

*Z<sup>u</sup> 720*

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



PL ISSN 0079-3701

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 19 · ZESZYT 1

WARSZAWA 1981

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

*531*

SPIS TREŚCI

N. CYGANOWA, Badanie charakteru wariacyjnego zasady Jourdaina i jej związku z ogólnymi twierdzeniami dynamiki . . . . .	3
Исследование вариационного характера принципа Журдена и связи его с общими теоремами динамики . . . . .	
On variational character of Jourdain's principle and its relations with general theorems of dynamics . . . . .	
Z. GABRYSZEWSKI, W. SRÓDKA, Zastosowanie temperatury sprzężonej z odkształceniami do oceny dysypacji energii i wyznaczania granic plastyczności. . . . .	11
Применение температуры сопряжённой с деформациями для оценки энергии и определения предела пластичности	
The effect of temperature coupled with strains for estimation of energy dissipation and determination of the yield limit. . . . .	
A. KISIEL, S. PIĘCZNIK, Reologiczne efekty prętów metalowych równocześnie zginanych i rozciąganych . . . . .	27
Реологические эффекты в изгибаемых и растягиваемых металлических балках	
Reological effects in metal beams and tension. . . . .	
W. I. ANDRZEJEW, Zagadnienia koncentracji naprężeń w otoczeniu otworów w ośrodku niejednorodnym. Cz. II . . . . .	41
Вопросы концентрации напряжений вблизи отверстий в неоднородной среде. Ч. II	
Stress concentration in the neighbourhood of holes in a nonhomogeneous medium. Part II . . . . .	
G. GASIĄK, Pełzanie cienkich powłok w zakresie dużych odkształceń . . . . .	57
Ползучесть тонких оболочек вращения по теории установившегося течения	
Creep of thin axially-symmetric shells based on the theory of plastic flow . . . . .	
A. GAŁKA, O formułowaniu dwuwymiarowych zagadnień brzegowych teorii sprężystości . . . . .	69
О построении двухмерных краевых задач в теории упругости	
Construction of two-dimensional boundary value problems in the theory of elasticity . . . . .	
W. BUBIEŃ, K. SZABELSKI, Metoda symulacji złożonych obciążeń stochastycznych w badaniach zmęczeniowych elementów . . . . .	81
Метод симуляции сложных стохастических нагрузок в усталостных исследованиях элементов	
A method of simulation of the complex stochastic loads in the fatigue tests of elements . . . . .	
T. SOŁKOWSKI, Płynięcie kołnierza przy kształtowaniu wytłoczki z niejednorodnej blachy anizotropowej . . . . .	95
Течение фланца при глубокой вытяжке деталей из неоднородного анизотропного материала	
Flow of the flange in deep drawing of shells from a non-homogeneous anisotropic sheet metal	
B. WOSIEWICZ, O pewnej interpretacji metod energetycznych dla problemów filtracji ustalonej . . . . .	105
К интерпретации энергетических методов решения задач стационарной фильтрации	
An interpretation of variational methods for steady seepage problems . . . . .	
M. NOWAK, A. WŁOSNOWICZ, Zmiany struktury poliamidu 6 w procesie niszczenia zmęczeniowego . . . . .	115
Исследование механизма усталостного разрушения полиамида (тарнамида Т-27)	
Variation of polyamid 6 structural parameters resulting from fatigue failure process . . . . .	
W. KORDYLEWSKI, H. KRUCZEK, Numeryczne modelowania zaplonu cząstki paliwa stałego . . . . .	125
Численное моделирование процесса воспламенения частицы твердого топлива	
Single particle of solid fuel ignition modelling . . . . .	
J. LEVRECHT, Naddźwiękowy przepływ w obszarze wylotowym dośrodkowego wieńca kierującego . . . . .	137
Модель сверхзвукового течения за центростремительной решеткой	
Supersonic outlet flow in a centri petal blade cascade . . . . .	
Biuletyn informacyjny . . . . .	153

*J<sup>u</sup> 720*

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

TOM 19 • ZESZYT 1

WARSZAWA 1981  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

### KOMITET REDAKCYJNY

MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,  
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,  
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,  
JÓZEF WIĘCKOWSKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK—REDAKTOR NACZELNY,  
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR  
ANDRZEJ SZANIAWSKI—REDAKTOR,  
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR  
MONIKA WĄGROWSKA—REDAKTOR,  
ELŻBIETA OLSZEWSKA—SEKRETARZ

### REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

---

Nakład 640. Ark. wydawniczych 12,5. Ark. drukarskich 10,25. Papier druk. mat. kl. III, 90 g. 70×100.  
Oddano do składania 12.I.1981 r. Druk ukończono w grudniu 1981 r. Zam. 82/81. Cena zł 30.—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

O WARIACYJNYM CHARAKTERZE ZASADY JOURDAINA I JEJ ZWIĄZKU Z OGÓLNYMI  
TWIERDZENIAMİ DYNAMIKI

N. CYGANOWA (MOSKWA)

Zasada Jourdaina jest różniczkową zasadą wariacyjną mechaniki niezmienną się układu punktów materialnych. Ma ona postać zasady wariacyjnej ponieważ w jej analitycznym zapisie występuje wariacja prędkości.

W niniejszej pracy badamy wariacyjny charakter zasady i jej związek z ogólnymi twierdzeniami dynamiki.

1. Zasada Jourdaina jest różniczkową wariacyjną zasadą mechaniki, zajmującą pośrednie miejsce między zasadą d'Alamberta-Lagrange'a i zasadą najmniejszego skrępowania Gaussa. Zasada ta została wyprowadzona przez angielskiego uczonego F. Jourdaina w 1909 r.

1. Dowód F. Jourdaina jest następujący.

Rozpatruje się układ „ $n$ ” punktów materialnych z więzami holonomicznymi i liniowymi nieholonomicznymi. Równania więzów holonomicznych i liniowych nieholonomicznych przyjmują postać

$$(1) \quad dx_i = \sum_{\nu=1}^s a_{i\nu} dq_\nu + a_i dt \quad (i = 1, 2, \dots, 3n),$$

gdzie  $x_i$  — kartezjańskie współrzędne układu punktów,  $q_\nu$  — współrzędne uogólnione,  $a_{i\nu}$  i  $a_i$  — pewne funkcje  $q_\nu$  i  $t$ . Porównajmy analityczne wyrażenia zasad d'Alamberta-Lagrange'a i Gaussa i odpowiadające im procesy wariacyjne

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0, \quad \delta t = 0, \quad \delta x_i \neq 0,$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta_2 \ddot{x}_i = 0, \quad \delta_2 t = 0, \quad \delta_2 x_i = \delta_2 \dot{x}_i = 0, \quad \delta_2 \ddot{x}_i \neq 0,$$

dla większej jasności wariacje w tych dwóch zasadach oznaczone są odpowiednio przez  $\delta$  i  $\delta_2$ .

Wariacje współrzędnych w zasadzie d'Alamberta-Lagrange'a i wariacje przyspieszeń w zasadzie Gaussa spełniają związki

$$(4) \quad \delta x_i = \sum_{\nu=1}^s a_{i\nu} \delta q_\nu,$$

$$(5) \quad \delta_2 \ddot{x}_i = \sum_{\nu=1}^s a_{i\nu} \delta_2 \ddot{q}_\nu,$$

F. Jourdain zauważa, że jeśli rozpatrzmy nowy proces wariacyjny  $\delta_1$ , dla którego  $\delta_1 t = 0$ ,  $\delta_1 \dot{x}_i = 0$ , a  $\delta_1 \ddot{x}_i \neq 0$ , to wariacje prędkości będą spełniały warunki

$$(6) \quad \delta_1 \dot{x}_i = \sum_{v=1}^s a_{iv} \delta_1 \dot{q}_v$$

podobnie jak warunki (4) i (5) dla  $\delta x_i$  i  $\delta_2 \ddot{x}_i$  w procesach wariacyjnych  $\delta$  i  $\delta_2$ . Stąd wnioskuje on, że w wyrażeniu (2) zasady d'Alamberta-Lagrange'a  $\delta x_i$  można zastąpić przez  $\delta_1 \dot{x}_i$  (lub w wyrażeniu (3) zasady Gaussa  $\delta_2 \ddot{x}_i$  zastąpić przez  $\delta_1 \dot{x}_i$ ) i dochodzi do wyrażenia analitycznego nowej zasady wariacyjnej w postaci

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta_1 \dot{x}_i = 0, \quad \delta_1 t = 0, \quad \delta_1 x_i = 0.$$

Przechodząc w równaniu (7) do współrzędnych uogólnionych, F. Jourdain otrzymuje równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla układów holonomicznych, a dla liniowych nieholonomicznych układów układ równań Ferrersa. W ten sposób, zasada Jourdaina (7) nie prowadzi do nowej formy równań ruchu. Jedyne zasady Gaussa daje nową postać równań — równania Appela. Dalsze badanie zasady Jourdaina związane jest z pracami austriackiej szkoły fizyków Leitingera i Wassmutha. W pracy z 1913 r. [2] Leitinger wyprowadza zasadę Jourdaina, różniczkując równanie d'Alamberta-Lagrange'a (2) względem czasu i następnie przechodząc w otrzymanym wyrażeniu

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{d}{dt} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta x_i = 0$$

do wariacji Jourdaina, tzn. podstawiając  $\delta_1 x_i = 0$ . Wówczas równanie (8) otrzymuje postać (7). Analogicznie różniczkując względem czasu równanie (7), przedstawiające zasadę Jourdaina i przechodząc w otrzymanym wyrażeniu do wariacji Gaussa, Leitinger wykazał również związek zasady Jourdaina z uogólnioną zasadą najmniejszego działania Höldera-Vossa dla układu z holonomicznymi i liniowymi nieholonomicznymi więzami, w ogólnym przypadku niestacjonarnymi. Zasada Höldera-Vossa dla takich układów ma postać

$$(9) \quad \int_{t_0}^{t_1} (\Delta T dt + 2T \Delta t + dT \Delta t + \delta A dt) = 0,$$

gdzie  $T$  — energia kinetyczna układu,  $\delta A$  — praca wirtualna działających sił,  $\Delta$  — asynchroniczna (zupełna) wariacja. Uogólniona zasada najmniejszego działania u Höldera opiera się na zasadzie d'Alamberta-Lagrange'a. Voss przechodząc do współrzędnych uogólnionych pokazał, że uogólniona zasada najmniejszego działania dla układów holonomicznych odpowiada równaniom Lagrange'a drugiego rodzaju, a dla liniowych układów holonomicznych — równaniom Ferrersa, przy czym Voss rozpatrzył przypadek więzów niestacjonarnych.

Leitinger wyprowadził zasadę Höldera-Vossa bezpośrednio z zasady Jourdaina, przekształcając w odpowiedni sposób wyrażenie podcałkowe w całce Vossa (9). Jeśli więzy holonomiczne są nałożone na układ niestacjonarny, to niesynchroniczne wariacje uogól-

nionych współrzędnych  $\Delta q_i$  są następująco związane z wirtualnymi wariacjami tych współrzędnych

$$(10) \quad \Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t$$

a dla  $\Delta$  — uogólnionych wariacji prędkości mamy

$$(11) \quad \Delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (\Delta q_i) - \dot{q}_i \frac{\Delta t}{dt}.$$

Uwzględniając równania (10) i (11), oraz wyrażenie dla wirtualnej pracy sił działających

$$\delta A = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i$$

podcałkowe wyrażenie całki (9) można przedstawić w postaci

$$(12) \quad \Delta T dt + 2T \Delta t + dT \Delta t + \delta A dt = \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + Q_i \delta q_i + \right. \\ \left. + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i \right) dt - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t \right) \right] + \frac{d}{dt} (2T \Delta t) dt.$$

Różniczkując równanie (12) względem czasu i następnie podstawiając w otrzymanym wyrażeniu, zgodnie z zasadą Jourdaina  $\delta q_i = 0$ , a także uwzględniając wyrażenie zasady Jourdaina dla układów holonomicznych i liniowych nieholonomicznych w postaci

$$(13) \quad \sum_{i=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta \dot{q}_i = 0,$$

Leitinger dochodzi do równania

$$\frac{d}{dt} [\Delta T dt + 2T \Delta t + dT \Delta t + \delta A dt] = \\ = \sum_{i=1}^s \left[ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t \right) \right] + \frac{d^2}{dt^2} (2T \Delta t),$$

które można rozpatrywać, jako jedno z analitycznych wyrażenń zasady Jourdaina. Całkując dwukrotnie ostatnie równanie względem czasu  $t$  w określonych granicach, odpowiadającym założonemu początkowemu i końcowemu położeniu układu, — Leitinger otrzymuje równanie (9), wyrażające zasadę Höldera-Vossa dla więzów niestacjonarnych. Dane wyprowadzenie znacznie upraszcza się, jeśli więzy są stacjonarne. Wówczas

$$\Delta q_i = \delta q_i \\ (14) \quad \Delta \frac{dq_i}{dt} = \delta \dot{q}_i - \dot{q}_i \frac{\Delta t}{dt}, \quad 2T = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i.$$

Uogólniona zasada najmniejszego działania dla więzów stacjonarnych przedstawia się równaniem

$$(15) \quad \int_{t_0}^{t_1} \Delta T dt + 2T \Delta t + \delta A dt = 0.$$

Pochodna względem czasu wyrażenia podcałkowego z uwzględnieniem związków (14) przekształca się następująco

$$\frac{d}{dt} \left[ \Delta T + 2T \frac{\Delta dt}{dt} + \delta A \right] = \sum_{i=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta \dot{q}_i + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i - \right. \\ \left. - \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \ddot{q}_i + \frac{dQ_i}{dt} \delta q_i + Q_i \delta \dot{q}_i \right],$$

stąd zgodnie z zasadą Jourdaina otrzymujemy równanie

$$\frac{d}{dt} \left( \Delta T + 2T \frac{\Delta dt}{dt} + \delta A \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right).$$

Dwukrotne całkowanie tego równania doprowadza do równania (15), tzn. do zasady Höldera-Vossa dla związków stacjonarnych. A. WASSMUTH w pracy z 1919 roku [3], dotyczącej związku trzech zasad różniczkowych, wprowadzonego przez Leitingera, zauważa, że proces przejścia od jednej zasady różniczkowej do drugiej przy pomocy różniczkowania względem czasu można przedłużyć, co doprowadzi do nowych różniczkowych zasad mechaniki.

W szczególności, jeśli zróżniczkować względem czasu równanie

$$\delta_2 S = \sum_{i=1}^s Q_i \delta_2 \ddot{q}_i,$$

( $S$  — energia przyspieszenia), przedstawiające zasadę Gaussa we współrzędnych uogólnionych i rozpatrzyć proces wariacyjny w którym  $\delta_3 t = 0$ ,  $\delta_3 q_i = \delta_3 \dot{q}_i = \delta_3 \ddot{q}_i$  to dojdziemy do nowej zasady różniczkowej

$$\frac{d}{dt} \delta_2 S = \sum_{i=1}^s Q_i \delta_3 \ddot{q}_i,$$

na mocy której, równania ruchu mają postać  $\frac{\partial \dot{S}}{\partial \dot{q}_i} = Q$ . W pracy tej Wassmuth rozpatruje także zastosowanie zasady Jourdaina do wyprowadzenia dynamicznych równań ruchu Eulera przedstawiających ruch ciała sztywnego wokół nieruchomego punktu. Niech ciało sztywne porusza się wokół nieruchomego punktu 0,  $(O\xi\eta\zeta)$  — nieruchomy układ osi,  $(oxyz)$  — nieruchomy układ osi, niezmiennie związany z ciałem i poruszający się razem z nim względem nieruchomego układu.

Zgodnie z zasadą Jourdaina (7) mamy

$$(16) \quad \sum_{i=1}^n m_i (\ddot{\xi}_i \delta \xi_i + \ddot{\eta}_i \delta \eta_i + \ddot{\zeta}_i \delta \zeta_i) = \sum_{i=1}^n (\Xi_i \delta \xi_i + H_i \delta \eta_i + Z_i \delta \zeta_i),$$

gdzie  $\Xi_i$ ,  $H_i$ ,  $Z_i$  — rzuty aktywnej siły  $\bar{F}_i$ , działającej na punkt  $m_i$ , na osie nieruchomego układu współrzędnych. Wykorzystując związek między współrzędnymi punktu w ruchomym i nieruchomym układzie współrzędnych, lewą stronę równania (16) można przedstawić w postaci



$$\sum_{i=1}^n [m_i x_i^2 (\ddot{\alpha}_1 \delta \dot{\alpha}_1 + \ddot{\beta}_1 \delta \dot{\beta}_1 + \ddot{\gamma}_1 \delta \dot{\gamma}_1) + m_i y_i^2 (\ddot{\alpha}_2 \delta \dot{\alpha}_2 + \ddot{\beta}_2 \delta \dot{\beta}_2 + \ddot{\gamma}_2 \delta \dot{\gamma}_2) + m_i z_i^2 (\ddot{\alpha}_3 \delta \dot{\alpha}_3 + \ddot{\beta}_3 \delta \dot{\beta}_3 + \ddot{\gamma}_3 \delta \dot{\gamma}_3)],$$

gdzie  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  — cosinusy kątów między osiami układu  $(O\xi\eta\zeta)$  i  $(oxyz)$ .

Następnie w wyrażeniu tym w miejsce dziewięciu wariacji pochodnych cosinusów kierunkowych wprowadza się wariacje rzutów prędkości kątowej  $\bar{\omega} \{p, q, r\}$  na osie ruchomego układu współrzędnych. W tym celu równanie Poissona

$$\dot{\alpha}_1 = r\alpha_2 - q\alpha_3, \quad \dot{\alpha}_2 = p\alpha_3 - r\alpha_1, \quad \dots, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

wariuje się zgodnie z Jourdainem (oczywiście wariują się tylko  $p, q, r$ ). Po podstawieniu lewą stroną równania (16) doprowadza się do postaci

$$[A\dot{p} + (C - B)qr]\delta p + [B\dot{q} + (A - C)rp]\delta q + [C\dot{r} + (B - A)pq]\delta r,$$

gdzie  $A, B, C$  — momenty główne bezwładności ciała. Analogicznie prawą część równania (16) doprowadza się do postaci

$$\delta p \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) + \delta q \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i) + \delta r \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i),$$

gdzie  $X_i, Y_i, Z_i$  — rzuty aktywnej siły  $\bar{F}_i$  na osie ruchomego układu współrzędnych. Obecnie równanie (16) ma postać

$$[A\dot{p} + (C - B)qr]\delta p + [B\dot{q} + (A - C)rp]\delta q + [C\dot{r} + (B - A)pq]\delta r = \\ = \delta p \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) + \delta q \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i) + \delta r \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i),$$

skąd na mocy dowolności wariacji  $\delta p, \delta q, \delta r$  wynikają dynamiczne równania Eulera.

2. Wyprowadzimy związek zasady Jourdaina z twierdzeniem o zmianie energii kinetycznej układu.

Wyrażenie zasady Jourdaina (7) można przekształcić do postaci, która pozwoli wyprowadzić z niej twierdzenie o zmienności energii kinetycznej układu.

Istotnie

$$(17) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i - \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \delta x_i.$$

Ponieważ czas nie zmienia się, to  $\frac{d}{dt} \delta \dot{x}_i = \delta \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \delta \ddot{x}_i$

Wyrażenie (17) otrzymuje postać

$$(18) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \delta T,$$

przy czym

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \delta T = \delta \frac{dT}{dt}.$$

Jeśli założyć, że siły  $X_i$  nie zależą od prędkości, to przy uwzględnieniu równań (18) i (19) wyrażenie zasady Jourdaina (7) przyjmuje postać

$$(20) \quad \delta \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i \right) = 0,$$

lub

$$(21) \quad \delta \left( \frac{dT}{dt} \right) = \delta \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i.$$

Stąd w dowolnym momencie ruchu ma miejsce równanie (21) wariacji Jourdaina: Wariacja pochodnej energii kinetycznej układu równa się wariacji pracy sił zewnętrznych na prędkościach rzeczywistego ruchu układu punktów.

Z równania (21) wynika, że w dowolnym momencie ruchu

$$(22) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i + C,$$

gdzie  $C$  — funkcja niezależąca od prędkości.

Niech w pewnym momencie ruchu, prędkości wszystkich punktów układu są zerowe. Wówczas z równania (22) wynika, że  $C = 0$ .

Stąd, z równania (22) mamy

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i,$$

lub

$$(23) \quad dT = \sum_{i=1}^{3n} X_i dx_i,$$

tzn. różniczka siły działającej jest równa sumie elementarnych prac sił zewnętrznych. Ostatnia równość wyraża twierdzenie o zmianie energii kinetycznej układu dla stałego układu punktów materialnych.

3. W wyrażeniu zasady Jourdaina (7) nie występuje wariacja żadnej funkcji, ale występuje wariacja prędkości, stąd lewa strona wyrażenia (7) jest wyrażeniem wariacyjnym i zasada Jourdaina ma postać wariacyjną.

Porównamy z zasadą Gaussa

$$(24) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta \ddot{x}_i = 0.$$

Ona jest zarówno wariacyjna w swojej formie jak i w treści, ponieważ wyraża minimum skrępowania

$$(25) \quad Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i \left( \dot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2.$$

Wracając do zasady Jourdaina należy postawić pytanie, czy zasada Jourdaina określa warunek na ekstremum jakiejś funkcji. W jakim przypadku? Przy jakich ograniczeniach?

a) Jeśli siły nie zależą od prędkości, to ma miejsce równanie

$$(26) \quad \delta \left( \frac{dT}{dt} - \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i \right) = 0 \quad \text{lub} \quad \delta \left( \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i - \frac{dT}{dt} \right) = 0.$$

W tym przypadku zasada ma jawnie wyrażony charakter wariacyjny: funkcja  $\sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i - \frac{dT}{dt}$  dla rzeczywistego ruchu ma stałą wartość. Oznaczmy tę funkcję  $J = \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i - \frac{dT}{dt}$  i nazwiemy funkcją Jourdaina.

b) Jeśli siły zależą od prędkości, to przekształcenie równania (7) prowadzi do:

$$\delta \left( \frac{dT}{dt} - \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{3n} \delta X_i \dot{x}_i = 0,$$

tzn. wariacja funkcji Jourdaina równa jest pracy wariacji (wg Jourdaina) sił na prędkościach ruchu rzeczywistego. Zasada Jourdaina w tym przypadku nie ma jawnie wyrażonego charakteru wariacyjnego w sensie istnienia funkcji posiadających wartość stałą dla ruchu rzeczywistego. Jednak jeśli praca wariacji sił na prędkościach ruchu rzeczywistego jest równa zero, to  $\delta J = 0$  tzn. funkcja Jourdaina ma wartość stacjonarną dla ruchu rzeczywistego.

A więc, dla układu punktów materialnych z więzami idealnymi, zasada Jourdaina ma jawnie wyrażony charakter wariacyjny — wariacja funkcji Jourdaina jest równa zero — jeśli siły działające na układ nie zależą od prędkości, i jeśli praca wariacji (wg Jourdaina) sił na prędkościach ruchu rzeczywistego jest równa zero.

c) Jeśli na układ oddziałują jedynie zewnętrzne siły reakcyjne, proporcjonalne do pierwszej potęgi prędkości układu punktów, to wprowadzając funkcję rozrzutu Rayleigha (funkcja dysypatywna)

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} k_i \dot{x}_i^2$$

zasadę Jourdaina można przedstawić w postaci

$$\delta \left( \frac{dT}{dt} + \Phi \right) = 0 \quad \text{lub} \quad \delta J = 0$$

gdzie funkcja Jourdaina  $J = \frac{dT}{dt} + \Phi$ , tzn. w tym przypadku zasada Jourdaina ma jawnie wariacyjny charakter.

#### Literatura cytowana w tekście

1. P. JOURDAIN; *Note on an analogue of Gauss principle of least constraint*, Quarterly Journal of pure and applied mathematics, vol. 40, London, 1909.
2. R. LEITINGER; *Über Jourdain's der Mechanik und Lessen Zusammenhang mit dem veralgemeinerten Prinzip der kleinsten Aktion*, Sitzungsberichte, Bd. 122, Wien, 1913.
3. A. WASSMUTH; *Studien über Jourdain's Prinzip der Mechanik*, Sitzungsberichte, Bd. 128, H. 3., Wien, 1919.

## Р е з ю м е

ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ХАРАКТЕРА ПРИНЦИПА  
ЖУРДЕНА И СВЯЗИ ЕГО С ОБЩИМИ ТЕОРЕМАМИ ДИНАМИКИ

Дается краткий обзор развития принципа Журдена и исследуется вариационный характер принципа.

## S u m m a r y

ON VARIATIONAL CHARACTER OF JOURDAIN'S PRINCIPLE AND ITS RELATIONS  
WITH GENERAL THEOREMS OF DYNAMICS

A short review of the development of Jourdain's principle is investigated as well as its variational character.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 stycznia 1980 roku.*

---

ZASTOSOWANIE TEMPERATURY SPRĘŻONEJ Z ODKSZTAŁCENIAMI DO OCENY  
DYSYPACJI ENERGII I WYZNACZANIA GRANIC PLASTYCZNOŚCI

ZDZISŁAW GABRYSZEWSKI, WIESŁAW ŚRÓDKA (WROCLAW)

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie, między innymi na przykładzie wyników własnych badań, możliwości wykorzystania pomiarów zmian temperatury sprężonej z procesem odkształcenia do opisu dysypacji energii i wyznaczania granic plastyczności dla dwóch rodzajów ciał, ciała izotropowego sprężysto-plastycznego jakim jest stal niskowęglowa i ciała nienormalnie izotropowego (tzw. półkrucho) — żeliwa szarego.

1. Zmagazynowana energia odkształcenia

Zjawisko zmiany temperatury wywołanej odkształceniem obserwuje się zarówno w metalach jak i w tworzywach wielkocząsteczkowych, jakkolwiek charakter zjawiska w każdym z tych przypadków istotnie się różni. O ile przy prostym rozciąganiu metale w zakresie sprężystym charakteryzują się na ogół liniową zależnością zmian temperatury od odkształcenia, to np. dla kauczuku zależność ta jest nieliniowa i ponadto przyrost temperatury zmienia znak z początkowo ujemnego na dodatni. Badaniem wpływu odkształcenia na zmianę temperatury w metalach zajmował się między innymi G. J. Taylor. Wspólnie z W. S. Farrenem przedstawił w 1925 roku wyniki pomiarów zmian temperatury towarzyszących prostemu rozciąganiu [3]. Przeprowadzone doświadczenia na stali, miedzi, aluminium oraz wykonane później z H. Quinney'em badania dotyczące skręcania [9] wykazały, że przyrost pracy właściwej odkształceń plastycznych

$$(1.1) \quad dw_p = \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p$$

jest większy od przyrostu energii rozpraszanej

$$(1.2) \quad dw_D = \rho \cdot c_e \cdot dT,$$

gdzie  $c_e$  — ciepło właściwe przy stałych odkształceniach. Oznacza to, że część pracy gromadzona jest w odkształcanym ośrodku, nie wywołując zmian temperatury:

$$dw_H = dw_p - dw_D.$$

Energia  $w_H$  określana mianem zmagazynowanej energii odkształcenia wiązana jest ze zjawiskiem umocnienia [5, 12]. Związek ten uzależnia względną (tj. odniesioną do pracy  $w_p$ ) wielkość gromadzonej w ten sposób energii od wielkości umocnienia tj. stosunku przyrostu naprężenia do przyrostu wywołanego nim odkształcenia trwałego i dotyczy

zarówno polikryształów jak i monokryształów [3, 13]. Stwierdzono, że w obszarze największego umocnienia ilość gromadzonej w ośrodku energii jest największa, natomiast obszar idealnej plastyczności cechuje się całkowitą dysypacją.

Badania mające na celu określenie wielkości zmagazynowanej energii odkształcenia w zależności od stanu ośrodka można związać z pomiarami zmian temperatury w procesie odkształcania. Parametrem przyjmowanym do określania stanu ośrodka w obszarze odkształceń sprężysto-plastycznych bywa zwykle praca odkształcenia plastycznego, lub parametr Odqvista [18]. Oznacza to iż funkcja  $w_H$ , zależna od pracy plastycznej, opisująca energię zmagazynowaną, nie zależy od drogi obciążania.

Eksperymenty określające przebieg zmian energii gromadzonej w ośrodkach sprężysto-plastycznych przeprowadzane były dla kilku rodzajów obciążenia próbek a ich wyniki zawarte są w szeregu publikacjach. Bogatą literaturę, prezentację stosowanych metod pomiarowych, oraz porównania otrzymanych wyników zawierają m.in. prace [2, 8, 13]. Teoretyczną analizę tego zagadnienia podają prace Th. LEHMANN [5, 6], czy A. A. WAKULENKI [10, 11].

Omówione w powyższych pracach badania obejmują rozciąganie ściskanie i skręcanie próbek walcowych, najczęściej pełnych.

Przy rozciąganiu lub ściskaniu uzyskiwano jednorodne pola odkształcenia w całej objętości pomiarowej próbki, co pozwalało na jednoznaczne określenie stanu odkształcenia i związanej z nim zmagazynowanej energii odkształcenia. Natomiast skręcanie pełnych próbek walcowych [9] prowadzi do niejednorodnego pola odkształcenia, a co za tym idzie i temperatury. Otrzymane wyniki mają charakter globalny odniesiony do całej objętości próbki i dotyczą w zasadzie tylko tego konkretnego rodzaju próbek. Jest rzeczą oczywistą że z punktu widzenia fizykalnego istotny jest związek między energią zgromadzoną a pracą plastyczną dotyczący materiału a nie konstrukcji. W większości przytaczanych tu publikacji autorzy stwierdzają, że dla stali stosunek przyrostów energii utajonej do przyrostów pracy odkształcenia plastycznego  $dw_H/dw_p$  jest stały w niemal całym obszarze odkształcenia, niezależnie od sposobu obciążenia i wynosi około 0,1. Jedynie końcowa faza skręcania wykazuje odchyłkę od tej wartości [9].

Badania wykonane na monokryształach Al, Cu, Ag itd. [1, 14, 15, 16] wskazują że stosunek ten bardzo silnie zależy od stopnia odkształcenia i ma pewien charakterystyczny przebieg we współrzędnych  $w_H/w_p$  —  $w_p$ . Początkowo osiąga pewną wartość maksymalną, następnie obniża się do wartości ustalonej przy wzrastającej pracy  $w_p$ . Omówione wyniki badań dotyczą materiałów sprężysto-plastycznych.

Dla tzw. materiałów nienormalnie izotropowych brak jest tego rodzaju danych doświadczalnych. Należy przy tym zwrócić uwagę na ich charakterystyczne cechy. Pojawiające się podczas odkształcania (mikro) pęknięcia sprawiają, że konieczne jest wprowadzenie, poza odkształceniami plastycznymi, jeszcze tak zwanych odkształceń rozluźnienia  $\varepsilon'_{ij}$  [19]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon'_{ij},$$

gdzie  $\varepsilon'_{ij}$  jest całkowitym odkształceniem nieodwracalnym.

Główne odkształcenia rozluźnienia zależą też od znaków głównych odkształceń całkowitych a objętościowe odkształcenie rozluźnienia jest nieujemne.

## 2. Sprężenie między polem odkształceń a polem temperatury

Wyprowadzając wzór opisujący sprężenie termomechaniczne, stosować będziemy znane, uproszczone zależności (np. założenie małych odkształceń w równaniu energii, małe przyrosty temperatury, quasistatyczność procesu) oraz przyjmować, że nie występują gradienty temperatury a proces globalnie jest adiabatyczny. Zapisując energię rozpraszaną w układzie wzorem

$$(2.1) \quad \dot{w}_D = \psi_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^t,$$

otrzymamy następujące wyrażenie na entropię  $s$

$$(2.2) \quad \rho T \dot{s} = \psi_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^t - q_{k,k},$$

gdzie  $\psi_{ij}$  jest pewnym tensorem drugiego rzędu, zależnym od zmiennych przyjętych do opisu procesu,  $\vec{q}$  — wektorem strumienia ciepła.

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki, wyrażając energię wewnętrzną przez energię swobodną  $\varphi$  i entropię  $s$  (wszystkie funkcje stanu odniesione są do jednostki masy) oraz zakładając addytywność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^s + \dot{\epsilon}_{ij}^t$ ,  $\epsilon_{ij}^s$  — składowe tensora odkształcenia sprężystego, równanie energii jest następujące:

$$(2.3) \quad \sigma_{ij}(\dot{\epsilon}_{ij}^s + \dot{\epsilon}_{ij}^t) - q_{k,k} = \rho(\dot{\varphi} + T\dot{s} + s\dot{T}),$$

a po wykorzystaniu (2.2)

$$(2.4) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^s + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^t - \psi_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^t - \rho s \dot{T} = \rho \dot{\varphi}.$$

Przy założeniu, że  $\varphi = \varphi(\epsilon_{ij}^s, \epsilon_{ij}^t, T)$  otrzymamy

$$(2.5) \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_{ij}^s}, \quad \sigma_{ij} - \psi_{ij} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_{ij}^t}, \quad s = - \frac{\partial \varphi}{\partial T}.$$

Z równania (2.2), wykorzystując (2.5)<sub>3</sub> wynika, że

$$-\rho T \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial T} = \psi_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^t - q_{k,k},$$

czyli

$$(2.6) \quad -\rho T \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_{ij}^s \partial T} \dot{\epsilon}_{ij}^s + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_{ij}^t \partial T} \dot{\epsilon}_{ij}^t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \dot{T} \right) = \psi_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^t - q_{k,k}.$$

Zauważając, że przy  $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$

$$(2.7) \quad -\rho T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \dot{T} = -q_{k,k} = \rho c_e \dot{T},$$

przy braku gradientów temperatury ( $q_{i,i} = 0$ ), na podstawie (2.5)<sub>1</sub> i (2.5)<sub>2</sub>

$$\rho c_e \ln \frac{T}{T_0} = \int_0^{\epsilon_{ij}^s} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} d\epsilon_{ij} + \int_0^{\epsilon_{ij}^t} \left( \frac{\psi_{ij}}{T} - \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial T} \right) d\epsilon_{ij}^t.$$

Dla małych przyrostów temperatury

$$(2.8) \quad \theta = \frac{T_0}{\rho c_e} \int_0^{\epsilon_{ij}^s} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} d\epsilon_{ij} + \frac{1}{\rho c_e} \int_0^{\epsilon_{ij}^t} \left( \psi_{ij} - T_0 \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial T} \right) d\epsilon_{ij}^t,$$

gdzie  $\theta = T - T_0$ .

Wyrażenie (2.8) przedstawia rozszerzony wzór Kelvina, który można jeszcze zapisać w postaci:

$$(2.9) \quad \theta = \kappa_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{\rho c_\varepsilon} \int_0^{w_i} k(w_i) dw_i,$$

gdzie

$$\kappa_{ij} = \frac{T_0}{\rho c_\varepsilon} \beta_{ij}, \quad \beta_{ij} = -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T},$$

natomiast

$$\psi_{ij} - T_0 \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial T} = k(w_i) \sigma_{ij},$$

przy czym przyjęto, że  $k$  jest wyłączną funkcją pracy odkształceń nieodwracalnych.

W przypadku ciała o izotropii normalnej, czyli gdy

$$\beta_{ij} = \alpha(3\lambda + 2\mu) \sigma_{ij},$$

otrzymamy

$$\theta = -\frac{T_0 \alpha(3\lambda + 2\mu)}{\rho c_\varepsilon} \varepsilon_{kk} + \frac{1}{\rho c_\varepsilon} \int_0^{w_i} k(w_i) dw_i.$$

### 3. Badania doświadczalne

**Aparatura i próbki.** Badania przeprowadzono na dwu materiałach. Niskowęglowa stal 15 H reprezentuje typ ośrodka sprężysto-plastycznego opisanego prawem Hooke'a w części sprężystej odkształceń, natomiast w obszarze odkształceń sprężysto-plastycznych cechującego się brakiem trwałych zmian objętości. Dodatkową własnością o charakterze indywidualnym jest górna granica plastyczności oraz obszar płynięcia plastycznego występujący po jej przekroczeniu. Żeliwo szare Z125 jest przedstawicielem modelu ośrodka półkruchego, cechującego się tzw. nienormalną izotropią. Próbki, identyczne dla obu materiałów, wykonano w postaci cienkościennych rurek zakończonych gwintowanymi uchwytyami. Średnica zewnętrzna próbek wynosiła 41 mm, wewnętrzna 38 mm, długość części pomiarowej 125 mm, długość uchwytów 30 mm. Pomiarów prowadzono na maszynie ZDM U 30t.

Wielkości siły rozciągającej (ściskającej) i skręcającej mierzono przy użyciu specjalnych czujników przetwarzających odkształcenia sprężyste elementów pomiarowych na sygnał elektryczny za pomocą naklejonych na nich tensometrów oporowych.

Do pomiaru odkształcenia próbek wykorzystano tensometry oporowe RL 120/6 naklejone na próbkach w kierunkach przewidywanych odkształceń głównych, współpracujące z mostkiem tensometrycznym AT 970. Pomiarów temperatury dokonano przy użyciu jednego czujnika termistorowego NTC-210 przyłożonego do próbki w środku jej długości i specjalnie zbudowanego wzmacniacza. Czulość układu jest rzędu  $10^{-3}$  K.

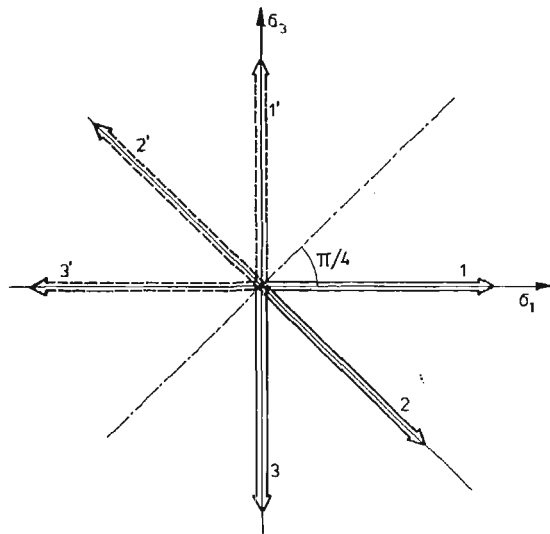
Sygnały siły, odkształcenia i temperatury rejestrowano na trzech rejestratorach X-Y Rikken Denshi.



Pracę „plastyczną” obliczono przez zmierzenie pola powierzchni zawartego między krzywą naprężenie — odkształcenie, osią odkształcenia, oraz prostą przedstawiającą proces odciążania.

Przy wyznaczaniu energii rozpraszanej  $w_D = \rho c_e \theta_D$  korzystano z tablicowej wartości ciepła właściwego  $c_e$  dla stali i żeliwa. Przyrost temperatury  $\theta_D$  wyznaczano jako różnicę między zmierzonym przyrostem temperatury  $\theta$  i zmianą temperatury  $\theta_0$ , związaną z odkształceniami sprężystymi, ekstrapolowaną z obszaru sprężystego indywidualnie dla każdej próbki.

**Zakres badań.** Badania obejmują trzy proste drogi obciążania których przebieg w przestrzeni naprężeń ( $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3$ ) przedstawia rys. 1. Własności mechaniczne obu ma-



Rys. 1. Drogi obciążania w przestrzeni naprężeń głównych.

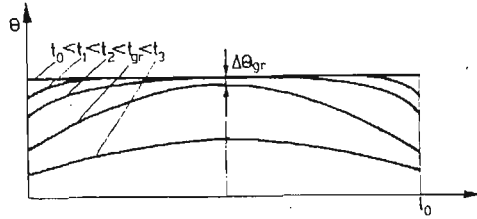
teriałów cechuje symetria względem prostej tworzącej z osią  $\sigma_1$  kąt  $\pi/4$ . Do określenia warunków termicznych procesu zachodzącego w próbce posłużyła idea metody Farren'a i Taylor'a [3] w myśl której ciepło wydzielane w objętości próbki jest wymieniane z otoczeniem częściowo na skutek konwekcji a częściowo na drodze przewodnictwa (przepływ ciepła do uchwytów maszyny). Specyficzny rozkład temperatury wzdłuż osi próbki w wyniku transmisji ciepła do (lub od) uchwytów stanowi podstawę opisywanej metody. Przy pomiarze zmian temperatury w środku długości próbki, zawsze istnieje taki przedział czasu w którym otoczenie „punktu” w którym dokonuje się pomiaru temperatury ma praktycznie taką samą temperaturę jak rozważany punkt. Sprawia to, że proces w tym punkcie można traktować jako adiabatyczny. Rys. 2 przedstawia wywołane przewodnictwem zmiany temperatury wzdłuż osi próbki w której w chwili  $t_0$  temperatura jest jednorodna i różna od temperatury otoczenia. Graniczna wartość czasu  $t_{gr}$  w którym można nie uwzględniać zakłócającego wpływu przewodnictwa zależy od założonej, dopuszczalnej odchyłki temperatury  $\Delta\theta_{gr}$  od wartości początkowej. Farren i Taylor określają ten czas, dla względnego odchylenia przyrostu temperatury 0,6% od wartości po-

czątkowej, następująco:

$$t_{gr} = 0,014 \cdot \rho \cdot c \cdot l^2/k,$$

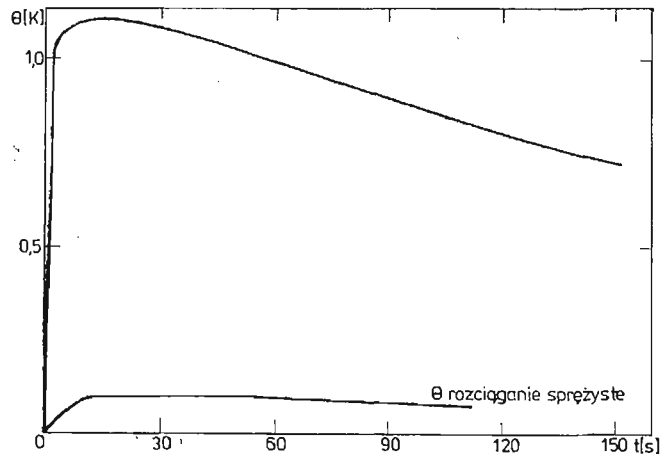
gdzie  $\rho$  — gęstość,  
 $c$  — ciepło właściwe,  
 $l$  — długość części pomiarowej próbki,  
 $k$  — współczynnik przewodnictwa.

(Daje to dla użytych tutaj próbek stalowych czas ok. 20 s.). Konwekcyjna wymiana ciepła uwidacznia swój wpływ od samego początku, lecz ze względu na wykładniczą zależność



Rys. 2. Zmiany temperatury w próbce której początkowa temperatura różni się o  $\theta_p > 0$  od temperatury otoczenia. W kolejnych chwilach  $t_1, t_2$  itd. temperatura obniża się symetrycznie względem środka długości próbki  $l_0$ , doznając początkowo największych zmian na końcach tego przedziału.

zmiany temperatury od czasu jest stosunkowo łatwa do uwzględnienia. Łączne działanie obu tych zakłóceń (jak również bezwładności termometru) uwidaczniają wykresy, wykonane dla badanych próbek rurowych, przedstawione na rys. 3. Uzyskano je przez rejestrację zmian temperatury w czasie, próbki szybko obciążonej do ustalonej wartości obciążenia (a więc i temperatury). Dolny wykres przedstawia zmiany temperatury próbki



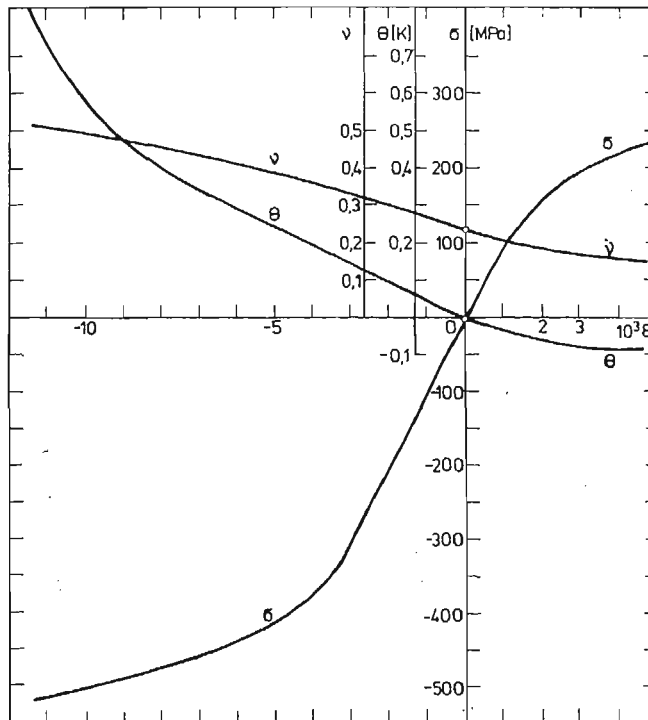
Rys. 3. Zmiany w czasie temperatury punktu środkowego próbki zarejestrowane po szybkim odkształceniu — a więc po jednorodnej zmianie temperatury w całej pomiarowej objętości próbki o  $+1,10\text{K}$  i  $-0,10\text{K}$ .

rozciągniętej sprężystości (zmiana temperatury jest ujemna), górny — próbki odkształconej plastycznie. W drugim przypadku, na skutek większej różnicy temperatur próbki i otoczenia, silniej uwidacznia się wpływ konwekcji (uwzględniany przy odczytywaniu temperatury) który w pierwszym przypadku jest po 60s niemal niewidoczny. Zmiany

temperatury wywołane przewodnictwem oceniane są na max 2% po 60 s i w tym też czasie przeprowadzane były właściwe pomiary. Badania te szczegółowo omówiono w pracy [20]. Prędkość odkształcania wynosiła  $3 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

**Wyniki pomiarów i ich dyskusja.** Każdą z trzech dróg obciążania-rozciąganie, ściskanie i skręcanie realizowano na pięciu próbkach zarówno w przypadku żeliwa jak i stali. Następnie wybierano jedną z pięciu próbek której wyniki najbliższe były wartościom średnim, do dalszego opracowania. Pominęto w ten sposób statystyczne opracowanie wyników i możliwość oszacowania najbardziej prawdopodobnych przedziałów w których powinny być one zawarte, nie narażając się jednocześnie na przyjęcie wyników zakłóconych szczególnie niekorzystnym nałożeniem się przypadkowych błędów pomiaru. Przedstawienie wyników jednej tylko próbki wynika też stąd, że wyznaczanie przebiegów (funkcji) średnich jest na ogół niejednoznaczne, ponieważ wynik uśredniania zależy od sposobu obliczania tych średnich.

Wykresy podane na rys. 4 przedstawiają zależność zmiany temperatury od odkształcenia wzdłużnego próbki żeliwnej przy rozciąganiu i ścisaniu oraz zależność naprężenia

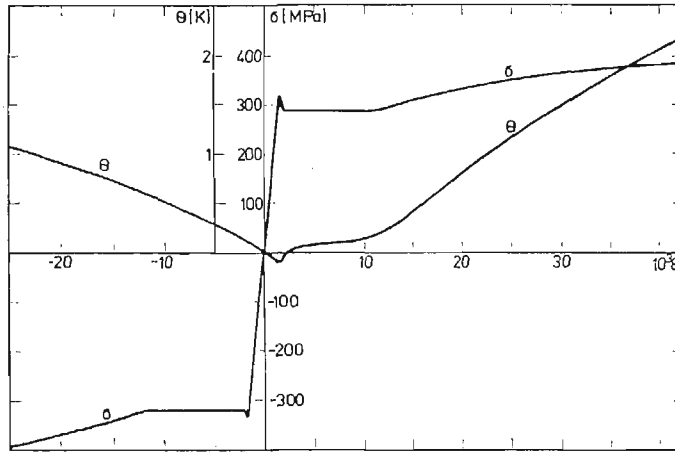


Rys. 4. Zależność zmiany temperatury od odkształcenia przy rozciąganiu i ścisaniu żeliwa, oraz naprężenia i współczynnika przewężenia od odkształcenia.

od odkształcenia. Charakterystyczna dla tego typu materiałów zależność własności od kierunku odkształcania dotyczy, jak widać, także termicznego jej aspektu. Współczynniki kierunkowe  $\vartheta = \theta/\varepsilon_{wzdł.}$  w początkowym, liniowym zakresie są różne przy rozciąganiu i ścisaniu. Fakt ten w zasadniczy sposób odróżnia zachowanie się pod tym wzglę-

dem żeliwa od stali. Podobny wykres dla stali podany na rys. 5 świadczy o niezależności  $\vartheta$  od kierunku odkształcania.

Przebieg zmian temperatury w początkowym zakresie odkształceń opisuje pierwszy wyraz wzoru (2.9). Występujący tam tensor  $\kappa_{ij}$  określa zmiany temperatury w tym zakresie odkształceń dla każdej drogi obciążania, a więc także dla rozciągania i ściskania.



Rys. 5. Zależność zmiany temperatury i naprężenia od odkształcenia przy rozciąganiu i ściskaniu stali.

Ponieważ wartość współczynnika  $\vartheta$  w przypadku żeliwa zależy od znaku odkształcenia wzdłużnego (rozciąganie lub ściskanie) więc także wówczas składowe tensora  $\kappa_{ij}$  zależą od znaków składowych tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ . Załóżmy zatem, że tensor  $\kappa_{ij}$  wiążący zmiany temperatury z odkształceniami w ośrodkach półkruchych cechuje się następującymi własnościami:

a) kierunki główne tensora  $\kappa_{ij}$  pokrywają się z kierunkami głównymi tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ ,

b) wartości główne tensora  $\kappa_{ij}$  zależą wyłącznie od znaków odpowiednich wartości głównych tensora  $\varepsilon_{ij}$  (przy zadanej temperaturze  $T_0$ ).

Słuszność tych założeń może potwierdzić porównanie przewidywań teoretycznych z wynikami doświadczeń w złożonych stanach naprężenia.

Wartości główne tensora  $\kappa_{ij}$  wyrażmy w postaci

$$(3.1) \quad \kappa_i = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon_i(t)}{|\varepsilon_i(t)|} \right) \kappa^r + \left( 1 - \frac{\varepsilon_i(t)}{|\varepsilon_i(t)|} \right) \kappa^s \right],$$

gdzie  $\kappa^r$ ,  $\kappa^s$  — stałe materiałowe.

Składowe  $\kappa_{ij}$  w dowolnym, ortogonalnym układzie osi współrzędnych określone są przez stałe  $\kappa^r$  i  $\kappa^s$ .

Wartości  $\kappa^r$  i  $\kappa^s$  można wyznaczyć znając współczynniki kierunkowe  $\vartheta$  przy rozciąganiu i ściskaniu:  $\vartheta_r = \theta/\varepsilon_1$  i  $\vartheta_s = \theta/\varepsilon_3$ . Rozwijając pierwszy wyraz (2.9) dla kierunków głównych, otrzymamy

$$\theta = \kappa_1 \varepsilon_1 + \kappa_2 \varepsilon_2 + \kappa_3 \varepsilon_3,$$

stąd, odpowiednio dla rozciągania i ściskania,

$$(3.2) \quad \begin{cases} \vartheta_r = \varkappa_1^r - \varkappa_2^r \cdot \nu_0 - \varkappa_3^r \cdot \nu_0, \\ \vartheta_s = -\varkappa_1^s \cdot \nu_0 - \varkappa_2^s \nu_0 + \varkappa_3^s, \end{cases}$$

ale wobec założonej zależności  $\varkappa_i$  wyłącznie od znaków odkształceń głównych  $\text{sgn } \varepsilon$ ,

$$\varkappa_1^r = \varkappa_1^s = \varkappa_2^s = \varkappa_2^r, \quad \varkappa_3^s = \varkappa_3^r = \varkappa_3^s = \varkappa_3^r,$$

z stąd po rozwiązaniu układu (3.2)

$$(3.3) \quad \begin{cases} \varkappa^r = \frac{\vartheta_r + 2\nu_0 \vartheta_s}{1 - 4\nu_0^2}, \\ \varkappa^s = \frac{\vartheta_s + 2\nu_0 \vartheta_r}{1 - 4\nu_0^2}, \end{cases}$$

gdzie  $\nu_0$  jest współczynnikiem przewężenia przy  $\varepsilon_{\text{wzdł}} \rightarrow 0$ , rys. 4.

Po podstawieniu (3.1) do (2.9) otrzymamy rozszerzoną postać wzoru Kelvina uwzględniającą wyraźnie własności ciała o izotropii nienormalnej

$$(3.4) \quad \theta = \frac{1}{2} [(\varkappa^r + \varkappa^s) \varepsilon_{kk} + (\varkappa^r - \varkappa^s)(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3|)] + \frac{1}{\rho c_\varepsilon} \int k(w_i) dw_i.$$

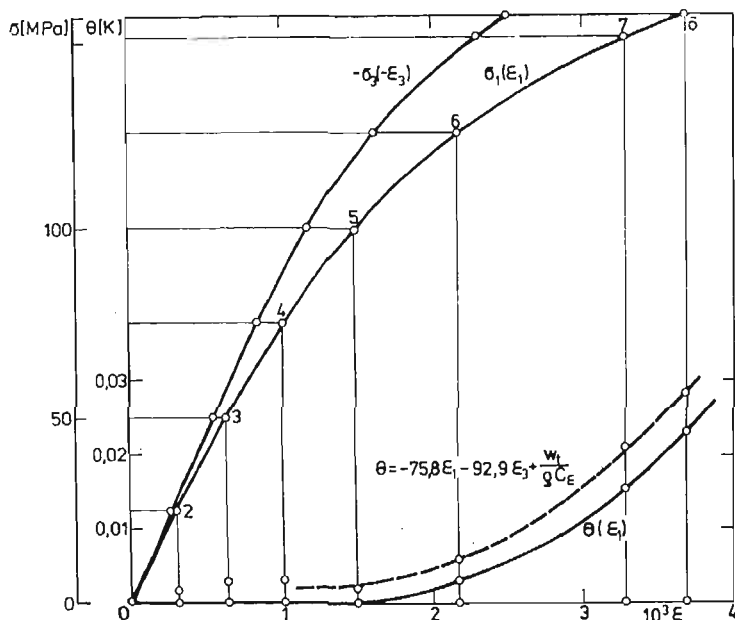
Drugim ważnym spostrzeżeniem jest liniowość wykresu  $\theta - \varepsilon_1$  w zakresie odkształceń znacznie większym od zakresu liniowości wykresu  $\sigma_1 - \varepsilon_1$ , rys. 4. Nie zauważa się tego przy ściskaniu, kiedy obydwa wykresy  $\sigma_3 - \varepsilon_3$  i  $\theta - \varepsilon_3$  w tym samym miejscu przestają być liniowe.

Droga obciążania 2 przedstawiona na rys. 1, stanowiąca przypadek złożonego stanu naprężenia, weryfikuje wzór (3.4), a więc także (2.9).

Tabela 1. Wyniki otrzymane przy skręcaniu próbki żeliwnej oraz zmiany temperatury obliczone ze wzoru (3.4). Wyznaczone na podstawie rys. 4 wartości  $\vartheta_r$  i  $\vartheta_s$  wynoszą odpowiednio  $-34\text{K}$  i  $-53\text{K}$  co przy  $\nu_0 = 0,25$  daje, na podstawie (3.3),  $\varkappa^r = -75,8\text{K}$  i  $\varkappa^s = -92,9\text{K}$ .

Lp.	$10^3 \varepsilon_1$	$10^3 \varepsilon_3$	$10^{-5} W_i$ J/m <sup>3</sup>	$\theta$ dośw. [K]	$\theta_0 = -75,8 \cdot \varepsilon_1 - 92,9 \cdot \varepsilon_3$ [K]	$\theta_D = \frac{w_i}{\rho c_\varepsilon}$ [K]	$\theta_0 + \theta_D$ [K]
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0,31	-0,27	0	0	+0,0016	0	0,0016
3	0,64	-0,55	0,051	0	0,0026	+0,0003	0,0029
4	1,01	-0,84	0,0717	0	0,0015	0,0016	0,0031
5	1,49	-1,17	0,274	0	-0,004	0,006	0,002
6	2,17	-1,61	0,897	+0,003	-0,015	0,021	0,006
7	3,27	-2,27	2,529	+0,015	-0,037	0,058	0,021
8	3,68	-2,50	3,269	+0,023	-0,047	0,075	0,028

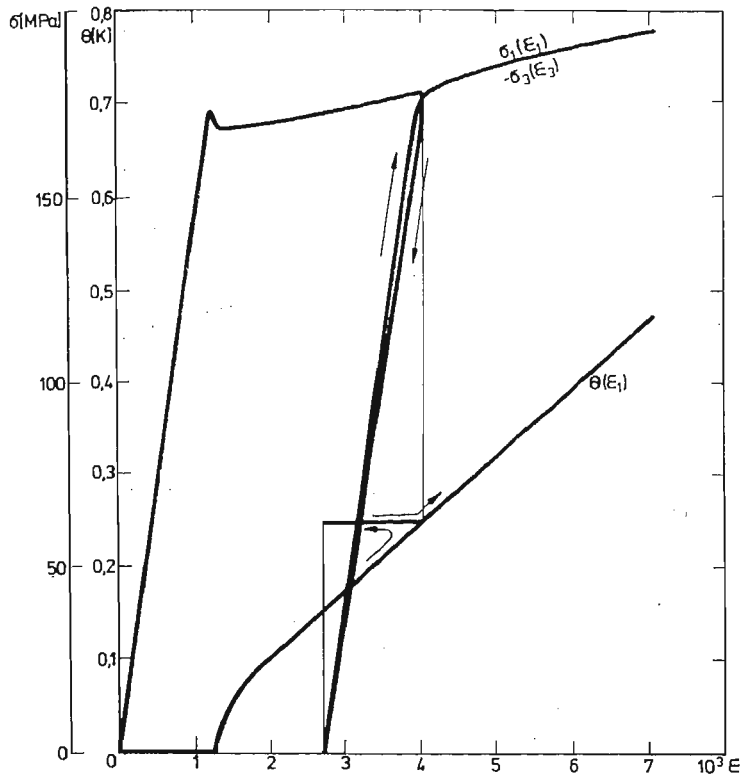
Porównanie wartości zmian temperatury obliczonych na podstawie tego wzoru oraz wyznaczonych doświadczalnie zawiera tabela 1. Teoretyczny przebieg zmian temperatury zaznaczony jest na rys. 6 linią przerywaną. Rysunek ten przedstawia ponadto zależność między naprężeniami głównymi  $\sigma_1$  i  $\sigma_3 = -\sigma_1$  a odkształceniami głównymi  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_3$ . Łatwo



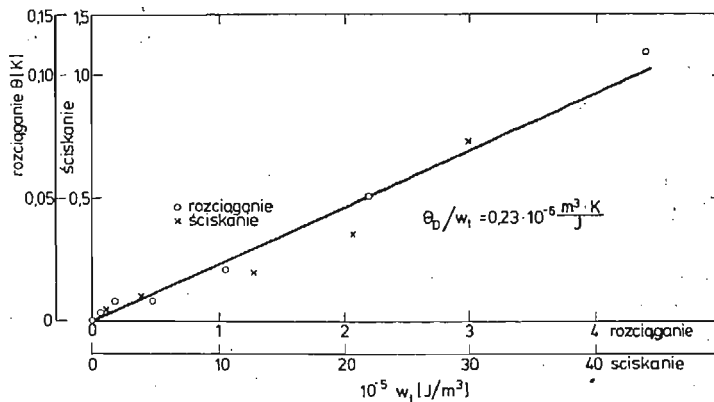
Rys. 6. Zależność między naprężeniami i odkształceniami głównymi w żeliwnej próbce skręcającej oraz przebieg zmian temperatury zmierzony i teoretyczny (linia przerywana).

zauważyć, że w przeciwieństwie do stali (rys. 7), odkształcenia główne  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_3$  nie są do bezwzględnej wartości równe, co świadczy, że zmienia się przy skręcaniu objętość a zatem i temperatura. Pojawia się tu problem określenia wszystkich wartości głównych tensora odkształceń jako że mierzone są dwie składowe  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_3$ , a nieznane jest odkształcenie promieniowe  $\varepsilon_2$  które dla stali jest z założenia wówczas równe zero. Ze względu na to że badania wykonano na próbkach cienkościennych, wyniki przeprowadzonych pomiarów odkształcenia  $\varepsilon_2$  obarczone są dużymi błędami. Z tego powodu wykorzystano równania konstytutywne dla żeliwa ZL25 zaproponowane w pracy [17]. Wynika z nich, że także żeliwo przy skręcaniu nie odkształca się w kierunku promieniowym czyli  $\varepsilon_2 = 0$ . Dane te posłużyły do wyznaczenia przebiegu teoretycznego  $\theta$  (rys. 6) na podstawie równania (3.4). Wchodząca w skład całkowitej zmiany temperatury część, opisywana przez drugi wyraz wzoru (2.9), związana jest z dysypacją. Porównanie obliczonej dla żeliwa pracy odkształceń nieodwracalnych, przy rozciąganiu i ściskaniu, z energią odpowiadającą przyrostowi temperatury  $\theta_D$  wyznaczoną eksperymentalnie, prowadzi do wniosku, że funkcja  $k = 1$ , czyli mamy do czynienia z pełną dysypacją energii, rys. 8. Wynik ten jest przybliżony, bo otrzymany po zastosowaniu liniowych związków między naprężeniami i odkształceniami sprężystymi które dla żeliwa, ściśle biorąc, takimi nie są. Tę wartość  $k$  wykorzystano przy wyznaczaniu temperatury  $\theta_D$  (opisywanej przez drugi składnik wzoru (2.9)) dla próbki skręcającej, tabela 1.

