

7<sup>u</sup> 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



PL ISSN 0079-3701

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 19 • ZESZYT 3

WARSZAWA 1981

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

## SPIS TREŚCI

Profesor Waclaw OLSZAK — wspomnienie pośmiertne	353
Cz. WOŹNIAK, Analiza niestandardowa w mechanice newtonowskiej punktu materialnego. Нестандартный анализ в ньютоновской механике материальной точки. Nonstandart analysis in Newtonian Mechanics of mass point.	355
R. GUTOWSKI, Wrażliwość rozwiązań równania liniowych drgań membrany na zmiany współczynników równania. Чувствительность решений уравнения линейных колебаний мембраны относительно изменений его коэффициентов. Sensitivity of solutions of linear equation for a vibrating membrane to variation of equation coefficients.	375
K. STEŚLIŃSKI, O pewnym matematycznym modelu procesu kolmatacji wymiarowej w szczelinach i jego zastosowaniu. Математическая модель процесса колматации на щелях и его применение. On a mathematical model of calmatage process in cracks and its application.	385
S. MATYSIAK, Z. OLESIAK, O pewnych własnościach naprężeń w kompozytach lamelkowych. О некоторых свойствах напряжений в композиционных материалах с лентообразными волокнами. Properties of stresses in composites with ribbon-like inclusions.	397
C. KOMORZYŃSKI, J. STUPNICKI, Wpływ podatności pierścieni wzmacniających na pracę kompensatorów mieszkowych. Влияние податливости укрепляющих колец на работу компенсаторов сильфонного типа. Influence of the rigidity of reinforcing rings on the work of expansion joints.	409
St. KASPRZYK, R. ZIERNICKI, Drgania giętne belki wywołane poruszającym się układem dyskretnym. Поперечные колебания балки вынужденные двигающейся механической системой из сосредоточенными параметрами Transverse vibrations of a beam forced by discrete material system moving on it.	423
M. NOWAK, Analityczny opis starzenia się poliamidu 6 niszczonego zmęczeniowo. Аналитическое описание старения усталостно разрушаемого полиамида 6. Analytical description of aging of polyamide 6 subjected to fatigue failure.	435
K. VARSAMOV, K. YOSIFOV, A. HALMOV, On the calculation of the velocity induced by a vortex-source. Wyznaczanie prędkości przepływu wywołanej wirowym stożkiem. Вычисление скорости порожденной вихрем конусом.	455
B. BORKOWSKI, W. KORDYLEWSKI, Warunek utraty stabilności swobodnej w warstwie porowatej. Условие потери стабильности естественной конвекции в пористом слое. Loss of stability condition for free convection in a porous layer.	463
St. DROBNIAK, Lepkość wirowa w osiowo-symetrycznych strugach zawirowanych. Турбулентная вязкость осе-симметричной закрученной струи. Eddy viscosity in axially symmetric swirling jets	477
BIULETYN INFORMACYJNY	491

<b>WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK</b>
--

*7-720*

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

**M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A**

KWARTALNIK

TOM 19 • ZESZYT 3

WARSZAWA 1981

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

*531*

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY  
MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY  
IGOR KISIEL, IERZY MARYNIAK,  
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,  
JÓZEF WIĘCKOWSKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK—REDAKTOR NACZELNY,  
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR  
ANDRZEJ SZANIAWSKI—REDAKTOR,  
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR  
MONIKA WĄGROWSKA—REDAKTOR,  
ELŻBIETA OLSZEWSKA—SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

---

Nakład 630. Ark. wydawniczych 11.25. Ark. drukarskich 9,75. Papier offs. b. mat. kl. III, 80 g. 70×100  
Oddano do składania 9.XI.1981 r. Druk ukończono w lutym 1983 r. Zam. 1025/81 Cena zł 30.—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa



PROFESOR WACLAW OLSZAK  
(1902 - 1980)

Nauka polska poniosła dotkliwą stratę. Dnia 8 grudnia 1980 r. odszedł od nas na zawsze jeden z najwybitniejszych mechaników polskich — Profesor Waclaw Olszak. Przez ostatnie 11 lat swego bogatego i pracowitego życia pełnił obowiązki Rezydenta Międzynarodowego Centrum Nauk Mechanicznych (CISM) w Udine we Włoszech.

Jego energia w działalności naukowej i organizacyjnej wydawała się niespożyta. Jeszcze na Kongresie Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej o Stosowanej (IUTAM) w Toronto w sierpniu 1980 słuchaliśmy z zainteresowaniem jak wygłaszał referat (wspólny z prof. Z. Bychawskim) i podziwialiśmy jego aktywność w organizowaniu nowych sympozjów, konferencji i wykładów, w nawiązywaniu kontaktów naukowych oraz w zachęcaniu do działalności naukowej. Niedawno, w marcu 1981, odbyła się jedna z tych konferencji organizowana przez IUTAM/CISM, niestety już bez udziału jej głównego promotora (Symposium on crack formation and propagation, Tuczno 22 - 27 marca 1981).

Spis prac naukowych i technicznych Profesora Waclawa Olszaka obejmuje imponującą liczbę ponad 300 pozycji, w tym dziesięć monografii naukowych. Pierwsza jego praca

naukowa ukazała się drukiem w roku 1923, ostatnie będą się jeszcze ukazywać przez pewien czas.

70-lecie urodzin Wacława Olszaka zbiegło się z jubileuszem 50-lecia Jego działalności naukowej. Mechanika Teoretyczna i Stosowana wydała z tej okazji specjalny zeszyt (2, 10 (1972)), który zawierał omówienie działalności naukowej i organizacyjnej Jubilatą oraz przeglądowe i oryginalne prace Jego współpracowników i uczniów. Nie powtarzamy tu omówienia zasług naukowych i zaszczytów, których dostąpił Profesor Wacław Olszak, członek PAN i wielu zagranicznych akademii nauk, doktor honoris causa wielu uniwersytetów w kraju i zagranicą. Wspomnimy jedynie, że znalazł On czas i chęć by w okresie powstawania naszego Towarzystwa być jego członkiem założycielem oraz wiceprezesem i członkiem Zarządu Głównego PTMTS w latach 1958 - 1962. W uznaniu zasług naukowych w dziedzinie mechaniki w szczególności w teorii plastyczności oraz w działalności na rzecz rozwoju Towarzystwa, PTMTS nadało mu w roku 1970 najwyższą godność członka honorowego.

Żegnamy z głębokim żalem Wielkiego Mechanika, Nauczyciela wielu z nas, życzliwego Człowieka.

*Redakcja  
Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*

ANALIZA NIESTANDARDOWA W MECHANICE NEWTONOWSKIEJ  
PUNKTU MATERIALNEGO

CZESŁAW W O Ź N I A K (WARSZAWA)

Splis treści

Wstęp

1. Co to jest analiza niestandardowa?
  - 1.1. Systemy relacyjne
  - 1.2. Modele niestandardowe
  - 1.3. Liczby rzeczywiste w analizie niestandardowej
  - 1.4. Przestrzenie metryczne w analizie niestandardowej
2. Niestandardowy model mechaniki Newtona
  - 2.1. Analiza niestandardowa a mechanika
  - 2.2. Podstawowe relacje mechaniki Newtona
  - 2.3. Niestandardowa interpretacja czasoprzestrzeni Galileusza
  - 2.4. Niestandardowa interpretacja równań Newtona
3. Niestandardowe podejście do pojęcia więzów
  - 3.1. Standardowe reprezentacje funkcji wewnętrznych
  - 3.2. Niestandardowe podejście do więzów zewnętrznych
  - 3.3. Niestandardowe podejście do więzów wewnętrznych
  - 3.4. Uwagi i wnioski

Literatura cytowana

Wstęp

Mechanika newtonowska punktów materialnych, podobnie jak i inne działy fizyki teoretycznej, jest teorią opisującą pewną klasę zjawisk fizycznych przy pomocy odpowiednich modeli matematycznych. Modele te formułowane są z reguły w ramach aparatu pojęciowego analizy matematycznej. Tym samym wszystkie wartości dowolnej funkcji liczbowej (występującej w znanych w mechanice modelach zjawisk) są wielkościami „tego samego rzędu” tj. należą do tzw. archimedesowych systemów wielkości. Oznacza to, że dla każdego dwóch dodatnich skalarowych wielkości fizycznych  $a$ ,  $b$ , które są porównywalne (tj.  $a = b$  lub  $a < b$  lub  $a > b$ ), istnieje zawsze liczba naturalna  $n$  taka, że  $na \geq b$ . Tworzenie matematycznych modeli zjawisk uwzględniających wielkości „różnych rzędów” wymaga zastosowania bardziej ogólnego aparatu analitycznego, dysponującego niearchimedesowymi systemami wielkości. Systemy takie spotykamy w tzw. analizie niestandar-

dowej, w której prócz liczb rzeczywistych „standardowych” mamy także do czynienia z liczbami „nieskończenie małymi” i „nieskończenie wielkimi” co do wartości bezwzględnej.

Początek rozwoju analizy niestandardowej przypada na rok 1961, w którym została ogłoszona praca A. ROBINSONA [1]. Wprawdzie istnienie niearchimedesowych systemów wielkości było znane już wcześniej, niemniej dopiero w [1] wykazano, że mogą być one konstruowane przy pomocy pewnych procedur prowadzących do rozszerzenia pojęcia liczby rzeczywistej. Pełny wykład podstaw analizy niestandardowej zawiera monografia A. ROBINSONA [2] z roku 1966 (por. także opracowanie M. MACHOVERA i J. HIRSCHFELDA [3] oraz monografię M. DAVIESA [4]). Warto nadmienić, że A. Robinson, będący twórcą niestandardowej analizy, był też współautorem (wraz z P. J. Kelemenem) pierwszej pracy poświęconej zastosowaniu metod analizy niestandardowej w fizyce teoretycznej, [5]. Przegląd prac A. Robinsona na temat niestandardowej analizy zawiera drugi tom opracowania [6]. Szereg prac dotyczących różnych zagadnień analizy niestandardowej oraz jej zastosowań można znaleźć w opracowaniach pokonferencyjnych [8, 9].

Korzystanie z wielkości „nieskończenie małych” lub „nieskończenie dużych” w mechanice Newtona punktu materialnego jest fizycznie umotywowane; przykładowo skokowa zmiana prędkości punktu materialnego prowadzi do nieskończonej wartości przyspieszenia, zderzeniom punktów materialnych towarzyszą nieskończone wartości sił a skończone zmiany pędu, krętu lub energii mogą zachodzić w nieskończenie małych przedziałach czasu. Wprowadzenie do mechaniki niearchimedesowych systemów wielkości, typowych dla analizy niestandardowej, umożliwia nadanie wielkościom nieskończonym charakteru ilościowego (tj. traktowanie ich tak samo jak liczb skończonych) i głębsze wnikięcie w strukturę wymienionych powyżej sytuacji fizycznych.

Zasadniczym celem pracy jest sformułowanie podstaw i opis niektórych zagadnień mechaniki Newtona (mechaniki skończonych układów punktów materialnych) przy użyciu analizy niestandardowej jako aparatu matematycznego teorii. W ramach takiego sformułowania możemy tworzyć nowe modele matematyczne zjawisk, które opisuje i bada mechanika. Są to modele nie mające znanych odpowiedników w dotychczasowym sformułowaniu mechaniki Newtona. W szczególności, jako przypadek równań mechaniki skończonych lecz „niestandardowych” układów punktów materialnych otrzymamy znane równania mechaniki kontinuum. Tym samym analiza niestandardowa jest pomostem między mechaniką „dyskretną” a mechaniką kontinuum materialnego. Zastosowania analizy niestandardowej w mechanice przedstawione w pracy mają więc dwojaki charakter; z jednej strony prowadzą do pewnych „standardowych” sformułowań (analiza niestandardowa jest wtedy stosowana jako metoda), z drugiej strony otrzymujemy relacje, które mogą być wyrażone wyłącznie przy wykorzystaniu pojęć niestandardowych (np. relacja między tensorem naprężenia a oddziaływaniami punktów materialnych).

Przedstawione poniżej opracowanie składa się z trzech rozdziałów. Rozdział pierwszy to wprowadzenie do analizy niestandardowej, korzystające z cytowanych już monografii [2, 4] oraz pierwszych ustępów opracowania W. A. J. LUXEMBURGA [7]. Drugi rozdział podaje podstawy mechaniki Newtona jako fragmenty pewnego systemu relacyjnego i omawia niestandardowe rozszerzenie tego systemu. Prowadzi to do niestan-



dardowego modelu mechaniki Newtona. Jedno z prostych zastosowań tego modelu podano w rozdziale trzecim. Bardziej złożonym przypadkom zastosowań będzie poświęcona oddzielna praca. Całość opracowania ogranicza się do zastosowania analizy niestandardowej w mechanice Newtona skończonych układów punktów materialnych.

### 1. Co to jest analiza niestandardowa?<sup>1)</sup>

**1.1. Systemy relacyjne.** Podstawy analizy niestandardowej są nierozzerwalnie związane z podstawami logiki matematycznej, a w szczególności z działem logiki zwanym teorią modeli. Tym samym odpowiedź na pytanie „co to jest analiza niestandardowa?” poprzedzić należy wprowadzeniem pewnych pojęć z których korzysta teoria modeli. Punktem wyjścia rozważań jest pojęcie systemu relacyjnego jako pewnego systemu obiektów zwanych relacjami. W systemie tym wyróżnimy przede wszystkim obiekty zwane elementami indywidualnymi. Przyjmujemy *a priori*, że są to pewne elementy „pierwotne” (*urelemente*), tj. takie o których nic nie zakładamy prócz tego, że nie są one zbiorami. Wszystkie inne obiekty systemu relacyjnego są utworzone przy pomocy elementów indywidualnych, przy czym będziemy rozróżniać obiekty różnego typu (jak zbiory, relacje *n*-członowe, relacje między relacjami etc.). Wprowadzając najpierw czysto formalnie pojęcie typu, podamy następnie definicję systemu relacyjnego.

Klasę wszystkich typów oznaczymy przez  $T$  i zdefiniujemy indukcyjnie przyjmując, że:  
 1°  $0$  jest typem (zamiast symbolu „ $0$ ” można wprowadzić np. symbol „ $*$ ”, por. [10] s. 205, lub dowolny inny symbol),

2° jeśli  $\tau_1, \dots, \tau_n$  są typami to  $\tau \equiv (\tau_1, \dots, \tau_n)$  jest typem,

3°  $T$  jest najmniejszą klasą spełniającą warunki 1°, 2°.

Systemem relacyjnym nazwiemy indeksowaną rodzinę zbiorów  $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$  taką, że:

1°  $B_0$  jest danym nieskończonym zbiorem elementów indywidualnych (elementy te będziemy także nazywać relacjami typu zero),

2°  $B_\tau$  dla  $\tau = (0, \dots, 0)$  ( $n$  razy) jest dla każdego  $n$ ,  $n \geq 1$ , danym zbiorem relacji  $n$ -członowych w  $B_0$  (tj. zbiorem podzbiorów w  $B_0 \times \dots \times B_0$ ,  $n$  razy; każdy z tych podzbiorów nazwiemy relacją typu  $(0, \dots, 0)$ ),

3° jeżeli  $B_{\tau_1}, \dots, B_{\tau_n}$ ,  $n \geq 1$ , są już zdefiniowanymi zbiorami relacji odpowiednio typów  $\tau_1, \dots, \tau_n$ , to  $B_\tau$  dla  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$  jest danym zbiorem relacji  $n$ -członowych w produkcie  $B_{\tau_1} \times \dots \times B_{\tau_n}$  (tj. zbiorem podzbiorów w  $B_{\tau_1} \times \dots \times B_{\tau_n}$ , z których każdy nazwiemy relacją typu  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ).

Zgodnie z powyższą definicją, dla każdego  $\tau \in T$ , zbiór  $B_\tau$  jest zbiorem relacji typu  $\tau$ , np.  $B_{(0)}$  jest znanym zbiorem zbiorów elementów indywidualnych (ogólniej  $B_{(\tau)}$  jest znanym zbiorem podzbiorów zbioru  $B_\tau$ ) a  $k$ -tą dziedzinę relacji typu  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , tworzą relacje typu  $\tau_k$ . System  $\mathfrak{M}$  zawiera tylko relacje określonego typu (zgodnie z tzw. zasadą czystości typów, por. np. [10], s. 214) tj. nie występują w nim takie obiekty jak

<sup>1)</sup> Rozdział ten zawiera ogólne wprowadzenie do analizy niestandardowej, niezbędne do zrozumienia lektury dalszej części pracy. Przedstawione tu podejście korzysta z pojęcia systemu relacyjnego i teorii typów, por. np. [2,7]; podejście alternatywne, teoriomnogościowe omówiono w [4] (por. także [13]).

np. zbiory utworzone z elementów indywidualnych i zbiorów tych elementów. Dla każdego  $\tau \in T$  i  $\tau \neq 0$ , zbiór  $B_\tau$  nie musi zawierać wszystkich relacji typu  $\tau$ ; w szczególności może być zbiorem pustym. System relacyjny zawierający wszystkie relacje wszystkich typów nazwiemy zupełnym; w systemie takim dla każdego  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$  mamy  $B_{\tau_1} \times \dots \times B_{\tau_n} \in B_{(\tau_1, \dots, \tau_n)}$ ,  $n \geq 1$ .

Niech  $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$  będzie danym (niezupełnym) systemem relacyjnym oraz niech  $(A_\tau)_{\tau \in T}$  będzie zupełnym systemem relacyjnym takim, że  $A_0 = B_0$ . Relacje należące do  $A_\tau \setminus B_\tau$ ,  $\tau \in T$ , nazwiemy wtedy zewnętrznymi (względem  $\mathfrak{M}$ ) a relacje należące do  $B_\tau$  — relacjami wewnętrznymi (względem  $\mathfrak{M}$ ). Zbiór wszystkich relacji wewnętrznych wszystkich typów oznaczymy przez  $M$ . Z definicji  $A_0 \setminus B_0 = \emptyset$  tj. wszystkie relacje typu zero są wewnętrzne.

Celem opisu systemu relacyjnego  $\mathfrak{M}$  wprowadzamy pewien język formalny  $L$ . Język ten zawiera, między innymi, zbiór symboli  $C$ , zwanych stałymi. Wprowadzając dowolne lecz ustalone i wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru  $M$  na pewien podzbiór zbioru  $C$ , stwierdzamy, że każda relacja systemu  $\mathfrak{M}$  jest oznaczona przy pomocy pewnej stałej języka  $L$ . Prócz stałych język formalny zawiera też inne symbole (takie jak funktory zdaniotwórcze, kwantyfikator, nawiasy, symbole do oznaczania zmiennych, etc.) przy pomocy których, w pewien określony sposób, budujemy formuły języka  $L$ . Spośród różnych formuł języka  $L$  interesować nas dalej będą jedynie formuły, które dotyczą systemu relacyjnego  $\mathfrak{M}$ ; nazwiemy je zdaniami określonymi w systemie  $\mathfrak{M}$ . Każda taka formuła zawierać może więc jedynie te stałe języka  $L$ , które oznaczają pewne relacje systemu  $\mathfrak{M}$ ; ponadto wszystkie symbole formuły oznaczające zmienne (jeśli występują) muszą być związane kwantyfikatorami. Każde zdanie określone w systemie  $\mathfrak{M}$  może być w tym systemie prawdziwe lub fałszywe.

W dalszym ciągu założymy, że dany jest pewien zupełny system relacyjny  $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$  oraz zbiór zdań języka  $L$  prawdziwych w tym systemie. Zbiór ten oznaczymy przez  $K$ , nazywając system  $\mathfrak{M}$  modelem zbioru zdań  $K$ .

**1.2. Modele niestandardowe.** Niech teraz  $*\mathfrak{M} = (*B_\tau)_{\tau \in T}$  będzie systemem relacyjnym różnym od  $\mathfrak{M}$ , którego zbiór wszystkich relacji  $*M$  został wzajemnie jednoznacznie odwzorowany na pewien podzbiór zbioru  $C$  stałych języka formalnego  $L$  (tj. języka wprowadzonego poprzednio do opisu systemu  $\mathfrak{M}$ ). Jeżeli każde zdanie prawdziwe w  $\mathfrak{M}$  jest jednocześnie prawdziwe w  $*\mathfrak{M}$  to system relacyjny  $*\mathfrak{M}$  nazwiemy niestandardowym modelem zbioru zdań  $K^2$ ). Łatwo zauważyć, że zbiór relacji  $M$  można zanurzyć w  $*M$ ; każdy bowiem element w  $M$  jest oznaczony przy pomocy pewnej stałej języka formalnego  $L$ , która jednocześnie oznacza pewien element w  $*M$ . Relacje systemu  $*\mathfrak{M}$ , które są oznaczone tymi samymi stałymi co pewne relacje systemu  $\mathfrak{M}$ , będziemy nazywać standardowymi. W dalszym ciągu zbiór relacji standardowych systemu  $*\mathfrak{M}$  będziemy oznaczać symbolem  $M$ , tj. symbolem oznaczającym zbiór relacji systemu  $\mathfrak{M}$ . Podobnie przez  $B_\tau$  oznaczymy również zbiór relacji standardowych typu  $\tau$ , będący podzbiorem zbioru  $*B_\tau$ . Taka niejednoznaczność oznaczeń nie prowadzi do nieporozumień, gdyż zasadniczym przedmiotem rozważań jest dalej system relacyjny  $*\mathfrak{M}$ . Zachodzi jednak pytanie, czy system  $*\mathfrak{M}$  zawiera także relacje nie standardowe. Pozytywna odpowiedź na to pytanie

<sup>2)</sup> Podobnie każde zdanie prawdziwe w  $*\mathfrak{M}$  i określone w  $\mathfrak{M}$  jest także prawdziwe w  $\mathfrak{M}$ .

jest związana z pojęciem tzw. relacji współbieżnych w systemie  $\mathfrak{M}$ . Relację  $(R) \in B_\tau$ , gdzie  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ , nazywamy współbieżną (jest to więc relacja binarna) gdy dla każdego skończonego ciągu elementów  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \text{dom}(R)$  istnieje element  $b \in \text{ran}(R)$ <sup>3)</sup> taki, że  $(a_1, b) \in (R)$ ,  $(a_2, b) \in (R)$ , ...,  $(a_m, b) \in (R)$ . Każdej relacji współbieżnej w  $\mathfrak{M}$  odpowiada relacja standardowa  $(*R)$  w  $*\mathfrak{M}$  (oznaczona w języku  $L$  są samą stałą). Można wykazać, że istnieje element  $c \in \text{ran}(*R)$  spełniający warunek:  $(*a, c) \in (R)$  dla każdego  $*a \in \text{dom}(R)$ . Nie uzasadniając powyższego stwierdzenia (por. np. [2]) zauważmy, że relacja  $\neq$  („nie równa się”), której dziedziną i przeciwdziedziną jest dowolny nieskończony zbiór  $B_{\tau_1}$ , jest relacją współbieżną typu  $\tau = (\tau_1, \tau_1)$  w systemie relacyjnym  $\mathfrak{M}$ . Tym samym istnieje element  $c \in *B_{\tau_1}$  taki, że  $*a \neq c$  dla każdego  $*a \in B_{\tau_1}$ . Element  $c$  jest więc niestandardową relacją typu  $\tau_1$  w  $*\mathfrak{M}$ . Wykazuje się także, że system relacyjny  $*\mathfrak{M}$ , który nazwiemy rozszerzeniem zupełnego systemu  $\mathfrak{M}$ , jest niezupełny. Tym samym będziemy mieć dalej do czynienia z relacjami standardowymi (które są zawsze wewnętrzne), z relacjami wewnętrznymi niestandardowymi oraz z relacjami zewnętrznymi (nie należącymi do  $*M$  lecz należącymi do pewnego zupełnego systemu relacyjnego, w którym  $*B_0$  jest zbiorem elementów indywidualnych). W szczególności każdy nieskończony zbiór  $B_\tau$  jest relacją zewnętrzną typu  $(\tau)$  (por. [6], s. 378).

W dwóch następnych podrozdziałach pracy podamy dwa proste przykłady ilustrujące rozważania ogólne naszkicowane powyżej. Zgodnie z tymi rozważaniami będziemy zakładać, że:

1° dany jest pewien zupełny system relacyjny  $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$ , w którym zbiór  $B_0$  elementów indywidualnych jest nieskończony, wraz ze zbiorem zdań  $K$  prawdziwych w tym systemie (mówiąc poglądowo, jest to zbiór zdań „opisujących” system  $\mathfrak{M}$ ),

2° istnieje system relacyjny niezupełny  $*\mathfrak{M} = (*B_\tau)_{\tau \in T}$ , będący rozszerzeniem systemu  $\mathfrak{M}$  (tj.  $B_\tau \subset *B_\tau$  dla każdego  $\tau \in T$ ), „opisywany” tym samym zbiorem zdań  $K$  co system  $\mathfrak{M}$ ; każde zdanie prawdziwe w  $\mathfrak{M}$  jest więc także prawdziwe w  $*\mathfrak{M}$  (jednakże przy zastrzeżeniu, że dotyczy ono wyłącznie relacji wewnętrznych względem  $*\mathfrak{M}$ !),

3° w systemie  $*\mathfrak{M} = (*B_\tau)_{\tau \in T}$  istnieją relacje wewnętrzne niestandardowe (tj. należące do  $*B_\tau \setminus B_\tau$ ), których istnienie wykazujemy tworząc relacje współbieżne w  $\mathfrak{M}$ .

Dowolną procedurę analityczną w ramach której wprowadzamy niestandardowy model  $*\mathfrak{M}$  zbioru zdań  $K$  (prawdziwych w pewnym systemie relacyjnym  $\mathfrak{M}$ ) nazwiemy dalej analizą niestandardową.

**1.3. Liczby rzeczywiste w analizie niestandardowej.** Jako system relacyjny  $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$  przyjmujemy teraz system zupełny w którym zbiorem  $B_0$  elementów indywidualnych jest zbiór  $R$  liczb rzeczywistych. Przedmiotem rozważań będzie rozszerzenie  $*\mathfrak{M} = (*B_\tau)_{\tau \in T}$  systemu  $\mathfrak{M}$ . Oznaczając  $*R \equiv *B_0$ , również elementy zbioru  $*R$  (tj. elementy indywidualne systemu  $*\mathfrak{M}$ ) nazwiemy liczbami rzeczywistymi. Zgodnie z przyjętymi poprzednio założeniami mamy  $R \subset *R$ , gdzie  $R$  jest teraz zbiorem standardowych liczb rzeczywistych. Są to liczby oznaczane w języku  $L$  tymi samymi stałymi co liczby rzeczywiste w  $\mathfrak{M}$ . Ponieważ relacja  $<$  („mniejszy niż”) w zbiorze  $R$  jest współbieżna, przeto istnieje liczba  $a \in *R$  taka, że  $r < a$  dla każdego  $r \in R$ . Tym samym istnieje liczba rzeczywista większa od wszystkich standardowych liczb rzeczywistych. Podobnie wykazujemy, że istnieje

<sup>3)</sup> Symbole  $\text{dom}(R)$ ,  $\text{ran}(R)$ , oznaczają odpowiednio dziedzinę i przeciwdziedzinę relacji  $(R)$ .

liczba rzeczywista mniejsza od wszystkich standardowych liczb rzeczywistych. Liczby takie nazwiemy nieskończonymi. W zbiorze  $*R$  są określone wszystkie te relacje, które są określone dla znanych w analizie liczb rzeczywistych. Są to relacje standardowe systemu  $*\mathfrak{M}$ . Tym samym dowolne elementy zbioru  $*R$  można dodawać, mnożyć, i dzielić (za wyjątkiem dzielenia przez zero) otrzymując elementy zbioru  $*R$ . W szczególności istnieje liczba  $\varepsilon = a^{-1}$ , gdzie  $a$  jest liczbą nieskończoną; liczbę taką nazwiemy infinitezymalną. Łatwo wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb nieskończonych (zbiór  $*R$  nie jest ograniczony gdyż nie jest ograniczony zbiór „klasycznych” liczb rzeczywistych) a więc istnieje także nieskończenie wiele liczb infinitezymalnych. Zbiór wszystkich liczb infinitezymalnych oznaczmy przez  $\mu(0)$ ,  $\mu(0) \subset *R$ . Jeśli  $a$  jest dowolną lecz ustaloną liczbą rzeczywistą to przez  $\mu(a)$  oznaczmy zbiór wszystkich liczb postaci  $a + \varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon$  jest dowolną liczbą infinitezymalną; zbiór taki nazywamy monadą liczby  $a$ . Liczbę rzeczywistą, która nie jest nieskończoną, nazwiemy skończoną. Można wykazać, że każda skończona liczba  $r$  daje się jednoznacznie przedstawić w postaci sumy  $r = {}^0r + \varepsilon$ , gdzie  ${}^0r \in R$ ,  $\varepsilon \in \mu(0)$ . Liczbę standardową  ${}^0r$  nazywamy wtedy częścią standardową liczby skończonej  $r$ . Łatwo wykazać, że nie istnieje w żadnej monadzie w  $*R$  liczba najmniejsza lub największa. Podobnie liczby takie nie istnieją w zbiorach liczb nieskończonych dodatnich i ujemnych.

Zbiór liczb naturalnych jako podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, jest określony pewną relacją typu (0) w  $\mathfrak{M}$ . Ta sama relacja w  $*\mathfrak{M}$  (będąca relacją standardową) określa w  $*R$  podzbiór  $*N$ , którego elementy nazywamy w dalszym ciągu liczbami naturalnymi. Oznaczmy ponadto przez  $N$  zbiór liczb naturalnych w  $*N$ , którego elementy są oznaczane (w języku  $L$ ) przy pomocy tych samych stałych co znane liczby naturalne. Elementy zbioru  $N$ ,  $N \subset *N$ , nazwiemy standardowymi liczbami naturalnymi. Łatwo wykazać, że wszystkie niestandardowe liczby naturalne są nieskończone. Każdy zbiór postaci  $\{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $a_k \in *B_r$ , nazwiemy skończonym nawet, gdy  $n$  jest nieskończoną liczbą naturalną. Gdy  $n$  jest skończoną (a więc standardową) liczbą naturalną, ciąg ten nazwiemy  $S$  — skończonym (standardowo skończonym). Zbiór liczb rzeczywistych dodatnich jest systemem niearchimedesowym w tym sensie, że nie dla każdego  $a, b \in *R^+$  istnieje liczba naturalna skończona  $n$  taka, że  $na > b$  (liczba  $n$ , występująca w definicji archimedesowego systemu wielkości, por. Wstęp, jest skończoną liczbą naturalną).

W powyższych rozważaniach pojawiają się w sposób naturalny takie podzbiory zbioru  $*R$  jak  $\mu(a)$ ,  $*R \setminus R$ ,  $R$ ,  $*N \setminus N$ ,  $N$ . Jako zbiory elementów indywidualnych (relacji typu 0) są to więc relacje typu (0). Zachodzi pytanie, czy relacje te należą do  $*\mathfrak{M}$ , tj. czy są relacjami wewnętrznymi. Celem wykazania, że relacja  $*N \setminus N$  jest zewnętrzna (tj. że zbiór nieskończonych liczb naturalnych nie należy do  $*B_{(0)}$ ) weźmy pod uwagę zdanie „każdy nie pusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera element najmniejszy”. Zdanie to, jako prawdziwe w systemie relacyjnym  $\mathfrak{M}$  (dla  $B_0 = R$ ) jest także prawdziwe w jego rozszerzeniu  $*\mathfrak{M}$  (gdzie  $*B_0 = *R$ ). Z drugiej jednakże strony nie istnieje najmniejsza nieskończona liczba naturalna (gdyby  $n$  było taką liczbą, to  $n-1$  byłoby liczbą skończoną, co nie jest prawdą). Tym samym zbiór  $*N \setminus N$  jest relacją zewnętrzną. Podobnie zewnętrznymi są wszystkie powyżej wymienione podzbiory zbioru  $*R$ .

Dowody powyższych twierdzeń wraz z dokładnym omówieniem wprowadzonych pojęć a także niestandardowe ujęcie rachunku różniczkowego i całkowego jest tematem trzeciego rozdziału monografii Robinsona [2].

**1.4. Przestrzeń metryczna w analizie niestandardowej.** Przestrznią metryczną nazywamy parę  $(T, \varrho)$  gdzie  $T$  jest pewną przestrzenią punktową a  $\varrho: T \times T \rightarrow R$  jest funkcją, która każdej parze punktów  $x, y \in T$  przyporządkowuje nieujemną liczbę  $\varrho(x, y)$  (odległość punktów  $x, y$ ), przy czym dla dowolnych  $x, y, z \in T$  mamy: 1°  $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ , 2°  $\varrho(x, y) = 0$  tylko gdy  $x = y$ , 3°  $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$ . Celem zastosowania analizy niestandardowej do teorii przestrzeni metrycznych wprowadzimy zupełny system relacyjny  $\mathfrak{M} = (B_r)_{r \in T}$  w którym  $T \subset B_0$  i  $R \subset B_0$ , tj. w którym przestrzeń  $T$  i zbiór  $R$  są relacjami typu (0). Relacje te są standardowymi relacjami w rozszerzeniu  ${}^*\mathfrak{M} = ({}^*B_r)_{r \in T}$  systemu  $\mathfrak{M}$ . Tym samym  ${}^*T \subset {}^*B_0$ ,  ${}^*R \subset {}^*B_0$ , gdzie własności zbioru  ${}^*R$  liczb rzeczywistych zostały omówione w poprzednim rozdziale. Zbiór standardowych punktów przestrzeni  ${}^*T$  oznaczmy przez  $T$ . Monadą dowolnego punktu  $x \in {}^*T$  nazwiemy zbiór  $\mu(x)$  punktów  $y$  takich, że  $\varrho(x, y)$  jest liczbą nieskończenie małą. Galaktyką dowolnego punktu  $x \in {}^*T$  nazwiemy zbiór  $G(x)$  punktów  $y$ , takich, że  $\varrho(x, y)$  jest liczbą skończoną; wszystkie punkty standardowe należą oczywiście do jednej galaktyki, którą nazywamy główną.

Topologię w przestrzeni  ${}^*T$ , której bazą jest zbiór wszystkich kul  $B(x, r) := \{y | \varrho(x, y) < r\}$ ,  $x \in {}^*T$ ,  $r \in {}^*R^+$ , nazywamy  $Q$ -topologią. W przestrzeni  ${}^*T$  wprowadzimy także topologię, której bazą będzie zbiór tzw.  $S$ -kul,  $S(x, r) := \{y | {}^0\varrho(x, y) < r\}$ ,  $x \in {}^*T$ ,  $r \in R^+$ , o standardowych promieniach  $r$  (symbol  ${}^0\varrho(x, y)$  oznacza część standardową skończonej odległości  $\varrho(x, y)$  dowolnego punktu  $y$  kuli od jej środka  $x$ ); wprowadzoną topologię nazywamy  $S$ -topologią (standardową topologią). Topologia ta odgrywa ważną rolę w zastosowaniach analizy niestandardowej w mechanice. Korzystając z  $S$ -topologii, dla dowolnego (wewnętrznego lub zewnętrznego) podzbioru  $D$ ,  $D \subset {}^*T$ , wprowadzimy pojęcia jego  $S$ -wnętrza,  $S$ -domknięcia oraz  $S$ -brzegu. Dla zbiorów wewnętrznych można wykazać, że zbiory:  $S\text{-int} D := \{x | \mu(x) \subset D\}$ ,  $S\text{-clos} D := \{x | \mu(x) \cap D \neq \emptyset\}$  oraz  $S\text{-bound} D := \{x | \mu(x) \cap D \neq \emptyset \wedge \mu(x) \cap ({}^*T \setminus D) \neq \emptyset\}$  są kolejno:  $S$ -wnętrzem,  $S$ -domknięciem i  $S$ -brzegiem zbioru wewnętrznego  $D$ .

Niech  $(x_n)_{n \in {}^*N}$  będzie dowolnym ciągiem w  ${}^*T$ . Punkt  $x \in {}^*T$  nazwiemy  $F$ -granicą tego ciągu gdy dla każdego  $\varepsilon \in R^+$  istnieje  $n_0 \in N$  takie, że  $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$  dla wszystkich  $n > n_0$ ; w powyższej definicji  $\varepsilon, n_0$  są liczbami standardowymi. Łatwo zauważyć, że gdy  $x$  jest  $F$ -granicą ciągu  $(x_n)$  to każdy punkt należący do monady  $\mu(x)$  jest także  $F$ -granicą tego ciągu. W czwartym rozdziale tej pracy będziemy korzystać z następującego twierdzenia: jeżeli  $x$  jest  $F$ -granicą ciągu wewnętrznego  $(x_n)_{n \in {}^*N}$  w  ${}^*T$ , to istnieje nieskończona liczba naturalna  $\lambda$ ,  $\lambda \in {}^*N \setminus N$  taka, że odległość  $\varrho(x, x_m)$  jest nieskończenie mała dla wszystkich nieskończonych  $m$  spełniających warunek  $m < \lambda$ . Tym samym każdy punkt  $x_m$  gdzie  $m < \lambda$  i  $m \in {}^*N \setminus N$  jest  $F$ -granicą ciągu wewnętrznego  $(x_n)_{n \in {}^*N}$ .

Niech  $D$  będzie dowolnym podzbiorem w głównej galaktyce przestrzeni  ${}^*T$ ; symbolem  ${}^0D$  oznaczmy wtedy podzbiór  ${}^*T$  zawarty w  $T$  (tj. złożony wyłącznie z punktów standardowych) zdefiniowany przez  ${}^0D := \{x | x \in T \wedge \mu(x) \cap D \neq \emptyset\}$ . Niech następnie  $f: D \rightarrow {}^*R$  będzie funkcją o dziedzinie  $D$ , przyjmującą jedynie wartości skończone i taką, że dla każdego  $x \in D$  mamy  $f(\mu(x) \cap D) \subset \mu(f(x))$ . Tym samym dla każdego  $x \in D$  istnieje dokładnie jeden punkt  ${}^0x \in {}^0D$  oraz dla każdego  $f(x)$ ,  $x \in D$ , istnieje dokładnie jedna liczba standardowa  $y$ ,  $y \in R$ , dana przez  $y = {}^0f(x)$  (tj. będąca częścią standardową liczby  $f(x)$ ) i taka sama dla wszystkich  $x \in \mu({}^0x) \cap D$ . Przyjmując  ${}^0y \equiv {}^0f({}^0x)$  dla każdego  ${}^0x \in {}^0D$ , zdefiniujemy

funkcję  ${}^0f: {}^0D \rightarrow R$ . Funkcję tę nazywamy częścią standardową funkcji  $f: D \rightarrow {}^*R$ . Można wykazać, że gdy funkcja  $f: D \rightarrow {}^*R$  jest zdefiniowana i  $S$ -ciągła (tj. ciągła w  $S$ -topologii) na wewnętrznym zbiorze  $D$ , to jej część standardowa  ${}^0f$  jest jednostajnie ciągła na  ${}^0D$ . Gdy  $D$  jest zbiorem wewnętrznym w  ${}^*T$  to  ${}^0D$  jest zbiorem domkniętym w  $T$ .

Szersze omówienie wprowadzonych tu pojęć oraz dowody powyższych twierdzeń można znaleźć w czwartym rozdziale monografii A. ROBINSONA [2].

## 2. Niestandardowy model mechaniki Newtona.

**2.1. Analiza niestandardowa a mechanika.** Analiza niestandardowa w matematyce znajduje zastosowanie jako metoda dowodzenia „standardowych” twierdzeń; celem wykazania prawdziwości pewnego zdania w systemie relacyjnym  $\mathfrak{M} = (B_r)_{r \in T}$  wystarczy wykazać jego prawdziwość w systemie rozszerzonym  ${}^*\mathfrak{M} = ({}^*B_r)_{r \in T}$  co zwykle zdecydowanie upraszcza dowód. Niezależnie od znaczenia analizy niestandardowej jako metody dowodzenia „standardowych” twierdzeń, przedmiotem badań mogą być rozszerzone systemy  ${}^*\mathfrak{M}$ . Traktując mechanikę Newtona jako pewien fragment matematyki sformułujemy ją w postaci zbioru zdań prawdziwych w pewnym zupełnym systemie relacyjnym  $\mathfrak{M} = (B_r)_{r \in T}$ . Tym samym relacje mechaniki Newtona zanurzymy w zbiorze  $M$  relacji systemu  $\mathfrak{M}$ . Pojęcia pierwotne mechaniki będą odgrywać rolę elementów indywidualnych (relacji typu zero) a prawa i twierdzenia mechaniki będą zdaniami prawdziwymi w systemie relacyjnym  $\mathfrak{M}$ . Wprowadzając następnie rozszerzenie  ${}^*\mathfrak{M} = ({}^*B_r)_{r \in T}$  systemu  $\mathfrak{M}$  będziemy rozpatrywać mechanikę w ramach analizy niestandardowej w podobny sposób, jak w poprzednim rozdziale w ramach analizy niestandardowej były badane niektóre elementy teorii przestrzeni metrycznych. Wszystkie prawa i twierdzenia mechaniki nie zmieniają przy tym swej postaci będąc zdaniami prawdziwymi w systemie rozszerzonym  ${}^*\mathfrak{M}$ . Mówiąc poglądowo, procedura taka nie zmienia treści samej mechaniki lecz wyraża tą treść przy pomocy bardziej bogatego aparatu analitycznego. Nawiązując do uwag przedstawionych we wstępie łatwo zauważyć, że zastosowanie analizy niestandardowej pozwoli na jednoczesne rozpatrywanie w mechanice wielkości „różnego rzędu” (skończonych i nieskończonych); konsekwencją tego będzie, między innymi, nowa interpretacja więzów w mechanice Newtona oraz możliwość otrzymania „standardowych” równań mechaniki kontinuum jako przypadku szczególnego mechaniki skończonych (lecz niestandardowych) układów punktów materialnych.

Przydatność mechaniki do opisu pewnych zjawisk przyrody rozstrzyga doświadczenie. Tym samym wartościom liczbowym uzyskanym z teorii winny odpowiadać zbliżone do nich wartości liczbowe uzyskane w rezultacie pomiarów badanego zjawiska. Ponieważ wartości pomiarowe są liczbami wymiernymi „standardowymi”, przeto tylko liczby standardowe, uzyskane z teorii korzystającej z aparatu niestandardowej analizy, mogą służyć za podstawę weryfikowania przydatności teorii do opisu badanego zjawiska. Nie oznacza to jednak, że wielkości niestandardowe, występujące w niestandardowym modelu mechaniki Newtona, nie mają jasnej interpretacji fizycznej. Jak wykażemy w dalszych rozważaniach, zastosowanie aparatu analizy niestandardowej umożliwi głębszy i pełniejszy

opis analityczny pewnej klasy zjawisk fizycznych, dostarczając nowych modeli matematycznych tych zjawisk.<sup>4)</sup>

**2.2. Podstawowe relacje mechaniki Newtona.** Mechnikę Newtona punktu materialnego będziemy rozpatrywać najpierw w ramach pewnego zupełnego systemu relacyjnego  $\mathfrak{M} = (A_\tau)_{\tau \in T}$ . Przyjmiemy w tym celu, że zbiór  $A_0$  elementów indywidualnych zawiera jako podzbiory następujące przestrzenie nieskończenie elementowe:

1° czterowymiarową rozmaitość różniczkową  $E$ , będącą przestrzenią zdarzeń  $p$ ,  $p \in E$ ,

2° czterowymiarową przestrzeń wektorową  $V$ , będącą przestrzenią translacji czasoprzestrzennych  $v$ ,  $v \in V$ ,

3° przestrzeń  $\mathcal{M}$ , której elementy nazwiemy punktami materialnymi  $P$ ,  $P \in \mathcal{M}$ ,

4° trójwymiarową przestrzeń wektorową  $F$ , której elementy nazwiemy siłami  $f$ ,  $f \in F$ ,

5° zbiór liczb rzeczywistych  $R$ .

Wymienione powyżej elementy indywidualne  $p, v, P, f$  systemu  $\mathfrak{M}$  interpretujemy jako pojęcia pierwotne mechaniki; ich zbiory  $E, V, \mathcal{M}, F$  oraz zbiór  $R$  są relacjami typu (0), tj.  $E, V, \mathcal{M}, F, R \in A_{(0)}$ .

Zgodnie ze znanymi aksjomatami odnośnie czasu i przestrzeni w mechanice Newtona (por. np. [11]) wprowadzimy jako relację typu (0) podzbiór  $S$ ,  $S \subset V$ , który interpretujemy jako trójwymiarową przestrzeń wektorową translacji czystoprzestrzennych. Ponadto wprowadzimy relację typu (0, 0, 0), daną funkcją  $g: E \times V \rightarrow E$  przyjmując, że  $V$  działa w  $E$  jako abelowa grupa translacji, tranzytywnie i swobodnie. Podzbiory  $E_p \equiv \{p\} + S$  w  $E$  interpretujemy, dla dowolnego  $p \in E$ , jako przestrzenie zdarzeń równoczesnych ze zdarzeniem  $p$  (przestrzenie zdarzeń równoczesnych). Wektory należące do  $V \setminus S$  nazywamy wektorami czasowymi.

W mechanice Newtona możemy posługiwać się różnymi układami jednostek fizycznych przy pomocy których wyrażamy długości przedziałów czasowych, odległości czystoprzestrzenne, wielkości sił oraz masy punktów materialnych. W związku z tym wyróżnimy następujące zbiory relacji:

1° Zbiór  $T \in A_{((0,0))}$ , gdzie elementami zbioru  $T$  są formy liniowe  $\tau: V \rightarrow R$ , spełniające warunek  $\text{Ker } \tau = S$  (tj.  $\tau(u) = 0$  dla każdego  $\tau \in T$  oraz  $u \in S$ ) przy czym dla każdej pary  $\tau_1, \tau_2 \in T$  istnieje  $\Theta \in R$ ,  $\Theta \neq 0$ , takie, że  $\tau_1 = \Theta \tau_2$ . Zbiór  $T$  nazwiemy przestrzenią form czasowych a  $\tau(p-q)$  nazwiemy odległością zdarzeń  $p, q \in E$  w formie czasowej  $\tau$ ,  $\tau \in T$ .

2° Zbiór  $H \in A_{((0,0,0))}$ , gdzie elementami zbioru  $H$  są iloczyny skalarowe  $h: S \times S \rightarrow R$ , przy czym dla każdej pary  $h_1, h_2 \in H$  istnieje  $\varepsilon \in R^+$  takie, że  $h_1 = \varepsilon^2 h_2$ <sup>5)</sup>. Dowolny element  $h, h \in H$ , nadaje przestrzeniom zdarzeń równoczesnych  $E_p$  strukturę przestrzeni

<sup>4)</sup> Zauważmy także, że ograniczenie wielkości stosowanych w teorii fizycznej do wielkości „pomiarowych”, które są liczbami wymiernymi, oznaczałoby rezygnację nie tylko z aparatu analizy niestandardowej lecz także z klasycznego rachunku różniczkowego.

<sup>5)</sup> Zmiana iloczynu skalarowego  $h_1 \rightarrow h_2$  nie zmienia kątów między dowolnymi wektorami  $u, w \in S$  lecz jedynie ich długość:

$$\frac{h_1(u, w)}{\sqrt{h_1(u, u)h_1(w, w)}} = \frac{h_2(u, w)}{\sqrt{h_2(u, u)h_2(w, w)}}, \quad h_1(u, u) \rightarrow h_2(u, u).$$

metrycznych  $(E_p, \varrho)$ ; liczbę  $\varrho(x, y) = \sqrt{h(x-y, x-y)}$ ,  $x, y \in E_p$ , nazwiemy odległością zdarzeń równoczesnych  $x, y \in E_p$  w metryce określonej iloczynem skalarowym  $h, h \in H$ .

3° Zbiór  $\Phi \in A_{((0,0,0))}$ , gdzie elementami zbioru  $\Phi$  są iloczyny skalarowe  $\varphi: F \times F \rightarrow R$ , przy czym dla każdej pary  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$  istnieje  $\alpha \in R^+$  takie, że  $\varphi_1 = \alpha\varphi_2$ . Iloczyn ten określa kąty między siłami  $f_1, f_2 \in F$  niezależnie od wyboru funkcji  $\varphi$ , natomiast wielkości sił  $|f| = \sqrt{\varphi(f, f)}$  w zależności od wyboru funkcji  $\varphi, \varphi \in \Phi$ .

4° Zbiór  $M \in A_{((0,0))}$ , gdzie elementami zbioru  $M$  są odwzorowania  $m: \mathcal{M} \rightarrow R^+$ , przy czym dla każdej pary  $m_1, m_2 \in M$  oraz każdej pary  $P, Q \in \mathcal{M}$  mamy  $m_1(P)/m_1(Q) = m_2(P)/m_2(Q)$ . Liczbę  $m(P)$  nazywamy masą punktu materialnego dla przyjętej miary  $m, m \in M$ . Dla każdej pary  $m_1, m_2 \in M$  istnieje  $\mu > 0$  takie, że  $m_1 = \mu m_2$ .

Układ elementów indywidualnych  $e_i \in S, a_i \in F, e_0 \in V \setminus S, P_0 \in \mathcal{M}$  taki, że dla przyjętych  $(\tau, h, \varphi, m) \in T \times H \times \Phi \times M$  mamy  $h(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \varphi(a_i, a_j) = \delta_{ij}, \tau(e_0) = 1, m(P_0) = 1$  (wyznacza on ortonormalne bazy wektorowe w  $S$  i  $F$ ) nazwiemy układem odniesienia dla  $(\tau, h, \varphi, m)$ <sup>6)</sup>.

Przedmiotem rozważań mechaniki są pewne skończone zbiory punktów materialnych, które dalej będziemy nazywać ciałami. Celem wprowadzenia do rozważań pojęcia ciała oznaczymy przez  $\mathcal{U}$  relację typu  $((0))$ ,  $\mathcal{U} \in A_{((0))}$ , przyjmując, że  $\mathcal{U}$  jest podzbiorem zbioru  $2^{\mathcal{M}}$  zawierającym skończenie elementowe podzbiory zbioru  $\mathcal{M}$ . Relację  $\mathcal{U}$  nazwiemy uniwersum materialnym (por. np. [12], rozdział 1) a jej elementy nazwiemy ciałami. Każde ciało w mechanice Newtona jest więc skończonym zbiorem  $\mathcal{B}$  punktów materialnych,  $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_n\}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathcal{U}$ <sup>7)</sup>. Niech  $I, I \subset R$ , będzie pewnym przedziałem liczbowym. Odwzorowania

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{B} \times I \ni (P, t) &\rightarrow p_0 + te_0 + r^k(P, t)e_k \in E, \\ \mathcal{B} \times I \ni (P, t) &\rightarrow f^k(P, t)a_k \in F, \end{aligned}$$

gdzie  $p_0$  jest dowolnym lecz ustalonym zdarzeniem,  $p_0 \in E$ , a funkcje  $r^k(P, \cdot), f^k(P, \cdot)$ , spełniają znane warunki regularności, nazywamy odpowiednio ruchem i rozkładem sił dla ciała  $\mathcal{B}$  w przedziale czasu  $I, I \subset R$ .

Własności dowolnego ciała  $\mathcal{B}, \mathcal{B} \in \mathcal{U}$ , opiszemy dalej dwoma aksjomatami. Po pierwsze postulujemy, że istnieją takie układy odniesienia (zwane inercyjnymi) w których relacja między ruchem (2.1)<sub>1</sub> a rozkładem sił (2.2)<sub>2</sub> dla dowolnego ciała  $\mathcal{B} \in \mathcal{U}$  ma postać

$$(2.5) \quad m(P)\ddot{r}^k(P, t) = f^k(P, t), \quad P \in \mathcal{B}, \quad t \in I.$$

Po drugie postulujemy, że dla każdego ciała  $\mathcal{B}$  wypadkowa siła  $f(P, t) = f^k(P, t)a_k$ , działająca na dowolny punkt  $P \in \mathcal{B}$  w dowolnej chwili  $t \in I$  jest określona wyrażeniem analitycznym postaci<sup>8)</sup>

$$(2.3) \quad f^k(P, t) = \hat{f}_P^k(t, r(P, t), \dot{r}(P, t)) + \sum_{Q \in \mathcal{B} \setminus \{P\}} \check{f}_{PQ}(\varrho(r(P, t), r(Q, t))) \frac{r^k(P, t) - r^k(Q, t)}{\varrho(r(P, t), r(Q, t))}, \quad P \in \mathcal{B},$$

<sup>6)</sup> Wskaźniki  $i, j, k$  przebiegają tu i dalej ciąg 1, 2, 3.

<sup>7)</sup> Założymy także, że dla każdego naturalnego  $n$  istnieją ciała  $n$ -elementowe,  $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_n\}$ , oraz, że podzbiory  $\mathcal{B}$  należące do uniwersum materialnego  $\mathcal{U}$  są rozłączne (por. także uwagę po wzorze).<sup>8)</sup> Tu i dalej oznaczamy:  $r \equiv (r^1, r^2, r^3)$ ,  $\dot{r} \equiv (\dot{r}^1, \dot{r}^2, \dot{r}^3)$ ,  $\varrho = (r_1, r_2) \equiv \sqrt{h(r_1 - r_2, r_1 - r_2)}$  i zakładamy  $r(P, t) \neq r(Q, t)$  dla każdego  $P \neq Q, t \in I$ .



w którym  $\hat{f}_P^k(\cdot)$  oraz  $\check{f}_{PQ}(\cdot) = \check{f}_{QP}(\cdot)$  są znanymi dla każdego ciała  $\mathcal{B}$  i dostatecznie regularnymi funkcjami. Jednocześnie zakładamy, że dla dowolnych  $P, Q \in \mathcal{B}$  istnieje ciąg punktów  $P_0 = P, P_1, \dots, P_k = Q$  należących do  $\mathcal{B}$  i taki, że  $\check{f}_{P_i P_{i+1}}(\cdot) \neq 0$  dla  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Tym samym dla każdego  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$ , mamy  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ . Wartość funkcji  $\hat{f}_P^k(t, \cdot) \mathbf{a}_k$  jest wypadkową sił zewnętrznych działających na punkt  $P$  w chwili  $t$ , wartość funkcji  $\check{f}_{PQ}(\cdot)$  jest wielkością oddziaływania punktu  $Q$  na punkt  $P$  w ciele  $\mathcal{B}$ .

Równania (2.2) i (2.3) przedstawiają relacje, należące do systemu  $\mathfrak{M}$ , będące ograniczeniami narzuconymi na ruch i rozkład sił dla dowolnego ciała  $\mathcal{B} \in \mathcal{U}$ ; po wyrugowaniu funkcji  $f^k(P, t)$  otrzymamy równania Newtona tego ciała. W powyższym sformułowaniu podstaw mechaniki Newtona (w którym obowiązują zależności (2.3)) mamy więc do czynienia wyłącznie z ciałami swobodnymi. Uniwersum materialne  $\mathcal{U}$  jest zbiorem ciał swobodnych. Mechanikę Newtona tych ciał będziemy natomiast traktować jako zbiór zdań pewnego języka formalnego  $L$ , prawdziwych w systemie relacyjnym  $\mathfrak{M} = (A_\tau)_{\tau \in T}$ .

**2.3. Niestandardowa interpretacja czasoprzestrzeni Galileusza.** Niech teraz system relacyjny  $*\mathfrak{M} = (*A_\tau)_{\tau \in T}$  będzie rozszerzeniem systemu relacyjnego  $\mathfrak{M} = (A_\tau)_{\tau \in T}$ , zawierającego relacje mechaniki Newtona dla swobodnych skończonych układów punktów materialnych. Tym samym zbiór elementów indywidualnych  $*A_0$  zawiera w sobie przestrzeń zdarzeń  $*E$ , przestrzeń translacji czasoprzestrzennych  $*V$ , przestrzeń materialną  $*M$ , przestrzeń sił  $*F$  oraz zbiór liczb rzeczywistych  $*R$ . Wszystkie relacje wymienione w poprzednim podrozdziale są relacjami standardowymi systemu  $*\mathfrak{M}$  i będą oznaczane tymi samymi symbolami co poprzednio, poprzedzonymi gwiazdką.

Niestandardowa interpretacja czasoprzestrzeni Galileusza wykorzystuje relacje  $*E, *V, g, *T, *H, *R$ , gdzie odwzorowania  $g: *E \times *V \rightarrow *E$  oraz  $\tau: *V \rightarrow *R, h: *V \times *V \rightarrow *R, \tau \in *T, h \in *H$ , mają te same własności co poprzednio. Przestrzeń wektorową translacji czysto przestrzennych  $*S$  możemy zdefiniować jako  $*S := \{u | \tau(u) = 0\}$ . Ponieważ dla każdej pary form czasowych  $\tau_1, \tau_2 \in *T$  istnieje  $\alpha \in *R, \alpha \neq 0$ , takie, że  $\tau_1 = \alpha \tau_2$ , przeto definicja przestrzeni  $*S$  nie zależy od wyboru formy  $\tau$ . W zbiorze zdarzeń  $*E$  wyróżnimy podzbiór zdarzeń standardowych  $E, E \subset *E$ , podobnie w przestrzeni translacji  $*V$  wyróżnimy zbiór translacji standardowych  $V, V \subset *V$ .

Jeżeli  $v$  jest translacją standardową, tj.  $v \in V$ , to każdą translację  $'v = \lambda v$ , gdzie  $\lambda$  jest dowolną liczbą infinitesimalną,  $\lambda \in \mu(0)$ , nazwiemy translacją infinitesimalną. Zbiór wszystkich translacji infinitesimalnych oznaczymy przez  $\mu_V(0)$ ; tworzą one podgrupę translacji zbioru zdarzeń  $*E$ . Tym samym każdemu zdarzeniu  $x \in *E$  możemy przyporządkować monadę tego zdarzenia  $\mu_E(x)$ , kładąc  $\mu_E(x) := \{y | y = x + 'v, 'v \in \mu_V(0)\}$ . Dowolną translację postaci  $v = v_0 + 'v$ , gdzie  $v_0 \in V, 'v \in \mu_V(0)$ , nazwiemy skończoną, oznaczając przez  $G_V(0)$  zbiór tych translacji. Niech  $x \sim y$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x - y \in G_V(0)$ . Relacja  $\sim$  jest w  $*E$  relacją równoważności i dzieli przestrzeń zdarzeń  $*E$  na rozłączne podzbiory  $G_E(x)$ , które nazwiemy galaktykami zdarzeń. Galaktykę zdarzeń do której należą wszystkie zdarzenia standardowe nazwiemy galaktyką główną.

Zbiór  $\mu_S(0) \equiv \mu_V(0) \cap *S$  nazwiemy zbiorem przestrzennych translacji infinitesimalnych, natomiast zbiór  $G_S(0) \equiv G_V(0) \cap *S$  nazwiemy zbiorem przestrzennych translacji skończonych. Zachodzi  $\mu_S(0) \subset G_S(0)$ , przy czym każdą przestrzenną translację, która

nie jest skończona nazwiemy nieskończoną. Niech  $x, y \in {}^*E$ . Niech  $x \simeq y$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x-y \in \mu_S(\theta)$ . Relacja  $\simeq$  jest relacją równoważności i dzieli zbiór zdarzeń  ${}^*E$  na rozłączne podzbiory, które nazwiemy przestrzennymi monadami. Zdarzenia należące do tej samej przestrzennej monady (są to zdarzenia równoczesne) nazwiemy nieskończenie bliskimi. Podobnie relacja  $\sim$ , gdzie teraz  $x \sim y$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x-y \in G_S(\theta)$ , dzieli zbiór  ${}^*E$  na rozłączne podzbiory, które nazwiemy przestrzennymi galaktykami. Zdarzenia należące do tej samej przestrzennej galaktyki (są to także zdarzenia równoczesne) nazwiemy skończenie przestrzennie odległymi. Zdarzenia równoczesne należące do różnych przestrzennych galaktyk nazwiemy nieskończenie przestrzennie odległymi.

Niech  ${}^*E_x$  będzie przestrzenią wszystkich zdarzeń równoczesnych ze zdarzeniem  $x \in {}^*E$ ,  ${}^*E_x := \{y | y = x + u, u \in {}^*S\}$ . Każdy zbiór  $\mu_E({}^*E_x) := \{y | y \in \mu(z), z \in {}^*E_x\}$ , nazwiemy zbiorem zdarzeń prawie równoczesnych; każda para zdarzeń równoczesnych jest więc też parą zdarzeń prawie równoczesnych. Każdy zbiór  $G_E({}^*E_x) := \{y | y \in G_E(z), z \in {}^*E_x\}$  nazwiemy zbiorem zdarzeń skończenie odległych w czasie. Zdarzenia, które nie są skończenie odległe w czasie nazwiemy nieskończenie odległymi w czasie.

