

J II 720

**P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J**



PL ISSN 0079-3701

# **M E C H A N I K A T E O R E T Y C Z N A I S T O S O W A N A**

**K W A R T A L N I K**

**T O M 1 9 • Z E S Z Y T 4**

**W A R S Z A W A 1 9 8 1**

**P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E**

531

## SPIS TREŚCI

<p>Cz. WOŹNIAK, On the nonstandard analysis and the interrelation between mechanics of mass-point system and continuum mechanics          O niestandardowej analizie i związku między mechaniką punktów materialnych a mechaniką kontinuum.          Нестандартный анализ и связь между механикой материальных точек и механикой континуум.</p>	511
<p>B. ROGOWSKI, Zagadnienie szczeliny w warstwowej płycie poprzecznie izotropowej          Задача трещины в трехслойной трансверсальноизотропной пластинке.          Crack problem of transversely isotropic three layered elastic plate</p>	527
<p>S. KOSIŃSKI, Płaska fala silnej nieciągłości we wstępnie odkształconym izotropowym materiale sprężystym          Плоская ударная волна в предварительно напряженной, упругой изотропной среде          Strong discontinuity plane waves in initially strained elastic isotropic medium</p>	545
<p>W. ZOWCZAK, Projektowanie elementów konstrukcyjnych przy pomocy ciągłych pól statycznie dopuszczalnych          Проектирование конструктивных элементов при помощи непрерывных статически допускаемых полей напряжений.          Design of structural elements by means of statically admissible continuous stress fields</p>	563
<p>E. RUSIŃSKI, Analiza statyczna konstrukcji prętowo-płytowych metodą [elementów skończonych, z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego          Статический анализ стержне-панельных конструкции методом конечных элементов с учетом стеснённого кручения          The method of finite elements in statical analysis of the rod-shield construction, with non-free torsion taken into account.</p>	575
<p>C. KOMORZYCKI, J. STUPNICKI, Badania elastoоптические mieszków kompensacyjnych z pierścieniami wzmacniającymi          Поляризационно-оптические исследования компенсаторов сильфонного типа с укрепляющими кольцами.          Photoelastic study of the bellow with reinforcing rings</p>	591
<p>M. ŚLESZKO, J. KOŁODZIEJ, Określenie wymiany ciepła pomiędzy wiązką regularnych prętów i płynem podczas podłużnego laminarnego przepływu metodą kollokacji brzegowej          Определение теплопередачи между регулярной системой стержней и жидкостью при продольном ламинарном течении методом граничной коллокации          The determination of the heat transfer between regular bundle of rods and fluid during longitudinal laminar flow, by means of boundary collocation</p>	621
<p>Biuletyn Informacyjny</p>	

Jul 780  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 1 9 • Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1 9 8 1

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА  
содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY  
MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,  
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,  
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,  
JÓZEF WIĘCKOWSKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK—REDAKTOR NACZELNY,  
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR  
ANDRZEJ SZANIAWSKI—REDAKTOR,  
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR  
MONIKA WĄGROWSKA—REDAKTOR,  
ELŻBIETA OLSZEWSKA—SEKRETARZ

## REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

---

Nakład 630. Ark. wydawniczych 9,0. Ark. drukarskich 7,5. Papier druk. b. sat. kl. IV, 71 g. 70×100.  
Oddano do składania 13.XI.1981 r. Druk ukończono w lutym 1983 r. Zam. 1049/12/81. Cena zł 30.—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ON THE NONSTANDARD ANALYSIS AND THE INTERRELATION BETWEEN MECHANICS  
OF MASS-POINT SYSTEMS AND CONTINUUM MECHANICS

CZESŁAW WOŹNIAK (WARSZAWA)

INTRODUCTION. Methods of the nonstandard analysis, introduced for the first time by A. ROBINSON, [1, 2], and then developed in many publications, cf. [3 - 11], are based on the fact that for every mathematical structure  $\mathfrak{M}$  there exists another structure  $^*\mathfrak{M}$  which is called an enlargement of  $\mathfrak{M}$ . By the mathematical structure we mean here a pair  $\mathfrak{M} = (X, M)$ , where  $X$  is an infinite set of elements called individuals<sup>(1)</sup> and  $M$  is a system of relations (of an arbitrary order, i.e., including also relations between relations and between individuals and relations, etc.) for which  $X$  is its „underlying” set. The enlargement  $^*\mathfrak{M} = (^*X, ^*M)$  is a model of  $\mathfrak{M} = (X, M)$ , i.e., every statement about  $\mathfrak{M}$  (expressed in a certain formal language) which is meaningful and true is also meaningful and true as a statement about  $^*\mathfrak{M}$ <sup>(2)</sup>. At the same time  $^*\mathfrak{M}$  is an extension of  $\mathfrak{M}$ , i.e.,  $X \subset ^*X$  and  $M \subset ^*M$ ; elements of  $X$  and those of  $M$  are called standard entities of  $^*\mathfrak{M}$ . If  $X$  is an infinite set then  $^*X$  is a proper extension of  $X$ , i.e.,  $^*X$  contains nonstandard elements. Moreover, every infinite set consisting of standard entities only is not contained in the structure  $^*\mathfrak{M}$  and is called external in  $^*\mathfrak{M}$  (is not an element of  $^*M$ ). Entities belonging to  $^*M$  are called relations internal in  $^*\mathfrak{M}$ . It must be emphasized that the statements which are meaningful and true for  $\mathfrak{M}$  are also meaningful and true for  $^*\mathfrak{M}$  provided that we interpret them exclusively in terms of the totality of internal entities only (individuals and relations of  $^*\mathfrak{M}$ ). Following [6] we recapitulate the key properties of an enlargement  $^*\mathfrak{M} = (^*X, ^*M)$  of  $\mathfrak{M} = (X, M)$  by the principles stated below:

1. *Permanence Principle*. Every mathematical statement which is meaningful and true for  $\mathfrak{M}$  is also meaningful and true for  $^*\mathfrak{M}$ , provided that it is interpreted exclusively in terms of internal entities, i.e., entities of  $^*M$ .

2. *Extension Principle*. Every mathematical notion which is meaningful for  $\mathfrak{M}$  is also meaningful for  $^*\mathfrak{M}$ . It follows that any entity of  $\mathfrak{M}$  extends naturally and uniquely to an entity of  $^*\mathfrak{M}$ . The extended entity is called standard in  $^*\mathfrak{M}$ .

3. *Enlargement Principle*. Every standard set  $^*S$  of  $^*\mathfrak{M}$ <sup>(3)</sup> which is infinite, and only in this case, contains nonstandard elements, i.e.,  $^*S \setminus S \neq \emptyset$ , where  $S$  is a set of all standard elements of  $^*S$ .

<sup>(1)</sup> We assume that elements of  $X$  are not sets, i.e., if  $x \in X$  then  $x \neq \emptyset$  and the assertion  $t \in x$  is always false, cf. [11], p. 11.

<sup>(2)</sup> We have assumed that a single formal language describes both structures  $\mathfrak{M}$  and  $^*\mathfrak{M}$ .

<sup>(3)</sup> Sets are treated as a special kinds of relations; If  $r \in M$  then the corresponding standard entity of  $^*M$  will be denoted by  $^*r$ . Thus  $^*S$  is an extension of a set  $S$  in  $M$ .

4. *Externity Principle.* Every infinite set  $S$  which consists of only standard elements does not belong to  ${}^*M$  (is said to be external in  ${}^*\mathfrak{M}$ ).

The enlargement  ${}^*\mathfrak{M}$  of a given mathematical structure  $\mathfrak{M}$  is not defined uniquely. However, from a point of view of applications, all we need is that such enlargement exists and has the relevant properties outlined above. Putting  $X = R$  and assuming that  $M$  is the set of all relations for which the real number system  $R$  is the underlying set<sup>(4)</sup>, we shall refer the enlargement  ${}^*\mathfrak{M} = ({}^*X, {}^*M)$  to as a nonstandard model of analysis. We have  $R \not\subseteq {}^*R$  where  $R$  is a set of all standard real numbers in  ${}^*\mathfrak{M}$ . Moreover,  ${}^*R$  constitutes a non-Archimedean ordered field, i.e., it contains positive numbers which are greater than any standard number (infinite positive real numbers). The reciprocals of infinite positive real numbers are infinitesimal numbers; they are positive and smaller than any positive standard real number. The set of all infinitesimal numbers is denoted by  $\mu(0)$  and is said to be the monad of zero. By the monad of an arbitrary standard number  $r, r \in R$ , we mean the set  $\mu(r) := \{a | a \in {}^*R, a - r \in \mu(0)\}$ . Every finite number of  ${}^*R$  (i.e., the number which is not infinite) can be uniquely represented by a sum  $r = {}^\circ r + \varepsilon$ , where  ${}^\circ r$  is a standard number and  $\varepsilon$  is an infinitesimal number,  ${}^\circ r \in R, \varepsilon \in \mu(0)$ . The number  ${}^\circ r$  is called the standard part of a finite number  $r$ . Analogously, in every Euclidean space  ${}^*R^n$  we define the set  $R^n, R^n \subset {}^*R^n$ , of standard points, and for every point  $x \in {}^*R^n$  we define its monad  $\mu(x)$  putting  $\mu(x) := \{y | \varrho(x, y) \in \mu(0)\}$ ,  $\varrho: {}^*R^n \times {}^*R^n \rightarrow {}^*R$  being the distance function in  ${}^*R$ . Points of  ${}^*R$  with all finite coordinates are said to be finite. Every finite point  $x$  has a unique representation  $x = {}^\circ x + \delta$ , with  ${}^\circ x$  as a standard point and  $\delta$  as an infinitesimal vector (all components of  $\delta$  are infinitesimal numbers). For further informations the reader may consult ref. [1, 2, 8, 11].

In this paper we are to show that, using the methods of the nonstandard analysis, the fundamental relations of continuum mechanics (for an elastic response) can be derived directly from the Newtonian mass-point mechanics (cf. also [14]). To do this we shall include the basic relation of Newtonian mechanics into a certain structure  $\mathfrak{M} = (X, M)$  and then reinterpret them within an enlargement  ${}^*\mathfrak{M} = ({}^*X, {}^*M)$  of  $\mathfrak{M}$ . This procedure was detailed in [12] and in a simplified form will be outlined in Sec. 1. Then we shall prove that there exists a class of „nonstandard” mass-point systems which have „standard” properties of some continuous systems. The presented approach has two main advantages. Firstly, it treats the continuum mechanics as a special case of the Newtonian mass-point mechanics. Secondly, it yields an interpretation of the basic concepts of continuum mechanics (such as a mass density, body force, stress tensor, strain energy function, etc.) in terms of the concepts of mass-point mechanics. In the first case the non-standard approach to continuum mechanics is conservative because any standard result that has been obtained by nonstandard methods can be also obtained without using these methods, [2]. However, the methods of the nonstandard analysis are more desirable from a purely analytical point of view, mainly by the avoidance of passages to a limit at different stages, [5]. They are also more desirable from an heuristic point of view, namely the obtained standard

<sup>(4)</sup> The set  $M$  of „all” relations based on  $R$  contains only relations of a definite type, i.e., we exclude from  $M$  certain abnormal relations such as sets containing simultaneously individuals and sets of individuals, etc, cf. [1, 2, 9].

relations of continuum mechanics describe certain properties of some „nonstandard” mass point systems and are not limit cases of the relations of mass-point mechanics. As we have mentioned above, the nonstandard passage from Newtonian mass-point mechanics to continuum mechanics also yields an interrelation between the known continuum concepts and those of the mass-point mechanics. Such interrelation can be formulated only in nonstandard terms. It must be also emphasized that the nonstandard formulation of the Newtonian mass-point mechanics yields more extensive class of mathematical models of the real bodies than the classical formulation. The nonstandard terms used in a description of different phenomena within mechanics have, as a rule, well determined physical meaning. For example, the infinitesimal interparticle distances or the infinitesimal masses of points can be treated as distances and masses, respectively, which can not be neglected but are too small to be measured in a class of problems under consideration, [12]. At the same time the standard parts of finite numbers can be treated as suitable approximations due to the character of the mathematical models of physical problems we deal with.

### 1. Nonstandard model of Newtonian mechanics.

To develop Newtonian mechanics of mass-point systems within certain mathematical structure  $\mathfrak{M} = (X, \mathcal{M})$ , we shall assume that  $R \subset X$  and  $\mathcal{M} \subset X$ ,  $\mathcal{M}$  being certain infinite but countable set of elements called points. Since we are to deal with finite systems of points, we shall assume that there is known an arbitrary but fixed sequence

$$\varphi = \{D_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathcal{M}, \quad \overline{D_n} = n.$$

Every  $D$ ,  $D \subset \mathcal{M}$ , such that  $D = D_n$  for some positive integer  $n$ , is called a point system. By  $C(D)$  we shall define the set of all injections  $\alpha: D \ni P \rightarrow \alpha(P) \in R^3$ . A continuous mapping  $I \ni t \rightarrow \alpha_t \in C(D)$ ,  $I$  being an open interval of  $R$ , such that  $\dot{\alpha}_t(P)$ ,  $\ddot{\alpha}_t(P)$  exist for every  $t \in I$ ,  $P \in D$ , will be called a motion of  $D$ . Let  $D \circ D := \{(P, Q) | P, Q \in D, P \neq Q\}$ . By  $\mathcal{N}$  we shall define the set of all quadruples  $(D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P, Q) \in D \circ D})$  where  $D \in \{D_1, D_2, D_3, \dots\}$ ,  $m_P \in R^+$  and

$$f_P: R^3 \times R^3 \rightarrow R^3, \quad \sigma_{PQ}: R^+ \rightarrow R; \quad \sigma_{PQ} = \sigma_{QP},$$

are sufficiently regular functions. An arbitrary element of  $\mathcal{N}$  will be called Newtonian mass-point system;  $D$  is a point system,  $m_P$  is a mass assigned to a point  $P$ ,  $f_P(\alpha_t(P), \dot{\alpha}_t(P))$ ,  $t \in I$ , is an external force acting at  $P$  in an arbitrary motion of  $D$  and  $\sigma_{PQ}(\varrho(\alpha_t(P), \alpha_t(Q)))$ ,  $t \in I$  ( $\varrho: R^3 \times R^3 \rightarrow R$  is a distance function) will be treated as a value of an interaction force between points  $P, Q \in D$  in this motion. As a basic statement of Newtonian mechanics we shall assume that for every Newtonian mass-point system  $(D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P, Q) \in D \circ D})$ , a motion of its point system  $D$  has to satisfy the relation

$$(1.1) \quad m_P \ddot{\alpha}_t(P) = f_P(\alpha_t(P), \dot{\alpha}_t(P)) + \sum_{Q \in D \setminus \{P\}} f_{PQ}(\alpha_t(P), \alpha_t(Q)),$$

$$P \in D, t \in I,$$

where we have denoted

$$(1.2) \quad f_{PQ}(\varkappa_t(P), \varkappa_t(Q)) = \sigma_{PQ}(\varrho(\varkappa_t(P), \varkappa_t(Q))) \frac{\varkappa_t(P) - \varkappa_t(Q)}{\varrho(\varkappa_t(P), \varkappa_t(Q))}$$

We have tacitly assumed here that  $\mathcal{N}$  is a set of all unconstrained Newtonian mass-point systems (cf. also [12]). Substituting RHS of Eqs. (1.2) into Eqs. (1.1) we arrive at the well known Newtonian equations. Every motion of a point system  $D$  satisfying Newton equation (i.e., Eqs. (1.1) with the denotations (1.2)) will be referred to as motion of a Newtonian mass-point system  $(D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P,Q) \in D \circ D})$ .

Passing to an enlargement  $*\mathfrak{M} = (*X, *\mathfrak{M})$  of  $\mathfrak{M} = (X, M)$ , we obtain  $*R \subset *X$ ,  $*\mathcal{M} \subset *X$ . A sequence  $\varphi$  is now uniquely extended to a standard sequence  $*\varphi = \{D_n\}_{n \in *N^+}$  with  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = *\mathcal{M}$ ,  $\overline{D}_n = n$ , where  $n$  runs over all positive integers  $*N^+$  (finite and infinite).

The set  $C(D)$  (here and in what follows  $D = D_n$  for some  $n \in *N^+$ ) analogously as before, is the set of all internal injections  $\varkappa: D \ni P \rightarrow \varkappa(P) \in *R^3$ , which will be called configurations of  $D$ . Symbol  $I$  stands now for an arbitrary internal interval of  $*R$ . An arbitrary internal continuous mapping  $\bar{I} \ni t \rightarrow \varkappa_t \in C(D)$ , such that  $\dot{\varkappa}_t(P)$ ,  $\ddot{\varkappa}_t(P)$  exist for every  $t \in I$ ,  $P \in D$ , is said to be a motion of  $D$ . The set  $\mathcal{N}$  extends uniquely to a standard set  $*\mathcal{N}$  of all quadruples  $s = (D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P,Q) \in D \circ D})$ , where  $f_P: *R^3 \times *R^3 \rightarrow *R^3$  and  $\sigma_{PQ}: *R^+ \rightarrow *R$ ,  $\sigma_{PQ} = \sigma_{QP}$ , are sufficiently regular internal functions. An arbitrary element  $s$  of  $*\mathcal{N}$  will be called a Newtonian mass-point system with  $D$  as a point system (without any specification; mind, that  $D = D_n$  for some  $n \in *N^+$ );  $m_P$  as a mass of  $P$ ,  $f_P(\varkappa_t(P), \dot{\varkappa}_t(P))$  as an external force acting on  $P$  and  $\sigma_{PQ}(\varrho(\varkappa_t(P), \varkappa_t(Q)))$  as a value of an interaction between  $P, Q$  in an arbitrary motion of  $D$  (by the definition every motion is an internal mapping). By  $\mathcal{N}$  we shall denote the set of all quadruples  $(D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P,Q) \in D \circ D})$  consisting exclusively of standard elements (here  $D = D_n$  for some standard  $n$ ,  $n \in N^+$ ); elements of  $\mathcal{N}$  will be called standard mass-point systems<sup>(5)</sup>. It is obvious that  $\mathcal{N} \not\subseteq *\mathcal{N}$ , i.e., there exist nonstandard mass-point systems (cf. also the Enlargement Principle). Such systems have no counterparts in the known formulation of mechanics. Thus, in the nonstandard model of Newtonian mechanics, we deal with more extensive class of mass-point systems (i.e., more extensive class of mathematical models of certain physical phenomena) than that in the classical (standard) model of Newtonian mechanics. The basic statement of Newtonian mechanics (which can be formulated within a certain formal language, cf. [2], p. 60), formulated above, is also true in  $*\mathfrak{M} = (*X, *\mathfrak{M})$ . It means that for every  $s = \{D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P,Q) \in D \circ D}\}$ , motion of  $D$  has to satisfy Eqs. (1.1), (1.2). Thus the form of Newton's equations of motion remains unchanged after passage to a non-standard model of Newtonian mechanics. At the same time these equations now describe more extensive class of mathematical models of physical phenomena than the „standard” equations. Generally speaking, within nonstandard model of Newtonian mechanics we can deal with point systems  $D$  which are infinite from the „standard” point of view (i.e.,  $\overline{D} = n$  where  $n \in *N \setminus N$  is a fixed but

<sup>(5)</sup> Mind that  $\mathcal{N}$  is an external relation (cf. the Externity Principle).



nonstandard natural number<sup>(6)</sup>. To each point we can assign an infinitesimal (infinite) mass. Distances and values of interactions between points can be infinitesimal or infinite. Thus the question arises how to interpret, from the purely physical point of view, the nonstandard quantities (nonstandard real numbers) in problems of mechanics. The answer to this question depends on the physical character of the problem under consideration. Roughly speaking, the quantities of the different order in magnitude (i.e., not belonging to the same Archimedean system<sup>(7)</sup>) will be treated as describing the features of phenomena which can not be simultaneously measured and compared (from a quantitative point of view) in an experiment. In what follows we shall see that an existence of quantities of a different order in magnitude (an existence of non-Archimedean systems in the nonstandard analysis) makes it possible to investigate continuum mechanics as a special case of mass-point mechanics.

## 2. Kinematics of nonstandard point systems.

Let  $s = (D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P,Q) \in D \times D})$  be a certain (fixed in what follows) nonstandard Newtonian mass-point system in which  $D = D_n$  for some infinite  $n$ ,  $n \in {}^*N \setminus N$ . Every set  $D_n$ ,  $n \in {}^*N \setminus N$ , is a nonstandard point system. By  $C_0(D)$  we shall denote the subset of  $C(D)$ , defined by  $C_0(D) := \{x | x \in C(D) \text{ and } x(P) \text{ is a finite point in } {}^*R^3 \text{ for every } P \in D\}$ . Following [2], for an arbitrary subset  $K$  of  ${}^*R^3$  we shall define the set (possibly empty)  ${}^\circ K$ , putting  ${}^\circ K := \{x | x \in R^3 \wedge [\mu(x) \cap K] \neq \emptyset\}$ . The set  ${}^\circ K$  will be called the standard representation of a set  $K$ , provided that all points of  $K$  are finite (cf. Introduction). It can be proved that if  $K$  is an internal set in  ${}^*R^3$  then  ${}^\circ K$  is closed in  $R^3$  (cf. [2], p. 101). Let  $\varkappa_R: D \rightarrow {}^*R^3$  be the known configuration of  $D$  such that  $\varkappa_R \in C_0(D)$  and  ${}^\circ \varkappa_R(D) = \bar{\Omega}$ , where  $\Omega$  is a certain regular region in  $R^3$  (here  $\bar{\Omega} = {}^\circ({}^*\Omega)$  and  ${}^*\Omega$  is a standard regular region in  ${}^*R^3$ , cf. [2], p. 102<sup>(8)</sup>). The set of all such configurations will be denoted by  $C_S(D)$ . The triples  $\Theta_P = (\Theta_P^\alpha) \equiv \varkappa_R(P)$ ,  $\Theta = (\Theta^\alpha) \equiv {}^\circ \varkappa_R(P)$ ,  $P \in D$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , will be referred to as  $Q$ -material and  $S$ -material coordinates of  $P$ , respectively. It can be easily observed that the  $Q$ -material coordinates  $\Theta_P$  are related to a discrete structure of an internal set  $\varkappa_R(D)$  in  ${}^*R^3$  and play the role of certain micro-coordinates of  $D$ . At the same time  $S$ -material coordinates  $\Theta$  (standard coordinates) can be interpreted as macro-coordinates; mind that all points of  $\varkappa_R(D)$  belonging to one monad have the same  $S$ -material coordinates. Thus the internal set  $\varkappa_R(D)$  in  ${}^*R^3$ , where  $\varkappa_R \in C_S(D)$ , having the standard representation  $\bar{\Omega} = {}^\circ \varkappa_R(D)$  ( $\Omega$  is a regular region in  $R^3$ ), can be interpreted from two different points of view. Firstly, it is a discrete set in  ${}^*R^3$ , i.e., for every  $\varkappa_R(P)$ ,  $P \in D$ , there exists a ball  $B(\varkappa_R(P), r)$  with a center  $\varkappa_R(P)$  and a radius  $r \in {}^*R^+$ , such that  $B(\varkappa_R(P), r) \cap [\varkappa_R(D) \setminus \{\varkappa_R(P)\}] = \emptyset$ . Secondly, to  $\varkappa_R(D)$  we can uniquely assign a re-

<sup>(6)</sup> Mind, that from the point of view of the nonstandard analysis all point systems under consideration are finite.

<sup>(7)</sup> The numbers  $\alpha, \beta \in {}^*R$ ,  $0 < \alpha < \beta$ , are assumed to belong to the same Archimedean system if and only if there exists such standard natural number  $n$ ,  $n \in N$ , that  $n\alpha \geq \beta$ .

<sup>(8)</sup> A region  $\Omega$  in  $R^3$  extends uniquely to a standard region  ${}^*\Omega$  in  ${}^*R^3$ , cf. also the footnote in the Introduction.

gular standard region  ${}^*\Omega$  in  ${}^*R^3$ , such that  $\bar{\Omega} = {}^{\circ}\kappa_R(D)$  is a standard representation of  $\kappa_R(D)$  in  $R^3$ . It means that the nonstandard discrete set  $\kappa_R(D)$  in  ${}^*R^3$  has the features of a certain standard region  ${}^*\Omega$  and a nonstandard point systems  $D$  in every configuration  $\kappa \in C_S(D)$  has certain properties of a standard but „continuous” system<sup>(9)</sup>.

Let  $\bar{D}$  be a nonstandard point system ( $D = D_n$  for an infinite positive integer  $n$ ) and  $\kappa$  be its arbitrary configuration such that  $\kappa \in C_S(D)$  (i.e.  $\kappa(D)$  has a standard representation in a form of a closure of a certain regular standard region). Let  $\bar{\Omega} \equiv {}^{\circ}\kappa(D)$  stands for a standard representation of  $\kappa(D)$  and let us define

$$\begin{aligned}\partial_S^* \Omega &:= \{x | \mu(x) \cap {}^*\partial\Omega \neq \emptyset\}, \\ \text{int}_S^* \Omega &:= \{x | \mu(x) \subset {}^*\Omega\}.\end{aligned}$$

The foregoing sets are said to be  $S$ -boundary and  $S$ -interior of  ${}^*\Omega$ , respectively, cf. [2] p. 107 - 108. Now putting  $\text{Bound}\kappa(D) \equiv \kappa(D) \cap \partial_S^* \Omega$ ,  $\text{Int}\kappa(D) \equiv \kappa(D) \cap \text{int}_S^* \Omega$ , we shall refer  $\text{Bound}\kappa(D)$  and  $\text{Int}\kappa(D)$  to as a boundary and an interior, respectively, of a discrete set  $\kappa(D)$  in  ${}^*R^3$ . It means that to every configuration  $\kappa$ ,  $\kappa \in C_S(D)$ , of a nonstandard point system  $D$ , we can uniquely assign a set of boundary points and a set of interior points. Analogously, denoting by  $S$  an arbitrary smooth surface in  $\bar{\Omega} = {}^{\circ}\kappa(D)$  and putting  $L_S := \{x | \mu(x) \cap {}^*S \neq \emptyset\}$ ,  $L_S \subset {}^*R^3$ , we shall refer the set  $\kappa(D) \cap L_S$  to as a discrete material surface in  $\kappa(D)$ . Thus we conclude that for every  $\kappa \in C_S(D)$  there exists one-to-one correspondence between certain discrete subsets of a discrete set  $\kappa(D)$  in  ${}^*R^3$  and certain smooth manifolds of a closure of a regular region  $\Omega$  in  $R^3$ . This correspondence is not only formal but also gives interpretation of a material smooth surface or a boundary of a continuous body in more physical terms of configurations of mass-point systems.

Now let  $I = (\tau_0, \tau_1)$  be an open interval in  $R$  and let  ${}^*\bar{I} \ni t \rightarrow \kappa_t \in C_S(D)$  be a certain motion of a nonstandard point system  $D$ . Let us define the function  $\bar{\Omega} \times \bar{I} \ni (\Theta, t) \rightarrow p(\Theta, t) \in R^3$  setting  $p(\Theta, t) = {}^{\circ}\kappa_t(P)$  with  $\Theta = {}^{\circ}\kappa_R(P)$ , for every  $P \in D$ ,  $t \in \bar{I}$ . Let  $p: \bar{\Omega} \times \bar{I} \rightarrow R^3$  be a function, such that  $p(\cdot, t)$  is smooth in  $\bar{\Omega}$  and invertible in  $\bar{\Omega}$  for every  $t \in I$  (i.e.,  $\det \nabla p(\Theta, t) > 0$ ,  $\Theta \in \bar{\Omega}$ ), having continuous first and second time derivatives, and satisfying conditions:  $p(\Theta, t) = {}^{\circ}\kappa_t(P)$ ,  $\dot{p}(\Theta, t) = {}^{\circ}\dot{\kappa}_t(P)$ ,  $\ddot{p}(\Theta, t) = {}^{\circ}\ddot{\kappa}_t(P)$ ,  $\Theta = {}^{\circ}\kappa_R(P)$ , for every  $t \in {}^*\bar{I}$ ,  $P \in D$ . Function  $p(\cdot)$  will be referred to as the deformation function (related to the reference configuration  $\kappa_R \in C_S(D)$ ) for a motion  ${}^*\bar{I} \ni t \rightarrow \kappa_t \in C_S(D)$ . Motions of  $D$  for which there exist deformation functions (related to a certain reference configuration  $\kappa_R: D \rightarrow {}^*R^3$ ) will be called  $S$ -regular<sup>(10)</sup>. Putting  $q(\Theta_P, t) \equiv \kappa_t(P)$ ,  $P \in D$ ,  $t \in {}^*\bar{I}$ , we can define the function  $q: \kappa_R(D) \times {}^*\bar{I} \rightarrow {}^*R^3$ , representing the motion of  $D$  by use of the „microcoordinates”  $\Theta_P \in \kappa_R(D)$ ,  $P \in D$ . It can be seen that the deformation function for this motion (if it exists) is nothing else but a standard part of the function  $q$ , i.e.,  $p(\cdot) = {}^{\circ}q(\cdot)$  (c.f. [2], p. 115, for the definition of a standard part of a function).

In the sequel we are to show under which conditions a motion a nonstandard point system  $D$  (provided that  $D$  belongs to a certain nonstandard Newtonian mass-point system) can be  $S$ -regular.

<sup>(9)</sup> The problem of different interpretations of discrete sets of points in  ${}^*R^3$  has been detailed in [13].

<sup>(10)</sup> A terminology used here slightly differs from that used in [13].

3. Mass-distribution in certain nonstandard Newtonian mass-point systems

Let  $\kappa_R \in C_S(D)$  be fixed reference configuration of a point-system  $D(D = D_n$  for some infinite  $n, n \in {}^*N \setminus N)$  belonging to a certain Newtonian mass-point system  $s = (D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P,Q) \in D \times D})$ . We have  ${}^o\kappa_R(D) = \bar{\Omega}, \Omega$  being a regular region in  $R^3$  (c.f. Sec. 2). Let  $\Delta$  be an arbitrary subset of  ${}^*R^3$ . To every  $\Delta$  we shall assign (provided that  $\kappa_R$  is fixed) the subset  $D_R(\Delta)$  of  $D$ , putting

$$(3.1) \quad D_R(\Delta) := \{P | P \in D \wedge \kappa_R(P) \in \Delta\}.$$

Thus  $D_R(\Delta)$  is a set of points of  $D$  which in the reference configuration  $\kappa_R$  occupy the places in  ${}^*R^3$  belonging to  $\Delta$ .

Now let  $\Theta$  be an arbitrary point in  $S$ -interior of  ${}^*\Omega, \Theta \in \text{int}_S {}^*\Omega$ , and let  $r_1$  stands for an arbitrary but fixed positive standard number. Setting  $r_m = r_1/m$  for  $m = 1, 2, 3, \dots$  ( $m$  runs over the sequence of all positive integers, finite and infinite) and denoting by  $B(\Theta, r_m)$  the ball in  ${}^*R^3$  with a center  $\Theta$  and a radius  $r$ , we shall construct the sequence

$$(3.2) \quad \varrho_m(\Theta) = \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_m)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_m))} m_P, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

where  $\text{vol} B(\Theta, r_m) = 4r_m^3\pi/3$  is a volume of  $B(\Theta, r_m)$ . We see that  $\varrho_m(\Theta)$  is a mean mass-density (in a ball with a center  $\Theta \in \text{int}_S {}^*\Omega$  and a radius  $r_m$ ) of a mass-point system under consideration in its reference configuration. Sequences (3.2) are obviously not convergent<sup>(11)</sup>.

In what follows we shall apply the known concept of an  $F$ -limit of an infinite sequence  $\{a_n\}, n \in {}^*N$  of points  $a_n$  in a certain metric space  $({}^*T, \varrho)$  (cf. 2, p. 109). The space  $({}^*T, \varrho)$  is an extension of a metric space  $(T, \varrho)$ , where  $\varrho$  is a distance function in  $T$  and hence a distance function in  ${}^*T$ . In the sequel  ${}^*T$  will always stand for a Euclidean space  ${}^*R^k, k$  being a fixed positive standard integer. We say that point  $a, a \in {}^*T$ , is a  $F$ -limit of  $\{a_n\}, a \in F\text{lim} a_n$ , if and only if for every  $\varepsilon \in R^+$  there exists  $n_0 \in N^+$  such that  $\varrho(a, a_n) < \varepsilon$  for all finite  $n, n > n_0$ . If  $a \in F\text{lim} a_n$  is a finite point in  ${}^*T$  (i.e., if there exist a standard point  $x$  in  ${}^*T$  such that  $\varrho(a, x) \in \mu(0)$ <sup>(12)</sup>) then a standard point  ${}^o a$  will be called  $S$ -limit of a sequence  $\{a_n\}$ . Mind that if  $a = F\text{lim} a_n$  then for every  $b \in \mu(a)$  ( $b$  is an arbitrary point in  ${}^*T$  such that  $\varrho(a, b)$  is infinitesimal positive number) we also have  $b \in F\text{lim} a_n$ . It follows that  $F$ -limit of a sequence  $\{a_n\}$  (if it exists) is not determined uniquely (but  $S$ -limit is defined uniquely).

Now assume that there exists the standard continuous function  $\varrho_R: {}^*\Omega \rightarrow {}^*R^+$  (obtained as a unique extension of the continuous function  $\varrho_R: \Omega \rightarrow R^+$ ), such that

$$(3.3) \quad \varrho_R(\Theta) \in F\text{lim} \varrho_m(\Theta); \Theta \in \text{int}_S {}^*\Omega.$$

It follows that  $\varrho_R(\Theta) = S\text{lim} \varrho_m(\Theta), \Theta \in \Omega$ . We have assumed here that every infinite sequence  $\{\varrho_m(\Theta)\}, \Theta \in \text{int}_S {}^*\Omega$ , has such finite  $F$ -limit  $\varrho_R(\Theta)$ , that  $\varrho_R(\cdot)$  is a continuous

<sup>(11)</sup> The concept of a limit in an enlargement  ${}^*\mathfrak{M}$  of a certain structure  $\mathfrak{M}$  is analogous to that of a limit in the structure  $\mathfrak{M}$  (cf. the Extension Principle in Introduction). For example, the real number  $r \in {}^*R$  is, by definition, a limit point of a sequence  $\{r_m\}, m \in {}^*N$ , in  ${}^*R$ , if for every  $\varepsilon \in {}^*R^+$  and for every  $v \in {}^*N$  there exists the natural number  $n, n > v$ , such that  $|r - r_n| < \varepsilon$ .

<sup>(12)</sup> Finite points in  ${}^*T$  are also called near-standard points, cf. [2], p. 93.

function defined on  $\Omega$  (mind, that  $\Omega \subset \text{int}_S^* \Omega$ , where  $\Omega$  is a set of all standard points in  $\text{int}_S^* \Omega$ ). The existence of a function  $\varrho_R(\cdot)$  depends only on mass distribution  $(m_P)_{P \in D}$  and on the choice of the reference configuration  $\varkappa_R$  of  $D$ ,  $\varkappa_R \in C_S(D)$ . The standard function  $\varrho_R: {}^* \Omega \rightarrow {}^* R^+$  (if it exists) will be called  $S$ -density of mass in a reference configuration  $\varkappa_R$  of a mass-point system. In what follows we shall assume that for the system  $(D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P,Q) \in D \times D})$  there exists the reference configuration  $\varkappa_R \in C_S(D)$  with the  $S$ -density of mass  $\varrho_R$ . It means that the mass-point system under consideration has certain property of a material continuum which will be referred to as  $S$ -regular mass-distribution in a configuration  $\varkappa_R$ . We can observe that the masses  $m_P$ , for every  $P \in D$ , have to be infinitesimal.

The interrelation between the „discrete” mass distribution  $\varkappa_R(D) \ni \Theta_P \rightarrow m(\Theta_P) \in {}^* R^+$ , where  $m(\Theta_P) \equiv m_P$ , and the „continuous” standard mass distribution  $\varrho_R: {}^* \Omega \rightarrow {}^* R^+$ , can be written down explicitly due to the following theorem on  $F$ -limits (cf. [2], p. 110). Namely, if  $\{a_n\}$ ,  $n \in {}^* N$ , is an internal sequence of points  $a_n \in {}^* T$  having  $F$ -limit, then there exists an infinite natural number  $\lambda$ ,  $\lambda \in {}^* N \setminus N$ , such that  $F \lim a_n = a$ , for every infinite  $\nu$  and  $\nu < \lambda$  (mind, that  $F$ -limits are not uniquely defined).

Since every infinite sequence (3.2) is internal and is assumed to have  $S$ -limit<sup>(13)</sup>, we obtain

$$(3.4) \quad \varrho_R(\Theta) = \left( \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_\nu)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_\nu))} m_P \right), \quad \nu < \lambda_0, \nu \in {}^* N \setminus N,$$

for every  $\Theta \in \Omega \subset {}^* \Omega$ . The RHS of Eq. (3.4) represents the standard part of an arbitrary standard number in a bracket (i.e., for an arbitrary infinite positive integer  $\nu$ , such that  $\nu < \lambda_0$ ). Using  $Q$ -material coordinates  $\Theta_P$ ,  $\Theta_P \in \varkappa_R(D)$ , and setting  $m_P(\Theta) \equiv m_P$ , we obtain an alternative form of Eq. (3.4), given by

$$(3.5) \quad \varrho_R(\Theta) = \left( \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_\nu)} \sum_{\Theta_P \in B(\Theta, r_\nu) \cap \varkappa_R(D)} m(\Theta_P) \right), \quad \nu < \lambda_0, \nu \in {}^* N \setminus N,$$

for every  $\Theta \in \Omega \subset {}^* \Omega$ . Eqs. (3.4) or (3.5) yield the direct interrelation between the „discrete” mass distribution in a nonstandard mass-point system and a standard „continuous” mass distribution. The physical sense of Eqs. (3.4) or (3.5) is evident; the values of „continuous” mass density at every standard point  $\Theta \in \Omega$  of  ${}^* \Omega$  are obtained (if they exist) as standard parts of mean mass densities in a ball with a center in a point  $\Theta$ , provided that the radius  $r_\nu$  of this ball is infinitesimal but, roughly speaking, not too small (i.e.,  $r_\nu > r_{\lambda_0}$  for some infinite  $\lambda_0$  and  $\nu \in {}^* N \setminus N$ ).

#### 4. Distributions of external and internal forces in certain non-standard Newtonian mass-point systems.

Now let  ${}^* \bar{I} \in I \rightarrow \varkappa_t \in C_S(D)$  be an arbitrary  $S$ -regular motion of the nonstandard point system and let us construct the sequences

<sup>(13)</sup> We confine ourselves to mass-point systems with  $S$ -regular mass-distribution in a reference configuration  $\varkappa_R$ .

$$(4.1) \quad \begin{aligned} b_m(\Theta, t) &\equiv \frac{1}{\text{vol}B(\Theta, r_m)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_m))} f_P(\mathbf{x}_t(P), \dot{\mathbf{x}}_t(P)), \\ d_m(\Theta, t) &\equiv \frac{1}{\text{vol}B(\Theta, r_m)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_m))} \sum_{\substack{Q \in D \\ Q \in D \setminus \{P\}}} f_{PQ}(\mathbf{x}_t(P), \mathbf{x}_t(Q)), \end{aligned}$$

for every  $\Theta \in \text{int}_S^* \Omega$ ,  $t \in {}^* \bar{I}$ . It can be easily seen that  $b_m(\Theta, t)$ ,  $d_m(\Theta, t)$  are mean densities of external and internal forces (in a ball with a center  $\Theta$  and a radius  $r_m = r_1/m$ ,  $m \in {}^* N^+$ ) for a certain  $S$ -regular motion of a mass-point system under consideration. As a rule, the sequences (4.1) are not convergent. However, it may happen that the sequences  $\{b_m(\Theta, t)\}$ ,  $\{d_m(\Theta, t)\}$  have  $S$ -limits for every  $\Theta \in \text{int}_S^* \Omega$ ,  $t \in {}^* \bar{I}$ . In what follows we shall confine ourselves only to such non-standard mass-point systems  $s = (D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P, Q) \in D \times D})$ , that for every  $S$ -regular motion of  $D$  there exist the standard continuous functions  $b_R(\Theta, t)$ ,  $d_R(\Theta, t)$ ,  $\Theta \in {}^* \Omega$ ,  $t \in {}^* \bar{I}$  (i.e., the extensions of continuous functions  $b_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$ ,  $d_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$ , respectively), such that

$$(4.2) \quad \begin{aligned} b_R(\Theta, t) &= \text{Slim } b_m(\Theta, t), \\ d_R(\Theta, t) &= \text{Slim } d_m(\Theta, t); \quad \Theta \in \text{int}_S^* \Omega, t \in {}^* \bar{I}. \end{aligned}$$

From the foregoing assumption it follows that  $b_R(\Theta, t) = \text{Slim } b_m(\Theta, t)$ ,  $d_R(\Theta, t) = \text{Slim } d_m(\Theta, t)$  for every standard  $(\Theta, t) \in \Omega \times \bar{I} \subset {}^* \Omega \times {}^* \bar{I}$ . The standard functions  $b_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$ ,  $d_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$  will be called  $S$ -body force and  $S$ -density of interaction, respectively, related to a reference configuration  $\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_R \in C_S(D)$ .

Since the infinite sequences  $b_m(\Theta, t)$ ,  $d_m(\Theta, t)$  are internal, then by virtue of a theorem on  $F$ -limits (cf. Sec. 3) we obtain

$$(4.3) \quad \begin{aligned} b_R(\Theta, t) &= {}^0 \left( \frac{1}{\text{vol}B(\Theta, r_\nu)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_\nu))} f_P(\mathbf{x}_t(P), \dot{\mathbf{x}}_t(P)) \right), \quad \nu < \lambda_1, \\ d_R(\Theta, t) &= {}^0 \left( \frac{1}{\text{vol}B(\Theta, r_\nu)} \sum_{\substack{P \in D_R(B(\Theta, r_\nu)) \\ Q \in D \setminus \{P\}}} f_{PQ}(\mathbf{x}_t(P), \mathbf{x}_t(Q)) \right), \quad \nu < \lambda_2, \end{aligned}$$

for every standard  $(\Theta, t) \in \Omega \times \bar{I} \subset {}^* \Omega \times {}^* \bar{I}$ ,  $\nu \in {}^* N \setminus N$ .

Thus we conclude, that the Newtonian mass-point system under consideration, in an arbitrary  $S$ -regular motion of its point system  $D$ , has certain features of a material continuum. These features are expressed by the existence of uniquely defined continuous fields  $b_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$ ,  $d_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$ , characterizing the distribution of external and internal forces. At the same time Eqs. (4.3)-yield an interrelation between the system of forces in a „discrete” mass-point system and a certain „continuous” distribution of forces ( $S$ -body force and  $S$ -density of interaction). The physical interpretation of the RHS of Eqs. (4.3) is rather clear; we deal here with certain mean densities of forces in an infinitesimal ball  $B(\Theta, r_\nu)$  which, roughly speaking, is not sufficiently small (has an infinitesimal radius  $r_\nu$ , but greater then  $r_\lambda$ ,  $\lambda \equiv \max(\lambda_1, \lambda_2)$ ).

## 5. Passage to standard laws of motion.

From now on we shall assume that the Newtonian nonstandard mass-point system  $s = (D, (m_P)_{P \in D}, (f_P)_{P \in D}, (\sigma_{PQ})_{(P,Q) \in D \times D})$  under consideration satisfies all assumptions introduced in Secs. 3.4. Thus we assume that there exists the reference configuration  $\kappa_R: D \rightarrow {}^*R^3$ , such that  $\bar{\Omega} \equiv {}^0\kappa_R(D)$  is a closure of a certain regular region  $\Omega$  in  $R^3$  and such that the function  $\varrho_R: \Omega \rightarrow R^+$ , defined by Eq. (3.4), exists and is continuous in  $\Omega$ . Moreover, we assume that for every  $S$ -regular motion of  $D$  there exist functions  $b_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$ ,  $d_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$ , defined by Eqs. (4.3), which are continuous in  $\bar{\Omega} \times I$ . A Newtonian mass-point system satisfying the forementioned conditions will be called regular. Now the question arises which necessary conditions are imposed on  $S$ -regular motion of  $D$  (if it exists) by Newton's equations of motion (1.1), (1.2) for a regular Newtonian mass-point system.