Analiza zmian temperatury sprężonej z odkształceniami w stali pozwala stwierdzić słuszność powszechnie przyjmowanych założeń dla tego typu materiałów a więc  $\kappa^r = \kappa^s$ , co prowadzi do wzoru Kelvina, niezmiennosc odkształcenia objętościowego



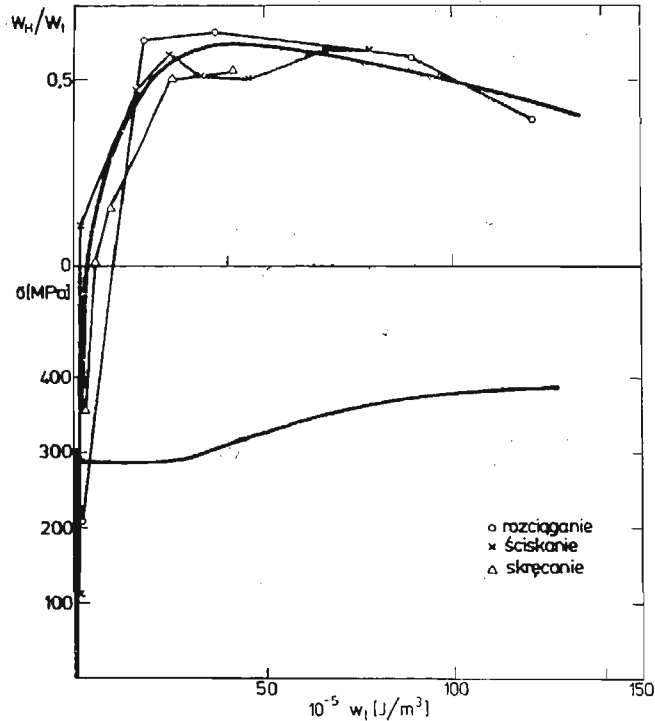
Rys. 7. Zależności między naprężeniami i odkształceniami głównymi w skręcanej próbce stalowej oraz przebieg zmian temperatury. Wykres zawiera fazę odciążania i ponownego obciążania. W obszarze odkształceń sprężystych temperatura zawsze pozostaje stała.



Rys. 8. Zmiany temperatury  $\theta_D$  przy rozciąganiu i ścisnaniu żeliwa. Współczynnik kierunkowy prostej  $\theta_D/w_1 = 0,23 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3\text{K/J}$  odpowiada pełnemu rozpraszaniu pracy  $w_1$  (przyjmując  $c_e = 4,36 \text{ MJ/m}^3\text{K}$ ).

$\varepsilon'_{kk} = \varepsilon''_{kk} = 0$  itp. Wyznaczona stąd zmiana temperatury  $\theta_D$  wywołana dysypacją, posłużyła do obliczenia wartości  $w_D$  i z kolei, stosunku energii  $w_H$  do  $w_t$  w zależności od  $w_t$ . Zależność tę przedstawia krzywa na rys. 9a. Dla porównania z wykresem rozciągania, na rys. 9b podano zależność  $\sigma_t - w_t$  dla stali.

Krzywa ta wykazuje charakterystyczny przebieg podobny do wykresów przedstawianych dla monokryształów w pracach Wolfendena. Chociaż występuje tu obszar idealnej



Rys. 9.

plastyczności, stosunek  $w_H/w_t$  jest bardzo duży, osiągając maksymalną wartość 0,6 w końcowej fazie płynięcia plastycznego. W obszarze umocnienia zaczyna maleć, zbliżając się do wartości podanej przez Farrena i Taylora.

Przeprowadzona analiza wykresów przedstawionych na rys. 9 pozwala stwierdzić zależność między energią zgromadzoną  $w_H$  a wykresem rozciągania w przypadku stali. Odzwierciedleniem przemian energetycznych zachodzących w procesie odkształcania miękkiej stali jest tu omawiana krzywa.

Jednakowy przebieg funkcji  $w_H/w_t - w_t$  dla wszystkich trzech dróg obciążania świadczy o tym, że pracę  $w_t$  można przy analizie tego typu ośrodków traktować jak zmienną stanu, jednoznacznie opisującą ośrodek w obszarze odkształceń nieodwracalnych (przynajmniej dla prostych dróg obciążania).

Duża dyssypacja energii pojawiająca się po przekroczeniu powierzchni plastyczności (początek wykresu 9a) pozwala na wyznaczanie tej powierzchni za pośrednictwem pomiaru temperatury.



#### 4. Wyznaczanie granic plastyczności

Doświadczalne wyznaczanie powierzchni plastyczności, oraz jej zmiany w procesie obciążania powinno teoretycznie polegać na podaniu w przestrzeni naprężeń, dla danej drogi obciążania, sześciu składowych  $\sigma_{ij}^0$  odpowiadających pojawieniu się w przestrzeni odkształceń pierwszych odkształceń plastycznych  $\varepsilon_{ij}^p$ , lub osiągnięciu przez te odkształcenia przyjętych umownie wartości.

Dla dowolnych dróg obciążania, nie wszystkie składowe  $\varepsilon_{ij}^p$  równocześnie takie wartości osiągają. Wobec tego, aby określić przejście w stan plastyczny, wprowadza się funkcję  $g(\varepsilon_{ij})$ , uważaną za pewne uogólnione odkształcenie, stanowiącą w złożonym stanie miarę wejścia w stan plastyczny. Gdy wartość tej funkcji będzie równa przyjętej, umownej jej wartości, np. przy jednoosiowym rozciąganiu, wówczas uważa się, że nastąpiło przejście w stan plastyczny a odpowiednią granicę plastyczności wyznaczają współrzędne drogi obciążania  $\sigma_{ij}^0$  w przestrzeni naprężeń. Praktycznie, unikając żmudnych pomiarów przy kolejnych obciążaniach i odciążaniach, korzysta się z wprowadzonego w mechanice uogólnionego naprężenia  $f(\sigma_{ij})$  związanego z funkcją  $g(\varepsilon_{ij})$ , w obszarze sprężystym liniowo  $f(\sigma_{ij}) = A \cdot [g(\varepsilon_{ij})]$ , buduje przy obciążaniu wykres  $f(\sigma_{ij}) = F[g(\varepsilon_{ij})]$  i z wykresu tego wyznacza — przy założeniu, że odciążanie jest opisane prawem liniowym o takim współczynniku  $A$ , jak obciążanie w zakresie sprężystym —  $f(\sigma_{ij}^0)$ , a następnie ewentualnie  $\sigma_{ij}^0$ . Powszechnie za funkcje  $g(\varepsilon_{ij})$  i  $f(\sigma_{ij})$  przyjmuje się intensywność odkształceń, oraz intensywność naprężeń. Takie postępowanie jest częściowo uzasadnione dla materiału do granicy plastyczności liniowo-sprężystego izotropowego, chociaż może budzić wątpliwości w przypadkach ustalania warunku plastyczności  $h(\sigma_{ij}) = \text{const}$  lub prawa umocnienia  $h(\sigma_{ij}) = H(\varepsilon_{ij}^p)$  sugerując postać  $h(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij})$ .

Dla ciał anizotropowych liniowo-sprężystych do granicy plastyczności, doświadczalnych badań dotyczących powierzchni plastyczności, przeprowadzonych przy wykorzystaniu uogólnień intensywności naprężeń i odkształceń na ciała anizotropowe, nie można uważać za poprawne, gdyż:

a) w proponowanych warunkach plastyczności, z których wynikają uogólnione intensywności, najczęściej ogranicza się ilość stałych sprężystości lub stałych wytrzymałości, przez założenie niezależności warunku od naprężenia średniego, co nie jest niczym uzasadnione,

b) uogólnione intensywności zdefiniowane są z dokładnością do współczynnika, przyjmowanego na ogół jako funkcja granic plastyczności przy rozciąganiu w różnych kierunkach, z dużą dowolnością [7].

Występowanie licznych stałych materiałowych wymaga wstępnej identyfikacji materiału, z punktu widzenia jego anizotropii, co jest doświadczalnie trudne, a niekiedy wręcz niemożliwe.

Do wyznaczania doświadczalnej granicy plastyczności może być z powodzeniem wykorzystane znane zjawisko sprzężenia, występującego między polem odkształceń, a polem temperatur [4]. Łatwość i dokładność, z jaką można zmierzyć obecnie przyrost temperatury w procesie odkształcania, oraz stwierdzenie, że momentowi przejścia materiału w stan plastyczny odpowiada spontaniczny wzrost wartości przyrostu temperatury, w procesie quasiadiabacycznym, upoważniają do założenia, że miarą granicy plastyczności może

być dla takich ciał określona umownie wartość tego przyrostu. Pozwala to oczywiście w łatwy sposób wyznaczyć doświadczalnie odpowiadające temu przyrostowi składowe  $\sigma_{ij}^0$ .

W ciałach nieliniowo-sprężystych do granicy plastyczności problem wyznaczania obszaru sprężystego w przestrzeni naprężeń, istotny z punktu widzenia wytrzymałościowego, jest nierozwiązany. Dlatego wydaje się celowym przeprowadzenie badań zmian temperatury towarzyszących procesom odkształcania.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. D. LIVINGSTON; Acta Met. 10, 229 (1962).
2. A. A. BOLŠANINA; W. PANIN; *Skrytaja energija deformacji*, „Issledovania po fizike tverdogo tela”, Izd. AN, SSSR 1957.
3. W. S. FARREN, G. J. TAYLOR; „Proc. Roy. Soc.”, Ser. A, (1925) vol. 101. p. 422.
4. B. GABRYSZEWSKA; *Praca doktorska*, IMiMT Politechniki Wrocławskiej 1964.
5. Th. LEHMANN; Arch. of Mechanics, 24, 1972, 978.
6. Th. LEHMANN, G. ZANDER; Arch. Mech. vol. 27, No 5 - 6, 1975 p. 759.
7. Z. MARCINIAK; *Odkształcenia graniczne przy tłoczeniu blach*, WNT Warszawa 1971.
8. A. L. TITCHENER; M. B. BEVER; Progr. Metal Phys. 7, 247 (1958).
9. G. J. TAYLOR, H. QUINNEY; Proc. Roy. Soc, A, 1934, v. 143, p. 307.
10. A. A. VAKULENKO; *O svjazach meżdu naprjażenijami i deformacijami v neuprugich sredach*, Issledovanija po uprugosti i plastičnosti. Sbornik 1. Izd. L.G.U. 1961.
11. A. A. VAKULENKO; *O svjazach meżdu naprjażenijami i deformacijami v izotropnych i pervonačalno izotropnych neuprugich sredach*, Issledovanija po uprugosti i plastičnosti, Sbornik 2, Izd. L.G.U. 1962.
12. R. O. WILLIAMS; Acta Met. 12, 745 (1964).
13. A. WOLFENDEN; Scripta Met. 4, 327 (1970).
14. A. WOLFENDEN; Scripta Met. 2, 621 (1968).
15. A. WOLFENDEN; Acta Met. 16, 975 (1968).
16. A. WOLFENDEN; Acta Met. 17, 585 (1969).
17. Cz. WITKOWSKI; *Praca doktorska*, IMiMT, Politechnika Wrocławska 1977.
18. M. ŻYCZKOWSKI; *Obciążenia złożone w teorii plastyczności* PWN, Warszawa 1973.
19. V. V. NOVOŽILOV; *O plastičeskom razrychlenii*, Prikladnaja matematika i mechanika, tom. 29, 1965.
20. W. ŚRÓDKA; *Praca doktorska*, IMiMT Politechnika Wrocławska 1979.

Pracę wykonano w ramach problemu MR I-23, koordynowanego przez IPPT PAN w Warszawie

#### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ, СОПРЯЖЕННОЙ С ДЕФОРМАЦИЯМИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ПЛАСТИЧНОСТИ

В работе проанализировано явление сопряжения между полем деформации и температурным полем при адиабатических процессах, учитывая в этом анализе диссипацию энергии, сопутствующую необратимым процессам.

Доказана целесообразность и обсуждены возможности использования этого явления для экспериментального определения поверхности пластичности в изотропных и анизотропных линейно упругих телах до предела пластичности. Приведены результаты собственных исследований изменений температуры при растяжении, сжатии и кручении упруго-пластических тел (сталь) и полухрупких тел (серый чугун).

Были получены зависимости между изменениями температуры и работой необратимых деформаций, из которых следует, что в средах типа серого чугуна происходит полная диссипация энергии

в необратимых процессах, средах же типа стали свойственна зависимость графиков: пластическая работа — изменение температуры и деформация — напряжение. Приведены также данные, свидетельствующие о влиянии деформаций разрыхления, имеющих место в полухрупких средах, на изменения температуры.

#### S u m m a r y

#### THE EFFECT OF TEMPERATURE COUPLED WITH STRAINS FOR ESTIMATION OF ENERGY DISSIPATION AND DETERMINATION OF THE YIELD LIMIT.

We discuss an effect of coupling between strain and temperature fields occurring in adiabatic processes taking into account the energy dissipation resulting from the irreversible processes. The usefulness was shown and a possibility of the application of the effect for an experimental determination of yield surface in isotropic linear elastic bodies up to yield limit. The results of our experiments concerning temperature changes for tension, compression and torsion of plastic (steel) and semi brittle bodies (grey cast iron) were given. The relations between the changes of temperature and the work of irreversible strains were obtained. In the result in a medium of the grey cast iron type, in the case of irreversible processes, a complete energy dissipation occurs while for media of steel type, there correspond the relations from the diagrams: plastic work-change of temperature, and strain-stress. Data were presented demonstrating the influence of slacken strains occurring in semibrittle media due to changes of temperature.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1979 roku.*

---



REOLOGICZNE EFEKTY PRĘTÓW METALOWYCH RÓWNOCZEŚNIE ZGINANYCH  
I ROZCIĄGANYCH<sup>1)</sup>

ADAM KISIEL, STEFAN PIECHNIK (KRAKÓW)

Wstęp

W pracy sformułowano i rozwiązano problem mimośrodowego rozciągania pręta przyrzątkowego w warunkach pełzania ustalonego. Materiał pręta opisuje uproszczone równanie Odqvista [4] (dla ustalonego pełzania)

$$(0.1) \quad s_{ij} = \sigma_0 \dot{\epsilon}_e^{\frac{1-n}{n}} \dot{\epsilon}_{ij},$$

gdzie

$s_{ij}$  — składowe dewiatora naprężeń  
 $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$  (dla  $\nu = 0,5$ ) — składowe tensora prędkości odkształceń  
 $\dot{\epsilon}_e$  — intensywność tensora prędkości odkształceń  
 $\sigma_0, n$  — stałe materiałowe.

Sposób rozwiązania problemu (podejście kinematyczne) pozwolił na pełną analizę pól odkształceń, naprężeń i przemieszczeń (z dokładnością do stałych występujących w ruchu bryły sztywnej), dla pręta przyrzątkowego, prostego, o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, obciążonego siłą rozciągającą na dowolnym mimośrodku (nie uwzględniono nie sprawiającego w rozwiązaniu analitycznym żadnych trudności przypadku, gdy punkt przyłożenia siły pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju poprzecznego).

Analizy takiej z uwagi na trudności numeryczne brakuje w dotychczasowej literaturze. Rozwiązanie problemu równoczesnego rozciągania i zginania podał S. PIECHNIK w pracach [5] i [6], ograniczając się jednak do prętów o przekrojach posiadających jedną oś symetrii i obciążonych w taki sposób, że deformacja pręta zachowuje własność symetrii względem płaszczyzny wyznaczonej przez oś pręta i oś symetrii przekroju poprzecznego. Przypadek prostego zginania prętów o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego rozwiązał A. JAKUBOWICZ [2]. Podał on tylko rozkład naprężeń (nie przeprowadził analizy stanu deformacji), przy czym metoda graficzna, jaką posłużył się do wyznaczenia charakterystyk geometrycznych przekroju nie pozwala na uzyskanie dokładnych wyników numerycznych. W pracach, których celem było wyznaczenie czasu powstania pierwszych pęknięć, bądź też całkowitego zniszczenia pręta, najczęściej wprowadzano założenia upraszczające odnośnie rozkładu naprężeń. I tak np. I. N. RABOTONW w [8] przyjął poło-

<sup>1</sup> Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12, temat 13.1.

zenie osi obojętnej jak przy pełnym uplastycznieniu, niezależnie od wartości wykładnika w prawie (0.1). Wyniki uzyskane przez S. PIECHNIKA w [5] i [6] wykorzystał do wyznaczenia czasu powstania pierwszych pęknięć M. CHRZANOWSKI w [1], natomiast do wyznaczenia czasu całkowitego zniszczenia S. PIECHNIK i M. CHRZANOWSKI w [6], wykazując, że jest on nieznacznie większy od czasu powstania pierwszych pęknięć. Dlatego w niniejszej pracy ograniczono się do obliczania czasu powstania pierwszych pęknięć, przyjmując prawo zniszczenia kruchego za Ł. M. KACZANOWEM [3]:

$$(0.2) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \cdot \left( \frac{\max \sigma_x}{\psi} \right)^m,$$

z warunkiem początkowym  $\psi(t=0) = 1$ , gdzie:

$\psi$  — funkcja charakteryzująca rozluźnienie materiału ( $\psi = 0$  dla czasu zniszczenia),  
 $\max \sigma_x$  — maksymalne naprężenie rozciągające,  
 $A, m$  — stałe materiałowe.

### 1. Sformułowanie problemu

Pręt pryzmatyczny, prosty, o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, wykonany z materiału podlegającego prawu fizycznemu (0.1), którego pierwotne położenie w przestrzeni identyfikujemy z konfiguracją początkową, poddany jest mimośrodowemu rozciąganiu.

Celem pracy jest znalezienie:

- 1 — stanu prędkości odkształcenia,
- 2 — stanu naprężenia,
- 3 — stanu przemieszczenia,
- 4 — czasu powstania pierwszych pęknięć.

W analizie przyjęto założenia:

- (a) — wielkości kinematyczne (prędkość zmiany krzywizny, prędkość odkształcenia osi pręta) są stałe w czasie,
- (b) — w czasie pracy pręta, aż do momentu powstania pierwszych pęknięć, przemieszczenia i ich pochodne względem zmiennych określających położenie punktów pręta są wystarczająco małe, aby słuszne były: zasada zeszywnienia, pominięcie wpływu przemieszczeń w płaszczyźnie przekroju poprzecznego na jego kształt i wielkość, oraz liniowe związki geometryczne Cauchyego,
- (c) — kinematyczne warunki brzegowe odbierają ruch pręta jako ciała sztywnego (sześć niezależnych równań więzów),
- (d) — pobocznica pręta wolna jest od obciążeń,
- (e) — zniszczenie materiału opisuje prawo kruchego pęknięcia (0.2).

### 2. Rozwiązanie problemu

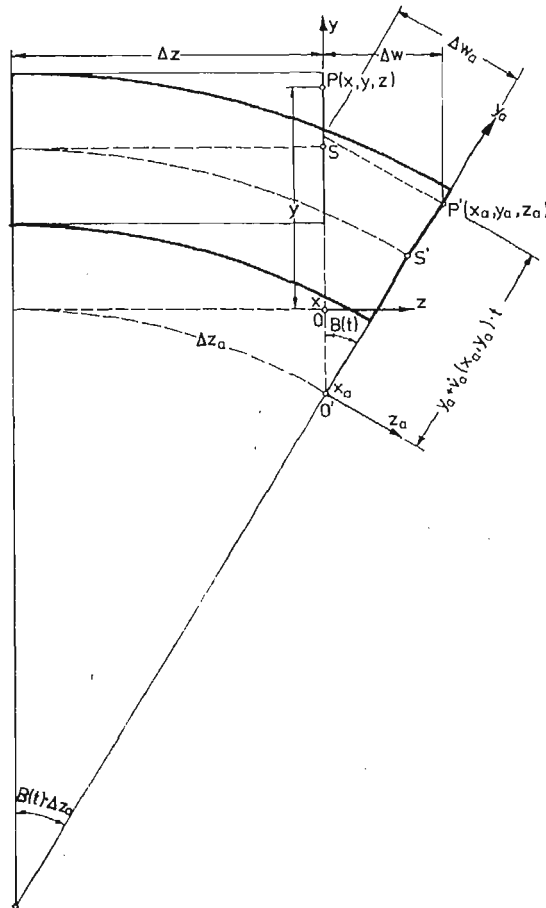
**2.1. Matematyczna postać zagadnienia.** Konfigurację pierwotną prostego pręta pryzmatycznego identyfikujemy z obszarem w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej sparametryzowanej kartezjańskim układem współrzędnych  $(x, y, z)$ , przy czym przyjmujemy

oś  $z$  jako równoległą do osi pręta. Z konfiguracją aktualną tego pręta zwiążemy układ krzywoliniowy  $(x_a, y_a, z_a)$ , w którym linie  $z_a$  są wyznaczone zdeformowanymi włóknami pierwotnie równoległymi do osi  $z$ , a linie  $x_a$  i  $y_a$  są zawarte w zdeformowanych przekrojach poprzecznych.

Przyjmujemy a priori, że miejsce geometryczne punktów przekroju poprzecznego ( $z = \text{const.}$ ), w których odkształcenie  $\varepsilon_z = 0$  jest prostą  $l$ . Rodzinę prostych o kierunku  $l$  przyjmujemy jako linie współrzędnych  $x_a$ , natomiast rodzinę prostych z nią ortogonalnych i zawierających się w zdeformowanych przekrojach poprzecznych utożsamiamy z  $y_a$ . Jeżeli początek tego krzywoliniowego układu współrzędnych przyjmiemy w punkcie należącym do prostej  $l$ , wówczas równanie przyrostów  $\Delta w_a$  przemieszczeń punktów płaszczyzny  $z = \text{const.}$  wzdłuż osi  $z_a$  można przedstawić w postaci:

$$(2.1) \quad \Delta w_a = B(t) \cdot [y_a + \dot{v}_a(x_a, y_a) \cdot t] \cdot \Delta z_a,$$

gdzie wielkość  $\dot{v}_a(x_a, y_a)$  określa prędkość przemieszczenia równoległego do osi  $y_a$  (zwężenie przekroju) (rys. 1). Na podstawie założenia (b) konfigurację aktualną można utożsamiać z konfiguracją początkową  $[(x_a, y_a, z_a) \equiv (x, y, z)]$ , a przemieszczenia  $\dot{v}_a(x_a, y_a) \cdot t$



Rys. 1.

zaniedbać jako małe względem  $y_n$ . Wykorzystując założenie (a) można przyjąć  $B(t) = B_0 \cdot t$ . Z zależności (2.1) otrzymuje się wówczas

$$(2.2) \quad \Delta w_a = \Delta w = B_0 \cdot y \cdot \Delta z \cdot t,$$

co można zapisać także w postaci

$$\Delta w = \Delta \dot{w} \cdot t.$$

Z liniowych związków geometrycznych Cauchy'ego otrzymujemy

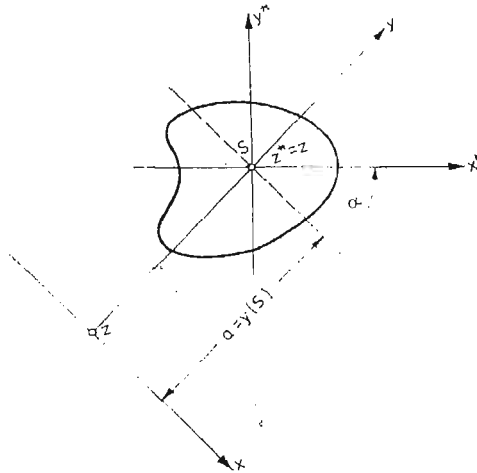
$$(2.3) \quad \varepsilon_z = \dot{\varepsilon}_z(x, y, z) \cdot t = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \dot{w}(x, y, z) \cdot t}{\Delta z} = B_0 \cdot y \cdot t = \dot{\varepsilon}_z(y) \cdot t,$$

skąd

$$(2.4) \quad \dot{\varepsilon}_z(y) = B_0 \cdot y.$$

Nie ograniczając ogólności rozwiązania przyjęto  $B_0 > 0$ .

Aby zagadnienie postawione w p. 1 rozwiązać dla dowolnego kształtu przekroju poprzecznego, układ współrzędnych  $(x, y, z)$  należy związać z pewnym charakterystycznym układem współrzędnych dla każdego przekroju. Niech będzie nim układ głównych centralnych osi przekroju poprzecznego (osie  $x^*$ ,  $y^*$ ) i osi pręta (oś  $z$ ) (rys. 2).



Rys. 2.

Związki transformacyjne przedstawiają się więc w sposób:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x^* &= x \cdot \cos \alpha + (y - a) \cdot \sin \alpha, \\ y^* &= -x \cdot \sin \alpha + (y - a) \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

lub

$$(2.6) \quad \begin{aligned} x &= x^* \cdot \cos \alpha - y^* \cdot \sin \alpha, \\ y &= x^* \cdot \sin \alpha + y^* \cdot \cos \alpha + a, \end{aligned}$$

gdzie

$\alpha$  — kąt mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od osi  $x$  do osi  $x^*$ ,



$a$  — miara odległości środka ciężkości przekroju poprzecznego  $S$  od osi  $x$ , równa współrzędnej  $y(S)$ . Wielkość  $a$  jest zależna od czasu, jednak na podstawie rozumowania prowadzącego do zależności (2.2) można przyjąć  $a(t) = \text{const}$ .

**2.2. Stan naprężenia i odkształcenia.** Wykorzystując założenia (a) i (d) oraz związki fizyczne (0.1), w prosty sposób można określić tensory prędkości odkształceń i naprężeń, które spełniają komplet równań geometrycznie liniowej teorii pełzania:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \dot{\epsilon}_y = -0,5 \cdot B_0 \cdot y, & \dot{\epsilon}_z &= B_0 \cdot y, \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{yz} = 0, \end{aligned}$$

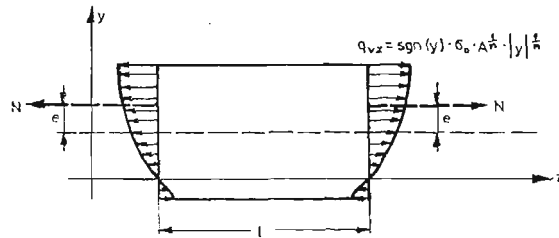
$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \\ \sigma_z &= \text{sgn}(y) \cdot \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot |y|^{1/n}. \end{aligned}$$

Z zależności (2.6) i (2.7) wynika, że w punktach leżących na osi  $x$  prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}_z$  oraz naprężenia  $\sigma_z$  są równe zero, stąd oś tę będziemy dalej nazywać osią obojętną.

Styczne warunki brzegowe spełnione są w sposób ścisły jedynie dla rozkładu obciążeń  $q_{vz}$  przyłożonych do ścianek poprzecznych pręta (rys. 3):

$$q_{vz} = \text{sgn}(y) \cdot \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot |y|^{1/n}.$$

W innych przypadkach wykorzystujemy zasadę de Saint-Venanta.



Rys. 3.

**2.3. Stan przemieszczenia.** Określone powyżej odkształcenia pozwalają z równań Cauchy'ego wyznaczyć następujące funkcje przemieszczeń:

$$(2.9) \quad u(x, y, z, t) = -0,5 \cdot B_0 \cdot x \cdot y \cdot t + a_0 + b_0 \cdot y + c_0 \cdot z,$$

$$(2.10) \quad v(x, y, z, t) = -0,25 \cdot B_0(-x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2) \cdot t + d_0 - b_0 \cdot x + f_0 \cdot z,$$

$$(2.11) \quad w(x, y, z, t) = B_0 \cdot y \cdot z \cdot t + e_0 - c_0 \cdot x - f_0 \cdot y,$$

gdzie stałą  $B_0$  należy wyznaczyć ze statycznych warunków brzegowych na ściankach poprzecznych pręta, natomiast stałe  $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0$  — z kinematycznych warunków brzegowych dla czasu  $t = 0$ . Przy pominięciu założenia (c), wielkości  $a_0$ — $f_0$  należy traktować jako liniowe funkcje czasu  $t$ , a dodatkowych sześć stałych wyznaczyć z warunków początkowych nałożonych na prędkości.

Stała  $B_0$  posiada interpretację prędkości głównej krzywizny powierzchni obojętnej  $\dot{\kappa}_0$ , co pokazano niżej (rys. 4). Przyjęto następujące oznaczenia:

$\Delta z_0 = \varrho_0(t) \cdot \Delta \varphi(t)$  — długość włókna równoległego do osi  $z$  przed deformacją, które w czasie  $t$  nie doznaje odkształceń,

$\Delta z(y, t) = [\varrho_0(t) + y] \cdot \Delta\varphi(t)$  — długość włókna równoległego do osi  $z$ , odległego o  $y$  od powierzchni obojętnej (utworzonej z osi obojętnych każdego przekroju poprzecznego), zmienna w czasie deformacji,

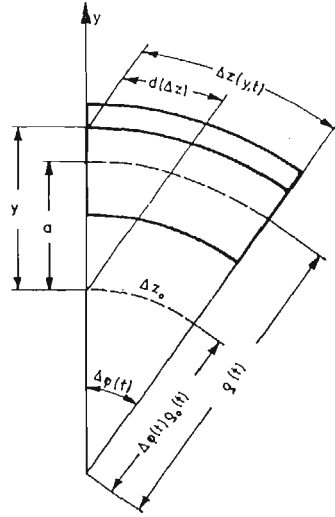
$\varrho_0(t)$  — promień głównej krzywizny powierzchni obojętnej,

$\varrho(t)$  — promień głównej krzywizny osi pręta,

$a$  — odległość osi pręta od osi obojętnej,

$\Delta\varphi(t)$  — kąt między sąsiednimi przekrojami,

$\varkappa_0(t), \dot{\varkappa}_0$  — główna krzywizna powierzchni obojętnej i jej prędkość.



Rys. 4

Z rys. 4 odczytujemy:

$$\varepsilon_z(y, t) = \dot{\varepsilon}_z(y) \cdot t = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta z(y, t) - \Delta z_0}{\Delta z_0} = \lim_{\Delta\varphi(t) \rightarrow 0} \frac{[\varrho_0(t) + y - \varrho_0(t)] \cdot \Delta\varphi(t)}{\varrho_0(t) \cdot \Delta\varphi(t)} = \frac{y}{\varrho_0(t)},$$

skąd, oraz z (2.3)

$$\frac{1}{\varrho_0(t)} = B_0 \cdot t.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\varrho_0(t)} = \varkappa_0(t),$$

więc

$$B_0 \cdot t = \varkappa_0(t), \quad B_0 = \dot{\varkappa}_0(t) = \text{const.}$$

2.4. Zredukowany układ sił wewnętrznych w układzie  $(x^*, y^*, z)$  W celu praktycznego zastosowania otrzymanych wyników należy skorzystać z zasady de Saint-Venanta. Ponieważ zredukowany układ sił wewnętrznych na ogół podawany jest w układzie głównych centralnych osi przekroju poprzecznego, dlatego w tym właśnie układzie zredukowano obciążenie przyłożone do ścianek poprzecznych pręta.

Z równań równoważności wynika:

$$(2.12) \quad N_z = \iint_F \sigma_z(x^*, y^*) dF,$$

$$(2.13) \quad M_{x^*} = \iint_F \sigma_z(x^*, y^*) \cdot y^* dF,$$

$$(2.14) \quad M_{y^*} = - \iint_F \sigma_z(x^*, y^*) \cdot x^* dF.$$

Z budowy macierzy naprężeń (2.8) widać od razu, że

$$Q_{x^*} = Q_{y^*} = M_z = 0.$$

Aby uzyskać wygodne wielkości do tablicowania, wprowadzono układ współrzędnych bezwymiarowych  $(x', y', z')$ , zdefiniowany związkami

$$\begin{aligned} x^* &= x' \cdot r, \\ y^* &= y' \cdot r, \\ z &= z'. \end{aligned}$$

Jakobian tego przekształcenia  $J(x', y') = r$ , gdzie  $r$  jest dowolną stałą o wymiarze długości. W niniejszej pracy przyjęto, że  $r$  jest promieniem koła o środku w punkcie  $S$ , zawierającego cały przekrój poprzeczny.

Dla wygody obliczeń, całkowanie przeprowadzono w układzie współrzędnych  $(x, y, z)$  określonym związkami (2.6). Przekształcono więc związki (2.12) - (2.14), podstawiając naprężenie  $\sigma_z$  wyrażone w układzie  $(x, y, z)$  i przedstawione zależnością (2.8):

$$(2.15) \quad N_z = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+2 \cdot n)/n} \cdot \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} dF',$$

$$(2.16) \quad M_{x^*} = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+3 \cdot n)/n} \cdot \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} \cdot [-x' \cdot \sin \alpha + (y' - a') \cdot \cos \alpha] dF',$$

$$(2.17) \quad M_{y^*} = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+3 \cdot n)/n} \cdot \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} \cdot [-x' \cdot \cos \alpha - (y' - a') \cdot \sin \alpha] dF'.$$

Dalej przyjęto oznaczenia:

$$(2.18) \quad B_N = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+2 \cdot n)/n},$$

$$(2.19) \quad B_M = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+3 \cdot n)/n} = B_N \cdot r,$$

$$(2.20) \quad N' = \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} dF',$$

$$(2.21) \quad M'_{x^*} = \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} \cdot [-x' \cdot \sin \alpha + (y' - a') \cdot \cos \alpha] dF',$$

$$(2.22) \quad M'_{y^*} = \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} \cdot [-x' \cdot \cos \alpha - (y' - a') \cdot \sin \alpha] dF'.$$

Wielkości  $N'$ ,  $M'_{x^*}$ ,  $M'_{y^*}$  zależą tylko od kształtu przekroju poprzecznego  $F'$  i jednej stałej materiałowej  $n$ . Związki (2.15) - (2.17) można więc zapisać w postaci:

$$(2.23) \quad N = B_N \cdot N',$$

$$(2.24) \quad M_{x^*} = B_M \cdot M'_{x^*},$$

$$(2.25) \quad M_{y^*} = B_M \cdot M'_{y^*}.$$

Z zależności (2.24) i (2.25) można wyznaczyć wielkość  $B_M$  jako funkcję momentu  $M = |\bar{M}| = (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2}$ .

Z (2.19) oraz warunku  $B_0 > 0$  wynika  $B_M > 0$ , więc

$$(2.26) \quad B_M = M / (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2}.$$

Korzystając z ostatniej zależności oraz z (2.19) można wyznaczyć stałą  $B_0$  jako funkcję momentu  $M$ :

$$(2.27) \quad B_0 = \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{-n/2} \cdot M^n.$$

Podstawiając (2.26) do (2.23) - (2.25) otrzymujemy:

$$(2.28) \quad N \cdot r / M = N' / (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2},$$

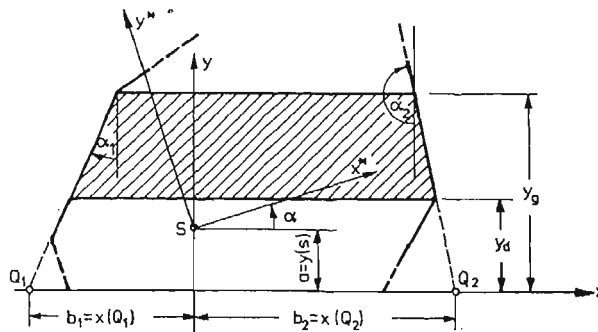
$$(2.29) \quad M_{x^*} / M = \cos \varphi(x^*, \bar{M}) = M'_{x^*} / (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2},$$

$$(2.30) \quad M_{y^*} / M = \sin \varphi(x^*, \bar{M}) = M'_{y^*} / (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2}.$$

Z postaci związków (2.28) - (2.30) wynika, że dla ustalonego kierunku wektora momentu  $\bar{M}$  i ustalonego stosunku  $N/M$  (niezależnie od wielkości  $N$  i  $M$ ), kąt zawarty między osią obojętną  $x$  i osią  $x^*$  oraz miara odległości  $a$  osi obojętnej od środka ciężkości  $S$  (od tych wielkości zależą wartości  $N'$ ,  $M'_{x^*}$  i  $M'_{y^*}$ ) pozostają stałe. Jest to własność ogólna dla dowolnego związku fizycznego typu  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ij})$  przy założeniu, że można go przedstawić jedną funkcją ciągłą w obszarze przekroju poprzecznego (por. [2]).

Fakt ten jest cenną wskazówką dla przejrzystego tablicowania funkcji (2.28) - (2.30), bądź innych wielkości, które opisano niżej. Ponieważ nie jest możliwe przedstawienie zamkniętych wzorów na całki (2.20) - (2.22) dla dowolnego kształtu obszaru  $F'$ , w pracy wprowadzono odpowiednie wzory i ułożono program na maszynę cyfrową dla obszaru opisanego dowolnym wielokątem. Posłużono się przy tym następującym algorytmem:

- W celu uniknięcia niejednoznaczności w przypadku przekrojów wklęsłych bądź wielospójnych, należy je podzielić na skończoną ilość wielokątów wypukłych.
- Całkę po całym obszarze oblicza się jako sumę całek po wielokątach wypukłych.
- Całkowanie po wielokącie wypukłym oparto na spostrzeżeniu, że każdy taki wielokąt można w sposób jednoznaczny podzielić na skończoną ilość trapezów o pod-



Rys. 5.

stawach równoległych do dowolnie danego kierunku. Zakładając, że tym kierunkiem jest oś obojętna  $x$  (rys. 5), wzory na całki (2.20) - (2.22) dla pojedynczego trapezu można przedstawić w sposób:

$$\begin{aligned} N'^{\square} &= (a_2 - a_{21}) \cdot g_2 + (b_2 - b_1) \cdot g_1, \\ M'_{x^*}{}^{\square} &= (M'_x{}^{\square} - N'^{\square} \cdot a) \cdot \cos \alpha + M'_y{}^{\square} \cdot \sin \alpha, \\ M'_{y^*}{}^{\square} &= -(M'_x{}^{\square} - N'^{\square} \cdot a) \cdot \sin \alpha + M'_y{}^{\square} \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} M'_x{}^{\square} &= (a_2 - a_1) \cdot g_3 + (b_2 - b_1) \cdot g_2, \\ M'_y{}^{\square} &= 0,5 \cdot (a_1^2 - a_2^2) \cdot g_3 + (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2) \cdot g_2 + 0,5 \cdot (b_1^2 - b_2^2) \cdot g_1, \\ \left. \begin{aligned} a_1 &= \operatorname{tg} \alpha_1, & a_2 &= \operatorname{tg} \alpha_2, \\ b_1, b_2 & \text{— jak na rys. 5} \end{aligned} \right\} \text{ dla } y_g \neq y_d, \\ a_1 &= a_2 = b_1 = b_2 = 0, & \text{ dla } y_g = y_d, \\ g_1 &= n/(n+1) \cdot (|y_g|^{(n+1)/n} - |y_d|^{(n+1)/n}), \\ g_2 &= n/(2 \cdot n+1) \cdot e \cdot (|y_g|^{(2 \cdot n+1)/n} - f \cdot |y_d|^{(2 \cdot n+1)/n}), \\ g_3 &= n/(3 \cdot n+1) \cdot (|y_g|^{(3 \cdot n+1)/n} - |y_d|^{(3 \cdot n+1)/n}), \\ e &= \operatorname{sgn}(y_g), & f &= e \cdot \operatorname{sgn}(y_d), \end{aligned}$$

2.5. Czas powstania pierwszych pęknięć. Rozwiązując równanie różniczkowe (0.2) i wykorzystując warunek  $\psi(t = t_k) = 0$ , czas powstania pierwszych pęknięć można określić wzorem

$$(2.31) \quad t_k = 1/[A \cdot (m+1) \cdot (\sigma_{z \max})^m],$$

gdzie  $A$ ,  $m$  są stałymi materiałowymi.

### 3. Zebranie wyników i podsumowanie

Podstawiając we wszystkich zależnościach wielkość określoną zależnością (2.27), otrzymano:

a) Stan odkształcenia

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y &= -0,5 \cdot y' \cdot (M'_{x^*}{}^2 + M'_{y^*}{}^2)^{-n/2} \cdot [M/(\sigma_0 \cdot r^3)]^n \cdot t, \\ (3.1) \quad \varepsilon_z &= y' \cdot (M'_{x^*}{}^2 + M'_{y^*}{}^2)^{-n/2} \cdot [M/(\sigma_0 \cdot r^3)]^n \cdot t, \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(3.2) \quad \varepsilon'(y') = y' / (M'_{x^*}{}^2 + M'_{y^*}{}^2)^{n/2},$$

można krótko zapisać:

— maksymalną prędkość odkształcenia

$$(3.3) \quad \max \cdot \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_z(y' = y'_{\max}) = \varepsilon'(y' = y'_{\max}) \cdot [M/(\sigma_0 \cdot r^3)]^n$$

— prędkość odkształcenia osi pręta

$$(3.4) \quad \dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_z(y' = a') = \varepsilon'(y' = a') \cdot [M/(\sigma_0 \cdot r^3)]^n.$$

Wielkości  $\varepsilon'(y' = y'_{\max})$  i  $\varepsilon'(y' = a')$  są bezwymiarowe i zależą tylko od kształtu przekroju poprzecznego i jednej stałej materiałowej  $n$  — są więc wielkościami wygodnymi do tablicowania.

b) Stan naprężenia

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = 0, \\ \sigma_z &= M \cdot r^{-3} \cdot (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-1/2} \cdot \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n}, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \end{aligned}$$

Oznaczając bezwymiarową wielkość naprężenia w sposób

$$(3.6) \quad \sigma(y') = (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-1/2} \cdot \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n}$$

maksymalną wartość naprężenia rozciągającego można wyznaczyć z zależności

$$(3.7) \quad \max \cdot \sigma_z = \sigma'(y' = y'_{\max}) \cdot M/r^3.$$

c) Stan przemieszczenia (w układzie współrzędnych  $(x', y', z)$ ):

$$(3.8) \quad \begin{aligned} u(x', y', z, t) &= -0,5 \cdot \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-n/2} \cdot M^n \cdot y' \cdot x' \cdot t + a_0 + b_0 \cdot y' + c_0 \cdot z, \\ v(x', y', z, t) &= -0,25 \cdot \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-n/2} \cdot M^n \cdot (y'^2 - x'^2 + 2 \cdot z^2) \cdot t + \\ &\quad + d_0 - b_0 \cdot x' + e_0 \cdot z; \\ w(x', y', z, t) &= \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-n/2} \cdot M^n \cdot y' \cdot z \cdot t + f_0 - c_0 \cdot x' - g_0 \cdot y'. \end{aligned}$$

Ponieważ stała  $B_0$  posiada interpretację prędkości krzywizny powierzchni obojętnej, więc wprowadzono bezwymiarową wielkość

$$(3.9) \quad \kappa'_0 = (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-n/2},$$

skąd:

$$(3.10) \quad B_0 = \kappa'_0 \cdot \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot M^n.$$

d) Czas powstania pierwszych pęknięć

$$(3.11) \quad t_k = 1/[A \cdot (m+1) \cdot (\sigma'(y' = y'_{\max}))^m] \cdot (r^3/M)^m.$$

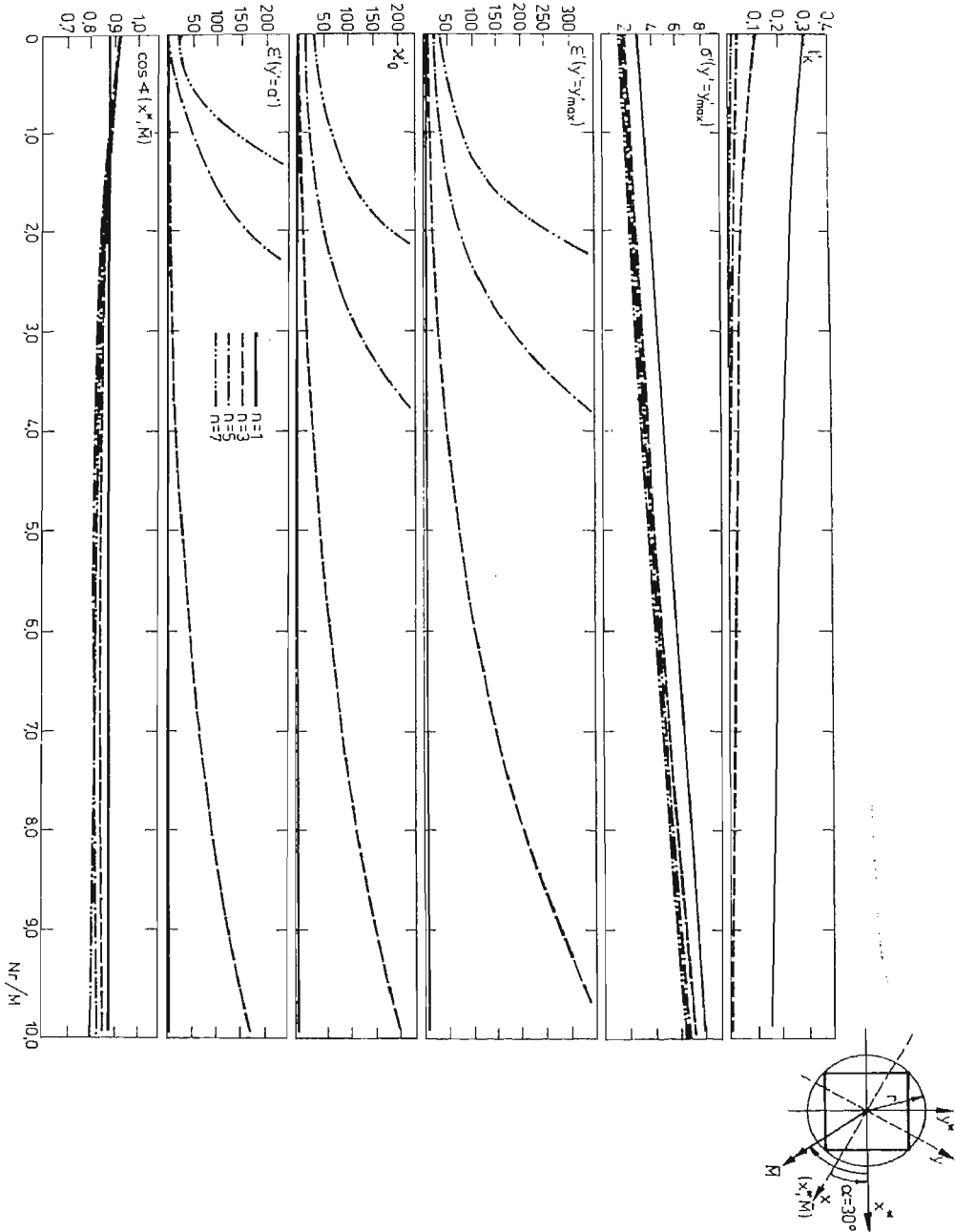
Analogicznie oznaczono bezwymiarowy czas zniszczenia

$$(3.12) \quad t'_k = 1/[(m+1) \cdot (\sigma'(y' = y'_{\max}))^m].$$

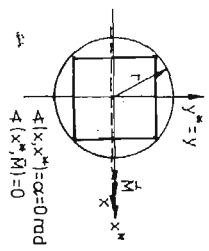
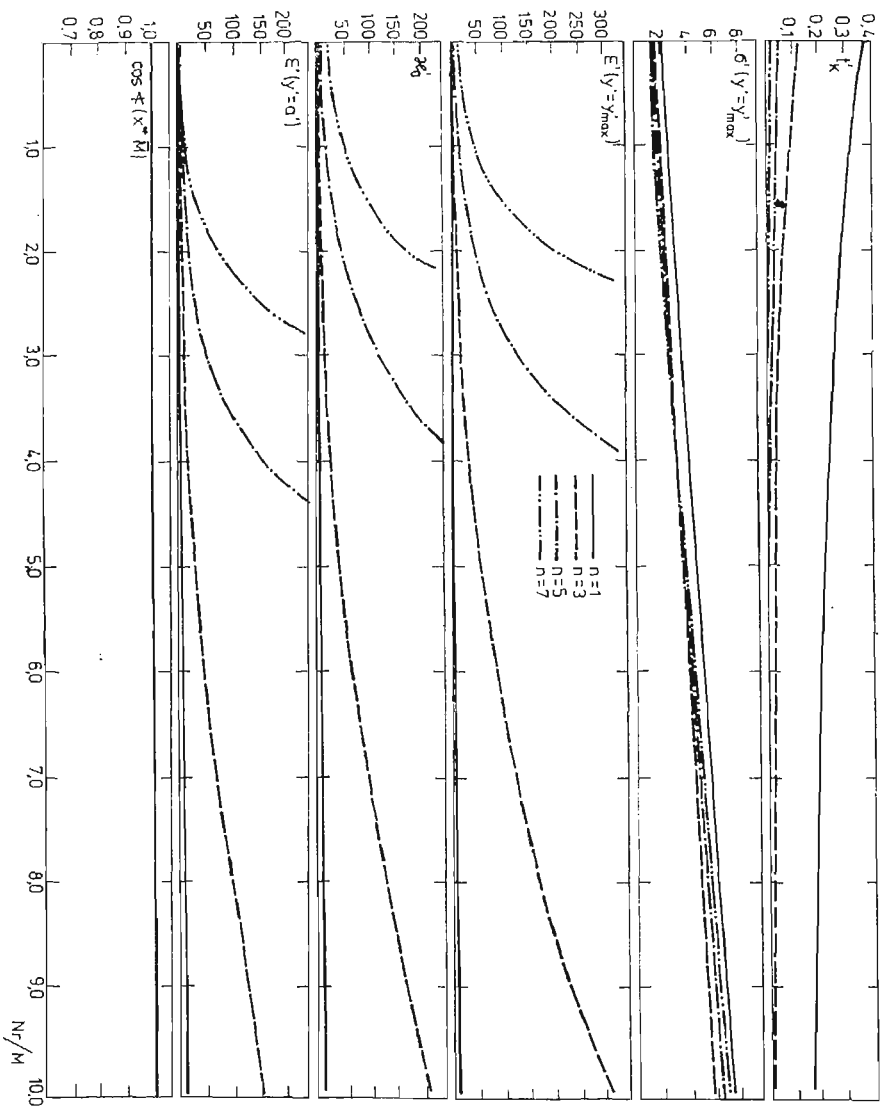
Z postaci związku (2.27) wynika, że wszystkie wielkości określone w tym punkcie zależą od całek (2.20) - (2.22), które w istotny sposób są zależne od sił działających na pręt. Stąd rzeczą korzystną jest ich tablicowanie. Ponieważ jednak ze wzorów przedstawiających rozwiązanie zagadnienia można wybrać pewne bezwymiarowe wielkości zależne od tych właśnie całek, więc program na maszynę cyfrową tak ułożono, aby bezpośrednio te wielkości tabelaryzować.

Przykładowe wyniki przedstawiono w postaci wykresów na rysunkach 6 i 7. Można się nimi w prosty sposób posłużyć przy wstępnym wymiarowaniu mimośrodowo rozciąganych elementów prętowych konstrukcji pracujących w warunkach pełzania ustalonego, bądź (interpretując wielkości kinematyczne jako statyczne) w warunkach fizykalnie nieliniowej teorii sprężystości. Dla celów dokładnego projektowania należy posłużyć się programem. Program i sposób jego wykorzystania oraz numeryczny przykład przedstawiono w sprawozdaniu realizacji problemu węzłowego 05.12, temat 13.1.

Rozwiązane w niniejszej pracy zagadnienie mimośrodowego rozciągania pozwala na łatwe wykorzystanie otrzymanych tu wyników w analizie wyboczenia w warunkach pełzania ustalonego, umożliwiając jego rozwiązanie bez powszechnie wprowadzanych przez autorów ograniczeń, dotyczących dowolności kształtu przekroju poprzecznego pręta i jego obciążenia.



Rys. 6.



Rys. 7.



## Literatura cytowana w tekście

1. M. CHRZANOWSKI; *Zniszczenie kruche prętów mimośrodowo rozciąganych przy uwzględnieniu pełzania ustalonego*, Rozpr. Inż. T. 16, z. 4, 1969.
2. A. JAKUBOWICZ, *Techniczna teoria zginania prętów dla pewnego przypadku materiału fizycznie nieliniowego*, Rozpr. Inż. T. 10, z. 3, 1963.
3. Ł. M. KACZANOW; *Teorija polzuczesti*, Fitmatgiz, Moskwa 1960.
4. F. K. G. ODQVIST; *On theories of creep rupture*, Publ. nr 136 Institutionen för hallfasthetslära, Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm, 1961.
5. S. PIECHNIK; *Combined tension-bending creep for a solid bar*, Trans. of the Royal Inst. of Technology, nr 194, Stockholm 1962.
6. S. PIECHNIK; *Pełzanie prętów przyzmatycznych przy łącznym obciążeniu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, nr 1, Bud. Łąd., Kraków 1963.
7. S. PIECHNIK, M. CHRZANOWSKI; *Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending*, Inst. J. Solids and Structures, vol. 6, 1970.
8. I. N. RABOTNOW; *Polzuczest' elementow konstrukcji*, Moskwa 1966.

## Резюме

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ИЗГИБАЕМЫХ И РАЗТЯГИВАЕМЫХ  
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БАЛКАХ

Принимая степенный закон ползучести (закон Одквиста для установившейся ползучести), а также линейные уравнения Коши и Навье (для ускорений равных нулю) решено задачу одновременного растяжения и изгиба призматических стержней о произвольной форме поперечного сечения. Предполагая, что некоторые параметры деформации выполняют систему уравнений, показано способ приложения сил исполняющего точно статические краевые условия, а также получено все компоненты тензоров напряжений, скоростей деформаций, перемещения, и время до появления трещины (за Качановым).

Особению точному анализу подвергнуто состояние деформации стержня. Приведен алгоритм вычисления неопределённых параметров.

## Summary

## REOLOGICAL EFFECTS IN METAL BEAMS UNDER BENDING AND TENSION

The problem of simultaneous tension and bending of prismatic bar of arbitrary cross-section shape has been solved in the case of the steady state creep law in the power form (Odquist's law) and linear Cauchy and Navier relations.

Assuming that certain parameters of deformation satisfy the system of equations. The method of the application of loads satisfying exactly the boundary conditions was shown, and the components of the stress tensor, rate of strains and displacements have been obtained as well as the time of crack initiation (according to Kachanov). The state of the bar deformation was subjected to detailed analysis. The numerical algorithm of unknown parameters of deformation has been given.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 marca 1979 roku.*



ZAGADNIENIA KONCENTRACJI NAPRĘŻEŃ W OTOCZENIU OTWORÓW W OŚRODKU  
NIEJEDNORODNYM. CZĘŚĆ II.

W. I. ANDREJEW (MOSKWA)

W pracy tej wyprowadzone są równania sprężystego i sprężysto-plastycznego zagadnienia grubościennego walca i grubościennej kuli z materiału niejednorodnego. Przytoczone są pewne rozwiązania dla różnych charakterystyk mechanicznych zależnych od promienia. Wyniki obliczeń mogą być wykorzystane do oceny stanu naprężeń w pobliżu otworów w ośrodku niejednorodnym. Przytoczone są także pewne wyniki obliczeń dotyczących zadania o masywie sprężystym z pustką kulistą, z uwzględnieniem sił objętościowych.

1. Niech grubościenny walec sprężysty, o promieniu wewnętrznym  $a$  i zewnętrznym  $b$  jest obciążony równomiernymi ciśnieniami, odpowiednio  $p_a$  i  $p_b$ . Materiał walca jest niejednorodny i w ogólnym przypadku jego sprężyste charakterystyki — moduł Younga i współczynnik Poissona są dowolnymi funkcjami promienia:  $E(r)$  i  $\nu(r)$ . Przytoczmy podstawowe równanie w biegunowych współrzędnych  $r, \theta$ . Równanie równowagi:

$$(1.1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

Równanie zgodności odkształceń:

$$(1.2) \quad \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0$$

Prawo Hooke'a:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E(r)} [\sigma_r - \nu(r)(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E(r)} [\sigma_\theta - \nu(r)(\sigma_r + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E(r)} [\sigma_z - \nu(r)(\sigma_\theta + \sigma_r)]. \end{aligned}$$

Rozpatrując dostatecznie długi walec i przyjmując dla prostoty  $\varepsilon_z = 0$  (w przypadku  $\varepsilon_z = \varepsilon_\theta$  różnice będą niewielkie), z ostatniego równania (1.3) znajdujemy  $\sigma_z$ , i wyrażając z (1.1)  $\sigma_\theta$  przez  $\sigma_r$  otrzymamy wzory na  $\varepsilon_r$  i  $\varepsilon_\theta$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E} [\sigma_r(1-2\nu) - \nu r \sigma_r'], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E} [\sigma_r(1-2\nu) - (1-\nu)r \sigma_r']. \end{aligned}$$

Tutaj i dalej prim oznacza różniczkowania względem promienia. Podstawiając (1.4) do (1.2) otrzymamy podstawowe równanie rozwiązujące na  $\sigma_r$ :

$$(1.5) \quad r\sigma_r'' + \left[ \frac{3(1-\nu^2) + 2r\nu\nu^1}{1-\nu^2} - r \frac{E'}{E} \right] \sigma_r' - \left[ \frac{\nu'(1+4\nu)}{1-\nu^2} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} \right] \sigma_r = 0.$$

Dla  $\nu = \text{const}$  równanie (1.5) upraszcza się

$$(1.5a) \quad r\sigma_r'' + \left( 3 - r \frac{E'}{E} \right) \sigma_r' - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} \sigma_r = 0,$$

a w przypadku materiału nieściśliwego ( $\nu = 0.5$ ) przyjmuje najprostszą postać:

$$(1.5b) \quad r\sigma_r'' + \left( 3 - r \frac{E'}{E} \right) \sigma_r' = 0.$$

Całkę ostatniego równania możemy otrzymać w postaci ogólnej dla dowolnej funkcji  $E(r)$ . Oznaczając  $y = \sigma_r$ , dostaniemy

$$y' + \left( \frac{3}{r} - \frac{E'}{E} \right) y = 0,$$

stąd

$$y = c_1 \frac{E(r)}{r^3},$$

i ostatecznie

$$(1.6) \quad \sigma_r = c_2 + c_1 \int \frac{E(r)}{r^3} dr.$$

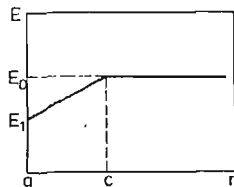
Drugie naprężenie  $\sigma_\theta$  łatwo znajduje się z (1.1). Oczywiście, z (1.6) otrzymuje się rozwiązanie dla materiału jednorodnego ( $E = \text{const}$ )

$$(1.7) \quad \sigma_r = c_2 - c_1 \frac{E}{2r^2}.$$

W przypadku materiału ściśliwego ( $\nu = \text{const} \neq 0.5$ ) rozwiązanie równania (1.5a) istotnie zależy od postaci funkcji  $E(r)$  i dla pewnych zależności może być sprowadzone do równań klasycznych. Tak na przykład, jeśli  $E = E_0 r^n$ , to równanie (1.5a) jest równaniem Eulera

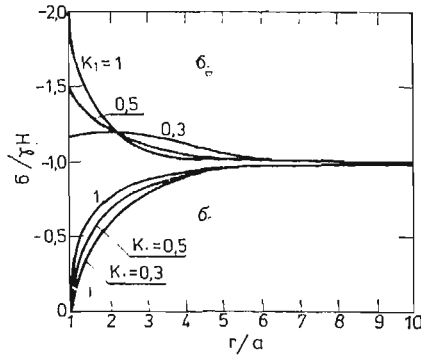
$$r\sigma_r'' + (3-n)\sigma_r' - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{n}{r} \sigma_r = 0.$$

W przypadku zależności  $E(r)$  odcinkami liniowej (na rys. 1. jest ona pokazana dla ośrodka nieograniczonego ( $b \rightarrow \infty$ )) równanie (1.5a) sprowadza się do hipergeometrycz-



Rys. 1.

nego, a w przypadku  $\nu = 0.5$  rozwiązanie otrzymuje się w sposób elementarny przy pomocy wzoru (1.6) dla obszaru  $a \leq r \leq c$  i (1.7) dla przedziału  $c \leq r < \infty$ . Na Rys. 2. przytoczone są pewne wykresy naprężeń  $\sigma_r$  i  $\sigma_\theta$  dla przypadku  $c = 3a$ ,  $p_a = 0$ ,  $p_b = -\gamma H$  i różnych wartości  $k_1 = \frac{E_1}{E_0}$ . Widać, że wykresy  $\sigma_r$  zmieniają się nieznacznie w porównaniu z naprężeniami w zagadnieniu jednorodnym, podczas gdy naprężenia  $\sigma_\theta$  w pobliżu



Rys. 2.

brzegu pustki maleją znacznie w miarę zmniejszania się parametru  $k_1$ , przy tym maksimum naprężeń może przesuwać się od brzegu pustki w głąb masywu.

