

J^u 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



PL ISSN 0079-3701

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 18 · ZESZYT 4

WARSZAWA 1980

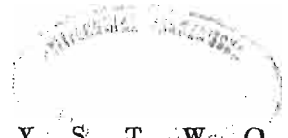
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

W. I. ANDRZEJEW, Zagadnienia koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w ośrodku niejednorodnym. Część I. Przegląd. Вопросы концентрации напряжений вблизи отверстий в неоднородной среде. Ч. I. Обзор. Stress concentration in the neighbourhood of cavities in nonhomogeneous media. Part I. Review.	519
K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, Zagadnienia odwrotne pól temperatur — przegląd. Обратные задачи теплопроводности — обзор литературы. The inverse heat conduction problems-review.	535
P. WIEWIÓRSKI, Efekt przejściowy przy przenikaniu słabej fali uderzeniowej przez rozgałęzienie przewodów. Переходный эффект во время проникания слабой ударной волны через разветвление трубопроводов. Transitional effect at the transmission of a weak shock wave through a branching of pipes.	555
A. Topoliński, Numeryczna analiza opływu płaskiej podstawy walca kołowego naddźwiękowym strumieniem lepkiego gazu. Численный анализ обтекания плоского основания кругового цилиндра сверхзвуковым потоком вязкого газа. Numerical analysis of flow around a flat base of circular cylinder by supersonic stream of viscous gas.	565
J. PIETRUCHA, Z. SZEWCZYK, Nowa metoda syntezy układu sterowania flatterem profilu. Новый метод управления флаттером профиля. A new method of flutter control of the airfoil.	577
M. CHRZANOWSKI, J. MADEJ, Budowa granicznych krzywych zniszczenia w oparciu o koncepcję parametru uszkodzenia. Построение предельных кривых разрушения с помощью параметра повреждений. The construction of failure limit curves by means of a damage.	587
A. DOLLAR, Z. KORDAS, Kształty prętów silnie zakrzywionych poddanych zginaniu z rozciąganiem i ścinaniem, całkowicie uplastycznionych w stadium zniszczenia. Формы стержней сильно искривленных подвергнутых изгибу с растяжением и сдвигом в стадии полной пластичности при разрушении. The shapes of thick curved bars subjected to bending, tension and shear showing complete yield at the stage of collapse.	603
St. BIELAK, A. DUDA, Powłoki prostokątne oparte na okręgu pracujące w stanie zgięciowym. Изгиб линейчатых оболочек опёртых на окружности. Bending state of ruled surface shells based on a circle.	623
W. WOJEWÓDZKI, J. SOKALSKI, Drgania sprężystoelastycznej powłoki kulistej. Колебания упруго-вязкопластической сферической оболочки. Oscillations of an elastoviscoplastic spherical shell.	635
J. HOLNICKI-SZULC, Sprężanie termiczne na przykładzie zagadnienia kołowo-symetrycznego. Образование предварительные термических напряжений на примере осесимметрической задачи. Thermal prestressing — an example of rotating disk.	649
BIULETYN INFORMACYJNY	655

74720



P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 8 • Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1 9 8 0

P A N S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИОННЫЙ

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR,
ANDRZEJ SZANIAWSKI — REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR,
MONIKA WĄGROWSKA — REDAKTOR,
ELŻBIETA OLSZEWSKA — SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN. pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 680. Ark. wydawniczych 12,0. Ark. drukarskich 9,25. Papier ofs. V kl. 71 g. 70×100.
Oddano do składania 7.VIII 1980 r. Druk ukończono w marcu 1981 r. Zam. 1050/12/80 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ZAGADNIENIA KONCENTRACJI NAPRĘŻEŃ W POBLIŻU OTWORÓW W OŚRODKU
NIEJEDNORODNYM. CZĘŚĆ I. PRZEGLĄD.

W. I. ANDREJEW (MOSKWA)

W zagadnieniach mechaniki niejednorodnego ośrodka ciągłego rozpatruje się trzy podstawowe typy niejednorodności: nieciągłą, dyskretną i stochastyczną. Dla każdego z przedstawionych typów, równania oraz metody rozwiązania są zupełnie różne, dlatego można rozpatrywać trzy samodzielne klasy zagadnień mechaniki niejednorodnego ośrodka ciągłego.

Zadania z pierwszym typem niejednorodności sprowadzają się do równań różniczkowych ze zmiennymi współczynnikami, w drugim przypadku rozwiązanie polega na „zszyciu” rozwiązań na granicy obszarów z własnościami jednorodnymi, w ostatnim przypadku należy posługiwać się aparatem statystyki matematycznej.

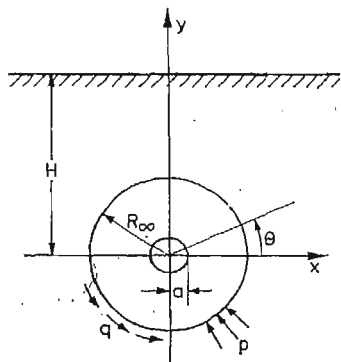
W tej pracy rozpatrzmy niejednorodności pierwszego typu, kiedy mechaniczne charakterystyki materiału są ciągłymi funkcjami współrzędnych, przy tym w każdym punkcie ciała spełnione są ogólne prawa teorii sprężystości lub plastyczności.

Niejednorodność o konkretnej postaci powstaje przy różnych sposobach obróbki części, w procesie produkcji (działanie wybuchowe, prowadzące do lokalnego zagęszczenia lub spulchnienia materiału, twardnienie betonu itp.), przy napromieniowaniu, istnieniu pola temperatury itd. W ostatnim przypadku, w zależności od materiału, gradient temperatury powodujący niejednorodność może być istotnie różny, od kilkuset stopni (metale) do kilku stopni (zamarznięty grunt). I tak w zamarzniętym gruncie przy zmianie temperatury o 5–7 stopni moduł Younga może zmienić się dwukrotnie i więcej. Zależność charakterystyk mechanicznych od współrzędnych wyznacza się doświadczalnie w każdym konkretnym przypadku, a potem aproksymuje się funkcje $E(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$, $\sigma_r(x, y, z)$ itd. Tutaj E , ν i σ_r są odpowiednio modułem Younga, współczynnikiem Poissona, granicą płynięcia materiału. Często otrzymanie odpowiednich danych doświadczalnych jest bardzo trudne, dlatego funkcje te mogą być wzięte w przybliżeniu, aby tylko pokazywały tendencję zmieniania się własności, a w rezultacie rozwiązania konkretnego zadania mechanicznego otrzymamy jakościową ocenę wpływu tego czy innego czynnika. Dalej będziemy zakładać, że wszystkie charakterystyki mechaniczne ośrodka są znanymi i zadanymi funkcjami.

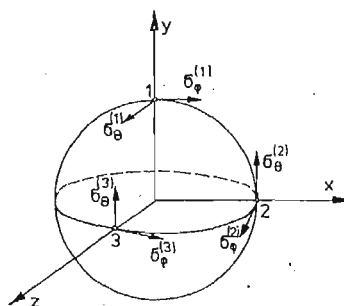
Jedne z pierwszych prac poświęconych teorii sprężystości ośrodka niejednorodnego napisał S. G. MICHLIN [1, 2], wyprowadził w nich równania płaskiego zagadnienia dla ciągłej i dyskretniej niejednorodności. Później podobne równania dla bardziej złożonych przypadków zostały podane w pracach [3, 4 i innych]. Jedną z podstawowych prac na temat teorii plastyczności ośrodka niejednorodnego jest praca W. OLSZAKA, J. RYCHLEWSKIEGO i W. URBANOWSKIEGO [5]. W ostatnich latach prace poświęcone mechanic

ośrodka niejednorodnego opublikowali G. P. KOLCZIN [6, 7], W. A. ŁOMAKIN [8], N. A. ROSTOCEW [9] i inni autorzy [10-12]. Jest także duża ilość prac poświęconych konkretnym zagadnieniom mechaniki, w których niejednorodność odgrywa istotną rolę. W pierwszej kolejności, oczywiście, rozwiązano klasyczne zagadnienia mechaniki ciała stałego — zagadnienie Lamégo dla walca i kuli [13-15 i inne], zadanie o klinie [16], zadanie Flamanta-Boussinesq'a [17, 18]. Porównanie otrzymanych rozwiązań ze znanymi klasycznymi, pokazuje, że niejednorodność ośrodka może istotnie zmienić obraz stanu naprężeń i odkształceń.

Niniejszy przegląd poświęcony jest przede wszystkim pracom, w których rozwiązane są zadania o rozkładzie naprężeń w pobliżu otworów. Wśród wielu zastosowań takich zadań w technice, szczególna uwaga będzie zwrócona na zagadnienie koncentracji naprężeń w pobliżu podziemnych pustek (jam, wydrążień), mających prostą postać: pustka kulista i usytuowany poziomo, dostatecznie długi otwór walcowy. W pierwszym przypadku zadanie jest osiowoosymetryczne względem osi Y (Rys. 2.), a w drugim zadanie można rozpatrywać jako zadanie o płaskim stanie odkształcenia (Rys. 1.). Jedyнным obciążeniem,



Rys. 1



Rys. 2

które powoduje powstanie pola naprężeń jest ciężar własny ośrodka. Przy tym ciężar własny jako obciążenie zewnętrzne występuje dwójako. Jeśli z masywu wyciąć pewną objętość zawierającą pustkę, to przechodząc do zadania brzegowego i zewnętrznego brzegu danej objętości, należy przyłożyć obciążenie normalne p i styczne q .

$$(1) \quad p = -\gamma(H - R_\infty \cos \theta) \left(\frac{\nu}{1-\nu} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right),$$

$$q = \frac{\gamma}{2} (H - R_\infty \cos \theta) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sin 2\theta,$$

gdzie γ — ciężar właściwy materiału, R_∞ — promień wyciętej objętości, θ — kąt biegunowy. Oprócz tego, ciężar własny wywołuje siły objętościowe, które we współrzędnych kartezjańskich mają postać $Y = -\gamma$, $X = Z = 0$, a we współrzędnych biegunowych i kulistych

$$(2) \quad R = -\gamma \cos \theta,$$

$$\Theta = \gamma \sin \theta,$$

trzecia składowa jest równa zeru.

Określenie naprężeń nawet w przypadku jednorodnym nie jest zadaniem elementarnym, jest kilka prac [19-22], w których rozpatruje się płaskie zagadnienie z otworem walcowym. Na przykład, zgodnie z [20], naprężenie σ_θ w pobliżu szczeliny określa się wzorem

$$(3) \quad \sigma_\theta = \frac{\gamma a}{4} \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \left[\left(3 \frac{r}{a} + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \Theta + \left(-\frac{r}{a} + \frac{a^3}{r^3} - 4 \frac{a^5}{r^5} \right) \sin 3\Theta \right] - \\ - \frac{\gamma H}{2} \left[\frac{1}{1-\nu} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\Theta \right] + \\ + \gamma a \left\{ \left[\frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{a}{r} - \frac{\nu}{4(1-\nu)} \frac{a^3}{r^3} \right] \sin \Theta + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{4} \frac{r}{a} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} + \frac{a^5}{r^5} \right] \sin 3\Theta \right\},$$

gdzie r — promień poprowadzony ze środka pustki, a — promień otworu. W przytoczonych wyrażeniach ostatnie składowe odpowiadają stanowi naprężenia w nieskończonej płaszczyźnie z otworem, a pierwsze dwie występują przy przejściu do półpłaszczyzny. Poza tym, druga składowa odpowiada rozwiązaniu zadania Kirscha, jeśli w kierunku pionowym występuje obciążenie γH , a w poziomym $\frac{\nu}{1-\nu} \gamma H$. W ten sposób, wpływ ciężaru własnego wyciętej objętości określa się, w przytoczonym wyrażeniu, pierwszą i trzecią składową. Jeśliby ocenić rząd poprawki, jaką wprowadza uwzględnienie ciężaru własnego, to okazuje się, że na brzegu otworu wzdłuż promienia poziomego ($\Theta = 0, \pi$) poprawka zeruje się, a przy innych wartościach Θ zależy ona od ν i osiąga największą wartość dla $\nu = 0$ w punkcie $r = a, \Theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Wartość poprawki równa jest γa , natomiast rząd naprężeń, określony drugą składową, równy jest γH . Można wyciągnąć dwa wnioski:

1. Wzdłuż poziomego promienia, tam gdzie występuje największa koncentracja naprężeń, uwzględnienie wpływu ciężaru własnego ośrodka nie zwiększa dokładności w porównaniu ze znacznie prostszym zadaniem Kirscha.

2. Uwzględnienie wpływu ciężaru własnego ośrodka daje istotną poprawkę w rozwiązaniu, gdy promień otworu jest porównywalny z głębokością położenia szczeliny H . W przeciwnym przypadku poprawkę można pominąć.

Oczywiście, podobne wnioski będą prawdziwe również w przypadku pustki kulistej.

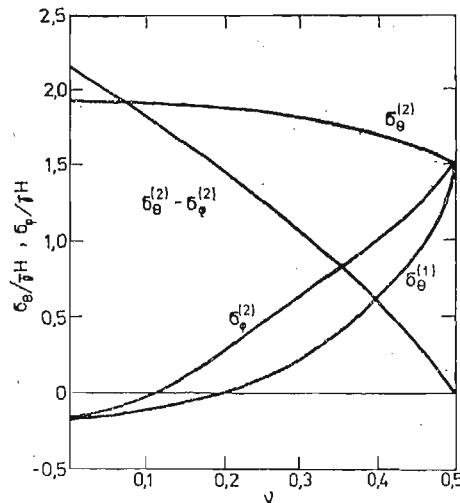
W ten sposób, dla oceny stanu naprężenia przy spełnieniu warunku $H \gg a$ w przypadku jednorodnym można wykorzystać rozwiązanie Kirscha w zadaniu z otworem walcowym, a przy pustce kulistej — zadanie o ściskaniu ośrodka w trzech kierunkach z takim samym otworem. Ostatnie rozwiązanie otrzymuje się bardzo łatwo drogą superpozycji trzech rozwiązań dotyczących rozciągania (ściskania) pręta z pustką kulistą [23]. Przytoczymy wzory na naprężenia występujące przy ściskaniu ośrodka w trzech kierunkach. Niech w pewnej odległości od pustki na ośrodek oddziałują obciążenia ściskające

$$\sigma_y = -\gamma H, \quad \sigma_x = \sigma_z = -\frac{\nu}{1-\nu} \gamma H.$$

Wówczas w pobliżu pustki naprężenie $\sigma_r = 0$, a dwa pozostałe naprężenia normalne w punktach charakterystycznych oblicza się ze wzorów (Rys. 2).

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} &= -\frac{3}{2} \gamma H \frac{(1+\nu)(5\nu-1)}{(7-5\nu)(1-\nu)}, \\ \sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\theta^{(3)} &= -\frac{3}{2} \gamma H \frac{(9-16\nu+5\nu^2)}{(7-5\nu)(1-\nu)}, \\ \sigma_\varphi^{(2)} = \sigma_\varphi^{(3)} &= -\frac{3}{2} \gamma H \frac{(-1+14\nu-15\nu^2)}{(7-5\nu)(1-\nu)}. \end{aligned}$$

Na Rys. 3 pokazaliśmy zależności tych trzech naprężeń (zauważmy, że przy zmianie kąta Θ przyjmują one wartości ekstremalne) od współczynnika Poissona. Poza tym, przytoczyliśmy wykres różnicy naprężeń głównych $\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\varphi^{(2)}$. Widać, że wykres ten leży powyżej wykresu $\sigma^{(2)}$ dla małych wartości ν i w tym naogół rzadkim przypadku może odpowiadać za zniszczenie. Praktycznie, przy wartościach ν (0.2 ÷ 0.35) różnica między naprężeniami głównymi $\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_r^{(2)}$ tzn. w rzeczywistości samo naprężenie $\sigma_\theta^{(2)}$ ($\sigma_r = 0$) jest maksymalne i zmienia się nieznacznie przy zmianach ν . Ostatni fakt pozwala stosować do oceny naprężeń jeszcze prostsze rozwiązanie — zadanie Lamégo dla grubościennej powłoki kulistej. Zauważmy, że rozwiązanie (4) dla $\nu = 0.5$ (przypadek równomiernego wszech-



Rys. 3

stronnego ściskania) jest rozwiązaniem zadania Lamégo. Jeśli z tego punktu widzenia rozpatrzmy powyżej wspomniane rozwiązanie zadania Kirscha dla płaskiego zagadnienia

z otworem walcowym, to okaże się, że współczynnik koncentracji naprężeń $K_\delta = \frac{\sigma_{0 \max}}{\gamma H}$

w zależności od współczynnika Poissona zmienia się w granicach od 2 ($\nu = 0.5$) do 3 ($\nu = 0$), co pozwala stosując rozwiązanie zadania Lamégo dla rury grubościennej, wprowadzić poprawkę dla dowolnej wartości ν .

Przytoczone powyżej rozważania, dotyczące sprowadzenia zadania o koncentracji naprężeń w pobliżu podziemnych pustek do znacznie prostszych zadań miały dwa cele. Po pierwsze, pokazaliśmy, że założenia o nie istnieniu ciężaru własnego i o tym, że współczynnik Poissona jest bliski 0.5 przy określonych warunkach nie dają istotnych różnic w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym. Po drugie, przy przejściu do zagadnień z własnościami niejednorodnymi rozpatrzenie tych dużo prostszych zadań pozwala dużo jaśniej i zrozumialej wyjaśnić wpływ różnych czynników na stan odkształcenia i naprężenia. Przy tym, jak widać, wyniki obliczeń tak jak i w zadaniach dotyczących ośrodka jednorodnego nie będą bardzo różnić się od rzeczywistości. Większość prac o koncentracji naprężeń w ośrodku niejednorodnym, tak w teorii sprężystości, jak w teorii plastyczności poświęcona jest jednowymiarowym zadaniom symetrycznym. Przed przejściem do rozpatrzenia poszczególnych prac, warto zatrzymać się krótko na podstawowych równaniach mechaniki ciągłego ośrodka niejednorodnego i niektórych metodach ich rozwiązań. Jak wspomnieliśmy powyżej, równania teorii sprężystości ciągłego ośrodka niejednorodnego dla zagadnienia płaskiego zostały wyprowadzone w pracach [1, 3]. Później analogiczne równania otrzymano w pracach [4, 6 i innych]. Tak jak w przypadku płaskiego zagadnienia jednorodnego, możemy posłużyć się funkcją naprężeń Airy'ego — i w ten sposób zagadnienie sprowadzi się do jednego równania czwartego rzędu, które można zapisać w postaci

$$(5) \quad \nabla^4 \Phi + L\Phi + P^H + P^0 = 0.$$

gdzie $\nabla^2 = \Delta$ — operator Laplace'a, L — operator różniczkowy trzeciego rzędu, a P^H i P^0 — odpowiednio niejednorodny i jednorodny operator, działające na człony nie zawierające Φ . Zarówno w biegunowym, jak i w kartezjańskim układzie współrzędnych wspomniane operatory przy dowolnych zależnościach, obu stałych sprężystości od współrzędnych mają bardzo skomplikowany zapis (tak np. operator L w biegunowym układzie współrzędnych, w ogólnym przypadku składa się z 33 składowych). Jednak dla przejrzystości przytoczymy tutaj postać operatorów L i P^H dla szczególnego przypadku, kiedy $\nu = \text{const.}$, a moduł Younga zadany jest przez jedną z prostszych zależności $E = E_0 r^n$, przy czym z pośród sił objętościowych różna od zera jest tylko składowa pionowa (Rys. 1.) równa γ (ciężar własny ośrodka). W tym przypadku

$$(6) \quad L\Phi = -\frac{2n}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{2n}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \left[-\frac{2n}{r^2} + \frac{Bn}{r^2} + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \\ + \left[\frac{3n}{r^4} - \frac{Bn(n+1)}{r^4} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \left[\frac{n}{r^3} - \frac{Bn(n+1)}{r^3} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

$$(7) \quad P^H = \frac{n(n+1)}{2r^2} [-(1-B)\gamma \cos \theta + (1+B)\gamma \cos \theta \cos 2\theta] - \\ - \frac{n}{r} \left[-2(1-B)\gamma \cos \theta + \frac{1+B}{2}\gamma \cos \theta \cos 2\theta + (1+B)\gamma \sin \theta \sin 2\theta \right].$$

Tutaj $B = \frac{\nu}{1-\nu}$. Widać, że także w tym stosunkowo prostym przypadku równanie (5) ma bardzo złożoną postać.

Wśród różnych metod rozwiązań płaskiego zagadnienia niejednorodnej teorii sprężystości, w większości stosuje się tradycyjnie: metodę zmiennej zespolonej [24], funkcje specjalne [18], metodę małego parametru, rozwiązania przy pomocy szeregów [4, 25] itd. Interesująca jest ogólna metoda rozwiązania równania (5), przedstawiona przez G. B. KOŁCZINA [26] metoda kolejnych przybliżeń. W metodzie tej poszukuje się funkcji Φ w postaci szeregu

$$(8) \quad \Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i.$$

Wówczas równanie (5) można przedstawić w postaci nieskończonego układu równań

$$(9) \quad \begin{aligned} \nabla^4 \Phi_0 &= -P^H - P^0, \\ \nabla^4 \Phi_1 &= -L\Phi_0, \\ &\dots \dots \dots \\ \nabla^4 \Phi_k &= -L\Phi_{k-1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy, że szereg (8) jest malejący i poczynając od pewnego N odrzucimy jego człony przyjmując, że ostatni zatrzymany jest dostatecznie mały, to otrzymamy $L\Phi_{n-1} = 0$.

Wówczas możemy przejść do skończonego układu równań (9), w którym pierwsze równanie daje rozwiązanie zadania jednorodnego, a wszystkie następne są pewnymi poprawkami wynikającymi z niejednorodności. Przy korzystaniu z tej metody warunki brzegowe musimy spełnić jedynie przy całkowaniu pierwszego równania, tzn. rozwiązując zadanie jednorodne. We wszystkich następnych etapach całkowania warunki brzegowe są jednorodne. Jeśli w pierwszym etapie nie udaje się dokładnie spełnić warunków na granicy, to można to osiągnąć przy obliczeniu następnych przybliżeń. Metoda ta była zastosowana przez G. B. KOŁCZINA w rozwiązaniu pewnych zagadnień [6], a także przez W. N. TORLINA [25]. Należy zauważyć, że jak przyznaje sam autor tej metody, zbieżność jej nie jest udowodniona i może być jedynie przeanalizowana drogą porównania kolejnych przybliżeń.

Poniżej, na przykładzie zadania Lamégo rozpatruje się dwa przypadki posługiwania się tą metodą. Rozpatrzmy rurę grubościenną, której promień wewnętrzny równy jest a , a zewnętrzny $b = 2a$, obciążoną zewnętrznym równomiernym ciśnieniem p . Przypuśćmy, że $\nu = 0.5$, a zależność modułu Younga od promienia ma postać

$$(10) \quad E = E_0 r^n.$$

Takie zadanie ma rozwiązanie ścisłe, przy czym nie potrzeba posługiwać się równaniem (5), lecz można rozwiązać zadanie, przyjmując jako funkcję rozwiązującą naprężenie σ_r . W danym przypadku zadanie sprowadza się do rozwiązania równania drugiego rzędu [27, 28]. Nie zatrzymując się nad szczegółami wyprowadzenia tego równania i metodzie rozwiązania (co pokażemy w drugiej części pracy), przytoczymy tu postać równania dla danego przypadku oraz wzory na naprężenie otrzymane ze ścisłego rozwiązania zadania

$$(11) \quad r\sigma_r'' + (3-n)\sigma_r' = 0.$$

Tutaj prim oznacza różniczkowanie względem promienia

$$(12) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p}{1-2^{n-2}} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{n-2} \right], \\ \sigma_\theta &= -\frac{p}{1-2^{n-2}} \left[1 - (n-1) \left(\frac{r}{a} \right)^{n-2} \right]. \end{aligned}$$

Dane rozwiązanie jest prawdziwe dla każdego n , za wyjątkiem $n = 2$. W tym przypadku w wyniku całkowania otrzymuje się logarytmy. Zadanie to można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń, która może być zastosowana do równania (11). Jeśli wydzielić w tym równaniu część odpowiadającą zadaniu jednorodnemu, to można zapisać je w postaci

$$(11a) \quad r\sigma_r' + 3\sigma_r' = n\sigma_r'.$$

Z prawej strony występuje odpowiednik operatora L z równania (5). Znajdując rozwiązanie zadania jednorodnego

$$(13) \quad \begin{aligned} \sigma_{r0} &= -\frac{4p}{3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{\theta 0} &= -\frac{4p}{3} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \end{aligned}$$

z równania (11a) można obliczyć pierwszą poprawkę danego rozwiązania, która ma postać

$$(14) \quad \begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{4n}{3} \left[-\frac{1}{3} \ln 2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{a^2}{r^2} \ln \frac{r}{a} \right], \\ \sigma_{\theta 1} &= \frac{4n}{3} \left[-\frac{1}{3} \ln 2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \ln \frac{r}{a} \right) \right], \end{aligned}$$

a po pierwszej iteracji otrzymuje się rozwiązanie w postaci sumy

$$(15) \quad \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \sigma_{r0} + \sigma_{r1}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \sigma_{\theta 0} + \sigma_{\theta 1}. \end{aligned}$$

Porównanie naprężeń σ_θ , obliczonych ze wzorów (12) i (15) pokazuje że już po pierwszym przybliżeniu otrzymuje się nie wiele różniące się wyniki dla pewnych n , na przykład $n = 1$ i $n = -2$.

Jednak w przypadku $n = 3$ różnica wynosi 50% i w tym przypadku jasne jest, że pierwsze przybliżenie jest niewystarczające. Widać, że nawet przy rozwiązaniu jednego zadania, w zależności od ilości parametrów, potrzeba dużej ilości etapów iteracji dla otrzymania dobrych wyników. Zauważmy, że w danym przykładzie ścisłe rozwiązanie otrzymuje się łatwiej, niż przy zastosowaniu metody kolejnych przybliżeń, ale często metoda ta może być stosowana znacznie efektywniej, kiedy ścisłego rozwiązania nie udaje się otrzymać.

Przytoczony poniżej drugi przykład również dotyczy zagadnienia zbieżności rozpatrywanej metody kolejnych przybliżeń. Autorowi tej pracy wspólnie z T. S. Danikną udało się dla szczególnego przypadku otrzymać rozwiązanie w postaci szeregu, który przy określonych warunkach jest zbieżny do ścisłego rozwiązania. Tak jak i w poprzednim przykładzie, rozpatruje się rurę grubościenną, której wewnętrzny promień $\rho = 1$, a zewnętrzny $\rho = b$ (ρ — bezwymiarowy promień). Rura może być obciążona dowolnym rów-

nomiernym ciśnieniem na zewnętrznym i wewnętrznym brzegu. Kładąc $\nu = 0.5$ i przyjmując zależność modułu Younga od promienia w postaci

$$(16) \quad E(\varrho) = E_0 \left(1 - \frac{m}{\varrho^n} \right),$$

podstawowe równanie rozwiązujące to zadanie można zapisać w następującej postaci

$$(17) \quad \frac{d^2 F}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF}{d\varrho} - \frac{F}{\varrho^2} = L(F),$$

gdzie F — funkcja związana z naprężeniami następującymi zależnościami

$$\sigma_r = \frac{F}{\varrho}, \quad \sigma_\theta = \frac{dF}{d\varrho},$$

a $L(F)$ operator określony przez niejednorodność materiału

$$(18) \quad L(F) = \frac{m}{\varrho^n} \left(\frac{d^2 F}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF}{d\varrho} - \frac{F}{\varrho^2} \right) + \frac{mn}{\varrho^{n+1}} \left(\frac{dF}{d\varrho} - \frac{F}{\varrho} \right).$$

W przypadku $m = 0$ moduł Younga jest stały, operator $L(F) = 0$ i równanie (17) odpowiada zadaniu jednorodnemu. Zadając funkcję F w postaci szeregu $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$ i przekształcając równanie (17) w układ (9), udaje się skonstruować zależność rekurencyjną

$$(19) \quad L(F_k) = \beta L(F_{k-1}) = \beta^k L(F_0),$$

gdzie

$$\beta = \frac{2m\alpha}{n+2}, \quad \alpha = \frac{b^{n+2} - 1}{b^n(b^2 - 1)},$$

Zauważmy, że warunki brzegowe w tym rozwiązaniu spełnione są już w pierwszym etapie przy rozwiązaniu zadania jednorodnego, a we wszystkich następnych etapach

$$(20) \quad F_k(\varrho = 1) = F_k(\varrho = b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Na podstawie zależności (19) daje się także wyrazić wszystkie następne rozwiązania F przez funkcję F_1 : $F_k = \beta^{k-1} F_1$,

$$F_k = \beta^{k-1} F_1,$$

przy tym

$$F_1 = \frac{2mB_0}{n+2} \left[\frac{\alpha}{\varrho} + (1-\alpha)\varrho - \frac{1}{\varrho^{n+1}} \right],$$

a B_0 — jedna ze stałych rozwiązania jednorodnego zadania

$$F_0 = \frac{B_0}{\varrho} + C_0 \varrho.$$

W ten sposób, pełne rozwiązanie równania (17) przedstawia się w postaci nieskończonej sumy

$$(21) \quad F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k = \frac{B_0}{\varrho} + C_0 \varrho + F_1 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1}.$$

Szereg ten jest zbieżny dla $|\beta| < 1$ i w tym przypadku równy $\frac{\beta}{1-\beta}$. Po prostych przekształceniach funkcję F można doprowadzić do postaci

$$(22) \quad F = C_{01}\varrho + \frac{\beta_{01}}{\varrho} - B_{01} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\varrho^{n+1}}.$$

gdzie

$$B_{01} = \frac{B_0}{1-\beta}, \quad C_{01} = C_0 + B_{01} \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Ścisłe rozwiązanie równania (17) otrzymano w [29], pokrywa się ono z rozwiązaniem (22). Rozpatrzmy warunek zbieżności szeregu (21) — $|\beta| < 1$, który nakłada określone ograniczenia na parametry m , n i promień b . Tak np. dla $m = 0.75$, $n = -1$, $b = 2$, $\beta = 1$ szereg jest rozbieżny. Dla funkcji (16) asymptotycznie zbiegających do wartości granicznej przy zwiększeniu się ϱ , n jest zawsze dodatnie, a $m \leq 1$ (jeśli $m > 1$, to dla $\varrho = 1$, E musiałoby być ujemne). Rozpatrując przypadek $b \rightarrow \infty$ ($\alpha = 1$) można określić obszar zbieżności szeregu (21) w danym przypadku. Ponieważ teraz $\beta = \frac{2m}{n+2}$, to warunkiem koniecznym zbieżności szeregu jest, by stałe m i n były związane zależnością

$$-\frac{n+2}{2} < m < \frac{n+2}{2}.$$

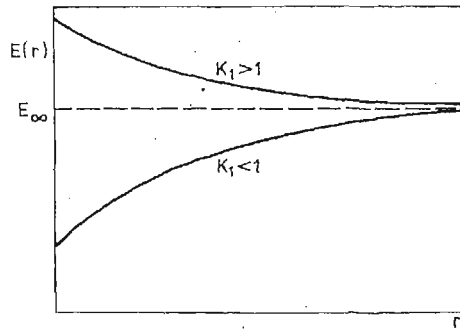
Prawa nierówność przy przedstawionych powyżej ograniczeniach ($m \leq 1$, $n > 0$) spełniona jest zawsze, a lewa może nie być spełniona, wówczas szereg będzie rozbieżny. W tych przypadkach, kiedy szereg jest zbieżny, szybkość jego zbieżności w dużym stopniu zależy od wielkości β . Dla małych β w celu otrzymania dostatecznej dokładności konieczne są 2-3 przybliżenia. Jeśli β jest bliskie 1, to dla otrzymania dokładnych wyników może być niezbędna duża liczba iteracji. Fakt ten jest potwierdzony także przez rozpatrzony powyżej przykład.

Zanim przejdziemy do omówienia poszczególnych prac, dotyczących rozwiązań zadań związanych z koncentracją naprężeń w ośrodku niejednorodnym, przedyskutujemy bardziej szczegółowo wpływ niejednorodności na mechaniczne własności materiałów. Jako podstawowe źródła rozpatrzmy prace [5, 29]. W pracy [5] główną uwagę zwrócono na zmianę sprężysto-plastycznych własności metali pod wpływem dwóch podstawowych przyczyn: napromieniowanie strumieniami neutronowymi i pole temperatury. Przytoczone są dane doświadczalne dotyczące wpływu wymienionych czynników na wykres rozciągania, granicę płynięcia oraz wytrzymałość pewnych metali. Zauważmy, że zwiększenie strumienia neutronów prowadzi do zwiększenia się dwóch ostatnich charakterystyk, a zwiększenie temperatury obniża granicę wytrzymałości i plastyczności. Pokazane zależności doświadczalne mają naogół skomplikowany charakter, różny dla różnych materiałów i ich analityczne przybliżenie jest bardzo trudnym zadaniem.

W pracy [29] na podstawie własnych badań doświadczalnych oraz na podstawie wyników prac [30-34] przytoczono dane na temat własności mechanicznych minerałów i ich zmian, powstających pod wpływem wybuchów i procesów cementacji. Przy wybuchowym

wierceniach tuneli oraz przy tworzeniu pustek za pomocą zamaskowanego wybuchu mogą zachodzić różne zjawiska, w zależności od typu skały. W pewnych przypadkach może nastąpić zgęszczenie materiału, prowadzące do zwiększenia modułu odkształcenia (analogiczne zjawisko zachodzi w minerałach zgęszczonych przez cementację), a w kruchych skałach może powstać obszar zarysowań, w którym moduł odkształcenia jest mniejszy niż w niezniszczonym masywie. Na Rys. 4 przedstawiony jest charakter zależności dwóch omówionych typów. W miarę oddalania się od pustki, moduł dąży asymptotycznie do wartości wyjściowej. Dla takich zależności zakłada się analityczną formę zapisu (tutaj zastosowano inne oznaczenie niż w pracy [29])

$$(23) \quad E = E_{\infty} \left[1 + (k_1 - 1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right],$$



Rys. 4

gdzie E_{∞} — moduł Younga w nienaruszonym masywie, $k_1 E_{\infty}$ — wartość modułu na brzegu pustki, a — promień pustki, n — parametr. Funkcja (23) dobrze opisuje rzeczywiste zależności, dla $k_1 < 1$ jest to typ niższej krzywej na Rys. 4, a dla $k_1 > 1$ — wyższej. Dla funkcji asymptotycznie zbiegających do wartości granicznej, oczywiście $n > 0$. Zauważmy, że podobna zależność występowała już wcześniej (16).

Poza zmianą własności odkształceniowych, przy pojawieniu się niejednorodności po wybuchu zachodzi także zmiana wytrzymałościowych własności materiału. W [29] przytoczone są pewne zależności granicy wytrzymałości w miarę oddalania się od brzegu pustki. W celu analitycznego zapisania tej zależności oraz zależności granicy płynięcia od promienia można też wykorzystać funkcje typu (23). Zatrzymajmy się jeszcze nad pewnymi postaciami aproksymacji własności mechanicznych. W niektórych pracach [5, 14, 38 i innych] dla modułu Younga stosuje się funkcje typu $E = E_0 \varrho^n$, $E = E_0(A + B\varrho)^n$, $E = E_0 e^{n\varrho^k}$ i inne. Pierwsza z przytoczonych funkcji jest najprostszą przy całkowaniu równania różniczkowego, jednak może ona dość efektywnie aproksymować rzeczywistą zależność jedynie w ciałach ograniczonych, ponieważ dla $\varrho \rightarrow \infty$, E również rośnie nieograniczenie, co przeczy rzeczywistości. Zatrzymajmy się jeszcze krótko na drugiej charakterystyce sprężystej — współczynniku Poissona ν . W pracach [35, 37 i innych] dla tego parametru stosuje się także różne zależności funkcjonalne, jednak niedostateczność i niewiarygodność danych doświadczalnych dotyczących wpływu niejednorodności na ten współczynnik nie pozwala określić tej zależności. Oprócz tego, w pracy [37] wskazuje się

na stosunkowo niewielki wpływ tej charakterystyki na stan naprężenia, a na podstawie wszystkich powyższych rozważań należy w obliczeniach przyjmować stały współczynnik Poissona.

Wracając do problemu koncentracji naprężeń w pobliżu pustki w masywie skalnym, rozpatrzmy zagadnienie o podstawowym stanie naprężeń w nim. Korzystając z pracy [29] i pomijając anizotropię masywu, w znacznej odległości od pustki naprężenia możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(24) \quad \begin{aligned} \sigma_y &= -\gamma H, \\ \sigma_x &= \sigma_x = -\frac{\nu}{1-\nu}\gamma H. \end{aligned}$$

Dla dostatecznie dużych wartości ν (bliskich 0.5), ciśnienie na głębokości H można rozpatrywać jako hydrostatyczne, na co w szczególności wskazuje praca [38]. Zauważmy, że z (24) wynikają przytoczone wyżej równania (1).

Na podstawie powyższych rozważań można pokazać, że dla oceny wpływu niejednorodności na stan naprężenia w pobliżu otworów, wygodnie jest rozpatrzeć jednowymiarowe zadania z osiową i środkową symetrią. Podobne podejście jest dostatecznie usprawiedliwione z punktu widzenia stosunkowo niedużych różnic w jakościowej ocenie koncentracji naprężeń w rzeczywistych warunkach i pozwala poglądowo prześledzić jakościowy wpływ poszczególnych czynników. Właśnie tak postępuje większość autorów [24, 39, 43, 44] nie mówiąc o pracach poświęconych bezpośrednio jednowymiarowym zadaniom [38, 40, 41, 45, 46 i inne]. W niektórych z wymienionych prac [24, 39] podstawiono znacznie ogólniejszy problem, przy dowolnych zależnościach charakterystyk sprężystych od dwóch współrzędnych, wyprowadza się pełne równania dla płaskiego zagadnienia. Jednak konkretne rozwiązania otrzymano dla przypadków uproszczonych, przechodząc od ogólnych równań do zadania jednowymiarowego.

W sposób najbardziej pełny w literaturze rozpatrzono sprężyste osiowosymetryczne zagadnienie walca grubościennego [25, 36, 37, 39]. W tym przypadku zadanie sprowadza się do zwyczajnego równania różniczkowego drugiego rzędu ze zmiennymi współczynnikami. Jako funkcję rozwiązującą stosuje się albo funkcję naprężeń Airy'ego — albo znacznie prostsze funkcje (patrz np. (17)). Jeśli obie charakterystyki sprężyste E i ν są funkcjami promienia, to przy braku sił objętościowych i temperatury, równanie rozwiązujące dla Φ zgodnie z [25], będzie miało postać

$$(25) \quad f_1^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi - 2f_1 f_1' \frac{d}{dr} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} f_1 f_1' L_1 \Phi - [f_1 f_1' - 2(f_1')^2] L_2 \Phi - \\ - \nu_0 f_1 \left(\frac{1}{r} f_1 f_2'' - 2f_1' f_2' \right) \left(L_1 + \nu_0 f_2 \frac{d^2}{dr^2} \right) \Phi + \nu_0 f_1 f_2' \frac{d^2 \Phi}{dr^2} = 0.$$

Tutaj $f_1(r)$ i $f_2(r)$ — funkcjonalne części charakterystyk sprężystych

$$\begin{aligned} E &= E_0 f_1(r), \quad \nu = \nu_0 f_2(r), \\ L_1 &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \nu_0 f_2 \frac{d^2}{dr^2}, \quad L_2 = \frac{d^2}{dr^2} - \nu_0 f_2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \\ \nabla^2 &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}. \end{aligned}$$

Oczywiście rząd tego równania można od razu obniżyć przez wprowadzenie funkcji.

$$\varphi = \frac{e\Phi}{dr}.$$

Jeszcze bardziej upraszcza się równanie, jeśli jedynie moduł Younga jest wielkością zmienną. Wówczas, posługując się funkcją rozwiązującą F(17), otrzymamy równanie drugiego rzędu [39]

$$(26) \quad E(r)r \frac{d^2F}{dr^2} + [E(r) - rE'(r)] \frac{dF}{dr} - \left[\frac{E(r)}{r} - \nu E'(r) \right] F = 0.$$

Podobne do wyżej otrzymanych równania uzyskano też w innych rozpatrywanych przypadkach. Złożoność rozwiązania równania (26), przede wszystkim zależy od postaci funkcji $E(r)$. Jak wyżej wspomniano, najprostszą funkcją ma postać $E(r) = E_0 r^n$, jednak nie zawsze opisuje ona w zadowalający sposób rzeczywiste zależności. Dla takiej funkcji otrzymano rozwiązania w [25, 36, 41]. Bardziej złożony przypadek rozpatrzony jest również w [36], gdzie otrzymano rozwiązanie z pomocą szeregu dla funkcji

$$(27) \quad E(r) = E_0 \frac{(b-r)^n}{(b-a)^n}$$

a i b oznaczają odpowiednio wewnętrzny i zewnętrzny promień rury lub pierścienia.

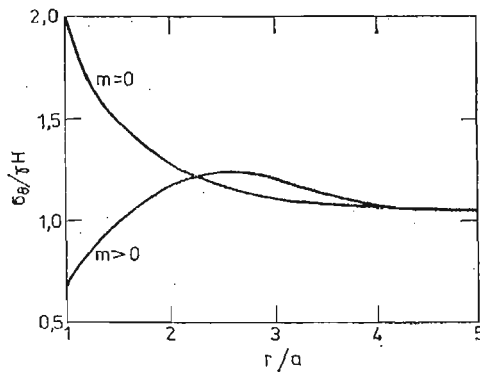
Nie analizując szczegółowo wszystkich możliwych postaci funkcji $E(r)$, przytoczymy jeszcze wyniki pracy [39], w której otrzymano rozwiązanie dla funkcji postaci (16) przy warunkach brzegowych

$$(28) \quad \begin{aligned} r = a \quad \sigma_r &= 0, \\ r = b \rightarrow \infty \quad \sigma_r &= -\gamma H. \end{aligned}$$

Warunki te odpowiadają zadaniu o zagłębionej pustce w masywie skalnym przy oddziaływaniu ciśnienia hydrostatycznego. Przytoczymy tu wzór określający naprężenia σ_θ

$$(29) \quad \sigma_\theta = \gamma H \left[1 + \frac{n+2-2m(n+1)r^{-n}}{n+2-2m} \cdot \frac{1}{r^2} \right].$$

Oczywiście dla $m = 0$, co odpowiada przypadkowi jednorodnemu, rozwiązanie przechodzi w znane rozwiązanie zadania Lamégo. Wraz ze zwiększaniem się m , tzn. przy zmniejszaniu się modułu Younga w miarę przybliżania się do brzegu otworu naprężenia znikają, a obszar największej koncentracji naprężeń przenosi się w głąb masywu (Rys. 5).



Rys. 5

Nie zwracając uwagi na to, że współczynnik koncentracji w danym przypadku jest mniejszy niż w przypadku jednorodnym, ale uwzględniając także zmianę we własnościach wytrzymałościowych, nie można być pewnym, że niejednorodność takiej postaci gwarantuje stabilność pustki. Fakt zmniejszania się naprężeń jest dostatecznie oczywisty, ponieważ rozmiękczenie materiału w pobliżu otworu prowadzi do zwiększenia przemieszczeń i częściowego odciążenia strefy otaczającej otwór. Przy istnieniu obszaru zagęszczenia materiału, gdzie moduł Younga jest większy, niż przy nienaruszonym masywie sytuacja jest odwrotna.

Należy powiedzieć kilka słów o drugiej stałej sprężystej ν . Jak pokazują prace M. M. PŁOTNIKOWA [31, 37 i inne], wpływ tego parametru na stan naprężenia jest niewielki. Jednak trzeba tu zauważyć, że w zadaniu o masywie skalnym, przy założeniu ciśnienia hydrostatycznego, zagadnienie wpływu ν na stan naprężenia jest postawione niepoprawnie, ponieważ zakłada się, że $\nu = 0.5$ na zewnątrz wyciętej objętości i byłoby nielogiczne przyjąć inną wartość wewnątrz objętości. Równocześnie zagadnienie wpływu na koncentrację naprężeń jest interesujące w zadaniach nie związanych z założeniami mechaniki górotworu.

Wśród prac poświęconych zagadnieniu sprężystemu dla grubościennej powłoki kulistej, rozpatrzmy [35, 39, 42], przy czym w [42] rozwiązanie zadania sprężystego jest częścią zagadnienia sprężysto-plastycznego. W pracy [35] przytoczono równania rozwiązujące dla funkcji φ , związanej z naprężeniami zależnościami

$$\sigma_{\theta} = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} \sigma_{\rho} = \frac{2}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho}$$

Jest to równanie trzeciego rzędu dla przypadku anizotropowego i przy uwzględnieniu pola temperatury

$$(30) \quad \frac{d^3\varphi}{d\rho^3} + \left(\frac{2}{\rho} + \frac{1}{a_{22}} \frac{da_{22}}{d\rho} \right) \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{a_{22}\rho} \left[\frac{d(2a_{12} + a_{22})}{d\rho} - \frac{2(a_{11} + a_{12})}{\rho} \right] \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{a_{22}\rho} \left[(\alpha_{\rho} - \alpha_{\theta})\Omega - \rho \frac{d(\alpha_{\theta} T)}{d\rho} \right].$$

Tutaj a_{ij} — stałe sprężyste, α_{ρ} , α_{θ} — współczynniki liniowej rozszerzalności, T — temperatura. Dalej w rozpatrywanej pracy równanie (30) sprowadza się do równań klasycznych dla różnych zależności modułów sprężystości i współczynników poprzecznej deformacji. Tak więc, jeśli moduły sprężystości są funkcjami potęgowymi typu (10), a współczynniki poprzecznej deformacji są stałe, to równania (30) przechodzi w równanie Eulera. Rozpatrzone są także zależności typu (27), wykładnicze i inne. W każdym z tych przypadków otrzymuje się równania znanego typu: Bessela, hipergeometryczne itd.

W pracy [39] otrzymano rozwiązanie dla pustki kulistej w masywie skalnym przy założeniach rozpatzonego wyżej zadania o pustce walcowej. Przy czym należy zauważyć, że w przedstawionej pracy jest błąd, który doprowadził do błędnych wyników liczbowych. Jakościowy wpływ niejednorodności na stan naprężeń i odkształceń jest taki sam, jak w płaskim zagadnieniu osiowosymetrycznym.

Na zakończenie przeglądu rozpatrzmy dwie prace W. OLSZAKA i W. URBANOWSKIEGO [41, 42], poświęcone rozwiązaniu sprężysto-plastycznemu dla grubościennego walca i kuli.

Sformułowanie tych dwóch zadań, równania i metody rozwiązania ich są bardzo podobne, dlatego zatrzymamy się jedynie na rozpatrzeniu zadania o kuli. Rozpatruje się materiał idealnie plastyczny, którego moduł sprężystości i granica płynięcia są dowolnymi funkcjami promienia. Przyjmuje się, że współczynnik Poissona jest równy 0.5, jak zwykle w zagadnieniach plastyczności. Rozwiązanie w obszarze sprężystym otrzymano przy pomocy całki

$$(31) \quad g_0(r) = \int \frac{G(r)}{r^4} dr,$$

gdzie $G(r)$ moduł odkształcenia postaciowego. Dalej wyprowadzone są zależności określające ciśnienie pomiędzy obszarem sprężystym (zewnątrznym) i plastycznym (wewnętrznym), oraz równanie przestępne dla określenia promienia c rozdzielającego te dwie strefy. Równanie to ma postać

$$(32) \quad p - q = h_0(c) - h_0(a) 2[g_0(c) - g_0(b)] \frac{Q(c)}{G(c)} c^3.$$

Tutaj p i q — wewnętrzne i zewnętrzne równomierne ciśnienie, $Q(r)$ — charakterystyka plastyczności, a $h(r)$ — całka postaci

$$(33) \quad h_0(r) = 2 \int \frac{Q(r)}{r} dr.$$

Otrzymano warunki powstawania strefy plastycznej na wewnętrznym brzegu i uplastycznienia się całej kuli. W szczególności, żeby spełnić pierwszy warunek, konieczne jest monotoniczne zmniejszanie się funkcji $\frac{1}{r^3} G(r)Q(r)$. Jako przykład rozpatrzono przypadek, gdy charakterystyki materiału są funkcjami potęgowymi

$$(34) \quad G(r) = Ar^6, \quad Q(r) = Br^3.$$

Zauważmy, że zależności te pozwalają stosunkowo łatwo otrzymać rozwiązanie, dzięki prostej postaci całek (31) i (33). Przy bardziej złożonych funkcjach (34) otrzymanie rozwiązania w zamkniętej postaci jest trudniejsze, przy czym, jak będzie pokazane w II-giej części pracy, odkształcenia plastyczne mogą powstawać nie tylko na wewnętrznym brzegu kuli, ale także wewnątrz jej ścianki. W tym ostatnim przypadku okazuje się, że dla otrzymania rozwiązania zadania nie wystarcza warunków brzegowych w naprężeniach i należy rozpatrzyć przemieszczenia.

Literatura cytowana w tekście

1. С. Г. Михлин, *Плоская задача теории упругости*, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 65, 1935.
2. С. Г. Михлин, *Плоская задача теории упругости для неоднородной среды*, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 66, 1935.
3. Ду-Цин-хуа, *Плоская задача теории упругости неоднородной упругой среды*, Проблемы механики сплошной среды, Изд. АН СССР, 1961.
4. P. P. TEODORESCU., M. PREDELEANU, *Über das eben Problem nichghomogener elastischer körper*, Acta techn. Acad. Scient. hung., 1959, 27, N 3—4, 349.

5. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, and W. URBANOWSKI, *Plasticity under non-homogenous conditions*, Acad. Press, New York-London, 1962.
В. Ольшак, Я. Рычлевский, В. Урбановский, Теория пластичности неоднородных тел, Изд. „Мир”, Москва, 1964.
6. Г. Б. Колчин, *Плоские задачи теории упругости неоднородных тел*, Кишинев, „Штиинца”, 1977.
7. Г. Б. Колчин, *Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов*, Кишинев, „Картя Молдовеняскэ”, 1971.
8. В. А. Ломакин, *Теория упругости неоднородных тел*, Изд. Моск. университета, 1976.
9. Н. А. Ростовцев, *К теории упругости неоднородной среды*, ПММ, т. 28, 1964, в. 4, 601.
10. M. NIEKE, K. HERRMANN, *Über ein ebenes inhomogenes Problem der Thermoelastizität*, „Acta mech.”, 1968, 6, N1, 42-55.
11. H. BUFLER, A. STEYERL, *Beitrag zum inhomogenen Halbraum beim ebenen und axialsymmetrischen Verzerrungszustand*, „Ing. Arch.” 1963, 32, N5, 304-322.
12. M. MIȘCU, C. TEODOSCU, *Asupra problemei axial simetrice și a problemei plane a teoriei elasticității pentru corpuri izotrope neohomogene*, „Comun. Acad. RPR”, 1962, 12, N 8, 921-927.
13. М. М. Плотноков, *Об одном общем уравнении для функции напряжений неоднородно-анизотропного цилиндра*, „Зап. Воронеж. с/х ин-та”, 1968, 35, 390-393.
14. R. L. HUSTON, *Zeitschrift für angew. Math. Mech.*, 1964, Bd. 44, N12, s. 573.
15. В. П. Стукалов, *Неоднородные уравнения осесимметричной задачи теории упругости*, Кн. Сопр. мат. и теор. соор., Межвед. респ. научн. сб., вып. 8, Киев, 1969, 3-8.
16. С. Г. Лехницкий, *Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости*, ПММ, 26, 1962, в. I.
17. И. Е. Храчевская, *Решение задачи Буссинеска для полупространства, модуль упругости которого является степенной функцией глубины*, „Матер. 7 мат. и 7 физ. межвуз. конф. Дальн. Вост”, Хабар., 1968, 87.
18. В. П. Плевако, *Деформация неоднородного полупространства под действием поверхностной нагрузки*, Прикл. мех., 1973, 9, № 6, 16-23.
19. А. Н. Динник, А. Б. Моргаевский, Г. Н. Савин, *Распределение напряжений вокруг подземных горных выработок*, Сб. Труды совещания по управлению горным давлением, М-Л, 1938, АН СССР, 7-56.
20. Г. Н. Савин, *Распределение напряжений около отверстий*, Изд. Наукова думка, Киев, 1968.
21. С. Н. Орлов, *Давление весомой упругой среды на цилиндрическую трубу*, Сб. Исследования по теории сооружений, УШ, М. 1959, 473.
22. П. А. Журавлев, А. Ф. Захаревич, *О распределении напряжений в массиве горных пород с горизонтальной выработкой круглого сечения*, Зап. Ленингр. горо. ин-та им. Г. В. Плеханова, т. XXXVI, 3, Л. 1958, 101-105.
23. А. И. Лурье, *Теория упругости*, „Наука”, М., 1970.
24. М. Мишику, К. Теодосиу, *Решение при помощи теории функций комплексного переменного статической задачи теории упругости для неоднородных изотропных тел*, ПММ, т. 30, в. 2, 1966.
25. В. Н. Торлин, *Прямая и обратная задача плоской теории упругости неоднородных тел*, Прикл. мех., XII, № 8, 1976.
26. Г. Б. Колчин, *О применимости итерационного метода в задачах теории упругости неоднородных тел*, Кн. Прикладная математика и программирование, в. 2, Кишинев, АН МССР, 1969.
27. В. И. Андреев, И. Ю. Шишиц, *Исследование напряжений вокруг отверстий в пространстве из неэластичного материала с переменным модулем упругости*, Сб. трудов МИСИ, № 112, М. 1973, 179.
28. В. И. Андреев, И. Ю. Шишиц, *Исследование напряжений вокруг отверстий в неоднородном пространстве с учетом эластичности материала*, Сб. трудов МИСИ, № 118, М., 1974, 59.
29. И. В. Баклашов, Б. А. Картозия, *Механика горных пород*, Наука, М, 1975.
30. П. Я. Таранов, В. В. Лавриненко, И. И. Антоневич, С. Череслоя, *Разрушение породного массива за контуром выработок в результате взрывных работ*, „Шахтное строительство”, 1969, № 1, 5-8.

31. В. В. Рукин, К. В. Рупшенейт, *Механизм взаимодействия обделки напорных тоннелей с массивом горных пород*, М., Наука, 1969.
32. В. С. Ямщиков, В. Г. Бондаренко, В. А. Щетинин, *О контроле качества укрепительной цементации*, „Шахтное строительство”, 1970, № 9, 14.
33. Н. А. Евстропов, *Взрывные работы в строительстве*, М., Стройиздат, 1965.
34. В. И. Смирнов, *Сооружение подземных емкостей камуфлетными взрывами и выбор методов их закрепления*, „Шахтное строительство”, 1973, № 12, 14-17.
35. В. М. Соболевский, *Некоторые случаи интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего напряженное состояние анизотропного, неоднородного и неравномерно нагретого шара*, Изв. АН БССР, Сер. физ.-техн. наук, 1963, № 2, 20-29.
36. Л. И. Дятловичкий, Э. Д. Лемберг, *Плоская задача с центральной симметрией*, Прикл. мех., т. IV, в. 8, 1968.
37. М. М. Плотноков, *О влиянии коэффициента Пуассона на поле напряжений неоднородного анизотропного цилиндра*, Изв. вузов. Машиностроение, 1968, № 3.
38. В. Менцель, В. Шрейнер, *Закономерности механического поведения каменных солей в лабораторных и природных условиях*, Сб. Механика горных пород, Наука, Каз. ССР, Алма-Ата, 1975, 64-78.
39. И. В. Баклашов, Б. А. Картозия, *Учет технологической неоднородности и анизотропии породного массива в решении вопросов горного давления*, „Шахтное строительство”, 1971, 12, 10-14.
40. И. В. Баклашов, Б. А. Картозия, *Влияние трещиноватости взрывного происхождения на величину нагрузки на крепь выработок*, Кн. Горностроительные и взрывные работы, Тула, изд. ТПИ, в. I, 1973, 136.
41. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej*, Arch. mech. stos., VII, 3, 1955, 315-336.
42. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Sprężysto-plastyczna grubościenna powłoka kulista z materiału niejednorodnego, poddana działaniu wewnętrznego i zewnętrznego ciśnienia*, Rozpr. inż., IV, 1, 1956, 23.