To obtain these conditions let us observe that for every  $\Theta \in \Omega$ ,  $t \in I$ ,  $m \in {}^*N^+$ , from Eqs. (1.1) it follows that

$$(5.1) \quad \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_m)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_m))} m_P \ddot{\kappa}_t(P) - \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_m)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_m))} f_P(\kappa_t(P), \dot{\kappa}_t(P)) - \\ - \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_m)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_m))} \sum_{Q \in D \setminus \{P\}} f_{PQ}(\kappa_t(P), \kappa_t(Q)) = 0,$$

where  ${}^*\bar{I} \ni t \rightarrow \kappa_t \in C(D)$  is a motion of the point system  $D$ . Let Eqs. (5.1) be satisfied by a certain  $S$ -regular motion. It means that

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \kappa_t(P) &= p(\Theta, t) + u_t(P), \\ \dot{\kappa}_t(P) &= \dot{p}(\Theta, t) + \dot{u}_t(P), \\ \ddot{\kappa}_t(P) &= \ddot{p}(\Theta, t) + \ddot{u}_t(P); \quad \Theta \equiv {}^0\kappa_R(P), \end{aligned}$$

hold for every  $P \in D$ ,  $t \in {}^*\bar{I}$ , where  $u_t(P)$ ,  $\dot{u}_t(P)$ ,  $\ddot{u}_t(P)$  are certain infinitesimal vectors in  ${}^*R^3$ . Substituting the RHS of Eq. (5.2) into Eq. (5.1) and putting  $m = \nu$ , where  $\nu < \lambda$ ,  $\lambda = \max(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$  and  $\nu \in {}^*N \setminus N$ , cf. Eqs. (3.5), (4.3), we shall arrive at the relation

$$(5.3) \quad \varrho_R(\Theta) \ddot{p}(\Theta, t) = b_R(\Theta, t) + d_R(\Theta, t),$$

which has to hold for every  $\Theta \in \Omega$ ,  $t \in \bar{I}$ . Passing from Eqs. (5.1), (5.2)<sub>3</sub> to Eqs. (5.3) we have taken into account formulas (3.5), (4.3) and a relation

$$(5.4) \quad \left( \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_\nu)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_\nu))} m_P \ddot{u}_t(P) \right) = 0, \quad \Theta \in \Omega.$$

In order to prove that Eqs. (5.4) holds let us observe that the RHS of the foregoing formula can be interpreted as  $S$ -limits of internal sequences

$$(5.5) \quad \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_m)} \sum_{P \in D} m_P \ddot{u}_t(P), \quad m \in {}^*N^+.$$

But the existence of  $F$ -limit of an infinite sequence  $\{a_n\}$ ,  $n \in {}^*N$ , of points in a certain metric space  ${}^*T$  depends only on terms  $a_n$  for  $n \in N$ . Because all these terms for sequence (5.5) are infinitesimal (it follows from the fact that all such terms of sequence (3.2) are finite) then  $S$ -limit of this sequence is equal to zero and Eq. (5.4) hold for every  $\Theta \in \Omega$ .

Eqs. (5.3) constitute the interrelation among the deformation function  $p: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$ ,  $S$ -density of mass  $\rho_R: \Omega \rightarrow R^+$ ,  $S$ -density of interaction  $d_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$  and  $S$ -body force  $b_R: \Omega \times \bar{I} \rightarrow R^3$ . Thus Eqs. (5.3) can be called standard laws of motion and their form coincides with that of laws of motion for a certain material continuum, occupying in the reference configuration a regular region  $\Omega$  in  $R^3$ . Because the interactions have been assumed non-local, we do not deal here with any contact forces (which are introduced and detailed in [15]). It must be emphasized that Eqs. (5.3) have to hold only if the motion of a nonstandard point system  $D$ , satisfying Eqs. (1.1), (1.2), is  $S$ -regular. At the same time Eq. (5.3) (in which  $\dot{p}(\Theta, t) = {}^0\mathcal{N}_R(P)$ ,  $\Theta \equiv {}^0\mathcal{N}_R(P)$ , cf. (5.2)<sub>3</sub> (together with Eqs. (3.4), (4.3) represent the necessary condition imposed on the  $S$ -regular motion of a regular Newtonian mass-point system (provided that such motion exists).

6. Passage to standard constitutive relations.

Now let us substitute the RHS of Eqs. (5.2)<sub>1,2</sub> into Eqs. (4.3)<sub>1</sub>. Setting

$$\begin{aligned} \Delta f_P(p(\Theta, t), \dot{p}(\Theta, t); \dot{u}_t(P), \dot{u}_t(P)) &\equiv \\ &\equiv f_P(p(\Theta, t) + \dot{u}_t(P), \dot{p}(\Theta, t) + \dot{u}_t(P)) - f_P(p(\Theta, t), \dot{p}(\Theta, t)), \end{aligned}$$

let us assume that the relation

$$(6.1) \quad \left( \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_\nu)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_\nu))} \Delta f_P(p(\Theta, t), \dot{p}(\Theta, t), u_t(P), \dot{u}_t(P)) \right) \equiv 0$$

holds for every infinitesimal  $u_t(P), \dot{u}_t(P)$ . Let us also define the function  $\beta_R: \Omega \times R^3 \times R^3 \rightarrow R^3$  by means of

$$(6.2) \quad \beta_R(\Theta, p(\Theta, t), \dot{p}(\Theta, t)) \equiv \left( \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_\nu)} \sum_{P \in D_R(B(\Theta, r_\nu))} f_P(p(\Theta, t), \dot{p}(\Theta, t)) \right).$$

In Eqs. (6.1), (6.2), as usual, we have  $\nu \in {}^*N \setminus N$  and  $\nu < \lambda$  for a certain infinite positive integer  $\lambda$ . Thus we conclude that if the conditions of the form (6.1) are satisfied for every  $\Theta \in \Omega$  then we can characterize the  $S$ -body forces by the formulas

$$(6.3) \quad b_R(\Theta, t) = \beta_R(\Theta, p(\Theta, t), \dot{p}(\Theta, t)), \quad \Theta \in \Omega, t \in \bar{I},$$

with the RHS of Eqs. (6.3) defined by Eqs. (6.2). Eqs. (6.2), (6.3) yield the interrelation between the „continuous”  $S$ -body force and the „discrete” distribution of external forces in the regular Newtonian mass-point system under consideration. This interrelation is valid under the conditions that the value of  $S$ -body force in any  $S$ -regular motion of a nonstandard point system  $D$  (cf. Sec. 2) depends only on the deformation function for this motion. It can be shown that such situation will take place if the external fields in  ${}^*R^3$ , determining the form of functions  $f_P: {}^*R^3 \times {}^*R^3 \rightarrow {}^*R^3$ , are standard.

Now let us detail the possible interrelation between the  $S$ -density of interaction  $d_R(\Theta, t)$  and the deformation function  $p(\cdot)$  of an arbitrary  $S$ -regular motion of a nonstandard point system  $D$ . To this aid we shall use Eq. (4.3)<sub>2</sub> with the functions  $f_{PQ}: {}^*R^3 \times R^3 \rightarrow {}^*R^3$  defined by Eq. (1.2). For every  $S$ -regular motion  ${}^*\bar{I} \ni t \rightarrow \mathbf{x}_t \in C_S(D)$  with the deformation function  $\Omega \times \bar{I} \ni (\Theta, t) \rightarrow p(\Theta, t) \in R^3$  (where  $p(\Theta, t) = {}^0\mathbf{x}_t(P)$  with  $\Theta = {}^0\mathbf{x}_R(P)$  cf. Sec. 2) we have

$$(6.4) \quad \mathbf{x}_t(P) = p(\Theta_P, t) + \mathbf{w}_t(P); \quad \Theta_P = \mathbf{x}_R(P), P \in D, t \in {}^*\bar{I},$$

where now  $p: {}^*\Omega \times {}^*\bar{I} \rightarrow {}^*R^3$  stands for an extension of the deformation function (which can be called a standard deformation function) and  $\mathbf{w}_t(P)$  are infinitesimal vectors in  ${}^*R^3$ . Instead of  $S$ -material coordinates  $\Theta = {}^0\mathbf{x}_R(P)$  (macro-coordinates), which have been used before (cf. Eq. (5.2)), we apply now  $Q$ -material coordinates  $\Theta_P = \mathbf{x}_R(P)$  (micro-coordinates). If  $\mathbf{w}_t(P) = 0, P \in D, t \in {}^*\bar{I}$ , then Eq. (6.4) will represent a special  $S$ -regular motion of  $D$  in which material points are „frozen” in a certain standard „material continuum”; motion of this „material continuum” is described by a standard deformation function  $p: {}^*\Omega \times {}^*\bar{I} \ni (\Theta, t) \rightarrow p(\Theta, t) \in {}^*R^3$  (i.e., by an extension of a deformation function for the motion of  $D$ ).

In what follows we shall confine ourselves to a certain subclass of a class of all  $S$ -regular motions of a point system  $D$  under consideration. This subclass contains motions in which the values of a function  $\mathbf{w}_t(P), P \in D, t \in {}^*\bar{I}$ , in Eq. (6.4) are not only infinitesimal but also, roughly speaking, „sufficiently small”. To be more precise we shall assume that for every pair  $(P, Q)$  of interacting material points (i.e., points for which  $f_{PQ}(\cdot)$  is not identically equal to zero) in the subclass of motions under consideration we have

$$(6.5) \quad \mathbf{w}_t(P) - \mathbf{w}_t(Q) = E(P, Q, t)[\mathbf{x}_t(P) - \mathbf{x}_t(Q)],$$

where  $E(P, Q, t)$  is a certain  $3 \times 3$  matrix of infinitesimal numbers. Eq. (6.5) can be also written down in a form

$$\mathbf{w}_t(P) - \mathbf{w}_t(Q) \in \sigma(\mathbf{x}_t(P) - \mathbf{x}_t(Q)),$$

where by  $\sigma(x), x \equiv (x_1, x_2, x_3) \in {}^*R^3$ , we denote the set of all triples  $y = (y_1, y_2, y_3) \in {}^*R^3$ , such that  $y_i = E_i^j x_j, i, j = 1, 2, 3$ , where  $E_i^j$  are infinitesimal (cf. also [2], p. 79). By virtue of Eq. (1.2), for a class of  $S$ -regular motions of  $D$  satisfying Eq. (6.5), we obtain

$$(6.6) \quad f_{PQ}(\mathbf{x}_t(P), \mathbf{x}_t(Q)) - f_{PQ}(p(\Theta_P, t), p(\Theta_Q, t)) \in \sigma(f_{PQ}(\mathbf{x}_t(P), \mathbf{x}_t(Q))),$$

for every  $P, Q \in D, P \neq Q, t \in {}^*\bar{I}$ . It means that, roughly speaking, the interactions in a motion determined by Eqs. (6.4), (6.5) are „nearly the same” as the interactions in a motion characterized by Eq. (6.4) with  $\mathbf{w}_t(P) = 0$  for every  $P \in D, t \in {}^*\bar{I}$ . Motions of  $D$  satisfying Eq. (6.5) (for every pair of interacting points  $P, Q$  and every  $t \in {}^*\bar{I}$ ) will be called strictly  $S$ -regular.

For motions of  $D$  which are strictly  $S$ -regular it can be shown that the  $S$ -density of interactions is uniquely determined by the deformation function. Namely from Eq. (6.6) it follows that

$$(6.7) \quad \left( \frac{1}{\text{vol}B(\Theta, r_\nu)} \sum_{\substack{P \in D_R(B(\Theta, r_\nu)) \\ Q \in D \setminus \{P\}}} f_{PQ}(\mathbf{x}_t(P), \mathbf{x}_t(Q)) \right) =$$



$$(6.7) \text{ [cont.]} = \left( \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_\nu)} \sum_{\substack{P \in D_R(B(\Theta, r_\nu)) \\ Q \in D \setminus \{P\}}} f_{PQ}(p(\Theta_P, t), p(\Theta_Q, t)) \right),$$

for every  $\Theta \in \Omega$ ,  $\nu \in {}^*N \setminus N$  and  $\nu < \lambda$ .

Introducing the functionals

$$(6.8) \quad D_R(\Theta, p(\cdot, t)) \equiv \left( \frac{1}{\text{vol} B(\Theta, r_\nu)} \sum_{\substack{P \in D_R(B(\Theta, r_\nu)) \\ Q \in D \setminus \{P\}}} f_{PQ}(p(\Theta_P, t), p(\Theta_Q, t)) \right),$$

defined for every  $\Theta \in \Omega$  on the space of all deformation functions  $p: \Omega \times \bar{I} \ni (\Theta, t) \rightarrow p(\Theta, t) \in R^3$  (and hence on the space of all standard deformation functions  $p: {}^*\Omega \times {}^*\bar{I} \ni (\Theta, t) \rightarrow p(\Theta, t) \in {}^*R^3$ ) and taking into account Eqs. (4.3)<sub>2</sub> and (6.7), we arrive at the relation

$$(6.9) \quad d_R(\Theta, t) = D_R(\Theta, p(\cdot, t)); \quad \Theta \in \Omega, t \in \bar{I}.$$

Eqs. (6.9), (6.8) characterize the interrelation between the „continuous”  $S$ -density  $d_R(\cdot, t)$  of interactions and the „discrete” distribution of interactions in the regular Newtonian mass-point system. This interrelation holds in any strictly  $S$ -regular motion of the point system  $D$  under consideration<sup>(14)</sup>.

Formulas (6.3), (6.9) can be interpreted as the constitutive relations of a certain non-local elastic „material continuum”, motion of which is described by an arbitrary deformation function  $p: \Omega \times I \ni (\Theta, t) \rightarrow p(\Theta, t) \in R^3$ . The properties of this „material continuum” are uniquely determined by the properties of a regular Newtonian mass-point system, provided that we confine ourselves to the strictly  $S$ -regular motions of its point system.

## 7. Conclusions.

Summarizing the obtained results we shall formulate the following assertions:

1. Every  $S$ -regular motion of an arbitrary regular Newtonian mass-point system<sup>(15)</sup> (if it exists) has to satisfy Eq. (5.3) together with Eqs. (3.5), (4.3) and with  $\ddot{p}(\Theta, t) = {}^0\ddot{x}_i(P)$ ,  $\Theta \in {}^0\mathcal{K}_R(P)$ , for every  $P \in D$ ,  $t \in I$ .

2. If there exists strictly  $S$ -regular motion of a certain regular Newtonian mass point system then the deformation function for this motion has to satisfy Eqs. (5.3), (6.3), (6.9) with denotations (3.4), (6.2), (6.8).

3. Every regular Newtonian mass-point system uniquely determines certain non-local elastic „material continuum” with governing relations (5.3), (6.3), (6.9). The continuous fields in these governing relations are expressed in terms of Newtonian mass-point mechanics by Eqs. (3.4), (6.2), (6.8) for every strictly  $S$ -regular motion of the Newtonian mass-point system under consideration (if it exists).

<sup>(14)</sup> This interrelation also holds in any  $S$ -regular motion satisfying Eq. (6.7)

<sup>(15)</sup> A motion of the Newtonian mass-point system was defined in Sec. 1 as the motion of its point system satisfying Newton's equations (1.1), (1.2).

It must be remembered that every regular Newtonian mass-point system is, by definition, a nonstandard Newtonian mass-point system. The number of points in this system is equal to a certain fixed infinite natural number and the masses of points are infinitesimal. For the class of motions under consideration (for  $S$ -regular motions) also the values of external forces acting on the points as well as the values of interactions between the points are infinitesimal. The assertions listed above, which interrelate certain nonstandard „discrete” functions (i.e., defined on  $\mathfrak{x}_R(D) \subset {}^*R^3$ ) with standard continuous fields (defined on  ${}^0\mathfrak{x}_R(D) \subset R^3$ ) can be expressed exclusively in terms of the nonstandard analysis. On the other hand, resulting relations (5.3), (6.3), (6.9), which can be interpreted as describing certain „material continuum”, are standard. Thus the method of the nonstandard analysis applied to Newtonian mass-point mechanics makes it possible to define the class of nonstandard mass-point systems (which were called regular Newtonian mass-point systems) having properties of material continua (for more general approaches cf. [13]). In this paper, starting from Newtonian mechanics, we have derived governing relations of a nonlocal continuum mechanics; passage from Newtonian mechanics to the relations of the elasticity theory will be described in the next paper (cf. also [15]). However, the non-standard methods can be also applied directly to some problems of continuum mechanics, [16, 17].

#### References

1. A. ROBINSON, *Non-standard analysis*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64, (1961).
2. A. ROBINSON, *Non-Standard Analysis*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam (1966).
3. A. R. BERNSTEIN, A. ROBINSON, *Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos*. Pacific J. Math. 16 (1966).
4. A. ROBINSON, E. ZAKON, *A Set-Theoretical Characterization of Enlargements*. Proc. of Int. Symp. on Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability. Pasadena, California 1967. Holt-Rinehart and Winston, New York (1969).
5. P. J. KELEMEN, A. ROBINSON, *The nonstandard  $\lambda$ - $\phi_2^2(x)$ : model*. Journ. Mat. Phys. 13 (1972).
6. A. ROBINSON, P. ROQUETTE, *On the Finiteness Theorem of Siegel and Mahler Concerning Diophantine Equations*. J. Number Theory 7 (1975).
7. A. ROBINSON, *Selected Papers, Vol. 2, Nonstandard Analysis and Philosophy*. Editors: W. A. J. Luxemburg, S. Korner, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam (1979).
8. M. MACHOVER, J. HIRSCHFELD, *Lectures on the Non-Standard Analysis*. Lecture Notes in Mathematics, No 94, Springer Verlag (1969).
9. W. A. J. LUXEMBURG, *A General Theory of Monads*. Appl. of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability, Holt-Rinehart and Winston (1969).
10. *Contributions to Non-Standard Analysis*, Symposium at Oberwolfach, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam (1972).
11. M. DAVIS, *Applied Non-Standard Analysis*, John Wiley and Sons, New York (1977).
12. CZ. WOŹNIAK, *Analiza niestandardowa w mechanice newtonowskiej punktu materialnego* (Nonstandard analysis in Newtonian mass-point mechanics, in Polish), Mech. Teor. i Stos. 19 (1981), 3
13. CZ. WOŹNIAK, *Non-Standard Analysis and Material Systems in Mechanics*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Techn. No 1-2, 1980.
14. CZ. WOŹNIAK, *On the Non-Standard Interrelation Between Mass-Point Mechanics and Continuum Mechanics*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. No 11-12, 1981.
15. CZ. WOŹNIAK, *On the Non-Standard Model of the Theory of Elasticity*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. No 11-12, 1981.

16. Cz. WOŹNIAK, E. WIERZBICKI, *On the formation of Implicit Constraints and Free-Boundary Problems for Elastodynamics by the Non-Standard Analysis Technique*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. No 11-12, 1981.
17. Cz. WOŹNIAK, K. NOBIS, *Nonstandard Analysis and Balance Equations in the Theory of Porous Media*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. No 11-12, 1981.

## Р е з ю м е

## НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ И СВЯЗЬ МЕЖДУ МЕХАНИКОЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК И МЕХАНИКОЙ КОНТИНУУМ.

В работе доказано, что учитывая методы нестандартного анализа из уравнений механики Ньютона системы материальных точек можно вывести непосредственно фундаментальные уравнения механики континуум без применения аппроксимации и граничных переходов.

## Streszczenie

## O N ESTANDARDOWEJ ANALIZIE I ZWIĄZKU MIĘDZY MECHANIKĄ PUNKTÓW MATERIALNYCH A MECHANIKĄ KONTINUUM

W pracy wykazano, że korzystając z metod niestandardowej analizy można wyprowadzić podstawowe równania mechaniki kontinuuum bez stosowania aproksymacji i przejść granicznych bezpośrednio z równań mechaniki Newtona układów punktów materialnych.

INSTYTUT MECHANIKI  
UNIwersytet warszawski



ZAGADNIENIE SZCZELINY W WARSTWOWEJ PŁYCCIE POPRZECZNIE  
IZOTROPOWEJ

BOGDAN R O G O W S K I (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Teoretyczne badanie zagadnień mechaniki anizotropowych ciał warstwowych osłabionych szczelinami rozpoczęto w ostatnich latach. Płaskie zagadnienie szczeliny w pasmie ortotropowym złączonym z półpłaszczyznami rozwiązano w [1], a w pasmie złączonym z półpłaszczyzną w [2].

Dla anizotropowych ciał warstwowych nie zbadanymi pozostają przestrzenne i w szczególności osiowosymetryczne zagadnienia szczelin. Zagadnienie szczeliny w warstwie poprzecznie izotropowej rozpatrzono w [3] i [4], a w ciele nieograniczonym w pracach [3 - 6].

W niniejszej pracy rozwiązano zagadnienie płaskiej szczeliny kołowej, usytuowanej w płaszczyźnie środkowej warstwy poprzecznie izotropowej, złączonej z dwoma innymi poprzecznie izotropowymi warstwami identycznymi ze sobą.

2. Równania podstawowe i ich rozwiązania

Zagadnienie równowagi sprężystego, jednorodnego ciała poprzecznie izotropowego może być rozwiązane za pomocą funkcji  $\varphi_\alpha(r, z)$ , które w przypadku osiowej symetrii są rozwiązaniami równań

$$(2.1) \quad (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + s_\alpha^{-2}\partial_z^2)\varphi_\alpha = 0; \quad \alpha = 1, 2.$$

Funkcje  $\varphi_\alpha(r, z)$  spełniają układ cząstkowych równań różniczkowych równowagi i określają w walcowym układzie współrzędnych  $(r, \theta, z)$  składowe wektora przemieszczenia  $(u, 0, w)$  i tensora naprężenia  $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, 0, 0, \sigma_{rz})$  za pomocą wzorów [7]

$$(2.2) \quad u = \partial_r(k\varphi_1 + \varphi_2), \quad w = \partial_z(\varphi_1 + k\varphi_2),$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{zz} &= G_1(k+1)\partial_z^2(s_1^{-2}\varphi_1 + s_2^{-2}\varphi_2), \\ \sigma_{rz} &= G_1(k+1)\partial_{rz}^2(\varphi_1 + \varphi_2), \\ \sigma_{rr} &= -G_1(k+1)\partial_z^2(\varphi_1 + \varphi_2) - 2Gr^{-1}\partial_r(k\varphi_1 + \varphi_2), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -G_1(k+1)\partial_z^2(\varphi_1 + \varphi_2) - 2G\partial_r^2(k\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned}$$

W związkach (2.1), (2.2), (2.3) przyjęto dla symboli różniczkowania oznaczenia

$$\partial_r(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial r}, \quad \partial_z(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial z}.$$

Parametry  $s_\alpha$ ,  $k$  zależą od stałych materiałowych. Obliczamy je ze wzorów [7]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} s_{1,2} &= \varepsilon \left( \sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} \right), \\ k &= \mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \end{aligned}$$

w których

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \left[ \frac{1}{1-\nu^2} H(1-\nu_1^2 H) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \varrho &= (\Gamma - \nu_1 H) \left[ \frac{1-\nu}{1+\nu} H(1-\nu_1^2 H) \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \mu &= \Gamma \left[ \nu_1 H + \frac{G_1}{E_1} (1-\nu-2\nu_1^2 H) \right]^{-1} - 1, \\ H &= \frac{E}{E_1}, \quad \Gamma = \frac{G}{G_1}. \end{aligned}$$

Techniczne stałe materiałowe  $E$ ,  $\nu$  charakteryzują właściwości sprężyste materiału w płaszczyznach  $z = \text{const}$  (izotropowe), natomiast  $E_1$ ,  $\nu_1$ ,  $G_1$  w kierunku osi  $z$ , równoległej do osi sprężystej symetrii materiału.

Biorąc pod uwagę nierówności jakie spełniają techniczne stałe materiałowe

$$(2.6) \quad 1 - \nu_1^2 \frac{E}{E_1} > 0, \quad 1 - \nu - 2\nu_1^2 \frac{E}{E_1} > 0,$$

stwierdzamy, że stałe  $\varepsilon$ ,  $\varrho$ ,  $\mu$  są rzeczywiste.

Z zależności (2.5) i (2.6) wynikają nierówności

$$\varepsilon > 0, \quad \varrho \geq 0, \quad \mu > -1,$$

zaś z równań (2.4) zależności

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \alpha &= s_1 + s_2 = \varepsilon \sqrt{2(\varrho+1)}, \\ \beta &= s_1 - s_2 = \varepsilon \sqrt{2(\varrho-1)}. \end{aligned}$$

W przypadku  $\varrho \geq -1$  parametr  $\alpha$  jest rzeczywisty dodatni bądź równy zeru, dla  $\varrho < -1$  przyjmuje wartość urojoną. Współczynnik  $\beta$  jest rzeczywisty dodatni dla  $\varrho > 1$ , równy zeru dla  $\varrho = 1$  i urojony dla  $\varrho < 1$ .

W przypadku  $\varrho > -1$ , tj. gdy spełnione są nierówności

$$(2.8) \quad \frac{G}{G_1} > \nu_1 \frac{E}{E_1} = \nu_2 \quad \text{lub} \quad -1 < \varrho < 0,$$

co najmniej jeden z parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  jest liczbą rzeczywistą. Rzeczywiste materiały mają takie właściwości, że ich stałe sprężystości spełniają alternatywę (2.8) (na przykład kompozyty). Teoretycznie mogą występować również takie materiały dla których  $\varrho < -1$  i wówczas parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  przyjmują wartości urojone  $\alpha = i\hat{\alpha}$ ,  $\beta = i\hat{\beta}$  ( $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  — rzeczywiste).

Jeżeli wykonamy transformację Hankela w równaniu (2.1), to stwierdzamy, że funkcje

$$(2.9) \quad \Phi_\alpha(\xi, z) = \mathcal{H}_\nu\{\varphi_\alpha(r, z); r \rightarrow \xi\} = \int_0^\infty r \varphi_\alpha(r, z) J_\nu(\xi r) dr,$$

spełniają równania

$$(2.10) \quad \left( \frac{d^2}{dz^2} - s_\alpha^2 \xi^2 \right) \Phi_\alpha = 0; \quad \alpha = 1, 2.$$

W zależności (2.9)  $\mathcal{H}_\nu$  oznacza operator transformacji Hankela rzędu  $\nu$  zdefiniowany za pomocą  $J_\nu(\xi r)$ , funkcji Bessela pierwszego rodzaju i rzędu  $\nu$ .

Przechodząc w rozwiązaniach równań (2.10) do oryginałów otrzymujemy funkcje przemieszczeń  $\varphi_\alpha(r, z)$ , które zapisano w postaci

$$(2.11) \quad \varphi_\alpha(r, z) = \frac{s_{\alpha \pm 1}}{G_1(k+1)(s_1-s_2)} \mathcal{H}_0\{\xi^{-2}[A_\alpha(\xi) \operatorname{sh} s_\alpha \xi z + B_\alpha(\xi) \operatorname{ch} s_\alpha \xi z]; \xi \rightarrow r\}; \quad \alpha = 1, 2 \text{ (nie sumowane)},$$

gdzie  $A_\alpha(\xi)$ ,  $B_\alpha(\xi)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) są nieznanymi funkcjami parametru transformacji  $\xi$ .

Pola przemieszczeń i naprężeń określimy jeżeli uwzględnimy zależności (2.11) w związkach (2.2) i (2.3).

Otrzymujemy wzory

$$(2.12) \quad u(r, z) = -\frac{1}{G_1(k+1)(s_1-s_2)} \mathcal{H}_1\{\xi^{-1}[ks_2(A_1 \operatorname{sh} s_1 \xi z + B_1 \operatorname{ch} s_1 \xi z) + s_1(A_2 \operatorname{sh} s_2 \xi z + B_2 \operatorname{ch} s_2 \xi z)]; \xi \rightarrow r\},$$

$$(2.13) \quad w(r, z) = \frac{s_1 s_2}{G_1(k+1)(s_1-s_2)} \mathcal{H}_0\{\xi^{-1}[A_1 \operatorname{ch} s_1 \xi z + B_1 \operatorname{sh} s_1 \xi z + k(A_2 \operatorname{ch} s_2 \xi z + B_2 \operatorname{sh} s_2 \xi z)]; \xi \rightarrow r\},$$

$$(2.14) \quad \sigma_{zz}(r, z) = \frac{1}{s_1-s_2} \mathcal{H}_0\{[s_2(A_1 \operatorname{sh} s_1 \xi z + B_1 \operatorname{ch} s_1 \xi z) + s_1(A_2 \operatorname{sh} s_2 \xi z + B_2 \operatorname{ch} s_2 \xi z)]; \xi \rightarrow r\},$$

$$(2.15) \quad \sigma_{rz}(r, z) = -\frac{s_1 s_2}{s_1-s_2} \mathcal{H}_1\{(A_1 \operatorname{ch} s_1 \xi z + B_1 \operatorname{sh} s_1 \xi z + A_2 \operatorname{ch} s_2 \xi z + B_2 \operatorname{sh} s_2 \xi z); \xi \rightarrow r\},$$

$$(2.16) \quad \sigma_{rr}(r, z) = -\frac{s_1 s_2}{s_1-s_2} \mathcal{H}_0\{s_1(A_1 \operatorname{sh} s_1 \xi z + B_1 \operatorname{ch} s_1 \xi z) + s_2(A_2 \operatorname{sh} s_2 \xi z + B_2 \operatorname{ch} s_2 \xi z); \xi \rightarrow r\} - 2G \frac{u(r, z)}{r},$$

$$(2.17) \quad \sigma_{\theta\theta}(r, z) = -\frac{s_1 s_2}{s_1-s_2} \mathcal{H}_0\{s_1(A_1 \operatorname{sh} s_1 \xi z + B_1 \operatorname{ch} s_1 \xi z) + s_2(A_2 \operatorname{sh} s_2 \xi z + B_2 \operatorname{ch} s_2 \xi z); \xi \rightarrow r\} + 2G \frac{u(r, z)}{r} + \frac{2}{k+1} \cdot \frac{1}{s_1-s_2} \cdot \frac{G}{G_1} \mathcal{H}_0\{ks_2(A_1 \operatorname{sh} s_1 \xi z + B_1 \operatorname{ch} s_1 \xi z) + s_1(A_2 \operatorname{sh} s_2 \xi z + B_2 \operatorname{ch} s_2 \xi z); \xi \rightarrow r\}.$$

## 3. Zagadnienie, jego warunki brzegowe i równania całkowe

Rozpatrzmy liniowo sprężystą, poprzecznie izotropową, nieograniczoną płytę złożoną z trzech warstw o grubościach  $h_2$ ,  $2h_1$ ,  $h_2$  ze szczeliną kołową o promieniu  $a$ .

Szczelina usytuowana jest symetrycznie względem swobodnych brzegów płyty i początku przyjętego walcowego układu współrzędnych  $(r', \Theta, z')$ .

Płyta zajmuje obszary:

$$\Omega_I = \{(r', \Theta, z') : 0 \leq r' < \infty, 0 \leq \Theta \leq 2\pi, |z'| \leq h_1\}. \quad i$$

$$\Omega_{II} = \{(r', \Theta, z') : 0 \leq r' < \infty, 0 \leq \Theta \leq 2\pi, h_1 \leq |z'| \leq h = h_1 + h_2\},$$

wypełnione materiałami poprzecznie izotropowymi o technicznych stałych, odpowiednio,  $E_I, \nu_I, E_{1I}, \nu_{1I}, G_{II}$  i  $E_{II}, \nu_{II}, E_{1II}, \nu_{1II}, G_{1II}$ .

Stałe te określają zgodnie z wzorami (2.4), (2.5) parametry materiałowe warstw, odpowiednio,  $s_{II}, s_{2I}, k_I$  i  $s_{1II}, s_{2II}, k_{II}$ .

Szczelina jest obciążona wewnętrznym ciśnieniem  $p(r')$  o rozkładzie osiowo symetrycznym.

Pola przemieszczeń  $(u_i, 0, w_i)$  ( $i = I, II$ ) i naprężeń  $(\sigma_{rri}, \sigma_{\Theta\Theta i}, \sigma_{zzi}, \sigma_{rzi})$ , występujące w materiałach wypełniających warstwy, dane są za pomocą wzorów o postaci (2.12)—(2.17), w których należy wprowadzić współrzędne  $r', \Theta, z'$  i parametr transformacji  $\xi'$ .

Wprowadzimy współrzędne bezwymiarowe  $r, z, \xi$  takie, że  $r' = ra$ ,  $z' = za$ ,  $\xi' = \xi/a$ . W tych współrzędnych promień szczeliny ma jednostkową długość oraz  $h_1 = a\delta_1$ ,  $h_2 = a\delta_2$ ,  $h = h_1 + h_2 = a\delta$ . Rozwiązania w obszarze  $\Omega_I$  otrzymamy z równań (2.12)—(2.17) przez formalną zamianę  $s_1, s_2, k, G, G_1$  na  $s_{1I}, s_{2I}, k_I, G_I, G_{1I}$ , a rozwiązania w obszarze  $\Omega_{II}$  z tych samych równań zamieniając odpowiednio  $A_\alpha(\xi), B_\alpha(\xi), s_\alpha, k, G, G_1$  na  $C_\alpha(\xi), D_\alpha(\xi), s_{\alpha II}, k_{II}, G_{II}, G_{1II}$ . W warstwie zewnętrznej zastąpimy zmienną  $z$  przez  $z - \delta_1$ . Wprowadzona zamiana zmiennych prowadzi do pomnożenia prawych stron równań opisujących przemieszczenia przez  $a^{-1}$  i prawych stron równań dla naprężeń przez  $a^{-2}$ .

Dzięki symetrii zagadnienie sprowadza się do znalezienia fizycznych wielkości w obszarze  $\Omega = \{(r, z) : r \geq 0, 0 \leq z \leq \delta\}$ .

Poszukiwane funkcje muszą spełniać odpowiednie warunki mieszane dla  $z = 0$ , warunki brzegowe dla  $z = \delta$  i warunki ciągłości dla  $z = \delta_1$ .

Z warunków tych wyznaczmy funkcje parametru transformacji  $A_\alpha(\xi), B_\alpha(\xi), C_\alpha(\xi), D_\alpha(\xi)$ .

Warunki brzegowe mają tu postać

$$(3.1) \quad \sigma_{zzi}(r, \delta) = 0; \quad r \geq 0,$$

$$(3.2) \quad \sigma_{zri}(r, \delta) = 0; \quad r \geq 0.$$

W płaszczyźnie  $z = 0$  mamy warunki brzegowe mieszanego typu

$$(3.3) \quad \sigma_{zri}(r, 0) = 0; \quad r \geq 0,$$

$$(3.4) \quad \sigma_{zzi}(r, 0) = -p(r); \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$(3.5) \quad w_i(r, 0) = 0; \quad r \geq 1.$$



Warunki ciągłości są postaci

$$(3.6) \quad \llbracket u_t(r, \delta_1) \rrbracket_I^{\text{II}} = \llbracket w_t(r, \delta_1) \rrbracket_I^{\text{II}} = 0; \quad r \geq 0,$$

$$(3.7) \quad \llbracket \sigma_{zz}(r, \delta_1) \rrbracket_I^{\text{II}} = \llbracket \sigma_{zr}(r, \delta_1) \rrbracket_I^{\text{II}} = 0; \quad r \geq 0,$$

gdzie  $\llbracket f_i \rrbracket_I^{\text{II}}$  oznacza skok funkcji  $f_i$  przy przejściu z warstwy I do warstwy II.

Z zależności (2.12) - (2.15) otrzymujemy

$$(3.8) \quad u_1(r, z) = - \frac{1}{G_{11}a(k_1+1)(s_{11}-s_{21})} \mathcal{H}_1 \{ \xi^{-1} [k_1 s_{21} (A_1 \text{sh} s_{11} \xi z + \\ + B_1 \text{ch} s_{11} \xi z) + s_{11} (A_2 \text{sh} s_{21} \xi z + B_2 \text{ch} s_{21} \xi z)]; \xi \rightarrow r \},$$

$$(3.9) \quad w_1(r, z) = \frac{s_{11}s_{21}}{G_{11}a(k_1+1)(s_{11}-s_{21})} \mathcal{H}_0 \{ \xi^{-1} [A_1 \text{ch} s_{11} \xi z + B_1 \text{sh} s_{11} \xi z + \\ + k_1 (A_2 \text{ch} s_{21} \xi z + B_2 \text{sh} s_{21} \xi z)]; \xi \rightarrow r \},$$

$$(3.10) \quad \sigma_{zz}(r, z) = \frac{1}{(s_{11}-s_{21})a^2} \mathcal{H}_0 \{ [s_{21} (A_1 \text{sh} s_{11} \xi z + B_1 \text{ch} s_{11} \xi z) + \\ + s_{11} (A_2 \text{sh} s_{21} \xi z + B_2 \text{ch} s_{21} \xi z)]; \xi \rightarrow r \},$$

$$(3.11) \quad \sigma_{zr}(r, z) = - \frac{s_{11}s_{21}}{(s_{11}-s_{21})a^2} \mathcal{H}_1 \{ (A_1 \text{ch} s_{11} \xi z + B_1 \text{sh} s_{11} \xi z + \\ + A_2 \text{ch} s_{21} \xi z + B_2 \text{sh} s_{21} \xi z); \xi \rightarrow r \},$$

gdzie  $(r, z) \in \Omega_1$  oraz

$$(3.12) \quad u_{\text{II}}(r, z) = - \frac{1}{G_{1\text{II}}a(k_{\text{II}}+1)(s_{1\text{II}}-s_{2\text{II}})} \mathcal{H}_1 \{ \xi^{-1} [k_{\text{II}} s_{2\text{II}} (C_1 \text{sh} s_{1\text{II}} \xi (z - \delta_1) + \\ + D_1 \text{ch} s_{1\text{II}} \xi (z - \delta_1)) + s_{1\text{II}} (C_2 \text{sh} s_{2\text{II}} \xi (z - \delta_1) + D_2 \text{ch} s_{2\text{II}} \xi (z - \delta_1))]; \xi \rightarrow r \},$$

$$(3.13) \quad w_{\text{II}}(r, z) = \frac{s_{1\text{II}}s_{2\text{II}}}{G_{1\text{II}}a(k_{\text{II}}+1)(s_{1\text{II}}-s_{2\text{II}})} \mathcal{H}_0 \{ \xi^{-1} [C_1 \text{ch} s_{1\text{II}} \xi (z - \delta_1) + \\ + D_1 \text{sh} s_{1\text{II}} \xi (z - \delta_1) + k_{\text{II}} (C_2 \text{ch} s_{2\text{II}} \xi (z - \delta_1) + D_2 \text{sh} s_{2\text{II}} \xi (z - \delta_1))]; \xi \rightarrow r \},$$

$$(3.14) \quad \sigma_{zz\text{II}}(r, z) = \frac{1}{(s_{1\text{II}}-s_{2\text{II}})a^2} \mathcal{H}_0 \{ [s_{2\text{II}} (C_1 \text{sh} s_{1\text{II}} \xi (z - \delta_1) + \\ + D_1 \text{ch} s_{1\text{II}} \xi (z - \delta_1)) + s_{1\text{II}} (C_2 \text{sh} s_{2\text{II}} \xi (z - \delta_1) + D_2 \text{ch} s_{2\text{II}} \xi (z - \delta_1))]; \xi \rightarrow r \},$$

$$(3.15) \quad \sigma_{zr\text{II}}(r, z) = - \frac{s_{1\text{II}}s_{2\text{II}}}{(s_{1\text{II}}-s_{2\text{II}})a^2} \mathcal{H}_1 \{ [C_1 \text{ch} s_{1\text{II}} \xi (z - \delta_1) + D_1 \text{sh} s_{1\text{II}} \xi (z - \delta_1) + \\ + C_2 \text{ch} s_{2\text{II}} \xi (z - \delta_1) + D_2 \text{sh} s_{2\text{II}} \xi (z - \delta_1)]; \xi \rightarrow r \},$$

dla  $(r, z) \in \Omega_{\text{II}}$ .

W szczególności dla  $z = 0$  otrzymujemy z (3.9), (3.10), (3.11)

$$(3.16) \quad w_1(r, 0) = \frac{s_{11}s_{21}}{G_{11}a(k_1+1)(s_{11}-s_{21})} \mathcal{H}_0 \{ \xi^{-1} [A_1(\xi) + k_1 A_2(\xi)]; r \},$$

$$(3.17) \quad \sigma_{zz}(r, 0) = \frac{1}{(s_{11}-s_{21})a^2} \mathcal{H}_0 \{ [s_{21} B_1(\xi) + s_{11} B_2(\xi)]; r \},$$

$$(3.18) \quad \sigma_{zr}(r, 0) = - \frac{s_{11}s_{21}}{(s_{11}-s_{21})a^2} \mathcal{H}_1 \{ [A_1(\xi) + A_2(\xi)]; r \}.$$

Z warunku brzegowego (3.3) i zależności (3.18) otrzymujemy

$$(3.19) \quad A_1(\xi) = -A_2(\xi) = -f(\xi),$$

gdzie  $f(\xi)$  jest nieznaną funkcją.

Równania ciągłości pola przemieszczeń i naprężeń dane za pomocą wzorów (3.6) i (3.7) przechodzą, po uwzględnieniu zależności (3.8) - (3.15), w układ równań algebraicznych, z którego możemy wyznaczyć  $C_\alpha(\xi)$ ,  $D_\alpha(\xi)$  za pomocą  $B_\alpha(\xi)$  i  $f(\xi)$ .

Otrzymujemy

$$(3.20) \quad \begin{aligned} C_1(\xi) &= \frac{1}{k_{II}-1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \{f(\xi)[(g-k_{II})\text{ch}s_{11}\xi\delta_1 - (gk_1-k_{II})\text{ch}s_{21}\xi\delta_1] - \\ &\quad - [B_2(gk_1-k_{II})\text{sh}s_{21}\xi\delta_1 + B_1(g-k_{II})\text{sh}s_{11}\xi\delta_1]\}, \\ C_2(\xi) &= \frac{1}{k_{II}-1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \{f(\xi)[(gk_1-1)\text{ch}s_{21}\xi\delta_1 - (g-1)\text{ch}s_{11}\xi\delta_1] + \\ &\quad + B_2(gk_1-1)\text{sh}s_{21}\xi\delta_1 + B_1(g-1)\text{sh}s_{11}\xi\delta_1\}, \\ D_1(\xi) &= \frac{1}{k_{II}-1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{1}{s_{2II}} \{f(\xi)[s_{1I}(g-1)\text{sh}s_{21}\xi\delta_1 - s_{2I}(gk_1-1)\text{sh}s_{11}\xi\delta_1] + \\ &\quad + B_2s_{1I}(g-1)\text{ch}s_{21}\xi\delta_1 + B_1s_{2I}(gk_1-1)\text{ch}s_{11}\xi\delta_1\}, \\ D_2(\xi) &= \frac{1}{k_{II}-1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{1}{s_{1II}} \{f(\xi)[s_{2I}(gk_1-k_{II})\text{sh}s_{11}\xi\delta_1 - s_{1I}(g-k_{II})\text{sh}s_{21}\xi\delta_1] - \\ &\quad - [B_2s_{1I}(g-k_{II})\text{ch}s_{21}\xi\delta_1 + B_1s_{2I}(gk_1-k_{II})\text{ch}s_{11}\xi\delta_1]\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.21) \quad \begin{aligned} g &= \frac{G_{1II}}{G_{1I}} \cdot \frac{k_{II}+1}{k_1+1}, \\ \beta_2 &= s_{1II} - s_{2II}, \\ \beta_1 &= s_{1I} - s_{2I}, \\ \varepsilon_1^2 &= s_{1I}s_{2I}, \quad \varepsilon_2^2 = s_{1II}s_{2II}. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (3.1) i (3.2), po uwzględnieniu (3.14) i (3.15) i wykorzystaniu (3.20), prowadzą do układu równań algebraicznych, z których możemy wyznaczyć  $B_\alpha(\xi)$  za pomocą nieznannej funkcji  $f(\xi)$ .

