

*J<sup>n</sup> 720*

**P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J**

PL ISSN 0079-3701

# **M E C H A N I K A T E O R E T Y C Z N A I S T O S O W A N A**

**K W A R T A L N I K**

**T O M 2 1 • Z E S Z Y T 1**



**W A R S Z A W A 1 9 8 3**

**P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E**

*10 10*

*531*

## SPIS TREŚCI

Z. WASZCZYŹYŃ, Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji Метод конечных элементов в устойчивости сооружений Finite element method in structural stability	3
M. KLEIBER, A. ZACHARSKI, Effective nonlinear analysis of arbitrary thin shells by simple finite element Эффективный нелинейный анализ тонких оболочек произвольной формы Nieliniowa analiza powłok cienkich dowolnego kształtu metodą elementów skończonych	25
J. MARCINOWSKI, Zginanie powłoki konoidalnej Изгиб коноидальной оболочки Bending of a conoidal shell	47
St. SUWAJ, St. WOJCIECH, Pierwszorzędowe obszary niestateczności drgań wałów wykonujących ruch obrotowo-oscylacyjny Первичные области неустойчивости колебаний валов совершающих вращательно — осцилляционное движение. First order non-stability fields for vibrating shaft performing swing-like motion	59
J. PIETRALA, Metoda wyznaczania momentów skupionych działających na tyczkę podczas skoku Метод определения сосредоточенных моментов действующих на шест во время прыжка с шестом The method of evaluating the moments applied to the pole during the pole-vault	69
W. WACHMACZ, J. PISAREK, Pomiarы przemieszczeń normalnych do powierzchni obiektu metodą fotografii plamkowej w świetle białym Анализ перемещений методом спеклов (пятнистых структур) в белом свете Displacement of surface by white speckle photography	79
B. KUŹNICKA, Wpływ parametrów programowanego przebiegu obciążenia na trwałość zmęczeniową Влияние параметров программы нагружения на усталостную долговечность The effect of programmed load spectrum parameters on the fatigue life	91
BIULETYN INFORMACYJNY	103

7-117210  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 2 1 • Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1 9 8 3  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY  
MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,  
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,  
WITÓLD NOWACKI, JAN SZARGUT,  
JÓZEF WIĘCKOWSKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK—REDAKTOR NACZELNY,  
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR  
ANDRZEJ SZANIAWSKI—REDAKTOR,  
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR  
MONIKA WĄGROWSKA—REDAKTOR,  
MAŁGORZATA JABŁOŃSKA—SEKRETARZ

## REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 530. Ark. wydawniczych 8,5. Ark. drukarskich 7,25. Papier druk. b. sat. kl. IV, 71 g. 70×100  
Oddano do składania 23.II.1983 r. Druk ukończono w styczniu 1984 r. Zam. 4351/83. Cena zł 80.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI<sup>1)</sup>

ZENON WASZCZYŹYŃ  
*Politechnika Krakowska*

### 1. Uwagi wstępne

Rozwój teorii stateczności, widoczny po ostatniej wojnie światowej doznał istotnego przyspieszenia w ostatnich 15-tu latach. Świadczy o tym bogata bibliografia. Obok wznowień klasycznej monografii S. P. TIMOSHENKI i J. H. GERE [76] oraz A. PFLÜGERA [60] pojawiły się książki A. S. WOLMIRA [84], H. ZIEGLERA [89], J. M. THOMPSONA i G. W. HUNTA [75], K. HUSEYINA [34], D. O. BRUSHA i B. O. ALMROTHA [15], ostatnio N. A. ALFUTOWA [1]. Opublikowano też wiele prac przeglądowych, dotyczących układów sprężystych i sprężysto-plastycznych [27, 36, 66, 67, 77]. Było organizowanych wiele konferencji poświęconych stateczności konstrukcji — warto zwrócić uwagę na te, po których zostały opublikowane pełne teksty referatów [16, 69, 72, 80]. Spośród rozwijanych zagadnień należy podkreślić duże zainteresowanie statecznością układów dyskretnych. Zajęto się rozwinięciem koncepcji W. T. Koitera analizy stanów pozakrytycznych i wpływu imperfekcji, różnymi kryteriami utraty stateczności, oszacowaniem zakresu obowiązywania teorii liniowych. Uwzględniając nieliniowości geometryczne i fizyczne zwrócono uwagę na wpływ zachowania się obciążeń podczas odkształcania się konstrukcji. Ostatnio coraz więcej uwagi poświęca się ważnym ze względów inżynierskich problemom stateczności przy działaniu obciążeń wieloparametrowych.

Silny rozwój teorii, zwłaszcza dotyczącej stateczności układów dyskretnych, był stymulowany koniecznością prowadzenia obliczeń niezbędnych dla praktyki inżynierskiej. Komputerowa technika obliczeniowa i metoda elementów skończonych (MES) znalazły tutaj szerokie możliwości zastosowań. W pierwszym rzędzie zajęto się problemami liniowymi, sprowadzając je do algebraicznych zagadnień obliczania wartości i wektorów własnych. Stało się to możliwe m.in. dzięki koncepcji macierzy geometrycznej wstępnych naprężeń [5, 25, 50]. Takie podejście zastosowano do analizy wyboczenia ram [29, 47], płyt [3, 40] i powłok [26, 53, 57]. Po dołączeniu macierzy mas zaczęto badać problemy utraty stateczności przy obciążeniach niekonserwatywnych [6]. Warto dodać, że problematyka stateczności w ujęciu MES szybko weszła do monografii i podręczników [52, 62, 91].

<sup>1)</sup> Praca została wykonana w ramach PW 05.12 i przedstawiona jako referat problemowy na V Konferencji Metod Komputerowych w Mechanice Konstrukcji — Karpacz, 6-9.V.1981. Jej obszerny skrót pt. „Stosowanie metody elementów skończonych w analizie stateczności konstrukcji” został opublikowany w T. 3 materiałów, wydanych w Pracach Naukowych Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, No 28, 1981, s. 101 - 121.

Opieranie się na równaniach teorii drugiego rzędu, wystarczające w liniowej analizie wybożenia, jest niewystarczające do badania bardziej złożonych, nieliniowych problemów utraty stateczności. Z tego względu dużo uwagi poświęcono sformułowaniu odpowiednich modeli matematycznych oraz metod obliczeniowych w ramach MES (bogata bibliografia można znaleźć w [42]). Algorytmizacja poszła w dwóch kierunkach. Pierwszy obowiązywał do koncepcji koiterowskich, łącząc aproksymację MES z metodą perturbacji i rozwinięciami w szeregi potęgowe [21, 44, 48, 74, 78, 82]. Takie ujęcie jest jednak efektywne tylko w ustrojach o małej liczbie stopni swobody lub o strukturze pasmowej, gdyż wymaga posługiwania się macierzami o dużych rozmiarach (trzeciego i czwartego rzędu). Komputerowe realizacje okazały się mało ogólne, gdyż w niewielkim stopniu korzystają ze standardowych procedur.

Drugi kierunek nawiązuje do ujęć „komputerowych”, wykorzystując przede wszystkim metody i algorytmy algebry liniowej. Stało się to możliwe przede wszystkim dzięki sformułowaniu przyrostowym [8, 30, 79], łączonym z odpowiednimi procedurami iteracyjnymi [70, 71]. Charakterystycznym objawem był rozwój tych koncepcji prawie równoległe z ujęciami liniowymi analizy stateczności przy użyciu MES [26, 47, 87]. Obecnie problemy te wchodzą już do podręczników [92].

W pracy zajmujemy się wybranymi problemami związanymi ze stosowaniem MES w analizie stateczności konstrukcji lądowych. Celem pracy jest pokazanie wzajemnych sprzężeń między teorią stateczności konstrukcji a MES, w szczególności na możliwości tej metody w zakresie analizy nieliniowej. Najpierw przypomnimy podstawowe koncepcje nieliniowej analizy stateczności układów dyskretnych, poddanych działaniu wieloparametrowych obciążeń konserwatywnych. Problemy obliczania statecznych i niestatecznych ścieżek równowagi połączymy z wyznaczaniem punktów krytycznych. Wskażemy dalej na możliwości obliczania stateczności układów sprężysto-plastycznych i quasi-konserwatywnych.

Oprzemy się częściowo na opracowaniach [81, 80] oraz na studium literatury, ukie-runkowanym pracami prowadzonymi w Instytucie Mechaniki Budowli Politechniki Kra-kowskiej w ramach PW 05.12.

## 2. Równowaga układów konserwatywnych

Ograniczamy się do układów dyskretnych o  $N$  stopniach swobody, którym odpowiada wektor<sup>2)</sup> uogólnionych przemieszczeń węzłów:

$$\mathbf{q} = \{q_i\} \equiv \{q_1, \dots, q_N\} \in R^N \quad (2.1)$$

W MES przemieszczenia  $q_i$  łączone z węzłami, lub też jako tzw. uogólnione stopnie swobody [92] są wykorzystywane do aproksymacji pola przemieszczeń elementu skończonego  $e$ :

$$\mathbf{u}^{(e)} = N\mathbf{q}^{(e)} \text{ i/lub } \Delta\mathbf{u}^{(e)} = N\Delta\mathbf{q}^{(e)}, \quad (2.2)$$

<sup>2)</sup> W dalszym ciągu przez wektor rozumiemy macierz jednokolumnową, pisząc jej składowe poziomo i ujmując je w klamry.

gdzie  $N$  jest macierzą funkcji kształtu, a  $q^{(e)}$  wektorem przemieszczeń węzłowych elementu  $e$ .

Obciążenia pozawęzłowe (np. powierzchniowe w powłokach)  $p(u, \lambda)$  i węzłowe  $G(u, \lambda)$  dzięki aproksymacji (2.2) i standardowemu postępowaniu MES (por. np. [92]) redukujemy do równoważnych, uogólnionych obciążeń węzłowych:

$$P = P(q, \lambda) \in R^N. \quad (2.3)$$

Podajemy ogólny przypadek, gdy obciążenia zewnętrzne  $P$  są funkcjami przemieszczeń  $q$  oraz  $M$  niezależnych parametrów obciążenia  $\lambda$ :

$$\lambda = \{\lambda^k\} \equiv \{\lambda^1, \dots, \lambda^M\} \in R^M. \quad (2.4)$$

Rozważania będziemy prowadzili też w przestrzeni konfiguracyjno-obciążeniowej  $R^{N+M}$  o wektorze wodzącym

$$\tilde{q} = \{q, \lambda\} \equiv \{q_\alpha\} \in R^{N+M}. \quad (2.5)$$

Energia potencjalna układu składa się z energii sprężystej  $U$  i pracy obciążeń zewnętrznych  $W$ :

$$V = U + W \equiv \sum_{e=1}^m U^{(e)}(q^{(e)}; \vartheta^{(e)}) - TPq, \quad (2.6)$$

gdzie  $U^{(e)}$  jest energią sprężystą pojedynczego elementu skończonego (ES). Dodatkowo wartość energii uzależniliśmy od wstępnych niedokładności w ES, które łącznie dla całego układu tworzą wektor imperfekcji

$$\vartheta = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_s\} \in R^s \quad (2.7)$$

Jeśli układ jest w równowadze, to spełniony jest warunek stacjonarności energii potencjalnej:

$$\delta V = 0, \quad \text{skąd} \quad \delta U = -\delta W. \quad (2.8)$$

Stan równowagi można też obliczyć z zasady prac wirtualnych:

$$\delta L_w = \delta L_z. \quad (2.9)$$

W układach konserwatywnych (UK) obydwa sformułowania są równoważne, w szczególności zarówno uogólnione siły wewnętrzne, jak też zewnętrzne są potencjalne, a więc dla (2.9) można zbudować odpowiedni funkcjonał nazywany energią potencjalną (2.6). W dalszym ciągu zajmujemy się układami UK.

Dla niezależnych przemieszczeń  $q_i$  z (2.8) otrzymujemy układ równań równowagi:

$$V_i(\tilde{q}; \vartheta)_i \equiv U_i(q; \vartheta) - P_i(q, \lambda) = 0. \quad (2.10)$$

Funkcje  $V_i$  możemy rozwinąć w otoczeniu  $\tilde{q}$  w szereg Taylora<sup>3)</sup>:

$$V_i(\tilde{q} + \Delta\tilde{q}; \vartheta) = V_i(\tilde{q}; \vartheta) + V_{i\alpha}(\tilde{q}; \vartheta)\Delta q_\alpha + \frac{1}{2} V_{i\alpha\beta}(\tilde{q}; \vartheta)\Delta q_\alpha\Delta q_\beta + \dots$$

<sup>3)</sup> Powtarzający się wskaźnik oznacza sumowanie, przy czym dolne wskaźniki przebiegają wartości 1, ...,  $N$ , a górne 1, ...,  $M$ , gdyż numerują one składowe wektorów  $q$  i  $\lambda$ . Wskaźniki greckie są używane dla składowych wektora  $\tilde{q}$ , stąd odpowiadają one liczbom naturalnym 1, ...,  $N+M$ .

Przyrównanie lewej strony do zera i zachowanie członów liniowych względem przyrostów  $\Delta \tilde{q}$  prowadzi do układu równań przyrostowych MES [81]:

$$(U_{ij} - P_{ij}) \Delta q_j = P_i^k \Delta \lambda^k + (P_i - U_i), \quad (2.11)$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia pochodnych:

$$U_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\tilde{a}}, \quad P_{ij} = \left. \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right|_{\tilde{a}}, \quad (2.12)$$

$$P_i^k = \left. \frac{\partial P_i}{\partial \lambda^k} \right|_{\tilde{a}}, \quad U_i = \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\tilde{a}}.$$

W dalszym ciągu obok zapisu wskaźnikowego będziemy też posługiwali się notacją macierzową oraz oznaczeniami ogólnie przyjętymi w MES dla macierzy sztywności  $\mathbf{K}$ , obciążeń  $\mathbf{P}$  i sił residualnych  $\mathbf{R}$ . Przyrostowe równanie równowagi (2.11) można napisać w postaci:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{P}' \Delta \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R}, \quad (2.13)$$

gdzie styczna macierz sztywności

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_u) - \mathbf{K}_p = \mathbf{K}_c - \mathbf{K}_p, \quad (2.14)$$

składa się z następujących macierzy

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 & \text{ — macierz małych przemieszczeń,} \\ \mathbf{K}_\sigma & \text{ — macierz początkowych naprężeń,} \\ \mathbf{K}_u & \text{ — macierz początkowych przemieszczeń,} \\ \mathbf{K}_G = \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_u & \text{ — macierz geometryczna,} \\ \mathbf{K}_p & \text{ — macierz początkowych obciążeń,} \\ \mathbf{K}_c & \text{ — macierz układów grawitacyjnych.} \end{aligned} \quad (2.15)$$

W równaniu (2.13) występuje też macierz obciążeń odniesienia

$$\mathbf{P}' = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad (2.16)$$

która w szczególnym przypadku jednoparametrowych, proporcjonalnych obciążeń wynosi [81]:

$$\mathbf{P} = \lambda \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbf{P}' = \bar{\mathbf{P}}. \quad (2.17)$$

Obliczanie sił residualnych  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} - \mathbf{F}, \quad (2.18)$$

gdzie  $\mathbf{F} = \{U_i\}$ , ma istotne znaczenie w procedurach iteracyjnych, gdyż ich wyzerowanie oznacza osiągnięcie powierzchni (ścieżki) równowagi.

Macierze (2.14) otrzymuje się dla opisu Lagrange'a (por. [30, 42]). Można też stosować opis uaktualniony ze współzrędnymi współobrotowymi [7, 42]. Trudno wskazać na preferencje któregoś z opisów, gdyż ich zalety są zależne od typu konstrukcji (prętowe, powierzchniowe) i obciążeń (grawitacyjne, śledzące). W pracach autora i jego współpracowników posługiwano się współzrędnymi współobrotowymi w analizie kratownic [19, 80] i współzrędnymi Lagrange'a przy liczeniu powłok [54, 55]. W dalszym ciągu ograniczamy się do całkowitego opisu Lagrange'a (Total Lagrangian Formulation).



### 3. Stateczność układów konserwatywnych typu grawitacyjnego

Jeśli obciążenia nie zależą od konfiguracji to nazywamy je „martwymi” [43]. W takim przypadku znika macierz początkowych obciążeń  $\mathbf{K}_p \equiv \mathbf{0}$  i układ konserwatywny jest typu grawitacyjnego [35]. Tak więc w układach grawitacyjnych mamy:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\lambda), \quad \mathbf{K} \equiv \mathbf{K}_c, \quad (3.1)$$

gdzie macierz sztywności jest symetryczna  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ .

W stanie równowagi wektor sił residualnych zeruje się,  $R_i = 0$ . Stosując w takim przypadku wzory Cramera rozwiązanie układu (2.11) można napisać w postaci [64, 81]:

$$D\Delta q_i = d_i^k \Delta \lambda^k, \quad (3.2)$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$D = \det |K_{ij}|, \quad d_i^k = \frac{\partial D}{\partial K_{ji}} P_j^k \quad (3.3)$$

Warunkiem koniecznym stanu krytycznego jest zerowanie się wyznacznika stateczności, skąd wynika warunek

$$D = 0 \Rightarrow d_i^k \Delta \lambda^k = 0. \quad (3.4)$$

W przypadku obciążeń jednoparametrowych  $\Delta \lambda \equiv \Delta \lambda^1$ , a  $\mathbf{d}$  staje się macierzą jednokolumnową. Rozwiązanie (3.2) określa wtedy ścieżkę równowagi w przestrzeni  $R^{N+1}$ . Ścieżka (stan równowagi) jest stateczna jeśli macierz  $\mathbf{K}$  jest dodatnio określona. Jeśli ścieżka równowagi  $q_i(\eta)$ ,  $\lambda(\eta)$ , gdzie  $\eta$  jest parametrem, przechodzi przez początek układu  $q_i(0) = 0$ ,  $\lambda(0) = 0$  to nazywamy ją podstawową (rys. 2).

Jeśli przy monotonicznym wzroście parametru  $\eta$  osiągniemy wartość  $\eta = \eta_c$ , dla której jest spełniony warunek (3.4) to odpowiedni punkt nazywamy pierwotnym punktem krytycznym. Rozróżniamy dwa typy punktów krytycznych:

a) punkt bifurkacyjny (B)

$$\Delta \lambda \neq 0 \wedge \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (3.5a)$$

b) punkt graniczny (G)

$$\Delta \lambda = 0 \wedge \mathbf{d} \neq \mathbf{0}. \quad (3.5b)$$

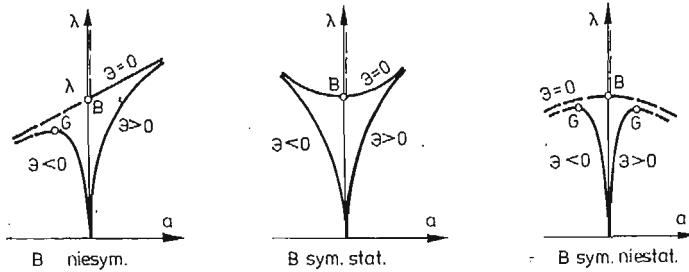
Zamiast zerowania wyznacznika stateczności  $D = 0$  można posłużyć się równoważnym kryterium zerowania się najniższej wartości własnej stycznej macierzy sztywności  $\mathbf{K}$ . Jeśli zeruje się pojedyncza wartość własna to mówimy o jednokrotnym punkcie krytycznym. W takim punkcie zachodzi

$$\omega_1 = 0 < \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_N,$$

gdzie  $\omega_i$  tworzą uporządkowany ciąg wartości własnych macierzy  $\mathbf{K}$ . Podstawowej wartości własnej  $\omega_1 \equiv \omega$  odpowiada wektor własny  $\mathbf{a}(1) \equiv \mathbf{a}$ , który służy określeniu kierunku ścieżki pozakrytycznej [17, 64, 87].

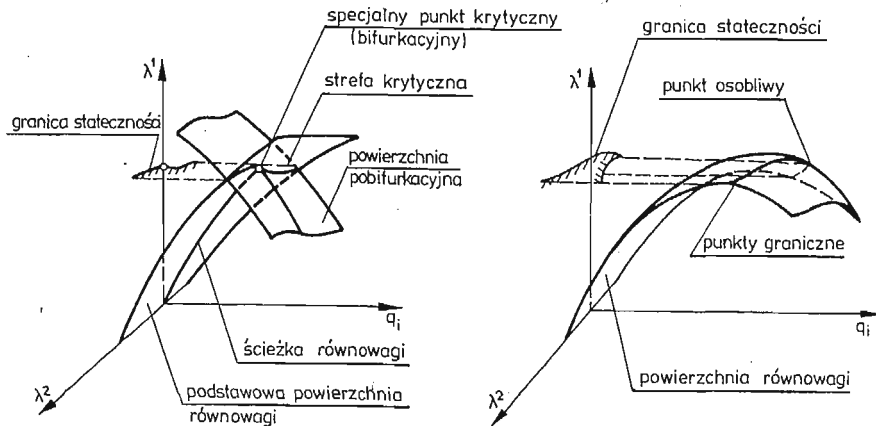
W dalszym ciągu ograniczamy się do analizy pojedynczych, pierwotnych punktów krytycznych. W przypadku punktów bifurkacyjnych można mówić o niesymetrycznych

(jeśli dla ścieżki pobifurkacyjnej w  $\lambda = \lambda_c$  zachodzi  $d\lambda/d\eta \neq 0$ ) i symetrycznych punktach bifurkacji stanów równowagi. Z kolei symetryczne punkty mogą być stateczne (jeśli dla  $\lambda = \lambda_c$  zachodzi  $d\lambda/d\eta = 0 \wedge d^2\lambda/d\eta^2 > 0$ ) lub niestateczne. Taka klasyfikacja jest powszechnie używana (por. np. [34, 66, 75]); gdyż określa ona tzw. czułość konstrukcji na imperfekcje. Nie wnikając w szczegóły warto tylko przypomnieć, że jedynie w przypadku gdy w idealnej konstrukcji sprężystej występuje symetryczny, stateczny punkt bifurkacji, to jest ona nieczuła na małe imperfekcje. W innych przypadkach imperfekcje powodują, że w konstrukcji nieidealnej może pojawić się punkt graniczny (na rys. 1 pokazano uproszczone wykresy, przyjmując jako rzędną amplitudę  $a$  postaci wybooczenia i zaznaczając linią kreskowaną niestateczne ścieżki równowagi).



Rys. 1

Klasyfikacja punktów krytycznych dla obciążeń wieloparametrowych jest znacznie bardziej złożona [34]. Rozwiązanie (3.2) określa powierzchnię równowagi, na której warunek (3.3) pozwala wyznaczyć strefę krytyczną. W przypadku obciążenia dwuparametrowego  $M = 2$ , pokazanego na rys. 2, strefa ta staje się krzywą krytyczną (miejsca geometryczne punktów krytycznych).



Rys. 2

Analogicznie do (3.5) można wyróżnić dwa przypadki szczególne [80]:

a) specjalny punkt krytyczny, gdy znikają wszystkie składowe macierzy  $d$  (odpowiada to bifurkacji stanów równowagi — rys. 2a):

$$\bigwedge_{i,k} d_i^k = 0, \quad (3.6a)$$

b) ogólny punkt krytyczny występuje, jeśli istnieje tylko jeden, różny od zera minor macierzy  $d$ , taki aby jej rząd wynosił

$$\bigvee_{i,k} rz(d_i^k) = M - 1 \Rightarrow \bigvee_k \Delta \lambda^k \neq 0, \quad (3.6b)$$

b') osobliwy punkt krytyczny powstaje, gdy występuje tylko trywialne rozwiązanie

$$\bigvee_{i,k} d_i^k \neq 0 \Rightarrow \bigwedge_k \Delta \lambda^k = 0. \quad (3.6b')$$

W inżynierskich zastosowaniach szczególnie ważna jest powierzchnia graniczna stateczności (granica stateczności gdy  $M = 2$ ), która jest brzegiem rzutu strefy krytycznej na podprzestrzeń obciążeń  $R^M$ . Powierzchnia ta ogranicza obszar bezpiecznych kombinacji obciążeń, nie wywołujących utraty stateczności. W zagadnieniach liniowych powierzchnia graniczna jest wypukła, w nieliniowych może być wklęsła [34].

#### 4. Wyznaczanie ścieżki równowagi

Spośród wielu metod rozwiązywania nieliniowego układu równań MES jako najdokładniejsza jest uważana metoda Newtona—Raphsona [70]. W wersji klasycznej stosuje się sterowanie obciążeniowe, tzn. jako niezależny przyjmuje się parametr obciążeniowy  $\eta \equiv \lambda^4$ . Ponieważ proces iteracyjny jest rozbieżny w otoczeniu punktu granicznego  $G$ , dlatego zaczęto stosować sterowanie przemieszczeniowe  $\eta \equiv q_j$ , [61, 90]. Jednak i to sterowanie nie zapewnia zbieżności iteracji, gdy zbliżamy się do obszaru, w którym  $\Delta \lambda / \Delta q_j \rightarrow \infty$  (punkt E na rys. 3).

W pracy [81] omówiono dokładniej metody obliczania równań przyrostowych MES. Tutaj przytaczamy jedynie metodę obliczania w przestrzeni  $R^{N+1}$  — metodę, która zapewnia zbieżność iteracji dla gładkich ścieżek równowagi.

Idea metody polega na równorzędnym traktowaniu przyrostów przemieszczeń  $\Delta q_l$  i obciążenia  $\Delta \lambda$ . W tym celu posługujemy się rozszerzonym układem równań przyrostowych:

$$\begin{aligned} K_{i,j} \Delta q_j - P'_i \Delta \lambda &= R_i, \\ t_j \Delta q_j + t_{N+1} \Delta \lambda &= \Delta \eta. \end{aligned} \quad (4.1)$$

W przypadku proporcjonalnego obciążenia jednoparametrowego  $P = \lambda \bar{P}$  będzie zachodziło:

$$P'_i = \frac{\partial P_i}{\partial \lambda} = \bar{P}_i, \quad (4.2)$$

gdzie  $\bar{P}$  jest wektorem obciążenia odniesienia.

<sup>4)</sup> Jako  $\lambda$  przyjmuje się jeden z parametrów obciążenia, np.  $\lambda \equiv \lambda^1$ , ustalając wartości pozostałych  $\lambda^l = \text{const.}$  dla  $l = 2, \dots, M$ .

Istotną rolę spełnia ostatnie równanie układu (4.1). Jeśli wektor jednostkowy  $\tilde{t}$  jest bliski wektorowi stycznemu  $\Delta\tilde{q}$ , to otrzymujemy sterowanie parametrem ścieżki  $\eta \equiv s$ . Sterowania obciążeniowe lub przemieszczeniowe odpowiadają odpowiednio wyspecyfikowanemu składowym wektora  $\tilde{t}$ :

a) sterowanie obciążeniowe  $\eta \equiv \lambda$

$$\tilde{t} = \{0, \dots, 0, 1\}, \quad (4.3a)$$

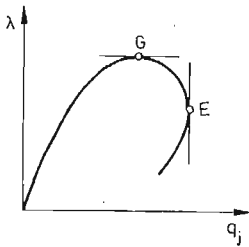
b) sterowanie przemieszczeniowe  $\eta \equiv q_j$

$$\tilde{t} = \{0, \dots, 0, j, 0, \dots, 0\}. \quad (4.3b)$$

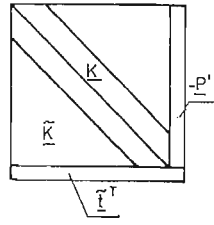
Układ równań (4.1) dalej będziemy nazywali rozszerzonym; zapisując go w postaci macierzowej otrzymujemy:

$$\tilde{\mathbf{K}}\Delta\tilde{q} = \tilde{\mathbf{R}}. \quad (4.4)$$

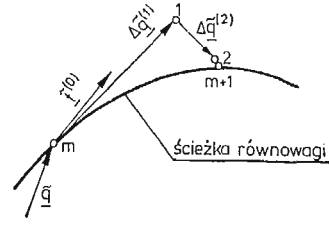
Rozszerzona macierz styczna  $\tilde{\mathbf{K}}$  powstaje przez dołączenie wiersza  $\tilde{t}$  i kolumny  $\tilde{\mathbf{P}}$  (rys. 4). Można przy tym zapamiętywać tylko elementy niezerowe jakie występują np. w sterowaniach  $\lambda$  lub  $q_j$  i obciążeniach skupionych  $P'_k$  oraz półpasmo symetrycznej macierzy stycznej  $\mathbf{K}$ .



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

W [64] wykazano, że macierz rozszerzona  $\tilde{\mathbf{K}}$  dla sterowania  $s$  jest nieosobliwa dla gładkich ścieżek równowagi. Osobliwość macierzy  $\tilde{\mathbf{K}}$  występuje w punktach bifurkacji (specjalnych punktach krytycznych).

Rozszerzone wektory  $\Delta\tilde{q}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}} \in \tilde{\mathbf{R}}^{N+1}$  mają składowe:

$$\Delta\tilde{q} = \{\Delta q, \Delta\lambda\}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \{\mathbf{R}, \Delta\eta\}. \quad (4.5)$$

Spośród wielu możliwych algorytmów obliczania kolejnych przybliżeń  $\Delta\tilde{q}^{r+1}$  dla  $r = 0, 1, \dots$  wskażemy tylko jeden, omówiony dokładnie w [81], a naszkicowany na rys. 5. Polega on na przyjmowaniu wektora residuum  $\tilde{\mathbf{R}}^{(r)}$  w postaci:

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(0)} = \{\mathbf{0}, \Delta\eta\}, \quad \tilde{\mathbf{R}}^{(r)} = \{\mathbf{R}^{(r)}, \mathbf{0}\} \quad \text{dla } r \geq 1 \quad (4.6)$$

Podczas obliczeń można obliczać macierz  $\tilde{\mathbf{K}}^{(r)}$  dla każdego kroku iteracyjnego. Stosowanie sterowania  $s$  nieco komplikuje programy na emc lecz pozwala w istotny sposób obniżyć liczbę iteracji, nawet dla długich kroków  $\Delta s$ . Można to sterowanie łączyć ze zmodyfikowaną metodą Newtona-Raphsona, gdy obliczamy tylko jeden raz  $\tilde{\mathbf{K}}^{(r)} = \tilde{\mathbf{K}}(\tilde{q}^{(1)})$ . Omówione podejścia zastosowano w pracach [19, 54, 80].

Mówiliśmy cały czas o obciążaniu jednoparametrowym. Rozważania odnoszą się również do przypadków  $M > 1$  jeśli wykonamy tylko odpowiednie przekroje w przestrzeni  $R^{N+M}$ . Jeśli ustalimy wartości  $\lambda^l = \text{const}$  to ich przyrosty  $\Delta \lambda^l = 0$  i w równaniach (4.1) należy obliczać  $P_i(\lambda; \lambda^l)$  oraz  $R_i(\lambda; \lambda^l)$ . Przez  $\lambda$  rozumiemy zmienny parametr obciążenia, wybrany ze składowych wektora  $\lambda$ ; np. jeśli  $\lambda \equiv \lambda^2$  to  $l = 1, 3, 4, \dots, M$ .

Prosty przykład takiego postępowania można znaleźć w [80].

### 5. Obliczanie punktów krytycznych i ścieżek pobifurkacyjnych

Opisane w poprzednim punkcie przyrostowe postępowanie można zastosować do wyznaczenia podstawowej ścieżki równowagi. W kolejnych punktach  $m$  tej ścieżki można obliczać wartość funkcji skalarnej  $S(\eta)$ , którą określa się tak, aby jej miejsca zerowe, obliczone z równania

$$S[\tilde{q}(\eta)] = 0, \tag{5.1}$$

występowały w punktach krytycznych  $\tilde{q}^c = \tilde{q}(\eta_c)$ .

Jako funkcję  $S$  można przyjąć wyznacznik stateczności  $D = \det|\mathbf{K}|$  lub podstawową wartość własną  $\omega$  macierzy stycznej  $\mathbf{K}$ . Z innych, zestawionych w [81], funkcji  $S$  przytaczamy obliczenie jej jako różnicy wartości parametrów obciążenia

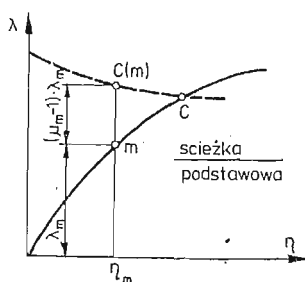
$$S = \lambda_{c(m)} - \lambda_m \equiv (\mu_m - 1) \lambda_m, \tag{5.2}$$

gdzie  $\lambda_m$  odpowiada punktowi  $m$  ścieżki równowagi, natomiast  $\lambda_{c(m)}$  jest liczone z odpowiednio sformułowanego problemu wartości własnych. Tym zagadnieniem zajęto się szczegółowo w pracach [14, 63]. Tutaj przytaczamy jedynie obliczenia  $\mu_m$  jako wartości własnej równania

$$(\mathbf{K}_0 + \mu \mathbf{K}_G[\tilde{q}(\eta)]) \Delta q = \mathbf{0}, \tag{5.3}$$

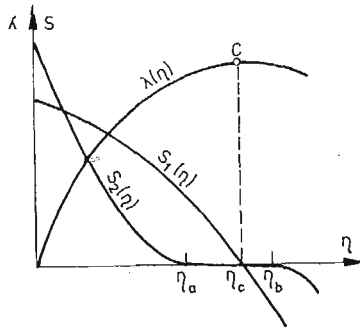
gdzie  $\mathbf{K}_0$  jest liniową, a  $\mathbf{K}_G$  geometryczną macierzą sztywności — por. (2.15).

Na rys. 6 pokazano interpretację funkcji (5.2). Przy realizacji obliczania ciągu kolejnych punktów podstawowej ścieżki równowagi  $m \rightarrow C$  będzie zachodziło  $\mu_m \rightarrow 1$ . Jeśli wartości  $S$  (a więc w szczególnym przypadku (5.2) różnica  $\mu_m - 1$ ) będą mały monotonicznie, to łatwo jest zbudować odpowiednie algorytmy iteracyjne. W zależności od przebiegu



Rys. 6

funkcji  $S(\eta)$  obliczenia mogą być niestabilne (gdy występują nieciągłości) lub mało dokładne (gdy dla  $\eta \in (\eta_a, \eta_b)$  wartości  $S(\eta) \approx 0$ ). Na rys. 7 pokazano różne krzywe  $S_1(\eta)$ ,  $S_2(\eta)$ , które nie są równoważne z punktu widzenia efektywności obliczeń numerycznych.



Rys. 7

Najczęściej w obliczeniach MES stosuje się  $S \equiv D$ , głównie ze względu na łatwość obliczania wyznacznika stateczności podczas rozwiązywania układu równań przyrostkowych (4.1). E. RIKS w swoich pracach [64, 65] zaproponował jako efektywniejsze przyjmowanie  $S \equiv \omega$ . Jednak możliwość „wymiany” najniższych wartości własnych  $\omega_2 < \omega_1$  (por. [65]) powoduje, że nie można uznać tego sposobu za w pełni przydatny do automatyzacji obliczeń. Skuteczniejsze algorytmy można otrzymać przez łączenie obydwu kryteriów [19].

Posługiwanie się techniką ekstrapolacyjno-interpolacyjną, połączoną z efektywną metodą obliczania ścieżki równowagi i dobrym wyborem funkcji  $S$  pozwala na stosunkowo szybkie obliczenia punktów krytycznych. Odnosi się to zwłaszcza do punktów granicznych (por. [10, 28]).

Podobnie jak przy wyznaczaniu ścieżki równowagi wszystkie rozważania pozostają ważne dla obciążień wieloparametrowych jeśli obliczenia punktów granicznych prowadzimy w przestrzeni  $R^{N+1}$ . W pracy [80] podano algorytm obliczania krzywych na strefie krytycznej (warstwie) dla  $M = 2$ , lub przyjęciu dwóch parametrów obciążenia jako zmienne niezależne, np.  $\lambda^1$ ,  $\lambda^2$  oraz  $\lambda^l = \text{const}$  dla  $l = 3, 4, \dots, M$ .

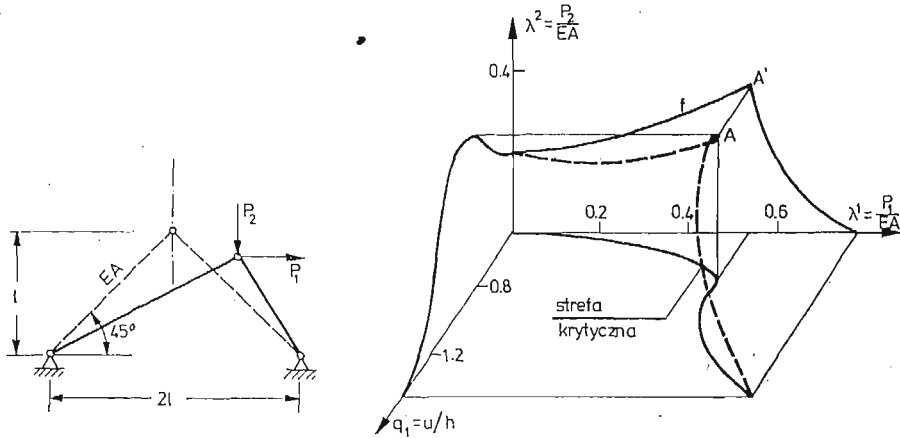
Jeśli skorzystamy z warunku stanu krytycznego  $D = 0$ , to po obliczeniu dowolnego punktu krytycznego, przy wykorzystaniu rozszerzonego układu równań (4.1), dalsze obliczenia prowadzi się w przestrzeni  $R^{N+2}$ , rozwiązując równania:

$$\begin{aligned} K_{ij} \Delta q_j - P_i^1 \Delta \lambda^1 - P_i^2 \Delta \lambda^2 &= R_i, \\ t_j \Delta q_j + t_{N+1} \Delta \lambda^1 + t_{N+2} \Delta \lambda^2 &= \Delta \eta, \\ D_j \Delta q_j &= -D(q; \mathfrak{a}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

gdzie wyznacznik  $D(q; \mathfrak{a})$  jest traktowany podczas iteracji jako residuum, a  $D_j$  są pochodnymi

$$D_j \equiv \frac{\partial D}{\partial q_j} = \frac{\partial D}{\partial K_{rs}} K_{rsj}. \quad (5.5)$$

Obliczenie pochodnych macierzy stycznej  $K_{rsj}$  jest możliwe dla małej liczby stopni swobody układu, lub dla układów pasmowych. Na rys. 8 wziętym z [80] pokazano krzywą



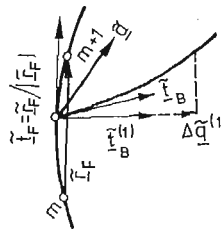
Rys. 8

graniczną  $f(\lambda^1, \lambda^2) = 0$  dla kratownicy Misesa. Nieciągłość krzywej  $f$  powstaje w punkcie osobliwym  $A'$  jako wynik rzutowania strefy krytycznej (zaznaczonej linią kreskowaną) na płaszczyznę  $(\lambda^1, \lambda^2)$ .

W przytoczonym przykładzie strefa krytyczna jest miejscem geometrycznym punktów granicznych. Gdyby w strefie występowały punkty bifurkacji (por. [83]), to podstawowa powierzchnia równowagi przestaje być gładka i algorytmy oparte na rozwiązywaniu układu (4.4) mogą przestać być zbieżne.

Oprócz obliczenia punktów bifurkacyjnych należy jeszcze określić ich typy. Można tego dokonać korzystając z wyższych pochodnych energii potencjalnej [34, 66, 75] lub przez obliczanie ścieżki pobifurkacyjnej w otoczeniu punktów  $B$ . Ponieważ macierze  $\mathbf{K}$  i  $\tilde{\mathbf{K}}$  są osobliwe w tym punkcie, to wektor  $\tilde{\mathbf{t}}_F$  styczny do ścieżki pobifurkacyjnej liczymy w sposób przybliżony (rys. 9)

$$\tilde{\mathbf{t}}_F = \frac{\Delta \tilde{\mathbf{q}}_F}{(\Delta \tilde{\mathbf{q}}_F^T \Delta \tilde{\mathbf{q}})^{1/2}}, \quad \Delta \tilde{\mathbf{q}}_F \approx \frac{1}{2} (\Delta \tilde{\mathbf{q}}_m + \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{m+1}). \quad (5.6)$$



Rys. 9

Wektor styczny do ścieżki pobifurkacyjnej  $\tilde{\mathbf{t}}_B$  obliczamy korzystając z podstawowego wektora własnego  $\mathbf{a}$  macierzy stycznej  $\mathbf{K}$  i wektora  $\tilde{\mathbf{t}}_F = \{\tilde{\mathbf{t}}_{Fu}\} = \{\tilde{\mathbf{t}}_F, \lambda_c\}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_B &= \alpha \{\mathbf{a} + \gamma \tilde{\mathbf{t}}_F, \gamma \lambda_B\}, \\ \alpha &= (1 + 2\gamma \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{t}}_F + \gamma^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

W pracy [64] wyprowadzono wzór na współczynnik

$$\gamma = - \frac{K_{ijk} a_i a_j a_k}{2K_{i\alpha} a_i a_j t_{F\alpha}}. \quad (5.8)$$

Ponieważ obliczanie pochodnych macierzy  $\mathbf{K}$  jest żmudne, dlatego w [64] zaproponowano obliczenie przybliżonego wektora  $\mathbf{t}_B^{(1)}$ , niekolinearnego z  $\tilde{\mathbf{t}}_F$  i leżącego w płaszczyźnie  $(\tilde{\mathbf{t}}_F, \tilde{\mathbf{a}})$ . Wektorem takim może być wektor ortogonalny do  $\tilde{\mathbf{t}}_F$ , skąd wynika:

$$\gamma^{(1)} = -\tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{t}_F. \quad (5.9)$$

W przypadku symetrycznego punktu  $B$  współczynnik  $\gamma = 0$  i wektor styczny do ścieżki pobifurkacyjnej wynosi:

$$\tilde{\mathbf{t}}_B = \{\mathbf{a}, 0\}. \quad (5.10)$$

Wektor (5.10) można przyjmować jako pierwsze przybliżenie również dla punktów niesymetrycznych [17, 55, 81].

Przyjmowanie  $\tilde{\mathbf{t}}_B^{(1)}$  niekolinearnego z  $\tilde{\mathbf{t}}_F$  ma służyć rozpoczęciu iteracji w metodzie obliczania ścieżki, pobifurkacyjnej w  $R^{N+1}$ . Aby nie wracać na ścieżkę podstawową należy wprowadzić zakłócenie do macierzy stycznej  $\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{q}}_F + \Delta \mathbf{q}_B^{(1)})$ , gdzie

$$\Delta \mathbf{q}_B^{(1)} = \beta \mathbf{t}_B^{(1)} \Delta \eta_F, \quad \beta < 1, \quad (5.11)$$

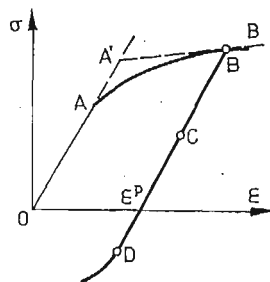
a  $\Delta \eta_F$  jest ostatnim przyrostem parametru sterującego obliczaniem podstawowej ścieżki równowagi.