Р е з ю м е

ВОПРОСЫ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ОТВЕРСТИЙ
В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ. ЧАСТЬ I. ОБЗОР

В работе приведен обзор работ решенных задач когда механические характеристики материала являются непрерывными функциями координат. Обсуждаются задачи теории упругости и пластичности.

S u m m a r y

STRESS CONCENTRATION IN THE NEIGHBOURHOOD OF CAVITIES IN
NONHOMOGENEOUS MEDIA. PART I-REVIEW

A review is given of the papers concerning the solved problems. When the mechanical properties of the material are the continuous functions of the coordinates. The problems of the theory of elasticity and plasticity are discussed.

MOSKWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 czerwca 1979 roku. Tłumaczył mgr inż. J. Olszewski.

ZAGADNIENIA ODWROTNE PÓL TEMPERATUR — PRZEGLĄD LITERATURY

KRZYSZTOF GRYSA, MICHAŁ JACEK CIAŁKOWSKI (POZNAŃ)

1. Wstęp

W większości zagadnień praktycznych rozwiązanie równania przewodnictwa ciepła nie przedstawia większych trudności o ile tylko warunki brzegowe dadzą się określić z wystarczającą dokładnością. Pomiarów przebiegów temperatury na brzegach rozważanego ciała dokonuje się w takich przypadkach przy pomocy termopar lub innych przyrządów pomiarowych, a następnie rachunkowo wyznacza się przebiegi temperatur w punktach wewnętrznych (tzw. wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe).

Zdarzają się jednakże sytuacje, gdy umieszczenie na powierzchni ciała instrumentów pomiarowych jest niemożliwe bądź niewskazane. Z tego typu sytuacją spotykamy się rozważając pole temperatury cylindra, w którego komorze spalania porusza się tłok, silnika odrzutowego — z uwagi na szybki przepływ gazów, czy turbiny ciepłej. W takich przypadkach dużo łatwiej jest rejestrować przebiegi temperatur w punktach wewnętrznych rozpatrywanych ciał, zaś zagadnieniem podstawowym jest określenie warunków termicznych powierzchniowych, które powodują owe wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe. Tego typu podejście do zagadnienia jest istotnie różne od zwykłego problemu brzegowo-początkowego. Chodzi tu bowiem nie tyle o wyznaczenie rozwiązania wewnątrz obszaru ograniczonego brzegiem, na którym zadane są wartości poszukiwanej funkcji lub jej pochodnych, co o ekstrapolację tego rozwiązania poza ten obszar. W literaturze przyjęło się nazywać tego typu zagadnienia problemami odwrotnymi w odróżnieniu od konwencjonalnych zagadnień brzegowo-początkowych, nazywanych problemami prostymi lub bezpośrednimi.

Ogólnie problemy odwrotne w technice to zagadnienia, które wiążą pomiary, metody matematyczne oraz inżynierskie wyczucie. Pomiarów zwykle dokonuje się w miejscach łatwo dostępnych. Poszukiwane wielkości często mogą zostać zmierzone tylko pośrednio. Na przykład w celu określenia przebiegu strumienia ciepła po stronie wewnętrznej naczynia ciśnieniowego dokonuje się pomiaru przebiegu temperatury na jego brzegu zewnętrznym. W konstrukcjach czasami wyznacza się nieznane przebiegi ciśnień czy przemieszczeń, dokonując w kilku punktach pomiarów prędkości. Jest oczywiste, że poprawne rozwiązania tego typu problemów w istotny sposób zależą od prawidłowego wyboru punktów pomiarowych, wielkości, które się mierzy oraz wyczucia inżynierskiego.

Dodatkowym utrudnieniem przy praktycznym zastosowaniu rozwiązań zagadnień odwrotnych jest wpływ instrumentu pomiarowego na przebieg pomiaru. Z tego też względu nie jest wskazane wprowadzanie do wnętrza ciała większej ilości czujników. Niemniej nawet jedna czy dwie termopary zakłócają pole temperatury i powodują niewielkie fałszowanie wyników. Stąd jednym z podstawowych problemów dotyczących zastosowań rozwiązań zagadnień odwrotnych jest problem pomiarów mało zakłócających przebieg

wielkości mierzonych. Wydaje się, że nowe, kompleksowe podejście do zagadnień odwrotnych pól temperatur, jakie jest rozwijane w ostatnich latach tak w Polsce jak i za granicą, może przynieść pozytywne rozwiązanie i tych problemów.

Rozwój tej gałęzi teorii przewodnictwa ciepła, jaką jest problematyka odwrotnych zagadnień pól temperatur, rozpoczął się stosunkowo niedawno. Autorzy najwcześniejszych prac, opublikowanych na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych (można tu wspomnieć prace N. V. SZUMAKOWA [33] czy G. J. STOLZA [35]) powołują się przede wszystkim na znaną monografię CARSLAWA i JAEGERA [8], w której wprowadzili autorzy nie wprowadzają nawet pojęcia zagadnień odwrotnych, ale gdzie podane są liczne przykłady sposobów rozwiązywania zagadnień bezpośrednich, łatwych do zastosowania (choć dosyć mało efektywnych) przy rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych. W latach sześćdziesiątych tematyka ta była rozwijana głównie dla zagadnień liniowych. Rozważano tylko problemy jednowymiarowe, przyjmując jako punkt wyjścia znaną odpowiedź temperaturową jednego punktu wewnętrznego oraz warunki początkowe, a poszukując temperatury brzegu przy założeniu tzw. warunków symetrii w środku ciała (gdy rozważano walec lub kulę) lub izolacji drugiego brzegu (gdy brano pod uwagę nieskończoną płytę). Wiele prac z tego okresu to prace teoretyczne, rozwijające wprowadzili metody rozwiązań tego typu problemów, ale oferujące wyniki w postaci skomplikowanych wielokrotnych szeregów bądź całek, zupełnie nieprzydatne dla celów praktycznych. Autorzy tych prac, w których przebiegane były przykłady liczbowe, wykorzystywali zwykle metodę różnic skończonych i w zasadzie przede wszystkim sygnalizowali, na jakiego rodzaju trudności i niebezpieczeństwa pomyłek narażeni mogą być eksperymenciatorzy, próbujący wykorzystywać wyniki ich prac. Niemniej kilka pomysłów dotyczących rozwiązywania problemów odwrotnych doczekało się, po niewielkich modyfikacjach, pozytywnych realizacji w latach siedemdziesiątych. Do takich pomysłów należy np. metoda dopasowywania funkcji, o której będzie mowa w dalszej części pracy. W latach siedemdziesiątych rozpoczął się burzliwy rozwój metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych i to już nie tylko jednowymiarowych i liniowych, ale także dwu- i trójwymiarowych (dla tych ostatnich nakreślono tylko, co prawda, sposób postępowania) oraz nieliniowych. Wyznaczono rozwiązania dla płyty, rury grubościenniej i powłoki kulistej, gdzie przy założeniu znajomości odpowiedzi temperaturowych z dwóch punktów wewnętrznych określono przebiegi temperatur na obu brzegach. Nastąpił gwałtowny rozwój metod numerycznych. Wreszcie w okresie tym pojawiły się pierwsze prace traktujące o zagadnieniach odwrotnych termosprężystości — czyli o problemach wyznaczania warunków termicznych na powierzchni ciała — gdy znane są w punkcie wewnętrznym odpowiedzi naprężeniowa bądź przemieszczeniowa.

Niektórzy autorzy pod hasłem „zagadnienia odwrotne” pól temperatury rozumieją treści odmienne od przytoczonych wyżej. W związku z tym warto wyszczególnić jakie zagadnienia są objęte tym określeniem. Są to mianowicie:

1° Zagadnienia wyznaczania temperatury lub strumienia ciepła na powierzchni ciała przy znanym przebiegu temperatury lub strumienia ciepła w jednym lub kilku punktach wewnętrznych ciała;

2° Zagadnienia wyznaczania temperatury lub strumienia ciepła na powierzchni ciała przy znanym przebiegu naprężeń termicznych bądź przemieszczeń w jednym lub kilku punktach wewnętrznych ciała;

3° Zagadnienia wyznaczania zależności funkcji $f(\mathbf{r}, t)$, opisującej źródło ciepła, od zmiennych przestrzennych przy założeniu, że $f(\mathbf{r}, t) = f_1(\mathbf{r}) \cdot f_2(t)$, gdzie $f_2(t)$ jest znaną funkcją, oraz przy komplecie warunków brzegowych i początkowych;

4° Zagadnienia wyznaczania stałych lub zmiennych z temperaturą lub z czasem współczynników dotyczących przewodnictwa cieplnego przy określonych warunkach brzegowych i początkowym oraz znanym bądź łatwym do wyznaczenia polu temperatury wewnątrz ciała.

Spośród prac traktujących o zagadnieniach odwrotnych w sensie określonym w punkcie 3° warto wymienić monografię [27], w której podany jest m.in. spis literatury dotyczącej tego typu odwrotnych problemów przewodnictwa ciepła i nie tylko. Zagadnienia odwrotne w sensie określonym w punkcie 4° były m.in. rozważane w pracach [2, 4, 11, 26, 30 i in].

W niniejszym przeglądzie zajmiemy się wyłącznie zagadnieniami odwrotnymi w sensie punktów 1° i 2°.

2. Liniowe zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego

Metody rozwiązywania liniowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła można podzielić następująco:

- 2.1. przewidywanie rozwiązania w postaci szeregu.
 - 2.2. analiza transformat Laplace'a
 - 2.3. podejścia oparte na metodzie różnic skończonych
 - 2.4. rozkład na szereg problemów prostych.
- Każdą z tych metod omówimy oddzielnie.

2.1. Przewidywanie rozwiązania w postaci szeregu. W rozdziale II monografii H. S. CARSLAWA i J. C. JAEGERA [8] omówione są proste (bezpośrednie) rozwiązania liniowego równania przewodnictwa ciepła. Przedstawiając możliwe postaci rozwiązań autorzy dali późniejszym badaczom zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła możliwość predykcji temperatury brzegu obszaru, gdy znana jest wewnętrzna odpowiedź temperaturowa. Jedną z postaci rozwiązań przedstawionych w [8] była szczególnie często wykorzystywana. Była to funkcja [8, str. 52]

$$(2.1) \quad T(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{x^2}{\kappa} \right)^k \frac{1}{(2k)!} \frac{d^k \Phi}{dt^k} + x \left(\frac{x^2}{\kappa} \right)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{d^k \psi}{dt^k} \right],$$

gdzie Φ i ψ są dowolnymi funkcjami czasu, spełniającymi jednowymiarowe równanie przewodnictwa ciepła

$$(2.2) \quad \nabla^2 T - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \nabla - \text{operator nabra},$$

zaś κ jest dyfuzyjnością temperaturową. Dla funkcji $T(x, t)$ zachodzą związki

$$(2.3) \quad T(0, t) = \Phi(t) \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi(t).$$

Przyjęcie rozwiązania zagadnienia odwrotnego w postaci (2.1) przy zastąpieniu podanych tu współczynników funkcyjnych przez pewne nieznanne funkcje pozwalało efektywnie rozwiązywać te zagadnienia w przypadkach gdy znana była odpowiedź temperaturowa w jednym punkcie wewnętrznym ciała. Bazując na tym podejściu BURGGRAF [7] wyznaczył ściśle rozwiązanie dla przebiegów powierzchniowej temperatury i powierzchniowego strumienia ciepła dla danych ciągłych przebiegów temperatury i strumienia ciepła w jednym punkcie wewnętrznym. Wykorzystał on wynikające z równania (2.1) i z prawa Fouriera związki

$$(2.4) \quad \frac{\partial^n T}{\partial t^n} = \kappa^n \nabla^{2n} T, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^n q}{\partial t^n} = \kappa^n \nabla^{2n} q,$$

gdzie $q = -\lambda \nabla T$ — strumień ciepła, λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego. Zadając następnie przebiegi $T(x_0, t) = T_0(t)$ oraz $q(x_0, t) = q_0(t)$ wyznaczył dla płyty, kuli i walca pole temperatury w postaci

$$(2.5) \quad T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n(x) \frac{d^n T_0}{dt^n} - \frac{1}{\kappa} g_n(x) \frac{d^n q_0}{dt^n} \right],$$

gdzie funkcje $f_n(x)$ i $g_n(x)$ spełniają związki następujące:

$$\frac{d^2 f_0}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 f_n}{dx^2} = \kappa^{-1} f_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \frac{d^2 g_0}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 g_n}{dx^2} = \kappa^{-1} g_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$f_0(x_0) = 1, f_n(x_0) = 0, \left. \frac{df_n}{dx} \right|_{x=x_0} = 0, \quad n = 0, 1, \dots; \quad g_0(x_0) = 0, \left. \frac{dg_0}{dx} \right|_{x=x_0} = 1,$$

$$g_n(x_0) = 0; \left. \frac{dg_n}{dx} \right|_{x=x_0} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ciekawy jest fakt, że do wyznaczenia rozwiązania nie jest tu potrzebny warunek początkowy. Wynika to z założenia, że funkcje $T_0(t)$ i $q_0(t)$ są określone dla $t \in \langle 0; \infty \rangle$.

DAVIES [13] i KOVERYANOV [25] również wykorzystali metodę przewidywania rozwiązania w postaci szeregu nieskończonego, przy czym o ile podejście Koveryanova było analogiczne do metody Burggrafa, o tyle Davies zaproponował nieco bardziej złożoną postać rozwiązania, zawierającą funkcję błędu.

Zupełnie nowy sposób atakowania jednowymiarowych zagadnień odwrotnych jest zaprezentowany w pracy IMBERA i KHANA [18]. Przede wszystkim, w odróżnieniu od prac poprzednich, zakładają autorzy znajomość przebiegów temperatury w dwóch punktach wewnętrznych. Jest to znaczne utrudnienie, gdyż nie ma wtedy możliwości zastosowania metod podanych wyżej. Trzeba najpierw rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe, aby móc określić postać rozwiązania dla obszaru zawartego pomiędzy wspomnianymi punktami wewnętrznymi, a następnie ekstrapolować to rozwiązanie poza ten obszar. W pracy [18] wyznaczono w ten sposób rozwiązania dla płyty i dla grubej powłoki kulistej, zaś w pracach [19, 24] również dla rury grubościennej. W niniejszym opracowaniu omówimy tę metodę na przykładzie rozwiązania dla płyty.

Zagadnienie do rozwiązania to równanie przewodnictwa ciepła (2.2) z jednorodnym warunkiem początkowym oraz z dwoma warunkami wewnętrznymi

$$(2.6) \quad T(x_1, t) = T_1(t) \quad \text{i} \quad T(x_2, t) = T_2(t),$$

gdzie $x_i < x_1 < x_2 < x_e$; x_i oraz x_e są współrzędnymi dolnej i górnej powierzchni płyty nieskończonej, która jest równoległa do płaszczyzny Oxy .

Rozwiązanie tego problemu dla $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ nie przedstawia trudności i w transformatach Laplace'a może być zapisane w postaci

$$(2.7) \quad \bar{T}(x, p) = \frac{\bar{T}_1}{1 - e^{-2p \cdot \Delta}} \cdot [e^{-p(x-x_1)} - e^{-p(2\Delta+x_1-x)}] + \\ + \frac{\bar{T}_2}{1 - e^{-2p \cdot \Delta}} \cdot [e^{-p(\Delta+x_1-x)} - e^{-p(\Delta-x_1+x)}],$$

gdzie nadkreślenie oznacza transformatę Laplace'a, $\Delta = x_2 - x_1$, $p = \sqrt{\frac{s}{\alpha}}$, zaś s jest parametrem transformacji.

Na zewnątrz przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$ transformata $\bar{T}(x, p)$ nie może zostać odwrócona z uwagi na pojawienie się wtedy w wykładnikach dodatnich argumentów. Okazuje się jednak, że przyjęcie funkcji $T_1(t)$ i $T_2(t)$ w odpowiednich postaciach umożliwi obejście tej trudności. Autorzy stosują dwa, różniące się nieco w szczegółach podejścia: jedno w celu dokonania ekstrapolacji „do tyłu”, dla $x \in \langle x_i, x_1 \rangle$, i drugie w celu ekstrapolowania rozwiązania „do przodu”, dla $x \in \langle x_2, x_e \rangle$.

Warto tu zaznaczyć, że wobec faktu iż $T_1(t)$ i $T_2(t)$ są sprowadzonymi do postaci funkcyjnej odczytami z dwóch termopar, tego rodzaju manewr jest niegroźny dla wyników końcowych, o ile tylko przyjęte postaci T_1 i T_2 dobrze pasują do wyników pomiarów.

Dokonując ekstrapolacji do tyłu przy założeniu, że $\Delta \geq x_1 - x_i$, przyjmuje się, że

$$(2.8) \quad \bar{T}_1(p) = \bar{T}_2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-m \cdot p \cdot \Delta} \quad \text{oraz} \quad T_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!},$$

gdzie współczynniki A_m i b_n należy wyznaczyć na podstawie odpowiedzi temperaturowych zanotowanych w punktach x_1 i x_2 . Po wprowadzeniu funkcji T_1 i T_2 określonych związkami (2.8) do (2.7), transformata temperatury daje się odwrócić i wynik końcowy, funkcjonujący dla $x \in \langle x_i, x_1 \rangle$, wyrażony jest przez potrójną sumę, zawierającą potęgi czasu i funkcje erfc od stosunkowo nieskomplikowanego argumentu.

Ekstrapolacja do przodu wymaga założenia, że $x \in \langle x_2, 2\Delta + x_1 \rangle$. Tak więc jeśli $x_e > 2\Delta + x_1$, to osiągnięcie brzegu x_e w jednym kroku jest niemożliwe. Trzeba wówczas przyjąć punkt $x = 2\Delta + x_1$ jako x_3 , temperaturę wyliczoną w tym punkcie jako $T_3(t)$ i ponownie stosować ekstrapolację do przodu, tym razem dla danych T_1 i T_3 . Co do odczytów z termopar przyjmuje się wówczas, że

$$(2.9) \quad \bar{T}_2(p) = \bar{T}_1 \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-m \cdot p \cdot \Delta} \quad \text{oraz} \quad T_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!},$$

gdzie B_m i a_n wyznacza się analogicznie, jak poprzednio A_m i b_n . Rozwiązanie dla ekstrapolacji do przodu ma postać zbliżoną do rozwiązania otrzymanego przy ekstrapolowaniu temperatury do tyłu.

Wykorzystując tę metodę wyznaczono w pracy [18] także rozwiązanie zagadnienia odwrotnego dla płyty dwuwarstwowej, jak również nakreślono sposób postępowania przy

rozwiązywaniu tego typu problemów dla płyt wielowarstwowych. Okazuje się, że do rozwiązania zagadnienia odwrotnego dla płyty wielowarstwowej o ilości warstw równej 5 lub więcej wystarczą odczyty z czterech termopar, z których po dwie muszą znajdować się w dwóch warstwach zewnętrznych z każdej strony. Termopary nie mogą być rozmieszczone dowolnie, lecz ograniczenia narzucone na ich rozmieszczenie nie stwarzają problemów przy wykorzystaniu praktycznym tej metody.

Bazując na metodzie podanej w pracy [18], CHEN i THOMSEN [9] rozwiązali odwrotne zagadnienie dla rury grubościenną dla małych czasów. Założenie krótkotrwałości rozważanego procesu pozwoliło uwzględnić dane tylko z jednej termopary. Zamiast drugiego czujnika przyjęto założenie, że dla bardzo krótko trwających procesów nagrzewania powierzchnia zewnętrzna rury nie zdąży się nagrzać, w związku z czym można zamiast grubej rury rozważać przestrzeń z pustką walcową.

Metody szeregowego typu zaprezentowanego przez Imbera i Khana wydają się mieć przed sobą liczne zastosowania w zagadnieniach odwrotnych termosprężystości. Cechuje je bowiem nie tylko — jak wykazano w pracy [18] — bardzo duża dokładność przy stosunkowo niewielkim nakładzie pracy ze strony maszyny cyfrowej, ale również precyzyjne określenie obszarów, dla których dokonane ekstrapolacje są wiarygodne.

2.2 Analiza transformat Laplace'a. Metoda analizy rozwiązania równania przewodnictwa w transformatach Laplace'a jest metodą badawczą narzucającą się, jeśli chodzi o zagadnienia odwrotne. Jest to wszakże — jak się okazuje — metoda nieefektywna, jeśli trzymać się jej ściśle. W przeciągu ok. 20 lat jej stosowania dla potrzeb zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła — tzn. począwszy od pracy MASKETA i VASTANO [28] z roku 1962, a skończywszy na artykule CIAŁKOWSKIEGO i GRYSY [12] — udawało się tylko przedstawiać rozwiązania tych zagadnień w transformatach, przy czym były to transformaty nie do odwrócenia ścisłymi metodami. Tak więc prace ściśle stosujące metodę analizy transformat miały raczej wartość tylko poznawczą, zaś rozwiązania w postaci jawnej możliwie były tylko do uzyskania dla punktów brzegowych, dla tzw. brzegowych zagadnień odwrotnych [10]. Dopiero IMBER [22], kombinując analizę transformat z metodą dopasowywania funkcji, podał przybliżony sposób rozwiązywania wewnętrznych zagadnień odwrotnych.

MASKET i VASTANO [28] jak również i SABHERWAL [32] przedstawili transformaty temperatury i strumienia ciepła na powierzchni przy pomocy wyrażeń zawierających transformatę odpowiedzi temperaturowej jednego punktu wewnętrznego. W zagadnieniach przez nich rozważanych zakładano zerową temperaturę początkową oraz warunek symetrii (w przypadku płyty warunek izolacji) dla $x = 0$. W obu pracach autorzy twierdzą, że transformaty rozwiązań można odwrócić, lecz w pracy [28] nie podano oryginałów, zaś w pracy [32] podane oryginały wzięte są „z powietrza”, bez najmniejszej wzmianki o metodzie ich uzyskania.

Wyniki ciekawsze z punktu widzenia metodyki rozwiązania, choć też nieefektywne jeśli chodzi o procedurę odwracania transformat rozwiązań, zaprezentowano w pracach [34] i [14]. SPARROW, HAJI-SHEIKH i LUNDGREN w pracy [34] dopuszczają niejednorodny warunek początkowy dla temperatury. Rozważając zagadnienie odwrotne dla kuli otrzymali transformatę temperatury powierzchniowej w postaci

$$(2.10) \quad \bar{T}(1, s) = \bar{f}(s) x^* \frac{\sinh \sqrt{s}}{\sinh(x^* \sqrt{s})},$$

gdzie $f(t) = T(x^*, t)$ jest znanym przebiegiem temperatury w punkcie wewnętrznym $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$, zaś s jest parametrem transformacji. Dla transformaty danej wzorem (2.10) oryginał nie istnieje i z tego powodu autorzy próbowali obejść problem, specyfikując funkcję $f(t)$. Dokonali tego w dwóch etapach. Najpierw zapisali transformatę $\bar{f}(s)$ w postaci

$$(2.11) \quad \bar{f}(s) = \bar{g}(s) e^{-(1-x^*)\sqrt{s}}.$$

Następnie, podstawiając (2.11) do (2.10), otrzymali taką postać transformaty temperatury, dla której próbowali określić oryginał metodami przybliżonymi najpierw dla małych czasów, a następnie dla czasów dowolnych. Rozwiązanie dla małych czasów uzyskuje się przez przybliżenie ułamka $\frac{1 - e^{-2\sqrt{s}}}{1 - e^{-2x^*\sqrt{s}}}$, występującego w iloczynie z $\bar{g}(s)$ po prawej stronie przekształconego wzoru (2.10), przez szereg potęgowy względem $e^{-2x^*\sqrt{s}}$. Otrzymuje się w ten sposób rozwiązanie w postaci całkowej, przy czym funkcja $g(t)$ określona jest przez równanie całkowe wynikające ze wzoru (2.11).

Rozwiązanie dla czasów dowolnych uzyskuje się metodą dopasowywania funkcji [31]. Metoda ta — ogólnie rzecz biorąc — polega na przybliżeniu transformaty funkcji, która jest nieodwracalna, przez zbliżoną do niej transformatę, dla której oryginał jest znany. Sprawdzanie, czy funkcja, przy pomocy której zastępuje się niewygodną transformatę, jest do tej ostatniej dobrze „dopasowana”, odbywa się przez ustalenie dla niej wartości w zerze i w nieskończoności, a następnie poprzez graficzne [29] lub numeryczne sprawdzenie, czy dopasowywana funkcja ma wykres (oczywiście dla argumentu s rzeczywistego) zbliżony do wykresu tej transformaty. Z punktu widzenia matematyki metoda ta jest nieściśła, jednakże z punktu widzenia inżynierskiego jest ona pożyteczna, gdyż daje stosunkowo dokładne wyniki w całym zakresie zmienności t .

W pracy [34] zalety metody dopasowania funkcji nie zostały dostatecznie wykorzystane. Metodą tą przybliżano przebieg temperatury powierzchniowej przy znanej funkcji $f(t)$, ale ponieważ po drodze trzeba było rozwiązać równanie całkowe określające $g(t)$, liczba kolejnych aproksymacji była dosyć duża i stąd możliwość dokładnego oszacowania numerycznego temperatury jest raczej wątpliwa. Użyta metoda rozwiązywania równania całkowego określającego funkcję $g(t)$, polegająca na podziale przedziału czasu na podprzedziały, musi być stosowana ostrożnie, gdyż przy zbyt małych podprzedziałach błąd aproksymacji gwałtownie wzrasta i mogą się pojawić oscylacje. Autorzy przestrzegają przed tą ewentualnością i próbują ustalić najmniejszą wielkość podprzedziałów. Do minusów pracy należy zbytnie zaufanie, jakie autorzy pokładają w możliwościach rekonstrukcji temperatury brzegu. Wydaje się, iż ich stwierdzenie, że znajomość odpowiedzi temperaturowej w środku kuli pozwala wyznaczyć temperaturę brzegu, jest przesadzone. Wiadomo bowiem, że wpływ warunków brzegowych jest we wnętrzu ciała tłumiony i dlatego ekstrapolacja temperatury jest zawsze obciążona pewnym błędem.

Metodę użytą w pracy [34] próbowali usprawnić DEVERALL i CHANNAPRAGADA [14]. Jednakże również i oni otrzymali wyniki w postaci skomplikowanych całek.

Klasyczną metodą analizy transformat Laplace'a próbowano także atakować zagadnienia odwrotne w pracach [10] i [12]. Równanie przewodnictwa było tam rozważane wraz z zerowym warunkiem początkowym, warunkiem symetrii (izolacji w przypadku

plyty) dla $x = 0$ i przy znanej odpowiedzi temperaturowej jednego punktu wewnętrznego. W odróżnieniu od wszystkich wyżej omówionych prac, zakładano tak w [10] jak i w [12], że na brzegu panują warunki III rodzaju (swobodna wymiana), przez co rozważane zagadnienie odwrotne mogło prowadzić bądź do wyznaczenia temperatury powierzchni, bądź strumienia cieplnego, bądź też liczby Biota. W pracy [12] podano rozwiązanie w postaci spłotowej, przy czym jest ono złożone z trzech wyrażeń, opisujących kolejno — transformatę odpowiedzi temperaturowej, transformatę rozwiązania problemu brzegowo-początkowego dla warunku I rodzaju, oraz transformatę tzw. funkcji intensywności grzania. W pracy tej podano również ograniczenia, jakie muszą być spełnione w przypadku funkcji $T(x^*, t)$, jeśli ma ona opisywać wewnętrzną odpowiedź temperaturową. Okazuje się, że dla transformaty $\bar{T}(x^*, s)$ musi być spełniona nierówność

$$(2.12) \quad \left| s \bar{T}(x^*, s) \frac{I_{-\beta}(\sqrt{s})}{x^{*\beta} I_{-\beta}(x^* \sqrt{s})} \right| < M, \quad x^* \in \langle 0, 1 \rangle,$$

gdzie M — dowolna stała dodatnia, $I_{-\beta}(u)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela I rodzaju, rzędu „ $-\beta$ ”. β jest tzw. parametrem kształtu. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego staje się rozwiązaniem dla kuli, gdy $\beta = -\frac{1}{2}$, dla walca gdy $\beta = 0$ i dla nieskończonej płyty

gdy $\beta = \frac{1}{2}$. Idea wprowadzenia parametru kształtu nie jest nowa; używali go także m.in. IMBER i KHAN w pracy [18].

Autorzy pracy [12] nie próbowali szukać retransformat rozwiązania dla $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$. Wyznaczyli natomiast rozwiązanie tak postawionego zagadnienia dla $x = 1$ (brzegowe zagadnienie odwrotne). Oczywiście dla warunku I rodzaju tego typu rozwiązanie jest nieciekawe, lecz dla warunków II rodzaju pozwala ono ustalić relację pomiędzy temperaturą czynnika grzejącego, strumieniem ciepła na brzegu i liczbą Biota (bezwymiarowym współczynnikiem przejmowania ciepła.)

Postać spłotową rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego dla walca, kuli i płyty [10, 12] wykorzystano do zdefiniowania miary odległości procesu nagrzewania (chłodzenia) z liczbą Biota ψ_1 od procesu nagrzewania (chłodzenia) tego samego ciała (i w tej samej temperaturze otoczenia) z liczbą Biota ψ_2 (w szczególności $0 < \psi_1 < \infty$, $\psi_2 \rightarrow \infty$). Miara ta jest zdefiniowana wzorem

$$(2.13) \quad \kappa(F_0, \psi_1, \psi_2, \beta) = \int_0^{F_0} [F_1(\tilde{F}_0, \psi_2, \beta) - F_1(\tilde{F}_0, \psi_1, \beta)] d\tilde{F}_0 = \\ = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_2 \cdot e^{-\lambda_{n,2}^2 \cdot F_0}}{\psi_2^2 + \lambda_{n,2}^2} - \frac{\psi_1 \cdot e^{-\lambda_{n,1}^2 \cdot F_0}}{\psi_1^2 + \lambda_{n,1}^2} \right) \quad \psi_i \equiv Bi_i, \quad i = 1, 2,$$

gdzie liczby $\lambda_{n,i}$, $i = 1, 2$, są pierwiastkami równania przestępnego

$$\lambda \cdot \mathcal{Y}_{-\beta+1}(\lambda) - \psi_i \cdot \mathcal{Y}_{-\beta}(\lambda) = 0, \quad i = 1, 2$$

$\mathcal{Y}_\nu(\lambda)$ — funkcja Bessela I rodzaju rzędu ν , Bi — liczbą Biota, F_0 — liczba Fouriera (bezwymiarowy czas). Wielkość, wprowadzona przy pomocy wzoru (2.13), znakomicie

nadaje się do odnoszenia procesu nagrzewania z dowolną liczbą Biota do procesu nagrzewania z warunkiem brzegowym I rodzaju, a co za tym idzie, do decydowania, w jakim stopniu proces nagrzewania może zostać przybliżony procesem z warunkiem I lub II rodzaju. Również w pracy [10] podano rozwiązania zretransformowane tylko dla $x^* = 1$.

Do prac [10] i [12] powrócimy jeszcze w rozdziale 5 z uwagi na inne ciekawe idee w nich zawarte.

Na zakończenie rozważań dotyczących analizy transformat omówimy jeszcze pracę IMBERA [22]. W pracy tej rozważano zagadnienie odwrotne dla walca. Autor bardzo szybko uzyskuje rozwiązanie w transformatach. Następnie dokonuje aproksymacji retransformaty dla małych czasów przy pomocy odpowiedniego przybliżenia wewnętrznej odpowiedzi temperaturowej (szereg quasipotęgowy zawierający funkcje erfc) oraz zastąpienia ułamka $I_0\left(x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)/I_0\left(x^*\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)$ przez rozwinięcie asymptotyczne (x^* — punkt, w którym zarejestrowano wewnętrzną odpowiedź temperaturową). Ta część pracy jest podobna do wcześniej omówionych (np. [34]). Ale następnie autor dokonuje przybliżenia rozwiązania dla całego zakresu zmienności t . Wykorzystuje w tym celu metodę dopasowania funkcji [31, 34]. Poszukuje funkcji $\bar{F}(s)$, posiadającej łatwą do znalezienia retransformatę, a będącą dobrym przybliżeniem ułamka

$$(2.14) \quad \frac{\exp\left[-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}(x-x^*)\right]I_0\left(x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)}{I_0\left(x^*\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)}$$

Funkcja ta dla $x^* \geq 0,5x$ odbiega od wartości wspomnianego ułamka, liczonych dla s rzeczywistego, nie więcej niż o 1,1%. Autor zakłada początkowo, że $\bar{F}(s)$ ma postać

$$(2.15) \quad \bar{F}(s) = \frac{a_2 p x^*}{1+a_3 p x^*} + \frac{a_4}{1+a_6 p x^*}, \quad p = \sqrt{\frac{s}{\kappa}},$$

gdzie nieznanne współczynniki a_2, a_3, a_4 i a_6 są funkcjami zmiennej x . Dopasowując $\bar{F}(s)$ do funkcji (2.14) dla małych i dużych czasów ustala postaci tych współczynników, a następnie, opierając się na numerycznym porównaniu związków (2.14) i (2.15) dla argumentu rzeczywistego, znajduje poprawkę, decydującą o dobrym przybliżeniu ułamka (2.14). Ostatecznie $\bar{F}(s)$ przyjmuje się w postaci

$$(2.16) \quad \bar{F}(s) = \frac{a_2 p x^*}{1+a_3 p x^*} + \frac{a_4}{1+a_6 \cdot p \cdot x^*} - 0,46379 p x^* \cdot \left(1 - \frac{x^*}{x}\right)^{1,25} \times \\ \times \exp\left[-1,39028 p x^* \cdot \left(1 - \frac{x^*}{x}\right)^{0,4}\right].$$

Zastępując tą funkcją ułamek (2.14) otrzymuje się takie przybliżone wyrażenie na transformacie temperatury, które daje się w prosty sposób odwrócić. Otrzymana funkcja $T(x, t)$ przybliża wartości temperatury w obszarze $x \in \langle x^*, \bar{x} \rangle$, gdzie \bar{x} jest wartością graniczną, dla której jeszcze funkcjonuje odwracanie funkcji $\bar{T}(x, s)$ przybliżonej poprzez zastąpienie ułamka (2.14) przez $\bar{F}(s)$. Błąd, z jakim Imber przybliżył wartości temperatury we wspomnianym obszarze, był nie większy niż 0,3%.

Metoda dopasowywania funkcji w ujęciu Imbera jest metodą efektywną i dającą w określonym obszarze wyniki bardzo obiecujące. Wadą tej metody jest może zbyt duża przewaga intuicji nad matematyką w doborze funkcji „zastępczej”.

2.3. Podejścia oparte na metodzie różnic skończonych. Tego typu podejścia były stosowane w wielu pracach. Było ono bądź wykorzystane do wyliczenia wartości liczbowych rozwiązania danego w postaci bardzo skomplikowanej, jak np. w [16], bądź w celu ekstrapolacji temperatury poza obszar wyznaczony przez punkty o danych odpowiedziach temperaturowych [1, 15, 17], przy czym w pracy [17] zastosowana jest metoda elementów skończonych. Żadna ze wspomnianych prac nie wnosi nic nowego do metodyki rozwiązań. Natomiast interesująca właśnie z punktu widzenia sposobu, w jaki wykorzystano metodę różnic skończonych, jest praca TRUJILLO [37].

Trujillo rozważa równanie macierzowe postaci

$$(2.17) \quad \dot{x} = K \cdot x + T \cdot g, \quad \text{gdzie} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

z warunkiem początkowym $x(0) = C \cdot x(t)$ jest wektorem ($n \times 1$), reprezentującym zmienne stanu, K — pewną macierzą ($n \times n$) reprezentującą własności rozważanego ciała, T jest pewną macierzą ($n \times m$), zaś g jest wektorem ($m \times 1$) reprezentującym wymuszenie.

Problem odwrotny w ujęciu Trujillo jest to tego typu zagadnienie, w którym znane są macierze K i T oraz wszystkie lub niektóre ze składowych wektora x (zmiennych stanu), podczas gdy nieznane są wielkości wymuszające proces. Równanie (2.17) autor rozwiązuje metodą różnic skończonych, przy czym minimalizacja błędu odbywa się przy użyciu w pewien szczególny sposób metody najmniejszych kwadratów. Autor podaje przykłady rozwiązania równania (2.17) dla przypadku odwrotnego zagadnienia przewodnictwa ciepła jak i dla odwrotnego problemu dynamiki konstrukcji. W bardziej dla nas interesującym pierwszym przypadku wektor $x(t)$ to temperatury punktów reprezentujących plastry, na jakie podzielono pyłę (jest to więc metoda dyskretyzacji zmiennych przestrzennych), macierz K wiąże się z dokonanym podziałem i jest oczywiście macierzą pasmową, macierz T zawiera różne od zera elementy tylko dla tych warstw, w których dane są przebiegi temperatur bądź strumieni ciepła, zaś wektor g jest wektorem złożonym ze znanych odpowiedzi temperaturowych. W ten sposób zagadnienie odwrotne zostaje sprowadzone do układu zwyczajnych równań różniczkowych, które daje się stosunkowo prosto rozwiązać numerycznie.

2.4. Rozkład na szereg problemów prostych. Metoda ta została po raz pierwszy użyta przez G. STOLZA [35]. Istotą metody jest wykorzystanie rozwiązania zagadnienia bezpośredniego dla stałego wymuszenia danego poprzez jednostkowy strumień ciepła, przy jednoczesnej dyskretyzacji zmiennej czasowej. Autor wykorzystuje zatem znajomość funkcji $F(x, t)/Z$ (Z — pewna stała), będącej rozwiązaniem problemu brzegowo-początkowego postaci

$$(2.18) \quad \chi \nabla^2 \theta - \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \theta(x, 0) = 0, \quad k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=R} = 1.$$

Dla warunku brzegowego II rodzaju z prawą stroną dowolnej postaci, np. równą — $\Phi(t)$, oraz dla niezerowego (równego pewnej stałej θ_i) warunku początkowego, można teraz łatwo uzyskać rozwiązanie, wykorzystując twierdzenie o splocie:

$$(2.19) \quad [\Theta_t - \Theta(x, t)]Z = \int_0^t \Phi(\mu) \frac{\partial}{\partial t} F(x, t - \mu) d\mu.$$

Następnym krokiem jest przybliżenie funkcji $\Phi(t)$ funkcją schodkową, która przyjmuje wartości stałe w przedziałach czasowych o długości $\Delta t = \lambda$. Poszczególne składniki sumy przybliżającej $\Phi(t)$ różnią się o $\delta\Phi(j\lambda) \equiv \delta\Phi_j \eta(t - j\lambda)$, gdzie $\eta(x)$ — funkcja Heavyside'a, oraz $j = 0, 1, 2 \dots n$. Po tym kroku otrzymuje się rozwiązanie (2.19) w postaci przybliżonej

$$(2.20) \quad \Theta_t - \Theta(x, n\lambda) = \frac{1}{Z} \cdot \sum_{j=0}^n \delta\Phi(j\lambda) F(x, (n-j)\lambda).$$

Przechodząc teraz do zagadnienia odwrotnego, zakładamy że $\Theta(x^*, t) = f(t)$ jest znane, a wyznaczyć należy przebieg strumienia ciepła na brzegu. Oznacza to potrzebę wyznaczenia wszystkich wartości $\delta\Phi(j\lambda)$. Wykorzystując fakt, iż $F(x, 0) = 0$, otrzymuje się

$$(2.21) \quad \delta\Phi[(n-1)\lambda] = - \sum_{j=0}^{n-2} \{ \delta\Phi(j\lambda) F(x^*, (n-j)\lambda) + Z [\Theta_t - \Theta(x^*, n\lambda)] \} \times \\ \times \frac{1}{F(x^*, \lambda)}.$$

Ponieważ każda wartość $\delta\Phi(n\lambda)$ zależy od wszystkich poprzednich przyrostów strumienia ciepła, więc rozwiązanie może być teraz generowane krok po kroku począwszy od $t = 0$. Dla przyrostu $\delta\Phi(0)$ dostaje się stąd

$$(2.22) \quad \delta\Phi(0) = \frac{Z}{F(x^*, \lambda)} [\Theta_t - \Theta(x^*, \lambda)],$$

a następnie na podstawie (2.21) łatwo wyznacza się pozostałe przyrosty strumienia ciepła.

Autor ostrzega, że krok czasowy nie może być zbyt mały, gdyż występuje wówczas możliwość oscylacji rozwiązania (por. także uwagi zawarte w pracy [34]).

Podobną metodę stosuje także w swoich pracach J. V. Beck. Rozważał on w [5] także problem wyznaczenia powierzchniowego strumienia ciepła. Jednakże o ile „wygładzanie” rozwiązania Stolz przeprowadza wykorzystując równowagę cieplną, o tyle Beck robi użytek z metody najmniejszych kwadratów przy wykorzystaniu idei tzw. współczynników wrażliwości [4]. O podejściu Becka będziemy mówić dalej przy omawianiu problemów nieliniowych.

3. Nieliniowe zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego

Zagadnienia nieliniowe nastroczają wiele trudności już przy rozwiązywaniu problemów bezpośrednich. Problemy odwrotne potęgują te trudności, gdyż nie tylko chodzi wówczas o rozwiązanie nietatwego zagadnienia brzegowo-początkowego, lecz także o ekstrapolację

otrzymanego rozwiązania poza obszar wyznaczony przez punkty wewnętrzne ze znanymi odpowiedziami temperaturowymi, i to w taki sposób, aby uwzględnić nieliniowość. Z tej przyczyny prac traktujących o zagadnieniach nieliniowych jest stosunkowo niewiele. Tym niemniej wśród nich daje się wyróżnić dwie metody:

3.1. podejścia oparte na metodzie różnic skończonych, oraz

3.2. rozkład problemu nieliniowego na szereg problemów liniowych (metoda całkowa).

Co do pierwszej metody istnieje pewna liczba prac, w których stosuje się ją z powodzeniem i przy wykorzystaniu interesujących modyfikacji. Metoda druga jest prezentowana na przykładzie jednej pracy, [23], z roku 1979. Podejście zaproponowane w tej pracy dotychczas nie było stosowane w rozważaniach dotyczących zagadnień odwrotnych.

3.1. Podejście oparte na metodzie różnic skończonych. Podejście to stosowane było m. in. w pracach [3, 6, 10, 11 i in.]. Prace [3, 10 i 11] to wykorzystanie klasycznego aparatu metody różnic skończonych, przy czym w pracy [3] zarysowana jest, wykorzystana w [6], a omówiona dokładniej w [4], metoda tzw. współczynników wrażliwości. Prace [10] i [11] zawierają, m. in., przybliżone rozwiązania nieliniowych zagadnień odwrotnych w sensie p. 4^o ze wstępu.

Pracą, którą warto tu nieco szerzej omówić, jest praca БЕЦКА [6]. Modyfikacja metody różnic skończonych, którą się on posługuje, opiera się na koncepcji tzw. nieliniowej estymacji. Metoda ta jest przedstawiona na przykładzie płyty nieskończonej. Autor formułuje problem następująco:

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T(x^*, t) = Y(t), \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = 0,$$

oraz

$$T(x, 0) = T_i(x),$$

gdzie $Y(t)$ oraz $T_i(x)$ są znanymi funkcjami, $x^* \in (x_e, x_i)$ przy czym autor przyjmuje $x_e = 0$, $x_i = L$, $x^* = E < L$. O λ i c_p zakłada się, że mogą być funkcjami temperatury i zmiennych przestrzennych.

Wielkościami poszukiwanymi są powierzchniowy strumień ciepła i powierzchniowa temperatura.

Rozwiązanie tego problemu może zostać wyznaczone przez zastosowanie kilku przybliżeń przy pomocy różnic skończonych, jak zrobiono np. w [3]. Jednakże z pracy [7] wynika m. in., że jeśli zmniejszać kroki czasowe, to coraz wyższe pochodne po czasie funkcji $Y(t)$ i strumienia w punkcie $x^* = E$ stają się nie do pominięcia. Przy użyciu formalizmu różnic skończonych oznaczałoby to konieczność uwzględnienia różnic wyższych rzędów. Z drugiej strony wiadomo [6, 34, 35], że zmniejszanie kroku czasowego prowadzi do utraty stabilności procedury numerycznej.

Idea nieliniowych estymacji pozwala po części ominąć te trudności, aczkolwiek kosztem pojawienia się nowych, o których mowa poniżej.

Jako zerowe przybliżenie dla q tzn. jako q^0 przyjmuje się rozwiązanie problemu liniowego. Następnie wyznacza się, rozwiązując nieliniowe zagadnienie brzegowo-początkowe (3.1)₁, (3.1)₃ (3.1)₄ przy wykorzystaniu wyznaczonego q^0 , przebieg temperatury T stanowiącej odpowiedź temperaturową punktu E na wymuszenie q^0 . Procedura wyznaczania strumienia q polega na minimalizowaniu funkcjonału

$$(3.2) \quad F(\bar{q}) = \sum_{i=1}^J (T_{\eta+i} - Y_{\eta+i})^2,$$

gdzie $\bar{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ jest wektorem, którego współrzędne określone są następująco:

$$q(0, t) = q_n \quad \text{dla} \quad \Theta_{n-1} < t < \Theta_n,$$

$Y_{\eta+i}$ jest wartością zmierzonej w punkcie E temperatury w chwili $t_{\eta+i}$, $T_{\eta+i}$ jest temperaturą wyliczoną dla chwili $t_{\eta+i}$ przy założeniu, że wartość strumienia ciepła na powierzchni wynosi q . (Zatem dla q° otrzymuje się temperaturę T°).

Krok czasowy dla wyznaczenia $Y_{\eta+i}$ czy $T_{\eta+i}$ może się różnić od kroku czasowego dla wyznaczenia q_n . Zachodzi między nimi relacja $\Delta\Theta = m \cdot \Delta t$, gdzie m — liczba naturalna, $\Delta\Theta$ — krok czasowy przy dyskretyzacji strumienia, zaś Δt dotyczą Y i T . Oznacza to, że Θ_M i t_n są tą samą chwilą czasu gdy $mM = \eta$.

Liczba J , do której następuje sumowanie po prawej stronie (3.2), jest równa $J = mr$, gdzie $r = 1, 2, 3$ lub 4 ; rzadko trzeba przyjmować r większe od czterech. Dzięki temu dla $r > 1$ przy wyznaczaniu strumienia wykorzystuje się „przyszłe” temperatury. Jeśli bowiem wyznaczana jest wartość q_{M+1} , to sumowanie obejmuje wskaźniki od $\eta = m \cdot M$ poprzez $\eta + m = m(M+1)$ aż do $\eta + r m = \eta + J$. Dzięki temu autor uzyskuje bardziej precyzyjne wyniki; chwyt dotyczący możliwości wprowadzenia do (3.2) temperatur $T_{\eta+i}$ gdzie $i > m$, polega na założeniu (tylko na użytek chwilowo wykonywanych rachunków), że $q_{M+1} = q_{M+2} = \dots = q_{M+r}$.

Aby zilustrować sposób, w jaki funkcjonuje metoda, założymy że wyznaczone jest q_{M+1}^{l-1} , tzn $l-1$ przybliżenie strumienia ciepła w chwili $(M+1) \Delta\Theta$. Oznacza to, że znamy również T_{M+1}^{l-1} . Rozkładamy teraz $T_{\eta+i}^l$ w szereg Taylora:

$$(3.3) \quad T_{\eta+i}^l \approx T_{\eta+i}^{l-1} + \Phi_{M,\eta,i}^{l-1} \nabla q_{M+1}^l,$$

gdzie $\nabla q_{M+1}^l = q_{M+1}^l - q_{M+1}^{l-1}$ zaś $\Phi_{M,\eta,i}^{l-1}$ jest tzw. współczynnikiem wrażliwości [4], określonym następująco:

$$\Phi_{M,\eta,i}^{l-1} \equiv \frac{\partial T_{\eta+i}^l}{\partial q_{M+1}^l} \approx \frac{T_{\eta+i} [q_{M+1}^{l-1} (1 + \varepsilon)] - T_{\eta+i} [q_{M+1}^{l-1}]}{\varepsilon \cdot q_{M+1}^{l-1}}, \quad \varepsilon \ll 1$$

Za ε przyjmuje autor wartość 0,001.

Jak więc widać, przyjmuje się zależność funkcyjną pomiędzy $T_{\eta+i}$ oraz q_{M+1} . Wykorzystując następnie fakt, że $F(\bar{q})$ ma osiągnąć minimum, oraz związek (3.3), otrzymuje się wzór na zmianę wartości strumienia po l -tym przybliżeniu:

$$(3.4) \quad \nabla q_{M+1}^l = \left[\sum_{i=1}^J [(\Phi_{M,\eta,i}^{l-1})^2] \right]^{-1} \sum_{i=1}^J (Y_{\eta+i} - T_{\eta+i}^{l-1}) \Phi_{M,\eta,i}^{l-1}.$$

Kolejne przybliżenia prowadzi się aż do chwili, gdy zmiana ∇q_{M+1}^l będzie znikoma, np. będzie równa $0,005 q_{M+1}^{l-1}$.

Metoda daje zadowalające wyniki dla $r = 3$ lub 4 nawet przy $m = 1$. Dla $r = 2$ rozwiązanie silnie oscyluje wokół rozwiązania ścisłego, zaś dla $r = 1$ procedura numeryczna jest niestabilna. Metodę tę można także stosować w celu rozwiązania liniowych problemów odwrotnych. W tych przypadkach funkcjonuje ona na zasadach zbliżonych do procedury opisanej w pracy [35].

3.2. Metody całkowe. Zasadnicza różnica pomiędzy metodą całkową, użytą przez IMBERA [23], a metodą omówioną wyżej, polega na tym, że Imber wyznacza rozwiązanie zagadnienia odwrotnego jako funkcję ciągłą, podczas gdy БЕК [6] wyznacza tylko ciąg wartości dyskretnych.

Rozwiązanie Imbera składa się z dwóch części. W części pierwszej rozważa on bezpośrednio nieliniowe zagadnienie wyznaczenia pola temperatury dla półprzestrzeni. Dokonuje tego metodą kolejnych przybliżeń. Jako przybliżenie zerowe T_0 rozwiązania równania (3.1)₁ z warunkiem początkowym (3.1)₄ przyjmuje rozwiązanie dla problemu liniowego. Znając rozwiązanie będące n -tym przybliżeniem ($n = 0, 1, 2, \dots$), uzyskuje się $n+1$ — przybliżenie następująco. Konstruuje się funkcjonał

$$(3.5) \quad I(a, C_0, C_1, \dots, C_n) = \int_0^{\infty} \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \sum_{k=0}^n C_k \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2} \right\}^2 dx dt,$$

który następnie należy zminimalizować, przy czym współczynnik a musi być równy części stałej współczynnika przewodnictwa cieplnego λ , oznaczonej λ_i . Funkcja $T(x, t)$ wchodząca w skład prawej strony związku (3.5) jest rozwiązaniem równania

$$(3.6) \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sum_{k=0}^n C_k \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2};$$

stałe C_k dla $k = 1, 2, \dots, n$ wyznacza się na podstawie warunków koniecznych osiągnięcia minimum przez funkcjonał I . Zatem aby otrzymać $T_{n+1}(x, t)$, trzeba wyznaczyć współczynniki C_0, C_1, \dots, C_n z równań

$$(3.7) \quad \frac{\partial I}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial C_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

przy jednoczesnym podstawieniu $a = \lambda_i$.

Jak więc widać, rozwiązanie zagadnienia bezpośredniego otrzymane jest metodą rozkładu problemu nieliniowego na ciąg problemów liniowych.

Natomiast nieliniowe zagadnienie odwrotne autor rozwiązuje w oparciu o zreferowaną już metodę rozwiązywania odwrotnych zagadnień liniowych [18]. Na podstawie rozwiązania zagadnienia bezpośredniego stwierdza on, iż krzywa opisująca przebieg odpowiedzi temperaturowej w punkcie wewnętrznym dla zagadnienia nieliniowego daje się lokalnie przybliżyć odpowiednimi krzywymi otrzymanymi dla zagadnień liniowych. W związku z tym przy nieliniowym zagadnieniu odwrotnym traktuje się współczynnik przewodnictwa λ jako odcinkowo stały i otrzymuje się rozwiązanie jako sklejenie rozwiązań dla poszczególnych zagadnień liniowych. Dla stwierdzenia, czy otrzymane przybliżenie, na podstawie odczytów z dwóch termopar, jest w poszczególnych przedziałach czasu wystarczająco ściśle, proponuje Imber, aby umieścić pomiędzy tymi termoparami trzeci, kontrolny czujnik.

4. Zagadnienia odwrotne wielowymiarowe przewodnictwa cieplnego

Po raz pierwszy dwu- i trójwymiarowe zagadnienia odwrotne przewodnictwa ciepła rozważał IMBER [20] w 1974 roku. Rozważał on zagadnienie dwuwymiarowe dla ciała

o dowolnych kształtach, natomiast dla zagadnień trójwymiarowych określił sposób otrzymania rozwiązania.

Aby rozważać zagadnienie odwrotne wielowymiarowe, trzeba znać a priori temperaturę w zamkniętym obszarze wewnątrz ciała. Z tego powodu termopary winny być usytuowane na brzegu tego obszaru, tzn. na krzywych w przypadku dwuwymiarowym lub na powierzchniach w przypadku trójwymiarowym. Staje się jasne, że w przypadkach wielowymiarowych dokładność predykcji temperatury w dowolnym punkcie na zewnątrz obszaru ograniczonego przez krzywe (powierzchnie) na których przebiegi temperatur są znane, w istotny sposób zależy od ilości termopar użytych do wyznaczenia tych przebiegów.

Ograniczając się w rozważaniach do zagadnienia dwuwymiarowego, konstruuje Imber rozwiązanie w sposób analogiczny jak dla problemu jednowymiarowego [18, 19]. Rozwiązuje on zatem równanie

$$(4.1) \quad \nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t},$$

z jednorodnym warunkiem początkowym oraz z warunkami opisującymi temperaturę w rogach pewnego prostokąta

$$(4.2) \quad T(x_i, y_j, t) = \sum_{n=1}^N b_n^{ij} t^n, \quad i, j = 1, 2,$$

oraz na bokach tegoż prostokąta

$$(4.3)_1 \quad T(x, y_j, t) = f_j(t) \quad \text{przy czym } x \in (x_1, x_2),$$

$$(4.3)_2 \quad T(x_i, y, t) = g_i(t) \quad \text{przy czym } y \in (y_1, y_2).$$

W celu otrzymania rozwiązania we wnętrzu prostokąta, wykorzystuje transformację Laplace'a. Specjalnych metod trzeba użyć dopiero przy eksploatacji rozwiązania poza ten obszar. Istota metody ekstrapolacji temperatury w przypadku wielowymiarowym polega na sprowadzeniu zagadnienia do jednowymiarowego. Dokonuje się tego, dobierając odpowiednie drogi, na których przeprowadza się operację ekstrapolacji. W rozważanym, dwuwymiarowym przypadku autor wybiera przedłużenia boków prostokąta. Uzyskuje w ten sposób do predykcji temperatury na zewnątrz obszaru te same dane, które posłużyły mu do wyznaczenia rozwiązania wewnątrz prostokąta. Postępując teraz zgodnie z omówioną w rozdziale 2.1. pracy metodą, [18], otrzymuje w ten sposób po jednym lub kilku krokach przebiegi temperatur w ośmiu punktach na brzegu rozważanego ciała. Aby wyznaczyć przebiegi temperatur w punktach wewnętrznych bądź brzegowych nie leżących na wspomnianych wyżej drogach, należy obrać jako nowe drogi ekstrapolacji bądź proste przechodzące przez prostokąt (równoległe do poprzednich), bądź przecinające obszar wyznaczony przez te proste. W ten sposób można wyznaczyć przebiegi temperatur w każdym punkcie dwuwymiarowego ciała o dowolnych kształtach, tyle tylko, że część wyznaczonych przebiegów będą to wyniki niejako drugiej generacji (w oparciu o dane — wyniki ekstrapolacji na drogach przechodzących przez obszar prostokąta).