Rozwiązanie tego układu ma postać

$$(3.22) \quad B_1(\xi) = f(\xi) \frac{l_1(x)}{m(x)}, \quad B_2(\xi) = f(\xi) \frac{l_2(x)}{m(x)}; \quad (x = \xi\delta),$$

gdzie

$$(3.23) \quad \begin{aligned} l_1(x) &= (a_1 + a_5)\text{ch}x(\alpha_1\eta_1 + \beta_2\eta_2) - (a_1 - a_5)\text{ch}x(\alpha_1\eta_1 - \beta_2\eta_2) - \\ &\quad - (a_2 + a_6)\text{ch}x(\beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2) + (a_2 - a_6)\text{ch}x(\beta_1\eta_1 - \beta_2\eta_2) + \\ &\quad + (a_3 + a_7)\text{ch}x(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2) - (a_3 - a_7)\text{ch}x(\alpha_1\eta_1 - \alpha_2\eta_2) - \\ &\quad - (a_4 + a_8)\text{ch}x(\beta_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2) + (a_4 - a_8)\text{ch}x(\beta_1\eta_1 - \alpha_2\eta_2) + \\ &\quad + a_9\text{ch}x\alpha_1\eta_1 + a_{10}\text{ch}x\beta_1\eta_1 - a_{11}\text{ch}x\alpha_2\eta_2 + a_{12}\text{ch}x\beta_2\eta_2 + a_0, \end{aligned}$$

$$(3.24) \quad l_2(x) = -(a_1 + a_5) \operatorname{ch} x(\alpha_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2) + (a_1 - a_5) \operatorname{ch} x(\alpha_1 \eta_1 - \beta_2 \eta_2) - \\ - (a_2 + a_6) \operatorname{ch} x(\beta_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2) + (a_2 - a_6) \operatorname{ch} x(\beta_1 \eta_1 - \beta_2 \eta_2) - \\ - (a_3 + a_7) \operatorname{ch} x(\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + (a_3 - a_7) \operatorname{ch} x(\alpha_1 \eta_1 - \alpha_2 \eta_2) - \\ - (a_4 + a_8) \operatorname{ch} x(\beta_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + (a_4 - a_8) \operatorname{ch} x(\beta_1 \eta_1 - \alpha_2 \eta_2) - \\ - a_9 \operatorname{ch} x \alpha_1 \eta_1 + a_{10} \operatorname{ch} x \beta_1 \eta_1 - a'_{11} \operatorname{ch} x \alpha_2 \eta_2 + a'_{12} \operatorname{ch} x \beta_2 \eta_2 + a'_0,$$

$$(3.25) \quad m(x) = (a_1 + a_5) \operatorname{sh} x(\alpha_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2) - (a_1 - a_5) \operatorname{sh} x(\alpha_1 \eta_1 - \beta_2 \eta_2) - \\ - (a_2 + a_6) \operatorname{sh} x(\beta_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2) + (a_2 - a_6) \operatorname{sh} x(\beta_1 \eta_1 - \beta_2 \eta_2) + \\ + (a_3 + a_7) \operatorname{sh} x(\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) - (a_3 - a_7) \operatorname{sh} x(\alpha_1 \eta_1 - \alpha_2 \eta_2) - \\ - (a_4 + a_8) \operatorname{sh} x(\beta_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + (a_4 - a_8) \operatorname{sh} x(\beta_1 \eta_1 - \alpha_2 \eta_2) + \\ + a_9 \operatorname{sh} x \alpha_1 \eta_1 + a_{10} \operatorname{sh} x \beta_1 \eta_1, \\ \left( \eta_1 = \frac{\delta_1}{\delta}, \eta_2 = \frac{\delta_2}{\delta}, x = \xi \delta \right).$$

Występujące we wzorach (3.23), (3.24) i (3.25) współczynniki  $a_i$  obliczamy za pomocą wzorów

$$(3.26) \quad a_{1,2} = \alpha_2 g(k_{II} - 1)(k_I - 1)(s_{1I} s_{2I} \mp s_{1II} s_{2II}), \\ a_{3,4} = -\beta_2 g(k_{II} - 1)(k_I - 1)(s_{1I} s_{2I} \pm s_{1II} s_{2II}), \\ a_{5,6} = \alpha_2 \{s_{2I} [s_{2II}(gk_I - k_{II})^2 + s_{1II}(gk_I - 1)^2] \mp s_{1I} [s_{1II}(g - 1)^2 + s_{2II}(g - k_{II})^2]\}, \\ a_{7,8} = \beta_2 \{s_{2I} [s_{2II}(gk_I - k_{II})^2 - s_{1II}(gk_I - 1)^2] \pm s_{1I} [s_{1II}(g - 1)^2 - s_{2II}(g - k_{II})^2]\}, \\ a_{9,10} = 8s_{1II} s_{2II} [s_{1I}(g - k_{II})(g - 1) \mp s_{2I}(gk_I - 1)(gk_I - k_{II})], \\ a_{11,12} = 4 \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} s_{1I} [s_{1II}(gk_I - 1)(g - 1) \mp s_{2II}(g - k_{II})(gk_I - k_{II})], \\ a_0 = -8s_{1II} s_{2II} s_{1I} [(gk_I - k_{II})(g - 1) + (g - k_{II})(gk_I - 1)], \\ a'_{11,12} = s_{2I} s_{1I}^{-1} a_{11,12}, \\ a'_0 = s_{2I} s_{1I}^{-1} a_0,$$

w których

$$(3.27) \quad \alpha_1 = s_{1I} + s_{2I}, \quad \alpha_2 = s_{1II} + s_{2II}, \\ \beta_1 = s_{1I} - s_{2I}, \quad \beta_2 = s_{1II} - s_{2II}.$$

Z zależności (3.22) obliczymy kombinację stałych  $B_1(\xi)$  i  $B_2(\xi)$

$$(3.28) \quad \frac{s_{2I}}{s_{1I} - s_{2I}} B_1(\xi) + \frac{s_{1I}}{s_{1I} - s_{2I}} B_2(\xi) = -f(\xi) \frac{l(x)}{m(x)}, \quad (x = \xi \delta).$$

Funkcja  $l(x)$  jest odpowiednią kombinacją funkcji  $l_1(x)$  i  $l_2(x)$ . Określona jest ona wzorem

$$(3.29) \quad l(x) = (a_1 + a_5) \operatorname{ch} x(\alpha_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2) - (a_1 - a_5) \operatorname{ch} x(\alpha_1 \eta_1 - \beta_2 \eta_2) + \\ + (a_2^* + a_6^*) \operatorname{ch} x(\beta_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2) - (a_2^* - a_6^*) \operatorname{ch} x(\beta_1 \eta_1 - \beta_2 \eta_2) + \\ + (a_3 + a_7) \operatorname{ch} x(\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) - (a_3 - a_7) \operatorname{ch} x(\alpha_1 \eta_1 - \alpha_2 \eta_2) + \\ + (a_4^* + a_8^*) \operatorname{ch} x(\beta_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) - (a_4^* - a_8^*) \operatorname{ch} x(\beta_1 \eta_1 - \alpha_2 \eta_2) + \\ + a_9 \operatorname{ch} x \alpha_1 \eta_1 - a'_{10} \operatorname{ch} x \beta_1 \eta_1 + 2a'_{11} \operatorname{ch} x \alpha_2 \eta_2 - 2a'_{12} \operatorname{ch} x \beta_2 \eta_2 - 2a'_0,$$

gdzie

$$(3.30) \quad \begin{aligned} a_i^* &= \alpha_1 \beta_1^{-1} a_i; & i &= 2, 4, 6, 8, 10, \\ a_k^* &= s_{21} \beta_1^{-1} a_k; & k &= 0, 11, 12, \end{aligned}$$

przy czym  $a_i, a_k$  dane są za pomocą wzorów (3.26).

Wprowadzimy funkcję  $M(x)$  ( $x = \xi\delta$ ) taką, że

$$(3.31) \quad M(x) = 1 - \frac{l(x)}{m(x)}; \quad (x = \xi\delta),$$

gdzie funkcja  $l(x)$  jest określona wzorem (3.29), a funkcja  $m(x)$  za pomocą wzoru (3.25).

Podstawienie zależności (3.19) do wzoru (3.16) i wykorzystanie reguły transformacji Hankela prowadzi do określenia przemieszczeń punktów leżących w płaszczyźnie zawierającej szczelinę

$$(3.32) \quad w_1(r, 0) = \frac{\kappa}{a} \int_0^\infty f(\xi) J_0(\xi r) d\xi,$$

gdzie

$$(3.33) \quad \kappa = \frac{s_{11} s_{21} (k_1 - 1)}{G_{11} (k_1 + 1) (s_{11} - s_{21})}$$

jest parametrem materiałowym.

Naprężenia występujące w tych punktach określimy ze wzoru (3.17) podstawiając (3.28) i uwzględniając (3.31)

$$(3.34) \quad \sigma_{zz1}(r, 0) = -\frac{1}{a^2} \int_0^\infty \xi [1 - M(\xi\delta)] J_0(\xi r) f(\xi) d\xi.$$

Funkcje parametru transformacji  $A_\alpha(\xi), B_\alpha(\xi), C_\alpha(\xi), D_\alpha(\xi)$  zostały określone za pomocą nieznannej funkcji  $f(\xi)$  i wzorów (3.19), (3.20), (3.22).

Za pomocą funkcji  $f(\xi)$  możemy określić przemieszczenia i naprężenia w materiałach wypełniających warstwy rozpatrywanej płyty niejednorodnej, wykorzystując w tym celu zależności (3.8) - (3.15) i wzory jakie otrzymamy dla  $\sigma_{rri}(r, z), \sigma_{\theta\theta i}(r, z)$  ze związków (2.16) i (2.17).

Realizacja mieszanych warunków brzegowych (3.4), (3.5) prowadzi do równań względem nieznannej funkcji  $f(\xi)$ . Jeżeli w tych warunkach uwzględnimy zależności (3.32) i (3.34), to otrzymujemy równania

$$(3.35) \quad \int_0^\infty f(\xi) \xi [1 - M(\xi\delta)] J_0(\xi r) d\xi = p(r) a^2; \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$(3.36) \quad \int_0^\infty f(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0; \quad r \geq 1.$$

Rozpatrywane zagadnienie zostało sprowadzone do dualnych równań całkowych (3.35), (3.36), z których wyznaczmy nieznaną funkcję  $f(\xi)$ , określającą poszukiwane fizyczne wielkości. Funkcja  $M(\xi\delta)$ , występująca w równaniu (3.35) i dana za pomocą wzorów (3.31), (3.29), (3.25) jest zależna od stałych materiałowych warstw i stosunku ich

grubości. Funkcja ta zależy także od parametru  $\delta$ , określającego stosunek grubości płyty  $h$  do promienia szczeliny  $a$ .

Gdy właściwości sprężyste warstw są identyczne, to ze wzorów (3.26), (3.27), (3.30) otrzymujemy

$$(3.37) \quad \begin{aligned} a_1 &= a_4 = a_5 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0 \\ a_4^* &= a_8^* = a_{10}^* = a_{11}^* = a_{12}^* = 0 \\ a_2 &= a_6 = 2s_1 s_2 \alpha (k-1)^2, \\ a_3 &= a_7 = -2s_1 s_2 \beta (k-1)^2, \\ a_2^* &= a_6^* = 2s_1 s_2 \alpha^2 \beta^{-1} (k-1)^2, \\ a_0^* &= 8s_1^2 s_2^2 \beta^{-1} (k-1)^2. \end{aligned}$$

Uwzględniając zależności (3.37) w związkach (3.25) i (3.29), a te w (3.31) otrzymujemy postać funkcji  $M(x)$  dla warstwy jednorodnej [3]

$$(3.38) \quad M(x) = 1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha x - \alpha^2 \beta^{-2} \operatorname{ch} \beta x + 4s_1 s_2 \beta^{-2}}{\operatorname{sh} \alpha x + \alpha \beta^{-1} \operatorname{sh} \beta x},$$

$$(\alpha = s_1 + s_2, \beta = s_1 - s_2, x = \xi \delta).$$

Przejście graniczne  $\delta_2 \rightarrow \infty (\eta_2 \rightarrow \infty)$  wykonane dla przypadku  $\alpha_2 \in R_+$  we wzorach (3.25) i (3.29) prowadzi do określenia funkcji  $M(x)$  za pomocą wzoru

$$(3.40) \quad M(x) = 1 - \frac{a_7 \operatorname{ch} \alpha_1 x + a_3 \operatorname{sh} \alpha_1 x + a_8^* \operatorname{ch} \beta_1 x + a_4^* \operatorname{sh} \beta_1 x + a_{11}^*}{a_3 \operatorname{ch} \alpha_1 x + a_7 \operatorname{sh} \alpha_1 x - a_4 \operatorname{ch} \beta_1 x - a_8 \operatorname{sh} \beta_1 x}, \quad (x = \xi \delta_1)$$

Zdefiniowana wzorem (3.40) funkcja  $M(x)$  odpowiada zagadnieniu warstwy poprzecznie izotropowej związanej z półprzestrzeniami o innych stałych materiałowych, osłabionej obecnością szczeliny usytuowanej w jej płaszczyźnie środkowej.

Jeżeli w (3.40) podstawimy wartości współczynników określonych wzorami (3.37), a więc przejdziemy do ośrodka jednorodnego, to funkcja  $M(x)$  jest tożsamościowo równa zeru. Funkcja  $M(x)$  posiada tę własność, że dąży do zera gdy  $x$  dąży do nieskończoności.

Gdy  $\delta \rightarrow \infty$  (długość promienia szczeliny dąży do zera lub ciało nieograniczone), to  $M(\xi \delta) \rightarrow 0$  i równania (3.35), (3.36) przechodzą w znane równania opisujące zagadnienie szczeliny w ciele nieograniczonym, które dla przypadku izotropii podano w [8] (s. 96 wzory 3.4.1 i 3.4.2).

#### 4. Równanie całkowe Fredholma, współczynnik intensywności naprężenia, przemieszczenia i energia szczeliny

Równanie (3.36) jest spełnione tożsamościowo przez reprezentację całkową

$$(4.1) \quad f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2 \int_0^1 g(\tau) \sin(\xi \tau) d\tau, \quad g(0) = 0.$$

Podstawiając związek (4.1) do równania (3.35) sprowadzamy je do równania całkowego typu Abela względem nieznannej funkcji  $g(\tau)$

$$(4.2) \quad \mathcal{A}_1[g'(\tau); r] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 g(\eta) d\eta \int_0^\infty \xi M(\xi\delta) J_0(\xi r) \sin(\xi\eta) d\xi + p(r); \quad 0 \leq r \leq 1,$$

gdzie  $\mathcal{A}_1$  jest operatorem Abela pierwszego rodzaju zdefiniowanym wzorem [8]

$$(4.3) \quad \mathcal{A}_1[g(\tau); r] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \frac{g(\tau) d\tau}{\sqrt{r^2 - \tau^2}}, \quad (r > 0).$$

Stosując w równaniu (4.2) odwrotny operator Abela

$$(4.4) \quad \mathcal{A}_1^{-1}[h(r); \tau] = \frac{d}{d\tau} \mathcal{A}_1[rh(r); \tau]$$

i wykonując w tym równaniu całkowanie z uwzględnieniem  $g(0) = 0$  oraz wzoru [9]

$$(4.5) \quad \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{r J_0(\xi r) dr}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} = \cos \xi \tau,$$

otrzymujemy

$$(4.6) \quad g(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 g(\eta) d\eta \int_0^\infty M(\xi\delta) \sin(\xi\eta) \sin(\xi\tau) d\xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\tau \frac{rp(r) dr}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}; \quad 0 < \tau < 1.$$

Równanie całkowe (4.6) zapiszemy w postaci

$$(4.7) \quad g(\tau) = \int_0^1 K(\tau, \eta) g(\eta) d\eta + p^*(\tau); \quad 0 < \tau < 1,$$

gdzie symetryczne jądro  $K(\tau, \eta)$  jest zdefiniowane wzorem

$$(4.8) \quad K(\tau, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty M(\xi\delta) \sin(\xi\eta) \sin(\xi\tau) d\xi$$

i  $p^*(\tau)$  jest daną funkcją określoną za pomocą całki

$$(4.9) \quad p^*(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\tau \frac{rp(r) dr}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}.$$

Równanie całkowe (4.7), określające funkcję  $g(\tau)$ , która wyznacza poszukiwaną funkcję  $f(\xi)$  za pomocą wzoru (4.1), jest równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego równania zależą od zachowania się jądra, zdefiniowanego wzorem (4.8), a więc określonego za pomocą funkcji trygonometrycznych i funkcji  $M(x)$  ( $x = \xi\delta$ ), zależnej od stałych materiałowych warstw, stosunku ich grubości oraz od stosunku grubości płyty do promienia szczeliny  $\left(\delta = \frac{h}{a}\right)$ .

Jądro zapiszemy w postaci równoważnej do (4.8)

$$(4.10) \quad K(\tau\delta^{-1}, \eta\delta^{-1}) = \frac{2}{\pi} \delta^{-1} \int_0^{\infty} M(x) \sin(x\eta\delta^{-1}) \sin(x\tau\delta^{-1}) dx,$$

$$\left( x = \xi\delta \in < 0, \infty \right), \quad \delta^{-1} = \frac{a}{h}.$$

Analizując wzory (3.31), (3.29), (3.25), określające funkcję  $M(x)$ , oraz zależności (2.7) i (3.27) określające parametry  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ( $i = I, II$ ) możemy stwierdzić, że funkcja  $M(x)$  posiada następujące własności:

a) Dla dowolnych właściwości sprężystych materiałów mamy

$$(4.11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n M(x) = \begin{cases} 9, & \text{dla } n = 1 \\ 0, & \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Granica  $g$  ma wartość skończoną i wynosi:

$$(4.12) \quad g = - \frac{2(a_5 + a_7 + a_8 + a_6^* + a_{11}^* - a_{12}^* - a_0^*) + a_9 - a_{10}^*}{(a_9 + 2a_5 + 2a_7)\alpha_1\eta_1 + (a_{10} - 2a_6 - 2a_8)\beta_1\eta_1 + 2(a_3 - a_4)\alpha_2\eta_2 + 2(a_1 - a_2)\beta_2\eta_2}$$

dla warstwy niejednorodnej,

$$(4.13) \quad g = - \frac{1 - \alpha^2\beta^{-2} + 4s_1s_2\beta^{-2}}{2\alpha}, \quad \text{gdy } \beta \neq 0, \quad \alpha \neq 0$$

w przypadku warstwy jednorodnej, przy czym

$$(4.14) \quad g = 0, \quad \text{gdy } \beta = 0 \quad \text{albo } \alpha = 0.$$

W przypadku  $\beta = 0$ , odpowiadającym  $\varrho = 1$ , mamy ze wzorów (2.4) i (2.7) zależność

$$4s_1s_2 = \alpha^2 - \beta^2$$

która uwzględniona w (4.13) prowadzi do (4.14). Przypadek  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 2$  odpowiada izotropii. W przypadku  $\alpha = 0$  mamy  $\beta = 2s_1s_2$  i ze wzoru (4.13) otrzymujemy (4.14).

b) Dla funkcji  $M(x)$  mają miejsce następujące asymptotyczne równości

$$(4.15) \quad M(x) \sim -e^{-2x\alpha_1\eta_1}, \quad \text{gdy } \alpha_1 \in R_+, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$(4.16) \quad M(x) \sim -e^{-2(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2)x}, \quad \text{gdy } \alpha_1 \text{ i } \alpha_2 \in R_+, \quad x \rightarrow \infty.$$

Tak więc

$$(4.17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n M(x) = 0; \quad n = 1, 2, \dots, \alpha_1 \in R_+$$

W przypadku rzeczywistych wartości parametru  $\alpha_2$  i urojonych  $\alpha_1$  musimy zbadać zachowanie się funkcji  $M(x)$  przy  $x$  dążącym do nieskończoności. Możemy posłużyć się w tym przypadku funkcją  $M(x)$  daną wzorem (3.40), która zachowuje się dla dużych  $x$  tak jak funkcja  $M(x)$ , dana wzorem ogólnym.

Jeżeli  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  przyjmują wartości urojone, to należy dla takich, teoretycznie możliwych, materiałów zbadać zachowanie się funkcji  $M(x)$  przy  $x$  dążącym do nieskończoności.

Biorąc pod uwagę wniosek wynikający ze wzoru (2.8) możemy stwierdzić, że gdy zachodzi

$$(4.18) \quad \frac{G_I}{G_{II}} > \nu_{II} \frac{E_I}{E_{II}} \quad \text{lub} \quad -1 < \varrho_I < 0,$$

to ma miejsce własność funkcji  $M(x)$  określona wzorem (4.17).

c) Jeżeli  $\alpha_1 \in R_+$  lub  $\alpha_2 \in R_+$ , to funkcja  $M(x)$  jest ciągła w przedziale  $(0, \infty)$ .

Wniosek ten wynika z analizy wzorów (3.31), definiującego funkcję  $M(x)$  i (3.25), określającego funkcję  $m(x)$ . Funkcja  $m(x)$  jest różna od zera dla każdego  $x \in (0, \infty)$ , gdy  $\alpha_1 \in R_+$  lub  $\alpha_2 \in R_+$ .

Jeżeli warstwa wewnętrzna rozpatrywanej płyty niejednorodnej wypełniona jest materiałem o parametrze  $\varrho_I < -1$ , tzn. nie zachodzi (4.18), to funkcja  $M(x)$  może nie mieć własności (4.17). Ponadto jeżeli dla obu materiałów mamy  $\varrho_i < -1$ , to mogą wystąpić punkty nieciągłości tej funkcji.

W przypadku analizy zagadnienia w tej klasie materiałów, teoretycznie możliwych, należy zbadać dla danych materiałów zachowanie się funkcji  $M(x)$  przy  $x \rightarrow \infty$  i ciągłość tej funkcji. Własności funkcji  $M(x)$  określone przez (4.11) i (4.17) oraz ciągłość tej funkcji w przedziale  $(0, \infty)$  zapewniają zbieżność całki (4.10), określającej jądro równania całkowego Fredholma. Z właściwości funkcji  $M(x)$ , mających zawsze miejsce w przypadku gdy spełniona jest alternatywa (4.18) wynika, że jądro równania całkowego zagadnienia jest ciągłą funkcją i mamy oszacowanie

$$(4.19) \quad \forall \tau, \eta \in \langle 0, 1 \rangle |K(\tau, \eta)| < C_1.$$

Występująca w równaniu całkowym (4.7) funkcja  $p^*(\tau)$ , zdefiniowana wzorem (4.9), jest także ograniczona

$$(4.20) \quad \forall \tau \in \langle 0, 1 \rangle |p^*(\tau)| < C_2.$$

Równanie całkowe (4.7), określające poszukiwaną funkcję  $g(\tau)$ , jest regularnym równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju to znaczy równaniem o jądrze ciągłym i całkwalnym z kwadratem. Wyznacza ono jednoznacznie poszukiwaną funkcję  $g(\tau)$ , należącą do przestrzeni funkcji ciągłych.

Za pomocą funkcji  $g(\tau)$  możemy wyznaczyć fizyczne wielkości interesujące nas w omawianym zagadnieniu.

Przemieszczenia brzegu szczeliny otrzymujemy z zależności (3.32), która po uwzględnieniu (4.1) prowadzi do wzoru

$$(4.21) \quad w_1(r, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \kappa a \int_0^1 g(\tau) d\tau \int_0^\infty J_0(\xi r) \sin(\xi \tau) d\xi.$$

Uwzględniając w (4.14) związek

$$(4.22) \quad \int_0^\infty J_0(\xi r) \sin(\xi \tau) d\xi = \begin{cases} 0 & \tau < r \\ (\tau^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}}, & \tau > r \end{cases}$$



określmy przemieszczenia brzegu szczeliny za pomocą wzoru

$$(4.23) \quad w_1(r, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \kappa a \int_r^1 \frac{g(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}; \quad 0 < r < 1.$$

Parametr materiałowy  $\kappa$  dany jest wzorem (3.33).

Energia szczeliny jest zdefiniowana wzorem [8]

$$(4.24) \quad W = 2\pi a^2 \int_0^1 r p(r) w_1(r, 0) dr.$$

Po uwzględnieniu zależności (4.23) i zamianie porządku całkowania znajdujemy, że energia szczeliny jest określona przez funkcje  $p^*(\tau)$  i  $g(\tau)$  w postaci następującej:

$$(4.25) \quad W = 2\pi a^3 \kappa \int_0^1 p^*(\tau) g(\tau) d\tau,$$

gdzie funkcja  $p^*(\tau)$  dana jest za pomocą wzoru (4.9).

Współczynnik intensywności naprężenia [8]

$$(4.26) \quad N = \lim_{r \rightarrow 1^+} \sqrt{2(r-1)} \{\sigma_{zz}(r, 0)\}_{r > 1}$$

określmy uwzględniając (3.34) i (4.1) w definicji (4.26). Po przekształceniach uwzględniających wzór rekurencyjny dla funkcji Bessela i równoważny wzór dla całki niewłaściwej z iloczynu funkcji Bessela i funkcji trygonometrycznej oraz pominięciu składnika, w którym nie występuje osobliwość dla  $r = 1$  otrzymujemy

$$(4.27) \quad N = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} g(1).$$

### 5. Stałe ciśnienie, iteracyjne rozwiązanie równania całkowego

W przypadku gdy  $p(r) = p_0$  jest stałą otrzymujemy z (4.9)

$$(5.1) \quad p^*(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0 \tau; \quad 0 < \tau < 1.$$

Dla tego przypadku zapiszemy równanie (4.7) i zależności (4.8) (4.23), (4.25), (4.26) za pomocą funkcji  $\psi(\tau)$  takiej, że

$$(5.2) \quad g(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0 \psi(\tau); \quad 0 < \tau < 1.$$

Mamy:

$$(5.3) \quad \psi(\tau) = \int_0^1 K(\tau, \eta) \psi(\eta) d\eta + \tau; \quad 0 < \tau < 1,$$

$$(5.4) \quad K(\tau, \eta) = \frac{-1}{\pi} \delta^{-1} \int_0^1 M(x) [\cos x \delta^{-1}(\tau + \eta) - \cos x \delta^{-1}(\tau - \eta)] dx,$$

$$(5.5) \quad w_I(r, 0) = \frac{2}{\pi} \kappa p_0 a \int_r^1 \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}; \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$(5.6) \quad W = 4\kappa p_0^2 a^3 \int_0^1 \tau \psi(\tau) d\tau,$$

$$(5.7) \quad N = \frac{2}{\pi} \sqrt{a p_0} \psi(1).$$

Jeżeli we wzorze (5.4) wykorzystamy rozwinięcie funkcji trygonometrycznych w szereg potęgowy względem parametru  $\delta^{-1}$ , to jądro  $K(\tau, \eta)$  zapiszemy w postaci

$$(5.8) \quad K(\tau, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\delta^{2n+1}} K^{(n)}(\tau, \eta),$$

gdzie

$$(5.9) \quad K^{(n)}(\tau, \eta) = \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n)!} [(\tau + \eta)^{2n} - (\tau - \eta)^{2n}]$$

oraz

$$(5.10) \quad I_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} M(x) x^{2n} dx; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Szereg (5.8) jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie dla każdego  $\tau, \eta \in \langle 0, 1 \rangle$ , gdy parametr  $\delta^{-1}$  spełnia nierówność

$$(5.11) \quad \delta^{-1} < \frac{1}{C_1},$$

gdzie  $C_1 > 0$  jest kresem jądra  $K(\tau, \eta)$  (wzór (4.19)).

Całki  $I_n$ , określone za pomocą (5.10), są zbieżne gdyż dla rzeczywistych materiałów mamy właściwości (4.11) i (4.17) ciągłej funkcji  $M(x)$ .

Warunek (5.11) stanowi ograniczenie zastosowania rozkładu (5.8) do takich przypadków, w których parametr  $\delta^{-1}$ , równy stosunkowi promienia szczeliny  $a$  do grubości warstwy  $h$ , jest na ogół mały. Zależy to od stałej  $C_1$ .

Rozwiązanie równania całkowego (5.3) można otrzymać teraz na drodze iteracyjnej

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \psi_0(\tau) &= \tau, \\ \psi_{r+1}(\tau) &= \tau + \int_0^1 K(\tau, \eta) \psi_r(\eta) d\eta; \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Proces iteracyjny wymaga obliczenia kolejnych zbieżnych całek danych wzorem (5.10).

Szybkość zbieżności (5.8), a zatem i procesu iteracyjnego (5.12) zależy w istotny sposób od wartości parametru  $\delta^{-1}$ . W przypadku gdy grubość warstwy wewnętrznej dąży do nieskończoności (ciało nieograniczone) mamy

$$(5.13) \quad \psi(\tau) = \psi_0(\tau) = \tau,$$

dla dowolnej, skończonej rozwartości szczeliny.

Jeżeli warstwa wewnętrzna o grubości  $h_1$  jest złączona z półprzestrzeniami poprzecznie izotropowymi ( $M(x)$  zdefiniowana wzorem (3.40)), to parametr  $\delta^{-1}$  należy zastąpić parametrem  $\delta_1^{-1} = \frac{a}{h_1}$ .

W tym przypadku zbieżność procesu iteracyjnego jest szybsza. Stosując proces iteracyjny opisany za pomocą wzoru (5.12) otrzymujemy, przy założeniu  $\delta^{-1} = \frac{a}{h} < 1$ , przybliżone rozwiązanie

$$(5.14) \quad \psi(\tau) = \tau \left[ 1 + \frac{1}{3} I_1 \delta^{-3} - \frac{1}{30} I_2 \delta^{-5} - \frac{1}{18} I_2 \delta^{-5} \tau^2 + \frac{1}{9} I_1^2 \delta^{-6} + \frac{1}{720} I_3 \delta^{-7} + \right. \\ \left. + \frac{2}{225} I_3 \delta^{-7} \tau^2 + \frac{1}{360} I_3 \delta^{-7} \tau^4 - \frac{1}{30} I_1 I_2 \delta^{-8} - \frac{1}{54} I_1 I_2 \delta^{-8} \tau^2 + O(\delta^{-10}) \right].$$

Uwzględniając zależność (5.14) we wzorach (5.5), (5.6), (5.7) i wykonując całkowanie otrzymujemy wzory określające deformację i energię szczeliny oraz współczynnik intensywności naprężenia

$$(5.15) \quad W_1(r, 0) = \frac{2}{\pi} \kappa p_0 a \sqrt{1-r^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} I_1 \delta^{-3} - \frac{7}{135} I_2 \delta^{-5} + \frac{1}{9} I_1^2 \delta^{-6} + \right. \\ \left. + \frac{1}{200} I_3 \delta^{-7} - \frac{16}{405} I_1 I_2 \delta^{-8} - \frac{1}{27} I_2 \delta^{-5} r^2 - \frac{1}{150} I_3 \delta^{-7} r^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{81} I_1 I_2 \delta^{-8} r^2 + \frac{1}{675} I_3 \delta^{-7} r^4 + O(\delta^{-10}) \right]; \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$(5.16) \quad W = \frac{4}{3} \kappa p_0^2 a^3 \left[ 1 + \frac{1}{3} I_1 \delta^{-3} - \frac{1}{15} I_2 \delta^{-5} + \frac{1}{9} I_1^2 \delta^{-6} + \right. \\ \left. + \frac{7}{1800} I_3 \delta^{-7} - \frac{17}{360} I_1 I_2 \delta^{-8} + O(\delta^{-10}) \right],$$

$$(5.17) \quad N = \frac{2}{\pi} p_0 \sqrt{a} \left[ 1 + \frac{1}{3} I_1 \delta^{-3} - \frac{4}{45} I_2 \delta^{-5} + \frac{1}{9} I_1^2 \delta^{-6} + \frac{7}{1200} I_3 \delta^{-7} + \right. \\ \left. + \frac{7}{135} I_1 I_2 \delta^{-8} + O(\delta^{-10}) \right].$$

W przypadku gdy warstwa ze szczeliną jest złączona z półprzestrzeniami poprzecznie izotropowymi należy w rozwiązaniach (5.15), (5.16), (5.17) podstawić w miejsce  $\delta^{-1}$  parametr  $\delta_1^{-1} = \frac{a}{h_1}$ . W tym przypadku funkcja  $M(x)$ , określająca wzorem (5.10)<sup>1</sup> całki  $I_n$ , zdefiniowana jest zależnością (3.40). Jeżeli  $\psi_h(\tau)$  jest rozwiązaniem dla płyty warstwowej a  $\psi_\infty(\tau) = \tau$  dla ciała nieograniczonego, to  $\psi_h(\tau) \rightarrow \psi_\infty(\tau)$  przy  $h_1 \rightarrow \infty$  jednostajnie względem  $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ .

W przypadku  $h_1 \rightarrow \infty (\delta^{-1} \rightarrow 0)$  otrzymujemy rozwiązania w postaci [3]

$$(5.18) \quad w_\infty(r, 0) = \frac{2}{\pi} \kappa p_0 a \sqrt{1-r^2}; \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$(5.19) \quad W_\infty = \frac{4}{3} \kappa p_0^2 a^3,$$

$$(5.20) \quad N_\infty = \frac{2\sqrt{a}}{\pi} p_0.$$

Wzory (5.18), (5.19), (5.20) przechodzą w znane rozwiązania dla nieograniczonego ciała izotropowego [8], gdy podstawimy w nich stałą materiałową

$$(5.21) \quad \kappa = \frac{1-\nu}{G},$$

otrzymaną ze wzoru (3.33) za pomocą przejścia granicznego  $s_{II} \rightarrow 1$ ,  $s_{III} \rightarrow 1$ ,  $k_I \rightarrow 1$ ,  $G_{II} = G$ .

Współczynnik intensywności naprężenia w nieograniczonym ciele poprzecznie izotropowym jest taki sam jak w przypadku ciała izotropowego. W rozpatrzonym w pracy zagadnieniu szczeliny w płycie warstwowej anizotropia materiału wpływa na wszystkie fizyczne wielkości i na współczynnik intensywności naprężenia.

#### Literatura cytowana w tekście

1. K. ARIN, *An Orthotropic Laminate Composite Containing a Layer with a Crack*, Int. J. Engng Sci., 15 p. 545, 1977.
2. M. R. GECIT, *Fracture of a Surface Layer Bonded to a Half Space*, Int. J. Engng Sci., 3, 17 p. 287, 1979
3. B. ROGOWSKI, *Zagadnienie szczeliny w ciele poprzecznie izotropowym*, Zeszyty Naukowe PŁ, Nr 340, Budownictwo z. 25, s. 7, 1979.
4. B. ROGOWSKI, *Pierścieniowa szczelina w ciele poprzecznie izotropowym*, Zeszyty Naukowe PŁ, Nr 370, Budownictwo z. 27, s. 47, 1981.
5. M. DAHAN, *Facteur d'intensité de contrainte pour un milieu infini transversalement isotrope avec fissure plane circulaire*, „C.r. Acad. Sci.” AB 290 Nr 2 B19 - B21, 1980.
6. M. DAHAN, M. PREDELEANU, *Penny — shaped crack in a transversely isotropic solid*, Lett. Appl. Engng Sci. Vol. 18 No 8 p. 1067, 1980.
7. B. ROGOWSKI, *Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego*, Mech. Teoret. i Stos. 1, 13 s. 69, 1975.
8. I. N. SNEDDON, *Metoda transformacji całkowych w mieszanych zagadnieniach brzegowych klasycznej teorii sprężystości*, PWN Warszawa 1974.
9. A. ERDELYI Ed, *Tables of Integral Transforms* Vol. 1, Mc Graw-Hill, 1954.

#### Резюме

#### ЗАДАЧА ТРЕЩИНЫ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ.

Рассматривается задача трещины для трехслойной, бесконечной, трансверсально — изотропной пластинки симметричного строения.

Продольная трещина, расположенная симметрично относительно граней пластинки и начала координат, нагружена внутренним давлением.

Краевая задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с неизвестной функцией, решающей задачу, и ядром зависящим от функции, которая учитывает упругие свойства составных материалов пластинки и отношение их толщин.

Приведены формулы для коэффициента интенсивности напряжения, энергии и перемещения трещины. Для частного случая постоянного давления дано итерационное решение задачи.

#### S u m m a r y

#### CRACK PROBLEM OF TRANSVERSELY ISOTROPIC THREE LAYERED ELASTIC PLATE

A penny — shaped crack problem for a transversely isotropic, symmetrical, three layered elastic plate is considered. The crack is situated in an elastic symmetry plane and axially loaded.

The mixed boundary-value problem has been reduced to a Fredholm integral equation of the second kind.

Expressions for the stress intensity factor, crack energy and crack opening displacements are derived by means of the solution of an integral equation. In the case of uniform pressure the iterative solution of the equation and expressions for the physical quantities are presented as functions of the ratio of a crack length and a plate thickness.

INSTYTUT INŻYNIERII BUDOWLANEJ  
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 września 1980 roku*

---



PLASKA FALA SILNEJ NIECIĄGŁOŚCI WE WSTĘPNIE  
ODKSZTAŁCONYM IZOTROPOWYM MATERIALE SPRĘŻYSTYM

SŁAWOMIR KOSIŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Fale silnej nieciągłości oraz fale przyspieszenia były przedmiotem rozważań wielu autorów m.in. D. R. BLANDA [1] i P. J. CHENA [6]. W pracy [3] Z. WESOŁOWSKI podał metodę, która w przypadku przybliżenia adiabatycznego, umożliwia wyznaczenie prędkości propagacji fali, amplitudy oraz skoku entropii w ośrodku wstępnie odkształconym. Rozwiązanie dla prędkości propagacji  $U_v$  i amplitudy  $H$  bazuje na rozwinięciu  $U_v$  i  $H$  w szereg potęgowy parametru  $m$ , który jest modułem amplitudy fali. Wielkość  $m$  traktuje się jako mały parametr — jego wartość należy przyjąć zgodnie z warunkami fizycznymi zadania. Następnie wyznacza się prędkość propagacji  $U_v$  oraz amplitudę  $H$  i skok entropii w funkcji amplitudy  $H$ , skok jest rzędu  $m^3$ .

W pracy rozwiązano powyższym sposobem zagadnienie propagacji płaskich sprężystych fal silnej nieciągłości w obszarze nieograniczonym, dla materiału II rzędu. Przed frontem fali silnej nieciągłości przyjęto jednorodny stan odkształcenia. Na wykresach przedstawiono wpływ składowych tensora odkształcenia na prędkość propagacji fali akustycznej, która jest zerowym przybliżeniem dla prędkości fali silnej nieciągłości, oraz wpływ wielkości skoku  $m$  na prędkość fali. Wykresy wykonano dla stali i aluminium.

2. Związki podstawowe

Podstawowe wzory tego punktu podane zostaną zgodnie z pracami [2], [3], [4].

Ruch ciała opisany jest związkami

$$(2.1) \quad x^i = x^i(X^\alpha, t),$$

gdzie  $X^\alpha$  — są współrzędnymi punktu materialnego w konfiguracji odniesienia  $B_R$ ,  $x^i$  — współrzędnymi punktu materialnego w konfiguracji aktualnej, a  $t$  — czasem. Przez  $x_{\alpha}^i$  oznaczane są składowe gradientu deformacji  $F$ .

Związek między lewym tensorem odkształcenia Cauchy-Greena  $B$ , a tensorem odkształcenia  $D$  jest następujący

$$(2.2) \quad D = \frac{1}{2} (B - \mathbf{1}),$$

gdzie przez  $\mathbf{1}$  oznaczono tensor metryczny.

Ponieważ w pracy będą rozważane jedynie małe przemieszczenia, przyjmuje się założenie o utożsamieniu tensora  $D$  z tensorem małych odkształceń  $E$ , którego składowe będą oznaczane  $\varepsilon_{ij}$ .

Zgodnie z pracami [3], [4] przez  $\sigma$  jest oznaczana gęstość energii sprężystej nagromadzonej, odniesionej do jednostki masy w  $B_R$ , a przez  $\eta$  entropia. W ciele sprężystym  $\sigma = \sigma(x_\alpha^I, \eta)$ . Wprowadzimy oznaczenie

$$(2.3) \quad \frac{\sigma_{ik\dots m\dots}^{\alpha\beta\dots}}{M \quad N} = \left( \frac{\partial^{M+N} \delta}{\partial x_\alpha^I \partial x_\beta^k \dots \partial \eta^N} \right)^F,$$

$F$  — oznacza, że pochodna dotyczy obszaru przed frontem fali silnej nieciągłości.

Dla materiału izotropowego gęstość energii sprężystej nagromadzonej odniesionej do jednostki masy, można wyrazić jako funkcję niezmienników tensora  $B$  i entropii

$$(2.4) \quad \sigma = \sigma(I_1, I_2, I_3, \eta).$$

W dalszych rozważaniach konieczna jest znajomość wyrażen dla pochodnych  $\sigma_{ik}^{\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{ikm}^{\alpha\beta\gamma}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ ;  $i, k, m = 1, 2, 3$  (zgodnie z (2.3)). Wyrażenie dla pochodnej  $\sigma_{ik}^{\alpha\beta}$  można znaleźć w [2] (s. 37). Pochodną  $\sigma_{ikm}^{\alpha\beta\gamma}$  obliczymy różniczkując (2.4).

Jeśli dany jest moduł skoku gradientu deformacji  $x_\alpha^I$

$$(2.5) \quad m = |H^I| = (H^I H_I)^{\frac{1}{2}} = ([x_\alpha^I][x_\beta^k] g^{\alpha\beta} g_{ik})^{\frac{1}{2}},$$

gdzie  $g^{\alpha\beta}$ ,  $g_{ik}$  oznaczają składowe tensora metrycznego w układzie  $\{X^\alpha\}$  i  $\{x^I\}$  odpowiednio. Wówczas dla określonego kierunku propagacji fali  $N_\alpha$  można wyznaczyć z warunku propagacji [3], prędkość propagacji  $U_\nu$  oraz kierunek tego skoku. Warunek propagacji wyprowadzony z dokładnością do  $m^3$  jest następujący

$$(2.6) \quad \sigma_{ik}^{\alpha\beta} H^k N_\alpha N_\beta + \frac{1}{2} \sigma_{ikm}^{\alpha\beta\gamma} H^k H^m N_\alpha N_\beta N_\gamma + \frac{1}{6} \sigma_{ikmn}^{\alpha\beta\gamma\delta} H^k H^m H^n N_\alpha N_\beta N_\gamma N_\delta + \\ + \frac{1}{3} \frac{\sigma_{i\eta}^\alpha N_\alpha}{\sigma_\eta} \sigma_{kmn}^{\beta\gamma\delta} H^k H^m H^n N_\beta N_\gamma N_\delta = U_\nu^2 H_I.$$

Aby wyznaczyć przybliżone wartości  $U_\nu$  i  $H^I$ , stosujemy rozwinięcie obu wielkości w szeregi potęgowe parametru  $m$ , aproksymację pełnego rozwinięcia potęgowego ograniczymy do dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia.

$$(2.7) \quad H^I/m = \overset{0}{H^I} + m \overset{1}{H^I}, \\ U_\nu(m) = \overset{0}{U_\nu} + m \overset{1}{U_\nu}.$$

Po wstawieniu wyrażen (2.7) do (2.6) otrzymamy

$$(2.8) \quad (\sigma_{ik}^{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta - \overset{0}{U_\nu}^2 \delta_{ik}) \overset{0}{H^k} = 0, \\ (\sigma_{ik}^{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta - \overset{0}{U_\nu}^2 \delta_{ik}) \overset{1}{H^k} - 2 \overset{0}{H^I} \overset{0}{U_\nu} \overset{1}{U_\nu} + \frac{1}{2} \sigma_{ikm}^{\alpha\beta\gamma} \overset{0}{H^k} \overset{0}{H^m} N_\alpha N_\beta N_\gamma = 0,$$



oraz

$$(2.9) \quad \begin{aligned} {}^0 H^1 H_1 &= 1, \\ {}^1 H^1 H_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ostatnie cztery równania pozwalają wyznaczyć dla danego skoku  $m$ ,  $U_v^0$ ,  $U_v^1$ , oraz  ${}^0 H$  i  ${}^1 H$ .

### 3. Związki dla materiału II rzędu

Zgodnie z propozycją Murnaghana, dla niezbyt dużych odkształceń, możliwa jest następująca postać energii sprężystej nagromadzonej w jednostce objętości materiału izotropowego [4] (s. 309)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varrho_R \sigma &= \frac{l+2m}{24} (I_1-3)^3 + \frac{\lambda+2\mu+4m}{8} (I_1-3)^2 + \frac{8\mu+n}{8} (I_1-3) + \\ &\quad - \frac{m}{4} (I_1-3)(I_2-3) - \frac{4\mu+n}{8} (I_2-3) + \frac{n}{8} (I_3-1) + T_0 \eta \varrho_R + \frac{\omega}{2} \eta^2 - \\ &\quad - \frac{\pi+B}{2} (I_1-3)\eta + \frac{A}{4} (I_1-3)^2 \eta + \frac{B\eta}{4} (I_2-3) + \frac{c}{2} \eta^2 (I_1-3) + D\eta^3. \end{aligned}$$

gdzie

$\mu, \lambda$  stałe Lamégo

$l, m, n$  — stałe sprężystości II rzędu

$A, B, C, D, \pi, \omega$  — współczynniki przy członach z entropią

$T_0$  — temperatura początkowa ośrodka w stanie naturalnym

W wyrażeniu powyższym dodano człony uwzględniające entropię.