Niech  $\tau, h$  będą dowolnymi lecz ustalonymi elementami standardowymi z  ${}^*T, {}^*H$ , odpowiednio, tj. niech  $\tau \in T, h \in H$ . Wtedy zdarzenia  $x, y \in {}^*E$  są prawie równoczesne gdy  $\tau(x-y) \in \mu(\theta)$ , natomiast są one skończenie odległe w czasie gdy  $\tau(x-y) \in G(\theta)$ . Podobnie zdarzenia równoczesne  $x, y \in {}^*E$  należą do jednej przestrzennej monady gdy  $h(x-y, x-y) \in \mu(\theta)$  natomiast należą do tej samej przestrzennej galaktyki gdy  $h(x-y, x-y) \in G(\theta)$ . Powyższe warunki są konieczne i wystarczające. Oznaczając przez  $\varrho(x, y) = \sqrt{h(x-y, x-y)}$  odległość zdarzeń równoczesnych  $x, y$ , mamy  $\varrho(x, y) \in \mu(\theta)$  dla zdarzeń równoczesnych należących do tej samej monady ( $x, y$  są wtedy zdarzeniami nieskończenie bliskimi) oraz  $\varrho(x, y) \in G(\theta)$  dla zdarzeń równoczesnych należących do tej samej galaktyki ( $x, y$  są wtedy zdarzeniami skończenie przestrzennie odległymi).

Oznaczmy przez  ${}^0\tau(v)$  i  ${}^0h(u_1, u_2)$  części standardowe liczb  $\tau(v), h(u_1, u_2)$  dla dowolnych  $v, u_1, u_2 \in G_V(\theta)$ . Odwzorowania  ${}^0\tau: G_V(\theta) \rightarrow R, {}^0h: G_V(\theta) \times G_V(\theta) \rightarrow R$ , nazwiemy odpowiednio  $S$ -miarą czasową i  $S$ -miarą przestrzenną.<sup>8)</sup>  $S$ -miara czasowa przyporządkowuje każdej parze zdarzeń  $(x, y)$  skończenie odległych w czasie,  $y \in G_E({}^*E_x)$ , liczbę standardową  ${}^0\tau(y-x)$ , którą nazwiemy  $S$ -upływem czasu od zdarzenia  $x$  do zdarzenia  $y$  mierzonym w  $\tau$ .  $S$ -upływ czasu pomiędzy zdarzeniami prawie równoczesnymi jest równy zero.  $S$ -miara przestrzenna przyporządkowuje każdemu dwóm zdarzeniom skończenie przestrzennie odległym (a więc równoczesnym) liczbę standardową  ${}^0\varrho(x, y) = \sqrt{{}^0h(y-x, y-x)}$ , którą nazwiemy  $S$ -odległością przestrzenną tych zdarzeń mierzona w  $h$ .  $S$ -odległość zdarzeń nieskończenie bliskich jest równa zero. Dla zdarzeń nieskończenie odległych w czasie  $S$ -upływ czasu nie jest określony, podobnie jak dla zdarzeń nieskończenie przestrzennie odległych nie jest określona ich  $S$ -odległość. Zbiory  $S$ -miar czasowych i przestrzennych oznaczmy odpowiednio przez  ${}^0T, {}^0H$ . Dla każdej pary  ${}^0\tau_1, {}^0\tau_2 \in {}^0T$  istnieje niezerowa liczba standardowa  $\alpha$  taka, że  ${}^0\tau_1 = \alpha {}^0\tau_2$ . Podobnie dla każdej pary  ${}^0h_1, {}^0h_2 \in {}^0H$  istnieje dodatnia liczba standardowa  $\beta$  taka, że  ${}^0h_1 = \beta {}^0h_2$ .

Zgodnie z własnościami  $S$ -miar  ${}^0\tau, {}^0h$ , zdarzenia prawie równoczesne będziemy interpretować jako zdarzenia, których nie można rozróżnić przy pomocy będących do naszej

<sup>8)</sup> Litera „ $S$ ” oznacza, że wartości tych form są liczbami standardowymi.

dyspozycji środków pomiaru czasu; podobnie zdarzenia nieskończenie bliskie i równoczesne interpretujemy jako zdarzenia, których nie można rozróżnić przy pomocy stojących do naszej dyspozycji środków pomiaru odległości. Zdarzenia nieskończenie odległe w czasie (nieskończenie odległe w przestrzeni) będziemy natomiast interpretować jako zdarzenia, upływ czasu (odległość) między którymi, z uwagi na ograniczoność środków pomiarowych, również nie podlega pomiarowi. Tym samym, korzystając z aparatu analizy niestandardowej, możemy mówić o pewnej skali rozpatrywanego zjawiska, rozróżniając w nim wielkości „różnego rzędu”. W powyższych rozważaniach formy  $\tau, h$  (na podstawie których utworzyliśmy  $S$ -miary  $\tau^0, h^0$ ) były dowolne lecz standardowe,  $\tau \in T \subset {}^*T$ ,  $h \in H \subset {}^*H$ . Celem opisu przy pomocy liczb standardowych upływów czasu i odległości „nieskończenie małych” i „nieskończenie wielkich”, należy wprowadzić odpowiednie niestandardowe formy czasowe  $\tau \in {}^*T \setminus T$  i przestrzenne  $h \in {}^*H \setminus H$ ; przypadki takie będą rozpatrzone w osobnej pracy.

**2.4. Niestandardowa interpretacja równań Newtona.** Uniwersum materialne  ${}^*\mathcal{U}$  jest podzbiorem zbioru  $2^{*\mathcal{M}}$  (gdzie  ${}^*\mathcal{M}$  jest przestrzenią punktów materialnych) zawierającym skończenie elementowe rozłączne podzbiory zbioru  ${}^*\mathcal{M}$  zwane ciałami. Ponadto dla każdego  $m \in {}^*\mathcal{N}$  istnieje ciało  $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_m\}$ ,  $\mathcal{B} \in {}^*\mathcal{U}$ , zawierające dokładnie  $m$  punktów materialnych. Gdy  $m$  jest liczbą naturalną nieskończoną,  $m \in {}^*\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}$ , mamy do czynienia z ciałem niestandardowym (zbiór  $\mathcal{B}$  jest wtedy również zbiorem skończonym por. 1.3). Rozkład masy w ciele  $\mathcal{B}$  opisujemy wykorzystując dowolną miarę  $m \in {}^*\mathcal{M}$ ,  $m: {}^*\mathcal{M} \rightarrow {}^*\mathcal{R}^+$ . Oznaczając ten rozkład symbolem  $m_{\mathcal{B}}$ , mamy  $m_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \ni P \rightarrow m(P) \in {}^*\mathcal{R}^+$ . Jeżeli punkt materialny  $P$  jest punktem standardowym,  $P \in \mathcal{M}$ , to jego masa  $m(P)$  wyrażona w dowolnej standardowej mierze  $m \in \mathcal{M} \subset {}^*\mathcal{M}$  jest liczbą standardową; stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Niech  $h$  i  $\varphi$  będą dowolnymi ustalonymi elementami standardowymi odpowiednio w  ${}^*H, {}^*\Phi$  tj.  $h \in H \subset {}^*H, \varphi \in \Phi \subset {}^*\Phi$ . Niech ponadto elementy  $e_i \in {}^*S, a_i \in {}^*F, i = 1, 2, 3$ , tworzą ortonormalne bazy wektorowe odpowiednio w  ${}^*S, {}^*F$ , tj. niech  $h(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ,  $\varphi(a_i, a_j) = \delta_{ij}$ . Ruch i rozkład sił dla ciała  $\mathcal{B}$  w pewnym przedziale czasu  $I, I \subset {}^*\mathcal{R}$ , jest wtedy dany odwzorowaniami postaci (2.1). Dla danego zdarzenia  $p_0 \in {}^*E$  i wektora  $e_0 \in {}^*V \setminus {}^*S$  (o których założymy, że są standardowe), mamy wtedy

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{B} \times I \ni (P, t) &\rightarrow p_0 + te_0 + r^k(P, t)e_k \in {}^*E, \\ \mathcal{B} \times I \ni (P, t) &\rightarrow f^k(P, t)a_k \in {}^*F, \end{aligned}$$

przy czym funkcje  $r^k(P, \cdot): I \rightarrow {}^*\mathcal{R}, f^k(P, \cdot): I \rightarrow {}^*\mathcal{R}, k = 1, 2, 3$ , są funkcjami wewnętrznymi (mogącymi przyjmować takie wartości niestandardowe) spełniającymi znane warunki regularności<sup>9)</sup>.

Niech teraz układ standardowych elementów indywidualnych  $e_i \in {}^*S, a_i \in {}^*F, e_0 \in {}^*V \setminus {}^*S, P_0 \in \mathcal{M}$ , będzie inercyjnym układem odniesienia dla standardowych form  $h, \varphi, \tau$  oraz standardowej funkcji rozkładu masy<sup>10)</sup>. Obowiązuje wtedy postać (2.2)

<sup>9)</sup> Aby nie wprowadzać dodatkowych oznaczeń, elementy indywidualne i relacje należące do systemu  ${}^*\mathcal{M}$ , występujące w (2.4) i w dalszych wzorach, oznaczyliśmy tymi samymi symbolami co relacje należące do  $\mathcal{M}$  i występujące w (2.1) - (2.3).

<sup>10)</sup> Z założenia tego w ostatnim rozdziale pracy zrezygnujemy, wprowadzając do rozważań także niestandardowe elementy z  ${}^*H, {}^*\Phi, {}^*T, {}^*\mathcal{M}$ .

drugiego prawa dynamiki Newtona, przy czym występujące w (2.2) funkcje są teraz wewnętrzne lecz nie koniecznie standardowe. Rozpatrując wyłącznie ciała swobodne (uniwersum materialne  ${}^*\mathcal{U}$  składa się tylko z takich ciał, por. poprzedni podrozdział) przyjmiemy, że wypadkowe siły działające na punkty materialne ciała są określone wyrażeniem postaci (2.3). Tym samym przyjmiemy, że

$$(2.5) \quad m(P)\ddot{r}^k(P, t) = \hat{f}_P^k(t, r(P, t), \dot{r}(P, t)) + \\ + \sum_{Q \in \mathcal{B} \setminus \{P\}} \check{f}_{PQ}(\varrho(r(P, t), r(Q, t))) \frac{r^k(P, t) - r^k(Q, t)}{\varrho(r(P, t), r(Q, t))}, \quad P \in \mathcal{B} \equiv \{P_1, \dots, P_n\}, \\ t \in I,$$

gdzie  $\hat{f}_P^k(\cdot)$ ,  $\check{f}_{PQ}(\cdot)$  są znanymi, dostatecznie regularnymi, funkcjami wewnętrznymi, przy czym obowiązują nadal uwagi wymienione po wzorze (2.3). Układ  $3n$  równań (2.5) (gdzie  $k = 1, 2, 3$  oraz  $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_n\}$ ), który nazwiemy równaniami ruchu, jest układem równań różniczkowych zwyczajnych dla  $3n$  funkcji wewnętrznych  $r^k(P, \cdot) : I \rightarrow {}^*\mathcal{R}$ , określających ruch ciała  $\mathcal{B}$  z uniwersum materialnego  ${}^*\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{B} \in {}^*\mathcal{U}$ . Wszystkie funkcje występujące w (2.5) mogą przyjmować dowolne wartości z rozszerzonego (niearchimedeseowego) zbioru liczb rzeczywistych, tj. mogą przyjmować także wartości nieskończenie małe i nieskończenie duże. Liczba  $n$  punktów materialnych ciała  $\mathcal{B}$  może być ponadto liczbą nieskończoną,  $n \in {}^*\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}$ .

Równania ruchu (2.5) przedstawiają pewną relację należącą do systemu relacyjnego  ${}^*\mathfrak{M} = ({}^*A_\tau)_{\tau \in T}$ , tj. relację wewnętrzną względem  ${}^*\mathfrak{M}$ . Tym samym wszystkie funkcje występujące w (2.5) są wewnętrzne (por. [2], s. 49). Relacja ta nie jest nowym postulatem mechaniki Newtona (dla swobodnych układów punktów materialnych) lecz jest niestandardową interpretacją równań Newtona tj. postacią równań Newtona w systemie rozszerzonym  ${}^*\mathfrak{M}$ . Traktując bowiem wszystkie postulaty mechaniki Newtona jako zdania języka formalnego  $L$  prawdziwe w systemie relacyjnym zupełnym  $\mathfrak{M} = (A_\tau)_{\tau \in T}$  i zakładając, że system relacyjny  ${}^*\mathfrak{M} = ({}^*A_\tau)_{\tau \in T}$  jest rozszerzeniem niestandardowym systemu  $\mathfrak{M}$ , otrzymujemy od razu prawdziwość tych zdań w systemie  ${}^*\mathfrak{M}$ . Należy zauważyć, że nie zachodzi tu konieczność przedstawiania *explicite* postulatów mechaniki w postaci pewnych zdań języka formalnego (prawdziwych w  $\mathfrak{M}$ ) lecz ważna jest jedynie możliwość takiego przedstawienia (por. [2], s. 60). Należy także pamiętać, że wszystkie znane twierdzenia analizy dotyczące układów równań różniczkowych zwyczajnych wynikających z (2.2) i (2.3) są nadal prawdziwe dla układów równań różniczkowych określonych relacją wewnętrzną postaci (2.5). Twierdzenia te można bowiem sformułować w języku formalnym  $L$  jako zdania prawdziwe w systemie relacyjnym  $\mathfrak{M}$ , tym samym pozostają one również prawdziwe w systemie rozszerzonym  ${}^*\mathfrak{M}$ . Zapewnia to istnienie rozwiązań układu (2.5) (przy spełnieniu znanych założeń regularności) także w przypadku gdy, funkcje występujące w (2.5) są wewnętrzne lecz nie są standardowe oraz gdy  $n$  jest liczbą nieskończoną.

W przypadku szczególnym wszystkie funkcje występujące w (2.5) mogą być standardowe oraz liczba punktów ciała może być standardową tj. skończoną liczbą naturalną. Relacja (2.5) jest wtedy relacją standardową (standardowymi równaniami ruchu) tj. odpowiada jej relacja określona wzorami (2.2), (2.3) należącą do systemu  $\mathfrak{M}$ . Tym samym standar-

dowe równania ruchu opisują te same problemy fizyczne, które są opisywane znanymi równaniami mechaniki swobodnych układów punktów materialnych tj. równaniami Newtona. Aparat analizy niestandardowej nie wnosi wtedy nowych treści do mechaniki. Ciało  $\mathcal{B}$ , dla którego relacja (2.5) jest standardowa (dla „standardowego” inercyjnego układu odniesienia), nazwiemy ciałem standardowym.

Sytuacja ulega zmianie gdy relacja (2.5) jest wewnętrzna lecz nie standardowa, tj. gdy co najmniej jedna z funkcji występujących w (2.5) jest wewnętrzna lecz nie standardowa. Równania ruchu (2.5) rozpatrywanego ciała opisują wtedy pewien problem fizyczny, który nie może być opisany równaniami Newtona (2.2), (2.3). Ciało  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B} \in {}^*\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}$ , jest wtedy ciałem niestandardowym a równania (2.5) nazwiemy niestandardowymi równaniami ruchu. Tym samym niestandardowe ciała stanowią nowy model matematyczny zjawisk fizycznych w ramach mechaniki Newtona swobodnych układów punktów materialnych.

### 3. Niestandardowe podejście do pojęcia więzów.

**3.1. Standardowe reprezentacje funkcji wewnętrznych.** Celem nie tylko jakościowego lecz także ilościowego porównania rezultatów otrzymanych z teorii z wynikami eksperymentu należy funkcjom wewnętrznym występującym w równaniach ruchu (2.5) przyporządkować pewne relacje standardowe. Gdy funkcje wewnętrzne, o których mowa, są  $\mathcal{S}$ -ciągłe to odpowiednie relacje standardowe są funkcjami zwanymi częściami standardowymi funkcji wewnętrznych (por. [2], s. 115 oraz podrozdział 1.4 tego opracowania). Te części standardowe stanowią podstawę do ilościowego porównania teorii z eksperymentem. Ponieważ funkcje ciągłe występujące w (2.5) nie muszą być  $\mathcal{S}$ -ciągłe (ich części standardowe mogą nie istnieć), przeto należy dysponować bardziej ogólną standardową reprezentacją funkcji wewnętrznych, którą przedstawimy poniżej.

Niech  $(X, \varrho_X)$ ,  $(Y, \varrho_Y)$  będą danymi przestrzeniami metrycznymi,  ${}^*X$ ,  ${}^*Y$  rozszerzeniami odpowiednio zbiorów  $X$ ,  $Y$ , oraz  $\psi: {}^*X \rightarrow {}^*Y$  — funkcję wewnętrzną ciągłą określoną na zbiorze (wewnętrzny)  $D(\psi)$ . W zastosowaniach do mechaniki będziemy przyjmować  ${}^*X \equiv {}^*R^m$ ,  ${}^*Y \equiv {}^*R^k$ , oraz zakładać, że  $\varrho_X$ ,  $\varrho_Y$ , są znanymi metrykami odległościowymi w przestrzeniach Euklidesa. Każdej funkcji  $\psi$  przyporządkujemy standardową multi-funkcję  $S_\psi: X \rightarrow 2^Y$ , kładąc

$$(3.1) \quad S_\psi(x) := \{y | y \in Y \wedge \mu(y) \cap \psi[\mu(x) \cap D(\psi)] \neq \emptyset\},$$

gdzie  ${}^0D(\psi) := \{x | x \in X \wedge [\mu(x) \cap D(\psi)] \neq \emptyset\}$ .

Tym samym  $S_\psi(x) \equiv {}^0(\psi[\mu(x) \cap D(\psi)])$ ,  $x \in {}^0D(\psi)$ . Dziedzina  $\mathcal{S}$ -efektywną  $\psi$  nazwiemy podzbiór  $D_e(\psi)$  zbioru  ${}^0D(\psi)$ , złożony z punktów  $x$  dla których  $S_\psi(x) \neq \emptyset$ :

$$(3.2) \quad D_e(\psi) := \{x | x \in {}^0D(\psi) \wedge S_\psi(x) \neq \emptyset\}.$$

Funkcję wewnętrzną  $\psi: {}^*X \rightarrow {}^*Y$ , ciągłą i taką, że  $D_e(\psi) \neq \emptyset$ , nazwiemy właściwą; multi-funkcję  $S_\psi$  będziemy nazywać wtedy  $\mathcal{S}$ -reprezentacją funkcji  $\psi$ . Jeżeli funkcja  $\psi$  jest —  $\mathcal{S}$ -ciągła na  $D(\psi)$  (tj.  $\psi[\mu(x) \cap D(\psi)] \subset \mu[\psi(x)]$  dla każdego  $x \in D(\psi)$  oraz przyjmuje wartości tylko w głównej galaktyce przestrzeni  ${}^*Y$  (tj.  $\mu[\psi(x)] \cap Y \neq \emptyset$  dla każdego  $x \in D(\psi)$ ) wtedy jest właściwa oraz można wykazać, że  $S_\psi(x) = \{{}^0\psi(x)\}$  dla każdego  $x \in {}^0D(\psi)$ . Tym samym  $\mathcal{S}$ -reprezentacją funkcji  $\mathcal{S}$ -ciągłej  $\psi$  jest jej część standardowa  ${}^0\psi$  (jeżeli

istnieje). Ogólniej:  $S_\psi(x) = \{\psi(x)\}$  dla pewnego  $x \in {}^0D(\psi)$  gdy  $\psi[\mu(x) \cap D(\psi)] \subset \mu(\psi(z))$  dla pewnego  $z \in D(\psi)$ . Podzbiór dziedziny  $S$ -efektywnej  $D_e(\psi)$  funkcji właściwej  $\psi$ , dla którego  $S_\psi(x) = \{\psi(x)\}$ , oznaczmy przez

$$(3.3) \quad D_1(\psi) := \{x | x \in {}^0D(\psi) \wedge S_\psi(x) = \{y\}, y \in Y\},$$

i nazwiemy dziedziną  $S$ -jednoznaczności. Mamy więc  $D_1(\psi) \subset D_e(\psi) \subset {}^0D(\psi)$ .

Kładąc  $*X \equiv *R$ ,  $*Y \equiv *R^3$  oraz  $\psi: *R \rightarrow *R^3$ , dokonajmy teraz  $S$ -reprezentacji ruchów  $r: *R \rightarrow *R^3$ , prędkości  $\dot{r}: *R \rightarrow *R^3$  i przyspieszeń  $\ddot{r}: *R \rightarrow *R^3$  punktu materialnego. Przyjmiemy, że  $I = D(r)$  jest standardowym przedziałem czasu,  $D(r) = (t_0, t_1) \subset *R$ ,  $t_0, t_1 \in R$ , oraz, że  $r(\cdot)$  jest funkcją ciągłą w  $D(r)$  mającą w  $D(r)$  ciągłe pierwszą i drugą pochodną. Zakładamy także, że funkcje  $r, \dot{r}, \ddot{r}$  są funkcjami właściwymi. Rozróżnimy następujące przypadki:

1°  $D_1(\psi) = {}^0D(\psi)$  dla  $\psi \in \{r, \dot{r}, \ddot{r}\}$ . Istnieją wtedy funkcje standardowe  ${}^0r, {}^0\dot{r}, {}^0\ddot{r}$  określone na  ${}^0D(r)$  a tym samym dla każdej chwili  $t \in {}^0D(r)$   $S$ -reprezentacja ruchów, prędkości i przyspieszeń jest jednoznaczna, tj.  $S_\psi(t) = \{\psi(t)\}$ ,  $t \in (t_0, t_1) \subset R$ , dla  $\psi \in \{r, \dot{r}, \ddot{r}\}$ .

2°  $D_e(\psi) = {}^0D(\psi)$  dla  $\psi \in \{r, \dot{r}, \ddot{r}\}$ . Dla każdej chwili  $t \in {}^0D(r)$  istnieje  $S$ -reprezentacja ruchów, prędkości i przyspieszeń, lecz dla  $t \in D_e(\psi) \setminus D_1(\psi)$  jest ona niejednoznaczna. W szczególności, standardowej chwili  $t \in D_e(\dot{r}) \setminus D_1(\dot{r})$  przyporządkowujemy wieloelementowy zbiór prędkości  $S_{\dot{r}}(t) \subset R^3$  a chwili  $t \in D_e(r) \setminus D_1(r)$  przyporządkowujemy wieloelementowy zbiór „standardowych” położeń  $S_r(t)$  punktu materialnego.

3°  ${}^0D(r) \setminus D_e(\psi) \neq \emptyset$  dla pewnego  $\psi \in \{r, \dot{r}, \ddot{r}\}$ . Dla  $t \in {}^0D(r) \setminus D_e(\psi)$  nie istnieje możliwość liczbowego porównania rezultatów teorii z eksperymentem. Zbiory  $S_\psi(t)$  wartości standardowych są bowiem puste dla  $t \in {}^0D(r) \setminus D_e(\psi)$  co oznacza, że niektóre spośród wartości  $r^k(s), \dot{r}^k(s), \ddot{r}^k(s)$  są nieskończone dla każdego  $s \in \mu(t)$ ,  $t \in {}^0D(r) \setminus D_e(\psi)$ , gdzie  $\psi \in \{r, \dot{r}, \ddot{r}\}$ .

**3.2. Niestandardowe podejście do więzów zewnętrznych.** Wiązami zewnętrznymi dla układu punktów materialnych nazwiemy takie ograniczenia nakładane na położenia i prędkości punktów materialnych, które są wywołane siłami zewnętrznymi. Poniżej wykażemy, że siły zewnętrzne działające na swobodny punkt materialny mogą prowadzić do pewnych ograniczeń dla części standardowych wektorów położenia i prędkości tego punktu; ograniczenia takie mają więc charakter pewnych „standardowych” więzów.

Przyjmując  $\mathcal{B} = \{P\}$  rozpatrzmy układ złożony z tylko jednego punktu materialnego o standardowej masie  $m = m(P) \in R^+$ . Równania ruchu (2.5) redukują się wtedy do postaci  $m\ddot{r}(t) = \hat{f}(t, r(t), \dot{r}(t))$ ,  $t \in I$  (tu i dalej oznaczamy:  $r \equiv (r^k), \hat{f} \equiv (\hat{f}^k), b \equiv (b^k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , etc). Załóżmy, że funkcja  $\hat{f}: I \times *R^2 \times *R^3 \rightarrow *R^3$  jest sumą funkcji standardowej  $b(\cdot)$  i wewnętrznej  $s(\cdot)$ , a równania ruchu mają postać

$$(3.4) \quad m(t \quad r(t), \dot{r}(t)) + s(r(t)), \quad t \in I,$$

w której  $b: I \times *R^3 \times *R^3 \rightarrow *R^3$ ,  $s: *R^3 \rightarrow *R^3$ , są ciągłymi funkcjami, przy czym  ${}^0D(b) = D_e(b) = D_1(b) = {}^0I \times R^3 \times R^3$ . Niech ponadto  ${}^0D(s) \setminus D_e(s) \neq \emptyset$ ,  $D_e(s) \setminus D_1(s) \neq \emptyset$ , gdzie  $D_e(s)$  jest nie pustym domkniętym i spójnym podzbiorem w  ${}^0D(s) = R^3$ . Tym samym istnieje określona na  ${}^0D(b)$  część standardowa  ${}^0b$  funkcji  $b$  (gdyż  $S_b(r) = \{{}^0b(r)\}$  dla każdego  $r \in {}^0D(b)$ ), natomiast nie istnieje na  ${}^0D(b)$  część standardowa funkcji  $s$ .

Warunek

$$(3.5) \quad \mathbf{r} \in D_e(s); \quad \dot{\mathbf{r}} = {}^0\dot{\mathbf{r}}(t), \quad t \in {}^0I,$$

jest ograniczeniem nałożonym na części standardowe wektorów położenia rozpatrywanego punktu materialnego. Relację (3.5) nazwiemy relacją  $S$ -więzów zewnętrznych a siły  $s(\mathbf{r}(t))$ ,  $t \in I$ , będziemy interpretować jako siły reakcji utrzymujące  $S$ -więzy.  $S$ -reprezentacja funkcji  $s: {}^*R^3 \rightarrow {}^*R^3$  prowadzi do warunku

$$(3.6) \quad \mathbf{p} \in S_s(\mathbf{r}); \quad \mathbf{r} \in D_e(s),$$

w którym dowolny wektor  $\mathbf{p}$  spełniający (3.6) nazwiemy  $S$ -reakcją dla (standardowej) konfiguracji  $\mathbf{r}$  punktu materialnego. Jeżeli dla dowolnych (standardowych) warunków początkowych zgodnych z (3.5) istnieje funkcja  $\mathbf{r}: {}^0I \rightarrow R^3$  spełniająca dla prawie każdego  $t \in {}^0I$  relację standardową

$$(3.7) \quad m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{b}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) + \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(t) \in S_s(\mathbf{r}(t)), \quad \mathbf{r}(t) \in D_e(s),$$

to powiemy, że funkcja wewnętrzna niestandardowa  $s: {}^*R^3 \rightarrow {}^*R^3$  generuje  $S$ -więzy zewnętrzne. Ponieważ funkcja  $s$  charakteryzuje działanie siły zewnętrznej, więzy te nazwiemy zewnętrznymi.<sup>11)</sup>

Podamy teraz dwa przykłady funkcji  $s: {}^*R^3 \rightarrow {}^*R^3$  generujących  $S$ -więzy zewnętrzne:

1° Niech  $D_1(s)$  będzie regularnym obszarem  $\Omega$  w  $R^3$  o gładkim brzegu  $\partial\Omega$  oraz  $D_e(s) = \bar{\Omega}$ . Niech ponadto  $S_s(\mathbf{r}) = \{\mathbf{0}\}$  dla każdego  $\mathbf{r} \in \Omega$  oraz  $S_s(\mathbf{r}) = \{\mathbf{0} + \lambda \mathbf{n}(\mathbf{r}); \lambda \geq 0\}$  dla każdego  $\mathbf{r} \in \partial\Omega$ , gdzie  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  jest wektorem wewnętrznie normalnym do  $\partial\Omega$ . Funkcja  $s(\cdot)$  generuje wtedy  $S$ -więzy beztarciowe a każdy „standardowy” tor punktu materialnego (określony relacjami (3.7)) znajduje się w  $\bar{\Omega}$ .

2° Niech  $D_e(s)$  będzie gładką zamkniętą powierzchnią  $\Pi$  w  $R^3$ . Niech ponadto  $S_s(\mathbf{r}) = \{\mathbf{0} + \lambda \mathbf{n}(\mathbf{r}); \lambda \in R\}$  dla każdego  $\mathbf{r} \in \Pi$ , gdzie  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  jest wektorem normalnym do  $\Pi$ . Funkcja  $s$  generuje wtedy  $S$ -więzy idealne dwustronne a każdy „standardowy” tor punktu materialnego znajduje się na powierzchni  $\Pi$ . W przypadku tym  $D_1(s) = \emptyset$ .

**3.3. Niestandardowe podejście do więzów wewnętrznych.** Więżami wewnętrznymi dla układu punktów materialnych nazwiemy ograniczenia nakładane na wzajemne odległości poszczególnych punktów; zakładamy jednocześnie, że ograniczenia te są utrzymywane działaniem wyłącznie sił wewnętrznych. Tym samym przedmiotem rozważań będzie teraz układ złożony co najmniej z dwóch punktów materialnych. Założymy, że są to punkty o standardowych masach  $m(P) \in R^+$ ,  $P \in \mathcal{B}$ , poddane działaniu standardowych sił zewnętrznych, tj. sił określonych standardowymi funkcjami  $\hat{f}_P: I \times {}^*R^3 \times {}^*R^3 \rightarrow {}^*R^3$ . Założymy także, że funkcje  $\check{f}_{PQ}: {}^*R^+ \rightarrow {}^*R$  w równaniach ruchu (2.5) są sumami funkcji ciągłych standardowych  $b_{PQ}: {}^*R^+ \rightarrow {}^*R$  i funkcji ciągłych wewnętrznych lecz niestandardowych  $t_{PQ}: {}^*R^+ \rightarrow {}^*R$ , gdzie  $b_{PQ} = b_{QP}$ ,  $t_{PQ} = t_{QP}$ . Równania ruchu mają więc postać

$$(3.8) \quad m(P)\ddot{\mathbf{r}}(P, t) = \hat{f}_P(t, \mathbf{r}(P, t), \dot{\mathbf{r}}(P, t)) + \\ + \sum_{Q \in \mathcal{B} \setminus \{P\}} [b_{PQ}(\varrho(\mathbf{r}(P, t), \mathbf{r}(Q, t))) + t_{PQ}(\varrho(\mathbf{r}(P, t), \mathbf{r}(Q, t)))] \frac{\mathbf{r}(P, t) - \mathbf{r}(Q, t)}{\varrho(\mathbf{r}(P, t), \mathbf{r}(Q, t))}, \\ P \in \mathcal{B}, \quad t \in I.$$

<sup>11)</sup> Przytoczone tu rozważania łatwo uogólnić na przypadek, w którym  $s: I \times {}^*R^3 \times {}^*R^3 \rightarrow {}^*R^3$  tj. funkcja  $s$  zależy od argumentów  $t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ . Wtedy  $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \in D_e(s(t, \cdot, \cdot))$  oraz  $\mathbf{p} \in S_s(t, \cdot, \dot{\cdot})$ .

Wykażemy, że dla odpowiednio dobranych funkcji  $t_{PQ}$  rozpatrywany układ materialny można interpretować jako pewien układ ze „standardowymi” więzami wewnętrznymi. W tym celu przyjmiemy, że funkcje  $t_{PQ}$  spełniają warunki  ${}^0D(t_{PQ}) = R$ ,  $D_c(t_{PQ}) = = [\alpha_{PQ}, \beta_{PQ}]$ ,  $D_1(t_{PQ}) = (\alpha_{PQ}, \beta_{PQ})$ , gdzie  $\alpha_{PQ}, \beta_{PQ}$  są danymi dodatnimi liczbami standardowymi,  $\beta_{PQ} \geq \alpha_{PQ}$ . Załóżmy ponadto, że w przedziale czasu  $I$  wszystkie punkty  $r(P, t)$ ,  $P \in \mathcal{B}$ ,  $t \in I$ , znajdują się w głównej galaktyce przestrzeni  $*R^3$ . Argument  $\varrho$  funkcji  $t_{PQ}$  spełnia warunek

$$(3.9) \quad \varrho \in D_c(t_{PQ}), \quad \varrho = {}^0\varrho(r(P, t), r(Q, t)), \quad t \in {}^0I.$$

Relację (3.9) nazwiemy relacją  $S$ -więzów wewnętrznych, interpretując  $t_{PQ}$  jako wielkości sił reakcji utrzymujących te więzy.  $S$ -reakcjami więzów nazwiemy siły wewnętrzne o wielkościach

$$(3.10) \quad q_{PQ} \in S_{t_{PQ}}(\varrho)$$

przyjmując ponadto, że  $S_{t_{PQ}}(\varrho) = \{0\}$  dla  $\varrho \in D_1(t_{PQ})$ ,  $S_{t_{PQ}}(\beta_{PQ}) = R^- \cup \{0\}$ ,  $S_{t_{PQ}}(\alpha_{PQ}) = = R^+ \cup \{0\}$ . Oznacza to, że  $S$ -reakcje więzów są równe zeru gdy  $\varrho \in (\alpha_{PQ}, \beta_{PQ})$ , przeciwdziałają zbliżaniu się punktów gdy  $\varrho = \alpha_{PQ}$  oraz przeciwdziałają ich oddalaniu się gdy  $\varrho = \beta_{PQ}$ . Niestandardowe funkcje wewnętrzne  $t_{PQ} = t_{QP}$ ,  $P, Q \in \mathcal{B}$ , spełniające powyższe warunki, prowadzą do standardowej relacji

$$(3.11) \quad m(P)\ddot{r}(P, t) = \hat{f}_P(t, r(P, t), \dot{r}(P, t)) + \\ + \sum_{Q \in \mathcal{B} \setminus \{P\}} [b_{PQ}(\varrho(r(P, t), r(Q, t))) + q_{PQ}(t)] \frac{r(P, t) - r(Q, t)}{\varrho(r(P, t), r(Q, t))}, \\ q_{PQ}(t) \in S_{t_{PQ}}(\varrho(r(P, t), r(Q, t))), \quad \varrho(r(P, t), r(Q, t)) \in D_c(t_{PQ}).$$

Powyższa relacja opisuje pewien standardowy ruch układu punktów materialnych, poddanego więzom wewnętrznym. Gdy dla każdej pary  $P, Q \in \mathcal{B}$  mamy  $b_{PQ} = 0$  oraz  $\alpha_{PQ} = \beta_{PQ}$ , otrzymujemy przypadek szczególny rozpatrywanego układu materialnego, który można nazwać ciałem  $S$ -sztywnym, Mówiąc poglądowo, jest to układ zachowujący się jak ciało sztywne gdy działające na niego siły zewnętrzne są skończone.

**3.4. Uwagi i wnioski.** Dwa podejścia przedstawione powyżej można łącznie zastosować do jednego układu punktów materialnych (swobodnego i niestandardowego) otrzymując równania ruchu opisujące pewien układ standardowy lecz nieswobodny (z więzami zewnętrznymi i wewnętrznymi). Z przedstawionego prostego przykładu zastosowania niestandardowej postaci (2.5) równań ruchu wynika, że:

1° Analiza niestandardowa umożliwia traktowanie nieswobodnych układów punktów materialnych jako pewnej „aprosymacji” układów swobodnych; „aprosymacja” ta polega jedynie na odpowiednim doborze niektórych funkcji (wewnętrznych lecz nie standardowych) występujących w równaniach ruchu układu swobodnego i nie wymaga stosowania ani przejść granicznych, ani dodatkowych postulatów.

2° Analiza niestandardowa daje nową interpretację więzów (por. (3.5), (3.6), (3.9), (3.10)), zgodną z ich sensem fizycznym, tj. polegającą na zaniedbywaniu wielkości infinitesimalnych jako nie dających się opisać przy pomocy będących do naszej dyspozycji środków pomiarowych.



3° Przy formułowaniu podstaw mechaniki Newtona w ramach analizy niestandardowej można ograniczyć się tylko do mechaniki swobodnych układów punktów materialnych (których ruch opisują równania (2.5)), bowiem więzy nakładane na „standardowy” ruch układu są rezultatem pewnych założeń co do sił działających na punkty materialne układu.

Druga część tego opracowania będzie zawierać bardziej złożone przykłady zastosowań ruchu (2.5) do formułowania modeli matematycznych rzeczywistych układów materialnych. Między innymi wykażemy, że z niestandardowych relacji (2.5) można otrzymać standardowe relacje mechaniki kontinuum. Umożliwi to interpretację znanych pojęć mechaniki kontinuum (jak np. gęstość masy, gęstość sił brzegowych i objętościowych, tensor naprężenia) wyłącznie przy użyciu pojęć mechaniki Newtona punktów materialnych. Wykażemy także, że stosowanie różnych układów odniesienia (inercyjnych lecz nie tylko standardowych, por. podrozdział 2.2) do opisu jednego i tego samego ciała  $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_n\}$ ,  $n \in {}^*N \setminus N$ , prowadzi do różnych matematycznych standardowych modeli, tj. jedno ciało  $\mathcal{B}$  może być, w zależności od przyjętego układu odniesienia, traktowane jako układ standardowy ciągły, układ dyskretny lub nawet jako jeden punkt materialny.

#### Literatura cytowana w tekście

1. A. ROBINSON, *Non-standard analysis*, Nedrel. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64, (1961) 432 - 440.
2. A. ROBINSON, *Non-Standard Analysis*, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1966.
3. M. MACHOVER, J. HIRSCHFELD, *Lectures on the Non-Standard Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, No 94, Springer Verlag, 1969.
4. M. DAVIES, *Applied Non-Standard Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1977.
5. P. J. KELEMEN, A. ROBINSON, *The nonstandard  $\lambda: \phi_2^4(x)$  model*, Journ. Math. Phys., 13 (1972), 1870 - 1878. (por. także [6], s. 270 - 278).
6. A. ROBINSON, *Selected Papers*, vol. 2, Nonstandard Analysis and Philosophy, Editors: W. A. J. Luxemburg i S. Körner, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1979.
7. W. A. J. LUXEMBURG, *A General Theory of Monads, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability Theory*, Proc. on a Meeting on Non-Standard Analysis, Holt-Rinehart and Winston, 1969.
8. *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability Theory*, Proc. of an International Symp. on Nonstandard Analysis, Holt-Rinehart and Winston, 1969.
9. *Contributions to Non-Standard Analysis*, Symposium at Oberwolfach, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1972.
10. A. MOSTOWSKI, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Wrocław, 1948.
11. A. TRAUTMAN, *Teoria względności*, Ossolineum, 1971.
12. C. TRUESDELL, *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, The Johns Hopkins University, Baltimore, 1972.
13. A. ROBINSON, E. ZAKON, *A set-theoretical characterization of enlargements*, w [8].

#### Р е з ю м е

#### НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ В НЬЮТОНОВСКОЙ МЕХАНИКЕ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК I.

В настоящей работе исследуется и применяется нестандартный анализ к задачам ньютоновской механики. Такой подход вводит в механику не-архимедовых упорядоченных полей и допускает возможность описать бесконечных и инфинитезимальные значения физических величин.

Методы нестандартного анализа ньютоновской механики систем материальных точек приводят к более широкому классу математических моделей физических явлений по сравнению с получающимися в классической формулировке дискретной механики. На пример, из „не-стандартной“ формулировки ньютоновских принципов движения дискретной механики можно вывести фундаментальные „стандартные“ соотношения механики континуума.

В этой части работы рассмотрены общее введение в нестандартный анализ, а также фундаментальные предположения ньютоновской механики в рамках нестандартного анализа. В виде примера новая интерпретация стандартного понятия связей выведена из ньютоновских принципов движения некоторых нестандартных систем материальных точек без связей.

#### S u m m a r y

#### NON-STANDARD ANALYSIS IN NEWTONIAN MECHANICS OF MASS-POINT Systems I

The aim of the present paper is to apply and to investigate the non-standard analysis as the mathematical tool of Newtonian mechanics. Such approach introduces into mechanics non-Archimedean ordered fields and makes it possible to describe explicitly also infinite and infinitesimal values of the physical quantities. Generally speaking, the methods of the non-standard analysis in Newtonian mechanics of mass-point systems lead to the wider class of mathematical models of physical phenomena than that which can be obtained within the classical formulation of the discrete mechanics. For example, from the „non-standard“ formulation of the Newton's law of motion in discrete mechanics we can derive the fundamental „standard“ relations of the continuum mechanics.

In this part of the paper the general introduction into the non-standard analysis as well as the fundamentals of Newtonian mechanics within non-standard analysis have been outlined. As an example of applications the new interpretation of the standard concept of constraints has been derived from the Newton's law of motion of certain non-standard unconstrained mass-point systems.

INSTYTUT MECHANIKI  
UNIWERSYTET WARSZAWSKI

---

WRAŻLIWOŚĆ ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA LINIOWYCH DRGAŃ MEMBRANY  
NA ZMIANY WSPÓŁCZYNNIKÓW RÓWNANIA

ROMAN GUTOWSKI (WARSZAWA)

I. Wstęp

Problem wrażliwości modeli matematycznych powstał w ostatnim dwudziestolecu a więc stosunkowo niedawno. Stał on się wkrótce jednym z najbardziej aktualnych problemów badawczych zarówno teorii jak i praktyki modeli matematycznych opisujących zjawiska rzeczywiste. W problemie tym występują dwa główne zagadnienia, a mianowicie jakościowe i ilościowe. W celu wyrobienia sobie bliższego poglądu na oba te zagadnienia, warto przedstawić skrótowo istotę problematyki wrażliwości. Ograniczymy się tu do modeli w postaci równań różniczkowych. Dla modeli tych formuluje się szereg zagadnień takich jak istnienie i jednoznaczność rozwiązania, ciągła zależność względem wartości początkowych i parametrów, stateczność (np. w sensie Lapunowa) ze względu na zaburzenia wartości początkowych, lub prawych stron równania i inne. Wrażliwość jest problemem polegającym na zbadaniu zmiany rozwiązania równania różniczkowego, powstającej wskutek zmiany któregoś ze współczynników występujących w równaniu. Okazuje się, że zmiana stałego współczynnika o pewną niewielką wartość, nie powoduje bynajmniej stałej odchyłki od starego rozwiązania, lecz odchyłkę zmienną w czasie, odnośnie której można badać bądź jakościowo pewną jej miarę informującą nas o ograniczoności tej odchyłki, lub jej zachowaniu się z biegiem czasu, bądź też można tę odchyłkę wyznaczyć ilościowo. Opisana powyżej koncepcja pojęcia wrażliwości nie jest jedyna i istnieją również inne koncepcje wrażliwości, jak na przykład wrażliwość strukturalna, zajmująca się badaniem odchyłki od starego rozwiązania, w przypadku zmiany struktury, czyli postaci równania różniczkowego, lub zmiany ilości stopni swobody. Pozostając przy zmianie współczynników, można badać również zmiany innych charakterystyk niż samo rozwiązanie, takich jak na przykład widma częstości, lub postaci własnych, w liniowych układach drgających. W każdym z rozważanych przypadków należy zdefiniować odpowiednią miarę wrażliwości. W niniejszej pracy ograniczymy się do badania klasycznej wrażliwości, to znaczy zmiany rozwiązania spowodowanego małą zmianą jednego ze współczynników równania. Badanie to przeprowadza się za pomocą odpowiednio zdefiniowanej funkcji wrażliwości, którą można wprowadzić w rozmaity sposób. W przedstawionej pracy podane jest badanie jakościowe wprowadzonej funkcji wrażliwości. W tym zakresie zagadnienie można zaliczyć do grupy jakościowej problematyki teorii stateczności specyficznego rodzaju, a mianowicie stateczności na małe zaburzenia stałych współczynników równania. Badanie takie powinno poprzedzać zagadnienie ilościowe wyznaczenia funkcji wrażliwości, które nadaje problemowi

wrażliwości ostateczny wyraz praktyczny. Jednakże nawet jakościowe zbadanie zachowania się funkcji wrażliwości i stwierdzenie, że jest ona na przykład ograniczona, lub zmierza do zera i od jakich parametrów fizycznych zagadnienia to zależy, daje pewne interesujące informacje praktyczne o wrażliwości modelu matematycznego, w postaci równania różniczkowego, na małe zaburzenia współczynnika.

Z praktycznego punktu widzenia, badanie wrażliwości w sensie omówionym powyżej pozwala na przewidzenie, jak znacznie będą się różniły rozwiązania np. drgań elementów wykonywanych seryjnie, dopuszczając pewien rozrzut parametrów fizycznych (mas, sztywności) podczas produkcji. Na podstawie analizy wrażliwości można również rozwiązywać zagadnienie odwrotne, to znaczy podać dopuszczalny rozrzut parametrów fizycznych aby odchyłka rozwiązań od egzemplarza wzorcowego nie przekroczyła z góry żądanej wartości.

Należy podkreślić, że problematyka ta została w mniejszym lub większym stopniu zbadana dla równań różniczkowych zwyczajnych [2], [3]. Dla równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych problematyka ta znajduje się w stadium formułowania i uzyskiwania pierwszych rezultatów. Niektóre z nich, dla zagadnień zawierających jedną zmienną przestrzenną są przedstawione w pracach [4], [5], [6]. Niniejsza praca przedstawia problem wrażliwości na zmiany współczynników równania dla równania o pochodnych cząstkowych z dwiema zmiennymi przestrzennymi. W tym przypadku, jak również w przypadku wielu zmiennych przestrzennych powstają jakościowo nowe problemy, w porównaniu z przypadkami, w których występuje jedna zmienna przestrzenna. Dla przejrzystości rozważań zagadnienie zostało przedstawione nie na przykładzie ogólnego równania o pochodnych cząstkowych o wielu zmiennych przestrzennych, lecz na przykładzie drgań membrany, mającej znane znaczenie i zastosowanie w teorii i praktyce drgań układów ciągłych.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy równanie różniczkowe drgań membrany prostokątnej w postaci

$$(1) \quad m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial t} + ru = T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, t),$$

gdzie

$m$  — masa przypadająca na jednostkę powierzchni membrany,

$\mu$  — współczynnik tłumienia liniowego zewnętrznego drgań poprzecznych,

$r$  — współczynnik sprężystości podłoża sprężystego,

$T_0$  — napięcie membrany,

$F(x, t)$  — siła wymuszająca,

$u(x, y, t)$  — przemieszczenie poprzeczne membrany.

Niech boki rozważanej membrany prostokątnej będą odpowiednio równe  $a$  i  $b$ , przy czym  $b < a$ .

Wprowadzamy oznaczenia

$$\frac{\mu}{m} = 2\beta, \quad \frac{r}{m} = c, \quad \frac{T_0}{m} = \gamma, \quad \frac{1}{m}F = f,$$

gdzie  $\beta$ ,  $c$ ,  $\gamma$  oznaczają stałe dodatnie. Równanie (1) przybiera postać

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + cu = \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, t).$$

Niech warunki początkowe mają postać

$$(3) \quad u(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi_2(x, y),$$

zaś warunki brzegowe niech mają postać

$$(4) \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, & u(a, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, & u(x, b, t) = 0. \end{cases}$$

Warunki te odpowiadają przypadkowi membrany zamocowanej wzdłuż wszystkich boków.

Zakładamy, że rozwiązanie równania (2) z warunkami (3) i (4) jest znane. Zagadnieniem, które chcemy zbadać, jest wrażliwość rozwiązań równania (2) na zmiany współczynnika  $\xi$ , który jest równy  $\gamma$  lub  $\beta$  lub  $c$ . W tym celu wprowadzamy funkcję wrażliwości w postaci

$$(5) \quad \omega(x, y, t, \xi) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{u(x, y, t, \xi + \Delta\xi) - u(x, y, t, \xi)}{\Delta\xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Na mocy (5) mamy następującą równość przybliżoną

$$(6) \quad u(x, y, t, \xi + \Delta\xi) - u(x, y, t, \xi) \cong \omega(x, y, t, \xi) \Delta\xi.$$

Jeśli wyznaczymy, lub oszacujemy funkcję  $\omega(x, y, t, \xi)$ , wtedy na podstawie wzoru (6) możemy wyznaczyć w przybliżeniu, lub oszacować zmianę funkcji  $u(x, y, t, \xi)$  odpowiadającą zmianie  $\Delta\xi$  parametru  $\xi$ . Również na odwrót, jeśli różnica  $\Delta u = u(x, y, t, \xi + \Delta\xi) - u(x, y, t, \xi)$  jest z góry dana, wtedy na mocy (6) możemy wyznaczyć w przybliżeniu dopuszczalną wartość  $\Delta\xi$ .

Wyprowadzimy równanie różniczkowe dla funkcji  $\omega(x, y, t, \xi)$ . Różniczkując równanie różniczkowe (2) względem  $\xi = \gamma, \beta, c$  otrzymujemy równanie różniczkowe wrażliwości w postaci

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial \omega}{\partial t} + c\omega = \gamma \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \varphi(x, y, t, \xi)$$

gdzie

$$(8) \quad \varphi(x, y, t, \xi) = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \text{dla } \xi = \gamma \\ -2 \frac{\partial u}{\partial t} & \text{dla } \xi = \beta \\ -u & \text{dla } \xi = c. \end{cases}$$

Warunki początkowe i brzegowe mają postać

$$(9) \quad \begin{cases} \omega(x, y, 0, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} u(x, y, 0, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_1(x, y) = 0, \\ \frac{\partial \omega(x, y, 0, \xi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial u(x, y, 0, \xi)}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \omega(0, y, t, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} u(0, y, t, \xi) = 0, & \omega(a, y, t, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} u(a, y, t, \xi) = 0, \\ \omega(x, 0, t, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} u(x, 0, t, \xi) = 0, & \omega(x, b, t, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} u(x, b, t, \xi) = 0. \end{cases}$$

Zagadnienie polega na zbadaniu zachowania się rozwiązań równania (7), to znaczy na znalezieniu warunków dostatecznych ich ograniczoności, lub zmierzania do zera przy  $t \rightarrow \infty$ .

### 3. Badanie zachowania się rozwiązań równania różniczkowego wrażliwości

Jeśli współczynnik  $\xi$  nie ulega zmianie, wtedy jest  $\omega \equiv 0$ . Jeśli współczynnik  $\xi$  zmienia się o  $\Delta \xi$ , wtedy rozwiązanie równania (7) odchyła się od rozwiązania zerowego. Odchylenie powyższe będziemy mierzyli za pomocą odległości w postaci

$$(11) \quad \begin{aligned} \varrho(\omega) &= \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + 2\beta \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + c\omega^2 + \gamma \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \int_0^a \int_0^b \left[ (c - \beta^2) \omega^2 + \left( \beta \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

gdzie zakładamy, że

$$(12) \quad c - \beta^2 > 0.$$

Wprowadzona odległość spełnia warunki

$$\varrho(\omega) \geq 0, \quad \varrho(0) = 0.$$

Odległość ta nie musi spełniać aksjomatów przestrzeni metrycznej.

Dla pewnego  $\omega(x, y, t, \xi)$  odległość będziemy oznaczali przez  $\varrho(t)$  i zakładamy, że jest ona jednoznaczna i ciągłą funkcją czasu  $t$ .

Różniczkując odległość (11) względem czasu i podstawiając zamiast  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$  odpowiednie składniki z równania (7) otrzymujemy po przekształceniach

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{\varrho} &= 2 \int_0^a \int_0^b \left[ -\beta \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 - 2\beta^2 \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} - \beta c \omega^2 + \beta \gamma \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \beta \gamma \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial t} + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial t} \right] dx dy + \\ &\quad + 2 \int_0^a \int_0^b \left( \beta \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \varphi dx dy. \end{aligned}$$

Obliczmy całkując przez części następujące całki, uwzględniając przy tym warunki brzegowe

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^b \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx dy &= - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dx dy, \\ \int_0^a \int_0^b \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} dx dy &= - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 dx dy, \\ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx dy &= - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial t} dx dy, \\ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} dx dy &= - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial t} dx dy.\end{aligned}$$

Wzór (13) przybiera więc postać

$$\begin{aligned}\dot{\varrho} &= -2\beta \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + 2\beta \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + c\omega^2 + \gamma \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ &\quad + 2 \int_0^a \int_0^b \left( \beta \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \varphi dx dy.\end{aligned}$$

Na mocy (11) mamy więc

$$(14) \quad \dot{\varrho} = -2\beta \varrho + 2 \int_0^a \int_0^b \left( \beta \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \varphi dx dy.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}\dot{\varrho} &\leq -2\beta \varrho + \int_0^a \int_0^b 2 \left| \beta \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| |\varphi| dx dy \leq -2\beta \varrho + \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \beta \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \varphi^2 \right] dx dy, \\ \dot{\varrho} &\leq -2\beta \varrho + \int_0^a \int_0^b \left[ (c - \beta^2) \omega^2 + \gamma \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left( \beta \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy + \int_0^a \int_0^b \varphi^2 dx dy, \\ (15) \quad \dot{\varrho} &\leq -2\beta \varrho + \varrho + \int_0^a \int_0^b \varphi^2 dx dy = (1 - 2\beta) \varrho + \int_0^a \int_0^b \varphi^2 dx dy.\end{aligned}$$

Oznaczmy

$$(16) \quad \Phi(t, \xi) = \int_0^a \int_0^b \varphi^2(x, y, t, \xi) dx dy.$$

Na mocy (15) otrzymujemy nierówność

$$(17) \quad \varrho \leq B \exp[(1-2\beta)t] + \int_0^t \Phi(s, \xi) \exp[(1-2\beta)(t-s)] ds, \quad t \in [0, \infty)$$

Na podstawie warunków początkowych (9) i wzoru (11) mamy

$$B = \varrho|_{t=0} = 0.$$

Nierówność (17) przybiera więc postać

$$(18) \quad \varrho \leq \int_0^t \Phi(s, \xi) \exp[(1-2\beta)(t-s)] ds.$$

Ponieważ rozwiązanie  $u(x, y, t, \xi)$  jest znane, więc znana jest również funkcja  $\Phi(t, \xi)$ . Możemy więc wyznaczyć analitycznie, lub numerycznie, obszar parametrów, dla których nierówność (18) jest spełniona.

Mając oszacowaną odległość  $\varrho$ , możemy oszacować całkę podwójną z kwadratu funkcji wrażliwości  $\omega$  rozciągniętą na obszar powierzchni membrany. Istotnie na mocy (11) i (18) mamy

$$(19) \quad \int_0^a \int_0^b \omega^2 dx dy \leq \frac{1}{c - \beta^2} \int_0^t \Phi(s, \xi) \exp[(1-2\beta)(t-s)] ds$$

W przypadku szczególnym  $\beta = 0$ ,  $c = 0$  nie można skorzystać z oszacowania (19), jednakże oszacowanie typu (19), niezależne od  $\beta$  i  $c$  można otrzymać jeszcze w następujący sposób.

Funkcję wrażliwości  $\omega^2(x, y, t, \xi)$  możemy przedstawić w postaci

$$\omega^2(x, y, t, \xi) = \int_0^y \frac{\partial}{\partial s} \omega^2(x, s, t, \xi) ds = \int_0^y 2\omega(x, s, t, \xi) \frac{\partial \omega(x, s, t, \xi)}{\partial s} ds.$$

Stąd mamy

$$(20) \quad \int_0^a \int_0^b \omega^2(x, y, t, \xi) dx dy = \int_0^a \int_0^b \left[ \int_0^y 2\omega(x, s, t, \xi) \frac{\partial \omega(x, s, t, \xi)}{\partial s} ds \right] dx dy,$$

$$\int_0^a \int_0^b \omega^2(x, y, t, \xi) dx dy = \int_0^a \left\{ \int_0^b \left[ \int_0^y 2\omega(x, s, t, \xi) \frac{\partial \omega(x, s, t, \xi)}{\partial s} ds \right] dy \right\} dx.$$

Zmieniamy kolejność całkowania względem  $y$  i  $s$  stosując wzór Dirichleta w postaci

$$(21) \quad \int_0^b dy \int_0^y f(s, y) ds = \int_0^b ds \int_s^b f(s, y) dy,$$

przy czym w rozważanym przypadku, funkcja  $f$  we wzorze (20) nie zależy od zmiennej  $y$ . Na podstawie (21) otrzymujemy wzór (20) w postaci

$$\int_0^a \int_0^b \omega^2(x, y, t, \xi) dx dy = \int_0^a \left\{ \int_0^b \left[ \int_s^b 2\omega(x, s, t, \xi) \frac{\partial \omega(x, s, t, \xi)}{\partial s} dy \right] ds \right\} dx.$$



Jednakże funkcja podcałkowa po prawej stronie nie zależy od  $y$  więc mamy

$$\int_0^a \int_0^b \omega^2(x, y, t, \xi) dx dy = \int_0^a \int_0^b 2\omega(x, s, t, \xi) \frac{\partial \omega(x, s, t, \xi)}{\partial s} (b-s) dx ds.$$

Ponieważ zmienna  $s$  zmienia się w granicach  $0 \leq s \leq b$  więc ma miejsce nierówność  $b-s \leq b$ . Oznaczając  $s$  przez  $y$  otrzymujemy więc

$$\int_0^a \int_0^b \omega^2(x, y, t, \xi) dx dy \leq 2b \int_0^a \int_0^b |\omega(x, y, t, \xi)| \left| \frac{\partial \omega(x, y, t, \xi)}{\partial y} \right| dx dy.$$

Stosując nierówność Buniakowskiego-Schwarza mamy

$$\int_0^a \int_0^b \omega^2(x, y, t, \xi) dx dy \leq 2b \left[ \int_0^a \int_0^b \omega^2(x, y, t, \xi) dx dy \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \omega(x, y, t, \xi)}{\partial y} \right)^2 dx dy \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Podnosząc tę nierówność obustronnie do kwadratu otrzymujemy ostatecznie

$$(22) \quad \int_0^a \int_0^b \omega^2 dx dy \leq 4b^2 \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 dx dy.$$

Na mocy (11) i (18) mamy

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 dx dy \leq \frac{1}{\gamma} \int_0^t \Phi(s, \xi) \exp[(1-2\beta)(t-s)] ds.$$

Wobec tego na mocy (22) otrzymujemy

$$(23) \quad \int_0^a \int_0^b \omega^2 dx dy \leq \frac{4b^2}{\gamma} \int_0^t \Phi(s, \xi) \exp[(1-2\beta)(t-s)] ds.$$

Nierówności (19) i (23) możemy napisać w postaci

$$(24) \quad \int_0^a \int_0^b \omega^2 dx dy \leq N \int_0^t \Phi(s, \xi) \exp[(1-2\beta)(t-s)] ds,$$

gdzie

$$(25) \quad N = \min \left( \frac{1}{c-\beta^2}, \frac{4b^2}{\gamma} \right).$$

Założmy, że jest spełniona nierówność

$$(26) \quad 1-2\beta < 0.$$

Jeśli funkcja  $\Phi(t, \xi)$  jest ograniczona dla  $t \in [0, \infty)$ , wtedy całka podwójna z kwadratu funkcji wrażliwości jest również ograniczona, gdy zaś  $\Phi(t, \xi) \rightarrow 0$  dla  $t \rightarrow \infty$ , wtedy całka podwójna z kwadratu funkcji wrażliwości ma również tę własność.

Założmy, że ma miejsce nierówność (26) i rozważmy przypadek, gdy rozwiązanie  $u(x, y, t, \xi)$  równania (2) oraz pochodne występujące w tym równaniu są ograniczone. Wtedy funkcja  $\Phi$  jest również ograniczona, to znaczy

$$(27) \quad \Phi(t, \xi) \leq \lambda = \text{const} < \infty, \quad t \in [0, \infty).$$

Nierówność (24) przybiera wtedy postać

$$(28) \quad \int_0^a \int_0^b \omega^2 dx dy \leq \frac{\lambda N}{2\beta - 1} (1 - \exp[(1 - 2\beta)t]).$$

Gdy funkcja  $u(x, y, t, \xi)$  jest nieznaną, wtedy w przypadku  $\xi = c$  to znaczy  $\varphi = -u$  możemy otrzymać oszacowanie całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości w sposób następujący.

Dla funkcji  $u$  możemy otrzymać analogicznie jak powyżej oszacowanie

$$(29) \quad J = \int_0^a \int_0^b \left[ (c - \beta^2) u^2 + \left( \beta u + \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \leq \\ \leq A \exp[(1 - 2\beta)t] + \int_0^t Q(s) \exp[(1 - 2\beta)(t - s)] ds,$$

gdzie

$$Q(t) = \int_0^a \int_0^b f^2 dx dy, \quad A = J|_{t=0}.$$

Stąd otrzymujemy w sposób analogiczny jak w przypadku nierówności (24) nierówność w postaci

$$\Phi = \int_0^a \int_0^b u^2 dx dy \leq N \left( A \exp[(1 - 2\beta)t] + \int_0^t Q(s) \exp[(1 - 2\beta)(t - s)] ds \right).$$

Wobec tego na mocy (24) mamy

$$(30) \quad \int_0^a \int_0^b \omega^2 dx dy \leq N^2 \int_0^t \left( A \exp[(1 - 2\beta)s] + \right. \\ \left. + \int_0^s Q(\tau) \exp[(1 - 2\beta)(s - \tau)] d\tau \right) \exp[(1 - 2\beta)(t - s)] ds$$

Na podstawie nierówności (30) można zbadać zachowanie się całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości z biegiem czasu, w zależności od własności funkcji  $Q$ .

