

J 11 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



PL ISSN 0079-3701

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 18 · ZESZYT 3

WARSZAWA 1980

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

A. ТОВАТА, J. КЛЕРАСЗКО, J. GRONOSTAJSKI, <i>Dynamiczne rozciąganie próbek metalowych przy użyciu młota rotacyjnego</i> <i>Испытание металлических образцов при ударном растяжении на ротационном молоте.</i> <i>Dynamic tensile test of metals with rotational hammer</i>	351
M. PIWESKI, <i>Próby statycznego i dynamicznego skręcania w zastosowaniu do oceny zdolności do odkształceń twardych stali</i> <i>Испытания на статическое и динамическое кручение в применении к оценке способности к деформации твердых сталей.</i> <i>Static and dynamic torsion tests in application to valuation of ability to deformation of hard steels</i>	371
J. STEFANIAK, J. JANKOWSKI, <i>Plaskie fale harmoniczne i dyfuzja w ciele stalym</i> <i>Плоские гармонические волны и диффузия в твёрдом теле</i> <i>Plane harmonic waves and diffusion in a solid body</i>	383
Z. DŻYGADŁO, <i>Problemy obliczania powłok w turbinowych silnikach lotniczych</i> <i>Проблемы расчёта оболочек в турбинных авиационных двигателях</i> <i>On the problems of shell calculations for the aircraft turbine engines</i>	391
J. KOKOT, Z. OLESIAK, <i>O osobliwości naprężeń w zagadnieniu skręcania stemplem pierścieniowym</i> <i>Особенности напряжений в задаче о кручении с кольцевой областью контакта.</i> <i>On stress singularities in torsion by an annulus</i>	401
J. KOLENDA, <i>Wymuszone drgania giętne podatnie podpartego asymetrycznego walu</i> <i>Вынужденные изгибные колебания асимметрического вала на податливом фундаменте.</i> <i>Forced flexural vibrations of a flexible supported asymmetrical shaft</i>	413
A. GAWEŃSKI, A. BORUSZAK, <i>Przybliżona teoria skręcania swobodnego ortotropowych prętów przyrównanych</i> <i>Приближённая теория свободного кручения призматических стержней.</i> <i>An approximate solution of torsion of anisotropic prismatic bars</i>	431
W. ZWOLIŃSKI, <i>Analiza płyty kołowej grubej o ortotropii cylindrycznej spoczywającej na sprężystym podłożu</i> <i>Толстая круглая цилиндрическая ортотропная плита на упругом основании</i> <i>A thick ortotropic circular plate on an elastic foundation</i>	449
K. TUSTANOWSKA-KAMROWSKA, <i>Rozwiązanie uproszczonych równań strumienia swobodnego metodą elementów skończonych</i> <i>Решение упрощённых уравнений осесимметричной свободной струи методом конечных элементов.</i> <i>The numerical solution of a simplified free round jet equations using the finite element method</i>	463
A. ZMITROWICZ, <i>Drgania układu prętowego z tarciem Coulomba na powierzchni nieciągłości</i> <i>Колебания стержневой системы с трением Кулона на поверхности неперывности.</i> <i>Vibrations of a rod system with Coulomb friction at discontinuity surface</i>	475
BIULETYN INFORMACYJNY	507

74 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 8 • Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 8 0
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR,
ANDRZEJ SZANIAWSKI — REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR,
MONIKA WĄGROWSKA — REDAKTOR,
ELŻBIETA OLSZEWSKA — SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN. pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 680, Ark. wydawniczych 12,5. Ark. drukarskich 10,5. Papier offs. V kl. 71 g, 70 × 100.
Oddano do składania 17.VII.1980 r. Druk ukończono w lutym 1981 r. Zam. 970/12/80 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

DYNAMICZNE ROZCIĄGANIE PRÓBEK METALOWYCH PRZY UŻYCIU MŁOTA ROTACYJNEGO

ANDRZEJ TOBOTA, JANUSZ KLEPACZKO, JERZY GRONOSTAJSKI,
(WROCLAW, WARSZAWA, WROCLAW)

I. Wstęp

Rezultaty badań doświadczalnych dotyczące własności metali odkształcanych z dużymi prędkościami wskazują, że podstawową przyczyną różnic w zachowaniu się metali podczas dynamicznego i statycznego obciążania jest czułość materiału na prędkość odkształcenia. Zjawisko to jest intensywnie badane od szeregu lat, a zainteresowanie nim wynika zasadniczo z dwóch przyczyn. Z jednej strony znajomość własności plastycznych metali ma podstawowe znaczenie dla analizy procesów obróbki plastycznej, w których odkształcenie materiału odbywa się z podwyższonymi lub dużymi prędkościami. Z drugiej natomiast strony badania takie posiadają istotne znaczenie poznawcze, przyczyniając się do głębszego zrozumienia zjawisk fizycznych, zachodzących w odkształcanym materiale.

Uzyskiwanie informacji o własnościach plastycznych metali odkształcanych w bardzo krótkich przedziałach czasu stanowi poważny problem techniczny. Wynika to z wielu trudności w technice eksperymentu spowodowanych krótkotrwałością zjawisk oraz koniecznością stosowania specjalnych metod badawczych i elektronicznej aparatury pomiarowej. Stąd większość badań w tym zakresie przeprowadza się przy prostych schematach obciążeń, jakie występują w próbach rozciągania, ściskania, skręcania i prostego ścinania.

O ile wśród metod dynamicznego ściskania technikę zmodyfikowanego pręta Hopkinsona można traktować jako próbę najbardziej rozpowszechnioną w skali światowej [1, 2], to w przypadku prób dynamicznego rozciągania trudno jest wyróżnić jakąkolwiek dominującą metodę. Niewątpliwie próba jednoosiowego dynamicznego rozciągania próbek zarówno walcowych jak i płaskich jest jednym z ważniejszych sposobów badań własności plastycznych materiałów. Odgrywa ona bowiem identyczną rolę jak próba rozciągania dla obciążeń statycznych.

Dynamiczna próba rozciągania jest jedną z najwcześniej wprowadzonych i stosowanych. Dotychczas w literaturze opisano szereg urządzeń przy użyciu których jest ona realizowana. Ze względu na rodzaj wykorzystywanej w nich energii, urządzenia te można podzielić na dwie grupy. Są to:

1. Urządzenia wykorzystujące energię kinetyczną dużej masy, która z określoną prędkością uderza w koniec próbki, podczas gdy drugi jej koniec jest utwierdzony. Stosuje się tu takie urządzenia jak: młoty wahadłowe ($0,5 \text{ ms}^{-1} < v < 5 \text{ ms}^{-1}$) [3,4], młoty

spadowe ($1,0 \text{ ms}^{-1} < v < 10 \text{ ms}^{-1}$) [5,6] oraz młoty rotacyjne ($1,0 \text{ ms}^{-1} < v < 50 \text{ ms}^{-1}$). Dla poszczególnych urządzeń podano orientacyjne granice prędkości wymuszenia mechanicznego v (prędkości uderzenia).

2. Urządzenia wykorzystujące energię potencjalną ośrodka pośredniczącego (ciśnienie powietrza, wody lub produktów spalania), która jest przekazywana zazwyczaj na tłok poruszający koniec próbki. Można tu wymienić prace [7] i [8].

Omówienie problemów konstrukcyjnych i pomiarowych spotykanych w wymienionych urządzeniach, za wyjątkiem młota rotacyjnego, wykracza poza ramy niniejszej pracy. Niektóre z nich zostały przedyskutowane w podanych wyżej opracowaniach.

Stosowanie młotów rotacyjnych rozpoczęto stosunkowo dawno. Pierwsze konstrukcje datują się z lat trzydziestych [9], jednak pozbawione były one elektronicznej techniki pomiarowej. W badaniach określano jedynie pracę odkształcenia plastycznego próbki w funkcji prędkości wymuszenia mechanicznego.

Jedną z pierwszych konstrukcji, w której zastosowano pomiary elektroniczne, jest urządzenie opisane w pracy [10]. Do pomiaru siły rozciągania zastosowano dynamometr z fotokomórką, dla rejestracji przemieszczenia jednego z uchwytów próbki użyto również fotokomórki. Przebiegi siły w funkcji przemieszczenia fotografowano na oscyloskopie katodowym. Niektóre wyniki uzyskane przy użyciu tego urządzenia przedstawiono w pracy [11].

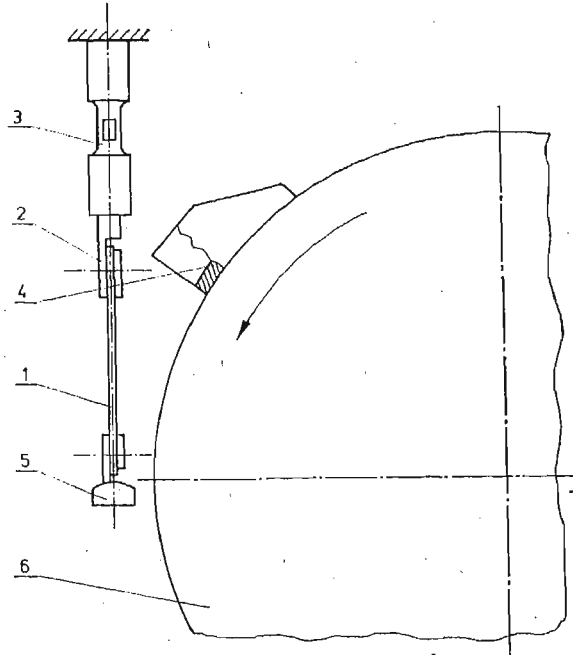
Obecnie młoty rotacyjne typu RSO produkcji WPM Lipsk są rozpowszechnione w wielu krajowych laboratoriach. W urządzeniach tych stosuje się system pomiaru siły czujnikami piezokwarcowymi, a w pomiarze przemieszczeń wykorzystuje się fotokomórkę. Niewielkie zainteresowanie młotami typu RSO do wyznaczania dynamicznych krzywych umocnienia jest spowodowane, jak się wydaje, zastosowanym systemem pomiaru siły, który znacznie utrudnia prawidłową interpretację uzyskiwanych wyników.

Z uwagi na brak bardziej szczegółowych analiz dotyczących tego zagadnienia, podjęto badania na urządzeniu wspomnianego typu, dokonując odpowiednich usprawnień systemu pomiarowego siły oraz wskazując sposób interpretacji otrzymywanych oscylogramów.

2. Zasada działania urządzenia i zastosowane metody pomiarowe

Schemat rozciągania próbek przy użyciu młota rotacyjnego przedstawiony jest na rys. 1. Rozciągana próbka 1 jest zamocowana w nieruchomym uchwycie 2, który połączony jest szeregowo z dynamometrem 3. Drugi koniec próbki, do którego przymocowano kowadło dolnego uchwytu 5, po uderzeniu przez pazur 4, porusza się z odpowiednio dużą prędkością v . Próbka poddawana jest rozciąganiu jedynie po zazębieniu kowadła z pazurem, który jest zamocowany na kole udarowym 6. Pazur zwalniany jest przez czujnik elektromagnetyczny przez określonej prędkości obrotowej koła zamachowego młota. Prędkość uderzenia v w dynamicznej próbie rozciągania posiada bardzo istotne znaczenie, bowiem stanowi podstawę przy określaniu prędkości odkształcenia. Stwierdzono, że pomiar prędkości za pomocą zainstalowanego fabrycznie w młocie rotacyjnym miernika prędkości, obciążony jest dość znacznym błędem. Wobec tego podjęto próbę wyznaczenia prędkości v inną metodą. W tym celu wykorzystano fotokomórkę,

która jest zamocowana nieruchomo do korpusu młota. Przesłona przytwierdzona do wału koła udarowego, obracając się wraz z nim, przecina przy każdym obrocie koła padający na fotokomórkę strumień światła. Impulsy z fotokomórki kierowane na wejście dwu-



Rys. 1. Schemat rozciągania próbek na młocie rotacyjnym. 1-próbka, 2-górny uchwyt, 3-dynamometr, 4-pazur, 5-dolny uchwyt, 6-koło zamachowe.

kanałowego oscyloskopu typu OKD-514A z wewnętrznie wyzwalaną podstawą czasu pozwalają zmierzyć czas trwania jednego obrotu. Otrzymywany przebieg jest fotografowany. Znając drogę pazura odpowiadającą jednemu obrotowi można obliczyć prędkość v . I tak np. przy wskazaniach fabrycznego miernika 10 ms^{-1} wyliczona prędkość wynosiła $8,1 \text{ ms}^{-1}$.

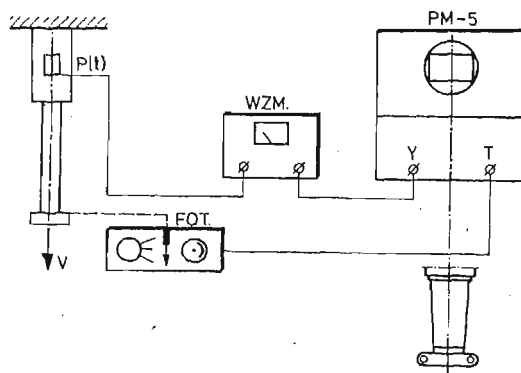
Najistotniejszym problemem w badaniach dynamicznych są pomiary i rejestracja szybkozmiennych sił występujących podczas odkształcania próbek. Wynika to przede wszystkim z bardzo krótkich czasów narastania impulsu, rzędu kilkudziesięciu mikrosekund, jak również ze stosunkowo krótkiego czasu trwania całego procesu. Stąd też zastosowana technika mierzenia sił odgrywa bardzo ważną rolę, decyduje bowiem o poprawności otrzymywanych wyników.

Jak wspomniano poprzednio, młot typu RSO jest wyposażony fabrycznie w czujniki piezokwarcowe do pomiaru siły. Uzyskiwane przebiegi zmiany siły w czasie są jednak znacznie zniekształcone, co jest spowodowane zakłóceniami elektrycznymi samych czujników. Dlatego zmieniono technikę pomiarową, wykorzystując w nowym rozwiązaniu tensometrię elektrooporową. System tego rodzaju jest między innymi szeroko stosowany w pomiarach dynamicznych w Zakładzie Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT.

Na tulejce o odpowiednio dobranej grubości ścianek, wykonanej z wysokogatunko-

wej stali narzędziowej (NC 10) naklejono po dwa tensometry w układzie samokompensacyjnym. Użyto czujników foliowych ITWL typu FK-3 o bazie pomiarowej 3 mm. Tensometry były zasilane napięciem 6V z jednokanałowego mostka tensometrycznego prądu stałego zbudowanego w IPPT.

Mostek posiadał liniowe pasmo przenoszenia od 0 do 100 kHz. Sygnał napięciowy z mostka kierowany był na wejście dwustrumieniowego oscyloskopu typu PM-5 o paśmie przenoszenia również 0–100 kHz. Rejestracja sygnału odbywała się za pomocą małoobrazkowego aparatu fotograficznego, a wyzwalenie jednorazowej podstawy czasu zsynchronizowane było z uderzeniem pazura młota rotacyjnego w kowadło dolnego uchwyty próbki. Podstawa czasu wyzwalała była przy użyciu fotokomórki, tuż przed samym uderzeniem pazura w próbkę. Schemat blokowy układu pomiarowego przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Schemat blokowy układu pomiarowego.

Pomiar dynamicznej siły rozciągania przyjęto w oparciu o zasadę pomiarów quasi-statycznych. W myśl tej zasady pomija się efekty falowe zarówno w próbce jak i w dynamometrze. Przyjmuje się, że rozkład naprężeń na długości próbki jest równomierny, co jest wynikiem wielokrotnych odbić fal naprężeń w próbce o krótkiej bazie pomiarowej [12]. Ponadto dynamometr w takich pomiarach powinien znajdować się jak najbliżej próbki, dzięki czemu czas przejścia fal naprężeń od próbki do dynamometru jest stosunkowo krótki. Dla zastosowanego układu czas ten wyliczony dla wzdłużnej fali sprężystej wynosił 0,0273 ms. Porównując go z najkrótszymi czasami rozciągania, które wynosiły średnio ~ 2 ms widać, że jest on około siedemdziesiąt razy krótszy od czasu odkształcania próbki. Wynika stąd, że zaprojektowany układ do pomiaru sił można traktować jako quasi-śtacyjny. Szersze rozważania na ten temat zostały przedstawione w pracy J. KLEPACZKI [13].

Drugim czynnikiem decydującym o prawidłowości pomiarów jest charakterystyka samego dynamometru. Powinien on mieć odpowiednio dużą częstotliwość i małą amplitudę drgań własnych. Wymagane parametry uzyskuje się przez właściwy dobór masy dynamometru, z równoczesnym uwzględnieniem masy uchwyty próbki, jak również odpowiednią jego sztywność. Okres drgań własnych T_0 dynamometru powinien być co najmniej kilkakrotnie krótszy od czasu odkształcania próbki. Częstość drgań własnych stosowanego w pracy dynamometru, pomierzona na oscylogramach po zerwaniu próbki wynosiła 5269 Hz, co odpowiada okresowi $T_0 = 0,189$ ms. Tak więc okres drgań własnych jest

około dziesięć razy krótszy od czasu rozciągania próbki, czyli i pod tym względem pomiary można traktować jako quasistatyczne.

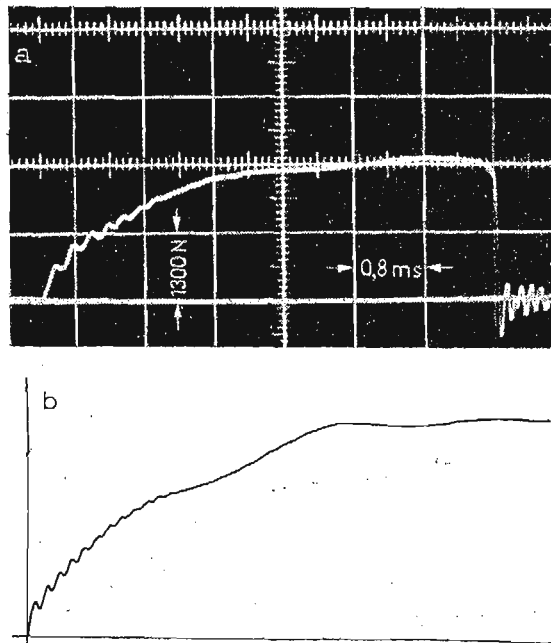
Opisany układ działał sprawnie. Należy tutaj jednak pamiętać, że przy pomiarach dynamicznych na odpowiedź dynamometru może w znacznym stopniu wpływać częstość drgań elementów, do których jest on zamocowany. Zjawisko to, mające wpływ na wynik pomiarów, należy uwzględnić podczas interpretacji wyników, zostało ono dokładnie przedyskutowane w dalszej części pracy.

3. Wyniki doświadczeń — oscylogramy $P(t)$

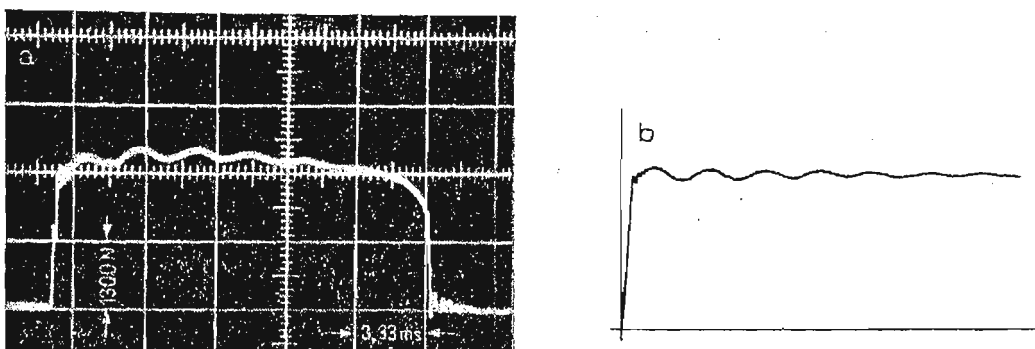
Do badań wybrano dwa materiały, w tym jeden w dwóch stanach — blachę miedzianą (99,90% Cu) o grubości 1,5 mm w stanie wyżarzonym oraz blachę stalową głębokotłoczną (0,11% C) o grubości 1 mm w stanie po walcowaniu i w stanie wyżarzonym. Doświadczenia przeprowadzono na próbkach o długości bazy pomiarowej 35 mm i szerokości 7 mm.

Po wzorcowaniu statycznym dynamometru za pomocą maszyny wytrzymałościowej przeprowadzono próby dynamiczne z oscyloskopową rejestracją siły rozciągającej P w funkcji czasu t . Próby te wykonano przy różnych prędkościach wymuszenia mechanicznego v , co odpowiadało różnym prędkościom odkształcenia. Typowe oscylogramy z takich prób dla miedzi przedstawiono na rys. 3a, dla próbek z blachy stalowej w stanie po walcowaniu na rys. 4a i 5a, natomiast dla blachy stalowej w stanie wyżarzonym na rys. 6.

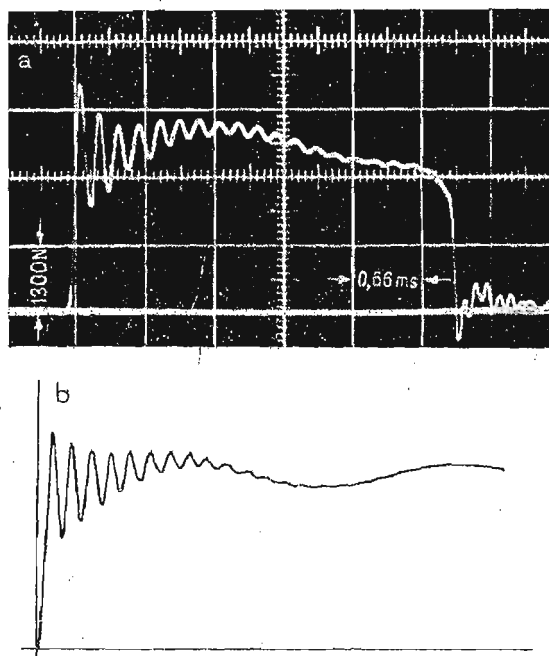
Na podstawie uzyskanych krzywych można zaobserwować, że w obszarze plastycznego płynięcia materiału obserwuje się występowanie przebiegów periodycznych o dwóch róż-



Rys. 3. Oscylogram pomiaru siły rozciągania dla próbki miedzianej odkształcanej z prędkością $v = 4 \text{ ms}^{-1}$ (a) oraz rozwiązanie z maszyny analogowej dla impulsu wymuszającego typu C (b).



Rys. 4. Oscylogram pomiaru siły rozciągania dla próbki stalowej walcowanej odkształcanej z prędkością $v = 1 \text{ ms}^{-1}$ (a) oraz rozwiązanie z maszyny analogowej dla impulsu wymuszającego typu A (b).



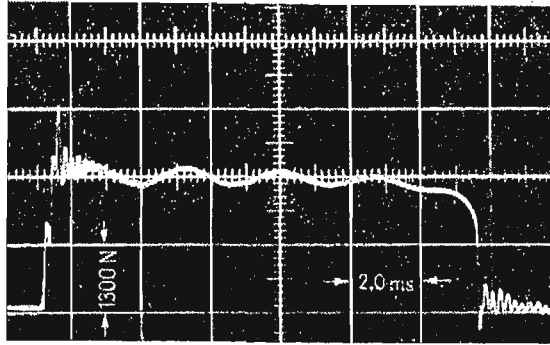
Rys. 5. Oscylogram pomiaru siły rozciągania dla próbki stalowej walcowanej odkształcanej z prędkością $v = 4 \text{ ms}^{-1}$ (a) oraz rozwiązanie z maszyny analogowej dla impulsu wymuszającego typu A (b).

nych częstotliwościach. Zjawiska takie są charakterystyczne dla dynamicznego zachowania się układu mechanicznego.

W badaniach dynamicznych istnieje potrzeba określenia rzeczywistej odpowiedzi dynamometru. W przypadku gdy dynamometr zostaje poddany obciążeniu udarowemu, jego odpowiedź może znacznie odbiegać w danej chwili od proporcjonalności do rzeczywistej wartości przyłożonej siły. Wynika to z faktu, iż w takich warunkach w dynametrze zostają wzbudzone drgania o określonej częstotliwości własnej. Drgania dynamometru przejawiają się na uzyskanych oscylogramach w postaci periodycznego przebiegu o wysokiej częstotliwości (5269 Hz). Amplituda tego przebiegu zależy od czasu narastania impulsu siły,

niezależnie od sztywności układu. Stąd szczególnie wyraźne oscylacje widoczne są przy większych prędkościach uderzenia (rys. 5a), podczas gdy przy mniejszych prędkościach koncentrują się one w obszarze początkowym krzywej $P(t)$ i zanikają (rys. 3a, 4a i 6).

Niezależnie od obserwowanego obrazu drgań dynamometru, na oscylogramach otrzymanych przy małych prędkościach uderzenia v zaznacza się wyraźnie przebieg periodyczny



Rys. 6. Oscylogram pomiaru siły rozciągania dla próbki stalowej (stan wyżarzony) odkształcanej z prędkością $v = 1 \text{ ms}^{-1}$.

o dużo mniejszej częstotliwości. Przy większych prędkościach oscylacje te są mniej widoczne. Pomiar oscylogramów wykazały, że częstota tego przebiegu jest niezależna od rodzaju odkształcanego materiału i wynosi średnio 369 Hz. Na tej podstawie należy sądzić, że spowodowany jest on drganiami elementów, do których zamocowany jest dynamometr.

Zjawisko drgań konstrukcji nośnej dynamometru, oddziaływujące na jego odpowiedź, nie jest do tej pory dobrze poznane. Zniekształcenia pomiaru które wywołuje mogą w bardzo istotny sposób wpływać na interpretacje uzyskiwanych wyników z prób dynamicznych. Na przykład oscylogramy dla stali w stanie po walcowaniu rozciąganej przy prędkości uderzenia $v = 4 \text{ ms}^{-1}$ (rys. 5a) mają ogólny kształt w postaci fragmentu zbliżonego do sinusoidy, co jest niewątpliwie nietypową charakterystyką dla tego materiału. Należy przypuszczać, że obraz ten jest wynikiem znacznie większej prędkości odkształcenia i stąd krótszego czasu rejestracji dla $v = 4 \text{ ms}^{-1}$, w porównaniu do mniejszych prędkości, dla których obserwuje się kilka okresów tego zakłócenia (rys. 4a).

Potwierdzenie takiej interpretacji można uzyskać w oparciu o analizę dynamicznego układu mechanicznego, który stanowi konstrukcja nośna — dynamometr-próbka. Ponieważ oscylogramy są podstawą do otrzymania dynamicznych krzywych umocnienia, celem jest przeprowadzenie takiej analizy, by w ten sposób wyeliminować zakłócenia pomiaru i uzyskać rzeczywistą wartość siły rozciągania.

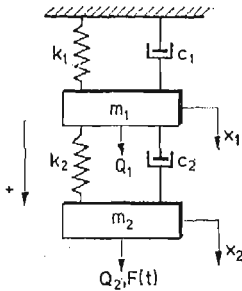
4. Metodyka interpretacji oscylogramów $P(t)$

Przeprowadzając teoretyczną analizę rzeczywistego układu mechanicznego, stosuje się zawsze uproszczenia pomijające szereg drugorzędnych jego własności.

Rozpatrywany układ mechaniczny konstrukcja nośna — dynamometr — próbka można idealizować dyskretnym modelem fizycznym o trzech stopniach swobody. Biorąc jednak

pod uwagę, że o strukturze układu (liczbie stopni swobody) wnioskuje się na podstawie charakteru wzbudzanego procesu drgań, to z analizy rzeczywistych krzywych $P(t)$ wynika, że powyższy układ można uprościć, sprowadzając go do układu drgającego o dwóch stopniach swobody. Za takim uproszczeniem przemawia fakt, iż oscylogramy stanowią pewną superpozycję przebiegów periodycznych o dwóch różnych częstościach.

Utworzony model układu mechanicznego pokazano na rys. 7. Masa m_1 reprezentuje masę zredukowaną konstrukcji nośnej, a m_2 dynamometru. Stałe k_i i c_i ($i = 1, 2$) obrazują



Rys. 7. Schemat analizowanego układu mechanicznego.

odpowiednio współczynniki sztywności i tłumienia. Próbką została pominięta, jednak należy zauważyć, że parametry k_2 i c_2 uwzględniają ją pośrednio. Rodzaj materiału próbki wpływa bowiem na wartość amplitudy obu przebiegów. Znacznie wyższą amplitudę, przy danej prędkości uderzenia, daje się zauważyć dla stali niż dla miedzi. Czynnikiem powodującym to zjawisko jest różna reakcja sprężysta tych materiałów. Wyższa dla stali aniżeli dla miedzi.

Punktem wyjścia do dalszej dyskusji problemu jest opisanie modelu układem równań różniczkowych. Jako współrzędne uogólnione przyjęto przemieszczenia mas x_i ($i = 1, 2$) o dodatnich zwrotach pokazanych na rys. 7. Wprowadzając współrzędne główne ξ_k , które związane są ze współrzędnymi uogólnionymi następującą zależnością:

$$(1) \quad x_i = \sum_k \lambda_k \mu_{ik} \xi_k(t),$$

równania różniczkowe ruchu układu o dwu stopniach swobody można przedstawić w postaci:

$$(2) \quad M_{kk} \ddot{\xi}_k + \sum_l C_{kl} \dot{\xi}_k + K_{kk} \xi_k = F_k, \quad k, l = 1, 2,$$

gdzie M_{kk} oznaczają uogólnione masy, C_{kl} uogólnione współczynniki tłumienia, K_{kk} uogólnione sztywności, a F_k uogólnione siły. Ponadto $\dot{\xi} = d\xi/dt$, gdzie t oznacza czas, λ_k jest dowolną stałą, a μ_{ik} przedstawiają tzw. współczynniki postaci drgań głównych, charakteryzujące formę k -tego drgania głównego.

Należy dodać, że równania (2) opisujące tzw. drgania główne, mogą odnosić się do obiektu o dowolnej liczbie stopni swobody.

Łatwo zauważyć, że jeżeli $C_{kl} = 0$ dla $k \neq l$, a więc macierz współczynników tłumienia jest diagonalna, to równania (2) przyjmują postać:

$$(3) \quad M_{kk} \ddot{\xi}_k + C_{kl} \dot{\xi}_k + K_{kk} \xi_k = F_k, \quad k, l = 1, 2,$$

i są układami równań rozprzężonych. Oznacza to, że każde z nich opisuje drganie wymuszone, tłumione, układu o jednym stopniu swobody. Wynika stąd, że postać drgań wymuszonych przez każdą z sił F_k jest taka sama, jak postać k -tego drgania głównego.

Jako podstawę do dalszych rozważań przyjęto równania (3). Siły uogólnione F_k można zapisać w następującej postaci:

$$(4) \quad F_k = \lambda_k \sum_i Q_i \mu_{ik},$$

gdzie Q_i jest rzeczywistą siłą przyłożoną do badanej konstrukcji. W rozważanym przypadku (zgodnie z rys. 7) $Q_1 = 0$, natomiast $Q_2 = F$. Wynika to z faktu, że siła F przyłożona do próbki oddziałuje bezpośrednio na dynamometr. Przyjmując powyższe warunki, oraz $\lambda_k = 1$, związek (4) dla rozpatrywanego układu można zapisać jako:

$$(5) \quad F_k = F \mu_{2k}, \quad k = 1, 2,$$

Wprowadzając dalej następujące oznaczenia: $K_{kk}/M_{kk} = \omega_{ok}^2$ oraz $C_{kk}/M_{kk} = 2h_k$, równania różniczkowe ruchu układu konstrukcja nośna-dynamometr-próbka można przedstawić następująco:

$$(6) \quad \ddot{\xi}_k + 2h_k \dot{\xi}_k + \omega_{ok}^2 \xi_k = \frac{\mu_{2k}}{M_{kk}} F(t), \quad k = 1, 2$$

gdzie ω_{ok} są częstościami kątowymi drgań własnych, a h_k współczynnikami tłumienia.

Efektywne rozwiązanie równań (6), z odpowiednimi warunkami początkowymi, jest niemożliwe, jeżeli nieznanne są wartości występujących w nich współczynników, na podstawie których można uzyskać pełny matematyczny opis zjawisk fizycznych zachodzących w badanym obiekcie. Współczynniki te można jednak wyznaczyć doświadczalnie, wykorzystując jedną z metod identyfikacji dynamicznego układu mechanicznego.

Znane i powszechnie stosowane metody identyfikacji dynamicznej polegają na badaniu odpowiedzi układu w wybranych jego punktach, podczas działania na układ kontrolowanych wymuszeń (obciążeń). Metody te mają charakter eksperymentu czynnego. W przypadku obecnej pracy eksperyment miał charakter bierny. Dysponowano jedynie odpowiedziami układu rzeczywistego na wymuszenie, w postaci obciążenia udarowego próbek. Nie istniała możliwość stosowania kontrolowanych obciążeń.

W związku z powyższym problem polegał na sprawdzeniu, czy układ równań (6) z wyznaczonymi współczynnikami dostatecznie dokładnie opisuje zachowanie się układu rzeczywistego.

Współczynniki h_k i ω_{ok} ($k = 1, 2$), stanowiące podstawę do rozwiązania związków (6), wyznaczono bezpośrednio z oscylogramów $P(t)$. Było to możliwe ze względu na znaczne różnice w częstościach obu przebiegów periodycznych, reprezentujących odpowiednie formy drgań. Z pomiarów oscylogramów wyznaczono okresy drgań tłumionych T_h oraz logarytmiczne dekrementy tłumienia $A = \ln \frac{a(t)}{a(t+T_h)}$ (logarytm naturalny stosunku dwu kolejnych amplitud). W obliczeniach dekrementu tłumienia pomijano wartość pierwszej amplitudy, a z pozostałych wyznaczano wartości średnie. Na podstawie znalezionych wielkości oraz korzystając z poniższych zależności:

$$\omega = 2\pi/T_h, \quad A = h \cdot T_h \quad \text{i} \quad \omega_0^2 = \omega^2 + h^2,$$

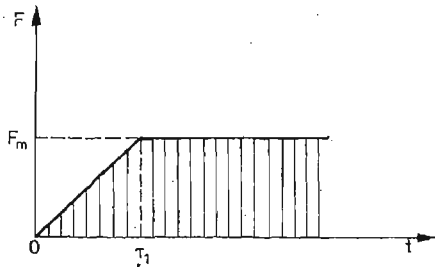
wyznaczono wartości odpowiednich współczynników. Wynoszą one:

$$\begin{aligned}\omega_{01} &= 2319 \text{ s}^{-1}, & h_1 &= 85 \text{ s}^{-1}, \\ \omega_{02} &= 33106 \text{ s}^{-1}, & h_2 &= 1579 \text{ s}^{-1}.\end{aligned}$$

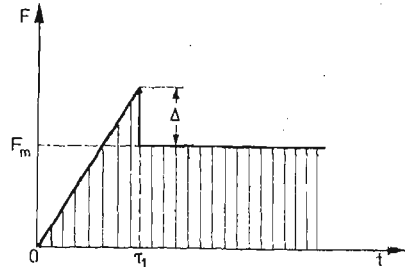
Do pełnej analizy drgań wymagana jest znajomość impulsu wymuszającego $F(t)$. Dokładny zapis matematyczny wymuszenia nie był znany, dlatego też określono jakościowo jego przebieg na podstawie charakteru fizycznego próby oraz odpowiedzi układu rzeczywistego. Uzyskane oscylogramy $P(t)$, przedstawiające przebieg czasowy siły rozciągania, mogą być traktowane jako reakcja układu na wymuszenie o charakterze impulsowym. Z otrzymanych przebiegów dla stali widać, że można je aproksymować impulsami o kształtach regularnych, ograniczonych odcinkami prostych. W przypadku natomiast oscylogramów dla miedzi aproksymacja wymuszenia może być dokonana funkcją o charakterze potęgowym. W związku z powyższym przyjęto trzy rodzaje impulsów wymuszających $F(t)$:

A) Siła wzrasta liniowo w czasie, następnie zachowuje stałą wartość, jak pokazano to na rys. 8. Impuls ten charakterystyczny jest dla stali po walcowaniu (rys. 4).

B) Siła wzrasta liniowo do określonej wartości, a następnie gwałtownie spada do pewnej wartości i pozostaje stała. Przypadek ten, pokazany na rys. 9, charakterystyczny jest dla stali wyżarzzonej (rys. 6), posiadającej wyraźną granicę plastyczności.



Rys. 8. Postać impulsu wymuszającego typu A.



Rys. 9. Postać impulsu wymuszającego typu B.

C) Siła zmienia się wg. paraboli, która w pewnym przybliżeniu może opisać zachowanie się miedzi.

W przypadkach A i B czas narastania siły τ_1 dobierano na podstawie pomiarów oscylogramów. Wynosił on średnio 0,55; 0,40; 0,12 i 0,10 ms odpowiednio dla prędkości uderzenia 1; 1,5; 4 i 8 ms^{-1} .

Należy tu dodać, że rzeczywistą odpowiedź układu stanowi sygnał z czujników tensometrycznych dynamometru, który w przyjętym modelu był reprezentowany przez element sprężysty k_2 . Przyjmując, że odkształcenie rozciągające ma znak plus a ściskające minus, założono, że tensometr mierzący odkształcenie jest równocześnie miernikiem różnicy przemieszczeń $x_2 - x_1$. Przekształcając zatem równania (1) (dla $\lambda_k = 1$) można pokazać, że odpowiedź układu rzeczywistego ($x_2 - x_1$) stanowi sumę wartości współrzędnych głównych ξ_1 i ξ_2 z odpowiednimi współczynnikami. Otrzymuje się bowiem:

$$(7) \quad x_2 - x_1 = (\mu_{21} - \mu_{11})\xi_1 + (\mu_{22} - \mu_{12})\xi_2.$$

Badania identyfikacji układu drgającego konstrukcja nośna-dynamometr-próbka po-

legały na uzyskaniu w postaci graficznej sumy całek ogólnych równań (6) przy zerowych warunkach początkowych, a następnie porównaniu jej z odpowiedziami układu rzeczywistego (oscylogramami). W badaniach wykorzystano technikę analogową.

W wyniku przeprowadzonych doświadczeń otrzymano graficzne rozwiązania równań ruchu układu mechanicznego, z których charakterystyczne pokazano na rys. 3b, 4b i 5b. Porównując uzyskane rozwiązania z maszyny analogowej z odpowiadającymi im rzeczywistymi przebiegami $P(t)$ (rys. 3a, 4a i 5a) stwierdzono, że występowała pomiędzy nimi zadawalająca zgodność. Wskazuje to, że przyjęty model matematyczny układu rzeczywistego w poprawny sposób opisywał badane zjawisko.

Należy zaznaczyć, że w praktyce nie jest możliwe uzyskanie idealnej zgodności (szczególnie co do wartości amplitud) pomiędzy przebiegami teoretycznymi a rzeczywistymi. Wynika to z faktu, iż model jest zazwyczaj układem liniowym (tłumienie wiskotyczne), podczas gdy warunek ten nie odpowiada ściśle układom rzeczywistym.

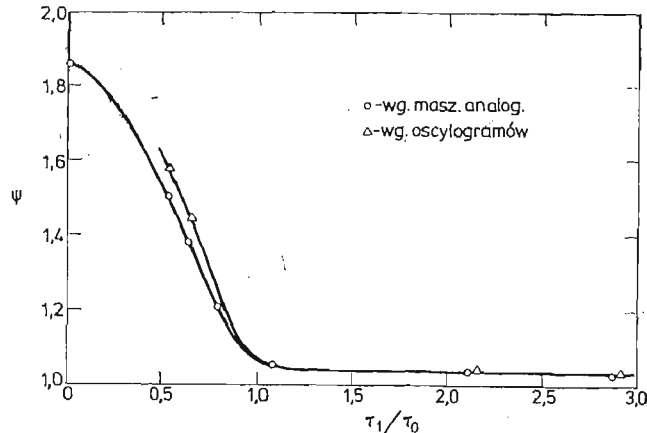
Z przeprowadzonej identyfikacji układu wynika, że obserwowany na oscylogramach proces oscylacji siły jest rezultatem drgań mechanicznych i zachodzi wokół krzywej, która odpowiada rzeczywistej sile rozciągania próbki. Do dalszej zatem interpretacji danych doświadczalnych niezbędne jest wyznaczenie tej krzywej. Ponieważ przebieg periodyczny o wysokiej częstotliwości, który łatwo jest uśrednić, nałożony jest na przebieg o niskiej częstotliwości, wobec tego rzeczywista krzywa $P(t)$ jest linią wokół której oscyluje ten ostatni. Prowadząc obwiednię tego przebiegu na odpowiednio powiększonych oscylogramach i uśredniając ją graficznie, wyznaczono poszukiwaną krzywą $P(t)$. Wiadomo jednak, że uśrednianie takie jest możliwe, gdy występuje kilka okresów przebiegu. Stąd na oscylogramach uzyskanych dla stali rozciąganej przy prędkościach 4 i 8 ms^{-1} , na których występował z reguły jeden niepełny okres przebiegu o niskiej częstotliwości, trudno było wyznaczyć rzeczywistą, były pozwalał zmianę w czasie siły rozciągania. W przypadku miedzi, amplitudy przebiegu bardzo małe, a ponadto przewidywany charakter krzywych rozciągania dość dokładnie je wyznaczyć.

Wnioskiem wyływającym z przedstawionych powyżej uwag jest stwierdzenie, że drgania konstrukcji nośnej dynamometru mogą w znacznym stopniu wpływać na poprawną interpretację wyników badań dynamicznych. Aby nie zniekształcały one rzeczywistej wartości siły, czas trwania próby dynamicznej powinien być znacznie dłuższy od okresu drgań elementów do których przytwierdzony jest dynamometr. W przypadku obecnego układu mechanicznego warunek ten, był spełniony.

Dokonując analizy uzyskanych wyników należy zinterpretować pierwsze maksimum siły, w szczególności widoczne na oscylogramach dla próbek stalowych. Niekiedy [14] wartość tego maksimum na krzywych dynamicznych interpretowano jako siłę odpowiadającą górnej granicy plastyczności. Jak wynika natomiast z rys. 4, 5 oraz 6 interpretacja taka jest błędna, bowiem wartość pierwszego maksimum zależy nie tylko od zachowania się odkształcanego materiału lecz również od reakcji dynamicznej układu mechanicznego. Reakcję dynamiczną charakteryzuje tzw. współczynnik dynamiczny, który jest stosunkiem maksymalnego przemieszczenia układu (pierwsze maksimum) do przemieszczenia statycznego (wartości ustalonej).

Wyizolowanie poszczególnych form drgań przy użyciu maszyny analogowej wykazało, że współczynnik dynamiczny układu związany jest jedynie z formą drgań o wysokiej często-

ści. Jego wartość zależy od postaci i czasu narastania impulsu wymuszającego. W celu ilościowego określenia wpływu tych czynników, na zamodelowany układ o jednym stopniu swobody i parametrach odpowiadających wysokiej częstotliwości drgań, działano impulsem wymuszającym typu A, o różnym czasie narastania siły w zakresie od 0,10 do 0,55 ms oraz impulsem typu B, przy różnym stosunku wartości „piku” Δ (rys. 9) do ustalonej wartości siły. Na podstawie uzyskanych rozwiązań sporządzono zależność współczynnika dynamicznego ψ w funkcji bezwymiarowego czasu narastania siły, którą pokazano na rys. 10. Z przedstawionego wykresu wynika, że współczynnik dynamiczny bardzo wy-



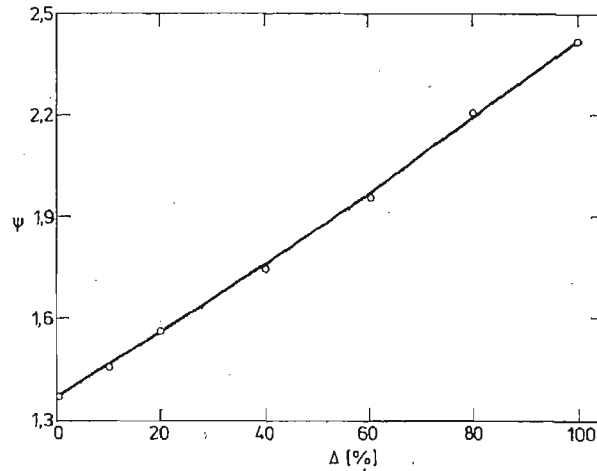
Rys. 10. Zmiana współczynnika dynamicznego ψ w funkcji bezwymiarowego czasu narastania siły.

rażnie zmniejsza się wraz ze wzrostem stosunku τ_1/T_0 , gdzie T_0 jest okresem drgań własnych. Dla $\tau_1/T_0 > 1$ współczynnik dynamiczny ψ jest mniejszy od 1,05, co wskazuje, że z dokładnością do 5% dla $\tau_1 > T_0$ można przyjąć $\psi \approx 1$.

W przypadku działania impulsu typu B obserwuje się dość intensywny wzrost współczynnika ψ wraz ze wzrostem procentowej wartości „piku” Δ (rys. 11). Dla $\tau_1 = 0,12$ ms ψ zmienia się od 1,37 przy 0% Δ do 2,41 przy 100% Δ .

Obciążenie układu impulsem typu B wiąże się w rzeczywistości z wyższą reakcją sprężystą odkształcanego materiału aniżeli dla impulsu typu A, oczywiście pod warunkiem, że w obu przypadkach ustalona wartość siły jest taka sama. Dokładna analiza porównawcza oscylogramów dla stali walcowanej z uzyskanymi dla nich rozwiązaniami przy wymuszeniu typu A wykazała, że o ile przy mniejszych prędkościach odkształcenia tego materiału ($v = 1,0$ i $1,5$ ms⁻¹) pierwsze maksimum siły na oscylogramach pokrywa się z pierwszym maksimum przemieszczenia układu, to w przypadku większych prędkości ($v = 4$ i 8 ms⁻¹) krzywe rzeczywiste mają nieco wyższe pierwsze amplitudy przebiegu o wysokiej częstotliwości aniżeli krzywe modelowe. Wyliczone współczynniki dynamiczne z oscylogramów dla stali walcowanej naniesiono na rys. 10. Porównując rzeczywiste wartości ψ z wartościami uzyskanymi z modelu stwierdza się, że te pierwsze dla $\tau_1/T_0 < 1$ są nieco wyższe. Wskazuje to, że obliczona reakcja sprężysta układu, odpowiadająca impulsowi typu A jest zbyt mała, by mogła wywołać pierwszą amplitudę o wartości odpowiadającej przebiegowi rzeczywistemu. Zastosowanie natomiast w badanym układzie impulsu wymuszającego typu B przy 10% „piku” dało wartości pierwszych amplitud zgodne z odpowia-

dającymi im wartościami uzyskanymi na oscylogramach przy prędkości $v = 4 \text{ ms}^{-1}$. Dla krzywych $P(t)$ uzyskanych przy prędkości $v = 8 \text{ ms}^{-1}$ pokrywanie się pierwszych amplitud zachodziło dla impulsu mającego około 20% wartości „piku”. Należy zatem wnioskować, że przy prędkościach uderzenia większych od $1,5 \text{ ms}^{-1}$ dla badanej stali walcowanej zaczyna się uwidaczniać wyraźna granica plastyczności.



Rys. 11. Zmiana współczynnika dynamicznego ψ w funkcji procentowej wartości „piku” Δ dla impulsu wymuszającego typu B; czas narastania impulsu $\tau_1 = 0,12 \text{ ms}$.

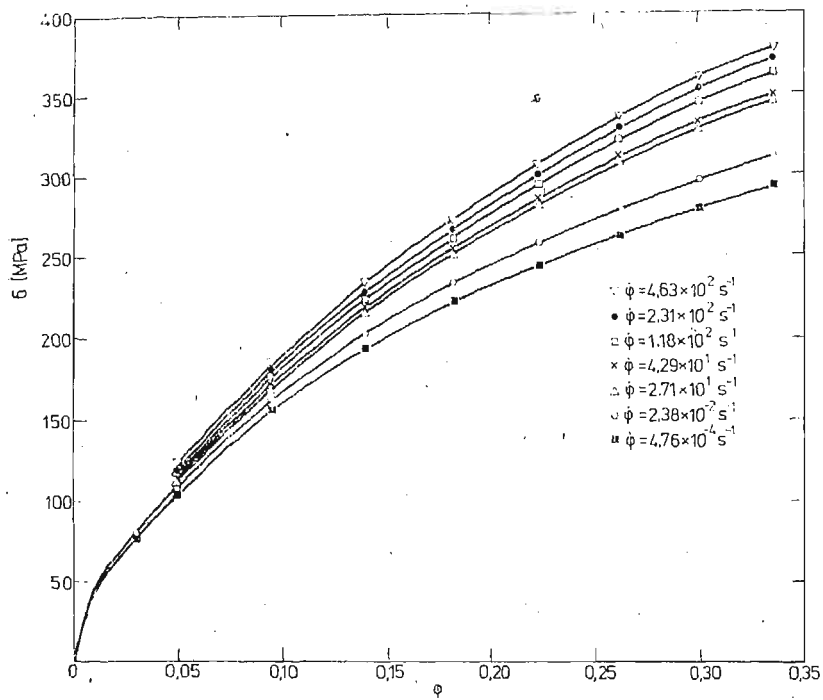
Znajomość wartości współczynnika dynamicznego ψ posiada bardzo istotne znaczenie dla materiałów wykazujących wyraźną granicę plastyczności. Rzeczywista górna granica plastyczności σ_g będzie bowiem wynosić $\sigma_g = \sigma_{\max}/\psi$, gdzie σ_{\max} jest obliczeniową wartością naprężenia odpowiadającą pierwszemu maksymalnemu wychyleniu na krzywych $P(t)$.

Występowanie dla stali wyżarzonej wyraźnej górnej i dolnej granicy plastyczności wymagało zatem przeprowadzenia odpowiedniej korekty uzyskanych oscylogramów. Postępowano w ten sposób, że dla wybranych oscylogramów poszukiwano na maszynie analogowej rozwiązań, najdokładniej opisujących zarejestrowany przebieg rzeczywisty, za wyjątkiem pierwszej amplitudy. Amplitudy drgań regulowano różnymi wartościami „piku” przy impulsach wymuszających typu B. Następnie dla znalezionych rozwiązań wyliczono współczynniki dynamiczne, których wartości były równe współczynnikom korekcyjnym dla pierwszego maksimum siły na oscylogramach. Wyznaczone średnie wartości współczynników korekcyjnych dla stali wyżarzonej wynosiły 1, 10; 1,12; 1,36 odpowiednio dla prędkości uderzenia 1; 1,5 i 4 ms^{-1} .

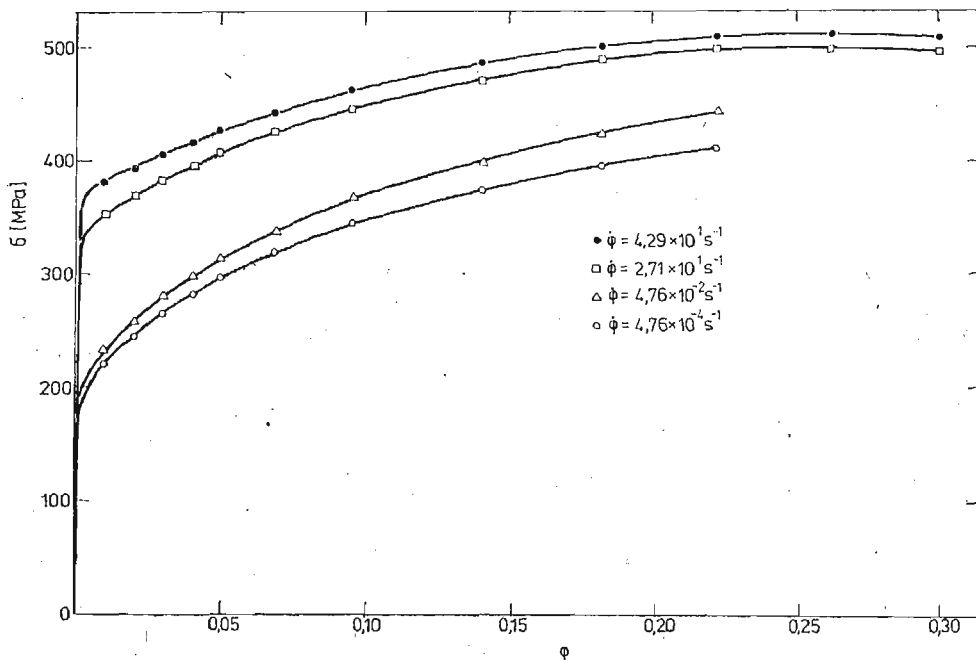
Z przeprowadzonych w tej części pracy rozważań wynika, że z punktu widzenia eksperymentu w warunkach dynamicznych, istotne znaczenie posiada fakt pełnego rozumienia wszystkich charakterystycznych zakłóceń, zniekształcających pomiar w stosunku do rzeczywistych obciążeń działających na odkształcaną próbkę.

5. Krzywe umocnienia

Przyjęcie założenia o stałej prędkości odkształcania, pozwoliło traktować uzyskane krzywe $P(t)$ na równi z zależnością $P(\Delta l)$, jednak z odpowiednio zmienionymi współrzędnymi



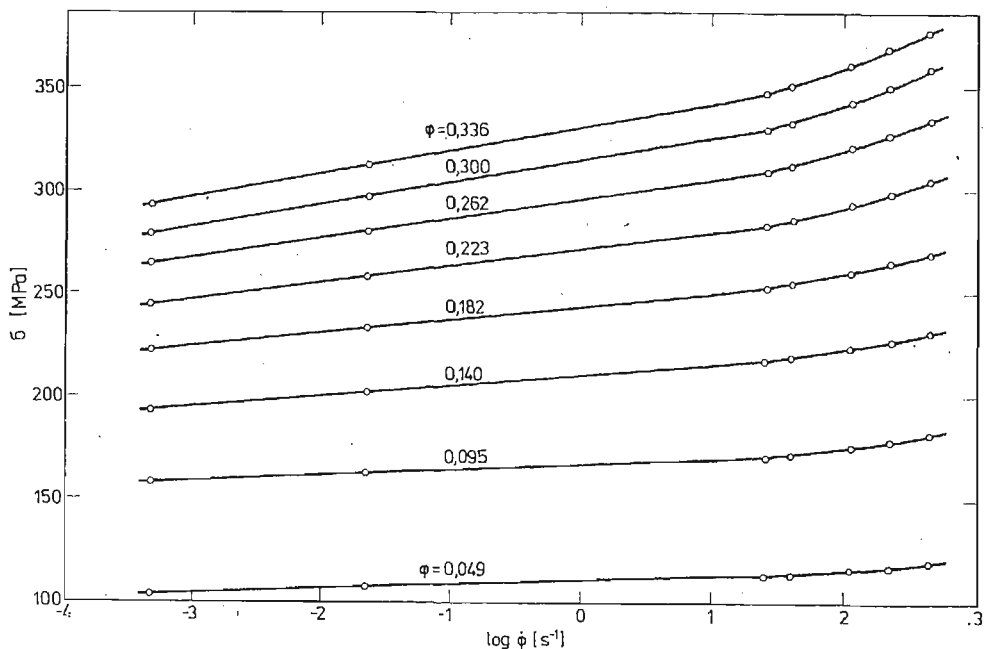
Rys. 12. Uśrednione krzywe umocnienia dla badanej miedzi uzyskane przy poszczególnych prędkościach odkształcenia.



Rys. 13. Uśrednione krzywe umocnienia dla badanej stali walcowanej uzyskane przy poszczególnych prędkościach odkształcenia.

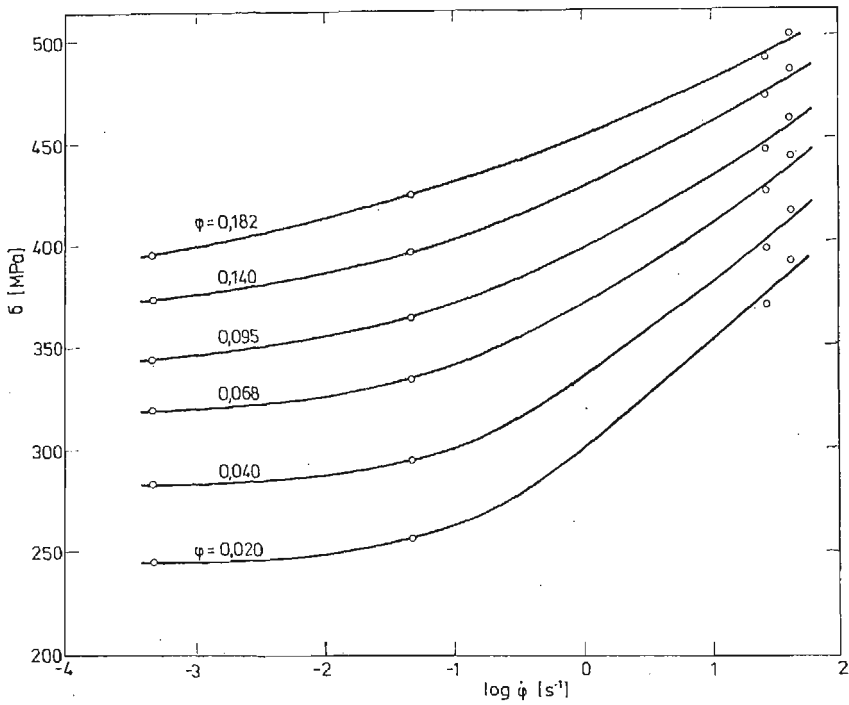
nymi osi odciętych. Na tej podstawie oscylogramy przeliczono, po dokonaniu odpowiednich pomiarów, na zależności naprężenia rzeczywistego σ w funkcji odkształcenia logarytmicznego φ . Uzyskane w ten sposób krzywe umocnienia dla różnych prędkości odkształcenia, pomierzone przy użyciu młota rotacyjnego, przedstawiono odpowiednio dla miedzi i stali po walcowaniu na rys. 12 i 13. Na rysunkach tych wykreślono również krzywe umocnienia dla małych prędkości odkształcenia $4,76 \cdot 10^{-4}$ i $4,76 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$. Krzywe te otrzymano za pomocą maszyny wytrzymałościowej Instron, przy czym używano próbek o identycznych wymiarach jak w badaniach dynamicznych. Wszystkie krzywe zostały sporządzone przez uśrednienie pomiarów z 3 - 4 próbek.

W oparciu o uzyskane wyniki można stwierdzić, że zmiana prędkości odkształcenia powoduje odpowiednią zmianę krzywej umocnienia badanych materiałów. Świadczy to, że badane materiały są wrażliwe na prędkość odkształcenia. Tę właściwość materiału wygodnie jest przedstawić na wykresie w układzie półlogarytmicznym $\sigma(\log \dot{\varphi})$, jak to pokazano odpowiednio dla miedzi i stali na rys. 14 i 15. Każda z krzywych dotyczy innej war-

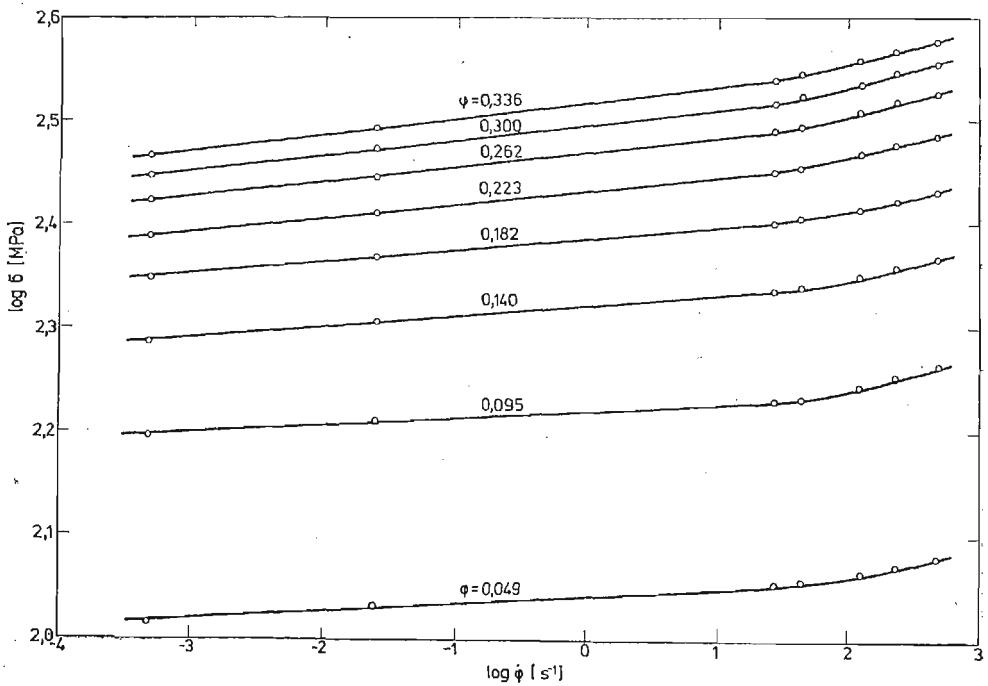


Rys. 14. Wykresy $\sigma(\log \dot{\varphi})$ dla miedzi uzyskane z uśrednionych krzywych umocnienia dla poszczególnych wartości odkształceń φ

tości odkształcenia. Jak widać z przebiegu krzywych dla miedzi, wpływ prędkości odkształcenia na naprężenie plastycznego płynięcia przy $\varphi = \text{const}$ przejawia się w postaci monotonicznie rosnącej funkcji prędkości odkształcenia. Czułość na prędkość odkształcenia β , którą można zdefiniować jako $\beta = \partial\sigma/\partial\log\dot{\varphi}$, zwiększa się zarówno ze wzrostem odkształcenia φ jak i prędkości odkształcenia $\dot{\varphi}$. Na skutek rozrzutu wyników w zakresie małych odkształceń, tj. dla $\varphi < 0,05$ przy prędkościach odkształcenia od $2,71 \cdot 10^1$ do $4,63 \cdot 10^2 \text{s}^{-1}$, nie było możliwe określenie ścisłej zależności pomiędzy prędkością odkształcenia a naprężeniem w tym zakresie.



Rys. 15. Wykresy $\sigma(\log\dot{\phi})$ dla stali walcowanej uzyskane z uśrednionych krzywych umocnienia dla poszczególnych wartości odkształceń ϕ .



