elsner, M. Janik. Swobodna turbulentna struga izotermiczna w polu oddziaływań akustycznych.
- R. Klajny, R. Wolański. Nieizotermiczna struga swobodna w polu fal akustycznych.

Liczba uczestników: 21, dyskutantów: 6.

2. „Termomechanika krzepnięcia”, w ramach której wygłoszono 4 referaty:

- R. Parkitny. Wprowadzenie do termomechaniki krzepnięcia.
- A. Bokota. Warunki ciągliwości na froncie krzepnięcia.
- J. Kidawa-Kukła. Zagadnienia oddziaływań mechanicznych odlewu i formy odlewniczej.
- Z. Jasikowski. Analiza statyczna układu ciągłego odlewania stali.

Liczba uczestników: 14, dyskutantów 6.

Colloquium Euromech 162

„Stabilność i odparowanie cienkich warstw cieczy w przepływie dwufazowym”

Jabłonna, 20 — 30 września 1982

Europejski Komitet Mechaniki zdecydował wiosną 1981 powierzyć organizację Colloquium EURO-MECH 162 profesorowi J. Krzyżanowskiemu z Instytutu Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku jako przewodniczącemu Komitetu Organizacyjnego i profesorowi D. E. Wurzowi (Institut für Technische Thermodynamik) z Uniwersytetu Karlsruhe jako wiceprzewodniczącemu. Colloquium zorganizowano w Pałacu w Jabłonce w dniach 20 - 23 wrześnią 1982 przy znacznej pomocy Polskiej Akademii Nauk. Powodzenie Colloquium zawdzięczać należy również Zespołowi Organizacyjnemu z Sekretarzem naukowym dr Z. Billickim z IMP PAN.

W Colloquium, mimo trudności, uczestniczyło 31 osób, w tym 15 z zagranicy: Czechosłowacji (1), Chińskiej Republiki Ludowej (1), Francji (2), Norwegii (2), Republiki Federalnej Niemiec (8), USA (1). Niestety kilka osób z USA i Wielkiej Brytanii wycofało się z uczestnictwa. Nie dopisali też potencjalni uczestnicy z krajów Europy Wschodniej, w szczególności kilka wysokiej klasy specjalistów ze Związku Radzieckiego. Mimo to, przy stosunkowo licznych, jak na Colloquia EUROMECH, audytorium, udało się zorganizować rzeczowe i pozytywne obrady.

Problemy stabilności i odparowania cienkich warstw cieczy w przepływie dwufazowym budzą ostatnio zainteresowanie. Zebrano w kilku europejskich ośrodkach obszerne materiały teoretyczne i doświadczalne. Prace w tej dziedzinie stymulowane są przez zainteresowania poznawcze, ale też przez liczne ważne zastosowania techniczne. Na czoło wysuwa się tu tematyka projektowania i bezpieczeństwa reaktorów jądrowych, lecz również w co najmniej tym samym stopniu wiele dziedzin postępu warunkowanych energetycznie.

Na przykład: 1) intensyfikacja wymiany masy i ciepła w procesach, (kondensacji, suszenia, chłodzenia cienką warstwą cieczy, spalania ze wstępnym odparowaniem, atomizacja cieczy w strumieniu gazu, generacji pary w kotłach i reaktorach jądrowych); 2) technologia turbin zasilanych parą moką (kondensacja w przepływie, straty energii, erozja); 3) technika napędów kosmicznych (chłodzenia ablacyjne, chłodzenia dysz rakiet cienką warstwą cieczy...) oraz 4) problemy ochrony środowiska (zjawiska przepływowe i biologiczne wież chłodniczych) i wiele innych.

Obrady prowadzone w 6 sesjach skupiły się na tle 18 referatów wokół następujących zagadnień:

1. Analiza numeryczna laminarnych warstw cieczy, poruszających się w polu grawitacyjnym lub napędzanych naprężeniem na powierzchni rozdziału.
Specyficzne problemy turbulencji w cienkich warstwach cieczy;
2. Struktura ruchu falowego na powierzchni warstw cieczy;
3. Zjawiska wymiany masy i ciepła między warstwą, a przepływem mgły parowej lub powietrznej;
4. Relacje między ruchem kropeł w warstwie przyściennej i ruchem warstwy cieczy;
5. Struktury przepływów dwufazowych w kanałach, rurociągach i strugach (związane z zachowaniem się warstw cieczy);
6. Zastosowania.

Zaprezentowano szereg oryginalnych, nowych prac i prac w toku. Nienapięty program konferencji stwarzał dogodną okazję do nieformalnych dyskusji i konsultacji. Zbiór streszczeń referatów zgłoszonych na Colloquium, opublikowany i rozesłany przez profesora Wurza uczestnikom przed konferencją był znaczną pomocą w ukierunkowaniu dyskusji. Niemalże znaczenie w tym sensie miało również 5 referatów przeglądowych wygłoszonych przez znanych specjalistów: profesora Mikielewicza (PRL), profesora Mozszyńskiego (USA), profesora Wurza (RFN), docenta Konorskiego (PRL) i doktora Bilickiego (PRL). Językiem Colloquium był język angielski.