2. W zagadnieniu grubościennej kuli sprężystej, obciążonej na wewnętrznym brzegu ( $r = a$ ) ciśnieniem  $p_a$ , a na zewnętrznym ( $r = b$ ) ciśnieniem  $p_b$ , przy takich samych założeniach jak w rozpatrywanym powyżej zagadnieniu rury grubościennej, wśród podstawowych równań różnić się będzie równanie równowagi, które we współrzędnych kulistych  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  ma postać

$$(2.1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Oprócz tego, uwzględniając, że  $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$  i wyrażając na podstawie (2.1)  $\sigma_\theta$  przez  $\sigma_r$ , prawo Hooke'a można teraz zapisać w następującej postaci

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r(1-2\nu) - \nu r \sigma_r'], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_r(1-2\nu) + \frac{1-\nu}{2} r \sigma_r' \right]. \end{aligned}$$

Trzeci związek przy uwzględnieniu  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$  będzie analogiczny. Podstawiając (2.2) do (1.2) (warunek Saint-Venanta w przypadku symetrii środkowej ma taką postać, jak i w płaskim osiowosymetrycznym zadaniu) otrzymujemy podstawowe równanie:

$$(2.3) \quad r \sigma_r'' + \left( 4 - \frac{E'}{E} r - \frac{\nu' r}{1-\nu} \right) \sigma_r' + \left( -2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} - \frac{4\nu'}{1-\nu} \right) \sigma_r = 0.$$

W przypadku  $\nu = \text{const}$  równanie przyjmuje postać

$$(2.3a) \quad r \sigma_r'' + \left( 4 - \frac{E'}{E} r \right) \sigma_r' - 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} \sigma_r = 0,$$

a dla  $\nu = 0.5$  ma najprostszą postać

$$(2.3b) \quad r\sigma_r'' + \left(4 - \frac{E'}{E}r\right)\sigma_r' = 0.$$

Ostatnie równanie pozwala otrzymać rozwiązanie w postaci całki

$$(2.4) \quad \sigma_r = c_2 + c_1 \int \frac{E(r)dr}{r^\nu}.$$

Przytoczymy niektóre rozwiązania otrzymanych równań dla różnych zależności  $E(r)$ . W przypadku materiału ściśliwego ( $\nu = \text{const} \neq 0.5$ ) dla funkcji  $E(r) = E_0 r^n$  równanie (2.3a) sprowadza się do postaci

$$(2.5) \quad \varrho^2 s'' + (4-n)\varrho s' - 2kns = 0.$$

Tutaj  $\varrho = \frac{r}{\alpha}$ ,  $k = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$ ,  $s = \frac{\sigma_r}{p}$ , gdzie  $p$ - pewne ciśnienie charakterystyczne. Równanie (2.5) jest równaniem Eulera, którego rozwiązanie zapisuje się w postaci

$$(2.6) \quad s = c_1 \varrho^\alpha + c_2 \varrho^\beta,$$

gdzie

$$\alpha, \beta = \frac{n-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(n-3)^2}{4} + 2kn}.$$

W przypadku zależności przytoczonej na rys. 1., równanie (2.3a) w obszarze  $a \leq r \leq c$  przyjmuje postać

$$(2.7) \quad \varrho(\varrho+A)s'' + (3\varrho+4A)s' - 2ks = 0,$$

gdzie  $A = \frac{E_1 c - E_0 a}{(E_0 - E_1)a}$ . Podstawiając  $\varrho = A(x-1)$ ,  $s = y(x)$  otrzymamy hipergeometryczne równanie Gaussa

$$(2.7a) \quad x(x-1)y'' + (3x+1)y' - 2ky = 0,$$

które w skróconej postaci da się zapisać [1] następująco

$$(2.7b) \quad H(\alpha, \beta, \gamma, y, x) = 0,$$

ze stałymi

$$\alpha, \beta = 1 \pm \sqrt{1+2k},$$

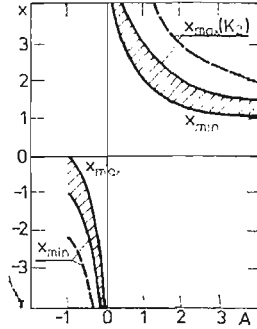
$$\gamma = -1$$

Postać rozwiązania równania (2.7b) zależy od obszaru zmienności zmiennej  $x$ , która związana jest z  $r$  zależnością

$$(2.8) \quad x = \frac{r}{aA} + 1.$$

Na rys. 3. pokazane są obszary zmienności  $x$  w zależności od parametru  $A$ . Zauważmy, że położenie krzywych ograniczających te obszary  $x_{\max}$  dla  $A < 0$  i  $x_{\min}$  dla  $A > 0$  nie zależy od wartości  $k_1 = \frac{E_1}{E_0}$  i  $k_2 = \frac{c}{d}$ , równocześnie położenie krzywych  $x_{\min}$  dla

$A < 0$  i  $x_{\max}$  dla  $A > 0$  zależy od  $k_2$ . W ten sposób, obszar zmienności  $x$  można rozbić na dwa. A mianowicie,  $A < 0$   $x \leq 0$ , oraz  $A > 0$   $x \geq 1$ . Wówczas rozwiązanie równania (2.7b) jest znane tylko dla obszaru  $0 < x < 1$ , a rozwiązanie dla półprostych  $x < 0$  i  $x > 1$  otrzymuje się przy pomocy określonych podstawień. Oddzielnym przypadkiem



Rys. 3.

est  $A = 0$ , gdy  $x$  jest nieokreślone, ale w tym przypadku bezpośrednio z (2.7) otrzymujemy równanie Eulera.

Przytoczymy rozwiązanie dla przypadku  $A > 0$ . Podstawienie  $\xi = \frac{1}{x}$ ,  $y(x) = |x|^{-\alpha} \eta(\xi)$  sprowadza rozwiązanie równania (2.7b) do rozwiązań równania

$$(2.9) \quad H(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \eta, \xi) = 0,$$

dla obszaru  $0 \leq \xi \leq 1$ . Przy tym

$$(2.10) \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \alpha - \gamma + 1, \quad \gamma_1 = \alpha - \beta + 1,$$

jeśli  $\gamma_1$  nie jest liczbą całkowitą. Rozwiązanie równania (2.7b) wyraża się przez hipergeometryczne funkcje  $F_i$  [2] i po nie skomplikowanych przekształceniach można otrzymać wyrażenie dla naprężeń:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= p \xi^\alpha [c_1 F_1(\xi) + c_2 \xi^{1-\nu_1} F_2(\xi)], \\ \sigma_\theta &= p \xi^\alpha \left\{ c_1 \left[ \left( 1 - \alpha \frac{1-\xi}{2} \right) F_1(\xi) - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\gamma_1} \frac{1-\xi}{2} \xi F_3(\xi) \right] + \right. \\ &\quad \left. + c_2 \left[ \xi^{1-\nu_1} \left( 1 - \frac{1-\xi}{2} (1 + \alpha - \gamma_1) \right) F_2(\xi) - \frac{\alpha_2 \beta_2}{\gamma_2} \xi^{2-\nu_1} \frac{1-\xi}{2} F_4(\xi) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Tutaj

$$F_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{\alpha_i+k-1}^k c_{\beta_i+k-1}^k}{c_{\gamma_i+k-1}^k} \xi^k,$$

gdzie  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  zgodne są z (2.10), a  $\alpha_2 = \alpha_1 - \gamma_1 + 1$ ,  $\beta_2 = \beta_1 - \gamma_1 + 1$ ,  $\gamma_2 = 2 - \gamma_1$ ,  $\alpha_3 = \alpha_1 + 1$ ,  $\beta_3 = \beta_1 + 1, \dots, \gamma_4 = \gamma_2 + 1$ . Stałe rozwiązania (2.11) można wyznaczyć z warunków brzegowych dla  $\xi = \xi_1$  i  $\xi = \xi_2$ , odpowiadających brzegom kuli  $a$  i  $b$ .

W przypadku gdy  $\gamma_1$  jest liczbą całkowitą, co jest możliwe tylko dla wartości  $\nu = \frac{3}{11}$

(dla  $0 < \nu < 0.5$   $\gamma_1$  zmienia się od 3 do  $1+2\sqrt{3}$ , przy czym jedyną liczbą całkowitą w tym przedziale jest  $\gamma_1 = 4$ ) rozwiązania równania (2.9) można sprowadzić przy pomocy podstawienia

$$\eta(\xi) = |\xi|^{1-\nu_1} \eta_1(\xi),$$

do rozwiązania równania

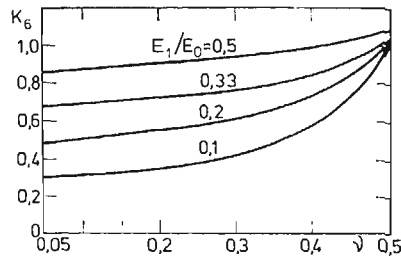
$$H(\alpha_1 - \gamma_1 + 1, \beta_1 - \gamma_1 + 1, 2 - \gamma_1, \eta, \xi) = 0.$$

Rozwiązanie powyższego równania jest również znane i można je znaleźć np. w [1].

Jak już zauważyliśmy, w przypadku  $A = 0$  równanie (2.7) przechodzi w równanie Eulera

$$p^2 s'' + 3ps' + -2ks = 0,$$

które jest szczególnym przypadkiem równania (2.5) dla  $n = 1$ . Parametry  $\alpha$  i  $\beta$ , występujące w rozwiązaniu (2.6) są rzeczywiste, ponieważ  $k = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$  — jest zawsze dodatnie. Rozwiązanie (2.4) jest ważne w obszarze liniowej zależności  $E(r)$  ( $a \leq r \leq c$ ), dla  $r \geq c$  ważne jest rozwiązanie zadania jednorodnego. Przytoczymy pewne wyniki obliczeń dla danego przypadku przy warunkach brzegowych  $r = a, p_a = 0, r = b \rightarrow \infty, p_b = -\gamma H$ . Na rys. 4. przytoczone są wykresy zależności współczynnika koncentracji naprężeń  $k_\sigma = \frac{|\sigma_0(r=a)|}{\gamma H}$  od współczynnika Poissona przy różnych zależnościach



Rys. 4.

$E_1/E_0$ . Zauważmy, że strefa niejednorodności, dana zależnością  $a/c$  jest w tym przypadku ściśle określona (dla  $A = 0, \frac{a}{c} = \frac{E_1}{E_0}$ ). Z rysunku widać, że przy silnej niejednorodności w pobliżu brzegu ( $E_1/E_0$  — małe) wpływ współczynnika Poissona może być dostatecznie duży.

3. Rozpatrzmy sprężysto-plastyczne zadanie o równowadze grubościennej kuli przy tych samych założeniach co w p. 2. Będziemy zakładać, że w każdym punkcie materiał spełnia warunek idealnej plastyczności, przy tym moduł Younga i granica płynięcia  $\sigma_r$  są funkcjami promienia

$$(3.1) \quad \begin{aligned} E(r) &= E_0 \left[ 1 + (k_1 - 1) \left( \frac{a}{r} \right)^n \right], \\ \sigma_r(r) &= \sigma_{r0} \left[ 1 + (k_r - 1) \left( \frac{a}{r} \right)^m \right] \end{aligned}$$



Przy przejściu do ośrodka nieograniczonego (zewnątrzny promień kuli  $b \rightarrow \infty$ ), takie funkcje asymptotyczne dostatecznie dobrze opisują rzeczywiste zależności. Oprócz tego, jak zwykle w sprężysto-plastycznych zadaniach będziemy zakładać, że materiał jest nieściśliwy ( $\nu = 0.5$ ). Rozwiązanie w strefie sprężystej zgodnie z (2.4) przyjmuje postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{re} &= c_2 + c_1 \left[ -\frac{a^3}{3r^3} - \frac{k_1 - 1}{n + 3} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+3} \right], \\ \sigma_{oc} &= c_2 + c_1 \frac{a^3}{6r^3} + \frac{(k_1 - 1)(n + 1)}{2(n + 3)} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+3} \Big]. \end{aligned}$$

Drugie naprężenie otrzymano z równania (2.1), indeks odpowiada strefie sprężystej.

W przypadku symetrii środkowej warunki plastyczności Hubera-Misesa i Treski-Saint Venanta mają jednakową postać

$$(3.3) \quad \sigma_0 - \sigma_r = \kappa \sigma_r(r), \quad \kappa = \pm 1.$$

Podstawiając ten związek do (2.1), po scałkowaniu otrzymujemy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{rp} &= D + 2\kappa \sigma_{T0} \left[ \ln \frac{r}{a} - \frac{k_T - 1}{m} \left( \frac{a}{r} \right)^m \right], \\ \sigma_{op} &= D + 2\kappa \sigma_{T0} \left[ \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} + \frac{(k_T - 1)(m - 2)}{2m} \left( \frac{a}{r} \right)^m \right]. \end{aligned}$$

Tutaj indeks  $p$  odpowiada strefie plastycznej. Stałe  $C_1$ ,  $D$ ,  $C_2$ , oraz promienie brzegów strefy plastycznej  $r_i$  określa się z warunków brzegowych na powierzchni kuli

$$(3.5) \quad \begin{aligned} r = a, \quad \sigma_r &= -p_a, \\ r = b, \quad \sigma_r &= -p_b, \end{aligned}$$

i na wspomnianych granicach

$$(3.5a) \quad \begin{aligned} r = r_i, \quad \sigma_{re} &= \sigma_{rp}, \\ \sigma_{oe} - \sigma_{re} &= \kappa \sigma_T(r_i), \\ u_e &= u_p. \end{aligned}$$

Drugi ze związków (3.5a) odpowiada punktowi przejścia materiału w stan uplastycznienia,  $u$  — jest przemieszczeniem promieniowym.

Przed wyznaczeniem stałych, należy zbadać zagadnienie powstawania stref plastycznych. Na podstawie związków (3.2) przejście w stan plastyczny zachodzi przy spełnieniu warunku

$$(3.6) \quad F(r) = \frac{c_1}{2\kappa \sigma_{T0}} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \frac{1 + (k_1 - 1)(a/r)^n}{1 + (k_T - 1)(a/r)^m} = 1.$$

Po znalezieniu maksimum funkcji  $F(r)$ , otrzymamy równanie określające  $r_s$  — promień, od którego zaczynają pojawiać się odkształcenia plastyczne

$$(3.7) \quad 3 + \alpha \left( \frac{a}{r_s} \right)^m + \beta \left( \frac{a}{r_s} \right)^n + \gamma \left( \frac{a}{r_s} \right)^{m+n} = 0.$$

Tutaj  $\alpha = (3 - m)(k_T - 1)$ ,  $\beta = (3 + n)(k_1 - 1)$ ,  $\gamma = (3 + n - m)(k_1 - 1)(k_T - 1)$ . W zależności od wartości  $n$ ,  $m$ ,  $k_1$ ,  $k_T$  zachowanie się funkcji  $F(r)$  może znacznie się różnić. Na

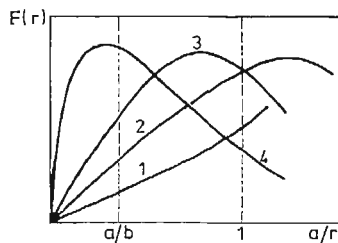
Rys. 5. podaliśmy cztery różne postacie tej funkcji. Widać, że funkcja  $F(r)$  może nie posiadać maksimum (krzywa 1), a w przypadku jego istnienia, może ono znajdować się wewnątrz ścianki kuli (krzywa 3) lub na zewnątrz jej (krzywe 2 i 4). W ostatnich dwóch przypadkach powstają oczywiście odkształcenia plastyczne na wewnętrznym lub zewnętrznym brzegu kuli. W przypadku braku maksimum, pozostaje określić największe wartości  $F(r)$ , (np. na krzywej 1 dla  $r = a$ ). Możliwe są również funkcje posiadające minimum, np. dla  $n < -(m+3)$ . W tym przypadku odkształcenia plastyczne powstają kolejno na powierzchniach kuli i przy zwiększeniu obciążenia strefy łączą się.

Łatwo znajdujemy ciśnienie, gdzie najpierw pojawią się odkształcenia plastyczne. Określając  $C_1$  dla zagadnienia sprężystego, zgodnie z (3.6) znajdziemy

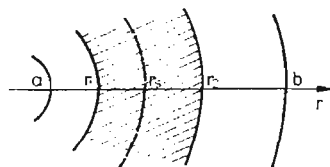
$$(3.8) \quad p_s = (p_a - p_b)_s = \left[ \frac{1 - k_2^3}{3} + \frac{k_1 - 1}{n + 3} (1 - k_2^{n+3}) \right] \frac{2\kappa\sigma_{T0} [1 + (k_T - 1)(a/r_s)^m]}{[1 + (k_1 - 1)(a/r_s)^n](a/r_s)^3}.$$

Tutaj  $k_2 = \frac{a}{b}$ . Z (3.8) można także określić znak  $\kappa$ , jeśli tylko znak wyrażenia znajdującego się w pierwszym nawiasie kwadratowym przy znanych  $k$ ,  $n$  i  $k_2$  jest znany. Np. dla  $n > 0$ ,  $\kappa = \text{sign}(p_a - p_b)$ .

W zależności od miejsca wystąpienia strefy plastycznej może być różny dalszy sposób rozwiązywania. Rozpatrzmy przypadek, gdy odkształcenia plastyczne powstają wewnątrz ścianki kuli:  $a < r_s < b$ . Przy zwiększeniu ciśnienia  $p$ , strefa plastyczna rozszerza się



Rys. 5.



Rys. 6.

w obie strony aż do momentu gdy jedna z granic pokryje się z jedną z powierzchni kuli, a następnie, do całkowitego przejścia kuli w stan plastyczny. Oznaczając granice strefy plastycznej przez  $r_1$  i  $r_2$  (p. rys. 6), i dwukrotnie spełniając warunki (3.5) i (3.5a), znajdujemy osiem związków dla ośmiu niewiadomych:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $D$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  i  $B$ , gdzie  $C_3$  i  $C_4$  — stałe rozwiązania zagadnienia sprężystego, typu (3.2) dla drugiej (wewnętrznej lub zewnętrznej) strefy sprężystej, a  $B$  — stała występująca w wyrażeniu na przemieszczenia w strefie plastycznej

$$(3.9) \quad u_p = \frac{B}{r_2}.$$

Ostatni związek otrzymuje się drogą całkowania warunku nieściśliwości. Przemieszczenie w strefie sprężystej określa się z prawa Hooke'a (2.2) i związku Cauchy'ego  $u = \varepsilon_{\theta r}$ . Układ ośmiu równań dla określenia powyżej wymienionych stałych, może być sprowadzony do dwóch, z których jedno jest liniowe

$$(3.10) \quad \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3 \frac{1 + (k_T - 1)(a/r_1)^m}{1 + (k_T - 1)(a/r_2)^m} = \frac{1 + (k_1 - 1)(a/r_1)^n}{1 + (k_1 - 1)(a/r_2)^n},$$

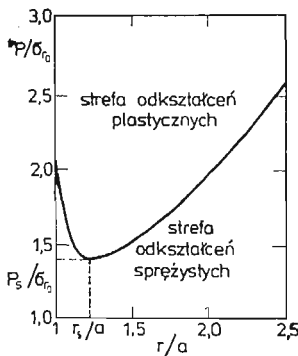
a drugie przestępne

$$(3.11) \quad -\frac{p}{2\kappa\sigma_{T0}} = \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k_T - 1}{m} \left[ \left( \frac{a}{r_1} \right)^m - \left( \frac{a}{r_2} \right)^m \right] + \left\{ \frac{1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r_1} \right)^3 + \left( \frac{a}{r_2} \right)^3 - k_2^3 \right] + \frac{k_1 - 1}{n + 3} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r_1} \right)^{n+3} + \left( \frac{a}{r_2} \right)^{n+3} - k_2^{n+3} \right] \right\} \frac{1 + (k_T - 1)(a/r_2)^m}{1 + (k_1 - 1)(a/r_2)^n} \left( \frac{r_2}{a} \right)^3.$$

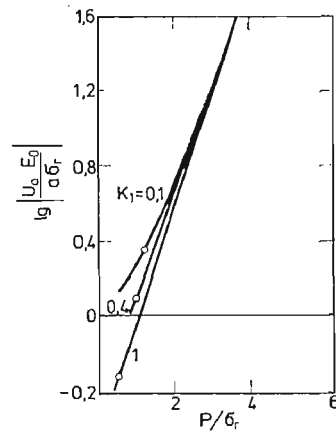
W celu wyznaczenia z tych związków promieni  $r_1$  i  $r_2$  przy danym  $p > p_s$  stosuje się następującą metodę odwrotną.

Wybierając dowolną wartość  $r_1$  z przedziału  $[a, r_s]$ , z (3.10) znajdujemy odpowiadającą wartość  $r_2$  i dla otrzymanej pary wartości  $r_1, r_2$  z (3.11) określa się konieczne ciśnienie  $p$ . (Przy dojściu strefy plastycznej do jednej z powierzchni kuli otrzymuje się przypadek zwyrodniały i dalsze obliczenia prowadzi się jedynie przy pomocy związku (3.11) dla  $r_1 = a$  lub  $r_2 = b$ ).

Na rys. 7 pokazaliśmy zależność  $p(r_1, r_2)$  dla przypadku  $\sigma_T = \sigma_{T0} = \text{const}$ ,  $k_1 = 0.1$ ,  $n = 2$ ,  $b \rightarrow \infty$  ( $k_2 = 0$ ). Według tego wykresu można dla danego ciśnienia  $p$  określić



Rys. 7.



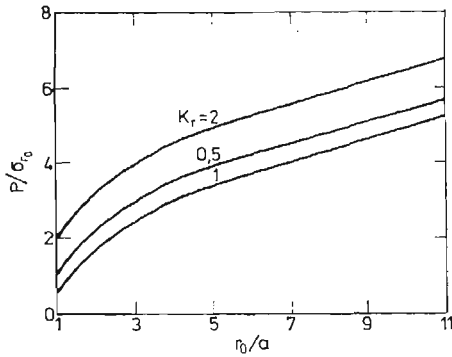
Rys. 8.

granice strefy plastycznej. Znając je, pozostałe 6 stałych można określić bardzo łatwo z pozostałych związków. Na rys. 8 pokazane są przemieszczenia punktów brzegu pustki w zależności od ciśnienia dla różnych stopni niejednorodności sprężystej. Kółka na krzywych odpowiadają początkowi odkształcenia plastycznego.

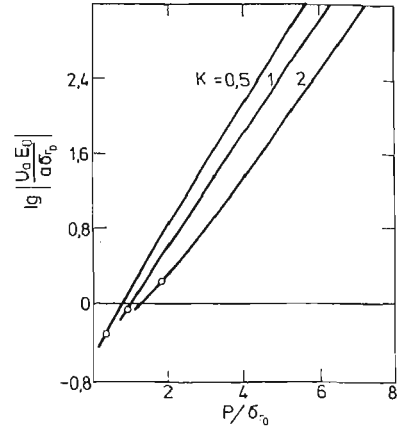
Na rys. 9 pokazaliśmy jeszcze jeden przykład obliczenia dla przypadku  $b \rightarrow \infty$  ( $k_2 = 0$ ),  $n = 2$ ,  $k = 0.5$ ,  $m = 2$  i różnych wartości  $k_T$ . W tym przykładzie odkształcenia plastyczne pojawiają się na brzegu pustki ( $r = a$ ), a przy powiększeniu ciśnienia, strefa plastyczna (określona promieniem  $r$ ) rozprzestrzenia się w głąb masywu. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń, na rys. 10, podaliśmy wykresy przemieszczeń punktów brzegu pustki w zależności od ciśnienia, dla różnych wielkości plastycznej niejednorodności. Porównując wykresy na rys. 8 i 10 można zauważyć, że przy dużych ciśnieniach niejednorodność plastyczna znacznie bardziej wpływa na przemieszczenia, niż sprężysta. Jest to związane z tym, że przy dużych ciśnieniach, kiedy strefa plastyczna jest dostatecznie

duża, jej rozmiary mało zależą od wielkości sprężystej niejednorodności, a znacznie od plastycznej.

4. Na zakończenie rozpatrzmy zagadnienie o wpływie sił objętościowych i asymetrii obciążeń zewnętrznych na stan naprężenia w pobliżu pustki kulistej. Pełne sformułowanie zadania podane jest w [3]. W celu rozwiązania zadania posłużono się algorytmem zapro-



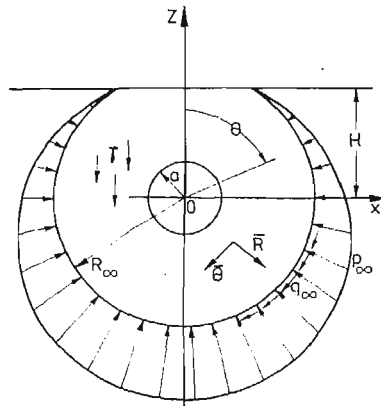
Rys. 9.



Rys. 10.

ponowanym w [4]. Programy i obliczenia wykonali A. B. Zołotow, W. I. Prokopiew, B. N. Sidorow i autor niniejszej pracy. Poniżej krótko przedstawimy metodę obliczeń i wyniki.

Na Rys. 11. pokazany jest schemat obliczeniowy zadania, zgodnie z którym, z niejednorodnej sprężystej półprzestrzeni wycina się ściętą kulę o promieniu  $R_\infty$ , a — jest



Rys. 11.

promieniem pustki. Z powodu symetrii względem osi  $Oz$  wystarczy rozpatrzeć połowę kuli. W związku z przyjętą geometrią i obciążeniami oddziaływującymi na rozpatrywany obszar, warunki brzegowe mogą być zapisane w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} r = a \\ \theta \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\} \sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0, \\
 & \left. \begin{array}{l} \theta = 0, \quad a \leq r \leq H \\ \theta = \pi, \quad a \leq r \leq R_\infty \end{array} \right\} v = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \\
 (4.1) \quad & \left. \begin{array}{l} r = R_\infty \\ \arccos \frac{H}{R_\infty} \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\} \begin{cases} \sigma_r = -p_\infty = -\gamma(H - R_\infty \cos \theta) \left( \frac{\nu}{1-\nu} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right), \\ \tau_{r\theta} = q_\infty = \frac{\gamma}{2} (H - R_\infty \cos \theta) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sin 2\theta, \end{cases} \\
 & \left. \begin{array}{l} r = \frac{H}{\cos \theta} \\ 0 \leq \theta \leq \arccos \frac{H}{R_\infty} \end{array} \right\} \begin{cases} \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta = 0, \\ \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Na każdy element rozpatrywanej przestrzeni oddziałują siły objętościowe

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & \bar{R} = \gamma \cos \theta, \\
 & \bar{\Theta} = \gamma \sin \theta.
 \end{aligned}$$

W rozpatrywanej metodzie mechaniczne stałe materiału można przyjąć jako dowolne funkcje dwóch współrzędnych, jednak obliczenia przeprowadza się dla modułu Younga danego w postaci (3.1) i  $\nu = \text{const}$ . Sposób przyjęty w obliczeniach pozwala na wyrowadzenie równań równowagi na cyfrowej maszynie matematycznej. W tym celu konieczna jest znajomość funkcjonałów energii odkształconej strefy i pracy sił zewnętrznych. W rozwiązaniu zadania stosuje się metodę elementów skończonych, w której obszar dzieli się kulistymi i stożkowymi powierzchniami na skończoną liczbę podobszarów. Zakładając, że wewnątrz  $(i,j)$ -tego elementu wszystkie odkształcenia i naprężenia są stałe, można dla niego napisać funkcjonał energii

$$(4.3) \quad \Phi_{ij} = \left\{ \frac{1}{E(r)} [\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_\varphi^2 - 2\nu(\sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta \sigma_\varphi + \sigma_r \sigma_\varphi) + 2(1+\nu)\tau_{r\theta}^2] \right\}_{ij} \cdot v_{ij},$$

gdzie

$$V_{ij} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} f(\xi) \sin \theta d\xi d\theta,$$

$$a) \quad f(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad 0 \leq \theta \leq \arccos \frac{H}{R_\infty} \quad \text{i} \quad r > \frac{H}{\cos \theta}, \\ \xi^2 & \end{cases}$$

punktowi węzłowemu odpowiadać będzie funkcjonał

$$\Phi_{cij} = \frac{1}{4} (\Phi_{i-1,j-1} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{ij}),$$

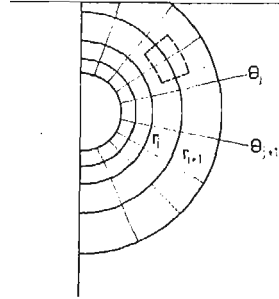
o wartości średniej w objętości, ograniczonej linią kropkowaną na rys. 12. Zgodnie z twierdzeniem o skończenie wymiarowych operatorach liniowych [5], dany funkcjonał można jednoznacznie przedstawić jako macierz współczynników układu liniowych równań algebraicznych, która odpowiada równaniom równowagi.

W celu obliczenia prawych części liniowych równań algebraicznych wykorzystuje się wzory (4.1), (4.2). Dla  $(i, j)$ -tego punktu węzłowego

$$(4.4) \quad \begin{aligned} F'_{ij} &= \bar{R}_j V_{ij} + [p_\infty R_\infty^3 (\text{jeśli } r = R_\infty)] s_{ij}, \\ F''_{ij} &= \bar{\Theta}_j V_{ij} + [q_\infty R_\infty^3 (\text{jeśli } r = R_\infty)] s_{ij}, \end{aligned}$$

gdzie

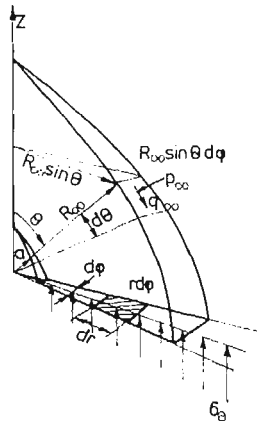
$$s_{ij} = \pi \frac{\cos \theta_{j-1} - \cos \theta_{j+1}}{2},$$



Rys. 12.

a  $p_\infty$  i  $q_\infty$  — oznaczają normalne i styczne ciśnienia, przyłożone na zewnętrznej powierzchni, dane wzorami (4.1).

Dla określenia współczynników układu i jego rozwiązania metodą Gaussa wykorzystuje się procedury w języku Algol. Zauważmy, że wzdłuż promienia obliczaliśmy nierównomierną siatkę, zagęszczającą się przy brzegu pustki. W wyniku obliczeń, wyznaczono naprężenia w środkach elementów, a w celu obliczenia naprężeń na granicach obszaru zastosowano ekstrapolację liniową. Przed przejściem do omówienia wyników należy powiedzieć kilka słów o oszacowaniu dokładności obliczeń. Pierwszą, ocenę całkową przeprowadzamy na podstawie analizy spełnienia warunku równowagi na osi Oz (rys. 13). Całka z obciążeń powierzchniowych i sił objętościowych (Weryfikację przeprowadzono dla przypadku  $R_\infty < H$ )



Rys. 13.

$$I_1 = \gamma \frac{d\varphi}{3} (R_\infty^3 - a^3) + d\varphi \int_0^{\pi/2} p_\infty R_\infty \sin\theta \cos\theta d\theta + d\varphi \int_0^{\pi/2} q_\infty R_\infty^2 \sin^2\theta d\theta.$$

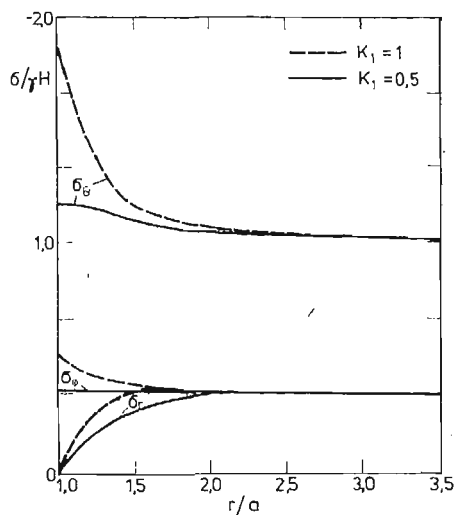
porównywano z obliczoną całką z naprężenia  $\sigma_\theta$ , oddziaływującego na warstwę poziomą

$$I_2 = d\varphi \int_a^{R_\infty} \sigma_\theta r dr$$

Różnica pomiędzy tymi całkami dla pewnych wariantów obliczeń nie przekraczała 0.4%.

Druga weryfikacja polegała na porównaniu naprężeń  $\sigma_\theta$  w punkcie  $\left(r = a, \theta = \frac{\pi}{2}\right)$  dla przypadku jednorodnego ( $k_1 = 1$ ) i rozwiązania zadania o ściskaniu w trzech kierunkach masywu z pustką kulistą (p. [3]). W punkcie tym, jak pokazuje analiza analogicznego zagadnienia płaskiego z otworem walcowym, wpływ ciężaru własnego ośrodka i asymetria obciążeń zewnętrznych nie powinny się różnić od bardziej prostego rozwiązania. W rozpatrywanym zadaniu, odpowiednie porównanie pokazało, że w danym przypadku też ma to miejsce, różnica w wielkościach naprężeń  $\sigma_\theta$  wynosiła około 2%, co jest dobrą dokładnością dla metody elementów skończonych.

Na rys. 14. pokazaliśmy wykresy trzech składowych naprężenia wzdłuż poziomego promienia dla dwóch wersji obliczeń: zadanie jednorodne ( $k_1 = 1$ ) i niejednorodne ( $k_1 = 0.5$ ) dla  $\nu = 0.23$ ,  $\gamma = 21.1$  Pa.



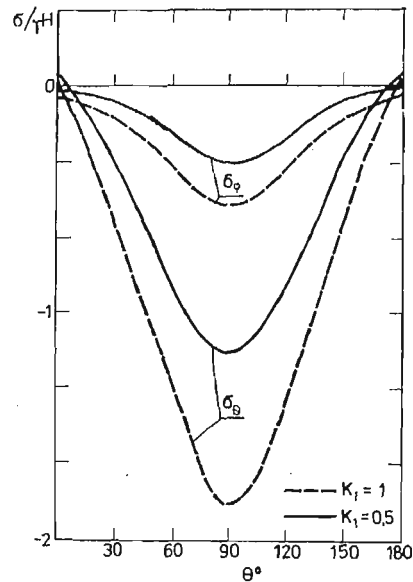
Rys. 14.

Na podstawie tych wykresów można wyciągnąć dwa podstawowe wnioski.

1. Wpływ sił objętościowych i asymetrii obciążenia zewnętrznego daje istotne różnice w naprężeniach  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_\varphi$  w porównaniu z zadaniem Lamègo dla grubościennej kuli w której po pierwsze  $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ , a po drugie  $\sigma_{\theta \max} = 1.5 \gamma H$ . Równocześnie wzdłuż danego kierunku  $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$  wszystkie trzy naprężenia (przypadek jednorodny) praktycznie są takie same jak w zadaniu o ściskaniu (w trzech kierunkach) masywu z pustką kulistą.

2. Wpływ niejednorodności na wielkość naprężeń w pobliżu pustki całkowicie odpowiada temu, co było pokazane przy rozwiązaniu dużo prostszego zadania z symetrią środkową.

Na rys. 15. przedstawione są naprężenia  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_\varphi$  na brzegu pustki w zależności od kąta  $\theta$  dla tych samych dwóch wersji obliczeń. Widać oczywiste różnice w porównaniu z zadaniem Lamègo, związane z istotną zmiennością naprężeń wzdłuż brzegu pustki,



Rys. 15.

aż do miejsca w pobliżu biegunów, gdzie pojawiają się niewielkie naprężenia rozciągające, co może być przyczyną zniszczenia w gruntach, w których granica wytrzymałości na rozciąganie jest znacznie mniejsza od granicy wytrzymałości na ściskanie. Oprócz tego, i to jest ważnym czynnikiem, niejednorodność w pobliżu pustki wpływa proporcjonalnie na obie składowe naprężenia.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń zanalizowano wpływ rozmiaru pustki  $a$  na stan naprężenia przy stałej głębokości  $H$ . Obliczenia przeprowadzono dla  $a = 0.0008 \div 0.2 H$ , przy czym okazało się, że przy wszystkich tych wartościach naprężenie  $\sigma_{\theta \max} \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right)$  praktycznie się nie zmienia, a naprężenie  $\sigma_\theta$  w punktach ( $r = a, \theta = 0 \cdot \pi$ ) zmienia się o wielkość rzędu  $\gamma a$ , co jest zgodne z analogicznymi obliczeniami we wspomnianym powyżej zadaniu o pustce walcowej. Przeprowadzone obliczenia pokazały, że dla dostatecznie zagłębionych otworów ( $a \leq 0.2H$ ), obliczenia z uwzględnieniem niejednorodności mogą być przeprowadzone w dwóch etapach. Pomijając siły objętościowe, można otrzymać rozwiązanie zawierające współczynnik oporu bocznego  $\frac{\nu}{1-\nu}$  z zadania o ściskaniu masywu w trzech kierunkach. Biorąc pod uwagę to, że wpływ niejednorodności na naprężenia  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_\varphi$  w pobliżu brzegu pustki jest proporcjonalny dla wszystkich war-



tości  $\theta$ , współczynnik proporcjonalności można określić z rozwiązania zadania Lamego dla kuli grubościennej. Ponieważ rozwiązanie ostatniego zadania można otrzymać stosunkowo łatwo, to można również przeanalizować różne postacie niejednorodności dla szeroko zmieniających się wartości parametrów.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Э. Камке; *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976, 421.
2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи; *Высшие трансцендентные функции, Гипергеометрическая функция, функции Лежандра*, Наука, М., 1965.
3. W I. ANDREJEW; *Zagadnienie koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w ośrodku niejednorodnym*, cz. I, MTiS 3, 1980.
4. А. Б. Золотов, В. Н. Сидоров; *Алгоритмизация краевых задач строительной механики на ЭВМ*, Строительная механика и расчеты сооружений, № 5, 1975.
5. В. А. Ильин, И. Г. Позняк; *Линейная алгебра*, Наука, М., 1974.

#### Резюме

#### ВОПРОСЫ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ОТВЕРСТИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ. Ч. II

Данная работа является продолжением и развитием I части. В ней рассматриваются результаты собственных исследований автора в вопросе концентрации напряжений в неоднородной среде. Приведены решения упругой и упруго-пластической задач для толстостенных цилиндра и шара с различными законами неоднородности. Рассматривается также задача о концентрации напряжений вблизи подземной сферической полости с учетом собственного веса среды и асимметрии внешней нагрузки, решение которой получено численным методом.

#### Summary

#### STRESS CONCENTRATION IN THE NEIGHBOURHOOD OF HOLES IN A NONHOMOGENEOUS MEDIUM. PART II.

Author's results are considered referring to the stress concentration in a nonhomogeneous medium. The solutions are discussed to elastic and elasto-plastic problems in the case of a thick-walled cylinder and a sphere with various laws of nonhomogeneity. We also envisage the numerical solution the stress concentration problem in the neighbourhood of an underground spherical, cavity taking into account the forces of gravity and asymmetry of an external load.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1979 roku.*



## PEŁZANIE CIENKICH OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK NA PODSTAWIE TEORII USTALONEGO PŁYNIĘCIA

GRZEGORZ G A S I A K (OPOLE)

### 1. Wstęp

E. C. BERNETT [1], a w ślad za nim i inni badacze (por. [2,3]) zauważyli, że w warunkach wysokich temperatur i naprężeń krzywe pełzania nie posiadają początkowej części wzmocnienia. Doświadczenia przeprowadzone przez N. N. MALININA i jego współpracowników [2 - 4] wykazały, że w przypadku pełzania w zakresie dużych odkształceń stopu aluminiowego PA7N<sup>1)</sup> w temperaturach 673, 723 i 748°K, każda z otrzymanych krzywych pełzania posiada początkową część liniową (por. rys. 1). Powyższy fakt pozwala na zastosowanie teorii ustalonego płynięcia w badaniach stateczności przy pełzaniu. W pracy [4] wykazano również, że w przypadku liniowości początkowych odcinków krzywych pełzania teorie płynięcia i wzmocnienia dają rezultaty identyczne, a wyniki obliczeń według tych teorii są bardziej zbliżone do danych doświadczalnych, aniżeli wyniki obliczeń, otrzymane w świetle teorii starzenia.

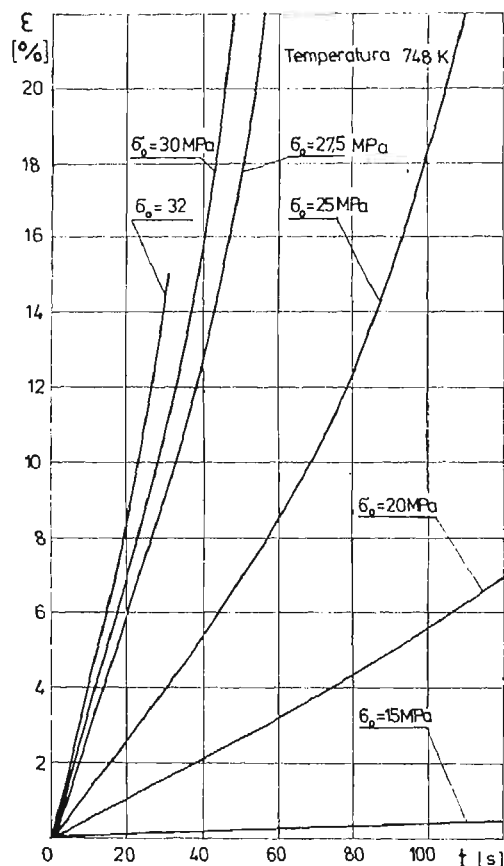
Zastosowanie teorii płynięcia przy pełzaniu w zakresie dużych odkształceń cienkich powłok napotyka znaczne trudności natury matematycznej. Dlatego w literaturze mamy do czynienia z pracami, w których daje się rozwiązania dla najprostszyc przypadków powłok, takich jak powłoka sferyczna i nieskończenie długa powłoka walcowa, obciążonych stałym ciśnieniem wewnętrznym [5 - 11].

Próbę ścisłego rozwiązania powyższego problemu według teorii płynięcia dla dowolnej osiowo-symetrycznej powłoki zawierają prace [11 - 14]. W pracach [12, 13] L. M. KACZANOW, stosując fizyczne związki teorii ustalonego płynięcia przy pełzaniu, otrzymał układ sześciu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, opisujących formę powłoki, stan naprężeń i odkształceń oraz zaproponował numeryczną metodę rozwiązania. Sposób ten w świetle pracy J. ORKISZA [11] nie jest poprawny ze względu na to, że rozkład charakterystyk układu równań prac [12, 13] nie pokrywa się z liniami, wzdłuż których poszukuje się rozwiązania. Ten sam temat podejmuje J. ORKISZ [11], który opierając się na szerszych założeniach (dowolne obciążenie, zmienna grubość powłoki, strefa fałdów), otrzymał układ równań różniczkowych stanu równowagi powłoki prostszy niż odpowiedni układ podany w pracach [12, 13]. Ponadto w pracy [11] zaproponowano numeryczny sposób rozwiązania wyżej wymienionych równań, lecz nie otrzymano konkretnych rozwiązań. Próbę numerycznego rozwiązania równań wyprowadzonych przez J. ORKISZA [11] podjęto w pracy [14], która zawiera niektóre wyniki liczbowe dotyczące

<sup>1)</sup> Według normy GOST odpowiada to stopu aluminiowemu D 16.

jednej powłoki walcowej. W pracy tej jednak nie podano parametrów pełzania materiału. Brak jest również informacji o wartości współczynnika wzmocnienia materiału, przy którym uzyskano warunki początkowe. Fakt ten uniemożliwia przeprowadzenie analizy porównawczej z rezultatami uzyskanymi w niniejszej pracy.

Podkreśla się, że bezpośrednie wyznaczenie naprężenia równoleżnikowego według równania wchodzącego w zależności fizyczne układu równań stosowanych w pracy [14]



Rys. 1. Krzywe krótkoczasowego pełzania stopu aluminiowego PA7N, gdzie  $\sigma_0$  oznacza naprężenie początkowe (w chwili  $t = 0$ ).

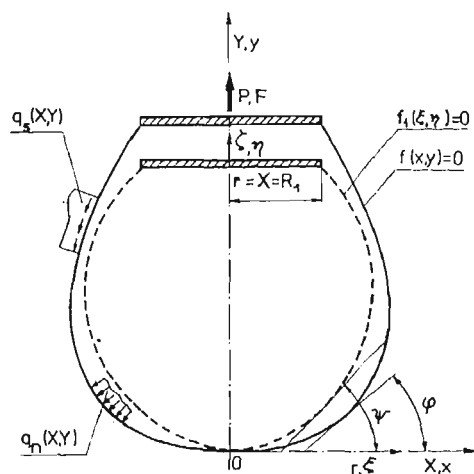
jest uciążliwe ze względu na przestępny charakter tego równania. W związku z tym w niniejszej pracy zastosowano odmienną aniżeli w [14] formę zapisu równań fizycznych.

Celem pracy jest przeprowadzenie, na podstawie teorii ustalonego płynięcia przy pełzaniu, analizy stanu naprężenia i odkształcenia oraz liczbowe wyznaczenie tak zwanego „czasu krytycznego”  $\tau^*$  dla szeregu powłok o początkowym kształcie walca kołowego przy różnych długościach. Pod pojęciem „czas krytyczny”  $\tau^*$  w myśl definicji podanej przez A. S. GRIGORIEWA [15] rozumie się czas, po upływie którego powłoka w procesie pełzania traci stateczność kształtu.

## 2. Założenia wstępne i równania powłoki

Przyjęto, że materiał powłoki jest plastyczny nieściśliwy, izotropowy, obciążenie dowolne osiowo-symetryczne, a sama powłoka jest wiotka, to jest może znajdować się jedynie w stanie błonowym i przenosić tylko naprężenia rozciągające.

Rozpatrzmy cienką, obrotowo-symetryczną powłokę (rys. 2), która obciążona statycznie w chwili  $t = 0$  ulega natychmiastowym odkształceniom plastycznym, a następnie



Rys. 2. Powłoka przed odkształceniem ..... i po odkształceniu —.

zaczyna pełzać według teorii ustalonego płynięcia. Wprowadźmy w tym celu dwa układy współrzędnych: pierwszy ustalony  $X, Y$  (typu Eulera), który związany jest z nieruchomymi punktami w przestrzeni i opisuje formę powłoki odkształconej oraz drugi układ  $r, \xi$  (typu Lagrange'a), gdzie współrzędne są sztywno związane z określonymi cząstkami powłoki i charakteryzują ich stan wyjściowy. Posługiwać się będziemy wielkościami bezwymiarowymi, które definiujemy następująco:

$$x = \frac{X}{R_1}, \quad y = \frac{Y}{R_1}, \quad \xi = \frac{r}{R_1}, \quad \eta = \frac{\zeta}{R_1}, \quad h = \frac{H}{H_1},$$

$$(2.1) \quad p_1 = \frac{\sigma_1}{K}, \quad p_2 = \frac{\sigma_2}{K}, \quad p_t = \frac{\sigma_t}{K}, \quad Q_n = Q_n(x, y) = \frac{R_1}{KH_1} q_n(X, Y),$$

$$Q_s = Q_s(x, y) = \frac{R_1}{KH_1} q_s(X, Y),$$

gdzie poszczególne wielkości oznaczają:  $H_1$  i  $H$  grubość powłoki odpowiednio przed odkształceniem i po odkształceniu,  $q_n(X, Y)$  i  $q_s(X, Y)$  obciążenie na jednostkę powierzchni odkształconej powłoki odpowiednio w kierunku normalnym i południkowym,  $R_1$  dowolny charakterystyczny wymiar powłoki,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  rzeczywiste naprężenia główne,  $K$  stała materiałowa o wymiarze naprężenia.

Oznaczając kierunek południkowy, równoleżnikowy i normalny przez 1, 2 i 3, to z uwagi na założony płaski stan naprężenia mamy  $\sigma_3 = 0$ .

Zależności teorii ustalonego płynięcia przy pełzaniu przyjęto w postaci [16]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \tau} = C p_i^m, \quad \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0, \\ \frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2}{p_1 - p_2} &= \frac{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3}{p_2 - p_3} = \frac{\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1}{p_3 - p_1} = \frac{3}{2} C^{-\frac{1}{m}} \dot{\varepsilon}_i^{\frac{m-1}{m}} \end{aligned}$$

gdzie  $C = TBK^m$ ,  $\dot{\varepsilon}_j = \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \tau}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) oznaczają prędkości odkształceń ustalonej cząstki w powłoce,  $T$  jest stałą o wymiarze czasu,  $B$  i  $m$  są parametrami pełzania zależnymi od materiału i temperatury,  $p_i$  i  $\dot{\varepsilon}_i$  oznaczają intensywności naprężeń i prędkości odkształceń, gdzie w rozpatrywanym tu płaskim stanie naprężenia określone są odpowiednio zależnościami

$$p_i = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2}, \quad \dot{\varepsilon}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2 + \dot{\varepsilon}_2 \dot{\varepsilon}_3}.$$

W pracy [11] wyprowadzony został układ równań różniczkowych

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{hx} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\xi}{hx} \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial \xi} &= -\frac{p_1}{h} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\xi}{hx^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left( p_2 - p_1 + \frac{x Q_s}{fh \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{p_1 hx \cos \psi} \left( \frac{Q_n}{fh} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right), \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} C p_i^{m-1} (2p_2 - p_1) x, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} C p_i^{m-1} (p_1 + p_2) h, \end{aligned}$$

opisujących formę, naprężenia i odkształcenia wiotkich powłok obrotowo-symetrycznych w świetle teorii ustalonego płynięcia przy pełzaniu, gdzie  $f = f(\xi)$  oznacza funkcję opisującą zmianę grubości ścianki powłoki w stanie nieodkształconym,  $\psi$  oznacza kąt zawarty między styczną do południka a płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu, natomiast  $\varphi$  jest znaczeniem  $\psi$  po odkształceniu. Układ równań (2.3) w powyższej formie zastosowano w pracy [14].

W niniejszej pracy w miejsce zależności (2.3)<sub>5,6</sub> wprowadzono równania

$$(2.4) \quad \begin{aligned} h(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial \tau} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial h}{\partial \tau} &= 0, \\ p_2 &= C^{-\frac{1}{m}} \frac{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_i^{\frac{m-1}{m}}}, \end{aligned}$$

które wynikają bezpośrednio z zależności fizycznych (2.2). Ponadto przyjęto stałą grubość ścianki powłoki nieodkształconej ( $f = 1$ ). Niewiadomymi są tu funkcje:  $x(\xi, \tau)$ ,  $y(\xi, \tau)$ ,  $\varphi(\xi, \tau)$ ,  $h(\xi, \tau)$ ,  $p_1(\xi, \tau)$  i  $p_2(\xi, \tau)$ .

Rozwiązanie problemów na podstawie teorii ustalonego płynięcia przy pełzaniu wymaga określenia stanu wyjściowego powłoki, opisanego przez warunki początkowe dla  $\tau = 0$ :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x(\xi_i, 0) = x_0(\xi_i), \quad y(\xi_i, 0) = y_0(\xi_i), \quad h(\xi_i, 0) = h_0(\xi_i), \\ \varphi(\xi_i, 0) = \varphi_0(\xi_i), \quad p_1(\xi_i, 0) = p_{10}(\xi_i), \quad p_2(\xi_i, 0) = p_{20}(\xi_i), \end{aligned}$$

gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Równania różniczkowe stanu równowagi powłoki (2.3)<sub>1-4</sub>, (2.4) uzupełniają warunki brzegowe (por. rys. 2):

$$\begin{aligned} x(0, \tau_j) = y(0, \tau_j) = \varphi(0, \tau_j) = 0, \quad h(0, \tau_j) = h_{0,j}, \\ p_1(0, \tau_j) = p_2(0, \tau_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} x(1, \tau_j) = 1, \quad y(1, \tau_j) = l, \quad h(1, \tau_j) = h_{1,j}, \\ p_2(1, \tau_j) = \frac{1}{2} p_1(1, \tau_j), \quad \varphi(1, \tau_j) = \arcsin \frac{Q_n + F}{2h_{1,j} p_1(1, \tau_j)}, \end{aligned}$$

gdzie  $h_{0,j}$  i  $h_{1,j}$  są grubościami powłoki odpowiednio w wierzchołku kopuły i przy denku,  $l_1$  oznacza odniesioną do  $2R_1$  długość początkową powłoki,  $l$  jest znaczeniem  $l_1$  po odkształceniu,  $F = \frac{P}{\pi H_1 K R_1}$  oznacza bezwymiarową wartość siły  $P$ .

### 3. Metoda numerycznego rozwiązania równań różniczkowych powłoki

Metoda numerycznego rozwiązania układu równań (2.3)<sub>1-4</sub>, (2.4) polega na sprowadzeniu równań różniczkowych, o pochodnych cząstkowych, do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych, które rozwiązuje się numerycznie. Sposób tego sprowadzenia oparto o metodę opisaną w pracy [11].

Przy  $\tau_j = \text{const}$  numerycznie rozwiązuje się równania (2.3)<sub>1-4</sub> metodą Rungego-Kutty. Przy  $\xi_i = \text{const}$  numerycznie rozwiązuje się, w oparciu o ulepszoną metodę Eulera, równania (2.4), w których pochodne mają postać:

$$\frac{dh_{j-1}}{d\tau} = \frac{1}{\Delta\tau} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} h_{j-r}, \quad \frac{dx_{j-1}}{d\tau} = \frac{1}{\Delta\tau} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} x_{j-r},$$

gdzie  $\beta_{kr}$  jest współczynnikiem, którego wartość zależy od przyjętej liczby  $k$  [11].

Pochodną  $\frac{\partial h}{\partial \xi}$ , występującą w równaniu (2.3)<sub>3</sub> określa się z równania różnicowego

$$\frac{dh_{s-1}}{d\xi} = \frac{1}{0,5 \Delta\xi} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} h_{s-r}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, 2n.$$

Z powodu braku bezpośredniej zależności między parametrem obciążenia, czasem i parametrami odkształcenia na granicach całkowania, należy w procesie całkowania układu (2.3)<sub>1-4</sub>, (2.4)<sub>1</sub> przy  $Q = Q_0 = \text{const}$  i bieżącym  $\tau_j$ , dobierać parametr początkowy  $h_{0,j}$  aż do spełnienia (z żadaną dokładnością) danych warunków na drugim brzegu. Wobec tego problem brzegowy sprowadza się do problemu początkowego i zadanie rozwiązuje się metodą półdrotną.

## 4. Przykłady liczbowe

W charakterze przykładu dano rozwiązanie powłoki w kształcie walca kołowego (przed odkształceniem) zakończoną sztywnymi, swobodnie przesuwными denkami, obciążoną równomiernie rozłożonym parciem wewnętrznym. Przy rozwiązywaniu danego przykładu wygodniej jest przyjąć jako zmienne niezależne  $\eta$ ,  $\tau$  i wówczas zamiast pochodnych  $\frac{\partial}{\partial \xi}$  mamy  $\frac{\partial}{\partial \eta}$ , a w miejsce  $\cos \varphi$  należy podstawić  $\sin \varphi$ . W naszym przypadku  $\xi = 1$  i  $\sin \varphi = 1$ . Ponadto zakłada się  $Q_s = 0$  i  $Q_n = Q_0$ .

W tym przypadku podstawowe układy równań stanu równowagi powłoki (2.3)<sub>1-4</sub> i (2.4) sprowadzić można do postaci:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\cos \varphi}{hx}, & \frac{\partial p_1}{\partial \eta} &= -\frac{p_1}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\cos \varphi}{hx^2} (p_2 - p_1), \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\sin \varphi}{hx}, & h(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial \tau} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial h}{\partial \tau} &= 0, \\ \varphi &= \arcsin \frac{xQ_0}{2hp_1}, & p_2 &= \frac{2}{3} C^{-\frac{1}{m}} \frac{\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_i^{\frac{m-1}{m}}}, \end{aligned}$$

gdzie  $Q_0$  oznacza obciążenie początkowe (wartość obciążenia  $Q$  przy  $\tau = 0$ ), a  $\eta$  jest osiową współrzędną powłoki.

Układ równań (4.1) powinien spełnić następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} x(0, \tau_j) &= 1, & y(0, \tau_j) &= 0, & h(0, \tau_j) &= h_{0,j}, \\ p_2(0, \tau_j) &= \frac{1}{2} p_1(0, \tau_j) = \frac{1}{\sqrt{3}} C^{-\frac{1}{m}} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} |\dot{\epsilon}_3| \right)^{\frac{1}{m}}, \\ \varphi \left( \frac{l_1}{2}, \tau_j \right) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Z początku problem powyższy rozwiązywano na podstawie teorii płynięcia plastycznego DAVIS-NADAI [17] przy  $\tau = 0$ . Przy obciążeniu  $Q_j = Q_0$  rezultaty tego rozwiązania stanowiły warunki początkowe (2.5) do równań (4.1) w przypadku  $k = 1$ . Po każdym kroku całkowania równym  $\Delta \tau$  wyniki zapisywano w pamięci maszyny. Kiedy otrzymano  $k$  rozwiązań, ich wyniki wprowadzono do programu i rozwiązanie zadania stateczności przy pełzaniu w świetle teorii płynięcia przy zadanych  $Q$ ,  $k$  i  $\Delta \tau$  prowadzono do chwili osiągnięcia przez powłokę „czasu krytycznego”  $\tau^*$ , który otrzymano z warunku

$$(4.2) \quad \frac{d\tau}{d\varepsilon} = 0,$$

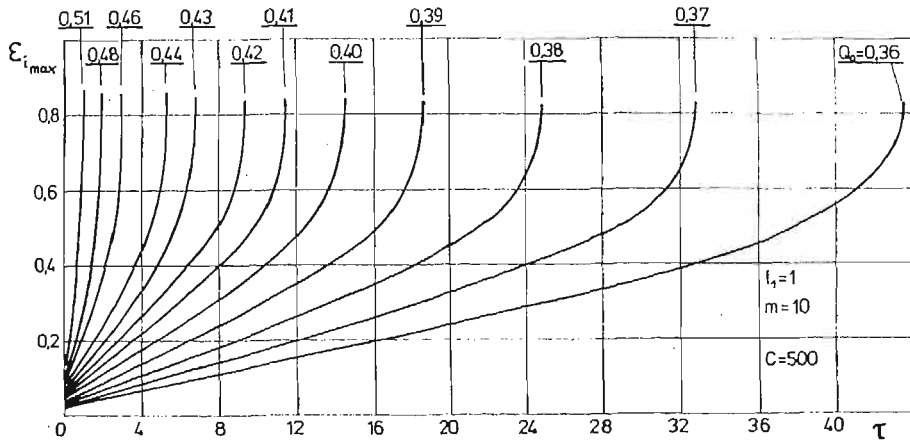
gdzie  $\varepsilon$  oznacza parametr charakteryzujący wielkość odkształceń w powłoce.

## 5. Analiza wyników obliczeń

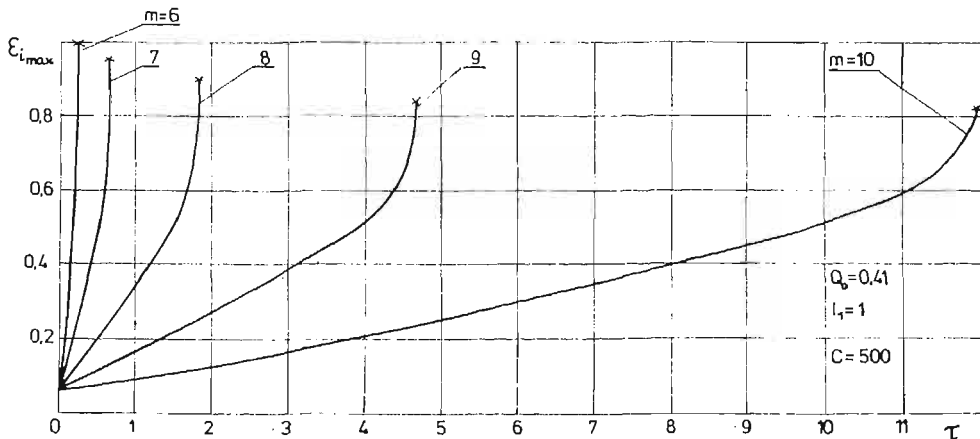
Wyżej opisaną metodą przeprowadzono obliczenia powłok o początkowym kształcie walca kołowego przy różnych długościach i obciążeniach początkowych oraz przy różnych parametrach pełzania materiału.



Rezultaty obliczeń przedstawione na rys. 3-8 otrzymano korzystając z warunków początkowych (2.5) wyznaczonych przy wykładniku potęgowego wzmocnienia materiału  $\mu = \frac{1}{3}$  [18]. Analizując rys. 3 stwierdzamy, że dla tej samej powłoki, przy różnych  $Q_0$  czas krytyczny  $\tau^*$  otrzymuje się praktycznie przy tej samej wartości intensywności odkształceń odnoszących się do punktów równika powłoki  $\varepsilon_{i_{\max}}$ , czego należało oczekiwać. Z rys. 4 wynika, że w miarę zmniejszania się parametru pełzania  $m$ , wartość  $\tau^*$  szybko maleje. W charakterze przykładu na rys. 5-8 pokazane są wykresy zmian naprężeń i odkształceń wzdłuż południka powłoki dla  $l_1 = 0,5, 1,0, 1,25$  przy  $m = 10$ . Na rysunkach tych linie przerywane dotyczą powłok wyjściowych ( $\tau = 0$ ), natomiast ciągłe dotyczą powłok w chwili osiągnięcia czasu krytycznego  $\tau = \tau^*$  przy pełzaniu. Z analizy wykresów wynika, że dla powłok o długościach  $l_1 \leq 1$  naprężenie równoleżnikowe  $p_2$  z upływem czasu  $\tau$  obniża swą wartość w stosunku do wartości początkowej (oznaczonej indeksem<sup>o</sup>).

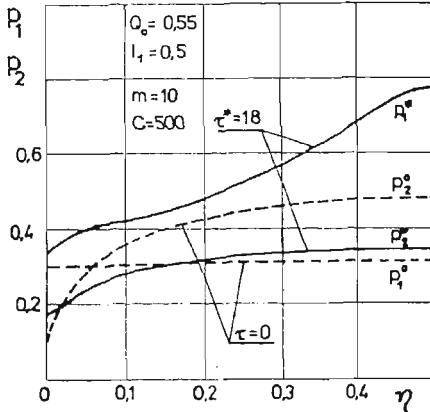


Rys. 3. Krzywe pełzania dla punktów równika powłoki przy różnych wartościach obciążenia początkowego  $Q_0$ .