W niektórych konstrukcjach (np. łuki lub powłoki kuliste) można łatwo przewidzieć pobifurkacyjne postacie równowagi. W takich przypadkach można wprowadzić zakłócenie odpowiadające tej postaci, łącząc je ze zmianą sterowania przemieszczeniowego [9, 55].

## 6. Stateczność układów sprężysto-plastycznych

Konstrukcje sprężysto-plastyczne (SP) są niekonserwatywne, gdyż stan przemieszczeń zależy od historii obciążenia. Pomimo tego można do nich stosować kryterium statyczne, zwłaszcza jeśli nie pojawiają się lokalne obciążenia [37, 77, 88].

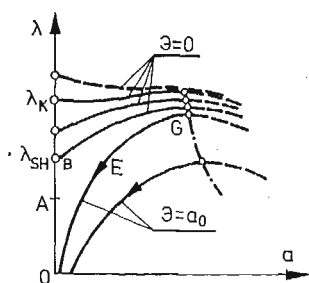
Pojawienie się lokalnych obciążeń i wtórnych uplastycznień w poszczególnych punktach konstrukcji (na rys. 10 pokazano wykres  $\sigma(\varepsilon)$  dla jednoosiowego rozciągania) odróżnia układy (SP) od układów nieliniowo sprężystych. Zjawiska te silnie rzutują na analizę utraty stateczności, zarówno konstrukcji idealnych jak też z imperfekcjami.



Rys. 10



Na rys. 11 pokazano wykres  $\lambda(a)$  zależności obciążenia od amplitudy  $a$  postaci wybożenia słupa ściskanego. Przypominamy, że w przypadku materiału sprężystego powstaje symetryczny, stateczny punkt bifurkacji (rys. 1b), który wyklucza możliwość występowania punktów granicznych dla konstrukcji nieidealnych. Jeśli słup jest wykonany z materiału SP, to wybożenie może nastąpić dla wartości  $\lambda_{SH}$ . Tą wartość obciążenia bifurkacyjnego łączymy z nazwiskiem Shanley'a [59], który zastosował kryterium statyczne  $D = 0$  bez dopuszczenia lokalnych odciążenia w chwili bifurkacji. Odciążenia rozwijają się wzdłuż pobifurkacyjnej ścieżki równowagi, co powoduje wzrost  $\lambda$ . Zmiana konfiguracji, a zwłaszcza wtórne uplastycznienia powodują występowanie punktu granicznego  $G$ .



Rys. 11

Podstawowej postaci wybożenia odpowiada cały przedział  $(\lambda_{SH}, \lambda_K)$  statecznych punktów krytycznych, w których dopuszczamy lokalne odciążenia w chwili wybożenia. Kryterium statyczne można też stosować dla  $\lambda > \lambda_K$ , gdzie  $\lambda_K$  jest obciążeniem Kármána [59].

W przypadku idealnych układów SP można też stosować koncepcje liniowej analizy stateczności, uzupełniając algorytmy liczenia wartości własnych odpowiednimi procedurami iteracyjnymi [18]. Jeśli układ równań przyrostowych przyjmiemy w postaci (5.3) to macierz  $\mathbf{K}_0$  przestaje być liniowa, gdyż stałe materiałowe należy zastąpić funkcjami  $E(\sigma)$  stanu naprężenia w elementach  $\sigma(\lambda)$ . Dochodzimy w ten sposób do układu równań dla wyznaczenia ścieżki przedbifurkacyjnej:

$$\mathbf{K}_0(\sigma) \Delta q = \mathbf{P}' \Delta \lambda \quad (6.1)$$

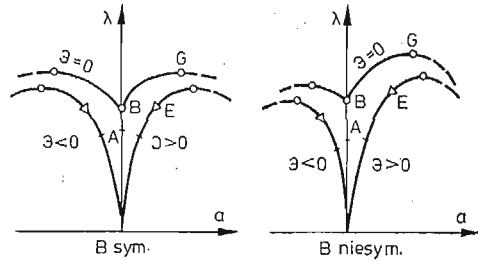
i warunku stateczności:

$$\det |\mathbf{K}_0(\sigma) + \lambda \mathbf{K}_G(\sigma)| = 0, \quad (6.2)$$

gdzie obok macierzy małych odkształceń  $\mathbf{K}_0(\sigma)$  występuje macierz wstępnych naprężeń  $\mathbf{K}_G(\sigma)$ .

Obliczenia polegają na wyznaczeniu takiej wartości  $\lambda$ , aby spełnić równania (6.1) i (6.2). Posługiwanie się przyrostowym układem równań (6.1) umożliwia obliczenie  $\min \lambda_c = \lambda_{SH}$  przy realizowaniu ścieżki podstawowej  $O-B$  na rys. 11 (punkt  $A$  odpowiada pojawieniu się pierwszych odkształceń plastycznych). W przypadku konstrukcji ramowych można posługiwać się liczbową macierzą  $\mathbf{K}_\sigma$  — por. [18]. Przykłady zastosowania MES do analizy wybożenia płyt sprężysto-plastycznych można znaleźć w [56, 68, 73].

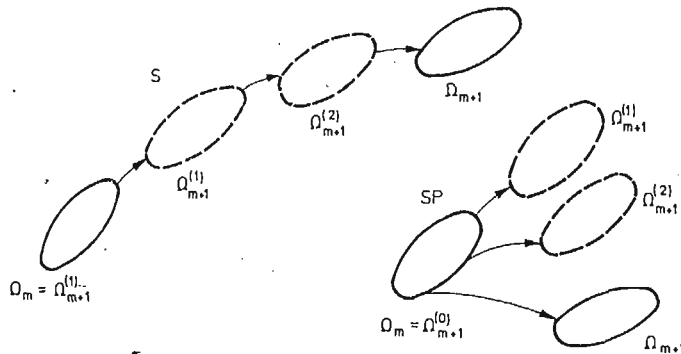
W układach SP można wyróżnić symetryczne i niesymetryczne punkty bifurkacji [77]. Na rys. 12 punkty  $B$  odpowiadają obciążeniu  $\lambda_{SH}$ . W odróżnieniu od idealnych układów



Rys. 12

sprężystych (rys. 1) konstrukcje SP są czułe na imperfekcje niezależnie od typu punktu bifurkacji. Z tego względu analiza stateczności idealnych układów SP ma mniejsze znaczenie praktyczne niż w układach sprężystych.

Obliczanie nieliniowych ścieżek równowagi dla układów SP dostarcza nowych problemów numerycznych. Podstawowym problemem jest konieczność uwzględnienia historii procesu. Problem ten jest dobrze opisany w literaturze (por. [42, 55]). Wspomnimy tylko o konieczności przechowywania i uaktualnienia zbiorów informacji we wszystkich punktach numerycznego całkowania w elementach. Wiąże się z tym konieczność zmiany procedur



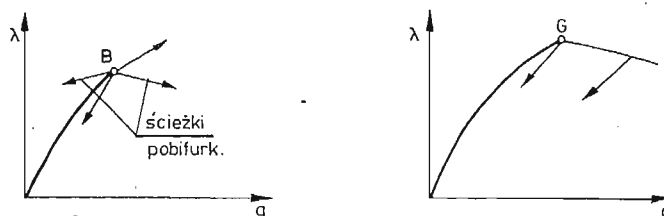
Rys. 13

iteracyjnych. Na rys. 13 pokazano różnicę między iteracjami układów S i SP przy przechodzeniu od punktu  $m$  do  $m+1$  na ścieżce równowagi [42]. W przypadku SP konfigurację  $\Omega_m$  traktuje się jako konfigurację odniesienia i dopiero po spełnieniu kryterium zbieżności uaktualnia się zbiory informacji. Ze względu na możliwość sprawdzania warunku utraty stateczności należy posługiwać się raczej metodą zmiennej sztywności, niż metodą początkowych obciążeń [42].

Powstawanie lokalnych odciążeń pogarsza zbieżność algorytmów [70]. Może to nastąpić przed osiągnięciem punktów krytycznych (punkty E na rys. 12). Należy również rozszerzyć kryterium utraty stateczności. W punktach krytycznych zamiast osobliwości macierzy stycznej  $\mathbf{K}$  może nastąpić zmiana znaku wyznacznika stateczności  $D(\eta)$ :

$$D(\eta_{c-}) \cdot D(\eta_{c+}) \leq 0, \quad (6.3)$$

co wymaga odpowiedniej modyfikacji algorytmów. Nieciągłości wartości  $D(\eta)$  powstają też jako wynik linearyzacji zależności  $\sigma(\epsilon)$ , jak zaznaczono linią  $O-A'-B'$  na rys. 10. W związku z powyższym należy liczyć się z pojawianiem się nowych ścieżek równowagi i nieciągłości zarówno w punktach bifurkacyjnych jak też granicznych (rys. 14) — (por. [88]).



Rys. 14

Jak wspomniano, pojawianie się lokalnych odciążań może pogarszać zbieżność algorytmów. Ogólniej chodzi o pojawianie się nieciągłości przy przekraczaniu granicy plastyczności [88], a więc też przy powstawaniu pierwszych lub wtórnych odkształceń plastycznych.

Przykłady pełnej nieliniowej analizy stateczności konstrukcji prętowych, płyt i powłok można znaleźć w pracach [8, 26, 42, 55, 68].

### 7. Stateczność układów sprowadzanych do konserwatywnych

Jeśli obciążenie zależy od konfiguracji  $p(q, \lambda)$ , to w najogólniejszym przypadku nie można posługiwać się statycznym kryterium utraty stateczności. W przypadku obciążeń niekonserwatywnych należy stosować kryterium dynamiczne [89, 93], co w istotny sposób komplikuje obliczenia.

Wiadomo z wielu prac, że kryterium statyczne daje dobre oszacowanie obciążeń krytycznych w niektórych przypadkach obciążeń podśledzących [93] i śledzących [33, 45]. Odnosi się to w szczególności do ciśnienia zewnętrznego, które występuje jako podstawowe obciążenie wielu konstrukcji.

Obciążenia typu śledzącego można łatwiej rozważać w ramach opisu uaktualnionego niż globalnego [39]. Z drugiej strony prostsza algorytmizacja zdaje się przemawiać za opisem globalnym [8], toteż dalej stosujemy ten opis.

W przypadku obciążenia powierzchniowego zależnego od przemieszczeń  $p(u, \lambda)$  jego przyrost wynosi:

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \Delta \lambda = L \Delta u + p' \Delta \lambda. \quad (7.1)$$

Po przyjęciu aproksymacji MES według (2.2)<sub>2</sub> z pracy wirtualnej przyrostu obciążenia

$$\delta \Delta L_z = \sum_s \iint_{S_s} \delta \Delta u^T \cdot (p + \Delta p) dS \equiv \delta \Delta q^T (P + K_p \Delta q + P' \Delta \lambda), \quad (7.2)$$

wynikają macierze równoważnych sił węzłowych  $P$ , początkowych obciążeń  $K_p$  i obciążeń odniesienia  $P'$ :

$$P = \sum_e \iint_{S_e} N^T p dS, \quad (7.3)$$

$$K_p = \sum_e \iint_{S_e} N^T L N dS, \quad P' = \sum_e \iint_{S_e} N^T p' dS.$$

Macierz  $K_p$  będzie w ogólności macierzą niesymetryczną, co może powodować istotne trudności w posługiwaniu się kryterium statycznym utraty stateczności i standardowymi programami MES. Niesymetria macierzy  $K_p$  zależy nie tylko od obciążenia, ale też od konstrukcji — w szczególności od jej warunków podparcia. Pokażemy to na przykładzie równomiernego ciśnienia działającego na dźwigar powierzchniowy.

Dla uproszczenia rozważań przyjmujemy, że brzeg  $\Gamma$  pokrywa się z główną linią krzywizn  $\xi^2 = \text{const}$ . Pracę obciążenia normalnego  $p$  można napisać w postaci:

$$\delta W_p = -\delta U_p + \delta W_{\Gamma}, \quad (7.4)$$

gdzie część niepotencjalna wynosi [49]:

$$\delta W_{\Gamma} = \int_{\Gamma} p w \delta v d\Gamma \equiv \delta q_v \hat{K}_{\Gamma} q_w. \quad (7.5)$$

Przy aproksymacji przemieszczeń  $v = N_v q_v$ , stycznych do brzegu  $\Gamma$  i przemieszczeń normalnych  $w = N_w q_w$  otrzymujemy niesymetryczną macierz początkowych obciążeń brzegowych

$$\hat{K}_{\Gamma} = \sum_{l=1}^n \int_{\Gamma_l} N_v^T p N_w d\Gamma, \quad (7.6)$$

gdzie sumowanie należy wykonać wzdłuż swobodnych, obciążonych brzegów  $\Gamma_l$  elementów skończonych, dla których zachodzi  $p \neq 0 \wedge v \neq 0 \wedge w \neq 0$ . Jeśli wektor przemieszczeń węzłów napiszemy w postaci:

$$q = \{q_u, q_v, q_w\}, \quad (7.7)$$

to  $\hat{K}_{\Gamma}$  występuje w macierzy  $K_p$

$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{K}_{\Gamma} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

która stanowi niesymetryczną część macierzy wstępnych obciążeń  $K_p$ .

Przy rozważaniu izolowanych elementów należy obliczyć macierze  $K_p^e$ . Jeśli ciśnienie jest równomierne  $p = p_0 = \text{const}$  to podczas agregacji elementów w układ macierze te ulegają wyzerowaniu dla wewnętrznych brzegów. Jeśli  $p = p(\xi_1, \xi_2)$ , jak należy przyjmować przy parciu wiatru, to dla tych brzegów  $\hat{K}_{\Gamma}^e \rightarrow 0$  przy zmniejszaniu wymiarów elementów. Zagęszczanie podziału na elementy skończone nie ma jednak wpływu na  $\hat{K}_{\Gamma}$  dla brzegów zewnętrznych.

Naszkieowany powyżej problem konserwatywności ciśnienia normalnego był najpierw rozpatrywany przez W. W. BOŁOTINA [13], następnie był uściślony przez G. A. COHENA [20], rozważany również w [31, 46].

W pracy [49] stwierdzono, że wpływ macierzy  $\mathbf{K}_r$  na wartości obciążeń krytycznych konstrukcji poddanych działaniu równomiernego ciśnienia normalnego  $p_0$  jest mały. Nie można natomiast pomijać symetrycznej części  $\mathbf{K}_p$  (wynikającej z potencjału  $U_p$  w (7.4)) dla niektórych typów konstrukcji. Dobrym przykładem są pierścienie sprężyste obciążone ciśnieniem zewnętrznym  $p_0$ . Uwzględnienie macierzy  $\mathbf{K}_{ps}$  daje krytyczną wartość ciśnienia normalnego do odkształconej osi pierścienia równą  $3EI/R^2$ , gdy pominięcie  $\mathbf{K}_{ps}$  odpowiada stałemu kierunkowi ciśnienia pierwotnie normalnego, skąd wynika  $p_{kr} = 4EI/R^2$  — por. [12].

Jak wykazano w [29] nie można pominąć  $\mathbf{K}_{ps}$  w łukach wyniosłych. Problem ten jest szczegółowo dyskutowany w [43] w odniesieniu do powłok o różnej wyniosłości.

Wróćmy do ogólnego przypadku niesymetrycznej macierzy  $\mathbf{K}_p$ . Jeśli obliczamy ściśle wektor sił residualnych  $\mathbf{R}$ , to dla iteracyjnego obliczenia ścieżki równowagi można posługiwać się przybliżonymi postaciami macierzy stycznej  $\mathbf{K}$ . W szczególności można dokonać symetryzacji tej macierzy według wzoru:

$$\mathbf{K}_s = \frac{1}{2} (\mathbf{K} + \mathbf{K}^T) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G - \frac{1}{2} (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_p^T). \quad (7.9)$$

Dochodzimy w ten sposób do tzw. sprowadzonego układu konserwatywnego, którego własności zostały zbadane w [35] z punktu widzenia teorii stateczności.

W pracy [23] wykonano obliczenia statecznych i niestatecznych części ścieżek równowagi dla różnych, przybliżonych macierzy stycznych. Obok  $\mathbf{K}_s$  stosowano też macierz

$$\mathbf{K}_s^* = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G, \quad (7.10)$$

a więc całkowicie pomijano macierz początkowych obciążeń  $\mathbf{K}_p$ . Obliczenia prowadzono w przestrzeni konfiguracyjnej  $R^N$ , stosując sterowanie obciążeniowe, a następnie przemieszczeniowe według algorytmu z [28] i zachowując ściśle wyrażenie na siły residualne  $\mathbf{R}$ . Okazało się, że w zależności od konstrukcji proces iteracyjny przestaje być zbieżny przy stosowaniu  $\mathbf{K}_s$  lub  $\mathbf{K}_s^*$ . Dotychczas nie posługiwano się metodą obliczania ścieżek równowagi w przestrzeni  $R^{N+1}$  przy uwzględnieniu macierzy  $\mathbf{K}_p$ .

## 8. Problemy nieomówione

W pracy nie zajęliśmy się problemami, które dotyczą doboru metod numerycznych, zagadnień informatycznych i realizacji programów na emc [7, 92].

Nie zajmujemy się też dokładniej problematyką aproksymacji MES, tzn. doбором typów elementów i ich stopni swobody. Należy tylko podkreślić, że w przypadku elementów niedostosowanych można mieć oszacowania wartości własnych od dołu [3, 92], a przy zbyt grubym podziale można źle ocenić typ punktu bifurkacji [55]. W pracach [22, 85] zwrócono uwagę na możliwość zmniejszenia globalnej liczby niewiadomych (wymiarów macierzy stycznej  $\mathbf{K}$ ) przez przyjęcie pozawęzłowych stopni swobody.

W zagadnieniach stateczności możemy również dokonywać kondensacji stopni swobody [3], ale należy czynić to ostrożnie, aby nie wyeliminować istotnych postaci utraty stateczności [5].

Na koniec o wpływie imperfekcji. Oprócz lokalnych imperfekcji ujętych w (2.5) wektorem  $\underline{\alpha}$  mogą wystąpić imperfekcje związane z przykładaniem obciążeń. W praktyce nigdy nie realizujemy liniowego stanu przedwyboczeniowego, co można zmienić typ utraty stateczności [11, 41]. Wiąże się to np. z istotnym dla praktyki inżynierskiej problemem obciążeń krytycznych w ramach z prętami zginanymi [2, 38, 51].

Oczywiście, w pracy nie wyczerpano całej bogatej problematyki stosowania MES do analizy stateczności konstrukcji. Ograniczono się tylko do zakresu obowiązywania kryterium statycznego utraty stateczności. W związku z tym pominięto całkowicie problemy stateczności dynamicznej, gdzie również MES jest wykorzystywana [58].

#### Literatura cytowana w tekście

1. H. A. ALFUTOW, *Osnovy rasczeta na ustojczivosti' uprugich sistient*, Maszynostrojenije, Moskwa 1978.
2. E. D. AKKOUSH, H. K. HUANG, *Bifurcation, Pre — and Post — Buckling Analysis of Frame Structures*, Comp & Struct., 8 (1978), 667 - 678.
3. R. G. ANDERSON, B. H. IRONS, O. C. ZIENKIEWICZ, *Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements*, Int. J. Solids Struct., 4 (1968), 1031 - 1055.
4. J. H. ARGYRIS, *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press 1964 (tłum. ros., Strojizdat, Moskwa 1968).
5. J. H. ARGYRIS, M. KÖNIG, D. A. NAGY, M. HAASE, G. MAJEJANALUS, *Metoda elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych*, Metody Oblicz. w Mech. Nielin., Ossolineum 1977, 163 - 234.
6. R. S. BARSOUM, *Finite Element Method Applied to the Problem of Stability of a Non — conservative system*, Int. J. Num. Meth. Eng., 3 (1971), 63 - 87.
7. K. J. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice — Hall, Inc. 1976.
8. K.-J. BATHE, H. OZDEMIR, *Elastic — Plastic Large Deformation: Static and Dynamic Analysis*, Comp. & Struct., 6 (1976) 81 - 92.
9. J. L. BATOZ, A. CHATTOPADHYNY, G. DUATT, *Finite Element Large Deflection Analysis of Shallow Shells*, Int. J. Num. Meth. Eng., 10 (1976), 39 - 58.
10. P. G. BERGAN, *Solution Algorithm for Nonlinear Structural Problems*, Intern. Conf. Eng. Appl. FEM, Høvik, Norway 1979, Vol. 1, 13.1 - 38.
11. J. F. BESSELING, *Nonlinear Analysis of Structures by the Finite Element Method as a Supplement to a Linear Algebra*, Int. J. Comp. Meth. Eng., 3 (1974).
12. S. R. BODNER, *On the Conservativeness of Various Distributed Force Systems*, J. Aero. Sci., (1958), 132 - 133.
13. W. W. BOLOTIN, *Niekonserwatywnyje zadaczi teorij uprugoj ustrojczivosti*, Fizmatgiz, Moskwa 1961.
14. B. BRENDEL, *Geometrisch nichtlineare Elastostabilität*, Inst. Baustatik Univ. Stuttgart, Bericht Nr. 79 - 1, 1979.
15. D. O. BRUSH, B. O. ALMROTH, *Buckling of Bars, Plates and Shells*, Mc Graw — Hill, 1975.
16. *Buckling of Structures*, Ed. B. Budiansky, Springer — Verlag 1976.
17. J. W. BUTTERWORDS, *Numerical Post — Buckling Analysis*, [72], 111 - 123.
18. Cz. CICHON, Z. WASZCZYSZYN, *Numeryczna analiza wyboczenia sprężysto-plastycznych ram płaskich*, Arch. Inż. Łąd., 1, 25 (1979), 35 - 41.
19. Cz. CICHON, *Podstawy nieliniowej analizy stateczności kratownic płaskich*, Arch. Inż. Łąd. (w druku).
20. G. A. COHEN, *Conservativeness of a Normal Pressure Field Acting on a Shell*, AIAA J., 4, 10 (1966), 1886 - 1887.
21. J. J. CONNOR, N. MORIN, *Perturbation Techniques in the Analysis of Geometrically Nonlinear Shells*, [32], 683 - 706.
22. S. B. DONG, J. A. WOLF, *Stability Analysis of Structures by a Reduced System of Generalized Coordinates*, Int. J. Solids Struct., 6 (1970), 1377 - 1388.

23. F. FREY, S. CESCOTTO, *Some New Aspects of the Incremental Total Lagrangian Description in Nonlinear Mechanics*, Int. Conf., EE in Nonl. Solid and Struct. Mech., Geilo, Norway, 1977, Prac. Vol. 1, C.05.1 - 20.
24. F. FREY, *L'analyse non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique*, Thèse de doctorat, Université de Liège, 1977/78.
25. R. H. GALLAGHER, J. PADLOG, *Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis*, AIAA J., 6, 1 (1963), 1437 - 39.
26. R. H. GALLAGHER, R. A. GELLATLY, J. PADLOG, R. H. MALLETT, *A Discrete Element Procedure for Thin — Shell Instability Analysis*, AIAA J., 1, 5 (1967), 138 - 145.
27. R. H. GALLAGHER, *Finite Element Representation for Thin Shell Instability Analysis*, [16], ss. 40 - 51.
28. W. E. HAISLER, J. A. STRICKLIN, *Displacement Incrementation in Non — linear Structural Analysis by the Self — Correcting Method*, Int. J. Num. Meth. Eng., 11 (1977), 3 - 10.
29. B. J. HARTZ, *Matrix Formulation of Structural Stability Problems*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., ST5 (1965), 141 - 157.
30. H. D. HIBBIT, P. V. MARCAL, J. R. RICE, *A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement*, Int. J. Solids Struct., 6 (1970), 1069 - 1089.
31. H. D. HIBBIT, *Some Follower Forces and Load Stiffness*, Int. J. Num. Meth. Eng., 14 (1979), 937 - 941.
32. *High Speed Computing of Elastic Structures*, Ed. B. Fraeijs de Veubeke, Univ. Liège, 1971.
33. K. HUSEYIN, R. H. PLAUT, *Application of the Rayleigh Quotient to Eigenvalue Problems of Pseudo — Conservative Systems*, J. Sound Vib., 33 (1974), 201 - 220.
34. K. HUSEYIN, *Nonlinear Theory of Elastic Stability*, Noordhoff Intern. Publ., 1975.
35. K. HUSEYIN, *Stability of Autonomous Systems*, [69], 121 - 180.
36. J. W. HUTCHINSON, W. T. KOITER, *Postbuckling Theory*, Appl. Mech. Rev., 23 (1970), 1353 - 1366.
37. J. W. HUTCHINSON, *Plastic Buckling*, Advances in Appl. Mech. Vol. 14, 1974, Academic Pres.
38. A. JERMINGS, *Frame Analysis Including Change of Geometry*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., ST3 (1968), 627 - 644.
39. R. F. JONES, H. G. COSTELLO, T. E. REYNOLDS, *Buckling of Pressure Loaded Rings and Shells by the Finite Element Method*, Comp. a. Struct., 7 (1977), 267 - 274.
40. K. K. KAPUR, B. J. HARTZ, *Stability of Plates Using the Finite Element Method*, Proc. ASCE, J. Mech. Eng. Div., EM2 (1966), 177 - 195.
41. A. D. KERR, M. T. SAIFER, *The Linearization of the Prebuckling State and Its Effect on the Determined Instability Loads*, J. Appl. Mech., 36 (1969), 775 - 783.
42. M. KLEIBER, *Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych — teoria i numeryczna analiza konstrukcji*, Prace IPPT PAN, Warszawa 1978.
43. W. T. KOITER, *General Equations of Elastic Stability for Thin Shells*, Proc. Symp. Theory of Thin Shells., Univ. Houston Press, 1967, 187 - 230.
44. T. E. LANG, B. J. HARTZ, *Finite Element Matrix Formulation of Post — Buckling Stability and Imperfection Sensitivity*, [32], 727 - 758.
45. H. H. E. LEIPHOLZ, *On Conservative Elastic Systems of the First and Second Kind*, Ing. Arch., 43 (1974), ss. 255 - 271.
46. K. LOGANATHAN, S. C. CHANG, R. H. GALLAGHER, J. F. ABEL, *Finite Element Representation and Pressure Stiffness in Shell Stability Analysis*, Int. J. Num. Meth., Eng. 14 (1979), 1413 - 1429.
47. R. H. MALLETT, P. V. MARCAL, *Finite Element Analysis of Nonlinear Structures*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., ST9 (1968), 2081 - 2105.
48. R. H. MALLETT, R. T. HAFTHA, *Progress in Nonlinear Finite Element Analysis Using Asymptotic Solution Techniques*, Advances Comp. Meth. Struct. Mech. Design, Univ. Alabama Press. Huntsville 1972, 357 - 373.
49. H. A. MANG, *Symmetry of Pressure Stiffness Matrices for Shells with Loaded Free Edges*, Int. J. Num. Mech. Eng., 15 (1980), 981 - 990.
50. H. C. MARTIN, *On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems*, Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright — Patterson AFB, Dayton Ohio (1966) DL-TR-66-80, 697 - 716.

51. E. F. MASUR, I. C. CHANG, J. H. DONNELL, *Stability of Frames in the Presence of Primary Bending Moments*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., EM4 (1961), 19 - 34.
52. B. NATH, *Fundamentals of Finite Elements for Engineers*, The Atklone Press, London 1974.
53. D. R. NAVARATNA, T. H. H. PIAN, L. A. WILIMIR, *Stability Analysis of Shells of Revolution, by the Finite Element Method*, AIAA J., 6 (1968), 355 - 361.
54. NGUYEN — CAO — DUONG, Z. WASZCZYSZYN, *Stateczność sprężysto-plastycznych luków i paneli walcowych*, Rozpr. Inż. (w druku).
55. NGUYEN — CAO — DUONG, *Analiza stateczności sprężysto-plastycznych luków i paneli walcowych* Rozpr. dokt., Politechnika Krakowska 1981.
56. A. NEEDLEMAN, *Axisymmetric Buckling of Elastic — Plastic Annular Plates*, AIAA J., 11, 12 (1974), 1954 - 1956.
57. J. T. ODEN, J. E. KEY, *Numerical Analysis of Finite Axisymmetric Deformations of Incompressible Elastic Solids of Revolution*, Int. J. Solid Struct., 6 (1970), 497 - 518.
58. W. OSTACHOWICZ, *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy stateczności dynamicznej prętów i płyt cienkich*, IV Konfer. Met. Komp. w Mech. Konstr., Koszalin 1979, Ref. probl., 193 - 224.
59. J. G. PANOWKO, I. I. GUBANOWA, *Ustrojcziwost' i kolebanija uprugich sistiem*, Wyd. 3, Nauka, Moskwa 1979.
60. A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme des Elastostatik*, Wyd. 2, Springer — Verlag 1964.
61. T. H. H. PIAN, PIN-TONG, *Variational Formulation of Finite Displacement Analysis*, [32].
62. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, Mc Graw — Hill 1968.
63. E. RAUM, *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Element*, Inst. Baustatik Univ. Stuttgart, Bericht Nr. 76 - 2, 1976.
64. E. RIKS, *An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems*, Int. J. Solids Struct., 15 (1979), 529 - 551.
65. E. RIKS, *A Unified Method for the Computation of Critical Equilibrium States of Nonlinear Elastic Systems*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung., 87 (1978), 121 - 141.
66. J. ROORDA, *Concepts in Elastic Structural Stability*, Mechanics Today, Ed. S. Nemat — Nasser, Vol. 1, 1972, Pergamon Press.
67. M. J. SEWELL, *A Survey of Plastic Buckling, Stability*, Ed. H. H. E. Leipholz, Univ. Waterloo, 1972, 85 - 198.
68. T. H. SØREIDE, *Collapse Behavior of Stiffened Plates Using Alternative Finite Element Formulation*; Div. Struct. Mech. Univ. Trondheim, Rep. No 77 - 3, 1977.
69. *Stability of Elastic Structures*, Ed. H. H. E. LEIPHOLZ, Springer — Verlag 1978.
70. J. A. STRICKLIN, W. E. HAISLER, W. A. RIESEMAN, *Evaluation of Solution Procedures for Material and/or Geometrically Nonlinear Structural Analysis*, AIAA J., 11 (1973), 292 - 299.
71. J. A. STRICKLIN, W. E. HAISLER, *Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis*, Comp. a. Struct., 7 (1977), 125 - 136.
72. *Structural Instability*, Ed. W. J. SUPPLE, IPC Business, London 1973.
73. K. TERAZAWA, J. YAGI, Y. UEDA, M. MATSUSHI, *Elastic — Plastic Buckling of Plates using the Finite Element Method*, J. Soc. Naval Arch. of Japan, 122 (1967).
74. J. M. T. THOMPSON, A. C. WALKER, *The Nonlinear Perturbation Analysis of Discrete Structural Systems*, IJSS, 4 (1968), 757.
75. J. M. T. THOMPSON, G. W. HUNT, *A General Theory of Elastic Stability*, J. Wiley & Sons, 1973.
76. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of Elastic Stability*, 2-nd Ed., Mc Graw — Hill, 1961 (polskie tłum., Arkady 1963).
77. V. TVERGAARD, *Buckling Behaviour of Plate and Shell Structures*, Theoret. and Appl. Mech., Ed. W. T. Koiter, North — Holland Publ. Co., 1976, 233 - 246.
78. A. C. WALKER, *A Nonlinear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches*, Int. J. Solids Struct. 5 (1969), 97 - 107.
79. K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press 1975.
80. Z. WASZCZYSZYN, E. PYTEL, NGUEN-CAO-DUONG, *Numeryczna analiza nieliniowych zagadnień utraty stateczności kratownic sprężystych przy obciążeniach wieloparametrowych*, Rozp. Inż. (w druku).



81. Z. WASZCZYŻYŃ, *Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych*, [86] 341 - 380.
82. L. C. WELLFORD, Gh. M. DIBB, *Post — Buckling Behaviour of Structures Using a Finite Element Non-linear Eigenvalue Technique*, Int. J. Num. Meth. Eng., **15** (1980), 955 - 980.
83. R. H. B. WELTON, *Snap — Through of Arch. Model under Multiple Loads*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., AM4, **104** (1978), 964 - 967.
84. A. S. WOLMIR, *Ustojcziwost' dieformirujemych sistem*, Nauka, Moskwa 1967.
85. M. WÓJCIK, Z. WASZCZYŻYŃ, *Zastosowanie pozawęzłowych stopni swobody w analizie wyboczenia ram płaskich metodą elementów skończonych* (w przygotowaniu do druku).
86. *Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji*, Ed. Z. WASZCZYŻYŃ, Ossolineum, 1981.
87. Y. YAMADA, K. IWATA, T. KAHIMI, T. HOSOMURA, *Large deformation and critical loads analysis of framed structures*, Comp. Meth. Nod. Mech., Texas Inst., (1974), 819 - 828.
88. Y. YOKKO, T. NAKAMURA, H. UETANI, *The incremental Perturbation Method for Large Displacement Analysis of Elastic — Plastic Structures*, Int. J. Num. Meth. Eng., **10** (1976), 503 - 525.
89. H. ZIEGLER, *Principles of Structural Stability*, Blaisdell Publ. Co., 1968 (tłum. ros., Mir, Moskwa 1971).
90. O. C. ZIENKIEWICZ, *Incremental Displacement in Nonlinear Analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng., **3** (1971), 587 - 592.
91. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The Finite Element Method of Structural and Continuum Mechanics*, Mc Graw — Hill 1967.
92. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method*, 3-d Ed., Mc Graw-Hill 1978.
93. M. ŻYCZKOWSKI, *Influence of the Behaviour of Loading on Its Critical Value*, [69], ss. 181 - 210.

## Р е з ю м е

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УСТОЙЧИВОСТИ СООРУЖЕНИЙ

Представлены некоторые проблемы применения МКЭ к нелинейному анализу устойчивости сооружений. Коротко напоминаются основные предположения и определение анализа дискретных систем при многопараметрической нагрузках. Затем рассуждается вычисление состояний равновесия и критических точек в конфигурационно — силовом пространстве. Указаны возможности статического анализа устойчивости упруго-пластических систем и квази — консервативных систем, в которых нагрузка является функцией конфигурации сооружения.

## S u m m a r y

## FINITE ELEMENT METHOD IN STRUCTURAL STABILITY

Some problems of application of FEM to nonlinear structural stability are discussed. Basic concepts of the nonlinear analysis of discrete systems subject to nonconservative loads are shortly presented. Then computation of equilibrium paths and critical points in the load configuration space is considered. Certain possibilities of the analysis of elastic-plastic systems and the static analysis of quasi-conservative systems (if load depends on configuration of structure) are pointed out.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 marca 1982 roku*



EFFECTIVE NONLINEAR ANALYSIS OF ARBITRARY THIN SHELLS BY SIMPLE  
FINITE ELEMENTS

MICHAŁ KLEIBER  
ANDRZEJ ZACHARSKI  
IPPT PAN  
Warszawa

1. Introduction

Available analytical solutions to structural problems of general shells are limited in scope and in general do not apply to arbitrary shapes, load conditions, irregular stiffening and support conditions, cut outs, and many other aspects of practical design. In the case of a simultaneous action of inelastic material properties and large deformations in free-form shells the situation is particularly difficult and successful analytical approaches even for simple geometries and loadings can hardly be expected. The finite element method has consequently come to the fore as an approach to structural analysis of shells because of its facility to deal with these complications. A comprehensive review of the history of the finite element developments for shell analysis can be found in [1]. This history evolved from very simple, flat elements to extremely complicated double curved elements and covered essentially the whole range of different approximations applied to the classical and nonclassical shell equations considered at the element level.

Unfortunately it is still fair to say that the final finite element formulation for nonlinear thin shell analysis is far from being settled. From the engineering point of view the prevailing problem is the lack of elements which can show both good accuracy and efficiency. The apparently better deeply curved elements quickly become so complicated that their attendant high computational cost have pretty well precluded the acceptance and general use of these elements. Their use seems to be particularly ruled out in the case of extensive nonlinearities of the problem which requires the element stiffnesses to be recalculated a large number of times. It is therefore understandable that the researches in the field of nonlinear shell analysis turned back to more simple elements. In this way, as concluded in [2], the history of the development of general shell finite elements has come full circle.

The simplest possible geometrical representation of a doubly curved shell surface is a facet approximation by flat elements. The extremely simple and efficient formulation that can be achieved by flat elements make them very well suited for nonlinear applications, in particular when used in the framework of the updated Lagrangian description of motion. The wide range of numerical examples studied in [3 - 11] indicate that flat finite elements may be very useful in the analysis of nonlinear shell problems. However, this approach has also its well-known deficiencies to mention only

- (a) the exclusion of the coupling of stretching and bending within the elements, (b) the difficulty of treating junctions where all elements are co-planar and (c) the presence of „discontinuity” bending moments, which do not appear in the continuously-curved actual structure, at the element juncture lines. Fortunately, many of these can be dealt with through various devices and additional computational effort.

The use of planar elements, in which the membrane and plate bending stiffness are derived from displacement patterns of different forms cannot insure complete compatibility of the assemblage which is needed for convergence of the sequence of finite element solutions to a true solution. (The second criterion necessary for convergence claims the following: the displacement functions have to be of such a form that if nodal generalized displacements are compatible with a constant strain condition such constant strain will in fact be obtained. Note that this criterion incorporates in fact the commonly quoted requirement of rigid body displacements as these are a particular case of constant strain displacement. In our approach the second criterion will always be satisfied).

The effect of the kinematic incompatibility can be expected to diminish with decreasing mesh size. In the present development an extensive study of this phenomenon has been made showing the essentially monotonic convergence to the true solution for a wide range of shell geometries and external loading patterns.

Formulating a nonlinear shell problem, one of the basic decisions implied by efficiency considerations is the selection of a frame of reference. For large displacement analysis of thin shells the total Lagrangian formulation has been adopted by most authors. As it is demonstrated in the following, however, the updated Lagrangian description offers remarkable simplifications in the formulation and this approach is used in this paper.

In the present study both the geometrical and material nonlinearities are taken into account. The former make it possible to solve the linearized and nonlinearized (solved by means of the step-by-step procedure) structural stability problems. The latter lead to the inelastic analysis performed basing upon an elasto-viscoplastic material model as proposed in [12] and subsequently discussed in [13 - 17]. This approach seems to have some significant advantages over the classical rate-independent elastic-plastic formulation. First it produces an additional numerical effect which stabilizes the iteration procedures used in the program. Second, it allows more rational generalizations towards the inclusion of the dynamic effects into the solution process. And third, it is in a certain sense more general approach as the classical elastoplastic solutions can be recovered in the limit as stationary non-viscous solutions of the viscous problem.

The presentation is necessarily brief and no explicit forms of the stiffness matrices are given. More details on both the theoretical and numerical parts of the study are available in [10, 11].

## 2. Coordinate systems

The geometry of the shell is replaced by an assembly of flat elements of triangular and/or quadrilateral shape (the latter elements being composed of four flat triangles not necessarily forming one plane), of Sec. 3. To describe the geometry and stiffness properties of the idealized structure we use the following coordinate systems, Fig. 1:

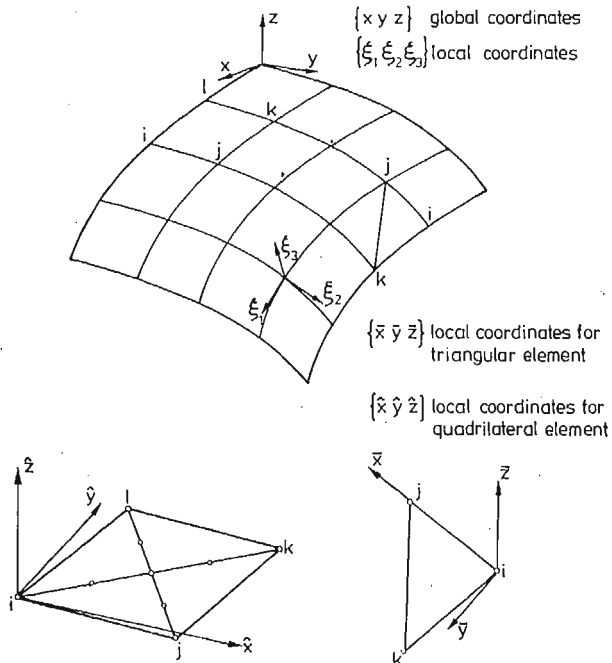


Fig. 1

- (a) global cartesian coordinate system  $\{xyz\}$ ,
- (b) at each nodal point: moving (e.g. stepwise updated) surface coordinate system  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  where  $\xi_3$  — axis is always taken normal to the current shell surface while the  $\xi_1$  — and  $\xi_2$  — axes have the tangential directions at the particular nodal point,
- (c) for each triangular element: local cartesian coordinates  $\{\bar{x}\bar{y}\bar{z}\}$ ,
- (d) for each triangular sub-element of a quadrilateral element: local cartesian coordinates  $\{\bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \bar{z}_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ,
- (e) for each quadrilateral element: local cartesian coordinates  $\{\hat{x}\hat{y}\hat{z}\}$  with the axes  $\hat{x}$  and  $\hat{y}$  lying in an „averaged” plane „tangential” to the element. This plane is formed by minimizing the sum of the squares of the normal distances from the plane to the exterior nodes of the quadrilateral.

The common reference frame to which all element matrices are transformed prior to the assembly of stiffnesses is herein called base coordinates. There are two different possibilities to choose the base coordinates. We describe them briefly in Sec. 3.

### 3. Finite elements

The detailed description of the nonlinear formulation for shell elements used in the present analysis can be found in [11] and will be summarized below. Since shell behaviour is characterized by both membrane action and bending action it is essential to recognize

both of these in evaluating the element stiffness properties. Two finite elements are available in the program both being based on a flat triangular shell element as described in [10]:

- (a) plane triangular element with *eighteen* degrees of freedom<sup>1)</sup> composed of:
- (a1) linear displacement membrane element with six d.o.f. (three corner nodes with two in-plane displacement components at each of them),
  - (a2) fully compatible Kirchhoff plate element with twelve d.o.f. (one transverse displacement and two plate-type rotations at each of the corners and at the mid-point of the triangle). The element is in fact a super-element composed of three triangular elements allowing the  $C^1$  — transverse displacement (full compatibility!) to vary as cubic polynomial within each triangular sub-element. In other words the transverse displacement approximation for the element is formed from the polynomial spline of the degree 3 and smoothness 1. We note also that the above properties imply the linear curvature variation within each sub-triangle.