Należy podkreślić, że w przypadku membrany, w której równaniu drgań poprzecznych występują dwie zmienne przestrzenne  $x$  i  $y$ , nie udaje się uzyskać informacji bezpośrednich o funkcji wrażliwości  $\omega$ , lecz tylko o całce podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości.

Wynika stąd na przykład, że jeśli oznaczymy przez  $u_1$  rozwiązanie równania (2) dla  $\beta \neq 0$ , zaś przez  $u_2$  rozwiązanie równania (2) dla  $\beta = 0$ , to przy  $\beta \rightarrow 0$  nie należy spodziewać się, że  $u_2 \rightarrow u_1$ . Natomiast powinno być

$$\int_0^a \int_0^b u_2^2 dx dy \rightarrow \int_0^a \int_0^b u_1^2 dx dy \quad \text{przy} \quad \beta \rightarrow 0$$

Podsumowując uzyskane rezultaty można stwierdzić co następuje. Badając wrażliwość drgań membrany w oparciu o liniowy model matematyczny drgań, za pomocą wprowadzonej funkcji wrażliwości, nie daje się uzyskać wartości ograniczającej samą funkcję wrażli-

wości, co jak stwierdziliśmy na początku jest na ogół nadzwyczaj pożądaną informacją jakościową mającą samodzielne znaczenie praktyczne. Odnośnie funkcji wrażliwości możemy uzyskać tylko informację, że całka podwójna z jej kwadratu jest ograniczona, lub zmierza do zera, co wynika ze wzoru (24). W nierówności tej prawą stronę otrzymujemy ustalając wartość stałej  $N$ , którą można wyznaczyć znając wymiary i parametry fizyczne membrany (wzór (25)) oraz mając informację o zachowaniu się rozwiązania równania (1) membrany z niezaburzonymi współczynnikami, to znaczy znając funkcję  $\Phi$  daną wzorem (16). Skończoną postać oszacowania (24), w przypadku gdy funkcja  $\Phi$  jest ograniczona stałą  $\lambda$  (wzór 27) przedstawia wzór (28). Oznacza to, że stosując model liniowy membrany w postaci równania (1), możemy w przypadku małej zmiany współczynników równania spodziewać się tylko małej zmiany całki z kwadratu funkcji wrażliwości, a nie samej funkcji wrażliwości. Jest to podstawowa cecha charakterystyczna i trudność występująca przy badaniu modeli matematycznych układów dynamicznych ciągłych, zawierających więcej niż jedną zmienną przestrzenną, którą trzeba brać pod uwagę przy fizycznej interpretacji wyników dotyczących badania wrażliwości, lub przy badaniach numerycznych.

Wzór (24) podaje oszacowanie całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości przy założeniu, że rozwiązanie równania (1) to znaczy również i funkcja  $\Phi$  dana wzorem (16) są znane. W przypadku gdy zmianie ulega współczynnik  $c$  (p. równanie (2)), wtedy możemy nie rozwiązywać tego równania w celu wyznaczenia funkcji  $\Phi$  lecz posłużyć się oszacowaniem funkcji  $\Phi$ , co wystarczy do skonstruowania oszacowania całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości danej wzorem (30). Sens tego wzoru jest taki sam jak wzoru (24), z tą jednak różnicą, że po prawej stronie wzoru (30) nie występuje już jawnie funkcja  $\Phi$  której nie trzeba więc wyznaczać. Należy jednak podkreślić, że wynik ten został uzyskany kosztem dokładności oszacowania, to znaczy oszacowanie (30) jest „grubsze” niż oszacowanie (24), w tym samym przypadku badania wrażliwości rozwiązania na zmianę współczynnika  $c$ . Oszacowanie to zachowuje jednakże te same cechy jakościowe, to znaczy można na jego podstawie wnioskować o ograniczoności i zmierzaniu do zera całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości.

#### Literatura cytowana w tekście

1. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. IV Гос. Изд. Тех.-Теорет. Лит. Москва, Ленинград, 1951
2. R. TOMOVIĆ, *Sensitivity analysis of dynamic systems*, NY 1963 Mac Graw Hill.
3. P. ТОМОВИЧ, М. ВУКОБРАТОВИЧ, *Общая теория чувствительности*, Изд. Советское Радио, 1972.
4. R. GUTOWSKI, *Introduction sur la stabilité du mouvement des systems continus*, Laboratoire de mécanique des solides, L'Université de Poitiers 1978.
5. R. GUTOWSKI, *Stateczność i wrażliwość w układach mechanicznych*, rozdział w: Wprowadzenie do stateczności ruchu układów ciągłych, Ossolineum 1978.
6. R. GUTOWSKI, *Чувствительность решений уравнений движения некоторых колебательных систем с распределенными параметрами*, Proceedings of the VIII-th International Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, 1978.

## Резюме

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
МЕМБРАНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ИЗМЕНЕНИЙ ЕГО КОЭФФИЦИЕНТОВ

В работе исследуется чувствительность решений уравнения линейных колебаний прямоугольной мембраны относительно изменений коэффициентов этого уравнения. Чувствительность исследуется с помощью определенной в работе функции чувствительности для которой выводится дифференциальное уравнение в частных производных. С помощью соответствующим образом выбранного расстояния между решениями дифференциального уравнения чувствительности и нулевым решением этого уравнения получены эффективные оценки двойного интеграла из квадрата функции чувствительности. На основании этих оценок исследуется поведение рассматриваемого двойного интеграла с течением времени, между прочим его ограниченность и стремление к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

## Summary

SENSITIVITY OF SOLUTIONS OF LINEAR EQUATION FOR A VIBRATING MEMBRANE  
TO VARIATION OF EQUATION COEFFICIENTS

The sensitivity of solution of is investigated the linear equation for a vibrating rectangular membrane, with respect to variation of equation coefficients.

The sensitivity has been tested by the sensitivity function, defined in the paper, for which a partial differential equation has been derived.

A properly established distance between the null solution to this equation and the solution of the differential equation of sensitivity has been used to estimate the double integral of the square of the sensitivity function. The estimation served later to investigate the variation with time of the double integrall and permitted to determine its limitations and convergence to zero as  $t \rightarrow \infty$ .

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 września 1980 roku*

---

O PEWNYM MATEMATYCZNYM MODELU PROCESU KOLMATACJI WYMIAROWEJ  
W SZCZELINACH I JEGO ZASTOSOWANIU

KRZYSZTOF CIEŚLICKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Spośród wielu różnorodnych metod pomiaru zawartości zanieczyszczeń stałych w cieczach coraz więcej uwagi poświęca się metodom kolmatacyjnym. Wykorzystują one zjawisko kolmatacji wymiarowej tzn. zatrzymywania cząstek zawiesiny przepływającej przez przegrodę porowatą wskutek różnic wymiarowych cząstek i porów. W kolmatomierzu — przyrządzie pomiarowym — rolę ośrodka porowatego spełnia szczelina o sztywnych i nieprzepuszczalnych ściankach i o wysokości zbliżonej do wymiarów występujących w cieczy cząstek. U podstaw pomiaru metodą kolmatacyjną liczby i składu granulometrycznego cząstek leży związek pomiędzy parametrami hydrodynamicznymi przepływu zawiesiny (spadek ciśnienia, natężenie przepływu), a parametrami charakteryzującymi rozkład wymiarowy cząstek. Dotychczas, ze względu na złożoność zjawisk, nie podano ścisłego modelu analitycznego wiążącego te wielkości. W istniejącym modelu, prezentowanym w pracach [1, 2] uproszczono opis matematyczny procesu kolmatacji

- przypisując szczelinie posiadanie cech idealnego filtra dolno-przepustowego o niezmiennej w czasie charakterystyce filtrowania (tzn. szczelina zatrzymuje tylko cząstki większe od wysokości szczeliny);
- całkowitemu zatkaniu szczeliny przyporządkowując stałą liczbę cząstek zatrzymanych, równą ilorazowi szerokości szczeliny —  $L_0$  przez jej wysokość —  $h$  ( $L_0/h$ ), niezależnie od rozkładu wymiarowego cząstek.

Dzięki tak sformułowanym założeniom uzyskano nieskomplikowaną zależność łączącą intensywność zatrzymywania cząstek z ilością cząstek już zatrzymanych. Ma ona postać [2]:

$$(1) \quad \frac{dP(t)}{dt} = K \cdot z_h [A - P(t)],$$

gdzie:  $P(t)$  — liczba cząstek większych od wysokości  $h$  szczeliny w chwili  $t$

$z_h$  — koncentracja cząstek większych od wysokości  $h$  szczeliny w cieczy doprowadzonej do jej wejścia

$A$  — graniczna „pojemność” szczeliny równa ilorazowi  $L_0/h$

$K$  — stała zależna od geometrii szczeliny i warunków przepływu zawiesiny

i jest analogiczna z zależnością opisującą w ujęciu fenomenologicznym kinetykę procesu kolmatacji w ośrodkach porowatych [6]. Pomiedzy zadaniami kolmatomierza, a założeniami modelu na którym pomiar się opiera uwidacznia się pewna niekonsekwencja. Otóż

celem pomiaru jest określenie m.in. rozkładu granulometrycznego cząstek zdyspergowanych w cieczy, z drugiej strony model nie ujmuje parametru charakteryzującego ten rozkład. Prosta struktura analitycznego wzoru (1) okupiona została zmniejszeniem wierności opisu zaznaczającym się wyraźnie w przypadkach, gdy do szczeliny napływają cząstki znacznie większe od wysokości szczeliny oraz w końcowych fazach procesu (tzn. gdy w szczelinie znajduje się już dużo cząstek zatrzymanych). Zastosowanie zależności (1) dla potrzeb opisu kinetyki kolmatacji w ośrodkach porowatych także nie oparło się próbie kolejnych, dokładniejszych eksperymentów i została ona zmieniona [7]. Okazało się bowiem, że intensywność zatrzymywania cząstek w porach  $\frac{\partial P(t)}{\partial t}$  nie jest, jak zakładano liniowo opadająca, początkowo rośnie, aż do osiągnięcia pewnego maksimum. Przy czym dalsze malenie wynika ze zmniejszającej się intensywności dopływu cząstek związanej z malejącą przepuszczalnością ośrodka.

W znanych pracach brak jest prostych modeli uwzględniających wpływ rozkładu wymiarowego cząstek zawiesiny na przebieg procesu i uzasadniających zmienną w czasie efektywność procesu kolmatacji zachodzącego w szczelinach. Problem ten rozważano w pracy [3], gdzie w wyniku otrzymano stochastyczny proces markowowski jako model zależności odpowiednich parametrów fizycznych od czasu. Jednak jego stopień skomplikowania znacznie utrudnia uzyskanie dostatecznie przejrzystych rozwiązań.

W niniejszej pracy przedstawiono model, który jest znacznie prostszy a przy tym uwzględnia mechanizm odpowiedzialny za zmienność charakterystyk filtrowania szczeliny oraz parametry rozkładu wymiarowego cząstek.

## 2. Matematyczny model procesu kolmatacji

Przepływ cieczy dwufazowej przez szczelinę i towarzyszący mu proces kolmatacji wymiarowej potraktowano w modelu jako przepływ cieczy jednorodnej przez obszar o zmiennej strukturze geometrycznej. W chwili początkowej struktura obszaru przepływowego jest znana i określona przez charakterystyczne wymiary szczeliny:  $L_0$  — szerokość,  $h$  — wysokość,  $m$  — długość, spełniających relacje:

$$(2) \quad h \ll L_0, \quad m = O(h).$$

Przyjmijmy, że ciecz dwufazowa ma postać zawiesiny cząstek stałych równomiernie zdyspergowanych w jednorodnej, nieściśliwej cieczy lepkiej, a koncentracja cząstek jest na tyle mała, że ich wzajemne oddziaływanie można pominąć. Podstawą modelu jest założenie, że cząstki zatrzymane w szczelinie mogą dzielić, początkowo jednospójny, obszar szczeliny  $D$  na rozłączne segmenty — a zatem zwiększać rząd spójności tego obszaru, lub też eliminować segmenty — czyli zmniejszać rząd spójności. Podział lub eliminacja segmentów wynika z relacji wzajemnych wymiarów cząstek i segmentów i zmienia się w czasie trwania procesu. W każdej chwili przepływ cieczy odbywa się zatem przez pewien obszar będący skończoną sumą rozłącznych obszarów jednospójnych. Niech każdy z segmentów charakteryzuje pewna liczba rzeczywista  $x$  będąca realizacją zmiennej  $X$ . Podobnie, każdą cząstkę przybywającą do obszaru przepływowego opisuje jej wymiar cha-

rakterystyczny  $y$  będący realizacją zmiennej  $Y$ . Chwilowy stan szczeliny opisuje para liczb  $\bar{C}$  i  $\bar{L}$  oznaczających odpowiednio wartość średnią liczby segmentów obszaru  $D$  oraz wartość średnią sumy wymiarów segmentów. Zmienną niezależną jest średnia objętość  $V$  cieczy jaka przepływa przez szczelinę. Ponieważ cząstki fazy drugiej są równomiernie wymieszane w fazie pierwszej, to objętość cieczy, która przepłynęła przez szczelinę jednoznacznie wyznacza skład cząstek, które znalazły się w jej otoczeniu. Jeśli do obszaru  $D$  przybywa cząstka o wymiarze charakterystycznym  $y$  to jeśli przybyła do segmentu o wymiarze charakterystycznym  $x$  zachodzi jedno z następujących zdarzeń:

- cząstka ulega zatrzymaniu, zaś suma wymiarów charakterystycznych segmentów zmniejsza się o  $y$ , o ile  $h \leq y < x$ ; jednocześnie rząd spójności obszaru szczeliny wzrasta o 1;
- cząstka ulega zatrzymaniu, zaś suma wymiarów segmentów zmniejsza się o  $x$ , o ile  $x \leq y$ ; jednocześnie rząd spójności obszaru maleje o 1;
- cząstka nie zostaje zatrzymana, suma wymiarów segmentów nie zmienia się o ile  $y < h$  i  $y < x$ ; rząd spójności obszaru pozostaje stały.

Oznaczmy przez  $P_{\bar{C}\bar{L}}(x, y)$  rozkład łączny zmiennych  $X, Y$ . Za podstawową informację o funkcjach  $\bar{C}(V)$  oraz  $\bar{L}(V)$  przyjmuje się w świetle przedstawionych założeń następujący układ równań różniczkowych:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{C}(V)}{dV} &= N \left[ \int_{h \leq y < x} dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y) - \int_{x \leq y} dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y) \right], \\ \frac{d\bar{L}(V)}{dV} &= -N \left[ \int_{h \leq y < x} y dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y) + \int_{x \leq y} x dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y) \right], \end{aligned}$$

gdzie:  $N$  — koncentracja cząstek zawiesiny.

Występujące po prawych stronach układu równań (3) całki Riemanna-Stieltjesa względem łącznego rozkładu zmiennych  $X, Y$  mają prostą interpretację. W pierwszym równaniu określają zależny od  $\bar{L}$  i  $\bar{C}$  względny udział cząstek zawiesiny, których przybycie do obszaru wlotowego szczeliny spowoduje odpowiednio wzrost, lub zmniejszenie o jeden liczby segmentów na które szczelina była podzielona przed ich przybyciem. W drugim równaniu określają wartość średnią zmiany sumy wymiarów segmentów, pod warunkiem, że przybycie cząstki spowodowało odpowiednio wzrost lub zmniejszenie o jeden liczby segmentów szczeliny. Przyjmujemy dalej, że wymiar cząstki- $y$  nie zależy od wymiaru charakterystycznego segmentu- $x$ , do którego cząstka przybyła. Jest to równoznaczne z założeniem niezależności zmiennych  $X$  i  $Y$ . Wówczas rozkład łączny  $P_{\bar{C}\bar{L}}(x, y)$  jest produktem dwu rozkładów  $f(x)$  i  $g(y)$ . W niniejszej pracy przyjęto, że są to rozkłady wykładnicze o gęstościach:

$$(4) \quad \begin{aligned} f(x) &= \frac{\bar{C}}{L} \exp \left\{ -\frac{\bar{C}}{L} x \right\} & \text{dla } x > 0 \\ g(y) &= \kappa \exp \{ -\kappa y \} & \text{dla } y > 0 \end{aligned}$$

gdzie  $\kappa$  oznacza parametr rozkładu wykładniczego zmiennej  $Y$ .

Rozkład wykładniczy  $g(y)$  jest jednym ze stosowanych do aproksymacji rozkładu wymiarów charakterystycznych cząstek zanieczyszczeń w cieczach roboczych układów hydraulicznych. Idea przyjęcia funkcji wykładniczej dla opisu wymiarów charakterystycznych

segmentów powstała przez analogię z asymptotycznym — wykładniczym rozkładem odległości między punktami rzucanymi równomiernie na odcinek [5]. Ze względu jednak na różny od zera wymiar cząstek, jako wartość średnią rozkładu  $f(x)$  przyjęto parametr zmienny, będący ilorazem wielkości  $\bar{L}(V)$  i  $\bar{C}(V)$ .

Przyjęcie gęstości łącznej  $dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y)$  w postaci iloczynu funkcji na płaszczyźnie  $R_2^+$  pozwala przedstawić odpowiednie całki Riemanna-Stieltjesa w postaci całek iterowanych:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{C}(V)}{dV} &= N\kappa \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \left[ \int_h^\infty \int_y^\infty \exp\left\{-\frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)}x\right\} \exp\{-\kappa y\} dx dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \int_x^\infty \exp\left\{-\frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)}x\right\} \exp\{-\kappa y\} dx dy \right] \\ \frac{d\bar{L}(V)}{dV} &= -N\kappa \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \left[ \int_h^\infty \int_y^\infty y \exp\left\{-\frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)}x\right\} \exp\{-\kappa y\} dx dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \int_x^\infty x \exp\left\{-\frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)}x\right\} \exp\{-\kappa y\} dx dy \right]. \end{aligned}$$

A po przekształceniu prawych stron (5) otrzymamy następujący nieliniowy układ równań różniczkowych:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{C}(V)}{dV} &= N \left( \kappa + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right)^{-1} \left( \kappa \exp\left\{-h \left[ \kappa + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right]\right\} - \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right), \\ \frac{d\bar{L}(V)}{dV} &= -N \left( \kappa + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right)^{-2} \left( \kappa \left[ 1 + h \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} + \kappa h \right] \exp\left\{-h \left[ \kappa + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right]\right\} + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right). \end{aligned}$$

Warunki początkowe dla powyższego układu równań wynikają z założenia, że w chwili początkowej ciecz płynie całą szerokością przepływową szczeliny, a zatem mają postać:

$$(7) \quad \bar{C}(0) = 1; \quad \bar{L}(0) = L_0.$$

### 3. Przybliżone analityczne rozwiązania sformułowanego układu równań

W początkowych etapach procesu kolmatacji spełniona jest zgodnie z (2) i (7) relacja:

$$(8) \quad \psi(V) = \bar{C}(V) \cdot \frac{h}{\bar{L}(V)} \Big|_{V \rightarrow 0} \ll 1.$$

Możemy zatem zlinearyzować układ równań przez rozwinięcie funkcji  $\exp\{-\psi(V)\}$  w szereg potęgowy. Pomijając wyrazy rzędu wyższego niż pierwszy otrzymamy po prostych przekształceniach rozwiązanie: [3]



$$(9) \quad \ln \left[ 1 - \frac{\psi(V) - \frac{\bar{h}}{\bar{l}(V)}}{a_1 - \frac{\bar{h}}{\bar{l}(V)}} \right] + a_2 \left[ \psi(V) - \frac{\bar{h}}{\bar{l}(V)} \right] = -B \frac{V}{\bar{l}(V)},$$

$$\psi_0(V) \left[ F_1 \ln \frac{\bar{l}(V) + b_1 \psi(V) + b_2 \psi^2(V)}{1 + b_1 \psi_0(V) + b_2 \psi_0^2(V)} - F_2 \ln \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\Delta} \psi_0(V)}{d_1 + d_2 \psi_0(V)} \right\} + \right. \\ \left. + F_2 \ln \left\{ 1 - \frac{\sqrt{-\Delta} \psi(V)}{d_1 + d_3 \psi(V)} \right\} \right] + \bar{l}(V) = 1 - G \cdot V.$$

gdzie:  $q = h\kappa, \quad \bar{h} = \frac{h}{L_0}, \quad \bar{l}(V) = \frac{L(V)}{L_0},$

$$\psi_0(V) = \bar{h} \bar{C}(V),$$

$$\Delta = [1 + q^2(2+q)^2 e^{-2q} - 2q^2 e^{-q}],$$

$$a_1 = \frac{q}{q + e^q},$$

$$a_2 = \frac{1 + q e^{-q}}{q[1 + (1+q)e^{-q}]},$$

$$b_1 = \frac{e^q - q^2}{q(1+q)}; \quad b_2 = -(1+q)^{-1},$$

$$d_1 = q(1+q)e^{-q}$$

$$d_2 = \frac{1 - q^2 e^{-q} - \sqrt{\Delta}}{2}; \quad d_3 = \frac{1 - q^2 e^{-q} + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$B = \frac{(1 + q e^{-q})^2}{1 + (1+q)e^{-q}} \frac{N}{L_0 \kappa},$$

$$F_1 = \frac{1}{2q(1+q)} [2(1+q) + q^2 - e^q],$$

$$F_2 = \frac{1}{2q(1+q)\sqrt{-\Delta}} [e^q + (2 + 4q + 6q^2 + 4q^3 + q^4)e^{-q} - 2(1+q+q^2)]$$

$$G = (1+q)e^{-q} \frac{N}{L_0 \kappa}.$$

Uwikłana postać zależności (9) nie pozwala wyznaczyć niewiadomych  $\bar{L}$  i  $\bar{C}$  bezpośrednio od zmiennej niezależnej  $V$ . Można jednak zauważyć, że w początkowych fazach procesu, zgodnie z (8), równania (9) można dalej uprościć, przez odrzucenie członów małych, do postaci:

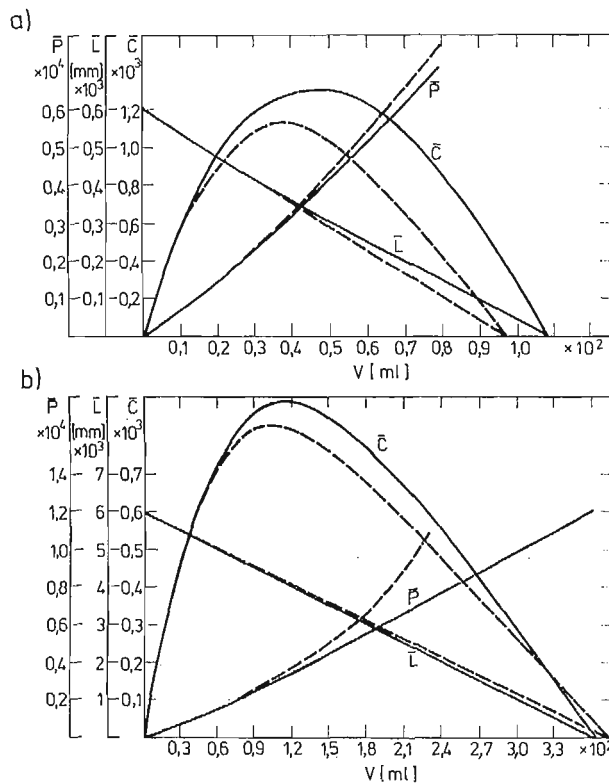
$$(10) \quad \bar{C}(V) = a'_1 \bar{L}(V) - [a'_1 \bar{L}(V) - 1] \exp\{\Phi(V)\}, \\ \bar{L}(V) = L_0 - G'V,$$

gdzie:

$$\Phi(V) = -BL_0 \frac{V}{L_0 - GV},$$

$$a'_1 = \frac{a_1}{h}; \quad G' = GL_0.$$

Dokładniejsze rozwiązania układu równań różniczkowych (6) dla danych wartości parametrów  $L_0$ ,  $h$ ,  $N$ ,  $m$ ,  $\lambda$  uzyskano numerycznie wykorzystując biblioteczną procedurę „Runge-Kutta 4”. Na rys. 1 pokazano je łącznie z wynikami rozwiązań przybliżonych. Wartości błędu wynikającego z poczynionych aproksymacji zależą przede wszystkim od



rys. 1

Numeryczne (linie ciągłe) i przybliżone analityczne (linie przerywane) przebiegi funkcji  $\bar{C}(V)$ ,  $\bar{L}(V)$ ,  $\bar{P}(V)$ , dla a)  $q = 1,8$ ; b)  $q = 3$ . Wartości  $L_0 = 60$  mm,  $h = 6$   $\mu$ m,  $N = 400$  szt./ml.

bezwymiarowego parametru  $q$ , określającego relacje pomiędzy wysokością szczeliny  $h$ , a parametrem założonego rozkładu wykładniczego cząstek [3]. Oczywiście wartość błędu jest zawsze zbieżna do wartości zerowej przy  $V \rightarrow 0$ .

Funkcje  $\bar{C}(V)$  oraz  $\bar{L}(V)$  wykorzystano także do obliczenia średniej liczby cząstek  $\bar{P}(V)$  zatrzymanych na wejściu do szczeliny po przepłynięciu objętości  $V$ . W pracy [3] zostało

to dokładnie omówione łącznie z wyprowadzeniem przybliżonej zależności analitycznej funkcji  $\bar{P}(V)$  słusznej dla małych wartości zmiennej niezależnej  $V$ . Ma ona postać:

$$(11) \quad \bar{P}(V) = g_1 V + g_2 V^2,$$

gdzie:

$$g_1 = Ne^{-a}, \quad g_2 = 0,5\bar{h}Ng_1 a_2 \left[ 1 - \frac{d_1}{q} \right].$$

#### 4. Dyskusja rozwiązań fenomenologicznego modelu procesu kolmatacji

Współczynnikom  $g_1$  i  $G'$  występującym w równaniach (10) i (11) można przypisać przejrzystą interpretację. I tak:

$g_1$  — określa liczbę cząstek większych od wysokości szczeliny w jednostce objętości cieczy

$$g_1 = n(x \geq h) = N\kappa \int_h^{\infty} \exp\{-\kappa x\} dx = Ne^{-a}.$$

$G'$  — odpowiada wartości średniej sumy wymiarów charakterystycznych cząstek większych od wysokości szczeliny w jednostce objętości cieczy

$$G' = E\{x/x \geq h\} = N\kappa \int_h^{\infty} x \exp\{-\kappa x\} dx = N \left( h + \frac{1}{\kappa} \right) e^{-a} = g_1 \left( h + \frac{1}{\kappa} \right).$$

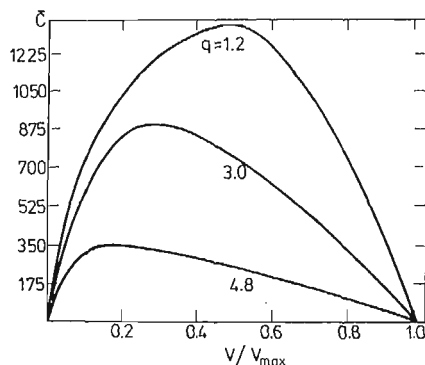
Obydwa współczynniki  $g_1$  oraz  $G'$  określają wartości odpowiednich pochodnych  $\frac{d\bar{L}(V)}{dV}$ ,  $\frac{d\bar{C}(V)}{dV}$ ,  $\frac{d\bar{P}(V)}{dV}$  w punkcie  $V = 0$

$$(12) \quad \left. \frac{d\bar{C}(V)}{dV} \right|_{V=0} = \left. \frac{d\bar{P}(V)}{dV} \right|_{V=0} = g_1; \quad \left. \frac{d\bar{L}(V)}{dV} \right|_{V=0} = G'.$$

Jest to zrozumiałe zważywszy, że w początkowym okresie procesu kolmatacji mogą być zatrzymywane wyłącznie cząstki większe od wysokości szczeliny, powodując podział szczeliny na równą ich liczbie liczbę segmentów oraz zmniejszając czynną szerokość przepływową szczeliny o wartość średnią sumy swoich wymiarów charakterystycznych. Dopiero wzrost liczby cząstek zatrzymanych na wejściu do szczeliny i towarzysząca jej malejąca wartość średnia wymiarów charakterystycznych segmentów —  $\frac{\bar{L}(V)}{\bar{C}(V)}$  zwiększa

liczbę zdarzeń „zatykania” poszczególnych fragmentów szczeliny. Większej liczbie cząstek w jednostce objętości cieczy o wymiarach charakterystycznych spełniających relacje  $y \geq h$ , towarzyszy szybszy podział szerokości przepływowej szczeliny na liczbę części zbliżoną do ilości cząstek zatrzymanych. Dominacja efektu „zatykania” fragmentów obszaru przepływowego szczeliny następuje wówczas przy większych wartościach stosunku  $\frac{V_{ex}}{V_{max}}$  wyrażającego iloraz objętości cieczy przy której występuje ekstremum funkcji  $\bar{C}(V)$ , do objętości wywołującej całkowitą niedrożność szczeliny  $V_{max}$  (rys. 2). Gdy udział cząstek

o wymiarach  $y \geq h$  jest niewielki, procesy podziału i zatykania segmentów szczeliny przebiegają prawie równocześnie. Maksymalna wartość funkcji  $\bar{C}(V)$  jest w tej sytuacji mniejsza i przesunięta w kierunku mniejszych wartości stosunku  $\frac{V_{ex}}{V_{max}}$ .



rys. 2

Przebiegi zależności  $\bar{C}\left(\frac{V}{V_{max}}\right)$  dla różnych wartości parametru  $q$

Korzystając z zależności (9b) oraz przyjmując najprostszy — liniowy związek pomiędzy czynną szerokością przepływową szczeliny —  $\bar{L}$ , a objętościowym natężeniem przepływu  $Q(V)$  cieczy płynącej pod działaniem stałego spadku ciśnienia  $\Delta p$  (tzn. zakładając proporcjonalność natężenia przepływu cieczy do powierzchni przepływowej szczeliny, gdyż  $h = \text{const}$ ) otrzymamy:

$$(13) \quad Q(t) = Q_0 \exp\{-\gamma t\},$$

gdzie:  $Q_0$  — początkowa wartość natężenia przepływu zawiesiny przez szczelinę

$$\gamma = Q_0 \frac{G'}{L_0}$$

lub:

$$(14) \quad V(t) = \frac{L_0}{G'} [1 - \exp\{-\gamma t\}].$$

Zależności powyższe wskazują na początkowo wykładniczy charakter przebiegu procesu kolmatacji w funkcji czasu.

Występujący we wzorach (13) i (14) parametr stały  $\gamma$ , wyraża początkowy współczynnik intensywności dopływu do szczeliny cząstek o wymiarach charakterystycznych większych od jej wysokości. Określa on jaką część całkowitej (tzn. w chwili  $t = 0$ ) szerokości przepływowej szczeliny eliminują zatrzymane w niej cząstki w jednostce czasu.

Nietrudno zauważyć, że w przypadku

$$(15) \quad h \gg \frac{1}{\kappa} \quad \text{lub} \quad q \gg 1,$$

tn. gdy wartość średnia wymiarów cząstek o rozkładzie wykładniczym, większych od wysokości szczeliny —  $\left(h + \frac{t_1}{\alpha}\right)$ , jest bliska  $h$ , wzór (13) jest zbieżny do zależności podanej w pracy [1, 2]. Istotnie wprowadzając cytowane we wzorze (1) oznaczenia  $z_n$  oraz  $A$  wzór (13) można doprowadzić do postaci:

$$(16) \quad Q(t) = Q_0 \exp\left\{Q_0 \frac{z_n}{A} t\right\}.$$

wynikającej z wzoru (1)

### 5. Zastosowanie fenomenologicznego modelu procesu kolmatacji

Zależność (13) bądź (14) jest prosta do weryfikacji praktycznej. Opisy stanowisk doświadczalnych oraz ich wyniki zamieszczone zostały w pracy [3]. Stwierdzono dobrą zgodność przebiegów teoretycznych i doświadczalnych funkcji  $V(t)$  dla różnych wymiarów geometrycznych szczelin i rozmaitych zawieszin. W dalszej części omówiony zostanie jedynie pomysł wykorzystania prezentowanego modelu matematycznego dla określenia parametrów cząstek zawiesziny.

Załóżmy, że mamy co najmniej dwie szczeliny o różnych wysokościach  $h_1$  oraz  $h_2$ . Przez obie te szczeliny przepuszczamy dane wartości objętości zawiesziny — odpowiednio  $V_{11}$  i  $V_{21}$  mierząc jednocześnie czasy ich wypływu —  $t_1$  i  $t_2$ . Następnie, nie przerywając eksperymentu mierzymy objętości cieczy  $v_{12}$ ,  $v_{22}$  jakie przepłyną przez obie szczeliny w przedziałach czasu  $t$  odpowiednio:  $(t_1, 2t_1)$  oraz  $(t_2, 2t_2)$ . Wykorzystując zależność (14) dla szczeliny o wysokości  $h_1$  otrzymamy:

$$(17) \quad \begin{aligned} V_{11} &= \frac{Q_{01}}{\gamma_1} [1 - \exp\{-\gamma_1 t_1\}], \\ V_{12} + V_{11} &= \frac{Q_{01}}{\gamma_1} [1 - \exp\{-2\gamma_1 t_1\}]. \end{aligned}$$

Eliminując z równań (17) czasy, uzyskujemy związek:

$$(18) \quad \frac{V_{11} - V_{12}}{(V_{11})^2} = \frac{\gamma_1}{Q_{01}} = N \left( h_1 + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-h_1 \alpha}$$

Dla dwóch wspomnianych szczelin, zależność (18) przybierze postać układu równań

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{V_{11} - V_{12}}{(V_{11})^2} &= N \left( h_1 + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-h_1 \alpha} \\ \frac{V_{21} - V_{22}}{(V_{21})^2} &= N \left( h_2 + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-h_2 \alpha} \end{aligned}$$

Z powyższego układu, przy zmierzonych wartościach objętości  $V_{11}$ ,  $V_{12}$ ,  $V_{21}$ ,  $V_{22}$  oraz danych  $h_1$  oraz  $h_2$  można wyznaczyć szukane parametry. Oczywiście warunkiem poprawności eksperymentu jest stałość temperatury i spadku ciśnienia, a więc i lepkości

cieczy w czasie doświadczenia. Przedstawiona wyżej metoda bazująca na podobnej, znanej metodzie określania tzw. „wskaźnika kolmatacji” (Silting Index) [1] nie jest oczywiście jedyną. W większości jednak przypadków wykorzystuje się związek (13) bądź (14).

#### 7. Wnioski

- Proponowany w pracy matematyczny model zjawiska kolmatacji wymiarowej może stanowić punkt odniesienia dla badań eksperymentalnych prowadzonych pod kątem wykorzystania szczeliny jako integralnego elementu czujnika kolmatometrycznego, a także być pomocny przy konstrukcji urządzeń do określania koncentracji i rozkładu granulometrycznego cząstek zawiesiny bazujących na tej metodzie pomiaru.
- Mimo wielu odrębnych założeń czynionych przy formułowaniu modelu matematycznego uzyskano w granicznym przypadku zbieżność z modelem proponowanym przez autora pracy [1]. Model opisany przez tegoż autora można uważać za szczególny przypadek modelu fenomenologicznego przedstawionego w niniejszej pracy.
- Układ równań różniczkowych (3) opisujący w sensie fenomenologicznym przebieg procesu kolmatacji w szczelinach ma charakter ogólny i może być wykorzystany przy założeniu dodatkowych, bądź innych mechanizmów zatrzymywania cząstek oraz odmiennych funkcji aproksymujących rozkład wymiarowy cząstek fazy zdyspergowanej.

#### Literatura cytowana w tekście

1. S. BOROWIK, *Filtry płynów roboczych*, WNT 1974.
2. S. BOROWIK, *Colmatometer — an Instrument for Continuous Measurement of Impurities Contained in Working Fluids*, Equipment & Technology Intern. USA, 1976, Vol. 2.
3. K. CIEŚLICKI, *Właściwości kolmatacyjne szczelinowych oporów hydraulicznych*, praca dokt. W-wa 1979, Polit. Warsz.
4. K. CIEŚLICKI, S. BOROWIK, *Koncepcja automatycznej kontroli jakości pracy okrętowych urządzeń oczyszczających w oparciu o kolmatomierz*. Spr. z pracy n-b A172, 1976/78, PW.
5. W. FELLER, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań*, PWN 1977, t. II.
6. J. LITWINISZYN, *Colmatage Considered as a Certain Stochastic Process*, Bull. Acad. Pol. Scien. Série Scien. Techn., Vol. 16, No. 4, 1966.
7. A. TRZASKA, *New Kinetics Equations of the Colmatage Process and their Applications*, Arch. Górnictwa, z. 4, 1972.

#### Резюме

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА КАЛЬМАТАЦИИ НА ЩЕЛЯХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

В работе представлена математическая модель явления сопутствующего течения суспензий через щель. Это явление называемое кальматацией, заключается в захватывании дисперсных частиц. Дисперсные частицы задержанные в щели разделяют область течения на отдельные сегменты. Вычислено количество —  $\bar{C}$  и характерные размеры —  $I$  всех сегментов после течения объема  $V$ . Затем проведен анализ предложенной модели основанный на компьютерных результатах решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. Представлены также приближенные аналитические решения данной системы.

## Summary

## ON A MATHEMATICAL MODEL OF COLMATAGE PROCESS IN CRACKS AND ITS APPLICATION

The work presents the phenomenological model of a phenomenon accompanying the flow of suspension through a micro-gap. The phenomenon is called the colmatage process and depends on trapping the dispersion phase particles. The particles being trapped in the gap divide its area on separate segments. There was assumed that a single particle stopped in the crack segment can divide or remove the segment, depending on their mutual dimensions. The number of segments —  $\bar{C}$  and the characteristic dimension of flow width —  $\bar{L}$  after flowing of the volume  $V$  of liquid have been calculated. The analysis based on the computer solved results of the set of formulated, nonlinear differential equations. Also the approximate, analytical solution of the set have been obtained.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 października 1980 roku.*

---





## O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH NAPRĘŻEŃ W KOMPOZYTACH LAMELKOWYCH

STANISŁAW MATYSIAK, ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Badanie stanu naprężeń w kompozytach włóknistych można, w wielu przypadkach praktycznych, sprowadzić do rozpatrywania ośrodka sprężystego z wtrąceniami (inkluzjami) w kształcie lametek. Inkluzje włókniste są zwykle głównym elementem przenoszącym siły i obciążenia działające na cały obszar kompozytu. W praktyce moduł Younga włókien jest znacznie większy od modułu Younga matrycy. Przyjmujemy, że materiał matrycy jest liniowo sprężysty, a sztywność włókien na tyle większa od sztywności matrycy, że można założyć ich nieodkształcalność. Założenie, że włókna mają kształt płaskich lametek prowadzi do uproszczenia analizy pozwalając równocześnie wyciągnąć wnioski dotyczące naprężeń w matrycy w przypadku, gdy włókna nie odbiegają zbytnio od kształtu taśmy.

Wyznamy tu stan naprężeń i przemieszczeń występujące w matrycy, przede wszystkim interesować nas będą składowe stanu naprężenia w bezpośrednim otoczeniu włókien. Wyprowadzone wzory będą przydatne przy określeniu wyężenia w matrycy oraz przy wyznaczeniu naprężeń mogących prowadzić do dekohezji na granicy między włóknami i matrycą, powstawania szczelin, przekroczenia granicy plastyczności i osiągnięcia odkształceń trwałych w matrycy, itp. Składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia zależą od współczynnika Poissona  $\nu$ . Interesujące jest to, że np. składowa naprężenia normalna do powierzchni lamelki osiąga maksymalną wartość dla  $\nu \cong 0,317$ . Znajomość rozkładu naprężeń w ośrodku nieograniczonym pozwala na oszacowanie stanu naprężenia w kompozycie, pod warunkiem, że odległość między poszczególnymi lamelkami (włóknami) nie jest mała w porównaniu do ich wymiarów poprzecznych. Nie zajmujemy się w tej pracy ważną dla kompozytów sprawą uśredniania wartości stałych materiałowych i naprężeń [3, 7].

### 2. Stan naprężeń w matrycy w otoczeniu wtrącenia w kształcie cienkiej taśmy

Materiał kompozytowy można traktować jako ośrodek sprężysty o skokowej niejednorodności, lub w przybliżeniu jako ośrodek niejednorodny z ciągłą, ale o dużym gradiencie, zmiennością przestrzenną stałych materiałowych. Najstarsza metoda polega na rozpatrzeniu dwóch lub więcej ciał, z których jedno jest matrycą, a pozostałe wtrąceniami, przy uwzględnieniu odpowiednich warunków brzegowych dla każdego z tych ciał, w tym warunków ciągłości (zwanymi czasami warunkami na „zszyciu”) przemieszczeń i naprężeń normalnych. Zakładamy tu, że wtrącenia włókniste, w kształcie lametek, są odpowiednio

uporządkowane oraz, że inkluzje są oddalone od siebie tak, że odnośne odległości są co najmniej kilkakrotnie większe od szerokości lub grubości lamelek. Założymy, że materiał lamelek jest na tyle sztywniejszy od materiału matrycy, że możemy przyjąć jego nieodkształcalność. Materiał matrycy jest sprężysty, izotropowy i jednorodny. Lamelka jest nieskończenie długa o szerokości  $2a$  i pomijalnej grubości. Przy tych założeniach przyjmiemy dwuwymiarowy stan odkształcenia. W zależności od sposobu przyłożenia sił rozpatrzmy dwa przypadki szczególne.

Lamelka zajmuje następujący obszar:  $D = \{(x, y, z); |x| < h, |y| < a, z \in R\}$ , gdzie  $(x, y, z)$  oznacza układ współrzędnych kartezjańskich,  $h \ll a$ .

**Przypadek 1.** Obciążenia zewnętrzne prostopadłe do powierzchni lamelki.

Przestrzeń z inkluzją taśmową jest poddana rozciąganiu obciążeniami  $\sigma_0$  w kierunku osi  $x$ , prostopadłym do powierzchni lamelki. Wektor przemieszczenia w dwuwymiarowym stanie odkształcenia ma postać  $u(x, y) = (u, v, 0)$ .

Rozwiążemy zagadnienie brzegowe teorii sprężystości sprowadzające się do równań przemieszczeniowych Naviera w postaci

$$(2.1) \quad (1-2\nu)u_{\alpha,\beta\beta} + u_{\beta,\beta\alpha} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 (u_1 \equiv u, u_2 \equiv v),$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad u(0, y) = v(0, y) = 0, \quad |y| \leq a,$$

oraz warunkami „wypromieniowania” w nieskończoności

$$(2.3) \quad \sigma_{xx} \rightarrow \sigma_0, \quad \sigma_{xy} \rightarrow 0, \quad \sigma_{yy} \rightarrow 0, \quad \text{dla } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty.$$

Rozwiązanie otrzymamy przez prostą superpozycję dwóch rozwiązań: zagadnienie (a) — półprzestrzeń bez wtarcenia w jednorodnym stanie naprężenia z warunkami brzegowymi (2.3), oraz zagadnienia uzupełniającego (b) spełniającego równania różniczkowe cząstkowe (2.1) z warunkami brzegowymi komplementarnymi do (2.2) i warunkami regularności w nieskończoności.

Rozwiązanie zagadnienia (a) ma postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_0 x; & v(x, y) &= -\frac{\nu}{2\mu} \sigma_0 y, \\ \sigma_{xx}(x, y) &= \sigma_0, & \sigma_{xy}(x, y) &= \sigma_{yy}(x, y) = 0, \\ & \forall x, y \in R^2. \end{aligned}$$

Zagadnienie uzupełniające (b) jest równoważne następującemu mieszanemu zagadnieniu brzegowemu dla półprzestrzeni  $x \in [0, \infty)$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ , którym rządzą równania różniczkowe cząstkowe (2.1) wraz z warunkami brzegowymi:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= 0, & y &\in R, \\ v(0, y) &= \frac{\nu}{2\mu} \sigma_0 y, & |y| &< a, \\ \sigma_{xy}(0, y) &= 0, & |y| &> a, \end{aligned}$$

oraz jednorodne warunki regularności w nieskończoności.

Przypuśćmy, że z rozwiązania wyniknie, że  $\sigma_{xy}(0, y) = -s(y)H(y-a)$ ,  $y \in R$ , przy czym  $s(-y) = -s(y)$ , oraz  $s(y) \in \mathcal{L}^1(-\infty, +\infty)$ . Rozwiązanie zagadnienia (b) przyjmuje postać następującą:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= -\frac{1}{4(1-\nu)\mu} x \mathcal{F}_c[\exp(-\xi x)\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y], \\
 v(x, y) &= -\frac{1}{4(1-\nu)\mu} \mathcal{F}_s[\xi^{-1}\{-(3-4\nu) + \xi x\} \exp(-\xi x)s(\xi); \xi \rightarrow y], \\
 (2.6) \quad \sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \mathcal{F}_c[(1-2\nu - \xi x)\exp(-\xi x)\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y], \\
 \sigma_{xy}(x, y) &= -\mathcal{F}_s\left[\left(1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \xi x\right) \exp(-\xi x)\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y\right], \\
 \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \mathcal{F}_c[\{-(3-2\nu) + \xi x\} \exp(-\xi x)\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y],
 \end{aligned}$$

gdzie  $\mathcal{F}_s[; ]$ ,  $\mathcal{F}_c[; ]$  są odpowiednio sinusową i kosinusową transformacją Fouriera, ponadto  $\tilde{s}(\xi) = \mathcal{F}_s[s(y); y \rightarrow \xi]$ .  $s(y)$  spełnia warunki brzegowe (2.5)<sub>2</sub> i (2.5)<sub>3</sub>, które prowadzą do następującego układu dualnych równań całkowych:

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad v(0, y) &= \frac{3-4\nu}{4\mu(1-\nu)} \mathcal{F}_s[\xi^{-1}\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y] = \frac{\nu}{2\mu} \sigma_0 y, \quad y \in [0, a), \\
 \sigma_{xy}(0, y) &= -\mathcal{F}_s[\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y] = 0, \quad y > a.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie dualnych równań całkowych (2.7) ma postać [8]:

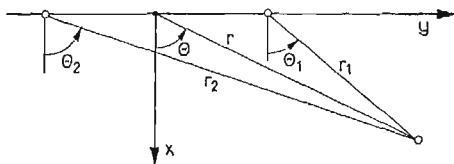
$$(2.8) \quad \tilde{s}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2\nu(1-\nu)}{3-4\nu} \sigma_0 a J_1(a\xi),$$

gdzie  $J_1(a\xi)$  jest funkcją Bessela.

Po podstawieniu wartości całek [4] występujących we wzorach (2.6) otrzymamy następujące rozwiązanie zagadnienia uzupełniającego:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= -\frac{\nu\sigma_0}{2\mu(3-4\nu)} r \cos\Theta \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left[\Theta - \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)\right] \right\}, \\
 v(x, y) &= \frac{\nu\sigma_0}{2\mu(3-4\nu)} \left\{ (3-4\nu) \left[ r \sin\Theta - \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r^2 \cos\Theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left[\Theta - \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)\right] \right\}, \\
 \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{\nu\sigma_0}{3-4\nu} \left\{ (1-2\nu) \left[ 1 - \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\Theta - \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)\right) \right] - \right. \\
 (2.9) \quad &\quad \left. - r \cos\Theta \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cos\frac{3}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) \right\}, \\
 \sigma_{xy}(x, y) &= -\frac{2\nu(1-\nu)}{3-4\nu} \sigma_0 \left\{ \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left[\Theta - \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)\right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2(1-\nu)} r \cos\Theta \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin\frac{3}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) \right\},
 \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad \sigma_{yy}(x, y) = -\frac{\nu\sigma_0}{3-4\nu} \left\{ -(3-2\nu) \left[ 1 - \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left( \Theta - \frac{1}{2} (\Theta_1 + \Theta_2) \right) \right] + \right. \\ \left. + r \cos \Theta \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cos \frac{3}{2} (\Theta_1 + \Theta_2) \right\},$$



Rys. 1

gdzie  $r$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  oraz  $\Theta$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  są określone wzorami (rys. 1)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Theta = \arctg \frac{y}{x},$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}, \quad \Theta_1 = \arctg \frac{y-a}{x},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}, \quad \Theta_2 = \arctg \frac{y+a}{x},$$

dla  $x = 0$ ,  $|y| < a$ ,  $\Theta_1 = \frac{3}{2}\pi$ ,  $\Theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  oraz  $\frac{3}{2}\pi$ ,

dla  $x = 0$ ,  $|y| > a$ ,  $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta = \frac{\pi}{2}$  oraz  $\frac{3}{2}\pi$ .

Z kolei dla  $x = 0$  otrzymujemy następujące składowe przemieszczenia i naprężenia. Wzory te podajemy dla zagadnienia wyjściowego, tzn. superpozycji rozwiązań zagadnienia (a) i (b):

$$(2.10) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= 0, \\ v(0, y) &= \frac{\nu}{2\mu} \sigma_0 \operatorname{sgn}(y) \sqrt{y^2 - a^2} H(|y| - a), \\ \sigma_{xx}(0, y) &= \left[ 1 - \frac{\nu(1-2\nu)}{3-4\nu} \right] \sigma_0 + \frac{\nu(1-2\nu)}{3-4\nu} \frac{|y|\sigma_0}{\sqrt{y^2 - a^2}} H(|y| - a), \\ \sigma_{xy}(0, y) &= -\frac{2\nu(1-\nu)}{3-4\nu} \sigma_0 \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} H(a - |y|), \\ \sigma_{yy}(0, y) &= \frac{3-2\nu}{3-4\nu} \nu\sigma_0 \left[ 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - a^2}} H(|y| - a) \right], \end{aligned}$$

gdzie  $H(y)$  oznacza funkcję Heaviside'a.

Obliczmy jeszcze współczynnik intensywności naprężeń:

$$K_I = \lim_{y \rightarrow a^+} 2\sqrt{2\pi(|y| - a)} \sigma_{xx}(0, y),$$

skąd, po podstawieniu otrzymujemy

$$(2.11) \quad K_1 = \frac{2\sqrt{\pi}(1-2\nu)\nu}{3-4\nu} \sqrt{a} \sigma_0.$$

Z powyższych rozważań możemy wyciągnąć dwa następujące wnioski:

1. lamelki o dużej sztywności spełniają rolę koncentratora naprężeń w matrycy,
2. współczynnik intensywności naprężeń osiąga największą wartość dla  $\nu = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \cong \cong 0,317$ .

**Przypadek 2.** Obciążenie równoległe do powierzchni lamelki.

Obecnie przyjmiemy, że obciążenie zewnętrzne  $q_0$  jest równoległe do osi  $Oy$ , przy niezmiennym położeniu lamelki. Układ równań różniczkowych nie ulegnie zmianie, podobnie jak warunki brzegowe na powierzchni lamelki, jedynie warunki w nieskończoności przyjmą teraz postać:

$$\sigma_{xx} \rightarrow 0, \quad \sigma_{xy} \rightarrow 0, \quad \sigma_{yy} \rightarrow q_0, \quad \text{dla } \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty$$

Również w tym przypadku wykorzystamy zasadę superpozycji. Zagadnienie (c) odpowiada równomiernemu stanowi naprężenia wywołanemu w ośrodku sprężystym bez inkluzji obciążeniami  $q_0$  przyłożonymi w nieskończoności. Rozwiązanie zagadnienia (c) otrzymamy z rozwiązania zagadnienia (a) przez cykliczną zamianę współrzędnych:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{\nu}{2\mu} q_0 x, & v(x, y) &= \frac{1-\nu}{2\mu} q_0 y, \\ \sigma_{xx}(x, y) &= \sigma_{xy}(x, y) = 0, & \sigma_{yy}(x, y) &= q_0, \\ & \forall x, y \in R^2. \end{aligned}$$

Zagadnienie uzupełniające (d) sprowadza się do rozwiązania równań różniczkowych równowagi (2.1) z warunkami regularności w nieskończoności oraz następującymi warunkami brzegowymi:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u &\in R, \\ v(0, y) &= -\frac{1-\nu}{2\mu} q_0 y, & \text{dla } |y| < a, \\ \sigma_{xy}(0, y) &= 0, & |y| > a. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zagadnienia (d) otrzymujemy przez podstawienie we wzorach (2.9) wartości

$$(2.14) \quad \sigma_0 = -\frac{1-\nu}{\nu} q_0.$$

Przez superpozycję rozwiązań zagadnień (c) i (d) otrzymujemy dla  $x = 0$  rozwiązanie odpowiadające przypadkowi 2 obciążeń zewnętrznych:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= 0, \\ v(0, y) &= -\frac{1-\nu}{2\mu} q_0 \operatorname{sgn}(y) \sqrt{y^2-a^2} H(|y|-a), \\ \sigma_{xx}(0, y) &= \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{3-4\nu} q_0 \left[ 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}} H(|y|-a) \right], \end{aligned}$$

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy}(0, y) &= \frac{2(1-\nu)^2}{3-4\nu} q_0 \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} H(a-|y|), \\ \text{[cd.]} \quad \sigma_{yy}(0, y) &= \frac{(1-\nu)(3-2\nu)}{3-4\nu} q_0 \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}} H(|y|-a) + q_0 \left[ 1 - \frac{(1-\nu)(3-2\nu)}{3-4\nu} \right]. \end{aligned}$$

Współczynnik intensywności naprężeń przyjmie w tym przypadku wartość

$$(2.16) \quad K_I = \frac{2\sqrt{\pi a}(1-\nu)(1-2\nu)}{3-4\nu} q_0,$$

osiągając maksymalną wartość dla  $\nu = 0$ .

### 3. Wyniki liczbowe i wnioski

Z otrzymanych wzorów, w obu przypadkach obciążeń możemy obliczyć koncentrację naprężeń oraz współczynniki intensywności naprężeń. Dla porównania podajemy, że odpowiedni współczynnik intensywności naprężeń szczeliny Griffitha w dwuwymiarowym stanie odkształcenia przyjmuje wartość

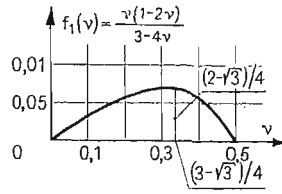
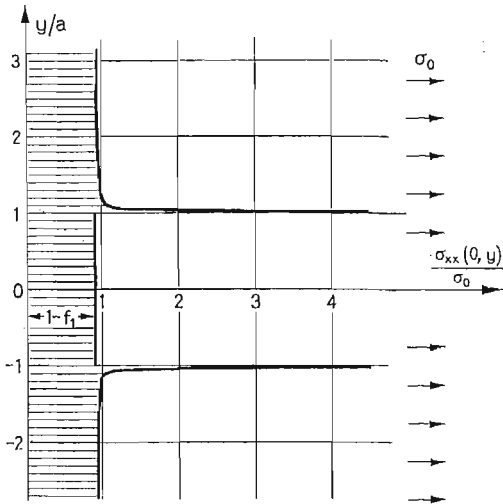
$$(3.1) \quad K_I = \sqrt{\pi a p_0},$$

gdzie  $p_0$  są obciążeniami prostopadłymi do powierzchni szczeliny. Jak widać współczynnik ten nie zależy od stałych materiałowych. W przypadku inkluzji można mieć wątpliwości jak należy obliczyć współczynnik intensywności naprężeń. Każda ze składowych stanu naprężenia wzrasta nieograniczenie w otoczeniu wierzchołków inkluzji i niewiadomo, która z nich będzie decydująca przy inicjacji pęknięcia. Wydaje się, że w przypadku odklejania się materiału matrycy od inkluzji decydujący wpływ będzie miała składowa styczna tensora naprężeń, w przypadku pęknięcia na zewnątrz inkluzji w płaszczyźnie lamelki składowa normalna naprężenia.

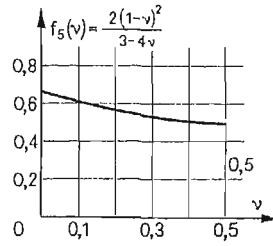
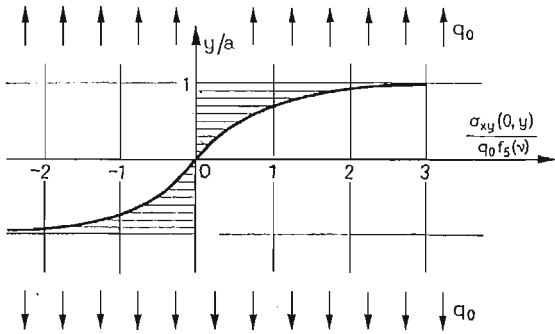
Na rysunkach 2-7 przedstawiliśmy rozkład poszczególnych składowych naprężenia oraz podaliśmy wykresy sześciu funkcji stałej materiałowej Poissona  $f_1(\nu) - f_6(\nu)$ . Okazuje się, że każda z wymienionych składowych naprężenia zależy w inny sposób od stałej Poissona, osiągając największe wartości bądź na brzegach przedziału zmienności, lub przyjmując ekstremum wewnątrz dziedziny określoności  $\nu$ . W przypadku obciążeń normalnych do powierzchni lamelki  $\sigma_0$ , naprężenia  $\sigma_{xx}(0, y)$  osiągają maksimum dla wartości stałej

Poissona  $\nu_m = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ , wtedy  $f_1(\nu_m) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ . Naprężenia  $\sigma_{xy}(0, y)$  oraz  $\sigma_{yy}(0, y)$  znikają dla  $\nu = 0$  i przyjmują odpowiednie największe wartości dla materiału nieściśliwego.

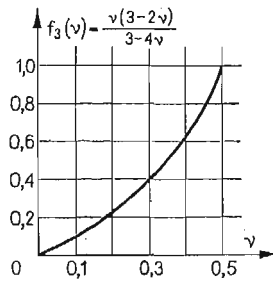
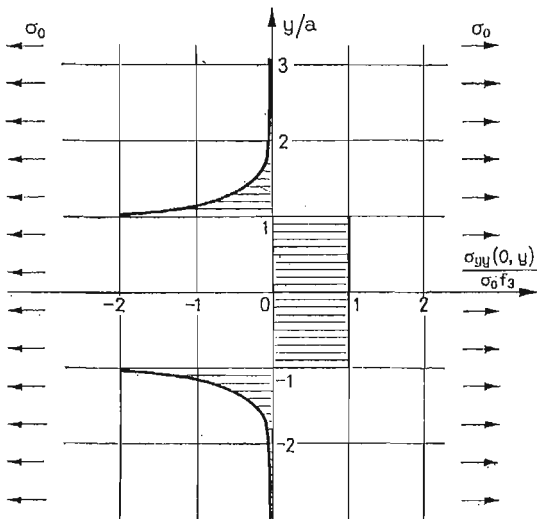
Z kolei przy obciążeniach równoległych do powierzchni lamelki  $q_0$  otrzymujemy największe wartości  $\sigma_{xx}(0, y)$  oraz  $\sigma_{xy}(0, y)$  dla  $\nu = 0$ , ponadto  $\sigma_{xx}(0, y)$  znika dla materiału nieściśliwego. Naprężenia  $\sigma_{yy}(0, y)$  natomiast przyjmują wartość minimalną dla  $\nu_m = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$  wynoszącą  $f_6(\nu_m) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ , a jednakowe wartości największe dla  $\nu = 0$  i  $\nu = 0,5$ .



