

Ju 720

**P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J**

PL ISSN 0079-3701

**M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A**

K W A R T A L N I K

T O M 1 8 · Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1 9 8 0

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

K. SOBCZYK, Drgania konstrukcji i stochastyczne modele uszkodzeń Случайные колебания и стохастические модели разрушения Random vibrations and stochastic models for structural failures	151
W. PIETRASZKIEWICZ, Niektóre problemy nieliniowej teorii powłok Некоторые проблемы нелинейной теории оболочек Some problems of nonlinear theory of shells	169
J. ORKISZ, Powłoki pneumatyczne Пневматические оболочки Pneumatic structures	193
M. KLEIBER, Nieliniowa, statyczna i dynamiczna analiza powłok metodą elementów skończonych Нелинейный статический и динамический расчёт оболочек методом конечных элементов Nonlinear static and dynamic analysis of shells by the finite element method	221
M. WOŹMIAK, Równania bilansu i zasady zachowania w porowatych ciałach wieloskładnikowych Уравнения баланса и принципы сохранения для пористых многокомпонентных сред The balance equations and conservation law for multiconstituent porous media	247
J. KŁEPACZKO, J. GARBARSKI, Próba dynamicznego rozciągania tworzyw sztucznych Ударное растяжение полимеров Dynamic tension test of polymers	265
K. A. MLADENOV, Dynamika pręta obciążonego dwiema siłami śledzącymi Динамическое поведение стержня под действием двух следящих сил Dynamics of a bar under two follower forces	287
S. WIŚNIEWSKI, Określenie gęstości strumienia ciepła na podstawie pomiarów nieustalanej temperatury jednostronnie ogrzewanej płytki płaskiej Определение плотности теплового потока на основе измерений нестационарной температуры одностронне обогреваемой плоской пластинки Determination of the heat flux density basis on the measurements of nonsteady temperature of a one-side heated flat plate	293
A. GAJEWSKI, Optymalne kształtowanie prętów ściskanych siłą skierowaną do bieguna, przy potęgowym prawie fizycznym Оптимальное проектирование стержней, сжимаемых центральной силой, при степенном физическом законе Optimal design of the bars, compressed by a polar force subject to the power physical law	305
S. OKOŃSKI, Wgłębianie narzędzia z periodycznym zarysem klinowym w ośrodek plastyczny Внедрение инструмента с периодическим клиновым профилем в пластическую среду Indentation of a periodically wedge-shaped tool into plastic material	319
BIULETYN INFORMACYJNY	331

Ju 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 8 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1 9 8 0

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR,
ANDRZEJ SZANIAWSKI — REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR,
MONIKA WĄGROWSKA — REDAKTOR,
ELŻBIETA OLSZEWSKA — SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2026

Nakład 670. Ark. wydawniczych 16,25. Ark. drukarskich 12,25. Papier druk sat. IV kl. 71 g, 70 × 100.
Oddano do składania 31.I.1980 r. Druk ukończono w październiku 1980 r. Zam. 214/12/80 Cena zł 30,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

DRGANIA KONSTRUKCJI I STOCHASTYCZNE MODELE USZKODZEŃ

KAZIMIERZ SOB CZ YK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienia wyznaczania przemieszczeń i naprężeń powodowanych dynamicznymi obciążeniami o charakterze przypadkowym (oraz) lub fluktuacjami parametrów rozważanych układów stanowią bardzo ważny dla praktyki składnik analizy konstrukcji inżynierskich.

W ostatnim dwudziestoleciu problemy drgań konstrukcji pod wpływem obciążeń przypadkowych były badane bardzo intensywnie i w chwili obecnej istnieje bogata literatura dotycząca metod i rezultatów dynamiki stochastycznej (por. [1], [2], [3], [4], [5]). Podstawową przyczyną tych badań jest fakt, że w większości realnych sytuacji podstawowe czynniki determinujące zachowanie się konstrukcji, tak jak na przykład obciążenia zewnętrzne czy własności mechaniczne rozważanych układów mają charakter fluktuacyjny i nie mogą być opisane w zwykły — deterministyczny sposób. Odnosi się to szczególnie do obciążeń konstrukcji budowlanych powodowanych porywistym wiatrem czy działaniem fal akustycznych lub sejsmicznych, konstrukcji statków na które działają fale morskie lub szумы turbulentne itp. W takich sytuacjach ważne jest zbadanie wpływu owych stochastycznych czynników na zachowanie się konstrukcji i jej zniszczenie. Zasadniczym motywem i celem analizy drgań stochastycznych konstrukcji jest ocena ich niezawodności. Z metodycznego punktu widzenia probabilistyczną analizę konstrukcji drgających można podzielić na dwa etapy: pierwszy — dotyczy wyznaczenia statystycznych charakterystyk reakcji konstrukcji (np. przemieszczeń, naprężeń itp.), zaś celem drugiego etapu jest analiza niezawodnościowa — charakteryzująca stany niebezpieczne i dostarczająca informacji o występowaniu uszkodzeń i zniszczeniu konstrukcji.

W chwili obecnej, istniejące metody i rezultaty dynamiki stochastycznej dają możliwość wyznaczania podstawowych charakterystyk statystycznych reakcji dla szerokiej klasy układów i obciążeń stochastycznych. Problemy dotyczące niezawodności stochastycznych drgających konstrukcji nie są jednak wystarczająco zbadane.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie problemów i nowych wyników dotyczących stochastycznej analizy drgań konstrukcji, ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień niezawodnościowych. Po zwięzłym przedstawieniu metody wyznaczania charakterystyk reakcji układów ciągłych uwaga będzie skupiona na dyskusji zniszczenia spowodowanego drganiami stochastycznymi. Ponieważ uszkodzenia konstrukcji powodowane drganiami

stochastycznymi przyjmują najczęściej postać uszkodzeń zmęczeniowych, w ostatniej części pracy przedstawione zostaną stochastyczne modele uszkodzeń zmęczeniowych, w tym modele bazujące na propagacji w materiale dominującej szczeliny.

2. Reakcja konstrukcji na obciążenie stochastyczne

Rozważmy drgania technicznego układu ciągłego i założmy, że jest on sprężysty i liniowy. Dla szerokiej klasy takich układów równanie opisujące drgania można przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad m\ddot{U} + cU + \mathcal{L}(U) = Q(\mathbf{r}, t),$$

gdzie m i c są parametrami charakteryzującymi masę układu i tłumienie, \mathcal{L} jest liniowym operatorem różniczkowym względem zmiennych przestrzennych, zaś $Q(\mathbf{r}, t)$ jest funkcją losową zmiennych $\mathbf{r} = (x, y, z)$ i czasu t . Dla przykładu operator \mathcal{L} może mieć postać

$$(2.2) \quad \mathcal{L} = \begin{cases} -T \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2}, \\ D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \end{cases}$$

i wtedy równanie (2.1) opisuje odpowiednio drgania struny, kołowo-cylindrycznej powłoki lub płyty sprężystej. W zależności od sytuacji równanie (2.1) należy rozwiązywać z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi. Równanie (2.1) jest równaniem stochastycznym interpretowanym zwykle w sensie średnio-kwadratowym (por. [5], [6]).

Metody stochastycznej analizy układów sprężystych opisanych przez równanie (2.1) są analogiczne do metod używanych w stochastycznej dynamice układów dyskretnych (opisanych przez równania różniczkowe zwyczajne). Metoda charakterystyk impulsowych oraz metoda widmowa mogą być łatwo zastosowane. Dla zastosowania metody charakterystyk impulsowych należy znać funkcję Greena $G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_1, t_1)$, która jest definiowana jako rozwiązanie równania

$$(2.3) \quad m\ddot{G} + cG + \mathcal{L}(G) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(t - t_1),$$

z odpowiednimi warunkami brzegowymi i zerowymi warunkami początkowymi dla $t = t_1$.

Rozwiązanie równania (2.1) ma postać

$$(2.4) \quad U(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \int_D G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) Q(\mathbf{r}_1, t_1) d\mathbf{r}_1 dt_1.$$

Gdzie D jest obszarem (powierzchnią) rozważanego układu. Na podstawie definicji wartości przeciętnej i funkcji korelacyjnej otrzymuje się

$$(2.5) \quad \langle U(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_0^t \int_D G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) \langle Q(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle d\mathbf{r}_1 dt_1.$$

$$(2.6) \quad K_U(r, t; r_1, t_1) = \langle U(r, t) U(r_1, t_1) \rangle = \\ = \int_0^t \int_0^{t_1} \int \int G(r, t; r', t') G(r_1, t_1; r'', t'') K_Q(r', t'; r'', t'') dr' dr'' dt' dt''.$$

Jako szczególny przypadek wzoru (2.6) otrzymuje się wyrażenie dla czasowej funkcji korelacji (dla ustalonego $r = r_1$) oraz przestrzennej funkcji korelacyjnej (dla ustalonego $t = t_1$). Często wystarczy znajomość wartości funkcji korelacyjnej pola $U(r, t)$ w ustalonym, wybranym (np. szczególnie wrażliwym) punkcie r ; traktuje się wtedy $U(r, t)$ jako funkcję losową tylko czasu t , czyli — jako proces stochastyczny.

Wprowadzając uogólnioną gęstość widmową pola $U(r, t)$ zgodnie z następującą definicją

$$(2.7) \quad g_U(r_1, \omega_1; r_2, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_U(r_1, t_1; r_2, t_2) e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

i analogicznie uogólnioną gęstość $g_Q(r_1, \omega_1; r_2, \omega_2)$, otrzymujemy następującą relację "widmową":

$$(2.8) \quad g_U(r_1, \omega_1; r_2, \omega_2) = \iint g_Q(r', \omega_1; r'', \omega_2) H(r_1, r'; \omega_1) H(r_2, r''; \omega_2) dr' dr'',$$

gdzie

$$(2.9) \quad H(r, r_1; \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(r, r_1; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \tau = t - t_1.$$

Jeżeli pole losowe $Q(r, t)$ jest stacjonarne w szerszym sensie i statystycznie jednorodne, to powyższe wzory znacznie upraszczają się.

Dla skorzystania z powyższych wzorów należy znać podstawowe charakterystyki obciążenia losowego $Q(r, t)$, tj. jego wartość przeciętną i funkcję korelacyjną oraz funkcję Greena $G(r, t; r_1, t_1)$. Charakterystyki obciążenia należy wyznaczyć na drodze opracowywania materiału doświadczalnego. Wyznaczenie funkcji Greena nie zawsze jest możliwe; dla stosunkowo szerokiej klasy układów liniowych zwykle stosuje się wersję metody rozdzielania zmiennych znaną w dynamice konstrukcji jako metoda modów normalnych (ang. the normal-mode approach — por. [3]).

Przytoczone wyżej wzory wyczerpująco charakteryzują reakcję konstrukcji opisanej równaniem (2.1) jeśli jej parametry materiałowe, warunki początkowe i brzegowe są deterministyczne a obciążenie $Q(r, t)$ jest gaussowską funkcją losową. Jeśli któryś z wymienionych warunków nie jest spełniony wzory (2.5) i (2.6) dają tylko częściową charakterystykę losowego pola przemieszczeń, gdyż jest ono wtedy nie gaussowskie. Często — w celu uproszczenia analizy — korzysta się z gaussowskiego przybliżenia. Jednakże problem jak dalece analiza gaussowska jest akceptowalna w problemach niegaussowskich wymaga oddzielnego badania (por. [7]).

W stochastycznej analizie układów konstrukcyjnych nieliniowych istniejące wyniki dotyczą przede wszystkim nieliniowości natury geometrycznej pochodzących z uwzględniania skończonych odkształceń (por. [3], [5]). Tego rodzaju drgania nieliniowych układów sprężystych przy wymuszeniu stochastycznym można badać za pomocą metod przybli-

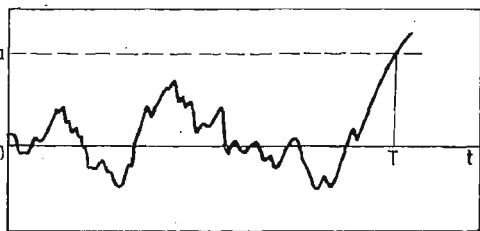
zonych będących połączeniem metod mechaniki nieliniowej i metod analizy korelacyjnej lub aparatu procesów Markowa. Pewne rezultaty dotyczące drgań stochastycznych konstrukcji sprężysto-plastycznych są zawarte w [8] (por. także [9]).

3. Drgania stochastyczne i uszkodzenia konstrukcji

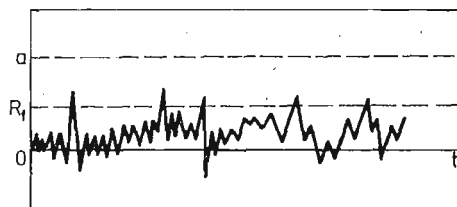
Niech $Y(t)$ oznacza dynamiczną reakcję konstrukcji (przemieszczenie, naprężenie itp.) w ustalonym punkcie krytycznym. Załóżmy, że podstawowe charakterystyki probabilistyczne procesu $Y(t)$ zostały wyznaczone metodami scharakteryzowanymi w punkcie poprzednim. Jak wykorzystać informacje o procesie $Y(t)$ w badaniu uszkodzeń powodowanych przez ten proces i w ocenie długowieczności konstrukcji?

Należy wyróżnić dwa podstawowe mechanizmy uszkodzeń związane z drganiami stochastycznymi:

1. $Y(t)$ osiąga po raz pierwszy pewien określony górny (np. a) lub dolny (np. $-b$) poziom, gdzie a i b są danymi dużymi liczbami dodatnimi; mówimy, że uszkodzenia występujące przy zajściu tego zdarzenia są *uszkodzeniami katastroficznymi* (lub uszkodzeniami pierwszego przejścia; ang. first excursion failures);
2. $Y(t)$ nie przyjmuje dużych (katastroficznym) wartości, doznaje jednak wielu nieznacznych wyjść poza granicę wytrzymałości i wobec tego zniszczenie konstrukcji akumuluje



Rys. 1



Rys. 2

się; całkowite zniszczenie następuje gdy nagromadzone uszkodzenia osiągają pewną określoną wartość; ten rodzaj zniszczenia znany jest pod nazwą *zniszczenia zmęczeniowego*. Schematycznie, powyższe rodzaje uszkodzeń są przedstawione na rysunkach (rys. 1, 2).

3.1. Uszkodzenia katastroficzne. W ocenie niezawodności konstrukcji w oparciu o pierwszy mechanizm zniszczenia istotne jest określenie czasu T w którym reakcja $Y(t)$ — np. naprężenie — osiągnie ustalony poziom po raz pierwszy. Oczywiście, czas T jest zmienną losową. Podstawowe zagadnienie w analizie uszkodzeń katastroficznym można sformułować następująco: znając własności statystyczne reakcji konstrukcji $Y(t)$ należy wyznaczyć charakterystyki probabilistyczne czasu pierwszego przejścia T .

Problemy związane z wyznaczaniem czasu pierwszego wyjścia realizacji procesu z rozważanego obszaru były rozważane w teorii procesów stochastycznych. Efektywne rozwiązania mogą być jednak otrzymane tylko dla specjalnych klas procesów np. dla dyfuzyjnych procesów Markowa; wtedy bowiem korzystając z równania Fokkera-Plancka-

Kołmogorowa dla gęstości prawdopodobieństwa przejścia procesu łatwo można wyprowadzić równanie różniczkowe dla funkcji $R(t)$ określającej prawdopodobieństwo przebywania procesu w danym obszarze Ω przestrzeni fazowej w przedziale czasu $[0, t]$, tj. dla funkcji

$$(3.1) \quad R(t) = P\{Y(\tau) \in \Omega, 0 \leq \tau \leq t\}.$$

Niech mianowicie $Y(t) = [Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)]$ będzie n -wymiarowym dyfuzyjnym procesem Markowa charakteryzującym zachowanie się układu w czasie; procesy — składowe $Y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ w analizie drgań układów sprężystych mogą być interpretowane jako współrzędne uogólnione. Niech w chwili początkowej t_0 układ znajduje się w stanie $Y_0 = [Y_1^0, \dots, Y_n^0]$. Niech $p(y, t|y_0, t_0)$ będzie gęstością prawdopodobieństwa przejścia procesu ze stanu y_0 w chwili t_0 do stanu y w chwili t . Ta funkcja spełnia znane równanie Kołmogorowa (por. [5]). Przyjmując $t_0 = 0$ będziemy zapisywać funkcję p w postaci $p(y, t|y_0)$.

Prawdopodobieństwo (warunkowe) tego, że jeżeli układ w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie $y_0 \in \Omega$, to do chwili t nie wyjdzie z obszaru Ω jest równe:

$$(3.2) \quad P(t|y_0) = \int_{\Omega} p(y, t|y_0) dy.$$

Całkując równanie Kołmogorowa otrzymuje się następujące równanie dla funkcji $P(t|y_0)$ — por. [10]

$$(3.3) \quad \frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial P}{\partial y_i^0} - \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^n b_{ik} \frac{\partial^2 P}{\partial y_i^0 \partial y_k^0} = 0,$$

gdzie a_i , b_{ik} są współczynnikami charakteryzującymi infinitezymalne własności procesu $Y(t)$. Równanie (3.3) należy rozwiązywać z następującymi warunkami

$$(3.4) \quad \begin{aligned} P(0|y_0) &= 1 & \text{dla } y_0 \in \Omega \\ P(t|y_0) &= 0 & \text{dla } y_0 \in S \end{aligned}$$

gdzie S jest brzegiem obszaru Ω .

Korzystanie z równania (3.3) w analizie realnych układów jest związane z trudnościami. Zagadnienie upraszcza się gdy poszukujemy momentów czasu pierwszego wyjścia procesu z obszaru Ω , tj. wielkości

$$(3.5) \quad \langle T^k \rangle = \int_0^{\infty} t^k \frac{\partial \tilde{P}(t|y_0)}{\partial t} dt; \quad \tilde{P}(t|y_0) = 1 - P(t|y_0).$$

Dla momentów czasu pierwszego wyjścia z obszaru Ω otrzymuje się rekurencyjny układ równań

$$(3.6) \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 \langle T^k(y_0) \rangle}{\partial y_i^0 \partial y_j^0} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \langle T^k(y_0) \rangle}{\partial y_i^0} = -k \langle T^{k-1}(y_0) \rangle,$$

gdzie, w rozpatrywanym przypadku gdy Ω jest obszarem zamkniętym, $\langle T^0(y_0) \rangle = 1$. Równania (3.3) i (3.6) nazywają się *równaniami Pontriagina*. Funkcja $R(t)$ jest znana

jako funkcja niezawodności układu; prawdopodobieństwo niezawodnej pracy układu w przedziale $[0, t]$ jest bowiem równe

$$(3.7) \quad R(t) = \int_{\Omega} P(t|y_0) p(y_0) dy_0,$$

gdzie $p(y_0)$ jest gęstością prawdopodobieństwa procesu $Y(t)$ w chwili $t = 0$.

Dla przypadków kiedy reakcja konstrukcji nie może być opisana przez dyfuzyjny proces Markowa korzysta się z pewnych rozwiązań przybliżonych oraz oszacowań prawdopodobieństwa pierwszego przejścia. Szczególnie prosty rezultat otrzymuje się, jeżeli przyjmie się założenie, że przekroczenia rozważanego poziomu a przez proces $Y(t)$ są wystarczająco rzadkie i statystycznie niezależne; oznacza to, że liczba chwil losowych w przedziale $(0, t]$ w których następują przekroczenia poziomu a jest scharakteryzowana przez jednorodny proces Poissona

$$(3.8) \quad P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Wtedy prawdopodobieństwo tego, że w przedziale $(0, t]$ nie nastąpi żadne przekroczenie poziomu a jest po prostu równe

$$(3.9) \quad P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}.$$

Prawdopodobieństwo uszkodzenia katastroficznego w przedziale $(0, t]$ jest więc w tym przypadku:

$$1 - e^{-\lambda t}.$$

Oznacza to, że czas pierwszego przejścia T danego (wysokiego) poziomu a przez proces $Y(t)$ jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. W tym przypadku

$$(3.10) \quad \langle T \rangle = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Parametr λ oznacza intensywność procesu Poissona; w zagadnieniach niezawodnościowych jest uzasadnione przyjąć, że jest on równy średniej liczbie przewyższeń poziomu a przez proces $Y(t)$ w jednostce czasu, tj.

$$(3.11) \quad \lambda = \nu_{a_i}^+ = \int_0^{\infty} \dot{y} f_Y(a, \dot{y}) d\dot{y}.$$

Wyrażenie (3.9) w którym λ jest wyrażone przez (3.11) określa niezawodność układu w równoważnym przypadku; w analizie konstrukcji zostało ono po raz pierwszy zaproponowane przez J. J. Colemana (1959 r.). Należy jednak podkreślić, że założenie iż przewyższenia poziomu a przez proces $Y(t)$ są statystycznie niezależne jest bardzo ograniczające. Nie jest ono, na przykład, akceptowalne dla procesów stacjonarnych o wąskim widmie dla których przewyższenia występują grupowo.

Bez założenia o niezależności przewyższeń wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa czasu pierwszego przejścia jest — za wyjątkiem prostych sytuacji opisanych procesem Markowa — niemożliwe. Toteż istotne znaczenie mają różne oszacowania prawdopodobieństwa pierwszego przejścia.

Najprostsze oszacowanie oparte jest na uogólnionej nierówności Czebyszewa; zakładając, że $\langle Y(t) \rangle = 0$ górne oszacowanie prawdopodobieństwa pierwszego wyjścia poza symetryczne poziomy a i $-a$ ma postać następującą

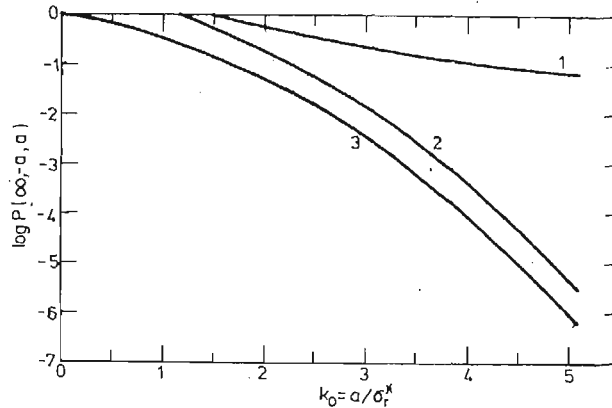
$$(3.12) \quad P\{t; -a, +a\} \leq \frac{1}{2a^2} [\sigma_Y^2(0) + \sigma_Y^2(t)] + \frac{1}{a^2} \int_0^t \sigma_Y(t) \sigma_{\dot{Y}}(t) dt$$

gdzie σ_Y^2 i $\sigma_{\dot{Y}}^2$ oznaczają odpowiednio wariancję procesu $Y(t)$ i jego pochodnej.

Dokładniejsze, górne i dolne oszacowanie prawdopodobieństwa pierwszego przejścia wyrażone przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa procesu $Y(t)$ i pochodną $\dot{Y}(t)$ zostało podane przez Shinozukę [11]. Dla układu o jednym stopniu swobody opisanego równaniem

$$m\ddot{Y} + \mu\dot{Y} + kY = mX(t),$$

gdzie proces stochastyczny $X(t)$ jest procesem gaussowskim niestacjonarnym postaci: $X(t) = H(t)e^{-\alpha\omega_0 t}Z(t)$, $H(t)$ — funkcja Hevisaide'a, $Z(t)$ — stacjonarny proces gaus-



Rys. 3. (1) górne oszacowanie; nierówność Czebyszewa, (2) górne oszacowanie wg Shinozuki, (3) dolne oszacowanie wg Shinozuki

sowski o wartości przeciętnej równej zero i danej gęstości widmowej oszacowania prawdopodobieństwa pierwszego przejścia w zależności od parametru $k_0 = \frac{a}{\sigma_Y^*}$ są przedstawione na rys. 3; σ_Y^* jest maksymalną wartością odchylenia standardowego reakcji układu (w przypadku: σ_Y^* występuje dla $\omega_0 t = 1,85$).

3.2. Uszkodzenia zmęczeniowe; „zrandomizowane” kryterium Palmgren-Minera. Zniszczenie konstrukcji pod wpływem drgań stochastycznych przyjmuje najczęściej formę zniszczenia zmęczeniowego powstającego na skutek długotrwałego oddziaływania naprężenia o charakterze pulsującym. Fizyczne zjawiska leżące u podstaw zniszczenia zmęczeniowego są bardzo złożone a ich natura nie jest jeszcze w pełni zbadana. W chwili obecnej podstawowe informacje o tym rodzaju zniszczenia czerpane są z doświadczeń przeprowadzanych w warunkach deterministycznych naprężeń cyklicznych. W takim przypadku istnieje relacja między amplitudą naprężenia i liczbą cykli powodujących zniszczenie; jest to

dobrze znana krzywa S - N opisana wzorem

$$(3.13) \quad NS^b = c,$$

gdzie S jest amplitudą naprężenia, N jest niszczącą liczbą cykli, zaś b i c są dodatnimi stałymi materiałowymi. Jeżeli amplituda naprężenia zmienia się, to należy wprowadzić dodatkowe założenia. Najlepiej znaną — i ze względu na prostotę ogólnie przyjmowaną — jest hipoteza Palmgrena-Minera postulująca, że jeżeli zniszczenie pod wpływem naprężenia o danej amplitudzie występuje po N cyklach, to uszkodzenie akumuluje się w sposób jednorodny w każdym kolejnym cyklu, tak że podczas jednego cyklu następuje $\frac{1}{N}$ całkowitego zniszczenia. Zniszczenie spowodowane działaniem n_i cykli naprężenia o amplitudzie S_i $i = 1, 2, \dots$ jest równe

$$(3.14) \quad \Delta_i = \frac{n_i}{N_i}, \quad n_i \leq N_i,$$

gdzie N_i jest niszczącą liczbą cykl przy amplitudzie naprężenia S_i . Całkowite zniszczenie jest równe

$$(3.15) \quad D = \sum_i \Delta_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i};$$

element (próbka) doznaje zniszczenia zmęczeniowego jeżeli $D = 1$.

Kryterium Palmgrena-Minera zostało zaadaptowane do przypadku obciążeń stochastycznych przez zamianę we wzorach (3.14), (3.15) symbolu n_i liczbą maksimum na poziomie S_i procesu charakteryzującego naprężenia. Oczywiście, jeżeli naprężenia są deterministyczne i cykliczne, to liczba maksimum jest równa liczbie cykli; jeżeli proces naprężenia jest stacjonarnym procesem stochastycznym o wąskim widmie to liczba maksimum równa się liczbie przecięć poziomu zerowego.

Założmy, dla lepszej przejrzystości wzorów, że reakcja konstrukcji w wybranym punkcie krytycznym jest scharakteryzowana przez stacjonarny proces stochastyczny $Y(t)$ o wąskim widmie. Niech ν_0^+ oznacza średnią liczbę przewyższeń poziomu zerowego w jednostce czasu. W czasie T średnia liczba przewyższeń poziomu zerowego jest $\nu_0^+ T$. Średnia liczba maksimum $n(a)$ o amplitudzie zawartej między a i $a+da$ jest równa

$$(3.16) \quad n(a) = \nu_0^+ T p(a) da,$$

gdzie $p(a)$ jest gęstością prawdopodobieństwa maksimum. Zgodnie z hipotezą Palmgrena-Minera każde maksimum o amplitudzie a powoduje przyrost zniszczenia równy $\frac{1}{N(a)}$, gdzie $N(a)$ jest niszczącą liczbą cykli w warunkach stałej amplitudy naprężenia a . Wartość średnia zniszczenia powodowanego wszystkimi maksimumami o amplitudzie w przedziale $[a, a+da]$ jest

$$\frac{n(a)}{N(a)} = \nu_0^+ T \frac{p(a)}{N(a)} da.$$

Wartość średnia całkowitego zniszczenia $\langle D \rangle$ jest równa

$$\langle D(T) \rangle = \nu_0^+ T \int \frac{p(a)}{N(a)} da,$$

gdzie $N(a)$ należy wyznaczyć z krzywej N-S. Jeżeli $Y(t)$ jest procesem gaussowskim, to korzystając z krzywej N-S oraz podstawiając w miejsce $p(a)$ funkcję gęstości rozkładu Rayleigh'a (por. [3]) otrzymujemy

$$(3.17) \quad \langle D(T) \rangle = \frac{v_0^+ T}{c} (\sqrt{2} \sigma_r)^b \Gamma\left(1 + \frac{b}{2}\right),$$

gdzie $\Gamma(x)$ jest funkcją gamma.

A zatem, w rozważanym przypadku wartość średnia nagromadzonego zniszczenia zmęczeniowego jest proporcjonalna do średniej liczby przewyższeń poziomu zerowego oraz zależy (w sposób nieliniowy) od wariancji losowego procesu naprężenia. Wzór (3.17) daje możliwość wyznaczenia czasu T_F charakteryzującego długowieczność konstrukcji, tj. czas potrzebny do tego aby wartość średnia całkowitego zniszczenia osiągnęła wartość jeden.

Jeżeli proces stochastyczny charakteryzujący reakcję konstrukcji jest niestacjonarny, to odpowiednie wzory są o wiele bardziej skomplikowane.

Kryterium Palmgrena-Minera jest hipotezą, której podstawowa zaleta polega na jej prostocie. Dane doświadczalne wskazują bowiem istotne braki tego kryterium. A oto najważniejsze z nich:

- 1) doświadczalnie stwierdza się, że jeżeli zmienne obciążenie wywołuje naprężenia charakteryzujące się bardzo dużą liczbą maksimów (nie przekraczających granicy zmęczenia), to zniszczenie może wystąpić również wtedy gdy $\sum \frac{n_i}{N_i} < 1$;
- 2) w doświadczeniach stwierdza się, iż wielkość akumulowanego zniszczenia w sposób istotny zależy od kolejności występowania naprężeń o różnych amplitudach, czego kryterium Palmgrena-Minera nie uwzględnia.

Należy podkreślić, że kryterium Palmgrena-Minera (oraz inne podobne kryteria zniszczenia) jest jedynie inżynierską metodą szacowania nagromadzających się uszkodzeń bardziej lub mniej słuszną w zależności od konkretnych sytuacji i nie stanowi w żadnej mierze wyjaśnienia złożonego i w istocie swego stochastycznego mechanizmu zniszczenia zmęczeniowego. W celu bardziej adekwatnego opisu tego zjawiska zostały zaproponowane pewne modele stochastyczne.

4. Stochastyczne modele zniszczenia zmęczeniowego

4.1. Zniszczenie zmęczeniowe jako proces Markowa. Zgodnie z istniejącymi poglądami proces zniszczenia zmęczeniowego (od powstania pierwszych odkształceń plastycznych w słabszych ziarnach poprzez pojawienie się i rozwój pęknięć mikroskopowych i makroskopowych) jest procesem stochastycznym. Opis tego procesu zajmował uwagę wielu autorów (por. [12], [13], [14], [15]).

Bardzo ogólny, stochastyczny opis zniszczenia otrzymany traktując rozważaną próbkę materiału (lub element konstrukcji) jako pewien układ którego stan mechaniczny jest scharakteryzowany przez n -wymiarowy proces stochastyczny $X(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$; jest uzasadnione przyjąć, że $0 \leq X_j(t) \leq 1$, przy czym wartość 0 odpowiada stanowi

idealnemu zaś wartość 1 — całkowitemu zniszczeniu. Oznaczając łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa procesów składowych przez $p(x, t) = p(x_1, \dots, x_n; t)$ można formalnie wypisać równanie „kinetyczne” opisujące ewolucję zniszczenia w czasie:

$$(4.1) \quad \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \mathcal{L}[p(x, t); Q(t), \Theta(t)],$$

gdzie \mathcal{L} jest operatorem działającym na funkcje występujące w nawiasie; $Q(t)$ — oznacza zespół odpowiednich parametrów charakteryzujących wymuszenie zewnętrzne, $\Theta(t)$ — parametr charakteryzujący pole temperatury.

W takim sformułowaniu problem polega na skonstruowaniu operatora \mathcal{L} na bazie informacji o oddziaływaniu elementów „pierwotnych” próbki i rozkładzie prawdopodobieństwa wytrzymałości.

Naturalny i stosunkowo prosty opis otrzymuje się przyjmując, że proces zniszczenia jest procesem Markowa. Scharakteryzujemy dokładniej tę ideę.

Założmy, że próbka (lub ogólniej — układ) może znajdować się w jednym z $n+1$ stanów: E_0, E_1, \dots, E_n . Stan E_0 odpowiada elementowi idealnemu, zaś stan E_n charakteryzuje pewien określony stan końcowy zniszczenia. Przejścia układu z jednego stanu do innego możliwe są tylko w wyniku przejść od stanu poprzedniego do następnego, tj. według schematu:

$$E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \dots \rightarrow E_{i-1} \rightarrow E_i \rightarrow \dots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow E_n.$$

Niech $P_{ij}(s, t)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że układ który w chwili s znajdował się w stanie E_i będzie w chwili $t > s$ znajdował się w stanie E_j ; $P_{ij}(s, t)$ są prawdopodobieństwami przejścia rozważanego procesu Markowa.

Zgodnie z określeniem

$$(4.2) \quad \begin{aligned} P_{ii}(s, s) &= 1, & P_{ij}(s, s) &= 0, & j > i, \\ \sum_{j=1}^n P_{ij}(s, t) &= 1 & \text{dla dowolnych } s, t &\geq s. \end{aligned}$$

Ze względu na możliwość przechodzenia tylko do stanu następnego $P_{ij}(s, t) = 0$ dla $j < i$, wobec czego macierz $\mathbf{P} = \{P_{ij}(s, t)\}$ jest macierzą trójkątną, przy czym przyjmuje się iż $P_{nn}(s, t) = 1$ (oznacza to, że jeżeli układ znalazł się w jakiejś chwili w stanie E_n , pozostaje w nim na zawsze z prawdopodobieństwem 1; stan E_n jest pochłaniający).

Niech zgodnie z teorią skokowych procesów Markowa $q_i(t)$ oznacza intensywność przejścia układu ze stanu E_i w chwili t do stanu E_{i+1} w nieskończenie małym przedziale czasu $(t, t + \Delta t)$. Oczywiście, $q_n(t) = 0$. Prawdopodobieństwa przejścia P_{ij} spełniają znane równania Kolmogorowa

$$(4.3) \quad \frac{\partial P_{ii}(s, t)}{\partial t} = -q_i(t)P_{ij}(s, t),$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial P_{ij}(s, t)}{\partial t} = -q_i(t)P_{ij}(s, t) + q_{j-1}(t)P_{i, j-1}(s, t), \quad j > 1,$$

z warunkami początkowymi (4.2).

Rozwiązując równania (4.3); (4.4) wyznaczamy prawdopodobieństwa przejścia $P_{ij}(s, t)$. Z kolei, trwałość (lub funkcja niezawodności) elementu (układu) jest scharakteryzowana przez $P_{on}(0, t)$, tj. przez prawdopodobieństwo przejścia ze stanu E_0 do stanu E_n .

Dla ilustracji założymy, że intensywności przejścia $q_i(t)$ są funkcjami postaci

$$(4.5) \quad q_i(t) = q_i \varphi(t).$$

W takim przypadku, wprowadzając nową zmienną

$$(4.6) \quad x = \int_t^T \varphi(z) dz,$$

sprowadzamy równania (4.3), (4.4) do równań o stałych współczynnikach

$$(4.7) \quad \frac{\partial Q_{ii}(x)}{\partial x} = -q_i Q_{ii}(x),$$

$$(4.8) \quad \frac{\partial Q_{ij}(x)}{\partial x} = -q_i Q_{ij}(x) + q_{j-1} Q_{i,j-1}(x),$$

gdzie $Q_{ij}(x)$ są funkcjami związanymi z $P_{ij}(s, t)$ przy pomocy przekształcenia (4.6). Względem zmiennej x rozważany proces jest więc procesem jednorodnym. Warunki „początkowe” mają postać

$$(4.9) \quad Q_{ii}(0) = 1, \quad Q_{ij}(0) = 0, \quad j > i.$$

Funkcja niezawodności jest więc

$$(4.10) \quad P_{on}(0, t) = Q_{on}(x) = Q_{on} \left(\int_0^T \varphi(z) dz \right).$$

W przypadku gdy $q_i = q_j = q$ dla wszystkich $0 \leq i \leq j \leq -1$ otrzymujemy równania różniczkowe odpowiadające procesowi Poissona; ich rozwiązanie ma postać

$$(4.11) \quad Q_{j-i}(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!}.$$

Jeżeli $q_i(t) = q = \text{const}$, to prawdopodobieństwo przejścia ze stanu E_0 do stanu E_j jest równe

$$(4.12) \quad Q_{0j}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Ponieważ $\sum_{j=0}^{\infty} Q_{0j}(t) = 1$, to prawdopodobieństwo zniszczenia zmęczeniowego próbki (układu), będące prawdopodobieństwem przejścia do stanu E_j , $j \geq n$ jest równe

$$(4.13) \quad P(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\lambda t} x^n e^{-x} dx.$$

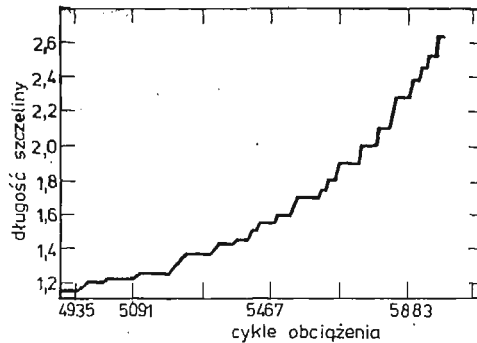
A zatem, długowieczność układu ma rozkład gamma.

Zastosowanie wyżej scharakteryzowanego modelu zniszczenia wymaga właściwego doboru funkcji intensywności $q_i(t)$. Niestety w chwili obecnej brak jest ilościowych kry-

teriów pozwalających szacować postać funkcji $q_i(t)$. Toteż sprawdzianem poprawności przyjętej postaci funkcji intensywności może być tylko wymaganie dobrej zgodności teorii z doświadczeniem. Niezależnie od powyższego, w celu oszacowania postaci funkcji $q_i(t)$ konieczny jest wybór bardzo konkretnego modelu mechanicznego próbki, której zmęczenie badamy; por. np. [13].

4.2. Wzrost szczeliny jako stochastyczny proces punktowy. Ogólnie przyjmuje się, że proces zmęczenia zachodzi w wyniku formowania się i rozwoju szczelin. Doświadczenia pokazują jednak, że chociaż w badanej próbce może pojawić się bardzo dużo szczelin, to zawsze istnieje jedna „dominująca” szczelina, która jest głównie odpowiedzialna za ostateczne zniszczenie. Uzasadnione jest więc opisywanie procesu zmęczenia przez badanie wzrostu dominującej szczeliny. Takie podejście zostało zaproponowane przez VELLURI'EGO w pracy [16] i jest obecnie ogólnie akceptowane. Z drugiej strony, wiadomo, że parametry materiałowe, geometria próbki, charakter obciążenia i inne czynniki wpływają na proces nagromadzania się uszkodzeń zmęczeniowych w sposób bardzo skomplikowany, wobec czego proces ten może być adekwatnie opisany jedynie jako proces stochastyczny.

W tym punkcie pokażemy jak można charakteryzować stochastyczny proces wzrostu dominującej szczeliny wychodząc z obserwacji danych doświadczalnych. Dane te — przedstawione na rys. 4 wskazują, że „uzasadnione jest przyjąć, iż dominująca szczelina



Rys. 4 (wg [16])

wzrasta w sposób przerywany i wzrost ten zawiera okresy aktywności i „drzemki” (patrz [16], s. 764). Biorąc powyższe pod uwagę wydaje się naturalne aby charakteryzację procesu wzrostu dominującej szczeliny oprzeć na następujących postulatach:

- 1) w chwili t_0 istnieje dominująca szczelina o długości L_0 wystarczającej do propagacji;
- 2) wzrost szczeliny odbywa się skokami o losowej wielkości; będziemy oznaczali przez $F(l)$ — dystrybuantę długości skoku, tj. prawdopodobieństwo, że jeżeli szczelina wzrasta, to jej przyrost ΔL jest mniejszy od 1;
- 3) wzrost szczeliny obserwowany w czasie zachodzi w losowo rozłożonych na przedziale $[t_0, \infty)$ chwilach: $t_1, t_2, \dots, t_n \dots$; liczba „skoków” w długości szczeliny jest losowa w każdym ustalonym przedziale czasu — będziemy tę zmienną losową oznaczali przez N , a jej rozkład przez $(n_k; p_k)$.

W celu otrzymania bardziej efektywnych rezultatów konieczne jest przyjęcie założenia, że:

4) zmienne losowe charakteryzujące wielkość przyrostu szczeliny L oraz liczbę skoków we wroście szczeliny N są niezależne.

A. Uproszczony model „statyczny”.

Używając postulatów 1) — 3) lub 1) — 4) należy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa $G(x)$ całkowitej długości szczeliny L_{t_0t} w końcu ustalonego przedziału czasu, tj.

$$(4.14) \quad G(x) = P\{L_{t_0t} < x\}.$$

Oznaczając przez $G_k(x)$ prawdopodobieństwo warunkowe, że jeżeli liczba skoków wynosi k , to całkowity wzrost szczeliny spowodowany tymi skokami jest mniejszy od x , tj.

$$G_k(x) = P\{L_{t_0t} < x | N = k\}.$$

Szukane prawdopodobieństwo $G(x)$ jest wtedy równe

$$(4.15) \quad G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k G_k(x).$$

Założmy, dla uproszczenia, że przyrosty długości szczeliny ΔL_k są statystycznie niezależne wtedy

$$(4.16) \quad G_k(x) = \int_0^x G_{k-1}(x-l) dF(l) = G_{k-1}(x) * F(x).$$

Niech liczba skoków w długości szczeliny ma rozkład Poissona

$$(4.17) \quad p_k = P\{N = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

wtedy

$$(4.18) \quad G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} G_k(x),$$

$$\langle L_{t_0t} \rangle = \int_0^{\infty} x dG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \int_0^{\infty} x dG_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} km = \lambda m,$$

gdź średnia rozkładu G_k jest km ; m — oznacza wartość średnią rozkładu F ;

$$(4.19) \quad \langle L_{t_0t}^2 \rangle = \int_0^{\infty} x^2 dG(x) = \lambda \alpha_2 + \lambda^2 m^2,$$

gdzie

$$\alpha_2 = \int x^2 dF(x).$$

Niech długości przyrostu szczeliny będą scharakteryzowane klasą rozkładów gamma, tj.

$$(4.20) \quad f(x) = F'(x) = \frac{a^{b+1}}{\Gamma(b+1)} x^b e^{-ax}, \quad x \geq 0, \quad b > -1;$$

wtedy

$$(4.21) \quad G(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} + \int_0^{ax} \varphi(z) dz, & x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(4.22) \quad \varphi(z) = \lambda z^b e^{-(\lambda+z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z^{b+1})^k}{\Gamma(k+1)(b+1)(k+1)!}.$$

Dla rozkładu wykładniczego ($b = 0$)

$$(4.23) \quad \varphi(z) = \lambda e^{-(\lambda+z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!(k+1)!}.$$

Rozkład wykładniczy przyrostów szczeliny odpowiada sytuacjom kiedy większym przyrostom odpowiadają mniejsze prawdopodobieństwa, zaś mniejszym przyrostom większe prawdopodobieństwa; wydaje się, iż może on stanowić dobre przybliżenie w wielu realnych przypadkach. Parametr a można szacować z danych doświadczalnych.

Jeżeli $\sqrt{\lambda z}$ jest wielkością bardzo małą wtedy szereg (4.23) jest szybko zbieżny i wartości funkcji $\varphi(z)$ można łatwo obliczyć. Jeżeli $\sqrt{\lambda z}$ staje się duże, to bezpośrednie sumowanie szeregu (4.23) jest bardzo pracochłonne. Wtedy jednak można skorzystać z asymptotycznych własności funkcji Bessela gdyż ich zmodyfikowana postać jest związana z (4.23). Nawet dla stosunkowo małych wartości $\sqrt{\lambda z}$ ($\sqrt{\lambda z} > 3$) następujące rozwinięcie daje wystarczająco dokładne wartości dla $\varphi(z)$, mianowicie

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{\lambda}{z}} \frac{e^{-(\sqrt{z}-\sqrt{\lambda})}}{2\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\lambda z}} \left\{ 1 - \frac{3}{16} (\sqrt{\lambda z})^{-1} - \frac{15}{512} (\sqrt{\lambda z})^{-2} - \right. \\ \left. - \frac{105}{8192} (\sqrt{\lambda z})^{-3} - \frac{4725}{524288} (\sqrt{\lambda z})^{-4} - \frac{72765}{8388608} (\sqrt{\lambda z})^{-5} \right\}.$$

B. Wzrost szczeliny jako proces punktowy

W celu scharakteryzowania zniszczenia zmęczeniowego jako procesu należy w pełni uwzględnić postulat 3). Załóżmy, że próbka poddana losowemu obciążeniu doznaje maksymalnych naprężeń „męczących” S_1, S_2, \dots w losowych chwilach t_1, t_2, \dots

Niech $N(t)$ będzie stochastycznym procesem punktowym reprezentującym liczbę punktów t_i w przedziale czasu $(0, t]$ w których występują zdarzenia powodujące wzrost dominującej szczeliny. Oznaczmy przez ΔL_i przyrost szczeliny następujący w losowej chwili t . Całkowita długość szczeliny w dowolnej chwili t może być wyrażona w postaci: $L_{10t}(t) = L_0 + L_F(t)$, gdzie

$$(4.24) \quad L_F(t) = \sum_i \Delta L_i H(t-t_i),$$

gdzie

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

lub w postaci całkowej

$$(4.25) \quad L_F(t) = \int_0^t \Delta L(\tau) dN(\tau),$$

Wartość przeciętna i wariancja $L_{t_0t}(t)$ przy założeniu, że wielkości przyrostów ΔL_t szczeliny w różnych chwilach t_i są niezależne i mają jednakowy rozkład $F(x)$ lub $f(x)$, są równe

$$(4.26) \quad \langle L_{t_0t}(t) \rangle = L_0 + \int_0^t \langle dN(\tau) \rangle \int_0^\infty xf(x) dx = \\ = L_0 + \langle N(t) \rangle \langle \Delta L \rangle = L_0 + m \langle N(t) \rangle.$$

W celu wyznaczenia wariancji należy skorzystać z produktowych funkcji gęstości rzędu drugiego wprowadzonych do opisu procesów punktowych (por. [17]). Otrzymujemy

$$(4.27) \quad \langle L_F^2(t) \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle dN(\tau_1) dN(\tau_2) \rangle \langle \Delta L(\tau_1) \Delta L(\tau_2) \rangle = \\ = \int_0^t \int_0^t g_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \left[\int_0^\infty xf(x) dx \right]^2 + \int_0^t \langle dN(\tau) \rangle \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \\ = m^2 \int_0^t \int_0^t g_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \alpha_2 \langle N(t) \rangle.$$

gdzie $g_2(\tau_1, \tau_2)$ jest produktową funkcją gęstości rzędu drugiego procesu $N(t)$ definiowaną następująco

$$g_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \langle dN(\tau_1) dN(\tau_2) \rangle,$$

jeżeli infinytezymalne przedziały d_1, d_2 są rozłączne, zaś gdy d_1, d_2 zachodzą na siebie

$$\langle dN(\tau_1) dN(\tau_2) \rangle |_{d\tau_1 = d\tau_2} = \langle [dN(\tau_1)]^2 \rangle = \langle dN(\tau_1) \rangle = g_1(\tau_1) d\tau_1.$$

Jeżeli proces punktowy $N(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ , tj.

$$P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

to

$$g_1(\tau) = \lambda, \quad g_2(\tau_1, \tau_2) = \lambda^2$$

i wobec tego

$$(4.28) \quad \langle L_{t_0t}(t) \rangle = L_0 + \lambda m, \\ \langle L_F^2(t) \rangle = \lambda \alpha_2 + m^2 \lambda^2 t^2, \\ v_{ar} L_{t_0t}(t) = \lambda \alpha_2 - m \lambda^2 + m \lambda^2 t^2.$$

Rozważania przedstawione w tym punkcie dotyczą jedynie nagromadzenia się uszkodzeń zmęczeniowych lub inaczej — wzrostu dominującej szczeliny. Nie wspominaliśmy nic o tym jak i kiedy szczelina zaczyna wzrastać oraz jaka jej długość powoduje zniszczenie. Proces zarodkowania szczeliny jest skomplikowany. Dane doświadczalne wska-

zują, że przy dużych amplitudach naprężenia szczeliny pojawiają się już w pierwszych cyklach obciążenia. W przypadku drgań stochastycznych wydaje się, że można z wystarczającym przybliżeniem zaniedbać okres zarodkowania szczeliny przyjmując, że pojawia się ona wystarczająco wcześniej w procesie obciążenia. Założona „początkowa”, długość dominującej szczeliny (lub jej rozkład) powinna być szacowana doświadczalnie.

Druga wspomniana kwestia dotyczy krytycznej długości dominującej szczeliny. Krytyczna długość L_{cr} szczeliny zależy od wielu czynników, np. przyłożonych naprężeń S , temperatury Θ , własności materiału (np. modułu Younga E) itp. Symbolicznie, można zapisać

$$(4.29) \quad L_{cr} = L_{cr}(S, \Theta, E, \xi)$$

gdzie ξ oznacza zespół możliwych innych czynników, które, w zależności od sytuacji, należy uwzględnić w obliczeniach. Zależność długości szczeliny od odpowiednich parametrów może być oszacowana z doświadczeń. Wydaje się, że dla wykorzystania modeli scharakteryzowanych wyżej może być użyta pewna zmodyfikowana postać kryterium Griffith'a, orzekająca że

$$(4.30) \quad L_{cr} = \frac{B}{S^\alpha}$$

gdzie B i α są stałymi; np. α zmienia się od 2 — dla materiałów kruchych do 5 — dla materiałów ciągliwych. Pełna teoretyczna analiza tego zagadnienia, jak również właściwe powiązanie parametrów przedstawionych modeli z charakterystykami procesu obciążenia i własności materiału pozostają problemami otwartymi.

Literatura cytowana w tekście

1. W. W. BOŁOTIN; *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Warszawa, Arkady, 1968.
2. В. В. БОЛОТИН; *Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений*. Изд. Литер. по строительству, Москва, 1971.
3. Y. K. LIN; *Probabilistic theory of structural dynamics*, Mc-Graw Hill Comp., 1967.
4. K. PISZCZEK; *Metody probabilistyczne w teorii drgań nieliniowych*, Wyd. Polit. Poznańskiej, 1974.
5. K. SOBZYK; *Metody dynamiki statystycznej* Warszawa, PWN, 1973.
6. И. И. ГИХМАН; *Асимптотическое поведение решений смешанной задачи описывающих случайные вынужденные колебания*, Прикл. Мех., Т. XIII., № 11, 1977.
7. K. SOBZYK; *Use of Gaussian analysis in non-gaussian problems*, Mech. Eng. Dept., Univ. of Glasgow, 1976.
8. В. А. ПАЛЬМОВ; *Колебания упруго-пластических тел*, Изд. Наука, 1976.
9. K. DOLIŃSKI; *Stochastyczna analiza konstrukcji sztywnoplastycznych*, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa, 1977.
10. В. И. ТИХОНОВ, М. А. МИРОНОВ; *Марковские процессы*, Москва, Сов. радио, 1977.
11. M. SHINOZUKA; *Probability of Structural Failure under Random Loading*, J. Eng. Mech., Div., Amer. Soc. Civil Engrs., 90 (EM5), 147 - 170, 1964.
12. С. В. СЕРЕНСЕН, В. П. КОГАЕВ; *Стохастические теории накопления усталостных повреждений* Машиностроение, № 3, 1966.
13. В. В. БОЛОТИН; *Некоторые математические и экспериментальные модели процессов разрушения*, Проблемы прочности, № 2, 1971.
14. J. L. BOGDANOFF; *A new cumulative damage model*, J. Appl. Mech., 45, Nr 2, June 1978.

15. K. SOBZYK; *On some stochastic model for fatigue crack propagation*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Techn. Sci., XXVII, 5/6, 1979.
16. R. S. VELLURI; *Some recent developments at GALCIT Concerning a Theory of Metal Fatigue*, Acta Metallurgica, 11, pp. 759 - 775, 1963.
17. S. K. SRINIVASAN; *Stochastic point processes and Their applications*, Griffin, London, 1973.

Резюме

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
РАЗРУШЕНИЯ

В работе представлены проблемы и новые результаты связанные со случайными колебаниями и надежностью упругих систем. По коротком описании основных методов стохастической динамики конструкции рассматриваются некоторые вероятностные модели усталостного разрушения. Характеризованы Марковские модели процесса накопления усталостных повреждений, а также некоторые модели связанные с распространением усталостной трещины.

Summary

RANDOM VIBRATIONS AND STOCHASTIC MODELS FOR STRUCTURAL
FAILURES

The objective of the paper is to present the problems and new results concerned with random vibrations of continuous structural systems with a special emphasize to associated reliability problems. After a short description of basic methods of stochastic dynamics of structural systems the attention is focused on probabilistic models for fatigue failures. The stochastic Markovian models for fatigue accumulation and some models associated with fatigue crack propagation are discussed in detail.

IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 grudnia 1978 roku

NIEKTÓRE PROBLEMY NIELINIOWEJ TEORII POWŁOK

WOJCIECH PIETRÁSZKIEWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

W pracy autora [1], w oparciu o publikacje do końca 1973 r., dokonano przeglądu różnych wariantów równań nieliniowej teorii pierwszego przybliżenia dla cienkich powłok sprężystych. Podano też krótki przegląd prac polskich z tej dziedziny oraz wskazano na niektóre nierozwiązane jeszcze problemy.

W ciągu ubiegłych ponad czterech lat nastąpił dalszy rozwój nieliniowej teorii powłok. Oprócz prac autora [2 - 11] w tej dziedzinie ukazały się monografie GALIMOWA [12], BRUSHA i ALMROTHA [13], AKSELRADA [14] oraz SZILKRUTA i WYRLANA [15] a także artykuły przeglądowe LANGHAARA [16], SIMMONDSA [17] i WEINITSCHKE [18] gdzie podana jest obszerna dodatkowa bibliografia. Opublikowano też szereg oryginalnych prac [19 - 37] dotyczących podstawowych zagadnień nieliniowej teorii powłok. Niniejsza praca ma na celu przedstawienie niektórych dodatkowych w stosunku do podanych w [1] wyników uzyskanych ostatnio przez autora oraz krótkie omówienie związanych z tym wybranych rezultatów uzyskanych w innych opublikowanych ostatnio pracach.

Deformację otoczenia każdej cząstki ośrodka ciągłego można rozłożyć na trzy stany elementarne: sztywne przemieszczenie, czyste rozciągnięcie wzdłuż głównych kierunków odkształcenia oraz sztywny obrót skończony kierunków głównych. Część obrotowa deformacji opisywana jest zwykle albo przy pomocy tensora ortogonalnego R , lub przez trzy kąty obrotu (zwykle kąty Eulera) lub też poprzez wektor obrotu skończonego Ω , [38, 39].

Już NOWOŻYŁOW [40] wskazał, że przy małych odkształceniach oraz wyeliminowaniu ruchu jako ciała sztywnego, w trójwymiarowym ciele sprężystym mogą wystąpić tylko małe obroty elementów materialnych, [41]. Jednakże dla ciał cienkich — belek, prętów cienkościennych, płyt i powłok — nawet przy małych odkształceniach mogą wystąpić duże obroty elementów materialnych ciała. Jest to istotna jakościowa różnica w zachowaniu się ciał cienkich w stosunku do ciał o trzech wymiarach tego samego rzędu. Wskazuje ona, że w nieliniowej mechanice powłok obrotowa część deformacji powinna odgrywać rolę znacznie większą, niż to ma miejsce dla zagadnień trójwymiarowych.

Jest rzeczą godną zastanowienia, że część obrotowa deformacji powłoki została opisana dopiero niedawno, w ramach nieliniowej teorii typu Kirchhoffa-Love'a w pracach SIMMONDSA i DANIELSONA [42, 43], którzy użyli wektora obrotu skończonego Ω głównych kierunków odkształcenia jako jedną z dwóch podstawowych zmiennych niezależnych nieliniowej teorii powłok. Obrót elementu brzegowego powłoki opisany został przez

NOWOŻYŁOWA i SZAMINĘ [44], którzy użyli tu wektora całkowitego obrotu skończonego Ω . W tych pracach wektory obrotu skończonego zostały wprowadzone w sposób opisowy, bez ich powiązania z innymi zmiennymi kinematycznymi, jak przemieszczenie powierzchni środkowej lub tensor gradientu deformacji powłoki. W ramach teorii powłok typu Kirchhoffa-Love'a teoria obrotów skończonych została opracowana w [7, 8].

Ogólna teoria obrotów skończonych w powłokach podana została w [5, 10], gdzie jako przypadki szczególne uzyskano wiele zależności uproszczonych, słusznych dla nieliniowej teorii typu Kirchhoffa-Love'a, dla teorii geometrycznie nieliniowej oraz dla teorii pierwszego przybliżenia cienkich powłok sprężystych. Wprowadzenie pojęcia obrotu skończonego okazało się niezwykle pożytecznym i umożliwiło m.in. uzyskanie nowych wariantów geometrycznych i statycznych warunków brzegowych [5, 7, 9], różne modyfikacje układu równań podstawowych [9, 42, 43] oraz zbudowanie nowej klasyfikacji równań uproszczonych dla geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych przy ograniczonych obrotach [7, 8] (por. również [67, 68]).

Istnieje szereg praktycznie ważnych zadań zachowania się elementów powłokowych, których rozwiązanie wymaga uściślonych dwuwymiarowych zależności podstawowych. Wymieńmy tu np. obliczanie względnie grubych powłok przy nierównomiernych obciążeniach, określanie charakterystyk dynamicznych powłoki od szybkozmiennych obciążeń, zadania kontaktowe, obliczanie powłok o dużej anizotropii itp. Uściślenie zależności nieliniowej teorii powłok, przy założeniu liniowości rozkładu przemieszczeń na grubości powłoki, przedyskutowano w [5, 45].

Przy konstruowaniu różnych zależności geometrycznie nieliniowej teorii powłok szczególną uwagę należy zwrócić na sposób wprowadzenia uproszczeń słusznych przy małych odkształceniach. Okazuje się, że szereg wzorów i definicji pojawia się tutaj w postaci różnicy wielkości tego samego rzędu. Należy więc najpierw wykonać działania ściśle (t.zn. z uwzględnieniem skończonych odkształceń), dopiero w zależnościach wynikowych można pomijać człony małe w stosunku do jedności. Wprowadzanie uproszczeń w zależnościach pośrednich może doprowadzić do błędnych wzorów końcowych. Z tego też powodu w niniejszej pracy wszelkie zależności geometrycznie nieliniowej teorii powłok wyprowadzane są najpierw ściśle, bez nałożenia ograniczeń na odkształcenia. Uproszczenia wynikające z założenia małych odkształceń wprowadzane są dopiero do zależności wynikowych.

W p. 2 i 3 przedstawiono niektóre dodatkowe w stosunku do [1] zależności nieliniowej teorii powłok cienkich. Uzyskano je, nakładając więzy Kirchhoffa-Love'a na deformację powłoki. Zmianę grubości powłoki podczas deformacji uwzględniono dopiero w równaniach konstytutywnych powłok sprężystych. Taki uproszczony opis deformacji jest uzasadniony w ramach geometrycznie nieliniowej teorii pierwszego przybliżenia dla cienkich powłok sprężystych dyskutowanej w p. 4, która jest zasadniczym celem poprzednich zależności. Dalsze uproszczenia równań podstawowych, wynikające z konsekwentnie ograniczanych parametrów obrotu skończonego, przedyskutowano w p. 5. W p. 6 podano zasadnicze zależności ogólnej teorii obrotów skończonych w powłokach, a w p. 7 przedyskutowano możliwości uściślenia modelu geometrycznie nieliniowego obliczania powłok sprężystych. Na zakończenie w p. 8 podano niektóre problemy teoretyczne wymagające dalszych badań.

2. Obróty skończone w teorii powłok typu Kirchhoffa-Love'a

W niniejszej pracy stosujemy układ oznaczeń używany w [1, 5, 7]. Niech $r(\vartheta^\alpha) = x^k(\vartheta^\alpha) i_k$ oraz $\bar{r}(\vartheta^\alpha) = \bar{x}^k(\vartheta^\alpha) i_k$, $k = 1, 2, 3$, będą wektorami wodzącymi punktów powierzchni środkowej powłoki w konfiguracji odniesienia i aktualnej, $\bar{r} = \chi(r)$, gdzie ϑ^α , $\alpha = 1, 2$, są współrzędnymi konwekcyjnymi na powierzchni, natomiast χ oznacza funkcję deformacji. W konfiguracji odniesienia geometrię powierzchni \mathcal{M} opisują kowariantne wektory bazy $a_\alpha = r_{,\alpha}$, kowariantne składowe $a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta$ tensora metrycznego powierzchni z wyznacznikiem $a = |a_{\alpha\beta}|$, wektor jednostkowy $n = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} a_\alpha \times a_\beta$ prostopadły do powierzchni oraz kowariantne składowe $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha,\beta} \cdot n$ tensora krzywizny b powierzchni. Tutaj $()_{,\alpha}$ oznacza pochodną cząstkową względem ϑ^α , $\epsilon^{\alpha\beta}$ są składowymi tensora permutacji, a przez $()_{|\alpha}$ będziemy oznaczać powierzchniową pochodną kowariantną na \mathcal{M} . Analogiczne wielkości geometryczne związane z powierzchnią odkształconą $\bar{\mathcal{M}} = \chi(\mathcal{M})$ wyróżniać będziemy kreską, np.: \bar{a}_α , \bar{n} , $\bar{a}_{\alpha\beta}$, \bar{a} , $\bar{b}_{\alpha\beta}$, $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}$, $()_{|\alpha}$.

Podczas deformacji powierzchni środkowej powłoki wektory bazy \bar{a}_α , \bar{n} wyrażane są przez wektor przemieszczenia $u = \bar{n} - r = u_\alpha a^\alpha + w n$ zależnościami

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \bar{a}_\alpha &= l_{\lambda\alpha} a^\lambda + \varphi_\alpha n, & \bar{n} &= n_\mu a^\mu + n n, \\ l_{\lambda\alpha} &= a_{\lambda\alpha} + u_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha} w, & \varphi_\alpha &= w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda, \\ n_\mu &= \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} \varphi_\alpha l_{\beta}^\lambda, & n &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} l_{\alpha}^\lambda l_{\beta}^\mu \end{aligned}$$

W ramach teorii powłok typu Kirchhoffa-Love'a zakładamy, że włókna materialne powłoki, które są proste i prostopadłe do \mathcal{M} , po deformacji powłoki pozostają prostymi i prostopadłymi do $\bar{\mathcal{M}}$ oraz nie wydłużają się. W ten sposób cała informacja o deformacji otoczenia punktów powierzchni środkowej powłoki zawarta jest w tensorze gradientu deformacji powłoki G , który ma postać [1, 7]

$$(2.2) \quad G = \bar{a}_\alpha \otimes a^\alpha + \bar{n} \otimes n, \quad G^{-1} = a_\alpha \otimes \bar{a}^\alpha + n \otimes \bar{n},$$

gdzie przez \otimes oznaczono operację iloczynu tensorowego.

Stosując twierdzenie o rozkładzie polarnym [38] do tensora nieosobliwego G przedstawimy go w postaci

$$(2.3) \quad G = R U = V R, \quad G^{-1} = U^{-1} R^T = R^T V^{-1},$$

gdzie U i V są lewym i prawym tensorami rozciągnięcia, natomiast R jest tensorem obrotu skończonego. Tensory U i V są dodatnio określone i symetryczne, natomiast R jest tensorem ortogonalnym takim, że $\det R = +1$.

Przy pomocy zależności $u = \bar{r} - r$ oraz (2.3) deformacja otoczenia powierzchni środkowej powłoki została rozłożona analitycznie na trzy stany elementarne: czystą translację, czyste rozciągnięcie wzdłuż głównych kierunków odkształcenia oraz obrót skończony kierunków głównych. Rozkład (2.3) poprzez U , spójny z opisem Lagrange'a, oraz rozkład (2.3) poprzez V , spójny z opisem Eulera, różnią się tylko kolejnością nałożenia tych trzech stanów elementarnych.

Z (2.2) i (2.3) wynika, że

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \bar{a}_\alpha &= R\check{a}_\alpha = V\check{a}_\alpha^*, & \bar{n} &= Rn, & \bar{a}^\alpha &= R\check{a}^\alpha = V^{-1}\check{a}^{\alpha*} \\ \check{a}_\alpha &= Ua_\alpha, & \check{a}^* &= Ra_\alpha. \end{aligned}$$

Tutaj wprowadzone zostały dwie powierzchniowe bazy pośrednie: Lagrange'owska \check{a}_α , powstająca z bazy a_α przy czystym jej rozciągnięciu wzdłuż głównych kierunków odkształcenia, oraz Eulerowska \check{a}_α^* , powstająca z bazy a_α przez jej obrót skończony.

W dalszych rozważaniach wygodnym jest wprowadzenie symetrycznych tensorów odkształcenia współosiowych z U :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}(U^2 - \mathbf{1}) = \gamma_{\alpha\beta} a^\alpha \otimes a^\beta, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(I_{\alpha\lambda}^{\lambda\beta} + \varphi_\alpha \varphi_\beta - a_{\alpha\beta}), \\ \frac{\bar{a}}{a} &= 1 + 2\gamma_\alpha^\alpha + 2(\gamma_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta - \gamma_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta). \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \check{\gamma} &= U - \mathbf{1} = \sqrt{1 + 2\gamma} - \mathbf{1} = \check{\gamma}_{\alpha\beta} a^\alpha \otimes a^\beta, \\ 2\gamma_{\alpha\beta} &= 2\check{\gamma}_{\alpha\beta} + \check{\gamma}_\beta^\lambda \check{\gamma}_{\lambda\beta}, & \check{a}_\alpha &= (\delta_\alpha^\lambda + \check{\gamma}_\alpha^\lambda) a_\lambda, \\ \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} (\delta_\alpha^\lambda + \check{\gamma}_\alpha^\lambda) (\delta_\beta^\mu + \check{\gamma}_\beta^\mu) \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{1} = a_\alpha \otimes a^\alpha + n \otimes n$ jest tensorem metrycznym trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej, obliczonym na \mathcal{M} . Podkreślmy, że $\gamma_{\alpha\beta}$ są wielomianami drugiego stopnia względem

przemieszczeń, lecz zależności geometryczne zawierające $\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}$ są funkcjami niewymiernymi względem $\gamma_{\alpha\beta}$. Z drugiej strony $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$ są funkcjami niewymiernymi przemieszczeń, lecz $\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}$ staje się wielomianem kwadratowym $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$. Przy małych odkształceniach $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$ różnią się tylko małymi członami i mogą być utożsamiane.

Z (2.4)₂ i (2.6) wynika zależność dla tensora obrotu skończonego [7]

$$(2.7) \quad R = \bar{a}^{\alpha\beta} (a_\alpha + u_{,\alpha}) \otimes (a_\beta + \check{\gamma}_{\beta\lambda} a^\lambda) + (n_\alpha a^\alpha + nn) \otimes n,$$

która jest niewymierną funkcją przemieszczeń u .

Tensor ortogonalny R określa w przestrzeni pewną oś obrotu określoną wersorem e oraz pewien kąt obrotu ω dookoła tej osi obrotu. Odpowiednie wzory podane zostały w [7]. Część obrotowa gradientu deformacji może być więc opisana również wektorem obrotu-skończonego $\Omega \equiv e \sin \omega$, który jest całkowicie określony przez tensor R . Zauważmy, że Ω nie jest wektorem w zwykłym sensie. W szczególności, prawa dodawania wektorów obrotów skończonych [39] różnią się od praw dodawania elementów przestrzeni liniowej. Dla Ω otrzymano następujące wyrażenie

$$(2.8) \quad \Omega = \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu} \{ [n^\lambda - \bar{a}^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\lambda + \check{\gamma}_\alpha^\lambda) \varphi_\beta] a^\mu + \bar{a}^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\lambda + \check{\gamma}_\alpha^\lambda) l_{\beta}^\mu n \}$$

które jest niewymierną funkcją u .

Działanie wektora obrotu skończonego Ω na dowolny wektor pokażemy na przykładzie zależności (2.4)₁, która przyjmuje postać

$$(2.9) \quad \bar{a}_\alpha = \check{a}_\alpha + \Omega \times \check{a}_\alpha + \frac{1}{2 \cos^2 \omega / 2} \Omega \times (\Omega \times \check{a}_\alpha).$$

Korzystając z R lub Ω można wyprowadzić wiele pożytecznych tożsamości i zależności geometrycznych [5, 7], bardzo przydatnych przy dyskusjach różnych zastosowań teorii obrotów skończonych. W szczególności, dla pochodnej pola przemieszczeń otrzymamy

$$(2.10) \quad u_{,\beta} = \check{\gamma}_\beta^\alpha a_\alpha + \Omega \times \check{a}_\beta + \frac{1}{2 \cos^2 \omega / 2} \Omega \times (\Omega \times \check{a}_\beta).$$

Różniczkowanie R i Ω wzdłuż krzywych układu współrzędnych konwekcyjnych ciała trójwymiarowego podano w [46, 47]. Opisując obroty przez Ω i przyjmując więzy K-L, na powierzchni \mathcal{M} otrzymamy

$$(2.11) \quad \Omega_{,\beta} = \cos \omega k_\beta + \frac{1}{2} \Omega \times k_\beta - \frac{1}{4 \cos^2 \omega / 2} \Omega \times (\Omega \times k_\beta),$$

gdzie dla wektora k_β otrzymano [5, 48]

$$(2.12) \quad k_\beta = \bar{\epsilon}^{\lambda\mu} \left[(\chi_{\beta\lambda} + b_\beta^\alpha \check{\gamma}_{\alpha\lambda}) \check{a}_\mu + \left(\gamma_{\beta\mu|\lambda} - \frac{1}{2} \check{\gamma}_\mu^\alpha \check{\gamma}_{\alpha\lambda|\beta} \right) \mathbf{n} \right] = \\ = \Omega_{,\beta} + \frac{1}{2 \cos^2 \omega / 2} \Omega_{,\beta} \times \Omega + \omega_{,\beta} \operatorname{tg} \omega / 2 \Omega$$

W zależności (2.12)₁ $\chi_{\alpha\beta} = -(\bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$ są składowymi tensora zmiany krzywizny powierzchni środkowej powłoki określonymi niewymiernie przez przemieszczenia

$$(2.13) \quad \chi_{\alpha\beta} = -[n(\varphi_{\alpha|\beta} + b_\beta^\lambda l_{\lambda\alpha}) + n_\lambda (l_{\alpha|\beta}^\lambda - b_\beta^\lambda \varphi_\alpha) - b_{\alpha\beta}].$$

Warunkami całkowalności układu (2.11) są następujące zależności

$$(2.14) \quad \epsilon^{\alpha\beta} \left(k_{\beta|\alpha} + \frac{1}{2} k_\alpha \times k_\beta \right) = \mathbf{0}.$$

Po wprowadzeniu do (2.14) zależności (2.12)₁ otrzymamy trzy równania ciągłości odkształceń powierzchni środkowej powłoki, które zapewniają istnienie pola przemieszczenia u odpowiadającego zadanim miarom odkształcenia $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$ i $\chi_{\alpha\beta}$.

Zależność (2.12)₁ można odwrócić względem $\chi_{\alpha\beta}$ otrzymując

$$(2.15) \quad \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\kappa\lambda} [(\delta_\alpha^\kappa + \check{\gamma}_\alpha^\kappa) k_\beta + (\delta_\beta^\kappa + \check{\gamma}_\beta^\kappa) k_\alpha] \cdot a^\lambda - \frac{1}{2} (b_\alpha^\lambda \check{\gamma}_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \check{\gamma}_{\lambda\alpha})$$

co, razem z (2.12)₂ prowadzi do wyrażenia $\chi_{\alpha\beta}$ poprzez Ω i $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$.

Tensor R lub wektor Ω całkowicie określa na \mathcal{M} obroty tych włókien materialnych powłoki, które pokrywają się z kierunkami głównymi odkształcenia. Inne włókna materialne mogą doznawać obrotu również w wyniku czystego rozciągnięcia otoczenia \mathcal{M} wzdłuż kierunków głównych odkształcenia. Dotyczy to w szczególności obrotu skończonego elementu materialnego brzegu.

Element brzegowy powłoki określa krzywa \mathcal{C} powierzchni \mathcal{M} , dana równaniem $\vartheta^\alpha = \vartheta^\alpha(s)$, gdzie s jest miarą długości na \mathcal{C} . Z tą krzywą związany jest wersor styczny $\mathbf{t} =$

$= \frac{dr}{ds}$ oraz wektor zewnętrznej normalnej $\nu = t \times n$. Ortonormalna trójka wektorów t, n, ν nie pokrywa się na ogół z głównymi kierunkami odkształcenia. Deformację tej trójki wektorów w trójkę ortogonalną $\bar{a}_t = \frac{d\bar{r}}{ds}$, \bar{n} , $\bar{a}_\nu = \bar{a}_t \times \bar{n}$ można przedstawić jako rozciągnięcie t i ν w stosunku $\sqrt{1+2\gamma_{tt}}$, gdzie $\gamma_{tt} = \gamma_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta}$ oraz dwa kolejne obroty: obrót skończony od czystego rozciągnięcia wzdłuż głównych kierunków odkształcenia oraz obrót skończony tych kierunków głównych. Te dwa kolejne obroty skończone wygodnie jest zamienić jednym równoważnym obrotem skończonym, wykonywanym przy pomocy tensora całkowitego obrotu R_t lub wektora całkowitego obrotu $\Omega_t = e_t \sin \omega_t$ brzegu. Odpowiednie wzory dla R_t i Ω_t poprzez u wynikają albo z zasady dodawania obrotów skończonych [7], lub wprost z zależności

$$(2.16) \quad R_t = \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma_{tt}}} (\bar{a}_\nu \otimes \nu + \bar{a}_t \otimes t) + \bar{n} \otimes n,$$

$$2\Omega_t = \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma_{tt}}} (\nu \times \bar{a}_\nu + t \times \bar{a}_t) + n \times \bar{n},$$

Różniczkowanie Ω_t wzdłuż krzywej \mathcal{C} prowadzi do zależności podobnej do (2.11)

$$(2.17) \quad \frac{d\Omega_t}{ds} = \cos \omega_t k_t + \frac{1}{2} \Omega_t \times k_t - \frac{1}{4 \cos^2 \omega_t / 2} \Omega_t \times (\Omega_t \times k_t).$$

Tutaj wektor zmiany krzywizny k_t krzywej brzegowej \mathcal{C} ma postać

$$(2.18) \quad k_t = -k_{tt} \nu + k_{\nu t} t - k_{nt} n,$$

$$(2.19) \quad -k_{tt} = \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma_{tt}}} (\sigma_t - \kappa_{tt}) - \sigma_t,$$

$$k_{\nu t} = \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma_{tt}}} \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \gamma_{\lambda\alpha} \bar{a}^{\lambda\alpha} (b_{\alpha\beta} - \kappa_{\alpha\beta}) t^{\beta} - \tau_t,$$

$$-k_{nt} = \frac{1}{1+2\gamma_{tt}} \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} [\kappa_t - \gamma_{\lambda} \bar{a}^{\lambda\mu} (\gamma_{\mu\alpha|\beta} + \gamma_{\mu\beta|\alpha} - \gamma_{\alpha\beta|\mu}) t^{\alpha} t^{\beta}] - \kappa_t$$

gdzie σ_t , τ_t , κ_t określają, odpowiednio, krzywiznę normalną, skręcenie geodezyjne oraz krzywiznę geodezyjną krzywej brzegowej \mathcal{C} . Wektor k_t wyrażony jest całkowicie poprzez miary odkształcenia powłoki $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\kappa_{\alpha\beta}$.