Metoda Imbera jest dosyć uciążliwa w zastosowaniu do problemów więcej niż jednowymiarowych. Potrzeba wykorzystania jako danych wyznaczonych uprzednio poza

obszarem przebiegów temperatury znacznie zwiększa możliwość błędnej aproksymacji. Ponadto minusem metody jest konieczność wprowadzenia do badanego obiektu dużej ilości termopar. Imber podaje, że przy ośmiu czujnikach (w każdym narożu i w środku każdego boku prostokąta) otrzymane wyniki są obciążone blisko 10% błędem. Wspomina on także o „wąskim gardle” metody, jakim jest — przy dużej liczbie termopar — wielkość układu równań na wyznaczenie stałych w związkach typu (2.8). Przy dwunastu termoparach (po dwie termopary pomiędzy narożami) i przy uwzględnieniu tylko pięciu pierwszych wyrazów szeregów typu (2.8)₂ (zawierają one — z uwagi na dwuwymiarowość zagadnienia — wyrazy o dwóch wskaźnikach, podobnie jak po prawej stronie związku (4.2)) — liczba niewiadomych wynosi 40 [21], tzn. do wyliczenia są wyznaczniki o rozmiarach 40×40 i to jeszcze na etapie przygotowywania danych do wyznaczenia ekstrapolowanej temperatury! Z tej przyczyny Imber proponuje [21], aby termopary umieszczać blisko interesującego nas obszaru, a wymiar prostokąta i liczba termopar powinny być jak najmniejsze.

Wydaje się, że stosowanie metody Imbera nie może dać wyników bliskich rzeczywistości, gdyż wprowadzenie dużej liczby czujników spowoduje niewątpliwie zmiany w polu temperatury.

5. Odwrotne zagadnienia temperaturowe w termosprężystości

Zupełnie nowe możliwości, szczególnie jeśli chodzi o wyznaczanie pola temperatury na zewnątrz obszaru o znanych warunkach brzegowych, wprowadzają idee zawarte w pracach [10] i [12]. W pracach tych omówione są metody wyznaczania temperatury i strumienia ciepła na powierzchni ciał, gdy uwzględnia się efekt sprzężenia pola temperatury z polem przemieszczeń. Dokonana analiza dotyczyła jednowymiarowych zagadnień teorii naprężeń cieplnych (a więc bez uwzględnienia tzw. efektów krzyżowych). Sformułowanie problemu zawierało równanie przewodnictwa cieplnego (2.1) z jednorodnym warunkiem początkowym, warunkiem symetrii (izolacji w przypadku płyty) dla $x = 0$ oraz równanie ruchu w przemieszczeniach.

$$(5.1) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2\beta}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1-2\beta}{x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u(x, t) = k_\beta \frac{\partial T(x, t)}{\partial x},$$

z warunkami brzegowymi i początkowymi

$$(5.2) \quad u(x, 0) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = 0; \quad \sigma_{xx}(1, t) = 0,$$

gdzie $c^2 = \frac{2G(1+2\beta\nu)}{\rho[1-(1-2\beta)\nu]}$, G — moduł ścinania, ν — liczba Poissona, ρ — gęstość, β — współczynnik kształtu, omówiony w rozdziale 2.2, $u(x, t)$ — przemieszczenie w kierunku osi x , $k_\beta = \frac{1+\nu}{1+2\beta\nu} \alpha_t$, α_t — rozszerzalność cieplnej. W rozpatrywanym zagadnieniu

$\beta \neq 0,5$. σ_{xx} jest współrzędną tensora naprężenia, określoną następująco:

$$(5.3) \quad \sigma_{xx} = \frac{2G}{1-(1-2\beta)\nu} \left[(1+2\beta\nu) \frac{u}{dx} + (1-2\beta)\nu \frac{u}{x} - (1+\nu)\alpha_t T \right]$$

W celu otrzymania rozwiązania zagadnienia odwrotnego pola temperatury stosuje się tu, podobnie jak i w wielu poprzednio omówionych pracach, analizę transformat Laplace'a. Pozwala ona wyrazić temperaturę powierzchniową lub strumień ciepła na brzegu, gdy np. znany jest przebieg przemieszczenia w punkcie x^* , tzn. $u(x^*, t) = u_1(t)$. Dla transformaty temperatury oraz strumienia ciepła na powierzchni ciała zachodzą wówczas związki [10]

$$(5.4) \quad \begin{cases} \bar{T}(1, s) = \bar{u}_1(s) \frac{c^2 - s}{c^2 x^* \beta k} \cdot \frac{\sqrt{s} I_{-\beta}(\sqrt{s}) L_1(s, \beta)}{I_{-\beta+1}(x^* \sqrt{s}) L_1(s, \beta) - I_{-\beta+1}\left(x^* \frac{s}{c}\right) L_2(s, \beta)} \\ \bar{q}(1, s) = \bar{u}_1(s) \frac{c^2 - s}{c^2 x^* \beta k} \cdot \frac{s I_{-\beta+1}(\sqrt{s}) L_1(s, \beta)}{I_{-\beta+1}(x^* \sqrt{s}) L_1(s, \beta) - I_{-\beta+1}\left(x^* \frac{s}{c}\right) L_2(s, \beta)} \end{cases}$$

gdzie

$$L_1(s, \beta) = (1 + 2\nu) I_{-\beta}\left(\frac{s}{c}\right) - (1 - 2\beta) [1 - (1 - 2\beta)\nu] \frac{c}{s} \cdot I_{-\beta+1}\left(\frac{s}{c}\right)$$

$$L_2(s, \beta) = (1 + 2\beta\nu) \cdot \frac{\sqrt{s}}{c} I_{-\beta}(\sqrt{s}) - (1 - 2\beta) [1 - (1 - 2\beta)\nu] \frac{c}{s} I_{-\beta+1}(\sqrt{s})$$

Podobne związki można podać dla przypadku, gdy znany jest w punkcie wewnętrznym przebieg naprężeń cieplnych [10, 12]. Aby transformaty związków (5.4) były odwracalne, funkcja $u_1(t)$ musi być odpowiednio regularna tak, że będą spełnione dla niej warunki analogiczne do warunku (2.12) [10, 12]. Przy zastosowaniu pomiaru przemieszczeń metodą np. znaczonych atomów (umieszczenie w odlewie np. cylindra silnika śladowych ilości izotopu pierwiastka promieniotwórczego) uzyskuje się możliwość dokonywania pośrednio pomiarów temperatury na tej powierzchni cylindra, która współpracuje z tłokiem.

6. Podsumowanie

Niniejsza praca zawiera przegląd ważniejszych metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła. Jednakże oczywistym jest, że nie wszystkie prace dadzą się jednoznacznie „zaszufladkować”. Do takich należy np. praca TULISZKI [38], gdzie nie tylko rozwiązano złożony problem pól temperatury i naprężeń, ale także podano sposób wyznaczania temperatury powierzchniowej, którego nie da się porównać z żadnym z omówionych. Należy jednak przy tym zaznaczyć, iż z uwagi na złożoność rozważanego zagadnienia metoda podana w pracy [38] nie jest tak prosta i elegancka jak metoda IMBERA [18, 22] czy BECKA [6]. Niniejszy przegląd nie zawiera również wszystkich prac napisanych na temat zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła. Pominięto np. prace cytowane w monografii TIEMKINA [36], jak również samą monografię, która — choć traktuje o zagadnieniach odwrotnych — jest stosunkowo mało czytelna i nie zawiera treści przydatnych dla eksperymentatora. Niewątpliwie niektóre z podejść zaprezentowanych w tej monografii, jak np. rozwijanie splotu w szereg, może jeszcze znaleźć zastosowanie, lecz wydaje się,

że metody omówione w rozdziałach 2.1, 2.4. czy 3.1. naszego opracowania są znacznie prostsze i bardziej eleganckie.

Dalsze kierunki badań dotyczących zagadnień odwrotnych, to rozważania dotyczące problemów nieliniowych jak również rozwijanie metod predykcji temperatury przy znanych odpowiedziach przemieszczeniowych czy naprężeniowych w punkcie (punktach) wewnętrznym. Te drugie problemy stanowią przedmiot badań autorów tego przeglądu. Warto podać, że w ogólności zagadnienia odwrotne w sensie punktów 1° i 2° ze wstępu można podzielić na

a) zagadnienia odwrotne jednorodne, tzn. dane i poszukiwane są przebiegi funkcji tego samego rodzaju, np. temperatury, oraz

b) zagadnienia odwrotne niejednorodne, tzn. dane i poszukiwane są przebiegi funkcji różnych rodzajów (por. rozdział 5 pracy).

Rozpatrując zagadnienia odwrotne niejednorodne, gdy dane są przebiegi dwóch różnych wielkości, każda w innym punkcie wewnętrznym, dochodzi się do wniosku, że ilość problemów czekających na rozwiązania (zastosowania?) jest znaczna. Zwrócimy chociażby uwagę na to, że w punktach x_1 i x_2 mogą być znane przebiegi, odpowiednio, temperatury i przemieszczeń, temperatury i naprężeń, przemieszczeń i strumienia ciepła itd., a wobec tego zagadnienia odwrotne mogą dotyczyć np. w obszarze „do tyłu” temperatury, a w obszarze „do przodu” przemieszczeń, jak to jest w przypadku pierwszej ze wspomnianych par znanych przebiegów. Jednocześnie proste (bezpośrednie) zagadnienie brzegowo-początkowe z warunkami typu Dirichleta bądź Neumanna okazuje się być szczególnym przypadkiem problemu odwrotnego. Są to wspomniane w rozdziale 2.2. brzegowe zagadnienia odwrotne, wśród których tylko jeden rodzaj problemów — z warunkami brzegowymi trzeciego rodzaju [10, 12] — to brzegowe zagadnienia odwrotne właściwe.

Ponad połowa prac omówionych w przeglądzie to publikacje z dziesięciolecia 1970 - 1980. Wydaje się, że obecnie, przy burzliwym rozwoju metod badań nieniszczących, problematyka zagadnień odwrotnych, nie tylko dotyczących pól temperatury, jest szczególnie aktualna i istotna.

Literatura cytowana w tekście

1. R. G. ARLEDGE, A. HAJI-SHEIKH, *An Iterative Approach to the Solution of Inverse Heat Conduction Problems*, ASME Paper 77 — WA/TM — 2.
2. Е. А. АРТУХИН, *Определение коэффициента температуропроводности по данным эксперимента*. Инж.-Физ. Журнал, 1, 29, (1975).
3. J. V. BECK, H. WOLF, *The Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem*, ASME Paper 65 — HT — 40 (1965).
4. J. V. BECK, *Transient Sensitivity Coefficients for the Thermal Contact Conductance*, Int. J. Heat Mass Transfer, 10, 1615-1617 (1967).
5. J. V. BECK, *Surface Heat Flux Determination Using an Integral Method*, Nucl. Engng. Design, 7, 170-178 (1968).
6. J. V. BECK, *Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, 13, 703—716 (1970).
7. O. R. BURGGRAF, *An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Application*, Trans. ASME, s. C. J. Heat Transfer, 86, 373 - 382 (1964).
8. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Oxford University Press, (1959).

9. C. J. CHEN, D. M. THOMSEN, *On Transient Cylindrical Surface Heat Flux Predicted from Interior Temperature Response*, AIAA Journal, **13**, 697 - 699 (1975).
10. M. J. CIAŁKOWSKI, *Metoda wyznaczania pól temperatury w elementach maszyn cieplnych w dowolnych warunkach nagrzewania*, praca doktorska, Polit. Pozn., Poznań (1978).
11. M. J. CIAŁKOWSKI, K. TUSTANOWSKA, *Nieliniowe zagadnienie brzegowe dla jednowymiarowego problemu nagrzewania (chłodzenia) kuli, walca i płyty nieskończonej. Zagadnienie odwrotne pola temperatury*, Arch. Bud. Maszyn, **2**, **26**, 291 - 305 (1979).
12. M. J. CIAŁKOWSKI, K. GRYSA, *On a Certain Inverse Problem of Temperature and Thermal Stress Fields*, Acta Mechanica, **36**, 169—185 (1980).
13. J. M. DAVIES, *Input Power Determined from Temperatures in a Simulated Skin Protected Against Thermal Radiation*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **88**, 154 - 160 (1966).
14. L. I. DEVERALL, R. S. CHANNAPRAGADA, *A New Integral Equation for Heat Flux in Inverse Heat Conduction*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **88**, 327 - 328 (1966).
15. N. D'SOUZA, *Numerical Solution of One-Dimensional Inverse Transient Heat Conduction by Finite Difference Method*, ASME Paper 75 - WA/HT — 81.
16. I. FRANK, *An Application of Least Squares Method to the Solution of the Inverse Problem of Heat Conduction*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **85**, 378 (1963).
17. P. S. HORE, G. W. KRUTZ, R. J. SCHOENHALS, *Application of the Finite Element Method to the Inverse Heat Conduction Problem*, ASME Paper 75-WA/TM-4.
18. M. IMBER, J. KHAN, *Prediction of Transient Temperature Distributions with Embedded Thermocouples* AIAA Journal, **6**, **10**, 784 - 789 (1972).
19. M. IMBER, *A Temperature Extrapolation Method for Hollow Cylinder*, AIAA Journal, **1**, **11**, 117 - 118 (1973).
20. M. IMBER, *Temperature Extrapolation Mechanism for Two-Dimensional Heat Flow*, AIAA Journal, **8**, **12**, 1089 - 1093 (1974).
21. M. IMBER, *Two-Dimensional Inverse Conduction Problem — Further Observations*, AIAA Journal, **1**, **13**, 114 - 115 (1975).
22. M. IMBER, *Inverse Problem for the Solid Cylinders*, AIAA Journal, **1**, **17**, 91 - 94 (1979).
23. M. IMBER, *Nonlinear Heat Transfer in Planar Solids: Direct and Inverse Applications*, AIAA Journal, **2**, **17**, 204 - 212 (1979).
24. J. KHAN, *A New Analytical Solution of the Inverse Heat Conduction Problem*, Ph. D. Thesis, Polytechnic Inst. of Brooklyn, New York (1972).
25. V. A. KOVERYANOW, *Inverse Problem of Nonsteady-State Thermal Conductivity*, Teplofizika Vysokich Temperatur, **1**, **5**, 141 - 143 (1967).
26. Л. А. КОЗДОВА, *Решения нелинейных задач теплопроводности*. Наукова Думка, Киев (1976).
27. M. M. LAVRENTIEV, V. G. ROMANOV, V. G. VASILIEV, *Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).
28. A. V. MASKET, A. C. VASTANO, *Interior Problems of Mathematical Physics, Part II Heat Conduction* Am. J. of Phys., **30**, 796 - 803 (1962).
29. T. J. MIRSEPASSI, *Heat-Transfer Charts for Time-Variable Boundary Conditions*, British Chem. Engng., **4**, 130 - 136 (1959).
30. К. Г. ОМЕЛЬЧЕНКО, В. Г. ПЧЕЛКИНА, *Решение обратной задачи нелинейной теплопроводности по определению теплофизических характеристик*. Инж.-Физ. Журнал, **1**, **29**, (1975).
31. M. L. ROSENZWEIG, *The Response of the Laminar Boundary Layer to Impulse Motion*, Ph. D. Dissertation in Aeronautical Engng. Cornell Univ., (1959).
32. K. C. SABHERWAL, *An Inverse Problem of Transient Heat Conduction*, Indian J. Pure and Appl. Phys., **3**, 397 - 398 (1965).
33. Н. В. ШУМАКОВ, *Метод экспериментального изучения процесса нагрева твердого тела*. Журнал Техн. Физ., **4**, **27**, 844-855, (1957).
34. E. M. SPARROW, A. HAJI-SHEIKH, T. S. LUNDGREN, *The Inverse Problem in Transient Heat Conduction*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **86**, 369 - 375 (1964).
35. G. STOLZ, Jr, *Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **82**, 20 - 26 (1960).

36. А. Г. Темкин, *Обратные методы теплопроводности*. Изд. Энергия, Москва, (1963).
37. D. M. TRUJILLO, *Application of Dynamic Programming to the General Inverse Problem*, Int. J. Num. Meth. in Engng., 12, 613 - 624 (1978).
38. E. TULISZKA, *An Analysis of the Unsteady Fields of Temperature and Thermal Stresses in a Rotating Disk of Thermal Axial-Flow Turbines*, Joint Gas Turbine Congress, Paper No 63, Tokyo (1977).

Резюме

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ — ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В работе продискутировано публикации, относящиеся к вопросам обратных полей температур. Этот ряд вопросов, который интересовал авторов обзора особенно, связанный с проблемами определения разрешения вопроса краево-начального вне области, определённой через берег, на котором заданы условия. Описано задачи линейные и нелинейные, одно и двухмерные, а также обратные задачи для сопряженных полей. В конце работы даны актуальные направления изучения и возможности практических применений обратных задач.

Summary

THE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS — REVIEW

The papers dealing with the inverse heat conduction problems are being reviewed. The concerns the following problems: to find a solution of an initial-boundary value problem outside the region determined by the boundary with prescribed conditions. The linear and nonlinear as well as one- and two-dimensional problems are discussed. Also some inverse problems of the coupled fields are briefly presented. In the last part of the review some new aspects and approaches to the problems as well as the possibilities of application of their solutions are given.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ I SILNIKÓW SPALINOWYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 listopada 1979 roku

EFEKT PRZEJŚCIOWY PRZY PRZENIKANIU SŁABEJ FALI UDERZENIOWEJ PRZEZ
ROZGAŁĘZIENIE PRZEWODÓW

PAWEŁ WIEWIÓRSKI (ŁÓDŹ)

Wykaz oznaczeń

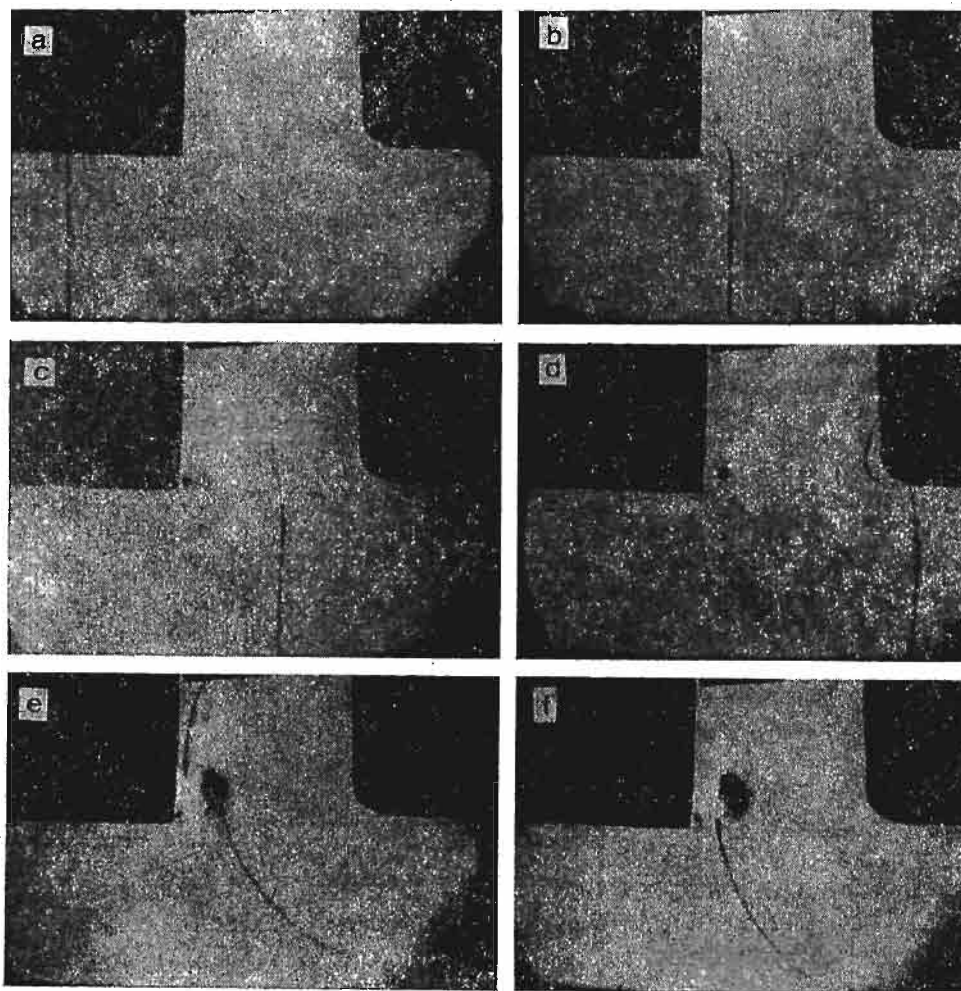
- a — prędkość dźwięku,
 a_{0s} — prędkość dźwięku w gazie, który doznał przyrostu entropii i rozprężył się do ciśnienia p_0 ,
 A — powierzchnia poprzecznego przekroju kanału,
 d — szerokość kanału przepływowego,
 M — liczba Macha,
 p — ciśnienie absolutne,
 $\Delta p = p - p_0$ — nadciśnienie
 s — entropia,
 t — czas,
 u — prędkość przepływu,
 x — współrzędna,
 α — wskaźnik (rys. 7),
 δ — kąt rozgałęzienia (rys. 4),
 $\kappa = 1, 4$ — wykładnik izentropy,
indeksy:
 c — parametry stagnacji,
 i — parametry związane z falą padającą,
 t — parametry związane z falą przechodzącą,
 o — parametry odniesienia (przed zakłóceniem),
1, 2, 3, — odnosi się do poszczególnych odgałęzień,
,” — kolejne stany przepływu (rys. 3),
 p, z — parametry przed lub za nieruchomą falą uderzeniową (rys. 2c)

1. Wstęp

Przenikaniu fali uderzeniowej przez rozgałęzienie przewodów towarzyszy efekt przejściowy, którego skutki dają znać o sobie w dość znacznej odległości od rozgałęzienia [1]. Efekt ten obejmuje zjawiska formowania się płaskich frontów fal przechodzących i odbitych oraz formowania się wiru za narożem i jego oddziaływania na przepływ. Umiejętność precyzyjnego przewidywania natężenia fal przechodzących i odbitych jest ważna

z punktu widzenia dokładności wykonywania obliczeń przepływu nieustalonego w rurociągach maszyn tłokowych, itp: [2], [3]. W obliczeniach natężenia tych fal zaniędywano dotychczas istnienie tego efektu. Znanych jest kilka takich jednowymiarowych metod obliczeniowych [5, 6, 8]. Spośród nich, bardziej złożone metody dobrze przewidują rzeczywiste natężenia fal w dalszej odległości od rozgałęzienia; bezpośrednio w okolicach rozgałęzienia dobrze przewidują wartości ciśnienia dopiero po zniknięciu efektu przejściowego, natomiast źle przewidują natężenie fali pierwotnej. W pracy [2] zaproponowano metodę obliczania natężenia pierwotnych fal przechodzących, która uwzględnia dwuwymiarowość zjawisk falowych. Efekt przejściowy był badany [1] w zasadzie jedynie eksperymentalnie w zakresie słabych fal, analizę teoretyczną ograniczono tu do prześledzenia rozwoju w czasie fali o założonej strukturze i o danym początkowym kształcie.

Celem niniejszej pracy jest próba ilościowego opisu wyżej wspomnianego efektu przejściowego.

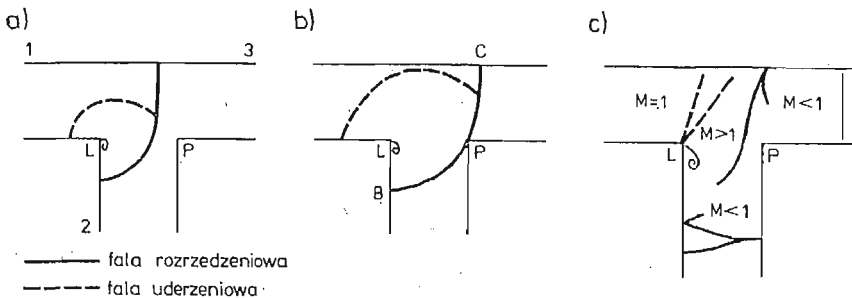


Rys. 1 — Obrazy wizualizacyjne przenikania fali uderzeniowej przez rozgałęzienie [9].

2. Obraz przepływu

Na rys. 1 przedstawionych jest kilka wybranych fotografii pokazujących historię przenikania słabej fali uderzeniowej przez rozgałęzienie przewodów. Wizualizacji dokonano [9] metodą smugową (Schlieren) używając światła błyskowego o czasie błysku ok. $1 \mu\text{s}$ z regulowanym czasem opóźnienia błysku. Pozwoliło to zarejestrować stany przepływu co $10 \mu\text{s}$. Opis użytej aparatury można znaleźć w [5, 9].

Z analizy zdjęć smugowych wynika następujący obraz przepływu. Fala padająca napotyka nagłe zwiększenie przekroju kanału. Powoduje to powstanie na narożu L fali rozrzedzeniowej (niewidocznej na zdjęciu), która współdziałając z falą padającą powoduje jej ugięcie (rys. 1b i 2a). Z chwilą dotarcia ugiętej fali do przeciwległego naroża P (rys. 2b):



Rys. 2 — Niektóre fazy przenikania fali uderzeniowej *a, b* — przepływ poddźwiękowy, $p_1/p_0 < 1,83$
c — przepływ krytyczny i naddźwiękowy, $p_1/p_0 > 1,83$.

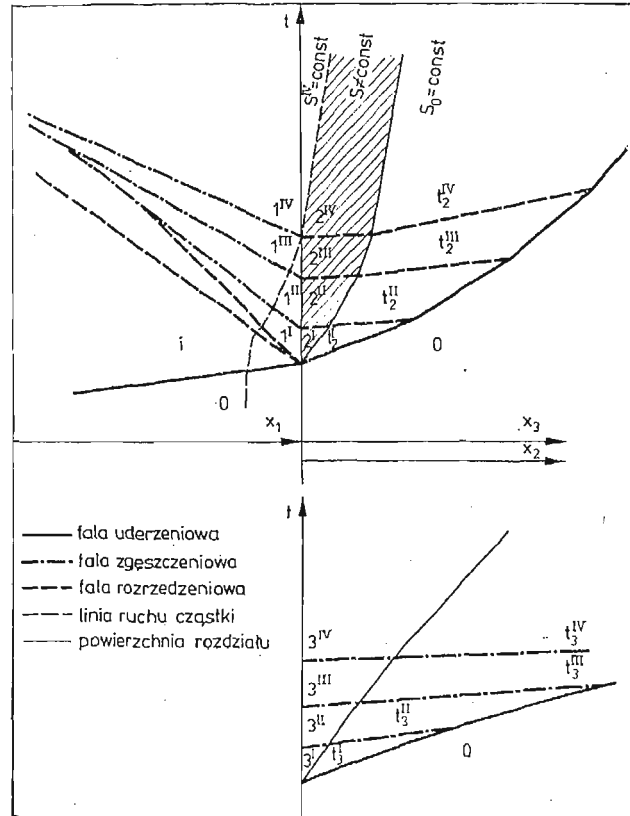
następuje jej podział na dwie fale pierwotne. Jednocześnie generuje się fala odbita od naroża P (rys. 1d), która przemieszcza się w górę przepływu (o ile przepływ jest poddźwiękowy) lub ustytuowuje się w rozgałęzieniu (przy przepływie krytycznym i naddźwiękowym) w obszarze wylotu przewodu 1, rys. 2c, [2]. Na poszczególnych zdjęciach widać także kolejne fazy rozwoju wiru za narożem L . Zmiana parametrów wywołana wzrostem oporów przepływu wywołuje falę rozrzedzeniową w przewodzie 2 oraz fale zagęszczeniowe w przewodach 1 i 3, które gonią fale pierwotne i zmieniają ich natężenie.

3. Teoretyczne przybliżenie

Jak wynika z obrazów wizualizacyjnych (własnych oraz zawartych w [2]), proces formowania się fal przechodzących, tj. kształtowania się płaskich frontów fal jest stosunkowo szybki i kończy się zasadniczo w odległości kilku średnic od rozgałęzienia. Dłużej trwa w odgałęzieniu bocznym, krócej w odgałęzieniu na wprost. Natomiast proces formowania się wiru za narożem jest stosunkowo powolny, trwa około 1 ms, (rys. 6, 7). W związku z tym fale informujące o zakończeniu rozwoju wiru doganiają fale pierwotne dopiero w odległości kilkudziesięciu średnic. Zjawisko to decyduje zatem o wielkości obszaru przepływu objętego stanem przejściowym.

Nasuwa się następujący (rys. 3) model przepływu: z chwilą osiągnięcia węzła rozgałęzienia przez falę padającą tworzą się pierwotne fale przechodzące w odgałęzieniach

2 i 3 i pierwotna fala odbita (rozrzedzeniowa) w odgałęzieniu 1. Następuje „natychmiastowe” ukształtowanie się płaskich frontów fal pierwotnych. Pojawiający się w tym momencie wir za narożem rośnie i wywołuje ciągły wzrost oporów przepływu. Zmiana warunków przepływu w rozgałęzieniu powoduje powstanie fal rozrzedzeniowych i zagęszczeniowych, goniących fale pierwotne i zmieniających ich natężenie.



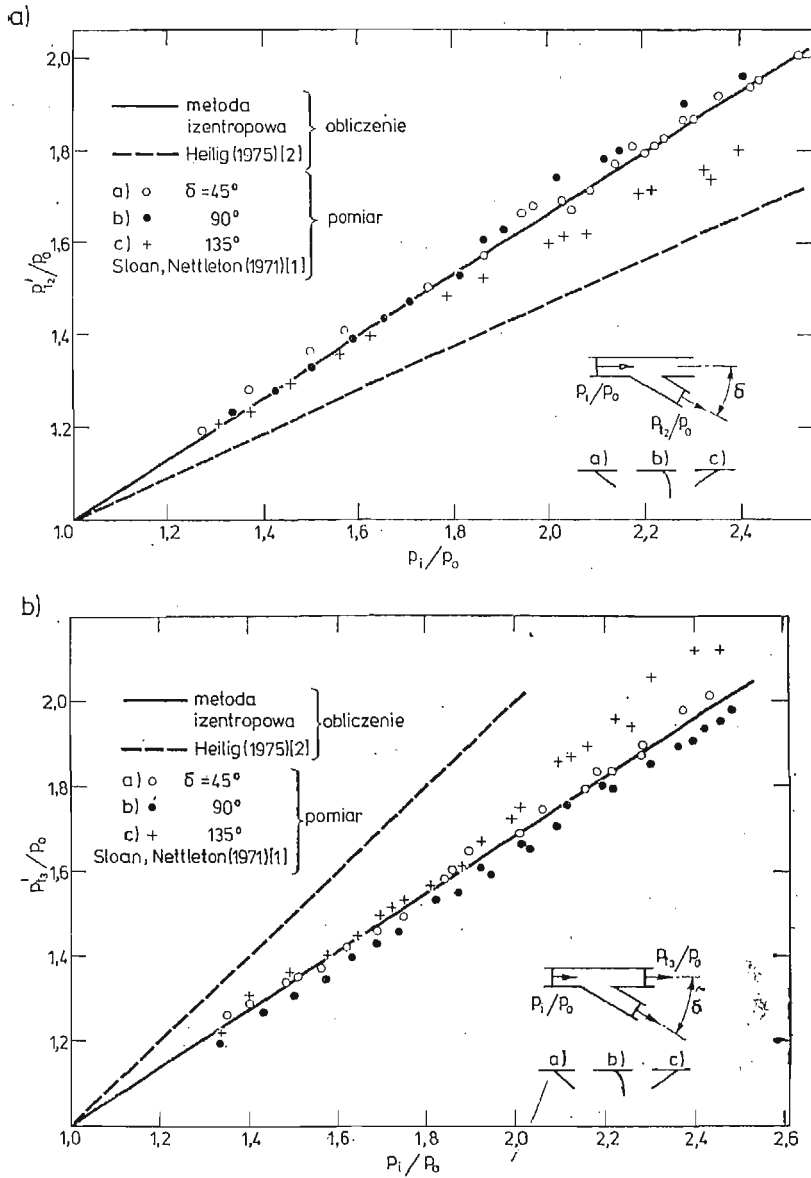
Rys. 3 — Schematyczny plan fal w płaszczyźnie $t-x$

Należy wobec tego ilościowo przewidywać:

- natężenie fal pierwotnych,
- rozwój wiru na narożu,
- oddziaływanie rosnącego wiru na przepływ w obszarze za falami pierwotnymi.

Natężenie fal pierwotnych. Jak wynika z rys. 4 metoda uwzględniająca dwuwymiarowość zjawisk falowych [2] nie przewiduje dobrze natężenia pierwotnych fal przechodzących w zakresie słabych fal padających (dla silnych fal zgodność z danymi eksperymentalnymi jest dobra). Prawdopodobnie jest to spowodowane tym, że zaniedbano energię transportowaną przez falę odbitą od naroża P . Udział energetyczny tej fali w stosunku do energii transportowanej falą BP lub PC (rys. 2b) jest istotny w zakresie słabych fal padających.

Natomiast prosta, jednowymiarowa „metoda izentropowa” [4, 5] daje wyniki bardzo dobrze zgodne z danymi eksperymentalnymi podanymi w [1]. Metoda ta opiera się na

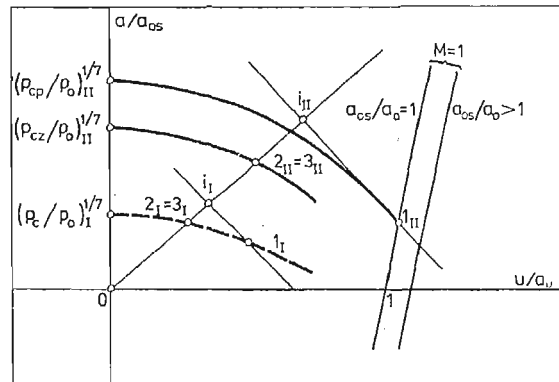


Rys. 4 — Natężenie fali pierwotnej w funkcji natężenia fali padającej: a — odgałęzienie boczne, b — odgałęzienie na wprost.

równaniach przepływu quasiustalonego: ciągłości, energii i izentropy. Równania te dotyczą chwili przepływu, kiedy fala odbita od naroża P wraca do przewodu 1, tzn. wtedy, kiedy gaz w odgałęzieniu 1 „dowiaduje się” o istnieniu naroża P . Metoda ta nie uwzględnia oczywiście faktu różnych „ostrości” naroża P , ale daje to w zakresie słabych fal niewielką, rozbieżność z eksperymentem (rys. 4). Równania tej metody funkcjonują dla natężenia fali padającej $p_i/p_0 \leq 1,83$ [6]. Dla większych natężeń fali padającej przepływ w obszarze

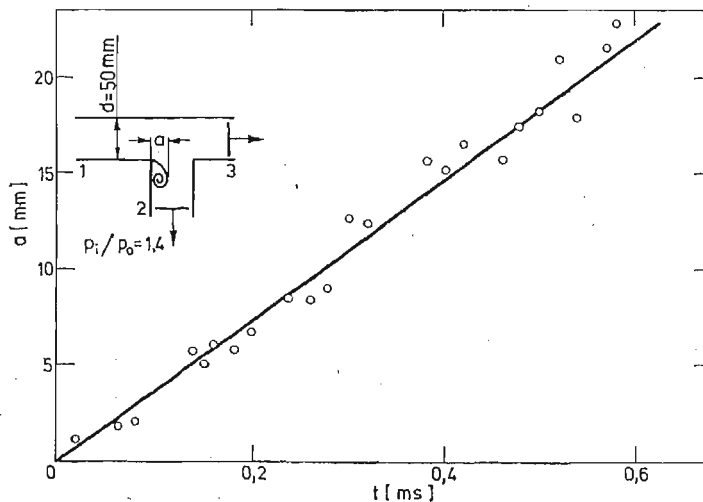
wylotowym przewodu i staje się krytyczny, a w dalszej części naddźwiękowy. Tworzy się nieruchoma fala uderzeniowa (rys. 2c), powodująca wzrost entropii i spadek ciśnienia całkowitego. Dalej przepływ jest traktowany jako izentropowy. Natężenie tej nieruchomej fali jest określane przez spadek ciśnienia całkowitego, wymagany dla spełnienia równania ciągłości. W ten sposób „metoda izentropowa” funkcjonuje także dla natężeń fali padającej $p_i/p_0 > 1,83$.

Na rys. 5 pokazano schematycznie sytuację obliczeniową na płaszczyźnie stanu gazu. Stan I leży w zakresie przepływu poddźwiękowego, stan II leży w zakresie przepływu krytycznego. Słabe fale uderzeniowe traktowane są jako fale izentropowe.

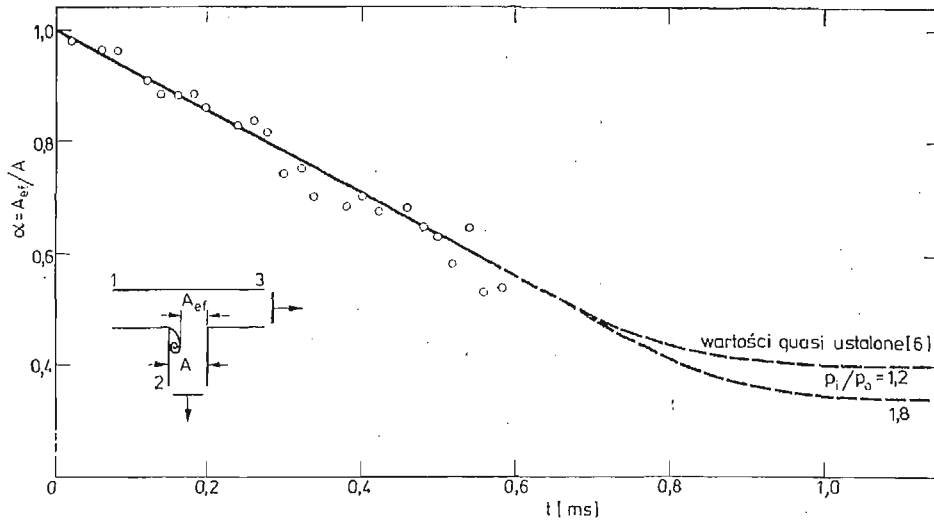


Rys. 5 — Schemat obliczenia natężenia fali pierwotnej

Rozwój wiru na narożu. Rys. 6 pokazuje zaobserwowany wzrost wymiaru wiru w czasie, zamierzony dla jednego natężenia fali padającej $p_i/p_0 = 1,4$. Natomiast rys. 7 pokazuje wynikającą z tego zmienność w czasie efektywnego przekroju przepływu w odgałęzieniu 2, mierzonego wskaźnikiem $\alpha = A_{ef}/A$. Zaznaczono tam także wartości quasiustalone wskaźnika [6].



Rys. 6 — Zmierzony wzrost wymiaru wiru.



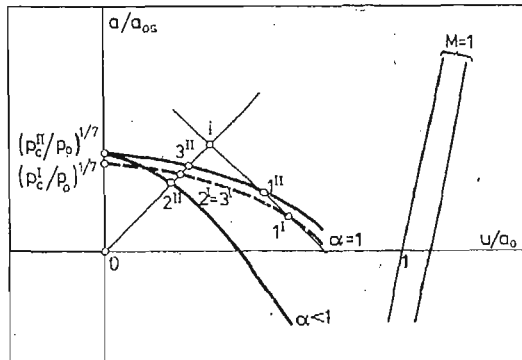
Rys. 7 — Przebieg wskaźnika α .

Oddziaływanie wiru na przepływ za falami pierwotnymi. Odcinek przewodu 2, w którym następuje rozszerzenie strugi po przejściu przez przewężenie spowodowane istnieniem wiru jest w przybliżeniu równy wymiarowi wiru. Znając wzrost wymiaru wiru w określonym odcinku czasu (rys. 6) można oszacować, że relacja między członami równania pędu będzie miała postać:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^2/d}{u/\Delta t} \cong 10.$$

Upoważnia to do stosowania równań przepływu quasiustalonego do obszaru przepływu w bezpośredniej bliskości węzła rozgałęzienia. Stwarza to sytuację analogiczną do napływu do rury przez przewężenie o zmiennym stopniu otwarcia [10, 11] z dodatkową komplikacją w postaci równania ciągłości, bilansującego strumień masy w poszczególnych przewodach. Zmiana stopnia otwarcia jest dana wskaźnikiem α (rys. 4b).

Na rys. 8 pokazano schematycznie sytuację obliczeniową na płaszczyźnie stanu gazu: (') — $\alpha = 1$ — wiru jeszcze nie ma, (") — $\alpha < 1$ — widoczna zmiana parametrów prze-



Rys. 8 — Schemat obliczenia uwzględniającego istnienie wiru za narożem.

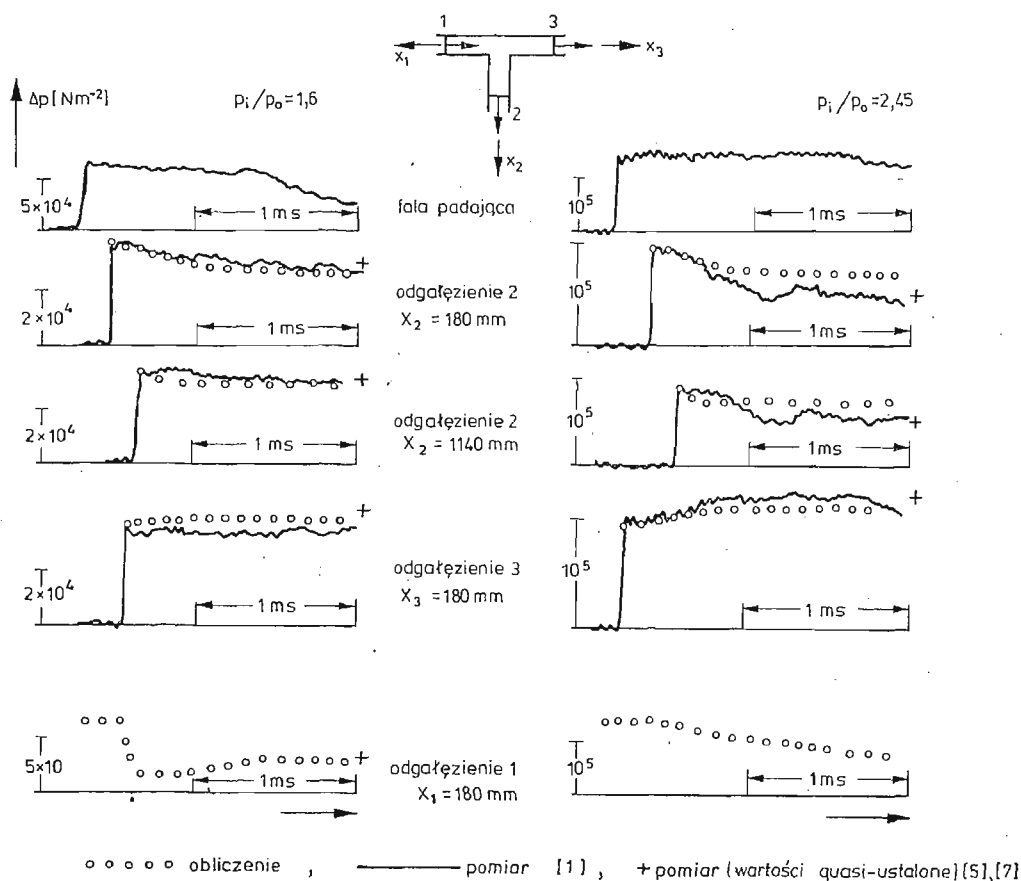
plywu, np. $u'_2 < u'_2$, $u'_3 > u'_3$, $u'_1 < u'_1$. Zmiana warunków przepływu w rozgałęzieniu oddziałuje na przepływ w obszarach za falami pierwotnymi. Obliczenia przeprowadzono metodą charakterystyk [10, 11]. Pokazuje to schematycznie rys. 3 i 8.

Ze względu na ograniczoną objętość artykułu nie podano szczegółowych wzorów obliczeniowych, które w zasadzie można znaleźć w cytowanej literaturze.

4. Porównanie wyników obliczeń z dostępnymi danymi eksperymentalnymi

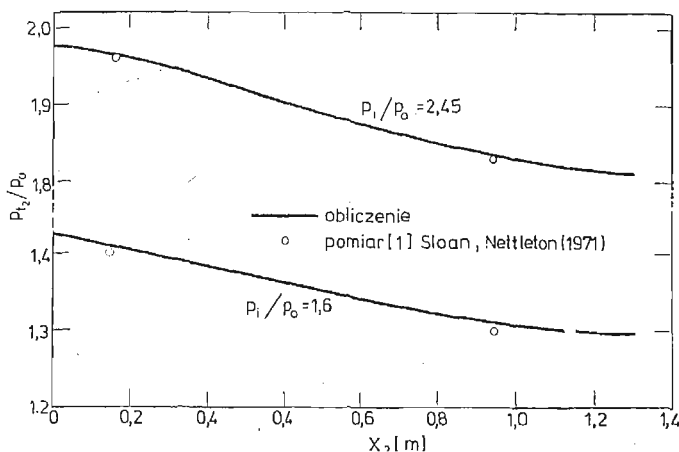
Wykorzystując metodę opisaną w rozdz. 3 wykonano obliczenia przepływu inicjującego falą padającą o natężeniu p/p_0 w zakresie od 1,4 do 2,45.

Na rys. 9 przedstawiono przykładowo obliczone przebiegi ciśnienia w czasie. Nanieśiono także wg [1] przebiegi ciśnienia zmierzone w przypadku rozgałęzienia o kącie $\delta = 45^\circ$ (nie dysponowano danymi dla rozgałęzienia o kącie $\delta = 90^\circ$ i o ostrych narożach). Zaznaczono także quasiustalone wartości ciśnienia (po zniknięciu efektu przejściowego) obserwowane doświadczalnie dla $\delta = 90^\circ$ [5, 6, 7]. Widać dobrą zgodność przebiegów obliczonych i zmierzonych. Zgodność ta jest bardzo dobra dla mniejszego natężenia fali padającej.



Rys. 9 — Porównanie zmierzonych i obliczonych przebiegów ciśnienia $\rightarrow t$.

Na rys. 10 pokazano obliczony przebieg zmniejszania się natężenia czoła fali przechodzącej w odgałęzieniu bocznym w funkcji odległości od węzła rozgałęzienia. Dla porównania zaznaczono także wartości zmierzone dla rozgałęzienia o kącie $\delta = 45^\circ$ [1]. Tu także widać bardzo dobrą zgodność. Z rys. 10 wynika także fakt, że zasięg obszaru objętego efektem przejściowym wynosi około 1,5 m i nie zależy od natężenia fali padającej.



Rys. 10 — Zmiana natężenia fali przechodzącej w odgałęzieniu 2 w funkcji odległości od węzła rozgałęzienia.

5. Wnioski

1. Przedstawiony model efektu przejściowego ujmuje te zjawiska, które mają decydujący wpływ na obraz ilościowy przepływu. W smukłych rurociągach ($x/d > 6 \div 10$) dwuwymiarowość zjawisk falowych nie ma istotnego znaczenia ilościowego. O istnieniu zjawiska przejściowego decyduje rozwój wiru za narożem.

2. Zasięg obszaru objętego stanem przejściowym jest znaczny i wynosi co najmniej kilkadziesiąt średnic.

3. Wskazane są badania, mające na celu ustalenie wpływu natężenia fali padającej na rozwój wiru w czasie.

4. Efekt przejściowy powinien być uwzględniany w obliczeniach nie tylko w przypadku, kiedy falą padającą jest fala uderzeniowa, lecz także w przypadkach, kiedy czas narastania ciśnienia i prędkości gazu w fali padającej jest mały lub porównywalny z czasem rozwoju wiru za narożem. Czas ten jest rzędu 1 ms.

5. Istnieje możliwość zastosowania opisaney metody obliczeniowej do przepływów okresowo zmiennych, pod warunkiem uzyskania dodatkowych informacji o zachowaniu się wiru w tym typie przepływu.

Literatura cytowana w tekście

1. S. A. SLOAN, M. A. NETTLETON. *The propagation of weak shock waves through junctions*. Preprints of the 8th Int. Shock Tube Symposium, London (1971).
2. W. H. HELIG, *Propagation of shock waves in various branched duct*. 10th Int. Shock Tube Symposium, Tokio (1975).

3. W. JUNGOWSKI, *Tłumienie pulsacji ciśnienia*. Arch. Bud. Masz. 1, XXV, 1978.
4. W. JUNGOWSKI, *Zmienny w czasie przepływ w kolektorze wylotowym silnika spalinowego*. Arch. Bud. Masz., z. 4, 1961.
5. P. WIEWIÓRSKI, *Przechodzenie słabych fal uderzeniowych przez rozgałęzienie przewodów rurowych*. Arch. Bud. Masz., (1979) (w druku).
6. P. WIEWIÓRSKI, *Nieustalony przepływ gazu przez rozgałęzienie przewodów*. Praca doktorska PŁ, (1977).
7. A. DADONE, M. PANDOLFI, F. TAMANINI, *Shock waves propagation in a straight duct with a side branch*. Preprints of the 8th Int. Shock Tube Symposium, London (1971).
8. A. G. HAMMITT, H. J. CARPENTER. AIAA Journ. 2, No. 12, 1964.
9. P. WIEWIÓRSKI, G. KOWALEWSKI, E. STARSKI, Arch. Prac Instytutu Maszyn Przepływowych PŁ, nr IMP-607, (1977).
10. W. JUNGOWSKI, *Podstawy dynamiki gazów*, Skrypt PW, Warszawa, (1965).
11. A. SHAPIRO, *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*. Vol. 2, Ronald Press, New York (1954).

Резюме

ПЕРЕХОДНЫЙ ЭФФЕКТ ВО ВРЕМЯ ПРОНИКАНИЯ СЛАБОЙ УДАРНОЙ
ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ РАЗВЕТВЛЕНИЕ ТРУБОПРОВОДОВ

Проникание ударной волны через разветвление трубопроводов дает переходный эффект, который состоит из явления формирования плоских фронтов волн и развития углового вихря.

На основании визуализационных изображений предложена количественная модель переходного эффекта. Сделаны расчеты течения для нескольких напряженностей ударной волны (в пределах: $1.4 \leq p_1/p_0 \leq 2.45$). Сопоставление результатов расчетов с доступными экспериментальными данными указывает пригодность и правильность принятой модели. Величина области переходного состояния зависит, главным образом, от умеренно медленного явления развития углового вихря.

Summary

TRANSITIONAL EFFECT AT THE TRANSMISSION OF A WEAK SHOCK WAVE THROUGH
A BRANCHING OF PIPES

Transmission of a shock wave through a branching of pipes is accompanied by transitional effect including phenomena of plane wave fronts formation and the phenomenon of a corner downstream vortex development. On the basis of visualisational images a quantitative model of transitional effect has been formulated. Calculations of the flow for some values of the incident wave strength (in the range: $1.4 \leq p_1/p_0 \leq 2.45$) have been performed. The comparison of the results of calculations with the available experimental data indicates usability and correctness of the assumed model. Comparatively slow development of the corner downstream vortex affects mainly about the area of the transitional state. The described method can be applied for the calculation of unsteady gas flow in pipe system of piston engines and compressors and in other similar problems.

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH
POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 marca 1979 roku

NUMERYCZNA ANALIZA OPLYWU PŁASKIEJ PODSTAWY WALCA KOŁOWEGO
NADDŹWIĘKOWYM STRUMIENIEM LEPKIEGO GAZU¹⁾

ANDRZEJ TOPOLIŃSKI (BYDGOSZCZ)

1. Wstęp

Zagadnienia wyznaczania naddźwiękowych opływów ciał przez gazy nabrały szczególnie ważnego aspektu praktycznego wraz z rozwojem lotnictwa i kosmonautyki. Na dużych wysokościach lotu wartości charakterystyczne liczb Reynoldsa są już na tyle małe, że opracowania teoretyczne opływów muszą opierać się na rozwiązaniu pełnych równań Naviera - Stokesa. Kształty współczesnych aparatów latających a zwłaszcza statków kosmicznych, odpowiadają często modelowi ciała z silnie zatępionym czołem i z załamaniem tworzących jego konturów. Zatępienie ciał podyktowane jest przede wszystkim potrzebą minimalizacji pochłanianego ciepła, zaś załamanie konturów tworzących wynika m. in. z konieczności zapewnienia stałości form ciała w procesie unoszenia jego materiału konstrukcyjnego spowodowanego nagrzewaniem aerodynamicznym [8].

Naddźwiękowe opływy gazem lepkiem ciał z silnie zatępioną częścią czołową i z załamaniem ich tworzących doczekały się stosunkowo nielicznych teoretycznych opracowań. THOMMEN [1] wyznaczył niestacjonarny opływ czołowej części prostokątnej płytki gazem lepkiem i przewodzącym ciepło. Kryłow i Pawłow [5] wykonali serię eksperymentów numerycznych stacjonarnych opływów czołowych części płyty prostokątnej oraz walca kołowego. Autorzy obu wymienionych prac stawiają sobie za cel wypróbowanie nowych numerycznych, stąd przytoczone przez nich opisy opływów są fragmentaryczne i niepełne.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie osiowosymetrycznego opływu walca kołowego o płaskiej podstawie gazem lepkiem i przewodzącym ciepło.

2. Sformułowanie zagadnienia

W pracy przyjęto, że gaz opływający ciało jest ściśliwy, lepki, przewodzący ciepło oraz doskonały w sensie termodynamicznym ($c_p = \text{const.}$, $c_v = \text{const.}$). Brak w nim źródeł i upustów ciepła i masy, pominięte też zostały siły masowe.

Rozpatrywany będzie osiowosymetryczny, niestacjonarny przepływ w pobliżu podstawy walca kołowego o stałej temperaturze ścianek. Ograniczoną część płaszczyzny przepływu, przyjętą jako obszar całkowania Ω , przedstawiono na rys. 1. Oś x jest tutaj osią symetrii — jej zwrot zgodny jest z kierunkiem napływającego strumienia gazu.

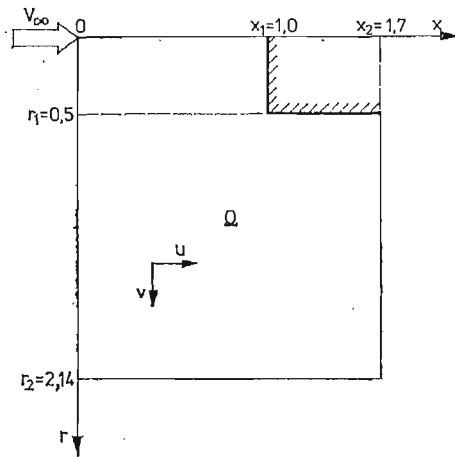
¹⁾ Praca zawiera wyniki rozprawy doktorskiej Autora, której promotorem był doc. dr hab. inż. Edward Walicki.