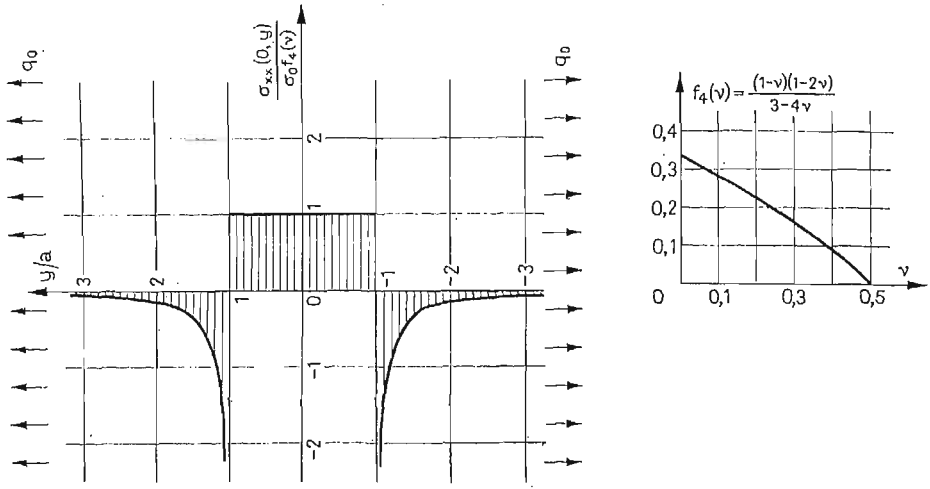
Rys. 2



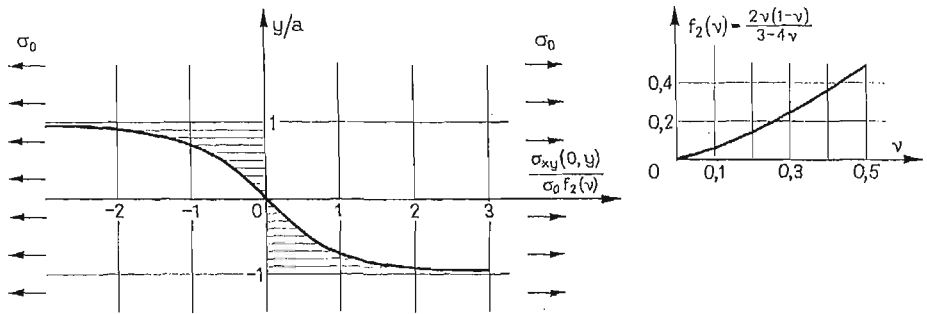
Rys. 3



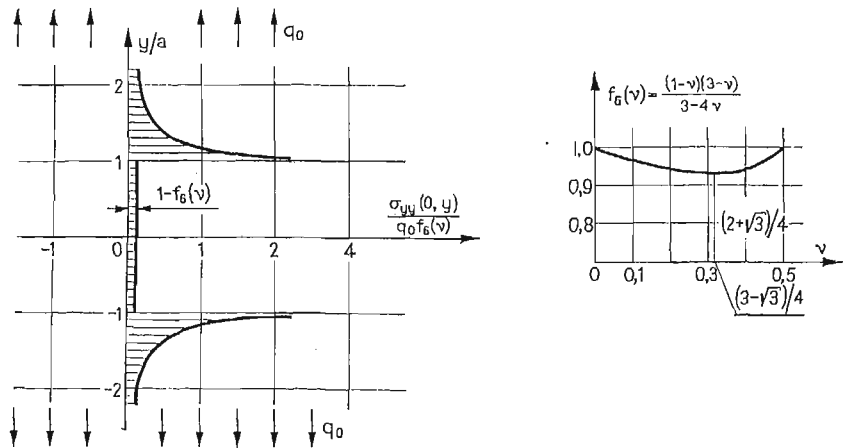
Rys. 4



Rys. 5

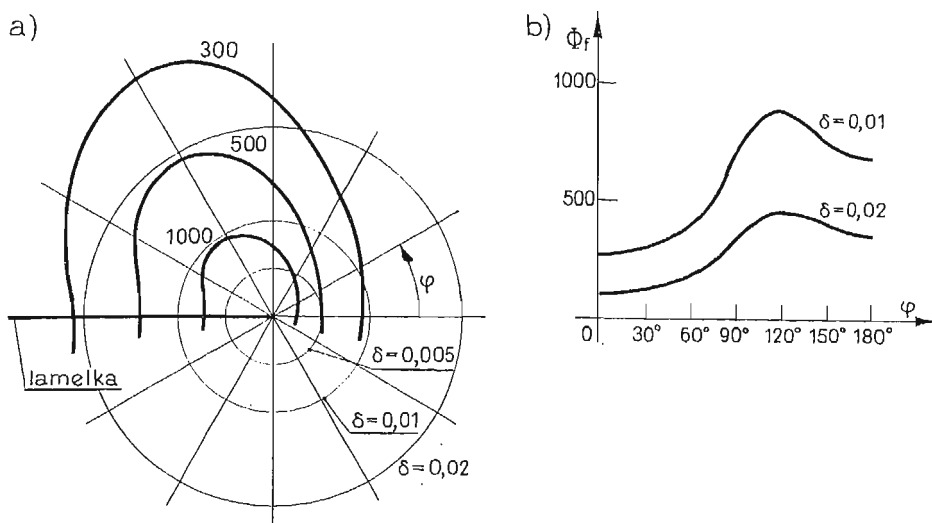


Rys. 6

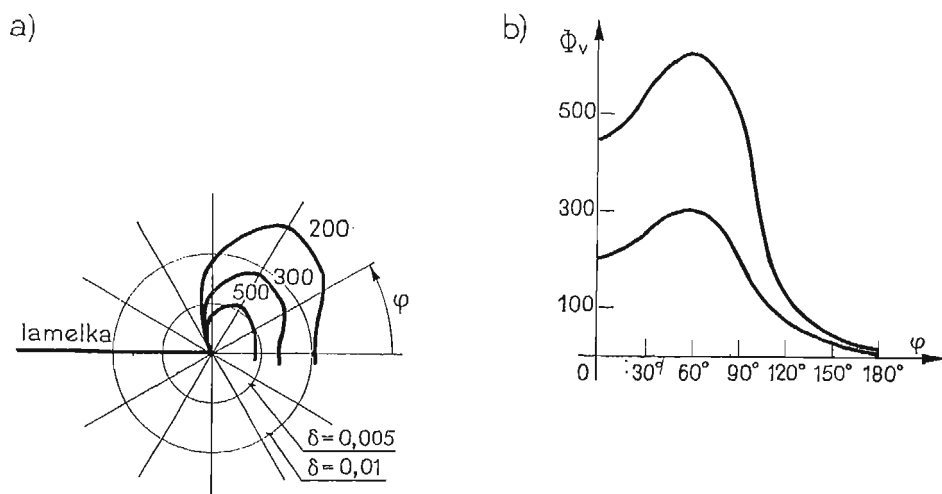


Rys. 7





Rys. 8



Rys. 9

Zaletą przedstawionego tu rozwiązania analitycznego dla kompozytu z nieodkształcalnymi lamelkami jest łatwość wyciągnięcia interesujących nas wniosków. Rozwiązanie dla lamelki sprężystej prowadzi do równania całkowego Fredholma II rodzaju na pewną funkcję w przestrzeni transformacji. Rozwiązanie można otrzymać na drodze numerycznej, z kolei przemieszczenia i naprężenia otrzymujemy przez obliczenie odpowiednich transformacji odwrotnych. Dyskusja otrzymanych na tej drodze wyników jest trudna i uciążliwa i prowadzi do wzorów przybliżonych.

## 4. Ogólny przypadek obciążenia

Przypuśćmy, że równomierne pole naprężeń  $p_0$  jest nachylone pod kątem  $\alpha$  do powierzchni lamelki. Wtedy wystarczy do wyprowadzonych wzorów podstawić

$$(4.1) \quad \sigma_0 = p_0 \sin \alpha, \quad q_0 = p_0 \cos \alpha.$$

Odpowiedni warunek brzegowy w zagadnieniu uzupełniającym (b) wzór (2.5) przyjmie postać

$$(4.2) \quad v(0, y) = \frac{y}{2\mu} p_0 [\nu(\sin \alpha + \cos \alpha) - \cos \alpha],$$

do wzorów (2.9) należy wtedy podstawić

$$(4.3) \quad \sigma_0 = p_0 \left[ \sin \alpha + \cos \alpha - \frac{1}{\nu} \cos \alpha \right].$$

Rozwiązanie ogólne otrzymamy przez dodanie, w odpowiedni sposób, do wzorów (2.9) rozwiązań zagadnienia (a), będącego uogólnieniem rozwiązania (2.4), w postaci

$$(4.4) \quad \begin{aligned} 2\mu u(x, y) &= -p_0 x [\nu(\sin \alpha + \cos \alpha) - \sin \alpha], \\ 2\mu v(x, y) &= p_0 y [\nu(\cos \alpha - \sin \alpha) - \cos \alpha], \\ \sigma_{xx}(x, y) &= p_0 \sin \alpha, \quad \sigma_{xy}(x, y) = 0, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= p_0 \cos \alpha. \end{aligned}$$

## 5. Energia właściwa odkształcenia postaciowego

W przypadku dwuwymiarowego stanu odkształcenia mamy następujący znany wzór na energię właściwą odkształcenia postaciowego:

$$(5.1) \quad \Phi_f = \frac{1}{12\mu} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \{(\nu - 1)\sigma_{xx} + \nu\sigma_{yy}\}^2 + \{(\nu - 1)\sigma_{yy} + \nu\sigma_{xx}\}^2 + 6\sigma_{xy}^2].$$

Podstawienie odpowiednich wyrażeń na naprężenia wyznaczone w p. 2 pracy pozwala na znalezienie krzywych stałej właściwej energii odkształcenia postaciowego  $\phi_f(x, y) = \text{const}$ . Ponieważ rozwikłanie tego równania jest uciążliwe, a najbardziej interesuje nas wartość energii w bezpośrednim otoczeniu wierzchołków lamelki, tzn. punktu  $(0, a)$  wyprowadzimy wzory przybliżone, wykorzystując rozwinięcia asymptotyczne dla małej wartości  $r_1/a = \delta \ll 1$  (por. rys. 1). Otrzymujemy następujące wzory:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{\nu\sigma_0}{3-4\nu} \left[ (1-2\nu) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \cos \frac{3}{2} \varphi \right] + O(\delta^{1/2}), \\ \sigma_{xy}(x, y) &= -\frac{2(1-\nu)\nu}{3-4\nu} \sigma_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sin \frac{\varphi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \cos \frac{3}{2} \varphi \right] + O(\delta^{1/2}), \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \sigma_{yy}(x, y) = -\frac{\nu\sigma_0}{3-4\nu} \left[ -(3-2\nu) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \sin \frac{3}{2} \varphi \right] + O(\delta^{1/2}). \\ \text{[cd.]}$$

Wzór na energię właściwą odkształcenia postaciowego ma postać:

$$(5.3) \quad \phi_f(x, y) = \frac{1}{12\mu} \frac{\nu^2 \sigma_0^2}{(3-4\nu)^2} \left\{ 4 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) (-4\nu^2 + 6\nu - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \sin \frac{3}{2} \varphi \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) (-4\nu^2 + 6\nu - 3) + (1-2\nu) \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \sin \frac{3}{2} \varphi \right]^2 + \right. \\ \left. + 24(1-\nu)^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \cos \frac{3}{2} \varphi \right]^2 \right\} + O(\delta).$$

W podobny sposób można wyprowadzić wzór na właściwą energię objętościową:

$$\Phi_v = \frac{1}{12\mu} \frac{\nu^2 \sigma_0^2}{(3-4\nu)^2} (1-2\nu)(1+\nu) \left[ 4(1-\nu) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \sin \frac{3}{2} \varphi \right]^2 + O(\delta); \\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1.$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. D. ACHENBACH, *A theory of elasticity with microstructure for directionally reinforced composites*, CISM Courses and Lectures nr 167, 1975, Udine.
2. W. E. CLAUSEN, A. W. LEISSA, *Stress and deflection analysis of fibrous composite materials under external load*, AFML-TR-67-151.
3. I. N. FRANCEVIČ, D. M. KARPINOS, *Kompozycyjne materiały włóknistego strojenia*, Kijów, Naukowa Dumka, 1970.
4. I. S. GRADSZTEJN, I. M. RYŻIK, *Tablicy integralow, summ, rjadow, proizwiedienij*, Nauka, Moskwa, 1971.
5. Z. HASHIN, *Theory of fiber reinforced materials*, NASA Contractor Report, Nr 1974, March 1972.
6. L. JENTSCH, *VII Sympozjum zagadnień i metod fizyki matematycznej*, Karl-Marx-Stadt, 18 - 22 VI 1979, referat sekcyjny pt. *Zagadnienia matematyczne teorii sprężystości ciał o jednorodności skokowej*.
7. G. P. SENDECKIJ, *Mechanics of composite materials*, Academic Press 1974, także wydanie rosyjskie Mir, Moskwa 1978.
8. I. N. SNEDDON, *Mixed boundary value problems in the potential theory*, North Holland Publ. Com, Amsterdam, 1966.
9. G. A. WAN-FO-FY, *Prikladnaja Miechanika*, 1, 5, 111 (1965), Kijów.
10. G. A. WAN-FO-FY, *Miechanika Polimierow*, 4, 593 (1966).

## Резюме

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ  
С ЛЕНТООБРАЗНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Рассматривается композиционный материал с лентообразными волокнами. Выведены формулы на напряжения и перемещения в матрице окружающей волокна в случае растягивающих усилий. Результаты рассуждений касающихся зависимости от коэффициента Пуассона приведены в виде диаграмм. Приведены также выражения на плотность энергии.

## Summary

## PROPERTIES OF STRESSES IN COMPOSITES WITH RIBBON-LIKE INCLUSIONS

A composite with rigid, ribbon-like fibres has been considered. The formulae have been derived for stress and displacements in the matrix surrounding a fiber in the case of tensile forces. The dependence on Poisson's ratio has been discussed and given in diagrams. The expression for energy density completes the paper.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI  
INSTYTUT MECHANIKI

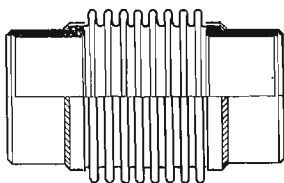
---

## WPLYW PODATNOŚCI PIERŚCIENI WZMACNIAJĄCYCH NA PRACĘ KOMPENSATORÓW MIESZKOWYCH<sup>1)</sup>

CYPRIAN KOMORZYCKI (LUBLIN), JACEK STUPNICKI (WARSZAWA)

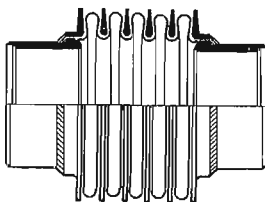
### 1. Wstęp

Przewody rurowe w instalacjach ciepłowniczych oraz różnego typu układach sieci przemysłowych, pracujących w zmiennych warunkach termicznych, muszą mieć możliwość wydłużeń przy niewielkich wzrostach sił. Uzyskuje się to na drodze kompensacji naturalnej przez wprowadzenie dużej liczby załamań i krótkich odcinków prostych lub też przez stosowanie kompensatorów wydłużeń termicznych. Spośród stosowanych obecnie kompensatorów kształtowych, dławicowych i mieszkowych, najbardziej uniwersalne są coraz częściej stosowane kompensatory mieszkowe (rys. 1).



Rys. 1. Kompensator mieszkowy

Przeгляд współczesnych możliwości w zakresie kompensacji wydłużeń termicznych przez zastosowanie mieszków sprężystych dają rozwiązania stosowane przez firmy Hydraschlauch-Fabrik [1] i Gilardini SpA Divisione Flexider [2].



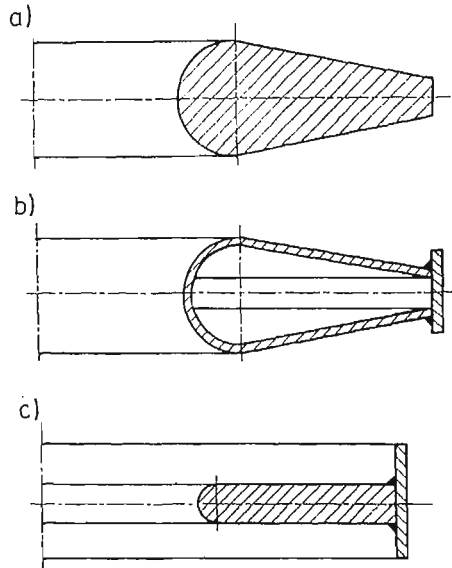
Rys. 2. Kompensator mieszkowy z pierścieniami wzmocniającymi

Od kompensatorów wymagamy dużej podatności w kierunku występujących przemieszczeń oraz odpowiedniej wytrzymałości na działające ciśnienia. W przypadku kompensatorów mieszkowych zachowanie odpowiedniej wytrzymałości przy rosnących ciśnieniach i rosnących średnicach nie dają się pogodzić z wymogiem odpowiedniej podatności.

<sup>1)</sup> Autorzy składają serdeczne podziękowanie Docentowi Janowi Witkowskiemu za cenne wskazówki, udzielone przy wykonywaniu niniejszej pracy.

Konsekwencją tego było pojawienie się kompensatorów mieszkowych z pierścieniami wzmacniającymi (rys. 2).

Obecność pierścieni wzmacniających w kompensatorze stwarza możliwość wystąpienia pod wpływem ciśnienia wewnętrznego stanu naprężeń bliskiego stanowi błonowemu. Pozwala to zmniejszyć grubość ścianki mieszka przy stałym ciśnieniu lub zwiększyć ciśnienie wewnętrzne przy nieziennej grubości powłoki. Mniejsza grubość ścianki zmniejsza sztywność mieszka, co jest zjawiskiem pożądanym.

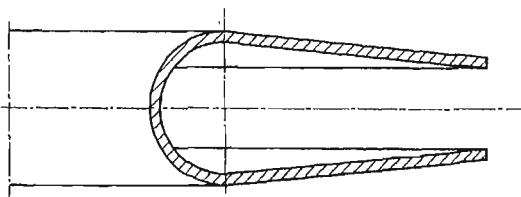


Rys. 3. Przykłady różnych kształtów pierścieni wzmacniających

Analiza wytrzymałościowa kompensatora mieszkowego z pierścieniami wzmacniającymi stanowi zagadnienie kontaktu dwóch ciał odkształcalnych o złożonym kształcie i może być prowadzona metodami doświadczalnymi lub analitycznymi.

Decydujący wpływ na rozkład naprężeń w mieszku i jego podatność mają wymiary i kształt pierścienia wzmacniającego. Różne kształty pierścieni wzmacniających, spotykanych w dotychczasowych rozwiązaniach kompensatorów mieszkowych pokazuje rys. 3.

Pierścień wzmacniający powinien być odpowiednio wytrzymały i sztywny przy działaniu obciążeń w kierunku promieniowym i powinien zabezpieczać jak najlepszą realizację przemieszczeń osiowych. Ten ostatni warunek można osiągnąć, stosując pierścień możliwie cienki (rys. 3c) lub pierścień o dużej podatności w kierunku osiowym (rys. 4).



Rys. 4. Cienkościenny pierścień wzmacniający

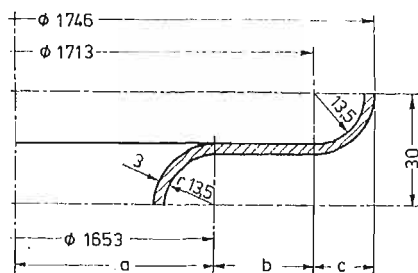
Odcinek powłoki cylindrycznej, widoczny na rys. 3c, ma zabezpieczać pierścień przed utratą stateczności.

Obok wymiarów i kształtu pierścienia wzmacniającego na własności użytkowe kompensatora wpływają wymiary i kształt mieszka oraz użyty materiał i stosowana technologia wykonania.

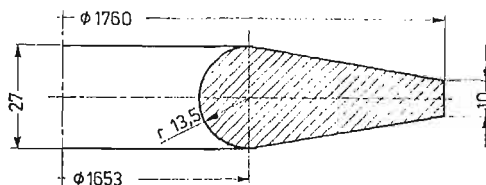
## 2. Sprecyzowanie zadania i metoda badań

W dotychczasowych rozwiązaniach analitycznych kompensatorów mieszkowych z pierścieniami wzmacniającymi [3] zakładano, iż pierścień jest idealnie sztywny. Ten model obliczeniowy dobrze opisuje współpracę mieszka z masywnym pierścieniem wzmacniającym, nie umożliwia jednak analizowania kompensatorów z podatnymi pierścieniami wzmacniającymi. Nowe możliwości w zakresie badania współpracy mieszka i pierścienia w czasie odkształceń rurociągu stwarza metoda elementów skończonych (MES) [4, 5, 6].

Celem niniejszego opracowania jest wykazanie, iż poszukiwanie optymalnej konstrukcji kompensatora mieszkowego z pierścieniami wzmacniającymi powinno między innymi zmierzać w kierunku poszukiwania optymalnych kształtów pierścieni wzmacniających wśród pierścieni cienkościennych o dużej podatności osiowej.



Rys. 5. Wymiary jednej półfali mieszka: a — torus wewnętrzny, b — część płytowa, c — torus zewnętrzny



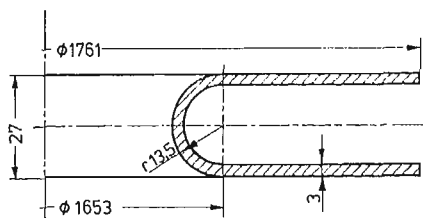
Rys. 6. Masywny pierścień wzmacniający

Do obliczeń numerycznych przyjęto wymiary jednej półfali mieszka jak na rys. 5.

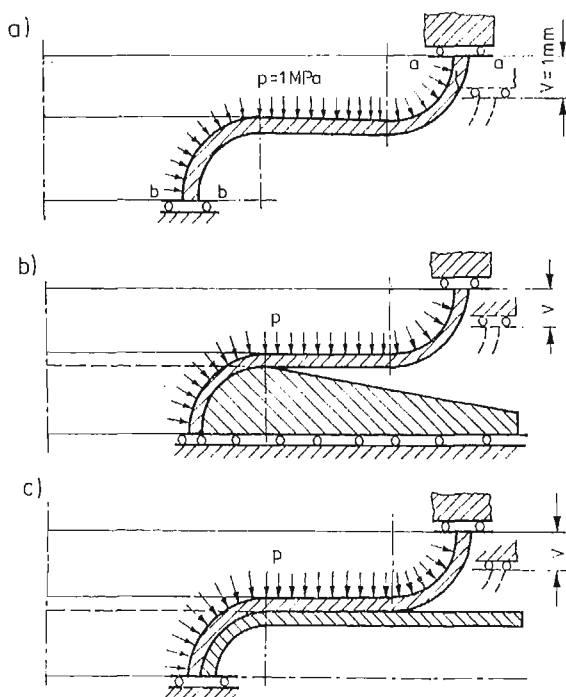
Wymiary i kształty pierścieni wzmacniających do porównawczych badań numerycznych przedstawiają rys. 6 i 7.

Przeprowadzone zostały obliczenia kompensatora mieszkowego bez pierścieni wzmacniających oraz z masywnymi i cienkościennymi pierścieniami wzmacniającymi dla obciążeń ciśnieniem wewnętrznym  $p = 1$  MPa i dla obciążeń kompensatora przemieszczeniem

osiowym  $v = 1$  mm na jedną półfałę. Schematy obliczeniowe dla tych przypadków przedstawia rys. 8.



Rys. 7. Wymiary cienkościennego pierścienia wzmacniającego



Rys. 8. Schematy obliczeniowe kompensatora: a) bez pierścieni wzmacniających, b) z masywnymi pierścieniami wzmacniającymi, c) z cienkościennymi pierścieniami wzmacniającymi o dużej podatności w kierunku osiowym

W przeprowadzonych badaniach zagadnienia kontaktu mieszkła i pierścienia można wyróżnić następujące etapy:

- 1) Podział mieszkła i pierścienia wzmacniającego na elementy skończone. Opracowanie listy danych odnośnie topologii, obciążeń zewnętrznych i warunków brzegowych.
- 2) Zastąpienie ciągłego oddziaływania między mieszkłem i pierścieniem wzmacniającym oddziaływaniem dyskretnym w wybranych węzłach mieszkła i pierścienia na podporach przesuwowych, nie uwzględniających sił tarcia. Przy podziale na elementy skończone  $p(1)$ , należy zapewnić, ażeby węzły siatki podziału mieszkła i pier-



ścienia na elementy skończone, w których chcemy przewidywać dyskretne oddziaływanie, trafiały na siebie.

- 3) Napisanie układu równań Maxwella-Mohra dla mieszka przy założeniu, że na wszystkich  $n$  podporach występuje wzajemne oddziaływanie:

$$[\alpha_{ik}]\{X_k\} = \{\delta_i\}$$

gdzie:  $X_k$  — siła wzajemnego oddziaływania mieszka i pierścienia na podporze o numerze „ $k$ ”,

$\alpha_{ik} = (\alpha_{ik})_m - (\alpha_{ik})_p$ ;  $(\alpha_{ik})_m$  — przemieszczenie węzła „ $i$ ” mieszka pod wpływem siły jednostkowej (tu  $10^5$  N) przyłożonej w węźle „ $k$ ” mieszka,

$(\alpha_{ik})_p$  — przemieszczenie węzła „ $i$ ” pierścienia pod wpływem siły jednostkowej przyłożonej w węźle „ $k$ ” pierścienia;

$\delta_i = \delta_{i0} + \delta_{im} - \delta_{ip}$ ;  $\delta_{i0}$  — luz między węzłami mieszka i pierścienia o numerze „ $i$ ” przed przyłożeniem obciążeń zewnętrznych do kompensatora,  $\delta_{im}$  — przemieszczenie węzła „ $i$ ” mieszka pod wpływem obciążenia zewnętrznego (ciśnienie wewnętrzne lub przemieszczenie osiowe), przyłożonego do mieszka,  $\delta_{ip}$  — przemieszczenie węzła „ $i$ ” pierścienia pod wpływem obciążenia zewnętrznego, przyłożonego do pierścienia (w rozpatrywanym przypadku nie występuje).

Wielkości  $(\alpha_{ik})_m$ ,  $(\alpha_{ik})_p$ ,  $\delta_{im}$  i  $\delta_{ip}$  orzymano na drodze obliczeń numerycznych MES z wykorzystaniem odpowiednich programów [7, 8] dla ciał osiowo-symetrycznych obciążonych osiowo-symetrycznie.

- 4) Utworzenie z układu równań Maxwella-Mohra p (3) przez odpowiednie skreślenie wierszy i kolumn o tych samych numerach (równoznaczne z odrzucaniem podpór), układu równań, którego rozwiązanie wskazywać będą na istnienie docisku na wszystkich uwzględnionych podporach (zgodne jest to z fizykalną stroną zjawiska). Jeśli uwzględniona w równaniach ilość dyskretnych oddziaływań między mieszkiem i pierścieniem w domniemanym obszarze kontaktu (obszarze poszukiwań) będzie maksymalna, to rozwiązanie należy uznać za optymalne. Będzie to układ:

$$[\alpha_{ik}]_{n_r \times n_r} \{X_k\}_{n_r} = \{\delta_i\}_{n_r}$$

gdzie:  $n_r \leq n$

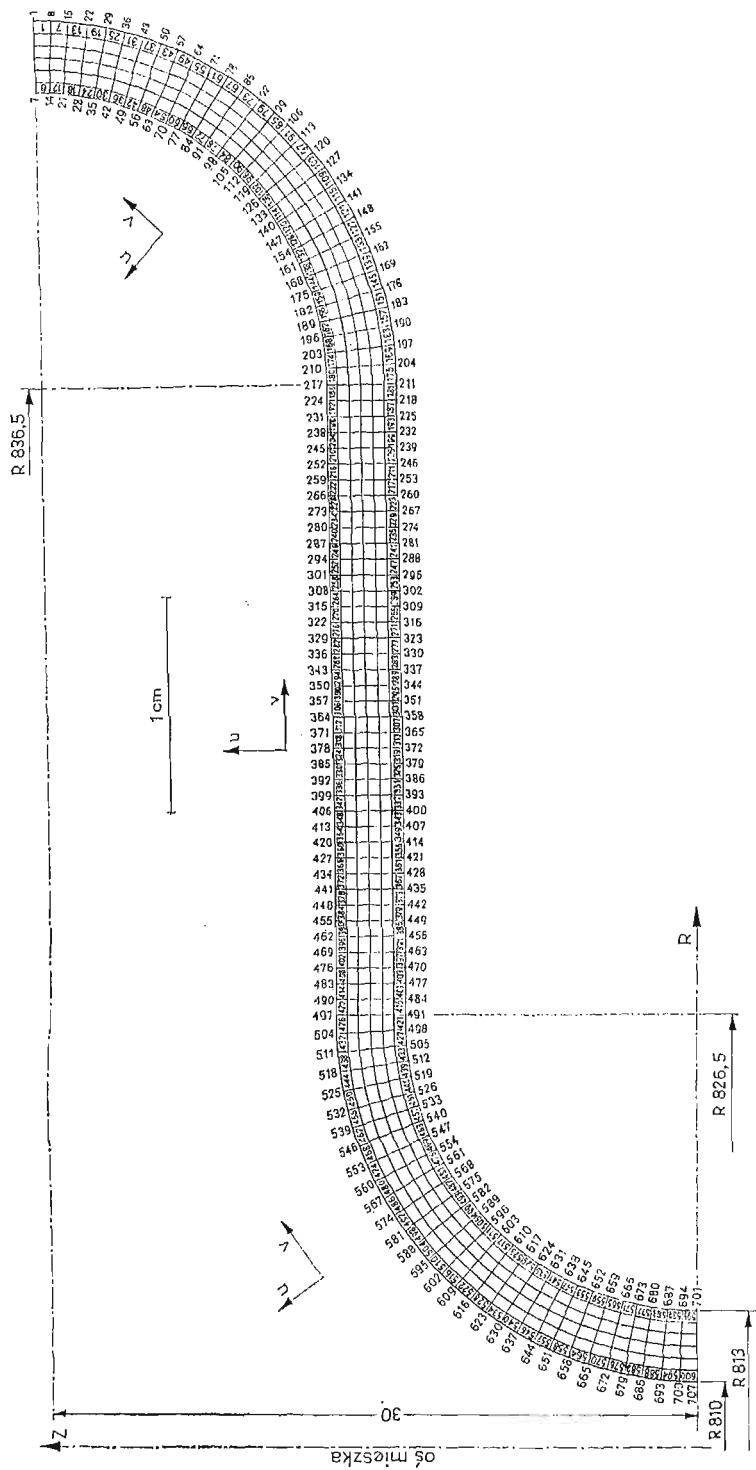
$X_1 \dots X_{n_r}$  — rzeczywiste oddziaływanie dyskretne między mieszkiem i pierścieniem.

- 5) Włączenie wielkości  $X_1, X_2, \dots, X_{n_r}$  do listy obciążeń zewnętrznych mieszka i pierścienia oraz przeprowadzenie obliczeń MES.

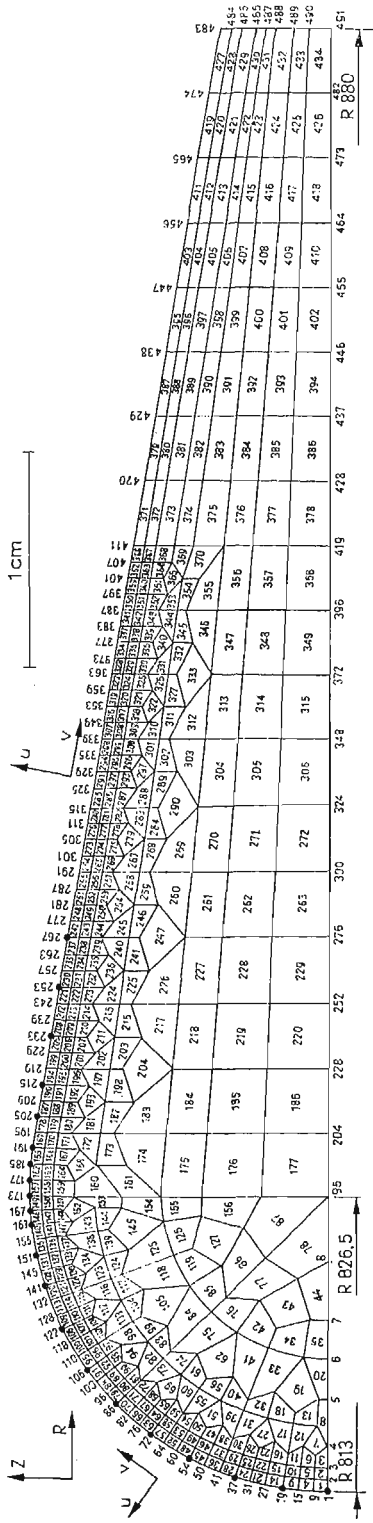
Dokładność przeprowadzonych w ten sposób obliczeń zależy od gęstości podziału elementów konstrukcji, kontaktujących się ze sobą, na elementy skończone oraz od ilości wstępnie przewidzianych oddziaływań dyskretnych.

### 3. Wyniki badań

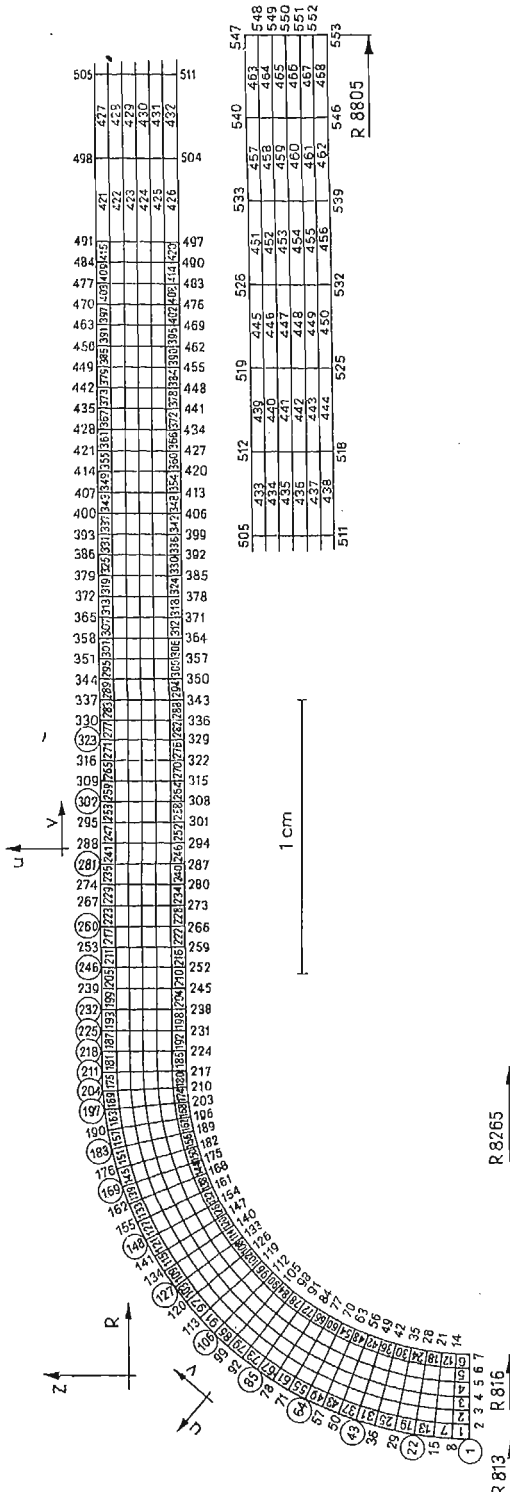
Podział mieszka i pierścieni wzmacniających na elementy skończone z zaznaczeniem 21 punktów, w których przewidziano wstępnie kontakt, pokazują rys. 9, 10, 11. Wartości sił kontaktowych  $X$  i wielkości sił wewnętrznych dla rozpatrywanych przypadków zawiera



Rys. 9. Podział mieszka na elementy skończone



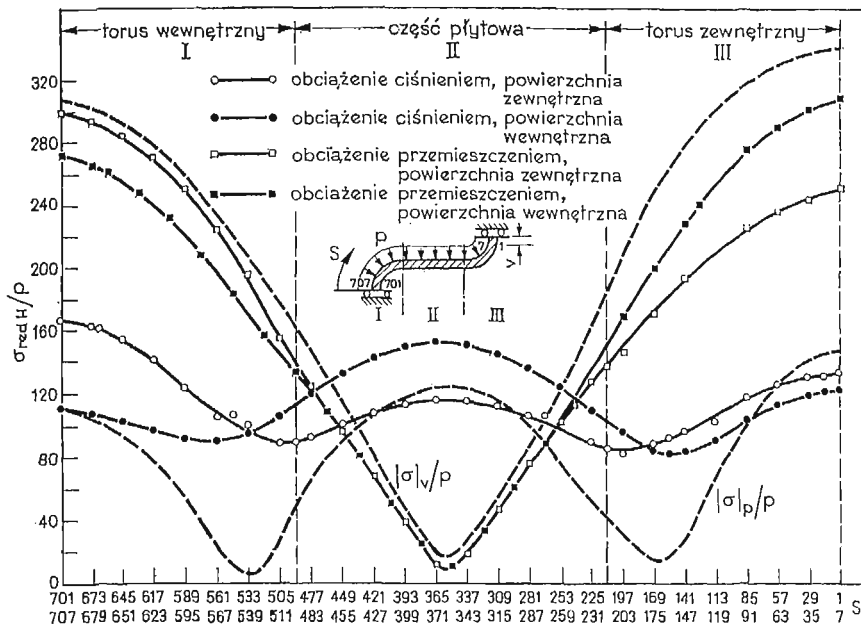
Rys. 10. Podział masywnego pierścienia wzmacniającego na elementy skończone



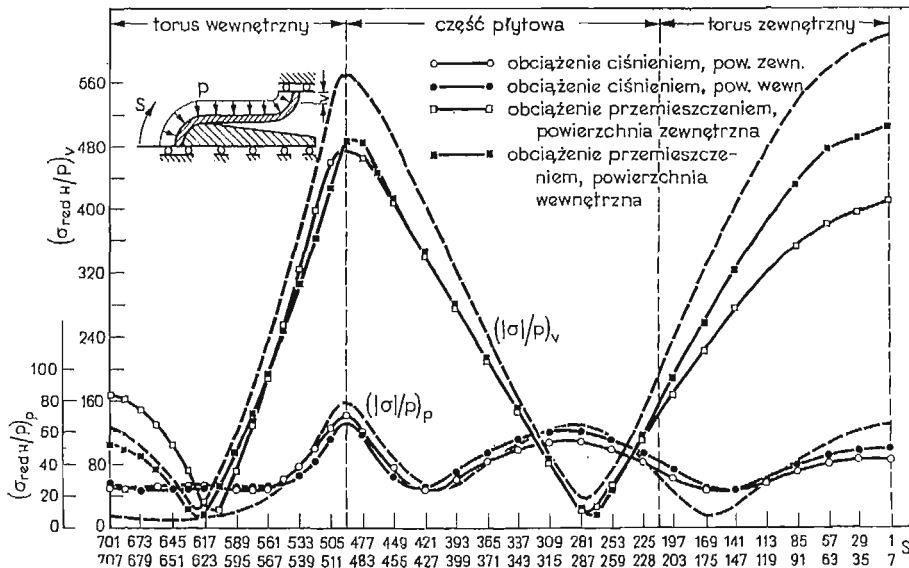
Rys. 11. Podział cienkościennego pierścienia wzmacniającego na elementy skończone

Tablica 1

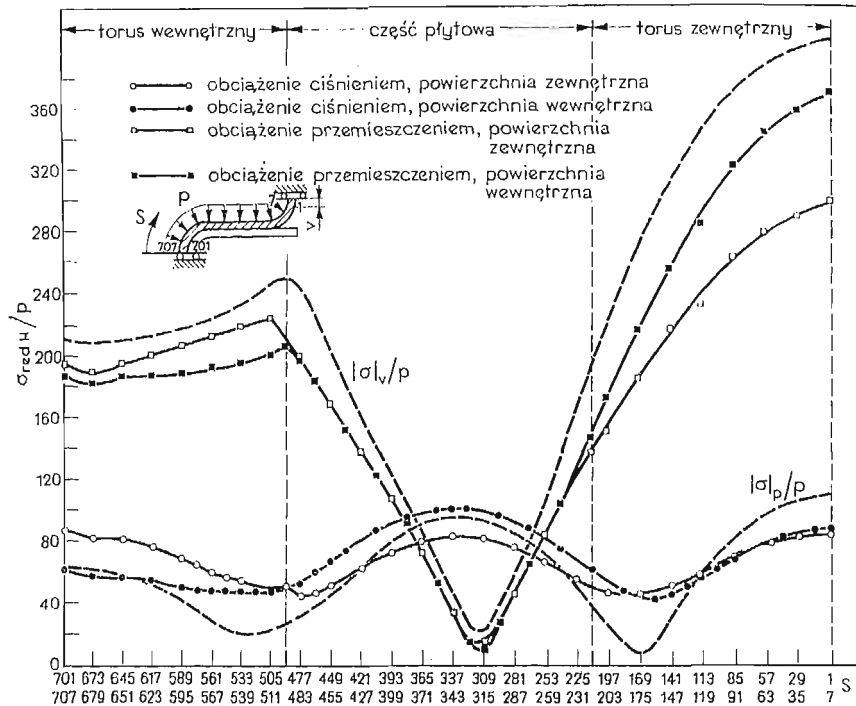
obciążenie rodzaj pierscienia	obciążenie ciśnieniem $p = 1 \text{ MPa}$		obciążenie przemieszczeniem $v = 1 \text{ mm/1 półfałę}$	
	siły wewnętrzne	siły kontaktowe [kN]	siły wewnętrzne	siły kontaktowe [kN]
bez pierscienia		—		—
pierscień masywny		$x_{701} = -x_1 = 11,88$ $x_{680} = -x_{19} = 25,42$ $x_{659} = -x_{37} = 25,1$ $x_{638} = -x_{54} = 26,48$ $x_{617} = -x_{72} = 96,8$ $x_{491} = -x_{173} = 222,78$		$x_{491} = -x_{173} =$ $= 608,95$
pierscień cienkościenney		$x_{701} = -x_1 = 16,49$ $x_{659} = -x_{43} = 0,88$ $x_{638} = -x_{64} = 16,82$ $x_{617} = -x_{85} = 17,96$ $x_{596} = -x_{106} = 3,96$ $x_{575} = -x_{127} = 4,44$ $x_{554} = -x_{148} = 9,12$ $x_{533} = -x_{169} = 3,39$ $x_{519} = -x_{183} = 12,79$ $x_{505} = -x_{197} = 6,05$ $x_{498} = -x_{204} = 27,57$ $x_{491} = -x_{211} = 39,84$		$x_{491} = -x_{211} =$ $= 29,97$ $x_{379} = -x_{323} =$ $= 109,91$



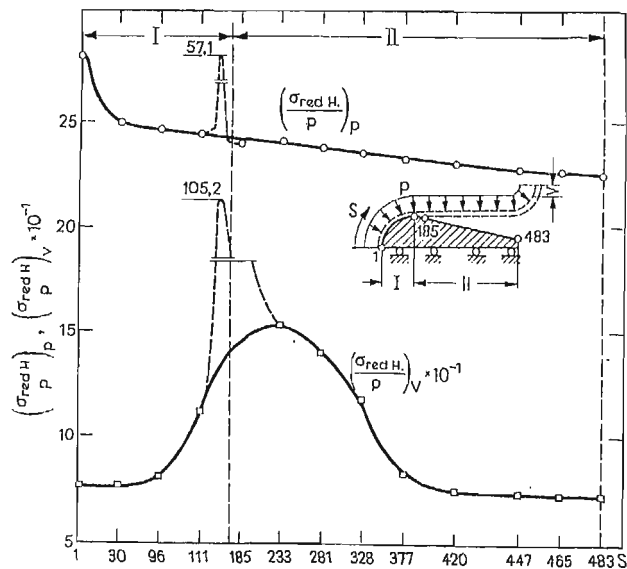
Rys. 12. Naprężenia zredukowane w mieszku bez pierścienia wzmacniającego i naprężenia od zginania  $|\sigma|$  w płaszczyźnie południkowej



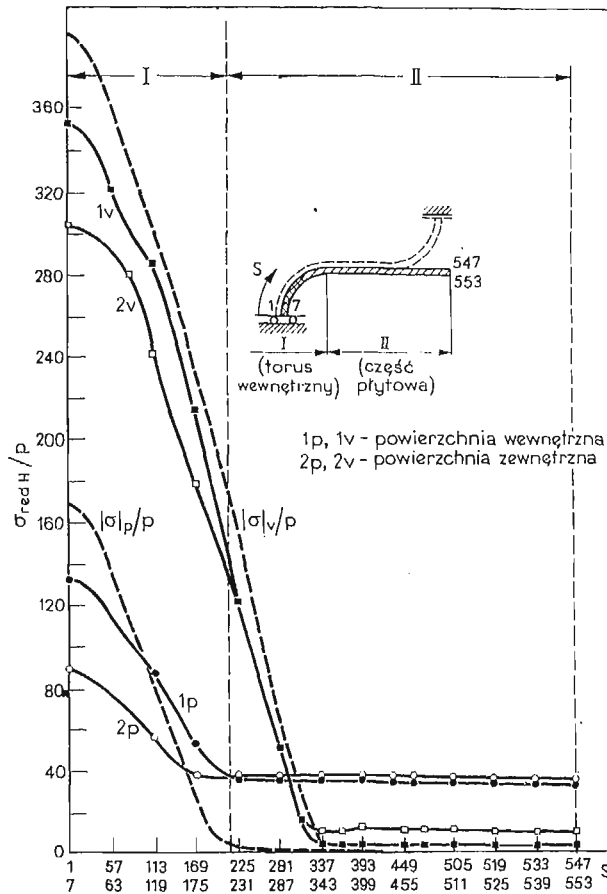
Rys. 13. Naprężenia zredukowane w mieszku z maszynym pierścieniem wzmacniającym i naprężenia od zginania  $|\sigma|$  w płaszczyźnie południkowej



Rys. 14. Naprężenia zredukowane w mieszku z cienkościennym pierścieniem wzmacniającym i naprężenia od zginania  $|\sigma|$  w płaszczyźnie południkowej



Rys. 15. Naprężenia zredukowane na powierzchni wewnętrznej pierścienia masywnego po obciążeniu kompensatora ciśnieniem wewnętrznym oraz przemieszczeniem osiowym



Rys. 16. Naprężenia zredukowane na powierzchniach cienkościennego pierścienia wzmacniającego i naprężenia od zginania  $|\sigma|$  w płaszczyźnie południkowej

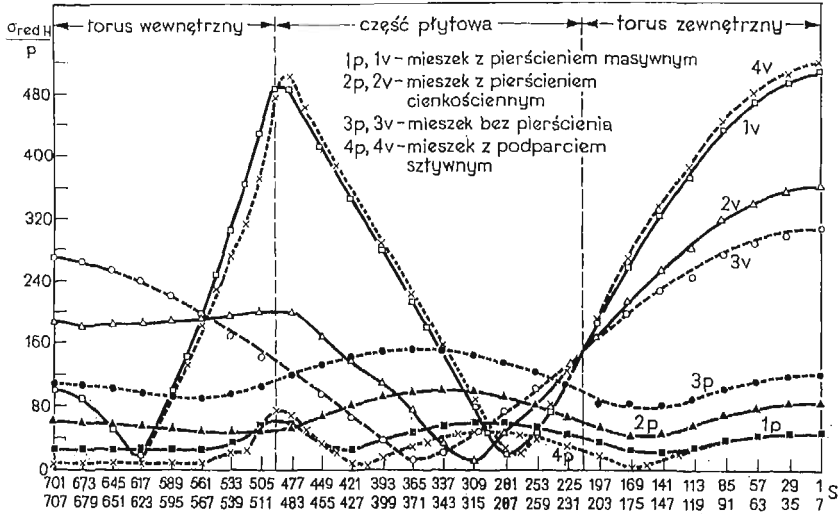
tablica 1. Wytężenie materiału powłoki mieszka według hipotezy Hubera dla rozpatrywanych przypadków obciążenia i podparcia przedstawiają wykresy na rys. 12, 13, 14.

Odpowiednie naprężenia w pierścieniach wzmacniających pokazują rys. 15 i 16.

Największe wytężenie materiału, jak wynika z zamieszczonych wykresów, występują na powierzchniach wewnętrznych mieszka. W kompensatorze bez pierścieni wzmacniających (rys. 12) największe naprężenia występują w części środkowej torusa zewnętrznego dla przypadku obciążenia ciśnieniem. Podobne relacje naprężeń obserwujemy w powłoce mieszka z pierścieniami masywnymi (rys. 13) i z pierścieniami cienkościennymi (rys. 14), chociaż dla poszczególnych przypadków występują wyraźne różnice ilościowe.

Naniesione na wykresach naprężenia od zginania w płaszczyźnie południkowej wskazują na decydujący ich udział w wytężeniu materiału zarówno mieszka jak i pierścienia cienkościennego, a szczególnie w przypadku obciążenia kompensatora przemieszczeniem osiowym.

Naprężenia na powierzchni wewnętrznej mieszka dla rozpatrywanych przypadków obciążeń i rodzajów pierścieni wzmacniających przy niezmiennych wymiarach mieszka, przedstawia zbiorczy wykres porównawczy na rys. 17.



Rys. 17. Naprężenia zredukowane na powierzchni wewnętrznej mieszka dla różnych przypadków jego podparcia i obciążenia

Poszczególne wykresy (rys. 17) wykonane przy założeniu niezmiennych wymiarów mieszka pozwalają oceniać i porównywać wpływ pierścieni wzmacniających o różnych kształtach na warunki pracy kompensatora, nie upoważniają jednak do bezpośredniego porównywania kompensatorów z pierścieniami wzmacniającymi z kompensatorami bez pierścieni. Istota bowiem stosowania pierścieni wzmacniających polega na tym, że w kompensatorze z pierścieniami możemy nawet kilkakrotnie zmniejszyć grubość ścianki mieszka w porównaniu z grubością ścianki mieszka kompensatora bez pierścieni wzmacniających. Dzięki temu maleją kilkakrotnie siły i naprężenia spowodowane przemieszczeniem.

#### 4. Wnioski

- Porównując wyniki dla kompensatora mieszkowego o podanych wymiarach z masywnymi i cienkościennymi pierścieniami wzmacniającymi (rys. 17) możemy stwierdzić:
- maksymalne naprężenia zredukowane dla obciążenia przemieszczeniem w obydwu przypadkach występują w części środkowej torusa zewnętrznego i są 1,5 raza większe dla kompensatora z pierścieniem masywnym,
  - maksymalne naprężenia dla mieszka z pierścieniami masywnymi, dla przypadku obciążenia przemieszczeniem, występują w obszarze przechodzenia części płytowej mieszka w torus wewnętrzny i są około 2,5 raza większe od analogicznych naprężeń w mieszku z cienkościennymi pierścieniami wzmacniającymi,

— w obszarze zredukowane i pierścienia następnego przebiegających pod wpływem obciążenia pierścienia. W sumie własności użytkownika. Przeprowadzono badania weryfikacji wyników badań elastycznych

1. Katalog firm
2. Katalog firm
3. Ł. D. ŁUGA
4. J. WITKOWSKI
5. S. H. CHAN
6. G. B. JOSIEF
7. O. C. ZIENI
8. J. SZMELT

ВЛИЯНИЕ

В работе рассмотрены вопросы влияния жесткости колец на условия работы компенсатора. Исследования показали, что при использовании массивных колец можно значительно уменьшить толщину стенки цилиндра в сравнении с толщиной стенки цилиндра компенсатора без колец. Благодаря этому уменьшаются силы и напряжения, вызванные перемещением.



- w obszarze przechodzenia części płytowej mieszka w torus wewnętrzny przebieg naprężeń zredukowanych dla przypadku podparcia pierścieniem cienkościennym jest łagodny i naprężenia te dla torusa wewnętrznego pozostają prawie stałe, podczas gdy dla pierścienia masywnego osiągają maksimum na granicy części płytowej i torusowej, a następnie gwałtownie maleją,
- przebieg naprężeń dla obciążenia ciśnieniem jest dla obydwu pierścieni wzmacniających podobny, a ilościowo nieznacznie większe naprężenia występują w mieszku z cienkościennym pierścieniem wzmacniającym,
- pierścień cienkościenny jest prawie pięciokrotnie lżejszy od pierścienia masywnego. W sumie kompensator z cienkościennym pierścieniem wzmacniającym posiada lepsze własności użytkowe od kompensatora z pierścieniem masywnym.

Przeprowadzone badania wykazały, że MES jest przydatna w analizie układu mieszek sprężysty — pierścień wzmacniający, stanowiącego jedno z licznych w technice zadań kontaktu dwóch ciał nie ujętego w teorii Hertza.

Weryfikacja doświadczalna przeprowadzonych obliczeń numerycznych przy wykorzystaniu metody elastooptycznej potwierdziła uzyskane wyniki. Szczegóły dotyczące badań elastooptycznych będą podane w osobnej publikacji w MTiS.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Katalog firmy Hydra-Metallschlauch-Fabrik, 1975.
2. Katalog firmy Gilardini SpA Divisione Flexider: „Compensatori di dilatazione”. Torino, 1975.
3. Ł. D. ŁUGANCEW, *Issledowanie naprężenno-deformiowanego sostożania silfonowego kompensatora wysokowo dawlenia*. W książce „Raszety na procznost’”, Maszynostrojenije, Moskwa 1976, wyd. 17.
4. J. WITKOWSKI, *Zagadnienie kontaktu ciał odkształcalnych*, Politechnika Warszawska, Mechanika z. 53 Warszawa 1976.
5. S. H. CHAN, I. S. TUBA, *A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies*. Int. Jour. of Mech. Science, 13, 1971.
6. G. B. JOSIELEWICZ, G. W. OSIPOWA, *Reszenije konstrukcionnokontaktnych zadacz czislennymi metodami*, Maszinowiedienije, 4, 1976.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*. Arkady, Warszawa 1972.
8. J. SZMELTER i inni, *Programy metody elementów skończonych*. Warszawa 1972.

#### Р е з ю м е

#### ВЛИЯНИЕ ПОДАТЛИВОСТИ УКРЕПЛЯЮЩИХ КОЛЬЦОВ НА РАБОТУ КОМПЕНСАТОРОВ СИЛЬФОННОГО ТИПА

В работе представлено решение задачи компенсатора сильфонного типа с укрепляющими кольцами. Исследования проведены по методу решения контактной задачи нелинейных дискретных механизмов и метода усилий.

Полученные результаты для избранных нагружений дают всесторонние информации о условиях работы сильфона и укрепляющего кольца, а также о их взаимодействиях.

## S u m m a r y

## INFLUENCE OF THE RIGIDITY OF REINFORCING RINGS ON THE WORK OF EXPANSION JOINTS

Numerical analysis of stress and deformation of the bellows with reinforcing rings used as compensators of thermal expansion in pipelines has been performed. The stress distribution, effective stresses, contact conditions between the shell and the rings have been determined by means of the finite element method in case of axisymmetric problems. The results allows us to determine the influence of the rings stiffness. The thin wall rings have been taken into account.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lutego 1981 roku*

---

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA  
3, 19 (1981)

DRGANIA C

S

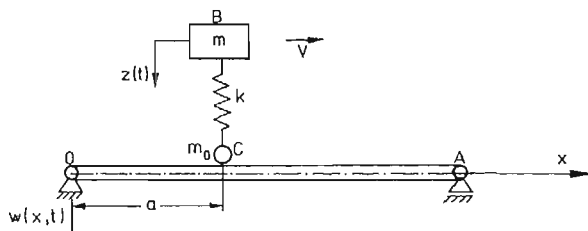
DRGANIA GIĘTNE BELKI WYWOŁANE PORUSZAJĄCYM SIĘ UKŁADEM DYSKRETNYM

STANISŁAW KASPRZYK, RYSZARD ZIERNICKI, (KRAKÓW)

W pracy analizowane są swobodne drgania giętne belki elastosprężystej wymuszone poruszającym się po niej ze stałą prędkością układem o dyskretnym rozłożeniu masy. Zagadnienia tego typu są rozważane w pracach [1, 2, 4, 5] przy założeniu *a priori*, że funkcje własne i wartości własne belki nie zależą od parametrów poruszającego się układu dyskretnego. W pracach tych drgania układu przybliża się pierwszą harmoniczną, tj. pierwszą postacią drgań wprowadzając w ten sposób układ dyskretno-ciągły do układu o dwóch stopniach swobody.

W pracy [3] pokazano, że funkcje i wartości własne belki w przypadku ustalonego położenia układu dyskretnego na belce zależą również w istotny sposób od parametrów układu dyskretnego. Wykorzystując ideę wyznaczania funkcji własnych [3], w pracy [6] pokazano, że siła w liniowym elemencie sprężystym łączącym belkę z masą skupioną w istotny sposób zależy od drgań belki.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie nowej przybliżonej metody analizy drgań zachowawczego układu przedstawionego na rys. 1.



Rys. 1

**Oznaczenia:**  $\bar{v}$  — prędkość przemieszczania się układu dyskretnego B - C po belce O - A,  $m$  — masa ciała B,  $m_0$  — masa ciała C,  $EI$  — sztywność zginania belki,  $\rho F$  — gęstość belki na jednostkę belki,  $k$  — współczynnik sprężystości,  $w(x, t)$  — przemieszczenie punktów belki,  $z(t)$  — przemieszczenie środka masy ciała B,  $l$  — długość belki O - A,  $a$  — współrzędna położenia ciała C na belce mierzona od punktu 0,  $a \in [0, l]$ ,  $\delta(x - a)$  — impuls Diraca w punkcie  $a$ .

**Przyjęte założenia:**

1. Układ dyskretny B - C porusza się ze stałą prędkością  $\bar{v}$ .
2. Ciało C w czasie ruchu nie odrywa się od belki.
3. Jeżeli układ B - C znajduje się w punkcie o współrzędnej  $x = 0$ , to belka O - A pozostaje w spoczynku.

4.  $z(0) = z_0$ ,  $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$  dla  $x = 0$  — warunki początkowe układu B - C.
5. Układem o ciągłym rozłożeniu masy jest pryzmatyczna belka sprężysta swobodnie podparta o stałej sztywności  $EI$ .
6. Amplitudy drgań punktów belki są małe tzn. są tego samego rzędu co ugięcia statyczne, przekroje poprzeczne nie ulegają odkształceniu oraz pozostają płaskie.
7. W układzie pominięto wpływ tłumienia, bezwładności obrotowej przekroji poprzecznych oraz ścinania.

Drgania układu przedstawionego na rys. 1 są opisane układem równań:

$$(1) \quad \begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \delta(x-vt) \left\{ -m_0 \frac{d^2 w}{dt^2} + k[z(t) - w(vt, t)] \right\}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} + k[z(t) - w(vt, t)] &= 0, \quad \left( \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$(2) \quad w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0,$$

oraz początkowymi

$$(3) \quad w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad z(0) = z_1, \quad \dot{z}(0) = z_2$$

Przytoczymy te wyniki z pracy [3], z których będziemy korzystali w dalszej części niniejszej pracy.

Przyjmując  $v = 0$  i  $m_0 = 0$  w układzie równań (1), otrzymujemy zagadnienie rozważane w [3], tj.:

$$(4) \quad \begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \delta(x-a) k[z(t) - w(a, t)], \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} + kz &= kw(a, t), \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi (2) oraz początkowymi

$$(5) \quad w(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = f_2(x), \quad z(0) = z_1, \quad \dot{z}(0) = z_2, \quad (f_1, f_2 \in C^2)$$

Ogólnym rozwiązaniem układu równań (4) jest:

$$(6) \quad w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t), \quad z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(t),$$

gdzie:

$$(7) \quad T_n(t) = C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t,$$

$$(8) \quad X_n(x) = R_n \sin \lambda_n x + Q_n \operatorname{sh} \lambda_n x + \frac{m \lambda_n}{2 \rho F} A_n [\operatorname{sh} \lambda_n (x-a) - \sin \lambda_n (x-a)] H(x-a),$$

$$H(x-a) = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq a \\ 0 & \text{dla } x < a, \end{cases} \quad \left( \omega_n^2 = \lambda_n^4 \frac{EJ}{F} \right).$$

Wektory własne  $(X_n(x), A_n) = y_n$  problemu (4), (2) odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne z wagami  $M, m$ , tzn.

$$(9) \quad \langle y_m, y_n \rangle = \int_0^l [MX_m(x)X_n(x) + mA_m A_n] dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ \gamma > 0 & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

gdzie:  $\rho Fl = M, n, m \in \mathbb{N}$ .

W dalszej części pracy przyjmujemy  $\gamma = 1$ , wynika to z odpowiedniego unormowania  $(X_n(x), A_n)$ .

Z (5), (6), (7), (8) i (9) wyznaczamy stałe, które dla warunków początkowych (6) w chwili  $t = t_0$  wynoszą:

$$(10) \quad C_{1n} = Y_{1n} \cos \omega_n t_0 - Y_{2n} \sin \omega_n t_0, \quad C_{2n} = Y_n \sin \omega_n t_0 + Y_{2n} \cos \omega_n t_0,$$

gdzie:

$$Y_{1n} = \int_0^l [MX_m(x)f_1(x) + mA_n z_{11}] dx, \quad Y_{2n} = \frac{1}{\omega_n} \int_0^l [MX_n(x)f_2(x) + mA_n z_{21}] dx.$$

Stałe  $R_n, Q_n$  i  $A_n$  wyznaczamy z równania:

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \sin \lambda_n l & \operatorname{sh} \lambda_n l & \frac{m \lambda_n}{2\rho F} \beta_1 \\ -\sin \lambda_n l & \operatorname{sh} \lambda_n l & \frac{m \lambda_n}{2\rho F} \beta_2 \\ \sin \lambda_n a & \operatorname{sh} \lambda_n a & \frac{mEJ}{k\rho F} \lambda^4 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \\ Q_n \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\beta_1 = \operatorname{sh} \lambda_n(l-a) - \sin \lambda_n(l-a), \quad \beta_2 = \sin \lambda_n(l-a) + \operatorname{sh} \lambda_n(l-a)$$

Wartości własne  $\lambda_n$  wyliczamy z równania otrzymanego z przyrównania do zera wyznacznika macierzy współczynników (11).