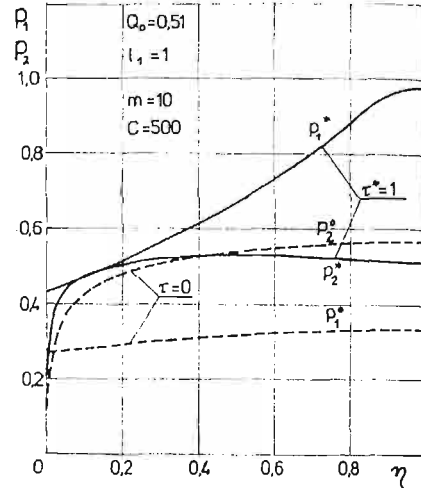


Rys. 4. Krzywe pełzania dla punktów równika powłoki przy różnych parametrach pełzania materiału  $m$ .

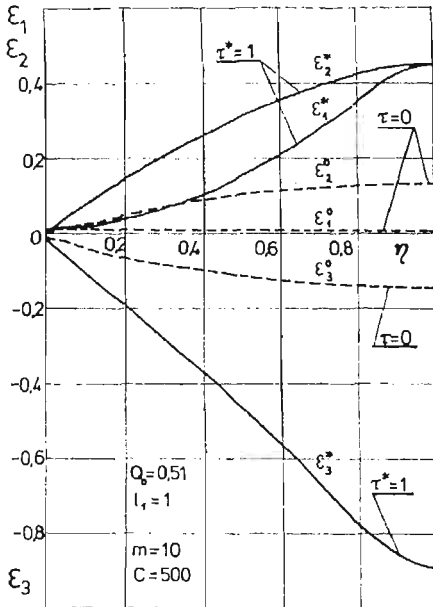
Obniżenie wartości  $p_2$  zaczyna się w pewnej odległości od dna powłoki (por. rys. 5 i 6) i dotyczy jej środkowej części. Maksymalna różnica w wartości  $p_2$  ma miejsce na równiku powłoki. Zjawisko obniżenia się naprężenia  $p_2$  jest wynikiem bardzo intensywnego oddziaływania na stan naprężeń i odkształceń powłoki sztywnych, nieodkształcalnych denek. Oddziaływanie to jest tym silniejsze, im krótsza jest powłoka.



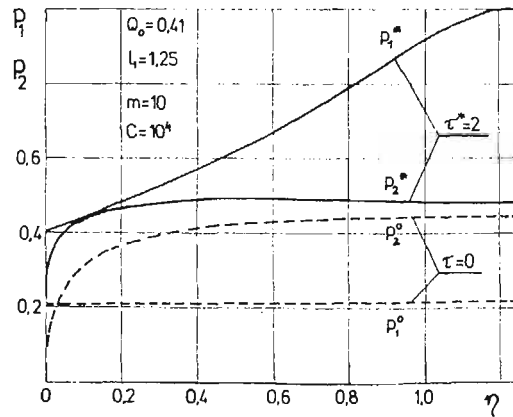
Rys. 5. Rozkład rzeczywistych naprężeń głównych  $p_1$  i  $p_2$  wzdłuż południka powłoki dla  $l_1 = 0,5$  przy  $Q_0 = 0,55$ .



Rys. 6. Rozkład rzeczywistych naprężeń głównych  $p_1$  i  $p_2$  wzdłuż południka powłoki dla  $l_1 = 1$  przy  $Q_0 = 0,51$ .

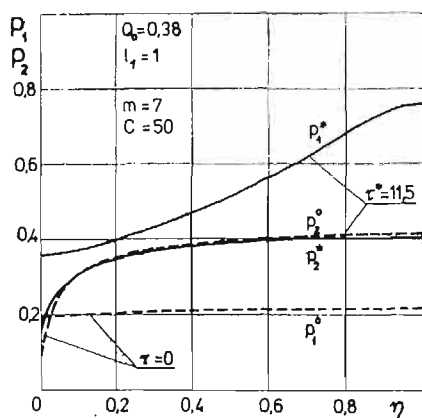


Rys. 7. Rozkład logarymicznych odkształceń głównych  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$  wzdłuż południka powłoki dla  $l_1 = 1$  przy  $Q_0 = 0,55$ .

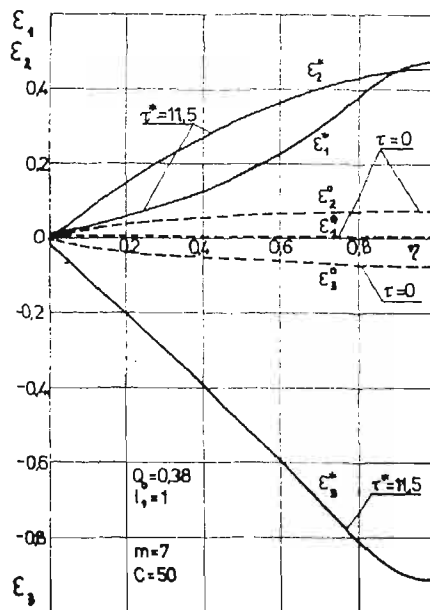


Rys. 8. Rozkład rzeczywistych naprężeń głównych  $p_1$  i  $p_2$  wzdłuż południka powłoki dla  $l_1 = 1,25$  przy  $Q_0 = 0,41$ .

Wykresy na rys. 9 i 10 przedstawiają rezultaty rozwiązania zadania stateczności przy pełzaniu powłoki walcowej ( $l_1 = 1$ ) wykonanej ze stopu aluminium PA7N o parametrach krótkoczasowego pełzania w temperaturze 748 °K:  $m = 7$ ,  $B = 208 \cdot 10^{-21} \text{ MPa}^{-m} \text{ K}^{-1}$  [2]. Warunki początkowe (2.5), niezbędne przy rozwiązywaniu układu równań (4.1) można było otrzymać po uprzedniej znajomości parametrów  $\mu$  i  $K$  dla materiału



Rys. 9. Rozkład rzeczywistych naprężeń głównych  $p_1$  i  $p_2$  wzdłuż południka powłoki wykonanej ze stopu aluminium PA7N.



Rys. 10. Rozkład logarytmicznych odkształceń głównych  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$  wzdłuż południka powłoki wykonanej ze stopu aluminium PA7N.

PA7N w temperaturze 748 °K. W wyniku aproksymacji wykresów odkształceń [2] na podstawie metody pracy [19] otrzymano:  $\mu = 0,295$ ,  $K = 65,5 \text{ MPa}$ . Obliczenia wykazały, że powłoka o długości  $l_1 = 1$  wykonana ze stopu aluminium PA7N pod obciążeniem  $Q_0 = 0,38$  traci stateczność przy pełzaniu po osiągnięciu czasu krytycznego  $\tau^* = 11,5$ , co odpowiada czasowi  $t = 586$  sekund.

## 6. Wnioski

Z otrzymanych tu rezultatów wynikają następujące spostrzeżenia:

1. Cienkie powłoki o początkowym kształcie kołowego i skończonych długościach, pracujące w warunkach pełzania w zakresie dużych odkształceń, tracą stateczność po osiągnięciu czasu krytycznego, określanego wartością maksymalną na krzywej zbudowanej w osiach: bezwymiarowy parametr czasu-charakterystyczne odkształcenie;

2. W miarę zwiększania się parametru pełzania  $m$  krytyczny moment utraty stateczności kształtu powłoki następuje przy coraz to mniejszych wartościach odkształceń i coraz to większych wartościach czasu krytycznego  $\tau^*$ ;

3. Wykazano, że w krótkich powłokach ( $l_1 \leq 1$ ) zachodzi zjawisko zmniejszania się naprężenia równoleżnikowego  $p_2$  wraz z wpływem czasu  $\tau$ .

4. Wprowadzając nową formę zapisu zależności fizycznych teorii płynięcia przy pełzaniu, uniknięto konieczności użycia dla wyznaczenia naprężenia równoleżnikowego równania o przestępnym charakterze stosowanego w pracy [14].

#### Literatura cytowana w tekście

1. E. C. BERNETT; *Short-time, elevated temperature stress-strain behaviour of tensile, compressive and column members properties*, Wright air Development Center Techn. Report, 1959.
2. В. Н. Бойков, Ю. И. Бойцов, Э. С. Лазаренко, Н. Н. Малинин; *Кратковременна ползучесть сплава Д 16 при больших деформациях*, Известия ВУЗов. Машиностроение, № 4, 1971.
3. Ю. И. Бойцов; *Исследование условия ползучести без упрочнения*, Известия ВУЗов. Машиностроение. № 2, 1973.
4. Ю. И. Бойцов; *Время разрушения по техническим теориям ползучести*, Известия ВУЗов. Машиностроение. № 7, 1974.
5. Л. М. Качанов; *Теория ползучести*, Изд. Физматгиз. Москва, 1960.
6. Л. М. Качанов; *Основы механики разрушения*. Изд. „Наука” Москва, 1974.
7. С. М. Кац; *Ползучесть и разрушение труб под действием внутреннего давления*, Изд. АН СССР, ОН, 10 1957.
8. F. P. J. RIMROTT; *Versagenheit beim Kriechen*, Ing. Arch., 3, 27, 1958.
9. Ю. И. Работнов; *Ползучесть элементов конструкции*, Изд. „Наука”, Москва, 1966.
10. Л. М. Качанов; *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изв. АН СССР, ОН 8, 1958.
11. J. ORKISZ; *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materialu*. Zeszyty Naukowe Polil. Krakowskiej, nr 11, Kraków 1967.
12. Л. М. Качанов; *Ползучесть безмоментных оболочек вращения при больших деформациях*. Сб. „Исслед. по упругости и пластичности”. Изд. ЛГУ, 4, 1965.
13. Л. М. Качанов; *О времени разрушения оболочек в условиях ползучести*, Матер. летней школы по пробл. „Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек”, Изд. ЛГУ, Тарту 1966.
14. J. WILK; *Pelzanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok niesprężystych w zakresie skończonych odkształceń*. Rozprawy Inżynierskie, 2, 18, 1970.
15. А. С. Григорьев; *О времени вязкого разрушения и критическом времени в условиях ползучести*, МТТ, № 4, 1968.
16. Г. Гасяк; *Большие деформации тонких оболочек начальной цилиндрической формы*, Диссертация на соискание ученой степени к.т.н. Москва 1977.
17. Г. Гасяк; *Несущая способность безмоментной оболочки начальной цилиндрической формы при больших деформациях*, Известия ВУЗов. Машиностроение, № 7, Москва 1977.
18. Н. Н. Малинин; *Прикладная теория пластичности и ползучести*, Изд. Машиностроение, Москва 1975.
19. G. GASTAK; *Analityczna schematyzacja wykresów naprężenie-odkształcenie przy dużych odkształceniach plastycznych*, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu nr 34, Seria: Mechanika z. 8, Opole 1978.

#### Резюме

#### ПОЛЗУЧЕСТЬ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПО ТЕОРИИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ

В работе дается строгое решение задачи устойчивости при ползучести в области больших деформации по теории установившегося течения тонких оболочек вращения. На основании соот-

ношений (2.3)<sub>1-4</sub> и (2.4) дается анализ распределения напряжений и деформаций по меридиану оболочки, а также получено так называемое „критическое время” при ползучести для рассматриваемых оболочек.

#### S u m m a r y

#### CREEP OF THIN AXIALLY-SYMMETRIC SHELLS BASED ON THE THEORY OF PLASTIC FLOW

The paper presents an exact solution of the stability problem of the creep in the range of large deformations of thin axially-symmetric shells based on the theory of steady-state plastic flow.

On the basis of eqs. (2.3)<sub>1-4</sub> and (2.4), the analysis of stress distribution and deformations along the meridian of the shell are given and also the so-called „critical times” of the creep for the shells considered are obtained.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA  
OPOLE  
ZAKŁAD MECHANIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lutego 1979 roku.*

---



O FORMOWANIU DWUWYMIAROWYCH ZAGADNIENÍ BRZEGOWYCH TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

ANDRZEJ GAŁKA (WARSZAWA)

Ważniejsze oznaczenia

Wskaźniki  $k, l, \dots$  przebiegają ciąg  $\{1, 2, 3\}$  i odnoszą się do kartezjańskiego układu współrzędnych w przestrzeni fizycznej. Wskaźniki  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  przebiegające również ciąg  $\{1, 2, 3\}$  i wskaźniki  $K, L, M, \dots$  przebiegające ciąg  $\{1, 2\}$  odnoszą się do krzywoliniowego układu współrzędnych w wyróżnionej konfiguracji  $\kappa_\tau$ . Współrzędne materialne oznaczone są przez  $X = (X^\alpha)$  i zamiennie przez  $X = (Z, Y)$ ,  $Z = (Z^K)$ . Wskaźniki  $A, B, \dots$ ;  $a, b, \dots$ ;  $\zeta, \eta, \dots$ ;  $\nu, \mu, \bar{\nu}, \bar{\mu}$  przebiegają skończone ustalone ciągi liczb naturalnych, przy czym  $\zeta, \eta \leq 6$ . Stosujemy konwencje sumacyjną Einsteina.

$B_\tau$  — obszar zajęty przez ciało  $B$  w ustalonej chwili  $\tau$ .

$B_R$  — obszar zmienności współrzędnych Lagrange'a.

$\bar{B}_\tau, \bar{B}_R, \bar{II}_R$  — domknięcia obszarów odpowiednio  $B_\tau, B_R, II_R$ .

$\partial B_\tau, \partial B_R$  — brzeg obszaru odpowiednio  $B_\tau, B_R$ .

$e_k$  — jednostkowe wektory bazy w przestrzeni fizycznej.

$g_\alpha$  — wektory bazy naturalnej krzywoliniowego układu współrzędnych w wyróżnionej konfiguracji  $\kappa_\tau$ .

$g^\alpha$  — wektory bazy dualnej.

$g_{\alpha\beta} = g_\alpha g_\beta$  — składowe tensora metrycznego

$n, \bar{n}$  — jednostkowe wektory normalne do  $\partial B_R, \partial B_\tau$ .

$x = x^k e_k$  — wektor położenia cząstki w przestrzeni fizycznej.

$\chi^k(X, t)$  — funkcje deformacji,  $x = \chi^k(X, t) e_k$ .

$C = C_{\alpha\beta} g^\alpha \otimes g^\beta$  — lokalny metryczny tensor deformacji.

$T_\tau = T^{k\alpha} e_k \otimes g_\alpha$  — pierwszy tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa

$T = T^{\alpha\beta} g_\alpha \otimes g_\beta$  — drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa (odniesiony do  $B_\tau$ ),  $T_\tau = \nabla \chi \hat{t}$ ,

$\rho_\tau$  — gęstość masy na jednostkę objętości obszaru  $B_\tau$ .

$b = b^k(X, t) e_k$  — zewnętrzne obciążenia masowe,

$p = p^k(X, t) e_k$  — zewnętrzne obciążenia brzegowe,

$r = r^k(X, t) e_k$  — wewnętrzne siły reakcji,

$s = s^k(X, t) e_k$  — brzegowe siły reakcji,

$\sigma(C)$  — funkcja energii odkształcenia,

$\gamma(T)$  — funkcja energii komplementarnej,

$(\cdot)_{,\alpha}$  — operacja różniczkowania cząstkowego,  $(\cdot)_{,\alpha} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial X^\alpha}$ ,

## Wstęp

W teorii powłok, w celu sprowadzenia trójwymiarowych zagadnień brzegowych do aproksymujących je zagadnień dwuwymiarowych, stosuje się różne metody. Wśród nich można rozróżnić dwa podejścia [1]. Podejście bezpośrednie oparte na modelu powłoki jako tzw. powierzchni Cosseratów i drugie poprzez uproszczenie równań klasycznej mechaniki kontinuum. Metody te zostały wyczerpująco omówione w monografii NAGHDI'EGO [1]. W pracach [2], [6] przedstawiono odmienną metodę formułowania zagadnień dwuwymiarowych, opartą na równaniach mechaniki ośrodków ciągłych z więzami wewnętrznymi, przy czym więzy zakładano tylko dla deformacji. Metoda przedstawiona w [2] zostanie w tej pracy rozszerzona poprzez wprowadzenie więzów dla naprężeń.

Przyjęcie więzów dla naprężeń pozwala w pewnych przypadkach otrzymać prostsze równania i wierniej opisać stan naprężenia i odkształcenia w ciele.

## 1. Założenia i sformułowanie problemu

Przedmiotem rozważań jest ciało  $B$  z materiału hypersprężystego, które w pewnej ustalonej konfiguracji zajmuje obszar  $B_R$ . Założymy, że obszar ten da się parametryzować współrzędnymi  $X = (Z, Y) \in B_R$ , gdzie domknięcie obszaru  $B_R$  jest postaci  $\bar{B}_R = \bar{I}I_R \times [-h, h]II_R$  jest obszarem regularnym na płaszczyźnie,  $(-h, h)$  odcinkiem,  $Z = (Z^1, Z^2) \in II_R$ ,  $Y \in (-h, h)$ .

W pracy zostanie podany sposób opisu przestrzennych zagadnień mechaniki rozważanego ciała przy pomocy dwuwymiarowych zagadnień brzegowych. Jako podstawę rozważań przyjęto następujące równania mechaniki ośrodków ciągłych z więzami dla deformacji i naprężeń [4]:

1°. Równania ruchu i kinetyczne warunki brzegowe

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \text{Div } T_r + \varrho_r b + \varrho_r r &= \varrho_r \ddot{\chi}, & X \in B_R, \\ T_r n_r &= p_r + s_r, & X \in \partial B_R. \end{aligned}$$

2°. Równania konstytutywne dla ciała hypersprężystego

$$(1.2) \quad T = 2\varrho_r \frac{\partial \sigma(C)}{\partial C},$$

3°. Równania definicyjne obciążeń zewnętrznych

$$(1.3) \quad \begin{aligned} b(X, t) &= \hat{b}(X, t, \chi, \nabla \chi), \\ p_r(X, t) &= \hat{p}_r(X, t, \chi), \end{aligned}$$

gdzie  $\hat{b}(\cdot)$ ,  $\hat{p}_r(\cdot)$  są danymi funkcjami lub funkcjonalami,

4°. Więzy dla deformacji

$$(1.4) \quad \begin{aligned} h_\nu(X, t, \chi, \nabla \chi, q, \nabla q) &= 0 & X \in B_R, \nu = 1, \dots, I_\nu \\ R_\mu(X, t, \chi, q) &= 0, & X \in \partial B_R, \mu = 1, 2, \dots, I_\mu \end{aligned}$$

5°. Więzy dla naprężeń

$$(1.5) \quad \begin{aligned} h^{\bar{\nu}}(X, t, T, \nabla T, \vartheta, \nabla \vartheta) &= 0, & X \in B_R, \bar{\nu} = 1, 2, \dots, I_{\bar{\nu}} \\ R^{\bar{\mu}}(X, t, T, \vartheta) &= 0, & X \in \partial B_R, \bar{\mu} = 1, 2, \dots, I_{\bar{\mu}} \end{aligned}$$



W równaniach więzów funkcje  $h_\nu(\cdot)$ ,  $R_\mu(\cdot)$ ,  $h^\nu(\cdot)$ ,  $R^\mu(\cdot)$  są znanymi funkcjami, różniczkowalnymi w swoich naturalnych dziedzinach. Funkcje  $q = (q^A(X, t))$ ,  $A = 1, 2, \dots, I_A < 3$  i  $\vartheta = (\vartheta^\zeta(X, t))$ ,  $\zeta = 1, 2, \dots, I_\zeta < 6$  stanowią dodatkowe nieznanne pola kinematyczne i kinetyczne.

6°. Warunek idealności więzów dla deformacji

$$(1.6) \quad \int_{B_\tau} \varrho_\tau r \delta \chi dv_\tau + \int_{\partial B_\tau} s_\tau \delta \chi d\sigma_\tau = 0,$$

który winien być spełniony dla dowolnej funkcji  $\delta \chi$ , takiej, że układ funkcji  $(\delta \chi, \delta q)$  spełnia równania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_\nu}{\partial \chi} \delta \chi + \frac{\partial h_\nu}{\partial \nabla \chi} \delta \nabla \chi + \frac{\partial h_\nu}{\partial q} \delta q + \frac{\partial h_\nu}{\partial \nabla q} \delta \nabla q &= 0 \quad \text{dla } X \in B_R \\ \frac{\partial R_\mu}{\partial \chi} \delta \chi + \frac{\partial R_\mu}{\partial q} \delta q &= 0, \quad \text{dla } X \in \partial B_R \end{aligned}$$

7°. Warunek idealności więzów dla naprężeń

$$(1.7) \quad \int_{B_R} D \delta T dv_R = 0, \quad \text{gdzie } D \stackrel{\text{df}}{=} (\nabla \chi)^T (\nabla \chi) - C,$$

który winien być spełniony dla dowolnej funkcji  $\delta T$  takiej, że układ funkcji  $(\delta T, \delta \vartheta)$  spełnia układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^\nu}{\partial T} \delta T + \frac{\partial h^\nu}{\partial \nabla T} \delta \nabla T + \frac{\partial h^\nu}{\partial \vartheta} \delta \vartheta + \frac{\partial h^\nu}{\partial \nabla \vartheta} \delta \nabla \vartheta &= 0, \quad \text{dla } X \in B_R, \\ \frac{\partial R^\mu}{\partial T} \delta T + \frac{\partial R^\mu}{\partial \vartheta} \delta \vartheta &= 0, \quad \text{dla } X \in \partial B_R. \end{aligned}$$

W pracy (w punkcie 2) wyspecjalizujemy więzy dla deformacji (1.4) i więzy dla naprężeń (1.5) tak, by na podstawie wyżej przytoczonych równań otrzymać dwuwymiarowe zagadnienie brzegowe, którego rozwiązanie pozwala określić stan przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w trójwymiarowym ciele hypersprężystym. Po rozwiązaniu przy pomocy otrzymanych równań danego zagadnienia dysponujemy wewnętrznymi siłami reakcji  $r$  i  $s_\tau$  (1.1) oraz niezgodnościami deformacji  $D$ , (1.7)<sub>2</sub>, wywołanymi więzami dla naprężeń, które po wprowadzeniu odpowiednich norm dają pewną możliwość oceny dokładności rozwiązań względem nieznanych rozwiązań odpowiedniego zagadnienia trójwymiarowego.

## 2. Równania więzów

Więzy dla deformacji przyjmiemy w postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \chi^k(X, t) &= \Phi^k(X, \psi^A(Z, t)), \quad X \in B_R, \quad Z \in \Pi_R, \\ \alpha_\nu(Z, \psi^A(Z, t), \psi_{,k}^A(Z, t)) &= 0, \quad Z \in \Pi_R, \quad \nu = 1, 2, \dots, I_\nu \\ \beta_\mu(Z, \psi^A(Z, t)) &= 0, \quad Z \in \partial \Pi_R, \quad \mu = 1, 2, \dots, I_\mu \end{aligned}$$

więzy dla naprężeń w postaci

$$(2.2) \quad T^{\alpha\beta} = \Psi^{\alpha\beta}(X, \pi^a(Z, t), \vartheta^\zeta(X, t)), \quad X \in B_R, \quad Z \in \Pi_R.$$

W przyjętych równaniach więzów funkcje  $\Phi^k(\cdot)$ ,  $\alpha_\nu(\cdot)$ ,  $\beta_\mu(\cdot)$ ,  $\Psi^{\alpha\beta}(\cdot)$  są danymi a priori funkcjami różniczkowalnymi w swoich naturalnych dziedzinach, natomiast  $\psi^A(Z, t)$ ,  $A = 1, 2, \dots, I_A$ ,  $\pi^a(Z, t)$ ,  $a = 1, 2, \dots, I_a$ ,  $\vartheta^\zeta(X, t)$ ,  $\zeta = 1, 2, \dots, I_\zeta < 6$  są nowymi niewiadomymi funkcjami. Funkcje  $\psi^A(Z, t)$  nazwiemy uogólnionymi deformacjami a funkcje  $\vartheta^\zeta(X, t)$  i  $\pi^a(Z, t)$  uogólnionymi naprężeniami. Postulowanie więzów w postaci (2.1) ma jasny sens kinematyczny w teorii płyt i powłok. Kinematyka bryły jest tam sprowadzana, przy pomocy tego typu więzów, do kinematyki powierzchni. Informacje dotyczące stanu naprężenia, dające się analitycznie wyrazić w postaci (2.2), można przy pomocy wprowadzonych więzów (2.2) wykorzystać do wierniejszego opisu, otrzymanymi niżej równaniami, stanu naprężenia i odkształcenia w rozpatrywanym ciele.

### 3. Równania ruchu i kinetyczne warunki brzegowe

Celem otrzymania równań ruchu i kinetycznych warunków brzegowych o dwóch zmiennych niezależnych przekształcimy warunek idealności więzów (1.6) do postaci w której występują całki po obszarze  $B_R = \Pi_R \times (-h, h)$  i  $\partial B_R = (\partial \Pi_R \times \{[-h, h]\}) \cup (\Pi_R \times \{-h\}) \cup (\Pi_R \times \{h\})$ . Po dokonaniu zmiany obszarów całkowania z  $B_\tau$  na  $B_R$  i przejściu  $dv_\tau = \sqrt{g} d\Pi_R dY$ ,  $ds_\tau = j ds_R$  oraz uwzględnieniu zależności

$$(3.1) \quad \delta \chi_k = \Phi_{Ak} \delta \psi^A, \quad \text{gdzie} \quad \Phi_{Ak} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \psi^A},$$

wynikających z przyjętych równań więzów (2.1)<sub>1</sub>, warunek idealności więzów deformacyjnych (1.6) można zapisać w postaci [6]:

$$(3.2) \quad \int_{\partial \Pi_R} s_A(Z, t) \delta \psi^A dI_R + \int_{\Pi_R} r_A(Z, t) \delta \psi^A d\Pi_R = 0,$$

gdzie zostały wprowadzone wielkości

$$(3.3) \quad s_A(Z, t) = \int_{-h}^h s_\tau^k \Phi_{Ak} j dY, \quad Z \in \partial \Pi_R,$$

$$r_A(Z, t) = \int_{-h}^h \rho_\tau r^k \Phi_{Ak} \sqrt{g} dY + [s_\tau^k \Phi_{Ak} j]_{Y=-h, h}, \quad Z \in \Pi_R,$$

które nazwiemy uogólnionymi siłami reakcji. Funkcje  $\delta \psi^A$  w przypadku występowania więzów (2.1)<sub>2</sub>, (2.1)<sub>3</sub> nie są dowolne, lecz spełniają zależności

$$(3.4) \quad \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A} \delta \psi^A + \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A_{,k}} \delta \psi^A_{,k} = 0, \quad Z \in \Pi_R,$$

$$\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A} \delta \psi^A + \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A_{,i}} \delta \psi^A_{,i} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta_\mu}{\partial \psi^A} \delta \psi^A = 0, \quad Z \in \partial \Pi_R - \partial^* \Pi_R, \quad \left[ \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A_{,i}} \delta \psi^A \right]_{\partial^* \Pi_R} = 0, \quad Z \in \partial^* \Pi_R.$$

Symbol  $[\cdot]_{Y=-h,h}$  oznacza sumę wartości wyrażenia w nawiasie dla  $Y = -h$  i dla  $Y = h$ ,  $\psi^A_{,i}$  oznacza pochodną funkcji  $\psi^A(\mathbf{Z}, t)$  w kierunku stycznym do brzegu  $\partial II_R$ ,  $\partial^* II_R$  skończony zbiór punktów brzegu obszaru  $II_R$  w których normalna może doznawać skoku,  $[\cdot]_{\partial^* II_R}$  suma skoków wyrażenia w nawiasie w punktach  $\mathbf{Z} \in \partial^* II_R$ .

Warunek (3.2) idealności więzów będziemy realizować przyjmując

$$(3.5) \quad \begin{aligned} r_A(\mathbf{Z}, t) &= - \left( \lambda^\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A_{,K}} \right)_{,K} + \lambda^\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A}, \quad \mathbf{Z} \in II_R, \\ s_A(\mathbf{Z}, t) &= \lambda^\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A_{,K}} N_K + \hat{\lambda}^\mu \frac{\partial \beta^\mu}{\partial \psi^A} + \bar{\lambda}^\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A} - \left( \bar{\lambda}^\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A_{,i}} \right)_{,i}, \quad \mathbf{Z} \in \partial II_R. \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda^\nu$ ,  $\bar{\lambda}^\nu$ ,  $\hat{\lambda}^\mu$  są dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami, które nazywać będziemy funkcjami więzów odpowiednio dla (2.1)<sub>2</sub> i (2.1)<sub>3</sub>,  $N$  jest wektorem jednostkowym, zewnętrżnie normalnym do  $\partial II_R$  w płaszczyźnie  $Y = 0$ . Można wykazać, korzystając z (3.4), że związki (3.5) spełniają warunek idealności więzów (3.2) tożsamościowo

Po podstawieniu do (3.3) wyrażeń  $\varrho_\tau r^k$  i  $x_\tau^k$  odpowiednio z równań ruchu (1.1) i kinetycznych warunków brzegowych (1.1)<sub>2</sub> i wykonaniu potrzebnych przekształceń, otrzymamy równania ruchu

$$(3.6) \quad H_{A,K}^K + h_A + f_A + r_A = i_A, \quad A = 1, \dots, I_A$$

i kinetyczne warunki brzegowe

$$(3.7) \quad H_A^K N_K = p_A + s_A,$$

gdzie

$$(3.8) \quad \begin{aligned} H_A^K(\mathbf{Z}, t) &= \int_{-h}^h \chi_{,\alpha}^k T^{\alpha K} \Phi_{Ak} \sqrt{g} dY, \\ h_A(\mathbf{Z}, t) &= - \int_{-h}^h \chi_{,\alpha}^k T^{\alpha\beta} \Phi_{Ak,\beta} \sqrt{g} dY, \\ f_A(\mathbf{Z}, t) &= \int_{-h}^h \varrho_\tau b^k \Phi_{Ak} \sqrt{g} dY + [p_\tau^k \Phi_{Akj}]_{Y=-h,h}, \\ i_A(\mathbf{Z}, t) &= \int_{-h}^h \varrho_\tau \ddot{\chi}^k \Phi_{Ak} \sqrt{g} dY, \quad \mathbf{Z} \in II_R, \\ p_A(\mathbf{Z}, t) &= \int_{-h}^h p^k \Phi_{Akj} dY, \quad \mathbf{Z} \in \partial II_R. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu równań więzów (2.1)<sub>1</sub> i (2.2) i równań definicyjnych obciążeń zewnętrznych (1.3) ostatecznie związki można zapisać w postaci

$$(3.9) \quad \begin{aligned} H_A^K(\mathbf{Z}, t) &= \hat{H}_A^K(\mathbf{Z}, \psi^A(\mathbf{Z}, t), \psi^A_{,K}(\mathbf{Z}, t), \pi^a(\mathbf{Z}, t); [\partial^c(X, t)]), \\ h_A(\mathbf{Z}, t) &= \hat{h}_A(\mathbf{Z}, \psi^A(\mathbf{Z}, t), \psi^A_{,K}(\mathbf{Z}, t), \pi^a(\mathbf{Z}, t); [\partial^c(X, t)]), \\ f_A(\mathbf{Z}, t) &= \hat{f}_A(\mathbf{Z}, \psi^A(\mathbf{Z}, t), \psi^A_{,K}(\mathbf{Z}, t)), \\ p_A(\mathbf{Z}, t) &= \hat{p}_A(\mathbf{Z}, \psi^A(\mathbf{Z}, t)), \\ i_A(\mathbf{Z}, t) &= \hat{\varrho}_{AB} \ddot{\psi}^B + \varrho_{ABC} \dot{\psi}^B \dot{\psi}^C \end{aligned}$$

gdzie  $\hat{H}_A^k(\cdot)$ ,  $\hat{h}_A(\cdot)$  są funkcjami zmiennych  $Z$ ,  $\psi^A$ ,  $\psi_{,K}^A$ ,  $\pi^a$  i funkcjonalami zmiennych  $\vartheta^z(X, t)$ , zdefiniowane całkami

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \hat{H}_A^k(\cdot) &= \int_{-h}^h \Phi_{Ak}(\Phi_\alpha^k \Psi^{\alpha k} + \psi_{,L}^B \Phi_B^k \Psi^{Lk}) \sqrt{g} dY, \\ \hat{h}_A(\cdot) &= - \int_{-h}^h \Phi_{Ak, \beta}(\Phi_\alpha^k \Psi^{\alpha \beta} + \psi_{,L}^B \Phi_B^k \Psi^{L\beta}) \sqrt{g} dY, \end{aligned}$$

$\hat{f}_A(\cdot)$ ,  $\hat{p}_A(\cdot)$ ,  $\hat{q}_{AB}(\cdot)$ ,  $\hat{q}_{ABC}(\cdot)$ , są funkcjami zmiennych  $Z$ ,  $\psi^A$ ,  $\psi_{,K}^A$ :

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \hat{f}_A(\cdot) &= \int_{-h}^h \varrho_\tau b^k(X, t, \Phi^k, \Phi_{,\alpha}^k) \Phi_{Ak} \sqrt{g} dY + [p^k(X, t, \Phi^k) \Phi_{Akj}]_{Y=-h, h} \quad Z \in \Pi_R, \\ \hat{p}_A(\cdot) &= p_\tau^k(X, t, \Phi^k) \Phi_{Akj} dY, \quad Z \in \partial \Pi_R, \\ \hat{q}_{AB}(\cdot) &= \int_{-h}^h \varrho_\tau \Phi_A^k \Phi_{Bk} \sqrt{g} dY, \quad \hat{q}_{ABC}(\cdot) = \int_{-h}^h \varrho_\tau \Phi_{Ak} \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial \psi^B \partial \psi^C} \sqrt{g} dY, \\ &\quad \Phi_\alpha^k = \frac{\partial \Phi^k}{\partial X^\alpha}. \end{aligned}$$

#### 4. Równania zgodności deformacji

Warunek idealności więzów (1.7)<sub>1</sub> po zmianie obszaru całkowania  $B_r$  na  $B_R$ , uwzględnieniu zależności

$$(4.1) \quad \delta T^{\alpha\beta} = \Psi_a^{\alpha\beta} \delta \pi^a + \Psi_\zeta^{\alpha\beta} \delta \vartheta^\zeta,$$

gdzie  $\Psi_a^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Psi^{\alpha\beta}}{\partial \pi^a}$ ,  $\Psi_\zeta^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Psi^{\alpha\beta}}{\partial \vartheta^\zeta}$ , wynikających z przyjętych więzów dla naprężeń, i wprowadzeniu wielkości  $D_a(Z, t)$  i  $D_\zeta(X, t)$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} D_a(Z, t) &= \int_{-h}^h D_{\alpha\beta} \Psi_a^{\alpha\beta} \sqrt{g} dY, \\ D_\zeta(X, t) &= D_{\alpha\beta} \Psi_\zeta^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

które nazwiemy uogólnionymi niezgodnościami deformacji, można zapisać w postaci

$$(4.3) \quad \int_{B_R} D_\zeta \delta \vartheta^\zeta \sqrt{g} dB_R + \int_{\Pi_R} D_a \delta \pi^a d\Pi_R = 0.$$

Ze względu na dowolność funkcji  $\vartheta^\zeta(X, t)$ ,  $\pi^a(Z, t)$ , z warunku (4.3) otrzymamy

$$(4.4) \quad D_\zeta = 0, \quad D_a = 0.$$

Po podstawieniu do (4.2) wielkości  $D_{\alpha\beta}$  z równań (1.7)<sub>2</sub> i uwzględnieniu (4.4) otrzymamy równania zgodności deformacji

$$(4.5) \quad \begin{aligned} C_a(Z, t) &= \int_{-h}^h \chi_{,\alpha}^k \chi_{k,\beta} \Psi_a^{\alpha\beta} \sqrt{g} dY, \\ C_\zeta(X, t) &= \chi_{,\alpha}^k \chi_{k,\beta} \Psi_\zeta^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

gdzie wielkości  $C_a$ ,  $C_\zeta$ , które nazwiemy uogólnionymi odkształceniami są zdefiniowane wzorami

$$(4.6) \quad C_a(\mathbf{Z}, t) = \int_{-h}^h C_{\alpha\beta} \Psi_a^{\alpha\beta} \sqrt{g} dY, \quad C_\zeta(\mathbf{X}, t) = C_{\alpha\beta} \Psi_\zeta^{\alpha\beta},$$

Równania zgodności deformacji (4.5) po uwzględnieniu równań więzów (2.1)<sub>I</sub> można zapisać w postaci

$$(4.7) \quad \begin{aligned} C_a(\mathbf{Z}, t) &= \hat{C}_a(\mathbf{Z}, \psi^A, \psi_{,K}^A, \pi^a; [\vartheta^\zeta]), \\ C_\zeta(\mathbf{X}, t) &= \hat{C}_\zeta(\mathbf{X}, \psi^A, \psi_{,K}^A, \pi^a, \vartheta^\zeta) \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \hat{C}_a(\cdot) &= A_{aAB}^{KL} \psi_{,K}^A \psi_{,L}^B + A_{aA}^K \psi_{,K}^A + A_a, \\ \hat{C}_\zeta(\cdot) &= B_{\zeta AB}^{KL} \psi_{,K}^A \psi_{,L}^B + B_{\zeta A}^K \psi_{,K}^A + B_\zeta, \\ A_{aAB}^{KL} &= \int_{-h}^h \Phi_{Ak} \Phi_B^k \Psi_a^{KL} \sqrt{g} dY, \\ A_{aA}^K &= 2 \int_{-h}^h \Phi_{Ak} \Phi_B^k \Psi_a^{K\beta} \sqrt{g} dY, \quad A_a = \int_{-h}^h \Phi_{\alpha k} \Phi_\beta^k \Psi_a^{\alpha\beta} \sqrt{g} dY, \\ B_{\zeta AB}^{KL} &= \Phi_{Ak} \Phi_B^k \Psi_\zeta^{KL}, \\ B_{\zeta A}^K &= 2 \Phi_{Ak} \Phi_\beta^k \Psi_\zeta^{K\beta}, \quad B_\zeta = \Phi_{\alpha k} \Phi_\beta^k \Psi_\zeta^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Współczynniki  $A_{aAB}^{KL}$ ,  $A_{aA}^K$ ,  $A_a$ ,  $B_{\zeta AB}^{KL}$ ,  $B_{\zeta A}^K$ ,  $B_\zeta$ , w ogólności zależą od  $\psi^A$ ,  $\pi^a$ ,  $\vartheta^\zeta$ . W przypadku gdy funkcje  $\Psi^{\alpha\beta}(\cdot)$  występujące w równaniach więzów są liniowymi względem uogólnionych naprężeń  $\pi^a$  i  $\vartheta^\zeta$  to wymienione współczynniki od nich nie zależą.

### 5. Równania konstytutywne

Równania konstytutywne dla materiału hypersprężystego przyjmiemy w postaci odwrotnej do (1.2)

$$(5.1) \quad C_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma(T)}{\partial T^{\alpha\beta}},$$

gdzie  $\gamma(T)$  jest funkcją energii komplementarnej. Po podstawieniu ostatnich związków do zależności (4.6) otrzymamy uogólnione równania konstytutywne

$$(5.2) \quad C_a(\mathbf{Z}, t) = \frac{\partial \hat{I}(\cdot)}{\partial \pi^a}, \quad C_\zeta(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \hat{\gamma}(\cdot)}{\partial \vartheta^\zeta},$$

gdzie  $\hat{\gamma}(\cdot)$  jest funkcją otrzymaną z funkcji energii komplementarnej  $\gamma(T)$  przez podstawienie  $T^{\alpha\beta} = \Psi^{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \vartheta^\zeta(\mathbf{X}, t), \pi^a(\mathbf{Z}, t))$ ,

$$(5.3) \quad \hat{\gamma}(\cdot) \equiv \hat{\gamma}(\mathbf{X}, \vartheta^\zeta(\mathbf{X}, t), \pi^a(\mathbf{Z}, t)) \stackrel{\text{df}}{=} \gamma(\Psi^{\alpha\beta}),$$

$\hat{I}(\cdot)$  jest funkcją zmiennych  $\mathbf{Z}$ ,  $\pi^a$  i funkcjonałem  $\vartheta^\zeta(\mathbf{X}, t)$  określonym całką

$$(5.4) \quad \hat{I}(\cdot) \equiv \hat{I}(\mathbf{Z}, \pi^a(\mathbf{Z}, t); [\vartheta^\zeta(\mathbf{X}, t)]) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-h}^h \hat{\gamma}(\mathbf{X}, \vartheta^\zeta(\mathbf{X}, t), \pi^a(\mathbf{Z}, t)) \sqrt{g} dY.$$

## 6. Konstrukcja dwuwymiarowych zagadnień brzegowych

Równania więzów (2.1) i (2.2), równania ruchu (3.6), kinetyczne warunki brzegowe (3.7), równania zgodności deformacji (4.7) i związki konstytutywne (5.2) tworzą podstawowy układ równań dla podstawowych niewiadomych funkcji: uogólnionych naprężeń  $\pi^a(\mathbf{Z}, t)$ ,  $\vartheta^c(\mathbf{X}, t)$ , uogólnionych deformacji  $\psi^A(\mathbf{Z}, t)$  i funkcji więzów  $\lambda^v(\mathbf{Z}, t)$ ,  $\hat{\lambda}^\mu(\mathbf{Z}, t)$ ,  $\hat{\lambda}^\nu(\mathbf{Z}, t)$ . Wykażemy, że powyższy układ równań prowadzi do dwuwymiarowych zagadnień brzegowych dla funkcji  $\psi^A(\mathbf{Z}, t)$ .

Z równań konstytutywnych (5.2)<sub>1</sub> i równań zgodności deformacji (4.7)<sub>1</sub> otrzymamy związki między uogólnionymi deformacjami i uogólnionymi naprężeniami

$$(6.1) \quad \frac{\partial \hat{\gamma}(\cdot)}{\partial \vartheta^c} = \hat{C}_c(\mathbf{X}, \psi^A, \psi_{,K}^A, \pi^a, \vartheta^c).$$

Założymy, że w przypadku gdy w równaniach więzów dla naprężeń (2.2) występują funkcje  $\vartheta^c$  zależne od trzech zmiennych przestrzennych, spełniony jest warunek

$$(6.2) \quad \det \left[ \frac{\partial^2 \hat{\gamma}(\cdot)}{\partial \vartheta^c \partial \vartheta^d} - \frac{\partial \hat{C}_c(\cdot)}{\partial \vartheta^d} \right] \neq 0.$$

Z równań (6.1) możemy wtedy wyznaczyć  $\vartheta^c(\mathbf{X}, t)$  jako znane funkcje  $\mathbf{X}$ ,  $\psi^A$ ,  $\psi_{,K}^A$ ,  $\pi^a$ :

$$(6.3) \quad \vartheta^c(\mathbf{X}, t) = \hat{\vartheta}^c(\mathbf{X}, \psi^A, \psi_{,K}^A, \pi^a).$$

Podstawiając (6.3) do (4.7)<sub>1</sub>, (5.2)<sub>1</sub> oraz do (3.9)<sub>1,2</sub> wyeliminujemy z podstawowego układu równań nieznanne funkcje  $\vartheta^c(\mathbf{X}, t)$  i otrzymamy zamknięty układ równań na poszukiwane funkcje  $\psi^A(\mathbf{Z}, t)$ ,  $\lambda^v(\mathbf{Z}, t)$ ,  $\bar{\lambda}^\nu(\mathbf{Z}, t)$ ,  $\hat{\lambda}^\mu(\mathbf{Z}, t)$ ,  $\pi^a(\mathbf{Z}, t)$

Zestawimy ten układ równań

1°. Równania więzów

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \alpha_\nu(\mathbf{Z}, \psi^A(\mathbf{Z}, t), \psi_{,K}^A(\mathbf{Z}, t)) &= 0, & \mathbf{Z} \in \Pi_R, & \quad \nu = 1, 2, \dots \\ \beta_\mu(\mathbf{Z}, \psi^A(\mathbf{Z}, t)) &= 0, & \mathbf{Z} \in \partial \Pi_R, & \quad \mu = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

2°. Równania ruchu i kinetyczne warunki brzegowe

$$(6.5) \quad \begin{aligned} H_{A,K}^K + h_A + f_A + r_A &= i_A, & \mathbf{Z} \in \Pi_R, \\ H_A^K n_K &= p_A + s_A, & \mathbf{Z} \in \partial \Pi_R, \end{aligned}$$

3°. Równania definicyjne

$$\begin{aligned} H_A^K &= \hat{H}_A^K(\mathbf{Z}, \psi^B, \psi_{,L}^B, \pi^a; [\hat{\vartheta}^c(\mathbf{X}, \psi^B, \psi_{,K}^B, \pi^a)]), \\ h_A &= \hat{h}_A(\mathbf{Z}, \psi^B, \psi_{,L}^B, \pi^a; [\hat{\vartheta}^c(\mathbf{X}, \psi^B, \psi_{,L}^B, \pi^a)]), \\ f_A &= \hat{f}_A(\mathbf{Z}, \psi^B, \psi_{,L}^B), \\ p_A &= \hat{p}_A(\mathbf{Z}, \psi^B), \\ i_A &= \hat{q}_{AB}(\mathbf{Z}, \psi^D) \dot{\psi}^B + \hat{q}_{ABC}(\mathbf{Z}, \psi^D) \dot{\psi}^B \dot{\psi}^C, \\ r_A &= - \left( \lambda^\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi_{,K}^A} \right)_{,K} + \lambda_\nu \frac{\partial \alpha^\nu}{\partial \psi^A}, & \mathbf{Z} \in \Pi_R \\ s_A &= \lambda^\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi_{,K}^A} n_K + \hat{\lambda}^\mu \frac{\partial \beta_\mu}{\partial \psi^A} + \bar{\lambda}^\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi^A} - \left( \bar{\lambda}^\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \psi_{,I}^A} \right)_I, & \mathbf{Z} \in \partial \Pi_R, \end{aligned}$$

4°. Równania zgodności deformacji

$$(6.7) \quad C_a = \hat{C}_a(Z, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^b; [\vartheta^z(X, \psi^B, \psi^B_{,K}, \pi^b)]),$$

5°. Równania konstytutywne

$$(6.8) \quad C_a = \left( \frac{\partial}{\partial \pi^a} \hat{\Gamma}(Z, \pi^b; [\vartheta^z(X, t)]) \right) \vartheta^z(X, t) = \hat{\vartheta}^z(X, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^b)$$

W przypadku gdy w równaniach więzów dla naprężeń (2.2) nie występują funkcje  $\vartheta^z(X, t)$ , wtedy  $\hat{\gamma}(\cdot)$  nie zależy od  $\vartheta^z(X, t)$ . Równania (6.1) są spełnione tożsamościowo a w równaniach (6.6)<sub>1,2</sub>, (6.7) i (6.8)  $\hat{H}_A(\cdot)$ ,  $\hat{h}_A(\cdot)$ ,  $\hat{C}_a(\cdot)$  i  $\hat{\Gamma}(\cdot)$  są funkcjami zmiennych  $Z, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^a$ .

Przy założeniu

$$\det \left[ \frac{\partial}{\partial \pi^b} \hat{\Gamma}_a(\cdot) - \hat{C}_a(\cdot) \right] \neq 0$$

gdzie

$$\hat{\Gamma}_a(\cdot) \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial \pi^a} \hat{\Gamma}(Z, \pi^b; [\vartheta^z]) \right] \vartheta^z = \hat{\vartheta}^z(X, \psi^B, \psi^B_{,K}, \pi^b),$$

$$\hat{C}_a(\cdot) = \hat{C}_a(Z, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^b; [\vartheta^z(X, \psi^B, \psi^B_{,K}, \pi^b)]),$$

z równań (6.7) i (6.8) można wyznaczyć  $\pi^a(Z, t)$  jako znane funkcje  $Z, \psi^A, \psi^A_{,K}$

$$\pi^a(Z, t) = \hat{\pi}^a(Z, \psi^A, \psi^A_{,K}).$$

Podstawiając te związki do (6.6)<sub>1,2</sub> otrzymamy  $I_A + 2I_\nu + I_\mu$  równań na niewiadome funkcje  $\psi^A(Z, t)$ ,  $A = 1, \dots, I_A$ ,  $\lambda^\nu(Z, t)$ ,  $\bar{\lambda}^\nu(Z, t)$ ,  $\nu = 1, \dots, I_\nu$ ,  $\lambda^\mu(Z, t)$ ,  $\mu = 1, \dots, I_\mu$ . Eliminując funkcje więzów, możemy tą drogą dojść do dwuwymiarowych zagadnień brzegowych dla  $\psi^A(Z, t)$ . Przedstawiony wyżej sposób konstrukcji dwuwymiarowych zagadnień brzegowych zilustrujemy niżej na przykładzie.

## 7. Przykład

W wyróżnionej konfiguracji  $\kappa_t$  wprowadźmy ortogonalny układ współrzędnych o wektorach bazy  $g_\alpha$  taki, że  $g_{33} = g_3 g_3 = 1$ . Więzy dla deformacji przyjmijmy w postaci (2.1)<sub>1</sub>, zaś więzy dla naprężeń w postaci

$$(7.1) \quad \begin{aligned} T^{11} &= \vartheta^1(X, t), & T^{22} &= \vartheta^2(X, t), & T^{12} &= \vartheta^3(X, t), \\ T^{K3} &= \pi^K(Z, t) \left( 1 - \left( \frac{Y}{h} \right)^2 \right), \\ T^{33} &= \Psi(X, t), \end{aligned}$$

gdzie  $\vartheta^\zeta(X, t)$   $\zeta = 1, 2, 3$ ,  $\pi^K(Z, t)$ ,  $K = 1, 2$  są nieznanymi funkcjami — uogólnionymi naprężeniami,  $\Psi(X, t)$  jest znaną funkcją. Założymy, że materiał ciała jest jednorodnym izotropowym materiałem Hooka. Trójwymiarowe równania konstytutywne (5.1) mają więc postać

$$(7.2) \quad E_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\gamma\delta} T^{\gamma\delta},$$

gdzie  $E_{\alpha\beta}$  jest tensorem odkształcenia Greena, Saint Venanta

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}),$$

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1+\nu}{2E} (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) - \frac{\nu}{E} g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}.$$

Każdemu z uogólnionych naprężeń odpowiada uogólnione odkształcenie które oznaczymy odpowiednio przez  $C_\zeta(X, t)$  i  $C_K(Z, t)$ . W przypadku przyjętych więzów dla naprężeń (7.1) funkcje  $C_\zeta(\cdot)$  i  $C_K(\cdot)$  nie zależą od  $\vartheta^\zeta(X, t)$  i  $\pi^K(Z, t)$ . Równania (6.1) na podstawie (4.8), (4.6)<sub>1</sub> i (5.2)<sub>1</sub> będą miały postać

$$(7.3) \quad L_{\zeta\eta} \vartheta^\eta(X, t) + L_\zeta \Psi(X, t) = \frac{1}{2} (\hat{C}_\zeta - g_\zeta),$$

gdzie

$$L_{11} = \frac{1}{E} g_{11}, \quad L_{22} = \frac{1}{E} g_{22}, \quad L_{33} = \frac{1+\nu}{2E} g_{11} g_{22},$$

$$L_{12} = L_{21} = -\frac{\nu}{E} g_{11} g_{22}, \quad L_{13} = L_{31} = L_{23} = L_{32} = 0,$$

$$L_1 = \frac{1+\nu}{2E} g_{11}, \quad L_2 = \frac{1+\nu}{2E} g_{22}, \quad L_3 = 0,$$

$$C_1 = B_{AB} \psi_{,1}^A \psi_{,1}^B + B_{A1} \psi_{,1}^A + B_{11},$$

$$C_2 = B_{AB} \psi_{,2}^A \psi_{,2}^B + B_{A2} \psi_{,2}^A + B_{22},$$

$$C_3 = B_{AB} \psi_{,1}^A \psi_{,2}^B + \frac{1}{2} (B_{A1} \psi_{,2}^A + B_{A2} \psi_{,1}^A) + B_{12},$$

$$g_1 = g_{11}, \quad g_2 = g_{22}, \quad g_3 = 0,$$

$$B_{AB} = \Phi_A^k \Phi_{Bk}, \quad B_{AL} = 2\Phi_A^k \Phi_{Lk}, \quad B_{KL} = \Phi_K^k \Phi_{Lk}.$$

Warunek (6.2) jest spełniony. Z równań (7.3) można wyznaczyć  $\vartheta^\zeta(X, t)$

$$(7.5) \quad \vartheta^\zeta(X, t) = L^{\zeta\eta} \left[ \frac{1}{2} (\hat{C}_\eta - g_\eta) - L_\eta \Psi(X, t) \right],$$

gdzie  $L^{\zeta\eta}$  są elementami macierzy odwrotnej do macierzy o elementach  $L_{\zeta\eta}$

$$(7.6) \quad L^{\zeta\eta} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} (g^{11})^2, & \nu g^{11} g^{22}, & 0 \\ \nu g^{11} g^{22}, & (g^{22})^2, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{2(1-\nu^2)}{1+\nu} g^{11} g^{22} \end{bmatrix}.$$

Równania zgodności deformacji (6.7) na podstawie (4.8)<sub>2</sub> mają postać

$$(7.7) \quad C_K(Z, t) = A_B \psi_{,K}^B + A_K,$$

gdzie

$$A_B = 2 \int_{-h}^h \Phi_{Bk} \Phi_3^k \left[ 1 - \left( \frac{Y}{h} \right)^2 \right] \sqrt{g} dY, \quad A_K = \int_{-h}^h \Phi_k \Phi_K^k \left[ 1 - \left( \frac{Y}{h} \right)^2 \right] \sqrt{g} dY.$$



Równania konstytutywne (6.8) mają postać

$$(7.8) \quad C_K = \bar{L}_{KL} \pi^L(Z, t),$$

gdzie

$$\bar{L}_{11} = \frac{1+\nu}{2E} \int_{-h}^h g_{11} \left[ 1 - \left( \frac{Y}{h} \right)^2 \right] \sqrt{g} dY, \quad \bar{L}_{22} = \frac{1+\nu}{2E} \int_{-h}^h g_{22} \left[ 1 - \left( \frac{Y}{h} \right)^2 \right] \sqrt{g} dY,$$

$$L_{12} = 0$$

Z równań (7.7) i (7.8) otrzymamy

$$(7.9) \quad \pi^K(Z, t) = \frac{1}{L_{KK}} (A_B \psi_{,K}^B + A_K).$$

Wielkości  $H_A^K$ ,  $h_A$  występujące w równaniach ruchu (6.5) po uwzględnieniu równań więzów (7.1), związków (7.5), (7.9) i wyznaczeniu całek w (3.10)<sub>1,2</sub> są znanymi funkcjami  $Z$ ,  $\psi^A(Z, t)$ ,  $\psi_{,K}^A(Z, t)$ . Otrzymamy więc równania różniczkowe na funkcje  $\psi^A(Z, t)$ . Jeżeli znajdziemy rozwiązanie tych równań to z (7.9) i z (7.5) wyznaczmy  $\pi^K(Z, t)$  i  $\vartheta^K(X, t)$ . Ruch ciała określony jest funkcją deformacji (2.1)<sub>1</sub> a naprężenia związkami (7.1).

#### Literatura cytowana w tekście

1. P. M. NAGHDI; *The theory of shells and plates*, Handbuch der Physik, vol. VI a/2, s. 425-640, Berlin-Haidelberg-New York 1972.
2. Cz. WOŹNIAK; *Constrained Continous Media III, Partly Discretized Bodies*, Bull. Acad. Polon., Ser. Sci. Techn., 21, 4, 1973.
3. Cz. WOŹNIAK; *Non-linear mechanics of constrained material continua. I. Foundations of the theory*, Arch. Mech. Stos., 26, 1, Warszawa 1974.
4. Cz. WOŹNIAK; *Non-linear Mechanics of constrained material continua. II. Ideal constraints for deformation and stresses*, Arch. Mech. Stos., 28, 2, Warszawa 1976.
5. Cz. WOŹNIAK; *On the Non-Standard Continuum Mechanics. II. Continua with Kinetic and Kinematic — Kinetic Constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 24, 1, 1976.
6. Cz. WOŹNIAK, M. KLEIBER; *Nieliniowa mechanika konstrukcji* PWN (w druku).

#### Резюме

#### О ПОСТРОЕНИИ ФДВУХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе предложен метод, в котором класс пространственных задач механики гиперупругого тела решается при помощи двухмерных краевых задач. Исходной точкой являются трёхмерные уравнения механики сплошных сред с внутренними связями [4]. Принято идеальные связи для деформации и напряжений. После употребления принципов идеальности получено систему уравнений, которая для определённых предположений даёт возможность постройки двухмерных краевых задач аппроксимирующих соответствующую трёхмерную задачу.

## S u m m a r y

## CONSTRUCTION OF TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN THE THEORY OF ELASTICITY

The purpose of the paper is the reduction of a class of three-dimensional problems of hyperelastic body to two-dimensional ones. The equations of continuum mechanics with internal constraints are used [4]. For deformations and stresses the ideal constraints are assumed. By means of the principles of ideality the system of equations has been obtained which, under some assumptions, gives the possibility of construction of two-dimensional problems approximating the corresponding three-dimensional problem.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI  
INSTYTUT MECHANIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 listopada 1979 roku.*

---

## METODA SYMULACJI ZŁOŻONYCH OBCIĄŻEŃ STOCHASTYCZNYCH W BADANIACH ZMĘCZENIOWYCH ELEMENTÓW

WŁADYSŁAW BUBIEŃ, KAZIMIERZ SZABELSKI (ŁUBLIN)

### 1. Wprowadzenie

Ocena trwałości zmęczeniowej obiektów technicznych opiera się głównie na doświadczalnych metodach badań. W przypadku układów mechanicznych doskonalone są wciąż metody dotyczące symulacji obciążeń eksploatacyjnych. Badania takie, prowadzone w warunkach laboratoryjnych, są szczególnie zalecane w przypadku elementów lub zespołów prototypowych, decydujących o bezpiecznej eksploatacji układów.

W szeroko stosowanej symulacji pośredniej obciążeń losowych aproksymuje się je widmem zastępczym, złożonym z cykli harmonicznym zawartych w blokach, odpowiednio uporządkowanych według wartości amplitud. Obciążenia zastępcze powinny być przy tym równoważne, w sensie zmęczenia, obciążeniom eksploatacyjnym.

Metoda symulacji bezpośredniej polega na odtwarzaniu obciążeń przez sterowanie siłownikami, najczęściej hydraulicznymi, zapisem na taśmie magnetycznej. Najcenniejszą jej zaletą jest zachowanie kolejności następujących po sobie impulsów. Ponadto omija się konieczność statystycznego opracowania zapisów obciążeń. Mogło by się wydawać że dzięki możliwości wiernego odtwarzania obciążeń eksploatacyjnych zostaną rozwiązane zasadnicze problemy związane z ich symulacją. W praktyce jednak ze względów dynamicznych, należy się liczyć ze zniekształceniem odtwarzanego procesu obciążeń. Istotną uciążliwością może być również długotrwałość takich badań.

Bardziej ogólną metodą jest symulacja obciążeń o danych charakterystykach statystycznych. Uważa się, że takie obciążenia mogą być bardziej reprezentatywne od wycinka zapisu obciążeń rzeczywistych [1]. Symulacja ta jest zazwyczaj oparta na funkcji rozkładu prawdopodobieństwa lub gęstości widmowej procesu obciążeń eksploatacyjnych. W badaniach zmęczeniowych za charakterystykę wiodącą przyjmuje się najczęściej funkcję gęstości widmowej.

Pomimo coraz większych możliwości technicznych dla rozwoju badań typu „random” w dalszym ciągu są doskonalone badania programowane z blokami obciążeń harmonicznymi. Obserwuje się nawet ponowny wzrost zainteresowania tymi metodami, wynikający głównie ze stosunkowo niskiego kosztu badań oraz możliwości znacznego ich przyspieszenia.

Przy przemyślanym programie obciążeń można tą drogą uzyskać zadowalające wyniki, dotyczące przewidywanej trwałości elementów oraz lokalizacji pęknięć zmęczeniowych.

Wiele miejsca w literaturze naukowej poświęcono symulacji prostych stanów obciążeń losowych. Sposoby tworzenia widm zastępczych, na podstawie zapisów realizacji funkcji

losowych, omówione są w pracach [1, 2, 3, 4]. W wielu elementach występują jednak obciążenia złożone, będące kombinacją dwóch lub kilku składowych obciążeń zmiennych. Zmianom podlegają wówczas wartości oraz kierunki naprężeń głównych, które w badaniach zmęczeniowych należy odtworzyć. Można to uzyskać odpowiednio kojarząc widma zastępcze obciążeń, co w każdym przypadku badań wymaga indywidualnego podejścia. Zagadnienia redukcji bloków obciążeń i przyspieszania badań przedstawiają się inaczej niż w przypadkach symulacji prostych stanów obciążenia.

W niniejszej pracy przedstawiono metodę symulacji pośredniej, opracowaną dla przyspieszonych badań zmęczeniowych elementów poddanych złożonym obciążeniom eksploatacyjnym w postaci dwóch funkcji losowych.

## 2. Kryteria zniszczenia zmęczeniowego w złożonym stanie naprężenia

Realizacja laboratoryjnego programu obciążeń, złożonego z bloków o różnych amplitudach i różnych wartościach średnich umownych cykli, jest uciążliwa ze względu na konieczność częstych nastaw na stanowisku badawczym. Tę niedogodność można złagodzić przez redukcję widma zastępczego do widma złożonego z cykli o stałej wartości średniej, najczęściej cykli wahadłowych. Wiąże się to z koniecznością wyznaczenia amplitud równoważnych w widmie zredukowanym.