W bezwymiarowym układzie równań (2.1 - 2.3) rządzących ruchem płynu, wszystkie długości zostały odniesione do średnicy walca L , składowe prędkości u, v — do V_∞ , gęstość ρ do ρ_∞ , jednostkowa energia wewnętrzna e do V_∞^2 , ciśnienie p do $\rho_\infty V_\infty^2$, czas t do L/V_∞ , przewodność cieplna λ i lepkość μ odpowiednio do λ_∞ i μ_∞ . Układ ten ma następującą postać:

$$(2.1) \quad F_t = A_x + B_r + C + D,$$

$$(2.2) \quad p = (\kappa - 1)\rho e,$$

$$(2.3) \quad \lambda = \mu = [M_\infty \kappa (\kappa - 1) e]^{0,5},$$



Rys. 1

gdzie:

$$F = \rho \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e + \frac{v^2}{2} \end{bmatrix}, \quad A = -\rho \begin{bmatrix} u \\ u^2 + \frac{p}{\rho} \\ uv \\ u \left(e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix},$$

$$B = -\rho \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 + \frac{p}{\rho} \\ v \left(e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix}, \quad C = -\frac{\rho v}{r} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \end{bmatrix},$$

$$D = \frac{1}{Re_\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\ - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{4}{3} \frac{\mu}{r} \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \\ - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \\ \frac{\kappa}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \lambda \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial e}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) u + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) v \right] + \frac{\partial}{\partial r} \mu \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) v + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) u \right] + \frac{\mu}{r} \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) v + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) u \right] \end{bmatrix}$$

Macierzowe równanie (2.1) wynika z zasady zachowania masy, pędu oraz energii; równanie (2.2) jest równaniem stanu, a (2.3) zależnością wiążącą przewodność cieplną i lepkość dynamiczną z jednostkową energią wewnętrzną gazu.

Warunki brzegowe zagadnienia są następujące (rys. 1):

1. Na brzegach $x = 0$, $0 \leq r \leq r_2$ oraz $r = r_2$, $0 \leq x \leq x_2$, dostatecznie oddalonych od ciała, przyjęto warunki odpowiadające strumieniowi jednorodnemu:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u(x, r, t) &= 1, & v(x, r, t) &= 0, \\ \varrho(x, r, t) &= 1, & e(x, r, t) &= e_\infty = [\kappa(\kappa - 1)M_\infty^2]^{-1}. \end{aligned}$$

2. Na osi symetrii $r = 0$:

$$(2.5) \quad v = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{\partial e}{\partial r} = 0.$$

3. Na powierzchni walca $x = x_1$, $0 \leq r \leq r_1$ oraz $r = r_1$, $x_1 \leq x \leq x_2$

$$(2.6) \quad u = v = 0, \quad e = ae_\infty.$$

Znana stała $a(a > 0)$ określa stosunek temperatury powierzchni ciała do temperatury niezakłóconego strumienia gazu.

4. Na granicy prawostronnej $x = x_2$, $r_1 \leq r \leq r_2$, wartości ϱ , u , v , e wyznaczono z wnętrza obszaru Ω za pomocą kwadratowej ekstrapolacji — co odpowiada użyciu przybliżonych, „miękkich” warunków brzegowych:

$$(2.7) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0,$$

gdzie f — dowolna z funkcji ϱ , u , v , e .

Jako warunki początkowe przyjęto spełnienie w obszarze Ω zależności (2.4) — za wyjątkiem powierzchni walca na której prędkość i temperatura spełnia (2.6) a $\varrho = 1$. Warunki te są równoznaczne z nagłym umieszczeniem walca w jednorodnym strumieniu gazu.

3. Schemat różnicowy

Numeryczne rozwiązanie układu (2.1 - 2.3) opiera się na zastąpieniu ciągłego rozkładu funkcji i argumentów ich wartościami w węzłach siatki różnicowej. Jeśli przez m, l, n oznaczymy numery węzłów, przez h_1, h_2, τ — odległość między węzłami siatki w kierunkach x, r, t , to przez $f_{m,l}^n$ rozumieć będziemy wartość f w punkcie $mh_1, lh_2, n\tau$.

Do obliczeń przyjęto dwustopniowy, jawny schemat różnicowy typu Laxa - Wendroffa [1].

Pierwszy krok umożliwia obliczenie $F_{m\pm\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}$ oraz $F_{m,l\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ (2.1) — przykładowo na kierunku osi x :

$$(3.1) \quad F_{m\pm\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\{ F_{m,l}^n + F_{m\pm 1,l}^n + \frac{\tau}{2} \left[\pm \frac{1}{h_1} (A_{m\pm 1,l}^n - A_{m,l}^n) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2h_2} (B_{m,l+1}^n + B_{m\pm 1,l+1}^n - B_{m,l-1}^n - B_{m\pm 1,l-1}^n) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_{m,l}^n + C_{m\pm 1,l}^n + D_{m,l}^n + D_{m\pm 1,l}^n \right] \right\} + O(\Delta^3).$$

Z powyższego wyznacza się $A_{m\pm\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}$, $B_{m,l\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ oraz $C_{m,l\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ i $C_{m\pm\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}$. Drugi krok pozwala na obliczenie wartości $F_{m,l}^{n+1}$:

$$(3.2) \quad F_{m,l}^{n+1} = F_{m,l}^n + \tau [(A_x)_{m,l}^{n+\frac{1}{2}} + (B_r)_{m,l}^{n+\frac{1}{2}} + C_{m,l}^{n+\frac{1}{2}} + D_{m,l}^n] + O(\Delta^3).$$

Stabilność użytego schematu różnicowego zbadana została dla równań modelowych uzyskanych z linearyzacji układu (2.1) 2.3). Ograniczenie nakładane na krok czasowy τ ma lokalny charakter i jest następujące:

$$(3.3) \quad \tau \leq \min \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{h}{|u| + |v| + c\sqrt{2}}, \frac{h\varrho}{8\nu} \right\},$$

gdzie:

$$h = \max(h_1, h_2),$$

$$\nu = \max \left(\frac{1}{\text{Re}_\infty}, \frac{\kappa}{\text{Re}_\infty Pr} \right),$$

c — lokalna prędkość dźwięku.

Obserwowany w trakcie obliczeń niemonotoniczny przebieg procesu zbieżności — szczególnie silny w obszarach formowania się dużych gradientów — spowodował konieczność użycia filtru numerycznego tłumiącego tę niedogodność. Zastosowano tutaj automatyczny filtr Shumana [2, 6, 7], którego współczynniki zostały tak dobrane, aby pozostały spełnione: warunek liniowej stabilności schematu różnicowego [6] oraz warunek zapewniający odpowiednią relację między wpływem filtracji i rzeczywistą lepkością gazu [9].

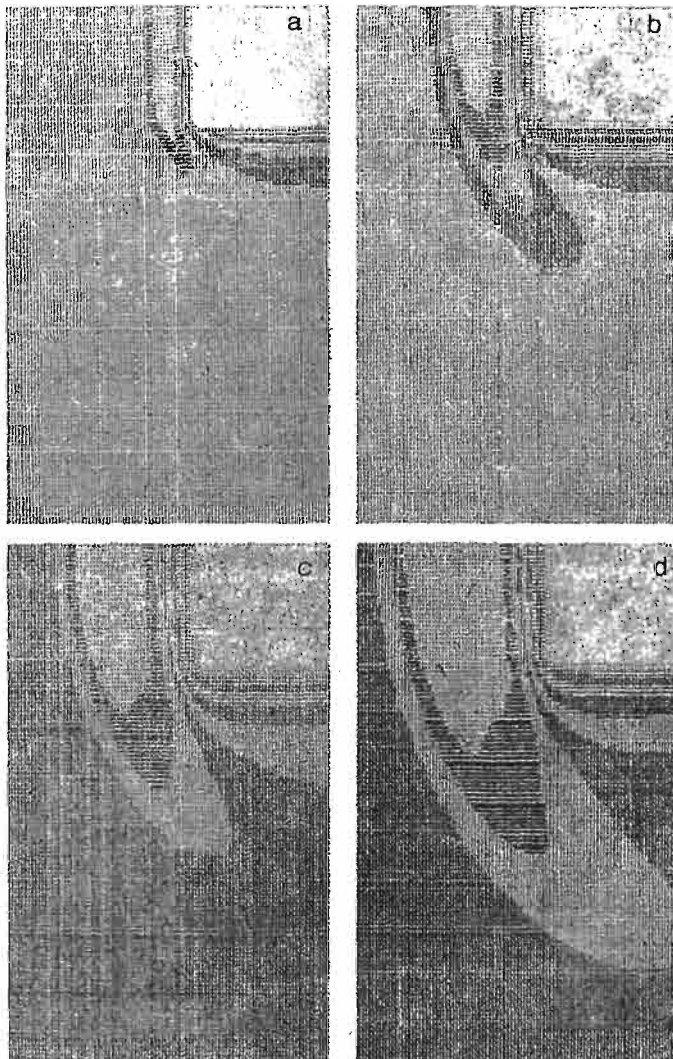
4. Obliczenia numeryczne

Obliczenia wykonane były dla czterech zestawów parametrów:

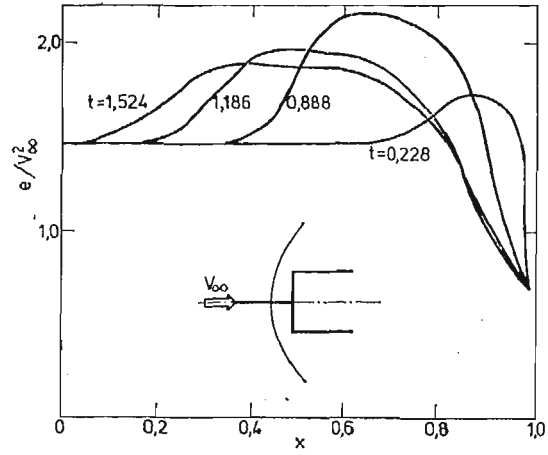
1. $M_\infty = 1.1$; $a = 0.5$;
2. $M_\infty = 2.5$; $a = 1.5$;
3. $M_\infty = 3.0$; $a = 1.5$;
4. $M_\infty = 4.0$; $a = 3.0$.

Dla każdego wariantu przyjęto: $\kappa = 1.4$; $Pr = 0.74$, $Re_\infty = 50$; $h_1 = h_2 = 0.066666667$. Przedstawione w niniejszej pracy wykresy warstwiczne pochodzą z drukarki wierszowej ODRY-1305, na której były wykonywane obliczenia. Wykresy przedstawiają proces formowania się stacjonarnych pól opływów w obszarze Ω (rys. 1). Przyjęto, że przepływ będzie uważany jako stacjonarny, jeśli spełniona będzie nierówność:

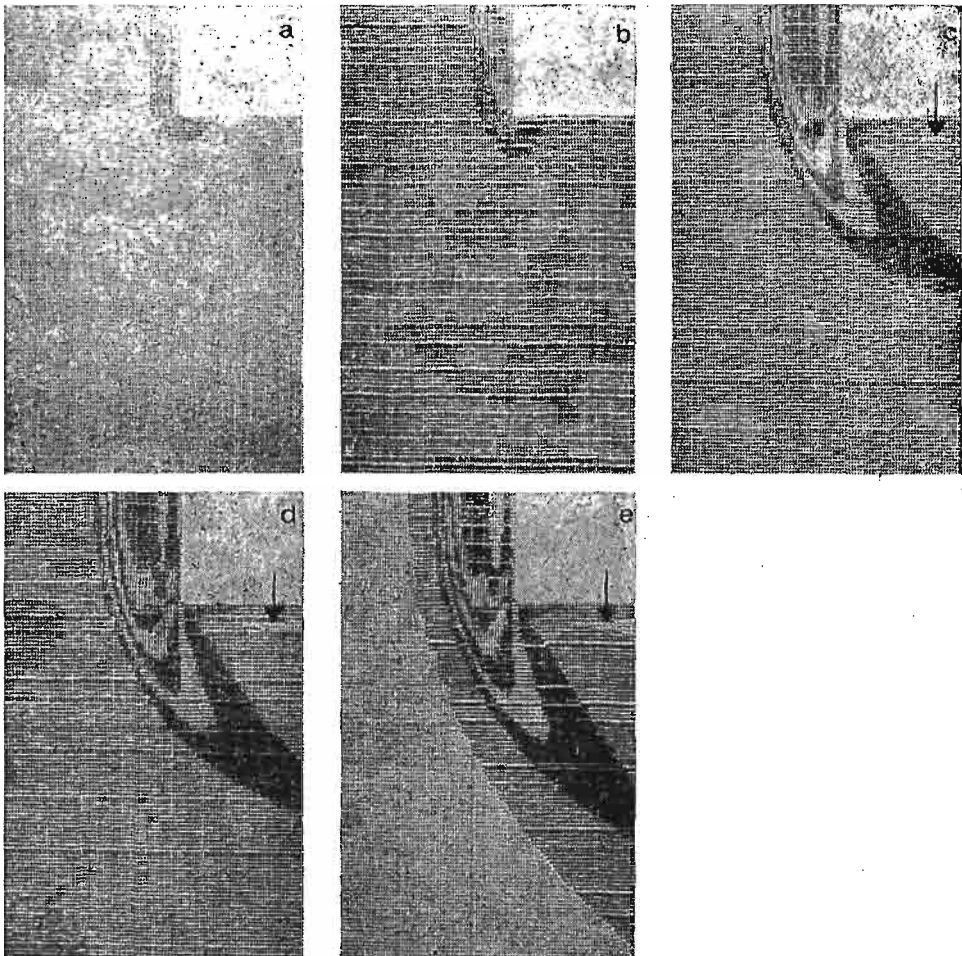
$$\frac{1}{\varrho_{m,l}^{n+1}} \frac{|\varrho_{m,l}^{n+1} - \varrho_{m,l}^n|}{\tau} \leq 0,03$$



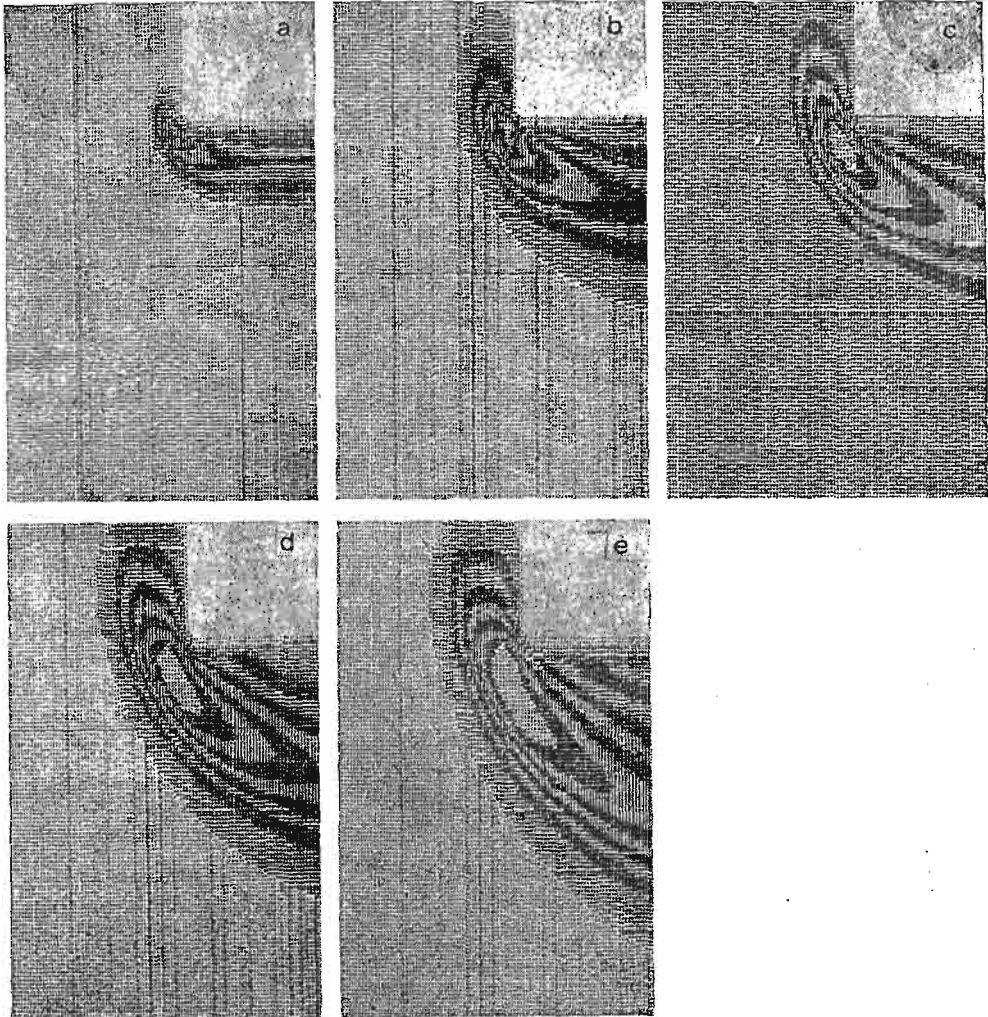
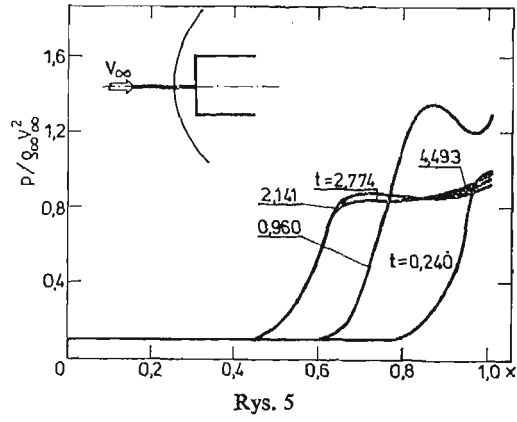
Rys. 2



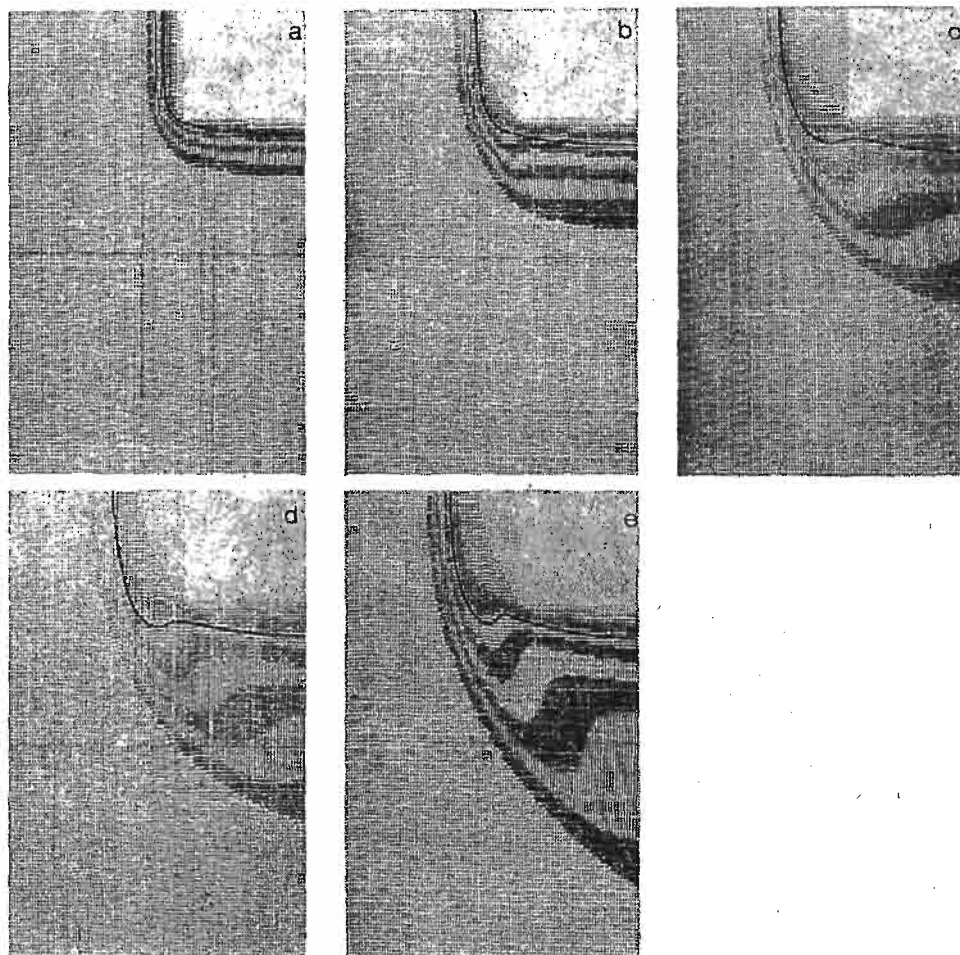
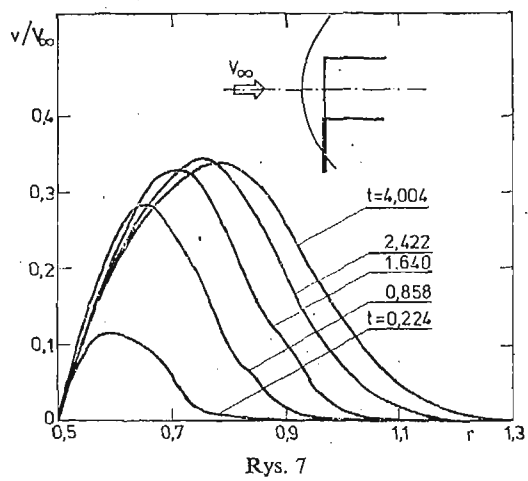
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 6

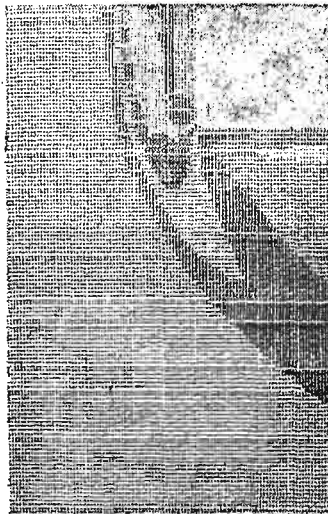


Rys. 8

Warunek powyższy nie został osiągnięty dla pierwszego wariantu obliczeń $M_\infty = 1.1$ z przyczyn natury technicznej; przy przyjętych parametrach obliczeniowych, czoło fali uderzeniowej stacjonarnego opływu musiałoby znaleźć się poza możliwym do przyjęcia obszarem całkowania. Ilustracją tego wariantu jest rys. 2, przedstawiający formowanie się w polu przepływu jednostkowej energii wewnętrznej dla bezwymiarowych czasów — odpowiednio $t = 0.228; 0.888; 1.186$ i 1.524 . W celu zorientowania się w wartościach odpowiadających symbolom wykresu (nie naniesionym dla przejrzystości odczytu na rys. 2) — służy rys. 3, pokazujący rozkład energii wewnętrznej na osi symetrii przepływu dla tychże chwil.

Rysunek 4 pokazuje kształtowanie się ciśnienia (dla $M_\infty = 2.5$) w obszarze obliczeniowym. Wykresy otrzymane są odpowiednio dla: $t = 0.240; 0.960; 2.141; 2.774$ i 4.493 . Uzupełnieniem powyższych wykresów jest rys. 5 przedstawiający rozkład ciśnienia na osi symetrii. Interesującym szczegółem rysunku 4 są oznaczone strzałką zamknięte obszary obniżonego ciśnienia (poniżej ciśnienia strumienia jednorodnego).

Na rysunku 6 ukazane są obrazy składowej prędkości v ($M_\infty = 4$) dla $t = 0.224; 0.858; 1.640; 2.422$ i 4.004 . W określeniu wartości odpowiadających poszczególnym symbolom tworzącym wykresy, pomocnym jest rys. 7, obrazujący odpowiednie rozkłady na prostej $x = x_1, r \geq r_1$.



symbol	wartość
	0,1133
•	0,7168
+	1,3202
#	1,9237
-	2,5271
0	3,1306
:	3,7340
8	4,3375
!	4,9409
M	5,5443
,	6,1478

Rys. 9

Wykresy rozkładów lokalnych liczb Macha dla wariantu z $M_\infty = 3$ ($t = 0.240; 0.974; 2.083; 2.599; 4.291$) pokazuje rys. 8. Na wszystkich pokazano zmiany i ostateczne ustalenie się położenia linii dźwiękowej (oznaczonej linią ciągłą na rys. 8). Jak wykazały doświadczenia numeryczne, przybliżyła się ona do czoła i ku powierzchni bocznej ciała wraz ze wzrostem liczby Macha niezakłóconego strumienia gazu, ale oddala przy wzrastającej temperaturze ścianek walca.

Na rysunku 9 przedstawiony został rozkład gęstości ustalonego ($t = 4.291$) opływu czołowej części walca dla $M_\infty = 2.5$. Tuż za narożem, na powierzchni bocznej ciała występuje obszar silnego rozrzedzenia gazu oraz obniżona jego gęstość (w stosunku do ρ_∞) wzdłuż tworzącej walca z tendencją do wolnego wzrostu w kierunku przepływu. Nie zaobserwowano wyraźnego związku rozkładu gęstości z parametrami przepływu na wspomnianym wyżej kierunku.

Program, którym się posłużono umożliwił śledzenie zbieżności procesów obliczeniowych. Stwierdzono, że 70% czasu, przy którym nastąpiło umowne ustalenie, jest zużywane na uformowanie się przybliżonego obrazu przepływu (1-2 cyfry znaczące), a pozostałe 30% na „udokładnianie” wyników. Proporcje te nie są zachowane w całym badanym obszarze. Najszybciej następuje zgrubne uformowanie rozkładów funkcji przy czołowej części ciała. Proces „zwiększania dokładności” wyników dłużej trwa w obszarach występowania najwyższych gradientów — tj. na fali uderzeniowej i w okolicy naroża ciała.

Powyższe spostrzeżenia posłużyły do podjęcia prób skrócenia czasu otrzymywania stacjonarnych rozwiązań. Dokonano tego na drodze zastosowania uproszczeń równań (2.1) w początkowym czasie zgrubnego formowania się rozkładów funkcji oraz „wyłączenia” części obszaru całkowania Ω w późniejszej fazie obliczeń. Oszczędność czasu przy zastosowaniu tych zabiegów sięgała 30%.

Przedstawione tutaj wyniki obliczeń uzyskane na drodze eksperymentów realizowanych przez maszynę cyfrową, wskazują na realne możliwości prowadzenia ich na krajowych komputerach średniej mocy.

Literatura cytowana w tekście

1. H. U. THOMMEN, *Numerical Integration of the Navier-Stokes Equations*. ZAMP, 17, No 5, 1966.
2. A. C. VLEIGENTHART, *The Shuman Filtering Operator and the Numerical Computation of Shock Waves*. J. Eng. Math., vol. 4, No 4, 1970.
3. W. PROSNAK, *Mechanika plynów*, T. 2, WNT, Warszawa 1971.
4. P. J. ROACHE, *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, N. M., Harmosa Press 1972.
5. Б. В. КРЫЛОВ, Б. М. ПАВЛОВ, *Применение разностной схемы к расчету обтекания торца сверхзвуковым потоком вязкого газа*. Выч. Мет. и Progr. XIX, Изд. Моск. Унив., Москва 1972.
6. A. HARTEN, G. ZWAS, *Switched Numerical Shman Filters for Shock Calculations*. J. Eng. Math., vol. 6, No 2, 1972.
7. K. SRINIWAS, J. GURURAJA, K. K. PRASAD, *An Assessment of the Quality of Selected Finite Difference Schemes for Time Dependent Compressible Flow*. J. Comp. Phys., 20, 1976.
8. В. Г. ВОРОНЯН, В. В. ЛУНЕВ, А. Н. НИКУЛИН, *О стационарной форме тел при их разрушении за счет аэродинамического нагрева*. Изв. АН СССР МЖГ, № 2, 1978.
9. A. TOPOLIŃSKI, *Analiza numeryczna pewnych przepływów gazu lepkiego*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska 1978 (niepublikowane).

Резюме

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКОГО ОСНОВАНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

В работе приведены численные результаты осесимметричного обтекания продольного цилиндра с плоским торцом. Задача решается с помощью явной двухшаговой разностной схемы типа Лакса-Вендроффа, аппроксимирующей дифференциальную систему со вторым порядком точности [1].

С целью выглушения осциляционного момента вычислений, применены процедуры сглаживания основанные на фильтре Шумана [2, 6, 7].

Вычисления сделаны для четырех вариантов параметров. Во всех одинаковы было число Рейнольдса — $Re_\infty = 50$.

Распределения функции поля течения иллюстрированы в работе на эяорах и на изогипсных планах.

Summary

NUMERICAL ANALYSIS OF FLOW AROUND A FLAT BASE OF CIRCULAR CYLINDER BY SUPERSONIC STREAM OF VISCOUS GAS

In this work numerical results of axisymmetrical flow round a cylinder with a flat front has been accomplished.

The calculations were made by means explicit, two-step Lax-Wendroff type scheme [1], which approximates the set of differential equations with the second order of accuracy.

In order to damp an oscillating course of calculations smoothing procedures based on Shuman's filter were applied [2, 6, 7].

The calculations were accomplished for four various sets of parameters. Reynolds number was constant in all of them, and equaled $Re_\infty = 50$.

Distribution of function of surface of the flow was represented on diagrams and contour graphs.

BYDGOSZCZ
AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA.

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 maja 1979 roku

NOWA METODA SYNTEZY UKŁADU STEROWANIA FLATTEREM PROFILU¹⁾

JÓZEF PIETRUCHA, ZBIGNIEW SZEWCZYK (WARSZAWA)

Oznaczenia

- A — macierz stanu układu niesterowanego o wymiarach $n \times n$
 B — macierz sterowania o wymiarach $n \times r$ i kolumnach b_i
 x — n -wymiarowy wektor stanu
 u — r -wymiarowy wektor sterowania
 V — macierz wektorów własnych macierzy A^T o kolumnach v_i
 U — macierz wektorów własnych macierzy A o kolumnach u_i
 H — macierz stanu układu zamkniętego
 $\{\lambda_i\}$ — zbiór wartości własnych układu niesterowanego
 $\{\rho_i\}$ — zbiór wartości własnych układu sterowanego
 w_i — wektory własne macierzy H
 m — masa na jednostkę rozpiętości skrzydła
 J_α, S_α — moment bezwładności i moment statyczny jednostki rozpiętości skrzydła względem osi skręceń
 J_p, S_p — moment bezwładności i moment statyczny jednostki rozpiętości powierzchni sterowej względem osi zawiasów
 K_h, K_α, K_β — sztywności zastępcze odpowiadające poszczególnym współrzędnym uogólnionym
 C_h, C_α, C_β — zastępcze współczynniki tłumienia
 P_h, M_α, M_β — siły aerodynamiczne odpowiadające poszczególnym współrzędnym uogólnionym na jednostkę rozpiętości
 M_t — moment sterujący działający na powierzchnię sterową
 h, α, β — współrzędne uogólnione
 η_1, η_2 — zmienne stanu charakteryzujące opływ niestacjonarny
 T_1, \dots, T_{29} — funkcje Theodorsena
 V_∞ — prędkość strumienia niezakłóconego
 $(\cdot)^T$ — transponowanie
 $(\cdot)^*$ — sprzęganie

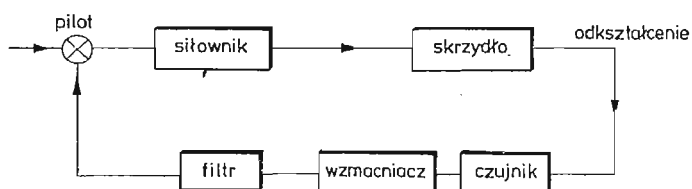
1. Wstęp

Jednym z podstawowych parametrów charakteryzujących jakość samolotu jest jego prędkość maksymalna w locie poziomym. Dążenie do zwiększania prędkości przy jedno-

(1) — artykuł niniejszy jest opracowany na podstawie referatu [6]

czesnym tworzeniu coraz lżejszych konstrukcji doprowadziło do tego, że nowoczesne obiekty latające ulegają znacznym odkształceniom podczas lotu. Obie te tendencje spowodowały pojawienie się nowych grup zagadnień związanych z konstrukcją samolotów. Są to często zagadnienia interdyscyplinarne. Należy do nich także tzw. aeroautoelastyczność, która łączy sterowanie automatyczne ze zjawiskami aeroelastycznymi [1]. Głównym przedmiotem aeroautoelastyczności jest sterowanie drganiami aeroelastycznymi. Przez „sterowanie” rozumie się realizację oddziaływań służących do poprawienia funkcjonowania obiektu sterowania zgodnie z celem sterowania. Można więc powiedzieć, że sterowanie flatterem polega na niedopuszczeniu do narastania drgań aeroelastycznych. Drgania te są powodem wielu niepożądanych skutków np. dodatkowego obciążenia konstrukcji. W związku z tym zagadnienie zapobiegania flatterowi jest od dawna ważnym zagadnieniem w projektowaniu obiektów latających. Metody zapobiegania można podzielić na bierne i czynne.

Metody bierne [2] polegają na wprowadzeniu takich zmian konstrukcyjnych (na etapie projektowania albo już w czasie eksploatacji), aby wszystkie prędkości krytyczne były wyższe od prędkości lotu. Metody te są powszechnie stosowane, chociaż powodują wzrost masy konstrukcji, co pogarsza osiągi samolotu. Z tych to względów w ostatnich latach prowadzone są intensywne badania podstawowe i doświadczalne nad metodami czynnymi. Metody te polegają na stosowaniu układów sterowania automatycznego, których członami wykonawczymi są istniejące lub dodatkowe powierzchnie sterowe. Odpowiedni ruch tymi powierzchniami generuje dodatkowe siły i momenty aerodynamiczne, które wpływają w sposób istotny na drgania całego układu. Schemat blokowy takiego układu pokazany jest na rys. 1. W literaturze znane są następujące metody czynnego zapobiegania flatterowi: częstotliwościowa, np. [3]; energetyczna, np. [4]; sterowania optymalnego, np. [5]. Najpoważniejszą wadą metody częstotliwościowej jest jej mała przydatność przy projektowaniu układów sterowania o wielu zmiennych wejściowych i wyjściowych.



Rys. 1

Wadą pozostałych metod jest konieczność stosowania techniki prób i błędów, bo np. w sterowaniu optymalnym zmuszeni jesteśmy do arbitralnego doboru współczynników wagi we wskaźniku jakości.

W niniejszej pracy proponujemy nową metodę czynną [6]. Do syntezy układu sterowania drganiami aeroelastycznymi zastosowano mianowicie stosunkowo młodą gałąź teorii sterowania—sterowanie modalne [7],

2. Metoda sterowania modalnego

Obecnie omówimy krótko metodę sterowania modalnego, którą posłużono się przy wyznaczaniu parametrów regulatora drgań aeroelastycznych.

Rozważmy układ jednowejściowy ($r = 1$), którego macierz stanu ma pojedyncze wartości własne rzeczywiste lub zespolone. Zakładamy, że układ jest całkowicie sterowalny.

Niech równanie układu zamkniętego ma postać:

$$(2.1) \quad \dot{x} = Ax + bu.$$

Wyznamy takie sterowanie $u(t)$, które pozwoli na uzyskanie zadanego zbioru wartości własnych układu zamkniętego, a tym samym pozwoli na syntezę układu o zadanych własnościach dynamicznych. Zakładamy, że będziemy zmieniać m ($m \leq n$) wartości własnych układu otwartego. W tym celu wprowadźmy do układu sterowanie w postaci

$$(2.2) \quad u = \sum_{i=1}^m k_i v_i^T x,$$

co jest możliwe przy założeniu bezpośredniego mierzenia wszystkich zmiennych stanu. Podstawiając (2.2) do (2.1) otrzymamy równanie stanu dla układu zamkniętego

$$\dot{x} = Hx,$$

gdzie macierz H ma postać

$$(2.3) \quad H = A + b \sum_{i=1}^m k_i v_i^T.$$

Mnożąc wyrażenie (2.3) prawostronnie przez u_j otrzymamy warunek

$$Hu_j = Au_j + b \sum_{i=1}^m k_i v_i^T u_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

z którego widać, że jeżeli $i = m+1, \dots, n$, to wektory i wartości własne macierzy H i A są takie same, natomiast w przypadku, gdy $i = 1, \dots, m$, to

$$(2.4) \quad Hu_j = Au_j + bk_i = \lambda_i u_j + bk_i.$$

Tak więc efektem wprowadzenia sterowania w postaci (2.2) jest zmiana zbioru $\{\lambda_i\}$ w $\{\rho_i\}$ i $\{u_i\}$ w $\{w_i\}$, gdzie $i = 1, \dots, m$, przy zachowaniu pozostałych $n-m$ wartości i wektorów własnych niezmiennych. Warunek (2.4) wynika z faktu, że wektory u_j i v_i są ortonormalne. Przy ustalonym zbiorze $\{\rho_i\}$, problem wyznaczenia sterowania sprowadza się do znalezienia współczynników wzmocnienia k_i w sprzężeniu zwrotnym. Dla $r = 1$ i przy założeniu całkowitej sterowalności układu rozwiązanie jest jednoznaczne i dane wzorem (zob. [7])

$$(2.5) \quad k_i = \frac{\prod_{j=1}^m (\rho_j - \lambda_i)}{p_i \prod_{j=1}^m (\lambda_j - \lambda_i)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

W powyższym wyrażeniu p_i jest elementem wektora sterowalności modalnej

$$(2.6) \quad p = V^T b.$$

Dla układu wielowejściowego będzie to macierz $P = V^T B$ o wymiarach $n \times r$. Sterowanie otrzymamy podstawiając (2.6) i (2.5) do (2.2) i tak

$$u = \sum_{i=1}^m k_i v_i^T x(t).$$

Należy zauważyć, że w przypadku układu fizycznego sterowanie będzie rzeczywiste (zob. [7]).

Obliczenia dla układu jednowejściowego przeprowadza się w następujących etapach:

- 1° ze wzoru (2.6) wyznacza się sterowalne i niesterowalne postacie układu, o czym informują zerowe elementy wektora p ;
- 2° ze wzoru (2.5) wyznacza się współczynniki wzmocnienia k_i ;
- 3° ze wzoru (2.2) wyznacza się sterowanie.

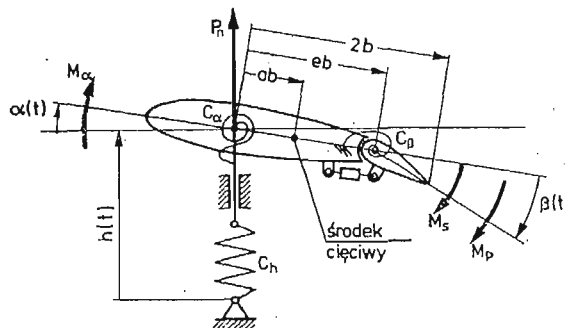
3. Synteza regulatora

Przedstawiona metoda zostanie zastosowana do syntezy regulatora drgań aeroelastycznych. Przez syntezę regulatora rozumie się projektowanie teoretyczne, tzn. procedurę zmierzającą do ustalenia struktury regulatora, nie zaś konkretne urządzenie np. elektroniczne czy hydrauliczne.

3.1. Równania ruchu we współrzędnych uogólnionych. Założenia upraszczające omówione w pracy [8] prowadzą do modelu skrzydła o trzech stopniach swobody. Przyjęty model jest przedstawiony na rys. 2. Uwzględniono już na nim istnienie siłownika wprawiającego w ruch powierzchnię sterową. Równania ruchu takiego modelu mają postać:

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + S_\beta \ddot{\beta} + C_h \dot{h} + K_h h &= P_h, \\ S_\alpha \dot{h} \times J_\alpha \ddot{\alpha} + ((e-a)bS_\beta + J_\beta) \ddot{\beta} + C_\alpha \dot{\alpha} + K_\alpha \alpha &= M_\alpha, \\ S_\beta \dot{h} + ((e-a)bS_\beta + J_\beta) \ddot{\alpha} + J_\beta \ddot{\beta} + C_\beta \dot{\beta} + K_\beta \beta &= M_\beta + M_\beta. \end{aligned}$$

Uogólnione siły aerodynamiczne P_h , M_α , M_β dla drgań harmonicznym z częstotliwością ω są przytoczone w pracy [5]. Aby wyznaczyć wartości sił aerodynamicznych w dowolnej



Rys. 2

chwili czasu (czego wymaga metoda sterowania modalnego) trzeba te siły przetransformować z dziedziny częstotliwości do dziedziny czasu. Przeprowadzając transformację Fouriera otrzymamy

$$(3.1.2) \quad \mathbf{F}_a = \mathbf{J}\mathbf{q}'' + \mathbf{B}_a\mathbf{q}' + \mathbf{A}_a\mathbf{q} + \mathbf{D} \int_{-\infty}^{\tau} \Phi(\tau-s) \frac{d\bar{w}}{ds} ds,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [h/b, \alpha, \beta]^T; \\ \mathbf{F}_a &= 1/(\rho b^2 V_\infty^2) [P_h b, M_\alpha, M_\beta]^T, \\ \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} -\pi, \\ \pi a, \\ T_1 - lT_4, \quad -2T_{13} - lT_{24}, \quad (T_3 - 2lT_2 + l^2T_5)/\pi \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_a &= \begin{bmatrix} 0, \quad -\pi, \quad T_4 + 2\sqrt{1-c^2} \\ 0, \quad -\pi(1/2-a), \quad -T_{16} - lT_{23} \\ 0, \quad -T_{17} - lT_{25}, \quad (T_{19} - lT_{27} - l^2T_{29})/\pi \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_a &= \begin{bmatrix} 0, \quad 0, \quad 0 \\ 0, \quad 0, \quad -T_{15} - lT_{22} \\ 0, \quad 0, \quad -(T_{18} - lT_{20} - l^2T_{28})/\pi \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D} &= [-2\pi, 2\pi(a+1/2), -T_{12} + 2lT_{20}]^T, \\ (3.1.3) \quad \bar{w} &= w/V_\infty, \end{aligned}$$

$$(3.1.4) \quad w(\tau) = V_\infty(\alpha(\tau) + h'(\tau)/b + 1/2 - a)\alpha'(\tau) + (T_{10} - lT_{21})\beta(\tau)/\pi + (T_{11} - 2lT_{10})\beta'(\tau)/2\pi.$$

Symbolem $\Phi(t)$ oznaczono w (3.1.2) funkcję Wagnera. Opisuje ona wpływ historii ruchu na wartości bieżące sił aerodynamicznych. Natomiast indeks „prim” oznacza różniczkowanie względem czasu bezwymiarowego

$$\tau = V_\infty t/b.$$

Korzystając z wyrażenia (3.1.4) można przeprowadzić całkowanie przez części w wyrażeniu (3.1.2), a następnie podstawić je do równań ruchu (3.1.1), które po ubezwymiarowaniu i przekształceniu przybierają postać

$$(3.1.5) \quad (\mathbf{M} - \mathbf{J})\mathbf{q}'' + (\mathbf{C}_b - \mathbf{B}_a - \mathbf{B}_c\Phi_0)\mathbf{q}' + (\mathbf{K}_b - \mathbf{A}_a - \mathbf{A}_c\Phi_0)\mathbf{q} - \mathbf{D} \int_{-\infty}^{\tau} \bar{w} \frac{d\Phi(\tau-s)}{ds} ds = \mathbf{F}_b,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m, & S_\alpha/b, & S_\beta/b \\ S_\alpha/b, & J_\alpha/b^2, & ((e-a)bS_\beta + J_\beta)b^2 \\ S_\beta/b, & ((e-a)bS_\beta + J_\beta)/b^2, & J_\beta/b^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_b &= 1/(\rho b V_\infty) \text{diag}[C_h, C_\alpha/b^2, C_\beta/b^2], \\ \mathbf{B}_c &= \mathbf{D}[1, 1/2 - a, (T_{11} - 2lT_{10})/2\pi], \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_b = 1/(\rho V_\infty^2) \text{diag}[K_h, K_\alpha/b^2, K_\beta/b^2],$$

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{D}[0, 1, (T_{10} - lT_{21})/\pi],$$

$$\mathbf{F}_b = [0, 0, M_s/(\rho b^2 V_\infty^2)]^\top,$$

$$\Phi_0 = \Phi(\tau)|_{\tau=0}.$$

W równaniu (3.1.5) występuje splot funkcji Wagnera z wyrażeniem (3.1.3). Równanie to przedstawia więc układ równań różniczkowo-całkowych. Ponieważ nie ma opracowanej teorii sterowania dla takich układów, więc równanie (3.1.4) należy sprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Pokazano to w punkcie 3.2.

3.2. Równania ruchu we współrzędnych stanu. Przyjmujemy najpierw przybliżenie Jonesa funkcji Wagnera (np. [9]):

$$(3.2.1) \quad \Phi(\tau) = 1 - A_1 \exp(-B_1 \tau) - A_2 \exp(-B_2 \tau),$$

gdzie A_1, A_2, B_1, B_2 są stałymi dodatnimi. Przybliżenie to nie jest obecnie traktowane jako narzędzie obliczeń, ponieważ błąd przybliżonej funkcji Theodorsena otrzymanej przez transformację przybliżenia Jonesa przekracza 10%. W dalszym ciągu jest jednak używane do badań jakościowych. Zastępując funkcję Φ w splotcie (zob. (3.1.4)) przybliżeniem (3.2.1) otrzymujemy

$$\int_0^\tau \bar{w}(s) \frac{d\Phi(\tau-s)}{ds} ds = \int_0^\tau (A_1 B_1 \exp(-B_1(\tau-s)) + A_2 B_2 \exp(-B_2(\tau-s))) \bar{w}(s) ds,$$

gdzie przyjęto, że ruch zaczyna się w chwili $\tau = 0$. Wprowadzamy teraz nowe zmienne pomocnicze (podobnie jak w pracy [10]):

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= \int_0^\tau A_1 B_1 \exp(-B_1(\tau-s)) \bar{w}(s) ds, \\ \eta_2 &= \int_0^\tau A_2 B_2 \exp(-B_2(\tau-s)) \bar{w}(s) ds. \end{aligned}$$

Różniczkując względem τ wyrażenia (3.2.2) otrzymujemy

$$\eta_1' = -B_1 \eta_1 + A_1 B_1 \bar{w}(\tau),$$

$$\eta_2' = -B_2 \eta_2 + A_2 B_2 \bar{w}(\tau).$$

Tak więc równanie (3.1.5) można doprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych w postaci

$$(3.2.3) \quad \mathbf{M}_c q'' + \mathbf{C}_c q' + \mathbf{K}_c q - \mathbf{D}(\eta_1 + \eta_2) = \mathbf{F}_b,$$

gdzie:

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M} - \mathbf{J},$$

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{C}_b - \mathbf{B}_a - \mathbf{B}_c \Phi_0,$$

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_b - \mathbf{A}_a - \mathbf{A}_c \Phi.$$

Dla stosowania metod teorii sterowania dogodnie jest posługiwanie się przestrzenią stanów. W tym celu równanie (3.2.3) należy przedstawić w tzw. postaci normalnej Cauchy'ego. Wprowadzamy zatem wektor zmiennych stanu x w postaci

$$x = [(h/b)', \alpha', \beta', h/b, \alpha, \beta, \eta_1, \eta_2]^T,$$

dzięki czemu równanie (3.2.3) można przedstawić w postaci (por. (2.2))

$$(3.2.4) \quad x' = Ax + bu,$$

gdzie:

$$u = M_s / (\rho b^2 V_\infty^2);$$

$$A = F^{-1} \begin{bmatrix} -C_a, & -K_c, & D, & D \\ E_3, & 0, & 0, & 0 \\ A_1 B_1 N^T, & -B_1, & 0 \\ A_2 B_2 N^T, & 0, & -B_2 \end{bmatrix},$$

$$b = F^{-1} [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]^T,$$

$$F = \text{diag}[M_c, E_s], \det F \neq 0.$$

Ponadto

$$N = [1, 0, 5-a, (T_{11}-2lT_{10})/2\pi, 0, 1, (T_{10}-lT_{21})/\pi]^T,$$

a przez E_i oznaczono macierz jednostkową o wymiarach $i \times i$; $i = 3, 5$. Ostatecznie dla modelu skrzydła o trzech stopniach swobody otrzymaliśmy układ ośmiu równań różniczkowych zwyczajnych w postaci normalnej o stałych współczynnikach. Równanie (3.2.4) jest punktem wyjścia do obliczeń.

3.3. Obliczenia. Obliczenia przeprowadzono dla następujących danych:

a) dane statyczno-dynamiczne

$$a = -0.438, \quad b = 0.768 \text{ m}, \quad c = 0.4645, \quad e = 0.5372, \quad m = 11.53 \text{ kg/m}$$

$$I_\alpha = 2.91 \text{ kgm}^2/\text{m}, \quad I_\beta = 0.0571 \text{ kgm}^2/\text{m},$$

$$S_\alpha = 2.84 \text{ kgm/m}, \quad S_\beta = 7.994 \cdot 10^{-4} \text{ kgm/m}$$

$$K_h = 5.56 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2, \quad K_\alpha = 5.71 \cdot 10^4 \text{ N}, \quad K_\beta = 5.169 \cdot 10^3 \text{ N},$$

$$C_h = 24.2 \text{ kg/ms}, \quad C_\alpha = 12.2 \text{ kgm/s}, \quad C_\beta = 0.5169 \text{ kgm/s},$$

b) dane przepływowe

$$V_\infty = 250 \text{ m/s}, \quad \rho = 1.2928 \text{ kg/m}^3, \quad \Phi_0 = 0.5,$$

$$A_1 = 0.165, \quad B_1 = 0.041, \quad A_2 = 0.335, \quad B_2 = 0.32.$$

Dla tych danych wyznaczono macierz stanu A i wektor sterowania b , a następnie obliczono wartości własne

$$\lambda_{1,1} = -0.285 \pm 0.974i, \quad \lambda_{3,4} = -0.432 \pm 0.306i,$$

$$\lambda_{5,6} = 0.114 \pm 0.337i, \quad \lambda_7 = -0.077, \quad \lambda_8 = -0.026.$$

W zbiorze wartości własnych istnieją więc wielkości z dodatnią częścią rzeczywistą ($\lambda_{5,6}$), co oznacza występowanie flatteru przy prędkości 250 m/s. Wprowadzając sterowanie do układu żądamy, aby zbiór wartości własnych układu zamkniętego nie implikował powstania drgań niegasnących.

Niech więc zbiór danych wartości własnych ma postać:

$$\begin{aligned} \varrho_{1,2} &= -0.059 \pm 0.651i, & \varrho_{3,4} &= -0.261 \pm 1.531i, \\ \varrho_{5,6} &= -0.228 \pm 0.452i, & \varrho_7 &= -0.207, & \varrho_8 &= -0.039. \end{aligned}$$

Przy tych danych wykonano dalsze obliczenia. Z równania (2.6) wyznaczono macierz sterowalności modalnej, której elementy równe są

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= 5.615 \pm 0.769i, & p_{3,4} &= 0.611 \pm 0.045i, \\ p_{5,6} &= -0.449 \pm 0.033i, & p_7 &= -0.025, & p_8 &= -0.009. \end{aligned}$$

Z równania (2.5) wyznaczono współczynniki wzmocnienia

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= -0.004i, \pm 0.066i, & k_{3,4} &= 0.520 \pm 1.113i, \\ k_{5,6} &= -0.619 \pm 2.210i, & k_7 &= 27.751, & k_8 &= -39.549. \end{aligned}$$

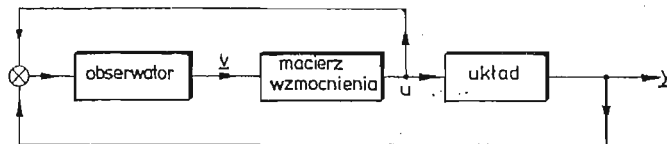
Mając te wyniki wyznaczono ostatecznie sterowanie z równania (2.2)

$$u(\tau) = -2.846(h/b)' - 0.030\alpha' + 0.050\beta' + 64.328(h/b) - 7.713\alpha + 3.286\beta - 0.626\eta_1 - 3.960\eta_2,$$

gdzie: $u(\tau) = M_s/\rho b^2 V_\infty^2$; $\tau = V_\infty t/b$.

4. Omówienie realizowalności wyznaczonego sterowania

Głównym problemem w realizacji technicznej prawa sterowania wyznaczonego metodami teorii sterowania jest warunek bezpośredniego mierzenia wszystkich współrzędnych stanu. Tylko dla bardzo prostych układów warunek ten jest możliwy do spełnienia. Dla układów złożonych jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest zastosowanie dodatkowego układu dynamicznego zwanego obserwatorem. Podstawą działania takiego układu jest odtwarzanie niemierzalnych współrzędnych stanu za pomocą pewnych operacji dynamicznych na wielkościach wyjściowych i wejściowych. Schemat wprowadzenia obserwatora do układu przedstawiony jest na rys. 3. Na przedstawionym schemacie wek-



Rys. 3

tor y oznacza mierzalną część wektora stanu zależną od możliwości pomiarowych. W omawianym zagadnieniu flutteru profilu będą to współrzędne h , α , β i dodatkowo \dot{h} , $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$. Trudno dostępne współrzędne η_1 i η_2 charakteryzujące opływ niestacjonarny będą na podstawie wektora y i sterowania u odtwarzane przez obserwator i w efekcie otrzymamy wektor stanu v . Występująca w schemacie macierz wzmocnienia tworzona jest na podstawie współczynnika wzmocnienia k_i , natomiast metoda obliczania parametrów obserwatora przedstawiona jest w pracy [11].

Techniczna realizacja sterowania wymaga zbudowania odpowiedniego układu elektryczno-mechanicznego, co wykracza poza ramy teorii sterowania i powinno być przedmiotem analizy ekonomicznej.

5. Zakończenie

Jak widać z przeprowadzonych obliczeń efektywność metody sterowania modalnego jest duża, co wynika ze stosowania prostych działań algebraicznych. W porównaniu ze znaną metodą sterowania optymalnego zastosowaną do podobnego typu zagadnienia, proponowana metoda pozwala uniknąć kłopotliwego doboru współczynników wagowych we wskaźniku jakości, a także trudności związanych z rozwiązaniem równania Riccatiego.

W przykładzie obliczeniowym wyznaczono sterowanie dla prędkości krytycznej profilu wynoszącej 250 ms^{-1} . Ponieważ w praktyce zachodzi potrzeba sterowania w całym zakresie prędkości eksploatacyjnych przewyższających prędkość krytyczną, należy algorytm obliczeń powtórzyć wymaganą ilość razy.

Wybór profilu jako modelu skrzydła nie jest przypadkowy, ponieważ jest on punktem wyjścia do stosowania bardziej złożonych modeli aeroelastycznych.

Każdy układ sterowania flutterem musi zapewniać utrzymanie kątów wychylenia powierzchni sterowej i sił działających w układzie w ustalonych przedziałach wartości. W dalszych badaniach należałoby więc uwzględnić kryteria mające na celu minimalizację sił i wychyleń w całym zakresie eksploatacyjnych prędkości lotu.

O aktualności podjętej tematyki zdają się świadczyć zarówno dane firmy Boeing, według których straty spowodowane stosowaniem metod biernych wynoszą od 10-20% masy użytkowej samolotu [12], jak i fakt udanego eksperymentalnego lotu samolotu B-52 z urządzeniem do czynnego sterowania flutterem [13]. Do tej pory nie ujawniono jednak szczegółów potrzebnych do projektowania tego typu urządzeń.