W ramach więzów typu K-L prostokreślna powierzchnia brzegowa $\partial\mathcal{P}$, prostopadła do \mathcal{M} i określona wektorem $p(s, \zeta) = r(s) + \zeta n(s)$, deformuje się w również prostokreślną powierzchnię $\partial\bar{\mathcal{P}}$, prostopadłą do \mathcal{M} i określoną wektorem $\bar{p}(s, \zeta) = \bar{r}(s) + \zeta \bar{n}(s)$. Powierzchnię $\partial\mathcal{P}$ można zadać jednoznacznie przez zadanie na \mathcal{C} przemieszczeń u oraz funkcji $\beta_\nu \equiv \frac{(\bar{n} - n) \cdot \bar{a}_\nu}{1+2\gamma_{tt}}$. W [7, 8] wykazano, że powierzchnię $\partial\bar{\mathcal{P}}$ można również określić w sposób uwikłany poprzez odpowiednie układy równań różniczkowych [44], zadając na \mathcal{C} albo Ω_t , γ_{tt} lub k_t , γ_{tt} . Zadając wartości Ω_t oraz γ_{tt} powierzchnię brzegową

$\partial\bar{\mathcal{P}}$ określamy z dokładnością do sztywnego przesunięcia w przestrzeni, a zadając wartości k_t oraz γ_{tt} określamy ją z dokładnością do sztywnego ruchu w przestrzeni. W ramach teorii K-L mamy więc następujące trzy warianty geometrycznych warunków brzegowych:

$$(2.20) \quad \begin{array}{ll} \text{a) przemieszczeniowe,} & \mathbf{u}(s) = \mathbf{A}(s), \quad \beta(s) = b(s), \\ \text{b) kinematyczne,} & \boldsymbol{\Omega}_t(s) = \mathbf{m}(s), \quad \gamma_{tt}(s) = l(s), \\ \text{c) deformacyjne,} & \mathbf{k}_t(s) = \mathbf{q}(s), \quad \gamma_{tt}(s) = l(s). \end{array}$$

Większość zadań z nieliniowej teorii powłok rozwiązuje się w przemieszczeniach, co wymaga stosowania przemieszczeniowych warunków brzegowych. Warunki kinematyczne (2.20)₂ odpowiednie są przy rozwiązywaniu zadań poprzez wektor obrotu skończonego [42; 43]. Szczególnie interesującymi są jednak deformacyjne warunki brzegowe (2.20)₃, gdyż wyrażone są one całkowicie poprzez miary odkształceń na brzegu powłoki. Umożliwia to formułowanie i rozwiązywanie zadań nieliniowej teorii powłok całkowicie poprzez miary odkształcenia jako zmienne niezależne [9].

Gdy wartości \mathbf{u} oraz β , są znane na \mathcal{C} , wartości $\boldsymbol{\Omega}_t$, \mathbf{k}_t oraz γ_{tt} łatwo jest określić stosując odpowiednie wzory różniczkowe. Jeśli jednak tylko wartości \mathbf{k}_t oraz γ_{tt} są znane na \mathcal{C} , do określenia $\boldsymbol{\Omega}_t$ trzeba rozwiązać równanie różniczkowe (2.17). Równaniem o podobnej strukturze opisywany jest ruch ciała sztywnego dookoła punktu stałego [39] i metody rozwiązania rozwinięte w mechanice analitycznej mogą być pomocne przy określaniu $\boldsymbol{\Omega}_t$ poprzez znany \mathbf{k}_t .

3. Dodatkowe zależności teorii typu K-L

Równania podstawowe teorii powłok typu K-L, zarówno w opisie Eulera jak i opisie Lagrange'a, zostały szczegółowo omówione w przeglądzie autora [1]. Podajmy tutaj niektóre dodatkowe przedstawienia, dotyczące równań równowagi oraz statycznych warunków brzegowych, uzyskane w [7 - 9].

Rozważmy powłokę o jednopójnej powierzchni środkowej w stanie równowagi. Niech na powłokę działa obciążenie powierzchniowe \mathbf{p} , dane na jednostkę powierzchni \mathcal{M} , oraz siły \mathbf{F} i momenty \mathbf{K} brzegowe, dane na jednostkę długości krzywej brzegowej \mathcal{C} . Dla każdego pola przemieszczeń wirtualnych $\delta\mathbf{u}$ istnieją symetryczne Lagrange'owskie tensory sił wewnętrznych i momentów $\mathbf{N} = N^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta$ i $\mathbf{M} = M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta$ takie, że zasada pracy wirtualnej w opisie Lagrange'a ma postać

$$(3.1) \quad \iint_{\mathcal{M}} (N^{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta}) dA = \iint_{\mathcal{M}} \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{K} \delta\boldsymbol{\Omega}_t) ds$$

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń lewą stronę (3.1) przedstawimy w postaci

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \iint_{\mathcal{M}} (N^{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta}) dA &= - \iint_{\mathcal{M}} (\mathbf{GN}^\beta)_{|\beta} dA + J_c, \\ J_c &= \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{P}_v \cdot \delta\mathbf{u} + \bar{\mathbf{M}}_{v,t} \bar{\mathbf{a}}_t \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}_t) ds + \bar{\mathbf{M}}_{t,v} \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{u}|_{\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 N^\beta &= Q^{\alpha\beta} a_\alpha + Q^\beta n, & P_\nu &= GN^\beta \nu_\beta + \frac{d}{ds} (\overline{M}_{t\nu} \overline{n}), \\
 Q^{\alpha\beta} &= N^{\alpha\beta} - \overline{b}_\lambda^\alpha M^{\lambda\beta}, & Q^\beta &= M^{\alpha\beta} |_\alpha + \overline{a}^{\beta\kappa} (2\gamma_{\kappa\lambda|\mu} - \gamma_{\lambda\mu|\kappa}) M^{\lambda\mu}, \\
 \overline{M}_{t\nu} &= \frac{1}{1+2\gamma_{tt}} M^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\lambda + 2\gamma_\alpha^\lambda) t_\lambda \nu_\beta, & \overline{M}_{\nu\nu} &= \frac{1}{1+2\gamma_{tt}} \sqrt{\frac{\overline{a}}{a}} \overline{M}^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta, \\
 \overline{M}_{t\nu} \overline{n} \cdot \delta u|_{\mathcal{C}} &= \sum_n [\overline{M}_{t\nu}(s_n+0) - \overline{M}_{t\nu}(s_n-0)] \overline{n}(s_n) \cdot \delta u(s_n),
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

oraz M_n , $n = 1, 2, \dots, N$ są wierzchołkami załomów krzywej \mathcal{C} , określonymi przez $s = s_n$.

Z (3.1) oraz (3.2) wynikają znane wektorowe równania równowagi

$$(GN^\beta)|_\beta + \mathbf{p} = 0 \tag{3.4}$$

oraz odpowiednie naturalne warunki brzegowe.

Przedstawiając (3.4) poprzez składowe w różnych bazach uzyskuje się pięć różnych postaci równań równowagi. W [1] podano postacie równań wynikające z rozłożenia analogicznego do (3.4) równania w bazach a_α , n lub \overline{a}_α , \overline{n} . W [7] uzyskano jeszcze inną postać rozkładu (3.4) w bazie a_α , n :

$$\begin{aligned}
 I_\lambda^\alpha (Q^{\lambda\beta} |_\beta + \overline{a}^{\lambda\kappa} \gamma_{\kappa\mu\beta} Q^{\mu\beta} - \overline{b}_\beta^\lambda Q^\beta) + n^\alpha (Q^\beta |_\beta + \overline{b}_{\lambda\beta} Q^{\lambda\beta}) + p^\alpha &= 0, \\
 \varphi_\lambda (Q^{\lambda\beta} |_\beta + \overline{a}^{\lambda\kappa} \gamma_{\kappa\mu\beta} Q^{\mu\beta} - \overline{b}_\beta^\lambda Q^\beta) + n (Q^\beta |_\beta + \overline{b}_{\lambda\beta} Q^{\lambda\beta}) + p &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

gdzie

$$\gamma_{\kappa\mu\beta} = \gamma_{\kappa\mu|\beta} + \gamma_{\kappa\beta|\mu} - \gamma_{\mu\beta|\kappa}. \tag{3.6}$$

Cechą układu (3.5) jest to, że parametry I_λ^α , n^α , φ_λ , n , będące składowymi tensora G , nie są tutaj różniczkowane, co może mieć pewne znaczenie przy rozwiązywaniu niektórych zadań.

Wprowadzając wektor $\check{N}^\beta = UN^\beta = Q^{\alpha\beta} \check{a}_\alpha + Q^\beta n$ równanie (3.4) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
 (R\check{N}^\beta)|_\beta + \mathbf{p} &= 0, \\
 R\check{N}^\beta &= \check{N}^\beta + \Omega \times \check{N}^\beta + \frac{1}{2\cos^2\omega/2} \Omega \times (\Omega \times \check{N}^\beta).
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Przedstawiając (3.7) różnymi drogami w składowych względem bazy pośredniej \check{a}_α , n w [7] uzyskano dwie równoważne postacie równań równowagi, które mogą stanowić wygodną podstawę do dalszych uproszczeń. W podobny sposób można wyprowadzić

równanie równowagi w składowych bazy pośredniej \check{a}_α^* , \check{n} , definiując $\check{N}^{*\beta} = \sqrt{\frac{\overline{a}}{a}} R\check{N}^\beta$ i odpowiednio modyfikując równanie (3.4). Taką postać równań podano w [42].

Ponieważ $\delta\beta_\nu = (\delta\Omega_t \times \check{n}) \cdot \check{\nu} = \delta\Omega_t \cdot \check{t}$, gdzie \check{t} jest wersorem stycznym a $\check{\nu}$ jest wersorem zewnętrznej normalnej do \mathcal{C} , ze struktury J_c w (3.2)₂ wynika, że zmodyfikowana siła brzegowa P_ν oraz moment $\sqrt{1+2\gamma_{tt}} \overline{M}_{\nu\nu}$ są wielkościami statycznymi wykonującymi pracę na wariacjach parametrów przemieszczeniowych u oraz β_ν .

Niech F_v jest wypadkową siłą a B_v wypadkowym momentem względem bieżącego punktu \bar{M} krzywej \mathcal{C} wszystkich sił i momentów wewnętrznych, działających wzdłuż krzywej brzegowej od \bar{M}_0 do \bar{M} . W opisie Lagrange'a wektory te określone są zależnościami

$$(3.8) \quad F_v = F_v^0 + \int_{M_0}^M P_v ds, \quad B_v = B_v^0 + \int_{M_0}^M (\bar{M}_{vv} \bar{a}_t + \bar{r} \times P_v) ds \bar{r} \times F_v.$$

gdzie F_v^0 jest wartością początkową F_v , a $B_v^0(O)$ jest początkowym momentem wypadkowym, określonym względem początku O układu współrzędnych kartezjańskich.

Dokonując odpowiednich przekształceń całkę krzywoliniową w (3.2) można przedstawić w postaci

$$(3.9) \quad J_c = \int_{M_0}^M \left[(\bar{M}_{vv} \bar{a}_t - \bar{a}_t \times F_v) \cdot \delta \Omega_t - \frac{\bar{a}_t \cdot F_v}{1 + 2\gamma_{tt}} \delta \gamma_{tt} \right] ds + (\bar{M}_{tv} \bar{n} - F_v) \cdot \delta u \Big|_{M_0}^M \\ = - \int_{M_0}^M \left(\sqrt{1 + 2\gamma_{tt}} B_v \cdot \delta k_t + \frac{\bar{a}_t \cdot F_v}{1 + 2\gamma_{tt}} \right) ds + [(\bar{M}_{tv} \bar{n} - F_v) \cdot \delta u - B_v \cdot \delta \Omega_t] \Big|_{M_0}^M.$$

Zależności (3.9) pokazują, że podczas wirtualnej deformacji powłoki pewne wielkości statyczne wykonują na brzegu pracę na wariacjach wielkości geometrycznych, określających kinematyczne i deformacyjne warunki brzegowe (2.20). Każdej wielkości geometrycznej odpowiada więc wielkość statyczna według następującego schematu [10]

$$(3.10) \quad u \leftrightarrow P_v, \quad \beta_v \leftrightarrow \sqrt{1 + 2\gamma_{tt}} \bar{M}_{vv}, \\ \Omega_t \leftrightarrow \bar{M}_{vv} \bar{a}_t - \bar{a}_t \times F_v, \quad \gamma_{tt} \leftrightarrow - \frac{\bar{a}_t \cdot F_v}{1 + 2\gamma_{tt}}, \\ k_t \leftrightarrow - \sqrt{1 + 2\gamma_{tt}} B_v, \quad \gamma_{tt} \leftrightarrow - \frac{\bar{a}_t \cdot F_v}{1 + 2\gamma_{tt}}.$$

Zakładając na brzegu \mathcal{C} wartości odpowiednich parametrów statycznych z (3.10) otrzymamy trzy warianty statycznych warunków brzegowych nieliniowej teorii powłok typu K-L. Te statyczne warunki brzegowe są energetycznie spójnymi z odpowiednimi wariantami geometrycznych warunków brzegowych. Człony pozacalkowe, pojawiające się w (3.2)₂ oraz (3.9), określają dodatkowe warunki które muszą być spełnione w załamkach krzywej brzegowej lub w miejscach nieciągłości obciążenia brzegowego.

4. Geometrycznie nieliniowa teoria cienkich powłok sprężystych

Załóżmy, że ekstremalne odkształcenia w powłoce są małe. Ścisłe oszacowanie stanu naprężenia i odkształcenia w izotropowej powłoce sprężystej, obciążonej tylko na brzegu, podał John [49]. Prowadzi to w sposób ścisły do następującej funkcji energii sprężystej teorii pierwszego przybliżenia [50, 11]

$$(4.1) \quad \Sigma = \frac{h}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{\lambda\mu} \right) + O(Eh\eta^2 \vartheta^2),$$

gdzie ϑ jest małym parametrem zdefiniowanym w [69, 1] a zmodyfikowany tensor sprę-

zystości, w przypadku izotropii materiału, przyjmuje postać

$$(4.2) \quad H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right).$$

Wyrażenie (4.1) ujmuje energię sprężystą od rozciągania (ściskania) i od zginania powierzchni środkowej powłoki, a także energię sprężystą od zmiany grubości powłoki podczas deformacji, która jest ujęta w zmodyfikowanym tensorze sprężystości H .

Z (4.1) wynika, że w ramach błędu teorii pierwszego przybliżenia $\gamma_{\alpha\beta}$ mogą być określone z dokładnością do członów $O(\eta\vartheta^2)$ natomiast $\varkappa_{\alpha\beta}$ — z dokładnością do członów $O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{h}\right)$. Przy małych odkształceniach wyrażenie niewymierne (2.13) dla tensora zmiany krzywizny można więc uprościć do wielomianu piątego stopnia, upraszczając n oraz n_μ do postaci [7]

$$(4.3) \quad n = \left[1 + \vartheta_x^x + \frac{1}{2} (\vartheta_x^x)^2 - \frac{1}{2} \vartheta_\mu^x \vartheta_x^\mu + \varphi^2 \right] [1 - \gamma_\lambda^\lambda + O(\eta^2)],$$

$$n_\mu = [-(1 + \vartheta_x^x) \varphi_\mu + \varphi^\lambda (\vartheta_{\lambda\mu} - \omega_{\lambda\mu})] [1 + O(\eta)],$$

gdzie

$$(4.4) \quad \gamma_\lambda^\lambda = \vartheta_\lambda^\lambda + \frac{1}{2} \vartheta_\mu^\lambda \vartheta_\lambda^\mu + \frac{1}{2} \varphi^\lambda \varphi_\lambda + \varphi^2,$$

$$\vartheta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w, \quad \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}), \quad \varphi = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} u_{\beta|\alpha}.$$

Podstawiając (4.3), (4.4), (2.13) oraz (2.5) do zasady pracy wirtualnej (3.1), po dokonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymamy Lagrange'owską postać równań równowagi geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych, słuszną przy nieograniczonych obrotach elementów materialnych powłoki.

W [1] podano postać kanoniczną układu równań, wyrażoną poprzez zmodyfikowane siły wewnętrzne oraz zmiany krzywizny jako zmienne niezależne. W podobnych równaniach wyprowadzonych w [7] ujęto dodatkowo również siły powierzchniowe $p^\alpha = O(E\eta\vartheta)$, $P = O(E\eta\vartheta^2)$ które nie były ujęte w [1]. Równania te są wyrażone poprzez $N^{\alpha\beta}$ oraz $\varkappa_{\alpha\beta}$ jako zmienne niezależne. Odpowiednie geometryczne i statyczne warunki brzegowe wynikają z uproszczeń wzorów (2.19) oraz (3.8) i (3.10)₃. Rozważając stosunek $\frac{\varkappa h}{\gamma}$ z postaci kanonicznej uzyskano w [7] pięć klas równań uproszczonych dla teorii membranowej, małego zginania, zgięciowej, dużego zginania oraz bez wydłużeń powierzchni środkowej powłoki. W szczególności, równania zgięciowej teorii powłok, wyrażone poprzez miary odkształcenia $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\varkappa_{\alpha\beta}$, przyjmują postać [9]

$$(4.5) \quad C[(1-\nu)\gamma_{\alpha|\beta}^\beta + \nu\gamma_{\beta|\alpha}^\beta] + \bar{p}_\alpha = O\left(Eh \frac{\eta\vartheta^2}{\lambda}\right),$$

$$D\varkappa_{\alpha|\beta}^\beta + C(b_\beta^\alpha - \varkappa_\beta^\alpha)[(1-\nu)\gamma_\alpha^\beta + \nu\delta_\alpha^\beta \gamma_\lambda^\lambda] + \bar{p} = O\left(Eh^2 \frac{\eta\vartheta^2}{\lambda^2}\right),$$

$$\varkappa_{\alpha|\beta}^\beta - \varkappa_{\beta|\alpha}^\beta = O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{h\lambda}\right),$$

$$(4.5) \text{ [cd.]} \quad \gamma_{\alpha\beta}^{\beta|\alpha} - \gamma_{\alpha\beta}^{\alpha|\beta} - (b_{\alpha}^{\beta}\kappa_{\beta}^{\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha}\kappa_{\beta}^{\beta}) + \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha}^{\beta}\kappa_{\beta}^{\alpha} - \kappa_{\alpha}^{\alpha}\kappa_{\beta}^{\beta}) = O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{\lambda^2}\right),$$

gdzie $\lambda \equiv \frac{h}{\vartheta}$ jest dużym parametrem, $C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Deformacyjne warunki brzegowe, spójne z (4.5), wyrażone są przez zadanie na \mathcal{C} funkcji k_t oraz γ_{tt} , gdzie

$$(4.6) \quad \begin{aligned} k_{tt} &= \kappa_{tt} + O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{h}\right), & k_{vt} &= \kappa_{vt} + O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{h}\right), \\ k_{nt} &= 2\frac{d\gamma_{vt}}{ds} - \frac{d\gamma_{tt}}{ds_{\nu}} + 2\kappa_{\nu}\gamma_{vt} + \kappa_t(\gamma_{\nu\nu} - \gamma_{tt}) + O\left(\frac{\eta\vartheta^3}{h}\right). \end{aligned}$$

Statyczne naturalne warunki brzegowe, energetycznie spójne z (4.6), otrzymamy z uproszczenia wzorów (3.8) i (3.10)₃, co daje

$$(4.7) \quad \begin{aligned} P_{\nu} &= (P_{\nu\nu}\bar{\nu} + P_{t\nu}\bar{t} + P_{n\nu}\bar{n})[1 + O(\eta)] \\ P_{\nu\nu} &= C(\gamma_{\nu\nu} + \nu\gamma_{tt}) + O(Eh\eta\vartheta^2), & P_{t\nu} &= C(1-\nu)\gamma_{vt} + O(Eh\eta\vartheta^2), \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} P_{n\nu} &= D\left[\frac{d\kappa_{\nu\nu}}{ds_{\nu}} + \nu\frac{d\kappa_{tt}}{ds_{\nu}} + 2(1-\nu)\frac{d\kappa_{t\nu}}{ds}\right] + \\ &+ D(1-\nu)[\kappa_t(\kappa_{\nu\nu} - \kappa_{tt}) + 2\kappa_{\nu}\kappa_{t\nu}] + O(Eh\eta\vartheta^3), \\ \bar{a}_t &= \bar{t} + O(\eta), & \bar{M}_{\nu\nu} &= M_{\nu\nu} + O(Eh^2\eta\vartheta^2), & \bar{M}_{t\nu} &= M_{t\nu} + O(Eh^2\eta\vartheta^2). \end{aligned}$$

a dla odpowiednich wielkości statycznych otrzymamy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} B_{\nu} &= B_{\nu}^0 + \int_{M_0}^M [D(\kappa_{\nu\nu} + \nu\kappa_{tt})\bar{t} + \bar{r} \times P_{\nu}] ds - \bar{r} \times \int_{M_0}^M P_{\nu} ds, \\ \bar{t} \cdot F_{\nu} &= \bar{t} \cdot \left(F_{\nu}^0 + \int_{M_0}^M P_{\nu} ds\right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że cztery równania w (4.5) są liniowe, a tylko dwa kwadratowe względem miar odkształcenia, natomiast wszystkie geometryczne i statyczne warunki brzegowe są liniowe względem $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\kappa_{\alpha\beta}$. Stwarza to dobrą prognozę dla przyszłych zastosowań tych zależności do zagadnień zgięciowych geometrycznie nieliniowej teorii powłok.

Rozwiązując (4.5) otrzymamy odkształcenia oraz naprężenia w przestrzeni powłoki zgodne z więzami K-L. Położenie powłoki w przestrzeni określone jest z dokładnością do jej ruchu jako ciała sztywnego. Wyznaczenie obrotów skończonych Ω wymaga więc całkowania układu równań (2.11), natomiast określenie pola przemieszczeń jest możliwe poprzez rozwiązanie układów równań (2.5) oraz (2.13) przy (4.3) i (4.4).

5. Klasyfikacja uproszczeń przy ograniczonych obrotach

W ramach geometrycznie nieliniowej teorii powłok założyliśmy, że odkształcenia w powłoce są małe. Nie zakładaliśmy dotychczas żadnych ograniczeń na parametry obrotu skończonego włókien materialnych powłoki.

W większości zastosowań technicznych konstrukcje powłokowe projektowane są w taki sposób, by możliwość wystąpienia dużych obrotów była ograniczona. Warto więc rozważyć możliwe uproszczenia zależności nieliniowej teorii powłok wynikające z konsekwentnych ograniczeń nakładanych na parametry obrotu skończonego włókien materialnych powłoki.

W literaturze powłokowej znane są oryginalne klasyfikacje uproszczeń, zaproponowane przez MUSZTARI'EGO i GALIMOWA [51], KOITERA [52] oraz CHIENA [53]. W [51] wprowadzono ograniczenia składowych φ_α i φ zlinearyzowanego wektora obrotu Φ , co umożliwiło wyróżnienie trzech wariantów równań uproszczonych dla „małego, średniego i dużego zginania (izgiba)”. W [52] wyróżniono cztery warianty równań przy „infinitesimalnym, umiarkowanie małym, średnim oraz dużym wygięciu (deflection)” poprzez odpowiednie ograniczenia składowych Φ oraz powierzchniowych gradientów przemieszczenia. Uproszczenia uzyskane w [53] (por. również [54]) oparte są na ograniczeniach przemieszczeń oraz ich pochodnych w stosunku do geometrii powłoki oraz zmienności stanu odkształcenia. W tych oryginalnych klasyfikacjach nie pojawia się słowo „obrot”, gdyż ani Φ , ani przemieszczenia lub ich gradienty jako takie nie opisują obrotu skończonego włókien materialnych powłoki.

W literaturze pojawiają się też prace, w których warianty uproszczone wg powyższych zasad nazywane są równaniami przy „małych, średnich, dużych etc. obrotach”. Jednakże takie nazwy nadawane są intuicyjnie, bez zdefiniowania pojęcia „obrotu” który ma być w jakimś sensie ograniczony. Może to prowadzić do nieporozumień.

Poprzez rozkład polarny gradientu deformacji (2.3) odkształcenia i obroty elementów materialnych powłoki zostały całkowicie rozdzielone. W p. 4 założyliśmy, że odkształcenia są małe. Jest więc rzeczą naturalną ograniczyć teraz parametry wektora obrotu skończonego Ω , tzn. kąt obrotu ω oraz kierunek osi obrotu określony przez e .

W ramach geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych można użyć małego parametru ϑ do następującej klasyfikacji obrotów [5, 7]:

- 1) $\omega \leq O(\vartheta^2)$ — małe obroty
- 2) $\omega = O(\vartheta)$ — umiarkowane obroty
- 3) $\omega = O(\sqrt{\vartheta})$ — duże obroty
- 4) $\omega \geq O(1)$ — skończone obroty

Przypadek małych obrotów prowadzi do klasycznej liniowej teorii powłok.

Przy założeniu umiarkowanych obrotów otrzymamy

$$(5.1) \quad \begin{aligned} |\Omega| &= O(\vartheta), & \Omega \cdot a_\alpha &= O(\vartheta), & \Omega \cdot n &= O(\vartheta), \\ \varphi_\alpha &= O(\vartheta), & \varphi &= O(\vartheta), & \vartheta_{\alpha\beta} &= O(\vartheta^2), \\ \Omega &= \left(\epsilon^{\beta\alpha} \varphi_\alpha + \frac{1}{2} \varphi^\beta \varphi \right) a_\beta + \varphi n + O(\eta\vartheta). \end{aligned}$$

Powierzchniowe miary odkształcenia, w ramach błędu energii odkształcenia (4.1), przyjmują postać

$$(5.2) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\vartheta_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} + \vartheta_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}) + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta + O(\eta\vartheta^2),$$

$$(5.2) \quad \varkappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} [\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda}(\vartheta_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\alpha}) + b_{\beta}^{\lambda}(\vartheta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha})] + O\left(\frac{\eta\vartheta}{\lambda}\right).$$

[cd.]

Wprowadzając (5.2) do zasady pracy wirtualnej (3.1) otrzymamy wektorowe równania równowagi (3.4), gdzie

$$(5.3) \quad GN^{\beta} = \left[N^{\alpha\beta} - b_{\lambda}^{\alpha} M^{\lambda\beta} - \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} N_{\lambda}^{\lambda} - \frac{1}{2} (\omega^{\alpha\lambda} N_{\lambda}^{\beta} + \omega^{\beta\lambda} N_{\lambda}^{\alpha}) + \frac{1}{2} (\vartheta^{\alpha\lambda} N_{\lambda}^{\beta} - \vartheta^{\beta\lambda} N_{\lambda}^{\alpha}) \right] a_{\alpha} + (\varphi_{\alpha} N^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}|_{\alpha}) n.$$

Odpowiednie zależności w składowych w bazie a_{α} , n podano w [8].

W wielu technicznie ważnych przypadkach tylko obroty dookoła stycznych do \mathcal{M} mogą być umiarkowane, podczas gdy obroty dookoła normalnych do \mathcal{M} są małe, gdyż powłoki są na ogół znacznie sztywniejsze na odkształcenia w swej powierzchni, niż na odkształcenia z powierzchni. W takim przypadku również $\varphi = O(\vartheta^2)$ w (5.1) i w ramach tych samych oszacowań zależności (5.1) - (5.3) można uprościć odrzucając człony podkreślone. Zauważmy, że dopiero w tym przypadku $\Omega = \Phi + O(\eta\vartheta)$, czyli obrót skończony pokrywa się z obrotem zlinearyzowanym, stosowanym w liniowej teorii powłok.

Przy założeniu dużych obrotów otrzymamy

$$(5.4) \quad \begin{aligned} |\Omega| &= O(\sqrt{\vartheta}), & \Omega \cdot a_{\alpha} &= O(\sqrt{\vartheta}), & \Omega \cdot n &= O(\sqrt{\vartheta}) \\ \varphi_{\alpha} &= O(\sqrt{\vartheta}), & \varphi &= O(\sqrt{\vartheta}), & \vartheta_{\alpha\beta} &= O(\vartheta) \\ \Omega &= \frac{1}{2} \{ \varepsilon^{\beta\alpha} [(2 + \vartheta_{\lambda}^{\lambda}) \varphi_{\alpha} - \varphi^{\lambda} (\vartheta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha})] a_{\beta} + 2\varphi n \} + O(\eta\sqrt{\vartheta}) \end{aligned}$$

Składowe tensora odkształcenia $\gamma_{\alpha\beta}$ mają pełną postać (2.5), natomiast dla składowych $\varkappa_{\alpha\beta}$ otrzymamy [7]

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \varkappa_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} [\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda}(\vartheta_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\beta}) + b_{\beta}^{\lambda}(\vartheta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha})] - \\ &- \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} + \vartheta_{\alpha}^{\lambda} \vartheta_{\lambda}^{\alpha} - \frac{1}{2} \vartheta_{\alpha}^{\alpha} \vartheta_{\lambda}^{\lambda} \right) (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) - \frac{1}{4} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} (b_{\alpha}^{\lambda} \omega_{\lambda\beta} - b_{\beta}^{\lambda} \omega_{\lambda\alpha}) + \\ &+ \left(\varphi^{\lambda} + \varphi_{\mu}^{\lambda} \omega^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \varphi^{\lambda} \varphi^{\lambda} \right) (\vartheta_{\lambda\alpha|\beta} + \vartheta_{\lambda\beta|\alpha} - \vartheta_{\alpha\beta|\lambda}) + O\left(\frac{\eta\vartheta}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Wprowadzając (2.5) oraz (5.5) do (3.1) otrzymamy wektorowe równania równowagi (3.4), gdzie

$$(5.6) \quad \begin{aligned} GN^{\beta} &= \left\{ I_{\lambda}^{\alpha} N^{\lambda\beta} - b_{\lambda}^{\alpha} M^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} \varphi^{\nu} \varphi_{\nu} (b_{\lambda}^{\alpha} M^{\lambda\beta} - b_{\lambda}^{\beta} M^{\alpha\lambda}) + (2\vartheta^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta} \vartheta_{\alpha}^{\alpha}) \varphi_{\lambda|\mu} M^{\lambda\mu} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \varphi^{\nu} \vartheta_{\nu\lambda\mu} M^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} (\varphi^{\alpha} \vartheta_{\lambda\mu}^{\beta} - \varphi^{\beta} \vartheta_{\lambda\mu}^{\alpha}) M^{\lambda\mu} - \\ &\left. - \left[\left(1 - \frac{1}{2} \varphi^2 \right) (\varphi^{\alpha} M^{\lambda\beta} + \varphi^{\beta} M^{\alpha\lambda} - \varphi^{\lambda} M^{\alpha\beta}) + \varphi_{\nu} (\omega^{\nu\alpha} M^{\lambda\beta} + \omega^{\nu\beta} M^{\alpha\lambda} - \omega^{\nu\lambda} M^{\alpha\beta}) \right] \right\} a_{\alpha} + \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \varphi_\lambda N^{\lambda\beta} + \left[\left(1 - \frac{1}{2} \varphi^\alpha \varphi_\alpha + \frac{1}{2} \vartheta_\alpha^\alpha \vartheta_\alpha^\mu - \vartheta_\mu^\alpha \vartheta_\alpha^\mu \right) M^{\lambda\beta} \right]_{|\lambda} + \left[\varphi^\beta (-b_{\lambda\mu} + \varphi_{\lambda\mu} - \underline{b_\lambda^\alpha \omega_{\alpha\mu}}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \vartheta_{\lambda\mu}^\beta + \omega^{\beta\alpha} \vartheta_{\alpha\lambda\mu} \right] M^{\lambda\mu} \right\} \mathbf{n}.$$

Jeżeli dookoła normalni dopuszczone są umiarkowane obroty, to w (5.4)₂ $\varphi = O(\vartheta)$ i w zależnościach (5.5) oraz (5.6) można opuścić człony podkreślone linią ciągłą. Gdy dookoła normalni dopuszcza się tylko małe obroty to $\varphi = O(\vartheta^2)$ i (2.5) upraszcza się do postaci

$$(5.7) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \vartheta_\alpha^\lambda \vartheta_{\lambda\beta} - \frac{1}{2} (\vartheta_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} + \vartheta_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}) + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta + O(\eta \vartheta^2),$$

natomiast w (5.4)₃ i (5.5) można jeszcze dodatkowo opuścić człony podkreślone linią falistą. Wprowadzając tak uproszczone miary odkształcenia powłoki do (3.1) otrzymamy (3.4), gdzie

$$(5.8) \quad GN^\beta = \left[(\delta_\lambda^\alpha + \vartheta_\lambda^\alpha) N^{\lambda\beta} - b_\lambda^\alpha M^{\lambda\beta} - \frac{1}{2} (\omega^{\alpha\lambda} N_\lambda^\beta + \omega^{\beta\lambda} N_\lambda^\alpha) - (2\vartheta^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta} \vartheta_\alpha^\alpha) \varphi_{\lambda\mu} M^{\lambda\mu} - \right. \\ \left. - (\varphi^\alpha M^{\lambda\beta} + \varphi^\beta M^{\alpha\lambda} - \varphi^\lambda M^{\alpha\beta})_{|\lambda} \right] \mathbf{a}_\alpha + \left\{ \varphi_\lambda N^{\lambda\beta} + \right. \\ \left. + \left[\left(1 - \frac{1}{2} \varphi^\alpha \varphi_\alpha \right) M^{\lambda\beta} \right]_{|\lambda} + [\varphi^\beta (-b_{\lambda\mu} + \varphi_{\lambda\mu}) + \vartheta_{\lambda\mu}^\beta] M^{\lambda\mu} \right\} \mathbf{n}.$$

Postać równań równowagi w składowych w bazie \mathbf{a}_α , \mathbf{n} jest oczywista.

6. Ogólna teoria obrotów skończonych w powłokach

Przy formułowaniu udokładnionych zależności nieliniowej teorii powłok nie wolno już stosować więzów K-L, ponieważ nawet w opisie deformacji mogłoby to doprowadzić do zauważalnych błędów.

Podczas deformacji powłoki jako ciała trójwymiarowego wektory bazy przestrzennej na powierzchni środkowej \mathcal{M} powłoki w konfiguracji odniesienia $\mathbf{a}_a \equiv (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{n})$, $a = 1, 2, 3$, deformują się w wektory bazy przestrzennej $\bar{\mathbf{a}}_a$ na powierzchni odkształconej $\bar{\mathcal{M}} = \chi(\mathcal{M})$. W szczególności, wektor $\mathbf{a}_3 \equiv \mathbf{n}$ po deformacji przechodzi w wektor $\bar{\mathbf{a}}_3$, który nie jest na ogół ani jednostkowym ani prostopadłym do $\bar{\mathcal{M}}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 \neq \bar{\mathbf{n}}$. Wektory \mathbf{a}_a oraz $\bar{\mathbf{a}}_a$ określają składowe przestrzennych tensorów metrycznych $a_{ab} = \mathbf{a}_a \cdot \mathbf{a}_b$ oraz $\bar{a}_{ab} = \bar{\mathbf{a}}_a \cdot \bar{\mathbf{a}}_b$.

Wektor przemieszczenia \mathbf{v} dowolnej cząstki powłoki ma postać szeregu

$$(6.1) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \zeta \boldsymbol{\beta} + \dots, \quad \boldsymbol{\beta} = \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{n} = \beta_\alpha \mathbf{a}^\alpha + \beta \mathbf{n},$$

gdzie, w ramach liniowego przybliżenia, występują dwa niezależne parametry przemieszczenia \mathbf{u} i $\boldsymbol{\beta}$.

Teorię deformacji powłoki, przy założeniu liniowości przemieszczeń, szczegółowo podano w [5]. Tutaj przedstawimy niektóre zależności dotyczące głównie obrotowej

części deformacji [10], które uzyskuje się analogicznie jak w p. 2, jedynie zależności wynikowe są bardziej skomplikowane.

Na powierzchni środkowej określony jest ścisły tensor gradientu deformacji

$$(6.2) \quad \mathbf{G} = \bar{a}_a \otimes a^a, \quad \mathbf{G}^{-1} = a_a \otimes \bar{a}^a,$$

poprzez który zdefiniowane są miary odkształcenia powłoki

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}(\mathbf{G}^T \mathbf{G} - \mathbf{1}), & \pi &= -(\mathbf{G}^T \bar{\lambda} \mathbf{G} - b), \\ \mu &= \frac{1}{2}(\mathbf{G}^T \bar{\lambda}^T \bar{\lambda} \mathbf{G} - b^2), & \bar{\lambda} &= -\bar{a}_{3,\beta} \otimes \bar{a}^\beta. \end{aligned}$$

W ramach liniowego przybliżenia (6.1)₁ miary odkształcenia (6.3) są funkcjami kwadratowymi \mathbf{u} i β oraz ich gradientów. Jednakże tylko składowe γ_{ab} oraz $\pi_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(\pi_{\alpha\beta} + \pi_{\beta\alpha})$ występują jako niezależne, natomiast μ jest wyrażalne przez γ i π oraz $\pi_{3\beta} = \gamma_{33,\beta}$.

Stosując do (6.2) twierdzenie o rozkładzie polarnym (3.1) można określić Lagrange'owską przestrzenną bazę pośrednią $\check{a}_a = Ua_a$ i zmodyfikowany tensor odkształcenia $\check{\gamma} = U - \mathbf{1}$, poprzez które wyrażamy tensor obrotu skończonego \mathbf{R} oraz wektor obrotu skończonego Ω głównych kierunków odkształcenia według następujących wzorów:

$$(6.4) \quad \mathbf{R} = \bar{a}_a \otimes \check{a}^a = [(a_\alpha + u_{,\alpha})\bar{a}^{\alpha\beta} + (n + \beta)\bar{a}^{3\beta}] \otimes (\delta_b^\alpha + \check{\gamma}_b^\alpha) a_c,$$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} 2\Omega &= \bar{\epsilon}^{abc}(\bar{a}_a \cdot \check{a}_b)\check{a}_c = \check{a}_a \times \bar{a}^a = \\ &= \epsilon_{\lambda\mu} \{ (\delta_a^3 + \check{\gamma}_a^3)[\bar{a}^{\alpha\beta} l_{\beta}^\lambda + \bar{a}^{\alpha 3} \beta^\lambda] - (\delta_a^\lambda + \check{\gamma}_a^\lambda)[\bar{a}^{\alpha\beta} \varphi_\beta + \bar{a}^{\alpha 3}(1 + \beta)] \} a^\mu + \\ &\quad + \epsilon_{\lambda\mu} (\delta_a^\lambda + \check{\gamma}_a^\lambda)[\bar{a}^{\alpha\beta} l_{\beta}^\mu + \bar{a}^{\alpha 3} \beta^\mu] n. \end{aligned}$$

Zależności te są niewymiernymi funkcjami \mathbf{u} i β .

Różniczkując Ω otrzymamy (2.11), gdzie teraz

$$(6.6) \quad k_\beta = \bar{\epsilon}^{aej}(\gamma_{e\beta;a} - A_{ea\beta})\check{a}_j, \quad A_{ea\beta} = \frac{1}{2}a^{gh}\check{\gamma}_{eg}\check{\gamma}_{ah;\beta},$$

natomiast $(\cdot)_{;a}$ jest przestrzenną pochodną kowariantną, obliczoną na \mathcal{M} przy pomocy a_{ab} . W szczególności $\gamma_{\alpha\beta;3} = \pi_{(\alpha\beta)} + b_\alpha^\gamma \gamma_{\gamma\beta} + b_\beta^\gamma \gamma_{\gamma\alpha}$, co pozwala rozwiązać zależność (6.6) względem $\pi_{(\alpha\beta)}$ otrzymując

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \pi_{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_{3\alpha\lambda} k_\beta + \bar{\epsilon}_{3\beta\lambda} k_\alpha) \cdot \check{a}^\lambda - \frac{1}{2}(b_\alpha^\gamma \gamma_{\gamma\beta} + b_\beta^\gamma \gamma_{\gamma\alpha}) - b_{\alpha\beta} \gamma_{33} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\gamma_{3\alpha|\beta} + \gamma_{3\beta|\alpha}) + \frac{1}{2}(A_{\alpha 3\beta} + A_{\beta 3\alpha} - A_{3\alpha\beta} - A_{3\beta\alpha}), \end{aligned}$$

co razem z (2.12)₂ daje ściśle wyrażenie $\pi_{(\alpha\beta)}$ poprzez Ω oraz $\check{\gamma}_{ab}$.

Wprowadzając (6.6) do (2.14) otrzymamy trzy ściśle równania ciągłości odkształceń wyrażone poprzez $\check{\gamma}_{ab}$ oraz $\pi_{(\alpha\beta)}$, które zapewniają istnienie parametrów przemieszczenia \mathbf{u} i β .

W rozważanym ogólnym przypadku deformacji powłoki, prostokreślna powierzchnia brzegowa $\partial\mathcal{P}$, prostopadła do \mathcal{M} i określona wektorem $p(s, \zeta) = r(s) + \zeta n(s)$, deformuje

się w powierzchnię $\partial\bar{\mathcal{P}}$, która nie jest na ogół ani prostokreślna ani prostopadła do $\bar{\mathcal{M}}$ wzdłuż krzywej $\mathcal{C} = \chi(\mathcal{C})$. W otoczeniu \mathcal{C} dla wektora wodzącego $\bar{p} = \chi(p)$ mamy rozwiniecie

$$(6.8) \quad \bar{p}(s, \zeta) = \bar{r}(s) + \zeta \bar{a}_3(s) + \dots,$$

które przybliża $\partial\bar{\mathcal{P}}$ pewną powierzchnię prostokreślną określoną przez liniową część (6.8). Ortonormalna trójka wektorów t, n, v deformuje się w trójkę ukośnokątną $\bar{a}_t = t + \frac{du}{ds}$, $\bar{a}_3 = n + \beta$, $\bar{a}_v = \bar{a}_t \times \bar{a}_3$ o długościach

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \bar{a}_t &= |\bar{a}_t| = \sqrt{1 + 2\gamma_{tt}}, & \bar{a}_3 &= |\bar{a}_3| = \sqrt{1 + 2\gamma_{33}}, \\ \bar{a}_v &= |\bar{a}_v| = \sqrt{(1 + 2\gamma_{tt})(1 + 2\gamma_{33}) - 4\gamma_{3t}^2}, \end{aligned}$$

gdzie $\gamma_{tt}, \gamma_{3t}, \gamma_{33}$ są fizycznymi składowymi odkształcenia na brzegu powłoki. Wprowadzając wektor

$$(6.10) \quad \bar{a}_m = \bar{a}_v \times \bar{a}_t = \bar{a}_t^2 \bar{a}_3 - 2\gamma_{3t} \bar{a}_t, \quad \bar{a}_m = \bar{a}_v \bar{a}_t,$$

można pokazać, że deformacja wektorów t, n, v w $\bar{a}_t, \bar{a}_m, \bar{a}_v$ składa się z ich odpowiedniego rozciągnięcia (6.9) i (6.10) oraz dwóch kolejnych obrotów skończonych. Obroty te mogą być zastąpione jednym równoważnym obrotem skończonym, wykonywanym przy pomocy tensora R_t lub wektora Ω_t , określanych poprzez u i β zgodnie z zależnościami

$$(6.11) \quad \begin{aligned} R_t &= \frac{\bar{a}_t}{a_t} \otimes t + \frac{\bar{a}_m}{a_m} \otimes n + \frac{\bar{a}_v}{a_v} \otimes v, \\ 2\Omega_t &= t \times \frac{\bar{a}_t}{a_t} + n \times \frac{\bar{a}_m}{a_m} + v \times \frac{\bar{a}_v}{a_v}. \end{aligned}$$

Różniczkowanie Ω_t prowadzi do zależności (2.17), gdzie dla składowych k_t otrzymano ściśle wzory poprzez miary odkształcenia γ_{ab} oraz $\pi_{(\alpha\beta)}$:

$$(6.12) \quad \begin{aligned} -k_{tt} &= \frac{1}{a_t \bar{a}_m} \left[\bar{a}_t^2 \left(2 \frac{d\gamma_{3t}}{ds} + \sigma_t - \pi_{tt} \right) - 2\gamma_{3t} \frac{d\gamma_{tt}}{ds} \right] - \sigma_t \\ k_{vt} &= \frac{1}{a_v \bar{a}_m} \left[\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{a}_t^2 (\tau_t + \nu_\lambda \bar{a}^{c\lambda} \gamma_{c3\beta} t^\beta) + \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma_{3t} (\chi_t - \nu_\lambda \bar{a}^{\lambda c} \gamma_{c\alpha\beta} t^{\alpha\beta}) \right] - \tau_t, \\ -k_{nt} &= \frac{1}{a_v \bar{a}_t} \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} (\varkappa_t - \nu_\lambda \bar{a}^{\lambda c} \gamma_{c\alpha\beta} t^{\alpha\beta}) - \varkappa_t, \\ \gamma_{abc} &= \gamma_{ab;c} + \gamma_{ac;b} - \gamma_{bc;a}. \end{aligned}$$

Powierzchnię prostokreślną określoną przez liniową część (6.8) można zadać jednoznacznie zadając wartości u oraz β na \mathcal{C} . W [5] pokazano, że zadanie Ω_t oraz $\gamma_{tt}, \gamma_{3t}, \gamma_{33}$ lub k_t oraz $\gamma_{tt}, \gamma_{3t}, \gamma_{33}$ również określa tę powierzchnię w sposób uwikłany, z dokładnością do sztywnego przesunięcia lub sztywnego ruchu w przestrzeni. W ten sposób również w ogólnym przypadku deformacji powłoki zostały sformułowane kinematyczne

i deformacyjne warunki brzegowe, umożliwiające formułowanie ogólnych zagadnień nieliniowej teorii powłok w odpowiednio zmodyfikowanych zmiennych niezależnych.

Podane tutaj zależności, wynikające z obrotowej części deformacji, są trójwymiarowo ścisłymi na powierzchni środkowej powłoki, gdyż uwzględnienie wyższych wyrazów rozwinięć (6.1)₁ oraz (6.8) nie zmienia kierunku \bar{a}_3 stycznej do zdeformowanego włókna materialnego obliczonej na $\bar{\mathcal{M}}$. Stąd też odpowiednie wzory dla różnych wariantów uproszczonych wynikają z tych zależności jako przypadki szczególne. W szczególności, łatwo zauważyć, że nakładając więzy K-L (tzn. przyjmując $\pi_{(\alpha\beta)} = \varkappa_{\alpha\beta}$, $\gamma_{3\alpha} = \gamma_{33} = \pi_{3\alpha} = 0$, $\bar{a}_3 = \bar{n}$) z tych ścisłych zależności otrzymamy odpowiednie wzory podane w p. 2. Inne uproszczenia tych zależności dla teorii geometrycznie nieliniowej, dla teorii pierwszego przybliżenia powłok sprężystych oraz przejścia graniczne do liniowej teorii powłok typu Reissnera i klasycznej liniowej teorii powłok dyskutowane są w [5, 10].

7. Uściślone zależności teorii geometrycznie nieliniowej dla powłok sprężystych

Dwuwymiarowe równania ruchu w opisie Lagrange'a oraz odpowiednie warunki brzegowe i początkowe, spójne z (6.1)₁, można uzyskać albo drogą bezpośredniego całkowania po grubości powłoki lokalnych równań ruchu ośrodka ciągłego w opisie Lagrange'a [55], lub stosując zasadę Hamiltona [5]. W rezultacie otrzymamy następujący układ równań ruchu

$$(7.1) \quad \begin{aligned} (GN^\beta)_{|\beta} + p &= \varrho_0 \ddot{u} + \varrho \ddot{\beta}, \\ (GM^\beta)_{|\beta} - GN^3 + l &= \varrho_1 \ddot{u} + \varrho_2 \ddot{\beta}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(7.2) \quad \begin{aligned} GN^b &= Q^{ab} \bar{a}_a, & Q^{ab} &= N^{ab} + (G_{3\lambda}^a + \bar{a}^{ac} \gamma_{c3\lambda}) M^{A\beta}, \\ GM^\beta &= R^{a\beta} \bar{a}_a, & R^{a\beta} &= M^{a\beta} + (G_{3\lambda}^a + \bar{a}^{ac} \gamma_{c3\lambda}) K^{\lambda\beta}. \end{aligned}$$

Tutaj N^{ab} , $M^{a\beta}$ i $K^{a\beta}$ są składowymi Lagrange'owskich sił wewnętrznych i momentów 1^{go} i 2^{go} rzędu, l jest wektorem momentów powierzchniowych, ϱ_0 , ϱ_1 , ϱ_2 są charakterystykami bezwładnościowymi powłoki, $(\dot{}) \equiv \frac{d}{dt}$ oraz $G_{3\lambda}^a$ są przestrzennymi symbolami Christoffela na \mathcal{M} .

Rozkładając (7.1) w bazach konfiguracji odniesienia a_a , konfiguracji aktualnej \bar{a}_a lub też w bazie pośredniej \check{a}_a uzyskano w [5] pięć różnych postaci układów równań całkowicie wyrażonych poprzez wielkości Lagrange'owskie. Każda z tych postaci posiada cechy szczególne, które mogą mieć znaczenie przy ich wykorzystaniu. W szczególności składowe równań równowagi (7.1) w bazie \bar{a}_a mają postać

$$(7.3) \quad \begin{aligned} Q^{\alpha\beta} |_\beta + \bar{a}^{\alpha d} \gamma_{d\lambda\beta} Q^{\lambda\beta} + (-b_\lambda^\alpha + \bar{a}^{\alpha d} \gamma_{d3\lambda}) Q^{3\lambda} + \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} p^\alpha &= 0, \\ Q^{3\alpha} |_\alpha + (b_{\alpha\beta} + a^{3d} \gamma_{d\alpha\beta}) Q^{\alpha\beta} + \bar{a}^{3d} \gamma_{d3\alpha} Q^{3\alpha} + \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} p^3 &= 0, \end{aligned}$$

$$(7.3) \quad \begin{aligned} R^{\alpha\beta}|_{\beta} + \bar{a}^{\alpha d} \gamma_{d\lambda\beta} R^{\lambda\beta} + (-b_{\lambda}^{\alpha} + \bar{a}^{\alpha d} \gamma_{d3\lambda}) R^{3\lambda} - Q^{\alpha 3} + \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{l}^{\alpha} &= 0, \\ R^{3\alpha}|_{\alpha} + (b_{\alpha\beta} + \bar{a}^{3d} \gamma_{d\alpha\beta}) R^{\alpha\beta} + \bar{a}^{3d} \gamma_{d3\alpha} R^{3\alpha} - Q^{33} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \bar{l}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Jest to tzw. mieszana postać równań równowagi, nie zawierająca w sposób jawny składowych gradientu deformacji, co predystynuje tę postać do rozwiązywania zagadnień formułowanych poprzez wielkości deformacyjne.

Podstawą uściślonych wariantów geometrycznie nieliniowej teorii powłok sprężystych, wychodzących poza pierwsze przybliżenie dyskutowane w p. 4, musi być konsekwentnie uściślona postać funkcji energii sprężystej powłoki. Po rozwinięciu trójwymiarowej funkcji energii materiału sprężystego w szereg względem ζ i odpowiednim scałkowaniu go po grubości otrzymamy ścisłą dwuwymiarową funkcję energii sprężystej powłoki w postaci szeregu nieskończonego względem potęg (małej) grubości powłoki. Zakładając małość odkształceń i wykorzystując ścisłe oszacowania składowych stanu naprężenia podane przez Johna [49], można oszacować rząd wielkości wszystkich członów tego szeregu nieskończonego. W wyniku otrzymano [5,1] następującą postać uściślonej funkcji energii sprężystej powłoki

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \sum = \frac{h}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \pi_{(\alpha\beta)} \pi_{(\lambda\mu)} \right) + 2hL_0^{3\beta 3\mu} \left(k^2 \gamma_{3\beta} \gamma_{3\mu} + l^2 \frac{h^2}{48} \pi_{3\beta} \pi_{3\mu} \right) + \\ + \frac{h^3}{12} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} (\mu_{\lambda\mu} - 2H\pi_{(\lambda\mu)}) + \frac{h^3}{12} H_1^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \pi_{(\lambda\mu)} + O(Eh\eta^2 \vartheta^4), \end{aligned}$$

gdzie H jest średnią krzywizną powierzchni \mathcal{M} , $k^2 = 5/6$, $l^2 = 7/10$ natomiast tensory sprężystości, w przypadku materiału izotropowego, określone są przez (4.2) oraz

$$(7.5) \quad \begin{aligned} H_1^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[2(a^{\alpha\lambda} b^{\beta\mu} + b^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu}) + 2(a^{\alpha\mu} b^{\beta\lambda} + b^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda}) + \right. \\ \left. + \frac{4\nu}{1-\nu} (a^{\alpha\beta} b^{\lambda\mu} + b^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu}) \right], \quad L_0^{3\beta 3\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} a^{\beta\mu}. \end{aligned}$$

Składowe $\pi_{(\alpha\beta)}$ można wyrazić przez $\varkappa_{\alpha\beta}$ otrzymując

$$(7.6) \quad \pi_{(\alpha\beta)} = \varkappa_{\alpha\beta} + \gamma_{3\alpha|\beta} + \gamma_{3\beta|\alpha} - (b_{\alpha\beta} - \varkappa_{\alpha\beta}) \gamma_{33} + O\left(\frac{\eta^2 \vartheta^2}{h}\right) = \varkappa_{\alpha\beta} + O\left(\frac{\eta \vartheta^2}{h}\right).$$

Jeżeli wprowadzimy (7.6) do (7.4) łatwo zauważyć, że w ramach błędu $O(Eh\eta^2 \vartheta^2)$ zależność ta rzeczywiście zredukuje się do energii sprężystej (4.1) teorii pierwszego przybliżenia.

Wyrażenie (7.4) można nazwać konsekwentnym drugim przybliżeniem do energii odkształcenia powłoki. Uściśla ono wyrażenie (4.1), zachowując w sposób konsekwentny również wszystkie człony drugorzędne, ujmujące dodatkową energię sprężystą od ścinania, od zmiany krzywizny wynikającej ze ścinania oraz dodatkową energię sprężystą od różnych sprzężeń między odkształceniami błonowymi, giętnymi, ścinającymi a także poprzecznymi, ujętymi w zmodyfikowanych tensorach sprężystości \mathbf{H} i \mathbf{H}_1 .

W wielu pracach oraz monografiach proponuje się uściśloną teorię opartą o trzy pierwsze człony w wyrażeniu (7.4). Jest jednak oczywiste, że dla powłok o słabej anizotropii uwzględnienie tylko jednego spośród pięciu członów dodatkowych nie może prowadzić do wyników globalnie dokładniejszych od uzyskiwanych z teorii pierwszego przybliżenia, aczkolwiek dla wybranych zadań i w niektórych obszarach powłoki wyniki te mogą rzeczywiście okazać się bliższe rozwiązaniu trójwymiarowemu. Jednakże dla innych zadań lub w innych obszarach taka „uściślona” teoria może prowadzić nawet do wyników gorszych od uzyskiwanych z teorii pierwszego przybliżenia.

Różniczkując wyrażenie (5.7) względem odpowiednich powłokowych miar odkształcenia otrzymamy uściślone równania konstytutywne wraz z oszacowaniem ich błędu [11], np.

$$(7.7) \quad N^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} = h \dot{H}^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[\gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} (\mu_{\lambda\mu} - 2H\pi_{(\lambda\mu)}) \right] + \frac{h^3}{12} H_1^{\alpha\beta\lambda\mu} \pi_{(\lambda\mu)} + O(Eh\eta\vartheta^4).$$

Równania konstytutywne mogą być wykorzystane do sformułowania uściślonej geometrycznie nieliniowej teorii powłok w miarach odkształcenia γ_{ab} oraz $\pi_{(\alpha\beta)}$. Rzeczywiście, podstawiając je do (7.3), oraz dokonując odpowiednich oszacowań i uproszczeń [5] otrzymamy sześć równań względem γ_{ab} i $\pi_{(\alpha\beta)}$, które uzupełnione o trzy warunki ciągłości odkształceń wynikające z uproszczenia (2.14) i (6.6) określają dziewięć równań względem dziewięciu niewiadomych składowych miar odkształcenia. Odpowiednie deformacyjne warunki brzegowe wynikają z uproszczenia zależności (6.12), natomiast uściślone naturalne warunki statyczne, energetycznie spójne z deformacyjnymi, nie zostały jeszcze dla tego ogólnego przypadku skonstruowane.

8. Niektóre problemy teoretyczne wymagające dalszych badań

Wyniki referowane w niniejszej pracy wyłaniają szereg dalszych problemów o charakterze podstawowym, dokładniejsze zbadanie których może doprowadzić do interesujących poznawczo i ważnych praktycznie wyników. Wskażmy tutaj na niektóre z tych problemów do rozwiązania w przyszłości.

Przy znanych wartościach parametrów przemieszczenia wyznaczenie miar odkształcenia, parametrów obrotu skończonego, wektora zmiany krzywizny oraz parametrów deformacyjnych brzegu sprowadza się do operacji różniczkowania. Znacznie trudniejszym jest zadanie odwrotne — wyznaczenie składowych przemieszczenia gdy znane są składowe miar odkształcenia lub nawet wyznaczenie parametrów obrotu skończonego. W zagadnieniach nieliniowej teorii powłok problemy te sprowadzają się do rozwiązania układu równań różniczkowych. Struktura równań (2.11) jest analogiczna do równań ruchu ciała sztywnego dookoła punktu stałego i na drodze wykorzystania wyników uzyskanych w mechanice analitycznej [71] można spodziewać się rozwiązania tego zadania również dla powłok.

W ramach geometrycznie nieliniowej teorii powłok nie zostały dotychczas podjęte problemy wydzielenia osobliwości rozwiązań związane z obciążeniem skupionym lub osobliwością geometrii powłoki, jak też związane z tym zagadnieniem rozwiązań powłok o obszarach wielospójnych.

W zagadnieniach liniowej teorii powłok rozwiązania takie są konstruowane [56, 57] poprzez całki krzywoliniowe, zawierające pochodne przemieszczenia i zlinearyzowanego wektora obrotu. Wydaje się więc, że korzystając z zależności teorii obrotów skończonych na brzegu powłoki możnaby uzyskać podstawowe zależności niezbędne do poprawnego formułowania i rozwiązywania tego typu zagadnień również w ramach nieliniowej teorii powłok.

Uzyskanie rozwiązania numerycznego podanych tu zależności geometrycznie nieliniowej teorii powłok na ogół wymaga zastosowania metod numerycznych opartych o wariacyjne sformułowanie zagadnienia. W literaturze jest wiele rozwiązań analitycznych i numerycznych, opartych o zasady wariacyjne, uzyskanych głównie w ramach najprostszego wariantu teorii powłok typu Donnella-Musztari-Własowa, np. [58 - 61]. Celowym jest jednak opracowanie różnych zasad wariacyjnych w ramach mniej ograniczających założeń geometrycznie nieliniowej teorii powłok przy umiarkowanych, dużych oraz skończonych obrotach. Chodziłoby tu nie tylko o skonstruowanie zasad wariacyjnych określających stacjonarność funkcjonału [70, 72], lecz głównie o skonstruowanie ekstremalnych zasad dualnych i podanie zakresu ich stosowalności. Mogą tu być pomocne niektóre wyniki uzyskane ostatnio w nieliniowej teorii sprężystości [62 - 65].

Dotychczas znane rozwiązania zadań nieliniowej teorii powłok sprężystych oparte są o warianty równań, w których część obrotowa deformacji została z góry ograniczona. Przykład nieliniowej deformacji wycinka kuli podany w [66] wskazuje, że uzyskane w ten sposób rozwiązanie może okazać się niespójnym z przyjętymi założeniami wyjściowymi. Celowe jest więc wykonanie szeregu testowych przykładów numerycznych dla prostych geometrii powłok (np. czasza kulista, cylinder, stożek etc.) opartych o pełne równania teorii geometrycznie nieliniowej oraz o równania przy ograniczonych obrotach. Dla najprostszych zadań jednowymiarowych celowe byłoby również wykonanie obliczeń, przyjmując kolejno u , albo Ω i $\gamma_{\alpha\beta}$ lub też $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\chi_{\alpha\beta}$ jako zmienne niezależne oraz przedyskutowanie zalet i wad rozwiązania przy różnych układach zmiennych oraz powiązań między nimi.

W dotychczasowej literaturze warunki ograniczające parametry związane z obrotem elementów materialnych zawsze były stosowane jedynie w ramach teorii małych odkształceń. Poprzez rozkład polarny $(2.3)_1$ odkształcenie i obrót zostały ściśle rozdzielone. Istnieje więc możliwość zbudowania również konsekwentnie uproszczonej teorii umiarkowanych lub dużych odkształceń przy ograniczonych obrotach.

W ramach teorii drugiego przybliżenia interesujące byłoby określenie warunków dodatkowych, przy których tylko jeden spośród pięciu członów drugorzędnych wystarcza do uzyskania wyników uściślonych w stosunku do teorii pierwszego przybliżenia. Dotyczy to w szczególności warunków, przy których wystarcza uwzględnienie tylko dodatkowej energii sprężystej od ścinania, gdyż takie właśnie uściślone warianty są najczęściej stosowane.

Literatura cytowana w tekście

1. W. PIETRASZKIEWICZ; *Nieliniowe teorie cienkich powłok sprężystych*, w: „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowanie”, pod redakcją J. Orkiszka i Z. Waszczyszyna, tom 1, Mat. Symp., Kraków, 25-27.IV.1974; PWN Warszawa 1978, 27 - 50.

2. W. PIETRASZKIEWICZ; *Linear compatibility conditions for the nonlinear theory of shells*, Biuletyn IMP PAN Nr 155 (843), Gdańsk 1976, 1 - 17.
3. W. PIETRASZKIEWICZ; *Some exact reduction of the nonlinear shell compatibility conditions*, ZAMM, vol. 57, No 5, 1977, T133 - T134.
4. W. PIETRASZKIEWICZ; *Simplified equations for the geometrically non-linear thin elastic shells*, Prace IMP PAN, z. 75, 1978, 165 - 173.
5. W. PIETRASZKIEWICZ; *Obroty skończone i opis Lagrange'a w nieliniowej teorii powłok*, Biuletyn IMP PAN Nr 172 (880), Gdańsk 1976, 1 - 191 wyd. w jęz. angielskim: *Finite rotations and Lagrangean descriptions in the non-linear theory of shells*, Polish Scientific Publishers, Warszawa - Poznań 1979.
6. В. ПЕТРАШКЕВИЧ, *Некоторые соотношения нелинейной теории оболочек Рейсснера*, Вестник Ленинградского Ун-та 1, 1979, 115 - 124.
7. W. PIETRASZKIEWICZ; *Introduction to the non-linear theory of shells*, Ruhr — Universität Bochum, Mitt. Inst. für Mech. Nr 10, Mai 1977, 1 - 154.
8. W. PIETRASZKIEWICZ; *Finite rotations in the non-linear theory of thin shells*, Lecture notes for CISM course „Thin Shells”, Udine, October 17 - 26, 1977 (w druku w Springer-Verlag Wien).
9. W. PIETRASZKIEWICZ; *Three forms of geometrically non-linear bending shell equations*, VIII Int. Congress on Appl. of Math. in Engng, Weimar, June 26 - July 2, 1978 (w druku w mat. pokonf.).
10. W. PIETRASZKIEWICZ; *Finite rotations in shells. Theory of shells*, W. T. Koiter, G. K. Mikhailov, Eds., Proc. Third IUTAM Symp., Tbilisi, 1978; North-Holland P. Co., Amsterdam 1980, 445 - 471.
11. W. PIETRASZKIEWICZ; *Consistent second approximation to the elastic strain energy of a shell*, ZAMM, vol. 59, 5, T 206 - T 208.
12. К. З. ГАЛИМОВ, *Основы нелинейной теории тонких оболочек*, Изд. Казанского ун-та, Казань 1975.
13. D. O. BRUSH, B. O. ALMROTH; *Buckling of bars, plates and shells*, McGraw - Hill B. Co, New York 1975.
14. Э. Л. АКСЕЛЬБРАД; *Гибкие оболочки*, Наука, Москва 1976.
15. Д. И. ШИЛЬКРУТ, П. М. ВЬРЛАН, *Устойчивость нелинейных оболочек*, Кишинев, Штинца 1977.
16. H. L. LANGHAAR; *Elastic surfaces and theories of shells*, Acta Mechanica, vol. 19, 1974, 109 - 128.
17. J. G. SIMMONDS; *Recent advances in shell theory*, in: „Advances in Engng Sci.”, Proc. 13 Annual Meet, Soc. Engng Sci., NASA CP - 2001, 1976, 617 - 626.
18. H. J. WEINITSCHKE; *Some mathematical problems in the non-linear theory of elastic membranes, plates and shells*, in: „Trends in Appl. of Pure Math. to Mech.”, ed. by G. Fichera, Pitman Publ., London 1976, 409 - 424.
19. Л. М. ЗУВОВ; *Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек*, ПИММ, т. 40, 1976, вып. 1, 85 - 95.
20. Л. А. ШАПОВАЛОВ; *Уравнения эластичности тонкой оболочки при неосесимметричной деформации*, Мех. Тв. Тела, 1976, № 3, 62 - 71.
21. A. M. A. van der HEIJDEN; *On modified boundary conditions for the free edge of a shell*, Delft University Press, 1976.
22. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI; *On the derivation of shell theories by direct approach*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, March 1974, 173 - 176.
23. Z. F. WACZYŃSKI; *Structure of equations and estimation of solutions in non-linear shell theory*, Arch. Mech. Stos., vol. 27, 1975, No 3, 375 - 384.
24. В. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ; *О некоторых формах уравнений теории оболочек*, ДАН СССР, т. 233, 1977, № 5, 820 - 823.
25. Э. И. ГРИГОЛЮК, В. И. МАМАЙ, *Об одном варианте уравнений теории конечных перемещений неполигих оболочек*, Прикл. Мех., т. 10, 1974, № 2, 3 - 13.
26. R. HARNACH, H. ROTHERT; *On the theory of inextensional bending of shell structures* Int. J. Sol. Str. vol. 12, 1976, No 5, 359 - 376.
27. M. KLEIBER, Cz. WOŹNIAK; *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN Warszawa (w druku).
28. Л. М. ЗУВОВ; *Уравнения упругих оболочек в эйлеровых координатах*, ДАН СССР, т. 237, 1977, № 5, 1044 - 1047.
29. Л. М. ЗУВОВ, *Об условиях консервативности гидростатической нагрузки на оболочку*, „Труды X-й Всес. Конф. по Теории Обол. и Пл.”, т. 1; Мецниереба, Тбилиси 1975, 129 - 134.

30. M. E. GURTIN, A. I. MURDOCK; *A continuum theory of elastic material surfaces*, ARMA vol. 57, 1975, No 4, 291 - 323.
31. P. A. ZHILIN; *Mechanics of deformable directed surfaces*, Int. J. Sol. Str. vol. 12, 1976, No 9/10, 635 - 648.
32. С. ВОЖНЯК; *Non-linear mechanics of constrained material continua*, I and II, Arch. Mech. Stos., vol. 26, 1974, No 1, 105 - 118; vol. 28, 1976, No 2, 155 - 170.
33. Н. П. СЕМЕНОК; *Об уравнениях геометрических нелинейной теории оболочек типа Тимошенко*, Прикл. Мех., т. 14, 1978, № 2, 128 - 132.
34. W. V. KRÄTZIG; *Herleitung und Struktur konsistenter nichtlinearer und linearer Shalentheorien*, TU Hannover, Bericht Nr S. 77/1, 1977, 13.1 - 13.30.
35. В. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ; *Вариационно-асимптотический метод*, сб.: „Некоторые вопр. мех. спл. среды”, ред. С. С. Григорян, Изд. МГУ, Москва 1978, 271 - 289.
36. E. STEIN; *Variational functionals in the geometrical non-linear theory of thin shells and FE discretization with application to stability problems* Theory of shells, W. T. Koiter, G. K. Mikhailov, Eds., Proc. Third IUTAM Symp., Tbilisi 1978; North-Holland P. Co., Amsterdam 1980, 509 - 535.
37. W. WUNDERLICH; *On a consistent shell theory in mixed tensor formulation*, Theory of Shells, W. T. Koiter, G. K. Mikhailov, Eds., Proc. Third IUTAM Symp., Tbilisi 1978; North-Holland P. Co., Amsterdam 1980, 607 - 633.
38. С. TRUESDELL W. NOLL; *The non-linear field theory*, in: „Handbuch der Physik”, vol. III/3, Springer-Verlag Berlin - Heidelberg - New York 1965.
39. А. И. ЛУРЬЕ; *Аналитическая механика*, Наука, Москва 1961.
40. В. В. НОВОЖИЛОВ; *Основы нелинейной теории упругости*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1948.
41. В. А. ШАМИНА; *Об упрощении общих нелинейных соотношений теории деформации сплошной среды*, сб. „Акт. проблемы нел. механики спл. среды.”, вып. 1, Изд. Ленун-та, Ленинград 1977, 132 - 147.
42. J. G. SIMMONDS, D. A. DANIELSON; *Nonlinear shell theory with a finite rotation vector*, I and II, Proc. Koninkl. Ned. Ak. Wet. ser., B, vol. 73, 1970, No 5, 460 - 478.
43. J. G. SIMMONDS, D. A. DANIELSON; *Non-linear shell theory with finite rotation and stress-function vectors*, J. of Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1972, No 4, 1085 - 1090.
44. В. В. НОВОЖИЛОВ, В. А. ШАМИНА; *О кинематических краевых условиях в нелинейных задачах теории упругости*, Изв. АН СССР, Мех. Тв. Тела, 1975, № 5, 63 - 74.
45. *Теория оболочек с учетом поперечного сдвига*, сб., Изд. Казанского ун-та, Казань 1977.
46. R. T. SHIELD; *The rotation associated with large strains*, SIAM J. Appl. Math., vol. 25, 1973, No 3, 483 - 491.
47. В. А. ШАМИНА; *Об определении вектора перемещения по компонентам Тензора деформации в нелинейной механике сплошной среды*, Изв. АН СССР, Мех. Тв. Тела, 1974, № 1, 14 - 22.
48. К. Ф. ЧЕРНЫХ, В. А. ШАМИНА; *Некоторые вопросы нелинейной классической теории тонких стержней и оболочек*, „Труды IX-й Всес. Конф. по Теории Обол. и Пл.”, Судостр., Ленинград 1975, 99 - 103.
49. F. JOHN; *Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations*, Comm. Pure and Appl. Math., vol. 18, 1965, 235 - 267.
50. W. T. KOITER; *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. IUTAM Symp. "Theory of Thin Shells", Delft 1959; North-Holland P. Co, Amsterdam 1960, 12 - 33.
51. Х. М. МУШТАРИ, К. З. ГАЛИМОВ; *Нелинейная теория упругих оболочек*, Таткинигоиздат, Казань 1957.
52. W. T. KOITER; *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Koninkl. Ned. Ak. Wet., Ser. B, vol. 69, 1966, No 1, 1 - 54.
53. W. Z. CHEN; *The intrinsic theory of thin shells and plates*, Quart. Appl. Math., vol. 1, 1944, 297 - 327.
54. M. K. DUSZEK; *A systematic study of kinematics of shells at large strains and displacements*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., vol. 24, 1978, No 1, 39 - 47.
55. W. PIETRASZKIEWICZ; *Material equations of motion for the nonlinear theory of thin shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie sci. techn., vol. 19, 1971, No 6, 261 - 266.
56. В. В. НОВОЖИЛОВ, К. Ф. ЧЕРНЫХ; *К расчету оболочек на сосредоточенные воздействия*, Иссл. по упр. и пл., № 2, Ленун-т, 1963.