W przypadkach złożonych obciążeń zmiennych obliczenia powinny być oparte na kryteriach zniszczenia zmęczeniowego. Przeglądu prac, omawiających związki między naprężeniami przy zniszczeniu zmęczeniowym, dokonano w publikacji [5].

G. SINES [6] przedstawił kryterium zniszczenia zmęczeniowego w postaci

$$(1) \quad \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_a)_i = A - \alpha(\sigma_{m1} + \sigma_{m2} + \sigma_{m3}),$$

gdzie  $(\sigma_a)_i$  jest intensywnością naprężeń zmiennych:

$$(\sigma_a)_i = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2 + (\sigma_{a2} - \sigma_{a3})^2 + (\sigma_{a3} - \sigma_{a1})^2] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wielkości  $\sigma_a$  i  $\sigma_m$  odpowiadają amplitudom i wartościom średnim naprężeń głównych, natomiast  $A$  i  $\alpha$  są współczynnikami uwzględniającymi własności zmęczeniowe materiału. Można je wyznaczyć na podstawie badań zmęczeniowych dla obciążeń o różnych cyklach; na przykład przy obciążeniach osiowych o cyklu wahadłowym  $(\sigma_a)_i = Z_{rc}$ ,  $\sigma_m = 0$  i przy tętniącym rozciąganiu, gdy  $(\sigma_a)_i = \sigma_m = \frac{1}{2} Z_{rj}$ . Po uwzględnieniu tych wielkości w za-

leżności (1) otrzymujemy  $A = \frac{\sqrt{3}}{3} Z_{rc}$ ,  $\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( \frac{Z_{rc}}{Z_{rj}} - 1 \right)$ .

Podobną postać ma kryterium zniszczenia zmęczeniowego B. CROSSLANDA [7] sformułowane na podstawie badań próbek ze stali stopowych:

$$(2) \quad (\sigma_a)_i = \sqrt{3} Z_{so} - \left( \sqrt{3} \frac{Z_{so}}{Z_{rc}} - 1 \right) (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3),$$

gdzie:  $Z_{so}$  i  $Z_{rc}$  — granice zmęczenia przy wahadłowym skręcaniu i rozciąganiu — ścisnaniu, natomiast symbolami  $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$ ,  $\sigma'_3$  oznaczono największe wartości naprężeń głównych ( $\sigma_m + \sigma_a$ ).

Ze względu na trudną technikę badań, niewiele jest prac pozwalających na pełny opis zniszczenia zmęczeniowego materiałów przy obciążeniach złożonych. Autorzy pracy [5] są zdania, że kryterium Crosslanda dla stali jest wystarczająco zgodne z wynikami, nielicznych wprawdzie, doświadczeń.

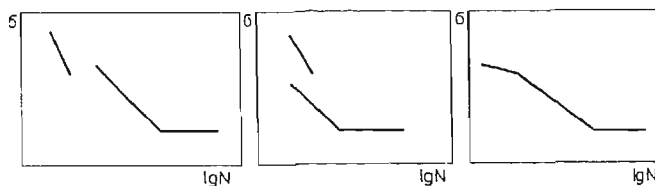
### 3. Przyspieszanie badań

Przyspieszanie badań laboratoryjnych można osiągnąć w różny sposób, poprzez: realizację obciążeń wyższych od obciążeń eksploatacyjnych, pomijanie cykli o małych amplitudach, lub zwiększenie częstotliwości obciążeń.

Ostatni z wymienionych sposobów jest najczęściej ograniczony ze względów technicznych. Mankamentem dużej częstotliwości obciążeń jest również naruszenie termicznych warunków badań, które mogą znacznie odbiegać od warunków eksploatacji elementu i w rezultacie wpływać na jego trwałość zmęczeniową.

Intensyfikacja obciążeń jest uzasadniona tylko wtedy, gdy nie wpływa na charakter procesu zmęczeniowego. Bardzo istotnym czynnikiem, stanowiącym o dokładności wyników badań, jest model matematyczny kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych. Pomijając omówienie stosowanych hipotez kumulacji, opisanych w pracach [8, 9, 10], należy stwierdzić, że dotychczas nie ma potwierdzonej empirycznie teorii pozwalającej na ocenę trwałości z uwzględnieniem parametrów technologiczno-konstrukcyjnych badanego obiektu, historii procesu obciążeń oraz kształtu cykli zmęczeniowych. Ponadto, do obliczenia równoważnej liczby cykli obciążeń w badaniach intensyfikowanych, wymagana jest znajomość doświadczalnej charakterystyki zmęczeniowej elementu. Przy statystycznym opracowaniu wyników badań zakłada się, że jest to funkcja ciągła.

W niektórych przypadkach założenie takie jest niesłuszne, gdyż obserwuje się strefy przejściowe, w których występuje przesunięcie albo załamanie charakterystyki (rys. 1).



Rys. 1. Typowe nieciągłości wykresów Wöhlera.

Przy określonej wartości naprężeń, na tym samym poziomie, można wyodrębnić dwie grupy wyników o różnych rozkładach częstości ich występowania. W wymienionych grupach złomy zmęczeniowe różnią się między sobą, co świadczy o odrębnych mechanizmach zniszczenia. Przegląd publikacji dotyczących tego zjawiska zawiera praca [1].

Dla większości metali poziom ten odpowiada obciążeniom wywołującym w najslabszym przekroju elementu, lub na dnie karbu, naprężenia równe granicy plastyczności.

Przy obciążeniach losowych, sporadycznie tylko pojawiające się naprężenia na poziomie nieciągłości mogą powodować zmianę żywotności elementu i charakteru złomu [1].

Stosując intensyfikację obciążeń można nieświadomie przekroczyć naprężenia odpowiadające strefie przejściowej  $\sigma_n$ . Obawy te szczególnie są uzasadnione w badaniach elementów z korbami o nieznanymi współczynnikami koncentracji naprężeń. Stąd, przy doborze współczynnika intensyfikacji naprężeń, wskazana jest pewna ostrożność. Powinien być przy tym spełniony następujący warunek:

$$(3) \quad \frac{\sigma_i}{\sigma} \leq \frac{\sigma_n}{\sigma_{\max}} < \frac{\sigma_n}{Z}$$

Dla elementów z korbami konstrukcyjnymi zakres intensyfikacji obciążeń jest jeszcze bardziej ograniczony. Przyjmując w nierówności (3)  $\sigma_n \sim \frac{R_e}{\alpha_k}$  oraz uwzględniając zmianę granicy zmęczenia przez wprowadzenie współczynnika działania karbu  $\left(\frac{Z}{\beta_k}\right)$ , otrzymujemy

$$(4) \quad \frac{\sigma_i}{\sigma} < \frac{\beta_k}{\alpha_k} \frac{R_e}{Z}$$

Wartość ilorazu  $\frac{\beta_k}{\alpha_k}$  dla stali stopowych wynosi  $0,85 \div 0,90$ , a dla stali węglowych i niskostopowych —  $0,75 \div 0,80$ . W niektórych przypadkach, zwłaszcza dla obciążeń o cyklach niesymetrycznych, gdy  $\frac{R_e}{Z}$  przybiera wartości mniejsze niż dla cykli wahadłowych, ograniczenie (4) może stawiać pod znakiem zapytania celowość intensyfikacji badań.

Zagadnienie to komplikuje się jeszcze bardziej, gdy obciążenie występuje w postaci  $n$ -wymiarowej funkcji losowej. Charakterystyka zmęczeniowa przybiera wówczas postać powierzchni. Wyznaczenie takiej powierzchni na drodze empirycznej wymaga znacznego nakładu pracy, który często nie będzie zrekomensowany korzyściami wynikającymi z przyspieszenia badań zmęczeniowych.

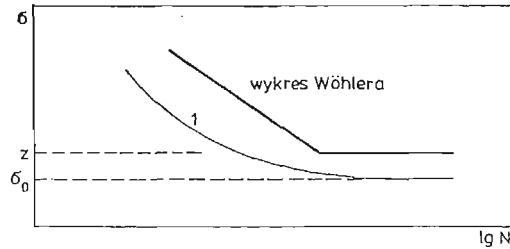
Przyspieszenie programowanych badań w licznych przypadkach może być jednak koniecznością. Ponieważ stosowanie intensyfikacji obciążeń nie zawsze jest celowe i nie zawsze możliwe, pozostaje sposób przyspieszenia badań drogą pominięcia w bloku laboratoryjnym cykli obciążeń o małych amplitudach. Przy tym powinna być ustalona górna wartość amplitud obciążeń, których odrzucenie nie obarczy wyników badań większymi błędami. Oczywiście rozważania te dotyczą materiałów dla których występuje granica zmęczenia. Wpływ naprężeń niższych od granicy zmęczenia (niedociążeń) na ograniczoną trwałość zmęczeniową jest bezsporny. Naogół jest to wpływ korzystny. W przypadku stali efekt wytrenowania jest widoczny przy naprężeniach niewiele mniejszych od granicy zmęczenia. Wpływ niedociążeń dużych ( $0,6Z$ ) na poziom granicy zmęczenia i na ograniczoną trwałość zmęczeniową jest nieznaczny.

W monografii [6] przytoczone są wyniki badań mających na celu pojawienie się śladów poślizgów w płaszczyznach krystalograficznych.

Rys. 2 przedstawia granicę (linia 1) poniżej której nie stwierdza się, za pomocą mikro-

skopu optycznego, zmian na powierzchni badanych próbek. Pierwsze ślady poślizgów, przy obciążeniach długotrwałych, wykrywane są dopiero na poziomie naprężeń  $\sigma_D$ .

Z chwilą pojawienia się mikropęknięć, ich propagacja jest uzależniona również od naprężeń o małych amplitudach. Uwzględniając jednak to, że rozwój pęknięć następuje



Rys. 2. Linia śladów pierwszych poślizgów 1.

w ostatniej fazie zmęczenia i że etap ten jest stosunkowo krótki, można przypuszczać, że pominięcie w badaniach cykli obciążeń o wartościach niższych od  $\sigma_D$  w niewielkim stopniu wpłynie na ostateczną trwałość.

Przyjmując z przesadą, że największe obciążenia eksploatacyjne mogą wywołać naprężenia nominalne równe  $R_e$ , przy założeniu  $\sigma_D = 0,5Z$ , otrzymujemy zależność

$$(5) \quad \frac{\sigma}{\sigma_{\max}} \geq \frac{0,5Z}{R_e \cdot \beta_k},$$

pozwalającą na wyznaczenie obciążeń zmiennych, jakie powinny być uwzględnione w badaniach stanowiskowych.

#### 4. Metoda symulacji złożonych obciążeń eksploatacyjnych

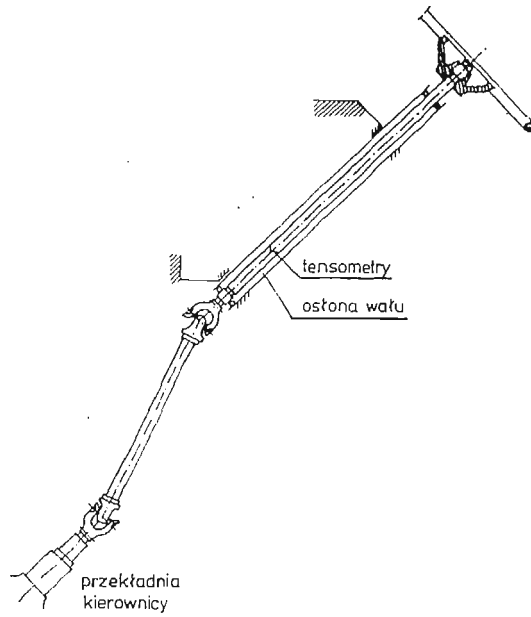
Metodę pośredniej symulacji złożonych obciążeń eksploatacyjnych, przedstawia się na przykładzie badań trójczłonowego wału kierownicy z przegubami krzyżakowymi samochodu dostawczego „Żuk” (rys. 3).

Ze względu na możliwość występowania w wale naprężeń eksploatacyjnych w zakresie ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej, należało wyznaczyć trwałość wału w przeciętnych warunkach użytkowania samochodu.

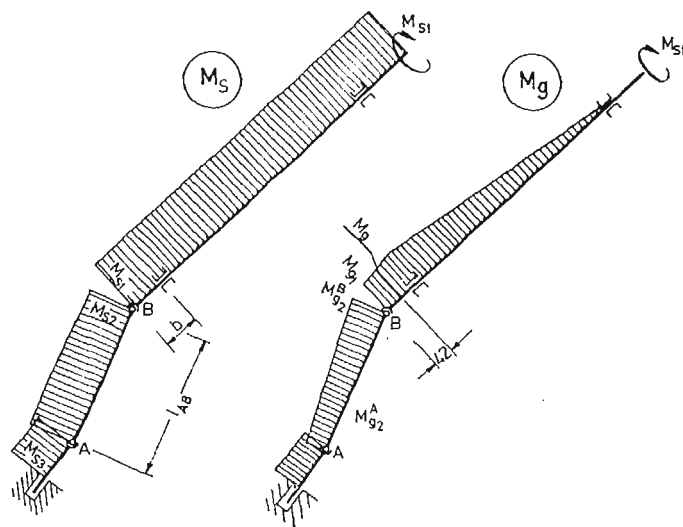
Podczas jazdy w poszczególnych członach wału występuje skręcanie wywołane oddziaływaniem przekładni i koła kierownicy. Jednocześnie występuje zginanie uwarunkowane wzajemnym położeniem elementów.

Z analizy układu wynika, że występujące w nim siły wewnętrzne można wyznaczyć na podstawie wartości momentu skręcającego w jednym z członów oraz kąta obrotu tego członu. Są to funkcje losowe składające się na proces obciążeń wału w warunkach eksploatacji samochodu.

Realizacje tych funkcji rejestrowano na taśmie magnetycznej, podczas jazd doświadczalnych. Do pomiarów momentu skręcającego służyły tensometry elektryczne naklejone na powierzchni górnego członu (rys. 3) a do rejestracji kąta obrotu wykorzystano po-



Rys. 3. Przegubowy wał kierownicy samochodu.

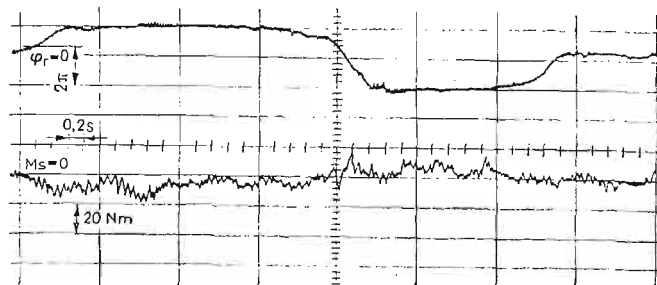


Rys. 4. Wykresy momentów skręcających i zginających w członach wału.



tencjometr. Pomiary przeprowadzono w sytuacjach odpowiadających typowym i charakterystycznym, ze względu na pracę układu kierowania, warunkom jazdy samochodu.

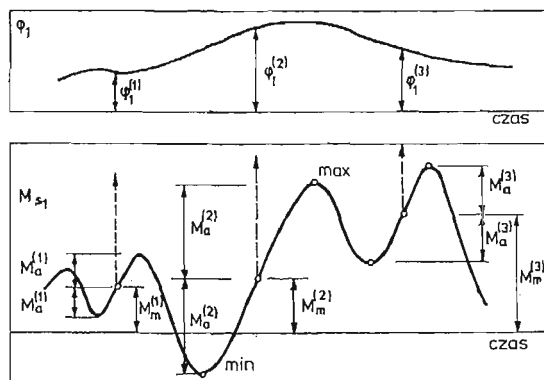
Przegląd zapisów na monitorze oscyloskopu wykazał, że we wszystkich przypadkach kąt obrotu wału jest funkcją wolnozmienną w porównaniu z realizacjami momentu skręcającego. Fragment oscylogramu przykładowo przedstawia rys. 5.



Rys. 5. Zapis obciążeń wału kierownicy przy pokonywaniu zakrętu.

W celu symulacji obciążeń zmęczeniowych, w warunkach laboratoryjnych, należało skojarzyć ze sobą odpowiednie wartości realizacji obu funkcji losowych zapewniając przy tym odtworzenie zmian naprężeń głównych.

Opracowanie zapisów zostało oparte na metodzie względnych rozpiętości i odpowiadających im wartości średnich. Według tej metody zakresy zmian obciążenia między dwoma, następującymi po sobie, lokalnymi ekstremami odpowiadają podwójnej amplitudzie zastępczego cyklu harmonicznego. Przy tym, najczęściej uwzględnia się tylko rosnące gałęzie zapisu zakładając, że dla wystarczająco długich przebiegów częstotliwości występowania takich samych gałęzi opadających będą identyczne. Powyższą metodę wykorzystano do zliczania umownych cykli, odpowiadających szybkozmiennnej funkcji  $M_s$ , a każdemu cyklowi została przypisana wartość funkcji wolnozmiennnej. Obciążenia zastępcze wyrażone są w rezultacie przez trzy wielkości: amplitudę momentu skręcającego  $M_a$ , jego wartość średnią  $M_m$  i kąt obrotu  $\varphi$ . Poszczególne realizacje zapisu opracowano w maszynie cyfrowej. Dla zmiennej  $M_s$  było wyznaczane kolejno lokalne minimum, a następnie najbliższe lokalne maksimum. W przypadku gdy różnica między tymi wielkościami, równa



Rys. 6. Zasada zliczania umownych cykli obciążeń.

$2M_a$ , przekraczała granicę zakłóceń o przyjętej wartości 5% zakresu pomiarowego, obliczana była wartość średnia  $M_m$  oraz odczytywana odpowiadająca jej wartość kąta obrotu  $\varphi$ . Na podstawie tych danych, określających pojedynczy cykl, następowała jego klasyfikacja w trójwymiarowej tablicy.

W wyniku oddzielnego opracowania zapisów poszczególnych realizacji procesu obciążeń, uzyskano częstości występowania umownych cykli, w przyjętych przedziałach klasowych, dla każdego stanu jazdy. Następnie wszystkie tablice zostały zsumowane według zależności

$$P_{ijk} = \sum_{l=1}^n P_{ijkl} \cdot p_l$$

Wyrazy  $p_{ijkl}$  są częstościami występowania obciążeń w przedziale klasowym  $i, j, k$  dla stanu jazdy  $l$ . Wyrazy  $p_l$  ujmują udział stanu jazdy  $l$  w ogólnym przebiegu, reprezentatywnym dla samochodów dostawczych. Wyznaczono je na podstawie odrębnych badań eksploatacyjnych.

W ten sposób powstał rozkład częstości występowania umownych cykli obciążeń w przeciętnych warunkach eksploatacji samochodu.

W celu uproszczenia badań laboratoryjnych, trójwymiarowe widmo obciążeń sprowadzono do widma zastępczego o cyklach wahadłowych.

Dla elementów o przekroju kołowym, poddanych jednoczesnemu skręcaniu i zginaniu, kryterium Crosslanda (2) przybiera postać:

$$(6) \quad \sqrt{\sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2 - \sigma_{a1} \sigma_{a2}} = \sqrt{3} Z_{so} - \left( \sqrt{3} \frac{Z_{so}}{Z_{go}} - 1 \right) (\sigma'_1 + \sigma'_2).$$

Składowe dwuwymiarowego stanu naprężenia można przedstawić następująco:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{2M_g}{W_g} = \frac{2c(M_m \pm M_a)}{W_o},$$

$$\tau_{\min}^{\max} = \frac{M_m \pm M_a}{W_o}$$

gdzie:  $M_m$  i  $M_a$  — odpowiednio wartość średnia i amplituda momentu skręcającego,

$$W_o — \text{biegunowy wskaźnik wytrzymałości przekroju, } c = \frac{M_g}{M_s}.$$

Uwzględniając, że naprężenia główne

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

wyznaczono wielkości wchodzące do (6)

$$(7) \quad \sigma_a = \frac{M_a}{W_o} (c \pm \sqrt{c^2 + 1}),$$

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 = \frac{2c(M_m + M_a)}{W_o}.$$

Kryterium zniszczenia zmęczeniowego dla obciążeń o cyklach dowolnych opisuje równanie

$$(8) \quad M_a \sqrt{4c^2 + 3} = W_o Z_{so} \sqrt{3} - 2Bc(M_m + M_a),$$

w którym

$$B = \sqrt{3} \frac{Z_{so}}{Z_{go}} - 1.$$

Dla obciążeń wahadlowych o amplitudzie momentu skręcającego  $M_o$  kryterium to ma postać

$$(9) \quad M_o \sqrt{4c^2 + 3} = W_o Z_{so} \sqrt{3} - 2BcM_o$$

Przez porównanie obu zależności wyznaczono amplitudę momentu skręcającego  $M_o$  równoważną amplitudzie  $M_a$ :

$$M_o = M_a + k \cdot M_m,$$

gdzie:

$$k = \left[ 1 + \frac{\sqrt{4c^2 + 3}}{2Bc} \right]^{-1}$$

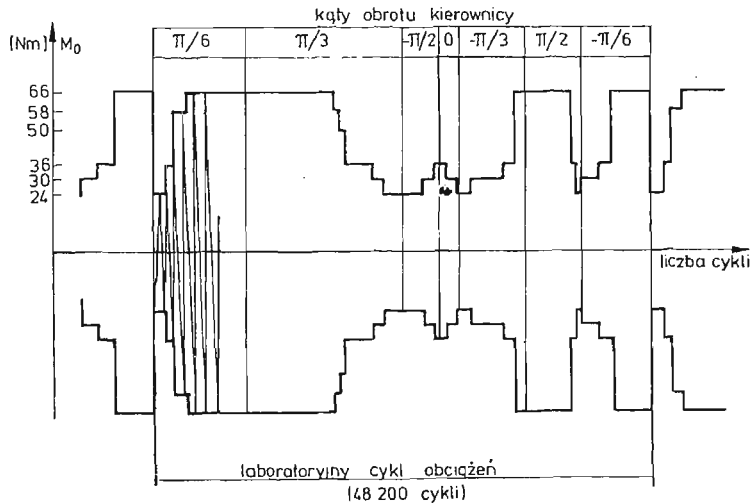
Wartość współczynnika  $k$  maleje w miarę zmniejszania się wielkości  $c$ , aż do zera w przypadku czystego skręcania. Wówczas asymetria cykli nie wpływa na wartość granicy zmęczenia, co jest zgodne z wynikami wielu doświadczeń [6, 11].

Należy zaznaczyć, że współczynnik  $k$  został wyznaczony dla obciążeń odpowiadających granicy zmęczenia. Stosowanie go przy innych wartościach obciążeń jest równoznaczne założeniu, że stosunek naprężeń do granicy zmęczenia, w cyklach niesymetrycznych i równoważnych im cyklach wahadlowych, jest taki sam.

Wielkość  $k$  jest odpowiednikiem wprowadzonego do literatury technicznej przez SERENSENA [11] współczynnika wrażliwości materiału na asymetrię cykli  $\psi$ . Przez analogię można go nazwać współczynnikiem wrażliwości elementu na asymetrię cykli obciążeń.

W obliczeniach równoważnych amplitud  $M_o$  uwzględniono naprężenia występujące w najszerszym przekroju górnego członu wału kierownicy.

Laboratoryjny cykl obciążeń odpowiadał przebiegowi samochodu równemu 35 tys. km. W poprawnie zaprogramowanych badaniach zmęczeniowych zniszczenie elementu powinno następować po wielokrotnym powtórzeniu tego cyklu. Warunek ten dotyczy



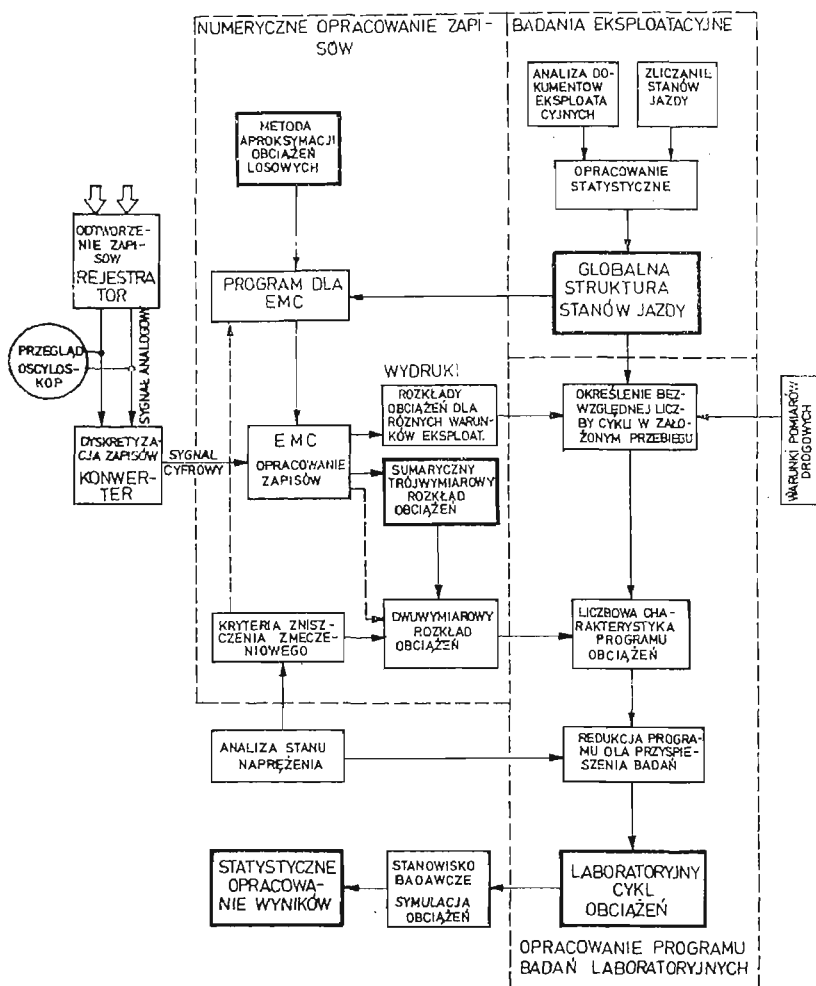
Rys. 7. Laboratoryjny cykl obciążeń odpowiadający przebiegowi samochodu 35 tys. km.

złagodzenia wpływu kolejności przykładania obciążeń o różnych amplitudach. Dla wału kierownicy, przy wymaganej trwałości eksploatacyjnej odpowiadającej 350 tys. km przebiegu samochodu, założono conajmniej 10-krotną realizację programu obciążeń.

Program ten zawierał około 85 milionów cykli umownych o różnych wartościach amplitud. Jego odtworzenie na stanowisku badawczym wymagałoby setek godzin, a zniszczenia wału należałoby oczekiwać w czasie znacznie dłuższym. Z tego względu cykl laboratoryjny został skrócony przez pominięcie obciążeń o małych amplitudach.

Po uwzględnieniu naprężeń w najsłabszym przekroju oraz kryterium zniszczenia zmęczeniowego (9) i warunku (5), z programu badań odrzucono obciążenia o amplitudach  $M_0 \leq 22$  Nm. W ten sposób, cykl laboratoryjny został zredukowany do widma przedstawionego na rys. 7.

Schemat blokowy programowania badań zmęczeniowych przedstawia rys. 8.



Rys. 8. Schemat blokowy programowania badań zmęczeniowych.

Badania przeprowadzono na skonstruowanej do tego celu maszynie zmęczeniowej. Wały mocowano w niej w taki sam sposób jak w samochodzie, z zachowaniem wzajemnego położenia ich elementów. Obciążenia były realizowane jednocześnie z obu stron wału przez układy korbowe. Dla kolejno zmieniających się kątów obrotu wału przykładano momenty skręcające o amplitudach  $M_0$ .

Badaniom poddano pięć zespołów zmodernizowanej kierownicy, uzyskując następujące trwałości: 49, 40, 68, 52 i 38 cykli laboratoryjnych.

### 5. Opracowanie statystyczne wyników badań i ich interpretacja

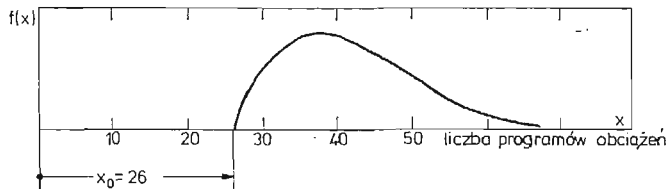
W badaniach trwałości zmęczeniowej liczba elementów lub zespołów maszyn jest zazwyczaj ograniczona ze względów technicznych i ekonomicznych. Przy opracowaniu wyników, powstaje wówczas konieczność przyjęcia pewnych założeń.

Istnieją teoretyczne i doświadczalne przesłanki, że trwałość obiektów technicznych przy obciążeniach zmiennych ma rozkład Weibulla [11] o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{(x-x_0)^k}{\theta}\right] & \text{dla } x > x_0, \\ 0 & \text{dla } x \leq x_0, \end{cases}$$

Rozkład ten określają trzy parametry:  $k > 0$  — parametr kształtu,  $\theta$  — parametr skali oraz  $x_0$  — parametr progowy rozkładu.

Dla układów mechanicznych największe znaczenie ma wartość parametru progowego, interpretowana jako minimalna trwałość dla całej populacji obiektów w danych warunkach badań. W takim ujęciu przedstawiono wyniki badań wału kierownicy. Parametry



Rys. 9. Rozkład prawdopodobieństwa trwałości zmęczeniowej elementów.

rozkładu Weibulla zostały oszacowane na podstawie estymatora skośności wyznaczonego z próby. Wartość progowa  $x_0$  wynosi 26,15 cykli laboratoryjnych. Uwzględniając, że każdy cykl odpowiada, z założenia, przebiegowi samochodu równemu 35 tys. km, parametr ten jest równoważny w przybliżeniu przebiegowi 900 tys. km. Jest to trwałość znacznie przewyższająca wymagania stawiane w założeniach konstrukcyjnych (350 tys. km). Z tego względu badania laboratoryjne można było ograniczyć do pięciu zespołów, dopuszczając możliwość popełnienia znacznego błędu w statystycznej ocenie progowego parametru rozkładu.

Znaczny margines bezpieczeństwa, uzasadniony znaczeniem wału kierownicy samochodu, uniemożliwia w pełni eksploatacyjną weryfikację przedstawionej metody.

Należy podkreślić jednak, że dotychczas nie notowano pęknięć wałów podczas eksploatacji dziesiątków tysięcy samochodów, co w pewnym stopniu potwierdza wyniki badań w dolnym zakresie szacowanej trwałości.

## 6. Podsumowanie

W pracy została przedstawiona propozycja metody programowania badań zmęczeniowych elementów układów mechanicznych, dla których obciążenia eksploatacyjne mają postać dwuwymiarowej funkcji losowej. Daje ona możliwość uwzględnienia w programie badań laboratoryjnych, łącznego rozkładu prawdopodobieństwa złożonych obciążeń. Metoda aproksymacji rzeczywistych widm obciążeń została opracowana dla przypadków w których jedna z funkcji losowych jest wolnozmienna w porównaniu z drugą. Uzasadnienie zaproponowanej metody w zakresie możliwości przyspieszania badań oraz konstrukcji bloków obciążeń o równoważnych cyklach harmonicznym ma znaczenie ogólne. Metoda może być stosowana po dalszych pracach w zakresie jej weryfikacji empirycznej do badań elementów, dla których obciążenia losowe odpowiadają założeniu dotyczącemu zmienności obu funkcji.

## Literatura cytowana w tekście

1. BILÝ, IVANOVA, TERENCEV; *Pevnost' sūčasti a materiálov pri premennom zatažení*. Veda — Bratislava 1976
2. J. SCHIJVE; *The analysis of random load-time histories with relation of fatigue tests and life calculations*. N.I.R. Rep. MP 201. Amsterdam 1961
3. T. HAAS; *Loading statistics as a basis of structural and mechanical design*. Eng. Dig. 1962 March, April, May
4. H. KAWAMOTO, H. ISHIKAWA, T. ONOE; *O programowaniu losowych obciążeń metodą pełnej fali*. Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1971, 37 Nr 296
5. L. DIETRICH, K. TURSKI; *Badania zmęczeniowe w złożonym stanie naprężenia*. Mech. Teoret. i Stos. PWN Warszawa 1 10 1972, 9 - 27
6. *Zmęczenie metali* — praca zbiorowa (tł. z jęz. angielskiego) PWT, Warszawa 1962
7. B. CROSSLAND; *Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel*, Int. Conf. on Fatigue of Metals, London, 1956, 138 - 149
8. W. W. BOŁOTIN; *Metody statystyczne w mechanice budowli*. Arkady, Warszawa 1968
9. S. KOCANĐA; *Zmęczeniowe niszczenie metali*. WNT, Warszawa 1978
10. W. SOBZYKIEWICZ; *Przydatność hipotez kumulacji uszkodzenia zmęczeniowego do oceny trwałości zmęczeniowej konstrukcji nośnych maszyn roboczych ciężkich*. Prace Nauk. Pol. Warsz. Nr 22 Mechanika 1973
11. И. В. СЕРЕНСЕН и др.; *Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность*. Машгиз, Москва 1963.
12. K. GRZEŚLAK, J. KOŁODZIEJSKI, Z. METZEL; *Badania trwałościowe obiektów technicznych*. WNT, Warszawa 1968
13. E. GUMBEL; *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, New York 1958

## Р е з ю м е

## МЕТОД СИМУЛЯЦИИ СЛОЖНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В УСТАЛОСТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе представлен метод программирования исследований усталостных элементов механических систем составных эксплуатационных нагрузок.

Предложенный метод аппроксимации случайных усталостных исследований касается случаев, в которых одна из случайных функций с значительно меняющейся частотой по сравнению со второй функцией.

В работе представлена конструкция заменяющего блока гармонических нагрузок, который при ускоренных исследованиях, соответствует определенному периоду эксплуатации объекта. Метод иллюстрируется примером исследований прочности шарнирного вала руля автомобиля.

## S u m m a r y

## A METHOD OF SIMULATION OF THE COMPLEX STOCHASTIC LOADS IN THE FATIGUE TESTS OF ELEMENTS

A method is presented of programming tests of fatigue elements of the mechanical systems, exposed to the action of complex service loads. The suggested method of approximation of random fatigue loads, refers to the cases when one of the random functions, has a negligible changing frequency in comparison to the other.

A construction of a supplementary block of harmonic loadings, which, under accelerated tests, corresponds to a certain period of exploitation of the object, has been presented in the paper. The method has been illustrated by an example of the durability of an articulated shaft of car steering wheel.

POLITECHNIKA LUBELSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1980 roku*

---





## PŁYNIĘCIE KOŁNIERZA PRZY KSZTAŁTOWANIU WYTŁOCZKI Z NIEJEDNORODNEJ BLACHY ANIZOTROPOWEJ

TADEUSZ SOŁKOWSKI (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Istnieje grupa specjalnych sposobów tłoczenia, w których celowo wytwarza się niejednorodność własności blachy przeznaczonej do kształtowania. Sposoby te polegają na obniżeniu wytrzymałości materiału w kołnierzu formowanej wytłoczki, przy zachowaniu początkowej wyższej wytrzymałości w obszarze i otoczeniu dna. Dzięki temu, graniczna siła jaką może przenieść dno pozostaje taka sama, a siła tłoczenia obniża się w wyniku spadku oporu kształtowania i można uzyskać wyższą wytłoczkę w jednej operacji.

Niejednorodność własności praktycznie uzyskuje się poprzez miejscowe wyżarzenie lub miejscowe podgrzanie blachy. W wyniku ograniczonych możliwości technicznych nagrzewu, nie uzyskuje się skokowego spadku  $\sigma_p$ , lecz wytwarza się w kołnierzu pewien rozkład  $\sigma_p(x, y)$ . Ponadto bardzo często materiał blachy wykazuje anizotropię własności.

Analiza teoretyczna takich przypadków wytłaczania powinna być wykonana z uwzględnieniem zarówno plastycznej niejednorodności jak i anizotropii materiału.

W analizie przedstawionej w niniejszej pracy, uwzględniono zmienną wartość naprężenia uplastyczniającego w zależności od położenia punktu w obszarze odkształcenia oraz od kąta  $\varphi$  wzajemnej orientacji kierunków głównych tensora naprężenia i ortotropii materiału. Ograniczono się do procesu wytłaczania, w którym naprężenia główne mają różnoimienne znaki oraz do przypadku ortotropii symetrycznej względem kątów będących całkowitą wielokrotnością  $45^\circ$  do kierunku walcowania blachy. Przy takich założeniach można zastosować warunek plastyczności Treski zmodyfikowany dla materiału anizotropowego przez IWLEWA [3].

W pracy podano równania i związki wzdłuż charakterystyk dla naprężeń i prędkości płynięcia w warunkach płaskiego stanu naprężenia. Wykonano przykłady ilustrujące wpływ niejednorodności i anizotropii na stan naprężeń i prędkości płynięcia w kołnierzu wytłoczek o niektórych kształtach podstawy w początkowym stadium ich formowania. Wskazano na praktyczne zastosowanie uzyskanych rozwiązań.

### 2. Płaski stan naprężenia niejednorodnego materiału anizotropowego

W przypadku niejednorodnego materiału Treski o ortotropii symetrycznej, tzn.

$$\sigma_p(x, y, \varphi) = \sigma_p\left(x, y, \varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) \text{ i przy } \sigma_1\sigma_2 \leq 0 \text{ podstawowy układ równań płaskiego stanu}$$

naprężenia ma postać:

$$(2.1) \quad \frac{\partial(h\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(h\tau_{xy})}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial(h\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(h\tau_{xy})}{\partial x} = 0,$$

$$(2.2) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_p(x, y, \varphi),$$

lub

$$(2.2a) \quad F \equiv (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - \sigma_p^2(x, y, \varphi) = 0,$$

$$(2.3) \quad \frac{\dot{\epsilon}_x}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_y}} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}} = \lambda,$$

$$(2.4) \quad \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_h = 0.$$

Powyższy układ równań może być rozwiązany w sposób podany przez HILLA [2] po przyjęciu z góry założenia o rozkładzie grubości  $h(x, y)$ , a warunek nieściśliwości (2.4) nie będzie wówczas spełniony.

Warunek plastyczności będzie tożsamościowo spełniony przy dowolnej funkcji  $\sigma_p(x, y, \varphi)$  po parametryzacji znanym sposobem:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + k \cos 2\varphi, \\ \sigma_y &= \sigma - k \cos 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

gdzie:

$$k = \frac{1}{2} \sigma_p(x, y, \varphi); \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Po wprowadzeniu zależności (2.5) do warunków równowagi (2.1) uzyskuje się pewien nie wypisany tutaj układ dwóch równań różniczkowych quasi-liniowych typu hiperbolicznego, który posiada dwie rodziny charakterystyk o równaniach:

$$(2.6) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left( \xi \pm \frac{\pi}{4} \right),$$

gdzie:

$$\xi = \varphi - \delta, \quad \delta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \varphi}.$$

Natomiast związki wzdłuż charakterystyk mają postać:

$$(2.7) \quad \pm d\sigma + \frac{2k}{\cos 2\delta} d\varphi + \left[ \left( \frac{\partial \ln k}{\partial x} + \frac{\partial \ln h}{\partial x} \right) \sin 2\delta - \left( \frac{\partial \ln k}{\partial y} + \frac{\partial \ln h}{\partial y} \right) \cos 2\delta \right] k dx + \\ + \left[ \left( \frac{\partial \ln k}{\partial x} + \frac{\partial \ln h}{\partial x} \right) \cos 2\delta + \left( \frac{\partial \ln k}{\partial y} + \frac{\partial \ln h}{\partial y} \right) \sin 2\delta \right] k dy + \\ + \left( - \frac{\partial \ln h}{\partial x} \sin 2\xi + \frac{\partial \ln h}{\partial y} \cos 2\xi \right) \sigma dx + \left( \frac{\partial \ln h}{\partial x} \cos 2\xi + \frac{\partial \ln h}{\partial y} \sin 2\xi \right) \sigma dy = 0.$$

W szczególnym przypadku przy  $h = \text{const}$  równania charakterystyk (2.6) pozostają takie same, a związki wzdłuż charakterystyk przybierają prostszą postać:

$$(2.8) \quad \pm d\sigma + \frac{2k}{\cos 2\delta} d\varphi + \left( \frac{\partial k}{\partial x} \sin 2\delta - \frac{\partial k}{\partial y} \cos 2\delta \right) dx + \\ + \left( \frac{\partial k}{\partial x} \cos 2\delta + \frac{\partial k}{\partial y} \sin 2\delta \right) dy = 0.$$

Prawo płynięcia (2.3) stowarzyszone z warunkiem plastyczności, po uwzględnieniu (2.5) daje dwa równania różniczkowe typu hiperbolicznego, które posiadają dwie rodziny charakterystyk o takich samych równaniach (2.6) jak charakterystyki dla naprężeń. Wyprowadzenie tych równań dla płaskiego stanu odkształcenia materiału anizotropowego podał BYKOWCEW [1]. Wzdłuż charakterystyk dla prędkości obowiązują związki podane przez Geiringer:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} d\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta d\xi &= 0, \\ d\vartheta_\beta - \vartheta_\alpha d\xi &= 0, \end{aligned}$$

### 3. Początkowe płynięcie kołnierza w procesie wytłaczania

Teoria płaskiego stanu naprężenia ma ważne zastosowanie do analizy procesów tłoczenia blach. Aby móc rozwiązać zagadnienie płynięcia kołnierza w procesie wytłaczania, musimy poczynić pewne założenia upraszczające. Zakładamy, że kołnierz znajduje się w warunkach płaskiego stanu naprężenia, tzn. pomija się naprężenia normalne i styczne pochodzące od dociskacza, jako niewielkie w porównaniu z oporem odkształcenia. Na wewnętrznym brzegu kołnierza, czyli na krawędzi otworu matrycy działa jedynie naprężenie ciągnące normalne do tego brzegu. Maksymalna wartość tego naprężenia jaką może przenieść materiał jest równa jego granicy plastyczności w tym miejscu.

Najbardziej interesującym będzie przypadek, w którym rozkład naprężenia ciągnącego na wewnętrznym brzegu jest równomierny, gdyż jak pokazuje doświadczenie, kołnierz wykreślony z warunku równomiernego rozkładu ciągnięć ma najmniejszą skłonność do utraty stateczności przy wytłaczaniu.

Po przyjęciu założeń odnośnie warunków na brzegu wewnętrznym można wyznaczyć wokół niego siatkę charakterystyk dla naprężeń dla przypadku płyty nieograniczonej. Prowadzone rozwiązanie ma jednak praktyczne znaczenie tylko w obszarze do trajektorii, wzdłuż której byłoby  $\sigma_1 = 0$  i byłaby ona prostopadła w każdym punkcie do kierunku działania  $\sigma_1$ . Technika poszukiwania takiej trajektorii na wykreślonej już siatce charakterystyk może być różnorodna. W przypadku materiału jednorodnego i niejednorodnego ale bez anizotropii, można tę trajektorię wykreślić z warunku, że linie poślizgu mają do niej podchodzić pod kątem  $45^\circ$  w każdym jej punkcie.

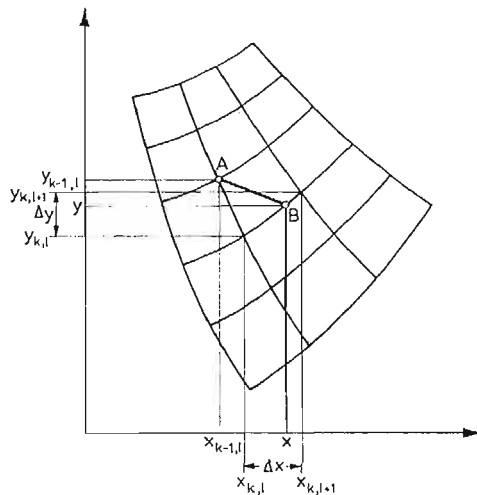
Wychodzimy z jakiegoś węzła siatki, o którym wiemy, że  $\sigma_1 = 0$ . Niech będzie to punkt A na rys. 1. Następny punkt, w którym szukana trajektoria przecina linię poślizgu ma współrzędne  $x, y$ , które znajdujemy rozwiązując następujący układ równań (według oznaczeń podanych na rys. 1):

$$(3.1) \quad y - y_{k-1, l} = \frac{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}} (x - x_{k-1, l}),$$

$$(3.1) \quad y - y_{k,l} = \frac{\Delta y}{\Delta x} (x - x_{k,l}),$$

[cd.]

Znaleziony punkt jest nowym punktem wyjściowym do poszukiwania następnego. Tak wykreślona linia jest w każdym punkcie prostopadła do kierunku działania naprężenia  $\sigma_1$ . Czy i z jaką dokładnością spełnia ona warunek swobodnego brzegu możemy sprawdzić znajdując przez interpolację wartości  $\sigma_1$  w poszczególnych jej punktach.



Rys. 1.

W przypadku materiału anizotropowego, kierunek naprężenia głównego  $\sigma_1$  nie tworzy z charakterystykami kąta  $\frac{\pi}{4}$ , lecz kąt  $\frac{\pi}{4} \pm \delta$ , a więc charakterystyki nie pochodzą do szukanej trajektorii pod kątem  $\frac{\pi}{4}$  z wyjątkiem kątów  $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \dots$

Mając wykreśloną siatkę charakterystyk i znając wartości  $\varphi$  i  $\sigma_1$  w węzłach, w przypadku materiału anizotropowego również wychodzimy z jakiegoś węzła, w którym  $\sigma_1 = 0$ . Następny punkt  $x, y$  szukanej trajektorii (rys. 1) wyznaczamy rozwiązując układ równań:

$$(3.2) \quad y - y_{k-1,l} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_{k-1,l}} (x - x_{k-1,l})$$

$$y - y_{k-1} = \frac{\Delta y}{\Delta x_j} (x - x_{k,l})$$

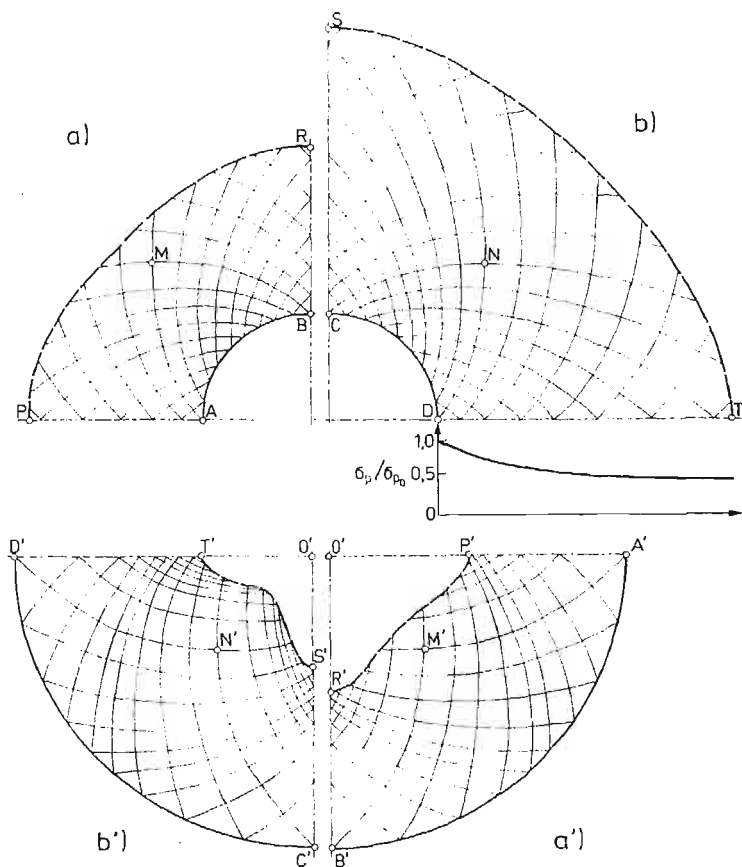
Następnie znajdujemy przez interpolację wartość kąta  $\varphi$  w punkcie  $x, y$ , której znajomość jest niezbędna do kontynuacji obliczeń. Możemy też znaleźć drugie i dalsze przybliżenia współrzędnych punktu  $x, y$ , biorąc w pierwszym równaniu (3.2) zamiast kąta  $\varphi_{k-1,l}$  wartość średnią z kątów  $\varphi_{k-1,l}$  i  $\varphi_{x,y}$ .

Tak wyznaczona trajektoria będzie w każdym punkcie prostopadła do kierunku działania naprężenia  $\sigma_1$ . Pozostaje do sprawdzenia wzdłuż wykreślonej linii z jaką dokładnością jest spełniony warunek  $\sigma_1 = 0$ .

W przedstawionych w pracy przykładach odchylenia były rzędu  $\frac{\sigma_1}{\sigma_{p_0}} = 0,02$  do  $0,06$  i są one podane przy każdym rozwiązaniu. Wykreślona trajektoria wyznacza kształt i graniczne wymiary materiału wyjściowego na wylotczkę, jaki teoretycznie może być wzięty do wytłaczania w jednej operacji.

Plan prędkości płynięcia w kołnierzu sporządza się na podstawie związków (2.9) wychodząc z założenia, że prędkość płynięcia na wewnętrznym brzegu kołnierza jest równa prędkości stempla i ma rozkład równomierny. Założenie takie jest dopuszczalne, gdyż w wyniku działania sił tarcia między czołem stempla a blachą, odkształcenia blachy w dnie są niewielkie [4]. Dla każdego kształtu podstawy wylotczki zarys zewnętrzny hodografu będzie więc kołem, a wartość prędkości stempla przedstawia promień tego koła. Konstrukcję hodografu prowadzimy do wyznaczonego na siatce charakterystyk dla naprężeń brzegu zewnętrznego kołnierza.

Przedstawione poniżej przykłady rozwiązań obrazują wpływ niejednorodności i anizotropii blachy na kształt i graniczne wymiary materiału wyjściowego wyznaczone z warunku równomiernego rozkładu ciągnięcia o wartości  $\sigma_{p_0}$  na brzegu otworu matrycy.



Rys. 2.

Niejednorodność i anizotropię blachy uwzględniono w tych przykładach wprowadzając rozkład  $\sigma_p$  opisany funkcją:

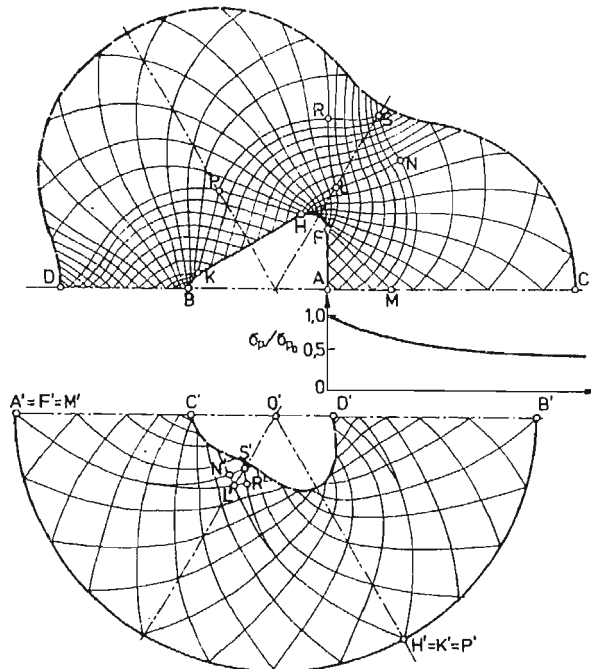
$$(3.3) \quad \frac{\sigma_p}{\sigma_{p_0}} = (1 + a \sin^2 2\varphi) b e^{c\sqrt{x^2+y^2}},$$

gdzie:  $\sigma_{p_0}$  — wartość  $\sigma_p$  na brzegu otworu matrycy i w kierunku walcowania blachy.

Pierwszy człon tej zależności opisuje symetryczną anizotropię blachy z dobrą zgodnością dla wielu gatunków materiałów. W przykładach przyjęto dla aluminium  $a = -0.15$ .

Drugi człon wczytywano w ten sposób, aby rozkład  $\sigma_p$  podany na wykresach przy każdym przykładzie opasywał podstawę wytłoczki. Przykłady wykonano dla początkowego stadium płynięcia, w którym  $h = \text{const}$ . Wykonano też rozwiązania przy liniowym wzroście grubości blachy w kierunku brzegu kołnierza o wartość rzędu do 5%, ale różnice w polu charakterystyk były tak niewielkie, że nie można ich przedstawić na rysunkach. Małe zmiany grubości występujące w początkowych etapach płynięcia są więc pomijalne.

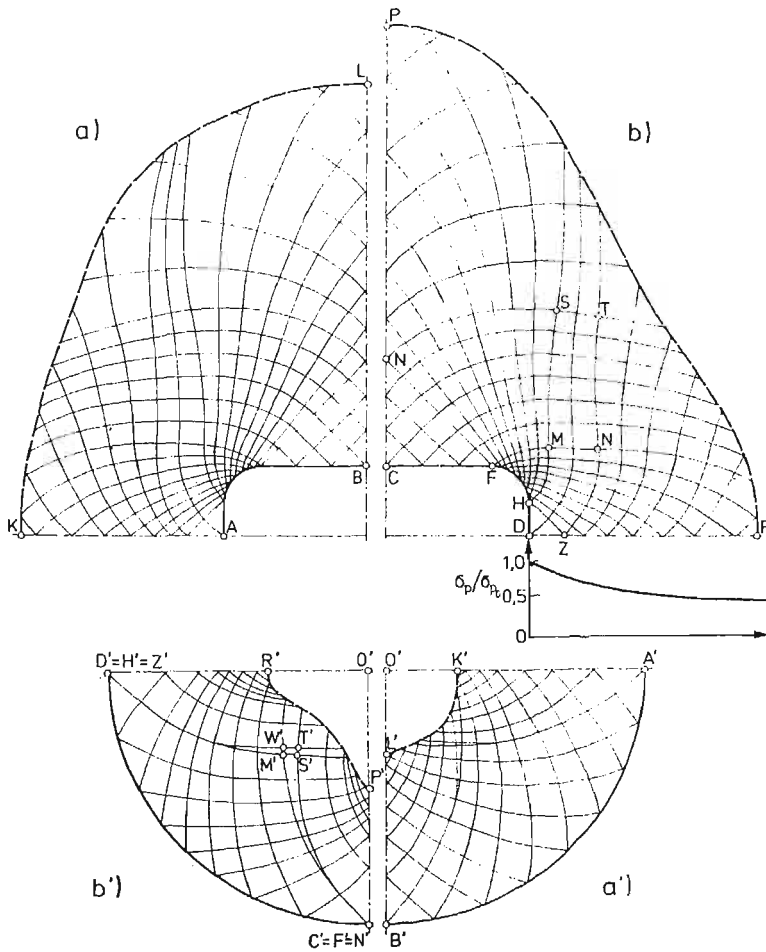
Na rys. 2 przedstawiono siatki charakterystyk dla naprężeń w kołnierzu wytłoczki o podstawie kołowej w przypadku blachy anizotropowej (a) i anizotropowej z podaną niejednorodnością (b). Siatki wyznaczono na podstawie związków (2.8) metodą różnic skończonych obliczając kolejne przybliżenia punktów. Przedstawione rozwiązania są trzecim przybliżeniem, przy czym czwarte i dalsze przybliżenia nie wprowadzają już praktycznie żadnych zmian. Wzdłuż trajektorii zewnętrznego brzegu wartość  $\frac{\sigma_1}{\sigma_{p_0}}$  odbiega od zera maksymalnie o 0,02. Niejednorodność blachy nie zmienia obrazu siatki, ale dopuszczalny obszar kołnierza jest znacznie większy.



Rys. 3.

Plan prędkości pokazuje, że prędkość płynięcia na zewnętrznym brzegu kołnierza jest najmniejsza w kierunku pod kątem 45°, przy czym różnica między prędkościami w kierunku 0° i 45° jest większa po zwiększeniu kołnierza w przypadku blachy niejednorodnej. Taka różnica prędkości powoduje dobrze znane w praktyce zjawisko tworzenia się uszu w przypadku wytłoczenia z blachy anizotropowej naczynia cylindrycznego z pół wyrobu kołowego.

^ Sama niejednorodność materiału, bez występowania anizotropii może również znacznie wpłynąć na obraz siatki charakterystyk. Wykazuje to przykład na rys. 3 wykonany dla wytłoczki o podstawie trójkątnej w przypadku występowania niejednorodności o rozkładzie podanym na wykresie. Przy bokach prostych otworu matrycy wartość  $\sigma_p$  zmienia się tylko w kierunku do nich prostopadłym i pola siatki przyległe do tych boków pozostają wtedy prostoliniowe. Zagadnienie charakterystyczne FMNL rozpoczyna się od charakterystyki prostoliniowej FM, ale charakterystyki tej rodziny przechodzą w krzywoliniowe. Konsekwencją tego jest wystąpienie na planach prędkości obszarów typu A'N'L', w których charakterystyki A'N' i A'L' wychodzą ze wspólnego punktu i stopniowo się



Rys. 4.

rozchodzą. Początkowo zmiana krzywizny linii z rodziny FM na płaszczyźnie fizycznej jest tak nieznaczna, że praktycznie linie A'N' i A'L' pokrywają się.

W powyższym przykładzie, na zewnętrznym brzegu wykreślonego kołnierza wartość  $\frac{\sigma_1}{\sigma_{p_0}}$  waha się od 0 do 0,03.

Dla wytłoczki o podstawie prostokątnej (rys. 4) wykonano dwa przypadki rozwiązania obrazujące wpływ poszczególnych cech materiału:

- a) materiał niejednorodny bez anizotropii
- b) materiał niejednorodny anizotropowy

Przy tym kształcie wytłoczki uzyskano nieco gorszą dokładność na zewnętrznym brzegu; wartość  $\frac{\sigma_1}{\sigma_{p_0}}$  wynosi od 0 do 0,06.

Rozwiązania takie, jak przedstawiono na powyższych przykładach są wskazówką przy projektowaniu kształtu materiału wyjściowego na wytłoczkę, gdyż pokazują kształty kołnierzy zapewniające równomierny rozkładciągnięć w otworze matrycy. Podają też w jakim stopniu wywołana niejednorodność blachy wpływa na zwiększenie dopuszczalnych wymiarów materiału wyjściowego.

#### 4. Uwagi końcowe

Przedstawione przykłady wykazują, że przy zastosowaniu zlinearyzowanego warunku plastyczności można rozwiązać pewną klasę zagadnień płynięcia kołnierzy przy wytłaczaniu w warunkach płaskiego stanu naprężenia z równoczesnym uwzględnieniem niejednorodności i symetrycznej anizotropii blachy. Dokładność rozwiązań zależy od kształtu wewnętrznego brzegu kołnierza oraz ilości punktów brzegowych wziętych do obliczeń, ale jest wystarczająco duża dla celów praktycznych. Mimo, że możliwe jest sformułowanie rozwiązań jedynie dla początkowego stadium płynięcia, to mają one zastosowanie do analizy procesów wytłaczania blach z miejscowym podgrzewaniem i po miejscowym wyżarzeniu. Rozwiązania te pozwalają wyznaczyć kształty materiału wyjściowego zapewniające równomierny rozkładciągnięć na brzegu otworu matrycy i są pomocne przy projektowaniu technologii wytłaczania.

#### Literatura cytowana w tekście

1. G. I. BYKOWCEW; *O płaskiej deformacji anizotropnych idealno-plastycznych tel.* Izv. AN SSSR, OTN, Mech. i Maszynostr., 1963, 2.
2. R. HILL; *The mathematical theory of plasticity.* Oxford, 1950.
3. W. F. KATKOW, M. N. GORBUNOW, O. W. POPOW, N. A. KLJUCZAREW; *Głubokaja wytjażka polykh izdelij s podogrewom*, w „Obrabotka metalłow dawlennijem”, Izd. AN SSSR, Moskwa, 1958.
4. D. D. IWLEW; *Teoria idealnoj plasticznosti.* Izd. Nauka, Moskwa, 1966.
5. A. D. TOMLENOW; *Plasticzeskoje teczenije w procesach složnoj wytjażki listowych metalłow.* Kuzn.-szlamp. Proiz. 1968, 7.



## Резюме

ТЕЧЕНИЕ ФЛАНЦА ПРИ ГЛУБОКОЙ ВЫТЯЖКЕ ДЕТАЛЕЙ  
ИЗ НЕОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

В статье представлено решение по методу характеристик, задачи о первоначальном пластическом течении фланца в процессе глубокой вытяжки с учетом неоднородности и плоской анизотропии материала. Разработаны сетки характеристик для напряжений и голографы для некоторых примеров вытяжки деталей различной формы поперечного сечения. Эти решения определяют благоприятный контур заготовок, а также объясняют механизм появления фестонов при вытяжке анизотропного листового металла.

## Summary

FLOW OF THE FLANGE IN DEEP DRAWING OF SHELLS FROM A NON-HOMOGENEOUS  
ANISOTROPIC SHEET METAL

The method of characteristics is applied to solve the problem of initial plastic flow of the flange in deep drawing with regard to the non-homogeneity and plane anisotropy of material.