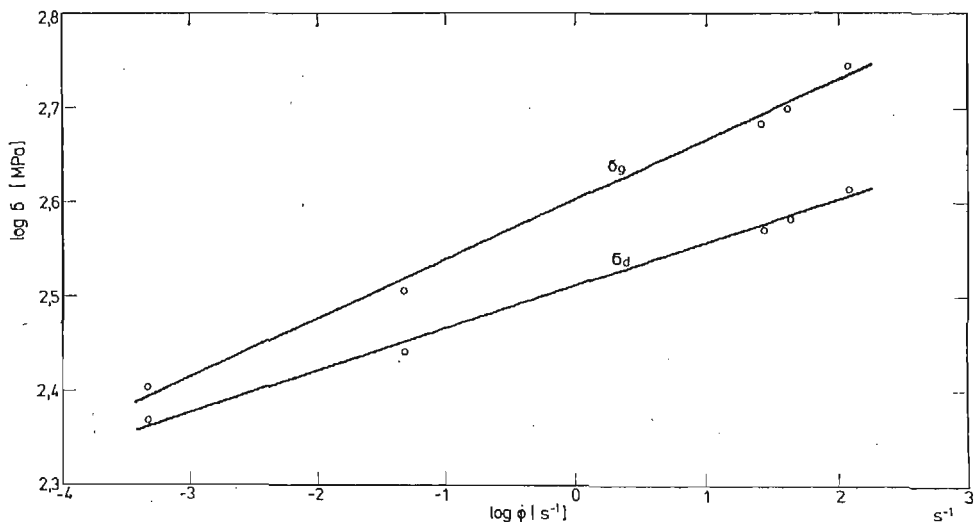
Rys. 16. Wykresy $\log \sigma(\log \dot{\phi})$ dla miedzi.

W przypadku stali walcowanej obserwuje się nieco inną reakcję na prędkość odkształcania. O ile w zakresie małych prędkości odkształcania $\dot{\varphi}$ od $4,76 \cdot 10^{-2}$ do $4,76 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ czułość na prędkość odkształcania β jest stosunkowo niska i zmienia się od 6,5 do 14,3 MPa w przedziale odkształceń φ od 0,020 do 0,182, to dla $\dot{\varphi}$ większych od $4,76 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ średnie wartości β są znacznie wyższe i zmieniają się od około 43 do 30 MPa w tym samym zakresie odkształceń. Ponadto β maleje w miarę wzrostu odkształcania. Wyraźna różnica w czułości na prędkość odkształcania stali w poszczególnych zakresach spowodowana jest, jak wynika z pracy [15], różnymi mechanizmami odkształcania plastycznego występującymi w poszczególnych zakresach prędkości odkształcania.

Wprowadzone wyżej pojęcie czułości na prędkość odkształcania β jest o tyle trafne, że posiada duże znaczenie przy interpretacji wyników od strony fizycznej. Jednak z inżynierskiego punktu widzenia bardzo często stosuje się definicję czułości na prędkość odkształcania jako $n = \partial \log \sigma / \partial \log \dot{\varphi}$. Korzystając z tej definicji sporządzono zależność $\log \sigma$ ($\log \dot{\varphi}$), którą dla miedzi przedstawiono na rys. 16. Z przedstawionego wykresu wynika, że n , podobnie jak β , zmienia się nieco w zależności od odkształcania oraz prędkości odkształcania. Średnia wartość tej stałej wynosi $n = 0,0187$. Jest ona porównywalna do wartości $n = 0,0146$ jaką uzyskano w pracy [16].

Badana blacha stalowa walcowana w zakresie prędkości odkształcania od $4,76 \cdot 10^{-4}$ do $4,29 \cdot 10^1 \text{ s}^{-1}$ nie wykazywała zjawiska górnej i dolnej granicy plastyczności. Fakt ten jest prawdopodobnie spowodowany zgniotem powierzchniowym materiału, powstałym w wyniku walcowania wygładzającego w procesie hutniczym. Przy wyższych prędkościach odkształcania, o czym wspomniano uprzednio, najprawdopodobniej pojawi się dla tego materiału wyraźna granica plastyczności.

Występowanie przy dużych prędkościach odkształcania wyraźnej granicy plastyczności dla materiałów, które przy mniejszych prędkościach odkształcania jej nie wykazują, jest zjawiskiem dość często spotykanym.



Rys. 17. Zmiana górnej σ_g i dolnej σ_d granicy plastyczności w funkcji prędkości odkształcania dla badanej stali w stanie wyżarzonym.

Wpływ prędkości odkształcenia na górną i dolną granicę plastyczności badanej stali w stanie wyżarzonym przedstawiono na rys. 17. Aproksymacja liniowa uzyskanych wyników w układzie $\log \sigma$ ($\log \dot{\varphi}$), w całym zastosowanym przedziale prędkości odkształcenia, pozwala na przyjęcie następujących zależności analitycznych:

$$\sigma_g = C_1 \dot{\varphi}^{n_g} \quad \text{i} \quad \sigma_d = C_2 \dot{\varphi}^{n_d},$$

gdzie σ_g i σ_d oznacza odpowiednio górną i dolną granicę plastyczności, C_1 i C_2 — stałe, a n_g i n_d — czułości na prędkość odkształcenia.

Wyliczone wartości n_g i n_d wynoszą odpowiednio 0,0618 i 0,0442. Są one porównywalne z wartościami 0,0677 i 0,0593 otrzymanymi w pracy [7] dla wyżarzonej miękkiej stali o zawartości węgla 0,085% i podobnej zawartości innych domieszek, odkształcanej w podobnym zakresie prędkości. Nieznaczne różnice wynikają prawdopodobnie z innej zawartości węgla w obydwu badanych materiałach. Blacha stalowa badana w obecnej pracy posiada 0,11% C. Uzyskane wyniki, znajdujące potwierdzenie w innych pracach wskazują, że przeprowadzona korekta wartości górnej granicy plastyczności na oscylogramach $P(t)$ wydaje się być w pełni poprawna.

6. Podsumowanie i wnioski

Na podstawie przytoczonych wyników doświadczeń jak i przeprowadzonej dyskusji można sformułować następujące wnioski:

1. Dokonane zmiany systemu pomiarowego siły, przez wykorzystanie w nowym rozwiązaniu tensometrii elektrooporowej, okazały się prawidłowe — stwierdzono przydatność stosowania do prób dynamicznego rozciągania młota rotacyjnego typu RSO.
2. Przeprowadzona identyfikacja układu drgającego konstrukcją nośna-dynamometr-próbka przy wykorzystaniu techniki analogowej, umożliwiła prawidłową interpretację uzyskanych oscylogramów. Dzięki identyfikacji układu udało się wyznaczyć wartości naprężenia dla górnych granic plastyczności badanych stali.
3. Opisana metoda interpretacji oscylogramów na których obserwuje się proces oscylacji siły może stanowić podstawę do analizy wyników otrzymywanych na urządzeniach podobnego typu.
4. W wyniku doświadczeń na młocie rotacyjnym uzyskano krzywe umocnienia dla miedzi i stali niskowęglowej w zakresie prędkości odkształcenia od 10^1s^{-1} do około 10^2s^{-1} . Krzywe te porównywano z krzywymi umocnienia, które zostały wyznaczone dla małych prędkości odkształcenia. Otrzymane wyniki mogą być użyteczne w pewnych procesach przeróbki plastycznej.

Literatura cytowana w tekście

1. U. S. LINDHOLM, *Some Experiments with the Split Hopkinson Pressure Bar*, J. Mech. Phys. of Solids 6, 12 (1964), 317.
2. J. KLEPACZKO, *Zmodyfikowany pret Hopkinsona*, Mech. Teoret. i Stos., 4, 9 (1971), 479.
3. J. E. SMITH, *Tension Test of Metals at Strain Rates up to 200 sec⁻¹*, Mat. Res. and Standards, 9, 3 (1963), 713

4. Ю. Я. Волощенко-Климовицкий, *Динамический предел текучести*, Изд. Наука, Москва 1965 (1963), 713.
5. B. REVSIN, S. R. BODNER, *Experiments on the Dynamic Tensile Strength of Metals and Plastics*, Israel Journal of Technology, 6, 7 (1969), 485.
6. I. VIGNESS, J. M. KRAFFT, R. C. SMITH, *Proc. Conf. on Properties of Materials at High Rates of Strain*, London 1957, 138.
7. K. J. MARSH, J. D. CAMPBELL, *The Effect of Strain Rate on the Post-Yield Flow of Mild Steel*, J. Mech. Phys. of Solids, 1, 11 (1963), 49.
8. C. J. MAIDEN, S. J. GREEN, *Compressive Strain-Rate Test on Six Selected Materials at Strain Rates from 10^{-3} to 10^4 in $|in|$ sec.*, J. Appl. Mech., 3, 33 (1966), 496.
9. H. C. MANN, *High-velocity Tension-Impact Tests*, Proc. ASTM, 36 (1936), 85.
10. M. J. MANJOINE, A. NADAI, *High-Speed Tension Tests at Elevated Temperatures*, Proc. ASTM, 40 (1940), 822.
11. M. J. MANJOINE, *Influence of Rate of Strain and Temperature on Yield Stresses of Mild Steel*, J. Appl. Mech., 12, 11 (1944), A-211.
12. F. E. HAUSER, *Techniques for Measuring Stress-Strain Relations at High Strain Rates*, Exp. Mech., 8, 6 (1966), 395.
13. J. KLEPACZKO, *Urządzenie do dynamicznego skrećania*, Mech. Teoret. i Stos., 4, 5 (1967), 425.
14. K. G. HOGE, *Some Mechanical Properties of Uranium-10 Weight Percent Molybdenum Alloy Under Dynamic Tension Loads*, Trans. ASME, 87 D (1966), 509.
15. A. R. ROSENFELD, G. T. HAHN, *Numerical Description of the Ambient-Temperature and High-Strain Rate Flow and Fracture Behavior of Plain Carbon Steel*, Trans. ASM, 59, (1966), 962.
16. J. KLEPACZKO, *O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury*, Rozpr. Inż., 3, 13 (1965), 561.

Резюме

ИСПЫТАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ ПРИ УДАРНОМ РАСТЯЖЕНИИ
НА РОТАЦИОННОМ КОПРЕ

В статье представлено как следует провести ударное растяжение на ротационном копре типа RSO производства фирмы WPM Лейпциг. Обсуждено сделанные изменения измерений системы сил и скорости удара, а также проведено краткий анализ этой системы с точки зрения распространения волн.

Проведено идентификацию колеблющей системы: конструкция копра — динамометр — образец используя аналоговую вычислительную машину что дало возможность правильной интерпретации полученных осциллограммов усилие — время, а также наметить напряжения верхнего предела текучести исследуемой стали.

В результате экспериментов получено динамические кривые упрочнения для поликристаллической меди (99,90% Cu) и низкоуглеродистой стали (0,11% C) в диапазоне скоростей деформаций $10 - 10^2 \text{ сек}^{-1}$. Построенные динамические кривые упрочнения этих металлов сравниваются со статическими кривыми.

Summary

DYNAMIC TENSILE TEST OF METALS BY ROTATIONAL HAMMER

It has been shown how the dynamic tensile test should be performed by means of rotational hammer RSO type, produced by WPM Leippzig. Some improvements have been described concerning measurements of force and impact velocity, as well as the wave analysis of the system.

Due to performed identification, by the analogue technique, of the system: support-dynamometer-specimen.

This enabled the correct of obtained oscillograms and the determination of values of the upper yield point.

As a result of the experiments the dynamic strain hardening curves for polycrystalline copper (99,9% Cu) and low carbon steel (0,11% C) have been obtained in the strain rate region $10-10^2\text{s}^{-1}$. The curves have been compared with those for quasi-static case.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT TECHNOLOGII BUDOWY MASZYN
IPPT PAN
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT TECHNOLOGII BUDOWY MASZYN

Praca została złożona w Redakcji. dnia 27 lipca 1978 roku.

PRÓBY STATYCZNEGO I DYNAMICZNEGO SKRĘCANIA W ZASTOSOWANIU DO OCENY
ZDOLNOŚCI DO ODKSZTAŁCEŃ TWARDYCH STALI

MIROSLAW PIWECKI (POZNAŃ)

1. Uwagi wstępne

Prędkość odkształcenia jest jednym z podstawowych czynników wpływających na własności plastyczne materiałów, a charakter tej zależności ma doniosłe znaczenie praktyczne w zagadnieniach technologii kształtowania plastycznego oraz w aspekcie odporności materiałów na pękanie.

Poniżej przytoczono wybrane przykłady badań w tej dziedzinie. W pracy [1] podano zależność przewężenia próbki od prędkości rozciągania w zakresie od 10^{-3} do $10^3 \frac{1}{s}$ dla trzech gatunków stali, a w [2] — rezultaty podobnych badań dla pięciu gatunków stali o rozmaitych zawartościach węgla i manganu.

Własności plastyczne kilku gatunków stali węglowych opisano w [3], przyjmując za miarę plastyczności wydłużenie i przewężenie z próby rozciągania, którą realizowano z prędkościami od 10^{-3} do $2,5 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$. W [4] podano wyniki podobnych badań dla stopów aluminium, a w [5] zależność przewężenia próbki od prędkości rozciągania w zakresie od 10^{-4} do $5 \cdot 10^2 \frac{m}{s}$ dla szeregu stali oraz stopów aluminium i tytanu.

Podsumowując wnioski podane w wyżej cytowanych pracach można stwierdzić, że zależność własności plastycznych od prędkości odkształcenia ma różny charakter dla różnych materiałów; własności plastyczne wzrastają, maleją lub też nie ulegają zmianie w poszczególnych przedziałach prędkości odkształcenia.

Przedmiotem niżej opisanych badań były stale narzędziowe szybko tnące gatunków SW7M i SW18, które poddano próbom skręcania w szerokim zakresie prędkości. Przeprowadzenie badań było możliwe po uprzednim zaprojektowaniu i wykonaniu odpowiednich stanowisk badawczych. Badania własności wybranych stali połączone były z testowaniem stanowisk, zwłaszcza opisanego urządzenia z drążkiem skrętnym jako źródłem energii. Urządzenie takie do tej pory nie było wykorzystywane. Celem badań było uzyskanie informacji na temat zależności odkształceń trwałych stali narzędziowych od prędkości odkształcenia. Badania te wypełniają w pewnym stopniu lukę w opisie własności stali o twardościach większych od 60 HRC, charakteryzujących się znikomą skłonnością do trwałych odkształceń.

Nadmienić należy, że próby statycznego i dynamicznego skręcania są, począwszy od lat trzydziestych, stosowane do badania własności stali narzędziowych jako jedne z bar-

dziej czułych metod. Jako przykłady wymienić można artykuły [6], [7] i [8], w których oceniano własności plastyczne stali po różnych zabiegach obróbki cieplnej. Również w pracach [9], [10], [11] i [12] opisano próby skręcania wykonane w podobnym celu. W przeprowadzonych badaniach zdolność do odkształceń stali SW7M i SW18 oceniano za pomocą kąta odkształcenia plastycznego próbki pełnej z łagodnym wytoczeniem na części roboczej, które lokalizowało miejsce pęknięcia.

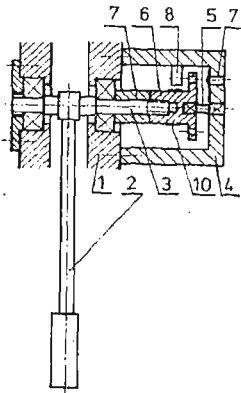
Stale narzędziowe o twardościach większych od 60 HRC charakteryzują się bardzo dużą wrażliwością na działanie karbu, co utrudnia zastosowanie próbek rurowych, gdyż zminimalizowanie efektu koncentracji naprężeń spowodowanego choćby istnieniem części chwytowych, wymagałoby nadania próbkom odpowiednio dużych wymiarów. Kształt próbki musi również umożliwiać jej ostateczną obróbkę mechaniczną po zabiegach obróbki cieplnej. Ilustracją tych problemów może być praca [13], w której przedstawiono kształt próbki umożliwiający wyznaczenie własności wytrzymałościowych i plastycznych stali narzędziowych podczas próby statycznego rozciągania.

Rezygnując z zastosowania próbek o rurowym kształcie części pomiarowej nie podawano wykresów skręcania we współrzędnych $\tau - \gamma$ lecz we współrzędnych moment skręcający — kąt skręcenia, na podstawie którego wyznaczono kąt odkształcenia plastycznego próbki.

2. STANOWISKA DO BADAŃ

W poniżej opisanych badaniach wykonanie prób statycznego skręcania z prędkością 0,0314 rad/s (0,3 obr./min.) umożliwiła typowa maszyna KM-50-1.

Próby dynamiczne przeprowadzono na dwóch specjalnie zaprojektowanych w tym celu stanowiskach. Jedno z tych stanowisk zostało zbudowane na bazie młota wahadłowego Charpy'ego według schematu przedstawionego na rysunku 1. Pomiar kąta skręcenia



Rys. 1. Schemat stanowiska na młocie wahadłowym

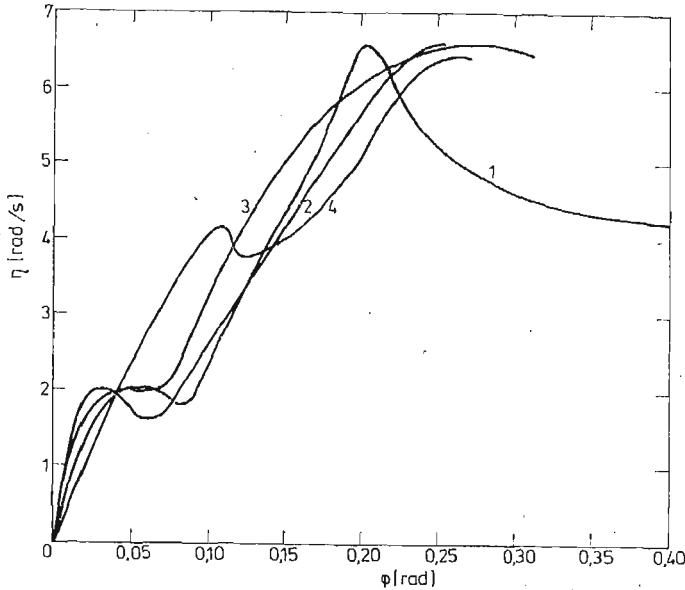
1 — korpus młota, 2 — wahadło, 3 — oś, 4 — korpus przystawki skręcającej, 5 — próbka, 6 — uchwyt ruchomy, 7 — tuleja dystansowa, 8 — uchwyt z fotodiody, 9 — lampka, 10 — czujniki tensometryczne

umożliwia układ obejmujący fotodiody 8, lampkę 9 oraz kołnierz uchwyty 6 z nawierconymi na obwodzie otworami. Pomiar momentu skręcającego przeprowadzano za pomocą tensometrów oporowych naklejonych na tulei uchwyty 6.

W skład układu pomiarowego wchodził mostek tensometryczny TDA-6 firmy Mikrotechna oraz oscyloskop dwustrumieniowy OKD 505A-III produkcji Radiotechniki z przystawką fotograficzną. Opis działania urządzenia znaleźć można w artykułach [10], [11] [12].

Podobne układy pomiarowe wykorzystane były w badaniach N. G. MICHAJLICZENKI [14], J. KLEPACZKI [15] oraz M. G. STEVENSONA i J. D. CAMPBELLA [16]. W pracy [8] w miejsce przetwornika fotoelektrycznego zastosowano do pomiaru kąta skręcenia przetwornik magnetyczny.

Zależność prędkości skręcania $\eta = \frac{d\varphi}{dt}$ w funkcji kąta skręcenia φ dla kilku próbek skręconych na omawianym stanowisku przedstawiono na rysunku 2. Jak widać, prędkość



Rys. 2. Zależność prędkości skręcania od kąta skręcenia podczas prób na stanowisku z rysunku 1
1 — próbka ze stali SW7M, temperatura odpuszczania 663K, 2 — SW7M, 783 K, 3 — SW18, 663 K, 4 — SW18, 783 K.

skręcania wzrasta w trakcie próby by osiągnąć maksymalną wartość około 6,6 rad/s (63 obr/min). Materiały bardziej plastyczne posiadają dla większych kątów skręcenia również gałąź opadającą na wykresie $\eta = f(\varphi)$.

Drugie stanowisko do prób dynamicznych zaprojektowano wykorzystując drążek skrętny jako źródło energii niszczącej próbkę. Schemat stanowiska przedstawiono na rysunku 3.

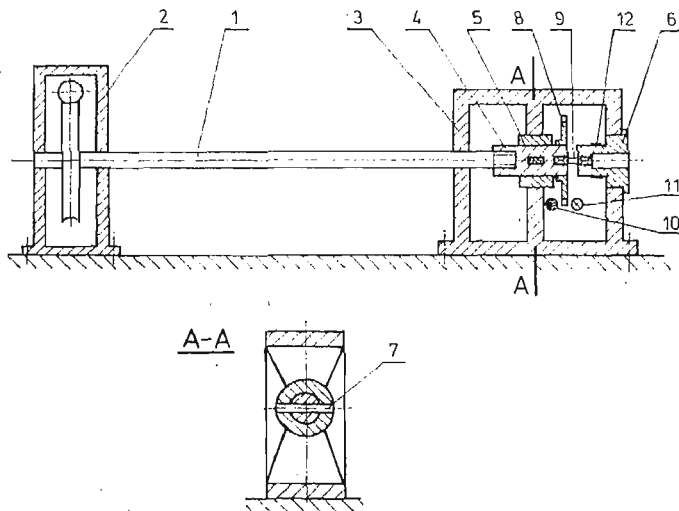
Drążek skrętny 1 wykonany ze stopu PA-9 połączony jest z lewej strony z przekładnią ślimakową 2. Drugi koniec drążka łączy się za pomocą wielowypustu z uchwytem ruchomym 4 mającym możliwość obrotu w panewce łożyska 5, która za pomocą wpustu jest ustalona w korpusie 3. W korpusie osadzony jest również uchwyt nieruchomy 6 próbki 9. Istotnym elementem urządzenia jest kołek, który uniemożliwia obrót uchwytem 4 podczas napinania drążka za pomocą przekładni ślimakowej. Skręcanie próbki rozpoczyna się wówczas, gdy moment skręcający w drążku 1 osiągnie wartość, przy której kołek 7 ulega ścięciu.

Do pomiaru kąta skręcenia służy, jak i w poprzednim stanowisku, układ z fotodiodą

10, lampką 11 i tarczą 8 z nacięciami na obwodzie, natomiast moment skręcający sygnalizują czujniki tensometryczne 12.

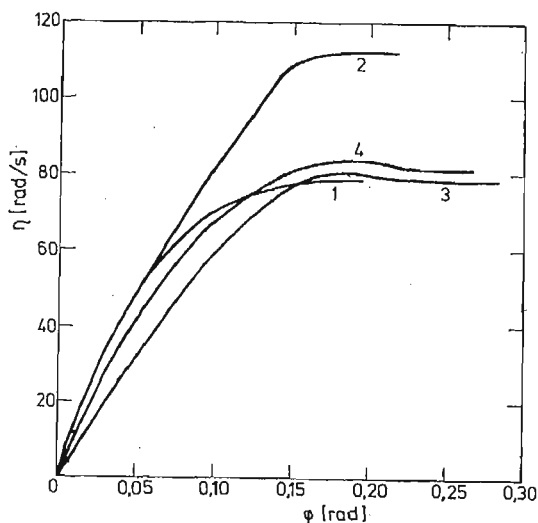
W skład stanowiska wchodzi również identyczna aparatura pomiarowa i rejestrująca jak poprzednio.

Na rysunku 4 przedstawiono zależność prędkości skręcania od kąta skręcania podczas prób na omawianym stanowisku. Uzyskuje się tutaj większy rozrzut prędkości skręcania niż na stanowisku zbudowanym na młocie wahadłowym, co jest związane z niejednorod-



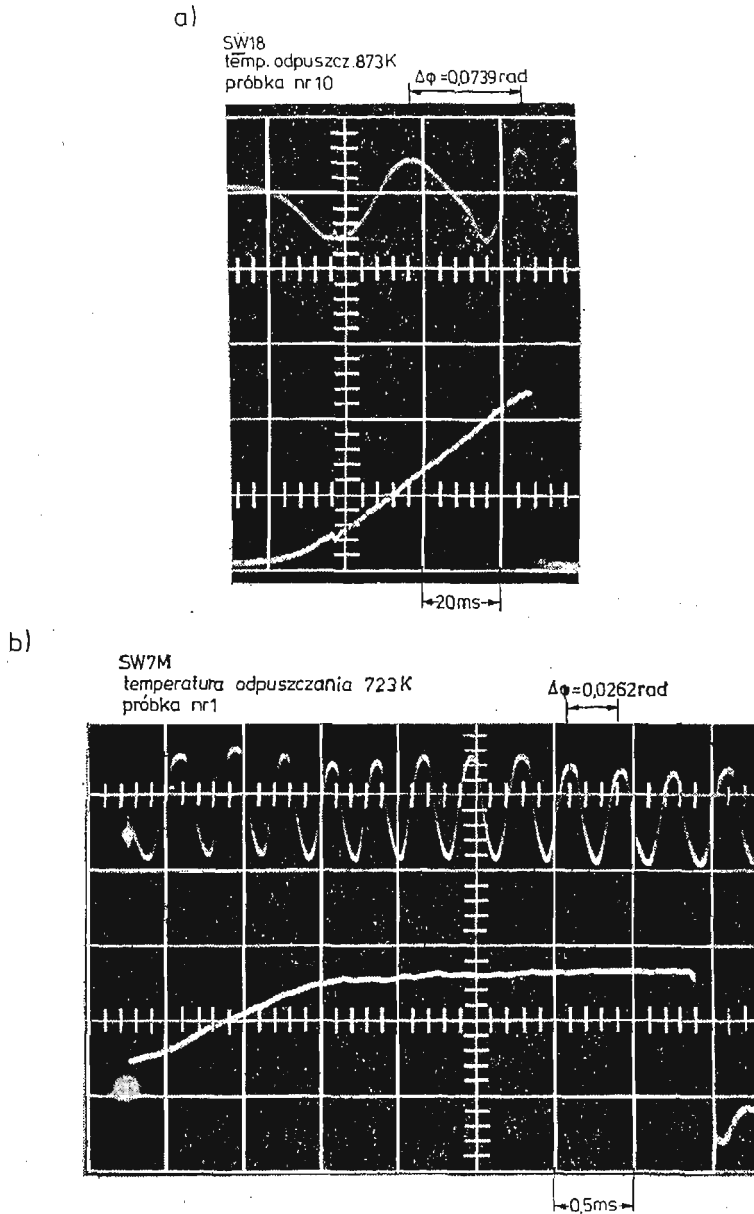
Rys. 3. Schemat stanowiska z drążkiem skrętnym.

1 — drążek skrętny, 2 — przekładnia ślimakowa, 3 — korpus, 4 — uchwyt ruchomy, 5 — panewka łożyska, 6 — uchwyt nieruchomy, 7 — kolebka, 8 — tarcza z nacięciami, 9 — próbka, 10 — fotodiody, 11 — lampka, 12 — czujniki tensometryczne.



Rys. 4. Zależność prędkości skręcania od kąta skręcania podczas prób na stanowisku z rysunku 3, 1 — próbka ze stali SW7N, temperatura dopuszczalna 663K, 2 — SW7M, 883K, U₃ — SWJ8, 663K, 4 — SWI8, 883K.

nością materiału stosowanego na kołki (metapleks). Maksymalne prędkości skręcania osiągały w przeprowadzonych badaniach wartości z przedziału $80 - 115 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (około $760 - 1100 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$). Opisując działanie stanowiska należy wspomnieć, że umożliwia ono również



Rys. 5. Oscylogramy skręcania próbek. Przebieg górny — sygnał z fotodiody, przebieg dolny — moment skręcający.

- a) oscylogram ze stanowiska na młocie wahadlowym,
b) oscylogram ze stanowiska z drążkiem skrętnym.

wykonanie prób statycznych, jeśli nie stosuje się kołka. W tym przypadku moment skręcający jest przekazywany na próbkę poprzez drążek skrętny podczas działania przekładni ślimakowej.

Na rysunku 5 przedstawiono przykładowo oscylogramy uzyskane na obu stanowiskach, przy czym na rysunku 5a) przedstawiono oscylogram ze stanowiska usytuowanego na młocie wahadłowym, a na rysunku 5b) — ze stanowiska z drążkiem skrętnym. Należy zwrócić uwagę, że oscylogramy zarejestrowano przy różnych podstawach czasu, oraz że nie mają one tej samej podziałki kąta skręcenia. Podziałka kąta na oscylogramie z rysunku 5a) jest zbliżona do zastosowanej w pracy [15], natomiast na rysunku 5b) jest ponad dwukrotnie dokładniejsza. Przedstawione oscylogramy uzyskano podczas badań materiałów o różnej plastyczności; na rysunku 5a) pokazano oscylogram skręcania próbki z materiału bardzo kruchego, natomiast na rysunku 5b) — z materiału o stosunkowo dużej plastyczności.

Przebiegi kąta skręcenia i momentu skręcającego podlegają dalszemu opracowaniu graficznemu. Uzyskuje się wykres skręcania skąd wyznacza się kąt odkształcenia plastycznego φ_{p1} .

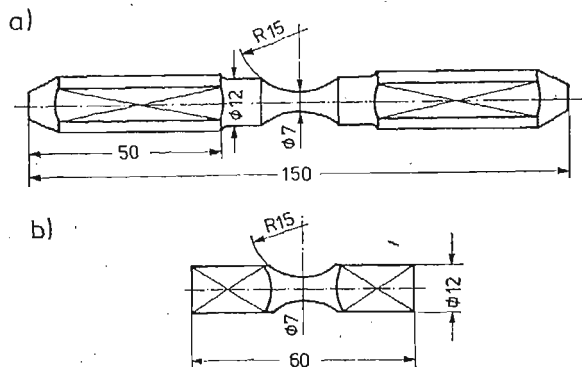
Na podstawie oscylogramów opracowuje się również wykres $\eta = f(\varphi)$. Dokładniejsze informacje na ten temat zawierają cytowane już artykuły [10], [11], [12] i [15].

Na zakończenie opisu działania obu stanowisk należy podkreślić, że w badaniach wykorzystano zasadę pomiarów quasi — statycznych. Wskazówki odnośnie prawidłowego interpretowania tej zasady znaleźć można w literaturze [15] i [17].

3. Badany materiał i stosowane próbki

Na opisanych w rozdziale 2 stanowiskach przeprowadzono badania własności stali narzędziowych szybko tnących gatunków SW7M i SW18. Z każdego rodzaju materiału pobrano po dwa pręty o średnicy 45 mm, które cięto na ćwiartki by z nich wykonać próbki, których wymiary pokazano na rysunku 6.

Przeprowadzono analizę składu chemicznego badanych materiałów, której wyniki zawiera tablica 1 oraz wykonano odpowiednie obserwacje metalograficzne w celu dobrania prętów o w miarę jednorodnych własnościach.



Rys. 6. Próbki do badań: a) statycznych, b) dynamicznych

Tablica 1

Skład chemiczny badanych stali

Gatunek stali	Nr pręta	Składniki stopowe w %						
		C	Mn	Si	Cr	W	Mo	V
SW7M	1	0,86	0,36	0,33	4,4	6,8	5,5	2,2
	2	0,82	0,34	0,35	4,4	6,5	5,5	2,2
SW18	1	0,75	0,39	0,29	4,5	17,5	0,7	1,2
	2	0,84	0,35	0,32	4,4	17,2	1,3	1,0

Próbki poddano obróbce cieplnej: stal SW7M hartowano z temperatury 1473 K (1200°C), a stal SW18 — z temperatury 1533 K (1260°C), a następnie dla obu gatunków stali przeprowadzono odpuszczanie w temperaturach 663 K (390°C), 723 K (450°C), 783 K (510°C), 813 K (540°C), 843 K (570°C) i 873 K (600°C). Na obydwu stanowiskach do prób dynamicznych, opisanych w rozdziale 2, wykorzystywano identyczne próbki. Na próbkach do badań statycznych i dynamicznych wykonano jednakowe karby w celu zapewnienia porównywalności kątów odkształcenia plastycznego.

Karb usytuowany na pomiarowej części próbki powoduje koncentrację naprężenia, przy czym współczynnik kształtu wyznaczony na podstawie [18] i [19] dla przyjętych wymiarów wynosi $\alpha_k \approx 1,035$. Jak widać wartość α_k jest bliska 1, więc w pierwszym przybliżeniu można pominąć efekt koncentracji naprężeń.

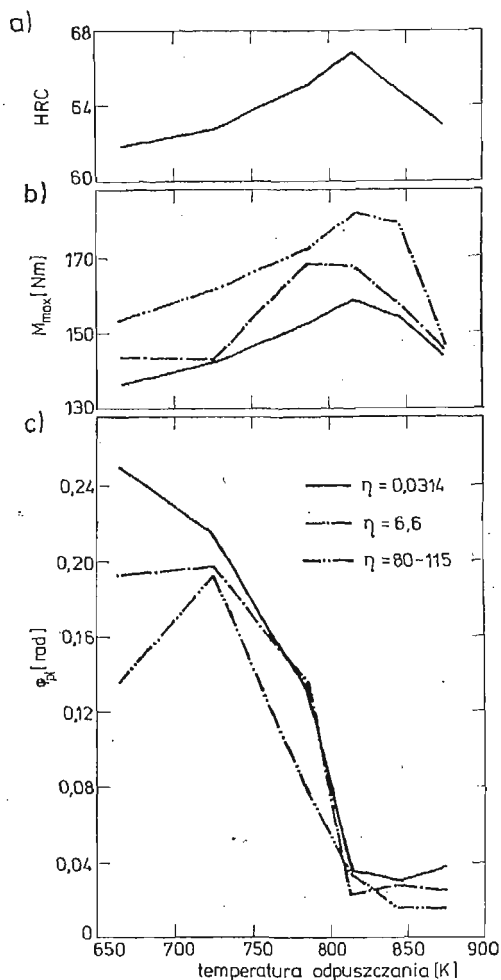
Wykorzystanie w badaniach próbek pełnych wymaga uwzględnienia zmienności naprężeń wzdłuż promienia, co zwłaszcza po przekroczeniu granicy plastyczności jest zagadnieniem dość skomplikowanym. Wyznaczenie krzywych umocnienia nie było celem niniejszej pracy, ale jak podano w pracy [20] zadanie takie można rozwiązać na podstawie skręcania pełnych próbek.

4. Wyniki badań

Wpływ warunków obróbki cieplnej oraz prędkości skręcania na własności badanych stali zilustrowano na rysunkach 7 i 8. Przedstawiono tam zależność twardości HRC od temperatury odpuszczania oraz zależność maksymalnego momentu skręcającego M_{max} i kąta odkształcenia plastycznego φ_{pl} od prędkości skręcania, oraz temperatury odpuszczania.

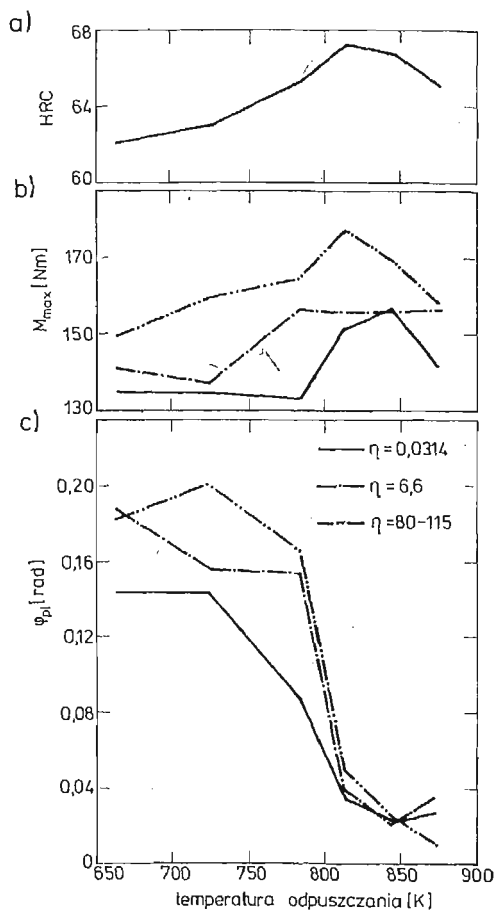
Na rysunkach 7 i 8 podano w charakterze parametrów prób maksymalne wartości prędkości skręcania, które uzyskano podczas badań na poszczególnych stanowiskach.

Rezultaty pomiarów kąta odkształcenia plastycznego opracowano statystycznie, korzystając z tablic zawartych w [21]. W szczególności zastosowano test Dixona na poziomie istotności $\alpha = 0,1$ w celu wyeliminowania wartości odbiegających od przeciętnych wyników pomiarów oraz obliczono przedziały ufności dla średnich, również na poziomie istotności $\alpha = 0,1$. Opracowane w wyżej opisany sposób wyniki pomiarów kąta φ_{pl} zawarte są w tablicy 2.



Rys. 7. Własności stali SW7M w zależności od temperatury odpuszczania i prędkości skręcania

- a) twardość HRC,
 b) maksymalny moment skręcający,
 c) kąt odkształcenia plastycznego.



Rys. 8. Własności stali SW18 w zależności od temperatury odpuszczania i prędkości skręcania

- a) twardość HRC,
 b) maksymalny moment skręcający,
 c) kąt odkształcenia plastycznego.

W tabelicy podano również liczbę udanych prób. Dla poszczególnych kombinacji warunków badań w wierszu górnym przytoczono średnią wartość ϕ_{pl} w rad, w wierszu środkowym przedział ufności dla średniej, a w wierszu dolnym — liczbę prób, które posłużyły do wyznaczenia średnich wartości kątów odkształcenia plastycznego.

5. Uwagi końcowe i wnioski

1. Przedstawione wyżej stanowiska badawcze umożliwiają wykonanie prób skręcania w szerokim zakresie prędkości odkształcenia. Próby te są łatwiejsze od prób wprowadzonych na gruncie mechaniki pękania, oraz są czulszą metodą oceny skłonności

Tablica 2

Zależność φ_{D1} [rad] od prędkości skręcania i warunków obróbki cieplnej dla stali SW7M i SW18

Gatunek stali	Maks. prędk. skręc. podczas próby w rad/s	Temperatura odpuszczania w K					
		663	723	783	813	843	873
SW7M	0,0314	0,250 0,0535 5	0,214 0,0208 5	0,131 0,0335 5	0,035 0,0127 4	0,031 0,0128 5	0,038 0,0121 4
	6,6	0,191 0,0555 8	0,196 0,0460 9	0,132 0,0309 12	0,024 0,0081 10	0,029 0,0062 10	0,026 0,0055 15
	80–115	0,136 0,0145 7	0,192 0,0631 2	0,076 0,0284 4	0,033 0,0067 10	0,016 0,0099 8	0,016 0,0025 3
SW18	0,0314	0,142 0,0209 5	0,144 0,0379 5	0,087 0,0162 5	0,035 0,0129 5	0,023 0,0041 5	0,029 0,0051 4
	6,6	0,186 0,0158 7	0,157 0,0357 10	0,154 0,0182 7	0,038 0,0191 8	0,022 0,0111 6	0,036 0,0045 8
	80–115	0,182 0,0059 3	0,201 0,0121 3	0,166 0,0500 4	0,048 0,0111 4	0,024 0,0110 6	0,010 0,0092 4

bardzo twardych stali do kruchego pęknięcia, od powszechnie stosowanych znormalizowanych prób udarowego zginania, co wykazano w pracy [10]. Inne przyczyny mogące zadecydować o wdrożeniu omawianych prób zebrano w artykule [22].

2. Jak wynika z wykresów na rysunkach 2 i 4 stanowiska do dynamicznego skręcania charakteryzują się zmienną prędkością odkształcenia podczas prób. W niniejszej pracy jako parametr charakteryzujący warunki próby podawano maksymalną wartość prędkości skręcania. Możliwe jest również wyznaczanie prędkości w momencie przekraczania granicy plastyczności, lub też średniej wartości prędkości skręcania [15].

3. Stanowiska podczas prób działały zgodnie z założeniami konstrukcyjnymi i były w pełni przydatne do realizacji założonego badań.

4. Przeprowadzone badania mają aspekt praktyczny. Podczas procesu odpuszczania badane stale uzyskują tak zwaną twardość wtórną, wskutek wydzielania się węglików i przemian austenitu. Problemem o dużej wadze jest dobór optymalnych warunków obróbki cieplnej ze względu na uzyskiwane własności mechaniczne.

5. Na podstawie przeprowadzonych badań można wysnuć wniosek, że odkształcenia trwałe badanych stali zależą w różny sposób od prędkości odkształcenia. W przypadku stali SW7M zaobserwowano zmniejszanie się odkształceń trwałych ze wzrostem prędkości skręcania. Tylko dwa punkty na wykresie z rysunku 7c) położone są niezgodnie ze sformułowaną wyżej zasadą.

Odkształcenia próbek ze stali SW18 wzrastają ze wzrostem prędkości odkształcania. Na osiemnaście średnich wartości kątów odkształcenia plastycznego, które posłużyły do konstrukcji wykresu podanego na rysunku 8c) w trzech przypadkach obserwuje się odstępstwa od ogólnej prawidłowości.

Generalnie rzecz biorąc wartości kątów odkształcenia plastycznego uzyskane podczas badań dynamicznych są dla stali SW7M mniejsze, a dla SW18 większe od wartości uzyskanych podczas prób statycznych.

6. Dla uzyskanych wyników przeprowadzono odpowiednią analizę wariancyjną, na podstawie której można stwierdzić, że zróżnicowanie wartości kątów φ_p spowodowane zmianą prędkości skręcania jest istotne ze statystycznego punktu widzenia.

7. Wpływ prędkości odkształcania na zdolność do trwałych odkształceń z którą wiąże się odporność na pęknięcie, należy uwzględnić podczas praktycznego zastosowania stali narzędziowych.

Literatura cytowana w tekście

1. C. ALBERTINI, M. MONTAGNANI, *Dynamic materials properties of several steels for fast breeder reactor safety analysis*, published by the Commission of the European Communities, 1977.
2. J. HARDING, *Effect of high strain rate on the room — temperature strength and ductility of five alloy steels*, Journal of the Iron and Steel Institute, 6 210 (1972), str. 425 - 432.
3. P. VELES, J. MICHEL', J. HIDVÉGHY, *Vplyv štruktúry uhlíkových ocelí na mechanické vlastnosti pri dynamickom namáhaní*, Kovové Materiály, 4 10 (1972), str. 343 - 351.
4. U. S. LINDHOLM, *Review of dynamic testing techniques and material behaviour*, Institute of Physics Conf. Ser. No 21, str. 3 - 21.
5. „Высокоскоростная деформация металлов”, под ред. В. И. Беляева, Наука и техника, Минск 1976.
6. G. V. LUERSEN, O. V. GREENE, *The torsion impact test*, Proceedings ASTM, 33 (1933) part II, str. 315 - 327.
7. R. SCHERER, H. KIESSLER, *Verdrehschlagzähigkeit von Werkzeugstahl*, Stahl u. Eisen, 18 63 (1943), str. 353 - 360.
8. J. SALOKANGAS, *Eine neue Maschine zur Schlagprüfung im Verdrehversuch und die Zähigkeit eines Werkzeugstahls bei schlagartiger Verdrehung in Abhängigkeit von der Anlastemperatur*, Materialprüfung, 12 3 (1961), str. 437 - 440.
9. O. KUPŚĆ, *Badanie na skręcanie stali szybkoobrotowej*, Mechanik, 6 44 (1971), str. 305 - 306.
10. M. PIWECKI, J. GRZEŠKOWIAK, *Ocena własności plastycznych stali SW12C za pomocą próby udarowego skręcania*, Biuletyn Techniczny Zakładów H. Cegielski, 2 23 (1979), str. 23 - 25.
11. M. PIWECKI, *Sposób przeprowadzenia próby udarowego skręcania*, Mechanik, 6 51 (1978), str. 293 - 298.
12. S. JONIAK, M. PIWECKI, *Próba dynamicznego skręcania twardych stali*, VIII Sympozjum Dośw. Badań w Mech. Ciała Stałego, Warszawa 1978, cz. I, str. 409 - 417.
13. A. ANKIEWICZ, J. LEWIŃSKI, J. MISIAK, Z. NITA, *Własności wytrzymałościowe stali szybkoobrotowych stosowanych na przeciągacze*, Mechanik, 12 48 (1975), str. 623 - 625.
14. Н. Г. МИХАЙЛИЧЕНКО, *Методика испытания металлических образцов с различными концентраторами напряжения при статическом и ударном кручении*, Зав. лаборатория, 9 22 (1956), стр. 1081 - 1086.
15. J. KŁEPACZKO, *Urządzenie do dynamicznego skręcania*, Mechanika Teoret. i Stosowana, 4 5 (1967), str. 425 - 438.
16. M. G. STEVENSON, J. D. CAMPBELL, *An optical method for direct measurement of strain in a torsional Hopkinson-bar apparatus*, Journal of Strain Analysis, 3 10 (1975), str. 172 - 179.
17. W. STYBURSKI, *Przetworniki tensometryczne*, WNT, Warszawa 1976.
18. H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg (1958), str. 111 - 113.

19. *Poradnik inżyniera „Mechanika”*, tom 1, WNT, Warszawa 1968, str. 1017.
20. T. PEŁCZYŃSKI, *O krzywych umocnienia, Obróbka Plastyczna*, 1 14 (1975), str. 5 - 34.
21. W. VOLK, *Statystyka stosowana dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1973.
22. M. PIWESKI, *Zastosowania skręcania do oceny własności plastycznych materiałów*, Zeszyty Nauk. Pol. Poznańskiej „Mechanika”, 19 (1977), str. 107 - 119.

Резюме

ИСПЫТАНИЯ НА СТАТИЧЕСКОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ
В ПРИМЕНЕНИИ К ОЦЕНКЕ СПОСОБНОСТИ К ДЕФОРМАЦИИ
ТВЕРДЫХ СТАЛЕЙ

В статье заключено результаты испытаний влияния скорости деформации и условий термической обработки на пластические свойства двух сортов инструментальных сталей (рис. 7 и 8). Угол пластической деформации полученный в испытаниях на кручение принято как показатель пластических свойств. Удостоверено, что пластические свойства стали SW7M уменьшаются, а стали SW18 — возрастают с повышением скорости деформации.

Динамические испытания осуществлено на двух специально запроектированных установках, принцип действия которых объясняют рисунки 1 и 3. Установку представленную на рисунке 1 построено как приставку к маятниковому копру Шарпи. Позволяет она получить максимальную скорость скручивания около 6,6 рад/с (рис. 2). Во время испытаний на установке представленной на рисунке 3, в которой источником скручивающей энергии является предварительно скрученный стержень, получено максимальные скорости скручивания в диапазоне 80 - 115 рад/с (рис. 4).

Summary

STATIC AND DYNAMIC TORSION TESTS IN APPLICATION TO VALUATION OF ABILITY
TO DEFORMATION OF HARD STEELS

The paper describes the results of investigations of the influence of the strain — rate and the heat treatment conditions on the ductile properties of two sorts of tool steels. The measure of the steel ductile properties was the angle of plastic strain during the torsion tests. It was found that with growing of the strain — rate the ductile properties of the steel SW7M decrease and the ductile properties of the steel SW18 increase.

The impact tests have been carried out on the two specially designed stands the operation principles of which are explained in the figures 1 and 3. The stand shown in the figure 1 is designed on the basis of the Charpy hammer. It permits to achieve the maximum strain — rate up to 6.6 rad/s (fig. 2). The experiments carried out on the stand shown in the figure 3, where a torsion bar was a source of energy, the maximum strain — rates of the range 80 ÷ 115 rad/s were achieved.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 maja 1979 roku

PLASKIE FALE HARMONICZNE I DYFUZJA W CIELE STAŁYM

JAROSŁAW STEFANIAK, JANUSZ JANKOWSKI (POZNAŃ)

1. Sformułowanie zagadnienia

Punktem wyjścia rozważań są równania różniczkowe dla termodyfuzji podane przez S. PODSTRIGAÇA i W. NOWACKIEGO [1]. Przy zaniedbaniu wpływu temperatury można je zapisać w postaci

$$(1.1) \quad c_{ii} - \frac{1}{D} c_{,i} = k u_{j,ii} - \frac{\sigma}{D}(x, t),$$

$$\mu u_{j,ii} + (\mu + \lambda) u_{i,ij} = \rho u_{j,ii} + \gamma_c c_{,j} - X(x, t),$$

gdzie

$j, l = 1, 2, 3; x \in R^3; t \in (0, \infty)$

$\mu, \lambda, \rho, \gamma_c, D, k$ — stałe materiałowe

c — koncentracja, u_j — przemieszczenie

σ — źródło dyfuzji, X_j — siły masowe.

Przyjęto jednorodny warunki początkowe

$$(1.2) \quad c(x, 0) = 0; \quad u_j(x, 0) = 0; \quad u_{j,t}(x, 0) = 0,$$

oraz warunki znikania w nieskończoności

$$(1.3) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} c(x, t) = 0; \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_j(x, t) = 0.$$

Założono, że w chwili $t = 0$ zaczynają działać w płaszczyźnie $x_1 = 0$: źródło dyfuzji i źródło dylatacji [2]

$$\sigma = D c_0 \delta(x_1) \eta(t),$$

$$X_j = -P_1 \delta'(x_1) e^{i\omega t} \eta(t) \delta_{1j},$$

gdzie δ_{jl} — symbol Kroneckera, $\delta(x_1)$ — funkcja Diraca,

$\eta(t)$ — funkcja Heaviside'a.

Zgodnie z [3], tak postawione zagadnienie posiada dokładnie jedno rozwiązanie w przestrzeniach Sobolewa: $H^{2,1}$ dla koncentracji, H^2 dla przemieszczenia.

2. Transformaty Laplace'a rozwiązań

Stosując transformatę Laplace'a [4] do układu równań (1.1) - (1.4) otrzymano

$$(2.1) \quad \bar{c}_{,ii} - \frac{s}{D} \bar{c} = k \bar{u}_{j,ii} - \frac{c_0}{s} \delta(x_1),$$

$$(2.1) \quad \mu \bar{u}_{j,11} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{t,1j} = \varrho s^2 u_j + \gamma c \bar{c}_{,j} + P_1 \delta'(x_1) \frac{\delta_{1j}}{s - i\omega},$$

[cd.]

gdzie $\bar{f}(s)$ oznacza transformatę Laplace'a dla funkcji $f(t)$, s jest parametrem transformacji. Oznaczając

$$(2.2) \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}; \quad \gamma = \frac{\gamma c}{\lambda + 2\mu}; \quad P = \frac{P_1}{\lambda + 2\mu},$$

dla $\gamma k \neq 1$ rozwiązanie układu (2.1) ma postać

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \bar{c}(x_1, s) &= \frac{Pk}{1 - \gamma k} \frac{\delta(x_1)}{s - i\omega} - \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left\{ \left[\frac{Pk}{s - i\omega} \alpha_1^4 + \frac{c_0}{s} \left(\alpha_1^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \right] \frac{e^{i\alpha_1|x_1|}}{i\alpha_1} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{Pk}{s - i\omega} \alpha_2^4 + \frac{c_0}{s} \left(\alpha_2^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \right] \frac{e^{i\alpha_2|x_1|}}{i\alpha_2} \right\}, \\ \bar{u}_j(x_1, s) &= \frac{\operatorname{sgn} x_1}{2\sqrt{\Delta}} \left\{ \left[P \frac{\alpha_1^2 + \frac{s}{D}}{s - i\omega} + \frac{\gamma c_0}{s} \right] e^{i\alpha_1|x_1|} + \right. \\ &\quad \left. - \left[P \frac{\alpha_2^2 + \frac{s}{D}}{s - i\omega} + \frac{\gamma c_0}{s} \right] e^{i\alpha_2|x_1|} \right\} \delta_{1j}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \frac{s}{c_1^2} \sqrt{s - s_1} \sqrt{s - s_2}, \\ s_{1,2} &= \frac{c_1^2}{D} [1 - 2\gamma k \pm 2\sqrt{\gamma k(\gamma k - 1)}], \\ \arg \sqrt{s - s_n} &= 0, \quad \text{gdy} \quad \operatorname{Re}(s - s_n) > 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(s - s_n) = 0, \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad \alpha_{1,2}^2 = -\frac{1}{2(1 - \gamma k)} \left(\frac{s^2}{c_1^2} + \frac{s}{D} \mp \sqrt{\Delta} \right).$$

Osobno należy rozważyć przypadek $\gamma k = 1$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \bar{c}_1(x_1, s) &= -\frac{Dc_1^2}{Ds + c_1^2} \left\{ \frac{Pk}{s - i\omega} \frac{\delta''(x_1)}{s} + \left[\frac{s}{Ds + c_1^2} \frac{Pk}{s - i\omega} - \frac{c_0}{s^2} \right] \delta(x_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{s^3}{Ds + c_1^2} \frac{Pk}{s - i\omega} + \frac{Dc_0 s}{c_1^2} \right] \frac{e^{i\alpha_0|x_1|}}{2i\alpha_0(Ds + c_1^2)} \right\}, \\ \bar{u}_j(x_1, s) &= \frac{c_1^2 \delta_{1j}}{Ds + c_1^2} \left[\frac{PD}{s - i\omega} \frac{\delta'(x_1)}{s} + \frac{1}{2} \left(\frac{P}{s - i\omega} \frac{c_1^2}{D(Ds + c_1^2)} + \frac{\gamma Dc_0}{s^2} \right) \operatorname{sgn} x_1 e^{i\alpha_0|x_1|} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.7) \quad \alpha_0^2 = -\frac{s^2}{Ds + c_1^2}.$$

Ponadto, zgodnie z warunkami (2.4), wybiera się na α_m , $m = 1, 2, 0$, te jednoznaczne gałęzi pierwiastków $\sqrt{\alpha_m^2}$, dla których. $\text{Im } \alpha_m > 0$.

Łatwo zauważyć, że przypadki szczególne $\gamma = 0$ lub $k = 0$ dają rozwiązania ścisłe, znane w teoriach niesprężonych.

3. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia

Ponieważ wartości współczynników γ i k nie są stabilizowane w dostępnej literaturze, należy rozważyć, z uwagi na (2.4), następujące przypadki: a) $\gamma k > 1$ b) $\gamma k = 0$, c) $\gamma k < 1$, $\gamma k > 0$

Wzory (2.3) oraz (2.6) dadzą się przedstawić w następującej, równoważnej postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{c}(x_1, s) &= \frac{Pk}{s-i\omega} \left[\frac{\delta(x_1)}{1-\gamma k} + \frac{i}{2} A_1(x_1, i\omega) \right] + \frac{\bar{\psi}_1(x_1, s)}{\sqrt{s-s_1}}, \\ \bar{u}_j(x_1, s) &= \left[\frac{P}{2} \frac{A_2(x_1, i\omega)}{s-i\omega} + \frac{1}{\sqrt{s-s_1}} \bar{\psi}_2(x_1, s) \right] \delta_{1j}, \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{c}_1(x_1, s) &= -D c_1^2 \left\{ \frac{Pk}{s-i\omega} \frac{\delta''(x_1)}{s(Ds+c_1^2)} + \left[\frac{Pks}{s-i\omega} - \frac{c_0}{s^2} (Ds+c_1^2) \right] \frac{\delta(x_1)}{(Ds+c_1^2)^2} \right\} + \\ &\quad - \frac{1}{s-i\omega} A_3(x_1, i\omega) + \frac{1}{\left(s + \frac{c_1^2}{D}\right)^{3/2}} \bar{\psi}_3(x_1, s) \frac{\sqrt{D} c_0}{2} \frac{e^{i\alpha_0|x_1|}}{\left(s + \frac{c_1^2}{D}\right)^{3/2}}, \\ {}_1\bar{u}_j(x_1, s) &= \frac{c_1^2 \delta'_{1j}}{Ds+c_1^2} \frac{PD}{s-i\omega} \frac{\delta'(x_1)}{s} + \frac{A_4(x_1, i\omega)}{s-i\omega} + \frac{\bar{\psi}_4(x_1, s)}{\left(s + \frac{c_1^2}{D}\right)^2} + \\ &\quad + \frac{c_1^2 \gamma c_0 D}{2(Ds+c_1^2)s^2} \text{sgn } x_1 e^{i\alpha_0|x_1|} \delta_{1j}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} A_1(x_1, i\omega) &= \frac{c_1^2}{i\omega} \frac{\alpha_1^3(i\omega) e^{i\alpha_1(i\omega)|x_1|} - \alpha_2^3(i\omega) e^{i\alpha_2(i\omega)|x_1|}}{\sqrt{i\omega-s_1} \sqrt{i\omega-s_2}}, \\ A_2(x_1, i\omega) &= \frac{c_1^2}{i\omega} \frac{\left(\alpha_1^2 + \frac{i\omega}{D}\right) e^{i\alpha_1|x_1|} - \left(\alpha_2^2 + \frac{i\omega}{D}\right) e^{i\alpha_2|x_1|}}{\sqrt{i\omega-s_1} \sqrt{i\omega-s_2}}, \\ A_3(x_1, i\omega) &= D c_1^2 Pk \frac{(i\omega)^3}{2i\alpha_0(i\omega)(i\omega D+c_1^2)^3} e^{i\alpha_0(i\omega)|x_1|}, \\ A_4(x_1, i\omega) &= \frac{P c_1^4 \text{sgn } x_1 \delta_{1j}}{2D(i\omega D+c_1^2)^2} e^{i\alpha_0(i\omega)|x_1|}, \\ \bar{\psi}_1(x_1, s) &= \frac{ic_1^2}{2s\sqrt{s-s_2}} \left\{ \frac{Pk}{s-i\omega} [\alpha_1^3 e^{i\alpha_1|x_1|} - \alpha_2^3 e^{i\alpha_2|x_1|} - \sqrt{A} A_1(x_1, i\omega)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_0}{s} \left[\left(\alpha_1^2 + \frac{s^2}{c_1^2}\right) \frac{e^{i\alpha_1|x_1|}}{\alpha_1} - \left(\alpha_2^2 + \frac{s^2}{c_1^2}\right) \frac{e^{i\alpha_2|x_1|}}{\alpha_2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad \bar{\psi}_2(x_1, s) &= \frac{c_1^2}{2s\sqrt{s-s_2}} \left\{ \frac{P}{s-i\omega} \left[\left(\alpha_1^2 + \frac{s}{D} \right) e^{i\alpha_1|x_1|} - \left(\alpha_2^2 + \frac{s}{D} \right) e^{i\alpha_2|x_1|} - \sqrt{D} A_2(x_1, i\omega) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma c_0}{s} [e^{i\alpha_1|x_1|} - e^{i\alpha_2|x_1|}] \right\} \operatorname{sgn} x_1, \\
 \bar{\psi}_3(x_1, s) &= \frac{c_1^2}{2D\sqrt{D}} \left[\frac{Pk s^2}{s-i\omega} e^{i\alpha_0|x_1|} + \frac{2D\sqrt{D}}{c_1^2(s-i\omega)} A_3(x_1, i\omega) \left(s + \frac{c_1^2}{D} \right)^{5/2} \right], \\
 \bar{\psi}_4(x_1, s) &= \frac{c_1^4 \delta_{1j}}{2D^3} \frac{P}{s-i\omega} \operatorname{sgn} x_1 e^{i\alpha_0|x_1|} - \frac{A_4(x_1, i\omega)}{s-i\omega}.
 \end{aligned}$$

Metodą przybliżoną (wg KRYŁOWA [5]) oblicza się oryginały transformat

$$(3.4) \quad \bar{F}_l(s) = \frac{1}{\sqrt{(s-s_1)^p}} \bar{\psi}_l(x_1, s); \quad l = 1, 2, 3, 4; \quad p \in \mathbb{N}.$$

Oryginały pozostałych składników wzorów (3.1), (3.2) można obliczyć w sposób ścisły.

Rozważmy przypadek $\gamma k > 1$. Wówczas $s_1 < 0$, a więc funkcja $\bar{F}_1(s)$ da się zapisać

$$(3.5) \quad \bar{F}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{-s_1}} \frac{1}{\sqrt{s'+s_1}} \bar{\psi}_1(x_1, -s_1 s').$$

Zgodnie z monografią [5] transformatę odwrotną $F_1(t)$ można jednostajnie przybliżać sumami

$$(3.6) \quad F_1(t) \approx \sum_{i=0}^n B_i(t) \bar{\psi}_1(x_1, -s_1 \sigma_i),$$

gdzie

$$(3.7) \quad \sigma_i = \frac{1+y_i}{1-y_i},$$

$y_l, l = 0, 1, \dots, n$, są miejscami zerowymi wielomianów stopnia $(n+1)$ ortogonalnych na przedziale $(-1, 1)$ oraz

$$(3.8) \quad B_i(t) = \sum_{j=0}^n a_{ij} \frac{t^{j-\frac{1}{2}}}{\Gamma(j+1/2)} e^{s_1 t}.$$

Wartości a_{ij}, σ_i można znaleźć np. w [6] tablica 6 lub tablica 7.