W sesji otwarcia Colloquium w imieniu Sekcji Mechaniki Cieczy i Gazów Komitetu Mechaniki PAN przemówił profesor W. Prosnak. Scharakteryzował on krótko rosnącą rolę przepływów dwufazowych we współczesnym rozwoju mechaniki płynów. Prof. W. Fiszdon, reprezentant Polski do Europejskiego Komitetu IUTAM, przedstawił krótko ideę colloquium EUROMECH jako nieformalnego forum dyskusji i wymiany informacji z dziedziny postępu mechaniki w środowisku europejskim.

W sesji zamknięcia prof. Wurz podjął m.in. wątek licznych głosów by następne colloquium w omawianej dziedzinie urządzić ponownie w Jabłonnej za 2 do 3 lat. Komitet Organizacyjny przyjął tą propozycję jako wyraz sukcesu imprezy.

Dyskusje wyłoniły kilka wniosków godnych zanotowania:

1. Współczesne modele teoretyczne ruchu falowego i stabilności warstw cieczy w przepływie dwufazowym są na tyle uproszczone, że ich zgodność z doświadczeniem wydaje się być raczej przypadkiem. Na tym tle wylania się istotne znaczenie eksperymentu jako źródła implikacji dla teorii.
2. Zastosowanie metody małych zaburzeń do rozważań na temat stabilności (rozpadu) warstw cieczy nie wydaje się obiecujące.
3. Wylaniają się pewne szanse dla metod asymptotycznych przy rozwijaniu nowych teoretycznych modeli stabilności i stosowanych kryteriów.
4. Również koncepcja fal toczących się po powierzchni warstwy czy strugi wydaje się obiecująca.
5. Dotychczasowe modele ruchu filmów opierają się na koncepcji przepływu laminarnego. Słabe jest rozeznanie na temat istoty turbulencji w cienkich warstwach.
6. Niewystarczające są ciągle wiadomości na temat wpływu osiadania i generacji kropli na powierzchni filmu w warunkach adiabatycznych i przy podgrzewie.
7. Rozpad warstw cieczy i kropeł w przepływie nie jest jeszcze dostatecznie poznany.
8. Pożyteczne byłoby sięgnięcie w większym stopniu niż dotychczas do eksperymentowania z innymi cieczami niż woda.

VI Radziecko-Polskie Sympozjum z Nieklasycznych Problemów Mechaniki Konstrukcji Cienkościennych Kijów, 22 — 27 listopada, 1982 roku

W przeciwieństwie do dotychczasowych pięciu sympozjów Polsko-Radzieckich i Radziecko-Polskich, z których 3 były zorganizowane w Polsce a 2 w ZSRR i które dotyczyły nieklasycznych problemów mechaniki ciała stałego (bez bliższej specyfikacji), ostatnie sympozjum miało bardziej wyspecjalizowaną tematykę, ograniczającą się do mechaniki konstrukcji cienkościennych. Wybór tej tematyki nie był jednakże przypadkowy bowiem Instytut Mechaniki Akademii Nauk USRR, będący organizatorem spotkania, ma od wielu lat znaczące osiągnięcia w rozwoju teorii konstrukcji cienkościennych. Ze strony polskiej w sympozjum wzięła udział 10-cio osobowa delegacja pod przewodnictwem zastępcy przewodniczącego Komitetu Mechaniki PAN W. Szczepińskiego. Ponadto w skład delegacji polskiej wchodził: M. Duszek, H. Frąckiewicz, E. Radzikowska, K. Sobczyk (IPPT PAN), J. Skrzypek, Z. Waszczyszyn (Politechnika Krakowska), W. Pietraszkiewicz (IMP Gdańsk), Z. Dzygadlo (WAT) oraz Cz. Woźniak (Uniwersytet Warszawski). Ze strony gospodarzy w konferencji brało czynny udział 18-tu pracowników nauki, wszyscy z Instytutu Mechaniki Ukraińskiej Akademii Nauk, pod przewodnictwem A. N. Guzia, dyrektora tego instytutu. Celem sympozjum, podobnie jak i sympozjów poprzednich (odbywają się one co 3-4 lata, naprzemiennie w Polsce i w ZSRR), jest współpraca naukowa w zakresie mechaniki ciała stałego sprowadzająca się do wymiany doświadczeń, konfrontacji wyników badań i pewnych prób ustalania wspólnej tematyki badawczej. Wszyscy uczestnicy polskiej delegacji wygłosili wykłady, większość brała udział w dyskusjach nad referatami oraz w dyskusji ogólnej. Prace przedstawione przez polskich uczestników miały raczej teoretyczny charakter natomiast większość z 18-tu wykładów przedstawionych przez pracowników Instytutu Mechaniki UAN dotyczyła zagadnień kompleksowych (były to zwykle prace kilkuosobowych zespołów) obejmujących zarówno podstawy teorii, metody obliczeniowe jak i rozwiązania szczegółowe różnych zagadnień o znaczeniu technicznym. Z prezentowanych na sympozjum osiągnięć wynika, że prace dotyczące konstrukcji cienkościennych prowadzone w Polsce są związane przede wszystkim z badaniami podstawowymi i akcentują elementy poznawcze raczej niż praktyczne zastosowania w technice, natomiast badania w ośrodku kijowskim są ukierunkowane na rozwiązywanie problemów o znaczeniu technicznym, zawierając wyniki numeryczne a także weryfikację doświadczalną założeń. Różnorodność ukierunkowania badań jest wynikiem zarówno pewnych tradycji naukowych jak i specyfiki naukowej Instytutu Mechaniki UAN: konfrontacja osiągnięć w ramach wspólnych spotkań wydaje się przeto bardzo celowa.