Literatura cytowana w tekście

1. A. A. КРАСОВСКИЙ, *Системы автоматического управления полетом и их аналитические построения*, „Наука”, Москва 1973.
2. W. FISZDON, *Wstęp do aerospężystości*, PWN Warszawa 1951.
3. W. E. TRIPLETT, H. P. F. KAPPUS, P. J. LANDY, *Active flutter control-an adaptable application to wing/store flutter*, Journal of Aircraft, 11, 10 (1973), 669.
4. M. C. SANDFORD, I. ABEL, D. L. GRAY, *Transonic study of active flutter suppression based on an energy concept*, Journal of Aircraft, 2, 12 (1975), 72.
5. J. PIETRUCHA, D. SZELĄG, *Application of the method of optimal control for elimination of aeroelastic vibrations*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 18 (1977), 45.
6. J. PIETRUCHA, Z. SZEWCZYK, *Metoda sterowania modalnego i jej zastosowanie do ustateczniania lotu śmigłowca*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 4, 14 (1976), 571.
6. J. PIETRUCHA, Z. SZEWCZYK, *Synteza układu eliminacji drgań aeroelastycznych metodą sterowania modalnego*, Streszczenia referatów VII Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”, Poznań-Błażejewko, Maj 1978.
8. R. SCALAN, R. ROSENBAUM, *Drgania i flutter samolotów*, PWN, Warszawa 1964.
9. Y. C. FUNG, *An introduction to the theory of aeroelasticity*, J. Wiley and Sons Inc. New York 1955.

10. E. F. BAIRD, H. J. KELLY, *Formulation of the flutter problem for solution on an electronic analog computer*, Journal of the Aeronautical Sciences, 1950, 189.
11. J. PIETRUCHA, *Техническая реализуемость системы активного подавления флаттера с помощью наблюдающих устройств*, III symposium Mechaniki Stosowanej, Warszawa 1978.
12. G. O. THOMSON, G. J. KASS, *Active Flutter Superssion — an Emerging Technology*, Journal of Aircraft, 3, 9 (1972), 230.
13. K. L. ROGER, G. H. HODGES, L. FELT, *Active Flutter Suppression — a Flight Test Demonstration*, Journal of Aircraft, 6, 12 (1975), 551.

Резюме

НОВЫЙ МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ФЛАТТЕРОМ ПРОФИЛЯ

В работе применено метод модального управления к синтезу регулятора аэроупругих колебаний классической модели крыла. Принято при этом линейную нестационарную аэродинамику. Линейность и стационарность системы получено с помощью аппроксимации Джонса функции Вагнера.

Summary

A NEW METHOD OF FLUTTER CONTROL OF THE AIRFOIL

In the paper the theory of modal control was applied to the syntesis of the regulator of aeroelastic vibrations in the classical model of wing. The linear unsteady aerodynamics was assumed. The linearity and stationarity of the system have been obtained by means of Jones' approximation of Wagner's function.

BUDOWA GRANICZNYCH KRZYWYCH ZNISZCZENIA W OPARCIU O KONCEPCJĘ
PARAMETRU USZKODZENIA¹,

MARCIN CHRZANOWSKI, JERZY MADEJ (KRAKÓW)

Wykaz oznaczeń

- n — stała materiałowa,
 n_0 — stała materiałowa,
 t — czas,
 t^* — czas zniszczenia,
 t^* — czas zniszczenia w jednoosiowym stanie naprężenia,
 A — stała materiałowa,
 A_0 — stała materiałowa,
 A_p — pierwotne pole powierzchni próbki,
 A_s — pole powierzchni szczelin powstałych w próbce,
 A_r — pole powierzchni przenoszącej naprężenia w przekroju próbki,
 R — naprężenie porównawcze,
 S_1, S_2 — bezwymiarowe naprężenia główne,
 S — bezwymiarowa intensywność naprężeń,
 α — parametr w równaniu (4.1a),
 β — parametr w równaniu (3.1),
 ω — parametr uszkodzeń,
 τ — bezwymiarowy czas,
 τ^* — bezwymiarowy czas zniszczenia,
 σ_1, σ_2 — naprężenia główne,
 σ_j — dodatnie, największe naprężenie główne,
 σ_t — intensywność naprężeń,
 σ_e — naprężenie ekwiwalentne wg Sdobyriewa,
 σ_{t0} — wartości intensywności naprężenia, przy której zniszczenie nastąpi w czasie $t = 0$,
 ψ — parametr ciągłości.

1. Wstęp

Charakterystyczną cechą zniszczenia elementów konstrukcji w wielu wypadkach (pełzanie, zmęczenie) jest to, że następuje ono w wyniku kumulacji uszkodzeń w ciągu

¹) Praca niniejsza wykonana została w ramach Problemu Międzyresortowego I-23, koordynowanego przez IPPT PAN

całego okresu eksploatacji. Makroskopowo obserwowane pęknięcie jest więc efektem końcowym procesu nukleacji i narastania mikrouszkodzeń. Drugim etapem procesu zniszczenia jest propagacja jednej (lub wielu) dominującej szczeliny, prowadząca do wyczerpania nośności elementu. Czas trwania tego etapu we wspomnianych powyżej wypadkach jest jednak pomijalnie mały w porównaniu z etapem pierwszym [8], [12], którego znaczenie jest podstawowe.

Dla opisu okresu kumulacji mikroskopowych uszkodzeń przy pełzaniu KACZANOW [5] wprowadził parametr, którego zmiana obrazuje proces uszkodzeń w materiale. Dla jednoosiowego rozciągania parametr ten może być interpretowany [11] jako stosunek pola efektywnie pracującej powierzchni przekroju poprzecznego próbki, do jej pierwotnego pola:

$$(1.1) \quad \omega = \frac{A_p - A_r}{A_p},$$

gdzie: A_p — pierwotne pole powierzchni

$A_r = A_p - A_s$ — pole powierzchni przenoszącej naprężenia w przekroju

A_s — pole powierzchni szczelin

ω — parametr uszkodzeń.

Zamiast parametru ω wygodniej jest czasami wprowadzić tzw. parametr ciągłości materiału

$$(1.2) \quad \psi = 1 - \omega,$$

którego zmiany w czasie, w jednoosiowym stanie naprężenia podał Kaczanow w postaci:

$$(1.3) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma}{\psi} \right)^n,$$

gdzie A , n — stałe materiałowe.

Odpowiednie równanie dla parametru uszkodzeń będzie miało postać:

$$(1.4) \quad \frac{d\omega}{dt} = A \left(\frac{\sigma}{1 - \omega} \right)^n.$$

To fenomenologiczne podejście znalazło szerokie potwierdzenie doświadczalne. Ponadto pozwala ono na opisanie całego procesu akumulacji uszkodzeń, a nie tylko efektu końcowego — zniszczenia. W niniejszej pracy zajęto się zbadaniem możliwości zastosowania tego parametru dla opisu zniszczenia w płaskim stanie naprężenia.

2. Transformacja krzywych granicznych

W przypadku materiałów polikrystalicznych i w jednoosiowym stanie naprężenia, zmiana wielkości działającego obciążenia powoduje zarówno zmianę czasu do zniszczenia jak i jego charakter. Dla małych wielkości obciążeń, a w konsekwencji dużych czasów do do zniszczenia, pęknięcia mają charakter międzykrystaliczny, a przełom jest rozdzielczy. W drugim skrajnym przypadku dużych wielkości obciążeń zniszczenie ma charakter wewnątrzkrystaliczny i zachodzi na skutek poślizgów w płaszczyznach przebiegających przez poszczególne ziarna (bloki kryształów).

W przestrzennym stanie naprężenia znajduje to swoje odbicie w zachowaniu się materiału zgodnie z różnymi kryteriami wyężeńiowymi. I tak dla przypadku dużych czasów do zniszczenia, decydujące znaczenie ma wielkość największego naprężenia głównego, a więc najadekwatniejszą jest hipoteza Clebscha-Rankine'a (zmodyfikowaną hipoteza Galileusza). Dla zniszczenia wewnątrzkrystalicznego decydujący jest mechanizm poślizgowy, zbliżony do tego jaki obserwuje się przy płynięciu plastycznym. Stąd powszechnie stosowanym jest tu kryterium Hubera-Misesa-Hencky'ego (lub — dla swej prostoty — kryterium Tresci).

Należy podkreślić, że powyższy podział jest czysto umowny i rzeczywiste zachowanie się materiałów jest wynikiem równoczesnego występowania obu typów zniszczenia. Ponadto przewaga jednego z powyższych typów zależy zarówno od temperatury, jak i od budowy krystalicznej materiału. W praktyce dąży się do jak najdalej idącej idealizacji, dzięki której klasyfikuje się materiały, które w najczęściej spotykanym zakresie temperatur zachowują się bądź jak czułe na największe naprężenie główne, bądź na wielkość stycznego naprężenia oktaedrycznego. Klasyfikację taką wprowadził m.in. Hayhurst [4], nazywając materiały pierwszej grupy materiałami typu $\Delta-\Delta$, drugiej typu $\Phi-\Phi$. Do klasy $\Delta-\Delta$ należą takie metale jak miedź, brąz i stale w bardzo wysokich temperaturach. Typowym reprezentantem klasy $\Phi-\Phi$ jest aluminium.

Jednak dla wielu materiałów, ważnych ze względu na swoje powszechne zastosowanie (stale stopowe), obserwować można opisaną powyżej zmianę charakteru zniszczenia i w konsekwencji transformację krzywych granicznych wraz ze zmianą czasu do zniszczenia.

Istnieją dwie możliwości opisu pośrednich krzywych granicznych. Pierwsza z nich to posługiwanie się różnymi hipotezami wyężeńiowymi, dla różnych czasów zniszczenia. Jest to jednak z praktycznego punktu widzenia możliwe tylko dla znalezienia pewnych oszacowań czasu do zniszczenia. Dla danego obciążenia nie jest bowiem znany z góry czas zniszczenia, a więc i postać szukanej krzywej granicznej, a w konsekwencji postać hipotezy wyężeńiowej, którą należy zastosować, aby ten czas poprawnie wyznaczyć.

Druga możliwość opisu transformacji krzywych granicznych, to dobór takiego prawa rozwoju uszkodzeń, aby w przypadkach granicznych tj. dla bardzo małych, lub bardzo dużych czasów do zniszczenia otrzymać odpowiednio hipotezy Hubera i Galileusza-Clebscha-Rankine'a. W przypadkach pośrednich wielkości obciążeń prawo takie powinno opisywać krzywe graniczne zawarte pomiędzy krzywymi odpowiadającymi powyższym dwóm hipotezom wyężeńiowym.

Niezależnie od powyższych możliwości należy podjąć decyzję co do reprezentacji uszkodzeń w przestrzennym stanie naprężenia. Najogólniejszym jest tu przyjęcie, że uszkodzenia reprezentowane są przez pewien tensor. Koncepcję taką zaproponował RABOTNOW [14], a pewną interpretację fizyczną składowych tego tensora podali KACZANOW jr. i WAKULENKO [16]. Według tej teorii zakłada się, że w każdej płaszczyźnie powstawanie i rozwój mikrouszkodzeń następuje w trzech kierunkach wzajemnie ortogonalnych. Prawo zmiany parametru uszkodzeń w tensorowej reprezentacji ma postać układu sześciu równań różniczkowych dla sześciu składowych tensora uszkodzeń, w których prędkości uszkodzeń są funkcją niezmienników tensora naprężeń rzeczywistych.

Zarówno ze względu na trudności matematyczne w skonstruowaniu praktycznie przy-

datnych rozwiązań, jak i na brak odpowiedniego materiału doświadczalnego koncepcja ta nie znalazła szerszego zastosowania w odniesieniu do zniszczenia metali przy pełzaniu, choć z powodzeniem była już stosowana do niektórych zagadnień mechaniki pęknięcia skał [2].

Do prostszych związków prowadzi koncepcja operowania zamiast tensorem uszkodzeń trzema parametrami opisującymi uszkodzenia w płaszczyznach naprężeń głównych. W dalszym ciągu w przypadku tej teorii, zaproponowanej przez KACZANOWA [6], operować będziemy umowną nazwą „wektorowa reprezentacja uszkodzeń”.

Wreszcie najprostszą koncepcją jest operowanie — również i w przypadku przestrzennego stanu naprężenia — skalarną reprezentacją parametru uszkodzeń, który może więc być rozumiany jako ślad tensora uszkodzeń. Propozycja taka zaproponowana została przez SDOBYRIEWA [15] i dzięki swej prostocie znalazła szerokie zastosowanie (np. [17]).

W niniejszej pracy zbadano skalarną i wektorową reprezentację uszkodzeń z punktu widzenia możliwości ich zastosowania do opisu omówionego powyżej zjawiska transformacji krzywych granicznych.

3. Skalarna reprezentacja parametru uszkodzeń

Aby rozważyć możliwe postacie krzywych izochronicznych (krzywych jednakowego czasu zniszczenia) przy pełzaniu wg skalarnej reprezentacji parametru uszkodzeń posłużono się prawem Kaczanowa uogólnionym na przestrzenny stan naprężenia przez Sdobyriewa w postaci

$$(3.1) \quad \dot{\omega} = A \left(\frac{\sigma_e}{1-\omega} \right)^n,$$

gdzie

$$\text{gdzie} \quad \sigma_e = \beta \sigma_1 + (1-\beta) \sigma_2 \quad 0 \leq \beta \leq 1,$$

σ_1 — intensywność tensora naprężenia.

Granicznym wartościom parametru β odpowiadać będą hipotezy Clebscha-Rankine'a i Hubera-Misesa. W pierwszym rzędzie zbadano więc, jak przedstawia się współpraca naprężeń głównych w zakresie rozwoju uszkodzeń dla poszczególnych wartości współczynnika β przy ustalonym czasie zniszczenia t^* , tzn. jaką postać mają krzywe izochroniczne dla różnych współczynników β .

Jako porównawczy przyjęto czas zniszczenia dla jednoosiowego stanu naprężenia \bar{t}^* . Następnie dokładając naprężenie σ_2 zmieniano σ_1 tak, by uzyskać ten sam czas zniszczenia \bar{t}^* .

Próby te przeprowadzono dla różnych wartości współczynnika β otrzymując za każdym razem odpowiednie krzywe graniczne.

Powyższe zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego, zwyczajnego typu (3.1) z warunkiem brzegowym na funkcję $\omega(t)$ w postaci:

$$(3.2) \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t^*) = 1,$$

przy dodatkowym warunku, aby dla różnych σ_2 zmieniając σ_1 uzyskać ten sam czas zniszczenia \bar{t}^* .

Rozdzielając zmienne w (3.1):

$$(3.3) \quad \int_0^{\omega} (1-\omega)^n d\omega = \int_0^t A\sigma_e^n dt.$$

i wykonując całkowanie otrzymujemy czas do zniszczenia

$$(3.4) \quad t^* = \frac{1}{A\sigma_e^n(1+n)}.$$

Przyjmując $\beta = 0$ mamy:

$$(3.5) \quad \sigma_e = \sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}.$$

Wprowadzając bezwymiarowe naprężenia

$$(3.6) \quad S_1 = \frac{\sigma_1}{R},$$

$$S_2 = \frac{\sigma_2}{R},$$

$$(3.7) \quad S_i = \frac{\sigma_i}{R} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2},$$

mamy zatem:

$$(3.8) \quad t^* = \frac{1}{A(1+n)R^n (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_1 S_2})^n}.$$

W jednoosiowym stanie naprężenia tj. gdy $S_1 = 1$ i $S_2 = 0$ czas zniszczenia wyraża się wzorem:

$$(3.9) \quad \bar{t}^* = \frac{1}{A(1+n)R^n}.$$

Wprowadzając bezwymiarowy czas

$$(3.10) \quad \tau = \frac{t}{t^*} = t \cdot AR^n(1+n),$$

mamy:

$$(3.11) \quad \tau^* = \frac{t^*}{t^*} = \frac{1}{(\sqrt{S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2})^n}.$$

W dalszym ciągu poszukiwać będziemy takich wartości S_1 i S_2 aby spełniony był warunek $\tau^* = 1$. Stąd:

$$(3.12) \quad S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2 = 1.$$

Jest to równanie elipsy Hubera-Misesa.

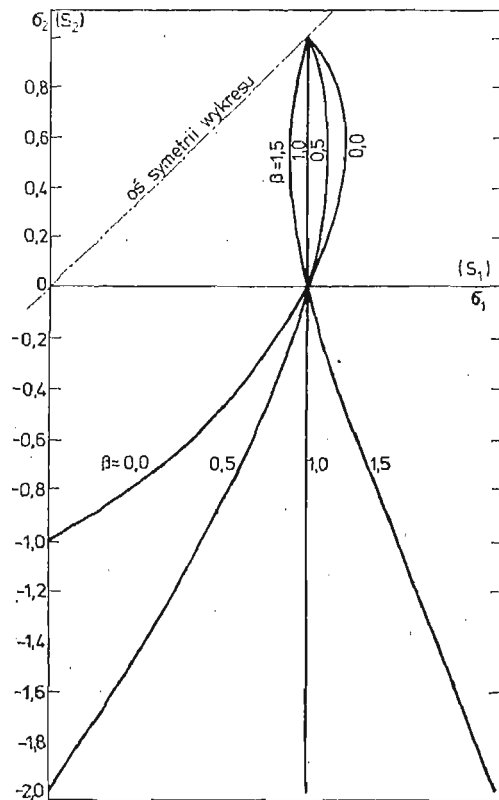
Dla $\beta \neq 0$ otrzymujemy:

$$(3.13) \quad \tau^* = \frac{1}{\beta S_1 + (1-\beta) (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2})^n}.$$

W dalszym ciągu zbadamy jak przy danych β przedstawia się współpraca naprężeń σ_1 i σ_2 w zakresie rozwoju zniszczenia, czyli dla jakich S_1 i S_2 $\tau^* = 1$. Stąd:

$$(3.14) \quad \beta S_1 + (1 - \beta) (\sqrt{S_1^2 + S_2^2} - S_1 S_2)^n = 1.$$

Na rys. 1. pokazano przykładowo krzywe graniczne dla $n = 1$ i $\beta = 0,5, 1,0$ a także dla $\beta = 1,5$ (tzn. $\sigma_c = 1,5 \sigma_1 - 0,5 \sigma_1$). W tym ostatnim przypadku otrzymuje się krzywą graniczną opisującą wzmocnienie materiału przy $\sigma_2 < 0$, co nie znajduje potwierdzenia doświadczalnego.



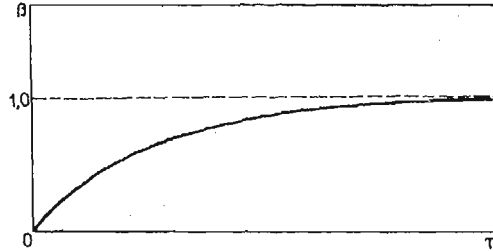
Rys. 1

Skonstruowane krzywe nie dotyczą III-ej ćwiartki układu σ_1, σ_2 , gdyż zgodnie z sugestią Kaczanowa propagacja uszkodzeń w płaskim stanie naprężenia zachodzi tylko wtedy gdy przynajmniej jedno z naprężeń głównych jest dodatnie (krzywe zniszczenia są otwarte).

Jak wynika z powyższych rozważań skalarna reprezentacja parametru uszkodzeń w postaci (3.1) daje możliwość opisu izochronicznych krzywych zniszczenia typu Galileusza i Hubera, a także krzywych pośrednich między tymi dwoma krzywymi granicznymi.

Zgodnie z uwagami z rozdz. 1, rozważana koncepcja nie daje jednak możliwości opisu transformacji izochronicznych krzywych zniszczenia. Aby to uzyskać musiałoby być

$\beta = \beta(t^*)$. Jakościowy charakter tej krzywej powinien być zgodny z pokazanym na rys. 2., jednak autorem nie są znane wyniki badań doświadczalnych potwierdzających ilościowo przebieg zależności $\beta(t^*)$.



Rys. 2

Skalarna reprezentacja parametru uszkodzeń może jednak być wykorzystana do opisu transformacji krzywych granicznych, jeśli przyjąć odpowiednie prawo propagacji uszkodzeń. W oparciu o [1], możliwość taką przedstawiono w pracy [10].

Założymy, że równanie kinetyki uszkodzeń ma postać:

$$(3.15) \quad \frac{d\omega}{dt} = f\left(\frac{\sigma_1}{1-\omega}\right) \frac{d\sigma_1}{dt} + g\left(\frac{\sigma_j}{1-\omega}\right),$$

gdzie:

ω — parametr uszkodzenia ($0 \leq \omega \leq 1$), σ_1 — intensywność naprężeń, σ_j — dodatnie, większe z dwu naprężeń głównych ($j = 1, 2$), t — czas.

Pierwszy składnik w prawej części wzoru dotyczy uszkodzeń niezależnych od czasu, drugi określa rozwój uszkodzeń związanych z procesami reologicznymi.

Dla procesów niezależnych od czasu o zniszczeniu decyduje wielkość działającego obciążenia, zatem zmiany parametru uszkodzeń opisuje tylko pierwszy człon tj. $f\left(\frac{\sigma_1}{1-\omega}\right)$. Dla bardzo dużych czasów zniszczenia o przyroście uszkodzeń decyduje druga z funkcji $g\left(\frac{\sigma_j}{1-\omega}\right)$, a wpływ pierwszej jest pomijalnie mały.

W oparciu o powyższe równanie kinetyki uszkodzeń, uwzględniające efekty zarówno natychmiastowe jak i zależne od czasu, zbadano możliwość transformacji krzywych izochronicznych w płaszczyźnie naprężeń głównych σ_1 i σ_2 dla różnych czasów zniszczenia.

W tym celu przyjęto do rozważań szczególną, potęgową postać funkcji f i g w formie:

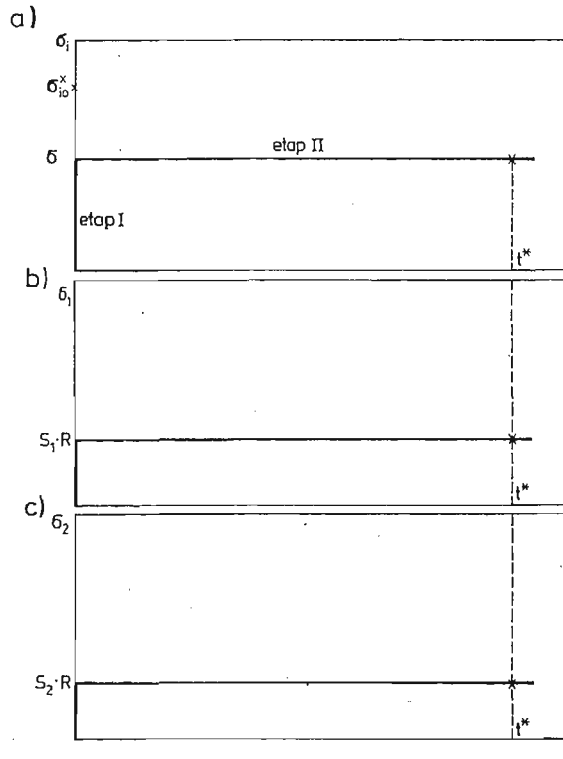
$$(3.16) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A_0 \left(\frac{\sigma_1}{\psi}\right)^{n_0} \frac{d\sigma_1}{dt} - A \left(\frac{\sigma_1}{\psi}\right)^n,$$

gdzie: ψ — parametr ciągłości ($1 \geq \psi \geq 0$)

σ_1 — intensywność naprężeń,

A_0, A, n_0, n — stałe materiałowe.

Przyjęto program obciążenia pokazany na rys. 3, według którego obciążenie działa w dwóch etapach.



Rys. 3

Dla wyznaczenia dowolnego punktu krzywej izochronicznej przyjęto program pokazany na rysunku 3a. Stałość intensywności naprężeń w drugim etapie jest przy tym zapewniona dzięki przyjęciu stałości zarówno σ_1 jak i σ_2 (Rys. 3b, 3c). Pary σ_1, σ_2 dobierano tak, aby dla każdej był spełniony warunek:

$$t^* = \text{const.}$$

Dzięki założeniu o natychmiastowym wzroście obciążenia do wartości σ_{i0} w etapie I do głosu nie dochodzą uszkodzenia reologiczne, których rozwój opisuje drugi składnik sumy w prawej stronie wzoru (3.16). W tym etapie całkowano więc równanie uproszczone (por. równanie (3.17)) wyznaczając wartość parametru ψ_0 , która stanowi warunek początkowy dla równania opisującego uszkodzenia w etapie II. Wobec założonego w etapie II $\sigma_i = \text{const.}$ jest $d\sigma_i/dt = 0$ i w konsekwencji całkować należy równanie (3.16) z pominięciem pierwszego składnika (por. równanie (3.20)).

Dla pierwszego etapu równanie kinetyki uszkodzeń ma więc postać:

$$(3.17) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A_0 \left(\frac{\sigma_i}{\psi} \right)^{n_0} \frac{d\sigma_i}{dt}.$$

Rozdzielając zmienne i całkując to równanie przy warunkach początkowych $\sigma_i = 0$ i $\psi = 1$ dla $t = 0$ otrzymujemy wartość parametru ciągłości ψ_0 dla intensywności naprężeń σ_{i0} :

$$(3.18) \quad \psi_0 = (1 - A_0 \sigma_{i0}^{n_0+1})^{\frac{1}{n_0+1}}$$

Oznaczając przez R wartość σ_{i0} dla której nastąpi zniszczenie natychmiastowe w jednoosiowym stanie naprężenia, otrzymamy następującą interpretację stałej materiałowej A_0 :

$$(3.19) \quad A_0 = \frac{1}{R^{n_0+1}}.$$

Rozwiązując równanie (3.16) dla $t > 0$ (tzn. gdy $d\sigma_i/dt = 0$):

$$(3.20) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_1}{\psi} \right)^n,$$

przy warunkach

$$(3.21) \quad \psi_0 \geq \psi \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t^*,$$

otrzymujemy:

$$(3.22) \quad \psi = [\psi_0^{n+1} - A(n+1)\sigma_1^n t] \frac{1}{n+1}.$$

Podstawiając tu za ψ_0 wyrażenie (3.18) otrzymujemy:

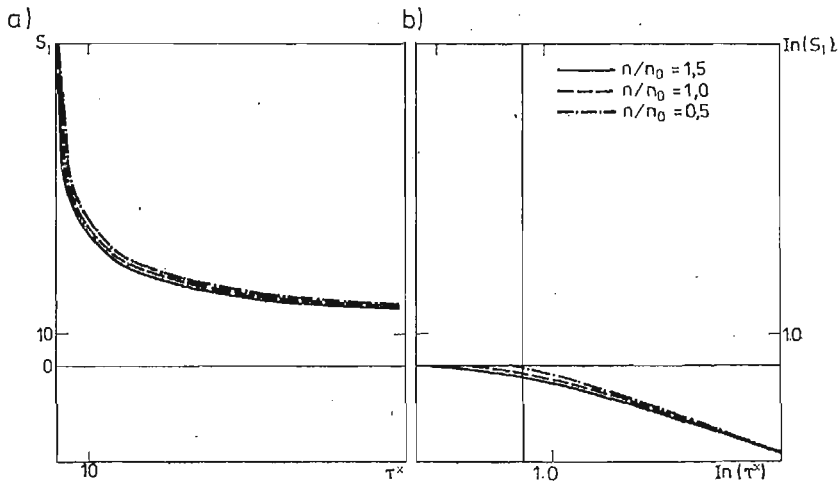
$$(3.23) \quad \psi = \left[(1 - A_0 \sigma_{i0}^{n_0+1}) \frac{n+1}{n_0+1} - A(n+1)\sigma_1^n t \right] \frac{1}{n+1}.$$

Po podstawieniu wielkości bezwymiarowych określonych przez (3.6) i (3.10) oraz oznaczając $\sigma_{i0} = S_{i0} \cdot R$ równanie (3.23) przyjmuje postać:

$$(3.24) \quad \psi = \left\{ \left[1 - \frac{1}{R^{n_0+1}} (RS_{i0})^{n_0+1} \right] \frac{n_0+1}{n+1} - (S_1 R)^n \tau \frac{1}{R^n} \right\} \frac{1}{n+1},$$

a po dokonaniu redukcji:

$$(3.25) \quad \psi = [(1 - S_{i0}^{n_0+1}) \frac{n_0+1}{n_0+1} - S_1^n \tau] \frac{1}{n+1}.$$



Rys. 4

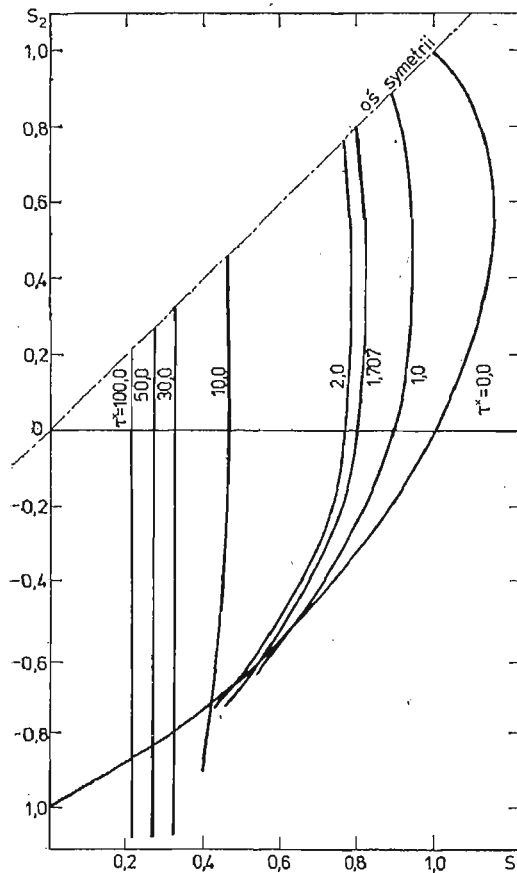
Dla $\psi = 0$ czas zniszczenia $\tau = \tau^*$ wyznaczamy z (3.25):

$$(3.26) \quad \tau^* = \frac{1}{S_1^n} [1 - S_1^{n_0+1}]^{\frac{n+1}{n_0+1}}$$

Na rys. 4a pokazano przebieg zależności $\tau^* = \tau^*(S_1)$ dla jednoosiowego stanu naprężenia ($S_1 = S_1$) przyjmując $n = 3$ i $n/n_0 = 0,5, 1, 1,5$. Na rys. 4b pokazano ten sam wykres w skali dwulogarytmicznej, częściej stosowanej dla przedstawienia tej zależności.

Dla opisu transformacji krzywych granicznych poszukiwać będziemy krzywych $S_1(S_2)$ opisanych związkem (3.26) przyjmując różne wartości τ^* .

Obliczenia przeprowadzono dla $n_0 = 6$, $n = 3$ oraz $\tau^* = 0, 1, 1,707, 2, 10, 30, 50, 100$ dla $S_1 > 0$ (I i IV ćwiartka), a uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5

Jak widać na podstawie uzyskanych wyników równanie kinetyki uszkodzeń w postaci (3.16) może być stosowane do opisu transformacji krzywych granicznych związanych z poziomem działających obciążeń. Otrzymane krzywe graniczne leżą pomiędzy skrajnymi przypadkami otwartego wieloboku Galileusza i elipsy Hubera.

4. Wektorowa reprezentacja parametru uszkodzeń

Analogiczne rozważania dotyczące postaci krzywych granicznych przeprowadzono dla wektorowej reprezentacji parametru uszkodzeń. Posłużono się tu równaniami kinetyki uszkodzeń przy pełzaniu dla przestrzennego stanu naprężenia zaproponowanymi przez KACZANOWA [7].

W jednoosiowym stanie naprężenia zgodnie z koncepcją KACZANOWA [7] kumulacja uszkodzeń ma charakter przestrzenny. Rozwój mikropęknięć w kierunku naprężenia σ_1 opisuje wzór:

$$(4.1) \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} \right)^n,$$

zaś w kierunkach prostopadłych do kierunku σ_1 zachodzą związki:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= \alpha \frac{d\psi_1}{dt}, \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= \alpha \frac{d\psi_2}{dt}, \end{aligned}$$

gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$.

Dla $\alpha = 0$ zniszczenie ma charakter kierunkowy (tj. postępuje tylko w kierunku prostopadłym do σ_1) zaś przy $\alpha = 1$ jest równomierne w całej objętości.

Odpowiednie prawo rozwoju uszkodzeń w przestrzennym stanie naprężenia zaproponował KACZANOW [5] w postaci:

$$(4.2) \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -A \left\{ \left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} \right)^n + \alpha \left[\left(\frac{\sigma_2}{\psi_2} \right)^n + \left(\frac{\sigma_3}{\psi_3} \right)^n \right] \right\}.$$

Dla kierunków 2 i 3 analogiczne równania otrzymuje się przez cykliczną zmianę wskaźników tj.

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= -A \left\{ \left(\frac{\sigma_2}{\psi_2} \right)^n + \alpha \left[\left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} \right)^n + \left(\frac{\sigma_3}{\psi_3} \right)^n \right] \right\}, \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= -A \left\{ \left(\frac{\sigma_3}{\psi_3} \right)^n + \alpha \left[\left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} \right)^n + \left(\frac{\sigma_2}{\psi_2} \right)^n \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dla płaskiego stanu naprężenia zagadnienia wyznaczenia izochronicznych krzywych granicznych, odpowiadających różnym wartościom współczynnika α , sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych typu (4.2) z warunkami brzegowymi na funkcję $\psi_i(t)$ w postaci:

$$(4.3) \quad \psi_i(0) = 1, \quad \psi_i(t^*) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

przy dodatkowym warunku, aby dla różnych par σ_1, σ_2 uzyskać ten sam czas zniszczenia t^* .

Używając zmiennych bezwymiarowych wprowadzonych w rozdz. 3 układ równań (4.2) w postaci:

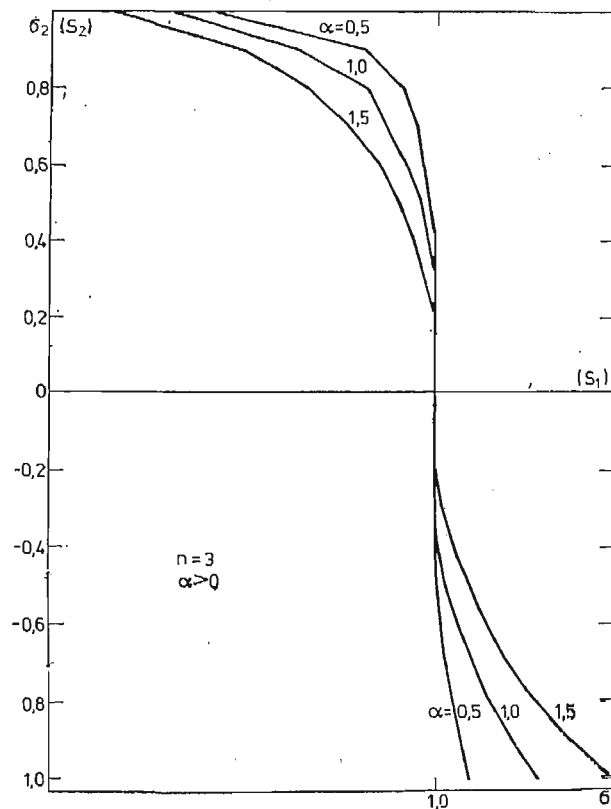
$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = -\frac{1}{n+1} \left[\left(\frac{S_1}{\psi_1} \right)^n + \alpha \left(\frac{S_2}{\psi_2} \right)^n \right],$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_2}{d\tau} &= -\frac{1}{n+1} \left[\left(\frac{S_2}{\psi_2} \right)^n + \alpha \left(\frac{S_1}{\psi_1} \right)^n \right], \\ \frac{d\psi_3}{d\tau} &= -\frac{\alpha}{n+1} \left[\left(\frac{S_1}{\psi_1} \right)^n + \left(\frac{S_2}{\psi_2} \right)^n \right], \end{aligned}$$

naależy rozwiązać przy warunkach (4.3), oraz przy warunku dodatkowym, aby dla różnych S_2 tak zmienić S_1 by uzyskać czas zniszczenia taki jak dla jednoosiowego stanu naprężenia (tj. dla $\tau^* = 1$, $S_2 = 0$, $S_1 = 1$).

Powyższe zagadnienie sprowadza się zatem do wielokrotnego rozwiązywania układu równań różniczkowych (4.4) przy warunku (4.3) i wielokrotnego „wstrzeliwania się” wartością S_1 tak aby przy ustalonym S_2 zniszczenie nastąpiło w czasie $\tau^* = 1$.

Z uwagi na brak możliwości rozwiązań drogą analityczną, przy rozwiązywaniu zadania zastosowano przybliżone metody numeryczne (metoda Rungego-Kutty trzeciego rzędu do rozwiązywania układu równań różniczkowych, oraz metodę Newtona do poszukiwania żądanej wartości naprężenia S_1 [9]).

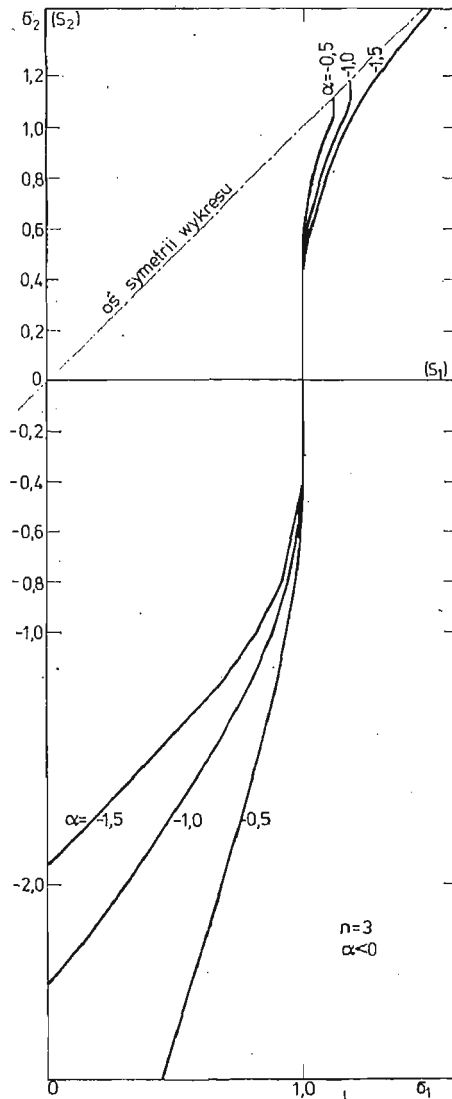


Rys. 6

Na rys. 6 pokazano postacie krzywych granicznych dla $n = 3$ i $\alpha > 0$. O ile ich przebieg w pierwszej ćwiartce może być niekiedy potwierdzony doświadczalnie [13], o tyle umoc-

nienie w IV ćwiartce nie jest obserwowane. Zbadano więc postać krzywych granicznych dla $\alpha < 0$, przyjmując jak poprzednio $n = 3$ lecz $\alpha = -0.5, -1.0$ i -1.5 . Uzyskane krzywe pokazano na rys. 7. Mają one charakter zbliżony do granicznych krzywych wg teorii największego wydłużenia de Saint-Venanta. Takie zachowanie się materiałów nie jest potwierdzone doświadczeniami jeśli chodzi o I ćwiartkę, natomiast jest zgodne z wynikami doświadczeń w ćwiartce IV-ej.

Układ równań (4.2) nie opisuje transformacji i dobór odpowiedniego prawa kinetyki uszkodzeń umożliwiający opis tego efektu jest celem dalszych prac autorów.



Rys. 7

5. Uwagi końcowe

Rozważone możliwości opisu kinetyki uszkodzeń w płaskim stanie naprężenia wskazują na konieczność stosowania rozszerzonego prawa uszkodzeń (3.15) dla opisu transformacji, izochronicznych krzywych granicznych. Dotyczy to zarówno skalarnej, jak i wektorowej reprezentacji parametru uszkodzeń. Wybór tej reprezentacji podyktowany musi być zgodnością uzyskanych krzywych granicznych z doświadczalnymi. W skalarnej reprezentacji parametru uszkodzeń możliwe jest jedynie wykorzystanie istniejących hipotez wyteżeniowych poprzez dobór odpowiedniego określenia naprężenia σ_e w (3.1).

Większą możliwość daje wektorowa reprezentacja. Rozważony układ równań różniczkowych (4.4) prowadzi do krzywych granicznych, które zbliżone są do doświadczalnych dla $\alpha > 0$ jeśli $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 > 0$, oraz dla $\alpha < 0$ jeśli $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 < 0$. Przyjęcie α dodatniego lub ujemnego dla dowolnych wartości σ_1 i σ_2 daje krzywe znacznie odbiegające od typowych wyników doświadczeń. Koniecznym jest więc poszukiwanie innego opisu kinetyki uszkodzeń, dającego zarazem możliwość opisu transformacji krzywych granicznych.

Użyte w niniejszej pracy równania kinetyki uszkodzeń są ważne jeśli przynajmniej jedno z naprężeń głównych jest dodatnie. Stąd dla rozważanego płaskiego stanu naprężenia nie ma możliwości zbudowania krzywych granicznych dla ujemnych wartości σ_1 i σ_2 . W przestrzennym stanie naprężenia, w zależności od kształtu powierzchni granicznej może ona przeciąć płaszczyznę σ_1 , σ_2 także i dla ujemnych ich wartości.

Literatura cytowana w tekście

1. M. CHRZANOWSKI, *Use of the damage concept in describing creep fatigue interaction under prescribed stress*, Inst. J. Mech. Sci. Vol. 18 pp. 69-73. Pergamon Press 1976.
2. A. DRAGON, *On phenomenological description of rock-like materials with account for kinetics of brittle fracture*, Arch. Mech. Stos., 28, 1, 13-1976.
3. D. R. HAYHURST, *Creep rupture under multi-axial states of stress*, J. Mech. Phys. Solids. 1972, Vol. 20 pp 381 to 390
4. D. R. HAYHURST, *Creep fracture of Materials and Structures. Lectures at Summer School on Fracture Mechanics Applied to Structural Analysis* Kraków, September 1977.
5. Л. М. КАЧАНОВ, *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изд. А. Н СССР ОН, 1958.
6. Л. М. КАЧАНОВ, *Ползучесть и длительная прочность*, Труды Всесоюз. Совещ. по теории расчетов на ползучесть и длит. прочность 15-18 мая 1962, Новосибирск.
7. Л. М. КАЧАНОВ, *Некоторые вопросы разрушения в условиях ползучести*. Тр. Всес. Совещ. по расч. на ползуч. и прочн. Изд. Сиб. Отд. А. Н. СССР, 1963.
8. Л. М. КАЧАНОВ, *Время разрушения в условиях ползучести*, Проблемы механики сплошной среды, Изд. А. Н. СССР, Москва 1961.
9. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, Wyd. Nauk. Techn. W-wa 1974.
10. J. MADEJ, M. CHRZANOWSKI, *Transformacja izochronicznych krzywych zniszczenia w warunkach pelzania*, IPPT PAN Polska Konf. Mech. Ciała Stałego. Porąbka Kozubnik 3—11.IX.1978.
11. F. K. G. ODQVIST, J. HULT, *Some aspects of creep rupture*, Archiv for Fysik, 3525, January 1961.
12. St. PIECHNIK, M. CHRZANOWSKI, *Time of total creep rupture of a beam under combined tension bending*, Inst. J. Solids Structures 1970, Vol. 6, pp. 453 to 477.
13. Г. С. ПИСАБЕНКО, А. А. ЛЕБЕДЕВ, *Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложной напряженно-состоянии*, Изд. наук Думка, Киев 1969.
14. Y. N. RABOTNOW, *Creep rupture Applied Mechanics Proceedings of the twelfth International Congress of Applied Mechanics* Stanford University 1968.

15. В. Р. СДОБЫРЕВ, *Критерии длительной прогности для некоторых эластопрогнозных сплавов*. Изд. А. Н. СССР Мех. и машин. 6, 1959.
16. А. А. БАКУЛЕНКО, Л. М. КАЧАНОВ, *Континуальная теория сред с трещинами*, Мех. Тв. Тела, 4, 1971.
17. M. ŻYCZKOWSKI, J. SKRZYPEK, *Stationary creep and creep rupture of thick-walled tube under combined loading*, Proc. IUTAM Symp. Creep in Structures, Gothenburg 1970, Springer — V. 1972.

Резюме

ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ КРИВЫХ РАЗРУШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРА ПОВРЕЖДЕНИЙ

В работе рассматривается возможность построения изохронных кривых разрушения в условиях ползучести используя параметр повреждений введенный Л. М. Качановым [3]. Особенное внимание посвящено обсуждению применимости скалярной и векторной интерпретации параметра повреждений к описанию трансформации изохронных кривых в зависимости от величины времени до разрушения. Показано, что для этого необходимо введение обобщенного уравнения кинетики повреждений содержащего также член соответствующий повреждениям независимым от времени.

Лучшие результаты, получены для векторной репрезентации повреждений чем для скалярной, не соответствуют вполне экспериментальным данным и вопрос должен в дальнейшем быть исследован используя более сложные уравнения кинетики повреждений.

Summary

THE CONSTRUCTION OF FAILURE LIMIT CURVES BY MEANS OF A DAMAGE

A possibility to employ Kachanov's damage parameter [3] in constructing isochronous failure limit curves in creep conditions is evaluated. A scalar and vector representation of damages are verified to be used in revealing a phenomenon of changing a shape of these curves with time to rupture. It is shown that in this case it is necessary to use an extended law of damage kinetics containing a term responsible for time independent deterioration.

The results are better when vector representation of damages has been used, however further improvements to fit more accurately experimental results are necessary.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1978 roku.

KSZTAŁTY PRĘTÓW SILNIE ZAKRZYWIONYCH PODDANYCH ZGINANIU Z ROZCIĄGANIEM I ŚCINANIEM, CAŁKOWICIE UPLASTYCZNIONYCH W STADIUM ZNISZCZENIA

ANNA DOLLAR, ZDZIŚLAWA KORDAS (KRAKÓW)

1. Wstęp

Powszechnie stosowanym podejściem przy kształtowaniu elementów konstrukcyjnych w zakresie sprężystym jest zastosowanie warunków równomiernej wytrzymałości. W zakresie plastycznym, pewnym odpowiednikiem tego podejścia jest poszukiwanie kształtów ciał, które przy osiągnięciu nośności granicznej osiągną stan plastyczny w całej swej objętości. Narzucenie warunku całkowitego uplastycznienia w stadium zniszczenia przy projektowaniu elementów z materiału idealnie plastycznego pozwala na wyeliminowanie z konstrukcji stref sztywnych bądź sprężystych: pozwala zatem na lepsze wykorzystanie materiału w pracach [1], [5] stwierdzono, bowiem, że w optymalnych konstrukcjach w stadium zniszczenia uplastycznione powinno być całe ciało, bądź możliwie wielki jego podobszar.

Kształty, które uzyskuje się w oparciu o to kryterium wykazują najczęściej całkowitą niejednoznaczność, zatem przy doborze kształtów optymalnych, należałoby przeprowadzić procedurę optymalizacyjną np. w oparciu o warunek minimum objętości. Niekiedy jednak pewne wymagania konstrukcyjne narzucają kształty odbiegające od kształtów regularnych, powszechnie stosowanych w praktyce. Wtedy też można dobrać kształty, które odpowiadają całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia, bez prowadzenia procedury optymalizacyjnej. Niekiedy też kształty, o których mowa spełniają warunek minimum objętości, zatem są kształtami optymalnymi w sensie powszechnie przyjętym.

Omawiane podejście przy kształtowaniu elementów konstrukcyjnych w zakresie plastycznym było stosowane w pracy [3], przy kształtowaniu niekołowych cylindrów grubościennych, następnie w pracy [2] przy projektowaniu skręcanych prętów rurowych. Szersze omówienie problematyki wyłaniającej się w trakcie kształtowania ciał wykazujących całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia, jak również przegląd publikacji z tego zakresu, można znaleźć w pracy [4].

W niniejszym opracowaniu poszukuje się takich kształtów pręta z materiału idealnie sprężysto-plastycznego, który poddany zginaniu z rozciąganiem i ścinaniem jak na rys. 1, uległby całkowitemu uplastycznieniu przy osiągnięciu nośności granicznej. Problem rozwiążemy w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, w p. 6 podamy ponadto wyniki analizy problemu w warunkach płaskiego stanu naprężenia.

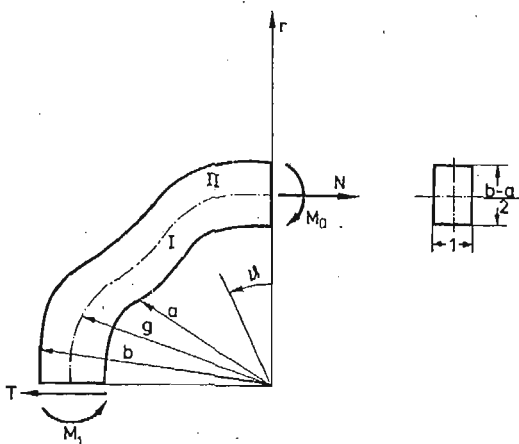
Z uwagi na zastosowaną metodę małego parametru poszukuje się kształtów pręta, odbiegającego od kołowego (od ćwiartki koła), będącego rozwiązaniem trywialnym

postawionego zagadnienia. Problem ten jest rozwinięciem i uzupełnieniem przykładów analizowanych w pracy [4] i pozwala na szersze poznanie analizowanej tam problematyki.

Rozwiązanie ma spełniać warunki równowagi wewnętrznej, warunków plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego w formie równości oraz naprężeniowe warunki brzegowe. Można więc je uzyskać w oparciu o równania naprężeniowe bez analizy równań odkształceniowych. Otrzymuje się szereg rozwiązań statycznie dopuszczalnych, a odpowiadające tym rozwiązaniom kształty są kształtami bezpiecznymi. W omawianym pręcie można wyróżnić strefę obwodowego ściskania oraz strefę obwodowego rozciągania. W każdej ze stref uzyskano dwa jakościowo różne rozwiązania, mianowicie ciąg rozwiązań odpowiadający niewielkim odstępstwom od kształtu będącego ćwiartką pierścienia kołowego, o ustalonym stosunku niezaburzonych promieni wewnętrznego i zewnętrznego oraz rozwiązania dla dowolnych stosunków niezaburzonych promieni.

2. Założenia i równania podstawowe

Rozważany jest pręt o przekroju prostokątnym i kształcie scharakteryzowanym we współrzędnych biegunowych funkcjami $a(\theta)$ i $b(\theta)$, obciążony jak na rysunku 1.



Rys. 1

W pręcie tym wyróżnia się dwie strefy uszeregowania naprężeń:

- strefę I — wewnętrzną, ściskaną naprężeniem obwodowym $\sigma_{\theta I}$
- strefę II — zewnętrzną, rozciąganą naprężeniem obwodowym $\sigma_{\theta II}$.

Przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia i nieściśliwości materiału, stan naprężenia w dowolnym punkcie pręta jest określony czwórką składowych σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, oraz $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$.

Naprężenia te, w każdej ze stref spełniają po dwa równania równowagi wewnętrznej postaci:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_r}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + 2 \frac{\tau_{r\vartheta}}{r} = 0. \end{cases}$$

Zgodnie z przyjętym kryterium kształtowania pręta, w każdym punkcie jest spełniony warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego:

$$(2.2) \quad (\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + 4\tau_{r\vartheta}^2 = \frac{4}{3}\sigma_0^2.$$

Problem jest zatem wewnętrznie statycznie wyznaczalny, gdyż w każdej ze stref mamy do dyspozycji trzy równania naprężeniowe oraz trzy niewiadome składowe stanu naprężenia.

Dla wyznaczenia poszukiwanych funkcji $a(\theta)$ i $b(\theta)$ oraz czterech stałych całkowania równań równowagi wewnętrznej, wykorzystano naprężeniowe warunki brzegowe (równowartości naprężeń promieniowych i obwodowych) na brzegach wewnętrznym i zewnętrznym oraz na granicy stref. Na obu nieobciążonych brzegach $a(\theta)$ i $b(\theta)$, składowe ciśnienia p_{nr} i $p_{n\vartheta}$ są równe zeru. Na powierzchni $g(\vartheta)$, rozgraniczającej obie strefy składowe naprężeń wewnętrznych równoważą się wzajemnie. Warunki te wyprowadzone w pracy [3] przyjmują następującą postać (oznaczenie „I” odnosi się do strefy wewnętrznej, a „II” do strefy zewnętrznej):

— na powierzchni wewnętrznej $r = a(\theta)$:

$$(2.3) \quad \begin{cases} a(\theta)\sigma_{rI}|_{r=a(\theta)} - a'(\theta)\tau_{r\theta I}|_{r=a(\theta)} = 0, \\ a'(\theta)\sigma_{\theta I}|_{r=a(\theta)} - a(\theta)\tau_{r\theta I}|_{r=a(\theta)} = 0, \end{cases}$$

— na powierzchni zewnętrznej $r = b(\theta)$:

$$(2.4) \quad \begin{cases} b(\theta)\sigma_{rII}|_{r=b(\theta)} - b'(\theta)\tau_{r\theta II}|_{r=b(\theta)} = 0, \\ b'(\theta)\sigma_{\theta II}|_{r=b(\theta)} - b(\theta)\tau_{r\theta II}|_{r=b(\theta)} = 0, \end{cases}$$

— na granicy stref $r = g(\theta)$:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} -g(\vartheta)\sigma_{rI}|_{r=g(\vartheta)} + g'(\vartheta)\tau_{r\theta I}|_{r=g(\vartheta)} &= -g(\vartheta)\sigma_{rII}|_{r=g(\vartheta)} + g'(\vartheta)\tau_{r\theta II}|_{r=g(\vartheta)}, \\ g'(\vartheta)\sigma_{\theta I}|_{r=g(\vartheta)} - g(\vartheta)\tau_{r\theta I}|_{r=g(\vartheta)} &= g'(\vartheta)\sigma_{\theta II}|_{r=g(\vartheta)} - g(\vartheta)\tau_{r\theta II}|_{r=g(\vartheta)}. \end{aligned}$$

Okaże się, że na tej drodze uzyskamy dwie rodziny rozwiązań: pierwsza będzie dotyczyć niekołowych kształtów przy czystym zginaniu momentem M_0 , natomiast druga dopuszcza wpływ jednoczesnego niewielkiego ścinania i rozciągania siłami $N = T$.

3. Metoda małego parametru

Przyjmujemy rozwiązanie w postaci szeregu parametru, charakteryzującego niekołowość kształtu pręta, mianowicie:

$$(3.1) \quad x(r, \vartheta) = x_0 + \alpha x_1(r, \vartheta) + \alpha^2 x_2(r, \vartheta) + \dots,$$

gdzie

$$x(r, \vartheta) = \sigma_r(r, \vartheta), \sigma_\vartheta(r, \vartheta), \tau_{r\vartheta}(r, \vartheta), a(\vartheta), b(\vartheta), g(\vartheta),$$

a wielkości z indeksem „0” są składowymi stanu naprężenia dla pręta kołowego o promieniach a_0 i b_0 , zginanego momentem M_0 , będącym nośnością graniczną tego pręta. Jak wiadomo, w oparciu o metodę małego parametru, nie badając zbieżności szeregów, możemy wyciągnąć pewne jakościowe wnioski np. odnośnie niejednoznaczności rozwiązań.