57. W. PIETRASZKIEWICZ; *Multivalued stress functions in the linear theory of shells*, Arch. Mech. Stos., vol. 20, 1968, No 1, 37 - 45.
58. Б. Я. КАНТОР; *Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек*, Наукова Думка, Киев 1971.
59. М. С. КОРНИШИН; *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*, Наука, Москва 1964.
60. N. GASS; *Some two-field variational principles for nonlinear deformation analysis of shells*, ZAMM, vol. 55, 1975, No 9, 515 - 521.
61. T. NISHIMURA; *An improved generalized variational principle of the geometrical nonlinear theory of thin elastic shells and its application*, IASS Conf. on Lightw. Shell and Space Str., Sept. 13 - 16, 1977, Alma-Ata; Mir Publ., 1977, 249 - 262.
62. Л. М. ЗУВОВ; *Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости*, ПММ, т. 34, 1970, вып. 2, 241 - 245.
63. W. T. KOITER; *On the complementary energy theorem in non-linear elasticity theory*, in: „Trends in Appl. of Pure Math. to Mech.”, ed. by G. Fichera, Pitman Publ., London 1976, 207 - 232.
64. E. H. DILL; *The complementary energy principle in non-linear elasticity*, Lett. Appl. and Engng Sci., vol. 5, 1977, No 2, 95 - 106.
65. H. STUMPF; *Dual extremum principles and error bounds in non-linear elasticity theory*, J. Elasticity, vol. 8, 1978, No 4, 1 - 14.
66. M. WESSELS; *Das statische und dynamische Durchschlagproblem der imperfekten flachen Kugelschale bei elastischer rotationssymmetrischer Verformung*, TU Hannover, Mitt. Inst. für Statik Nr 23, Dezember 1977.
67. G. WEMPNER; *Finite elements, finite rotations and small strains*, Int. J. Sol. Str., vol. 5, 1969, 117 - 153.
68. P. G. GLOCKNER, J. P. SHRIVASTAVA; *On the geometry and kinematics of nonlinear deformation of shell space*, in: „Proceed. 11th Midw. Mech. Conf.”, Iowa St. Univ., Aug. 18 - 20, 1969, 331 - 352.
69. W. T. KOITER, J. G. SIMMONDS; *Foundations of shell theory*, in: Theoretical and Applied Mechanics, Proc. 13th IUTAM Congress, Moscow 1972; Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1973.
70. R. SCHMIDT, W. PIETRASZKIEWICZ; *Variational principles in the geometrically non-linear theory of shell under going moderate rotations*, Ruhr-Universität, Inst. f. Mechanik, Bochum, July 1979 (w druku w Ingenieur - Archiv).
71. Г. А. ГОРР, Л. В. КУДРЯЦОВА, Л. А. СТЕПАНОВА; *Классические задачи динамики твердого тела*, Наукова Думка, Киев 1978.
72. W. PIETRASZKIEWICZ, M. SZWABOWICZ; *Lagrangian non-linear theory of thin shells*, Archives of Mechanics (w druku).

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В работе дан обзор некоторых достижений в нелинейной теории оболочек полученных в период 1975—1978, с особой ссылкой на результаты полученные автором. В рамках нелинейной теории тонких оболочек рассмотрены следующие проблемы: теория конечных поворотов, разные виды геометрических краевых условий и энергетически согласованных статических граничных условий, разные представления основных уравнений в Лагранжевом описании и их упрощение в случае малой упругой деформации, а также в случае дополнительного ограничения поворотов. Сформулированы основные зависимости общей теории конечных поворотов в оболочках. Приведена уточненная формула второго приближения к упругой энергии деформации оболочки и соответствующие уточненные двумерные уравнения равновесия и определяющие соотношения. В заключении обсуждены некоторые нерешенные проблемы нелинейной теории оболочек.

Summary

SOME PROBLEMS OF THE NON-LINEAR THEORY OF SHELLS

The paper contains a revue of some advances in the non-linear theory of shells in the period 1975—1978 with particular reference to the new results obtained by the author. Within the non-linear theory of thin

shells the following topics are discussed: the theory of finite rotations, various forms of geometric boundary conditions and energetically compatible static boundary conditions, various representations in the Lagrangean description and the consistent simplification of the equations in the case of small elastic strain and for additionally restricted rotations. Basic relations of the general theory of finite rotations in shells are presented. A consistent second approximations refined two-dimensional equilibrium equations and constitutive relations are presented. Finally, some unsolved problems of the non-linear theory of shells are pointed out.

INST. MASZYN PRZEPLYWOWYCH PAN GDAŃSK

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1979 roku.

POWŁOKI PNEUMATYCZNE¹,

JANUSZ O R K I S Z (KRAKÓW)

1. Wstęp

1.1. Problematyka teorii wiotkich powłok i jej zastosowań. Pod pojęciem powłok pneumatycznych rozumiemy wiotkie powłoki, które utrzymują swoją formę dzięki istnieniu pewnego choćby niewielkiego ciśnienia wewnętrznego. Powłoki te nie przenoszą zginania ani ściskania a jedynie rozciąganie i mogą znajdować się bądź to w stanie błonowym, gdy oba naprężenia główne są dodatnie ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$), bądź też w jednoosiowym stanie naprężenia w przypadku powstania fałdów ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$).

Historia powłok pneumatycznych liczy już kilkadziesiąt lat, a pierwszą zrealizowaną konstrukcję o charakterze użytkowym zawdzięczamy BAIRDOWI [12]. Dzięki licznym zaletom jak lekkość, taniość i szybkość wznoszenia, powłoki pneumatyczne znalazły zastosowanie w budownictwie wielu krajów [12, 125, 126] m.in. w Polsce [149]. Stanowią one przekrycia magazynów, basenów i hal sportowych a nawet sezonowych wystaw lub teatrów. Stosuje się je również jako zbiorniki cieczy, gazów i materiałów sypkich oraz elementy wielu aparatów i konstrukcji przemysłowych.

Stan fizyczny takich struktur pneumatycznych, a więc geometrię odkształcenia i naprężenia opisuje teoria powłok wiotkich. Teoria ta znajduje również zastosowanie w innych dziedzinach, jak np. obróbka plastyczna metali, a nawet medycyna, gdzie może służyć np. do opisu mechanicznego modelu serca i naczyń krwionośnych.

Wspólną cechą struktur pneumatycznych jest

- znaczna zmienność geometrii pod wpływem zmiany ciśnienia wewnętrznego, przyłożonych obciążeń i temperatury;
- możliwość powstawania i zanikania fałdów;
- na ogół nieliniowa charakterystyka materiału, który zależnie od przeznaczenia powłoki pneumatycznej stanowią najczęściej tworzywa sztuczne, zazwyczaj zbrojone, guma i materiały gumopodobne oraz metale;
- możliwość utraty stateczności przez rozciąganie.

W zastosowaniach praktycznych powłoki pneumatyczne często znajdują się pod obciążeniem strumienia gazu (np. wiatru) skąd wynika potrzeba analizy zjawiska flatteru zwłaszcza ze względu na słabą odporność materiału powłoki na rozdarcie.

W pracy konstrukcji pneumatycznej można na ogół wyróżnić trzy fazy [80]:

- I — początkową bez żadnych obciążeń;

¹ Artykuł wygłoszony jako referat problemowy na II konferencji „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowania”.

- II — pośrednią scharakteryzowaną przez stan jaki osiąga powłoka po przyłożeniu ciśnienia wewnętrznego utrzymującego jej formę;
- III — użytkową, otrzymaną po przyłożeniu obciążeń do powłoki znajdującej się już we fazie II.

Poprawna teoria powłok pneumatycznych, prócz wymienionego na wstępie warunku nieujemności naprężeń głównych wyrażonego przez jednostronne więzy $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 \geq 0$, powinna więc uwzględniać:

- nieliniowość geometryczną, na którą składają się
 - = z reguły duże przemieszczenia a często i skończone odkształcenia powłoki;
 - = możliwość powstawania i zanikania strefy fałdów ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$);
- zmianę grubości powłoki w miarę jej odkształcania się; jest to niezbędne dla analizy zjawiska utraty stateczności;
- anizotropię i różnorodną nieliniowość fizyczną materiału pozwalającą na opisanie takich cech jak wysoka elastyczność, pełzanie, starzenie się, plastyczność;
- wpływ temperatury.

W zakresie analizy statycznej konkretne zastosowania stawiają nas najczęściej przed jednym z następujących zadań:

- znany jest wyjściowy stan powłoki i jej obciążenie (czas), szukamy stanu końcowego;
- znamy formę końcową powłoki i jej obciążenie (czas), szukamy formy wyjściowej oraz naprężeń w stanie końcowym.

Poza rozwiązaniem zagadnień statyki, teoria ta powinna umożliwiać analizę stateczności oraz badanie różnych efektów dynamicznych w powłoce pneumatycznej.

Zagadnienie stateczności powłok pneumatycznych ma charakter nieklasyczny, gdyż nie wiąże się ze ściskaniem lecz z rozciąganiem powłoki, a ponadto już sama możliwość utraty stateczności zależy od charakteru obciążenia (por. [120]). Zadanie formułuje się następująco: znany jest stan wyjściowy powłoki i rodzaj obciążenia, poszukiwana zaś wartość tego obciążenia (czasu) oraz odpowiadający jej stan końcowy, powyżej którego nie jest możliwy stan równowagi w powłoce. Poprawne rozwiązanie tego zadania jest możliwe tylko na gruncie teorii odkształceń skończonych.

Zagadnienia dynamiki to przede wszystkim opis ruchu powłoki o znanym stanie wyjściowym znajdującej się w opływie strumienia gazu. Zadanie to bywa analizowane nawet przy uproszczonym założeniu o nierozciągliwości materiału powłoki (por. [22]).

1.2. Cel i zakres pracy. Obecna praca ma charakter problemowy co pozwala skupić się na kilku wybranych zagadnieniach. Zasadniczym jej zadaniem jest nie tyle dokonanie pełnego przeglądu co przedstawienie aktualnego „state of art” w dziedzinie teorii i metod obliczania powłok pneumatycznych.

W szczególności jej cele to:

- zestawienie literatury zagadnienia za ostatnie dziesięciolecie;
- wyróżnienie na tej podstawie różnych szkół i ich zwięzła charakterystyka;
- szkicowa prezentacja teorii wiotkich powłok w ujęciu metody elementów skończonych;
- wskazanie kierunków rozwojowych mechaniki powłok pneumatycznych.

Ponadto praca zawiera krótką charakterystykę problemu przeprowadzoną z punktu widzenia mechaniki i metod obliczeniowych oraz reprezentatywne przykłady rozwiązań uzyskanych metodą elementów skończonych.

2. Krótkie omówienie literatury

Zestawienie literatury podanej w niniejszej pracy dotyczy problematyki wiotkich powłok w aspekcie powłok pneumatycznych i obejmuje w zasadzie ostatnie dziesięciolecie. W wyjątkowych przypadkach znalazły się tu pozycje wcześniejsze, te mianowicie, które nie były zamieszczone w bibliografii poprzedniej pracy autora [120] obejmującej okres do roku 1967. Zgodnie z przyjętym na wstępie założeniem nie będziemy tu omawiać wszystkich prac ograniczając się jedynie do tych, które bądź to mają decydujące znaczenie dla aktualnego stanu wiedzy w dziedzinie powłok pneumatycznych, bądź też są charakterystyczne dla rozpatrywanego zagadnienia. Omówienie literatury można znaleźć w rozmaitych pracach przeglądowych [12, 23, 45], monografiach [42, 115, 120, 125, 126], materiałach specjalistycznych konferencji [133, 134, 136] lub w niektórych pracach szczegółowych [34, 77, 128].

Podstawy ogólnej teorii wiotkich membran, ściślej na gruncie skończonych odkształceń ciał hipersprężystych zostały podane jeszcze przez GREENA i ADKINSA [42]. Obecnie stosowane są zarówno globalne (por. np. [8, 80]) jak i lokalne (por. np. [166, 179]) sformułowania tej teorii. W ujęciu lokalnym teoria ta prowadzi do silnie nieliniowego problemu brzegowego dla układu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Układ ten daje się ściśle rozwiązać jedynie w nielicznych przypadkach powłok o specjalnym kształcie i obciążeniu.

Do czasu pojawienia się metody elementów skończonych, która w radykalny sposób zmieniła sytuację, stosowano — jak wynika to z literatury — następujące sposoby postępowania:

- znaczne uproszczenie modelu teoretycznego, a następnie wykorzystanie rozmaitych metod analitycznych, ścisłych lub przybliżonych, często związanych z konkretnym kształtem powłoki, sposobem obciążenia, czy też rodzajem użytego materiału;
- ograniczenie rozważań do klasy zadań obrotowo-symetrycznych a więc jednowymiarowych i zastosowanie efektywnych metod numerycznych;
- ograniczenie rozważań do prostych przypadków specjalnych, które można rozwiązać ściśle jak np. powłoka kulista lub nieskończenie długa powłoka cylindryczna obciążone ciśnieniem wewnętrznym.

Uproszczenia modelu teoretycznego przyjmowane przez różnych autorów sprowadzały się do jednego z poniższych wariantów:

- założenie małych odkształceń i liniowego prawa fizycznego;
- dokonanie pełnej linearyzacji końcowych równań powłoki (małe przemieszczenia!);
- założenie, że materiał powłoki jest nierozciągliwy, co ogranicza analizę jedynie do równań równowagi (ruchu).

Zasadniczą wadą takich uproszczeń jest z jednej strony zbyt daleko idąca idealizacja rzeczywistej wiotkiej powłoki, z drugiej zaś wąskość założeń i cząstkowość rozwiązań

(por. np. [84 - 105]). Nawet niewielka zmiana obciążeń, kształtu powłoki lub własności materiału, z którego została wykonana — stwarza zazwyczaj ogromne trudności obliczeniowe.

W przypadku obrotowej symetrii powłoki i obciążenia ściśle sformułowane zagadnienie można sprowadzić (por. [120]) do problemu brzegowego dla układu nieliniowego, zwyczajnych równań różniczkowych. Układ ten na ogół daje się efektywnie rozwiązać metodami bezpośredniego całkowania numerycznego (NC) takimi jak metody Rungego-Kutty, Adamsa lub różnego typu metody predyktor-korektor. Takie podejście zastosowano w znakomitej większości prac dotyczących wiotkich powłok obrotowo-symetrycznych.

Zaletą metod NC jest ich prostota i małe obciążenie pamięci operacyjnej maszyny. Z drugiej strony jednak ich efektywność w znacznej mierze zależy od głębokości propagacji efektu brzegowego we wnętrze powłoki oraz od niezbędnej liczby kroków całkowania. Metody te są stabilne dla powłok krótkich, słabo stabilne w przypadku powłok średnich, a niestabilne dla powłok długich.

Metody NC wykorzystywano w znakomitej większości prac dotyczących wiotkich powłok obrotowo-symetrycznych. Ponadto stosowano też inne metody jak np. różnic skończonych (por. [158, 180]), a po linearyzacji równań także metodę prągonki (por. [159, 160]). W pracach [25, 26, 154] zaprezentowano podejście energetyczne i minimalizację metodą Fletchera-Powella. Interesujące połączenie iteracyjnej metody Picarda z techniką analogową pokazano w pracy [14]. Były również próby przybliżonych rozwiązań graficzno-analitycznych (por. [106, 171]).

Wszystkie wspomniane wyżej metody trudno uznać za w pełni zadowalające, zarówno gdy idzie o ogólność ich zastosowania jak i otrzymane rezultaty. Dopiero pojawienie się metody elementów skończonych pozwoliło na dokonanie odpowiedniej dyskretyzacji zagadnienia względem dwóch zmiennych, niezbędnej do numerycznego rozwiązania nieuproszczonego zadania ogólnego. Powstała przy tym możliwość jednakowego potraktowania powłok o najzupełniej różnych kształtach i warunkach podparcia, rozmaicie obciążonych i wykonanych z materiałów o różnorodnych własnościach (np. izotropowe, anizotropowe). Choć potencjalne możliwości jakie kryje w sobie metoda elementów skończonych nie zostały jeszcze — jak na to wskazuje analiza dotychczasowych prac — w pełni wykorzystane, to już obecnie wachlarz rozwiązywanych zagadnień jest znacznie szerszy, a uzyskane wyniki bardziej zbliżone do rzeczywistości niż te, które można by osiągnąć innymi, dotąd stosowanymi metodami.

Dlatego też w dalszych rozważaniach główną uwagę poświęcimy tym pracom, które stanowią dziś teoretyczną podstawę obliczania powłok pneumatycznych metodą elementów skończonych. Jeśli chodzi o pozostałe prace, mające aktualnie mniejszy ciężar gatunkowy, o ograniczymy się do wyróżnienia i krótkiej charakterystyki zasadniczych szkół.

Stosunkowo liczne są tu prace radzieckie. I tak warto wymienić w pierwszym rzędzie prace S. A. ALEKSIEJEWY i jego współpracowników. Ponieważ w znacznej większości pochodzą one z przełomu lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych a jedynie ich wpływ sięga czasów późniejszych cytujemy tu tylko ostatnie pozycje [2, 3]. Dotyczą one fizycznie liniowej teorii powłok pneumatycznych podlegających dużym przemieszczeniom przy małych odkształceniach.

Następna grupa to prace A. S. GRIGORIEWY (wymieniamy jedynie przeglądową pracę

[45] i kilka ostatnich [43, 44, 36, 47]) oraz rozlicznych jego współpracowników i kontynuatorów [34, 35, 120 - 124, 131, 138 - 141, 146 - 148, 155 - 157].

Wszystkie one dotyczą teorii wiotkich powłok obrotowo symetrycznych, ściślej na gruncie teorii skończonych odkształceń ośrodka ciągłego. Ze względu na obrotową symetrię i wynikającą stąd stałość kierunków głównych posługiwano się najczęściej logarytmiczną miarą odkształceń i prawami fizycznymi Nadai-Davisa dla rzeczywistych naprężeń. Przypadki innych związków konstytutywnych odpowiadających ciałom hipersprężystym, lepkosprężystym i lepkoplastycznym rozważone zostały przez J. ORKISZA w serii prac [121 - 124], z których pierwsza najpełniej przedstawia osiągnięcia i możliwości omawianej teorii. W przypadku zadań stacjonarnych teoria ta prowadziła do zagadnienia brzegowego dla układu czterech zwyczajnych, nieliniowych równań różniczkowych, zaś przy procesach niestacjonarnych do zagadnienia początkowo-brzegowego dla układu sześciu quasilineowych równań różniczkowych pierwszego rzędu (por. [120]). Rozwiązanie otrzymano metodami NC. W pracach tej grupy specjalną uwagę poświęcono problemowi stateczności powłoki przy rozciąganiu oraz zagadnieniu strefy fałdów ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$).

Wśród publikacji radzieckich wyróżniają się swą liczebnością prace ośrodka we Władystoku (por. [136]), w których inicjatorem i inspiratorem jest W. F. MAGUIA [84 - 101] a obok niego B. I. DRUZ [20, 21] i B. N. MARTYNIIEC [102 - 105] (por. też [22, 38, 63, 108, 130]). Prace te charakteryzują się zarówno daleko idącymi uproszczeniami (np. przyjęcie nierozciągłości materiału) jak i użytkowym celem, który najczęściej stanowiło projektowanie wiotkich zbiorników na ciecze i materiały sypkie. Warto tu też podkreślić zainteresowanie strefą fałdów (por. [64, 90, 92 - 94, 169, 170]). Stosunkowo znaczna liczebność prac tej grupy jest jednak rezultatem wariantowania wąskich założeń teoretycznych i braku efektywnego kontaktu z innymi ośrodkami pracującymi nad teorią powłok wiotkich.

W ostatnich latach ukazała się seria prac [25 - 29, 154, 166 - 168] W. W. FENGA i W. H. YANGA oraz ich współpracowników jak również tematycznie pokrewne im prace Y. S. SUNA i C. E. UENGA [145, 158]. Dotyczą one wiotkich powłok tak o dowolnych obrotowo-symetrycznych, jak i innych kształtach. Nawiązując do sformułowania podanego przez GREEA i ADKINSA [42] opierają się one na teorii ścisłej dla materiałów hipersprężystych. Specyfiką tych prac jest m.in. poświęcenie uwagi problemom kontaktowym (por. [26, 28, 29] oraz także [129]). Rozwiązania konkretnych zadań uzyskiwano numerycznie metodami NC [29, 166], metodą różnic skończonych [158, 168] lub FLETCHERA-POWELLA [25, 26, 154].

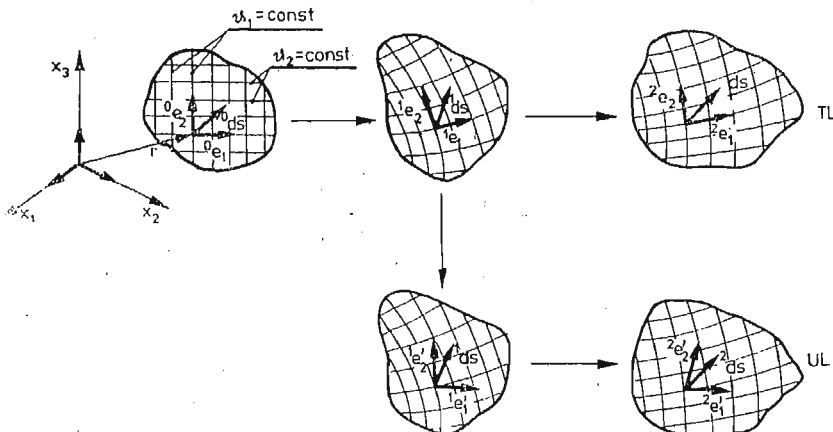
Poza wyszczególnieniem i krótką charakterystyką „szkół” warto jeszcze wymienić prace poświęcone różnym tematom specjalnym, takim jak:

- stateczność: stateczność rozumiana jest (za wyjątkiem pracy [17]) w sensie podanym w punkcie 1.1. niniejszej pracy; rozważany był zarówno przypadek dowolnej powłoki obrotowo-symetrycznej [15, 34, 43, 44, 120] jak i pewne kształty specjalne [31] np. cylindryczny [33, 156], toroidalny [18]; w pracach [120, 165] rozpatrywano stateczność powłoki kulistej przy pełzaniu;
- dynamika: problemy dynamiki powłok pneumatycznych rozważano dotąd w sposób bardzo uproszczony. Najczęściej ograniczano się do rozpatrywania statycznego parcia

- wiatru [21, 22, 36, 40, 41]; jedynie w nielicznych przypadkach po wstępnej linearyzacji układu równań analizowano zagadnienie drgań własnych [53, 70, 175] lub zjawisko flutteru [20, 65, 132]. Znacznie uproszczone podejście nieliniowe prezentuje praca [101]. Bogata natomiast jest literatura dotycząca pokrewnych problemów w przekryciach wiszących [177];
- pełzanie: pełzanie dowolnych obrotowo-symetrycznych wiotkich powłok przy różnych prawach fizycznych było przedmiotem prac [50, 120, 123]; rozważono też pewne szczególne przypadki jak membrana kołowa [16, 83], pierścieniowa [163] lub powłoka kulista [165];
 - optymalizacja: podejmowane [62, 139, 140] były pierwsze, uproszczone próby formułowania zadań optymalnych;
 - problemy różne: analiza wiotkich powłok toroidalnych [60, 67, 68, 107, 109, 110], problem obciążeń lokalnych [127] oraz struktury pneumatyczne wzmocnione kablami [106, 151];
 - doświadczenia: osobną grupę, niestety niezbyt liczną, stanowią prace eksperymentalne. W zakresie statyki dotyczą one doświadczeń prowadzonych na membranach kołowych [48, 118] w celu weryfikacji równolegle otrzymywanych rozwiązań teoretycznych. Podobnie było w przypadku badań nad utratą stateczności przez wiotkie powłoki [14, 18]. Stosunkowo najwięcej prac [4, 11, 70, 136, 178] poświęcono problemowi zachowania się powłok pneumatycznych w warunkach opływu strumieniem gazu.

3. Powłoki pneumatyczne w ujęciu metody elementów skończonych

3.1. Uwagi wstępne. Metoda elementów skończonych stwarza realną szansę wykorzystania ścisłej teorii skończonych odkształceń ośrodka ciągłego do obliczania powłok pneumatycznych o dowolnym kształcie. W tym celu można zaadoptować ogólny sposób postępowania opracowany dla rozwiązywania zagadnień geometrycznie nieliniowych (por. [10, 51, 52, 58, 112, 115]). Aby rozróżnić konfiguracje początkową i aktualną stosuje się opis



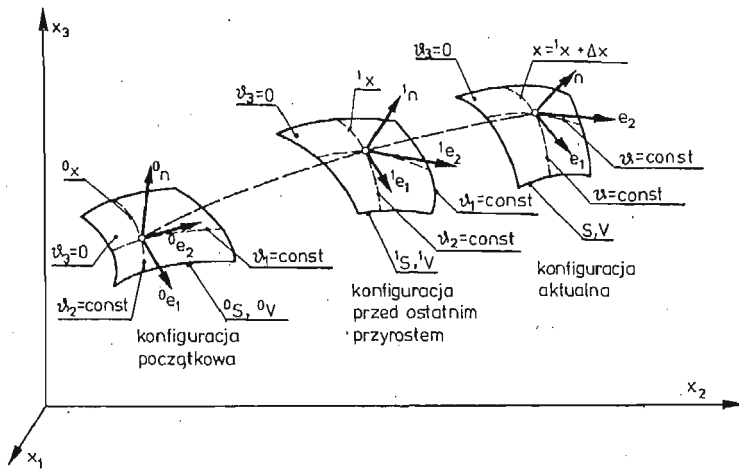
Rys. 1. Rozróżnianie sformułowań TL i UL

Eulera, opis Lagrange'a (TL — total Lagrangian), bądź też jego modyfikację tzw. uaktualniony opis Lagrange'a (UL — updated Lagrangian) ściśle związanym z numeryczną techniką rozwiązywania problemu.

W opisie Eulera rozważane wielkości są odniesione do konfiguracji aktualnej. Takie sformułowanie jest wygodne w tych problemach, gdzie znany jest aktualny kształt powłoki, a poszukiwana jej forma wyjściowa. Znajomość tej formy jest natomiast warunkiem zastosowania opisu Lagrange'a. Konfiguracja odniesienia stanowi wówczas (por. rys. 1) bądź to stały układ początkowy (TL), bądź też układ konwekcyjny związany z kształtem powłoki, ustalony każdorazowo dla przedostatniego kroku postępowania przyrostowego (UL). W praktycznych obliczeniach można spotkać (por. [10]) oba te sformułowania z tym, że w opisie UL struktura odpowiednich macierzy jest prostsza niż w TL, lecz istnieje większe niebezpieczeństwo kumulacji błędów obliczeń.

Równania metody elementów skończonych zastosowanej do teorii wiotkich powłok otrzymywano dotychczas wychodząc z zasady prac wirtualnych. Jednakże, podobnie jak ma to miejsce w rozmaitych innych zagadnieniach nieliniowych, można by również wykorzystać inne zasady wariacyjne podane w postaci przyrostowej (por. [52]).

Obecnie przedstawimy pokrótce sposób wyprowadzenia tych równań posługując się dla przejrzystości zapisem macierzowym. Rozważmy w tym celu element powłoki przedstawiony na rys. 2 i opisany w globalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych



Rys. 2. Przemieszczenia elementu skończonego. x — globalny układ przestrzennych współrzędnych kartezjańskich, v_1, v_2, v_3 — lokalny układ materialnych współrzędnych krzywoliniowych

przestrzennych x_1, x_2, x_3 . Wielkości oznaczone indeksem „0” odnoszą się do konfiguracji pierwotnej, „1” do konfiguracji przed ostatnim przyrostem, zaś „2” lub bez indeksu do konfiguracji aktualnej. Wprowadźmy ponadto lokalny, konwekcyjny układ współrzędnych v_1, v_2, v_3 związany z wektorami e_1 oraz e_2 stycznymi do powierzchni środkowej powłoki i normalnym n . Oznaczmy indeksem „e” wielkości węzłowe w elemencie, zaś przez N macierz złożoną z funkcji kształtu. W przypadku powszechnie stosowanych

elementów izoparametrycznych, geometrię powłoki opisuje równanie

$$(1) \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{N}\mathbf{x}_e,$$

zaś przemieszczenia

$$(2) \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{x} - {}^\circ\mathbf{x} = \mathbf{N}(\mathbf{x} - {}^\circ\mathbf{x}) \equiv \mathbf{N}\mathbf{u}_e,$$

skąd znając konkretną postać wektora odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ możemy już znaleźć przyrostową relację

$$(3) \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}_e.$$

Wektor odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ najwygodniej jest zdefiniować w lokalnym układzie współrzędnych $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ jako

$$(4) \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\},$$

pomijając, zgodnie z teorią wiotkich membran (por. [42, 115]), $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} \equiv 0$ a ponadto składową ε_{33} , która choć jest różna od zera to jednak — wobec założonego płaskiego stanu naprężenia w powłocie — nie występuje w wyrażeniu na pracę wirtualną. W przypadku materiałów nieściśliwych wykorzystuje się ją do określenia aktualnej grubości powłoki h .

Podobnie wektor naprężeń odpowiadający wektorowi odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ przyjmuje się w postaci

$$(5) \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} \equiv 0.$$

Konkretna forma tych wektorów zależy od przyjętej miary odkształcenia i obranego układu współrzędnych.

3.2. Sformułowanie Eulera. Zasada prac wirtualnych ma w tym przypadku postać

$$(6) \quad \int_V \boldsymbol{\sigma}'_c \delta\boldsymbol{\varepsilon}_A dV = \int_V \rho \mathbf{b}' \delta\mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{q}' \delta\mathbf{u} dS,$$

gdzie

$\boldsymbol{\sigma}'_c$ — wektor naprężeń Cauchy'ego;

A — indeks odnoszący się do miary odkształceń typu Almansi'ego;

\mathbf{b} — wektor sił masowych;

\mathbf{q} — wektor zewnętrznych obciążeń powierzchniowych;

ρ — gęstość materiału powłoki;

V — objętość powłoki;

S — powierzchnia powłoki.

Wszystkie te wielkości są odniesione do konfiguracji aktualnej.

Na podstawie przeprowadzonej uprzednio dyskretyzacji (1) - (3) oraz relacji $dV = h dS$ można napisać

$$(4) \quad \delta\mathbf{u}'_e \left(\int_S \mathbf{B}'_A \boldsymbol{\sigma}'_c h dS \right) = \delta\mathbf{u}'_e \left(\int_S \mathbf{N}' \mathbf{b} h \rho dS + \int_S \mathbf{N}' \mathbf{q} dS \right) \equiv \delta\mathbf{u}'_e \mathbf{P}_e.$$

Wielkość

$$(8) \quad \mathbf{P}_e \equiv \int_S \mathbf{N}' (\mathbf{b} h \rho + \mathbf{q}) dS,$$

przedstawia wektor sił węzłowych kinematycznie równoważnych obciążeniom zewnętrznym. Stąd więc równania równowagi elementu zawierające nieznanne przemieszczenia węzłowe mają ostatecznie postać

$$(9) \quad \int_S \mathbf{B}'_A \sigma_c h dS = P_e.$$

3.3. Sformułowanie Lagrange'a. W klasycznym opisie Lagrange'a (TL) posługujemy się jedną, ustaloną konfiguracją odniesienia, zazwyczaj określającą pierwotną geometrię powłoki. Zasada prac wirtualnych ma wówczas następującą formę

$$(10) \quad \int_{\circ V} \sigma'_p \delta \varepsilon_G d^{\circ}V = \int_{\circ V} \rho b^t \delta u d^{\circ}V + \int_{\circ S} q^t \delta u d^{\circ}S.$$

W wyniku dyskretyzacji opartej na wzorach (1) - (3) otrzymujemy stąd równania równowagi elementu

$$(11) \quad \int_{\circ S} \mathbf{B}'_G \sigma_p h d^{\circ}S = P_e,$$

przy czym siły węzłowe kinematycznie równoważne obciążeniom wewnętrznym są obecnie równe

$$(12) \quad P_e \equiv \int_{\circ S} \mathbf{N}'(b^{\circ} \rho^{\circ} h + q) d^{\circ}S.$$

We wzorach tych wskaźnik G oznacza miarę odkształceń Greena-Lagrange'a, zaś σ_p wektor naprężeń Pioli-Kitchhoffa drugiego rodzaju.

3.4. Uaktualnione sformułowanie Lagrange'a. W uaktualnionym opisie Lagrange'a stosuje się podejście przyrostowe, w którym konfiguracja odniesienia zmienia się na każdym kroku. Wiąże się ją z reguły z formą jaką przyjmuje powłoka przed ostatnim przyrostem odkształceń (por. rys. 1). Aby wyprowadzić odpowiednią zasadę wariacyjną rozważa się (por. rys. 2) pewną, konfigurację „1” odniesienia oraz konfigurację przyrostową „2”. Zakłada się, że wariacje przemieszczeń wokół stanu równowagi 1 są małe. Można wówczas napisać

$$(13) \quad \int_{1V} \sigma'_p \delta \varepsilon_G d^1V = \int_{1V} \frac{1}{2} \rho b^t \delta u d^1V + \int_{1S} \frac{1}{2} q^t \delta u d^1S,$$

oraz

$$(14) \quad \int_{1V} \sigma'_c \delta \varepsilon_c d^1V = \int_{1V} \frac{1}{2} \rho b^t \delta u d^1V + \int_{1S} \frac{1}{2} q^t \delta u d^1S.$$

W obu tych wyrażeniach wszystkie wielkości związane są z konfiguracją aktualną, lecz odniesione do konfiguracji „1”; \mathbf{g}_c jest wektorem odkształceń typu Cauchy'ego. Kładąc

$$(15) \quad \begin{aligned} \Delta \varepsilon &\equiv \varepsilon_G - \varepsilon_c, & \Delta \sigma &\equiv \sigma_p - \sigma_c, \\ \Delta \rho &\equiv \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{2} \rho, & \Delta q &\equiv \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} q, \end{aligned}$$

otrzymamy stąd poszukiwane, przyrostowe sformułowanie zasady wariacyjnej (10) dla powłoki

$$(16) \quad \int_{1S} (\sigma'_c \delta \Delta \varepsilon + \Delta \sigma^t \delta \varepsilon_G) h d^1S = \int_{1S} \Delta \rho b^t \delta u h d^1S + \int_{1S} \Delta q^t \delta u d^1S.$$

Po dyskretyzacji (1) - (3) otrzymujemy stąd równania równowagi

$$(17) \quad \int_{^1S} (\Delta \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}_C + \mathbf{B}_G^t \Delta \boldsymbol{\sigma})^t h d^1S = P_e,$$

gdzie tym razem

$$(18) \quad P_e \equiv \int_{^1S} \mathbf{N}^t (b \Delta q^1 h + \Delta q) d^1S,$$

przy czym

$$(19) \quad \Delta \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_G - \mathbf{B}_C.$$

3.5. Równania fizyczne. Równania równowagi elementu należy uzupełnić stosownymi równaniami fizycznymi. Rozpatrywanie różnych możliwych związków konstytutywnych nie jest celem niniejszej pracy, stąd też ograniczymy się jedynie do kilku ogólnych uwag.

Powłoki pneumatyczne wykonuje się na ogół z materiałów, których własności fizyczne poprawnie opisuje teoria ciał wysokoelastycznych [42, 115]. Zachodzi wówczas (por. [8]) relacja

$$(20) \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}},$$

co w postaci przyrostowej można zapisać jako

$$(21) \quad \delta \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}^t} \delta \boldsymbol{\varepsilon},$$

gdzie W oznacza gęstość energii odkształcenia. Dla teorii drugiego rzędu równania (20) mają charakter sprężystości liniowej $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$ zaś dla teorii wyższych rzędów nieliniowej. Równania takie, zwłaszcza dla szczególnego przypadku — materiału Mooney'a-Rivlina — znalazły powszechne zastosowanie w obliczeniach metodą elementów skończonych.

W teorii wiotkich powłok rozważa się ponadto materiały sprężysto-plastyczne i lepkoplastyczne [6, 7, 59] oraz materiały o własnościach reologicznych [118]. Wówczas związki fizyczne są na ogół dane jedynie w postaci przyrostowej

$$(22) \quad \delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_T \delta \boldsymbol{\varepsilon},$$

gdzie \mathbf{E}_T jest macierzą styczną. W takiej sytuacji obliczanie naprężeń nie zawsze jest sprawą trywialną i zależnie od definicji tych naprężeń odbywa się drogą odpowiedniego sumowania ich przyrostów [59].

3.6. Numeryczne rozwiązywanie problemu. Równania równowagi elementu (9), (11) oraz (17) są nieliniowe względem przemieszczeń węzłowych nawet przy liniowych związkach fizycznych. Stosowanie efektywnych metod rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych takich jak metoda Newtona-Raphsona, czy też różne metody przyrostowe, wymaga lokalnej linearyzacji tych równań. W przypadku równań metody elementów skończonych taka linearyzacja wiąże się z określeniem tzw. „macierzy stycznej” \mathbf{k}_{eT} . Można ją uzyskać np. poprzez wariację równań (9), (11) lub (17) i wówczas

$$(23) \quad \delta P_e \equiv (\mathbf{k}_{eL} + \mathbf{k}_{eN}) \delta \mathbf{u}_e \equiv \mathbf{k}_{eT} \delta \mathbf{u}_e.$$

Macierz tę rozbija się na ogół na część liniową \mathbf{k}_{eL} oraz nieliniową \mathbf{k}_{eN} . Pierwsza z nich opisuje efekt zmiany naprężeń przy ustalonej geometrii. Przy liniowych związkach fizycz-

nych jest ona równa klasycznej macierzy sztywności znanej z teorii liniowej. Druga ujmując wpływ zmian geometrii powłoki przy niezmiennych naprężeniach i nosi nazwę „macierzy geometrycznej” elementu.

Po agregacji elementów otrzymuje się układy równań przemieszczeniowych powłoki, pierwszy w postaci pełnej nieliniowej

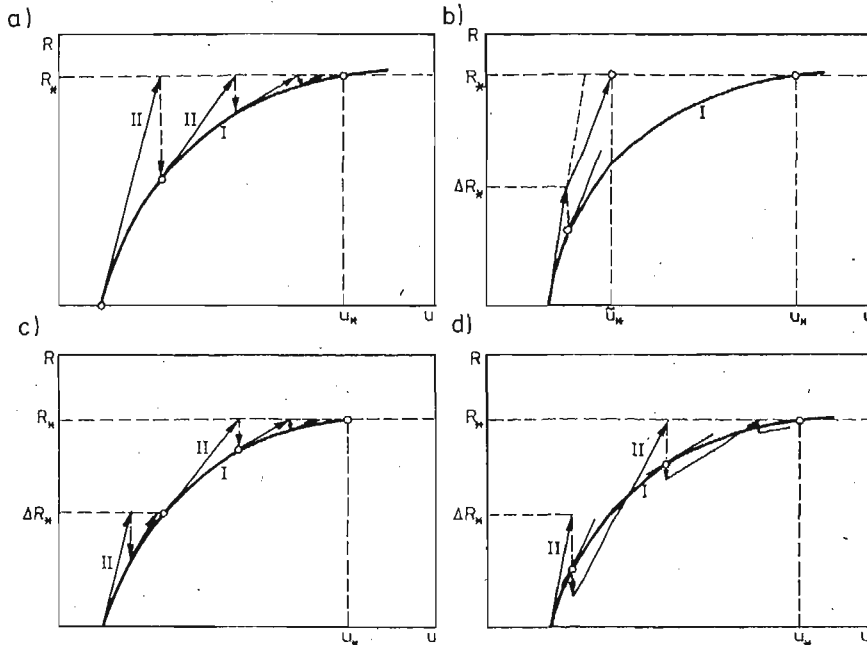
$$(24) \quad f(u_*) = R_*$$

oraz drugi w postaci przyrostowej, zlinearyzowanej

$$(25) \quad K_T \Delta u_* = \Delta R_*$$

Przez „*” oznaczono tu zbiór wielkości węzłowych w całej powłoce, zaś przez R wektor wszystkich obciążeń zewnętrznych sprowadzonych do wielkości węzłowych.

Do rozwiązania równań (24) stosuje się (por. rys. 3) na ogół — metodę Newtona-Raphsona; kolejne poprawki liniowe Δu_* oblicza się wówczas przy pomocy równań (25), zaś residua z równań (24);



Rys. 3. Interpretacja graficzna metody: a) Newtona-Raphsona, b) przyrostowej, c) mieszanej, d) samokorygującej, I — $f(U_*) = R_*$, II — $K_T \Delta U_* = \Delta R_*$

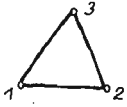
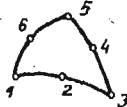

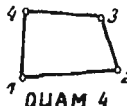

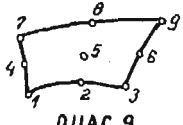
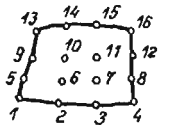
- metodą przyrostową wykorzystując jedynie zlinearyzowane równania (25);
- kombinację obu tych metod ewentualnie połączoną z techniką nadrelaksacji (np. metody samokorygujące).

Istotnym problemem numerycznym jest znalezienie wyjściowej (nie trywialnej) formy powłoki będącej w równowadze. Tylko taka forma bowiem może stanowić właściwą konfigurację odniesienia w podanych uprzednio zasadach wariacyjnych TL i UL. Dlatego też w konkretnych obliczeniach prowadzonych metodą elementów skończonych roz-

wiązywano na ogół takie zadania, w których początkowa forma była z góry znana np. płaska, walcowa, kulista.

Interesujący sposób poszukiwania formy wyjściowej, choć zastosowany nie do powłok pneumatycznych, lecz do siatkowych konstrukcji ścięgowych, zaproponowano w pracy [1]. Umożliwia on rozpoczęcie obliczeń od pewnej płaskiej pomocniczej formy równowagi, której poprzez kolejne przyrosty przemieszczeń nadaje się następnie pożądaną kształt drogą odpowiedniej zmiany warunków brzegowych i sztucznego, chwilowego zwiększenia ciężaru własnego powłoki.

Tablica 1. Wykaz elementów wg pracy [128]

Typ elementu	Liczba węzłów	Jednomiany interpolacyjne w układzie lokalnym	Liczba punktów całkowania numerycz.
 <p>TRIM 3</p>	3	1 $\xi_1 \quad \xi_2$	1
 <p>TRIMC 6</p>	6	1 $\xi_1^2 \quad \xi_1 \xi_2 \quad \xi_2^2$ $\xi_1 \xi_2$	7
 <p>TRIMC 10</p>	10	1 $\xi_1^3 \quad \xi_1^2 \xi_2 \quad \xi_1 \xi_2^2 \quad \xi_2^3$ $\xi_1^2 \xi_2 \quad \xi_1 \xi_2^2$ $\xi_1 \xi_2$	13
 <p>QUAM 4</p>	4	1 $\xi \quad \eta$ $\xi \eta$	2x2
 <p>QUAC 8</p>	8	1 $\xi^2 \xi \eta \quad \xi \eta^2 \quad \eta^2$ $\xi \eta^2 \quad \xi \eta$	3x3
 <p>QUAC 9</p>	9	1 $\xi^2 \xi \eta \quad \xi \eta^2 \quad \eta^2$ $\xi \eta^2 \quad \xi \eta$ $\xi \eta^2$	3x3
 <p>QUAC 16</p>	16	1 $\xi^3 \xi^2 \xi \eta \quad \xi \eta^2 \quad \eta^2 \quad \eta^3$ $\xi^2 \xi \eta \quad \xi \eta^2 \quad \xi \eta$ $\xi \eta^2 \quad \xi \eta$ $\xi \eta^2$	4x4

Natomiast przy znanej formie końcowej, pierwotną formę powłoki można znaleźć stosując sformułowanie Eulera. W pracy [80] zaproponowano, ilustrując to przykładem, aby przyjąć, że kształt powłoki pod działaniem jedynie ciśnienia wewnętrznego (i ciężaru własnego) o ustalonej roboczej wartości jest znany. Stanowi on kolejno:

- formę końcową powłoki przy poszukiwaniu jej formy pierwotnej (sformułowanie E);
- formę początkową powłoki przy poszukiwaniu jej kształtu odpowiadającego różnym obciążeniom użytkowym (sformułowanie UL lub TL).

3.7. Elementy. W dotychczasowych pracach najczęściej posługiwano się najprostszymi elementami trójkątnymi TRIM 3 o trzech węzłach. Elementy te, jak wiadomo, mają stałe pole odkształceń oraz naprężeń, stąd przy ich stosowaniu nie jest konieczne uciążliwe całkowanie numeryczne. Z drugiej strony jednak ich dokładność jest mało zadowalająca. Elementom wyższego rzędu poświęcono jak dotąd jedynie nieliczne prace i to stosując w każdej z nich inne podejście.

Najpełniejszy zestaw elementów zarówno trójkątnych typu TRIMC jak i czworokątnych typu QUAC pokazany w tablicy 1 otrzymano w pracy [128] drogą bezpośredniego wykorzystania formuł (11), (17), (23). W pracy [8] przedstawiono rodzinę elementów typu TRIMC otrzymaną na drodze tzw. „naturalnego” podejścia. Polega ono na posługiwaniu się stopniami swobody elementu eliminującymi te przemieszczenia, które są związane z jego ruchem jako bryły sztywnej. Wreszcie w pracach [80, 81] wprowadzono jeden element czworokątny (por. [76]), w którym zastosowano sześciennie funkcje kształtu skonstruowane t.zw. techniką „patch test”.

3.8. Przegląd literatury. Wszystkie prace dotyczące obliczania powłok pneumatycznych metodą elementów skończonych oparte są na teorii dużych odkształceń membran. Można je podzielić na trzy grupy.

Pierwsza z nich wiąże się głównie z nazwiskiem J. T. ODENA [111 - 119]. Zaliczyć do niej trzeba przede wszystkim pionierskie prace [11, 118, 119], w których podane zostały teoretyczne podstawy dyskretyzacji wiotkich powłok metodą elementów skończonych oraz monografię [115]. Autorzy pracy [118] wychodząc z równań termodynamiki zarówno dyskutują problematykę fizycznie nieliniową jak i dynamikę membran (por. też [117]). Warto również wspomnieć o pracy [113] poświęconej obliczaniu sił niekonserwatywnych w MES (np. ciśnienie w powłoce pneumatycznej). Do tej grupy, z uwagi na sposób potraktowania tematu, trzeba także zaliczyć prace J. E. KEY'A [57] oraz H. PARISCHA [128]. Ta ostatnia jako jedyna z wymienionych wprowadza elementy wyższych rzędów.

Druga grupa jest dziełem spółki autorskiej J. W. LEONARD, C. T. L. oraz ich współpracowników [76 - 81, 161]. Prócz ścisłości teoretycznej [77, 80] cechuje ją troska o inżynierskie realia dotyczące warunków pracy powłok pneumatycznych takich jak: kolejne fazy obciążania [72, 73], praktyczne zastosowania [74, 45], czy też fakt wzmocnienia konstrukcji linami [81, 161]. Materiał powłoki przyjmowano jako liniowo-sprężysty a wyjątkowo [77] jako hiperelastyczny. Rozważano również [79] problem drgań powłoki.

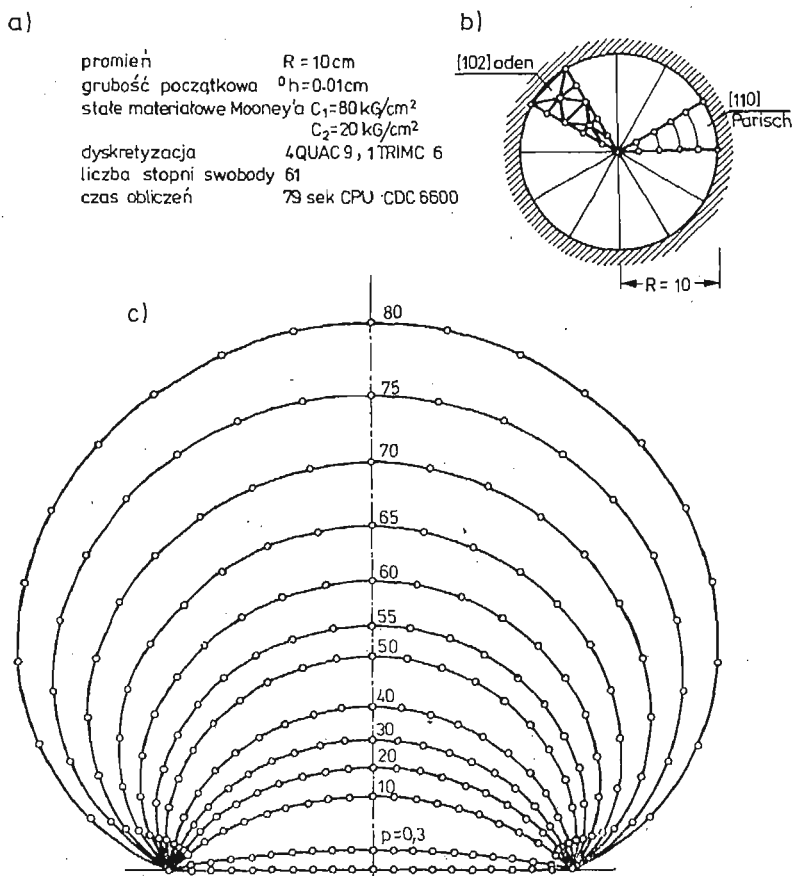
Trzecia grupa to prace [5 - 8, 59] charakteryzujące się tzw. podejściem naturalnym sformułowanym przez J. H. ARGYRISA i jego współpracowników. Dzięki oddzieleniu przemieszczeń elementu związanych z czystym odkształceniem od przemieszczeń wynikających z ruchu sztywnego uzyskuje się lepszą stabilność numeryczną rozwiązań. W pracach tej grupy materiał powłoki traktowano jako liniowo-sprężysty [7], hipersprężysty [8]

bądź też sprężysto-plastyczny [6, 7, 59], choć w tym ostatnim przypadku konkretne rozwiązania nie dotyczyły bezpośrednio powłok pneumatycznych.

Prócz trzech wymienionych grup warto tu też wspomnieć o programie NONSAP [10] przeznaczonym do dynamicznej i statycznej analizy różnych konstrukcji w zakresie geometrycznie i fizycznie nieliniowym, w tym także płaskich membran.

Porównanie diskutowanych tu grup przeprowadzono na przykładzie kilku prac reprezentujących aktualnie najbardziej zaawansowany stan wiedzy w dziedzinie teorii obliczania wiotkich powłok metodą elementów skończonych. Analiza tablicy 2, w której zestawiono dane porównawcze ukazuje równocześnie perspektywę dalszych prac badawczych co zaznaczono znakiem 0 na przykładzie pracy [8].

3.9. Przykłady rozwiązań. Dla zilustrowania aktualnych możliwości rozwiązywania problemów praktycznych metodą elementów skończonych podano niżej kilka reprezentatywnych przykładów zaczerpniętych z literatury. Aby łatwiej można było porównać skalę poszczególnych zadań korzystano tylko z dwóch źródeł [128, 80]. W pierwszej z tych prac obliczenia wykonywano na EMC CDC 6600; czas obliczeń podawany jest w sekundach

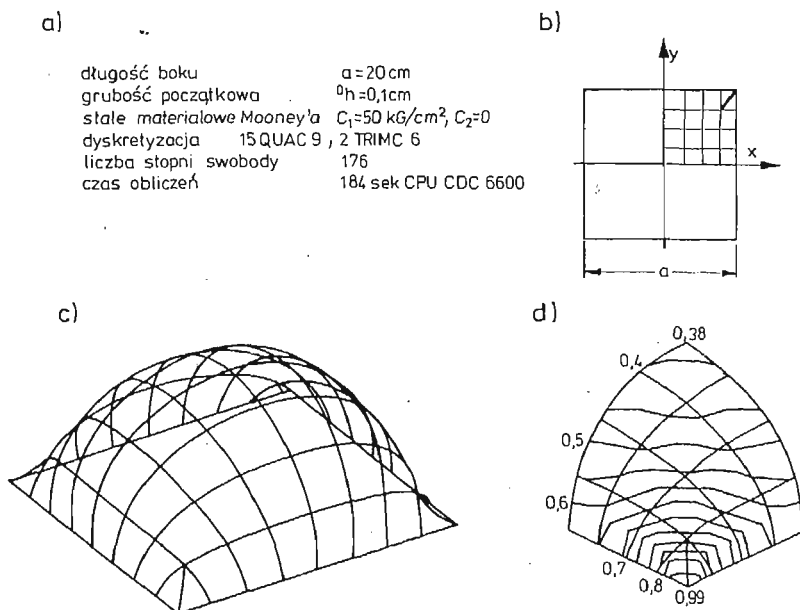


Rys. 4. Membrana kołowa obciążona równomiernym parciem gazu [128]: a) dane, b) dyskretyzacja, c) forma odkształcona

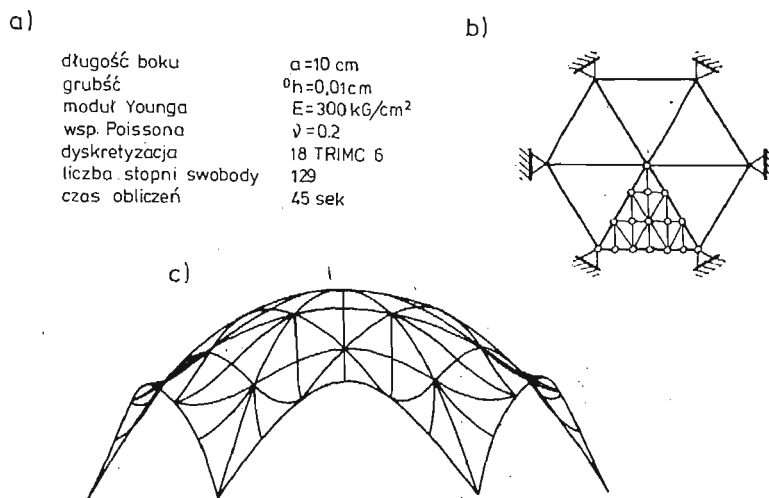
CPU. W czterech ostatnich przykładach wykorzystano prawo Hooke'a, zaś w dwóch pierwszych związek fizyczny (por. [42])

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$$

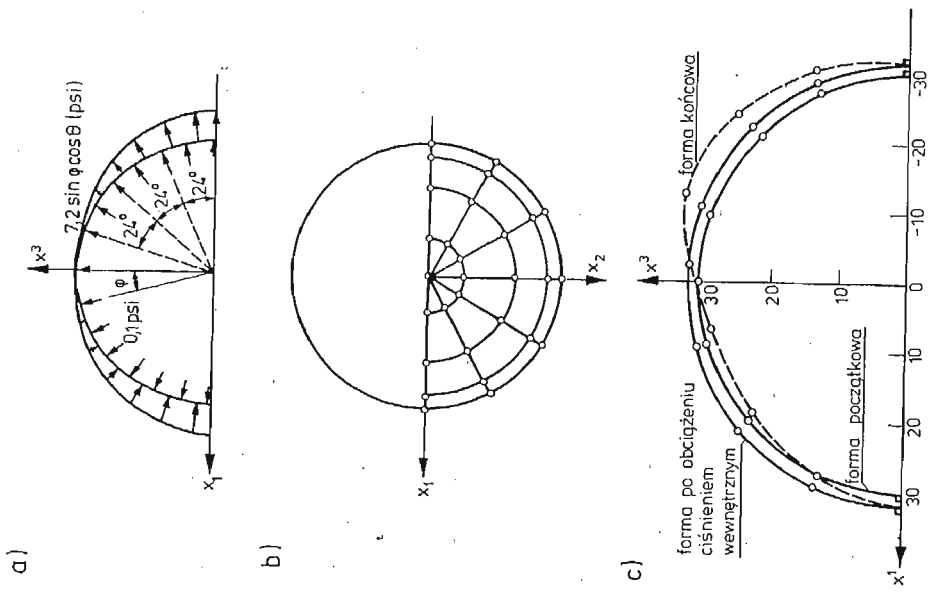
opisujący ciało hipersprężyste Moone'a-Rivlina. Gęstość energii odkształcenia wyraża



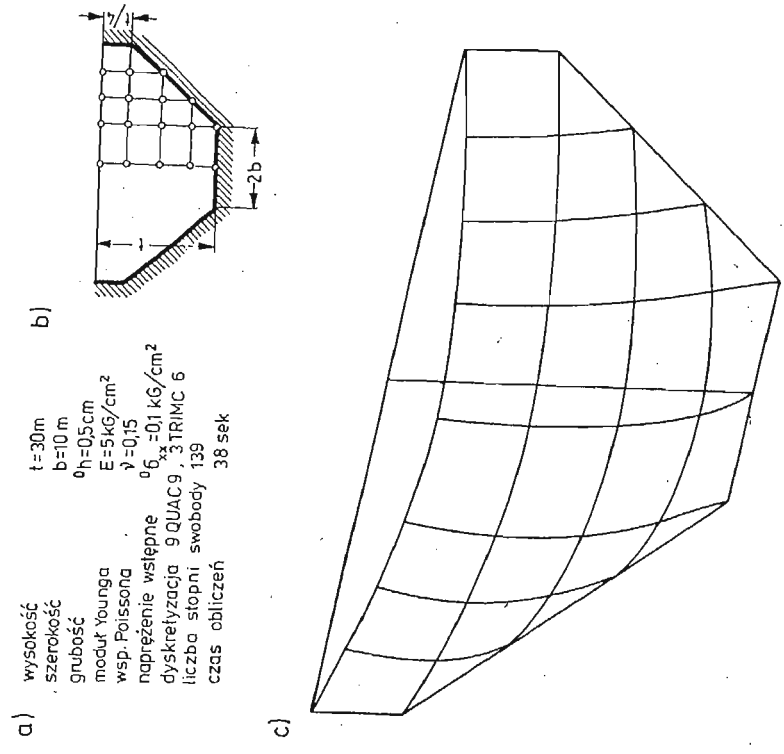
Rys. 5. Membrana kwadratowa obciążona parciem gazu [128]: a) dane, b) dyskretyzacja, c) forma odkształcona, d) grubość względna h/h_0 po odkształceniu



Rys. 6. Membrana sześciokątna obciążona ciężarem własnym [128]: a) dane, b) dyskretyzacja, c) forma po obciążeniu



Rys. 8. Kulista powłoka pneumatyczna obciążona parciem wiatru [80, 81]: a) obciążenie, b) dyskretyzacja, c) forma po obciążeniu — parciem wewnętrznym gazu - - - - wiatrem

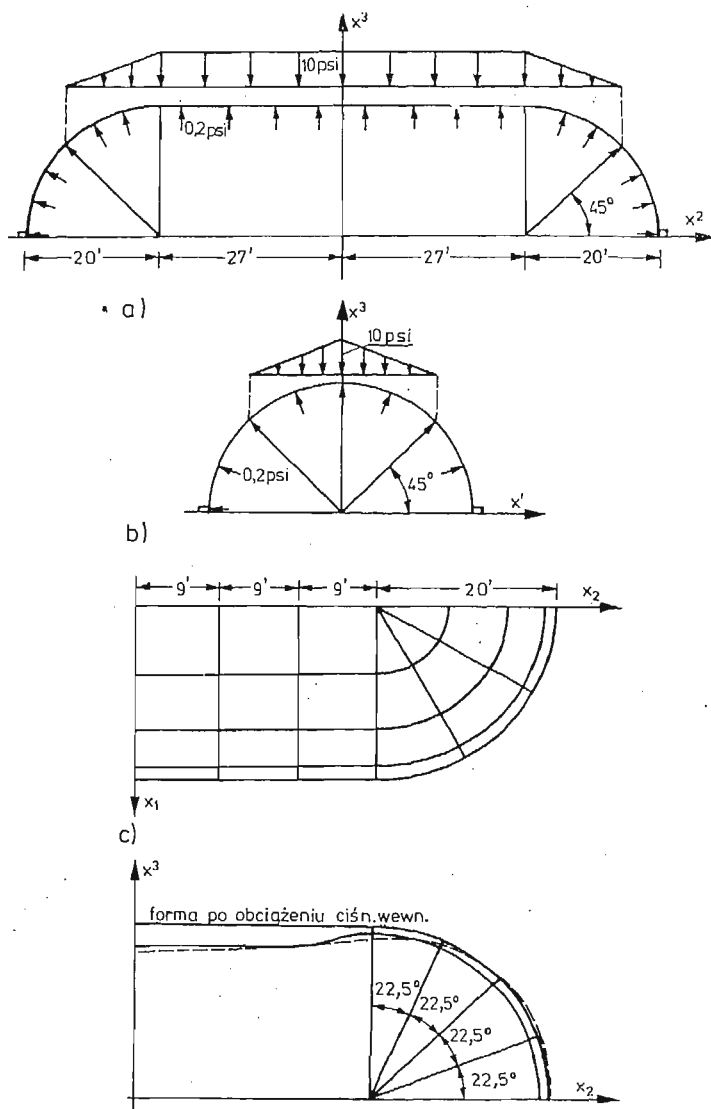


Rys. 7. Membrana obciążona parciem hydrostatycznym [128]: a) dane, b) dyskretyzacja, c) forma po obciążeniu

się tu poprzez niezmienniki stanu odkształcenia I_1, I_2 i zależy również od stałych materiałowych C_1 oraz C_2 .

Rozwiązane zostały następujące zadania szczegółowe:

- membrana kołowa obciążona równomiernym parciem gazu ([128] — rys. 4);
- membrana kwadratowa obciążona parciem gazu ([128] — rys. 5);
- membrana sześciokątna obciążona ciężarem własnym ([128] — rys. 6);
- membrana pięciokątna obciążona parciem hydrostatycznym ([128] — rys. 7);
- kulista powłoka pneumatyczna obciążona parciem wiatru ([80, 81] — rys. 8);
- powłoka pneumatyczna obciążona śniegiem ([80] — rys. 9).



Rys. 9. Powłoka pneumatyczna obciążona śniegiem [80]: a) obciążenie, b) dyskretyzacja, c) forma powłoki odkształconej

4. Uwagi końcowe

W pracy zebrano i krótko scharakteryzowano literaturę dotyczącą powłok pneumatycznych, która ukazała się w ostatnim dziesięcioleciu. Wyodrębniono w niej główne nurty (szkoły) związane z kilkoma wiodącymi ośrodkami i szkicowo przedstawiono metody obliczeniowe stosowane w teorii wiotkich powłok, ze szczególnym uwzględnieniem metody elementów skończonych.

Tablica 2. Zestawienie porównawcze reprezentatywnych prac poświęconych analizie wiotkich powłok metodą elementów skończonych

Grupa Praca		ODEN		LEONARD - Li			ARGYRIS	
		118	128	80	81	77	8	59
Opis	Eulera E			+			+	
	Lagrange'a TL	+	+			+	+	+
	waktualniony Lagrange'a UL			+	+		0	+
Metoda rozwiązania	iteracyjna	+	+	+(E)		+	+	+
	przyrostowa			+(UL)	+	+	+	+
Materiał (równania konstytutywne)	liniowa sprężysty	+	+	+	+		+	
	hipersprężysty	+	+			+	+	
	sprężysto - plastyczny	(+)					0	+
	lepkosprężysty	+					0	
	lepkoplastyczny						0	+
	izotropia	+	+	+	+	+	+	+
	anizotropia	+					+	
	efekty termiczne	+					0	
Elementy	najprostszy trójkatny	+	+				+	+
	wyższego rzędu			+	+	+	+	
Strefa	$\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 > 0$	+	+	+	+	+	+	+
	$\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 = 0$ (fatdy)						0	
Struktura	prosta: membrana	+	+	+		+		+
	złożona: membrana+kable				+		(+)	
Nieznana forma	końcowa	+	+	+(UL)	+	+	+	+
	początkowa			+(E)			0	
	statyka	+	+	+	+	+	+	+
	stateczność						0	
	dynamika	+					0	
	analiza	+	+	+	+	+	+	+
	optymalizacja						0	

Analiza przeprowadzona w niniejszej pracy pozwala na sformułowanie następujących ogólnych wniosków.

- Podstawowy zarys teorii wiotkich membran jest opracowany w przypadku materiałów hipersprężystych (por. [42, 115]). Dalszego rozwoju tej teorii można i oczekiwać przede wszystkim przy zastosowaniu nowych materiałów (nowe prawa konstytutywne).
- W świetle tej teorii poprawnie sformułowane zagadnienia dla powłok pneumatycznych są z reguły nieliniowe (geometrycznie) nawet w przypadku liniowych związków fizycznych.
- Efektywne rozwiązania dla powłok pneumatycznych można aktualnie uzyskać jedynie poprzez odpowiednią dyskretyzację problemu i stosowanie metod numerycznych. W zagadnieniach obrotowo-symetrycznych mogą to być różne metody bezpośredniego całkowania, natomiast w ogólnym przypadku zdecydowanie najbardziej skuteczna okazała się metoda elementów skończonych, która obecnie stanowi jedyne efektywne narzędzie rozwiązywania praktycznie dowolnych problemów teorii wiotkich powłok, chociaż jej potencjalne możliwości ciągle jeszcze nie zostały w pełni wykorzystane (por. tablica 2).
- Pomimo opracowania podstaw teoretycznych oraz pojawienia się skutecznej metody analizy problematyka wiotkich powłok ciągle jeszcze stanowi pole badań naukowych. Świadczą o tym choćby liczne prace naukowe jakie się ostatnio ukazują. Wśród nich w samych tylko latach siedemdziesiątych znaleźć można siedem rozpraw doktorskich [19, 34, 79, 124, 128, 145, 161]. Trzeba jednak nadmienić, że w świetle bezspornych sukcesów metody elementów skończonych w rozwiązywaniu różnych problemów dotyczących powłok pneumatycznych o dowolnym kształcie wiele z tych prac straciło rację bytu i w ogóle nie powinno się ukazać.

Perspektywy dalszych prac nad problematyką wiotkich powłok to przede wszystkim

- uwzględnienie nowych praw konstytutywnych w szczególności dla materiałów o własnościach reologicznych oraz wpływów termicznych;
 - opracowanie ścisłej teorii strefy fałdów ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$);
 - dalszy postęp w dziedzinie teoretycznego sformułowania problemów stateczności i dynamiki;
 - rozwiązywanie zagadnień specjalnych, np. kontaktowych (więzy jednostronne);
 - obliczanie złożonych struktur powłokowo-liniowych;
 - optymalizacja konstrukcji pneumatycznych;
 - dalszy rozwój metod obliczeniowych, w tym głównie:
 - = metody elementów skończonych (por. tablica 2) tak, aby można było przy jej pomocy efektywnie rozwiązywać wszystkie problemy wymienione wyżej;
 - = podjęcie szerszej próby wykorzystania na równi z metodą elementów także metody różnic skończonych, zwłaszcza w jej wersji opracowanej dla nieregularnych siatek węzłów; pierwsze prace w tym kierunku [56, 82] są nader zachęcające;
 - = pełniejsze opracowanie zagadnienia poszukiwania pierwotnej formy powłoki (por. [1, 80]);
 - prowadzenie różnorodnych prac doświadczalnych;
- Realizacja takiego programu prac jest w pełni realna, a jego wykonanie umożliwiłyby

efektywne rozwiązywanie rozmaitych skomplikowanych problemów inżynierskich, które ze swej strony zapewne stawiać będą przed teorią i metodami obliczeniowymi coraz to nowe zadania.

Literatura cytowana w tekście

1. TH. ANGELOPULOS; *Zur Formfindung und Dynamik von Vorgespannten Netzwerkkonstruktionen*, Ph. D. thesis, Univ. of Stuttgart, 1977.
2. С. А. АЛЕКСЕЕВ; *Основы общей теории мягких оболочек*, Расчет пространственных конструкций, Стройиздат., Москва, II, 1966.
3. С. А. АЛЕКСЕЕВ; *Задачи статики и динамики мягких оболочек*, ТВКТОП VI, 1966.
4. С. А. АЛЕКСЕЕВ, Ю. А. МАХАЛОВ; *Экспериментальное исследование модели пневмокаркасного сооружения в потоке воздуха*, Строит. Мех., 2, 1972, 9 - 11.
5. J. H. ARGYRIS, P. C. DUNNE; TH. ANGELOPULOS, B. BICHAT; *Large Natural Strains and Some Special Difficulties Due to Nonlinearity and Incompressibility in Finite Elements*, CM. AME, 4, 10 (1974), 219 - 278.
6. J. H. ARGYRIS, M. KLEIBER; *Finite Strain Elasto-Plasticity and Its „Natural” Discretized Formulations*, CM. AME, 11, 13 (1977), 215 - 247.
7. J. H. ARGYRIS, J. ST. DOLTSINIS, M. KLEIBER; *Incremental Formulation in Nonlinear Mechanics and Large Strain Elasto-Plasticity-Natural Approach Part II*, CM. AME, 2, 14 (1978), 259 - 294.
8. J. H. ARGYRIS, M. HAASE, J. ORKISZ; *Higher Order Simplex Elements for Large Strain Analysis of Membranes — Natural Approach*, Int. Conf. on Finite Elements in Nonlinear Mechanics, ISD Stuttgart, Aug. 1978.
9. Л. И. БАДАБУХ, В. И. УСУОКИН; *Приближенная теория мягких оболочек вращения*, ТВКТОП VIII, 1971.
10. K. J. BATHE, E. RAMM, E. L. WILSON; *Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis*, I J. NME, 1, 9 (1975), 353 - 386.
11. G. BERGER, E. MACHER; *Results of Wind Tunnel Tests of Some Pneumatic Structures*, Proc. ICPS I, 1967.
12. W. W. BIRD; *The Development of Pneumatic Structures, Past, Present and Future*, Proc ICPS I, 1967.
13. Р. Г. БОРСОВ; *О расчете мягкой цилиндрической оболочки закрепленной вдоль образующих*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 31 - 37.
14. D. L. BOYER, W. GUTKOWSKI; *Liquid Filled Membranes*, Int. J. Non-linear Mechanics, 5, 1970, 299 - 310.
15. Б. Л. БУЖИН; *Устойчивость сетчатой оболочки вращения нагруженной внутренним давлением*, ТВКТОП VIII, 1971, 249 - 254.
16. Z. BYCZAWSKI; *Large Deflections of the Elasto-Creeping Circular Membrane*, AMS, 3, 17 (1965), 427 - 439.
17. L. Y. CHEN, R. T. SHIELD; *The Stability of a Finitely Inflated Cylindrical Elastic Membrane under Axial Compression*, J. Elasticity, 3 - 4, 5 (1975), 363 - 377.
18. J. D. C. CRISP; L. J. HART-SMITH; *Multilobed Inflated Membranes: Their Stability under Finite Deformation*, ISS, 7, 7 (1971), 843 - 862.
19. D. E. DIETRICH; *Nonlinear Analysis of Arbitrary Hyperelastic Membrane Shells by the Finite Element Method*, Ph. D. thesis New York State Univ., Buffalo, 1973.
20. Б. И. ДРУЗЬ; *Колесания мягкой оболочки в потоке газа*, Строит. Мех., 3, 1969, 47 - 49.
21. Б. И. ДРУЗЬ; *О форме поперечного сечения воздухоопорной цилиндрической оболочки*, Строит. Мех., 4, 1973, 16 - 19.
22. В. В. ЕРМОЛОВ; *Деформации цилиндрической пневматической оболочки под действием ветровой нагрузки*, Строит. Мех., 6, 1969, 4 - 7.
23. В. В. ЕРМОЛОВ; *Симптозюм по пневматическим оболочкам*, Строит. Мех., 6, 1973, 74 - 76.

24. Л. А. ФАЛЕВСКАЯ, Л. А. МАТВЕЕВА; *К оценке деформированного состояния составных пневматических конструкций*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 59 - 66.
25. W. W. FENG, P. HUANG; *On the Inflation of Plane Nonlinear Membrane*, Trans. ASME, AM, Ser E, 41 (1974), 767 - 771.
26. W. W. FENG, P. HUANG; *On the General Contact Problem of an Inflated Nonlinear Plane Membrane*, ISS 4, 11 (1975), 437 - 449.
27. W. W. FENG, J. T. TIELKING; *Large Plane Deformations of Rectangular Elastic Sheets*, ZAMP, 6, 27 (1976), 781 - 789.
28. W. W. FENG, J. T. TIELKING, P. HUANG; *The Inflation and Contact Constraint of Rectangular Membrane*, Trans. ASME, AM (w druku).
29. W. W. FENG, W. H. YANG; *On the Contact Problem of an Inflated Spherical Nonlinear Membrane*, Trans. ASME, AM, Ser. E, 40 (1973), 209 - 214.
30. В. И. ФЕОДОСЬЕВ; *О формах равновесия сферической оболочки при внутреннем давлении*, Прикл. Мат. Мех., 32 (1968).
31. Ю. Ф. ФОКИН; *Устойчивость некоторых безмоментных оболочек при больших деформациях*, Проблемы устойчивости в строительной механике, Стройиздат., 1965.
32. H. O. FOSTER; *Very Large Deformations of Axially Symmetrical Membranes Made of Neo-Hookean Materials*, I J. ES, 1, 5 (1967).
33. S. FUCHIZAWA, H. TAKEYANA; *Study on The Bulge Forming of Thin-Walled Cylinder*, J. Jap. Soc. Prec. Eng., 8, 37 (1971).
34. Г. ГАСЯК; *Большие деформации тонких оболочек начальной цилиндрической формы*, Кандидатская диссерт. Инж. Строй. Инс., Куйбышева, Москва, 1977.
35. Г. ГАСЯК; *Несущая способность безмоментной оболочки начальной цилиндрической формы при больших деформациях*, Изв. вузов, Машиностроение, 7, 1977.
36. Г. А. ГЕНЕВ; *Расчет цилиндрических пневмооболочек на действие ветровых нагрузок с учетом больших перемещений*, Прочность и деформативность конструкций с применением пластмасс, Стройиздат, 1966.
37. P. G. GLOCKNER, T. VISHWANATH; *On the Analysis of Nonlinear Membranes* Dpt. CE Rpt, Univ. of Calgary, Alberta, Canada, Feb. 1971.
38. Г. И. ГОЛОВНЯ А. Г. МОЛЧАНОВ; *Определение вариационным методом формы равновесия мягкой оболочки имеющей начальную геометрию в виде правильного тетраэдра*, ТВКТОП, IX 1973, 40 - 42.
39. В. В. ГОНЧАРУК; *Цилиндрическая мягкая оболочка под действием давления горизонтальной нагрузки и момента* Тр. НКИ вып. 106, 1975 57 - 60.
40. А. А. ГОРЕШВИЛИ; *О формировании пневматических оболочек*, Исследования строительных конструкций сельскохозяйственных зданий и сооружений, вып. I, Стройиздат, 1967.
41. А. А. ГОРЕШВИЛИ, Л. И. ЯРИН; *Расчет на ветровую нагрузку воздухоопорного цилиндрического свода*, Строит. Мех., 2, 1971, 17 - 19.
42. A. E. GREEN, J. E. ADKINS; *Large Elastic Deformations*, Pergamon Press, Oxford, 1960.
43. А. С. ГРИГОРЬЕВ; *Об устойчивости безмоментных оболочек вращения в условиях растяжения*, МТТ, I, 1967.
44. A. S. GRIGORIEV; *Tensile Instability in Cases of Large Deformations*, Geophys. T. R. Astr. Soc., 14, 1967.
45. А. С. ГРИГОРЬЕВ; *О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях*, ТВКТОП VII, 1970, 779 - 787, МТТ, I, 1970.
46. А. С. ГРИГОРЬЕВ; *Большие деформации неоднородных осесимметрических оболочек*, ТВКТОП VIII, 1971.
47. А. С. ГРИГОРЬЕВ; *О теории больших деформаций тонких неоднородных оболочек*, Механика деформируемых тел и конструкций, Машиностроение, Москва, 1975.
48. L. J. HART-SMITH, J. D. C. CRISP; *Large Elastic Deformations of Thin Rubber Membranes*, I J. ES, 1, 5 (1967), 1 - 24.
49. E. HAUG, G. H. POWELL; *Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures*, SESM Rpt. No 72-7, Dept. of Civ. Engng, Univ. of California, Berkeley, 1972.