Cz. Woźniak

Konferencja Mechanika ośrodków ciągłych ciała stałego Oberwolfach, 2 — 8 stycznia 1983

Pierwsze próby zorganizowania ośrodka nauk matematycznych w Oberwolfach-Walke, w górach Schwarzwald, sięgają jeszcze końcowego okresu II wojny światowej. W roku 1946 przyjechali tam pierwsi matematycy zagraniczni. W latach 1967-70, dzięki dotacji Volkswagena, na miejscu starych domów Lorenzenhofu zostały zbudowane nowoczesne budynki, w których mieści się bogato wyposażona biblioteka matematyczna działająca na zasadzie samoobsługi, czytelnia czasopism, duża sala wykładowa, małe sale konferencyjne, hotel na około 50 osób, stolówka, pokój muzyczny, pokój do ping-ponga, bilard, samoobsługowe bufety itd. Nie ma natomiast telewizji i radia. Konferencje z różnych działów matematyki organizowane są tu prawie bez przerwy przez cały rok w liczbie ok. 50 rocznie. Konferencje zaczynają się w niedzielę wieczorem wspólnym posiłkiem i trwają do piątku wieczorem. Uczestnicy wyjeżdżają zwykle w sobotę rano. Warunki do pracy w Lorenzenhofie są idealne, cisza zupełna, a najbliższe, małe zresztą, osiedle Oberwolfach-Walke znajduje się w odległości ponad 3 km.

Konferencje z mechaniki ośrodków ciągłych ciała stałego mają tu już swoją tradycję, odbywają się zwykle co 3 lata, w drugim tygodniu stycznia. Tym razem uczestniczyło w niej około 50 osób z 14 państw (zaproszonych było z 17 państw) w tym również z U.S.A. i Kanady. Polska grupa była najliczniejsza ze

wszystkich zagranicznych. Wygłoszono 39 referatów o różnorodnej tematyce. Można było wyróżnić następujące grupy tematyczne:

- metody matematyczne w mechanice ciała stałego,
- teoria plastyczności,
- mechanika ośrodków anizotropowych,
- dźwigary powierzchniowe (powłoki, płyty, również nieliniowe),
- mechanika pękania materiałów,
- prace doświadczalne z mechaniki ciała stałego,
- termosprężystość, nieliniowa teoria sprężystości,
- rozchodzenie się fal.

Organizatorami Konferencji byli profesor Horst Lippmann z Monachium i profesor George Herrmann z Uniwersytetu Stanforda w USA. Przy tak rozstrzelonej tematyce wyróżnienie jakichś referatów musi być subiektywne. Profesor G. Fichera z Rzymu wygłosił interesujący, chyba najlepiej wygłoszony, referat o zasadzie zanikającej pamięci. Prof. P. Chadwick mówił o rozchodzeniu się fal w naprężonych ciałach sprężystych, prof. R. J. Knops o zasadzie Saint-Venanta w nieliniowej teorii sprężystości, prof. I. Müller o dynamicznej teorii pamięci stopów. Wymieńmy tu jeszcze referaty profesorów G. Grioli'ego, K. Herrmanna, G. Koitera, E. Steina, F.Y.M. Wana, H. J. Weinitschkego i W. Wunderlicha.