Po rozwinięciu składowych stanu naprężenia w równaniach (2.1) i (2.2) w szereg parametru α i porównaniu współczynników przy odpowiednich potęgach α otrzymuje się dla każdej ze stref ciąg układów 3 równań, w których niewiadomymi są odpowiednie poprawki składowych stanu naprężenia:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta i}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{ri} - \sigma_{\vartheta i}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta i}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta i}}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_{r\vartheta i}}{r} = 0, \end{cases}$$

$$(3.3) \quad \sigma_{ri} - \sigma_{\vartheta i} = f_i(\sigma_{\vartheta 0}, \sigma_{r0} \dots \sigma_{r_{i-1}}, \sigma_{\vartheta_{i-1}}, \tau_{r\vartheta_{i-1}}),$$

gdzie $i = 0, 1, 2 \dots$

Równania (3.2) mają dla każdego przybliżenia, identyczną postać z wyjściowymi warunkami (2.1), które są równaniami liniowymi. Równanie (3.3) jest dla i — tego przybliżenia liniowym warunkiem plastyczności.

Zastąpienie w warunkach brzegowych (2.3), (2.4) i (2.5) funkcji $a(\theta)$, $b(\theta)$, $g(\theta)$ ich rozwinięciami (3.1) oraz rozwinięcie wyrażeń na kolejne składowe stanu naprężenia dla promieni $a(\theta)$, $b(\theta)$ i $g(\theta)$ odpowiednio wokół punktów a_0 , b_0 i g_0 prowadzi do rozwinięcia warunków brzegowych w szereg parametru α (schemat rozwinięcia według pracy [3]).

Pierwszy z warunków (2.5) (warunek na granicy stref) po rozwinięciu przybiera następującą postać:

gdzie $i = 0, 1, 2 \dots$

$$(3.4) \quad -(g_0 + \alpha g_1 + \alpha^2 g_2 + \dots) \left\{ \left[(\sigma_{r0i} - \sigma_{r0i}) \right]_{r=g_0} + \right. \\ \left. + \frac{\partial (\sigma_{r0i} - \sigma_{r0i})}{\partial r} \Big|_{r=g_0} (\alpha g_1 + \alpha^2 g_2 + \dots) + \frac{\partial^2 (\sigma_{r0i} - \sigma_{r0i})}{\partial r^2} \frac{g_1^2}{2!} \alpha^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial (\sigma_{r1i} - \sigma_{r1i})}{\partial r} \Big|_{r=g_0} (\alpha g_1 + \alpha^2 g_2 + \dots) \right] \alpha + (\sigma_{r2i} - \sigma_{r2i}) \Big|_{r=g_0} \alpha^2 + \dots + \left. \right\} \\ + (\alpha g'_1 + \alpha^2 g'_2 + \dots) \left\{ \left[(\tau_{r\vartheta 1i} - \tau_{r\vartheta 1i}) \right]_{r=g_0} + \right. \\ \left. + \frac{\partial (\tau_{r\vartheta 1i} - \tau_{r\vartheta 1i})}{\partial r} \Big|_{r=g_0} (\alpha g_1 + \alpha^2 g_2 + \dots) \right] \alpha + (\tau_{r\vartheta 2i} - \tau_{r\vartheta 2i}) \Big|_{r=g_0} \alpha^2 + \dots = 0,$$

Pozostałe warunki rozwijają się podobnie.

Porównanie współczynników przy α^i prowadzi do warunków brzegowych w i — tym przybliżeniu. W dalszym ciągu oznaczono poszczególne warunki odnoszące się do brzegu wewnętrznego literą „W”, zewnętrznego „Z”, a do granicy stref literą „g”.

Indeks „p” odnosi się do warunków równowagi naprężeń promieniowych, a indeks „o” obwodowych.

Cyfra w nawiasie oznacza szczebel przybliżenia.

Warunki brzegowe w zerowym przybliżeniu:

$$(3.5) \quad \begin{cases} W_p(0): 0 = \sigma_{r0I}|_{r=a_0}, \\ W_o(0): 0 = 0, \\ Z_p(0): 0 = \sigma_{r0II}|_{r=b_0}, \\ Z_o(0): 0 = 0, \\ g_p(0): 0 = \sigma_{r0I}|_{r=g_0} - \sigma_{r0II}|_{r=g_0}, \\ g_o(0): 0 = 0 \end{cases}$$

Warunki brzegowe w pierwszym przybliżeniu:

$$(3.6) \quad \begin{cases} W_p(1): 0 = -a_1 \sigma_{r0I}|_{r=a_0} - a_0 a_1 \frac{\partial \sigma_{r0I}}{\partial r} \Big|_{r=a_0} - a_0 \sigma_{r1I}|_{r=a_0}, \\ W_o(1): 0 = -a'_1 \sigma_{\theta 0I}|_{r=a_0} + a_0 \tau_{r\theta 1I}|_{r=a_0}, \\ Z_p(1): 0 = -b_1 \sigma_{r0II}|_{r=b_0} - b_0 b_1 \frac{\partial \sigma_{r0II}}{\partial r} \Big|_{r=b_0} - b_0 \sigma_{r1II}|_{r=b_0}, \\ Z_o(1): 0 = -b'_1 \sigma_{\theta 0II}|_{r=b_0} + b_0 \tau_{r\theta 1II}|_{r=b_0}, \\ g_p(1): 0 = \left[-g_1 (\sigma_{r0I} - \sigma_{r0II}) - g_0 g_1 \frac{\partial (\sigma_{r0I} - \sigma_{r0II})}{\partial r} - g_0 (\sigma_{r1I} - \sigma_{r1II}) \right] \Big|_{r=g_0}, \\ g_o(1): 0 = [-g'_1 (\sigma_{\theta 0I} - \sigma_{\theta 0II}) + g_0 (\tau_{r\theta 1I} - \tau_{r\theta 1II})] \Big|_{r=g_0}. \end{cases}$$

Warunki brzegowe w drugim przybliżeniu:

$$(3.7) \quad \begin{cases} W_p(2): 0 = \left[-a_2 \sigma_{r0I} - a_1^2 \frac{\partial \sigma_{r0I}}{\partial r} - a_0 a_2 \frac{\partial \sigma_{r0I}}{\partial r} - \frac{a_0 a_1^2}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{r0I}}{\partial r^2} - \right. \\ \left. - a_1 \sigma_{r1I} - a_0 a_1 \frac{\partial \sigma_{r1I}}{\partial r} - a_0 \sigma_{r2I} + a'_1 \tau_{r\theta 1I} \right] \Big|_{r=a_0}, \\ W_o(2): 0 = \left[-a'_2 \sigma_{\theta 0I} - a'_1 a_1 \frac{\partial \sigma_{\theta 0I}}{\partial r} - a'_1 \sigma_{\theta 1I} + \right. \\ \left. + a_0 a_1 \frac{\partial \tau_{r\theta 1I}}{\partial r} + a_1 \tau_{r\theta 1I} + a_0 \tau_{r\theta 2I} \right] \Big|_{r=a_0}, \\ Z_p(2): 0 = \left[-b_2 \sigma_{r0II} - b_1^2 \frac{\partial \sigma_{r0II}}{\partial r} - b_0 b_2 \frac{\partial \sigma_{r0II}}{\partial r} - \frac{b_0 b_1^2}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{r0II}}{\partial r^2} - \right. \\ \left. - b_1 \sigma_{r1II} - b_0 b_1 \frac{\partial \sigma_{r1II}}{\partial r} - b_0 \sigma_{r2II} + b'_1 \tau_{r\theta 1II} \right] \Big|_{r=b_0}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 Z_0(2): \quad 0 &= \left[-b'_2 \sigma_{\theta 0 \text{II}} - b'_1 b_1 \frac{\partial \sigma_{\theta 0 \text{II}}}{\partial r} - b'_1 \sigma_{\theta 1 \text{II}} + \right. \\
 &\quad \left. + b_0 b_1 \frac{\partial \tau_{r\theta 1 \text{II}}}{\partial r} + b_1 \tau_{r\theta 1 \text{II}} + b_0 \tau_{r\theta 2 \text{II}} \right]_{r=b_0}, \\
 g_r(2): \quad 0 &= \left[-g_2 (\sigma_{r 0 \text{I}} - \sigma_{r 0 \text{II}}) - g_1^2 \frac{\partial (\sigma_{r 0 \text{I}} - \sigma_{r 0 \text{II}})}{\partial r} - \right. \\
 &\quad - g_0 g_2 \frac{\partial (\sigma_{r 0 \text{I}} - \sigma_{r 0 \text{II}})}{\partial r} - \frac{g_0 g_1^2}{2} \frac{\partial^2 (\sigma_{r 0 \text{I}} - \sigma_{r 0 \text{II}})}{\partial r^2} - \\
 &\quad - g_1 (\sigma_{r 1 \text{I}} - \sigma_{r 1 \text{II}}) - g_0 g_1 \frac{\partial (\sigma_{r 1 \text{I}} - \sigma_{r 1 \text{II}})}{\partial r} - g_0 (\sigma_{r 2 \text{I}} - \sigma_{r 2 \text{II}}) + \\
 &\quad \left. + g'_1 (\tau_{r\theta 1 \text{I}} - \tau_{r\theta 1 \text{II}}) \right]_{r=g_0}, \\
 g_\theta(2): \quad 0 &= \left[-g'_2 (\sigma_{\theta 0 \text{I}} - \sigma_{\theta 0 \text{II}}) - g'_1 g_1 \frac{\partial (\sigma_{\theta 0 \text{I}} - \sigma_{\theta 0 \text{II}})}{\partial r} - \right. \\
 &\quad - g_1 (\sigma_{\theta 1 \text{I}} - \sigma_{\theta 1 \text{II}}) + g_0 g_1 \frac{\partial (\tau_{r\theta 1 \text{I}} - \tau_{r\theta 1 \text{II}})}{\partial r} + \\
 &\quad \left. + g_1 (\tau_{r\theta 1 \text{I}} - \tau_{r\theta 1 \text{II}}) + (\tau_{r\theta 2 \text{I}} - \tau_{r\theta 2 \text{II}}) g_0 \right]_{r=g_0}.
 \end{aligned}
 \tag{3.7. cd.}$$

W zerowym przybliżeniu składowe stanu naprężenia odpowiadają zginaniu pręta kołowego o wymiarach a_0 i b_0 momentu M_0 , w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Są to następujące funkcje promienia r :

— w strefie wewnętrznej (obwodowego ściskania)

$$\begin{cases}
 \sigma_{r 0 \text{I}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln \frac{r}{a_0}, \\
 \sigma_{\theta 0 \text{I}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left(\ln \frac{r}{a_0} + 1 \right) \\
 \tau_{r\theta 0 \text{I}} = 0.
 \end{cases}
 \tag{3.8}$$

— w strefie zewnętrznej (obwodowego rozciągania)

$$\begin{cases}
 \sigma_{r 0 \text{II}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln \frac{r}{b_0}, \\
 \sigma_{\theta 0 \text{II}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left(\ln \frac{r}{b_0} + 1 \right), \\
 \tau_{r\theta 0 \text{II}} = 0.
 \end{cases}
 \tag{3.9}$$

Funkcje te stanowią rozwiązanie układu równań (3.2) i (3.3) dla $i = 0$, przy założeniu kolejno $\sigma_{r 0 \text{I}} > \sigma_{\theta 0 \text{I}}$ i $\sigma_{r 0 \text{II}} < \sigma_{\theta 0 \text{II}}$, z wykorzystaniem pierwszego i trzeciego z warunków (3.5). Zerowe przybliżenie promienia rozgraniczającego strefy jest równe:

$$g_0 = \sqrt{a_0 b_0},
 \tag{3.10}$$

a moment, który powoduje całkowite uplastycznienie pręta wynosi:

$$(3.11) \quad M_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sigma_0 (b_0 - a_0)^2.$$

4. Rozwiązanie w kolejnych szczeblach przybliżenia

4.1. Przybliżenie pierwsze. Z warunku plastyczności (3.3) dla $i = 1$ wynika równość pierwszych poprawek naprężeń promieniowego i obwodowego w obu strefach. Dwa równania układu (3.2), dla $i = 1$, można sprowadzić do równania różniczkowego cząstkowego, drugiego rzędu na pierwszą poprawkę naprężenia stycznego $\tau_{r\theta 1}$. Przyjęcie:

$$(4.1) \quad \tau_{r\theta 1} = R(r) \cdot T(\vartheta),$$

prowadzi do rozdzielenia zmiennych, a tym samym do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, określających funkcje $R(r)$ i $T(\theta)$. Są to następujące równania:

$$(4.2) \quad r^2 R'' + 3rR' + \lambda^2 R = 0,$$

$$(4.3) \quad T'' + \lambda^2 T = 0,$$

Równanie (4.3) ma całkę ogólną dającą się przedstawić w postaci:

$$(4.4) \quad T = D \cdot \sin \lambda \vartheta.$$

Równanie (4.2) ma następujące całki ogólne:

— dla $\lambda \neq 1$

$$(4.5) \quad R = \frac{1}{r} \left[C_1 \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right],$$

— dla $\lambda = 1$,

$$(4.6) \quad R = \frac{1}{r} \left(C'_1 \ln \frac{r}{b_0} + C'_2 \right).$$

Wobec (4.4), (4.5) i (4.6), pierwszą poprawkę naprężenia stycznego określają wzory:

— dla $\lambda \neq 1$:

$$(4.7) \quad \tau_{r\theta 1} = \frac{1}{r} \left[A_1 \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + B_1 \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin \lambda \vartheta,$$

— dla $\lambda = 1$:

$$(4.8) \quad \tau_{r\theta 1} = \frac{1}{r} \left(A'_1 \ln \frac{r}{b_0} + B'_1 \right) \sin \vartheta.$$

Całkowanie równań równowagi dla pierwszego przybliżenia z uwzględnieniem kolejno (4.7) i (4.8), prowadzi do określenia pierwszych poprawek naprężeń obwodowego i promieniowego;

— dla $\lambda \neq 1$

$$(4.9) \quad \sigma_{r1} = \sigma_{\theta 1} = \frac{1}{r} \left[\left(A_1 - \sqrt{\lambda^2 - 1} B_1 \right) \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \\ \left. + (B_1 + \sqrt{\lambda^2 - 1} A_1) \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \frac{\cos \lambda \vartheta}{\lambda} + C_1,$$

— dla $\lambda = 1$

$$(4.10) \quad \sigma_{r1} = \sigma_{\theta 1} = \frac{1}{r} \left[A'_1 \left(\ln \frac{r}{b_0} + 1 \right) + B'_1 \right] \cos \vartheta + C'_1,$$

— gdzie stałe A'_1, B'_1, A_1, B_1 należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Są to $A'_{1I}, B'_{1I}, A'_{1II}, B'_{1II}$ — w strefie wewnętrznej $A'_{1II}, B'_{1II}, A_{1II}, B_{1II}$ — w strefie zewnętrznej; stałe C_1 i C'_1 są dowolnymi stałymi całkowania odpowiadającymi nałożeniu dodatkowego ciśnienia hydrostatycznego i w dalszym ciągu przyjęto: $C'_{1I} = C'_{1II} = C_{1I} = C_{1II} = 0$.

Dla wyznaczenia stałych całkowania należy w warunkach brzegowych uwzględnić uzyskane wyrażenia na pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia przy założeniu kolejno $\lambda \neq 1$ wzory (4.7) (4.9) oraz $\lambda = 1$ wzory (4.8) i (4.10).

Wyznaczenie z warunków $w_p(1), z_p(1)$ i $g_p(1)$ pierwszych poprawek promieni $a_1(\vartheta), b_1(\vartheta)$ i $g_1(\vartheta)$ i porównanie z wyrażeniami na $a'_1(\vartheta), b'_1(\vartheta)$ i $g'_1(\vartheta)$, uzyskanymi z warunków $w_o(1), z_o(1)$ i $g_o(1)$ prowadzi do układu równań na stałe całkowania.

Dla $\lambda \neq 1$, układ ten ma następującą postać

$$(4.11) \quad \begin{cases} \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[A_{1II} \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) - B_{1II} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) \right] = 0, \\ \sqrt{\lambda^2 - 1} A_{1II} = 0, \\ \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[(B_{1I} - B_{1II}) \sin \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{g_0}{b_0} \right] + (A_{1I} - A_{1II}) \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{g_0}{b_0} \right) = 0. \end{cases}$$

Uwzględnienie wzoru (3.10) i oznaczenie

$$(4.12) \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0}$$

upraszcza ten układ do następujących równań

$$(4.13) \quad \begin{cases} A_{1I} \cos \beta - B_{1I} \sin \beta = 0, \\ A_{1II} = 0, \\ (B_{1I} - B_{1II}) \sin \frac{\beta}{2} - A_{1I} \cos \frac{\beta}{2} = 0. \end{cases}$$

Układ ten ma następujące nietrywialne rozwiązania:

$$(4.14) \quad \begin{cases} \beta \neq n \frac{\pi}{2}, \\ A_{1I} = B_{1I} \operatorname{tg} \beta, \\ B_{1II} = B_{1I} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta \right). \end{cases}$$

$$(4.15) \quad \begin{cases} \beta = -(2n+1) \frac{\pi}{2}, \\ A_{1I} = B_{1II} (-1)^n, \\ B_{1I} = 0. \end{cases}$$

$$(4.16) \quad \begin{cases} \beta = -2n\pi, \\ A_{1I} = 0. \end{cases}$$

$$(4.17) \quad \begin{cases} \beta = -(2n+1)\pi, \\ B_{1I} = B_{1II} \stackrel{\text{ozn}}{=} B_1, \\ A_{1I} = 0, \end{cases}$$

gdzie $n = 0, 1, 2 \dots$

W dalszym ciągu opracowania omówione zostanie jedynie rozwiązanie (4.17), gdyż jak się okazało warunki brzegowe w drugim szczeblu przybliżenia sprowadzają rozwiązanie (4.14), (4.15), (4.16) bądź do rozwiązania (4.17) bądź do rozwiązania trywialnego $A_{1I} = B_{1I} = B_{1II} = 0$.

Pierwsze równanie z (4.17) określa podwójny ciąg stosunków wymiarów pręta:

$$(4.18) \quad \frac{a_0}{b_0} = e^{\frac{-(2n+1)\pi}{\sqrt{\lambda^2-1}}}.$$

Wykorzystując zależności (4.17) otrzymuje się z wzorów (4.7) i (4.9) wyrażenie na pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia

$$(4.19) \quad \begin{cases} \tau_{r\theta_{1I}} = \tau_{r\theta_{1II}} = \frac{B_1}{r} \cos\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \sin^2 \lambda\vartheta, \\ \sigma_{r_{1I}} = \sigma_{\theta_{1I}} = \sigma_{r_{1II}} = \sigma_{\theta_{1II}} = -\frac{B_1}{r\lambda} \left[\sqrt{\lambda^2-1} \sin\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) - \right. \\ \left. - \cos\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \right] \frac{\cos \lambda\vartheta}{\lambda}. \end{cases}$$

z warunków brzegowych pierwsze poprawki promieni jako następujące funkcje kąta ϑ :

$$(4.20) \quad \begin{cases} a_1(\vartheta) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} B_1 \frac{\cos \lambda\vartheta}{\lambda}, \\ b_1(\vartheta) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} B_1 \frac{\cos \lambda\vartheta}{\lambda}, \\ g_1(\vartheta) = 0. \end{cases}$$

Niewyznaczona stała B_1 spełnia rolę parametru, który zostanie włączony do parametru α .

Dla $\lambda = 1$, wykorzystanie warunków brzegowych prowadzi do zerowania stałych $A_{1I} = A_{1II} = 0$ (nie pojawia się problem wartości własnych). Pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia przyjmują postać:

— w strefie obwodowego ściskania

$$(4.21) \quad \begin{cases} \tau_{r\theta_{1I}} = \frac{B'_{1I}}{r} \cdot \sin \vartheta, \\ \sigma_{r_{1I}} = \sigma_{\theta_{1I}} = \frac{B'_{1I}}{r} \cos \vartheta, \end{cases}$$

— w strefie obwodowego rozciągania

$$(4.22) \quad \begin{cases} \tau_{r\theta_{1II}} = \frac{B'_{1II}}{r} \cdot \sin \vartheta, \\ \sigma_{r_{1II}} = \sigma_{\theta_{1II}} = \frac{B'_{1II}}{r} \cdot \cos \vartheta. \end{cases}$$

Pierwsze poprawki promieni wyrażają się następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$(4.23) \quad \begin{aligned} a_1(\vartheta) &= \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} B'_{1I} \cos \vartheta, \\ b_1(\vartheta) &= \frac{-\sqrt{3}}{2\sigma_0} B'_{1II} \cos \vartheta, \\ g_1(\vartheta) &= \frac{\sqrt{3}}{4\sigma_0} (B'_{1I} - B'_{1II}) \cos \vartheta \end{aligned}$$

Należy zauważyć że wzory (4.21) i (4.22) można uzyskać z wzorów (4.19) przez podstawienie $\lambda = 1$ oraz kolejno $B_I = B'_{1I}$ lub $B_{II} = B'_{1II}$. Można zatem traktować wzory (4.19) za obowiązujące dla $\lambda = 1, 2, 3$ z dokładnością do stałej.

4.2. Przybliżenie drugie. Warunek plastyczności (3.3), dla $i = 2$ daje zależność:

$$(4.24) \quad \sigma_{r_2} - \sigma_{\theta_2} = \frac{-2\tau_{r\theta_2}}{\sigma_{r_0} - \sigma_{\theta_0}}.$$

Różnica zerowych przybliżeń naprężeń promieniowego i obwodowego jest z dokładnością do znaku, jednakowa w obu strefach. Ogólnie, warunek plastyczności (4.24) można więc zapisać wzorem:

$$(4.25) \quad \sigma_{r_2} - \sigma_{\theta_2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} \cdot \frac{B_1^2}{r^2} \cdot \cos^2 \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \sin^2 \lambda \vartheta,$$

— gdzie znak górny odnosi się do strefy obwodowego ściskania a dolny do strefy obwodowego rozciągania.

Równania równowagi, dla $i = 2$ po uwzględnieniu (4.25) można sprowadzić do jednego równania cząstkowego, drugiego rzędu, niejednorodnego, określającego drugą poprawkę naprężenia stycznego $\tau_{r\theta_2}$:

$$(4.26) \quad r^2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_2}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_2}}{\partial \vartheta^2} + 3r \frac{\partial \tau_{r\theta_2}}{\partial r} = \pm \frac{B_1}{\lambda r^2} \left[1 + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \\ \left. + 2\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin 2\lambda \vartheta.$$

Takie samo równanie z dokładnością do znaku prawej strony otrzymano w pracy [3] (wzór 3.26). Zatem jego rozwiązanie ze znakiem „-” przy stałej B_1 dla strefy obwodowego ściskania, a ze znakiem „+” dla strefy obwodowego rozciągania stanowią wzory (3.29), (3.30) i (3.31) pracy [3].

Stałe A_2 i B_2 należy wyznaczyć z warunków brzegowych w drugim przybliżeniu dla $\lambda \neq 1$ jako $A_{2I}, B_{2I}, A_{2II}, B_{2II}$; dla $\lambda = 1$ jako $A'_{2I}, B'_{2I}, A'_{2II}, B'_{2II}$.

Dla $\lambda \neq 1$ wykorzystanie warunków brzegowych $w_p(2), z_p(2), g_p(2), w_o(2), z_o(2), g_o(2)$ prowadzi do wniosku, że dla ustalonego wzorem (4.18) stosunku promieni $\frac{a_0}{b_0}$ stałe całkowania

$$(4.27) \quad A_{2I} = B_{2I} = A_{2II} = B_{2II} = 0.$$

5. Zestawienie końcowych wzorów i przykłady liczbowe.

Wykorzystując wzory (3.1) oraz wyniki uzyskane na poszczególnych szczeblach przybliżenia można wyrazić końcowe wzory określające promienie kształtowanego pręta oraz składowe stanu naprężenia.

Analiza problemu doprowadziła do dwóch jakościowo różnych rozwiązań dla $\lambda \neq 1$, co odpowiada całkowitemu uplastycznieniu pręta o ustalonym stosunku niezaburzonych promieni (wzór (4.18)), oraz dla $\lambda = 1$, co odpowiada całkowitemu uplastycznieniu pręta o dowolnych stosunkach $\frac{a_0}{b_0}$.

Dla $\lambda \neq 1$ funkcje określające promienie kształtowanego pręta z dokładnością do drugiego przybliżenia mają postać:

$$(5.1) \quad \begin{cases} a(\vartheta) = a_0 - \bar{\alpha} \frac{\cos \gamma \vartheta}{\lambda} - \frac{\bar{\alpha}^2}{2a_0} \sin^2 \lambda \vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) = b_0 - \bar{\alpha} \frac{\cos \lambda \vartheta}{\lambda} - \frac{\bar{\alpha}^2}{2b_0} \sin^2 \lambda \vartheta + \dots, \\ g(\vartheta) = g_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{2g_0} \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda^2} \cos 2\lambda \vartheta + \dots, \end{cases}$$

— gdzie $\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \cdot B_1 \cdot \alpha$ jest nowym parametrem charakteryzującym niekołowość pręta.

Składowe stanu naprężenia z dokładnością do drugiego przybliżenia określone są następującymi funkcjami kąta ϑ i promienia r :

— w strefie obwodowego ściskania (wewnętrznej):

$$(5.2) \quad \begin{cases} \sigma_{r1} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r}{a_0} + \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \cos \lambda \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda^2 r^2} \left\{ (2\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - (3\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - 2\lambda^2 \right\} \cos 2\lambda \vartheta + \right. \\ \left. + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \lambda^2 \right\} + \dots \Big], \\ \sigma_{\theta 1} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r}{a_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \right] \cos \lambda \vartheta + \\ + \frac{\bar{\alpha}}{4\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \cos 2\lambda \vartheta - \right. \\ \left. - \left[\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \right. \end{cases}$$

$$(5.2) \quad \left. \begin{aligned} & + (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] + \dots \Bigg], \\ \tau_{r\theta I} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \sin \lambda\vartheta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda r^2} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + 1 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin 2\lambda\vartheta + \dots \right] \right]. \end{aligned} \right\} \text{[cd.]}$$

W strefie obwodowego rozciągania (zewnątrznej):

$$(5.3) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{rII} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\left[\ln \frac{b_0}{r} + \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \cos \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right] \right] \cos \lambda\vartheta - \right. \\ & - \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (3\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - 2\lambda^2 \right] \cos 2\lambda\vartheta + \right. \\ & \left. \left. + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - (\lambda^2 - 1) \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \lambda^2 \right\} + \dots \right], \\ \sigma_{\theta II} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\left[\ln \frac{r}{b_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \right] \cos \lambda\vartheta + \right. \\ & + \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \cos 2\lambda\vartheta - \right. \\ & \left. \left. - \lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right\} + \dots \right], \\ \tau_{r\theta II} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \sin \lambda\vartheta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda r^2} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + 1 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin 2\lambda\vartheta + \dots \right] \right]. \end{aligned} \right\}$$

Wyniki otrzymane w strefie zewnętrznej, pokrywają się z wynikami otrzymanymi w pracy [3], w której kształtowano niekołowe cylindry grubościenne poddane działaniu ciśnienia, z tym że zniszczeniu w sensie przyjętego kryterium mogą ulec dodatkowo cylindry niekołowe o stosunku:

$$\frac{a_0}{b_0} = e^{\frac{-2n\pi}{\sqrt{\lambda^2-1}}}.$$

Dla $\lambda = 1$ funkcje określające kształt pręta z dokładnością do drugiego przybliżenia mają postać:

$$(5.4) \quad \begin{cases} a(\vartheta) = a_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2}{2a_0} \cdot \cos 2\vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) = b_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2b_0} \cdot \sin^2 \vartheta + \dots, \\ g(\vartheta) = g_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2g_0} \cdot \sin^2 \vartheta + \dots \end{cases}$$

Składowe stanu naprężenia z dokładnością do drugiego przybliżenia określone są następującymi funkcjami kąta ϑ i promienia r :

— w strefie wewnętrznej:

$$(5.5) \quad \begin{cases} \sigma_{rI} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r}{a_0} + \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} (1 - 2\cos 2\vartheta) + \dots \right], \\ \sigma_{\vartheta I} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r}{a_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} + \dots \right], \\ \tau_{r\vartheta I} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \sin \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} \cdot \sin 2\vartheta + \dots \right], \end{cases}$$

— w strefie zewnętrznej

$$(5.6) \quad \begin{cases} \sigma_{rII} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r_0}{b_0} - \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} (1 - 2\cos 2\vartheta) + \dots \right], \\ \sigma_{\vartheta II} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r}{b_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} + \dots \right], \\ \tau_{r\vartheta II} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \sin \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} \sin 2\vartheta + \dots \right]. \end{cases}$$

Przyjęcie konkretnych wartości liczbowych za $\bar{\alpha}$, b_0 , λ i a_0 (poprzez n dla $\lambda \neq 1$) określa jednoznacznie poszukiwany kształt pręta, który ulegnie całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia, jak również naprężenia w każdym jego punkcie. Siły zewnętrzne odpowiadające tak przyjętym danym, należy wyznaczyć z warunków równowagi w końcowych przekrojach pręta określonych kątami $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (rys. 1). Mianowicie w przekroju określonym kątem $\vartheta = 0$:

$$(5.7) \quad \begin{cases} T(0) = \int_{a(0)}^{g(0)} \tau_{r\theta I}(0) dr + \int_{g(0)}^{b(0)} \tau_{r\theta II}(0) dr, \\ N(0) = \int_{a(0)}^{g(0)} \sigma_{\theta I}(0) dr + \int_{g(0)}^{b(0)} \sigma_{\theta II}(0) dr, \\ M(0) = \int_{a(0)}^{g(0)} \sigma_{\theta I}(0) r dr + \int_{g(0)}^{b(0)} \sigma_{\theta II}(0) r dr - \frac{a(0)+b(0)}{2} N(0), \end{cases}$$

oraz w przekroju $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

$$(5.8) \quad \begin{cases} T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{a\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \tau_{r\theta I}\left(\frac{\pi}{2}\right) dr + \int_{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{b\left(\frac{\pi}{2}\right)} \tau_{r\theta II}\left(\frac{\pi}{2}\right) dr, \\ N\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{a\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sigma_{\theta I}\left(\frac{\pi}{2}\right) dr + \int_{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{b\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sigma_{\theta II}\left(\frac{\pi}{2}\right) dr, \\ M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{a\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sigma_{\theta I}\left(\frac{\pi}{2}\right) r dr + \int_{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{b\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sigma_{\theta II}\left(\frac{\pi}{2}\right) r dr - \frac{a\left(\frac{\pi}{2}\right)+h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} N\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Ograniczymy się poniżej do λ całkowitych. Dla parzystych $\lambda = 2k$, wobec zerowania się naprężeń stycznych w przekrojach $\vartheta = 0$; $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, problem sprowadza się do poszukiwania niekołowych kształtów pręta obciążonego jedynie momentem M_0 (wzór (3.11)).

Dla nieparzystych $\lambda = 2k+1$, naprężenia styczne zerują się tylko na brzegu $\vartheta = 0$. Scałkowanie naprężeń $\tau_{r\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ daje wzór na siłę styczną:

— dla $\lambda \neq 1$

$$(5.9) \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\alpha}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}}{\sqrt{\lambda^2-1}} \left\{ \sin\left[\sqrt{\lambda^2-1} \ln\left(b_0 - \frac{\alpha^2}{2b_0}\right)\right] - \sin\left[\sqrt{\lambda^2-1} \ln\left(a_0 - \frac{\alpha^2}{2a_0}\right)\right] \right\}.$$

Rozwijając wyrażenie (5.9) w szereg parametrów $\bar{\alpha}$, otrzymujemy

$$(5.10) \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \bar{\alpha}}{\sqrt{\lambda^2-1}} \sin(\sqrt{\lambda^2-1} \ln b_0) - \frac{\sigma_0(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \alpha^3}{\sqrt{3} a_0^2 b_0^2} (a_0^2 + b_0^2) \cos(\sqrt{\lambda^2-1} \ln b_0) + \dots$$

— dla $\lambda = 1$

$$(5.11) \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \bar{\alpha} \ln \left[\frac{\left(a_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{2a_0}\right) \left(b_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{2b_0}\right)}{\left(g_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{2b_0}\right)^2} \right].$$

Po rozwinięciu wyrażenia (5.11) w szereg parametru $\bar{\alpha}$, otrzymujemy:

$$(5.12) \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{(2a_0g_0 - a_0^2 - b_0^2)}{a_0^2 b_0^2} \bar{\alpha}^3 + \dots$$

Warunki równowagi pręta wymagają:

$$(5.13) \quad \begin{cases} N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ N(0) = T\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ M\left(\frac{\pi}{2}\right) = M(0) + \frac{a(0)+b(0)}{2} \cdot N(0). \end{cases}$$

Na rysunkach 2, 3, 4 podano przykładowo znalezione niekołowe kształty pręta oraz rozkład naprężeń w kilku-przekrojach przy przyjęciu różnych danych liczbowych.

6. Analiza problemu w warunkach płaskiego stanu naprężenia

Założenie płaskiego stanu naprężenia pociąga za sobą konieczność skorzystania z warunku Tresci-Guesta, gdyż warunek H—M—H nie daje na szczeblu zerowym rozwiązania ścisłego. W strefie obwodowego ściskania warunek przedstawia się wzorem:

$$(6.1) \quad \sigma_0 = -\frac{\sigma_{r1} + \sigma_{\theta1}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{r1} - \sigma_{\theta1})^2 + 4\tau_{r\theta1}^2},$$

a w strefie obwodowego rozciągania wzorem

$$(6.2) \quad \sigma_0 = \sqrt{(\sigma_{rII} - \sigma_{\theta II})^2 + 4\tau_{r\theta II}^2},$$

identycznym z dokładnością do czynnika $\frac{4}{3}$ z wzorem (2.2). Równania równowagi wewnętrznej (2.1), warunki brzegowe (2.3), (2.4), (2.5), a tym samym ich rozwinięcia (3.4) pozostają obowiązujące.

W pierwszym stopniu przybliżenie przy założeniu $\lambda = 1, 2, 3 \dots$ całkowanie równań podstawowych z wykorzystaniem warunków brzegowych prowadzi do następujących wzorów na pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia i promieni $a_1(\vartheta)$ i $b_1(\vartheta)$

— w strefie obwodowego ściskania:

$$(6.3) \quad \begin{cases} \sigma_{r_{II}} = \frac{C_1}{r^2} \cos \vartheta, \\ \sigma_{\vartheta_{II}} = 0, \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \begin{cases} a_1(\vartheta) = \frac{C_1}{a_0 \sigma_0} \cos \vartheta, \\ b_1(\vartheta) = -\frac{B_1}{\sigma_0} \frac{\cos \lambda \vartheta}{\lambda}. \end{cases}$$

Warunki brzegowe w drugim szczeblu przybliżenia mogą być spełnione jedynie dla $\lambda = 1$ z czego wniosek, że nie można spowodować całkowitego uplastycznienia pręta którego promień wewnętrzny zmienia się w funkcji kąta ϑ a zewnętrzny w funkcji wielokrotności tego kąta. Warunki te określają również związek między stałymi całkowania w obu strefach

$$C_1 = -B_1 a_0.$$

Wykorzystując wyniki uzyskane na poszczególnych szczeblach przybliżenia można wyrazić wzory określające promienie kształtowanego pręta, z dokładnością do drugiego przybliżenia w postaci funkcji kąta ϑ :

$$(6.5) \quad \begin{cases} a(\vartheta) = a_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \bar{\alpha}^2 \frac{1}{2b_0} \sin^2 \vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) = b_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \bar{\alpha}^2 \frac{1}{2b_0} \sin^2 \vartheta + \dots, \\ g(\vartheta) = g_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \bar{\alpha}^2 \frac{1}{2g_0} \sin^2 \vartheta + \dots, \end{cases}$$

— gdzie $\bar{\alpha} = \frac{B'_1}{\sigma_0} \alpha$

Składowe stanu naprężenia określone są następującymi funkcjami kąta ϑ i promienia r :

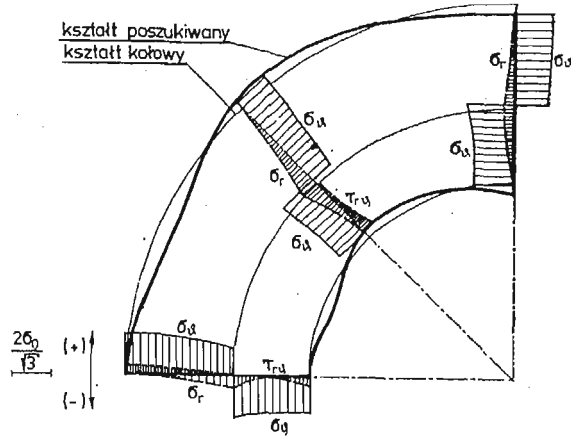
— w strefie wewnętrznej:

$$(6.6) \quad \begin{cases} \sigma_{r_I} = -\sigma_0 \left[1 - \frac{a_0}{r} + \frac{\bar{\alpha} a_0}{r^2} \cos \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2 a_0}{2r^3} (3 \sin^2 \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta) + \dots \right], \\ \sigma_{\vartheta_I} = -\sigma_0 \left[1 - \frac{\bar{\alpha}^2 a_0}{r^3} \sin^2 \vartheta + \dots \right], \\ \tau_{r\vartheta_I} = -\sigma_0 \left[\frac{\bar{\alpha} a_0}{r^2} \sin \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2 a_0}{r^3} \sin 2\vartheta + \dots \right], \end{cases}$$

— w strefie zewnętrznej:

$$(6.7) \quad \begin{cases} \sigma_{r_{II}} = -\sigma_0 \left[\ln \frac{b_0}{r} - \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} (2 \cos 2\vartheta - 1) + \dots \right], \\ \sigma_{\vartheta_{II}} = -\sigma_0 \left[\ln \frac{r}{b_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} + \dots \right], \\ \tau_{r\vartheta_{II}} = \sigma_0 \left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \sin \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} \sin 2\vartheta + \dots \right]. \end{cases}$$

Rys. 5 podaje przykładowo kształt pręta i rozkład naprężeń znaleziony w oparciu o powyższe wzory przy następujących danych liczbowych $\lambda = 1$, $a_0 = 0,4503$, $b_0 = 1$, $\bar{\alpha} = 0,06$.



Rys. 5

Literatura cytowana w tekście

1. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Bounds on minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 3, 15 (1957), 269-281.
2. M. GALOS, *Plastyczne skęćanie niejednorodnych prętów o zmiennej średnicy*, Rozprawy Inżynierskie, 1, 9 (1971), 89—113.
3. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Kształtowanie niekołowych cylindrów grubościennych wykazujących pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Rozprawy Inżynierskie 3, 18 (1970), 371—390.
4. Z. KORDAS, *Problematyka działania kształtów ciał wykazujących całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, 15, 7 (1977).
5. A. ZAVELANI-ROSSI, *Minimum — weight design for twodimensional bodies*, Meccanica 4, (1968-1969), 1-8.

Резюме

ФОРМЫ СТЕРЖНЕЙ СИЛЬНО ИСКРЯВЛЕННЫХ ПОДВЕРГНУТЫХ ИЗГИБУ С РАСТЯЖЕНИЕМ И СДВИГОМ В СТАДИИ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ РАЗРУШЕНИИ

В представленной работе автор ищет форм стержня подвергнутого изгибу с растяжением и сдвигом, которые в предельном состоянии полностью разрушаются.

В связи с применением метода малого параметра автор ищет форм стержня, отличающихся от круга (четыре круга). В сформированном стержне можно выделить две зоны: зону сжатия по периметру и зону периметрического растяжения, в каждой из которых напряжения характеризуют σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ согласно условиям внутреннего равновесия и условию пластичности. Таким образом достигаются две группы решений. Одна из них соответствует установленным условиям не искаженных радиусов четверти круга, вторая группа является решением для произвольных условий.

Решенная проблема дополняет и расширяет возможности решения ряда проблем представленных в работе [4].

Summary

THE SHAPES OF THICK CURVED BARS SUBJECTED TO BENDING, TENSION AND SHEAR
SHOWING COMPLETE YIELD AT THE ETAGE OF COLLAPSE

In the paper we investigate the shapes of bars subjected to bending, tension and shear, satisfying the yield condition at all points at the stage of collapse.

Applying the small parameter method the shapes different from circular (a quarter of a ring) are investigated. In the designed bar we can observe two zones: a zone of circumferential compression and a zone of circumferential tension. In each of them the stress state is determined by three components σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, satisfying the internal equilibrium conditions and the yield condition. Two types of solutions are obtained: the first, corresponding to given ratios of undisturbed radii of a ring quarter, and the second corresponding to arbitrary ratios.

The solved problem completes and broadens variety of analyzed in [4].

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 stycznia 1979 roku

POWŁOKI PROSTOKREŚLNE OPARTE NA OKRĘGU PRACUJĄCE W STANIE ZGIĘCIOWYM

STANISŁAW BIELAK, ANDRZEJ DUDA (OPOLE)

1. Wstęp

W pracy przedstawiono rozwiązanie powłok prostokreślnych opartych na okręgu pracujących w zgięciowym stanie naprężenia. Przyjęty model matematyczny, opisujący stan naprężenia w powłoce, oparto na liniowej teorii izotropowych jednorodnych powłok sprężystych. W pracy rozpatruje się tylko powłoki cienkie, tj. takie, w których odległości pomiędzy powierzchniami granicznymi są wielokrotnie mniejsze od wymiarów i promieni krzywizn tych powierzchni.

Obecne rozwiązania stosowane w praktyce dla powłok hiperboloidalnych (chłodnie kominowe) bazują w zasadzie na pracy w stanie błonowym. Natomiast próby rozwiązania stanu zgięciowego za pomocą innych metod nie uwzględniają rzeczywistych warunków brzegowych, co prowadzi do znacznych odchyień w porównaniu ze stanem rzeczywistym.

Największe odchylenia uwiadcniają się w przemieszczeniach. W prezentowanej pracy rozwiązanie stanu zgięciowego bazuje na szeregach hipertrygonometrycznych pozwalających uwzględniać dowolny sposób obciążenia i podparcia.

Wprowadzona parametryzacja opisuje wspólnym równaniem wektorowym hiperboloidę jednowłokową, stożek i walec a to pozwoliło na podanie algorytmu rozwiązującego trzy typy powłok. Takie ujęcie umożliwi obliczanie tych powłok na EMC za pomocą jednego programu.

Rozwiązanie ogólne układu równań oparto na pracach [1, 2] i polega ono na wprowadzeniu dwóch wymuszonych stanów, błonowego i zgięciowego sprowadzającego odpowiednie układy do kwadratur. Postępowanie takie dało w rozwiązaniu uogólnione siły przekrojowe napięcia i momenty, które są sumami złożonymi z wpływów pracy błonowej i zgięciowej. Podane rozwiązania ogólne zawierają dowolne funkcje niewiadome, zależne od sposobu zamocowania powłoki.

Funkcje te mogą być wyznaczone z warunków brzegowych, ponieważ rozwiązanie zawiera szeregi trygonometryczne pozwalające uwzględnić dowolny sposób podparcia.

2. Ogólny układ równań

2.1. Opis geometryczny. Równanie wektorowe powierzchni środkowej powłok prostokreślnych opartych na okręgu opisuje wzór:

$$(2.1) \quad \vec{r} = a_1(\cos u^2 \vec{i} + \sin u^2 \vec{j}) + u^1 [\cos(u^2 + \alpha) \vec{i} + \sin(u^2 + \alpha) \vec{j}] \times \cos \beta + u^1 \sin \beta \vec{k}.$$

Zmienne niezależne u^1, u^2 są współzależnymi krzywoliniowymi na powierzchni (rys. 1), przy czym u^1 określa położenie punktu na tworzącej, u^2 wskazuje tworzącą, na której leży punkt.

Zmienna u^1 należy do przedziału $0 \leq u^1 \leq l$, gdzie l jest długością tworzącej, natomiast u^2 jest zawarta w przedziale $0 \leq u^2 \leq 2\pi$.

Kąt α jest zawarty między rzutem tworzącym na płaszczyznę xy , a promieniem podstawy a_1 . Nachylenie tworzącej do płaszczyzny xy określa kąt β .

Jeżeli w równaniu (2.1) przyjmiemy $\alpha = 0$ i $\beta = \pi/2$ otrzymamy walec, $\alpha = 0$ i $\beta \neq \pi/2$ stożek, $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq \pi/2$ hiperboloidę jednopowłokową.

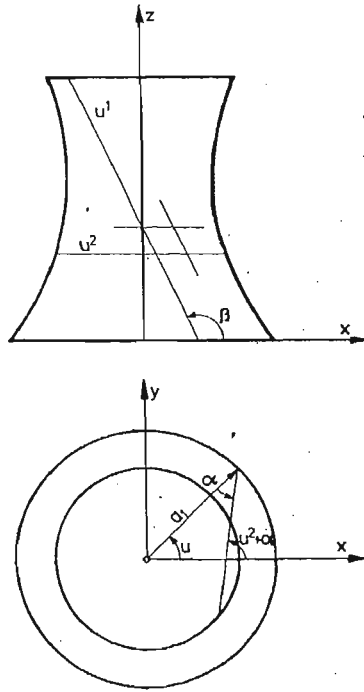
Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej, ich wyróżniki oraz krzywizny — gaussovska i średnia wynoszą [1];

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 1, \\
 g_{12} &= g_{21} = a_1 \sin \alpha \cos \beta, \\
 g_{22} &= (u^1)^2 \cos^2 \beta + 2u^1 a_1 \cos \alpha \cos \beta + a_1^2, \\
 g &= (u^1)^2 \cos^2 \beta + 2u^1 a_1 \cos \alpha \cos \beta + a_1^2 (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta), \\
 b_{11} &= 0, \\
 b_{12} &= b_{21} = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{12} \sin \beta, \\
 b_{22} &= \frac{1}{\sqrt{g}} g_{22} \sin \beta, \\
 b &= -\frac{1}{g} (g_{12} \sin \beta)^2, \\
 K &= -\left(\frac{1}{g} g_{12} \sin \beta\right)^2, \\
 H &= \frac{g - g_{12}^2}{2g \sqrt{g}} \sin \beta,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= 0, \\
 \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{g_{12}}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^1}, \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{g_{12}} \Gamma_{12}^1, \\
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{g_{22}}{g_{12}} \Gamma_{12}^1, \\
 \Gamma_{22}^2 &= -\Gamma_{12}^1.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

2.2. Związki geometryczne powłoki. Związek składowych przemieszczenia ze składowymi tensora odkształcenia błonowego przyjmuje postać:



Rys. 1

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad & W_{,1}^1 + g_{12} W_{,1}^2 = \gamma_{11}, \\
 & g W_{,1}^2 - 2b_{12} W^3 = 2\gamma_{12} - g_{12}\gamma_{11}, \\
 & \frac{1}{2} g_{,1} W^1 - b_{22} W^3 = \gamma_{22}.
 \end{aligned}$$

Przecinek użyty w wyrażeniach (2.4) oznacza odpowiednią pochodną względem zmiennej u^1 .

2.3. Związki fizyczne. Związki fizyczne wiążące naprężenia z odkształceniami dla wersji uproszczonej mają postać:

$$(2.5) \quad N^{ij} = \bar{N}^{ij} + 6H\hat{M}^{ij}, \quad M^{ij} = \hat{M}^{ij} + \xi h^2 H \bar{N}^{ij},$$

gdzie: ξ oznacza parametr stały, a \bar{N}^{ij} i \hat{M}^{ij} są związkami:

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad \bar{N}^{ij} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\gamma^{ij} + \nu g^{ij}A], \\
 \hat{M}^{ij} &= \frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)\varrho^{ij} + \nu g^{ij}B].
 \end{aligned}$$

Niezmienniki A i B występujące w (2.6) są sumami:

$$(2.7) \quad A = g^{ij}\gamma_{ij}, \quad B = g^{ij}\varrho_{ij},$$

przy czym tensor odkształcenia błonowo — zgięciowego ϱ_{ij} można zastąpić zależnością:

$$(2.8) \quad \varrho_{ij} = \frac{1}{2} W^3|_{ij}.$$

Użyta w (2.8) kreska pionowa oznacza pochodną kowariantną. Związki (2.6) napiszemy w innym ujęciu, dostosowanym do bezpośredniego wykorzystania. Z pierwszego wyrażenia (2.6) wyznaczamy składowe tensora błonowego γ_{ij} :

$$(2.9) \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)g_{ii}g_{jk} - \gamma g_{ij}g_{ik}\bar{N}^{jk}].$$

Wielkości \hat{M}^{ij} opisane drugim wyrażeniem (2.6) po podstawieniu (2.8) przyjmą postać:

$$(2.10) \quad M^{ij} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)^2} [(1-\nu)g^{ii}g^{jk}W^3|_{ik} + \gamma g^{ij}W].$$

Składowe tensora sił tnących Q^i napiszemy w oparciu o pracę [1]:

$$(2.11) \quad Q^j = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)^2} g^{ij}W|_i.$$

Niezmiennik W występujący w (2.10) i (2.11) jest sumą:

$$(2.12) \quad W = g^{ij}W^3|_{ij}.$$

Przejdźcie do współrzędnych fizycznych, odniesionych do bazy jednostkowej dokonujemy za pomocą wzorów:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} N_{ij}^{\bar{}} &= \sqrt{\frac{g_{ij}}{g^{ij}}} N^{ij}, & Q_i^{\bar{}} &= \sqrt{\frac{1}{g^{ii}}} Q^i, \\ M_{ij}^{\bar{}} &= -\sqrt{\frac{gg^{11}}{g^{ii}}} M^{i2}, & M_{i2}^{\bar{}} &= \sqrt{\frac{gg^{22}}{g^{ii}}} M^{i1}, \\ W_i^{\bar{}} &= \sqrt{g_{ii}} W^i, & W_3^{\bar{}} &= W^3, \\ P_i^{\bar{}} &= \sqrt{g_{ii}} P^i, & P_3 &= P^3, \end{aligned}$$

(po ij nie sumować).

Symbol „ $\bar{\quad}$ ” oznacza współrzędną fizyczną.

3. Rozwiązanie równania różniczkowego powłok prostokreślnych opartych na okręgu

Równanie różniczkowe rozwiązujące dowolne powłoki prostokreślne dowolnie obciążone i podparte posiada kształt — patrz praca [1]:

$$(3.1) \quad g^{ij}g^{kl}g^{mn}g^{rs}\bar{N}^{22}|_{rmnklij} + \frac{\bar{\beta}^4}{g} K^2 \bar{b}^{ij}\bar{b}^{kl}\bar{N}^{22}|_{klij} = -R,$$

gdzie:

$$R = g^{ij}g^{kl}g^{mn}R^1|_{mknlij} + \frac{\bar{\beta}^4}{g} K \bar{b}^{ij}[R^2 + \frac{1}{3}P^3|_{11}]|_{ij} + \frac{1+\nu}{g} g^{ij}g^{lk}P^r|_{rkiij11},$$

oraz

$$\begin{aligned}
 R^1 &= g^{2r} P^2|_r - \frac{g_{1r}}{g} P^r|_1, \\
 R^2 &= K \bar{b}^{2r} P^2|_r - \frac{b_{1r}}{g} P^r|_1, \\
 K \bar{b}^{ij} &= 2H g^{ij} - b^{ij}, \\
 \bar{\beta}^4 &= \frac{3(1-\gamma^2)}{h^2} g.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Rozwiązanie równania (3.1) można przedstawić jako sumę:

$$\bar{N}^{22} = \bar{N}_o^{22} + \bar{N}_s^{22}
 \tag{3.3}$$

złożoną z całki \bar{N}_o^{22} , nazwanej całką ogólną i całki \bar{N}_s^{22} nazwanej całką szczególną.

Całka szczególna \bar{N}_s^{22} jest rozwiązaniem stanu bezmomentowego i może być wyznaczona przez całkowanie bezpośrednie.

Całka ogólna \bar{N}_o^{22} rozwiązująca stan zgięciowy, może być przedstawiona jako suma odpowiednio dobranego szeregu hipertrygonometrycznego, zapisanego w ujęciu tensorowym. Zapis tensorowy będzie szczególnie korzystny dla przeprowadzenia wszystkich operacji matematycznych związanych z obliczeniami.

Wprowadźmy następujące wielkości mające charakter tensorowy ze względu na sumowanie.

Argumenty funkcji trygonometrycznych hiperbolicznej:

$$Z_H^k = \bar{\beta} m_H^k u^i,
 \tag{3.4}$$

kołowej:

$$Z_k^l = \bar{\beta} n^l u^j.
 \tag{3.5}$$

Funkcje trygonometryczne

Hiperboliczne:

$$H^i = \begin{cases} \text{sh} & \text{dla } i = 1, \\ \text{ch} & \text{dla } i = 2, \end{cases}
 \tag{3.6}$$

pochodna funkcji H^i :

$$\bar{H}^i = \begin{cases} \text{ch} & \text{dla } i = 1, \\ \text{sh} & \text{dla } i = 2, \end{cases}
 \tag{3.6'}$$

kołowe:

$$K^j = \begin{cases} \sin & \text{dla } j = 1, \\ \cos & \text{dla } j = 2, \end{cases}
 \tag{3.7}$$

pochodna funkcji K^j :

$$\bar{K}^j = \begin{cases} \cos & \text{dla } j = 1, \\ \sin & \text{dla } j = 2, \end{cases}
 \tag{3.7'}$$

Wielkości trygonometryczne

hiperboliczne:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} A_{mn}^{ik} &= H^i Z_H^k, \\ \bar{A}_{mn}^{ik} &= \bar{H}^i \bar{Z}_H^k, \end{aligned}$$

kołowe

$$(3.9) \quad \begin{aligned} B_{mn}^{il} &= K^l Z_k^i, \\ \bar{B}_{mn}^{il} &= \bar{K}^l \bar{Z}_k^i, \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu tych wielkości całce ogólnej $N_o^{2,2}$ można nadać kształt:

$$(3.10) \quad \bar{N}_o^{2,2} = \sum_{m,n=1} C_{rklj}^{mn} A_{mn}^{ik} B_{mn}^{il}$$

Wskaźniki i, j, k, l mają charakter tensorowy i przyjmują wartości 1, 2, natomiast m, n są liczbami naturalnymi. Wielkości C_{rklj}^{mn} wyznacza się z warunków brzegowych.

W wyrażeniu (3.10) nie znamy wielkości m_i^k, n_j^l . Możemy je wyznaczyć rozwiązując równanie algebraiczne ósmego stopnia, uzyskane ze spełnienia tożsamościowego równania (3.1), które przyjmuje postać:

$$(3.11) \quad g^{ij} g^{kl} g^{mn} g^{rs} \bar{N}_o^{2,2} |_{rsmnklj} + \frac{\bar{\beta}^4}{g} K^2 \bar{b}^{ij} \bar{b}^{kl} \bar{N}_o^{2,2} |_{klj} = 0.$$

Po wykonaniu działań polegających na różniczkowaniu szeregów otrzymamy następujący układ równań:

$$\bar{\beta}^8 [(D^2 - E^2)^2 - 4D^2 E^2 + \kappa^2 g (D_1^2 - E_1^2)] = 0,$$

Równanie różniczkowe (3, 11) jest równaniem o pochodnych kowariantnych (oznaczonych pionową kreską „|”) ze zmiennymi współczynnikami zależnymi tylko od współczynników pierwszej formy różniczkowej g_{ij} . Również poszukiwane wielkości m_i^k, n_j^l będą funkcjami współczynników g_{ij} . Dzięki temu w procesie różniczkowania kowariantnego będą się one zachowywały tak jak wielkości stałe. Zilustrujemy to prostym przykładem rozwiązania następującego równania różniczkowego, o pochodnych kowariantnych:

$$g^{ij} N |_{ij} + \alpha N = 0,$$

gdzie α jest funkcją g_{ij} .