1. Przedstawimy obecnie ideę metody otrzymywania przybliżonego rozwiązania równań (1) z warunkami (2) i (3). Przy założeniu  $m \gg m_0$ , przyjmujemy  $m_0 = 0$ .

1.1. Przedział  $[0, a]$  dzielimy na  $n$  równych części punktami  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , przy czym  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_l < \dots < x_{n-1} < x_n = a$ .

1.2. Układ ciał B - C znajdujący się w punkcie  $x = 0$  dla  $t \in \left[0, \frac{a}{nv}\right]$  przenosimy w czasie

zerowym do punktu  $x_1 = \frac{a}{n}$  i pozostawiamy go w tym punkcie dla  $t \in \left[\frac{a}{nv}, \frac{2a}{nv}\right]$ .

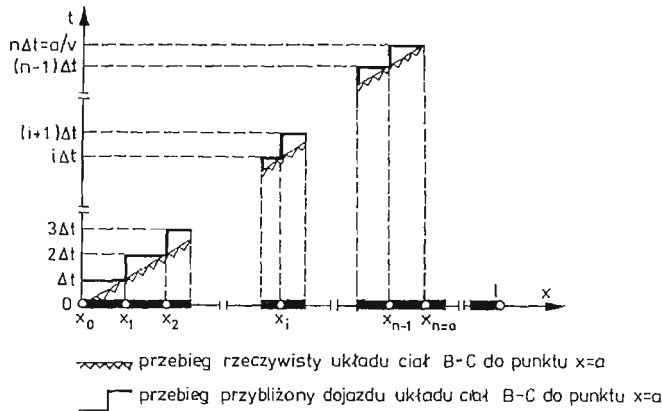
W tym przedziale czasu jest wzajemne oddziaływanie układu B - C i belki w punkcie  $x = x_1$ . Przeniesienia dokonujemy tak, aby wektory prędkości względnych belki w punkcie  $x_1$  i ciała C były sobie równe.

1.3. Wyznaczamy rozwiązanie  $z\left(\frac{a}{n}, t\right)$  oraz  $w\left(x, \frac{a}{n}, t\right)$ .

1.4. Następnie, jeśli  $t = \frac{2a}{nv}$  układ B - C przenosimy sposobem podanym w punkcie 1.2

do punktu belki o odciętej  $x_2 = \frac{2a}{n}$ .

1.5. Postępowanie to powtarzamy tak długo, aż układ ciał B - C znajdzie się w punkcie  $x = a$ , a następnie wyznaczamy rozwiązanie  $z(a, t)$  i  $w(x, a, t)$ . Sposób przemieszczania ciał B - C po belce przedstawiony w punktach 1.2 - 1.5 nazwano porównawczym ruchem skokowym. Powyższe postępowanie ilustruje rys. 2.

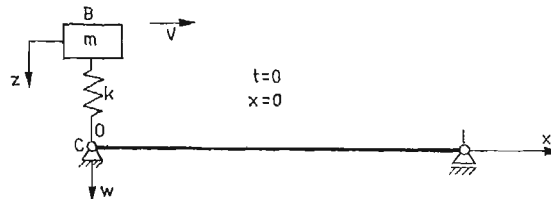


Rys. 2

**Uwaga 1.** Z przedstawionej w punktach 1.1 - 1.5 metody postępowania wynika, że  $w, z, X, \dots$  zależą również od parametru  $\frac{ia}{n}$  i dla krótkości zapisu oznaczymy:

$$w^{(i)}(x, t) = w\left(x, \frac{ia}{n}, t\right), \quad z^{(i)}(t) = z\left(\frac{ia}{n}, t\right), \quad X^{(i)}(x) = X\left(x, \frac{ia}{n}\right),$$

$$T^{(i)}(t) = T\left(t, \frac{ia}{n}\right), \quad \lambda^{(i)} = \lambda\left(\frac{ia}{n}\right), \quad R^{(i)} = R\left(\frac{ia}{n}\right), \dots$$



Rys. 3

Uwzględniając powyższe założenia, rozpatrzmy kolejne etapy ruchu ciał B - C po belce O - A.

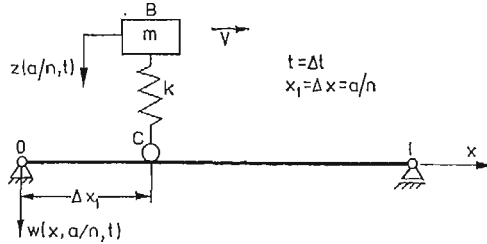
W chwili  $t = 0$  układ B - C znajduje się na lewej podporze (rys. 3). Zgodnie z założeniem 3 belka pozostaje w spoczynku. W tym przypadku mamy warunki początkowe:

$$(12) \quad z^{(0)}(0) = z_0, \quad \dot{z}^{(0)}(0) = \dot{z}_0, \quad w^{(0)}(x, 0) = 0, \quad w_t^{(0)}(x, 0) = 0, \quad \left(w_t = \frac{\partial w}{\partial t}\right).$$

Z (6), (7), (8) i (11) otrzymujemy rozwiązanie dla  $x = 0$ ,  $t \in \left[0, \frac{a}{nv}\right]$ ,

$$(13) \quad w^{(0)}(x, t) = 0, \quad z^{(0)}(t) = z_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

Krok pierwszy



Rys. 4

Układ dyskretny B - C znajduje się w punkcie  $x_1 = \frac{a}{n}$  dla  $t \in \left[0, \frac{a}{nv}\right]$  (rys. 4) i pobudza belkę do drgań. Jest to więc układ dyskretno-ciągły, którego drgania wyznaczamy z (6), (7) i (8) dla następujących warunków początkowych:

$$(14) \quad \begin{aligned} z^{(0)}(t_1) &= z_1 \cos \omega_0 t_1 + \frac{z_2}{\omega_0} \sin \omega_0 t_1, \\ \dot{z}^{(0)}(t_1) &= z_2 \cos \omega_0 t_1 - z_1 \omega_0 \sin \omega_0 t_1, \\ w^{(0)}(x, t_1) &= 0, \quad w_t^{(0)}(x, t_1) = 0, \quad t_1 = \frac{2a}{nv}. \end{aligned}$$

Dla pierwszego kroku funkcje własne (8) mają postać:

$$(15) \quad \begin{aligned} X_k^{(1)}(x) &= R_k^{(1)} \sin \lambda_k^{(1)} x + Q_k^{(1)} \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)} + \\ &+ \frac{m \lambda_k^{(1)}}{2 \rho F} A_k^{(1)} \left\{ \operatorname{sh} \left[ \lambda_k^{(1)} \left( x - \frac{a}{n} \right) \right] - \sin \left[ \lambda_k^{(1)} \left( x - \frac{a}{n} \right) \right] \right\} H \left( x - \frac{a}{n} \right). \end{aligned}$$

Z (10) dla  $x_1 = \frac{a}{n}$  wyliczamy stałe  $R_k^{(1)}$ ,  $Q_k^{(1)}$  w zależności od  $A_k^{(1)}$

$$(16) \quad \begin{aligned} R_k^{(1)} &= \frac{m \lambda_k^{(1)}}{2 \rho F} \cdot \frac{\sin \left[ \lambda_k^{(1)} \left( l - \frac{a}{n} \right) \right]}{\sin \lambda_k^{(1)} l} A_k^{(1)}, \\ Q_k^{(1)} &= - \frac{m \lambda_k^{(1)}}{2 \rho F} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left[ \lambda_k^{(1)} \left( l - \frac{a}{n} \right) \right]}{\operatorname{sh} \lambda_k^{(1)} l} A_k^{(1)}. \end{aligned}$$

Z (7) otrzymujemy

$$(17) \quad T_k^{(1)}(t) = C_{1k}^{(1)} \cos \omega_k^{(1)} t + C_{2k}^{(1)} \sin \omega_k^{(1)} t.$$

Wobec (7) i (14) otrzymujemy:

$$(18) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)}(x) T_k^{(1)}(t_1) &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)}(x) \dot{T}_k^{(1)}(t_1) &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} T_k^{(1)}(t_1) &= z_1 \cos \omega_0 t_1 - \frac{z_2}{\omega_0} \sin \omega_0 t_1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} \dot{T}_k^{(1)}(t_1) &= z_1 \cos \omega_0 t_1 + z_2 \omega_0 \cos \omega_0 t_1. \end{aligned}$$

Mnożąc pierwsze dwa równania (18) przez  $MX_j^{(1)}(x)$  oraz trzecie i czwarte przez  $mA_j^{(1)}$ , a następnie dodając pierwsze do trzeciego i drugie do czwartego otrzymujemy:

$$(19) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)}(t_1) [MX_k^{(1)} X_j^{(1)} + mA_k^{(1)} A_j^{(1)}] &= mA_j^{(1)} \left[ z_1 \cos \omega_0 t_1 + \frac{z_2}{\omega_0} \sin \omega_0 t_1 \right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k^{(1)}(t_1) [MX_k^{(1)} X_j^{(1)} + mA_k^{(1)} A_j^{(1)}] &= mA_j^{(1)} [z_2 \cos \omega_0 t_1 - z_1 \omega_0 \sin \omega_0 t_1]. \end{aligned}$$

Całkując stronami (19) w przedziale  $[0, 1]$  oraz wykorzystując (7), (9) i (14) wyliczamy stałe  $C_{1k}^{(1)}$ ,  $C_{2k}^{(1)}$ :

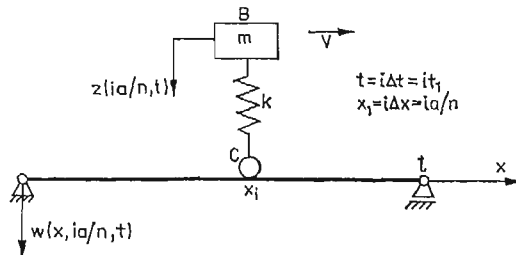
$$(20) \quad \begin{aligned} C_{1k}^{(1)} &= Y_{1k}^{(1)} \cos(\omega_k^{(1)} t_1) - Y_{2k}^{(1)} \sin(\omega_k^{(1)} t_1), \\ C_{2k}^{(1)} &= Y_{1k}^{(1)} \sin(\omega_k^{(1)} t_1) + Y_{2k}^{(1)} \cos(\omega_k^{(1)} t_1), \quad t_1 = \frac{a}{nv}, \end{aligned}$$

gdzie

$$Y_{1k}^{(1)} = ml A_k^{(1)} z^{(0)}(t_1), \quad Y_{2k}^{(1)} = \frac{ml}{\omega_k^{(1)}} A_k^{(1)} \dot{z}^{(0)}(t_1),$$

Wykorzystując (6), (15), (16), (17) i (20) otrzymujemy rozwiązanie układu (1) z warunkami (2) i (3), ( $m_0 = 0$ ) dla  $t \in \left[0, \frac{2a}{nv}\right]$ .

**Krok i-ty.**



Rys. 5



W  $i$ -tym punkcie ( $x = x_i, t_i = it_1$ ) warunki początkowe są następujące:

$$(21) \quad \begin{aligned} z^{(i-1)}(it_1) &= z^{(i)}(it_1), & \dot{z}^{(i-1)}(it_1) &= \dot{z}^{(i)}(it_1), \\ w^{(i-1)}(x, it_1) &= w^{(i)}(x, it_1), & w_t^{(i-1)}(x, it_1) &= w_t^{(i)}(x, it_1). \end{aligned}$$

Rozwiązanie (6) w  $i$ -tym kroku ma postać:

$$(22) \quad \begin{aligned} w^{(i)}(x, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} X_s^{(i)}(x) T_s^{(i)}(t), \\ z^{(i)}(t) &= \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(i)} T_s^{(i)}(t). \end{aligned}$$

Funkcja własna (8) dla  $i$ -tego kroku ma postać:

$$(23) \quad X_s^{(i)} = R_s^{(i)} \sin \lambda_s^{(i)} x + Q_s^{(i)} \operatorname{sh} \lambda_s^{(i)} x + \frac{m \lambda_s^{(1)}}{2 \rho F} A_s^{(i)} \left\{ \operatorname{sh} \left[ \lambda_s^{(i)} \left( x - \frac{ia}{n} \right) \right] \right\} H \left( x - \frac{ia}{n} \right),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R_s^{(i)} &= \frac{m \lambda_s^{(i)}}{2 \rho F} \cdot \frac{\sin \left[ \lambda_s^{(i)} \left( l - \frac{ia}{n} \right) \right]}{\sin [\lambda_s^{(i)} l]} A_s^{(i)}, \\ Q_s^{(i)} &= - \frac{m \lambda_s^{(i)}}{2 \rho F} \frac{\operatorname{sh} \left[ \lambda_s^{(i)} \left( l - \frac{ia}{n} \right) \right]}{\sin [\lambda_s^{(i)} l]} A_s^{(i)}, \quad s \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Wobec (7) funkcja  $T_s^{(i)}$  dla  $i$ -tego kroku wyraża się wzorem

$$T_s^{(i)}(t) = C_{1s}^{(i)} \cos \omega_s^{(i)} t + C_{2s}^{(i)} \sin \omega_s^{(i)} t, \quad (s \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n)$$

Z (6) i (21) otrzymujemy układ równań

$$(24) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i-1)} T_k^{(i-1)}(it_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} T_k^{(i)}(it_1), \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i-1)} \dot{T}_k^{(i-1)}(it_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} \dot{T}_k^{(i)}(it_1), \\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i-1)}(x) T_k^{(i-1)}(it_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i)}(x) T_k^{(i)}(it_1), \\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i-1)}(x) \dot{T}_k^{(i-1)}(it_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i)}(x) \dot{T}_k^{(i)}(it_1). \end{aligned}$$

Mnożąc pierwsze dwa równania układu (24) przez  $m A_j^{(i)}$  i dwa ostatnie przez  $M X_j^{(i)}$ , a następnie dodając stronami pierwsze do trzeciego oraz drugie do czwartego równania otrzymujemy odpowiednio:

$$(55) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \{ T_k^{(i-1)}(it_1) [M X_k^{(i-1)} X_j^{(i)} + m A_k^{(i-1)} A_j^{(i)}] - T_k^{(i)}(it_1) [M X_k^{(i)} X_j^{(i)} + m A_k^{(i-1)} A_j^{(i)}] \} &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \{ \dot{T}_k^{(i-1)}(it_1) [M X_k^{(i-1)} X_j^{(i)} + m A_k^{(i-1)} A_j^{(i)}] - \dot{T}_k^{(i)}(it_1) [M X_k^{(i)} X_j^{(i)} + m A_k^{(i)} A_j^{(i)}] \} &= 0. \end{aligned}$$

Całkując stronami układ równań (25) w przedziale  $[0, l]$  oraz uwzględniając (7), (8) i (9) wyliczamy  $C_{1k}^{(i)}$ ,  $C_{2k}^{(i)}$ , tzn.

$$(26) \quad \begin{aligned} C_{1k}^{(i)} &= Y_{1k}^{(i)} \cos(\omega_k^{(i)} it_1) - Y_{2k}^{(i)} \sin(\omega_k^{(i)} it_1), \\ C_{2k}^{(i)} &= Y_{1k}^{(i)} \sin(\omega_k^{(i)} it_1) + Y_{2k}^{(i)} \cos(\omega_k^{(i)} it_1), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

gdzie

$$(27) \quad \begin{aligned} Y_{1k}^{(i)} &= \int_0^l [MX_k^{(i)}(x)w^{(i-1)}(x, it_1) + mA_k^{(i)}z^{(i-1)}(it_1)] dx, \\ Y_{2k}^{(i)} &= \frac{1}{\omega_k^{(i)}} \int_0^l [MX_k^{(i)}w_i^{(i-1)}(x, it_1) + mA_k^{(i)}\dot{z}^{(i-1)}(it_1)] dx; \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

**Uwaga 2.**

We wzorze (26) dla  $i = 1$  należy wstawić odpowiednio:

$$w^{(0)}(x, 0) = 0, \quad w_t^{(0)}(x, 0) = 0, \quad z^{(0)}(0) = z_1, \quad \dot{z}^{(0)}(0) = z_2$$

**Uwaga 3.**

Jeśli przyjmiemy:

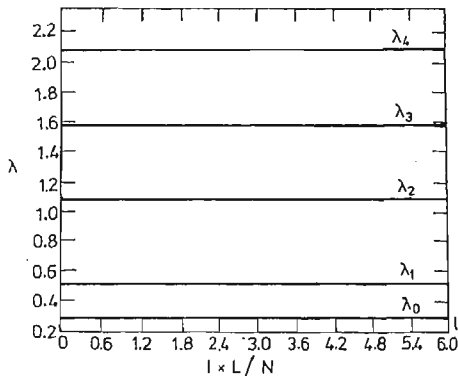
$$\begin{aligned} f_1(x) &= w^{(i-1)}(x, it_1), & z_1 &= z^{(i-1)}(it_1), \\ f_2(x) &= w_t^{(i-1)}(x, it_1), & z_2 &= \dot{z}^{(i-1)}(it_1), \end{aligned}$$

to z wzoru (10) otrzymujemy wzór (27). Dla  $n$ -tego kroku  $\left(x = a, t = \frac{a}{v}\right)$  należy podstawić w powyższych wzorach  $i = n$ .

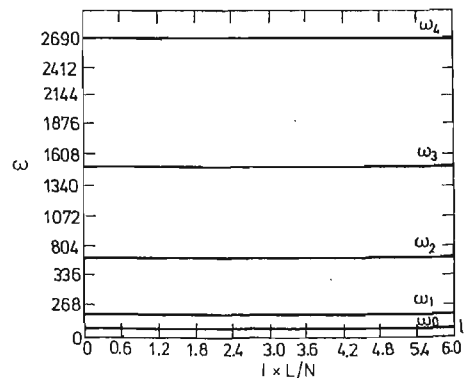
#### Obliczenia numeryczne wartości własnych.

Obecnie przedstawimy wyniki obliczeń numerycznych wartości własnych i częstości własnych rozważanego zagadnienia uzyskane na maszynie cyfrowej CYBER 72. Obliczono kilkanaście kolejnych wartości własnych  $\lambda_j$  w zależności od położenia układu B - C na belce dla następujących danych:  $n = 100$ ,  $m = 16,5749$  [kGs<sup>2</sup>m<sup>-1</sup>],  $EI = 2,1 \cdot 9,785 \cdot 10^5$  [kGm<sup>2</sup>],  $\rho F = 5,51$  [kGs<sup>2</sup>m<sup>-2</sup>],  $k = 5 \cdot 10^4$  [kGm<sup>-1</sup>],  $l = 6$  [m].

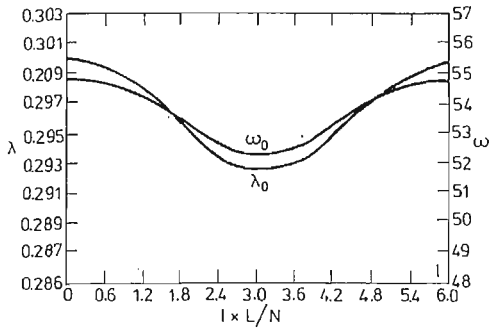
Wyniki obliczeń przedstawione są na rys. 6-12.



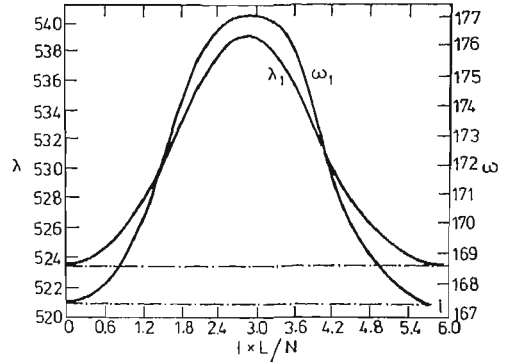
Rys. 6



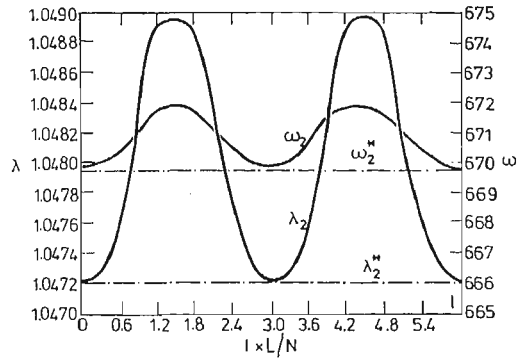
Rys. 7



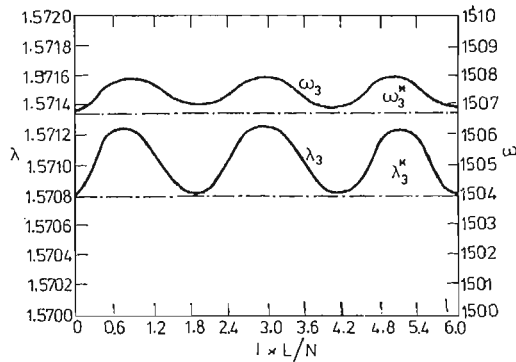
Rys. 8



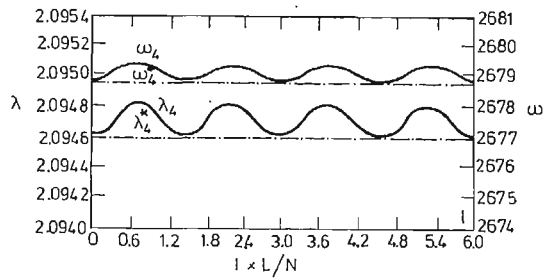
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

## Wnioski

1. W przedstawionej metodzie funkcje własne oraz wartości własne (częstości własne) belki zależą nie tylko od jej parametrów lecz również od parametrów poruszającego się po niej układu dyskretnego. Takie podejście pozwala na dokładniejszą analizę drgań rozważanego układu.
2. Jeśli w przedstawionej metodzie zwiększymy liczbę „ $n$ ” punktów podziału to ruch porównawczy poruszającego się po belce układu dyskretnego zbliża się do ruchu rzeczywistego.
3. Przedstawiona w pracy metoda analizy drgań giętnych belki wywołanych poruszającym się układem dyskretnym może być również zastosowana do bardziej złożonych układów dyskretnych poruszających się po belce.
4. Przeprowadzone obliczenia na maszynie cyfrowej (dla dwóch przypadków) pokazały, że położenie układu dyskretnego na belce sprężystej nie ma dużego wpływu na wyższe wartości własne układu.
5. Różnica wartości własnych układu dyskretno-ciągłego typu  $(1, \infty)$  i wartości własnych belki swobodnie podpartej i z tymi samymi warunkami brzegowymi maleje dla wyższych wartości własnych.
6. W zbiorze częstości własnych układu dyskretno-ciągłego pojawia się dodatkowa częstość własna, która jest mniejsza od pierwszej częstości własnej belki. Pojawienie się tej częstości spowodowane jest uwzględnieniem parametrów układu dyskretno-ciągłego przy wyznaczaniu funkcji własnych.

## Literatura cytowana w tekście

1. A. S. DMITRIEV, *Kritičeskoje skorosti dviženija podressorennogo gruzu*. Problemy Masinostroenija, Vyp. 5 s. 29 - 33, Akademija Nauk Ukrainskoj SSR, Naukowaja Dumka 1977.
2. A. G. GALČENKO, S. I. KONAŠČENKO, *O kolebanijach balki pri dviženii po nej grupy gruzow i gruzu s polsirujuscej siloj*, Tr. Dnepropetrovsk. Transzeldovizdat, 1963.
3. S. KASPRZYK, DANG-THINH, *Drgania swobodne zachowawczego układu dyskretno-ciągłego*. Zagadnienia Drgań Nieliniowych, z. 19, 1979.
4. G. F. KRAVČENKO, *O kolebanijach svobodnogo opertoj balki pri dviženii po nej sistemy podressorenyh gruzow*. Prikladnaja Mechanika. T. III, No. 8, Moskva 1967.
5. A. B. MORGAVSKIJ, *O vlijanii resorov na velcinu dinamičeskogo efekta ot podriznoj nagruzki*, Sb. Issledovanija po teorii sooruzenij, Vyp. XIV s. 67 - 72. Moskva 1965.
6. J. WAPIENNIK, R. ZIERNICKI, *Porównanie sił sprężystych w układzie dyskretnym i dyskreno-ciągłym typu  $(1, \infty)$* . Zeszyty Naukowe AGH, z. 728 Kraków 1979.

## Резюме

## ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ВЫНУЖДЕННЫЕ ДВИГАЮЩЕЙСЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ИЗ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.

В статье рассматривается математическая модель для анализа динамической реакции балки по которой движется механическая система из сосредоточенными параметрами. Анализ сделан новым методом который представлен в работе.

## S u m m a r y

TRANSVERSE VIBRATIONS OF A BEAM FORCED BY DISCRETE MATERIAL SYSTEM  
MOVING ON IT

In the paper we develop a mathematical model for the analysis of the dynamic response of a beam on which a discrete system moves with constant velocity. The analysis has been made according to the new method presented in the paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1979 roku*

---



## ANALITYCZNY OPIS STARZENIA POLIAMIDU 6 NISZCZONEGO ZMĘCZENIOWO

MARIAN NOWAK (WROCLAW)

### Zestawienie ważniejszych oznaczeń

- $A, B$  — stałe równania empirycznego,  
 $m$  — wartość średnia rozkładu normalnego,  
PA6 — poliamid 6,  
 $v_\sigma$  — prędkość starzenia w chwili  $\tau = \sigma$ ,  
 $Z_{\theta 0}$  — wytrzymałość zmęczeniowa (granica zmęczenia) przy próbie wahadłowego zginania,  
 $Z_\tau$  — granica zmęczenia w chwili  $\tau$ ,  
 $Z_\infty, Z_m, Z_\sigma$  — granica zmęczenia w chwili  $\tau = \infty, \tau = m, \tau = \sigma$   
 $\sigma$  — odchylenie standardowe,  
 $\tau$  — czas starzenia (ogólnie), czas ekspozycji,  
 $\tau_\infty$  — czas starzenia w pełnym cyklu badań,  
 $\Delta\tau$  — stopień czasu starzenia,  
 $\tau_s$  — czas starzenia w metodzie skróconej,  
 $\varphi(u)$  — gęstość zmiennej losowej unormowanej.

### 1. Wstęp

Starzenie się tworzyw sztucznych termoplastycznych nie zostało w literaturze technicznej wystarczająco naświetlone i opracowane w odniesieniu do jego wpływu na własności mechaniczne, a analizy o relacji „granica zmęczenia — czas starzenia” nie podejmowano. Dlatego też pierwsze wyniki badań [1], a zwłaszcza tworzyw produkcji krajowej, mogą przyczynić się do lepszego wykorzystania i stosowania ich w przemyśle oraz produkcji tworzyw odporniejszych na starzenie. Niedocenianie roli efektów starzenia wynika prawdopodobnie stąd, że krótki czas składowania obiektów może nie sygnalizować wszystkich aspektów związanych ze zmniejszaniem się wytrzymałości zmęczeniowej. W niniejszej pracy wykazano, że ograniczenie czasu starzenia wewnątrznie uspokojonego PA6 do 4 lat zmniejsza granicę zmęczenia  $Z_{\theta 0}(10^7)$  zaledwie o 5% podczas gdy wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu 6 starzonego przez 10 lat jest o 26% mniejsza. Przewidywany spadek granicy zmęczenia w pełnym cyklu starzenia ( $\tau_\infty = 13$  lat) wynosi 29%. Spadek taki powinien już być przez konstruktora uwzględniony przy projektowaniu elementów na długi czas eksploatacji, pracujących w warunkach zmiennych naprężeń.

Matematyczny opis zjawiska starzenia jest jeszcze mało użyteczny, zarówno do celów badawczych jak i projektowych [2, 3, 4]. M.in. ze względu na daleko posunięte uproszczenia i założenia. Tworzywa sztuczne charakteryzują się wyraźnymi, a więc nie do pominięcia w modelu matematycznym, własnościami relaksacyjnymi, złożoną budową molekularną i nadmolekularną [5, 6] oraz dużą czułością na bodźce zewnętrzne — mechaniczne i termiczne. Posługiwanie się funkcjami liniowymi może ponadto korespondować z fizyczną naturą zjawiska tylko dla krótkich czasów starzenia, mało więc użytecznych w praktycznych obliczeniach inżynierskich. Dlatego też analiza doświadczalna efektów starzenia, mimo że opiera się na długotrwałym eksperymencie, jest jednak w aktualnym stanie zagadnienia konieczna i przez teorię jeszcze nie zastąpiona lub równorzędnie współtworzona.

Starzenie poliamidu 6 wyjaśniono w zasadzie od strony zmian w budowie molekularnej [6, 7, 8, 9]. Zmiany te polegają przede wszystkim na zmniejszaniu się masy cząsteczkowej makrocząsteczki oraz sił wiązań pobocznych w wyniku sorpcji wody. Ujemne skutki starzenia są związane ponadto z przemianami fazowymi, efektami reotermokinetycznymi [10] oraz z naprężeniami wewnętrznymi. Pewne spostrzeżenia i interpretację fizyczną procesów starzenia PA6 niewzmocnionego i wzmocnionego podano w pracy [1].

Problem starzenia tworzyw sztucznych jest także istotny w ich badaniu na pełzanie, a zwłaszcza przy stosowaniu przyspieszonej metody badań lub w obliczaniu wytrzymałości na pełzanie metodą interpolacji.

Niekorzystne skutki starzenia można zahamować lub usunąć poddając wyroby poliamidowe obróbce cieplnej [1, 11].

Liczne prace na temat starzenia tworzyw sztucznych jakie ukazały się w ostatnich dwudziestu latach w specjalistycznych czasopismach naukowych, poświęcone są głównie starzeniu naturalnemu, tj. starzeniu w warunkach klimatu atmosferycznego, a więc uwzględniającego wpływ takich czynników jak promieniowanie słoneczne, deszcz, ozon, wahania temperatury i wilgotności itp. [12 ÷ 18].

Pozostałe kierunki badań można sklasyfikować według następujących zagadnień: — badania trwałości termoplastycznych tworzyw sztucznych, rzadziej termoutwardzalnych, na działanie mikroklimatu w miejscach o różnych współrzędnych geograficznych [16 ÷ 20].

— badanie wpływu różnych stabilizatorów na prędkość starzenia [21, 22];

— badanie wpływu niekonwencjonalnych warunków pomiaru — podwyższonej temperatury, specjalnych środowisk itp. [3, 4, 23, 24];

— analiza mechanizmu starzenia pod wpływem wybranych czynników (np. fotonów światła, deszczu) oraz prognozowania własności na podstawie pomiarów krótkotrwałych [20, 25, 26, 27];

— zagadnienia metodyczne (np. zastosowanie ETO w w analizie wyników pomiarów).

Miarami starzenia są najczęściej wskaźniki, które reprezentują własności fizyczne i chemiczne, rzadziej (co już podkreślono wyżej) własności mechaniczne, jak: wytrzymałość na rozciąganie, wytrzymałość na zginanie, udarność, wydłużenie względne, moduł sprężystości poprzecznej [18, 20, 28]. Ze względu na specyficzne znaczenie i rolę tlenu w procesie starzenia tworzyw sztucznych, autorzy [23, 24] omawiając to zagadnienie stwierdzają, że utlenianie, a zwłaszcza w podwyższonej temperaturze prowadzi intensywnie do de-



zintegracji struktury. Ponadto w skutek podwyższonej temperatury zachodzą takie zmiany strukturalne jak rekrytalizacja, przemiany polimorficzne, orientacja pod obciążeniem itp. prowadzące w zasadzie do wzrostu wytrzymałości. W pierwszym etapie starzenia działają zatem z różną siłą dwa konkurencyjne procesy: proces utleniania prowadzący do zmniejszania wartości wytrzymałości oraz procesy porządkowania struktury — prowadzące do wzrostu wytrzymałości. Efektem wypadkowym w tym etapie starzenia może być (i często jest) czasowa poprawa własności.

## 2. Charakterystyka materiału pomiarowego

Przedmiotem badań zmęczeniowych jest poliamid 6 (Tarnamid T-27) produkcji Zakładów Azotowych w Tarnowie (ZAT). Do scharakteryzowania własności próbek, wykonanych metodą wtrysku oraz utworzenia bazy wielkości do identyfikacji materiału, określono wskaźniki zalecane przez normy [29, 30, 31] i dodatkowo wyznaczono: naprężenie zrywające  $\sigma_{rp}$  i wydłużenie względne  $\varepsilon_{rp}$  w próbce pierścieniowej [32, 33] naprężenia własne  $\sigma_w$  oraz współczynnik zmęczenia  $K$  (tabl. 1). Wymienione wskaźniki określono po 7 i 120

Tablica 1. Własności mechaniczne badanego poliamidu 6 (Tarnamidu T-27).

Wskaźniki	Metoda oznaczania	Czas starzenia $\tau$ (mies.)		Zmiana wskaźnika wskutek starzenia przez 10 lat, %
		7	120	
Naprężenie zrywające $\sigma_r$ , MPa	PN-68	75	44	-41
Wydłużenie względne $\varepsilon_r$ , %	C-89034	—	210	—
Naprężenie zrywające $\sigma_{rp}$ , MPa	Próba pierścieniowa [33]	40,9	31,7	-23
Wydłużenie względne $\varepsilon_{rp}$ , %	2 × 2 × 12 (mm)	30	32	+7
Moduł sprężystości przy zginaniu $E_g$ , MPa	PN-61/C-89027	1450	1060	-27
Granica zmęczenia $Z_{g0}(10^7)$ , MPa	Z wykresów zmęczenia	12,9	9,5	-26
Naprężenia własne $\sigma_w$ , MPa	Przecięcia próbki wzdłuż osi	—	0,152	—
Współczynnik zmęczenia $K$	$K = Z_{g0}/\sigma_r$	0,17	0,22	+29

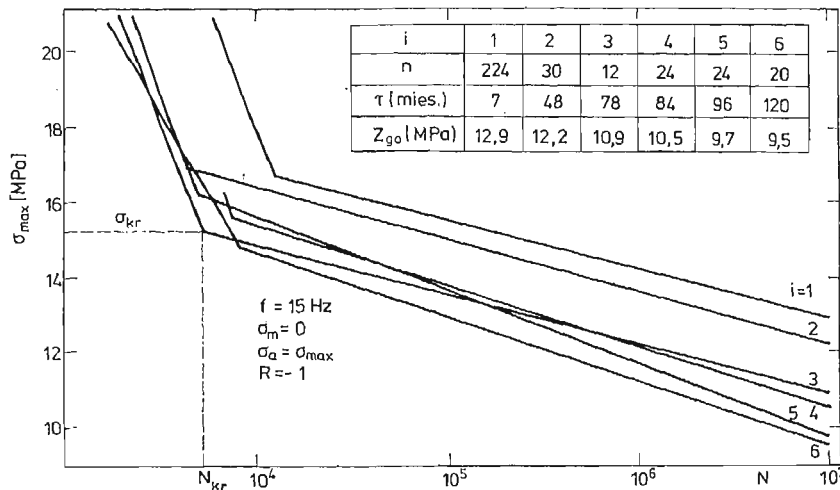
miesiącach starzenia próbek w naturalnych warunkach laboratoryjnych. Z otrzymanych rezultatów wynika, że starzenie PA6 może być mierzone, oprócz granicy zmęczenia, także modułem sprężystości  $E_g$  oraz naprężeniem zrywającym  $\sigma_{rp}$ . Zmniejszenie się ich wartości przeciętnie o 1/4 jest jednak dużą utratą zdolności do przenoszenia obciążeń

stałych i zmiennych przez wyroby poliamidowe, włączone do eksploatacji, jeśli wiek polimeru jest znacznie zaawansowany [5].

Na szczególną uwagę zasługuje wzrost (a nie odwrotnie) własności plastycznych  $\varepsilon_{rp}$ . Wydłużenie względne  $\varepsilon_r$  próbek wiasełkowych po 120 mies. starzenia, wynoszące aż 210% stawia PA6 w rzędzie materiałów o własnościach nadplastycznych. Jest to szczególnie cenna właściwość poliamidu 6 jako tworzywa konstrukcyjnego, a przede wszystkim włókno-twórczego.

### 3. Przedstawienie danych eksperymentalnych za pomocą równania

Wyniki eksperymentu (rys. 1 i tabl. 2) przedstawiono w formie krzywej życia materiału (rys. 2). Wynika z nich, że należy je opisać równaniem mającym punkt przegięcia. Do tego celu przyjęto rozkład normalny (rys. 3), ponieważ oprócz dobrej jakości dopasowania jest łatwo doświadczalnie określić jego parametry ( $m$ ,  $\sigma$ ) oraz równanie asymptoty. Korzystając z własności tego rozkładu wyznaczono wykreslnie przybliżone położenie punktu



Rys. 1. Wykresy zmęczenia poliamidu 6 starzonego w naturalnych warunkach laboratoryjnych ( $n$ -liczba oznaczeń  $d = 12$  mm średnica próbki [1])

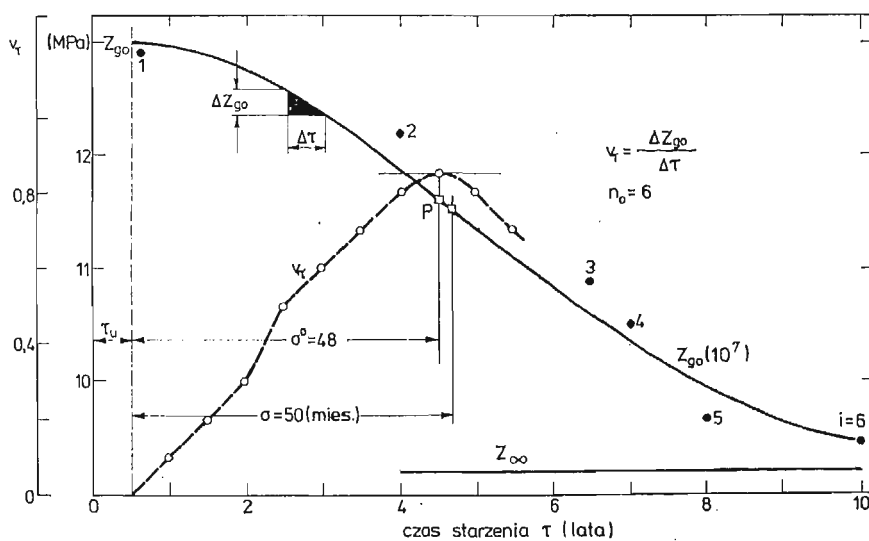
przegięcia  $P$  (rys. 2), a więc jeden z jego parametrów. Korekcja  $\sigma^0$  polega na tym, że dopasowujemy jego moduł do takiej wartości, która zapewnia w przybliżeniu jednakowe błędy  $\Delta_i$  w punktach najdalej odległych od wykresu  $Z_r$  (tabl. 2). Drugi parametr, charakteryzujący przesunięcie wykresu, przyjęto  $m = 6$  mies. Wartość  $m$  odpowiada czasowi uspokojenia PA6 (rys. 4). Celem wykorzystania danych stabelaryzowanych gęstości prawdopodobieństwa [34] do wykreślenia równania empirycznego wprowadzono statystykę upraszczającą  $u$  (tabl. 2). Ogólne równanie empiryczne granicy zmęczenia w funkcji czasu starzenia ma zatem postać

$$(1) \quad Z_r = A + B \cdot \varphi(u),$$

Tablica 2. Porównanie wartości granicy zmęczenia  $Z_\tau$  określonej z równania empirycznego (11) z wartościami  $Z_{g0}$  określonymi doświadczalnie (rys. 1).

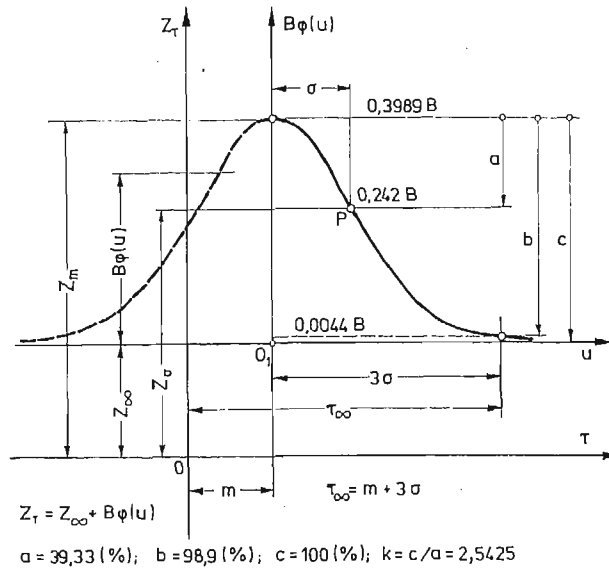
i	Czas starzenia $\tau$		Równanie prostej regresji dla $\sigma_{\max} < \sigma_{kr}$	$Z_{g0}$ (MPa)	$u = \frac{\tau - m}{\sigma}$	$\varphi(u)$	$Z_\tau$ (MPa)	$\Delta_i^*$ (%)
	lata	mies.						
1	0,58	7	$\lg N = 17,001 - 0,7736 \cdot \sigma_{\max}$	12,9	0,02	0,3989	12,99	0
2	4	48	$\lg N = 15,382 - 0,6922 \cdot \sigma_{\max}$	12,2	0,84	0,2803	11,87	-2,70
3	6,5	78	$\lg N = 15,343 - 0,7660 \cdot \sigma_{\max}$	10,9	1,44	0,1415	10,55	-3,20
4	7	84	$\lg N = 13,363 - 0,6060 \cdot \sigma_{\max}$	10,5	1,56	0,1182	10,33	-1,62
5	8	96	$\lg N = 11,646 - 0,4870 \cdot \sigma_{\max}$	9,7	1,80	0,0789	9,95	+2,58
6	10	120	$\lg N = 12,464 - 0,5749 \cdot \sigma_{\max}$	9,5	2,28	0,0297	9,48	-0,21

$$*) \Delta = 100 \frac{Z_{g0} - Z_\tau}{Z_{g0}} (\%); \quad |\Delta_2| \approx |\Delta_5|.$$

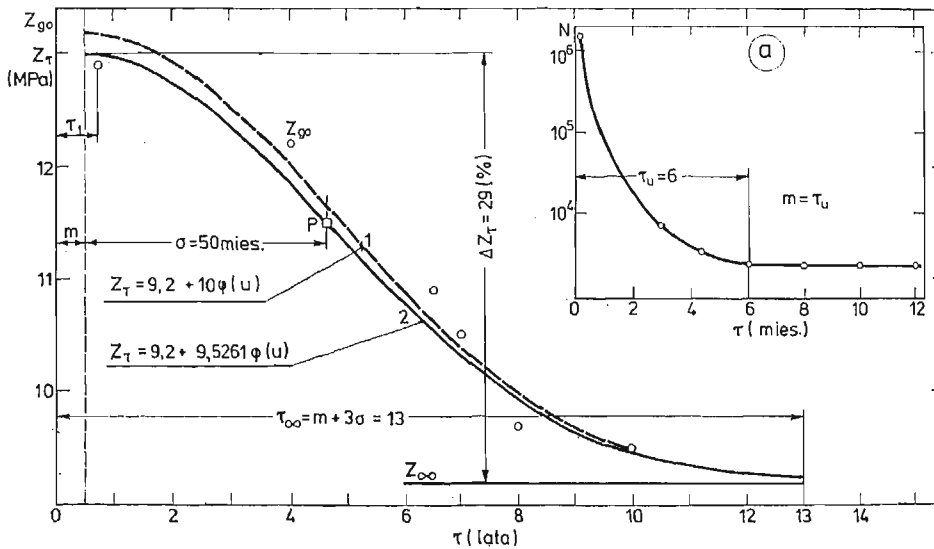
Rys. 2. Krzywa życia PA6 oraz wykreślne wyznaczenie punktu przegięcia  $P$  i odchylenia standardowego ( $\sigma^o$  — wartość orientacyjna,  $\sigma$  — wartość dokładna, po korekcji)

w którym  $\varphi(u)$  — gęstość zmiennej losowej unormowanej określona wzorem

$$(2) \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$



Rys. 3. Charakterystyka rozkładu Gaussa do opisu efektów starzenia:  $P$  — punkt przegięcia;  $\tau_{\infty}$  — czas starzenia w pełnym cyklu badań;  $k$  — współczynnik we wzorze (3)



Rys. 4. Krzywe życia PA6: 1 — równanie empiryczne zbudowane wg metody najmniejszych kwadratów; 2 — wg metody wybranych punktów; a — wykres zmiany trwałości zmęczeniowej

Stałą  $A$  można zdefiniować jako najmniejszą wartość granicy zmęczenia ze względu na własności fizykochemiczne PA6 i czas starzenia  $\tau_{\infty}$  w pełnym cyklu eksperymentu, czyli  $A = Z_{\infty}$ . Wartość  $Z_{\infty}$  wynika z własności rozkładu normalnego, tj. że w unormowanym rozkładzie Gaussa  $N(0,1)$  zmienna  $\varphi(u)$  zmniejsza się w przedziale jednosmowym

o 39,33%, a w przedziale trzysigmowym o 98,9% (rys. 3). Na podstawie tych własności ustalono równania do obliczania stałej  $Z_{\infty}$  w przedziale  $1\sigma$  (3) i w przedziale  $3\sigma$  (4):

$$(3) \quad Z_{\infty} = kZ_{\sigma} - (k-1)Z_m,$$

$$(4) \quad Z_{\infty} = 0.989(Z_{g0})_{\min},$$

gdzie:  $Z_{\sigma}$  — wartość granicy zmęczenia dla  $\tau = \sigma$ ;  $Z_m$  — wartość granicy zmęczenia dla  $\tau = m$ ;  $(Z_{g0})_{\min}$  — wartość granicy zmęczenia w punkcie pomiaru, który jest położony najbliżej asymptoty  $Z_{\tau} = Z_{\infty}$ .

Wychodząc z ogólnej procedury przedstawiania danych za pomocą równania, stałą  $B$  można określić:

a) Metodą najmniejszych kwadratów

$$(5) \quad f = \sum [Z_{g0} - Z_{\infty} - B\varphi(u)]^2 = \min.,$$

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial B} = -2 \sum [Z_{g0} - Z_{\infty} - B\varphi(u)] \cdot \varphi(u) = 0.$$

Ponieważ  $\varphi(u) \neq 0 \Rightarrow [Z_{g0} - Z_{\infty} - B\varphi(u)] = 0$ , czyli

$$(7) \quad B = \frac{\sum (Z_{g0} - Z_{\infty})}{\sum \varphi(u)}, \quad \sum_{i=1}^{i=n_0} (n_0 = \text{liczba prób}).$$

b) Metodą wybranych punktów.

Tym wybranym punktem może być albo pierwszy wynik z oznaczania  $Z_{g0}(\tau_1)$ , czyli wartość granicy zmęczenia w chwili  $\tau = \tau_1$  (rys. 4)

$$(8) \quad B = \left[ \frac{Z_{g0}(\tau_1) - Z_{\infty}}{\varphi_1(u)} \right]_{\tau=\tau_1},$$

$\varphi_1(u)$  — gęstość zmiennej losowej unormowanej w czasie  $\tau = \tau_1$ ; albo wybranym punktem może być  $Z_{\sigma}$ :

$$(9) \quad B = \left[ \frac{Z_{\sigma} - Z_{\infty}}{\varphi_{\sigma}(u)} \right]_{\tau=\sigma},$$

$\varphi_{\sigma}(u) = \frac{e^{-0.5}}{\sqrt{2\pi}} = 0,242$  — gęstość zmiennej losowej unormowanej w punkcie przegięcia  $P(m + \sigma, Z_{\sigma})$ .

Konstrukcja równania (9) wynika z analizy prędkości starzenia  $v_{\tau}$  (vide 4.1.). Wartości stałej  $B$ , obliczone według wzorów (8) i (9) różnią się między sobą dopiero na czwartym miejscu po przecinku.

Szczegółowa postać równania empirycznego, które najlepiej aproksymuje wyniki eksperymentu do fizycznych przesłanek zjawiska jest więc dla czasu starzenia  $m \leq \tau \leq m + 3\sigma$  ( $6 \leq \tau \leq 156$  mies.) następująca

$$(10) \quad Z_{\tau} = 9,2 + 10,0\varphi(u),$$

albo gdy stałą  $B$  określić metodą wybranych punktów

$$(11) \quad Z_{\tau} = 9,2 + 9,5261 \cdot \varphi(u).$$

Ponieważ prawdopodobieństwo wystąpienia obserwowanego efektu starzenia w granicach  $(0, u)$  przedstawia wartość funkcji

$$(12) \quad \varphi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-u^2/2} du,$$

a częstość wartości odchyłki standardowej równa się  $\sigma$ , to w przedziale  $(0, 3\sigma)$  mieści się prawie cała zmiana według sformułowanej hipotezy starzenia w 4.3 — badanej wielkości, tj. granicy zmęczenia (98,9% — rys. 3). Potrójne odchylenie standardowe informuje zatem o pełnym cyklu starzenia. Wynosi on dla badanego PA6 (rys. 4)

$$(13) \quad \tau_\infty = m + 3\sigma = 13 \text{ lat.}$$

#### 4. Analiza i uogólnienie danych eksperymentalnych

**4.1. Nowa klasyfikacja tworzyw sztucznych.** Za podstawę klasyfikacji, ze względu na badane procesy, przyjęto prędkość starzenia, która może być zdefiniowana w dwojaki sposób.

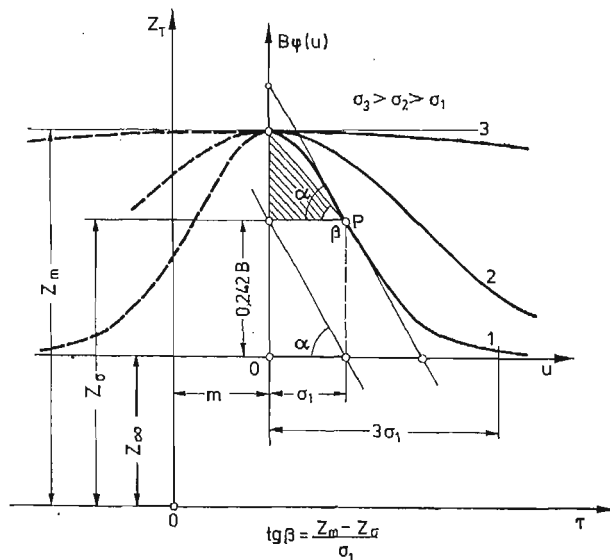
a) Matematyczny

Funkcja starzenia dana jest w postaci

$$(14) \quad Z_\tau = A + \frac{B}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\tau-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Stąd równanie stycznej do rozkładu normalnego

$$(15) \quad \frac{\partial Z_\tau}{\partial \tau} = v_\tau = \frac{B(m-\tau)}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\tau-m)^2}{2\sigma^2}\right],$$



Rys. 5. Klasyfikacja tworzyw sztucznych ze względu na prędkość starzenia: 1 — tworzywa szybko starzejące się; 2 — tworzywa wolno starzejące się; 3 — tworzywa praktycznie nie starzejące się

a prędkość starzenia w punkcie przegięcia  $P$  ( $m + \sigma$ ,  $Z_\sigma$ ) wynosi

$$(16) \quad |v_\sigma| = \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,242B}{\sigma},$$

albo uwzględniając zależności geometryczne (rys. 5), otrzymamy

$$(17) \quad |v_\sigma| = \frac{Z_\sigma - Z_\infty}{\sigma}.$$

Porównując ze sobą równania (16) i (17) można określić stałą  $B$  — vide równanie (9).

b) Fizyczny

Jest on praktyczniejszy w zastosowaniach inżynierskich ze względu na to, że informuje ile wynosi średni spadek granicy zmęczenia w przedziale jednosigmowym ( $\sigma$  w latach):

$$(18) \quad v_\sigma = \operatorname{tg} \beta = \frac{Z_m - Z_\sigma}{\sigma}.$$

Za kryterium zmiany granicy zmęczenia w czasie (lub innego parametru materiałowego badanego na starzenie) może być również, przyjęty czas starzenia w pełnym cyklu eksperymentu ( $\tau = \tau_\infty$ ), albo czas starzenia równy odchyleniu standardowemu ( $\tau = \tau_\sigma$ ), którego wartość informuje równocześnie o kształcie rozkładu normalnego (rozkład mniej lub bardziej spłaszczony).

Tablica 3. Stosowane miary zmiany granicy zmęczenia w czasie — czas starzenia  $\tau$  i prędkość starzenia  $V_\sigma$  dla poliamidu niewzmoczonego i wzmozonego.

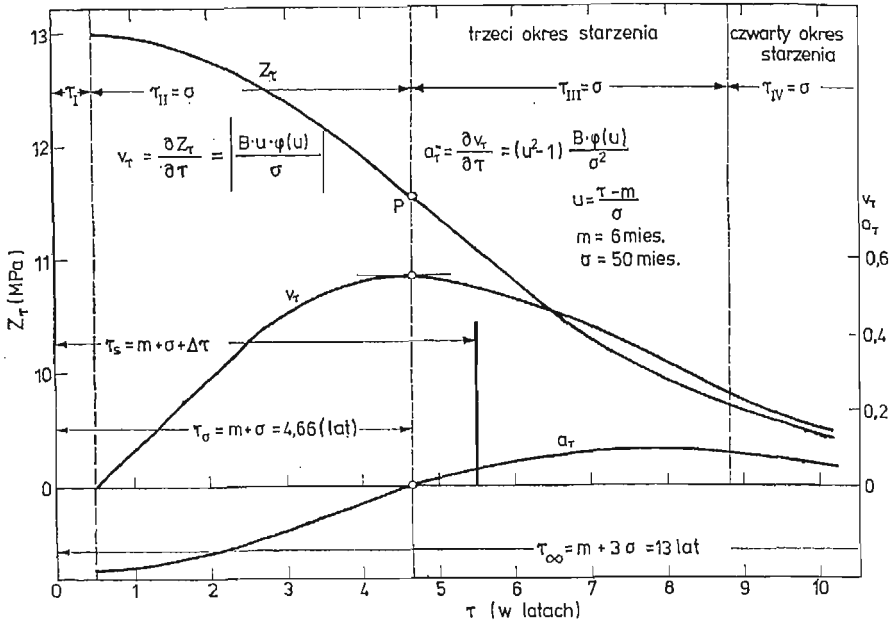
Materiał	Czas starzenia $\tau$ (mies.)		Prędkość starzenia $V_\sigma \left( \frac{\text{M Pa}}{\sigma} \right)$	
	$\tau_\sigma = \sigma$	$\tau_\infty = m + 3\sigma$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,242 \cdot B}{\sigma}$	$\operatorname{tg} \beta = \frac{Z_m - Z_\sigma}{\sigma}$
Tarnamid T-27	50	156	0,5532	0,3587
Itamid 25	25	75	1,7346	1,1247
Itamid 35	19	57	2,7773	1,8007

Wyniki obliczeń dla trzech materiałów i czterech wielkości, które mogą być stosowane do oceny prędkości procesów starzenia, zestawiono w tablicy 3. Wynika z nich oraz z krzywych życia, że tworzywa sztuczne, ze względu na prędkość zmiany wytrzymałości zmęczeniowej można podzielić na trzy charakterystyczne grupy (rys. 5 i 6):

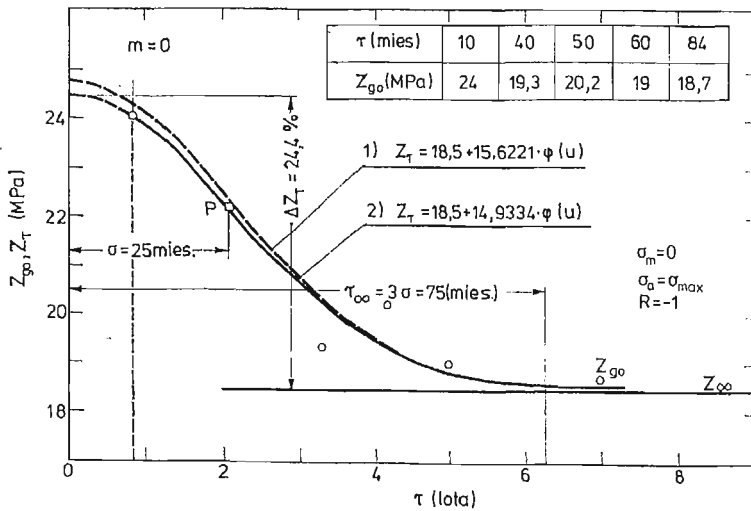
1. Na tworzywa szybko starzejące się, gdy prędkość starzenia  $v_\sigma = \operatorname{tg} \beta \geq 1$  (albo gdy dochylenie standardowe  $\sigma \leq 28$  mies.). Do grupy tej należą np. Itamid 25 oraz Itamid 35 (rys. 7 i 8).

2. Tworzywa starzejące się wolno, gdy prędkość starzenia  $v_\sigma = \operatorname{tg} \beta < 1$  (albo gdy  $\sigma > 28$  mies.). Do grupy tej należy badany PA6.

3. Tworzywa nie starzejące się w znaczeniu technicznym ( $v_\sigma = \operatorname{tg} \beta < 0,1$ , albo gdy  $\sigma$  — jest bardzo duże) oraz takie, których wytrzymałość zmęczeniowa  $Z_{\sigma 0}$  rośnie nieznacznie do pewnego czasu z powodu procesów sieciowania.



Rys. 6. Schemat podziału czasu starzenia  $\tau_{\infty}$  na okresy oraz wykresy funkcji  $V_{\tau}$  i  $a_{\tau}$  na tle wykresu granicy zmęczenia PA6



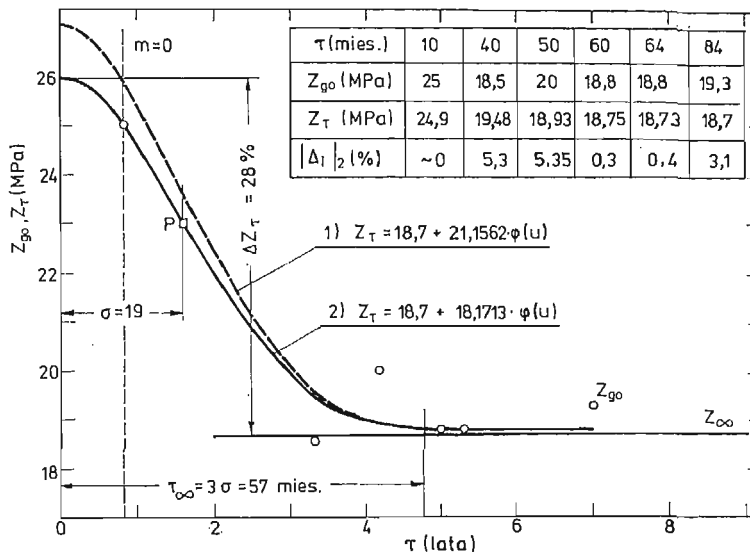
Rys. 7. Krzywe życia poliamidu wzmocnionego (Itamid 25): 1 — równanie empiryczne zbudowane według metody najmniejszych kwadratów; 2 — według metody wybranych punktów

Zaproponowany podział i wprowadzone umowne kryteria mają charakter orientacyjny i wraz z nagromadzeniem danych doświadczalnych mogą być precyzyjniej ustalone i przyjmując obligatoryjny charakter. Znajomość lub wczesne rozpoznanie przynależności polimeru do jednej z wymienionych grup pozwala na dokładniejsze określenie parametrów rozkładu



normalnego ( $m, \sigma$ ) oraz na ekonomiczne prowadzenie eksperymentu przy korzystaniu ze skróconej metody badań na starzenie, tj. gdy opis krzywej życia materiału  $M = M(\tau)$  powstaje na podstawie fragmentu wykresu.

Na czas starzenia  $\tau_\infty$  w pełnym cyklu badań, określony na podstawie własności funkcji  $\varphi(u)$ , składa się wartość średnia  $m$  i odchylenie standardowe  $\sigma$  (tabl. 4). Zatem wielkości te mogą być przyjęte jako racjonalne i ogólne kryteria podziału  $\tau_\infty$  na okresy o jednakowej podstawie czasu ( $\tau = \sigma$ ), a różnej intensywności zmiany granicy zmęczenia (tabl. 4, rys. 6)



Rys. 8. Krzywe życia poliamidu wzmocnionego (Itamid 35): 1 — równanie empiryczne zbudowane według metody najmniejszych kwadratów; 2 — według metody wybranych punktów

Tablica 4. Podział czasu starzenia w pełnym cyklu badań na okresy.