Polscy uczestnicy wygłosili następujące referaty:

- A. Sawczuk: Dolne ograniczenia ugięć konstrukcji plastycznych przy skończonym zginaniu,
- W. Szczepiński: Teoretyczne i doświadczalne studium postępującego procesu ciągłego pęknięcia metali,
- Z. Wesolowski: Fale w ciągnie o przekroju asymetrycznym,
- H. Zorski: Bifurkacja fal w ośrodku sprężystym,
- Z. Olesiak: O stowarzyszonych transformacjach Webera i zastosowaniach w teorii sprężystości,
- Ponadto, pracujący w Monachium J. Najar wygłosił referat: Porównawcza analiza ciągłych modeli pęknięcia dynamicznego i zastosowania w zagadnieniach zapobiegania wybuchom węgla.

Zbigniew Olesiak

Euromech 166
„Focussing of Mechanical Waves
in Continuous Media”,
Aachen (RFN), 28—30 marca 1983 r.

Tematyka Konferencji dotyczyła skupienia fal mechanicznych w ośrodkach ciągłych. Szereg prezentowanych referatów wykraczało poza ramy nakreślone tą tematyką. Przedstawione prace dotyczyły zarówno badań teoretycznych jak i doświadczalnych związanych z propagacją fal w ciałach stałych, cieczach i gazach. W Konferencji uczestniczyło 50 osób, wygłoszono 32 referaty (w tym 3 referaty przeglądowe):

1. A. Jeffrey (Wlk. Brytania) — „Growth and Decay of Singularities in Hyperbolic Systems, with Applications” (ref. przeglądowy),
2. M. Piau (Francja) — „Converging Rayleigh Waves from Annular Spreading Loads,
3. D. Fusco (Włochy) — „Wave Propagation in Nonlinear Media Described by Quasilinear Hyperbolic First Order Systems Involving Dissipative Effects”,
4. M. Burnat (Polska) — „On the Qualitative Theory of Autonomic Partial Systems with Applications in Continuum Mechanics,
5. G. Dammaz (Francja) — „Motion of a Front Governed by a Celerity-Curvature Relation”,
6. E. Handke, F. Obermeier (RFN) — „On the Focussing of Shock Waves in Gasdynamics”,
7. R. Holl, H. Grönig (RFN) — „Shock Focussing in Gases”,
8. F. J. Sánchez-Sesma (Włochy) — „Diffraction of Elastic Waves by Three-Dimensional Surface Irregularities”,

9. R. Dziecielak (Polska) — „Propagation of Acceleration Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid”.
10. K. Sobczyk (Polska) — „On the Propagation of Pulses in a Stochastic Medium”.
11. P. L. Christiansen (Dania) — „Soliton Waves on Mechanical Structures”.
12. B. Rogg, D. Hermann, G. Adomeit (RFN) — „Pressure and Temperature Development in Regular Arrays of Obstacles and Packed Beds”.
13. G. Ben-Dor (Izrael) — „Shock Wave Reflections in Steady, Pseudo-Steady and Unsteady Flows-State of the Art” (ref. przeglądowy).
14. B. Schmidt (RFN) — „Investigation of the Shock Structure of a Shock Wave Close to a Wall”.
15. D. Zeitoun, M. Brun (Francja) — „Interaction between Shock Waves and Boundary Layers in Shock-Tubes”.
16. J. Renard, M. Tronel, J. Brossard (Francja) — „Shock Waves in Tubes: Transient Response to Changing Velocities and Rheology of the Confining Material”.
17. J. F. Clark (Wlk. Brytania) — „Shock Wave Reflection from a Porous Surface”.
18. H. Schilling (RFN) — „Focussing of Sonic Booms”.
19. D. Dufresne, P. Giovanneschi, C. Creput, M. Autric, J. P. Caressa (Francja) — „Laser Generation and Measurement of Stress Waves in Materials”.
20. W. Tepper (RFN) — „Wave Phenomena in Two-Phase Media”.
21. L. Z. Dumitrescu (Rumunia) — „Some Results on Shock Focussing and Stability”.
22. W. Johnson (Wlk. Brytania) — „Fracture Sites Determined by Stress Wave Focussing” (ref. przeglądowy).
23. H. P. Rossmanith (Austria) — „Dynamic Photoelastic Investigation of Stress Wave Focussing in Layered Media”.
24. S.T.S.Al-Hassani (Wlk. Brytania) — „Antipodal Focussing of Rayleigh Surface Waves in a Sphere Subjected to Polar Impact”.
25. J. Najar (RFN) — „Directed Explosive Fracturing of Coal Seams as a Burst Prevention Method”.
26. M. Staat, H. J. Raatschen (RFN) — „Shock Focussing in Plates”.
27. P. Guelin, W. Nowacki (Francja, Polska) — „Remarques sur les ondes d'accélération dans un continu élastoplastique avec hystérésis”.
28. M. Braun (RFN) — „Focussing of Acceleration Waves in Homogeneous, Anisotropic Elastic Media”.
29. M. J. P. Musgrave (Wlk. Brytania) — „On Criteria for Intense Focussing of Elastic Waves in Anisotropic Media”.
30. A. Gerard, J. L. Rousselot (Francja) — „Résonances acoustiques d'une sphere élastique et leur relation avec les ondes de surface”.
31. W. Kosiński (Polska) — „Three-Dimensional Waves in Elasto-Viscoplastic Medium with Dilation”.
32. A. Bostrom (Szwecja) — „Elastic Wave Scattering by a Three-Dimensional Inhomogeneity in an Elastic Half Space”.