Przyjmując rozwiązanie ilustrujące postaci

$$N = \sin n_i u^i,$$

w którym n_i będą funkcjami współczynników pierwszej formy różniczkowej g_{ij} , otrzymamy po zróżniczkowaniu kowariantnym i spełnieniu równania wyjściowego następujące równanie:

$$[g^{ij} n_i n_j - \alpha] N = 0,$$

dadzące algebraiczne równanie rozwiązujące postaci

$$g^{ij} n_i n_j - \alpha = 0.$$

Uwaga: Rozwijając funkcję $\sin n_i u^i$ w szereg otrzymamy:

$$N = \sin n_i u^i = n_i u^i - \frac{(n_i u^i)^3}{3!} + \frac{(n_i u^i)^5}{5!} - \dots$$

Po zróżniczkowaniu kowariantnym względem zmiennej u^k będzie

$$N|_k = n_k \left[1 - \frac{(n_i u^i)^2}{2!} + \frac{(n_i u^i)^4}{4!} - \dots \right],$$

bo n_k jest funkcją g_{ij} , czyli;

$$N|_k = n_k \cos n_i u^i.$$

Ponowne zróżniczkowanie względem zmiennej u^l daje

$$N|_{kl} = -n_k n_l \sin n_i u^i.$$

Rozwiązanie ogólne równania (3.11) uzyskamy tworząc odpowiednią sumę szeregu hipertrygonometrycznego postaci (3.10).

$$(3.12) \quad \bar{\beta}^8 [4DE(D^2 - E^2) + 2\kappa^2 g D_1 E_1] = 0,$$

gdzie:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} D &= g g^{ij} D_{ij}, & E &= g g^{ij} E_{ij}, \\ D_1 &= k_j^i \frac{b}{\kappa} b^{ij} D_{ij}, & E_1 &= k_j^i \frac{b}{\kappa} b^{ij} E_{ij}, \\ k_j^i &= \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ -1 & \text{dla } i \neq j, \end{cases} \\ D_{ij} &= m_i^k m_j^k - n_i^k n_j^k, & E_{ij} &= m_i^k n_j^k + m_j^k n_i^k, \end{aligned}$$

Z układu (3.12) możemy wyznaczyć niewiadome wielkości m_i^k , n_j^k . Przyjmując $D = 0$ i $E = \varepsilon$ dochodzimy do układu dwóch równań z czterema niewiadomymi:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} g g^{ij} (m_i^k m_j^k - n_i^k n_j^k) &= 0, \\ g g^{ij} (m_i^k n_j^k + m_j^k n_i^k) &= \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie: $\varepsilon = \pm \sin \beta$

Dwie z tych niewiadomych mogą być dowolnie przyjęte, a wtedy pozostałe dwie wyznaczymy z równań (3.14). Rozwiązanie układu równań (3.14) można podać w postaci:

$$\begin{aligned} m_1^k &= \frac{\sqrt{gb}}{g g^{11}} \left\{ \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{m_2}{b} + \varepsilon^k \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{g_{11}^{11}}{b^2} \right)^2 \left(1 - \frac{4m_2 n_2}{g g^{11}} \right) + 1} \right] - \left(\frac{m_2}{b} \right)^2} \right\}, \\ m_2^k &= m_2, \\ n_1^l &= \frac{\sqrt{gb}}{g g^{11}} \left\{ \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{n_2}{b} + \varepsilon^l \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{g_{11}^{11}}{b^2} \right)^2 \left(1 - \frac{4m_2 n_2}{g g^{11}} \right) + 1} \right] - \left(\frac{n_2}{b} \right)^2} \right\}, \\ n_2^l &= n_2, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} b^2 &= (m_2)^2 + (n_2)^2 \\ \varepsilon^k &= \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 1 \\ -1 & \text{dla } k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Rozwiązanie stanu zgięciowego

Wszystkie wielkości opisujące stan zgięciowy, zarówno siły jak i przemieszczenia, są sumami odpowiednich szeregów hipertrygonometrycznych. Szeregów tych są cztery rodzaje, a rozwiązania są ich kombinacjami.

Oznaczając występujące w równaniach sumy odpowiednimi symbolami, uzyskamy możliwość wprowadzenia do opisu konwencji sumowania tensorowego.

Niech symbole S^i i \bar{S}^i określają sumy:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} S^1 &= C_{klij}^{mn} A_{mn}^{ik} B_{mn}^{jl}, & S^2 &= C_{klij}^{mn} \bar{A}_{mn}^{ik} \bar{B}_{mn}^{jl}, \\ \bar{S}^2 &= C_{klij}^{mn} \bar{A}_{mn}^{ik} B_{mn}^{jl}, & \bar{S}^1 &= C_{klij}^{mn} A_{mn}^{ik} \bar{B}_{mn}^{jl}. \end{aligned}$$

Wówczas siły \bar{N}_0^{ij} będą opisane wyrażeniem:

$$(4.2) \quad \bar{N}_0^{ij} = \sum_{m,n} F_k^{ij} S^k$$

Wielkości F_k^{ij} uzyskamy z odpowiednich równań równowagi [1]. Możemy je podać w postaci:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} F_r^{12} &= \begin{cases} F_1^{12} = -\frac{m_1^k m_2 + n_1^k n_2}{(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2} \\ F_2^{12} = \frac{n_2^k m_2 - m_1^k n_2}{(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2} \end{cases} \\ F_r^{11} &= \begin{cases} F_1^{11} = (F_1^{12})^2 - (F_2^{12})^2, \\ F_2^{11} = 2F_1^{12}F_2^{12}, \end{cases} \\ F_r^{22} &= \begin{cases} F_1^{22} = 1, \\ F_2^{22} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu związku przemieszczenia \hat{W}^3 z siłami \bar{N}_0^{ij} postaci:

$$(4.4) \quad \hat{W}^3 = -\frac{g}{2Eh\epsilon^2} b_{ij} \bar{N}_0^{ij}$$

możemy momenty \hat{M}^{ij} określone równaniami (2.10) opisać następującymi wyrażeniami:

$$(4.5) \quad \hat{M}^{ij} = \frac{g}{\beta 2\epsilon^2} [(1-\nu)(\delta_i^k G^{rs} + e_i^k L^{rs}) + \nu g e^{ij} e_i^k] F_k S^i$$

gdzie: G^{rs} i L^{rs} są określone wzorami:

$$(4.5) \quad G^{rs} = g g^{ir} g^{js} (m_r^k m_s^k - n_r^k n_s^k), \quad L^{rs} = g g^{ir} g^{js} (m_r^k n_s^k + n_r^k m_s^k),$$

oraz

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad e_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = 1 \\ 0 & \text{dla } i = j \\ -1 & \text{dla } i = 2 \end{cases}$$

Siły tnące opisane równaniami (2.11), dla stanu zgięciowego po odpowiednim zróżniczkowaniu kowariantnym wyrażenia (4.4) wynoszą:

$$(4.6) \quad \hat{Q}^j = -\frac{g}{\beta \epsilon} g^{ij} (\delta_r^s n_i^s - e_r^s m_i^k) F_s \bar{S}^r,$$

gdzie:

$$(4.7) \quad F_k = b_{ij} F_k^{ij}.$$

Przemieszczenia \hat{W}^i wyznaczymy z równań (2.4):

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \hat{W}^1 &= \frac{1}{2Eh} \sum_{m,n} A_i \bar{S}^i, \\ \hat{W}^2 &= \frac{1}{2Eh} \sum_{m,n} B_i \bar{S}^i, \\ \hat{W}^3 &= \frac{-g}{2Eh\delta^2} \sum_{m,n} F_i S^i. \end{aligned}$$

Wielkości A_i, B_i występujące w (4.8) są równe:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{M_1 m_1 + M_2 n_1}{\beta [(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2]}, & A_2 &= \frac{M_2 m_1 - M_2 n_1}{\beta [(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2]}, \\ B_1 &= \frac{-B_{ij} [m_i^k F_1^{ij} + n_i^k F_2^{ij}]}{\beta [(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2]}, & B_2 &= \frac{-B_{ij} [m_i^k F_2^{ij} - n_i^k F_1^{ij}]}{\beta [(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2]}, \\ M_r &= A_{ij} F_r^{ij} - \beta (\delta_r^k m_2^k + e_r^k n_2^k) B_k, \\ A_{ij} &= (1-\nu) g_{ij} - \frac{2gH}{\delta^2} b_{ij}, & B_{ij} &= (1+\nu) g_{1i} g_{1j} - A_{ij} - \nu g_{ij} \end{aligned}$$

5. Zestawienie wzorów obliczeniowych

Wyrażenia opisujące pracę powłoki są sumami złożonymi z całek szczególnych odpowiadających stanowi błonowemu i całek ogólnych dających pracę zgięciową.

5.1. Stan błonowy

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \bar{N}_s^{11} &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\int \sqrt{g} P^1 du^1 + \frac{1}{2\sin\beta} \int g' P^3 du^1 + C_1 \right], \\ \bar{N}_s^{12} &= -\frac{g_{12}}{g_{22}} \bar{N}_s^{11} + \frac{1}{\sqrt{g} g_{22}} \left[-\int \sqrt{g} g_{12} P^1 du^1 + \frac{1}{\sin\beta} \int g P^3 du^1 + C_2 \right], \\ \bar{N}_s^{22} &= -\frac{1}{g_{22}} \left[2g_{12} \bar{N}_s^{12} + \frac{\sqrt{g}}{\sin\beta} P^3 \right]. \end{aligned}$$

Przemieszczenia

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{W}^1 &= \int \left\{ \left[\frac{g_{22}}{g} \gamma_{11} + 2 \frac{g_{12}}{g} \left(\frac{g_{12}}{g_{22}} \bar{\gamma}_{22} - \bar{\gamma}_{11} \right) \right] \exp \int \frac{g_{12}^2}{g g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} du^1 \right\} du^1 + C_3(u^2), \\ \bar{W}^2 &= \frac{1}{g_{12}} \left[\int \bar{\gamma}_{11} du^1 - \bar{W}^1 \right] + C_4(u^2), \\ \bar{W}^3 &= \frac{1}{b_{22}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \bar{W}^1 - \gamma_{22} \right]. \end{aligned}$$

Odształcenia $\bar{\gamma}_{ij}$ występujące w (5.2) wyznaczymy ze wzorów (2.9).

5.2. Stan zgięciowy

Siły

$$(5.3) \quad \bar{N}_0^{ij} = \sum_{m,n} F_k^{ij} S^k,$$

$$\hat{Q}^j = -\frac{g}{\beta \varepsilon} g^{ij} (\delta_r^s n_i^l - e_r^s m_i^k) F_s \bar{S}^r.$$

Momenty zginające

$$(5.4) \quad \hat{M}^{ij} = \frac{g}{\beta^2 \varepsilon^2} [(1-\nu) (\delta_l^k G^{rs} + e_l^k L^{rs}) + \nu \varepsilon g^{ij} e_l^k] F_k S^l.$$

Przemieszczenia

$$(5.5) \quad \hat{W}^1 = \frac{1}{2Eh} \sum_{mn} A_i \bar{S}^i, \quad \hat{W}^2 = \frac{1}{2Eh} \sum_{mn} B_i \bar{S}^i, \quad \hat{W}^3 = \frac{-g}{2Eh\varepsilon^2} \sum_{mn} F_i S^i.$$

Wielkości pomocnicze F_k^{ij} , G^{rs} , L^{rs} , F_k , A_k , B_k określają wzory: (4.3), (4.5'), (4.7), (4.9).

5.3. Stan łączny

Wielkości tensorowe

Siły

$$(5.6) \quad N^{ij} = \bar{N}_s^{ij} + \bar{N}_0^{ij} + 6HM\hat{M}^{ij},$$

$$Q^j = \hat{Q}^j + \xi h^2 (HN\bar{N}^j)_|_l,$$

Momenty

$$(5.7) \quad M^{ij} = M^{ij} + \xi h^2 HN\bar{N}^{ij}.$$

Przemieszczenia

$$(5.8) \quad W^i = \bar{W}^i + \hat{W}^i, \quad W^3 = \bar{W}^3 + \hat{W}^3$$

Wielkości fizyczne uzyskamy ze wzorów (2.13).

Literatura cytowana w tekście

1. St. BIELAK, *Powłoki prostokątne*, Zeszyty Naukowe WSI Opole, Budownictwo 3 (1976).
2. St. BIELAK, *Ogólna teoria powłok prostokątnych pracujących w stanie zgięciowym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo, 33 (1973).

Резюме

ИЗГИБ ЛИНЕЙЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК ОПЕРТЫХ НА ОКРУЖНОСТИ

В работе дано решение проблемы линейчатых оболочек опирающихся на окружности, работающих в изгибающем напряжённом состоянии. Принята математическая модель, описывающая состояние напряжения в оболочке основана на линейной теории изотропных однородных упругих оболочек. Введена параметризация описывает общим векторным уравнением однополостный гиперболоид, конус и цилиндр, а это позволило определить алгоритм решающий задачи трех типов оболочек.

В настоящей работе решение изгибающего состояния опирается на гипертригонометрических рядах, позволяющих учитывать любой способ нагрузки и подпоры.

S u m m a r y

BENDING STATE OF RULED SURFACE SHELLS BASED ON A CIRCLE

We discuss the bending theory of the ruled surface shells such as cylinder, cone and one sheet hyperbola based on a circle. The mathematical model is based on the assumption that the shells material is isotropic and linear.

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lipca 1978 roku.

DRGANIA SPRĘŻYSTO LEPKOPLASTYCZNEJ POWŁOKI KULISTEJ

WIESŁAW WOJEWÓDZKI, JANUSZ SOKAŁSKI (WARZAWA)

1. Wprowadzenie

Uwzględnienie efektów lepkości, wzmocnienia materiału i zmian geometrii w konstrukcjach obciążonych dynamicznie jest konieczne dla poprawnej oceny charakteru procesu deformacji, wielkości odkształceń i naprężeń. Problem ten był przedmiotem wielu prac teoretycznych i doświadczalnych. Obszerne prace WIERZBICKIEGO [1] i JONESA [2] zawierają przegląd dotychczasowych osiągnięć w tej dziedzinie. Problem deformacji cienkiej powłoki kulistej obciążonej wybuchem w jej wnętrzu był rozpatrywany w kilku pracach. BAKER [3] przedstawił rozwiązanie dla powłoki z materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem bez efektu lepkości. Otrzymane teoretyczne wyniki porównano z eksperymentalnymi osiągając dobrą ich zgodność. W pracy SZCZEPIŃSKIEGO [4] uwzględniając duże odkształcenia powłoki zbadano oddzielny i łączny wpływ efektu wzmocnienia i lepkości materiału na wielkość przemieszczeń. Stwierdzono, że uwzględnienie obu efektów daje duże zmniejszenie końcowych odkształceń. Wyniki otrzymane przez DUFFEY [5, 6] wskazują, że również w zakresie małych deformacji powłoki wzmocnienie odkształceniowe i lepkość materiału zmniejszają znacznie przemieszczenia. Stwierdzono, że wpływ lepkości materiału na wielkość maksymalnych przemieszczeń wzrasta gdy wartość impulsu rośnie. Dla ustalonej wartości impulsu ciśnienia wpływ ten maleje ze wzrostem czasu działania impulsu. Największe przemieszczenia powstają w przypadku obciążenia idealnym impulsem ciśnienia. Podane rozwiązanie analityczne odnosi się tylko do początkowego okresu deformacji nie dając informacji o szybkości tłumienia drgań w dalszym procesie odkształcenia.

W niniejszej pracy rozpatrywać będziemy cienką pełną powłokę kulistą z materiału sprężystolepkoplastycznego obciążoną pojedynczym prostokątnym impulsem ciśnienia bądź też kilkoma prostokątnymi impulsami. Impuls jest skierowany radialnie na zewnątrz powłoki. Rozpatrywany problem cechuje kulista symetria. Celem pracy jest analiza całego procesu drgań w zakresie małych odkształceń, określenie czasu początkowego uplastycznienia, zbadanie wpływu lepkości materiału i wielkości impulsu na podstawowe parametry drgań. Badany będzie również wpływ chwili przyłożenia powtórnego impulsu i obciążenia cyklicznego na wielkość przemieszczeń.

2. Równanie ruchu

Przyjmujemy równania konstytutywne dla materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia, wyprowadzone przez PERZYŃĘ [7] w następującej postaci:

$$(2.1) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{\gamma}{2} \langle \Phi(F) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk},$$

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1, \quad \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} \Phi(F) & \text{dla } F > 0 \\ 0 & \text{dla } F \leq 0, \end{cases}$$

gdzie ε_{ij} , σ_{ij} oznaczają odpowiednio składowe tensora odkształcenia i naprężenia, e_{ij} , s_{ij} są dewiatorami tych tensorów, μ , K oznaczają odpowiednio moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego, $k = \sigma_0/\sqrt{3}$, σ_0 jest statyczną granicą plastyczności materiału, γ współczynnikiem lepkości, a $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$ oznacza drugi niezmiennik dewiatora

naprężenia. Kropką oznaczono różniczkowanie względem czasu. Równania powyższe opisują liniowe efekty sprężyste, statyczne uplastycznienie według warunku Hubera-Misesa, izotropowe wzmocnienie materiału oraz liniowy wpływ prędkości odkształcenia. W przejściu granicznym dla $\gamma = \infty$, $\sqrt{J_2} = k$ otrzymuje się równania dla ośrodka sprężysto-idealnie-plastycznego. W rozpatrywanym przypadku kulistej symetrii ($\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \sigma$, $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \varepsilon$) z (2.1) otrzymujemy

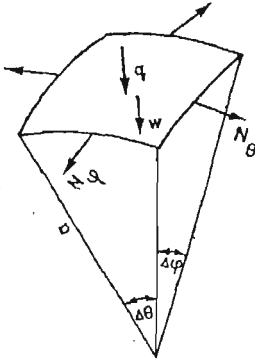
$$(2.2) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1-\nu}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sqrt{3}\gamma}{6\sigma_0} (\sigma + m\sigma_0) \quad \text{dla } |\sigma| > \sigma_0,$$

$$(2.3) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1-\nu}{E} \dot{\sigma} \quad \text{dla } |\sigma| \leq \sigma_0,$$

gdzie E jest modułem Younga, ν oznacza współczynnik Poissona zaś $m = +1$ dla ściskania i $m = -1$ dla rozciągania.

Równanie ruchu elementu powłoki, rys. 1, jest następujące

$$(2.4) \quad 2N = a(\rho h \ddot{w} - q(t)),$$



Rys. 1 Element powłoki. Dodatkowo kierunki sił i przemieszczeń

gdzie ρ jest gęstością materiału, h jest grubością powłoki, $N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dz$ jest siłą podłużną na jednostkę długości, pozostałe wielkości są określone na rysunku. Przyjmujemy, że materiał powłoki jest nieściśliwy. Prędkość odkształcenia punktów powierzchni środkowej wynosi $\dot{\varepsilon} = -\dot{w}/a$. Uwzględniając (2.2) równanie ruchu (2.4) dla $|N| > N_0$ zapisujemy w następującej postaci

$$(2.5) \quad \ddot{\ddot{w}} + 2\alpha \dot{\ddot{w}} + \omega^2 \ddot{w} = \frac{2\alpha\sigma_0}{\rho a} \left[-2m + \frac{1}{Q_0} \left(\frac{1}{\alpha} \dot{q}(t) + 2q(t) \right) \right],$$

gdzie

$$(2.6) \quad 2\alpha = \frac{\gamma E}{2\sqrt{3}(1-\nu)\sigma_0}, \quad \omega^2 = \frac{2E}{(1-\nu)\rho a^2},$$

ω jest częstością sprężystych drgań własnych o okresie $T = 2\pi/\omega$, zaś $Q_0 = 2\sigma_0 h$ jest nośnością graniczną powłoki. W fazie sprężystej deformacji, $|N| < N_0$ ($N_0 = \sigma_0 h$) równanie ruchu ma postać

$$(2.7) \quad \ddot{w} + \omega^2 \dot{w} = \frac{1}{\rho h} \dot{q}(t).$$

W ogólnym przypadku deformacji rozpatrywać będziemy następujące cztery fazy: 1 i 4 sprężyste gdy $|N| < N_0$ i odpowiednio $q \neq 0$, $q = 0$, 2 i 3 sprężystolepkoplastyczne gdy $|N| > N_0$ i odpowiednio $q \neq 0$, $q = 0$. Zakładamy, że jeśli przekrój powłoki uplastycznia się to jednocześnie cały w czasie odpowiadającym uplastycznieniu punktów na powierzchni środkowej. Dla cienkich powłok wpływ stopniowego uplastycznienia się przekroju na zachowanie powłok jest zaniedbywalny, DUFFEY, KRIEG [8]. Przy przejściu z jednej fazy do drugiej muszą być spełnione warunki ciągłości: przemieszczenia, prędkości oraz sił wewnętrznych.

W dalszej części zajmować się będziemy powłoką obciążoną prostokątnym impulsem ciśnienia o wielkości Q i czasie działania t_i ,

$$(2.8) \quad q(t) = \begin{cases} -Q & \text{dla } 0 \leq t \leq t_i, \\ 0 & \text{dla } t > t_i. \end{cases}$$

Impuls jest rozłożony równomiernie na całej wewnętrznej powierzchni i skierowany radialnie na zewnątrz powłoki. W zależności od wielkości impulsu $I = Qt_i$ deformacja powłoki może odbywać się w różnych fazach. Rozpatrywać będziemy różne możliwości.

3. Fazy sprężyste

Zajmiemy się najpierw sytuacją gdy w całym procesie deformacji $|N| < N_0$. Rozwiązanie równania (2.7) w przypadku (2.8) ma postać

$$(2.9) \quad w = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C.$$

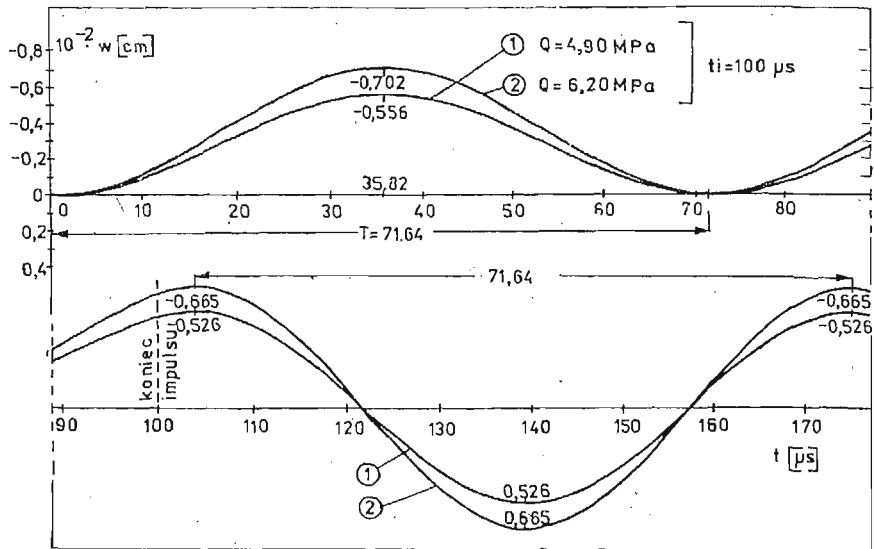
Wyznaczając stałe z warunków początkowych $w(0) = \dot{w}(0) = 0$, $\ddot{w}(0) = -Q/\rho h$ oraz z warunków ciągłości dla $t = t_i$, otrzymujemy

$$(2.10) \quad w = L(1 - \cos \omega t), \quad L = -\frac{Q}{\rho h \omega^2}, \quad 0 \leq t \leq t_i,$$

$$(2.11) \quad w = L[(\cos \omega t_i - 1) \cos \omega t + \sin \omega t_i \sin \omega t], \quad t > t_i.$$

Ze wzoru (2.10) wynika, że w czasie $t = (n+1/2)T$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, przemieszczenia i siły wewnętrzne są największe i wynoszą

$$w = -2Q/\rho h \omega^2, \quad N = Qa, \quad \text{zaś } \dot{w}_0 = 0, \quad \ddot{w} = Q/\rho h.$$



Rys. 2. Zmiana przemieszczenia w czasie w zakresie sprężystym. Obciążenie impulsem ciśnienia: krzywa 1— $Q = 4,90 \text{ MPa}$ $t_i = 100 \mu\text{s}$ krzywa 2— $Q = 6,20 \text{ MPa}$, $t_i = 100 \mu\text{s}$.

Dla $t = nT$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, obciążona powłoka osiąga najmniejsze odkształcenia i siły wewnętrzne, $w = 0$, $N = 0$ zaś $\dot{w} = 0$, $\ddot{w} = -Q/\rho h$, rys. 2. Analizując (2.11) rozpatrzmy dwa skrajne przypadki. Przypadek pierwszy gdy $t_i = (n+1/2)T$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Mamy wówczas $w = (2Q/\rho h \omega^2) \cos \omega t$ i dla $t = T(n+1)/2$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, powłoka osiąga ekstremalne przemieszczenia i siły wewnętrzne $w = \pm 2Q/\rho h \omega^2$, $N = \pm Qa$, zaś $\dot{w} = 0$, $\ddot{w} = \pm 2Q/\rho h$. Przypadek drugi gdy $t_i = (n+1)T$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, wtedy otrzymujemy $w = \dot{w} = \ddot{w} = N = 0$. Do obliczeń numerycznych w całej pracy przyjęto dane liczbowe zawarte w tabelicy 1.

Uwzględniając (2.10) (2.11) i warunek uplastycznienia w równaniu (2.3) otrzymujemy następujące wzory określające czas początkowego uplastycznienia powłoki

Tabelica 1. Dane liczbowe do obliczeń numerycznych.

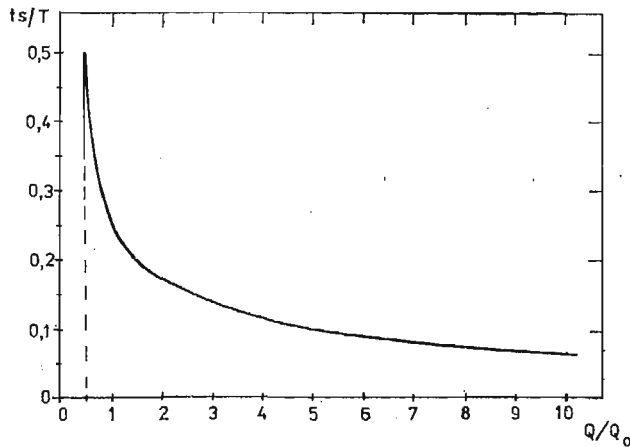
Materiał	E [MPa]	ν	σ_0 [MPa]	ρ [Ns ² /cm ⁴]	γ [s ⁻¹]	a [cm]	h [cm]
Miękka stal	$2,0594 \cdot 10^5$	0,3	206,9	$7,65 \cdot 10^{-5}$	10	10	0,3
					100		
					200		
					400		
					427,36		
					500		
					1 000		
					20 000		

$$(2.12) \quad ts = \frac{1}{\omega} \arccos \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \quad \text{dla } ts \leq ti,$$

$$(2.13) \quad ts = \frac{1}{\omega} \arcsin \left[\frac{Q_0}{2Q} \frac{\sin \omega ti}{1 - \cos \omega ti} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \omega ti}{2} - \left(\frac{Q_0}{2Q} \right)^2} \right] + ti \quad \text{dla } ts \geq ti.$$

Największa wartość przemieszczenia w zakresie sprężystym określona z (2.10) wynosi $w_{\max}^s = -2Q/\rho h \omega^2$ i występuje po raz pierwszy w czasie π/ω . Zatem najmniejszy początkowy impuls uplastyczniający powłokę wynosi $I_0 = (Q_0/2)(\pi/\omega) = (Q_0/2)(T/2)$. Jeżeli przyłożone obciążenie ma wartość mniejszą od $Q_0/2$ to dla dowolnie długiego czasu jego działania powłoka nie uplastyczni się. W rozpatrywanym szczegółowym przypadku (tablica 1) $Q_0 = 12,42$ MPa. Wykres funkcji (2.12) przedstawiono na rys. 3. Czas pierwszego uplastycznienia dla impulsów $I > I_0$ oblicza się ze wzoru (2.12) bądź (2.13).

W przypadku działania większych obciążeń gdy pojawiają się wielokrotnie fazy sprężystolepkoplastyczne wówczas aby określić cały proces deformacji, do opisu faz czwartych musimy korzystać z równania w postaci (2.9), a występujące trzy stałe określać z warunków ciągłości na granicach faz.



Rys. 3. Czas pierwszego uplastycznienia powłoki w funkcji obciążenia, (wzór (2.12)).

4. Fazy sprężystolepkoplastyczne

Zajmować się będziemy drugą i trzecią fazą ruchu, $|N| > N_0$. Istnieją trzy rozwiązania (2.5) w zależności od relacji wielkości α i ω . Niech $\xi = \alpha/\omega$.

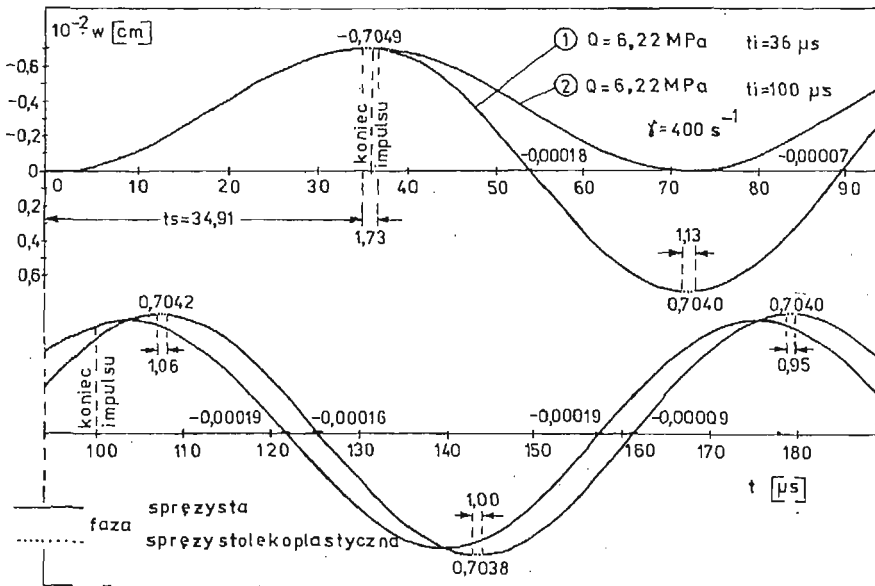
4.1. Przypadek słabego tłumienia, $\xi < 1$. Dla prostokątnego impulsu ciśnienia (2.8) otrzymujemy

$$(2.14) \quad w = \left[A \cos \sqrt{1 - \xi^2} \omega t + B \sin \sqrt{1 - \xi^2} \omega t \right] e^{-\xi \omega t} - \frac{4\sigma_0 \xi}{\rho \omega a} \left(m + \frac{Q}{Q_0} \right) t + C,$$

gdzie A , B , C stałe całkowania. Jak widać, przemieszczenie (2.14) składa się z trzech części: cyklicznej, liniowej i stałej. Część cykliczna jest wytłumiana w czasie, szczególnie silnie dla większych wartości współczynnika lepkości γ .

Rozpatrzmy teraz sytuację gdy w drugiej fazie ruchu część cykliczna jest prawie wytłumiona a przemieszczenie (2.14) można aproksymować częścią liniową, która nie jest tłumiona i częścią stałą reprezentującą trwałe przemieszczenie. Część liniowa znika gdy obciążenie $Q = Q_0$ i przy długim czasie jego działania $w \rightarrow C$ tzn. powłoka dąży do stałego położenia równowagi. Gdy $Q > Q_0$ część liniowa powoduje zwiększenie przemieszczeń wraz ze wzrostem współczynnika lepkości. Dla $Q < Q_0$ część liniowa zmniejsza przemieszczenia. Kładąc $Q = 0$ w wyrażeniu (2.14) dla drugiej fazy otrzymujemy odpowiedni opis ruchu fazy trzeciej.

Na rys. 4 przedstawiono przemieszczenia w przypadku działania niewielkiego obciążenia. Założono współczynnik lepkości $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$. Krzywa 1 odpowiada impulsowi $Q = 6,22 \text{ MPa}$ $t_i = 36 \mu\text{s}$ a krzywa 2 impulsowi $Q = 6,22 \text{ MPa}$, $t_i = 100 \mu\text{s}$. Krzywa 2 jest niemal identyczna z krzywą 2 na rys. 2. Różnica polega na małym przekroczeniu granicy sprężystości materiału. Faza sprężystolepkoplastyczna pojawia się tylko jednokrotnie. Jest to wpływ długości działania obciążenia na wielkość przemieszczenia. W przy-

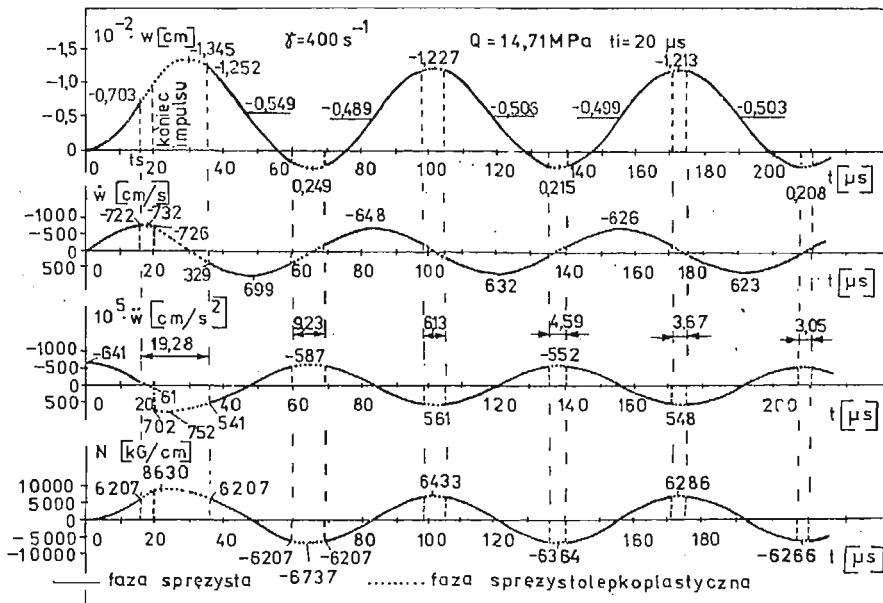


Rys. 4. Zmiana przemieszczenia w czasie. Przypadek słabego tłumienia, $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$. Krzywa 1— $Q = 6,22 \text{ MPa}$, $t_i = 36 \mu\text{s}$, krzywa 2— $Q = 6,22 \text{ MPa}$, $t_i = 100 \mu\text{s}$

padku krzywej 1 fazy sprężystolepkoplastyczne pojawiają się wielokrotnie, są bardzo krótkie i nie wpływają w sposób istotny, dla $t > t_i$ na postać drgań. Liczby umieszczone przy poziomych kreskach tuż nad osią odciętych, wyznaczają chwilowe położenia równowagi wokół których powłoka wykonuje oscylacje. Tym wartościom odpowiada siła $N = 0$. W powłoce powstają niewielkie odkształcenia trwałe. Na rysunku podano również wartości największych przemieszczeń w fazie sprężystolepkoplastycznej i czas trwania tych faz. Wartości te maleją z upływem czasu.

Na rys. 5 podano typowy wykres przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia i siły podłużnej dla obciążenia impulsem $Q = 14,71 \text{ MPa}$ $t_i = 20 \mu\text{s}$. Przyjęto $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$.

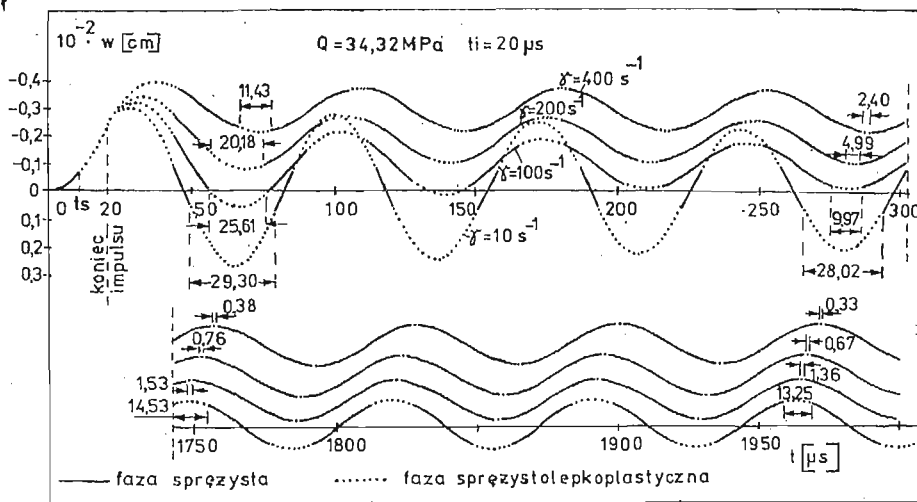
W czasie $t_s = 16,12 \mu\text{s}$ powłoka uplastycznia się przechodząc z fazy sprężystej w fazę sprężystolepkoplastyczną. Osiąga ona w tym czasie maksymalne przemieszczenia sprężyste wynoszące $0,00703 \text{ cm}$. Stanowią one $0,023$ grubości powłoki. Siła podłużna osiąga wartość $N_0 = 6207,6 \text{ N/cm}$. Po zdjęciu w $20 \mu\text{s}$ obciążenia, przemieszczenia i siła podłużna w dalszym ciągu narastają ale coraz wolniej. Po $22 \mu\text{s}$ (w $2 \mu\text{s}$ po zdjęciu obciążenia) siła podłużna osiąga największą wartość $N = 8625,9 \text{ N/cm}$ po czym stopniowo maleje do wartości N_0 w chwili $35,4 \mu\text{s}$ i wówczas następuje czwarta faza ruchu (odciążenie sprężyste). Po fazie czwartej następuje powtórnie trzecia faza ruchu ale przekroczenie granicy plastyczności występuje przy ściskaniu. Fazy trzecia i czwarta wielokrotnie się powtarzają. W miarę upływu czasu $|N|$ dąży do N_0 i tak w chwili $t = 2036 \mu\text{s}$ $N = 6208,2 \text{ N/cm}$. Przemieszczenie osiąga największą wartość $0,013447 \text{ cm}$ w chwili $30 \mu\text{s}$. Prędkość odkształcenia jest największa w chwili $18,3 \mu\text{s}$ i wynosi $731,8 \text{ cm/s}$. Wielkości przemieszczeń (liczby przy poziomych kreskach) określające chwilowe położenie równowagi stopniowo



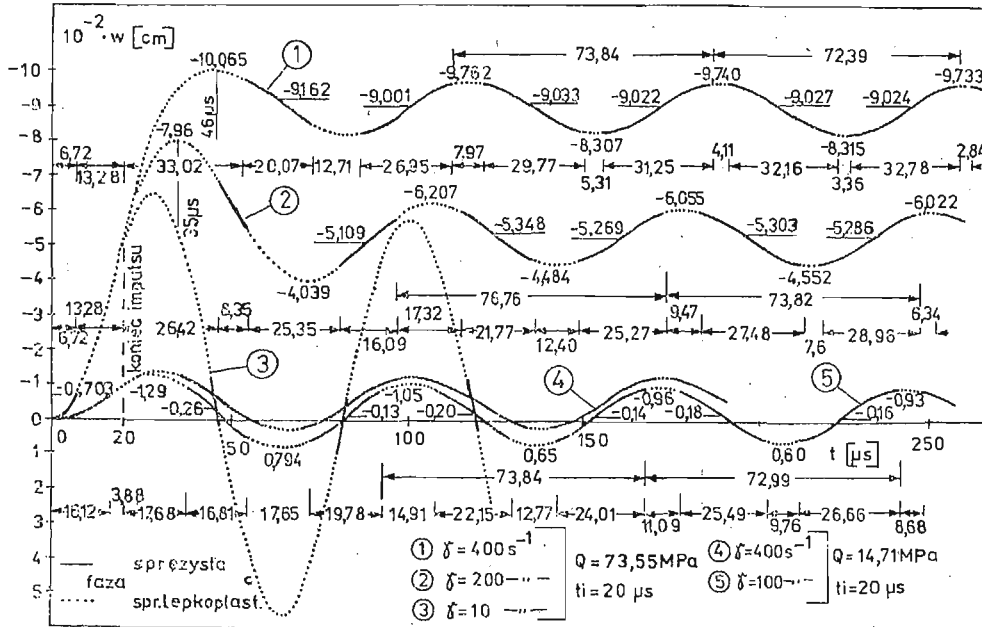
Rys. 5. Zmiana przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia i siły podłużnej w czasie dla obciążenia impulsem $Q = 14,71 \text{ MPa}$ $t_i = 20 \mu\text{s}$ i dla $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$

ulegają stabilizacji reprezentując trwałe odkształcenia. I tak w chwili $t = 2018 \mu\text{s}$ trwałe ugięcie wynosi $0,00501422 \text{ cm}$. Różnica między maksymalnymi odchyleniami powłoki od położenia równowagi powoli maleje do wartości maksymalnej amplitudy drgań sprężystych wynoszącej $0,007033 \text{ cm}$ i na przykład w chwili $t = 2036 \mu\text{s}$ wynosi $0,0070341 \text{ cm}$. W skutek tłumienia długości faz sprężystolepkoplastycznych maleją i okres drgań dąży do okresu drgań sprężystych $T = 71,64 \mu\text{s}$. Np. w czasie około $2000 \mu\text{s}$ wynosi on $71,6452 \mu\text{s}$.

Na rys. 6 i 7 przedstawiono wpływ lepkości materiału i wielkości obciążenia na przebieg drgań. Dla współczynnika lepkości $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ i danych w tabelicy 1, w chwili $t = 20 \mu\text{s}$ $e^{-\xi\omega t} = 1/5,15$ a w chwili $t = 800 \mu\text{s}$ $e^{-\xi\omega t} = 1/(2,95 \cdot 10^{28})$. Widać, że część cykliczna rozwiązania (2.14) jest już w początkowej fazie silnie wytłumiana i dla dużych



Rys. 6. Przeszyczenie powłoki w funkcji czasu i współczynnika lepkości. Przypadek słabego tłumienia. Obciążenie impulsem $Q = 34,32 \text{ MPa}$, $t_i = 20 \mu\text{s}$.



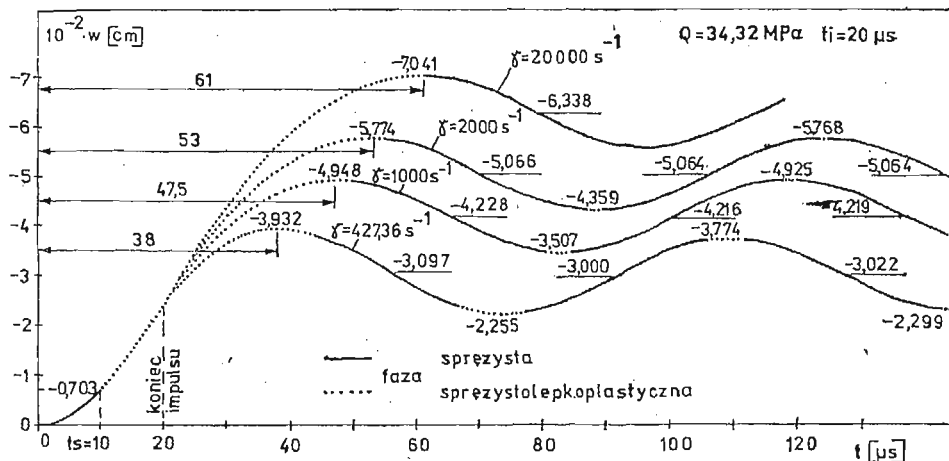
Rys. 7. Przeszyczenie powłoki w funkcji czasu, współczynnika lepkości i impulsu. Przypadek słabego tłumienia.

wartości czasu praktycznie nie ma żadnego wpływu na postać przemieszczenia. Dla małych współczynników lepkości przebieg tłumienia przebiega bardzo powoli. Np. dla $\gamma = 10 \text{ s}^{-1}$ w chwili $t = 20 \mu\text{s}$ $e^{-\xi\omega t} = 1/1,04$, a więc w tym przypadku tłumienie cyklicznej części drgań jest minimalne i okres drgań sprężystolepkoplastycznych jest bardzo zbliżony do okresu drgań sprężystych. Jednocześnie część liniowa jest 40 razy mniejsza niż dla $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ i mało wpływa na postać przemieszczenia. Dla $\gamma = 10 \text{ s}^{-1}$ i $t = 800 \mu\text{s}$ $e^{-\xi\omega t} = 1/5,15$, a więc jest to wartość osiągnięta dla $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ już w chwili $t = 20 \mu\text{s}$. W czasie około $1950 \mu\text{s}$ długość fazy sprężystolepkoplastycznej dla $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ wynosi $0,33 \mu\text{s}$ natomiast dla $\gamma = 10 \text{ s}^{-1}$ wynosi ona $13,25 \mu\text{s}$, rys. 6. Reasumując, wzrost współczynnika lepkości powoduje wzrost maksymalnych przemieszczeń i czasu ich pojawienia się, wzrost odkształceń trwałych, szybkie wytłumienie faz sprężystolepkoplastycznych a w konsekwencji szybsze dążenie procesu do drgań sprężystych, zmniejszenie wielkości sił wewnętrznych. Wzrost wielkości obciążenia Q powoduje wzrost ekstremalnych przemieszczeń i czasu ich występowania, wzrost odkształceń trwałych i sił wewnętrznych. Wpływ wielkości obciążenia Q na postać drgań a zwłaszcza na szybkość wytłumiania faz sprężystolepkoplastycznych jest bardzo mały, rys. 7. Wraz ze wzrostem czasu trwania obciążenia t_i szczególnie dla większych γ przemieszczenia (2.14) dążą do równania prostej i dla $|Q| < Q_0$ maleją, dla $|Q| = Q_0$ są stałe, zaś dla $|Q| > Q_0$ rosną.

4.2. Przypadek granicznego tłumienia, $\xi = 1$. Dla obciążenia impulsowego (2.8) otrzymujemy w fazie drugiej

$$(2.15) \quad w = (A + Bt)e^{-\xi\omega t} - \frac{4\sigma_0\xi}{\rho\omega a} \left(m + \frac{Q}{Q_0} \right) t + C,$$

gdzie A, B, C stałe określone przez warunki ciągłości. Ruch nie jest oscylacyjny. Pierwszy człon jest silnie wytłumiany już w początkowym okresie fazy sprężystolepkoplastycznej. Człon drugi i trzeci jest identyczny jak w przypadku $\xi < 1$. Opis dla fazy trzeciej otrzymujemy podstawiając do (2.15) $Q = 0$. Dla danych w tabelicy 1 wielkości $\xi = 1$ odpowiada współczynnik lepkości $\gamma = 427,36 \text{ s}^{-1}$. Drgania powłoki dla tego przypadku przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Przemieszczenia powłoki w funkcji czasu i współczynnika lepkości. Przypadek granicznego i silnego tłumienia. Obciążenie impulsem $Q = 34,32 \text{ MPa}$, $t_i = 20 \mu\text{s}$

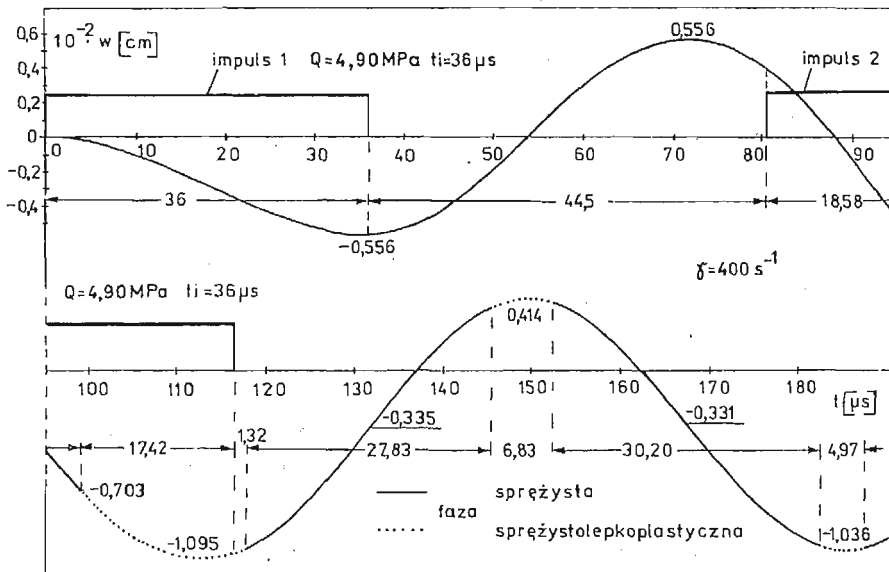
4.3. **Przypadek silnego tłumienia, $\xi > 1$.** Dla obciążenia prostokątnym impulsem (2.8) otrzymujemy w fazie drugiejj

$$(2.16) \quad w = Ae^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega t} + Be^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega t} - \frac{4\sigma_0 \xi}{\rho \omega a} \left(m + \frac{Q}{Q_0} \right) t + C.$$

Stałe A , B , C są określone przez warunki ciągłości. Jest to opis ruchu aperiodycznego. Pierwszy człon określony przez funkcję eksponencjalną jest silnie wytłumiony w początkowym okresie fazy sprężystolepkoplastycznej. Pozostałe człony liniowy i stały są identyczne jak w przypadku słabego tłumienia. Na rys. 8 przedstawiono zmianę przemieszczenia w czasie dla kilku współczynników lepkości materiału. Fazy sprężystolepkoplastyczne są silniej wytłumiane niż w poprzednim przypadku słabego tłumienia. Drgania konstrukcji szybko dążą do drgań sprężystych. Np. dla współczynnika lepkości $\gamma = 20000 \text{ s}^{-1}$ po początkowej fazie sprężystej faza sprężystolepkoplastyczna występuje jednokrotnie i dalsza odpowiedź konstrukcji jest często sprężysta, a przejście z fazy sprężystolepkoplastycznej do sprężystej (odciążenie) występuje przy największej wartości przemieszczenia. Wnioski dotyczące wpływu lepkości i obciążenia podane w przypadku słabego tłumienia stosują się i w tym przypadku.

5. Obciążenie kilkoma prostokątnymi impulsami ciśnienia

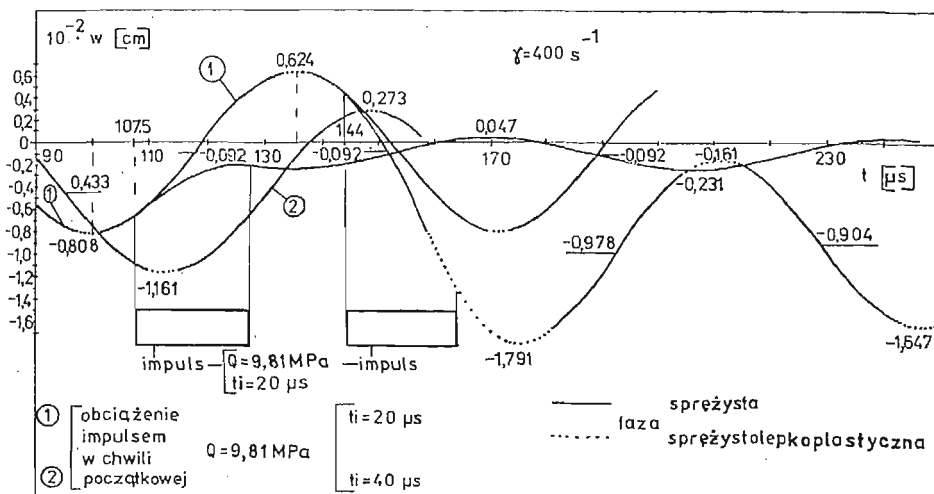
Na rys. 9 przedstawiono przemieszczenia powłoki ($\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$) obciążonej dwoma jednakowymi impulsami ciśnienia $Q = 4,90 \text{ MPa}$ $t_i = 36 \mu\text{s}$. Pod wpływem obciążenia $Q < Q_0/2$ przyłożonego w chwili początkowej powłoka nie uplastycznia się. Chwila przyłożenia drugiego impulsu została tak dobrana aby wektory prędkości i przyspieszenia



Rys. 9. Zmiana przemieszczenia w czasie. Obciążenie dwoma jednakowymi impulsami $Q = 4,90 \text{ MPa}$ $t_i = 36 \mu\text{s}$ $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$.

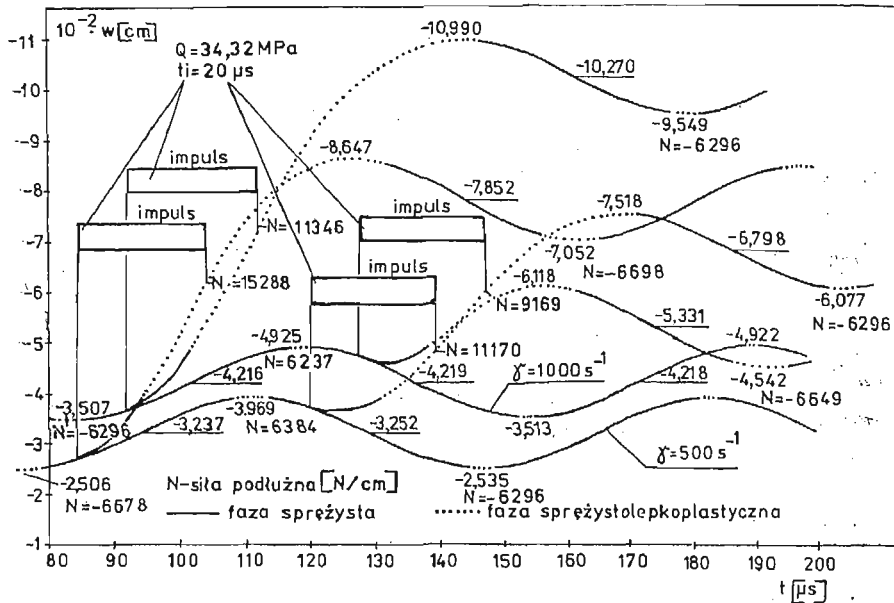
przemieszczenia wywołane pierwszym impulsem były zgodne z wektorami prędkości i przyśpieszenia wywołanymi przez drugi impuls. W rezultacie zostaje przekroczony warunek plastyczności i powłoka przechodzi w fazę sprężystolepkoplastycznej deformacji.