Since the three mid-point plate-type d.o.f. are local to the element they are condensed (by means of the inverse Gauss elimination) prior to the assembly procedure. This results in the total number of **fifteen** d.o.f. for the triangular shell element (two membrane-type and three plate-type d.o.f. at each exterior, corner nodes),

- (b) non-plane quadrilateral element with forty one d.o.f. composed of four triangular elements each of them based upon,
- (b1) quadratic displacement membrane element with twelve d.o.f. (three corner and three mid-side nodes with two in-plane displacement components at each of them),
  - (b2) plate element described above, cf. (a2),

The external (with regard to the quadrilateral) boundaries of the four triangular elements are additionally constrained to deform linearly. These constraints eliminate the exterior mid-side nodes of the element, thereby reducing the connectivity (band width) which must be considered in the direct solution of the nodal point equilibrium equations. In this way the total number of d.o.f. is reduced to thirty three (forty one less two d.o.f. at each of the four mid-side nodes). Moreover, since there exist in the quadrilateral element thirteen d.o.f. which are local to the element, the corresponding static condensation reduces finally the global number of d.o.f. to **twenty**.

In this way we consistently end up with two finite element: triangular (three nodes) and quadrilateral (four nodes) with five d.o.f. at each node.

As we already mentioned in Sec. 2 the generalized displacements have to be transformed from local to a common frame of reference so that the assembly procedure could be effectively performed. It is here assumed that the rotational d.o.f. are always referred to the surface coordinates  $\xi_1$  and  $\xi_2$ . For the translational d.o.f. it is left to the user to choose between two common coordinate systems: the global system  $\{xyz\}$  or the surface system  $\{\xi_1 \xi_2 \xi_3\}$ . In this way we can practically perform the assembly calculation either in a „mi-

---

<sup>1)</sup> The term „degrees of freedom” will be further referred to as d.o.f.

ned" coordinate system (the rotational d.o.f. in the  $\{\xi_1 \xi_2 \xi_3\}$  coordinates, the translational d.o.f. in the  $\{x, y, z\}$  coordinates) or in the surface coordinate system alone (all the d.o.f. referred to the  $\{\xi_1 \xi_2 \xi_3\}$  coordinates).

#### 4. Incremental description of motion and the solution procedure

It is generally accepted that the incremental approach is the most effective way of handling nonlinear structural problems. In the case of elastic structures it is only an alternative to other solution algorithms while for the inelastic structures the step-by-step approach is in general unavoidable because of the incremental nature of the material response. The solution algorithm accepted in the present paper relies entirely on the stepwise linearized solutions which enable us to trace the characteristic load — displacement curves describing the nonlinear behaviour of the shell structures analysed. At each solution step an iteration algorithm over the residual out-of-balance forces is planned to be additionally implemented to improve the solution by restoring exact equilibrium. The solution algorithm is controlled by parameters that are input to the computer program.

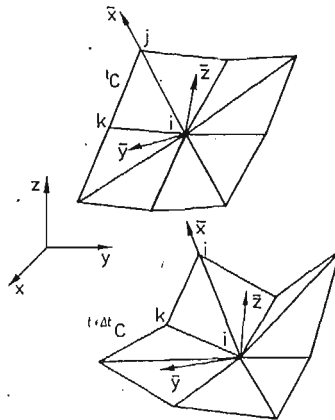


Fig. 2

A typical triangular element with the nodes 1 - 2 - 3 will be referred to the local cartesian coordinates  $\{\bar{x} \bar{y} \bar{z}\}$ , Fig. 2. The  $\bar{x}$ -axis is taken to coincide with the middle line of the 1 - 2 side of the triangle, the  $\bar{y}$ -axis lies in the element middle plane and is directed towards the node 3 while the  $\bar{z}$ -axis is chosen so that the  $\{\bar{x} \bar{y} \bar{z}\}$  — system be right-handed. The unit vectors of the system are built a new at each incremental step basing upon new nodal coordinates and in accordance with the above definition.

We assume that the solution for the kinematic and static variables for all time steps from a time  $t_0$  to the current time  $t$ , inclusive, is known, and that the solution for time  $t + \Delta t$  is required next. According to the concept of the updated Lagrangian description we take the configuration  ${}^t C$  at time  $t$  as a reference state to describe the incremental motion  ${}^t C \xrightarrow{t+\Delta t} C$ , Fig. 3. Referring to this configuration we introduce in the plane of the element the second Piola-Kirchhoff stress tensor  $S_{A\Delta} \Delta$ ,  $A = 1, 2$  which describes

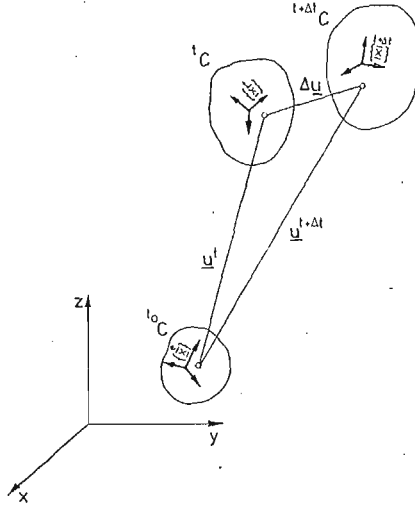


Fig. 3

the current stress at time  $t$ , and the Green strain tensor  $E_{AA}$ ,  $A, A = 1, 2$  which describe the current strain in the element. The stresses  $S_{AA}$  are assumed to be equilibrated by the given external forces  $p_k$   $k = 1, 2, 3$  acting upon the shell.

The incremental changes of the load are denoted by  $\Delta p_k$ ; they give rise to incremental stresses  $\Delta S_{AA}$ , incremental strains  $\Delta E_{AA}$  and incremental displacements  $\Delta U_A$ ,  $\Delta W$ , the latter referred to the  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  directions, respectively. The new total stresses  $S_{AA} + \Delta S_{AA}$  are assumed to be in the equilibrium with the new total external forces  $p_k + \Delta p_k$ .

The incremental strain displacement relationship is taken in the form

$$\Delta E_{AA} = \frac{1}{2} (\Delta u_{A,A} + \Delta u_{A,A}) + \frac{1}{2} \Delta W_{,A} \Delta W_{,A} - \bar{Z} \Delta W_{,AA}, \quad (1)$$

which means that the only geometric nonlinear effect included in the formulation is the influence of the transverse displacement upon the membrane strains. It is broadly known that the results obtained within this approximation are sufficiently accurate for majority of mildly nonlinear practical problems.

We introduce next the shape functions for the triangular plate element as

$$\Delta u_{A2 \times 1} = \hat{\Phi}_{A2 \times 15}^T \Delta u_{15 \times 1}^{(N)}, \quad (2)$$

$$\Delta W_{1 \times 1} = \hat{\Phi}_{1 \times 15}^T \Delta u_{15 \times 1}^{(N)}, \quad (3)$$

where the vector  $\Delta U^{(N)}$  collects the generalized nodal displacements for the element considered. Its conjugate internal nodal force vector  $U_{15 \times 1}^{(N)}$  satisfies the virtual work equation of the form

$$\int_V S_{AA} \delta E_{AA} dV = U_{1 \times 15}^{(N)T} \delta u_{15 \times 1}^{(N)}, \quad (4)$$



where  $V$  is the element volume,  $\delta \mathbf{u}^{(N)}$  is an arbitrary (virtual) variation of the displacement vector and  $\delta E_{\Delta A}$  is the corresponding variation of  $E_{\Delta A}$  taken for  $\Delta u_A = \Delta W = 0$ , e.g. at the beginning of the step considered (in the configuration  ${}^tC$ )

$$\delta E_{\Delta A} = \frac{1}{2} (\delta u_{\Delta, A} + \delta u_{A, \Delta}) - \bar{z} \delta w_{, \Delta A}. \quad (5)$$

For the configuration  ${}^{t+\Delta t}C$  we write the similar virtual work equation as

$$\int_V (S_{\Delta A} + \Delta S_{\Delta A}) \delta E_{\Delta A} dV = (\mathbf{U}^{(N)} + \Delta \mathbf{U}^{(N)})_{1 \times 15}^T \delta \mathbf{u}_{15 \times 1}^{(N)}, \quad (6)$$

where now  $\delta E_{\Delta A}$  is the variation of  $E_{\Delta A}$  taken in the new configuration  ${}^{t+\Delta t}C$ , e.g.

$$\delta E_{\Delta A} = \frac{1}{2} (\delta u_{\Delta, A} + \delta u_{A, \Delta}) + \frac{1}{2} (\delta w_{, \Delta} w_{, A} + w_{, \Delta} \delta w_{, A}) - \bar{z} \delta w_{, \Delta A}. \quad (7)$$

By using eqs. (4) - (7) we immediately get

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}^{(N)T} \delta \mathbf{u}^{(N)} = & \int_V \left\{ S_{\Delta A} \frac{1}{2} (\delta w_{, \Delta} w_{, A} + w_{, \Delta} \delta w_{, A}) + \right. \\ & \left. + \Delta S_{\Delta A} \left[ \frac{1}{2} (\delta u_{\Delta, A} + \delta u_{A, \Delta}) + \frac{1}{2} (\delta w_{, \Delta} w_{, A} + w_{, \Delta} \delta w_{, A}) - \bar{z} \delta w_{, \Delta A} \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (8)$$

Noting the symmetry of  $S_{\Delta A}$  and  $\Delta S_{\Delta A}$  and neglecting the third-order terms eq. (8) can be conveniently written as

$$\Delta \mathbf{U}^{(N)T} \delta \mathbf{u}^{(N)} = (\Delta \bar{\mathbf{U}}_{\beta}^{(N)} + \Delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\beta}^{(N)}) \delta u_{\beta}^{(N)}, \quad (9)$$

where  $\beta$  runs over the sequence 1, 2, ..., 15; the summations with respect to  $\beta$  is implicitly assumed on the right-hand side of eq. (9),

$$\Delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\beta}^{(N)} = \left( \int_V S_{\Delta A} \hat{\Phi}_{, \Delta}^{\beta} \hat{\Phi}_{, A}^{\alpha} dV \right) \Delta u_{\alpha}^{(N)}, \quad (10)$$

in the nonlinear contribution to the nodal incremental forces while

$$\Delta \bar{\mathbf{U}}^{(N)} = \int_V \Delta S_{\Delta A} \left[ \frac{1}{2} (\hat{\Phi}_{, \Delta}^{\beta} + \hat{\Phi}_{, A}^{\beta}) - \bar{z} \hat{\Phi}_{, \Delta A}^{\beta} \right] dV, \quad (11)$$

describes the corresponding linear contribution. Defining the resultant forces by

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xx} dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} S_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xy} dz, \quad (12)$$

and the resultant moments by

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xx} \bar{z} dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} S_{yy} \bar{z} dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xy} \bar{z} dz \quad (13)$$

eqs. (10), (11) can be transformed to the form

$$\Delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{15 \times 1}^{(N)} = \left( \int_A (\nabla \hat{\Phi})_{15 \times 2} N_{2 \times 2} (\nabla \hat{\Phi})_{2 \times 15}^T dA \right) \Delta \mathbf{u}_{15 \times 1}^{(N)}, \quad (14)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{U}}_{15 \times 1}^{(N)} = \int_A (\mathbf{B}_{m15 \times 3} \Delta N_{3 \times 1} - \mathbf{B}_{b15 \times 3} \Delta M_{3 \times 1}) dA \quad (15)$$

where  $A$  is the triangle area and

$$N_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\Delta N_{3 \times 1} = \{\Delta N_{xx} \Delta N_{yy} \Delta N_{xy}\}, \quad (17)$$

$$\Delta M_{3 \times 1} = \{\Delta M_{xx} \Delta M_{yy} \Delta M_{xy}\}, \quad (18)$$

$$\nabla \hat{\Phi}_{15 \times 2} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x}^1 & \Phi_{,y}^1 \\ \Phi_{,x}^2 & \Phi_{,y}^2 \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_{,x}^{15} & \Phi_{,y}^{15} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$Bm_{15 \times 3} = \begin{bmatrix} \Phi_{x,x}^1 & \Phi_{y,y}^1 & \Phi_{y,x}^1 + \Phi_{x,y}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{x,x}^{15} & \Phi_{y,y}^{15} & \Phi_{y,x}^{15} + \Phi_{x,y}^{15} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$B_{b15 \times 3} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{,xx}^1 & \hat{\Phi}_{,yy}^1 & 2\hat{\Phi}_{,xy}^1 \\ \hat{\Phi}_{,xx}^{15} & \hat{\Phi}_{,yy}^{15} & 2\hat{\Phi}_{,xy}^{15} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

The incremental forces and moments in eq. (15) are defined by replacing in the definitions (12), (13) the stress components  $S_{AA}$  by the corresponding incremental stress components  $\Delta S_{AA}$ .

Due to the arbitrariness of the variations  $\delta u^{(N)}$  eq. (9) yields the increment of the internal nodal generalized force vector as

$$\Delta U^{(N)} = \Delta \bar{U}^{(N)} + \Delta \bar{\bar{U}}^{(N)}. \quad (22)$$

In order to maintain the equilibrium at a given node of the discretization mesh the sum  $\Delta R^{(int)}$  of the internal generalized incremental forces coming from all the neighbouring elements must be equal to the external load  $\Delta R^{(ext)}$  acting upon this node, e.g.

$$\Delta R^{(int)} = \Delta R^{(ext)}, \quad (23)$$

where this equality is meant to represent the incremental equilibrium of all the nodes of the discretized shell. Expressing the vector  $\Delta R^{(int)}$  in terms of the components of the elemental vector  $\Delta U^{(N)}$  in which in turn we use the relationships (14), (15) and appropriate incremental constitutive law, we end up with the relation of the form

$$\Delta R^{(int)}(\Delta r) = \Delta R^{(ext)} \quad (24)$$

where  $\Delta r$  is the vector of the generalized displacements of the whole assemblage of the shell finite elements. The explicit form of eq. (24) is regarded as the fundamental relationship for the static incremental analysis of shells. Such an explicit evaluation of all the matrices used above is disregarded here; the reader is referred to [10, 11] for the details.

The elemental geometric stiffness matrix is defined as

$$k_{15 \times 15}^{(g)} = \int_A \nabla \hat{\Phi} N (\nabla \hat{\Phi})^T dA \quad (25)$$

The geometric stiffness matrix was implemental in the program in a slightly modified version. This so-called inconsistent formulation corresponds to the fact that the shape

functions  $\hat{\Phi}$  used in the derivation of  $\mathbf{k}^{(o)}$  was different (simpler) than that used to obtain the constitutive stiffness matrix to be discussed below. As stated in [18], for instance, such an approximation leads to practically acceptable results allowing the significant computer time savings as compared to the consistent geometric stiffness evaluation.

We note that in order to calculate the force vector  $\Delta\bar{\bar{U}}^{(N)}$  (or the geometric stiffness matrix  $\mathbf{k}^{(o)}$ ) the state of stress at the beginning of step is the essential information required. In contrast, the evaluation of the vector  $\Delta\bar{U}^{(N)}$  requires the material properties of the element to be known.

Let us start with the assumption of the linear elastic behaviour of the shell material, e.g.

$$\begin{bmatrix} \Delta S_{xx} \\ \Delta S_{yy} \\ \Delta S_{xy} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{E}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta E_{xx} \\ \Delta E_{yy} \\ \Delta E_{xy} \end{bmatrix} \quad (26)$$

which more compactly reads

$$\Delta S_{3 \times 1} = \mathbf{D}_{3 \times 3} \Delta \mathbf{E}_{3 \times 1} \quad (27)$$

where  $\mathbf{E}$  is the Young modulus and  $\nu$  the Poisson ratio.

We write next eq. (1) as

$$\Delta \mathbf{E}_{3 \times 1} = \Delta \bar{\mathbf{E}}_{3 \times 1} + \Delta \bar{\bar{\mathbf{E}}}_{3 \times 1}, \quad (28)$$

where  $\Delta \bar{\mathbf{E}}$  and  $\Delta \bar{\bar{\mathbf{E}}}$  are the corresponding linear and nonlinear (with respect to the incremental displacements) parts of the incremental strain.

The vector  $\Delta \bar{\mathbf{E}}$  is defined as

$$\Delta \mathbf{E}_{3 \times 1} = [\mathbf{B}_{m3 \times 15}^T - \bar{z} \mathbf{B}_{b3 \times 15}^T] \Delta \mathbf{u}_{15 \times 1}^{(N)} \quad (29)$$

with the matrices  $\mathbf{B}_m$ ,  $\mathbf{B}_b$  given in eqs. (20), (21). Without recalling explicitly the definition of the nonlinear part we note only that the appropriate expression is independent of the coordinate  $\bar{z}$ , cf. eq. (1). By using eqs. (26) - (29) we arrive at

$$\Delta S = \mathbf{D} \Delta \mathbf{E} = \mathbf{D} [(\mathbf{B}_m^T - \bar{z} \mathbf{B}_b^T) \Delta \mathbf{u}^{(N)} + \Delta \bar{\bar{\mathbf{E}}}] \quad (30)$$

or, performing the linearization, at

$$\Delta S = \mathbf{D} [(\mathbf{B}_m^T - \bar{z} \mathbf{B}_b^T) \Delta \mathbf{u}^{(N)}]. \quad (31)$$

The generalization of the above approach to include the inelastic analysis capability is achieved here by specifying an inelastic constitutive law to be used instead of the elastic law given by eq. (26). The analysis will be based upon the elasto-viscoplastic constitutive assumptions first proposed in [12] and later explored numerically by many authors, [13 - 17].

The elastic-viscoplastic material is defined by the following constitutive relation

$$\Delta S = \mathbf{D} (\Delta \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}^{(vp)}) \quad (32)$$

where the only new quantity (as compared to eq. (26)) is the viscoplastic strain increment  $\Delta \mathbf{E}^{(vp)}$  derived from

$$\Delta \mathbf{E}^{(vp)} = \gamma \Delta t \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial S}. \quad (33)$$

Here,  $\gamma$  is a material viscosity coefficient which has dimension (time)<sup>-1</sup>,  $\Delta t$  is the time increment,  $f(S)$  is a yield function entering the yield condition as

$$f(S) \leq \bar{\sigma}_0^2, \quad (34)$$

where  $\bar{\sigma}_0$  is a current yield point stress determined in the uniaxial tension test,

$$F(S) = \frac{f(S) - \bar{\sigma}_0^2}{\bar{\sigma}_0^2} \quad (35)$$

and  $\langle \Phi(F) \rangle$  is a discontinuous function of  $F$  which ensures that no viscoplastic flow occurs below the yield condition, e.g.

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} \Phi(F) & \text{if } F \geq 0, \\ 0 & \text{if } F < 0. \end{cases} \quad (36)$$

According to the above assumptions inelastic deformations will develop only when a threshold value for the state of stress corresponding to a yield surface is exceeded, and the viscoplastic strain increment is the function of the amount by which the stress exceeds this yield surface. The viscoplastic strain increment depends also on the material viscosity. In other words, the viscoplastic flow commences when the stress path penetrates the static yield condition and continues until stresses relax back to the current loading surface.

We assume further for simplicity

$$\Phi(F) = F, \quad (37)$$

For the Huber-Mises yield condition under the plane stress condition we have

$$f(S) = \frac{1}{2} [(S_{xx} - S_{yy})^2 + S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + 6S_{xy}^2], \quad (38)$$

which, by (33), (35) leads to

$$\Delta \mathbf{E}_{3 \times 1}^{(vp)} = \gamma \Delta t \left( \frac{\frac{1}{2} [(S_{xx} - S_{yy})^2 + S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + 6S_{xy}^2] - \bar{\sigma}_0^2}{\bar{\sigma}_0^2 \sqrt{5S_{xx}^2 + 5S_{yy}^2 - 3S_{xx}S_{yy} + 36S_{xy}^2}} \right) \begin{bmatrix} 2S_{xx} - S_{yy} \\ 2S_{yy} - S_{xx} \\ 6S_{xy} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

The square root in the denominator on the right-hand side of (39) is introduced to normalize the vector  $\frac{\partial f}{\partial S}$ .

For hardening materials the yield limit  $\bar{\sigma}_0$  changes in the course of the deformation process. We postulate the hardening law as a function of the total viscoplastic strains in the general form

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\mathbf{E}^{(vp)}). \quad (40)$$

Which has to be specified for a given material. We note that in inviscid plasticity calculations the explicit relation of the above type is not used directly<sup>2)</sup> — the actual value of the yield stress  $\bar{\sigma}_0$  is determined from the actual stress state by using the yield condition (34). In viscoplasticity, however, the yield condition is not a real constraint imposed on the constitutive relation as in general

$$f(S) - \bar{\sigma}_0 \neq 0. \quad (41)$$

<sup>2)</sup> Eq. (40) enters the constitutive relation, though.

Denoting the intensities of the incremental stresses and inelastic strains by

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta S_{xx})^2 + (\Delta S_{yy})^2 - \Delta S_{xx} \Delta S_{yy} + 3(\Delta S_{xy})^2}, \quad (42)$$

$$\Delta E_{(i)}^{(op)} = \frac{2}{3} \sqrt{3[(\Delta E_{xx}^{(op)})^2 + (\Delta E_{yy}^{(op)})^2 + \Delta E_{xx}^{(op)} \Delta E_{yy}^{(op)} + (\Delta E_{xy}^{(op)})^2]}. \quad (43)$$

(the latter definition takes into account the inelastic incompressibility of the material), and assuming that  $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(E_{(i)})$ , we define the hardening modulus as

$$h = \frac{\Delta S_{(i)}}{\Delta E_{(i)}^{(op)}}. \quad (44)$$

Using eqs. (31) and (32) we arrive at

$$\Delta S = D[B_m^I - \bar{z}B_b^T] \Delta u^{(N)} - \Delta E^{(op)}. \quad (45)$$

Performing the integrations (12), (13), for the value of  $\Delta S$  given by eq. (45) we get incremental membrane forces

$$\Delta N_{3 \times 1} = h \bar{D}_{3 \times 3} B_{m,15}^T \Delta U_{15 \times 1}^{(N)} - \Delta N^* \quad (46)$$

and the incremental bending moments

$$\Delta M_{3 \times 1} = -\frac{h^3}{12} D_{3 \times 3} B_{b,15}^T \Delta u_{15 \times 1}^{(N)} - \Delta M^*, \quad (47)$$

where the „initial” generalized forces  $\Delta N^*$  and  $\Delta M^*$  are defined by

$$\Delta N^* = D \int_{-h/2}^{h/2} \Delta E^{(op)} dz, \quad (48)$$

$$\Delta M^* = D \int_{-h/2}^{h/2} \Delta E^{(op)} \bar{z} dz. \quad (49)$$

Similarly as before, cf. eq. (15) the expression for  $\Delta \bar{U}_{15 \times 1}^{(N)}$  can now be obtained in the form

$$\begin{aligned} \Delta U_{15 \times 1}^{(N)} &= \int_A \left[ B_m (h D B_m^I \Delta u^{(N)} - \Delta N^*) + B_b \left( -\frac{h^3}{12} D B_b^T \Delta u^{(N)} - \Delta M^* \right) \right] dA = \\ &= k^{(e)} \Delta u^{(N)} - \Delta U^{(N)*} \end{aligned} \quad (50)$$

where  $k^{(e)}$  is the elastic elemental stiffness matrix used in the linear version of the program, [10] and based now on the current configuration at the beginning of the load step, and  $\Delta U^{(N)*}$  forms a vector of the „additional” incremental nodal forces and moments defined by

$$\Delta U^{(N)*} = \int_A [B_m \Delta N^* - B_b \Delta M^*] dA. \quad (51)$$

The last two expressions suggest an iterative „initial force” procedure to be performed at each incremental step.

The application of the direct assembly procedure leads to the fundamental matrix equation describing the large displacement inelastic shell problem in the form

$$[K^{(e)} + K^{(e)}] \Delta r = \Delta R^{(ex)} + \Delta R^* \quad (52)$$

in which the matrices  $\mathbf{K}^{(e)}$ ,  $\mathbf{K}^{(o)}$  and the vectors  $\Delta r$ ,  $\Delta \mathbf{R}^*$  are the global counterparts of the elemental matrices  $k^{(e)}$ ,  $k^{(o)}$  and the vector  $\Delta \mathbf{u}^{(N)}$ ,  $\Delta \mathbf{U}^{(N)*}$  while  $\Delta \mathbf{R}^{(\text{ext})}$  is the external load vector, cf. eq. (23). Because in the case of inelastic material properties there is no linear stress distribution across the thickness of the shell (and, in fact, no functional approximation for such a stress distribution can be rationally assumed a priori), the shell element is considered as composed of layers. To effectively find the inelastic elemental nodal forces we proceed as follows:

1. From eq. (39) the incremental inelastic strain is calculated for the given stress  $\mathbf{S}$  in all layers at each nodal point.
2. Using the trapezoidal rule the across-thickness integrations are performed according to eqs. (48), (49) resulting in the initial membrane forces  $\Delta \mathbf{N}^*$  and bending moments  $\Delta \mathbf{M}^*$ .
3. Eq. (41) is used to find the initial nodal generalized forces  $\Delta \mathbf{U}^{(N)*}$ . Numerical area integration is carried out at this stage by simply assuming

$$\Delta \mathbf{U}^{(N)*} = \frac{1}{3} A \sum_{i=1}^3 (\mathbf{B}_{m_i} \Delta \mathbf{N}_i^* - \mathbf{B}_{b_i} \Delta \mathbf{M}_i^*) \quad (53)$$

where the index „ $i$ ”,  $i = 1, 2, 3$ , refers to the nodal values of the triangular element.

4. Eq. (52) is obtained as a result of the direct assembly procedure. It is then solved for  $\Delta \mathbf{r}$ , and this calculation is followed by:

- evaluation of the new incremental stresses by eq. (45),
- evaluation of the new total stresses according to the known stress accumulation procedure,
- evaluation of the new „initial load” vector
- solution of eq. (52) for the improved value of the incremental displacement  $\Delta \mathbf{r}$ .

The iteration process is continued until convergence is achieved up to a desired accuracy. In the present study the convergence is monitored by using alternatively the conditions:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{R}^{(k)*} - \Delta \mathbf{R}^{*(k-1)}\|}{\|\Delta \mathbf{R}^{*(k-1)}\|} < \text{tol}(R)$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{r}^{(k)} - \Delta \mathbf{r}^{(k-1)}\|}{\|\Delta \mathbf{r}^{(k-1)}\|} < \text{tol}(r)$$

where  $k$  stands for the  $k$ -th iteration.

### 5. Linearized stability analysis

For one-parameter (proportional) loadings the fundamental matrix equation describing the static problem of elastic thin shells can be presented in a convenient, approximate form as, cf. eq. (52)

$$[\mathbf{K}^{(e)} + \lambda \mathbf{K}^{(o)}(\sigma_*)] \Delta r = \lambda \mathbf{R}_*^{(\text{ext})} \quad (54)$$

where  $K^{(o)}(\sigma^*)$  signifies symbolically dependence of the initial stress matrix on the stress state  $\sigma^*$  which corresponds linearly to a reference external load  $R_*^{(ex)}$  while  $\lambda$  is the scalar load multiplier. The approximation in eq. (54) consists essentially in using the initial coordinates for setting up the stiffness matrices  $K^{(e)}$  and  $K^{(o)}$ , which is rigorously valid for small deformation problems only.

The purpose of the linearized analysis of the shell stability is to check the uniqueness of the solution  $\Delta r$  of eq. (54) for each given value of the parameter  $\lambda$ . The points of such a non-uniqueness are called bifurcation (or branching) points on the primary equilibrium path in the load-displacement space  $\lambda - \Delta r$ . According to the definition at the bifurcation point  $\lambda = \lambda_{cr}$  the relations hold

$$\begin{aligned} [K^{(e)} + \lambda_{cr} K^{(o)}(\sigma^*)] \Delta r_1 &= \lambda_{cr} R_*^{(ex)}, \\ [K^{(e)} + \lambda_{cr} K^{(o)}(\sigma)] \Delta r_2 &= \lambda_{cr} R_*^{(ex)} \end{aligned} \quad (55)$$

which, when subtracted from each other, yield

$$[K^{(e)} + \lambda_{cr} K^{(o)}(\sigma)] v = 0, \quad (56)$$

with

$$v = \Delta r_1 - \Delta r_2. \quad (57)$$

Eq. (56) represents a generalized eigenvalue problem which yields as its solution the  $N$  different critical load parameters<sup>3)</sup>  $\lambda_{cr}^1, \lambda_{cr}^2, \dots$  and the corresponding buckling modes  $v_1, v_2, \dots$ . In most practical situations only the first pair  $(\lambda_{cr}^1, v_1)$  is important which greatly simplifies the computations.

In the present program the eigenvalue problem (56) is solved by using the so-called subspace iteration method.

## 6. Computer studies

- I. Linear analysis of a rectangular plate with complex boundary conditions, Fig. 4. The plate is subjected to uniformly distributed pressure load. Two finite element idealizations are shown in Fig. 4. In Tabl. 1. The present numerical results are compared against the analytical results reported in [19].
- II. Linear analysis of a clamped, axisymmetric sphere under the point load applied at the apex, Fig. 5. The part of the shell considered in the analysis and its finite element idealization are shown in Fig. 5. The results are discussed in Tabl. 2.
- III. Geometrically nonlinear analysis of a quadratic plate clamped at the boundaries, Fig. 6. The plate is subjected to uniformly distributed pressure load. The loading was assumed to act perpendicularly deforming surface of the plate. Fig. 6 and 7 illustrate the computed variation of the vertical displacement at the center point of the plate

<sup>3)</sup> The so-called multiple bifurcation points are excluded here to simplicity is the total number of degrees of freedom in the discretized shell.

$v_s$ , the applied load and the computed variations of the normal stresses on both the upper and lower surfaces at the center point  $v_s$ , the applied load, respectively. The agreement of the results with those discussed in [20] is excellent.

#### IV. Geometrically nonlinear analysis of a circular cylindrical shell, Fig. 8.

The shell is subjected to a point load applied centrally on the convex side. The longitudinal boundaries are hinged and immovable, whereas the curved edges are

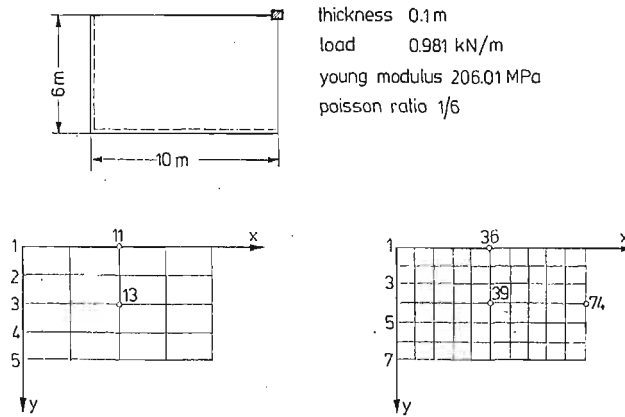


Fig. 4

Table 1

		$w$ [m]	$M_2$ [kN]	$M_1$ [kN]
$x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2}$ Node 13 (16 el) Node 39 (60 el)	N 16	0.002477	3.777	3.063
	N 60	0.002688	3.947	3.136
	A	0.002667	3.600	2.649
$x = \frac{a}{2}, y = 0$ Node 11 (16 el) Node 36 (60 el)	N 16	0.003972	6.511	
	N 60	0.004356	6.875	
	A	0.004330	7.250	
$x = a, y = \frac{b}{2}$ Node 23 (16 el) Node 74 (60 el)	N 16	0.001070		4.707
	N 60	0.001121		5.049
	A	0.001222		5.366



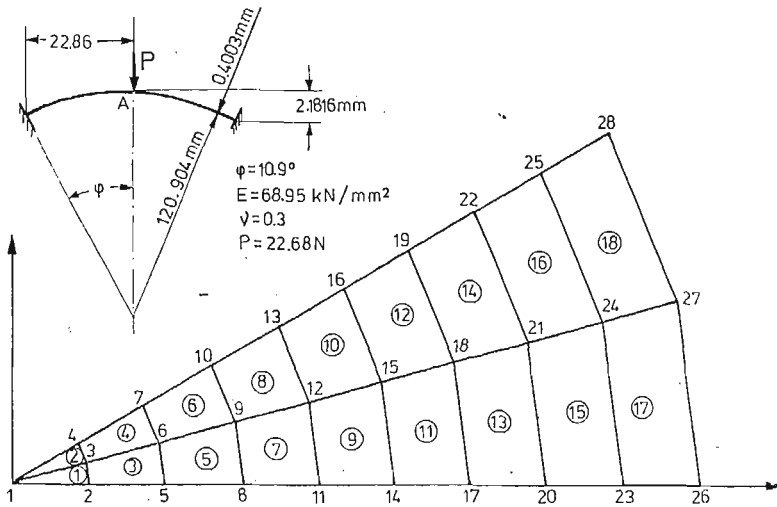


Fig. 5

Table 2

	$w_A$ [mm]	$M_A$ [N]
analytical solution	0.090932	-8.2312
finite difference method	0.093472	
present solution	0.091440	-7.7058
error %	0.56	6.38

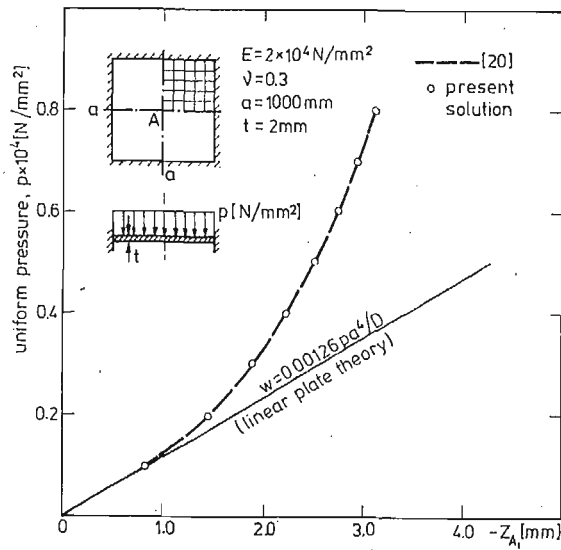


Fig. 6

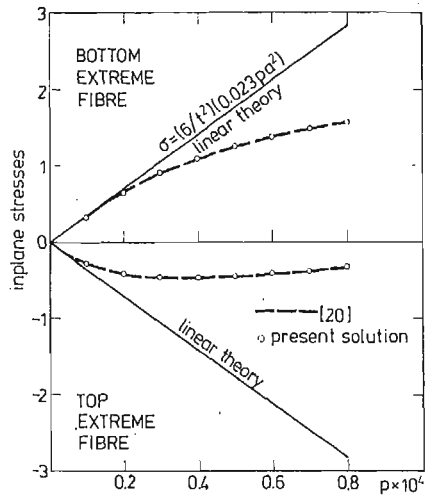


Fig. 7

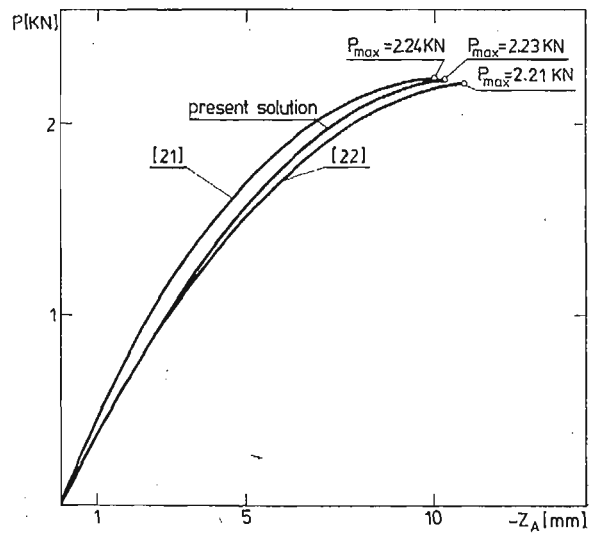
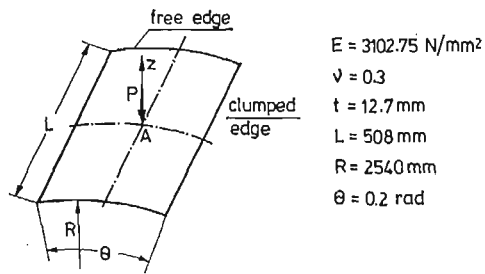


Fig. 8

completely free. The analysis was continued up to the point at which singularity of the total stiffness matrix appeared. One-quarter of the panel was discretized by a  $6 \times 6$  finite element mesh. The comparison of the present results with those discussed in [21], [22] is shown in Fig. 8. Good agreement of the results is observed.

V. Geometrically nonlinear analysis of another cylindrical shell, Fig. 9.

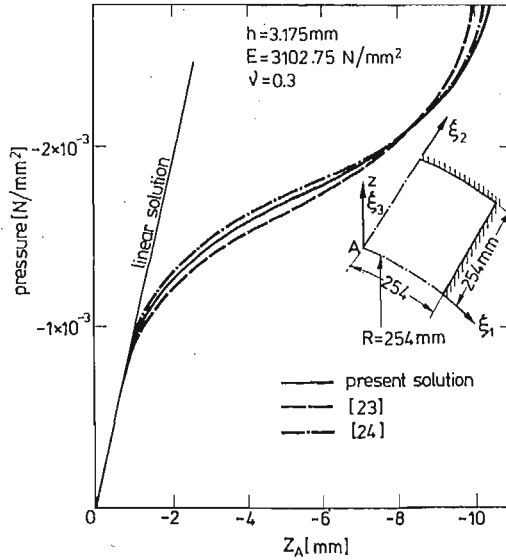


Fig. 9

The circular cylindrical shell portrayed in Fig. 9, is clamped along all four boundaries and subjected to uniform inward radial loading. One-quarter of the shell was discretized by an uniform  $8 \times 8$  finite element mesh and 32 equal load steps were applied. Fig. 9 shows a very good agreement of the present results as compared against those given in [23], [24]. Almost the same results were obtained in the present study by using an uniform  $6 \times 6$  mesh and 40 load increments.

VI. Geometrically nonlinear analysis of a spherical shell, Fig. 10.

The shell is subjected to a concentrated load at the apex; all edges are hinged and immovable. One-quarter of the shell was discretized by a  $6 \times 6$  finite element mesh and 40 load increments were used. As a matter of fact the problem was considered under the apex displacement control rather than under the force control. This made it possible to get through the limit point on the load-displacement diagram without any difficulties. The results were found to be sufficiently accurate, cf. Fig. 10 cf. [23], their further improvement is possible by simply using more load increments.

VII. Limit load analysis of a quadratic plate, under uniform loading, Fig. 11.

The upper and lower limit load estimates are given as, cf. [25]

$$p_s = \frac{24M_0}{a^2}, \quad M_0 = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_0 h^2.$$

$$p_k = \frac{2}{\sqrt{3}} p_s$$

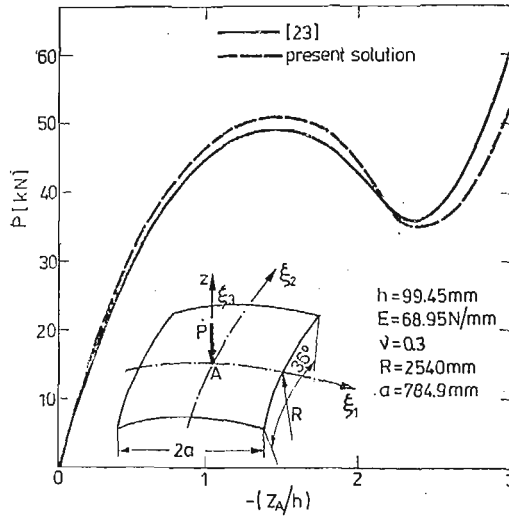


Fig. 10

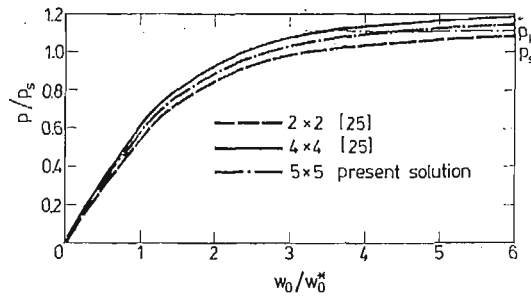
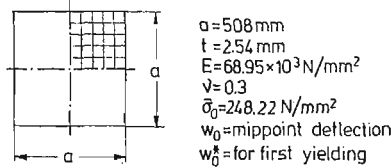
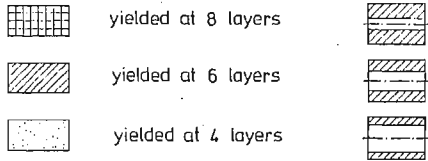
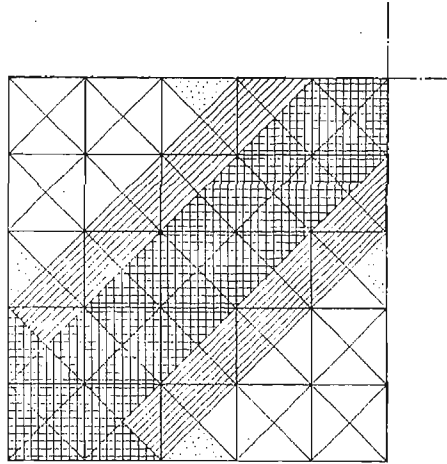


Fig. 11

The  $5 \times 5$  finite element mesh was used each element consisting of 11 layers assumed for the observation of the across-thickness plastic zone development. The results of the analysis are shown in Fig. 11, 12.