Characteristic line networks for stresses and hodographs are designed for some cases of shells with different cross-section shapes. The solutions allow to determine the favourable shape of the blank for the deep drawn part and explain the mechanism of earing of an anisotropic sheet metal.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lutego 1979 roku.*

---



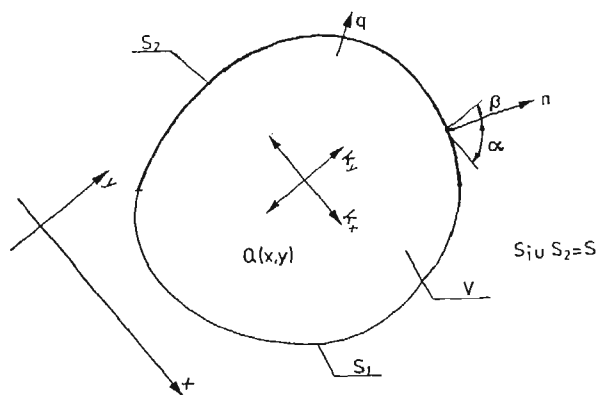
O PEWNEJ INTERPRETACJI METOD ENERGETYCZNYCH DLA PROBLEMÓW FILTRACJI  
USTALONEJ

BOGDAN WOSIEWICZ (POZNAŃ)

1. Sformułowanie problemu i zależności podstawowe

W pracy wykażemy, że poszukiwanie rozwiązania problemów filtracji ustalonej metodami energetycznymi przez minimalizację funkcjonału energii jest równoważne z minimalizacją metodą najmniejszych kwadratów ważonych błędów wyznaczenia składowych wektora prędkości filtrującej cieczy.

Założymy, że filtracja odbywa się w trójwymiarowym anizotropowym obszarze filtracji  $V$  a osie układu współrzędnych pokrywają się z głównymi osiami anizotropii ośrodka (rys. 1). Przy takich założeniach problem filtracji sprowadza się do wyznaczenia funkcji



Rys. 1. Oznaczenia (płaski obszar filtracji dla uproszczenia rysunku).

$h(x, y, z)$ , opisującej rozkład ciśnienia piezometrycznego, spełniającej w obszarze filtracji równanie różniczkowe

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) + Q = 0, \quad (x, y, z) \in V,$$

a na brzegu  $S$  mieszane i niejednorodne warunki brzegowe

$$(2) \quad h(x, y, z) = g, \quad (x, y, z) \in S_1,$$

oraz

$$(3) \quad u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma = q, \quad (x, y, z) \in S_2,$$

W zależnościach powyższych przez  $k_x, k_y, k_z$  oznaczono współczynniki filtracji odpowiednio wzdłuż osi  $x, y, z$ , przez  $u, v, w$  składowe wektora prędkości wzdłuż tych osi, przez  $Q, g, q$  odpowiednio wydatek źródeł wewnętrznych, zadane na brzegu  $S_1$  ciśnienie piezometryczne oraz wydatek przez brzeg  $S_2$  a przez  $\alpha, \beta, \gamma$  kąty jakie tworzy normalna do brzegu  $S$  z osiami współrzędnych.

Związek pomiędzy składowymi wektora prędkości a ciśnieniem piezometrycznym dany jest za pomocą prawa Darcy'ego

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x}, \\ v &= -k_y \frac{\partial h}{\partial y}, \\ w &= -k_z \frac{\partial h}{\partial z}. \end{aligned}$$

Alternatywnie zagadnienie sprowadza się do znalezienia takiej funkcji  $h(x, y, z)$ , która minimalizuje funkcjonal energii

$$(5) \quad \pi(h) = \int_V \int \int \left[ k_x \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 - 2Qh \right] dV + 2 \int_{S_2} \int q h ds$$

i spełnia zasadniczy dla tego problemu warunek brzegowy (2).

W metodach energetycznych stosowanych do zagadnień filtracji ustalonej poszukuje się przybliżonego rozkładu ciśnienia piezometrycznego  $\tilde{h}$  w postaci

$$(6) \quad \tilde{h}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) H_i$$

gdzie liczby  $H_i (i = 1, 2, \dots, n)$  są szukanymi współczynnikami (w metodzie elementów skończonych są to wprost wartości ciśnień piezometrycznych w wyróżnionych punktach obszaru filtracji) a znane funkcje  $N_i(x, y, z)$  stanowią zbiór funkcji bazowych (układ współrzędnych) w rozpatrywanej przestrzeni funkcyjnej. Po wyznaczeniu współczynników  $H_i$  przez minimalizację funkcjonału (5) możemy także wyznaczyć przybliżone wartości składowych wektora prędkości  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$  na podstawie prawa Darcy'ego.

## 2. Funkcjonał błędu wyznaczenia składowych wektora prędkości i jego minimalizacja

Jako miarę błędu przybliżonego rozwiązania problemu filtracji uznać można następujące wyrażenie

$$(7) \quad e = \frac{1}{k_x} (u - \tilde{u})^2 + \frac{1}{k_y} (v - \tilde{v})^2 + \frac{1}{k_z} (w - \tilde{w})^2.$$

Zależność (7) jest ważonym błędem kwadratowym wyznaczania składowych wektora prędkości. Jako wagi przyjęto odwrotności współczynników filtracji. Wartość błędu  $e$  jest oczywiście funkcją położenia a także zależy od sposobu aproksymacji składowych wektora prędkości.

Jako najlepsze rozwiązanie, w sensie metody najmniejszych kwadratów, można uznać takie, które całce

$$(8) \quad E = \int_V \int_V \int_V edv = \int_V \int_V \int_V \left[ \frac{1}{k_x} (u - \tilde{u})^2 + \frac{1}{k_y} (v - \tilde{v})^2 + \frac{1}{k_z} (w - \tilde{w})^2 \right] dV,$$

nadaje najmniejszą wartość.

Wykażemy teraz, że wyznaczenie liczb  $H_i$  przez minimalizację funkcjonału (8) jest równoważne minimalizacji funkcjonału (5).

Wyrażając  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  poprzez funkcję  $\tilde{h}(x, y, z)$  za pomocą formuł (4) możemy funkcjonał (8) zapisać w sposób następujący

$$(9) \quad E = \int_V \int_V \int_V \left[ k_x \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( u \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right) \right] dV + \\ + \int_V \int_V \int_V \left( \frac{1}{k_x} u^2 + \frac{1}{k_y} v^2 + \frac{1}{k_z} w^2 \right) dV.$$

Ostatnia całka w powyższej zależności ma dla każdego konkretnego zadania stałą wartość (choć oczywiście inną dla różnych zadań), w żaden bowiem sposób nie zależy ona od wyboru przybliżenia funkcji  $\tilde{h}(x, y, z)$  za pomocą wyrażenia (6). Wartość tej całki oznaczymy przez  $C_1$ .

Do ostatniego składnika w pierwszej całce zastosujemy teraz twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego w postaci

$$(10) \quad \int_V \int_V \int_V \left( u \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right) dV + \int_V \int_V \int_V \tilde{h} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV = \\ = \int_S \tilde{h} (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) dS.$$

Wyrażenie w nawiasie drugiej całki objętościowej jest dywergencją wektora prędkości. Jest zatem równe wydatkowi źródeł wewnętrznych  $Q$  w obszarze filtracji. Wyrażenie w nawiasie w całce po powierzchni  $S$  przedstawia natomiast jednostkowy przepływ  $q$  przez brzeg obszaru filtracji. Wartość tego wydatku przez część  $S_2$  brzegu jest określona na podstawie warunku brzegowego (3). Na części  $S_1$  brzegu wartość rzeczywistego wydatku  $q$  nie jest natomiast znana. Pamiętać jednak należy, że rozwiązania zagadnienia brzegowego (1), (2) i (3) a także problemu wariacyjnego (5) i (2) poszukiwać należy wśród funkcji  $\tilde{h}(x, y, z)$  spełniających zasadniczy dla tego problemu warunek brzegowy (2) [1].

Na brzegu  $S_1$  musi być zatem spełniona zależność

$$(11) \quad \tilde{h}(x, y, z) \equiv h(x, y, z) = g(x, y, z) \quad (x, y, z) \in S_1.$$

Tym samym wartość tej całki po brzegu  $S_1$  jest dla konkretnego zadania stałą, niezależną od wyboru funkcji  $\tilde{h}(x, y, z)$ . Oznaczmy jej wartość przez  $C_2$ .

Podstawiając do funkcjonału (9) wyrażenia wynikające z twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego (10) i wykorzystując wnioski z przeprowadzonych powyżej rozważań uzyskamy

$$(12) \quad E(\tilde{h}) = \int_V \int_V \int_V \left[ k_x \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right)^2 - 2\tilde{h}Q \right] dV + 2 \int_{S_1} \tilde{h}q dS + C_1 + C_2.$$

Porównując funkcjonały (5) i (12) widać, że różnią się one tylko o stały składnik, jest bowiem:

$$(13) \quad E(\tilde{h}) = \pi(\tilde{h}) + C_1 + C_2.$$

Poszukując przybliżonego rozwiązania problemu filtracji poprzez minimalizację funkcjonału (5) lub funkcjonału (12) uzyskać musimy identyczne wyniki. Tym samym teza, że metody energetyczne dla problemów filtracji ustalonej traktować można jako procedurę minimalizacji metodą najmniejszych kwadratów ważonych błędów wyznaczenia składowych wektora prędkości filtrującej cieczy została wykazana.

W identyczny sposób interpretować można metody energetyczne dla innych problemów fizycznych opisanych równaniem (1) i warunkami brzegowymi (2) i (3). Wystarczy tylko podać fizyczną interpretację funkcjonału (8) i wyrażień w formule (10). Dla procesów fizycznych w których konieczne jest uwzględnienie warunku brzegowego trzeciego rodzaju

$$(14) \quad u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma + ah = q, \quad (x, y, z) \in S_3,$$

gdzie iloczyn  $ah$  uwzględnia takie zjawiska jak na przykład straty konwekcyjne i radiacyjne, funkcjonał (8) musi zostać rozbudowany o składnik

$$(15) \quad 2 \int \int_{S_3} da(h - \tilde{h})^2 dS.$$

Składnik ten można interpretować jako ważony błąd kwadratowy wyznaczenia funkcji  $h$  na części  $S_3$  brzegu.

### 3. Wyprowadzanie funkcjonału błędu wyznaczenia składowych wektora prędkości

W podobny sposób można, jak się wydaje, zinterpretować metody energetyczne dla innych zagadnień brzegowych. Wystarczy jedynie odgadnąć postać takiego funkcjonału metody najmniejszych kwadratów, którego minimalizacja jest równoznaczna z minimalizacją funkcjonału energii dla danego zagadnienia brzegowego i nadać mu odpowiednią interpretację fizyczną. Tą drogą w pracy [2] zinterpretowano na przykład metodę elementów skończonych w zagadnieniach teorii konstrukcji jako procedurę minimalizacji ważonych błędów wyznaczenia składowych dewiatora i aksjatora naprężeń.

Jednakże w pewnych przypadkach odpowiednią postać funkcjonału błędu można, jak się okazuje wydedukować wprost z postaci równania różniczkowego problemu i jego interpretacji fizycznej. Rozpatrzmy równanie różniczkowe

$$(16) \quad Au = f$$

gdzie  $A$  jest operatorem różniczkowym problemu a  $f$  i  $u$  są daną i szukaną funkcją w pewnej przestrzeni funkcyjnej. W przypadku gdy operator  $A$  jest operatorem dodatnio określonym można wprowadzić operator  $B$  taki, że  $A = B^2$  i dowieść [1] istnienie ograniczonego operatora  $B^{-1}$  do niego odwrotnego. W tym wypadku rozwiązanie równania (16) jest równoznaczne rozwiązaniu równania

$$(17) \quad Bu = B^{-1}f.$$

Ponadto funkcjonały metody energetycznej dla równania (16) i najmniejszych kwadratów dla równania (17) różnią się wtedy tylko o stały składnik [1]. Z tego wynika, że w przypadku dodatnio określonego operatora  $A$  zastosowanie metody energetycznej do problemu opisanego równaniem (16) prowadzi do tego samego wyniku co zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do równania (17).

Problemem pozostaje oczywiście konstrukcja równania (17). Nie wydaje się bowiem możliwe podanie efektywnej drogi znalezienia operatora  $B$  w każdym przypadku. Ponadto operator  $B^{-1}$  jest przecież poszukiwanym rozwiązaniem problemu, zachodzi bowiem  $B^{-1}Bu = u$ . Tym samym konstrukcja równania (17) jest w zasadzie równoznaczna znalezieniu poszukiwanego rozwiązania.

Tym niemniej jeżeli uda się rozłożyć operator równania różniczkowe o (16) na iloczyn dwóch identycznych operatorów  $B$  można także zinterpretować prawą stronę równania (17). Tym samym uzyskać można funkcjonał metody najmniejszych kwadratów dla równania (17), funkcjonał o określonej interpretacji fizycznej.

Idąc tą drogą wykażemy, że wprowadzony a priori funkcjonał (8) jest w analizowanym problemie identyczny z funkcjonałem metody najmniejszych kwadratów dla równania (17).

W przypadku problemów filtracji ustalonej operator  $A$  z równania (1) jest dodatnio określony i daje się przedstawić w postaci iloczynu dwóch identycznych operatorów macierzowych względem siebie transponowanych. Istotnie, można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$(18) \quad A = B^T B$$

gdzie macierzowy operator  $B$  ma postać

$$(19) \quad B = KD = \begin{bmatrix} -\sqrt{k_x} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{k_y} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{k_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}.$$

Tym samym zależność (17) dla problemu opisanego równaniem (1) można zapisać następująco

$$(20) \quad KDh = \begin{Bmatrix} -\sqrt{k_x} \frac{\partial h}{\partial x} \\ -\sqrt{k_y} \frac{\partial h}{\partial y} \\ -\sqrt{k_z} \frac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} = -B^{-1}Q.$$

Prawa strona powyższej równości nie jest dana w jawnej postaci. Aby jednak równość była spełniona winna być ona równa stronie lewej. Biorąc pod uwagę prawo Darcy'ego (4) widzimy, że lewa strona zależności (20) przedstawia podzielone odpowiednio przez  $\sqrt{k_x}$ ,  $\sqrt{k_y}$ ,  $\sqrt{k_z}$  składowe  $u$ ,  $v$ ,  $w$  wektora prędkości. Można więc napisać, że

$$(21) \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{k_x} \frac{\partial h}{\partial x} \\ -\sqrt{k_y} \frac{\partial h}{\partial y} \\ -\sqrt{k_z} \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{k_x}} \\ \frac{v}{\sqrt{k_y}} \\ \frac{w}{\sqrt{k_z}} \end{pmatrix}.$$

Podstawiając teraz w miejsce  $h$  wartość przybliżoną  $\tilde{h}$  równanie (21) nie będzie oczywiście spełnione. Jako najlepsze przybliżenie można uważać to, które minimalizuje funkcjonal metody najmniejszych kwadratów dla tego równania

$$(22) \quad E = \int_V \int_V \int_V \left[ \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{k_x}} \\ \frac{v}{\sqrt{k_y}} \\ \frac{w}{\sqrt{k_z}} \end{pmatrix} - \mathbf{KD}\tilde{h} \right]^2 dV.$$

Wykonując działania w funkcjale (22) z wykorzystaniem formuł (4) uzyskamy

$$(23) \quad E = \int_V \int_V \int_V \left[ \left( \frac{u}{\sqrt{k_x}} + \sqrt{k_x} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{v}{\sqrt{k_y}} + \sqrt{k_y} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{w}{\sqrt{k_z}} + \sqrt{k_z} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right)^2 \right] dV = \\ = \int_V \int_V \int_V \left[ \frac{1}{k_x} (u - \tilde{u})^2 + \frac{1}{k_y} (v - \tilde{v})^2 + \frac{1}{k_z} (w - \tilde{w})^2 \right] dV.$$

Otrzymaliśmy zatem wyjściowy funkcjonal (8). Innymi słowy wprowadzony poprzednio funkcjonal (8) jako całka z ważonych błędów kwadratowych wyznaczenia składowych wektora prędkości jest identyczny z funkcjalem metody najmniejszych kwadratów dla równania (17). Funkcjonał ten istotnie różni się od funkcjonału metody energetycznej dla równania (1) tylko stałą co wykazano poprzednio.

Zastosowane tutaj postępowanie może być, jak się wydaje użyte do interpretacji podobnych zależności dla innych procesów fizycznych.

#### 4. Metoda elementów skończonych

Wśród metod energetycznych stosowanych do rozwiązywania zagadnień filtracji ustalonej największe uznanie zdobyła ostatnio metoda elementów skończonych (MES) [3]. Można ją oczywiście także traktować jako procedurę minimalizacji błędów wyznaczenia składowych wektora prędkości w sensie najmniejszych kwadratów. Ma to o tyle ważne znaczenie praktyczne, że z jednej strony pozwala na interpretację niektórych właściwości rozwiązań uzyskiwanych za jej pomocą a z drugiej strony umożliwia ogólne wnioskowanie o zbieżności metody oraz warunkach i kryteriach tej zbieżności. Dla przykładu:

(i) Rozwiązania przybliżone minimalizujące średni błąd kwadratowy mają jak wiadomo [2] tendencję do oscylacji wokół wartości dokładnych a zatem prędkości obliczone metodą elementów skończonych będą także wykazywać taką naturę. Istotnie, taka oscy-

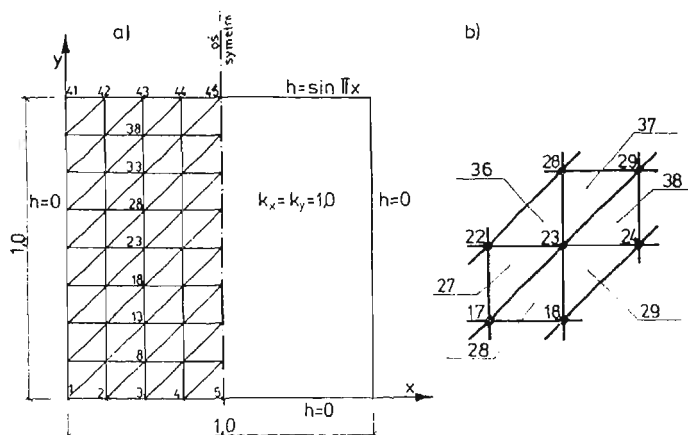


łacja składowych wektora prędkości jest powszechnie obserwowana w MES, szczególnie w pobliżu osobliwości w rozkładzie prędkości. Z tego też powodu jako ostateczne wartości przyjmowane są zwykle wartości uśrednione z różnych elementów.

Dla ilustracji tego faktu w tabeli 1 zestawiono  $u/k_x$  i  $v/k_y$  obliczone w węźle 23 dla obszaru filtracji i podziału na elementy przedstawionego na rys. 2. Obliczenia wykonano za pomocą programu zreferowanego w pracy [4].

Tabela 1

Prędkości obliczone z elementu	$\frac{u}{k_x}$	$\frac{v}{k_y}$
27	-0,527	-0,223
28	-0,338	-0,412
29	-0,352	-0,412
36	-0,527	-0,587
37	-0,532	-0,587
38	-0,352	-0,767
Wartości średnie	-0,438	-0,498
Wartości dokładne	-0,443	-0,483



Rys. 2. Obszar filtracji, warunki brzegowe i podział na elementy dla zadania przykładowego (a) oraz numeracja węzłów i elementów w otoczeniu węzła 23.

(ii) Błąd bezwzględny wielkości uzyskanych przez minimalizację błędu kwadratowego może być tego samego rzędu dla wszelkich wartości (dużych i małych) obliczonych tym sposobem.

Tym samym należy liczyć się z większymi błędami względnymi wyznaczenia składowych wektora prędkości dla obszarów gdzie prędkości te są małe. W tabeli 2 zestawiono przykładowo wartości  $u/k_x$  i  $v/k_y$  obliczone dla węzłów leżących wewnątrz obszaru filtracji z rys. 2 wzdłuż prostej  $x = 0,25$ . Obliczone błędy względne wskazują istotnie największe wartości dla prędkości małych co do modułu. Jest to szczególnie widoczne w tym przypadku dla składowej  $v$ .

Tabela 2

Węzeł	$\frac{u}{k_x}$			$\frac{v}{k_y}$		
	MES	Dokładnie	Błąd względny w %	MES	Dokładnie	Błąd względny w %
8	-0,074	-0,077	3,9	-0,215	-0,207	3,9
13	-0,165	-0,167	1,2	-0,264	-0,255	3,5
18	-0,280	-0,283	1,1	-0,354	-0,342	3,5
23	-0,438	-0,443	1,1	-0,498	-0,483	3,1
28	-0,663	-0,672	1,3	-0,717	-0,699	2,6
33	-0,988	-1,006	1,8	-1,046	-1,024	2,1
38	-1,464	-1,497	2,2	-1,534	-1,509	1,7

(iii) Zbieżność metody elementów skończonych, traktowanej jako procedura minimalizacji błędu kwadratowego wynika z poniższego twierdzenia [5]:

Jeżeli: 1) ciąg elementów  $BN_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) jest zupełny w rozpatrywanej przestrzeni funkcyjnej, do której należą zarówno poszukiwana funkcja  $u$  jak i znana funkcja  $f$  z równania (16) 2) równanie (17) ma rozwiązanie oraz 3) istnieje ograniczony operator odwrotny  $B^{-1}$  wówczas układ równań uzyskiwany metodą najmniejszych kwadratów ma jedno i tylko jedno rozwiązanie, które przy  $n \rightarrow \infty$  zapewnia zbieżność  $u_n$  do  $u$  jak i  $Bu_n$  do  $B^{-1}f$ .

Zupełność elementów  $BN_n$  oznacza tutaj fakt, że funkcje bazowe w MES muszą być tak dobrane aby ze wzrostem  $n$  dowolnie dokładnie przybliżyć rzeczywisty rozkład prędkości. Natomiast zbieżność  $u_n \rightarrow u$  oraz  $Bu_n$  do  $B^{-1}f$  oznacza w przypadku problemów filtracji ustalonej zbieżność zarówno funkcji  $h(x, y, z)$ , opisującej rozkład ciśnienia piezometrycznego, jak i składowych wektora prędkości filtrującej cieczy do wartości dokładnych. Pamiętać jedynie należy, że pojęcie zbieżności odnosi się tutaj do zbieżności według normy w analizowanej przestrzeni funkcyjnej.

#### Literatura cytowana w tekście

1. С. Т. МИХЛИН; *Вариационные методы в математической физике*, Изд. Наука, Москва, 1970.
2. L. R. HERRMANN; *Interpretation of finite element procedure as stress error minimization procedure*, J. Eng. Mech. Div. 98, 1972, 1330 - 1336.
3. O. C. ZIENKIEWICZ; *Metoda elementów skończonych*, ARKADY, Warszawa 1972.
4. B. WOSIEWICZ, S. FRĄCKOWIAK; *Program obliczeń płaskiej filtracji ustalonej na EMC ODRA 1204*, Wiad. Mel. i Łąk., 1/1979, s. 25 - 27.
5. S. G. MICHLIN, C. L. SMOLICKI; *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*, PWN, Warszawa 1972.

## Р е з ю м е

К ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В качестве меры ошибки приближённого решения задачи фильтрации в вариационной формулировке (5) и (2) или эквивалентной ей краевой задачи (1), (2) и (3) принято взвешенную квадратичную невязку определения составляющих вектора скорости фильтрующейся жидкости (7).

Доказано, что минимизация такой невязки по всей области фильтрации (8) приводит к минимизации функционала диссипации энергии (5).

Данный подход к энергетическим методам позволяет определить некоторые свойства решений, а также, сходимость самого метода. Он проанализирован для метода конечных элементов.

## S u m m a r y

## AN INTERPRETATION OF VARIATIONAL METHODS FOR STEADY SEEPAGE PROBLEMS

Analysed boundary value problem for steady seepage is described by partial differential equation (1) with boundary conditions (2) and (3) or by energy functional (5) with boundary conditions (2). The weighted squared error of velocity components (7) is assumed as the error measure of an approximate solution to the problem. It is proved that the minimization of the weighted squared error over whole flow domain (8) is equivalent to the corresponding variational formulation (5). Thus, variational methods for steady seepage problems may be interpreted as the least squared error procedure where the measure of error is the weighted function of the errors in the velocity components. The formulation of variational methods as a minimum least squared error procedure is susceptible to interpretation of some properties of the obtained solutions and affords a method of convergence. These aspects have been discussed for the finite elements method.

INSTYTUT BUDOWNICTWA WODNO-MELIORACYJNEGO  
POZNAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 listopada 1979 roku.*



## ZMIANY STRUKTURY POLIAMIDU 6 W PROCESIE NISZCZENIA ZMĘCZENIOWEGO

MARIAN NOWAK (WROCLAW), ANDRZEJ WŁOCHOWICZ (BIELSKO-BIALA)

### 1. Cel i zakres badań

Jednym z celów badań strukturalnych tworzyw sztucznych jest zbudowanie modelu fizycznego objaśniającego np. zasadę modyfikowania wytrzymałości zmęczeniowej [1]. Problem konstytuowania nowych, lepszych własności mechanicznych tworzyw w stanie stałym, dostosowanych do potrzeb eksploatacyjnych sprowadza się do modyfikacji struktury nadcząsteczkowej polimeru, od której zależy m.in. trwałość zmęczeniowa ( $N$ ), granica zmęczenia ( $Z$ ) oraz kąt pochylenia wykresu zmęczenia w zakresie wytrzymałości umownej ( $\sigma < \sigma_{kr}$ ). Problem może polegać także i na tym, w jaki sposób zahamować rozwój procesów starzenia, aby w określonym czasie  $\tau$  granica zmęczenia  $Z \approx \text{const}$ . [2]. Sformułowanie fizycznych podstaw procesów rządzących kinetyką kohezji i dekohezji oznacza ustalenie jakościowych i ilościowych związków pomiędzy czynnikami zewnętrznymi, np. termiczno-ciśnieniowymi, a ich skutkami mierzonymi wytrzymałością lub trwałością zmęczeniową. Podstawą do sformułowania takich zależności jest dokładne zbadanie zmian zachodzących w mikrostrukturze fizycznej polimeru pod wpływem zaprogramowanych bodźców termicznych i termiczno-ciśnieniowych oraz pod działaniem zmiennego pola naprężeń i sprzężonego z nim wewnętrznego pola temperatur.

Równorzędym zagadnieniem w stosunku do konstytuowania własności wytrzymałościowych (zmęczeniowych) jest sformułowanie hipotezy zmęczenia dla tworzyw sztucznych [3, 4, 5].

Oba zagadnienia są złożone, a ich rozwiązanie wymaga wieloletnich i czasochłonnych badań. Są to tzw. zadania dalsze, których strona merytoryczna może być realizowana w dwóch etapach. Pierwszy — to badanie tworzywa w stanie nieobciążonym i zużonym. Ten etap badań sprowadza się do pomiarów strukturalnych, które ujawniłyby najsłabsze ogniwa w strukturze nadcząsteczkowej polimeru oraz do wytypowania jednego lub kilku spośród oznaczanych wskaźników zmieniających się najwyraźniej w procesie zmęczenia. Należy więc przede wszystkim ustalić czy można wytypować taki wskaźnik, który byłby szczególnie odpowiedzialny za wzrost wytrzymałości zmęczeniowej i czy aktualne metody badań strukturalnych mogą być stosowane do masowych oznaczeń w granicach optymalnego czasu badań.

Etap drugi — badanie tworzywa po dokonanych zabiegach termicznych lub termiczno-ciśnieniowych, także w stanie nieobciążonym i zużonym.

Zadanie zrealizowane i przedstawione w niniejszej pracy — tzw. zadanie bliższe — polegało na zbadaniu mikrostruktury fizycznej próbek wykonanych z poliamidu 6 metodą

wtrysku, o różnej historii obciążenia mechanicznego i sprzężonego z nim obciążenia termicznego [6] oraz na udokumentowaniu tezy, że w procesie zmęczenia bierze udział nie tylko faza bezpostaciowa lecz także obszary uporządkowane o większych wartościach sił kohezji.

Badania strukturalne przeprowadzono na dwóch rodzajach preparatów pobranych z:

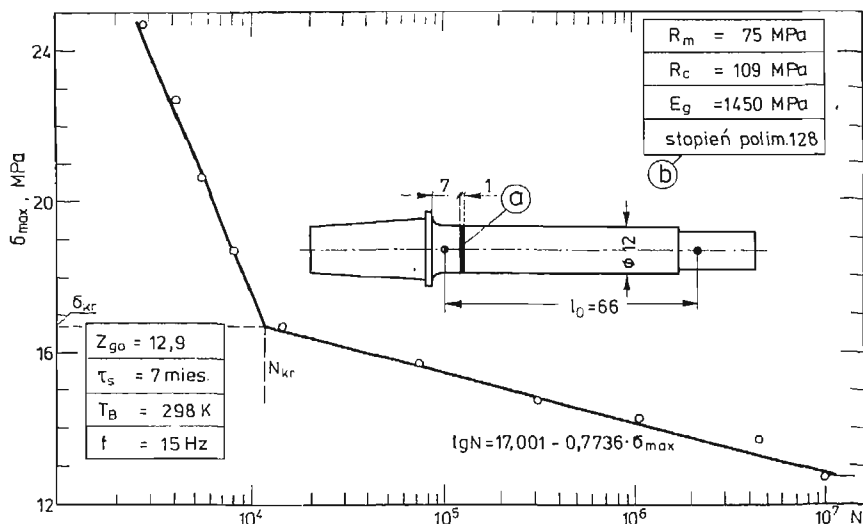
1. próbek nieobciążonych (stan początkowy), przeznaczonych do badań zmęczeniowych, tj. przede wszystkim do określenia granicy zmęczenia oraz do charakterystycznych cech wytrzymałościowych, wynikających z wykresu zmęczenia;

2. próbek obciążonych naprężeniem zmieniającym się według cyklu sinusoidalnego ( $\sigma_a = \sigma_{max}$ ,  $\sigma_m = 0$ ,  $R = -1$ ) z częstotliwością  $f = 15$  Hz.

W zakresie wytrzymałości ograniczonej wykonano pomiary dla dwóch poziomów naprężenia  $\sigma_{max}$ , a w zakresie umownej wytrzymałości zmęczeniowej — dla sześciu poziomów naprężenia i liczbie cykli zmian naprężenia do  $10^7$ .

## 2. Konstrukcja wykresu zmęczenia. Przygotowanie preparatów do badań strukturalnych

Próbki do badań zmęczeniowych (rys. 1) wykonano metodą wtrysku do formy ogrzewanej (353 K). Celem doprowadzenia w nich zawartości wilgoci do stanu równowagowego z otoczeniem, próbki klimatyzowano w normalnych warunkach klimatycznych,



Rys. 1. Wykres zmęczenia poliamidu 6 (Tarnamidu T-27), próbka do badań zmęczeniowych i rentgenograficznych (a) oraz wybrane własności mechaniczne i fizyczne (b).

tnz. w temperaturze i wilgotności względnej otoczenia. Podstawą do oceny stanu równowagowego był wykres trwałości zmęczeniowej ( $N$ ) w funkcji czasu starzenia  $\tau_s$  [1]. Po czasie leżakowania około  $\tau_s = 6$  miesięcy osiągnięto  $\bar{N} \approx \text{const}$  przy wybranej amplitudzie cyklu naprężeń  $\sigma_a = 24,7$  MPa. Dla próbek wewnętrznie uspokojonych skonstruowano wykres zmęczenia metodą statystyczną [7], przyjmując do określenia średniej arytmetycznej liczby cykli do złomu  $\bar{N}$  liczebność próby  $n = 12 \div 96$  [1]. Selekcję próbek

przeprowadzono po badaniach zmęczeniowych, stosując do eliminacji wyników odbiegających test *t*-Studenta. Umowna wytrzymałość zmęczeniowa w temp.  $T_B = 298$  K, określona na bazie  $10^7$  cykli wynosi  $Z_{go} = 12,9$  MPa. Dla  $\sigma_{max} < \sigma_{kr}$  wyznaczono analitycznie równanie prostej regresji  $\lg N = A - B\sigma_{max}$ , w którym  $A = 17,001$  i  $B = 0,7736$  (rys. 1).

Preparaty do oznaczeń strukturalnych wykonano skrawając z małą prędkością ( $v \approx 25$  m/min) próbki nużone, których liczba cykli  $N$  do złomu była najbliższa średniej arytmetycznej  $\bar{N}$  (tablica 1).

Tablica 1. Zestawienie wyników pomiaru do konstrukcji wykresu zmęczenia oraz liczba cykli do złomu  $N_f$  próbek wybranych do badań strukturalnych.

$\sigma_{max}$ MPa	$n$	$\bar{N}$	$N_f$		
			1	2	3
24,7	12	2 800	2 270	2 630	3 100
20,7	12	5 650	5 240	6 050	6 290
16,7	12	13 540	11 200	11 800	13 500
15,7	24	71 910	41 600	63 500	65 600
14,7	96	302 380	301 500	307 000	327 000
14,2	20	1 030 370	868 000	874 000	$10^6 \uparrow$
13,7	12	4 707 920	$6 \cdot 10^6 \uparrow$	$6 \cdot 10^6 \uparrow$	$6 \cdot 10^6 \uparrow$
12,7	12	10 285 170	$10^7 \uparrow$	$10^7 \uparrow$	$10^7 \uparrow$

$\uparrow$  próbka nie złamana;  $n$  — liczebność próby

Wszystkie badane preparaty, pochodzące z określonego poziomu naprężenia, są w pojęciu statystycznym jednakowo wyężone i zużone. Do oznaczania parametrów strukturalnych stosowano po trzy preparaty, w kształcie płytki o wymiarach  $D \times g = 12 \times 1$  mm (rys. 1-a).

### 3. Metody stosowane w badaniach strukturalnych

Strukturę badanego poliamidu 6 (Tarnamidu T-27) scharakteryzowano za pomocą wskaźników, które podzielono na dwie grupy.

W pierwszej grupie znajdują się te, których wartości określono metodami bezpośrednimi. Są to (tablica 2):

1. poprzeczne wymiary obszaru krystalicznego (szerokość  $\Delta_{(200)}$  i grubość  $\Delta_{(020)+(220)} = \Delta_{(020)}$ );
2. średnia długość obszaru krystalicznego ( $l_{wo}$ );
3. gęstość obszarów uporządkowanych ( $d$ );
4. stopień krystaliczności ( $X_m$ ).

Do drugiej grupy zaliczono wielkości określone metodami pośrednimi, tj.:

5. wskaźnik doskonałości obszaru krystalicznego ( $k$ );
6. masowy i objętościowy stopień krystaliczności ( $X_{mg}$ ,  $X_v$ );
7. objętość obszaru krystalicznego ( $v_k$ ).

Tablica 2. Zestawienie wzorów stosowanych w obliczeniach parametrów strukturalnych [5, 10, 14].

Nr wzoru	Nazwa badanego parametru strukturalnego	Wzór
1	Poprzeczne wymiary obszaru krystalicznego $\Delta_{(hkt)}$	$\frac{R \cdot \lambda}{b_{(hkt)} \cdot \cos \Theta_{(hkt)}}$
2	Średnia długość obszaru krystalicznego $l_{wo}$	$\frac{\lambda}{2 \sin \Theta_{wo}}$
3	Masowy stopień krystaliczności według Wakelina-Virgina-Crystala (WVC) $X_m$	$\frac{\sum [I_s - I_a] 2\Theta}{\sum [I_k - I_a] 2\Theta} 100$
4	Masowy stopień krystaliczności według metody gradientowej $X_{mg}$	$\frac{d_k(d - d_a)}{d(d_k - d_a)} 100$
5	Objętościowy stopień krystaliczności według metody gradientowej $X_v$	$\frac{d - d_a}{d_k - d_a} 100$
6	Wskaźnik doskonałości obszaru krystalicznego $k$	$\frac{\frac{d_{(200)}}{d_{(020)}} - 1}{0,166} 100$
7	Objętość agregatu krystalicznego $v_k$ (objętość umowna)	$\Delta_{(200)} \cdot \Delta_{(020)} \cdot l_{wo}$

Dane dodatkowe:  $R = 114,7$  mm;  $\lambda = 1,54$  Å;  $\Theta_{(200)} = 10^\circ 10'$ ;  $\Theta_{(020)} = 12^\circ 02'$ ;  $d_a = 1,084$ ,  $d_k = 1,174$  g/cm<sup>3</sup> [15, 16];  $2\Theta_{wo} = 14^\circ \pm 31^\circ$

Tablica 3. Zestawienie wyników badań strukturalnych poliamidu 6

Wyniki badań zmęzeniowych			Wyniki badań strukturalnych								
Lp	$\sigma_{max}$ [MPa]	$\bar{N}$ [cykle]	bezpośrednie				pośrednie				$v_k \cdot 10^3$ [Å]
			$\Delta_{(hkt)}$ [Å]	$l_{wo}$ [Å]	$x_m$ [%]	$d$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$k$ [%]	$x_v$	$x_{mg}$		
			$\Delta_{(200)}$	$\Delta_{(020)}$							
0	Stan początkowy		63,0	56,0	90,5	54,4	1,1445	82,5	67,2	68,9	319
1	24,7	2 800	59	48	99,4	46,0	1,1391	72,5	61,2	63,0	282
2	20,7	5 650	59	50	98,4	47,0	1,1391	72,6	61,2	63,0	290
3	16,7	13 540	59	48	96,1	47,0	1,1399	73,6	62,1	64,0	272
4	15,7	71 910	59	43	95,3	48,0	1,1402	73,3	62,4	64,2	242
5	14,7	302 380	59	50	94,0	50,0	1,1409	75,3	63,2	65,1	277
6	14,2	1 030 370	59	48	93,5	50,0	1,1406	76,6	62,8	64,7	265
7	13,7	4 707 920	59	48	93,0	51,0	1,1409	77,4	63,2	65,1	263
8	12,7	10 285 170	59	47	92,2	51,0	1,1413	79,3	63,6	65,4	256
Względne, maksymalne zmiany badanych wskaźników, %			-6,4	-23,3	+9,8	-16,4	-0,5	-12,2	-9	-8,6	-24,3



Wyniki pomiarów i obliczeń zestawiono w tabelicy 3. Są to wartości orientacyjne, wykorzystane w analizie wyników badań w charakterze danych porównawczych, jednak zupełnie wystarczające do uzasadnienia postawionej tezy. Rentgenograficzne badania strukturalne prowadzono na dyfraktometrze „Rigaku-Denki” (Japonia) w warunkach: promieniowanie  $\text{CuK}\alpha$ , natężenie prądu anodowego 30 mA, napięcie przyspieszające 40 kV, szybkość kątowna licznika scyntylacyjnego  $2^\circ/\text{min}$ . Wzorce do oceny wskaźnika krystaliczności — krystaliczny i bezpostaciowy wykonano według [8].

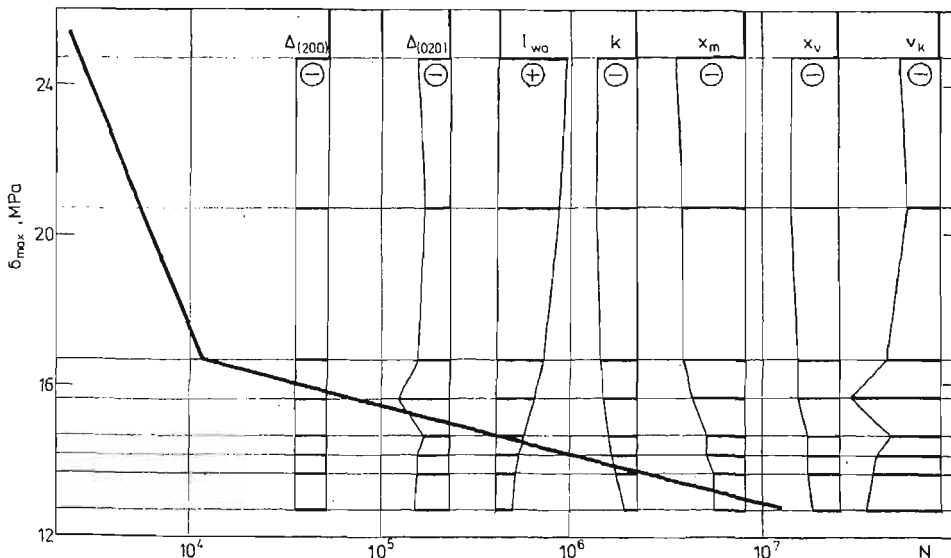
Gęstość określono metodą gradientową, w kolumnie przygotowanej sposobem Wiśniewskiej [9], wypełnionej mieszaniną  $\text{CCl}_4$  i n-heptanu.

#### 4. Dyskusja wyników

Nie wnikając w zagadnienie zasadności wyboru modelu struktury nadcząsteczkowej tworzywa polimeru — jedno czy dwufazowego — należy zwrócić uwagę na fakt, że w procesie zmęczenia mechanicznego Tarnamidu T-27 biorą udział obszary, które posiadają najbardziej poprawnie wykształconą sieć przestrzenną. Jest to wynik na tyle nieoczekiwany, że doprowadzenie obszaru krystalicznego (względnie mezomorficznego) do dezintegracji poprzez zmienne pole naprężeń, wymaga przecież doprowadzenia znacznie większej ilości energii niż do obszarów bezpostaciowych.

Należy dodać, że agregaty krystaliczne zajmują ponad połowę objętości i ponad połowę masy obiektu badanego.

Włochowicz i Kubacki stwierdzili [3], że mikropęknięcie rozwija się według zasady najmniejszego oporu. Z energetycznego punktu widzenia jest to oczywiste i równoznaczne z pewnikiem. Ale jeżeli pęknięcie zmęczeniowe napotka na drodze swojego rozwoju obszar krystaliczny, nie oznacza to jeszcze — w świetle otrzymanych wyników (tabela 3) — że musi powstać uskok o takiej wysokości, aby obszar ten pozostał poza strefą dekohezji. Przedstawione badania strukturalne (rys. 2), a w szczególności ujawniony fakt zmniej-



Rys. 2. Schematyczne przedstawienie zmian strukturalnych poliamidu 6 na tle wykresu zmęczenia.

szania się objętości obszarów krystalicznych ( $v_k$ ) wskazuje wyraźnie, że nie wszystkie obszary uporządkowane są w pozycji uprzywilejowanej, tzn. że posiadają większą wartość sił kohezji od obszarów bezpostaciowych. Co zatem wpływa, że w wyniku działania naprężeń zmiennych obszary krystaliczne zmieniają wymiary (np. grubość o ok. 23%) i że zachodzi obniżenie stopnia krystaliczności (maksymalnie o ok. 16%). Bezpornym wydaje się fakt, że obszary uporządkowane badanego poliamidu, jak w każdej strukturze rzeczywistej, posiadają liczne defekty [5, 10], których wpływ na osłabienie wiązań międzycząsteczkowych jest większy, niż osiągnięte wzmocnienie jako następstwo ścisłego upakowania makrocząsteczek. Poprzez wzrost tylko samych obszarów uporządkowanych nie osiągnie się jeszcze wzrostu wytrzymałości zmęczeniowej. Należy dążyć do tego, aby były one o możliwie niskim stopniu zdefektowania i o odpowiedniej budowie morfologicznej.

Do opisu jakości wykształconych struktur krystalicznych wprowadzono za Roldanem [11] i Włochowiczem [5] tzw. wskaźnik doskonałości obszaru krystalicznego ( $k$ ). Dla próbek nieobciążonych jest on znacznie mniejszy od jedności (0,825) i maleje maksymalnie dla  $\sigma_a = 24,7$  MPa o 12%. Dla małych wartości naprężeń  $\sigma_a$ , przy których liczba cykli do złomu jest większa od  $10^7$  naruszenie doskonałości sieci przestrzennej w stosunku do stanu nieobciążonego wynosi już tylko 4%.

Tablica 4. Zestawienie wyników badań strukturalnych Itamitu I-35 i Tarlonu XB [17, 18].

	Lp.	$\sigma_{max}$ [MPa]	$\bar{N}$ [cykle]	$\Delta_{(hkl)}$ [Å]		$x_m$ (HW) [%]	$d$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$x_i$ [%]	
				$\Delta_{(200)}$	$\Delta_{(020)}$			$x_y$	$x_{mg}$
Itamid I-35	0	Stan początkowy		75,4	46,3	48,4	—	—	—
	1	20,2	92 000	75,4	41,5	40,8	—	—	—
	2	19,7	213 000	75,4	41,5	43,4	—	—	—
	3	18,7	1 150 000	75,4	49,3	46,7	—	—	—
	4	18,2	5 000 000	75,4	41,5	44,6	—	—	—
	5	17,2	14 000 000	75,4	37,5	45,5	—	—	—
Tarlon XB	0	Stan początkowy		30,3	29,0	49,6	1,1445	67,2	68,9
	1	18,7	6 000	29,2	37,3	48,3	1,1441	66,8	68,5
	2	16,7	267 160	29,8	36,2	47,5	1,1442	66,9	68,6
	3	15,7	1 324 070	29,8	37,8	47,4	1,1430	65,6	67,3
	4	13,7	15 420 470	29,9	37,3	49,2	1,1440	66,7	68,4

Interesującym zjawiskiem, które zaobserwowano w procesie zmęczenia poliamidu 6 jest niezależność szerokości obszaru krystalicznego  $\Delta_{(200)}$ , od wartości amplitudy cyklu naprężeń  $\sigma_a$ . Analogiczny fakt zaobserwowano także w badaniach zmęczeniowych Itamidu 35 oraz Tarlonu XB (tablica 4). Mimo, że tworzywa te różnią się własnościami mechanicznymi to jednak ze względu na zbliżoną budowę chemiczną posiadają pewne cechy wspólne. Przejawem jednej z nich jest to, że pod działaniem zmiennego naprężenia  $\Delta_{200}$  jest stałe, lub prawie stałe. Jeżeli szerokość krystalitu nie jest wrażliwa na zmianę naprężenia należy więc dążyć w procesie wytwarzania, przetwórstwa, względnie poprzez zabiegi na gotowym

wyrobie do tego, aby  $\Delta_{(200)}$  było jak największe. Spośród trzech wymiarów obszaru krystalicznego tylko jeden z nich może stanowić próg energetyczny przeciw rozwojowi mikro-  
pęknięcia.

Zmiany zachodzące w strukturze poliamidu 6 potwierdza jednoznacznie oznaczenie stopnia krystaliczności metodą wypornościową w kolumnie gradientowej.

Rozpatrując zmianę długości krystalitu ( $l_{wo}$ ) należy podkreślić, że jest to jedyny parametr, który wzrasta  $2 \div 10\%$  w wyniku działania zmiennego naprężenia. Ale mimo to, że  $l_{wo}$  wzrasta, to kierunek zjawiska jest taki, że w większym stopniu maleje umowna objętość krystalitów, niż wskaźnik krystaliczności. Oznacza to, że w wyniku zmiennego pola naprężeń następuje z jednej strony rekrytalizacja (krystalizacja wtórna o charakterze wymuszonym), a z drugiej — obszary krystaliczne maleją. Efekt ten może być najprościej wyjaśniony pogładowo w oparciu o hipotezę micelarno — frędzlową Kratky'ego i Marka [za 10]. Za interpretacją zaobserwowanych zjawisk wymienioną hipotezę przemawiają następujące fakty:

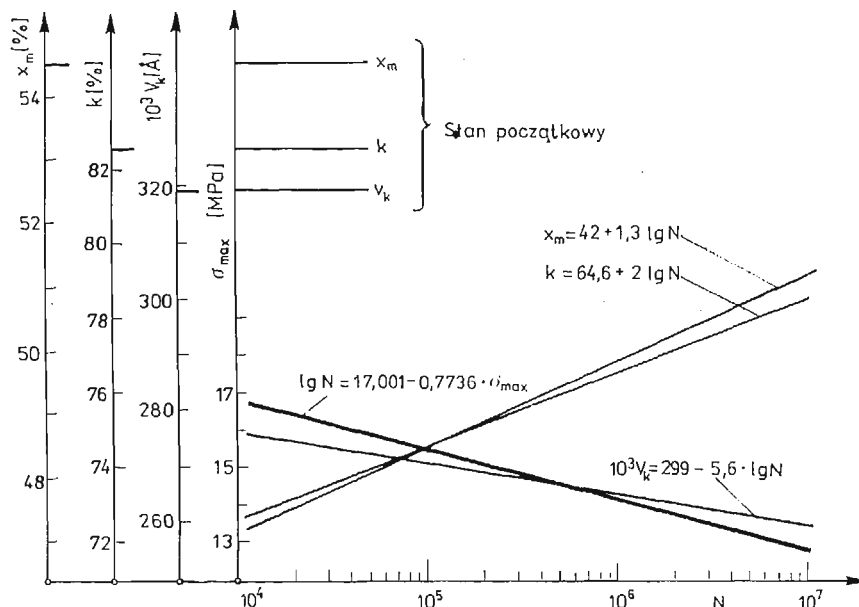
1. małe zmiany w zawartości fazy krystalicznej wskazują na silne skłębienie i splątanie obszarów bezpostaciowych;
2. hipoteza dopuszcza zmiany w zawartości obszarów uporządkowanych w wyniku działania naprężeń i temperatury (tutaj temperatury samowzbudnej);
3. bardzo małe rozmiary obszarów krystalicznych.

Aby wyjaśnić wzrost długości krystalitów, koniecznym jest przyjęcie założenia, że w wyniku obciążenia mechanicznego i nieznacznego termicznego jest możliwa zmiana położenia makrocząsteczek w stanie stałym. Badania przeprowadzone np. przez Urbańczyka wykazały [12], że są możliwe zmiany strukturalne w poliamidzie 6 w stanie stałym pod wpływem obciążenia mechanicznego. Zmiany te dotyczą obszarów uporządkowanych (około 27%), wymiarów poprzecznych (14%) i długości krystalitów (10%) oraz orientacji obszarów bezpostaciowych i uporządkowanych (87%). Struktura w badanych preparatach nie jest zorientowana, a więc i osie krystalitów nie posiadają uprzywilejowanego kierunku w stosunku do kierunku zmiennego naprężenia. Istnieje jednak pewien procent obszarów krystalicznych, dla których oś  $c$  jest równoległa lub nachylona pod niewielkim kątem do osi próbki. Zatem w wyniku działania naprężenia  $\sigma_a$  jest możliwe dalsze porządkowanie makrocząsteczek, które wychodząc z krystalitu tworzą obszary bezpostaciowe lub mezomorficzne.

Posługiwanie się hipotezą micelarno-frędzlową, mimo jej szeregu luk i nieściśłości [10], stwarza wygodniejszą pozycję w aplikacji takich pojęć jak krystalit, faza bezpostaciowa i krystaliczna, orientacja, dezintegracja struktury, wymiary poprzeczne i długości krystalitów itp. niż model jednofazowy typu Bonarta-Hosemanna [13]. Interpretacja zjawisk zachodzących w strukturze poliamidu 6 sprowadzałaby się — biorąc za punkt wyjścia obszary parakrystaliczne — do operowania pojęciami związanymi z obszarami krystalicznymi o określonym stopniu zdeformowania, lub uwzględnienia struktur lamelarnych i makrocząsteczek z warstw przekładkowych [3].

## 5. Wnioski

1. W procesie zmęczenia mechanicznego poliamidu 6 ulegają zmianie wszystkie mierzone parametry strukturalne, z tym że wzrasta tylko długość kryształitu, natomiast wielkości pozostałe — maleją. Oznacza to, że obszary krystaliczne, ich budowa i siły kohezji cząsteczkowej mają znaczny udział w kinetyce dekohezji zmęczeniowej.



Rys. 3. Przedstawienie wybranych wyników badań strukturalnych  $v_k$ ,  $k$ ,  $x_m$  w zakresie umownej wytrzymałości zmęczeniowej

2. Obniżenie wskaźnika krystaliczności (masowego i objętościowego) oraz objętości umownej kryształitów nastąpiło w trakcie zmęczenia w takim stosunku, że pod wpływem pola naprężeń i sprzężonego z nim pola temperatur zachodzą procesy rekrytalizacji.

3. Poprawę własności zmęczeniowych poliamidu 6 można osiągnąć poprzez zmianę fizycznej mikrostruktury tworzywa dążąc do zwiększenia sił spójności obszarów bezpostaciowych i krystalicznych. W tych ostatnich szczególnie pożądanym jest wzrost szerokości kryształitów  $\Delta_{(200)}$  oraz wzrost doskonałości budowy sieci krystalicznej.

4. Poliamid 6 (Tarnamid T-27) wykrytalizował całkowicie w układzie jednoskośnym. Na rentgenogramach badanych preparatów nie zaobserwowano występowania refleksów charakterystycznych dla układu heksagonalnego.

5. Największe zmiany wartości parametrów strukturalnych zachodzą pod wpływem zmiennego naprężenia w umownej objętości kryształitu  $v_k$ , masowym stopniu krystaliczności  $x_m$  oraz doskonałości obszaru krystalicznego  $k$ . Wielkości te mogą więc być wykorzystane w metodzie oceny stopnia zużycia poliamidu 6, opartej na kryteriach strukturalnych (rys. 3).

## Literatura cytowana w tekście

1. M. NOWAK; *Wybrane zagadnienia wytrzymałości zmęczeniowej poliamidu stabilizowanego*. Prace Naukowe Inst. Mater. i Mech. Techn. Politechniki Wrocławskiej Nr 11, seria: Monografie Nr 3, Wrocław, 1972.
2. M. NOWAK; *Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu 6 w funkcji czasu starzenia i zawartości włókna szklanego*. Mech. Teoret. Stos., 3, 17 1979.
3. A. WŁOCHOWICZ, Z. KUBACKI; *Przyczynek do mechanizmu zniszczenia zmęczeniowego żyłek poliamidowych*. Mech. Teoret. Stos., 2, 9 1971.
4. В. А. КАРГИН, Г. Л. СЛОНИМСКИЙ; *О механизме утомления полимеров*. Доклады Академии Наук СССР, 4, 105 1955.
5. A. WŁOCHOWICZ; *Zmiany fizycznej mikrostruktury włókna poliamidowego wywołane dekolacją zmęczeniową w miejscu zerwania*. Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej Nr 122, Włókiennictwo z. 19, Łódź, 1969.
6. M. NOWAK, A. WŁOCHOWICZ; *Wpływ stanu cieplnego formy i próbki na trwałość zmęczeniową i strukturę submikroskopową poliamidu — Tarnamidu T-27*. Raport nr 43, Inst. Mater. i Mech. Techn. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1975.
7. M. NOWAK; *Analiza doświadczalna metod oznaczania granicy zmęczenia na przykładzie wybranych tworzyw sztucznych*. Raport nr 139, Inst. Mater. i Mech. Techn. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1978.
8. W. O. STATTON; *On X-ray crystallinity index method with application to poly (ethylene terephthalate)*. J. Appl. Polymer Sci., 8 1963.
9. W. WISNIEWSKA; *Problematyka oznaczania gęstości włókien*. Przegląd Włókienniczy, 32 1978.
10. G. W. URBAŃCZYK; *Fizyka włókna — molekularna i nadmolekularna struktura włókna*. WNT, Warszawa 1970.
11. L. G. ROLDAN, F. RAHL, A. R. PATERSON; *Investigation of Polymer Order by X-Ray Diffraction*. J. Polymer Sci., Part C, Polymer Symposia, Nr 8, 1965.
12. G. W. URBAŃCZYK; *Analiza zjawisk orientacji i zmian krystaliczności zachodzących w obszarach uporządkowanych włókna polikaprolaktamowego pod wpływem rozciągania na zimno*. Zesz. Naukowe Politechniki Łódzkiej Nr 35, Włókiennictwo z. 7, Łódź, 1961.
13. R. BONART, R. HOSEMANN; *Modellversuche zur Deutung der Röntgen Langperiodeninterferenzen*. Makromol. Chem., 39, 1960.
14. К. КАИ; *Increase of the Crystallite Size by Application of Tensile Stress for Highly Oriented Polymer*. Makromol. Chem. 1 1974.
15. L. G. ROLDAN, H. S. KAUFMAN; *Crystallization of Nylon 6*. J. Polymer Sci., Part B, Polymer Letters, 1, 7 1963.
16. A. JEZIORNY, S. КЕРКА; *Preparation of Standard Amorphous Specimens for X-Ray Analysis of Fiber Crystallinity*. J. Polymer Sci., Part B, Polymer Letters, 10, 4 1972.
17. A. WŁOCHOWICZ, M. NOWAK; *Badanie struktury submikroskopowej poliamidu zużonego*. Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej Nr 132, Włókiennictwo, z. 22, Łódź, 1971.
18. A. WŁOCHOWICZ, M. NOWAK, J. ZAWADZKI; *Badania strukturalne poliamidu zbrojonego włóknem szklanym*. VI Konferencja Nauk.-Techn.: Rentgenowska analiza strukturalna w metalurgii i metaloznawstwie. Gliwice, 1972.

## Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ  
ПОЛИАМИДА (ТАРНАМИДА Т-27)

Представлены результаты измерений избранных параметров определяющих физическую микроструктуру полиамида 6 (тарнамида Т-27) до и после опыта механической усталости. Дана оценка поперечных размеров кристаллитов  $\Delta_{(h,k,l)}$  длина кристаллического района  $l_{w0}$ , а также массовый и объёмный степень кристалличности. Кроме того определено, пообразцу Рольдана,

коэффициент совершенства кристаллического района. Механическую усталость проведено в синусоидальном цикле по консольной схеме нагрузки ( $\sigma_{\min} = 0$ ,  $\sigma_{\max} = \sigma_a$ )  $R = 0$ ) с частотой 15 герцов.

Установлено, что в процессе усталости изменяются все исследованные структуральные параметры. Из них повышается только длина кристаллита, максимум 10%, остальные - уменьшаются в интервале 8 ÷ 25%. Величиной, которая не зависит от амплитуды цикла напряжений  $\sigma_a$  и числа цикла до перелома является ширина кристаллита  $\Delta_{(200)}$ . Этот результат, из точки зрения усталостного разрушения, может быть основанием для исследования таких термическо-механических процедур, которые в полиамиде 6 вызовут его рост в течение кристаллизации или принуждённой рекристаллизации.

### S u m m a r y

#### VARIATION OF POLYAMID 6 STRUCTURAL PARAMETERS RESULTING FROM FATIGUE FAILURE PROCESS

The results of measurements of selected parameters which characterise the physical-structure of Polyamide 6 (Tarnamid T-27) before and after mechanical fatigue are presented. Assessed were the cross dimensions of crystallites  $\Delta_{(hkl)}$ , the length of crystalline regions  $l_{w0}$ , the mass- and volume-degree of crystallinity. In addition the perfection index of crystalline region according to Roldan's formula was determined. Mechanical fatigue tests were carried out at sinusoidal cycle for cantilever beam ( $\sigma_{\min} = 0$ ,  $\sigma_{\max} = \sigma_a$ ,  $R = 0$ ) with 15 Hz frequency.

During the fatigue process all measured structural parameters can all alter. From these only the length of crystallites increases to a maximum 10%—the other structural parameters decrease in the range from 8 to 25%.

The width of the crystallite  $\Delta_{(200)}$  is the quantity which is independent of the amplitude of stress and of the number of cycles till fracture  $N$ . This effect may be a basis for investigating of such thermal-mechanical process which generates the growth of the crystallite width during a constrained crystallisation or recrystallisation of Polyamide 6.

**Politechnika Wroclawska**  
**Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej**  
 INSTYTUT WŁÓKIENNICZY  
 FILIA POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ  
 BIELSKO-BIAŁA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1979 roku.*

## NUMERYCZNE MODELOWANIA ZAPŁONU CZĄSTKI PALIWA STAŁEGO

WŁODZIMIERZ KORDYLEWSKI, HALINA KRUCZEK (WROCLAW)

W pracy przedstawiono metodę modelowania numerycznego procesu zapłonu pojedynczej, kulistej cząstki paliwa stałego. Wychodząc z ciepłno-dyfuzyjnej teorii zapłonu, zagadnienie rozwiązano metodą różnic skończonych, stosując metodę niejawną. Dokonując zamiany liniowej zmiennej  $\eta = \frac{1}{\xi}$ , przekształcono otaczającą cząstkę przestrzeń w kulę jednostkową, dzięki czemu uniknięto trudności związanych z oceną grubości warstwy granicznej. Występujące w zagadnieniu nieliniowe warunki brzegowe czwartego rodzaju prowadzą do nieliniowych równań algebraicznych, które rozwiązywano metodą bisekcji. Metodę zilustrowano przykładami obliczeń.

### Spis oznaczeń

- $a$  — współczynnik wyrównania temperatury
- A, B — współczynniki przegania
- $c_0$  — stała Boltzmanna
- $c_p$  — ciepła pojemność właściwa
- $D$  — współczynnik dyfuzji
- CO<sub>2</sub> — masowa koncentracja dwutlenku węgla
- $E$  — energia aktywacji
- $h$  — krok przestrzenny
- $k$  — współczynnik przedeksponencjalny
- O<sub>2</sub> — masowa koncentracja tlenu
- $Q$  — ciepło spalania
- $r$  — promień
- $R$  — uniwersalna stała gazowa
- $t$  — czas
- $T$  — temperatura
- $\gamma$  — bezwymiarowa koncentracja tlenu
- $\varepsilon_0$  — współczynnik emisji pozostałości koksowej
- $\lambda$  — współczynnik przewodzenia ciepła
- $\xi$  — bezwymiarowa zmienna liniowa
- $\eta$  — bezwymiarowa zmienna liniowa ( $\eta = 1/\xi$ )
- $\Theta$  — bezwymiarowa temperatura
- $\tau$  — bezwymiarowy czas
- $\varrho$  — gęstość

## Indeksy

- 0 — odnosi się do warunków początkowych  
 1 — odnosi się do cząstki paliwa stałego  
 2 — odnosi się do gazowego otoczenia.

## 1. Wstęp

Wyznaczanie czynników determinujących czas i temperaturę zapłonu należy do klasycznych problemów teorii spalania. W przypadku płomienia pyłowego bądź olejowego parametry zapłonu i gaśnięcia ziarna węglowego lub kropli oleju decydują o stateczności i niedopale płomienia [1].