W dalszych rozważaniach zbadano wpływ chwili przyłożenia powtórnego obciążenia na wielkość przemieszczenia powłoki. Na rys. 10 krzywa 1 obrazuje fragment przebiegu drgań powłoki ($\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$) obciążonej pierwotnie w chwili początkowej impulsem $Q = 9,81 \text{ MPa}$ przez okres $t_i = 20 \mu\text{s}$. Powłoka ta w chwili $t = 100 \mu\text{s}$ osiąga maksymalne lokalne przemieszczenia w stanie rozciągania, a w chwili $t = 135,5 \mu\text{s}$ w stanie ściskania. Następnie taki sam impuls przykładano powtórnie w różnych chwilach czasu i badano deformację powłoki. Stwierdzono, że zmniejszenie przemieszczenia występuje gdy obciążenie



Rys. 10. Wpływ chwili przyłożenia powtórnego impulsu na wielkość przemieszczenia. Przypadek słabego tłumienia, $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$

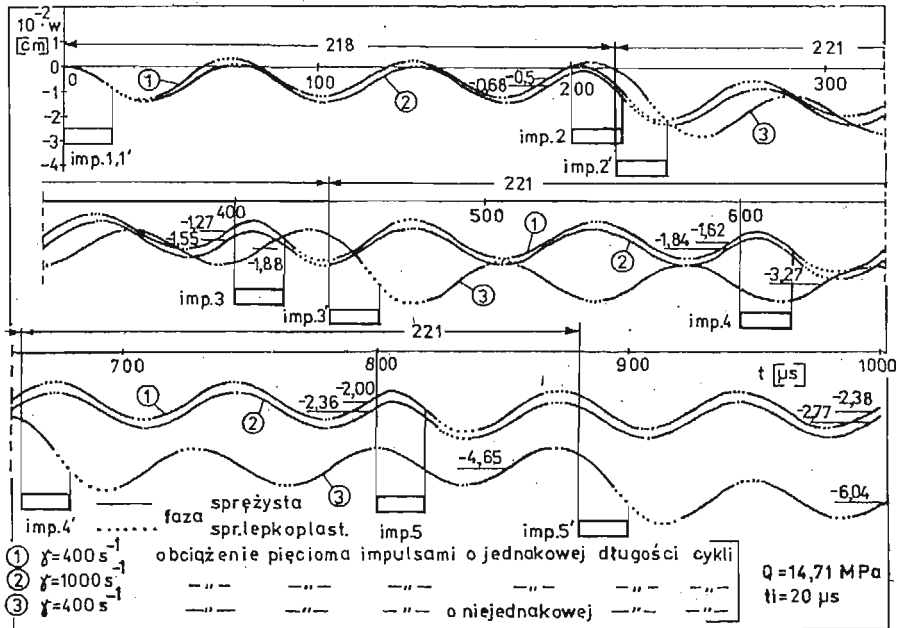
żenie jest przykładane w chwilach zawartych w przedziale czasu $100-117,5 \mu\text{s}$. W tym przedziale czasu wektory prędkości i przyśpieszenia drgań własnych i wymuszonych mają przeciwne zwroty. W rezultacie drgania zostają w znacznym stopniu mechanicznie wytłumione. Siły wewnętrzne maleją do wielkości $|N| < N_0$, a więc w powłoce będą występować jedynie niewielkie drgania sprężyste. Odształcenia trwałe pozostają takie same jak przed wtórnym obciążeniem. Największe wytłumienie drgań wystąpi gdy powtarne obciążenie nastąpi $107,5 \mu\text{s}$ tzn. w $7,5 \mu\text{s}$ po czasie osiągnięcia przez powłokę maksymalnych odształceń rozciągających. Natomiast zwiększenie przemieszczenia występuje gdy wektory prędkości i przyśpieszenia drgań własnych i wymuszonych działaniem wtórnego obciążenia są zgodne. Dla rozpatrywanej powłoki przemieszczenie zwiększa się gdy powtarne impuls jest przyłożony w chwili czasu pomiędzy $135,5$ a $153,5 \mu\text{s}$. Największe przemieszczenie występuje gdy powtarne impuls jest przyłożony w chwili $t = 144 \mu\text{s}$ tzn. w $8,5 \mu\text{s}$ ($\sim T/9$) po czasie odpowiadającym maksymalnym odształceniom ściskającym. Obserwuje się wtedy znaczne zwiększenie odształceń trwałych i faz sprężystolepkoplastycznych. Również na rys. 11 przedstawiono wpływ chwili przyłożenia powtórnego ob-



Rys. 11. Wpływ chwili przyłożenia powtórnego impulsu na wielkość przemieszczenia i siły podłużnej
Przypadek silnego tłumienia, $\gamma = 500$ i 1000 s^{-1}

ciężenia na wielkość przemieszczenia i dodatkowo na wartość siły podłużnej. Wyniki dotyczą większych impulsów i przypadku materiału o silnym tłumieniu $\gamma = 500$ i 1000 s^{-1} . Przemieszczenia trwale są tu znacznie większe niż przemieszczenia przedstawione na rys. 10. Stwierdzono, że wpływ czasu przyłożenia wtórnego obciążenia na wielkość proporcji między przyrostami przemieszczeń trwałych po pierwszym i wtórnym obciążeniu szybko maleje ze wzrostem obciążenia oraz bardzo mało zależy od współczynnika lepkości. Chwila najbardziej niekorzystnego (najbardziej zwiększającego przemieszczenia) lub korzystnego przyłożenia drugiego impulsu zależy ogólnie od przedziału czasowego w którym nastąpi, od wielkości obciążenia i współczynnika lepkości.

Obciążenie cykliczne. Na ostatnim rysunku 12 podano zmianę przemieszczenia powłoki w czasie, obciążonej pięcioma impulsami ciśnienia. Krzywe 1 ($\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$) i 2 ($\gamma = 1000 \text{ s}^{-1}$) odnoszą się do przypadku obciążenia pięcioma równymi impulsami ($Q = 14,71 \text{ MPa}$, $t_i = 20 \mu\text{s}$) o jednakowej długości cykli wynoszącej $200 \mu\text{s}$, zaś krzywa 3 ($\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$) do przypadku gdy długości cykli nie są jednakowe. W przypadku impulsów o jednakowej długości cykli każdy z impulsów rozpoczynał swoje działanie przed osiągnięciem przez powłokę maksymalnych odkształceń w stanie ściskania. Powodowało to umiarkowane przyrosty przemieszczenia na poszczególnych cyklach. Natomiast w drugim przypadku gdy długości cykli nie były jednakowe każdy z impulsów zaczynał działać w $9 \mu\text{s}$ po osiągnięciu przez powłokę maksymalnych odkształceń w stanie ściskania. Ten niekorzystny moment przyłożenia kolejnego impulsu został wybrany tak jak dla powłoki obciążonej dwoma impulsami. W rezultacie powłoka osiągnęła na poszczególnych cyklach znacznie większe przemieszczenia niż w pierwszym przypadku. W wyniku analizy obliczeń numerycznych dla przypadku działania kilku równych impulsów o jednakowej



Rys. 12. Zmiana przemieszczenia w czasie. Obciążenie pięcioma jednakowymi impulsami o równych i nierównych długościach cykli.

długości cykli stwierdzono, że na cyklu przyrosty przemieszczeń maksymalnych, przyrosty przemieszczeń trwałych, czasy osiągnięcia granicy plastyczności i maksymalnego przemieszczenia na cyklu liczone od chwili przyłożenia kolejnego impulsu mają tendencję do stabilizacji. Ta stabilizacja została osiągnięta dla $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ już po drugim cyklu, natomiast dla $\gamma = 1000 \text{ s}^{-1}$ jest ona mniej wyraźna. Podobne efekty wyraźnej stabilizacji dla $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ stwierdzono w przypadku gdy dla jednakowych impulsów długości cykli nie były jednakowe.

Literatura cytowana w tekście

1. T. WIERZBICKI, *Dynamika powłok lepkoplastycznych*, Rozpr. Inż. 19, 4, 667—730, 1971.
2. N. JONES, *Recent progress in the dynamic plastic behavior of structures*, Massachusetts Institute of Technology, Report No. 78-1.
3. W. E. BAKER, *The elastic-plastic response of thin spherical shells to internal blast loading*, J. Appl. Mech., 27, 139-144, 1960.
4. W. SZCZEPIŃSKI, *Plastic strain of a spherical shell under dynamic loading by internal pressure*, Arch. Mech. Stos. 16, 1207-1214, 1964.
5. T. A. DUFFEY, *Significance of strain hardening and strain rate effects on the transient response of elastic-plastic spherical shells*, Int. J. Mech. Sciences, 12, 1970.
6. T. A. DUFFEY, *Influence of finite duration pressure pulse on the transient response of elastic-plastic strain-rate-sensitive cylindrical and spherical shells*, 1st Inter. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech., Vol. 3 Part E, Germany, September 1971.

7. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., Vol. XX, 321-322, 1963.
8. T. DUFFEY, R. KRIEG, *The effects of strain hardening and strain rate sensitivity on the transient response of elastic-plastic spherical shells*, Int. J. Mech. Sc., 12, 811, 1970.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ УПРУГО — ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ

В работе представлен анализ колебания, в пределе малых деформации, для полной тонкой упруго-вязкопластической оболочки. Оболочка есть нагружена единичным радиальным импульсом давления или несколькими импульсами. Проблем характеризуется сферической симметрией. Определено величину первоначального импульса давления пластифицирующей оболочку. Исследовано влияние вязкости материала на основные параметры колебаний. Рассмотрено также влияние момента приложения повторного импульса и циклического нагружения на величину перемещения.

Summary

OSCILLATIONS OF ELASTOVISCOPLASTIC SPHERICAL SHELL

Oscillations of a complete thin elastoviscoplastic spherical shell is analysed in the range of small strains. The shell is subjected to a radial pressure impulse of rectangular shape or to several impulses. The magnitude of the initial impulse is determined resulting in the yielding of the shell. The influence of the viscosity of the material upon the basic parameters of vibrations is investigated. Also, the influence is considered of the instant of application of the second impulse and of the cyclic loading on the magnitude of deflections.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INST. MECH. KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 października 1978 roku

SPRĘŻANIE TERMICZNE NA PRZYKŁADZIE ZAGADNIENIA
KOŁOWO-SYMETRYCZNEGO¹,

JAN HOLNICKI - SZULC (WARSZAWA)

1. Wstęp

Celem pracy jest sformułowanie i analiza zagadnienia sprężania termicznego na przykładzie kołosymetrycznej tarczy wirującej.

Przez sprężanie rozumiemy sterowanie wymuszonym polem dystorsji pierwotnych $\overset{\circ}{\varepsilon}$, w celu uzyskania (samozrównoważonych) stanów naprężeń wstępnych $\overset{R}{\sigma}$ oraz (nierozdzielnych) stanów odkształceń wstępnych $\overset{R}{\varepsilon}$ takich, które korzystnie regulują stany końcowe $\sigma = \overset{L}{\sigma} + \overset{R}{\sigma}$, $\varepsilon = \overset{L}{\varepsilon} + \overset{R}{\varepsilon}$ gdzie pola $\overset{L}{\sigma}$ i $\overset{L}{\varepsilon}$ są znane i związane z danym obciążeniem zewnętrznym (por. [1, 4, 6]).

Prezentowane w pracy „sprężanie termiczne” stanowi szczególny przypadek opisanej wyżej idei „sprężania wewnętrznego”. Wprowadzanie do ustroju dystorsji za pośrednictwem wymuszania pola temperatury ogranicza możliwości regulacji stanów. Ograniczenia te wpływają na fakt, że pewne rozwiązania wyznaczane dla sprężania termicznego mają bardziej złożoną postać niż rozwiązania uzyskiwane w przypadku ogólnym [6].

Przykładem innej technicznej realizacji sprężania wewnętrznego może być wymuszanie pól dystorsji w ustrojach kratowych poprzez generowanie odpowiednich stanów dyslokacji (wydłużeń i skróceń prętów). [7].

Zajmijmy się przypadkiem ciała izotropowego i ustalonego procesu przepływu temperatury. Dystorsje termiczne działające na ciało przyjmują postać:

$$(1) \quad \overset{\circ}{\varepsilon} = \alpha \theta \delta,$$

gdzie θ — pole temperatury w stosunku do stałej temperatury otoczenia, α — współczynnik rozszerzalności termicznej materiału, δ — tensor jednostkowy.

Pole temperatury musi przy tym spełniać równanie przewodnictwa cieplnego.

$$(2) \quad \nabla \theta = -\frac{w}{\lambda},$$

gdzie λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego w materiale zaś W — pole skalarne źródeł ciepła.

Cechą charakterystyczną sprężania termicznego jest fakt, że nie istnieje możliwość wymuszania beznaprężeniowo odkształceń wstępnych (poza przypadkiem liniowo zmiennych pól $\overset{\circ}{\varepsilon}$) oraz bezodkształceniowo naprężeń wstępnych [6].

¹ Praca wykonana została w ramach współpracy polsko-amerykańskiej (fundusz Marii Skłodowskiej-Curie NO INT 75-08722) na temat „Optymalizacja elementów i systemów konstrukcyjnych”.

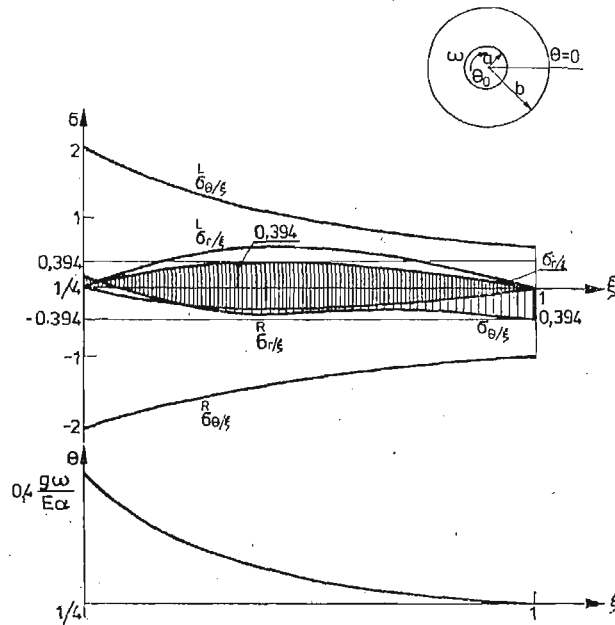
Zatem, poza przypadkiem liniowo zmiennego pola Θ , każdy inny rozkład temperatury wywołuje jednocześnie stany naprężeń i odkształceń wstępnych.

2. Sformułowanie zagadnienia sprężenia termicznego tarczy wirującej

Omówimy przykład tarczy z otworem wirującej ze stałą prędkością kątową ω (rys. 1).

Obciążenie zewnętrzne opisane jest w tym przypadku (pomijając ciężar własny) przez pole masowych sił odśrodkowych
gdzie ρ — masa właściwa materiału.

$$(3) \quad R = \rho \omega^2 r,$$



Rys. 1

Uwzględniając wpływ pola dystorsji na stany naprężeń i odkształceń końcowych przez przyjęcie zmodyfikowanych związków konstytutywnych [2, 6], otrzymujemy układ związków zapisanych dla naszego kołosymetrycznego przypadku w układzie współrzędnych biegunowych:

— równania równowagi

$$(4) \quad \sigma_{r,r} + \frac{1}{\nu} (\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0,$$

$$\sigma_r = 0 \quad \text{dla} \quad r = b,$$

$$\sigma_r = 0 \quad \text{dla} \quad r = a,$$

— warunki nierozdzielności

$$(5) \quad \varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r \varepsilon_{\theta,r} = 0,$$

— związki konstytutywne

$$(6) \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \overset{\circ}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \overset{\circ}{\varepsilon},$$

$$(7) \quad \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) - \overset{\circ}{\sigma},$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) - \overset{\circ}{\sigma},$$

gdzie

$$(8) \quad \overset{\circ}{\varepsilon} = \alpha \Theta, \quad \overset{\circ}{\sigma} = \frac{E}{1-\nu} \alpha \Theta.$$

Wprowadźmy ograniczenia nierównościowe narzucone na końcowy stan naprężeń w postaci:

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma} - &\leq \sigma_r \leq \bar{\sigma}, \\ \bar{\sigma} - &\leq \sigma_\theta \leq \bar{\sigma}, \quad \text{gdzie } \bar{\sigma} > 0. \end{aligned}$$

Jeśli naprężenia $\overset{L}{\sigma}_r$ i $\overset{L}{\sigma}_\theta$, wywołane przez obciążenie zewnętrzne polem sił masowych R ograniczeń tych nie spełniają, interesujący z inżynierskiego punktu widzenia staje się problem poszukiwania pól dystorsji $\overset{\circ}{\varepsilon}$, które minimalizując koszt sprężenia mierzony całką (globalna energia stanu dystorsji):

$$(10) \quad \min \int_V \overset{\circ}{\varepsilon} \overset{\circ}{\sigma} dV$$

wywołują stany wstępne $\overset{R}{\sigma}_r$, $\overset{R}{\sigma}_\theta$ dostosowujące naprężenia końcowe $\sigma_r = \overset{R}{\sigma}_r + \overset{L}{\sigma}_r$, $\sigma_\theta = \overset{R}{\sigma}_\theta + \overset{L}{\sigma}_\theta$ do ograniczeń (9).

Dysponując techniczną możliwością wprowadzania dowolnie rozłożonych źródeł ciepła w, związki (3)+(10) formułują zagadnienie optymalnego sprężania termicznego. Otrzymane zadanie minimalizacji funkcjonatu (10) przy ograniczeniach nierównościowych (9), więzach w postaci czterech równań: (4)¹, (5) i (6) lub (7) oraz dwóch warunków brzegowych (4)² i (4)³ opisuje pięć poszukiwanych funkcji Θ , σ_r , σ_θ , ε_r , ε_θ .

Związek (2) opisuje rozkład źródeł ciepła w, jaki należy wymusić w celu wygenerowania pola temperatur Θ .

3. Przypadek źródeł ciepła rozłożonych na brzegu tarczy

Stan naprężeń użytkowych rozpatrywanej (niesprężonej) tarczy wirującej opisany jest związkami [5]:

$$\overset{L}{\sigma}_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) - \xi^2 \right] \overset{a}{=} \zeta s(\xi),$$

$$(11) \quad \sigma_{\Theta}^L = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\xi^2} \right) - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \xi^2 \right] \stackrel{as}{=} \xi u(\xi),$$

$$\text{gdzie:} \quad \xi = \frac{r}{b} \in \left\langle \frac{a}{b}, 1 \right\rangle, \quad \zeta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2.$$

Omówmy przypadek łagodzenia koncentracji naprężeń w środkowym obszarze tarczy (por. rys. 1) przez zastosowanie sprężania termicznego.

Wartość $\bar{\sigma}$ występującą w ograniczeniach (9) — mniejszą od maksymalnych wartości $\sigma_r^L, \sigma_{\Theta}^L$, przyjmiemy później.

Wprowadźmy dodatkowo ograniczenie dowolności pól temperatur Θ do takich, które mogą być wywołane przez źródła ciepła przyłożone jedynie do brzegu wewnętrznego otworu tarczy (rys. 1). Ograniczenie to uwarunkowane jest względami technologicznymi, ułatwiając realizację wyznaczonego rozkładu temperatur.

Kryterium optymalizacji (10) zbieżne jest w tym przypadku z minimalizacją intensywności źródeł ciepła na obwodzie $r = a$.

Poszukiwane pole temperatury Θ musi spełniać w stanie ustalonym równanie przewodnictwa cieplnego (2) (bez źródeł wewnątrz tarczy: $\nabla \Theta = 0$), które w omawianym zadaniu kołowsymetrycznym przyjmuje postać:

$$(12) \quad \Theta_{rr} + \frac{1}{r} \Theta_r = 0,$$

z warunkiem na brzegu $r = b$;

$$(13) \quad \Theta = 0,$$

Z powyższych związków wynika postać rozkładu temperatur:

$$(14) \quad \Theta = \frac{C}{b} \ln \left(\frac{r}{b} \right)$$

z dokładnością do parametru C , zależnego od intensywności źródła ciepła rozłożonego na obwodzie $r = a$.

Znając pole dystorsji termicznych (14) można określić pole naprężeń wstępnych przez nie wywoływanych (z dokładnością do stałej C).

Podstawiając w tym celu (14) do (6) a następnie wyrażając warunek nierozdzielności (5) przez naprężenia otrzymujemy wraz z równaniem równowagi (pomijając obciążenia zewnętrzne R) układ dwu równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na dwie niewiadome funkcje opisujące naprężenia wstępne: $\sigma_r^R(r), \sigma_{\Theta}^R(r)$ o warunkach brzegowych (4)^{2,3} na okręgach $r = a$ oraz $r = b$. Rugując z tego układu funkcję naprężeń obwodowych dochodzimy do opisu wstępnych naprężeń promieniowych σ_r^R :

$$(15) \quad r^2 \sigma_{rr}^R + (2\nu+1)r \sigma_{r,r}^R + r E \alpha \Theta_r = 0,$$

$$\sigma_r^R|_{r=a} = \sigma_r^R|_{r=b} = 0,$$

gdzie:

$$\Theta_{ir} = \frac{G}{r}.$$

Można sprawdzić, że całka ogólna równania różniczkowego (15)¹ ma postać:

$$(16) \quad \sigma^r = \frac{E\alpha G}{2\nu} \left(\ln r + \frac{a_1}{r^{2\nu}} \right) + a_2,$$

określoną z dokładnością do stałych a_1, a_2 .

Wyznaczając je z warunków brzegowych (15)² otrzymujemy ostatecznie

$$(17) \quad \sigma^r = -z \left[\ln \xi + \frac{\ln \left(\frac{a}{b} \right) a^{2\nu}}{a^{2\nu} - b^{2\nu}} \right] \left(\frac{1}{\xi^{2\nu}} - 1 \right) \stackrel{a^r}{=} zt(\xi),$$

gdzie:
$$z = \frac{E\alpha C}{2\nu}, \quad \xi = \frac{r}{b} \in \left\langle \frac{a}{b}, 1 \right\rangle.$$

Znając rozkład naprężeń promieniowych, można wyznaczyć z (4)¹ naprężenia obwodowe:

$$(18) \quad \sigma_{\theta}^r = -z \left[\ln \xi + \frac{\ln \left(\frac{a}{b} \right) a^{2\nu}}{a^{2\nu} - b^{2\nu}} \left((1-2\nu) \frac{1}{\xi^{2\nu}} - 1 \right) \right] \stackrel{a^r}{=} zw(\xi).$$

Znając naprężenia wstępne wywoływane przez pole temperatur (14), zadanie termosprężania ze względu na spełnienie ograniczeń (9) minimalnym kosztem wprowadzanych dystorsji sprowadza się do minimalizacji parametru:

$$(19) \quad \min z^2,$$

przy ograniczeniach

$$(20) \quad \begin{aligned} \zeta s(\xi) + zt(\xi) &\leq \bar{\sigma}, & \zeta s(\xi) + zt(\xi) &\geq -\bar{\sigma}, \\ \zeta u(\xi) + zw(\xi) &\leq \bar{\sigma}, & \zeta u(\xi) + zw(\xi) &\geq -\bar{\sigma}. \end{aligned}$$

Jeśli wartość $\bar{\sigma}$ ograniczająca naprężenia dopuszczalne jest określona, to przy funkcjach $s(\xi)$, $i(\xi)$, $t(\xi)$, $W(\xi)$ zdefiniowanych wyrażeniami (11), (17), (18), związki (20) opisują zespół warunków określających obszar dopuszczalny na osi liczbowej z , który jest zgodny dla każdego ξ z warunkami (20).

Po znalezieniu tego obszaru, oraz określeniu minimalnej wartości z , można wyznaczyć poszukiwany parametr C (17) określający (por. 14) intensywność źródła ciepła

$$(21) \quad \Theta_b = \frac{c}{b} \ln \left(\frac{a}{b} \right)$$

jakie należy wprowadzić na obwodzie otworu wewnętrznego tarczy wirującej w celu optymalnego termosprężania.

Omawiane zadanie rozwiązano numerycznie przyjmując dane:

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 1, \quad \nu = \frac{1}{4}, \quad \bar{\sigma} = 0,3941\zeta.$$

Wartość $\bar{\sigma}$ ograniczającą naprężenia dobrano tak, aby efekt sprężania był największy. Omawiany przykład reprezentuje zatem zadanie maksymalnego łagodzenia koncentracji naprężeń. Można go wykorzystać do maksymalnego zwiększania nośności ustroju poprzez sprężanie.

Parametr z przybiera w omawianym przykładzie optymalną wartość

$$(22) \quad z = -1,4151\zeta,$$

skąd wynika, obliczając parametr C , że poszukiwane pole temperatury (14) ma rozkład

$$(23) \quad \Theta = -1,4151 \frac{2\nu\zeta}{E\alpha b} \ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

i może być wywołane przez ogrzewanie brzegu otworu wewnętrznego tarczy źródłami ciepła (21) o intensywności (podstawiając dane przykładu)

$$(24) \quad \Theta_0 = 0,3985 \frac{\sigma\omega^2}{E\alpha}.$$

Rozkłady naprężeń radialnych i obwodowych w stanach użytkowym, wstępnym i końcowym pokazano na rys. (1). Widać, że w wyniku termosprężania uzyskano ponad pięciokrotne zmniejszenie ekstremalnych wartości naprężeń.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. MRÓZ, J. E. TAYLOR *Prestress for maximum strength*, Int. J. Solid. Struct. 9, (1973) 1535-1541.
2. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, §§ 4, 8 PWN Warszawa 1970.
3. A. STODOLA, *Dampf — und Gas Turbinen*, wyd. G str. 312 i 889-1924.
4. J. E. TAYLOR *Optimal prestress against buckling. An energy approach*, Int. J. Solid. Struct. 2, 7 (1971).
5. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*. § 14. Arkady Warszawa 1962.
6. J. HOLNICKI-SZULC, *Theory of prestressing I, II*, Bull Acad. Pol. Sci. Techn. 1, 24 (1976).
7. J. HOLNICKI-SZULC, *Prestress of truss and frame structures*, J. Struct. Div. ASCE vol. 105 No ST 3, March 1979.

Резюме

ОБРАЗОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ОСЕСИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В работе рассматривается проблема предварительных термических напряжений. Задача заключается в управлении термическим полем с целью получения требуемого перераспределения напряжений и деформаций в нагруженном упругом сооружении.

Подробно обсуждаются результаты полученные в случае вращающегося диска. Получено оптимальное распределение температуры и указан способ гео реализации.

Summary

THERMAL PRESTRESSING — AN EXAMPLE OF ROTATING DISK

A thermal prestressing problem is formulated in the paper. The prestressing is understood as a control of temperature field in order to produce a convenient redistribution of stress and strain states in a loaded structure.

An example of rotating disk is examined in details. In the result, the optimal distribution of temperature is determined. A technical way producing of such a distribution is also discussed.

IPPT
PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 czerwca 1979 roku.

BIULETYN INFORMACYJNY

IX SYMPOZJUM DRGANIA W UKŁADACH FIZYCZNYCH

W dniach 22—24 maja 1980 r odbyło się w Błażejewku k/Kórniku IX Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”. Sympozjum ma wieloletnią tradycję i jest organizowane co dwa lata przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i Instytut Mechaniki Technicznej Politechniki Poznańskiej. Obecne miało szczególny charakter. Było bowiem połączone z XIX Zjazdem Delegatów PTMTiS. Wspólnym dniem obrad dla Delegatów na XIX Zjazd oraz uczestników IX Sympozjum był czwartek, 22 maja. Podczas przedpołudniowej sesji plenarnej wygłoszono trzy referaty:

1. Józef Więckowski — Dynamika i zastosowania mostów składanych.
2. Józef Wojnarowski — O grafach odwzorowań drgających układów fizycznych.
3. Jarosław Stefaniak — Zagadnienia propagacji fal monochromatycznych w ciałach stałych.

Dalsze obrady odbywały się w sekcjach. Przyjęto następujący podział tematyczny referatów:

- Sekcja I — Modele ciągłe obiektów mechanicznych
Sekcja II — Modele dyskretne obiektów mechanicznych
Sekcja III — Dynamika maszyn i urządzeń.

Podział powyższy miał charakter dość ogólny i był podyktowany nie tylko względami merytorycznymi lecz również organizacyjnymi.

W sekcji I wygłoszono 34 referaty, w sekcji II 23 referaty, w sekcji III 25 referatów. W sesji plenarnej wspólnej dla Delegatów XIX Zjazdu PTMTiS i uczestników IX Sympozjum wzięło udział 217 osób. Uczestników IX Sympozjum było 129. Wśród nich zdecydowaną większość stanowili pracownicy wyższych uczelni i instytutów PAN. Materiały Sympozjum w postaci streszczeń referatów wydano drukiem, nakładem Politechniki Poznańskiej.

Jarosław Stefaniak

XIX ZJAZD DELEGATÓW POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, 21—22 maja 1980 r., Błażejewko

W Zjeździe uczestniczyło 84 delegatów.

Obrady otworzył Przewodniczący Zarządu Głównego prof. dr hab. Marek Dietrich. Powitał przybyłych delegatów oraz zaproszonych gości członków Honorowych PTMTiS prof. prof. Janusza Dietrycha i Zbigniewa Kączkowskiego. Podziękował jednocześnie Zarządowi Oddziału Poznańskiego za podjęcie się organizacji XIX Zjazdu Delegatów Towarzystwa.

Na przewodniczącego Zjazdu powołano prof. J. Stefaniaka (Poznań). Na wiceprzewodniczących Zjazdu wybrano profesorów: A. Olędzkiego (Warszawa) i J. Kruszewskiego (Gdańsk). Na sekretarzy Zjazdu wybrano doc. Sobczyńską-Kończak (Poznań) i doc. A. Tylikowskiego (Warszawa).

Przyjęto następujący porządek obrad:

Pierwszy dzień obrad 21 maja 1980 r.

1. Otwarcie Zjazdu. Wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarzy Zjazdu.
2. Dokonanie wyboru członków honorowych PTMTS.
3. Przyjęcie protokołu z XVIII Zjazdu Delegatów PTMTS odbytego w Ustroniu Zawodziu.
4. Powołanie Komisji Matki i Komisji Skrutacyjnej.

5. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa.
6. „ „ „ finansowego.
7. Informacja o działalności czasopisma — „Mechanika Teoretyczna i Stosowana”.
8. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
9. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich oraz postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem.
10. Zmiany w statucie PTMTS.
11. Wybory:
 - a) przewodniczącego,
 - b) członków Zarządu Głównego,
 - c) Głównej Komisji Rewizyjnej,
12. Sprawy bieżące i wolne wnioski.

W drugim dniu obrad przewidziano sesję naukową połączoną z otwarciem obrad IX Sympozjum PTMTS „Drgania w układach fizycznych” oraz kontynuację obrad Zjazdu Delegatów wg następującego porządku.

13. Dyskusja i uchwalenie generalnych wytycznych działalności PTMTS na następną kadencję.
14. Zamknięcie Zjazdu Delegatów.

Na wniosek Przewodniczącego obrad prof. J. Stefaniaka, zebranie uczcili minutą ciszy pamięć zmarłych w okresie XVIII-ej kadencji członków i pracowników Towarzystwa.

Ad. 1.

Pierwszy punkt porządku dziennego wyczerpano na wstępie.

Ad. 2.

Doc. J. Wojnarowski w imieniu Zarządu Głównego przedstawił wniosek Oddziału Wrocławskiego o nadanie godności członka honorowego profesorowi Igorowi Kisielowi oraz wniosek Oddziału Warszawskiego o nadanie godności członka honorowego profesorowi Janowi Oderfeltowi. Poinformował on Zjazd, że kandydatury były przedstawione i poddane pod głosowanie na Zebraniu Plenarnym Zarządu Głównego.

Delegaci w jawnym głosowaniu jednomyślnie przyjęli wnioski o nadanie godności członków honorowych.

W związku z nieobecnością spowodowaną złym stanem zdrowia nowowybranych Członków Honorowych dyplomy członków honorowych przekazano przewodniczącym Oddziału Wrocławskiego i Oddziału Warszawskiego i zaproponowano, aby oddziały te zorganizowały uroczyste zebrania, na których dyplomy zostaną wręczone.

Ad 3.

Wobec opublikowania protokołu XVIII Zjazdu Delegatów w kwartalniku Mechanika Teoretyczna i Stosowana T. XVI 1978 z. IV zaproponowano nie odczytywać go, a jedynie poddać pod dyskusję.

Ad 4.

Komisję Matkę powołano w następującym składzie: prof. J. Elsner (Częstochowa), doc. J. Gołaś (Opole) i doc. E. Walicki (Bydgoszcz). Komisję skrutacyjną powołano w składzie: doc. A. Ajdukiewicz (Gliwice), doc. W. Gawroński (Gdańsk), doc. M. Trombski (Bielsko-Biała).

Ad 5.

W związku z opublikowaniem sprawozdania za okres XVII kadencji i doręczeniem go wcześniej delegatom, przewodniczący prof. M. Dietrich ograniczył się do krótkiego komentarza i podkreślenia nowych form działalności. Nowością w pracach Zarządu Głównego było przydzielenie na stałe wszystkim członkom Zarządu określonych zadań zgodnie z wytycznymi XVIII Zjazdu Delegatów wskazującego na fakt, że Towarzystwo dobrze wywiązywało się ze swych zadań statutowych w kraju przy dość ograniczonej działalności o charakterze międzynarodowym, zwiększono informacje o międzynarodowych organizacjach rozwijających działalność w zakresie mechaniki (IFTOMM, IUTAM, EUROMECH) adresowane poprzez Przewodniczących Oddziałów do ogółu członków Towarzystwa.

— powołanie dwóch nowych Oddziałów w Lublinie i Bielsku-Białej.

— powołano dwa nowe Oddziały w Lublinie i Bielsku-Białej. W czasie kadencji wystąpiły trudności organizacyjne w pracy biura Zarządu, spowodowane zmianami na stanowisku kierowniczym. Na zakoń-

czenie Przewodniczący Z. G. podkreślił duży wkład pracy doc. J. Wojnarowskiego w przygotowaniu materiałów do sprawozdania i wydania go drukiem.

Ad 6.

Sprawozdanie finansowe złożył skarbnik doc. E. Radwański. (Szczegółowy tekst włączony został do akt Zjazdu). Podsumowując wystąpienie zaapelował o realniejsze planowanie wydatków Towarzystwa i wykonywanie planów finansowych.

Ad 7.

Prof. Z. Olesiak zapoznał delegatów z historią i aktualną działalnością kwartalnika „Mechanika Teoretyczna i Stosowana” (Pełny tekst wystąpienia włączony został do akt Zjazdu).

Ad 8.

Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył jej Przewodniczący prof. dr Z. Kączkowski. (Tekst włączono do akt Zjazdu).

Ad 9.

Przewodnictwo obrad przejął prof. A. Olędzki. W dyskusji nad sprawozdaniami zabrali głos: Prof. J. Dietrych, prof. Sz. Borkowski, prof. A. Olędzki, Doc. dr Z. Rotter, dr Świder, doc. Walicki, prof. Z. Osiński, prof. Brzuchowski, doc. J. Wojnarowski, prof. Z. Kączkowski i doc. W. Szuścik. Dyskutanci podkreślali, że swoboda i bezinteresowność są cechami działalności Towarzystwa. Wiele wypowiedzi zawierało wyjaśnienia odnoszące się do uwag i zastrzeżeń zawartych w sprawozdaniu Głównej Komisji Rewizyjnej. Podkreślano, że wiele uwag szczegółowych zawartych w sprawozdaniu Komisji było spowodowanych oparciem się w pracach Komisji na sprawozdaniach nadesłanych do 24 kwietnia br. i oddzielną oceną działalności w roku 1978 i 1979 a nie oceną całej kadencji. Dyskutanci wysoko ocenili działalność merytoryczną zwłaszcza zebrania naukowe w formie dyskusji „okrągłego Stolu oraz kwartalnik „Mechanika Teoretyczna i Stosowana”. Stwierdzono, że należy dążyć do podniesienia poziomu konkursów naukowych między innymi poprzez zwiększenie liczby uczestników i szerszego udziału naukowców w pracach Sądu konkursowego spoza ośrodka organizującego konkurs.

Po zakończeniu dyskusji Z-ca przewodniczącego Zjazdu prof. A. Olędzki postawił wniosek o udzielenie absolutorium ustępującemu Zarządowi Głównemu.

Wniosek przyjęto w głosowaniu jawnym przy wstrzymaniu się od głosowania osób, które wchodziły w skład byłego Zarządu.

Ad 10.

Prof. E. Bielewicz przedstawił propozycje dotyczące zmian w statucie Towarzystwa dotyczące wprowadzenia oprócz istniejących rodzajów członkostwa (zwyczajnego i honorowego) również członkostwa wspierającego. Jednocześnie postawił w imieniu Zarządu Głównego wniosek o zmniejszenie składek członkowskich PTMTS dla członków emerytowanych do wysokości zł. 1. — rocznie.

W dyskusji udział wzięli: prof. Dietrich, prof. Z. Osiński, doc. Dems, dr Pillich, prof. Z. Olesiak, prof. Brzuchowski, dr Rakowski.

Zjazd jednomyślnie zaakceptował propozycje zmian z tym, że staną się one obowiązujące po zatwierdzeniu ich przez władze rejestracyjne — Urząd Miasta Stołecznego Warszawy. Zjazd uchwalił przy 1 głosie wstrzymującym się wysokość składek dla członków emerytów w wysokości 1 złotego. Uchwała obowiązuje od 1-go stycznia 1980 r.

Przewodnictwo obrad przejął prof. Kruszewski.

Ad 11

Przewodniczący Komisji Skrutacyjnej doc. A. Ajdukiewicz poinformował, że na Zjazd przybyło 84 Delegatów w związku z czym, uchwały mogą być prawomocne.

Przewodniczący Komisji Matki prof. J. Elsner, zgłosił kandydaturę prof. Marka Dietricha na przewodniczącego Zarządu Głównego, kandydatury do Zarządu Głównego:

Doc. W. Bachmacza

prof. E. Bielewicz

prof. K. Biernatowskiego

doc. S. Kasprzyka

prof. Z. Olesiaka

doc. E. Radwańskiego

prof. J. Stefaniaka

doc. A. Tylikowskiego
 doc. W. Walczaka
 doc. A. Wilczyńskiego
 doc. J. Wojnarowskiego

do Głównej Komisji Rewizyjnej:

prof. Sz. Borkowskiego
 doc. K. Grudzińskiego
 prof. Z. Kączkowskiego
 prof. H. Mikołajczaka

Prof. Z. Kączkowski wysunął kandydaturę dra K. Borsuka do Głównej Komisji Rewizyjnej. Wywiązała się dyskusja na temat liczby członków Gł. Komisji Rewizyjnej. Zabierali w niej głos prof. Elsner, doc. Szuszcik, prof. Osiński.

Prof. Z. Kączkowski zgłosił wniosek o wybór Komisji w składzie 5-ciu osób.

Większością głosów wniosek ten (przy 9-ciu głosach przeciwnych) przeszedł. W związku z tym, dodatkowo zgłoszono kandydatury doc. M. Trombskiego, doc. K. Grossmana i doc. Parkitnego.

W wyniku głosowania tajnego Przewodniczącym Zarządu głównego wybrano prof. Marka Dietricha (65 głosów), do Zarządu Głównego wybrano następujących kolegów: doc. Bachmacza (58 głosów), prof. E. Bielewicz (72), prof. K. Biernatowskiego (69), doc. S. Kasprzyka (57), prof. Z. Olesiaka (75), doc. E. Radwańskiego (68), Prof. J. Stefaniaka (69), doc. A. Tylikowskiego (68), doc. W. Walczaka (66), doc. J. Wojnarowskiego (58), oraz na zastępcę członka Zarządu doc. A. Wilczyńskiego (44). Do Głównej Komisji Rewizyjnej wybrano: prof. Sz. Borkowskiego (75), dr K. Borsuka (64), doc. K. Grudzińskiego (65), prof. Z. Kączkowskiego (72), prof. H. Mikołajczaka (59).

Prof. M. Dietrich w serdecznych słowach podziękował za ponowny wybór na stanowisko przewodniczącego Zarządu Głównego.

Ad 12.

Skarbnik doc. E. Radwański poinformował Zjazd o wynikach kontroli NTK działalności finansowej Towarzystwa.

W drugim dniu obrad przewodnictwo objął prof. J. Stefaniak i udzielił głosu Przewodniczącemu Zarządu Głównego XIX kadencji prof. M. Dietrichowi.

Przewodniczący poinformował Zjazd o zebraniu wybranych członków Zarządu Głównego odbytym w dniu 21 maja br. oraz o pierwszym zebraniu plenarnym Zarządu Głównego odbytym w dniu 22 maja br, na którym nowowybrany Zarząd ukonstytuował się następująco:

Prof. Marek Dietrich — Przewodniczący (z wyboru)
 Prof. Eugeniusz Bielewicz — Z-ca Przewodniczącego
 Prof. Zbigniew Olesiak — „ „ „ „
 Doc. Józef Wojnarowski — Sekretarz Generalny
 Doc. Edward Radwański — Z-ca Sekr. Generalnego
 Doc. Andrzej Tylikowski — Skarbnik
 Doc. Waldemar Bachmacz — Z-ca Skarbnika

Prof. Z. Kączkowski poinformował, że Główna Komisja Rewizyjna ukonstytuowała się w następującym składzie:

Prof. Zbigniew Kączkowski — Przewodniczący
 Prof. Szczepan Borkowski — Z-ca Przewodniczącego
 Dr Kazimierz Borsuk — Członkowie
 Prof. Henryk Mikołajczak — „ „
 Doc. Karol Grudziński — „ „

Prof. M. Dietrich przedstawił wytyczne jakimi Zarząd Główny ma zamiar kierować się w swojej działalności.

Są to:

- zachowanie i rozwój dotychczasowych form działalności,
- rozwijanie kontaktów międzynarodowych,
- dążenie do reprezentacji Towarzystwa w organach międzynarodowych.
- pomoc członkom PTMTS w publikowaniu prac w czasopismach zagranicznych.

— utrzymanie i poszerzenie specjalistycznych sympozjów w tym również przez Oddziały, które dotychczas nie stosowały tej formy działalności.

— podniesienie rangi konkursów naukowych,

— porządkowanie spraw organizacyjnych i formalnych,

— gromadzenie i porządkowanie informacji o działalności Towarzystwa.

— poprawa współpracy z Główną Komisją Rewizyjną poprzez szczegółowe kontrole bieżące Zarządu przez Komisje Rewizyjne oraz analityczne oceny pracy za okres kadencji.

W dyskusji nad generalnymi wytycznymi działalności Towarzystwa, udział wzięli doc. W. Tarnowski, prof. M. Dietrich, prof. J. Stefaniak, prof. E. Brzuchowski, prof. J. Antoniak, doc. Z. Rotter, doc. Wernerowski, prof. Z. Kączkowski, doc. J. Wojnarowski. Dyskutanci poruszali problemy współpracy między Zarządem Głównym a Główną Komisją Rewizyjną oraz Zarządami Oddziałów i Komisjami Rewizyjnymi Oddziałów. Większość mówców była zdania, że Komisje Rewizyjne winny opracowywać sprawozdanie syntetycznie, oceniając ocenę działalności merytorycznej, natomiast szczegółowe kontrole i wskazówki winny być przeprowadzane na bieżąco. Wskazywano również na potrzebę kontroli przez Główną Komisję Rewizyjną, Komisji Rewizyjnych Oddziałów.

Ze spraw merytorycznych zaproponowano obowiązkowe przedstawienie przez doktorantów swoich osiągnięć na zebraniach naukowych Towarzystwa i jeśli to możliwe poza miejscowością zatrudnienia np. w środowisku recenzenta spoza uczelni lub instytutu doktoranta. Podkreślono potrzebę podniesienia poziomu konkursów na najlepsze prace naukowe. Zaproponowano w tym celu lepszą propagandę konkursów poza ośrodkami organizacyjnymi oraz większy udział PTMTS spoza ośrodka organizującego w pracach Sądu Konkursowego.

Na tym dyskusję zakończono akceptując plan pracy Zarządu. Na zakończenie prof. M. Dietrich złożył profesorom J. Stefaniakowi i M. Cempłowi oraz całemu Zarządowi Oddziału Poznańskiego (nowemu i poprzedniemu) podziękowania za sprawne zorganizowanie Zjazdu delegatów i Sesji Naukowej oraz gościnne przyjęcie.

Podziękował również Delegatom za liczne przybycie, dyskutantom za aktywny udział w obradach Zjazdu.

Na tym obrady XIX Zjazdu zakończono.

*Zofia Sobczyńska-Kończak
Andrzej Tylikowski*

ZARZĄDY ODDZIAŁÓW POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ. KADENCJA 1980—82 r.

1. Bielsko-Biała

Przewodniczący	— prof. Stanisław	Gdula
Wiceprzewodniczący	— dr. Zbigniew	Banet
Sekretarz	— dr. Stanisław	Wojciech
Skarbnik	— dr. Andrzej	Sucheta
Członek Zarządu	— doc. Janusz	Bogusławski

2. Bydgoszcz

Przewodniczący	— doc. Edward	Walicki
Wiceprzewodniczący	— doc. Stanisław	Siólkowski
Sekretarz	— mgr Andrzej	Golik
Skarbnik	— mgr Mirosław	Molec
Członek Zarządu	— dr. Józef	Szala
Członek Zarządu	— dr. Marian	Szymański

3. Częstochowa

Przewodniczący	— prof. Janusz	Elsner
Wiceprzewodniczący	— doc. Ryszard	Parkitny
Sekretarz	— doc. Roman	Wolański

3. Częstochowa c.d.

Skarbnik	— dr	Józef	Zajdel
Członek Zarządu	— doc.	Waldemar	Bachmacz
Członek Zarządu	— dr hab.	Lech	Tomski
Z-ca Człon. Zarządu	— doc.	Stefania	Stachura
Z-ca Człon. Zarządu	— dr	Janusz	Wilczyński

4. Gdańsk

Przewodniczący	— prof.	Jan	Kruszewski
Wiceprzewodniczący	— doc.	Wojciech	Pietraszkiewicz
Sekretarz	— dr	Edmund	Wittbrodt
Skarbnik	— dr	Czesław	Branicki
Członek Zarządu	— dr	Zbigniew	Powierża

5. Gliwice

Przewodniczący	— doc.	Walery	Szuścik
Wiceprzewodniczący	— doc.	Wojciech	Tarnowski
Sekretarz	— dr	Wojciech	Pillich
Skarbnik	— dr	Remigiusz	Ćwik
Z-ca Sekretarza	— dr	Jerzy	Kuczyński
Z-ca Skarbnika	— dr	Henryk	Skowron
Z-ca Członka Z-du	— doc.	Zbigniew	Gębicki
Z-ca Członka Z-du	— dr	Józef	Suchoń

6. Kraków

Przewodniczący	— prof.	Wiesław	Krzyś
Z-ca przewodnicząc.	— doc.	Stanisław	Bednarz
Sekretarz	— doc.	Jan	Ryś
Skarbnik	— dr	Maria	Baczyńska
Członek Zarządu	— doc.	Stanisław	Kasprzyk
Z-ca Członka Z-du	— dr	Stanisław	Michałowski
Z-ca Członka Z-du	— dr	Lech	Głuch
Z-ca Członka Z-du	— dr	Jerzy	Wapiennik

7. Lublin

Przewodnicząca	— doc.	Zdzisława	Rotter
Z-ca przewodnicząc.	— doc.	Kazimierz	Szabelski
Sekretarz	— dr	Jan	Golec
Skarbnik	— doc.	Krzysztof	Wierzcholski
Z-ca Sekretarza	— dr	Elżbieta	Polonis
Z-ca Skarbnika	— dr	Antoni	Molicki

8. Łódź

Przewodniczący	— doc.	Janusz	Lipiński
Z-ca przewodnicząc.	— doc.	Marian	Królak
Sekretarz	— dr	Krzysztof	Dems
Skarbnik	— doc.	Piotr	Klemm
Członek Zarządu	— doc.	Sylwester	Konieczny

9. Opole

Przewodniczący	— doc.	Maciej	Gryczmański
Z-ca przewodnicząc.	— doc.	Jerzy	Gołaś
Sekretarz	— dr	Tadeusz	Smoleń
Skarbnik	— dr	Tomasz	Dziadek
Członek Zarządu	— doc.	Jan	Kubik

10. Poznań

Przewodniczący	— prof.	Czesław	Cempel
Wiceprzewodniczący	— prof.	Henryk	Mikołajczak
Sekretarz	— dr	Andrzej	Litewka
Skarbnik	— dr	Ryszard	Dzięcielak
Członek Zarządu	— dr	Jan	Kołodziej
Z-ca Członka Z-du	— prof.	Romuald	Świtka

11. Rzeszów

Przewodniczący	— prof.	Jan	Woźniacki
Sekretarz	— dr	Zbigniew	Oniszczuk
Skarbnik	— dr	Jerzy	Ledziński
Członek Zarządu	— dr	Joanna	Gibalewicz

12. Szczecin

Przewodniczący	— doc.	Czesław	Mickiewicz
Wiceprzewodniczący	— doc.	Karol	Grudziński
Sekretarz	— dr	Alfred	Stępniewski
Skarbnik	— dr	Jerzy	Honczarenko
Członek Zarządu	— mgr		Mieczysław Kosecki

13. Warszawa

Przewodniczący	— prof.	Andrzej	Oleńdzki
Wiceprzewodniczący	— doc.	Stanisław	Dubiel
Sekretarz	— doc.	Andrzej	Tylikowski
Skarbnik	— doc.	Przemysław	Jastrzębski
Z-ca Sekretarza	— prof.	Jerzy	Maryniak
Z-ca Skarbnika	— prof.	Wanda	Szemplińska-Stupnicka
Członek Zarządu	— prof.	Stanisław	Łukasiewicz

14. Wrocław

Przewodniczący	— prof.	Eugeniusz	Brzuchowski
Wiceprzewodniczący	— doc.	Bertold	Łysik
Sekretarz	— dr	Jerzy	Sąsiadek
Skarbnik	— dr	Ryszard	Izbicki
Członek Zarządu	— doc.	Mirosław	Werszko
Członek Zarządu	— doc.	Franciszek	Romanów

15. Zielona Góra

Przewodniczący	— doc.	Edward	Goss
----------------	--------	--------	------

WYKAZ KONFERENCJI I SYMPOZJÓW Z DZIEDZINY MECHANIKI ORGANIZOWANYCH W POLSCE W 1981 ROKU

1. Metody badania własności mechanicznych skał i gruntów w laboratorium in situ.

luty

Organizator: Instytut Geomechaniki Górniczej AGH, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków

2. Osiągnięcia w badaniach i projektowaniu pędników okrętowych.

11—13 luty, Gdańsk

Organizator: Instytut Maszyn Przepływowych PAN, ul. Gen. J. Fiszerza 14, 80-952 Gdańsk

3. Międzynarodowe Sympozjum nt. Powstawanie i propagacja szczelin.

22—28 marzec, Tuczno

Organizator: Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych IPPT PAN, IUTAM i CISM, Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa

4. II Seminarium Zespołu Mechaniki Zniszczenia Materiałów Komitetu Mechaniki PAN nt. Teoretyczne i doświadczalne problemy mechaniki zniszczenia.
kwiecień lub listopad, Częstochowa
Komitet Mechaniki PAN, Instytut Maszyn Politechniki Częstochowskiej, prof. S. Kocańda
5. Sympozjum polsko-włoskie nt. Nowe zagadnienia w mechanice ciał odkształcalnych.
14—20 czerwiec, Jabłonna
Organizator: Komitet Mechaniki PAN, prof. H. Zorski
6. Euromech 149 nt. Fale naprężenia w ciałach niesprężystych.
22—27 czerwiec, Jabłonna
Organizator: Komitet Mechaniki PAN, doc. W. K. Nowacki
7. Szkoła letnia nt. Materiały z pamięcią kształtu.
29. 06—4 lipiec, Jabłonna
Organizator: Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych IPPT PAN, 00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21,
8. XXIII Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego
wrzesień
Organizator: Komitet Mechaniki PAN, Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych IPPT PAN, ul. Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa, prof. D. Roguła
9. XV Międzynarodowe Sympozjum nt. Współczesne metody i problemy mechaniki cieczy i gazów.
6—12 wrzesień, Jachranka
Organizator: Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT, ul. Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa
10. Euromech nt. Fale uderzeniowe.
14—16 wrzesień, Jabłonna
Organizator: Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT PAN.
11. IV CISM-IFTOMM Sympozjum Teorii i Praktyki Robotów i Manipulatorów
8—12 wrzesień
Organizator: CISM-Udine, IFTOMM, i Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa PW, Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej, ul. Nowowiejska 22/24, 00-665 Warszawa, prof. A. Morecki
12. Euromech ISO. Analiza stateczności drugą metodą Lapunowa i jej zastosowanie w mechanice.
4—10 październik, Jabłonna
Organizator: Komitet Mechaniki PAN, prof. R. Gutowski
13. Problemy losowe w mechanice konstrukcji.
14—15 listopad, Gdańsk
Organizator: Instytut Konstrukcji Budowlanych Politechniki Gdańskiej, ul. Majakowskiego 11, 80-952 Gdańsk i PTMTS prof. E. Bielewicz
14. Wybrane zagadnienia z mechaniki gruntów i fundamentowania.
Jabłonna
Organizator: Instytut Budownictwa Wodnego PAN, ul. Cystersów 11, 80-953 Gdańsk-Oliwa.

W następnym zeszycie ukażą się prace:

N. CYGANOWA, Badanie charakteru wariacyjnego zasady Jourdaina i jej związku z ogólnymi twierdzeniami dynamiki.

Исследование вариационного характера принципа Журдена и связи его с общими теоремами динамики.

On variational character of Jourdain's principle and its relations with general theorems of dynamics.

Z. GABRYSZEWSKI W. SRÓDKA, Zastosowanie temperatury sprzężonej z odkształceniami do oceny dysypacji energii i wyznaczania granic plastyczności.

Применение температуры сопряжённой с деформациями для оценки энергии и определения предела пластичности.

The effect of temperature coupled with strains for estimation of energy dissipation and determination of the yield limit.

A. KISIEL S. PIĘCZYK, Reologiczne efekty prętów metalowych równocześnie zginanych i rozciąganych.

Реологические эффекты в изгибаемых и растягиваемых металлических балках.

Reological effects in metal beams and tension.

W. I. ANDRZEJEW, Zagadnienia koncentracji naprężeń w otoczeniu otworów w ośrodku niejednorodnym. Cz. II.

Вопросы концентрации напряжений вблизи отверстий в неоднородной среде Ч. II.

Stress concentration in the neighbourhood of holes in a nonhomogeneous medium. Part II.

G. GASTAK, Pełzanie cienkich powłok w zakresie dużych odkształceń.

Ползучесть тонких оболочек вращения по теории установившегося течения.

Creep of thin axially-symmetric shells based on the theory of plastic flow.

A. GAŁKA, O formułowaniu dwuwymiarowych zagadnień brzegowych teorii sprężystości.

О построении двухмерных краевых задач в теории упругости.

Construction of two-dimensional boundary value problems in the theory of elasticity.

W. BUBIEŃ K. SZABELSKI, Metoda symulacji złożonych obciążeń stochastycznych w badaniach zmęczeniowych elementów.

Метод симуляции сложных стохастических нагрузок в усталостных исследованиях элементов.

A method of simulation of the complex stochastic loads in the fatigue tests of elements.

T. SOŁKOWSKI, Płynięcie kołnierza przy kształtowaniu wytłoczki z niejednorodnej blachy anizotropowej.

Течение фленца при глубокой вытяжке деталей из неоднородного анизотропного материала.

Flow of the flange in deep drawing of shells from a non-homogeneous anisotropic sheet metal.

B. WOSIEWICZ, O pewnej interpretacji metod energetycznych dla problemów filtracji ustalonej.

К интерпретации энергетических методов решения задач стационарной фильтрации.

An interpretation of variational methods for steady seepage problems.

M. NOWAK A. WŁOSNOWICZ, Zmiany struktury poliamidu 6 w procesie niszczenia zmęczeniowego.

Исследование механизма усталостного разрушения полиамида (тарнамида Т-27).

Variation of polyamid 6 structural parameters resulting from fatigue failure process.

W. KORDYLEWSKI H. KRUCZEK, Numeryczne modelowanie zapłonu cząstki paliwa stałego.

Численное моделирование процесса воспламенения частицы твердого топлива.

Single particle of solid fuel ignition modelling.

J. LEVRECHT, Naddźwiękowy przepływ w obszarze wylotowym dośrodkowego wieńca kierującego.

Модель сверхзвукового течения за центростремительной решеткой.

Supersonic outlet flow in a centri petal blade cascade.

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
półrocznie zł 60.—
rocznie zł 120.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku bieżącego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmują RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy. Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17 pokój 1724)

Mech. Teor. T. 18, z. 4, s. 517—664, Warszawa 1981, Indeks 36523