Założono, że deformacja wstępna w obszarze przed frontem fali silnej nieciągłości opisana jest wzorami

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x^1 &= \lambda_1 X^1, \\ x^2 &= \lambda_2 X^2, \\ x^3 &= \lambda_3 X^3, \end{aligned}$$

gdzie:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — stałe

Układy współrzędnych  $\{X^\alpha\}$ ,  $\{x^i\}$  są pokrywającymi się układami kartezjańskimi. Gradient deformacji przy takim opisie ruchu jest niezależny od współrzędnych  $X^\alpha$  i czasu  $t$ , funkcje  $\sigma_{ik}^{\alpha\beta}$ ;  $\sigma_{imn}^{\alpha\beta\gamma}$  dla materiału jednorodnego pozostaną stałe w czasie i przestrzeni. Otrzymujemy

$$(3.3) \quad \{x_i^1\}^F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

oraz

$$(3.4) \quad \begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{aligned}$$

Zakładamy, że powierzchnia nieciągłości jest płaszczyzną o równaniu

$$(3.5) \quad X^1(t) = f(t) \quad N_\alpha = N^\alpha = (1, 0, 0).$$

Biorąc pod uwagę równanie powierzchni nieciągłości, otrzymamy tensor akustyczny postaci

$$(3.6) \quad Q_{ik} = \sigma_{ik}^{11} \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Dla gradientu deformacji  $\{\lambda_\alpha^i\}^F$  oraz tensorów  $\{B^{ij}\}^F$  i  $\{C^{\alpha\beta}\}^F$  składowe tensora akustycznego  $Q_{ik}$  zgodnie z (5.21) w [2] wynoszą

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^{11} &= \frac{2}{\rho_R} \{ \sigma_1 + (\sigma_2 + 4\sigma_{12}\lambda_1^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \sigma_3\lambda_2^2\lambda_3^2 + 2\sigma_{11}\lambda_1^2 \}, \\ \sigma_{12}^{11} &= \frac{2}{\rho_R} \{ \sigma_1 + \sigma_2\lambda_3^2 \}, \\ \sigma_{33}^{11} &= \frac{2}{\rho_R} \{ \sigma_1 + \sigma_2\lambda_2^2 \}, \\ \sigma_{12}^{11} &= \sigma_{23}^{11} = \sigma_{13}^{11} = 0. \end{aligned}$$

We wzorach powyższych i dalej wprowadzono oznaczenia

$$(3.8) \quad \sigma_K = \frac{\partial \sigma}{\partial I_K}; \quad \sigma_{KL} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial I_K \partial I_L}; \quad \sigma_{KLM} = \frac{\partial^3 \sigma}{\partial I_K \partial I_L \partial I_M} \quad K, L, M = 1, 2, 3.$$

Biorąc pod uwagę pierwsze równania (2.8) i (2.9) otrzymamy

$$(3.9) \quad \begin{aligned} (\sigma_{ik}^{11} N_1 N_1 - \overset{0}{U}_v^2 \delta_{ik}) \overset{0}{H}^k &= 0 \\ \overset{0}{H}^i \overset{0}{H}_i &= 1; \end{aligned}$$

rozwiązania są następujące

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \overset{0}{U}_v^2 &= \sigma_{11}^{11}, \quad \overset{0}{H} = (\pm 1, 0, 0); \quad \overset{0}{H} \parallel N, \\ \overset{0}{U}_v^2 &= \sigma_{22}^{11}, \quad \overset{0}{H} = (0, \pm 1, 0); \quad \overset{0}{H} \perp N, \\ \overset{0}{U}_v^2 &= \sigma_{33}^{11}, \quad \overset{0}{H} = (0, 0, \pm 1); \quad \overset{0}{H} \perp N. \end{aligned}$$

Zerowe przybliżenia  $\overset{0}{U}_v$  i  $\overset{0}{H}$  są więc rozwiązaniami równania propagacji fali akustycznej.

Wyrażenie ogólne dla trzeciej pochodnej  $\sigma_{ikm}^{\alpha\beta\gamma}$  zajmuje dużo miejsca, oraz ma skomplikowaną budowę, dlatego niżej podane zostaną istotne dla opisywanego tu przypadku, wartości trzeciej pochodnej

$$\begin{aligned}
 \sigma_{111}^{111} &= \frac{4}{\varrho_R} \{2\sigma_{111}\lambda_1^3 + 3\sigma_{111}\lambda_1 + 6\sigma_{12}\lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\}, \\
 \sigma_{122}^{111} &= \frac{1}{\varrho_R} \{4\sigma_{111}\lambda_1 + 4\sigma_{12}\lambda_1(\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2)\}, \\
 \sigma_{133}^{111} &= \frac{1}{\varrho_R} \{4\sigma_{111}\lambda_1 + 4\sigma_{12}\lambda_1(\lambda_3^2 + 2\lambda_2^2)\}, \\
 \sigma_{222}^{111} &= \sigma_{333}^{111} = \sigma_{112}^{111} = \sigma_{113}^{111} = \sigma_{232}^{111} = \sigma_{123}^{111} = \sigma_{233}^{111} = \sigma_{322}^{111} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Z drugiego równania (2.8) i (2.9) możemy obliczyć przyrosty prędkości i składowe amplitudy 1 rzędu dla kierunku podłużnego i obu kierunków poprzecznych. Zakładamy, że trzy zerowe przybliżenia prędkości fali silnej nieciągłości są różne.

Dla fali podłużnej  $\overset{0}{U}_v$ ,  $\overset{0}{H}(\pm 1, 0, 0)$  otrzymamy

$$\overset{1}{U}_v = \frac{1}{4\overset{1}{U}_v} \sigma_{ikm}^{\alpha\beta\gamma} \overset{0}{H}^i \overset{0}{H}^k \overset{0}{H}^m N_\alpha N_\beta N_\gamma = \pm \frac{1}{4\overset{1}{U}_v} \sigma_{111}^{111}.
 \tag{3.12}$$

Składowe amplitudy dla tej fali spełniają równania

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{22}^{11} - \overset{0}{U}_v^2) \overset{1}{H}^2 + \frac{1}{2} \sigma_{211}^{111} &= 0, \\
 (\sigma_{33}^{11} - \overset{0}{U}_v^2) \overset{1}{H}^3 + \frac{1}{2} \sigma_{311}^{111} &= 0, \\
 \overset{1}{H}^i \overset{0}{H}_i &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Po rozwiązaniu otrzymamy  $\overset{1}{H} = (0, 0, 0)$

Dla fali poprzecznej o kierunku  $X^2$ ,  $\overset{0}{U}_v$ ,  $\overset{0}{H} = (0, \pm 1, 0)$  mamy

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{U}_v &= \frac{1}{4\overset{1}{U}_v} \sigma_{222}^{111} = 0, \\
 (\sigma_{11}^{11} - \overset{0}{U}_v^2) \overset{1}{H}^1 + \frac{1}{2} \sigma_{122}^{111} &= 0, \\
 (\sigma_{33}^{11} - \overset{0}{U}_v^2) \overset{1}{H}^3 + \frac{1}{2} \sigma_{322}^{111} &= 0, \\
 \overset{0}{H}_i \overset{1}{H}^i &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

co daje ostatecznie

$$\overset{1}{H} = (-\sigma_{122}^{111} / [2(\sigma_{11}^{11} - \overset{0}{U}_v^2)], 0, 0).$$

Analogicznie dla fali poprzecznej o kierunku  $X^3$ ,  $\overset{0}{U}_v$ ,  $\overset{0}{H} = (0, 0, \pm 1)$  mamy

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \overset{1}{U}_v &= \frac{1}{4\overset{3}{U}_v} \sigma_{333}^{111} = 0, \\ (\sigma_{11}^{11} - \overset{0}{U}_v^2) \overset{1}{H}^1 + \frac{1}{2} \sigma_{133}^{111} &= 0, \\ (\sigma_{22}^{11} - \overset{0}{U}_v^2) \overset{1}{H}^2 + \frac{1}{2} \sigma_{233}^{111} &= 0, \\ \overset{0}{H}^1 \overset{1}{H}^1 &= 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymamy

$$\overset{1}{H} = (-\sigma_{133}^{111}/[2(\sigma_{11}^{11} - \overset{0}{U}_v^2)], 0, 0).$$

Jak wynika z przytoczonych powyżej wzorów jedynie prędkość fali podłużnej zwiększa się. Fale w dwóch pozostałych kierunkach poprzecznych, przy przyjętym przybliżeniu, propagują z prędkością równą prędkości fali akustycznej.

Weźmy pod uwagę podłużną falę silnej nieciągłości, wstawiając do (2.7)<sub>1</sub>, (3.10)<sub>1</sub> i rozwiązanie dla (3.13) otrzymamy

$$(3.16) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\pm m, 0, 0).$$

Biorąc pod uwagę warunki zgodności w [3],

$$(3.17) \quad \llbracket x_\alpha^i \rrbracket = H^i N_\alpha \quad \text{dla} \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \text{oraz} \quad i = 1, 2, 3.$$

Stwierdzamy, że skoku może doznać tylko jedna składowa gradientu deformacji  $x_1^1$ . Chcąc dobrać wielkość skoku  $m$ , składowych gradientu deformacji, tak aby składowe tensora odkształcenia  $\mathbf{D}$ , który tu redukuje się do tensora  $\mathbf{E}$ , nie przekroczyły granicy sprężystości materiału zauważymy, że

$$\llbracket \mathbf{D} \rrbracket = \frac{1}{2} (\llbracket \mathbf{F} \rrbracket \llbracket \mathbf{F}^T \rrbracket + (\mathbf{F}^T)^F \llbracket \mathbf{F} \rrbracket + (\mathbf{F})^E \llbracket \mathbf{F}^T \rrbracket).$$

Biorąc pod uwagę (3.2), (3.17) oraz fakt iż jedynie  $\llbracket x_1^1 \rrbracket = m \neq 0$  otrzymamy

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \llbracket D^{11} \rrbracket &= \frac{1}{2} \llbracket x_1^1 \rrbracket^2 + \llbracket x_1^1 \rrbracket \lambda_1 = \frac{1}{2} m^2 \pm m \lambda_1, \\ \mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \lambda_1^2 &= 1 + 2\varepsilon^{11}, \quad \lambda_1 = \pm \sqrt{1 + 2\varepsilon^{11}} \approx \pm(1 + \varepsilon^{11}). \end{aligned}$$

Przypadek  $\lambda_1 < 0$  zgodnie z (3.2) nie jest fizycznie możliwy. Zależność (3.18) jest podstawą dla przeprowadzonej dalej analizy numerycznej. Przy założeniu  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ , człony rzędu większego niż  $m$  w (3.18) nie mają istotnego znaczenia, wobec tego wyrażenie (3.18) upraszcza się do postaci

$$(3.19) \quad \llbracket D^{11} \rrbracket = \llbracket x_1^1 \rrbracket = \pm m = \llbracket \varepsilon^{11} \rrbracket,$$

ostateczna modyfikacja możliwa jest dalej w oparciu o równanie (4.5).

Rozpatrując wyłącznie fale sprężyste, można stwierdzić, że maksymalny skok składowej tensora odkształcenia, może być równy podwojonej granicy sprężystości  $\epsilon_s$ , ale jedynie w przypadku kiedy przed frontem fali silnej nieciągłości składowa jest równa granicy sprężystości materiału ze znakiem przeciwnym niż skok. W następnym punkcie pracy biorąc pod uwagę przybliżenie izentropowe obliczono prędkości fal, gdy odkształcenia przed frontem fali silnej nieciągłości zmieniają się w granicach  $\pm \epsilon_s$ , a moduł skoku odkształcenia  $0 \leq m \leq 2\epsilon_s$ .

#### 4. Przybliżenie izentropowe

Zgodnie z uwagami w § 2.2 w [1] jako pierwsze przybliżenie przyjęto równanie (3.1) z entropią  $\eta = 0$ . Do obliczeń przyjęto stałe sprężystości wg. tabeli 1 zamieszczonej w pracy [5], stałe  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  podane przez Smitha, Sterna i Stephensa przeliczono na stałe Mur-naghana  $l, m, n$ . Stałe te wynoszą

Tabela 1

ośrodek	$\mu \cdot 10^{-6}$	$\lambda \cdot 10^{-6}$	$m \cdot 10^{-6}$	$n \cdot 10^{-6}$	$l \cdot 10^{-6}$
Fe	$0.821 \pm 0.005$	$1.11 \pm 0.01$	$-6.36 \pm 0.56$	$-7.08 \pm 0.32$	$-4.61 \pm 0.85$
Al	$0.276 \pm 0.001$	$0.57 \pm 0.02$	$-4.01 \pm 1.38$	$-4.08 \pm 1.36$	$-3.11 \pm 1.25$

Stałe w tabeli wyrażone są w  $\text{kG/cm}^2$ . Wartości stałych  $l, m, n$  wahają się w dość znacznych granicach. Bardzo istotną sprawą dla dalszych obliczeń jest ustalenie odkształcenia odpowiadającego granicy sprężystości dla stali i aluminium  $\epsilon_s$ . Obliczenia dla stali przeprowadzono dla odkształceń zmieniających się w granicach  $-85 \cdot 10^{-4} \leq \epsilon \leq 85 \cdot 10^{-4}$ , a dla aluminium  $-30 \cdot 10^{-4} \leq \epsilon \leq 30 \cdot 10^{-4}$ .

Po wstawieniu do (3.7) współczynników (3.8) obliczonych dla  $\eta = 0$  (zakładamy, że entropia w stanie naturalnym wynosi zero), oraz po zastąpieniu składowych tensora  $\mathbf{B}$  składowymi tensora  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$  tzn.

$$B^{ij} = 1 + 2 \cdot D^{ij} = 1 + 2 \cdot \epsilon^{ij},$$

$$\lambda_i^2 = 1 + 2\epsilon_{ii} \quad (\text{nie sumować})$$

i wstawieniu danych z tabeli 1 otrzymano z (3.7) dla stali następujący wzór

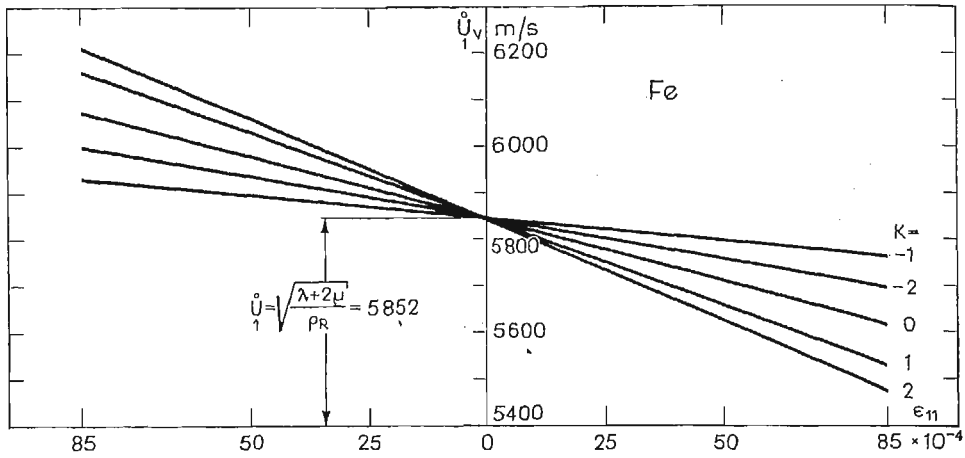
$$(4.1) \quad \bar{U}_b^2 = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 9.81}{7.85} \{1.37 - 13.22 \epsilon_{11} - 4.06 \cdot K \cdot \epsilon_{11}\}, \quad \frac{m^2}{\text{sek}^2}.$$

We wzorze powyższym przyjęto  $\rho_R = 7.85 \text{ t/m}^3$ , ponadto przyjęto

$$\epsilon_{22} = \alpha_2 \epsilon_{11}, \quad -1 \leq \alpha_2 \leq 1, \quad k = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\epsilon_{33} = \alpha_3 \epsilon_{11}, \quad -1 \leq \alpha_3 \leq 1, \quad -2 \leq k \leq 2.$$

Na rys. 1 sporządzono wykresy dla  $\epsilon_{11}$  zmieniającego się w granicach  $\pm 85 \cdot 10^{-4}$  i dla  $-2 \leq K \leq 2$ .



Rys. 1. Wykres prędkości  $\dot{U}_v^0$  podłużnej fali akustycznej w stali.

W analogiczny sposób otrzymujemy wyrażenia dla prędkości fal poprzecznych

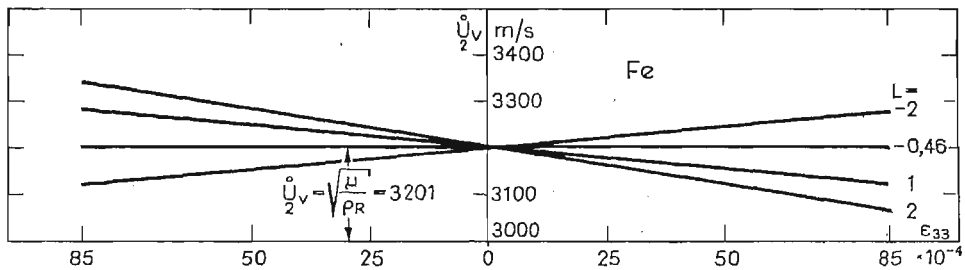
$$(4.2) \quad \dot{U}_v^2 = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 9.81}{7.85} \{0.41 - 1.8L\epsilon_{33} - 0.84\epsilon_{33}\}; \frac{m^2}{\text{sek}^2},$$

przy oznaczeniach

$$\epsilon_{11} = \beta_1 \epsilon_{33}, \quad -1 \leq \beta_1 \leq 1, \quad L = \beta_1 + \beta_2$$

$$\epsilon_{22} = \beta_2 \epsilon_{33}, \quad -1 \leq \beta_2 \leq 1, \quad -2 \leq L \leq 2$$

Ilustrację graficzną wzoru (4.2) przedstawiono na rys. 2. Wyrażenie dla prędkości



Rys. 2. Wykres prędkości  $\dot{U}_v^2$  poprzecznej fali akustycznej w stali.

$\dot{U}_v^0$  otrzymamy z (4.2) wstawiając  $\epsilon_{22}$  w miejsce  $\epsilon_{33}$ . Wykres identyczny jak w przypadku wzoru (4.2).

Gdy obszar przed frontem fali silnej nieciągłości nie jest wstępnie odkształcony z (2.8)<sub>1</sub> i (3.10) otrzymamy

$$\dot{U}_v^0 = [(\lambda + 2\mu)/\rho_R]^{1/2} = 5852 \text{ m/sek}, \quad \dot{U}_v^2 = (\mu/\rho_R)^{1/2} = 3201 \text{ m/sek}$$

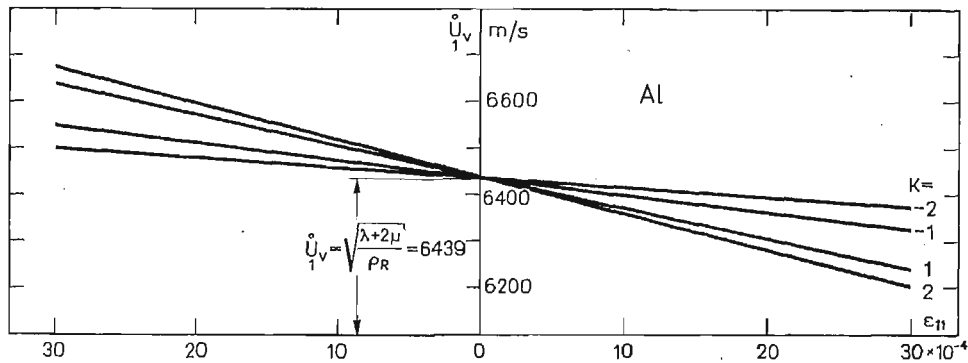
Widzimy, że zerowe przybliżenia prędkości fali silnej nieciągłości w ośrodku nieodkształconym przed frontem fali, są równe prędkości fali podłużnej i poprzecznej w danym ośrodku. Z rys. 1 wynika, że maksymalne różnice w prędkościach wystąpią przy  $K = 2$ , dla  $\varepsilon_{11} = 85 \cdot 10^{-4}$   $\overset{0}{U}_v = 5454$  m/sek, a przy  $\varepsilon_{11} = -85 \cdot 10^{-4}$ ,  $\overset{0}{U}_v = 6224$  m/sek. Różnica prędkości wynosi 770 m/sek. Na rys. 2 wystąpi analogiczna sytuacja dla  $L = 2$ , przy zmianie  $\varepsilon_{33}$  przed frontem fali z  $85 \cdot 10^{-4}$  na  $-85 \cdot 10^{-4}$ , różnica prędkości wyniesie 313 m/sek.

Analogiczne wyrażenia dla zerowych przybliżeń prędkości fali w aluminium, przy  $\rho_R = 2.65 \text{ t/m}^3$  są następujące

$$(4.3) \quad \overset{0}{U}_v^2 = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 9.81}{2.65} \{0.56 - 9.47\varepsilon_{11} - 2.85K\varepsilon_{11}\}, \quad \frac{m^2}{\text{sek}^2}$$

$$(4.4) \quad \overset{0}{U}_v^2 = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 9.81}{2.65} \{0.13 - 0.72\varepsilon_{33} - 1.46L\varepsilon_{33}\}, \quad \frac{m^2}{\text{sek}^2}$$

Wykresy wzorów (4.3) i (4.4) przedstawiono na rys. 3, 4. Zakres zmienności odkształceń przyjęto  $\pm 30 \cdot 10^{-4}$ . Dla obszaru nieodkształconego przed frontem fali otrzymamy odpowiednio

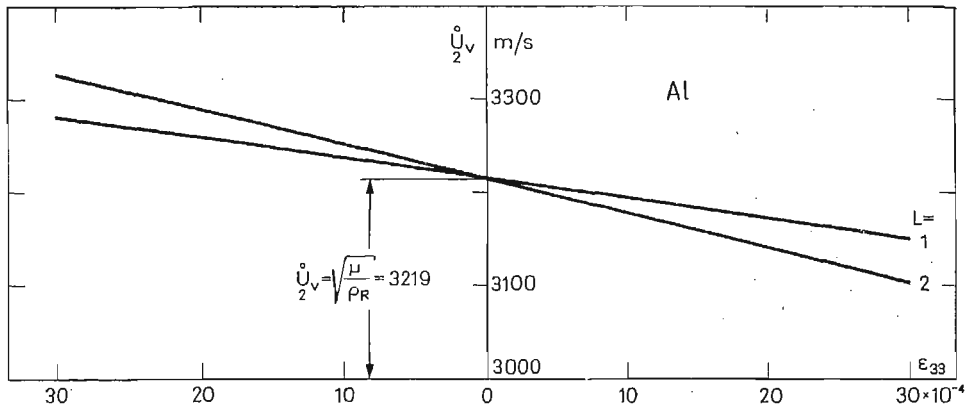


Rys. 3. Wykres prędkości  $\overset{0}{U}_v$  podłużnej fali akustycznej w aluminium.

$$\overset{0}{U}_v = [(\lambda + 2\mu)/\rho_R]^{1/2} = 6439 \text{ m/sek}, \quad \overset{0}{U}_v = (\mu/\rho_R)^{1/2} = 3219 \text{ m/sek}.$$

Największe różnice prędkości  $\overset{0}{U}_v$  wystąpią dla  $K = 2$ , przy zmianie odkształcenia  $\varepsilon_{11}$  przed frontem fali z  $30 \cdot 10^{-4}$  na  $-30 \cdot 10^{-4}$  różnica prędkości wyniesie 461 m/sek. Dla prędkości  $\overset{0}{U}_v$  rys. 4, przy takiej samej zmianie odkształcenia różnica prędkości wynosi 230 m/sek.

Wstawiając wartości współczynników (3.8) do pierwszego równania (3.11) oraz bio-



Rys. 4. Wykres prędkości  $\dot{U}_v$  poprzecznej fali akustycznej w aluminium.

racę pod uwagę (3.12), przy stałych sprężystości podanych w tabeli 1, oraz zmianie składowych tensora  $\mathbf{B}$  na  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ , dla stali otrzymamy

$$(4.5) \quad \dot{U}_v^1 = \frac{\lambda_1}{4\dot{U}_v^0 \varrho_R} \{-26.38 - 173.24 \varepsilon_{11} - 27.6(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\} H^1 H^1 H^1 N_1 N_1 N_1,$$

$$H^1 = \pm 1, \quad \lambda_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \approx 1 + \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{11} \ll 1 \Rightarrow \lambda_1 \approx 1$$

ponieważ  $\dot{U}_v^1 > 0$  zgodnie z [4] możliwa jest tylko następująca sytuacja

$$H^1 = -1, \quad \lambda_1 > 0$$

przy  $H^1 = 1$ ,  $\lambda_1 < 0$ , zachodzi również nierówność  $\dot{U}_v^1 > 0$ , ale warunek aby  $\lambda_1 < 0$ , zgodnie z (3.2) nie jest fizycznie możliwy.

Skok entropii wynosi [3]

$$(4.6) \quad [[\eta]] = S = \frac{1}{12} \frac{\sigma_{ikm}^{\alpha\beta\gamma} N_\alpha N_\beta N_\gamma H^i H^k H^m}{\sigma_\eta}.$$

Wobec (4.5) i (3.16) licznik tego wyrażenia oraz  $\sigma_\eta$  jako temperatura bezwzględna, są zawsze większe od zera, wobec czego  $[[\eta]] > 0$ . Sprawdzenia tego dokonano zgodnie z uwagą w [1] § 2.2, w myśl której dopuszczalne jest izentropowe przybliżenie w przypadku fali silnej nieciągłości, jedynie wtedy, kiedy zostanie stwierdzony fakt, że mała zmiana  $\eta$  przy propagacji fali okaże się rzeczywiście dodatnia.

Zgodnie z uwagami przy wzorze (4.5) stała  $\lambda_1 > 0$  stąd mamy  $H^1 = -1$ . Jednocześnie biorąc pod uwagę (2.7)<sub>1</sub> otrzymamy

$$H^1/m = H^1 + mH^1 \quad H^1 = mH^1 = -m.$$

Moduł skoku w składowych gradientu deformacji  $m$  (2.5) jest co najwyżej równy ((3.19))  $m = 2 \cdot 85 \cdot 10^{-4}$ .



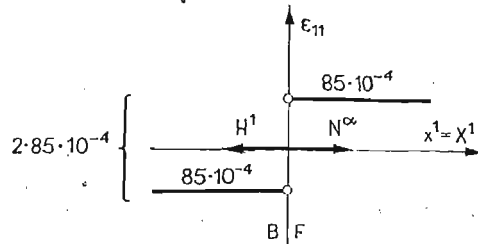
Przy przyjęciu oznaczenia  $K$  jak w (4.1), otrzymamy zgodnie z (2.7)<sub>2</sub> następujące wyrażenie dla prędkości fali silnej nieciągłości

$$(4.7) \quad U_1^v = \overset{0}{U}_1^v + \frac{1}{4\overset{0}{U}_1^v \rho_R} \{26.38 + 173.24\varepsilon_{11} + 27.6K\varepsilon_{11}\} \cdot m, \quad \frac{m}{\text{sek}}$$

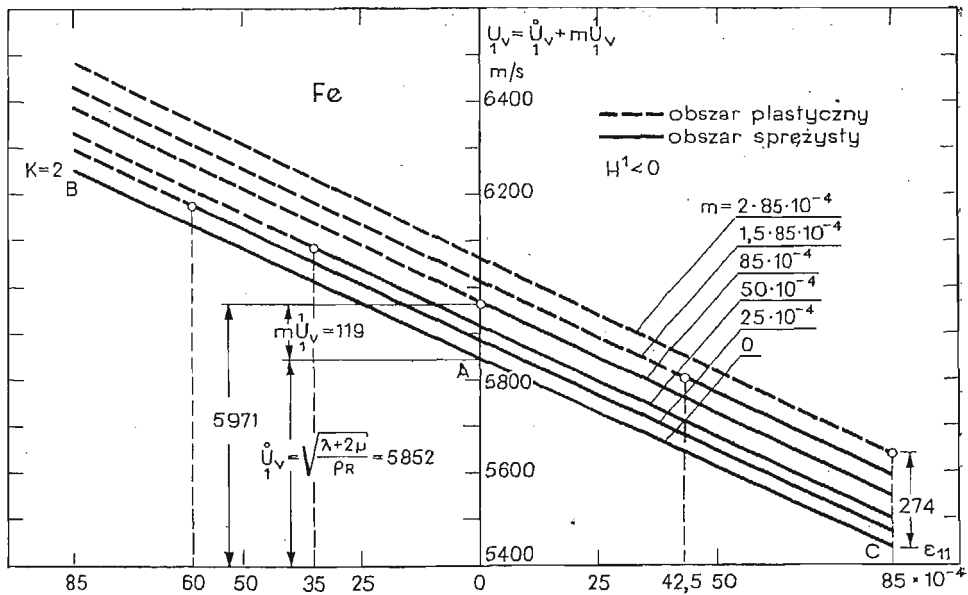
Odształcenie przed frontem fali waha się w granicach  $\pm 85 \cdot 10^{-4}$ , wartość  $m$  w równaniu (4.7) dobieramy tak, aby po skoku, po stronie  $B$  powierzchni nieciągłości, składowe stanu odkształcenia nie przekroczyły granicy sprężystości. Łatwo zauważyć, że największa wartość skoku może wynieść  $2 \cdot 85 \cdot 10^{-4}$ . Weźmy pod uwagę (3.19), dla  $H^1 < 0$  otrzymamy

$$[[D^{11}]] = [[\varepsilon^{11}]] = [[x_1^1]] = (x_1^1)^B - (x_1^1)^F = -2 \cdot 85 \cdot 10^{-4}.$$

Zakładając  $(x_1^1)^F = 85 \cdot 10^{-4}$  mamy  $(x_1^1)^B = -85 \cdot 10^{-4}$ , przypadek ten ilustruje rys. 5. Przy wartości skoku  $m = 2 \cdot 85 \cdot 10^{-4}$  granica sprężystości materiału nie została przekroczona. Na rys. 6 przedstawiono wzór (4.8) dla  $K = 2$ , oraz dla pięciu wartości



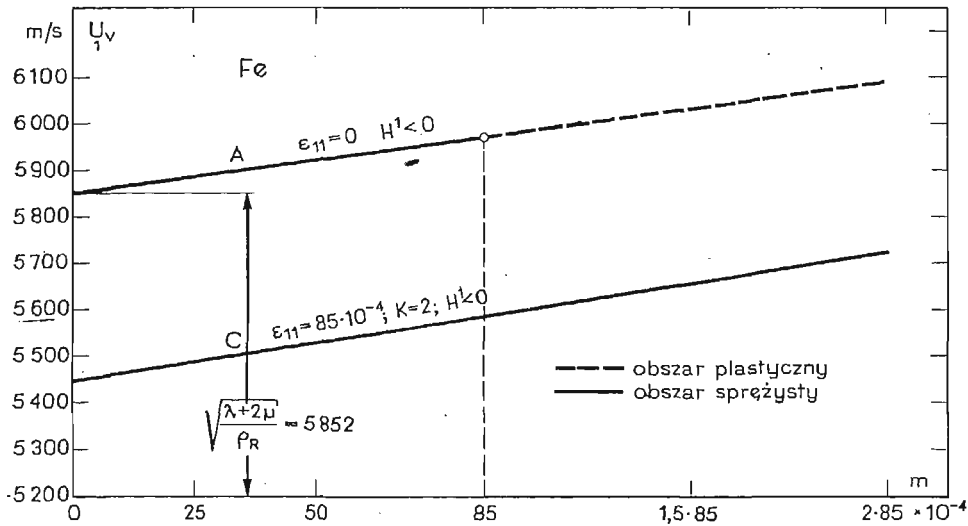
Rys. 5.



Rys. 6. Wykres prędkości  $U_1^v$  w funkcji skoku  $m$  dla stali.

skoków składowej gradientu deformacji mniejszych niż omówiony wyżej, graniczny  $2 \cdot 85 \cdot 10^{-4}$ , linia ciągła oznacza obszar sprężysty, przerywana plastyczny. Największy przyrost prędkości  $m \dot{U}_v$  uzyskuje się w punkcie C rys. 6. Przyrost prędkości wynosi w tym punkcie 274 m/sek.

Porównując wartość prędkości  $\dot{U}_v^0 = [(\lambda + 2\mu)/\rho_R]^{1/2} = 5852 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$ , (Rys. 6) przy nieodkształconym obszarze przed powierzchnią nieciągłości, z prędkością fali silnej nie-



Rys. 7. Wykres prędkości  $\dot{U}_v$  w punktach A, C w zależności od skoku  $m$  dla stali.

ciągłości, stwierdzamy wzrost prędkości o 119 m/sek, punkt A rys. 6. Prędkość fali  $\dot{U}_v$  wynosi 5971 m/sek.

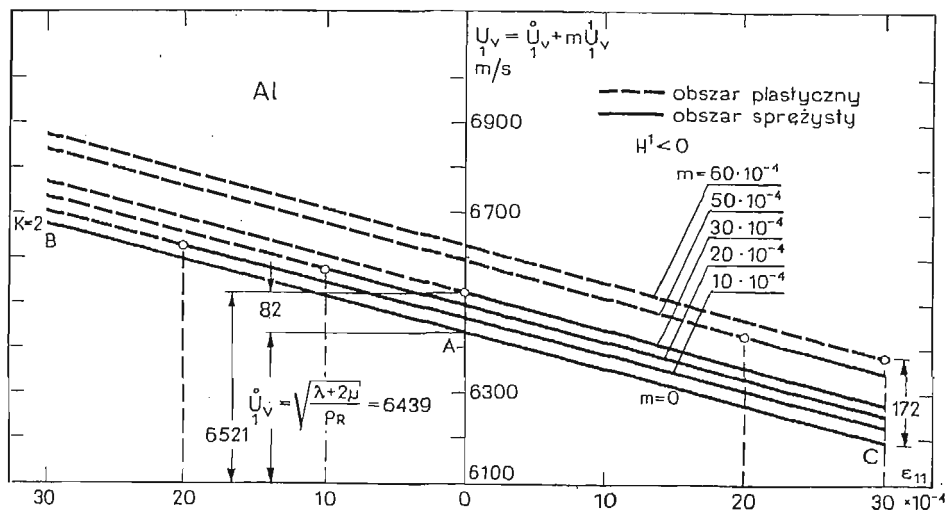
W analogiczny sposób, w oparciu o te same równania otrzymujemy następujące wyrażenie dla prędkości  $\dot{U}_v$  fali w aluminium

$$(4.8) \quad \dot{U}_v = \dot{U}_v^0 + \frac{1}{4\dot{U}_v^0 \rho_R} \{19.02 + 112.24 \varepsilon_{11} + 18.72 K \varepsilon_{11}\} \cdot m, \quad \frac{\text{m}}{\text{sek}}$$

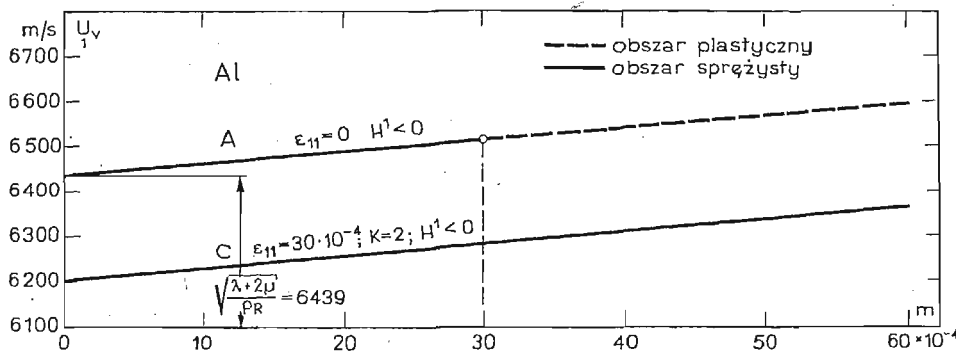
oznaczenie  $K$  jak w (4.1)

Skok w składowych gradientu deformacji jest co najwyżej równy (zgodnie z (3.19))  $m = 60 \cdot 10^{-4}$ .

Odpowiednie wykresy przedstawiono na rys. 8. Największy przyrost prędkości  $m \dot{U}_v$  uzyskuje się w punkcie C rys. 8. Przyrost prędkości w tym punkcie wynosi 172 m/sek. Porównanie wartości prędkości  $\dot{U}_v^0 = [(\lambda + 2\mu)/\rho_R]^{1/2} = 6439 \text{ m/sek}$ , przy nieodkształco-



Rys. 8. Wykres prędkości  $U_v$  w funkcji skoku  $m$  dla aluminium.



Rys. 9. Wykres prędkości  $U_v$  w punktach A, C w zależności od skoku  $m$  dla aluminium.

nym obszarze przed powierzchnią nieciągłości, wykazuje wzrost prędkości o 82 m/sek w odniesieniu do prędkości fali silnej nieciągłości. Prędkość  $U_v$  wynosi 6521 m/sek. (Rys. 8).

### 5. Przybliżenie adlbatyczne

Rozpatrzmy adiabaticzną falę silnej nieciągłości. W wyrażeniu (3.1) zostanie uwzględniona entropia. W warunkach adiabaticznych przed frontem fali, entropia jest stała. Jeżeli w obszarze tym propaguje fala silnej nieciągłości, stała wartość entropii ulega zmianie. Entropia przyjmuje nową wartość, która nie zmienia się, aż do czasu przejścia przez obszar nowej fali silnej nieciągłości. Poprzednio w punkcie 4 rozpatrywaliśmy przybliżenie izentropowe, założyliśmy, że entropia przed frontem fali wynosi zero. Obliczmy

przyrost entropii jaki wywoła przejście przez obszar adiabatycznej fali silnej nieciągłości. Ponieważ skok entropii jest rzędu  $m^3$  [3], [4], składowe tensora odkształcenia są rzędu  $m$ , należy w wyrażeniu (3.1) pominąć wyrazy zawierające  $\eta^2$  i  $\eta^3$  oraz iloczyny  $\eta$  i niezmienników tensora  $B$ . Równanie (3.1) zostało wyprowadzone z dokładnością do trzecich potęg składowych tensora odkształcenia. Otrzymamy

$$(5.1) \quad \varrho_R \sigma = T_0 \eta \varrho_R + \frac{l+2m}{24} (I_1-3)^3 + \frac{\lambda+2\mu+4m}{8} (I_1-3)^2 + \\ + \frac{8\mu+n}{8} (I_1-3) - \frac{m}{4} (I_1-3)(I_2-3) - \frac{4\mu+n}{8} (I_2-3) + \frac{n}{8} (I_1-3),$$

skok entropii wynosi [3]

$$[\eta] = S = \frac{1}{12} \frac{\sigma_{ikm}^{\alpha\beta\gamma} N_\alpha N_\beta N_\gamma H^i H^k H^m}{\sigma_\eta}.$$

W naszym przypadku (3.18), (3.6) mamy  $H = H(m, 0, 0)$ ,  $N_\alpha = N^\alpha = 1$  więc

$$[\eta] = \frac{1}{12} \frac{\sigma_{111}^{111} m^3}{\sigma_\eta} > 0; \quad \sigma_\eta = \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = T,$$

$$\frac{1}{1} U_v = \frac{1}{0} \cdot \sigma_{111}^{111} \quad \text{zgodnie z (3.13)}$$

$$(5.2) \quad [\eta] = S = \frac{1}{12} \frac{(4 \overset{0}{U}_v \overset{1}{U}_m) m^2}{\sigma_\eta}.$$

Temperaturę początkową  $T_0$  przyjęto 300°K. Biorąc pod uwagę ostatnią zależność (5.2) obliczono wartości skoku entropii dla różnych wartości skoku  $m$  składowych gradientu deformacji.

Wartości skoku entropii w kcal/(kg °K) dla stali podano w tabeli 2, a dla aluminium w tabeli 3.

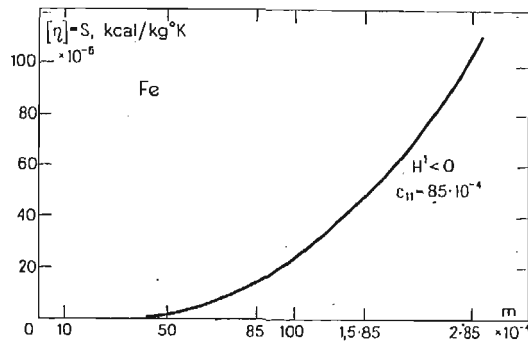
Tabela 2

skok $m$				
$25 \cdot 10^{-4}$	$50 \cdot 10^{-4}$	$85 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 85 \cdot 10^{-4}$	$2.85 \cdot 10^{-4}$
skok $s$				
$0.37 \cdot 10^{-6}$	$2.93 \cdot 10^{-6}$	$14.25 \cdot 10^{-6}$	$48.50 \cdot 10^{-6}$	$113.75 \cdot 10^{-6}$
$H^1 < 0 \quad s_{11} = 85 \cdot 10^{-4}$				

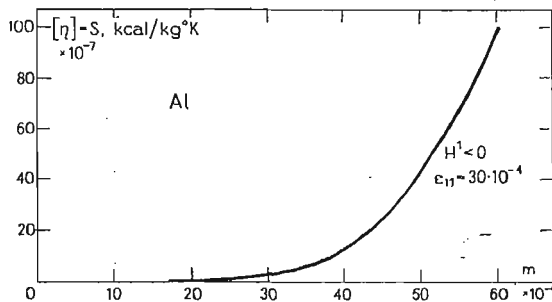
Tabela 3

skok $m$				
$10 \cdot 10^{-4}$	$20 \cdot 10^{-4}$	$30 \cdot 10^{-4}$	$50 \cdot 10^{-4}$	$60 \cdot 10^{-4}$
skok $s$				
$0.05 \cdot 10^{-6}$	$0.38 \cdot 10^{-6}$	$1.27 \cdot 10^{-6}$	$4.89 \cdot 10^{-6}$	$10.19 \cdot 10^{-6}$
$H^1 < 0 \quad \varepsilon_{11} = 30 \cdot 10^{-4}$				

Wyniki zawarte w tabelach przedstawiono na rysunkach 10 i 11.



Rys. 10. Zależność skoku entropii  $[\eta]$  od wartości skoku  $m$  dla stali.



Rys. 11. Zależność skoku entropii  $[\eta]$  od wartości skoku  $m$  dla aluminium.

W przypadku gdyby rząd skoku entropii  $[[\eta]]$ , okazał się równy rzędowi skoku  $m$ , konieczne jest uwzględnienie entropii zgodnie z (3.1). Otrzymamy wtedy następujące wyrażenie dla prędkości fali akustycznej zgodnie z (3.11)

$$(5.3) \quad \overset{0}{U}_1^2 = \overset{0}{U}_1^2|_{\eta=0} + \frac{2}{\varrho_R} \left\{ -\frac{\pi+B}{2} \eta + \frac{A}{2} (I_1-3)\eta + \frac{C\eta^2}{2} + \left(\frac{B\eta}{4}\right) (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + A\eta\lambda_1^2 \right\},$$

$$(5.4) \quad \overset{0}{U}_2^2 = \overset{0}{U}_2^2|_{\eta=0} + \frac{2}{\rho_R} \left\{ -\frac{\pi+B}{2} \eta + \frac{A}{2} (I_1-3) \eta + \frac{B\eta}{4} \lambda_3^2 \right\},$$

$$(5.5) \quad \overset{0}{U}_3^2 = \overset{0}{U}_3^2|_{\eta=0} + \frac{2}{\rho_R} \left\{ -\frac{\pi+B}{2} \eta + \frac{A}{2} (I_1-3) \eta + \frac{B\eta}{4} \lambda_2^2 \right\},$$

$$(5.6) \quad \overset{1}{U}_1 = \overset{1}{U}_1|_{\eta=0} + \frac{2}{\rho_R} \{6A\eta\lambda_1\}.$$

Wartości współczynników  $\pi$  oraz  $\omega$  w (3.1) można znaleźć w [7].

$$\pi = \frac{\beta T_0 \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right)}{q},$$

$$\omega = \frac{T_0}{q} \left( 1 - \frac{\beta^2 T_0}{q} \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \right).$$

gdzie:  $\beta$  — współczynnik objętościowej rozszerzalności cieplnej  
 $q$  — ciepło właściwe przy zerowym stanie naprężenia

Dla stali wartości współczynników  $\pi$  i  $\omega$  przy

$$\beta = 36 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{K}}, \quad q = 0.11 \frac{\text{kcal}}{\text{kg } ^\circ\text{K}},$$

wynoszą

$$\pi = 1598851,6 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}^2 \text{ } ^\circ\text{K}}{\text{m kcal sek}^2}, \quad \omega = 2678,2 \frac{\text{kg } ^\circ\text{K}}{\text{kcal}}.$$

Biorąc pod uwagę największy skok  $m = 2 \cdot 85 \cdot 10^{-4}$  z tabeli 2 i odpowiadający mu skok entropii  $[\eta] = 113.75 \cdot 10^{-6}$  stwierdzamy, że skok entropii jest rzędu  $m^2$ . Zachowując w równaniach (5.3), (5.4), (5.5) człony ze współczynnikami  $\pi$ ,  $\omega$  stwierdzamy, że prędkości obliczone z powyższych równań, przy przyjętej dokładności liczenia nie ulegają zmianie.