VIII. Inelastic, large displacement analysis of a spherical cap, Fig. 13.

The shell is hinged at the boundary and subjected to a concentrated force acting at the apex. The material and geometric data are the same as in Example II, cf. Fig. 5. The material is assumed to be ideally plastic with  $\bar{\sigma}_0 = 137.9 \text{ N/mm}^2$ . The displacement control of the process was used. The first five incremental apex displacements were assumed to be equal to  $-0.0254 \text{ mm}$ . which was followed by the



$$P/P_s = 1$$

Fig. 12

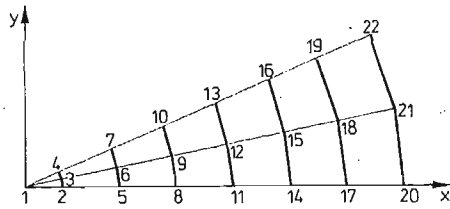


Fig. 13

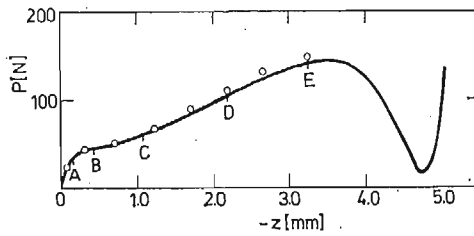


Fig. 14

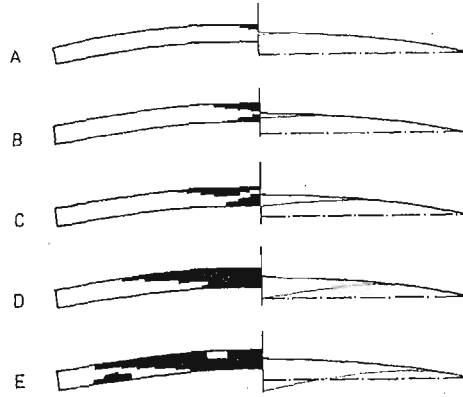


Fig. 15

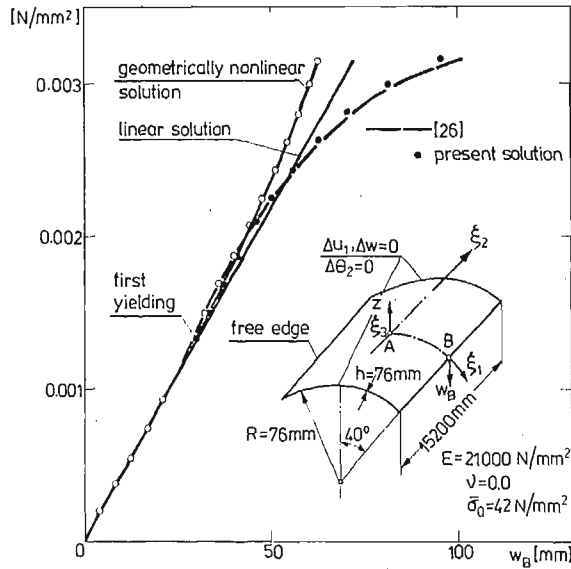


Fig. 16

25 steps of  $-0.127$  mm. The present results are shown in Fig. 14 and 15 and compared with those given in [7].

IX. Inelastic, large displacement analysis of a cylindrical panel, Fig. 16.

- The shell is subjected to the uniformly distributed loading acting in the negative  $z$ -direction.

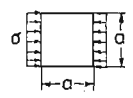
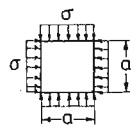
The load was assumed to increase from 0 to  $0.00315$  N/mm<sup>2</sup> in the 24 equal increments. The results are given in Fig. 16 cf. [26].

X. Linearized stability of elastic quadratic plates, Tabl. 3.

The linearized stability formulation described in Sec. 5 was the base for calculating the buckling loads for the two differently supported plates. One-quarter of the

plate was analysed. It is seen that the accuracy of the solution is strongly dependent on the number of finite elements used in the calculation. This can be partly attributed to the simplified assumptions used in deriving the geometric stiffness matrix.

Table 3

$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2$	Mesh	Coefficient K	error %
simply supported plate 	6x6	4.192	4.8
	9x9	4.044	1.1
	14x14	4.016	0.4
clumped plate 	6x6	5.947	12.0
	9x9	5.506	3.7
	14x14	5.374	1.2
	19x19	5.337	0.5

## References

1. R. H. GALLAGHER, *Shell elements*, Proc. World Congress on Finite Element Method in Struct. Mech. Bournemouth, England, 1975.
2. M. D. OLSON, T. W. BEARDEN, *A simple flat triangular shell element revisited*, Int. J. Num. Meths. Eng. **14**, 51 - 68, 1979.
3. R. W. CLOUGH, C. P. JOHNSON, *A finite element approximation for the analysis of thin shells*, Inst. Y. Sol. Struct. **4**, 43 - 60, 1968.
4. H. WENNERSTRÖM, *Nonlinear shell analysis performed with flat elements*, Proc. Int. Conf. Finite Elements in Nonlinear Mechanics, Geilo, Norway, August 1977, pp. 285 - 302.
5. J. H. ARGYRIS, P. C. DUNNE, G. A. MALEJANNAKIS, E. SCHELKE, *A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems*, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. **10**, 371 - 403 and **11**, 97 - 131, 1977.
6. M. KLEIBER, *A triangular finite element for large deformation elasto-plastic analysis of arbitrary shells*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **26**, No 2, 61 - 71, 1978.
7. J. H. ARGYRIS, H. BALMER, M. KLEIBER, U. HINDENLANG, *Natural formulation of large inelastic deformations for shells of arbitrary shape-Application of the TRUMP element*, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. **22**, 361 - 389, 1980.
8. G. HERRIGMOE, P. G. BERGAN, *Nonlinear analysis of free-form shells by flat finite elements*, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. **16**, 11 - 35, 1978.
9. M. KLEIBER, H. STOLARSKI, *Numerical analysis of elastic-plastic shells in the range of large static deformations*, (in Polish), Institute of Fundamental Technological Research, Warsaw 1976, Results obtained in the course of research sponsored by the Centrum Techniki Okrętowej, contract EU/B/246/74.
10. M. KLEIBER, A. ZACHARSKI, *SHELIN — linear finite element analysis of thin free-form shells*, (in Polish), Institute of Fundamental Technological Research, Report No 51/1978, Warsaw.
11. A. ZACHARSKI, *Nonlinear static analysis of thin shells of arbitrary shape*, (in Polish), Ph. D. thesis, Institute of Fundamental Technological Research, Report No 15/1982, Warsaw.
12. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20**, 321 - 332, 1963.

13. O. C. ZIENKIEWICZ, I. C. CORMEAU, *Visco-plasticity and creep in elastic shells—a unified numerical solution approach*, Int. J. Num. Meths. Eng. **8**, 821 - 845, 1974.
14. S. NAGARAJAN, E. P. POPOV, *Plastic and viscoplastic analysis of axisymmetric shells*, Int. J. Sol. Struct. **11**, 1 - 19, 1975.
15. B. KRÅKELAND, *Large displacement analysis of shells considering elasto-plastic and elasto-viscoplastic materials*, Report No 77 - 6, Dec. 1977, Div. of Struct. Mech., The Univ. of Trondheim, Norway.
16. M. KLEIBER, *Natural finite elements and large deformation elasto-viscoplasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sxci. Techn. **26**, 73 - 81, 1978.
17. J. H. ARGYRIS, J. ST. DOLTSINIS, M. KLEIBER, *Incremental discretized formulation in non-linear mechanics and finite strain elasto-plasticity-natural approach Part. II*, Comp. Meths. Mech. Eng. **14**, No 2, 259 - 294, 1978.
18. R. W. CLOUGH, C. A. FELIPPA, *A refined quadrilateral element for analysis of plate bending*, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Wright—Patterson, Ohio, 1968.
19. R. BARES, *Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on the elastic theory*, 2nd ed., Bauverlay, GmbH., Wiesbaden, 1971, German-English edition.
20. W. KANOK-NUKULCHAI, R. L. TAYLOR, T. I. HUGHES, *A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method*, Comp. Struct., Vol. 13, 1981.
21. K. J. BATHER, S. BOLOURCHI, *A geometric and material nonlinear plate and shell element*, Comp. Struct., Vol. 11, 1980.
22. H. PARISH, *Large displacements of shells including material nonlinearities*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 27, 1981.
23. G. DHATT, *Instability of thin shells by the finite element method*, Symp. of Int. Assoc. of Shell Struct., Vienna, 1970.
24. C. TAHIANI, L. LACHANCE, *Linear and non-linear analysis of thin shallow shells by mixed finite elements*, Comp. Struct., Vol. 5, 1975.
25. P. BERGAN, *Nonlinear analysis of plates considering geometric and material effects*, Div. of Struct. Mech. the Norwegian Inst. of Techn., Report No 72 - 1, May 1972.
26. P. BERGAN, G. HORRIGMOE, B. KRÅKELAND, T. SPREIDE, *Solution techniques for non-linear finite element problems*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 12, 1978.

#### Резюме

### ЭФФЕКТИВНЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В работе обсуждены основные аспекты статического нелинейного анализа оболочек произвольной формы методом конечных элементов. Применено относительно простые конечные элементы облегчая таким образом введение данных и интерпретацию полученных результатов. Учтены проблемы больших перемещений оболочек и неупругих свойств материала. Обсуждены также вопросы анализа линеаризированной устойчивости оболочек. Работа иллюстрирована численными примерами.

#### Streszczenie

W pracy przedstawiono podstawy statycznej, nieliniowej analizy powłok dowolnego kształtu metodą elementów skończonych. Zastosowano względnie proste elementy skończone, upraszczając w ten sposób wprowadzanie danych wejściowych oraz interpretację otrzymywanych wyników. Uwzględniono problematykę dużych przemieszczeń powłok oraz niesprężyste własności materiału. Omówiono również zagadnienie analizy zlinearyzowanej stateczności powłok. Praca zilustrowana jest licznymi przykładami.



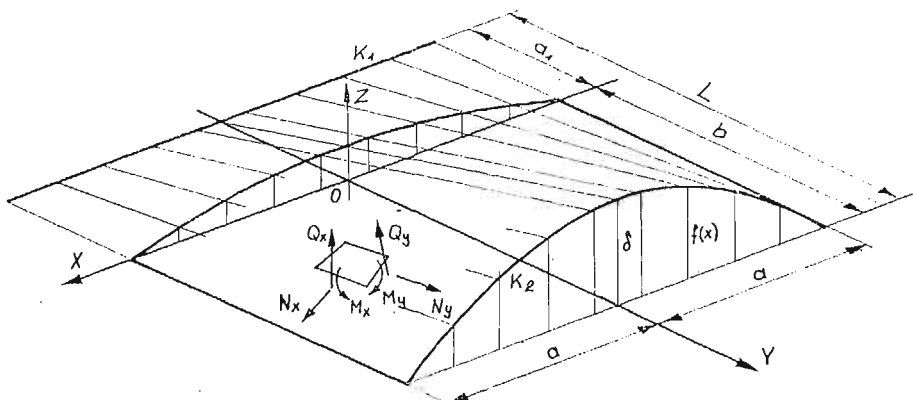
## ZGINANIE POWŁOKI KONOIDALNEJ

JAKUB MARCINOWSKI

Wrocław

### 1. Wstęp

Powierznię konoidalną (Rys. 1) zakreśla w przestrzeni prosta tworząca poruszająca się równoległe do płaszczyzny prowadzącej ( $OYZ$  na rys. 1) po kierownicach  $K_1$  i  $K_2$ . Kierownice te leżą w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny  $OXZ$  i kierownica  $K_1$  jest odcinkiem prostym (rozważa się też konoidy z dwiema kierownicami zakrzy-



Rys. 1

wionymi). Konoida jest powierzchnią prostokreślną, zwichrowaną. Tu rozpatrywać się będzie konoidę paraboliczną (kierownica  $K_2$  jest parabolą), mało wyniosłą, to znaczy, że stosunek jej wyniosłości  $\delta$  do boku  $b$  jest mniejszy od  $1/5$  ( $1/3 \div 1/8$ ). Powłoki konoidalne posiadają wiele zalet. Znalazły zastosowanie do przekryć dużych hal przemysłowych i widowiskowych. Stosuje się je także do budowy zapór wodnych. Z łatwością można się ich doszukać w elementach poszycia aparatów latających i sprzętu pływającego.

### 2. Różniczkowe równania równowagi powłok mało wyniosłych

Przyjęcie założenia małej wyniosłości pozwala na zastosowanie równań technicznej teorii powłok WŁASOWA [1].

Dla powłok mało wyniosłych, o równaniu powierzchni środkowej:  $z = z(x, y)$ , wygodnie jest wprowadzić jako współrzędne krzywoliniowe linie:  $x = \text{const}$   $y = \text{const}$ . Dla

dowolnej powierzchni nie będą to linie krzywizn głównych, a warunek ortogonalności będą spełniały jedynie w przybliżeniu.

Podstawowe związki geometryczne dla tak opisanej powierzchni przyjmą postać następującą [3]:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &\approx \alpha_2 \approx 1, \\
 \vec{i}_x &= \vec{i}_x + z_{,x} \vec{i}_z, \\
 \vec{i}_y &= \vec{i}_y + z_{,y} \vec{i}_z, \\
 \vec{n} &= -z_{,x} \vec{i}_x - z_{,y} \vec{i}_y + \vec{i}_z, \\
 k_{xx} &= z_{,xx}, \quad k_{yy} = z_{,yy}, \\
 k_{xy} &= z_{,xy}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie:

$\alpha_1, \alpha_2$  — współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni,

$\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{n}$  — wektory bazowe powierzchni,

$k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}$  — krzywizny linii współrzędnych i skręcenie powierzchni (odpowiednio).

Związki między odkształceniami a składowymi wektora przemieszczenia można zapisać w następującej postaci [2]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= u_{,x} - z_{,xx} w, \\
 \varepsilon_y &= v_{,y} - z_{,yy} w, \\
 \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} - 2z_{,xy} w, \\
 \kappa_x &= -w_{,xx}, \quad \kappa_y = -w_{,yy}, \quad \kappa_{xy} = -w_{,xy}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Założenie małej grubości i ortogonalności wybranych kierunków pozwala przyjąć związki fizyczne w najprostszej postaci [1]:

$$\begin{aligned}
 N_x &= B(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \\
 N_y &= B(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\
 N_{xy} = N_{yx} = S &= \frac{B \cdot (1 - \mu)}{2} \cdot \gamma_{xy}, \\
 M_x &= D \cdot (\kappa_x + \mu \kappa_y), \\
 M_y &= D(\kappa_y + \mu \kappa_x), \\
 M_{xy} = M_{yx} = H &= D \cdot (1 - \mu) \kappa_{xy}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdzie:

$$B = \frac{E \cdot h}{1 - \mu^2}, \quad D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)},$$

$E$  — moduł Younga,

$h$  — grubość powłoki,

$\mu$  — współczynnik Poissona.

Równania równowagi mają postać następującą [1]:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + S_{y,y} + P_x &= 0, \\ S_{x,x} + N_{y,y} + P_y &= 0, \\ Q_{y,y} + Q_{x,x} + N_x \cdot k_{xx} + N_y \cdot k_{yy} + 2S \cdot k_{xy} + P_z &= 0, \\ M_{y,y} + H_{x,x} - Q_y &= 0, \\ M_{x,x} + H_{y,y} - Q_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie:

$P_x, P_y, P_z$  — składowe obciążenia zewnętrznego,

$Q_x, Q_y$  — siły poprzeczne.

Wprowadźmy wielkości bezwymiarowe z „falał”, zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P \cdot a^4}{D} \cdot \frac{\delta}{a}, & v &= \tilde{v} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P \cdot a^4}{D} \cdot \frac{\delta}{a}, \\ w &= \tilde{w} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P \cdot a^4}{D}, & z &= \tilde{z} \cdot \delta, \\ x &= \tilde{x} \cdot a, & y &= \tilde{y} \cdot b, & \lambda &= \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie:

$\delta$  — wyniosłość powłoki,

$a$  — wymiar planu powłoki w kierunku osi  $X$ ,

$b$  — wymiar planu powłoki w kierunku osi  $Y$ ,

$P = P_z$  — składowa pionowa obciążenia.

Przyjmijmy:

$$P_x = P_y = 0, \quad P_z = P = \text{const}$$

Jeśli do równań (2.4) podstawimy zależności (2.3) i (2.2) oraz wykorzystamy związki (2.5), to otrzymamy następujący układ równań na poszukiwane przemieszczenia bezwymiarowe (wszystkie wielkości tu występujące są bezwymiarowe choć pominięto w nich „faleł”):

$$\begin{aligned} \Delta^2 \lambda \cdot u_{xx} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\Delta^2}{\lambda} u_{yy} + \frac{1+\mu}{2} \Delta^2 \cdot v_{xy} + \\ - \lambda \cdot w_x \cdot (r + \mu t) - w \cdot (\lambda r_x + s_y) - (1-\mu) \cdot w_y \cdot s = 0, \\ \frac{\delta^2}{\lambda} v_{yy} + \frac{1-\mu}{2} \delta^2 \cdot \lambda \cdot v_{xx} + \frac{1+\mu}{2} \Delta^2 \cdot u_{xy} - (t + \mu \cdot r) \cdot w_y \\ - (t_y + \lambda \cdot s_x) \cdot w - \lambda \cdot s(1-\mu) \cdot w_x = 0, \\ \lambda \cdot \omega \cdot w_{xxxx} + \frac{2}{\lambda} \cdot \omega \cdot w_{xxyy} + \frac{\omega}{\lambda^3} w_{yyyy} + 12 \cdot \Delta^2 \cdot \lambda [r^2 + \\ + t^2 + 2(1-\mu)s^2 + 2\mu r t] \cdot w + 12 \cdot [(r + \mu t) \cdot \lambda \cdot u_x + \\ + (t + \mu r) \cdot v_y + (1-\mu) \cdot s \cdot (\lambda v_x + u_y)] - 10^4 \cdot \lambda \cdot \omega = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdzie:

$$r = \frac{\delta^2}{a^2} z_{xx}, \quad s = \frac{\delta^2}{ab} z_{xy}, \quad t = \frac{\delta^2}{b^2} z_{yy},$$

$$\Delta = \frac{\delta}{a}, \quad \omega = \frac{h^2}{a^2}, \quad (\cdot)_x = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}, \quad (\cdot)_y = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}.$$

Do rozważań wprowadza się następujące sposoby zamocowania krawędzi powłoki:

1) Krawędź sztywno zamocowana:

(dla krawędzi o normalnej zewnętrznej — X)

$$u = v = w = 0, \quad w_{,x} = 0.$$

2) Krawędź zamocowana przegubowo:

$$u = v = w = 0, \quad M_x = 0.$$

3) Krawędź swobodna:

$$N_x = 0, \quad S = 0, \quad Q_x + H_{,y} = 0, \quad M_x = 0.$$

Warunki te można zapisać w przemieszczeniach korzystając ze związków (2.3) i (2.2).

Po rozwiązaniu układu (2.6), przy odpowiednich warunkach brzegowych, ze związków (2.2) wyznaczmy składowe odkształcenia, a następnie z równań (2.3) znajdziemy siły przekrojowe w powłoce.

### 3. Rozwiązanie

Układ równań (2.6) rozwiążemy zastępując operatory tego układu operatorami różnicowymi, zapisując te ostatnie za pomocą schematów różnicowych centralnych. Równania te zapisuje się dla wszystkich wewnętrznych węzłów siatki różnic skończonych. Wielkości przemieszczeń węzłów zewnętrznych, pojawiające się w układzie, eliminuje się za pomocą odpowiednich warunków brzegowych.

Równanie powierzchni środkowej parabolicznej powłoki konoidalnej (Rys. 1) ma następującą postać:

$$z(x, y) = \delta(y + a_1) \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2 \cdot L}, \quad (2.7)$$

Zatem:

$$z_{,xx} = -\frac{2\delta}{a^2} \cdot \frac{y + a_1}{L},$$

$$z_{,yy} = 0, \quad (2.8)$$

$$z_{,xy} = -\frac{2 \cdot \delta}{a^2} \cdot \frac{x}{L}.$$

Wielkości występujące w równaniach (2.6), w tym przypadku przyjmują postać następującą:

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= -\frac{A}{a}(\tilde{y}b + a_1), \\ \tilde{s} &= -A \cdot \tilde{x}, \quad \tilde{t} = 0, \\ \tilde{s}, \tilde{x} &= -A, \quad \tilde{s}, \tilde{y} = \tilde{r}, \tilde{x} = 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

gdzie:

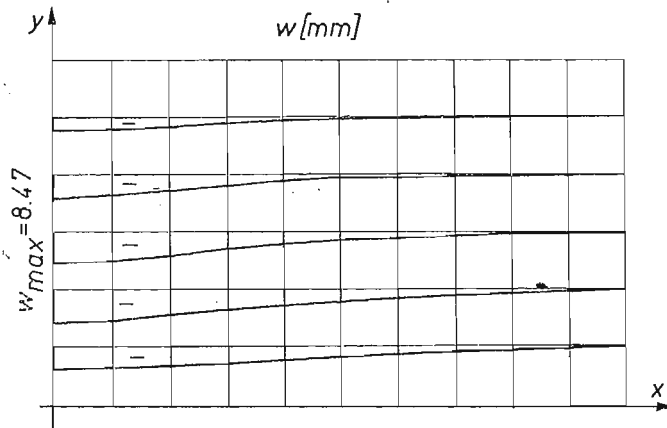
$$A = \frac{2 \cdot \delta^2}{a \cdot L}.$$

Rozwiązano powłokę żelbetową ( $\mu = 0,167$ ,  $E = 3,0 \cdot 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>) o następujących wymiarach:  $a = 15,0$  m,  $b = 9,0$  m,  $L = 12$ , Om,  $\delta = 3,0$  m,  $h = 0,10$  m. Powłoka jest obciążona równomiernym obciążeniem  $P_z = P = -4$  kN/m<sup>2</sup>.

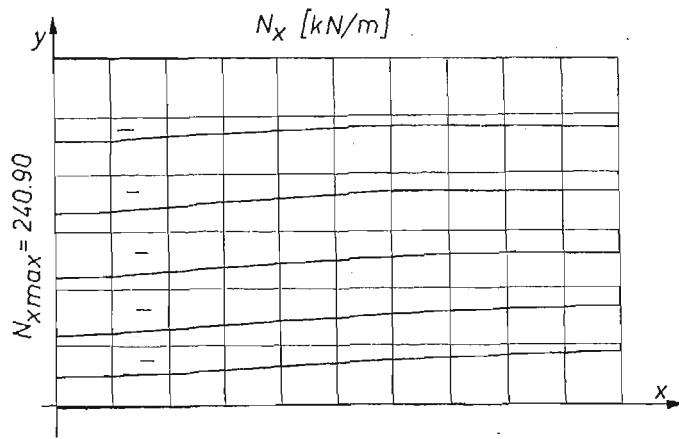
#### 4. Wyniki

Rysunki 2, 3, 4 przedstawiają ugięcia i wybrane siły przekrojowe w powłoce podpartej zawiasowo wzdłuż wszystkich czterech krawędzi. Rysunki 5, 6, 7 przedstawiają te same wielkości dla powłoki o czterech krawędziach sztywno zamocowanych. Kolejne rysunki (8, 9, 10) dotyczą powłoki podpartej jedynie wzdłuż krawędzi prostoliniowych (łuki — swobodne), przy czym, krawędzie podparcia są sztywno zamocowane. Ostatnie trzy rysunki przedstawiają charakterystyczne wielkości dla powłoki podpartej zawiasowo wzdłuż dwóch krawędzi prostoliniowych.

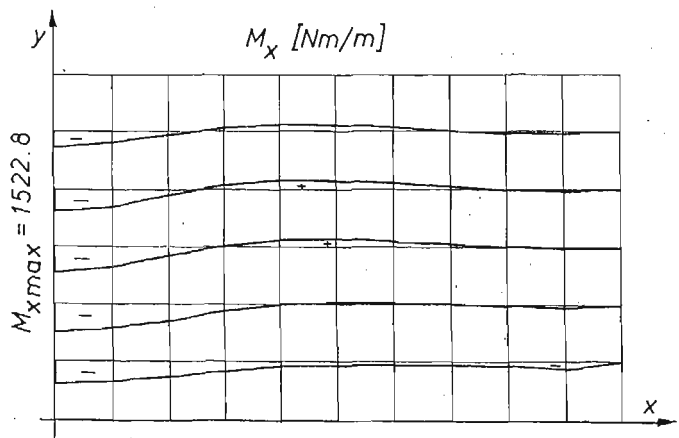
Wszystkie prezentowane wyniki dotyczą takiego podziału powłoki, że nieznanne wartości składowych przemieszczeń wyznacza się w 50-ciu punktach co odpowiada 150-ciu stopniom swobody (5 węzłów w kierunku osi  $X$  i 10 — w kierunku osi  $Y$ ), przy czym wykorzystano symetrię powłoki. Przeprowadzono kontrolę zbieżności otrzymanych rozwiązań. Rys. 14 przedstawia zależność ugięcia w środku powłoki od zmiany gęstości podziału



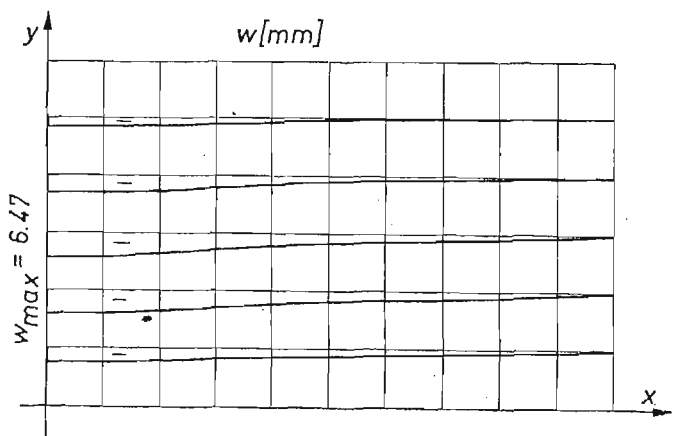
Rys. 2



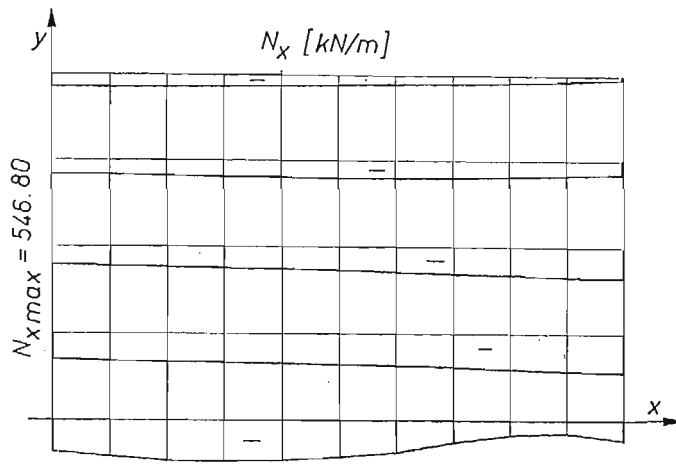
Rys. 3



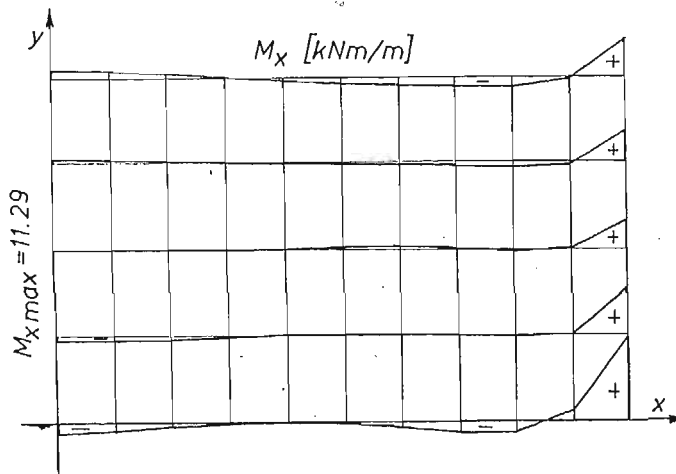
Rys. 4



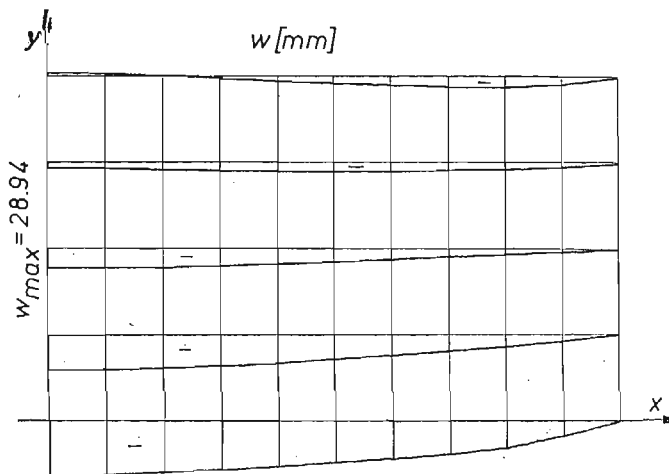
Rys. 5



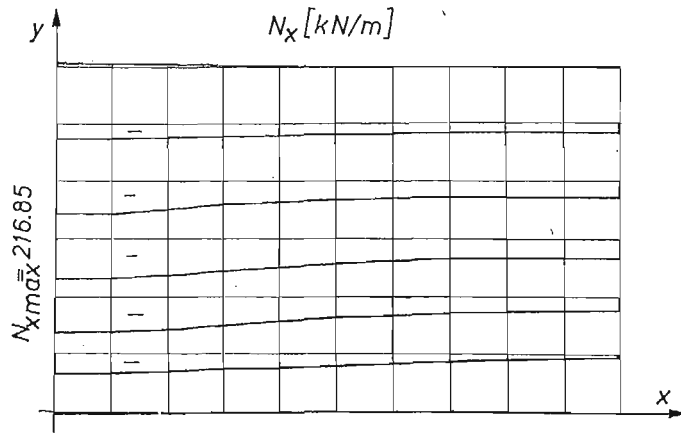
Rys. 9



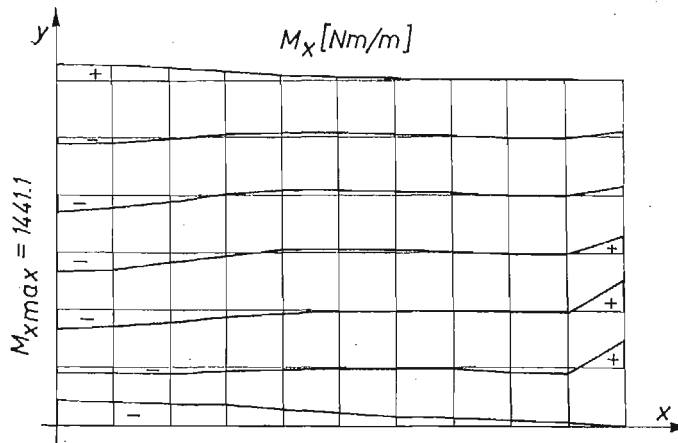
Rys. 10



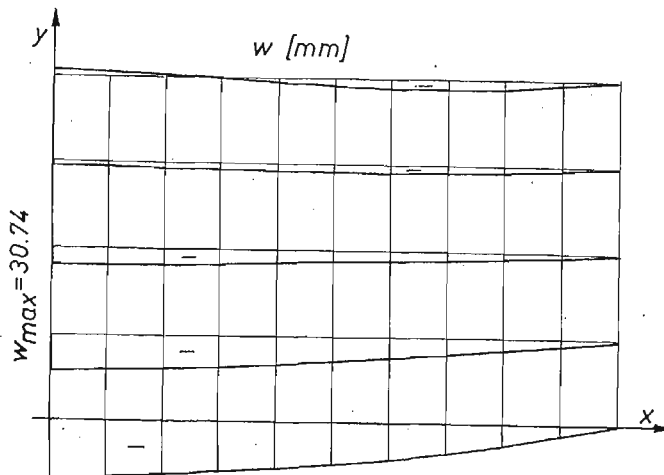
Rys. 11



Rys. 6

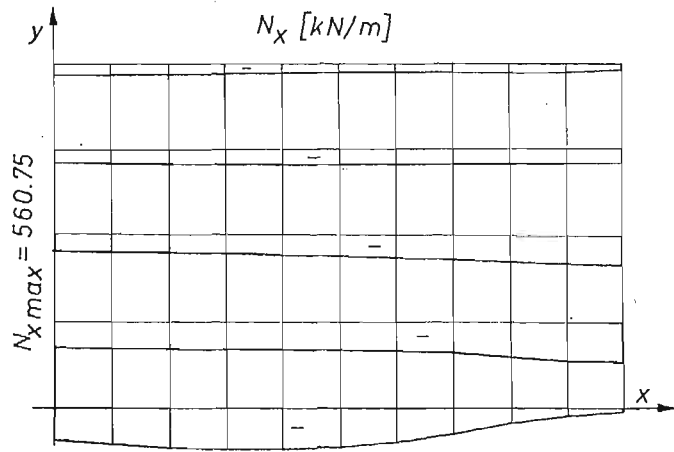


Rys. 7

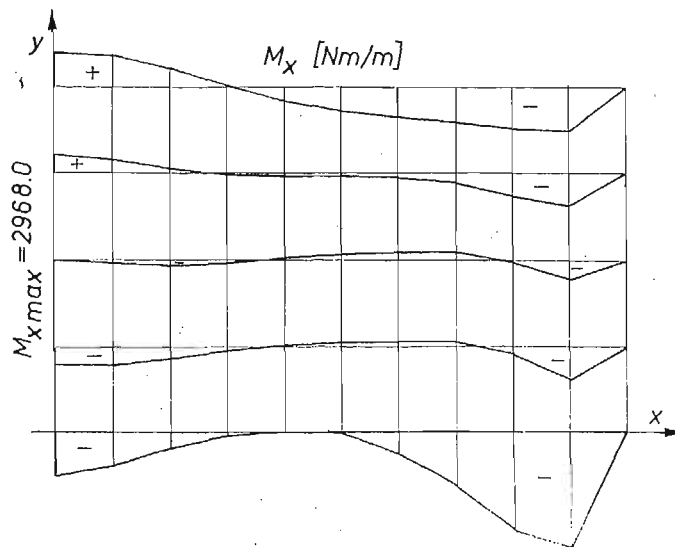


Rys. 8

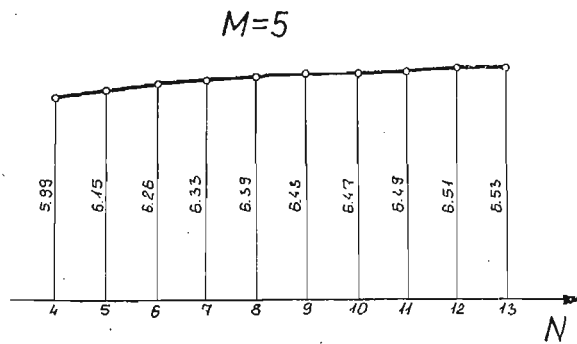




Rys. 12

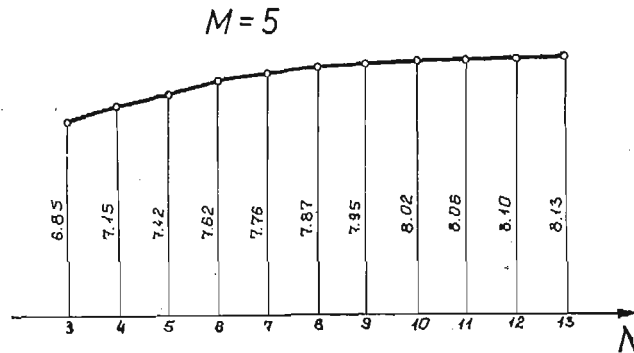


Rys. 13



Rys. 14

siatki w kierunku osi  $X$  (podział w kierunku osi  $Y$  stały i równy  $M = 5$ ) dla powłoki podpartej przegubowo wzdłuż wszystkich czterech krawędzi. Wykres przedstawiony na rys. 15 dotyczy powłoki sztywno zamocowanej na wszystkich krawędziach. Oba wykresy potwierdzają zbieżność rozwiązania dla przemieszczeń. W przypadku dwóch pozostałych wariantów



Rys. 15

tów podparcia, tj. podparcia przegubowego wzdłuż krawędzi prostoliniowych oraz sztywnego zamocowania tych krawędzi, uzyskane wyniki nie wykazują tak dobrej zbieżności. Aby uzyskać rozwiązanie bardziej dokładne należałoby zastosować bardziej gęsty podział, co z kolei wymagałoby wykorzystania w obliczeniach pamięci zewnętrznych MC (w obliczeniach, których wyniki tu przedstawiono, wykorzystano jedynie pamięć operacyjną MC ODRA 1305).

Znane autorowi prace [4÷8] zawierające rozwiązania stanu zgięciowego powłoki konoidalnej dotyczą innych warunków podparcia niż te przedstawione wyżej. Praca stanowi więc istotne uzupełnienie znanych rozwiązań o kilka nowych, nie bez znaczenia praktycznego, przypadków.

### 5. Uwagi końcowe

Z przedstawionych wyników wynika, że powłoka konoidalna (nawet o tak dużej rozpiętości), mimo swej niewielkiej grubości, z powodzeniem przenosi znaczne obciążenia. Wyraźnie zaznacza się sklepieniowy charakter pracy powłoki, a sposób zamocowania ma wpływ na wielkość sił przekrojowych głównie w pobliżu krawędzi podparcia. Naprężenia w powłoce wywołane siłami osiowymi znacznie przekraczają część naprężeń od momentów zginających i momentu skręcającego.

### Literatura cytowana w tekście

1. W. W. NOWOŻIŁOW, *Teoria tonkich obłoczek*, Sudpromgiz, Leningrad 1951.
2. A. A. NAZAROW, *Osnovy teorii i metody raschieta pologich obłoczek*, Strojizdat, Leningrad 1966.
3. C. BREBBIA, J. CONNOR, *Geometrically nonlinear finite-element analysis*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 95, No. EM2, Apr. 1969 pp. 463 - 483.

4. R. W. CLOUGH, C. P. JOHNSON, *A finite element approximation for the analysis of thin shells*, Int. J. Solids Struct., 1968, Vol. 4, pp. 43 - 60.
5. C. B. WILBY, H. N. NAQUI, *Structural analysis of conoidal shells*, Structural Engineer, 50, 1972, No. 5, pp. 197 - 201.
6. A. P. NIKOŁAJEW, N. G. BANDURIN, *K rasczetu oboloczek metodom koniecznego elementa*, Stroit. Mech. i Rasczet Sooruz., No. 5, 1980, s. 21 - 25.
7. A. JU. OSTROWSKI, *Pribliznonyj rasczet konoidalnoj oboloczki*, Stroit. Mech. i Rasczet Sooruz., No. 4, s. 13 - 18, 1970.
8. W. D. GAJZER, *Rasczet pokrytij iz oboloczek otriciatelnoj kriwizny*, Stroit. Mech. i Rasczet Sooruz. No. 4, 1970, s. 9 - 13.

## Резюме

## ИЗГИБ КОНОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе решается задача изгиба пологой, коноидальной оболочки. Решение получено из системы дифференциальных уравнений в частных производных для перемещений с учетом упрощений Власова. Статический изгиб оболочки решено методом конечных разностей. Рассматриваются разные случаи опор оболочки. Составлены графики перемещений и внутренних сил образующихся в равномерно нагруженной оболочке.

## Summary

## BENDING OF A CONOIDAL SHELL

Bending of a shallow conoidal shell is discussed in the paper. The solution has been obtained from a system of partial differential equations of the linear theory of shells in the form simplified according to that of Vlasov's. The static bending of the shell has been solved by finite difference method. Various cases of support are considered. The diagrams of displacements and internal forces for uniformly loaded shell have been presented.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 listopada 1981 roku*

---



## PIERWSZORZĘDOWE OBSZARY NIESTATECZNOŚCI DRGAŃ WAŁÓW WYKONUJĄCYCH RUCH OBROTOWO-OSCYLACYJNY

STANISŁAW SUWAJ  
STANISŁAW WOJCIECH  
*Politechnika Łódzka*  
*Filia w Bielsku-Białej*  
*Instytut Mechaniczno-Konstrukcyjny*

### 1. Wstęp

Drgania giętne o ruchu obrotowo-oscyłacyjnym opisane są układem równań różniczkowych cząstkowych o współczynnikach okresowych [2].

Istotnym problemem przy analizie drgań takich wałów jest określenie przedziałów częstości krytycznych ruchu oscylacyjnego.

W niniejszej pracy przedstawiono zastosowanie do określenia pierwszorzędowych obszarów niestateczności, metody przybliżonej [1], wymagającej sprowadzenia analizowanych równań do układu kanonicznego hamiltonowskiego. Zaletą przedstawionej metody jest krótki czas obliczeń numerycznych.

### 2. Dyskretyzacja zagadnienia

W pracy [2] przedstawiono następujący układ równań opisujących przemieszczenia wałów wykonujących ruch obrotowo-oscyłacyjny:

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \dot{\varphi}^2 \xi - \ddot{\varphi} \eta - 2\dot{\varphi} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= k_1 \frac{dz^4 \xi_s}{dz^4} - g \sin(\varphi_0 + \varphi), \\ k_2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \dot{\varphi}^2 \eta + \ddot{\varphi} \xi + 2\dot{\varphi} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= k_2 \frac{d^4 \eta_s}{dz^4} - g \cos(\varphi_0 + \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{EJ_2}{\rho F}, \quad k_2 = \frac{EJ_2}{\rho F}$$

$E$  — moduł Younga

$J_1, J_2$  — momenty bezwładności przekroju wału względem osi  $\eta$  i  $\xi$

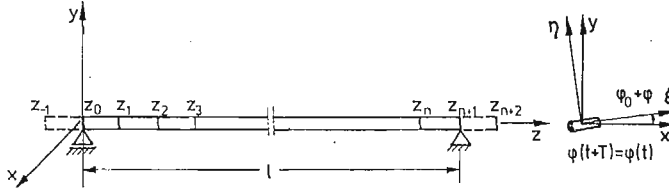
$\rho$  — gęstość

$F$  — pole powierzchni przekroju

$g$  — przyspieszenie ziemskie

$\varphi_0$  — wychylenie początkowe

Równania (1) są równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych i są trudne do bezpośredniej analizy. Dyskretyzując zagadnienie, można układ (1) doprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej  $t$  wygodnego w analizie. We wspomnianej już pracy [2] do dyskretyzacji zagadnienia zastosowano metodę Galerkiną. W niniejszej pracy zmienną  $z$  eliminuje się poprzez zastosowanie metody różnic skończonych.



Rys. 1 Model wału

**2.1. Metoda różnic skończonych.** W dalszych rozważaniach przyjmuje się następujące oznaczenia (rys. 1):

$n$  — liczba wewnętrznych równoodległych punktów przedziału  $\langle 0, l \rangle$

$h = \frac{l}{n+1}$  — długość podprzedziału

$$\left. \begin{aligned} z_i &= i \cdot h \\ a_i(t) &= \xi(z_i, t) \\ b_i(t) &= \eta(z_i, t) \end{aligned} \right\} i = 0, 1, \dots, n, n+1$$

Jeśli przyjąć, że równania (1) są spełnione gdy są spełnione w punktach  $z_1, \dots, z_n$ , oraz przybliżyć pochodne funkcji  $\xi$  i  $\eta$  względem zmiennej  $z$  w punktach  $z_1, \dots, z_n$  przez różnice skończone centralne, to równania zagadnienia można zapisać w postaci następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej  $t$ :

$$\ddot{Y} = 2\dot{\varphi}B_2\dot{Y} + [-B_1 + \dot{\varphi}^2J + \ddot{\varphi}B_2]Y + G, \quad (2)$$

gdzie:

$$Y = \text{col} \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{h^4} B_0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{h^4} B_0 \end{bmatrix}$$

$B_0$  — macierz pięciodiagonalna o stałych współczynnikach

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \text{col} \{g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n}, g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2n}\}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{1i} &= k_1 \frac{d^4 \xi_s}{dz^4} \Big|_{z=z_i} - g \sin(\varphi_0 + \varphi) \\ g_{2i} &= k_2 \frac{d^4 \eta_s}{dz^4} \Big|_{z=z_i} - g \cos(\varphi_0 + \varphi) \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

Elementy macierzy  $B_0$  zależą przy tym od rodzaju podparcia wału [3].