W pracy przedstawiono metodę numerycznego modelowania procesu zapłonu kulistej cząstki paliwa stałego, umieszczonej nagle w nieruchomym, gorącym powietrzu. Przyjęto przy tym, że zapłon ma charakter heterogeniczny, czyli zachodzi na powierzchni cząstki.

Model matematyczny zjawiska zapłonu dla cząstki paliwa stałego formułuje się w oparciu o ciepłno-dyfuzyjną teorię zapłonu [1 - 3]. Tworzą go równania transportu ciepła wewnątrz cząstki i w jej otoczeniu oraz równanie dyfuzji tlenu

— cząstka

$$(1) \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} - a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0,$$

— otoczenie

$$(2) \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} - a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial O_2}{\partial t} - D \left( \frac{\partial^2 O_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial O_2}{\partial r} \right) = 0,$$

Powyższe równania uzupełnione są warunkami początkowymi

$$(4) \quad T_1(0, r) = T_{01}, \quad 0 \leq r \leq r_0$$

$$(5a) \quad T_2(0, r) = T_{o2},$$

$$(5b) \quad O_2(0, r) = O_{2,o}, \quad \left. \begin{array}{l} T_2(0, r) = T_{o2}, \\ O_2(0, r) = O_{2,o}, \end{array} \right\} r_0 \leq r \leq \infty$$

i następującymi warunkami brzegowymi

$$(6) \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} = 0, \quad r = 0,$$

$$(7) \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} + c_o \varepsilon_o (T_{o2}^4 - T_1^4) + O_2 \varrho Q k \exp(-E/RT_1), \quad T_1 = T_2 \text{ dla } r = r_o,$$

$$(8) \quad D \frac{\partial O_2}{\partial r} = O_2 k \exp(-E/RT_1), \quad r = r_o,$$

$$(9) \quad \left. \begin{array}{l} T_2 = T_{o2}, \\ O_2 = O_{2,o}, \end{array} \right\} r \rightarrow \infty.$$

W powyższym układzie równań podstawowe problemy wynikają z nieliniowych warunków brzegowych czwartego rodzaju (7) [4] oraz z konieczności wyboru skończonej



grubości warstwy gazu w otaczającej cząstkę nieskończonej przestrzeni, w której zachodzi przekazywanie ciepła i dyfuzja tlenu. W celu uniknięcia trudności związanych z aprioryną oceną grubością warstwy prześciennej, dokonuje się zamiany zmiennej  $\eta = \frac{1}{\xi}$  ( $\xi = \frac{r}{r_o}$ ) dla otaczającego cząstkę obszaru zawierającego tlen.

W wyniku transformacji obszar ten ulega przekształceniu w kulę jednostkową. Powołała to zachować w przedstawionej metodzie obliczeniowej warunki brzegowe w nieskończoności, co byłoby niemożliwe w przypadku metody warstwy granicznej.

### 2. Zamiana zmiennych

Równania (1) — (3) przekształca się do postaci bezwymiarowej, odnosząc zmienną liniową  $r$  do promienia cząstki paliwa  $r_o$  ( $\xi = \frac{r}{r_o}$ ), a następnie dla równań (2), (3) dokonuje się zamiany zmiennej  $\eta = \frac{1}{\xi}$ .

$$(10) \quad \frac{\partial\theta(1)}{\partial\tau} - \left( \frac{\partial^2\theta(1)}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial\theta(1)}{\partial\xi} \right) = 0,$$

$$(11) \quad \frac{\partial\theta(2)}{\partial\tau} - \frac{a_2}{a_1} \eta^4 \frac{\partial^2\theta(2)}{\partial\eta^2} = 0,$$

$$(12) \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\tau} - \frac{D}{a_1} \eta^4 \frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2} = 0,$$

gdzie:

$$\theta(1) = \frac{T_1}{T_{o1}}, \quad \theta(2) = \frac{T_2}{T_{o1}}, \quad \gamma = \frac{O_2}{O_{2,o}}, \quad \tau = \frac{a_1 t}{r_o^2}.$$

Warunki brzegowe w postaci bezwymiarowej przedstawiają się następująco:

$$(13) \quad \frac{\partial\theta(1)}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = 0,$$

$$(14) \quad \frac{\partial\theta(1)}{\partial\xi} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial\theta(2)}{\partial\eta} + \frac{c_o \varepsilon_o r_o T_{o1}^3}{\lambda_1} \left[ \left( \frac{T_{o2}}{T_{o1}} \right)^4 - \theta(1)^4 \right] + \frac{\gamma Q k r_o O_{2,o}}{\lambda_1 T_{o1}} \exp(-E/R T_{o1} \cdot 1/\theta(1)), \quad \theta(1) = \theta(2) \quad \eta = \xi = 1$$

$$(15) \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\eta} = \frac{\gamma k r_o}{D} \exp(-E/R T_{o1} \cdot 1/\theta(1)),$$

$$(16) \quad \theta(2) = \frac{T_{o2}}{T_{o1}}, \quad \gamma = 1 \quad \text{dla} \quad \eta = 0.$$

Warunki początkowe (4), (5) przyjmują natomiast postać

$$(17) \quad \theta(1) = 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

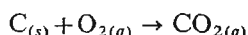
$$(18) \quad \theta(2) = \frac{T_{o2}}{T_{o1}}, \quad \gamma = 1 \quad \text{dla} \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

W ten sposób problem modelowania zjawiska zapłonu kulistej cząstki paliwa stałego w nieograniczonej przestrzeni został sprowadzony do rozwiązania układu trzech równań parabolicznych (10), (11), (12) w kuli jednostkowej odpowiednio z warunkami brzegowymi (13) - (16) i początkowymi (17), (18). Zmienne liniowe  $\zeta$ ,  $\eta$  będzie się dalej traktować jako jedną zmienną liniową.

Powyższe rozważania od strony fizycznej ważne są dla następujących założeń:

— wartości parametrów fizyko-chemicznych  $\lambda_1, \varrho_1, c_{p1}, \lambda_2, \varrho_2, c_{p2}, \varepsilon_0, Q, k, E, D$  przyjmuje się stałe w trakcie trwania zjawiska zapłonu [1], [2]

— reakcja chemiczna rządząca zapłonem jest reakcją heterogeniczną typu Arrheniusowskiego i pierwszego rzędu względem tlenu, przebiega wg schematu [5], [6]



gdzie indeksy  $s$  i  $g$  odnoszą się do fazy stałej i gazowej odpowiednio.

### 3. Aproksymacja różnicowa równań (10)–(12)

Układ równań parabolicznych (10) - (12) rozwiązuje się przy pomocy niejawnej metody różnic skończonych [7], stąd schemat różnicowy przedstawia się następująco:

$$(10a) \quad \frac{\theta(1)_{k+1}^j - \theta(1)_k^j}{\Delta\tau} - \frac{\theta(1)_{k+1}^{j+1} - 2\theta(1)_k^{j+1} + \theta(1)_{k+1}^{j+1}}{h^2} - \frac{2}{\eta_k} \frac{\theta(1)_{k+1}^{j+1} - \theta(1)_k^{j+1}}{2h} = 0,$$

$$(11a) \quad \frac{\theta(2)_{k+1}^{j+1} - \theta(2)_k^j}{\Delta\tau} - \frac{a_2}{a_1} \eta_k^4 \frac{\theta(2)_{k+1}^{j+1} - 2\theta(2)_k^{j+1} + \theta(2)_{k+1}^{j+1}}{h^2} = 0,$$

$$(12a) \quad \frac{\gamma_{k+1}^{j+1} - \gamma_k^j}{\Delta\tau} - \frac{D}{a_{1j}} \eta_k^4 \frac{\gamma_{k+1}^{j+1} - 2\gamma_k^{j+1} + \gamma_{k+1}^{j+1}}{h^2} = 0,$$

$k = 1, 2, \dots, K$ .

Rząd aproksymacji wynosi  $O(\Delta\tau) + O(h^2)$ .

Równania (10a) - (12a) można zapisać w ogólnej postaci następująco:

$$(19) \quad \alpha_k \Phi_{k-1}^{j+1} + \beta_k \Phi_k^{j+1} + \omega_k \Phi_{k+1}^{j+1} = \Phi_k^j,$$

gdzie wektor  $\Phi$  posiada trzy składowe

$$\Phi = \begin{pmatrix} \theta(1) \\ \theta(2) \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Wybór niejawnego schematu obliczeniowego, który wymaga bardziej złożonego algorytmu obliczeń niż schemat jawny, wynika z konieczności stosowania bardzo małego kroku czasowego w tym ostatnim. Zastosowanie metody niejawnej pozwoliło zmniejszyć ilość iteracji o dwa rzędy.

Liniowy układ równań (19) rozwiązuje się w każdym kroku czasowym  $(j+1) \Delta\tau$  używając trójdzielnej metody THOMASA [7]. Rozwiązania na danym poziomie czasowym otrzymuje się z formuły

$$(20) \quad \Phi_k = A_k \Phi_{k+1} + B_k, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

gdzie  $A_k, B_k$  są współczynnikami przegania.

Ponieważ wyznaczanie rozwiązań zaczyna się od przedostatniego wyrazu  $\Phi_{K-1}$ , więc w pierwszym kroku obliczeniowym rozwiązuje się równania warunków brzegowych (14), (15) dla  $\Theta(1)_K$ ,  $\Theta(2)_K$  i  $\gamma_K$  określonych w punkcie  $\xi = \eta = 1$  na brzegu kuli.

#### 4. Aproksymacja różnicowa warunków brzegowych

Warunki brzegowe (14), (15) w postaci różnicowej przedstawiają się następująco:

$$(21) \quad \frac{r_o c_o \varepsilon_o T_{o1}^3 h}{\lambda_1} \theta_K^4 + \theta_K \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) - \frac{\gamma_K Q Q k r_o O_{2,o} h}{\lambda_1 T_{o1}} \cdot \\ \exp(-E/R T_{o1} \cdot 1/\theta_K) - \theta(1)_{K-1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \theta(2)_{K-1} - \frac{c_o \varepsilon_o r_o T_{o1}^3 h}{\lambda_1} \left( \frac{T_{o2}}{T_{o1}} \right)^4 = 0,$$

$$(22) \quad \gamma_K - \gamma_{K-1} = -\gamma_K \frac{k r_o h}{D} \exp(-E/R T_{o1} \cdot 1/\theta_K)$$

gdzie  $\theta_K = \theta(1)_K = \theta(2)_K$ .

W równaniach powyższych opuszczono dla jasności indeksy dotyczące czasu ( $j$ ).

Określenie wielkości  $\theta_K$ ,  $\gamma_K$  bezpośrednio z równań (21), (22) jest niemożliwe w metodzie niejawnej, ponieważ nieznane są wartości  $\theta(1)_{K-1}$ ,  $\theta(2)_{K-1}$  i  $\gamma_{K-1}$ . Zmienne z indeksem  $K-1$  eliminuje się, wychodząc z formuły „przegania” (20)

$$\Phi_{K-1} = A_{K-1} \Phi_K + B_{K-1}.$$

Korzystając dalej z liniowości równania (22) względem koncentracji  $\gamma_K$ , otrzymuje się równanie algebraiczne, pozwalające wyznaczyć temperaturę na brzegu cząstki  $\theta_K$

$$(23) \quad \frac{c_o \varepsilon_o r_o T_{o1}^3 h}{\lambda_1} \theta_K^4 + \theta_K \left[ 1 - A_{K-1}(1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (1 - A_{K-1}(2)) \right] - \\ - \frac{Q k r_o O_{2,o} h_o B_{K-1}(3)}{\lambda_1 T_{o1} (1 - A_{K-1}(3)) \exp(E/R T_{o1} \cdot 1/\theta_K) + \frac{k r_o h}{D}} - B_{K-1}(1) - \\ - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} B_{K-1}(2) - \frac{c_o \varepsilon_o r_o T_{o1}^3 h}{\lambda_1} \left( \frac{T_{o2}}{T_{o1}} \right)^4 = 0,$$

gdzie indeksy 1, 2, 3 współczynników przegania  $A$ ,  $B$  odnoszą się odpowiednio do  $\theta(1)$ ,  $\theta(2)$  i  $\gamma$ .

Powyższe równanie, które można przedstawić w ogólnej postaci

$$\Phi_K = F(\Phi_K),$$

jest silnie nieliniowe. Rozwiązywano je metodą bisekcji [8], która co prawda nie jest tak szybka, jak metoda Newtona, ale jest absolutnie stabilna.

#### 5. Rezultaty obliczeń

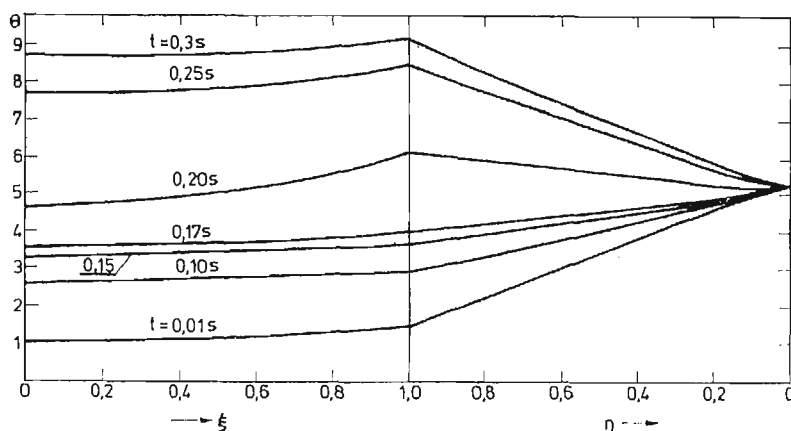
Przeprowadzono obliczenia dla modelu zapłonu, przedstawionego w punktach 1 i 2, metodą opisaną w punktach 3 i 4, dla cząstki pozostałości koksowej antracytu. Obliczenia wykonano dla promienia ziarna  $r_o = 2 \cdot 10^{-4}$  m, temperatury początkowej ziarna

293 °K i temperatury gorącego otaczającego powietrza 1523 °K. Wartość masowej koncentracji początkowej tlenu równa była 0,23. Stałe kinetyczne  $E = 140$  kJ/mol,  $k = 4,5 \cdot 10^5$  m/s i ciepło spalania  $Q = 7 \cdot 10^3$  kJ/kg pochodzą z pracy [9]. Wartość pozostałych parametrów fizycznych, przyjętych do obliczeń, wynosiła

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kJ}}{\text{msdeg}}, & c_{p1} &= 1,2779 \frac{\text{kJ}}{\text{kgdeg}}, & \rho_1 &= 1389 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \lambda_2 &= 8,45 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kJ}}{\text{msdeg}}, & c_{p2} &= 1,16 \frac{\text{kJ}}{\text{kgdeg}}, & \rho_2 &= 0,24 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \varepsilon_0 &= 0,82, & h &= 0,1, & D &= 3,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Wartość współczynnika emisji  $\varepsilon_0$  dla pozostałości koksowej antracytu wzięto z pracy [10].

W wyniku obliczeń otrzymano przestrzenno-czasowe rozkłady temperatur w ziarnie antracytu i otaczającym gazowym ośrodku (rys. 1). Jak wynika z rys. 1, czas relaksacji



Rys. 1. Przestrzenno-czasowy rozkład temperatury w ziarnie antracytu i w jego gazowym otoczeniu.

w fazie gazowej jest znacznie krótszy niż w fazie stałej. Świadczy o tym rozkład temperatury w otoczeniu ziarna, tj. w obszarze kuli jednostkowej  $0 \leq \eta \leq 1$ , w której rozwiązanie stacjonarne równania (11) ma charakter liniowy. Stacjonarne rozwiązanie równania (10) dla cząstki paliwa stałego ma wartość stałą, ale rozkłady temperatury wewnątrz ziarna pozostałości koksowej antracytu nie odpowiadają stanowi ustalonemu.

Rozkłady koncentracji tlenu przedstawiają rysunki 2 i 3. Koncentrację dwutlenku węgla wyznaczano w sposób przybliżony jako różnicę  $O_{2,o} - O_2$  wartości koncentracji początkowej tlenu i bieżącej. Uzasadnieniem może być mała różnica między współczynnikami dyfuzji  $O_2$  i  $CO_2$  w powietrzu, wynosząca w zależności od temperatury kilka procent [11].

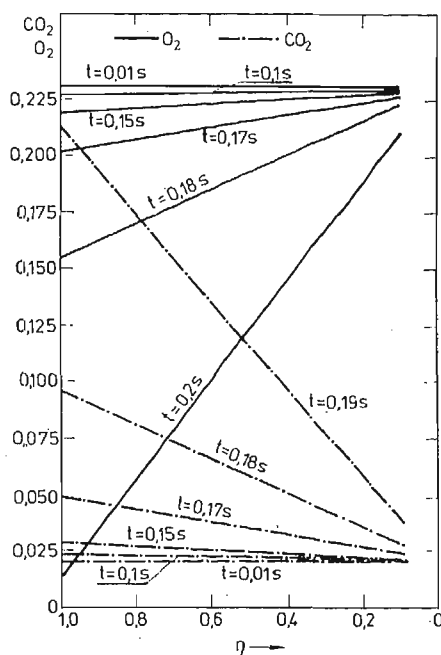
W krótkim początkowym okresie nagrzewu ( $10^{-7}$  s) zaobserwowano szybkie ustalenie się temperatury powierzchni ziarna, dalej jej malenie i po osiągnięciu pewnego minimum, ponowny wzrost (rys. 3a). Tłumaczyć to należy nieciągłością warunków początkowych (4), (5) oraz nieciągłością gradientów temperatury na granicy fazy stałej i gazowej.

Pomijając dla tego okresu czasu w równaniu (21) człon promieniowania i źródła ciepła, otrzymuje się po przyjęciu  $\theta(1)_{K-1} = 1$ ,  $\theta(2)_{K-1} = \theta_{o2}$

$$\theta_K = \frac{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \theta_{o2}}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Dla przyjętych wyżej danych obliczeniowych wynika z powyższego wzoru  $\theta_K = 1,518$ .

Różnica między tym wynikiem, a rezultatem, uzyskanym z obliczeń numerycznych  $\theta_K = 1,6$  spowodowana jest przyjęciem skończonego kroku  $h = 0,1$  w tych ostatnich.



Rys. 2. Rozkłady koncentracji tlenu i dwutlenku węgla w gazowej przestrzeni otaczającej ziarno antracytu —  $\text{O}_2$ , .....  $\text{CO}_2$ .

Dalszy gwałtowny wzrost temperatury powierzchni ziarna następuje w momencie zapłonu (rys. 3). Za kryterium zapłonu przyjęto w pracy znikanie drugiej pochodnej temperatury powierzchni ziarna względem czasu, analogicznie jak w pracy [14].

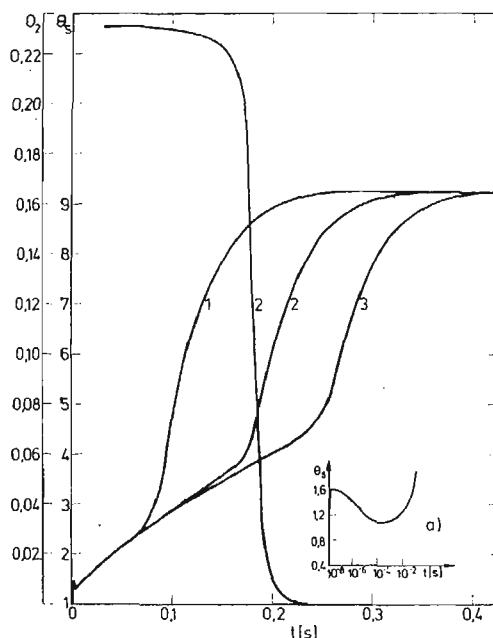
Do momentu zapłonu nie zauważa się istotnych zmian w rozkładzie koncentracji tlenu (rys. 2, 3) czyli zapłon następuje w reżimie kinetycznym. Sugeruje to, że do określenia charakterystyk zapłonu: czas i temperatura zapłonu, wystarczy użyć cieplnego przybliżenia procesu.

Przybliżenie powyższe znalazło potwierdzenie w obliczeniach numerycznych w pracy [15], gdzie uzyskano rozkład temperatury wewnątrz ziarna rozwiązując równanie bilansu ciepła (1) przy stałej koncentracji tlenu na jego powierzchni.

Uzyskane z obliczeń wartości temperatury powierzchni ziarna pozostałości koksowej antracytu w funkcji czasu pozwalają, przy przyjęciu w.w. kryterium zapłonu, określić

wartość temperatury zapłonu i czasu zapłonu. Wartość temperatury powierzchniowej, uzyskanej w chwili zapłonu dla temperatury otoczenia 1523 °K, równa około 1000 °C ( $\theta = 4,35$ , rys. 3, krzywa 2), pokrywa się z wynikami, uzyskanymi w pracach [12], [13].

Aby ocenić ważność wpływu stałych kinetycznych na czas i temperaturę zapłonu przeprowadzono obliczenia dla różnych wartości energii aktywacji. Jak wynika z rys. 3 (krzywe 1, 2, 3) ze wzrostem energii aktywacji znacznie wydłuża się czas zapłonu i rośnie



Rys. 3. Rozkład temperatury powierzchniowej  $\theta_s = T_1(r_o)/T_{o1} = T_2(r_o)/T_{o1}$  i koncentracji tlenu  $O_2(r_o)$  przy powierzchni ziarna antracytu w zależności od czasu dla  $K_o = 0.45 \cdot 10^6$  m/s,  $Q = 7 \cdot 10^3$  kJ/kg oraz dla krzywych: 1 —  $E = 100$  kJ/mol, 2 —  $E = 140$  kJ/mol, 3 —  $E = 160$  kJ/mol. (a) początkowe stadium nagrzewu.

temperatura zapłonu. Problem ten jest jednakże znacznie szerszy. Jest oczywiste, że znajomość stałych kinetycznych ( $E$ ,  $k$ ) ma zasadnicze znaczenie dla ilościowej oceny temperatury i czasu zapłonu, a także dla określenia czasu i prędkości spalania.

Czy zatem możliwa jest weryfikacja stałych  $E$  i  $k$  przy pomocy przedstawionych modeli numerycznych. Należy przede wszystkim zaznaczyć, że stałe kinetyczne mogą być różne dla różnych modeli matematycznych. I tak, nie należy oczekiwać, że rezultaty uzyskane przy pomocy modelu opisanego układem równań zwyczajnych i modelu opisanego układem równań cząstkowych będą identyczne. Oba modele wymagają różnych stałych kinetycznych. Wyznaczanie stałych kinetycznych dla danego modelu matematycznego jest trudnym problemem matematycznym, zwanym odwrotnym zadaniem aerotermodemii. Obecnie istnieją próby określenia stałych prędkości reakcji homogenicznych przy założeniu znajomości pełnego schematu kinetycznego [16].

## 6. Podsumowanie

Przedstawiony przykład obliczeniowy dotyczył zapłonu pozostałości koksowej antracytu, gdy nie występuje wydobywanie się części lotnych, które mogłyby zmienić charakter zapłonu. Czy zatem przedstawiony model numeryczny może być wykorzystany dla analizy zapłonu innych paliw stałych.

W przypadku węgla zasadniczym problemem jest wpływ części lotnych na mechanizm zapłonu. ESSENHIGH [17] podaje, że powyżej prędkości nagrzewania ziarna węglowego  $10^4$  deg/s procesy pirolizy dla zapłonu praktycznie nie mają znaczenia, zapłon wyprzedza pirolizę.

THOMAS i in. [6] w swoich badaniach nad zapłonem cząstek wrzucanych do przepływającego strumienia powietrza wykazali, że nawet dla cząstek węgla brunatnego o średnicy  $1000 \mu\text{m}$  zachodzi zapłon heterogeniczny. Tego ostatniego wyniku nie należy uogólniać na wszystkie typy węgla brunatnych. Prawdopodobnie zapłon heterogeniczny może zachodzić jedynie dla pewnych odmian petrograficznych węgla brunatnych.

Drugim problemem jest wpływ homogenicznej reakcji dopalania tlenku węgla w otoczeniu ziarna na warunki zapłonu. W pracy przyjęto, że reakcją decydującą o zapłonie węgla jest pierwotna reakcja przebiegająca do  $\text{CO}_2$ , pominięto więc drugą reakcję do CO i homogeniczną reakcję dopalania tlenku węgla. Obszerne uzasadnienie tego założenia można znaleźć u ŁAWROVA [18]. W poprzedniej pracy autorów [19] analizowano numerycznie zapłon cząstki węgla uwzględniając cztery reakcje reagowania węgla z tlenem. Wyniki, jakie uzyskano w porównaniu z wynikami w tej pracy, różnią się tylko o około 1%, natomiast czas obliczeń dla modelu w pracy [19] był dziesięciokrotnie dłuższy. Natomiast problem zawartości części mineralnych w węglu dla zjawiska zapłonu jest nieistotny, a to z powodu małego stopnia wypalenia (konsumpcji paliwa) do momentu zapłonu [20].

Czy przedstawiony model może opisywać zapłon cząstek metalu. To zależy jakich, bowiem pod względem sposobu niskotemperaturowego utleniania metale dzieli się na posiadające porowatą, przepuszczalną dla tlenu, warstwę tlenku na powierzchni metalu oraz na takie, które pokrywają się krystaliczną, trudno przepuszczalną warstwą tlenku [21]. Typowym przedstawicielem pierwszych jest magnez, drugich natomiast glin.

Cząstka magnezu ulega zapłonowi w pobliżu temperatury topnienia magnezu, można więc pominąć parowanie metalu w trakcie zapłonu i uznać go za heterogeniczny [22, 23, 24]. Mimo, że cząstka przyjmuje w trakcie topnienia dość nieregularne kształty [23], autorzy sądzą, że przedstawiony model można użyć do analizy jej zapłonu.

Cząstka glinu zapala się dopiero w temperaturze topnienia tlenku glinu [25]. Dzieje się tak, gdyż w trakcie zapłonu narastająca warstwa tlenku utrudnia dostęp tlenu do metalu, więc zapłon nastąpi jedynie wówczas, gdy temperatura cząstki zdąży wzrosnąć w wyniku samopodgrzewu do temperatury topnienia tlenku glinu [25, 26]. W takim przypadku proponowany model zapłonu należy uzupełnić opisem wzrostu warstwy tlenku na powierzchni metalu. Z matematycznego punktu widzenia problem ten nie przedstawia większych trudności i stanowi uogólnienie modelu zerowymiarowego [26].

## Literatura cytowana w tekście

1. D. A. FRANK-KAMIENIECKIJ; *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*. New York 1969.
2. A. G. MERZHANOV, and A. E. AVERSON; *The Present State of the Thermal Ignition*. Combustion and Flame 16, 1, 1971.
3. KIM CHOONG SE, N. PAUL CHUNG; *An Asymptotic Thermo-Diffusive Ignition Theory of Porous Solid Fuels*. Journal of Heat Transfer 5, 1976
4. A. V. LYKOV; *Teoria teploprovodnosti*, Izd. „Nauka” Moskwa 1967.
5. R. K. AHLUWALIA, P. M. CHUNG; *Surface Ignition of Coal and other Fuel Particles in Radiative and Diffusive Environment*, Combust. Sci. Technology 17, 169 - 181, 1978
6. G. R. THOMAS, J. J. HARRIS, D. G. EVANS; *The Ignition of Pulverized Brown Coal*, Combustion and Flame, 12, 391 - 393, 1968.
7. K. N. MORTON, R. D. RICHTMAYER; *Difference methods for initial-value problems*. Interscience, New York 1967.
8. B. P. DEMIDOVICZ, I. A. MARON; *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 1965.
9. C. N. SATLERFIELD; *Mass Transfer in Heterogeneous Catalysis M.I.T.*, Press Cambridge, 1970.
10. M. ZEMBRZUSKI, H. KARCZ; *Kinetyczne własności odmian petrograficznych antracytu*, Archiwum Procesów Spalania, vol. 4, nr 3, 235 - 245, 1973.
11. SHERWOOD, PIGFORD; *Absorption and Extraction*, Mc Graw Hill Book, New York, 1952.
12. A. B. AYLING, J. W. SMITH; *Measured Temperatures of Burning Pulverized — Fuel Particles, and the Nature of the Primary Reaction Product*. Combust. Flame 18, 173 - 184, 1972.
13. S. BANDYOPADHYAY, D. B. BHADURI, *Prediction of Ignition Temperature of a Single Coal Particle*, Combust. Flame 18, 411 - 415, 1972.
14. F. A. WILLIAMS; *Theory of propellant ignition by heterogeneous reaction*. AIAA Journal, 4, 1966.
15. H. KRUCZEK; *Teoretyczne i doświadczalne badania zaplonu ziarna węglowego*. Praca doktorska ITCiMP, Politechnika Wroclawska 1977.
16. *Исследование горения газообразных топлив*, сб., Новосибирск, 1977, стр. 52—79.
17. R. H. ESSENHIGH; *Combustion and Flame Propagation in Coal Systems: A Review XVI-th Symposium on Combustion*, Pittsburgh, 1976.
18. Н. В. ЛАВРОВ; *Физико-химические основы процесса горения топлива*, „Наука”, Москва, 1971.
19. W. KORDYLEWSKI, H. KRUCZEK; *Modelowanie zaplonu ziarna węglowego*, Inżynieria Chemiczna, nr 3, 1978.
20. M. M. BAUM and P. J. STREET; *Predicting the Combustion Behavior of Coal Particles*, Combust. Sci. Technol. 3, 231 - 243, 1971.
21. P. KOESTAD; *High-temperature Oxidation of Metals*, John Wiley and Sons, INC. New York 1966 (w języku rosyjskim).
22. H. M. CASSEL and I. LIEBMAN; *The cooperative mechanism in the ignition of dust dispersions*. Combust. Flame 1958, Nr 8.
23. М. Е. ДЕРЕВЯГА, Л. Н. СЛЕСИК, А. Е. ФЕБОРИН; *Режимы горения магнезита*, „Физика горения и взрыва”, № 6, 1978.
24. Г. К. ЕЖОВСКИЙ, Е. С. ОЗЕРОВ; *Воспламенение порошкообразного магнезита*, „Физика горения и взрыва”, № 6, 1977.
25. М. А. ГУРЕВИЧ, Е. С. ОЗЕРОВ, А. А. ЮРИНОВ; *О влиянии пленки окисла на характеристики воспламенения алюминия*, „Физика горения и взрыва”, № 4, 1978.
26. М. А. ГУРЕВИЧ, Г. В. ОЗЕРОВА, А. М. СТЕПАНОВ; *Гетерогенное воспламенение алюминиевой частицы в кислороде и водном паре*, „Физика горения и взрыва”, № 3, 1970.



## Резюме

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОСПЛАМЕНЕНИЯ ЧАСТИЦЫ  
ТВЕРДОГО ТОПЛИВА

В статье показан метод математического моделирования процесса воспламенения одиночных сферических частиц твердого топлива на электронно-вычислительных машинах. Исходя из тепло-диффузионной теории воспламенения, эта проблема была решена при помощи конечно-разностного метода с применением неявноразностной схемы. Пространство, окружающее частицу, было преобразовано в сферу путем преобразования линейной переменной  $\varrho = \frac{1}{\xi}$ , благодаря чему удалось избежать затруднений связанных с оценкой пограничного слоя, а также было обеспечено сохранение краевых условий в бесконечности. Рассматриваемые в данном вопросе нелинейные краевые условия четвертого рода, ведут к нелинейным алгебраическим уравнениям, которые решались методом биссекции. Метод иллюстрируется примерами вычислений.

## Summary

## SINGLE PARTICLE OF SOLID FUEL IGNITION MODELLING

A numerical method of the modelling ignition process, for a single spherical particle of a solid fuel is presented. The problems has been solved by an implicit finite-difference technique based on the thermal-diffusion ignition theory. The surrounding space of a particle has been transformed into the unit sphere by conversion of the linear variable  $\varrho = \frac{1}{\xi}$ . In this way the difficulty connected with the estimate of the thickness of boundary layer has been avoided and the boundary conditions at the infinity assured. The ourth kind of nonlinear boundary conditions which appear in the problem lead to nonlinear algebraic equation which have been solved by the method of false position. The numerical examples illustrate the method of modelling.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1979 roku.*

---

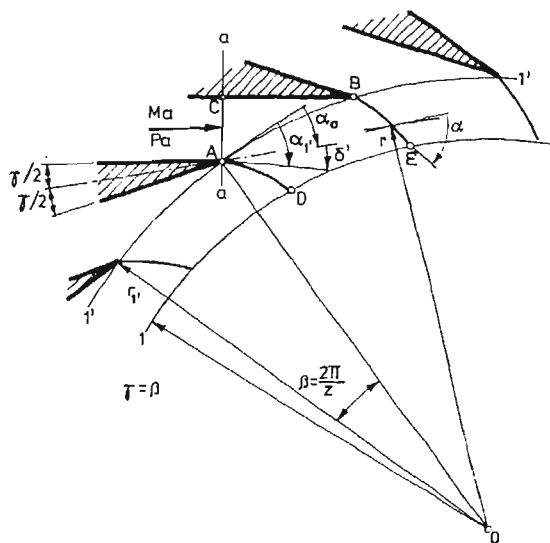


NADDŹWIĘKOWY PRZEPŁYW W OBSZARZE WYLOTOWYM DOŚRODKOWEGO WIENĆCA  
KIERUJĄCEGO

JACEK LEBRECHT (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Znane z literatury modele naddźwiękowego przepływu za układami łopatkowymi dotyczą jedynie prostych, nieskończenie długich palisad łopatkowych [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8]. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie modelu przepływu za dośrodkowym wieńcem łopatkowym oraz wykazanie, że skośne fale uderzeniowe pojawiające się na krawędziach splywu powinny powstawać w każdych warunkach pracy wieńca, przy tym fale te oraz



Rys. 1. Rozważany model wieńca dośrodkowego.

linie rozdzielające strugi wypływające z sąsiednich kanałów łopatkowych będą zawsze krzywoliniowe — nawet przy jednorodnym polu parametrów w przekroju  $a-a$  (rys. 1). Celem pracy jest także określenie charakteru zmiany parametrów na linii rozdziálu w niewielkiej odległości od krawędzi łopatek:  $0,95 \leq r \leq 1,0$ .

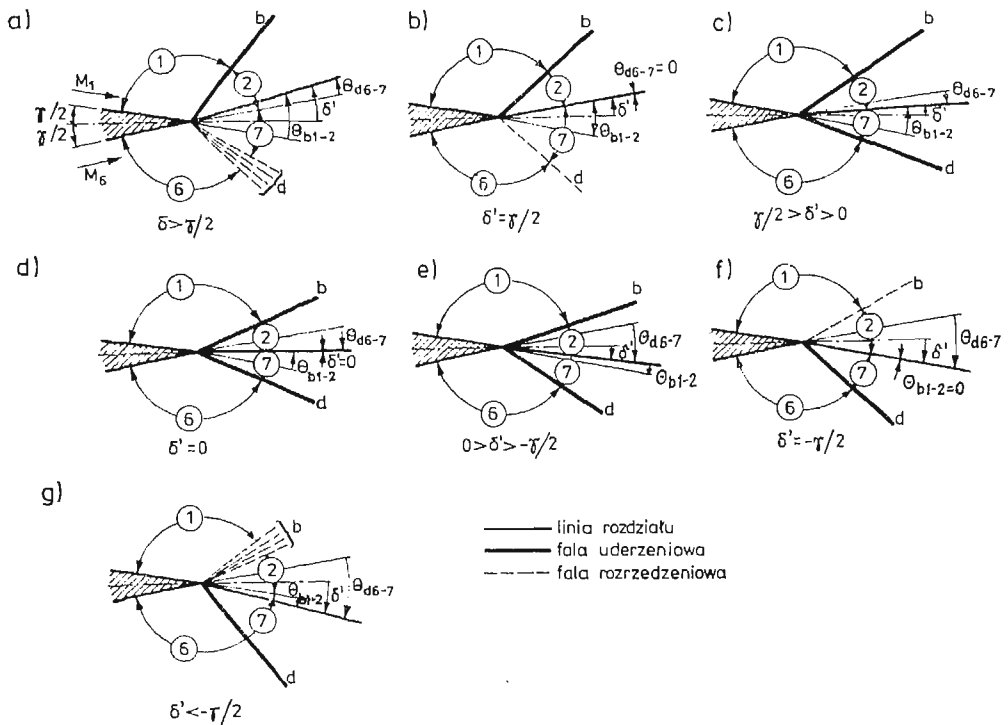
## 2. Założenia

Rozważany jest naddźwiękowy wypływ gazu z dośrodkowego wieńca ograniczonego dwiema równoległymi ścianami. Łopatki ukształtowane są tak, że w części wylotowej ściany kanałów łopatkowych są równoległe (rys. 1). Parametry przepływowe w przekroju  $a-a$  (w obszarze przed pierwszą falą powstającą na krawędzi splywu) są jednorodne.

Wprowadzono ograniczenie, że w przepływie nie pojawiają się lokalne obszary poddźwiękowe oraz skośne fale uderzeniowe nie są falami odsuniętymi.

## 3. Model przepływu

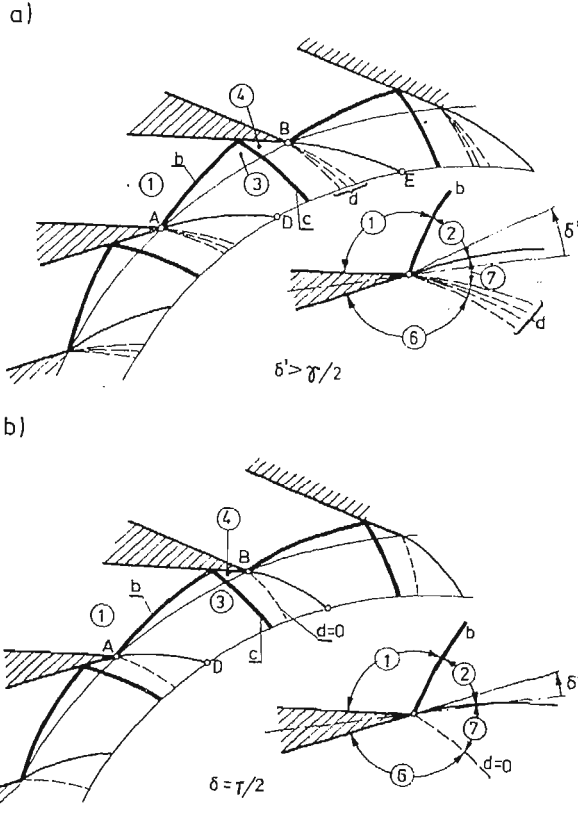
Konfiguracje fal powstających na krawędziach splywu są zależne od kąta ustawienia łopatek  $\alpha_a$ , liczby Macha w przekroju  $a-a$  oraz ciśnienia za wieńcem. Wszystkie możliwe układy fal zestawiono na rys. 2<sup>1)</sup>. Należy zwrócić uwagę na ścisły związek między konfiguracją fal i kątem  $\delta' = \alpha_a - \alpha_1$ , kątem odchylenia linii rozdziału na krawędzi splywu.



Rys. 2. Możliwe konfiguracje fal na krawędzi splywu łopatki. Oznaczenia obszarów: 1 — przed falą „b”, 2 — za falą „b” i nad linią rozdziału, 6 — przed falą „d” i pod łopatką, 7 — za falą „d” i pod linią rozdziału.

<sup>1)</sup> Na rys. 2 i dalszych symbolami 1, 2 ... oznaczono nieskończenie małe obszary w bezpośrednim sąsiedztwie ścianek i linii rozdziału, w których fale uderzeniowe mogą być potraktowane jako prostoliniowe. Na rysunkach symbole cyfrowe oznaczone są w kółkach.

Na przykład dla kąta  $\delta' > \frac{\gamma}{2}$  (rys. 2a) fala „b” może być jedynie falą uderzeniową zaś fala „d” — jedynie falą rozrzedzeniową. Odpowiedni model przepływu dla tego przypadku podany jest na rys. 3a. Przepływ za wieńcem będzie powtarzalny wzdłuż całego obwodu, jeżeli ciśnienie wzdłuż linii rozdziału (A—D) będzie się zmieniać identycznie jak wzdłuż (B—E). W szczególności w bezpośrednim sąsiedztwie krawędzi spływu —



Rys. 3. Model przepływu za wieńcem dośrodkowym a — dla  $\delta' > \frac{\gamma}{2}$ , b — dla  $\delta' = \frac{\gamma}{2}$

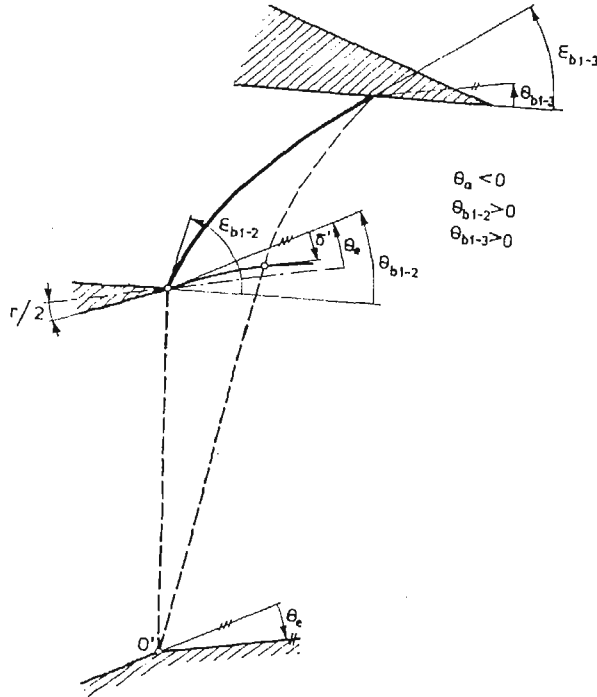
w obszarach 2 i 7 — ciśnienie musi mieć równą wartość. Ponadto być powinna zachowana równość kąta  $\delta'$  w punktach A i B; przy czym może być  $M_2 \neq M_7$ .

Powyższe warunki zapisane przy pomocy znanych związków dla skośnych fal uderzeniowych i prostych fal rozrzedzeniowych wiążących liczby Macha oraz ciśnienia przed i za falą przy pominięciu nieznacznej zmiany parametrów między obszarami 4 i 6 ( $M_4 = M_6$ ), daje się sprowadzić do układu ośmiu równań (1) ÷ (8) z niewiadomymi:  $M_2, M_3, M_6, M_7, \theta_e, \epsilon_{b1-3}, \epsilon_{c3-4}, \epsilon_{b1-2}$  (patrz oznaczenia na rys. 4).

$$(1) \quad \delta' - \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \left[ \arctg \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} (M_7^2 - 1) - \arctg \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} (M_6^2 - 1) \right] + \\ + \arctg \sqrt{M_6^2 - 1} - \arctg \sqrt{M_7^2 - 1},$$

$$(2) \quad \operatorname{ctg} \left( \delta' + \frac{\gamma}{2} \right) = \operatorname{tg} \varepsilon_{b1-2} \left( \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_a^2}{M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-2} - 1} - 1 \right),$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varepsilon_{b1-3} \left( \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_a^2}{M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-3} - 1} - 1 \right) = \operatorname{tg} \varepsilon_{c3-4} \left( \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_3^2}{M_3^2 \sin^2 \varepsilon_{c3-4} - 1} - 1 \right),$$

Rys. 4. Kąt  $\theta_e$  zakrzywienia linii rozdziału

$$(4) \quad \left[ 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_3^2 \sin^2 \varepsilon_{c3-4} - 1 \right] \left[ 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-3} - 1) \right] =$$

$$= \left[ 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-2} - 1) \right] \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_7^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_6^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}},$$

$$(5) \quad -\theta_e = \delta' + \frac{\gamma}{2} - \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \varepsilon_{b1-2} \left( \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_a^2}{M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-2} - 1} - 1 \right) \right],$$

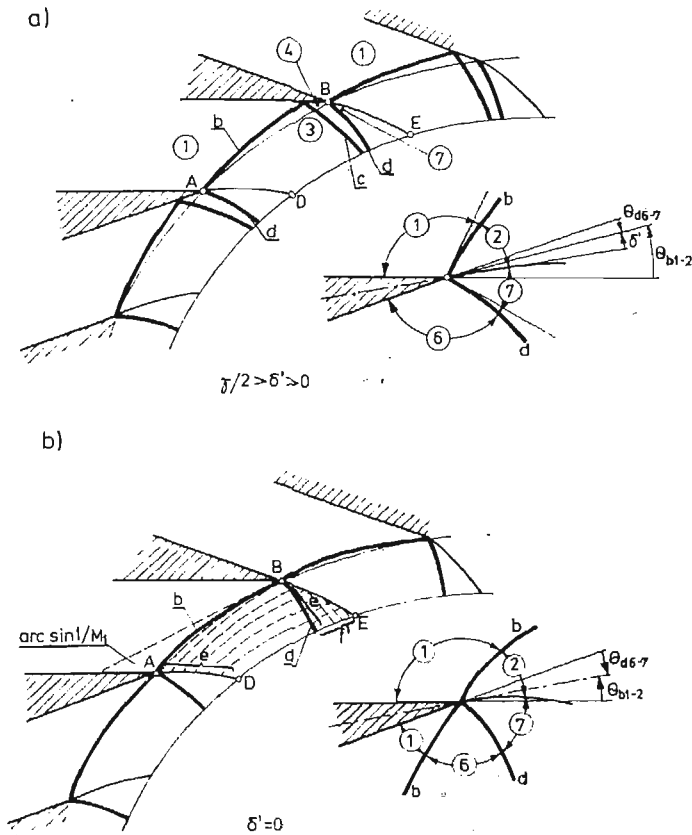
$$(6) \quad M_2^2 = \frac{\left( M_a^2 + \frac{2}{\kappa-1} \right) M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-2}}{\left[ 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-2} - 1) \right] \left[ 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-2} - 1) \right]} - \frac{2}{\kappa-1},$$

$$(7) \quad M_3^2 = \frac{\left(M_a^2 + \frac{2}{\kappa-1}\right) M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-3}}{\left[1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-3} - 1)\right] \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_a^2 \sin^2 \varepsilon_{b1-3} - 1)\right]} - \frac{2}{\kappa-1},$$

$$(8) \quad M_4^2 = \frac{\left(M_3^2 + \frac{2}{\kappa-1}\right) M_3^2 \sin^2 \varepsilon_{c3-4}}{\left[1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_3^2 \sin^2 \varepsilon_{c3-4} - 1)\right] \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_3^2 \sin^2 \varepsilon_{c3-4})\right]} - \frac{2}{\kappa-1}.$$

Układ ten przy warunku conajmniej dźwiękowego przepływu we wszystkich rozpatrywanych obszarach ( $M_i \geq 1$ ;  $i = 1, 2 \dots 7$ ) ma zawsze tylko jedno sensowne fizycznie rozwiązanie dla zestawu danych wejściowych  $M_a, \kappa, \delta', \gamma$  skąd wynika, że w omawianym przypadku ( $\delta' > \frac{\gamma}{2}$ ) model przepływu podany na rys. 3a może zapewnić powtarzalność przepływu wzdłuż całego obwodu wieńca.

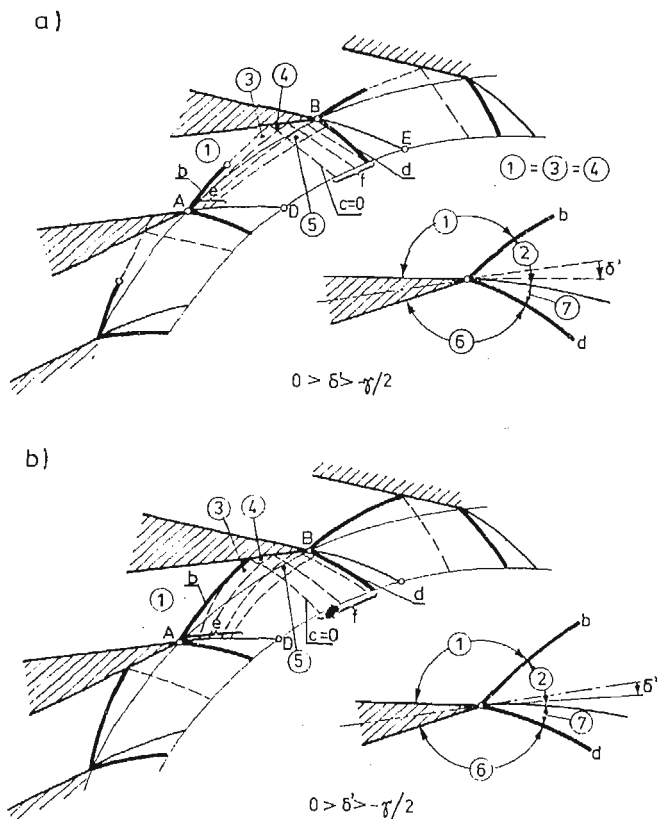
Do analogicznych wniosków o powtarzalności przepływu dochodzi się [9] rozpa-



Rys. 5. Model przepływu za wieńcem dośrodkowym a — dla  $\frac{\gamma}{2} > \delta' > 0$ , b — dla  $\delta' = 0$

trując pozostałe warianty podane na rys. 2b ÷ g określone różną wartością kąta  $\delta'$ . Odpowiadające im modele przepływu przedstawiono na rys. 5 ÷ 7.

3.1. Wyniki obliczeń. Kąt  $\theta_e$  wyraża w sposób uwikłany krzywiznę fal uderzeniowych — dla  $\theta_e = 0$  fale te są prostoliniowe. Obliczenia wskazują (rys. 8 i 9), że kąt  $\theta_e \neq 0$  w całym



Rys. 6. Model przepływu za wieńcem dośrodkowym dla  $0 > \delta' > -\frac{\gamma}{2}$ .

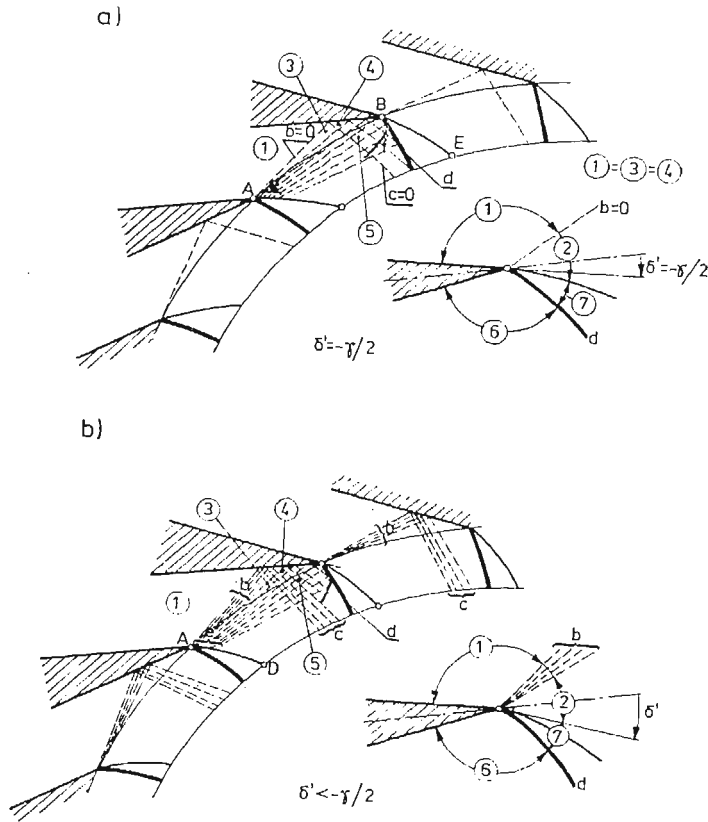
zakresie kątów  $\delta'$ , a jego wartość zależy od liczby łopatek i liczby Macha w przekroju  $a-a$ . Oznacza to, że fale uderzeniowe powstające na krawędzi splywu są zawsze krzywoliniowe.

Wraz ze wzrostem liczby łopatek kąt  $\theta_e$  maleje i dla  $z \rightarrow \infty$  (a więc jedynie dla nieskończenie długiej palisady cienkich łopatek) kąt  $\theta_e \rightarrow 0$  i skośne fale są prostoliniowe.

Wykresy na rys. 10 przedstawiają zależność liczby Macha  $M_i$  ( $i = 1, 2 \dots 7$ ) w poszczególnych obszarach w funkcji kąta  $\delta'$ . Interesujące jest, że dla  $\delta' \geq -\frac{\gamma}{2}$  liczba Macha po obydwu stronach linii rozdziału ma taką samą wartość:  $M_2 = M_7$ .

Zakres wartości  $M_a$  i  $\delta'$ , dla których podane rozwiązania mają sens fizyczny podano na rys. 11. Przepływ na wylocie wieńca będzie naddźwiękowy, bez lokalnych obszarów poddźwiękowych, o ile tylko graniczne wartości  $(M_a)_{gr}$  i  $(\delta')_{gr}$  będą leżały powyżej krzywej podanej na rys. 11.



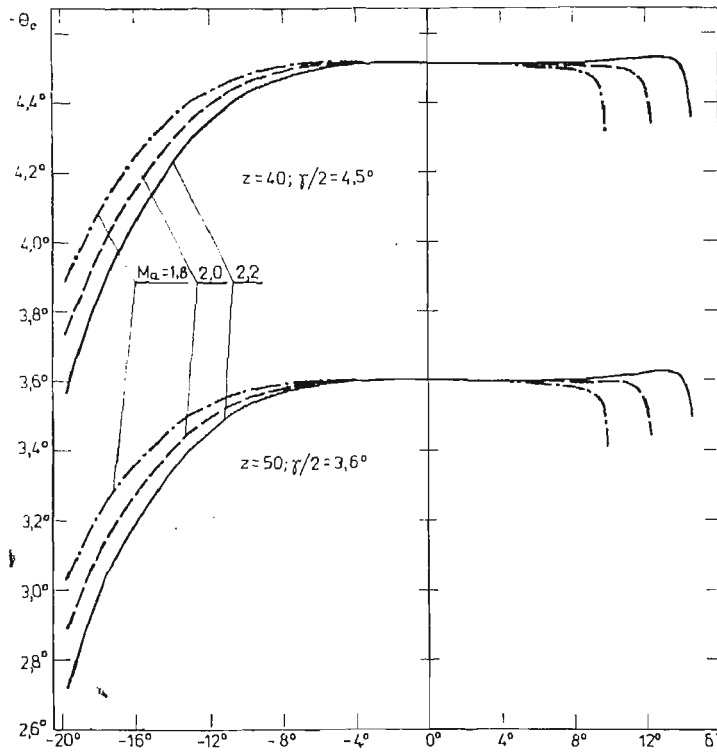


Rys. 7. Model przepływu za wieńcem dośrodkowym a — dla  $\delta' = -\frac{\gamma}{2}$ , b — dla  $\delta' < -\frac{\gamma}{2}$ .

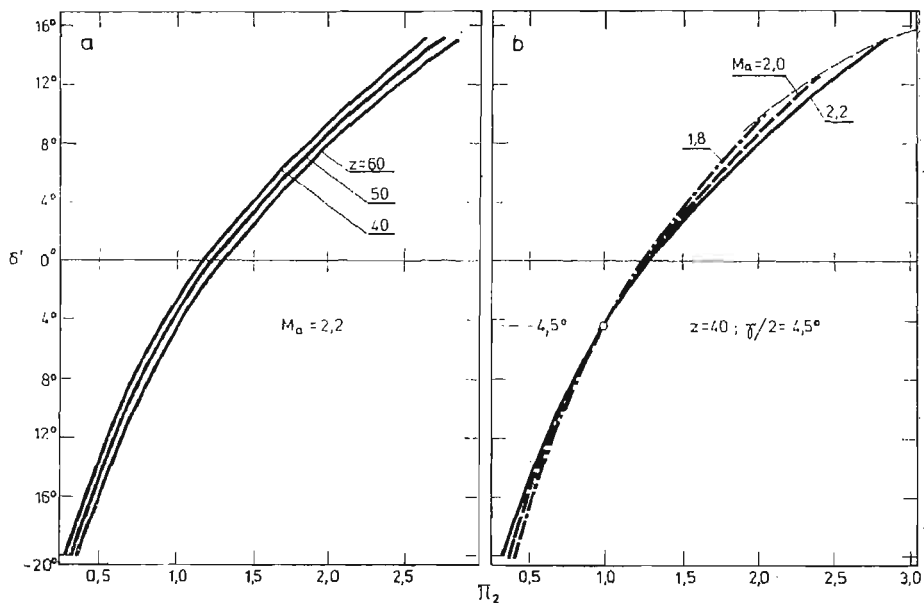
4. Obliczenie pewnych charakterystycznych parametrów przepływu na linii rozdziału

Celem niniejszej części jest określenie zależności bezwymiarowego ciśnienia  $\pi_m$ , liczby Macha  $M_m$  i kąta  $\alpha_m$  w punktach leżących na linii rozdziału od bezwymiarowego promienia  $\bar{r} = r/r_1$ , oraz związku między konfiguracją fal w obszarze wylotowym i kątem ustawienia łopatek  $\alpha_a$  (rys. 12).

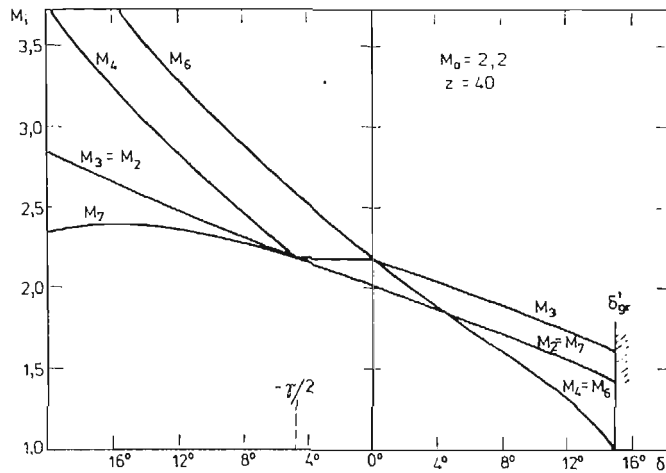
Wykorzystując zależności geometryczne (9) ÷ (14) między promieniem  $\bar{r}_m$  i współrzędnymi  $(x_m, y_m)$  punktów leżących na linii rozdziału oraz współrzędnymi  $(x_B, y_B)$  krawędzi spływu B sąsiedniej łopatki, a także mając na uwadze fakt, że wzdłuż linii rozdziału (A—D) zachodzi izentropowy związek (15) między ciśnieniem i liczbą Macha okazuje się, że poszukiwane zależności daje się określić, jeśli znane są współrzędne  $x_B, y_B$  krawędzi spływu sąsiedniej łopatki. Konieczna jest przy tym znajomość zależności  $M_m = f(x_m, y_m)$ , która będzie określona, jeżeli dopuści się, że linia rozdziału jest np. linią prądu prostej fali rozrzedzeniowej zogniskowanej w pewnym punkcie  $O'$  — patrz rys. 13 oraz wzory (16) ÷ (21).



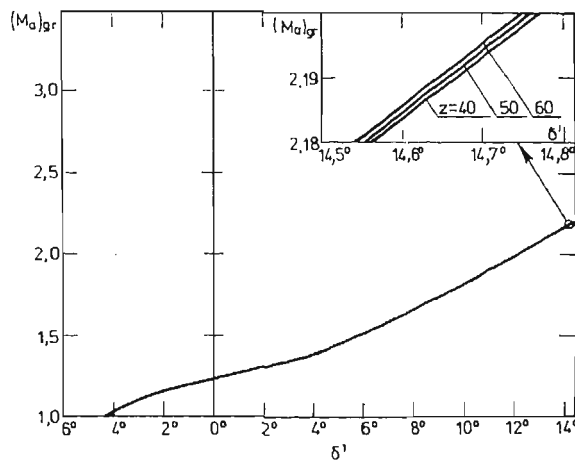
Rys. 8. Wykres zależności  $\theta_e = f(\delta')$



Rys. 9. Wykres zależności  $\delta' = f(\pi_2)$ ; a — dla trzech różnych wartości  $z$ , b — dla trzech różnych wartości  $M_a$ .



Rys. 10. Wykres zależności  $M_i = f(\delta')$ . Nieciągłość pochodnych  $\partial M_i / \partial \delta'$  w punktach  $\delta' = \frac{\gamma}{2}; 0; \frac{\gamma}{2}$  związana jest ze zmianą charakteru fal „b” i „d” (por. rys. 2)



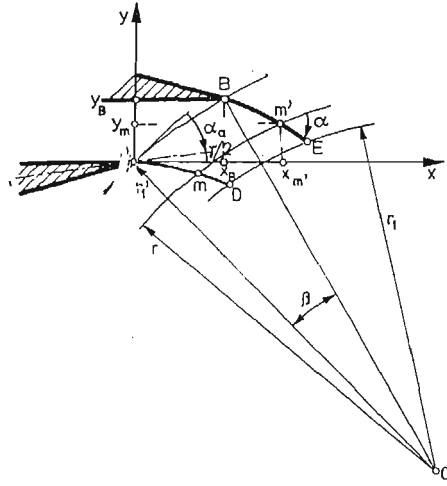
Rys. 11. Wykres zależności  $(M_a)_{gr} = f(\delta')_{gr}$ . Wpływ liczby łopatek jest nieznaczący

$$(9) \quad \bar{r}_m = \sqrt{\left[ \sin\left(\alpha_a + \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{x_m}{r_{1'}} \right]^2 + \left[ \cos\left(\alpha_a + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{y_m}{r_{1'}} \right]^2},$$

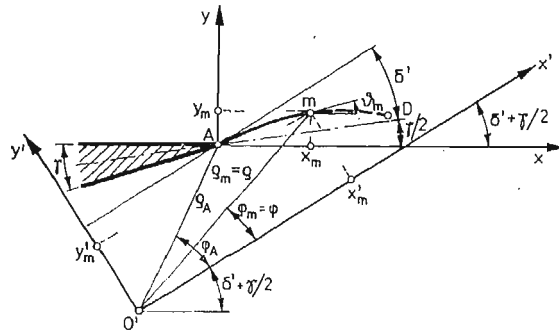
$$(10) \quad \alpha_m = \arctg \frac{r_{1'} \sin\left(\alpha_a + \frac{\gamma}{2}\right) - x_m}{r_{1'} \cos\left(\alpha_a + \frac{\gamma}{2}\right) + y_m} - \vartheta_m,$$

gdzie:

$$(11) \quad \vartheta_m = \vartheta_2 + \chi_2 - \chi_m,$$



Rys. 12. Zależności geometryczne między \$\bar{r}\_m\$ i \$x\_m, y\_m, x\_B, y\_B\$.