Zarówno obrady Konferencji, jak i spotkanie okrągłego stołu miały interesujący przebieg. Ożywiona dyskusja stworzyła możliwość wymiany poglądów na szereg problemów związanych z propagacją fal w ośrodkach ciągłych.

Obrady Konferencji toczyły się w Wyższej Szkole Technicznej w Aachen (der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen). Na podkreślenie zasługuje wysoki poziom organizacji Konferencji i sprawny przebieg obrad. Uczestnicy Konferencji zwiedzili bardzo interesujące laboratorium fal uderzeniowych Uczelni. Zadbano również o zorganizowanie programu socjalnego.

Euromech colloquium 169
„Równanie Boltzmann w dynamice gazów”
Trondheim, 20 — 23 Czerwiec 1983

Relację naszą rozpoczynamy od prezentacji miasta, w którym się konferencja odbywała, gdyż jak zawsze najpierw z nim się zetknęliśmy. Trondheim został założony w roku 997 przez króla Wikingów Olava Tryggvasona i przez wiele wieków był stolicą Norwegii. Dziś jest jednym z głównych ośrodków przemysłowych i kulturalnych kraju, zabudowany w znacznej mierze przez jedno- dwu piętrowe drewniane domki, pomalowane każdy na inny kolor. Już w niedzielę, 19 czerwca, poznaliśmy główną atrakcję Trondheim, którą o tej porze roku jest brak nocy, słońce zachodziło po 23-tej na około 2 godziny.

W takim atrykcyjnym i spokojnym miejscu odbywało się kolokwium Euromechu zorganizowane przez Norges Tekniske Høgskole, a przewodniczącym komitetu organizacyjnego był prof. Tor Ytrehus. Wszyscy zamiejscowi uczestnicy zakwaterowani zostali w domu studenckim, który latem zostaje zamieniony na Sigsaker Sommer Hotel; obrady odbywały się w Głównym Budynku NTH odległym o ok. 20 min. spacerem.

W kolokwium brało udział 44 uczestników reprezentujących 12 narodowości, wygłoszono 37 referatów, w tym 6 dłuższych wykładów. Kolokwium rozpoczęło się w poniedziałek, 20 czerwca, wykładem przeglądowym prof. Carlo Cercignaniego (Politechnika de Milano) pt. „The Boltzmann Equation in Rarefied Gas Dynamics”, a pozostała część obrad dotyczyła przepływów w obszarach przejściowych oraz zagadnień parowania — kondensacji i warstw Knudsenowskich. We wtorek, 21 czerwca, prof. Władysław Fiszdron wygłosił przygotowany wraz z R. Herczyńskim i Z. Walentą wykład pt. „Shock-Wave Structure, Shock Reflection — Gaps between Theory and Experiments”, zaś pozostałe referaty dotyczyły wpływów z dysz oraz wpływu pól zewnętrznych.

Tego dnia obrady skończyły się wcześniej, gdyż zorganizowano wycieczkę do Ryngve Museum posiadającego około 12 tysięcy różnych, często bardzo dziwnych instrumentów muzycznych. Posiada ono również jedną z dwu pośmiertnych masek F. Chopina, odlew gipsowy jego dłoni i kilka mebli używanych przez niego. Takie pamiątki po Chopinie chciałoby mieć chyba każde inne muzeum. Następnie zwiedzaliśmy główny architektoniczny zabytek Trondheim — Nidarosdomen — czyli Katedra Nidarosa, sięgającą początkami roku 1150.

Sroda, 22 czerwca, była najbardziej przepełnionym dniem kolokwium. Tego dnia wygłoszone zostały dwa wykłady przeglądowe, pierwszy przez prof. H. Neunzerta (Universität Kaiserslautern) pt. „Mathematical Research on the Fundamentals of Kinetic Theory — where it stands and where it (perhaps) goes” i drugi przez J. R. Dorfmana (University of Maryland) — „Long-Range Boundary Effects in Simple Fluids”, a pozostałe referaty dotyczyły modeli matematycznych w kinetycznej teorii gazów.

Czwartek, 23 czerwca, był ostatnim dniem obrad. Główne wykłady przygotowane zostały przez prof. Ivana Kuscera (Univerza v Ljubljaini) wraz z B. I. M. Boschem i J. J. Beenakkerem (obaj z Holandii) na temat: „Onsager Symmetries in Field — Dependent Flows of Rarefied Molecular Gases”, a drugi wykład wygłosił prof. Y. Sone (Kioto University) — temat jego wykładu: „Free Molecular Flow — Construction of Solution, Uniqueness and Application”. Pozostałe wystąpienia dotyczyły gazów wieloatomowych oraz przepływów swobodnie molekularnych.