2.2 Doprowadzanie równań do układu równań pierwszego rzędu. Układ równań (2) można łatwo zapisać w pożądanej w dalszych rozważaniach postaci jako układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\dot{X} = A(t)X + F \quad (3)$$

gdzie:

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B_1 + \dot{\varphi}^2 I + \ddot{\varphi} B_2 & 2\dot{\varphi} B_2 \end{bmatrix}$$

Układ (3) jest układem  $4n$  równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej  $t$ . Do postaci (3) można doprowadzić równania (1) również w przypadku gdy węzły  $z_i (i = 0, 1, \dots, n+1)$  nie są równoodległe.

2.3. Dokładność aproksymacji. Istotnym elementem przy stosowaniu metody różnic skończonych jest właściwe określenie liczby wewnętrznych punktów dyskretyzacji  $n$  wpływającej na dokładność wyników. Wpływ  $n$  na dokładność wyników zbadano porównując częstości drgań własnych wału nieruchomego obliczone przy różnych  $n$  metodą różnic skończonych, z wynikami otrzymanymi metodą ścisłą [4]. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Wpływ liczby  $n$  na wartości częstości drgań własnych  
 $k_1 = 167,2 \text{ m}^4\text{s}^{-2}$ ,  $k_2 = 107,1 \text{ m}^4\text{s}^{-2}$ ,  $l = 1,2 \text{ m}$

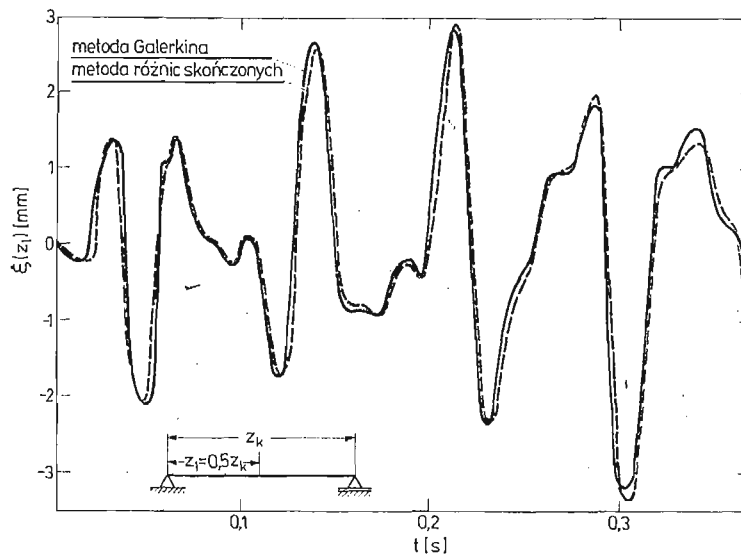
Nr kol. częstości	$n = 6$	$n = 9$	$n = 11$	$n = 15$	$n = 19$	$n = 23$	Metoda ścisła.
1	69,75	70,35	70,53	70,70	70,78	70,83	70,93
2	265,18	274,51	277,30	280,09	281,40	282,10	283,72
3	547,38	592,50	606,23	620,13	626,65	630,21	638,37
4	861,02	993,18	1034,89	1077,73	1098,04	1109,19	1134,89
5	1143,43	1437,35	1534,08	1635,33	1683,96	1710,85	1773,26
6	1428,67	1881,51	2069,78	2271,49	2369,99	2424,90	2553,49
7		2350,88	2605,48	2961,76	3139,22	3239,12	3475,59
8		2804,45	3104,67	3679,61	3972,74	4139,57	4539,54
9		3248,84	3533,34	4397,47	4849,99	5110,21	5745,36
10			4069,04	5087,74	5749,40	6136,33	7093,03
$n+1$	87,15	87,90	88,12	88,34	88,44	88,50	88,62
$n+2$	331,33	342,99	346,47	349,97	351,59	352,48	354,50
$n+3$	684,18	740,30	757,46	774,83	782,97	787,43	797,62
$n+4$	1075,82	1237,31	1293,06	1346,59	1371,96	1385,90	1418,00
$n+5$	1338,85	1795,91	1916,78	2043,28	2104,04	2137,65	2215,62
$n+6$	1672,85	2282,20	2586,12	2838,14	2961,21	3029,82	3190,49
$n+7$		2600,18	3255,45	3700,61	3922,35	4047,15	4342,62
$n+8$		2851,53	3879,18	4597,54	4963,79	5172,23	5671,99
$n+9$		3503,93	4414,78	5494,48	6059,89	6385,01	7178,61
$n+10$			5084,11	6356,94	7183,66	7667,12	8862,48

Jak wynika z rozważań przedstawionych w rozdziale 3 niniejszej pracy wyznaczenie pierwszorzędowych obszarów niestateczności sprowadza się do obliczenia częstości i postaci drgań własnych wału nieruchomego. Dlatego można przyjąć, że błąd popełniany przy wyznaczaniu pierwszorzędowych obszarów niestateczności jest określony przez błędy w wyznaczaniu częstości drgań i postaci drgań własnych wału nieruchomego. Wyniki przedstawione w tabeli 1 wykazują, że już przy  $n = 9$  otrzymuje się pierwszą częstość drgań własnych  $\omega_1$  z błędem mniejszym od 1%, a  $\omega_2$  z błędem mniejszym niż 3,5% w odniesieniu do wartości dokładnych.

Na rys. 2 przedstawiono porównanie wyników uzyskanych przy rozwiązywaniu zagadnienia drgań wymuszonych w przypadku, gdy wymuszenie ruchu opisuje funkcja:

$$\varphi(t) = \Phi \sin \omega t. \quad (4)$$

Linia przerywaną zaznaczono rozwiązanie uzyskane po dyskretyzacji zagadnienia metodą różnic skończonych przedstawionej powyżej, a linią ciągłą rozwiązanie uzyskane



Rys. 2 Porównanie rozwiązań równania (3) uzyskanych metodą Galerkina i metodą różnic skończonych

po dyskretyzacji zagadnienia metodą Galerkina przy  $n = 3$ , a więc przyjęciu trójwyrazowego szeregu aproksymującego funkcje  $\xi$  i  $\eta$  [2]. Wyniki obliczeń są bardzo zbliżone. W obu przypadkach otrzymany po dyskretyzacji układ równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej  $t$  rozwiązywano numerycznie wykorzystując metodę interpolacyjno-ekstrapolacyjną z automatycznym doбором kroku całkowania.

### 3. Wyznaczanie pierwszorzędowych obszarów niestateczności wałów oscylujących

Badanie stateczności w sensie Lapunowa [5] jednorodnego równania (3) czyli równania:

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (5)$$



przy założeniu (4) powodującym okresowość macierzy  $A(t)$  można poprzez podstawienie

$$W = SX \quad \text{gdzie } S = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\dot{\phi}B_2 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

sprowadzić do badania stateczności układu hamiltonowskiego:

$$\dot{W} = B(t)W \quad \text{gdzie } B(t) = \begin{bmatrix} \dot{\phi}B_2 & \mathbf{I} \\ -B_1 & \dot{\phi}B_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Uwzględniając założenie (4), po wprowadzeniu czasu bezwymiarowego:

$$\tau = \omega \cdot t, \quad (8)$$

można układ (7) zapisać w postaci:

$$\frac{dW}{d\tau} = [\gamma C_0 + \Phi D_0 \cos \tau] W \quad (9)$$

gdzie:

$$\gamma = \frac{1}{\omega}; \quad C_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -B_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad D_0 = \begin{bmatrix} B_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix}$$

W pracy [1] (rozdział V, s. 359) podano twierdzenie umożliwiające określenie pierwszorzędowych obszarów niestateczności. W odniesieniu do równania (9) z twierdzenia tego wynika, że obszar dynamicznej niestateczności określony jest następująco:

$$\gamma_0 + \chi_{j,h}^{(1)}\phi < \gamma < \gamma_0 + \chi_{j,h}^{(2)}\phi, \quad (10)$$

gdzie:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\omega_j + \omega_h}$$

$$\chi_{j,h}^{(1,2)} = \frac{\mp 2|\chi_{j,h}|}{\frac{d}{d\gamma}(\omega_j + \omega_h)|_{\gamma=\gamma_0}}$$

$$\chi_{j,h} = (H_{10}^1 \bar{C}_j, C_h)$$

$\omega_j$  — wartości własne będące pierwiastkami równania  $\det[\gamma C_0 - i\omega \mathbf{I}] = 0$

$C_j$  — wektory własne macierzy  $\gamma C_0$  odpowiadające wartościom własnym  $i\omega_j$  unormowane warunkami:

$$\gamma_{j,h} = \langle C_j, C_h \rangle = i(\mathbf{J}C_j, C_h) = \begin{cases} 0 & \text{jesli } j \neq h \\ 1 & j = h \leq 2n \\ -1 & j = h > 2n \end{cases}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad H_{10}^1 = \frac{1}{2} \mathbf{J} D_0.$$

Jak wynika z powyższych wzorów, przy wyznaczaniu obszarów niestateczności podstawowym problemem jest określenie wartości i wektorów własnych macierzy  $\gamma C_0$ .

**3.1. Wyznaczenie wartości i wektorów własnych macierzy  $\gamma C_0$ .** Zgodnie z cytowanym wyżej twierdzeniem wartości własnej  $\omega_j$  określone są jako pierwiastki równania

$$\det[\gamma C_0 - i\omega \mathbf{I}] = 0$$

Jeśli przez  $\omega_{0j}$  oznaczyć wartości własne macierzy  $C_0$  to zachodzi

$$\omega_j = -i\gamma\omega_{0j} \quad (j = 1, 2, \dots, 4n). \quad (11)$$

Wektory  $C_j$  są określone jako nietrywialne rozwiązania równań:

$$\gamma C_0 C_j = i\omega_j C_j$$

Łatwo sprawdzić, że wobec związków (11) wektory własne macierzy  $\gamma C_0$  i  $C_0$  są identyczne.

Wobec powyższego problem wyznaczenia wartości własnych  $\omega_j$  i wektorów  $C_j$  sprowadza się do wyznaczenia wartości i wektorów własnych macierzy  $C_0$ .

Zgodnie z (9) macierz  $C_0$  ma postać:

$$C_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Jeśli oznaczyć:

$$\mathbf{\Omega} = i \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n} \}$$

$$\mathbf{P} = [P_1 P_2 \dots P_n]$$

gdzie:

$\lambda_j^2$  — są wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{B}_1$

$P_j$  — są wektorami własnymi macierzy  $\mathbf{B}_1$

to wartości własne macierzy  $C_0$  są określone następująco:

$$\begin{cases} \omega_{0j} = i\lambda_j \\ \omega_{0j+2n} = -i\lambda_j \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (12)$$

a macierz  $\mathbf{P}_0$  wektorów własnych macierzy  $C_0$  ma postać

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}\mathbf{\Omega} & -\mathbf{P}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \left( C_j = \begin{bmatrix} P_j \\ i\omega_j P_j \end{bmatrix}, \quad C_{2n+j} = \begin{bmatrix} P_j \\ -i\omega_j P_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \right) \quad (13)$$

Macierz  $\mathbf{B}_1$  ma również postać, która upraszcza wyznaczenie jej wektorów i wartości własnych:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} k_1 \mathbf{B}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_2 \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Wobec (14) wartości własne  $\lambda_j$  i wektory własne  $P_j$  macierzy  $\mathbf{B}_1$  można określić następująco:

$$\begin{cases} \lambda_j^2 = \frac{k_1}{h^4} \omega_{Bj}^2 = \omega_{1j}^2 \\ \lambda_{j+n}^2 = \frac{k_2}{h^4} \omega_{Bj}^2 = \omega_{2j}^2 \end{cases} \quad (\omega_{Bj}^2 \text{ — wartości własne } \mathbf{B}_0) \quad (15)$$

$$P_j = \begin{bmatrix} d_j^1 \\ -d_j^2 \end{bmatrix} \quad \text{gdzie: } d_j^1 = \begin{cases} d_j & j \leq n, \\ \mathbf{0} & j > n, \end{cases} \quad d_j^2 = \begin{cases} \mathbf{0} & j \leq n \\ d_j & j > n \end{cases} \quad (16)$$

$d_j$  — jest  $j$ -tym wektorem własnym macierzy  $\mathbf{B}_0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

Normowanie wektorów  $C_j$  wobec warunku:

$$\gamma_{jh} = \langle C_j, C_h \rangle = i(\mathbf{J} C_j, C_h) = \begin{cases} 0 & j \neq h \\ 1 & j = h \leq 2n \\ -1 & j = h > 2n \end{cases}$$

i wynikającej z ortogonalności wektorów własnych macierzy  $\mathbf{B}_0$  zależności:

$$i(\mathbf{J}C_j, C_h) = i\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_j \\ i\omega_j P_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_h \\ i\omega_h P_h \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq h \\ 2\omega_j d_j^T d_j & j = h \end{cases}$$

polega więc na określeniu elementów przez liczbę  $\sqrt{2\omega_j d_j^T d_j}$

3.2. Wyznaczenie współczynników  $\chi_{j,h}^{(1,2)}$ . Aby zgodnie z (10) określić współczynniki  $\chi_{j,h}^{(1,2)}$  należy obliczyć wielkości

$$\chi_{j,h} = (\mathbf{H}_{10}^T \bar{C}_j, C_h) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{J} D_0 \bar{C}_j, C_h\right). \quad (17)$$

Podstawiając do (17) wektory  $C_j$  określone przez (13) - (16) otrzymano:

$$|\chi_{j,h}| = \frac{1}{2} |\lambda_j - \lambda_h| |d_j^T d_h^1 - d_j^1 d_h^T|. \quad (18)$$

Wobec (11) i (12) zachodzi:

$$\frac{d}{d\gamma} (\omega_j + \omega_h) = \lambda_j + \lambda_h \quad (19)$$

a więc współczynniki  $\chi_{j,h}^{(1,2)}$  wynoszą:

$$\chi_{j,h}^{(1,2)} = \mp \frac{|\lambda_j - \lambda_h| |d_j^T d_h^1 - d_j^1 d_h^T|}{\lambda_j + \lambda_h} \quad (20)$$

Z (16) i (20) wynika, że nie występują obszary niestateczności zaczynające się w punktach

$\gamma_0 = \frac{1}{\omega_j + \omega_h}$  dla następujących przypadków:

1.  $j < n$  i  $h < n$
2.  $j > n$  i  $h > n$

ponieważ zachodzi wówczas:

$$d_j^T d_h^1 - d_j^1 d_h^T = 0. \quad (21)$$

W szczególności warunek (21) jest spełniony również przy  $j = h$  czyli nie wystąpią obszary niestateczności odpowiadające  $\vartheta_0 = 2\omega_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2n$ ).

Wobec tego obszary niestateczności wystąpią tylko wówczas, gdy spełnione będą warunki:

1.  $j < n$  i  $h > n$
2.  $j > n$  i  $h < n$

przy czym wobec (15), (16) wyrażenie (20) przybierze postać:

$$\chi_{j,h}^{(1,2)} = \mp \frac{|\omega_{1,j} - \omega_{2,h-n}|}{\omega_{1,j} + \omega_{2,h-n}} \cdot |d_j^T d_h^2| \text{ — w przypadku 1.} \quad (22)$$

$$\chi_{j,h}^{(1,2)} = \mp \frac{|\omega_{1,j-n} - \omega_{2,h}|}{\omega_{1,j-n} + \omega_{2,h}} |d_j^T d_h^1| \text{ — w przypadku 2.} \quad (23)$$

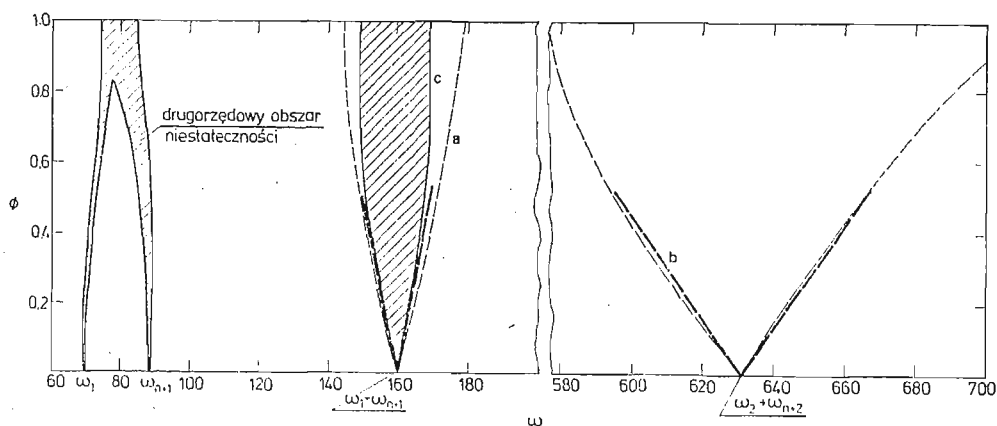
Z powyższych rozważań wynika, że wyznaczenie pierwszorządowych obszarów niestateczności sprowadza się do obliczenia wartości i wektorów własnych macierzy  $\mathbf{B}_0$  stopnia  $n$  oraz wykonania szeregu mnożeń według wzorów (22) i (23). Jest to sprawa

o tyle istotną, że macierz  $C_0$  jest macierzą stopnia  $4n$ , a więc sprowadzenie problemu obliczenia jej wartości i wektorów własnych do problemu obliczenia wartości i wektorów własnych macierzy stopnia  $n$  pozwala na znaczne skrócenie czasu obliczeń numerycznych.

**3.2. Wyniki obliczeń numerycznych.** Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla następujących danych liczbowych:  $k_1 = 167,2 \text{ m}^4\text{s}^{-2}$ ,  $k_2 = 107,1 \text{ m}^4\text{s}^{-2}$ ,  $l = 1,2 \text{ m}$ . Wartości i wektory własne obliczono według algorytmu  $QR$  wykorzystując podprogramy biblioteczne ODRY 1305. Wartości  $\chi_{1,n+1}^{(1,2)}$  i  $\chi_{2,n+2}^{(1,2)}$  odpowiadające  $\vartheta_0 = \frac{\omega_{1,1} + \omega_{2,1}}{1}$  i  $\vartheta_0 = \frac{\omega_{1,2} + \omega_{2,2}}{1}$  wyznaczono dla kilku  $n$  celem ustalenia wpływu tej liczby na dokładność wyników. Przedstawione w tabeli 2 wyniki pozwalają wysnuć wniosek, że  $n \geq 9$  daje

Tabela 2

	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	$n = 13$	$n = 15$
$\omega_1$	87.49	87.90	88.12	88.25	88.34
$\omega_{n+1}$	70.02	70.35	70.53	70.63	70.70
$\chi_{1,n+1}^{(2)}$	17.58	17.66	17.70	17.73	17.75
$\omega_2$	336.65	342.99	346.47	348.59	349.97
$\omega_{n+2}$	269.43	274.51	277.30	278.99	280.09
$\chi_{2,n+2}^{(2)}$	67.63	68.90	69.61	70.03	70.31



Rys. 3 Wykres obszarów niestateczności

- obszary niestateczności wyznaczone wg zależności (24)
- · - · - przybliżenia liniowe wg wzoru (25)
- obszary niestateczności uzyskane w pracy [2]

zadowalającą dokładność. Rys. 3 przedstawia obszary niestateczności w płaszczyźnie  $(\Phi, \omega)$  wyznaczone wg zależności:

$$\gamma = \gamma_0 + \chi_{j,h}^{(1,2)} \Phi. \quad (24)$$

Wobec zależności  $\gamma = \frac{1}{\omega}$  proste (24) w płaszczyźnie  $(\Phi, \omega)$  nie są już prostymi. Stosując jednak rozwinięcie

$$\frac{1}{1+\gamma} = 1 - \gamma + \dots$$

można określić w sposób przybliżony proste

$$\vartheta = \vartheta_0 - \chi_{j,h}^{(1,2)} \vartheta_0 \Phi, \quad (25)$$

ograniczające obszar niestateczności w płaszczyźnie  $(\Phi, \omega)$ . Proste te również naniesiono na rys. 3. Ponadto dla porównania wyników pokazano również na rys. 3 obszary niestateczności wyznaczone w pracy [2].

Przedstawiona metoda daje dobre wyniki dla małych wartości  $\Phi$ . Zaletą jej jest krótki czas obliczeń oraz możliwość przewidywania istnienia obszarów niestateczności.

#### Literatura cytowana w tekście

1. V. ~~Š~~ JAKUBOVIČ, V. M. STARŽINSKIJ, *Linejnyje differencjalnyje uravnenija s periodiceskimi koefficientami i ich priloženije*, Izd. Nauka Moskva 1972.
2. S. SUWAJ, M. TROMBSKI, *Analiza stateczności wałów o ruchu obrotowo-oscyłacyjnym*, ABM z 1, 1982.
3. S. SUWAJ, *Analiza drgań wałów wykonujących ruch obrotowy wahadłowy o małych amplitudach*, Praca doktorska, Pol. Łódzka 1980.
4. Z. OSIŃSKI, *Teoria drgań*, PWN Warszawa 1978.
5. B. P. DEMIDOWICZ, *Matematyczna teoria stabilności*, WNT Warszawa 1972.

#### Резюме

#### ПЕРВИЧНЫЕ ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ВАЛОВ СОВЕРШАЮЩИХ ВРАЩАТЕЛЬНО-ОСЦИЛЛЯЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ

В работе представлен приближенный анализ первичных областей неустойчивости системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, описывающей колебания валов с вращательно-осцилляционным движением. Для дискретизации проблемы применен метод конечных разностей.

#### Summary

#### FIRST ORDER NON-STABILITY FIELDS FOR VIBRATING SHAFT PERFORMING SWING-LIKE MOTION

An approximate analysis is presented for the first order non-stability fields for differential equations system with periodical factors due to shaft swing-like type vibrations. The discretization of the system is obtained by finite differences method.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1982 roku*



## METODA WYZNACZANIA MOMENTÓW SKUPIONYCH DZIAŁAJĄCYCH NA TYCZKĘ PODZAS SKOKU

JAN PIETRAŁA

*Instytut Sportu  
Warszawa*

### Wstęp

Dotychczasowe badania naukowe w dyscyplinie sportowej skoku o tyczce miały na uwadze dwa cele:

- poznawczy, w którym chodziło o zrozumienie zjawisk mechanicznych i biomechanicznych zachodzących w trakcie skoku, oraz
- wdrożeniowy, gdzie chodziło o ulepszenie istniejących lub opracowanie nowych technik wykonywania skoku i sprzętu.

Skok o Tyczce jest procesem, który zachodzi w układzie SKOCZEK-TYCZKA od fazy rozbiegu począwszy do przekroczenia płaszczyzny poprzeczki, ustawionej na żądanej wysokości.

Budowano, dla wymienionych celów, różne modele Skoczka i modele Tyczki [5, 2, 3]. Śledząc zjawisko pojawiania się modeli Skoczka dostrzega się wyraźnie ich ewolucję, od modeli prostych [5] począwszy, w których skoczek przedstawia się jako punkt materialny lub wahadło fizyczne, po bardziej złożone [3], w których w układzie brył sztywnych modelujących skoczka uwzględnia się działanie momentów napędowych, czyli elementy biomechaniki człowieka.

Model Tyczki stanowi zwykle pręt sprężysty, bezmasowy, na który działają siły i momenty skupione [5, 2, 3].

Opisana niżej metoda służy do wyznaczania momentów skupionych, działających na tyczkę podczas skoku, na podstawie analizy kształtu tyczki w różnych fazach skoku, przy różnych postaciach odkształconej tyczki, poczynając od tyczki nieodkształconej. Momenty skupione modelują działanie na tyczkę pary sił, pochodzącej od rąk zawodnika trzymającego tyczkę.

Przedmiotem analizy jest tyczka, której zmienna postać została zarejestrowana na kadrze filmu-16 mm podczas skoku, zaś jej kształt został zdjęty za pomocą analizatora filmów 16 mm NAC. W trakcie analizy porównuje się pomierzony kształt tyczki z kształtem obliczonym na podstawie zaproponowanego niżej modelu matematycznego tyczki. W wyniku otrzymuje się wartość momentu skupionego działającego na tyczkę w danej fazie skoku.

Opisana niżej metoda może służyć do weryfikacji modeli dynamiki skoku o tyczce oraz, perspektywicznie, do otrzymywania wytycznych do treningu sportowego skoku o tyczce.

#### Opis metody

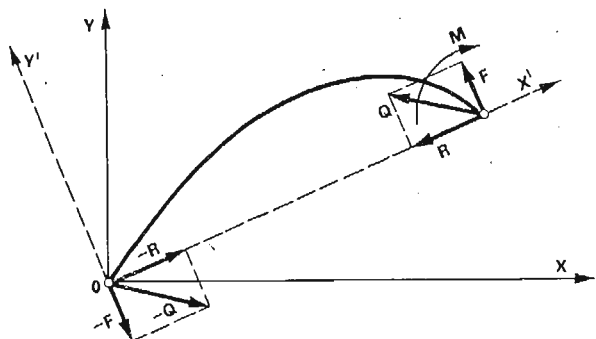
Materiałem do analizy są pojedyncze kadry filmu 16 mm przedstawiające poszczególne fazy skoku o tyczce, podczas którego zawodnik jest fotografowany. Wymaga się, aby płaszczyzna kadru była równoległa do płaszczyzny tyczki i w takich warunkach przeprowadzono rejestrację skoku. Za pomocą analizatora filmu zdejmuje się kształt tyczki w danym kadrze w postaci ciągu punktów  $(x, y)_i$ ,  $(i = 1, \dots, N)$  w ustalonym układzie współrzędnych  $OXY$  i zapisuje się do zbiorów danych, których nośnikiem są dyski elastyczne (floppy discs). Zbiory te stanowią dane wejściowe do programu na maszynie cyfrową napisanego w języku FORTRAN IV i realizującego opisaną niżej metodę wyznaczania momentów skupionych.

W poniższych rozważaniach przyjęto następujące założenia odnośnie tyczki:

- tyczka zachowuje się jako ciało doskonale i liniowo sprężyste w obszarach małych i dużych odkształceń, chociaż z różnymi współczynnikami sprężystości w obu obszarach, co jest zgodne z pomiarami przeprowadzonymi w Instytucie Sportu i podanymi w raporcie naukowym MINS/PNT/8/77,
- pomija się masę tyczki ze względu na dużą, w porównaniu z nią, masę skoczka,
- pomija się drgania tyczki,
- obserwowany doświadczalnie kształt tyczki jest wynikiem superpozycji siły działającej na swobodny koniec tyczki i momentu skupionego pochodzącego od pary sił działających w miejscach uchwytu tyczki przez zawodnika. Siła powoduje duże odkształcenia tyczki, a moment skupiony — małe, co potwierdziły dane doświadczalne.

Rys. 1. przedstawia przykładowo kształt tyczki w analizowanej fazie skoku. Od strony zawodnika na tyczkę działają:

- siła  $Q$ , zaczepiona w przybliżeniu na swobodnym końcu tyczki,
- siły reakcji  $-R$  i  $-F$  będące składowymi siły  $Q$  i działające na podparty koniec tyczki,
- moment skupiony  $M$  wywołany parą sił w miejscach uchwytu tyczki przez zawodnika i przyłożony w ich środku.



Rys. 1. Siły i momenty działające na tyczkę w analizowanej fazie skoku



Przeprowadźmy obliczenia w układzie tyczki  $OXY'$  prostokątnym, w którym oś  $X'$  jest skierowana wzdłuż cięciwy łączącej oba końce tyczki. Jak wynika z [2, 7], kształt tyczki w danym momencie czasu zależy od wartości siły  $R$  i momentu skupionego  $M$ .

Istota metody, wymienionej w tytule, polega na wyznaczeniu różnicy między kształtem obserwowanym tyczki, a kształtem obliczonym, który tyczka przyjmuje tyłko pod działaniem siły  $R$  działającej wzdłuż cięciwy łączącej oba końce tyczki. Kształt tyczki pod działaniem siły  $R$  oblicza się na podstawie modelu Love'a [4] załącznik 1. W wyniku dostaje się funkcję

$$y = f(s) \quad \text{dla } 0 \leq s \leq L, \quad (1)$$

w układzie współrzędnych  $OSY$  gdzie  $s$  — długość mierzona wzdłuż tyczki o kształcie wyliczonym z modelu Love'a.

Przyjmuje się, że  $f(s)$  opisuje kształt pochodzący wyłącznie od działania na tyczkę pary sił o momencie skupionym  $M$ .

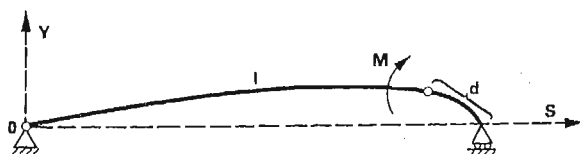
Następnie z kształtu  $y = f(s)$  tyczki oblicza się wartość momentu skupionego  $M$ . Do tego celu przyjmuje się założenie, że tyczkę można przedstawić w postaci belki swobodnej podpartej na podporach przegubowych: nieprzesuwnej (koniec podparty tyczki) i przesuwnej (koniec swobodny tyczki) — rys. 2.

Jak wiadomo z teorii sprężystości i wytrzymałości materiałów [7] belka tak podparta, pod działaniem momentu skupionego  $M$  przyłożonego w odległości  $d$  od końca umocowanego na podporze przesuwnej, przyjmuje kształt opisany równaniami:

$$y = -\frac{M}{6L \cdot E \cdot J} s^3 + As + B \quad \text{w obszarze } 0 \leq s \leq L-d, \quad (2)$$

$$y = -\frac{M}{6L \cdot E \cdot J} s^3 + Cs^2 + Ds + E \quad \text{w obszarze } L-d \leq s \leq L \quad (3)$$

gdzie stała  $A, B, C, D, E$  wyznacza się z warunków brzegowych układu i warunku ciągłości rozwiązań na brzegach obszarów.



Rys. 2. Kształt tyczki pod działaniem momentu skupionego

Jak widać, współczynniki przy 3-ciej potęgce  $s$  w obu wyrażeniach (2 - 3) zależą wyłącznie od wartości momentu skupionego  $M$  i parametrów tyczki:  $L, E, J$ , gdzie:

- $L$  — długość tyczki,
- $E$  — moduł Younga tyczki w zakresie niewielkich odkształceń,
- $J$  — moment bezwładności przekroju poprzecznego tyczki.

Wartość współczynników przy 3-ciej potęgce zmiennej  $s$  oblicza się aproksymując otrzymany wcześniej kształt  $y = f(s)$  wielomianem 3-go stopnia:

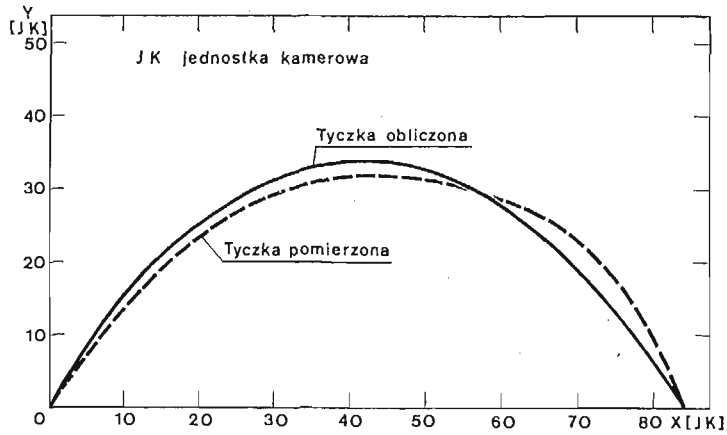
$$y = as^3 + bs^2 + cs + d. \quad (4)$$

Porównując, dla kształtu  $y = f(s)$ , współczynnik  $a$  ze współczynnikiem przy 3-ciej potędze zmiennej  $s$  w wyrażeniach (2-3) otrzymuje się następującą wartość momentu skupionego:

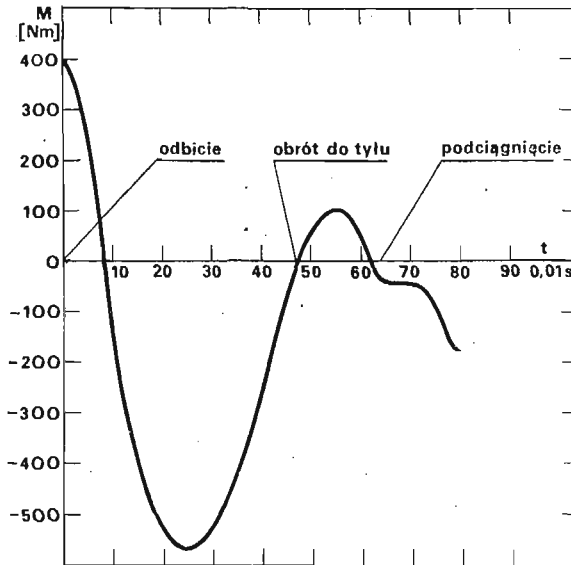
$$M = -6L \cdot E \cdot J \cdot a. \quad (5)$$

#### Przykład wyników

Dla tyczki o parametrach  $L = 5,03 \text{ m}$ ,  $E = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ,  $J = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ , której kształty: pomierzony i obliczony (bez działania momentu skupionego), pokazuje rys. 3. obliczono współczynnik  $a$ . Wynosi on  $a = 1,2 \cdot 10^{-2}$ , stąd  $M = 500 \text{ Nm}$ . Jest to analiza jednego kadru filmowego.



Rys. 3. Kształty tyczek: pomierzony i obliczony w układzie tyczki



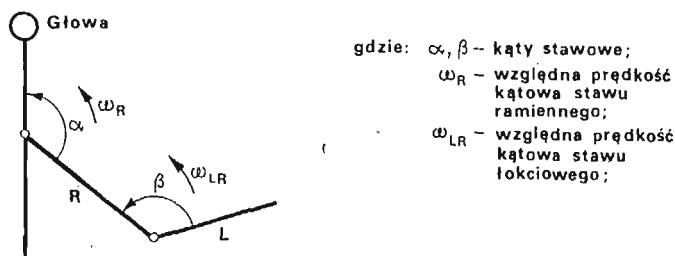
Rys. 4. Zmiana momentu skupionego działającego na tyczkę w czasie skoku

Rys. 4 przedstawia wyniki analizy całego skoku, dla wybranego zawodnika, od fazy odbicia począwszy (chwila  $t = 0$ ) przez fazę lotu, do chwili odłączenia tyczki od zawodnika. Skok na wysokość 555 cm był udany. Analizowano co czwartą klatkę filmu.

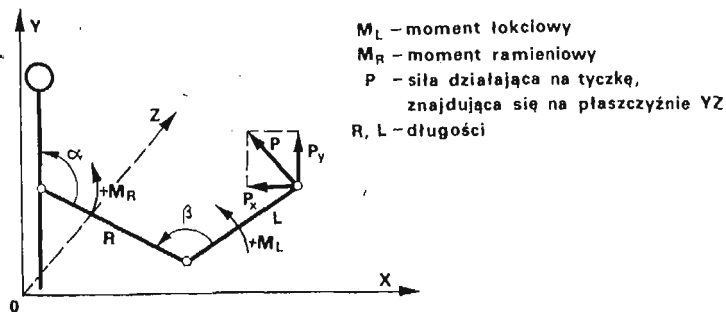
#### Dyskusja wyników

Obliczmy poniżej, jakiego rzędu maksymalne momenty mogą być rozwijane przez zawodnika, co posłuży nam do weryfikacji wyników uzyskanych za pomocą omówionej powyżej metody.

Rozważmy przypadek gdy jedno ramię zawodnika jest unieruchomione, a drugie jest w ruchu — jak na rys. 5:



Rys. 5. Przypadek zginania ręki w stawie ramiennym i zginania w stawie łokciowym zawodnika. Ręka ruchoma. Płaszczyzna strzałkowa



Rys. 6. Siły i momenty napędowe dla ramienia ruchomego

W tym przypadku działają siły i momenty napędowe jak na rys. 6. Interesuje nas siła  $P$ , jedna z pary, którą zawodnik działa na tyczkę, oraz jej składowe: pionowa  $P_y$  i pozioma  $P_x$ . Obliczenia przeprowadzone dla przypadku  $ZR + ZL$  (zginanie ramieniowe + zginanie łokciowe) dają:

$$P_x = - \left[ \frac{M_R(\alpha)}{R} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)} + \frac{M_L(\beta)}{L} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha + \beta)} \right], \quad (6)$$

$$P_y = \frac{M_R(\alpha)}{R} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)} - \frac{M_L(\beta)}{L} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin(2\alpha + \beta)}, \quad (7)$$

a dla przypadku  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ :

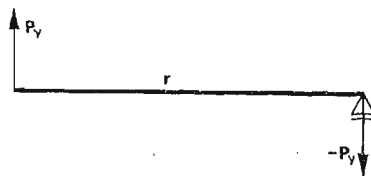
$$P_x = \frac{M_L(\beta = 90^\circ)}{L}, \quad (8)$$

$$P_y = \frac{M_R(\alpha = 90^\circ)}{R}. \quad (9)$$

Biorąc maksymalną wartość momentów, dostajemy dla  $P_y$ :

$$P_y = \frac{M_{R\max}}{R}. \quad (10)$$

Para sił  $P_y, -P_y$  powoduje odkształcenie całej tyczki w płaszczyźnie  $YZ$ , w której obserwuje się kształt tyczki.



Rys. 7. Para sił działających na tyczkę

Moment skupiony  $M$  pochodzący od pary sił  $P_y, -P_y$  osiąga wartość maksymalną w sytuacji jak na rys. 7, gdy można założyć, że na odcinku chwytu  $r$  tyczka jest nieodkształcona, chwyt leży w płaszczyźnie  $YZ$ , a siły  $P_y$  i  $-P_y$  są do niego prostopadłe. Wtedy maksymalny moment skupiony  $M_{\max}$ , który wywiera zawodnik przy opisanym układzie rąk: jedna wyprostowana, druga — z kątami ugięć  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ , wynosi:

$$M_{\max} = \frac{M_{R\max}}{R} \cdot r \quad (11)$$

Dla wartości  $M_{R\max} = 190 \text{ Nm}$  (według pomiarów przeprowadzonych w Instytucie Sportu w Warszawie),  $R = 0,21 \text{ m}$  i długości chwytu  $r = 0,60 \text{ m}$  otrzymuje się  $M_{\max} = 540 \text{ Nm}$ .

Wartość momentu skupionego, obliczona na podstawie kształtu tyczki jest więc tego samego rzędu, co obliczona na podstawie analizy zmian kątów stawowych zawodnika. Sugeruje to prawdziwość założeń poczynionych w modelu tyczki i poprawność wyników uzyskiwanych opisaną metodą.

#### Zastosowania

Przedstawiona metoda pozwala obliczać przebieg momentu skupionego w czasie  $t$  skoku na atakowaną wysokość  $h_{at}$ :  $M(h_{at}; t)$  i — dzięki programowi komputerowemu — robić to szybko i automatycznie. Może ona służyć do weryfikacji modeli skoku o tyczce, w których uwzględnia się oddziaływanie zawodnika na tyczkę przez parę sił działających w miejscach uchwytu.

Bezpośrednim efektem praktycznym może być informacja dla trenera o wartości różnicy między momentem wybieranym przez skoczka na tyczkę w danej fazie lotu, a momentem wymaganym (wzorcowym) dla pokonania atakowanej wysokości:

$$\Delta M = M(h_{at}; t) - M_{wz}(h_{at}; t) \quad (12)$$

gdzie:

$M(h_{at}; t)$  — moment skupiony wywierany obliczony opisaną metodą

$M_{wz}(h_{at}; t)$  — moment skupiony wymaganym (wzorcowym).

Obecnie otwartą jest kwestia, skąd wziąć funkcję  $M_{wz}(h_{at}; t)$ , czyli przebieg wymaganego momentu skupionego w czasie skoku na atakowaną wysokość. Istnieją dwie drogi jej uzyskania:

- pierwsza: budowa modelu skoku o tyczce, uwzględniającego działanie momentów mięśniowych zawodnika na tyczkę i wyznaczenie w eksperymencie modelowym funkcji  $M_{wz}(h_{at}; t)$ , lub
- druga: adaptacja istniejących modeli, spełniających powyższe wymagania. W literaturze [3], w której omawia się model skoku o tyczce (gdzie zawodnika modeluje się jako układ brył sztywnych, w których działają momenty napędowe, a tyczkę jak w niniejszej pracy) sugeruje się, że możliwa jest optymalizacja funkcji  $M_{wz}(h_{at}; t)$ .

Jako dane wejściowe do tego modelu służą parametry antropologiczne skoczka, parametry mechaniczne tyczki i warunki początkowe skoku.

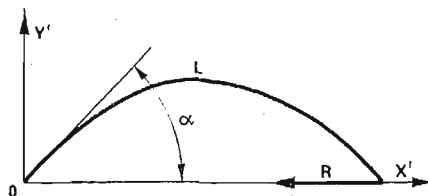
Obie drogi wymagają kontynuacji prac badawczych.

#### Wniosek

Przedstawiona metoda wyliczania momentów skupionych wytwarzanych przez parę sił pochodzących od działania zawodnika na tyczkę może być skutecznym narzędziem weryfikacji modeli matematycznych uwzględniających wymieniony efekt biomechaniczny, a w perspektywie — źródłem danych do treningu skoku o tyczce.

#### Załącznik 1

Pręt sprężysty o długości  $L$ , bezmasowy, umocowany jednym końcem na podporze przegubowej nieprzesuwnej, a na którego koniec swobodny działa siła  $R$ , skierowana wzdłuż cięciwy łączącej oba końce, przyjmuje kształt, który w układzie współrzędnych  $OX'Y'$  można zapisać [4] w postaci parametrycznej (rys. 8):



Rys. 8. Działanie siły  $R$  na pręt sprężysty bezmasowy

$$x = \sqrt{\frac{B}{R}} [-u + 2 \{E \operatorname{am}(u + K) = E \operatorname{am} K\}] \quad (\text{z.1})$$

$$y = -2k \sqrt{\frac{B}{R}} \operatorname{cn}[u + K] \quad (\text{z.2})$$

$$\sqrt{\frac{B}{R}} = \frac{L}{2K(k)} \quad (\text{z.3})$$

gdzie:

$L$  — długość pręta,

$B$  — sztywność pręta,

$R$  — siła działająca na swobodny koniec pręta wzdłuż cięciwy łączącej oba końce pręta,

$u$  — bezwymiarowa długość pręta związana z długością  $s$  pręta, mierzona wzdłuż linii jego ugięcia, zależnością

$$u = s \sqrt{\frac{R}{B}} \quad (\text{z.4})$$

$k$  — moduł, związany z kątem nachylenia stycznej do tyczki w punkcie zamocowania, zależnością

$$k = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{z.5})$$

$K = K(k)$  — całka eliptyczna zupełna pierwszego rodzaju [7],

$E = E(\varphi, k)$  — całka eliptyczna niezupełna drugiego rodzaju,

$\operatorname{am}(u, k)$  — funkcja — amplituda Jacobiego,

$\operatorname{cn} u$  — cosinus eliptyczny Jacobiego.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. ANTONIEWICZ, *Tablice funkcji dla inżynierów*, Warszawa, PWN, 1980.
2. M. HUBBARD, *An iterative numerical solution for the elastica with casually mixed inputs*; Trans. of ASME, Vol. 47, March 1980.
3. M. HUBBARD, *Dynamics of the pole vault*; J. Biomechanics, Vol. 13, G. B. 1980.
4. A. G. H. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, N. Y., Dover Publ. 1944.
5. J. MORAWSKI, M. BUCZEK, K. WIKLIK, T. ŚLIWIŃSKI, *Badania modelowe skoku o tyczce*, Raport Instytutu Sportu, Warszawa, 1977.
6. R. V. SOUTHWELL, *An introduction to the theory of elasticity*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1941.
7. J. WALCZAK, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, t. I, Warszawa, PWN, 1978.