Rys. 13. Współrzędne linii rozdziálu w układzie \$x-y\$.

$$(12) \quad \chi = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M^2-1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2-1},$$

$$(13) \quad \alpha_a = \operatorname{arctg} \frac{y_B}{x_B},$$

$$(14) \quad r_{1'} = \frac{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2}},$$

$$(15) \quad \pi_m = \pi_2 \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_m^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}},$$

$$(16) \quad x_m = \bar{\varrho}_m \cos \left( \varphi_m + \delta' + \frac{\gamma}{2} \right) - x_{0'}$$

$$y_m = \bar{\varrho}_m \sin \left( \varphi_m + \delta' + \frac{\gamma}{2} \right) - y_{0'}$$

$$(17) \quad x_{0'} = \cos \left( \varphi_A + \delta' + \frac{\gamma}{2} \right),$$

$$y_{0'} = \sin \left( \varphi_A + \delta' + \frac{\gamma}{2} \right),$$

$$(18) \quad \bar{\varrho}_m = \frac{\varrho_m}{\varrho_A} \left\{ \frac{\cos \left[ \arctg \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} (M_2^2 - 1) \right]}{\cos \left[ \arctg \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} (M_m^2 - 1) \right]} \right\}^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}},$$

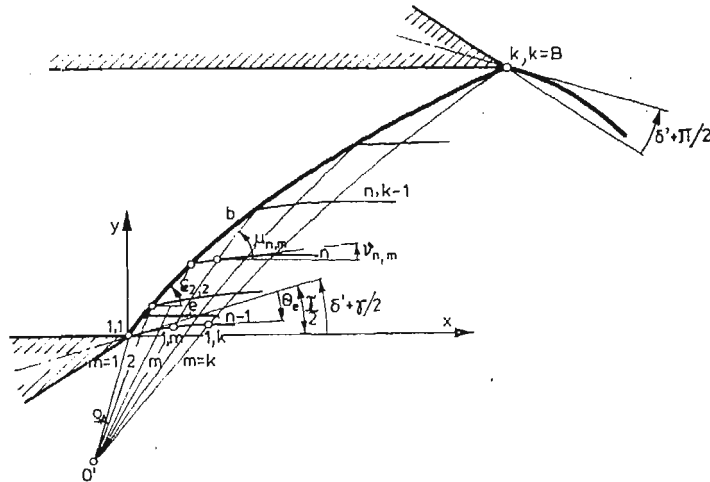
$$(19) \quad \varphi_m = \varphi_A - \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \left[ \arctg \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} (M_m^2 - 1) - \arctg \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} (M_2^2 - 1) \right],$$

$$(20) \quad \varphi_A = \arcsin \frac{1}{M_2},$$

$$(21) \quad \varrho_A = 1.$$

Tak więc poszukiwane zależności  $\pi_m = f(\bar{r}_m)$ ,  $M_m = f(\bar{r}_m)$ ,  $\alpha_m = f(\bar{r}_m)$  będą określone, jeśli dla danych  $M_2$ ,  $\kappa$ ,  $\delta'$  i  $\gamma$  znane będą współrzędne  $x_B, y_B$  krawędzi spływu sąsiedniej łopatki.

Obliczenia wykonywane są począwszy od przypadku, w którym  $\delta' = 0^2)$ . Wówczas (rys. 2d, 5b oraz 14) uderzeniowa fala „b” pada na sąsiednią łopatkę właśnie w punkcie

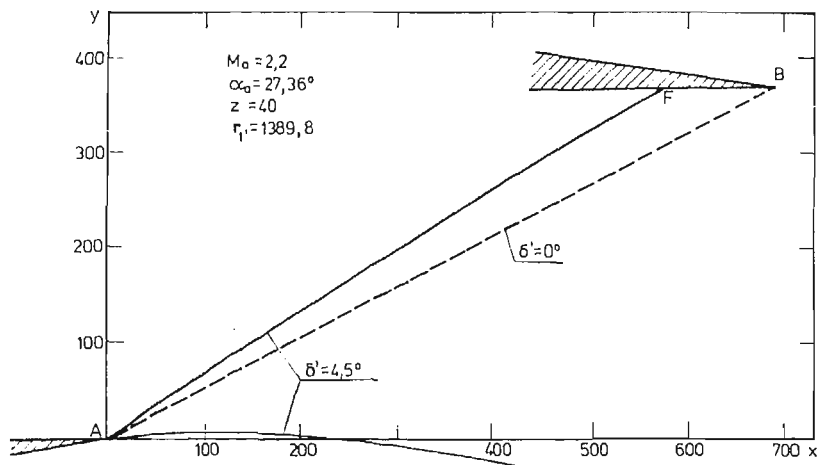


Rys. 14. Siatka do obliczenia kształtu fali „b” dla  $\delta' = 0$ .

<sup>2)</sup> Przypadek ten jest szczególnie wyróżniony gdyż dla danej liczby łopatek z oraz liczby Macha  $M_a$  istnieje tylko jedna wartość kąta  $\alpha_a = (\alpha_a)_{\delta'=0}$  przy której możliwy jest układ taki, aby  $\delta' = 0$ . Jeśli  $\delta' > 0$  to  $\alpha_a \geq (\alpha_a)_{\delta'=0}$ ; jeśli  $\delta' < 0$  to  $\alpha_a < (\alpha_a)_{\delta'=0}$ .

B pokrywającym się z sąsiednią krawędzią spływu a jej intensywność w tym punkcie jest nieskończenie mała. Do wyznaczenia kształtu fali zastosowano metodę charakterystyk. Wprowadzono przy tym uproszczenia polegające na pominięciu wpływu fali rozrzedzeniowej odbijającej się od fali uderzeniowej.

4.1. Wyniki obliczeń Rys. 15 przedstawia porównanie położenia i kształtu fali uderzeniowej dla dwóch wartości kąta  $\delta'$ :  $\delta' = 0^\circ$  i  $\delta' = 4,5^\circ$ . Obliczony kąt ustawienia łopatek,



Rys. 15. Porównanie położenia i kształtu fali uderzeniowej „b” dla  $\delta' = 0^\circ$  i  $\delta' = 4,5^\circ$

dla którego możliwe są takie konfiguracje przepływu wynosi  $\alpha_a = 27,36^\circ$ . W obydwu przypadkach krzywoliniowość fali objawia się w zasadzie nie kształtem lecz malejącą intensywnością w miarę oddalania się od punktu A — zakrzywienie fali jest niewielkie.

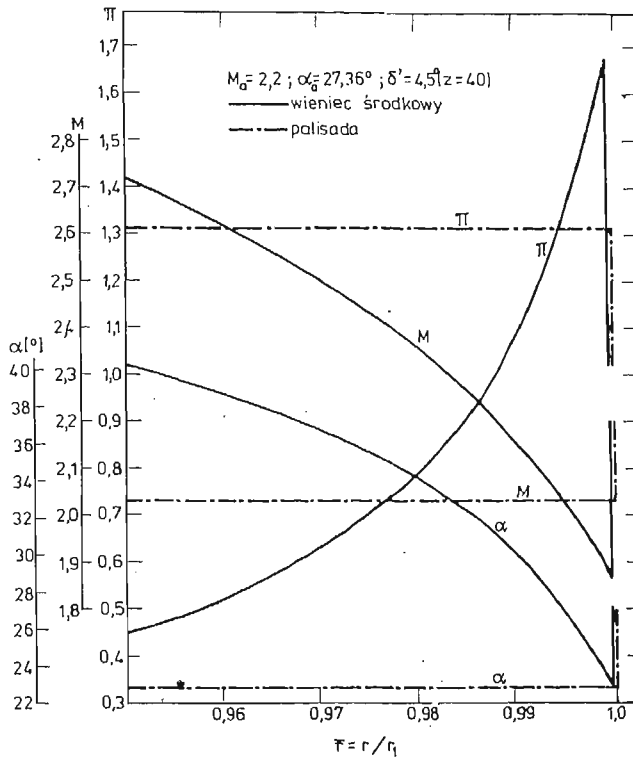
Jednakże wzdłuż linii rozdziału parametry przepływowe zmieniają się znacznie — rys. 16. W miarę oddalania się od krawędzi spływu ciśnienie znacznie maleje zaś wartości liczby Macha i kąta  $\alpha$  znacznie wzrastają. W odległości  $\bar{r} = 0,95$  odpowiednie parametry na linii rozdziału wynoszą:  $\pi \cong 0,45$ ;  $M \cong 2,7$ ;  $\alpha \cong 40^\circ$ .

Dla porównania w przepływie z prostoliniowymi falami uderzeniowymi, a więc dla nieskończonej palisady prostej (linie „kreska kropka” na rys. 16) wielkości te pozostają niezmiennie w miarę oddalania się od krawędzi spływu i wynoszą:  $\pi \cong 1,3$ ;  $M \cong 2,0$ ;  $\alpha \cong 23^\circ$ .

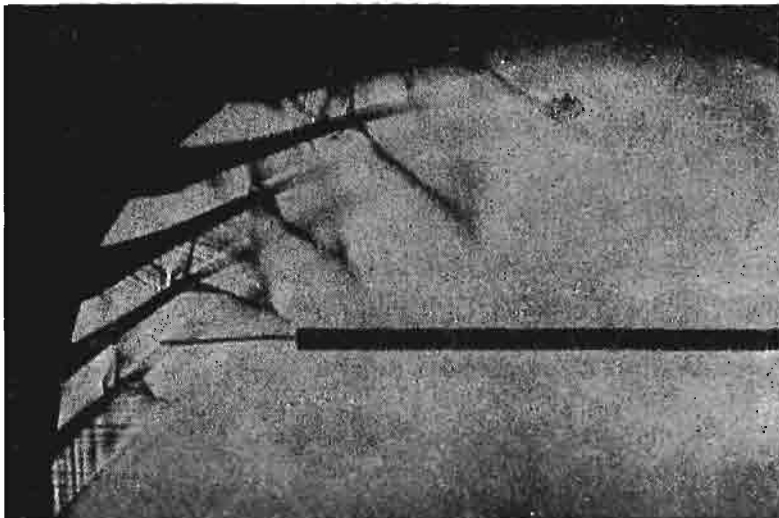
Różnica między przepływem w obszarze wylotowym zawierającym fale prostoliniowe i krzywoliniowe jest istotna, a więc w wieńcach dośrodkowych mimo niewielkiego zakrzywienia fal uderzeniowych nie można w obliczeniach zastąpić ich falami prostoliniowymi; powodowałoby to znaczne niedokładności wyników.

## 5. Wizualizacja przepływu

Sprawdzający eksperyment, polegający na wykonaniu wizualizacji przepływu przez wycinek wieńca dośrodkowego, przeprowadzono przy pomocy naddźwiękowego tunelu impulsowego. Na krawędziach spływu łopatek (rys. 17) widoczne są fale uderzeniowe



Rys. 16. Wykres zależności ciśnienia, liczby Macha i kąta  $\alpha$  w funkcji bezwymiarowego promienia  $\bar{r} = r/r_1$  dla  $\delta' = 4,5^\circ$



Rys. 17. Obraz naddźwiękowego przepływu w obszarze wylotowym wycinka wieńca dośrodkowego.  
 $M_a \cong 1,34$ ;  $z = 40$ ;  $\gamma \cong 9^\circ$ ;  $\alpha_a \cong 18^\circ$ ;  $r_{1,1} = 114,3$  mm, profil TS-2R

„b” i „d” oraz rozmyte linie rozdziału strug — ślady załatkowe (por. rys. 2e). Jak widać uderzeniowa fala „b” nie odbija się od sąsiedniej łopatki (można też powiedzieć, że odbija się jako nieskończenie słaba fala „c”) co świadczy, że jej intensywność w punkcie padania jest nieskończenie mała.

Ponieważ w kanale łopatkowym nie otrzymuje się jakiegos szczególnego rozkładu parametrów przed falą „b”, który mógłby spowodować jej malejącą intensywność, to można wnioskować, że fala „b” jest krzywoliniowa (w sensie podanym w części 4) na skutek doganiania jej przez inną falę rozrzedzeniową. Z porównania rys. 17 i 6 wynika, że otrzymany eksperymentalnie układ fal odpowiada przypadkowi  $0 > \delta' > -\frac{\gamma}{2}$ .

## 6. Wnioski

Obliczenia i wizualizacja przepływu wskazują, że w obszarze wylotowym naddźwiękowego wieńca dośrodkowego powinny pojawiać się krzywoliniowe fale uderzeniowe i linie rozdziału. Fale uderzeniowe na krawędziach spływu powinny występować w każdych warunkach pracy wieńca (rys. 2 i 8).

Wartość kąta  $\delta'$  jest ściśle związana z konfiguracją fal powstającą w obszarze wylotowym i w sposób istotny zależy od  $\pi$ ,  $M_a$  oraz  $z$ .

Zakrzywienie fal uderzeniowych jest niewielkie i trudne do zidentyfikowania na drodze wizualizacji — objawia się zmianą intensywności tych fal.

W miarę oddalania się od krawędzi spływu parametry na linii rozdziału i w całym obszarze wylotowym ulegają zmianie i znacznie różnią się od parametrów w przekroju  $a-a$ .

Przepływ w obszarze wylotowym wieńca dośrodkowego jest istotnie różny od przepływu za palisadą prostą — wynika to z różnego charakteru fal uderzeniowych.

## 7. Uwagi końcowe

Naddźwiękowy wieńiec dośrodkowy może być zastosowany jako np. aparat wywołujący zawirowanie wstępne przed pierwszym — osiowym wieńcem wirującym turbiny lub też jako kierownica turbinowego stopnia promieniowo-osowego [3]. Z przedstawionych rozważań płynie szereg praktycznych wniosków przydatnych konstruktorom takich stopni:

— powstające fale uderzeniowe powodują znaczne przyrosty entropii wpływające na sprawność stopnia

— na wlocie do wirnika (promień  $r_1$ ) parametry będą silnie niejednorodne wzdłuż obwodu

— uśredniony wzdłuż podziałki kąt napływu na wirnik będzie większy (czasem nawet znacznie) od kąta ustawienia łopatek kierownicy

— uśrednione parametry na promieniu  $r_1$  będą silnie zależały od warunków pracy stopnia.

Wnioski te należy uwzględnić przy projektowaniu łopatek wirnika.



## Literatura cytowana w tekście

1. K. BRIEDEN; *Die anisentrope Überschalldurchströmung des Streckengitters*, ZAMP IXb 1958.
2. M. E. DEICZ; *Technicheskaja gazodynamika*. Energia, Moskwa 1974, s. 541 - 549.
3. W. R. GUNDLACH, J. POROCHNICKI, J. PRYWER; *Method of optimisation of the centripetal double — flow inlet stages for the low pressure part of wet steam turbines*. Appendix to Proceedings of VI conference on Steam Turbines of Large Output. Pilzno 16 - 19. IX 1975.
4. C. H. HAUSER, W. W. PLOHR, G. SONDE; *Study of Flow Conditions and Deflection Angle at Exit of Two — Dimensional Cascade of Turbine Rotor Blades at Critical and Supercritical Pressure Ratios*. NACA RM E9K25, 1950.
5. O. LAWACZECK; *Calculation of the Flow Properties Up — and Downstream of and within a Supersonic Turbine Cascade*. ASME — paper 72-GI-47 1972.
6. H. J. LICHTFUSE, H. STARKEN; *Supersonic Cascade Flow*. Progress in Aerospace Science, vol. 15, Pergamon Press, Oxford 1974.
7. H. J. LICHTFUSS, W. STARKEN; *A Critical Review of the Outlet Flow of Supersonic Turbine Nozzles*. Prace Instytutu Maszyn Przepływowych 1976, nr 70 - 72.
8. J. LEBRECHT; *Metody obliczania kąta odchylenia strugi w obszarze „skośnego ścięcia” palisady*. CMP 1976, nr 81.
9. J. LEBRECHT; *Odchylenie strugi na wylocie transsonicznego wieńca dośrodkowego*. Praca doktorska. Arch. Prac. IMP, 1977, nr 608.

## Р е з ю м е

## МОДЕЛЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНОЙ РЕШЕТКОЙ

В статье представлен модель сверхзвукового течения за центростремительной решеткой. Показывается, что на выходных кромках, в любых условиях работы решетки должны возникать косые криволинейные ударные волны. Кроме того определяется характер изменения термодинамических параметров на линиях тока на небольшом расстоянии от выходной кормки.

Результаты показаны на фотографии сверхзвукового течения через модельный отрезок радиальной решетки.

## S u m m a r y

## SUPERSONIC OUTLET FLOW IN A CENTRI PETAL BLADE CASCADE

In the paper a model of supersonic outlet flow in centripetal blade cascade has been presented. It has been proved that on the trailing edges under all working conditions of the blade cascade oblique curves shock waves should arise.

Moreover, the character of a change of flow parameters on the slip line close to the trailing edge has been determined.

The results have been illustrated on a photograph of supersonic flow through the model section of the centripetal blade cascade.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 marca 1979 roku*



# BIULETYN INFORMACYJNY

## XV MIĘDZYKONFERENCYJNY KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ (ICTAM) TORONTO, 17—23 SIERPNIĄ 1980 R.

*Kongres został przygotowany przez 17 osobowy komitet lokalny pod przewodnictwem prof. F.P.J. Rimrotta oraz 27 osobowy komitet międzynarodowy pod przewodnictwem prof. F. I. Niordsona (Dania). Sekretarzem odpowiedzialnym Kongresu był prof. K. Charboneau, a z ramienia Polski do komitetu międzynarodowego wchodził prof. W. Fiszdon. Kongres odbył się w salach i pomieszczeniach Uniwersytetu Toronto (St. George Campus).*

W Kongresie uczestniczyło około 800 osób z 41 krajów, co jest liczbą raczej małą, jeżeli porównamy z XII Kongresem w Stanfordzie (1336 uczestników), lub z XIII Kongresem w Moskwie (2540 uczestników). Warto może dodać, że dokładnie w tym samym czasie odbył się w Waterloo (odległym ok. 100 km od Toronto) wielki międzynarodowy kongres poświęcony zagadnieniom spalania, na który miało przyjechać ponad 1000 uczestników. Na Kongresie MTiS w Toronto była również sekcja dot. spalania, a nawet jeden z referatów generalnych poświęcony był tam zagadnieniom. Liczbę uczestników ilustruje poniższe zestawienie: Algieria — 3, Australia — 3, Austria — 4, Belgia — 11, Brazylia — 3, Bułgaria — 3, Chiny — 13, Czechosłowacja — 3, Dania — 10, Francja — 58, Holandia — 34, India — 7, Izrael — 19, Japonia — 35, Jugosławia — 14, Kanada — 126, NRD — 3, Polska — 17, Portugalia — 3, RFN — 41, Stany Zj. — 245, Szwajcaria — 8, Szwecja — 20, Wielka Brytania — 45, Włochy — 18, ZSRR — 9, z pozostałych państw (Finlandia, Grecja, Irak, Korea, Meksyk, Nowa Zelandia, Nigeria, Południowa Afryka, Arabia Saudyjska, Egipt, Tunezja, Turcja, Wenezuela, Indie Zachodnie) przyjechało po jednym lub dwóch uczestników. Zestawienia tego nie należy jednak brać zbyt dosłownie, wykryliśmy bowiem, że jeden z naszych kolegów został uznany za reprezentanta Nigerii, Prof. W. Olszak za Włocha, a niżej podpisany za Kanadyjczyka.

Na Kongres zgłoszono 868 prac. Komitet selekcyjny (4 osobowy) wybrał z pośród nich 334 prace do ogłoszenia, w tym 14 zostało zakwalifikowanych jako sekcyjne. Dalsze 24 prace stanowiły rezerwę. Ponadto, na zaproszenie organizatorów opracowano i ogłoszono 5 referatów generalnych, jednogodzinnych — bez dyskusji, i 21 referatów sekcyjnych, 50 minutowych z dyskusją. Liczba faktycznie ogłoszonych referatów była mniejsza od sumy  $5+35+320$ , przynajmniej 7 referatów 20 minutowych nie zostało ogłoszonych z powodu nie przybycia referentów, odpadły również 3 zaplanowane referaty sekcyjne (wszystkie ze Związku Radzieckiego), jeden referat został ogłoszony dodatkowo. Wpłynęły prace z 48 krajów, przyjęto do ogłoszenia z 40 krajów. Dla porównania w Delft było odpowiednio 42 i 39, a w Stanfordzie i w Moskwie referaty ogłosili, w obu przypadkach, przedstawiciele 27 krajów. Poniżej podajemy statystykę prac złożonych i zakwalifikowanych do ogłoszenia oraz zaproszonych. W kolumnie 3 podaliśmy procent w stosunku do wszystkich 868 prac, w kolumnie 11 procent prac zakwalifikowanych do złożonych, w kolumnie 16 procent prac zakwalifikowanych do wszystkich prac przyjętych. S — oznacza prace z mechaniki ciała stałego, P — prace z mechaniki i płynów i termodynamiki. Dla porównania podajemy, że w Moskwie ogłoszono 228 referatów 20 minutowych, 5 generalnych i 20 sekcyjnych, w Stanfordzie referatów 15 minutowych było 291.

Lp	Kraj	prac złożonych		prac zakwalif.			prac przyjętych sekcyjnych			× × %	na zaproszenie organizatorów				× × × %		
		× %	Σ	S	P	Σ	S	P	Σ		Gen.	sekcyjne					
												S	P	Σ			
1	Afryka Połud.	0,1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
2	Arabia Saud.	1,5	13	2	1	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,9
3	Australia	0,3	3	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
4	Austria	0,2	2	2	—	2	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	0,6
5	Belgia	1,5	13	3	2	5	—	—	—	38,5	—	—	1	—	1	—	1,5
6	Brazylia	1,0	9	3	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,9
7	Bulgaria	0,3	3	2	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,6
8	Chiny	3,6	31	5	3	8	—	—	—	25,8	—	—	—	—	—	—	2,4
9	Czechosłowacja	1,5	13	4	1	5	—	—	—	38,5	—	—	—	—	—	—	1,5
10	Dania	0,8	7	3	—	3	—	—	—	42,8	—	—	1	—	1	—	0,9
11	Egipt	1,0	9	3	—	3	—	—	—	33,3	—	—	—	—	—	—	0,9
12	Francja	8,1	70	12	13	25	1	1	2	38,6	—	—	—	1	1	—	8,1
13	Grecja	0,1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
14	Holandia	1,3	11	3	4	7	—	1	1	72,7	—	—	—	1	1	—	2,4
15	Hiszpania	0,1	1	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
16	India	7,0	61	7	5	12	—	—	—	19,7	—	—	—	—	—	—	3,6
17	Irlandia	0,1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
18	Izrael	1,8	16	7	2	9	—	—	—	56,3	—	—	—	—	—	—	2,7
19	Japonia	5,0	43	14	6	20	1	1	2	51,2	—	—	—	2	2	—	6,6
20	Jugosławia	0,3	3	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
21	Kanada	5,9	51	8	8	16	1	—	1	33,3	1	1	—	1	—	—	5,1
22	Meksyk	0,6	5	1	1	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,6
23	Nigeria	0,8	7	1	1	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,6
24	Nowa Zelandia	0,1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
25	Norwegia	0,1	1	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
26	N.R.D.	0,5	4	1	1	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,6
27	Polska	3,3	29	7	3	10	1	—	1	37,9	—	—	—	1	—	1	3,3
28	Portugalia	1,0	9	1	2	3	—	—	—	33,3	—	—	—	—	—	—	0,9
29	R.F.N.	5,5	48	11	9	20	—	1	1	43,8	—	—	—	3	—	3	6,3
30	Rumunia	0,5	4	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
31	St. Zjedn. A.P.	31,8	276	61	31	92	3	1	4	34,8	1	2	1	3	—	—	28,7
32	Szwajcaria	0,7	6	2	2	4	—	—	—	66,6	—	—	—	1	—	1	1,2
33	Szwecja	0,3	3	2	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,6
34	Taiwan	0,6	5	2	1	3	—	—	—	60,0	—	—	—	—	—	—	0,9
35	Turcja	0,8	7	2	1	3	—	—	—	42,8	—	—	—	—	—	—	0,9
36	Wenezuela	0,1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
37	Węgry	0,5	4	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3
38	W. Brytania	3,9	34	15	5	20	1	—	1	61,8	1	1	1	2	—	—	6,3
39	Włochy	3,5	30	7	3	10	—	—	—	33,3	1	—	1	1	—	—	3,0
40	Z.S.R.R.	2,4	21	11	2	13	—	1	1	66,7	1	1	1	2	—	—	4,2

Wpłynęły jeszcze prace z Albanii, Finlandii, Iraku, Iranu, Liberii, Libii, Malezji, oraz Sudanu.

Poniżej podamy klasyfikację tematyki referatów przeprowadzoną przez organizatorów Kongresu. Sesji odbyło się 90, w tym 59 poświęconych zagadnieniom mechaniki ciała stałego i mechanice analitycznej (z grubsza biorąc), pozostałe 31 dotyczyły mechaniki płynów i termodynamiki. Wygłoszone zostały wszystkie zaplanowane wykłady generalne, 32 wykłady sekcyjne oraz około 310 referatów. Wykłady odbywały się w 10 równoległych sesjach, wykłady sekcyjne natomiast równoległe po 5 lub 4. Jak zwykle na Kon-

gresach trzeba było dokonywać wyboru między równoległymi sesjami. Na jedną sekcję tematyczną przeznaczono od jednego do 6 sesji (posiedzeń). Po wyłączeniu referatów sekcyjnych grupy tematyczne referatów przedstawiały się następująco:

I. Mechanika ciał stałych i analityczna	
1. Zagadnienia stateczności (6 sesji)	24 referaty
2. Mechanika ośrodków ciągłych	3
3. Mechanika pękania (4 sesje)	17
4. Drgania (5 sesji)	19
5. Plastyczność (4 sesje)	14
6. Mechanika gruntów	3
7. Sprężystość (3 sesje)	15
8. Kinematyka i dynamika (3 sesje)	14
9. Biomechanika	5
10. Metody analityczne (3 sesje)	8
11. Ruch falowy w ciałach stałych (5 sesji)	19
12. Powłoki (2 sesje)	4
13. Dynamika maszyn	2
14. Systemy i kontrola (2 sesje)	4
15. Procesy pękania (2 sesje)	6
16. Materiały kompozytowe (2 sesje)	6
17. Płyty, powłoki i membrany	4
18. Metody numeryczne	3
19. Ruch wymuszony siłami ciężkości	5
20. Trybologia	2
21. Geomechanika	4
22. Płyty (2 sesje)	7
23. Studia doświadczalne	4
24. Lepkosprężystość (2 sesje)	7
25. Metoda elementów skończonych (2 sesje)	7
26. Liny i pręty	4
27. Metody fotosprężystości	3
Razem 59 sesji	213 referatów,
II. Mechanika płynów i termodynamika	
1. Konwekcja	3 referaty
2. Warstwa przyścienna	3
3. Turbulencja jednorodna (2 sesje)	5
4. Przepływy turbulენტne (2 sesje)	9
5. Przejście do turbulencji	4
6. Teoria kinetyczna gazów	3
7. Spływanie wirów	6
8. Przepływy dwu-fazowe	6
9. Smarowanie	6
10. Niestacjonarna separacja	2
11. Metody analityczne	2
12. Spalanie	2
13. Stateczność przepływów	6
14. Fale wodne	6
15. Mechanika płynów	2
16. Przenoszenie ciepła	2
17. Wybuchy	2
18. Wzajemne oddziaływanie przepływów i ciał	2
19. Przepływy laminarne w przewodach	2

20. Fale gęstości	2
21. Ciała smukłe	4
22. Akustyka	4
23. Przepływy potencjalne	4
24. Przepływy turbulენტne z uwzględnieniem ścinania (2 sesje)	7
25. Przepływy Stokesa	4
26. Przepływy przydźwiękowe	3
27. Dyspersja w rurach	3
28. Magneto hydrodynamika	3
Razem 31 sesji	107 referatów.

W porównaniu z poprzednimi kongresami nastąpiło większe z różnicowanie referatów oraz wzrost liczby referatów z mechaniki ciała stałego.

Obrady Kongresu rozpoczęły się w poniedziałek 18 sierpnia 1980 w wielkiej sali „Convocation Hall”. Adresy powitalne wygłosili prof. F.P.J. Rimrott, przewodniczący lokalnego komitetu organizacyjnego, prof. G.R. Slemon, dziekan Wydziału Nauk Stosowanych i Inżynierskich Uniwersytetu w Toronto, prof. J.L. Kerwin, prezes National Research Council w Kanadzie, oraz prof. F.I. Niordson, prezes Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM).

Inauguracyjny wykład generalny wygłosił prof. H.H.E. Leipholtz (Kanada), tytuł wykładu „Analiza niekonserwatywnych układów nieholonomicznych”. Następnego dnia wykład generalny wygłosił prof. J.C.R. Hunt (W. Brytania) na temat „Środowiskowa dynamika przepływów”. W wykładzie tym chodziło o zagadnienia przepływów w różnych środowiskach, na które oddziałuje człowiek i wzajemnie. Trzeci referat generalny wygłosił prof. G. Fichera (Włochy). Jego tematyka dotyczyła analitycznych zagadnień materiałów z pamięcią. Czwarty wykład generalny pt. „Dynamika gazów egzotermicznych fal” wygłosił prof. G.G. Czerny (ZSRR). Obrady merytoryczne Kongresu zamknął wykład generalny prof. E. Sternberga (St. Zjedn. A. P.) pt. „O osobliwych zagadnieniach w elastostatyce zliniaryzowanej i skończonych odkształceń”.

Wygłoszone zostały następujące wykłady sekcyjne (w porządku chronologicznym):

1. R. C. Tennyson — *Stateczność powłok*,
2. B. Budiansky, J. W. Hutchinson — *Wzrost pękki w ciałach lepkich*,
3. T. J. Pedley — *Fizjologiczna mechanika cieczy*,
4. D. D. Joseph — *Bifurkacja w mechanice cieczy*,
5. J. A. Geurst — *Teoria dwóch cieczy laminarnego przepływu supercieczy helu przez rurki kapilarne i wąskie kanaliki*,
6. K. Huseyin, V. Mandadi — *O niestateczności układów wieloparametrowych*,
7. G. A. Maugin — *Sprężysto — elektromagnetyczne sprzężenie rezonansowe w ośrodkach uporządkowanych elektromagnetycznie*,
8. M. M. Carroll — *Mechaniczne oddziaływanie cieczy i nasyconego materiału porowatego*,
9. K. Oshima, Y. Oshima — *Wirowy opływ za drgającym płatem*,
10. Y. Sone, S. Tanaka — *Thermal stress slip flow induced in rarefied gas between noncoaxial circular cylinders*,
11. P. Perzyna — *Zjawiska stateczności w ciałach dysypatywnych z wewnętrznymi defektami i wadami*,
12. J. Wittenburg — *Dynamika układów z wielu ciał*,
13. K. Kawata — *Mikromechaniczne studium ciał przy wysokich prędkościach odkształceń*,
14. C. Baiocchi — *Przepływ cieczy przez ośrodek porowaty ze swobodnymi brzegami*,
15. D. R. Crawford, B. M. Lake, P. G. Saffmann, H. C. Yuen — *Wpływ nieliniowości i spektralnej szerokości pasma na związek dyspersyjny i składową prędkości fazowej powierzchniowych fal grawitacyjnych*,
16. Z. Mróz — *Odkształcenie i płynięcie ośrodków ziarnistych*,
17. E. Axelrad — *Wiotkie powłoki*,
18. O. Richmond, W. A. Spitzig — *Zależność ciśnienia i dylatacji plastycznego płynięcia*,
19. W. Schneider — *Wpływ promieniowania w jedno i wielofazowym przepływie*,
20. H. Hasimoto — *Solitary*,

21. J. W. Dally — *Doświadczalne studia dynamiki pękania*,
22. J. R. Willis — *Teoretyczne wyznaczenie ogólnych własności materiałów kompozytowych*,
23. J. A. Battjes — *Fale i ich wpływ na konstrukcje nadbrzeżne i przybrzeżne*,
24. H. Buggisch — *Nieliniowe fale w ośrodkach*,
25. J. G. Simmonds, J. W. Nicholson — *Współczynniki intensywności naprężeń dla splekanych powłok o małej wyniosłości*,
26. T. C. Rogers, R. L. Moss, A. J. M. Spencer — *Sprężysto-plastyczne odkształcenia walców wzmocnionych włóknami (warstwami na krzyż)*,
27. Y. Yamamoto — *Zagadnienie wzajemnego oddziaływania konstrukcji i cieczy w przypadku statku na falach*,
28. N. Rott — *Nieliniowa akustyka*,
29. N. Olhoff — *Optymalne projektowanie względem wartości własnych konstrukcji*,
30. S. Cescotto, F. Frey, Ch. Massonet — *O efektywnej analizie elementów skończonych konstrukcji inżynierskich w zakresie nieliniowym*,
31. E. Becker — *Przepływ warstwy przyściennej nienewtonowskiej cieczy o krótkiej pamięci*,
32. R. Moreau — *Metalurgiczne zastosowania magnetohydrodynamiki*.

Wymienimy jeszcze 10 zakwalifikowanych i wygłoszonych referatów polskich, po za powyżej podanymi dwoma sekcyjnymi. Były to następujące referaty: Z. Banach i H. Zorski — *Kontynuálny model układow materialnych z oddziaływaniami mechanicznymi i elektrodynamicznymi*, M. Bratos i R. Herczyński — *Wyznaczanie potencjałów międzymolekularnych przez pomiary gazodynamiczne*, J. Klepaczek — *Widna prędkości obciążenia w przypadku inicjacji pękania metali*, D. Alliro, J. P. Boeller, A. Sawczuk — *Kryteria plynienia i mechanizmy zniszczenia dla ciał anizotropowych*, A. Dragon — *Inicjacja makropęknięcia w ciałach plastyczno kruchych*, W. Kosiński — *Fala uderzeniowa powstająca przy pękaniu skał*, A. Papiński i E. Włodarczyk — *Fale naprężenia i przemieszczenia wymuszone w ośrodku sprężystym przez liniowe obciążenie poruszające się wzdłuż walcowego otworu wiertniczego*, W. Kalita — *Przepływy o małej liczbie Reynoldsa naokoło szeregów wieku cienkich prętów*, I. Pienkowska — *Uogólnienie twierdzenia Faxena uwzględniające warunki początkowe i efekty wzajemnego oddziaływania*, Z. Bychawski i W. Olszak — *Funkcjonalna metoda rozwiązywania zagadnień o słabej nieliniowej lepkości sprężystości*. Z dziesięciu powyżej wymienionych prac jedna powstała we współpracy z dwoma autorami francuskimi. Na Kongresie były wygłoszone również dwie prace, zaliczone do prac prezentowanych przez inne kraje, ale wykonane we współpracy z autorami polskimi: A. Gołębiowska-Herrmann i G. Herrmann — *Mechanika płaskiej szczeliny*, oraz O. Bruhns i B. Raniecki — *Granice naprężeń bifurkacyjnych w ciałach z niestowarzyszonym prawem plynienia plastycznego w warunkach dużych odkształceń*. Nazwiska prelegentów zostały wyróżnione. Z grupy uczestników polskich 9 osób miało pokryte koszty pobytu i przejazdu, kilka osób tylko koszty przejazdu, pozostali przyjechali łącząc pobyt na Kongresie z pobylem w Kanadzie, lub St. Zjednoczonych. 2 osoby miały opłacony również przelot przez instytucje zagraniczne.

W czasie trwania Kongresu wydawcy wykorzystali okazję do zareklamowania książek i czasopism z dziedziny mechaniki. Szkoda, że nie było tam ani naszych książek wydawanych w j. angielskim, ani żadnych tytułów czasopism. Redaktor Applied Mechanics Reviews i Redaktor International Journal of Engineering Sciences urządzili małe spotkania z autorami.

Organizatorzy Kongresu włożyli wiele trudu by wzorowo zorganizować przebieg obrad. Zorganizowano cały program dla osób towarzyszących, a w środę popołudniu można było pojechać do wodospadów Niagary, lub do Stratfordu. Wydany został pierwszy tom obszernych streszczeń referatów generalnych i sekcyjnych oraz oddzielny tom ze streszczeniami wszystkich referatów, które zostały, lub miały być wygłoszone na Kongresie. Drugi tom streszczeń referatów generalnych i sekcyjnych zostanie wydany w niedługim czasie. Część uczestników zakwaterowana w starych domach na terenie kampusu uniwersyteckiego natrafiła na warunki dalekie od luksusowych.

W wyniku wyborów, do nowych władz Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM) weszli następujący profesorowie: D. C. Drucker — Prezes (St. Zjedn. A. P.), F. I. Niordson — wiceprezes (Dania, dotychczasowy prezes), E. Becker — skarbnik (RFN), oraz J. Hult — sekretarz (Szwecja, dotychczasowy sekretarz). Członkami „Biura” IUTAM zostali wybrani profesorowie: P. Germain (Francja), M. J. Lighthill (W. Brytania), L. I. Siedow (ZSRR) oraz I. Tani (Japonia). Dokonano

również wyborów członków Komitetu Kongresu w liczbie 26 osób. Ze strony Polski wybrano prof. W. Fiszdona, który reprezentował nas w tym Komitecie również do tej pory.

Następny Kongres odbędzie się w sierpniu 1984 w Kopenhadze (Dania). Tym razem Polska nie występowała z propozycją organizacji Kongresu u nas w kraju.

*Z. Olesiak*

## IX SYMPOZJUM BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH W MECHANICE CIAŁA STAŁEGO

Symposium zostało zorganizowane wspólnie przez Oddział Warszawski PTMTS, Zespół Mechaniki Doświadczalnej Komitetu Mechaniki PAN oraz Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej PW. Odbyło się ono w dniach 24 - 27 września 1980 r. w Jachrance pod Warszawą, a uczestniczyło w nim ok. 130 osób z kraju i 6 osób z zagranicy.

Czterodniowe obrady biegły dwoma nurtami, z których pierwszy stanowiło 10 referatów plenarnych o charakterze ogólnym naświetlających stan wiedzy, nowe tendencje oraz pożądane kierunki rozwoju w wybranych dziedzinach. Dwa z tych referatów (R. Prabhakaran USA, V. Reiman NRD) dotyczyły ulepszeń metody elastooptycznej, dwa dalsze (F. P. Chiang, J. Stupnicki) omawiały zastosowanie holografii do pomiaru odkształceń metodą bezpośrednią (plamkową) bądź przez wykorzystanie interferometrii. W trzech referatach (J. W. Dally USA, J. Bäccklund Szwecja, A. Drescher) przedstawiono różne aspekty mechaniki pękania, a w szczególności obserwację procesu pękania metodami optycznymi, mechanizmy niszczenia ciał kruchych i wreszcie wyznaczanie trwałej wytrzymałości zmęczeniowej. Interesująca metoda hybrydowej analizy procesów, w której część informacji wyjściowych dostarcza eksperyment, była przedmiotem referatu K. H. Laermanna z NRF. Dwa ostatnie referaty dotyczyły pomiarów naprężeń. I tak referat W. Klepackiego i K. Wojtyry dał przegląd kilkuletnich prac Instytutu Lotnictwa w zakresie drgań łopatek turbin i sprzężarek, podczas gdy referat M. Bijak-Żochowskiego naświetlił problem pomiarów naprężeń własnych.

Drugim nurtem symposium były 4 sesje plakatowe, na których przedstawiono ogółem 90 prac, wykonanych głównie w Polsce. Pierwsza grupa (22 prace) objęła badania własności materiałów w aspekcie: mechaniki pękania, naprężeń własnych, reologii oraz zmian strukturalnych. Grupa druga (21 prac) poświęcona była metodom badań, wśród których dominowały elastooptyka i holografia. Równorzędna była z nimi grupa 25 prac obejmująca badania modelowe i badania konstrukcji, wśród których na wyróżnienie zasługują badania naprężeń w elementach wirujących turbin oraz badania konstrukcji cienkościennych w stanach podkrytycznym, zakrytycznym i w fazie zniszczenia. Wreszcie ostatnią czwartą grupę 22 prac stanowiło badanie zmęczenia i pełzania.

Oceniając ogólnie obrady symposium należy stwierdzić, że w porównaniu z poprzednimi sympozjami zaznacza się wyraźny dodatni gradient rozwoju badań doświadczalnych. Dotyczy to zarówno jakości prac jak i ich zakresu oraz tematyki. I tak jako bezsporne fakty trzeba podkreślić:

- I. Bardzo wyraźne zaakcentowanie mechaniki pękania w różnych jej aspektach jak propagacja pęknięcia w warunkach obciążeń jednorazowych, a szczególnie w warunkach obciążeń zmiennych. Znajomość mechaniki pękania dotarła do świadomości ogółu w uczelniach, instytutach resortowych. Pod tym względem zaznaczył się wyraźny postęp w porównaniu z sympozjami poprzednimi.
- II. Bardzo wyraźny wzrost liczby i jakości prac w zakresie zmęczenia. Dużo prac dotyczyło ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej połączonej z mechaniką pękania. Pojawiły się także całkowicie nowe tematyki jak zmęczenie cieplne, fretting i zmęczenie w podwyższonych temperaturach. Pozytywnym objawem jest również postęp w dziedzinie programowania badań zmęczeniowych.
- III. W zakresie badań modelowych obserwuje się podjęcie nowej tematyki jak badania stateczności konstrukcji oraz ich praca w stanie zakrytycznym, adaptacji konstrukcji, nośności granicznej oraz obciążeń cieplnych.

Podsumowując ten aspekt można ocenić obrady Symposium jako akcentujące znaczne rozszerzenie tematyki. Również obiektywnie biorąc poziom przedstawionych prac uległ podwyższeniu i wytrzymuje porównanie z analogicznymi pracami wykonanymi za granicą.



Pod względem metod badawczych ubiegły 2 letni okres cechuje znaczny wzrost zastosowań holografii i to w szeregu ośrodku krajowych. Niewątpliwie uległ znacznej poprawie poziom prac, szersze opanowanie metod bezpośredniego pomiaru odkształceń w szczególności metody plamkowej. W elastooptyce obserwuje się poszukiwania określenia połowego nowych wielkości, np. izopach, pewnej komputeryzacji procesów wreszcie użycie dodatkowych metod jak superpozycja modeli, z których jeden przedstawia znany stan napięć.

Jako dodatkia cę zaobserwowano pojawienie się po raz pierwszy badań metodą emisji akustycznej.

Również po raz pierwszy na szerszą skalę niż dotąd pojawiły się prace wykonane w resortowych instytutach i ośrodkach rozwojowych przemysłu. Zaprezentowany poziom prac pod względem nowoczesności narzędzi, metod opracowania wyników wytrzymuje porównanie z dobrymi pracami zagranicznymi opisywanymi w takich czasopismach jak *Experimental Mechanics*, *Strain* czy *Transactions ASME*. Na tym tle wydaje się celowe, aby w następnych sympozjach udział podobnych ośrodków zdecydowanie rozszerzyć.

Wreszcie na zakończenie warto jest zaznaczyć, iż zmodyfikowana na tym sympozjum forma realizacji obrad zdala egzamin użyteczności. W szczególności wprowadzenie sesji plakatowych wzmogło znacznie dyskusję naukową, stopień zrozumienia wyników poszczególnych prac i zaangażowania uczestników. Fakty te były powodem, iż taka forma organizacji przewiduje się w następnym X Sympozjum, które powinno odbyć się w 1982 r.

*Zbigniew Brzoska*

### 136 KOŁOKWIUM EUROMECHU PT. ZAGADNIENIA LOKALNE W PŁYTACH I POWŁOKACH

Kolokwium odbyło się w dniach od 29 września do 1 października 1980 r. w Jabłonie koło Warszawy. Wzięło w nim udział 35 uczestników z 9 krajów (Anglii, Austrii, Danii, Finlandii, Francji, Hiszpanii, Polski, RFN i Szwecji), w tym 16 uczestników z zagranicy.

Kolokwium było poświęcone zagadnieniom lokalnym spotykanym w teorii płyt i powłok. Ogółem wygłoszono 26 referatów 25-minutowych, które dotyczyły następujących grup tematycznych:

- efekty brzegowe w teorii płyt (2 referaty: P. Ladevese i F. Pecostings oraz A. M. van der Heijden)
- propagacja szczelin w płytach i powłokach (cztery referaty; w tym dwa dotyczące powstawania szczelin w betonie H. Manga i H. Flögla oraz P. Gambarowy)
- zastosowanie równań całkowych w różnych zagadnieniach płytowych (trzy referaty); na uwagę zasługują dwa z nich: E. Hansena dotyczący zastosowania tej metody do analizy koncentracji naprężeń dookoła otworów w płytach i powłokach oraz S. Krenka, w którym zastosowano równania całkowe do badania drgań płyt na sprężystym podłożu;
- zastosowanie metody elementów skończonych w zagadnieniach płytowych (3 referaty)
- zagadnienia analizy koncentracji naprężeń w powłokach (4 referaty); niektóre referaty z tej grupy miały bardziej techniczny charakter, np. referat A. Tootha dotyczący analizy naprężeń w zbiornikach walcowych spoczywających na podporach siodłowych, omawiający zagadnienie lokalnej utraty stateczności zbiorników, czy praca M. Suviolati omawiająca dachy cylindryczne;
- lokalna utrata stateczności (2 referaty), ciekawa była praca B. Kröplina, w której przeanalizowano zagadnienia utraty stateczności płyt i powłok przy uwzględnieniu efektów lepkich. Jeden referat miał charakter eksperymentalny i dotyczył analizy rzeczywistych rozkładów naprężeń w cienkościennych konstrukcjach lotniczych.
- zagadnienia optymalnego projektowania konstrukcji (2 referaty)

Obrady Kolokwium zakończył referat Z. Mroza, który dotyczył zagadnienia optymalnego działania obciążeń na konstrukcję. Podane zostały ogólne warunki określające optymalne rozłożenie podpór oraz umiejscowienie elementów wzmacniających.

Po prawie wszystkich referatach dyskusja była bardzo ożywiona i brało w niej udział wielu dyskusantów. Warunki pobytu w Jabłonie były zadowalające. Kolokwium było trzecim z kolei kolokwium EUROMECHu poświęconym podobnej tematyce, pierwsze odbyło się w 1976 w Jabłonie, drugie w 1979

w Linköping w Szwecji. Organizatorami kolokwium byli: Komitet Mechaniki Polskiej Akademii Nauk, Instytut Techniki Lotniczej Politechniki Warszawskiej i Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Prace przedstawione na Kolokwium będą opublikowane w Archiwum Budowy Maszyn.

*S. Łukasiewicz*

### JUBILEUSZ PROFESORA WITOLDA NOWACKIEGO

Dnia 25 czerwca 1981 odbyło się w Warszawie w sali Okrągłego Stołu w Pałacu Staszica plenarne zebranie Komitetu Mechaniki Polskiej Akademii Nauk poświęcone przedstawieniu sylwetki i działalności naukowej Profesora Witolda Nowackiego w związku z jubileuszem Jego 70 lecia. Porządek dzieniny przewidywał:

1. Słowo wstępne przewodniczącego Komitetu prof. A. Sawczuka,
2. Wystąpienie prof. J. Litwiniszyna omawiające sylwetkę Jubilata,
3. Wystąpienie prof. Z. Kączkowskiego o działalności naukowej W. Nowackiego,
4. Referat problemowy prof. D. Roguli pt. „Pola sprzężone i nieklasyczne ośrodki ciągłe”,
5. Referat problemowy prof. M. Sokołowskiego pt. „Teoria sprężystości i termosprężystości”,
6. Wypowiedź Profesora W. Nowackiego na temat przeszłości i przyszłości mechaniki polskiej.

W przyszłości podamy skrót wystąpień i referatów. Wypowiedź prof. W. Nowackiego, która zapewne zainteresuje ogół mechaników w Polsce drukujemy oddzielnie.

Dnia 3 lipca 1981 w Pałacu Kazimierzowskim w Warszawie odbyło się uroczyste posiedzenie Senatu Uniwersytetu Warszawskiego, na którym profesor Witold Nowacki otrzymał doktorat honoris causa. Na Uczelni tej wykładał przez ponad ćwierć wieku, będąc kierownikiem Katedry Teorii Sprężystości i Plastyczności w latach 1955—69 i Dyrektorem Instytutu Mechaniki w latach 1969—78.

Dyplom doktora honoris causa wręczył J. M. Rektor Uniwersytetu Warszawskiego profesor Henryk Samsonowicz, promotorem był prof. Z. Olesiak. Godzi się wspomnieć, że był to już ósmy doktorat honoris causa przyznany prof. W. Nowackiemu. Wpłynęły liczne gratulacje i życzenia od Władz i osób prywatnych.

### SYMPOZJA MIĘDZYNARODOWEJ UNII MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ (IUTAM)

#### Rok 1981

1. IUTAM/IUPAC Symposium on Interaction of Particles in Colloidal Dispersions, Canberra, Australia, 16—21 marca, organizator prof. B. W. Ninham,
2. CISM/IUTAM Symposium on Crack Formation and Propagation, Tuczno, Polska, 22—27 marca, organizator prof. M. Sokołowski,
3. IUTAM symposium on Unsteady Turbulent Shear Flows, Toulouse, Francja, 5—8 maj 1981, Przewodniczący Dr R. Michel  
Département d'Aérodynamique  
ONERA/CERT  
B. P. 4025  
F-31055 TOULOUSE Cedex, France
4. IUTAM Symposium on the Mechanics and Physics of Gas Bubbles in Liquids, Pasadena, USA, 15—19 czerwiec 1981, Przewodniczący Prof. M. S. Plesset  
Engineering Science Department  
California Institute of Technology

- Pasadena, Cal. 91125, USA, oraz  
 Prof. L. van Wijngaarden  
 Technische Hogeschool Twente  
 Postbus 217  
 ENSCHEDE, Holandia
5. Second IUTAM Symposium on Stability in the Mechanics of Continua, NÚMBRECHT, RFN, 31 sier-  
 pień—4 wrzesień 1981  
 Przewodniczący Prof. F. H. Schroeder  
 Universität Wuppertal, FB 11  
 Pauluskirchstrasse 7  
 D-5600 WUPPERTAL, RFN,
6. IUTAM Symposium on High Temperature Gas Dynamics, Praga, Czechosłowacja 14—18 wrzesień  
 1981  
 Przewodniczący Prof. M. Pichal  
 Institute of Thermomechanics  
 Czechoslovak Academy of Sciences  
 Puškinovo nám. 9  
 160 00 PRAGA, Czechosłowacja

#### Rok 1982

1. IUTAM Symposium on Threedimensional Turbulent Boundary Layers, Berlin Zachodni, 29 marzec—  
 1 kwietnia 1982  
 Przewodniczący Prof. H. Fernholz  
 Technische Universität Berlin, Sekr. HF1  
 Strasse des 17 Juni 135  
 D-1000 Berlin 12, Berlin Zachodni oraz  
 Prof. E. Krase  
 Aerodynamisches Institut  
 Technische Hochschule Aachen  
 Willnerstrasse zw. 5—7  
 D-5100 Aachen, RFN
2. COSPAR/IUTAM Symposium on Fundamental Aspects of Material Sciences in Space, Ottawa,  
 Kanada, maj 1982  
 Przewodniczący Dr A. Bewersdorf  
 DFVLR  
 Postfach 90 60 58  
 D-5000 Köln 90, RFN
3. IUTAM Symposium on Mechanics of Composite Materials, Blacksburg, Virginia, USA, 16—19  
 sierpień 1982  
 Organizator Prof. Z. Hashin  
 School of Engineering  
 Tel-Aviv University  
 Ramat-Aviv  
 TEL-AVIV 69978, Izrael oraz  
 Prof. C. T. Herakovich  
 Department of Engineering Science and Mechanics  
 Virginia Polytechnic Institute  
 BLACKSBURG, Va. 24061, USA
4. IUTAM Symposium on Non-linear Deformation Waves, Tallin, ZSRR, sierpień 1982  
 Przewodniczący Prof. U. Nigul

Institute of Cybernetics  
 Academy of Sciences of the Estonian SSR  
 Lenini Puiestee 10  
 200104 Tallinn, ZSRR

5. IUTAM Symposium on Collapse — the Buckling of Structures in Theory and Practice, Londyn, 21 sierpień — 3 wrzesień 1982  
 Organizator Prof. J. M. T. Thompson  
 Department of Civil and Municipal Engineering  
 University College London  
 Gower Street  
 LONDON WC1E 6BT, Wielka Brytania
6. IUTAM Symposium on Metallurgical Applications of Magnetohydrodynamics, Cambridge, 8—10 września 1982  
 Organizator Prof. J. A. Shercliff  
 Department of Engineering  
 University of Cambridge  
 Trumpington Street  
 CAMBRIDGE CB2 1PZ, Wielka Brytania
7. IUTAM/IUGG Symposium on Intense Atmospheric Vortices, Reading, 1982  
 Organizator Prof. Sir M. J. Lighthill  
 Provost, University College London  
 Gower Street  
 London WC1E 6BT, Wielka Brytania
8. IUTAM Symposium on Structure of Complex Turbulent Shear Flow, Marsylia, 1982  
 Organizator Prof. R. Dumas  
 Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence  
 12 Avenue Général Leclerc  
 F-13003 MARSEILLE, Francja
9. IUTAM Symposium on Deformation and Failure of Granular Media, Delft, 1982  
 Organizator Prof. A. Verruijt  
 Department of Civil Engineering  
 Delft University of Technology  
 1 Stevinweg  
 DELFT 8, Holandia
10. ISIMM/IUTAM Symposium on Modern Developments of Analytical Mechanics, Toryn, 1982  
 Organizator Prof. A. Lichnerowicz  
 Ecole Polytechnique  
 F-91128 Palaiseau Cedex, Francja

#### Rok 1983

1. ICA/IUTAM Symposium on Mechanics of Hearing Processes, 1983 (ewentualnie 1982)  
 Organizator Prof. Sir M. J. Lighthill  
 Provost, University College London  
 Gower Street  
 London WC1E 6BT, Wielka Brytania
2. IUTAM Symposium on Sea — bed Mechanics, 1983  
 Organizator Prof. B. Denness  
 Department of Ocean Engineering

- University of Newcastle- upon-Tyne  
NEWCASTLE-UPON-TYNE NE1 7RU, Wielka Brytania
3. IUTAM Symposium on Atmospheric Dispersion of Heavy Gases and Small Particles, 1983,  
Organizator Prof. G. Ooms  
Delft University of Technology  
P.O. Box 5033  
2600 GA DELFT, Holandia  
Prof. H. Tennekes  
Royal Netherlands Meteorological Institute  
P.O. Box 201  
3730 AE DE BILT, Holandia
  4. IUTAM Symposium on Geomaterials: Rocks, Concretes, Soils Evanston, Illinois, 1983  
Organizator Prof. Z. Bazant  
Department of Civil Engineering  
The Technological Institute  
Northwestern University  
EVANSTON, ILL. 60201, USA,  
Prof. J. R. Rice  
Division of Engineering  
Brown University  
PROVIDENCE, R.I. 02912, USA
  5. IUTAM Symposium on Probabilistic Methods in Strength of Structures Sztokholm, 1983  
Organizator Dr S. Eggwertz  
Aeronautical Research Institute  
Box 11021  
S-16111 BROMMA, Szwecja  
Prof. N. C. Lind  
Department of Civil Engineering  
University of Waterloo  
WATERLOO, Ontario N2L 3G1, Kanada
  6. IUTAM Symposium on Random Vibrations and Reliability, Berlin, 1983  
Organizator Prof. G. Schmidt  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik  
Mohrenstrasse 39  
108 BERLIN, NRD
  7. IUTAM Symposium on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids Kyoto lub Tokyo, 1983  
Organizator Prof. T. Tatsumi  
Department of Physics  
Kyoto University  
Kitashirakawa-Oiwake, Sakyo-ku  
KYOTO, 606 Japonia
  8. IUTAM Symposium on Electromagnetic Solid Continua, Paryż, 1983  
Organizator Prof. A. Maugin  
Laboratoire de Mécanique Théorique  
Université Pierre-et-Marie Curie  
Tour 66  
4 Place Jussieu  
F-75230 PARIS Cedex 05, Francja
  9. IUTAM Symposium on Experimental Techniques in Two-phase Flow, 1983.

W następnym numerze ukaza się prace:

- St. ŁUKASIEWICZ, Równania liniowej, zgięciowej teorii powłok o wolno zmiennych krzywiznach.  
Уравнения линейной теории изгиба оболочек и медленно изменяющимися кривизнами  
Equations of the linear theory of shells with slowly varying curvatures.
- J. ZIELNICA M. KWIEK, Wyboczenie cienkiej powłoki przy obciążeniach obrotowo symetrycznych i ich wykorzystanie w optymalizacji konstrukcji.  
Выпучивание тонкой конической оболочки при осе- симметрических нагрузках за пределом упругости  
Buckling of a thin walled conical shell for axially-symmetric loads beyoned to elastic limit.
- R. GRĄDZKI, Stateczność i stan zakrytyczny swobodnie podpartej tarczy trapezowej poddanej jednokierunkowemu ścisnaniu.  
Устойчивость и закритическое поведение трапецевидной пластинки при сжатии  
Bucling and post-bucling behaviour of trapezoidal webplates under compression.
- M. NIEZGODZIŃSKI, W. ZWOLIŃSKI, Analiza wytrzymałościowa pionowej przepływowej wytwornicy pary elektrowni jądrowych.  
Расчет на прочность вертикальных парогенераторов атомных электростанции.  
Strength analysis of the vertical flow steam generators of nuclear power plants.
- J. OWCZARZY J. KOSSOWSKI, Nielasyczne zachowanie się modelu hiperboloidalnej chłodni kominowej pod obciążeniem osiowo symetrycznym.  
Пример модели неклассического поведения гиперболической оболочки градирни при осесимметрической нагрузке  
A nonelastic behaviour model of hyperbolic shell of cooling tower under axisymmetric loading.
- A. WŁOSNOWICZ M. LINEK, Wpływ temperatury i szybkości rozciągania na wytrzymałość włókien poliestrowych o niskim stopniu orientacji.  
Влияние температуры и скорости растяжения на прочность полиэфирных волокон с малой вытяжкой.  
Influence of temperature and stretching rate on the strenght of polyester fibres of smoll elongation.
- E. RUSIŃSKI, Analiza konstrukcji prętowo-tarczowych metodą elementów skończonych.  
Анализ стержне — складчатой конструкции с помощью метода конечных элементов.  
An analysis of the rod-shield constructions by the finite element method.
- N. СУДАНОВА, О однозначности zasady наименьшего скрепования (наименьшего прzymуса) Gaussa.  
Об однозначности принципа наименьшего принуждения Гаусса.  
On uniqueness of Gauss least constraint principle.
- K. DEMS, Zasady wariacyjne mechaniki dla zmiennych obszarów i ich wykorzystanie w optymalizacji konstrukcji.  
Вариационные правила механики для переменных областей и их использование для оптимизации конструкции.  
The variational principles of mechanics for variable domains and their utilization for structural optimization.
- A. LIŃEWKA E. ROGALSKA, Stan naprężenia przy niesymetrycznym rozciąganiu osiowym materiałów perforowanych.  
Напряженное состояние для несимметричного одноосного растяжения перфорированных материалов.  
Stress state for off-axis tension of the perforated materials.
- M. NOWAK, Oznaczenie granicy zmęczenia tworzy sztucznych metodą schodkową.  
Определение усталостной прочности пластмасс методом вверх—вниз.  
Determination of fatigue strenght of plastics according to up-and-down method.

- H. WOJCIŚCZAKOWSKI, Wyznaczenie współczynników uderzenia w układzie o dwu stopniach swobody z nieliniowością typu Duffinga i Hertza.  
Определение динамических коэффициентов в системе с двумя степенями свободы с нелинейностью типа Дуффинга и Герца.  
The determination of dynamic factors in a system with two degrees of freedom and Duffing-Hertz nonlinearity.
- J. KOLENDĄ, О wykorzystaniu funkcji własnych do opisu drgań wymuszonych podatnie podpartych asymetrycznych wałów.  
О использовании собственных форм для описания вынужденных колебаний ассиметрических валов на податливых фундаментах.  
Use of modes for description of forced vibrations of flexible supported asymmetrical shafts.
- K. RUP, Nieizotermiczny, laminarny przepływ nienewtonowskiej cieczy w krótkiej rurze.  
Неизотермическое ламинарное течение неньютоновской жидкости на термическом начальном участке трубы.  
Laminar flow of a non-newtonian fluid in the thermal entrance region of smooth pipe.

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty  
Cena prenumeraty krajowej  
półrocznie zł 60.—  
rocznie zł 120.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

— do 25 listopada na I półroczu roku bieżącego i na cały rok następny,

— do 10 czerwca na II półroczu roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmują RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17 pokój 1724)*

---

Mech. Teor. T. 19, z. 1, s. 1—164, Warszawa 1981, Indeks 36523