50. HELLAN KARE; *Finite Creep of Closed Membranes of Revolution*, Acta Polytechn. Scand. Mech. Eng., Ser. A, 57, 1971.
51. H. D. HIBBIT, P. V. MARCAL, J. R. RICE; *A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement*, ISS, 6 (1970), 1069 - 1086.
52. G. HERRIGMOE, P. G. BERGAN; *Incremental Variational Principles and Finite Element Models for Nonlinear Problems*, SM. AME, 7, 12 (1976), 201 - 217.
53. В. А. ИВОВИЧ; *Собственные колебания мягкой пневматической оболочки цилиндрической формы*, Строит. Мех., 2, 1976, 50 - 54.
54. M. VAN JAETHENAN Jr.; *Widerstandsfähigkeit biegeweicher Schalen*, Z. Bauplanung und Bautechnik, 9, 1969.
55. Я. Ф. КЛЮК; *Основные соотношения геометрически нелинейной теории мягких оболочек вращения*, Докл. АН УССР, 8, 1976А, 715 - 719.
56. R. KAO, N. PERRONE; *Large Deflections of Flat Arbitrary Membranes*, C and S, 4, 2 (1972), 535 - 546.
57. J. E. KEY; *On the Numerical Solution of Certain Problems in Finite Element Method*, IJ. NME, 2, 9 (1975), 483 - 487.
58. M. KLEIBER; *Lagrangian and Eulerian Finite Element Formulation for Large Strain Elasto-Plasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 23 (1975), 117 - 126.
59. M. KLEIBER; *Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych, teoria i numeryczna analiza konstrukcji*, Prace IPPT PAN, Warszawa, 1978.
60. Ю. Н. КОРОБАНОВ; *Мягкий тор под касательной нагрузкой и внутренним давлением*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 35 - 41.
61. Ю. М. КОРОБАНОВ; *Осесимметричная задача мягкой оболочки вращения в физически и геометрически нелинейной постановке*, ТВКТОП X, 1975, 456 - 464.
62. C. N. KOSTEM; *Optimum Shaped Pneumatic Roofs*, Symposium IASS, Kielce, 18 - 23 June 1973, 77 - 87.
63. В. Д. КУЛАГИН; *Некоторые вопросы общей теории одноосно напряженных мягких оболочек*, Строит. Мех., 3, 1970, 16 - 18.
64. В. Д. КУЛАГИН, В. Э. МАГУЛА; *К расчету мягких оболочек в зоне складчатости*, Сб. материалов 13 и 14 конкурсов, Дальиздат., 1968.
65. H. KUNIEDA; *Flutter og Hanging Roofs and Curved Membrane Roofs*, ISS, 4, 11 (1975), 477 - 492.
66. H. H. KUO; *Numerical Approach to Large Elastic Deformation of Axi-Symmetrical Membrane Problems*, Ph. D. thesis Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1969.
67. A. D. KYDONIEFS; *The Finite Inflation of an Elastic Toroidal Membrane*, IJ, ES., 6, 5 (1967).
68. A. D. KYDONIEFS, A. T. SPENCER; *The Finite Inflation of an Elastic Torus*, IJ. ES., 2, 3 (1965).
69. В. В. ЛЕВАНИДОВ; *Деформация мягкой сферической оболочки изготовленной из ортотропной пленки*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 80 - 87.
70. Э. Л. ЛЕГЛЕР; *Расчетное и экспериментальное исследование собственных колебаний мягкой цилиндрической оболочки. Экспериментальное исследование автоколебаний мягкой цилиндрической оболочки в потоке воздуха*, Тр. ЦАГИ, вып. 1253, 1970.
71. J. W. LEONARD; *Behaviour on Pressure Stabilized Inflatable Shells of Revolution*, Ph. D. thesis Univ. of Illinois, Urbana, III, (1966).
72. J. W. LEONARD; *Inflatable Shells: Pressurization Phase*, Proc. ASCE, EM2, Paper 5212, 93 (1967), 207 - 227.
73. J. W. LEONARD; *Inflatable Shells: In-Service Phase*, Proc. ASCE, EM6, Paper 5642, 93 (1967), 67 - 85.
74. J. W. LEONARD; *Inflatable Shells for Underwater Use*, Proc. Third Annular Offshore Technology Conf., Huoston, Texas, Apr. 1971.
75. J. W. LEONARD; *Use of Pressurized Membranes as a Low-Cost Erection Scheme for Concrete Structures*, Proc. Second Int. Symp. on Lower Cost Housing Problems Related to Urban Renewal and Development, Univ. of Missouri, Rolla, Mo., Apr. 1972.
76. J. W. LEONARD; C. T. LI; *Strongly Curved Finite Element for Shell Analysis*, Proc. ASCE, EM 3, 99 (1973), 515 - 535.
77. J. W. LEONARD, V. K. VERMA; *Double-curved Element for Mooney-Rivlin Membranes*, Proc. ASCE, EM4, 102 (1976), 625 - 641.

78. C. T. LI; *Analysis of Inflatable Shell by Finite Element Method*, Ph. D. dissertation, State Univ. of New York at Buffalo, 1973.
79. C. T. LI, J. W. LEONARD; *Non-linear Response of a General Inflatable Shell to In-service Loads*, IAASS Conference, Calgary, 1972.
80. C. T. LI, J. W. LEONARD; *Finite Element Analysis of Inflatable Shells*, Proc. ASCE, EM3, 99 (1973), 495 - 514.
81. C. T. LI, N. K. SRIVASTAVA; *Analysis of Pneumatic Shell with or without Cable Net; General Finite Element Formulation, Geometrical Nonlinear Behaviour of Cable-reinforced Inflatable Shells*, C and S, 4 (1974), 813 - 828.
82. T. LISZKA, J. ORKISZ; *Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Meshes in Non-linear Problems of Applied Mechanics*, Trans. of the 4th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, Aug. 1977.
83. А. М. ЛОКОЩЕНКО, С. А. ШЕСТЕРИКОВ; *Круглая вязко-упругая мембрана под действием равномерного давления*, МТТ, 5, 1967.
84. В. Э. МАГУЛА и др.; *Судовые мягкие емкости*, Судостроение, 1966.
85. В. Э. МАГУЛА; *К теории мягких цилиндрических оболочек, обладающих изгибной жесткостью*, Сообщения лаборатории мягких оболочек ДВВИМУ, вып. 3, Владивосток, 1968.
86. В. Э. МАГУЛА; *Сводка основных зависимостей теории мягких цилиндрических оболочек под гидростатической нагрузкой*, Научные тр. ДВВИМУ, вып. 5, Владивосток, 1968.
87. Э. В. МАГУЛА; *Базовые формулы для расчета мягких оболочек вращения в одноосном состоянии*, Сообщения лаборатории мягких оболочек ДВВИМУ, вып. 2, Владивосток, 1970.
88. Э. В. МАГУЛА; *Связь одноосного состояния с раскрытием мягкой оболочки*, ТВКТОП VII, 1970, 582 - 587.
89. В. Э. МАГУЛА; *Обобщенные формулы статики некоторых мягких оболочек*, Строит. Мех., 6, 1972, 33 - 35.
90. В. Э. МАГУЛА; *Общие закономерности складкообразования мягких оболочек*, Тр. НКИ, вып. 63, 1972.
91. В. Э. МАГУЛА; *К расчету гибкой цилиндрической оболочки*, Строит. Мех., 2, 1973, 26 - 29.
92. В. Э. МАГУЛА; *К теории мягких оболочек плоского раскрытия*, Тр. НКИ, вып. 92, 1974.
93. В. Э. МАГУЛА; *Сдвиг нагруженной давлением мягкой оболочки плоского раскрытия*, Тр. НКИ, вып. 92, 1974.
94. В. Э. МАГУЛА; *Сдвиг сетчатой оболочки, нагруженной нормальным давлением*, Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам, вып. 28, Владивосток, 1974.
95. В. Э. МАГУЛА; *О противоречии порождаемом гипотезной нерастяжимости мягких оболочек*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 3 - 13.
96. В. Э. МАГУЛА; *Принципы расчета мягких оболочек плоского раскрытия*, ТВКТОП X, т. I, 1975, 465 - 469.
97. В. Э. МАГУЛА; *Методические соображения о процедуре перехода от гибкой к абсолютно гибкой оболочке*, Тр. НКИ, вып. 116, 1976, 86 - 88.
98. В. Э. МАГУЛА, Б. И. ДРУЗЬ, В. Д. КУЛАГИН, Е. П. МИЛОСЛАВСКАЯ, М. В. НОВОСЕЛОВ; *Судовые мягкие емкости*, Судостроение, 1966.
99. В. Э. МАГУЛА, Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *К расчету мягкой цилиндрической оболочки с поперечными диафрагмами*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 44 - 48.
100. В. Э. МАГУЛА, А. Д. МОСКАЛЕНКО; *Статика гибких стенок под давлением несвязной сыпучей среды*, Строит. Мех., 4, 1970, 5 - 9.
101. В. Э. МАГУЛА, Ф. П. ШАВКИН; *Особенности нелинейных колебаний пневматических оболочек с грузом*, Строит. Мех., 2, 1971, 49 - 52.
102. Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *Цилиндрическая мягкая оболочка под действием давления и горизонтальной нагрузки*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 52 - 57.
103. Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *Влияние жесткой вставки на усилия в цилиндрической мягкой оболочке*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 48 - 52.
104. Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *К расчету вертикальной жесткости цилиндрической мягкой оболочки*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 54 - 58.

105. Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *К расчету мягкой цилиндрической оболочки с неравномерной по периметрии*, Тр. НКИ, вып. 116, 1976, 93 - 98.
106. В. А. МЕШКУРОВ; *Графоаналитический метод расчета воздухоопорного купола, усиленного ван-тами*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 67 - 73.
107. J. MERUER, J. FREMAN, A. ROSNA; *Large Deformations and Stresses of a Thin Highly Elastic, Toroidal Shell under Internal Pressure*, ISS, 8, 6 (1970), 1233 - 1241.
108. А. Г. МОЛЧАНОВ, С. П. ЧЕРНИКОВ; *О равновесии мягкой одноосной цилиндрической оболочки под действием осевых растягивающих усилий и внутреннего давления*, ТВКТОП, IX, 1973, 76 - 78.
109. В. А. НАУМОВ, Н. П. СТРЕКОЗОВ; *Исследование напряженного и деформированного состояния мягкого циланга, навитого на эсесткий барабан*, ТВКТОП, X, т. I, 1975, 478 - 481.
110. В. А. НАУМОВ, В. А. ТЕРЕЩЕНКО; *Расчет мягкой тороидальной оболочки при действии внутреннего давления и торцевых усилий нормальных к оси вращения*, Тр. Моск. высш. техн. уч-ща Н. Э. Баумана, 206, 1975, 103 - 106.
111. J. T. ODEN; *Analysis of Large Deformation of Elastic Membranes by the Finite Element Method*, Proc. IASS Congress on Large Span Shells, Leningrad, Sept. 1966.
112. J. T. ODEN; *Numerical Formulation of Nonlinear Elasticity Problems*, Proc. ASCE, EM, 93 (1967), 235 - 255.
113. J. T. ODEN; *Note on an Approximate Method for Computing Non-Conservative Generalized Forces on Finite of Deformed Finite Element*, AIAA J. 11, 8 (1970), 2088 - 2090.
114. J. T. ODEN; *Finite Deformation of Elastic Plates, Shells and Membranes by the Finite Element Method*, Proc. IASS Calgary, Alberta, Canada, July 1972, 63 - 89.
115. J. T. ODEN; *Finite Element of Non-linear Continua*, MC Graw-Hill, New York, 1972.
116. J. T. ODEN; *Some Results of Finite Element Applications in Finite Elasticity*, C and S, 1, 3 (1973), 175 - 194.
117. J. T. ODEN, J. E. KEY, R. B. FOST; *A Note on the Analysis of Nonlinear Dynamics of Elastic Membranes by the Finite Element Method*, C and S, 2, 4 (1974), 445 - 452.
118. J. T. ODEN, W. K. KUBITZA; *Numerical Analysis of Non-linear Pneumatic Structures*, Proc. ICPS I, 1967.
119. J. T. ODEN, T. SATO; *Finite Strains and Displacements of Elastic Membranes by the Finite Element Method*, ISS, 3 (1967), 471 - 488.
120. J. ORKISZ; *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materialu*, Politechnika Krakowska, Kraków, Zesz. Nauk. 11, (1967).
121. J. ORKISZ; *Finite Deformations of Flexible Axisymmetric Shells According to the Generalized Theory of Plastic Flow*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 9, 17 (1969), 437 - 444.
122. J. ORKISZ; *Finite Deformations of Flexible Inelastic Orthotropic Shells of Revolution*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 11 - 12, 17 (1969), 511 - 518.
123. J. ORKISZ; *Unsteady Creep of Rotationally Symmetric Pneumatic Shells in the Light of the Generalized Kelvin Model*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 6, 21 1973.
124. J. ORKISZ, J. WILK; *Numeryczne obliczanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 7 (1969), 179 - 193. *Numerical Procedure for Slender Axisymmetric Shells Subjected to Plastic Flow in the Range of Large Deformations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1, 18 (1970), 29 - 37.
125. F. OTTO; *Pneumatic Structures*, The MIT Press, Cambridge, Mass., USA, 1967.
126. F. OTTO, R. TROSTEL; *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ullstein Fachverlag, Frankfurt - Berlin, 1962.
127. С. В. ПАНОВ; *Локальное нагружение мягкой оболочки вращения*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 38 - 45.
128. H. PARISCH; *Zur Berechnung von Membranschalen unter Endlicher Deformation mit der Methode der Finiten Elemente*, Doctoral Thesis, Univ. Stuttgart, 1977.
129. Б. Л. ПЕЛЕХ; *Некоторые контактные задачи для мягких оболочек из высокоэластичных материалов*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 24 - 30.
130. С. М. ПЕВЗNER; *Взаимодействие грунта и мягкой оболочки в подпорном сооружении*, Сообщения лаборатории мягких оболочек ДВВИМУ, вып. 3, Владивосток, 1968.

131. Ю. Н. Подладчиков, И. И. Федик; *Исследование форм равновесия тласселых жидкостных оболочек вращения*, ТВКТОП VII, 1970, 479 - 485.
132. Л. Н. Покровский; *Динамика гибких пологих оболочек обтекаемых потоком жидкости*, ТВКТОП IX, 1973, 215 - 218.
133. *Proceedings of the 1 st International Colloquium on Pneumatic Structures*, Stuttgart, 1967 (Proc. ICPS I).
134. *Proceedings of the 2nd International Colloquium on Pneumatic Structures*, Delft, Sept. 1972.
135. E. W. ROSS; *Large Deflections of an Inflated Cylindrical Tent*, Trans. ASME, AM, ser. E, 4, 36 (1969), 845 - 851.
136. *Сборник 5-й Дальневосточн семинара по мягким оболочкам*, Владивосток, 1976 (Сб. 5-й ДСМО).
137. A. SIEV; *Experimental Study of Flutter in Suspension Roofs*, Bull. IASS, 23, 3 (1965).
138. Л. М. СИГНАТУЛИНА; *Большие деформации безмоментных конических оболочек вращения*, ВНИЭКИ-ПРОДМАШ, Тр. Института 37, Москва, 1974.
139. Ю. И. СОЛОДИЛОВ; *Несущая способность и выбор оптимальной кривизны пневматических сферических оболочек*, Строит. Мех., 2, 1969, 33 - 36.
140. Ю. И. СОЛОДИЛОВ; *Расчет оптимальных параметров пневматической сферической оболочки по критерию несущей способности*, ТВКТОП VII, 1970, 562 - 567.
141. Ю. И. СОЛОДИЛОВ; *О расчете пневматических линзообразных оболочек при больших деформациях*, Строит. Мех., 3, 1971, 64 - 66.
142. Н. П. СТРЕКОЗОВ; *Равновесие мягкой сферической оболочки при осесимметричных нагрузках*, МТТ, 2, 1969.
143. Н. П. СТРЕКОЗОВ; *Некоторые вопросы осесимметричных формоизменений мягких оболочек*, ТВКТОП VIII, 1971, 342 - 344.
144. Н. И. СТРЕКОЗОВ, В. И. ЖАРЧЕНКО; *Равновесие мягкой сферической оболочки при воздействии воздушного потока*, ТВКТОП VII, 1970, 565 - 000.
145. Y. S. SUN; *Large Elastic Deformations of an Anisotropic Inflatable Membrane of Revolution*, Ph. D. thesis, Georgia Inst. Techn., Atlanta, 1972.
146. Л. М. ШАРШУКОВА; *Критерий прочности двухслойных мембранных оболочек вращения*, Сообщение лаборатории мягких оболочек ЦБНИИММФ СССР, вып. 5, Владивосток, 1969.
147. Л. М. ШАРШУКОВА; *Расчет нелинейноупругих тонкостенных оболочек вращения при больших деформациях и перемещениях*, Кандидатская диссерт., Москва, 1969.
148. Л. М. ШАРШУКОВА; *К расчету двухслойных оболочек вращения при больших деформациях*, ТВКТОП VII, 1970, 691 - 694.
149. A. TARCZEWSKI; *Konstrukcje pneumatyczne*, Wyd. NOT, Warszawa, 1965.
150. В. А. ТЕРЕЩЕНКО; *Алгоритм численного решения задач статики мягких оболочек*, Тр. Моск. высш. техн. уч-ща Н. Э. Баумана, 241, 1977.
151. Л. Н. ТЕР-МКРТИЧЬЯН; *Равновесие абсолютно гибкой оболочки, окантованной по краям гибкими нитями*, ТВКТОП IX, 1973, 296 - 299.
152. Л. Н. ТЕР-МКРТИЧЬЯН; *К расчету гибких осесимметричных оболочек при больших перемещениях*, Строит. Мех., 5, 1976, 9 - 11.
153. Л. Н. ТЕР-МКРТИЧЬЯН; *Уравнение состояния мягких оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности*, Сб. Вопр. резания надежности и долговечн. деревореп. инструментов и машин, вып. 4, 1977, 80 - 85.
154. J. T. TIELKING, W. W. FENG; *The Application of the Minimum Potential Energy Principle to Non-linear Axisymmetric Membrane Problems*, Trans. ASME, AM, Ser. E, 2, 41 (1974), 491 - 497.
155. В. М. ТРУЩИНА; *Большие деформации круглой мембраны из пластического неоднородного материала*, ТВКТОП VIII, 1971.
156. В. М. ТРУЩИНА; *Большие деформации и несущая способность оболочки начальной цилиндрической формы*, МТТ, 5, 1971.
157. В. М. ТРУЩИНА; *О теории больших деформаций однородных и неоднородных оболочек вращения и ее приложения к некоторым задачам прочности и технологии*, Кандидатская диссерт., Москва 1971.

158. C. E. S. UENG, Y. S. SUN; *Large Elastic Deformation of an Inflatable Membrane of Revolution*, AIAA J., 6, 12 (1974), 761 - 766.
159. В. И. Усюкин; *Расчет мембранных оболочек при малом параметре нагрузки методом прогонки*, ТВКТОП VII, 1970, 582 - 587.
160. В. И. Усюкин; *Численный анализ мягких оболочек вращения с произвольной геометрией меридиана при несимметричной деформации*, ТВКТОП IX, 1973, 92 - 93.
161. V. K. VERMA; *Finite Element Analysis of Nonlinear Cable Reinforced Membrane*, Ph. D. thesis, Illinois Inst. Techn., Chicago, 1974.
162. T. VISHWANATH, P. G. GLOCKNER; *On the Nonlinear Membrane Displacement Problem*, Dpt CE Rpt, Univ. of Calgary, Alberta, Canada, Feb. 1971.
163. A. S. WINEMAN; *Large Axisymmetric Deformation of a Nonlinear Viscoelastic Membrane Due to Spinning*, Trans. ASME, AM, 39 (1972), 848 - 851.
164. A. S. WINEMAN; *Large Axially Symmetric Stretching of a Nonlinear Viscoelastic Membrane*, ISS, 8 (1972), 775 - 780.
165. A. S. WINEMAN; *Bifurcation of Response of a Nonlinear Viscoelastic Spherical Membrane*, ISS, 3, 14 (1978), 197 - 212.
166. L. S. YANG, W. W. FENG; *On Axisymmetrical Deformations of Non-linear Membranes*, Trans. ASME, AM, Dec. 1970, 1102 - 1011.
167. W. H. YANG, K. H. HSU; *Indentation of a Circular Membrane*, Trans. ASME, AM, Ser. E, 38 (1971), 227 - 230.
168. W. H. YANG, C. H. LU; *General Deformations of Neo-Hookean Membranes*, Trans. ASME, AM, Ser. E, 40 (1973), 9 - 12.
169. В. В. Зайцев; *Расчет цилиндрической мягкой оболочки на продольные касательные нагрузки*, Тр. НКИ, вып. 92, 1974.
170. В. В. Зайцев; *Методы расчета цилиндрических мягких оболочек на продольные касательные нагрузки*, ТВКТОП X, т. I, 1975, 414 - 423.
171. О. Г. Затворницкий; *К расчету мягких наливных оболочек*, Строит. Мех., 1, 1970, 18 - 20.
172. П. А. Зиновьев, В. А. Терещенко; *Мягкие равнонапряженные оболочки*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 74 - 79.
173. A. M. BINNIE; *Air-generated Waves on a Moving Membrane*, J. Mech. Eng. Sci., 3, 12 (1970).
174. J. BUJAK, A. ŻÓRAWSKI; *Problemy dynamiczne płaskiego przekrycia wiszącego*, Arch. Inż. Łąd., 17, 4, 1971.
175. H. M. IRVINE; *The Linear Theory of Free Vibrations of Suspended Membranes*, Proc. R. Soc. Lond. A. 350, 1976.
176. V. J. MEYERS; *Pneumatically Formed Sandwich Shell Roof Structures*, Proc. ASCE, St. 3, 104 (1978), 381 - 389.
177. R. SYGULSKI; *Problemy drgań niektórych typów przekryć cieżgowych w opływie powietrza*, Praca doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań 1978.
178. E. TRINKL, V. P. SCHNABEL; *Olympiadächer in Windkanal*, Die Bautechnik 1, 1972.
179. В. И. Усюкин; *Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек*, МТТ, 1, 1976, 70 - 75.
180. В. И. Усюкин, В. А. Терещенко, А. Н. Сдобников, С. В. Панов, Р. Г. Борсов; *Расчет пневматических строительных конструкций с использованием ЭВМ*, Доклады Международной конф. ИАСС, Алма-Ата, 1977, Строиз., Москва, 1977, 146 - 151.

Wykaz ważniejszych skrótów użytych w spisie literatury

AIAA J.	— Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics.
C and S	— Computer and Structures.
Proc. ASCE, ST	— Proc. of ASCE, Journal of Structural Division.
Proc. ASCE, EM	— Proc. of ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division.

- Trans. ASME, AM — Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics.
 IJ. NME — International Journal for Numerical Methods in Engineering.
 ISS — International Journal of Solids and Structures.
 IJ. ES — International Journal of Engineering Science.
 CM. AME — Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
 Proc. ICPS — Proc. of International Colloquium on Pneumatic Structures.
 Строит. Мех. — Строительная механика и расчет сооружений.
 Тр. НКИ — Труды Николаевского кораблестроительного института.
 МТТ — Механика твердого тела.
 Прикл. Мат. Мех. — Прикладная математика и механика.
 Сб. 5-й ДСМО — Сборник 5-й Дальневост семин. по мягким оболочкам.
 ТВКТОП — Труды Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок:
 — VI Баку, 1966, Изд. Наука, Москва 1966;
 VII Днепропетровск, 1969, Изд. Наука, Москва 1970;
 VIII Ростов-на-Дону, 1971, Изд. Наука, Москва 1973;
 IX Ленинград, 1973, Изд. Судостр., Ленинград 1975;
 X Кутаиси, 1975, Изд. Мецниереба, Тбилиси, 1975.

Резюме

ПНЕВМАТИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

В настоящей работе сделан критический обзор работ по различным вопросам пневматических оболочек (теория, методы решений, решения) напечатанных за последних десять лет. Специальное внимание обращено к формулировке теории мягких оболочек с точки зрения метода конечных элементов. Излагается общая характеристика проблемы. Указано также в каком направлении развиваются вопросы механики пневмооболочек и численные методы их решения. Кроме этого показаны примеры конкретных решений типичных задач.

Summary

PNEUMATIC STRUCTURES

A critical review of numerous papers published in the last ten years on various aspects of the theory of pneumatics structures (mechanics, calculation methods, solutions) is presented. Special attention has been paid to the Finite Element formulation of the theory of membrane shells. A brief, general characteristics of the problem is given and current directions of the development of the theory and solution methods are discussed. Moreover some examples of numerical solutions representative for the contemporary state of art are presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1979 roku

NIELINIOWA, STATYCZNA I DYNAMICZNA ANALIZA POWŁOK METODĄ
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH¹⁾

MICHAŁ KLEIBER (WARSZAWA)

1. Uwagi wstępne

W wyniku znacznego w ostatnim dziesięcioleciu rozwoju metody elementów skończonych stało się obecnie możliwe uzyskiwanie zadawalających projektanta (tj. dostatecznie dokładnych) rozwiązań nawet dla trudnych zagadnień brzegowych w zakresie liniowej statyki powłok. Postępujące udoskonalenia odpowiednich programów obliczeniowych uczyniły z rozwiązywania prawie wszystkich zagadnień dotyczących liniowej teorii powłok standardową czynność, stosunkową prostą do bezpośredniego i natychmiastowego wykonania. Pomimo, iż dla pewnej klasy zagadnień (jak np. obciążenia skupione, koncentracja naprężeń, nieciągłe warunki brzegowe) problemy wyboru typu elementu czy też sposobu dyskretyzacji konstrukcji wymagają dalszych studiów i ulepszeń, można w zasadzie stwierdzić, że istniejące procedury numeryczne pozwalają na obliczanie w ekonomicznie uzasadniony sposób liniowo-sprężystych powłok z dostateczną dla celów praktycznych dokładnością.

W dziedzinie obliczeń konstrukcji powłokowych pracujących (lub przewidzianych do pracy np. w warunkach awaryjnych) w zakresie geometrycznie i materiałowo nieliniowym sytuacja jest daleko bardziej skomplikowana.²⁾ Niezwykła zawiłość analityczna (czy nawet, niekiedy, pojęciowa) zagadnień takich jak: redystrybucje naprężeń wynikające z lokalnych uplastycznień materiału, lokalne odciążenia w obszarach uprzednio uplastycznionych, różne rodzaje utraty stateczności czy wzajemny wpływ na siebie (sprężenie) obu przyczyn nieliniowości (nieliniowej charakterystyki materiału i dużych przemieszczeń) były powodem, że dotychczas podejmowano tylko niewiele prób pełnego, nieliniowego opisu zachowania się powłok. W szczególności rozwiązanie zagadnień utraty stateczności nie jest, i nie może być, proste i natychmiastowe. Podejście do badania stateczności konstrukcji różni się bowiem od przypadku do przypadku i nie jest możliwe zbudowanie jednego programu zdolnego do przeanalizowania wszystkich problemów związanych z poszukiwaniem osobliwości w rozwiązaniach dla powłok o dowolnym kształcie. Jeśli chodzi o problematykę plastyczności to największe kłopoty sprawia tu wybór odpowiednich elementów skończonych zdolnych do zadawalającego opisu rozprzestrzeniania się stref uplastycznionych zarówno wzdłuż powierzchni jak i po grubości powłoki.

¹⁾ Uwagi w oparciu o doświadczenia uzyskane przy opracowywaniu programów SHELAX, SHELIN, SHENON, LARSTRAN, DYNAX.

²⁾ Szerokie omówienie różnych sytuacji praktycznych, wymagających obliczenia konstrukcji powłokowych w oparciu o teorie nieliniowe przedstawiono w [1].

Aby więc podjąć trud dokładnej, nieliniowej analizy powłoki potrzeba uprzednio dobrze zrozumieć i przewidzieć różne skomplikowane zjawiska zachodzące w konstrukcjach powłokowych i stosownie do tego zdecydować się na taką lub inną technikę numeryczną. Nawet dysponując gotowym programem nieliniowej analizy powłok użytkownik będzie musiał podejmować decyzje dotyczące uwzględniania jednych i pomijania innych efektów nieliniowych w toku konkretnych obliczeń numerycznych. Uwzględnienie wszystkich przyczyn ewentualnego nieliniowego zachowania się powłoki powodować będzie bowiem prawie zawsze olbrzymie komplikacje numeryczne (konieczność szerokiego korzystania z pamięci zewnętrznych maszyny cyfrowej, kłopoty ze zbieżnością procedur iteracyjnych, ewentualna konieczność pracy z wykorzystaniem podwójnej precyzji, wielokrotne zwiększenie się kosztu obliczeń).

Z rozważań powyższych wynika pierwsza ogólna konkluzja (następne podamy w dalszym toku pracy):

Stosując metody numeryczne w nieliniowych zagadnieniach powłok szczególną uwagę przypisać należy gruntownemu zrozumieniu fizycznych podstaw odnośnej problematyki. Znaczące wyniki i ich odpowiednią interpretację uzyskać można wyłącznie w oparciu o taką wiedzę.

W szczególności godne polecenia wydaje się przestudiowanie przed przystąpieniem do konkretnych obliczeń istniejących rozwiązań analitycznych i numerycznych dotyczących utraty stateczności i zachowania pokrytycznego różnych prostych konstrukcji sprężystych i niesprężystych takich jak kolumny, układy prętów, prostsze przypadki płyt.

2. Podstawy nieliniowej analizy powłok

Elementy skończone stosowane dotychczas do analizy powłok podzielić można na pięć zasadniczych grup:

- a) elementy płaskie, otrzymywane na drodze prostej superpozycji elementów tarczowych i płytowych,
- b) elementy zakrzywione, otrzymywane na bazie różnych teorii powłok (najczęściej na bazie teorii cienkich powłok mało wyniosłych),
- c) trójwymiarowe elementy izoparametryczne, dla których wprowadzono w dyskretyzowanej postaci pewne założenia teorii powłok,
- d) „nieformalne” elementy oparte na tzw. metodzie „physical lumping”,
- e) elementy do analizy zagadnień specjalnych, wśród których największą grupę stanowią elementy do analizy zagadnień o osiowosymetrycznej geometrii z osiowo- lub nieosiowosymetrycznym obciążeniem.

Żadna z wymienionych wyżej grup elementów (a) - (d) nie została w praktyce uznana za zdecydowanie lepszą od pozostałych. Elementy „dokładniejsze” dają lepsze wyniki kosztem dużego nakładu pracy przy opracowywaniu danych wejściowych, skomplikowania algorytmów numerycznych oraz trudności z interpretacją wyników. Stosowanie elementów prostszych (np. płaskich) usuwa wprawdzie większość z tych trudności, powoduje jednakże różne komplikacje szczególnie przy opisie powłok silnie zakrzywionych oraz w zagadnieniach wrażliwych na imperfekcje geometrii. W ogólności stwierdzić należy, że:

W obecnej fazie rozwoju metody elementów skończonych wydaje się celowe budowanie programów w oparciu o wszystkie wymienione wyżej rodzaje elementów. Ostateczna decyzja co do ich użycia w konkretnym zagadnieniu spoczywać powinna w ręku użytkownika i zapadać w oparciu o zwiększającą się stale liczbę testów i porównań publikowanych w literaturze światowej.

Różne rodzaje elementów wykorzystanych w programach opracowanych w IPPT omówimy w rozdz. 4, próbując scharakteryzować szerzej ich wady i zalety. Przedtem jednak przedstawimy pewne podstawowe aspekty nieliniowego opisu powłok obowiązujące niezależnie od rodzaju zastosowanego elementu.

Formułując problemy z zakresu nieliniowej mechaniki powłok stosujemy zazwyczaj przyrostowy opis zagadnień, brzegowo-początkowych. Dla materiałów sprężystych analizowanych w zakresie geometrycznie nieliniowym opis taki jest jedynie jednym z możliwych podejść do rozwiązywania zagadnień brzegowo-początkowych podczas gdy dla materiałów charakteryzowanych przyrostowym równaniem konstytutywnym jest on koniecznością.

Celem naszym będzie określenie położenia analizowanego ciała \mathcal{B} i istniejącego w tym ciele stanu naprężenia w kolejnych, dyskretnych chwilach czasu $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots$ gdzie Δt jest przyrostem czasu zaś t_0 początkową chwilą analizy. Zakładać będziemy, że znamy pewne rozwiązanie dla wszystkich kroków po czasie z przedziału $[t_0, t]$ (włącznie z chwilą t , którą nazywać będziemy chwilą aktualną), poszukiwać zaś będziemy rozwiązania w chwili $t + \Delta t$. Sformułowany w ten sposób problem jest problemem typowym (powtarzalnym) i zastosowany do kolejnych chwil czasu umożliwia znalezienie całej drogi położenia równowagi ciała.

Istotną rolę przy ocenie efektywności numerycznej, geometrycznie nieliniowej analizie powłok odgrywają układy współrzędnych, w których wyrażane są poszczególne równania teorii. W zagadnieniach geometrycznie liniowych bezdyskusyjny jest wybór nieruchomego układu odniesienia. Wykorzystywane w standardowych algorytmach metody elementów skończonych lokalne (dla każdego elementu), ale stałe w czasie układy współrzędnych służą jedynie wygodzie algebraicznych przekształceń na poziomie elementu i nie są warunkowane kinematyką procesu deformacji. Odmienną sytuację napotykamy w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych, w których duże przemieszczenia w naturalny sposób podsuwają jeden z dwu następujących lokalnych (dla każdego elementu) opisów:

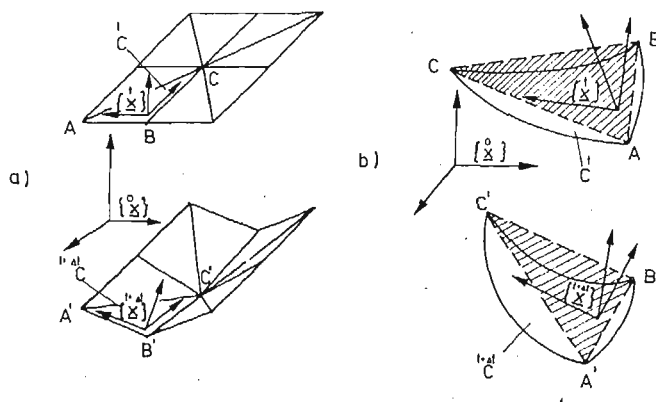
- a) opis w stałym układzie początkowym,
- b) opis w układzie konwekcyjnym (lub w układzie będącym jego modyfikacją, np. w układzie współobrotowym).

Aby to bliżej wyjaśnić rozpatrzmy duże przemieszczenia płaskiego elementu powłokowego pokazane na rys. 1a. Stwierdzamy, że aby w pełni zachować korzyści płynące z dwuwymiarowości opisu tych elementów możemy:

- a) sprowadzić wszystkie rozważania do konfiguracji pierwotnej ${}^{\circ}C$ (stałego w czasie układu współrzędnych początkowych), w której elementy zachowują swój pierwotny kształt,
- b) wprowadzić konwekcyjny układ współrzędnych; ze względów rachunkowych wygodnie jest ograniczyć się do układów zachowujących swą ortogonalność i prostoliniowość, a więc to tzw. układów współobrotowych.

Podejście (a) nazywać będziemy stacjonarnym opisem Lagrange'a zaś podejście (b) uaktualnionym opisem Lagrange'a.

Rozważania powyższe są przekonywujące w przypadku przedstawionego na rys. 1a najprostszego, płaskiego elementu powłokowego. Jednakże, jak się okazuje, również dla elementów zakrzywionych wygodnie jest mieć ortogonalny układ współrzędnych



Rys. 1

prostoliniowych związany z elementem w sposób pokazany na rys. 1b, przy czym należy oczywiście odpowiednio zdefiniować, co rozumie się pod słowem „współobrotowy”. Obroty różnych cząstek elementu są bowiem różne i należy wybrać pewien uśredniony, „globalny” obrót elementu, definiowany najwygodniej przez ruch węzłów.

Omawiany układ współrzędnych lokalnych jest oczywiście tylko jednym z kilku układów współrzędnych, które wprowadzić należy analizując konstrukcje powłokowe. W szczególności zawsze wprowadzić musimy:

- stały w czasie globalny układ współrzędnych traktowany jako układ odniesienia przy definiowaniu danych wejściowych,
- wspólny dla wszystkich elementów układ współrzędnych umożliwiający „złożenie” konstrukcji w całość.

Przykłady definiowania wszystkich wymienionych wyżej układów współrzędnych podamy w rozdz. 4. Na podstawie powyższych uwag stwierdzamy, że:

Przystępując do opracowywania programu nieliniowej analizy powłok należy zawsze dokonać świadomego wyboru konfiguracji odniesienia i odpowiednich układów współrzędnych kierując się przy tym:

- wygoda (kosztem) obliczeń,
- fizycznym charakterem równań (np. postulatem przestrzennej addytywności miar odkształceń sprężystych i plastycznych).

We wszystkich omawianych programach za podstawę przyjęto klasyczną teorię powłok Love'a-Kirchhoffa oraz klasyczne sformułowanie teorii sprężysto-plastyczności Prandtl-Reussa z izotropowym wzmocnieniem. Do opisu kinematyki procesu deformacji stosowano uaktualniany opis Lagrange'a wykorzystując współobrotowy, lokalny układ współrzędnych kartezjańskich. Konsekwencją tego podejścia było postulowanie równania

konstytutywnego w postaci związku między II-im tensorem przyrostu naprężenia Pioli-Kirchhoffa odniesionym do aktualnej konfiguracji ciała a przyrostem odkształcenia Greena zdefiniowanym na tej konfiguracji.²⁾ Takie definicje podstawowych niewiadomych wymagały przeprowadzania odpowiedniego procesu akumulacji poszczególnych wielkości przyrostowych oraz transformacji wielkości globalnych przy końcu każdego kroku, por. [2], [3].

Określenie macierzy konstytutywnej łączącej przyrosty uogólnionych naprężeń (tj. sił wewnętrznych) z przyrostami uogólnionych odkształceń (tj. odkształceń i krzywizn powierzchni środkowej powłoki) wymagało, odmiennie niż to jest w przypadku sprężystym, stosowania metod całkowania numerycznego. Spowodowane to jest skomplikowanym, nieliniowym charakterem rozkładu naprężeń po grubości powłoki i zależnością macierzy konstytutywnej materiału od aktualnego stanu naprężenia. Ponieważ w przekrojach, w których dominującym typem deformacji jest zginanie sztywność materiału konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym zmienia się po grubości bardzo znacznie, powodowało to konieczność uwzględniania w trakcie procesu całkowania numerycznego dużej liczby punktów całkowania (10, 12 i więcej punktów). W opracowywanych programach przyjęto prosty sposób całkowania numerycznego po grubości powłoki mający fizyczną interpretację w postaci analizy powłoki podzielonej na warstwy.

Aby zapewnić zbieżność ciągów rozwiązań przybliżonych otrzymywanych w oparciu o metodę elementów skończonych do rozwiązania dokładnego funkcje aproksymujące stan przemieszczenia spełniać muszą trzy zasadnicze warunki:

1. dostateczną gładkość poprzez brzegi międzyelementowe,
2. możliwość modelowania jednorodnych stanów odkształcenia,
3. wytwarzanie zerowych odkształceń przy sztywnych ruchach elementów.

Warunki te są identyczne jak w analizie liniowej. Uwagi dotyczące ich spełnienia przez różne elementy zamieścimy w trakcie omawiania poszczególnych, zrealizowanych programów.

Następną uwagę poświęcimy istotnej sprawie „składania” płaskich elementów powłokowych ze sobą w celu utworzenia podstawowego układu równań konstrukcji. Jako wspólny układ współrzędnych służący temu celowi przyjmuje się zazwyczaj:

- a) globalny układ współrzędnych kartezjańskich,
- b) układ współrzędnych krzywoliniowych na powierzchni środkowej powłoki, przy czym przeważnie układ ten definiowany jest poprzez płaszczyzny styczne do powłoki przyjmowane jako pewne uśrednione płaszczyzny sąsiadujących ze sobą elementów.

Jak podkreślaliśmy poprzednio, poszczególnym węzłom konstrukcji powłokowej przypisuje się zazwyczaj pięć stopni swobody, w taki sposób, że węzły te nie mają sztywności względem obrotu wokół normalnej do powłoki. Aby „złożyć” płaskie elementy powłokowe ze sobą w globalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych, którego orientacja przestrzenna może być znacznie różna od orientacji układów lokalnych w elementach, często konieczne jest wzięcie pod uwagę wszystkich sześciu stopni swobody węzła. Spowodowane jest to koniecznością posiadania nieosobliwej transformacji od układu lokalnego

²⁾ Definicje tych wielkości, a także uzasadnienie konieczności ich użycia przy uaktualnionym opisie Lagrange'a podano w pracy [2].

do układu globalnego w przypadku koplanarności elementów sąsiadujących z danym węzłem. W praktyce dokonuje się tej ransformacji przypisując rozpatrywanemu węzłowi pewną fikcyjną sztywność względem obrotu wokół normalnej, stwierdzono bowiem na drodze numerycznych doświadczeń zadawalającą zgodność wyników otrzymywanych nawet dla znacznie różniących się od siebie wartości tej fikcyjnej sztywności.

Znacznie prościej przedstawia się sytuacja w przypadku korzystania w celu utworzenia globalnej macierzy sztywności z układu współrzędnych powierzchniowych. Przyjmując za płaszczyznę styczną do powłoki pewną płaszczyznę powstałą z uśrednienia płaszczyzn elementów sąsiadujących z danym węzłem dokonać można transformacji między poszczególnymi grupami pięciu stopni swobody wyrażonych w układach lokalnych a pięcioma stopniami swobody wyrażonymi we wspólnym układzie powierzchniowym, wpływ bowiem szóstego stopnia swobody na tę transformację uznać można za pomijalnie mały. Prowadzi to do znacznych oszczędności czasu obliczeń³⁾ ma jednak wadę w postaci trudności przy analizowaniu powłok o gwałtownych zmianach kształtu (np. analiza żebra traktowanego jako zwykły element powłokowy). Dalszymi zaletami takiego podejścia są:

- otrzymywanie składowych stanu pomieszczenia i obrotu w układzie współrzędnych ściśle związanym z powłoką,
- brak jakichkolwiek kłopotów w przypadku koplanarności wszystkich elementów sąsiadujących z danym węzłem.

Jak wiadomo, bardzo szeroką klasę nieliniowych zagadnień mechaniki continuum, w tym również zagadnienia nieliniowej mechaniki powłok, opisać można w ramach przemieszczeniowego modelu metody elementów skończonych układem równań algebraicznych postaci

$$(1) \quad \mathbf{K} \Delta \mathbf{r}_t + \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}}_t + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}_t = \mathbf{R}_t - \mathbf{J}_{t-\Delta t},$$

gdzie

$$(2) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^{\text{konst.}} + \mathbf{K}^{\text{pocz. przem.}} + \mathbf{K}^{\text{pocz. napr.}} + \mathbf{K}^{\text{niekons. obc.}},$$

przy czym wprowadzono te oznaczenia:

- \mathbf{K} — globalna macierz sztywności konstrukcji,
- $\mathbf{K}^{\text{konst}}$ — macierz sztywności konstytutywnej,
- $\mathbf{K}^{\text{pocz. przem.}}$ — macierz początkowych przemieszczeń,
- $\mathbf{K}^{\text{pocz. napr.}}$ — macierz początkowych naprężeń,
- $\mathbf{K}^{\text{niekons. obc.}}$ — macierz obciążeń niekonserwatywnych,
- \mathbf{C} — macierz tłumienia,
- \mathbf{M} — macierz mas,
- \mathbf{R}_t — wektor obciążenia zewnętrznego węzłów (w chwili t),
- \mathbf{r}_t — wektor uogólnionych przemieszczeń węzłów (w chwili t),
- $\mathbf{J}_{t-\Delta t}$ — wektor „wewnętrznych” sił węzłowych odpowiadający poprzedniemu krokowi analizy.

³⁾ Uwzględnienie 6-go stopnia swobody powoduje wzrost czasu rozwiązywania podstawowego układu równań około $\left(\frac{6}{5}\right)^3 \approx 1.728$ razy.

Równanie (1), zależnie od geometrii i materiału konstrukcji, rodzaju obciążenia, zastosowanego opisu (stacjonarny lub uaktualniony) oraz wybranego układu współrzędnych, doprowadzić można do jawnej postaci, dla której wybrać należy odpowiednią metodę rozwiązywania.

3. Uwagi na temat algorytmów rozwiązywania nieliniowych zagadnień powłokowych

Metody rozwiązywania statycznych i dynamicznych zagadnień powłokowych nie różnią się zasadniczo od metod rozwiązywania odpowiednich problemów mechaniki continuum. Poniżej dokonamy krótkiego przeglądu tych metod zaś do klasyfikacji tej nawiążemy w rozdz. 4 wskazując na podejścia zastosowane w zrealizowanych programach.

(A) Zagadnienia statyczne

Pomijając człony dynamiczne zapiszmy równanie (1) w postaci

$$(3) \quad (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{R} - \mathbf{J}^*$$

gdzie \mathbf{K}_1 jest częścią macierzy sztywności \mathbf{K} stałą w trakcie procesu deformacji, $\mathbf{K}_2 \equiv \mathbf{K} - \mathbf{K}_1$, $\Delta\mathbf{R}$ jest przyrostem obciążenia zewnętrznego na danym kroku zaś \mathbf{J}^* odpowiednio zmodyfikowanym wektorem wypadkowych sił węzłowych wyrażających fakt niezrównoważenia węzłów. Niezrównoważenie to jest wynikiem błędów przybliżeń numerycznych powstałych na poprzednich krokach analizy. Macierz \mathbf{K}_2 jest funkcją aktualnego stanu powłoki co symbolicznie zapiszemy jako $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2(\sigma, \mathbf{r}, \dots)$.

Istnieją dwie podstawowe metody rozwiązywania zagadnienia przyrostowego opisanego równaniem (3), które scharakteryzujemy krótko poniżej.

(A1) *Metoda zmiennej sztywności.* Metoda ta polega na rozwiązywaniu równania (3) dla kolejnych przyrostów obciążenia uwzględniając zmiany macierzy sztywności odpowiadające rozprzestrzenianiu się stref plastycznych w analizowanej powłoce. Po wykonaniu obliczeń danego kroku należy akumulować otrzymane wielkości przyrostowe i na podstawie obliczonych wielkości globalnych charakteryzujących proces (naprężenie, odkształcenie plastyczne, parametry wzmocnienia) określić nową macierz sztywności powłoki. Metoda powyższa, ze względu na swą prostotę i łatwość interpretacji poszczególnych operacji algebraicznych w ramach mechaniki, jest szeroko stosowana we wszystkich prawie programach dotyczących dyskretyzowanych metod w nieliniowej analizie powłok.

Rozpatrzmy dowolny i -ty krok analizy prowadzonej w oparciu o równanie (3), $i = 1, 2, \dots, n$. Wprowadzimy, dla dowolnej funkcji f charakteryzującej rozpatrywany proces, symbol $f^{(i)}$ na oznaczenie wartości funkcji f odpowiadającej początkowi i -tego kroku, zaś symbol $\Delta f^{(i,i+1)}$ ma oznaczenie wartości przyrostu funkcji f na tym kroku. W metodzie zmiennej sztywności stosujemy algorytm postępowania dany równaniami

$$(4) \quad \begin{aligned} & [\mathbf{K}_1^{(i)} + \mathbf{K}_2^{(i)}(\sigma^{(i)}, \dots)]\Delta\mathbf{r}^{(i,i+1)} = \Delta\mathbf{R}^{(i,i+1)}, \\ & \Delta\mathbf{r}^{(i,i+1)} = [\mathbf{K}_1^{(i)} + \mathbf{K}_2^{(i)}]^{-1}\Delta\mathbf{R}^{(i,i+1)}, \\ & \mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} + \Delta\mathbf{r}^{(i,i+1)}, \\ & \sigma^{(i+1)} = \sigma^{(i)} + \Delta\sigma^{(i,i+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^{(i+1)} &= \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots), \\ [\mathbf{K}_1^{(i+1)} + \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots)] \Delta r^{(i+1, i+2)} &= \Delta R^{(i+1, i+2)}, \\ \mathbf{K}_1^{(i)} &= \mathbf{K}_1^{(i+1)}. \end{aligned}$$

Metoda zmiennej sztywności nie jest wolna od wad. Zaliczyć do nich należy przede wszystkim:

1. konieczność wielokrotnego (na każdym kolejnym kroku) rozwiązywania podstawowego układu równań z nową, uaktualnioną macierzą sztywności,
2. mała efektywność metody w zagadnieniach prowadzących do niesymetrycznej macierzy sztywności (np. przy uwzględnieniu niestowarzyszonych praw płynięcia plastycznego materiału powłoki czy też obciążeń zewnętrznych typu śledzącego),
3. trudne do oszacowania błędy „odchodzenia” od rozwiązania dokładnego wraz ze wzrostem liczby przyrostów,
4. trudności związane ze złym uwarunkowaniem globalnej macierzy sztywności w otoczeniu punktów krytycznych.

Istnieje wiele metod poprawiania dokładności rozwiązań uzyskiwanych metodą zmiennej sztywności. Jedną z nich, tzw. metodę sił korekcyjnych, opisać można formalnie zależnościami

$$\begin{aligned} &[\mathbf{K}_1^{(i)} + \mathbf{K}_2^{(i)}(\sigma^{(i)}, \dots)] \Delta r^{(i, i+1)} = \Delta R^{(i, i+1)} - \mathbf{J}^{*(i)}, \quad \mathbf{J}^{*(1)} = 0, \\ \Delta r^{(i, i+1)} &= [\mathbf{K}_1^{(i)} + \mathbf{K}_2^{(i)}]^{-1} [\Delta R^{(i, i+1)} - \mathbf{J}^{*(i)}], \\ r^{(i+1)} &= r^{(i)} + \Delta r^{(i, i+1)}, \\ (5) \quad \sigma^{(i+1)} &= \sigma^{(i)} + \Delta \sigma^{(i, i+1)}, \\ \mathbf{K}_2^{(i+1)} &= \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots), \\ \mathbf{J}^{*(i+1)} &= [\mathbf{K}_1^{(i+1)} + \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots)] \Delta r^{(i, i+1)} - \Delta R^{(i, i+1)}, \\ &[\mathbf{K}_1^{(i+1)} + \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots)] \Delta r^{(i+1, i+2)} = \Delta R^{(i+1, i+2)} - \mathbf{J}^{*(i+1)}. \end{aligned}$$

Stosowanie metody zmiennej sztywności uwzględniającej siły korekcyjne wymaga wykonania jedynie niewielkiej liczby dodatkowych operacji mnożenia, potrzebnych do określenia wektora danego wzorem (5)₆. Nie wymaga ono natomiast rozwiązywania nowego układu równań ani też stosowania jakichkolwiek procedur iteracyjnych.

(A2) **Metoda początkowych obciążeń.** Metoda ta ma charakter iteracyjny; k -tą iterację na i -tym kroku analizy przyrostowej opisać można w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{*(i;k)} &= \mathbf{K}_2^{(i)}(\sigma^{(i)}, \dots) \Delta r^{(i, i+1; k-1)}, \\ \mathbf{K}_1^{(i)} \Delta r^{(i, i+1; k)} &= \Delta R^{(i, i+1)} + \mathbf{J}^{*(i;k)}, \\ (6) \quad \Delta r^{(i, i+1; k)} &= \mathbf{K}_1^{(i)-1} [\Delta R^{(i, i+1)} + \mathbf{J}^{*(i;k)}], \\ \mathbf{J}^{*(i; k+1)} &= \mathbf{K}_2^{(i)}(\sigma^{(i)}, \dots) \Delta r^{(i, i+1; k)}, \\ &|\mathbf{J}^{*(i;k)} - \mathbf{J}^{*(i; k+1)}| \stackrel{?}{<} \eta \end{aligned}$$

gdzie η jest zadaną dokładnością procesu iteracyjnego. Proces powyższy kontynuujemy aż do momentu, w którym dwa kolejno obliczone wektory węzłowych obciążeń początkowych $\mathbf{J}^{*(i;k)}$, $\mathbf{J}^{*(i; k+1)}$ różnić się będą dostatecznie mało od siebie. Na każdym kroku analizy proces iteracyjny rozpocząć można zakładając $\Delta r^{(i, i+1; 0)} = 0$ lub, co jest bardziej efektywne, $\Delta r^{(i, i+1; 0)} = \Delta r^{(i-1, i)}$.

Zasadniczą zaletą metody obciążeń początkowych jest konieczność tylko jednokrotnego odwrócenia macierzy sztywności (która jest stała w trakcie procesu deformacji), wada zaś natomiast często napotykanne kłopoty ze zbieżnością procedury iteracyjnej. Nie istnieją bowiem w przypadku powłok żadne ścisłe kryteria dotyczące tej zbieżności⁴⁾.

Bardzo istotną sprawą przy stosowaniu metody początkowych obciążeń jest sposób kolejnego określania sił węzłowych, bowiem w praktyce nie korzysta się tu bezpośrednio ze wzoru (6)₁ wprowadzonego powyżej jedynie w celu uzyskania większej zwartości opisu omawianego algorytmu obliczeń. Dwie, zasadniczo różne od siebie, metody określenia dodatkowych sił węzłowych noszą w literaturze nazwy: metoda początkowych naprężeń i metoda początkowych odkształceń. W praktyce okazuje się, że zbieżność metody początkowych naprężeń jest znacznie słabsza od zbieżności metody początkowych odkształceń i właśnie ta druga metoda stosowana jest powszechnie w programach sprężysto-plastycznej analizy powłok.

(B) Zagadnienie dynamiczne

Podstawowe algorytmy rozwiązywania układu równań (1) omówimy na przykładzie prostszego przypadku dynamicznej analizy zagadnień liniowo-sprężystych opisanym równaniem

$$(7) \quad M\ddot{r}_t + C\dot{r}_t + Kr_t = R_t.$$

Procedura tworzenia globalnych macierzy mas i tłumienia jest analogiczna do procedury budowy globalnej macierzy sztywności w zagadnieniach statycznych⁵⁾. Polega ona na bezpośrednim sumowaniu odpowiednich macierzy poszczególnych elementów utworzonych w lokalnych układach współrzędnych i przetransformowanych do układu globalnego.

Podstawy konstrukcji elementów macierzy tłumienia są bardzo słabo zbadane co wynika z ogólnego braku informacji na temat mechanizmów pochłaniania energii w skomplikowanych układach konstrukcyjnych. Zamiast więc prób bardziej ogólnego definiowania tej macierzy ustala się zazwyczaj pewne parametry tłumienia dla poszczególnych postaci drgań powłoki w oparciu o doświadczenia uzyskane przy analizie podobnych układów. Ustalone w ten sposób parametry tłumienia modalnego mogą być bezpośrednio wykorzystane do analizy o ile stosujemy przy rozwiązywaniu tzw. metodę superpozycji modalnej lub też przetransponowane do postaci równoważnej macierzy tłumienia C w przypadku bezpośredniego całkowania równań ruchu.

Dla wszystkich elementów powłokowych istnieje możliwość budowania tzw. konsystentnej macierzy mas w oparciu o te same założenia aproksymujące, które przyjęto przy konstrukcji macierzy sztywności. Konsystentną macierz mas określa się na podstawie równania, które symbolicznie napisać można jako

$$(8) \quad M = \int_V \rho \Phi^T \Phi dV,$$

⁴⁾ Kryteria takie istnieją tylko dla niektórych, najprostszych zagadnień z zakresu sprężysto-plastyczności, np. zagadnień płaskiego stanu naprężenia w materiale ze wzmocnieniem izotropowym.

⁵⁾ Pełną analogię wykazuje również zagadnienie szóstego (obrót wokół normalnej do powłoki) stopnia swobody w węźle.

gdzie M jest macierzą mas rozpatrywanego elementu, ρ gęstością masy materiału zaś Φ wektorem odpowiednich funkcji kształtu. Na podstawie (8) stwierdzamy, że dla funkcji kształtu będącej wielomianem np. 3-go stopnia przy określaniu mas całkowaniu podlega wielomian stopnia 6-go. W przypadku korzystania z procedur całkowania numerycznego prowadzić to może do konieczności użycia znacznej liczby punktów całkowania czyniąc z takiego postępowania metodę bardzo kłopotliwą i kosztowną (w porównaniu z numerycznym całkowaniem potrzebnym do określenia macierzy sztywności tego samego elementu).

Alternatywną procedurą jest tworzenie uproszczonej, diagonalnej macierzy mas w oparciu o założenie istnienia skoncentrowanych mas w punktach węzłowych. Ze względu na kłopoty numeryczne przy określaniu macierzy konsystentnej oraz zupełnie zadowalające wyniki otrzymywane przy korzystaniu z macierzy diagonalnej w wielu programach dynamicznej analizy powłok stosuje się to drugie podejście. Diagonalna macierz mas zapewnia bowiem dużą efektywność całkowania względem czasu równania (7) nawet w przypadku znacznej liczby stopni swobody analizowanego zakładu.

Poniżej scharakteryzujemy krótko dwa podstawowe podejścia stosowane do przybliżonego całkowania równań ruchu (7), za które uważa się grupę metod bezpośredniego całkowania oraz metodę superpozycji modalnej.

(B1) Metody bezpośredniego całkowania. W metodach tych równanie (7) całkowane jest względem czasu metodą „krok po kroku”, zaś określenie „bezpośrednie całkowanie” oznacza, że przed przystąpieniem do całkowania równania tego nie podajemy żadnej transformacji. Metody bezpośredniego całkowania oparte są na dwu podstawowych założeniach. Po pierwsze zakładamy, że równanie (7) ma być spełniane tylko w wybranych chwilach czasu $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_1$ nie zaś w całym przedziale czasu $[t_0, t_1]$. Po drugie, zakładamy z góry pewną zmienność przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń w zapytrywanym, typowym przedziale czasu $[t, t + \Delta t]$. Ponieważ zaś równanie (7) jest wektorowym równaniem różniczkowym o stałych współczynnikach, do wyrażenia prędkości i przyspieszeń w funkcji przemieszczeń zastosować można w zasadzie dowolną aproksymację różnicową pochodnych czasowych. Jak się jednak okazuje, tylko kilka wyrażen prowadzi do dostatecznie efektywnych algorytmów.

W metodzie różnic centralnych przyjmujemy

$$(9) \quad \ddot{r}_t = \frac{1}{(\Delta t)^2} [r_{t-\Delta t} - 2r_t + r_{t+\Delta t}],$$

$$(10) \quad \dot{r}_t = \frac{1}{2\Delta t} [-r_{t-\Delta t} + r_{t+\Delta t}],$$

co w połączeniu z (7) prowadzi do

$$(11) \quad \left[\frac{M}{(\Delta t)^2} + \frac{C}{2\Delta t} \right] r_{t+\Delta t} = R_t - \left[K - \frac{2M}{(\Delta t)^2} \right] r_t - \left[\frac{M}{(\Delta t)^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] r_{t-\Delta t}.$$

Wzór (11) przedstawia układ równań liniowych, z którego znając $r_t, r_{t-\Delta t}$ oraz R_t wyliczyć można $r_{t+\Delta t}$. Procedurę powyższą nazywamy metodą całkowania jawnego; zauważmy, że procedura ta nie wymaga odwracania macierzy sztywności K co, szczególnie gdy mamy do czynienia z diagonalnymi macierzami mas i tłumienia, jest jej olbrzymią zaletą. Dodajmy

ponadto, że ponieważ do obliczenia $r_{t+\Delta t}$ potrzebna jest znajomość r_t i $r_{t-\Delta t}$, dla $t = t_0$ zachodzi konieczność opracowania pewnej procedury „startowej”, która w celu określenia $r_{t_0+\Delta t}$ nie korzystałaby z wielkości $r_{t_0-\Delta t}$. Inną, znacznie poważniejszą wadą metody różnic centralnych jest konieczność doboru długości kroku po czasie Δt w taki sposób, aby była ona mniejsza od pewnego czasu krytycznego Δt_{kr} , zależnego od własności całego układu. W przeciwnym bowiem wypadku otrzymywane rozwiązanie cechuje brak stabilności. Zachodzić powinno

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{\pi}$$

gdzie T_n jest najmniejszym okresem drgań własnych układu. Warunek ten jest bardzo silnym ograniczeniem długości kroku i, mimo iż w pewnych sytuacjach nie musi być on w pełni przestrzegany, stwarza poważne przeszkody w efektywnym wykorzystaniu omawianego algorytmu.

Drugą metodę, którą przedstawimy w niniejszym opracowaniu, jest metoda całkowania niejawnego typu Wilsona, zwana także metodą parametru ϑ . W metodzie tej zakładamy

$$(12) \quad \ddot{r}_{t+\tau} = \dot{r}_t + \frac{\tau}{\vartheta \Delta t} (\ddot{r}_{t+\vartheta \Delta t} - \ddot{r}_t),$$

gdzie $\tau \in [0, \vartheta \Delta t]$, $\vartheta \geq 1$, co prowadzi do zależności

$$(13) \quad \ddot{r}_{t+\vartheta \Delta t} = \frac{6}{\vartheta^2 (\Delta t)^2} (r_{t+\vartheta \Delta t} - r_t) - \frac{6}{\vartheta \Delta t} \dot{r}_t - 2\ddot{r}_t,$$

$$(14) \quad \dot{r}_{t+\vartheta \Delta t} = \frac{3}{\vartheta \Delta t} (r_{t+\vartheta \Delta t} - r_t) - 2\dot{r}_t - \frac{\vartheta \Delta t}{2} \ddot{r}_t.$$

Podstawiając (13) i (14) do równania ruchu wypisanego dla chwili $t + \vartheta \Delta t$ otrzymujemy równanie, z którego wyliczyć można $r_{t+\vartheta \Delta t}$ a następnie otrzymać $\dot{r}_{t+\Delta t}$, $\ddot{r}_{t+\Delta t}$, $r_{t+\Delta t}$. W algorytmie tym nie zachodzi potrzeba opracowywania dodatkowej procedury „startowej”, bowiem przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w chwili $t + \Delta t$ wyrażone są w funkcji wielkości zdefiniowanych jedynie dla chwili t . Metoda Wilsona wymaga triangularyzacji macierzy sztywności dla każdej dyskretnej chwili czasu. Metoda ta jest bezwarunkowo stabilna dla $\vartheta \geq 1,37$; powszechnie przyjmuje się $\vartheta = 1,4$.

(B2) Metoda superpozycji modalnej. Metoda ta polega na przetransformowaniu równania ruchu (7) do prostej, rozprężonej postaci⁶⁾

$$(15) \quad \ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = P(t),$$

otrzymanej za pomocą macierzy transformacji utworzonej z rozwiązań $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ zagadnienia na wartości i wektory własne postaci

$$(16) \quad \mathbf{K}\Phi = \omega^2 \mathbf{M}\Phi,$$

przy czym Ω^2 jest diagonalną macierzą o wyrazach będących kwadratami kolejnych wartości własnych $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$. Układ równań (15) przedstawić można w postaci n niezależnych od siebie równań skalarnych postaci

$$(17) \quad \ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = P_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

⁶⁾ Dla prostoty pominięliśmy wpływ tłumienia.

do rozwiązania których wykorzystać można jedną z wielu znanych metod całkowania równań różniczkowych zwyczajnych. Aby uzyskać rozwiązanie zagadnienia (7) metodą superpozycji modalnej należy więc kolejno:

1. rozwiązać zagadnienie na wartości własne (16),
2. rozwiązać n niezależnych równań typu (17),
3. dokonać superpozycji otrzymanych rozwiązań wg. wzoru

$$(18) \quad r(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i x_i(t).$$

Rozwiązania otrzymane za pomocą metody bezpośredniego całkowania i metody superpozycji modalnej powinny być identyczne z dokładnością do błędów powstałych w wyniku całkowania numerycznego oraz błędów zaokrągleń związanych ze skończoną długością słowa maszyny cyfrowej.

Efektywność metody superpozycji modalnej zależy od liczby postaci drgań (równań typu (17)), które muszą być uwzględniane w konkretnym przypadku aby otrzymać dostatecznie dokładne rozwiązanie.

W zagadnieniach nieliniowych korzysta się z zasady z metod bezpośredniego całkowania.

4. Krótki opis zrealizowanych programów wraz z przykładami ich zastosowań

(A) Program SHELAX — statyczna analiza dużych deformacji cienkich osiowo-symetrycznych powłok sprężysto-plastycznych, [3].

Program SHELAX umożliwia statyczną analizę dużych ugięć powłok osiowosymetrycznych podpartych i obciążonych osiowosymetrycznie. Analizowane powłoki mogą posiadać wzdłuż tworzącej nieciągłą krzywiznę oraz skokowo zmienną grubość. Aby stworzyć szerokie możliwości wykorzystania programu konieczny był wybór takiego elementu skończonego, który umożliwiłby

- a) dogodność geometrycznej reprezentacji dowolnej powłoki osiowosymetrycznej,
- b) przyjęcie funkcji aproksymujących stan przemieszczenia w postaci wielomianów odpowiednio wysokich stopni.

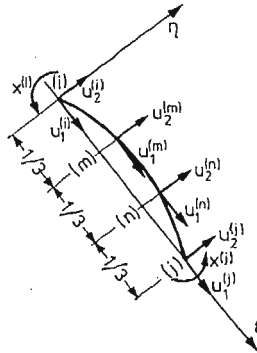
Pierwsze z powyższych wymagań spełniono przyjmując pierścieniowy element o niezerowej krzywiznie Gaussa („podwójnie” zakrzywiony) o tworzącej aproksymowanej w lokalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych bezwymiarowych $\xi-\eta$ (parametryzującym rozpatrywaną południkową płaszczyznę przekroju konstrukcji) wyrażeniem, por. rys. 2

$$(19) \quad \eta = \xi(1-\xi)(A_1 + A_2\xi + A_3\xi^2 + A_4\xi^3),$$

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \bar{\eta}.$$

Krzywa powyższa, przechodząc z definicji przez punkty końcowe elementu, zapewnia w tych punktach ponadto (poprzez odpowiedni dobór parametrów A_1, A_2, A_3, A_4) równość kątów nachylenia stycznej i równość krzywizn dla sąsiadujących ze sobą elementów.

W nawiązaniu do rozdz. 2 podkreślmy, że wprowadzony powyżej ruchomy układ współrzędnych $\xi-\eta$ zachowuje w trakcie procesu deformacji swą ortogonalność i prostoliniowość doznając jedynie obrotu w płaszczyźnie pokładnikowej w sposób określony



$$u_1(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 + \alpha_5 \xi^4,$$

$$u_2(\xi) = \alpha_6 + \alpha_7 \xi + \alpha_8 \xi^2 + \alpha_9 \xi^3 + \alpha_{10} \xi^4.$$

Rys. 2

przemieszczeniami węzłów. jest to więc przykład współobrotowego układu współrzędnych wprowadzonego lokalnie dla każdego elementu.

Funkcje aproksymujące stan przemieszczenia elementu wyrażono w lokalnym układzie współrzędnych $\xi-\eta$ jako

$$(20) \quad u_1(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 + \alpha_5 \xi^4,$$

$$u_2(\xi) = \alpha_6 + \alpha_7 \xi + \alpha_8 \xi^2 + \alpha_9 \xi^3 + \alpha_{10} \xi^4.$$

Założono, że funkcje te opisują stan przemieszczeń w elemencie skończonym o dziesięciu stopniach swobody i czterech węzłach, z których dwa wewnętrzne umieszczono w punktach $\xi = 1/3$, $\xi = 2/3$, rys. 2. Stopnie swobody odpowiadające węzłom wewnętrznym są w programie „usuwane” (na poziomie elementu!) poprzez zastosowanie procesu statycznej kondensacji. Przyjęte funkcje aproksymujące stan przemieszczenia zapewniają automatyczne spełnienie podstawowych, wymienionych w rozdz. 2, warunków, tj. warunku sztywnych ruchów elementu i warunków jednorodnych stanów odkształcenia.

Równania (20), opisujące stan przemieszczenia w dowolnym pierścieniowym elemencie powłoki osiowoosymetrycznej, zostały w pracy [1] wyspecyfikowane w sposób dogodny do opisu również elementów kopułowych. Umożliwiło to analizowanie powłok zamkniętych (kopuł).

Program SHELAX oparty jest na metodzie zmiennej sztywności z jednokrotną korektą równań równowagi na każdym kroku, por. rozdz. 3. Jako wspólny układ współrzędnych służący budowaniu macierzy sztywności konstrukcji przyjęto globalny układ współrzędnych cylindrycznych $\{r, \varphi, z\}$ (a właściwie układ $\{r, z\}$ na wybranej południowej płaszczyźnie przekroju $\varphi = \text{const.}$). Ze względu na brak możliwości obrotu wokół normalnej do powłoki w przypadku powłok osiowoosymetrycznych nie występują opisane w rozdz. 3 problemy z wprowadzaniem fikcyjnej sztywności odpowiadającej temu stopniowi swobody.

Program napisany jest w języku FORTRAN IV i składa się z około 1400 wyrażeń (kart perforowanych); w trakcie jego opracowywania korzystano z maszyny cyfrowej CYBER 72, na której też policzono wszystkie dotychczasowe przykłady.

Przykład 1

Za pomocą programu SHELAX przeprowadzono analizę czaszy kulistej poddanej działaniu siły P przyłożonej w wierzchołku czaszy, rys. 3⁷⁾. Omawianie tego problemu rozpoczniemy od przytoczenia wyników dotyczących sprężystej czaszy utwierdzonej na obwodzie. Dla przyrostu obciążenia $\Delta P = 1/b$ stwierdzono pewną rozbieżność wyników w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym podanym w [9], szczególnie w części środkowej całego zakresu analizowanych deformacji. Wiąże się to z najmniejszą sztywnością konstrukcji w tym zakresie. W celu zwiększenia dokładności obliczeń zmniejszono pięciokrotnie przyrost obciążenia co wpłynęło na znaczną poprawę dokładności rozwiązania. Omawianą czaszę poddano następnie analizie w zakresie sprężysto-plastycznym. Odpowiedni wykres obciążenie-przemieszczenie podano na rys. 4, na którym zilustrowano również charakter powstających stref plastycznych (naniesionych na nieodkształconą konfigurację powłoki).

Zmieniając warunki brzegowe powłoki z utwierdzenia na przegubowe podparcie nieprzesuwne obserwujemy jakościową różnicę w otrzymywanym rozwiązaniu. Umożliwiłoby bowiem w ten sposób wystąpienie zjawiska globalnej utraty stateczności czaszy w postaci tzw. przeskoaku. Wartości obciążenia krytycznego dla powłoki sprężystej i sprężysto-plastycznej, jak również odpowiednie kształty powłoki w chwili przeskoaku podano na rys. 5.

(B) program SHENON⁸⁾ — statyczna analiza dużych przemieszczeń i stateczności cienkich powłok dowolnego kształtu, [1], [4], [5], [6].

Program SHENON umożliwia analizę w wyżej wymienionym zakresie dowolnych powłok sprężystych oraz sprężysto-lepkoplastycznych. Wykorzystując stacjonarne własności rozwiązań sprężysto-lepkoplastycznych program umożliwia również otrzymywanie rozwiązań sprężysto-plastycznych. W programie uwzględniono następujące powłokowe elementy skończone typu przemieszczeniowego:

a) płaski element trójkątny charakteryzowany przez:

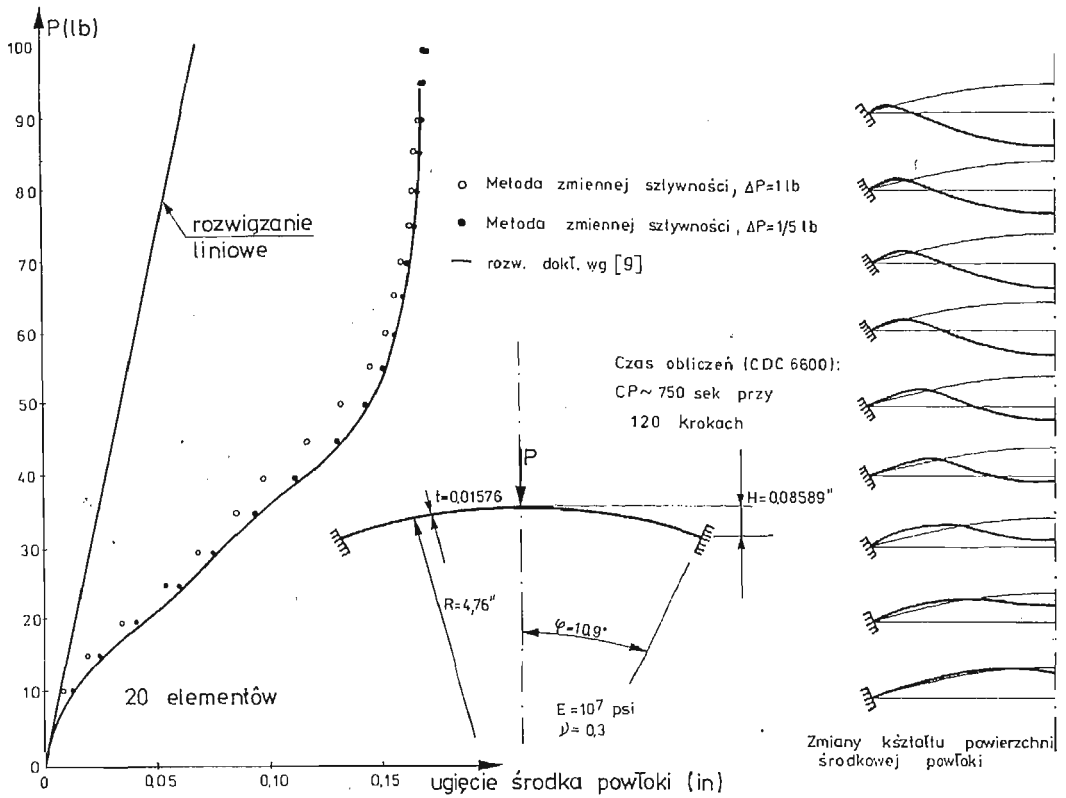
- (a1) stan membranowy — element z liniową funkcją kształtu,
- (a2) stan zgięciowy — zgodny element płytowy zaproponowany w [7],

b) niepłaski element czworokątny charakteryzowany przez:

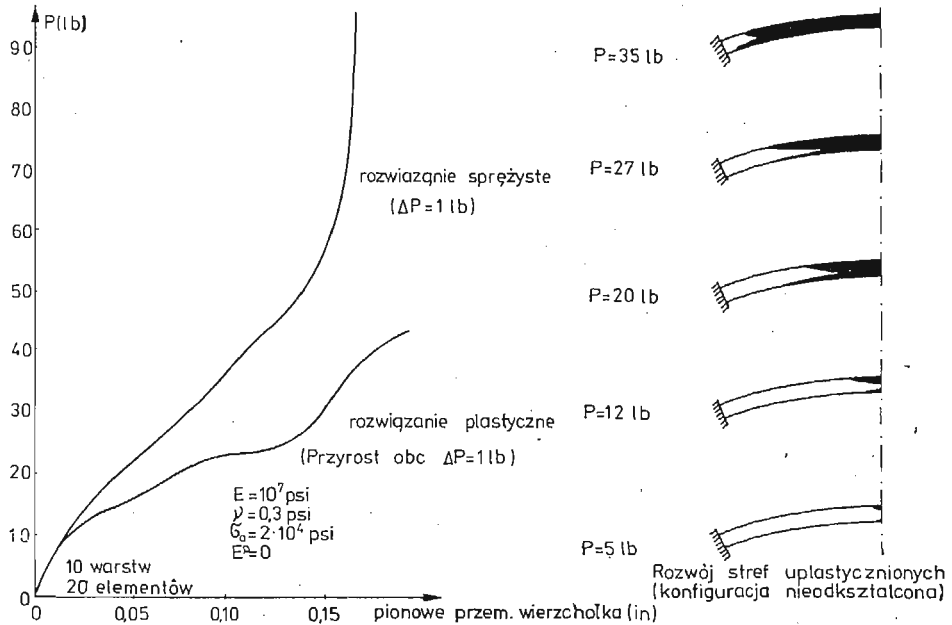
- (b1) stan membranowy — układ czterech płaskich elementów trójkątnych z kwadratową funkcją kształtu poddany więzom kinematycznym prowadzącym do linowości przemieszczeń wzdłuż czterech zewnętrznych boków czworokąta,
- (b2) stan zgięciowy — układ czterech elementów płytowych wymienionych w (a2).