## 6. Wnioski i uwagi końcowe

Z przedstawionych wykresów wynika, że prędkość fali silnej nieciągłości zależy w znacznym stopniu od wstępnego odkształcenia ośrodka. Prędkość fali akustycznej  $\overset{0}{U}_1$  jest większa w strefie gdzie  $\varepsilon_{11} < 0$ , maleje ze wzrostem odkształcenia  $\varepsilon_{11}$ , osiągając w stanie nieodkształconym wartość  $\overset{0}{U}_1 = [(\lambda+2\mu)/\rho_R]^{1/2}$ . Z porównania wykresów 1,2 wynika, że największy wpływ na prędkość  $\overset{0}{U}_1$  ma odkształcenie  $\varepsilon_{11}$ , odkształcenia  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  nie są w stanie tak wpłynąć na prędkość, aby w strefie gdzie  $\varepsilon_{11} < 0$ , przyjęła wartość mniejszą od  $\overset{0}{U}_1 = [(\lambda+2\mu)/\rho_R]^{1/2}$ . Inaczej jest w przypadku prędkości  $\overset{0}{U}_2$ . Odkształcenie  $\varepsilon_{33}$  ma mniejszy wpływ na zmiany prędkości, o zmianie decydują odkształcenia  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{11}$

w strefie gdzie odkształcenia te są rozciągające np. ( $K = -2$ ), a odkształcenie  $\varepsilon_{33} < 0$ , prędkość  $\overset{0}{U}_v$  jest mniejsza od  $\overset{0}{U}_v = (\mu/\rho_R)^{1/2}$ . W strefie gdzie  $\varepsilon_{11} < 0$ ,  $\varepsilon_{22} < 0$ ,  $\varepsilon_{33} > 0$ , ( $K = -2$ ), prędkość jest większa od prędkości fali poprzecznej w tym ośrodku.

Największa różnica między prędkością fali akustycznej, propagującą się w ośrodku wstępnie odkształconym, a prędkością fali silnej nieciągłości w tym ośrodku wynosi 274 m/sek, punkt C rys. 6. Prędkość fali akustycznej wynosi w tym punkcie 5454 m/sek. Otrzymamy więc 5% przyrost prędkości.

Skok entropii będący rzędu  $m^3$ , dla małych wartości skoku  $m$  szybko wzrasta ze skokiem  $m$  rys. 10, 11. Dla stali otrzymano większe przyrosty prędkości niż dla aluminium, wiąże się to z mniejszą wartością granicy sprężystości przyjętą dla aluminium, a tym samym mniejszym skokiem  $m$ . W opisanym tu przypadku fala silnej nieciągłości jest falą ścisającą. Zachodzi tu analogiczna sytuacja jak w gazie przy zaniedbaniu przewodnictwa cieplnego, nierówność  $[[\eta]] > 0$  dopuszcza jedynie ścisające fale silnej nieciągłości, oraz uniemożliwia propagację fal rozrzedzeniowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. D. R., BLAND, *Nonlinear Dynamic Elasticity*, Waltham, 1969.
2. Z. WESOŁOWSKI, *Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości*, PWN, W-wa 1974.
3. Z. WESOŁOWSKI, *Strong discontinuity wave in initially strained elastic medium*, Arch. Mech. Stos. 3, 30, 1978.
4. Z. WESOŁOWSKI, *Nieliniowa teoria sprężystości*, w IV tomie „Mechaniki Technicznej” pt. „Sprężystość”, red. M. Sokołowski, PWN, W-wa 1978.
5. H. FUKUOKA, H. TODA, *Preliminary experiment on acoustoelasticity for stress analysis*, Arch. Mech. Stos. 5, 29, 1977.
6. P. J. CHEN, *Growth and decay of waves in solids*, in „Handbuch der Physik”, Vol. VI, a/3. Springer — Verlag, Berlin — New York.
7. С. К. Годунов, *Элементы механики сплошной среды*, Изд. Наука, 1978.

#### Резюме

#### ПЛОСКАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ, УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ.

Рассмотрено распространение плоских ударных волн в однородной неограниченной среде с упругими постоянными третьего порядка. Предположено, что перед фронтом ударной волны находится однородная предварительная деформация. Рассмотрено адиабатическое и изэнтропическое приближения.

В работе использовано метод доказанный в работе [3]. После разложения скорости распространения и амплитуды в степенные ряды получено решение. Как „нулевое” приближение получено волну ускорения (одну продольную и две поперечные). На рисунках представлено скорость распространения в зависимости от компонент тензора деформаций перед сингулярной поверхностью. „Первое” приближение дает только одну продольную ударную волну. На рисунках представлено скорость ударной волны в зависимости от скачка градиента деформаций. Рисунки сделано для стали и алюминия.

## S u m m a r y

## STRONG DISCONTINUITY PLANE WAVES IN INITIALLY STRAINED ELASTIC ISOTROPIC MEDIUM.

The subject of the paper is the analysis of propagation of strong discontinuity plane waves in an isotropic unbounded medium. The isotropic material with the second order elasticity coefficients has been assumed. We also assumed that the strains in front of the strong discontinuity wave were homogeneous. The isentropic and adiabatic approximation were taken into consideration. By means of the method described in paper [3] the amplitude vector  $H^i$  and the speed propagation  $U_s$  have been expanded into power series of the parameter  $m$ . As the „zero” approximation we obtained the acceleration wave (two transversal and one longitudinal). The diagrams for the speed propagation against the strains in front of the singular surface have been presented. The „first” approximation gives only a single longitudinal strong discontinuity wave. On the remaining diagrams we presented the strong discontinuity wave speed against the jump of the deformation gradient. The diagrams were made for steel and aluminium. It has been calculated that the greatest difference between the acoustic speed wave propagated in initially strained medium and the strong discontinuity wave speed in this medium for the steel is 274 m/s.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 stycznia 1980 roku*

---



PROJEKTOWANIE ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH PRZY POMOCY  
CIĄGŁYCH PÓL STATYCZNIE DOPUSZCZALNYCH

WŁODZIMIERZ ZOWCZAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Metoda nośności granicznej projektowania elementów maszyn i konstrukcji opiera się na istniejącym w teorii plastyczności twierdzeniu o dolnej ocenie obciążenia niszczącego. Zgodnie z tym twierdzeniem, dolne oszacowanie obciążenia niszczącego element, uzyskać można przyjmując dowolne statycznie dopuszczalne pole naprężeń. Odwrotnie — przy danym obciążeniu, pole statycznie dopuszczalne pozwala określić nieznaną kształt elementu.

Dotychczas przy projektowaniu metodą nośności granicznej stosowano pola statycznie dopuszczalne skokowo niejednorodne, to znaczy złożone z pewnej ilości pól jednorodnych oddzielonych od siebie liniami nieciągłości naprężeń.

W wielu przypadkach osiągnąć można znacznie lepsze oszacowanie, zarówno kształtów projektowanych elementów, jak i ich nośności przy danym kształcie, posługując się polami o ciągłej niejednorodności stanu naprężenia (w całym lub części obszaru).

W poprzedniej pracy [6], zaproponowano zastosowanie kilku prostych typów pól statycznie dopuszczalnych o ciągłej niejednorodności do konstruowania elementów maszyn. W niniejszym artykule proponuje się użycie w tym celu pól naprężeń zbudowanych metodą charakterystyk. Jedyny, znany autorowi przykład kształtowania przy pomocy tej metody pochodzi z mechaniki gruntów i dotyczy wyznaczania profili skarp ziemnych ([3]).

Poniżej przedstawiono krótko sposoby budowania różnych typów pól statycznie dopuszczalnych, a następnie skonstruowano przy ich pomocy dwa przykłady elementów konstrukcyjnych. Otrzymane rozwiązania porównano z dotychczasowymi, otrzymanymi przy użyciu pól skokowo niejednorodnych.

W rozważaniach przyjęto sztywno — idealnie plastyczny model materiału i założono, że podlega on warunkowi plastyczności Treski. Przyjęto też, że projektowane elementy znajdują się w płaskim stanie naprężenia. Pola naprężeń budowane przy tym założeniu, pozostają statycznie dopuszczalnymi również dla płaskiego stanu odkształcenia oraz dla elementów o skończonej grubości, są więc najbardziej uniwersalne. Tak więc, materiał osiąga stan plastyczny, gdy spełniona jest jedna przynajmniej spośród równości

$$(1) \quad \sigma_1 = 2k,$$

$$(2) \quad \sigma_2 = -2k,$$

$$(3) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k,$$

gdzie  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są naprężeniami głównymi ( $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ), a  $k$  — granicą plastyczności przy czystym ścinaniu.

## 2. Metoda charakterystyk budowy statycznie dopuszczalnych pól naprężeń

Metoda ta, stosowana szeroko do rozwiązywania różnych płaskich zagadnień teorii plastyczności, opisana jest wyczerpująco w monografiach poświęconych temu działowi mechaniki (np. [2], [4]). Dlatego poniżej zostanie przypomnianych jedynie kilka zasadniczych pojęć i wzorów.

Zakłada się, że w rozważanym obszarze materiału jest w stanie plastycznym, przy czym naprężenia główne spełniają warunek (3). Związek ten zapisać można inaczej w postaci

$$(4) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2.$$

Dołączając doń równania równowagi

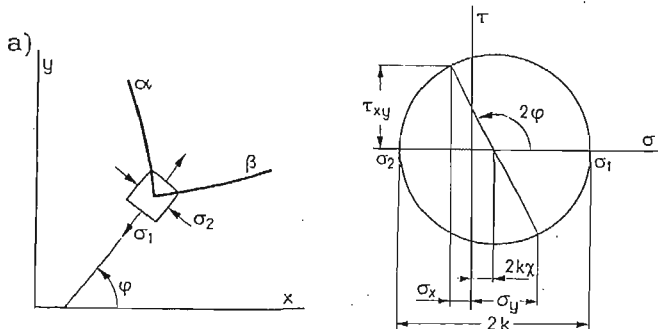
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

otrzymujemy układ trzech równań, z których wyznaczyć należy niewiadome naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ . Stan naprężenia określić więc można bez konieczności wyznaczania kinematyki.

W dalszym ciągu wprowadza się nowe zmienne  $\varphi$  i  $\chi$  tak dobrane, by warunek (4) spełniony był tożsamościowo. Naprężenia wyrażają się wzorami

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= 2k\chi + k\cos 2\varphi, \\ \sigma_y &= 2k\chi - k\cos 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= k\sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Interpretacja nowych zmiennych pokazana jest na rys. 1.  $\varphi$  jest wielkością kąta między kierunkiem naprężenia  $\sigma_1$  (większego), a osią  $x$ , zaś  $\chi$  — bezwymiarowym naprężeniem średnim.



Rys. 1.

Podstawiając wzory (5) do równań równowagi otrzymujemy nowy układ równań różniczkowych cząstkowych z niewiadomymi  $\chi$  i  $\varphi$ . Układ ten jest typu hiperbolicznego, posiada więc dwie rodziny charakterystyk rzeczywistych (oznaczonych symbolami  $\alpha$  i  $\beta$ ). Określone są one równaniami

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{rodzina } \alpha), \\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{rodzina } \beta). \end{aligned}$$

Wzdłuż charakterystyk spełnione są związki pomiędzy niewiadomymi

$$(7) \quad \begin{aligned} \chi + \varphi &= \operatorname{const.} (\alpha), \\ \chi - \varphi &= \operatorname{const.} (\beta). \end{aligned}$$

Rozwiązanie odpowiedniego zadania brzegowego sprowadzić więc można do całkowania układu równań różniczkowych zwyczajnych (6) przy wykorzystaniu związków (7). Całkowania tego dokonuje się numerycznie metodą różnic skończonych. Szczegóły na temat sposobu postępowania przy rozwiązywaniu poszczególnych zagadnień brzegowych znaleźć można w cytowanych monografiach.

### 3. Szczególne odmiany pól statycznie dopuszczalnych

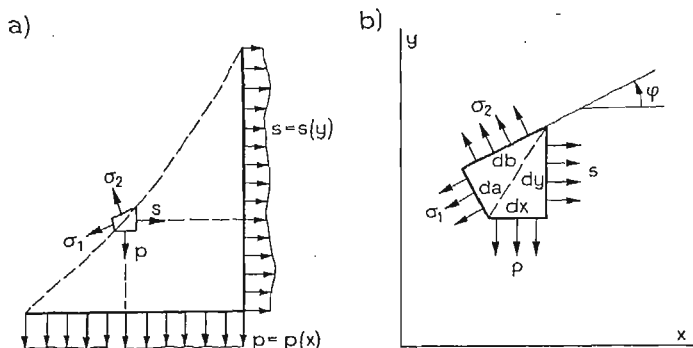
Metoda charakterystyk służy do budowy pól statycznie dopuszczalnych, spełniających warunek (3), tzn. że w każdym punkcie różnica naprężeń głównych równa jest  $2k$ . Jednak założenie to nie zawsze musi być spełnione. W projektowanym elemencie mogą np. istnieć obszary o jednakowych znakach naprężeń głównych. W takim obszarze materiał osiąga stan plastyczny, gdy spełniony jest warunek (1) lub (2), tzn. gdy przynajmniej jedno z naprężeń głównych ma wartość bezwzględną  $2k$ . Mogą też istnieć obszary (o naprężeniach jedno- jak i różno-imiennych), w obrębie których materiał pozostaje w stanie sztywnym.

We wszystkich tych przypadkach nie można wykorzystać omawianej wyżej metody. Proponuje się zamiast tego inny tok postępowania: W obszarach, w których, jak się spodziewamy, metoda charakterystyk nie będzie mogła być zastosowana, część spośród funkcji określających nam stany naprężenia i granice danego pola zakładamy z góry. Pozostałe, nieznanne funkcje wyznacza się z warunków równowagi pomiędzy budowanym polem, a polem skonstruowanym metodą charakterystyk.

Oczywiście w ten sposób budować można nieograniczoną ilość różnych pól, spośród których omówione zostaną jedynie dwa. Będą one wykorzystane w pokazanych w następujących punktach przykładach.

#### a) Pole o stałych kierunkach głównych

Stanowi ono uogólnienie podobnego pola pokazanego w pracy [6]. W całym obszarze tego pola kierunki główne są jednakowe. Załóżmy, że są one zgodne z osiami układu współrzędnych prostokątnych (rys. 2a). Wynika stąd, że naprężenia  $\sigma_x = s$  i  $\sigma_y = p$  są naprężeniami głównymi, a ponadto, że są one stałe:  $\sigma_x$  wzdłuż prostych równoległych do osi  $x$  a  $\sigma_y$  wzdłuż prostych równoległych do osi  $y$ . Inaczej mówiąc  $s = s(y)$ ,  $p = p(x)$ .



Rys. 2.

Załóżmy teraz, że omawiane pole przylega do obszaru, w którym stan naprężenia (tzn. wartości naprężeń  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  oraz kąt  $\varphi$ ) jest znany. Równania równowagi na linii granicznej pomiędzy obszarami (stanowiącej w ogólnym przypadku linię nieciągłości) są następujące (rys. 2b):

$$(8) \quad \begin{aligned} -pdx - \sigma_1 da \sin \varphi + \sigma_2 db \cos \varphi &= 0, \\ sdy - \sigma_1 da \cos \varphi - \sigma_2 db \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Wielkości  $da$  i  $db$  wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} da &= dy \cos \varphi - dx \sin \varphi, \\ db &= dy \sin \varphi + dx \cos \varphi. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do równań (8), otrzymujemy, po przekształceniach

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sigma_1 \sin^2 \varphi + \sigma_2 \cos^2 \varphi - p}{(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi},$$

$$(10) \quad s = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sigma_1 \sin^2 \varphi + \sigma_2 \cos^2 \varphi - p}.$$

Przy danej funkcji  $p(x)$  (np.  $p(x) = p = \text{const}$ ), wyznaczyć można z równania (9) przebieg linii granicznej  $y = y(x)$ , a następnie, ze wzoru (10), wielkości naprężeń  $s$ .

b) Pole osiowosymetryczne

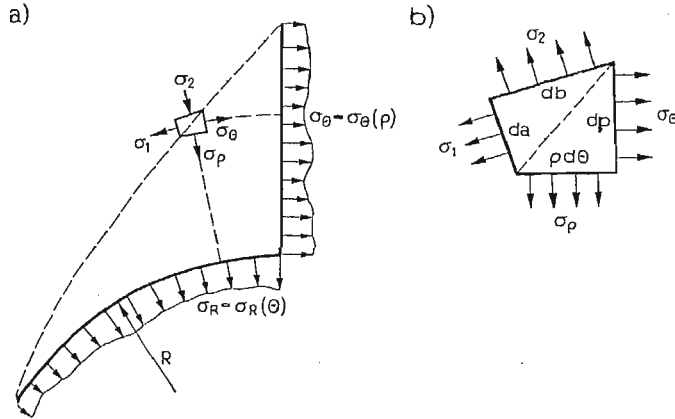
Rozważmy pole, w którego każdym punkcie kierunki główne wyznaczone są przez styczne do linii biegunowego układu współrzędnych. W obszarze pola naprężenia obwodowe zależą tylko od wielkości promienia  $\sigma_\varrho = \sigma_\varrho(\varrho)$  natomiast naprężenia promieniowe spełniać muszą równanie równowagi

$$(11) \quad \frac{d\sigma_\varrho}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho} (\sigma_\varrho - \sigma_\theta) = 0.$$

Równania równowagi na granicy pomiędzy omawianym polem, a innym, w obszarze którego stan naprężenia jest znany są analogiczne do równań (8): należy jedynie zastąpić  $s$  i  $p$  przez  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_\varrho$ , zaś  $dx$  i  $dy$  przez  $\varrho d\theta$  i  $d\varrho$  (rys. 3).

Wyznaczanie naprężeń panujących w obrębie pola upraszcza się w przypadku, gdy krzywa  $\varrho = f(\theta)$  rozgraniczająca obydwa pola poprowadzona jest tak, by była w każdym

punkcie prostopadła do kierunku naprężenia  $\sigma_2$ . W punktach przylegających do krzywej panuje wówczas dwuosiowy równomierny stan naprężenia. Obwodowe naprężenia  $\sigma_\theta$  są więc równe naprężeniu panującemu w punkcie brzegu o tej samej wartości promienia  $\rho$ , natomiast naprężenia promieniowe oblicza się ze wzoru (11).

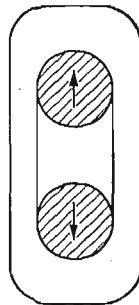


Rys. 3.

Dla pewnych rozkładów naprężenia wzdłuż linii granicznej  $\rho = f(\theta)$  ekstremalne wartości naprężeń  $\sigma_\theta$  wystąpić mogą w punktach wewnętrznych pola. W ogólnym więc przypadku, sprawdzenia, czy nie przekraczają one wartości dopuszczalnych dokonać należy w całym obszarze.

#### 4. Projekt elementu jarzmowego

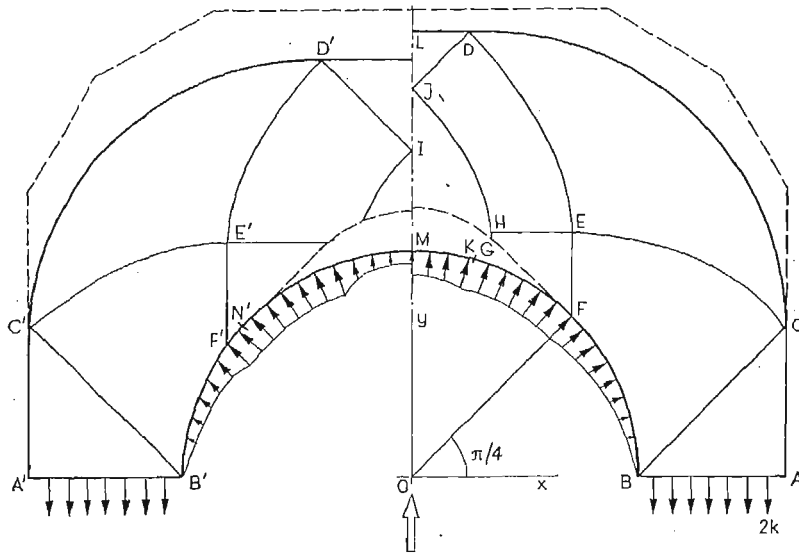
Rozważmy element jarzmowy, służący do przeniesienia siły pomiędzy dwoma okrągłymi sworzniami (rys. 4). Założmy, że obydwa boczne paśy jarzma rozciągane są naprężeniami



Rys. 4.

2k. Należy tak ukształtować główkę elementu, aby jej nośność nie była mniejsza niż pasów bocznych.

Rozwiązanie tego zadania przy założeniu, że na powierzchni styku sworznia z jarzmem nie występuje tarcie, widnieje po prawej stronie rys. 5 (ze względu na symetrię pokazano



Rys. 5.

tylko połowę pola). Ciągłymi liniami zaznaczono charakterystyki, zaś przerywanymi — linie nieciągłości. Obliczenia wykonano dla szczególnego stosunku wymiarów charakterystycznych: szerokości pasa bocznego do połowy szerokości elementu  $c/a = 0,4$ .

Pole konstruuje się w sposób następujący: Rozpoczynamy od odcinka  $AB$ , wzdłuż którego, zgodnie z założeniem, rozłożone są naprężenia rozciągające  $2k$ . Takie same naprężenia panują w całym trójkącie  $ABC$ . Z założenia o braku tarcia na brzegu otworu wynika, że w każdym punkcie łuku kąt  $\varphi$  jest znany (jest to kąt kierunkowy stycznej do brzegu w danym punkcie). W czworokącie  $BCEF$  rozwiązujemy więc mieszane zagadnienie brzegowe. Na podstawie danych wartości funkcji  $\chi$  i  $\varphi$  wzdłuż charakterystyki  $BC$ , oraz znanego rozkładu  $\varphi$  wzdłuż łuku  $BF$ , znajdujemy stan naprężenia w całym tym obszarze. Punkt  $F$  na okręgu tak wybrano, by prosta  $OF$  tworzyła kąt  $\pi/4$  z osią  $x$ . Zapewniamy to, że w punkcie  $D$  styczna do brzegu swobodnego będzie pozioma ( $\varphi_D = \pi$ ). Następnie wykorzystując znajomość wartości funkcji  $\chi$  i  $\varphi$  wzdłuż charakterystyki  $CE$ , rozwiązujemy tak zwane odwrotne zadanie Cauchy'ego. Wyznaczamy w ten sposób kształt brzegu swobodnego  $CD$ , oraz stan naprężenia w całym obszarze  $CDE$ . Zakładamy dalej, że odcinek  $LD$  — styczny do brzegu swobodnego w punkcie  $D$  wyznacza kształt brzegu aż do osi symetrii.

W trójkącie utworzonym przez prostoliniową część brzegu swobodnego, charakterystykę  $DJ$  i symetryczną do niej charakterystykę po drugiej stronie osi panuje jednorodne rozciąganie naprężeniami  $2k$ . Znając wartości funkcji  $\chi$  i  $\varphi$  wzdłuż charakterystyk  $DJ$  i  $DE$  rozwiązujemy teraz charakterystyczne zadanie brzegowe, wyznaczając w ten sposób stan naprężenia w obszarze  $DEHJ$ . Charakterystyki  $EF$  i  $EH$  (podobnie jak  $DJ$  oraz  $BC$ ) są prostoliniowe. W obszarze  $EFGH$  panuje więc jednorodny stan naprężenia:  $\varphi = 3\pi/4$ ,  $\chi = 0,5 - \pi/4$ .

Z warunku symetrii wynika, że dla punktów leżących na osi, naprężenie  $\sigma_1$  jest skierowane poziomo, więc  $\varphi = \pi$ . Rozwiązanie zadania mieszanego opartego na charakterystyce

$GJ$  i odcinku  $IJ$  osi symetrii określa nam stan naprężenia w obszarze  $GII$ . Następnie, poczynając od punktu  $F$ , prowadzimy krzywą o równaniu  $dy/dx = \operatorname{tg}\varphi$  (trajektorię naprężenia głównego  $\sigma_1$ ). Przyjmujemy, że krzywa ta —  $FGI$ , będzie linią nieciągłości. Poniżej krzywej  $FGI$  rozciąga się pole osiowosymetryczne, opisane w poprzednim punkcie.

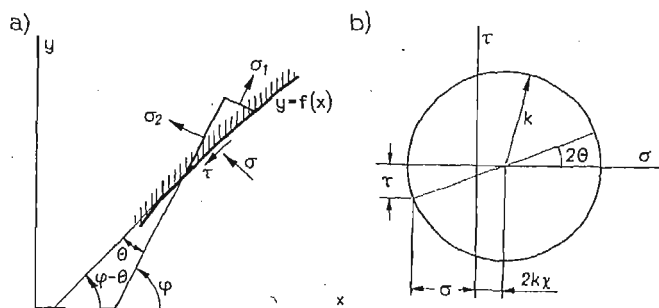
Na rys. 5 pokazany jest też rozkład nacisków na obwodzie otworu wynikający ze skonstruowanego pola, statycznie dopuszczalnego. Naciski te rosną od zera w punkcie  $B$  do wartości  $0,82 \cdot 2k$  w punkcie  $K$ . Następnie zaczynają się obniżać i w punkcie  $N$  osiągają wielkość  $0,58 \cdot 2k$ .

Na rysunku zaznaczono też (linią przerywaną), kontur analogicznego elementu zaprojektowanego przy pomocy pól skokowo niejednorodnych ([5]). Omawiane rozwiązanie jest, jak widać, oszczędniejsze.

Istotny wpływ na budowę pola i w konsekwencji na zewnętrzny kształt elementu mają założenia dotyczące warunków panujących na powierzchniach obciążanych. Obydwa przedstawione wyżej przykłady powstały przy założeniu, że powierzchnia otworu jest gładka (w przypadku drugiego elementu było drobne odstępstwo od tego warunku). Rozważmy teraz podobne zadanie, przyjmując jednak, że na linii styku sworznia z jarzmem dopuszcza się tarcie. Rozwiązanie zadania przy założeniu, że współczynnik tarcia  $\mu = 0,2$ , pokazane jest z lewej strony rys. 5. Pole buduje się podobnie jak poprzednio. Jediną różnicę stanowi fakt, że charakterystyki wychodzące z punktów leżących na łuku  $BF$  nie są nachylone pod kątem  $\pi/4$  do stycznych do łuku.

Oznaczmy symbolem  $\Theta$  kąt między styczną do łuku a kierunkiem naprężenia głównego  $\sigma_1$ . Pochodna funkcji  $y = \sqrt{1-x^2}$  określającej kształt otworu równa jest w każdym punkcie łuku tangensowi kąta  $\varphi - \Theta$  (rys. 6a):

$$(12) \quad \frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} = \operatorname{tg}(\varphi - \Theta).$$



Rys. 6.

Oznaczając symbolami  $\sigma$  i  $\tau$  naprężenia normalne i styczne panujące na brzegu otworu otrzymujemy dalej (rys. 6b):

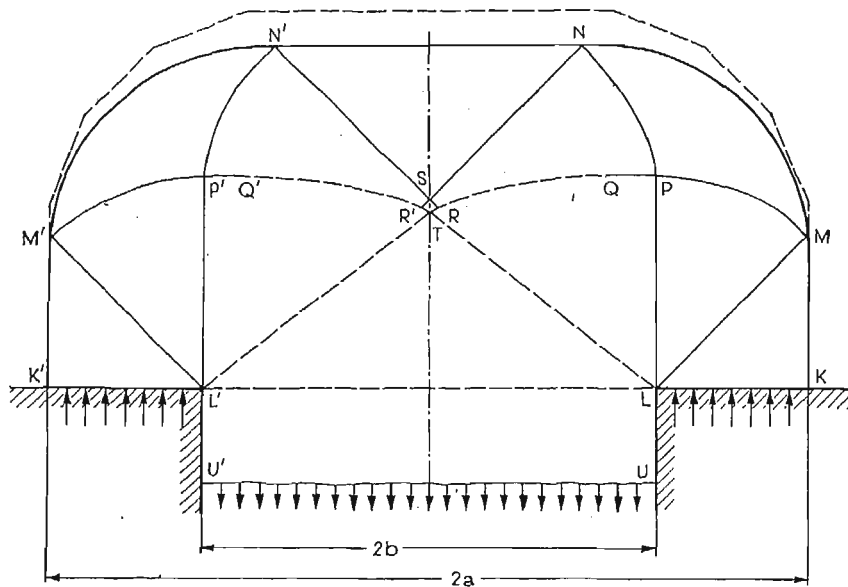
$$(13) \quad \begin{aligned} \sigma &= 2k - k \cos 2\Theta, \\ \tau &= -k \sin 2\Theta, \\ \tau &= \mu \sigma \end{aligned}$$

(przyjęto taki zwrot sił tarcia by ich pionowa składowa brała udział w zrównoważeniu siły zewnętrznej obciążającej sworzeń). Eliminując z równań (12) i (13) wielkości  $\sigma$ ,  $\tau$  i  $\Theta$  otrzymujemy związek pomiędzy funkcjami  $\chi$  i  $\varphi$ , jaki musi być spełniony we wszystkich punktach łuku  $B'F'$ . Związek ten wyraża żądanie aby pomiędzy jarzmem a sworzniem panowały siły tarcia o maksymalnej (przy danym współczynniku tarcia) wysokości. Otrzymaną zależność wykorzystujemy do rozwiązania zadania mieszanego i znalezienia naprężeń w całym obszarze  $B'C'E'F'$ . Punkt  $F'$  jest znów tak dobrany, aby zachodziło  $\varphi_{D'} = \pi$ .

Konstrukcja pozostałej części pola przebiega identycznie jak poprzednio. Na łuku  $N'M$  działają wyłącznie naprężenia normalne. Jak wynika z rys. 5 założenie, że na powierzchni obciążonej może wystąpić tarcie pozwala jeszcze oszczędniej zaprojektować jarzmo.

### 5. Projekt elementu kotwiącego

Rozpatrzmy element kotwiący pokazany na rys. 7. Może on stanowić na przykład część mocującą łopatki turbiny zapobiegającą wyrwaniu łopatki z gniazda w wirniku (patrz [5]). Zakładamy, że trzon elementu obciążony jest naprężeniami rozciągającymi



Rys. 7.

$\sigma_1 \leq 2k$ . Należy tak ukształtować łeb, aby przeniósł naciski równe  $2k$  powstające na powierzchniach oporowych  $KL$  i  $K'L'$ .

Zadanie rozwiązano dla szczególnego stosunku wymiarów charakterystycznych  $b/a = 0,6$ . Wartość tę wybrano, celem porównania otrzymanego rozwiązania z istniejącymi już rozwiązaniami, uzyskanymi przy pomocy pól skokowo niejednorodnych. Konstrukcja analogicznego elementu dla innego stosunku wymiarów charakterystycznych nie przedstawia większych trudności.



Budowa pola statycznie dopuszczalnego przebiega podobnie jak poprzednio. Pole jest symetryczne względem osi pionowej. W trójkącie  $KLM$  panuje ściskanie naprężeniami  $-2k$ . W punkcie  $L$  następuje skokowa zmiana stanu naprężenia, jest to więc punkt osobliwy.

Z punktu tego wychodzi wachlarz charakterystyk  $LMP$ . Odcinek  $LP$  przyjęto prostopadły do krawędzi  $KL$ , co zapewnia poziome położenie stycznej do brzegu w punkcie  $N$ . Rozpoczynając od charakterystyki  $MP$  rozwiązujemy odwrotne zadanie Cauchy'ego w obszarze  $MNP$ . Określony zostaje w ten sposób kształt brzegu swobodnego  $MN$ . Przyjmujemy, podobnie jak poprzednio, że styczna do brzegu swobodnego w punkcie  $N$  określa dalszy kształt brzegu ciała do punktu  $N'$  po drugiej stronie osi. W obszarze  $NN'S$  panuje jednorodne ściskanie naprężeniami  $-2k$ . Na podstawie znajomości stanu naprężenia wzdłuż charakterystyk  $NS$  i  $LN$  rozwiązujemy kolejno zadania charakterystyczne w całym obszarze  $LNR'T$  (pamiętając, że charakterystyki  $SR$  i  $SR'$  są symetryczne). W punkcie  $Q$  tego obszaru charakterystyki należące do jednej rodziny ( $\alpha$ ) zaczynają się przecinać. Krzywa  $QT$  stanowi więc linię nieciągłości.

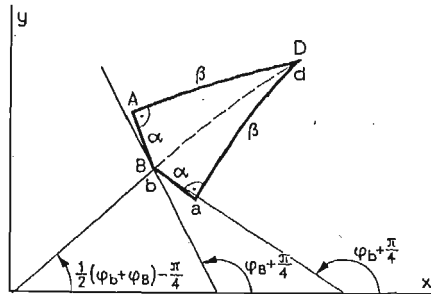
Jej przebieg określić można posługując się znanymi zależnościami (patrz np. [1]). Równanie linii nieciągłości zapisać można w postaci

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\varphi_L + \varphi_P) - \frac{\pi}{4} \right],$$

gdzie  $\varphi_L$  i  $\varphi_P$  są wartościami  $\varphi$ , w tym samym punkcie po obydwu jej stronach. Wzdłuż linii spełniony jest ponadto związek

$$2\varphi_a = \varphi_a - \varphi_D - \sin(\varphi_a - \varphi_D) + \varphi_b - \varphi_B - \sin(\varphi_b - \varphi_B).$$

Oznaczenia poszczególnych punktów podane są na rys. 8. W omawianym przypadku, ze względu na prostoliniowość odcinków  $LP$  i  $NS$  odpowiednich charakterystyk, wyznaczanie przebiegu krzywej nieciągłości jest znacznie ułatwione.



Rys. 8.

Poniżej linii nieciągłości  $LT$  rozciąga się pole naprężeń o stałych kierunkach głównych, którego budowę opisano w punkcie 3a. Przebieg tej krzywej wyznacza się całkując numerycznie równanie (9). Naprężenia  $p$  działające w kierunku pionowym są stałe w obszarze pola i równe  $2k(a-b)/b = 1,33k$ .

Naprężenia  $s$  — w kierunku poziomym maleją od  $0,94 \cdot 2k$  na linii  $LL'$  do  $0,84 \cdot 2k$  w punkcie  $T$ ; tak więc cały obszar  $LL'T$  znajduje się w stanie sztywnym.

Również w obrębie trzona  $LL'U'U$  materiał, zgodnie z założeniem, nie osiąga stanu plastycznego. Takie sposoby ukształtowania trzona, by w całym jego obszarze występował stan graniczny, pokazane są w monografii [5] i nie będą tu omawiane.

Na rys. 7 zaznaczono też, linią przerywaną, zarys rozwiązania pochodzącego z pracy [5], a otrzymanego przy użyciu pola statycznie dopuszczalnego o skokowej niejednorodności. Kształt otrzymany za pomocą pól ciągłych jest, jak widać oszczędniejszy.

## 6. Uwagi końcowe

Ciągłe pola statycznie dopuszczalne wykazują szereg zalet w stosunku do pól skokowo niejednorodnych. Pozwalają one na otrzymanie gładkich zarysów zewnętrznych projektowanych elementów i uniknięcie w ten sposób, lub ograniczenie koncentracji naprężeń. Ciągłe pola umożliwiają też (jak pokazano na przykładach) oszczędniejsze kształtowanie. Zbudowana siatka charakterystyk może ponadto posłużyć do skonstruowania odpowiadającego jej pola prędkości i znalezienia w ten sposób górnego oszacowania nośności zaprojektowanego elementu konstrukcyjnego. Tematowi temu poświęcona będzie osobna praca.

Wadą omawianych pól jest większa na ogół pracochłonność ich wykonania, niż pól o skokowej niejednorodności. Stosowane procedury obliczeniowe dają się jednak łatwo zaprogramować na maszynę cyfrową (lub kalkulator elektroniczny). Istnieją też sposoby wykreślne konstruowania siatek charakterystyk.

Metoda charakterystyk stanowi standardowy sposób budowy pól statycznie dopuszczalnych i jej stosowanie nie nastręcza większych trudności. Dalszy rozwój przedstawionych sposobów projektowania zależy więc głównie od skonstruowania pól (takich, jak pokazano w punkcie 3), które nie dadzą się zbudować przy pomocy charakterystyk, oraz od stworzenia sposobów łączenia różnych typów pól.

## Literatura cytowana w tekście

1. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic — rigid material*, J. Mech. Phys. Sol., Vol 2 (1953), str. 43 - 53
2. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford at the Clarendon Press 1950
3. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sybkich* (tłum. z ros.), PWN, Warszawa 1958
4. W. SZCZEPIŃSKI, *Mechanika plastycznego płynięcia*, PWN, Warszawa 1978
5. W. SZCZEPIŃSKI, *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, Warszawa 1968
6. W. ZOWCZAK, *Projektowanie i nośność graniczna elementów połączeń sworzniowych*, Rozpr. Inż. (w druku)

## Резюме

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ПОМОЩИ НЕПРЕРЫВНЫХ СТАТИЧЕСКИ ДОПУСКАЕМЫХ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ

Темой статьи является проектирование элементов конструкции методом несущей способности с применением статически допускаемых полей напряжений непрерывной неоднородности.

При конструировании полей используется известный в теории пластичности метод характеристик.

В работе коротко обсуждены способы строения непрерывных полей, а также представлены примеры формирования элементов по сравнению с аналогичными решениями, полученными благодаря применению скачкообразно неоднородных полей.

#### S u m m a r y

#### DESIGN OF STRUCTURAL ELEMENTS BY MEANS OF STATICALLY ADMISSIBLE CONTINUOUS STRESS FIELDS

Plastic design of structural elements by means of nonhomogeneous continuous stress fields is presented. Well-known method of characteristics is used to construct stress fields. The process of constructing stress fields is shortly described. Examples of plastic design of bolt joint and tension member are presented to illustrate the proposed design procedure. Results are compared with those obtained by means of piecewise-homogeneous stress field technique.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1981 roku.*



ANALIZA STATYCZNA KONSTRUKCJI PRĘTOWO-PŁYTOWYCH  
METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH, Z UWZGLĘDNIENIEM  
SKRĘCANIA NIESWOBODNEGO

EUGENIUSZ R U S I Ń S K I (WROCLAW)

1. Wstęp

Przeprowadzenie analizy wytrzymałościowej cienkościennych konstrukcji prętowo-płytowych z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego metodami tradycyjnymi [1] przysparzało wiele trudności natury obliczeniowej pod względem szybkości jak i zakresu obliczeń. W znanych na świecie i w kraju systemach (np. SEZAM-69, NASKA, WAT-KM) nie uwzględnia się technicznej teorii WLASOVA [1]. Ostatnio pojawiło się wiele publikacji dotyczących obliczania prętowych konstrukcji cienkościennych z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego, opartych na metodzie sił oraz metodzie elementów skończonych [2, 3] z opracowanymi programami na EMC.

W niniejszej pracy podejmuje się próbę możliwie ogólnego określenia macierzy sztywności prostokątnego elementu (superelementu) prętowo-płytowego. Wyznaczenie macierzy sztywności takiego elementu jest przydatne w konstrukcjach powtarzalnych oraz zmniejsza efektywny czas obliczeń EMC. Zagadnienie rozważane jest jako liniowe. Rozważania szczegółowe opierają się na metodzie elementów skończonych, z uwzględnieniem technicznej teorii WLASOVA [1].

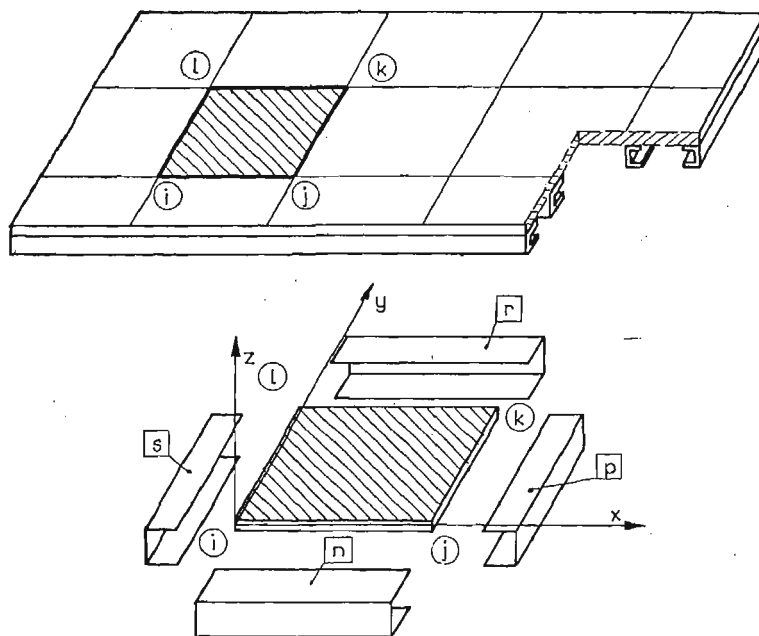
2. Określenie macierzy sztywności elementu prostokątnego prętowo-płytowego

Macierz sztywności elementu prętowo-płytowego wyznaczamy analogicznie jak w pracy [4], metodą superpozycji. Określa się macierz sztywności płyty, a następnie rusztu, pokazanego na rys. 1, składającego się z czterech prętów cienkościennych. Macierz sztywności elementu prętowo-płytowego wyznacza się w ogólnej postaci jako

$$(2.1.) \quad [k_{u-p}] = [k_u] + [k_p],$$

gdzie:  $[k_u]$  — macierz sztywności rusztu jednoobwodowego ramy obciążonej przestrzennie,  
 $[k_p]$  — macierz sztywności elementu płyty.

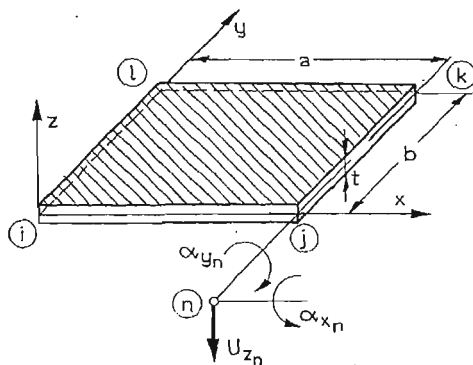
Prostokątny element płyty połączony jest z dowolnymi elementami prętowymi  $n, p, r, s$  wzdłuż krawędzi płyty w sposób ciągły (rys. 1). Wielkości węzłowe odniesione są do osi prętów i powierzchni środkowej płyty, pominięto mimośród prętów.



Rys. 1. Konstrukcja rusztowo-płytowa jako zbiór elementów prostokątnych prętowo-powłokowych.

2.1. **Macierz sztywności prostokątnego elementu płyty.** Analizujemy prostokątny element płyty o węzłach  $i, j, k, l$ , gdzie początek układu współrzędnych przyjęto w węzle „i”, jak pokazano na rys. 2. W każdym węźle zadane są przemieszczenia  $\{V_n\}$ . Mają one trzy składowe: przemieszczenie liniowe  $u_{z_n}$  w kierunku osi  $z$ , oraz dwa obroty  $\alpha_{x_n}, \alpha_{y_n}$  wokół osi  $x$  i  $y$ . Przemieszczenia węzłów można zatem przedstawić w postaci:

$$(2.1.1.) \quad \{V_n\} = \begin{Bmatrix} u_{z_n} \\ \alpha_{x_n} \\ \alpha_{y_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{z_n} \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)_n \\ -\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_n \end{Bmatrix}.$$



Rys. 2. Prostokątny element płyty.

Uogólnione siły węzłowe odpowiadające tym przemieszczeniom można interpretować jako jedną siłę i dwa momenty.

$$(2.1.2.) \quad \{S_n\} = \begin{Bmatrix} P_{z_n} \\ M_{x_n} \\ M_{y_n} \end{Bmatrix}.$$

Funkcję kształtu przyjęto w postaci wielomianu [5], w którym występuje 12 parametrów:

$$(2.1.3.) \quad u_z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \\ + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

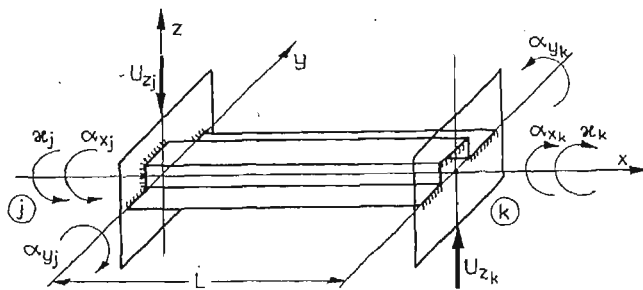
Macierz sztywności, wiążąca siły węzłowe z odpowiednimi im przemieszczeniami węzłów, dla tak przyjętej funkcji kształtu, określa się na podstawie kinematycznego pola przemieszczeń wg [6] w postaci:

$$(2.1.4.) \quad k_p = \int_0^a \int_0^b [b]^T [D] [b] dx dy$$

Po wyznaczeniu elementów składowych powyższego równania i scałkowaniu otrzymano macierz sztywności prostokątnego elementu płyty, którą przedstawiono w tabelicy 1.

**2.2. Macierz sztywności rusztu jednoobwodowego.** Rozważany ruszt jest zbudowany z czterech prętów cienkościennych  $n, p, r, s$  połączonych ze sobą sztywno (rys. 1). Przy połączeniu sztywnym zginanie prętów jednego kierunku powoduje zginanie i skręcanie prętów drugiego kierunku. W związku z tym w węzłach mogą wystąpić trzy różne wielkości statyczne: siła poprzeczna i dwie składowe momentów. Natomiast w rusztach z prętów cienkościennych przy nieswobodnym skręcaniu powstaje spaczenie przekroju [1], w wyniku czego w węzle występuje czwarta składowa - bimoment. Przedstawiony na rys. 1 ruszt jest opisany węzłami  $i, j, k, l$  z początkiem układu współrzędnych w węzle „i”.