Na zakończenie omówimy udział Polaków. Było nas pięciu, lecz tylko autorzy tego sprawozdania w ścisłym sensie reprezentowali Polskę, a pozostali trzej reprezentowali ośrodki zagraniczne, w których aktualnie przebywają, a które ich wydelegowały. Wszyscy wygłosiliśmy referaty, a prof. W. Fiszdron — wspomniany wykład przeglądowy. Ponadto, biorąc czynny udział w dyskusjach daliśmy się, naszym zdaniem, zauważyć jako aktywni uczestnicy tego spotkania. Konferencję uważamy za bardzo ciekawą i pożyteczną. Pozwoliła nam ona odnowić kontakty naukowe i zorientować się co do obecnych kierunków badań w zakresie dynamiki gazów rozrzedzonych, tym bardziej, że po dwuletnim osłabieniu kontaktów naukowych z zagranicą, stwierdziliśmy u nas pewien regres.

K. Piechór T. Płatkowski

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHILOSOPHY DEPARTMENT

1155 EAST 58TH STREET

CHICAGO, ILLINOIS 60637

TEL: 773-936-3300

FAX: 773-936-3300

WWW.PHIL.DEP.CHICAGO.EDU

ADMISSIONS@PHIL.DEP.CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

PHIL.DEP@CHICAGO.EDU

SPIS TREŚCI

Profesor Czesław Eimer — wspomnienie pośmiertne	119
III Konferencja Naukowa „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowania” III Научная конференция „Оболочки, теория и применения” The third Conference „Shells, theory and applications”	123
Z. MAZURKIEWICZ, Z. RYCHTER, Wybrane problemy wieloparametrowych liniowych teorii powłok sprężystych Избранные проблемы мультипараметрических линейных теорий упругих оболочек Selected problems in the multi-parametric linear theories of elastic shells	127
R. NAGÓRSKI, One-dimensional continuous model of lattice type surface structures Уравнения одномерной сплошной модели сетчатых поверхностных конструкций Jednowymiarowy model ciągły siatkowych dźwigarów powierzchniowych	147
Z. RYCHTER, On linear theory of anisotropic shells of moderate thickness О линейной теории анизотропных оболочек средней толщины О liniowej teorii anizotropowych powłok o średniej grubości	139
L. NOGA, Finite element representation for stiffened thin cylindrical shell instability analysis Конечный элемент в расчетах ребристых цилиндрических оболочек Metoda elementów skończonych w analizie stateczności cienkich uźebrowanych powłok walcowych	155
P. KONDERLA, The analysis of a viscoelastic shell of revolution periodically loaded Анализ вязко-упругой оболочки вращения периодически нагруженной Analiza lepkosprężystej powłoki obrotowej obciążonej periodycznie	169
M. RADWAŃSKA, Numerical analysis of large deflection behaviour of elastic-plastic shells of revolution Численный анализ больших прогибов упруго-пластических оболочек вращения Numeryczna analiza dużych przemieszczeń sprężysto-plastycznych powłok obrotowo symetrycznych	179
T. LEWIŃSKI, Shallow spherical lattice-type shell subjected to normal point load — fundamental solution Действие сосредоточенной нормальной силы на пологую, сферическую сетчатую оболочку — фундаментальное решение Działanie normalnej siły skupionej na mało wyniosłą siatkową powłokę kulistą — rozwiązanie podstawowe	189
J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, A. PEER-KASPERSKA, Numerical calculations of nonlinear equilibrium paths for spherical cantilever shells Численное решение задачи нахождения кривой равновесия для сферических консольных оболочек Numeryczne obliczanie krzywoliniowych ścieżek równowagi dla powłok sferycznych o konstrukcji wsporczej	199
S. JONIAK, F. TWARDOSZ, Stability problems of a shallow conical shell under lateral pressure Задача об устойчивости пологой конической оболочки со всесторонним гидравлическим давлением Zagadnienie stateczności mało wyniosłej powłoki stożkowej pod działaniem ciśnienia	205
P. WIŚNIAKOWSKI, The equations of the second order linear model of surface grids Уравнения линейной теории второго ряда упругих поверхностных растров Równania liniowej teorii drugiego rzędu sprężystych rusztów powierzchniowych	211
A. SERUGA, Analysis of the stress state in the cylindrical shells of the concrete tanks prestressed by the external tendons Анализ напряженного состояния в цилиндрических оболочках бетонных резервуаров предварительно напряженных внешними кабелями Analiza stanu naprężenia w powłokach walcowych z żelbetu sprężonego pasmowymi ciągniami zewnętrznymi	219