⁷⁾ Aby umożliwić przeprowadzenie porównań otrzymanych wyników z rozwiązaniami otrzymanymi przez innych autorów, w przykładzie tym (i paru innych) przyjęto układ jednostek stosowany powszechnie w USA.

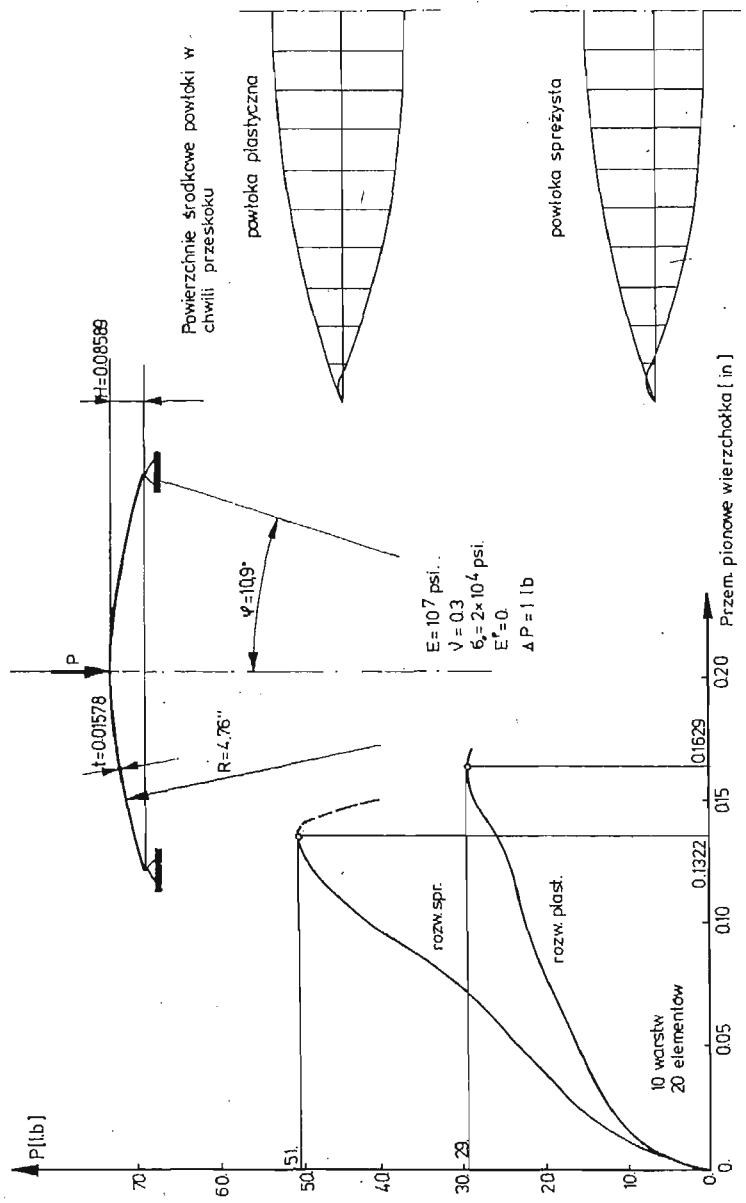
⁸⁾ Opis programu SHELIN, [4], będącego liniową wersją analizy powłok na bazie której opracowano wersję nieliniową zatytułowaną SHENON, zawarty jest automatycznie (jako część opisu programu SHENON) w poniższym tekście.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Przy opracowywaniu programu zdecydowano się na element złożony z czterech płaskich elementów trójkątnych ze względu na:

1. brak w naszych krajowych warunkach doświadczenia w korzystaniu ze skomplikowanych programów numerycznych w ogóle, a z programów dotyczących powłok w szczególności,
2. konieczność minimalizacji wykorzystywanego obszaru pamięci wewnętrznej maszyny,
3. prostotę i szybkość przygotowywania danych wejściowych,
4. względnie dobrą aproksymację rzeczywistej geometrii powłoki w przypadku niepłaskiego elementu czworokątnego przy zachowaniu niewielkiej liczby danych wejściowych,
5. przejrzystość programu i łatwość jego rozbudowywania,
6. łatwą interpretację otrzymywanych wyników,
7. możliwość (prawie we wszystkich przypadkach) redukcji błędów wprowadzonych w trakcie idealizacji powierzchni zakrzywionej elementami płaskimi poprzez zagęszczanie siatki elementów.

Przeprowadzone testy wskazują na znacznie lepszą dokładność osiąganą przy użyciu elementu czworokątnego dlatego też elementy trójkątne zaleca się używać wyłącznie jako uzupełnienie siatki elementów czworokątnych.

Macierze sztywności elementów wyprowadzono korzystając z bardzo wygodnych tzw. polowych współrzędnych wprowadzonych w obszarze każdego z trójkątów. Odpowiednie funkcje kształtu oraz otrzymane na ich podstawie macierze sztywności podano w [4], [5]. Opracowany element czworokątny posiada 37 stopni swobody, z których jednakże tylko 20 ma charakter stopni zewnętrznych. Reszta, tj. 17 jest eliminowana w procesie statycznej kondensacji na szczyblu elementu zapewniając bardzo korzystną, niewielką szerokość pasma globalnej macierzy sztywności.

Omawiany element czworokątny jest elementem zgodnym tylko w przypadku koplanarności wszystkich swoich trójkątnych podelementów; brak zgodności w przypadku niepłaskim nie spowodował w dotychczasowych testach zauważalnych problemów ze zbieżnością ciągów rozwiązań przybliżonych. Opracowana w programie macierz początkowych naprężeń jest tzw. macierzą niekonsystentną tzn. opartą na nieco uproszczonym układzie aproksymujących funkcji kształtu, por. [5]. Uprościło to znacznie procedurę jawnego otrzymywania macierzy początkowych naprężeń nie prowadząc (w dotychczasowych zastosowaniach) do żadnych niekorzystnych własności takiego sformułowania. Numeryczne całkowanie potrzebne przy określaniu tej macierzy przeprowadza się w programie wykorzystując wzory P. C. Hammera, O. P. Marlowe'a i A. H. Strouda podane np. w [8], s. 421.

„Składanie” macierzy poszczególnych elementów w globalną macierz układu odbywać się może w programie alternatywnie w oparciu o:

- a) globalny układ współrzędnych prostokątnych dla translacyjnych stopni swobody (3 składowe) i powierzchniowy układ współrzędnych dla obrotowych stopni swobody (2 składowe),
- b) powierzchniowy układ współrzędnych dla wszystkich pięciu składowych stanu uogólnionych przemieszczeń.

Zgodnie z poprzednimi uwagami żadna z tych metod nie prowadzi do trudności związanych z brakiem w węźle szóstego stopnia swobody odpowiadającego obrotowi wokół normalnej do powłoki.

Podstawową metodą rozwiązywania układu równań zastosowaną w programie SHENON jest metoda początkowych obciążeń w odniesieniu do nieliniowości typu fizycznego oraz metoda zmiennej sztywności w odniesieniu do nieliniowości typu dużych przemieszczeń.

Program SHENON pozwala na znaczne uproszczenie i zmniejszenie liczby danych wejściowych poprzez wykorzystanie szeregu podprogramów generacyjnych. W szczególności program umożliwia:

- a) generację współrzędnych węzłów dla pięciu często spotykanych typów powierzchni,
- b) generację cosinusów kierunkowych współrzędnych powierzchniowych,
- c) generację numerów węzłów,
- d) generację danych materiałowych,
- e) generację przemieszczeniowych warunków brzegowych,
- f) generację obciążeń zewnętrznych.

Program SHENON napisany jest w języku FORTRAN IV i składa się z około 3.000 wyrażań (kart perforowanych); w trakcie jego uruchamiania korzystano z maszyny cyfrowej CYBER 72.

Przykład 2

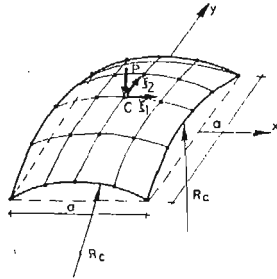
Za pomocą programu SHENON 1 przeprowadzono analizę dużych ugięć wycinka sfery kulistej obciążonego siłą skupioną P , rys. 6. Na wykresie przemieszczenie środka powłoki — obciążenie zewnętrzne porównano wyniki otrzymane przez różnych autorów.

(C) LARSTRAN — analiza dużych odkształceń konstrukcji sprężystych, sprężysto-plastycznych, sprężysto-lepkoplastycznych.

System LARSTRAN jest dużym systemem nieliniowej, dynamicznej analizy konstrukcji opracowanym w Instytucie Statyki i Dynamiki Uniwersytetu w Stuttgarcie, [13], [14]. Istniejące w tym systemie możliwości analizy powłok opisane zostały w pracach [15], [16], [17]. Przedstawiony w tych pracach element TRUMP może być stosowany w bardzo wielu zagadnieniach praktycznych aczkolwiek autorzy z naciskiem podkreślają jego przybliżony charakter i, związaną z tym, jego jedynie „inżynierską” dokładność. Mówiąc ogólnie, proponując element TRUMP kierowano się przekonaniem, że obniżona dokładność rozwiązań rekompensowana będzie niższym kosztem obliczeń i mniejszym zapotrzebowaniem na pamięć komputera, co w skomplikowanych problemach nieliniowej mechaniki powłok może być sprawą na wagę możliwości uzyskania jakiegokolwiek użytecznej informacji. Element TRUMP zaliczyć trzeba do klasy elementów „nieformalnych”, jego przydatność będzie musiała zostać w przyszłości potwierdzona na drodze różnorodnych eksperymentów numerycznych.

Omawiany element skończony jest trójkątnym, płaskim elementem powłokowym z trzema punktami węzłowymi, z których każdy posiada sześć stopni swobody w postaci trzech przemieszczeń i trzech obrotów. Zgodnie z poprzednimi uwagami konieczność wprowadzenia sztywności elementu względem obrotu wokół normalnej do powłoki wynika ze składania macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych; sztywność ta ma charakter czysto „numeryczny”. Naturalny opis stanu deformacji elementu powoduje, że element posiada pozornie jedynie 12 stopni swobody (3×6 stopni swobody węzłów minus 6 stopni swobody odpowiadających sztywnym ruchom elementu w przestrzeni trójwymiarowej). Zastosowanie koncepcji elementu warstwowego do analizy powłok

niesprężystych odpowiada metodzie omówionej na przykładach programu SHELAX; odpowiednio budowana macierz sztywności elementu uwzględnia jego własności membranowe i zgięciowe zaś struktura warstwowa umożliwia opis zmian własności materiału „po grubości” powłoki:



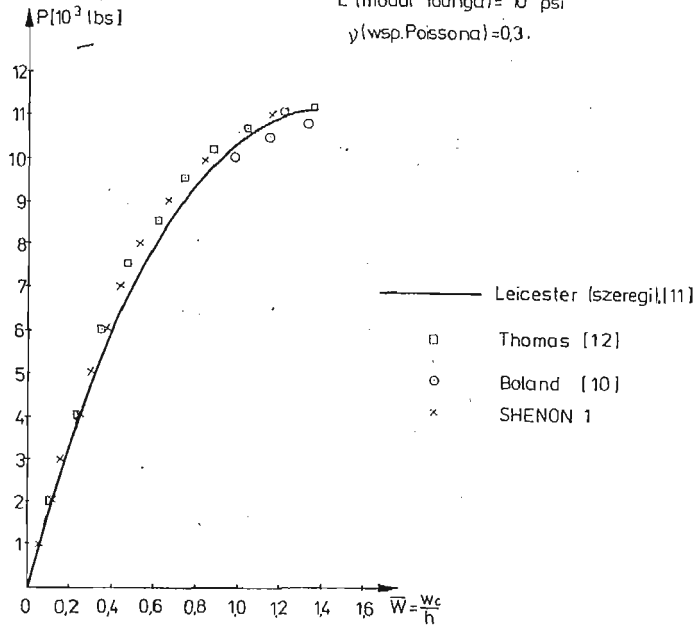
$$a = 61,8031'' \text{ (156,99 cm)}$$

$$h \text{ (grubość powłoki)} = 3,9154'' \text{ (9,95 cm)}$$

$$R_c = 100,0'' \text{ (254,0 cm)}$$

$$E \text{ (moduł Younga)} = 10^5 \text{ psi}$$

$$\nu \text{ (wsp. Poissona)} = 0,3.$$



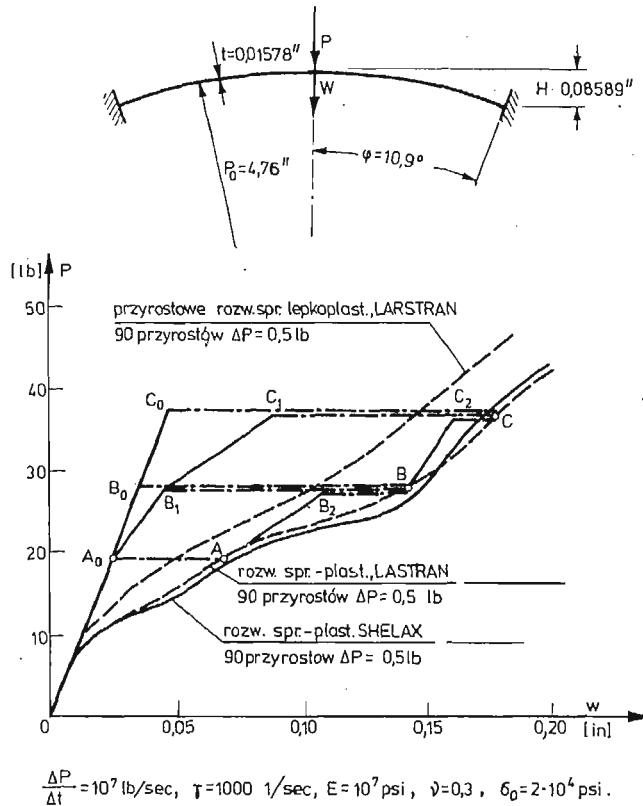
Rys. 6

W programie założono, że poszczególne warstwy elementu TRUMP odpowiadają najprostszemu elementowi płaskiego stanu naprężenia charakteryzowanemu stałym rozkładem naprężenia. Ponieważ jednak element złożony z warstw o stałym naprężeniu nie jest w stanie opisać deformacji elementu typu antysymetrycznego zginania w programie wykorzystano dodatkowo analogię typu płyta trójkątna — układ trzech zginanych belek.

W trakcie statycznej analizy konstrukcji niesprężystych istnieje w systemie LARS-TRAN możliwość wykorzystywania wszystkich omówionych w rozdz. 3 procedur analizy nieliniowej tj. metody zmiennej sztywności oraz obu wersji metody początkowych obciążeń. Element TRUMP jest obecnie wykorzystywany także do zagadnień dynamiki powłok.

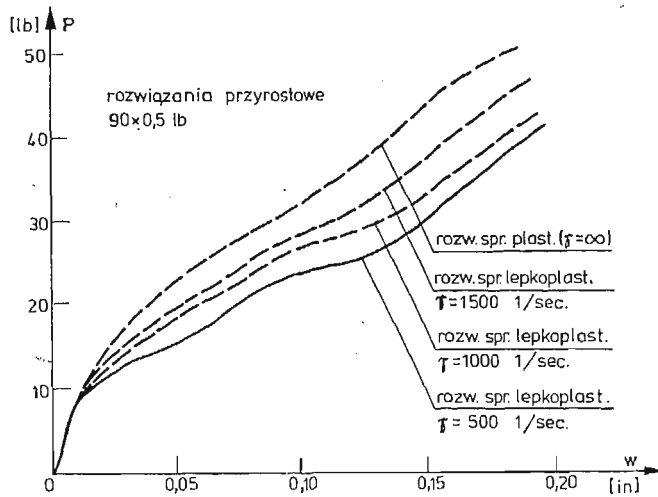
Przykład 3

Jednym z testów elementu TRUMP była analiza powłoki omówionej w Przykładzie 1, [18]. Wycinek w postaci 1-go radiana kopuły poddano dyskretyzacji za pomocą 36 elementów TRUMP. Sprężysto-plastyczne rozwiązanie O-A-B-C, rys. 7, otrzymane przy $\Delta P = 0,5 \text{ lb}$ wykazało dość dobrą zgodność z rozwiązaniem otrzymanym za pomocą



Rys. 7

SHELAX-u. W celu wykorzystania własności rozwiązań sprężysto-lepkoplastycznych opisanych w [2], [17], [18] przyłożono następnie w jednym kroku obciążenie odpowiadające punktowi A_0 i następnie, w procesie płynięcia lepkoplastycznego pod stałym obciążeniem otrzymano leżący na odpowiedniej krzywej punkt A . Podobnie dla obciążeń odpowiadających punktom B_0 i C_0 otrzymano punkty B i C , a następnie rozpatrzono także inne historie obciążenia (np. $0-A_0-B_1-B-C_2-C$), wszystkie wykazujące zgodność z odpowiednim rozwiązaniem sprężysto-plastycznym. Liczba iteracji konieczna do uzyskania odpowiedniej zbieżności procesu numerycznego opisującego płynięcie lepkoplastyczne wahała się od 37 (w przypadku płynięcia $C_0 \rightarrow C$) do 8 (w przypadku płynięcia $C_3 \rightarrow C$). Na rys. 8 przedstawiono rozwiązanie tego samego zadania dla różnych wartości współczynnika lepkości; otrzymane krzywe wykazują tendencję do asymptotycznego zbliżania się do rozwiązania sprężysto-plastycznego ($\gamma = \infty$).



Rys. 8

(D) WHAM — nieliniowa dynamiczna analiza ciał i konstrukcji

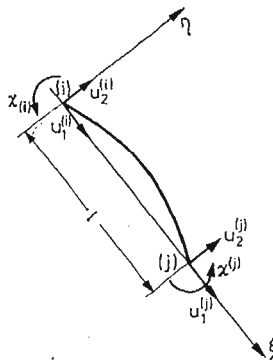
System WHAM jest dużym systemem nieliniowej, dynamicznej analizy konstrukcji opracowanym na Uniwersytecie Northwestern w Chicago, USA przez T. Belytschke i B. Mullena. Istniejący w tym systemie element powłoki osiowoosymetrycznej opisano w [19]. Element ten jest podobny do elementu istniejącego w programie SHELAX. Jego tworząca opisywana jest równaniem, por. (19)

$$\eta = \xi(1-\xi)(A_1 + A_2\xi)$$

zaś funkcje aproksymujące stan przemieszczenia przyjęto w postaci, por. (20)

$$u_1(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi,$$

$$u_2(\xi) = \alpha_3 + \alpha_4 \xi + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \xi^3.$$



$$u_1(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi$$

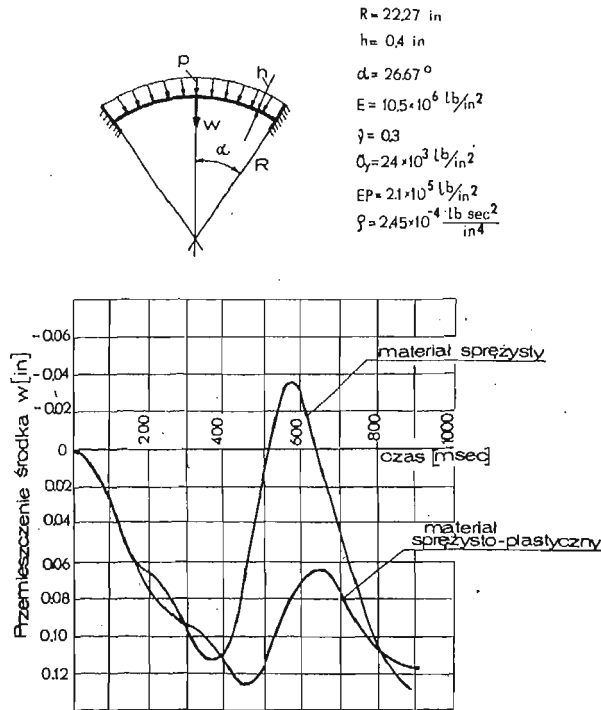
$$u_2(\xi) = \alpha_3 + \alpha_4 \xi + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \xi^3$$

Rys. 9

Funkcje te opisują stan przemieszczenia w elemencie skończonym o sześciu stopniach swobody i dwu węzłach zewnętrznych, rys. 9.

Zmianę własności materiału wzdłuż grubości powłoki uwzględniono wprowadzając model warstwy. Do całkowania równań ruchu zastosowano metodę różnic centralnych. Przykład 4

Możliwości obliczeniowe programu WHAM zilustrujemy na przykładzie analizy utwierdzonej na obwodzie powłoki sferycznej obciążonej impulsem ciśnienia, rys. 10. Na rysunku tym pokazano zmianę ugięcia środka kopuły w czasie dla przypadków: sprężystego i sprężysto-plastycznego.



Rys. 10

(E) DYNAX — dynamiczna analiza osiowosymetrycznych ciał i powłok sprężystych poddanych dowolnemu obciążeniu.

Program DYNAX, [20], stanowi pierwszą fazę pracy nad programem umożliwiającym dynamiczną analizę różnorodnie obciążonych konstrukcji o osiowosymetrycznej geometrii w zakresie fizycznej i geometrycznej nieliniowości. W odróżnieniu od programu SHELAX i powłokowej części programu WHAM program DYNAX dopuszcza powstawanie dowolnego (a nie tylko osiowosymetrycznego) stanu odkształcenia w analizowanych konstrukcjach). Aby umożliwić taką ogólność analizy zmienne wokół osi symetrii obciążenie przedstawiane jest w postaci szeregów Fouriera. Na każdym kroku analizy otrzymujemy rozwiązanie dla każdego wyrazu rozwinięcia oddzielnie i sumujemy otrzymane rozwiązania otrzymując wynik odpowiadający całemu obciążeniu.

Program dysponuje obecnie trzema typami elementów:

1. element powłokowy identyczny do wykorzystywanego w programie SHELAX,
2. „trójkątny” element ciała osiowosymetrycznego (grubej powłoki) z liniową funkcją kształtu w płaszczyźnie południkowej,
3. „czworokątny” element ciała osiowosymetrycznego złożony z czterech elementów „trójkątnych” bez węzła środkowego eliminowanego w procesie statycznej kondensacji.

Dla wszystkich elementów w programie istnieją możliwości obliczania konsystentnych macierzy mas. Współczynniki leżące na diagonalu w wygodniejszej w analizie diagonalnej macierzy mas otrzymywane są poprzez sumowanie wszystkich współczynników występujących w poszczególnych wierszach macierzy konsystentnej.

Macierz tłumienia przyjmowana jest w postaci proporcjonalnej jako

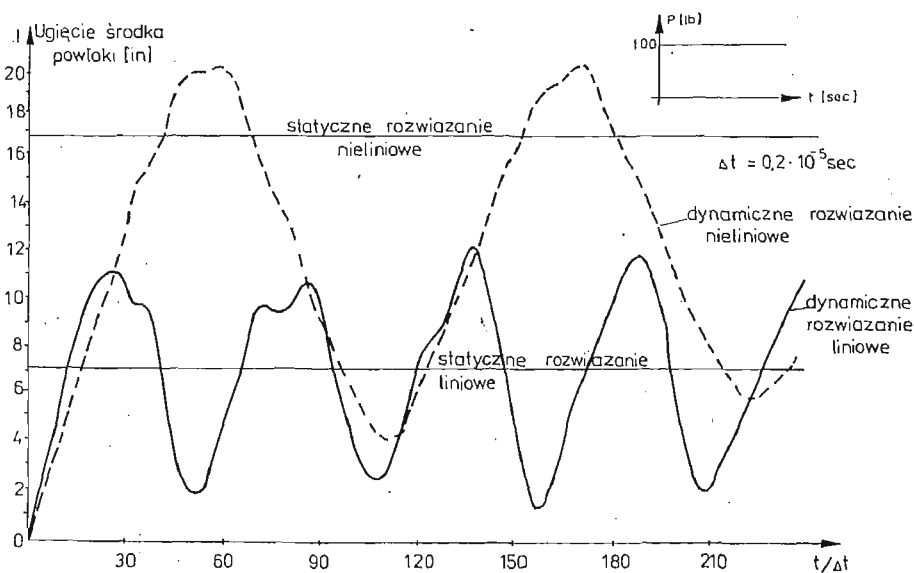
$$C = \alpha M + \beta K$$

gdzie współczynniki α i β ustalane są w zależności od parametrów tłumienia modalnego.

Całkowanie względem czasu może być dokonywane za pomocą zarówno metody całkowania bezpośredniego Wilsona ($\vartheta = 1.4$) jak i metody superpozycji modalnej (tylko w przypadku małych przemieszczeń!).

Przykład 5

Dla omawianej poprzednio sprężystej powłoki utwierdzonej, por. rys. 3, przeprowadzono analizę dynamiczną za pomocą programu DYNAX. Obciążenie wierzchołka czaszy o wartości $P = 100/b$ przyłożono w sposób nagły w chwili $t = 0$ i pozostawiono niezmiennym do końca analizy. Pominięto wpływ tłumienia. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 11. Znacznie większe przemieszczenia w przypadku analizy geometrycznie

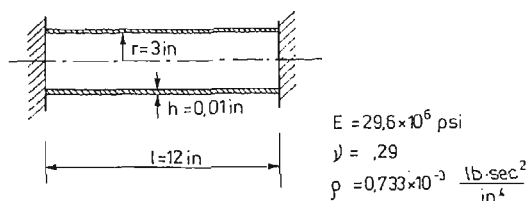


Rys. 11

niezlinearyzowanej są wynikiem zmniejszenia się sztywności powłoki ze wzrostem obciążenia. Otrzymane wyniki wykazują dobrą zgodność z rozwiązaniami podanymi w [21].

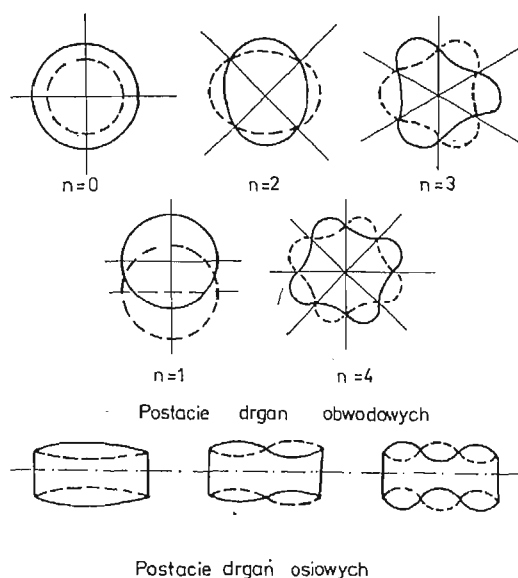
Przykład 6

Korzystając z programu DYNAX policzono drgania własne powłoki walcowej o utwierdzonych brzegach pokazanej na rys. 12. Na rysunku tym podano także odpowiednie



Rys. 12

dane geometryczne i materiałowe charakteryzujące powłokę. Macierz mas przyjęto w postaci diagonalnej. Na rys. 13 pokazano różne możliwe postacie drgań własnych powłoki zaś w Tabl. 1 przedstawiono otrzymane wyniki i porównano je z wynikami eksperymental-



Rys. 13

nymi podanymi w [22] oraz z wynikami analitycznymi uzyskanymi w oparciu o klasyczne równania powłok podanymi w [23]. Analizę przeprowadzono dzieląc powłokę na 10 pierścieniowych elementów skończonych.

Tablica 1

m \ n		1	2	3	4	5	6	7
0	A			1025	700	559	525	587
	B	3427	1918	1145	765	580	530	597
	C	3426	1922	1160	769	581	534	589
1	A				1620	1210	980	875
	B	6423	3905	2538	1753	1287	1022	907
	C	6404	3912	2553	1770	1303	1034	912
2	A						1650	1395
	B		5844	4054	2921	2192	1720	1431
	C	8194	5839	4075	2953	2227	1754	1458
3	A							1960
	B		7303	5447	4104	3168	2516	2076
	C		7245	5451	4144	3222	2578	2133
4	A							
	B							
	C		8120	6550	5222	4197	3430	2867

A : wg [22] wartości doświadczalne

B : wg [23] wartości analityczne

C : DYNAX metoda elementów skończonych

Literatura cytowana w tekście

1. M. KLEIBER, H. STOLARSKI; *Numeryczna analiza zagadnień statyki sprężysto-plastycznych powłok w zakresie dużych przemieszczeń, Cz. I — Podstawy teoretyczne*, Zlecenie CTO EU/B/246/74, Warszawa, IPPT, Grudzień 1976.
2. M. KLEIBER; *Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych. Teoria i numeryczna analiza konstrukcji*, Prace IPPT nr 13/1978.
3. M. KLEIBER; *SHELAX — analiza dużych deformacji cienkich, osiowosymetrycznych powłok sprężysto-plastycznych metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja użytkowania, Prace IPPT nr. 49/1977.
4. M. KLEIBER, A. ZACHARSKI; *SHELIN — liniowa analiza statyczna cienkich powłok dowolnego kształtu metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja użytkowania, Prace IPPT nr 51/1978.
5. M. KLEIBER, J. BAUER, H. STOLARSKI, A. ZACHARSKI; *SHENON — statyczna analiza dużych przemieszczeń i stateczności cienkich, sprężystych i niesprężystych powłok dowolnego kształtu metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja użytkowania, Prace IPPT 1980 (w przygotowaniu).
6. M. KLEIBER, J. BAUER, H. STOLARSKI, A. ZACHARSKI; *SHENON 1 — statyczna analiza dużych przemieszczeń i stateczności cienkich powłok dowolnego kształtu metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja Użytkowania, Zlecenie CTO EU/B/246/74, Warszawa, IPPT, Czerwiec 1978.
7. R. W. CLOUGH, J. L. TOCHER; *Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending*, Konferencja: „Matrix methods in Structural Mechanics”, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1965.
8. O. C. ZIENKIEWICZ; *Metoda elementów skończonych* Arkady Warszawa 1972.
9. J. R. TILLERSON J. A. STRICKLIN W. E. HAISLER; *Numerical methods for the solution of nonlinear problems in structural analysis* 1973 Winter Annual Meeting of the ASME Nov. 1973 New Mexico,

10. P. L. BOLAND; *Large deflection analysis of thin elastic structures by the assumed stress hybrid finite method* Report Oct. 1975 MIT Cambridge Mass. USA.
11. R. H. LEICESTER; *Finite deformation of shallow shells* Proc. ASCE J. Eng. Mech. Div. **94** 1409 - 1421 (1968).
12. G. THOMAS R. GALLAGHER; *A triangular thin shell finite element; nonlinear analysis* NASA-CR-2483.
13. J. H. ARGYRIS P. C. DUNNE T. ANGELOPOULOS B. BICHAT; *Large natural strains and some special difficulties due to non-linearity and incompressibility in finite elements* Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. **4** 219 - 278 (1974).
14. J. H. ARGYRIS, M. KLEIBER; *Incremental natural discretized formulation in nonlinear mechanics and large strain elastoplasticity, Part I*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. **11**, 125 - 144 (1977).
15. J. H. ARGYRIS, P. C. DUNNE, MALEJANAKIS, E. SCHEKLE; *A simple triangular facet shell element with application to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. **10**, 371 - 403 (1977).
16. M. KLEIBER; *A triangular finite element for large deformation elasto-plastic analysis of arbitrary shells*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. XXVI, 61 - 71 (1978).
17. J. H. ARGYRIS, M. KLEIBER, U. HINDENLANG; *Finite deformation analysis of inelastic shells — Natural finite element approach*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. **22**, 361—390 1980.
18. M. KLEIBER; *Natural finite elements and large deformation elasto-viscoplasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. XXVI, 73 - 81 (1978).
19. T. BELYTSCHKO, H. STOLARSKI; *A curved finite element for nonlinear transient analysis of shells of revolution*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. 1979.
20. M. KLEIBER, T. D. HIEN; DYNAX — *dynamiczna analiza osiowosymetrycznych ciał i powłok sprężystych poddanych dowolnemu obciążeniu metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja użytkowania, Prace IPPT **25**, 1980.
21. K. J. BATHE, H. OZDEMIR, E. L. WILSON; *Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis*, SESM Report 74 - 4, University of California, Berkeley, 1974.
22. R. L. KOVAL, E. T. CRANCH; *On the free vibrations of thin cylindrical shells subjected to initial torque*, Proc. US National Congress of Appl. Mech. 11 - 18 (1962).
23. B. L. SMITH, E. E. HAFT; *Natural frequencies of clamped cylindrical shells*, J. Amer. Inst. Aeron. Astron **6**, April 1968.

Р е з ю м е

НЕЛИНЕЙНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ
ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В данной работе обсуждены основные аспекты нелинейного анализа с применением ЭВМ для тонких оболочек произвольной формы. Учитывается физическая и геометрическая нелинейность задачи. Представлены основные алгоритмы, применяемые при постановке статических и динамических задач. Работа проиллюстрирована многочисленными примерами расчётов, выполненных с помощью программ на ЭВМ, разработанных автором.

S u m m a r y

NONLINEAR STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF SHELLS BY THE FINITE
ELEMENT METHOD

In the paper some fundamental aspects of numerical nonlinear analysis of free-form thin shells are discussed. Both material and geometrical nonlinearities are taken into account. The basic numerical methods are described for nonlinear static and dynamic problems. A number of examples is included.

IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1979 roku

RÓWNANIA BILANSU I ZASADY ZACHOWANIA W POROWATYCH CIAŁACH WIEŁOSKŁADNIKOWYCH

MAŁGORZATA WOŹNIAK (WARSZAWA)

Wstęp

Kontynualne teorie mieszanin [1, 2] oraz zarówno liniowe [3, 4] jak i nieliniowe [5, 6] sformułowania teorii ośrodków porowatych i konsolidacji postulują, że w danej chwili w jednym i tym samym miejscu przestrzeni mogą się znajdować różne cząstki ośrodka oraz, że porowatość ośrodka opisują wprowadzone *a priori* pola. Przegląd i omówienie literatury problemu można znaleźć np. w [6]. W monografii [7] przedstawiono bardziej fizyczne podejście do teorii ośrodków porowatych nasyconych cieczą, biorąc jako punkt wyjścia skokowo-niejednorodną i nieciągłą (zawierającą inkluzję i pustki) „mikro”-strukturę ciała. Podstawowe równania pola otrzymano w [7] przez przeprowadzenie uśrednień po pewnych „makro”-powierzchniach i „makro”-objętościach.

W tej pracy przedstawiono formalizację podejścia zastosowanego w [7] i dokonano jego uogólnienia na przypadek N-składnikowego ciała o dowolnej strukturze niejednorodnej i porowatej. Celem pracy jest podanie ogólnego schematu konstrukcji równań bilansu dla pól opisujących pewne globalne (uśrednione) własności porowatych ciał wieloskładnikowych. Pokazano również zastosowania tego schematu do budowy praw zachowania i niektórych równań transportu dla pól uśrednionych. Wyniki pracy umożliwiają także głębszą interpretację fizyczną pól, których istnienie postuluje się w kontynualnych teoriach mieszanin i ośrodków porowatych.

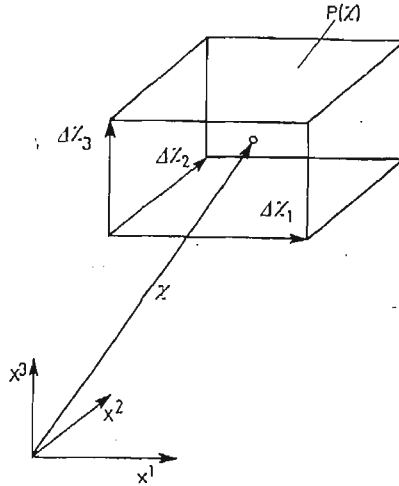
1. Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Rozważania dotyczą ośrodka ciągłego M zajmującego w dowolnej chwili t sumę M_t rozłącznych obszarów w R^3 (tj. w przestrzeni fizycznej z ustalonym ortogonalnym układem kartezjańskim $0x^1x^2x^3$). Celem uproszczenia formalnej strony rozważań założymy, że ośrodek jest nieograniczony w tym sensie, że istnieje liczba r , $r > 0$, taka, że dla każdego x , $x \in R^3$, kula $K(x, r)$ o promieniu r i o środku x zawiera punkty należące do M_t , $t \in R^3$. Ośrodek M może więc mieć strukturę porowatą (gdy $R^3 \setminus \bar{M}_t \neq \emptyset$) i skokowo-niejednorodną (gdy $\partial M_t \cap M_t \neq \emptyset$).

Zakładamy, że w ośrodku M można wyróżnić skończoną liczbę N składników $B^{(a)}$, ..., $B^{(N)}$. Przez $B_t^{(a)}$, $B_t^{(a)} \subset M_t$, oznaczymy sumę obszarów przestrzeni R^3 zajętych przez składnik $B^{(a)}$ ośrodka w dowolnej chwili t , $M_t = \cup B_t^{(a)}$. Żądamy, by istniała liczba r , $r > 0$, taka by $K(x, r) \cap B_t^{(a)} \neq \emptyset$, $a = 1, \dots, N$, było dla każdego x , $x \in R^3$, skończoną

sumą regularnych rozłącznych obszarów w \mathbb{R}^3 , przy czym wszystkie pola charakteryzujące własności lub stan dowolnego składnika $B^{(a)}$ były dostatecznie regularne w każdym z tych obszarów. Zakładamy ponadto, że w jednym punkcie przestrzeni \mathbb{R}^3 w dowolnej lecz ustalonej chwili t może się znajdować najwyżej jeden składnik, tj. $B_i^{(a)} \cap B_i^{(b)} = \emptyset$ dla każdego $a \neq b$. Wszystkie rozważania aż do końca p. 4 dotyczą dowolnego lecz ustalonego składnika $B = B^{(a)}$; faktu tego nie będziemy zaznaczać przy użyciu wskaźnika a , wyróżniającego składnik. Należy jednak pamiętać, że wprowadzone w p. 1-4 obiekty należy traktować jako dotyczące jednego wybranego składnika $B = B^{(a)}$.

Przyporządkujemy każdemu \mathbf{x} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, bazę wektorową $\Delta \mathbf{x}_k = (\delta_{k1} \Delta x^1, \delta_{k2} \Delta x^2, \delta_{k3} \Delta x^3)$, $k = 1, 2, 3$, tj. wprowadzimy na razie dowolną funkcję $\Delta \mathbf{x}_k = \Delta \mathbf{x}_k(\mathbf{x})^1$, określoną w \mathbb{R}^3 . Funkcję tę przyjmujemy niezależnie dla każdego składnika. Symbolem $\Delta x^k = |\Delta \mathbf{x}_k|$ oznaczymy długość k -tego wektora bazy, $\Delta \mathbf{x}_k = \Delta \mathbf{x}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, 3$. Przez $P(\mathbf{x})$ oznaczymy prostopadłościan o środku w dowolnym punkcie \mathbf{x} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, rozpięty na wektorach bazy $\Delta \mathbf{x}_1, \Delta \mathbf{x}_2, \Delta \mathbf{x}_3$, przyporządkowanej temu punktowi, por. rys. 1.

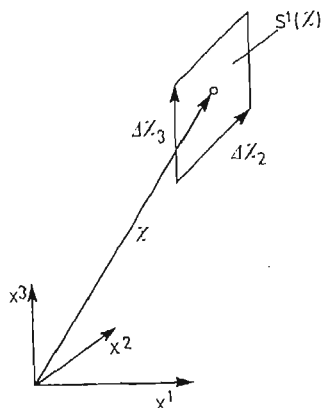


Rys. 1

Objętość $\Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$ tego prostopadłościanu oznaczymy przez ΔV . Ponadto przez $S^l(\mathbf{x})$ oznaczymy prostokąt o środku w dowolnym punkcie \mathbf{x} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, rozpięty na wektorach bazy $\Delta \mathbf{x}_m, \Delta \mathbf{x}_n$, $l \neq m \neq n \neq l$, przyporządkowanej temu punktowi, por. rys. 2. Pole prostokąta $S^l(\mathbf{x})$ oznaczymy przez ΔS^l . Zarówno $\Delta \mathbf{x}_k, \Delta V$ jak i $\Delta S^l(\mathbf{x})$ są w przypadku ogólnym funkcjami punktu \mathbf{x} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Niech $\Psi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in B_t = B_i^{(a)}$, $t \in \mathbb{R}$, oznacza dowolne pole tensorowe o walencji K , $K \geq 0$, które jest polem gęstości objętościowej w dowolnym równaniu bilansu wyróżnionego składnika $B = B_i^{(a)}$. Zakładamy, że dla każdej chwili t pole $\Psi(\cdot, t)$ jest ciągłe w $B_i^{(a)}$ a ponadto $\Psi(\mathbf{x}, \cdot)$ jest różniczkowalne podług czasu dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Położmy $\Psi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_i^{(a)}$, rozszerzając dziedzinę funkcji $\Psi(\cdot, t)$ na \mathbb{R}^3 .

¹⁾ Tu i dalej wskaźniki i, j, k, l, m, n przebiegają ciąg 1, 2, 3. Konwencja sumacyjna obowiązuje tylko względem wskaźnika powtarzającego się dwukrotnie na różnych poziomach.

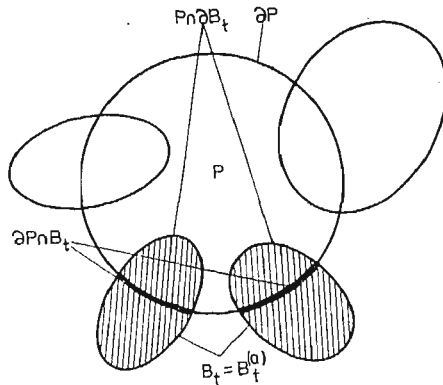


Rys. 2

Zdefiniujmy dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ następujące uśrednienia pól $\Psi(\mathbf{x}, t)$ po objętościach

$$(1.1) \quad \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \Psi(\mathbf{y}, t) dv; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\bar{\Psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{P(\mathbf{x})} \Psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) dv.$$



Rys. 3

Kładąc $\Psi = \Xi \rho$, gdzie $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ jest gęstością masy wybranego składnika, zdefiniujemy także następujące uśrednienia pola $\Xi(\mathbf{x}, t)$ podług masy tego składnika

$$(1.2) \quad \bar{\Xi}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\int_{P(\mathbf{x})} \Xi(\mathbf{y}, t) \rho(\mathbf{y}, t) dv}{\int_{P(\mathbf{x})} \rho(\mathbf{y}, t) dv} = \frac{1}{\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)} \int_{P(\mathbf{x})} \Xi(\mathbf{y}, t) \rho(\mathbf{y}, t) dv,$$

$$\bar{\Xi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)} \int_{P(\mathbf{x})} \Xi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) \rho(\mathbf{y}, t) dv.$$

Niech $\Phi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, oznacza pole tensorowe o walencji $K+1$, $K \geq 0$, takie, że $\Phi(\cdot, t)$ jest polem gęstości na powierzchni zorientowanej wektorem \mathbf{n} , występującej w dowolnym globalnym równaniu bilansu składnika $B = B^{(a)}$. Zakładamy, że $\Phi(\cdot, t)$ jest ciągle w $\bar{B}_t^{(a)}$ oraz różniczkowalne w każdym z rozłącznych obszarów, z których składa się $B_t^{(a)}$, $t \in \mathbb{R}$. Rozszerzymy dziedzinę funkcji $\Phi(\cdot, t)$ na \mathbb{R}^3 kładąc, jak poprzednio, $\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_t^{(a)}$. Dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, oraz dla każdego wersora $e_m = (\delta_{m1}, \delta_{m2}, \delta_{m3})$ zdefiniujemy następujące uśrednienia po powierzchniach

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \tilde{\Phi}^m(\mathbf{x}, t) &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_m} \int_{S^m(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{y}, t) e_m ds; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\Phi}^{k_1 \dots k_K m}(\mathbf{x}, t) &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_m} \int_{S^m(\mathbf{x})} \Phi^{k_1 \dots k_K m}(\mathbf{y}, t) ds. \end{aligned}$$

Wartości pól uśrednionych $\bar{\Psi}(\cdot, t)$, $\bar{\Xi}(\cdot, t)$, $\tilde{\Phi}^m(\cdot, t)$, $t \in \mathbb{R}$, zależą oczywiście od funkcji Δx_K . Przyjmiemy dalej, że pola te są co najmniej ciągle w \mathbb{R}^3 dla każdej chwili $t \in \mathbb{R}$.

2. Ogólna postać równania bilansu

Niech P będzie dowolnym regularnym obszarem w \mathbb{R}^3 . Rozpatrując jeden wybrany składnik $B^{(a)}$, oznaczmy $B_t = B_t^{(a)}$. Oznaczmy ponadto przez $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \partial(B_t \cap P)$, jednostkowy wektor zewnętrznie normalny do gładkich płatów powierzchni $\partial(B_t \cap P)$. Niech ψ , π , σ będą polami określonymi w B_t , $t \in \mathbb{R}$, które wraz z polem prędkości \mathbf{v} składnika $B^{(a)}$ są powiązane poniższym ogólnym równaniem bilansu dla tego składnika²⁾

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{P \cap B_t} \psi(\mathbf{x}, t) dv &= \int_{P \cap B_t} [\pi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) ds + \\ &+ \int_{P \cap B_t} \sigma(\mathbf{x}, t) dv + \int_{P \cap \partial B_t} \pi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) ds. \end{aligned}$$

Ze związku (2.1) wynika, że ψ jest polem określającym gęstość objętościową tej wielkości fizycznej, którą bilansujemy; jest to pole tensorowe o walencji K , $K \geq 0$. Pole tensorowe σ , o tej samej walencji K jest gęstością objętościową źródeł wewnętrznych wielkości bilansowanej. Iloczyn $\pi \cdot \mathbf{n}$ charakteryzuje przepływ wielkości bilansowanej przez jednostkę powierzchni zorientowanej wektorem normalnym \mathbf{n} . Samo pole tensorowe π o walencji $K+1$, $K \geq 0$, charakteryzuje więc gęstość źródeł powierzchniowych wielkości bilansowanej, niezależnej od transportu masy; \mathbf{v} jest polem wektorowym prędkości materiału składnika $B^{(a)}$. Wszystkie powyższe pola są określone w każdej chwili t w $\bar{B}_t^{(a)}$, $\bar{B}_t^{(a)} \subset M_t$, a równanie (2.1) ma być spełnione dla każdego regularnego obszaru P , $P \subset \mathbb{R}^3$.

Celem napisania ogólnego równania bilansu dla dowolnego regularnego, niezależnego od czasu, obszaru P , $P \subset \mathbb{R}^3$, rozszerzymy pola ψ , ..., \mathbf{v} , dotychczas określone w \bar{B}_t dla każdego t , na całą przestrzeń \mathbb{R}^3 , kładąc $\psi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, $\pi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, $\sigma(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$

²⁾ Ogólnym równaniem bilansu nazywamy równanie bilansu, w którym polom ψ , π , σ nie nadajemy wyraźnego sensu fizycznego, por. [8], str. 141. Wyprowadzenie związku (2.1) ze znanej ogólnej zasady bilansu, [8], podano w Dodatku na końcu pracy.

dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_t$ i każdego $t \in \mathbb{R}$. Oznaczmy tu przez $\Sigma_t(P)$ sumę brzegów rozłącznych obszarów, z których składa się ∂B_t , zawartych w obszarze P , $\Sigma_t(P) \stackrel{\text{df}}{=} P \cap \partial B_t$. Ogólne równanie bilansu ma wtedy postać

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_P \psi(\mathbf{x}, t) dv &= \oint_{\partial P} [\pi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{n} ds + \\ &+ \int_P \sigma(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\Sigma_t(P)} \pi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) ds, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_P \psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) dv &= \oint_{\partial P} [\pi^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) - \psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) v^l(\mathbf{x}, t)] n_l ds + \\ &+ \int_P \sigma^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\Sigma_t(P)} \pi^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) n_l ds. \end{aligned}$$

Związek (2.2) ma być spełniony dla dowolnego regularnego obszaru P w \mathbb{R}^3 . Stanowić on będzie podstawę do otrzymania w punkcie 3 funkcyjnych różnicowych równań bilansu, z których otrzymamy w punkcie 4 zasady bilansu dla pól uśrednionych, tj. pól zdefiniowanych przez (1.1) - (1.3).

3. Funkcyjne różnicowe równania bilansu

Przyjmijmy $P = P(\mathbf{x})$ w (2.2) dla dowolnego \mathbf{x} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ przy danej, na razie dowolnej bazie $\Delta \mathbf{x}_1, \Delta \mathbf{x}_2, \Delta \mathbf{x}_3$ (baza ta może zależeć również od \mathbf{x} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, por. pkt. 1). Oznaczmy ponadto $\Sigma_t(\mathbf{x}) \stackrel{\text{df}}{=} \Sigma_t(P)$ dla $P = P(\mathbf{x})$. Zdefiniujmy dla dowolnej funkcji $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, operator różnicowy

$$(3.1) \quad \frac{\Delta}{\Delta \mathbf{x}^l} f(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{f(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_l, t) - f(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_l, t)}{\Delta \mathbf{x}^l}.$$

Dzieląc (2.2) przez ΔV i uwzględniając definicję (1.1), (1.2), (1.3) i (3.1) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{V} \int_{P(\mathbf{x})} \psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) dv; \\ \frac{\Delta}{\Delta \mathbf{x}^l} \bar{\pi}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial P(\mathbf{x})} \pi^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{y}, t) n_l ds; \quad \bar{\sigma}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \sigma^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) dv. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu mamy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial P(\mathbf{x})} \psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) v^l(\mathbf{y}, t) n_l ds &= \\ = \sum_{l=1}^3 \frac{1}{\Delta S_l \Delta \mathbf{x}^l} \left[\int_{S^l(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_l)} \psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) v^l(\mathbf{y}, t) ds - \int_{S^l(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_l)} \psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) v^l(\mathbf{y}, t) ds \right], \end{aligned}$$

Oznaczając przez $\varrho = \varrho(\mathbf{x}, t)$ gęstość masy rozpatrywanego składnika, zdefiniujmy prędkość średnią $\bar{\mathbf{v}}$ tego składnika, zgodnie z (1.2)

$$(3.3) \quad \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\int_{P(\mathbf{x})} \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) \varrho(\mathbf{y}, t) dv}{\int_{P(\mathbf{x})} \varrho(\mathbf{y}, t) dv}.$$

Przedstawmy następnie wektor prędkości jako sumę

$$(3.4) \quad \mathbf{v}^l(\mathbf{y}, t) = \hat{\mathbf{v}}^l(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathbf{v}}^{*l}(\mathbf{y}, t); \quad \mathbf{y} \in S^l(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie

$$(3.5) \quad \hat{\mathbf{v}}^{*l}(\mathbf{y}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{v}^l(\mathbf{y}, t) - \hat{\mathbf{v}}^l(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y} \in S^l(\mathbf{x}),$$

jest definicją tzw. prędkości oscylacyjnej $\hat{\mathbf{v}}^*$ w dowolnie wybranym punkcie \mathbf{y} prostokąta $S^l(\mathbf{x})$. Rozkład prędkości oscylacyjnej $\hat{\mathbf{v}}^{*l}$ jest określony niezależnie dla każdego prostokąta $S^l(\mathbf{x})$. Podobnie przyjmijmy

$$(3.6) \quad \psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) = \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) + \hat{\psi}^{*k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t); \quad \mathbf{y} \in P(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie

$$(3.7) \quad \hat{\psi}^{*k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) - \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y} \in P(\mathbf{x}),$$

jest oscylacją wielkości ψ w dowolnym punkcie prostopadłościanu $P(\mathbf{x})$; wielkość oscylacyjna $\hat{\psi}^*$ jest określona niezależnie dla każdego prostopadłościanu $P(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Prawą stronę równości (3.2) można teraz doprowadzić do postaci

$$(3.8) \quad \sum_{l=1}^3 \frac{1}{\Delta S_l \Delta x^l} \left[\int_{S^l(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_l)} (\hat{\psi}^{*k_1 \dots k_K} \hat{v}^l + \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K} \hat{v}^{*l} + \hat{\psi}^{k_1 \dots k_K} \hat{v}^{*l}) ds - \int_{S^l(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_l)} \hat{\psi}^{*k_1 \dots k_K} \hat{v}^l + \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K} \hat{v}^{*l} + \hat{\psi}^{k_1 \dots k_K} \hat{v}^{*l} ds + \frac{\Delta}{\Delta x^l} (\bar{\psi}^{k_1 \dots k_K} \hat{v}^l) = \frac{\Delta}{\Delta x^l} (\tilde{\eta}^{k_1 \dots k_K l} + \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K} \hat{v}^l), \right.$$

w której

$$(3.9) \quad \tilde{\eta}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(\mathbf{x})} \eta^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{y}, t) ds; \quad \mathbf{y} \in S^l(\mathbf{x}),$$

$$\eta^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{y}, t) \stackrel{\text{df}}{=} (\psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) \hat{v}^l(\mathbf{y}, t) + \hat{\psi}^{*k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) \hat{v}^l(\mathbf{y}, t)).$$

Korzystając z (3.1) oraz (3.8), równość (3.2) przedstawimy w postaci

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\partial P(\mathbf{x})} \psi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) v^l(\mathbf{y}, t) = \sum_{l=1}^3 \left[\frac{\Delta}{\Delta x^l} \hat{v}^l(\mathbf{x}, t) \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta}{\Delta x^l} \tilde{\eta}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) \right].$$

Oznaczmy ponadto

$$(3.10) \quad q^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_t(\mathbf{x})} \pi^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{y}, t) n_t(\mathbf{y}, t) ds.$$

Wykorzystując powyższe przekształcenia oraz wprowadzone oznaczenia, ogólne równanie bilansu (2.2) doprowadzimy do postaci

$$(3.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta}{\Delta x^l} [\tilde{\pi}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) - \hat{v}^l(\mathbf{x}, t) \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\eta}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t)] + \bar{\sigma}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) + q^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Związek (3.11) nazwiemy funkcyjnym różnicowym równaniem bilansu dla dowolnego

lecz ustalonego składnika $B = B^{(0)}$. Przy wyprowadzaniu równania (3.11) nie korzystano z żadnych założeń upraszczających opis ośrodka. Równanie (3.11) stanowi punkt wyjścia do otrzymania różniczkowych zasad bilansu dla pól uśrednionych (1.1) - (1.3).

4. Różniczkowe zasady bilansu dla pól uśrednionych

Oznaczmy przez Φ dowolne pole tensorowe o walencji $K+1$, $K \geq 0$, występujące w zasadzie bilansu, tj. Φ niech oznacza pola $\bar{\pi}$, $\bar{\psi} \otimes \bar{v}$, $\bar{\eta}$, a także ich sumę. Załóżmy, że dla przyjętej funkcji bazy wektorowej $\Delta x_k = \Delta x_k(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $k = 1, 2, 3$, pola $\Phi(\cdot, t)$ są różniczkowalne, a pozostałe pola występujące w (3.11) są ciągłe w \mathbb{R}^3 dla każdego t , $t \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy różnicowo-różniczkowe operatory

$$(4.1) \quad \delta_l(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta(\Phi)}{\Delta x^l} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^l}, \quad l = 1, 2, 3,$$

oraz wprowadźmy pola o wartościach

$$(4.2) \quad \delta_0^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_l(\bar{\pi}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) - \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) \bar{v}^l(\mathbf{x}, t) - \bar{\eta}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t)).$$

Funkcyjną różnicową zasadę bilansu (3.11) można teraz napisać w postaci

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) &= \text{div}(\bar{\pi}(\mathbf{x}, t) - \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{v}(\mathbf{x}, t) - \bar{\eta}(\mathbf{x}, t)) + \bar{\sigma}(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t) + \delta_0(\mathbf{x}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) &= (\bar{\pi}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) - \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) \bar{v}^l(\mathbf{x}, t) - \bar{\eta}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t))_{,l} + \\ &\quad + \bar{\sigma}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) + q^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) + \delta_0^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdzie tu i dalej oznaczmy $(\cdot)_{,k} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^k}$.

Równanie (4.3) ma postać lokalnego równania bilansu, w którym występuje formalnie wprowadzone pole gęstości objętościowych źródeł δ_0 . Załóżmy, że każdemu punktowi \mathbf{x} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ można przyporządkować taką trójkę wektorów Δx_k , $k = 1, 2, 3$, że w klasie rozważanych problemów dla rozpatrywanego ciała, pole gęstości objętościowych „źródeł” δ_0 można uznać jako zaniedbywalnie małe w równaniach bilansu (4.3). Równanie (4.3) z pomijalnie małym polem „źródeł” δ_0 nazwiemy różniczkową zasadą bilansu dla pól uśrednionych.

Łatwo zauważyć, że różniczkową zasadę bilansu dla pól uśrednionych można stosować gdy każde pole $\Phi(\cdot, t)$, $t \in \mathbb{R}$, w każdym obszarze $P(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, jest w przybliżeniu polem liniowym. W tym przypadku bowiem $\delta_l(\Phi)$ jest zaniedbywalnie małe, a tym samym zaniedbywalnie małe są wartości formalnie wprowadzonej gęstości objętościowej δ_0 w zasadzie bilansu (4.3).

Zakładając tu i dalej, że $\delta_l(\Phi) \cong 0$ będziemy pole $\bar{\eta}^{k_1 \dots k_K}(\cdot, t)$, występujące w (3.11), traktować w przybliżeniu jako liniowe w każdym z obszarów $P(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Tym samym

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \eta^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{y}, t) dV = \frac{1}{\Delta x^l} \int_{x - \frac{1}{2} \Delta x^l}^{x + \frac{1}{2} \Delta x^l} \frac{1}{\Delta S_l} \int_{S(\mathbf{y})} \eta^{k_1 \dots k_K l} ds dy^l = \\ &= \frac{1}{\Delta x^l} \int_{x - \frac{1}{2} \Delta x^l}^{x + \frac{1}{2} \Delta x^l} \eta^{k_1 \dots k_K l} dy^l \cong \frac{1}{\Delta x^l} \bar{\eta}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) \Delta x^l, \end{aligned}$$

czyli

$$\tilde{\eta}(\mathbf{x}, t) \cong \tilde{\eta}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in R^3,$$

tj. uśrednienie po powierzchni $S^l(\mathbf{x})$ funkcji $\eta^{k_1 \dots k_K l}$ zastąpimy dalej uśrednieniem tej funkcji po obszarze $P(\mathbf{x})$. Równość przybliżona powyższej postaci dotyczy także dowolnego pola $\Phi(\cdot, t)$, $t \in R$. Oznaczając $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \delta_0 - \text{div}(\tilde{\eta} - \tilde{\eta})$, różniczkową zasadę bilansu (4.3) napiszemy w postaci alternatywnej

$$(4.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) = \text{div}(\bar{\pi}(\mathbf{x}, t) - \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{v}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\eta}(\mathbf{x}, t)) + \bar{\sigma}(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x}, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) = (\bar{\pi}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) - \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) \bar{v}^l(\mathbf{x}, t) - \tilde{\eta}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t))_{,l} +$$

$$+ \bar{\sigma}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) + q^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) + \delta^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad t \in R^2,$$

w której wkład „źródeł” o gęstości $\delta^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t)$ przyjmujemy jako pomijalnie mały.

W dalszym ciągu będziemy korzystać z różniczkowej zasady bilansu dla pól uśrednionych w postaci (4.4). Występujące w tej zasadzie uśrednione pola (zgodnie z definicjami (1.1), (1.2), (1.3)) są określone przez

$$(4.5) \quad \bar{\psi}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \psi^{k_1 \dots k_K} dv,$$

$$\bar{\pi}^{k_1 \dots k_K l}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(\mathbf{x})} \pi^{k_1 \dots k_K l} ds,$$

$$\bar{v}^k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\bar{\varrho}(\mathbf{x}, t)} \int_{P(\mathbf{x})} v^k \varrho dv; \quad \bar{\varrho}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \varrho dv,$$

$$\tilde{\eta}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \psi^{k_1 \dots k_K} \bar{v}^l dv,$$

$$\bar{\sigma}^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \sigma^{k_1 \dots k_K} dv,$$

$$q^{k_1 \dots k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_l(\mathbf{x})} \pi^{k_1 \dots k_K l} n_l ds; \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad t \in R,$$

natomiast pole $\delta(\mathbf{x}, t)$ będziemy interpretować jako zaniedbywalnie małą wydajność (formalnie wprowadzonych) dodatkowych źródeł wielkości bilansowanej.

Należy pamiętać, że wprowadzone ogólne zasady bilansu oraz występujące tam pola, dotyczą dowolnego lecz ustalonego składnika $B^{(a)}$. Uzyskane powyżej funkcyjna różnicowa lokalna postać zasad bilansu (3.11), oraz ogólna postać różniczkowa (4.4) umożliwiają pewien uśredniony opis wieloskładnikowego ciała porowatego (jego homogenizację). Opis ten jest szczególnie przydatny np. w ciałach kapilarno-porowatych, gruntach, niektórych kompozytach, oraz tam, gdzie dysponujemy tylko statystycznymi informacjami o rozkładzie składników lub o porowatości. W tych sytuacjach dysponujemy równaniami konstytutywnymi bezpośrednio dla pól uśrednionych (4.5). Niektóre zastosowania zasad (4.4) podamy w punktach 4 - 7.

W zasadach bilansu (3.11) i (4.4), wszystkie pola uśrednione zależą od postaci funkcji wektorowych $\Delta x_k = \Delta x_k^{(a)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $a = 1, \dots, N$ bowiem dowolnie obrane prostopadłościanny $P(\mathbf{x})$ oraz prostokąty $S^l(\mathbf{x})$ występujące w równaniach (4.5), są rozpięte na wektorach $\Delta x_1(\mathbf{x})$, $\Delta x_2(\mathbf{x})$, $\Delta x_3(\mathbf{x})$ oraz odpowiednio $\Delta x_m(\mathbf{x})$, $\Delta x_n(\mathbf{x})$. Wartości funkcji $\Delta x_k^{(a)}(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, 3$ dla każdego \mathbf{x} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ wyznaczają więc pewien rodzaj uśrednienia, który dla każdego składnika $B^{(a)}$ może być inny. W funkcyjnych różnicowych zasadach bilansu (3.11) rodzaj uśrednienia jest dowolny w przeciwieństwie do różniczkowych zasad bilansu (4.4), w których dodatkowo żądamy, by wkład pola δ do bilansu był pomijalnie mały. Wybór rodzaju uśrednienia (tj. przyjęcie funkcji $\Delta x_k(\cdot)$ lub $P(\cdot)$) zapewniający zanedbywalność wielkości δ w różniczkowej zasadzie bilansu (4.4) zależy od struktury ośrodka i zachodzących w nim procesów. Kryteria tego wyboru mają więc charakter fizyczny, por. np. [7], i dla różnych zjawisk fizycznych mogą być zupełnie różne. W szczególności żądamy, by wszystkie przekroje przez ośrodek prostokątami $S^l(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $l = 1, 2, 3$ były przekrojami statystycznymi, [6]. Różniczkowej zasady bilansu nie możemy więc stosować do ciał np. o regularnym rozkładzie inkluzji, pustek, warstw, włókien itp.

Zauważmy, że w ogólnych zasadach bilansu danych przez (3.11), (4.4) i (4.5), tylko pole prędkości \mathbf{v} jest w ścisłym tego słowa znaczeniu polem fizycznym. Wszystkim pozostałym polom, tj. ψ , π , σ , sens fizyczny nadamy w dalszej części pracy, w której podamy przykłady zastosowań ogólnej zasady bilansu (4.4) do budowy niektórych równań mechaniki porowatych ciał wieloskładnikowych.

Nieco inne sposoby konstrukcji różniczkowych ogólnych zasad bilansu podano w [9], gdzie zasady te nie zawierają pól $\delta(\mathbf{x}, t)$ natomiast pola o podobnym znaczeniu pojawiają się w definicjach wielkości uśrednionych.

5. Zasady zachowania dla pól uśrednionych

Korzystając ze wzorów (4.4) i (4.5) przedstawimy zasady zachowania dla pól uśrednionych w wieloskładnikowych ciałach porowatych. Ograniczymy się wyłącznie do zjawisk mechanicznych.

5.1. Zasada zachowania masy składnika. Mamy tutaj: $\psi = \varrho^{(a)}$, $\pi = 0$, $\sigma = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(a)}$. Tak więc zgodnie z (4.4) i (4.5) otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} dv = \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\dot{\varrho}^{(a)l} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} dv - \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \dot{\varrho}^{(a)l} \varrho^{(a)} dv \right) + \delta^{(a)}.$$

Ponieważ ostatnia całka jest równa zero (wynika to z (3.3) i (3.5)) przeto

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} dv + \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\dot{\varrho}^{(a)l} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} dv \right) = \delta^{(a)},$$

czyli

$$(5.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\varrho}^{(a)} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\dot{\varrho}^{(a)l} \bar{\varrho}^{(a)}) = \delta^{(a)}.$$

Przy założeniu, że pole $\delta^{(a)}$ jest pomijalnie małe, wzór (5.1) przedstawia różniczkową zasadę zachowania masy dla pól uśrednionych. Pomijając w (5.1), pole $\delta^{(a)}$ otrzymamy

równanie

$$(5.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\varrho}^{(a)} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\dot{\varrho}^{(a)l} \bar{\varrho}^{(a)}) = 0,$$

które nazwiemy uproszczonym równaniem zachowania masy, lub uproszczonym równaniem ciągłości składnika $B^{(a)}$. Wzór (5.2) ma podobną budowę jak klasyczna lokalna zasada zachowania masy, niemniej znaczenie występujących w (5.2) pól jest inne.

5.2. Zasada zachowania pędu składnika. Korzystamy z równości (4.4) i (4.5), gdzie funkcjami podcałkowymi są: $\psi^k = \varrho^{(a)} v^{(a)k}$, $\sigma^{(a)k} = \varrho^{(a)} b^{(a)k}$, $\tau^{kl} = T^{(a)kl}$, $v^k = v^{(a)k}$, $b^{(a)}$ są siłami masowymi, $T^{(a)kl}$ jest tensorem naprężenia Cauchy'ego. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} v^{(a)k} dv &= \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(x)} T^{(a)kl} ds - \dot{\varrho}^{(a)l} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} v^{(a)k} dv - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} v^{(a)k} \dot{\varrho}^{(a)l} \varrho^{(a)} dv \right) + \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} b^{(a)k} dv + \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_i(x)} T^{(a)kl} n_l ds + \delta^{(a)k}. \end{aligned}$$

Korzystając z rozkładu (3.4) możemy napisać

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \dot{\varrho}^{(a)l} (\dot{\varrho}^{(a)k} + \dot{\varrho}^{(a)k}) \varrho^{(a)} dv &= \dot{\varrho}^{(a)k} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} \dot{\varrho}^{(a)l} dv + \\ &\quad + \int_{P(x)} \dot{\varrho}^{(a)l} \dot{\varrho}^{(a)k} \varrho^{(a)} dv = \int_{P(x)} \varrho^{(a)} \dot{\varrho}^{(a)k} \dot{\varrho}^{(a)l} dv. \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe wyrażenie, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} v^{(a)k} dv &= \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(x)} T^{(a)kl} ds - \dot{\varrho}^{(a)k} \dot{\varrho}^{(a)l} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} dv - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} \dot{\varrho}^{(a)k} \dot{\varrho}^{(a)l} dv \right) + \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} b^{(a)k} dv + \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_i(x)} T^{(a)kl} n_l ds + \delta^{(a)k}. \end{aligned}$$

Skąd następnie, korzystając z (1.1) - (1.3)

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\varrho}^{(a)l} \bar{\varrho}^{(a)}) = \frac{\partial}{\partial x^l} (\tilde{T}^{(a)kl} - \dot{\varrho}^{(a)k} \dot{\varrho}^{(a)l} \bar{\varrho}^{(a)} - \dot{W}^{*(a)kl}) + \bar{\varrho}^{(a)} \dot{b}^{(a)k} + r^{(a)k} + \delta^{(a)k},$$

gdzie

$$(5.4) \quad r^{(a)k} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_i(x)} T^{(a)kl} n_l ds; \quad \dot{W}^{*(a)kl} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} \dot{\varrho}^{(a)k} \dot{\varrho}^{(a)l} dv.$$

Równanie (5.3), po pominięciu wielkości $\delta^{(a)k}$, jest uproszczoną różniczkową postacią zasady zachowania pędu. Jeżeli prędkości oscylacyjne $\dot{v}^{(a)}$ są niewielkie wobec wartości prędkości średnich $\dot{v}^{(a)}$, można pominąć człon zawierający kwadraty prędkości $\dot{v}^{(a)}$. Po wprowadzeniu pochodnej całkowitej i wykorzystaniu równania (5.2), oraz po pominięciu $\delta^{(a)k}$, otrzymamy ostatecznie

$$(5.5) \quad \bar{\varrho}^{(a)} \frac{d_{(a)} \dot{\varrho}^{(a)k}}{dt} + \frac{\partial \dot{W}^{*(a)kl}}{\partial x^l} = \frac{\partial \tilde{T}^{(a)kl}}{\partial x^l} + \bar{\varrho}^{(a)} \dot{b}^{(a)k} + r^{(a)k},$$

gdzie

$$(5.6) \quad \frac{d_{(a)}}{dt} \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} v^{(a)}.$$

Wzór (5.5) przedstawia uproszczoną różniczkową postać zasady bilansu pędu.

5.3. Zasada zachowania momentu pędu. Wielkością bilansowaną jest w tym przypadku moment pędu, którego gęstość dla ustalonego składnika $B^{(a)}$ wyrażamy przy pomocy tensora antisymetrycznego: $\psi^{ij} = \varrho^{(a)} v^{(a)l} x^{ij}$. Podobnie przyjmiemy $\sigma^{ij} = \varrho^{(a)} b^{(a)l} x^{ij}$, $\pi^{ij} = T^{(a)l[ik]x^{j]l}$. Podstawiając powyższe wartości pól do równości (4.4), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} v^{(a)l} y^{j]l} dv &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{\Delta S_k} \int_{P(x)} T^{(a)l[ik]y^{j]l} ds - \right. \\ &\quad \left. - \dot{\vartheta}^{(a)k} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} v^{(a)l} y^{j]l} dv - \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} v^{(a)l} y^{j]l} \dot{\vartheta}^{(a)k} dv \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} b^{(a)l} y^{j]l} dv + \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_i(x)} T^{(a)l[ik]y^{j]l} n_k ds + \delta^{(a)ij}. \end{aligned}$$

Korzystając z rozkładu (3.4) oraz przyjmując $y = x + \xi$, mamy

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\varrho}^{(a)} \dot{\vartheta}^{(a)l} x^{j]l} + \bar{\varrho}^{(a)} \dot{\vartheta}^{(a)l} \mu^{j]l}) &= \frac{\partial}{\partial x^k} (\tilde{T}^{(a)l[ik]x^{j]l} + \\ &\quad + M^{(a)ijk} - \dot{\vartheta}^{(a)k} \dot{\vartheta}^{(a)l} x^{j]l} \bar{\varrho}^{(a)} - \bar{\varrho}^{(a)} \dot{\vartheta}^{(a)k} \dot{\vartheta}^{(a)l} \mu^{(a)j]l} + \\ &\quad + \bar{\varrho}^{(a)} \dot{b}^{(a)l} x^{j]l} + \bar{\varrho}^{(a)} H^{(a)[ij]} + r^{(a)l} x^{j]l} + R^{(a)[ij]} + \dot{U}^{(a)ij} + \delta^{(a)ij}, \end{aligned}$$

gdzie $\dot{U}^{(a)ij}$ zależą od prędkości oscylacyjnej $\dot{v}^{(a)}$ oraz

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}^{(a)} \mu^{(a)j} &\stackrel{df}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} \xi^j dv, \\ M^{(a)ijk} &\stackrel{df}{=} \frac{1}{\Delta S_k} \int_{S^k(x)} T^{(a)l[ik] \xi^j]l} ds, \\ \bar{\varrho}^{(a)} H^{(a)ij} &\stackrel{df}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \bar{\varrho}^{(a)} b^{(a)l} \xi^j]l} dv, \\ R^{(a)ij} &\stackrel{df}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_i(x)} T^{(a)l[ik] \xi^j]l} n_k ds. \end{aligned}$$

Uwzględniając zasadę zachowania pędu, (5.7) zredukuje się do postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\varrho}^{(a)} \dot{\vartheta}^{(a)l} \mu^{(a)j]l}) &= \tilde{T}^{(a)[ij]} + M^{(a)ijk}{}_{,k} - (\bar{\varrho}^{(a)} \dot{\vartheta}^{(a)k} \dot{\vartheta}^{(a)l} \mu^{(a)j]l})_{,k} + \\ &\quad + \bar{\varrho}^{(a)} \dot{b}^{(a)l} x^{j]l} + \bar{\varrho}^{(a)} H^{(a)[ij]} + R^{(a)[ij]} + \delta^{(a)ij}. \end{aligned}$$

Ponieważ zgodnie z zasadą zachowania masy, dla dowolnego f mamy

$$\bar{\varrho}^{(a)} \frac{d_{(a)} f}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\varrho}^{(a)} f) + \text{div}(\bar{\varrho}^{(a)} f \cdot \dot{v}^{(a)}),$$

otrzymany ostatecznie po pominięciu $\delta^{(a)ij}$

$$(5.8) \quad \bar{\varrho}^{(a)} \frac{d^{(a)}}{dt} (\tilde{\vartheta}^{(a)\Gamma i} \mu^{(a)J}) = \tilde{T}^{(a)\Gamma ij} + M^{(a)ijk}{}_{,k} + H^{(a)\Gamma ij} + R^{(a)\Gamma ij} + \dot{U}^{(a)\Gamma ij}.$$

Jest to uproszczona postać różniczkowa zasady zachowania momentu pędu.