W celu wyznaczania macierzy sztywności cienkościennego elementu (rys. 3) wykorzy-



Rys. 3. Wydzielony element pręta cienkościennego.

stuje się zamieszczone w pracy [1] równanie różniczkowe kątów obrotu przekroju przy nieswobodnym skręcaniu w postaci:

$$(2.2.1.) \quad \alpha_x^{IV} - \frac{GI_d}{EI_\omega} \alpha_x'' = 0,$$

Tablica I.

Macierz sztywności prostokątnego elementu płyty w stanie zgięciowym.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$e_1$	$e_5$	$-e_6$	$e_7$	$e_9$	$-e_{11}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$-e_{16}$	$e_8$	$e_{17}$	$-e_{15}$	
	$e_2$	$-e_4$	$e_9$	$e_{10}$	0	$-e_{14}$	$e_{18}$	0	$-e_{17}$	$e_{19}$	0	
		$e_3$	$e_{11}$	0	$e_{12}$	$e_{16}$	0	$e_{20}$	$-e_{15}$	0	$e_{21}$	
		S	$e_1$	$e_5$	$e_6$	$e_8$	$e_{17}$	$e_{15}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{16}$	
		Y	$e_2$	$e_4$	$e_4$	$-e_{17}$	$e_{19}$	0	$-e_{14}$	$e_{18}$	0	
		M	$e_3$	$e_3$	$e_3$	$e_{15}$	0	$e_{21}$	$-e_{16}$	0	$e_{20}$	
		E	$e_1$	$e_1$	$e_1$	$e_1$	$-e_5$	$e_6$	$e_7$	$-e_9$	$e_{11}$	
		T	$e_2$	$e_2$	$e_2$	$e_2$	$e_2$	$-e_4$	$-e_9$	$e_{10}$	0	
		R	$e_3$	$e_3$	$e_3$	$e_3$	$e_3$	$e_3$	$-e_{11}$	0	$e_{12}$	
		I	$e_4$	$e_4$	$e_4$	$e_4$	$e_4$	$e_4$	$e_1$	$-e_5$	$-e_6$	
		A	$e_5$	$e_5$	$e_5$	$e_5$	$e_5$	$e_5$	A	$e_2$	$e_4$	

$[kp] =$

$$A_1 = \frac{E t^3 ab}{12(1-\nu^2)}$$

$$e_1 = A_1 \left( \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{14-4\nu}{5a^2b^2} \right),$$

$$e_2 = A_1 \left( \frac{4}{3b^2} + \frac{4}{15} \frac{1-\nu}{a^2} \right),$$

$$e_3 = A_1 \left( \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{15} \frac{1-\nu}{b^2} \right), \quad e_4 = \frac{A_1 \nu}{ab}$$

$$e_5 = A_1 \left( \frac{2}{b^3} + \frac{1+4\nu}{5a^2b} \right), \quad e_6 = A_1 \left( \frac{2}{a^3} + \frac{1+4\nu}{5ab^2} \right),$$

$$e_7 = A_1 \left( \frac{4}{a^4} + \frac{2}{b^4} - \frac{14-4\nu}{5a^2b^2} \right), \quad e_8 = A_1 \left( \frac{2}{a^4} - \frac{4}{b^4} - \frac{14-4\nu}{5a^2b^2} \right),$$

$$e_9 = A_1 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1+4\nu}{5a^2b} \right), \quad e_{10} = A_1 \left( \frac{2}{3b^2} - \frac{4}{15} \frac{1-\nu}{a^2} \right),$$

$$e_{11} = A_1 \left( \frac{2}{a^3} + \frac{1-\nu}{5ab^2} \right), \quad e_{12} = A_1 \left( \frac{2}{3a^2} - \frac{1-\nu}{15b^2} \right), \quad e_{13} = A_1 \left( \frac{2}{a^4} - \frac{2}{b^4} + \frac{14-4\nu}{5a^2b^2} \right),$$

$$e_{14} = A_1 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1-\nu}{5a^2b} \right), \quad e_{15} = A_1 \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1+4\nu}{5ab^2} \right), \quad e_{16} = A_1 \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1-\nu}{5ab^2} \right),$$

$$e_{17} = A_1 \left( \frac{2}{b^3} + \frac{1-\nu}{5a^2b} \right), \quad e_{18} = A_1 \left( \frac{1}{3b^2} + \frac{1-\nu}{15a^2} \right), \quad e_{19} = A_1 \left( \frac{2}{3b^2} - \frac{1-\nu}{15a^2} \right),$$

$$e_{20} = A_1 \left( \frac{1}{3a^2} + \frac{1-\nu}{15b^2} \right), \quad e_{21} = A_1 \left( \frac{2}{3a^2} - \frac{1-\nu}{15} \frac{1-\nu}{b^2} \right).$$



oraz równanie osi ugięcia pręta

$$(2.2.2.) \quad EI_y z = -Mg$$

gdzie:  $E$  — moduł Younga,

$G$  — moduł Kirchhoffa,

$I_d$  — moment bezwładności przekroju na skręcanie,

$I_w$  — główny wycinkowy moment bezwładności przekroju,

$I_y$  — moment bezwładności przekroju na zginanie.

Z przedstawionych powyższych równań różniczkowych wyznaczono macierz sztywności dla pręta cienkościennego (rys. 3), którą zamieszczono w tabelicy 2.

Tabela 2.

Macierz sztywności cienkościennego elementu pręta.

		1	2	3	4	5	6	7	8	
$[k_g] =$	$A$	0	0	$-B$	$-A$	0	0	0	$-B$	1
		$M$	$-P$	0	0	$R$	$P$	0	0	2
			$S$	$S$	0	0	$-P$	$S$	0	3
				$Y$	$F$	$B$	0	0	$T$	4
					$M$	$A$	0	0	$B$	5
						$E$	$M$	$P$	0	6
							$T$	$S$	0	7
									$F$	8

$A = \frac{12EI_y}{L^3},$   
 $B = \frac{6EI_y}{L^2},$   
 $F = \frac{4EI_y}{L}, \quad T = \frac{2EI_y}{L}$   
 $k^2 = \frac{GI_d}{EJ_w}$

$$M = \frac{GI_d}{qk} [k \cdot L \cosh(kL) - \sinh(kL)],$$

$$P = \frac{GI_d}{q} [\cosh(kL) - 1],$$

$$R = \frac{GI_d}{qk} [\sinh(kL) - kL], \quad S = \frac{GI_d}{q} k \cdot \sinh(kL),$$

$$q = 2 + kL \sinh(kL) - 2 \cosh(kL)$$

gdzie:  $L$  przyjmuje wartości  $a$  lub  $b$ .

Po określeniu macierzy sztywności pręta, określamy macierz sztywności rusztu jednoobwodowego według następującej zależności:

$$(2.2.11.) \quad k_u = \sum_{i=1}^n [C^T][k_g][C]_i$$

gdzie:  $[C]$  — macierz transformacji z układu rusztu jednoobwodowego do układu lokalnego pręta.

Macierz transformacji przedstawia zależność

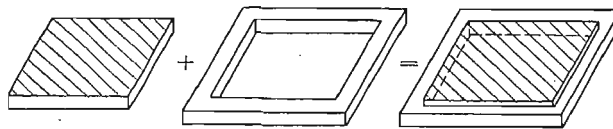
$$(2.2.12.) \quad [C] = \begin{bmatrix} [C_E] \\ [C_E] \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$(2.2.13.) \quad [C_E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Kąt  $\gamma$  w tym przypadku przyjmuje dwie wartości, zależnie od położenia pręta, w ruszcie jednoobwodowym: 0 lub  $\pi/2$ . Macierz sztywności elementarnego rusztu jednoobwodowego  $[k_u]$  przedstawiono w tablicy 3.

2.3. Macierz sztywności elementu prostokątnego prętowo-płytkowego. Znając macierze sztywności elementów, płyty  $[k_u]$  (tabl. 1) oraz jednoobwodowego rusztu  $[k_p]$  (tabl. 3) wyznacza się



Rys. 4. Prostokątny element prętowo-płytkowy.

macierz sztywności elementu prętowo-płytkowego  $[k_{u-p}]$  na zasadzie superpozycji jak to pokazano na rys. 4.

Zagadnienie sprowadza się do dodania odpowiednich składników do siebie. Dodawania tego nie można zrobić wprost, gdyż macierz sztywności  $[k_u]$  ma w węźle 4 składowe ( $u_{z_i}, \alpha_i, \alpha_{x_i}, \alpha_{y_i}$ ) natomiast macierz sztywności płyty ma w węźle po 3 składowe ( $u_{z_i}, \alpha_{x_i}, \alpha_{y_i}$ ). W macierzy sztywności płyty brakujące wiersze i kolumny pochodzące od deplanacji przekroju pręta uzupełnia się zerami, w wyniku czego otrzymuje się nową macierz  $[k_p^*]$ .

Wówczas równanie (2.1) przyjmuje postać:

$$(2.3.1.) \quad [k_{u-p}] = [k_u] + [k_p^*],$$

gdzie:  $[k_p^*]$  — macierz sztywności elementu płyty z zerową deplanacją przekroju.

Ze względu na wymiary macierzy sztywności  $[k_{u-p}]$  przedstawia się ją w formie:

$$(2.3.2.) \quad [k_{u-p}] = \begin{bmatrix} [k_1] & [k_2] \\ S_{YM} & [k_3] \end{bmatrix}.$$

Odpowiednie podmacierze  $[k_1]$ ,  $[k_2]$  i  $[k_3]$  zamieszczone są w kolejnych tablicach 4, 5 i 6.

### 3. Program PPLY

Powyżej przedstawiona macierz sztywności cienkościennego elementu prętowo-płytkowego, posłużyła do zbudowania programu PPLY. opartego na metodzie elementów skończonych z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego. Program ten napisano w języku

Tablica 3.

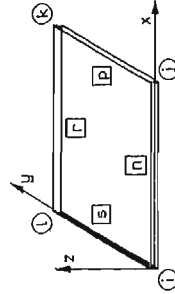
Macierz sztywności rusztu jednoobwodowego.

$$[k_{ij}] =$$

,,i''			,,j''				,,k''				,,l''				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$A_n + A_s$	0	$B_s$	$-A_n$	$-A_n$	0	0	$-B_n$	0	0	0	0	$-A_s$	0	$-B_s$	0
$M_n + M_s$	$-P_n$	$P_s$	0	$R_n$	$R_n$	$P_n$	0	0	0	0	0	0	$R_s$	0	$P_s$
	$S_n + F_s$	0	0	$-P_n$	$S_n$	$S_n$	0	0	0	0	0	$B_s$	0	$T_s$	0
		$F_n + S_s$	0	0	0	0	$T_n$	0	0	0	0	0	$-P_s$	0	$S_s$
		$S$	$B_n$	$A_n + A_p$	0	$-B_p$	$B_n$	$-A_p$	0	$-B_p$	0	0	0	0	0
			$Y$	$M_n + M_p$	$P_n$	$P_n$	$-P_p$	0	$R_p$	0	$P_p$	0	0	0	0
				$M$	$S_n + F_p$	$E$	0	$B_p$	0	$T_p$	0	0	0	0	0
							$F_n - S_p$	0	$-P_p$	0	$-S_p$	0	0	0	0
							$T$	$A_p + A_r$	0	$B_p$	$-B_r$	$-A_r$	0	0	$-B_r$
								$R$	$M_p + M_r$	$-P_r$	$P_p$	0	$R_r$	$P_r$	0
									$I$	$F_p + S_r$	0	0	$-P_r$	$S_r$	0
										$A$	$F_r + S_r$	$B_r$	0	0	$T_r$
												$A_s + A_n$	0	$-B_s$	$B_n$
													$M_s + M_n$	$P_n$	$-P_s$
														$S_n + F_s$	0
															$T_n - S_s$

$$A_n = A_n \cdot n', A_p = A_p \cdot p',$$

$$\dots, T_s = T_s \cdot s'$$



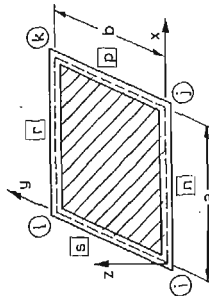
$n, p, r, s$  — numery prętów  
 $i, j, k, l$  — numery węzłów

Współczynniki  $n', p', r', s'$  przyjmują tylko dwie wartości, 1 gdy występuje dany pręt w elemencie lub 0, gdy nie występuje.

Tablica 4.

Podmacierze sztywności prostokątnego elementu prętowo- płytowego

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$A_n + A_s + e_1$	0	$B_s + e_5$	$-A_n - e_6$	$-A_n + e_7$	0	$e_9$	$-B_n - e_{11}$
2	$M_n + M_s$	$M_n + M_s$	$-P$	$P_s$	0	$R_n$	$P_n$	0
3		$S_n + F_s + e_2$	$S_n + F_s + e_2$	$-e_4$	$e_9$	$-P_n$	$S_n + e_{10}$	0
4				$F_n + S_s + e_3$	$B_n + e_{11}$	0	0	$T_n + e_{12}$
5					$A_n + A_p + e_1$	0	$-B_p + e_5$	$B_n + e_6$
6						$M_n + M_p$	$P_n$	$-P_p$
7							$S_n + F_p + e_2$	$e_4$
8								$F_n - S_p + e_3$



$$[k_1] =$$

Tablica 5.

Podmacierze sztywności prostokątnego elementu prętowo-plytowego [cd.]

	9	10	11	12	13	14	15	16
1	$e_{13}$	0	$e_{14}$	$-e_{16}$	$-A_s - e_8$	0	$-B_s + e_{17}$	$-e_{15}$
2	0	0	0	0	0	$R_s$	0	$P_s$
3	$-e_{14}$	0	$e_{18}$	0	$B_s - e_{17}$	0	$T_s + e_{19}$	0
4	$e_{16}$	0	0	$e_{20}$	$-e_{15}$	$-P_s$	0	$S_s + e_{21}$
5	$-A_p + e_8$	0	$-B + e_{17}$	$e_{15}$	$e_{13}$	0	$e_{14}$	$e_{16}$
6	0	$R_p$	0	$P_p$	0	0	0	0
7	$B_p - e_{17}$	0	$T_p + e_{19}$	0	$-e_{14}$	0	$e_{18}$	0
8	$e_{15}$	$-P_p$	0	$-S_p + e_{21}$	$-e_{16}$	0	0	$e_{20}$

$[k_2] =$

Tablica 6.

Podmacierze sztywności prostokątnego elementu prętowo- płytowego [cd.]

	9	10	11	12	13	14	15	16
9	$A_p + A_r + e_1$	0	$B_p - e_5$	$-B_r + e_6$	$-A_r + e_7$	0	$-e_9$	$-B_r + e_{11}$
10		$M_p + M_r$	$-P_r$	$P_p$	0	$R_r$	$P_r$	0
11			$F_p + S_p + e_2$	$-e_4$	$-e_9$	$-P_r$	$S_r + e_{10}$	0
12				$F_r + S_r + e_3$	$B_r - e_{11}$	0	0	$T_r + e_{12}$
13					$A_s + A_n + e_1$	0	$-B_s - e_5$	$B_n - e_6$
14						$M_s + M_n$	$P_n$	$-P_s$
15							$S_n F_s + e_2$	$e_4$
16								$T_n - S_5$

$[k_3] =$

FORTRAN 1900 i uruchomiono go na maszynie cyfrowej serii ODRA 1300. Obliczać można dowolne konstrukcje płaskie obciążone przestrzennie, składające się z elementów:

- prętowo-płytyowych (o elementach prostokątnych),
- prętowych (ruszty),
- płytowych.

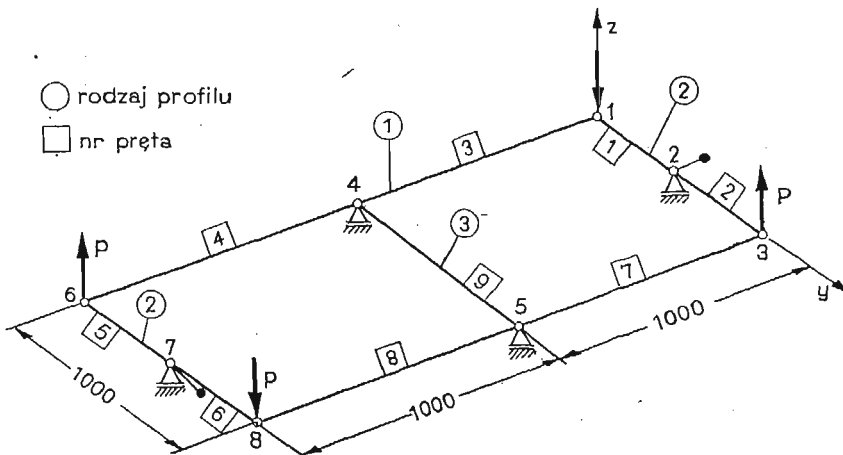
Pręty mogą być o dowolnym, lecz stałym przekroju, a w połączeniu z płytą stanowią jej ożebrowanie lub wzmocnienie brzegów. Obciążenie zewnętrzne może być stałe ciągłe lub skupione — przykładane w węzłach elementów. W danym do programu należy podać dyskretne wielkości geometryczne prętów i płyty. Jako wyniki otrzymuje się przemieszczenia węzłów konstrukcji ( $u_z, \kappa, \alpha_x, \alpha_y$ ) oraz siły wewnętrzne w elementach prętowych i płytowych. Ponadto program PPLY liczy w każdym elemencie prętowym naprężenia:

- gnące ( $\sigma_\theta$ ),
  - normalne wycinkowe ( $\sigma_\omega$  — pochodzące od bimomentu),
  - styczne do San-Venanta ( $\tau_v$ ),
  - styczne wycinkowe ( $\tau_\omega$ ),
  - zredukowane ( $\sigma_z$  — wg hipotezy Hubera),
- oraz w elemencie płyty naprężenia  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  i zredukowane  $\sigma_z$ .

#### 4. Przykłady liczbowe

Na podstawie opracowanego programu rozwiązano szereg prostych przykładów liczbowych. Jako pierwszy przedstawiono przykład ramy płaskiej (rys. 5) obciążonej przestrzennie, której wytrzymałość obliczono dwiema metodami, powyższą z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego (PPLY) oraz bez skręcania nieswobodnego (WAT-KM). Wyniki obliczeń według metod zostały przedstawione w tablicach 7 i 8.

Analiza naprężeń stycznych (tabl. 7) wykazała, że system WAT-KM daje zawyżone wartości naprężeń stycznych (w tym przypadku o 61,5%) przy jednakowym lub mniejszym momencie skręcającym w porównaniu z przedstawioną metodą obliczeń. Rozbieżność



Rys. 5. Model ramy skręcanej.

Tabela 7.

Zestawienie wewnętrznych momentów skręcających i naprężeń stycznych w poszczególnych elementach ramy (porównanie z nieswobodnym skręcaniem).

Nr pręta	PPLY			KM-WAT	PPLY			KM-WAT	$\Delta_{P-K}$ [%]
	$M_V$ [kGcm]	$M_\omega$ [kGcm]	$M^*$ [kGcm]	$M_s$ [kGcm]	$\tau_v$ [MPa]	$\tau_\omega$ [MPa]	$\tau_P$ [MPa]	$\tau_K$ [MPa]	
1	-798,0	-1600,5	-2398,6	-1129,5	40,59	8,3	48,9	58,9	-16,9
2	-798,0	-1600,5	-2398,6	-1129,5	40,59	8,3	48,9	58,9	-16,9
3	959,1	1920,6	2879,8	2882,9	23,50	3,68	27,18	70,6	-61,5
4	959,1	1920,6	2879,8	2882,9	23,50	3,68	27,18	70,6	-61,5
5	-798,0	-1600,5	-2398,6	-1129,5	40,59	8,3	48,9	58,9	-16,9
6	-798,0	-1600,5	-2398,6	-1129,5	40,59	8,3	48,9	58,9	-16,9
7	959,1	1920,6	2879,8	2882,9	23,50	3,68	27,18	70,6	-61,5
8	959,1	1920,6	2879,8	2882,9	23,50	3,68	27,18	70,6	-61,5
9	-489,3	-3193,6	-3683,0		23,0			—	

$$*M_s = M_v + M_\omega; \quad \Delta_{P-K} = \frac{\tau_P - \tau_K}{\tau_K} \cdot 100; \quad \tau_P = \tau_v + \tau_\omega$$

PPLY — system oparty na metodzie elementów skończonych z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego,

KM — system oparty na metodzie elementów skończonych (bez skręcania nieswobodnego) opracowany przez KMS i Wytrż. Mat. WAT.

Tabela 8.

Zestawienie maksymalnych naprężeń normalnych i zastępczych w elementach ramy skrętej (porównanie z nieswobodnym skręcaniem).

Nr pręta	PPLY			KM-WAT	$\Delta_{(P-K)_n}$ %	PPLY	KM-WAT	$\Delta_{(P-K)_z}$ %
	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_\omega$ MPa	$\sigma_n^*$ MPa	$\sigma_\theta = \sigma_n$ MPa		$\sigma_z$ MPa	$\sigma_z$ MPa	
1	7,389	237,1	244,5	7,397	96,9	258,7	102,3	152,8
2	7,389	237,1	244,5	7,397	96,9	258,7	102,3	152,8
3	1,99	75,39	77,38	2,576	96,7	90,57	122,4	-26,0
4	1,99	75,39	77,38	2,576	96,7	90,57	122,4	-26,0
5	7,389	237,1	244,5	7,397	96,9	258,7	102,3	152,8
6	7,389	237,1	244,5	7,397	96,9	258,7	102,3	152,8
7	1,99	75,39	77,38	2,576	96,7	90,57	122,4	-26,0
8	1,99	75,39	77,38	2,576	96,7	90,57	122,4	-26,0
9	0,00	276,87	276,87	0,0	100	—	—	—

$$\Delta_{(P-K)_n} = \frac{\sigma_{nP} - \sigma_{nK}}{\sigma_{nP}} \cdot 100; \quad \Delta_{(P-K)_z} = \frac{\sigma_{zP} - \sigma_{zK}}{\sigma_{zK}} \cdot 100; \quad \sigma_n = \sigma_\theta + \sigma_\omega$$

$\sigma_\theta$  — naprężenia gnące,  $\sigma_\omega$  — normalne naprężenia wycinkowe (pochodzące od nieswobodnego skręcania),  $\sigma_z$  — naprężenia zastępcze wg hipotezy Hubera.



ta wynika stąd, że przy skręcaniu nieswobodnym prętów cienkościennych całkowity moment skręcający jest równy

$$(4.1.) \quad M_s = M_v + M_\omega$$

momentowi de San Venanta ( $M_v$ ) i momentowi giętno-skrętnemu ( $M_\omega$ ), natomiast w metodzie bez skręcania nieswobodnego (system WAT-KM) przyjmuje się, że moment całkowity skręcający

$$(4.2.) \quad M_s = M_v,$$

jest równy momentowi de San Venanta, w wyniku czego otrzymuje się nieadekwatne naprężenia styczne. Z porównania naprężeń normalnych ( $\sigma_n$ ) obu metod w tabl. 8 wynikają duże rozbieżności, ponieważ w metodzie z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego są one równe

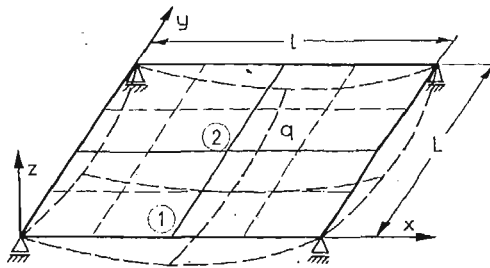
$$(4.3.) \quad \sigma_n = \sigma_g + \sigma_\omega,$$

tzn. sumie naprężeń gnących ( $\sigma_g$ ) i wycinkowych ( $\sigma_\omega$ ) — pochodzących od bimomentu. W metodzie (WAT-KM) bez skręcania nieswobodnego naprężenia normalne są równe naprężeniom gnącym

$$(4.4.) \quad \sigma_n = \sigma_g.$$

Z porównania naprężeń zastępczych (tabl. 8) wynika, że błąd w obliczeniach prowadzonych bez uwzględnienia teorii prętów cienkościennych jest znaczny i osiąga w tym wypadku 152,8%. Oprócz tego należy zwrócić uwagę na maksymalne naprężenia (przekrój niebezpieczny), które według obu metod są w różnych przekrojach ramy (rys. 5).

Drugim przykładem jest płyta kwadratowa izotropowa (rys. 6), podparta w narożach i obciążona równomiernie ( $q$ ). W tabl. 9 porównano wyniki analizy



Rys. 6. Płyta kwadratowa izotropowa obciążona równomiernie.

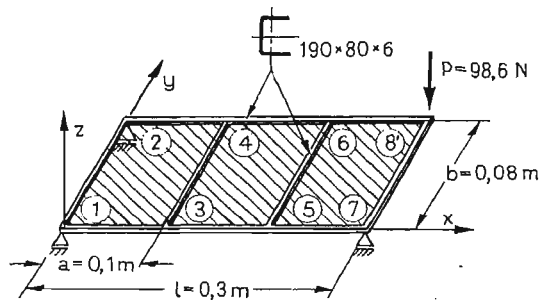
metodą elementów skończonych otrzymane programem PPLY z przykładem Zienkiewicza [7] i innymi rozwiązaniami przybliżonymi. W tym przypadku, gdzie koncentracja sił w narożach komplikuje zagadnienie, uzyskano dosyć dobrą zgodność zarówno przemieszczeń, jak i naprężeń. Przy bardziej zagęszczonej siatce podziału na elementy uzyskuje się większą dokładność i zbieżność wyników.

Trzecim przykładem liczbowym jest konstrukcja prętowo-płytowa skręcana asymetrycznie. Przedstawioną konstrukcję na rys. 7 podzielono na trzy elementy

Tabela 9.

Zestawienie przemieszczeń kwadratowej płyty liczone różnymi metodami.

Obciążenie ciągłe ( $q$ )				
	Siatka	$u_z$ (ugięcie)		Mnożnik
		Punkt 1	Punkt 2	
PPLY	2×2	0,0145	0,0217	$-\frac{qL^4}{D_1}$
	4×4	0,01677	0,0249	
Zienkiewicz	2×2	0,0126	0,0176	
	4×4	0,0165	0,0232	
Marcus	—	0,0180	0,0281	
Lee i Ballesteras	—	0,0170	0,0265	
Obciążenie siłą skupioną ( $P$ )				
PPLY	2×2	0,07695	0,14662	$-\frac{P^2}{D_1}$
	4×4	0,09066	0,15977	

Punkt 1 — środek boku, punkt 2 — środek płyty,  $D_1$  — sztywność płyty.

Rys. 7. Konstrukcja prętowo-płytowa skręcana asymetrycznie.

prętowo-płytowe (2.3.2.) Analizę wytrzymałościową przeprowadzono MES z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego programem PPLY. Ze względu na brak w literaturze podobnej analizy cienkościennych konstrukcji prętowo-płytowej, w tabl. 10 porównano wyniki przemieszczeń węzła pod siłą skupioną dla trzech przypadków konstrukcji: płytowej, ramowej i ramowo-płytowej.

Przeprowadzona analiza trzech przykładów wykazała, że przedstawiona metoda obliczeń cienkościennych konstrukcji prętowo-płytowych daje wyniki zadawalające. Uwzględnienie dodatkowego stopnia swobody  $\kappa$  (deplanacja przekroju pręta cienkościennego), pozwala na osiągnięcie wyników zbliżonych, odpowiadających rzeczywistym w stosunku do tradycyjnej MES (tabl. 7, 8). Ponadto wyprowadzona macierz sztywności płyty (tabl. 1) w porównaniu z wynikami np. Zienkiewicza (tabl. 9) przy tej samej siatce podziału daje wyniki dokładniejsze. Dla podziału na elementy 2×2 różnica wyników wynosi 18%, a przy 4×4 już 6,8% (tabl. 9). Różnice wyników maleją przy wzroście liczby elementów, na jaką konstrukcja została podzielona. Natomiast jest bardzo ważne, że program PPLY

T a b l i c a 10.

Maksymalne przemieszczenia trzech typów konstrukcji.

Przemieszczenia w węźle nr 8	konstrukcja			Mnożnik
	ramowa	plytowa	ramowo-plytowa	
$u_z$ [m]	-0,33685	-33,01587299	-0,33344	$10^{-2}$
$\kappa$ [1/m]	-0,00000233	0,0	-0,00000231	$10^2$
$\alpha_x$ [rad]	-0,00420937	-0,31269841	-0,00416688	—
$\alpha_y$ [rad]	0,0011192	0,11005291	0,0011079	—

dla dużych elementów daje wyniki dokładniejsze od innych metod, a tym samym potwierdza możliwość stosowania programu do analizy wytrzymałościowej cienkościennych konstrukcji z podziałem na elementy prętowo-plytowe. Taki podział dla konstrukcji powtarzalnych pozwala w znaczny sposób skrócić efektywny czas liczenia i nie zajmuje tyle pamięci EMC, jak przy użyciu systemu ASKA, SEZAM-69 lub KM-WAT, w których oddzielnie są liczone macierze sztywności poszczególnych prętów i płyt.

## Literatura cytowana w tekście

1. V. Z. VLASOV, *Tonkostennye uprugie sterzhni*. Gosud. izdat. fiziko-matem. literatury, Moskva 1959.
2. J. H. ARGYRIS, D. RADAJ, *StEIFigkeitsmatrizen dünnwandiger Stöbe und Stabsysteme*. Ingenieur — Archity, Nr 40/1971.
3. E. RUSIŃSKI, *Obliczanie ram samochodowych według metody elementów skończonych i teorii prętów cienkościennych*, Technika Motoryzacyjna nr 1 i 2/78.
4. E. RUSIŃSKI, *Analiza konstrukcji prętowo-tarczowych metodą elementów skończonych*. MTiS, zeszyt 2/1981.
5. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill 1968.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*. Arkady, Warszawa 1972.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs*, Proc. Inst. Civ. Eng., 28, s. 471 - 88, 1964.

## Резюме

СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТЕРЖНЕ-ПАНЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ СТЕСНЕННОГО КРУЧЕНИЯ

В работе описан усовершенствованный по сравнению с применяемым до сих пор методом конечных элементов для анализа тонкостенных стержнепанельных конструкций. Предложен новый способ подразделения конструкций на стержне — панельные элементы, состоящие из панели и стержней на краях, а также определена матрица жёсткости такого элемента с учётом стеснённого кручения. Определена также матрица напряжений и внешняя сплошная нагрузка элемента панели. Разработана программа на языке ФОРТРАН 1900 для расчёта тонкостенных конструкций: стержневых, панельных и стержне-панельных.

## Summary

THE METHOD OF FINITE ELEMENTS IN STATICAL ANALYSIS OF THE  
ROD-SHIELD CONSTRUCTION, WITH NON-FREE TORSION, TAKEN INTO  
ACCOUNT

The existing finite elements method has been improved for the analysis of thin-walled rod-shield constructions. The rod-shield construction consist of a thin panel framed with rods on all sides.

The stiffness matrix of such elements has been determined by taking into account the non-free torsion of the rods. The stress-matrix and external continuous loading matrix of an element have been also determined. The program PPLY in FORTRAN 1900 language for calculations of thin-walled constructions has been worked out. The program applies to calculation of rod constructions, rod-shield constructions and panel constructions. The program has been tested on computer Odra 1300. The paper has been illustrated with examples to verify the total procedure.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 października 1979 roku.*

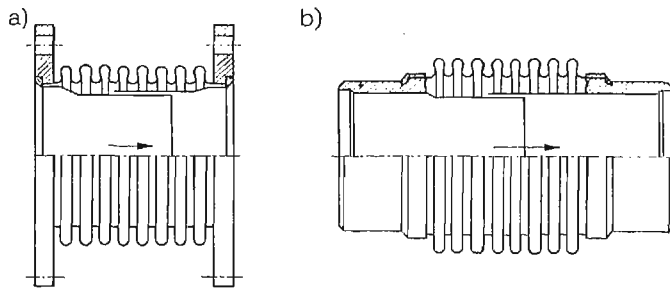
---

BADANIA ELASTOPTYCZNE MIESZKÓW  
KOMPENSACYJNYCH Z PIERŚCIENIAMI WZMACNIAJĄCYMI

CYPRIAN KOMORZYCKI (LUBLIN), JACEK STUPNICKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Mieszki sprężyste (rys. 1), w miarę postępu technologii ich wykonania, są coraz częściej stosowane jako kompensatory przemieszczeń w różnego typu rurociągach, pracujących w zmiennych warunkach termicznych.

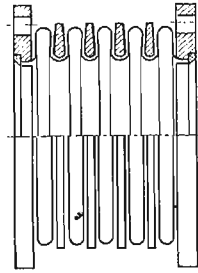


Rys. 1. Kompensatory mieszkowe: a) z zakończeniem kołnierzym, b) z zakończeniem rurowym.

Analiza jakościowa wykazuje, że możliwości stosowania mieszków sprężystych jako układów kompensujących przemieszczenia znacznie maleją, gdy mamy do czynienia z wysokimi ciśnieniami i dużymi średnicami rurociągów. Nowe możliwości w tym zakresie pojawiły się wraz z zastosowaniem mieszków o powłoce wzmocnionej pierścieniami, znajdującymi się we wgłębieniach powłoki<sup>1)</sup> (rys. 2).

Ogólnie słuszna idea zastosowania pierścieni wzmocniających w kompensatorach mieszkowych, napotyka przy praktycznej realizacji na szereg trudności technologicznych i obliczeniowych [1]. Badania elastooptyczne są jedną z metod doświadczalnych, które mogą być zastosowane do analizy wytrzymałościowej kompensatorów mieszkowych z pierścieniami wzmocniającymi dla różnego rodzaju obciążeń właściwych kompensatorom, a w tej liczbie również obciążeń niesymetrycznych. Występujące wzajemne oddziaływanie pierścienia wzmocniającego i mieszka czynią z kompensatora obiekt trudny do modelowania.

<sup>1)</sup> Praca nt. „Wpływ podatności pierścieni wzmocniających na pracę kompensatorów mieszkowych” w MTS



Rys. 2. Kompensator mieszkowy z pierścieniami wzmacniającymi: 1-mieszek, 2-pierścień wzmacniający

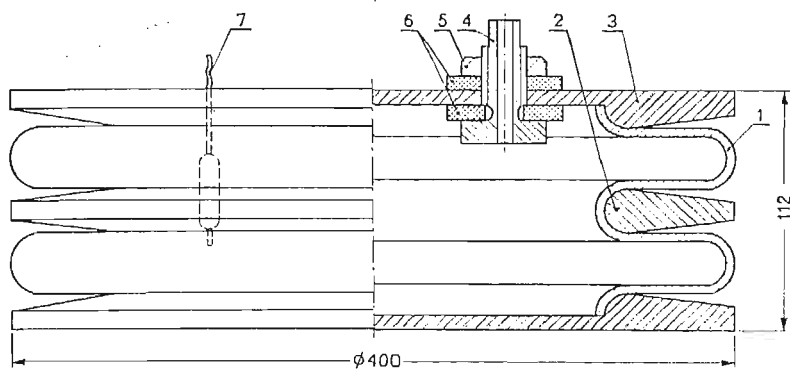
Ograniczeniem w badaniach elastoptycznych kompensatorów mieszkowych z pierścieniami wzmacniającymi jest mała grubość ścianki mieszka w porównaniu z pozostałymi wymiarami, co nastręcza trudności wykonawcze. Innym ograniczeniem ogólniejszej natury, jest zastosowanie metody zamrażania naprężeń do zagadnienia nieliniowego. Polega ono na tym, że otrzymane wyniki badań opisują tylko jeden wybrany stan pracy konstrukcji, a uzyskanie informacji dla innych stanów pracy jest możliwe po wykonaniu nowych modeli elastoptycznych.

## 2. Technika badań doświadczalnych

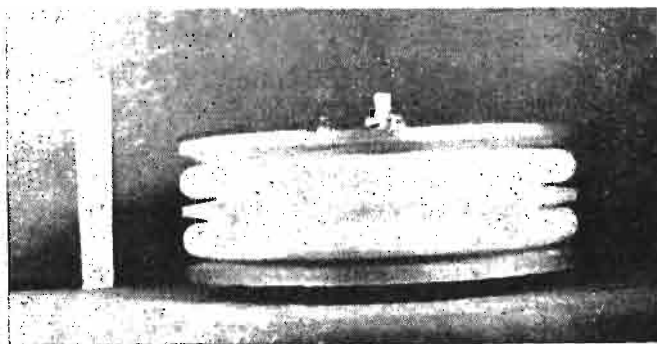
Badania elastoptyczne konstrukcji przestrzennych metodą zamrażania naprężeń, jakkolwiek zaliczane już do badań rutynowych, zawsze posiadają na etapie wykonania modelu, stanowiska badawczego oraz przeprowadzenia samego doświadczenia wiele cech indywidualnych, uwarunkowanych wielkością i kształtem konstrukcji oraz charakterem i wielkością występujących obciążeń [2]. W przypadku badań elastoptycznych kompensatora mieszkowego z pierścieniami wzmacniającymi szczególnych zabiegów wymagały:

- na etapie wykonania modelu: zachowanie stałej grubości ścianki mieszka, zapewnienie dobrego przylegania mieszka i pierścieni wzmacniających bez napięć w stanie nieobciążonym, szczelność modelu, płaskość pokryw modelu;
- na etapie przygotowania stanowiska badawczego: maksymalne wyeliminowanie ciężaru własnego modelu, zachowanie stałości ciśnienia wewnętrznego z wysokością modelu, umożliwienie zadawania dowolnych obciążeń ciśnieniem i przemieszczeniem, zabezpieczenie przed wystąpieniem naprężeń termicznych;
- na etapie prowadzenia doświadczenia: zabezpieczenie możliwie równomiernego wzrostu i zmniejszania temperatury modelu.

**2a. Wykonanie modelu.** Poszczególne elementy modelu kompensatora wykonane zostały z żywicy epoksydowej Epidian 5 z utwardzaczem  $A_1$  [2]. Kompletny model przedstawia rys. 3, a jego widok rys. 4. Dwie pokrywy 3 z ukształtowanymi półpierścieniami zamykają mieszek 1 i są z nim sklejone żywicą epoksydową. Pierścień wzmacniający 2 po rozcięciu i nałożeniu na mieszek został również sklejony żywicą. W pokrywie górnej zamontowany jest króciec 4, umożliwiający doprowadzenie oleju i termopara 7.



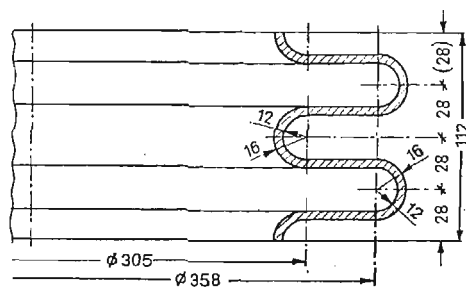
Rys. 3. Model kompensatora: 1 — mieszek, 2 — pierścień wzmacniający, 3 — pokrywa, 4 — króciec, 5 — nakrętka, 6 — podkładki uszczelniające, 7 — termopara.



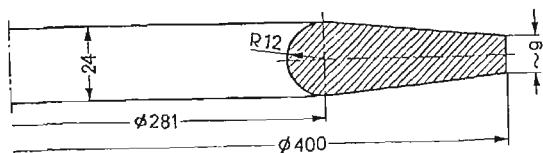
Rys. 4. Kompensator mieszkowy z pierścieniami wzmacniającymi.

Kształt i wymiary mieszka przyjęte do badań elastoptycznych przedstawia rys. 5, a pierścienia wzmacniającego rys. 6.

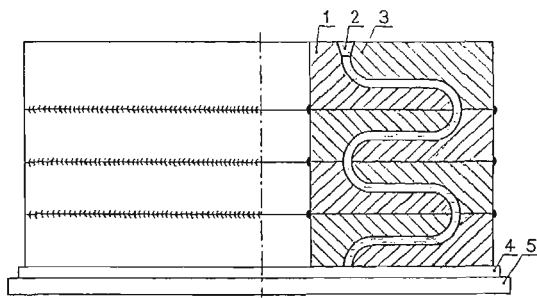
Elementami wyjściowymi do wykonania mieszka, pierścieni wzmacniających i pokrywy były pramodele pierścienia wzmacniającego i jednej półfali powłoki mieszkowej, wykonane z duralu PA5. Dzieloną formę gumową do odlewania mieszka w całości z odpowiednimi nadatkami na obróbkę mechaniczną przedstawia rys. 7.



Rys. 5. Mieszek wykonany z żywicy epoksydowej Epidian 5.



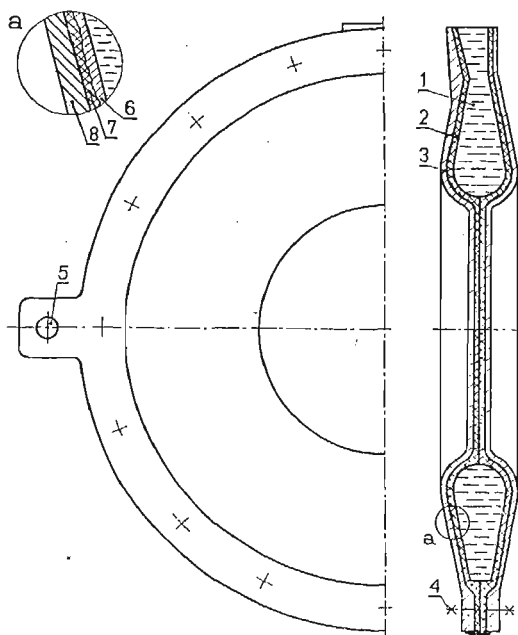
Rys. 6. Pierścień wzmacniający wykonany z żywicy epoksydowej Epidian 5.



Rys. 7. Kompletna forma gumowa przygotowana do odlewania mieszka: 1 — część wewnętrzna formy (guma silikonowa M33), 2 — mieszek (żywica), 3 — część zewnętrzna formy (guma M33), 4 — podkładka (polimetakrylan metylu), 5 — podstawa drewniana.

Pierścienie wzmacniające zostały odlane w formie z gumy silikonowej, wzmocnionej powłoką z żywicy zmieszanej z gipsem, przedstawionej na rys. 8. Dla mieszka i pierścienia przewidziano nadatki na obróbkę mechaniczną.

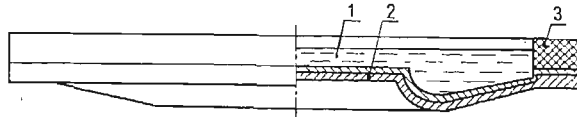
Grubość warstwy gumy 3 zależy od żądanej grubości pokrywy. Pokrywa z połówką pierścienia wzmacniającego była pasowana z mieszkiem na drodze obróbki mechanicznej.



Rys. 8. Forma do odlewania pierścieni wzmacniających: 1 — pierścień (żywica), 2, 3 — część lewa i prawa formy dzielonej, 4 — śruby łączące, 5 — kołki centrujące, 6 — warstwa gumy, 7 — przekładka z tkaniny, 8 — warstwa żywicy epoksydowej z wypełniaczem w postaci gipsu.



Pokrywy kompensatora mieszkowego zostały wykonane w formie, dla której bazą była powłoka formy, przygotowanej do odlewania pierścieni wzmacniających (rys. 9).

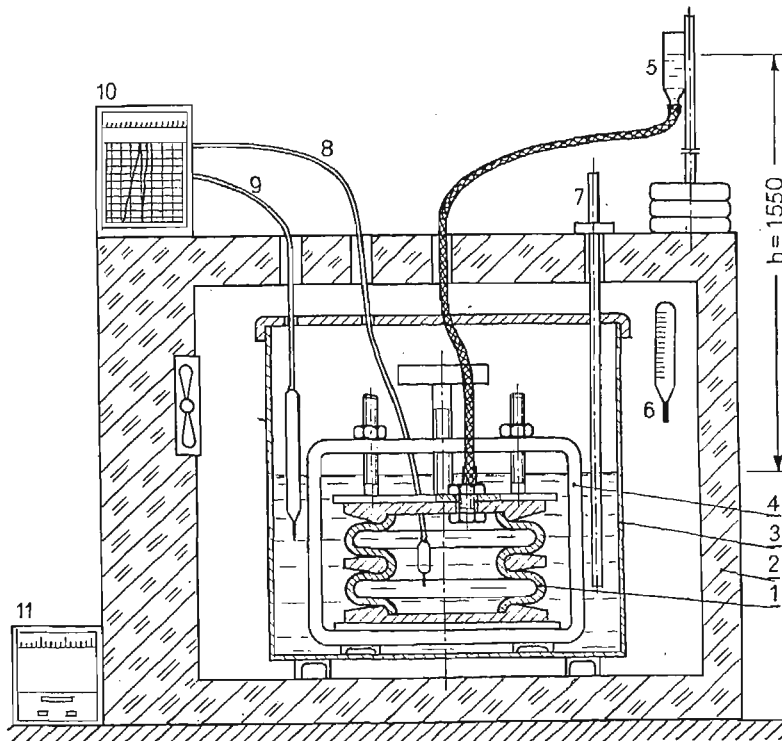


Rys. 9. Forma do odlewania pokryw: 1 — pokrywa (żywica), 2 — połówka formy gipsowej do odlewania pierścieni (patrz rys. 8), 3 — warstwa gumy.