#### Резюме

#### МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МОМЕНТОВ ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ШЕСТЬ ВО ВРЕМЯ ПРЫЖКА С ШЕСТОМ

В статье представлен метод определения сосредоточенных моментов действующих на шест во время прыжка спортсмена, на основании анализа форм шеста в различных фазах прыжка для различных видов его деформации начиная с момента отсутствия деформации. Принимается,

что наблюдаемый вид шеста, известный по кинематографическому анализу прыжка, является результатом наложения двух воздействий: действия на свободный конец шеста только сосредоточенной силы, действующей вдоль дуги соединяющей оба конца шеста (модель ЛОВА(4)), — действия на шест только сосредоточенного момента, являющегося результатом пары сил возбужденных спортсменом в точках захвата. Сравнивая наблюдаемую форму шеста с формой рассчитанной по модели ЛОВА определяется вид шеста как результат действия на шест одного сосредоточенного момента. Исходя из полученной формы шеста определяется значение сосредоточенного момента действующего на шест в данный момент времени. Представлен пример измерения сосредоточенного момента во время прыжка и проведена предварительная проверка предлагаемого метода. Предложенный метод может служить проверке моделей прыжка с шестом, в которых принимается во внимание воздействие спортсмена на шест как пары сил действующих в точках захвата.

#### Summary

#### THE METHOD OF EVALUATING THE MOMENTS APPLIED TO THE POLE DURING THE POLE-VAULT.

The paper presents the method of evaluating moments applied to the pole during pole-vault. The method is based on the analysis of the pole shape during different phases of vault, starting from the phase when the pole is not deflected. It is assumed that the pole shape, obtained by means of kinematographic analysis, is the effect of superposition of two phenomena. Firstly, the force applied to the free end of the pole, acting in the direction of the chord joining both ends (Love's model [4]). Secondly, the moment originated from the couple of forces applied to the pole by the vaulter's grip, acting on non-deflected pole. Comparing the pole shape observed and the shape evaluated basing on Love's model, the shape resulting from the moment action only can be obtained. Then, the value of moment acting on the pole with respect to time can be determined. An example of the moment transient during the vault is presented. A method of analysis of the pole-vault models, that take into account the action of vaulter, is then proposed.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 marca 1982 roku*

---





POMIARY PRZEMIESZCZEŃ NORMALNYCH DO POWIERZCHNI OBIEKTU  
METODĄ FOTOGRAFII PŁAMKOWEJ W ŚWIETLE BIAŁYM

WALDEMAR BACHMACZ  
JERZY PISAREK  
*Politechnika Częstochowska*

Wstęp

Praca prezentuje metodę projekcyjną fotografii płamkowej, wykorzystującą niekoherentne źródła światła, pozwalającą wyznaczyć normalną do powierzchni obiektu składową wektora przemieszczenia.

Metoda w swej istocie zbliżona jest do metody rastrów, [8] [9] [14] [15] [18] [22], nie wymaga jednak stosowania precyzyjnych układów optycznych ani stosowania specjalnych siatek (rastrów), nie stwarza też trudności w interpretacji wyników i oszacowaniach błędów.

W metodzie proponowanej przez autorów na powierzchnię obiektu rzutowana jest stochastyczna struktura płamkowa, zbliżona do obrazu płamkowego obserwowanego na powierzchni przedmiotów oświetlonych światłem spójnym. Podobnie jak w klasycznej, koherentnej fotografii płamkowej struktura płamkowa jest fotografowana na tej samej klatce filmowej dwukrotnie, tzn. przed i po obciążeniu obiektu. Otrzymane w powyższy sposób przeźrocze, zwane dalej — zgodnie z przyjętym w literaturze przedmiotu, uporządkowanym przez V. J. PARKS'A [19] i K. A. Stetsona układem pojęć dotyczących fotografii i interferometrii płamkowej — specklogramem, może być analizowane podobnymi metodami jak specklogramy laserowe i pozwala na otrzymanie zarówno mapy warstwicznej przemieszczeń, jak i ich wartości w dowolnym punkcie (obszarze) powierzchni obiektu. Obszerny opis zasady działania używanych do tego celu procesów optycznych zawiera praca [5], a przykłady ich zastosowań praktycznych w koherentnej fotografii płamkowej prace [1], [3], [7], [10], [16], [17], [18], [19].

Rozwój fotografii płamkowej zapoczątkowany został przez TOKARSKIEGO i BURCHA [4]. W 1970 r. FERNELIUS i TOME [12] zastosowali ją w analizie drgań. Połowej analizy przemieszczeń liniowych dokonali w 1972 r. ARCHBOLD i ENNOS [1] i niezależnie od nich TIZIANI [21]. CHIANG i JUANG [7] przeprowadzili w 1976 r. pomiary ugięć płyt. W Polsce koherentną fotografią płamkową zajmują się m.in. Z. Orłoś i M. Matczak (WAT), J. Stupnicki (Pol. Warszawska), A. Bełzowski i H. Kasprzak (Pol. Wrocławska), E. Mróz (CLO).

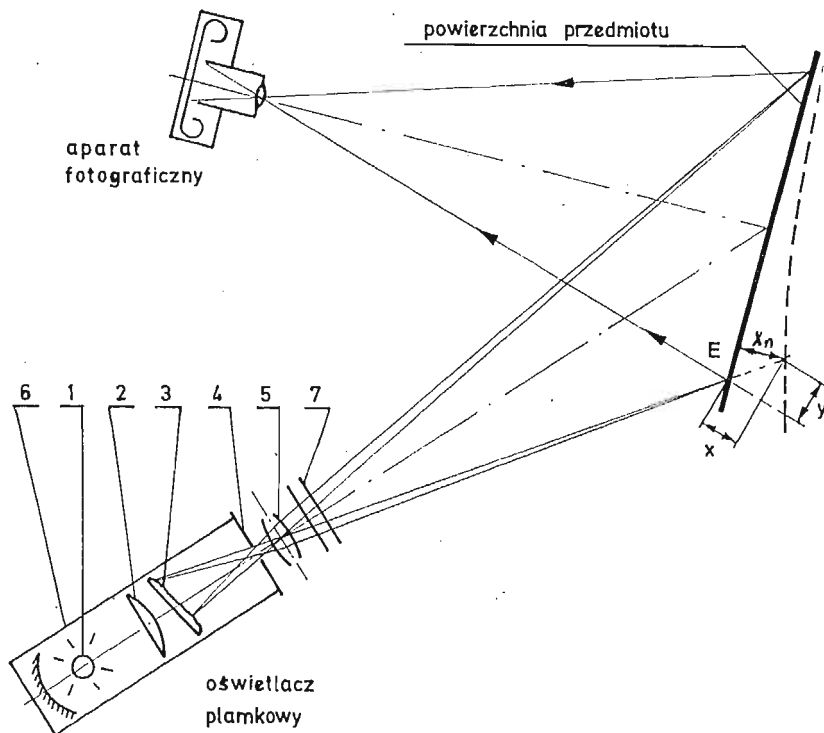
Metody fotografii płamkowej wymagają użycia jako źródła światła lasera, co ogranicza ich stosowalność do przedmiotów o małych wymiarach. Istnieją ponadto pewne trudności w pomiarach dużych przemieszczeń. Wad tych pozbawiona jest metoda nieko-

herentnej fotografii plamkowej. W 1975 r. C. FORNO [11] uzyskał obrazy plamkowe pokrywając badane obiekty specjalną farbą odbłaskową i oświetlając je zwykłym reflektorem. CHIANG i ASUNDI [6] otrzymali efekt „sztucznego plamkowania” wykonując swe modele z materiału w którym rozproszona była zawiesina drobnych ziarenek szkła.

Cechą wspólną wymienionych wyżej metod koherentnej i niekoherentnej fotografii plamkowej jest generacja struktur plamkowych przez powierzchnię obiektu. Umożliwiają one pomiar przemieszczeń kątowych lub prostopadłej do kierunku obserwacji składowej przemieszczenia liniowego. Składowa przemieszczenia liniowego równoległa do kierunku obserwacji nie jest natomiast przy ich pomocy wykrywalna. W metodzie proponowanej przez autorów powierzchnia obiektu stanowi jedynie ekran, na który rzutowana jest struktura plamkowa i którego przemieszczenia normalne powodują proporcjonalne przemieszczenia jej obrazu, rejestrowane na specklogramie. Pozwala ona na punktową i polową analizę prostopadłej do powierzchni przedmiotu składowej przemieszczenia i nie wymaga stosowania ani lasera, ani specjalnych odbłaskowych farb. Metoda białych plamek projekcyjnych jest więc uzupełnieniem metod opracowanych przez Forno, Asundi i Chiang'a.

### 1. Istota metody projekcyjnej

Stanowisko pomiarowe (rys. 1) składa się z projektora, zwanego dalej oświetlaczem plamkowym i małoobrazkowego aparatu fotograficznego. Jeśli przedmiot ma niewielkie wymiary liniowe (rzędu 1 m) można do generacji struktur plamkowych użyć typowego



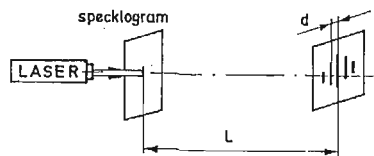
Rys. 1

rzutnika przezroczy wstawiając w miejsce przezrocza matówkę wykonaną metodą piaskowania. Obraz matówki rzucony na powierzchnię przedmiotu daje strukturę plamkową o wymaganych parametrach. Przemieszczenie normalne „ $x_k$ ” i przedmiotu powoduje proporcjonalne przemieszczenie rzutowanych plamek. Ich obraz przesuwa się na błonie filmowej o wielkość  $M \cdot y$ , gdzie  $M$  — powiększenie układu optycznego aparatu fotograficznego. Wykonanie na tej samej klatce fotograficznej zdjęć dwu kolejnych położeń obiektu powoduje nałożenie się na siebie odpowiadających im struktur plamkowych podobnie jak dzieje się to w „klasycznej”, koherentnej fotografii plamkowej. Po fotochemicznej obróbce filmu przesunięte względem siebie plamki tworzą na nim rodzaj minisiatek dyfrakcyjnych. Taki film nazwano specklogramem. Jeśli zmiana wielkości przemieszczenia  $M \cdot y$  (gradient) jest w rozpatrywanym obszarze specklogramu niewielka, to prześwietlając go wiązką lasera (rys. 2) uzyskamy szereg wiązek odchylonych w płaszczyźnie ( $y, z$ ) o kąty

$$\vartheta_n = \arctg(n \cdot \lambda / M \cdot y) \dots \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, 3 \quad (1)$$

$\lambda$  — długość fali świetlnej

Umieszczając w odległości „ $L$ ” za specklogramem ekran „ $E$ ” otrzymamy na nim szereg równoległych prążków, tzw. prążków Young’a, prostopadłych do przemieszczenia „ $y$ ”

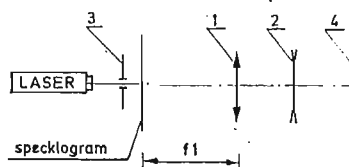


Rys. 2

tego obszaru obiektu, któremu odpowiada prześwietlany wiązką lasera fragment specklogramu. Przemieszczenie „ $y$ ” wyznaczyć możemy ze wzoru

$$y = \frac{\lambda \cdot L}{d \cdot M} \quad \text{gdzie } d \text{ — odległość między prążkami.} \quad (2)$$

Prążki Young’a odznaczają się na ogół niskim kontrastem, zwłaszcza jeśli używamy materiałów fotograficznych gorszej jakości. Znacznie lepsze rezultaty uzyskać można stosując układ przedstawiony na rys. 3, gdzie 1,2 — soczewki  $f+400$  i  $f-1000$ , 3—diagrama, 4 — ekran, matówka lub błona fotograficzna. Jako źródło światła zastosowano laser He-Ne typ LG-600 o długości fali  $0,6328 \mu\text{m}$  i mocy ok. 3 mW w modzie podstawowym.



Rys. 3

Przemieszczenie „ $y$ ” obliczymy wtedy ze wzoru

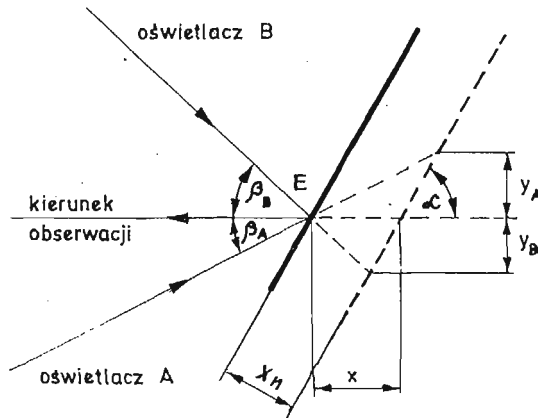
$$y = \frac{\lambda \cdot f'}{d \cdot M} \quad \text{gdzie } f' \text{ — zastępcza ogniskowa układu soczewek 1 i 2.} \quad (3)$$

Możliwe jest również wyznaczenie przemieszczenia „ $y$ ” bez pomocy lasera, przy użyciu niekoherentnych procesów optycznych. Jedną ze stosowanych przez autorów konstrukcji takiego procesora omówiono w dalszej części pracy.

Jeśli zarejestrujemy niezależnie od siebie zdjęcia struktur plamkowych pochodzących od dwu różnych oświetlaczy  $A$  i  $B$ , to znając geometrię układu (rys. 4), w którym wykonano obie fotografie możemy wyznaczyć kąt „ $\alpha$ ” nachylenia rozpatrywanego fragmentu „ $E$ ” badanej powierzchni do kierunku obserwacji oraz jej przemieszczenie normalne „ $x_n$ ”

$$\alpha = \arccos \left( \frac{y_A}{y_B + y_A} \operatorname{ctg} \beta_A - \frac{y_B}{y_B + y_A} \operatorname{ctg} \beta_B \right), \quad (4)$$

$$x_n = y_A (\operatorname{ctg} \beta_A - \operatorname{ctg} \alpha) \cos \alpha. \quad (5)$$

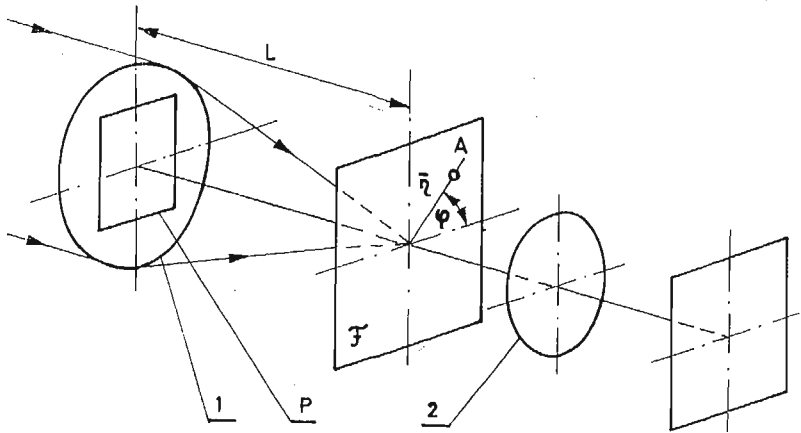


Rys. 4

W przypadku, gdy przystępując do pomiaru znamy już kąt „ $\alpha$ ” do wyznaczenia przemieszczeń wystarczy jeden oświetlacz plamkowy. Gdy oś optyczna aparatu fotograficznego jest prostopadła do powierzchni obiektu powyższy wzór przyjmuje postać

$$x_n = y \operatorname{ctg} \beta. \quad (6)$$

Wyznaczone przemieszczenie „ $x_n$ ” nie jest przypisane żadnemu konkretnemu punktowi obiektu, lecz jest średnią wartością normalnych do jego powierzchni składowych przemieszczeń punktów odpowiadających prześwietlanemu wiązka lasera fragmentowi specklogramu. Dokładność pomiaru metodą „punktową” zależy więc od gradientu przemieszczeń i średnicy wiązki analizującej. Jeśli przedmiot jest płaski, a jego wymiary są znacznie mniejsze od odległości od oświetlacza można analizy przemieszczeń dokonać metodą połową, podobnie jak dla specklogramów laserowych. Przykład układu optycznego służącego do tego celu, stosowanego m.in. przez Chianga i Bełzowskiego przedstawia rys. 5. Równoległa wiązka światła, niekoniecznie spójnego, skupiona jest w płaszczyźnie „ $F$ ” przez



Rys. 5

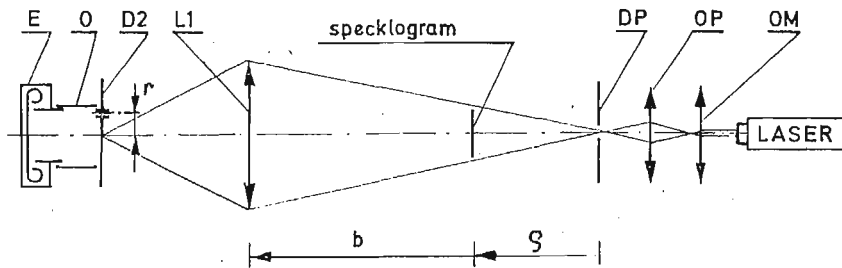
soczewkę 1. W tej samej płaszczyźnie umieszczona jest przesłona z małym otworkiem kołowym w punkcie  $A$ . Między przesłoną, a soczewką 1, w odległości  $L$  od przesłony znajduje się specklogram „ $P$ ” badanego obiektu. Soczewka 2 odwzorowuje obraz przeźrocza „ $P$ ” na błonie filmowej. Ponieważ na specklogramie zarejestrowane są dwie, przesunięte względem siebie struktury plamkowe pełniące rolę siatki dyfrakcyjnej (a ściślej mówiąc zbioru mini-siatek) rozczepia on przechodzącą wiązkę świetlną w szereg wiązek skupionych w płaszczyźnie ogniskowej „ $i$ ” w punktach o współrzędnych

$$\eta_n = \frac{n \cdot \lambda \cdot L}{y \cdot M} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \bar{\eta}_n \perp \bar{y}. \quad (7)$$

Wprowadzenie w płaszczyźnie „ $i$ ” przesłony z małym otworkiem w punkcie  $A$  powoduje, że na błonie filmowej mogą być zarejestrowane tylko te obszary obrazu przedmiotu, dla których ugięta przez specklogram wiązkę świetlną przechodzi przez punkt  $A$ , tzn. których składowa przemieszczenia  $y$  w kierunku prostopadłym do  $\bar{\eta}_A$  wynosi

$$y_n = \frac{n \cdot \lambda \cdot L}{r \cdot M} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (8)$$

Widoczne są one w postaci układu jasnych prążków (warstwic przemieszczeń). Liczbę całkowitą „ $n$ ” nazywamy rzędem prążka. Aczkolwiek opisany układ stosowany bywa z powodzeniem do analizy specklogramów laserowych, w przypadku metody projekcyjnej nie daje on układów prążkowych wysokiej jakości. Na przeszkodzie stoją tu małe wymiary (kątowe) przeźrocza, duże przemieszczenia, stosowanie materiałów fotograficznych niższej jakości (ziarnistość, chropowatość podłoża, niejednorodność warstwy emulsji). Zadowalające rezultaty przynosi natomiast zastosowanie układu (rys. 6), w którym soczewka transformująca  $L1$  pełni równocześnie rolę obiektywu odwzorowującego obraz. W skład przedstawionego na rys. 6 i stosowanego przez autorów koherentnego procesora polowego wchodzi: Laser LG-600, OM — obiektyw mikroskopowy  $\times 10$ , OP — obiektyw powiększalnikowy „Amar S”, DP — pinhol o średnicy ok. 0,01 mm  $L1$  — soczewka  $f+400$ ,  $\phi G4$ , D2 — przesłona otworowa lub szczelinowa, O — osłona, E — lustrzanka małoobrazkowa



Rys. 6

Zenith „E” bez obiektywu. Średnica otworka w przesłonie D2 nie może być mniejsza niż 1 mm ze względu na silne plamkowanie obrazu przezrocza. W analizie przemieszczeń płaskich powierzchni korzystniejsze jest zastosowanie przesłony szczelinowej o szerokości 0,5÷1 mm i długości 5-15 mm. Prowadzi ono do skrócenia czasu naświetlania, polepszania kontrastu prążków oraz, dzięki większej jasności obrazu, ułatwia jego obserwację na matówce aparatu fotograficznego. Zasada działania opisanego układu jest podobna, jak przedstawionego na rys. 3, a poszczególnym prążkom zarejestrowanej struktury odpowiadają przemieszczenia:

$$y = \frac{n \cdot \lambda f^*}{M \cdot \eta} \quad \text{gdzie } n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

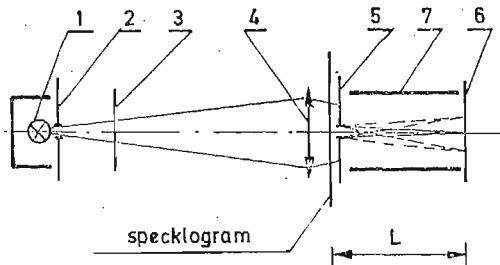
$$f^* = \frac{e \cdot f}{b + e - f} \quad (10)$$

Wyprowadzenie wzoru 10 zawiera praca [5]. Bardzo dobre wyniki można uzyskać dokonując połowej analizy specklogramów otrzymanych metodą projekcyjną przy pomocy niekoherentnych procesorów optycznych.

## 2. Stosowana aparatura

W skład oświetlacza plamkowego (rys. 1) wchodzi: 1 — oświetlacz halogenowy; 2 — kondensator  $f$  200  $\varnothing$  110 mm; 3 — wykonana mechanicznie metodą piaskowania jednostronna matówka szklana 150×210 mm; 4 — przesłona irysowa; 5 — obiektyw  $f$  400  $\varnothing$  64 mm; 6 — obudowa, 7 — płytka płaskorównoległa. Obudowa jest nieprzepuszczalna dla światła, ale zapewnia chłodzenie żarówki halogenowej. Matówka i obiektyw mają możliwość obrotu wokół osi pionowej, co ułatwia „ostre” odwzorowanie struktury plamkowej przy nieprawidłowym oświetleniu powierzchni obiektu. Zgodnie bowiem z twierdzeniem Scheipfluga-Czapskiego najlepszą jakość rzutowanego obrazu uzyskamy wtedy, gdy płaszczyzny: przezrocza — matówki, soczewki obiektywu i płaszczyzny stykającej do powierzchni obiektu przecinają się wzdłuż jednej prostej. Zastosowanie matówki umożliwia odwzorowanie struktury plamkowej na powierzchniach o dowolnym kształcie przy stosunkowo niewielkich stratach energii świetlnej i małych wymiarach pojedynczej plamki. Głębokość ostrości odwzorowania i wielkości plamek można w pewnym zakresie regulować poprzez zmianę przesłony aperturowej 4. Zastosowanie przesłon dwuszczylinowych poprawia

kontrast plamek, prowadzi jednak do zmniejszenia głębi ostrości. Umieszczona przed obiektywem płytka płaskorównoległa 7 posiada możliwość obrotu wokół osi poziomej i jest pomocna przy określaniu małych przemieszczeń metodą kompensacyjną. Wstawienie w miejsce żarówki halogenowej palnika lampy błyskowej lub stroboskopowej umożliwia pomiar przemieszczeń dynamicznych i drgań.



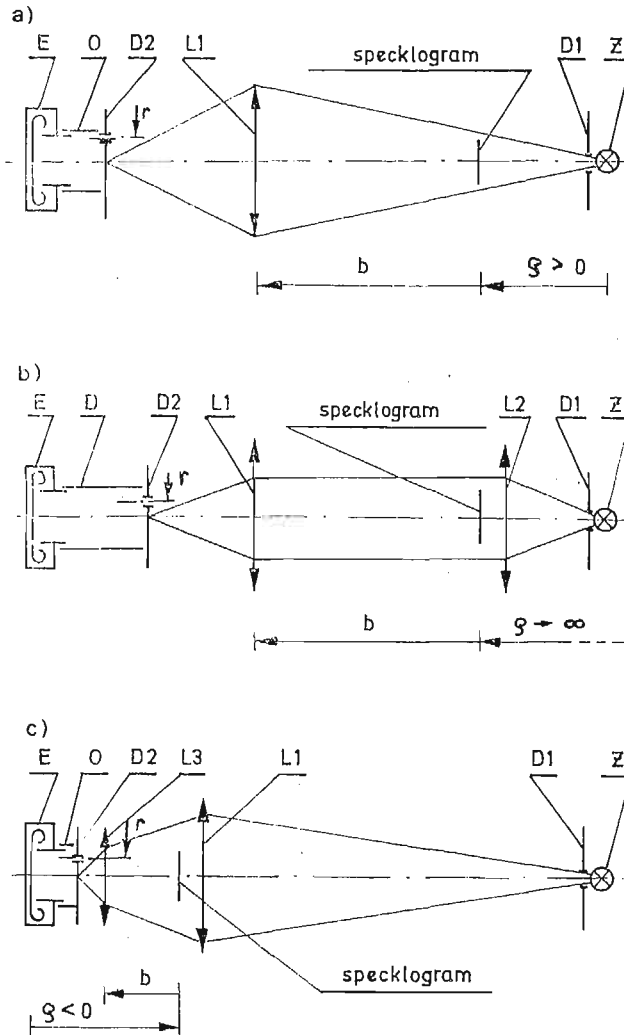
Rys. 7

W skład niekoherentnego analizatora punktowego (rys. 7) wchodzi: 1 — żarówka; 2 — przesłona szczelinowa o szerokości ok. 2 mm; 3 — filtr barwny; 4 — soczewka transformująca  $f+400 \text{ } \varnothing 64 \text{ mm}$ ; 5 — przesłona otworowa  $\varnothing 1 \div 4 \text{ mm}$ ; 6 — matówka lub błona filmowa; 7 — osłona. Ilość otrzymanych prążków, a więc i dokładność przyrządu, zależy od rodzaju filtru i dla wysokoselektywnych filtrów fotograficznych dochodzi do 15-stu. Bez filtru można otrzymać 5 - 8 prążków. Rodzaj żarówki i jej odległość od soczewki transformującej dobierano w ten sposób, by obraz włókna odwzorowany na błonie filmowej lub matówce był mniejszy niż szerokość prążka. Podobnie jak dla analizatora koherentnego wielkość przemieszczenia opisana jest wzorem 3.

Schematy stosowanych przez autorów niekoherentnych analizatorów połowych przedstawia rys. 8.

Przesłony szczelinowe  $D_1$  i  $D_2$  oraz włókno żarówki są do siebie równoległe. Szerokość szczeliny  $D_2$  odpowiada szerokości obrazu włókna żarówki. Wszystkie przedstawione układy dają obrazy prążkowe wysokiej jakości, różnią się natomiast jasnością obrazu i czułością. Przemieszczenie, odpowiadające poszczególnym prążkom opisane jest wzorem 9. Zauważmy, że odległość między warstwicami określonej barwy jest — przy tym samym gradiencie przemieszczenia — proporcjonalna do długości fali. Każdej długości fali odpowiada więc inna struktura prążkowa. Nałożone na siebie dają one charakterystyczny wielobarwny obraz, przypominający obrazy elastoptyczne. Przemieszczeniu zerowemu odpowiada prążek czarny lub szary.

Zastępując w układzie „8c” soczewkę  $L1$  obiektywem „Ketar”  $f 135 \text{ n } 3$  otrzymano przenośny analizator specklogramów o długości 90 cm. Może on pracować jako układ połowy lub po usunięciu obiektywu  $L3$  i przesłony  $D2$  jako analizator punktowy. Błąd pomiaru przy pomocy analizatora przenośnego jest kilkakrotnie większy (ok.  $6 \times$ ) niż w układach przedstawionych wyżej.

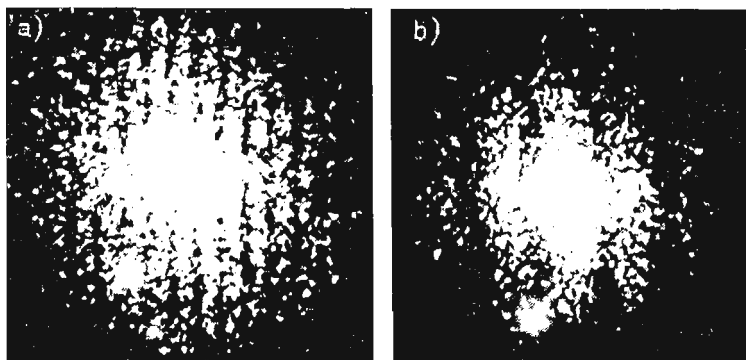


Rys. 8

### 3. Przykład zastosowania metody projekcyjnej

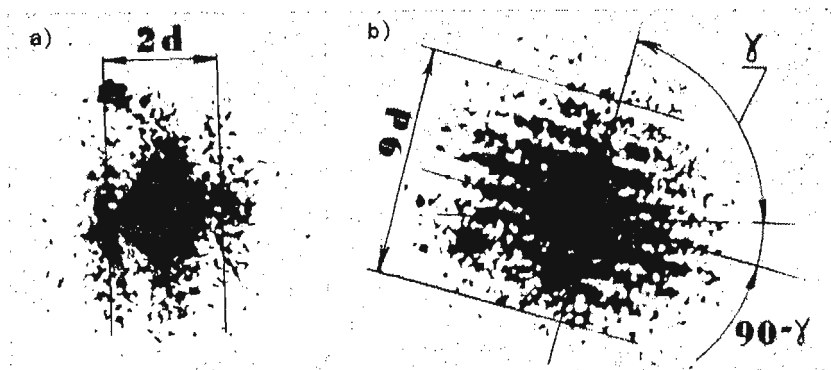
Przydatność metody punktowej sprawdzono na przykładzie sztywnej płyty o wymiarach  $2 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  obracanej o niewielki kąt wokół osi pionowej. Jako oświetlacza punktowego użyto tu rzutnika „Profil S” z obiektywem 85 mm, zmodyfikowanego w sposób opisany wyżej. Wartości przemieszczeń poszczególnych punktów określone na podstawie specklogramów różniły się od rzeczywistych o  $0,5 \div 4\%$ , przy czym większa wartość błędu odpowiada mniejszym przemieszczeniom. Błąd popełniany przy analizie specklogramów przy pomocy punktowych procesów niekoherentnych był tego samego rzędu, ale zakres pomiarowy zmniejszył się dwukrotnie. Obrazy prążkowe odpowiadające różnym przemieszczeniom przedstawia rys. 9. Modelem, na którym sprawdzono oświetlacz plamkowy była pomalowana białą farbą emulsyjną płyta ze szkła organicznego o grubości 3 mm i wymia-





Rys. 9

rach  $420 \times 420$  mm, utwierdzona na brzegu i obciążona punktowo na końcu boku przeciwnego. Odległość płyty od oświetlacza wynosiła 2,5 m, a kąt między jego osią, a powierzchnią płyty  $45^\circ$ . Oś aparatu fotograficznego była prostopadła do płyty. Specklogram rejestrowano na mikrofilmie negatywnym „Super-orto” wywołanym w 5% wywołaczu Rodinal R09 i utrwalanym w utrwalaczu uniwersalnym U1. Zakres pomiarowy przy analizie specklogramów punktowym procesorem koherentnym wynosił  $0,8 \div 12$  mm, a błąd

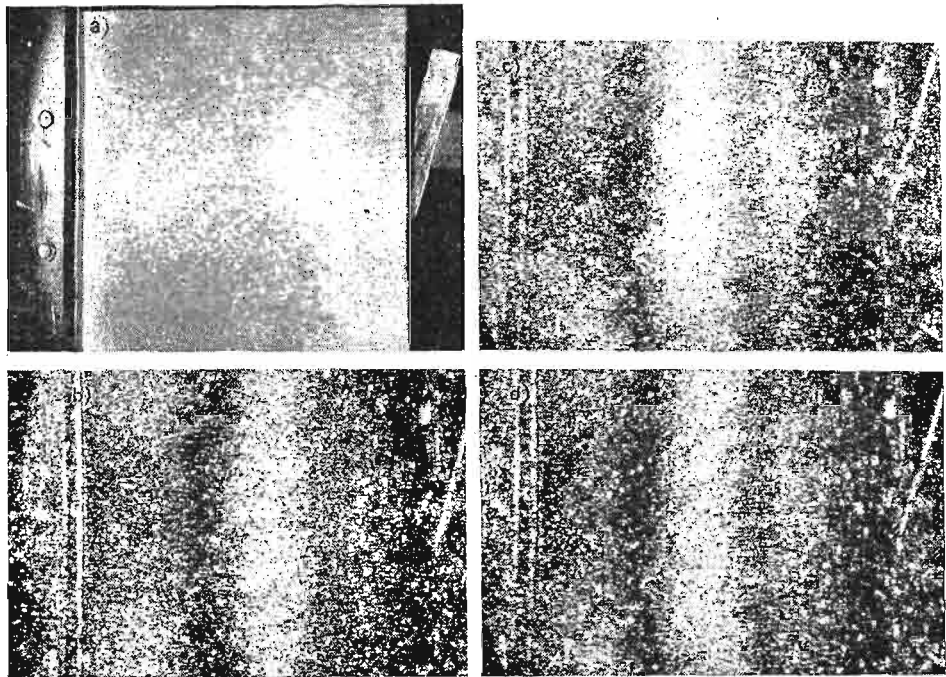


Rys. 10

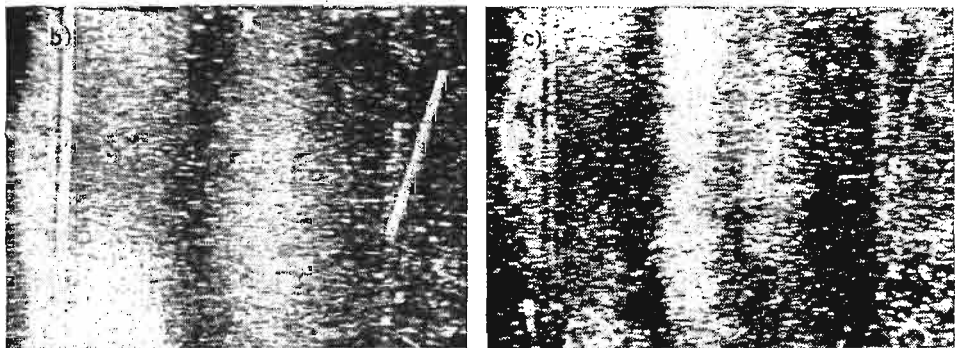
pomiarowy zawierał się w granicach  $0,5 \div 3\%$ . Obrót między ekspozycjami płytki płasko-równoległej umieszczonej przed obiektywem oświetlacza o kąt zapewniający pionowe przemieszczenie rzutowanych plamek o ok. 1 mm pozwolił na obniżenie dolnej granicy zakresu pomiarowego do ok. 0,1 mm i ograniczenie błędu pomiarowego do 0,5% w całym zakresie pomiarowym. Wartości przemieszczeń opisane są w tym przypadku wzorem;

$$x = y = \frac{f \cdot \lambda}{M \cdot d} \cos \gamma$$

$\gamma$  — kąt nachylenia do poziomu  
normalnej do prążków



Rys. 11 a) Dwuekspozycyjna fotografia badanej płyty (specklogram) b, c, d) Warstwy przemieszczeń otrzymane w koherentnym procesorze polowym przy różnych położeniach szczeliny filtrującej częstości przestrzenne.



Rys. 12 Warstwy przemieszczeń otrzymane przy pomocy procesora z żarowym źródłem światła.

Zauważmy, że  $\cos \gamma$  może przyjmować wartości dodatnie i ujemne. Wprowadzenie wstępnego przemieszczenia plamek umożliwia (niestety tylko dla płyt) określenie zwrotu przemieszczenia obiektu. Sposób wyznaczania na podstawie struktury prążkowej otrzymanej w analizatorze punktowym odległości między prążkami „ $d$ ” i kąta „ $\gamma$ ” przedstawia rys. 10. Przykłady struktur prążkowych otrzymanych przy pomocy koherentnego analizatora połowego z przesłoną szczelinową 0,7 mm pokazano na rys. 11, a wyniki analizy tego samego specklogramu w świetle białym przy użyciu układu z rys. 8a przedstawia rys. 12. Zamieszczone obrazy można traktować jako wykresy warstwiczne ugięć płyty zamocowanej i obciążonej w opisany wyżej sposób.

#### 4. Wnioski i uwagi

Metoda białych plamek projekcyjnych umożliwia punktowy pomiar normalnej do powierzchni obiektu składowej przemieszczenia płyt i mało wyniosłych powłok z dokładnością do 0,02% ich maksymalnego wymiaru liniowego, który może dochodzić do kilku metrów. Pomiar metodami połowymi ma, ze względu na małą ilość obserwowanych prążków i błędy spowodowane rozbieżnością wiązki oświetlającej, charakter raczej jakościowy niż ilościowy. Układy służące do rejestracji i analizy specklogramów mogą być wykonane niewielkim kosztem z elementów dostępnych na krajowym rynku fotograficznym. Szeroki zakres dopuszczalnych wymiarów obiektów, łatwość przygotowania ich do badań, stosunkowo duża dokładność pomiarów i łatwość interpretacji ich wyników, bezkontaktowy charakter pomiaru, duża ilość informacji zawartych w pojedynczym specklogramie i jego małe wymiary, możliwość stosowania tanich, krajowych materiałów fotograficznych oraz taniść i dostępność aparatury przemawiają za szerszym zastosowaniem metody zarówno w warunkach laboratoryjnych, jak i przemysłowych. Do jej wad zaliczyć trzeba konieczność pracy w zaciemnieniu, dość wąski zakres pomiarowy uzależniony każdorazowo od parametrów oświetlacza, czasochłonną obróbkę fotograficzną przezrocza.

#### Literatura cytowana w tekście

1. E. ARCHBOLD, A. E. ENNOS, *Displacement measurement from double-exposure laser photographs*, Opt. Acta, 19, 253 - 271.
2. W. BACHMACZ, J. PISAREK, *Wyznaczanie statycznych i dynamicznych przemieszczeń dużych obiektów metodą interferometrii plamkowej*, IX Symp. Badań Dośw. w Mechanice Ciała Stałego” Warszawa 24 - 27.IX.1980.
3. A. BÉLZOWSKI, M. KASPRZAK, *Zastosowanie interferometrii plamkowej z rekonstrukcją połową w badaniach nieniszczących* IX Symp. Badań Dośw. w Mechanice Ciała Stałego. Warszawa 24 - 27.IX.1980.
4. J. M. BURCH, J. M. TOKARSKI, Opt. Acta 15 No2, 101/1968.
5. W. T. CATHEY, *Optyczne przetwarzanie informacji i holografia*, PWN, Warszawa 1978.
6. CHIANG, Asundi — Applied optics, 19 No 14 s. 152 July 1980.
7. F. P. CHIANG, R. JUANG, *Laser speckle interferometry for plate bending problems*, Appl. Opt. Vol. 15 No 9 (1976).
8. *Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń*, pod redakcją Z. ORLOSIA. rozdz. 7. A. BUTT-HUSSAIM: *Metody mory*. PWN, Warszawa 1977.
9. A. J. DURELLI, V. J. PARKS, *Moiré Analysis of Strain* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1970.

10. R. K. ERF, *Speckle metrology*, Academic Press, New York 1978.
11. C. FORNO, *White light speckle photography for measuring deformation strain and shape*, Opt. and laser technology, oct. 1975.
12. N. FERNELIUS, C. TOME, J. opt. Soc. Am. 6, 559.
13. M. FRANCON, *Optika spjekwov*, Izd. Mir, Moskwa 1980.
14. H. GIGER, Opt. Acta 15 nr 5 s. 511, 1968.
15. JOGEUX, Appl. Optics 15, s. 1241 - 1248, 1976.
16. M. KASPRZAK, *Interferometria plamkowa w zastosowaniu holografii do badań nieniszczących*. Pr. Nauk. Inst. Fiz. P. Wr. Seria: SPR Nr 36/80 Wroclaw 80, s. 128 - 158.
17. M. MATCZAK, *Metoda plamkowa w: Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń*, PWN, W-wa 1977.
18. E. MRÓZ, *Technika plamkowa — jej porównanie z interferometrią holograficzną i techniką mory w: Holografia optyczna*. PWN, W-wa 1980.
19. V. J. PARKS, *The range of speckle metrology*. Exp. Mech. June 1980.
20. L. M. ROGERS, *Noncoherent Optocal Processing*, Willey and Sons 1977.
21. H. J. TIZIANI, Opt. Commun. 5. 271, 1972.
22. W. VOCKE, K. ULLMANN, *Experimentelle Dehnungsanalyse*, Dehngitter und Moireverfahren VEB Fachbuchverlag, Lipsk 1974.

## Р е з ю м е

АНАЛИЗ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ СПЕКЛОВ (ПЯТНИСТЫХ СТРУКТУР)  
В БЕЛОМ СВЕТЕ

В работе представлен новый вариант метода спеклов. Пятнистая структура, получена с помощью матового стекла проектируется на поверхность исследуемого объекта. На основании фотографий объекта до- и после нагружения определяются перемещения. К анализу спектрограмм применено некогерентные оптические прецессоры.