5.4. Zasada zachowania energii. Mamy tutaj $\psi = \frac{1}{2} \varrho^{(a)} v^{(a)k} v_k^{(a)} + \varrho^{(a)} \varepsilon^{(a)}$, $\pi^k = T^{(a)kl} v_l^{(a)} + h^{(a)k}$, $\sigma = \varrho^{(a)} b^{(a)k} v_k^{(a)} + q^{(a)}$, co po podstawieniu do (4.5) i (4.4) daje

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \left(\frac{1}{2} \varrho^{(a)} v^{(a)k} v_k^{(a)} + \varrho^{(a)} \varepsilon^{(a)} \right) dv &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{1}{\Delta S_k} \int_{S^k(x)} (T^{(a)kl} v_l^{(a)} + h^{(a)k}) ds - \right. \\ &- \tilde{\vartheta}^{(a)k} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \left(\frac{1}{2} \varrho^{(a)} v^{(a)k} v_k^{(a)} + \varrho^{(a)} \varepsilon^{(a)} \right) dv - \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \left(\frac{1}{2} \varrho^{(a)} v^{(a)k} v_k^{(a)} + \varrho^{(a)} \varepsilon^{(a)} \right) \tilde{\vartheta}^{(a)k} dv \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} (\varrho^{(a)} b^{(a)k} v_k^{(a)} + q^{(a)}) dv + \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_t(x)} (T^{(a)kl} v_l^{(a)} + h^{(a)k}) n_k ds + \delta^{(a)}. \end{aligned}$$

Wykorzystując związek (3.4) oraz definicje (1.1) - (1.3) mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{\varrho}^{(a)} \tilde{\vartheta}^{(a)k} \tilde{\vartheta}_k^{(a)} + \bar{\varrho}^{(a)} \varepsilon^{(a)} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\tilde{\vartheta}_k^{(a)} \tilde{T}^{(a)kl} + \tilde{h}^{(a)k} - \right. \\ &- \tilde{\vartheta}^{(a)k} \left(\frac{1}{2} \bar{\varrho}^{(a)} \tilde{\vartheta}^{(a)m} \tilde{\vartheta}_m^{(a)} + \bar{\varrho}^{(a)} \varepsilon^{(a)} \right) \left. \right] + \bar{\varrho}^{(a)} \dot{b}^{(a)k} \tilde{\vartheta}_k^{(a)} + q^{(a)} + r^{(a)k} \tilde{\vartheta}_k^{(a)} + s^{(a)} + \dot{W}^{(a)} + \delta^{(a)}, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono

$$s^{(a)} = \frac{df}{\Delta V} \int_{\Sigma_t(x)} h^{(a)k} n_k ds,$$

a $\dot{W}^{(a)}$ zawiera wszystkie człony z oscylacjami prędkości $\dot{v}^{(a)}$. Wykorzystajmy zasadę zachowania pędu (5.5), definicję (5.6) oraz zasadę zachowania masy (5.2). Równość powyższa sprowadzi się wtedy do postaci

$$(5.9) \quad \bar{\varrho}^{(a)} \frac{d^{(a)}}{dt} \varepsilon^{(a)} = \tilde{T}^{(a)kl} \tilde{\vartheta}_{l,k}^{(a)} + \tilde{h}^{(a)k}{}_{,k} + q^{(a)} + s^{(a)} + \dot{W}^{(a)} + \delta^{(a)},$$

Równanie (5.9), w którym pominiemy wielkość $\delta^{(a)}$, jest przybliżoną różniczkową postacią zasady zachowania energii.

6. Równania koncentracji dla pól uśrednionych.

Oznaczmy przez $C^{(a)}$ koncentrację składnika transportowanego przez ośrodek o gęstości ϱ , czyli gęstość ośrodka transportowanego jest równa $\varrho C^{(a)} = \varrho C^{(a)}$. Wprowadźmy ponadto współczynnik dyfuzji D . Wielkości podcałkowe w związkach (4.5) mają postać $\psi = \varrho^{(a)} = \varrho C^{(a)}$, $\sigma = 0$, $\pi_k = D^{(a)} C_{,k}^{(a)}$. Podstawiając powyższe zależności do (4.5) i wykorzystując (4.4), otrzymamy

$$(6.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} dv = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(x)} D^{(a)} C^{(a)},_l ds - \vartheta^{(a)l} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} dv - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \varrho^{(a)} \vartheta^{(a)l} dv \right) + \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_t(x)} D^{(a)} C^{(a)},_l n^l ds + \delta^{(a)}.$$

Przedstawmy $D^{(a)}$ zgodnie z (3.6)

$$D^{(a)} = \bar{D}^{(a)} + \bar{D}^{*(a)}; \quad \bar{D}^{(a)} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} D^{(a)} dv$$

wobec powyższego

$$\frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(x)} D^{(a)} C^{(a)},_l ds = \bar{D}^{(a)} \frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(x)} C^{(a)},_l ds + \frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(x)} \bar{D}^{*(a)} C^{(a)},_l ds = \\ = \bar{D}^{(a)} \tilde{C}^{(a)},_l ds + \frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(x)} \bar{D}^{*(a)} C^{(a)},_l ds.$$

Podstawiając powyższe związki do (6.1) mamy

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\varrho}^{(a)} = \frac{\partial}{\partial x^l} (\bar{D}^{(a)} \tilde{C}^{(a)},_k \delta^{kl} + a^{(a)l} - \vartheta^{(a)l} \bar{\varrho}^{(a)} - D^{(a)l}) + d^{(a)} + \delta^{(a)},$$

gdzie

$$a^{(a)l} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(x)} C^{(a)},_l \bar{D}^{*(a)} ds,$$

$$q^{(a)l} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} \bar{\varrho}^{(a)} \vartheta^{(a)l} dv,$$

$$d^{(a)} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma_t(x)} D^{(a)} C^{(a)},_l n^l dv.$$

Jeżeli $C^{(a)},_l n_l$ na powierzchni wewnętrznej $\Sigma_t(x)$ jest równa zeru, to po pominięciu $\delta^{(a)}$ otrzymamy uproszczone równanie koncentracji składnika $B^{(a)}$

$$(6.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\varrho}^{(a)} = \frac{\partial}{\partial x^l} (\bar{D}^{(a)} \tilde{C}^{(a)},_k \delta^{kl} + a^{(a)l} - \vartheta^{(a)l} \bar{\varrho}^{(a)} - q^{(a)l}),$$

w którym

$$(6.3) \quad \bar{\varrho}^{(a)} = \varrho C^{(a)} + \frac{1}{\Delta V} \int_{P(x)} C^{(a)} \bar{\varrho}^* dv,$$

oraz $\bar{C}^{(a)} \cong \tilde{C}^{(a)}$ (por. punkt 4).

7. Związki z teorią konsolidacji

Wprowadźmy funkcję losową, por. [8] s. 11, $X^{(a)}(\mathbf{x}, t, \chi)$, taką, że

$$(7.1) \quad X^{(a)}(\mathbf{x}, t, \chi) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \mathbf{x} \in \bar{B}_t^{(a)}, \\ 0 & \text{gdy } \mathbf{x} \sim \in \bar{B}_t^{(a)}. \end{cases}$$

Symbol realizacji χ będzie dalej pomijany, kładąc $\eta^{(a)}(\chi, t) \stackrel{\text{df}}{=} X^{(a)}(\mathbf{x}, t, \chi)$. Oznaczmy przez $\Delta V^{(a)}$ część objętości prostopadłościanu $P(\mathbf{x})$, zajęta przez składnik $B^{(a)}$

$$(7.2) \quad \Delta V^{(a)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{P(\mathbf{x})} \eta^{(a)}(\mathbf{y}, t) dv,$$

ponadto oznaczmy

$$(7.3) \quad n^{(a)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\Delta V^{(a)}(\mathbf{x}, t)}{\Delta V(\mathbf{x}, t)},$$

oraz średnią gęstość składnika $B^{(a)}$

$$(7.4) \quad \hat{\varrho}^{(a)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V^{(a)}} \int_{P(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} dv.$$

Ponieważ zgodnie z (1.1)

$$\bar{\varrho}^{(a)} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} dv,$$

przezo z uwzględnieniem (7.3) i (7.4), mamy

$$(7.5) \quad \bar{\varrho}^{(a)}(\mathbf{x}, t) = n^{(a)}(\mathbf{x}, t) \hat{\varrho}^{(a)}(\mathbf{x}, t).$$

Wielkość $\bar{\varrho}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ jest nazywana gęstością objętościową.

Korzystając z (7.5) napiszmy zasadę zachowania masy (5.2) w postaci

$$(7.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (n^{(a)} \hat{\varrho}^{(a)}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (n^{(a)} \hat{\varrho}^{(a)} \vartheta^{(a)i}) = 0; \quad a = 1, \dots, N.$$

Jeżeli $B^{(a)}$ jest materiałem wypełniającym pory ośrodka, to $n^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ można nazwać średnią porowatością obszaru $P(\mathbf{x})$ w chwili t . W teorii konsolidacji zamiast średniej porowatości występuje porowatość w „punkcie”. Równanie (7.6) jest formalnie identyczne z jego odpowiednikiem w teorii konsolidacji, [6], jednakże występują różnice w sposobie interpretacji wyrażenia.

Tensorem naprężeń cząstkowych nazywamy wielkość

$$(7.7) \quad \tilde{T}^{(a)kl}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(\mathbf{x})} T^{(a)kl}(\mathbf{y}, t) ds.$$

Określmy część powierzchni $S^l(\mathbf{x})$ zajęta przez składnik $B^{(a)}$ jako

$$(7.8) \quad \Delta S_l^{(a)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{S^l(\mathbf{x})} \eta^{(a)}(\mathbf{y}, t) ds.$$

Wprowadźmy

$$(7.9) \quad T^{(a)kl}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_l^{(a)}} \int_{S^l(\mathbf{x})} T^{(a)kl}(\mathbf{y}, t) ds,$$

oraz

$$(7.10) \quad \lambda^{(a)l}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\Delta S_l^{(a)}}{\Delta S_l}.$$

Jeżeli

$$(7.11) \quad \Delta V^{(a)}(\mathbf{x}, t) \cong \Delta x^l \Delta S_l^{(a)}(\mathbf{x}, t),$$

tj., gdy $\Delta S_l^{(a)}$ jest przekrojem statystycznym, to z uwagi na (7.3) mamy

$$(7.12) \quad n^{(a)}(\mathbf{x}, t) \cong \lambda^{(a)l}(\mathbf{x}, t), \quad l = 1, 2, 3.$$

Ponieważ zgodnie z (7.9) i (7.10) tensor naprężeń cząstkowych ma postać

$$(7.13) \quad \tilde{T}^{(a)kl}(\mathbf{x}, t) = \lambda^{(a)l}(\mathbf{x}, t) \hat{T}^{(a)kl}(\mathbf{x}, t),$$

możemy teraz napisać zasadę zachowania pędu (5.5):

$$(7.14) \quad n^{(a)} \hat{\varrho}^{(a)} \frac{d_{(a)} \hat{v}^{(a)l}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^l} (\lambda^{(a)l} \hat{T}^{(a)kl} - \check{W}^{(a)kl}) + n^{(a)} \hat{\varrho}^{(a)} \check{b}^{(a)k} + r^{(a)k}.$$

Powyższą zasadę, po wykorzystaniu (7.12) i pominięciu członów oscylacyjnych $\check{W}^{(a)kl}$ gdy są małe wobec $\tilde{T}^{(a)kl}$, napiszemy w uproszczonej postaci

$$(7.15) \quad n^{(a)} \hat{\varrho}^{(a)} \frac{d_{(a)} \hat{v}^{(a)l}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^l} (n^{(a)} \hat{T}^{(a)kl}) + n^{(a)} \hat{\varrho}^{(a)} \check{b}^{(a)k} + r^{(a)k}.$$

Niezależnie od podobieństwa formalnego równania różniczkowego ruchu w teorii konsolidacji, [6], i zasady (7.15), różnica polega na interpretacji występujących w (4.15) pól, jako pól uśrednionych, a nie jako postulowanych a priori wielkości lokalnych.

Rozpatrując zasadę zachowania momentu pędu (5.8), założymy, że można pominąć w niej człony oscylacyjne \check{U} . Założymy, że można także pominąć wielkości μ , \bar{M} , \bar{H} . Wtedy

$$(7.16) \quad \tilde{T}^{(a)[ij]} + R^{(a)[ij]} = 0.$$

Oznaczając

$$(7.17) \quad \hat{T}^{(a)kl}(\mathbf{x}, t) \stackrel{df}{=} \sum_{a=1}^N T^{(a)kl}(\mathbf{x}, t),$$

mamy wobec $\sum_{a=1}^N R^{(a)[ij]} = 0$,

$$(7.18) \quad \tilde{T}^{(a)[ij]} = 0,$$

co oznacza, że przy stosowalności (7.16) założeń, do związku tensor naprężeń T^{ij} jest symetryczny.

Funkcje $n^{(a)}(\mathbf{x}, t)$, $\lambda^{(a)l}(\mathbf{x}, t)$ oraz $\hat{\varrho}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ opisują cechy topologiczne ciała, podobnie jak w teorii konsolidacji [6]. Jednakże funkcje te interpretujemy jako wielkości średnie. Wielkościom $\lambda^{(a)l}$ odpowiada w teorii konsolidacji jedna funkcja $\lambda^{(a)}$ dla każdego a , [6].

Dodatek

Postać całkowitej zasady bilansu (2.1) dotyczy obszaru $P \cap B$, dla którego część brzegu $P \cap \partial B$, jest powierzchnią materialną (zmienną w czasie), a druga część $\partial P \cap B$, jest powierzchnią ustaloną (niezmienną w czasie). Ponieważ ogólna postać zasady bilansu dla takich obszarów nie jest na ogół spotykana w literaturze, podano poniżej wyprowadzenie związku (2.1).

Punktem wyjścia rozważań jest równanie bilansu, por. np. [8] str. 141, w postaci

$$(1) \quad \int_{P \cap B_t} \rho \dot{\xi} dv = \oint_{\partial(P \cap B_t)} \pi \cdot n ds + \int_{P \cap B_t} \sigma dv,$$

gdzie

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} + \xi_{,k} v^k$$

Przyjmując ponadto oznaczenie $\psi = \rho \xi$, podobne jak w punkcie 1, oraz korzystając z lokalnej zasady zachowania masy, mamy

$$(2) \quad \rho \dot{\xi} = \rho \frac{\partial \xi}{\partial t} + \rho \xi_{,k} v^k = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \xi \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\psi v^k)_{,k} - \xi (\rho v^k)_{,k} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi v^k)_{,k}$$

Scałkujemy równość (2) po obszarze $P \cap B_t$. Stosując twierdzenie o dywergencji, otrzymujemy

$$(3) \quad \int_{P \cap B_t} \rho \dot{\xi} dv = \int_{P \cap B_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} dv + \oint_{\partial(P \cap B_t)} \psi v^k n_k ds.$$

Zgodnie z definicją pochodnej po czasie, można łatwo wykazać, że

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{P \cap B_t} \psi dv = \int_{P \cap B_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} dv + \int_{P \cap \partial B_t} \psi v^k n_k ds.$$

Odejmując stronami równanie (4) od (3) otrzymujemy

$$(5) \quad \int_{P \cap B_t} \rho \dot{\xi} dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{P \cap B_t} \psi dv + \int_{\partial P \cap B_t} \psi v^k n_k ds.$$

Wykorzystując związek (5), podstawiając go do równania (1), otrzymamy ostatecznie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{P \cap B_t} \psi dv = \int_{\partial P \cap B_t} (\pi - \psi \otimes v) \cdot n ds + \int_{P \cap B_t} \sigma dv + \int_{P \cap \partial B_t} \pi \cdot n ds,$$

to jest zasadę bilansu (2.1).

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL; *Sulle Basi Della Termodinamica Della Miscela*, Acc. Naz. Lincei, VIII, vol. XLIV, 1968.
2. A. E. GREEN, Quart. P. M. NAGHDI; *On Basic Equations for Mixtures*, *Journ. Mech. Appl. Math.* XXII, 1969.
3. M. A. BIOT; *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*, *J. Appl. Phys.* 12, 1941.
4. M. A. BIOT; *Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid*, *J. Acoust. Soc. Am.* 28, 1956.
5. E. H. DAVIS, G. P. RAYMOND; *A Non-Linear Theory of Consolidation*, *Geotechnique* 2, 15, 1965.
6. G. SZEFER; *Nonlinear Problems of Consolidation Theory*, *Problèmes de Reologie*, Mater. Konf. Polsko-Francuskiej, Kraków 1977.
7. W. N. NIKOLAEVSKI, K. S. BASNEV, A. T. GORBUNOV, G. A. ZOTOV; *Mechanics of saturated porous media*, Moskwa 1970.

8. C. TRUESDELL; *A first course in rational continuum mechanics*, Johns Hopkins Univ. Baltimore, Maryland, 1972.
9. Cz. WOŹNIAK, M. WOŹNIAK; *Effective Balance Equations for Multiconstituent; Porous Media and Composites*, Bull. Acad. Polon. Sci. Techn. (w przygotowaniu).

Резюме

УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА И ПРИНЦИПЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ
ПОРИСТЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

В работе выведено общую форму уравнения баланса для раздроблённых и разрывных сред зависящую от некоторых гладких полей. Полученные уравнения баланса для многокомпонентных пористых сред применено для получения принципов сохранения. Дано приближительные связи между введенными и разрывными полями, которые описывают раздроблённые среды. Указано некоторые применения к теории консолидации.

Summary

THE BALANCE EQUATIONS AND CONSERVATION LAWS FOR
MULTICONSTITUENT POROUS MEDIA

The aim of the paper is to express the general form of the balance equation for media with disintegrated and discontinuous structure in terms of certain smooth fields. The obtained form of the balance equation for these fields was applied to the function of the conservation laws for multiconstituent porous media. The interrelation between the introduced smooth fields and the discontinuous fields describing the disintegrated medium is given by a form of certain approximation. Some applications to the foundation of the non-linear consolidation theory were also mentioned.

SGGW — AKADEMIA ROLNICZA
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 listopada 1979 roku

PRÓBA DYNAMICZNEGO ROZCIĄGANIA TWORZYW SZTUCZNYCH

JACEK G A R B A R S K I, JANUSZ K L E P A C Z K O (WARSZAWA)

I. Wstęp

Własności mechaniczne tworzyw wielkocząsteczkowych odkształcanych z dużymi prędkościami stają się ostatnio obiektem coraz większego zainteresowania. Wynika to z coraz szerszego ich stosowania jako materiałów konstrukcyjnych. Jednak własności mechaniczne wspomnianych tworzyw są stosunkowo mało poznane, co prowadzi często do niepowodzeń przy ich stosowaniu. Zbadanie zachowania się tworzyw przy obciążeniach dynamicznych może być istotne nie tylko dla szerszego poznania ich własności eksploatacyjnych ale również dla zastosowania w niektórych procesach przetwórczych.

Należy dodać, że zachowanie się tworzyw przy obciążeniach dynamicznych nie może być przewidziane na podstawie prób statycznych, a to ze względu na zbliżenie się procesu odkształcania do procesu adiabatycznego, wskutek czego nie można zastosować zasady superpozycji temperaturowo-czasowej Williamsa-Landle'go-Ferry'ego, oraz ze względu na zjawiska falowe, które mogą niekiedy bardzo zmieniać obserwowane zachowanie się materiału.

Standardowe próby udarowe na zginanie próbek z karbem wg Izoda lub Charpy'ego dają tylko jakościowe pojęcie o zachowaniu się materiału w warunkach obciążeń dynamicznych. Udarowe rozciąganie, przy dokładnym pomiarze procesu, stanowi stosunkowo trudny problem eksperymentalny. Jednak próba ta winna być częściej stosowana ze względu na zwiększony zakres uzyskiwanych informacji. Praca niniejsza ujmuje ten problem od strony techniki eksperymentu i dostarcza nowych danych o zachowaniu się niektórych tworzyw podczas próby szybkiego rozciągania.

Dotychczas podejmowano bardzo nieliczne próby badań tworzyw przy dynamicznym rozciąganiu. Jedną z najnowszych jest praca [1]. Przedstawiono w niej wyniki badań na dynamiczne rozciąganie dla poliamidu w zakresie prędkości odkształcenia od $23,5 \text{ s}^{-1}$ do 48 s^{-1} . Znormalizowane próbki zrywano na młocię PSWO-30 wyposażonym w dodatkowy przyrząd umożliwiający rozciąganie. Siła rozciągająca mierzona była przez czujnik piezoelektryczny, natomiast przemieszczenie kątowe bijaka mierzono przy pomocy fotokomórki. Na podstawie uzyskanych oscylogramów określono wielkości charakterystyczne dla próby rozciągania jak wytrzymałość na rozciąganie, wydłużenie całkowite i dynamiczny moduł Younga, podjęto także próbę określenia współczynników nieliniowych w równaniu konstytutywnym zaproponowanym przez KERIMOWA [6].

W pracy [2] zamieszczono wyniki badań własności mechanicznych polimetakrylanu metylu przy zmiennych prędkościach odkształcenia i przy złożonym stanie naprężeń.

Badania objęły prędkości odkształcenia od $1,1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ do $66,67 \text{ s}^{-1}$ przy stosowanej bazie próbki 60 mm, przy czym każda następna prędkość była dziesięciokrotnie większa od poprzedniej. Badania prowadzono w temperaturach -40° , -20° , 0° , 20° i 40°C . Badania z prędkościami od $1,1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ do $0,11 \text{ s}^{-1}$ prowadzono przy użyciu maszyny wytrzymałościowej typu kinematycznego oraz elektronicznego pomiaru siły. Badania z prędkościami od $1,11 \text{ s}^{-1}$ do $66,67 \text{ s}^{-1}$ przeprowadzono na maszynie posiadającej pneumatyczny system rozciągania i możliwość rejestrowania siły w funkcji czasu dzięki elementowi piezoelektrycznemu. Wykres rozciągania uzyskiwano fotografując ekran oscylografu katodowego. Stwierdzono, że wzrost prędkości odkształcenia wpływa na wzrost wytrzymałości badanego tworzywa, przy czym wpływ ten jest najmniejszy w temperaturze -40°C , następnie rośnie do temperatury $+40^\circ\text{C}$, aby potem znowu zmaleć. Wszystkie badane próbki pękały krucho bez tworzenia się szyjki niezależnie od prędkości odkształcenia i temperatury.

W obydwu wspomnianych wyżej pracach pominięto problem drgań układu dynamometr — próbka, który zawsze występuje przy wszelkich uderzeniach i ma ogromny wpływ na wyniki badań. Problem drgań mechanicznych w układzie pomiarowym rozważony został na przykład w pracy [3], gdzie zakłada się dwa stopnie swobody. Dynamometr i maszyna wytrzymałościowa modelowane są we wspomnianej pracy jako układ sprężysty o liniowej charakterystyce z dwoma masami. Zakłada się, że próbka odkształca się na początku sprężysto, a następnie po przekroczeniu granicy plastyczności, siła potrzebna do jej rozciągania jest stała, niższa lub równa granicy plastyczności próbki. Analiza taka umożliwia prawidłową interpretację wyników doświadczeń.

Fakt, że wyniki prób przy szybkim odkształcaniu tworzyw sztucznych mogą mieć istotne zastosowanie do przewidywania parametrów niektórych procesów technologicznych został potwierdzony między innymi w pracy [4]. W konkluzji tej pracy stwierdzono, że próby rozciągania z dużą prędkością są miarodajne dla przewidywania siły potrzebnej przy tłoczeniu na zimno ABS. Natomiast głębokość tłoczenia wykazuje ścisły związek z wydłużeniem całkowitym w jednoosiowym stanie naprężenia.

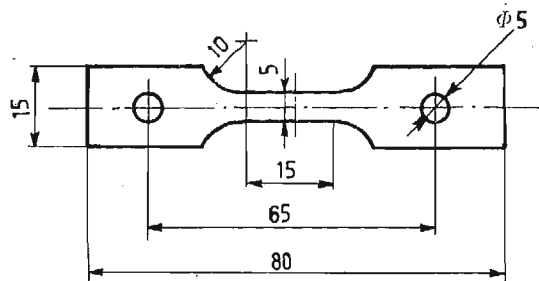
2. Budowa stanowiska badawczego

Zadaniem podjętym w niniejszej pracy jest pomiar granicy plastyczności i naprężenia plastycznego płynięcia, oraz w przypadku próbek kruchych naprężenia niszczącego, w funkcji prędkości rozciągania próbki. Przy czym dalszym krokiem jest porównanie wyników otrzymanych z prób powolnego rozciągania z próbami udarowymi.

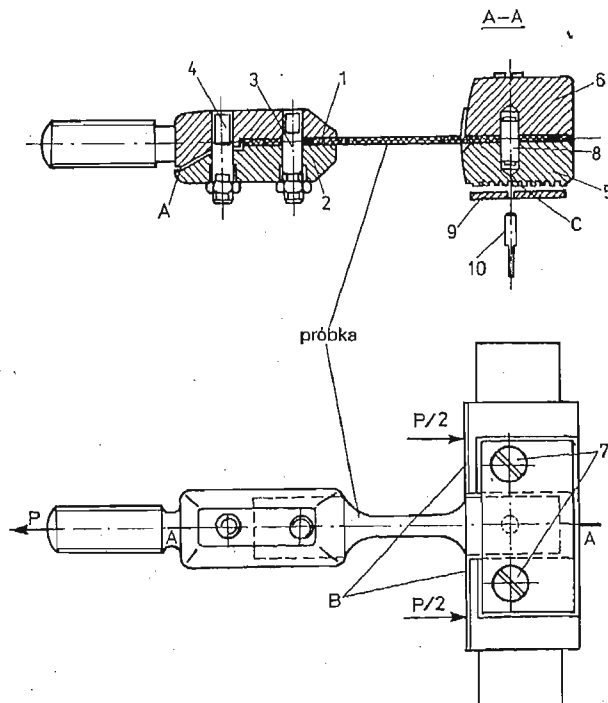
Próby rozciągania z małą prędkością odkształcania przeprowadzono na standardowej maszynie wytrzymałościowej typu kinematycznego, jednak z zastosowaniem kompletnej rejestracji wykresu siła — przemieszczenie uchwytu próbki na drodze elektronicznych pomiarów wielkości mechanicznych. Zastosowano tu specjalny dynamometr z tensometrami elektrooporowymi, mostek prądu stałego o szerokim paśmie przenoszenia ($0 \div 100 \text{ kHz}$) oraz indukcyjny czujnik przemieszczeń wraz z odpowiednim zasilaczem, a także rejestrator X—Y. Przy czym ten sam dynamometr wraz z mostkiem był również używany do pomiaru siły w funkcji czasu podczas badań dynamicznych.

Badania dynamiczne przeprowadzono na młocie wahadłowym typu PSW-30 prod. WPM — Lipsk z zastosowaniem specjalnego urządzenia skonstruowanego w Zakładzie Mechaniki Ośrodków Ciągłych Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN i będącego przedmiotem patentu PRL. Urządzenie zapewnia kompletną rejestrację w funkcji czasu przebiegu siły rozciągającej oraz przemieszczenia końca próbki z użyciem oscyloskopu i kamery Polaroid. Bardziej dokładny opis urządzenia przeznaczonego do dynamicznego rozciągania próbek metalowych dwustronnie gwintowanych zamieszczono w pracy [5].

Ze względu na to, że przystawka do młota PSW-30 umożliwiającą udarowe rozciąganie została pierwotnie zaprojektowana dla próbek metalowych z dwustronnym gwintem M12 i długości pomiarowej 50 mm, nie można było (ze względu na ograniczenia wymiarowe) do badań tworzyw zastosować standardowych próbek wiósełkowych. Projektując

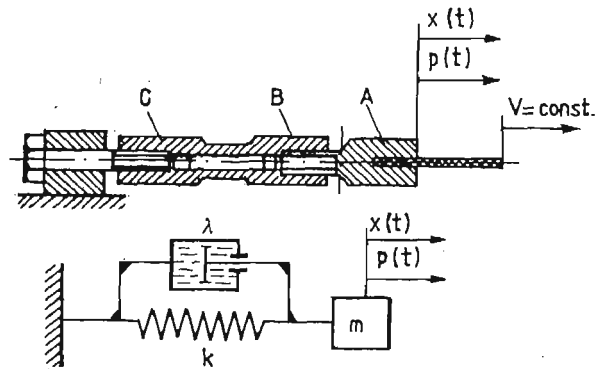


Rys. 1. Stosowana próbka płaska w badaniach statycznych i dynamicznych



Rys. 2. Uchwyt do rozciągania próbek płaskich z tworzyw sztucznych

specjalny uchwyt do próbek z tworzyw sztucznych przyjęto kształt próbki jak na Rys. 1, w związku z czym próbki mogły być frezowane z płyt o grubości od 0,8 do 3,5 mm. Budowę uchwytu przedstawia Rys. 2. Uchwyt 1 wkręcono w dynamometr identyczny jak do badań próbek metalowych. Próbka umocowana jest między moletowanymi płaszczyznami uchwytu 1 i 2 dociśniętymi do siebie śrubami 3 i 4. Śruba 3 spełnia jednocześnie rolę kołka ustalającego próbkę względem uchwytu i zabezpiecza ją dodatkowo przed wysunięciem. W związku z różną grubością stosowanych próbek powstała konieczność użycia podkładek aby uzyskać styk w punkcie A. Druga część uchwytu, zabierak przyjmujący uderzenie bijaka młota dwiema płaszczyznami B, składa się z korpusu 5 i nakładki 6 skręcanych śrubami i ustalonych względem siebie i próbki kołkiem 8. Płaszczyzny stykające się z próbką zostały również moletowane. Uchwyt 1 jest szeregowo mocowany przy pomocy połączenia gwintowego z dynamometrem (Rys. 3). Drugi koniec dynamo-



Rys. 3. Schemat uchwytu wraz z dynamometrem i model dynamiczny układu

metru jest mocowany do korpusu urządzenia. Natomiast zabierak, w który uderza dwupunktowo bijak młota jest dwustronnie suwliwie prowadzony w korpusie przyrządu. Miejsca uderzenia bijaka młota w zabierak, wraz z kierunkiem działania siły zostały oznaczone strzałkami oraz symbolem $P/2$, gdzie P oznacza siłę rozciągającą próbkę.

Ponieważ czas zerwania próbki jest stosunkowo krótki i wynosi zaledwie od jednej do kilku milisekund, system pomiaru sił winien charakteryzować się krótkim czasem reakcji na zadane wymuszenie. Tego rodzaju wymagania spełnia zastosowany dynamometr wraz z układem mostka tensometrycznego na prąd stały.

System pomiaru przemieszczeń zabieraka oparty jest zatem o zasadę modulacji częstotliwości impulsów świetlnych odbijanych od rastra C zabieraka 5 (Rys. 2). Płaszczyzna C posiada mechanicznie wykonany raster umożliwiający okresowe odbijanie światła i przez to dawanie odpowiednich impulsów do odpowiednio umieszczonej fotodiody 10. Zabierak oświetlony jest od dołu małą żarówką poprzez szczelinę w przesłonie 9, a odbijana część światła rejestrowana jest w funkcji czasu na oscyloskopie poprzez fotodiodę 10. Sygnał z fotodiody zbliżony jest do sinusoidy i zawiera zakodowane przemieszczenie zabieraka. Stąd staje się możliwa kompletna rejestracja przebiegu próby dynamicznego rozciągania przy użyciu dwustrumieniowego oscyloskopu. Na kanale pierwszym rejestruje

się siłę w funkcji czasu, a na kanale drugim zakodowane przemieszczenie. Po eliminacji czasu można otrzymać poszukiwany wykres siła-przemieszczenie, a następnie wykres naprężenie-odkształcenie.

3. Program badań

Badania objęły trzy materiały: polistyren wysokoudarowy, polichlorek winylu i poli-propylen. Z materiałów tych w postaci płyt o grubości od 2,5 do 3,2 mm frezowano próbki jak na rys. 1, które następnie przechowywano przez 7 dni przed rozpoczęciem badań w klimatyzowanym pomieszczeniu w którym odbywały się badania. Dla ustalenia poziomu odniesienia dla badań dynamicznych, wykonano najpierw próby statyczne przy rozciąganiu z prędkością odkształcenia $\dot{\epsilon} = 8,9 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Rozciąganie dynamiczne przeprowadzono przy czterech założonych prędkościach dla każdego z materiałów, a dla każdej prędkości wykonano po dwie udane próby, otrzymując w sumie dwadzieścia cztery oscylogramy. Różne prędkości rozciągania uzyskano spuszczać bijak młota z określonych wysokości. Osiągnięto dzięki temu prędkości uderzenia v : $6,5 \text{ ms}^{-1}$, 5 ms^{-1} , $3,5 \text{ ms}^{-1}$ i $1,65 \text{ ms}^{-1}$, co dla założonej bazy próbki $l_0 = 15,5 \text{ mm}$ odpowiada prędkościom odkształcenia $\dot{\epsilon} = 419 \text{ s}^{-1}$, $332,5 \text{ s}^{-1}$, $225,8 \text{ s}^{-1}$ i $106,45 \text{ s}^{-1}$.

4. Analiza układu dynamometr—próbka—zabierak

Dokładniejsze wyznaczenie granicy plastyczności lub wartości naprężenia niszczącego można osiągnąć przeprowadzając analizę przyjętego w obecnej pracy modelu układu drgającego z jednym stopniem swobody i tłumieniem, który jest zbliżony do rzeczywistego układu dynamometr — próbka — uchwyty. Przyjęty model został przedstawiony na rys. 3. Analiza taka pozwala na ustalenie wpływu drgań, w które rzeczywisty układ zostaje wprowadzony podczas uderzenia bijaka młota. Wychodząc z założenia, że dynamometr i uchwyt z próbka są układem drgającym z jednym stopniem swobody, ogólne równanie ruchu układu, tj. zredukowanej masy skupionej drgającej na nieważkiej sprężynie można napisać następująco:

$$(1) \quad m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = P(t),$$

gdzie:

m — zastępcza masa drgająca

λ — współczynnik tłumienia proporcjonalny do logarytmicznego dekrementu tłumienia

k — sztywność sprężyny

$P(t)$ — impuls wymuszający

Zastępczą masę drgającą obliczono sumując masę uchwyty A, masę części B dynamometru oraz jedną trzecią masy części C dynamometru. Parametry λ i k wyliczono na podstawie otrzymanych oscylogramów (równania 27 i 28). Ponadto zakłada się, że energia zużyta do zniszczenia próbki jest pomijalna w porównaniu z energią kinetyczną bijaka, oraz że przemieszczenie środka masy $x(t)$ jest pomijalne w porównaniu z wydłużeniem próbki Δl . Zakłada się również, że próbka odkształca się ze stałą prędkością, a siła potrzebna

do jej rozciągania, która zmienia się w funkcji czasu, jest impulsem wywołującym drgania. Ponieważ otrzymany oscylogram jest odpowiedzią układu, tj. oscylacjami nałożonymi na krzywą rozciągania próbki, chcąc otrzymać impuls wymuszający, czyli wykres rozciągania próbki, należy znaleźć rozwiązanie równania (1) dla żadanego impulsu, a następnie porównać otrzymane rozwiązanie z wynikiem doświadczalnym (oscylogramem).

Równanie (1) można przepisać w formie

$$(2) \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = N(t),$$

gdzie

$$2n = \frac{\lambda}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad N(t) = \frac{P(t)}{m}$$

Przykładowe rozwiązanie tego równania dla impulsu osiągającego skokowo w czasie równym zero pewną wartość i utrzymującego się dalej na tym poziomie, będzie miało postać, tzn. impuls wymuszający $N(t) = N_0 = \text{const}$, albo $P(t) = P_0 = \text{const}$.

$$(3) \quad x(t) = \frac{N_0}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-nt} \frac{n}{\omega} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{n} \cos \omega t \right) \right].$$

Rozpatrując siłę $P(t) = x(t) \cdot k$ zamiast przesunięcia otrzymuje się:

$$(4) \quad P(t) = P_0 \left[1 - e^{-nt} \frac{n}{\omega} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{n} \cos \omega t \right) \right]$$

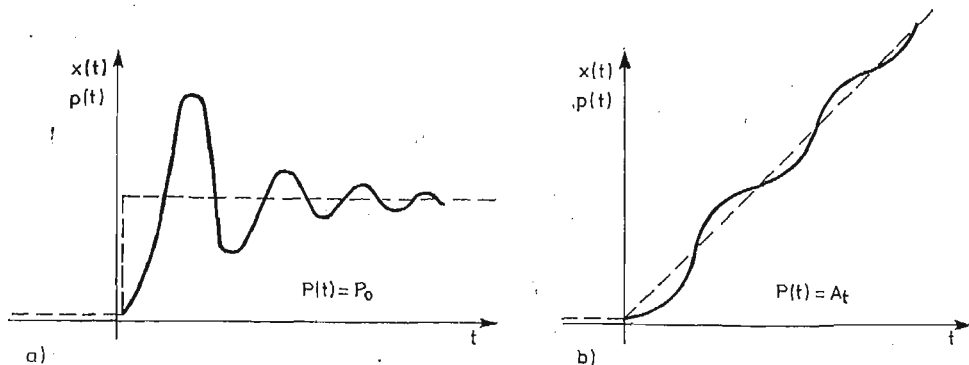
gdzie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$; jest to przypadek małego tłumienia tzn., że $\omega_0 > n$. Rozwiązanie to otrzymano metodą uzmienniania stałych. Tą samą metodą otrzymano rozwiązanie dla impulsu liniowo narastającego w czasie: $N(t) = N \cdot t$ albo $P(t) = P \cdot t$

$$(5) \quad x(t) = \frac{N}{\omega_0^2 \omega} \left[\omega t - \frac{2n\omega}{\omega_0^2} + \frac{e^{-nt}(\omega_0^2 - 2n^2)}{\omega_0^2} \left(\frac{2n\omega}{\omega_0^2 - 2n^2} \cos \omega t - \sin \omega t \right) \right],$$

lub dla siły $P(t) = k \cdot x(t)$

$$(6) \quad P(t) = P \left[t - \frac{2n}{\omega_0^2} + \frac{e^{-nt}(\omega_0^2 - 2n^2)}{\omega_0^2 \omega} \left(\frac{2n\omega}{\omega_0^2 - 2n^2} \cos \omega t - \sin \omega t \right) \right].$$

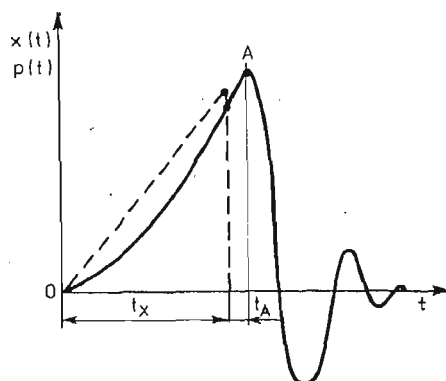
Rys. 4. Przedstawia podane wyżej typy impulsów i odpowiedzi układu.



Rys. 4. Odpowiedzi układu na: a) impuls stały, b) impuls liniowo narastający w czasie

Żaden z wymienionych impulsów wymuszających nie stanowi sam w sobie dobrej aproksymacji wykresu rozciągania. Jedynie impuls liniowo narastający dość dobrze przybliża zachowanie się materiału sprężysto-kruchego. Jednak nawet dla takiego przypadku przy dokładnej analizie oscylogramu należy uwzględnić bezwładność mas połączonych z dynamometrem i związane z tym zjawiska.

Rozważmy co się dzieje z układem drgającym przed i po zerwaniu próbki (Rys. 5). Przed zerwaniem podczas procesu obciążania, na skutek bezwładności, odpowiedź układu



Rys. 5. Impuls wymuszający i odpowiedź układu dla materiałów kruchych

opóźnia się w stosunku do impulsu wymuszającego. Po zerwaniu tj. po czasie t_x , dynamometr rejestruje dalszy wzrost siły aż do zatrzymywania się rozprędzonej masy co następuje po czasie t_A licząc od momentu zerwania. W punkcie A odpowiadającym temu czasowi siła osiąga maksimum, po czym gwałtownie spada i następują tłumione drgania swobodne układu wokół położenia $P = 0$. Chcąc więc analizować oscylogram z zarejestrowaną odpowiedzią dla materiału sprężysto-kruchego, należy rozważyć dwie fazy, a więc fazę przed i po zerwaniu. Do analizy pierwszej fazy można posłużyć się równaniem (5) lub (6). Natomiast druga faza, to drgania swobodne dla warunków początkowych nie równych zero. Warunkami tymi są konkretne przesunięcie i prędkość w momencie zerwania t_x czyli $x(t_x) = s_x$ i $\dot{x}(t_x) = v_x$

$$(7) \quad \dot{x}(t_x) = \frac{N}{\omega_0^2 \omega} \left[\omega - e^{-n t_x} \cdot n \left(\sin \omega t_x + \frac{\omega}{n} \cos \omega t_x \right) \right].$$

Warunki te wejdą do równania ruchu przy uzmiennianiu stałych. Dla drgań swobodnych równanie (1) przyjmuje postać

$$(8) \quad m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0,$$

albo

$$(9) \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

co daje rozwiązanie ogólne:

$$(10) \quad x(t) = e^{-nt} (A \cdot \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

gdzie A i B oznaczają stałe.

Różniczkując równanie (10) stronami otrzymuje się:

$$(11) \quad \dot{x}(t) = e^{-nt}(nB + \omega A) \left(\frac{\omega B - nA}{nB + \omega A} \cos \omega t - \sin \omega t \right).$$

Jeśli w punkcie t_x przyjąć początek nowej skali czasu to można napisać:

$$(12) \quad x(0) = S$$

$$(13) \quad \dot{x}(0) = v,$$

co stanowi układ dwóch równań z niewiadomymi A i B.

Po rozwiązaniu otrzymuje się

$$(14) \quad A = S,$$

oraz

$$(15) \quad B = \frac{v + ns}{\omega}$$

Wstawiając zależności (14) i (15) do równania (10) otrzymuje się ostatecznie:

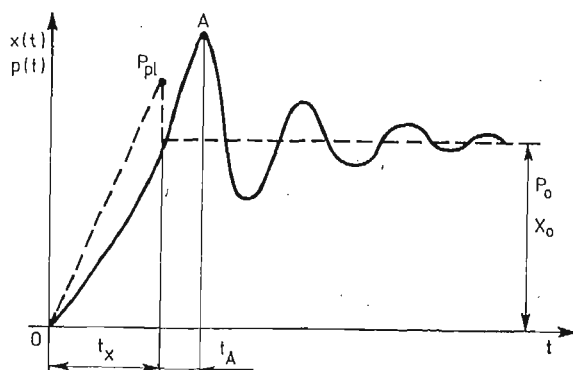
$$(16) \quad x(t) = \frac{e^{-nt}(v + ns)}{\omega} \left[\frac{\omega S}{v + ns} \cos \omega t + \sin \omega t \right].$$

Można stąd również obliczyć czas t_A wychodząc z założenia, że w tym momencie prędkość $\dot{x} = 0$. Różniczkując równanie (16) i przyrównując do zera tj. $x(t) = 0$, otrzymuje się ostatecznie:

$$(17) \quad 0 = e^{-nt_A} \left[\frac{n(v + ns)}{\omega} + \omega S \right] \left[\frac{v}{(v + ns)n + \omega S} \cos \omega t_A + \sin \omega t_A \right],$$

oraz

$$(18) \quad t_A = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{v}{(v + ns)n + \omega S} \right]^2}}$$



Rys. 6. Impuls wymuszający i odpowiedź układu dla materiału z fizyczną granicą plastyczności

Opisana metoda obliczania odpowiedzi układu na zadany impuls, uwzględniająca dwie fazy procesu rozciągania została nazwana metodą łączenia rozwiązań, w tym przypadku w punkcie odpowiadającym czasowi t_x . Pokazano ją dla najprostszego przypadku drugiej fazy tj. dla drgań swobodnych po zerwaniu gdy $P = 0$.

Z badań statycznych wynika, że dobrym przybliżeniem dynamicznej krzywej rozciągania byłby impuls o kształcie pokazanym na rys. 6. Jest to impuls narastający liniowo do chwili t_x , a następnie utrzymujący wartość stałą P_0 , w ogólnym przypadku różną od P_{pl} tj. siły odpowiadającej górnej granicy plastyczności. Metoda postępowania prowadząca do otrzymania odpowiedzi układu jest identyczna. W pierwszej fazie, do osiągnięcia czasu t_x , posługujemy się równaniem (5) lub (6). Dla czasu t_x obliczamy $x(t_x) = S_x$ i $\dot{x}(t_x) = v_x$ z równań (5) i (7). Są to warunki początkowe dla uzmiennienia stałych w równaniu ruchu dla drugiej fazy opisanej równaniem:

$$(19) \quad m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = P_0.$$

Postępując podobnie jak w wypadku poprzednim otrzymuje się rozwiązanie dla drgań po zerwaniu:

$$(20) \quad x(t) = \frac{N}{\omega_0^2} \left[1 + \sin \omega t \cdot \frac{e^{-nt}}{\omega} \left(\frac{\omega_0^2}{N} (v + ns) - n \right) + \cos \omega t \cdot e^{-nt} \left(\frac{\omega_0^2}{N} \cdot s - 1 \right) \right],$$

lub dla przypadku siły

$$(21) \quad P(t) = P_0 \left[1 + \sin \omega t \cdot \frac{e^{-nt}}{\omega} \left(\frac{k}{P_0} (v + ns) - n \right) + \cos \omega t \cdot e^{-nt} \left(\frac{k}{P_0} S - 1 \right) \right].$$

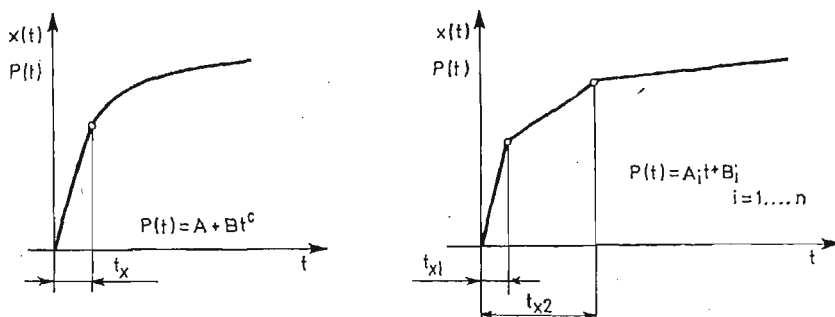
Ze zróżniczkowanego równania (20), które następnie przyrównuje się do zera można otrzymać czas t_A , który wynosi:

$$(22) \quad t_A = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + M^2}},$$

gdzie

$$M = \frac{\frac{P_0}{m} - n(v + ns) - s\omega^2}{\omega \cdot v}.$$

Posługując się podaną wyżej metodą łączenia rozwiązań można otrzymać rozwiązanie dla dowolnego impulsu drugiej fazy. Rys. 7a jest przykładem takiego impulsu o równaniu



Rys. 7. a) Impuls drugiej fazy typu $P(t) = A + Bt^c$, b) Impuls drugiej fazy typu $P(t) = At + B$

$P(t) = A + B \cdot t^c$, natomiast Rys. 7b przedstawia połączone ze sobą impulsy liniowe typu $P(t) = At + B$. Złożoność rozwiązania analitycznego powoduje jednak, że impulsy tego typu, jakkolwiek dobrze odpowiadające krzywym rozciąganiom, są zbyt pracochłonne do analizy. I tak np. dla impulsu $P(t) = At + B$ połączonego z impulsem narastającym w punkcie t_x rozwiązanie ma postać

$$(23) \quad x(t) = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \omega(ct + \alpha) - \frac{2n\omega_c}{\omega_0^2} + e^{-nt} \cdot Q[P \cdot \cos\omega t + \sin\omega t] \right\},$$

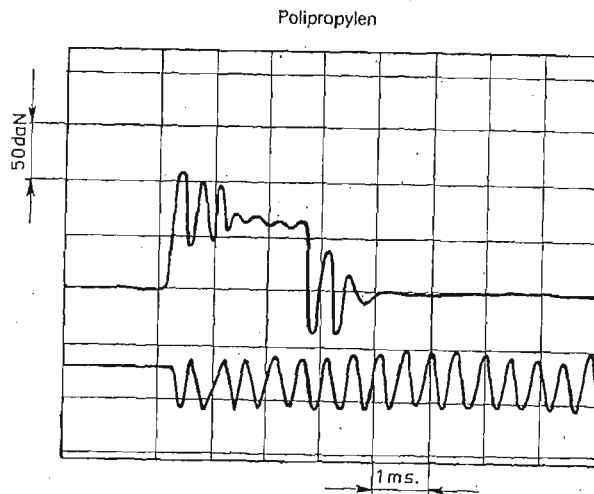
$$\text{gdzie } c = \frac{A}{m}; \quad d = \frac{B}{m}; \quad Q = \frac{(v + ns)\omega_0^4 - dn\omega_0^2 - c(\omega_0^2 - 2n^2)}{\omega_0^2};$$

$$P = \frac{2\omega nc - d\omega_0^2\omega + s\omega\omega_0^4}{(v + ns)\omega_0^4 - dn\omega_0^2 - c(\omega_0^2 - 2n^2)}$$

Przedstawione przykłady analizy układu umożliwiają bardziej dokładną ocenę zachowania się próbki w procesie udarowego rozciągania i tym samym bardziej dokładne wyznaczanie odpowiednich naprężeń.

5. Opracowanie wyników

Przy użyciu urządzenia do dynamicznego rozciągania otrzymuje się oscylogramy o charakterze jak przedstawiony na rys. 8. Pomiary oscylogramów przeprowadzono przy pomocy mikroskopu pomiarowego z elektronicznym odczytem współrzędnych



Rys. 8. Oscylogram z dynamicznej próby rozciągania polipropylenu na podstawie którego opracowano rys. 9

$X-Y$ oraz drukarki. Pomiary należy przeprowadzać dla możliwie jak największej liczby punktów leżących na krzywej $P(t)$. Na podstawie dokonanego przed pomiarem zasadniczym wzorcowania mikroskopu można przeliczyć wartości napięć elektrycznych na siłę w N i czas w ms. Z dalszego przebiegu sygnału z fotodiody, który stanowi zakodowane

przemieszczenie zabieraka próbki w funkcji czasu, wywnioskować można o prędkości rozciągania gdyż wiadomo, że odległość między sąsiednimi maksimami o jednakowym znaku odpowiada przemieszczeniu jednego milimetra; jest to podziałka nacięcia rastra. W efekcie analizy pomiarów na mikroskopie uzyskuje się ostatecznie odwzorowany oscylogram we współrzędnych $P-t$ oraz przemieszczenie $\Delta l(t)$, a stąd prędkość odkształcenia $\dot{\epsilon}(t)$.

Chcąc następnie dopasować rozwiązanie analityczne do otrzymanego wyniku doświadczalnego według metody podanej poprzednio, należy określić parametry układu drgającego występujące w równaniu (1), tzn. zredukowaną masę, współczynnik tłumienia oraz sztywność układu. Masę zredukowaną określono sumując odpowiednie masy elementów drgających z rys. 3, wyniosła ona $m = 0,1861$ kg. Pozostałe parametry są różne dla każdego z badanych materiałów. Określano je indywidualnie na podstawie otrzymanych oscylogramów. Okres drgań T obliczano jako średnią ze wszystkich prób dla danego materiału. Na tej podstawie można następnie określić częstotliwość kołową:

$$(24) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Dekrement tłumienia n obliczano biorąc średnią stosunków następujących po sobie amplitud:

$$(25) \quad n = \frac{1}{T} \ln \frac{P(t)}{P(t+T)}.$$

Znalezienie wartości powyższych parametrów pozwala na obliczenie pozostałych ze wzorów:

$$(26) \quad \omega_0^2 = \sqrt{\omega^2 + n^2},$$

$$(27) \quad \lambda = 2mn,$$

$$(28) \quad k = m\omega_0^2.$$

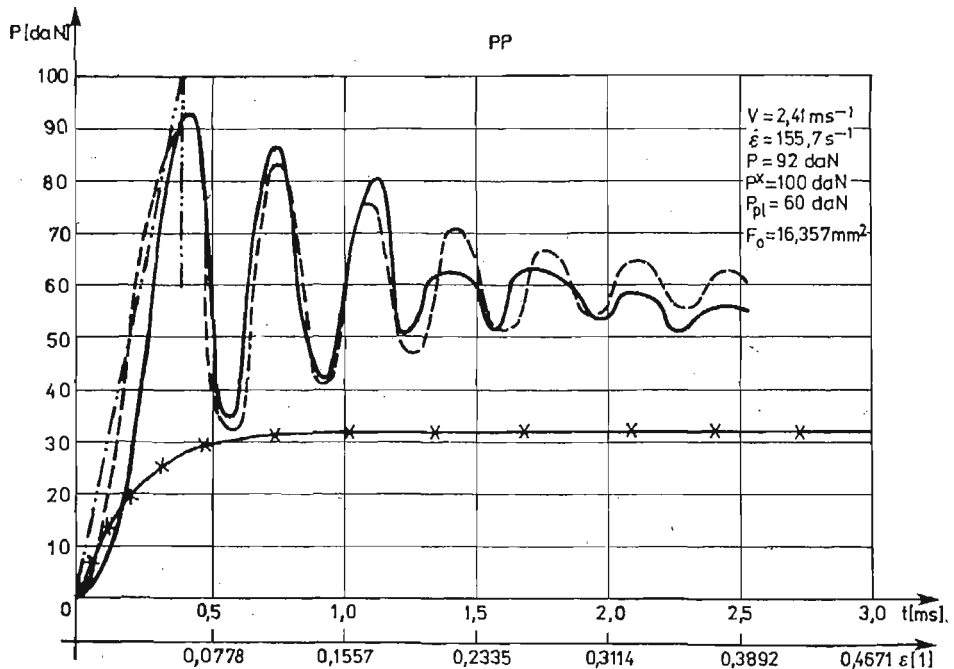
W Tabelcy I zestawiono obliczone w ten sposób parametry dla trzech badanych tworzyw.

Tabelca I—Parametry układu drgającego dynamometr—uchwyty—próbka

	T (ms)	ω (s ⁻¹)	n (s ⁻¹)	ω_0 (s ⁻¹)	λ (kg s ⁻¹)	k (kg s ⁻²)
Polistyren udarowy	0,3420	18 362	4645,5	18 940	1728,1	66 744 666
Polichlorek winylu	0,4540	13 849	1150,7	13 901,7	428,1	35 984 875
Polipropylen	0,3400	18 453	1068,8	18 983,7	397,6	63 547 193

Następnie mając wyznaczone parametry układu drgającego można przystąpić do obliczania jego odpowiedzi na zadany impuls składający się z dwóch faz, a mianowicie liniowego narastania siły, a następnie jej spadku do zera lub utrzymywania się na stałym poziomie w zależności od tego czy materiał pęka krucho czy też tworzy się sztywna po przekroczeniu granicy plastyczności. Należy pamiętać, że w przypadku tworzyw sztucznych sztywna stabilizuje proces odkształcania.

Analizę numeryczną rozpoczyna się od dobrania odpowiedniego współczynnika narastania impulsu oraz od ustalenia czasu t_x . Dokonuje się tego na drodze numerycznej poprzez kolejne przybliżenia. Dalej wyznacza się odpowiednie parametry brzegowe wymagane do połączenia w chwili t_x odpowiedzi na dwa kolejne impulsy, tak jak to przedyskutowano poprzednio. Przebiegi tego rodzaju obliczano na mikrokomputerze Tektronix (Tek 31) wyposażonym dodatkowo w plotter. Po uzyskaniu wystarczającej zgodności danych eksperymentalnych z wynikami obliczeń numerycznych, można traktować impuls wymuszający jako uproszczony kształt krzywej rozciągania w układzie siła — czas. Na tej podstawie można dalej sporządzić wykres siły, a następnie naprężenia niszczącego



Rys. 9. Wynik dynamicznego rozciągania polipropylenu dla $V = 2,41 \text{ ms}^{-1}$: — krzywa eksperymentalna — tj. zmierzony oscylogram, ---- odpowiedź układu obliczona analitycznie, -.-.- impuls wymuszający * - - - - * krzywa rozciągania statycznego

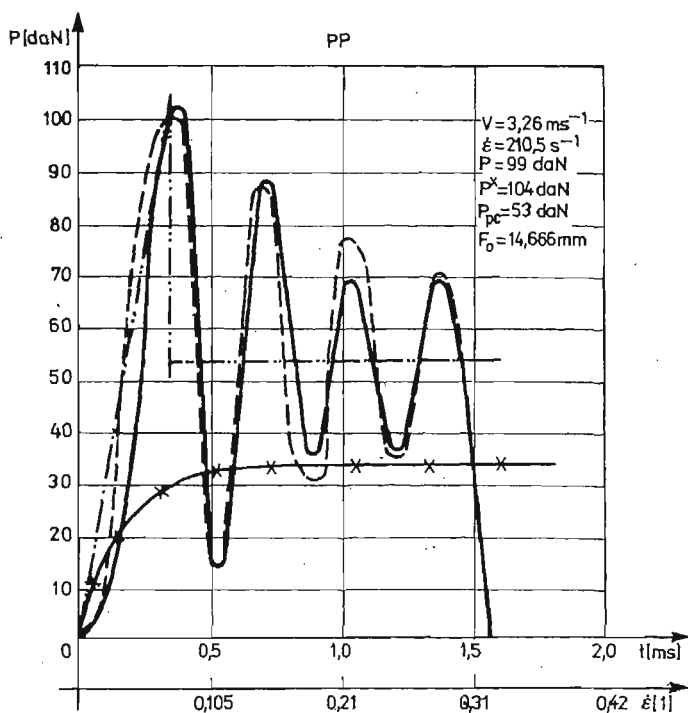
lub naprężenia będącego granicą plastyczności w funkcji prędkości rozciągania. Na rys. 9 pokazano opracowany w ten sposób oscylogram z rys. 8, uzyskany z dynamicznej próby rozciągania próbki wykonanej z polipropylenu.

6. Omówienie wyników

Wszystkie trzy tworzywa (PSW, PCW, PP) badane w zakresie małych prędkości rozciągania $1 \text{ ms}^{-1} \leq v \leq 5 \text{ ms}^{-1}$, co odpowiada zakresowi prędkości odkształcenia $70 \text{ s}^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 330 \text{ s}^{-1}$, zachowują się jak materiały plastyczne znajdujące się w stanie twardym ciągliwym. Dla tworzyw sztucznych stan ten znajduje się pomiędzy temperaturą

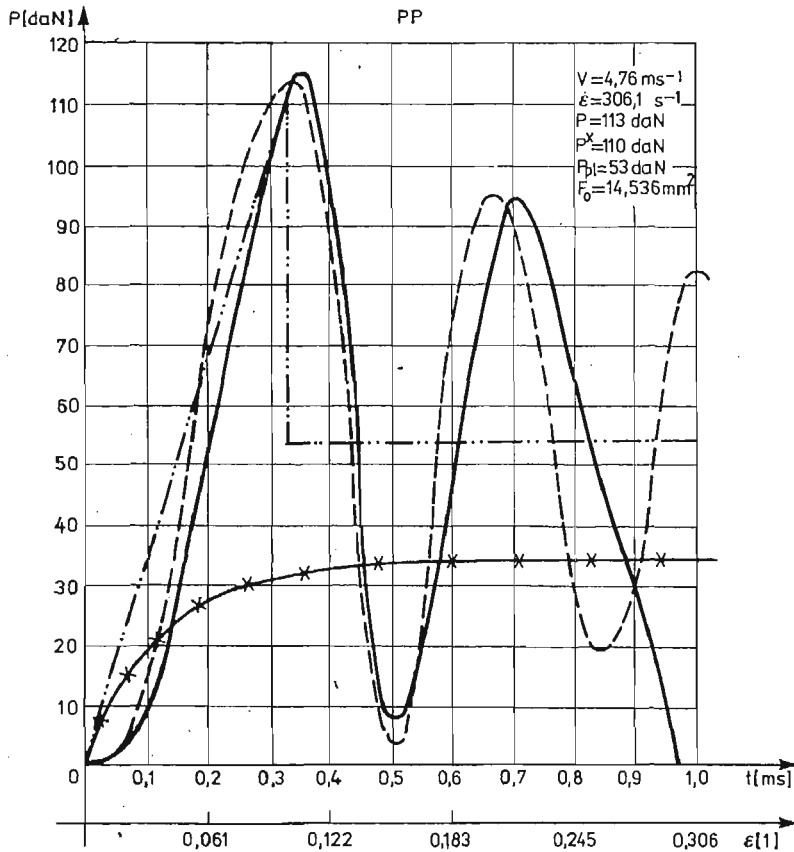
kruchości a rekryształizacji i charakteryzuje się wyraźną granicą plastyczności. Do osiągnięcia granicy plastyczności materiał odkształca się jednorodnie w całej objętości, a po jej przekroczeniu tworzy się lokalne przewężenie, co powoduje pewien spadek siły rozciągającej. Następujące w wyniku powstania szyjki lokalne umocnienie materiału jest tak duże, że kompensuje lokalne zmniejszenie się przekroju do tego stopnia, że przekrój ten może przenosić większe obciążenie niż sąsiadujący z nim materiał. W efekcie następuje propagacja przewężenia, co odbywa się przy stałej sile mniejszej od granicy plastyczności. Rys. 9 przedstawia, jak wspomniano poprzednio, wynik rozciągania polipropylenu z prędkością $\dot{\epsilon} = 155,7 \text{ s}^{-1}$. Znaczenie poszczególnych rodzajów linii na tym, jak i na dalszych rysunkach jest jednakowe: linia ciągła — krzywa eksperymentalna uzyskana na podstawie pomiaru oscylogramu; linia kreska — dwie kropki — kreska — oznacza impuls wymuszający, innymi słowy jest to przybliżona krzywa materiałowa; linia przerywana — obliczona analitycznie odpowiedź układu na zadany impuls; linia z krzyżykami — krzywa powolnego rozciągania. Należy zaznaczyć, że podziałka odkształceń jest wspólna zarówno dla krzywej statycznej jak i dynamicznej, zaś podziałka czasu odpowiada tylko krzywej dynamicznej. Obliczona analitycznie odpowiedź układu powinna jak najściślej pokrywać się z krzywą eksperymentalną. Należy opk określić dobrą zgodność analitycznie obliczonej odpowiedzi układu z wynikiem pomiaru oscylogramu.

Zwiększanie prędkości odkształcenia powoduje przesuwanie się stanu materiału w kierunku kruchości. I tak np. krzywe rozciągania dla polipropylenu uzyskane przy prędkościach odkształcenia $\dot{\epsilon} = 210,5 \text{ s}^{-1}$ i $\dot{\epsilon} = 306,1 \text{ s}^{-1}$ przedstawiają rys. 10 i rys. 11. Przy



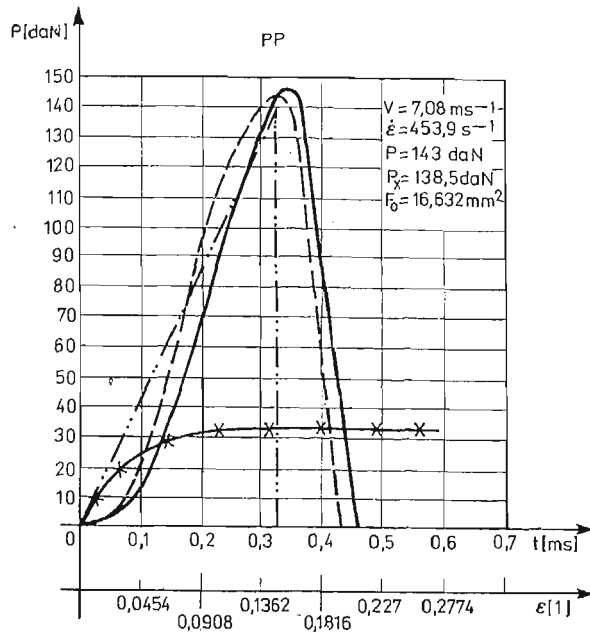
Rys. 10. Wynik dynamicznego rozciągania polipropylenu dla $V = 3,26 \text{ ms}^{-1}$

tych prędkościach odkształcenia materiał jest jeszcze plastyczny. Natomiast zastosowanie prędkości $\dot{\epsilon} = 453,9 \text{ s}^{-1}$ Rys. 12 sprawia, że materiał ulega zerwaniu bez przejścia w stan plastyczny. Z tego wypływa wniosek, że dla temperatury pokojowej w zakresie prędkości $306,1 \text{ s}^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 453,9 \text{ s}^{-1}$ zachodzi przemiana krucho-ciągła tego materiału. Jak już

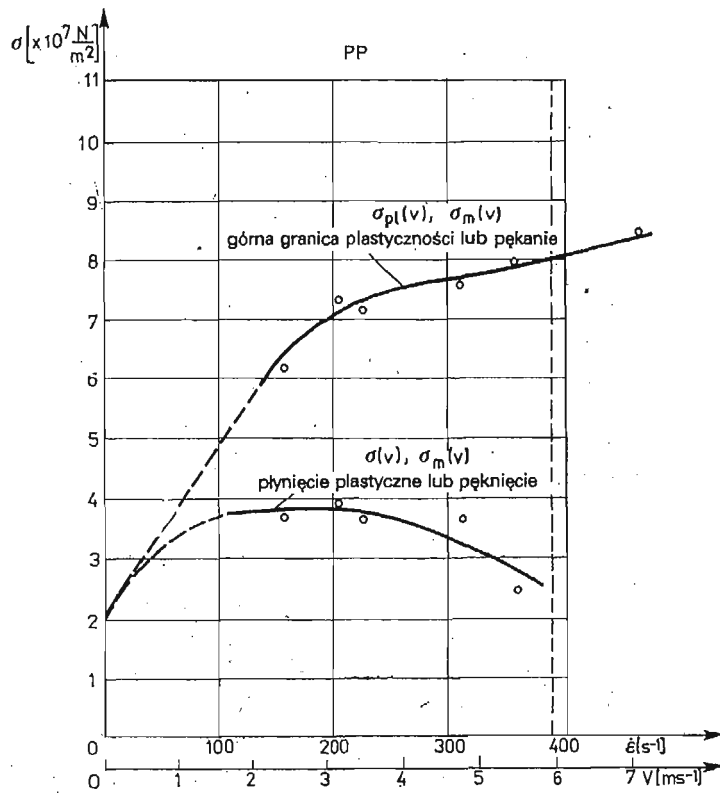


Rys. 11. Wynik dynamicznego rozciągania polipropylenu dla $V = 4,76 \text{ ms}^{-1}$

wspomniano poprzednio, na podstawie otrzymanych przybliżonych krzywych rozciągania można wykonać wykresy skorygowanej górnej granicy plastyczności i naprężenia płynięcia lub naprężenia pęknięcia w funkcji prędkości odkształcenia. Takie wykresy wykonane dla polipropylenu przedstawia rys. 13. Widać z nich, że granica plastyczności rośnie wraz ze zwiększaniem się prędkości odkształcenia, natomiast naprężenie płynięcia wykazuje tendencję malejącą. Pionowa linia przerywana odpowiada hipotetycznej prędkości przemiany krucho-ciągłej. Aby wyjaśnić takie przebiegi krzywych, rozważmy stan fizyczny badanego tworzywa odpowiadający temperaturze pokojowej, czyli stan twardy ciągliwy zwany też stanem twardym wymuszonej elastyczności. Tworzywa nieusieciowane poniżej temperatury kruchości mogą odkształcać się tylko sprężysto z zachowaniem liniowości lub nieliniowo, co jest związane ze zmianą kąta walencyjnego między atomami.



Rys. 12. Wynik dynamicznego rozciągania polipropylenu dla $V = 7,08 \text{ ms}^{-1}$



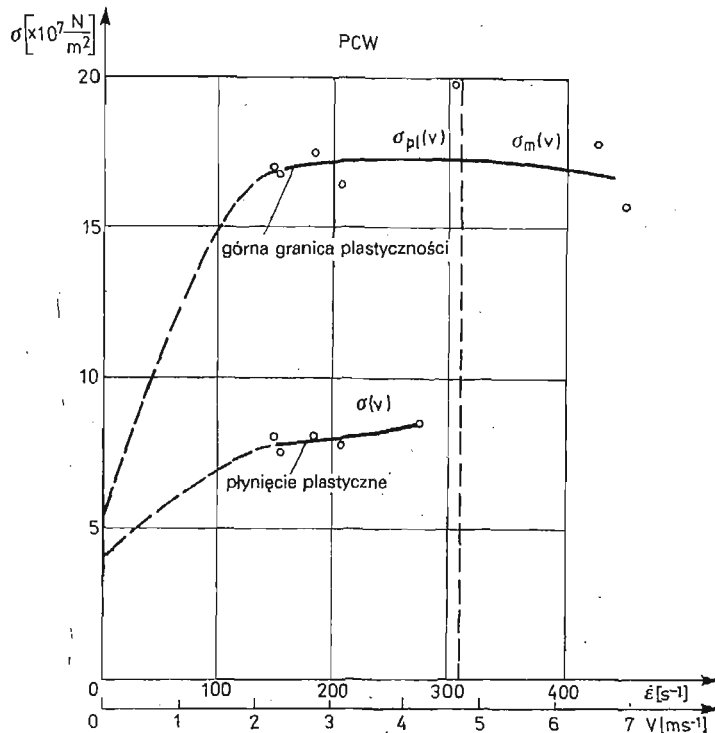
Rys. 13. Rezultaty badań polipropylenu — PP, krzywa górna stanowi zmianę górnej granicy plastyczności lub pęknięcie, krzywa dolna przedstawia zmiany naprężenia płynięcia

Powyżej zaś temperatury rekryształizacji występuje stan elastyczny charakteryzujący się odkształceniami lepkosprężystymi, zwanymi też sprężystymi opóźnionymi. Odkształcenia te zachodzą dzięki prostowaniu się makrocząsteczek na skutek obrotu merów względem siebie bez zmiany kąta walencyjnego. Odkształcenia tego typu ilustruje dobrze model Kelvina. Stan, w którym znajduje się polipropylen w temperaturze pokojowej jest stanem pośrednim pomiędzy dwoma stanami wymienionymi. Stosując względnie małe prędkości odkształcenia można wymusić tu odkształcenia lepkosprężyste. W wyniku lokalnego nagrzania się materiału na skutek dysypacji energii można osiągnąć temperaturę, w której makrocząsteczki mogą się prostować, a więc układać równoległe do siebie wywołując większe umocnienie materiału w kierunku rozciągania.

Jak zostało powiedziane wyżej odkształcenia tego typu to odkształcenia lepkosprężyste wynikające z prostowania się makrocząsteczek, a więc powrotne. Trwałość odkształcenia występuje dzięki następującemu natychmiast po procesie odkształcenia ochłodzeniu się materiału. Wystarczy jednak odkształcony w ten sposób materiał ogrzać o kilkadziesiąt stopni, a nastąpi nawrót odkształceń. Innymi słowy nie są to odkształcenia trwałe, a zamrożone lepkosprężyste lub wymuszone sprężyste, stąd bardziej uzasadnione wydaje się użycie określenia „granica wymuszonej sprężystości” niż „granica plastyczności”. Sprężystość niewymuszona ma miejsce powyżej temperatury rekryształizacji. Tutaj wymuszamy ją przez oddziaływanie mechaniczne. Należy pamiętać, że naprawdę trwałe odkształcenia tworzyw mają miejsce powyżej temperatury płynięcia, kiedy przesuwają się względem siebie całe makrocząsteczki, a nie tylko ich segmenty. Wracając do płynięcia na zimno polipropylenu należy zauważyć, że inicjacja i propagacja przewężenia, to fizycznie dwa różne procesy, przy czym pierwszy z nich bierze początek na skutek lokalnej wady materiałowej, np. mniejszego efektywnego przekroju próbki, gdzie naprężenia rzeczywiste zostają spiętrzone, co prowadzi na początku procesu odkształcania do lokalnego odkształcenia się próbki. Propagacja zaś przewężenia związana jest z tak zwanym mięknięciem odkształceniowym, co z kolei jest wynikiem przepływu ciepła z odkształcanej części materiału próbki do części nieodkształconej. Należy tu zwrócić uwagę na pewną różnicę w porównaniu z płynięciem plastycznym metali, niezależnie od faktu, że dla tworzyw nie są to odkształcenia plastyczne. Metale odkształcają się w zasadzie jednorodnie w całej objętości. Poza tym utworzenie się przewężenia oznacza utratę stateczności procesu, tutaj powoduje stabilizację. Wychodząc ze wspomnianego założenia, że inicjacja i propagacja przewężenia są niezależnymi od siebie procesami można próbować wyjaśnić charakter przebiegu krzywych odpowiednich naprężeń σ_{pl} , σ , σ_m , w funkcji prędkości odkształcenia gdzie σ_{pl} oznacza górną granicę plastyczności, σ jest naprężeniem plastycznego płynięcia, a σ_m naprężeniem niszczącym. Zmniejszenie się naprężenia płynięcia na zimno tłumaczyć można w oparciu o przepływ ciepła w próbce podczas odkształcania. Ponieważ, jak już wspomniano, płynięcie na zimno spowodowane jest przepływem ciepła z części odkształconej do nieodkształconej, to zwiększanie prędkości odkształcenia spowoduje mniejsze jego rozproszenie, co z kolei ze względu na zachowanie bilansu cieplnego prowadzi będzie do większego nagrzania części odkształconej. Im większa prędkość odkształcania tym bardziej proces zbliża się do adiabatycznego i tym bardziej wzrasta efektywna temperatura, przy której ma miejsce płynięcie na zimno. Przy mniejszych natomiast prędkościach odkształcenia generowane ciepło będzie rozpra-

szane w otaczającej atmosferze dostatecznie szybko aby wzrost temperatury był mniejszy. Spowolnienie odkształcenia przesuwa proces w kierunku procesu izotermicznego. Potwierdzenie przytoczonego wyводу znaleźć można w pracy (7) dla próby powolnego rozciągania z różnymi prędkościami.