Na mocy powyższych rozważań można przedstawić oryginały transformat występujących w (3.1) w postaci

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad c(x_1, t) &\approx -Pk \left[\frac{1}{\gamma k - 1} \delta(x_1) + \frac{1}{2i} A_1(x_1, i\omega) \right] e^{i\omega t} + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^n B_i(t) \bar{\psi}_1(x_1, -s_1 \sigma_i), \\
 u_j(x_1, t) &\approx \left[\frac{P}{2} A_2(x_1, i\omega) e^{i\omega t} + \sum_{i=0}^n B_i(t) \bar{\psi}_2(x_1, -s_1 \sigma_i) \right] \delta_{1j}.
 \end{aligned}$$

Obierając dla przykładu $n = 3$ dostaje się wzór na koncentrację

$$c(x_1, t) \approx -Pk \left[\frac{1}{\gamma k - 1} \delta(x_1) + \frac{1}{2i} A_1(x_1, i\omega) \right] e^{i\omega t} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{s_1 t} \left[a_{00} \bar{\psi}_1(x_1, -s_1 \sigma_0) + \right.$$

$$+ \left(a_{10} + \frac{2}{1} a_{11} t \right) \bar{\psi}_1(x_1, s_1 \sigma_1) + \left(a_{20} + a_{21} \frac{2}{1} t + \frac{2}{1} \frac{2}{3} a_{22} t^2 \right) \times$$

$$\times \bar{\psi}_1(x_1, -s_1 \sigma_2) + \left(a_{30} + a_{31} \frac{2}{1} t + \frac{2}{1} \frac{2}{3} a_{32} t^2 + \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{2}{5} a_{33} t^3 \right) \bar{\psi}_1(x_1, -s_1 \sigma_3) \Big].$$

Rozważając analogicznie przypadek $\gamma k = 1$, otrzymujemy

$$c_1(x_1, t) \approx - \left\{ \frac{Pkc_1^2 D}{i\omega D |c_1^2} \left[\frac{\delta''(x_1)}{i\omega} - \frac{i\omega \delta(x_1)}{i\omega D |c_1^2} \right] + A_3(x_1, i\omega) \right\} e^{i\omega t} +$$

$$- \left\{ \frac{Pk}{i\omega D + c_1^2} \left[D^2 \delta''(x_1) + c_1^2 \frac{i\omega D - \frac{c_1^2}{D} t (i\omega D + c_1^2)}{i\omega D + c_1^2} \delta(x_1) \right] + \right.$$

$$+ \frac{D^2}{c_1^2} c_0 \delta(x_1) \Big\} e^{-\frac{c_1^2}{D} t} + \frac{PkD}{i\omega} \delta''(x_1) + Dc_0 \left(t - \frac{D}{c_1^2} \right) \delta(x_1) +$$

$$+ e^{-\frac{c_1^2}{D} t} \frac{D^2}{c_1^2} \sum_{j=0}^n \frac{t^{j+1/2}}{\Gamma(j+5/2)} \sum_{l=0}^n a_{lj} \left[\frac{\sqrt{D}}{c_1} t \bar{\psi}_3 \left(x_1, \frac{c_1^2}{D} \sigma_l \right) + \right.$$

$$(3.11) \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{2j+3}{4} c_1 c_0 e^{-\frac{\sigma_l |x_1|}{D \sqrt{\sigma_l + 1}}} \right],$$

$${}_1u_1(x_1, t) \approx Pc_1^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{D} \right)^2 A_4(x_1, i\omega) - \frac{D \delta'(x_1)}{i\omega (i\omega D + c_1^2)} \right] e^{i\omega t} +$$

$$+ PD^2 \left[\frac{1}{i\omega D} - \frac{1}{i\omega D + c_1^2} e^{-\frac{c_1^2}{D} t} \right] \delta'(x_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-\frac{c_1^2}{D} t} \sum_{j,l=0}^n a_{lj} \frac{t^j}{j!} \left[P \frac{c_1^4}{D^2} \frac{t}{j+1} \bar{\psi}_3 \left(x_1, \frac{c_1^2}{D} \sigma_l \right) + \right.$$

$$\left. + \gamma \sigma_0 \frac{D^2}{c_1^2 \sigma_l^2} e^{-\frac{\sigma_l |x_1|}{D \sqrt{\sigma_l + 1}} \operatorname{sgn} x_1} \right].$$

W przypadku $0 < \gamma k < 1$ wartość s_1 , dana wzorem (2.4), jest liczbą zespoloną i wówczas wzory typu (3.6) - (3.8) zawierają funkcje hipergeometryczne, co komplikuje algorytm obliczeniowy. Aby tego uniknąć, zastosowano tutaj rozwinięcie nieznanymi oryginałów transformat (3.1) w szereg wielomianów ortogonalnych na przedziale (0,1). Możli-

wość takiego rozwinięcia jest umotywowana twierdzeniem o istnieniu rozwiązania zagadnienia (1.1) - (1.4) dowodzonym w [3]. Otrzymuje się

$$(3.12) \quad \begin{aligned} c(x_1, t^*) &\approx Pk \left[\frac{1}{1-\gamma k} \delta(x_1) + \frac{i}{2} A_1(x_1, i\omega) \right] e^{i\omega t^*} + \\ &+ \sum_{l=0}^n (2l+1) a_l P_l \left(e^{-2\frac{c_1^2}{D} t^*} \right), \\ u_1(x_1, t^*) &\approx \frac{P}{2} A_2(x_1, i\omega) e^{i\omega t^*} + \sum_{l=0}^n (2l+1) b_l P_l \left(e^{-2\frac{c_1^2}{D} t^*} \right) \end{aligned}$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem Legendre'a

$$(3.13) \quad \begin{aligned} P_l(x) &= \sum_{j=0}^l \beta_{jl} x^j; \quad \beta_{jl} = (-1)^{j+l} \binom{l}{j} \frac{(j+l)!}{j!l!}, \\ a_l &= \sum_{j=0}^l \beta_{jl} 2 \frac{c_1^2}{D} \frac{\bar{\psi}_1 \left(x_1, 2 \frac{c_1^2}{D} (1+j) \right)}{\sqrt{2 \frac{c_1^2}{D} (1+j) - s_1}}, \\ b_l &= \sum_{j=0}^l \beta_{jl} 2 \frac{c_1^2}{D} \frac{\bar{\psi}_2 \left(x_1, 2 \frac{c_1^2}{D} (1+j) \right)}{\sqrt{2 \frac{c_1^2}{D} (1+j) - s_1}}, \\ t^* &= \frac{1}{2} \frac{D}{c_1^2} t. \end{aligned}$$

Wzory typu (3.12) znaleźć można w monografii [5]. Wielomiany Legendre'a zastąpić można inną rodziną wielomianów ortogonalnych na przedziale (0,1), otrzymując wzory podobne do (3.12).

Otrzymane wzory (3.9), (3.11) i (3.12) pozwalają wyznaczyć w sposób efektywny, z dowolnym przybliżeniem, koncentrację $c(x_1, t)$ i przemieszczenie $u_1(x_1, t)$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, MTiS 13, 2, 1975.
2. J. STEFANIAK, *Concentrated loads as body forces*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., XIV, 1, 1967.
3. M. DRYJA, *Difference and finite-element methods for the dynamical problem of thermodiffusion in an elastic solid*, Archives of Mechanics 29, 1, 1977.
4. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN 1964.
5. В. И. КРЫЛОВ, Н. С. СКОБЛЯ, *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*, Наука 1974.
6. В. И. КРЫЛОВ, Н. С. СКОБЛЯ, *Справочная книга по численному преобразованию Лапласа*, Минск 1968.

Резюме

ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ И ДИФФУЗИЯ В ТВЁРДОМ ТЕЛЕ

В работе определены поле перемещений и поле концентрации в неограниченной среде, для динамической задачи диффузии. Сопряжённые уравнения диффузии даны С. Подстригаčem и В. Новацким [1]. Приведены методы приближенного обращения преобразования Лапласа.

Summary

PLANE HARMONIC WAVES AND DIFFUSION IN A SOLID BODY

On the basis of equations given by S. Podstrigač and W. Nowacki [1], the interaction between harmonic waves and diffusion in solids is considered. To obtain the concentration and displacement the approximate method for inverse Laplace transform is used.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 czerwca 1978 roku

PROBLEMY OBLICZANIA POWŁOK W TURBINOWYCH SILNIKACH LOTNICZYCH¹

ZBIGNIEW D Ź Y G A D Ł O (WARSZAWA)

1. Wstęp

Współczesne turbinowe silniki lotnicze (śmigłowe i odrzutowe) są konstrukcjami złożonymi z elementów powłokowych, płytowych i tarczowych. Buduje się je jako układy jedno lub dwuprzepływowe, wyposażone w jeden, dwa lub nawet trzy niezależne wirniki sprzężone termodynamicznie. Dzięki zastosowaniu wysokowytrzymałych i lekkich materiałów oraz odpowiednich rozwiązań uzyskuje się niezawodne w działaniu i trwałe konstrukcje charakteryzujące się małą masą jednostkową [1], [3].

Z uwagi na złożony kształt poszczególnych zespołów wirników i korpusów, obliczenia wytrzymałościowe przeprowadza się stosując różne przybliżone metody analityczne i numeryczne [2], [4] - [6].

Wprowadzenie metody elementów skończonych i macierzowej analizy numerycznej umożliwia opracowanie jednolitego podejścia do statycznych i dynamicznych obliczeń różnych zespołów konstrukcyjnych [7] - [13], [16], [17].

W niniejszym referacie przedstawiono metodykę obliczeń zespołów wirnikowych sprzężarek i turbin silników lotniczych (na przykład rys. 1a i b), opartą na podziale konstrukcji na powłokowe, płytowe lub tarczowe pierścieniowe elementy skończone.

Zakładamy, że rozpatrywane zespoły wirują ze stałą prędkością kątową Ω . Na elementy konstrukcji działają siły masowe spowodowane wirowaniem, siły ciągnięć promieniowych od wieńców łopatek, siły i momenty gnące od sił aerodynamicznych przyłożonych do piór łopatek oraz obciążenia powierzchniowe od różnicy ciśnień na poszczególnych stopniach sprężarki lub turbiny.

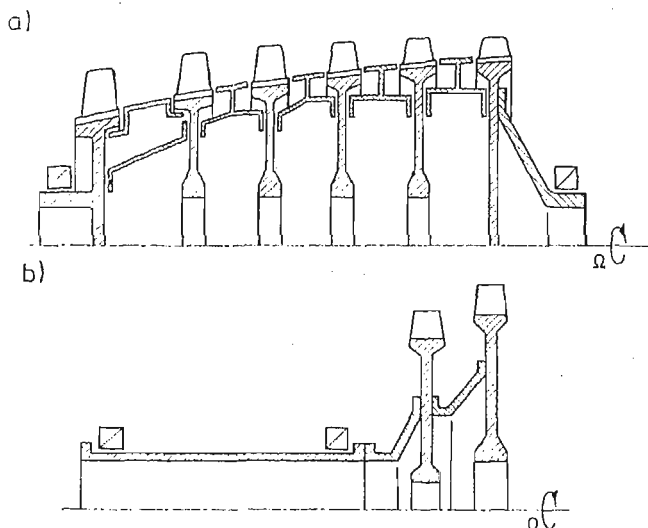
Poza tym uwzględnimy fakt, że badane zespoły pracują na ogół w warunkach silnego nagrzania, gdy moduł sprężystości, liczba Poissona i współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału zależą od temperatury i z uwagi na duże gradienty temperatury w kierunku osiowym i promieniowym stają się funkcjami zmiennej osiowej lub promieniowej.

W związku z tym w konstrukcji mogą występować naprężenia termiczne, a materiał należy rozpatrywać jako niejednorodny (por. [10]).

Jako podstawowy element stosowany w omawianej metodzie przyjęto powłokowy, stożkowy element o zmiennej grubości i niejednorodnym materiale. Za pomocą odpowiedniej transformacji można przekształcić go na element tarczowy, płytowy lub powłokowy cylindryczny.

¹⁾ Referat problemowy przedstawiony na II Konferencji „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowania”, w Gołuniu 6-10 XI 1978 r.

W referacie podano równania równowagi dynamicznej takiego elementu oraz sposób wyznaczania przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w wirnikach składających się z elementów powłokowych, płytowych i tarczowych przy uwzględnieniu gradientów temperatury i niejednorodności materiału.



Rys. 1.

Przedstawiono również metodykę kształtowania wytrzymałościowego konstrukcji oraz badania drgań własnych i wymuszonych.

Omówiono stosowane sposoby składania równań elementów w macierzowe równanie całej struktury, a także przekształcania równań elementów w układ rekurencyjny, co umożliwia następnie proste rozwiązanie rozpatrywanych problemów.

2. Równania równowagi dynamicznej wirującego, niejednorodnego elementu stożkowego

Rozpatrzmy cienki, stożkowy element powłokowy o zmiennej grubości $h = h(\xi)$, wirujący dokoła osi symetrii Ox z prędkością kątową Ω (rys. 2a).

Przyjmujemy, że element jest umieszczony w osiowosymetrycznym polu temperatury zmiennym wzdłuż tworzącej, przy czym wzdłuż grubości ścianki temperatura jest stała,

$$(2.1) \quad T = T_{\text{nag},j}(\xi) - T_0 = T_j(\xi),$$

gdzie

$T_{\text{nag},j}(\xi)$ — temperatura nagrzanego elementu,

T_0 — początkowa temperatura stała dla całego zespołu.

W związku z silnym nagraniem elementu zakładamy, że moduł sprężystości E , liczba Poissona ν i współczynnik cieplnej rozszerzalności materiału α zależą od temperatury $T_{\text{nag},j}(\xi)$, a więc — od współrzędnej ξ

$$(2.2) \quad \begin{aligned} E &= E_j(\xi), & \nu &= \nu_j(\xi), \\ \varepsilon_T &= \alpha T = \alpha_j(\xi) T_j(\xi) = \varepsilon_{T,j}(\xi), \end{aligned}$$

gdzie ε_T — odkształcenie termiczne.

Na powierzchnię elementu działa obciążenie pochodzące od różnicy ciśnień $p = p_j(\xi, \beta, t)$, które w ogólnym przypadku zależy od współrzędnych przestrzennych ξ, β (rys. 2) oraz czasu t .

Równanie równowagi dynamicznej elementu wyznaczono wykorzystując zasadę prac wirtualnych przy zastosowaniu liniowej teorii cienkich powłok [6], [7], [14], a w przypadku rozpatrywania wpływu napięć błonowych na sztywność elementu uwzględniono nieliniowe składowe odkształcenia [15].

Składowe przemieszczenia środkowej powierzchni powłoki u, v, w , odniesiono do lokalnego, ortogonalnego układu współrzędnych $s\beta\eta$ (rys. 2c), gdzie s — zmienna wzdłuż tworzącej, β — zmienna obwodowa, a n — zmienna normalna do środkowej powierzchni.

Siły i momenty działające w przekrojach powłoki mają dodatnie zwroty takie jak pokazano na rys. 2c. gdzie

Q_s, Q_β — siły poprzeczne,

N_s, N_β — siły normalne

$S_{s\beta}, S_{\beta s}$ — siły styczne

M_s, M_β — momenty zginające

$M_{s\beta}, M_{\beta s}$ — momenty skręcające

Powierzchniowe obciążenie zewnętrzne $p_j(\xi, \beta, t)$ przyjmiemy w postaci

$$(2.3) \quad p_j(\xi, \beta, t) = p_{j0}(\xi) \cos k\beta e^{i\omega t}.$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

W związku z tym wektor przemieszczeń elementu będziemy poszukiwać w następującej formie

$$(2.4) \quad \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j(\xi, \beta, t) = [u_j(\xi, \beta, t), v_j(\xi, \beta, t), w_j(\xi, \beta, t)]^T = \\ = L_0 \Phi(\beta) \mathbf{N}(\xi) \delta_j e^{i\omega t},$$

gdzie $\Phi(\beta)$ jest macierzą diagonalną

$$(2.5) \quad \Phi(\beta) = \begin{bmatrix} \cos k\beta, & 0, & 0 \\ 0, & \sin k\beta, & 0 \\ 0, & 0, & \cos k\beta \end{bmatrix},$$

a $\mathbf{N}(\xi)$ jest macierzą 3×8 o postaci

$$(2.6) \quad \mathbf{N}(\xi) = [\mathbf{N}_1(\xi), \mathbf{N}_2(\xi)],$$

której składowe są

$$(2.7) \quad \mathbf{N}_1(\xi) = \begin{bmatrix} 1-\xi, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1-\xi, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1-3\xi^2+2\xi^3, & (\xi-2\xi^2+\xi^3)\lambda_j \\ \xi, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \xi, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 3\xi^2-2\xi^3, & (\xi^3-\xi^2)\lambda_j \end{bmatrix},$$

oraz

$$\xi = (s - s_{j-1})/l_j, \quad \lambda_j = l_j/L_0,$$

L_0 jest wielkością charakterystyczną przyjętą jako długość odniesieniowa.

δ_j jest wektorem uogólnionych przemieszczeń krawędzi rozpatrywanego elementu (rys. 2b)

$$(2.8) \quad \delta_j = [\bar{u}_{j-1}, \bar{v}_{j-1}, \bar{w}_{j-1}, w_{j-1}, \bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j, w'_j]^T,$$

gdzie wielkości $\bar{u}_{j-1}, \bar{v}_{j-1}, \bar{w}_{j-1}, \bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j$ są odpowiednimi przemieszczeniami krawędzi odniesionymi do L_0 , a w'_{j-1}, w'_j — kąty obrotu tych krawędzi.

Wektor przemieszczeń δ_j jest odniesiony do lokalnego układu współrzędnych $S\beta n$.

Dla analizy złożonych konstrukcji wirników wygodnie jest wprowadzić wektor przemieszczeń krawędzi elementu w globalnym układzie xOz (rys. 2a). Oznaczmy go δ_j^* , przy czym

$$(2.9) \quad \delta_j = \Theta_j \delta_j^*,$$

gdzie

$$(2.10) \quad \Theta_j = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 \\ 0 & \Theta_1 \end{bmatrix},$$

$$(2.11) \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & 0 & \sin \varphi_j & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_j & 0 & \cos \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

oraz

$$(2.12) \quad \delta_j^* = [\bar{u}_{j-1}^*, \bar{v}_{j-1}^*, w_{j-1}^*, \bar{w}_{j-1}^*, w'_{j-1}, \bar{u}_j^*, \bar{v}_j^*, \bar{w}_j^*, w'_j]^T$$

$\bar{u}_{j-1}^*, \bar{v}_{j-1}^*, \bar{u}_j^*, \bar{w}_j^*$ — odpowiednie bezwymiarowe składowe przemieszczeń krawędzi elementu w globalnym układzie współrzędnych.

Stosując zasadę prac wirtualnych oraz wykorzystując zależności teorii cienkich powłok [6], [7], [14] i [15], przy uwzględnieniu wzorów (2.3) - (2.12) oraz (2.1), (2.2), otrzymamy równanie równowagi dynamicznej wirującego, niejednorodnego elementu stożkowego

$$(2.13) \quad (\mathbf{K}_j + \mathbf{K}_j^{(d)} - \omega^2 \mathbf{m}_j + i\omega \mu \mathbf{K}_j) \delta_j^* = \mathbf{F}_j^{(eT)} + \mathbf{F}_j^{(\Omega)} + \mathbf{F}_j^{(p)} + \mathbf{F}_j^{(kr)},$$

gdzie kolejne składniki mają następujące znaczenie:

\mathbf{K}_j — macierz sztywności elementu,

$\mathbf{K}_j^{(d)}$ — dodatkowa macierz sztywności, wynikająca z początkowego, osiowosymetrycznego stanu napięć błonowych [15],

\mathbf{m}_j — macierz mas elementu,

$\mu \mathbf{K}_j$ — macierz tłumienia wewnętrznego materiału powłoki przy założeniu lepko-sprężystego modelu Voigta [8],

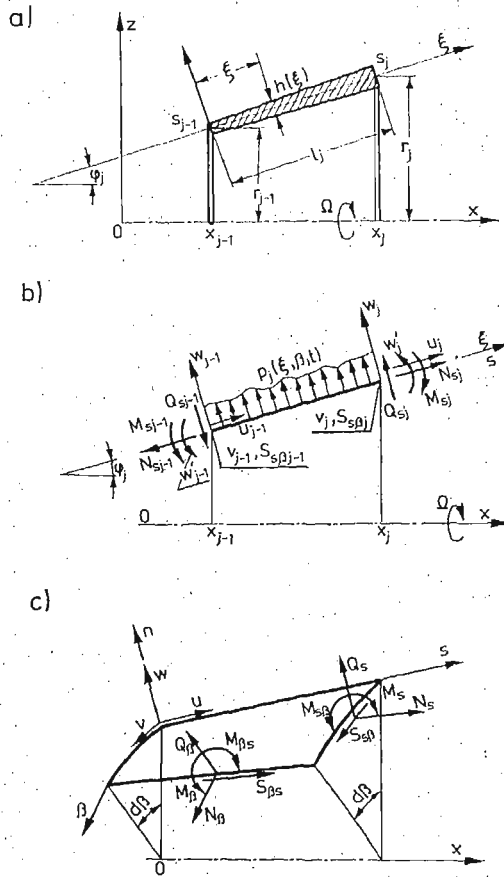
μ — współczynnik tłumienia materiału,

$\mathbf{F}_j^{(eT)}$ — wektor obciążeń termicznych,

$\mathbf{F}_j^{(\Omega)}$ — wektor obciążeń masowych, spowodowanych wirowaniem elementu,

$\mathbf{F}_j^{(p)}$ — wektor obciążenia powierzchniowego (2,8),

$\mathbf{F}_j^{(kr)}$ — wektor sił krawędziowych.



Rys. 2

Szczegółowych wyrażeń na poszczególne składniki nie będziemy podawać (por. [10], [13], [16], zwrócimy jedynie uwagę na postać wektora sił krawędziowych $F_j^{(kr)}$, który będzie potrzebny w dalszym ciągu

$$(2.14) \quad F_j^{(kr)} = R_j F_j^*$$

gdzie R_j jest macierzą diagonalną 8×8

$$(2.15) \quad R_j = [r_{j-1}, r_{j-1}, r_{j-1}, r_{j-1}, r_j, r_j, r_j, r_j],$$

a F_j^* jest wektorem o postaci:

$$(2.16) \quad F_j^* = [-N_{xj-1}^*, -S_{s\beta j-1}, -Q_{xj-1}^*, M_{sj-1}, N_{xj}^*, S_{s\beta j}, Q_{xj}^*, -M_{sj}]^T$$

przy czym wielkości $S_{s\beta j-1}$, M_{sj-1} , $S_{s\beta j}$, M_{sj} są siłami i momentami określonymi wyżej (rys. 2b),

N_{xj-1}^* , Q_{xj-1}^* , N_{xj}^* , Q_{xj}^* — odpowiednie siły w globalnym układzie współrzędnych xOz .

Przyjmując w poszczególnych składnikach równania (2.13) kąt pochylenia tworzącej elementu (rys. 2a) $\varphi_j = \pi/2$ otrzymamy zależności dla elementu tarczowo-płytkowego, a przy $\varphi_j = 0$ — zależności dla cylindrycznego elementu powłokowego.

Równanie równowagi elementu (2.13) umożliwia rozpatrzenie problemów statycznych odkształceń i naprężeń (przy $\omega = 0$) w termicznie niejednorodnych układach wirnikowych, a dla $\omega \neq 0$ — analizę drgań własnych i wymuszonych tych zespołów.

3. Statyczna analiza stanu odkształceń i naprężeń w wirnikach

W tym przypadku rozpatrujemy osiowosymetryczny stan odkształceń i naprężeń w układach powłokowo-płytowo-tarczowych wirujących z prędkością kątową Ω .

Do szczegółowych obliczeń przyjęto, że temperatura, grubość elementu oraz charakterystyki materiału mogą zmieniać się wzdłuż tworzącej w sposób liniowy.

Opracowano program do obliczeń na maszynie Odra 1305 służący do analizy statycznej złożonego układu typu wirnik sprężarki osiowej (rys. 1a). Zastosowano algorytm składania równań równowagi elementów z jednoczesnym ich rozwiązywaniem (metoda frontalna), wykorzystując pasmowość macierzy sztywności. Niektóre wyniki obliczeń były przedstawione w szczegółowym referacie [13].

W przypadku rozpatrywania konstrukcji typu turbiny gazowej (rys. 1b) zastosowano inną metodę obliczeń. Polega ona na przekształceniu równań równowagi elementów w układ rekurencyjny (por. [10]).

W tym celu wprowadzamy wektor bezwymiarowych parametrów krawędziowych

$$(3.1) \quad \mathbf{p}_j = [\bar{u}_j^*, \bar{v}_j, \bar{w}_j^*, w_j', \bar{N}_{xj}^*, \bar{S}_{s\beta j}, \bar{Q}_{xj}^*, \bar{M}_{sj}],$$

którego składowymi są bezwymiarowe przemieszczenia krawędzi elementu $\bar{u}_j^*, \bar{v}_j, \bar{w}_j^*, w_j'$, określone wyżej, oraz bezwymiarowe siły i momenty przekrojowe

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{N}_{xj}^* &= N_{xj}^* L_0 / D_0, & \bar{S}_{s\beta j} &= S_{s\beta j} L_0 / D_0, \\ \bar{Q}_{xj}^* &= Q_{xj}^* L_0 / D_0, & \bar{M}_{sj} &= M_{sj} L_0^2 / D_0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.3) \quad D_0 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu_0^2)}$$

jest sztywnością giętą powłoki, którą przyjęto jako wielkość odniesieniową.

Wykorzystując wektor \mathbf{p} możemy przekształcić równanie (2.13) do postaci bezwymiarowej

$$(3.4) \quad \mathbf{p}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{p}_{j-1} + \mathbf{f}_j,$$

gdzie współczynniki macierzy \mathbf{A} wyrażają się w zależności od współczynników macierzy występujących po lewej stronie równania (2.13), a składowe wektora \mathbf{f}_j wynikają ze składowych wektorów obciążeń termicznych, masowych i powierzchniowych.

Następnie, uwzględniając rekurencyjny charakter równania (3.1), przekształćmy je w następujący sposób

$$(3.5) \quad \mathbf{p}_j = \mathbf{Y}_j \mathbf{p}_0 + \mathbf{y}_j,$$

gdzie macierz \mathbf{Y}_j i wektor \mathbf{y} wyznaczamy z zależności rekurencyjnych

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_j &= \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{j-1}, \\ \mathbf{y}_j &= \mathbf{A}_j \mathbf{y}_{j-1} + \mathbf{f}_j, \end{aligned}$$

$$j = 2, 3, 4, \dots,$$

z warunkami początkowymi

$$(3.7) \quad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{f}_1.$$

Równanie (3.5) stanowiło podstawę do opracowania algorytmu i programów obliczeń statycznych tarcz turbin gazowych i różnych układów płytowo-powłokowych [9], [11], [12], [16].

4. Wytrzymałościowe kształtowanie układów powłokowo-płytowo-tarczowych

Metodyka statycznych obliczeń wirników przedstawiona wyżej może być również wykorzystana do opracowania algorytmu wytrzymałościowego kształtowania konstrukcji wirników przy założonym rozkładzie naprężeń dopuszczalnych i uwzględnieniu termicznej niejednorodności materiału [11], [17].

Rozpatrzono osiowosymetryczne układy powłokowo-płytowo-tarczowe, wirujące ze stałą prędkością Ω , na które działają obciążenia masowe, termiczne i powierzchniowe, rozłożone w sposób osiowosymetryczny.

Przyjmujemy, że dany jest rozkład naprężeń dopuszczalnych wzdłuż osi lub promienia elementów konstrukcyjnych wirnika, zależny od własności materiału i temperatury, musimy zaś wyznaczyć rozkład grubości tych elementów tak, by zredukowane naprężenia były równe wartościom dopuszczalnym (por. [2]).

W związku z tym jako warunek kształtowania konstrukcji przyjmujemy

$$(4.1) \quad \sigma_{red\ max} = \max \left(\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_\beta^2 - \sigma_s \sigma_\beta} \right) = \sigma_{dop}$$

gdzie σ_s , σ_β oznaczają naprężenia osiowe i obwodowe, a σ_{dop} — naprężenia dopuszczalne.

W opracowanym algorytmie numerycznego kształtowania konstrukcji żądamy by warunek (4.1) był spełniony na wszystkich krawędziach elementów, na które podzielono rozpatrywany wirnik.

Algorytm oparty jest na rekurencyjnym cyklu obliczeń. W początkowym przybliżeniu przyjmujemy stałą grubość poszczególnych części wirnika, a następnie wykorzystując warunek (4.1) wyznaczamy zmianę grubości wzdłuż elementów wirnika.

Opracowano programy służące do numerycznego kształtowania tarcz turbin gazowych oraz układów powłokowo-płytowych [11], [16], [17].

5. Analiza drgań własnych i wymuszonych wirników

Pełne równanie dynamicznej równowagi wirującego, niejednorodnego elementu stożkowego (2.13) może stanowić podstawę do opracowania algorytmu numerycznej analizy drgań własnych i wymuszonych rozpatrywanych wirników.

W tym przypadku stosowano również metodę składania równań elementów w macierzowe równanie całej struktury oraz sposób przekształcenia równań do postaci rekurencyjnej, podobnie jak przy obliczeniach statycznych [11], [16].

Literatura cytowana w tekście

1. S. SZCZECIŃSKI, *Двuwirnikowe i dwuprzeplywowe lotnicze silniki turbinowe*, Wyd. KiŁ, Warszawa 1971.
2. J. LIPIKA, *Wytrzymałość maszyn wirnikowych*, Wyd. NT, Warszawa (1967).
3. Г. С. СКУБАЧЕВСКИЙ, *Авиационные газотурбинные двигатели*, Изд. Машиностроение, Москва (1974).
4. А. Д. КОВАЛЕНКО, *Пластины и оболочки в роторах турбомашин*, Изд. АН УССР, Киев (1955).
5. Д. В. ХРОНИН, *Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов*, Изд. Машиностроение, Москва (1970).
6. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK — pod red. S. KALISKIEGO, *Drgania i fale w ciałach stałych*, wyd. PWN, Warszawa (1966).
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, wyd. Arkady, Warszawa (1972).
8. J. SZMELTER i in., *Programy metody elementów skończonych*, wyd. Arkady, Warszawa (1973).
9. Z. DŻYGADŁO, J. KIERKOWSKI, *Numeryczna analiza metodą elementów skończonych przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w wirującej tarczy chłodzonej symetrycznie*. Streszczenia referatów II Konferencji „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji”, Gdańsk, 24 - 26 listopada 1975 r. oraz — Komputer w mechanice budowli, (praca zbiorowa), seria Mechanika i Komputer tom I, wyd. PWN, Warszawa (1978).
10. Z. DŻYGADŁO, *Dynamic model of a rotating, nonhomogeneous gas — turbine disc for flexural vibration analysis by the finite element method*, J. Techn. Phys., 18, 1, (1977).
11. Z. DŻYGADŁO, J. KIERKOWSKI, *Wytrzymałościowe kształtowanie wirujących, niejednorodnych tarcz turbin gazowych metodą elementów skończonych*, III Konferencja „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji”, Referaty części ogólnej, tom I, Opole 26 - 28 maja (1977).
12. Z. DŻYGADŁO, J. KIERKOWSKI and S. SZCZECIŃSKI, *Numerical analysis of displacements, strains and stresses in thermally nonhomogeneous gas turbine discs*, J. Techn. Phys., 19, 4, (1978).
13. Z. DŻYGADŁO, I. NOWOTARSKI, *Numeryczna analiza osiowo-symetrycznego stanu odkształcenia i naprężenia wirujących układów powłokowo- płytowych*, Streszczenia referatów II Konferencji „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowania”, Goleń, 6 - 10 listopada (1978) r.
14. J. L. SANDERS, *An improved first-approximation theory for thin shells*. NASA TR R-24, (1959).
15. D. R. NAVARATNA, T. H. H. PIAN and E. A. WITMER, *Stability analysis of shells of revolution by the finite-element method*, AIAA Journal, 6, 2, (1968).
16. A. OLEJNIK, *Analiza problemów statyki, stateczności i drgań osiowo-symetrycznych układów powłokowo-płytowych o zmiennej grubości metodą elementów skończonych*, Rozprawa doktorska, WAT, Warszawa (1978).
17. Z. DŻYGADŁO, *A numerical method of design of thermally nonhomogeneous gas turbine discs*, J. Techn. Phys., 20, 1, (1979).

Резюме

ПРОБЛЕМЫ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК В ТУРБИНЫХ
АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

Представлена методика расчетов роторных агрегатов компрессоров и турбин авиационных двигателей, опирающаяся на разделение конструкций на оболочечные, плиточные и дисковые конечные элементы.

Предположено, что рассматриваемые агрегаты вращаются с постоянной угловой скоростью.

На элементы конструкции действуют массовые силы, вызванные вращением, силы радиальных натяжений со стороны венцов лопастей и поверхностные нагрузки со стороны разницы давлений на отдельных степенях компрессора или турбины.

Дается способ определения перемещений, деформаций и напряжений в элементах ротора, а также способ прочностного формирования конструкций и исследования собственных и вынужденных колебаний.

Summary

ON THE PROBLEMS OF SHELL CALCULATIONS FOR THE AIRCRAFT TURBINE ENGINES

A method is presented for calculations of compressor and gas turbine rotors of the aircraft engines making use of shell, plate and disc finite elements.

It is assumed that the units under consideration rotate at a constant angular speed. Their elements are exposed to the action of mass forces caused by the rotation, tension forces of rims of blades, as well as surface forces due to the pressure difference at a compressor or turbine section.

In this paper a method is presented for determining the state of displacements, strains and stresses in the rotor, for the design of its elements under a prescribed distribution of the permissible stress and for calculations of natural and forced vibrations.

WAT
INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1979 roku.

O OSOBLIWOŚCI NAPRĘŻEŃ W ZAGADNIENIU SKRĘCANIA STEMPLEM PIERŚCIENIOWYM

JAN KOKOT, ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W przypadku skręcania półprzestrzeni sprężystej, gdy naprężenia kontaktowe są styczne do powierzchni w kształcie pierścienia, zagadnienie jest uogólnieniem znanego zadania Reissnera-Sagoci'ego [6, 8, 10, 11], dotyczącego kontaktu na powierzchni koła.

Zastosowanie metody transformacji całkowych Hankela do rozwiązania osiowo symetrycznych zagadnień z powierzchnią kontaktu w kształcie pierścienia stało się możliwe dopiero po ukazaniu się pierwszych prac dotyczących potrójnych równań całkowych z jądrem Hankela (COOKE [3, 4], WILLIAMS [14, 15]). Metoda rozwiązywania potrójnych równań całkowych opiera się zwykle na konsekwentnym zastosowaniu operatorów ERDĚLYI'EGO-KOBERA i COOKE'A [5, 12, 13]. Układ potrójnych równań całkowych w przestrzeni transformacji Hankela, odpowiadający między innymi zagadnieniom kontaktowym skręcania półprzestrzeni pierścieniem daje się sprowadzić metodą rozwiązań próbnych Sneddon'a do układu dwu równań całkowych, albo do jednego równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju, które można rozwiązać numerycznie. Rozwiązanie podane przez Cooke'a posiada ciekawą własność, a mianowicie jeżeli (a, b) oznacza odcinek mierzony wzdłuż szerokości pierścienia, to z postaci rozwiązania można znaleźć, przez rozwinięcie asymptotyczne, osobliwość naprężeń na brzegu zewnętrznym pierścienia dla $r \rightarrow b^-$. BORODACZEW, w niedawnych pracach [1, 2] posłużył się również metodą rozwiązań próbnych, jednak jego rozwiązanie posiada postać pozwalającą znaleźć osobliwość naprężeń z innego rozwinięcia asymptotycznego, tym razem dla $r \rightarrow a^+$. W pracy wykorzystamy oba podstawienia do przypadku szczególnego, w którym przedyskutujemy osobliwości, gdy półprzestrzeń sprężysta jest skręcana pierścieniem, a następnie prostą metodę pozwalającą z dużą dokładnością wyznaczyć rozkład naprężeń kontaktowych.

2. Równania podstawowe

Weźmy pod uwagę osiowo symetryczne zagadnienie skręcania półprzestrzeni sztywnym, płaskim stemplem pierścieniowym. Zakładamy, że półprzestrzeń jest jednorodnym ośrodkiem sprężystym. Ze względu na osiową symetrię zagadnienia wszystkie składowe stanu naprężenia i odkształcenia będziemy rozpatrywać w walcowym układzie współrzędnych (r, φ, z) . Wtedy układ równań przemieszczeniowych Naviera redukuje się do jed-

nego równania [7, 11], które można zapisać w następującej postaci:

$$(2.1) \quad \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] (ru_\varphi) = 0.$$

Po zastosowaniu transformacji całkowej Hankela pierwszego rzędu

$$(2.2) \quad \bar{\Phi}(\xi, z) = \mathcal{H}_1[\Phi(r, z); r \rightarrow \xi] \equiv \int_0^\infty r \Phi(r, z) J_1(r, \xi) dr,$$

równanie (2.1) redukuje się do równania różniczkowego zwyczajnego:

$$(2.3) \quad (D^2 - \xi^2) \bar{u}_\varphi(\xi, z) = 0, \quad \text{gdzie} \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ze względu na znikanie składowej przemieszczenia dla $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow +\infty$ rozwiązanie równania (2.3) przyjmiemy w postaci

$$(2.4) \quad \bar{u}_\varphi(\xi, z) = A(\xi) \exp(-\xi z).$$

Otrzymujemy następujące wzory:

$$(2.5) \quad u_\varphi(r, z) = \mathcal{H}_1[\xi^{-1} A(\xi) \exp(-\xi z); \xi \rightarrow r],$$

$$(2.6) \quad \sigma_{\varphi z}(r, z) = -\mu \mathcal{H}_1[A(\xi) \exp(-\xi z); \xi \rightarrow r],$$

$$(2.7) \quad \sigma_{r\varphi}(r, z) = -\mu \mathcal{H}_2[A(\xi) \exp(-\xi z); \xi \rightarrow r].$$

Nieznana funkcję $A(\xi)$ wyznaczmy z warunku brzegowego, który w przypadku skręcania osiowo symetrycznego ma postać następującą

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varphi z}(r, 0) &= 0, & \text{dla } r &\in (0, a) \cup (b, +\infty), \\ u_\varphi(r, 0) &= \delta r, & \text{dla } r &\in (a, b), \end{aligned}$$

gdzie δ jest kątem skręcania.

Warunek brzegowy (2.8) prowadzi do poniższego układu potrójnych równań całkowych na $A(\xi)$:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_1[A(\xi); \xi \rightarrow r] &= 0, & \text{dla } r &\in [0, a) \cup (b, +\infty), \\ \mathcal{H}_1[\xi^{-1} A(\xi); \xi \rightarrow r] &= \delta r, & \text{dla } r &\in (a, b). \end{aligned}$$

Całkowity moment skręcający, działający na stempel, dany jest wzorem

$$(2.10) \quad M = -2\pi \int_a^b r^2 \sigma_{\varphi z}(r, 0) dr = +2\pi\mu \int_a^b r^2 \mathcal{H}_1[A(\xi); \xi \rightarrow r] dr.$$

Przyjmujemy następującą zasadę oznaczania funkcji, gdzie wskaźniki będą zawsze się odnosiły do tych samych obszarów, np.:

$$(2.11) \quad f(r) = \begin{cases} f_1(r), & \text{dla } r \in [0, a), \\ f_2(r), & \text{dla } r \in (a, b), \\ f_3(r), & \text{dla } r \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Obecnie, wykorzystując operatory Hankela [12]:

$$(2.12) \quad S_{\eta, \alpha} f(x) = 2^\alpha x^{-\alpha} \int_0^\infty t^{1-\alpha} J_{2\eta+\alpha}(xt) f(t) dt,$$

układ równań całkowych (2.9) zapiszemy w postaci następującej:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} S_{1/2,0} A(r) &= 0, & r \in [0, a) \cup (b, +\infty), \\ S_{0,1} A(r) &= f_2(r) = 2, & r \in (a, b). \end{aligned}$$

3. Dwie postacie rozwiązania układu potrójnych równań całkowych (2.13)

Dla każdej z postaci rozwiązania układu równań całkowych (2.13) skonstruujemy równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju. Pierwsze rozwiązanie pozwoli na wyznaczenie osobliwości naprężeń stycznych $\sigma_{\eta z}(r, 0)$ przy $r \rightarrow a^+$, drugie zaś przy $r \rightarrow b^-$. Posłużymy się operatorami całkowymi Erdélyi'ego-Kobera [5, 12] i operatorami częściowego (frakcyjnego) całkowania Cooke'a [5], a mianowicie:

$$(3.1) \quad ({}^b I_{\eta, \alpha}) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^{-2\alpha-2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (x^2-u^2)^{\alpha-1} u^{2\eta+1} f(u) du, & \alpha > 0, \\ f(x), & \alpha = 0, \\ \frac{x^{-2\alpha-2\eta-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^b (x^2-u^2)^{\alpha} u^{2\eta+1} f(u) du, & \alpha \in (-1, 0), \end{cases}$$

$$(3.2) \quad ({}^d K_{\eta, \alpha}) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_c^d (u^2-x^2)^{\alpha-1} u^{-2\alpha-2\eta+1} f(u) du, & \alpha > 0, \\ f(x), & \alpha = 0, \\ -\frac{x^{2\eta-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \int_c^d (u^2-x^2)^{\alpha} u^{-2\alpha-2\eta+1} f(u) du, & \alpha \in (-1, 0). \end{cases}$$

Zauważmy, że ${}^{\delta} I_{\eta, \alpha} \equiv I_{\eta, \alpha}$, oraz ${}^{+\infty} K_{\eta, \alpha} \equiv K_{\eta, \alpha}$.

Wprowadźmy operatory

$$(3.3) \quad ({}^{x,a} L_{\eta, \alpha}) f(x) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} x^{-2\eta} (x^2-c^2)^{-\alpha} \int_a^b (c^2-t^2)^{\alpha} (x^2-t^2)^{-1} t^{2\eta+1} f(t) dt,$$

dla $a < b < c < x$, oraz

$$(3.4) \quad ({}^{x,a} M_{\eta, \alpha}) f(x) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} x^{2\eta+2\alpha} (d^2-x^2)^{-\alpha} \int_a^b (t^2-d^2)^{\alpha} (t^2-x^2)^{-1} t^{-2\alpha-2\eta+1} \times \\ \times f(t) dt, \quad \text{dla } x < d < a < b.$$

W dalszym ciągu pracy wykorzystamy reguły „składania” operatorów [12]:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} S_{\eta+\alpha, \beta} S_{\eta, \alpha} &= I_{\eta, \alpha+\beta}, & S_{\eta, \alpha} S_{\eta, \alpha+\beta} &= K_{\eta, \alpha+\beta}, \\ I_{\eta, \alpha}^{-1} &= I_{\eta+\alpha, -\alpha}, & K_{\eta, \alpha}^{-1} &= K_{\eta+\alpha, -\alpha}, \end{aligned}$$

oraz

$$(3.6) \quad \begin{aligned} ({}^d_c I_{\eta, \alpha}^{-1}) ({}^x_c I_{\eta, \alpha}) &= -({}^x_d; {}^d_c L_{\eta, \alpha}), \quad x > d > c, \\ ({}^e_d K_{\eta, \alpha}^{-1}) ({}^e_x K_{\eta, \alpha}) &= -({}^e_x; {}^e_d M_{\eta, \alpha}), \quad x < d < e. \end{aligned}$$

Założmy obecnie, że poszukiwana funkcja $A(\xi)$ w równaniach (2.13) ma postać [2]:

$$(3.7) \quad A(r) = S_{1, -1/2} H(r).$$

Po podstawieniu do układu równań (2.13), otrzymamy:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} I_{1, -1/2} H(r) &= 0, \quad r \in [0, a) \cup (b, +\infty), \\ K_{0, 1/2} H(r) &= f_2(r), \quad r \in (a, b). \end{aligned}$$

Zastosowanie własności i wykorzystanie wzorów (3.1) - (3.6) pozwala nam sprowadzić układ równań (3.8) do układu równań całkowych Fredholma na funkcję $H(r)$:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} H_1(x) &= 0, \quad x \in [0, a), \\ H_2(x) &= ({}^b_x K_{1/2, -1/2}) f_2(x) - ({}^b_x; {}^{+\infty}_b M_{0, 1/2}) H_3(x), \quad x \in (a, b), \\ H_3(x) &= -({}^x_b; {}^b_a L_{1, -1/2}) H_2(x), \quad x \in (b, +\infty). \end{aligned}$$

Z drugiego i trzeciego równania układu (3.9) możemy wyrugować $H_3(x)$ i w ten sposób otrzymamy równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju na poszukiwaną funkcję $H_2(x)$:

$$(3.10) \quad H_2(x) = ({}^b_x K_{1/2, -1/2}) f_2(x) + ({}^b_x; {}^{+\infty}_b M_{0, 1/2}) ({}^x_b; {}^b_a L_{1, -1/2}) H_2(x) \quad \text{dla } x \in (a, b).$$

Równanie powyższe można zapisać w równoważnej postaci

$$(3.11) \quad H_2(x) = \varphi(x) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_a^b K_a(x, y) H_2(y) dy,$$

gdzie: $\varphi(x) = ({}^b_x K_{1/2, -1/2}) f_2(x)$,

$$(3.12) \quad K_a(x, y) = \frac{xy^3}{\sqrt{(b^2-x^2)(b^2-y^2)}} \int_b^{+\infty} \frac{t^2-b^2}{t^2(t^2-x^2)(t^2-y^2)} dt.$$

Po obliczeniu całki w (3.12) i przejściu do współrzędnych bezwymiarowych równanie (3.11) zapiszemy w postaci następującej

$$(3.13) \quad \frac{1-x^2}{x^4} \chi(x) = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_\varepsilon^1 \bar{K}_a(x, y) \chi(y) dy, \quad x \in (\varepsilon, 1),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varepsilon &= a/b, \quad \chi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu\delta b^2} \frac{x^3}{\sqrt{b^2-x^2}} H_2(x), \\ b^2 \bar{K}_a(x, y) &= \frac{1}{2(x^2-y^2)} \left[\frac{1-y^2}{y^3} \ln \frac{1+y}{1-y} - \frac{1-x^2}{x^3} \ln \frac{1+x}{1-x} \right] - \frac{1}{x^2 y^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ zarówno jądro równania całkowego (3.13) $\bar{K}_a(x, y)$ jak i funkcja swobodna $x^4/(1-x^2)$ są klasy $L^2(\varepsilon, 1)$, to zgodnie ze znanym twierdzeniem teorii równań całkowych,

rozwiązanie równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju (3.13) $\chi(x)$ jest jedyne i również należy do klasy $L^2(\varepsilon, 1)$. Składową styczną naprężenia $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$ wyrazimy przez funkcję $\chi(x)$ w sposób następujący

$$(3.14) \quad \sigma_{\varphi z}(r, 0) = \frac{2\mu\delta b^3}{\pi r^2} \frac{d}{dr} \int_{\varepsilon}^{r/b} \left[\frac{1-y^2}{\left(\frac{r^2}{b^2} - y^2\right)} \right]^{1/2} \chi(y) dy.$$

Wykorzystując powyższy związek przepisemy wzór na moment skręcający, wyrażając go również przez funkcję $\chi(x)$:

$$(3.15) \quad M = -4\mu b^3 \delta \int_{\varepsilon}^1 \chi(y) dy = -4\mu b^3 \delta \gamma_a^{-1}.$$

Równanie powyższe możemy również potraktować jako związek pomiędzy momentem skręcającym i kątem skręcenia, gdzie

$$(3.16) \quad \gamma_a^{-1} = \int_{\varepsilon}^1 \chi(y) dy.$$

Ze związku (3.14), po podstawieniu (3.16), otrzymamy następujące wyrażenie asymptotyczne dla $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$, przy $r \rightarrow a^+$:

$$(3.17) \quad \sigma_{\varphi z}(r, 0) = -\frac{M\gamma_a \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\sqrt{2} a^2 b \sqrt{\varepsilon} \pi} \left(\frac{r}{b} - \varepsilon \right)^{-1/2} \chi(\varepsilon).$$

W przypadku, gdy stempel ma podstawę kołową ($a = 0$), otrzymamy dokładne rozwiązanie równania (3.13), (które prowadzi do dobrze znanego wyniku na rozkład naprężeń kontaktowych):

$$(3.18) \quad \chi(x) = \frac{x}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[(1+x^2) \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x \right].$$

Stosując analogiczną metodę postępowania otrzymamy wyrażenie pozwalające na ustalenie charakteru osobliwości naprężeń kontaktowych dla $r \rightarrow b^-$. W tym celu przyjmujemy następującą postać [4] poszukiwanej funkcji $A(r)$ występującej w równaniu (2.13):

$$(3.19) \quad A(r) = S_{1/2, -1/2} h(r).$$

Po podstawieniu otrzymujemy układ potrójnych równań całkowych

$$(3.20) \quad \begin{aligned} K_{1/2, -1/2} h(r) &= 0, & r \in [0, a) \cup (b, +\infty), \\ I_{1/2, 1/2} h(r) &= f_2(r), & r \in (a, b). \end{aligned}$$

Wykorzystując następnie, jak poprzednio, definicje i własności podane pod (3.1) - (3.6), dostaniemy

$$(3.21) \quad \begin{aligned} h_1(x) &= -\left({}_a^x M_{1/2, -1/2} \right) h_2(x), & x \in [0, a), \\ h_2(x) &= \left({}_a^x I_{1, -1/2} \right) f_2(x) - \left({}_a^x L_{1/2, 1/2} \right) h_1(x), & x \in (a, b), \\ h_3(x) &= 0, & x \in (b, +\infty). \end{aligned}$$

Po podstawieniu za $h_1(x)$ z pierwszego równania do drugiego otrzymamy równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju ze względu na $h_2(x)$:

$$(3.22) \quad h_2(x) = ({}_a^x I_{1, -1/2}) f_2(x) + ({}_a^x; {}_b^x L_{1/2, 1/2}) ({}_x^a; {}_b^x M_{1/2, -1/2}) h_2(x).$$

Po przejściu do zmiennych bezwymiarowych równanie (3.22) sprowadzi się do postaci

$$(3.23) \quad (x^2 - \varepsilon^2) \eta(x) = (2x^2 - \varepsilon^2) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{\varepsilon}^1 K_b(x, y) \eta(y) dy,$$

gdzie

$$\bar{K}_b(x, y) = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \left[x(x^2 - \varepsilon^2) \ln \frac{x + \varepsilon}{x - \varepsilon} - y(y^2 - \varepsilon^2) \ln \frac{y + \varepsilon}{y - \varepsilon} \right] - \frac{\varepsilon}{b},$$

$$\eta(x) \equiv \frac{\sqrt{\pi} x}{2\mu\delta \sqrt{x^2 - \varepsilon^2}} h_2(bx).$$

Podobnie jak w przypadku równania całkowego (3.13) również tutaj możemy stwierdzić, że rozwiązanie równania całkowego (3.23) jest klasy $L^2(\varepsilon, 1)$. Obecnie wyrażenie na naprężenia kontaktowe $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$ dadzą się zapisać następująco:

$$(3.24) \quad \sigma_{\varphi z}(r, 0) = \frac{M\gamma_b}{2\pi b^2} \frac{d}{dr} \int_{\varepsilon}^1 \left[\frac{y^2 - \varepsilon^2}{y^2 - \left(\frac{r}{b}\right)^2} \right]^{1/2} \eta(y) dy,$$

gdzie

$$\gamma_b^{-1} = \int_{\varepsilon}^1 (2y^2 - \varepsilon^2) \eta(y) dy.$$

Ponieważ rozwiązanie równania całkowego (3.23) jest klasy $L^2(\varepsilon, 1)$ możemy dokonać przejścia asymptotycznego we wzorze (3.24), podobnie jak poprzednio w (3.17). Wyrażenie asymptotyczne dla $r \rightarrow b^-$ przyjmie postać następującą

$$(3.25) \quad \sigma_{\varphi z} = - \frac{M\gamma_b \sqrt{1 - \varepsilon^2} \eta(1)}{2 \sqrt{2} \pi b^3} (1 - r/b)^{-1/2}.$$

Dla kołowej podstawy stempla ($a = 0$) otrzymujemy dokładne rozwiązanie równania (3.23), wtedy $\eta(x) = 2$.

4. Rozwiązania przybliżone

Na podstawie dotychczasowych rozwiązań określiliśmy osobliwości składowej stycznej naprężeń kontaktowych występujących na krańcach obszaru kontaktu. Na brzegach pierścienia składowa obwodowa wektora przemieszczenia, aczkolwiek ciągła, nie posiada pochodnej. Dla $r \in (a, b)$ funkcja $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$ jest dodatnia, klasy C^1 . Rozkład naprężeń kontaktowych otrzymamy dopiero po rozwiązaniu odpowiednich równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju, również wtedy będziemy w stanie wyznaczyć pozostałe

niezerowe składowe tensora naprężenia, wektor przemieszczenia oraz współczynniki $\chi(\varepsilon)$ i $\eta(1)$ występujące w wyrażeniach asymptotycznych (3.17) i (3.25).

Naszym celem nie jest powtórzenie tu znanych metod rozwiązań lecz pokazanie jak w łatwy sposób można wyznaczyć rozkład naprężeń kontaktowych bez konieczności rozwiązywania równania całkowego zagadnienia. Wykorzystując wyrażenia asymptotyczne zapiszemy $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$ w postaci:

$$(4.1) \quad \sigma_{\varphi z}(r, 0) \cong -\frac{2\mu\delta}{\pi} \sqrt{b^2 - a^2} \begin{cases} \frac{b^2}{a^2} (r^2 - a^2)^{-1/2} \chi(\varepsilon), & r \in (a, a + \Delta), \\ f(r), & r \in (a + \Delta, b - \Delta), \\ \frac{r}{b} (b^2 - r^2)^{-1/2} \eta(1), & r \in (b - \Delta, b), \end{cases}$$

gdzie $\Delta = (b - a)/n$, $n > 2$, $f(r)$ jest regularną funkcją dodatnią.

Gdyby funkcja $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$ była dokładnym rozwiązaniem naszego zagadnienia, to wtedy $u_{\varphi}(r, 0)$, obliczona z transformaty Hankela (2.5), dla $r \in (a, b)$, przyjąłaby oczywiście postać zgodną z warunkiem brzegowym (2.8)₂:

$$(4.2) \quad u_{\varphi}(r, 0) = r\delta, \quad r \in (a, b).$$

Jako pierwsze przybliżenie, dostatecznie dokładne dla szerokich pierścieni możemy przyjąć, że współczynnik $\eta(1)$ dla $r \rightarrow b^-$ jest taki sam jak w przypadku kontaktu na powierzchni koła, t.zn. $\eta(1) = 2$. Wtedy współczynnik $\chi\left(\frac{a}{b}\right)$ we wzorze na naprężenia styczne $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$, dla $r \rightarrow a^+$, można obliczyć z warunku na moment skręcający (2.10). Przyjmiemy obecnie, że trzeci przedział we wzorze (4.1) został przedłużony w ten sposób, że obejmuje drugi. Mamy więc dla pierwszego przedziału $r \in (a, a + (b - a)/n)$, a dla trzeciego $r \in (a + (b - a)/n, b)$; drugi przedział znika. Jak widać z rysunku 1 przybliżenie takie ma sens dla dużego zakresu szerokości pierścieni. Celem obliczenia $\chi\left(\frac{a}{b}\right)$ wykorzystamy wzór na moment skręcający w postaci

$$(4.3) \quad M = 4\mu\delta \sqrt{b^2 - a^2} \left[b^2 a^{-2} \chi \frac{a}{b} \int_a^{a + \frac{b-a}{n}} r^2 (r^2 - a^2)^{-1/2} dr + \frac{\eta(1)}{b} \int_{a + \frac{b-a}{n}}^b r^3 (b^2 - r^2)^{-1/2} dr \right],$$

Jeżeli przyjmiemy podział odcinka $(b - a)$ na pewną całkowitą liczbę m części to na ogół okaże się, że wartość naprężeń na granicy przedziałów doznaje skoku. Na drodze prób możemy znaleźć takie (niecałkowite) n , że skok będzie mniejszy od pewnego z góry zadanego, małego ε , a funkcja naprężeń praktycznie ciągła. Metodą prób otrzymaliśmy następującą tabelkę, dla różnych szerokości pierścienia kontaktu, gdzie $1/n$ jest stosunkiem długości pierwszego przedziału do szerokości pierścienia:

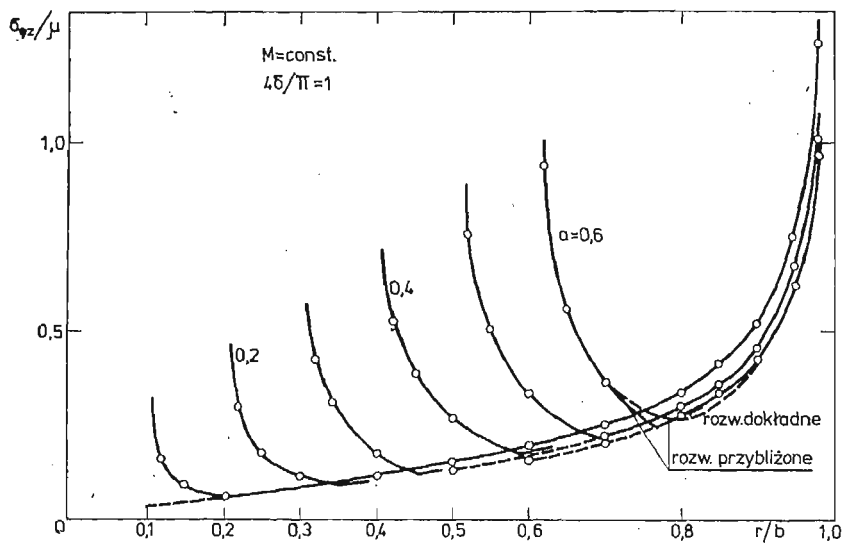
a/b	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
n	9,5	6,3	4,8	3,5	2,75	2,5
$1/n$	0,105	0,159	0,208	0,286	0,36	0,40

Ponieważ jednak tylko jedna z wielkości M , lub δ jest znana z warunków zadania, założymy, że w przybliżeniu, dla dostatecznie szerokich pierścieni związek między momentem skręcającym i kątem skręcenia jest taki sam jak w przypadku kontaktu na powierzchni koła:

$$(4.4) \quad M = \frac{16}{3} b^3 \mu \delta.$$

Miarą popełnionego błędu będzie różnica między przemieszczeniem $u_\varphi(r, 0)$ $r \in (a, b)$ obliczonym dla rozkładu naprężeń danych wzorem przybliżonym i wynikającym z warunku brzegowego (2.8)₂.

Na rysunku 1 przedstawiliśmy rozkłady naprężeń dla różnych szerokości $(b-a)$ pierścieni kontaktu, od $0,4b$ do $0,9b$. Dla porównania, w przypadku o najmniejszej szerokości

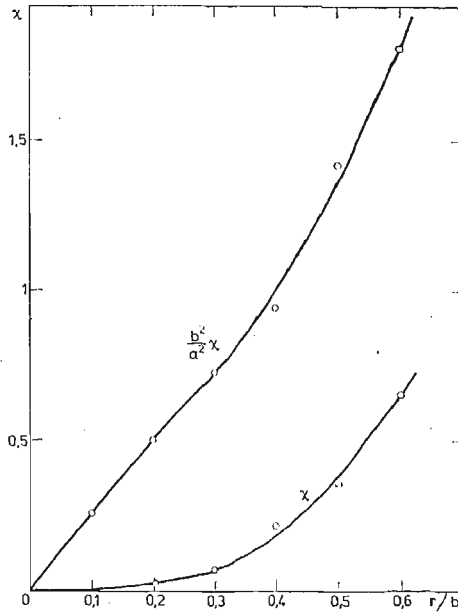


Rys. 1

$0.4b$ wrysowaliśmy również krzywą odpowiadającą rozwiązaniu otrzymanemu z rozwiązania numerycznego równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju, według metody Cooke'a. Widać, że redystrybucja naprężeń jest nieznaczna i tym mniejsza im szerszy jest pierścień kontaktu. Rysunek 2 przedstawia wartości $\chi(a/b)$ i $b^2 a^{-2} \chi(a/b)$ w zależności od szerokości pierścienia. Warto zauważyć, że dla wąskiego pierścienia wartość $b^2 a^{-2} \chi(a/b) \approx 1,8$ i jest bliska współczynnikowi osobliwości na promieniu zewnętrznym dla przypadku kontaktu na powierzchni koła. Punkty oznaczają odpowiednie wartości pierwszego przybliżenia.

W drugim przybliżeniu odstawimy od założenia upraszczającego, że $\eta(1) = 2$ czyli, że $\eta(1)$ jest taki sam jak dla kontaktu na powierzchni koła. Brakujący warunek, (lub warunki) otrzymamy ze spełnienia warunku brzegowego w punkcie, ewentualnie w kilku punktach. Jeżeli założymy, że $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$ jest znane, wtedy otrzymamy ze wzoru (2.6)

$$-\mu A(\xi) = \int_a^b r \sigma_{\varphi z}(r, 0) J_1(\xi r) dr,$$



Rys. 2

skąd, dla $z = 0$, mamy

$$(4.5) \quad u_\varphi(r, 0) = -\frac{1}{\mu} \int_a^b t \sigma_{\varphi z}(t, 0) dt \int_0^\infty J_1(\xi r) J_1(\xi t) d\xi,$$

gdzie

$$(4.6) \quad \frac{\pi}{2} \int_0^\infty J_1(\xi r) J_1(\xi t) d\xi = \begin{cases} \frac{1}{r} \left[K\left(\frac{r}{t}\right) - E\left(\frac{r}{t}\right) \right], & t > r, \\ \frac{1}{t} \left[K\left(\frac{t}{r}\right) - E\left(\frac{t}{r}\right) \right], & r > t. \end{cases}$$

Podstawiając $r = b$ w warunku brzegowym (2.8)₂, otrzymamy dodatkowy warunek

$$(4.7) \quad \pi \mu b \delta = -2 \int_a^b \sigma_{\varphi z}(t, 0) \left[K\left(\frac{t}{b}\right) - E\left(\frac{t}{b}\right) \right] dt.$$

Z kolei zamiast warunku (4.4) możemy wziąć następujący:

$$(4.8) \quad \pi \mu a^2 \delta = -2 \int_a^b \sigma_{\varphi z}(t, 0) \left[K\left(\frac{a}{t}\right) - E\left(\frac{a}{t}\right) \right] t dt.$$

Współczynniki $\chi(\varepsilon)$ oraz $\eta(1)$ wyznaczymy, po obliczeniu całek, z równań algebraicznych (4.7) i (4.8), a następnie kąt obrotu z równania (4.3). Obliczenia ułatwia wykorzystanie wzoru:

$$K(k) - E(k) = k^2 \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx, \quad k < 1,$$

który umożliwia obliczenie jednej z całek w całce podwójnej i numeryczne scałkowanie pozostałych.

Potraktujmy równanie (4.7) jako test pierwszego przybliżenia i przyjmijmy np. dla $a/b = 0,5$, że zgodnie z pierwszym przybliżeniem $(b^2/a^2)\chi(\varepsilon) = 1,42$ (Rys. 2). Po podstawieniu i obliczeniu całek otrzymamy $\eta(1) \approx 1,58$, a więc wartość mniejsza od 2, co było do przewidzenia.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. М. БОРОДАЧЕВ, *О характере особенностей напряжений под кольцевым штампом*, Прикл. Мат. и Мех., 40 (1976), 2, 372.
2. Н. М. БОРОДАЧЕВ, *Об одном классе решений тройных интегральных уравнений*, Прикл. Мат. и Мех., 40 (1976), 4, 655.
3. J. C. COOKE, *Triple integral equations*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 16 (1963), 193.
4. J. C. COOKE, *The solution of triple integral equations in operational form*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 18 (1965), 57.
5. A. ERDÉLYI, I. N. SNEDDON, *Fractional integration and dual integral equations*, Canad. J. Math. 14 (1962), 685.
6. E. REISSNER, H. F. SAGOCI, *Forced torsional oscillations of an elastic half-space*, Int. J. Appl. Physics, 15 (1944), 652.
7. W. B. RUDNICKII, *Praca doktorska*, Instytut Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, 1971.
8. I. N. SNEDDON, *Note on boundary value problem of Reissner and Sagoci*, J. Appl. Physics 18 (1947), 130.
9. I. N. SNEDDON, *Fractional integration and dual integral equations*, North Carolina State College, PSR-6, 1962.
10. I. N. SNEDDON, *The use of transform methods in elasticity*, II, North Carolina State Univ., PSR-24/5, 1965.
11. I. N. SNEDDON, *The Reissner-Sagoci problem*, Proc. Glasgow Math. Assoc., 7 (1966).
12. I. N. SNEDDON, *Mixed boundary value problems of potential theory*, Amsterdam, North Holland Publ. Co., 1966.
13. I. N. SNEDDON, *The use of operators of fractional integration in applied mathematics*, IPPT PAN, PWN Warszawa-Poznań, 1979.
14. W. E. WILLIAMS, *Note on the electrostatic problem for a circular annulus*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 16 (1963), 2.
15. W. E. WILLIAMS, *Integral equation formulation of some three part boundary value problems*, Proc. Edinb. Math. Soc. Ser. 2, 13 (1963), 4.