Czas starzenia w pełnym cyklu badań	$\tau_\infty = m + 3\sigma$			
	I	II	III	IV
Oznaczenie okresu				
Intensywność zmiany granicy zmęczenia $\Delta Z_I$ w danym okresie	bardzo duża	mała $\Delta Z_{II} = 0,4 \Delta Z_\tau$	duża $\Delta Z_{III} = 0,47 \Delta Z_\tau$	bardzo mała $\Delta Z_{IV} = 0,13 \Delta Z_\tau$
Granice okresu (ogólnie)	$0 \leq \tau_I \leq m$	$m \leq \tau_{II} \leq m + \sigma$	$m + \sigma \leq \tau_{III} \leq m + 2\sigma$	$\tau_{IV} > m + 2\sigma$
Granice okresu dla badanych materiałów mies.	T-27	0 ÷ 6	6 ÷ 56	56 ÷ 106
	I-25	—	0 ÷ 25	25 ÷ 50
	I-35	—	0 ÷ 19	19 ÷ 38

$$\sum_{\tau_{II}}^{\tau_{IV}} \Delta Z_I = (0,4 + 0,47 + 0,13) \Delta Z_\tau = \Delta Z_\tau$$

zamiast dotychczasowych wartości szczegółowych i orientacyjnych [1]. Analogiczny podział można wprowadzić dla każdego badanego na starzenie parametru materiałowego  $M$ , którego zmianę w czasie opisuje równanie

$$(19) \quad M_\tau = M_\infty + B\varphi(u).$$

**4.2. Metody badań efektów starzenia.** Wybór metody badania efektów starzenia — metoda trwałości ( $N$ ), czy metoda wytrzymałości ( $Z$ ) — jest jednoznacznie określony przez skonstruowane wykresy zmęczenia PA6 (rys. 1) oraz stopień ważności technicznej miary starzenia. Nie ulega wątpliwości, że powinna to być metoda wytrzymałości (oznaczanie granicy zmęczenia) z bazą  $N_G$  nie mniejszą niż  $10^7$  cykli. Metoda wytrzymałości jest czuła w pełnym cyklu starzenia  $\tau_\infty$ , podczas gdy metoda trwałości tylko w określonym przedziale czasu i określonej wartości naprężenia  $\sigma_{\max}$ .

**4.3. Sformułowanie hipotezy starzenia się polimerów niszczonego zmęczeniowo.** Wybór rozkładu normalnego do opisu procesów starzenia, zachodzących w poliamidzie 6 wynika nie tylko z kształtu wykresu doświadczalnego (rys. 4), lecz także z charakteru zmiany masy cząsteczkowej wskutek destrukcji mechaniczno-chemicznej [35, 36] — jako podstawowego aktu w samorzutnej i nieodwracalnej zmianie własności tworzywa w przedziale czasu narzuconym przez eksploatację albo eksperyment. Proces ten jest opisany przez charakterystyczne wielkości — minimalną masę cząsteczkową  $M_\infty$  i stałą szybkości destrukcji  $k$ . Wielkości te są związane ze sobą równaniem

$$(20) \quad M_\tau = M_\infty + B \exp(-k\tau),$$

w którym  $M_\tau$  — masa cząsteczkowa w chwili  $\tau$ . Nie jest więc przypadkiem, że funkcja  $Z_{g0} = Z_{g0}(\tau)$  ma punkt przegięcia oraz asymptotę  $Z_\tau = Z_\infty$ , tj. taką minimalną wartość  $Z_{g0}$ , która wynika z właściwości makrocząsteczki poliamidu ( $M_\infty$ ), a ogólniej — z właściwości związku wielocząsteczkowego. Formułując model fenomenologiczny, opisujący procesy starzenia w tworzywach termoplastycznych, w oparciu o fizyczne przesłanki wykresu (rys. 4), to powinien on uwzględniać:

1. Własności tworzyw objęte klasyfikacją ze względu na prędkość starzenia.
2. Praktyczny zanik efektów starzenia po  $\tau_\infty$  latach składowania lub eksploatacji.
3. Czas uspokojenia  $\tau_u$  [6].

Wszystkie te warunki — jak widać to na przykładzie badań PA6 oraz dodatkowych badań weryfikujących, przeprowadzonych na Itamidzie 25 i Itamidzie 35 (własności — vide [1]) w pełnym cyklu starzenia — spełnia rozkład Gaussa.

Uogólnienie wyników eksperymentu prowadzi więc do sformułowania hipotezy starzenia polimerów, niszczonego zmęczeniowo, w postaci: granica zmęczenia termoplastycznych tworzyw sztucznych, starzonych w naturalnych warunkach laboratoryjnych, zmienia się według rozkładu normalnego o odchyleniu standardowym  $\sigma$  i wartości średniej  $m$ . Zatem dla badanego tworzywa, którego proces starzenia mierzony będzie wytrzymałością zmęczeniową należy określić cztery wielkości —  $m$  i  $\sigma$  (doświadczalnie) oraz stałe równania  $B$  i  $Z_\infty$  (analitycznie).

**4.4. Algorytm skróconej metody badań na starzenie.** Prowadzenie badań starzeniowych w pełnym cyklu eksperymentu jest w warunkach przemysłowych działalnością nierealną, ponieważ okres starzenia w obszarze trzysigmowym ( $3\sigma$ ) dla niektórych polimerów może

być dłuższy od 10 lat. Dlatego też zbudowanie algorytmu skróconej metody badań na starzenie — na podstawie sformułowanej hipotezy starzenia tworzyw sztucznych — ma istotne znaczenie w badaniach doświadczalnych, a szczególnie tworzyw z dodatkami zwiększającymi ich odporność na starzenie. Z własności przyjętej funkcji  $\varphi(u)$  wynika, że czas skróconego eksperymentu można ograniczyć do takiej wartości  $\tau_s$ , przy której można wykreślnie wyznaczyć parametr rozkładu  $\sigma$ , tj. do czasu

$$(21) \quad \tau_s = m + \sigma + \Delta\tau.$$

Dysponując odchyleniem standardowym  $\sigma$ , wartością średnią  $m$  oraz równaniami do obliczania  $B$  i  $Z_\infty$  tylko na podstawie fragmentu krzywej życia materiału można zapisać równanie (1).

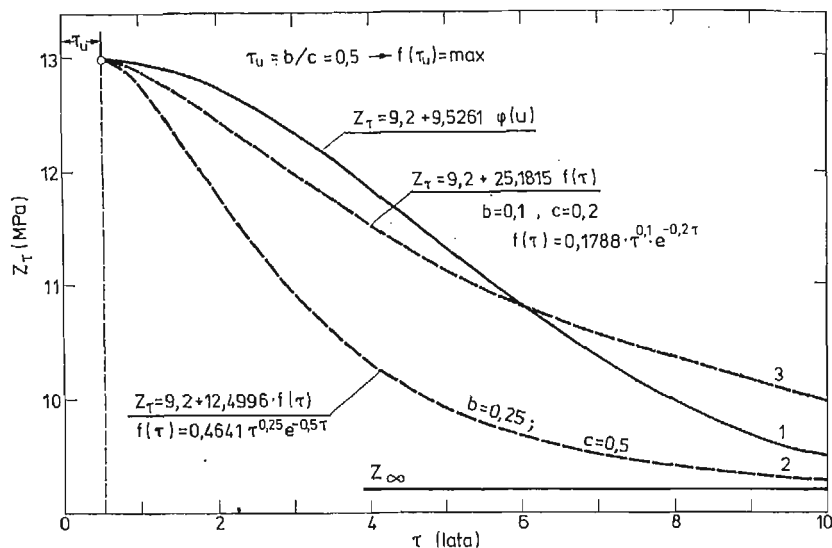
Na algorytm skróconej metody badań starzenia składają się następujące instrukcje:

1. Kwalifikacja polimeru do odpowiedniej grupy starzeniowej i ustalenie gęstości punktów pomiarowych. Dla tworzyw szybko starzejących się można przyjąć stopień czasu starzenia  $\Delta\tau = 1/2$  roku oraz dla wolno starzejących się  $\Delta\tau = 1$  rok.
2. Doświadczalne określenie parametrów rozkładu ( $m, \sigma$ ).
3. Wyznaczenie stałych równania empirycznego  $B, Z_\infty$  — ze wzorów (8) i (3).
4. Zapis równania krzywej życia polimeru na podstawie zależności (1).
5. Określenie czasu pełnego cyklu starzenia według równania (13).

Zaletą metody skróconej — w stosunku do metod przyspieszających starzenie — jest to, że otrzymane wyniki reprezentują naturalne zmiany własności materiału, bez udziału bodźców zewnętrznych zniekształcających w niektórych przypadkach eksperyment. Metoda skrócona zmniejsza ponadto około 2,5-krotnie czasochłonność pomiarów, podczas gdy badania w warunkach niekonwencjonalnych (np. w wodzie i podwyższonej temperaturze) i bez korzystania z hipotezy starzenia skracają czas trwania próby najwyżej o około 20%.

**4.5. Analiza jakości dopasowania i analiza wartości użytkowej rozkładu normalnego.** Spośród około 20 rozkładów zmiennej losowej [37, 38] wytypowano do analizy po wstępnych rozważaniach statystycznych rozkład normalny, ponieważ tylko ten spełnia wszystkie założone kryteria selekcyjne. A więc:

1. Posiada punkt przegięcia i asymptotę.
2. Uwzględnia rzeczywisty rozkład wyników badań na starzenie i niektóre zjawiska związane ze starzeniem [23, 39, 40], ze szczególnym uwzględnieniem własności tworzyw scharakteryzowanych równaniem (20).
3. Zawiera minimalną liczbę parametrów ( $m, \sigma$ ) łatwych do doświadczalnego określenia w stosunkowo krótkim czasie starzenia.
4. Jest prosty w budowie, analizie fizycznej wyników pomiaru i praktycznym stosowaniu przez wprowadzenie zmiennej losowej unormowanej.
5. Dokładnie opisuje jednym równaniem nie tylko wyniki badanego PA6 (rys. 9 i tabl. 5) lecz także jest „zdolny” do opisu również takich procesów jak chwilowy wzrost  $Z_{\theta 0}$  [41] w wyniku sieciowania, zmian strukturalnych lub zmian naprężeń własnych oraz naprężeń na granicy faz.
6. Jest rozkładem bardziej elastycznym od innych, ponieważ metodą kolejnych przybliżeń można określić jego parametry oraz stałe równania tak, że błąd względny aproksy-



Rys. 9. Aproxymacja wyników pomiaru granicy zmezczenia rozkładem gamma: 1 — rozkład normalny, 2 i 3 — rozkład gamma dla różnych wartości parametrów  $b$  i  $c$

Tablica 5. Porównanie wyników obliczeń statystycznych względnego błędu aproxymacji granicy zmezczenia PA6 rozkładem normalnym i rozkładem gamma

Czas starzenia $\tau$ , lata		0,58	4	6,5	7	8	10
Rozkład aproxymujący	Względny błąd aproxymacji	$\Delta = 100 \frac{Z_{g0} - Z_\tau}{Z_{g0}}, \%$					
	Normalny $Z_\tau = A + B_1 \cdot \varphi(u) = 9,2 + 9,5261 \cdot \varphi(u)$	0	-2,70	-3,20	-1,62	+2,58	-0,21
	Gamma $Z_\tau = A + B_2 f(\tau) = 9,2 + 25,1815 f(\tau)$	0	-5,58	-2,02	+0,48	+6,39	+4,8

macji jest mały — około dwukrotnie mniejszy niż dla rozkładu gamma (tabl. 5). Ponadto za rozstrzygający uznano jeszcze fakt, że rozkład normalny stanowi wygodną bazę do zbudowania algorytmu skróconej metody badań na starzenie ze względu na łatwość doświadczalnego określenia jego parametrów ( $m$ ,  $\sigma$ ) oraz prostą budowę wzorów (3), (8) i (13).

Jeżeli porównać gęstość rozkładu Weibulla (rys. 10) i rozkładu gamma [38]

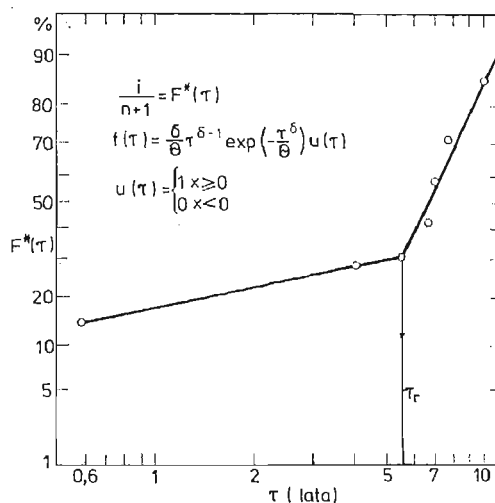
$$(22) \quad f(\tau) = \frac{c^{b+1}}{\Gamma(b+1)} \tau^b e^{-c\tau} \cdot U(\tau).$$

$b > 0$ ;  $c > 0$  parametry rozkładu,

$$(23) \quad U(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \geq 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases} \quad \Gamma(b+1) = \int_0^\infty \tau^b e^{-\tau} d\tau$$

z gęstością rozkładu normalnego (2), to widać jego bezsporne zalety zarówno ilościowe jak i jakościowe.

Warto podkreślić interesującą zbieżność wartości odciętej punktu rozdzielania rozkładów Weibulla ( $\tau_r$  — rys. 10) z wartością odchylenia standardowego  $\sigma$  rozkładu normalnego (rys. 2), która ujawniła się przy próbie opisu wyników pomiarów również rozkładem Weibulla. W analizie trwałości obiektów technicznych [42]  $\tau_r$  informuje o zmianie intensywności uszkodzeń, a w przypadku badanego PA6 o zmianie intensywności starzenia, które polega m.in. na powstawaniu uszkodzeń (zrywaniu wiązań głównych, rozpadzie lub wzroście obszarów krystalicznych z defektami w strukturze krystalicznej i z defektami

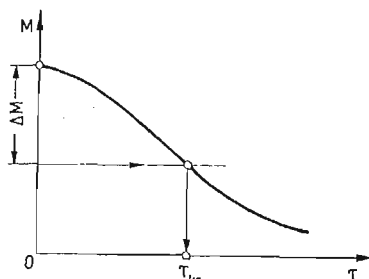


Rys. 10. Dystrybuanta empiryczna (z próbki)  $F^*(\tau)$  na siatce funkcyjnej rozkładu Weibulla; punkt rozdzielania rozkładów  $\tau_r \approx 5,5$  roku;  $i$  — kolejna realizacja zmiennej losowej w próbce o liczności  $n$  [37];  $f(\tau)$  — gęstość rozkładu Weibulla [42]

w strukturze bezpostaciowej — zagięciach, supłach, przesunięciach itp.). Ponieważ przebieg dystrybuanty empirycznej (rys. 10) wskazuje, że mamy do czynienia ze złożonym rozkładem Weibulla i w związku z tym nie spełnionym kryterium jednego równania, zaniechano więc dalszej analizy statystycznej i aproksymacji wyników pomiarów tym rozkładem. Jednak przybliżona równość  $\tau_r \approx \sigma$  jest cenną informacją w badaniach procesów starzenia przeprowadzanych na podstawie sformułowanej hipotezy starzenia. Ponadto zbieżność  $\tau_r \approx \sigma$  potwierdza, że naturalnymi procesami starzenia rządzą dwa mechanizmy, zależnie od czasu ekspozycji.

Analiza statystyczna doprowadzająca do ustalenia odpowiedniej funkcji aproksymującej wyniki pomiarów (konstrukcja krzywej życia materiału) — to jeden z ważniejszych kierunków badań tworzyw sztucznych na starzenie. Innym, od przedstawionego przez autora, podejściem do problemu starzenia jest określenie krytycznego czasu starzenia  $\tau_{kr}$ , tj. takiego czasu, w ciągu którego nastąpi zmiana mierzonego parametru materiałowego  $M$  o ustaloną wartość  $\Delta M$  (rys. 11). Oznaczanie  $\tau_{kr}$  może być realizowane metodą doświadczalną albo teoretyczną, najczęściej w oparciu o kinetyczną teorię wytrzymałości

polimerów [43, 44]. Osiągnięcie czasu krytycznego oznacza w praktyce wyłączenie wyrobu z eksploatacji. Kilka wybranych funkcji, stosowanych do oznaczenia  $\tau_{kr}$  podano w tabeli 6.



Rys. 11. Schemat krzywej życia materiału (kinetyki starzenia) i określenie  $\tau_{kr}$ .

Tablica 6. Zestawienie funkcji prognozujących krytyczny czas starzenia  $t_{kr}$  w różnych warunkach obciążenia obiektu [3, 4, 16, 43, 44].

Nr	Starzenie pod obciążeniem:	Funkcja prognozująca krytyczny czas starzenia	Uwagi
1	cieplnym	$B \exp\left(\frac{U}{RT}\right)$	Np. dla polietylenu (małe $\rho$ ) $U = 12 \div 30$ kcal/mol $B = 10^{-2} - 10^{-16} \text{h}^{-1}$
2	mechanicznym	$\tau_0 \exp\left(\frac{U_0 - \gamma\sigma}{RT}\right)$	Wartości parametrów $\tau_0$ , $U_0$ i $\gamma$ dla niektórych polimerów podaje [43, s. 108]
3	poła elektrycznego	$\tau_e = CE^{-m}$	Funkcja prognozująca czas do przebiecia dielektryka
4	cieplnym i $\sigma(\tau) = 0$	$-\frac{\ln S_{kr}}{A_0} \exp\left(\frac{U}{RT}\right)$	$S_{kr} = 0,5 \div 0,75$ Np. $A_0 = 2,5 \cdot 10^5 (\% \cdot \% \cdot \text{s}^{-1})$

$B$  — stała czasowa;  $U$  — energia aktywacji;  
 $R$  — stała gazowa;  $T$  — temperatura;  $\sigma$  — naprężenie;  
 $\gamma$  — współczynnik strukturalny;  $\tau_0$  — współczynnik czasowy;  
 $E$  — natężenie pola elektrycznego;  $m$ ,  $C$  — parametry;  
 $S_{kr}$  — dopuszczalna wartość współczynnika odporności na starzenie;

$$S = \frac{W_\tau - \text{wartość po czasie ekspozycji } \tau}{W_0 - \text{wartość przed ekspozycją}} \quad [16]$$

## 5. Wnioski

1. Granica zmęczenia poliamidu 6 (Tarnamidu T-27), starzonego w naturalnych warunkach laboratoryjnych przez 10 lat, zmienia się według rozkładu Gaussa o równaniu empirycznym

$$Z_\tau = 9,2 + 9,5261 \cdot \varphi(u)$$

2. W badaniach laboratoryjnych oraz w obliczeniach zmęczeniowych elementów maszyn wykonanych z PA6 i programowanych na długi czas eksploatacji lub z dużym opóźnieniem włączanych do użytkowania należy uwzględnić spadek granicy zmęczenia, który np. po 10 latach starzenia wynosi 26%. Przewidywany spadek granicy zmęczenia w pełnym cyklu starzenia ( $\tau_{\infty} = 13$  lat) wynosi 29%.

3. Na podstawie przeprowadzonych badań starzeniowych oraz ogólnych własności fizykochemicznych polimerów można sformułować następującą hipotezę starzenia tworzyw sztucznych niszczonego zmęczeniowo: tworzywa sztuczne termoplastyczne zmieniają w czasie wytrzymałość zmęczeniową według rozkładu normalnego opisanego parametrami  $m$  i  $\sigma$  oraz ogólnym równaniem empirycznym

$$Z_{\tau} = Z_{\infty} + \frac{B}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\tau - m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

4. Zastosowanie prawa Gaussa do analitycznego opisu zjawisk starzeniowych zachodzących w tworzywach termoplastycznych umożliwia korzystanie z algorytmu skróconej metody badań na starzenie. Czas trwania eksperymentu zmniejsza się wówczas z wartości  $\tau_{\infty} = m + 3\sigma$  na  $\tau_s = m + \sigma + \Delta\tau$ , a więc około 2,5-krotnie.

5. Tworzywa sztuczne, oprócz istniejącego podziału na krystaliczne i bezpostaciowe, termoplastyczne i termoutwardzalne itp. mogą być sklasyfikowane ze względu na szybkość starzenia na: szybko, wolno i technicznie nie starzejące się. Taki rodzaj klasyfikacji ułatwia ich badanie na starzenie oraz podnosi poziom ufności funkcji starzenia zbudowanej metodą skróconą.

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. NOWAK, *Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu 6 w funkcji czasu starzenia i zawartości włókna szklanego*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 3, 17 (1979), s. 431.
2. L. BADIAN, *Nowe kryteria odporności starzeniowej dielektryków na tle badań własności dielektrycznych w szerokim zakresie częstotliwości i temperatur*. Sesja odczytowa „Inżynieria Materiałowa”, Tom II, Instytut Elektrotechniki, Oddział we Wrocławiu, Wrocław 1975/76, s. 6.
3. А. М. Волчек, М. Н. Бокшицкий, И. Я. Клинов, *Старение полипропилена в азотной кислоте*. Пластические Массы, 3, (1970), с. 37.
4. Е. Л. Виноградов, Л. И. Годунова, А. М. Лобанов, Н. В. Лысенко, Л. М. Терентьева, С. С. Хинькис, *Прогнозирование свойств полимеров и работоспособность полимерных материалов в изделиях*. Пластические Массы, 4, (1976), с. 44.
5. G. W. URBAŃCZYK, *Fizyka włókna molekularna i nadmolekularna struktura włókna*. WNT, Warszawa 1970.
6. W. ALBRECHT, S. CHRZCZONOWICZ, W. CZTERNASTEK, M. WŁODARCZYK, A. ZIABICKI, *Poliamidy*, WNT, Warszawa 1964.
7. M. B. NEJMAN, *Starzenie i stabilizacja polimerów* (tłum. z ros.). WNT, Warszawa 1966.
8. B. WRIGHT, *The ageing of plastics-conclusion*. Plastics, 314, 28 (1963), s. 106.
9. Н. В. Михайлов, Л. Г. Токарева, М. В. Ковалева, *Исследование механизма старения синтетических волокон*. Высокомолекулярные Соединения, 4, 2 (1960), с. 581.
10. M. NOWAK, *Wybrane zagadnienia wytrzymałości zmęczeniowej poliamidu stabilizowanego*. Prace Naukowe Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Nr 11, seria — Monografie, 3 (1972).

11. M. NOWAK, *Модифицирование усталостных свойств полиамида обработанного термическим методом под давлением*. Механика Полимеров, 6, (1977), с. 1017.
12. H. J. M. LANGSHAW, *The weathering of high polymers*. Plastics, 267, 25 (1960), s. 40.
13. D. WEICHERT, K. BÜHLER, *Über die Eindringtiefe der Alterung in Plaste bei natürlicher Bewitterung*. Plaste und Kautschuk, 11, 12 (1965), s. 664.
14. H. HESPE, H. W. PAFFRATH, *Licht-, Alterungs- und Witterungsbeständigkeit bei Kunststoffen*. Zeitschrift für Werkstofftechnik, 6, 2 (1971), s. 292.
15. S. S. STIVALA, L. REICH, *Estimation of Shelf Life of Unstabilized Polyolefins from Thermal Oxidation Data*. Journal of Applied Polymer Science, 9, 17 (1973), s. 2919.
16. S. ALEKSANDROWICZ, *Wyniki badań odporności materiałów z tworzyw sztucznych na działanie czynników atmosferycznych*. Polimery — Tworzywa Wielkocząsteczkowe, 9, 19 (1974), s. 436.
17. G. MENZEL, *Licht und Wetterbeständigkeit von Polyvinylchlorid*. Bewitterungsuntersuchungen an Hart — PVC und schlagzähem PVC. Plastverarbeiter, 3, 25 (1974), s. 137.
18. A. BRAVENCOVÀ, L. REKTORIKOVÀ, P. SVOBODA, *Oxidace plastu ozónem*. II. Změny mechanických vlastností. Plasty a Kaučuk, 12, 11 (1974), s. 357.
19. J. DELORME, *Étude du vieillissement du polychlorure de vinyle sous divers climats*. Interprétation différée des résultats. Revue Générale des Caoutchoucs et Plastiques, 11, 51 (1974), s. 816.
20. A. CASALE, O. SALVATORE, G. PIZZIGONI, *Measurement of aging effects of ABS polymers*. Polymer Engineering and Science, 4, 15 (1975), s. 286.
21. G. MENZEL, *Licht- und Wetterbeständigkeit von Polyvinylchlorid*. Plastverarbeiter, 5, 26 (1975), s. 259.
22. Н. И. КОРЦУНОВА, Т. К. ШАПОШНИКОВА, Т. И. СОГОЛОВА, В. А. КАРГИН, *Значение физической модификации полиакриламида антиоксидантами для его стабилизации при термоокислительном старении*. Высокомолекулярные Соединения, 1, 16А (1974), с. 77.
23. Н. Ф. НЕГРЕЙ, М. Н. БОКШИЦКИЙ, Р. Б. ШЛЕЙФМАН, В. И. ГЕРАСИМОВ, Н. Н. ЗНАМЕНСКИЙ, П. В. КОЗЛОВ, *Старение пентапласта и поликарбоната в некоторых средах*. Пластические Массы, 2, (1974). с. 54.
24. M. TRELIŃSKA W. ŁASKAWSKI, S. DZIOLAK, *Badania nad wpływem starzenia na niektóre własności twardego PCW suspensyjnego*. Polimery — Tworzywa Wielkocząsteczkowe, 5, 21 (1976), s. 215.
25. R. A. HELLER, H. F. BRINSON, A. B. THAKKER, *Environmental effects on fiber — reinforced composites*. Polymer Engineering and Science, 11, 15 (1975), s. 781.
26. R. SASTRE, J. L. ACOSTA, J. FONTAN, *Fotodegradacion de polimeros*. Revista de Plásticos Modernos, 219 (9), 25 (1974), s. 393.
27. A. DAVIS, D. GORDON, *Rapid assessment of weathering stability from exposure of Polymer films*. Journal of Applied Polymer Science, 4, 18 (1974), s. 1159, s. 1173, s. 1181.
28. P. UNGER, *Der Einfluss von Werkstoffzusammensetzung und Umgebungsklima auf die zeitabhängige Änderung elektrischer Eigenschaften duroplastischer Formstoffe*. Kunststoffe, 8, 64 (1974), s. 409.
29. PN-69/C-89027 Tworzywa sztuczne. Oznaczanie wytrzymałości na zginanie.
30. PN-68/C-89034 Tworzywa sztuczne. Oznaczanie cech wytrzymałościowych przy statycznym rozciąganiu.
31. PN-71/C-89037 Tworzywa sztuczne. Badanie odporności na starzenie w naturalnych warunkach klimatycznych.
32. M. NOWAK, *Badanie mechanicznych własności rur windurowych na próbkach pierścieniowych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej, Mechanika 19, Wrocław 1967.
33. J. ZAWADZKI, M. NOWAK, *Badanie własności mechanicznych poliamidu na próbkach pierścieniowych*. Prace Naukowe Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Nr 4, seria — Studia i Materiały, (2) 1970.
34. J. ANTONIEWICZ, *Tablice funkcji dla inżynierów*. PWN, Warszawa 1969.
35. C. SIMIONESCU, C. V. OPREA, *Mecanochimia compusilor macromoleculari*. Edit. Acad. Rep. Soc. Romania, Bukareszt 1967.
36. J. ZAWADZKI, M. NOWAK, *Wpływ parametrów wtrysku na wytrzymałość zmęczeniową poliamidu*. Przegląd Mechaniczny, 18, 30 (1971), s. 553.



37. PN-74/N-01051 Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Nazwy, określenia i symbole.
38. A. PAPOULIS, *Prawdopodobieństwo zmienne losowe i procesy stochastyczne*. WNT, Warszawa 1972.
39. Е. Л. ТАТЕВОСЯН, И. С. ФИЛАТОВ, Н. Н. ПАВЛОВ, Е. Н. МАТВЕЕВ, *Старение пластических масс в условиях тропического климата*. Пластические Массы, 3, (1972), с. 64.
40. M. BORZACCHINI, *Conduites en PVC pour l'eau et le gaz. Vieillessement en service* Plastiques Modernes et Elastomeres, 5 27 (1975), s. 75.
41. A. WAWRYKOWICZ, *Własności zmęczeniowe Elitu 25 — nowego tworzywa konstrukcyjnego*. Raport Nr 29, Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
42. K. GRZESIAK, J. KOŁODZIEJSKI, Z. NETZEL, *Badania trwałościowe obiektów technicznych*. Tablice rozkładu Weibulla. WNT, Warszawa 1968.
43. В. Р. РЕГЕЛЬ, А. И. СЛУЦКЕР, Э. Е. ТОМАШЕВСКИЙ, *Кинетическая природа прочности твердых тел*. Издательство „Наука”, Москва 1974.
44. М. Н. БОКШИЦКИЙ, *К оценке активаторов статической усталости полимеров*. Механика Полимеров, 4, (1970), с. 654.

### Р е з ю м е

#### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТАРЕНИЯ УСТАЛОСТНО РАЗРУШАЕМОГО ПОЛИАМИДА 6

Описано изменение усталостной прочности полиамида 6 (РА6) в результате естественного старения в течение 10 лет. На основе проведенных исследований, а также общих физикохимических свойств полимеров была сформулирована гипотеза старения синтетических материалов, усталостно разрушаемых, в виде: усталостная прочность ( $Z_T = \sigma_{-1}$ ) термопластических синтетических материалов (пластмасс), подвергаемых старению в естественных лабораторных условиях, изменяется по нормальному распределению, описанному параметрами  $m$  и  $\sigma$ , а также общим эмпирическим уравнением (1).

Предложен сокращённый метод испытаний на старение, заключающийся в том, что аналитическое описание диаграммы долговечности материала можно провести на основе такого фрагмента измерений, в котором возможным является определение  $\sigma$ . Постоянную  $Z_\infty$  и  $B$  определяют тогда уравнения (3) и (8). Приведена прямая зависимость для вычисления времени полного цикла старения полимеров в естественных лабораторных условиях (13).

Произведено новое подразделение синтетических материалов, принимая за классификационный критерий скорость старения (18), а также время старения, равное значению среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ .

### S u m m a r y

#### ANALYTICAL DESCRIPTION OF AGEING OF POLYAMIDE 6 SUBJECTED TO FATIGUE FAILURE

The variation of fatigue behavior of polyamide 6 (PA 6) in effect of ten years of ageing is presented. The hypothesis of ageing process of polymers, based on experimental results and general physico-chemical properties of polymers has been proposed in the following form: fatigue limit of thermoplastics  $Z$  aged in laboratory environment conditions decrease in agreement with Gaussian distribution (with parameters  $m$  and  $\sigma$ ) and general empirical equation (1).

A method of accelerated investigation of ageing has been proposed. The analytical description of life-time curve may be found on the basis of such experimental results which enable to determine the value of. Then the constants  $Z$  and  $B$  may be found from equation (3) and (9). A simple formula for determination the ageing time of polymers in laboratory environment conditions has been proposed. A new classification of polymers has been done. The criterion of classification were the rate of ageing (18) and time of ageing equal to value of standard deviation.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 stycznia 1980 roku*

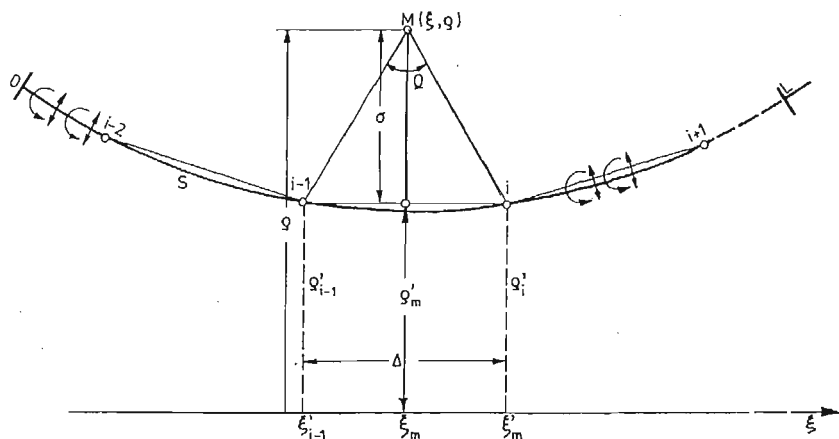
---

ON THE CALCULATION OF THE VELOCITY INDUCED BY A VORTEX-SOURCE CONE

K. VARSAMOV, K. YOSIFOV, A. HAIMOV (WARNA)

The present paper describes the transition from numerical quadrature to linearized expressions for calculation of the velocity induced by unit vortex cone at points near the vortex sheet. A criterion is obtained by comparing the results with the exact solution for singularity distribution of constant strength.

I. The method of singularities is often used for solving axisymmetric potential flow problems in doubly connected regions (ring aerofoils, bodies in ducts, etc.). The bodies are represented by a vortex or source-vortex distribution along the so called camber surfaces. The strength of the singularities gives the velocity at any point of the flow by numerical quadrature. The numerical integration for the velocity at a control point near a vortex sheet becomes inaccurate due to the singularity of the integrand at points on the sheet.



Rys. 1

Consider a continuous vortex or source-ring distribution of strength  $\gamma(s')$ ,  $q(s')$ , respectively, along a camber line  $s$  (see fig. 1) and the control point  $M$  located near  $s$ . Any component of the velocity induced by such a sheet may be written as

$$(1) \quad C = \int_0^L \gamma(s') \cdot F(S, S') ds' = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \gamma_i \cdot F_i,$$

where  $\lambda_i$  are the weight coefficients of the quadrature. It was mentioned in [1] that the increasing error of quadrature formula for small values of  $b$  forces a special consideration of the interval  $\Delta = \xi'_i - \xi'_{i-1}$ . Eq. (I) can be expressed in the form

$$(2) \quad C = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \gamma_j F_j + \sum_{j=i}^N \lambda_j \gamma_j F_j + c^*$$

where

$$(3) \quad c^* = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \gamma(s') \cdot F(S, S') \cdot ds'.$$

The exact solution of the integral (3) can be found by using linearization of the camber line and the vortex strength and setting

$$(4) \quad \begin{aligned} \varrho'(\xi') &= \varrho'_m + a \cdot \xi', \\ \gamma(\xi') &= \gamma_m + e \cdot \xi', \\ q(\xi') &= q_m + f \cdot \xi', \end{aligned}$$

where  $a, e, f$  are the corresponding derivatives and  $\varrho'_m, \gamma_m, q_m$  — the mean values.

For the axial and radial velocity components from (I) in [1] and [2] we obtain:

$$(5) \quad \begin{aligned} u_v^* &= \frac{\gamma(\xi')}{2\pi(\varrho + \varrho'_m)} \left\{ \left[ \ln \left( \frac{4(\varrho + \varrho'_m)}{\sqrt{1+a^2}} \right) - \frac{1}{4} \ln(A^+ \cdot A^-) \right] \Delta + \right. \\ &\quad + \frac{a}{1+a^2} \left( \varrho'_m + \frac{b}{2} \right) \ln \frac{A^+}{A^-} - \frac{b}{|b|} \cdot \frac{2\varrho'_m + b}{1+a^2} \Omega + e \left[ \frac{a(4\varrho'_m + b)}{2(1+a^2)} \Delta + \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{2c^2 - d}{4} - \frac{\varrho'_m}{1+a} (2ac - b) - \frac{\Delta^2}{16} \right) \ln \frac{A^+}{A^-} - \frac{a \cdot |b|}{(1+a^2)^2} (4\varrho'_m + b) \Omega \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} V_v^* &= \frac{\gamma(\xi')}{2\pi\varrho(\varrho + \varrho'_m)} \left\{ \frac{c}{2} \Delta + \left( \frac{c^2}{2} - \frac{d}{4} - \frac{\Delta^2}{16} - \frac{\varrho\varrho'_m}{1+a^2} \right) \ln \frac{A^+}{A^-} - \right. \\ &\quad - a \frac{b}{|b|} \left[ 2\varrho \cdot \varrho'_m + \frac{b}{1+a^2} \right] \frac{\Omega}{1+a^2} + e \left[ \left( \frac{2c^2 - d}{3} - \frac{2\varrho\varrho'_m}{1+a^2} \right) \Delta + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{c}{6} \left( 4c^2 - 3d - 12 \frac{\varrho\varrho'_m}{1+a^2} \right) \ln \frac{A^+}{A^-} - \frac{|b|}{3(1+a^2)^3} [b^2(3a^2 - 1) - 6\varrho\varrho'_m(1 - a^4)] \Omega \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} u_q^* &= \frac{q(\xi')}{2\pi} \cdot \frac{2\varrho'_m}{\varrho + \varrho'_m} \cdot \frac{1}{1+a^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{A^+}{A^-} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{ab}{|b|} \Omega + f \left( \Delta + \frac{ab}{1+a^2} \ln \frac{A^+}{A^-} + |b| \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \Omega \right) \right], \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} V_q^* &= \frac{q(\xi')}{2\pi} \cdot \frac{\varrho'_m}{\varrho(\varrho + \varrho'_m)} \left\{ \left[ \ln \frac{4(\varrho + \varrho'_m)}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{1}{4} \ln A^+ A^- \right] \Delta + \right. \\ &\quad + \frac{a}{1+a^2} \left( \frac{b}{2} - \varrho \right) \ln \frac{A^+}{A^-} + \frac{b}{|b|} (2\varrho - b) \frac{\Omega}{1+a^2} + f \left[ \left( \frac{c}{2} - \frac{2\varrho \cdot a}{1+a^2} \right) \Delta + \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{c^2}{2} - \frac{d}{4} - \frac{\Delta^2}{16} - \frac{\varrho \cdot b}{1+a^2} - \frac{2\varrho \cdot a \cdot c}{1+a^2} \right) \ln \frac{A^+}{A^-} + \frac{a \cdot |b|}{(1+a^2)^2} (4\varrho - b) \Omega \right] \right\}. \end{aligned}$$

where the notation is expedient from fig. 1:

$$(9) \quad \begin{aligned} c &= \frac{a \cdot b}{1+a^2}; & d &= \frac{b^2}{1+a^2}; \\ \left| \left( \frac{\Delta}{2} \right)^2 - 2c \left( \frac{\Delta}{2} \right) + d \right| &= A^+; & \left| \left( \frac{\Delta}{2} \right)^2 + 2c \left( \frac{\Delta}{2} \right) + d \right| &= A^-; \\ \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{\Delta}{2} - c}{\sqrt{d - c^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-\frac{\Delta}{2} - c}{\sqrt{d - c^2}} \right) &= \Omega; \end{aligned}$$

2. The above equations for the induced velocity have been applied to the numerical solutions [1] [3] of the inverse hydrodynamic problem for propelling complex in partially nonlinear formulation. They have been used not only for calculation of the camber ( $b = 0$ ) lines, but also for the construction of duct's profile in case of control points situated near the camber line. For the points sufficiently distant from the camber line the contribution of the vortex-source cone containing in its interval the control point is obtained from (1). The trapezoidal rule is used in both solutions. It is obvious that the boundary value of  $b$ , which gives more accurate result using eq. (5÷8) than the trapezoidal rule must be obtained for the considered interval. The purpose is to obtain a smooth transition in accuracy for both formulas.

3. The solution of the problem in [1] is obtained empirically by numerical tests in quite a narrow interval along the duct profile ( $\sim 0.5$ ) and about 20 points used in the case of large relative thickness. The results of computations [3] show that it is not convenient to use a fixed value of  $b$  like a transition criterion from (1) to (5÷8). Obviously, the variation of the number of points with other parametres fixed changes the length of the interval  $\Delta$  (fig. 1) and the relative position of the control point  $M$  towards the influencing cone. That is why the comparison of the accuracy of (5÷8) and the quadrature formulae will be made for normalized values of  $b$ ,  $q = \frac{b}{\varrho'_m}$ ,  $p = \frac{\Delta}{\varrho'_m}$ . Only the main components  $u_v^*$  and  $v_a^*$  will be discussed.

4. Consider the influence of vorticity distributon of constant strength placed along a cylindrical surface. Hence, assuming that  $\gamma = \text{const}$ ,  $q = \text{const}$ , where  $a = 0$ ,  $e = 0$ ,  $f = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = b^2$ , from eq. (5) and (8) we obtain the expressions:

$$(10) \quad \bar{u}_v^* = \frac{4\pi}{\gamma} u_v^* = \frac{1}{p} \left\{ \ln 8 \frac{P}{Q} - \operatorname{sign}(b) \cdot 2P \cdot \Omega \right\},$$

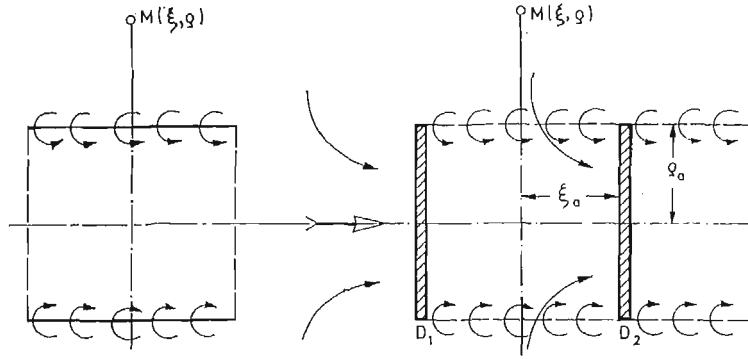
$$(11) \quad \bar{v}_a^* = \frac{4\pi}{q} v_a^* = \frac{1}{R} \left\{ \ln 8 \frac{P}{Q} + \operatorname{sign}(b) 2P \cdot \Omega \right\},$$

where

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{p} \left( 1 + \frac{q}{2} \right), & Q &= \frac{|q|}{p} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{p}{q} \right)^2 + 1}, \\ R &= \frac{(1-q)(1+q/2)}{p}, & \Omega &= 2 \operatorname{arctg} \frac{p}{2|q|}, \\ p &= \frac{\Delta}{\varrho'_m}, & q &= \frac{b}{\varrho'_m}. \end{aligned}$$

It is sufficient to analyze eq. (10). The simple chosen scheme gives the possibility to calculate the exact values of the velocity, substituting the vorticity distribution by two equivalent source disks (fig. 2). This suggests the solution

$$(12) \quad \bar{u}_v^* = u_{D_1} + u_{D_2},$$



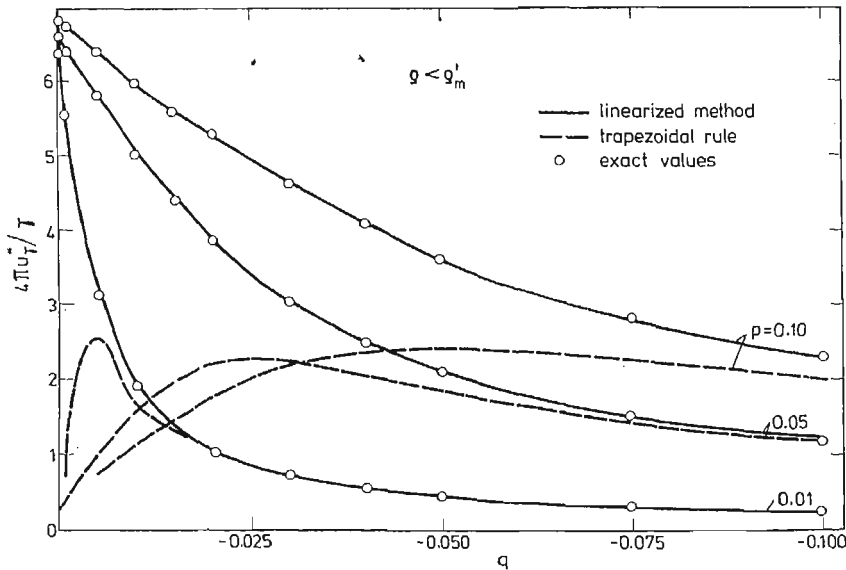
Rys. 2

where

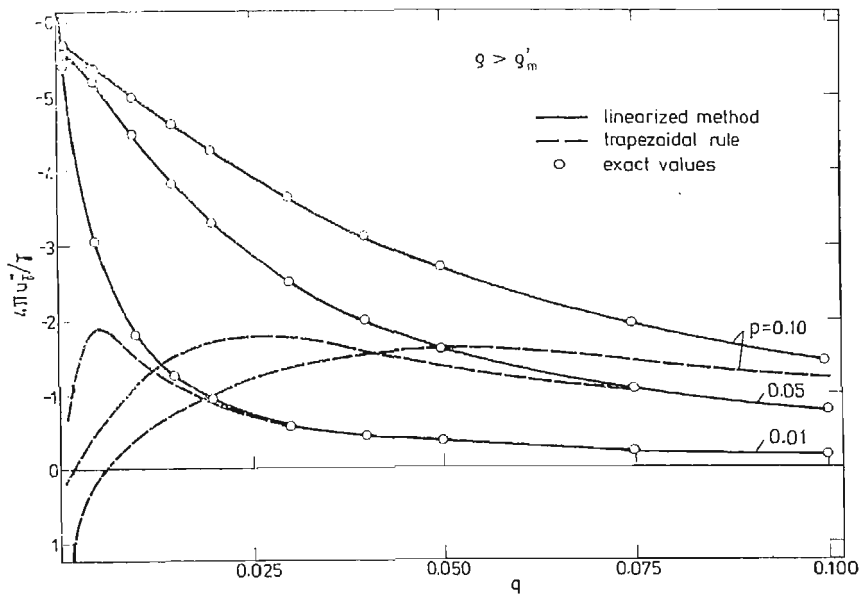
$$(13) \quad u_D = \frac{\varrho_a}{2\pi} \left\{ A + \frac{\xi - \xi_a}{(\xi - \xi_a)^2 + (\varrho + \varrho_a)^2} \left[ K(k) - \frac{\varrho - \varrho_a}{\varrho + \varrho_a} \Pi(m^2, k) \right] \right\},$$

$K(k)$ ,  $E(k)$ ,  $\Pi(m^2, k)$  are the complete elliptic integrals of first, second and third kind with arguments  $K = \int \frac{4p\varrho'}{(p+p')^2 + (\xi - \xi')^2}$ ,  $m^2 = \frac{4p}{(\varrho + \varrho_a)^2}$

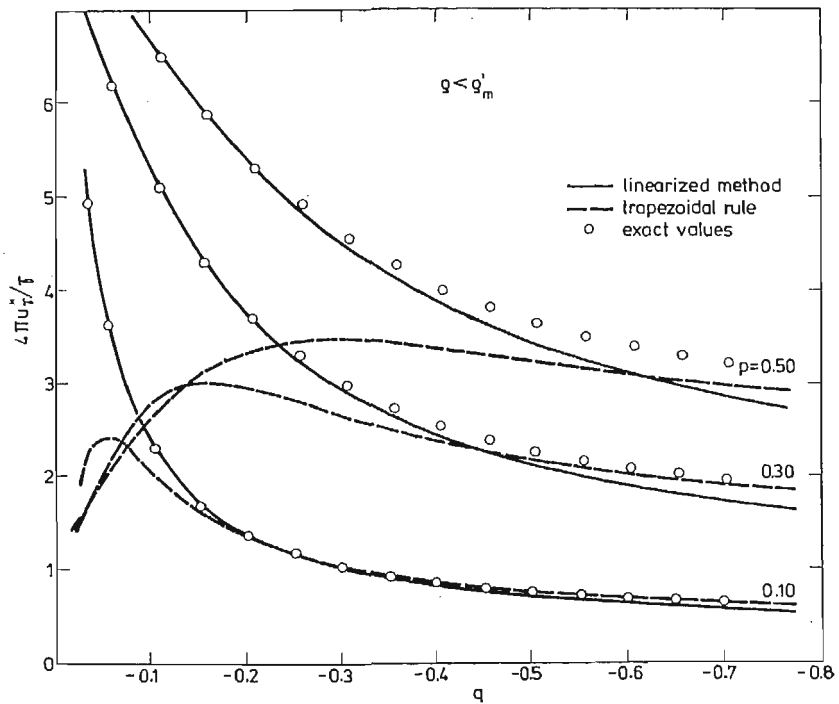
Fig. 3, 4, 5 and 6 show certain results of calculations obtained by the use of the three methods (eq. (1), (10) and (12) for which computer programs were written. The results



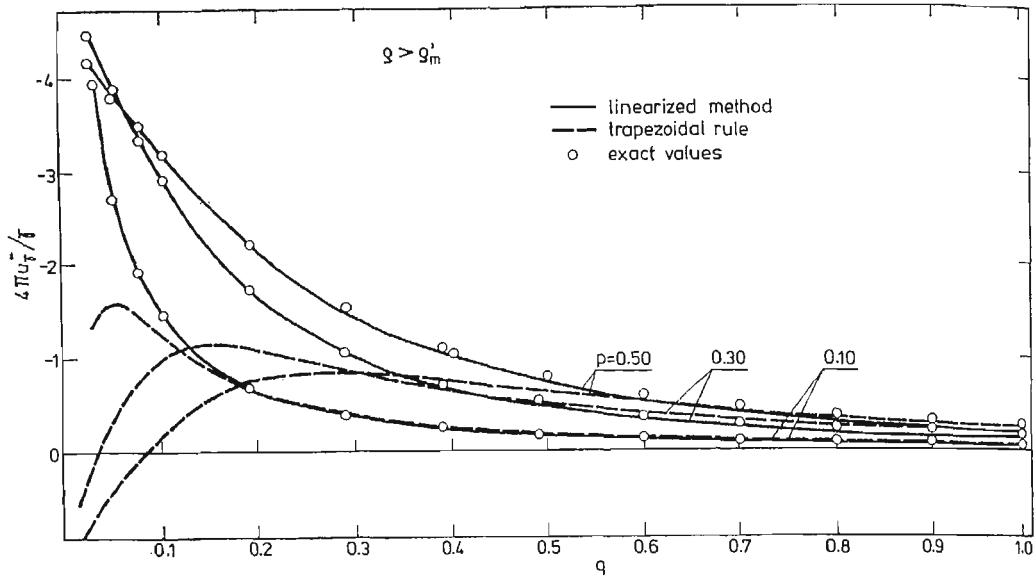
Rys. 3



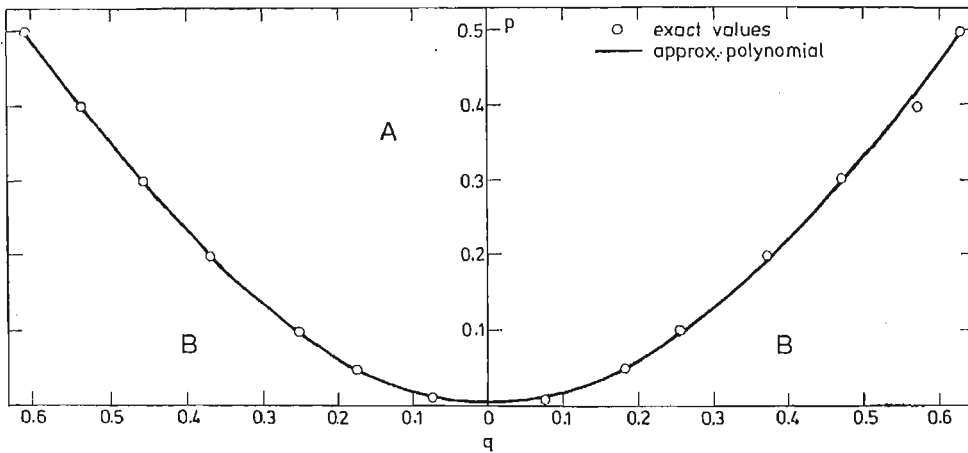
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

of (10) and (12) are in good agreement, specially for small values of  $|q|$ , where the error of the quadrature formula increases rapidly. Increasing the value of  $q$  we obtain that, the accuracy of both methods becomes equal and next the results from (1) are better.

The behaviour of the solution permits to obtain the curve  $p = f(q)$  plotted in fig. 7 which, gives the same accuracy in using both formulae. In the interval  $-0,6 < q < 0,6$  the function is approximated by the polynomial

$$(14) \quad p = -0,5393 \cdot q^4 - 0,0852 \cdot q^3 + 1,494 \cdot q^2 - 0,445 \cdot 10^{-3}q + 0,386 \cdot 10^{-2}$$



The resulting formula defines two regions  $A$  and  $B$  which correspond to the sufficiently accurate use of eq. (10) and (I), respectively.

As a concluding remark it should be mentioned that eq. (14) permits the automatic transition from numerical quadrature to linearized expressions in calculating the velocity, induced by a vortex-source come in points of its neighbourhood.

#### References

1. M. POPOV, K. VARSAMOV, *Ducted Propeller Design Method*, Theor. and Appl. Mechanics, Nr. 2, I 1970 (in Bulgarian).
2. K. YOSIFOV, K. VARSAMOV, G. GENTCHEV, *On the Ducted Propeller Design*, Reports of the First National Conference on Fluid Mechanics and Fluid Machinery, Varna. 1975 (in Bulgarian).
3. N. LUDSKANOV, L. PANOV, *Potential Flow of Incompressible Fluid around Arbitrary Profile*, Annual Journal Appl. Mechanics, Nr. 2, vol. III, 1967 (in Bulgarian).

#### Резюме

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОРОЖДЕННОЙ ВИРОВЫМ КОНУСОМ

В работе рассматривается переход от вычислительной квадратуры до линеаризованных формул на скорость порожденную единичным вихревым конусом в точках в окрестности вихревого слоя.

Из сравнения результатов с точным решением получен критерий для сингулярного распределения вихря о постоянной интенсивности.

#### Streszczenie

#### WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI PRZEPLYWU WYWOŁANEJ WIROWYM STOŻKIEM

W pracy przedyskutowaliśmy przejście od kwadratury numerycznej do zlinearyzowanych wzorów obliczeniowych, z których wyznaczona została prędkość przepływu wywołana jednostkowym stożkiem wirowym w punktach w pobliżu warstwy wirowej. Przez porównanie wyników z rozwiązaniem ścisłym otrzymano kryterium na rozkład osobliwości o stałej wydajności.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 listopada 1980 roku*

---



## WARUNEK UTRATY STABILNOŚCI KONWEKCJI SWOBODNEJ W WARSTWIE POROWATEJ

BARBARA BORKOWSKA-PAWŁAK, WŁODZIMIERZ KORDYLEWSKI (WROCLAW)

### Wstęp

W ostatniej dekadzie obserwuje się wzrost liczby publikacji dotyczących konwekcji swobodnej w ośrodkach porowatych. Problematyka ta ma szereg aspektów technicznych takich jak ekstrakcja ropy z łupków, poprawa własności materiałów izolacyjnych i niektóre zagadnienia technologii chemicznej. Pełni również ważną rolę w zagadnieniach geofizycznych.

Z teoretycznego punktu widzenia konwekcja swobodna spowodowana gradientem temperatury dostarcza jednego z najprostszych przykładów niestabilności ruchu w mechanice płynów. Klasycznym obiektem jest tu warstwa płynu ograniczona dwoma nieprzenikliwymi płaszczyznami, z których dolna ma wyższą temperaturę.

LAPWOOD [1] wykazał, że dla liczby Rayleigh'a  $Ra = 4\pi^2$  rozwiązanie trywialne równań ruchu płynu i bilansu energii cieplnej w warstwie porowatej staje się niestabilne, co utożsamia się z wystąpieniem konwekcji swobodnej. Liczne badania doświadczalne potwierdziły ten rezultat wykazując, że konwekcja swobodna występuje dla liczb Rayleigh'a większych od pewnej wartości krytycznej, która zawiera się w granicach:  $32,3 < Ra < 43$ .

Na przełomie lat 60 i 70-tych, seria prac eksperymentalnych [2], [3], [4] wykazała, że ruch konwekcyjny w warstwie porowatej staje się niestabilny po przekroczeniu przez liczbę Rayleigh'a wartości zawierającej się w zakresie  $240 < Ra < 280$ . Od tego czasu, problemowi teoretycznego określenia tzw. drugiej liczby Rayleigh'a poświęcono wiele uwagi. Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie polega na wyznaczeniu wartości krytycznej liczby Rayleigh'a, dla której nietrywialne rozwiązanie równań ruchu i bilansu energii staje się niestabilne.

W dotychczasowych pracach teoretycznych rozwiązań poszukiwano numerycznie metodą różnic skończonych lub metodą Galerkiną; ich stabilność badano metodą Galerkiną, również numerycznie.

STRAUS [5] stwierdził, że nieregularne fluktuacje ruchu płynu w warstwie porowatej pojawiają się, gdy  $Ra > 380$ . CALTAGIRONE [6] wykazał, że ruch konwekcyjny w warstwie porowatej przestaje być stabilny dla  $Ra > 384$ . Jednakże późniejsze prace nie potwierdziły poprawności tych rezultatów. Schubert i Straus [7] stwierdzili, że druga liczba Rayleigha zawiera się w przedziale  $300 < Ra < 320$ . HORN [8] odkrył fluktuacyjny charakter konwekcji swobodnej w warstwie porowatej dla  $Ra > 300$ . Tak więc, druga liczba Rayleigh'a nie jest jeszcze określona i wydaje się, że wymagane są bardziej staranne studia nad zagadnieniem utraty stabilności ruchu w ośrodku porowatym.

Celem niniejszej pracy jest określenie drugiej liczby Rayleigha metodami analitycznymi. Inspiracją były między innymi prace LORENTZA [9], RUELLE i TAKENSA [10] oraz MARS-DENA [11] dotyczące klasycznego zagadnienia konwekcji swobodnej Benarda. Wyjściowy problem analizy układu równań różniczkowych cząstkowych zredukowano metodą Galerkiną do badania pewnego układu równań różniczkowych zwyczajnych. Wyznaczono pierwszą nietrywialną gałąź rozwiązań stacjonarnych odpowiadającą początkowej fazie występowania konwekcji swobodnej w warstwie porowatej oraz zbadano jej stabilność. Wykazano, że dla liczby Rayleigh'a  $Ra = 30\pi^2$  ma miejsce bifurkacja Hopfa, stąd dla  $Ra > 30\pi^2$  konwekcja musi mieć charakter fluktuacyjny. Załączone przykłady obliczeń na maszynie analogowej wskazują, że fluktuacje mają niestabilny charakter, lecz w odróżnieniu od rozpatrywanego przez LORENTZA [9] przykładu, trajektorie nie są ograniczone.

### Spis oznaczeń

$\bar{u}(u_x, u_z)$	— bezwymiarowa prędkość (składowe w kierunku $x$ i $z$ )
$T$	— bezwymiarowa temperatura
$P$	— bezwymiarowe ciśnienie
$t$	— bezwymiarowy czas
$h$	— długość komórki
$\gamma$	— wektor o składowych $(0, 0, 1)$
$g$	— przyśpieszenie ziemskie
$\alpha$	— współczynnik rozszerzalność termicznej
$k_m$	— termiczna dyfuzyjność
$T_0$	— temperatura zimnej (górnej) powierzchni
$\Delta T$	— różnica temperatur między gorącą (dolną) i zimną (górną) powierzchnią warstwy
$C_p$	— ciepło właściwe
$\rho$	— gęstość
$(\rho c_p)_m$	— jednostkowa pojemność cieplna nasączonej substancji porowatej
$\rho c_p$	— jednostkowa pojemność cieplna materiału porowatego
$H$	— bezwymiarowy współczynnik $H = \frac{(\rho c_p)_m}{\rho C_p}$
$k$	— przepuszczalność
$\mu$	— lepkość dynamiczna
$\nu$	— lepkość kinetyczna
$\varepsilon$	— porowatość

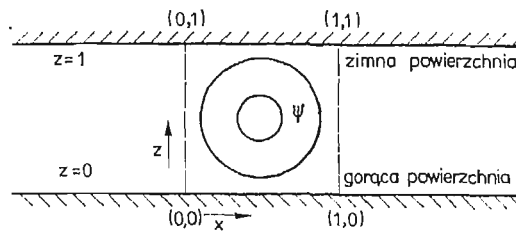
### 2. Sformułowanie problemu

Rozważana jest substancja porowata nasączona płynem, umieszczona między dwiema poziomymi nieprzenikliwymi płaszczyznami w ziemskim polu grawitacyjnym (Rys. 1). Odległość między płaszczyznami jest równa jednostce długości. Przyjmuje się, że dolna

płaszczyzna ma wyższą temperaturę niż górna, co jest przyczyną występowania konwekcji swobodnej. W celu uproszczenia analizy, rozważa się pionowy przekrój warstwy (Rys. 1).

Bezwymiarowe równania ruchu płynu wraz z równaniem ciągłości oraz transportu energii cieplnej mają postać

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= -\bar{u} - \nabla p + T Ra \bar{\gamma}, \\ \operatorname{div} \bar{u} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \nabla T &= \nabla^2 T. \end{aligned}$$



Rys. 1. Pionowy przekrój warstwy porowatej.