Końcowym etapem przygotowania modelu kompensatora do badań elastoptycznych było zamontowanie termopary i króćca do napełniania kompensatora olejem oraz sklejanie żywicą poszczególnych elementów i sprawdzenie szczelności.

2b. Stanowisko badawcze. Schemat stanowiska do badań elastoptycznych kompensatorów mieszkowych metodą zamrażania naprężeń przedstawia rys. 10.

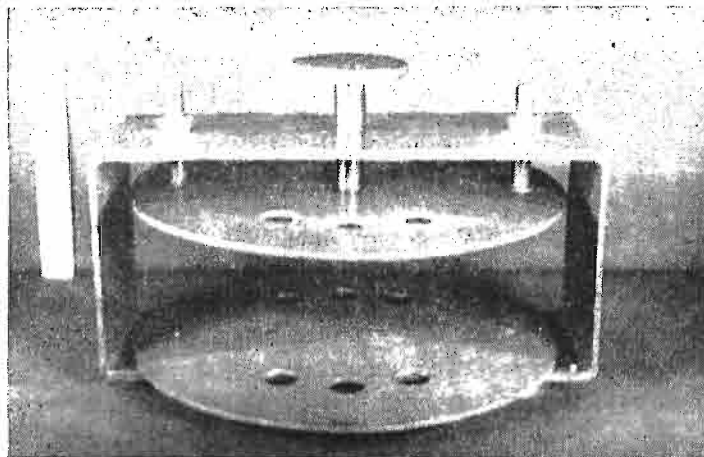
Przygotowane stanowisko badawcze umożliwia realizację dowolnych obciążeń kompensatora mieszkowego przemieszczeniem osiowym i ciśnieniem wewnętrznym oraz



Rys. 10. Schemat stanowiska do badań elastoptycznych kompensatorów: 1 — kompensator mieszkowy, 2 — komora cieplna, 3 — pojemnik, 4 — rama obciążająca, 5 — zbiornik z olejem, 6 — termometr rtęciowy, 7 — wskaźnik poziomu oleju, 8, 9 — termopary, 10 — rejestrator temperatury, 11 — automatyczny regulator temperatury.

umożliwia realizację dowolnie wybranego programu nagrzewania i chłodzenia modelu oraz kontrolę rozkładu i zmian temperatury.

Kompensator mieszkowy 1 wraz z ramą obciążającą 4 (rys. 11) umieszczono w pojemniku 3, który znajdował się w komorze cieplnej 2. Do wnętrza kompensatora doprowa-



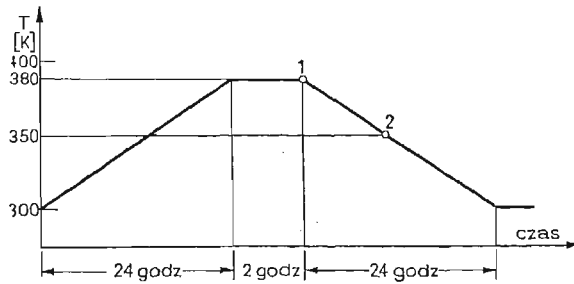
Rys. 11. Rama obciążająca.

dzony był olej przewodem grumowym ze zbiornika oleju 5. Różnica poziomów oleju w zbiorniku 5 i pojemniku 3 wyznaczała wielkość ciśnienia wewnętrznego w kompensatorze ( $p = h \cdot \gamma$ ;  $h$  — różnica poziomów oleju,  $\gamma$  — ciężar właściwy oleju). Olej wypełniający pojemnik 3 eliminował w znacznym stopniu (około 80%) wpływ ciężaru własnego kompensatora na stan naprężeń oraz powodował, że ciśnienie hydrostatyczne  $p$  wewnątrz mieszka pozostawało stałe z jego wysokością. Temperaturę oleju wewnątrz kompensatora podawała termopara 8, a temperaturę na zewnątrz mieszka termopara 9. Rejestrator 10 dokonywał ciągłego zapisu temperatur, przekazywanych przez termopary. Termometr rtęciowy 6 wskazywał temperaturę wewnątrz komory cieplnej. Nadajnik programu temperatury 11 sterował szybkością ogrzewania i chłodzenia modelu. Rama obciążająca 4 (rys. 11) umożliwiała realizację obciążeń kompensatora przemieszczeniem osiowym i ciśnieniem wewnętrznym.

**2c. Przebieg badań.** Duża pojemność cieplna układu i małe przewodnictwo cieplne oleju i żywicy epoksydowej wymagały programu zamrażania, przedstawionego na rys. 12.

Jeden z modeli poddano obciążeniu przemieszczeniem osiowym 10 mm (2,5 mm w przeliczeniu na jedną półfałę), a drugi obciążono ciśnieniem wewnętrznym  $p = \gamma \cdot h = 8 \cdot 10^{-3} \text{ MN/m}^3 \cdot 1,55 \text{ m} = 1,24 \cdot 10^{-2} \text{ MN/m}^2$ . Dla uniknięcia dodatkowych obciążeń, wynikających z dużych różnic współczynników rozszerzalności cieplnej stali (rama obciążająca) i żywicy epoksydowej (kompensator) w przypadku obciążenia kompensatora ciśnieniem wewnętrznym, wprowadzono poprawkę w postaci luzu  $\Delta l$  pomiędzy pokrywą górną kompensatora i płytą górną ramy obciążającej, równą

$$\Delta l = l \cdot \Delta T(\alpha_2 - \alpha_{st})$$



Rys. 12. Program zamrażania stanu naprężeń (odkształceń): 1 — obciążenie modelu kompensatora przez mieszczeniem lub ciśnieniem (rozpoczęcie zamrażania), 2 — koniec zamrażania.

gdzie:  $l$  — długość kompensatora ( $l = 132$  mm)

$T = T_z - T_0$ ;  $T_z$  — temperatura zamrażania,  $T_0$  — temperatura otoczenia; ( $\Delta T = 100$  K)

$\alpha_z = 12,5 \cdot 10^{-5}$  1/K — współczynnik rozszerzalności cieplnej żywicy,

$\alpha_{st} = 1,25 \cdot 10^{-5}$  1/K — współczynnik rozszerzalności cieplnej stali

Wielkość luzu:  $\Delta l = 132 \cdot 100 (12,5 \cdot 10^{-5} - 1,25 \cdot 10^{-5}) \cong 1,5$  mm.

W przypadku obciążenia kompensatora przemieszczeniem osiowym, płytę górną ramy obciążającej przesuwamy w temperaturze górnej zamrażania o daną wielkość przez pokręcenie śruby, licząc przemieszczenie od momentu zetknięcia płyty z kompensatorem. Uwzględnienie więc luzu w tym przypadku jest zbyteczne.

### 3. Opracowanie wyników badań

Jak wykazały badania wstępne żywica epoksydowa Epidian 5 z utwardzaczem  $A_1$  posiada w temperaturze zamrażania 383 K (110°C) moduł Younga  $E = 16$  MPa. Dla próbki o grubości  $\delta_w = 3$  mm wyciętej z modelu z zamrożonym stanem odkształceń dla światła żółtego o długości fali  $\lambda_w = 578$  nm stałą modelową naprężeniową  $f_{\sigma_w} = 9,25 \cdot 10^{-2}$  MN/m<sup>2</sup> · rz.iz.

Najbardziej wyężonym elementem kompensatora jest mieszek, a ekstremalne naprężenia występują na jego swobodnych powierzchniach. Określenie naprężeń głównych, decydujących o wyężeniu materiału na powierzchniach swobodnych mieszka sprowadza się, wobec znajomości ich kierunków, do wyznaczenia rozkładu izochrom w płytkach wyciętych w płaszczyźnie południkowej (rys. 13).

Wielkość naprężeń na powierzchniach swobodnych mieszka w płaszczyźnie południkowej wyznaczamy z podstawowego równania elastoptyki:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = f_{\sigma} \cdot m,$$

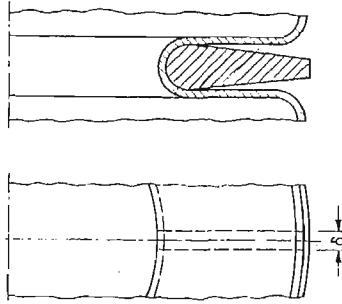
gdzie:  $\sigma_1, \sigma_2$  — naprężenia główne ( $\sigma_1 \geq \sigma_2$ )

$f_{\sigma}$  — stała modelowa naprężeniowa  $\left( f_{\sigma} = f_{\sigma_w} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_w} \cdot \frac{\delta}{\delta_w} \right)$ ;

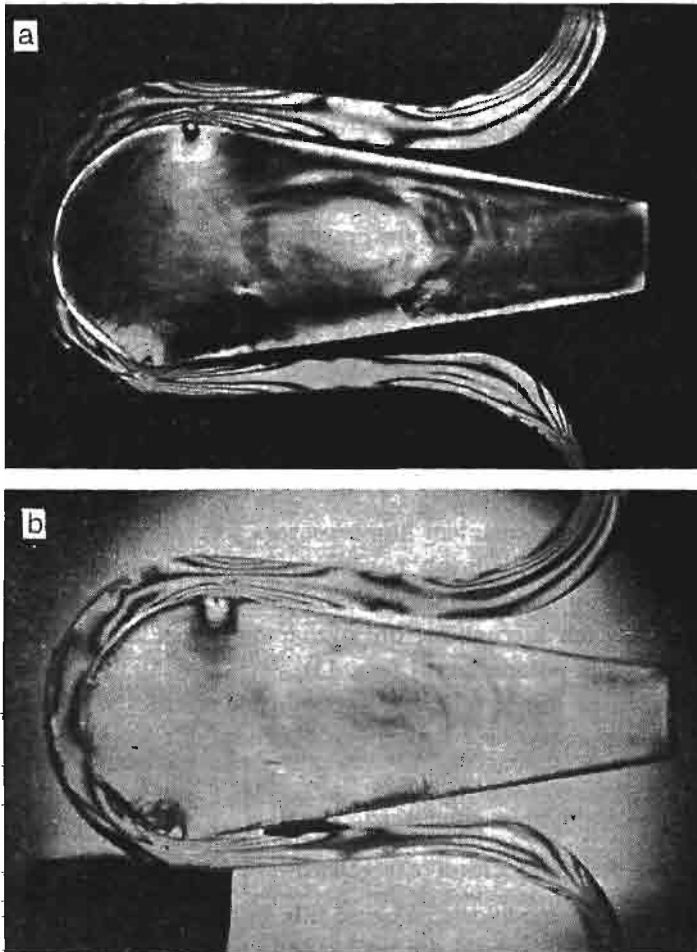
$f_{\rho_w}, \lambda_w, \delta_w$ , — stała modelowa, długość fali świetlnej, grubość płytki dla próbki wzorcowej;

$f_{\sigma}, \lambda, \delta$ , — stała modelowa, długość fali światła, grubość dla płytki badanej;

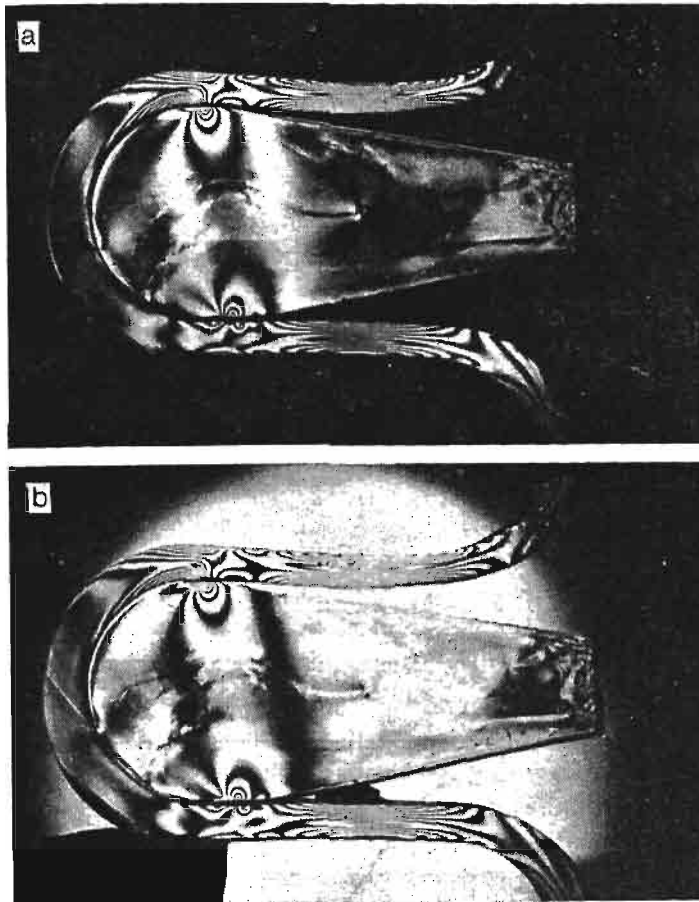
$m$  — rząd izochromy.



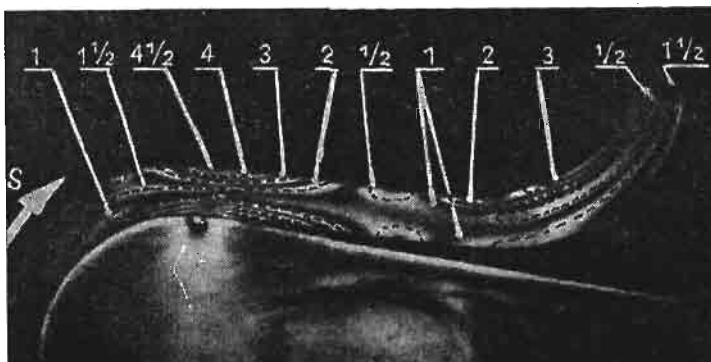
Rys. 13. Płyta o grubości wycięta z kompensatora przeznaczonego do badań elastoptycznych.



Rys. 14. Obrazy izochrom dla kompensatora obciążonego przemieszczeniem osiowym 2,5 mm/1 półfałę:  
a) izochromy całkowite, b) izochromy półówkowe.



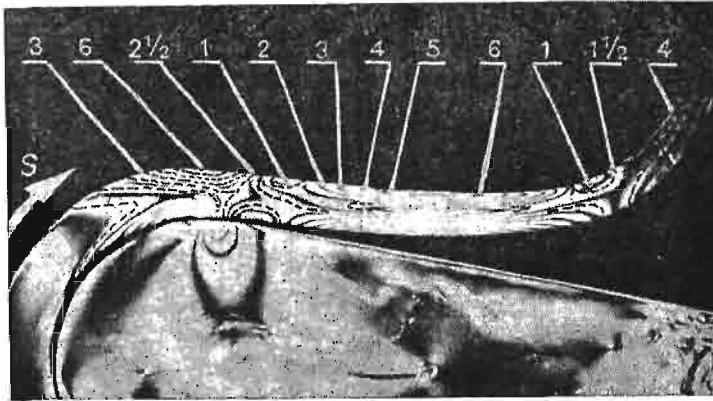
Rys. 15. Obrazy izochrom dla kompensatora obciążonego ciśnieniem wewnętrznym  $p = 1,24 \cdot 10^{-2} \text{ MN/m}^2$  :  
 a) izochromy całkowite, b) izochromy połówkowe.



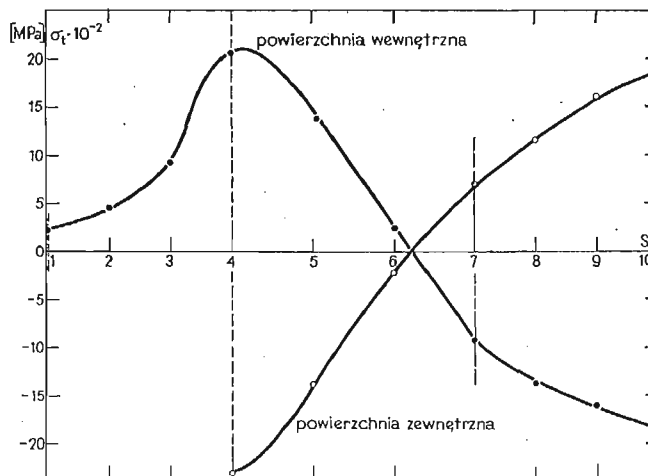
Rys. 16. Obraz zbiorczy izochrom dla kompensatora obciążonego przemieszczeniem osiowym 2,5 mm / 1półfałę.

Obrazy izochrom w wycinku kompensatora mieszkowego z pierścieniem wzmacniającym dla przypadków obciążenia przemieszczeniem osiowym i ciśnieniem wewnętrznym przedstawiają rys. 14 i 15, a obrazy zbiorcze izochrom (całkowitych i połówkowych) pokazują rys. 16 i 17.

Wyniki obliczeń w postaci wykresów naprężeń na powierzchniach swobodnych wycinków mieszka (rys. 16, 17) przedstawione są w postaci wykresów, przedstawionych na rys. 18 i 19.



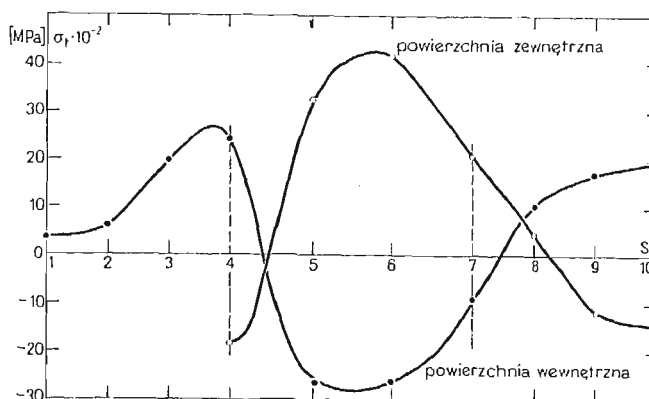
Rys. 17. Obraz zbiorczy izochrom dla kompensatora obciążonego ciśnieniem wewnętrznym  $p = 1,24 \times 10^{-2} \text{ MN/m}^2$ .



Rys. 18. Naprężenia południkowe na powierzchniach swobodnych mieszka obciążonego przemieszczeniem osiowym 2,5 mm/1półfałę.

#### 4. Dyskusja otrzymanych wyników i ocena błędów

Przedstawione naprężenia na powierzchniach swobodnych mieszka (rys. 18, 19) są w przeważającej części efektem zginania powłoki mieszka w płaszczyźnie południkowej. Mają one decydujący udział w wyteżeniu materiału, ponieważ naprężenia obwodowe są



Rys. 19. Naprężenia południkowe na powierzchniach swobodnych mieszka obciążonego ciśnieniem wewnętrznym  $p = 1,24 \cdot 10^{-2} \text{ MN/m}^2$ .

stosunkowo małe, dzięki zastosowaniu pierścieni wzmacniających, co można potwierdzić przez wycięcie płytki obwodowej. Określenie naprężeń obwodowych na drodze elastooptycznej przez badanie podpłytek jest jednak kłopotliwe ze względu na małą wartość tych naprężeń.

Dla obciążenia kompensatora przemieszczeniem osiowym największe co do wartości bezwzględnej naprężenia o kierunku południkowym występują w środku torusa zewnętrznego mieszka i w miejscu wchodzenia w kontakt powłoki mieszka z pierścieniem wzmacniającym. Dla przypadku obciążenia ciśnieniem wewnętrznym największe naprężenia występują w środku części płytowej półfali mieszka, w części środkowej torusa zewnętrznego oraz w miejscu wchodzenia w kontakt mieszka z pierścieniem wzmacniającym.

Zasady przenoszenia wyników pomiarów modelu na konstrukcję rzeczywistą (obiekt) określa teoria podobieństwa modelowego. Nieliniowość procesu współpracy mieszka z pierścieniem wzmacniającym stwarza szczególne wymagania zachowania postaci modelu i konstrukcji rzeczywistej w trakcie obciążania i po obciążeniu; zachowanie podobieństwa badanych zjawisk prowadzi do konieczności zachowania podobieństwa zmiany postaci modelu i obiektu. W badanej konstrukcji kompensatora zupełnie inne równania opisują odkształcenia mieszka (zgięciowa teoria powłok), a inne masywnego pierścienia. Zarówno obszar oddziaływań pomiędzy mieszkem a pierścieniem jak i rozkład tych oddziaływań zależy od odkształceń obydwu elementów. Dla punktów dostatecznie odległych od obszaru kontaktu wpływ, wynikający ze zmiany obszaru kontaktu, może być pominięty. Takie założenie można poczynić jeśli ograniczamy się do wyznaczania naprężeń w punktach mieszka o największym wyężeniu materiału, a więc dla punktów torusa zewnętrznego lub punktów powierzchni swobodnych środka części płytowej.

Przy powyższych założeniach, zgodnie z teorią Buckingham'a, dla materiału izotropowego podlegającego prawu Hooke'a, naprężenia w punkcie o współrzędnych  $(x, y, z)$  można wyrazić następująco [4]:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{p}{E} \cdot f_1\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \nu, \dots\right) + \frac{\nu}{l} \cdot f_2\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \nu, \dots\right),$$

gdzie:  $p$  — ciśnienie wewnętrzne w kompensatorze,  
 $l$  — dowolny wymiar liniowy,  
 $v$  — przemieszczenie osiowe (przemieszczenie jako obciążenie),  
 $E$  — moduł Younga,  
 $\nu$  — liczba Poissona'a.

Jeśli stosunki odpowiednich wielkości, dla modelu i obiektu, w funkcjach  $f_1$  i  $f_2$  są równe (w tym i liczba Poissona'a) to naprężenia w dowolnym punkcie modelu i obiektu można przedstawić:

$$\frac{\sigma}{E} = C_1 \cdot \frac{p}{E} + C_2 \cdot \frac{v}{l}$$

gdzie:  $C_1, C_2$ , — stałe niezależne od obciążeń jednakowe dla modelu i obiektu.

Stałe  $C_1$  i  $C_2$  można wyznaczyć poddając niezależnie obciążeniom  $p$  i  $v$  dwa jednakowe modele. Wtedy dla obciążenia modelu ciśnieniem spełniony będzie warunek:

$$\frac{\sigma_m}{E_m} = C_1 \cdot \frac{p_m}{E_m},$$

a dla obciążenia przemieszczeniem

$$\frac{\sigma_m}{E_m} = C_2 \cdot \frac{v_m}{l_m}.$$

Pisząc analogiczne zależności dla obiektu i uwzględniając równość odpowiednich statycznych otrzymujemy proste wzory umożliwiające przenoszenie wyników z modelu na konstrukcję rzeczywistą:

a) dla obciążenia ciśnieniem

$$\sigma_o = \frac{p_o}{p_m} \cdot \sigma_m$$

b) dla obciążenia przemieszczeniem

$$\sigma_o = \frac{E_o}{E_m} \cdot \frac{v_o}{v_m} \cdot \frac{l_m}{l_o} \cdot \sigma_m$$

Jeśli przyjąć, że obiekt ma te same wymiary co model i zadane obciążenia przemieszczeniem są jednakowe dla modelu i obiektu to naprężenia w konstrukcji rzeczywistej i modelu pozostają do siebie w takim stosunku jak moduły sprężystości  $E_o/E_m$ , naprężenia zaś od obciążenia ciśnieniem pozostają do siebie w stosunku równym skali ciśnień  $p_o/p_m$ .

Na błąd wyników pomiarów elastooptycznych wpływa błąd samej metody pomiaru oraz błąd wynikający z konieczności przenoszenia wyników pomiarów z modelu na konstrukcję rzeczywistą. Błąd względny możemy obliczyć metodą pochodnej logarytmicznej przyjmując, że  $E_o$  jest wielkością o błędzie pomijalnym, zaś  $\Delta E_m/E_m = 0,05$  (z pomiarów testowych), a obiekt pod względem wymiarów geometrycznych i wielkości przemieszczeń jest wiernym odwzorowaniem modelu. Otrzymamy wtedy:

$$\frac{\Delta \sigma_o}{\sigma_o} = \pm \left( \left| \frac{\Delta E_m}{E_m} \right| + \left| \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} \right| \right) \cdot 100\%$$



Błąd  $\Delta\sigma_m/\sigma_m$  obliczony metodą pochodnej logarytmicznej na bazie równania podstawowego elastoptyki przytoczonego w opracowaniu wyników wynosi  $\Delta(\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm 0,055$ . Stąd błąd względny określenia naprężeń w punktach obiektu (mieszka rzeczywistego) dostatecznie odległych od obszaru kontaktu i będącego pod względem geometrycznym wiernym odwzorowaniem modelu wyniesie

$$\frac{\Delta\sigma_0}{\sigma_0} = \pm 10,5\%.$$

## 5. Wnioski

Przeprowadzone badania elastoptyczne dostarczyły cennych informacji o wytrzymałościowych warunkach pracy kompensatora mieszkowego z pierścieniami wzmacniającymi. Uzyskane wyniki i poczynione w trakcie badań obserwacje pozwalają sformułować następujące wnioski:

1) W przypadku obciążenia kompensatora ciśnieniem wewnętrznym ekstremalne naprężenia występują w środku części płytowej na swobodnej powierzchni wewnętrznej.

2) W przypadku obciążenia kompensatora przemieszczeniem osiowym ekstremalne naprężenia występują w części środkowej torusa zewnętrznego i w obszarze wchodzenia mieszka w kontakt z pierścieniem.

3) Zgodnie z zasadą superpozycji naprężenia w punktach powłoki mieszkowej dostatecznie odległych od obszaru kontaktu mieszka i pierścienia mogą być wyznaczone dla dowolnej kombinacji obciążeń ciśnieniem i przemieszczeniem na podstawie wyników otrzymanych oddzielnie dla obciążenia kompensatora ciśnieniem i przemieszczeniem.

4) W warunkach prowadzonych badań, dla obciążenia kompensatora ciśnieniem wewnętrznym, obserwowane było przyleganie mieszka na całej powierzchni torusa pierścienia zaś dla obciążenia przemieszczeniem (ściskanie), zgodnie z oczekiwaniem mieszki i pierścienia nie przylegały w części środkowej torusa wewnętrznego.

5) Jeśli wyłączyć niewielki obszar spiętrzenia naprężeń w obszarze przechodzenia pierścienia wzmacniającego z części stożkowej w torusową to należy zauważyć, że wartości naprężeń w torusie wewnętrznym są pomijalne w porównaniu z naprężeniami w pozostałych fragmentach mieszka.

6) Zastosowana w badaniach technologia wykonania modeli elastoptycznych wykazała, że osiągnięcie ostatecznej grubości ścianki mieszka 3 mm lub większej i średnicy do 400 mm nie jest trudne.

7) Gdyby zaszła konieczność badania kompensatorów o bardzo cienkich powłokach mieszkowych (np. ułanków milimetra) to obok oczywistych trudności wykonawczych wystąpiłyby trudności w badaniach naprężeń, a przede wszystkim naprężeń obwodowych, których udział w wyężeniu materiału przy obciążeniu ciśnieniem zwiększa się w miarę zmniejszania się grubości ścianki mieszka.

8) Warunki brzegowe w modelowych badaniach elastoptycznych są bliskie rzeczywistym, a uwzględnienie innych rodzajów obciążeń niż osiowo-symetryczne nie zmieniłoby w zasadniczy sposób metodyki badań.

9) Badania elastoptyczne mogą być stosowane jako samodzielna lub uzupełniająca metoda analizy stanu naprężeń i przemieszczeń w kompensatorach mieszkowych z pierścieniami wzmacniającymi.

#### Literatura cytowana w tekście

1. L. D. ŁUGANCEW, *Issledowanie naprażenno-deformirowannogo sostojania silfonnogo kompensatora wysokowo dawlenia*, W: Raszety na procznost. Wyp. 17, Moskwa, Maszynostrojenie, 1976.
2. I. SŁOWIKOWSKA, A. KOZŁOWSKI, *Elastoptyczne własności krajowych żywic epoksydowych*, cz. I, Polimery, 9, 15 (1970).
3. R. S. DOROSZKIEWICZ, *Elastoptyka*, Warszawa—Poznań, PWN, 1975.
4. A. DIURELLI, U. RAILI, *Wwiedienije w fotomechaniku*, Moskwa, Izd. Mir, 1970.

#### Резюме

#### ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПЕНСАТОРОВ СИЛЬФОННОГО ТИПА С УКРЕПЛЯЮЩИМИ КОЛЬЦАМИ

В работе представлено результаты исследований компенсаторов сильфонного типа с укрепляющими кольцами проведены поляризационно-оптическим методом.

Полученные результаты исследований доказали большую пригодность поляризационно-оптических методов для анализа условий работы компенсаторов сильфонного типа.

#### Summary

#### PHOTOELASTIC STUDY OF THE BELLOW WITH REINFORCING RINGS

Experimental analysis of stress and deformation of the bellows with reinforcing rings, used as compensators of thermal expansion in pipelines has been performed. Using the photoelastic freezing method and models made of epoxy resin the stress distribution, effective stresses, contact zones between the shell and the rings for inner pressure as well as for displacements has been determined.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lutego 1981 roku*

OKREŚLENIE WYMIANY CIEPŁA POMIĘDZY WIĄZKĄ REGULARNYCH PRĘTÓW  
I PŁYNEM PODCZAS PODŁUŻNEGO LAMINARNEGO PRZEPŁYWU  
METODĄ KOLLOKACJI BRZEGOWEJ

MIECZYŚLAW CIESZKO, JAN ADAM KOŁODZIEJ (POZNAŃ)

I. Wprowadzenie

Z przepływem płynu lepkiego wzdłuż układu równoległych prętów przy równoczesnej wymianie ciepła między prętami i płynem spotykamy się w niektórych typach reaktorów atomowych, przy procesach przędzenia włókien chemicznych oraz w innych dziedzinach techniki. Analiza tego typu przepływów bywa również wykorzystywana do określenia oporu filtracyjnego lub współczynnika wymiany ciepła w równaniach filtracji.

Ze względu na wagę zagadnienia, problem podłużnego opływu układu prętów był rozważany przez wielu autorów. Jednak prawie wszystkie prace rozważają problem przepływu bez wymiany ciepła. Obszerny przegląd tego typu prac pod kątem wyznaczania charakterystyk filtracyjnych podany jest w pracy [1].

Po raz pierwszy zagadnienie podłużnego opływu równoległej wiązki prętów z wymianą ciepła rozpatrywali E. M. SPARROW, H. L. LOEFLER i H. A. HUBBARD [2]. Autorzy ci analizowali wymianę ciepła między prętami i płynem zakładając, że pręty ułożone w siatce trójkątnej wytwarzają ciepło ze stałą intensywnością na jednostkę objętości. Ponadto zakładali oni, że temperatura w danym przekroju poprzecznym pręta jest identyczna w każdym punkcie. Bardziej ogólne rozważania wymiany ciepła podczas opływu prętów w siatce trójkątnej podał R. A. AXFORD [3]. Założył on, że pręty wytwarzające ciepło ze stałą intensywnością są osłonięte rurami. Nie zakładał ponadto stałej temperatury w przekroju poprzecznym prętów i rur. Niestety, autor ten nie wyznaczył współczynnika przejmowania ciepła w takim układzie ograniczając się do wyznaczenia pola przepływu i temperatury.

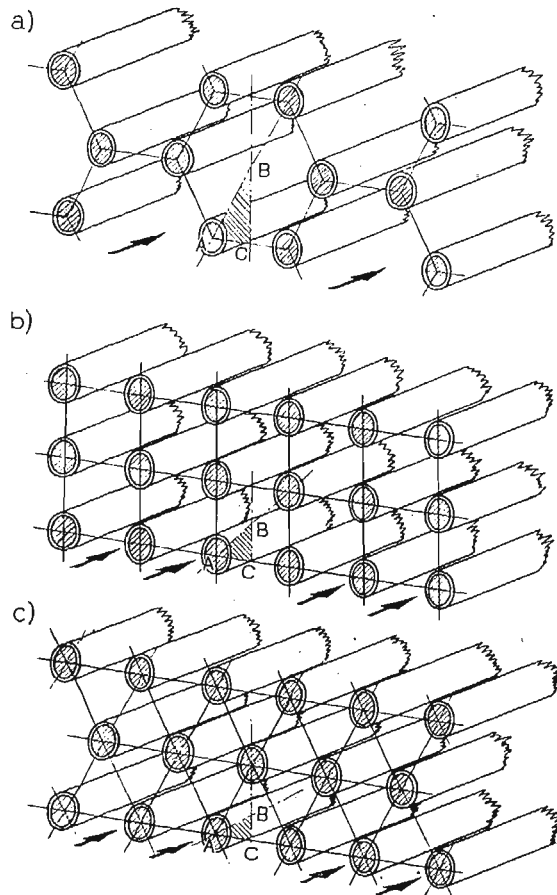
Niniejsza praca jest kontynuacją badań dotyczących wymiany ciepła przy podłużnym opływie układu prętów. Rozpatruje się trzy sposoby ułożenia prętów w układzie, a mianowicie według siatki trójkątnej, kwadratowej i sześciokątnej. Podobnie jak w pracy [3] zakłada się, że pręty wytwarzające ciepło ze stałą intensywnością są osłonięte rurami.

Do wyznaczenia pola przepływu płynu oraz pól temperatury w prętach, rurach i płynie stosuje się metodę kollokacji brzegowej. Dzięki temu równania różniczkowe opisujące problem są spełnione ściśle, a wymienione pola są podane przy pomocy wzorów zamkniętych w postaci obciętych szeregów.

Głównym celem pracy jest wyznaczenie liczby Nusselta, która charakteryzuje wymianę ciepła pomiędzy prętami i płynem w funkcji parametrów geometrycznych i termicznych układu. Liczbę tę wyznacza się w oparciu o otrzymane rozwiązanie pola przepływu i temperatury przyjmując odpowiednią procedurę uśredniania.

## 2. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

Weźmy pod uwagę regularne układy równoległych prętów osłoniętych rurami, które są ułożone według siatki trójkątnej, kwadratowej i sześciokątnej jak na rysunku 1. Wprowadzamy następujące wielkości charakteryzujące geometrię siatki:  $a$  — promień pręta lub promień wewnętrzny rury,  $b$  — promień zewnętrzny rury,  $c$  — połowa odległości



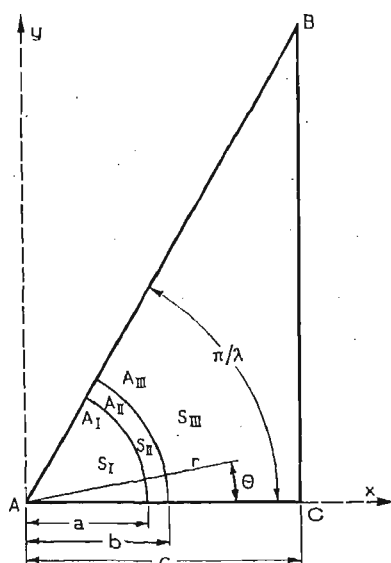
Rys. 1. Równoległe układy prętów cylindrycznych ułożone według siatki sześciokątnej, kwadratowej i trójkątnej.

między osiami dwóch sąsiednich prętów. Stosunek promienia zewnętrznego rur do połowy odległości między osiami sąsiadujących prętów oznaczmy przez  $\varepsilon = \frac{b}{c}$ . Wielkość ta związana jest z tzw. gęstością upakowania układu  $\varphi$  zależnością, którą dla trzech typów siatek podano w tabeli 1. Stosunek promienia pręta do promienia zewnętrznego rury oznaczmy przez  $\eta = \frac{a}{b}$ .

Tabela 1

	Typ siatki		
	trójkątna	kwadratowa	sześciokątna
$\varphi$	$\frac{\pi \varepsilon^2}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\pi \varepsilon^2}{4}$	$\frac{\pi \varepsilon^2}{3\sqrt{3}}$
$\lambda$	6	4	3
$S_{III}$	$\frac{1}{6} \left( \sqrt{3} - \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \right)$	$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\pi \varepsilon^2}{4} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \sqrt{3} - \frac{\pi \varepsilon^2}{3} \right)$

Celem ułatwienia teoretycznej analizy wymiany ciepła zauważmy, że w każdej siatce, według której ułożone są pręty, występują płaszczyzny symetrii, które dzielą nieskończony obszar na elementarne powtarzające się komórki nieograniczone tylko w jednym kierunku (rys. 1). Przekrój poprzeczny takiej komórki, wspólny dla trzech sposobów ułożenia prętów, przedstawia rysunek 2. Sposób ułożenia prętów jest określony parametrem  $\lambda$ , który podaje tabela 1. We wspomnianym przekroju poprzecznym występują trzy obszary:



Rys. 2. Przekrój poprzeczny komórki elementarnej.

- obszar pręta —  $A_I$  o polu  $S_I$ ,
- obszar rury —  $A_{II}$  o polu  $S_{II}$ ,
- obszar płynu —  $A_{III}$  o polu  $S_{III}$ .

W dalszym ciągu przyjmujemy następujące założenia upraszczające:

- przepływ jest ustalony, laminarny oraz w pełni rozwinięty;
- pręty stanowią źródło ciepła o stałej intensywności na jednostkę objętości;

c) rury ciepła nie wytwarzają, a ciepło wytwarzane w płynie na skutek lepkiej dysypacji ignorujemy;

d) wymiana ciepła pomiędzy prętami, rurami i płynem jest w pełni rozwinięta;

e) współczynniki charakteryzujące fizyczne własności prętów, rur i płynu są stałe i nie zależą od temperatury.

Po wprowadzeniu powyższych założeń rozpatrywany problem można sprowadzić do wyznaczenia pola przepływu płynu i pól temperatury w pręcie, rurze i płynie w dowolnym przekroju poprzecznym wspomnianej wyżej komórki układu. Przyjmując cylindryczny układ współrzędnych  $(r, \theta, z)$  tak jak na rysunku 2 dysponujemy przy tym następującymi równaniami różniczkowymi opisującymi zjawisko w obszarach:

a) pręta (obszar  $A_I$ )

$$(1) \quad \frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_1}{\partial \theta^2} = - \frac{\Phi}{\pi a^2 k_1},$$

gdzie:  $t_1$  — temperatura w pręcie,  $k_1$  — współczynnik przewodzenia ciepła w pręcie,  $\Phi$  — ilość wytwarzanego ciepła na jednostkę długości pręta;

b) rury (obszar  $A_{II}$ )

$$(2) \quad \frac{\partial^2 t_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_2}{\partial \theta^2} = 0,$$

gdzie:  $t_2$  — temperatura w rurze;

c) płynu (obszar  $A_{III}$ )

$$(3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz},$$

$$(4) \quad k_3 \left( \frac{\partial^2 t_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_3}{\partial \theta^2} \right) = w \rho c_p \frac{\partial t_3}{\partial z},$$

gdzie:  $w$  — prędkość przepływu w kierunku równoległym do osi prętów,  $\mu$  — współczynnik lepkości płynu,  $\frac{dp}{dz}$  — stały spadek ciśnienia w kierunku osi prętów,  $t_3$  — temperatura w płynie,  $\rho$  — gęstość płynu,  $c_p$  — ciepło właściwe płynu przy stałym ciśnieniu. Ponadto zgodnie z przyjętymi założeniami mamy

$$(5) \quad \frac{\partial t_3}{\partial z} = \frac{\Phi}{Q \rho c_p},$$

gdzie:  $Q$  — objętościowy wydatek przepływu przypadający na jedną rurę.

Warunki brzegowe dla równań (1 - 4) wynikają z przesłanek fizycznych i geometrycznych. Symetria zagadnienia prowadzi do następujących warunków:

$$(6) \quad \frac{\partial t_1}{\partial \theta} = \frac{\partial t_2}{\partial \theta} = \frac{\partial t_3}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad \text{dla} \quad \begin{cases} \theta = 0, \\ \theta = \frac{\pi}{\lambda}, \end{cases}$$

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta &= 0 \\ \frac{\partial t_3}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial t_3}{\partial \theta} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{dla} \quad r = \frac{c}{\cos \theta}.$$

(8)

Zakładając ciągłość temperatury i strumieni ciepła na granicy prętów i rur oraz rur i płynu otrzymujemy

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} t_1 &= t_2 \\ k_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} &= k_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} \end{aligned} \right\} \text{ dla } r = a,$$

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} t_2 &= t_3 \\ k_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} &= k_3 \frac{\partial t_3}{\partial r} \end{aligned} \right\} \text{ dla } r = b.$$

Z warunku braku poślizgu płynu po powierzchni rury otrzymujemy

$$(13) \quad w = 0 \quad \text{dla } r = b$$

Równowaga sił ciśnienia i lepkości prowadzi do związku

$$(14) \quad \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \mu \frac{\partial w}{\partial r} r \Big|_{r=b} d\Theta = - \frac{dp}{dz} S_{III}$$

przy czym pola powierzchni  $S_{III}$  zostały podane w tabeli 1.

Tak więc zagadnienie brzegowe do rozpatrywanego w pracy problemu określa układ równań (1 - 4) z warunkami brzegowymi (6 - 14)

### 3. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego

Znalezienie ścisłego rozwiązania układu równań (1 - 4) ze ścisłym spełnieniem warunków brzegowych (6 - 14) jest zagadnieniem trudnym. Wynika to z faktu, że warunki brzegowe są stawiane na liniach nie będących liniami współrzędnych tego samego układu. Z tego powodu podajemy rozwiązanie, które spełnia ściśle układ równań (1 - 4) oraz warunki brzegowe (6), (9 - 14), a warunki brzegowe (7 - 8) spełnia w sposób przybliżony. Rozwiązanie to ma postać:

$$(15) \quad W = -\frac{1}{4}(R^2 - \varepsilon^2) + \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^N X_k \operatorname{sh}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] \cos(\lambda k \Theta),$$

$$(16) \quad T_1 = \frac{k_3}{4\pi k_1} \left[ 1 - \left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right)^2 \right] + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N Z_k \left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right)^{\lambda k} \cos(\lambda k \Theta),$$

$$(17) \quad T_2 = -\frac{k_3}{2\pi k_2} \ln\left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right) + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N Z_k \left\{ \operatorname{ch}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right)\right] + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sh}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right)\right] \right\} \cos(\lambda k \Theta),$$

$$\begin{aligned}
 (18) \quad T_3 = & \frac{k_3}{2\pi k_2} \ln(\eta) - \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{M} \left\{ \frac{1}{8} \left\{ \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \times \right. \right. \\
 & \times \left[ \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) (R^2 + \varepsilon^2) - (R^2 - \varepsilon^2) \right] - \frac{1}{8} \left[ (R^2 - \varepsilon^2)(R^2 - 3\varepsilon^2) + \right. \\
 & \left. \left. + 4\varepsilon^4 \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) \right] \right\} + \sum_{k=1}^N Z_k \left\{ \operatorname{ch}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] \left[ \operatorname{ch}(\lambda k \ln(\eta)) - \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sh}(\lambda k \ln(\eta)) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{k_2}{k_3} \operatorname{sh}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] \left[ \frac{k_1}{k_2} \operatorname{ch}(\lambda k \ln(\eta)) - \operatorname{sh}(\lambda k \ln(\eta)) \right] \cos(\lambda k \Theta) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{X_k}{(\lambda k)^2 - 1} \left[ (R^2 - \varepsilon^2) \lambda k \operatorname{ch}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] - (R^2 + \varepsilon^2) \operatorname{sh}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] \right] \cos(\lambda k \Theta) \right\} \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$(19) \quad R = \frac{r}{c},$$

$$(20) \quad W = \frac{w}{c^2 \frac{dp}{dz} - \mu \frac{dz}{dz}},$$

$$(21) \quad T_i = \frac{k_3(t_i - A_0)}{\Phi} \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}
 (22) \quad M = & \frac{1}{4\pi} \left[ \lambda \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \right]^2 \left\{ -\ln\left[\frac{\lambda}{2\pi} \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right] - 3 + \right. \\
 & \left. + \frac{\pi}{2\lambda} \left[ \frac{3}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}{3} \right] + 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{4\pi}{\lambda \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} \times \right. \\
 & \left. \times \sum_{k=1}^N X_k (-1)^k \left\{ \frac{\left[ \frac{\lambda}{2\pi} \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \right]^{-\frac{\lambda k}{2}}}{(\lambda k + 2)(\lambda k + 1)} - \frac{\left[ \frac{\lambda}{2\pi} \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \right]^{\frac{\lambda k}{2}}}{(\lambda k - 2)(\lambda k - 1)} \right\} \right\},
 \end{aligned}$$

przy czym  $A_0$  jest średnią temperaturą na powierzchni rury.