Резюме

ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ С КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТЮ КОНТАКТА

Применяя решения Кука и Бородавчева получены особенности напряжений на внутреннем и наружном радиусах кольца контакта в задаче о кручении. Предложен простой метод приближенного решения задачи, приведены примеры.

S u m m a r y

ON STRESS SINGULARITIES IN TORSION BY AN ANNULUS

Using the forms of solutions proposed by Cooke and Borodachev we discuss the stress singularities in the torsion, on outer and inner radii of the contact annulus. Next a simple method of approximate solution is considered and verified on examples.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
INSTYTUT MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 grudnia 1979 roku

WYMUSZONE DRGANIA GIĘTNE PODATNIE PODPARTEGO ASYMETRYCZNEGO WAŁU

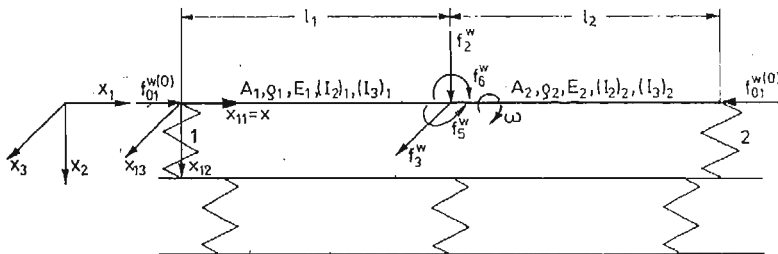
JANUSZ KOLEND A (GDAŃSK)

1. Wstęp

Rozpatrywane w pracach [1] i [2] układy z asymetrycznymi wałami analizowano przy założeniu, że drgania giętne w obu płaszczyznach oraz drgania podłużne i skrętne poszczególnych odcinków linii wałów można opisać niesprzężonymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Uwzględniono natomiast możliwość sprzężeń pomiędzy tymi drganiami na skutek podatności konstrukcji podpierających linie wałów. W szczególności istotne są sprzężenia pomiędzy drganiami giętymi. Zagadnienie to zilustrowano w niniejszej pracy na przykładzie drgań dwupodporowego wału. Rozpatrzono również zagadnienia redukcji i dokładności obliczeń.

2. Opis drgań giętych wału przy wymuszeniach okresowych

Obliczeniowy schemat analizowanego układu przedstawiono na rys. 1. Przyjęto, że główna centralna oś bezwładności wału pokrywa się z osią obrotu. Wał podzielono na dwa odcinki obliczeniowe o długościach l_1 i l_2 , których przekroje poprzeczne są stałe i kołowo asymetryczne. Lokalne ruchome układy współrzędnych obu odcinków x_{11}, x_{12}, x_{13} i x_{21}, x_{22}, x_{23} mają początki na osi obrotu w połowie długości pierwszego łożyska i w przekroju $x_{11} = l_1$ oraz osie odpowiednio równoległe w chwili $t_0 = 2k\pi/\omega$,



Rys. 1. Schemat obliczeniowy analizowanego układu. A_1 —pole przekroju poprzecznego pierwszego odcinka wału; ρ_1 — gęstość materiału pierwszego odcinka; E_1 — moduł Younga dla pierwszego odcinka; $(I_2)_1, (I_3)_1$ — momenty bezwładności przekroju poprzecznego pierwszego odcinka; l_1 — długość pierwszego odcinka; f_α^w ($\alpha = 2, 3, 5, 6$) — skupione wymuszenia zewnętrzne; $f_{01}^{w(0)}$ — stała poosiowa siła ściskająca; x_{11}, x_{12}, x_{13} — ortogonalny ruchomy układ współrzędnych pierwszego odcinka; X_1, X_2, X_3 — ortogonalny nieruchomy układ odniesienia konstrukcji podpierającej; ω — prędkość kątowa wirowania wału; 1,2 — podpory łożyskowe

$k = 0, 1, 2, \dots$ do osi nieruchomego układu odniesienia fundamentu X_1, X_2, X_3 . Osie x_{i2}, x_{i3} ($i = 1, 2$) są równoległe do głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego wału. Zakłada się, że wymuszenia zewnętrzne f_α^w i reakcje łożysk $f_{i\alpha}$ ($\alpha = 2, 3, 5, 6$) są siłami skupionymi, których wektory przechodzą przez oś obrotu w przekroju $x_{11} = l_1$ i w połowie długości łożysk. Okresowe wymuszenia przedstawiono w postaci:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} f_\alpha^w &= \sum_\nu (f_\alpha^{w1(\nu)} \cos \nu \omega t + f_\alpha^{w2(\nu)} \sin \nu \omega t) = \\ &= \sum_{\mu} f_\alpha^{w(\mu)} \exp(j\mu \omega t), \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu \dots \end{aligned}$$

Podobnie wyrazić można przemieszczenia i siły wewnętrzne wału w przekrojach $x_{i1} = x \in [0, l_i]$:

$$(2.2) \quad u_{ix\alpha} = \sum_{\mu} u_{ix\alpha}^{(\mu)} \exp(j\mu \omega t),$$

$$(2.3) \quad p_{ix\alpha} = \sum_{\mu} p_{ix\alpha}^{(\mu)} \exp(j\mu \omega t), \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6.$$

W wyniku podstawienia (2.2) do jednorodnych równań różniczkowych drgań giętych i -tego odcinka wału oraz uwzględnienia relacji między siłami $p_{ix\alpha}$ i przemieszczeniami $u_{ix\alpha}$ uzyskuje się dla uściślonego modelu wału ¹⁾ wyrażenia [2]:

$$(2.4) \quad u_{ix}^{(\mu)} = C_{ix}^{(\mu)} a_i^{(\mu)},$$

$$(2.5) \quad p_{ix}^{(\mu)} = A_{ix}^{(\mu)} a_i^{(\mu)},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} u_{ix\alpha}^{(\mu)} &= \{u_{ix\alpha}^{(\mu)}\}, \quad p_{ix\alpha}^{(\mu)} = \{p_{ix\alpha}^{(\mu)}\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6, \\ a_i^{(\mu)} &= \{a_i^{(\mu)}\}, \quad q = 3, 4, \dots, 10, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Macierze $C_{ix}^{(\mu)}, A_{ix}^{(\mu)}$ tworzy się z analogicznych macierzy wyznaczonych w [2] przez odrzucenie kolumn: 1-ej, 2-ej, 11-ej, 12-ej oraz wierszy: 1-go i 4-go.

Warunki ciągłości przemieszczeń i równowagi sił w przekroju $x_{11} = l_1$ prowadzą do zależności [2]:

$$(2.6) \quad a_2^{(\mu)} = B_1^{(\mu)} a_1^{(\mu)} + F_1^{(\mu)} f^{w(\mu)}.$$

Macierze $B_1^{(\mu)}, F_1^{(\mu)}$ tworzy się z macierzy $B_i^{(\mu)}, F_i^{(\mu)}$ określonych w [2], natomiast $f^{w(\mu)}$ jest macierzą kolumnową amplitud μ -tych składowych wymuszeń zewnętrznych:

$$f^{w(\mu)} = \{f_\alpha^{w(\mu)}\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6.$$

Zgodnie z przyjętą w [1] konwencją znaków, warunki brzegowe analizowanego wału mają postać:

$$(2.7) \quad p_{102} = -f_{12}, \quad p_{103} = -f_{13}, \quad p_{105} = f_{15}, \quad p_{106} = f_{16},$$

$$(2.8) \quad p_{212} = f_{22}, \quad p_{213} = f_{23}, \quad p_{215} = -f_{25}, \quad p_{216} = -f_{26}.$$

¹⁾ Z uwzględnieniem wpływu tłumienia wewnętrznego, momentów sił bezwładności obrotu, odkształceń postaciowych od sił poprzecznych i stałej siły poosiowej $f_{01}^{w(0)}$.

Z uwzględnieniem (2.3), (2.5) i (2.6) warunki (2.7) i (2.8) prowadzą do zależności:

$$(2.9) \quad \bar{B}^{(\mu)} a_1^{(\mu)} + \tilde{B}^{(\mu)} f^{w(\mu)} = f^{(\mu)},$$

w której oznaczono:

$$\bar{B}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} A^{(\mu)} \\ B^{(\mu)} B_1^{(\mu)} \end{bmatrix}_8, \quad \tilde{B}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} 0 \\ B^{(\mu)} F_1^{(\mu)} \end{bmatrix}_{8 \times 4},$$

$$f^{(\mu)} = \{f_1^{(\mu)}, f_2^{(\mu)}\}, \quad f_i^{(\mu)} = \{f_{i2}^{(\mu)}, f_{i3}^{(\mu)}, f_{i5}^{(\mu)}, f_{i6}^{(\mu)}\}, \quad i = 1, 2.$$

Macierz $A^{(\mu)}$ powstaje z macierzy $A_{1x_1}^{(\mu)}$ przez podstawienie $x = 0$ oraz pomnożenie pierwszego i drugiego wiersza przez (-1) ; macierz $B^{(\mu)}$ powstaje z macierzy $A_{2x}^{(\mu)}$ przez podstawienie $x = l_2$ oraz pomnożenie trzeciego i czwartego wiersza przez (-1) .

Amplitudy μ -tych składowych przemieszczeń wału w miejscach podpór łożyskowych zapisać można w postaci macierzy kolumnowej

$$u^{(\mu)} = \{u_{10}^{(\mu)}, u_{21}^{(\mu)}\}^*$$

która zgodnie z (2.4) i (2.6) wyraża się zależnością:

$$(2.10) \quad u^{(\mu)} = \bar{C}^{(\mu)} a_1^{(\mu)} + \tilde{C}^{(\mu)} f^{w(\mu)},$$

$$\bar{C}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} C_{10}^{(\mu)} \\ C_{21}^{(\mu)} B_1^{(\mu)} \end{bmatrix}_8, \quad \tilde{C}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{21}^{(\mu)} F_1^{(\mu)} \end{bmatrix}_{8 \times 4}.$$

Ogólna zależność pomiędzy amplitudami składowych reakcji i przemieszczeń wału w miejscach podpór łożyskowych jest następująca [1]:

$$(2.11) \quad \mathbf{u}^{(r)} = -\mathbf{U}^{(r)} \mathbf{R}^{(r)} \mathbf{f}^{(r)},$$

przy czym r jest liczbą uwzględnianych harmonicznych, a $\mathbf{u}^{(r)}$ i $\mathbf{f}^{(r)}$ oznaczają macierze kolumnowe:

$$\mathbf{u}^{(r)} = \{u^{(-r)}, u^{(-r+1)}, \dots, u^{(0)}, u^{(r-1)}, u^{(r)}\},$$

$$\mathbf{f}^{(r)} = \{f^{(-r)}, f^{(-r+1)}, \dots, f^{(0)}, \dots, f^{(r-1)}, f^{(r)}\}.$$

Dla analizowanego układu macierze $\mathbf{U}^{(r)}$ i $\mathbf{R}^{(r)}$ mają przy pominięciu składników dotyczących drgań podłużnych i skrętnych postać:

$$\mathbf{U}^{(r)} = \begin{bmatrix} 0 & \check{\Pi}^T & & & & 0 \\ \hat{\Pi}^T & 0 & \check{\Pi}_1^T & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \hat{\Pi}^T & 0 & \check{\Pi}^T \\ 0 & & & & \hat{\Pi}^T & 0 \end{bmatrix}_{8(2r+1)}$$

$$\mathbf{R}^{(r)} = \begin{bmatrix} 0 & \check{D}^{(-r)} \check{\Pi} & & & & 0 \\ \check{D}^{(-r+1)} \hat{\Pi} & 0 & \check{D}^{(-r+1)} \check{\Pi} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \check{D}^{(r-1)} \hat{\Pi} & 0 & \check{D}^{(r-1)} \check{\Pi} \\ & & & & & \check{D}^{(r)} \hat{\Pi} & 0 \end{bmatrix}_{8(2r+1)}$$

$$\hat{\Pi} = [\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \dots], \quad \check{\Pi} = [\check{\Pi}_1, \check{\Pi}_2, \dots],$$

$$\hat{\Pi}_1 = \hat{\Pi}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 & 0 \\ -j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & -j & 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\Pi}_1 = \check{\Pi}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 0 & 0 & j & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}^{(\mu)} = [\tilde{D}_{ij}^{(\mu)}], \quad i, j = 1, 2, \quad \mu = -r, -r+1, \dots, 0, \dots, r-1, r,$$

$$\tilde{D}_{ii}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{ii22}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii23}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii25}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii26}^{(\mu)} \\ \tilde{d}_{ii32}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii33}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii35}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii36}^{(\mu)} \\ \tilde{d}_{ii52}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii53}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii55}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii56}^{(\mu)} \\ \tilde{d}_{ii62}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii63}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii65}^{(\mu)} & \tilde{d}_{ii66}^{(\mu)} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_{ij}^{(\mu)} \quad (i \neq j) = \begin{bmatrix} d_{ij22}^{(\mu)} & d_{ij23}^{(\mu)} & d_{ij25}^{(\mu)} & d_{ij26}^{(\mu)} \\ d_{ij32}^{(\mu)} & d_{ij33}^{(\mu)} & d_{ij35}^{(\mu)} & d_{ij36}^{(\mu)} \\ d_{ij52}^{(\mu)} & d_{ij53}^{(\mu)} & d_{ij55}^{(\mu)} & d_{ij56}^{(\mu)} \\ d_{ij62}^{(\mu)} & d_{ij63}^{(\mu)} & d_{ij65}^{(\mu)} & d_{ij66}^{(\mu)} \end{bmatrix}.$$

W odróżnieniu od $d_{ij\alpha\beta}^{(\mu)}$ ($i \neq j$) współczynniki podatności dynamicznej $\tilde{d}_{ii\alpha\beta}^{(\mu)}$ uwzględniają wpływ filmu olejowego w łożyskach [1], [2].

Zależności (2.9) i (2.10) można dla wszystkich rozpatrywanych harmoniczych napisać w postaci:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}^{(r)} \mathbf{a}_1^{(r)} + \tilde{\mathbf{B}}^{(r)} \mathbf{f}^{w(r)} &= \mathbf{f}^{(r)}, \\ \mathbf{u}^{(r)} &= \bar{\mathbf{C}}^{(r)} \mathbf{a}_1^{(r)} + \tilde{\mathbf{C}}^{(r)} \mathbf{f}^{w(r)}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^{(r)} &= \{a^{(-r)}, a^{(-r+1)}, \dots, a_1^{(0)}, \dots, a^{(r-1)}, a_1^{(r)}\}, \\ \mathbf{f}^{w(r)} &= \{f^{w(-r)}, f^{w(-r+1)}, \dots, f^{w(0)}, \dots, f^{w(r-1)}, f^{w(r)}\}, \\ \bar{\mathbf{B}}^{(r)} &= [\bar{B}^{(-r)}, \bar{B}^{(-r+1)}, \dots, \bar{B}^{(0)}, \dots, \bar{B}^{(r-1)}, \bar{B}^{(r)}]_{8(2r+1)} \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^{(r)} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^{(-r)} & & & & & & & 0 \\ & \tilde{B}^{(-r+1)} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \tilde{B}^{(0)} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \tilde{B}^{(r-1)} & & \\ & & & & & & \tilde{B}^{(r)} & \end{bmatrix}_{8(2r+1) \times 4(2r+1)}$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{(r)} = [\bar{C}^{(-r)}, \bar{C}^{(-r+1)}, \dots, \bar{C}^{(0)}, \dots, \bar{C}^{(r-1)}, \bar{C}^{(r)}]_{8(2r+1)}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(r)} = \begin{bmatrix} \tilde{C}^{(-r)} & & & & & & & 0 \\ & \tilde{C}^{(-r+1)} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \tilde{C}^{(0)} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \tilde{C}^{(r-1)} & & \\ & & & & & & \tilde{C}^{(r)} & \end{bmatrix}_{8(2r+1) \times 4(2r+1)}$$

Z równań (2.11) i (2.12) wyznaczyć można nieznane macierze kolumnowe:

$$(2.13) \quad \mathbf{a}_1^{(r)} = -(\bar{\mathbf{C}}^{(r)})^{-1} \{ \tilde{\mathbf{C}}^{(r)} + \mathbf{U}^{(r)} \mathbf{R}^{(r)} [\mathbf{E} + \bar{\mathbf{B}}^{(r)} (\bar{\mathbf{C}}^{(r)})^{-1} \mathbf{U}^{(r)} \mathbf{R}^{(r)}]^{-1} [\tilde{\mathbf{B}}^{(r)} - \bar{\mathbf{B}}^{(r)} (\bar{\mathbf{C}}^{(r)})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}^{(r)}] \} \mathbf{f}^{w(r)},$$

$$(2.14) \quad \mathbf{f}^{(r)} = [\mathbf{E} + \bar{\mathbf{B}}^{(r)} (\bar{\mathbf{C}}^{(r)})^{-1} \mathbf{U}^{(r)} \mathbf{R}^{(r)}]^{-1} [\tilde{\mathbf{B}}^{(r)} - \bar{\mathbf{B}}^{(r)} (\bar{\mathbf{C}}^{(r)})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}^{(r)}] \mathbf{f}^{w(r)},$$

$$(2.15) \quad \mathbf{u}^{(r)} = -\mathbf{U}^{(r)} \mathbf{R}^{(r)} [\mathbf{E} + \bar{\mathbf{B}}^{(r)} (\bar{\mathbf{C}}^{(r)})^{-1} \mathbf{U}^{(r)} \mathbf{R}^{(r)}]^{-1} [\tilde{\mathbf{B}}^{(r)} - \bar{\mathbf{B}}^{(r)} (\bar{\mathbf{C}}^{(r)})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}^{(r)}] \mathbf{f}^{w(r)},$$

przy czym \mathbf{E} jest macierzą jednostkową.

Przemieszczenia oraz siły wewnętrzne w przekroju x pierwszego odcinka wału określone są zgodnie z (2.1) do (2.5) zależnościami:

$$(2.16) \quad u_{1x} = C_{1x}^{(0)} a_1^{(0)} + \sum_{\nu=1}^r [(C_{1x}^{(\nu)} a_1^{(\nu)} + C_{1x}^{(-\nu)} a_1^{(-\nu)}) \cos \nu \omega t + j (C_{1x}^{(\nu)} a_1^{(\nu)} - C_{1x}^{(-\nu)} a_1^{(-\nu)}) \sin \nu \omega t],$$

$$(2.17) \quad p_{1x} = A_{1x}^{(0)} a_1^{(0)} + \sum_{\nu=1}^r [(A_{1x}^{(\nu)} a_1^{(\nu)} + A_{1x}^{(-\nu)} a_1^{(-\nu)}) \cos \nu \omega t + j (A_{1x}^{(\nu)} a_1^{(\nu)} - A_{1x}^{(-\nu)} a_1^{(-\nu)}) \sin \nu \omega t].$$

Wielkości te oraz wymuszenia (2.1) odnoszą się do lokalnych układów współrzędnych, wirujących wraz z wałem. Podobnie wyznacza się przemieszczenia oraz siły wewnętrzne w drugim odcinku, wyliczając uprzednio z zależności (2.6) macierze kolumnowe $a_2^{(\mu)}$ dla $\mu = -r, -r+1, \dots, 0, \dots, r-1, r$.

3. Przykład obliczeniowy

Do obliczeń przyjęto uproszczony model wału, pomijając wpływ tłumienia wewnętrznego, momentów sił bezwładności obrotu, odkształceń postaciowych od sił poprzecznych i stałej siły poosiowej. Konsekwencją tego uproszczenia jest mniej złożona postać elementów macierzy $C_{ix}^{(\mu)}$, $A_{ix}^{(\mu)}$, $\bar{B}^{(\mu)}$, $\tilde{B}^{(\mu)}$, $\bar{C}^{(\mu)}$ i $\tilde{C}^{(\mu)}$. W szczególności pominięcie tłumienia wewnętrznego wału prowadzi do identycznej postaci w/w macierzy dla $\mu = -\nu$ i $\mu = \nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, r$)²⁾. Zależności (2.4), (2.5), (2.6), (2.9) i (2.10) przyjmują postać [1]:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_{ix}^{(\mu)} &= C_{ix}^{(\nu)} a_1^{(\mu)}, \quad \nu = |\mu|, \\ p_{ix}^{(\mu)} &= A_{ix}^{(\nu)} a_1^{(\mu)}, \\ a_2^{(\mu)} &= B_1^{(\nu)} a_1^{(\mu)} + F_1^{(\nu)} f^{w(\mu)}, \\ \bar{B}^{(\nu)} a_1^{(\mu)} + \tilde{B}^{(\nu)} f^{w(\mu)} &= f^{(\mu)}, \\ u^{(\mu)} &= \bar{C}^{(\nu)} a_1^{(\mu)} + \tilde{C}^{(\nu)} f^{w(\mu)}. \end{aligned}$$

²⁾ Przy uwzględnieniu tłumienia w konstrukcji podpierającej wał (linię wałów) macierze podatności łożysk dynamicznej $\tilde{D}^{(-\nu)}$ i $\tilde{D}^{(\nu)}$ są zespolone sprzężone. Przy pominięciu tłumienia w filmie olejowym łożysk, podporach łożyskowych i w fundamencie macierze te stają się rzeczywiste i jednakowe. Założenie o idealnie sprężystym podparciu linii wałów prowadzi do identycznej postaci macierzy $\tilde{D}^{(\mu)}$ dla wszystkich μ .

Występujące tu macierze określono poniżej:

$$C_{ix}^{(0)} = \begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & x^2 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3x^2 & -2x & -1 & 0 \\ 3x^2 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{ix}^{(\nu)} = [(C_{ix}^{(\nu)})_1; (C_{ix}^{(\nu)})_2], \quad \nu \neq 0,$$

$$(C_{ix}^{(\nu)})_1 = \begin{bmatrix} \cos \lambda_2 x & \sin \lambda_2 x & \operatorname{ch} \lambda_2 x & \operatorname{sh} \lambda_2 x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 \sin \lambda_2 x & \lambda_2 \cos \lambda_2 x & \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 x & \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_2 x \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$(C_{ix}^{(\nu)})_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \lambda_3 x & \sin \lambda_3 x & \operatorname{ch} \lambda_3 x & \operatorname{sh} \lambda_3 x \\ \lambda_3 \sin \lambda_3 x & -\lambda_3 \cos \lambda_3 x & -\lambda_3 \operatorname{sh} \lambda_3 x & -\lambda_3 \operatorname{ch} \lambda_3 x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$A_{ix}^{(0)} = \begin{bmatrix} -6EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6EI_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI_3 x & 2EI_3 & 0 & 0 \\ -6EI_2 x & -2EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{ix}^{(\nu)} = [(A_{ix}^{(\nu)})_1; (A_{ix}^{(\nu)})_2], \quad \nu \neq 0,$$

$$(A_{ix}^{(\nu)})_1 = \begin{bmatrix} -EI_2 \lambda_2^3 \sin \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^3 \cos \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^3 \operatorname{sh} \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^3 \operatorname{ch} \lambda_2 x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ EI_2 \lambda_2^2 \cos \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^2 \operatorname{ch} \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^2 \operatorname{sh} \lambda_2 x \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$(A_{ix}^{(\nu)})_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EI_3 \lambda_3^3 \sin \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^3 \cos \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^3 \operatorname{sh} \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^3 \operatorname{ch} \lambda_3 x \\ -EI_3 \lambda_3^3 \cos \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^3 \sin \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^3 \operatorname{ch} \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^3 \operatorname{sh} \lambda_3 x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$(\lambda_2)_i = (\lambda_2^{(\nu)})_i = (\nu\omega)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A_0}{EI_2} \right)_{(i)}^{\frac{1}{2}}, \quad (\lambda_3)_i = (\lambda_3^{(\nu)})_i = (\nu\omega)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A_0}{EI_3} \right)_{(i)}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2.$$

Do obliczeń przyjęto, że oba odcinki obliczeniowe są identyczne:

$$l_1 = l_2 = l, \quad (\lambda_2)_1 = (\lambda_2)_2 = \lambda_2, \quad (\lambda_3)_1 = (\lambda_3)_2 = \lambda_3, \quad A_{1x}^{(\nu)} = A_{2x}^{(\nu)} = A_x^{(\nu)},$$

$$C_{1x}^{(\nu)} = C_{2x}^{(\nu)} = C_x^{(\nu)}.$$

Macierze $B_1^{(\nu)}$ oraz $F_1^{(\nu)}$ przyjmują wówczas postać:

$$B_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3l & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3l^2 & 2l & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l^3 & l^2 & l & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3l & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3l^2 & 2l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l^3 & l^2 & l & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1^{(\nu)} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_2 l & \sin \lambda_2 l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \lambda_2 l & \cos \lambda_2 l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \lambda_2 l & \operatorname{sh} \lambda_2 l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} \lambda_2 l & \operatorname{ch} \lambda_2 l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \lambda_3 l & \sin \lambda_3 l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \lambda_3 l & \cos \lambda_3 l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{ch} \lambda_3 l & \operatorname{sh} \lambda_3 l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sh} \lambda_3 l & \operatorname{ch} \lambda_3 l \end{bmatrix},$$

$$F_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/6EI_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2EI_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6EI_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2EI_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1^{(\nu)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2EI_2 \lambda_2^2 \\ -1/2EI_2 \lambda_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2EI_2 \lambda_2^2 \\ 1/2EI_2 \lambda_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2EI_3 \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & -1/2EI_3 \lambda_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2EI_3 \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 1/2EI_3 \lambda_3^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zależności (2.13) do (2.15) zachowują swą postać, przy czym macierze $\bar{B}^{(r)}$, $\tilde{B}^{(r)}$, $\bar{C}^{(r)}$ i $\tilde{C}^{(r)}$ mają na skutek pominięcia tłumienia w wałe jednakowe odpowiednie bloki:

$$\bar{B}^{(r)} = [\bar{B}^{(r)}, \bar{B}^{(r-1)}, \dots, \bar{B}^{(0)}, \dots, \bar{B}^{(r-1)}, \bar{B}^{(r)}],$$

$$\tilde{B}^{(r)} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^{(r)} & & & & & & & 0 \\ & \tilde{B}^{(r-1)} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \tilde{B}^{(0)} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \tilde{B}^{(r-1)} & & \\ 0 & & & & & & \tilde{B}^{(r)} & \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}^{(r)} = [\bar{C}^{(r)}, \bar{C}^{(r-1)}, \dots, \bar{C}^{(0)}, \dots, \bar{C}^{(r-1)}, \bar{C}^{(r)}],$$

$$\tilde{C}^{(r)} = \begin{bmatrix} \tilde{C}^{(r)} & & & & 0 \\ & \tilde{C}^{(r-1)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \tilde{C}^{(0)} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tilde{C}^{(r-1)} \\ 0 & & & & & & \tilde{C}^{(r)} \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}^{(v)} = \begin{bmatrix} A^{(v)} \\ B^{(v)} \quad B_1^{(v)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}^{(v)} = \begin{bmatrix} 0 \\ B^{(v)} \quad F_1^{(v)} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}^{(v)} = \begin{bmatrix} C_0^{(v)} \\ C_1^{(v)} \quad B_1^{(v)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}^{(v)} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_1^{(v)} \quad F_1^{(v)} \end{bmatrix},$$

$$v = 0, 1, 2, \dots, r.$$

Macierze $A^{(v)}$ i $B^{(v)}$ tworzy się z macierzy $A_x^{(v)}$ analogicznie jak występujące w (2.9) macierze $A^{(v)}$ i $B^{(v)}$ z macierzy $A_{1x}^{(v)}$ i $A_{2x}^{(v)}$.

Do obliczeń przyjęto:

- rząd uwzględnianych harmonicznycch $r = 2$,
- pole przekroju poprzecznego wału $A = 9 \text{ cm}^2$,
- gęstość materiału wału $\rho = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$,
- moduł Younga $E = 2,1 \cdot 10 \text{ N/cm}^2$,
- główne centralne momenty bezwładności przekroju poprzecznego wału $I_2 = 12 \text{ cm}^4$
 $I_3 = \frac{1}{3} 2,25^3 \text{ cm}^4$,
- długość obliczeniowego odcinka wału $l = 100 \text{ cm}$,
- prędkość kątowa wirowania wału $\omega = 75 \text{ rad/s}$.

Zgodnie z twierdzeniem o wzajemności prac obrano macierze podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej w postaci symetrycznej, przy czym pominięto wpływ tłumienia. Dla analizowanego układu przyjęto:

$$\tilde{D}^{(-2)} = \tilde{D}^{(2)} = d_2 \tilde{D}^{(0)}, \quad \tilde{D}^{(-1)} = \tilde{D}^{(1)} = d_1 \tilde{D}^{(0)}, \quad \tilde{D}^{(0)} = kD.$$

Współczynniki d_1 , d_2 i k zmieniano w trakcie obliczeń, ograniczając się do dwóch wariantów macierzy D :

- z uwzględnieniem sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi poprzez fundament:

$$D = D_A = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = D_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,03 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = D_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix},$$

- z pominięciem sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi poprzez fundament:

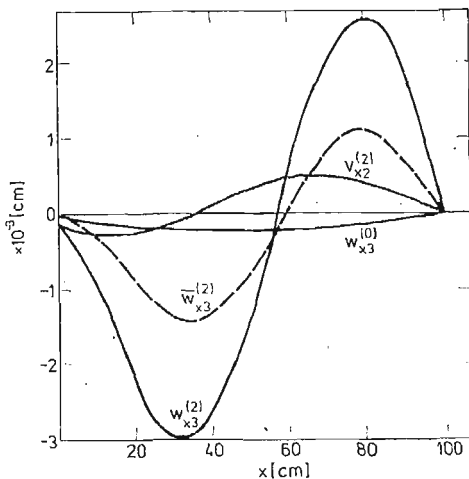
$$D = D_B = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix},$$

Z uwagi na symetrię analizowanego układu wyznaczano drgania jedynie pierwszego odcinka z zależności:

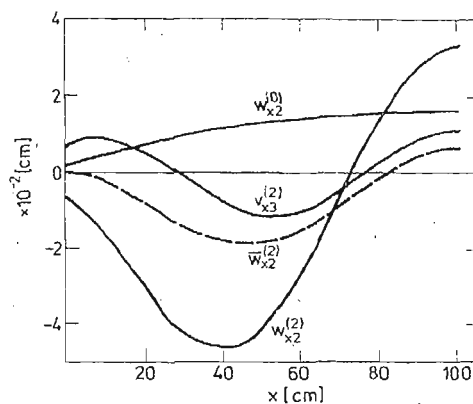
$$(3.2) \quad \begin{aligned} u_{1x} &= w_x^{(0)} + w_x^{(1)} \cos \omega t + v_x^{(1)} \sin \omega t + w_x^{(2)} \cos 2\omega t + v_x^{(2)} \sin 2\omega t, \\ w_x^{(0)} &= \{w_{x\alpha}^{(0)}\}, \quad w_x^{(\nu)} = \{w_{x\alpha}^{(\nu)}\}, \quad v_x^{(\nu)} = \{v_{x\alpha}^{(\nu)}\}, \quad \nu = 1, 2, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6, \\ w_x^{(0)} &= C_x^{(0)} a_1^{(0)}, \quad w_x^{(\nu)} = C_x^{(\nu)} (a_1^{(\nu)} + a_1^{(-\nu)}), \\ v_x^{(\nu)} &= j C_x^{(\nu)} (a_1^{(\nu)} - a_1^{(-\nu)}). \end{aligned}$$

Przykładowe wyniki obliczeń wartości amplitud poszczególnych harmonicznych drgań u_{1x2} i u_{1x3} przedstawiono na rys. 2 do rys. 6. Amplitudy harmonicznych wyznaczano z zależności (3.2), po uprzednim wyliczeniu wartości elementów macierzy kolumnowej $a_1^{(2)}$ zgodnie z (2.13). W wyniku obliczeń stwierdzono, że niezerowe macierze kolumnowe $a_1^{(\nu)}$ i $a_1^{(-\nu)}$ są zespolone sprzężone, a macierz kolumnowa $a_1^{(0)}$ jest rzeczywista.

Dla przypadku istnienia sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi poprzez fundament wykonano obliczenia przy wymuszeniach momentem gnącym $f_3^w = 10^3 \cos 150t$ [Ncm] (rys. 2) oraz siłą poprzeczną $f_2^w = 10^3 \cos 150t$ [N] (rys. 3). Jak wynika z rys. 2 i 3, drgania



Rys. 2. Amplitudy drgań wału w przypadku sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi poprzez fundament przy $f_3^w = 10^3 \cos 150t$ [Ncm], $k = 10^{-5}$, $d_1 = 0,25$, $d_2 = 0,15$, $D = D_A$, $v_{x2}^{(2)}$, $w_{x3}^{(0)}$, $w_{x3}^{(2)}$ — amplitudy według zależności (3.2); $\bar{w}_{x3}^{(2)}$ — amplituda drgań giętnych pierwszego odcinka wału w płaszczyźnie utworzonej przez osie x_{11} , x_{13} w przypadku sztywnego zamocowania końców wału.



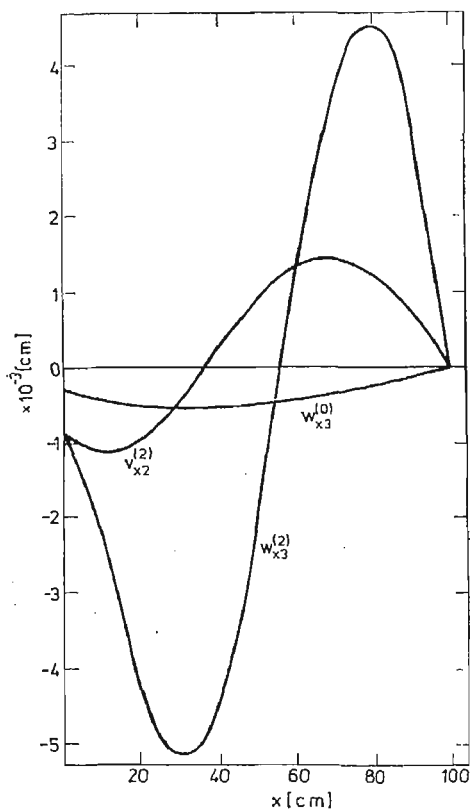
Rys. 3. Amplitudy drgań wału w przypadku sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi poprzez fundament przy $f_2^w = 10^3 \cos 150t$ [N], $k = 10^{-4}$, $d_1 = 0,25$, $d_2 = 0,15$, $D = D_A$. $w_{x2}^{(0)}$, $w_{x2}^{(2)}$, $v_{x2}^{(2)}$ amplitudy według zależności (3.2); $\bar{w}_{x2}^{(2)}$ — amplituda drgań giętnych pierwszego odcinka wału w płaszczyźnie utworzonej przez osie x_{11} , x_{12} w przypadku sztywnego zamocowania końców wału.

giętnie występują nie tylko w płaszczyznach działania wymuszeń, lecz także w płaszczyznach do nich prostopadłych (pomimo założonego braku sprzężeń równań różniczkowych, opisujących drgania giętnie w płaszczyznach x_{11} , x_{12} oraz x_{11} , x_{13}). Przy pominięciu tłumienia w układzie harmoniczne składowe drgania wału o częstotliwości równej częstotliwości wymuszeń są w płaszczyźnie działania wymuszenia zgodne w fazie z wymuszeniem, a w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny działania wymuszenia — przesunięte w fazie o $\pi/2$. W płasz-

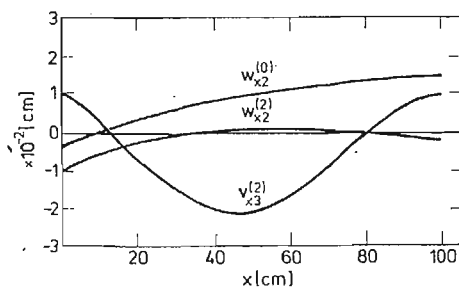
czynach działania wymuszeń pojawiają się ponadto stałe składowe przemieszczeń wału ($w_{x3}^{(0)}$ i $w_{x2}^{(0)}$). Występujące przy tym siły odśrodkowe są zanedbywalne (w analizowanych przypadkach przyspieszenia odśrodkowe nie przekraczają 10% przyspieszenia ziemskiego). Przyjęte wymuszenia nie wywołują drgań giętych o częstotliwości $\omega = 75 \text{ rad/s}$ ($a_1^{(1)} = a_1^{(-1)} = 0$).

Przy założeniu braku podatności filmu olejowego w łożyskach, podpór łożyskowych i fundamentu ($D = 0$) drgania gięte występują jedynie w płaszczyznach działania wymuszeń, a ich częstotliwości są równe częstotnościom wymuszeń. Amplitudy drgań przy $D = 0$ przedstawiono na rys. 2 i 3 liniami kreskowymi.

W celu zilustrowania wpływu pominięcia sprzężeń pomiędzy podporami na drgania wału zastąpiono przy niezmiennych wymuszeniach macierz D_A macierzą blokowo diagonalną D_B . Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4 i 5.



Rys. 4. Amplitudy drgań wału w przypadku braku sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi poprzez fundament przy $f_3'' = 10^3 \cos 150t$ [Ncm], $k = 10^{-5}$, $d_1 = 0,25$, $d_2 = 0,15$, $D = D_B$.

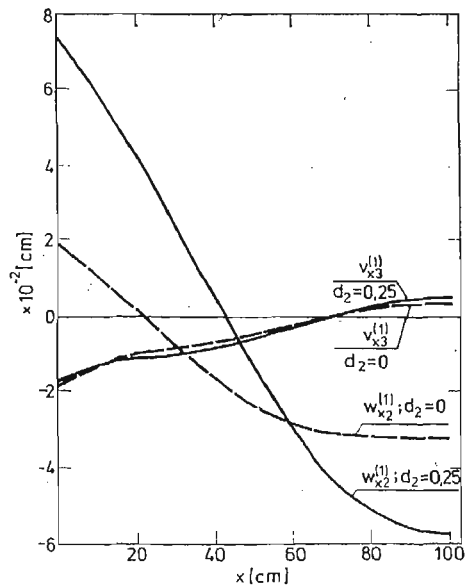


Rys. 5. Amplitudy drgań wału w przypadku braku sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi poprzez fundament przy $f_2'' = 10^3 \cos 150t$ [N], $k = 10^{-4}$, $d_1 = 0,25$, $d_2 = 0,15$, $D = D_B$.

Transformacja harmoniczných wielkości z ruchomego układu współrzędnych do nieruchomego układu współrzędnych odniesienia fundamentu (i odwrotnie) zmienia przy częstotliwości wirowania wału ω częstotliwości tych harmoniczných o $\pm \omega$. Macierze podatności

dynamicznej fundamentu $\tilde{D}^{(0)}$, $\tilde{D}^{(-2)}$ i $\tilde{D}^{(2)}$ nie wpływają zatem na powyższe obliczenia (dotyczące wymuszeń z częstością 2ω) i mogły być zastąpione blokami zerowymi. Przy wymuszeniach zawierających harmoniczne nieparzystych rzędów obliczenia wymagają znajomości macierzy $\tilde{D}^{(0)}$ i $\tilde{D}^{(\omega)}$ dla parzystych wartości μ .

W kolejnym wariantcie obliczeniowym przyjęto wymuszenie siłą poprzeczną $f_2^w = 10^3 \cos \omega t$ [N] (rys. 6). Rząd uwzględnianych harmonicznych w przykładowych obliczeniach wynosi $r = 2$ i w tym przypadku wymuszenia przyjęto: $k = 10^{-4}$, $d_2 = 0,25$, $D = D_A$. W celu zilustrowania wpływu ograniczenia analizy do harmonicznych rzędu $r = 1$ wykonano również obliczenia przy $d_2 = 0$ i niezmiennych pozostałych parametrach.



Rys. 6. Amplitudy drgań wału w przypadku pominięcia harmonicznych rzędu wyższego od $r = 2$ ($d_2 = 0,25$) i w przypadku pominięcia harmonicznych rzędu wyższego od $r = 1$ ($d_2 = 0$) przy $f_2^w = 10^3 \cos 75t$ [N], $k = 10^{-4}$, $D = D_A$.

Z rys. 6 wynika, że pominięcie wpływu wyższych harmonicznych może być przyczyną błędnego wyznaczenia punktów węzłowych i zaniżenia wartości amplitudy analizowanej harmonicznej drgań.

4. Uwagi końcowe

Przedstawiony powyżej sposób rozwiązania może być również stosowany, gdy drgania asymetrycznego wału opisują się sprzężonymi równaniami różniczkowymi. Przykładowo, gdy wał posiada jedną płaszczyznę symetrii, drgania giętne w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny symetrii i drgania skrętne opisują się dwoma sprzężonymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi czwartego rzędu [3]. Prowadzi to m.in. do odpowiedniego zwiększenia wymiarów macierzy w zależnościach obliczeniowych.

W szeregu przypadkach wymiary macierzy mogą być zmniejszone. Niech punktem wyjścia do rozpatrzenia tego problemu będzie linia wałów z asymetrycznymi odcinkami wykonującymi drgania giętne, skrętne i podłużne opisane niesprzężonymi równaniami

różniczkowymi cząstkowymi, podparta konstrukcją charakteryzującą się macierzami podatności dynamicznej $\tilde{D}^{(\mu)}$ ($\mu = -r, -r+1, \dots, 0, \dots, r$) z elementami sprzęgającymi w/w drgania. Macierze $\tilde{D}^{(\mu)}$ są wówczas stopnia $6n(n - \text{liczba łożysk})$, a macierze kwadratowe w zależności analogicznej do (2.11)

$$(4.1) \quad \mathbf{u}^{(r)} = -\mathbf{U}^{(r)} \mathbf{R}^{(r)} \mathbf{f}$$

są stopnia $6n(2r+1)$ [1].

W przypadku gdy sprzężenia pomiędzy podporami łożyskowymi poprzez fundament są zanedbywalnie małe, macierze podatności dynamicznej stają się blokowo diagonalne:

$$(4.2) \quad \tilde{D}^{(\mu)} = \Gamma \tilde{D}_{ii}^{(\mu)} \Gamma_{6n}, \quad \tilde{D}_{ij}^{(\mu)} = 0 \quad (i \neq j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

i zależność (4.1) może być zastąpiona n zależnościami:

$$(4.3) \quad \mathbf{u}_i^{(r)} = -\mathbf{U}_i^{(r)} \mathbf{R}_i^{(r)} \mathbf{f}_i^{(r)}$$

lub z uwzględnieniem ortogonalności macierzy kosinusów kierunkowych między osiami nieruchomego układu i ruchomych układów współrzędnych

$$(4.4) \quad \mathbf{f}_i^{(r)} = -\mathbf{U}_i^{(r)} \mathbf{R}_i^{(r)} \mathbf{u}_i^{(r)}.$$

Macierze tu występujące mają postać [1]:

$$\mathbf{u}_i^{(r)} = \{u_i^{(-r)}, u_i^{(-r+1)}, \dots, u_i^{(0)}, \dots, u_i^{(r-1)}, u_i^{(r)}\},$$

$$\mathbf{f}_i^{(r)} = \{f_i^{(-r)}, f_i^{(-r+1)}, \dots, f_i^{(0)}, \dots, f_i^{(r-1)}, f_i^{(r)}\},$$

$$\mathbf{u}_i^{(\mu)} = \{u_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \quad \mathbf{f}_i^{(\mu)} = \{f_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6,$$

$$\mathbf{U}_i^{(r)} = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_i & \check{\Pi}_i^T & 0 \\ \hat{\Pi}_i^T & \tilde{\Pi}_i & \check{\Pi}_i^T \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\Pi}_i^T & \tilde{\Pi}_i & \check{\Pi}_i^T \\ 0 & \hat{\Pi}_i^T & \check{\Pi}_i^T \end{bmatrix}_{6(2r+1)}$$

$$\mathbf{R}_i^{(r)} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{ii}^{(-r)} \tilde{\Pi}_i & \tilde{D}_{ii}^{(-r)} \check{\Pi}_i \\ \tilde{D}_{ii}^{(-r+1)} \hat{\Pi}_i & \tilde{D}_{ii}^{(-r+1)} \tilde{\Pi}_i & \tilde{D}_{ii}^{(-r+1)} \check{\Pi}_i \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{D}_{ii}^{(r-1)} \hat{\Pi}_i & \tilde{D}_{ii}^{(r-1)} \tilde{\Pi}_i & \tilde{D}_{ii}^{(r-1)} \check{\Pi}_i \\ 0 & \tilde{D}_{ii}^{(r)} \hat{\Pi}_i & \tilde{D}_{ii}^{(r)} \tilde{\Pi}_i \end{bmatrix}_{6(2r+1)}$$

$$\mathbf{R}_i^{(r)} = \begin{bmatrix} (\tilde{D}_{ii}^{(-r)})^{-1} \check{\Pi}_i & (\tilde{D}_{ii}^{(-r)})^{-1} \tilde{\Pi}_i \\ (\tilde{D}_{ii}^{(-r+1)})^{-1} \hat{\Pi}_i & (\tilde{D}_{ii}^{(-r+1)})^{-1} \tilde{\Pi}_i & (\tilde{D}_{ii}^{(-r+1)})^{-1} \check{\Pi}_i \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (\tilde{D}_{ii}^{(r-1)})^{-1} \hat{\Pi}_i & (\tilde{D}_{ii}^{(r-1)})^{-1} \tilde{\Pi}_i & (\tilde{D}_{ii}^{(r-1)})^{-1} \check{\Pi}_i \\ 0 & (\tilde{D}_{ii}^{(r)})^{-1} \hat{\Pi}_i & (\tilde{D}_{ii}^{(r)})^{-1} \tilde{\Pi}_i \end{bmatrix}_{6(2r+1)}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_i &= [\tilde{\Pi}'_i, \tilde{\Pi}'_{i-1}], & \check{\Pi}_i &= [\check{\Pi}'_i, \check{\Pi}'_{i-1}], & \hat{\Pi}_i &= [\hat{\Pi}'_i, \hat{\Pi}'_{i-1}], \\ \tilde{\Pi}'_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \check{\Pi}'_i &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \exp(-j\delta_i), \\ \hat{\Pi}'_i &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix} \exp(j\delta_i).\end{aligned}$$

Wielkość δ_i jest kątem obrotu lokalnego ruchomego układu współrzędnych, w którym opisywane są drgania wału u_i w miejscu i -tego łożyska, mierzonym względem układu X_1, X_2, X_3 w kierunku wirowania wału w chwili $t_0 = 2k\pi/\omega$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Jeśli w przekroju łączącym odcinki i -ty oraz $(i+1)$ -y działają siły $f_i = \{f_{i\alpha}\}$ i osie lokalnych układów współrzędnych tych odcinków są do siebie odpowiednio równoległe, to współczynniki rozwiązań dla tych odcinków związane są relacją [2]:

$$(4.5) \quad a_{i+1}^{(\mu)} = B_i^{(\mu)} a_i^{(\mu)} + F_i^{(\mu)} f_i^{(\mu)},$$

a amplitudy μ -tych składowych przemieszczeń wału w miejscu i -tego łożyska wyrażają się zależnością [2]:

$$(4.6) \quad u_i^{(\mu)} = C_{ii}^{(\mu)} a_i^{(\mu)}.$$

Na podstawie (4.4) do (4.6) można napisać:

$$(4.7) \quad a_{i+1}^{(r)} = P_i^{(r)} a_i^{(r)},$$

gdzie $P_i^{(r)}$ może być traktowana jako macierz przejścia, wiążąca współczynniki rozwiązań poszukiwanych harmonicznych dla dwóch odcinków sąsiadujących z podatnym łożyskiem w przypadku braku sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi poprzez fundament:

$$(4.8) \quad P_i^{(r)} = B_i^{(r)} - F_i^{(r)} U_i^{(r)} U_i^{(r)} C_{ii}^{(r)}.$$

Poszczególne macierze mają postać:

$$a_i^{(r)} = \{a_i^{(-r)}, a_i^{(-r+1)}, \dots, a_i^{(0)}, \dots, a_i^{(r-1)}, a_i^{(r)}\},$$

$$a_{i+1}^{(r)} = \{a_{i+1}^{(-r)}, a_{i+1}^{(-r+1)}, \dots, a_{i+1}^{(0)}, \dots, a_{i+1}^{(r-1)}, a_{i+1}^{(r)}\},$$

$$B_i^{(r)} = [\begin{matrix} B_i^{(-r)}, B_i^{(-r+1)}, \dots, B_i^{(0)}, \dots, B_i^{(r-1)}, B_i^{(r)} \end{matrix}]_{12(2r+1)},$$

$$F_i^{(r)} = \begin{bmatrix} F_i^{(-r)} & & & & & & & & 0 \\ & F_i^{(-r+1)} & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & F_i^{(0)} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & F_i^{(r-1)} & & & \\ 0 & & & & & & F_i^{(r)} & & \end{bmatrix}_{12(2r+1) \times 6(2r+1)}, \quad C_{ii}^{(r)} = \begin{bmatrix} C_{ii}^{(-r)} & & & & & & & & 0 \\ & C_{ii}^{(-r+1)} & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & C_{ii}^{(0)} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & C_{ii}^{(r-1)} & & & \\ 0 & & & & & & & & C_{ii}^{(r)} \end{bmatrix}_{6(2r+1) \times 12(2r+1)}$$

Na podstawie zależności (4.7) i wyznaczonych w [1] i [2] macierzy przejścia (wiązących współczynniki rozwiązań dla sąsiednich odcinków w przypadku wymuszeń skupionych, mas dyskretnych i skokowych zmian stałych materiałowych) można wyrazić macierze kolumnowe współczynników rozwiązań dla poszczególnych odcinków w funkcji jednej niewiadomej macierzy kolumnowej współczynników rozwiązań dla wybranego j -tego odcinka $\mathbf{a}_j^{(\mu)}$, którą można wyznaczyć z warunków brzegowych linii wałów. Zatem w tym przypadku macierze występujące w zależnościach obliczeniowych mają w porównaniu z układem wyjściowym n -krotnie zmniejszone wymiary. Jeśli ponadto macierze $\tilde{D}_{ii}^{(\mu)}$ są diagonalne

$$(4.9) \quad \tilde{D}_{ii}^{(\mu)} = \lceil \tilde{d}_{ii11}^{(\mu)}, \tilde{d}_{ii22}^{(\mu)}, \dots, \tilde{d}_{ii66}^{(\mu)} \rceil, \quad \tilde{D}_{ij}^{(\mu)} = 0 \quad (i \neq j)$$

i spełnione są warunki

$$(4.10) \quad \tilde{d}_{ii22}^{(\mu)} = \tilde{d}_{ii33}^{(\mu)}, \quad \tilde{d}_{ii55}^{(\mu)} = \tilde{d}_{ii66}^{(\mu)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \mu = -r, -r+1, \dots, r-1, r,$$

to drgania podłużne, skrętne i giętne (w obu płaszczyznach) oraz ich harmoniczne ulegają rozprzęgnięciu i mogą być liczone oddzielnie w oparciu o zależność:

$$(4.11) \quad f_{i\alpha}^{(\mu)} = -(\tilde{d}_{ii\alpha\alpha}^{(\mu)})^{-1} u_{i\alpha}^{(\mu)}, \quad \alpha = 1, \dots, 6.$$

Przy pominięciu inercyjnych oraz dysypatywnych własności konstrukcji podpierającej, współczynniki podatności nie zależą od częstości i w tym przypadku zależności (4.9) - (4.11) przyjmują postać:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \tilde{D}_{ii} &= \lceil \tilde{d}_{ii11}, \dots, \tilde{d}_{ii66} \rceil, \quad \tilde{D}_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \\ \tilde{d}_{ii22} &= \tilde{d}_{ii33}, \quad \tilde{d}_{ii55} = \tilde{d}_{ii66}, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ f_{i\alpha} &= -(\tilde{d}_{ii\alpha\alpha})^{-1} u_{i\alpha} = -\tilde{c}_{ii\alpha\alpha} u_{i\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Wielkość $\tilde{c}_{ii\alpha\alpha}$ jest współczynnikiem sztywności i -tej podpory łożyskowej (łącznie z filmem olejowym) w kierunku α względem nieruchomego układu X_1, X_2, X_3 (przy czym zgodnie z poprzednimi oznaczeniami $f_{i\alpha}$ jest siłą reakcji a $u_{i\alpha}$ przemieszczeniem wału w miejscu i -tej podpory łożyskowej w kierunku α względem ruchomego układu współrzędnych).

Przyjęcie do obliczeń założenia o braku podatności

$$(4.13) \quad \tilde{D}^{(\mu)} = 0, \quad \mu = -r, -r+1, \dots, r-1, r$$

sprowadza zagadnienie do drgań belek dwustronnie utwierdzonych.

W przypadku, gdy macierze $\tilde{D}^{(\mu)}$ nie zawierają elementów sprzęgających drgania podłużne i skrętne z drganiami giętymi, t.j. gdy

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \tilde{d}_{ij\alpha 1}^{(\mu)} &= \tilde{d}_{ij\alpha 4}^{(\mu)} = \tilde{d}_{ij1\beta}^{(\mu)} = \tilde{d}_{ij4\beta}^{(\mu)} = 0, \quad i \neq j, \\ \tilde{d}_{ii\alpha 1}^{(\mu)} &= \tilde{d}_{ii\alpha 4}^{(\mu)} = \tilde{d}_{ii1\beta}^{(\mu)} = \tilde{d}_{ii4\beta}^{(\mu)} = 0, \\ i, j &= 1, \dots, n, \quad \alpha, \beta = 2, 3, 5, 6, \quad \mu = -r, -r+1, \dots, r-1, r, \end{aligned}$$

drgania te mogą być liczone oddzielnie, przy czym wzajemnie sprzężone drgania giętne w obu płaszczyznach mogą być wyznaczone jak powyżej w p. 2 i 3 przy pomocy równań macierzowych o odpowiednio mniejszych wymiarach (w zależności (4.1) wystąpią macierze

stopnia $4n(2r+1)$). Łatwo stwierdzić na podstawie przykładu obliczeniowego i zależności (2.11), że w tym przypadku istnieje dalsza możliwość zmniejszenia wymiarów macierzy, gdyż w ruchomych układach współrzędnych amplitudy harmoniczných parzystych rzędów nie są sprzężone z amplitudami harmoniczných rzędów nieparzystych. Można zatem (2.11) rozdzielić na dwie zależności:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^{(r1)} &= -\mathbf{U}^{(r1)} \mathbf{R}^{(r1)} \mathbf{f}^{(r1)}, \\ \mathbf{u}^{(r2)} &= -\mathbf{U}^{(r2)} \mathbf{R}^{(r2)} \mathbf{f}^{(r2)}, \end{aligned}$$

w których oznaczono:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(r1)} &= \{u^{(-r)}, u^{(-r+2)}, \dots, u^{(r-2)}, u^{(r)}\}, \\ \mathbf{f}^{(r1)} &= \{f^{(-r)}, f^{(-r+2)}, \dots, f^{(r-2)}, f^{(r)}\}, \\ \mathbf{u}^{(r2)} &= \{u^{(-r+1)}, u^{(-r+3)}, \dots, u^{(r-3)}, u^{(r-1)}\}, \\ \mathbf{f}^{(r2)} &= \{f^{(-r+1)}, f^{(-r+3)}, \dots, f^{(r-3)}, f^{(r-1)}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(r1)} &= \begin{bmatrix} \check{\Pi}^\tau & & & & 0 \\ \hat{\Pi}^\tau & \check{\Pi}^\tau & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \hat{\Pi}^\tau & \check{\Pi}^\tau & \\ & & & \hat{\Pi}^\tau & \check{\Pi}^\tau \\ 0 & & & & \hat{\Pi}^\tau \end{bmatrix}_{4n(r+1) \times 4nr}, & \mathbf{U}^{(r2)} &= \begin{bmatrix} \hat{\Pi}^\tau & \check{\Pi}^\tau & & & 0 \\ & \hat{\Pi}^\tau & \check{\Pi}^\tau & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \hat{\Pi}^\tau & \check{\Pi}^\tau \\ 0 & & & & \hat{\Pi}^\tau & \check{\Pi}^\tau \end{bmatrix}_{4nr \times 4n(r+1)}, \\ \mathbf{R}^{(r1)} &= \begin{bmatrix} \tilde{D}^{(-r+1)} \hat{\Pi} & \tilde{D}^{(-r+1)} \check{\Pi} & & & 0 \\ & \tilde{D}^{(-r+3)} \hat{\Pi} & \tilde{D}^{(-r+3)} \check{\Pi} & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \tilde{D}^{(r-3)} \hat{\Pi} & \tilde{D}^{(r-3)} \check{\Pi} \\ 0 & & & & \tilde{D}^{(r-1)} \hat{\Pi} & \tilde{D}^{(r-1)} \check{\Pi} \end{bmatrix}_{4nr \times 4n(r+1)}, \\ \mathbf{R}^{(r2)} &= \begin{bmatrix} \tilde{D}^{(-r)} \check{\Pi} & & & & 0 \\ \tilde{D}^{(-r+2)} \hat{\Pi} & \tilde{D}^{(-r+2)} \check{\Pi} & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \tilde{D}^{(r-2)} \hat{\Pi} & \tilde{D}^{(r-2)} \check{\Pi} & \\ 0 & & & & \tilde{D}^{(r)} \hat{\Pi} \end{bmatrix}_{4n(r+1) \times 4nr}, \\ \check{\Pi} &= \begin{bmatrix} \check{\Pi}_i \end{bmatrix}_{4n}, & \hat{\Pi} &= \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_i \end{bmatrix}_{4n}, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Jeśli wymuszenia działające na układ nie zawierają składowych stałych i harmoniczných parzystych rzędów, to wystarczy ograniczyć się do analizy drgań o nieparzystych rzędach harmoniczných (i odwrotnie), korzystając z jednej z zależności (4.15). Jak ukazano w p. 3, do analizy drgań przy wymuszeniach stałych oraz przy wymuszeniach zawierających har-

moniczne parzystych rzędów (w ruchomych układach współrzędnych) wystarcza znajomość macierzy $\tilde{D}^{(\mu)}$ dla nieparzystych wartości μ (i odwrotnie).

Na wymiary macierzy w zależnościach obliczeniowych wpływa również liczba uwzględnianych harmonicznych r . Liczba ta zależy od najwyższego rzędu uwzględnianej harmonicznej wymuszeń, od wartości amplitud harmonicznych wymuszeń, od intensywności tłumienia w układzie oraz od pożądanej dokładności obliczeń. Jeśli najwyższa uwzględniana harmoniczna wymuszeń jest rzędu k , to wyznaczenie liczby $r = r_m$ wymaga wykonania obliczeń drgań dla jednego z odcinków linii wałów w oparciu o zależności (2.13) i (2.16) kolejno przy $r_1 = k$, $r_2 = k+2$, $r_3 = k+4$ itd., aż różnice pomiędzy wartościami amplitud r_m harmonicznych przy obliczeniach z liczbą $r = r_m$ i wartościami amplitud tych samych harmonicznych przy obliczeniach z liczbą $r = r_{m+1}$ (a także wartości amplitud harmonicznych rzędów wyższych od r_m) staną się mniejsze od przyjętych dopuszczalnych wartości. Odcinek linii wałów wybrany do tych obliczeń winien charakteryzować się możliwie najmniejszym tłumieniem fal giętnych w pętli: odcinek — podpora łożyskowa — fundament — podpora łożyskowa — odcinek (np. o najmniejszej odległości pomiędzy podporami) lub najwyższą wartością amplitud działających nań wymuszeń.

Dla uzyskania należytej dokładności obliczeń celowe jest (zwłaszcza przy długich liniach wałów) prowadzić obliczenia z możliwie dużą liczbą cyfr znaczących oraz właściwie wybrać macierz kolumnową $a_j^{(\mu)}$, w funkcji której wyraża się pozostałe macierze kolumnowe współczynników rozwiązań. W przypadku, gdy linia wałów składa się z N obliczeniowych odcinków o jednakowych stałych materiałowych i nie występują masy dyskretne, macierz kolumnowa współczynników rozwiązań dla μ -tej składowej drgań ostatniego odcinka wału wyraża się w funkcji macierzy kolumnowej współczynników rozwiązań dla pierwszego odcinka wału zależnością [1]:

$$(4.16) \quad a_N^{(\mu)} = B_{N-1,1}^{(\mu)} a_1^{(\mu)} + B_{N-1,2}^{(\mu)} F_1^{(\mu)} f_1^{(\mu)} + B_{N-1,3}^{(\mu)} F_1^{(\mu)} f_2^{(\mu)} + \dots + F_1^{(\mu)} f_{N-1}^{(\mu)}.$$

Wielkości $f_i^{(\mu)}$ mogą tu reprezentować zarówno reakcje łożysk, jak i skupione wymuszenia zewnętrzne. Macierze $B_{N-1,i}^{(\mu)}$, tworzy się z diagonalnych macierzy przejścia $B_{N-1,i}^{(\mu)}$ [2] przez zsumowanie długości kolejnych odcinków o numerach od i do $(N-1)$ w wykładnikach funkcji eksponencjalnych, występujących w tych macierzach. Amplituda μ -tej składowej drgań giętnych na końcu ostatniego odcinka linii wałów w płaszczyźnie utworzonej przez osie x_{N1} , x_{N2} lokalnego układu współrzędnych tego odcinka wynosi [2]:

$$(4.17) \quad u_{N2}^{(\mu)} = a_{N3}^{(\mu)} \exp[(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})L_N] + a_{N4}^{(\mu)} \exp[-(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})L_N] + \\ + a_{N5}^{(\mu)} \exp[(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})L_N] + a_{N6}^{(\mu)} \exp[-(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})L_N],$$

przy czym L_N oznacza długość ostatniego odcinka obliczeniowego linii wałów. Z uwzględnieniem postaci macierzy $B_i^{(\mu)}$ i $F_i^{(\mu)}$ (określonych zależnościami (2.23) i (2.24) w pracy [2]) otrzymuje się na podstawie (4.16) i (4.17):

$$(4.18) \quad u_{N2}^{(\mu)} = a_{13}^{(\mu)} \exp[(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})L] + a_{14}^{(\mu)} \exp[-(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})L] + \\ + a_{15}^{(\mu)} \exp[(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})L] + a_{16}^{(\mu)} \exp[-(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})L] + r^{(\mu)},$$

gdzie L jest długością linii wałów, a $r^{(\mu)}$ reprezentuje człon, w których wykładniki funkcji eksponencjalnych zawierają sumy długości $(N-1)$ odcinków, $(N-2)$ odcinków itd. Oznacza to, że jeśli górny kres błędu, z jakim wyznaczona jest macierz $a_1^{(\mu)}$, wynosi $\delta_1^{(\mu)}$, to

wówczas górny kres błędu, z jakim określone są poszczególne człony zależności (4.18), nie przekracza wartości

$$(4.19) \quad \Delta_N^{(\mu)} = \delta_1^{(\mu)} \exp(\lambda_m^{(\mu)} L),$$

gdzie $\lambda_m^{(\mu)}$ jest większą liczbą spośród wartości modułów

$$(4.20) \quad \lambda_m^{(\mu)} = \max(|\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)}|, |\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)}|).$$

W ogólnym przypadku stałe $\lambda^{(\mu)}$ w zależności (4.18) również obarczone są błędem, na jaki składają się głównie niedokładności w ustalaniu wartości współczynników tłumienia materiałowego, momentów bezwładności przekroju poprzecznego wału etc. Jeśli górny kres błędu, z jakim określone są stałe $\lambda^{(\mu)}$, wynosi $\delta_2^{(\mu)}$, to

$$(4.21) \quad \Delta_N^{(\mu)} = \delta_1^{(\mu)} \exp[(\lambda_m^{(\mu)} + \delta_2^{(\mu)}) L].$$

Znajomość $\delta_2^{(\mu)}$ i uwzględnienie takiej spośród wszystkich występujących w obliczeniach danej linii wałów wielkości $\lambda_m^{(\mu)}$, której wartość jest maksymalna, umożliwi oszacowanie wartości $\delta_1^{(\mu)}$ zapewniającej nie przekroczenie wartości $\Delta_N^{(\mu)}$ uznanej za dopuszczalną. Zaleca się przy tym wyznaczać z warunków brzegowych linii wałów macierz kolumnową współczynników rozwiązań dla środkowego odcinka linii wałów i w funkcji tej macierzy wyrażać macierze kolumnowe współczynników rozwiązań dla pozostałych odcinków, gdyż wówczas wartości (4.19), (4.21) ulegają zmniejszeniu w wyniku zastąpienia L przez $L/2$.