Równania te uzyskano drogą skalowania prawa Darcy'ego oraz równania przewodnictwa cieplnego względem zmiennych

$$\frac{h^2 H}{k_m}, h, \Delta T, \frac{\mu k_m}{k}, \frac{k_m}{h},$$

które odpowiadają: czasowi, długości, temperaturze, ciśnieniu oraz prędkości. Parametry: liczba Prandtla  $Pr$  i liczba Rayleigh'a  $Ra$  określone są następująco:

$$Pr = \frac{h^2 H}{k_m k}; \quad Ra = \frac{k g h \alpha \Delta T}{k_m}.$$

Przyjmuje się następujące warunki brzegowe:

$$(1a) \quad \begin{aligned} u &= 0 \quad \text{dla} \quad z = 0, 1. \\ T &= 1 \quad \text{dla} \quad z = 0; \quad T = 0 \quad \text{dla} \quad z = 1. \end{aligned}$$

W rozważanym przypadku dwuwymiarowym wygodnie jest wprowadzić funkcję prądu  $\psi$  zdefiniowaną następująco

$$(2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -u_x.$$

Układ równań (1) można wówczas zapisać jako

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) &= -\nabla^2 \psi + Ra \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \nabla^2 \Theta + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \end{aligned}$$

gdzie  $\Theta = T - T_a$  jest różnicą temperatur odpowiadających stanom występowania i braku konwekcji swobodnej. Temperatura w stanie bez konwekcji jest funkcją tylko zmiennej  $z$  ( $T_a = 1 - z$ ).

Warunki brzegowe dla problemu (3) przedstawiają się następująco

$$(3a) \quad \psi = \Theta = 0 \quad \text{dla } z = 0, 1.$$

Zagadnienie brzegowe (3), (3a) posiada nieskończenie wiele rozwiązań. W celu ograniczenia ich ilości rozważać się je będzie w obszarze ograniczonym w tzw. komórce podstawowej. Wysokość jej jest równa 1, natomiast długość wyznacza się na podstawie analizy stacjonarnego liniowego problemu własnego, który ma postać

$$(4) \quad \begin{aligned} -\nabla^2 \tilde{\psi} + \text{Ra} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x} &= 0, \\ \nabla^2 \tilde{\Theta} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi;

$$(4a) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi} = \tilde{\Theta} &= 0 \quad \text{dla } z = 0, 1, \\ \tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x} &= 0 \quad \text{dla } x = 0, h. \end{aligned}$$

gdzie  $h$  jest szukaną długością komórki.

Wartości własne problemu (4), (4a) tworzą ciąg nieskończony o wyrazach danych wzorem

$$(5) \quad \text{Ra}_{ij} = \frac{\Pi^2}{i^2 h^2} (i^2 h^2 + j^2)^2; \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Pierwsza wartość własna  $\text{Ra}_{11} = (1 + h^2)^2 \frac{\pi^2}{h^2}$  jest wartością własną prostą tzn. odpowiada jej tylko jedna funkcja własna. Ma to duże znaczenie (jak to się później okaże) przy badaniu stabilności stanów stacjonarnych odpowiadających tej wartości własnej.

Wartość  $h = 1$  minimalizuje pierwszą wartość własną  $\text{Ra}_{11}$  ( $\text{Ra}_{11} = 4\pi^2$  dla  $h = 1$ ), której odpowiada minimum energii układu.

Z tego względu uzasadnione są przyjęcie w charakterze komórki podstawowej kwadratu o boku równym 1.

### 3. Aproksymacja Galerkin

W celu analizy stabilności rozwiązań problemu brzegowego (3), (3a) przedstawia się je w postaci szeregów Fouriera

$$(6) \quad \psi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} \psi_{ij}, \quad \Theta = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{kl} \Theta_{kl},$$

gdzie układ funkcji  $\{\psi_{ij}; \Theta_{kl}\}$  postaci

$$(7) \quad \begin{aligned} \psi_{ij} &= 2 \sin \Pi i x \sin \Pi j z; & i, j, l &= 1, 2, \dots \\ \Theta_{kl} &= 2 \cos \Pi k z \sin \Pi l z & k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

jest układem ortonormalnym zupełnym w przestrzeni funkcji typu  $L^2$  ( $[0, 1] \times [0, 1]$ ) spełniających warunki brzegowe (3a), natomiast  $\beta_{ij}$  i  $\alpha_{kl}$  są nieokreślonymi współczynnikami zależnymi tylko od czasu. Badanie zachowania się tych współczynników w czasie pozwala określić własności dynamiczne (stabilność) rozwiązań układu równań (3), (3a). W celu określenia zależności między współczynnikami  $\beta_{mn}$  i  $\alpha_{rs}$  należy wyrażenia (6) podstawić do układu równań (3), wymnożyć pierwsze z równań przez  $\psi_{mn}$  drugie przez  $\Theta_{rs}$  oraz scałkować je po kwadracie jednostkowym  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Otrzymuje się wówczas następujący nieskończenie wymiarowy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{d\beta_{mn}}{dt} &= -\beta_{mn} + \frac{mRa}{\pi(m^2+n^2)} \cdot \alpha_{mn}, \\ \frac{d\alpha_{rs}}{dt} &= -\Pi^2(r^2+s^2)\alpha_{rs} + \pi r \beta_{rs} - \frac{\pi^2}{4} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g_k h_{l-k} \{jk[(\delta_{|i-k|}^r - \\ &\quad - \delta_{|i+k|}^r) \delta_{|l-j|}^s \operatorname{sgn}(l-j)(\delta_{|i-k|}^r + \delta_{|i+k|}^r) \delta_{|l+j|}^s] + il[(\delta_{|i-k|}^r - \delta_{|i+k|}^r) \delta_{|l-j|}^s \operatorname{sgn}(j-l) + \\ &\quad + (\delta_{|i-k|}^r + \delta_{|i+k|}^r) \delta_{|l+j|}^s]\} \beta_{ij} \gamma_{kl} \end{aligned}$$

gdzie:

wskaźniki  $m, n, r, s$ , zmieniają się tak jak wskaźniki  $i, j, k, l$  występujące w wyrażeniach (6); funkcje  $g_k$  i  $h_{i-k}$  określone są następująco:

$$g_k = \begin{cases} 4 & \text{dla } k \neq 0, \\ 2\sqrt{2} & \text{dla } k = 0, \end{cases} \quad h_{i-k} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } i-k \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } i-k = 0, \end{cases}$$

natomiast  $\delta_a^b$  jest deltą Kroneckera zdefiniowaną

$$\delta_a^b = \begin{cases} 1 & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b \end{cases} \quad \text{gdzie } \begin{cases} a = i-k; & i+k; & l-j; & l+j \\ b = r, s \end{cases}$$

Analiza układu równań (8) jest zadaniem trudnym i złożonym. Metoda Galerkinia pozwala sprowadzić ten nieskończenie wymiarowy problem do skończonego wymiaru przez obcięcie bazy ortonormalnej do skończonej ilości elementów.

W pracy rozważa się układ równań oparty na podbazie sześciu elementów

$$(9) \quad \begin{aligned} &\psi_{11}, \psi_{12}, \Theta_{01}, \Theta_{02}, \Theta_{11}, \Theta_{12} \\ \frac{1}{Pr} \frac{d\beta_{11}}{dt} &= -\beta_{11} + \frac{Ra}{2\pi} \alpha_{11}, \\ \frac{1}{Pr} \frac{d\beta_{12}}{dt} &= -\beta_{12} + \frac{Ra}{5\pi} \alpha_{12}, \\ \frac{d\alpha_{01}}{dt} &= -\pi^2 \alpha_{01} + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{11} \alpha_{12} + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \alpha_{11} \beta_{12}, \\ \frac{d\alpha_{02}}{dt} &= -4\pi^2 \alpha_{02} - \pi^2 \sqrt{2} \alpha_{11} \beta_{11}, \\ \frac{d\alpha_{11}}{dt} &= \pi \beta_{11} - 2\pi^2 \alpha_{11} + \pi^2 \sqrt{2} \beta_{11} \alpha_{02} - \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{12} \alpha_{01}, \\ \frac{d\alpha_{12}}{dt} &= \pi \beta_{12} - 5\pi^2 \alpha_{12} - \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{11} \alpha_{01} \end{aligned}$$

Zasadniczym problemem jest teraz znalezienie stanów stacjonarnych układu dynamicznego (9) oraz określenie ich stabilności.

#### 4. Stany stacjonarne

Stany stacjonarne (punkty stałe) układu dynamicznego wyznacza się przez przyrównanie jego prawych stron do zera. Tabela 1 podaje zestawienie punktów stałych dla układu równań w zależności od wartości liczby Rayleigh'a  $Ra$ , może ich być 1, 3 lub 7. Z tabeli 1 wynika w szczególności, że zero (punkt 0) jest punktem stałym dla dowolnej wartości  $Ra$ . Jeżeli wartość parametru  $Ra$  przekracza  $4\pi^2$  (pierwsza wartość własna problemu liniowego (4)), pojawiają się dwie gałęzie niezerowych rozwiązań stacjonarnych  $A_1$  i  $A_2$  co utożsamiane jest z pojawieniem się konwekcji swobodnej.

Punkt  $(0, 4\pi^2)$  jest zatem punktem bifurkacji rozwiązania zerowego z prostej wartości własnej  $Ra = 4\pi^2$ . W ogólności punktem bifurkacji rozwiązania  $x_0(\mu)$  układu dynamicznego  $\dot{x} = F(x(\mu), \mu)$  z wartości własnej  $\mu_0$  nazywa się punkt  $(x(\mu_0), \mu_0)$  taki, że w dowolnie małym jego otoczeniu pojawia się nowe, dodatkowe rozwiązanie tego układu.

Jeżeli wartości parametru  $Ra$  przekraczają  $25\pi^2$ , pojawią się cztery nowe gałęzie rozwiązań stacjonarnych  $B_1, B_2, B_3, B_4$  przy czym interesujące jest, że nie rozwidlają się one z rozwiązania zerowego.

Dalsza część pracy poświęcona jest (zgodnie z jej celem określonym poprzednio) analizie stabilności gałęzi rozwiązań niezerowych  $A_1, A_2$  odpowiadających stanowi początkowemu występowania konwekcji swobodnej.

Pierwszym krokiem w tym kierunku jest zbadanie stabilności rozwiązania zerowego, z którego rozwidlają się te gałęzie.

#### 5. Stabilność stanów stacjonarnych

Stabilność punktu stałego układu dynamicznego bada się, wyznaczając wartości własne jego zlinearyzowanej postaci. Jest on stabilny tylko wtedy, gdy części rzeczywiste wartości własnych są ujemne.

Linearyzując układ równań (9) w otoczeniu rozwiązania zerowego, otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Pr} \frac{d\beta'_{11}}{dt} &= -\beta'_{11} + \frac{Ra}{2\pi} \alpha'_{11}, \\
 \frac{1}{Pr} \frac{d\beta'_{12}}{dt} &= -\beta'_{12} + \frac{Ra}{5\pi} \alpha'_{12}, \\
 \frac{d\alpha'_{01}}{dt} &= -\pi^2 \alpha'_{01}, \\
 \frac{d\alpha'_{02}}{dt} &= -4\pi^2 \alpha'_{02}, \\
 \frac{d\alpha'_{11}}{dt} &= \pi\beta'_{11} - 2\pi^2 \alpha'_{11}, \\
 \frac{d\alpha'_{12}}{dt} &= \pi\beta'_{12} - 5\pi^2 \alpha'_{12},
 \end{aligned}
 \tag{10}$$



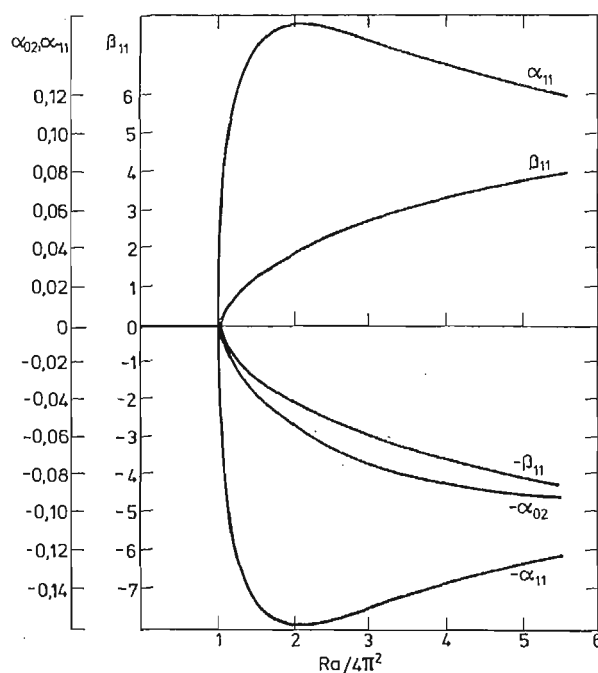
Tabela 1. Punkty state układu równań (9)

Współ- rzędne punktów	$\beta_{1,1}$	$\beta_{1,2}$	$\alpha_{0,1}$	$\alpha_{0,2}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$
0	0	0	0	0	0	0
$A_1$	$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Ra-4\pi^2}{Ra}}$	0	0	$-\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{Ra-4\pi^2}{Ra}$	$\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{Ra-4\pi^2}{Ra}}$	0
$A_2$	$-\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Ra-4\pi^2}{Ra}}$	0	0	$-\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{Ra-4\pi^2}{Ra}$	$-\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{Ra-4\pi^2}{Ra}}$	0
$B_1$	$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{1}{7\pi} \sqrt{\frac{2(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{1}{\pi Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}} \times (5Ra+22\pi^2)$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi} \frac{Ra-25\pi^2}{Ra}$	$\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{10}{7} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$
$B_2$	$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{1}{7\pi} \sqrt{\frac{2(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{1}{\pi Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}} \times (5Ra+22\pi^2)$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi} \frac{Ra-25\pi^2}{Ra}$	$-\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{10}{7} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$
$B_3$	$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{1}{7\pi} \sqrt{\frac{2(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{1}{\pi Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}} \times (5Ra+22\pi^2)$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi} \frac{Ra-25\pi^2}{Ra}$	$\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{10}{7} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$
$B_4$	$-\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{1}{7\pi} \sqrt{\frac{2(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{1}{\pi Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}} \times (5Ra+22\pi^2)$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi} \frac{Ra-25\pi^2}{Ra}$	$-\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{10}{7} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$

gdzie zmienne z indeksem „prim” oznaczają odchylenie od punktu stałego. Wartości własne określone są następująco

$$(11) \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{2\pi^2 + \text{Pr}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2\pi^2 + \text{Pr})^2 + 2\text{Pr}(\text{Ra} - 4\pi^2)}, \\ \lambda_{3,4} &= -\frac{5\pi^2 + \text{Pr}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(5\pi^2 + \text{Pr})^2 + \frac{4}{5} \text{Pr}(\text{Ra} - 25\pi^2)}, \\ \lambda_5 &= -4\pi^2, \\ \lambda_6 &= -\pi^2. \end{aligned}$$

W punkcie  $\text{Ra} = 4\pi^2$  wartość własna  $\lambda_1$  przecina oś urojoną, zatem rozwiązanie zerowe staje się niestabilne. Jednocześnie jak było wspomniane w poprzednim punkcie pojawiają się dwa rozwiązania niezerowe (Rys. 2), odpowiadające wystąpieniu konwekcji swobodnej.



Rys. 2. Bifurkacja niezerowych rozwiązań stacjonarnych z rozwiązania trywialnego.

Stabilność gałęzi nietrywialnych w pewnym otoczeniu punktu bifurkacji można określić na podstawie twierdzenia o bifurkacji z prostej wartości własnej [12] (s. 39).

Zgodnie z twierdzeniem tym, jeżeli pochodna wartości własnej, która „powoduje” niestabilność rozwiązania zerowego po parametrze w punkcie bifurkacji jest dodatnia, to rozwidlająca się z niego gałąź nietrywialnych rozwiązań jest stabilna.

W punkcie bifurkacji  $(0, 4\pi^2)$  układu równań (9) zachodzi

$$\left. \frac{d\lambda_1}{d\text{Ra}} \right|_{\text{Ra}=4\pi^2} > 0,$$

zatem gałęzie rozwiązań  $A_1$  i  $A_2$  są stabilne w pewnym otoczeniu wartości parametru  $Ra = 4\pi^2$ , a co za tym idzie, stabilny jest ruch konwekcyjny płynu dla liczb Rayleigh'a mało różniących się od  $4\pi^2$ .

Z postaci rozwiązań stacjonarnych  $A_1, A_2$  (Tabela 1) wynika, że amplituda konwekcji swobodnej rośnie wraz z liczbą Rayleigh'a. Doświadczenia wykazują, że od pewnej wartości krytycznej liczby Rayleigh'a ruch płynu staje się fluktuacyjny [1], [2]. Sugeruje to, że z gałęzi  $A_1$  (lub  $A_2$ ) rozwidlają się rozwiązania okresowe.

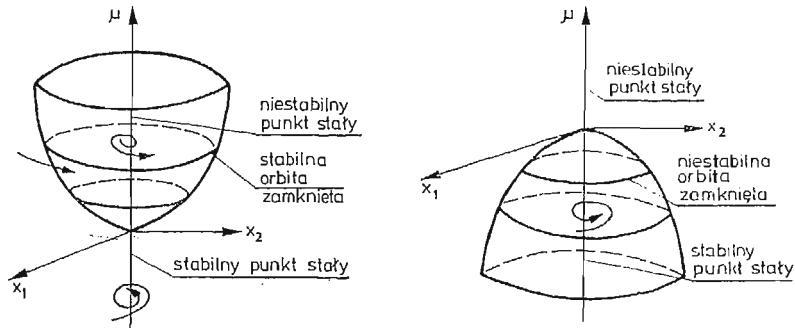
### 6. Stabilność rozwiązań okresowych

Przypadek rozwidlenia się z danej gałęzi rozwiązań stacjonarnych okresowego rozwiązania nazywa się bifurkacją Hopfa; ściślej punkt  $(x(\mu_0), \mu_0)$  nazywa się punktem bifurkacji Hopfa układu równań różniczkowych  $\dot{x} = F(x, \mu)$ , jeżeli spełnione są dwa warunki

- (i)  $F'_x(x(\mu_0), \mu_0)$  posiada dwie czysto urojone wartości własne
- (ii) Jeżeli  $S_1(\mu)$  jest częścią rzeczywistą wartości własnej, to dla  $\mu = \mu_0$  zachodzi

$$S_1(\mu_0) = 0, \quad \left. \frac{dS_1}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} > 0.$$

Istnieją dwa typy bifurkacji Hopfa — superkrytyczny i subkrytyczny. W pierwszym przypadku pojawiają się stabilne rozwiązania okresowe dla wartości parametru większego od wartości krytycznej, w drugim natomiast rozwiązania okresowe są niestabilne i istnieją dla wartości parametru mniejszych od wartości krytycznej (Rys. 3). W celu określenia punktu bifurkacji Hopfa na gałęzi  $A_1$  (lub  $A_2$ ) linearyzuje się układ równań (9) w otoczeniu rozwiązania należącego do gałęzi  $A_1$  (lub  $A_2$ ).



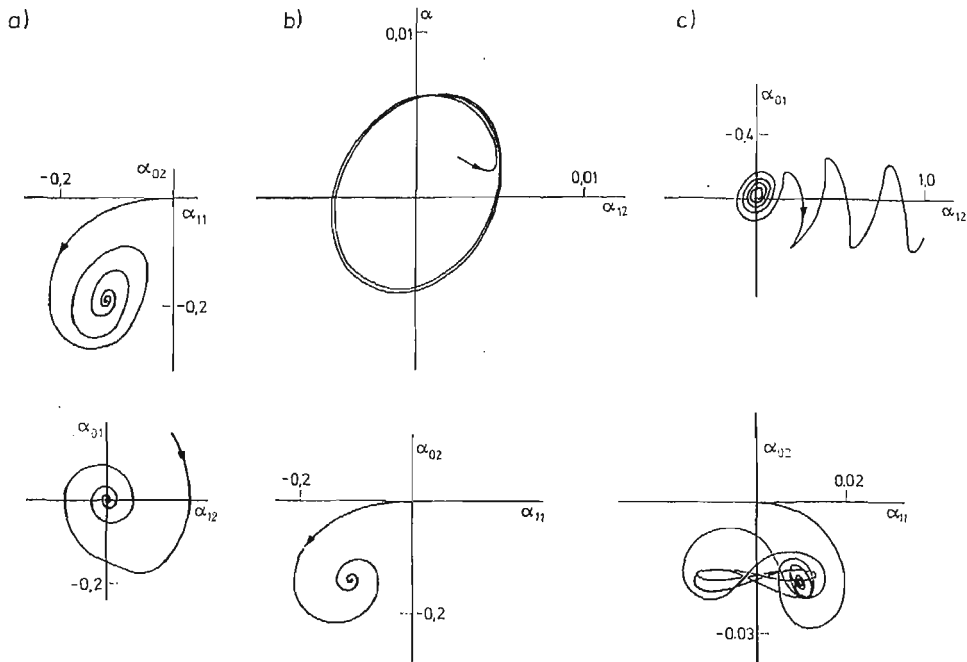
Rys. 3. Typy bifurkacji Hopfa a) superkrytyczny b) subkrytyczny.

Linearyzacja ta prowadzi do dwóch odseparowanych od siebie podukładów równań

$$(12a) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{d\beta'_{11}}{dt} &= -\beta'_{11} + \frac{Ra}{2\pi} \alpha'_{11}, \\ \frac{d\alpha'_{02}}{dt} &= -\pi^2 \sqrt{2} \alpha_{11} \beta'_{11} - 4\pi^2 \alpha'_{02} - \pi^2 \sqrt{2} \beta_{11} \alpha'_{11}, \\ \frac{d\alpha'_{11}}{dt} &= \pi(1 + \pi \cdot \sqrt{2} \alpha_{02}) \beta'_{11} + \pi^2 \cdot \sqrt{2} \beta_{11} \alpha'_{02} - 2\pi^2 \alpha'_{11}. \end{aligned}$$

$$(12b) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{d\beta'_{12}}{dt} &= -\beta'_{12} + \frac{Ra}{5\pi} \alpha'_{11}, \\ \frac{d\alpha'_{01}}{dt} &= \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \alpha_{11} \beta'_{12} - \pi^2 \alpha'_{01} + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{11} \alpha'_{12}, \\ \frac{d\alpha'_{12}}{dt} &= \pi \beta'_{12} - \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{11} \alpha'_{01} - 5\pi^2 \alpha'_{12}, \end{aligned}$$

gdzie  $\beta_{11}$ ,  $\alpha_{02}$ ,  $\alpha_{11}$  są odpowiednimi współrzędnymi punktu stałego  $A_1$  lub  $A_2$ .



Rys. 4. Trajektorja rozwiązań układu równań (9) na płaszczyznach fazowych  $(\alpha_{01}, \alpha_{12})$  i  $(\alpha_{02}, \alpha_{11})$  dla wartości liczb Rayleigh'a a)  $Ra = 24\pi^2$ , b)  $Ra = 30\pi^2$ , c)  $Ra = 36\pi^2$ .

Z postaci układu równań (12a), (12b) widać, że jego równanie charakterystyczne można przedstawić w postaci iloczynu dwóch równań:

$$(13a) \quad \lambda + (6\pi^2 + Pr) \lambda^2 + 2\pi^2(Ra + 2Pr) \lambda + 4\pi^2 Pr(Ra - 4\pi^2) = 0, \quad \text{oraz}$$

$$(13b) \quad \lambda + (6\pi^2 + Pr) \lambda^2 + \left(6\pi^2 Pr + 3\pi^4 + \frac{\pi^2 Ra}{2} - \frac{Pr Ra}{5}\right) \lambda + \frac{11\pi^4}{5} Pr + \frac{\pi^2}{2} Pr Ra = 0,$$

które są równaniami charakterystycznymi podukładów równań (12a) o i (12b).

Badając znaki wyróżników równań trzeciego stopnia (13a) i (13b) można łatwo wywnioskować, że oba posiadają jeden pierwiastek rzeczywisty oraz parę pierwiastków zespolonych sprzężonych. Zatem, równanie charakterystyczne zlinearyzowanego układu równań (9) spełnia warunek (i) wtedy i tylko wtedy, gdy własność tę posiada równanie (12a) albo (12b).

Równanie charakterystyczne (13a) można zapisać w postaci iloczynowej następująco

$$(14a) \quad (\lambda - S) \cdot (\lambda - \bar{S}) \cdot (\lambda - \alpha) = 0$$

gdzie:

$S, \bar{S}$  — pierwiastki zespolone, sprzężone  
 $\alpha$  — pierwiastek rzeczywisty.

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach  $\lambda$  w równaniach (13a) i (14a) otrzymuje się układ zależności:

$$(14b) \quad \begin{aligned} 2S_1 + \alpha &= -(6\pi^2 + \text{Pr}), \\ |S|^2 + 2\alpha S_1 &= 2\pi^2(2\text{Pr} + \text{Ra}), \\ -\alpha|S|^2 &= 4\pi^2\text{Pr}(\text{Ra} - 4\pi^2), \quad \text{gdzie } S_1 = \text{Re } S. \end{aligned}$$

Korzystając z warunku (ii) ( $S_1 = 0$ ) wyznacza się krytyczną wartość liczby Rayleigh'a

$$(15) \quad \text{Ra} = \frac{2\text{Pr}(10\pi^2 + \text{Pr})}{\text{Pr} - 6\pi^2}$$

Zwykle dla substancji porowatych wartości osiągane przez liczbę Prandtla są bardzo duże (rzędu  $10^5$ - $10^9$ ), przyjmując więc we wzorze (15), że  $\text{Pr} \rightarrow \infty$  otrzymuje się  $\text{Ra} \rightarrow \infty$ . Podobnie przedstawiając równanie charakterystyczne (13b) w postaci iloczynowej

$$(16a) \quad (\lambda - q)(\lambda - \bar{q})(\lambda - \beta) = 0,$$

gdzie:

$q, \bar{q}$  — pierwiastki zespolone  
 $\beta$  — pierwiastek rzeczywisty

oraz porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach w równaniach (13b) i (16a) otrzymuje się następujący układ zależności

$$(16b) \quad \begin{aligned} 2q_1 + \beta &= -(\text{Pr} + 6\pi^2), \\ |q|^2 + 2\beta q_1 &= 6\pi^2\text{Pr} + 3\pi^4 + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \text{Ra} - \frac{1}{5} \text{Pr Ra}, \\ -\beta|q|^2 &= \frac{11}{5} \text{Pr} + \frac{1}{2} \text{Pr Ra}, \\ q_1 &= 0, \quad \text{gdzie } q_1 = \text{Re } q. \end{aligned}$$

Przyjmując w układzie (16b)  $q_1 = 0$ ; wyznaczona z niego krytyczna wartość liczby Rayleigh'a wyraża się wzorem

$$(17) \quad \text{Ra}_R = \frac{(\text{Pr} + 6\pi^2)(6\pi^2\text{Pr} + 3\pi^4) - \frac{11}{5} \pi^4 \text{Pr}}{\frac{1}{2} \text{Pr} - (\text{Pr} + 6\pi^2) \left( \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{5} \text{Pr} \right)}.$$

Jeżeli  $\text{Pr} \rightarrow \infty$  to  $\text{Ra}_R \rightarrow 30\pi^2$ .

Wynika stąd punkt  $(A_1, 30\pi^2)$  jest punktem bifurkacji Hopfa oraz, że dla wartości parametru  $\text{Ra} > 30\pi^2$  gałąź rozwiązań stacjonarnych  $A_1$  staje się niestabilna.

Określenie typu bifurkacji Hopfa jest prostym problemem, wymaga bowiem zbadania stabilności rozwiązań okresowych. MARSDEN i McCRACKEN [11] podali algorytm, który pozwala rozstrzygnąć typ bifurkacji. W pracy [13] autorzy wykazali, korzystając z tego algorytmu, że  $Ra = 30\pi^2$  jest subkrytycznym punktem bifurkacji Hopfa. Nie przytacza się tu długich i złożonych obliczeń, bowiem o typie bifurkacji można także wywnioskować na podstawie prezentowanych na rysunkach 4a, 4b, 4c rozwiązań układu równań (9). Przedstawiają one trajektorie rozwiązań na płaszczyznach fazowych  $(\alpha_{01}, \alpha_{12})$  oraz  $(\alpha_{02}, \alpha_{11})$  dla trzech wartości liczby Rayleigh'a  $Ra = 24\pi^2, 30\pi^2, 36\pi^2$ . Wynika z nich, że dla  $Ra < 30\pi^2$  konwekcja swobodna jest stabilna, po przekroczeniu drugiej liczby krytycznej Rayleigh'a, ruch płynu nabiera fluktuacyjnego charakteru.

### 7. Zakończenie

Dokonano analizy stabilności ruchu dla dwuwymiarowej konwekcji swobodnej w warstwie porowatej. Zastosowano metodę Galerkiną obcinając nieskończone szeregi trygonometryczne do sześciu wyrazów.

Przyjmując nieskończoną wartość liczby Prandtla wykazano, że gałąź rozwiązań stacjonarnych, odpowiadających stadium początkowemu konwekcji swobodnej, traci stabilność dla wartości liczby Rayleigh'a  $Ra = 30\pi^2$ . W punkcie tym ma miejsce bifurkacja Hopfa do rozwiązań periodycznych. Poprzednie badania autorów [13] oraz wyniki obliczeń na maszynie analogowej wskazują, że bifurkacja ma charakter subkrytyczny. Oznacza to że rozwiązania periodyczne, które zjawiają się dla wartości liczby Rayleigh'a bliskich  $30\pi^2$  muszą być niestabilne.

Mimo, że uzyskany rezultat zgadza się z wynikami badań doświadczalnych i ostatnimi rezultatami obliczeń numerycznych, problematyce tej należy poświęcić jeszcze dużo uwagi ze względu na jej podstawowe znaczenie dla analizy stabilności ruchu w ośrodkach porowatych.

### Literatura cytowana w tekście

1. E. R. LAPWOOD, *Convection of a fluid in a porous medium*, Proc. Cambridge Phil. Society vol. 44 p. 508 (1948).
2. M. COMBARNOUS and B. LE FUR, *Transfert de chaleur par convection naturelle dans une couche poreuse horizontale*, C. R. Acad. Sci Paris 269 B, 1000 (1960).
3. J. P. CALTAGIRONE, M. CLOUPEAU and M. COMBARNOUS, *Convection naturelle fluctuante dans une couche poreuse horizontale*. C. R. Acad. Sci. Paris 273 B, 833 (1971).
4. R. N. HORNE, M. J. O'SULLIVAN, *Oscillatory convection in a porous medium heated from below*, J. Fluid Mechanics (1974) vol. 66 p. 2 str. 339.
5. J. M. STRAUS, *Large amplitude convection in porous media*, J. Fluid Mechanics (1974) vol. 64, p. 1, s. 51.
6. J. P. CALTAGIRONE, *Thermoconvective instabilities in a horizontal porous layer*, J. Fluid Mechanics (1975) vol. 72, p. 2, str. 269.
7. G. SCHUBERT, J. M. STRAUS, *Three — dimensional and multicellular steady and unsteady convection in fluid — saturated porous media at high Rayleigh number*, J. Fluid Mechanics (1979), vol. 94, p. 1, str. 25.

8. R. N. HORN, *Three — dimensional natural convection in a confined porous medium heated from below*, J. Fluid Mechanics vol. 92, p. 4, str. 751 (1979).
9. E. LORENZ, *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmospheris Sciences vol. 20 (1963).
10. D. RUELLE, F. TAKENS, *On the Nature of Turbulence*, Commus. math. Phys. 20 167 - 192 (1971) by Spinger — Verlag (1971).
11. J. MARSDEN, M. McCRACKEN, *The Hopf Bifurcation and Its Application*, Springer-Verlag, New York (1976).
12. D. H. SATTIGER, *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York (1979).
13. B. BORKOWSKA, W. KORDYLEWSKI, *Stability of two dimensional Convection in a porous Layer*. Raport serii PREPRINTY 68/80 Politechnika Wroclawska, Wroclaw (1980).

## Р е з ю м е

УСЛОВИЕ ПОТЕРИ СТАБИЛЬНОСТИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ  
В ПОРИСТОМ СЛОЕ

Сделана попытка анализа стабильности двухразмерной естественной конвекции в пористом слое. Применяя метод Галеркина, система двух дифференциальных частных уравнений была заменена шестью дифференциальными уравнениями. Определено область стационарных ршшений, соответствующих начальной стадии естественной конвекции. Находящаяся в этой области точка бифуркации Х. Хопфа для числа Рейли, равного  $30 \pi^2$ , определяет условие потерн стабильности движения жидкости в пористом слое, индуцированной с помощью градиента температуры.

## S u m m a r y

## LOSS OF STABILITY CONDITION FOR FREE CONVECTION IN A POROUS LAYER

A stability analysis of the two-dimensional natural convection in a porous layer has been performed. By means of Galerkin's method the system of two partial differential equations has been replaced by a system of six ordinary differential equations. The branch of steady-state solutions referring to primary stage of free convection has been determined.

The condition for stability loss of fluid motion in porous layer induced by temperature gradient is determined by the Hopf bifurcation point for Rayleigh number equal to  $30\pi^2$ .

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1980 roku*





## LEPKOŚĆ WIROWA W OSIOWO-SYMETRYCZNYCH STRUGACH ZAWIROWANYCH

STANISŁAW DROBNIK (CZĘSTOCHOWA)

### 1. Wstęp

Problem ewolucji charakterystyk turbulencji w osiowo-symetrycznych strugach z zawirowaniem wstępnym jest zagadnieniem interesującym i wartym szczegółowych badań zarówno ze względów aplikacyjnych jak i poznawczych.

Nałożenie na przepływ główny dodatkowego pola prędkości obwodowych deformuje bowiem strukturę ruchu średniego i fluktuacyjnego intensyfikując procesy turbulentnego transportu masy, pędu i ciepła. W rozważaniach niniejszej pracy szczegółowej analizie poddano wpływ warunków początkowych przepływu (intensywności zawirowania wstępnego) na przestrzenny rozwój współczynników burzliwej dyfuzji pędu.

### Wykaz oznaczeń

$d$	— średnica dyszy wylotowej
$F$	— bezwymiarowa funkcja
$r^*$	— charakterystyczna skala wymiaru liniowego
$R_T$	— turbulentna liczba Reynoldsa
$s$	— intensywność zawirowania
$U_x; U_r; U_\varphi$	— składowe prędkości średniej
$u_x; u_r; u_\varphi$	— składowe prędkości fluktuacyjnych
$U^*$	— charakterystyczna skala
$x; r; \varphi$	— współrzędne cylindryczne
$\eta$	— współrzędna względna

### Indeksy

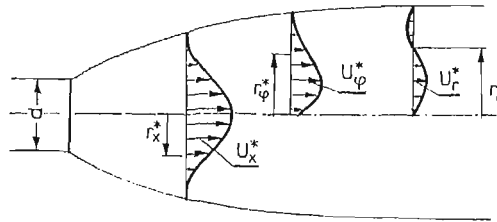
max	— wartość maksymalna w danym przekroju poprzecznym
o	wartość określona w przekroju wylotowym dyszy

### 2. Opis ewolucji współczynników lepkości wirowej

Analiza strug turbulentnych oparta w znacznej mierze na przyjęciu modelu pełnego lub częściowego samopodobieństwa pól prędkości prowadzi w efekcie do szeregu potęgowych zależności opisujących przestrzenny rozwój charakterystycznych wielkości przepływu. Obszerne podsumowanie otrzymanych w powyższy sposób praw potęgowej ewo-

lucji przedstawia min Schlichting [8] sugerując stałość w kierunku przepływu turbulენტnej liczby Reynoldsa (opartej o współczynnik lepkości wirowej  $\nu_T$ ). Do podobnego wniosku skłaniają także rezultaty prac cytowane przez Reynoldsa [7], który stwierdza ponadto, że turbulენტna liczba  $R_T$  zachowuje stałą wartość dla poszczególnych kategorii przepływu nie zależąc w ogólności od rzeczywistej liczby  $R_e$  i warunków początkowych pola prędkości. Założenie o stałości  $R_T = R_T(x)$  leży także u podstaw sformułowanej po raz pierwszy przez CORRINA [1] hipotezy „niestabilności brzegowej” (marginal instability) przepływów swobodnych, w myśl której wartość  $R_T$  dla określonej kategorii przepływu (struga płaska, osiowosymetryczna) jest tego samego rzędu co dolna krytyczna wartość  $R_e$  dla odpowiedniej strugi laminarnej. Wynikające z przyjęcia tej hipotezy rozważania przedstawiono w [5], a uzyskane wyniki wykazują pełną analogię z rezultatami pracy [8].

Przyjęcie samopodobieństwa przepływu, która implikuje stałość  $R_T(x)$  prowadzi jednak, jak to wykazał ELSNER w jednej ze swych prac [2] — do „zamrożenia” w otrzymanym rozwiązaniu struktury turbulencji. Wyraża się to m.in. we wzajemnej proporcjonalności wszystkich składowych tensora naprężeń burzliwych, podczas gdy doświadczenie wykazuje, że znacznie szybciej zanikają składowe niediagonalne ( $i \neq j$ ) co jest wyrazem naturalnego dążenia przepływu do stanu izotropii.



Rys. 1

Przyjęcie samopodobieństwa sprowadza się do równań wykładników w potęgowych związkach opisujących zanik wszystkich charakterystycznych momentów korelacyjnych turbulencji i jak wykazano to m.in. w [9] struga rzeczywiście może osiągnąć ten stan w pewnej (zazwyczaj dość znacznej,  $x \approx 70d$ ) odległości od wylotu. Zważywszy jednak, że obwodowa składowa prędkości zanika w omawianym typie przepływu znacznie szybciej niż osiowa, byłaby to więc praktycznie struga niezawierana. Poszukując więc modelu użytecznego dla potrzeb strugi z zawirowaniem wstępnym, może nim być jedynie rozwiązanie oparte o hipotezę semi-zachowawczości przepływu sformułowaną pierwotnie w [2]. Koncepcja ta zakłada, że w pewnym obszarze przepływu rozkłady wszystkich charakterystycznych parametrów strugi (rys. 1) opisane być mogą za pomocą indywidualnych skal odrębnych tak dla wielkości średnich jak i fluktuacyjnych, co ująć można następującym zapisem:

$$\begin{aligned}
 U_x(x, r) &= U_x^*(x) \cdot F_x(\eta_x); & \eta_x &= \frac{r}{r_x^*}, \\
 U_\phi(x, r) &= U_\phi^*(x) \cdot F_\phi(\eta_\phi); & \eta_\phi &= \frac{r}{r_\phi^*}, \\
 U_r(x, r) &= U_r^*(x) \cdot F_r(\eta_r); & \eta_r &= \frac{r}{r_r^*},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_x^2(x, r) &= U_{xx}^{*2} \cdot F_{xx}(\eta_{xx}); & \eta_{xx} &= \frac{r}{r_{xx}^*}, \\
 \bar{u}_\varphi^2(x, r) &= U_{\varphi\varphi}^{*2} \cdot F_{\varphi\varphi}(\eta_{\varphi\varphi}); & \eta_{\varphi\varphi} &= \frac{r}{r_{\varphi\varphi}^*}, \\
 \bar{u}_r^2(x, r) &= U_{rr}^{*2} \cdot F_{rr}(\eta_{rr}); & \eta_{rr} &= \frac{r}{r_{rr}^*}, \\
 \overline{u_x u_r}(x, r) &= U_{xr}^{*2}(x) \cdot F_{xr}(\eta_{xr}); & \eta_{xr} &= \frac{r}{r_{xr}^*}, \\
 \overline{u_r u_\varphi}(x, r) &= U_{r\varphi}^{*2}(x) \cdot F_{r\varphi}(\eta_{r\varphi}); & \eta_{r\varphi} &= \frac{r}{r_{r\varphi}^*}, \\
 \overline{u_x u_\varphi}(x, r) &= U_{x\varphi}^{*2}(x) \cdot F_{x\varphi}(\eta_{x\varphi}); & \eta_{x\varphi} &= \frac{r}{r_{x\varphi}^*}.
 \end{aligned}$$

(1 cd.)

Obecny stan wiedzy nie pozwala na jednoznaczne skorelowanie naprężeń turbulentnych z polem prędkości średnich. Z wielu zaproponowanych do tej pory hipotez, do dalszej analizy wybrano postulat Boussinesq'a wiążący naprężenia burzliwe z tensorem prędkości deformacji płynu w oparciu o lepkość wirowo definiowaną związkami

$$(2) \quad \nu_{T_{ij}} = \frac{-\overline{u_i u_j}}{\frac{\partial U_{i-}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{j-}}{\partial x_i}},$$

który dla potrzeb opisu zawirowanej strugi osiowo-symetrycznej wyrażony zostaje w postaci:

$$(3) \quad \nu_{T_{xr}} = \frac{\overline{u_x u_r}}{\frac{\partial U_{x-}}{\partial r}}; \quad \nu_{T_{r\varphi}} = -\frac{\overline{u_r u_\varphi}}{r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U_\varphi}{r} \right)} = -\frac{\overline{u_r u_\varphi}}{\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r}}.$$

Jeżeli założymy, że tak zdefiniowany współczynnik lepkości wirowej  $\nu_{T_{xr}}$  jest stały w poprzecznym przekroju strugi:

$$(4) \quad \nu_{T_{xr}}(r) = \text{const},$$

wówczas prawa strona pierwszego z równań ruchu (5):

$$(5) \quad \begin{cases} U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u_x u_r}), \\ \frac{U_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u_r^2}) - \frac{\overline{u_\varphi^2}}{r}, \\ U_x \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{U_r U_\varphi}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \overline{u_r u_\varphi}), \end{cases}$$

po uwzględnieniu związków (3) i (4) przyjmuje postać:

$$(6) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u_x u_r}) = -\nu_{T_{xr}} \frac{\partial^2 U_x}{\partial r^2} + \frac{\nu_{T_{xr}}}{r} \frac{\partial U_x}{\partial r}.$$

Po wprowadzeniu do powyższego związku zależności (1) otrzymujemy ostatecznie:

$$(7) \quad \frac{r_x^*}{U_x^*} F_x \left[ F_x \frac{dU_x^*}{dx} - \eta_x F_x' \frac{U_x^*}{r_x^*} \frac{dr_x^*}{dx} \right] + \frac{U_r^*}{U_x^*} F_r F_x' = \frac{\nu_{T_{xr}}^{**}(x)}{r_x^* U_x^*} \left( F_x'' + \frac{F_x'}{\eta_x} \right).$$

Tak przekształcone równanie ruchu zachowuje słuszność w każdym punkcie rozpatrywanej przestrzeni, w szczególności zaś niezależne jest od współrzędnej  $x$ , co prowadzi do relacji:

$$(8) \quad \frac{r_x^*}{U_x^*} \frac{dU_x^*}{dx} \sim \frac{dr_x^*}{dx} \sim \frac{U_r^*}{U_x^*} \sim \frac{\nu_{T_{xr}}(x)}{r_x^*(U_x^*)},$$

przy czym zgodnie ze związkiem definicyjnym 3 winien być jednocześnie spełniony warunek:

$$(9) \quad \nu_{T_{xr}}(x) \sim \frac{U_{xr}^{*2, *}}{U_x^*}.$$

Zauważmy ponadto, że wyrażenie:

$$(10) \quad \frac{r_x^* U_x^*}{\nu_{T_{xr}}} = R_T,$$

jest omawianą już wcześniej turbulentną liczbą Reynoldsa, a związki (8) wskazują na znacznie bardziej złożoną postać zależności  $R_T(x)$  niż wynikałoby to np. z [5].

Analogiczny jak w związku (6) sposób postępowania w odniesieniu do drugiego współczynnika lepkości wirowej nie jest możliwy, ponieważ nie wykazuje on stałości w poprzecznym przekroju strugi.

### 3. Zmienność charakterystyk turbulencji w strudze z zawirowaniem wstępnym

Dla eksperymentalnej weryfikacji wyprowadzonych powyżej zależności przeprowadzono odpowiedni cykl badań doświadczalnych. Średnica wylotu dyszy wynosiła  $d = 0,04$  m a charakterystyczną liczbę Reynoldsa utrzymywano na stałym w trakcie pomiarów poziomie

$$Re = \frac{U_{x0} \cdot d}{\nu} = 9,810^4.$$

Intensywność zawirowania definiowana związkiem:

$$s_0 = \frac{\int_0^{\infty} U_{x0} \cdot U_{\varphi 0} \cdot r^2 \cdot dr}{\int_0^{\infty} U_{x0}^2 \cdot r \cdot dr}$$

wynosiła odpowiednio:

$$S_0 = 0; 0,1; 0,129; 0,147; 0,164; 0,195,$$

a badaniami objęto obszar  $x \in (0; 15)d$  co jest zakresem spotykanym w literaturze i umożliwia konfrontację wyników własnych badań z rezultatami prac innych autorów. Pomiary wielkości średnich wykonywano pięciootworkową sondą kulową, a składowe naprężeń

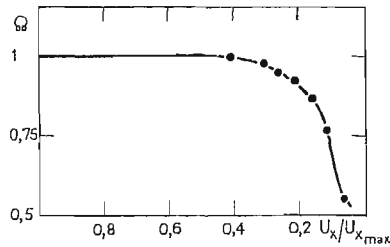
burzliwych określano dwukanałowym zestawem DISA 55 System wykorzystując metodę opisaną w [3]. Eksperymentalnie znalezione rozkłady naprężeń tak stycznych jak normalnych korygowano ze względu na wpływ intermittenencji w sposób następujący:

$$(11) \quad \begin{aligned} \overline{u_{xzm}^2} &= \Omega \overline{u_{x\text{turb}}^2} + (1-\Omega) \overline{u_{r\text{pot}}^2}, \\ \overline{u_{rzm}^2} &= \Omega \overline{u_{r\text{turb}}^2} + (1-\Omega) \overline{u_{r\text{pot}}^2}, \\ \overline{u_{\varphi zm}^2} &= \Omega \overline{u_{\varphi\text{turb}}^2} + (1-\Omega) \overline{u_{\varphi\text{pot}}^2}, \end{aligned}$$

$$\overline{u_x u_{rzm}} = \Omega \overline{u_x u_{r\text{turb}}} + (1-\Omega) \overline{u_x u_{r\text{pot}}}; \quad \overline{u_r u_{\varphi zm}} = \Omega \overline{u_r u_{\varphi\text{turb}}} + (1-\Omega) \overline{u_r u_{\varphi\text{pot}}}$$

przy czym rozkład współczynnika intermittenencji podano na rys. (2), zaś wartości tzw. potencjalnych fluktuacji strugi przyjęto za [9] jako równe:

$$(12) \quad \frac{\overline{u_{x\text{pot}}^2}}{U_{x0}^2} = \frac{\overline{u_{\varphi\text{pot}}^2}}{U_{x0}^2} \cong 3,7 \cdot 10^{-6}; \quad \frac{\overline{u_r^2}}{U_{x0}^2} \cong 7,8 \cdot 10^{-6}.$$



Rys. 2

Porównawcze zestawienie naprężeń burzliwych przed i po korekcji przedstawiono na rys. 3a ÷ d przykładowo dla  $s_0 = 0,129$  i  $x = 8d$ . Wyniki tam zamieszczone wykazują, że w obszarze przepływu transkrytycznego (tj. w zewnętrznej strefie strugi) wielkości uzyskane bezpośrednio z pomiarów mają wartości zaniżone w stosunku do swych odpowiedników charakteryzujących rzeczywistą turbulencję przepływu.

Uwzględnienie zjawiska intermittenencji w definicyjnym związku (3) daje przykładowo:

$$(13) \quad -[\Omega(\overline{u_x u_r})_{\text{turb}} + (1-\Omega)\overline{u_x u_r}_{\text{pot}}] = \nu_{T_{xr}} \frac{\partial}{\partial r} [\Omega(U_x)_{\text{turb}} + (1-\Omega)U_{x\text{pot}}],$$

a uwzględnienie w powyższym równaniu związków (12) prowadzi wprost do zależności:

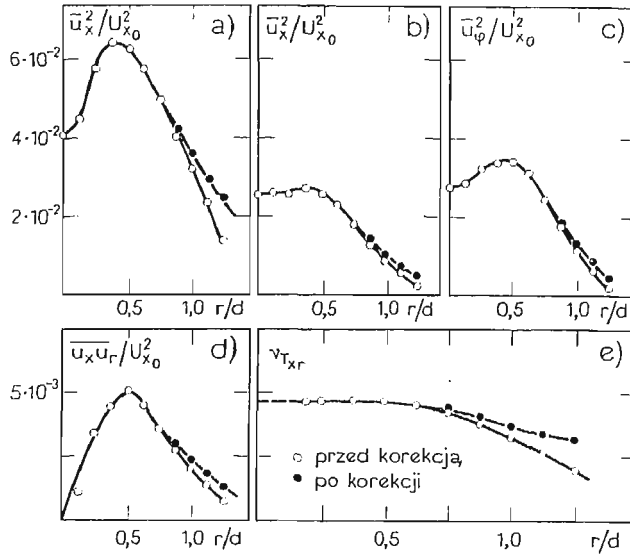
$$(14) \quad \overline{u_x u_{rzm}} = -\Omega \overline{u_x u_r}_{\text{turb}} \cong \Omega \nu_{T_{xr\text{turb}}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U_x}{\Omega} \right),$$

skąd wynika:

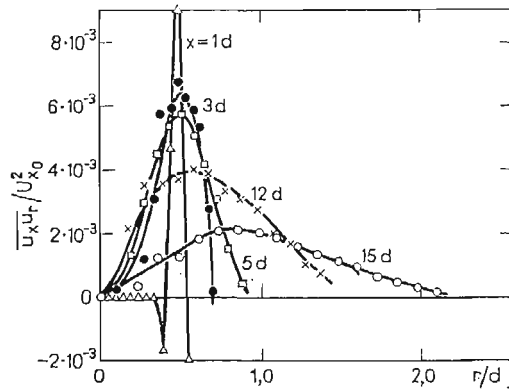
$$(15) \quad \nu_{T_{xr\text{turb}}} = \frac{\overline{u_x u_{rzm}}}{\Omega \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U_x}{\Omega} \right)}.$$

Należy więc stwierdzić, że spotykany często sposób obliczania skorygowanej wartości współczynnika lepkości wirowej z zależności:

$$(16) \quad \nu_{T_{U_{\text{turb}}}} = \frac{\nu_{T_{U_{zm}}}}{\Omega},$$



Rys. 3



Rys. 4

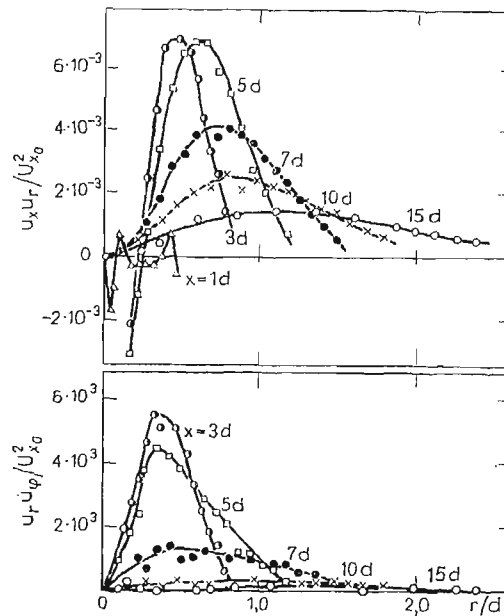
nie jest poprawny, chociaż w pewnych przypadkach błąd wynikający z przyjęcia takiego związku może być mało znaczący [4]. Z rys. 3e na którym naniesiono promieniowe rozkłady zarówno skorygowanego jak i nieskorygowanego współczynnika lepkości wirowej wynika wyraźnie, że uwzględnienie wpływu intermityencji pozwala uzyskać bardziej wyrównany rozkład

$$(17) \quad v_{T_{xr}} = v_{T_{xr}}(r),$$

co dodatkowo potwierdza dopuszczalność założenia o stałości tegoż współczynnika w poprzecznym przekroju strugi.

Na rys. 4 przedstawiono narastanie i następnie zanik w kierunku przepływu naprężeń stycznych dla strugi niezawiruwanej. W pobliżu wylotu dyszy struga niezawiruwana cha-

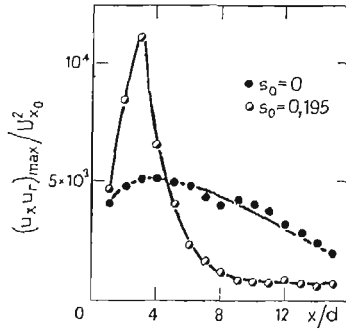
rakteryzuje się istnieniem tzw. potencjalnego jądra przepływu, w którym nie występują jakiegokolwiek naprężenia burzliwe, przy jednoczesnej obecności znacznych wartości tychże iloczynów korelacyjnych w obszarze warstwy granicznej (shear-layer) — stanowiącej powierzchnię ruchomego rozdziału między strugą i otaczającym ją ośrodkiem. W miarę oddalania się od początku przepływu zmniejsza się niejednorodność powyższych rozkładów, gdyż strefa burzliwości ogarnia stopniowo cały obszar strugi. Obecność nałożonych na strugę osiową dodatkowych pól prędkości obwodowych wywołuje wyraźne zmiany tak ilościowe jak i jakościowe turbulentnej mikrostruktury przepływu (rys. 5). Strefa rdzenia



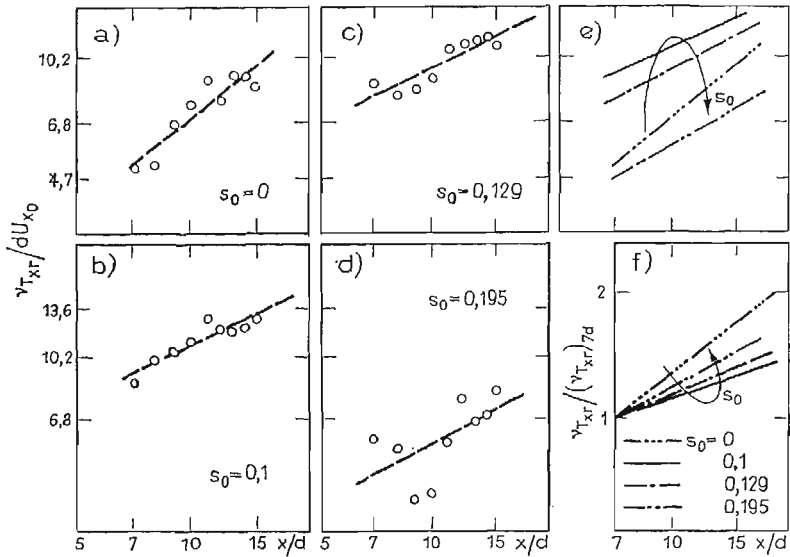
Rys. 5

potencjalnego praktycznie zanika, a struga jest w pełni turbulentną poczynając już od wylotu z dyszy. Występująca w początkowych przekrojach znaczna niejednorodność rozkładu naprężeń stycznych ulega w miarę wyrównania się profilu prędkości średniej wyraźnej redukcji, a w obszarze w pełni rozwiniętego przepływu turbulentnego ( $x \geq 7d$ ) profile naprężeń stają się podobne do tych, które zaobserwować można w strudze niezawirowanej. Obecność zawirowania wywołując z jednej strony w początkowym obszarze przepływu wyraźny wzrost wartości naprężeń burzliwych powoduje jednocześnie przyspieszenie procesu ich zaniku (co zilustrowano na rys. 6) w dalszym rejonie strugi.

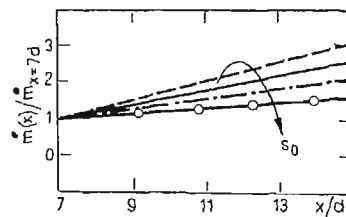
Przeprowadzony eksperyment wykazał (vide rys. 7), że w analizowanym obszarze strugi obserwuje się tendencję narastania wartości współczynnika lepkości wirowej  $\nu_{T,rx}$  w kierunku przepływu, przy czym możliwym jest przyjęcie potęgowego charakteru zmienności  $\nu_{T,rx}(x)$ . Wpływ zawirowania na ewolucję współczynnika ma (podobnie jak poprzednio) wyraźnie niejednoznaczny charakter. W zakresie najmniejszych intensywności zawirowania wzrost  $s_0$  powoduje początkowo zwiększenie wartości  $\nu_{T,rx}$  (rys. 7e) przy jedno-



Rys. 6



Rys. 7



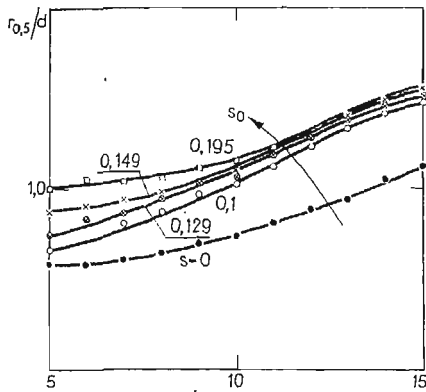
Rys. 8

czesnym wyraźnym spadku stopnia narastania wielkości  $\left(\frac{\partial v_{T_{xr}}}{\partial x}\right)$  w kierunku przepływu.

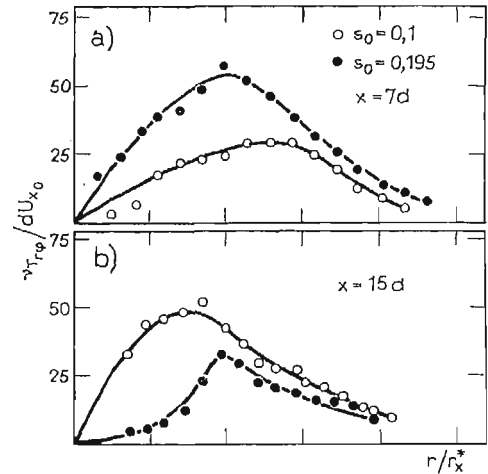
W zakresie większych wartości  $s_0$  wpływ ten staje się natomiast przeciwny (rys. 7f). Zaobserwowany efekt jest sumą dwóch jednocześnie występujących w przepływie oddziaływań. Najmniejsze z zastosowanych wartości  $s_0$  powodują zwiększenie intensywności



podsysania czynnika z otoczenia, podczas gdy dalszy wzrost  $s_0$  wywołuje tendencję przeciwną, co zilustrowano na rys. 8. Wzmoczone zasysanie czynnika o znikomej burzliwości oprócz intensyfikacji procesów mieszania wywołuje także istotny przyrost efektywnej szerokości strugi wyraźny zwłaszcza dla małych wartości  $s_0$  (rys. 9). Prowadzi do spadku promieniowego gradientu prędkości osiowej wywołując tym samym wzrost wartości współczynnika lepkości burzliwej. Większe wartości  $s_0$  powodują już tylko nieznaczne przyrosty szerokości strugi (rys. 9) co przy jednoczesnej wyraźnej redukcji naprężeń stycznych (rys. 10) prowadzi w efekcie do zauważalnego spadku wartości  $\nu_{T, \tau}$ .

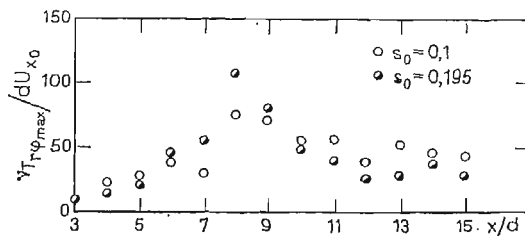


Rys. 9



Rys. 10

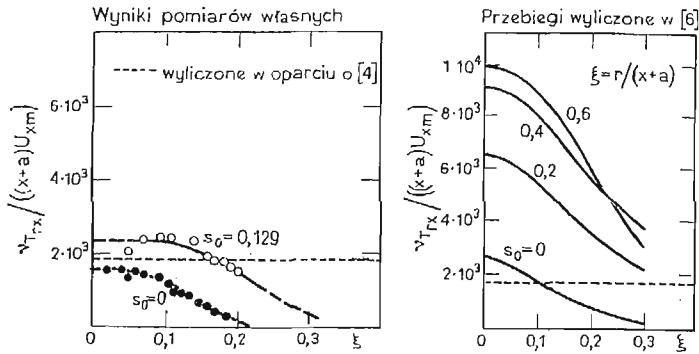
Drugi z analizowanych współczynników lepkości burzliwej  $\nu_{T, r_{\phi}}$  wykazuje zupełnie odmienny charakter przebiegu (rys. 10a i b). W miarę wzrostu odległości osiowej  $x$  współczynnik ten początkowo narasta, następnie zaś zaczyna zanikać (rys. 11) wykazując tendencję podobną do obserwowanej przy omawianiu turbulentnych charakterystyk strugi.