Stałe  $X_k$  i  $Z_k$  wyznaczamy spełniając w sposób przybliżony warunki (7-8). Warunki te spełniamy mianowicie ściśle w  $N$  różnych punktach na brzegu CD. Innymi słowy, stosujemy metodę kollokacji brzegowej zakładając, że punkty kollokacji są



od siebie równo odległe. Biorąc pod uwagę fakt, że punkty te określa  $N$  wartości kąta

$$(23) \quad \Theta_j = \arctg \left[ \frac{(j-1)}{(N-1)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\lambda} \right], \quad j = 1, 2, \dots, N$$

z warunków (7 - 8) po uwzględnieniu (15) i (18) otrzymujemy następujące układy równań liniowych na niewiadome  $X_k$  i  $Z_k$

$$(24) \quad \sum_{k=1}^N A_{jk} X_k = B_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$(25) \quad \sum_{k=1}^N C_{jk} Z_k = D_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie:

$$(26) \quad A_{jk} = \lambda k \{ [\varepsilon \cos(\Theta_j)]^{\lambda k} \cos[(\lambda k + 1)\Theta_j] + [\varepsilon \cos(\Theta_j)]^{-\lambda k} \cos[(\lambda k - 1)\Theta_j] \},$$

$$(27) \quad B_j = \frac{1}{\cos \Theta_j} - \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{\lambda} \right) \cos(\Theta_j),$$

$$(28) \quad C_{jk} = \lambda k \cos(\Theta_j) \left\{ \left\{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\eta)] - \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\eta)] \right\} \left\{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \right\} \times \right. \\ \times \sin(\lambda k \Theta_j) \sin(\Theta_j) - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) \} + \\ \left. + \frac{k_2}{k_3} \left\{ \frac{k_1}{k_2} \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\eta)] - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\eta)] \right\} \left\{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) \right\} \right\},$$

$$(29) \quad D_j = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{X_k}{[(\lambda k)^2 - 1] \cos(\Theta_j)} \{ (\lambda k)^2 \{ 1 - [\varepsilon \cos(\Theta_j)]^2 \} \times \\ \times \{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \} \operatorname{bin}(\lambda k \Theta_j) \operatorname{bin}(\Theta_j) - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \times \\ \times \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) \} - \lambda k \{ 1 + [\varepsilon \cos(\Theta_j)]^2 \} \cdot \{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) - \\ - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \sin(\lambda k \Theta_j) \sin(\Theta_j) \} + 2 \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) \{ \lambda k \operatorname{ch} \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j)) - \\ - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \} \} + \frac{M}{2\pi} \cos^2(\Theta_j) + \frac{\lambda}{8\pi} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{\lambda} \right) \{ 1 + 2 \ln[\varepsilon \cos(\Theta_j)] - \\ - \varepsilon \cos(\Theta_j) \}^2 - \frac{1}{16} \frac{\{ 1 - [\cos(\Theta_j)]^2 \}^2}{\cos^2(\Theta_j)}$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że przed przystąpieniem do rozwiązywania układu równań (25) musimy już dysponować rozwiązaniem układu równań (24), ponieważ wyrazy wolne układu (25) określone są rozwiązaniem układu (24). Liczba całkowita  $N$  określa wymiar tych układów i zarazem jest ilością punktów kolokacji, w których spełniamy ściśle warunki (7 - 8).

## 4. Wyznaczenie współczynnika przejmowania ciepła

Przejmowanie ciepła od powierzchni ciała stałego przez płyn, który to ciało opływa jest opisywane przez prawo Newtona w postaci {[4], s. 23}:

$$(30) \quad q_s = \kappa(t_s - t_p),$$

gdzie:  $q_s$  — gęstość strumienia ciepła przejmowanego przez płyn od powierzchni ciała stałego,  $t_s$  — temperatura powierzchni ciała stałego,  $t_p$  — odpowiednio określona temperatura płynu,  $\kappa$  — współczynnik przejmowania ciepła.

Dla konkretnego przepływu  $\kappa$  jest wielkością stałą. Zmienia się jednak ze zmianą jego parametrów charakterystycznych. Celem uzyskania większej uniwersalności rezultatów w miejsce współczynnika przejmowania ciepła podaje się na ogół liczbę Nusselta zdefiniowaną wzorem

$$(31) \quad N_u = \frac{\kappa L}{k},$$

gdzie:  $L$  — długość charakterystyczna,  $k$  — współczynnik przewodzenia ciepła.

Znajomość pola prędkości przepływu oraz pola temperatury w rozważanych przez nas przypadkach opływu wiązki prętów daje możliwość wyznaczenia współczynnika przejmowania ciepła lub liczby Nusselta. W tym celu musimy ściślej określić znaczenie różnicy temperatur ( $t_s - t_p$ ) we wzorze (30). Z uwagi na nieograniczoność układu i zmienność pola temperatury na zewnętrznej ścianie rury, wygodnie jest przez  $t_s$  oznaczać średnią temperaturę zewnętrznej ścianki rury, natomiast przez  $t_p$  średnią temperaturę płynu. Wówczas korzystając z definicji temperatury średniej w postaci

$$(32) \quad t_3^{sr} = \frac{\iint_{A_{III}} \varrho t_3 w dA}{\iint_{A_{III}} \varrho w dA},$$

różnicę temperatur ( $t_s - t_p$ ) można przedstawić jako

$$(33) \quad t_s - t_p = (t_3|_{r=b})^{sr} = \frac{\iint_{A_{III}} (t_3|_{r=b} - t_3) w r d r d \Theta}{\iint_{A_{III}} w r d r d \Theta},$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$(34) \quad \frac{(t - t_p) k_3}{\Phi} = \frac{\int_a^{\frac{\pi}{\lambda}} \int_a^{\frac{1}{\cos \Theta}} (T_3|_{r=b} - T_3) W R d R d \Theta}{M} = f\left(\lambda, \eta, \varphi, \frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2}{k_3}\right).$$

Współczynnik przejmowania ciepła  $\kappa$ , zgodnie z równaniem (30) po wykorzystaniu (34) wyrazi się wzorem

$$(35) \quad \kappa = \frac{k_3}{2\pi b f\left(\lambda, \eta, \varphi, \frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2}{k_3}\right)},$$

natomiast liczba Nusselta, po wprowadzeniu obwodu zewnętrznej ściany rury  $2\pi b$  jako długości charakterystycznej, przyjmuje postać

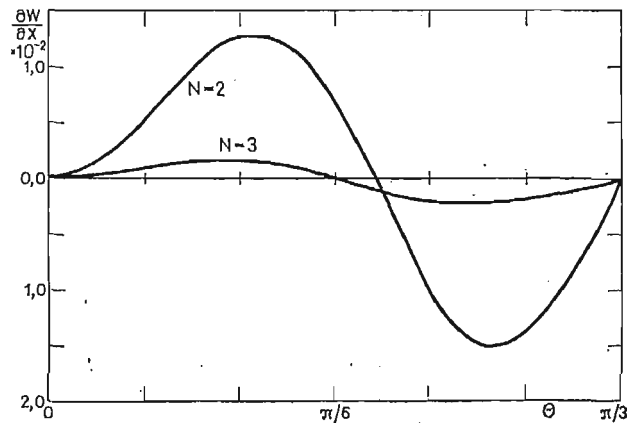
$$(36) \quad N_u = \frac{1}{f\left(\lambda, \eta, \varphi, \frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2}{k_3}\right)}.$$

W dalszym ciągu liczba Nusselta będzie wyznaczana poprzez numeryczne obliczenie całki występującej we wzorze (34).

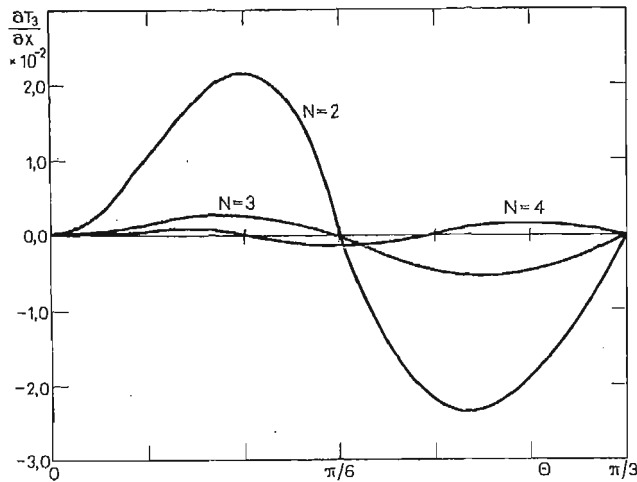
### 5. Rezultaty numeryczne

W proponowanej metodzie rozwiązania omawianego zagadnienia warunki brzegowe na części brzegu rozważanego obszaru zostały spełnione w sposób przybliżony. Spełnia się je ściśle tylko w skończonej ilości  $N$  punktów. Dotyczy to zarówno wyznaczania pola prędkości jak również wyznaczania pola temperatury. Przy czym wyznaczając pole temperatury korzystamy z rozwiązania dla pola prędkości. Tak więc błędy przybliżenia rozwiązania przepływu ingerują w dokładność rozwiązania określającego pole temperatury.

Intuicyjnie może się wydawać, że zwiększając ilość punktów kolokacji (liczbę  $N$ ) zwiększamy dokładność spełnienia warunków brzegowych, a tym samym dokładność otrzymywanych rezultatów. Eksperymenty numeryczne nie potwierdzają jednak w pełni takiego przypuszczenia. Okazuje się, że liczba  $N$  nie musi być duża, aby uzyskać odpowiednio mały maksymalny błąd spełnienia warunków brzegowych pomiędzy punktami kolokacji. Sytuację tę ilustrują rysunki 3 i 4, gdzie podano wykresy błędu spełnienia warunku brzegowego na brzegu  $CB$ , zarówno dla rozwiązania przepływu jak i dla pola temperatury. Widzimy, że już przy dwóch punktach kolokacji ( $N = 2$ ) tangens nachylenia stycznej do profilów prędkości lub temperatury, który powinien być równy zero, jest bardzo mały.



Rys. 3. Wartości pochodnej prędkości na brzegu  $CD$  dla siatki sześciokątnej przy  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\eta = 0,95$ .



Rys. 4. Wartości pochodnej temperatury na brzegu  $CD$  dla siatki sześciokątnej przy  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\eta = 0,95$ ,

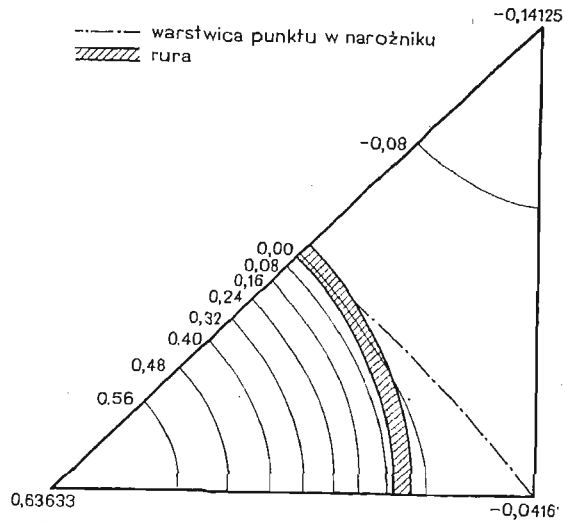
$$\frac{k_1}{k_2} = 1,0, \quad \frac{k_2}{k_3} = 1,0.$$

Dla czterech punktów kolokacji maksymalna wartość wspomnianego tangensa w obu przypadkach jest mniejsza od  $10^{-4}$ .

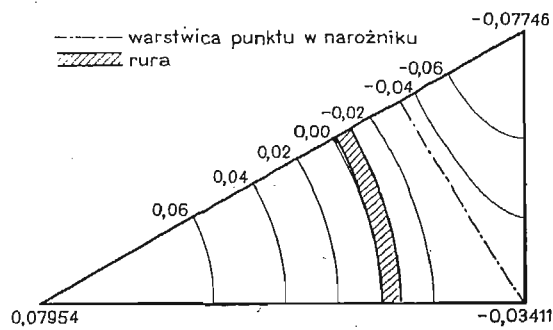
Z drugiej strony powiększanie ilości punktów kolokacji prowadzi w końcu do złego uwarunkowania macierzy układów równań (24) i (25) (przy wartościach  $N$  rzędu kilkudziesięciu). Związane to jest z faktem, że zgęszczanie punktów kolokacji powoduje, iż sąsiadujące ze sobą równania we wspomnianych układach, określone dwoma sąsiednimi punktami kolokacji niewiele różnią się od siebie.

Na dokładność spełnienia warunku brzegowego pomiędzy punktami kolokacji przy ustalonym  $N$  mają również pewien wpływ parametry  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ ,  $\frac{k_1}{k_2}$ ,  $\frac{k_1}{k_3}$  i  $\eta$ . Maksymalny błąd spełnienia warunków brzegowych rośnie, jeśli  $\lambda$  maleje lub jeśli  $\varepsilon$  rośnie. Jednak, jak wskazują rysunki 3 i 4, które przedstawiają niekorzystny przypadek ze względu na parametry  $\lambda$  i  $\varepsilon$  spełnienie warunków brzegowych przy „rozsądnej” wartości  $N$  jest zadowalające. Istnieją jedynie problemy natury numerycznej dla wartości  $\varepsilon$  bliskich maksymalnym i maksymalnych ( $\varepsilon = 1$ ). Wówczas, aby w zadowalający sposób spełnić warunki brzegowe należy powiększać  $N$ , co z kolei prowadzi do układów liniowych słabo uwarunkowanych. W rezultacie dla tych wartości  $\varepsilon$ , przy wzroście  $N$ , szybciej uzyskujemy układ słabo uwarunkowany niż w zadowalający sposób spełnimy warunek brzegowy. Z tego powodu dalsze wyniki podaje się dla  $\varepsilon \leq 0,9$ , które uzyskiwano przy  $N < 10$ .

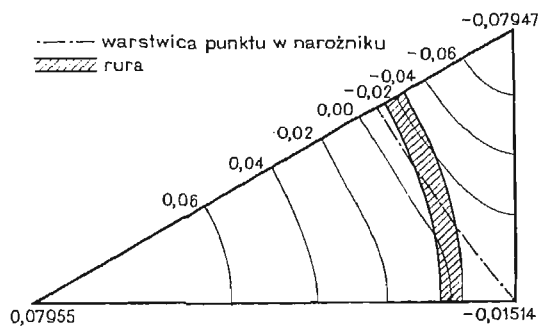
Przykładowe profile pola temperatury w płaszczyźnie rozważanej komórki pokazują rysunki 5 - 10. Z rysunków tych wynika między innymi, że temperatura w przecie zmienia się znacznie i założenie stałej temperatury pręta, jak to uczyniono w pracy [2], jest poważnym uproszczeniem. Możliwie dokładne rozkłady temperatury są istotne z punktu widzenia wyznaczenia naprężeń cieplnych.



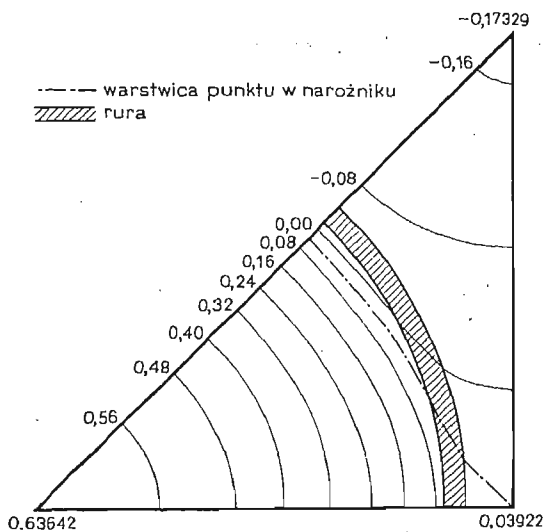
Rys. 5. Przykładowe pole temperatury dla  $\lambda = 6$ ,  $\varepsilon = 0,75$ ,  $\eta = 0,95$ ,  $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$ ,  $\frac{k_2}{k_3} = 1,0$ .



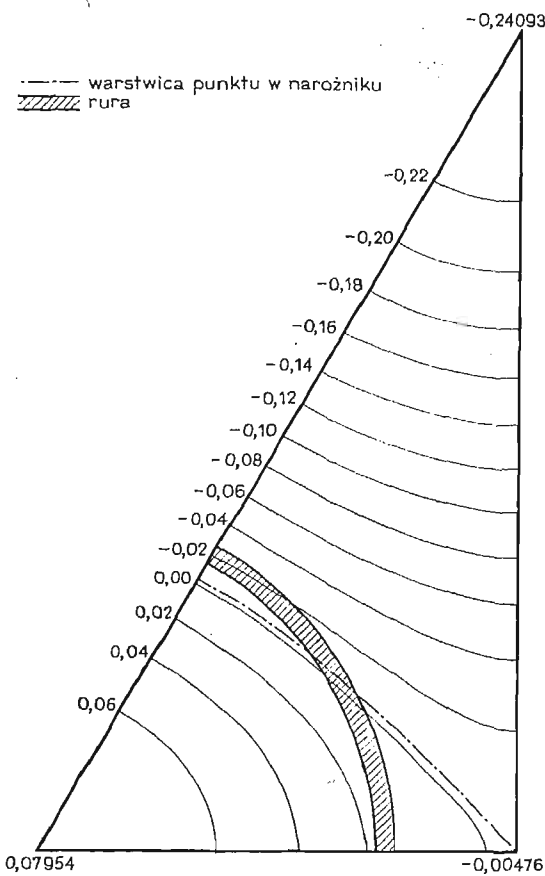
Rys. 6. Przykładowe pole temperatury dla  $\lambda = 4$ ,  $\varepsilon = 0,75$ ,  $\eta = 0,5$ ,  $\frac{k_1}{k_2} = 0,25$ .



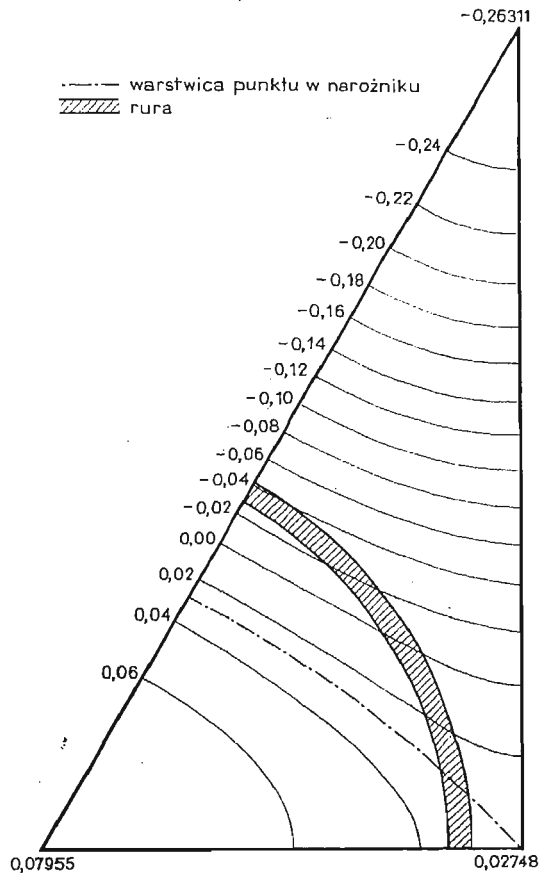
Rys. 7. Przykładowe pole temperatury dla  $\lambda = 6$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\eta = 0,95$ ,  $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$ ,  $\frac{k_2}{k_3} = 1,0$ .



Rys. 8. Przykładowe pole temperatury dla  $\lambda = 4$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\eta = 0,5$ ,  $\frac{k_1}{k_2} = 0,5$ .



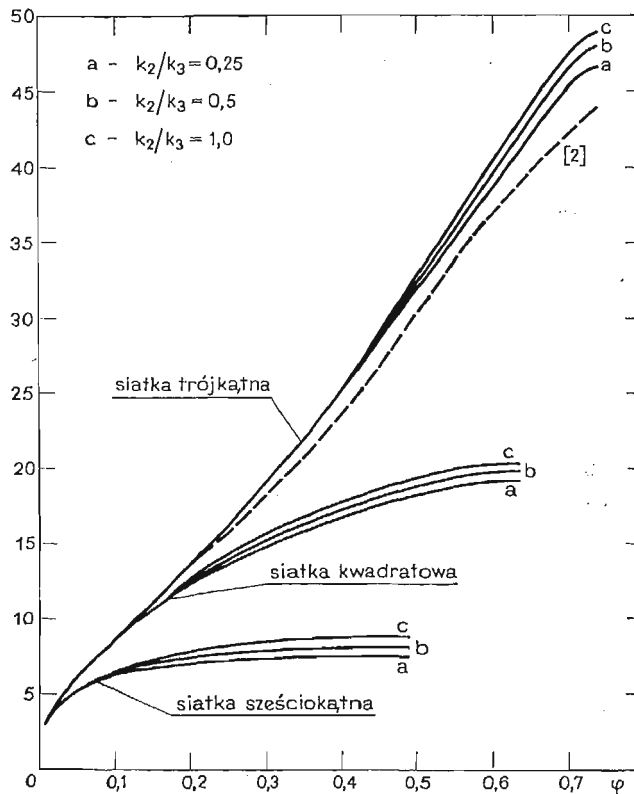
Rys. 9. Przykładowe pole temperatury dla  $\lambda = 3$ ,  $\varepsilon = 0,75$ ,  $\eta = 0,95$ ,  $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$ ,  $\frac{k_2}{k_3} = 1,0$ .



Rys. 10. Przykładowe pole temperatury dla  $\lambda = 3$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\eta = 0,95$ ,  $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$ ,  $\frac{k_2}{k_3} = 1,0$ .

Na rysunku 11 zostały przedstawione wartości liczb Nusselta w funkcji gęstości upakowania układu przy różnych wartościach pozostałych parametrów. Z rysunku tego wynika, że założenie stałej temperatury pręta, jak to uczyniono w pracy [2], nie prowadzi do istotnych zmian liczby Nusselta. Zgodnie ze wzorami (34) i (36) liczba Nusselta jest odwrotnością różnicy średnich temperatur powierzchni, zewnętrznej rury i płynu przy ustalonym strumieniu ciepła pomiędzy prętami i płynem. Z rysunku 9 wynika, że dla wszystkich sposobów ułożenia prętów różnica ta maleje ze wzrostem gęstości upakowania. Oznacza to, że intensywność chłodzenia rośnie, gdy gęstość upakowania maleje.

Widoczny jest dość istotny wpływ sposobu ułożenia prętów na wartość liczby Nusselta. Przy ustalonej gęstości upakowania najkorzystniejsze chłodzenie występuje przy ułożeniu prętów według siatki sześciokątnej, a najmniej korzystne, gdy pręty ułożone są według siatki trójkątnej. Znacznie mniejszy wpływ na wartość liczby Nusselta mają stosunki współczynników przewodzenia ciepła.



Rys. 11. Wartości liczb Nusselta przy  $\eta = 0,95$ ,  $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$ .

#### Literatura cytowana w tekście

- 1 J. A. KOŁODZIEJ, *Opór filtracyjny układu prętów cylindrycznych przy podłużnym laminarnym opływie*. Archiwum Budowy Maszyn, vol. 28, zeszyt 4, (1980), s. 487-502.
- 2 E. M. SPARROW, A. L. LOEFFLER, H. A. HUBBARD, *Heat Transfer to Longitudinal Laminar Flow Between Cylinders*. Trans. ASME ser. C, Journal Heat Transfer, vol. 83, no. 4, (1961), pp. 415-422.
- 3 R. A. AXFORD, *Two-dimensional, multiregion analysis of temperature fields in reactor tube bundles*. Nuclear Engineering Design, vol. 6, (1967), pp. 25-42.
- 4 S. WIŚNIEWSKI, *Wymiana ciepła*, PWN, Warszawa 1979.

#### Резюме

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ МЕЖДУ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ СТЕРЖНЕЙ И ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ПРОДАЛЬНОМ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНОЙ КОЛЛОКАЦИИ

В статье обсуждено стационарное ламинарное течение жидкости вдаль системы цилиндрических стержней. Исследуется теплопередачу между стержнями и жидкостью, причем стержни являются источниками тепла. Система содержит параллельные стержни, каждый из которых прикрыт трубкой. Исследуется три способа расположения стержней в треугольной, квадратной и шестиугольной сетке. Применяя метод граничной коллокации определяется движение жидкости и теплопередачу. Вычисляется число Нуссельта в широком диапазоне отношений поверхности.



## Summary

## THE DETERMINATION OF THE HEAT TRANSFER BETWEEN REGULAR BUNDLE OF RODS AND FLUID DURING LONGITUDINAL LAMINAR FLOW, BY MEANS OF BOUNDARY COLLOCATION

The steady longitudinal laminar flow along a system of cylindrical rods is considered. The heat transfer between the rods and fluid is taken into account, where the rods are assumed to be heat sources.

The system consist of the parallel rods each of them is placed in cylindrical tube. Three different patterns of lattice (perpendicular normal cross section of system) are considered: triangular, square and hexagonal.

Using boundary collocation method the problem of fluid flow and heat transfer in the system is solved. The Nusselt's number for wide range of the surface ratio is determined.

IPPT PAN POZNAŃ  
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 października 1980 roku*

---



# BIULETYN INFORMACYJNY

## SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI PTMTIS za rok 1980.

### I. Działalność organizacyjna

Na koniec roku 1980 do naszego Towarzystwa należało 983 osób, w tym w poszczególnych oddziałach: Bielsko Biala — 17, Bydgoszcz 36, Częstochowa — 66, Gdańsk — 62, Gliwice — 166, Kraków — 71, Lublin — 40, Łódź — 57, Opole — 23, Poznań — 74, Rzeszów — 21, Szczecin — 40, Warszawa — 202, Wrocław — 87, Zielona Góra — 21.

W okresie sprawozdawczym odbyły się 3 zebrania Prezydium Zarządu Głównego, 4 zebrania plenarne Zarządu Głównego, oraz łącznie 83 zebrania organizacyjne w oddziałach (od 11 w Gliwicach do 1 w Rzeszowie).

W dniach 21 - 22 maja 1980 r. odbył się w Błajejewku Zjazd Delegatów PTMTIS, połączony z sympozionem „Drgania w układach fizycznych” (patrz oddzielne sprawozdanie w 3 zeszytcie 1981 MTIS).

### II. Działalność naukowa

Na zebraniach naukowych, które odbyły się w 14 oddziałach wygłoszono 67 referatów, a mianowicie:

Lp.	Data	Prelegent	Temat
<b>Bielsko Biala</b>			
1.	13.03.	K. Maczyński	Dynamika mechanizmów o zmiennym przełożeniu przy uwzględnieniu tarcia w węzłach
2.	6.06.	J. R. Moszyński	Metody i zastosowania akumulacji energii
3.	19.12.	J. Matkowski	Twierdzenie o punktach stałych jako metoda rozwiązywania równań
<b>Bydgoszcz</b>			
4.	18.03.	E. Lubieniecki	Rozkład naprężeń w elementach skrzynkowych od docisku siły skupionej
5.	18.06	K. Wernerowski	Tłumienie drgań wybranych łożysk gazowych
6.	2.12. 19.12.	F. Lubieniecki	Wiązary stalowe o dużej rozpiętości wstępne sprężone
<b>Częstochowa</b>			
7.	8.05.	K. Ciupak	Symulacja numeryczna stanów przejściowych ruchu samochodu
8.	15.05.	R. M. Evan—Iwanowski (USA)	Drgania rezonansowe w układach mechanicznych
9.	12.06.	J. Elsner	Metody uśredniania równań konstytutywnych w aeromechanice przepływów turbulentnych
10.	12.06.	S. Drobniak	Struktury koherentne w turbulencji przepływów
11.	30.10.	T. Chmielniak	Przepływ czynników dwuskładowych w kanałach maszyn przepływowych. Aerodynamiczne aspekty erozji pyłowej maszyn przepływowych.

Lp.	Data	Prelegent	Temat
12.	19.11.	Ł. N. Sidelkowskij	Gospodarka skojarzona w energetyce przemysłowej
13.	4.12.	J. Trojan	Podstawy matematyczne metody elementu skończonego
<b>Gdańsk</b>			
14.	4.02.	J. Bystrzycki	Badania dynamiczne sprężystej belki obciążonej siłami krótkotrwałymi i uderzonej prętem
15.	5.03.	S. Dobrociński	Wybrane problemy brzegowe termosprężystości niesprężonej w ujęciu metody elementów skończonych
16.	12.03.	J. Walaszczyk	O pewnych możliwościach zastosowania metod numerycznych do zagadnienia odprężenia górotworu
17.	15.03.	Carlos Mota Soares (Lizbona)	Dynamic analysis of plates by mixed elements
18.	12.05.	R. M. Evan Iwanowski	Oil whirl and critical instabilities in Roter-Bearing systems
19.	14.05.		Resonance oscillations in mechanical systems
20.	14.04.		Stability of shells (static)
21.	19.06.	A. Tomana	Zastosowanie ściśtych elementów skończonych do optymalnego kształtowania prętowych układów drgających
22.	11.09.	J. Wdowicki	Analiza dynamiczna konstrukcji przy użyciu języka problemowo-zorientowanego
23.	2.12.	B. Chrobot	Matematyczne metody powłok uźebrowanych
24.	2.12.	J. Henrysiak	Matematyczne modele powłok wzmocnionych na brzegach
<b>Gliwice</b>			
25.	7.05.	B. Skalmierski	Wpływ stanu naprężeń pudła rezonansowego skrzywiec na rozkład formatów w widmie
26.	4.06.	J. Maryniak	Własności dynamiczne obiektów latających
27.	14.10.	E. Polonis	Koncepcja nowego ustroju budowlanego pod taśmociągi lubelskiego zagłębia węglowego
28.	11.11.	K. Stoiński	Analogie elektromechaniczne w zastosowaniu do oceny obciążeń udarowych podpory hydraulicznej
<b>Kraków</b>			
29.	28.01.	G. Szefer	Problemy nauczania mechaniki w RFN
30.	30.04.	Eduardo Romano (Lizbona)	An integrated theory for finite elements and finite differences
<b>Lublin</b>			
31.	8.01.	T. Opolski	Zmiany naprężeń ciągną w układach zamkniętych
32.	4.03.	B. Skierczyński	Wrażliwość równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych i nieliniowych na zmiany parametrów
33.	1.04.	J. Mames	Teoria bezpieczeństwa konstrukcji oparta na rozkładach ekstremalnych
34.	13.05.	C. Werbałow (Bułgaria)	Metody wariacyjne w mechanice konstrukcji
35.	19.11.	E. Polonis	Analiza dynamiczna betonowej wstęgi sprężonej
36.	10.12.	J. Podgórski	O pewnych przypadkach nieliniowych równań teorii powłok i ich zastosowanie

Lp.	Data	Prelegent	Temat
<b>Łódź</b>			
37.	21.02.	K. Kozakiewicz	Występowanie osobliwości w zagadnieniach kontaktowych
38.	27.03.	K. Dems	Stateczność i stan zakrytyczny swobodnie podpartej tarczy trapezowej poddanej jednokierunkowemu ściskaniu
39.	31.03.	A. E. Bergles	Enhancement of heat transfer
40.	23.10.	F. Lothar (NRD)	Projektowanie konstrukcji przy pomocy EMC z aktywnym ekranem
41.	30.10.	J. Zajączkowski	Drgania samowzbudne belki opartej na ruchomej podporze
42.	20.11.	H. Glaser (NRD)	Rozwiązanie zagadnienia wiskoplastycznego metodą elementów skończonych
43.	18.12.	W. Konecki J. Miśkiewicz	Zmiany podstawowych właściwości mechanicznych mono i bifilamentów o różnych stopniach skręcania
<b>Opole</b>			
44.	29.04.	M. Radwański	Pewne problemy analizy stateczności obrotowo-symetrycznych powłok sprężysto-plastycznych
45.	20.05.	Z. Waszczyszyn	Nieliniowa numeryczna analiza stateczności konstrukcji
46.	11.11.	T. Strzelecki	Optymalne wyznaczanie parametrów modeli mechanicznych
47.	17.12.	E. Maciąg	Spektrum odpowiedzi i spektrum Fouriera dla drgań drogowych
<b>Poznań</b>			
48.	20.04.	A. Szadkowski	Kilka uwag o sposobie objaśniania podstawowych pojęć mechaniki
49.	20.06.	C. Cempel	Identyfikacja drganiowych stanów krytycznych elementów maszyn i konstrukcji
<b>Szczecin</b>			
50.	31.01.	K. Szmidt P. Wilde	Małe drgania sztywnej płyty w paśmie cieczy
51.	6.03.	A. Bodnar	Problemy wielowskaźnikowej oceny rozwiązań w procesie optymalizacji
52.	27.03.	S. Berczyński K. Grudziński	Zagadnienie modelowania i obliczania połączeń śrubowych metodą elementów skończonych
53.	14.05.	R. Kwiat Z. Górecki	Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok do obliczania wieloobwodowych cienkościennych prętów przyrzątecznych
54.	29.05.	S. Berczyński	Algorytm estymacji parametrów liniowych modeli dyskretnych na przykładzie modelu drgań skrętnych
55.	12.06.	Z. Mincel H. Bröker	Cyfrowe elektroanalogowe zastosowanie równania do symulacji nieustalonych przepływów w korytach otwartych
56.	15.10.	W. Fröhling (NRD)	Wpływ naprężeń spawalniczych na zachowanie się płyt w zakresie sprężysto-plastycznym

Lp.	Data	Prelegent	Temat
57.	29.11.	J. Sułocki	Stateczne problemy obliczeniowe rurociągów wiotkich
58.	19.12.	A. Majchrzycka	Temperatura komfortu w warunkach hiperbarycznych

#### Warszawa

59.	28.01.	A. Ołędzki W. Szemplińska-Stupnicka A. Marusak	Badania symulacyjne w budowie maszyn
60.	10.06.	Z. Kączkowski	Zastosowania metody czaso-przestrzennych elementów skończonych w dynamice konstrukcji
61.	23.06.	J. R. Moszyński B. Staniszewski E. Radwański	Perspektywy energetyczne

#### Wrocław

62.	14.01.	J. Sasiadek	Sterowanie i modelowanie procesów o parametrach rozłożonych
63.	5.03.	H. Chrostowski	Interpretacja zjawiska „stukania” zaworów w pompach tłokowych
64.	23.06.	Z. Kowal	Efekty statyczne w mechanice
65.	24.07. 25.07.	C. Rodkiewicz (Kanada)	O przepływie krwi przez duże arterie
66.	1.12.	W. Kordylewski	Dziwne atraktory w mechanice płynów
67.	18.12.	E. Brzuchowski	Dylemat położenia martwego

W oddziale Zielona Góra odbyły się 53 spotkania naukowe o następującej tematyce:

Wybrane zagadnienia z dynamiki — S. Mazur — 9 spotkań

Wybrane zagadnienia mechaniki analitycznej — S. Mazur — 5 spotkań

Programowanie i obsługa kalkulatora programowego COMPUCORP 425G — S. Pryputniewicz — 4 spotkania

Teoria niezawodności. Wykorzystanie teorii niezawodności do badań niezawodnościowych — S. Iwański — 3 spotkania

Teoria napędów ciągnowych — E. Goss — 5 spotkań

Teoria optymalizacji. Programowanie liniowe — J. Kurpiewski — 6 spotkań

Metody numeryczne rozwiązywania wybranych zagadnień inżynierskich — F. Fabiś — 3 spotkania

Wykorzystanie metody elementów skończonych do wyznaczania sił wewnętrznych w tarczach —

E. Miształ — 4 spotkania

Rezonanse przejściowe w konstrukcjach budowlanych — S. Mazur — 3 spotkania

Funkcje pełzania betonu w konstrukcjach żelbetowych — J. Reiche — 1 spotkanie

Drgania budowli w ujęciu komputerowym L. Szeloch — 10 spotkań

#### Sympozja i konferencje naukowe

Gdańsk — w dniach 14—15.11.1980 r. odbyła się konferencja na temat „Problemy losowe w mechanice konstrukcji” — zorganizowana przez Oddział PTMTS w Gdańsku przy współudziale Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN — Sekcja Mechaniki Konstrukcji oraz Instytutu Konstrukcji Budowlanych Politechniki Gdańskiej

Gliwice — w dniach 17—22.03.80 r. odbył się XIX Sympozjon pod hasłem „Modelowanie w Mechanice” w DW w Szczyrku. W czasie obrad wygłoszono 44 referaty, które zostały opublikowane w zbiorze

referatów. Odbyły się dwie dyskusje „Okrągłego stołu” na tematy prac naukowych z mechaniki i dydaktyki. Było około 160 wypowiedzi w dyskusjach. W sympozjonie wzięło udział 77 uczestników z Polski i 1 naukowiec z Miskolca (Węgry)

Kraków — w dniach 29—30.09.80 r. odbył się II Krajowy Sympozjon nt. „Wpływ wibracji na otoczenie”, którego organizatorami byli: Instytut Fizyki Politechniki Krakowskiej, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej oraz PTMTS O/Kraków. W Sympozjonie uczestniczyło 60 osób, wygłoszono 39 referatów, w dyskusji wzięło udział 41 osób.

Łódź — Oddział współuczestniczył w organizowaniu Sympozjonu na temat „Kompozyty i konstrukcje zespolone w budownictwie”, który odbył się w dniach 13—14 maja 1980 r. Opublikowano 19 referatów. W Sympozjonie wzięło udział 80 osób.

Poznań — w dniach 21—24 maja 1980 r. odbył się IX Sympozjon na temat „Drgania w układach fizycznych” w Błażejewku k/Poznania. Wygłoszono 81 referatów. W Sympozjonie wzięło udział 129 uczestników.

Warszawa — w dniach 24—27 września 1980 r. odbył się IX Sympozjon „Doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego”. Wpłynęło 90 prac, wygłoszono 10 referatów sekcyjnych. W Sympozjonie wzięło udział około 150 uczestników z różnych ośrodków naukowych Polski oraz 6 z zagranicy. Opublikowano zbiór referatów.

### Seminaria i kursy

Częstochowa — odbył się kurs „Metody numeryczne w mechanice płynów” — część I „Programowanie i wykorzystanie minikomputera MERA 400”. Wzięło w nim udział 22 uczestników.

Gdańsk — odbyły się 2 seminaria „Dynamika stochastyczna” (prof. E. Bielewicz, I i II kwartał po 2 godz. tygodniowo, 12 uczestników) „Metoda elementów skończonych w obliczeniach drgań i stateczności konstrukcji” (prof. J. Kruszewski, doc. W. Ostachowicz I—IV.1980 r. po 2 godz. tygodniowo, 8 uczestników).

Gliwice — Zarząd Oddziału razem z Instytutem Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej zorganizował kurs na temat „Metoda elementów skończonych dla inżynierów”. Kurs rozpoczął się 28 marca pod kierownictwem naukowym prof. A. Jakubowskiego. Uczestniczyło w nim 35 osób.

Poznań — Oddział kontynuował kurs na temat „Metody elementów skończonych”, który miał miejsce od 29.11.1979 r. do 30.03.1980 r. Uczestniczyło w nim 44 osoby. Wygłoszono 4 wykłady, których wykładowcami byli mgr M. Kwiek, dr M. Ciałkowski i dr K. Magnucki

Szczecin — od 16.11.80 r. prowadzone jest seminarium przez doc. dr inż. M. Kmiecika. Temat „Metody elementu skończonego”. Wykłady odbywają się raz w tygodniu i cieszą się zainteresowaniem. Obecnych około 20 osób.

### Konkursy naukowe

Częstochowa — II Ogólnokrajowy Konkurs na pracę z „Mechaniki Płynów” Wpłynęło 9 prac. Sąd konkursowy zebrał się 12.09.1980 r. w składzie Prof. Z. Orzechowski (IMP PŁ) — przewodniczący, doc. M. Nowak (IPPT PAN W-wa), dr J. Kołodko — (IBW PAN Gdańsk), doc. W. Bachmacz (IPKM PCz) przedstawiciel ZG PTMTS, dr A. Jarza (IMC PCz), mgr inż. M. Trzeciński (IMC PCz). Przyznano 2 równorzędne II nagrody, trzecią i wyróżnienie.

Wrocław — Oddział zorganizował konkurs na pracę z „Mechaniki stosowanej”. Wpłynęło 11 prac. Sąd Konkursowy zbierał się w dniach 8—9.12.80 r. w składzie 7 osób. Po wysłuchaniu opinii recenzentów postanowiono nie przyznać I nagrody, przyznać II i III nagrodę oraz 4 wyróżnienia.

### Działalność wydawnicza

Na działalność wydawniczą składają się:

— kwartalnik *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*

— materiały wydawnicze z okazji sympozjów

W 1980 r. wydano 4 zeszyty MTiS o objętości 53,5 ark. wyd.

W ramach działalności oddziałów wydano:

Gdańsk — Materiały konferencji „Problemy losowe w mechanice konstrukcji”.

Gliwice — Zbiór referatów XIX sympozjonu „Modelowanie w mechanice” z. 45, Gliwice 1980. 148 stron. Wydano również programy obrad XIX sympozjonu.

Łódź — wydano 19 referatów z sympozjonu „Kompozyty i konstrukcje zespolone w budownictwie”.

Poznań — Program XIX Zjazdu Delegatów PTMTS i IX Sympozjonu „Drgania w układach fizycznych”.

Warszawa — wydano zbiór referatów i program IX Sympozjonu „Doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego” 24—27 września. Sprawozdanie nie obejmuje danych dotyczących Oddziału w Rzeszowie — z powodu braku.



W następnym numerze ukażą się prace:

- JUBILEUSZ PROFESORA WITOLDA NOWACKIEGO  
Юбилей Профессора Витольда Новацкого  
Professor Witold Nowacki's Jubilee
- W. NOWACKI, Zagadnienia termosprężystości  
Проблемы термоупругости  
Problems of thermoelasticity
- D. ROGULA, Pola sprzężone i nieklasyczne ośrodki ciągłe  
Сопряженные поля и неклассические сплошные среды  
Coupled fields and nonclassical continuous media
- J. LEMAÎTRE, Zniszczenie w zakresie lepkoplastycznym  
Разрушение при условиях ползучести  
Fracture in creep conditions
- K. GRYSA, O zagadnieniu odwrotnym dla równania falowego  
Некоторая обратная задача для волнового уравнения  
On an inverse problem for wave equation
- H. KAMIŃSKI, Metoda oznaczania współczynników charakteryzujących procesy opisane równaniem parabolicznym  
Метод определения коэффициентов которые характеризуют процессы изображенные уравнением параболического типа  
Method of determination of a coefficients characterizing the processes described by parabolic equation
- K. GRYSA, Metody określania liczby Biota i współczynnika przejmowania ciepła  
Методы определения числа Биота и коэффициента теплообмена  
Methods of determination of the Biot number and the heat transfer coefficient
- W. KARMOWSKI, S. MAZURKIEWICZ, Wyznaczenie płaskiego pola naprężenia z obrazu izodyn uzyskiwanych metodą światła rozproszonego  
Новый метод интерпретирования изображения изодин  
Determination of plane state of stress from the image of isodynes obtained by the method of scatteredlight
- J. KOMOROWSKI, J. STUPNICKI, Skośne prześwietlanie w metodzie warstwy elastoptycznej  
Метод неклонного просвечивания фотоупругих покрытий  
Oblique incidence in photo-stress method
- J. WOJNAROWSKI, St. ZAWIŚLAK, O klasach 2-drzew w syntezy dyskretnych układów mechanicznych  
О классах 2-деревьев в синтезе дискретных механических систем  
On the classes of 2-trees in the synthesis of discrete mechanical systems
- Z. BASISTA, Optymalne kształtowanie belki trójwarstwowej w procesie ustalonych harmonicznycy drgań wymuszonych  
Оптимальное формирование трехслойной балки в процессе установившихся гармонических вынужденных колебаний  
Optimal design of the three-layer sandwich beam under stable harmonical excitation
- J. WŁASZCZUT, Analiza stateczności pryzmatycznych łuków o osi odkształcającej  
Анализ устойчивости призматических балок  
Stability of extensible prismatic arches
- P. WRZECIONIAK, Stateczność eulerowska prętów przekładkowych z rdzeniem o zmiennej charakterystyce  
Эйлерова устойчивость трёхслойных стержней с заполнителем о переменной характеристике  
Overall instability of sandwich struts with a core of variable characteristic
- LIST DO REDAKCJI J. WACŁAWIK, O pewnych rozwiązaniach równania dyfuzji w przestrzeni dystrybucji

BIULETYN INFORMACYJNY

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty  
Cena prenumeraty krajowej  
rocznie zł 120.—  
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następnym,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland, Please send payments to the account of Ars Polona—Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)*

---