Literatura cytowana w tekście

1. KOLENDA, *Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętnej i podatności fundamentów. Metoda identyfikacji podatności dynamicznej linii wałów*, Mech. Teor. i Stos., 4, 16 (1978).
2. J. KOLENDA, *Uściślony opis drgań wymuszonych linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętnej i podatności fundamentów*, Mech. Teor. i Stos., 1, 17 (1979).
3. S. KALISKI (red.), *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.

Резюме

ВЫНУЖДЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АСИММЕТРИЧЕСКОГО ВАЛА НА ПОДАТЛИВОМ ФУНДАМЕНТЕ

Рассматриваются изгибные колебания вращающегося вала при периодических возмущениях. Анализируемый асимметрический вал установлен на две податливые опоры, присоединенные к податливому фундаменту. Для описания поведения этой системы используются зависимости, определенные в предыдущих статьях автора. Представляются результаты численных расчетов, а также рассматривается проблемы редукции и точности расчетов.

Summary

FORCED FLEXURAL VIBRATIONS OF FLEXIBLE SUPPORTED ASYMMETRICAL SHAFT

Periodically excited flexural vibrations of a rotating shaft are considered. The analysed asymmetrical shaft is supported on two flexible pedestals which are mounted on a flexible foundation. For the description of behaviour of this system the relations determined in previous author's papers are used. The results of numerical calculations are given and problems of a reduction and accuracy of calculations are considered.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT OKRĘTOWY

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 kwietnia 1979 roku

PRZYBLIŻONA TEORIA SKRĘCANIA SWOBODNEGO ORTOTROPOWYCH PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH

ANDRZEJ GAWĘCKI, ANDRZEJ BORUSZAK (POZNAŃ)

1. Wprowadzenie

Punktem wyjścia jest teoria anizotropowych, niejednorodnych płyt Reissnera o zmiennej grubości [1]¹⁾. Praca niniejsza jest uogólnieniem podejścia E. REISSNERA ([2], [3], [4]), który obmyślona przez siebie teorię płyt grubych zastosował do obliczania skręcania izotropowych, jednorodnych prętów o przekroju prostokątnym. Wyniki uzyskane przez E. Reissnera w pracy [2] zachęciły F. ESSENBURGA i P. M. NAGHDIEGO [5] do rozszerzenia teorii i uwzględnienia zginania i skręcania płyt izotropowych o zmiennej grubości. Okazało się, że rozwiązania zagadnienia skręcania prętów o przekroju eliptycznym i przekroju trójkąta równobocznego uzyskane na gruncie teorii płyt grubych pokrywają się z rozwiązaniami ścisłymi, a różnice w wartościach naprężeń stycznych dla przekrojów trapezowych w porównaniu z teorią de Saint-Venanta nie przekraczają 5%. Błędy w wartościach kątów skręcania są około 10 razy mniejsze od błędów w wartościach naprężeń.

Rezultaty powyższe wskazują, że teoria Reissnera zastosowana do obliczania sztywności skrętnej daje — praktycznie biorąc — wyniki ścisłe.

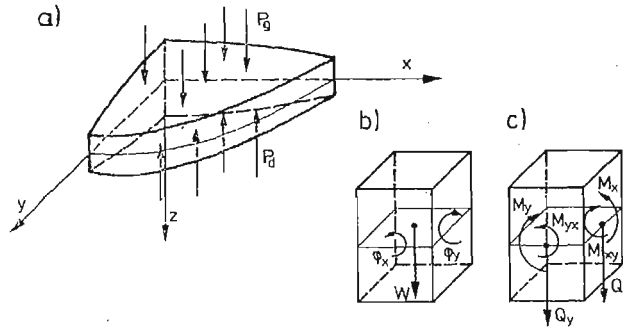
Zasadniczą zaletą omawianej metody przybliżonej jest możliwość uzyskania wzorów na naprężenia i przemieszczenia w postaci zamkniętej dla skręcania przekrojów o jednej osi symetrii. Poza tym nakład pracy rachunkowej jest dużo mniejszy w porównaniu z metodami ścisłymi. Wymienione wyżej zalety stanowią o dużej wartości metody w problemach projektowania i optymalizacji konstrukcji.

W pracy niniejszej podjęto próbę dalszego uogólnienia przybliżonej metody obliczania skręcania swobodnego, na pryzmatyczne pręty anizotropowe. Wyniki liczbowe dla prętów o przekroju prostokątnym i trójkątnym porównano z rozwiązaniami ścisłymi.

2. Sformułowanie problemu

Równania podstawowe teorii ortotropowych, niejednorodnych płyt Reissnera o zmiennej grubości zgodnie z pracą [1] mają postać (rys. 1):

¹⁾ Teoria Reissnera uwzględnia wpływ sił poprzecznych na ugięcie płyty



Rys. 1.

— równania równowagi:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \\ \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \bar{p} = 0, \end{cases}$$

— równania „przemieszczenia — siły wewnętrzne”

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \Delta}{\partial M_x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Delta}{\partial M_{xy}} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \Delta}{\partial M_y} = 0, \\ \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \Delta}{\partial Q_x} = 0, \\ \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \Delta}{\partial Q_y} = 0, \end{cases}$$

W równaniach (2.1) i (2.2) wprowadzono następujące oznaczenia:

M_x, M_y — momenty zginające na jednostkę szerokości płyty,
 $M_{xy} = M_{yx}$ — moment skręcający na jednostkę szerokości płyty,
 Q_x, Q_y — siły poprzeczne na jednostkę szerokości, płyty,
 h — grubość płyty,

$\bar{p} = (p_d - p_g) \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right]}$ — obciążenie zastępcze,

p_d, p_g — obciążenia dolnej i górnej powierzchni płyty,

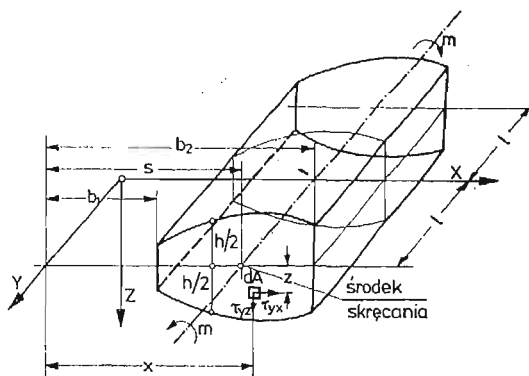
$\Lambda = \Lambda(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y)$ — energia sprężysta płyty odniesiona do jednostki pola płaszczyzny środkowej,

φ_x, φ_y — kąty obrotu elementu normalnego dopowierzchni środkowej odpowiednio względem osi y i osi x .

w — przemieszczenie (ugięcie) płyty w kierunku osi z .

Dodatknie wartości sił wewnętrznych M_x, M_y, Q_x i Q_y oraz przemieszczeń φ_x, φ_y i w uwidoczono na rys. 1 b), 1c). Równania podstawowe wyprowadzono przy założeniu, że kierunki główne ortotropii materiału płyty pokrywają się z kierunkami osi układu współrzędnych x, y, z .

Rozważmy problem czystego skręcania pręta pryzmatycznego przedstawionego na rys. 2. Pręt ten można traktować jako płytę o zmiennej grubości $h = h(x)$. Płaszczyzna



Rys. 2.

środkowa tej płyty pokrywa się z płaszczyzną x, y . Obciążenie płyty jest przyłożone tylko na krawędziach $y = \pm l$. Wypadkowa tego obciążenia równa się całkowitemu momentowi skręcającemu \mathfrak{M} działającemu na pręt:

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M} = \int_A (\tau_{yx} \cdot z - \tau_{yz} \cdot x) dA, \\ \int_A \tau_{yx} dA = 0, \\ \int_A \tau_{yz} dA = 0, \end{array} \right.$$

Zależności (2.3) obowiązują również dla każdego przekroju prostopadłego do osi y .

Pozostałe powierzchnie ograniczające płytę są wolne od naprężeń. Oznacza to, że $\bar{p} \equiv 0$. Przyjmijmy dalej, że współczynniki sprężystości materiału (moduły ścinania) mogą być funkcjami zależnymi jedynie od współrzędnej x . Podstawowym założeniem kinematycznym stosowanym w omawianej teorii jest hipoteza de Saint-Venanta, według której kształt rzutu przekroju pręta na płaszczyznę (x, z) nie ulega zmianie, a rzut ten doznaje jedynie obrotu wokół środka skręcania o współrzędnej $x = S$.

Kinematyczne warunki brzegowe dla $y = \pm l$ prowadzą więc do następujących zależności:

$$(2.4) \quad \begin{cases} w = \pm \Theta \cdot (x-s) \cdot l, \\ \varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

gdzie Θ jest jednostkowym kątem skręcania.

Z naprężeniowych warunków brzegowych mamy

$$(2.5) \quad \begin{cases} \text{dla } y = \pm l, & M_y = 0, \\ \text{dla } x = b_1 \quad \text{i} \quad x = b_2, & M_x = M_{xy} = Q_x = 0. \end{cases}$$

Przy czystym skręcaniu swobodnym zakładamy oczywiście, że stan naprężenia nie może zależeć od współrzędnej y . Uwzględnienie tego faktu w równaniach równowagi (2.1) przy spełnieniu warunków brzegowych (2.5) prowadzi do stwierdzenia, że w całym obszarze płyty znikają momenty zginające i siła poprzeczna Q_x , to znaczy, że:

$$(2.6) \quad M_x = M_y = Q_x = 0.$$

Tak więc jedynymi różnymi od zera siłami wewnętrznymi są moment skręcający $M_{yx} = M$ oraz siła poprzeczna $Q_y = Q$. Stosownie do wyników prac [5] i [1], wywołują one naprężenia styczne τ_{yx} i τ_{yz} :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \tau_{yx} = \frac{6M}{h^2} \cdot \frac{z}{h/2}, \\ \tau_{yz} = \frac{3}{2h} \left\{ Q \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] - \frac{M}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right) \left[1 - 3 \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \right\}. \end{cases}$$

Z powyższych zależności widać, że rozkład naprężeń stycznych τ_{yx} na grubości płyty jest zawsze liniowy, co stanowi zasadnicze źródło błędów prezentowanej teorii skręcania. W omawianym problemie skręcania pręta ortotropowego wyrażenie na energię sprężystą A upraszcza się do postaci

$$(2.8) \quad \begin{aligned} A = A(M, Q) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\tau_{yx}^2}{G_{yx}} + \frac{\tau_{yz}^2}{G_{yz}} \right) dz = \\ &= \frac{GM^2}{G_{yx}h^3} + \frac{3}{10G_{yz}h} \left[2Q^2 - 2\frac{QM}{h} \frac{dh}{dx} + 3 \left(\frac{M}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

gdzie G_{yx} i G_{yz} oznaczają odpowiednio moduły ścinania w płaszczyznach y, x i y, z .

Z zależności (2.8) otrzymujemy:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial M} = c_{11} M + c_{12} Q, \\ \frac{\partial A}{\partial Q} = c_{21} M + c_{22} Q, \end{cases}$$

przy czym:

$$(2.10) \quad \begin{cases} c_{11} = \frac{12}{G_{yx}h^3} + \frac{9}{5G_{yz}h^3} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2, \\ c_{12} = c_{21} = -\frac{3}{5G_{yz}h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2, \\ c_{22} = \frac{6}{5G_{yz}h}. \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę wzory (2.9) i (2.10) równania podstawowe (2.1), (2.2) modyfikują się do postaci:

$$(2.11) \quad \frac{dM}{dx} = Q$$

$$(2.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - c_{11}M - c_{12}Q = 0, \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0, \\ \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} - c_{21}M - c_{22}Q = 0. \end{cases}$$

Przyjmując funkcję $w(x, y)$ w postaci:

$$(2.13) \quad w = -\Theta(x-s)y,$$

spełniamy kinematyczny warunek brzegowy (2.4) oraz równania (2.12)₄ i (2.12)₁. Warto zwrócić uwagę, że z równań (2.12) i (2.13) wynika zależność:

$$(2.14) \quad \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \Theta = \text{const.}$$

Jeśli w równaniach (2.12)₂ i (2.12)₅ uwzględnimy obecnie zależności (2.11), (2.13) i (2.14), to otrzymamy układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych o dwóch niewiadomych φ_y i M :

$$(2.15) \quad \begin{cases} \Theta + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - c_{11}M - c_{12} \frac{dM}{dx} = 0, \\ \varphi_y - \Theta(x-s) - c_{21}M - c_{22} \frac{dM}{dx} = 0. \end{cases}$$

Różniczkując drugie z równań (2.15) względem x oraz odejmując je od pierwszego uzyskamy równanie różniczkowe zwyczajne na funkcję $M(x)$:

$$(2.16) \quad c_{22} \frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{dc_{22}}{dx} \cdot \frac{dM}{dx} + \left(\frac{dc_{12}}{dx} - c_{11} \right) M = -2\Theta.$$

Równanie (2.16) jest równaniem podstawowym przybliżonej teorii skręcania swobodnego niejednorodnych ortotropowych prętów przyrządycznych o przekroju monosymetrycznym.

Zgodnie z warunkami brzegowymi (2.5)₂ funkcją $M(x)$ musi spełniać zależności:

$$(2.17) \quad M(b_1) = M(b_2) = 0.$$

Jednostkowy kąt skręcenia Θ , występujący w równaniu (2.16), można wyrazić przez całkowity moment skręcający wykorzystując równanie (2.3)₁ oraz równania definicyjne

$$\text{sił wewnętrznych } M \text{ i } Q \left(M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz, Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \right):$$

$$(2.18) \quad \Theta l = \int_{b_1}^{b_2} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{yx} z - \tau_{yz} x) dz \right] dx = \int_{b_1}^{b_2} (M - Qx) dx = 2 \int_{b_1}^{b_2} M dx.$$

Z równania (2.12)₃ wnioskujemy, że $\varphi_y = \varphi_y(x)$. Oznacza to, że funkcja deplanacji ϑ jest niezależna od współrzędnej y i wynosi:

$$(2.19) \quad \vartheta = \vartheta(x, z) = z\varphi_y(x).$$

Jak widać funkcja deplanacji (spaczenia) w omawianej teorii jest zawsze powierzchnią prostokreślną.

W dalszym ciągu niniejszej pracy podamy kilka przykładów zastosowań przedstawionej teorii oraz porównanie wyników z rozwiązaniami ścisłymi.

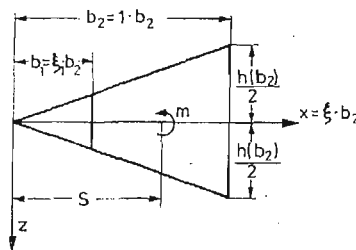
3. Skręcanie jednorodnego pręta o przekroju trapezowym

W przypadku, gdy materiał pręta jest jednorodny i ortotropowy, a wysokość przekroju h jest funkcją współrzędnej x , równanie (2.16) można zapisać następująco:

$$(3.1) \quad h^2 \frac{d^2 M}{dx^2} - h \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dM}{dx} - \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + h \frac{d^2 h}{dx^2} \right] + 10g^2 \right\} M = -\frac{5}{3} G\Theta h^3,$$

gdzie:

$$(3.2) \quad \left\{ G = G_{yz}, \quad g^2 = \frac{G_{yz}}{G_{yx}} \right.$$



Rys. 3.

Dla $h = mx$, gdzie m jest stałą większą od zera, równanie (3.1) modyfikuje się do postaci:

$$(3.3) \quad \xi^2 M'' - \xi M' - \alpha^2 M = -G\Theta\beta \cdot \xi^3,$$

gdzie:

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{x}{b_2}, \\ \alpha^2 = \frac{1}{2} + \frac{10g^2}{m^2}, \\ \beta = \frac{5mb_2^3}{3}, \\ ()' \equiv \frac{d}{d\xi} (). \end{array} \right.$$

Funkcja $M(\xi)$ musi spełniać warunki graniczne:

$$(3.5) \quad M(\xi_1) = M(1) = 0, \quad \xi_1 = \frac{b_1}{b_2}.$$

Rozwiązanie ogólne równania (3.3) jest następujące:

$$(3.6) \quad M(\xi) = \bar{M}(\xi) + c_1 \cdot \xi^{1+\gamma} + c_2 \cdot \xi^{1-\gamma},$$

gdzie:

$$\gamma = \sqrt{1 + \alpha^2},$$

$M(\xi)$ jest całką szczególną, a c_1 i c_2 są stałymi całkowania.

Całkę szczególną wyznaczono metodą uzmiennienia stałych. W rezultacie otrzymano:

$$(3.7) \quad \bar{M}(\xi) = \begin{cases} -\frac{G\Theta\beta}{4-\gamma^2} \xi^2, & \gamma \neq 2 \\ \frac{G\Theta\beta}{4} \xi^3 (1 - \ln \xi), & \gamma = 2 \end{cases}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych (3.5) i wyrażeń (3.7), rozwiązanie równania (3.3) ma postać:

$$(3.8) \quad M(\xi) = \begin{cases} \frac{G\Theta\beta}{4-\gamma^2} [a\xi^{1+\gamma} + b\xi^{1-\gamma} - \xi^3], & \gamma \neq 2 \\ \frac{G\Theta\beta}{4} \left[\bar{a} \left(-\xi^3 + \frac{1}{\xi} \right) - \xi^3 \ln \xi \right], & \gamma = 2 \end{cases}$$

gdzie:

$$(3.9) \quad a = \frac{1 - \xi_1^{2+\gamma}}{1 - \xi_1^{2\gamma}}, \quad b = \frac{\xi_1^{2+\gamma} - \xi_1^{2\gamma}}{1 - \xi_1^{2\gamma}}, \quad \bar{a} = \frac{\xi_1^4 \ln \xi_1}{1 - \xi_1^4}$$

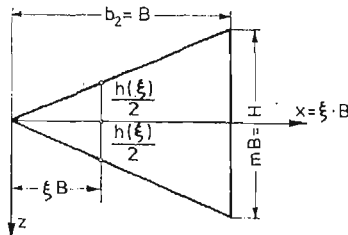
Siła poprzeczna wynosi:

$$(3.10) \quad Q(\xi) = \frac{1}{b_2} M'(\xi) = \begin{cases} \frac{G\Theta\beta}{(4-\gamma^2)b_2} [a(1+\gamma)\xi^\gamma + b(1-\gamma)\xi^{-\gamma} - 3\xi^2], & \gamma \neq 2 \\ -\frac{G\Theta\beta}{4b_2} \left[\xi^2(1+3\bar{a}) + \frac{\bar{a}}{\xi^2} + 3\xi^2 \ln \xi \right], & \gamma = 2 \end{cases}$$

Wyznaczenie funkcji $M(\xi)$ i $Q(\xi)$ pozwala obliczyć sztywność skręcania, rozkład naprężeń i funkcję deplanacji.

Przedstawimy obecnie szczegółowe obliczenia dla pręta o przekroju trójkątnym (rys. 4).

W zadaniu tym $b_1 = 0$ (tj. $\xi_1 = 0$) i $b_2 = B$ (tj. $\xi_2 = 1$) oraz $m = \frac{H}{B}$.



Rys. 4.

Dla uproszczenia pominiemy przypadek, gdy $\gamma = 2$, Oznacza to, że w dalszych rozważaniach $m \neq 2g$ (tj. $\frac{H}{Bg} \neq 2$).

Wobec powyższego $a = 1$, $b = 0$, a wyrażenia na siły wewnętrzne są następujące:

$$(3.11) \quad \begin{cases} M(\xi) = \frac{G\Theta\beta}{4-\gamma^2} (\xi^{1+\gamma} - \xi^3), & Q(\xi) = \frac{G\Theta\beta}{(4-\gamma^2)B} [(1+\gamma)\xi^\gamma - 3\xi^2]. \end{cases}$$

Całkowity moment skręcający wynosi:

$$\mathfrak{M} = 2B \int_0^1 M(\xi) d\xi = \frac{G\Theta\beta B}{2(2+\gamma)^2},$$

Skąd

$$(3.12) \quad \Theta = \frac{\mathfrak{M}}{G\beta B/[2(2+\gamma)^2]}.$$

Sztywność skręcania D_s występuje w mianowniku prawej strony (3.12c.) Podstawiając wyrażenie na β ze wzoru (3.4)₃ otrzymujemy

$$(3.13) \quad D_s = \frac{\mathfrak{M}}{B} = \frac{5GHB^3}{6(2+\gamma)^2}.$$

Wzory (3.11) po wykorzystaniu (3.12) można zapisać jeszcze inaczej:

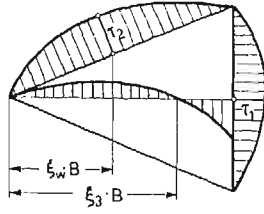
$$(3.14) \quad \begin{cases} M(\xi) = \frac{\mathfrak{M}}{B} \frac{2(2+\gamma)}{2-\gamma} (\xi^{1+\gamma} - \xi^3), \\ Q(\xi) = \frac{\mathfrak{M}}{B^2} \frac{2(2+\gamma)}{2-\gamma} [(1+\gamma)\xi^\gamma - 3\xi^2]. \end{cases}$$

Poziome naprężenia styczne stosownie do wzoru (2.7)₁ wynoszą:

$$(3.15) \quad \tau_{yx}(\xi, z) = \frac{6M}{h^2} \frac{z}{h/2} = \frac{\mathfrak{M}}{BH^3} \cdot \frac{24(2+\gamma)}{2-\gamma} (\xi^{-2+\gamma} - 1)z.$$

Na brzegu $z = \frac{1}{2}h(\xi)$ otrzymamy:

$$(3.16) \quad \tau_{yx}\left(\xi, \frac{1}{2}h\right) = \frac{\mathfrak{M}}{BH^2} \frac{12(2+\gamma)}{2-\gamma} (\xi^{-1+\gamma} - \xi).$$



Rys. 5.

Pionowe naprężenia styczne $\tau_{yz}(\xi, z)$ obliczyć można ze wzoru (2.7)₂. Na brzegu $Z = \frac{1}{2}h(\xi)$ otrzymujemy:

$$(3.17) \quad \tau_{yz}\left(\xi, \frac{1}{2}h\right) = \frac{\mathfrak{M}}{HB^2} \frac{6(2+\gamma)}{2-\gamma} (\xi^{-1+\gamma} - \xi)$$

Natomiast dla $z = 0$:

$$(3.18) \quad \tau_{yz}(\xi, 0) = \frac{\mathfrak{M}}{HB^2} \frac{3(2+\gamma)}{2-\gamma} (\gamma\xi^{-1+\gamma} - 2\xi).$$

Naprężenie τ_{yz} w punkcie (1,0) wynosi:

$$(3.19) \quad \tau_1 = \tau_{yz}(1, 0) = -\frac{\mathfrak{M}}{HB^2} 3(2+\gamma),$$

natomiast w punkcie $(\xi_3, 0)$ naprężenie $\tau_{yz} = 0$, przy czym

$$(3.20) \quad \xi_3 = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}}.$$

W końcu na brzegu $\xi = 1$ mamy:

$$(3.21) \quad \tau_{yz}(1, z) = -\frac{\mathfrak{M}}{HB^2} 3(2+\gamma) \left[1 - \left(\frac{2z}{H}\right)^2\right].$$

Analizując wzory (3.16) i (3.17) łatwo przekonać się, że

$$\frac{\tau_{yz}\left(\xi, \frac{1}{2}h\right)}{\tau_{yz}\left(\xi, \frac{1}{2}h\right)} = \frac{H}{2B} = \frac{\mathfrak{M}}{2}.$$

Oznacza to, że na brzegu $z = \frac{1}{2}h(\xi)$ wypadkowy wektor naprężeń $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{yz} + \vec{\tau}_{yx}$ ma kierunek styczny do konturu przekroju. Moduł tego wektora wynosi:

$$(3.22) \quad \tau = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{yx}^2} \Big|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{\mathfrak{M}}{BH^2} \left| \frac{6(2+\gamma)}{2-\gamma} (\xi^{-1+\gamma} - \xi) \sqrt{4 + \left(\frac{H}{B}\right)^2} \right|.$$

Największe wypadkowe naprężenie styczne na brzegu $z = \frac{1}{2}h(\xi)$ równa się:

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \tau\left(\xi_4, \frac{1}{2}h\right),$$

gdzie

$$(3.23) \quad \xi_4 = \left(\frac{1}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}}.$$

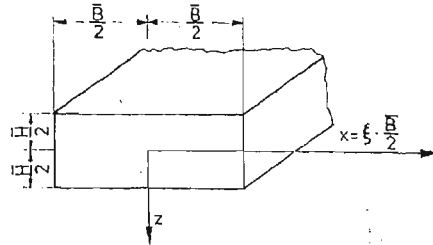
Nietrudno stwierdzić, że dla izotropowego trójkąta równobocznego ($g = 1$, $m = \frac{H}{B} = \frac{2}{\sqrt{3}}$) rozwiązanie podane wyżej pokrywa się z dobrze znanym rozwiązaniem ścisłym (por. np. [8] str. 238, 239).

Rezultaty obliczeń dla wybranych przypadków skręcania prętów ortotropowych o przekroju trójkątnym oraz porównanie ich z wynikami ścisłymi uzyskanymi na gruncie teorii sprężystości zamieszczono w punkcie 6.

4. Skręcanie jednorodnego pręta ortotropowego o przekroju prostokątnym

Zależność (3.1), podana w poprzednim rozdziale, przedstawia ogólne równanie skręcania jednorodnego pręta ortotropowego o przekroju monosymetrycznym. Jeśli w równaniu tym przyjmiemy, że $h(x) = \bar{H} = \text{const.}$, to otrzymamy (rys. 6):

$$(4.1) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} - 10\left(\frac{g}{H}\right)^2 M = -\frac{5}{3} G\Theta\bar{H}.$$



Rys. 6

Wprowadzając oznaczenia:

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{2x}{B}, & n &= \frac{\bar{B}}{H}, & \bar{\alpha} &= \sqrt{2,5gn}, & (') &= \frac{d}{d\bar{\xi}}(\cdot), \end{aligned} \right.$$

równanie (4.1) można zapisać następująco:

$$(4.3) \quad M'' - \bar{\alpha}^2 M = -\frac{\bar{H}^3}{6g^2} G\Theta\bar{\alpha}^2.$$

Warunki brzegowe wymagają, by:

$$(4.4) \quad M(-1) = M(1) = 0.$$

Rozwiązanie równania (4.3) spełniające warunki brzegowe (4.4) ma postać

$$(4.5) \quad M(\bar{\xi}) = \frac{\bar{H}^3}{6g^2} G\Theta \left(1 - \frac{\text{ch } \alpha \bar{\xi}}{\text{ch } \bar{\alpha}} \right).$$

Wobec powyższego siła poprzeczna wynosi:

$$(4.6) \quad Q(\bar{\xi}) = \frac{2}{B} M'(\bar{\xi}) = - \frac{\bar{H}^2 G\Theta}{3ng} \bar{\alpha} \frac{\text{sh } \alpha \bar{\xi}}{\text{ch } \bar{\alpha}}.$$

Wychodząc z równania (2.18) obliczymy sztywność skręcania D_s :

$$\mathfrak{M} = \bar{B} \int_{-1}^1 M(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \frac{\bar{B}\bar{H}^3}{3g^2} G\Theta \left(1 - \frac{1}{\bar{\alpha}} \text{th } \bar{\alpha} \right),$$

skąd

$$(4.7) \quad D_s = \frac{\mathfrak{M}l}{\Theta} = G \frac{\bar{B}\bar{H}^3}{3g^2} \left(1 - \frac{1}{\bar{\alpha}} \text{th } \bar{\alpha} \right) = G \cdot I_s,$$

gdzie I_s jest tzw. momentem bezwładności na skręcanie:

$$(4.8) \quad I_s = \frac{\bar{H}^4}{3g^2} \left[n - \frac{1}{g\sqrt{2,5}} \text{th}(\sqrt{2,5} gn) \right].$$

Dla przypadku izotropii ($g = 1$) i gdy $\bar{B} > \bar{H}$, wzór (4.8) daje wartości równie dokładne, jak ogólnie znany wzór C. Webera, cytowany przez W. NOWACKIEGO [7]:

$$(4.9) \quad I_s = \frac{\bar{H}^4}{3} \left[n - 0,63 + \frac{0,052}{n^4} \right],$$

Naprężenia styczne obliczone ze wzorów (2.7) przy wykorzystaniu rozwiązań (4.5) (4.6) określają następujące zależności:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \tau_{yx}(\xi, z) &= G\Theta \frac{\bar{H}}{g^2} \left(1 - \frac{\text{ch } \alpha \bar{\xi}}{\text{ch } \bar{\alpha}} \right) \left(\frac{2z}{\bar{H}} \right), \\ \tau_{yz}(\xi, z) &= -G\Theta \frac{\bar{H}}{2g^2 n} \bar{\alpha} \cdot \frac{\text{sh } \alpha \bar{\xi}}{\text{ch } \bar{\alpha}} \left[1 - \left(\frac{2z}{\bar{H}} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

lub po uwzględnieniu wzoru (4.7):

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \tau_{yx}(\xi, z) &= \frac{\mathfrak{M}}{\bar{B}\bar{H}^2} \frac{3}{1 - \frac{1}{\bar{\alpha}} \text{th } \bar{\alpha}} \left(1 - \frac{\text{ch } \alpha \bar{\xi}}{\text{ch } \bar{\alpha}} \right) \left(\frac{2z}{\bar{H}} \right), \\ \tau_{yz}(\xi, z) &= -\frac{\mathfrak{M}}{\bar{B}\bar{H}^2} \frac{3}{2n \left(1 - \frac{1}{\bar{\alpha}} \text{th } \bar{\alpha} \right)} \frac{\text{sh } \alpha \bar{\xi}}{\text{ch } \bar{\alpha}} \left[1 - \left(\frac{2z}{\bar{H}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Wartości ekstremalnych naprężeń stycznych $\bar{\tau}_1$ i $\bar{\tau}_2$ wynoszą (rys. 7):

$$(4.12) \quad \bar{\tau}_1 = \tau_{yx}\left(0, \frac{H}{2}\right) = \frac{\mathfrak{M}}{H^3} \frac{3\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\bar{\alpha}}\right)}{n\left(1 - \frac{1}{\alpha}\operatorname{th}\bar{\alpha}\right)},$$

$$\bar{\tau}_2 = \tau_{yz}(1, 0) = -\frac{\mathfrak{M}}{H^3} \frac{3\sqrt{10}g}{4n} \frac{\operatorname{th}\bar{\alpha}}{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\operatorname{th}\bar{\alpha}\right)}.$$

Na podstawie równań (2.15) nietrudno przekonać się, że środek skręcania (punkt w którym $\varphi_y = 0$) wypada w środku ciężkości przekroju, tzn. $s = 0$. Funkcję deplanacji obliczymy na podstawie zależności (2.19) wykorzystując drugie z równań (2.15):

$$(4.13) \quad v = v(\bar{\xi}, z) = z \cdot \varphi_y(\bar{\xi}) = \Theta \frac{\bar{H}^2}{4} n \left(\bar{\xi} - \frac{2}{\bar{\alpha}} \frac{\operatorname{sh}\bar{\alpha}\bar{\xi}}{\operatorname{ch}\bar{\alpha}} \right) \left(\frac{2z}{\bar{H}} \right).$$

Po wykorzystaniu zależności (4.7) równanie (4.13) można zapisać następująco:

$$(4.14) \quad v(\xi, z) = \frac{\mathfrak{M}}{GH^2} \cdot \frac{3g^2}{4} \cdot \frac{\bar{\xi} - \frac{2}{\bar{\alpha}} \frac{\operatorname{sh}\bar{\alpha}\bar{\xi}}{\operatorname{ch}\bar{\alpha}}}{1 - \frac{1}{\bar{\alpha}}\operatorname{th}\bar{\alpha}} \left(\frac{2z}{\bar{H}} \right).$$

5. Rozwiązania ściśle teorii sprężystości

5.1. Sformułowanie problemu. Podstawowe równanie różniczkowe funkcji naprężeń $\psi(x, z)$ przy skręcaniu swobodnym sprężystych, ortotropowych prętów pryzmatycznych ma postać:

$$(5.1) \quad \frac{1}{G_{yz}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{G_{yx}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2\Theta,$$

przy czym funkcja naprężeń spełnia następujące zależności:

$$(5.2) \quad \tau_{yx} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$(5.3) \quad \psi_c = \text{const},$$

$$(5.4) \quad \mathfrak{M} = 2 \iint \psi dx dz = D_s \Theta,$$

gdzie ψ_c oznacza wartości funkcji naprężeń na konturze pręta.

Równanie (5.1) łatwo doprowadzimy do równania Poissona podstawiając, że

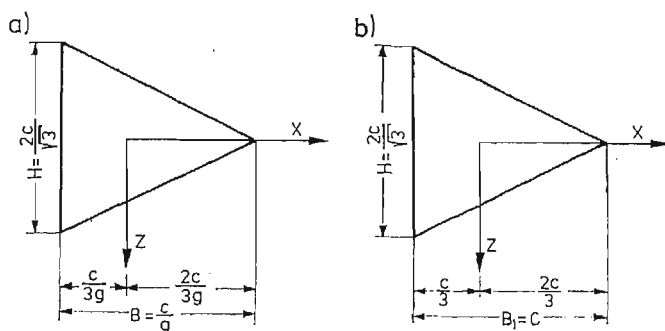
$$(5.5) \quad x_1 = xg, \quad z_1 = z.$$

Otrzymamy wówczas:

$$(5.6) \quad \frac{\partial^2 \psi(x_1, z_1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(x_1, z_1)}{\partial z_1^2} = -2G_{yx}\Theta.$$

Problem skręcania pręta ortotropowego sprowadza się obecnie do rozwiązania skręcania zastępczego pręta izotropowego o g -krotnie zwiększonych wymiarach w kierunku osi x [11], [12].

5.2. Skręcanie pręta o przekroju trójkątnym. W celu uproszczenia obliczeń ograniczymy się do rozwiązania problemu skręcania pręta ortotropowego o przekroju trójkąta równoramiennego, przy czym wymiary przekroju dobieramy tak, by w układzie osi x_1, z_1 zastępczy przekrój izotropowy odpowiadał trójkątowi równobocznemu (por. rys. 7a i 7b).



Rys. 7

W przypadku trójkąta równobocznego funkcję naprężeń $\psi(x_1, z_1)$ buduje się jako iloczyn równań boków trójkąta (por. [8]). Mamy więc:

$$(5.7) \quad \psi(x_1, z_1) = A \left(x_1 + \frac{1}{3}c \right) \left(x_1 - \frac{2}{3}c - \sqrt{3}z_1 \right) \left(x_1 - \frac{2}{3}c + \sqrt{3}z_1 \right).$$

Stałą A wyznacza się podstawiając wyrażenie (5.7) do równania (5.6).

Ostatecznie uzyskujemy:

$$(5.8) \quad \psi(x_1, z_1) = -\frac{G_{yx}\Theta}{2} \left[\frac{1}{c} (3x_1 z_1^2 - x_1^3) + (x_1^2 + z_1^2) \right].$$

Po uwzględnieniu transformacji współrzędnych (5.5) funkcja naprężeń ψ w układzie osi x, z przyjmuje postać:

$$(5.9) \quad \psi(x, z) = -\frac{G_{yx}\Theta}{2} \left[g \left(\frac{3}{c} x z^2 - \frac{g^2}{c} x^3 \right) + (g^2 x^2 + z^2) \right].$$

Łatwo się przekonać, że funkcja ψ na konturze pręta, zgodnie z warunkiem brzegowym (5.3), przyjmuje wartość stałą równą zero.

Stosownie do zależności (5.2) składowe naprężenia styczne wynoszą:

$$(5.10) \quad \begin{cases} \tau_{yx} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{G\Theta}{g^2} \left(\frac{3g}{c} x + 1 \right) z, \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2G\Theta \left(\frac{3}{cg} z^2 - \frac{3g}{c} x^2 + 2x \right). \end{cases}$$

Jednostkowy kat skręcenia obliczono na podstawie zależności (5.4):

$$(5.11) \quad \Theta = \frac{\mathfrak{M}}{D_s}, \quad \text{gdzie} \quad D_s = \frac{GC^4}{g^3 15 \sqrt{3}}$$

i ostatecznie składowe naprężenia przyjmują postać:

$$(5.12) \quad \begin{cases} \tau_{yx} = -\frac{\mathfrak{M}}{c^4} g 15 \sqrt{3} \left(\frac{3gx}{c} + 1 \right) Z, \\ \tau_{yz} = \frac{\mathfrak{M}}{c^4} g 7,5 \sqrt{3} \left(\frac{3}{c} g z^2 - \frac{3}{c} g^3 x^2 + 2g^2 x \right). \end{cases}$$

5.3. Skręcenie pręta o przekroju prostokątnym. Rozwiązanie zadania brzegowego dla pręta prostokątnego przedstawionego na rys. 6 zbudujemy za pomocą szeregów Fouriera. Ponieważ zadanie jest symetryczne względem osi $x_1 = x \cdot g$ zarówno funkcję naprężeń $\varphi(x_1, z_1)$ jak i prawą stronę równania (5.6) przedstawimy w postaci pojedynczego szeregu cosinusowego:

$$(5.13) \quad \psi(x_1, z_1) = \sum_{k=1,3,5} C_k \cos\left(\frac{k\pi x_1}{\bar{B}_1}\right) Z_k(z_1)$$

$$(5.14) \quad 2G_{yx}\Theta = 2G_{yx}\Theta \sum_{k=1,3,5} \frac{4}{\pi k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{\bar{B}_1}\right),$$

gdzie C_k oznaczają niewiadome współczynniki rozwinięcia funkcji ψ , $\bar{B}_1 = \bar{B} \cdot g$.

Po wykonaniu różniczkowania i podstawieniu zależności (5.13) do lewej strony równania (5.6) oraz podstawieniu zależności (5.14) w miejsce prawej strony zależności (5.6) dla poszczególnych wartości k otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne na niewiadomą funkcję $Z_k(z_1)$:

$$(5.15) \quad \frac{d^2 Z_k}{dz_1^2} - \left(\frac{k\pi}{\bar{B}_1}\right)^2 \cdot Z_k = -2G_{yx}\Theta \frac{4}{k\pi C_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}.$$

Rozwiązanie tego równania jest następujące:

$$(5.16) \quad Z_k(z_1) = A_1 \operatorname{sh} \frac{k\pi z_1}{\bar{B}_1} + A_2 \operatorname{ch} \frac{k\pi z_1}{\bar{B}_1} + \frac{8G_{yx}\Theta \bar{B}_1^2}{k^3 \pi C_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}},$$

gdzie A_1 i A_2 oznaczają stałe całkowania.

Z symetrii zadania wynika, że $A_1 = 0$. Stałą A_2 zgodnie z (5.3) wyznaczamy z warunku $Z_k|_{z_1 = \pm \bar{H}_1/2} = 0$.

Po obliczeniu stałej A_2 równanie (5.16) przyjmuje postać:

$$(5.17) \quad Z_k(z_1) = \frac{8G_{yx}\Theta \bar{B}_1^2}{k^3 \pi C_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi z_1}{\bar{B}_1}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi \bar{H}_1}{2\bar{B}_1}} \right).$$

Ostatecznie po podstawieniu do (5.13) i po uporządkowaniu otrzymamy:

$$(5.18) \quad \psi(x_1, z_1) = \frac{8G_{yx}\Theta \bar{B}_1^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5} \frac{1}{k^3} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi z_1}{\bar{B}_1}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi \bar{H}_1}{2\bar{B}_1}} \right] \cos\left(\frac{k\pi x_1}{\bar{B}_1}\right).$$

Funkcja naprężeń wyrażona przez zmienne x, z przyjmie postać:

$$(5.19) \quad \psi(x, z) = \frac{8G\Theta\bar{B}^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5} \frac{1}{k^3} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi z}{g\bar{B}}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi H}{2g\bar{B}}} \right] \cos \left(\frac{k\pi x}{\bar{B}} \right).$$

Naprężenia styczne wyrażają zależność:

$$(5.20) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_{yx} &= \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{8G\Theta\bar{B}}{\pi^2 g} \sum_{k=1,3,5} \frac{1}{k^2} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{k\pi z}{g\bar{B}} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{k\pi H}{2g\bar{B}} \right)} \cdot \cos \left(\frac{k\pi x}{\bar{B}} \right), \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{8G\Theta\bar{B}}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5} \frac{1}{k^2} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{k\pi z}{g\bar{B}} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{k\pi H}{2g\bar{B}} \right)} \right] \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi x}{\bar{B}} \right). \end{aligned} \right.$$

Moment skręcający \mathfrak{M} obliczony z równania (5.4) wynosi:

$$(5.21) \quad \mathfrak{M} = \Theta \left\{ G\bar{B}^4 \left[\frac{1}{3n} - \frac{64}{\pi^5} \sum_{k=1,3,5} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \left(\frac{k\pi H}{2g\bar{B}} \right) \right] \right\} = \Theta \cdot D_g.$$

6. Porównanie rezultatów teorii przybliżonej z rozwiązaniami ścisłymi

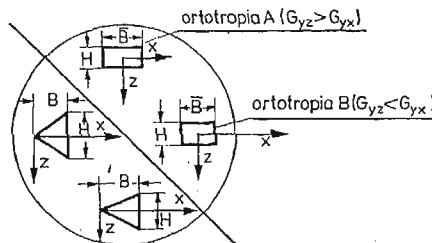
Porównanie przeprowadzimy dla trzech przypadków: izotropii, ortotropii „A” oraz ortotropii „B”. Wartości modułów ścinania materiału ortotropowego odpowiadają drewnu świerkowemu, dla którego według E. K. Aszkenaziego [9] mamy (rys. 8):

— Ortotropia A $G_{yz} = 4210 \text{ kG/cm}^2$

$$G_{yx} = 3540 \text{ kG/cm}^2 < G_{yz}, \quad g = \sqrt{\frac{G_{yz}}{G_{yx}}} = 1,0905$$

— Ortotropia B $G_{yz} = 3540 \text{ kG/cm}^2$

$$G_{yx} = 4210 \text{ kG/cm}^2 < G_{yz}, \quad g = \sqrt{\frac{G_{yz}}{G_{yx}}} = 0,9170$$

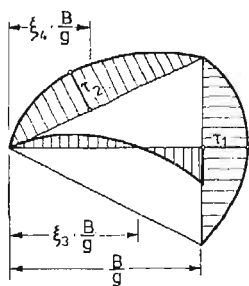


Rys. 8.

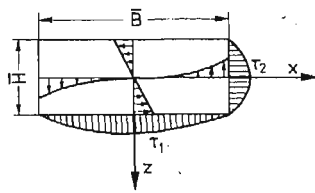
Przypadki ortotropii A i B różnią się jedynie sposobem wycięcia pręta z pnia drewnianego.

Przypadek izotropii rozważano przyjmując, że moduł ścinania jest równy średniej arytmetycznej modułów dla przypadku ortotropii, tj. $G_0 = \frac{1}{2}(G_{yz} + G_{yx}) = 3875 \text{ kG/cm}^2$.

W tabelicy 1 przedstawiono wartości naprężeń τ_1 i τ_2 oraz sztywności skrętnej D_s dla pręta o przekroju trójkąta równoramiennego (rys. 7a). W przypadku rozwiązywania takiego zadania, niezależnie od wartości modułów G_{yx} i G_{yz} współrzędne ξ_3 i ξ_4 mają stałą wartość (por. rys. 9). $\xi_3 = \frac{2}{3}$ i $\xi_4 = \frac{1}{2}$. Rozwiązanie przybliżone jest w tym przypadku rozwiązaniem ścisłym. W tabelicy 2 zestawiono wartości sztywności skrętnej D_s oraz naprężeń τ_1 i τ_2 (por. rys. 10) dla pręta o przekroju prostokątnym przy różnych stosunkach boków $n = B:H$.



Rys. 9



Rys. 10

Przedstawione rezultaty pozwalają stwierdzić, że sztywności na skręcanie dla prętów ortotropowych obliczone w sposób przybliżony według teorii płyt Reissnera są niemal identyczne z wartościami uzyskanymi z metody ścisłej. Podobne stwierdzenia dla prętów izotropowych zostały przedstawione w pracy [5]. W pewnych przypadkach przekroju

Tabela 1

Pręt o przekroju trójkątnym. Wyniki dla metody przybliżonej i ścisłej

Przypadek	D_s	τ_1	τ_2
Ortotropia A $G_{yz} > G_{yx}$	$0,0322 c^4 G_0$	$-15,448 \frac{M}{c^3}$	$14,497 \frac{M}{c^3}$
Ortotropia B $G_{yz} < G_{yx}$	$0,0456 c^4 G_0$	$-10,923 \frac{M}{c^3}$	$11,673 \frac{M}{c^3}$

trójkątnego wyniki uzyskane z metody przybliżonej są ścisłe. Odnosi się to zarówno do sztywności jak i do składowych naprężeń stycznych. W przekrojach prostokątnych wartości naprężeń różnią się, a największą różnicę (do 10%) otrzymuje się dla przypadków gdy stosunek boków prostokąta wynosi 1:1.

Tablica 2

Pręt o przekroju prostokątnym

Stos. dług. bok. $n = B:H$	Przypadek	Ds: G_0H^4		$\tau_1 \cdot \frac{A^3}{M}$		$\tau_2 \cdot \frac{A^3}{M}$	
		rozwiązanie		rozwiązanie		rozwiązanie	
		przybliżone	ściśle	przybliżone	ściśle	przybliżone	ściśle
1	izotropia	0,1396	0,1406	4,3340	4,8080	5,2020	4,8080
	ortotropia A	0,1388	0,1396	4,3070	4,5970	5,3250	4,9331
	ortotropia B	0,1384	0,1396	4,3580	4,7777	5,0960	4,6633
2	izotropia	0,4566	0,4580	2,0050	2,0320	1,7250	1,6133
	ortotropia A	0,4328	0,4334	1,9680	1,9639	1,8160	1,7010
	ortotropia B	0,4760	0,4770	2,0320	2,0293	1,6440	1,5390
4	izotropia	1,1220	1,1240	0,8877	0,8865	0,7043	0,6596
	ortotropia A	1,0415	1,0420	0,8754	0,8625	0,7563	0,7093
	ortotropia B	1,1989	1,1997	0,9008	0,8895	0,6570	0,6162
8	izotropia	2,4561	2,4546	0,4072	0,3979	0,3219	0,3027
	ortotropia A	2,2600	2,2601	0,4043	0,3979	0,3486	0,3270
	ortotropia B	2,6472	2,6483	0,4104	0,4050	0,2975	0,2791

7. Uwagi końcowe

Na podstawie przeprowadzonych przykładowych obliczeń można stwierdzić, że przedstawiony w pracy przybliżony sposób wyznaczania sztywności, naprężeń i deplanacji przekrojów w ortotropowych prętach skręcanych jest szczególnie przydatny do obliczania sztywności skrętnej dla dowolnych przekrojów, o jednej osi symetrii. Przybliżony sposób stosować można również do obliczania naprężeń, przy czym należy się liczyć z błędami, które dla przekrojów kwadratowych wynoszą niemal 10%.

Ocenę błędów dla przypadków gdy nieznanie jest rozwiązanie ściśle uzyskać można, przy rozwiązywaniu zagadnienia na drodze teoretycznej, w zasadzie tylko na gruncie teorii ośrodków z więzami [10].

Literatura cytowana w tekście

1. A. GAWĘCKI, *Statyka podłużnie niejednorodnej płyty Reissnera o zmiennej grubości*, Rozprawy Inżynierskie, 20, 4, 555 - 576, (1972).
2. E. REISSNER, *On the theory of bending of elastic plates*, Journal of Mathematics and Physics, 23, 184 - 191, (1944).

3. E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, Journal of Applied Mechanics, 12, A69 - A77, (1945).
4. E. REISSNER, *On bending of elastic plates*, Quarterly of Applied Mathematics, 5, 55 - 68, (1947).
5. F. ESSENBERG, P. M. NAGHALI, *On elastic plates of variable thickness*, Proceedings of 3-rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 313 - 319, (1958).
6. Z. KAŹCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady 1968.
7. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*. PWN (1974).
8. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady (1962).
9. E. K. ASZKENAZI, *Anizotropia maszynostrojnych materialow*. Izdatelstwo Maszynostrojenije. Leningrad (1969).
10. C. WOŹNIAK, *Elastic bodies with constraints imposed on deformations, stresses and momenta*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sci. techn., XII (1974).
11. W. S. SARKISIAN, *Niektoryje zadaczi teorii uprugosti anizotropnego tiela*. Izdatelstwo Erewanskogo Uniwersiteta. Erewań — (1970)
12. S. G. LECHNICKIJ, *Teoria uprugosti anizotropnego tiela*. Gosizdat techniko — teoreticzeskoj literatury, 1957.

Резюме

ПРИБЛИЖЁННАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО КРУЧЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

В работе представлено приближённый метод вычисления напряжений в скручиваемых призматических, анизотропных стержнях. Метод является обобщением теории Э. Райсснера для анизотропных, неоднородных пластинок и переменной толщиной.

Полученные приближённые решения имеют замкнутый вид. Представлены примеры и сравнение полученных результатов с результатами вычисленными точным методом.

Предложенный метод может быть использован при вычислении ортотропных стержней с произвольным поперечным сечением и аксиальной симметрией.

Summary

AN APPROXIMATE SOLUTION OF TORSION OF ANISOTROPIC PRISMATIC BARS

An application of Reissner's plate theory to torsion problem of monosymmetric anisotropic bars is presented. The solution obtained by means of the method has a simple exact form. The torsion of the rectangular and triangular cross-section bars are discussed. A good agreement (especially in case of displacements) with exact solution of the theory of elasticity is shown. The approximate method presented here is useful in design and optimization problems.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 stycznia 1979 roku

ANALIZA PŁYTY KOŁOWEJ GRUBEJ O ORTOTROPII CYLINDRYCZNEJ SPOCZYWAJĄCEJ
NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

WACŁAW ZWOLIŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Założenia podstawowe

Obliczanie kołowej płyty grubej izotropowej spoczywającej na sprężystym podłożu przedstawił w pracy [1] D. FREDERICK w oparciu o teorię E. Reissnera. W wielu konstrukcjach płyty tego typu wykonane są z materiału o własnościach ortotropowych. Płyta perforowana otworami tworzącymi siatkę trójkątną może być przykładem płyty o ortotropii konstrukcyjnej [2].

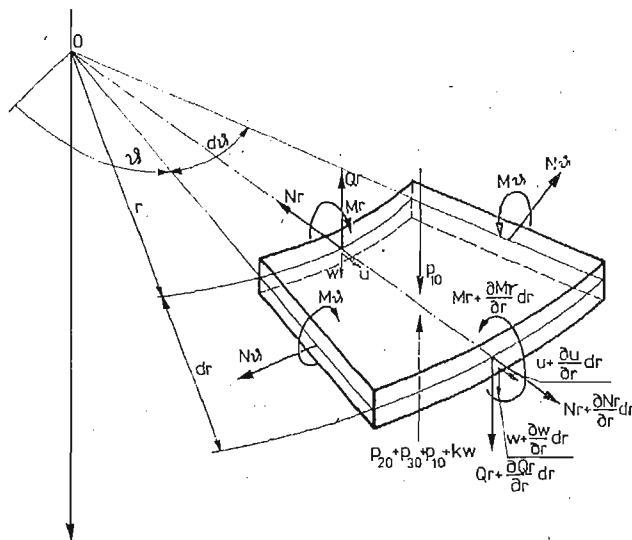
Przyjęto do obliczeń następujące stałe materiałowe płyty:

E^x, G^x, ν^x — moduły sprężystości i liczbę Poissona w płaszczyźnie płyty.

E^z, G^z, ν^z — moduły sprężystości i liczbę Poissona w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty.

Ponadto założono:

- materiał płyty podlega uogólnionemu prawu Hooke'a,
- grubość elementu mierzona wzdłuż normalnej do powierzchni środkowej nie ulega zmianie podczas odkształcenia płyty [3].



Rys. 1.

c) naprężenia styczne τ_{rz} i $\tau_{\theta z}$ (lub odpowiadające im odkształcenia γ_{rz} i $\gamma_{\theta z}$) zmieniają się wzdłuż grubości płyty według określonej funkcji [1, 3, 4, 5].

Na rysunku 1 przedstawiono przyjęty walcowy układ osi współrzędnych oraz obciążenie elementu płyty. Ciśnienia p_1, p_2 działają na powierzchnię płyty, zaś $p = kw$ oznacza oddziaływanie podłoża sprężystego (k — stała sprężystego podłoża, w — ugięcie środkowej powierzchni płyty). Założono, że obciążenie płyty jest symetryczne i wywołuje symetryczne odkształcenia i przemieszczenia $u, w, (v = 0)$ poszczególnych elementów płyty. Tak więc przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia będą funkcjami współrzędnych: r, z (rys. 1) [4].

2. Odkształcenia i naprężenia

Naprężenie styczne τ_{rz} występujące w rozpatrywanej płycie określono na podstawie prac [1, 3, 4, 5] w postaci:

$$(2.1) \quad \tau_{rz} = \frac{1}{8} h^2 \varphi \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right),$$

gdzie:

h — grubość płyty

φ — nieznaną funkcją współrzędnej „ r ”

Odkształcenia na podstawie prawa Hooke'a [1, 5, 6] mają postać:

$$(2.2) \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E^x} (\sigma_r - \nu^x \sigma_\theta) - \frac{\nu^x}{E^x} \sigma_z,$$

$$(2.3) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^x} (\sigma_\theta - \nu^x \sigma_r) - \frac{\nu^x}{E^x} \sigma_z,$$

$$(2.4) \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{G^x} \tau_{rz}; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G^x} \tau_{\theta z}.$$

Po wstawieniu wyrażeń (2.4) do odpowiednich równań geometrycznej hipotezy W. Własowa dotyczącej ogólnej teorii powłok [7] (jak podano w pracy [3]), przemieszczenie $u(r, z)$ dowolnego punktu płyty jest określone funkcją:

$$(2.5) \quad u(r, z) = u(r) - z \frac{dw}{dr} + \frac{z\varphi h^2}{8G^x} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

gdzie:

$u(r) = u$ — przemieszczenie punktów środkowej powierzchni płyty

Odkształcenia dowolnego elementu płyty wyrażone w przemieszczeniach można przedstawić w postaci [3].

$$(2.6) \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr} - z \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{zh^2}{8G^x} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \frac{d\varphi}{dr},$$

$$(2.7) \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{zh^2}{8G^x} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \frac{\varphi}{r},$$

$$(2.8) \quad \gamma_{rz} = \frac{h^2}{8G^x} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi.$$

Naprężenia wyrażone odpowiednio w funkcji przemieszczeń, po wykorzystaniu zależności (2.2) (2.8), określone są wyrażeniami:

$$(2.9) \quad \sigma_r = \frac{E^x}{1-(\nu^x)^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu^x \frac{u}{r} - z \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu^x}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{zh^2}{8G^z} \cdot \right. \\ \cdot \left. \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu^x \frac{\varphi}{r} \right) \right] + \frac{\nu^z}{1-\nu^x} \frac{E^x}{E^z} \cdot \\ \cdot \left[-\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + kw) + \frac{3}{2} \frac{z}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) (p_1 - p_2 - kw) \right]$$

$$(2.10) \quad \sigma_s = \frac{E^x}{1-(\nu^x)^2} \left[\nu^x \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} - z \left(\nu^x \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{zh^2}{8G^z} \cdot \right. \\ \cdot \left. \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \left(\nu^x \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) \right] + \frac{\nu^z}{1-\nu^x} \frac{E^x}{E^z} \cdot \\ \cdot \left[-\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + kw) + \frac{3}{2} \frac{z}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) (p_1 - p_2 - kw) \right],$$

$$(2.11) \quad \sigma_z = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + kw) + \frac{3}{2} \frac{z}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) (p_1 - p_2 - kw),$$

$$(2.12) \quad \tau_{rz} = \frac{h^2}{8} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi.$$

3. Siły przekrojowe

Siły i momenty przekrojowe działające w płycie (rys. 1) wyrażone w funkcji przemieszczeń po uwzględnieniu wyrażen (2.9) ÷ (2.12) przyjmują postać [3]:

$$(3.1) \quad N_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r dz = \frac{E^x h}{1-(\nu^x)^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu^x \frac{u}{r} \right) - \frac{\nu^z h}{2(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} (p_1 + p_2 + kw),$$

$$(3.2) \quad N_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_s dz = \frac{E^x h}{1-(\nu^x)^2} \left(\nu^x \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) - \frac{\nu^z h}{2(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} (p_1 + p_2 + kw),$$

$$(3.3) \quad Q_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{rz} dz = \frac{h^3}{12} \varphi,$$

$$(3.4) \quad M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r z dz = -\frac{E^x h^3}{12[1-(\nu^x)^2]} \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu^x}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{h^2}{10G^z} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu^x \frac{\varphi}{r} \right) \right] + \\ + \frac{\nu^z h^2}{10(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} (p_1 - p_2 - kw),$$

$$(3.5) \quad M_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz = -\frac{E^x h^3}{12[1-(\nu^x)^2]} \left[\nu^x \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{h^2}{10G^z} \left(\nu^x \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) \right] + \\ + \frac{\nu^z h^2}{10(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} (p_1 - p_2 - kw).$$

4. Równania równowagi

Równania równowagi elementu rozpatrywanej płyty (rys. 1) w tym przypadku mają postać [7]:

$$(4.1) \quad \frac{d}{dr} (rN_r) - N_\vartheta = 0,$$

$$(4.2) \quad \frac{d}{dr} (rQ_r) + r(p_1 - p_2 - kw) = 0,$$

$$(4.3) \quad \frac{d}{dr} (rM_r) - M_\vartheta - rQ_r = 0$$

Wstawiając do tych równań siły i momenty określone zależnościami (3.1) ÷ (3.5) otrzymamy:

$$(4.4) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = \eta \frac{dw}{dx},$$

$$(4.5) \quad \frac{d}{dx} (x\varphi) + \frac{12x}{\beta h^3} (p_1 - p_2 - kw) = 0,$$

$$(4.6) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 w}{dx^3} - \left(\frac{1}{x^2} + 2C \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2C}{x} \right) \frac{dw}{dx} + w = \frac{p_1 - p_2}{k},$$

gdzie:

$$x = \beta r; \quad D^x = \frac{E^x h^3}{12[1-(\nu^x)^2]}; \quad \eta = \frac{\nu^z(1+\nu^x)k}{2\beta E^z}; \quad \beta^4 = \frac{k}{D^x};$$

$$(4.7) \quad C = \frac{1}{2} \left[\frac{6k}{5\beta^2 h G^z} - \frac{\nu^z(\beta h)^2}{10(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} \right] = \frac{3k}{5\beta^2 h} \left[\frac{1}{G^z} - \frac{\nu^z(1+\nu^x)}{E^z} \right],$$

Tak więc otrzymano układ trzech równań różniczkowych (4.4) ÷ (4.6) w którym niewiadomymi są funkcje u , w , φ .