Rys. 11

Na rys. 12 zamieszczono zestawienie własnych danych eksperymentalnych z rezultatami obliczeń LILLEY'A i CHIGIER'A [6], wykazujące jakościowe podobieństwo porównywanych przebiegów. Uzyskana w ramach niniejszego eksperymentu wartość  $\nu_{T, \tau}$  jest dla strugi niezawieranej znacznie bliższa empirycznym danym HINZE'A [4] niż cytowane wyniki [6], co dodatkowo potwierdzać może wiarygodność uzyskanego materiału doświadczalnego.

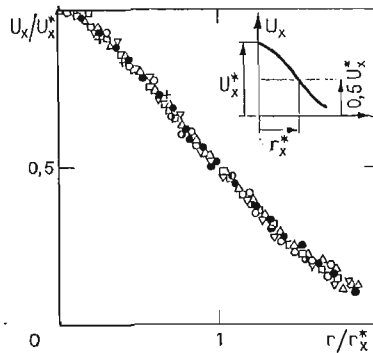
Zgodnie z zamieszczonymi poprzednio rozważaniami, założenie istnienia w omawianym przepływie obszaru semi-zachowawczego wymaga łowprowadzenia charakterystycznych skal prędkości  $U^*$  i wymiaru liniowego takich, że eksperymentalnie określone rozkłady wszystkich parametrów strugi po ich zredukowaniu względem  $U^*$  i  $r^*$  winny z możliwie dobrym przybliżeniem grupować się wokół wspólnych krzywych. Zastosowanie powyższej procedury po rozpatrzeniu szeregu wariantów pozwoliło na znalezienie odpowiednich



Rys. 12

skal tak dla ruchu średniego (rys. 13) jak i fluktuacyjnego (rys. 14), a sens fizyczny przyjętych skal wyjaśniono na rysunkach zamieszczonych w narożnikach odpowiednich wykresów. Dla ułatwienia weryfikacji związków semi-zachowawczości wyrażono rozpatrywane skale w postaci:

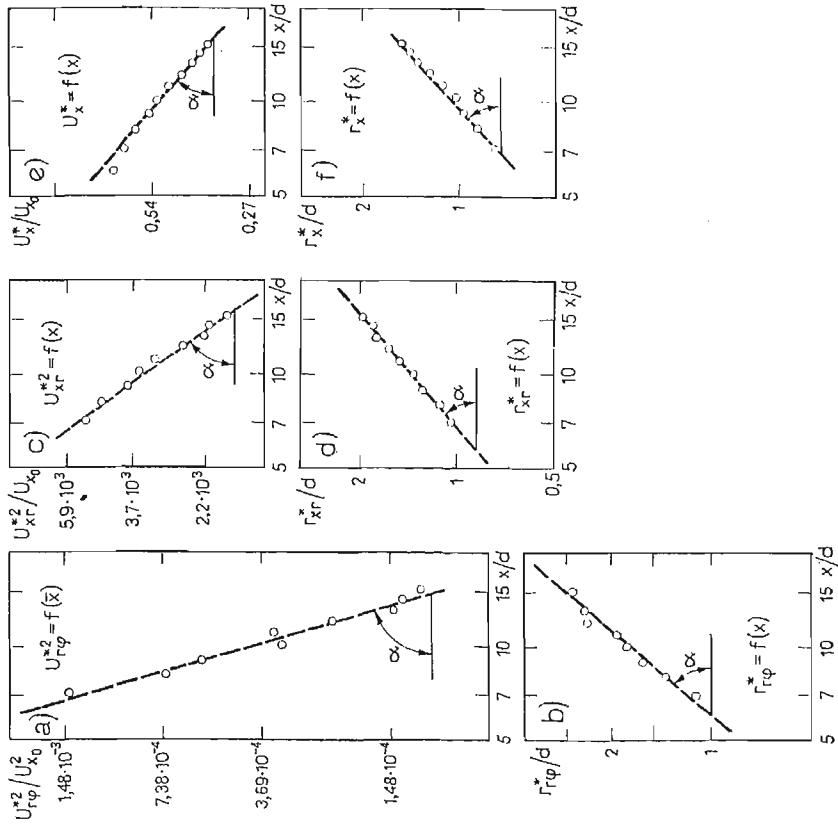
$$(18) \quad U_l^* = U_l^*(x) = C_{U_l} \bar{x}^{-\alpha_{U_l}}; \quad r_l^* = r_l^*(\bar{x}) = C_{r_l} \bar{x}^{\alpha_{r_l}},$$



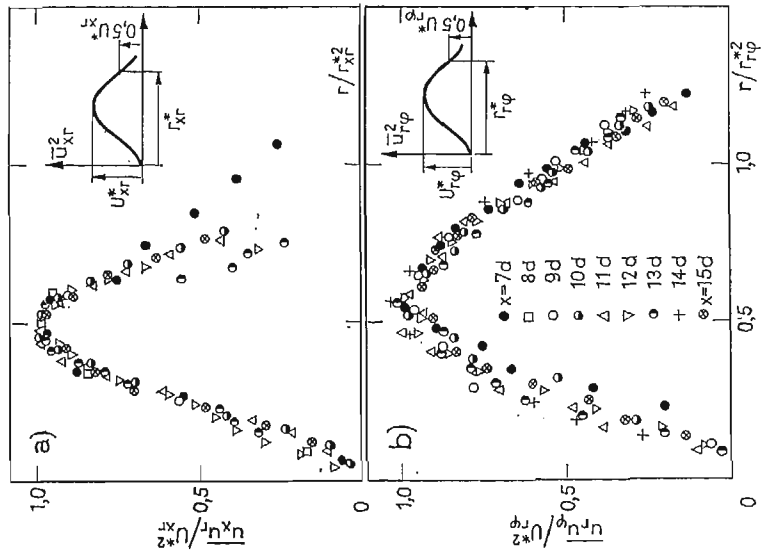
Rys. 13

traktowano je więc jako potęgowe funkcje współrzędnej  $x$ . Jest to założenie często spotykane w analizie przepływów burzliwych, a graficzną ilustrację jego dopuszczalności przedstawiono na rys. 15. Matematycznym wyrazem spełnienia warunków semi-zachowawczości jest zatem równość wykładników potęgowych obydwu stron związków typu (9):

$$X^{*L} \sim X^{*p}$$



Rys. 15



Rys. 14

czyli

$$\kappa_L = \kappa_p$$

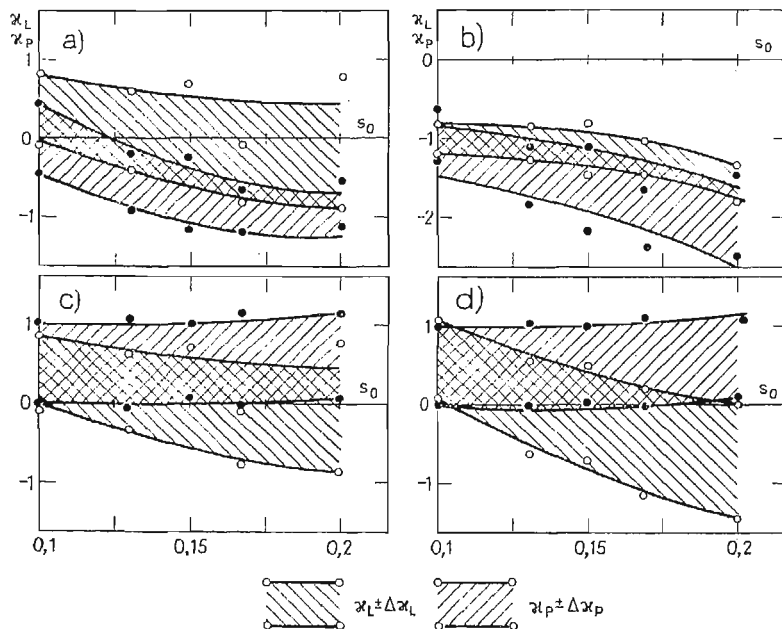
Szczegółowej analizie poddano następujące, wyprowadzone uprzednio związki:

Postać pierwotna	Relacja potęgowa	Warunek
$\frac{U_r^{*2} r_x^*}{U_x^*} \sim r_x^{*2} \frac{dU_x^*}{dx}$	$X^{\kappa_{U_{xr}} + \kappa_{r_x} - \kappa_{U_x}} \sim X^{2\kappa_{r_x} - \kappa_{U_x} - 1}$	„a”
$U_{xr}^{*2} \sim U_r^* U_x^*$	$X^{\kappa_{U_{xr}}} \sim X^{\kappa_{U_r} + \kappa_{U_x}}$	„b”
$v_{r,xr} \sim \frac{U_{xr}^{*2} r_x^*}{U_x^*}$	$X^{\kappa_{v_T}} \sim X^{\kappa_{U_{xr}} + \kappa_{r_x} - \kappa_{U_x}}$	„c”
$v_{T,xr} \sim U_r^* U_x^*$	$X^{\kappa_{v_T}} \sim X^{\kappa_{U_r} + \kappa_{r_x}}$	„d”

Jako kryterium pozwalające ocenić stopień zgodności koncepcji semi-zachowawczości z doświadczeniem uznano pokrywanie się przedziałów ufności wykładników

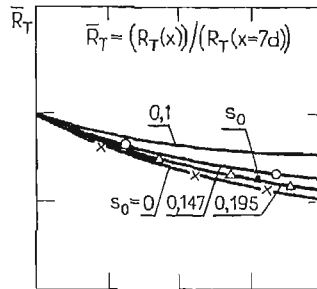
$$[\kappa_L - \Delta\kappa_L; \kappa_L + \Delta\kappa_L] \quad \text{oraz} \quad [\kappa_p - \Delta\kappa_p; \kappa_p + \Delta\kappa_p]$$

wyznaczonych na ustalonym poziomie ufności (np.  $\alpha = 0,95$ ). Rys. 16a - d wykazują, że przedziały ufności odpowiednio prawej i lewej strony powyższych związków pokrywają się wzajemnie w całym zastosowanym zakresie intensywności zawirowania wstępnego, co świadczy o istnieniu w omawianym przepływie obszaru semi-zachowawczego. Zastoso-



Rys. 16

wanie zatem do opisu ewolucji strugi zawirowanej skal prędkości i wymiaru liniowego oddzielnych dla ruchu średniego i fluktuacyjnego, pozwala w sposób pełniejszy (niż ma to miejsce w przypadku samopodobieństwa) ocenić sposób rozwoju tak istotnego parametru jakim jest współczynnik lepkości burzliwej. Wykres 17 ilustruje dodatkowo zmienność



Rys. 17

turbulentnej liczby Reynoldsa, która zgodnie z przewidywaniami nie zachowuje stałości w kierunku przepływu, zanikając tym szybciej im wyższa jest wartość zastosowanego zawirowania wstępnego  $s_0$ .

#### 4. Zakończenie

W przedstawionej pracy omówiono sposób ewolucji współczynników lepkości wirowej i zaproponowano analityczny ich opis w oparciu o hipotezę semi-zachowawczego obszaru przepływu. Prowadzone w pracy rozważania wykazały, że rozwiązanie powyższe może być jedynie użytecznym dla przypadku strugi z zawirowaniem. Koncepcję semi-zachowawczości traktować można jako hipotezę stanu przejściowego strugi, po którym wystąpić może równowaga typu samopodobieństwa, ale ze względu na znacznie szybszy proces zaniku składowej obwodowej będzie to już przepływ praktycznie niezawirowany.

#### Wykaz literatury

1. S. CORRSIN, *Some current problems in turbulent shear flows*, Noval Hydrodynamics 1957.
2. J. W. ELSNER, *Uogólnione prawo rozwoju pola prędkości w turbulentnym anizotropowym strumieniu*, Ciepłota Maszyny Przepływowe Nr 71/72.
3. J. W. ELSNER, S. DROBNIAK, *Metoda wyznaczania tensora naprężeń burzliwych w przepływie przestrzennym*, Turbulencja 78 — III KKMCiG — 1978.
4. Hinze — *Turbulence*. Mc Graw — Hill, N. Y. 1975.
5. M. LESSEN, *On the power laws for turbulent jets, wakes and shearing layers and their relationship to the principle of marginal instability*, J. Fluid Mech. vol. 88, 1978.
6. D. LILLEY, N. A. CHIGIER, *Nonisotropic turbulent stress distribution in swirling flows from mean — value distributions*, Inst. J. Heat and Mass Transfer, vol. 38, 1971.
7. A. J. REYNOLDS, *Turbulent flows in engineering* John Wiley and Sons, 1974.
8. H. SCHLICHTING, *Teorija pogranično sloja* wyd. Nauka, 1974.
9. J. WYGNAŃSKI, H. FIEDLER, *Some measurements in the self — preserving jet*, J. Fluid Mech. vol. 38, 1969.

## Резюме

## ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ ОСЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ЗАКРУЧЕНОЙ СТРУИ

Для определения развития турбулентной вязкости свободной закрученной струи проведено серию экспериментальных исследований.

Доказано, в течениях данного типа, существование автомодельной области. Проведено также развитие турбулентного числа Рейнольдса.

## Summary

## EDDY VISCOSITY IN AXIALLY SYMMETRIC, SWIRLING JETS

The results are presented of the experiments carried out in order to find the evolution of eddy viscosity in swirling jets.

The existence of semi — preserving region has been proved in this kind of flows and the behaviour, of turbulent Reynolds number has also been checked.

POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1980 roku*

---

# BIULETYN INFORMACYJNY

## SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI PTMTIS ZA OKRES XVIII KADENCJI od 9 III 1978 r. do 20 V 1980 r.

W ciągu XVIII kadencji Zarząd Główny, przy współudziale Zarządów Oddziałów, rozwijał działalność w dziedzinie mechaniki teoretycznej i stosowanej. Przy zachowaniu obowiązujących przepisów prawnych i statutowych Towarzystwo realizowało swoje zadania poprzez:

- organizowanie zebrań naukowych, wykładów, seminariów, kursów i sympozjów,
- popieranie badań naukowych,
- organizowanie konkursów naukowych z nagrodami,
- udzielanie informacji naukowych zainteresowanym instytucjom,
- utrzymywanie łączności z pokrewnymi stowarzyszeniami w kraju i za granicą,
- czynny udział w zjazdach krajowych i zagranicznych,
- wydawanie zeszytów naukowych, monografii i książek.

Podstawą działalności finansowej Towarzystwa były i są nadal dotacje Polskiej Akademii Nauk, której Towarzystwo bezpośrednio podlega.

Integralną częścią sprawozdania z działalności Towarzystwa jest sprawozdanie finansowe, które ujęto w oddzielnym opracowaniu.

### 1. Zarząd Główny i skład Głównej Komisji Rewizyjnej.

W okresie sprawozdawczym Zarząd Główny działał pierwotnie w składzie:

prof. dr hab. Marek Dietrich	przewodniczący
prof. dr hab. Eugeniusz Bielewicz	z-ca przewodniczącego
prof. dr Zbigniew Olesiak	z-ca przewodniczącego
doc. dr hab. Józef Wojnarowski	sekretarz generalny
doc. dr hab. Andrzej Tylikowski	z-ca sekretarza generalnego
dr inż. Kazimierz Borsuk	skarbnik
prof. dr hab. Zenon Waszczyszyn	z-ca skarbnika
prof. dr hab. Kazimierz Biernatowski	członek
prof. dr hab. Henryk Mikołajczak	członek
doc. dr Władysław Walczak	członek

Przewodniczący Oddziałów:

doc. dr Krzysztof Wernerowski	Bydgoszcz
prof. dr hab. Janusz Elsner	Częstochowa
prof. dr hab. Jan Kruszewski	Gdańsk
doc. dr Walery Szuścik	Gliwice
doc. dr hab. Stanisław Kasprzyk	Kraków
doc. dr hab. Jan Kubik	Opole
doc. dr Zdzisława Rotter	Lublin (od 5.12.1978 r.)
doc. dr Janusz Lipiński	Łódź
prof. dr hab. Jarosław Stefaniak	Poznań
prof. dr hab. Zbyszko Słojek	Rzeszów
doc. dr Czesław Mickiewicz	Szczecin
prof. dr hab. Stanisław Łukaszewicz	Warszawa
prof. dr hab. Eugeniusz Brzuchowski	Wrocław
doc. dr Edward Goss	Zielona Góra
prof. dr hab. Stanisław Jerzy Gdula	Bielsko-Biała (13.03.1980 r.)

natomiast skład Głównej Komisji Rewizyjnej był następujący:

prof. dr	Zbigniew Kączkowski	przewodniczący
prof. dr hab.	Szczepan Borkowski	członek
prof. dr hab.	Gwidon Szefer	członek
prof. dr	Zdzisław Parszewski	z-ca członka
doc. dr	Karol Grudziński	z-ca członka

Z dniem 9.12.1978 r. zrezygnował z funkcji skarbnika dr Kazimierz Borsuk i uchwałą plenarnego zebrania Zarządu Głównego funkcję skarbnika powierzono z-cy członka Zarządu Głównego doc. dr Edwardowi Radwańskiemu.

### 1.1. Działalność organizacyjna

#### 1.1.1 Członkowie Towarzystwa

Na koniec pierwszego kwartału 1980 r. zarejestrowanych 971 członków Towarzystwa — oznacza to, że w okresie XVIII kadencji zanotowano wzrost liczby członków o 87 osób, czyli 9,8%. Liczba Oddziałów wzrosła z trzynastu do piętnastu. Liczba delegatów Oddziałów wybranych na Walnych Zgromadzeniach na XIX Zjazd Delegatów wynosi 108. Ilustruje to Tablica 1.1.

Tablica 1.1

Lp.	Oddział i rok założenia		Liczba członków				Liczba delegatów
			na koniec:		I kwartału		
			IV kwartału	1978	1979	1980	
1.	Bydgoszcz	1970	27	29	32	32	4
2.	Częstochowa	1969	54	55	63	63	7
3.	Gdańsk	1958	59	64	61	63	7
4.	Gliwice	1958	157	153	166	161	17
5.	Kraków	1958	82	76	73	73	8
6.	Lublin	1978	—	40	44	44	5
7.	Łódź	1958	57	55	60	61	7
8.	Opole	1975	20	21	21	21	3
9.	Poznań	1958	65	70	75	75	8
10.	Rzeszów	1972	20	21	21	21	3
11.	Szczecin	1958	34	33	34	39	4
12.	Warszawa	1958	227	201	201	201	21
13.	Wrocław	1958	71	75	80	81	9
14.	Zielona Góra	1978	11	22	18	22	3
15.	Bielsko-Biała	1980	—	—	—	14	2
Razem:			884	915	949	971	108
Wzrost:				31	34	22	
%				3,5%	3,7%	2,3%	
Wzrost członków w XVIII kadencji			87 (9,8%)				



### 1.2. Zebrania organizacyjne

Zarząd Główny na posiedzeniu w dniu 10.03.1978 wybrał siedmioosobowe Prezydium Zarządu Głównego w składzie:

prof. dr hab.	Marek Dietrich	przewodniczący
prof. dr hab.	Eugeniusz Bielewicz	z-ca przewodniczącego
prof. dr	Zbigniew Olesiak	z-ca przewodniczącego
doc. dr hab.	Józef Wojnarowski	sekretarz generalny
doc. dr hab.	Andrzej Tylikowski	z-ca sekretarza generalnego
dr	Kazimierz Borsuk	skarbnik
prof. dr hab.	Zenon Waszczyszyn	z-ca skarbnika

W okresie kadencji Prezydium Zarządu Głównego zebrało się 6 razy. W XVIII kadencji odbyło się pięć zebrań plenarnych.

W czasie kadencji wystąpiły pewne trudności w działalności biura Zarządu Głównego wskutek nieuniknionej, trzykrotnej zmiany na stanowisku kierowniczkim.

W okresie XVIII kadencji w Oddziałach odbyło się 171 zebrań organizacyjnych Zarządów i 15 Walnych Zgromadzeń. Tablica 1.2. ujmuje liczby zebrań w poszczególnych latach kadencji. Należy podkreślić, że

Tablica 1.2

Lp.	Oddział	Data Walnego Zgromadzenia	Liczba zebrań Zarządów i prezydium Zarządów			
			1978	1979	I kw. 1980	Razem
1.	Bydgoszcz	19.04.1980 I/19	4	4	1	9
2	Częstochowa	1.03.1980 II/20	4	4	1	9
3.	Gdańsk	19.01.1980 II/17	4	3	1	8
4.	Gliwice	14.04.1980 II/45	12+2	6+6	2	28
5.	Kraków	28.01.1980 II/24	3	4	2	9
6.	Lublin	5.12.1978 I/22 <sup>1)</sup>	1	2	3	6
7.	Łódź	1.03.1980 II/26	2	2	2	6
8.	Opole	4.03.1980 I/13	6	2+1	1	10
9.	Poznań	4.02.1980 II/26	2	3	2	7
10.	Rzeszów	21.02.1980 I/12	4	10	1	15
11.	Szczecin	21.02.1980 II/14	2	2	2	6
12.	Warszawa	30.03.1980 II/19	8+2	2+1	3	16
13.	Wrocław	15.04.1980 II/23	11	8	3	22
14.	Zielona Góra	23.01.1980 I/10	8	6	5	19
15.	Bielsko-Biała	13.03.1980 I/10 <sup>*)</sup>	—	—	1	1

171

<sup>1)</sup> Zebranie Członków Założycieli

zebrania organizacyjne Zarządu Głównego i Zarządów Oddziałów odbywały się zgodnie z wymaganiami statutu Towarzystwa. Zwolywanie zebrań Prezydium Zarządu Głównego w tym samym dniu, przed zebrańmi Plenarnymi Zarządu Głównego, miało na celu racjonalizację czasu poświęcanego na zebrania przez Członków Zarządu Głównego oraz oszczędność wydatkowania środków finansowych na delegacje.

W czasie od 19.01.1980 r. do 19.04.1980 r. odbyły się w Oddziałach Walne Zgromadzenia, na których wybrano Zarządy Oddziałów na XIX kadencję.

### 1.3. Powołanie nowych Oddziałów Towarzystwa

#### Oddział w Lublinie

W dniu 15.04.1978 r. na zebraniu plenarnym Zarządu Głównego podjęto uchwałę o utworzeniu 14 Oddziału Towarzystwa w Lublinie. W dniu 4.12.1978 r. na zebraniu członków założycieli utworzono Oddział w Lublinie.

Ze strony Zarządu Głównego w zebraniu tym wziął udział Przewodniczący prof. Marek Dietrich. Przewodniczącą oddziału w Lublinie została wybrana doc. dr Zdzisława Rotter.

Do oddziału w Lublinie przeszło 26 członków z Oddziału Warszawskiego i 14 z Oddziału Gliwickiego.

#### Oddział w Bielsku-Białej

W dniu 25.05.1979 r. na zebraniu plenarnym Zarządu Głównego podjęto uchwałę o utworzeniu 15 Oddziału Towarzystwa w Bielsku-Białej, upoważniając prof. Stanisława Gdulę do podjęcia prac organizacyjnych z tym związanych.

W dniu 13.03.1980 r. na zebraniu członków założycieli utworzono Oddział w Bielsku Białej.

Ze strony Zarządu Głównego w zebraniu udział wzięli: Przewodniczący prof. Marek Dietrich i Sekretarz Generalny doc. Józef Wojnarowski.

Ze strony Oddziału Gliwickiego w zebraniu uczestniczyli: doc. W. Szuścik i dr J. Kuczyński.

Przewodniczącym Oddziału został wybrany prof. St. Gdula.

Do Oddziału Bielsko-Biała przeszło 10 członków z Oddziału Gliwickiego i 4 z Oddziału Łódzkiego.

## 2. Działalność naukowa

### 2.1. Zebrania naukowe

Zebrania naukowe były formą ciągłej działalności. W okresie XVIII kadencji w Oddziałach Towarzystwa zorganizowano w sumie 176 zebrań, na których wygłoszono 185 referatów.

Na zebraniach naukowych Towarzystwa, które z założenia traktowano jako formę spotkań naukowych, realizowano zasadę prezentowania najnowszych osiągnięć z dziedziny mechaniki i dyscyplin pokrewnych. Tematyka wygłaszanych referatów podczas zebrań naukowych była bardzo różnorodna i częstokroć była ściśle związana ze specyfiką danego Oddziału. Zakres poruszanych zagadnień dotyczył: badania zjawisk ruchu ciała i ośrodków materialnych, tworzenia modeli ośrodków i maszyn, prezentowania teorii i metod, rozwiązań, nowoczesnej techniki obliczeniowej, teorii konstrukcji i innych. Liczbę i poziom wygłaszanych referatów należy ocenić pozytywnie. Na podkreślenie zasługuje liczny udział w zebraniach uczonych z zagranicy. Liczbowe zestawienie zebrań naukowych w poszczególnych Oddziałach ujmuje Tablica 2.1.

Tematykę referatów wygłoszonych na zebraniach ujęto w Biuletynie Informacyjnym kwartalnika *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*.

### 2.2. Sympozjony i konferencje

Sympozjony i konferencje stały się już tradycyjną formą działalności Towarzystwa. Stwarzają one warunki dla bezpośredniej wymiany myśli badawczej i wyprzedzają publikacyjne przekazywanie informacji naukowej o pracach z dziedziny mechaniki.

W niniejszej kadencji odbyło się 9 sympozjonów, na których wygłoszono 456 referatów. Szczegółowy wykaz, hasło sympozjonu, liczby referatów, uczestników i dni obrad ujmuje tablica 2.2.

Należy podkreślić, że sympozjony organizowane przez PTMTS osiągają coraz lepszy poziom naukowy a przez to i odpowiednią rangę w życiu naukowym kraju. Można twierdzić, że należą one do najbardziej udanych imprez naukowych Towarzystwa. Należy więc dbać o utrzymanie tradycyjnych sympozjonów i dążyć do podjęcia organizacji nowych w nowopowstałych Oddziałach.

Tablica 2.1

Lp.	Oddział	Liczba					
		zebrań/referatów				uczestn./dyskutan.	
		1978	1979	I kw. 1980	razem	1978	1979
1.	Bydgoszcz	4/4	9/9	1/1	14/14	73/24	349/37
2.	Częstochowa	9/12	9/9	3/3	21/24	351/52	162/31
3.	Gdańsk	5/5	7/7	4/4	16/16	72/15	118/48
4.	Gliwice	8/8	7/8	0/0	15/16	137/62	141/44
5.	Kraków	6/6	3/3	1/1	10/10	114/28	66/23
6.	Lublin	—	6/6	3/3	9/9	—	98/21
7.	Łódź	7/8	5/7	3/3	15/18	109/20	*)
8.	Opole	6/6	9/9	2/2	17/17	64/33	106/41
9.	Poznań	2/2	1/1	1/1	4/4	27/12	20/5
10.	Rzeszów	3/3	1/1	0/0	4/4	—	*)
11.	Szczecin	5/5	8/8	3/3	16/16	61/16	168/32
12.	Warszawa	1/3	5/5	1/1	7/9	57/12	100/36
13.	Wrocław	7/7	5/6	2/2	14/15	52/25	89/48
14.	Zielona Góra	3/2	1/1	9/9	13/12	19/5	9/2
15.	Bielsko-Biała	—	—	1/1	1/1	—	—
	Razem:	66/71	76/80	34/34	176/185	1136/304	1426/368

\*) Brak danych

Tablica 2.2

Lp.	Oddział	Hasło sympozjonu	Liczba		Data
			ref.	uczest.	
1.	Gdańsk	II Konferencja „Konstrukcje powłokowe teoria i zastosowanie”	49	105	6 - 10.11.1978
2.	Gliwice	XVIII Sympozjon „Modelowanie w Mechanice”	39	96	25.2 - 3.3.1978
		XIX Sympozjon „Modelowanie w Mechanice”	44	77	17 - 22.3.1980
3.	Kraków	V Sympozjon Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki	51	125	23 - 24.3.1979
4.	Łódź	III Sympozjon nt. „Stateczność konstrukcji”	53	103	26 - 27.10.1979
5.	Poznań	VIII Sympozjon „Drgania w układach fizycznych”	78	116	18 - 20.5.1978
6.	Rzeszów	IV Sympozjon Dynamiki Konstrukcji	41	70	23 - 24.9.1979
7.	Warszawa	VIII Sympozjon Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego	69	180	5 - 6.9.1978
8.	Wrocław	VII Sympozjon Poświęcony Reologii	32	80	26 - 27.9.1978
		R a z e m	456	952	

### 2.3. Konkursy naukowe

Organizowane konkursy naukowe miały na celu aktywizację do pracy naukowej młodej kadry.

W okresie dwu lat Zarządy Oddziałów zorganizowały 4 konkursy i rozesłały zawiadomienia o dwu nowych konkursach.

Na ogólną liczbę 37 prac przyznano 9 nagród i 7 wyróżnień. Suma przyznanych nagród i wyróżnień wyniosła 109 tys. zł. Tablica 2.3. podaje zestawienie odbytych konkursów, liczbę nadesłanych prac i rodzaje przyznanych nagród.

Tablica 2.3

Lp.	Oddział i rok zorganizowania konkursu	Rodzaj zgłoszonych prac	Liczba nadesłanych prac	Rodzaj i wysokość przyznanych nagród
1.	Częstochowa 1978	mechanika płynów	12	I, II, III nagroda
2.	Gliwice	teoretyczne	9	I i II nagroda oraz 3 wyróżnienia
3.	Częstochowa	doświadczalne	8	II nagroda i 4 wyróżnienia
4.	Łódź—Warszawa	teoretyczne	8	I, II i III nagroda

Biorąc pod uwagę liczbę prac zgłaszanych na konkursy organizowane przez Oddziały PTMTS, recenzje i opinie oraz dyskusje na posiedzeniach Sądów Konkursowych można stwierdzić, że konkursy spełniają swoją rolę inspiratora i stymulatora działalności naukowo-badawczej młodej kadry naukowej specjalizującej się w dziedzinie mechaniki. Liczba konkursów jest wystarczająca, należy jedynie większą uwagę zwrócić na dostateczny okres czasowy pomiędzy ogłoszeniem i terminem zgłaszania prac na konkurs, lepszą propagandę oraz staranność w doborze recenzentów oceniających poszczególne prace.

### 2.4. Seminaria naukowe i kursy

Obok zebrań naukowych szeroko stosowaną formą działalności Towarzystwa stały się seminaria naukowe i kursy. Jest przy tym rzeczą godną podkreślenia, że akcja ta nabrała cech systematyczności. W okresie XVIII kadencji odbyło się 16 seminariów i 10 kursów. Szczegółowe dane zestawiono w tablicach 2.4 i 2.5.

### 2.5. Działalność wydawnicza

Na działalność wydawniczą Towarzystwa składają się:

- kwartalnik *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*
- materiały wydawane z okazji sympozjonów naukowych zawierające streszczenia bądź pełne referaty zgłoszonych prac.

W XVIII kadencji wydano 8 zeszytów *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* o objętości 46,75 ark. wyd. w 1978 r. i 47,5 ark. wyd. w 1979 r., razem 94,25 ark. Zgodnie z przyjętymi założeniami na treść wydawanych zeszytów składają się oryginalne prace naukowe teoretyczne i doświadczalne, referaty przeglądowe i sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, sympozjonów i zjazdów naukowych. W szczególności w 1978 r. opublikowano 39 prac, a jeden spośród autorów był z zagranicy, natomiast w 1979 r. opublikowano 36 prac i wśród autorów dwóch było z zagranicy. Jeśli dokonać podziału według tematyki, to w 1978 r. 7 prac było doświadczalnych, 4 przeglądowe, 5 z mechaniki płynów, 22 z mechaniki ciała sta-

Tablica 2.4

Lp.	Oddział	Tematyka seminarium	Rok	Liczba ref. lub odbytych spotkań, ucz.
1.	Bydgoszcz	Wybrane zagadnienia z mechaniki płynów	1979	6
2.	Częstochowa	Termo-Aerodynamika maszyn przepływowych	1979	19 r., 30 u.
3.	Gdańsk	Nieliniowa teoria powłok	1978	13 u.
		Liniowa teoria powłok	1978	12 u.
		Metoda elementów skończonych w nieliniowych zagadnieniach ośrodków ciągłych	1979	15 u.
		Metoda elementów skończonych w analizie drgań i stateczności konstrukcji	1979	35 u.
4.	Kraków	Tworzywa sztuczne w budowie maszyn		
5.	Rzeszów	Mechanika konstrukcji	1978	9 r. 23 u.
		Mechanika konstrukcji	1979	8 r. 20 u.
6.	Szczecin	Zagadnienia nieliniowe w mechanice konstrukcji	1978/79	8 r. 20 u.
7.	Warszawa	Optyczne metody doświadczalnej analizy odkształceń i naprężeń	1978	2 r.
8.	Wrocław	Metodologia konstruowania	1979	4 r.
9.	Zielona Góra	Teoria optymalizacji	1978	7 spotkań
		Zastosowanie teorii sprężystości	1978	5 r.
		Wybrane działy kinematyki	1979	9 spotkań
		Dynamika budowli w ujęciu komputerowym	1979	9 spotkań

lego, 12 o innej tematyce, natomiast w 1979 r. odpowiednio podział ten kształtował się następująco 13-1-4-25-7.

W tomie 16 z. 4 w 1978 r., s. 601 - 604 w Biuletynie informacyjnym ukazało się sprawozdanie z XVIII Zjazdu Delegatów i Sesji Naukowej z okazji XX-lecia PTMTS.

Komitet redakcyjny kwartalnika *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* działał w składzie: prof. Marek Dietrich — przewodniczący, prof. Igor Kisiel, prof. Jerzy Maryniak, prof. Witold Nowacki, prof. Jan Szargut, prof. Józef Więckowski, prof. Zbigniew Olesiak — redaktor naczelny, doc. Jacek Stupnicki, prof. Andrzej Szaniawski, prof. Czesław Woźniak, — mgr Monika Wągrowka redaktorzy, mgr. Jerzy Dalek, obecnie mgr Elżbieta Olszewska — sekretarz redakcji.

A oto zestawienie wydanych materiałów w Oddziałach Towarzystwa:

1. VII Sympozjum Drgania w układach fizycznych, streszczenia referatów PTMTS, Oddział Poznań, Błażejewko k. Kórnik 28 - 29 maja 1978.

2. W. Burzyński: *Mechanika układów odkształcalnych*. ZNP Pol. Śl., s. Energetyka, z. 64, Gliwice 1978, ss. 289. Z okazji XX-Lecia PTMTS przygotował do druku J. Wojnarowski.

3. *Konstrukcje powłokowe — teoria i zastosowanie*. Materiały z II Konferencji PTMTS Oddział Gdańsk 1978.

4. *Sprawozdanie z VII Sympozjum Reologii — materiały*. PTMTS Oddział Wrocław, Pol. Wrocławska WDN, Wrocław 1978, ss. 440.

5. *Doświadczalne badania w mechanice ciała stałego*. Materiały VIII Sympozjum PTMTS Oddział Warszawa 1978, cz. I ss. 417.

Tablica 2.5

Oddział	Tematyka kursu, prowadzący	Rok	Liczba uczestników
Częstochowa	1. Analiza korelacyjno-spektralna w przepływach turbulentnych Prow. prof. Janusz Elsner	1978	16
	2. Metody modelowania matematycznego	1979	
Gliwice	3. Zasosowanie grafów w mechanice i technice Prow. doc. Józef Wojnarowski dr Jerzy Kaczmarski	1977/78	18
	4. Metoda elementów skończonych dla inżynierów/rozpoczęto w marcu Prow. doc. Antoni Jakubowicz	1980	38
Łódź	5. Analiza niestandardowa i jej zastosowanie w mechanice /5 wykładów Prow. prof. Czesław Woźniak	1978	10
Opole	6. Ogólne podstawy mechaniki ośrodków ciągłych Prow. doc. Jan Kubik	1978/79	9
	7. Metody numeryczne mechaniki konstrukcji Prow. dr Tadeusz Smoleń	1979	9
	8. Pierwsza szkoła mechaniki nt. „Statyka nieliniowych układów prętowych oraz przyrostowych metod w nieliniowej analizie konstrukcji” Prow. doc. Jan Kubik	1979	12
Poznań	9. Powłoki pneumatyczne i ciągną Metoda różnic skończonych przy nieregularnej siatce węzłów Zagadnienia własne dla dużych układów Automatyczna aproksymacja danych doświadczalnych przy zastosowaniu funkcji typu SPLINE	1979	27
	10. Metody elementów skończonych 4 wykłady Prow. dr M. Ciałkowski, mgr M. Kwiek dr K. Magnucki	1979	44
			183

6. Doświadczalne badania w mechanice ciała stałego. Materiały VIII Sympozjum PTMTS Oddział Warszawa 1978, cz. II ss. 462.
7. Doświadczalne badania w mechanice ciała stałego. Suplement VIII Sympozjum PTMTS Oddział Warszawa 1978, ss. 58.
8. J. Kubik, A. Zybur: Mechanika i termodynamika procesów korozji żelbetu. PTMTS Oddział Opole 1978, nakł. 14 egz.
9. J. Elsner: X-lecie Oddziału Częstochowskiego PTMTS, Częstochowa 1979.
10. XVIII Sympozjon „Modelowanie w mechanice”, zbiór referatów 44, PTMTS Oddział Gliwice, 1979, ss. 404.
11. Problemy dynamiki konstrukcji. Zbiór prac IV Sympozjum, Rzeszów listopad 1979, ss. 480.
12. M. Wróbel: Wariacyjne ujęcie sprzężonych przepływów ciepłno-dyfuzyjnych w ciele lepkosprężystym. PTMTS Oddział Opole 1979, ss. 91.
13. B. Pała: Stany naprężeń w betonowych osłonach reaktorów jądrowych. PTMTS Oddział Opole 1979, ss. 56.
14. M. Biskup: Stany graniczne ram dla modelu ciała sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem. PTMTS Oddział Opole 1979, ss. 60.
15. XIX Sympozjon „Modelowanie w mechanice”, zbiór referatów nr 45, PTMTS Oddział Gliwice 1980, ss. 348.
16. J. Kubik: Wprowadzenie do statyki układów niesprężystych. PTMTS Oddział Opole 1980, ss. 259.

#### 2.6. Członkowie Honorowi PTMTS

W uznaniu za wybitną działalność w dziedzinie rozwoju mechaniki oraz zasług położonych dla Towarzystwa Zarząd Główny przygotował na XIX Zjazd Delegatów wnioski o nadanie godności Członka Honorowego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej profesorom

- Igorowi Kisielowi — Członkowi Oddziału Wrocławskiego
- Janowi Oderfeldowi — Członkowi Oddziału Warszawskiego.

#### 2.7. Członkowie zagraniczni

Zarząd Główny na zebraniu plenarnym w dniu 30.11.1979 r. podjął uchwałę o wystąpienie do Sekretarza Naukowego PAN z wnioskiem o powołanie następujących uczonych na Członków Zagranicznych naszego Towarzystwa profesorów:

- Stephen H. Crandal — Massachusetts Institute of Technology USA
- Konstantin W. Frolow — AN ZSRR
- Charles Massonet — Liège, Belgia
- Jerzy R. Moszyński — University of Dalaware, USA
- Antoni K. Oppenheim — University of California, USA
- Czesław Rodkiewicz — The University of Alberta, Kanada.

Zaproponowani na członków naszego Towarzystwa profesorowie prowadzą ożywioną działalność naukową z zakresu mechaniki i współpracują z polskimi uczelniami.

#### 2.8. Informacje o międzynarodowych organizacjach rozwijających działalność z mechaniki

W czasie zebrań plenarnych Zarządu Głównego organizowano wystąpienia przedstawicieli międzynarodowych organizacji reprezentujących dyscyplinę mechaniki. Dzięki temu uczestnicy plenarnych zebrań Zarządu Głównego zapoznali się z formami działalności IFToMM, IUTAM, EUROMECH (tablica 2.6).

Ponadto doc. dr hab. W. K. Nowacki w dniu 25 maja 1979 r. przedstawił formy i zakres działania Komitetu Mechaniki Polskiej Akademii Nauk.

Tablica 2.6

Lp.	Nazwa organizacji	Prezenter	Data
1.	International Union Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM)	Prof. S. Zahorski Sekretarz Polskiej Grupy IUTAM	9.12.1978
2.	International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms (IFTOMM)	Prof. A. Morecki Sekretarz Generalny IFTOMM	25.05.1979
3.	European Mechanics (EURO-MECH)	Prof. W. Fiszdon	30.11.1979

Pragniemy podkreślić, że informacje o międzynarodowych organizacjach rozwijających działalność w dziedzinie mechaniki adresowano poprzez Przewodniczących Oddziałów do ogółu Członków Towarzystwa i to z myślą o zachęceniu wszystkich do większej aktywności w międzynarodowym życiu naukowym.

#### 2.9. Dyskusje „Okrągłego stołu”

Dla wzajemnej informacji o tematyce prowadzonych prac badawczych a także jako forma swobodnej wymiany poglądów organizowano w Oddziałach dyskusje „Okrągłego stołu”.

Między innymi przeprowadzono dyskusje na temat:

- prac naukowych realizowanych w ośrodkach krajowych,
- metod symulacyjnych w budowie maszyn,
- nauczania mechaniki w uczelniach technicznych.

Ogółem w XVIII kadencji zorganizowano 6 dyskusji.

#### 2.10. Zagraniczni goście Towarzystwa

Gośćmi Towarzystwa w poszczególnych Oddziałach byli:

##### Oddział

Częstochowa	Doc. F. Molesa	VSD Žilina, CRS
	Ing P. Zdeno	VSD, Žilina, CRS
	Doc. V. Korolev	ZSRR
	Prof. M. Markovin	USA
Gdańsk	Prof. H. Stumpf	Bochum, RFN
	Doc. A. P. Popov	ZSRR
Gliwice	Dr László Forrei	Miskolc, Węgry
Kraków	Prof. T. S. Dane	Edinburg, W. Brytania
	Dr W. Stiasny	Bratysława
	Prof. J. Pindera	Waterloo, Kanada
Łódź	Prof. S. H. Crandall	Massachusetts, USA
	Dr J. M. Prentis	Cambridge, W. Brytania
	Prof. W. King	
	Prof. C. W. Radcliffe	Berkeley, USA
	Prof. I. S. Rao	Delhi, India
Poznań	Prof. G. Eason	Glasgow, W. Brytania
Szczecin	Prof. H. Phau	WSI Wismar
	Prof. H. Moll	Hanower, RFN



Warszawa	Prof. C. Atkinson	Londyn
	Doc. W. J. Andrejew	Moskwa, ZSRR
Wrocław	Prof. K. Shimada	Tokyo
	Prof. C. Rodkiewicz	Edmonton, Kanada.

### 3. Podsumowanie działalności Towarzystwa.

W okresie XVIII kadencji dalszy rozwój Towarzystwa polegał na następujących osiągnięciach.

1. Powstały dwa nowe Oddziały: w Lublinie i w Bielsku-Białej tak, że obecnie liczba Oddziałów wynosi piętnaście.

2. W okresie sprawozdawczym liczba członków Towarzystwa wzrosła o 87 osób co wynosi 9,8%.

3. Liczba zebrań naukowych wyniosła 176.  
liczba wygłoszonych na nich referatów 185.

W zebraniach tych wzięło udział około 2700 uczestników a około 700 zabrało głos w dyskusji.

4. Zorganizowano

9 sympozjonów, na których wygłoszono 456 referatów,

4 konkursy naukowe, na które zgłoszono 37 prac,

16 seminariów,

10 kursów,

6 dyskusji okrągłego stołu.

Ogółem podczas wszystkich zorganizowanych spotkań naukowych wygłoszono 641 referatów.

W ramach zebrań naukowych 22 uczonych z zagranicy było gośćmi Towarzystwa.

5. W ramach akcji wydawniczej wydano: 8 zeszytów kwartalnika *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, w których opublikowano 75 artykułów, 11 pozycji systemem małej poligrafii i 5 pozycji (Oddział Opole) w postaci odbitek kserograficznych.

6. Opracowano zestawienie instytutów, zakładów i zespołów rozwijających w Polsce działalność w zakresie dyscypliny mechanika.

7. Odbyto

5 zebrań plenarnych Zarządu Głównego

6 zebrań prezydium Zarządu Głównego

8. Prowadzono ciągłą informację Członków Towarzystwa o odbywających się konferencjach ogólnokrajowych i zagranicznych.

9. Wprowadzono na zebraniach plenarnych Zarządu Głównego prezentacje działalności międzynarodowych organizacji naukowych IUTAM, IFToMM i EUROMECH.

10. Dokonano oceny poziomu naukowego i organizacyjnego sympozjonów i konkursów zorganizowanych w 1978 i 1979 roku.

11. Wręczono z okazji XX-lecia PTMTS pisemne podziękowania wieloletnim Członkom PTMTS za pracę w Towarzystwie.

Zbiorcze zestawienie działalności Towarzystwa ujmuje tablica 2.7.

### 4. Uwagi końcowe.

Przeprowadzenie dokładnej analizy z działalności Towarzystwa jest niewątpliwie trudne. Zestawione w sprawozdaniu dane i tablice mają różną wagę a ich ujęcie tylko w sposób statystyczny i orientacyjny charakteryzuje rzeczywisty wkład pracy Oddziałów. Próba takiego przedstawienia działalności Oddziałów jest więc napewno uproszczona i może nasuwać wiele uwag natury metodologicznej, wydaje się jednak pożyteczna dla zorientowania się w głównych liniach realizacji zadań Towarzystwa. Może być także podstawą do doskonalenia metod analizy pracy w przyszłych kadencjach. Należałoby podjąć również ogólniejszą i głębszą analizę nad zagadnieniem w jakim stopniu działalność naukowa PTMTS wpływa na rozwój mechaniki, na postęp techniczny czy na inspirację tematyki badań naukowych. Wydaje się, że są to problemy, które powinny włączyć do swojego programu Oddziały Towarzystwa.

Tablica 2.7

Liczbowe zestawienie działalności  
Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w XVIII kadencji  
tj. od 9 III 1978 r. do 20 V 1980 r.

Lp.	Oddziały i Zarząd Główny	Członków	Liczba										Wydawnictw
			Zebrania		Wygłoszo- nych refe- ratów	Zorganizowa- nych sympoz. i konf.	Seminariów	Kursów	Konkursów	Kursów	Wydawnictw		
			Zarządu i Prez. Zarządu	Naukowych Zarządu									
1.	Bydgoszcz	32	9	14	14	—	1	—	—	—	—	—	
2.	Częstochowa	63	9	21	24	—	1	2	2	2	2	1	
3.	Gdańsk	63	8	16	16	1	4	—	—	—	—	1	
4.	Gliwice	161	28	15	16	2	—	2	2	1	1	3	
5.	Kraków	73	9	10	10	1	1	—	—	—	—	—	
6.	Lublin	44	6	9	9	—	—	—	—	—	—	—	
7.	Łódź	61	6	15	18	1	—	—	1	1*	—	—	
8.	Opole	21	10	17	17	—	—	—	3	3	—	5	
9.	Poznań	75	7	4	4	1	—	—	2	2	—	1	
10.	Rzeszów	21	15	4	4	1	—	—	—	—	—	1	
11.	Szczecin	39	6	16	16	—	—	—	—	—	—	—	
12.	Warszawa	201	16	7	9	1	1	1	—	—	1*	3	
13.	Wrocław	81	22	14	15	1	1	1	—	—	—	1	
14.	Zielona Góra	22	19	13	12	—	—	4	—	—	—	—	
15.	Bielsko-Biała	14	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	
16.	Zarząd Główny	—	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
	Razem	971	182	176	185	9	16	10	4	25	8	8 MTS	

\* Konkurs organizowany wspólnie.

Podsumowując nie ulega wątpliwości, że osiągnięcia Oddziałów są znaczne. Oddziały Towarzystwa prowadziły działalność naukową na miarę zadań i swoich możliwości. Jedne z nich cały swój wysiłek skierowały na zebrania naukowe i sympozjony, inne na seminaria czy też kursy. Te odmienne formy aktywności przez poszczególne Oddziały są dowodem, że nasze Towarzystwo w zakresie swej działalności dostosowuje się do możliwości oraz indywidualnych predyspozycji organizatorów.

Wymienione wyżej osiągnięcia, podane tu w dużym skrócie, można było uzyskać jedynie dzięki ofiarnej i aktywnej pracy Członków Towarzystwa za co Zarząd Główny wyraża im gorące podziękowanie.

*Józef Wojnarowski*

**MIĘDZYNARODOWE SYMPOZJUM  
„DEFECTS AND FRACTURE” („DEFEKTY A TEORIA PĘKANIA”)  
Tuczno, 13.17.10.1980**

W październiku ubiegłego roku odbyło się w Tucznie (woj. Piłskie), w Domu Pracy Twórczej SARP, pięciodniowe międzynarodowe sympozjum naukowe poświęcone pewnej dziedzinie współczesnej teorii pękania i fizyki ciała stałego, a mianowicie teorii defektów i jej związkom z mechaniką tworzenia się i rozwoju szczelin w ośrodkach ciągłych i materiałach konstrukcyjnych.

Sympozjum zorganizowane zostało staraniem Instytutu Pękania (Institute of Fracture) Lehigh University w Bethlehem (USA), reprezentowanego przez Prof. C. C. Sih oraz Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, reprezentowanego przez Prof. H. Zorskiego. Wymienieni profesorowie byli współprzewodniczącymi sympozjum i stali na czele Komitetu Naukowego sympozjum, w skład którego wchodził ponadto profesorowie D. R. Axelrad i J. W. Provan z Kanady, R. Bullough z W. Brytanii i R. De Wit ze Stanów Zjednoczonych. Komitet ten był odpowiedzialny zarówno za dobór uczestników spotkania (uczestnictwo w obradach odbywało się wyłącznie na zasadzie indywidualnych zaproszeń), jak i za przyjęcie zaproponowanych przez autorów referatów.

W dobie obserwowanego od około dwudziestu lat burzliwego rozwoju teorii i mechaniki pękania ciał stałych, tego rodzaju polityka selekcji uczestników spotkań naukowych i doboru odpowiednio sprecyzowanej i zawężonej tematyki jest jedyną rękojmą ich rzeczywistej efektywności. Także i w tym przypadku polityka ta okazała się w pełni słuszna. Ograniczenie liczby przyjętych referatów do 22 (w konferencji poza referentami brało również udział kilku obserwatorów z różnych polskich ośrodków naukowych) wpłynęło w sposób zasadniczy zarówno na poziom przedstawionych referatów, jak i na pełne zaangażowanie wszystkich uczestników w obradach sympozjum w całym okresie jego trwania.

Pełny materiał naukowy (zbiór kilkunastostronicowych opracowań poszczególnych referatów) ukaże się w najbliższych miesiącach w opracowaniu książkowym przygotowywanym przez wydawnictwo Noordhoffa w Holandii (pod redakcją G. C. Sih). Tutaj zasygnalizować warto jedynie kilka ciekawych tematów poruszonych przez niektórych referentów. G. I. Barenblatt mówił o zastosowaniach analizy wymiarowej i metod podobieństwa do badania kinetyki wzrostu szczelin zmęczeniowych. B. C. Edwards referował wyniki swych badań eksperymentalnych na temat wpływu segregacji zanieczyszczeń śladowych na pękanie śródziarnowe i międzymiarnowe. F. Gillemot omawiał zastosowania różnych kryteriów energetycznych, a w szczególności tzw. kryterium ASPEF, do oceny defektów spawalniczych w zbiornikach ciśnieniowych stosowanych w energetyce atomowej. Podstawy fenomenologicznych teorii pękania ośrodków ciągłych były tematem kilku referatów wygłoszonych przez E. Kossecką, E. Krönnera oraz zespołowej pracy M. Matczyńskiego, M. Sokolowskiego i H. Zorskiego. S. Minagawa przedstawił teoretyczną pracę o zastosowaniu geometrii nieriemannowskiej do teorii defektów w ośrodkach typu Cosseratów. Referat H. Liebowitza, J. D. Lee i N. Subramoniana omawiał różne koncepcje liniowej i nieliniowej mechaniki pękania takie jak liniowa mechanika pękania kruchej, tworzenie się stref plastycznych w wierzchołku szczeliny, wpływy termiczne i dynamiczne. Różne aspekty problematyki powstawania i rozwoju pęknięć zmęczeniowych przedstawiali T. H. Lin, H. Meghrabi, J. W. Provan i G. C. Sih; praca ostatniego z wymienionych referentów stanowiła obszerny przegląd jego najnowszych badań teoretyczno-doświadczalnych nad rozwojem

pęknięć zmęczeniowych i akumulacją uszkodzeń w stopach metali na poziomie makroskopowym. W. Szczepiński mówił o mechanizmach pęknięcia ciągłego w metalach. W. Greenwood przedstawił swe teoretyczne rozważania na temat ruchu dyslokacji i wakansji w procesach pęknięcia przy podwyższonych temperaturach. Probablistyczne aspekty teorii pęknięcia poruszył K. C. Valanis.

Na osobne wyróżnienie zasługuje wysoki poziom organizacyjny sympozjum.

*Marek Sokolowski*

**SYMPOZJUM  
POWSTAWIANIE I RUCH SZCZELIN  
(Tuczo 23 - 27 marca 1981)**

Organizatorzy: Międzynarodowy Ośrodek Nauk Mechanicznych (CISM), Udine, Włochy; Instytut Podstawowych Problemów Techniki, PAN.

Komitet organizacyjny: Przewodniczący — Prof. W. Olszak, Prof. M. Sokolowski; członkowie — profesorowie A. Ben-Menachen, J. Carlson, L. B. Freund, Yu. N. Rabotnov, I. N. Sneddon; sekretarz — doc. dr M. Matczyński.

W pięknej scenerii zamku Wedłów — Tuczyńskich, pomiędzy ukrytymi w lasach jeziorami odbyło się międzynarodowe sympozjum na temat mechaniki pęknięcia. Autorytet członków Komitetu Organizacyjnego i ranga Instytucji Organizujących spowodował, że sytuacja społeczno-polityczna nie wystraszyła zaproszonych gości. Przyjechało wielu reprezentantów siedmiu krajów, niemniej zawiodło kilkunastu, na których obecność bardzo liczono. Wygłoszono 20 godzinnych referatów, odbyła się też krótka sesja plakatowa. Po każdym bez wyjątku referacie toczyły się kilkunastominutowe dyskusje, które znalazły swój finał ostatniego dnia w plenarnej sesji podsumowującej obrady.

Referaty swą tematyką objęły szeroki zakres mechaniki zniszczenia i choć nacisk położono raczej na zagadnienia podstawowe znalazły się w programie również prace o bezpośrednim praktycznym zastosowaniu.

**Zagadnienia dynamiczne** reprezentowane były w wielu pracach.

A. S. KOBAYASHI (USA) przedstawił wyniki prac doświadczalnych w referacie „Dynamika pęknięcia pewnych polimerów, szkła i stali” F. NILSSON (Szwecja) w pracy „Niektóre rezultaty analizy dynamicznego ruchu szczelin w sprężysto-lepkoplastycznym materiale” zaprezentował rozwiązanie dynamicznego zagadnienia dla trzeciego schematu pęknięcia dla pewnego prostego związku konstytutywnego ciała lepkoplastycznego, W. G. KNAUSS (USA) przedstawił pracę „Przejsiowy ruch szczeliny spowodowany falą naprężeń”. Autor pokazał niezwykle ciekawe wyniki doświadczeń dotyczących ruchu szczeliny pod działaniem nagłych zewnętrznych obciążeń oraz pomiar współczynników intensywności naprężeń (WIN). Tą samą technikę pomiarową zastosowali: J. F. KALTHOF, W. KLEMN (RFN) i T. KOBAYASHI (USA) w pracy: „Badanie energii kinetycznej szczelin sztucznie zatrzymanych we wczesnych i późnych stadiach propagacji”. M. HUMEN, Z. BILEK i J. BUCHAR (CSRS) zaprezentowali ciekawą pracę dotyczącą pomiarów WIN związanych z etapem inicjacji ruchu i zatrzymania szczelin poruszających się z dużymi prędkościami w materiałach optycznie czułych. Tytuł pracy: „Inicjacja i propagacja szczelin pod wpływem fali naprężeń”. K. KISHIMOTO, S. AOKI (Japonia) przedstawili referat pt. „Wpływ rozkładu naprężeń na rozgałęzianie się szczelin w szkłe”, który zaklasyfikować można do teoretyczno-eksperymentalnego studium z zakresu dynamiki szczelin. K. B. BROBERG (Szwecja) wygłosił interesującą pracę „O osobliwościach podczas ruchu szczeliny przez poślizg z dużymi prędkościami”. Z. OLESIAK (Polska) w pracy „Dynamiczny stan naprężeń wokół dwu ruchomych płaskich szczelin” przedyskutował zjawisko ruchu dwu szczelin aż do ich wzajemnego połączenia się.

**Zagadnienia zmęczenia metalu** opisano w dwóch pracach:

N. G. OHLSON (Szwecja) przedstawił pracę „Fenomenologiczna analiza wpływu utwardzenia cyklicznego na inicjację szczelin”, G. GLINKA (Polska) zaprezentował interesujący model zmęczeniowego wzrostu szczeliny w pracy „Kumulacyjny model zmęczeniowego wzrostu szczeliny. Model zweryfikowano doświadczalnie.

Dynamiczny i quasi-statyczny ruch szczelin stał się tematem pracy D. R. CURRANA (USA), której tytuł brzmi: „Mikrostrukturalne podłoże odporności materiału na pękanie”. Przedyskutowano tu zjawisko tworzenia się pustek przed frontem szczeliny.

**Podkrytyczny ruch szczelin i pękanie w warunkach pełzania** przedyskutowano kolejno w pracach: M. P. WNUK (USA) — „Rozwój szczeliny przy zmiennym kroku wzrostu” przedstawiono tu model i kryterium podkrytycznego wzrostu szczeliny teorię zweryfikowano doświadczalnie. H. RIEDEL (RFN) w pracy „Makroskopowe szczeliny w warunkach pełzania” podał szeroką teorię zniszczenia w różnych etapach pęknięcia, teorię opartą na wnikliwej analizie prac eksperymentalnych. W. SZCZEPIŃSKI (Polska) przedstawił bardzo interesujący model zniszczenia ciała polikrystalicznego. Zapostulowano zniszczenie po granicach ziaren czyli odpowiadające zniszczeniu wysokotemperaturowemu Tytuł pracy: „O modelach postępującego międzykrystalicznego pęknięcia i poślizgu”. A. NEIMITZ (Polska) w pracy „Fizyczno-mechaniczny model szczeliny w warunkach pełzania” przedstawił teoretyczny model wzrostu skokowego szczeliny na skutek procesu rozwoju pustek w strefie pęknięcia. H. HOMMA, H. NAKAZAWA (Japonia) wykorzystując całkę  $J$  i kryterium wierzchołkowego rozwarcia badali ustalony wzrost szczelin. Wyniki przedstawili w pracy „Ciągłiwy i ustalony wzrost szczelin”. Również w sesji plakatowej przedstawiono dwie prace, które mogą być zaliczone do powyższej grupy referatów, są to: M. CHRZANOWSKI, J. MIĘTŁA (Polska) — „Wzrost pustek w obszarze między ziarnami jako efekt kumulacji zniszczenia”, Z. GMUR, G. GLINKA (Polska) — „Odporność na zniszczenie ciągliwych materiałów”

**Zagadnienia stacjonarne** przedstawiono w pracach:

M. MATCZYŃSKI, M. SOKOŁOWSKI — (Polska) — „Oddziaływanie szczelin w ośrodku sprężystym”. W pracy tej analizowano wzajemne oddziaływanie szczelin w różnych konfiguracjach wykorzystując ogólne zasady teorii defektów w ośrodku sprężystym zaproponowanej przez Eshelby’ego i Zorskiego. G. KUHN (RFN) zaprezentował pracę „Sformułowanie granicznego problemu dla wydzielonego elementu z ciała zawierającego określoną konfigurację szczelin”.

B. MICHEL (NRD) wygłosił referat na temat: „Sprzężenie mechaniki kwantowej z mechaniką pęknięcia”, A. BORCZ (Polska) w pracy „Szczeliny w konstrukcjach z cementu” przedstawił rozwiązania dla kilku konkretnych obiektów obciążonych z zewnątrz i osłabionych szczelinami.

R. WÓJCIK i J. STUPNICKI w ramach sesji plakatowej zaprezentowali pracę: „Możliwość rozwoju szczeliny na skutek chwilowych obciążeń kontaktowych”. Oprócz przedpołudniowych i popołudniowych sesji uczestnicy mogli brać udział w kilku świetnie zorganizowanych imprezach, takich jak: zapoznawczy koktail, wycieczka autokarowa po okolicach, koncert muzyków Państwowej Orkiestry Kameralnej z Torunia, uroczysta kolacja. Organizacja całego sympozjum zasługuje na najwyższą notę. Najbardziej wybredny nie mógłby dopatrzeć się błędów lub niedociągnięć.

*Andrzej Neimitz*

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty  
Cena prenumeraty krajowej  
rocznie zł 120.—  
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland, Please send payments to the account of Ars Polona—Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)*

---