Z rys. 13 wynika również, że zwiększenie prędkości odkształcania powoduje wzrost górnej granicy plastyczności. Odkształcenia poprzedzające inicjację przewężenia, co odpowiada osiągnięciu górnej granicy plastyczności są w głównej mierze sprężyste, a więc nie rozpraszające energii. To tłumaczyłoby dlaczego nie następuje spadek obserwowanej granicy plastyczności. Jej wzrost wyjaśnić można na gruncie zasady superpozycji temperaturowo-czasowej. Wzrost naprężeń potrzebnych do inicjacji przewężenia przy zwiększeniu prędkości odkształcania jest równy przyrostowi jaki nastąpiłby przy odpowiednim obniżeniu temperatury, a więc przy przesuwaniu się stanu tworzywa w kierunku kruchości. Wydaje się więc słuszne, że dla zwiększającej się prędkości odkształcania górna granica



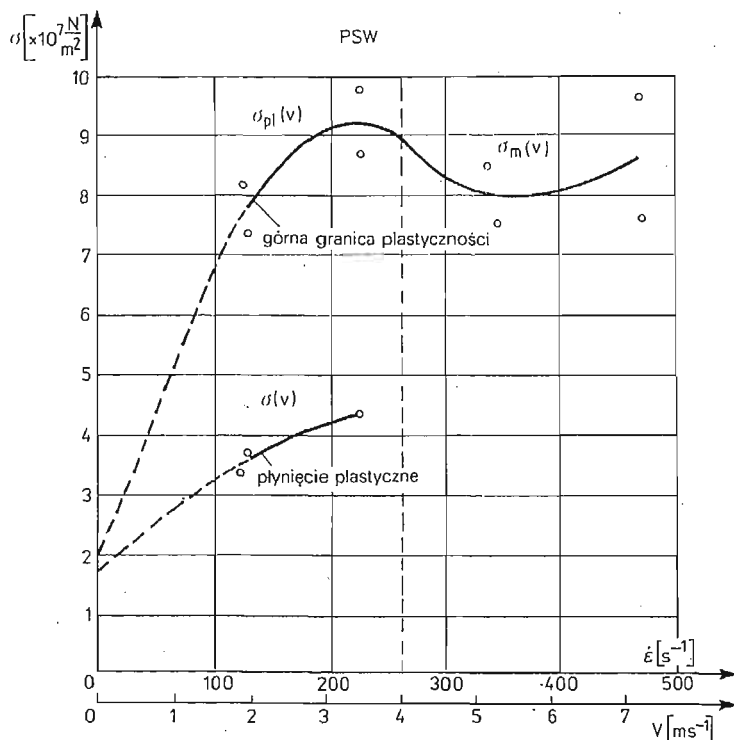
Rys. 14. Rezultaty badań polichloroku winylu — PCW

plastyczności powinna rosnać, natomiast naprężenie płynięcia na zimno maleć. Potwierdzają to uzyskane wyniki dla polipropylenu.

Natomiast w przypadku PCW i PSW przebiegi są nieco inne od oczekiwanych. Wyniki badań dla tych dwóch tworzyw zamieszczono na rys. 14 i rys. 15. Opracowane oscylogramy dla skrajnych prędkości przy dynamicznym rozciąganiu tworzyw PCW i PSW przed-

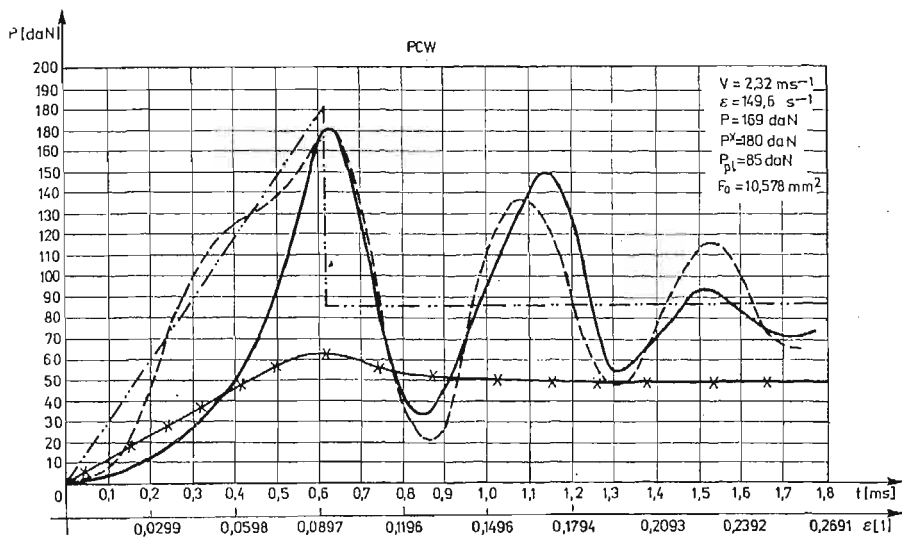
stawiono na rys. 16 i rys. 17 — PCW oraz rys. 18 i rys. 19 — PSW. W każdym z obydwu przypadków występuje duża różnica pomiędzy górną granicą plastyczności i naprężeniem płynięcia na zimno, o wiele większa niż dla warunków rozciągania statycznego. Dla polipropylenu na przykład, przy rozciąganiu statycznym różnica ta praktycznie nie istnieje, natomiast dla polistyrenu wysokociśnieniowego jest bardzo niewielka.

Po przekroczeniu krytycznej prędkości odkształcenia, zaznaczonej na rys. 13, 14 i 15 pionową linią przerywaną, materiał nie płynie na zimno. Próbka ulega zniszczeniu

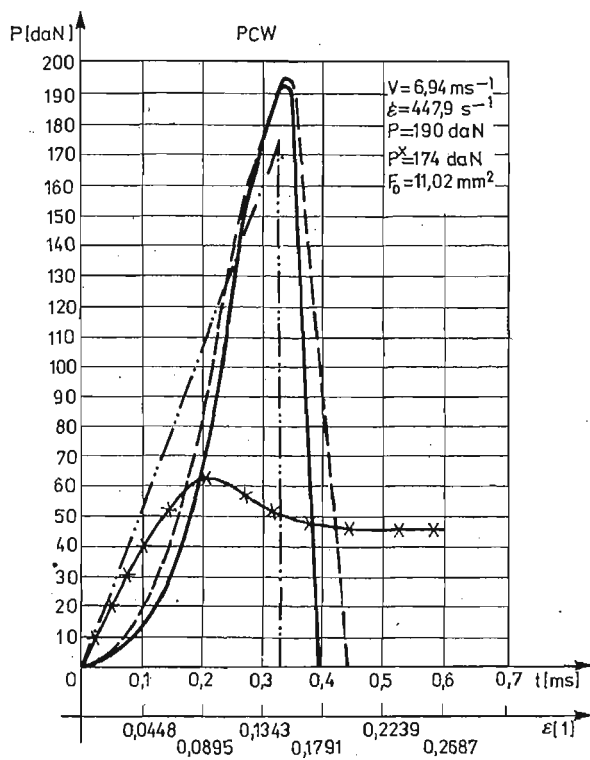


Rys. 15. Rezultaty badań polistyrenu wysokoudarowego — PSW

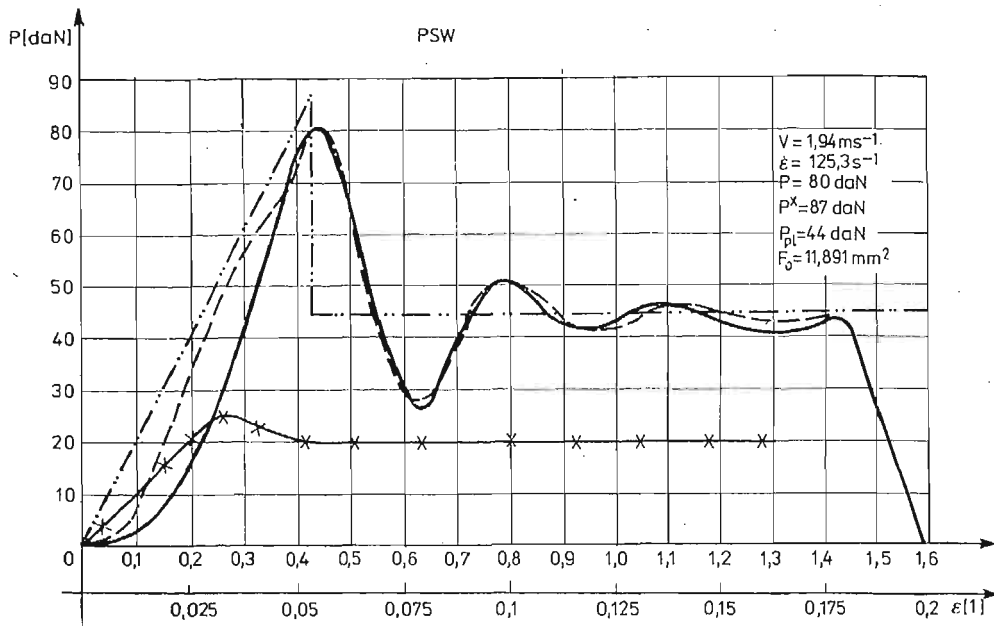
po osiągnięciu naprężenia maksymalnego. Należy jednak zdawać sobie sprawę, że pokazane na rysunkach z opracowanymi oscylogramami, w szczególności rys. 17 i rys. 19, impulsy wymuszające są przybliżone i nie powinny sugerować całkowicie kruchego zachowania się materiału. W rzeczywistości następuje prawdopodobnie niewielki spadek naprężenia po przekroczeniu naprężenia maksymalnego, a następnie zerwanie próbki, które jednak nie jest pęknięciem całkowicie kruchym, a raczej spowodowane jest dużym lepkiem oporem materiału. Widać więc wyraźnie, że istnieje pewna prędkość krytyczna odkształcenia poniżej której naprężenie płynięcia wykazuje pewną wartość, a powyżej której materiał pęka bez występowania widocznego płynięcia. Dalsze studia tego zagadnienia mogłyby być użyteczne w ustaleniu optymalnych prędkości dla procesów technologicznych kształtowania na zimno wyrobów z tworzyw sztucznych (4).



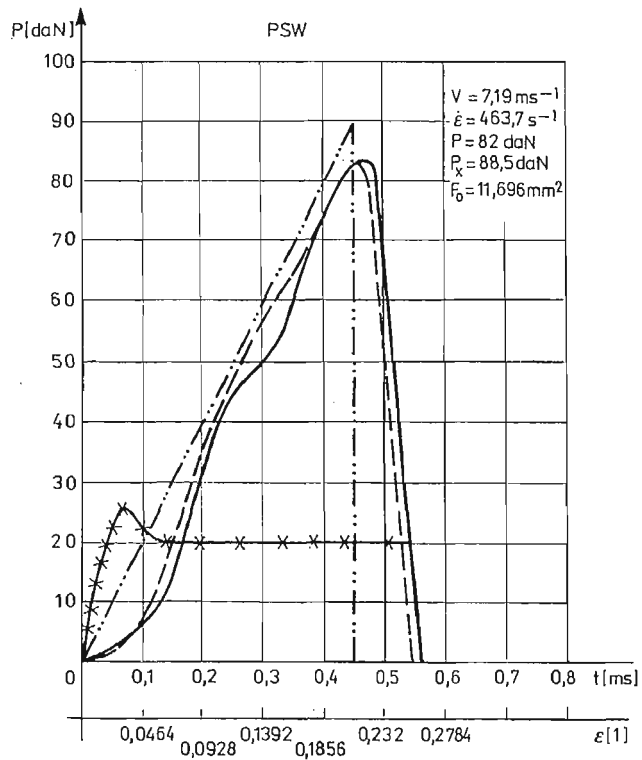
Rys. 16. Wynik dynamicznego rozciągania próbki z polichloroku winylu dla $V = 2,32 \text{ ms}^{-1}$



Rys. 17. Wynik dynamicznego rozciągania próbki z polichloroku winylu dla $V = 6,94 \text{ ms}^{-1}$



Rys. 18. Wynik dynamicznego rozciągania próbki z polistyrenu wysokoudarowego dla $V = 1,94 \text{ ms}^{-1}$



Rys. 19. Wynik dynamicznego rozciągania próbki z polistyrenu wysokoudarowego dla $V = 7,19 \text{ ms}^{-1}$

7. Wnioski

- Spośród ważniejszych wniosków uzyskanych w pracy należy wymienić:
- Badania zachowania się tworzyw sztucznych przy odkształceniu z dużymi prędkościami mogą być bardzo przydatne do oceny zarówno ich własności eksploatacyjnych jak i technologicznych.
 - Dla wszystkich trzech badanych tworzyw, tj. dla polipropylenu, polichlorku winylu i dla polistyrenu wysokociśnieniowego zaobserwowano przy pewnej krytycznej prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{cr}$ pękanie badanych materiałów bez wystąpienia widocznego płynięcia. Otrzymane wartości $\dot{\epsilon}_{cr}$ wynoszą odpowiednio w przybliżeniu PP — $\dot{\epsilon} \approx 390 \text{ s}^{-1}$, PCW — $\dot{\epsilon} \approx 310 \text{ s}^{-1}$, PSW — $\dot{\epsilon} \approx 260 \text{ s}^{-1}$.
 - Stosunkowo duża masa zredukowana układu drgającego w porównaniu ze stosunkowo małymi siłami obserwowanymi przy rozciąganiu powoduje trudności w określeniu parametrów układu. Pomimo tego rodzaju trudności uzyskano w miarę dokładne opisy analityczne oscylogramów.
 - W dalszych badaniach należałoby stosować bardziej dokładne założenia dotyczące krzywoliniowości impulsu wymuszającego przyjmowanego w analizie numerycznej, co pozwoliłoby na jeszcze dokładniejsze określenie charakterystyki materiałowej.
 - W sumie przedstawiona metoda pomiaru własności wytrzymałościowych tworzyw sztucznych, w przypadku badania płaskich próbek przy dynamicznym rozciąganiu z kompletną rejestracją próby, może stanowić podstawę do dalszych badań w tym kierunku.

Literatura cytowana w tekście

1. S. BUĆKO, E. CEGIELSKI; *Badania własności mechanicznych PA przy udarowym rozciąganiu*, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej 1976.
2. W. DĘBSKI; *Własności mechaniczne PMMA przy zmiennych szybkościach odkształcania i przy złożonym stanie naprężeń*, Prace Politechniki Poznańskiej 1966.
3. P. P. GILLIS; *Vibration analysis of a high speed tension test*, University of Kentucky 1969.
4. *Analysis of abs cold-forming by high speed testing*, Borg-Warner Corporation 1969.
5. J. KLEPACZKO; *Urządzenie do dynamicznego rozciągania*, Prace IPPT (w przygotowaniu).
6. K. A. KERIMOW, J. R. MARDUCHAJEW; *Issledowanie mechanicheskich charakteristik polimernih nitiej s ucetom skorosti dieformacji i relaksacji pri prodolnom udarie*. Mech. Dieformirujemych Twor-dych Tiel sei. Mech. Baku 1970.
7. J. M. WARD; *Mechaniczne własności polimerów jako tworzyw konstrukcyjnych*, PWN 1975.

Резюме

УДАРНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПОЛИМЕРОВ

В работе описывается экспериментальная установка и приводятся полученные результаты в виде кривых напряжение-деформация при ударном одноосном растяжении для избранных полимеров. Экспериментальные исследования проводились на маятниковом копре PSW-30 с использованием установки сконструированной в Институте Основных Проблем Техники ИАН. Эта установка, (имеющая патент ПНР) дает возможность одновременной записи силы, растягивающей

образец и перемещения из его концов. Течение процесса во времени регистрируется с помощью осциллоскопа, оснащенного фотокамерой POLAROID. В итоге обработки осциллограммы, исключая параметр времени, получают кривую растяжения, искаженную влиянием колебаний системы динамометр-образец-захваты. Действительная сила, действующая на образец, получается путем учета математически моделируемых параметров этой системы.

Если аналитическая модель удовлетворительно описывает экспериментально полученную кривую, это означает, что найденная сила, действующая при испытании на один из концов образца, описана правильно. Следовательно такой подход дает возможность косвенного устранения влияния колебаний, искажающих кривую растяжения.

При аналитическом подходе решения складывались, это создавало возможность исследовать материалы с более сложными прочностными характеристиками, например, с верхним и нижним пределами текучести.

Исследования проводились для трех материалов: высокоударного полистирола, полихлорвинила и полипропилена. Для всех исследуемых материалов было установлено существование предельной скорости растяжения, превышение которой вызывает разрушение образца без предварительного развития шейки. Для полимеров это равнозначно исчезновению верхнего предела текучести. В итоге проведенных экспериментов были получены кривые, описывающие влияние скорости на предел текучести, напряжение пластического течения и временное сопротивление разрушающее напряжение. Было установлено наличие существенных различий в поведении исследуемых материалов при медленной и ударной нагрузках. Предпринята попытка объяснить это явление с точки зрения кинетики образования и развития шейки.

Summary

DYNAMIC TENSION TEST OF POLYMERS

The paper presents some results on dynamic tension tests of several polymers. A new device is applied and described. All impact experiments were performed with the aid of pendulum hammer type PSW — 30 equipped with a special device designed at the Institute of Fundamental Technological Research of the Polish Academy of Sciences. The device, being the subject of patent, enables one to measure simultaneously the tensile force and displacement of the specimen grip as a function of time. Force and displacement is recorded independently on a two-beam oscilloscope and Polaroid camera. Having recorded the oscillogramme, the time can be eliminated and force — displacement curve obtained. However, the curve shows presence of some vibrations in the system of dynamometer — specimen — grips. Assuming a suitable vibration model it was possible to find out the parameters of the vibrating system and to calculate the real force acting on the specimen. If the analytical description coincides with the oscillogram — it means that the force was calculated correctly. Such procedure enables the indirect elimination of vibrations from the stress — strain curve. In the analytical description the method of „connecting solutions” was applied which makes possible to evaluate materials with a more complicated shape of its stress — strain curve (e.g. upper and lower yield point).

Altogether three materials were tested: impact resistant polystyrene, PVC, and polypropylene. In all materials tested the critical strain rate was measured beyond which the fracturing of specimen without prior necking is observed. It means that in such a case the plastic flow is limited. As the result of experiments the diagrams have been obtained which demonstrate the effect of strain rate on the yielding stress, flow stress, and fracture stress for all materials tested. Considerable differences are observed in material behaviour tested under slow and impact loading. An attempt was taken up to explain this phenomenon within the framework of the necking and neck propagation kinetics.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lipca 1979 roku

DYNAMIKA PRĘTA OBCIĄŻONEGO DWIEMA SIŁAMI ŚLEDZĄCYMI

KOSTA A. MLADENOV (SOFIA)

1. Wstęp

Dynamiczne zachowanie się układu sprężystego znajdującego się pod działaniem sił śledzących lub obwodowych posiada pewne szczególne własności spowodowane tym, że siły te nie są potencjalne.

Równania różniczkowe opisujące ruch tych układów w pobliżu konfiguracji równowagi zwykle nie są samo sprzężone względem warunków brzegowych. Odpowiadające wartości własne są rzeczywiste i różne tylko w przypadku wartości krytycznej parametru obciążenia. Poza tym, wartości własne są zespolone i określają niestabilność typu dywergencji lub flutteru. Bardziej szczegółową dyskusję na temat tych własności można znaleźć w szeroko znanej monografii BOŁOTINA [1], podczas gdy praca przeglądowa HERRMANNA [2] daje zwarty przegląd problemów dotyczących zagadnień niezachowawczej stabilności, stosunkowo niedawno sformułowanej stateczności sprężystej. Należy zauważyć, że badania dające dokładne rozwiązania układów niezachowawczych dotyczą przeważnie zwykłego, jednorodnego pręta ze zmiennymi warunkami brzegowymi znajdującego się pod niezachowawczym obciążeniem. Dobrze wiadomo, że układ niezachowawczy może być typu flutteru lub dywergencji w zależności od warunków brzegowych. W poprzedniej pracy autora [3] pokazano, że parametry określające sztywność zginania, masę oraz długość wpływają na zachowanie się układu niezachowawczego w punkcie krytycznym.

W niniejszej pracy skoncentrowano się na relatywnie bardziej skomplikowanym modelu składającym się z początkowo zwykłego pręta podpartego swobodnie na gładkiej rolce i obciążonego dwiema siłami śledzącymi. Pokazano, że oba typy niestabilności typu flutteru i dywergencji mogą wystąpić nie tylko wtedy gdy zmieniają się poprzednio wspomniane parametry, ale również między wartościami dwóch sił obwodowych.

2. Rozwiązanie równań podstawowych

Rozważamy początkowo prosty, jednorodny pręt posiadający stały moment bezwładności I (rys. 1). Pręt ten jest obciążony dwiema siłami śledzącymi, o stałej wielkości lecz przeciwnych zwrotach.

Zaniedbując bezwładność obrotową, równania różniczkowe opisujące małe drgania pręta wyprowadzaliśmy z zasady d'Alamberta-Lagrange'a.

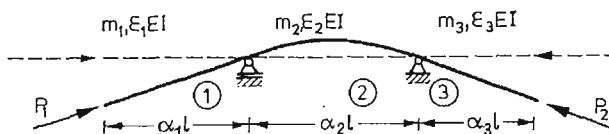
Ponieważ jest to powszechnie znany sposób, podamy więc jedynie wyniki

$$(1) \quad y_j^{IV} + k_j^2 y_j^{II} + v_j \ddot{y}_j = 0.$$

Tu jak i w pozostałej części pracy $j = 1, 2, 3$.

Ponadto celem sprowadzenia równań (1) do postaci bezwymiarowej wykorzystamy następujący zapis

$$(2) \quad y_j(\xi, t) = w_j(x, \tau)/l; \quad y_j^{IV} = \frac{\partial^4 y_j}{\partial \xi^4}; \quad \ddot{y}_j = \frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2}$$



Rys. 1

Tutaj $w(x, \tau)$ i τ są odpowiednio obciążeniem poprzecznym, mierzonym wzdłuż osi x ($0 \leq x \leq l$) oraz czasem.

Bezwymiarowe parametry t i ξ są w następujący sposób związane z wielkościami fizycznymi x i τ .

$$(3) \quad \xi = x/l; \quad t^2 = \tau^2 EI / (m l^4),$$

przy czym EI oznacza sztywność zginania, podczas gdy m oznacza masę jednostki długości pręta. Pozostałe oznaczenia występujące w układzie równań cząstkowych (1) są definiowane następująco

$$(4) \quad \begin{aligned} k_n^2 &= P_n l^2 / (\epsilon_n EI), \quad n = 1, 2, \\ k_3^2 &= P_2 l^2 / (\epsilon_3 EI), \quad v_j = m_j / (\epsilon_j m), \end{aligned}$$

przy czym m_j oznacza masę jednostki długości j -tej części pręta, podczas gdy ϵ_j są danymi stałymi.

Zakłada się, że nietrywialne rozwiązanie układu (1) ma następującą postać

$$(5) \quad y_j = X_j(\xi_j) e^{i\omega t},$$

gdzie $i = (-1)^{1/2}$.

Bezwymiarowy parametr częstotliwości ω jest związany z wielkością fizyczną Ω następującą zależnością

$$(6) \quad \omega^2 = \Omega^2 m l^4 / (EI).$$

Podstawiając (5) do układu równań (1) i wykorzystując fakt, że $e^{i\omega t}$ nie zeruje się, otrzymano następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych na funkcję $X_j(\xi_j)$

$$(7) \quad X_j^{IV} + k_j^2 X_j'' - \omega^2 v_j X_j = 0,$$

Rozwiązaniami jego są funkcje

$$(8) \quad X_j = C_{1j} \operatorname{ch} \gamma_j \xi_j + C_{2j} \operatorname{sh} \gamma_j \xi_j + C_{3j} \cos \delta_j \xi_j + C_{4j} \sin \delta_j \xi_j,$$

gdzie

$$(9) \quad \gamma_j = (z_j - k_j/2)^{1/2}, \quad \delta_j = (z_j + k_j/2)^{1/2}, \quad z_j = (n_j^4 + k_j^2/4),$$

i

$$(10) \quad n_j^4 = \omega^2 v_j / \epsilon_j, \quad 0 \leq \xi_j \leq \beta_j.$$

Rozwiązania te muszą spełniać następujące warunki brzegowe

$$(11) \quad \begin{aligned} X_1^{\text{II}}(0) = X_1^{\text{III}}(0) = X_1(\alpha_1) = 0, \quad X_1^{\text{I}}(\alpha_1) = X_2^{\text{I}}(0), \\ X_2(0) = 0, \quad \varepsilon_1 X_1^{\text{II}}(\alpha_1) = \varepsilon_2 X_2^{\text{II}}(0), \quad X_2^{\text{I}}(\alpha_2) = X_3^{\text{I}}(0), \\ \varepsilon_2 X_2^{\text{II}}(\alpha_2) = \varepsilon_3 X_3^{\text{II}}(0), \quad X_3(0) = X_3^{\text{II}}(\alpha_3) = X_3^{\text{III}}(\alpha_3) = 0. \end{aligned}$$

Podstawiając (8) do (11) otrzymuje się

$$(12) \quad \begin{aligned} C_{11}\gamma_1^2 - C_{31}\delta_1^2 &= 0, \quad C_{21}\gamma_1^3 - C_{41}\delta_1^3 = 0, \\ C_{11}\text{ch}\gamma_1\alpha_1 + C_{21}\text{sh}\gamma_1\alpha_1 + C_{31}\cos\delta_1\alpha_1 + C_{41}\sin\delta_1\alpha_1 &= 0, \\ C_{11}\gamma_1\text{sh}\gamma_1\alpha_1 + C_{21}\gamma_1\text{ch}\gamma_1\alpha_1 - C_{31}\delta_1\sin\delta_1\alpha_1 + C_{41}\delta_1\cos\delta_1\alpha_1 &= \\ &= C_{22}\gamma_2 + C_{42}\delta_2, \\ C_{11}\gamma_1^2\text{ch}\gamma_1\alpha_1 + C_{21}\gamma_1^2\text{sh}\gamma_1\alpha_1 - C_{31}\delta_1^2\cos\delta_1\alpha_1 - C_{41}\delta_1^2\sin\delta_1\alpha_1 &= \\ &= \varepsilon_2(C_{12}\gamma_2^2 - C_{32}\delta_2^2)/\varepsilon_1, \\ C_{12} + C_{32} &= 0, \quad C_{13} + C_{33} = 0, \\ C_{12}\text{ch}\gamma_2\alpha_2 + C_{22}\text{sh}\gamma_2\alpha_2 + C_{32}\cos\delta_2\alpha_2 + C_{42}\sin\delta_2\alpha_2 &= 0, \\ C_{12}\gamma_2^2\text{sh}\gamma_2\alpha_2 + C_{22}\gamma_2^2\text{ch}\gamma_2\alpha_2 - C_{32}\delta_2^2\sin\delta_2\alpha_2 + C_{42}\delta_2^2\cos\delta_2\alpha_2 &= \\ &= C_{23}\gamma^2 + C_{43}\delta_3, \\ C_{12}\gamma_2^2\text{ch}\gamma_2\alpha_2 + C_{22}\gamma_2^2\text{sh}\gamma_2\alpha_2 - C_{32}\delta_2^2\cos\delta_2\alpha_2 - C_{42}\delta_2^2\sin\delta_2\alpha_2 &= \\ &= \varepsilon_3(C_{13}\gamma_3^2 - C_{33}\delta_3^2)/\varepsilon_2, \\ C_{13}\gamma_3^2\text{ch}\gamma_3\alpha_3 + C_{23}\gamma_3^2\text{sh}\gamma_3\alpha_3 - C_{33}\delta_3^2\cos\delta_3\alpha_3 - C_{43}\delta_3^2\sin\delta_3\alpha_3 &= 0, \\ C_{13}\gamma_3^3\text{sh}\gamma_3\alpha_3 + C_{23}\gamma_3^3\text{ch}\gamma_3\alpha_3 + C_{33}\delta_3^3\sin\delta_3\alpha_3 - C_{43}\delta_3^3\cos\delta_3\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dla niezerowego rozwiązania wyznacznik układu (12) musi znikać. Stąd otrzymuje się równanie charakterystyczne

$$(13) \quad \begin{aligned} z_2 \kappa_1 (z_2 \kappa_3 \text{sh} \gamma_2 \alpha_2 \sin \delta_2 \alpha_2 - z_3 n_3^2 \varepsilon_3 \Theta_2 \Theta_3) / \varepsilon_1 - \\ - n_1^2 z_1 \Theta_1 [\varepsilon_3 z_3 n_3^2 (2n_2^2 \text{ch} \gamma_2 \alpha_2 \cos \delta_2 \alpha_2 - 2n_2^2 + \\ k_2 \text{sh} \gamma_2 \alpha_2 \sin \delta_2 \alpha_2) \Theta_3 + z_2 \kappa_3 \Theta_{2s}] = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(14) \quad \begin{aligned} \kappa_i &= \gamma_i^4 + \delta_i^4 + n_i^2 (2n_i^2 \text{ch} \gamma_i \alpha_i \cos \delta_i \alpha_i + k_i \text{sh} \gamma_i \alpha_i \sin \delta_i \alpha_i), \quad i = 1, 3, \\ \Theta_j &= \gamma_j \text{ch} \gamma_j \alpha_j \sin \delta_j \alpha_j - \delta_j \text{sh} \gamma_j \alpha_j \cos \delta_j \alpha_j. \end{aligned}$$

Przestępne równanie (13) otrzymano dla

$$(15) \quad \varepsilon_2 = 1.$$

Niektóre równania charakterystyczne w zagadnieniach dotyczących wartości własnych pręta, znane z literatury, mogą być wyprowadzone jako szczególny przypadek z równań (13). Na przykład, niech α_3 jest bliskie zeru, wówczas

$$(16) \quad \Theta_3 = 0, \quad \kappa_3 = 4z_3^2,$$

oraz równania (13) redukują się do następującej postaci

$$(17) \quad \kappa_1 z_2 \text{sh} \gamma_2 \alpha_2 \sin \delta_2 \alpha_2 - \varepsilon_1 z_1 n^2 \Theta_1 \Theta_2 = 0.$$

Dla $\alpha_1 = 0$ można otrzymać z (14)

$$(18) \quad \Theta_1 = 0, \quad \kappa_1 = 4z_1^2,$$

gdy równanie (13) przyjmuje postać

$$(19) \quad z_2 \kappa_3 \text{sh} \gamma_2 \alpha_2 \sin \delta_2 \alpha_2 - z_3 n_3^2 \varepsilon_3 \Theta_2 \Theta_3 = 0.$$

Podstawiając

$$(20) \quad \alpha_1 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 = 1$$

oraz przekształcając wyrażenia (16) i (18), po transformacji dochodzi się do równania (21)

$$\text{sh} \gamma_2 \sin \delta_2 = 1.$$

Dla $P = 1$ jego pierwiastki odpowiadają częstotliwości drgań swobodnych swobodnie podpartego pręta, gdy $n_2 = 0$ prowadzi do nieskończonego zbioru pierwiastków równania (21), które odpowiadają dobrze znanej eulerowskiej sile krytycznej dla takiego samego pręta.

Równania charakterystyczne (17) i (19) dają wartości własne krzywych dla dwóch niezachowawczych zagadnień zbadanych przez autora [3].

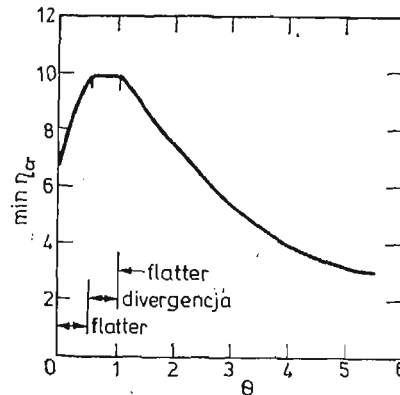
3. Wyniki numeryczne. Wnioski końcowe

Pierwiastki równania charakterystycznego (13) otrzymane zostały przy pomocy komputera. Przedstawiają one zależność pomiędzy częstotliwością a parametrami obciążenia. Wszystkie wyniki otrzymano przy założeniu

$$(22) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \\ v_1 &= v_2 = v_3, \\ \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

Dla wygody obliczeń wprowadzono wielkości

$$(23) \quad \Theta = P_2/P_1, \quad \eta = k_2.$$



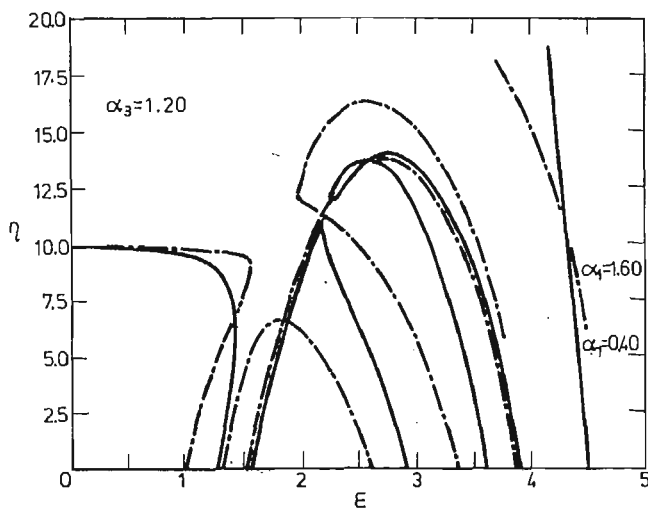
Rys. 2

Wyniki rozwiązań numerycznych dane są na rys. 2, 3, 4, 5. Pokazują one że jeden z parametrów krytycznych η zawsze zbiega do π^2 tzn., że odpowiada on najmniejszemu eulerowskiemu obciążeniu krytycznemu swobodnie podpartego pręta określającemu niestabilność typu dywergencji. Jest to albo najmniejsza wartość krytyczna, albo wartość o wyższym stopniu w zależności od parametrów rozważanego układu.

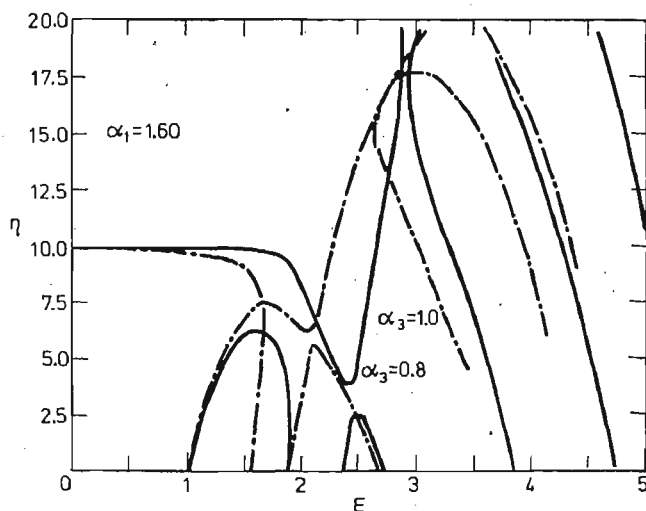
Ponadto na rys. 2 pokazaliśmy zależność pomiędzy najmniejszą krytyczną wartością parametru obciążenia η oraz stosunkiem Θ dla $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$.

Zauważmy, że η_{cr} w dużym stopniu zależy od θ . Dla $\theta < 0.5$ i $\theta > 1.0$ najmniejsza η_{cr} odpowiada niestabilności typu flatteru, podczas gdy dla $0.5 \leq \theta \leq 1.0$ jest niezależne od θ i odpowiada niestabilności typu dywergencji.

Na rys. 3 pokazaliśmy jakie otrzymuje się krzywe wartości własnych gdy α_1 zmienia się, natomiast $\theta = 1$ i $\alpha_3 = 1.2$ są stałe.

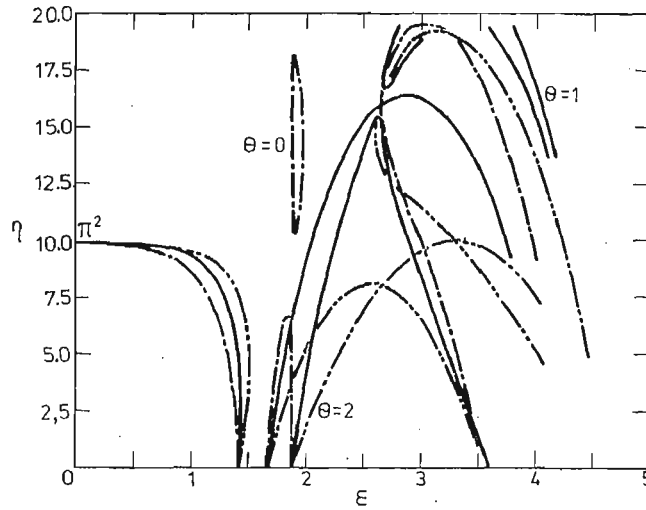


Rys. 3



Rys. 4

Podobna zależność dla $\alpha_1 = 1.6$, $\theta = 1.0$ i różnych α_3 jest przedstawiona na rys. 4. Rys. 5 pokazuje zależność wartości własnych od parametru. Widać stąd, że w punkcie krytycznym cechy dynamiczne układu zależą od parametrów układu nie tylko ilościowo, ale także jakościowo.



Rys. 5

Literatura cytowana w tekście

1. В. В. БОЛОТИН; *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгит, Москва 1961.
2. G. HERRMANN; *Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces*, AMR 20 (1967), 103 - 108.
3. K. A. MLADENOV; *Über das dynamische Verhalten eines Druckstabes mit tangententreuer Endbelastung*, to appear in ZAMM.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ДВУХ СЛЕДЯЩИХ СИЛ

Исследуется динамическое поведение двухконсольного однопролетного стержня, нагруженного в концах двумя следящими силами. Характеристическое уравнение задачи решено при помощи ЭВМ. Результаты показывают что стержень теряет устойчивость либо в виде флаттера, либо в виде дивергенции в зависимости от параметров системы и соотношения между величинами сил.

Summary

DYNAMICS OF A BAR UNDER TWO FOLLOWER FORCES

The purpose of the paper is to investigate the dynamical behaviour of a bar subjected to two follower forces. Numerical solutions of the characteristic equation show that both flutter and divergence instability may occur depending on the parameters of the system and the ratio between the magnitudes of the two forces.

WYŻSZA SZKOŁA BUDOWNICTWA I ARCHITEKTURY
SOFIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1979 r.

OKREŚLENIE GĘSTOŚCI STRUMIENIA CIEPŁA NA PODSTAWIE POMIARÓW
NIEUSTALONEJ TEMPERATURY JEDNOSTRONNIE OGRZEWANEJ PŁYTKI
PŁASKIEJ

STEFAN WIŚNIEWSKI (WARSZAWA)

Streszczenie

W pracy podano analityczne metody określania gęstości strumienia ciepła na podstawie pomiarów nieustalanej temperatury powierzchni przejmującej ciepło płytki płaskiej w warunkach gdy pozostałe jej powierzchnie są adiabatyczne. Szczególnie proste jest określenie stałej wartości gęstości strumienia ciepła lub stałego współczynnika przejmowania ciepła, w przypadku, gdy pomiary temperatur wykonywane są w dowolnym punkcie płytki czujnika zaproponowano metodę opartą na analogowym modelu Libmanna.

Ważniejsze oznaczenia

- a — współczynnik wyrównywania temperatury,
- c — ciepło właściwe,
- q_s — gęstość strumienia ciepła na powierzchni płytki czujnika,
- t — temperatura płytki czujnika,
- t_0 — temperatura początkowa płytki czujnika,
- t_p — temperatura płynu,
- t_s — temperatura powierzchni płytki ogrzewanej przez płyn,
- α — współczynnik przejmowania ciepła,
- δ — grubość płytki czujnika,
- ϑ — nadwyżka temperatury płynu nad temperaturą płytki czujnika,
- Θ — bezwymiarowa nadwyżka temperatury,
- λ — współczynnik przewodzenia ciepła,
- ρ — gęstość,
- τ — czas,
- ω — prędkość kąтова.

1. Wstęp

Zagadnienia odwrotne przewodzenia ciepła polegają na określaniu warunków brzegowych wymiany ciepła na powierzchni ciała stałego (temperatury powierzchni, gęstości strumienia ciepła na powierzchni zewnętrznej, współczynnika przejmowania ciepła) ze

znanych temperatur w niektórych punktach ciała oraz przy znanym równaniu różniczkowym przewodzenia ciepła i znanych własnościach termofizycznych materiału ciała.

Chociaż danym warunkom brzegowym odpowiada tylko jedno rozwiązanie równania różniczkowego przewodzenia ciepła, to takie samo pole temperatur może być również otrzymane przy innych równoważnych warunkach brzegowych wytwarzających na powierzchni płytki taką samą gęstość strumienia ciepła

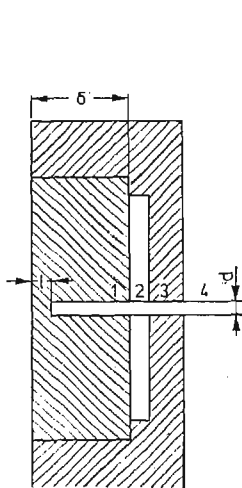
$$(1) \quad q_s(\tau) = \alpha(\tau)[t_p(\tau) - t_s(\tau)].$$

Na podstawie znanych wartości zmiany w czasie τ temperatury płynu t_p i temperatury powierzchni płytki stykającej się z płynem t_s , przy znanej gęstości strumienia ciepła na tej powierzchni q_s , można obliczyć współczynnik przyjmowania ciepła α . Zmienną w czasie gęstość strumienia ciepła na powierzchni płytki stykającej się z płynem można obliczyć z wyników pomiaru zmiany w czasie temperatury tej powierzchni.

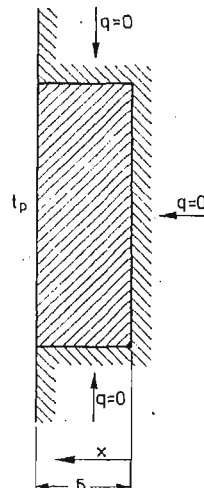
Problem określania gęstości strumienia ciepła na podstawie pomiarów temperatury zewnętrznej powierzchni ciała półnieskończonego opracował Giedt [1]. Metoda jego jest bardzo dogodna przy występowaniu szybkich zmian temperatury na powierzchni grubej ścianki. W innych przypadkach do określania gęstości przyjmowanego strumienia ciepła może być dogodnie zastosować czujnik w postaci płaskiej płytki z jednej strony ogrzewanej przez płyn a z pozostałych stron cieplnie izolowanej.

2. Obliczanie gęstości strumienia ciepła na podstawie pomiaru temperatury powierzchni płytki stykającej się z płynem

Do pomiaru gęstości przyjmowanego strumienia ciepła można zastosować czujnik w postaci płaskiej płytki o niezbyt dużej grubości δ , izolowanej cieplnie na wszystkich powierzchniach nie stykających się z płynem (rys. 1). Dobrą izolację cieplną tworzy nie-



Rys. 1. Schemat czujnika: 1 — płytka czujnika, 2 — szczelina wypełniona powietrzem, warstwa izolacyjna, 4 — termoelement



Rys. 2. Schemat wymiany ciepła w płytce czujnika

ruchoma warstewka powietrza zawarta między powierzchnią płytki czujnika a warstwą materiału izolacyjnego. Rozmiary płytki czujnika oraz kształty w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku należy dostosować do konkretnych warunków eksperymentu, szczególnie dbając o zachowanie założonego w rozumowaniach teoretycznych jednowymiarowego pola temperatur.

W początkowym okresie wymiany ciepła, zmiany temperatur nie występują na całej grubości płytki czujnika. W tym przypadku gęstość przejmowanego strumienia ciepła określa się tak jak dla ciała półnieskończonego [1]

$$(2) \quad q_s(\tau) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{\tau} \frac{dt_s}{d\tau'} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}},$$

gdzie λ oraz a są współczynnikami przewodzenia ciepła oraz wyrównywania temperatury materiału płytki czujnika.

Ponieważ przy eksperymentalnym określaniu pochodnej $\frac{dt_s}{d\tau}$ pojawiają się stosunkowo duże błędy dogodnie jest przekształcić wzór (2) całkując przez części a wtedy otrzymuje się

$$(3) \quad q_s(\tau) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{t_s(\tau)}{\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \frac{t_s(\tau) - t_s(\tau')}{(\tau - \tau')^{1.5}} d\tau' \right].$$

W przypadku gdy liczba Biota

$$(4) \quad Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} < 0,5,$$

można przyjąć, że płytka czujnika ma w danej chwili jednakową temperaturę w każdym punkcie a wtedy chwilowa gęstość przejmowanego strumienia ciepła wynosi

$$(5) \quad q_s(\tau) = \delta \rho c \frac{dt}{d\tau},$$

gdzie ρ oraz c są to gęstość oraz ciepło właściwe materiału płytki czujnika.

W przypadku gdy współczynnik przejmowania ciepła jest stały może być obliczony prosto na podstawie teorii uporządkowanej wymiany ciepła, jeżeli stała jest temperatura płynu t_p , według wzoru

$$(6) \quad \alpha = \delta \rho c \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1},$$

gdzie wprowadzono nadwyżkę temperatury płynu nad temperaturą płytki

$$(7) \quad \vartheta = t_p - t.$$

W ogólnym przypadku pole temperatur w rozpatrywanej płytce czujnika (rys. 2), wykonanej z materiału o stałym współczynniku wyrównywania temperatury a , opisywane jest przez równanie różniczkowe

$$(8) \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq \delta,$$

z warunkiem początkowym

$$(9) \quad t(x, 0) = t_0(x) \quad \text{dla} \quad \tau = 0,$$

oraz warunkami brzegowymi

$$(10) \quad \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0,$$

$$(11) \quad t(\delta, \tau) = t_s(\tau) \quad \text{dla} \quad x = \delta,$$

Rozwiązanie powyższego problemu ma postać [2]

$$(12) \quad t(x, \tau) = \frac{2}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a}{\delta^2} \tau\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \left[(-1)^n \mu_n \frac{a}{\delta} \int_0^{\tau} \exp\left(\mu_n^2 \frac{a}{\delta^2} \tau'\right) \times \right. \\ \left. \times t_s(\tau') d\tau' + \int_0^{\delta} t_0(x') \cos\left(\mu_n \frac{x'}{\delta}\right) dx' \right],$$

gdzie

$$(13) \quad \mu_n = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Najczęściej rozpoczyna się pomiary od równomiernego rozkładu temperatury w płytce czujnika $t_0 = \text{const}$ a wtedy rozkład temperatury w niej określony jest przez równanie

$$(14) \quad t(x, \tau) = \frac{2}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a}{\delta^2} \tau\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \left[\mu_n \frac{a}{\delta} \int_0^{\tau} \exp\left(\mu_n^2 \frac{a}{\delta^2} \tau'\right) \times \right. \\ \left. \times t_s(\tau') d\tau' + \frac{t_0 \delta}{\mu_n} \right].$$

Wielkością mierzoną jest temperatura zewnętrznej powierzchni płytki $t_s(\tau)$ natomiast wielkością obliczaną jest gęstość strumienia ciepła $q_s(\tau)$ na powierzchni $q = \delta$. Ponieważ ciepło jest dostarczane tylko przez jedną powierzchnię płytki więc jest w całości zużywane na przyrost jej pojemności cieplnej. Gęstość strumienia ciepła przejmowanego przez płytkę można więc obliczyć jako

$$(15) \quad q_s(\tau) = \int_0^{\delta} \rho c \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \partial x = \\ = \frac{2\lambda}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ t_s(\tau) - \gamma_n \int_0^{\tau} \exp[-\gamma_n(\tau - \tau')] t_s(\tau') d\tau' - t_0 \exp(-\gamma_n \tau) \right\},$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$(16) \quad \gamma_n = \frac{\mu_n^2 a}{\delta^2} = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a}{4\delta^2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

W warunkach nieuporządkowanej wymiany ciepła można niekiedy aproksymować zmianę temperatury powierzchni płytki zależnością paraboliczną

$$(17) \quad t_s(\tau') = t_0 + a_1 \tau' + a_2 \tau'^2,$$

a wtedy

$$(18) \quad q_s(\tau) = \frac{2\lambda}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{a_1 \gamma_n - 2a_2}{\gamma_n^2} [1 - \exp(-\gamma_n \tau)] + \frac{2a_2 \tau}{\gamma_n} \right\}.$$

Gdy $\gamma_n > 20$ można pominąć dalsze wyrazy we wzorze.

W warunkach uporządkowanej wymiany ciepła zmiana temperatury ogrzewanej powierzchni płytki może być przedstawiona w postaci zależności eksponencjalnej

$$(19) \quad t_s(\tau') = b_0 + b_1 \exp(-b_2 \tau'),$$

a wtedy równanie (15) przybiera postać

$$(20) \quad q_s(\tau) = \frac{2\lambda b_1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_n b_2} \right) [\exp(-b_2 \tau) - \exp(-\gamma_n \tau)].$$

Dla okresowej zmiany temperatury powierzchni płytki

$$(21) \quad t_s(\tau') = t_0 + \vartheta_{sm} \cos \omega \tau',$$

otrzymuje się

$$(22) \quad q_s(\tau) = \frac{2\lambda}{\delta} \vartheta_{sm} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos \omega \tau - \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 + \omega^2} (\gamma_n \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau - \gamma_n \exp(-\gamma_n \tau)) \right].$$

W tym przypadku konieczny jest jedynie pomiar amplitudy temperatury ϑ_{sm} na powierzchni płytki.

Jeżeli pulsacje temperatury nie dochodzą do powierzchni adiabatycznej płytki, należy posługiwać się wzorem słusznym dla ciała półnieskończonego [3]

$$(23) \quad q_s(\tau) = \lambda \vartheta_{sm} \sqrt{\frac{\omega}{2a}} (\cos \omega \tau - \sin \omega \tau) = \lambda \vartheta_{sm} \sqrt{\frac{\omega}{a}} \cos \left(\omega \tau + \frac{\pi}{4} \right).$$

Pomiar temperatury powierzchni ciała stałego od strony wewnętrznej jest dość skomplikowanym problemem. Zainstalowanie czujnika temperatury wytwarza zaburzenie pola temperatury w postaci lokalnego wzrostu temperatury powierzchni wywołanego obecnością czujnika temperatury o znacznie niższym współczynniku przewodzenia ciepła niż materiał płytki. Efekt ten badali Masters i Stein [4] a następnie Beck i Hurwicz [9]. Jak wynika z tych badań błąd pomiaru temperatury powierzchni jest równy w przybliżeniu zero gdy stosunek promienia r otworu na czujnik temperatury do odległości l dna otworu od powierzchni zewnętrznej płytki wynosi

$$(24) \quad \frac{r}{l} = 1,1 \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_c},$$

gdzie:

λ — współczynnik przewodzenia ciepła materiału płytki,

λ_c — współczynnik przewodzenia ciepła materiału czujnika temperatury.

3. Określenie stałej wartości gęstości strumienia ciepła

Jeżeli na powierzchni płytki płaskiej otoczonej płynem ($x = \delta$) występuje stały warunek brzegowy drugiego rodzaju ($q_s = \text{const}$), a na równoległej do niej powierzchni ($x = 0$) warunek brzegowy drugiego rodzaju jest równy zeru ($q = 0; \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$), to przy równomiernej temperaturze początkowej ($t_0 = \text{const}$) otrzymuje się w płycie pole temperatur odpowiadające symetrycznej połowie pola temperatur w nieograniczonej płycie płaskiej (zawartej w granicach $-\delta \leq x \leq \delta$) przy stałym warunku brzegowym drugiego rodzaju, jednakowym na obydwu powierzchniach [6]

$$(25) \quad t(x, \tau) = t_0 + q_s \frac{\delta}{\lambda} \left[\frac{a\tau}{\delta^2} - \frac{\delta^2 - 3x^2}{6\delta^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}) \right],$$

gdzie

$$(26) \quad \mu_n = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Przy wartościach liczby Fouriera $\text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2} \geq 0,5$ błąd wynikający z uwzględnienia tylko pierwszego wyrazu szeregu nie przekracza 0,5% a wtedy można posługiwać się równaniem

$$(27) \quad t(x, \tau) = t_0 + q_s \frac{\delta}{\lambda} \left(\frac{a\tau}{\delta^2} - \frac{\delta^2 - 3x^2}{6\delta^2} \right).$$

Obliczenie gęstości strumienia ciepła upraszcza się gdy temperatura jest mierzona w punkcie, w którym temperatura jest równa średniej temperaturze płytki czujnika, co wiąże się z warunkiem

$$\delta^2 - 3\bar{x}^2 = 0,$$

czyli

$$(28) \quad \bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \delta = 0,577\delta.$$

W tym przypadku można gęstość strumienia przyjmowanego ciepła obliczać na podstawie wzoru

$$(29) \quad q_s = [t(\bar{x}, \tau + \Delta\tau) - t(\bar{x}, \tau)] \frac{\partial q_c}{\Delta\tau}.$$

4. Określenie stałej wartości współczynnika przyjmowania ciepła

W wielu przypadkach występuje stały warunek brzegowy przyjmowania ciepła polegający na stałości temperatury płynu $t_p = \text{const}$ oraz stałości współczynnika przyjmowania ciepła $\alpha = \text{const}$. Z tej przyczyny zostanie obecnie rozpatrzone nieustalone pole temperatur w płycie czujnika gęstości strumienia ciepła przy stałym warunku brzegowym trzeciego

rodzaju od strony otoczonej płynem ($x = \delta$) oraz równym zeru warunkiem brzegowym drugiego rodzaju ($q = 0; \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$) na powierzchni izolowanej cieplnie ($x = 0$). Takie pole temperatur odpowiada symetrycznej połowie pola temperatur w nieograniczonej płycie płaskiej zawartej w granicach $-\delta \leq x \leq \delta$ o równomiernej temperaturze początkowej $t_0 = \text{const}$ i przy stałych oraz jednakowych warunkach brzegowych trzeciego rodzaju na obydwu powierzchniach [6]

$$(30) \quad \Theta = \frac{t - t_0}{t_p - t_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}),$$

gdzie μ_n są to pierwiastki równania charakterystycznego

$$(31) \quad \text{ctg} \mu = \frac{\mu^2 - \text{Bi}^2}{2\mu \text{Bi}}.$$

Stałe współczynniki A_n określone są przez wzór

$$(32) \quad A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n},$$

liczba Biota

$$(33) \quad \text{Bi} = \frac{\alpha \delta}{\lambda},$$

liczba Fouriera

$$(34) \quad \text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2},$$

Jako przykład zostanie rozpatrzony przypadek pomiaru temperatury t_a na powierzchni adiabatycznej płytki czujnika ($x = 0$) lecz podobną metodę można zastosować przy pomiarze temperatury w innych miejscach płytki czujnika. Na powierzchni adiabatycznej płytki czujnika względna nadwyżka temperatury wynosi

$$(35) \quad \Theta_a(\tau) = \frac{t_a(\tau) - t_0}{t_p - t_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}).$$

Wykonywanie obliczeń analitycznych jest w tym przypadku utrudnione. Można natomiast posługiwać się wykresami [6]. Mierzy się w tym przypadku temperaturę początkową płytki czujnika t_0 , temperaturę płynu t_p oraz zmianę w czasie temperatury powierzchni adiabatycznej $t_a(\tau)$ i następnie oblicza się $\Theta_a(\tau)$ oraz liczby Fouriera dla tych samych chwil. Obliczone wartości pozwalają wyznaczyć jednoznacznie z wykresu liczbę Biota, której odpowiada szukany współczynnik przejmowania ciepła. Jeżeli współczynnik przejmowania ciepła i temperatura płynu są stałe podczas eksperymentu otrzymuje się te same wartości liczby Biota dla każdej chwili. Gdy zmiany liczby Biota wykraczają poza błędy eksperymentu należy przyjąć, że warunki brzegowe trzeciego rodzaju zmieniają się w czasie i powyższa metoda nie może być zastosowana.

Gdy $Bi \leq 1$ oraz $Fo \geq 0,55$ sumy we wzorach (30) oraz (35) można ograniczyć tylko do jednego wyrazu z błędem poniżej 0,25% a wtedy

$$(36) \quad \Theta(\tau) = 1 - A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \exp(-\mu_1^2 Fo),$$

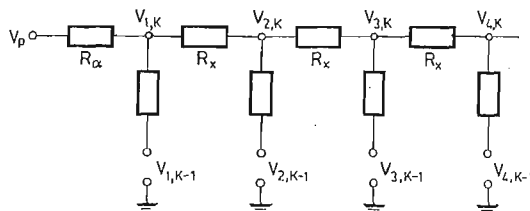
oraz

$$(37) \quad \Theta_a(\tau) = 1 - A_1 \exp(-\mu_1^2 Fo),$$

co znacznie upraszcza sporządzanie wykresów $\Theta = f(Bi, Fo)$.

5. Określenie warunków brzegowych wymiany ciepła na podstawie pomiaru temperatury w dowolnym punkcie płytki czujnika

Ponieważ pomiar temperatury powierzchni ciała stałego od strony wewnętrznej lub od strony zewnętrznej nie zawsze jest dogodny można zmierzyć temperaturę $t(x, \tau)$ w dowolnych punktach czujnika. W tym przypadku wielkością szukaną może być temperatura powierzchni ($x = 0$) płytki czujnika $t_s(\tau)$, gęstość strumienia ciepła $q_s(\tau)$ lub współczynnik przejmowania ciepła $\alpha(\tau)$. Gdy q_s oraz α zmieniają się w czasie pod względem prostoty i szybkości uzyskania wyników godne zalecenia jest wykorzystanie modelu analogowego typu siatka rezystorów (rys. 3), stosowanego w metodzie Liebmana [3].



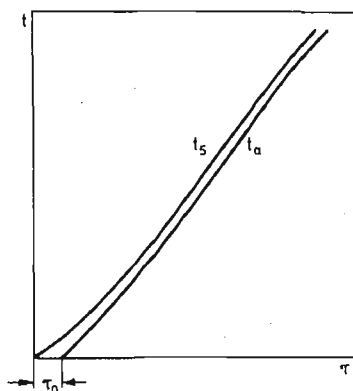
Rys. 3. Schemat modelu analogowego stosowanego w metodzie Liebmana do rozwiązywania zagadnienia odwrotnego

Rozwiązanie zagadnienia prostego dla przewodzenia ciepła, tj. określenie rozkładu temperatury na podstawie danych warunków początkowych i brzegowych, dokonuje się metodą Liebmana krok po kroku zadając do rezystorów R_x , symulujących krok czasowy $\Delta\tau$, napięcie $V_{i,k-1}$ proporcjonalne do wartości temperatur w danym węźle $t_{i,k-1}$ w poprzednim kroku czasu $k-1$. Do skrajnych węzłów siatki zadaje się odpowiednie warunki brzegowe dla kroku czasu k . Z pomiaru napięć $V_{i,k}$ w węzłach modelu określa się wartości temperatur ścianki dla kroku czasu k . Postępowanie takie powtarza się dla następných kroków czasu.

Przy rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnego zakres czynności dla każdego kroku czasu rozszerza się o dodatkowe, związane z określeniem nieznannej wartości współczynnika przejmowania ciepła α . Po zadaniu napięć w węzłach siatki $V_{i,k-1}$ dla kroku czasu $k-1$ oraz na brzegu siatki napięcia $V_{p,k}$, odpowiadającego temperaturze płynu $t_{p,k}$ w kroku czasu k , dokonuje się zmiany wartości rezystancji rezystora R_α , modelującego opór przejmowania ciepła, tak by w węźle odpowiadającym położeniu punktu pomiarowego uzyskać

wartość napięcia wyznaczoną ze zmierzonej temperatury w czujniku w kroku czasu k . Po spełnieniu tego warunku dokonuje się pomiaru rezystancji rezystora R_α odwrotnie proporcjonalnej do współczynnika przejmowania ciepła. Następnie powtarza się wszystkie czynności dla kolejnych kroków czasu aż do zakończenia procesu rozwiązywania problemu.

Przy rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnego pojawia się ograniczenie od dołu wartości kroku dyskretyzacji czasu $\Delta\tau$, ze względu na przesunięcie czasowe krzywych zmian temperatury w punktach położonych wewnątrz płytki tworzącej czujnik, zwiększające się w miarę oddalania od powierzchni przejmowania ciepła (rys. 4). Ze względu na dokładność



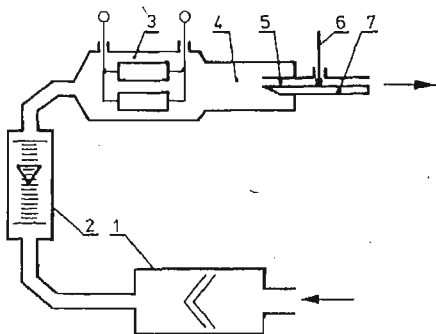
Rys. 4. Zmiany w czasie temperatur: t_s — powierzchni płytki czujnika ogrzewanej płynem, t_a — powierzchni adiabatycznej płytki

rozwiązania zagadnienia odwrotnego należy przyjąć krok dyskretyzacji czasu $\Delta\tau$ większy od opóźnienia czasowego τ_0 rozpoczęcia zmiany temperatury mierzonej w czujniku t_m w stosunku do rozpoczęcia zmiany temperatury płynu t_p otaczającego czujnik. Z drugiej strony należy uwzględnić, że początkowa faza procesu wymiany ciepła decyduje w największym stopniu o dokładności rozwiązania, co wymaga przyjęcia małej wartości kroku czasu $\Delta\tau$. Obydwa powyższe ograniczenia prowadzą do wniosku, że w przypadku rozwiązywania zagadnienia odwrotnego należy punkt pomiarowy w czujniku umieszczać możliwie blisko powierzchni przejmowania ciepła oraz dokładnie i równocześnie rejestrować zmiany temperatury płynu oraz punktu pomiarowego za pomocą czujników temperatury o możliwie małej stałej czasowej w celu dokładnego określenia czasu opóźnienia τ_0 . Opóźnienie to będzie tym mniejsze im większy jest współczynnik wyrównywania temperatury płytki czujnika. Dla rozpatrywania początkowej fazy przejmowania ciepła płytka czujnika powinna być wykonana z miedzi, a dla późniejszego okresu ze stali.

6. Badania eksperymentalne

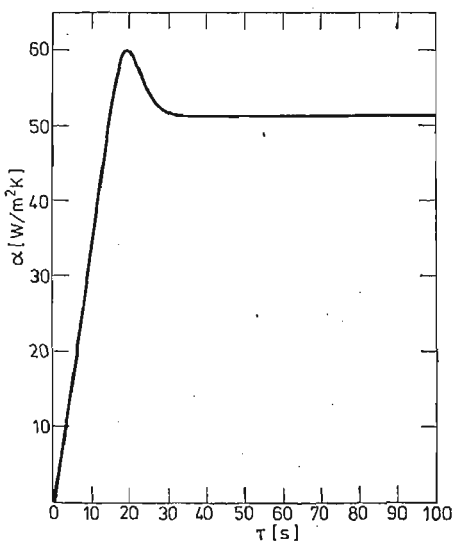
W celu weryfikacji przydatności omówionej metody analogowej określania gęstości strumienia ciepła do badań eksperymentalnych wykonano pomiary na stanowisku przedstawionym schematycznie na rysunku 5. Jako dmuchawę (1) zastosowano dwa odkurzacze zasilane przez autotransformator, co pozwalało regulować strumień masy powietrza.

Pomiary strumienia masy powietrza były dokonywane przez rotametr (2). Podgrzewacz powietrza (3) stanowiła rura zawierająca grzejnik elektryczny. Zmianę mocy grzejnika uzyskiwano przez zmniejszanie napięcia prądu za pomocą autotransformatora. W celu uniknięcia strat ciepła ścianki podgrzewacza izolowano sznurem azbestowym. Źródło gorącego powietrza działało w warunkach ustalonych.



Rys. 5. Schemat stanowiska badawczego: 1 — dmuchawa, 2 — rotametr, 3 — podgrzewacz powietrza, 4 — kanał wyrównawczy, 5 — kanał pomiarowy, 6 — termoelement płaszczowy, 7 — czujnik

Z podgrzewacza powietrze przepływało przez kanał wyrównawczy (4) do prostokątnego kanału pomiarowego (5) o wymiarach przekroju poprzecznego $5,5 \times 80$ mm. W osi kanału pomiarowego umieszczono płaszczowy termoelement Fe-Konst (6) o zewnętrznej średnicy płaszcza 0,5 mm, przeznaczony do pomiaru temperatury powietrza. W szerszej ściance kanału pomiarowego znajdował się otwór, do którego gwałtownie wprowadzano czujnik (7) do pomiaru gęstości strumienia ciepła, oś którego znajdowała się w odległości 110 mm od krawędzi napływu powietrza na ściankę kanału.



Rys. 6. Zmiana w czasie współczynnika przejmowania ciepła po gwałtownym zetknięciu czujnika z ustalonym przepływem laminarnym

Parametry stanowiska eksperymentalnego pozwalały na realizację przepływu laminarnego przez szczelinę płaską, dla którego na odcinku stabilizacji termicznej, wg. [7], liczba Nusselta wynosi $Nu_q = 8,235$ przy stałej gęstości strumienia ciepła oraz $Nu_T = 7,54$ przy stałej temperaturze ścianki. Ponieważ w eksperymencie żaden z powyższych warunków nie był spełniony przyjęto za podstawę porównania liczbę Nusselta $Nu = 8$, jako wartość pośrednią.

Zagadnienie odwrotne wymiany ciepła rozwiązano metodą analogową w ten sposób, że z danych wykresów temperatury w funkcji czasu wyznaczono zmianę w czasie współczynnika przejmowania ciepła (rys. 6) oraz temperaturę powierzchni ścianki.

Metoda ta daje w pierwszych krokach zaniżone wartości współczynnika przejmowania ciepła. W wykonanym eksperymencie, po osiągnięciu maksimum, współczynnik przejmowania ciepła zbliża się asymptotycznie do wartości odpowiadającej ustalonemu przejmowaniu ciepła, która różni się mniej niż o 5% od obliczonej z wartości liczby Nusselta $Nu = 8$. Tę samą wartość stałego współczynnika przejmowania ciepła uzyskano z wykresów podanych w monografii ŁYKOWA [6].

7. Wyniki i wnioski

Eksperymentalne określanie warunków brzegowych wymiany ciepła jest konieczne do prawidłowego obliczania pól temperatur i naprężeń termicznych w częściach silników i urządzeń cieplnych. W tym celu zaproponowano czujnik w postaci płytki jednostronnie ogrzewanej, której temperaturę można mierzyć w różnych punktach. Dla takiego czujnika opracowano teorię obliczania gęstości strumienia ciepła i współczynnika przejmowania ciepła. Badania eksperymentalne potwierdziły możliwość praktycznego wykorzystania takiego typu czujników do określania warunków brzegowych wymiany ciepła.

Literatura cytowana w tekście

1. W. H. GIEDT; *The Determination of Transient Temperatures and Heat Transfer at a Gas — Metal Interface Applied to a 40 mm Gun Barrel*, Jet Propulsion, No 4, 1955.
2. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER; *Conduction of Heat In Solids*. Clarendon Press, Oxford 1959.
3. S. WIŚNIEWSKI; *Obciążenia cieplne silników tłokowych*. WKiŁ, Warszawa 1972.
4. J. I. MASTERS, S. STEIN; *Effect an Axial Cavity on Temperature History of a Surface Heated Slab*. The Review of Scientific Instruments, No 12, 1956.
5. J. V. BECK, H. HURWICZ; *Effect on Thermocouple Cavity on Heat Sink Temperature*. Journal of Heat, Transfer, No 1, 1960.
6. A. W. ŁYKOW; *Teoriya tepłoprowodnosti*. Wysszaja Szkoła, Moskwa 1967.
7. W.M. KAYS, *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill New York 1966.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА НА ОСНОВЕ ИЗМЕРЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ОДНОСТОРОННЕ ОБОГРЕВАЕМОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ

В статье обсужден аналитический метод определения плотности теплового потока на основе измерений нестационарной температуры поверхности теплоотдачи плоской пластинки в условиях, когда остальные ее поверхности являются адиабатическими.

Особенно легко определяется постоянная плотность теплового потока или постоянный коэффициент теплоотдачи.

В условиях, когда измерения температур производится в произвольном пункте такой пластинки, предложен аналоговый метод Либманна.

S u m m a r y

DETERMINATION OF THE HEAT FLUX DENSITY FROM THE MEASUREMENTS OF NONSTEADY TEMPERATURE OF A ONE-SIDE HEATED FLAT PLATE

An analytical method of the determination of the heat flux density from the measurements of non-steady temperature of the heat transfer surface of a flat plate in the conditions when the remaining surfaces are adiabatic is presented. The problem of the determination of the value of constant heat flux density or constant heat transfer coefficient is especially easy. Since the measurements of temperatures are done at any point of such a plate the Liebman's analog method is suggested.

WAT

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 listopada 1978 roku

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRĘTÓW ŚCISKANYCH SIŁĄ SKIEROWANĄ
DO BIEGUNA, PRZY POTĘGOWYM PRAWIE FIZYCZNYM¹⁾,

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Niniejsza praca poświęcona jest problemowi optymalnego kształtowania osiowo-ściskanych prętów wspornikowych, wykonanych z materiału nieliniowo-sprężystego lub sprężysto-plastycznego z nieograniczoną granicą plastyczności, który może być opisany potęgowym prawem fizycznym. Pręt wspornikowy jest ściskany siłą skupioną działającą na jego swobodnym końcu, skierowaną podczas wyboczenia do ustalonego punktu.

Podobny problem, w przypadku materiału liniowo-sprężystego, został rozwiązany w pracy A. GAJEWSKIEGO i M. ŻYCKOWSKIEGO [1], gdzie podano również szerszy przegląd literatury dotyczącej tego tematu.

Niefiniowo-sprężyste lub sprężysto-plastyczne własności materiału mają jednak istotny wpływ na optymalny kształt pręta; szereg szczególnych rozwiązań otrzymano w pracach W. KRZYSIA [2], [3], A. GAJEWSKIEGO [4], A. GAJEWSKIEGO i M. ŻYCKOWSKIEGO [5], przy założeniu, że sprężysto-plastyczne własności materiału są opisane za pomocą specjalnie dobranych praw fizycznych, zaproponowanych w pracy [3].

W wymienionych pracach zwrócono również uwagę na wpływ zachowania się siły po utracie stateczności na jej wartość krytyczną i na odpowiadający jej kształt optymalny pręta. Wpływ ten może być bardzo istotny, szczególnie w przypadkach, w których zachowanie się siły jest niekonserwatywne. Jak wykazano w pracy A. GAJEWSKIEGO i M. ŻYCKOWSKIEGO [6], oraz M. FARSHADA i I. TADJBAKHSZA [7], konserwatywność układu ma tu podstawowe znaczenie, bowiem pozwala na stosowanie statycznego kryterium stateczności oraz powoduje względne uproszczenie odpowiednich warunków optymalności. W dalszym ciągu ograniczymy się do przypadku działania siły skierowanej do bieguna, tzn. do zagadnienia konserwatywnego.

Optymalne kształty ściskanych prętów liniowo-sprężystych oraz prętów sprężysto-plastycznych z nieograniczoną granicą plastyczności charakteryzują się występowaniem zerowych przekrojów. Prowadzi to do nieskończonego wzrostu naprężeń i wymaga przyjęcia dodatkowego warunku wytrzymałościowego, ograniczającego naprężenia. Warunek ten uwzględniono w pracy S. H. RASMUSSENA [8], w przypadku optymalnego kształtowania pręta przegubowo zamocowanego, ściskanego siłą eulerowską (o stałym kierunku i punkcie przyłożenia), wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego, opisanego nieliniowym

¹⁾ Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych” — koordynowanego przez IPPT PAN.

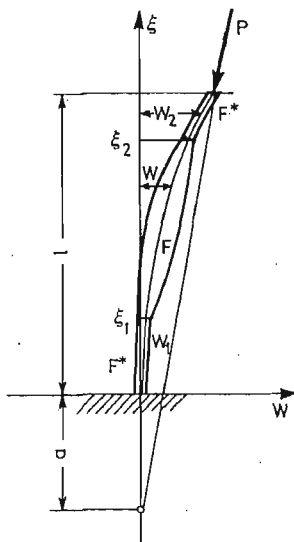
prawem Ramberga-Osgooda. Odpowiedni warunek optymalności otrzymano w oparciu o klasyczny rachunek wariacyjny, a zagadnienie rozwiązano na drodze numerycznej metodą kolejnych przybliżeń.

Okazuje się jednak, że istnieje również możliwość otrzymania rozwiązań ścisłych w przypadku optymalnego kształtowania prętów wspornikowych, ściskanych siłą skierowaną do bieguna, jeżeli ograniczymy się do potęgowego prawa fizycznego. Przedstawione niżej rozwiązania ścisłe, z uwzględnieniem warunków ograniczających pole powierzchni przekroju poprzecznego, mogą stanowić bardzo dobre kryterium oceny zbieżności różnych metod przybliżonych, które, z konieczności, muszą być stosowane w podobnych zagadnieniach przy innych prawach fizycznych.