5. Rozwiązanie równań różniczkowych równowagi płyty

W celu rozwiązania równania różniczkowego (4.6) wprowadzono parametr α [1, 8] określony równością:

$$(5.1) \quad C = -\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}(e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}).$$

Ponieważ parametr α zależy bezpośrednio od stałej C , która może przyjmować różne wartości, zatem należy zbadać pierwiastki równania otrzymanego z (5.1):

$$(5.2) \quad t^2 + 2Ct + 1 = 0,$$

gdzie:

$$t = e^{2i\alpha}.$$

Pierwiastki tego równania wynoszą:

$$(5.3) \quad t_{1,2} = -C \pm \sqrt{C^2 - 1}$$

i iloczyn tych pierwiastków równy jest jedności ($t_1 \cdot t_2 = 1$). Tak więc dla wyznaczenia wartości parametru α otrzymujemy równania:

$$(5.4) \quad e^{2i\alpha_1} = t_1; \quad e^{2i\alpha_2} = t_2 = \frac{1}{t_1},$$

z których wynikają zależności (przy uwzględnieniu tylko głównych wartości argumentu ($-\pi < \arg t_1 \leq \pi$))

$$2i\alpha_1 = \ln|t_1| + i \arg t_1,$$

$$2i\alpha_2 = \ln|t_2| + i \arg t_2 = -(\ln|t_1| + i \arg t_1).$$

Po podzieleniu powyższych równań przez i otrzymamy:

$$(5.5) \quad 2\alpha_1 = \arg t_1 - i \ln|t_1|,$$

$$2\alpha_2 = -(\arg t_1 - i \ln|t_1|).$$

Aby nie ograniczać rozwiązania równania różniczkowego (4.6) założono, że występująca w nim stała C może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste. W związku z tym wyróżniono trzy przedziały wartości i dwa przypadki na granicy przedziałów, które może przyjmować stała C .

a. Przedział I: $-1 < C < +1$. Pierwiastki (5.3) przyjmują w tym przypadku wartości zespolone. Łatwo zauważyć [9], że $|t_1| = 1$ i $\ln|t_1| = 0$, a więc z wyrażenia (5.5) otrzymamy:

$$(5.6) \quad 2\alpha_1 = +\arg t_1 = \arccos C - \pi,$$

$$2\alpha_2 = -\arg t_1 = -(\arccos C - \pi).$$

Jak widać parametry α_1 i α_2 przyjmują wartości rzeczywiste o przeciwnych znakach. Zatem parametr α występujący w równaniu (5.1) w przypadku ($-1 < C < 1$) może być określony zależnością:

$$(5.7) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos C; \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

W celu rozwiązania równania różniczkowego (4.6) wprowadzimy zmienną:

$$(5.8) \quad y = \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + we^{-2i\alpha},$$

i otrzymamy równanie:

$$(5.9) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + ye^{2i\alpha} = \frac{p_1 - p_2}{k}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$(5.10) \quad y = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 J_0(xe^{i\alpha}) + C_3 H_0^{(1)}(xe^{i\alpha}),$$

gdzie:

$J_0(xe^{i\alpha})$ — funkcja Bessela (funkcja walcowa pierwszego rodzaju) rzędu zerowego

$H_0^{(1)}(xe^{i\alpha})$ — funkcja Hankela (funkcją walcową trzeciego rodzaju) rzędu zerowego.

Wstawiając wyrażenie (5.10) do równania (5.8) otrzymamy:

$$(5.11) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + we^{-2i\alpha} = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 J_0(xe^{i\alpha}) + C_3 H_0^{(1)}(xe^{i\alpha}).$$

Całka ogólna tego równania jest również całką ogólną równania (4.6) i ma ona postać:

$$(5.12) \quad w = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 J_0(xe^{i\alpha}) + C_2 J_0(xe^{-i\alpha}) + C_3 H_0^{(1)}(xe^{i\alpha}) + C_4 H_0^{(1)}(xe^{-i\alpha}),$$

gdzie:

$C_1 \div C_4$ — stałe całkowania zespolone

Aby wyrazić funkcję ugięcia w postaci rzeczywistej, funkcje walcowe rozłożono na części rzeczywiste i urojone w postaci [8]:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} J_0(xe^{\pm i\alpha}) &= \text{Ber}(xe^{i\alpha}) \pm i \text{Bei}(xe^{i\alpha}), \\ H_0^{(1)}(xe^{\pm i\alpha}) &= \text{Her}(xe^{i\alpha}) \pm i \text{Hei}(xe^{i\alpha}). \end{aligned}$$

Wykorzystując zależność (5.13) i przekształcając odpowiednio stałe całkowania zespolone $C_1 \div C_4$ możemy przekształcić funkcje ugięcia (5.12), do postaci nie zawierającej elementów urojonych. W ten sposób otrzymamy:

$$(5.14) \quad w = \frac{p_1 - p_2}{k} + c_1 \text{Ber}(xe^{i\alpha}) + c_2 \text{Bei}(xe^{i\alpha}) + c_3 \text{Her}(xe^{i\alpha}) + c_4 \text{Hei}(xe^{i\alpha})$$

gdzie:

$C_1 \div C_4$ — stałe całkowania rzeczywiste

Z rozwiązania równania różniczkowego (4.5) po wykorzystaniu funkcji (5.14) otrzymamy:

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \varphi = -\frac{12k}{\beta h^3} \left\{ C_1 [\text{Ber}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \right. \\ + C_2 [-\text{Ber}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \\ + C [\text{Her}'(e^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ \left. + C_4 [-\text{Her}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \frac{B}{x} \right\} \end{aligned}$$

gdzie:

B — stała całkowania

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\text{Ber}(xe^{i\alpha})] &= \text{Ber}'(xe^{i\alpha}); & \frac{d}{dx} [\text{Bei}(xe^{i\alpha})] &= \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \\ \frac{d}{dx} [\text{Her}(xe^{i\alpha})] &= \text{Her}(xe^{i\alpha}); & \frac{d}{dx} [\text{Hei}(xe^{i\alpha})] &= \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \end{aligned}$$

Wstawiając pochodną względem x funkcji ugięcia (5.14) do równania różniczkowego (4.4) łatwo otrzymamy całkę ogólną tego równania w postaci:

$$(5.16) \quad u = -\eta \left\{ C_1 [\text{Ber}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \right. \\ + C_2 [-\text{Ber}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \\ + C_3 [\text{Her}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ \left. + C_4 [-\text{Her}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + A_1 x + \frac{A_2}{x} \right\},$$

gdzie:

A_1, A_2 — stałe całkowania.

b. Przedział II: $C > 1$. Pierwiastki $t_{1,2}$ (5.3) są liczbami rzeczywistymi ujemnymi, zatem $\arg t_1 = \pi$ i z równań (5.5) otrzymamy:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} 2\alpha_1 &= \pi - i \ln(+C + \sqrt{C^2 - 1}), \\ 2\alpha_2 &= -[\pi - i \ln(+C + \sqrt{C^2 - 1})], \end{aligned}$$

ponieważ $|t_1| = -t_1$

Wyznaczone tu parametry α_1 i α_2 są zespolonymi liczbami przeciwnymi.

W dalszych obliczeniach uwzględnimy następującą zależność:

$$(5.18) \quad \begin{aligned} xe^{i\alpha_1} &= xe^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} \ln \gamma_1} = i\gamma_1 x, \\ xe^{i\alpha_2} &= xe^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln \gamma_1} = -i \frac{x}{\gamma_1}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\gamma_1 = \sqrt{C + \sqrt{C^2 - 1}}.$$

Następnie pamiętając, że istnieją między funkcjami walcowymi zależności [10]:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} J_0(i\gamma_1 x) &= I(\gamma_1 x); & I_0\left(-i \frac{x}{\gamma_1}\right) &= I_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right), \\ H_0^{(1)}(i\gamma_1 x) &= -\frac{2}{\pi} i K_0(\gamma_1 x); & H_0^{(1)}\left(-\frac{x}{\gamma_1}\right) &= -\frac{2}{\pi} i K_0\left(-\frac{x}{\gamma_1}\right), \\ K_0\left(-\frac{x}{\gamma_1}\right) &= K_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) - i\pi I_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right), \end{aligned}$$

gdzie:

$I_0(\gamma_1 x)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela rzędu zerowego

$K_0(\gamma_1 x)$ — zmodyfikowana funkcja Mac Donalda rzędu zerowego

zatem dla rozpatrywanego tu przypadku funkcja ugięcia „ w ” (5.14) będąca całką ogólną równania różniczkowego (4.6), po odpowiednim doborze stałych całkowania, przyjmie postać:

$$(5.20) \quad w = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 I_0(\gamma_1 x) + C_2 I_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) + C_3 K_0(\gamma_1 x) + C_4 K_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right).$$

Funkcja φ , będąca całką równania różniczkowego (4.5) ma postać:

$$(5.21) \quad \varphi = \frac{12k}{\beta\gamma_1 h^3} \left[C_1 I_1(\gamma_1 x) + C_2 \gamma_1^2 I_1\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) - C_3 K_1(\gamma_1 x) - C_4 \gamma_1^2 K_1\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) + \frac{\gamma_1 B}{x} \right].$$

Po rozwiązaniu równania różniczkowego (4.4) w tym przypadku otrzymano:

$$(5.22) \quad u = \frac{\eta}{\gamma_1} \left[C_1 I_1(\gamma_1 x) + C_2 \gamma_1^2 I_1\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) - C_3 K_1(\gamma_1 x) - C_4 \gamma_1^2 K_1\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_1 A_1 x}{2} + \frac{\gamma_1 A_2}{x} \right].$$

c. Przedział III: $C < -1$. Pierwiastki $t_{1,2}$ (5.3) w tym przypadku są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, zatem $\arg t_1 = 0$ i z równania (5.5) otrzymamy:

$$(5.23) \quad 2\alpha_1 = -i \ln(-C - \sqrt{C^2 - 1}), \\ 2\alpha_2 = i \ln(-C - \sqrt{C^2 - 1}).$$

Otrzymane więc parametry α_1, α_2 są liczbami zespolonymi przeciwnymi. W dalszych obliczeniach uwzględnimy następującą zależność:

$$(5.24) \quad x e^{i\alpha_1} = x e^{1/2 \ln \gamma_2} = \gamma_2 x, \\ x e^{i\alpha_2} = x e^{-1/2 \ln \gamma_2} = \frac{x}{\gamma_2},$$

gdzie:

$$\gamma_2 = \sqrt{-C - \sqrt{C^2 - 1}}.$$

W rozpatrywanym tu przedziale wartości stałej C , rozwiązaniem równania różniczkowego (4.6) będzie funkcja:

$$(5.25) \quad w = \frac{p_1 - p_2}{k} C_1 J_0(\gamma_2 x) + C_2 J_0\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) + C_3 Y_0(\gamma_2 x) + C_4 Y_0\left(\frac{x}{\gamma_2}\right),$$

gdzie:

$J_0(\gamma_2 x), Y_0(\gamma_2 x)$ — funkcja Bessela rzędu zerowego.

Funkcję φ otrzymano tu z równania różniczkowego (4.5) w postaci:

$$(5.26) \quad \varphi = \frac{12k}{\beta\gamma_2 h^3} \left[C_1 J_1(\gamma_2 x) + C_2 \gamma_2^2 J_1\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) + C_3 Y_1(\gamma_2 x) + C_4 \gamma_2^2 Y_1\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) + \frac{\gamma_2 B}{x} \right].$$

Z rozwiązania równania różniczkowego (4.4) dla tego przypadku, otrzymano funkcje przemieszczeń „ u ” w postaci:

$$(5.27) \quad u = \frac{\eta}{\gamma_2} \left[C_1 J_1(\gamma_2 x) + C_2 \gamma_2^2 J_1\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) + C_3 Y_1(\gamma_2 x) + C_4 \gamma_2^2 Y_1\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_2 A_1 x}{2} + \frac{\gamma_2 A_2}{x} \right].$$

Należy tu jeszcze przedstawić rozwiązania równania różniczkowego (4.6) dla dwóch szczególnych wartości C ; t.j. $C = 1$, i $C = -1$.

d. Przypadek: $C = 1$. Łatwo można sprawdzić, przez bezpośrednie podstawienie do równania różniczkowego (4.6), że rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja:

$$(5.28) \quad w = \frac{P_1 - P_2}{k} + C_1 I_0(x) + C_2 x I_1(x) + C_3 K_0(x) + C_4 x K_1(x).$$

Z rozwiązań zaś równań różniczkowych (4.5) i (4.4) w tym przypadku otrzymamy:

$$(5.29) \quad \varphi = \frac{12k}{\beta h^3} \left\{ C_1 I_1(x) + C_2 [x I_0(x) - 2I_1(x)] - C_3 K_0(x) - C_4 [x K_0(x) + 2K_1(x)] + \frac{B}{x} \right\},$$

$$(5.30) \quad u = \eta \left\{ C_1 I_1(x) + C_2 [x I_0(x) - 2I_1(x)] - C_3 K_1(x) - C_4 [x K_0(x) + 2K_1(x)] + \frac{A_1 x}{2} + \frac{A_2}{x} \right\}$$

e. Przypadek: $C = -1$. Dla tego przypadku rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego (4.6) jest funkcja:

$$(5.31) \quad w = \frac{P_1 - P_2}{k} + C_1 J_0(x) + C_2 x J_1(x) + C_3 Y_0(x) + C_4 x Y_1(x).$$

Następnie z rozwiązania równania różniczkowego (4.5) i (4.4) odpowiednio otrzymamy:

$$(5.32) \quad \varphi = \frac{12k}{\beta h^3} \left\{ C_1 J_1(x) - C_2 [x J_0(x) - 2J_1(x)] + C_3 Y_1(x) - C_4 \cdot [x Y_0(x) - 2Y_1(x)] + \frac{B}{x} \right\},$$

$$(5.33) \quad u = \eta \left\{ C_1 J_1(x) - C_2 [x J_0(x) - 2J_1(x)] + C_3 Y_1(x) - C_4 \cdot [x Y_0(x) - 2Y_1(x)] + \frac{A_1 x}{2} + \frac{A_2}{x} \right\}.$$

6. Stałe całkowania

Dla wyznaczenia stanu naprężeń i odkształceń obciążonej płyty należy określić stałe całkowania z warunków zamocowania brzegu wewnętrznego i zewnętrznego.

Dla płyty pełnej (bez otworu w środku) stała całkowania $C_3 = C_4 = A_2 = B = 0$, ponieważ dla $x = \beta r = 0$ funkcja „ w ” (5.14), „ φ ” (5.15) i „ u ” (5.16) mogą tylko w tym przypadku przyjmować wartości skończone. Natomiast stałe całkowania C_1, C_2, A_1 można wyznaczyć z warunków obciążenia brzegu zewnętrznego, więc:

$$(6.1) \quad M_{r(x=\beta a)} = M_a; \quad N_{r(x=\beta a)} = N_a; \quad Q_{r(x=\beta a)} = Q_a$$

gdzie:

a — promień zewnętrzny płyty.

W technicznych zagadnieniach najczęściej stała $C(5.1)$ przyjmuje wartość mniejszą od jedności. Zatem wstawiając funkcję „ w ” (5.14), „ φ ” (5.15) i „ u ” (5.16) odpowiednio do wyrażenia (3.1), (3.2) i (3.4) po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymamy równania dla określenia stałych całkowania C_1 , C_2 , A_1 w postaci:

$$(6.2) \quad \frac{M_r}{\beta^2 D^x} = C_1 \left\{ -\text{Ber}(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha - \text{Bei}(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \right. \\ \left. + \frac{6(1-\nu^x)_k}{5\beta^3 h a G^z} \left[\left(\cos 2\alpha + \frac{5\beta^2 h G^z}{6k} \right) \text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \right] \right\} + \\ + C_2 \left\{ \text{Ber}(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha - \text{Bei}(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha - \frac{6(1-\nu^x)_k}{5\beta^3 h a G^z} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha - \left(\cos 2\alpha + \frac{5\beta^2 h G^z}{6k} \right) \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \right] \right\},$$

$$(6.3) \quad \frac{2\beta a E^z N_a}{\nu^z k E^x} = C_1 [\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ + C_2 [-\text{Ber}(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \\ + \beta a A_1 - \frac{2\beta a p_1}{(1-\nu^x)k},$$

$$(6.4) \quad \frac{\beta Q_a}{k} = -C_1 [\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ + C_2 [\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha].$$

Dalej można traktować stałe całkowania jako wielkości znane. Przemieszczenia punktów leżących na brzegu powierzchni środkowej płyty oraz kąt obrotu elementów liniowych mierzonych wzdłuż grubości płyty, w otoczeniu środkowej powierzchni płyty (dla $x = \beta a$ i $z = 0$) w tym przypadku w oparciu o zależności (5.14), (2,6) można przedstawić w postaci:

$$(6.5) \quad w_a = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 \text{Ber}(\beta a e^{i\alpha}) + C_2 \text{Bei}(\beta a e^{i\alpha}),$$

$$(6.6) \quad u_a = -\eta \{ C_1 [\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ + C_2 [-\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \beta a A_1 \},$$

$$(6.7) \quad \Theta_a = -\frac{3k}{2\beta h G^z} \left\{ C_1 \left[\left(\cos 2\alpha + \frac{2\beta h G^z}{3k} \right) \text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha \right] + \right. \\ \left. + C_2 \left[\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \left(\cos 2\alpha + \frac{2\beta h G^z}{3k} \right) \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \right] \right\}$$

gdzie:

$$\Theta = \frac{\partial u \left(\frac{x}{\beta}, z \right)}{\partial z}.$$

Dla weryfikacji podanych zależności przeprowadzono obliczenia dla płyty wykonanej z materiału o ortotropii cylindrycznej takiej jak dla płyt perforowanych w zależności od współczynnika perforacji określonego w pracy T. SŁOTA [2]. Następnie założono, że własności materiału w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty są takie same jak w płaszczyźnie płyty przy danym współczynniku perforacji (materiał izotropowy). Otrzymano mniejsze naprężenia dla płyty ortotropowej w porównaniu z naprężeniami dla takiej samej płyty izotropowej

- a) dla współczynnika perforacji 0,2 naprężenia otrzymano mniejsze o 17%
- b) dla współczynnika perforacji 0,4 naprężenia otrzymano mniejsze o 10%
- c) dla współczynnika perforacji 0,6 naprężenia otrzymano mniejsze o 3%

Podane zestawienie świadczy o celowości przeprowadzonej analizy i prawidłowości przyjętych założeń.

Dodatek

Zastosowana w pracy postać niektórych funkcji walcowych nie jest na ogół podawana w takiej formie w ogólnie dostępnej literaturze. Zatem dla ułatwienia przeprowadzenia obliczeń podano niżej postać tych funkcji (występujących pod nazwą funkcji Dinnika) oraz podstawowe ich zależności:

$$(1) \quad J_n(xe^{\pm i\alpha}) = \text{Ber}_n(xe^{i\alpha}) \pm i \text{Bei}_n(xe^{i\alpha}),$$

$$(2) \quad H_n^{(1)}(xe^{\pm i\alpha}) = \text{Her}_n(xe^{i\alpha}) \pm i \text{Hei}_n(xe^{i\alpha})$$

$$(3) \quad \text{Ber}_0(xe^{i\alpha}) = \text{Ber}(xe^{i\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \cos 2k\alpha}{2^{2k} (k!)^2},$$

$$(4) \quad \text{Bei}_0(xe^{i\alpha}) = \text{Bei}(xe^{i\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin 2k\alpha}{2^{2k} (k!)^2},$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{Her}_0(xe^{i\alpha}) = \text{Her}(xe^{i\alpha}) = & \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \text{Ber}(xe^{i\alpha}) - \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) \text{Bei}(xe^{i\alpha}) + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin 2k\alpha}{2^{2k} (k!)^2} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{Hei}_0(xe^{i\alpha}) = \text{Hei}(xe^{i\alpha}) = & \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) \text{Ber}(xe^{i\alpha}) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \text{Bei}(xe^{i\alpha}) - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \cos 2k\alpha}{2^{2k} (k!)^2} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

$$(7) \quad \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) = \cos \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \cos 2k\alpha}{2^{2+1} k!(k+1)!} - \sin \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \sin 2k\alpha}{2^{2+1} k!(k+1)!},$$

$$(8) \quad \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) = \sin \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \cos 2k\alpha}{2^{2k+1} k!(k+1)!} + \cos \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \sin 2k\alpha}{2^{2k+1} k!(k+1)!},$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \text{Her}_1(xe^{i\alpha}) &= \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) - \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2\sin \alpha}{x} + \frac{x \sin \alpha}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \sin(2k+1)\alpha}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \left[\sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right], \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \text{Hei}_1(xe^{i\alpha}) &= \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) + \\ &- \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\cos \alpha}{x} + \frac{x \cos \alpha}{2}\right) - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \cos(2k+1)\alpha}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \left[\sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right], \end{aligned}$$

gdzie: $k = 0, 1, 2, 3 \dots$

$m = 1, 2 \dots$

$C = 0,57721566$ — stała Eulera

$$(11) \quad \frac{d}{dx} [\text{Ber}(xe^{i\alpha})] = -\cos \alpha \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) + \sin \alpha \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}),$$

$$(12) \quad \frac{d}{dx} [\text{Bei}(xe^{i\alpha})] = -\sin \alpha \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) - \cos \alpha \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}),$$

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} [\text{Ber}(xe^{i\alpha})] &= -\cos 2\alpha \text{Ber}(xe^{i\alpha}) + \sin 2\alpha \text{Bei}(xe^{i\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{x} [\cos \alpha \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) - \sin \alpha \text{Bei}_1(xe^{i\alpha})], \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} [\text{Bei}(xe^{i\alpha})] &= -\sin 2\alpha \text{Ber}(xe^{i\alpha}) - \cos 2\alpha \text{Bei}(xe^{i\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{x} [\sin \alpha \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) + \cos \alpha \text{Bei}_1(xe^{i\alpha})]. \end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę, że dla $x = 0$ mamy:

$$\text{Ber}(xe^{i\alpha}) = 1; \quad \text{Bei}(xe^{i\alpha}) = 0; \quad \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) = 0;$$

$$\text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) \right] = \frac{\cos \alpha}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) \right] = \frac{\sin \alpha}{2}$$

a funkcje $\text{Her}(xe^{i\alpha})$, $\text{Hei}(xe^{i\alpha})$, $\text{Her}_1(xe^{i\alpha})$, $\text{Hei}_1(xe^{i\alpha})$ w tym przypadku przyjmują wartości nieokreślone.

Aby obliczyć pochodne funkcji $\text{Her}(xe^{i\alpha})$ i $\text{Hei}(xe^{i\alpha})$ należy we wzorach (11)÷(14) zastąpić odpowiednio funkcję $\text{Ber}(xe^{i\alpha})$ funkcją $\text{Her}(xe^{i\alpha})$, a funkcję $\text{Bei}(xe^{i\alpha})$ funkcją $\text{Hei}(xe^{i\alpha})$.

Pozostałe funkcje walcowe są na ogół znane i występują w ogólnie dostępnej literaturze.

Literatura cytowana w tekście

1. D. FREDERICK, *On some problems in bending of thick circular plates on an elastic foundation*. Journal of Applied Mechanics. June 1956.
2. T. SLOT, *Orthotropic analysis of thick perforated plate with pressure on one side*. In: Second International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology. Berlin 10 - 14.09.1973 vol. F6/8.
3. S. A. AMBARCUMJAN, D. W. PIETMALAŻJAN, *K teorii ortotropnych obłoczek i platinok*. Izwiestia A. N. Arm. SSR (Fiz-mat, nauk) T — XII Nr 1 1959 r.
4. S. A. AMBARCUMJAN, *K teorii izgiba anizotropnych platinok*, Izwiestia AN — SSSR OTN Nr 5 1958.
5. S. TIMOSZENKO, S. WOJNOWSKIJ — KRIEGIRE, *Teoria płyt i powłok*. Wyd. ARKADY 1962 r.
6. *Sprawocznik Procnost — Ustojciwost — Koliebanija*, Tom 1 Izd. Masinostroenie, Moskwa 1968 r.
7. W. Z. WŁASOW, *Obszaja teoria obłoczek* Izd. Tiechn — Teoriet liter. Moskwa — Leningrad 1949 r.
8. W. URBANOWSKI, *Niektóre przypadki zginania płyt okrągłych połączonych z podłożem sprężystym o własnościach uogólnionych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika Nr. 3 Warszawa 1956
9. A. J. MARKUSIEWICZ, *Teoria analitycznych funkcji*, Gostiechizdat, Moskwa — Leningrad 1950
10. J. M. RYŻYK, J. S. GRADSZTEJN.: *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów* Wyd. PWN Warszawa 1964 r.

Резюме

ТОЛСТАЯ КРУГЛАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ОРТОТРОПНАЯ ПЛИТА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В статье представлено аналитическое решение для перфорированной толстой круглой плиты лежащей на упругом основании и нагруженной давлением. Дифференциальные уравнения равновесия решено для общего случая. Полученные функции перемещений средней поверхности плиты дают возможность определения сил, моментов и напряжений в любом её сечении. Постоянные интегрирования определено для цилиндрически ортотропной плиты нагруженной силами и моментом на контуре. Для облегчения применений теории перечислены свойства цилиндрических функций.

Summary

A THICK ORTHOTROPIC CIRCULAR PLATE ON AN ELASTIC FOUNDATION

In the paper the analytical solution for a thick orthotropic circular plate on an elastic foundation subjected to pressure load is presented. A general solution of a differential equation of a plate has been carried out. Displacement functions of mid surface elements have been obtained permitting to describe internal forces, moments and stresses. In the case of the plate loaded by edge forces and moments the integral constants were defined.

To facilitate the applications we have listed in Appendix the properties of cylindrical functions.

ŁÓDŹ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 stycznia 1979 roku

ROZWIĄZANIE UPROSZCZONYCH RÓWNAŃ STRUMIENIA SWOBODNEGO METODĄ
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

KRYSZYNA TUSTANOWSKA — KAMROWSKA (POZNAŃ)

1. Wprowadzenie

W pracy przedstawiono metodę rozwiązywania uproszczonych równań strumienia swobodnego opisujących wypływ czynnika z rury prostej metoda elementów skończonych. Obliczenia przeprowadzono dla obszaru w odległości $4 \div 8$ z/d od wylotu rury. Do rozwiązywania otrzymanego z dyskretyzacji metody elementów skończonych układu LN równań algebraicznych nieliniowych opracowano zmodyfikowaną metodę iteracyjną. Otrzymane za pomocą tej metody wyniki porównano z doświadczalnymi.

Ważniejsze oznaczenia:

- Q obszar,
- G brzeg obszaru,
- x, r, z współrzędne,
- u, v funkcje niewiadome,
- R równanie,
- L droga mieszania,
- E element skończony,
- Δ pole trójkąta,
- H funkcja kształtu,
- K macierz współczynników,

2. Postawienie problemu i dyskretyzacja

Rozważmy swobodny wypływ czynnika z rury prostej (rys. 1), opisany w obszarze osiowosymetrycznym Q , uproszczonym równaniem ruchu strumienia swobodnego

$$(1a) \quad \frac{\partial}{\partial z}(ru^2) + \frac{\partial}{\partial r}(ruv) = -\frac{\partial}{\partial r}(rL),$$

oraz równaniem ciągłości przepływu

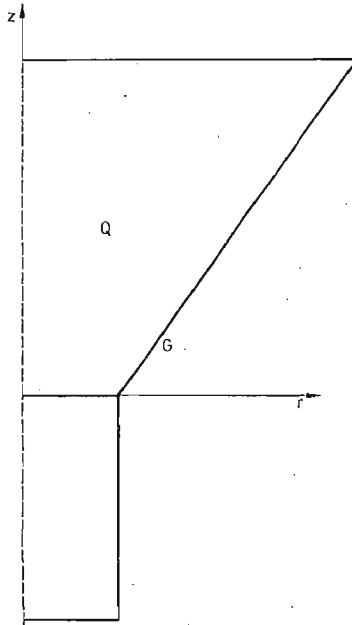
$$(1b) \quad \frac{\partial}{\partial z}(ru) + \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0,$$

gdzie funkcje niewiadome $u(r, z)$ i $v(r, z)$ oznaczają odpowiednio prędkości osiową i pro-

mieniową czynnika, oraz na brzegu G obszaru Q spełniają warunek brzegowy I-go rodzaju

$$(2) \quad u(r, z) = u_0, \quad v(r, z) = v_0, \quad (r, z) \in G,$$

zaś $L = L(r, z) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2$ oznacza drogę mieszania czynnika [1].



Rys. 1,

Ponieważ celem naszym jest rozwiązanie problemu numerycznie, więc musimy go sprowadzić do postaci dyskretnej. Uczynimy to za pomocą metody elementów skończonych (MES).

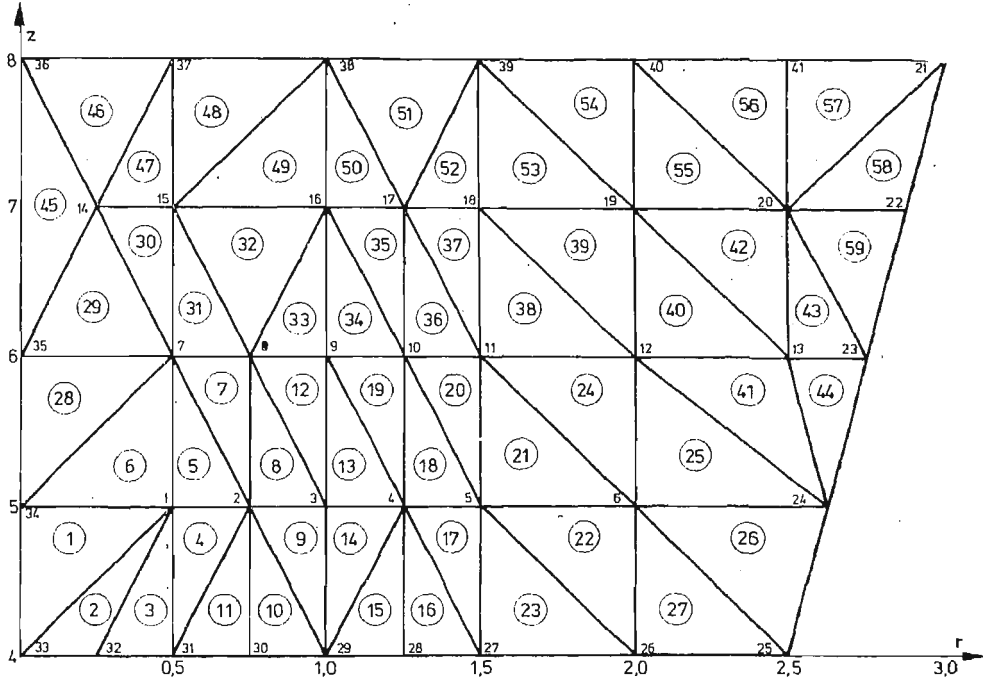
Dyskretyzacja obszaru: Nie będziemy rozpatrywać całego obszaru określoności funkcji u i v z (1), lecz pewien jego fragment (w dalszym ciągu oznaczony jako Q), którego wymiary podane są na rysunku 2, gdzie jednostką jest promień rury.

W obszarze Q ustalamy LWR , w naszym przypadku $LWR = 41$, dowolnie wybranych punktów (węzły). Jako elementy skończone przyjmujemy trójkąty, które numerujemy od 1 do $LER = 59$. Dla każdego z LER trójkątów wypiszemy, zachowując kierunek lewoskrętny, odpowiadające mu węzły (LWE), stanowiące jego wierzchołki (tablica WE). Kolejność numerowania węzłów obszaru i elementów oraz ustalenie numeru pierwszego węzła dla każdego elementu w tablicy WE , zależą od sposobu ułożenia programu.

Zbiór wszystkich utworzonych wyżej trójkątów, który oznaczymy przez \bar{Q} , stanowi model dyskretny obszaru Q (rys. 2).

Dyskretyzacja funkcji: Zbudowaliśmy model dyskretny \bar{Q} obszaru Q określoności funkcji $u(r, z)$ i $v(r, z)$. Przystępujemy teraz do budowy funkcji $\bar{u}(r, z)$ i $\bar{v}(r, z)$, dla których obszarem określoności będzie Q . Ponieważ, w naszym przypadku, dyskretyzacja tak funkcji $u(r, z)$ jak i $v(r, z)$ będzie przebiegała analogicznie, więc w celu ograniczenia liczby wzorów (podwójnie) przeprowadzimy ją tylko dla funkcji $u(r, z)$.

W wybranych *LWR* węzłach obszaru \bar{Q} , wartości funkcji $u(r, z)$ oznaczymy przez U^i , $i = 1, \dots, LWR$. Rozpatrzmy teraz dowolny element skończony. Będziemy uważali go za obszar określoności pewnej funkcji lokalnej, oznaczonej przez $u^{(e)}(r, z)$, tego typu co



Rys. 2,

$u(r, z)$. Funkcję lokalną aproksymuje się na odpowiadającym jej elemencie funkcjami ciągłymi, postaci

$$(3) \quad u^{(e)}(r, z) = H_1^{(e)}(r, z)u_1^{(e)} + \dots + H_{LWE}^{(e)}(r, z)u_{LWE}^{(e)},$$

gdzie $u_n^{(e)}$ są wartościami funkcji $u^{(e)}(r, z)$ w węzłach elementu, zaś funkcje $H_n^{(e)}(r, z)$, $n = 1, \dots, LWE$, dla elementu trójkątnego mają postać [2, 9]

$$(4) \quad H_n^{(e)}(r, z) = (a_n + b_n + c_n z) / 2\Delta, \quad n = i, j, k.$$

Stałe a, b, c zależą tylko od współrzędnych węzłów elementu [9], Δ jest polem trójkąta E_e , zaś i, j, k oznaczają kolejne numery jego wierzchołków. W tym przypadku funkcja $u^{(e)}(r, z)$, zgodnie z (3) i (4), w każdym elemencie E_e , będzie następująca

$$(5) \quad u^{(e)}(r, z) = \frac{1}{2\Delta} [r z] \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^i \\ U^j \\ U^k \end{Bmatrix} = [H^e] \{U^e\}.$$

Ostateczny model dyskretny funkcji $u(r, z)$ w obszarze \bar{Q} otrzymamy po zastosowaniu typowego dla *MES* zbierania po elementach [2, 4, 9]

$$(6) \quad u(r, z) \cong \bar{u}(r, z) = \sum_{e=1}^{LER} u^{(e)}(r, z) = \sum_{e=1}^{LER} H^{(e)}(r, z)u_n^{(e)} = [H]\{U\},$$

gdzie $H(r, z)$ oznacza globalną aproksymację funkcji $u(r, z)$ w \bar{Q} , a $\{U\}$ jest wektorem wartości tej funkcji w LWR węzłach obszaru \bar{Q} .

Dyskretyzacja równań. Niech, zgodnie z (5)

$$(7) \quad u^{(e)}(r, z) = [H^e]\{U\}^e, \quad v^{(e)}(r, z) = [H^e]\{V\}^e$$

będzie aproksymacją dla u i v w typowym elemencie trójkątnym E_e . Ponieważ (7) jest tylko przybliżeniem funkcji $u(r, z)$ i $v(r, z)$ w każdym elemencie skończonym, więc błędy

$$(8) \quad R_1^{(e)}(r, z) = \frac{\partial}{\partial z}(ru^{(e)2}) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ru^{(e)}v^{(e)} + rL \left(\frac{\partial}{\partial r} u^{(e)} \right)^2 \right] = 0,$$

$$R_2^{(e)}(r, z) = \frac{\partial}{\partial z}(ru^{(e)}) + \frac{\partial}{\partial r}(rv^{(e)}) = 0,$$

nie będą tożsamościowo równe zero. Możemy je zminimalizować w każdym elemencie metodą Galerkiną [2, 4, 8, 9], dla której funkcje wagowe są równe $H^{(e)}$, oraz

$$(9) \quad \int_{E_e} H^{(e)}(r, z) R_i^{(e)}(r, z) dE_e = 0, \quad i = 1, 2.$$

Dla naszych równań warunków (9), po uwzględnieniu (8), przyjmie postać

$$(10) \quad \int_{E_e} H^{(e)} \left[\frac{\partial}{\partial z}(ru^{(e)2}) + \frac{\partial}{\partial r} \left(ru^{(e)}v^{(e)} + rL \left(\frac{\partial}{\partial r} u^{(e)} \right)^2 \right) \right] dE_e = 0,$$

$$\int_{E_e} H^{(e)} \left[\frac{\partial}{\partial z}(ru^{(e)}) + \frac{\partial}{\partial r}(rv^{(e)}) \right] dE_e = 0.$$

W tym miejscu zazwyczaj w celu obniżenia rzędu równania, lub wydzielenia z równania tych jego części, które działają tylko na brzegu obszaru (umożliwia to wprowadzenie warunków brzegowych II-go i III-go rodzaju, o ile takie są dane), stosujemy do niego wzór Greena [2, 3].

W naszym przypadku wzór ten zastosujemy do pierwszego z równań (10). W tym celu musimy je przekształcić do odpowiedniej postaci. Wtedy, zapisując układ (10) już dla całego elementu E_e , mamy

$$(11) \quad \int_{E_e} [H_z]^T r [H]\{U\} [H]\{U\} + [H_r]^T r [H]\{U\} [H]\{V\} +$$

$$+ [H_r]^T r L [H_r]\{U\} [H_r]\{U\} dr dz =$$

$$= \int_{G_e} [H]^T r \left(\bar{u}^2 \cos g + \left(\bar{u}\bar{v} + L \left(\frac{\partial}{\partial r} \bar{u} \right)^2 \right) \sin g \right) dS = 0,$$

$$\int_{E_e} ([H]^T r ([H_z]\{U\} + [H_r]\{V\}) + [H]^T [H]\{V\}) dr dz = 0,$$

gdzie $H_r = \partial H / \partial r$, $H_z = \partial H / \partial z$, G_e jest brzegiem elementu E_e , zaś g kątem normalnej zewnętrznej do brzegu trójkąta.

Nie użyliśmy w (11) symbolu (e) , aby nie zaciemniać zapisu. Należy jednak pamiętać, że wszystkie występujące tam wielkości odnoszą się do elementu E_e .

Całka po G_e , występująca w (11), jest równa zeru na wszystkich brzegach wewnętrznych obszaru \bar{Q} [8], natomiast na brzegach elementów pokrywających się z G , nie będziemy z niej korzystać, gdyż mamy dany warunek I-go rodzaju.

Jeżeli teraz do r , z i L zastosujemy aproksymację tego samego typu co dla funkcji nieświadomych, określoną wzorami (7), to wykorzystując wzór [9]

$$(12) \quad \int_{E_e} H_i^\alpha H_j^\beta H_k^\gamma dr dz = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2\Delta,$$

będziemy mogli z łatwością policzyć całki występujące w (11). I tak

$$\int_{E_e} [H]^T [H] dr dz = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{12} [B],$$

$$\int_{E_e} [H]\{r\}[H]\{U\}[H] dr dz = \frac{\Delta}{60} \{U\}^T \begin{bmatrix} (622) & (221) & (212) \\ (221) & (262) & (122) \\ (212) & (122) & (226) \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{60} \{U\}^T [A],$$

$$(13) \quad \int_{E_e} [H]\{r\}[H] dr dz = \frac{\Delta}{12} \{r\}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{12} \{r\}^T [B],$$

gdzie $(pqs) = pr_i + qr_j + sr_k$. Oznaczając

$$(14) \quad [H_r] = \frac{1}{2\Delta} [b_i b_j b_k] = \frac{1}{2\Delta} [b],$$

$$[H_z] = \frac{1}{2\Delta} [c_i c_j c_k] = \frac{1}{2\Delta} [c],$$

otrzymamy z (11) układ sześciu równań algebraicznych, dla każdego z LER trójkątów E_e .

$$(15) \quad [c]^T \{U\}^T [A] \{U\} + [b]^T \{U\}^T [A] \{V\} + [b]^T \{r\}^T [B] \{L\} [b] \{U\} [b] \{U\} = 0,$$

$$[B] \{r\} [c] \{U\} + 2\Delta [B] \{V\} + [B] \{r\} [b] \{V\} = 0,$$

który zapisany bardziej przejrzyście jest postaci

$$(16) \quad M_1^{(e)}(u, v) = \begin{cases} c_i [A] uu + b_i [A] uv + b_i [k] uu \\ c_j [A] uu + b_j [A] uv + b_j [k] uu \\ c_k [A] uu + b_k [A] uv + b_k [k] uu \end{cases} = 0,$$

$$M_2^{(e)}(u, v) = [k3] \{U\} + [k4] \{V\},$$

gdzie

$$(17) \quad [k] = [b]^T \{r\}^T [B] \{L\} [b],$$

$$[k3] = [B] \{r\} [c],$$

$$[k4] = 2\Delta [B] + [B] \{r\} [b].$$

$M_1^{(e)}$ i $M_2^{(e)}$ są modelami dyskretnymi równań (1) w elemencie E_e , a zapis symboliczny $[A]uv$ należy rozumieć jako $\{U\}^T [A] \{U\}$, oraz wszystkie wielkości występujące w (16) odnoszą się do E_e . Model globalny równań (1) otrzymamy po złożeniu równań (16) dla całego obszaru \bar{Q} . Powstanie w ten sposób LWR równań typu

$$(18a) \quad [K1]UU + [K2]UV = 0,$$

oraz LWR równań liniowych

$$(18b) \quad [K3]\{U\} + [K4]\{V\} = 0.$$

Niech teraz $LN = LWR - LWD$ będzie ogólną liczbą węzłów obszaru Q , w których poszukujemy wartości funkcji $\bar{u}(r, z)$ i $\bar{v}(r, z)$. LWD oznacza liczbę tych węzłów obszaru Q , w których znamy wartości funkcji \bar{u} i \bar{v} (warunki (2)).

Oczywiście, liczba punktów brzegowych, dla których znamy wartości funkcji nie musi być taka sama dla u i v . W naszym przypadku przyjmiemy jednak, że one są równe, co nie zawęży dalszych rozważań.

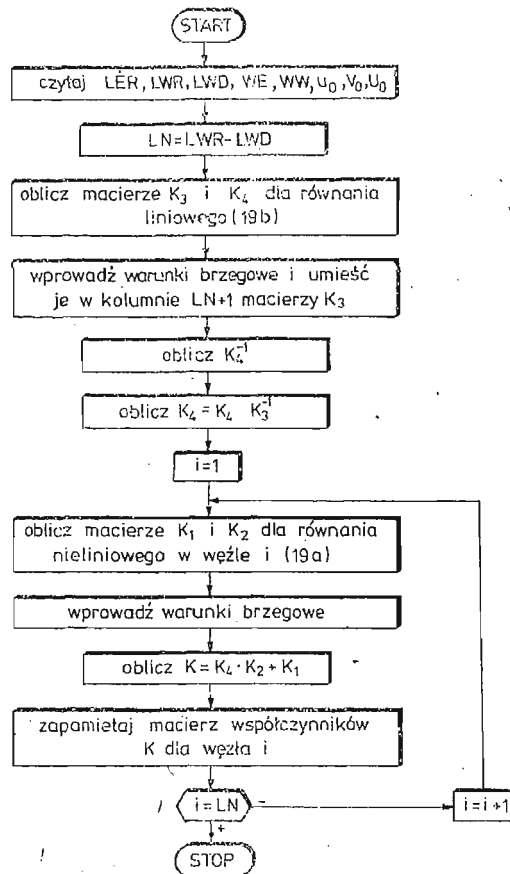
Po wprowadzeniu warunków (2) do układu (18), otrzymamy $2 \times LN$ równań

$$(19) \quad \begin{aligned} [K1]UU + [K2]UV &= 0, \\ [K3]\{U\} + [K4]\{V\} &= \{F\} \end{aligned}$$

Teraz $U = [U^1, \dots, U^{LN}, 1]$, a macierze $[K1]$ i $[K2]$ są rozmiaru $(LN+1) \times (LN+1)$.

Wykorzystując fakt, że macierz $[K4]$ jest nieosobliwa ((17)), możemy z drugiej części układu (19) wyznaczyć wektor $\{V\}$

$$(20) \quad \{V\} = [K4]^{-1}(\{F\} - [K3]\{U\}),$$



Rys. 3 Schemat blokowy.

a wstawiając go do części pierwszej układu (19), otrzymamy LN równań nieliniowych, każde postaci

$$(21) \quad [K]UU = 0,$$

o niewiadomych U^i , $i = 1, \dots, LN$.

Oczywiście macierz $[K]$ można zawsze przedstawić jako macierz symetryczną.

Schemat blokowy programu realizującego opisaną dyskretyzację, którego wynikiem jest układ równań (21), pokazano na rysunku 3. Czas jego realizacji na mc Odra 1204 wynosi, dla naszego zadania, 224 s.

3. Rozwiązanie

Układ równań (21) próbowano rozwiązać wieloma metodami (Newtona-Raphsona (NR) [5], gradientów sprzężonych (GW) [4], linearyzacji Steffensena (ST) [6], iteracji prostej (IT) [4], i inne). Każda z tych metod wymaga jednak dosyć dobrej znajomości przybliżonych wartości rozwiązania, co nie zawsze jest łatwe, a w większości przypadków wręcz niemożliwe. Podjęto więc próbę opracowania takiej metody (lub zmodyfikowania jednej ze znanych metod), która nie zależałaby od punktu startowego.

Ponieważ układ (21) można z łatwością zapisać w postaci

$$(22) \quad a^n U^n U^n + 2b^n U^n + c^n = 0, \quad n = 1, \dots, LN,$$

gdzie

$$(23) \quad \begin{aligned} a^n &= K_{nn}^n, & b^n &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{LN+1} K_{in}^n U^i, \\ c^n &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{LN+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{LN+1} K_{ij}^n U^i U^j, & U^{LN+1} &= 1, \end{aligned}$$

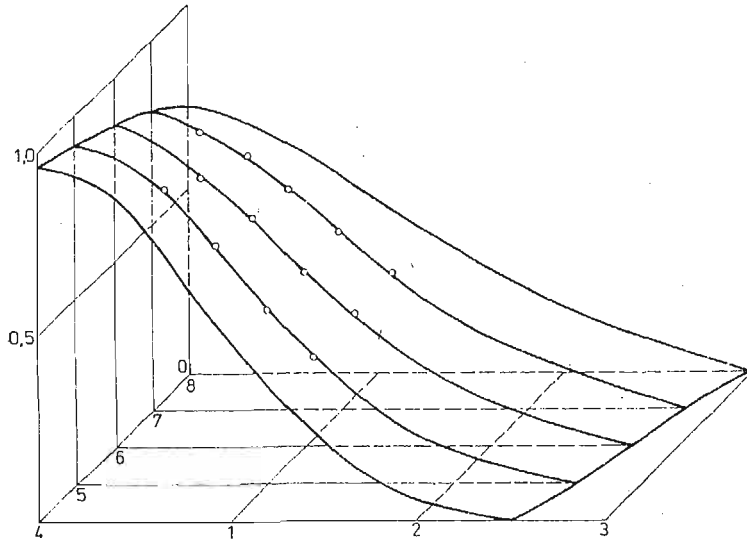
więc niewiadomą U^n można prosto wyznaczyć z n -tego równania

$$(24) \quad U^n = \frac{-b^n \pm \sqrt{b^n b^n - a^n c^n}}{a^n}.$$

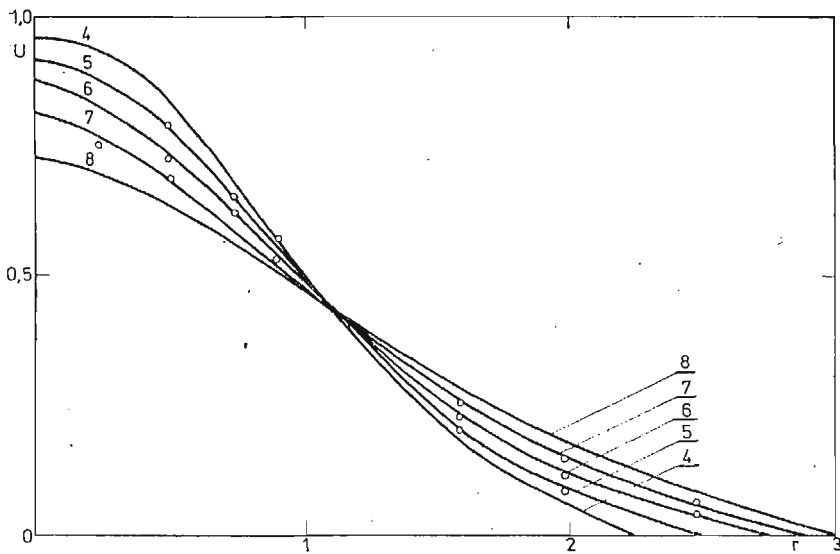
Pozostaje tylko problem, który ze znaków (+ czy -) przyjąć dla każdej z niewiadomych U . Okazuje się, że znak ten nie jest stały w każdej iteracji, lecz może ulegać zmianie. Jego dobór można ustalić automatycznie w programie, po wprowadzeniu pewnych warunków dodatkowych.

Bodaj najważniejszym z nich jest założenie o zbieżności metody. Oznacza to, że mając dla każdej z niewiadomych, w każdej iteracji po dwa pierwiastki, dobieramy ten z nich, dla którego różnica z rozwiązaniem dotychczasowym jest mniejsza.

W ten sposób otrzymane wyniki porównano z doświadczalnymi. Wynik pokazano na rysunku 4 i 5, gdzie punkty oznaczają wartości obliczone. Rysunki 6 - 10 przedstawiają zachowanie się rozwiązania naszego zadania w dwudziestu pierwszych iteracjach (it). Punktem wyjściowym był punkt zerowy, tzn. na początku wszystkie $U^i = 0$, $i = 1, \dots, LN$.



Rys. 4.



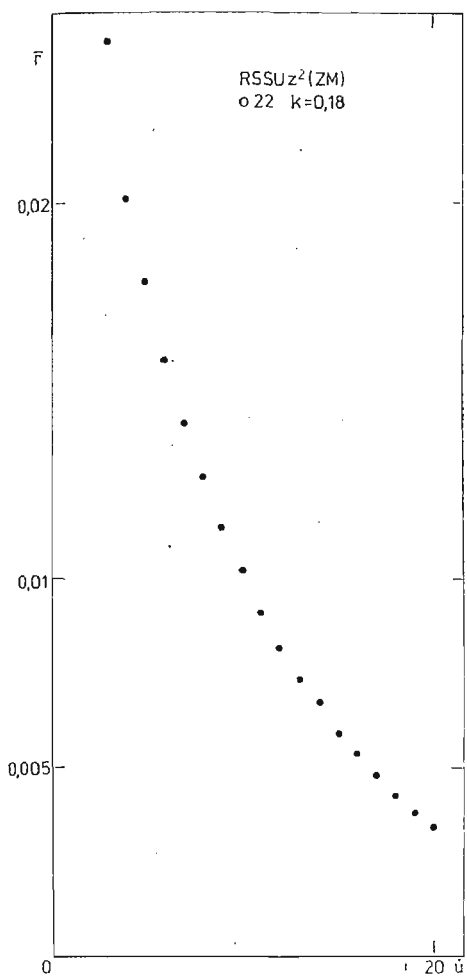
Rys. 5.

Rysunek 6 przedstawia średnią kwadratową wartość z funkcji układu (21). Jeżeli nasze równanie zapiszemy w postaci

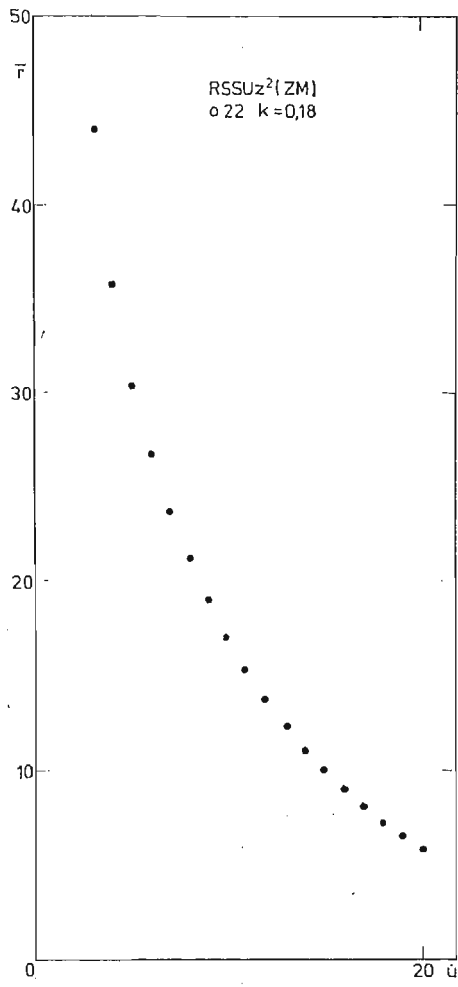
$$f_i(U) = 0, \quad i = 1, \dots, LN,$$

to

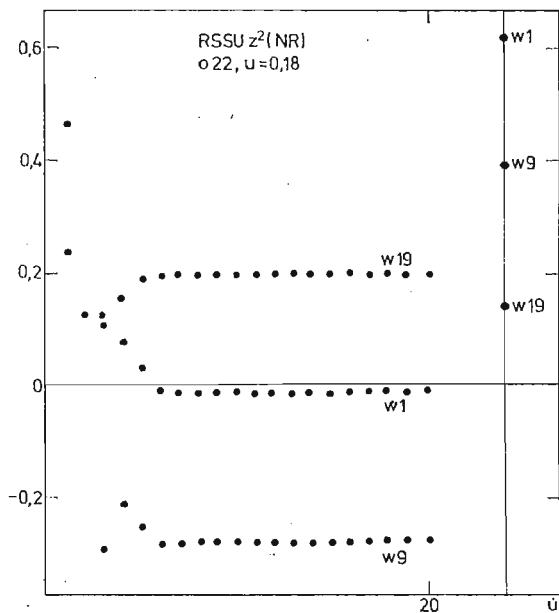
$$F_u = \sqrt{\frac{LN}{\sum_{i=1}^{LN} f_i^2(u_{it}) / LN}}.$$



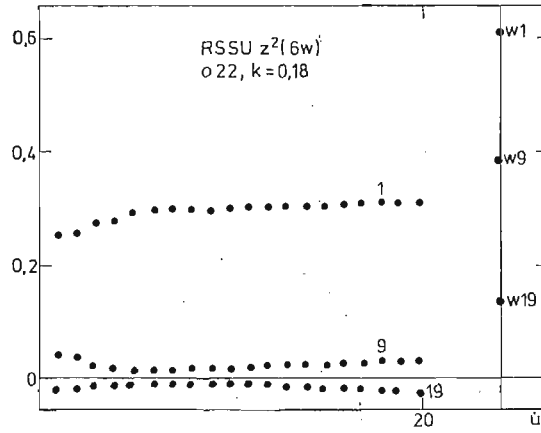
Rys. 6.



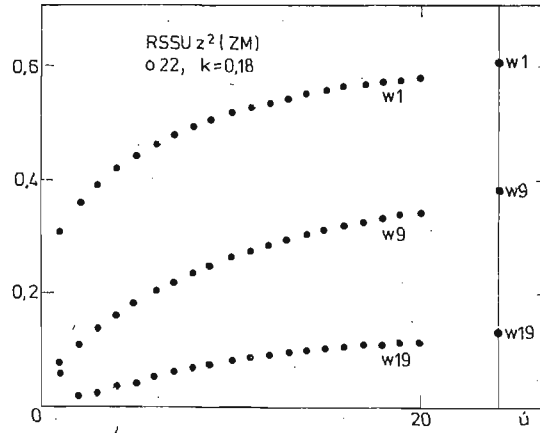
Rys. 7.



Rys. 8.



Rys. 9.



Rys. 10.

Na rysunku 7 pokazano odpowiednio błąd średni

$$r_{it} = \sqrt{\frac{LN}{\sum_{l=n}^N (U_{it-1}^l - U_{it}^l)^2 / LN}},$$

kolejnych przybliżeń pierwiastków. Natomiast rysunki 8, 9, 10 przedstawiają zachowanie się trzech dowolnie wybranych pierwiastków układu (21) dla trzech metod (NR, GW, ZM).

4. Podsumowanie

Przedstawiona wyżej, na przykładzie, metoda rozwiązywania równań różniczkowych, może być wykorzystana również w większości nieliniowych problemów pola.

Wybór kształtu elementu oraz funkcji aproksymującej jest dowolny i zależy od potrzeb i wykonawcy. Konkretna jego postać jest ważna dopiero po przystąpieniu do całkowania równań (11).

Kształt układu (21) zależy tylko od charakteru równań wyjściowych (1), a ściśle od stopnia występujących w nich funkcji niewiadomych.

Wprowadzenie warunków brzegowych II-go i III-go rodzaju również nie nastęrcza formalnie większych problemów. Bardziej pracochłonne będzie jedynie wtedy ułożenie programu.

Zmodyfikowana metoda iteracyjna (ZM) może służyć do rozwiązywania nie tylko równań kwadratowych, lecz ogólnie do równań typu wielomianowego. Najefektywniej jednak można ją wykorzystać w celu ustalania przybliżenia początkowego, na tyle dokładnego, aby można było stosować inne szybsze metody rozwiązywania równań nieliniowych, np. metodę Newtona-Raphsona.

Literatura cytowana w tekście

1. L. BOGUSŁAWSKI, Cz. O. POPIEL, E. DUBANIEWICZ, K. TUSTANOWSKA, *Konwekcyjna wymiana ciepła i masy w przepływach turbulentnych*, Opracowanie wewnętrzne, Poznań 1977.
2. J. DESCOLOUX, *Metoda elementów skończonych*, Mir, Moskwa 1976.
3. G. M. FICHTENHOLZ, *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa 1975.
4. J. T. ODEN, *Koniecznyje elementy w nieliniowej mechanice splosznych sred*, Mir, Moskwa 1976.
5. J. M. ORTEGA, W. G. RHUMBOLAT, *Iteracyjnyje metody rieszenia nieliniowych sistem urawnienij so mnogimi niezwiestnymi*, Moskwa 1975.
6. W. PANKIEWICZ, *Utoczenie rieszenij sistem nielintejnych algiebraicznych i transciendentnych urawnienij pobszeziennym metodom Steffensena*, Algorytmy i Algoritmicheskie Jazyki, 4/1969.
7. K. TUSTANOWSKA, M. CIAŁKOWSKI, R. PIĄTKOWSKI, *Metoda elementów skończonych dla liniowych problemów pola*, I Wydziałowa Sesja Naukowa, Poznań 1977.
8. B. WOSIEWICZ, *Model mieszany metody elementów skończonych dla filtracji ustalonej*, *Archiwum Hydrotechniki*, 2/1975.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

РЕШЕНИЕ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СВОБОДНОЙ СТРУИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье представлено метод решения упрощенных уравнений свободной струи изобраающих вытекание потока с прямой трубы методом конечных элементов (МКЭ). Исчисления сделано для области в расстояний $4 \div 8 z/d$ от выхода трубы. Для решения полученного из дискретизации МКЭ системы ЛН алгебраических нелинейных уравнений разработано модифицированный итерационный метод.

Получены при помощи этого метода результаты сравнено с экспериментальными.

Summary

THE NUMERICAL SOLUTION OF A SIMPLIFIED FREE ROUND JET EQUATIONS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

A method of numerical solution is presented of simplified equations of free round jet flowing from a straight pipe using the finite element method (FEM). The solution is-given for the region $4 \div 8 z/d$ from the pipe outlet.

A modified iteration method is proposed to solve LN algebraic nonlinear equations system obtained from FEM discretization.

The results is compared with the experimental data.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ
I SILNIKÓW SPALINOWYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1979 roku

DRGANIA UKŁADU PRĘTOWEGO Z TARCIEM COULOMBA NA POWIERZCHNIE
NIECIĄGŁOŚCI¹⁾

ALFRED ZMITROWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

Liczne urządzenia mechaniczne posiadają konstrukcyjne nieciągłości w postaci połączeń, miejsc podparcia, powierzchni rozdziału. Wśród nich wyróżnia się te nieciągłości, które charakteryzują się wyraźnym ruchem względnym stykających się powierzchni, zwanym poślizgiem lub makropoślizgiem. W tych przypadkach zazwyczaj pomija się odkształcalność stykających się powierzchni i traktuje je jako idealnie sztywne. Osobną grupę stanowią połączenia w których zachodzą t.zw. mikropoślizgi, wskutek sprężystości powierzchniowej styku lub obecności dodatkowych elementów sprężystych (nity, śruby, sworznie).

Towarzyszące poślizgowi i mikropoślizgowi siły tarcia suchego powodują rozpraszanie energii ruchu, przemieszczających się względem siebie elementów. Przez zjawisko dysypacji energii drgającego układu mechanicznego, tarcie suche przyczynia się do redukcji odkształceń i naprężeń dynamicznych a tym samym do zwiększenia niezawodności i żywotności urządzenia. Tłumienie drgań na skutek tarcia oddziaływania stykających się powierzchni jest szczególnie pożądane tam gdzie wymiary, ciężar, stopień złożoności lub koszt urządzenia odgrywają decydującą rolę. Ponadto tarcie powierzchniowe stykających się elementów jest na ogół większe od tarcia materiałowego i w wielu maszynach jest głównym mechanizmem tłumienia [1, 2, 3].

Stosowany opis sił oporu w konstrukcyjnych nieciągłościach nie zawsze jest związany z określonym sposobem dysypacji energii. Zazwyczaj tłumienie to jest przedstawiane w 3 znanych postaciach (lepkie, histerezyowe, tarcia) lub ich kombinacji. Tarcie suche generowane podczas ruchu najczęściej określa się znanym wzorem Amontonsa i Coulomba. Przyjęcie liniowej zależności siły tarcia od wersora prędkości poślizgu i wielkości wzajemnego docisku, wprowadza nieliniowości do równań ruchu.

Drgania złożonych układów konstrukcyjnych z tarcie suchym na powierzchniach nieciągłości zazwyczaj opisuje się zastępczym układem o 1 stopniu swobody. Taki model dynamiczny przyjmowano dla belek warstwowych [1, 4, 5] oraz belek wspornikowych z niewielkim obszarem styku [1, 4]. Podobnie postępowano w przypadku prętów z tarcie suchym w obszarze zamocowania [1, 4, 6, 7]. W [8] modelem dynamicznym łopatki maszyny wirnikowej z tarcie konstrukcyjnym w zamocowaniu jest układ o zmiennej

¹⁾ Praca wykonana w ramach planu badań MR 1/26, temat 09.3.

liczbie stopni swobody (1 lub 2). Stan sztywnego i przesuwnego zamocowania a tym samym liczbę stopni swobody układu określa zależność ujmująca wszystkie parametry układu. Przeszczenia łopatki sprężarki z tarcie suchym w styku t.zw. półek opisano w [9] dynamicznymi liczbami wpływowymi. Przy tym założono zlinearyzowaną postać siły tarcia suchego. Ciągłe układy belkowe z tarcie suchym na powierzchni rozdziału i w zamocowaniu rozważano w [10, 11, 12]

Prosty układ o 1 stopniu swobody z tłumieniem tarciovym jest przedmiotem analizy zamieszczonej w podręcznikach teorii drgań np.: [13, 14, 15, 16]. Jego ruch opisuje nieliniowe równanie różniczkowe. Równanie to można przedstawić w postaci 2 równań liniowych których rozwiązania „zszywa się” ze sobą w chwilach zmiany znaku prędkości. Wiele prac poświęcono analizie rozwiązań bardziej złożonych równań różniczkowych zwyczajnych ze składnikiem uwzględniającym wpływy tarciove np.: [17, 18]

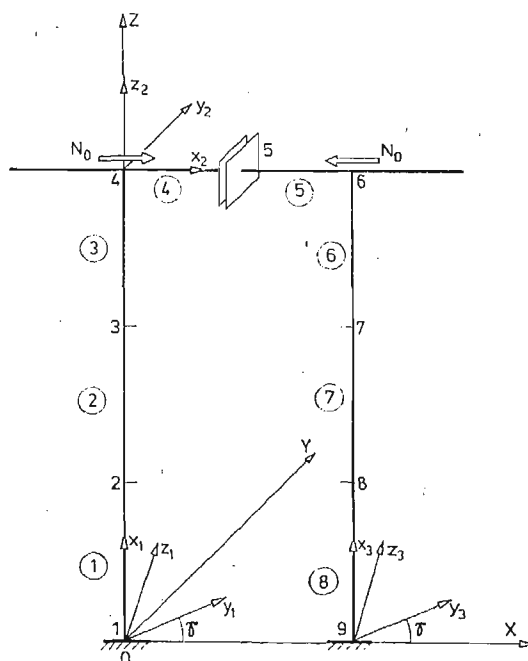
Trudności związane z opisem sił oporu w miejscach nieciągłości oraz z poszukiwaniem rozwiązań nawet najprostszych równań ruchu sprawiły, że w cytowanych powyżej pracach rozpatrywano jedynie wybrane zagadnienia dynamiki. Można stwierdzić, że przyjęcie złożonego układu dynamicznego z reguły pociągało za sobą uproszczenie modelu tarcia suchego (np. jego linearyzację) i na odwrót. Między innymi teoria układów o przeliczalnej ilości stopni swobody z udziałem sił tarcia suchego jest jeszcze w trakcie opracowywania.