G. BRYC, Equations of the spherical shell with axially symmetric, stochastic imperfections Вращательно симметричное случайное состояние перемещений сферической оболочки Równania powłoki kulistej w przypadku osiowo symetrycznych stochastycznych niedokładności	233
W. NAGÓRKO, On a method of formulation of two-dimensional theories for elastic shells О некотором методе конструкции теории упругих оболочек О pewnej metodzie konstrukcji teorii powłok sprężystych	239
A. GAŁKA, On certain inequalities in the linear shell problems Некоторые неравенства в линейной теории оболочек О pewnych nierównościach w liniowych zagadnieniach powłok	249
K. H. ŻMIJEWSKI, On theory of lattice-reinforced shells О теории оболочек армированных сетками О teorii powłok zbrojonych siatkami	255
M. DIETRICH, P. KUROWSKI, Pewien model mechaniczny kręgosłupa lędźwiowo-krzyżowego człowieka Модель пояснично-крестцевого позвоночника человека Model of the human lumbar spine	261
J. T. PINDERA, B. KRASNOWSKI, Engineering applications of plane generalized isodyne photoelasticity Инженерские приложения плоской и обобщенной изодыновой фотоупругости Zastosowanie inżynierskie płaskiej i uogólnionej elastoptyki izodynowej	279
Z. DYŁĄG, Z. ORŁOŚ, Doświadczalna analiza naprężeń termosprężystych metodą elastoptyczną Исследования температурных напряжений поляризационнооптическим методом Photothermoelastic investigations of thermal stresses	
K. H. LAERMANN, Recent trends in experimental analysis Последние тренды в экспериментальном анализе Ostatnie kierunki w analizie doświadczalnej	315
R. WÓJCIK, J. STUPNICKI, Wpływ szczeliny prostopadłej do brzegu na rozkład nacisków i stan naprężeń w kontakcie Влияние трещины перпендикулярной к берегу на распределение давления и состояние напряжений в контакте The influence of the crack perpendicular to the edge on the load distribution and on the stress state in contact	327
Cz. Goss, Niskocyklowa trwałość zmęczeniowa stali o podwyższonej wytrzymałości w ujęciu energetycznym Малоцикловая усталость высокопрочных сталей полученная из энергетических условий Low cycle fatigue of high-strength steels in terms of energy	341
A. LIŹEWKA, J. STANISŁAWSKA, Experimental simulation of anisotropic damage. Экспериментальное моделирование материалов с трещинами Doświadczalna symulacja anizotropowego uszkodzenia materiału	361
W. KARMOWSKI, S. MAZURKIEWICZ, Nowa metoda wyznaczania pola odkształcenia w przypadku trójwymiarowym, wykorzystująca zjawisko światła rozproszonego w elastoptyce Новый метод определения поля деформации в трехмерном случае с учетом явления рассеянного света New method of strain field in three-dimensional state	371
C. AJDUKIEWICZ, P. JASTRZĘBSKI, Application of the moiré method to the analysis of failure modes of metal strips Применение метода муара для анализа кинематических механизмов разрушения металлических полос Zastosowanie metody mory do analizy kinematycznych mechanizmów zniszczenia pasm metalowych	385
J. LIETZ, B. MICHAŁSKI, Pewne aspekty elastoptycznych badań odkształceń plastycznych w konstrukcjach stalowych	397

	Некоторые аспекты фотоупругих исследований пластических деформаций в стальных конструкциях	
	Certain aspects of photoelastic investigations of plastic strain in steel structures	
H. SKROCKI,	Analiza obrotu powierzchni płynięcia z uwzględnieniem pamięci materiału	403
	Анализ оборота поверхности текучести с учетом памяти материала	
	Analysis of rotation of yield surface with consideration of the memory of the material	
E. J. KRYNICKI, S. MATYSIAK,	Drgania prętów o liniowo zmiennej wysokości przekroju poprzecznego	417
	Колесания стержней с линейно переменной высотой поперечного сечения	
	Vibrations of bars with linearly variable cross-sectional height	
K. MYŚLECKI,	O pewnych więzach brzegowych w klasycznej teorii płyt	431
	О некоторых краевых связях в классической теории пластин	
	On certain boundary constraints in classical theory of plates	
J. ŁUCZKO,	Оптималізація параметрична układów dynamicznych o nieciągłych charakterystykach	439
	Параметрическая оптимизация динамических систем с разрывными характеристиками	
	Parametrical optimization of dynamic systems with discontinuous characteristics	
Z. KASPERSKI,	Numeryczne obliczanie krzywoliniowych ścieżek równowagi dla jednowymiarowych układów sprężystych	453
	Численное исследование криволинейных путей равновесия в случае одномерных упругих систем	
	Numerical calculation of the non-linear equilibrium paths of the one-dimensional elastic systems	
W. GRZESIKIEWICZ, A. WAKULICZ,	Zderzenie w układzie o wielu stopniach swobody	467
	Соударение твердых тел в системах с многими степенями свободы	
	Solid bodies impacts with multi-degrees of freedom systems	
J. MARYNIAK, W. BLAJER,	Numeryczna symulacja korkociągu samolotu	481
	Численная имитация штопора самолёта	
	Digital computer simulation of an aircraft motion in spin	
J. KARŁANEK,	Kształtowanie płaskich ustrojów nośnych o największej sztywności	493
	Формирование плоских систем самой высокой жесткости	
	Shaping of discs with respect to maximum stiffness	
BIULETYN INFORMACYJNY		501