## S u m m a r y

DISPLACEMENT OF SURFACE BY WHITE SPECKLE PHOTOGRAPHY

The new method of speckle photography is presented. The white speckle patterns are created by ground glass and projected onto the surface of the tested object. Displacement of the surface can be measured by recording a double — exposure photography of the object illuminated by speckle — projector, followed by optical processing of the recorded speckle pattern image. The analysis can be performed either point — by — point technique, or by spatial filtering technique which resolves the motion in direction perpendiculary to object surface. Noncoherent optical processors are used to analyse speckle pattern image.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 maja 1981 roku*

WPLYW PARAMETRÓW PROGRAMOWANEGO PRZEBIEGU OBCIĄŻENIA  
NA TRWAŁOŚĆ ZMĘCZENIOWĄ

BOGUMIŁA KUŹNICKA

*Instytut Materialoznawstwa  
i Mechaniki Technicznej  
Politechniki Wrocławskiej*

Wykaz oznaczeń

- $n_i$  — liczba cykli zmian naprężenia o wartości  $\sigma_{ai}$   
 $n_0$  — liczba cykli w bloku programu naprężeń.  
 $\sigma_{ai}$  — wartość amplitudy naprężeń odpowiadająca  $i$ -temu stopniowi w programie naprężeń  
 $\xi$  — współczynnik wypełnienia widma  
 $N_c$  — sumaryczna liczba cykli do złomu próbek przy obciążeniach programowanych  
 $\sigma_{ap}$  — wartość amplitudy naprężenia odpowiadająca pierwszemu stopniowi programowanego przebiegu naprężenia  
 $N_G$  — graniczna (bazowa) liczba cykli

1. Wstęp

Badania zmęczeniowe przy programowanych przebiegach obciążenia prowadzone są w celu wyznaczenia własności zmęczeniowych materiałów i trwałości eksploatacyjnej elementów konstrukcji przenoszących losowo zmienne obciążenia. Obecnie stosowane metody badań programowanych polegają na zastąpieniu eksploatacyjnych przebiegów obciążenia przebiegami sinusoidalnymi o zmiennej amplitudzie (tzw. blokowymi przebiegami obciążenia), różnego rodzaju przebiegami pseudolosowymi lub losowymi o danych charakterystykach statystycznych. Szereg względów przemawia za realizacją metod badań przy blokowym przebiegu obciążenia, z których najważniejsze to: możliwość znacznego przyspieszenia badań i ich niski koszt, wynikający z zastosowania mało skomplikowanych urządzeń.

Zastąpienie obciążeń eksploatacyjnych obciążeniami sinusoidalnymi o zmiennej amplitudzie wymaga między innymi odpowiedniego doboru parametrów programu obciążenia [1], od których zależy zgodność trwałości wyznaczonej w badaniach programowanych z trwałością eksploatacyjną. W literaturze można znaleźć pewne wskazówki (opracowane na podstawie badań), dotyczące modelowania obciążeń, które w pewnym stopniu norma-

lizują programowane przebiegi obciążenia. Stosowanie tych wskazówek jest korzystne głównie z punktu widzenia możliwości późniejszego porównywania wyników badań, a także odtwarzania samych badań.

O niedoskonałości stosowanych metod opracowywania programów obciążenia świadczą różnice (w niektórych przypadkach bardzo istotne [2, 3]) w trwałościach zmęczeniowych, wyznaczonych przy eksploatacyjnych przebiegach obciążenia i zastępujących je przebiegach programowanych. Wnioski wynikające z badań wpływu parametrów programu obciążenia na trwałość zmęczeniową, w wielu przypadkach różnią się, a nawet są sprzeczne [4]. Przyczyną sprzeczności jest prawdopodobnie fakt, że wpływ każdego z parametrów programu obciążenia na trwałość zależy od doboru wartości pozostałych parametrów. Utrudnia to wyciągnięcie prawidłowych wniosków z badań, w których zmienny jest tylko jeden z parametrów programu. Ponadto w wielu pracach wyniki badań nie były poddawane analizie statystycznej. Stąd też interpretacja istotności uzyskiwanych różnic w wynikach (zwłaszcza przy dużych rozrzutach charakterystycznych dla badań programowanych) w przypadkach niektórych prac może być tendencyjna. Dlatego pożądane jest prowadzenie badań pozwalających określić związki między poszczególnymi parametrami przy wyznaczaniu ich wpływu na trwałość zmęczeniową oraz dokładniejsze opracowywanie ich wyników.

Dane literaturowe zebrane w pracy [4] wskazują, że najsilniejszą niejasność i rozbieżność zdań jest we wnioskach dotyczących wpływu sekwencji obciążeń na trwałość zmęczeniową. Poza tym brak jest danych dotyczących:

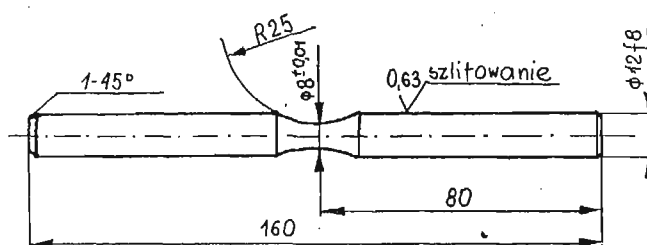
- wpływu pierwszego stopnia obciążenia w programie na trwałość zmęczeniową oraz zależności tego wpływu od rodzaju sekwencji obciążeń w programowanym przebiegu i zakresu wartości występujących w nim obciążeń,
- wpływu parametrów programu obciążenia na trwałość w zależności od rodzaju materiału.

Należy również zaznaczyć, że w wielu pracach, których autorzy oceniali wpływ poszczególnych parametrów programu obciążenia na przebieg krzywych trwałości zmęczeniowej, przyjmowano do badań bloki obciążenia o stałej liczbie cykli, niezależnie od wartości obciążenia maksymalnego  $\sigma_{a \max}$  w przebiegu. W takim przypadku ze zmianą wartości obciążenia  $\sigma_{a \max}$  w programie zmieniała się liczba powtórzeń bloku do złomu, co mogło mieć dodatkowy wpływ na przebieg krzywych trwałości. Celowe jest więc doświadczalne sprawdzenie, czy przebieg krzywych trwałości, wyznaczonych przy programach o stałej liczbie cykli w bloku, różni się od przebiegu krzywych, wyznaczonych przy blokach o liczbie cykli dobranej tak, aby powtarzalność bloku była stała (niezależnie od wartości obciążenia  $\sigma_{a \max}$ ).

Celem niniejszej pracy jest określenie wpływu wybranych parametrów przebiegu naprężenia: sekwencji naprężeń, stopnia naprężenia rozpoczynającego przebieg oraz liczby cykli w bloku na trwałość zmęczeniową. Przyjęty program badań zakładał ustalenie, czy wpływ każdego z tych parametrów (z osobna) na trwałość zależy od doboru dwóch pozostałych parametrów oraz od wartości naprężeń występujących w przebiegu i rodzaju materiału.

## 2. Przebieg badań

**2.1. Urządzenie i próbki.** Badania zmęczeniowe przeprowadzono na czterowrzecionowej maszynie UBM. (produkcji NRD) przeznaczonej do badań przy obrotowym zginaniu. Kształt i wymiary badanych próbek przedstawiono na rys. 1. Próbki wykonano z duralu PA6N (w stanie po starzeniu samorzutnym) oraz mosiądzu MO58 (w stanie wyżarzonym). Przy wyborze materiałów wzięto pod uwagę fakt, że w przypadku wybranych materiałów przebieg krzywych zależności odkształceń sprężystych i plastycznych od liczby cykli, jest różny [5, 6]. Można więc było spodziewać się, że proces zmęczenia przy programowanych przebiegach obciążenia będzie przebiegał w obydwu stopach odmiennie. Własności mechaniczne badanych stopów, wyznaczone po obróbce cieplnej, podano w tabelcy 1.



Rys. 1. Kształt i wymiary badanych próbek

Tabela 1

Własności mechaniczne duralu PA6N i mosiądzu MO58

Materiał	Własności wytrzymałościowe			Własności plastyczne		
	R [MPa]	R <sub>0,2</sub> [MPa]	E [MPa]	A [%]	Z [%]	HV <sub>10</sub> [MPa]
PA6N	407	254	5,74 · 10 <sup>4</sup>	22	39	1690
MO58	392	125	7,82 · 10 <sup>4</sup>	42	38	1060

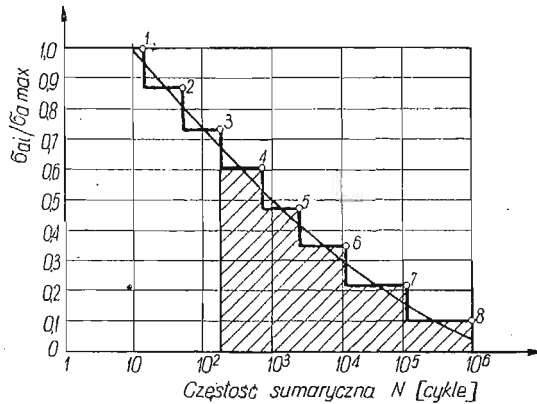
**2.2. Program badań.** Całość zrealizowanych badań można podzielić na dwa etapy:

- w pierwszym wyznaczono krzywe Wöhlera duralu i mosiądzu w zakresie ograniczonej i nieograniczonej ( $N_G = 5 \cdot 10^7$  cykli dla PA6N,  $N_G = 5 \cdot 10^7$  cykli dla MO58) wytrzymałości zmęczeniowej, potrzebne do opracowania programu dalszych badań,
- w drugim wyznaczono krzywe trwałości zmęczeniowej przy programowych przebiegach naprężenia o różnych parametrach, w zakresie ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej.

Warunki badań programowanych opracowano koncentrując się bardziej na wartościach poznawczych uzyskiwanych wyników, niż możliwości bezpośredniego ich wykorzystania w praktyce. Wobec powyższego, w celu wyznaczenia zależności wpływu sekwencji na trwałość zmęczeniową od wartości pierwszego stopnia naprężenia w przebiegu

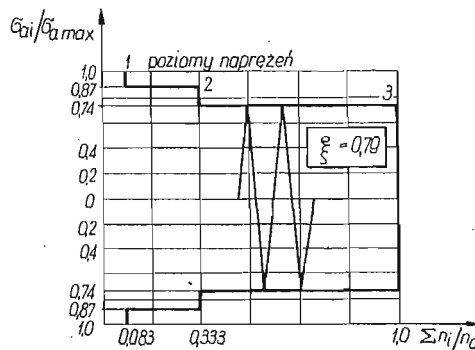
(dla różnych zakresów wartości naprężeń), dobrano pozostałe parametry przebiegu (liczbę cykli w bloku, liczbę stopni naprężenia w przebiegu) tak, aby sprzyjały one wystąpieniu wpływu sekwencji.

Dane literaturowe zebrane w pracy [4] sugerują, że wpływ sekwencji jest tym większy, im mniejsza jest powtarzalność bloku przebiegu do złomu oraz im mniejsza jest liczba stopni w bloku. Dlatego przyjęto do badań trzystopniowe przebiegi naprężenia. Liczbę cykli w bloku dobierano tak, aby średnia jego powtarzalność do złomu była trzykrotna, niezależnie od wartości naprężeń występujących w przebiegu. Nie dotyczy to przebiegów naprężenia, w przypadku których zwiększenie powtarzalności bloku do złomu było celowe (określenie wpływu sekwencji w zależności od liczby cykli w bloku).



Rys. 2. Dwumianowy rozkład częstości sumarycznej w układzie półlogarymicznym i aproksymujący go 8-stopniowy rozkład częstości

Ponieważ względna powtarzalność poszczególnych wartości naprężenia w bloku może mieć wpływ na uzyskiwane wyniki, całkowite liczby cykli w bloku podzielono między poszczególne stopnie naprężenia według krzywej półlogarymicznego rozkładu dwumianowego (rys. 2), stosowanego przez Gassnera [7]. Z danych doświadczalnych przedstawionych w pracy [1] (s. 62) wynika, że przy wysokich wartościach stosunku  $\sigma_{a \max}/Z_{g0}$  wpływ naprężeń niższych od nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej na trwałość zmęcze-



Rys. 3. Histogram amplitud naprężenia przyjęty w badaniach własnych



niową jest niewielki. Wobec powyższego, w celu skrócenia czasu badań pominięto w przyjętym rozkładzie naprężenia o amplitudzie  $\sigma_{ai} < 0,74 \sigma_{a\max}$  (zakreskowana na rys. 2 część wykresu). W rezultacie najniższe naprężenia w przebiegach o określonych wartościach  $\sigma_{a\max}$  osiągały najniższą wartość równą nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej. Na rys. 3 pokazano przyjęty do badań histogram naprężeń, na podstawie którego opracowano wszystkie przebiegi naprężenia zrealizowane w badaniach własnych.

Wpływ sekwencji naprężeń na trwałość stopów PA6N i MO58 określono realizując przebiegi o rosnącej (SR) i malejącej (SM) kolejności następowania poszczególnych stopni naprężenia (rys. 4). Dla każdego rodzaju sekwencji przyjęto:

a) trzy wartości naprężenia maksymalnego w przebiegu:

$$\sigma_{a\max} = 1,60; 1,48; 1,36 Z_{g0} \text{ dla stopu PA6N,}$$

$$\sigma_{a\max} = 1,53; 1,42; 1,31 Z_{g0} \text{ dla stopu MO58,}$$

b) trzy wartości naprężenia rozpoczynającego przebieg (rys. 4):

$$\sigma_{ap} = \sigma_{a\max}; \sigma_{a\text{sr}}; \sigma_{a\text{min}}$$

c) liczbę cykli w bloku  $n_0$ :

— stałą (w pierwszej serii badań) dla wszystkich wartości  $\sigma_{a\max}$  dobrana tak, aby średnia powtarzalność bloku do złomu przy najwyższej wartości  $\sigma_{a\max}$  była trzykrotna, czyli:

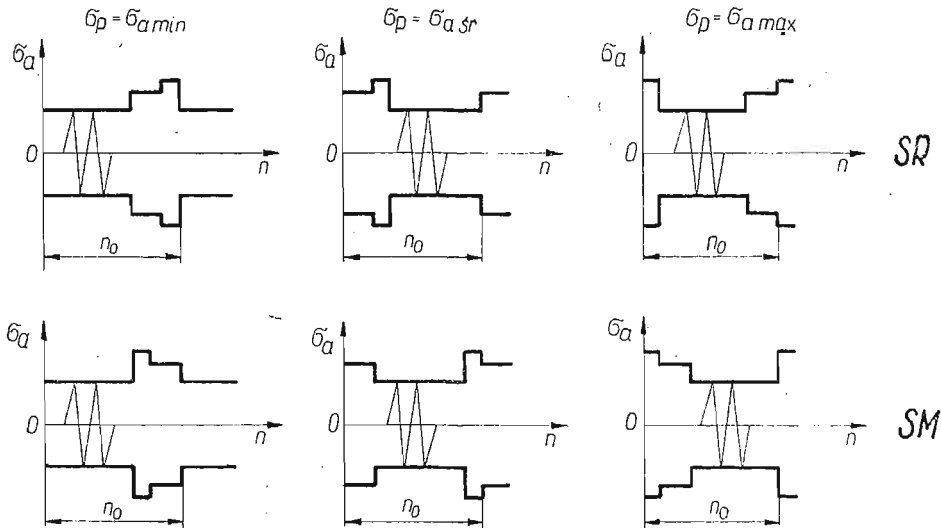
$$n_0 = 4,2 \cdot 10^5 \text{ cykli dla duralu PA6N,}$$

$$n_0 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ cykli dla mosiądzu MO58,}$$

— zależną od wartości  $\sigma_{a\max}$ , tzn. dobraną tak, aby średnia powtarzalność bloku do złomu była trzykrotna dla każdej wartości  $\sigma_{a\max}$  ( $n_0 \sim N$ ), mianowicie:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{a\max} = 1,60 Z_{g0}; 1,48 Z_{g0}; 1,36 Z_{g0}, \\ n_0 = 4,2 \cdot 10^5; 6,0 \cdot 10^5; 1,2 \cdot 10^6 \text{ cykli} \end{array} \right\} \text{ dla PA6N,}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{a\max} = 1,53 Z_{g0}; 1,42 Z_{g0}; 1,31 Z_{g0}, \\ n_0 = 1,2 \cdot 10^5; 3,6 \cdot 10^5; 9,6 \cdot 10^5 \text{ cykli} \end{array} \right\} \text{ dla MO58,}$$



Rys. 4. Schemat przebiegów naprężenia zastosowanych w badaniach

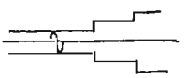
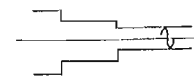
Tak zaprojektowany program badań umożliwił określenie — oprócz wpływu sekwencji naprężeń na trwałość w zależności od wybranych parametrów przebiegu naprężenia — również wpływu stopnia naprężenia rozpoczynającego przebieg i czasu trwania bloku przebiegu przy różnych rodzajach sekwencji naprężeń. Badania przeprowadzono przyjmując 5-8 próbek na każdy poziom naprężenia  $\sigma_{amax}$ , w zależności od rozrzutu wyników.

Oceny wpływu poszczególnych parametrów przebiegu na trwałość dokonywano porównując położenie uzyskanych przy programowanych przebiegach naprężenia, krzywych trwałości zmęczeniowej w układzie  $\sigma_{amax} - \log N_c$ .

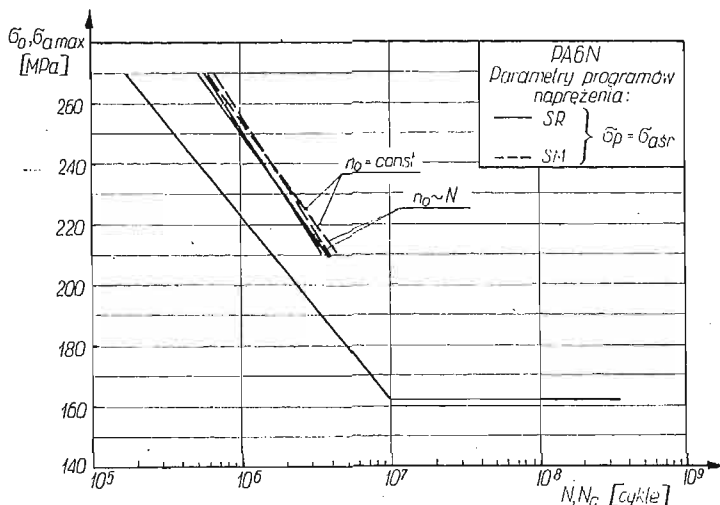
**2.3. Opracowanie wyników badań.** W opracowaniu wyników badań zastosowano metodę najmniejszych kwadratów przy założeniu liniowego przebiegu funkcji:  $\sigma_a = f(\log N)$ ,  $\sigma_{amax} = f(\log N_c)$ . Otrzymano w ten sposób proste regresji i odpowiadające im przedziały ufności wartości średnich i pojedynczych spostrzeżeń na poziomie istotności 95%. Równania tych prostych zestawiono w tablicy 2. Dla przykładu na rys. 5 i 6 przedstawiono zestawienie niektórych prostych, otrzymanych dla obydwu badanych materiałów przy przebiegach naprężenia, w których zmianie ulegały dwa parametry przebiegu: sekwencja naprężeń i liczba cykli w bloku. Dla orientacji na rysunkach pokazano również przebieg krzywej Wöhlera odpowiedniego materiału. Następnie przeprowadzono szczegółową analizę statystyczną wpływu rozpatrywanego parametru przebiegu naprężenia na położenie

Tablica 2

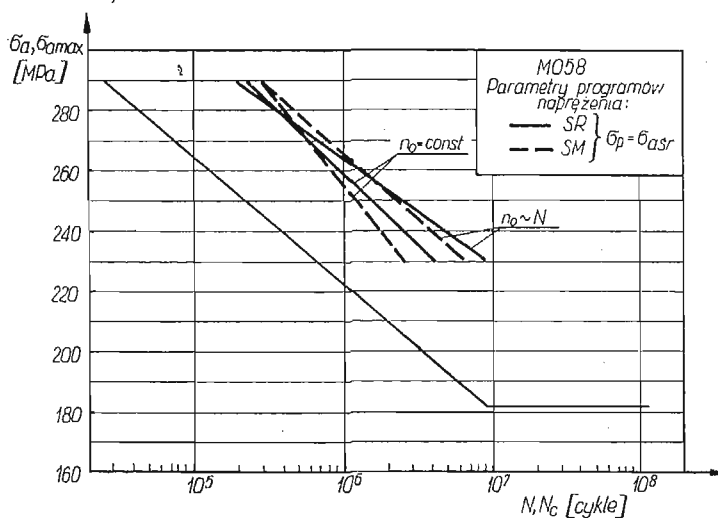
Równania prostych regresji, wyznaczone dla zrealizowanych w badaniach programowych przebiegów naprężenia

Materiał	Naprężenie początkowe $\sigma_{ap}$	SR 		SM 	
		$n_0 = \text{const}$	$n_0 \sim N$	$n_0 = \text{const}$	$n_0 \sim N$
PA6N	$\sigma_{a \text{ min}}$		$\hat{y} = 9,95798 - 0,01498x$		$\hat{y} = 10,63809 - 0,01795x$
	$\sigma_{a \text{ sr}}$	$\hat{y} = 9,52983 - 0,01402x^{*)}$	$\hat{y} = 9,43671 - 0,01361x$	$\hat{y} = 9,32545 - 0,01303x$	$\hat{y} = 9,70012 - 0,01453x$
	$\sigma_{a \text{ max}}$		$\hat{y} = 9,46749 - 0,01362x$		$\hat{y} = 8,81307 - 0,01128x$
MOSS	$\sigma_{a \text{ min}}$		$\hat{y} = 12,56535 - 0,02479x$		$\hat{y} = 11,20887 - 0,02025x$
	$\sigma_{a \text{ sr}}$	$\hat{y} = 11,30797 - 0,02047x$	$\hat{y} = 13,24079 - 0,02737x$	$\hat{y} = 10,23683 - 0,01652x$	$\hat{y} = 12,25855 - 0,02359x$
	$\sigma_{a \text{ max}}$		$\hat{y} = 10,83073 - 0,01901x$		$\hat{y} = 12,41563 - 0,02512x$

\*)  $\hat{y} = \log N_c$ ,  $x = \sigma_{amax}$



Rys. 5. Krzywe trwałości zmęczeniowej wyznaczone dla duralu PA6N przy przebiegach naprężenia, w których liczba cykli w bloku:  $n_0 = \text{const} = 4,2 \cdot 10^5$  cykli oraz  $n_0 \sim N$  ( $n_0 = 4,2 \cdot 10^5; 6,0 \cdot 10^5; 1,2 \cdot 10^6$  cykli odpowiednio dla:  $\sigma_{a, \text{max}} = 260, 240, 220$  MPa).



Rys. 6. Krzywe trwałości zmęczeniowej wyznaczone dla mosiądzu M05B przy przebiegach naprężenia, w których liczba cykli w bloku:  $n_0 = \text{const} = 1,2 \cdot 10^5$  cykli oraz  $n_0 \sim N$  ( $n_0 = 1,2 \cdot 10^5; 3,6 \cdot 10^5; 9,6 \cdot 10^5$  cykli odpowiednio dla  $\sigma_{a, \text{max}} = 280, 260, 240$  MPa).

uzyskanych prostych regresji. Statystyczna ocena różnic trwałości zmęczeniowej, uzyskanej przy przebiegach naprężenia o różnych parametrach, polegała na porównaniu położenia odpowiednich prostych regresji. Porównanie dwóch lub trzech (w zależności od rodzaju parametru, którego wpływ był analizowany) prostych regresji obejmowało:

- porównanie współczynników kierunkowych tych prostych testem *t*-Studenta w przypadku dwóch prostych i testem istotności *F* dla (kilku średnich) w przypadku trzech prostych [8],
- porównanie średnich generalnych tych prostych przy pomocy wymienionych wyżej testów.

W przypadku stwierdzenia, że trzy proste są równoległe oraz że różnica między ich średnimi generalnymi jest istotna, dalsze postępowanie polegało na sprawdzeniu, między którymi z porównywanych średnich różnica jest istotna. Zastosowano do tego celu wielokrotny test rozstępu Duncana [9].

W przypadku stwierdzenia, że różnice w nachyleniu prostych są istotne, porównania średnich dokonywano na każdym poziomie naprężenia  $\sigma_{a\max}$  przy pomocy testu *t* lub testu rozstępu Duncana.

Stwierdzenie nieistotnych różnic między położeniami porównywanych prostych regresji oznaczało brak istotności wpływu określonego parametru obciążenia na trwałość zmęzeniową.

Stosowanie testu *t* jak i testu Duncana wymaga spełnienia warunku jednorodności wariancji oszacowania. O jednorodności względnie niejednorodności wariancji wnioskowano na podstawie testu istotności *F* — dla wariancji oraz testu  $\chi^2$  — dla trzech wariancji [8]. Jeżeli w wyniku testowania stwierdzono, że wariancje są niejednorodne (miało to miejsce tylko w jednym przypadku porównywania dwu prostych), istotność różnic między nachyleniami prostych i ich średnimi generalnymi, oceniono korzystając z odpowiednio opracowanego dla tego przypadku testu *t* — Studenta [9].

Szczegółowe wyniki badań oraz przebieg obliczeń statystycznych podano w pracy [4].

### 3. Analiza wyników badań

Przeprowadzona analiza statystyczna wykazała, że stosowanie w badaniach trzystopniowych przebiegów naprężenia o wartościach naprężeń stopniowo rosnących lub malejących, nie powoduje istotnych zmian trwałości zmęzeniowej duralu PA6N w całym, przyjętym w badaniach zakresie naprężeń maksymalnych w przebiegu:  $\sigma_{a\max} = 1,36 \times 1,6 Z_{go}$ . Wpływ sekwencji naprężeń jest nieistotny niezależnie od tego, który z trzech stopni naprężenia:  $\sigma_{a\max}$ ,  $\sigma_{a\text{śr}}$ , czy  $\sigma_{a\min}$  rozpoczyna przebieg oraz niezależnie od przyjętej liczby cykli w bloku (rys. 5). Sugeruje to, że w przypadku duralu sposób modelowania programu naprężeń z punktu widzenia kolejności ich następowania może być dowolny.

Trwałość mosiądzu natomiast okazała się być zależną od rodzaju sekwencji, ale tylko w przypadku przebiegów rozpoczynających się od najniższego stopnia naprężenia  $\sigma_{a\min}$  i o dużej objętości bloku, dającej średnio trzykrotną powtarzalność bloku do złomu. Trwałość zmęzeniowa mosiądzu wyznaczona przy przebiegu naprężeń o sekwencji rosnącej jest wówczas większa średnio o 50% od trwałości wyznaczonej przy sekwencji malejącej w całym, przyjętym w badaniach, zakresie naprężeń maksymalnych w przebiegu:  $\sigma_{a\max} = 1,31 - 1,53 Z_{go}$ . Wynika stąd, że stosowanie w badaniach mosiądzu przebiegu o rosnącej sekwencji naprężeń, dużej objętości bloku i rozpoczynających się od najniższego stopnia naprężenia, może spowodować umocnienie mosiądzu objawiające się wzrostem trwałości zmęzeniowej.

Wobec powyższego można powiedzieć, że obydwa badane materiały w tych samych warunkach obciążenia charakteryzują się różną wrażliwością na zmianę sekwencji naprężeń. Mała wrażliwość duralu (mimo odpowiedniego doboru liczby cykli i stopni naprężenia w bloku programu, sprzyjających — według danych literaturowych — wystąpieniu wpływu sekwencji) nasuwa wniosek, że czynnikiem decydującym o pojawieniu się wpływu sekwencji jest nie tylko (jak sądzą autorzy pracy [10]) mała powtarzalność bloku przebiegu naprężenia do złomu, ale również rodzaj materiału. Potwierdzeniem tego wniosku mogą być wyniki badań, przedstawione w pracy [11].

Fakt stwierdzenia wpływu sekwencji na trwałość mosiądzu tylko w przypadku przebiegów rozpoczynających się od najniższego stopnia naprężenia, świadczy o zależności tego wpływu od kolejnego czynnika — stopnia naprężenia rozpoczynającego przebieg. Według literatury, trwałość zmęczeniowa osiąga najwyższe wartości w przypadku przebiegów o rosnącej sekwencji naprężeń, natomiast w przypadku sekwencji malejącej — najniższe (cyt. za [12]). Odwrotny charakter wpływu sekwencji stwierdzono na przykład w pracy [13]. Można więc przypuszczać, że różnice we wnioskach wynikających z tego typu badań są spowodowane różnym doбором pozostałych parametrów przebiegów, takich jak np. stopień naprężenia rozpoczynający przebieg.

Porównując parametry prostych regresji — wyznaczonych dla stopu PA6N przy przebiegach rozpoczynających się od różnych stopni naprężenia — stwierdzono, że trwałość przy przebiegach SR, rozpoczynających się od najniższego stopnia naprężenia, jest o 51% większa od trwałości przy przebiegach, w których  $\sigma_{ap} = \sigma_{a,sr}$ ,  $\sigma_{a,max}$  w całym badanym zakresie wartości naprężenia  $\sigma_{a,max}$ . W przypadku przebiegu SM, rozpoczynając realizację przebiegów od różnych stopni naprężenia otrzymuje się istotnie różne trwałości duralu. Różnice trwałości są zależne od wartości naprężenia  $\sigma_{a,max}$ . Dla najniższej wartości  $\sigma_{a,max} = 1,36 Z_{g0}$  trwałość zmęczeniowa — przy przebiegu rozpoczynającym się od najniższego stopnia naprężenia — jest maksymalnie o 128% większa od trwałości wyznaczonej przy przebiegu, które rozpoczyna naprężenie  $\sigma_{a,max}$ . Należy przy tym zaznaczyć, że uzyskane bezwzględne różnice w trwałościach są w przybliżeniu równe sumie liczb cykli dwóch pierwszych stopni naprężeń w przebiegu; w którym  $\sigma_{ap} = \sigma_{a,min}$ . Można więc sądzić, że w żadnym ze zrealizowanych przypadków przebiegów naprężenia nie wystąpił efekt umocnienia duralu.

Zależność trwałości zmęczeniowej mosiądzu MO58 od wartości naprężenia rozpoczynającego przebieg istnieje tylko w przypadku realizacji przebiegów SR. Wpływ naprężenia początkowego jest tym większy, im niższa jest wartość maksymalnego naprężenia w przebiegu. Trwałość przy przebiegach, w których naprężenie początkowe  $\sigma_{ap} = \sigma_{a,min}$ ,  $\sigma_{a,sr}$  jest maksymalnie o 235% większa od trwałości przy przebiegach, w których  $\sigma_{ap} = \sigma_{a,max}$  dla  $\sigma_{a,max} = 1,31 Z_{g0}$ . Tak duża różnica trwałości świadczyć może o wystąpieniu silnego efektu umocnienia mosiądzu.

Analizując parametry prostych wyznaczonych przy różnych objętościach bloku przebiegu (rys. 5) stwierdzono, że trwałość stopu PA6N wyznaczona przy przebiegach naprężenia, w których liczba cykli w bloku jest stała (niezależnie od wartości  $\sigma_{a,max}$ ) nie różni się istotnie od trwałości wyznaczonych w przebiegach, w których liczba cykli w bloku zapewniała zbliżoną liczbę jego powtórzeń do złomu dla każdej wartości naprężenia  $\sigma_{a,max}$ . Wpływ liczby cykli w bloku na trwałość duralu jest nieistotny niezależnie od sekwencji naprężeń w przebiegu.

Zastosowanie powyższych sposobów przyjęcia liczby cykli w bloku przebiegu do określenia położenia krzywych trwałości zmęczeniowej mosiądzu MO58 ma istotny wpływ na położenie tych krzywych. W przypadku przebiegów zarówno SR jak i SM, 8-krotny wzrost liczby cykli w bloku powoduje wzrost trwałości mosiądzu o 112% (rys. 1). Oznacza to, że w zakresie małej liczby bloków realizowanych do złomu, trwałość zmęczeniowa mosiądzu wzrasta. Wynika stąd również wniosek, że krzywe trwałości zmęczeniowej przy programowanych przebiegach naprężenia powinny być wyznaczone w taki sposób, aby dla różnych wartości naprężenia  $\sigma_{nmax}$ , liczba powtórzeń bloku do złomu była zbliżona.

Powyższe wyniki badań sugerują, że początkowe stopnie naprężenia w przebiegu mogą — w zależności od czasu ich trwania i kolejności ich następowania — różnie oddziaływać na trwałość zmęczeniową. Ich wpływ zależy również od rodzaju materiału, tzn. od jego zdolności do treningu. Potwierdzeniem tego wniosku są wyniki badań Redkova [14], który twierdził, że te same początkowe stopnie naprężenia mogą — w zależności od czasu ich trwania — powodować wzrost lub zmniejszenie trwałości zmęczeniowej, albo nie mieć na nią wpływu. Podobne rezultaty badań wpływu liczby cykli w bloku przebiegu naprężenia na trwałość zmęczeniową podawane są w literaturze. Na przykład autorzy pracy [15] stwierdzili, że wpływ ten jest istotny, inni badacze [11, 14] — że niewielki, natomiast w badaniach przedstawionych w pracy [16] nie stwierdzono go wcale. Można więc przyposzczać, że (zgodnie z sugestią autora pracy [1]) dla każdego materiału istnieje pewna charakterystyczna objętość bloku, zależna od pozostałych parametrów przebiegu naprężenia, przy której uzyskuje się maksymalne umocnienie materiału, objawiające się maksymalnym wzrostem trwałości zmęczeniowej.

Uzyskane wyniki sugerują, że wpływ parametrów programowanego przebiegu naprężenia na trwałość zmęczeniową zależy istotnie od własności materiału; od jego zdolności do umacniania się w procesie zmęczenia. Dural PA6N, należący do materiałów cyklicznie osłabiających się w procesie zmęczenia, wykazuje małą wrażliwość na zmiany parametrów przebiegu. Oddziaływanie parametrów przebiegu naprężenia na trwałość zmęczeniową mosiądzu MO58 wydaje się być związane z dużą skłonnością tego materiału do umacniania się w procesie zmęczenia i możliwością wystąpienia zjawiska treningu w przypadku niektórych, charakterystycznych wariantów przebiegów.

#### 4. Wnioski

1. Parametry programowanego przebiegu naprężenia, takie jak: sekwencja naprężeń, liczba cykli w bloku i pierwszy stopień naprężenia, mogą mieć istotny wpływ na trwałość zmęczeniową materiałów, wyznaczoną w badaniach programowanych. Wpływ każdego z tych parametrów (z osobna) na trwałość zależy od doboru dwóch pozostałych parametrów, a także od wartości naprężeń występujących w przebiegu i rodzaju materiału.

2. Stosowanie w badaniach trzystopniowych przebiegów naprężenia o rosnącej (SR) i malejącej (SM) sekwencji naprężeń, nie powoduje istotnych zmian trwałości zmęczeniowej duralu PA6N niezależnie od tego, który z trzech stopni naprężenia rozpoczyna przebieg, oraz niezależnie od liczby cykli w bloku i wartości naprężeń w przebiegu. Rozpoczęcie realizacji przebiegu od różnych stopni naprężenia może powodować istotne zmiany

trwałości duralu, zależnie od sekwencji naprężeń w przebiegu. Wpływ liczby cykli w bloku na trwałość duralu jest nieistotny, niezależnie od doboru pozostałych parametrów przebiegu.

3. Istnieje zależność między trzema parametrami przebiegu: sekwencją naprężeń, liczbą cykli w bloku i pierwszym stopniem naprężenia w ich oddziaływaniu na trwałość zmęczeniową mosiądzu MO58. Wpływ tych parametrów na trwałość jest największy w przypadku przebiegów SR, rozpoczynających się od najniższego stopnia naprężenia przy dużej liczbie cykli w bloku; tym większy, im niższa jest wartość naprężenia maksymalnego w przebiegu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. SZALA, *Badania i obliczenia zmęczeniowe elementów maszyny w warunkach obciążeń losowych i programowanych*, Prace IPPT PAN, Warszawa, 6 (1979) 39 - 61.
2. G. H. JACOBY, *Comparison of fatigue lives under conventional program loading and digital random loading*, ASTH, STP, 462 (1960) 184 - 202.
3. E. C. NAUMANN, *Fatigue under random loading and programmed loads*, Langley Research Center, NASA, Langley Station, Hampton, Va., October (1964) 1 - 25.
4. B. KUŹNICKA, *Wytrzymałość zmęczeniowa mosiądzu MO58 i duralu PA6N przy programowanych przebiegach naprężenia*, Pr. Nauk. Inst. Mater. PWr., Raport Serii PRE, 22 (1980) 7 - 20.
5. J. W. SZPIL, *Wpływ powłok z tworzyw sztucznych na żywotność mosiądzu M63*, Rozprawa doktorska, Inst. Mater. PWr., Wrocław (1972).
6. P. GAŹDZIK, *Wpływ częstotliwości zmian naprężeń i powłok z tworzyw sztucznych na wytrzymałość zmęczeniową duralu PA6*, Rozprawa doktorska, Inst. Mater. PWr., Wrocław (1976).
7. E. GASSNER, *Programnye ekspluatacionnye ustalostnye ispytaniya primenitelno k samoletnym konstrukcijam*, Sb. Ustalost'samoletnych konstrukcij, Oborongiz (1961) 207 - 238.
8. W. VOLK, *Statystyka stosowana dla inżynierów*, WNT, Warszawa, (1973).
9. N. ОКТАВА, *Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa*, PWN, Warszawa, (1967).
10. M. KAWAMOTO, H. ISHIKAWA, T. SHIBATA, *The effect of stress sequence on the fatigue strength under program loading*, Mem. Fac. Eng. Kyoto, 35 (1973) 28 - 36.
11. M. KAWAMOTO, Y. IBUKI i inni, *The effects of blok size and cycle ratio of peak load on the fatigue strength under program loading*, The 13-th Japan Congress of Materials Research Metallic Materials, March (1970) 88 - 91.
12. T. R. G. WILLIAMS, D. H. HUGHES, *Problems involved in the development of programmed fatigue testing*, The Engineer, 28 (1960) 703 - 705.
13. Y. IBUKI, T. IWAYA, *Effects of program load including peak load on fatigue life of materials*, J. Soc Mater. Sc. Japan, vol. 25, 276 (1976) 870 - 874.
14. N. F. REDKOVEC, *K voprosu o vybore parametrov programm ustalostnych ispytanj detalej samoletnych konstrukcij*, Procnost i dolgovecnost' aviacionnych konstrukcij, Vyp. II, Kiev (1963) 174 - 184.
15. V. V. KUFAROV, A. D. POGREBNJAK, *Vlijanie parametrov programm na dolgovecnost zaropcnogo materiala pri cikliceskome nagruzenii*, Problemy procnosti, 7 (1970) 17 - 21.
16. G. D. GRINGAUZ, *O programmirovanii ustalostnych ispytanj*, Zavodskaja Laboratorija, 27, 10 (1961) 1282 - 1287.

#### Резюме

#### ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОГРАММЫ НАГРУЖЕНИЯ НА УСТОЛОСТНУЮ ДАЛГОВЕЧНОСТЬ

В статье представлены результаты влияния параметров программы нагружения: последовательности чередования амплитуд напряжений, начального уровня напряжений и объема блока на долговечность сплавов РА6Н и МО58. Поведенные испытания показали, что влияние на долговечность каждого из этих параметров зависит от выбора других параметров, от интервала напряжений в программе и от испытанного материала.

## Summary

## THE EFFECT OF PROGRAMMED LOAD SPECTRUM PARAMETERS ON THE FATIGUE LIFE

The effect of stress sequence, initial stress level and number of cycles in a block on the fatigue life of PA6N duraluminium and MO58 brass alloys has been investigated. The effect of each of these parameters has been found to depend on the selection of the remaining parameters, the range of stresses in a spectrum and on the type of material as well.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1981 roku*



# BIULETYN INFORMACYJNY

## SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W ROKU 1981

### I. Działalność organizacyjna

W 15 Oddziałach PTMTS liczba członków PTMTS zwiększyła się o 18 osób i na koniec roku 1981 wynosiła łącznie 1001.

Odbyło się 1 zebranie plenum Zarządu Głównego, 1 zebranie Prezydium Zarządu Głównego oraz 44 zebrania Zarządów Oddziałów PTMTS.