W niniejszej pracy podjęto próbę sformułowania metody analizy drgań układu prętowego z tarcie suchym w miejscu konstrukcyjnej nieciągłości. W odróżnieniu od znanych rozważań [1, 4, 9] modelem dynamicznym jest układ o wielu stopniach swobody. Ogólny opis sił tarcia suchego na powierzchni styku otrzymano przy wykorzystaniu tensora tarcia Coulomba. Na przykładzie drgań pakietu łopatek turbinowych wskazano na efekty wzbudzeń drgań przez tarcie oraz sprzężeń poprzez sprężystość i anizotropię tarcia suchego.

2. Sposób dyskretyzacji

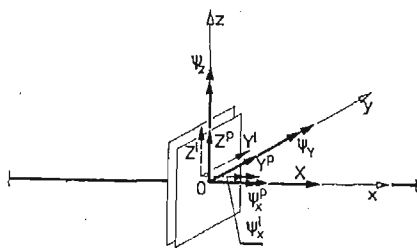
Rozważmy pokazany na rys. 1 układ ramowy z powierzchnią nieciągłości i sztywnym podparciem. Załóżmy pewien inercjalny układ współrzędnych $OXYZ$, rys. 1. Postępując zgodnie z formalizmem metody elementów skończonych i korzystając z jednowymiarowych elementów prętowych o 12 stopniach swobody [19, 20], można dokonać dyskretnego opisu układu. Przyjęto, że deformację prętowych elementów skończonych określają równania technicznej teorii zginania (z pominięciem deplanacji przekroju) oraz równania teorii skręcania swobodnego. Założenie o płaskich przekrojach dotyczy również powierzchni kontaktu. Środki ścinania pokrywają się ze środkami ciężkości przekrojów pręta.

Z rozwiązania równania różniczkowego pręta ściskanego (rozciąganego), zginanego i skręcanego określa się elementy macierzy funkcji kształtu. Te same funkcje interpolują przemieszczenia statyczne i dynamiczne na długości elementu prętowego. Wyznaczone zgodnie z powyższymi założeniami lokalne macierze mas i sztywności podane są w literaturze przedmiotu [19, 20]. Przy tym w konsystentnej macierzy mas uwzględniono wyrazy odpowiadające bezwładności obrotowej i skrętnej.



Rys. 1. Schemat układu dynamicznego. Numeracja węzłów i elementów.

Podział układu ramowego na elementy skończone przeprowadza się tak aby w miejscu nieciągłości wystąpił węzeł. W węźle tym dopuszcza się względny ruch translacyjny na płaszczyźnie Oyz oraz względny ruch wirowy wokół osi Ox , rys. 2. Stanem zespolenia nazywa się przypadek gdy stykające się powierzchnie nie przemieszczają się względem



Rys. 2. Przemieszczenia węzła nieciągłości w stanie całkowitego poślizgu.

siebie zaś stanem poślizgu gdy powierzchnie ślizgają się po sobie. W niniejszej pracy wyróżnia się 4 różne stany współpracy kontaktujących się powierzchni: stan całkowitego zespolenia, stan zespolenia w ruchu translacyjnym i poślizgu w ruchu wirowym, poślizgu w ruchu translacyjnym i zespolenia na względny obrót oraz stan całkowitego poślizgu.

Niech każdy z elementów skończonych mający jeden węzeł w miejscu nieciągłości deformuje się pod wpływem obciążeń i ruchu jak belka wspornikowa o swobodnym końcu w węźle nieciągłości. Ponadto w zależności od stanu współpracy stykających się powierzchni nakłada się warunki zgodności przemieszczeń węzłowych kontaktujących się elementów na ustalonych kierunkach. I tak w stanie całkowitego zespolenia przyjmuje się więzy zgod-

ności wszystkich przemieszczeń i obrotów węzła. Wówczas przemieszczenia i odpowiednie siły węzłowe w miejscu nieciągłości opisują wektory,

$$(2.1) \quad X^W = [X, Y, Z, \psi_x, \psi_y, \psi_z]^T,$$

$$(2.2) \quad F^W = [F_x, F_y, F_z, W_x, W_y, W_z]^T.$$

Podczas całkowitego poślizgu w węźle nieciągłości nakłada się więzy zgodności przemieszczeń X i obrotów ψ_y i ψ_z z lewej i prawej strony węzła, rys. 2. W stanie tym przemieszczenia i siły określają wektory,

$$(2.3) \quad X^W = [X, Y^l, Y^p, Z^l, Z^p, \psi_x^l, \psi_x^p, \psi_y, \psi_z]^T,$$

$$(2.4) \quad F^W = [F_x, F_y^l, F_y^p, F_z^l, F_z^p, W_x^l, W_x^p, W_y, W_z]^T.$$

Wskaźniki l i p oznaczają wielkości związane odpowiednio z lewą i prawą stroną węzła.

W zależności od ilości możliwych poślizgów w węźle nieciągłości należy odpowiednio zbudować wektory przemieszczeń, sił węzłowych, lokalne macierze mas i sztywności elementów z węzłem nieciągłości. W celu zachowania ogólnej reguły agregacji globalnych macierzy mas i sztywności oraz uwzględnienia niezależnego opisu translacji i wirowania dla obu powierzchni styku, wektory stanu elementów z węzłami nieciągłości mają wyrazy zerowe a macierze zerowe wiersze i kolumny. Niech wektorami stanu elementów z węzłem nieciągłości, podczas całkowitego zespolenia, będą

$$(2.5) \quad U^l = [U_1^l, U_2^l, \dots, U_{12}^l]^T,$$

$$(2.6) \quad U^p = [U_1^p, U_2^p, \dots, U_{12}^p]^T.$$

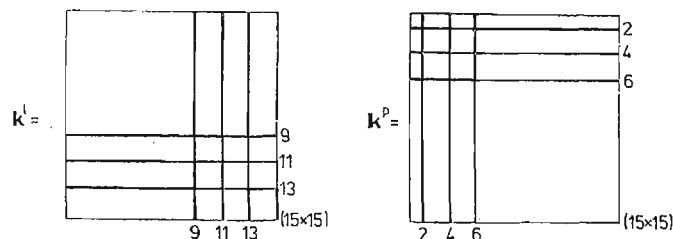
W przypadku całkowitego poślizgu wektory te przyjmują postać

$$(2.7) \quad U^l = [U_1^l, \dots, U_8^l, 0, U_9^l, 0, U_{10}^l, 0, U_{11}^l, U_{12}^l]^T,$$

$$(2.8) \quad U^p = [U_1^p, 0, U_2^p, 0, U_3^p, 0, U_4^p, \dots, U_{12}^p]^T.$$

Szkic lokalnych macierzy elementów z węzłem nieciągłości pokazano na rys. 3, gdzie liniami ciągłymi oznaczono ciągi wyrazów zerowych dla stopni swobody których dany element nie określa. Tak zmodyfikowane macierze mas i sztywność zachowują symetrię układu.

Transformacji układu inercjalnego $OXYZ$ w układ lokalny $O_i x_i y_i z_i$ związany z wybranym elementem prętowym dokonuje się przez równoległe przesunięcie początków tych układów oraz przez wykonane kolejno trzy obroty skończone. Dwa kąty obrotu określone są współzrędnymi końców pręta w układzie globalnym a kąt γ obrotu do koła osi pręta jest wielkością daną. Macierz takiej transformacji ortogonalnej C po-



Rys. 3. Schemat lokalnych macierzy sztywności elementów z węzłem nieciągłości.

dana jest np.: w [19, 20]. Ze względu na zmianę macierzy mas i sztywności elementów z węzłem nieciągłości, należy zmienić macierze transformacji tych elementów, wstawiając odpowiednio zerowe wiersze i kolumny z jedynkami na przekątnej.

Korzystając z ogólnego formalizmu metody elementów skończonych buduje się następnie globalne macierze mas M i sztywności K dla całego układu. Na macierzowe równania ruchu nakłada się warunki brzegowe sztywnego zamocowania.

3. Drgania układu zachowawczego

Nietłumione drgania swobodne układu opisuje równanie

$$(3.1) \quad M\ddot{x} + Kx = O,$$

gdzie x jest globalnym wektorem przemieszczeń uogólnionych. Ponieważ ilość stopni swobody układu zależy od liczby możliwych poślizgów w węzle nieciągłości dlatego należy analizować różne przypadki współpracy kontaktujących się powierzchni.

Częstości własne drgań (ν) i formy (Φ) są nietrywialnymi rozwiązaniami zagadnienia na wartości własne,

$$(3.2) \quad (K - \nu^2 M)\Phi = O.$$

Znane są liczne metody poszukiwania rozwiązań zagadnienia (3.2). W zamieszczonych w pracy przykładach obliczeń numerycznych przyjęto następujący tok postępowania. Równanie (3.2) sprowadza się do postaci standardowej korzystając z symetrycznego rozkładu macierzy M na macierze trójkątne L , zgodnie z metodą Cholesky-Banachiewicza [21, 22].

$$(3.3) \quad M = LL^T.$$

Po redukcji równanie (3.2) ma postać

$$(3.4) \quad AW = \lambda W,$$

gdzie

$$(3.5) \quad A = L^{-1}K(L^T)^{-1}, \quad W = L^T\Phi, \quad \lambda = \nu^2.$$

Następnie macierz A przedstawia się w postaci symetrycznej trójdzielnej za pomocą procedury Householdera [21, 22]. Korzystając z własności ciągów Sturm, metodą bisekcji określa się przybliżone wartości własne [21, 22]. Za pomocą metody odwrotnych iteracji wyznacza się przybliżone wektory własne macierzy trójdzielnej. Zgodnie z przyjętą transformacją (3.5) postacię drgań własnych układu określa równanie

$$(3.6) \quad \Phi = (L^T)^{-1}W.$$

Wektory własne są ortogonalne względem macierzy mas i unormowane tak, że

$$(3.7) \quad \Phi^T M \Phi = I,$$

$$(3.8) \quad \Phi^T K \Phi = D,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową zaś D jest macierzą diagonalną której elementami są ν_i^2 .

4. Dyskretny element tarcłowy

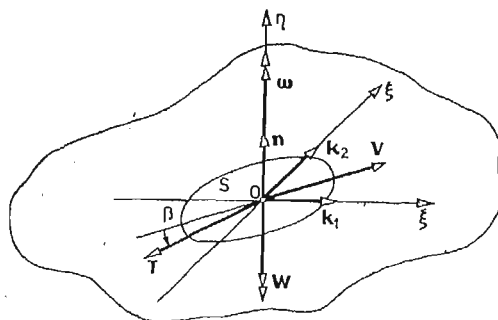
Względny ruch cząstek stykających się powierzchni można złożyć z ruchu translacyjnego z prędkością V i ruchu obrotowego z prędkością Ω . Z warunku styczności wynika zgodność przemieszczeń i prędkości w kierunku normalnym do styku. Wobec tego składowa prędkości translacji V_n (normalna do styku) jest równa zero. Ruch obrotowy można przedstawić jako czyste toczenie o składowej Ω_t w płaszczyźnie styczności do obu powierzchni i wirowanie określone składową Ω_n normalną do styku. Składowa pozioma reakcji więzów podczas czystego toczenia z prędkością Ω_t ma charakter tarcia statycznego. Wobec tego wystarczająco do opisu tarcia podczas ruchu, pole prędkości względnych określają, wektor prędkości translacji v i wektor prędkości wirowania ω

$$(4.1) \quad v = \frac{V_t}{|V_t|}, \quad \omega = \frac{\Omega_n}{|\Omega_n|}.$$

gdzie V_t jest składową styczną prędkości translacji.

Względnym ruchom w obszarze styku przy zapewnionym docisku towarzyszą siły tarcia suchego. Przyjmijmy model tarcia wg Amontonsa i Coulomba.

W styku o obszarze S założmy układ współrzędnych $O\xi\zeta\eta$ o bazie (k_1, k_2, n) , rys. 4.



Rys. 4. Dyskretny element tarcłowy.

Wektor sił tarcia Coulomba w dowolnym punkcie A styku s , podczas poślizgu, zgodnie z opisem zaproponowanym w [23], określa równanie.

$$(4.2) \quad T_A = -N_A Q v = -N_A Q^{ij} v_j k_i, \quad i, j = 1, 2$$

gdzie Q^{ij} są elementami reprezentacji tensora tarcia Coulomba Q , v_j są składowymi kowariantnymi wektora prędkości poślizgu v , N_A jest wielkością docisku w punkcie A . Reprezentację tensora tarcia Q wyznaczono przy założeniu analogii rozkładu sił tarcia z rozkładem naprężeń w płaskim stanie napięcia oraz przy założeniu reguły składania tensorów [23, 24]. Opis składowych tensora Q , uwzględnia kierunkowość chropowatości każdej z powierzchni oraz chwilową konfigurację styku.

Podczas względnego ruchu wirowego wokół normalnej z wektorem n do styku, tarcie w punkcie A styku S , odniesione do środka wirowania, określa wektor siły tarcia T_A i wektor momentu tarcia W_A ,

$$(4.3) \quad T_A = -N_A R_A^l \omega k_l, \quad l = 1, 2$$

$$(4.4) \quad W_A = -N_A R_A^3 \omega n,$$

gdzie ω jest składową wersora prędkości wirowania na osi n , R_A^k ($k = 1, 2, 3$) są charakterystykami tarciovymi styku [24]. Charakterystyki R_A^k zależą od kształtu obszaru styku oraz od jego zmienności w czasie.

Pole sił tarcia w styku S , podczas ruchu można opisać wypadkowym wektorem sił tarcia $T = T^i k_i$ ($i = 1, 2$) oraz wypadkowym wektorem momentu sił tarcia $W = W_n$, rys. 4. Zgodnie z przyjętymi założeniami [23, 24] istnieje liniowe odwzorowanie [L] wypadkowego wektora sił tarcia i wersora pola prędkości względnych,

$$(4.5) \quad \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ W \end{bmatrix} = [L] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Wyrazy odwzorowania [L] zwanego charakterystyką dyskretnego elementu tarciovego tworzy się przez redukcję pola sił tarcia opisanego wzorami (4.2), (4.3) i (4.4), do środka 0,

$$(4.6) \quad [L] = - \begin{bmatrix} Q^{ij} \int_S N_A dS & \int_S N_A R_A^k dS \\ \dots & \dots \\ O^i & \dots \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} A \subset S \\ i, j = 1, 2 \\ k = 1, 2, 3. \end{array}$$

Opis sił tarcia za pomocą (4.5) i (4.6) uwzględnia anizotropię każdej z kontaktujących się powierzchni, kształt styku, chwilowe pole prędkości względnych, chwilową konfigurację stykających się powierzchni oraz dowolny rozkład docisku.

Definicja: Dyskretnym elementem tarciovym nazwano taki model chropowatego styku ciał, który ustalonemu punktowi styku S przyporządkowuje własności bieguna pola prędkości względnych w tym styku oraz własności środka redukcji, powstałego podczas ruchu pola sił tarcia.

5. Wektor sił tarcia Coulomba

Podczas drgań analizowanego układu prętowego (rys. 1), siły tarcia suchego są generowane tylko na powierzchniach konstrukcyjnej nieciągłości. Wobec tego globalny wektor tarcia zawiera wyrazy zerowe i wektor tarcia T^w w węźle nieciągłości,

$$(5.1) \quad T = [O; T^w; O]^T.$$

W przypadku całkowitego poślizgu T^w może mieć 6 niezerowych składowych na kierunkach ruchu względnych,

$$(5.2) \quad T^w = [T_y^l, T_y^p, T_z^l, T_z^p, W^l, W^p]^T.$$

Zgodnie z zasadą o wzajemnym oddziaływaniu

$$(5.3) \quad T_y^l = -T_y^p, \quad T_z^l = -T_z^p, \quad W^l = -W^p.$$

liczba składowych wektora T^w wynika z chwilowego stanu współpracy kontaktujących się powierzchni.

Każda z powierzchni styku może mieć własną anizotropową chropowatość opisaną współczynnikami tarcia $\mu_{ij}^{(s)}$ ($i, j = 1, 2; s = l, p$) np. dla kierunków pokrywających się z głównymi osiami bezwładności kontaktujących się powierzchni pręta. Powierzchnie styku

złożono ze sobą w chwili początkowej tak, że kierunki pomiarowe tarcia (główne osie bezwładności przekrojów) pokrywają się. Kąt wirowania określający wzajemny obrót układów odniesienia na powierzchniach styku w tym przypadku równy jest różnicy kątów obrotu lewej i prawej powierzchni nieciągłości,

$$(5.4) \quad \varphi = \psi_x^l - \psi_x^p.$$

Kąt wirowania w miejscu styku praktycznie w każdej deformacji (rys. 1) jest wielkością pomijalnie małą ($\varphi \cong 0$). Stąd przyjęto, że podczas wirowania styk zachowuje swój pierwotny prostokątny kształt. Ponadto w styku panuje stały i równomierny docisk a N jest wielkością wypadkowej sił docisku z całej powierzchni kontaktu.

Zgodnie z opisem dyskretnego elementu tarciowego i powyższymi założeniami składowe siły tarcia w miejsce nieciągłości (odniesione do lewej strony węzła) opisują następujące równania,

$$(5.5) \quad \begin{bmatrix} T_y^l \\ T_z^l \\ W^l \end{bmatrix} = -N \begin{bmatrix} Q^{11} & Q^{12} & 0 \\ Q^{21} & Q^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_3}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y^l \\ v_z^l \\ \omega^l \end{bmatrix}.$$

Elementami macierzowej reprezentacji tensora tarcia Q w tym przypadku są,

$$(5.6) \quad \begin{aligned} Q^{11} &= \kappa(\mu_{11}^{(l)} + \mu_{11}^{(p)}), & Q^{12} &= \kappa(\mu_{12}^{(l)} + \mu_{12}^{(p)}), \\ Q^{21} &= \kappa(\mu_{21}^{(l)} + \mu_{21}^{(p)}), & Q^{22} &= \kappa(\mu_{22}^{(l)} + \mu_{22}^{(p)}), \end{aligned}$$

gdzie κ jest t.z.w. współczynnikiem złożenia [24]. Ponieważ środkiem wirowania styku prostokątnego o wymiarach $(a \times b)$ jest środek symetrii, więc charakterystyką tarciową styku [24] jest

$$(5.7) \quad R_3 = N(Q^{11}A_3 + Q^{22}A_4),$$

gdzie

$$(5.8) \quad \begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{12} \left[a^2 b \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} - a^3 \ln \left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} \right) + 2b^3 \ln \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} \right) \right], \\ A_4 &= \frac{1}{12} \left[ab^2 \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - b^3 \ln \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} \right) + 2a^3 \ln \left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Składowe wersora prędkości poślizgu w miejscu nieciągłości określają wzory

$$(5.9) \quad v_y^l = \frac{\dot{Y}^l - \dot{Y}^p}{\sqrt{(\dot{Y}^l - \dot{Y}^p)^2 + (\dot{Z}^l - \dot{Z}^p)^2}}, \quad v_z^l = \frac{\dot{Z}^l - \dot{Z}^p}{\sqrt{(\dot{Y}^l - \dot{Y}^p)^2 + (\dot{Z}^l - \dot{Z}^p)^2}},$$

$$\omega^l = \text{sign}(\dot{\psi}_x^l - \dot{\psi}_x^p)$$

gdzie \dot{Y}^l , \dot{Y}^p , \dot{Z}^l , \dot{Z}^p , $\dot{\psi}_x^l$, $\dot{\psi}_x^p$ są składowymi wektora prędkości lewej i prawej strony węzła nieciągłości, rys. 2.

6. Drgania tłumione siłami tarcia Coulomba

Załóżmy, że drgania układu odbywają się wokół pewnego stanu odkształconego wskutek działania obciążeń statycznych określonych wektorem G . Stan deformacji statycznej x_{st} opisuje równanie

$$(6.1) \quad Kx_{st} = G.$$

W zamieszczonych w pracy obliczeniach numerycznych rozwiązania równania (6.1) poszukiwano metodą eliminacji Gaussa [21, 22].

Ruch układu dyskretnego z tarcie, dla ustalonego stanu współpracy w miejscu nieciągłości, we współrzędnych uogólnionych określa równanie

$$(6.2) \quad M\ddot{x} + Kx = F + T(\dot{x}),$$

gdzie F i $T(\dot{x})$ są globalnymi wektorami sił zewnętrznych i sił tarcia Coulomba.

Wiadomo, że w przypadku drgań nieliniowych z udziałem tarcia Coulomba, okres drgań tłumionych jest równy okresowi drgań układu zachowawczego — przy tych samych charakterystykach sprężystych i bezwładnościowych, [1, 4, 13, 14, 15, 16].

W ustalonym stanie współpracy stykających się powierzchni rozwiązanie równania ruchu (6.2) może być przedstawione jako liniowe rozwinięcie według form drgań własnych

$$(6.3) \quad x = y_1(t)\Phi_{(1)} + y_2(t)\Phi_{(2)} + \dots + y_n(t)\Phi_{(n)} \equiv \Phi y,$$

y jest wektorem a Φ macierzą zbudowaną z postaci drgań,

$$(6.4) \quad \Phi = [\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \dots, \Phi_{(n)}].$$

Należy zaznaczyć, że liczba stopni swobody n zależy od przyjętego podziału na elementy skończone oraz od ilości możliwych, w danej chwili, ruchów względnych w miejscu styku. Równanie (6.3) określa transformację współrzędnych uogólnionych x do współrzędnych y zwanych normalnymi lub głównymi. Wprowadzając operacje transformacji macierzy i wektorów równanie (6.2) przyjmuje postać,

$$(6.5) \quad (\Phi^T M \Phi)(\Phi^{-1}\ddot{x}) + (\Phi^T K \Phi)(\Phi^{-1}x) = \Phi^T F + \Phi^T T(\dot{x}).$$

Równanie (6.5) można zapisać w prostej formie

$$(6.6) \quad m\ddot{y} + ky = f + t(\dot{y}),$$

przy następujących oznaczeniach

$$(6.7) \quad \begin{aligned} m &= \Phi^T M \Phi, & k &= \Phi^T K \Phi, \\ \ddot{y} &= \Phi^{-1}\ddot{x}, & y &= \Phi^{-1}x, \\ f &= \Phi^T F, & t(\dot{y}) &= \Phi^T T(\dot{x}). \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku nie można sformułować wektora tarcia t poprzez współrzędne normalne. Fakt ten zmusza do powrotu do współrzędnych uogólnionych na każdym etapie w którym określa się siły tarcia. Z warunku unormowania wektorów własnych (3.7) i (3.8) wynika, że m jest macierzą jednostkową a k macierzą diagonalną z elementami v_i^2 . Macierz odwrotną Φ^{-1} można określić korzystając z własności opisanej równaniem (3.7). Mnożąc (3.7) prawostronnie przez Φ^{-1} otrzymuje się

$$(6.8) \quad I\Phi^{-1} = \Phi^T M \Phi \Phi^{-1},$$

stąd

$$(6.9) \quad \Phi^{-1} = \Phi^T M.$$

Przy tak określonej macierzy Φ^{-1} współrzędne normalne wyrażają się poprzez współrzędne uogólnione następującym wzorem

$$(6.10) \quad y = \Phi^T M x.$$

Uwzględnienie w rozwinięciu (6.3) tylko k -tej ($k \leq n$) liczby niższych form drgań własnych sprowadza opis układu do k pierwszych równań typu (6.6). Wtedy macierz transformacji jest niepełną macierzą Φ , ograniczoną do k pierwszych wektorów. Posługując się pełnymi macierzami M , K i pełnymi wektorami x , F , T , działania opisane równaniami (6.7) i (6.9) są formalnie takie same, również dla niepełnej macierzy Φ . Uzyskane z operacji (6.7) i (6.9) wyniki obliczeń są elementami pełnych macierzy m , k , Φ^{-1} oraz pełnych wektorów y , f , $t(\dot{x})$. W ten sposób otrzymano wygodne narzędzie analizy jakościowej drgań złożonych układów.

Równania ruchu (6.6) w przypadku drgań nietłumionych rozprzegają się. Tarcie sprawia wzajemne sprzężenie tych równań, które odpowiadają formom drgań z względnymi przemieszczeniami w miejscu nieciągłości. Równania (6.6) opisują ruch tak długo jak długo liczba kierunków poślizgu w miejscu nieciągłości a tym samym liczba stopni swobody układu jest niezmienna.

Tylko w przypadku gdy macierz transformacji Φ składa się z 1 wektora własnego, równanie (6.6) można rozwiązać w sposób ścisły. W celu uzyskania ogólnej procedury rozwiązywania zagadnienia (6.6) skorzystano z jednej z metod przybliżonego, bezpośredniego całkowania układu równań różniczkowych [25, 26]. Wybrano metodę jednokrokowego całkowania równań wg Newmarka [25, 26, 27]. Metoda ta dla stosownie dobranych współczynników Newmarka i kroku całkowania, charakteryzuje się dobrą zbieżnością.

Zadane warunki początkowe ruchu we współrzędnych uogólnionych

$$(6.11) \quad x(t_0) - x_0 = O, \quad \dot{x}(t_0) - \dot{x}_0 = O,$$

według wzoru (6.10) formułuje się we współrzędnych normalnych

$$(6.12) \quad y_0 = \Phi^T M x_0, \quad \dot{y}_0 = \Phi^T M \dot{x}_0.$$

Następnie z równanie (6.6) wyznacza się przyspieszenia początkowe

$$(6.13) \quad \ddot{y}_0 = -D \dot{y}_0 + f(t_0) + t(\dot{x}_0).$$

Korzystając z parametrów ruchu wyznaczonych w $(i-1)$ chwili czasu, ruch w chwili i -tej określamy: równanie ruchu (6.6) i następujące wzory Newmarka [25, 26, 27]

$$(6.14) \quad \begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + h \dot{y}_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) h^2 \ddot{y}_{i-1} + \alpha h^2 \ddot{y}_i, \\ \dot{y}_i &= \dot{y}_{i-1} + (1 - \delta) h \ddot{y}_{i-1} + \delta \ddot{y}_i, \\ h &= t_i - t_{i-1}. \end{aligned}$$

W oparciu o obliczenia testowe, jako wsp. Newmarka przyjęto

$$(6.15) \quad \alpha = 1/4 \quad \text{i} \quad \delta = 1/2.$$

a jako optymalny krok całkowania

$$(6.16) \quad h = 0,1 \frac{\pi}{\nu_{(i)}}$$

gdzie $\nu_{(i)}$ jest częstością analizowanych drgań. Kryterium doboru wsp. Newmarka i kroku czasowego stanowiły: dokładność i stabilność numeryczna amplitudy i częstości w kolejnych cyklach drgań oraz rozsądnie długi czas obliczeń.

Z powodu nieliniowości równania ruchu (6.6), w przypadku stanu częściowego i całkowitego poślizgu jego rozwiązanie poszukuje się w sposób iteracyjny. Zgodnie z wzorami Newmarka i przedstawionymi powyżej własnościami układu w każdym kroku czasowym t_i iteracyjnie rozwiązuje się następujący układ równań

$$(6.17) \quad \left(\frac{4}{h^2} \mathbf{I} + \mathbf{D} \right) \mathbf{y}_i = \frac{4}{h} \left(\frac{1}{h} \mathbf{y}_{i-1} + \dot{\mathbf{y}}_{i-1} \right) + \ddot{\mathbf{y}}_{i-1} + \mathbf{f}_i + \mathbf{t}(\dot{\mathbf{x}}_i),$$

$$(6.18) \quad \dot{\mathbf{y}}_i = \dot{\mathbf{y}}_{i-1} + \frac{h}{2} (\ddot{\mathbf{y}}_{i-1} + \ddot{\mathbf{y}}_i),$$

$$(6.19) \quad \ddot{\mathbf{y}}_i = \frac{4}{h^2} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1}) - \frac{4}{h} \dot{\mathbf{y}}_{i-1} - \ddot{\mathbf{y}}_{i-1}.$$

Równanie (6.17) jest równaniem ruchu (6.6) zapisanym w przemieszczeniach \mathbf{y}_i . Powracając z rozwiązaniem do wsp. uogólnionych, ruch w i — tej chwili określają

$$(6.20) \quad \mathbf{x}_i = \Phi \mathbf{y}_i, \quad \text{i.t.d.}$$

Cykl iteracji nieliniowej funkcji wektora tarcia rozpoczyna się od oszacowania prędkości w i — tej chwili w oparciu o znane parametry ruchu w chwili $(i-1)$, według wzoru

$$(6.21) \quad \dot{\mathbf{x}}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{x}}_{i-1} + h \ddot{\mathbf{x}}_{i-1}.$$

Stąd pierwszym przybliżeniem wektora tarcia jest

$$(6.22) \quad \mathbf{T}_i^{(1)} = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{x}}_i^{(0)}), \quad \mathbf{t}_i^{(1)} = \Phi^T \mathbf{T}_i^{(1)}.$$

Równanie (6.17) rozwiązuje się z tak oszacowanym wektorem tarcia. Z otrzymanych rozwiązań (6.18) określa się odpowiadający im wektor tarcia,

$$(6.23) \quad \mathbf{T}_i^{(2)} = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{x}}_i^{(1)}), \quad \mathbf{t}_i^{(2)} = \Phi^T \mathbf{T}_i^{(2)},$$

z którym ponownie rozwiązuje się równania (6.17). W analogiczny sposób, s — tym przybliżeniem wektora tarcia jest

$$(6.24) \quad \mathbf{T}_i^{(s)} = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{x}}_i^{(s-1)}).$$

Kryterium zakończenia procesu iteracyjnego stanowi zbieżność wektora tarcia z dwóch kolejnych iteracji, do wartości ustalonej

$$(6.25) \quad |\mathbf{T}_i^{(s)} - \mathbf{T}_i^{(s-1)}| \leq \delta,$$

gdzie δ jest nałożoną dokładnością iteracji. Na ogół, korzystając z wzoru (6.21) uzyskuje się zbieżności iteracji z błędem nie przekraczającym 1% już w 1 - 2 kroku. Trudności z zapewnieniem zbieżności występują tam gdzie kierunek siły tarcia, co prawda w sposób ciągły lecz gwałtowny, zmienia się o kąt bliski π . W tych przypadkach można konstruować inne procedury trafniejszego wyboru wektora tarcia spełniającego chwilowe warunki równowagi dynamicznej układu. Najprostszym (lecz czasochłonnym) sposobem poprawy zbieżności jest zmniejszenie wielkości kroku całkowania równań ruchu.

Korzystając z lokalnej macierzy sztywności elementu prętowego oraz jego przemieszczeń węzłowych przetransformowanych do układu lokalnego, można określić chwilowe siły przywęzłowe w danym elemencie prętowym.

Niech N^l i N^p są chwilowymi siłami normalnymi na lewej i prawej powierzchni miejsca

nieciągłości. Brane są pod uwagę tylko te przypadki ruchu podczas których N^I i N^P są siłami ściskającymi. Warunek ten gwarantuje wprowadzany do układu, odpowiednio duży, niezależny od czasu, docisk technologiczny określony siłami N_0 , rys. 1. Za miarę docisku w styku przyjmuje się

$$(6.26) \quad N = 0,5|N^I - N^P|.$$

Podczas procesu iterowania chwilowego wektora tarcia, przemieszczenia podlegają niewielkim zmianom. Stąd można założyć, że w cyklu iteracyjnym docisk jest stały i równy np. dociskowi obliczonemu w chwili poprzedniej. W zamieszczonych w pracy przykładach wielkość docisku N praktycznie nie różniła się od $|N_0|$. Wynika to stąd, że dopuszczalne deformacje sprężyste układu, przy nieobciążonym siłami normalnymi węzle nieciągłości, dają niewielkie siły normalne w tym węzle.

Istnieje klasa zadań w których wektor tarcia ma stały w czasie kierunek działania. Wtedy również w pewnych chwilach czasu prędkość względna w styku przyjmuje wartość zero. W chwilach tych wektor tarcia jest nieokreślony, zaś funkcje przyspieszeń mają nieciągłość. Dla tych zadań formułuje się dodatkową procedurę znajdowania miejsca zerowego funkcji prędkości poślizgu i sposobu przejścia przez miejsce nieciągłości funkcji przyspieszeń. Oszacowaną prędkość względną w kroku i — tym w oparciu o parametry ruchu w kroku $(i-1)$ według wzoru (6.21) porównuje się z prędkością kroku $(i-1)$. W ten sposób określa się przedział czasowy $< t_{i-1}, t_i >$ w którym może nastąpić zmiana kierunku prędkości poślizgu. Znaleziony przedział dzieli się na mniejsze o wielkości θ . Następnie porównując rozwiązania równań (6.17) — (6.19) w tak określonych podprzedziałach czasu, lokalizuje się miejsce zerowe prędkości poślizgu z dokładnością θ . Różnicę wartości przyspieszeń obliczonych dla najbliższego otoczenia miejsca zerowego prędkości poślizgu, przyjmuje się za skok funkcji przyspieszeń.

Dodatkowej procedury wyznaczania wektora tarcia w chwili bliskiej t_0 wymagają te zadania w których prędkość początkowa jest równa zero. Wówczas po wyznaczeniu przyspieszeń w chwili t_0 (bez udziału tarcia) szacuje się wielkość prędkości w chwili bliskiej t_0 , z wzoru

$$(6.27) \quad \dot{x}(t_0 + \varepsilon) = \varepsilon \ddot{x}_0, \quad \varepsilon < h.$$

Dla tak określonej prędkości wyznacza się wektor sił tarcia

$$(6.28) \quad T(t_0) \cong T(\dot{x}(t_0 + \varepsilon))$$

Następnie z równania (6.13) określa się przyspieszenie \ddot{y}_0 które jest wielkością startową do analizy ruchu w kroku pierwszym. Powyższa procedura okazała się wystarczającą jedynie w przypadku ruchu układu opisanego jedną formą drgań własnych.

Ważnym jest określenie momentu w którym nastąpi przejście ze stanu poślizgu w stan zespolenia i odwrotnie. Najogólniej można stwierdzić, że poślizg rozpocznie się wtedy gdy zostaną zerwane więzy tarcia statycznego w styku. Natomiast zakończenie poślizgu (zwane zespoleniem) nastąpi gdy ustanie ruch względny w miejscu konstrukcyjnej nieciągłości i zostaną nawiązane więzy tarcia statycznego. W zamieszczonych w pracy przykładach obliczeń pokazano tylko przypadek ruchu z całkowitym poślizgiem. W tym celu tak dobrano warunki początkowe ruchu aby stan ten panował już w chwili t_0 . Moment zakończenia poślizgu można określić badając parametry ruchu układu. W pracy przyjęto, że na-

stąpi to w chwili gdy prędkość względna ma miejsce zerowe a przyspieszenie względne liczone dla sił tarcia dynamicznego zmieniałoby znak.

7. Przykład zastosowań do analizy układów łopatkowych turbin. Opis problemu.

Łopatki turbinowe zakończone fragmentem bandaża mogą być zestawiane ze sobą w pakiety. Wzajemne usytuowanie odcinków bandaża wpływa na charakter pracy łopatek. Przy tym możliwe jest zachowanie luzu, monolityczne złączenie lub kontakt z zapewnionym dociskiem. Jednym ze sposobów zagwarantowania docisku jest takie wykonywanie łopatek aby płaszczyzna końca bandaża była przesunięta względem płaszczyzny stopy łopatki. Po zestawieniu ze sobą 2 - 4 łopatek osiąga się znaczny docisk na powierzchni nieciągłości bandaża. Najczęściej powierzchnia nieciągłości jest prostopadła lub ukośna względem brzegu bandaża. Znane są również połączenia z uskokiem w środku szerokości bandaża. Podczas ruchu na powierzchniach styku bandaża generowane są siły tarcia suchego [28]

Zasadniczym zadaniem mechanizmów tarciovych maszyn wirnikowych jest rozpraszanie energii dostarczanej do układu na skutek oddziaływań zaburzonego przepływu czynnika lub drgającego wirnika. W szczególności wymuszenia mogą pochodzić od źle wykonanego kanału przepływowego w tarczy kierowniczej lub od nieszczelności na powierzchni podziału tarczy. Trudno ocenić jakiej wielkości są to oddziaływania. Nie ma jednoznacznych opisów wartości sił i ruchów wymuszających drgania elementów turbiny [28]

Rozważmy parę cylindrycznych łopatek turbinowych z odcinkiem bandaża. Powierzchnia styku, fragmentów bandaża jest prostopadła do jego osi. Załóżmy, że siły docisku technologicznego zapewniają ciągły kontakt a przemieszczenia względne w styku bandaża są makropoślizgami. Pakiet znajduje się w stacjonarnym polu sił masowych. Kształt kanału przepływowego wymaga ukośnego usytuowania łopatek względem płaszczyzny tarczy wirnikowej. Stąd główne osie bezwładności przekrojów łopatek i bandaża nie są wzajemnie równoległe. Załóżmy, że inercjalny układ współrzędnych $OXYZ$ jest związany z wieńcem tarczy wirnikowej. Płaszczyzna OXZ pokrywa się z płaszczyzną tarczy. Niech modelem dynamicznym pakietu będzie układ prętowy przedstawiony na rys. 1. W zamieszczonych w pracy przykładach liczonego pakietu złożony z łopatek o szerokości 0,03 [m] i wysokości 0,172 [m]. Obliczenia przeprowadzono na EMC ODRA 1204.

W niewielu publikacjach zajmowano się tak postawionym problemem teoretycznym. W [29] analizowano drgania własne 2 łopatek z monolitycznym bandażem korzystając z modelu ramy płaskiej. Wyniki badań eksperymentalnych nad wpływem docisku w miejscu nieciągłości podczas drgań rezonansowych pary łopatek zaprezentowano w [30].

8. Wyniki obliczeń drgań własnych pakietu łopatek

Rezultaty obliczeń pierwszych częstości drgań własnych układu, dla podziału na 4, 6 i 8 elementów, przedstawiono w tabl. 1. Za każdym razem bandaż dzielono na 2 elementy. W węźle nieciągłości, możliwy jest całkowity poślizg. Łopatki osadzono ukośnie

względem płaszczyzny tarczy wirnikowej ($\gamma = 10^\circ$). Uzyskane wyniki wskazują na dobrą zbieżność, pierwszych częstości drgań układu dyskretyzowanego. Według J. THOMASA [29] optymalny podział pakietu ze względu na pierwsze częstości to 3 elementy na łopatkę

Tablica 1

Częstości drgań własnych dla różnych podziałów na elementy skończone (p — ilość elementów) w stanie całkowitego poślizgu i dla $\gamma = 10^\circ$ (w [1/s]).

p	$\nu_{(I)}$	$\nu_{(II)}$	$\nu_{(I)}$	$\nu_{(IV)}$	$\nu_{(V)}$	$\nu_{(VI)}$	$\nu_{(VII)}$	$\nu_{(VIII)}$
4	1907,55	3591,11	3629,77	17535,64	19044,12	19442,59	33331,27	33814,39
6	1904,33	3584,72	3623,73	12249,47	12676,71	19135,14	23886,06	24280,37
8	1904,03	3584,14	3623,18	12140,28	12610,20	19087,96	23757,04	24154,22

i 2 na bandażu. Niniejsza analiza potwierdza ten wniosek również w przypadku pakietu z nieciągłym bandażem. Dalsze wyniki uzyskano dla takiego podziału układu na elementy skończone.

Dopuszczenie względnych ruchów na kierunkach poślizgów w węźle nieciągłości, daje znacznie niższe wartości niektórych częstości drgań własnych w porównaniu z tym samym pakietem o monolitycznym bandażu. W tabl. 2 zestawiono częstości drgań własnych pakietu ($\gamma = 10^\circ$) gdy przemieszczenia węzła nieciągłości bandaża opisuje 6 składowych

Tablica 2

Częstości drgań własnych w różnych stanach współpracy stykających się powierzchni (m — ilość stopni swobody w miejscu nieciągłości) gdy $\gamma = 10^\circ$ (w [1/s]).

w	$\nu_{(I)}$	$\nu_{(II)}$	$\nu_{(III)}$	$\nu_{(IV)}$	$\nu_{(V)}$	$\nu_{(VI)}$	$\nu_{(VII)}$	$\nu_{(VIII)}$
6	2907,48	3584,14	10708,54	12140,28	15683,14	23757,04	26238,42	35800,52
7	2901,35	3584,14	10672,29	12140,28	15625,53	23757,04	24074,72	35800,52
8	1938,71	3584,14	4584,45	12140,28	12730,03	19126,27	23757,04	26471,07
9	1904,03	3584,14	3623,18	12140,28	12610,20	19087,96	23757,04	24154,22

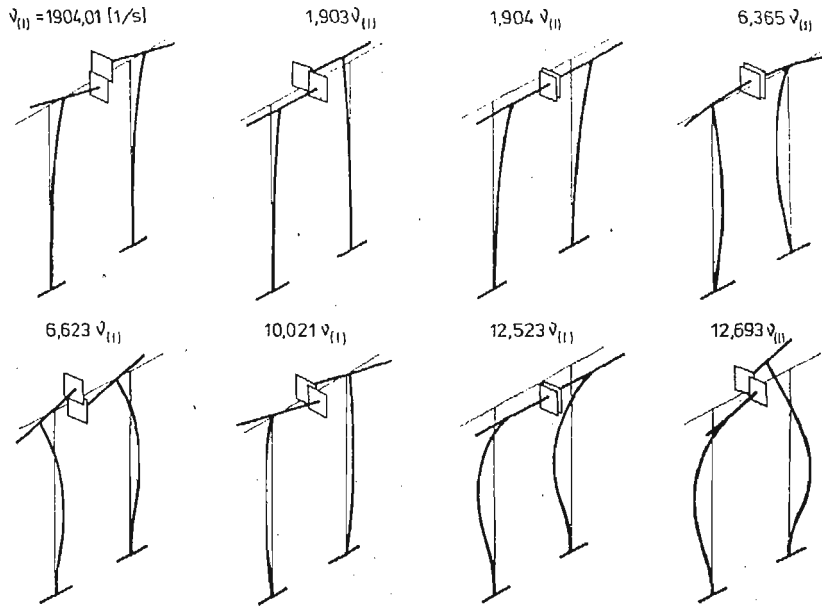
(całkowite zespolenie), 7 (względne wirowanie), 8 (względny ruch translacyjny) i 9 (całkowity poślizg). Np. pierwsza częstość drgań własnych jest mniejsza o 34,5% a trzecia o 66,2%, na skutek odsztywnienia układu. Częstości II i IV charakteryzujące drgania bez względnych przemieszczeń w styku we wszystkich stanach współpracy są jednakowe. Częstości w przypadku dopuszczonego względnego wirowania (7 składowych) są nieznacznie mniejsze od częstości drgań w stanie całkowitego zespolenia (6 składowych). Oczywiście są identyczne w przypadku form bez względnego wirowania (II, IV, VI).

Zmiana kąta (γ) ukośnego usytuowania łopatek względem płaszczyzny tarczy wirnikowej, powoduje małe zmiany częstości drgań układu co pokazano w tabl. 3.

Szkic pierwszych 8 form drgań w przypadku $\gamma = 0^\circ$ przedstawiono na rys. 5. Linia

Tablica 3
Częstości drgań własnych dla różnych kątów ukośnego usytuowania łopatek pakietu (γ) w stanie całkowitego poślizgu ($w[1/s]$)

γ	$\nu_{(I)}$	$\nu_{(II)}$	$\nu_{(III)}$	$\nu_{(IV)}$	$\nu_{(V)}$	$\nu_{(VI)}$	$\nu_{(VII)}$	$\nu_{(VIII)}$
0°	1904,01	3623,18	3624,62	12118,32	12609,54	19079,16	23844,87	24167,49
10°	1904,03	3584,14	3623,18	12140,28	12610,20	19087,96	23757,04	24154,22
20°	1904,09	3465,36	3623,16	12202,55	12612,90	19113,55	23503,74	24115,88
30°	1904,17	3276,20	3623,14	12294,86	12614,96	19153,46	23113,96	24056,71



Rys. 5. Szkic form drgań własnych w stanie całkowitego poślizgu gdy $\gamma = 0^\circ$

cienką oznaczono niezdeformowany stan pakietu. W dalszej części pracy postacie deformacji będą bliżej określone poprzez wyróżnienie płaszczyzn i kierunków dominującego ruchu, odniesionych względem układu $OXYZ$.

Siła tarcia jest generowana podczas drgań tylko z tymi formami, które mają względne przemieszczenie lub względny obrót w miejscu konstrukcyjnej nieciągłości. Z pierwszych 8 form drgań własnych, pokazanych na rys. 5, dysypacja energii występuje podczas drgań z 5 postaciami (I, II, V, VI, VIII) zaś drgania z 3 pozostałymi są zachowawcze.

Ukośne usytuowanie łopatek w wieńcu tarczy wirnikowej ($\gamma \neq 0^\circ$) wywołuje efekt sprzężenia drgań. Gdy kąt γ jest zerem to formy drgań własnych występują w czystej postaci, (bez wzajemnych sprzężeń). I tak, gdy $\gamma \neq 0^\circ$ drgania z I postacią są głównie drganiami w płaszczyźnie tarczy w kierunku OX . Nakładają się na nie drgania w kierunku OY z II formą. Z analizy I formy (tabl. 4) wynika, że ze wzrostem kąta γ zwiększa się udział w drganiach II formy, poprzez wzrost wartości składowych Y , ψ_x i ψ_z , pokazanych dla

węzła 4 i 5. Jednocześnie zmniejsza się wkład I formy, odpowiada temu spadek wartości X , Z i ψ_Y

Tablica 4

Sprzężenia drgań w płaszczyźnie tarczy ($\Phi_{(I)}, \gamma = 0^\circ$) i z płaszczyzny tarczy ($\Phi_{(II)}, \gamma = 0^\circ$) na skutek ukośnego usytuowania łopatek określonego kątem γ . Na przykładzie przemieszczeń węzła 4 i 5 w stanie całkowitego poślizgu

		$\Phi_{(I)}, \gamma = 0^\circ$	$\Phi_{(II)}, \gamma = 0^\circ$	$\Phi_{(I)}, \gamma = 10^\circ$	$\Phi_{(I)}, \gamma = 20^\circ$	$\Phi_{(I)}, \gamma = 30^\circ$
4	X	19,2996210	-0,0000035	19,0066846	18,1366670	16,7158496
	Y	-0,0000005	-19,2361931	3,3504032	6,5993992	9,6482273
	Z	-0,0002645	0,0000000	-0,0002604	-0,0002485	-0,0002291
	ψ_X	0,0000000	1,5730921	-0,2739447	-0,5395851	-0,7888365
	ψ_Y	1,5782049	-0,0000003	1,5542374	1,4830578	1,3668255
	ψ_Z	0,0000000	-0,1412941	0,0066147	0,0130297	0,0190500
	X	19,2998088	-0,0000035	19,0068697	18,1368436	16,7160124
5	Y^L	-0,0000005	-19,4073922	3,3584179	6,6151867	9,6713095
	Y^P	0,0000056	19,4427800	-3,3584344	-6,6151723	-9,6713155
	Z^L	-1,9100269	0,0000005	-1,8810203	-1,7948750	-1,6542044
	Z^P	1,9100268	-0,0000006	1,8810204	1,7948752	1,6542042
	ψ_X^L	0,0000000	1,5732363	-0,2739516	-0,5395987	-0,7888565
	ψ_X^P	-0,0000004	-1,5761300	0,2739531	0,5395976	0,7888569
	ψ_Y	1,5783579	-0,0000004	1,5543882	1,4832018	1,3669579
	ψ_Z	0,0000000	-0,1415520	0,0066268	0,0130536	0,0190850

Drgania z II postacią (gdy $\gamma \neq 0^\circ$) są drganiami z płaszczyzny tarczy, wzdłuż osi OY z III formą (dla $\gamma = 0^\circ$). Są one sprzężone z drganiami w płaszczyźnie na kierunku OZ z IV formą. Z analizy II postaci drgań własnych (tabl. 5) wynika, że wzrost wartości kąta ukośnego usytuowania łopatek w zasadzie nie ma wpływu na zmianę tej formy drgań.

Drgania z III postacią (gdy $\gamma \neq 0^\circ$) są drganiami z płaszczyzny tarczy w kierunku OY (z II formą dla $\gamma = 0^\circ$). Towarzyszą im drgania w płaszczyźnie tarczy na kierunku OX z I postacią (dla $\gamma = 0^\circ$) w przypadku względnego ruchu translacyjnego i całkowitego poślizgu w węzle nieciągłości. W przypadku stanu całkowitego zespolenia lub względnego ruchu wirowego w miejscu styku są one sprzężone z odpowiednią V formą drgań (dla $\gamma = 0^\circ$).

Podobną analizę efektów sprzężeń drgań poprzez sprężystość można przeprowadzić dla dalszych form drgań.

Tablica 5

Sprężenia drgań z płaszczyzny tarczy ($\Phi_{(III)}, \gamma = 0^\circ$) i w płaszczyźnie tarczy ($\Phi_{(IV)}, \gamma = 0^\circ$) na skutek ukośnego usytuowania łopatek, określonego kątem γ . Na przykładzie przemieszczeń węzła 4 i 5 w stanie całkowitego poślizgu

		$\Phi_{(III)}, \gamma = 0^\circ$	$\Phi_{(IV)}, \gamma = 0^\circ$	$\Phi_{(II)}, \gamma = 10^\circ$	$\Phi_{(II)}, \gamma = 20^\circ$	$\Phi_{(II)}, \gamma = 30^\circ$
4	X	-0,0000027	0,0547074	0,0011286	0,0019027	0,0025771
	Y	19,2869399	-0,0000005	19,2600057	19,2387286	19,2146241
	Z	0,0000000	0,0132329	0,0000084	0,0000142	0,0000159
	ψ_x	-1,5771722	0,0000000	-1,5721831	-1,5631514	-1,5522302
	ψ_y	-0,0000002	-2,7013994	-0,0211946	-0,0381756	-0,0478345
	ψ_z	-0,0006294	0,0000001	0,0004834	0,0004559	0,0004063
5	X	-0,0000027	-0,0000019	0,0001002	-0,0000168	0,0000170
	Y^L	19,2874754	-0,0000003	19,2603696	19,2390738	19,2149314
	Y^P	19,2517460	0,0000008	19,2614216	19,2390239	19,2149796
	Z^L	0,0000003	1,6493734	0,0128274	0,0231134	0,0289573
	Z^P	-0,0000003	1,6493713	0,0128474	0,0231100	0,0289604
	ψ_x^L	-1,5773168	0,0000000	-1,5723241	-1,5632824	-1,5523465
	ψ_x^P	-1,5744205	-0,0000001	-1,5724093	-1,5632782	-1,5523504
	ψ_y	-0,0000003	-0,0000009	0,0000083	-0,0000014	0,0000013
	ψ_z	0,0001302	0,0000001	-0,0000047	-0,0000001	-0,0000006

9. Wyniki obliczeń drgań tłumionych pakietu łopatek

Tłumiącą rolę tarcia suchego oraz wpływ anizotropii tarcia na drgania pakietu łopatek rozpatrzono na przykładzie „czystych drgań”. Układ mechaniczny wykonuje „czyste drgania” o jednej tylko częstotliwości drgań własnych gdy jest wprawiony w ruch z konfiguracji lub z prędkością o rozkładzie zgodnym z wybraną formą drgań własnych. Podobnie, drgania rezonansowe z daną częstotliwością realizuje harmoniczna siła wymuszająca o częstotliwości rezonansowej i rozkładzie amplitudy z odpowiadającą danej częstotliwości formie drgań. Przy tym korzysta się z własności układów z tarcieciem suchym, że częstotliwość drgań układu tłumionego i nietłumionego jest jednakowa [4].

Wymuszając „czyste drgania” z wybraną formą drgań własnych jednocześnie wzbudza się drgania z innymi częstotliwościami. Liczba wzbudzanych form zależy od warunków ruchu, typu tarcia oraz od tego, czy uwzględnia się sprężenia poprzez sprężystość układu. Budując macierz transformacji Φ z wybranych wektorów własnych można ograniczyć rozważania efektu wzbudzenia drgań do kilku form. W ten sposób otrzyma się przybliżony

obraz drgań. O stopniu przybliżenia decyduje liczba wziętych do analizy wektorów własnych. Krok całkowania numerycznego dobiera się ze względu na formę z najwyższą częstotliwością drgań.

Rozważmy przypadek gdy macierz transformacji Φ zawiera tylko jedną formę drgań z względnymi przemieszczeniami w miejscu nieciągłości. Niech siły wymuszające i warunki początkowe mają rozkład zgodny z tą formą. Uzyskany obraz drgań będzie pierwszym przybliżeniem rzeczywistych drgań układu. Na rysunkach 6 przedstawiono przemieszczenia (rys. 6.1), prędkości (rys. 6.2) i przyspieszenia (rys. 6.3), drgań swobodnych węzła 4 w kierunku OX , wywołane deformacją początkową układu zgodną z I formą drgań (gdy $\gamma = 10^\circ$). Na wykresach umieszczono przebiegi drgań nietłumionych i drgań tłumionych siłami tarcia izotropowego, dla różnych wielkości tarcia przy stałym docisku technologicznym ($N_0 = 700$ [N]). Ekstremalne naprężenia normalne od zginania w stopie łopatkki, na skutek tłumienia ($\mu = 0,1$) zmniejszyły się około 10-krotnie, z 34,3 [mP] do 3,38 [mP]. Na rysunkach 7 pokazano przemieszczenia (rys. 7.1), prędkości (rys. 7.2) i przyspieszenia (rys. 7.3) drgań swobodnych węzła 4 w kierunku OY , wywołane prędkością początkową o rozkładzie zgodnym z III formą drgań własnych (gdy $\gamma = 10^\circ$). Wykresy ilustrują przebiegi drgań nietłumionych ($N_0 = 0$) oraz drgań tłumionych siłami tarcia izotropowego ($\mu = 0,1$) gdy docisk technologiczny N_0 przyjmuje różne wartości. Pod wpływem tłumienia ($N_0 = 150$ [N]) ekstremalne naprężenia normalne od zginania w stopie łopatkki z 33,35 [mP] zostały zredukowane do 4,32 [mP]. Na rys. 8.1, 8.2, 8.3 umieszczono przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia drgań z I częstotliwością rezonansową. Pakietowi łopatek nadano również deformację wstępną zgodną z I formą (gdy $\gamma = 10^\circ$). Na rysunkach pokazano drgania węzła 4 w kierunku OX . Wykresy zawierają przebiegi drgań nietłumionych ($\mu = 0$) i drgań tłumionych siłami tarcia izotropowego o różnych współczynnikach tarcia, przy tym samym docisku N_0 .

Przebiegi „czystych drgań” uzyskane dla macierzy transformacji zbudowanej tylko z jednego wektora własnego mają znane własności dynamiczne układu o 1 stopniu swobody z tarciem suchym [13, 14, 15, 16]. Są to takie cechy jak:

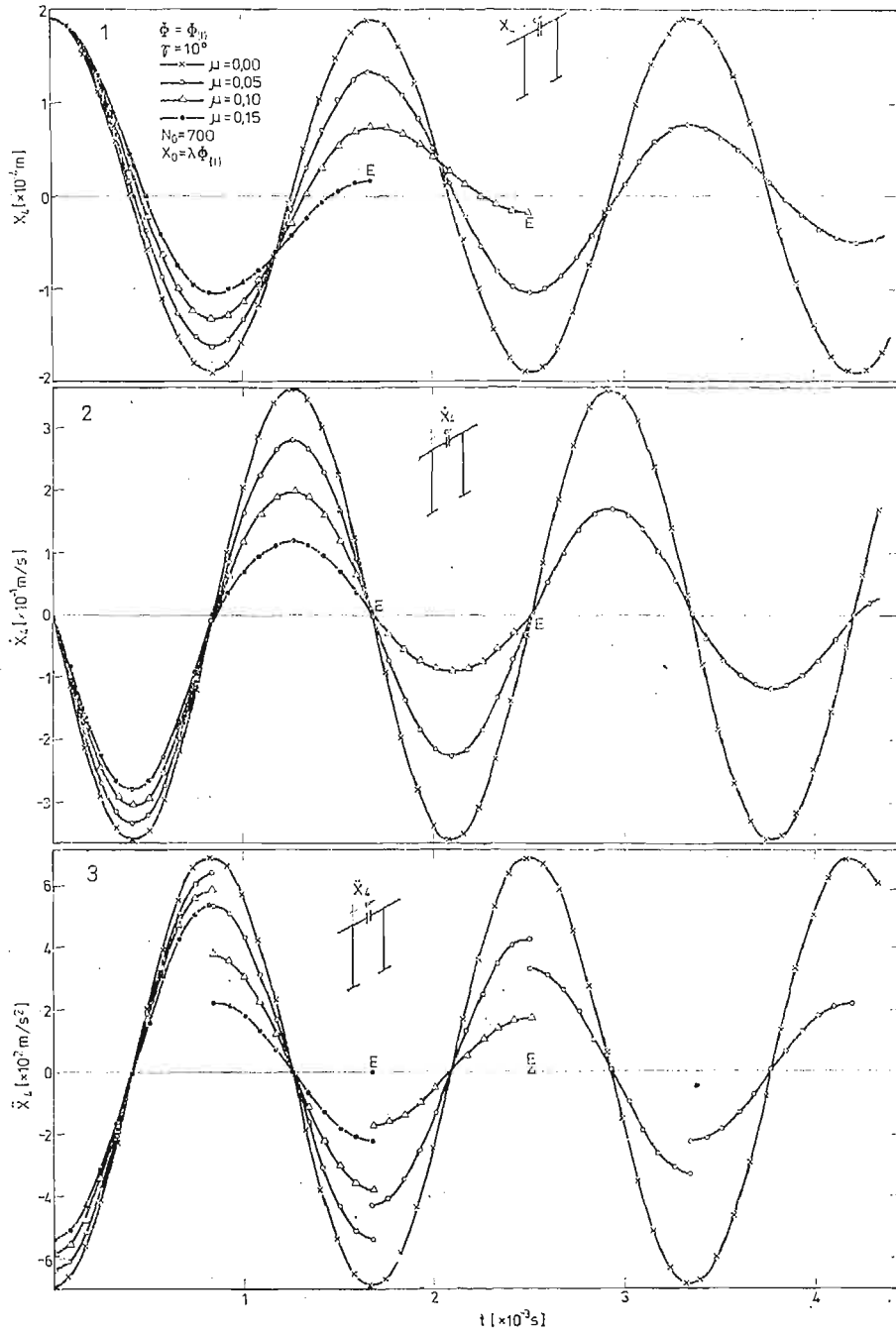
- występuje przesunięcie środka drgań o $\pm \Delta$,
- amplituda drgań maleje wg postępu arytmetycznego,
- funkcja przyspieszeń jest nieciągła (ze stałym skokiem $2\Delta\nu_{(i)}^2$) w miejscu zerowym prędkości i.t.d.

Dla rozpatrywanych układów o wielu stopniach swobody

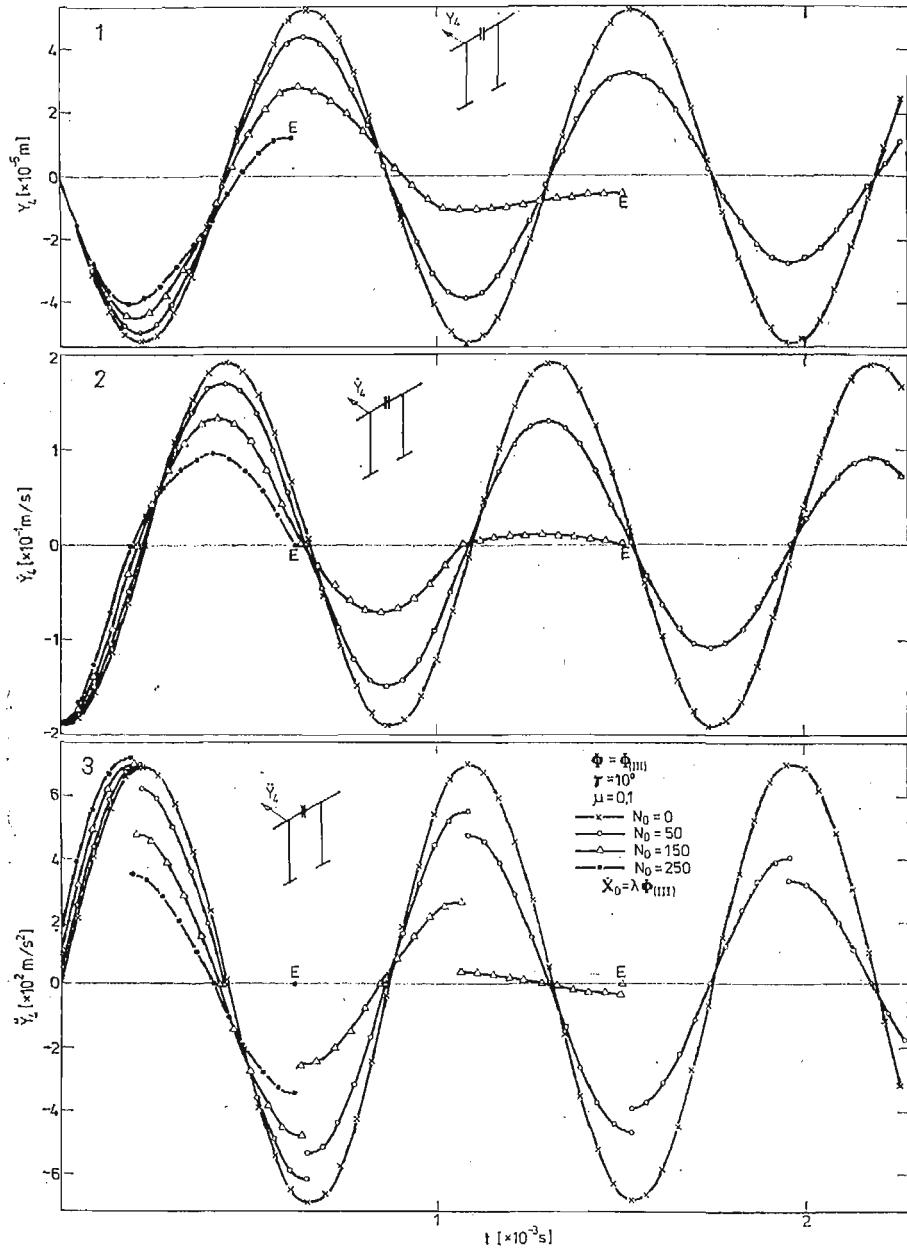
$$(9.1) \quad \Delta = \frac{|\Phi_{(i)}^T T|}{\nu_{(i)}^2},$$

gdzie $\Phi_{(i)}$ jest postacią analizowanych drgań, $\nu_{(i)}$ odpowiadającą jej częstotliwością, T wektorem generowanych podczas ruchu sił tarcia. Cechą charakterystyczną, tych zagadnień jest stały w czasie kierunek działania wektora tarcia na powierzchni styku (bez względu na typ tarcia).