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several paragraphs and is mostly obscured by the low contrast of the scan.

CENTRALNY KATALOG ZAGRANICZNYCH CZASOPISM I WYDAWNICTW CIĄGLYCH

Centralny katalog zagranicznych czasopism i wydawnictw ciągłych znajdujących się w bibliotekach Polskiej Akademii Nauk i towarzystw naukowych dotowanych przez PAN dostarcza informacji bibliograficznych o ponad 18 000 tytułów wydawnictw z różnych dziedzin i dyscyplin naukowych.

Katalog jest prowadzony przez Bibliotekę Polskiej Akademii Nauk w Warszawie w formie kartoteki od 1961 roku. Biblioteka udziela informacji na podstawie katalogu na miejscu (Pałac Kultury i Nauki, VI piętro, pokój 607), telefonicznie (20-02-11 wew. 26) lub za pośrednictwem teleksu 815360).

Katalog jest aktualizowany bieżąco na podstawie opisów bibliograficznych nadsyłanych z ok. 120 bibliotek Akademii.

Opis katalogowy zawiera dane o tytule (ewentualnie i podtytule) wydawnictwa, miejscu wydawania, częstotliwości, zasobach w obrębie tytułu (rocznik, zeszyty, numery), sposobie nabycia (prenumerata, kupno), wymiana, dar), jego lokalizacji w danej placówce (bibliotece), a także informuje, czy wydawnictwo zostało zmikrofiszowane.

Pewna liczba czasopism zagranicznych posiadanych przez biblioteki PAN jest dostępna również w postaci mikrofisz znajdujących się w Ośrodku Informacji Naukowej PAN, który publikuje wykazy czasopism zmikrofiszowanych oraz udostępnia kopie mikrofisz, a także odbitki czytelne gołym okiem na życzenie użytkowników.

Centralny katalog zagranicznych czasopism i wydawnictw ciągłych jest źródłem informacji o bieżących wpływach oraz informacji retrospektywnej za okres ponad 20 lat.

- G. RAKOWSKI, Komputeryzacja mechaniki konstrukcji w Polsce w ostatniej dekadzie działalności PTMTS
Компьютеризация строительной механики в Польше в последнем десятилетии
The computerization of structural mechanics in Poland during the latest decade
- M. KLEIBER, Metoda elementów skończonych w mechanice kontinuum: aktualne kierunki badań
Метод конечного элемента в механике континуума, современные направления исследований
Finite element method in continuum mechanics: contemporary trends in research
- S. DROBNIAK, Przegląd osiągnięć krajowych badań doświadczalnych turbulencji w okresie minionego dziesięciolecia
Обзор достижений экспериментальных исследований в Польше в области турбулентии в последнем десятилетии
Review of achievements in experimental research in Poland in turbulence during the latest decade
- W. KANIA, Aerodynamika doświadczalna w zakresie dużych prędkości
Экспериментальная аэродинамика в области больших скоростей
Experimental aerodynamics at high speeds
- J. S. OSTROWSKI, Ocena krajowych badań doświadczalnych z zakresu turbulencji oraz aerodynamiki dużych prędkości
О экспериментальных работах в Польше по турбулентии и аэродинамике больших скоростей
On Polish experimental research in turbulence and high speed aerodynamics
- K. WILMAŃSKI, Termodynamika fenomenologiczna — stan badań i perspektywy
Феноменологическая термодинамика, состояние исследований и перспективы
Phenomenological thermodynamics — state of research and perspectives
- M. WIJAK-ŻOCHOWSKI, J. KARKOWSKI, Współczesne metody badań doświadczalnych w mechanice ciała stałego
Современные экспериментальные методы в механике твердого тела
On Polish experimental research in turbulence and high speed aerodynamics
Contemporary experimental methods in solid body mechanics
- Z. OLESIAK, Nowa lista haseł w Applied Mechanics Reviews
Новый список заглавий в Апплайд Механикс Ревьюс
New subject lista in Applied Mechanics Reviews
- Biuletyn informacyjny

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 320.—
półrocznie zł 160.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następnny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona — Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland, Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa, pokój 309)