### II. Działalność naukowa

Odbyło się 46 zebrań naukowych o następującej tematyce:

#### Oddział w Bielsku Białej

1. 30 stycznia, prof. Ryszard Petela, *Próby wizualnych badań spalania wewnętrznego.*
2. 27 lutego, dr Marek Linek, *Termomechaniczna teoria wytrzymałości polimerów.*
3. 30 kwietnia, dr inż. Wojciech Cholewa, *Wykorzystanie halasu i drgań do oceny stanu technicznego maszyn.*
4. 3 kwietnia, mgr inż. Jerzy Janoszka, *Informacje nt. prac z zakresu walki z hałasem i wibracjami, wykonywanych w COBRPW.*
5. 29 kwietnia, dr inż. Władysław Jakubiec, *Symulator cyfrowy niezbędnym elementem wyposażenia dydaktycznego, umożliwiającym opanowanie techniki prowadzenia badań eksperymentalnych.*
6. 29 kwietnia, dr inż. Władysław Jakubiec, dr inż. Józef Matuszek, *Niezawodność narzędzi skrawających i problemy obsługi narzędziowej obrabiarek-automatów.*

#### Oddział w Bydgoszczy

7. 26 października, prof. K. Kembłowski, *Zasady projektowania rurociągów dla stopionych reologicznie niestabilnych polimerów.*
8. 17 listopada, prof. A. Maryniak, *Niektóre zagadnienia analizy dynamiki obiektów ruchomych.*

#### Oddział w Częstochowie

9. 19 stycznia, doc. Jerzy Porochnicki, *Wpływ odsysania warstwy przyściennej na startę profilową palisady lopatkowej.*
10. 26 lutego, prof. Janusz Elsner, *Metody termoanemometryczne w przepływach silnie burzliwych.*
11. 24 kwietnia, doc. B. Mochnacki, *Rozwiązania zagadnień transportu ciepła metodą elementu skończonego.*
12. 7 maja, prof. M. Zembrzusi, *Problematyka spalania pyłu węglowego.*
13. 7 maja, dr inż. Henryk Korcz, *Metody wizualizacji procesów spalania.*

#### Oddział w Gdańsku

14. 14 stycznia, doc. Włodzimierz Gawroński, *Dopasowanie sygnałów wejściowego i wyjściowego w liniowych układach mechanicznych.*
15. 15 stycznia, dr A. Waberski, *Metody optymalnej estymacji drgań układów stałych rozłożonych.*

16. 6 marca, dr inż. P. Krasowski, dr inż. W. Król, *Naprężenia i odkształcenia kadłuba statku spowodowane działaniem niekontaktowych wybuchów podwodnych z uwzględnieniem czasoprzestrzennego rozchodzenia się fali uderzeniowej.*
17. 4 czerwca, mgr inż. Jerzy Makowski (Opole), *Analiza stateczności sprężystej liniowych i nieliniowych cienkich powłok.*
18. 15 czerwca, prof. William NASH (USA), *Vibration of Initially Imperfect Cylindrical Shells.*
19. 7 października, dr Władysław Przybyło (Politechnika Krakowska), *Komputerowy system wspomagania obliczeń nauk.-techn. KNWD. (Metoda elementów skończonych), zagadnienia statyki i dynamiki, automatyzacja projektowania.*

#### Oddział w Gliwicach

20. 7 stycznia, mgr Małgorzata Bierońska, *Zastosowanie funkcji giętych do modelowania problemu przewodnictwa cieplnego.*
21. 24 lutego, dr Krzysztof Mazur, *Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczeń zagadnień przepływu ciepła.*
22. 28 kwietnia, doc. Bohdan Mochnecki, mgr inż. Ryszard Zabawa, *Model przepływu ciepła w strefie dwufazowej krzepnącego stopu.*
23. 12 maja, prof. Janusz Elsner, *Podstawowe problemy turbulencji przepływu.*
24. 26 maja, mgr inż. Jerzy Świder, *Cyfrowe badania drgań układów napędowych ze złożonymi przekładniami zębatymi metodą grafów hybrydowych.*
25. 30 czerwca, doc. Ryszard Rohatyński, *Analiza przepływu cieczy doskonałej przez palisady łopatek maszyn przepływowych metodą wirów powierzchniowych.*
26. 17 listopada, mgr inż. Jan Tunk, *Ocena wibroaktywności napędu głównego wiertarko-frezarek.*

#### Oddział w Krakowie

27. 5 maja, prof. O. C. Zienkiewicz — University of Swansea, *Recent trends in the finite element methods.*

#### Oddział w Lublinie

28. dr Stefan Fijałkowski, *Wpływ wymiany ciepła na niektóre wielkości charakterystyczne aerodynamicznych łożysk poprzecznych przy laminarnym ruchu czynnika smarnego.*
29. dr Jerzy Podgórski, *Cienkie powłoki walcowe w płaskim stanie odkształcenia.*

#### Oddział w Łodzi

30. 4 czerwca, dr inż. Bogdan Rogowski, *Efekt anizotropii materiałów kompozytowych w zagadnieniach kontaktowych.*
31. 25 czerwca, dr inż. Wiesław Bendkowski, *Analityczna metoda przewidywania wytrzymałości tkanin na wypychanie.*
32. 29 października, doc. Marian Królak, *Stateczność cienkościennych dźwigarów o przekroju trapezowym.*

#### Oddział w Poznaniu

33. 16 marca, doc. B. Radziszewski (IPPT PAN W-wa), *Wybrane problemy teorii stateczności i jej zastosowanie.*
34. 26 października, prof. Czesław Cempel, *Emisja akustyczna — nowa technologia badań materiałów maszyn i procesów technologicznych.*
35. 23 listopada, prof. Józef Ignaczak (IPPT W-wa), *Terminosprężystość ze skończonymi falowymi prędkościami — przegląd.*

#### Oddział w Szczecinie

36. 20 lutego, dr inż. Alfred Stępniewski, *Uzupełnione prawo Newtona oraz rozszerzona zasada D'Alemberta, jako naczelné prawo mechaniki.*
37. 2 kwietnia, mgr inż. Wiesław Jaroszewicz, *Reologiczny model i badania fundamentowych złączy śrubowych silników okrętowych.*

38. 28 maja, doc. Marian Kmiecik, mgr inż. Michał Kulik, *Metoda różnic skończonych w zagadnieniach geometrycznej nieliniowości belek.*
39. 25 czerwca, mgr inż. Aleksander Badower, *Obliczanie belek na sprężystym podłożu w warunkach losowości parametrów podłoża i belek.*

#### Oddział w Warszawie

40. 30 czerwca, prof. Andrzej Tylikowski, prof. Jerzy Rutkowski i prof. Andrzej Ołędzki, *Zebranie Okrągłego Stołu nt. Nowe programy nauczania na Wydz. MEL PW.*
41. 30 stycznia, prof. R. Moszyński, *Kameralne spotkanie nt. Nowych źródeł energii.*
42. 10 kwietnia, prof. Stephen Crandall, *Kształcenie inżynierów mechaników w MIT.*

#### Oddział we Wrocławiu

43. 13 maja, prof. Hans Paceaiko (Holandia), *Modelowanie i symulacja pojazdów samochodowych.*
44. 15 kwietnia, dr inż. Ewald Mach, *Modelowanie matematyczne trwałości zmęczeniowej materiałów w warunkach losowego złożonego stanu naprężenia.*
45. 10 czerwca, prof. Mitschke, *Wpływ parametrów układu napędowego na użycie paliw.*
46. 11 grudnia, prof. Eugeniusz Brzuchowski, *Model. doskonalenia produkcji.*

### III. Sympozja i konferencje naukowe

#### Oddział w Gliwicach

1. zorganizował w dniach 16 - 22 marca 1981 r. XX Sympozjon Modelowanie w Mechanice. W czasie obrad wygłoszono 55 referatów.

### IV. Seminarja, kursy i inne zebrania

#### Oddział w Gliwicach

1. zorganizował 3 dyskusje Okrągłego stołu na tematy prac naukowych związanych z mechaniką, prowadzonej dydaktyki z zakresu mechaniki oraz badań stosowanych w szczególności we współpracy z przemysłem.

#### Oddział w Poznaniu

2. zorganizował cykl wykładów na temat: Stochastyczne modele ciała stałego w dniach od 26.10 do 14.12.1981 r. Wykładowca dr Barbara Gambin (IPPT PAN W-wa). Uczestników 10 - 20, wykładów 7.

#### Oddział w Zielonej Górze

3. zorganizował seminarium n.t. Niezawodność — I kw. 1981 r.
4. seminarium n.t. Wytrzymałość zmęczeniowa — I kw. 1981 r.
5. seminarium n.t. Wytrzymałość zmęczeniowa w napędach — I kw. 1981 r.

### V. Konkursy naukowe

1. Oddział w Częstochowie zorganizował Ogólnokrajowy Konkurs na temat Prace Doświadczalne z Zakresu Mechaniki Technicznej.
2. Oddział w Łodzi zorganizował Ogólnokrajowy Konkurs na temat Prace Teoretyczne z Zakresu Mechaniki Technicznej.

### VI. Działalność wydawnicza

Oprócz druku kwartalnika MTiS, którego ukazywanie się uległo znacznym opóźnieniom (w roku 1981 wyszły dwa zeszyty z roku 1980), Oddział w Gliwicach wydał zbiór referatów wygłoszonych na XX Sympozjonie nt. Modelowanie w Mechanice, z. 46, Gliwice 1981, stron 454.

**VIII-y KONGRES n.t. BADANIA MATERIAŁÓW, BUDAPESZT, 28.IX - 1.X.1982 r**

W dniach 28 września - 1 października 1982 r. odbył się w Budapeszcie VIII-y Kongres n.t. Badania Materiałów (8<sup>th</sup> Congress on Material Testing). Kongres zorganizowany został przez Węgierskie Stowarzyszenie Naukowe Inżynierów Mechaników. Przewodniczącym 13-osobowego Komitetu Organizacyjnego był dr Kornel Lehofer.

W stosunku do poprzednich Kongresów n.t. Badania Materiałów — organizowanych tradycyjnie w Budapeszcie co 4 lata i obejmujących na ogół dość szeroki zakres zagadnień — tematykę obecnego Kongresu skoncentrowano na zagadnieniach, dotyczących różnych aspektów procesów zniszczenia. Do tematyki obrad włączono także zagadnienia analizy naprężeń oraz specjalnych metod badawczych.

Obrady Kongresu odbywały się w salach Domu Techniki w Budapeszcie. Oficjalnymi językami Kongresu były języki angielski, niemiecki, węgierski i rosyjski. W Kongresie wzięło udział ponad 430 uczestników z 20-tu krajów, w tym około 280 spoza Węgier. Najliczniej, poza Węgrami, reprezentowane były kraje demokracji ludowych: Czechosłowacja (56 osób), Polska (53 osoby), NRD (40 osób) i ZSRR (33 osoby), a ponadto: Anglia (8), Australia (3), Belgia (1), Bułgaria (2), Egipt (1), Finlandia (4), Francja (3), Holandia (2), Jugosławia (5), Republika Federalna Niemiec (17), Berlin Zachodni (3), Rumunia (13), Szwajcaria (1), Włochy (15) i Stany Zjednoczone Ameryki Północnej (7 osób).

Zgłoszone i przyjęte referaty zgrupowano w trzech następujących sekcjach tematycznych:

Sekcja I — Zniszczenie, zmęczenie, pełzanie;

Sekcja II — Doświadczalna analiza naprężeń;

Sekcja III — Specjalne metody badań nieniszczących.

Najwięcej prac przedstawiono na obradach Sekcji I (ponad 150). Natomiast w czasie obrad Sekcji II przedstawiono ogółem 62 prace, zaś Sekcji III-ej — 28 prac. Łącznie wygłoszono ponad 240 referatów. Z Polski zgłoszono ogółem 37 prac, z których 25 przedstawiono w Sekcji I, 8 prac — w Sekcji II oraz 4 prace — w Sekcji III.

W stosunku do poprzedniego Kongresu (7<sup>th</sup> Congress on Material Testing), który odbył się w Budapeszcie w 1978 r. nastąpił znaczny wzrost ogólnej liczby prezentowanych prac: ze 160-ciu w roku 1978 do ponad 240 w roku bieżącym przy czym z Polski: z 12-tu — do 37-miu. Świadczy to o intensyfikacji prowadzonych w Kraju prac w dziedzinie badania materiałów i konstrukcji.

Z uwagi na różnorodność zagadnień omawianych w Sekcji I, referaty przedstawione w tej Sekcji podzielone zostały pod względem tematycznym na 3 zasadnicze grupy, przy czym obrady, dotyczące każdej grupy tematycznej poprzedzane były zamówionym referatem ogólnym. Wprowadzeniem do zagadnień zniszczenia materiału był referat prof. J. F. Knotta z uniwersytetu w Cambridge n.t. „Mechanika i fizyka procesów niszczenia i pęknięcia”. W 30-tu następnych referatach omówiono różne zagadnienia procesu pęknięcia oraz pełzania materiałów, prezentując wyniki badań zarówno laboratoryjnych jak i przemysłowych. Omówiono wpływ korozji i wielkości ziaren, struktury i domieszek stopowych, inkluzji itp. na przebiegi procesów pęknięć zmęczeniowych w różnego rodzaju materiałach oraz elementach konstrukcyjnych (rury, zbiorniki, elementy maszyn). Przedstawiono również teoretyczne i doświadczalne metody analizy procesów pełzania konstrukcji, wyniki badań pełzania materiałów przy różnych stanach naprężeń i temperatury, a także obciążeniach cyklicznych.

Inną grupą zagadnień omawianych w Sekcji I były zagadnienia zmęczeniowe. Wprowadzeniem do tych zagadnień był referat ogólny prof. G. Schotta (RFN) n.t. „Badań zmęczeniowych w temperaturze pokojowej”. Referaty szczegółowe dotyczyły naprężeń zmęczeniowych przy obciążeniach przypadkowych, badań strefy uplastycznienia w obszarze czoła szczeliny zmęczeniowej, charakterystyk procesu zmęczeniowego przy niskich cyklach obciążenia, energetycznych kryteriów niszczenia w okresie powstawania oraz propagacji pęknięcia, metod wyznaczania wzrostu pęknięć zmęczeniowych oraz wyników badań propagacji pęknięć zmęczeniowych w różnych materiałach i elementach konstrukcji, a także kryształach. Poruszone tematy przedstawiono w 42 referatach.

W trzecim zamówionym referacie prof. N. Soete (Belgia) omówił aktualne zagadnienia badań stali. W tej grupie zagadnień, w 18-tu referatach szczegółowych, wiele miejsca poświęcono zmęczeniu termicznemu stali i stopów aluminiowo-silikonowych, propagacji szczelin zmęczeniowych przy wysokich temperaturach oraz wpływowi różnych czynników, a m.in. napięć wewnętrznych oraz gładkości powierzchni na mechanikę powstawania i propagacji pęknięć zmęczeniowych przy obciążeniach udarowych. W dalszych

18-tu referatach omówiono różne aspekty mechaniki pękania w odniesieniu do elementów konstrukcyjnych, a w szczególności połączeń spawanych, w płytowych dźwigarach nośnych, rurociągach przesyłowych, konstrukcjach żelbetonowych i in. Uwzględniono przy tym zarówno wpływ cyklicznych oddziaływań mechanicznych jak i temperatury.

Podczas obrad w Sekcji II przedstawiono 4 referaty zamówione. Pierwszym z nich był referat prof. J. Svaba z Politechniki w Budapeszcie n.t. problemów pomiarowych maszyn w czasie. W 3-ch referatach szczegółowych związanych z poruszoną tematyką, omówiono zagadnienia niezawodności tensometrycznych systemów kontrolnych w urządzeniach ciśnieniowych, pracujących w wysokich temperaturach, czynniki wpływające na dokładność pomiarów tensometrycznych przy badaniach konstrukcji stalowych oraz wyznaczania naprężeń przy kombinacyjnym zastosowaniu metody tensometrycznej i elastoplastycznej. Dalsze trzy referaty poświęcone były zagadnieniom badań modelowych: teorii oraz ocenie błędów przy przeniesieniu wyników takich badań na objekty rzeczywiste.

Następna grupa tematyczna dotyczyła zastosowań wybranych metod optycznych do analizy stanów naprężenia. Otworzył ją referat wprowadzający prof. V. Szabo z Bratisławy, który przedstawił najnowsze osiągnięcia w zakresie zastosowań metody holograficznej w doświadczalnej analizie stanów naprężenia.

Zastosowaniem tej metody do badania rezonansowych postaci powierzchni łopatek promieniowych w tarczach wirnikowych, a w szczególności zaś zastosowaniom interferometrii holograficznej do badania obszaru uplastycznienia w wierzchołku szczeliny oraz pęknięć w elementach ze stali węglowej poświęcono 3 prace. Dalsze cztery prace poświęcone: zastosowaniu cieniowej metody Moiré'a do badania stanów krytycznych prostokątnych tarcz sandwiczowych, określaniu przemieszczeń w płytach i powłokach przy zastosowaniu metody plamkowej, deformacji polimerów — przy zastosowaniu interferometrycznej wersji tej metody, a także badaniom odkształceń konstrukcji drewnianych oraz naprężeń spawalniczych w węzłach konstrukcji spawanych.

Doświadczalnym badaniom naprężeń w mostach oraz konstrukcjach głębinowych poświęcił swój referat wprowadzający prof. C. Schleicher z N.R.D. W dwudziestu referatach szczegółowych, związanych z poruszoną tematyką omówiono: doświadczalną analizę nieliniowych zagadnień płyt zginanych, metody badania pęknięć w rurach oraz płaskich, zbrojnych przekryciach nośnych, zagadnienie przejmowania naprężeń w miejscach pęknięć konstrukcji żelbetonowych, badania fal naprężeń przy obciążeniach dynamicznych, badania stanów naprężenia w otoczeniu podziemnych wyrobisk, elastoplastyczne badania modelowe zagadnień górniczych z uwzględnieniem specjalnych materiałów do sporządzania tych modeli, zagadnienia badania dużych odkształceń itp.

Dużą część prac (22 referaty) poświęcono następnej grupie tematycznej, a mianowicie zastosowaniom metody elastooptycznej w badaniach zagadnień technicznych. Referat wprowadzający do tych zagadnień przedstawił prof. M. F. Tschinke z Palermo (Włochy). W referatach szczegółowych przedstawiono wyniki badań stanów naprężenia oraz koncentracji naprężeń w różnego rodzaju elementach konstrukcyjnych, a także wyniki bio-mechanicznych badań modelowych połączeń kostnych. Na uwagę zasługują prace dotyczące zastosowania metody elastooptycznej do modelowania naprężeń wywołanych temperaturą, optymalizacji konstrukcji oraz rozwoju pęknięć. Omówiono również specjalne metody elastooptyczne, a m.in. zastosowanie interferometrii holograficznej w elastooptyce, zagadnienie podobieństwa układu izochromu z układem teoretycznych linii izonaprężeń wewnętrznych, zastosowania izodony dla określania składowych naprężeń w płaskim stanie naprężenia, a także określanie płaszczyzn pęknięcia zmęczeniowego w złożonym stanie naprężenia za pomocą cyfrowej metody symulacyjnej.

Obrady, prowadzone w Sekcji III dotyczyły nieniszczących badań specjalnych. Wprowadzeniem do tych zagadnień był referat D. Pallagi'ego i P. Pellionisza z Instytutu Fizyki Węgierskiej Akademii Nauk w Budapeszcie. Przedstawiono w nim przegląd najnowszych osiągnięć — na Węgrzech i na świecie — w zakresie technicznych zastosowań metody emisji akustycznej w badaniach materiałów i konstrukcji. Tematyce tej poświęcono 12 dalszych referatów szczegółowych. Przedstawiono w nich m.in. wyniki badań niszczenia materiałów (w tym również ceramicznych) przy cyklicznych obciążeniach termicznych, zastosowanie metody emisji akustycznej do kontroli jakości połączeń klejonych, stopnia zniszczenia elementów żelbetonowych przy osiowym ściskaniu. Omówiono również techniczne możliwości, a także ograniczenia w zastosowaniu metody ultradźwiękowej — w badaniach połączeń spawanych. Dalsza grupa referatów dotyczyła badań

procesu niszczenia materiału przy zastosowaniu promieni Rentgena, metody magnetycznej, impulsowej metody ultradźwiękowej oraz metody replik.

Zamówione referaty przeglądowe oraz streszczenia referatów szczegółowych zostały wydane drukiem — w trzech tomach, o łącznej objętości 1301 stron. Dwa pierwsze tomy, a mianowicie t. I o objętości 402 stron oraz t. II — o objętości 407 stron, obejmowały tematykę, przedstawioną w Sekcji I. Natomiast w tomie III-cim zawarto streszczenia prac, referowanych w czasie obrad Sekcji II-ej i III-ej. Z zestawienia tego wynika, że zagadnienia zniszczenia, zmęczenia i pełzania materiałów były dominującą tematyką obrad — zgodnie z zamierzeniem Kongresu. Wydano również broszurę zawierającą wykaz nazwisk uczestników Kongresu.

*Władysław Walczak*  
*Łódź*

### SYMPOZJUM IUTAM pt. „NIELINIOWE FALE DEFORMACJI”

Symposium miało miejsce w Tallinnie w Estońskiej Republice Socjalistycznej ZSRR, w dniach 22 - 28 sierpnia, 1982 r. Zostało ono przygotowane przez 7 osobowy komitet międzynarodowy pod przewodnictwem prof. U. Nigula z Instytutu Cybernetyki Estońskiej Akademii Nauk oraz 20 osobowy komitet lokalny pod przewodnictwem prof. J. N. Rabotnowa. Z ramienia Polski do komitetu międzynarodowego wchodził prof. Z. Wesółowski.

W symposium uczestniczyły 153 osoby z 17 krajów, w tym 110 osób ze Związku Radzieckiego. Z Polski wzięły udział 4 osoby, a dwie spośród nich wygłosiły referaty. Zgłoszone prace komitet podzielił na 2 grupy, a mianowicie: 43 referaty zostały wygłoszone na sesjach plenarnych, a 25 zostało zakwalifikowanych do dyskusji w ramach sesji plakatowej. Jak stwierdził przewodniczący komitetu w swym powitalnym wystąpieniu, po raz pierwszy obrady symposium nie były dzielone na sekcje, a wszystkie referaty spośród 43 były wygłoszone na sesjach plenarnych. Uczestnicy symposium szybko dostrzegli walory takiej organizacji, albowiem każdy z nich miał możliwość przysłuchiwania się wygłaszanemu referatowi i brania udziału w dyskusji. Na zaproszenie organizatorów opracowano i przedstawiono 13 referatów generalnych 40 minutowych, pozostałe były 20 minutowe.

Wygłoszone referaty dotyczyły następujących grup tematycznych:

1. metody analityczne w mechanice, akustyce, zastosowaniach matematyki i fizyki,
2. nieliniowe modele matematyczne ciał stałych i płynnych,
3. metody asymptotyczne i numeryczne w zagadnieniach fal nieliniowych,
4. badania eksperymentalne i ich zastosowanie w mechanice, biomechanice i geofizyce.

Wiele prac dotyczyło solitonów i różnych metod rozwiązywania równania Burgersa oraz Kortewega-de Vriesa. Świadczy to o modnej ostatnio tematyce. Ale metody grup, półgrup oraz podobieństwa w zagadnieniach nieliniowych fal deformacji nie pozostawały w tyle. Obie te grupy metod dominowały na symposium. Referaty w pełnym brzmieniu, zaprezentowane podczas symposium, zostaną opublikowane w tomie wydanym przez wydawnictwo Springer-Verlag.

W trakcie trwania symposium pokazano również dwa filmy:

1. nieliniowe i niesprężyste fale deformacji w polimerach i metalach,
2. komputerowe symulowanie fal sprężystych.

Istotnym punktem programu symposium była wycieczka do Centrum Obliczeniowego Instytutu Cybernetyki Estońskiej Akademii Nauk, mająca w programie między innymi pokaz i krótką lekcję pracy przy końcówce. Należy stwierdzić, że nowoczesność i rozmach, z jakim centrum zostało zaprojektowane, budzą zdumienie i podziw — COIC EAN nie ustępuje, moim zdaniem, zachodnim uniwersyteckim ośrodkom obliczeniowym. Centrum spełnia ważną rolę w procesie kształcenia studentów politechniki, prowadzeniu badań naukowych, a także usługową dla potrzeb innych ośrodków i instytucji ERS. 65% budżetu ośrodka pochodzi z dotacji państwa, a 35% — ośrodek wypracowuje sam poprzez wykonywanie usług dla zleceniodawców. Każdy z uczestników symposium mógł w wyznaczonym przez organizatorów dniu sko-

rzystać z komputera w celu wykonania obliczeń numerycznych do własnych zagadnień, na koszt Instytutu Cybernetyki.

Podsumowując, należy ocenić obrady sympozjum jako owocne, wygłaszane referaty stały na wysokim poziomie, a organizatorom i gospodarzom podziękować za wzorową organizację.

*W. Frydrychowicz  
Warszawa*

## O DZIAŁALNOŚCI ZESPOŁU BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH KOMITETU INŻYNIERII LĄDOWEJ I WODNEJ PAN

W 1978 r. z inicjatywy prof. Romana Ciesielskiego powołany został jako organ K.I.Li.W. PAN — Zespół Badań Doświadczalnych Konstrukcji Inżynierskich.

Celem prac Zespołu było między innymi

1. Skupienie wokół zagadnień związanych z badaniami konstrukcji inżynierskich w skali naturalnej pracowników nauki twórczo zaangażowanych w tej dziedzinie

2. Prowadzenie działań w dziedzinie informacji i wymiany doświadczeń oraz dyskusji w zakresie w/w problematyki badawczej

3. Podjęcie próby koordynacji prac w skali krajowej oraz takie ich ukierunkowanie by zapewniona była ich optymalna efektywność z punktu widzenia nauki i gospodarki

Na przewodniczącego Zespołu powołany został Mieczysław Rybak a na Sekretarza Naukowego Lech Słowański, w skład zespołu weszło 36 osób. W okresie IX.1978 - V.1981 zorganizowano 9 zebrań naukowych Zespołu. Na zebraniach tych przedstawiono i przedyskutowano 38 referatów naukowych.

Zebrania te odbyły się w Instytucie Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej (dwukrotnie), na Wydziale Budownictwa Lądowego Politechniki Poznańskiej, w Instytucie Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej, w Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy, w Politechnice Gdańskiej, w Instytucie Inżynierii Lądowej WSI w Opolu i dwukrotnie w ITB.

## KONFERENCJA GAMM

W roku 1982 doroczna Konferencja GAMM (Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik) odbyła się w dniach 13 - 16 kwietnia w Budapeszcie. Uczestniczyło w niej około 680 osób z 20 krajów (Austria, Belgia, Bułgaria, Czechosłowacja, Dania, Finlandia, Francja, India, Irak, Jugosławia, NRD, Polska, RFN, Rumunia, Szwajcaria, Szwecja, USA, Wenezuela, Wielka Brytania i ZSRR).

Wygłoszono ok. 350 krótkich 20 minutowych referatów w ramach następujących sekcji:

1. Drgania i zagadnienia stateczności,
2. Mechanika ciał sprężystych i plastycznych,
3. Mechanika cieczy i gazów,
4. Analiza stosowana i fizyka matematyczna,
5. Analiza numeryczna,
6. Optymalizacja, stochastyka i matematyczne metody w ekonomii,
7. Informatyka.

Największą liczbę referatów wygłoszono w sekcjach 1, 2 i 5. Uczestnicy polscy wygłosili 6 referatów (R. Bogacz, J. A. König, Z. Olesiak, W. Pietraszkiewicz, A. Piskorek, G. Szefer, J. Więckowski). Z zapowiedzianych 14 referatów generalnych wygłoszono 11, a mianowicie:

- O. H. Bielocerkowskij (ZSRR), Stochastyczne modele do bezpośredniej analizy zagadnień aerodynamiki,  
L. Collatz, Numeryczne zastosowania monotonii w równaniach różniczkowych,  
D. Gross, Koncepcje w mechanice pękania,  
R. Jeltsch, Stateczność, zwężanie i dokładność metod numerycznych dla zagadnień ze sztywnymi warunkami początkowymi,

- S. Kaliszky (Węgry), Dynamiczne reagowanie konstrukcji plastycznych,
- R. Klötzler (NRD), Globalna optymalizacja w teorii kontroli,
- Th. Lehmann, O pewnych aspektach termoplastyczności,
- J. Rosenmüller, Współdziałające gry i zagadnienia niedegenerowalności,
- R. Schassberger (Berlin Zach.), Networks of Stochastic servers,
- W. Schielen, Mechaniczne drgania losowe,
- A. Tondl (CSRS), O możliwościach zastosowania tłumików drgań w samowzbudnych układach wirnikowych.

Specjalny wykład został poświęcony pamięci profesora Ludwiga Prandtla. Wygłosił go W. Wuest, Strumienie termokapilarne — termiczna konwekcja Marangoniego. Wykład popularno-naukowy na temat „Matematyka a obiektywna rzeczywistość” wygłosił M. Farks (Węgry).

Odbyło się również walne zebranie członków GAMM poświęcone sprawozdaniom z działalności Towarzystwa, omówieniu zamierzeń na przyszłość i wyborom. W skład obecnego zarządu GAMM wchodzi między innymi prof. Z. Wesolowski (IPPT PAN).

Organizatorzy zapewnili interesujący program turystyczno kulturalny, dla osób towarzyszących i uczestników konferencji, umożliwiający zapoznanie się z miastem i okolicą, koncert organowy, itp.

*Z. Olesiak*

## INFORMACJA

W dniach od 9 do 13.02.1981 r. odbyły się w Gdańsku dwie imprezy naukowe organizowane przez Zakład Pędników Okrętowych Instytutu Maszyn Przepływowych PAN.

1. Posiedzenie Międzynarodowego Komitetu Pędnikowego (Propeller Committee XVI ITTC), którego gospodarzem był prof. dr inż. Henryk Jarzyna — kierownik Zakładu Pędników Okrętowych IMP PAN, członek tego Komitetu. International Towing Tank Conference (ITTC) jest okresową, co trzy lata powtarzającą się konferencją naukową spełniającą jednocześnie określone funkcje organizacyjne. Zadania naukowe ITTC polegają na analizie stanu wiedzy teoretycznej w zakresie hydromechaniki okrętu, stanu metod eksperymentalnych i narzędzi badań eksperymentalnych oraz na określaniu potrzeb badawczych każdorazowo na najbliższy trzyletni okres. Zadania organizacyjne polegają na wyborach władz organizacji i komitetów roboczych, których zadaniem jest opracowywanie w ciągu trzech lat między konferencjami raportu o stanie wiedzy w danej dziedzinie oraz o potrzebach badawczych. W skład każdego komitetu wchodzi osiem osób. Jednym z komitetów jest Komitet Pędnikowy (Propeller Committee). W jego skład w obecnej kadencji 1978 - 1981 wchodzi przedstawiciele ośrodków badawczych z ośmiu krajów: ZSRR, USA, Japonii, Anglii, Holandii, Norwegii, Szwecji, Polski. Z ramienia Centrum Techniki Okrętowej ośrodek polski reprezentuje w tym Komitecie prof. H. Jarzyna (drugą kadencję od roku 1975). Na posiedzeniu Komitetu Pędnikowego w Gdańsku, w dniach 9 i 10 lutego 1981 r. zakończono pracę nad raportem na XVI ITTC, która odbędzie się w Leningradzie, we wrześniu 1981 roku. W raporcie tym sporo miejsca poświęcono pracom Zakładu Pędników Okrętowych IMP PAN.

2. Międzynarodowe Sympozjum „Advances in Propeller Research and Design” zostało zorganizowane przez Zakład Pędników Okrętowych IMP PAN przy współudziale Centrum Techniki Okrętowej w Gdańsku, Instytutu Okrętowego Politechniki Gdańskiej oraz Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Mechaników Polskich w Gdańsku. W konferencji wzięło udział 29 przedstawicieli z 14 krajów: (ZSRR, USA, Japonia, Anglia, Włochy, Bułgaria, NRD, RFN, Norwegia, Szwecja, Finlandia, Holandia, Austria, Chiny) oraz 42 przedstawicieli polskich ośrodków badawczych, projektowych i produkcyjnych. Wygłoszono 18 referatów w tym 3 z Zakładu Pędników Okrętowych IMP PAN (prof. H. Jarzyna, dr inż. T. Koronowicz i dr inż. J. Centkowskiego), 2 z Centrum Techniki Okrętowej w Gdańsku. Wydana została zbiorcza publikacja wszystkich referatów w postaci wydawnictwa zwartej i rozesłana wszystkim uczestnikom. Wydane zostaną materiały pokonferencyjne zawierające wystąpienia w dyskusji. Zarówno referaty



jak i wystąpienia w dyskusji były ocenione bardzo wysoko przez uczestników. Trzeci dzień konferencji był poświęcony zwiedzaniu Ośrodka Hydrodynamiki Okrętu działającego przy Centrum Techniki Okrętowej w Gdańsku-Oliwie. Obie imprezy odbyły się w 25-lecie istnienia Zakładu Pędników Okrętowych.

*Prof. dr hab. Jerzy Krzyżanowski*

## DRUGIE MIĘDZYNARODOWE SYMPOZJUM „DEFEKTY, PĘKANIE I ZMĘCZENIE” W MONT GABRIEL, KANADA

W dniach od 30 maja do 5 czerwca 1982 r. odbyło się w Mont Gabriel w prowincji Québec (Kanada) Drugie Międzynarodowe Sympozjum „Defekty, Pękanie i Zmęczenie”. Zostało ono zorganizowane jako Kontynuacja Pierwszego Międzynarodowego Sympozjum „Defekty i Pękanie”, zainicjowanego w Polsce (Tuczno, październik 1980 r.). Finansowego wsparcia Sympozjum udzielił Kanadyjski Komitet Badań Wytrzymałości i Pęknięcia Materiałów i w związku z tym Sympozjum to zostało również nazwane Siódmą Kanadyjską Konferencją Pęknięcia.

Problematyka Kanadyjskiego Sympozjum, rozszerzona przez włączenie wpływu defektów na zmęczenie charakterystyki ciał stałych, obejmowała następujące dziedziny: dyslokacje i pasma poślizgu; tworzenie pustek, łączenie się mikroszczelin i defektów; efekty metalurgiczne; mechanika mikro i makropęknięcia; kryteria plastycznego pęknięcia; powstawanie szczelin zmęczeniowych, propagacja i prędkość wzrostu; modelowanie analityczne (deterministyczne, statystyczne); analiza naprężeń, zniszczenie i pewność; wpływ defektów na kontrolę zniszczenia.

W Sympozjum wzięło udział 45 uczestników z szeregu krajów. Polska reprezentowana była przez Dr A. Neimitza oraz Doc. dr J. Krzemińskiego. Obaj wygłosili referaty oraz przewodniczyli obradom czwartego i piątego dnia Sympozjum.

W referatach dał się zauważyć nacisk na badania eksperymentalne różnych praw niezawodności zmęczeniowej oraz stochastyczne interpretacje degradacji materiału w wielkich systemach konstrukcyjnych jak mosty, żurawie wieżowe, suwnice bramowe, zbiorniki, zakłady nuklearne itp. W pracach kanadyjskich specjalną uwagę poświęcono badaniom stali używanej do rurociągów oraz nieniszczącym badaniom defektów istniejących rurociągów. Kanada posiada szereg niezwykle długich rurociągów na gaz i ropę naftową i efektywne inspekcje tych przewodów, pozwalające wcześniej wykryć wszelkie błędy (korozja, pęknięcia termiczne i mechaniczne itp.), mają podstawowe znaczenie.

Obecność wybitnych specjalistów, bardzo dobre referaty i dyskusje oraz kameralność obrad i niezwykle miła bezpośrednia atmosfera sprawiły iż Konferencja stała na bardzo wysokim poziomie. Na szczególne wyróżnienie zasługują specjalne sesje filmowe, odbywające się wieczorami po obradach. Pokazano w nich trzy świetne filmy. Pierwszym był animowany film szkoleniowy, obrazujący wszystkie możliwe ruchy i źródła dyslokacji (H. J. Mc Queen, Kanada). Drugi film naturalny pokazywał emisję i rozkłady dyslokacji na szczytach propagujących się szczelin w różnych metalach pod działaniem rozciągającej i cyklicznej deformacji (S. M. Ohr, J. A. Horton, S. J. Chang, USA). Wreszcie trzeci, znakomity film kolorowy „Żyjące metale”, przedstawiał powstawanie i ruch większości podstawowych defektów w metalach (T. Imura, Japonia).

Organizacja Sympozjum bardzo sprawna. Każdy z uczestników był oczekiwany na lotnisku, przywieziony do hotelu w Mont Gabriel i po zakończeniu obrad odwieziony do odpowiedniego portu lotniczego. W odpowiedzi na wyraźne słowa uznania Prof. J. W. Provan, Przewodniczący Międzynarodowego Komitetu Organizacyjnego (wspólnie z Prof. G. C. Sih), powiedział że starał się naśladować polski sposób przyjmowania uczestników konferencji naukowych.

Wzorem Sympozjum w Tuczno, wszystkie referaty zostaną opublikowane w wydawnictwie książkowym nakładem Wydawnictwa Martinus Nijhoff Publishers, The Hague.

*Jerzy Krzemiński  
Warszawa*

## KOŁOKWIA EUROMECH 1984

- |                 |  |   |
|-----------------|--|---|
| Euromech<br>177 | Mathematical modelling of sediment transport and morphology<br><br>4—6 czerwca 1984<br>Delft, Holandia | Professor<br>dr. C. B. Vreugdenhil<br>Delft Hydraulics<br>Laboratory<br>P.O. Box 152<br>8300 AD Emmeloord<br>Holandia<br>oraz Professor<br>Dr. P. J. Zandbergen<br>Enschede                       |
| Euromech<br>178 | The mechanics of oil recovery<br>10—13 kwietnia 1984<br>Bukareszt, Rumunia                             | Dr. H. I. Ene<br>INCREST, Dept.<br>of Mathematics<br>Bd. Păcil 220<br>79622 Bucharest,<br>Rumunia   |
| Euromech<br>179 | Waves in fluid-filled tubes<br>18—22 czerwca 1984<br>Rimini, Włochy                                    | Professor<br>F. Mainardi<br>Dipartimento di<br>Matematica<br>Univesità di<br>Bologna<br>Piazza di Parta<br>S. Donato 5<br>40127 Bologna,<br>ITALY,<br>oraz Professor<br>H. Buggisch,<br>Karlsruhe |
| Euromech<br>180 | Turbulence modelling for incompressible flows<br>4—6 lipca 1984<br>Karlsruhe, RFN                      | Professor W. Rodi<br>Institut für Hydromechanik<br><br>Universität Karlsruhe<br>7500 Karlsruhe,<br>RFN  |
| Euromech<br>181 | Drag reduction through boundary layer control<br>28—30 sierpnia 1984<br>Stockholm, Szwecja             | Dr. A. Bertelrud<br>Aerodynamics Research<br>Institute<br>of Sweden (FFA)<br>Box 11021<br>161 11 Bromma 11,<br>Szwecja  |
| Euromech<br>182 | Mechanical characterisation of load-bearing fibre composite laminates<br>29—31 sierpnia 1984           | Professor A. H.<br>Cardon<br>Vrije Universiteit<br>Brussel  |

- |                 |   |  |
|-----------------|---|--|
|                 | Brussels, Belgia  | Faculty of Applied<br>Sciences Pleinlaan 2<br>1050 Brussels<br>Belgia<br>oraz Professor<br>G. Varchery,<br>Palaiseau   |
| Euromech<br>183 | Plasticity of crystalline<br>media<br>24—27—września 1984<br>Villetaneuse, Francja  | Dr. A. Zaoui<br>Laboratoire<br>P.M.T.M. C.N.R.S.<br>Université<br>Paris-Nord<br>Avenue J. B. Clément<br>93430, Villetaneuse<br>Francja   |
| Euromech<br>184 | The inclusion of local effects<br>in the analysis of structures<br>11—14 września 1984<br>Cachan, Francja                   | Professor<br>P. Ladeveze<br>Laboratoire<br>de Mécanique et<br>Technologie<br>E.N.S.E.T.<br>Université<br>Paris VI/C.N.R.S.<br>61, Avenue du President Wilson<br>94230 Cachan,<br>Francja |
| Euromech<br>185 | Mathematical programming methods<br>for the plastic analysis of<br>structures<br>17—21 września 1984<br>London, W. Brytania | Professor<br>J. Munro<br>Civil Engineering<br>Department Imperial College<br>London SW7<br>W. Brytania<br>oraz Professor<br>G. Maier,<br>Mediolan  |
| Euromech<br>186 | Rheology of biological fluids<br>12—14 września 1984<br>Nancy, Francja  | Professor<br>M. Lucius<br>Institut National Polytechnique de<br>Lorraine<br>B. P. 3308, Porte de la Craffe<br>54014 Nancy Cedex,<br>Francja<br>oraz J. F. Stoltz,<br>Nancy               |
| Euromech<br>187 | Adaptive wall wind tunnels<br>and wall-interference correction methods<br>15—17 października 1984                           | Professor<br>H. Hornung, Ph. D.<br>Institut für Experimentelle Strömun-  |

	Göttingen, RFN	gsmechanik DFVLR Bunsenstrasse 10 3400 Göttingen, RFN
Euromech 188	Fluid loading and fluid-structure interaction 24—26 września 1984 Leeds, W. Brytania	Professor D.G. Crighton Department of Applied Mathematical Studies University of Leeds Leeds LS2 9JT, W. Brytania
Euromech 189	Elasticity coupled with thermal and electro-magnetic effects koniec 1984 Poznań	Profesor J. Stefaniak Instytut Mechaniki Technicznej Politechnika Poznańska ul. Piotrowo 3 61-138 Poznań oraz Profesor D. Rogula, Warszawa
Euromech 190	Dynamical stability of inelastic structures 1—4 października 1984 Hamburg-Harburg, RFN	Professor Dr. -Ing. O. Mahrenholtz Arbeitsgebiet Strukturmechanik TU Hamburg-Harburg Eiendorfer Straße 38 2100 Hamburg 90 oraz Dr. R. Bogacz, Warszawa
Euromech 191	The physics of dispersions of small particles 12—15 grudnia 1984 Cambridge, W. Brytania	Dr. E. J. Hinch Department of Applied Mathematics University of Cambridge Silver Street Cambridge CB3 9EW, oraz Dr. R. Blanc, Marsylia.

#### XVI KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ICTAM

odbędzie się w dniach 19—25 sierpnia 1984 w Lyngby w Danii.

Uczestnicy Kongresu pragnący wygłosić referat powinni złożyć streszczenie pracy w języku angielskim (100—150 słów) w sześciu egzemplarzach oraz rozszerzone streszczenie (500 słów) rów-

niez w sześcioro egzemplarzach bezpośrednio na adres Biura Kongresu, nie później niż 6 lutego 1984 r. Autorzy prac są również proszeni o nadesłanie próbek przeźroczy lub slajdów. Decyzja dotycząca przyjęcia pracy do wygłoszenia, lub zakwalifikowania do sesji plakatowej zostanie podjęta w maju 1984.

Następujące zagadnienia będą się cieszyć szczególną uwagą Kongresu:  
 Mikropoziomowe studia własności ośrodków wieloskładnikowych,  
 Oddziaływanie fal na konstrukcje podwodne, oraz  
 Rozwój chaotycznych zachowań w układach dynamicznych.

Adres: Dr. Niels Olhoff, Executive Secretary ICTAM  
 Technical University of Denmark, Building 404,  
 DK-2800 Lyngby, Dania.

### KOMUNIKAT

Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Mechaniki Stosowanej i Teoretycznej oraz Instytut Mechaniki Technicznej Politechniki Poznańskiej uprzejmie zawiadamia, że wzorem lat ubiegłych XI Sympozjum nt. „Drgania w Układach Fizycznych” odbędzie się w dniach 24—26 maja 1984 r. w Błażewku k/Kórniku.

Celem Sympozjum jest przedstawienie najnowszych prac z tego zakresu oraz przedyskutowanie aktualnych problemów w dziedzinie drgań.

Całkowity koszt udziału w Sympozjum wyniesie około 2.300 zł (wg obecnie obowiązujących cen).

Zainteresowanych udziałem w Sympozjum prosimy uprzejmie o nadesłanie wstępnych zgłoszeń na załączonym odcinku do dnia 31 października 1983 r.

Komitet Organizacyjny

### KONGRES TRYBOLOGII

w dniach 9—12 września 1985 odbędzie w Lyonie Międzynarodowy Kongres Trybologii (Eurotrib 85, *Congres International de Tribologie*).

Streszczenie prac w objętości 300 słów należy przesyłać do 31 marca 1984 (w języku francuskim, lub angielskim) na adres Sekretariatu Naukowego:

Ecole Centrale de Lyon, 36, av. Guy de Collongue —  
 69131 Ecully Cedex, Francja.

21st Annual Meeting — Society of Engineering Science, Inc. 15—17 października 1984, Virginia Polytechnic Institute and State University. Adres:

c/o Prof. Daniel Frederick  
 Dept. of Engineering Science and Mechanics,  
 Virginia Polytechnic Institute and State University,  
 Blacksburg, Virginia, 24061 USA

#### **Errata**

do zeszytu nr 3—4/82 Kwartalnika Mechanika Teoretyczna i Stosowana. W artykule „Statyczne ciśnienia niszczące membranę z promieniowymi korbami” Autorów D. Bugajny, M. Ostwald, W. Szyc omyłkowo podano nazwisko Pana M. Ostwalda w tytule, w żywej paginie i w spisie treści. Artykuł ten zamieszczono na stronach 383—393 zeszytu.

Redakcja serdecznie przeprasza Autora i Czytelników.

Cena zł 80.—

Warunki prenumeraty  
Cena prenumeraty krajowej  
rocznie zł 320.—  
półrocznie zł 160.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następnny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland, Please send payments to the account of Ars Polona—Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)*

---