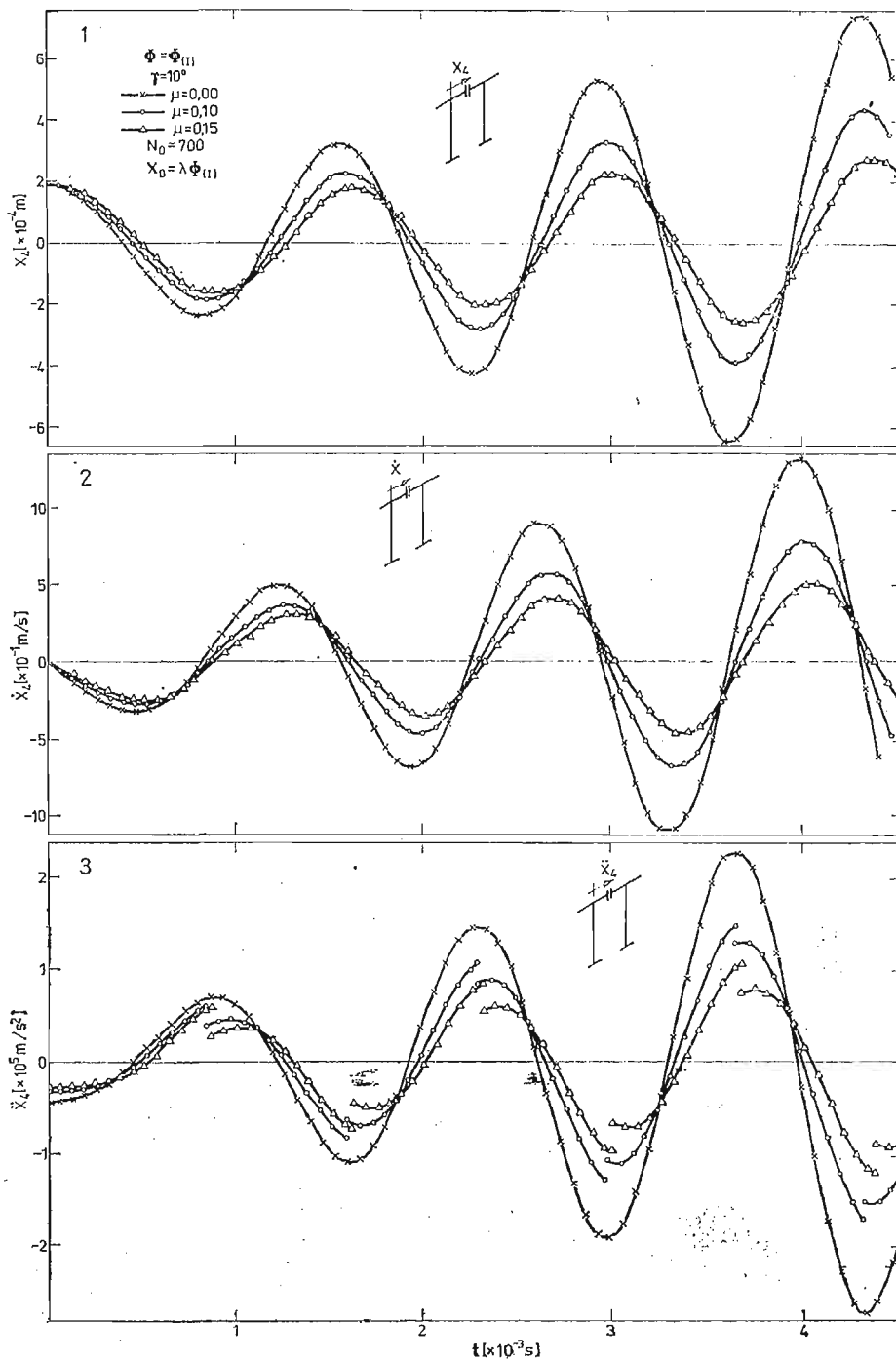
Wpływ ilości form drgań własnych wziętych do budowy macierzy transformacji Φ na obraz drgań, pokazano na przykładzie drgań swobodnych węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY , wywołanych prędkością zgodną z II formą drgań (gdy $\gamma = 0^\circ$). Na rysunkach 9 przedstawiono przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w przypadku tarcia izotro-



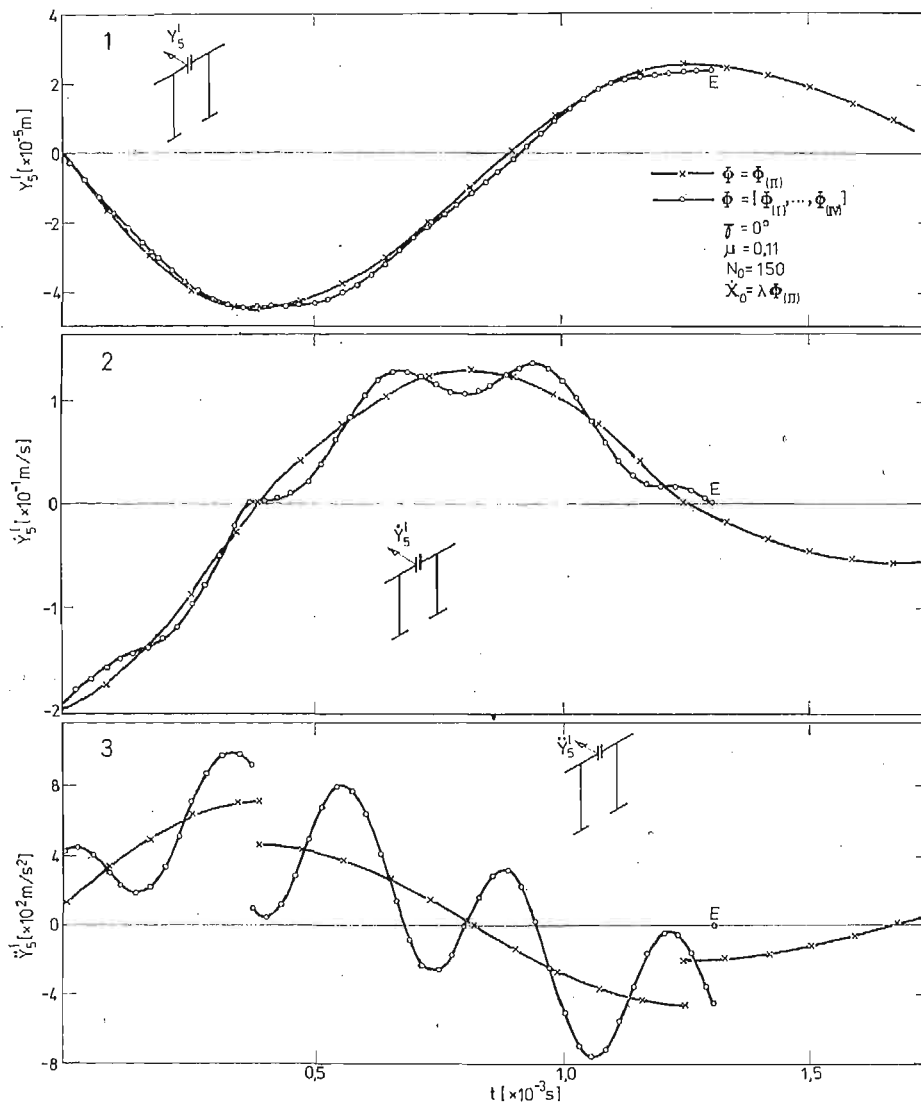
Rys. 6. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 4 w kierunku OX podczas drgań swobodnych z I formą (gdzie $\gamma = 10^\circ$).



Rys. 7. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 4 w kierunku OY podczas drgań swobodnych z III formą (gdy $\gamma = 10^\circ$).



Rys. 8. Przeszyczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 4 w kierunku OX podczas drgań rezonansowych z I częstotnością własną (gdy $\gamma = 10^\circ$)

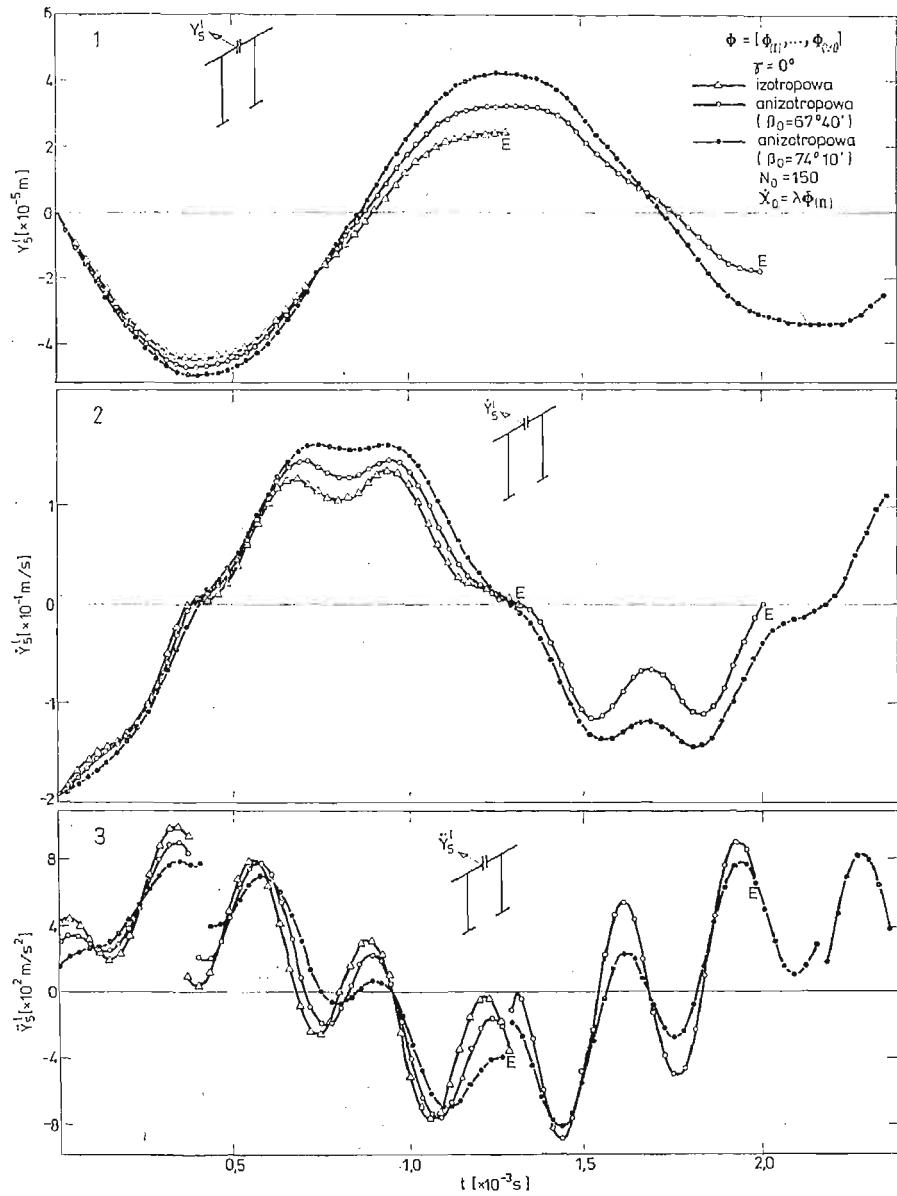


Rys. 9. Przemieszczenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY przy różnych opisach transformacji.

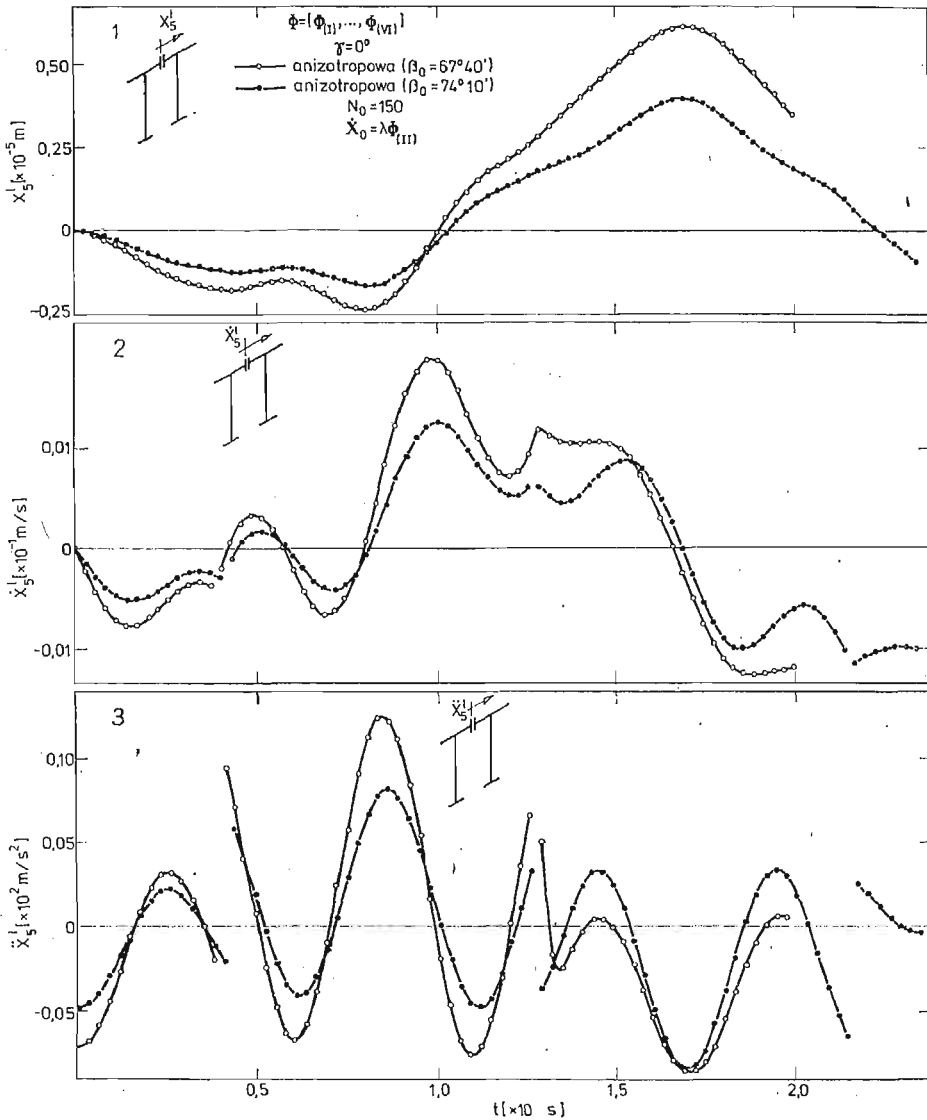
powego, gdy macierz Φ składa się tylko z drugiej formy drgań i gdy jest zbudowana z pierwszych sześciu postaci drgań własnych. Dla tak sformułowanego zagadnienia izotropowe tarcie suche wzbudza dodatkowo te formy drgań, które mają względne translacje w kierunku OY oraz względny obrót. Z pierwszych sześciu wektorów własnych tarcie wzbudza VI formę drgań własnych. Ogólnie, wzbudzone są te formy drgań na których tarcie wykonuje pracę, czyli

$$(9.2) \quad \Phi_{(i)}^T T \neq 0.$$

W następnych zadaniach przyjęto opis układu sześcioma pierwszymi formami drgań.

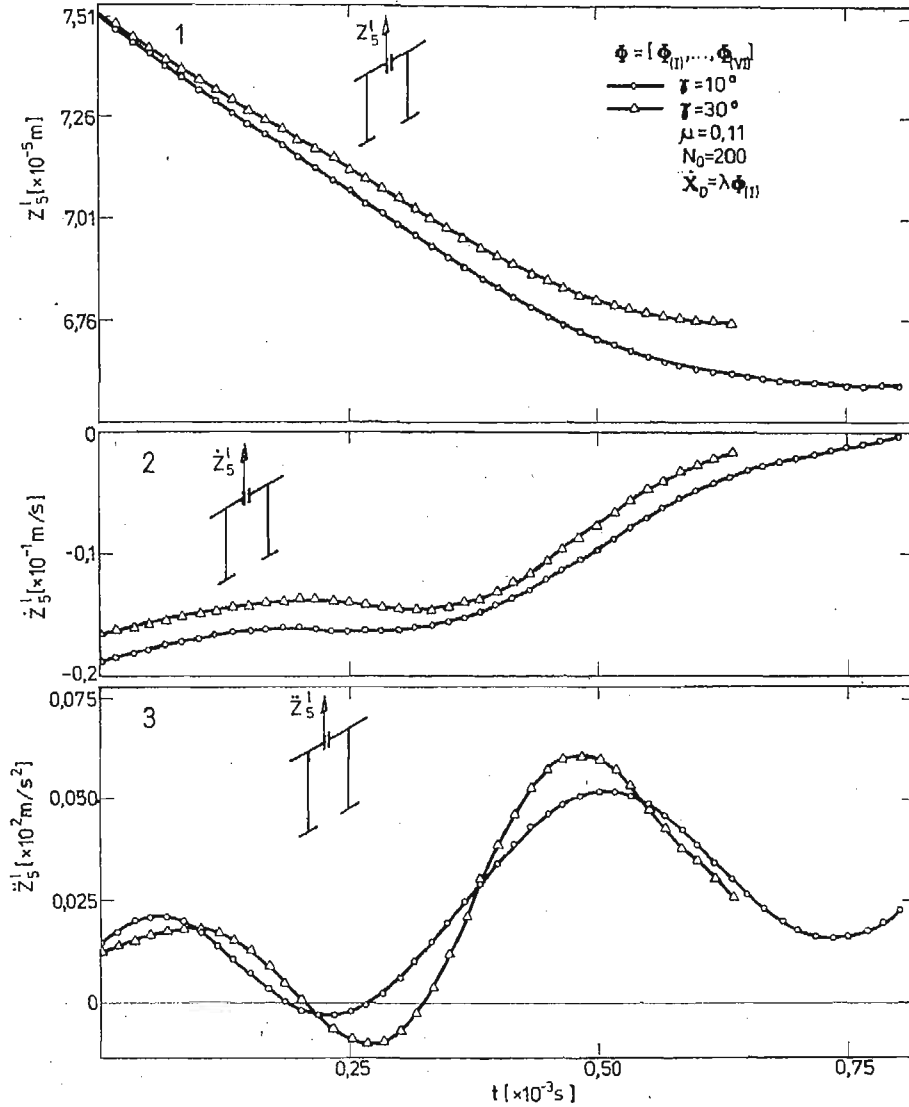


Rys. 10. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY podczas drgań swobodnych ze sprzężeniami poprzez anizotropię tarcia.



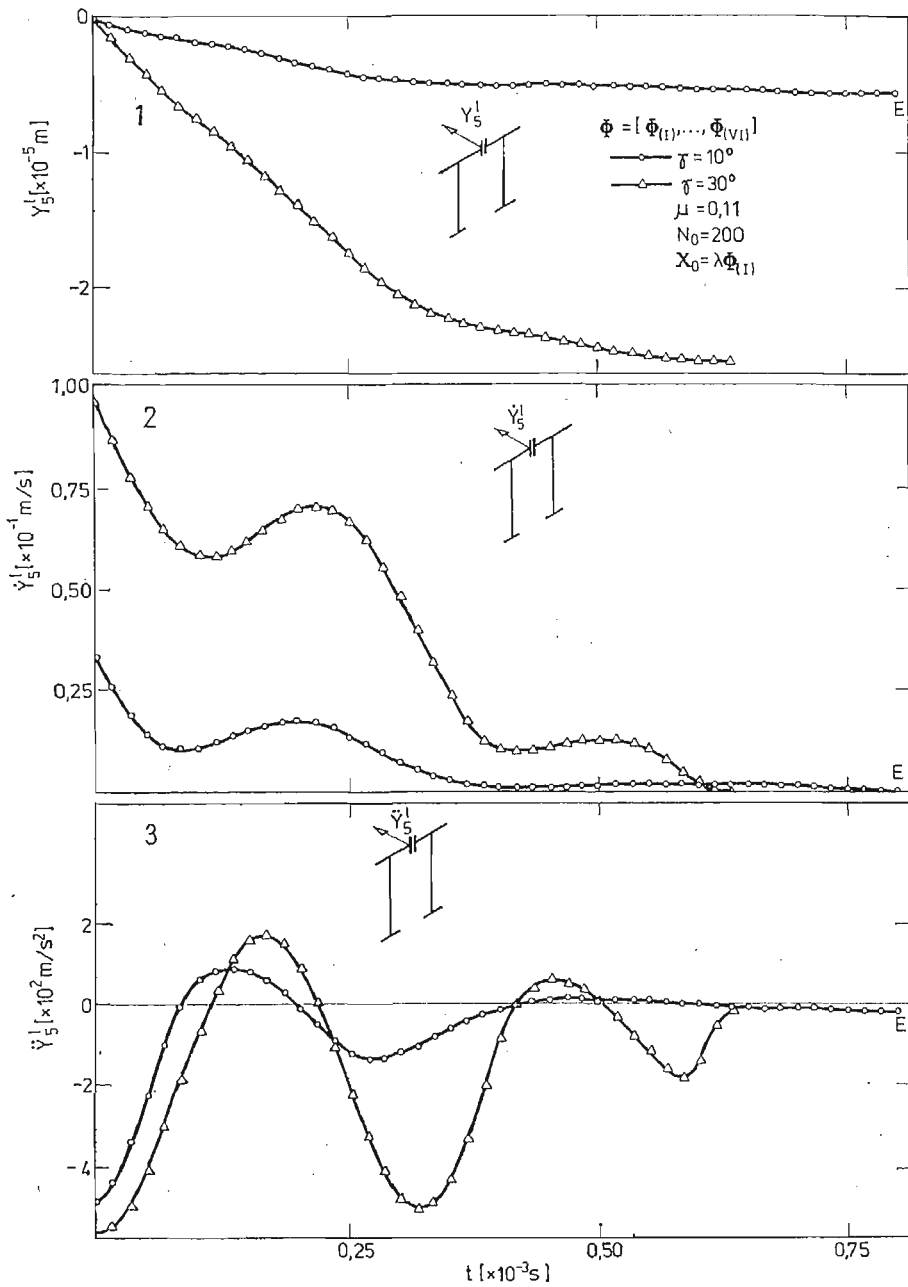
Rys. 11. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OX wywołane sprzężeniami poprzez anizotropię tarcia.

W przypadku drgań z formami bez sprzężeń sprężystych ($\gamma = 0^\circ$) tarcie anizotropowe generowane podczas ruchu z wybraną formą, wzbudza jednocześnie wszystkie formy z względnymi przemieszczeniami. Wynika to z własności wektora tarcia anizotropowego, który zbacza z kierunku wymuszonego ruchu względnego o kąt β . Mówimy wówczas o sprzężeniu drgań poprzez anizotropię tarcia suchego. Własność tę zilustrowano przykła-



Rys. 12. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OZ podczas drgań swobodnych z różnymi sprzężeniami poprzez sprzężystość układu ($\gamma \neq 0^\circ$)

dem „czystych drgań” z płaszczyzny tarczy, wywołanych prędkością początkową o rozkładzie zgodnym z II formą drgań (gdy $\gamma = 0^\circ$). Na rysunkach 10 i 11 znajdują się przebiegi drgań tłumionych tarciami izotropowym ($\mu = 0,11$) oraz dwa przypadki tarcia anizotropowego: $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,07$, $\mu_{12} = -0,035$, $\mu_{21} = 0,17$, $\kappa = 0,55$ ($\beta_0 = 67^\circ 40'$) i $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,04$, $\mu_{12} = -0,11$, $\mu_{21} = 0,14$, $\kappa = 0,45$ ($\beta_0 = 74^\circ 10'$), przyjęto $\mu_{ij}^{(L)} =$



Rys. 13. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY dla różnych sprężyn sprężystych ($\gamma \neq 0^\circ$)

Tablica 6

Zmiana kierunku wektora sił tarcia izotropowego podczas drgań swobodnych z III formą gdy $\gamma = 10^\circ$

$$t_0 = 3,659 \times 10^{-4} [\text{s}]; h = 0,002 \frac{\pi}{v_{(III)}}; v_{(III)} = 3623,18 [\text{l/s}];$$

$t = t_0 + nT$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 18$
$T_y [\text{N}]$	14,98	14,97	14,95	14,90	14,56	0,13	-14,08	-14,67	-14,99	-15,00	-15,00	-14,99	-14,99	-14,98
$T_z [\text{N}]$	0,79	0,94	1,20	1,74	3,60	15,00	5,15	3,11	0,48	0,19	-0,04	-0,23	-0,39	-0,75
$W [\text{Nm}]$	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	0,02

Tablica 7

Zmiana kierunku wektora sił tarcia anizotropowego podczas drgań swobodnych z II formą gdy $\gamma = 0^\circ$

$$t_0 = 4,046 \times 10^{-4} [\text{s}]; h = 0,0008 \frac{\pi}{v_{(II)}}; v_{(II)} = 3623,18 [\text{l/s}];$$

$t = t_0 + nT$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$
$T_y [\text{N}]$	7,48	7,59	5,77	2,03	-0,40	-1,69	-2,42	-2,90	-3,24	-3,48	-3,67	-3,81
$T_z [\text{N}]$	18,77	15,89	6,71	-4,63	-10,04	-13,09	-14,49	-15,35	-15,91	-16,31	-16,66	-16,84
$W [\text{Nm}]$	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	0,13

$= \mu_i^{(p)}$. Rys. 10 przedstawia przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia drgań swobodnych węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY . Wzbudzone drgania tego węzła w płaszczyźnie tarczy wskutek działania sił tarcia anizotropowego przedstawia rys. 11. Tarcie izotropowe nie wymusza drgań w płaszczyźnie OXZ .

W przypadku drgań ze sprzężonymi sprężystościami formami ($\gamma \neq 0^\circ$) tarcie (niezależnie od typu) generowane podczas drgań z wybraną formą, wzbudza wszystkie postacie ze względnyimi przemieszczeniami. Zilustrowano to przykładami drgań swobodnych tłumionych tarcie izotropowym $\mu = 0,11$ a wywołanych prędkością początkową o rozkładzie zgodnym z I formą drgań dla $\gamma = 10^\circ$ i $\gamma = 30^\circ$. Na rys. 12 przedstawiono obraz drgań swobodnych węzła 5 (lewa strona) w kierunku OZ a na rys. 13 drgania tego węzła w kierunku OY . W zdaniu tym nie uzyskano zbieżności interakcji wektora tarcia w chwili bliskiej momentowi wygaśnięcia ruchu względnego.

Wektor sił tarcia jest funkcją ciągłą względem czasu wtedy, gdy drgania są sprzężone poprzez sprężystość ($\gamma \neq 0^\circ$) lub poprzez anizotropię tarcia. Wynika to stąd, że składowe wektora prędkości translacji mają miejsca zerowe w różnych chwilach czasu. Jednak w wielu przypadkach zmiana kierunku wektora siły tarcia następuje w bardzo krótkim czasie (mniejszym od przyjętego kroku całkowania równań ruchu). Pokazuje to przykład (tabl. 6) zmiany kierunku wektora tarcia izotropowego ($\mu = 0,1$; $N_0 = 150$ [N]) podczas drgań z III formą drgań własnych (gdy $\gamma = 10^\circ$). Przypadek zmiany kierunku tarcia anizotropowego (dla $\beta_0 = 74^\circ 10'$) podczas drgań według II formy (gdy $\gamma = 0^\circ$), przedstawiono w tabl. 7. W obu przykładach składowe wektora tarcia iterowano z dokładnością $\delta = 2$ [%]. Z ciągłości wektorowej funkcji siły tarcia wynika ciągłość funkcji przyspieszeń. Jednak ze względu na bardzo krótki czas w którym zmienia się kierunek siły tarcia, otrzymany obraz funkcji jest zbliżony do przebiegu typu przeskoku. Funkcja prędkości w tym przypadku może mieć gwałtowne ekstremum. W celu zachowania przejrzystego obrazu drgań na rys. 10 i 11 w przypadkach anizotropii nie naniesiono przebiegów funkcji prędkości i przyspieszeń w przedziałach czasowych zmiany kierunku wektora tarcia.

We wszystkich pokazanych przykładach tak dobrano warunki początkowe drgań aby siły tarcia dynamicznego były generowane już od chwili t_0 . Opis drgań kończono z chwilą ustania jednego (rys. 10, 11, 12, 13) lub wszystkich (rys. 6, 7, 9) ruchów względnych w miejscu nieciągłości. Moment ten oznaczono na wykresach literą E .

10. Wnioski

Zasadnicze własności dynamiczne pary łopatek turbinowych z tarcie suchym na powierzchni nieciągłości bandaża można sformułować następująco:

- Pakiet łopatek z nieciągłym bandażem ma dodatkowe stopnie swobody a jego częstotliwości drgań własnych, odpowiadające formom z względnyimi przemieszczeniami, są niższe od częstotliwości drgań układu z monolitycznym bandażem.
- Ukośne usytuowanie łopatek w wieńcu tarczy wirnikowej ($\gamma \neq 0^\circ$) wywołuje efekty sprzężeń drgań z różnych płaszczyzn ruchu (jest to sprzężenie drgań poprzez sprężystość).
- Drgania z postaciami bez względnych przemieszczeń w miejscu nieciągłości nie będą generowały sił tarcia.
- Przez odpowiedni dobór parametrów tarcia można uzyskać powolny wzrost amplitud rezonansowych, dopuszczalny w określonym czasie eksploatacji.

- e) Drgania pakietu z udziałem tarcia suchego są superpozycją ruchów z tymi formami własnymi na których generowana podczas ruchu siła tarcia wykonuje pracę. W zależności od warunków ruchu, typu tarcia oraz sprężystych sprzężeń form drgań, siły tarcia pracują na niektórych lub wszystkich formach z względnymi przemieszczeniami w miejscu styku. We wszystkich rozważanych przykładach ruch form rozpraszających energię ustaje jednocześnie.
- f) W przypadku sprzężenie sprzężonych form drgań ($\gamma \neq 0^\circ$) tarcie izotropowe i anizotropowe generowane podczas „czystych drgań” z wybraną formą, wzbudza wszystkie formy z względnymi przemieszczeniami, niezależnie od tego czy wywołano drgania o dominujących przemieszczeniach w płaszczyźnie tarczy wirnikowej czy z płaszczyzny.
- g) Siły tarcia izotropowego podczas „czystych drgań” z niesprężoną sprzężenie formą ($\gamma = 0^\circ$) wzbudzają tylko te postacie w których względne przemieszczenia występują na kierunkach przemieszczeń wymuszonej formy.
- h) Siły tarcia anizotropowego generowane podczas „czystych drgań” z niesprężonymi formami ($\gamma = 0^\circ$) zbaczają z kierunku wymuszonego ruchu i wzbudzają wszystkie formy z względnymi przemieszczeniami w miejscu nieciągłości (jest to sprzężenie drgań poprzez anizotropię tarcia).

Przedstawiona w pracy metoda analizy dynamicznej umożliwia liczenie układów o wielu stopniach swobody z udziałem sił tarcia na powierzchniach rozdziału. Uwzględniła ona typowe dla opisu tarcia suchego nieliniowości i nieciągłości.

Na zakończenie autor pragnie podziękować Panu mgr M. LIDKE za liczne uwagi i sugestie wykorzystane przy układaniu programów obliczeniowych na EMC.

Literatura cytowana w tekście

1. J. GIERGIEL, *Problemy tarcia konstrukcyjnego w dynamice maszyn*, Zeszyty Naukowe AGH, z. 44, 1971 r.
2. Z. OSIŃSKI, *Rozpraszania energii w nieliniowych układach mechanicznych*, Zag. Drgań Nielin., nr 9, 1968 r. s. 85 - 95
3. Z. OSIŃSKI, *Kierunki rozwojowe badań tłumienia drgań w procesach dynamicznych*, Zag. Drgań Nielin., nr 12, 1971 r., s. 87 - 99
4. Н. Г. Калинин и др., *Конструктивное демпфирование в неподвижных соединениях*, Изд. АНЛСРР, Рига 1960
5. J. MURIN, *Comments on the dynamic and damping properties of a layered system with dry friction*, Zag. Drgań Nielin., nr 14, 1973 r., s. 531 - 545
6. W. BOGUSZ, J. GIERGIEL, *Drgania przypadkowe wymuszone układu mechanicznego z tarciem suchym*, Zag. Drgań Nielin. nr 12, 1971 r., s. 169 - 176
7. Z. OSIŃSKI, K. WIKLIK, *The excited nonlinear vibrations of a system damped by the viscous and structural damping*, Zag. Drgań Nielin., nr 15, 1974 r., s. 381 - 391.
8. A. MUSZYŃSKA, *Wpływ efektu poślizgu w zamkach na tłumienie drgań łopatek maszyn wirnikowych* Prace IPPT, nr 55, 1977 r.
9. S. W. EARLES, E. J. WILLIAMS, *A linearized analysis for frictionally damped systems*, Jour. of Sound and Vibr., 24 (4), 1972 r., s. 445 - 458
10. J. WIĘCKOWSKI, *Dynamika belki warstwowej z tarciem suchym*, Biuletyn Inst. Maszyn Przepł., 21 (698) 1971 r.
11. J. WIĘCKOWSKI, *Sygnatury i analiza numeryczna drgań swobodnych łopatek pryzmatycznej z drutami tłumiącymi*, Biuletyn Inst. Maszyn Przepływ., 97 (763) 1974 r.

12. J. WIĘCKOWSKI, *Tłumienie drgań giętych w przecie przyzmatycznym z profilem odcinka zamocowania typu gwintowego*, Prace Inst. Maszyn Przepl., z. 49, 1970 r., s. 97 - 119
13. I. P. DEN HARTOG, *Drgania mechaniczne*, PWN, Warszawa 1971 r.
14. S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1957 r.
15. S. KALISKI, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966 r.
16. Z. OSIŃSKI, *Teoria drgań*, PWN, Warszawa 1978 r.
17. А. Ф. ФИЛИПОВ, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Мат. Сборник, Т51 (93), нр. 1, 1960, с. 99—128
18. K. TAUBERT, *Differenzverfahren für Schwingungen mit trockener und zäher Reibung und für Regelungssysteme*, Numer Math., нр 26, 1976 r., s. 379 - 395
19. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of matrix structural analysis*, Mc Graw-Hill, 1968 r.
20. J. SZMELTER i inni, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1973 r.
21. R. E. D. BISHOP i inni, *Macierzowa analiza drgań*, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa 1972 r.
22. J. H. WILKINSON, C. REINSCH, *Linear Algebra. Handbook for Automatic Computation*, Springer-Verlag, 1971 r.
23. A. ZMITROWICZ, *Tensor tarcia Coulomba*, Mech. Teor. i Stosow., нр 4, 1977 r., s. 517 - 527
24. A. ZMITROWICZ, *Sily tarcia Coulomba podczas wirowania*, Mech. Teor. i Stosow., нр 4, 1972 r. s. 583 - 600
25. K. J. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice — Hill Inc., 1976 r.
26. K. MOSZYŃSKI, *Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych na maszynach cyfrowych*, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa 1971 r.
27. N. M. NEWMARK, *A method of computation for structural dynamics*, Proc. ASCE, Jour. Eng. Mech. Div., vol. 85, нр 3, 1959 r., s. 67 - 97
28. A. ZMITROWICZ, *Mechanizmy tarciove w układach lopatkowych maszyn wirnikowych*, Zeszyty Naukowe Inst. Maszyn Przepl., 45 (919) 1978 r.
29. J. THOMAS, H. BELEK, *Free vibration of blade packets*, Jour. Mech. Eng. Scien., vol. 19, нр 1, 1977 r., s. 13 - 21
30. В. В. МАТВЕЕВ и др., *Исследование демпфирующей способности попарно бандажированных турбинных лопаток в зависимости от условий сопряжения их бандажных полок*, Проблемы прочности, нр. 8, 1978, с. 93—97

Резюме

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕНИЕМ КУЛОНА НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЕРЫВНОСТИ

В работе представлен метод расчета колебаний стержневой системы с сухим трением в конструкционной прерывности, рис. 1. При помощи метода конечных элементов стержневую систему описано системой с конечным числом степеней свободы. Общее описание сил сухого трения на поверхности контакта дано при помощи тензора трения Кулона [23, 24]. Принято во внимание поверхностный характер контакта и анизотропию сухого трения.

Динамические свойства стержневой системы исследовано на примере расчета „чистых колебаний” пакета, турбинных лопаток. Показано эффекты возбуждения колебаний силами трения и сопряжения колебаний через упругость системы и анизотропное трение.

Summary

VIBRATION OF A ROD SYSTEM WITH COULOMB FRICTION AT DISCONTINUITY SURFACE

The paper presents a method of vibration analysis of a rod system with dry friction at the construction discontinuity place, fig. 1: The rod system was described as a system of finite degrees of freedom by means of the method of finite elements. General description of dry friction forces at the contact surface

was made by means of Coulomb friction tensor [23, 24]. Friction anisotropy and a real character of contact was taken into consideration.

The motion properties of the rods system were investigated by numerical studying of an example of turbine blades packet „pure vibration”. The effects of friction excited vibration and of vibration coupling resulting from elasticity of the system and/or anisotropic friction, were showed.

PAN
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH
GDAŃSK

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 lipca 1979 roku

BIULETYN INFORMACYJNY

SZKOŁA nt. „NIENISZCZĄCE BADANIA KONSTRUKCJI METODAMI HOLOGRAFII” WARSZAWA — JACHRANKA 1—13.10.1979 r.

Szkoła finansowana z funduszy Komitetu Mechaniki PAN zorganizowana została przez Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej przy udziale Centralnego Laboratorium Optyki, Instytutu Fizyki Politechniki Warszawskiej oraz Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Politechniki Krakowskiej.

W trakcie trwania Szkoły wygłoszono 40 godz. wykładów i wykonano 8 ćwiczeń laboratoryjnych w grupach 5-cio osobowych oraz wygłoszono 6 półgodzinnych referatów na temat badań własnych uczestników Szkoły. Ponadto odbyły się dwa wykłady prof. J. Ebbeni z Université Libre de Bruxelles, które wywołały duże zainteresowanie uczestników Szkoły. Wykładowcami Szkoły byli; mgr M. Daszkiewicz, mgr inż. T. Feuer, dr M. J. Matczak, mgr E. Mróz-Powichrowska, mgr R. Pawluczyk, dr B. Smolińska oraz doc. dr hab. inż. J. Stupnicki.

Program Szkoły był tak dobrany aby słuchacze mogli czynnie uczestniczyć w zajęciach w trakcie których przyswoili sobie szereg trudnych zagadnień optyki koherentnej, elektroniki i mechaniki ciał odkształcalnych. W trakcie wykładów omówiono następujące tematy; światło jako nośnik informacji, propagacja światła, holograficzna rejestracja informacji (energetyczne, geometryczne i techniczne warunki rejestracji holograficznej), interferometria holograficzna, interferometria plamkowa oraz wyznaczanie przemieszczeń, odkształceń i naprężeń na podstawie obrazów interferometrycznych.

Uczestnicy Szkoły otrzymali skrypt, który umożliwił przekazanie bardzo obszernej i różnorodnej tematyki w trakcie zaledwie kilkudziesięciu godzin wykładów. Dla przeprowadzenia zajęć laboratoryjnych opracowano i przygotowano osiem ćwiczeń laboratoryjnych; justowanie układów holograficznych, badanie kształtu metodą immersyjną, badanie drgań metodą uśrednienia czasowego, badanie przemieszczeń metodą czasu rzeczywistego, badanie drgań metodą błyskową, badanie przemieszczeń metodą interferometrii plamkowej oraz badanie dwoma metodami odkształceń modeli z materiałów dwójtomnych.

Słuchacze reprezentujący wiele różnych ośrodków z całego kraju, zostali wybrani spośród zgłoszonych przeszło osiemdziesięciu osób.

Najszerzej były reprezentowane uczelnie — 28 osób, instytuty naukowe — 5 osób, przemysł — 3 osoby. Regionalnie najliczniej była reprezentowana Warszawa — 17 osób, Kraków — 4 osoby, Wrocław — 3 osoby, Lublin, Gliwice, Łódź po dwie osoby, Starachowice, Częstochowa, Koszalin, Poznań, Gdańsk i Elbląg po jednej osobie.

Irena Mruk

KONFERENCJA KONTYNUALNA MECHANIKA CIAŁA STAŁEGO Oberwolfach, 6 — 12 stycznia 1980

Druga w tym roku konferencja organizowana przez Mathematisches Forschungsinstitut w znanym, wśród matematyków, ośrodku konferencyjnym, poświęcona była zagadnieniom mechaniki ciała stałego odkształcalnego. Konferencje organizowane w Oberwolfach dotyczą oczywiście przede wszystkim poszczególnych działów matematyki. Jednak również w tym roku kilka z tych konferencji interesuje bezpośrednio

pracowników nauki z dziedziny mechaniki. Spis konferencji do października 1981 r. został opublikowany w Biuletynie Informacyjnym Polskiego Towarzystwa Matematycznego nr 4/1979. W roku bieżącym przewidziano 46 konferencji, w tym: metody i osiągnięcia fizyki matematycznej, teoria sterowania, metoda elementów skończonych, nieliniowe i reolinowe układy drgające, równania całkowe w naukach inżynierskich.

Wracając do konferencji podanej w tytule, to brało w niej udział 44 uczestników z 11 państw wygłaszając 33 referaty (Austria — 1, Berlin Zachodni — 1, Bułgaria — 1, Francja — 1, Holandia — 3, Polska — 6(5 referatów), Szwecja — 2, RFN — 14 referatów, Stany Zjednoczone A. P. — 1 (2 referaty), Turcja — 1, W. Brytania — 2). Tematyka konferencji była dość rozproszona, nie mniej stała na tradycyjnie wysokim poziomie naukowym. Poszczególne referaty dotyczyły zagadnień dynamicznych ośrodków sprężystych i niesprężystych, stateczności, modeli ciał stałych, mechaniki pękania i teorii szczelin, rozwiązań przybliżonych i metod obliczeniowych. Kilka referatów, przede wszystkim dwa referaty przedstawione przez prof. G. Herrmanna (drugi z nich w zastępstwie A. Gołębiewskiej-Herrmann) pt. „Sformułowanie Lagrange'a dla nieidealnych (imperfect) ośrodków sprężystych” spowodowało obszerną dyskusję i potrzebę zorganizowania specjalnego zebrania dyskusyjnego „okrągłego stołu”. Zebranie to poprowadził prof. P. Chadwick przedstawiając wyrowadzenie, genezę i sens J , L i M całek w ośrodkach ze szczelinami. W ożywionej dyskusji swoje poglądy na ten temat wypowiedzieli profesorowie M. Sokołowski, G. Herrmann, D. Gross, F. Nilsson i H. Zorski.

Jest rzeczą subiektywną wymienienie najciekawszych referatów. Wymienię tu referaty J. B. Alblasa — wciskanie stempla przy zupełnej adhezji, P. Chadwicka — o aspektach istnienia fal powierzchniowych w ośrodkach sprężystych z symetrią kubiczną, W. A. Greena — o propagacji fal w płytach silnie anizotropowych. W. T. Koiter mówił o nowych aspektach teorii kolumn w zakresie powybieczeniowym z nieliniowym warunkiem pobocznym. Świetny dydaktycznie wykład przedstawił G. Kuhn (o metodzie równań całkowych dla dwu i trójwymiarowych zagadnień termosprężystości). Th. Lehmann mówił o sprzężeniu procesów termicznych i mechanicznych w przypadku niesprężystego odkształcenia ciał stałych, H. Lippmann przedstawił zagadnienie progresywnego rozwoju szczelin — problem, który ma bezpośrednie znaczenie praktyczne zwłaszcza w górnictwie węglowym, modeluje bowiem zjawisko tąpnięć. J. Meixner, w swoim referacie, zajął się zagadnieniem nierówności w termostatyce i termodynamice, a L. Müller — funkcjami stanu dla stopów z pamięcią. F. Ziegler z pomocą metody T-macierzy rozwiązał zagadnienie tłumienia fal akustycznych w ciałach sprężystych z niejednorodnościami.

Polska grupa była najliczniejsza z pośród uczestników zagranicznych. Przedstawiliśmy 5 referatów: A. Sawczuk — o kryteriach uplastycznienia w konstrukcjach silnie odkształcanych, M. Sokołowski i M. Matczyński — o fizycznej interpretacji J -całki, W. Szczepiński — studium odkształceń plastycznych polikrystalicznych agregatów pod działaniem złożonych obciążeń, H. Zorski — nielocalne kontinua z oddziaływaniami elektro-magnetycznymi i Z. Olesiak — o potrójnych równaniach całkowych i ich zastosowaniach w mechanice ciała stałego. W niedługim okresie po konferencji organizatorzy rozesłali broszurę zawierającą streszczenia wygłoszonych referatów i spis uczestników.

Z. Olesiak

NOWE CZASOPISMA NAUKOWE

1. Politechnika Wroclawska rozpoczęła wydawanie kwartalnika pod tytułem „Studia geotechnica et mechanica”. Redaktorem naczelnym czasopisma jest prof. Igor Kisiel, przewodniczącym Komitetu Redakcyjnego prof. Antonii Sawczuk. Kwartalnik ten, wydawany w językach angielskim, francuskim i rosyjskim będzie publikować prace teoretyczne i doświadczalne z dziedziny reologii gruntu i skał, nowe rozwiązania zagadnień geotechnicznych, prace z zastosowań metod numerycznych i analogowych w geotechnice i mechanice oraz z zastosowań analizy wymiarowej i z zagadnień teoretycznych i doświadczalnych techniki podmorskiej i podziemnej. Pierwszy zeszyt ukazał się w 1979 roku. Adres: Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wroclawskiej Smoluchowskiego 25, 50 - 370 Wrocław.

2. Zakończone zostały przygotowania do wydawania kwartalnika „Machine Dynamics Problems”. Redaktorem naczelnym jest prof. Zbigniew Osiński, przewodniczącym Komitetu Redakcyjnego prof. J. Więckowski. Publikowane będą oryginalne prace dotyczące wszelkiego rodzaju maszyn oraz procesów technologicznych przez nie realizowanych, których dynamiczne cechy wysuwają się na plan pierwszy przy ich konstruowaniu i użytkowaniu. Publikacje powinny dotyczyć problemów: modelowania maszyn jako układów dynamicznych, identyfikacji i modyfikacji układów, badania podstawowych własności materiałów elementów i zespołów maszyn, badania współdziałania elementów, badania drgań, wibroizolacji i wibroakustyki, diagnostyki dynamicznej maszyn, analizy stateczności, badania i opisu procesów i oddziaływań zewnętrznych. Prace będą publikowane wyłącznie w języku angielskim. Adres: Instytut Podstaw Budowy Maszyn Politechnika Warszawska, Narbutta 84, 02-524 Warszawa.

SPRAWOZDANIE

z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej
w drugie j połowie 1979 r.

I. Działalność naukowa

Odbyły się 26 zebrania naukowe o następującej tematyce:

Oddział w Bydgoszczy

1. 25.10.79 dr inż. Henryk Holka „Dynamiczny tłumik drgań z aktywnym sterowaniem częstotliwością nastrojenia”
2. 15.11.79 r. mgr inż. Jan Lorkowski „Dyskretna, skończona transformacja Fouriera w zastosowaniu do obliczeń osiowo-symetrycznych konstrukcji prętowych”
3. 3.12.79 prof. dr hab. inż. Marek Dietrych „Modelowanie mechanicznych procesów stochastycznych w konstrukcji maszyn”.

Oddział w Częstochowie

4. 10.9.79 prof. Marek Morkowin (Inst. Technologiczny w Chicago) „Generacja turbulencji i struktura dużych wirów w przepływach turbulentnych”
5. 12.11.79 doc. dr inż. Mieczysław Fołtyński „Niekonwencjonalne napędy samochodów przyszłości”
6. 17.12.79 dr inż. Krystyna Jeżowiecka-Kabsch „Struktura rozprzestrzeniania się strumienia turbulentnego”.

Oddział w Gdańsku

7. 18.9.79 mgr inż. Aleksander Zubulewicz „Pewien wariant metody elementów skończonych”
8. 26.11.79 mgr inż. Jerzy Makowski „Bifurkacyjna utrata stateczności powłok sprężystych — ogólne równania i przykłady obliczeń metody elementów skończonych”.

Oddział w Gliwicach

9. 28.11.79 mgr inż. Andrzej Sambura „Koordynacja kształtowania rozwiązań projektowych w ramach systemu projektującego”

Oddział w Krakowie

nie było

Oddział w Lublinie

10. 3.07.79 dr inż. Jan Golec „Drgania układów prętowych o zmiennej sztywności zginania”
11. 17.8.79 dr inż. Wiesław Hawrylecki „Synteza układów mechanicznych trajektorii oparta na podobieństwie trajektorii ruchu”
12. 4.09.79 — doc. dr Krzysztof Wierzchowski „Przegląd magneto-hydrodynamicznych problemów w zagadnieniach kontaktów pomiędzy dwoma powierzchniami sprężystymi”
13. 2.10.79 — prof. dr Tadeusz Opolski „Zmiany naprężeń w zamkniętych układach cięgien”
14. 6.11.69 — dr Andrzej Ostapiuk „Pojemność energetyczna w układach względnie odosobnionych”
15. 4.12.79 — Komunikat — mgr inż. Bogusław Skierczyński „Ogólne wymuszanie parametryczne mechanizmów wagi uchyłnej”

Oddział w Łodzi

nie było.

Oddział w Opolu

16. 7.11.79 prof. dr hab. inż. Oswald Mateja „Ścisłe macierze sztywności w metodzie elementów skończonych”
17. 5.12.79 dr hab. inż. Andrzej Dragon „Wprowadzenie do teorii zniszczenia”
18. 19.12.79 dr hab. inż. Andrzej Dragon „Doświadczalna weryfikacja teorii zniszczenia”

Oddział w Poznaniu

19. 19.9.79 prof. dr G. Easen „Wave propagation in a preliminary deformed R O D”

Oddział w Szczecinie

20. 15.11.79 dr inż. Alfred Stępniewski „Zastosowanie metody przekształceń elementarnych do rozwiązywania zagadnień statyki i dynamiki. Twierdzenie o wypadkowej zaszczipionego układu sił”
21. 29.11.79 doc. dr inż. Marian Kmiecik „Wpływ geometrii odkształceń spawalniczych na nośność płyt osiowo ściskanych”
22. 14.12.79 dr inż. J. Bauer „Wybrane zagadnienia optymalizacji dyskretnej konstrukcji inżynierskich”

Oddział w Warszawie

23. 25.10.79 prof. dr J. Oderfeld, prof. dr Z. Mróz, prof. dr A. Brandt „Cele i metody optymalizacji w mechanice”
24. 26.11.79 r. dr Jan Obrębski „Analiza i synteza numeryczna wielkich układów konstrukcyjnych”

Oddział we Wrocławiu

25. 2.7.79 r. prof. Kimio Shimada z Tokyo University — „Zastosowanie robotów w automatyzacji procesów przemysłowych”
26. 8.10.79 prof. Marek Zakrzewski „Mechanika Dolnośląska w początkowym okresie PRL”
prof. Otton Dąbrowski „Nauczanie Mechaniki w Polsce i niektórych krajach obcych”

II. Sympozja i konferencje naukowe**Oddział w Łodzi**

1. zorganizował w dniach 26 i 27 października 1979 r. III Sympozjum Stateczności Konstrukcji.

Oddział w Krakowie

2. zorganizował w dniach 23 i 24.3 — 79 r. V Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki.

Oddział w Rzeszowie

3. zorganizował w dniach 23 i 24.9.79 r. IV Sympozjum dynamiki konstrukcji.

Oddział w Zielonej Górze

4. zorganizował Sympozjum n.t. „Badania dynamiczne warstwy wierzchniej” w okresie 17—22.9.1979 r. Uczestników 128, referent doc. dr inż. S. Laber.

III. Seminarja naukowe i kursy**Oddział w Bydgoszczy**

1. zorganizował seminarium na temat „Wybrane zagadnienia Mechaniki Płynów”. Uczestników było 238, referatów — 6.

Oddział w Gdańsku

2. zorganizował seminarium n.t. „Metoda elementów skończonych w obliczeniach drgań i stateczności konstrukcji” uczestników 12.

Oddział w Poznaniu

3. zorganizował kursy wykładowe na temat „Metody elementów skończonych” w dniach 29.10.1979 r., do 30.3.1980 r. Wykładowcy M. Kurek, M. Ciałkowski, K. Magnucki. Uczestników 44, wykładów 4.

Oddział w Zielonej Górze

4. zorganizował seminarium na temat „Wybrane działy z kinematyki”. Prelegent mgr inż. Stanisław Mazur.

IV. Konkursy naukowe

1. Oddział w Częstochowie ogłosił konkurs na temat „Prace Doświadczalne z Mechaniki”. Wpłynęło 8 prac. Sąd Konkursowy przyznał II nagrodę — zł. 8.000.— dr inż. Krzysztofowi Wernerowi (Częstochowa) za pracę pt. „Badanie rozwoju zmęczeniowego pęknięcia powierzchniowego o kształcie pół-eliptycznym w próbach stali o podwyższonej wytrzymałości 156-ZAN6 i obliczenie trwałości próbek na podstawie wyników badań”
 Ponadto 4 wyróżnienia po zł. 4.000.— otrzymali:
 dr inż. Andrzej Kaliszek (Warszawa) za pracę pt. „Własności wytrzymałościowe elementów szklanych z silną lokalną nieciągłością geometryczną”
 dr inż. Mariusz Szechiński (Wrocław) za pracę pt. „Zagadnienia zmian kształtu wykresu naprężeń w belkach żelbetowych obciążonych długotrwale”
 dr inż. Jan Musialik (Częstochowa) za pracę pt. „Własności stereometryczne i fizyczne warstwy wierzchniej stali obrobionej wyglądaniem elektromechanicznym”
 dr inż. Halina Konderla (Wrocław) za pracę pt. „Zmiany wytrzymałości gruntu spoistego wywołane jego rozluźnieniem”.
2. Oddział Łódzki wspólnie z Oddziałem Warszawskim zorganizował konkurs na tematy teoretyczne. Nadesłano 8 prac. Sąd Konkursowy postanowił:
 Nagrodę stopnia I przyznać pracy sygnowanej godłem „OPTY” pt. „Zasady wariacyjne mechaniki dla zmiennych obszarów i ich wykorzystanie w optymalizacji konstrukcji”. Wysokość nagrody zł 14.000.—
 Nagrodę stopnia II przyznać pracy sygnowanej godłem „Osob” pt. „Występowanie osobliwości w zagadnieniach kontaktowych”. Wysokość nagrody zł. 9.000.—
 Nagrodę stopnia III przyznać pracy sygnowanej godłem „GRAD” pt. „Stateczność i stan krytyczny swobodnie podpartej tarczy trapezowej poddanej jednokierunkowemu ściskaniu”.

V. Działalność organizacyjna

1. W roku 1979 liczba członków PTMTS wzrosła do 949.
 2. W okresie roku 1979 odbyło się 22 zebrania organizacyjne.

Kolokwia Euromechu 1981

137	Flow in collapsible tube 5—8 stycznia 1981, Cambridge W. Brytania	Dr J. Pedley University of Cambridge oraz dr R. C. Schroter, Londyn
138	Convective transport and instability phenomena with application to material science 9—11 marzec 1981, Karlsruhe RFN	Dr H. Oertel Universität Karlsruhe RFN
139	Uncontrolled blasts and explosions in industry 13—15 kwiecień 1981, Aberystwyth W. Brytania	Dr D. H. Edwards University of Wales oraz dr M. A. Nettleton, Leatherhead

- | | | |
|-----|--|---|
| 140 | Solution methods in structural plasticity
6—9 maj 1981, Udine
Włochy | Prof. G. Del Piero
Facolta d'Ingegneria
Udine |
| 141 | Stationary methods of nonlinear
mechanical systems
23—25 czerwiec 1981,
Enschede, Holandia | Prof. D. H. van Campen
Teghnische Hogeschool
Twente, Enschede
oraz prof. A. D. de Pater,
Delft |
| 142 | Acoustics of turbulent flows
23—25 Wrzesień 1981, Lyon
Francja | Prof. G. Comte-Bellot
Ecole Centrale de Lyon
oraz prof. M. Sunyach,
Lyon |
| 143 | Flow and transport in porous
media
2—4 wrzesień 1981, Delft
Holandia | Prof. A. Verruijt
Delft University
oraz dr F. B. J. Barends,
Delft |
| 144 | Mechanics of sedimentation and
fluidised beds
Wrzesień 1981, Wiedeń
Austria | Prof. W. Schneider
Technische Universität
Wien
oraz dr R. Clift,
Cambridge |
| 145 | Shock waves and relaxation processes
in gases
14—16 wrzesień 1981
Jabłonna, Polska | Prof. B. Schmidt
Universität Karlsruhe, RFN
oraz dr Z. A. Walenta,
Warszawa |
| 146 | Flows of liquids past bodies with
developed cavities
28—30 wrzesień 1981,
Grenoble, Francja | Dr J. M. Michel
Institut de Mecanique de Grenoble,
Francja
oraz dr A. Rowe, Grenoble |
| 147 | Damage mechanics
22—25 wrzesień 1981,
Cachan/Paryż, Francja | Prof. J. Lemaitre
Ecole Normale Superieure
de l'Enseignement Technique
Cachan, Francja |
| 148 | Two-dimensional separated flows
13—15 październik 1981
Bochum, RFN | Prof. K. Gersten
Ruhr-Universität Bochum
oraz prof. K. Stewartson,
Londyn |
| 149 | Stress waves in non-elastic solids
23—27 czerwiec 1981
Jabłonna, Polska | Doc. dr W. K. Nowacki
Inst. Podst. Probl. Techniki PAN,
Warszawa
oraz prof. E. Włodarczyk,
Warszawa |
| 150 | Analysis of stability by the Liapunov
direct method and its application
in mechanics
październik 1981
Jabłonna, Polska | Prof. R. Gutowski
Politechnika Warszawska
oraz prof. V. A. Vuicic,
Belgrad, Jugosławia |

Zawiadomienie

W dniach 6—10 kwietnia 1981 r. w Jadwisinie koło Warszawy odbędzie się XIII Międzynarodowa Konferencja Dynamiki Maszyn INTERDYNAMICS 81.

Szczegółowych informacji udziela Komitet Organizacyjny Konferencji:
Zakład Układów Mechanicznych IPPT PAN
Ul. Świętokrzyska 21 tel. 26-12-81 w. 267
00-049 Warszawa
INTERDYNAMICS 81

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- W. I. ANDREJEW, Zagadnienia koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w ośrodku niejednorodnym.
Вопросы концентрации напряжений вблизи отверстий в неоднородной среде. Ч. I.
Обзор.
Stress concentration in the neighbourhood of cavities in nonhomogeneous media. Part I. Review.
- K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, Zagadnienia odwrotne pól temperatur — przegląd.
Обратные задачи теплопроводности — обзор литературы.
The inverse heat conduction problems — review.
- P. WIEWIÓREKI, Efekt przejściowy przy przenikaniu słabej fali uderzeniowej przez rozgałęzienie przewodów.
Переходный эффект во время проникания слабой ударной волны через разветвление трубопроводов.
Transitional effect at the transmission of a weak shock wave through a branching of pipes.
- A. TOROLIŃSKI, Wpływ walca kołowego z płaskim czołem naddźwiękowym strumieniem gazu o małej liczbie Reynoldsa.
Сверхзвуковое обтекание продольного цилиндра с плоским носом газа при малом числе Рейнольдса.
Supersonic gas flow past a cylinder with a flat front at low Reynolds number.
- J. PIETRUCHA, Z. SZEWCZYK, Nowa metoda syntezy układu sterowania flatterem profilu.
Новый метод управления флаттером профиля.
A new method of flutter control of the airfoil.
- M. CHRZANOWSKI, J. MADEJ, Budowa granicznych krzywych zniszczenia w oparciu o koncepcję parametru uszkodzenia.
Построение предельных кривых разрушения с помощью параметра повреждений.
The construction of failure limit curves by means of a damage.
- A. DOLLAR, Z. KORDAS, Kształty prętów silnie zakrzywionych poddanych zginaniu z rozciąganiem i ścinaniem, całkowicie uplastycznionych w stadium zniszczenia.
Формы стержней сильно искривленных подвергнутых изгибу с растяжением и сдвигом в стадии полной пластичности при разрушении.
The shapes of thick curved bars subjected to bending, tension and shear showing complete yield at the stage of collapse.
- St. WIELAK, A. DUDA, Powłoki prostokątne oparte na okręgu pracujące w stanie zgięciowym.
Изгиб линейчатых оболочек опёртых на окружности.
Bending state of ruled surface shells based on a circle.
- W. WOJEWÓDZKI, J. SOKAŁSKI, Drgania sprężysto-вязкопластичnej powłoki kulistej.
Колебания упруго-вязкопластической сферической оболочки.
Oscillations of an elastoviscoplastic spherical shell.
- J. HOLNICKI-SZULC, Sprężanie termiczne na przykładzie zagadnienia kołowo-symetrycznego.
Образование предварительные термических напряжений на примере осесимметрической задачи.
Thermal prestressing — an example of rotating disk.

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
półrocznie zł 60.—
rocznie zł 120.—

• Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

— do 25 listopada na I półroczu roku bieżącego i na cały rok następny,

— do 10 czerwca na II półroczu roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmują RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17 pokój 1724)

Mech. Teor. T. 18, z. 3, s. 349—516, Warszawa 1980, Indeks 36523