2. Sformułowanie zagadnienia

Przedmiotem rozważań jest jednostronnie, sprężyste utwierdzone pręt, o długości l , ściskany stałą siłą P , działającą na jego swobodnym końcu (rys. 1). Siła ta jest stale skierowana do bieguna położonego w odległości „ a ” od utwierdzenia ($\alpha = a/l$). Kształt przekroju poprzecznego pręta i jego związek z momentem bezwładności przekroju jest scharakteryzowany zależnością:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Phi(\xi) &= [g(\xi)]^\kappa, & g(\xi) &= J/J_0, & \Phi(\xi) &= F/F_0, \\ F_0 &= F(\xi_0), & J_0 &= J(\xi_0), \end{aligned}$$



Rys. 1

w której: $g(\xi)$ oznacza bezwymiarowy moment bezwładności, $\Phi(\xi)$ — pole powierzchni przekroju, F_0 i J_0 oznaczają odpowiednio pole powierzchni i moment bezwładności w pewnym, na ogół dowolnie wybranym punkcie $\xi = \xi_0$ a wykładnik κ określa sposób wyboczenia pręta ($\kappa = 1$ — pręt płaskozbieżny, podlegający wyboczeniu z płaszczyzny

zbieżności, $\kappa = 1/2$ — pręt wszechstronnie równomiernie zbieżny, $\kappa = 1/3$ — pręt płasko-zbieżny, podlegający wyboczeniu w płaszczyźnie zbieżności). Będziemy w dalszym ciągu stosowali teorię modułu stycznego wg. koncepcji F. R. SHANLEYA [9], która sprowadza się w praktyce do zastąpienia modułu Younga E w równaniu linii ugięcia dla zakresu sprężystego, przez moduł styczny $\bar{E} = d\sigma/d\varepsilon$ wykresu ściskania $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. W dalszym ciągu ograniczymy się do potęgowego prawa fizycznego, które zapiszemy w postaci:

$$(2.2) \quad \varepsilon = |\sigma/\eta|^n \operatorname{sgn} \sigma,$$

gdzie η i n oznaczają pewne znane stałe materiałowe.

W niniejszej pracy uwzględnimy również warunek wytrzymałościowy:

$$(2.3) \quad P/F \leq \sigma^*,$$

w którym σ^* oznacza maksymalne naprężenie dopuszczalne. Warunek (2.3) zapiszemy dalej w postaci:

$$(2.4) \quad F \geq F^* \quad \text{lub} \quad \Phi \geq \Phi^*.$$

Gdy parametr $\alpha = a/l$, określający położenie centrum siły jest zawarty w granicach: $0 \leq \alpha < \infty$ i $-\infty < \alpha < -1$, wówczas wyboczenie pręta następuje w postaci jednej półfali, co ogranicza występowanie minimalnych przekrojów Φ^* do przedziałów leżących w pobliżu obu końców pręta. Ograniczymy się do powyższych wartości parametru α i przyjmiemy, że część pręta od utwierdzenia do, chwilowo nieokreślonego, punktu ξ_1 , oraz od nieokreślonego jeszcze punktu ξ_2 do swobodnego końca $\xi = l$ mają stały przekrój Φ^* . Zarówno część środkowa (zawarta między ξ_1 i ξ_2), o poszukiwanym kształcie optymalnym, jak i części o stałym przekroju znajdują się w stanie nieliniowo-sprężystym, opisanym zależnością (2.2).

Równanie linii ugięcia pręta obciążonego w sposób przedstawiony na rys. 1 są następujące:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} (\bar{E}J^*w_1'')'' + Pw_1'' &= 0 & \text{dla: } 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ (\bar{E}Jw'')'' + Pw'' &= 0 & \text{dla: } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ (\bar{E}J^*w_2'')'' + Pw_2'' &= 0 & \text{dla: } \xi_2 \leq \xi \leq l, \end{aligned}$$

gdzie: w_1 i w_2 oznaczają ugięcie w punkcie ξ dla części o stałym przekroju, w — ugięcie dla części o przekroju zmiennym, $w' = dw/d\xi$, \bar{E} = moduł styczny, J^* — moment bezwładności przekrojów stałych.

Jeśli w dalszym ciągu wprowadzimy bezwymiarowe oznaczenia:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} y_1 &= w_1/l, \quad y_2 = w_2/l, \quad y = w/l, \quad x = \xi/l, \quad \Phi^* = F^*/F_0, \\ f(x) &= \bar{E}(x)/E, \quad f^* = \bar{E}/E = \text{const.} \\ \beta &= \frac{Pl^2}{EJ_0}, \end{aligned}$$

to równania (2.5) możemy zapisać w postaci:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} (f^*g^*y_1'')'' + \beta y_1'' &= 0 & \text{dla: } 0 \leq x \leq x_1 \\ [f(x)g(x)y'']'' + \beta y'' &= 0 & \text{dla: } x_1 \leq x \leq x_2 \\ (f^*g^*y_2'')'' + \beta y_2'' &= 0 & \text{dla: } x_2 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Do równań tych należy dołączyć warunki brzegowe, które zgodnie z przyjętym charakterem siły ściskającej, mają następującą postać:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} y_1(0) &= 0 \\ y_1'(0) - \psi(f^*g^*y_1')_{x=0} &= 0 \\ (f^*g^*y_2')_{x=1} &= 0 \\ \left[(f^*g^*y_2')' + \beta \left(y_2' - \frac{y_2}{1+\alpha} \right) \right]_{x=1} &= 0, \end{aligned}$$

w której ψ charakteryzuje sprężystość utwierdzenia (gdy $\psi = 0$ — pręt jest sztywnie utwierdzony, a gdy $\psi \rightarrow \infty$ — pręt jest zamocowany przegubowo). W dalszym ciągu będziemy rozważali tylko pręty sztywnie zamocowane.

Całkując dwukrotnie równania (2.7) i wprowadzając nowe zmienne zależne:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} v_1(x) &= y_1(x) - \frac{\bar{B}_1}{\beta} - \frac{\bar{C}_1}{\beta}x, \\ v(x) &= y(x) - \frac{\bar{B}}{\beta} - \frac{\bar{C}}{\beta}x \\ v_2(x) &= y_2(x) - \frac{\bar{B}_2}{\beta} - \frac{\bar{C}_2}{\beta}x \quad (\bar{B}_1, \bar{C}_1 - \text{stałe całkowania}) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} G^* + \frac{v_1}{v_1'} &= 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ G(\Phi) + \frac{v}{v'} &= 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \\ G^* + \frac{v_2}{v_2'} &= 0, \quad x_2 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

gdzie: G^* i G są zdefiniowane następująco:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} G(\Phi) &= \frac{1}{\beta} f(\Phi) g(\Phi) = \frac{1}{\beta} \Phi^{1/\mu} f(\Phi), \\ G^* &= \frac{1}{\beta} f(\Phi^*) g^* = \frac{1}{\beta} \Phi^{*1/\mu} f(\Phi^*). \end{aligned}$$

Funkcja $G(\Phi)$ jest zależna od zmiennej x za pośrednictwem funkcji $\Phi(x)$, natomiast wartość G^* jest stała; w przypadku potęgowego prawa fizycznego (2.2) ze wzorów (2.11) otrzymujemy:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} G(\Phi) &= \bar{G} \Phi^{1/\mu+n-1} \\ G^* &= \bar{G} \Phi^{*(1/\mu+n-1)} \\ \bar{G} &= \frac{J_0}{nF_0 l^2} \left(\frac{\eta F_0}{P} \right)^n. \end{aligned}$$

Korzystając z warunków ciągłości momentu zginającego, siły poprzecznej, funkcji ugięcia i jej pierwszej pochodnej w punktach x_1 i x_2 otrzymujemy równości: $\bar{B}_1 = \bar{B}_2 = \bar{B}$,

$\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \bar{C}$ oraz, z równań (2.8), warunki brzegowe (przy $\psi = 0$):

$$(2.13) \quad \begin{aligned} v_1(0) - \alpha v_1'(0) &= 0, \\ v_2(1) &= 0. \end{aligned}$$

3. Optymalizacja kształtu pręta. Rozwiązanie ogólne

Zasadniczy problem pracy polega na znalezieniu takiego kształtu $\Phi(x)$ oraz punktów zszycia x_1 i x_2 , aby objętość pręta była minimalna (przy ustalonej wartości siły krytycznej), tzn. aby:

$$(3.1) \quad V = F_0 l \left[\int_0^{x_1} \Phi^* dx + \int_{x_1}^{x_2} \Gamma \left(-\frac{v}{v''} \right) dx + \int_{x_2}^1 \Phi^* dx \right] = \min.$$

W funkcjale (6.1) Γ jest funkcją odwrotną do $G(\Phi)$ i wynika z rozwiązania drugiego z równań (2.10) ze względu na Φ .

Problem polega na minimalizacji funkcjonału (3.1), przy czym nie wszystkie wartości brzegowe są niezależne i ustalone; nie są również określone wartości współrzędnych x_1 i x_2 . Jest to więc problem z końcami ruchomymi; obok równań Eulera-Lagrange'a należy wykorzystać podstawowy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału $\delta V = 0$.

Warunek transwersalności (podany w pracy [6]) prowadzi do dwóch równań określających skoki w wartościach drugich pochodnych przy z góry założonych skokach pola powierzchni przekrojów w punktach x_1 i x_2 .

W dalszym ciągu założymy ciągłość naprężeń w punktach x_1 i x_2 , a więc również pola powierzchni przekrojów; z warunku transwersalności wynika wówczas ciągłość drugich pochodnych ugięcia w tych punktach:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} v''(x_1) &= v_1''(x_1), \\ v''(x_2) &= v_2''(x_2). \end{aligned}$$

W pracy [6] wykazano również, że przy obciążeniu konserwatywnym, równanie Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału (3.1) przybiera prostą postać:

$$(3.3) \quad v''^2 = C_1 \dot{\Gamma}, \quad \text{gdzie:} \quad \dot{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{d\left(-\frac{v}{v''}\right)}.$$

W przypadku prawa potęgowego (2.2):

$$(3.4) \quad \dot{\Gamma} = \frac{1}{1/\kappa + n - 1} \bar{G}^{-1/(\kappa+n-1)} \left(-\frac{v}{v''} \right)^{-\frac{1/\kappa+n-2}{1/\kappa+n-1}}$$

i równanie (3.3) można sprowadzić do prostej postaci nieliniowego równania różniczkowego trzeciego rzędu:

$$(3.5) \quad v'' v^{[1-\kappa(2-n)]/(1+\kappa n)} = C, \quad C = \text{const.}$$

Równanie to może być scałkowane na drodze analitycznej; podstawiając bowiem:

$$(3.6) \quad p(v) = v'(x), \quad v''(x) = p \frac{dp}{dv},$$

po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$(3.7) \quad vp(v) = \pm (A_1' v^{2\kappa/(1+\kappa n)} + A_2')^{1/2}, \quad A_1', A_2' — \text{stałe całkowania}$$

a stąd:

$$(3.8) \quad x = \pm \int (A_1' v^{2\kappa/(1+\kappa n)} + A_2')^{-1/2} dv.$$

Dokonując podstawienia:

$$(3.9) \quad -\frac{A_1'}{A_2'} v^{2\kappa/(1+\kappa n)} = \sin^2 \varphi,$$

rozwiązanie równania (3.3) możemy przedstawić w następującej postaci parametrycznej:

$$(3.10) \quad \begin{cases} v = A_1 (\sin \varphi)^{1/\kappa+n} & \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ x = A_2 \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi & \bar{\varphi} — \text{ pewna stała całkowania} \end{cases}$$

Poszukiwane bezwymiarowe pole powierzchni przekroju obliczymy z równań (2.10) i (2.12):

$$(3.11) \quad \Phi(\varphi) = \left[\frac{A_2^2}{(1/\kappa+n)G} \right]^{1/(\frac{1}{\kappa}+n-1)} \sin^2 \varphi.$$

Ogólne rozwiązanie zagadnienia składa się zatem z rozwiązania pierwszego z równań (2.10):

$$(3.12) \quad v_1(x) = B_1 \sin \omega x + B_2 \cos \omega x, \quad 0 \leq x \leq x_1,$$

gdzie:

$$(3.13) \quad \omega = (G^*)^{-1/2},$$

rozwiązania (3.10) oraz rozwiązania trzeciego z równań (2.10):

$$(3.14) \quad v_2(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x, \quad x_2 \leq x \leq 1.$$

Stałe A_1 , A_2 , $\bar{\varphi}$, B_1 , B_2 , C_1 , C_2 oraz punkty zszycia x_1 i x_2 należy wyznaczyć na podstawie warunków brzegowych (2.13) i warunków zszycia:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} v_1(x_1) &= v(x_1), & v(x_2) &= v_2(x_2), \\ v_1'(x_1) &= v'(x_1), & v'(x_2) &= v_2'(x_2), \\ v_1''(x_1) &= v''(x_1), & v''(x_2) &= v_2''(x_2). \end{aligned}$$

Ponadto musimy wyznaczyć siłę krytyczną P ; obliczymy ją podając pole powierzchni przekroju w pewnym, na ogół dowolnie wybranym punkcie x_0 :

$$(3.16) \quad \Phi(x_0) = \Phi_0.$$

Przyjmijmy w dalszym ciągu, że współrzędnej x_1 odpowiada wartość parametru φ_1 , współrzędnej x_2 wartość φ_2 , a współrzędnej x_0 — wartość φ_0 .

Ponieważ linia ugięcia pręta po wyboczeniu jest określona z dokładnością do stałego mnożnika, więc jedna ze stałych jest dowolna; dla uproszczenia obliczeń przyjmijmy:

$$(3.17) \quad A_1 = 1.$$

Wprowadzimy ponadto parametr:

$$(3.18) \quad \Theta = \bar{\Phi}^*/\bar{\Phi}_0, \quad 0 \leq \Theta \leq 1,$$

określający stosunek powierzchni przekroju w punkcie x_1 (lub x_2) do powierzchni przekroju w punkcie x_0 , oraz wyrazimy stałą \bar{G} za pomocą parametru ω ze wzoru (3.13).

Przy powyższych oznaczeniach otrzymujemy ostatecznie 12 równań algebraicznych, pozwalających na obliczenie poszukiwanych stałych:

$$B_2 - \alpha\omega B_1 = 0 \tag{1}$$

$$C_1 \sin \omega + C_2 \cos \omega = 0 \tag{2}$$

$$B_1 \sin \omega x_1 + B_2 \cos \omega x_1 = (\sin \varphi_1)^{1/\kappa+n} \tag{3}$$

$$\omega A_2 (B_1 \cos \omega x_1 - B_2 \sin \omega x_1) = (1/\kappa+n) \cos \varphi_1 \tag{4}$$

$$\omega^2 A_2^2 (\sin \varphi_1)^{1/\kappa+n-2} (B_1 \sin \omega x_1 + B_2 \cos \omega x_1) = 1/\kappa+n \tag{5}$$

$$(3.19) \quad C_1 \sin \omega x_2 + C_2 \cos \omega x_2 = (\sin \varphi_2)^{1/\kappa+n} \tag{6}$$

$$\omega A_2 (C_1 \cos \omega x_2 - C_2 \sin \omega x_2) = (1/\kappa+n) \cos \varphi_2 \tag{7}$$

$$\omega^2 A_2^2 (\sin \varphi_2)^{1/\kappa+n-2} (C_1 \sin \omega x_2 + C_2 \cos \omega x_2) = 1/\kappa+n \tag{8}$$

$$\Theta^{1/\kappa+n-1} \omega^2 A_2^2 (\sin \varphi_0)^{2(1/\kappa+n-1)} = 1/\kappa+n \tag{9}$$

$$x_1 = A_2 \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_1} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi \tag{10}$$

$$x_2 = A_2 \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_2} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi \tag{11}$$

$$x_0 = A_2 \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_0} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi \tag{12}$$

Znajomość parametru ω pozwala wyznaczyć również siłę krytyczną, którą obliczamy z równania (2.12):

$$(3.20) \quad P = \eta \Theta^{(1/\kappa+n-1)/n} \left(\frac{\omega^2}{nc^{1/\kappa} l^2} \right)^{1/n} (F_0^* \bar{\Phi}_0)^{(1/\kappa+n-1)/n} = \eta \left(\frac{\omega^2}{nc l^2} \right)^{1/n} F^{*(1/\kappa+n-1)/n},$$

gdzie:

$$(3.21) \quad c = F_0/J_0^*.$$

Wzór (3.20) służy praktycznie do określenia przekroju podstawowego F_0 dla danej siły P_0 .

Po prostych przekształceniach z układu równań (3.19) obliczamy stałe:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} B_1 &= \frac{(\sin \varphi_1)^{1/\kappa+n}}{\sin \omega x_1 + \alpha \omega \cos \omega x_1}, & B_2 &= \frac{\alpha \omega (\sin \varphi_1)^{1/\kappa+n}}{\sin \omega x_1 + \alpha \omega \cos \omega x_1}, \\ C_1 &= \frac{\cos \omega (\sin \varphi_2)^{1/\kappa+n}}{\sin [\omega(1-x_2)]}, & C_2 &= \frac{\sin \omega (\sin \varphi_2)^{1/\kappa+n}}{\sin [\omega(1-x_2)]}, \\ A_2 &= \frac{(1/\kappa+n)^{1/2}}{\omega \Theta^{(1/\kappa+n-1)/2} (\sin \varphi_0)^{1/\kappa+n-1}}, \\ \varphi_1 &= \arcsin(\Theta^{1/2} \sin \varphi_0), & (\sin \varphi_1 &= \Theta^{1/2} \sin \varphi_0 = \sin \varphi_2), \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} + \arccos(\Theta^{1/2} \sin \varphi_0). \end{aligned}$$

Pozostałe parametry: ω , x_1 , x_2 , $\bar{\varphi}_0$, φ musimy wyznaczyć z układu równań przestępnych:

$$(3.23) \quad -\frac{\cos \varphi_1 (\sin \omega x_1 + \alpha \omega \cos \omega x_1)}{\cos \varphi_2 (\cos \omega x_1 - \alpha \omega \sin \omega x_1)} = \operatorname{tg}[\omega(1-x_2)],$$

$$(3.24) \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -(1/\kappa+n)^{1/2} \operatorname{tg}[\omega(1-x_2)],$$

oraz równań (10) (11) i (12) układu (3.19). Równania (3.19)₁₀ ₁₁ ₁₂, (3.13) i (3.24) można rozwiązać analitycznie stosując metodę odwrotną, która polega na przyjęciu z góry parametrów Θ i x_0 oraz wyznaczeniu odpowiadającej im wartości parametru α (określającego położenie bieguna siły).

Obliczając zatem kolejno poniższe stałe, otrzymamy rozwiązanie zagadnienia:

$$(3.25) \quad \varphi_1 = \arcsin(\Theta^{1/2} \sin \varphi_0),$$

$$(3.26) \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1,$$

$$(3.27) \quad H = \frac{(1/\kappa+n)^{1/2}}{\Theta^{(1/\kappa+n-1)/2} (\sin \varphi_0)^{1/\kappa+n-1}},$$

$$(3.28) \quad \delta = -\operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{(1/\kappa+n)^{1/2}} \right],$$

$$(3.29) \quad x_2 = \frac{x_0 + \frac{H}{\delta} \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi}{1 + \frac{H}{\delta} \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi},$$

$$(3.30) \quad x_1 = x_0 - \frac{H(1-x_2)}{\delta} \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi,$$

$$(3.31) \quad \omega = \frac{\delta}{1-x_2},$$

$$(3.32) \quad \alpha = \frac{1}{\omega} \operatorname{tg}(\delta - \omega x_1),$$

$$(3.33) \quad \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_0} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi = \frac{\omega x_0}{H},$$

Należy zauważyć, że równanie (3.33) przyjmuje postać:

$$(3.34) \quad \int_0^{\bar{\varphi}} (\sin \varphi)^{1/\kappa+n-1} d\varphi + \int_0^{\varphi_0} (\sin \varphi)^{1/\kappa+n-1} d\varphi = \frac{\omega x_0}{H} \quad \text{gdym: } \bar{\varphi} < 0, \text{ albo:}$$

$$(3.35) \quad \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_0} (\sin \varphi)^{1/\kappa+n-1} d\varphi = \frac{\omega x_0}{H}, \quad \text{gdym: } \bar{\varphi} \geq 0.$$

Po obliczeniu stałych: φ_1 , φ_2 , H , δ , x_2 , x_1 , ω , α , $\bar{\varphi}$ znajdujemy funkcje określające linie ugięcia pręta optymalnego:

$$(3.36) \quad v_1(x) = \frac{(\sin \varphi_1)^{1/\kappa+n}}{\sin \delta} \sin[\delta - \omega(x_1 - x)] \quad \text{dla: } 0 \leq x \leq x_1,$$

$$(3.37) \quad \begin{cases} v(\varphi) = (\sin \varphi)^{1/\kappa+n}, \\ x(\varphi) = x_1 + \frac{H}{\omega} \int_{\varphi_1}^{\varphi} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi = x_2 - \frac{H}{\omega} \int_{\varphi}^{\varphi_2} |\sin \varphi|^{1/\kappa+n-1} d\varphi, \end{cases}$$

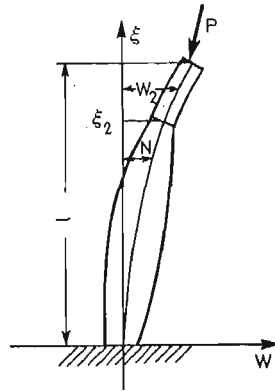
dla: $x_1 \leq x \leq x_2$ ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$).

$$(3.38) \quad v_2(x) = \frac{(\sin \varphi_2)^{1/\kappa+n}}{\sin[\omega(1-x_2)]} \sin[\omega(1-x)], \quad \text{dla: } x_2 \leq x \leq 1.$$

Znaczne uproszczenie obliczeń otrzymamy zakładając, że w punkcie x_0 występuje maksymalny przekrój Φ_0 . Odpowiada to przyjęciu:

$$(3.39) \quad \varphi_0 = \pi/2.$$

3.1. Ogólne równania (3.25) - (3.38) ulegają zmianie, gdy rozważamy przypadek takiego obciążenia pręta, który wymaga ograniczenia powierzchni przekroju tylko w górnej części pręta (rys. 2). Wykorzystując rozwiązania (3.10) i (3.14), warunki brzegowe (2.13)



Rys. 2

oraz warunki zszycia w punkcie x_2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, \\ A_2 &= \alpha(1/\kappa+n) \frac{\cos \bar{\varphi}}{(\sin \bar{\varphi})^{1/\kappa+n}}, \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} + \arccos(\Theta^{1/2} \sin \bar{\varphi}), \\ (3.40) \quad \omega &= \left\{ -\arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{(1/\kappa+n)^{1/2}} \right] + \frac{(1/\kappa+n)^{1/2}}{\Theta^{(1/\kappa+n-1)/2} (\sin \bar{\varphi})^{1/\kappa+n-1}} \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_2} (\sin \varphi)^{1/\kappa+n-1} d\varphi \right\}, \\ \alpha &= \frac{\operatorname{tg} \bar{\varphi}}{\omega(1/\kappa+n)^{1/2} \Theta^{(1/\kappa+n-1)/2}}, \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{\omega} \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{(1/\kappa+n)^{1/2}} \right]. \end{aligned}$$

Stałe C_1 i C_2 określone są wzorami (3.22), linię ugięcia pręta opisują wyrażenia:

$$(3.41) \quad \begin{cases} v(\varphi) = (\sin \varphi)^{1/\kappa+n}, \\ x(\varphi) = \frac{(1/\kappa+n)^{1/2}}{\omega (\sin \varphi_2)^{1/\kappa+n-1}} \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} (\sin \varphi)^{1/\kappa+n-1} d\varphi \end{cases} \quad \text{dla: } \begin{cases} \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ 0 \leq x \leq x_2, \end{cases}$$

$$(3.42) \quad v_2(x) = (\sin \varphi_2)^{1/\kappa+n} \frac{\sin[\omega(1-x)]}{\sin[\omega(1-x_2)]}, \quad \text{dla: } x_2 \leq x \leq 1,$$

a bezwymiarowe pole powierzchni przekroju dane jest równaniem:

$$(3.43) \quad \Phi(\varphi) = \Phi^* \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi_2}.$$

Siłę krytyczną obliczamy, jak poprzednio, ze wzoru (3.20).

4. Przykłady liczbowe

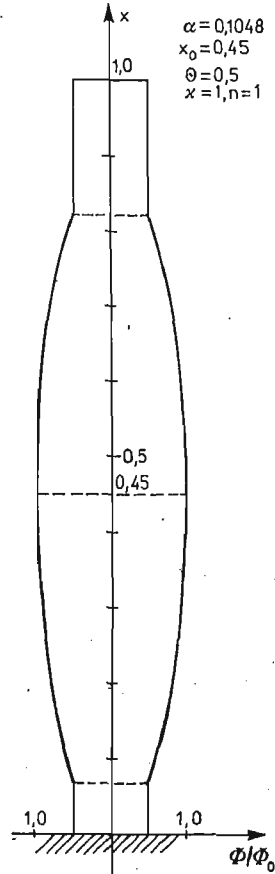
4.1. **Materiał liniowo-sprężysty: $n = 1$.** W przykładzie tym założymy, że ograniczenia inżyneryjne na obu końcach pręta i że wyoboczenie zachodzi z płaszczyzny zbieżności, tzn. że: $\kappa = 1$. Wówczas otrzymujemy:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \arcsin(\Theta^{1/2}), \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1, \quad H = \left(\frac{2}{\Theta}\right)^{1/2} \\ \delta &= \arctg \left\{ \left[\frac{\Theta}{2(1-\Theta)} \right]^{1/2} \right\}, \\ x_2 &= \frac{x_0 + \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(\frac{1-\Theta}{\Theta} \right)^{1/2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(\frac{1-\Theta}{\Theta} \right)^{1/2}}, \\ x_1 &= x_0 - \frac{\sqrt{2}(1-x_2)}{\delta} \left(\frac{1-\Theta}{\Theta} \right)^{1/2} = 2x_0 - x_2, \\ \omega &= \frac{\delta}{1-x_2}, \quad \alpha = \frac{1}{\omega} \operatorname{tg}(\delta - \omega x_1), \\ \bar{\varphi} &= -\arccos \left(2 - \frac{\omega x_0}{H} \right), \\ \begin{cases} x(\varphi) = x_1 + \frac{H}{\omega} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi), \\ \Phi(\varphi) = \varphi_0 \left\{ 1 - \left[\cos \varphi_1 - \frac{\omega}{H} (x - x_1) \right]^2 \right\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Równocześnie, korzystając z równania szóstego powyższego układu, możemy określić graniczne wartości współrzędnej x_0 , dla której punkt zszycia x_1 występuje w punkcie

utwierdzenia pręta. Przyjmując bowiem $x_1 = 0$ mamy:

$$(4.2) \quad x_{0g} = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)^{1/2}}{\operatorname{arctg} \left\{ \left[\frac{\theta}{2(1-\theta)} \right]^{1/2} \right\} + 2\sqrt{2} \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)^{1/2}}.$$



Rys. 3

Zakładając np.: $\theta = 0.5$; $x_0 = 0.45$, obliczamy:

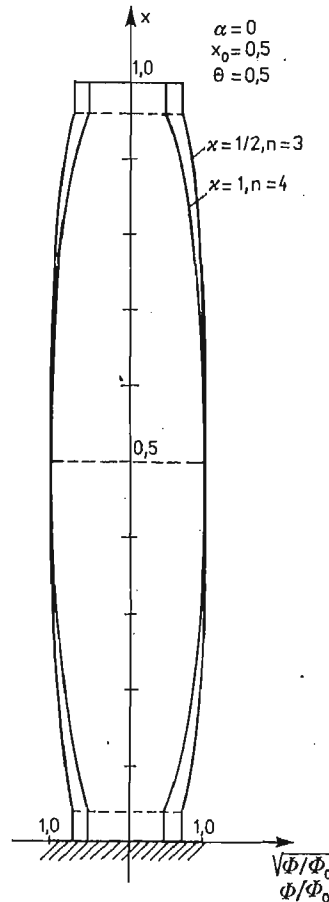
$$(4.3) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= 0.785398, & \varphi_2 &= 2.356194, & H &= 2, & \delta &= 0.615480, \\ x_2 &= 0.833219, & x_1 &= 0.066781, & \omega &= 3.690351, \\ \alpha &= 0.104801, & \bar{\varphi} &= 0.591098, \\ \Phi(x) &= \Phi_0(0.310554 + 3.064206x - 3.404673x^2), \\ P &= 6,809347 \frac{\eta J_0}{l^2}. \end{aligned}$$

Optymalny kształt pręta, odpowiadający powyższym danym, przedstawiono na rys. 3.

4.2. Materiał nieliniowo-sprężysty: $1/\kappa+n = 5$. W przykładzie drugim również przyjmujemy, że ograniczenia ingerują na obu końcach pręta i, że: $1/\kappa+n = 5$, tzn. albo: $\kappa = 1, n = 4$, albo: $\kappa = 1/2$ i $n = 3$. Zakładając: $\Theta = 0.5$ i $x_0 = 0.5$ otrzymujemy:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0.785398, & \varphi_2 = 2.356194, & H = 8.944272, & \delta = 0.420534, \\ x_2 = 0.960259, & x_1 = 0.039471, & \omega = 10.581815, & \alpha = 0, \\ \begin{cases} x(\varphi) = 0.0021071 + 0.316968\varphi - 0.211312\sin 2\varphi + 0.026414\sin 4\varphi, \\ \Phi(\varphi) = \Phi_0 \sin^2 \varphi. \end{cases} \end{cases}$$

Optymalny kształt pręta, odpowiadający powyższym danym, przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4

4.3. Materiał liniowo-sprężysty: $n = 1$. W przykładzie tym założymy, że ograniczenie przekroju występuje tylko w górnej części pręta sprężystego ($n = 1$), płasko-zbieżnego ($\kappa = 1$), ściskanego siłą eulerowską ($\alpha \rightarrow \pm\infty$). Z równań (3.40) - (3.43) dostajemy tu proste rozwiązanie:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \bar{\varphi} = \pi/2, \\ \varphi_2 = \pi/2 + \arccos(\Theta^{1/2}), \end{cases}$$

$$(4.5) \quad \omega = \left[\frac{2(1-\Theta)}{\Theta} \right]^{1/2} + \arctg \left\{ \left[\frac{\Theta}{2(1-\Theta)} \right]^{1/2} \right\},$$

[cd.]

$$x_2 = \frac{\left[\frac{2(1-\Theta)}{\Theta} \right]^{1/2}}{\left[\frac{2(1-\Theta)}{\Theta} \right]^{1/2} + \arctg \left\{ \left[\frac{2(1-\Theta)}{\Theta} \right]^{-1/2} \right\}}.$$

1. Gdy $\Theta \rightarrow 0$ rozwiązanie jest ważne dla kształtu optymalnego bez ograniczeń na przekrój:

$$\varphi_2 = \pi, \quad \omega \sim (2/\Theta)^{1/2}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad x_2 = 1, \quad P = 2 \frac{EJ_0}{l^2}.$$

2. Gdy $\Theta = 1$ otrzymujemy siłę krytyczną dla liniowo-sprężystego pręta pryzmatycznego:

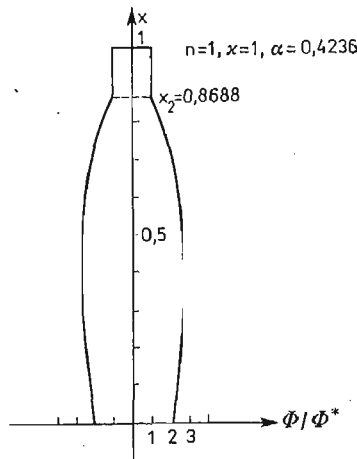
$$\varphi_2 = \pi/2, \quad \omega = \pi/2, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad x_2 = 0, \quad P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ_0}{l^2}.$$

W innych przypadkach położenia bieguna, oraz dla dowolnych wartości parametrów n , κ i Θ , można wykonać tablice przedstawiające zależności parametrów φ_2 , ω , α , x_2 od stałej $\bar{\varphi}$.

Na rys. 5 przedstawiono optymalny kształt pręta dla następujących danych:

$$n = 1, \quad \kappa = 1, \quad \Theta = 1/2, \quad \alpha = 0.4236, \quad \bar{\varphi} = 1, \quad \varphi_2 = 2.5043,$$

$$\omega = 3.6767, \quad x_2 = 0.8688, \quad P = 6.7591 \frac{EJ_0}{l^2}.$$



Rys. 5

Równania linii ugięcia oraz kształt optymalny są tu następujące:

$$(4.6) \quad \begin{cases} x(\varphi) = 0.6464(0.5403 - \cos \varphi), \\ v(\varphi) = \sin^2 \varphi, \\ \Phi(\varphi) = 2.8246 \Phi^* \sin^2 \varphi, \end{cases} \quad \text{dla: } 1 \leq \varphi \leq 2.5043,$$

$$\begin{cases} v_2(x) = 0.7637 \sin[\omega(1-x)], \\ \Phi_2 = \Phi^*. \end{cases} \quad \text{dla: } 0.8688 \leq x \leq 1,$$

5. Uwagi końcowe

W niniejszej pracy przedstawiono ściśle rozwiązanie analityczne problemu optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna, przy czym założono, że materiał pręta jest nieliniowo-sprężysty i może być opisany potęgowym prawem fizycznym. Na ogół w podobnych zagadnieniach, w których nakładamy pewne ograniczenia na zmienną sterowania, (przedstawionych np. w pracy [8]) zachodzi konieczność stosowania metod numerycznych z wykorzystaniem maszyn cyfrowych. Niniejsze rozwiązanie analityczne, otrzymane dla szczególnej postaci prawa fizycznego może stanowić zatem dobry test dokładności metody numerycznej.

Literatura cytowana w tekście

1. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI; *Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Rozpr. Inż., 2, 17, 1969, 299 - 329.
2. W. KRZYŚ; *Optymalne kształtowanie z uwagi na stateczność ściskanych słupów cienkościennych o profilu zamkniętym*, Zeszyty Nauk. Pol. Krak., Mechanika, z. 4, 1967.
3. W. KRZYŚ; *Optimale Formen gedrückter dünnwandiger Stützen im elastisch plastischen Bereich*, Wiss. Z. TU Dresden Internationale Stahlbautagung, 2, 17, 1968, 407 - 410.
4. A. GAJEWSKI; *Optymalne kształtowanie sprężysto-plastycznego słupa przy ogólnym konserwatywnym zachowaniu się obciążenia*, Rozpr. Inż., 1, 19, 1971, 65 - 83.
5. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI; *An optimal forming of a bar compressed with subtangential force in elastic-plastic range*, Arch. Mech. Stos., 2, 23, 1971, 147 - 165.
6. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI; *Optimal Design of Elastic Columns Subject to the General Conservative Behaviour of Loading*, ZAMP, 5, 21, 1970, 806 - 818.
7. M. FARSHAD, I. TADJBAKHS; *Optimum Shape of Columns with General Conservative End Loading*, JOTA, 4, 11, 1973, 413 - 420.
8. S. H. RASMUSSEN; *On the optimal shape of an elastic-plastic column*, The Danish Center for Appl. Math. and Mech., Report No. 96, Nov. 1975, 1 - 17.
9. F. R. SHANLEY; *Inelastic column theory*, J. Aeron. Sci., 12, 13, 1946.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ, СЖИМАЕМЫХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛОЙ, ПРИ СТЕПЕННОМ ФИЗИЧЕСКОМ ЗАКОНЕ

В настоящей работе представлено точное, аналитическое решение проблемы оптимального проектирования стержня, сжимаемого силой направленной к полюсу.

Предполагается, что материал стержня нелинейно-упругий или упруго-пластический и может быть определенным степенным физическим законом.

В работе принято во внимание тоже неравенственные ограничивающие условия на критические напряжения или на площадь поперечного сечения.

Summary

OPTIMAL DESIGN OF THE BARS, COMPRESSED BY A POLAR FORCE, SUBJECT TO THE POWER PHYSICAL LAW

In this paper, the exact analytical solution to the problem of optimal design of a cantilever compressed by a polar force is presented.

It is assumed that the material of the bar is nonlinearly elastic or elasto-plastic and it may be described by the power physical law.

The inequality constraints on the critical stress or cross-sectional area have been taken into account.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 grudnia 1978 roku

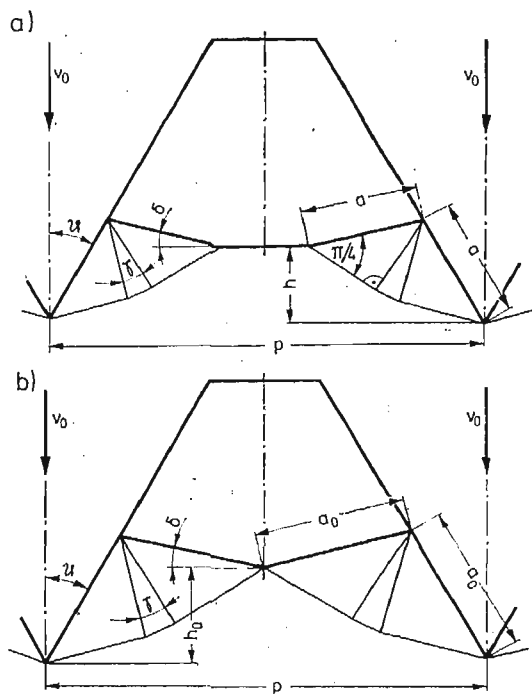
WGŁĘBIANIE NARZĘDZIA Z PERIODYCZNYM ZARYSEM KLINOWYM
W OŚRODEK PLASTYCZNY

STANISŁAW OKOŃSKI (KRAKÓW)

1. Wprowadzenie

Potrzeba rozwiązania zagadnienia wgłębiania narzędzia z periodycznym zarysem klinowym w ośrodek plastyczny wynika z braku modelu teoretycznego, mogącego posłużyć do analizy plastycznego kształtowania gwintów wewnętrznych, wygniatania trójkątnych rowków położonych blisko siebie i tym podobnych przypadków.

W dotychczasowych pracach [1] stosowano model wgłębiania pojedynczego klina, dla którego rozwiązanie zostało opracowane przez R. HILLA, E. H. LEE i S. J. TUPPERA [2, 3, 4]. W przypadku periodycznego zarysu klinowego rozwiązanie to traci ważność z chwilą połączenia się stref plastycznych wokół sąsiednich wierzchołków, dla pewnej wielkości zagłębienia h_0 . Siatkę linii poślizgu dla tego przypadku podano na rys. 1b.



Rys. 1. Siatki linii poślizgu: a — dla początkowego stadium wgłębiania, b — dla granicznego przypadku ważności rozwiązania R. HILLA

Obowiązują następujące zależności:

$$(1.1) \quad \delta = \vartheta - \gamma,$$

$$(1.2) \quad \cos(\vartheta - \gamma) = \operatorname{tg}(\pi/4 - \gamma/2).$$

Korzystając z rys. 1b oraz zależności (1.1) i (1.2) można dla dowolnego kąta wierzchołka klina obliczyć graniczną wartość zagłębienia h_0 . Wynosi ona:

$$(1.3) \quad h_0 = \frac{\cos \vartheta - \sin(\vartheta - \gamma)}{\sin \vartheta + \cos(\vartheta - \gamma)} \cdot \frac{P}{2}.$$

Analiza zagadnienia dla zagłębienia większego niż h_0 wymaga nowego opracowania

2. Rozwiązanie metodą charakterystyk

Zagadnienie rozwiązano przyjmując warunki płaskiego stanu odkształcenia, przy pominięciu tarcia i wzmocnienia materiału. Przyjęto warunek plastyczności HUBERA-MISESA. Dodatkowo założono, że krawędź powierzchni swobodnej materiału pomiędzy sąsiednimi wierzchołkami klinów składa się z dwóch prostoliniowych odcinków, które w trakcie wgłębienia przemieszczają się równoległe do swego początkowego położenia pokazanego na rys. 1. Analizowany proces jest niestacjonarny i jego rozwiązanie wymaga rozważenia pewnej liczby kolejno po sobie następujących etapów. Ponieważ zarys wciskanego narzędzia jest periodyczny, wystarczy rozważyć obszar pomiędzy sąsiednimi wierzchołkami klinów, a właściwie — ze względu na symetrię — tylko jedną jego połowę.

Analiza konkretnych zagadnień w płaskim stanie odkształcenia polega [5] na rozwiązywaniu zagadnień brzegowych do równań charakterystyk:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), & \chi + \varphi &= \text{const. dla linii } \alpha, \\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), & \chi - \varphi &= \text{const. dla linii } \beta, \end{aligned}$$

gdzie φ jest kątem, jaki większe z naprężeń głównych tworzy z osią x , a χ funkcją zależną od sumy naprężeń głównych:

$$(2.2) \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_0 + 2k\chi.$$

Składowe stanu naprężenia wyrażają się przez funkcje χ i φ jak następuje:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + 2k\chi + k \cos 2\varphi, \\ \sigma_y &= \sigma_0 + 2k\chi - k \cos 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

gdzie k jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu, a σ_0 — pewną stałą, którą należy przyjąć na początku rozwiązania. Zależności (2.3) spełniają tożsamościowo warunek plastyczności HUBERA-MISESA:

$$(2.4) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2.$$

Ponadto

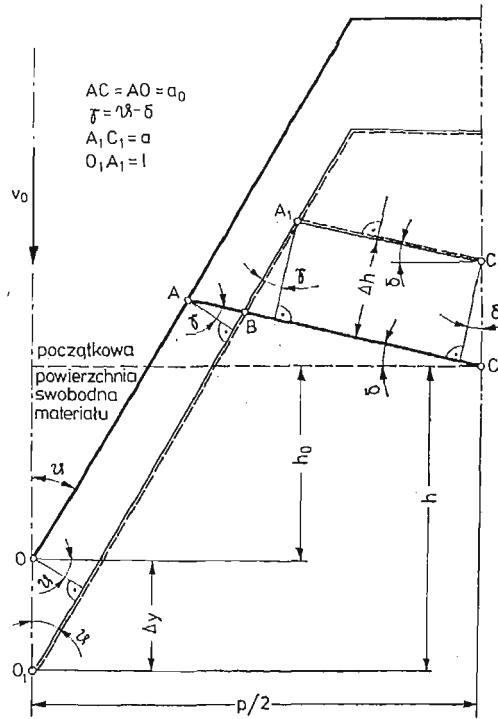
$$(2.5) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k,$$

W naszym przypadku przyjmujemy $\sigma_0 = 0$.

Prędkości płynięcia można otrzymać wykorzystując równania H. GERINGER, które obowiązują wzdłuż charakterystyk (2.1):

$$(2.6) \quad \begin{aligned} dv_\alpha + v_\beta d\varphi &= 0, & \text{wzdłuż linii } \alpha, \\ dv_\beta - v_\alpha d\varphi &= 0, & \text{wzdłuż linii } \beta. \end{aligned}$$

Rozwiązanie rozpoczniemy od określenia położenia i wymiarów krawędzi powierzchni swobodnej dla dowolnej wielkości zagłębienia. Jeżeli wierzchołek klina zagłębi się w ma-



Rys. 2. Położenie krawędzi powierzchni swobodnej A_1C_1 dla wielkości zagłębienia większej od h_0

teriale na głębokość $h_0 + \Delta y$ (rys. 2), to położenie krawędzi A_1C_1 powierzchni swobodnej można określić podając odległość pionową pomiędzy punktami O_1 i C_1 :

$$(2.7) \quad H = h_0 + \Delta y + \frac{\Delta h}{\cos \delta}.$$

Z warunku nieściśliwości wynika równość pól czworokątów OO_1BA i BA_1C_1C , co daje związek:

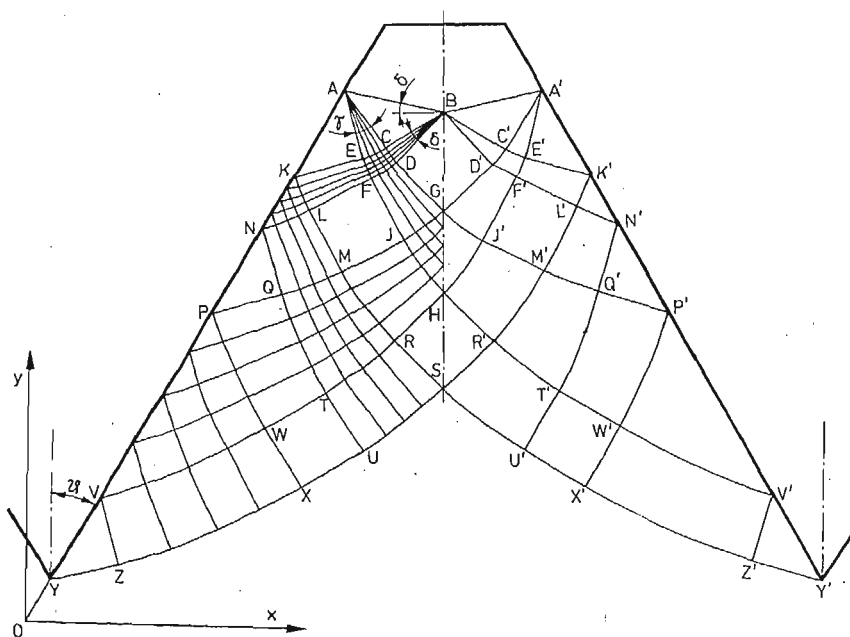
$$(2.8) \quad (\Delta h)^2 (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta) - \Delta h \frac{P}{\sin \vartheta + \cos \delta} - 2\Delta y \frac{\sin \vartheta}{\cos \gamma} + \frac{P\Delta y \sin \vartheta}{\sin \vartheta + \cos \delta} + (\Delta y)^2 \sin \vartheta (\cos \vartheta + \sin \vartheta \operatorname{tg} \gamma) = 0.$$

Długość odcinka $A_1 C_1$ wynosi:

$$(2.9) \quad A_1 C_1 = a = \frac{P}{2(\sin \vartheta + \cos \delta)} - \Delta h (\sin \delta + \sin \gamma) - \Delta y \frac{\sin \vartheta}{\cos \gamma}.$$

Korzystając z zależności (2.8) należy w związkach (2.7) i (2.9) wyrugować Δh i w ten sposób określić położenie i wymiary powierzchni swobodnej w funkcji wielkości zagłębienia $h_0 + \Delta y$. Obliczenia najłatwiej jest przeprowadzić dla konkretnej wartości kąta ϑ , po uprzednim wyznaczeniu kątów δ i γ z równań (1.1) i (1.2).

Schemat siatki linii poślizgu dla zaawansowanego etapu procesu przedstawia rys. 3. Obszar ABCEK odpowiada rozwiązaniu R. HILLA. Współrzędne punktów węzłowych



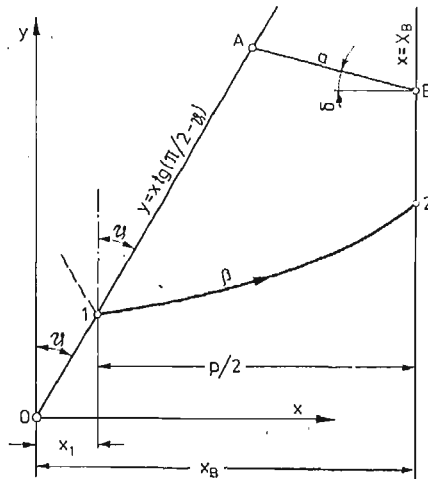
Rys. 3. Schemat siatki linii poślizgu dla zaawansowanego stadium wgłębienia

Tablica 1. Wartości funkcji φ i χ w obszarach z jednorodnym stanem naprężenia dla siatki linii poślizgu z rys. 3

Obszar	φ	χ
ABC ^{+))}	$\pi/2 - \delta$	-0,5
AEK ^{+))}	$\pi/2 - \vartheta$	-0,5 - γ
BDGD'	$\pi/2$	-0,5 - δ
LMJF	$\pi/2 - \gamma$	-0,5 - $\gamma - \delta$
PQN	$\pi/2 - \vartheta$	-0,5 - $\gamma - 2\delta$
RSR'H	$\pi/2$	-0,5 - $2\gamma - \delta$
WTUX	$\pi/2 - \delta$	-0,5 - $2\gamma - 2\delta$
VZY	$\pi/2 - \vartheta$	-0,5 - $3\gamma - 2\delta$

^{+))} Wartości znane z rozwiązania R. HILLA

siatki linii poślizgu oraz wartości funkcji χ i φ w tych punktach wyznacza się ze związków (2.1) wychodząc ze znanych wartości na linii BCEK. Całkowanie przeprowadza się numerycznie sposobem podanym w monografii [5]. W obszarach ABC, AEK, BDGD', LMJF, PQN, RSR'H, WTUX, VZY panują jednorodne stany naprężenia, które można wyznaczyć w sposób elementarny na podstawie związków wzdłuż charakterystyk: $\chi + \varphi = \text{const.}$ dla linii α , oraz $\chi - \varphi = \text{const.}$ dla linii β . Wartości funkcji χ i φ dla tych obszarów podano w tabl. 1. Po określeniu χ i φ naprężenia wyznacza się z zależności (2.3) bądź też (2.2) i (2.5).



Rys. 4. Schemat postępowania przy konstruowaniu siatki linii poślizgu

Omówimy teraz bardziej szczegółowo konstrukcję siatek linii poślizgu dla poszczególnych etapów procesu. W układzie współrzędnych Oxy (rys. 4) przyjmujemy prostą o równaniu:

$$y = x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right),$$

obrazującą boczną powierzchnię klina. Na tej prostej wybieramy dowolnie punkt $A(x_A, y_A)$, z którego prowadzimy odcinek AB o dowolnie przyjętej długości, nachylony do poziomu pod kątem δ . Przez jego koniec B prowadzimy prostą pionową o równaniu $x = x_B$, którą przyjmujemy za oś symetrii obszaru uplastycznionego. Znamy więc współrzędne x_A, y_A, x_B, y_B oraz długość odcinka $AB = a$. W dalszym ciągu przystępujemy do wyznaczania współrzędnych punktów węzłowych siatki linii poślizgu oraz określania naprężeń w sposób podany uprzednio, przy czym położenie wierzchołka klina a tym samym wartość skoku P (odległość pomiędzy sąsiednimi wierzchołkami) jest na razie nieznaną. Dowolna charakterystyka rodziny β przecinająca kontur narzędzia może być dolną granicą obszaru uplastycznionego. Przyjmijmy dla przykładu, że wyznaczyliśmy przebieg charakterystyki 1-2 (rys. 4). Stanowi ona dolną granicę obszaru uplastycznionego, jeżeli wierzchołek klina znajduje się w punkcie 1. Wartość skoku wynosi więc $P = x_B - x_1$. Wartość x_1 jest znana z przebiegu charakterystyki 1-2, a wartość x_B wyznaczyliśmy uprzednio,

przyjmując długość odcinka AB i położenie punktu A. Teraz na podstawie równań (1.3), (2.8) i (2.9) podstawiając znane wartości a i P określa się wartość $h_0 + \Delta y$. Jest to wielkość zagłębienia dla etapu, przy którym charakterystyka 1-2 stanowi dolną granicę obszaru uplastycznionego. Następnie należy dokonać przekształcenia współrzędnych polegającego na przesunięciu początku układu do punktu 1 i obliczyć bezwymiarowe wielkości x/P , y/P , h_0/P i $\Delta y/P$. W ten sam sposób kontynuuje się rozwiązanie dla dalszych etapów wgłębienia, wyznaczonych przez przebieg kolejnych charakterystyk rodziny β .

Jeżeli nie jest konieczna duża dokładność obliczeń, siatki linii poślizgu można otrzymać wykreślnie, na przykład sposobem opisanym w monografii [5]. Punktem wyjścia jest obliczenie długości odcinka a dla danej wielkości zagłębienia Δy z zależności (2.8) i (2.9). Jak widać z rys. 4, przy znanych wartościach P i ϑ wystarczy to do określenia położenia punktu 1.

Analiza prędkości płynięcia prowadzi do wniosku, że istnieją pewne zakresy wielkości zagłębienia uzależnione od kąta 2ϑ , dla których nie można otrzymać poprawnego rozwiązania dla prędkości (występuje kinematycznie niedopuszczalny typ nieciągłości). W pozostałych zakresach rozwiązanie jest kinematycznie dopuszczalne. Zagadnienie to jest omówione w dalszym ciągu na konkretnym przykładzie.

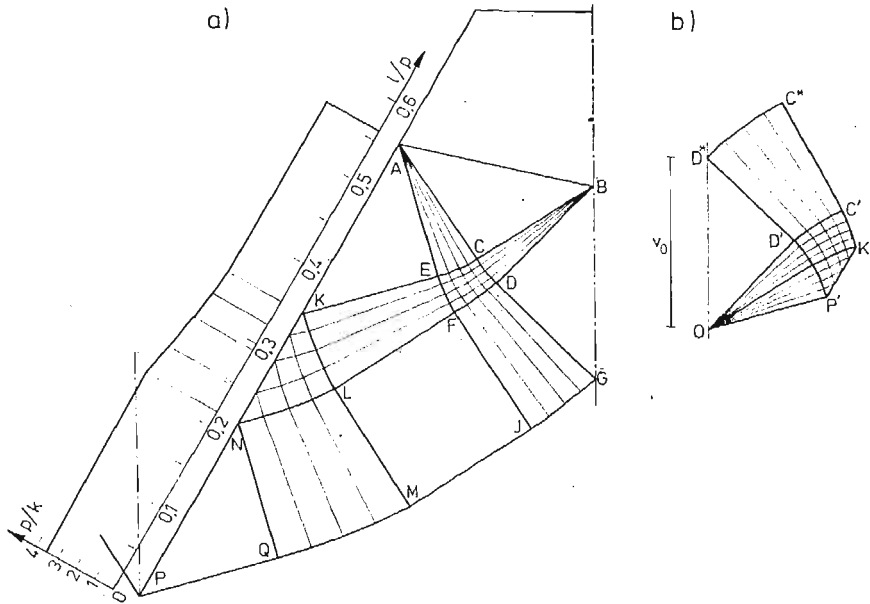
3. Wyniki obliczeń

Obliczenia przeprowadzono dla szczególnego przypadku, gdy $2\vartheta = 1,047$ rad. (60°). Z równań (1.1), (1.2) i (1.3) wynikają wartości: $\gamma = 0,303$ rad. ($17^\circ 20'$), $\delta = 0,221$ rad. ($12^\circ 40'$) oraz $h_0 = 0,219P$. Przeanalizowano przebieg procesu dla wielkości zagłębienia h w zakresie $0,219 \leq h/P \leq 0,403$. W obliczeniach numerycznych przyjęto przyrosty kątów w wycinkach biegunowych EAC i CBD (rys. 3) równe odpowiednio: $\Delta\gamma = 0,038$ rad. ($2^\circ 10'$) oraz $\Delta\delta = 0,028$ rad. ($1^\circ 35'$). Rozważono 10 etapów wgłębienia wyznaczonych

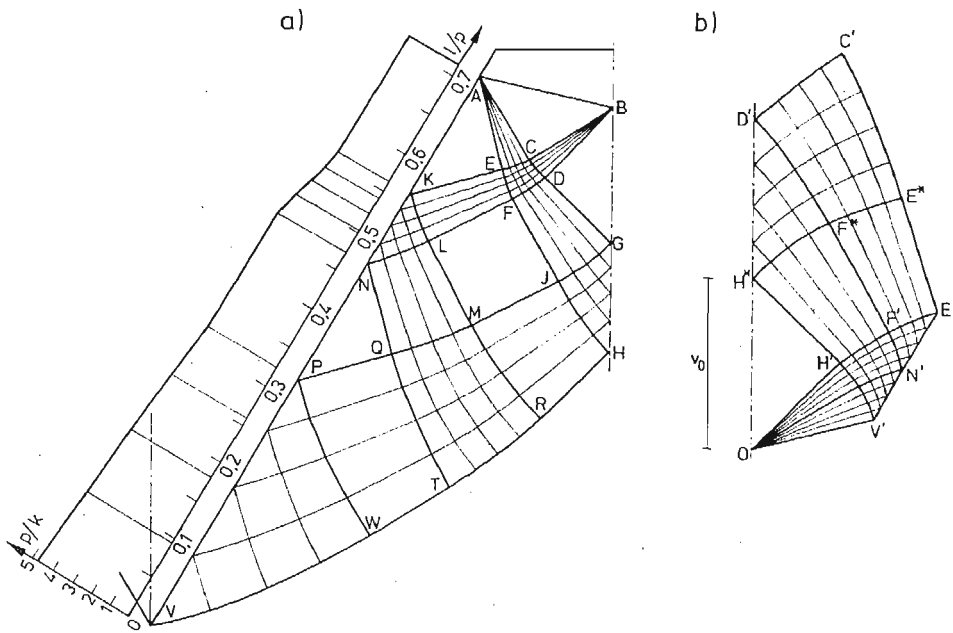
Tablica 2. Wyniki obliczeń przykładu

Etap	Zagłębienie		Długość styku bocznej powierzchni narzędzia z materiałem l/P	Średni nacisk jednostkowy p_{sr}/k
	$\frac{\Delta y}{P}$	$\frac{h_0 + \Delta y}{P}$		
0*)	0	0,219	0,339	2,61
1	0,018	0,237	0,367	2,62
2	0,035	0,254	0,395	2,66
3	0,051	0,270	0,422	2,71
4	0,066	0,285	0,449	2,78
5	0,125	0,344	0,570	3,06
6	0,141	0,360	0,609	3,14
7	0,153	0,372	0,645	3,26
8	0,165	0,384	0,679	3,39
9	0,174	0,393	0,709	3,55
10	0,184	0,403	0,747	3,68

*. Etap zerowy obejmuje początkowy okres procesu, $h \leq h_0$; $p_{sr} = \text{const.}$, $p = \text{const.}$



Rys. 5. Siatka linii poślizgu (a) i hodograf (b) dla zagłębienia $\Delta y/P = 0,125$; $(h_0 + \Delta y)/P = 0,344$, $p_{sr} = 3,06 k$, $l/P = 0,570$, $2\vartheta = 60^\circ$

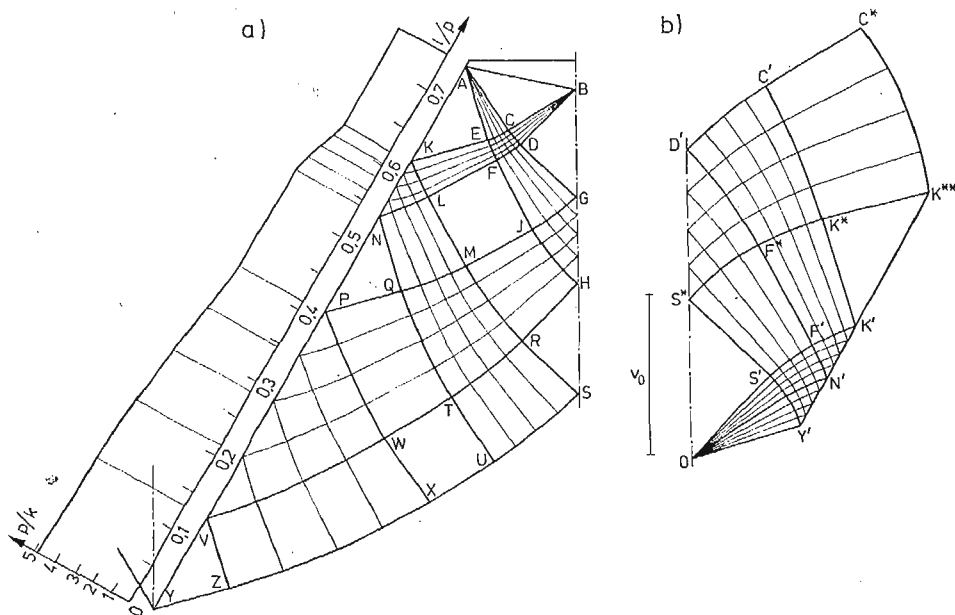


Rys. 6. Siatka linii poślizgu (a) i hodograf (b) dla zagłębienia $\Delta y/P = 0,174$; $(h_0 + \Delta y)/P = 0,393$, $p_{sr} = 3,55k$, $l/P = 0,709$, $2\vartheta = 60^\circ$

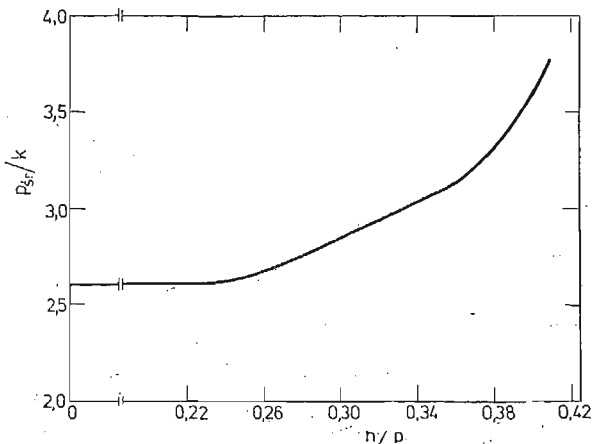
przez przebieg odpowiednich charakterystyk rodziny β . Dla każdego etapu określono zagłębienie Δy oraz $h = h_0 + \Delta y$. Następnie obliczono długość styku bocznej powierzchni materiału z klinem l z oczywistej (z rys. 2) zależności:

$$P/2 = l \sin \vartheta + a \cos \delta,$$

gdzie a wyraża się poprzez Δy wzorem (2.9), w którym należy wyrugować Δh za pomocą związku (2.8). Określono rozkłady nacisków jednostkowych, oraz wartości średnie nacisków p_{sr} . Wyniki obliczeń przedstawiono w tabl. 2, a przykładowe siatki linii poślizgu



Rys. 7. Siatka linii poślizgu (a) i hodograf (b) dla zagłębienia $\Delta y/P = 0,184$; $(h_0 + \Delta y)/P = 0,403$, $p_{sr} = 3,68k$, $l/P = 0,747$, $2\vartheta = 60^\circ$



Rys. 8. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wielkości zagłębienia

i hodografy prędkości na rys. 5, 6 i 7. Na rysunkach dla przejrzystości przyjęto dwa razy większe przyrosty $\Delta\gamma$ i $\Delta\delta$ niż w obliczeniach numerycznych. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wielkości zagłębienia przedstawiono na rys. 8.

Całkowitą siłę potrzebną do wglębiania (na jednostkę długości narzędzia) oblicza się z zależności:

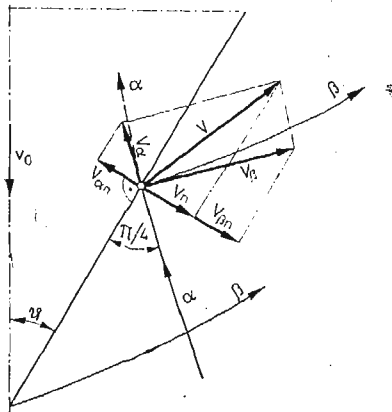
$$(3.1) \quad P = 2\rho_{sr} l \sin\vartheta(n-1) + \frac{4kh(1+\gamma)\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \sin(\vartheta-\gamma)},$$

gdy $h > h_0$, lub też

$$(3.2) \quad P = \frac{4khn(1+\gamma)\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \sin(\vartheta-\gamma)},$$

gdy $h \leq h_0$. Zależność (3.2) wynika z rozwiązania R. HILLA; n jest liczbą klinowych wierzchołków. W zakresie $h > h_0$ nie można podać analitycznej zależności siły od wielkości zagłębienia, gdyż ρ_{sr} określa się numerycznie. Drugi człon w równaniu (3.1) uwzględnia dwie boczne powierzchnie skrajnych wierzchołków narzędzia.

Określenie prędkości płynięcia przedstawimy na przykładzie siatki z rys. 6. Wzdłuż linii VH dana jest składowa normalna prędkości, równa składowej normalnej prędkości sztywnej części materiału. Zatem na linii VH $v_\alpha = 0$. Na odcinku VP nie będącym charakterystyką, a także na całej długości linii styku materiału z narzędziem VA dana jest również składowa normalna, równa składowej normalnej prędkości przemieszczania się narzędzia. Składowa ta wynosi $v_n = v_0 \sin\vartheta$, gdzie v_0 jest pionową prędkością narzędzia. W celu otrzymania związku pomiędzy v_α i v_β na odcinku VP (a także na całym brzegu VA) rzutujemy te składowe na kierunek normalny do powierzchni narzędzia (rys. 9).



Rys. 9. Schemat warunku brzegowego dla składowych v_α i v_β na linii styku klina z materiałem

Otrzymuje się związek:

$$v_\beta \cos\pi/4 - v_\alpha \cos\pi/4 = v_0 \sin\vartheta.$$

Wykorzystując te dane można rozwiązać w polu PWV zagadnienie brzegowe typu mieszanego dla równań (2.6). Daje to łącznie z warunkiem na linii VH punkt wyjścia dla dalszych obliczeń. Przeprowadza się je numerycznie sposobem podanym w monografii [5].

Charakterystyki VWTRH i HJFEA są liniami nieciągłości prędkości. Kończą się one w narożach wycinków biegunowych, co jest kinematycznie dopuszczalne¹⁾. Podobnie wyznacza się prędkości płynięcia dla innych wielkości zagłębienia.

W przedstawionym rozwiązaniu dla $2\theta = 60^\circ$ wystąpiły dwa zakresy wielkości zagłębienia, dla których pojawił się kinematycznie niedopuszczalny typ nieciągłości prędkości (linia nieciągłości przecina prostoliniowy odcinek krawędzi powierzchni materiału). Zakresy te są następujące: $0,066 < \Delta y/P < 0,125$ oraz $0,174 < \Delta y/P < 0,184$. Dla pozostałych wielkości zagłębienia rozwiązanie jest kinematycznie dopuszczalne.

4. Uwagi końcowe

Przedstawione rozwiązanie umożliwia wyznaczenie rozkładu nacisków jednostkowych na powierzchni narzędzia oraz całkowitej siły potrzebnej do wgłębienia. W odróżnieniu od przypadku pojedynczego klina nacisk jednostkowy nie jest stały, lecz zmienia się wzdłuż linii styku osiągając największą wartość przy wierzchołku. Średnia wartość nacisku rośnie wraz z zagłębieniem.

Dla pewnych zakresów wielkości zagłębienia zależnych od kąta 2θ występuje linia nieciągłości prędkości przecinająca swobodny brzeg materiału. Jest to kinematycznie niedopuszczalne i świadczy o tym, że założenie o prostoliniowych krawędziach powierzchni swobodnej nie daje się w tych zakresach utrzymać. Rozwiązanie dla dalszych zakresów odpowiada przypadkowi wgłębienia narzędzia w materiał o odpowiednio ukształtowanym brzegu, a nie w materiał o brzegu początkowo płaskim, co nie jest w pełni zgodne z charakterem procesu. W związku z tym uzyskane wyniki winny być traktowane jako przybliżone. Zaletą przedstawionego rozwiązania jest jego prostota. Siatki linii poślizgu dla poszczególnych etapów zagłębienia można otrzymać w łatwy sposób, zarówno numerycznie jak i wykreślnie, dla różnych kątów wierzchołkowych 2θ . Natomiast uwzględnienie rzeczywistego kształtu powierzchni swobodnej napotyka na znaczne trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. W. E. HENDERER, B. F. TURKOWICH; *Theory of the cold forming tap*, CIRP Ann. vol. 23/1 (1974).
2. R. HILL, S. J. LEE, S. J. TUPPER; *Theory of wedge indentation of ductile materials*, Proc. Roy. Soc. of London A, vol. 188 (1945).
3. J. GRUNZWEIG, J. M. LOGMAN, N. J. PETCH; *Calculation and measurements on wedge-indentation*, J. Mech. Phys. Solid. vol. 2 (1954).
4. D. S. DUGDALE; *Wedge indentation experiments with coldworked metals*. J. Mech. Phys. Solid. vol. 2 (1953).
5. W. SZCZEPIŃSKI; *Teoria obróbki plastycznej metali*. PWN Warszawa (1964).

¹⁾ Rys. 6a przedstawia połowę siatki, stąd linie VWTRH i HJFEA mają dalszy ciąg po prawej stronie osi symetrii.

Р е з ю м е .

ВНЕДРЕНИЕ ИНСТРУМЕНТА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ
КЛИНЕВЫМ ПРОФИЛЕМ В ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

В работе представлено решение задачи о внедрении инструмента, который имеет рабочую часть в виде ряда клиневых вершин, в пластическую среду, при плоской деформации, без трения и упрочнения материала; принято условие пластичности Губера-Мизеса. Использован метод характеристик. Разработано частный случай, при котором угол вершины клина был равен 60° . Представлено сетки линии скольжения, годографы скорости и результаты вычислений для некоторых значений глубины внедрения.

S u m m a r y

INDENTATION OF A PERIODICALLY WEDGE-SHAPED TOOL INTO PLASTIC
MATERIAL

The title problem has been discussed in the case of plane strain and Huber-Mises yield criterion without friction or material hardening taken into account. The solution has been obtained by the method of characteristics.

As an example we consider a particular case for the wedge angle 60° . The slip-lines networks, selected indentations have been presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1979 roku

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w pierwszym półroczu 1979 r.

I. Działalność naukowa

Tematyka referatów wygłoszonych podczas zebrań była następująca:

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba uczestników
Oddział w Bydgoszczy				
1.	23.03.79	prof. dr hab. Andrzej Szaniawski	„Zagadnienia przepływowe przy przędzeniu włókien z tworzyw sztucznych”	30
Oddział w Częstochowie				
2.	25.01.79	mgr inż. Stanisław Nikiel	„Tendencje konstrukcyjne we współczesnej budowie turbin”	32
3.	20.03.79	prof. dr hab. Janusz Elsner	„Dwukanałowa metoda termoanemometryczna określania dysypacji energii turbulentnej”	16
4.	29.03.79	mgr inż. Lucjan Kuszak, mgr inż. Jacek Zieliński	„Metodyka określania charakterystyk turbulencji w przepływie nieizotermicznym”	
5.	29.03.79	mgr inż. Zbigniew Popiołek, mgr inż. Włodzimierz Ślęzak	„Interpretacja sygnału termoanemometru w silnie burzliwych przepływach o małych prędkościach”	
6.	3.05.79	doc. dr hab. Jan Kubik	„Termodyfuzja lepkosprężysta”	9
7.	31.05.79	doc. dr Vladimir Korolew	„Hydrodynamika i wymiana ciepła warstwy fluidalnej”	20
Oddział w Gdańsku				
8.	17.01.79	mgr inż. Abdul Mahdi Saudi Majeed	„Wpływ szczelin w wymienniku płaszczoworurowym na współczynniki przejmowania ciepła”	
9.	9.02.79	mgr inż. Tomasz Kucharski	„Analiza niestabilnych stanów drgań dyskretnych układów liniowych”	25
10.	21.03.79	mgr inż. Bogdan Wilczyński	„Optymalizacja okrętowego układu napędowego ze względu na niektóre własności dynamiczne”	12
11.	24.05.79	mgr inż. Marek Mazurkiewicz	„Obliczenia wytrzymałości i drgań własnych łopatek wirnikowych maszyn przepływowych metodą elementów skończonych”	12

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba uczestników
12.	13.06.79	mgr inż. Zofia Matulewicz	„Analiza statyczna konstrukcji z gruntu zbrojonego na podstawie teorii ośrodków sprężysto-plastycznych”	15
Oddział w Gliwicach				
13.	24.01.79	doc. dr inż. Zdzisław Sulimowski	„Rozwój poglądów na temat bezpieczeństwa konstrukcji”	21
14.	31.01.79	dr hab. inż. Bernard Drzęzła	„Przybliżone rozwiązanie pewnego przestrzennego zadania liniowej teorii sprężystości w zastosowaniu do prognozowania deformacji górotworu pod wpływem eksploatacji górniczej”	20
15.	11.04.79	dr inż. Remigiusz Ćwik	„Racjonalny wybór postaci konstrukcyjnej wymiaru przekroju elementów zginanych”	9
16.	26.04.79	doc. dr hab. Jan Kubik	„Wprowadzenie do statyki układów niesprężystych”	13
17.	23.05.79	prof. dr hab. Gwidon Szefer	„Mechanika ośrodków porowatych — teoria i zastosowanie”	28
18.	„ „ „	„ „ „ „	„Nauczanie mechaniki stan aktualny i tendencje rozwoju”	
19.	20.06.79	dr inż. Tadeusz Smoleń	„Wpływ odchyłek geometrii na stan odprężenia”	10
Oddział w Opolu				
20.	7.03.79	doc. dr hab. Jan Kubik	„Rozwiązania spowolnione w lekkosprężystości”	10
21.	28.03.79	mgr Franciszek Gajda	„Pola koncentracji i temperatur w półprzestrzeni sprężystej”	10
22.	11.04.79	mgr Franciszek Gajda	„Niektóre zagadnienia termodyfuzji w półprzestrzeni sprężystej”	11
23.	10.05.79	doc. dr W. Tarnawski	„Wieloparametrowe kryteria optymalizacji w projektowaniu technicznym”	12
24.	22.05.79	doc. dr Maciej Gryczmański	Cykl referatów przewidzianych do wygłoszenia na konferencji Nauk. Sekcji Mechaniki Gruntów i Skał oraz Fundamentowania KLiW-Opole 79	15
25.	18.06.79	mgr inż. Jerzy Wyrwał	Numeryczne rozwiązywanie zagadnień sprzężeń pół mechanicznych z dyfuzyjnymi	10
Oddział w Krakowie				
26.	28.03.79	dr inż. Jan Adamczyk	„Kierunki rozwoju mechaniki w RFN”	26
27.	1.06.79	dr Henryk Brancewicz	„Czarne dziury i inne pułapki grawitacyjne”	16

Lp.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba uczestników
28.	19.06.79	prof. dr Z. Mazurkiewicz	„Polskie tradycje w mechanice teoretycznej i stosowanej”	24
Oddział w Łodzi				
29.	11.05.79	prof. dr C. W. Radcliffe	„Geometrical analysis of planar mechanisms”	16
30.	„ „ „	„ „ „ „ „	„Digital computer control of an. Above-the-Knee prosthetics”	
31.	16.05.79	prof. dr J. S. Rao	„Torsional dynamics of rotors-systems Transient stresses”	31
32.	21.05.79	prof. dr J. M. Harvey	Wyniki najnowszych prac naukowo-badawczych prowadzonych w Katedrze Mechaniki Materiałów Uniwersytetu Strathclyde	23
33.	30.05.79	doc. dr J. Ziółkowski i inni	Wybrane zagadnienia z pneumatycznego formowania przędzy (projekcja film.)	20
34.	21.06.79	prof. dr J. Heymann	„Badania elastoptyczne skomplikowanych elementów przestrzennych”	19
35.	21.06.79	dr inż. K. Mączyński	„Dynamika układów napędowych zawierających mechanizmy o zmiennym przełożeniu”	c.
Oddział w Poznaniu				
zebrania się nie odbywały				
Oddział w Rzeszowie				
brak danych				
Oddział w Szczecinie				
36.	14.03.79	dr inż. Włodzimierz Paczkowski	„Próba optymalizacji konstrukcji przęsł mostów drogowych z betonu sprężonego”	16
37.	3.04.79	prof. dr hab. Rolf Mull (Hannover)	„Zastosowanie metody elementów skończonych w mechanice płynów”	12
38.	5.04.79	mgr inż. Piotr Auzinsz (Ryga)	„Metody obliczania dynamicznego płył”	49
39.	31.05.79	Prof. dr Eugeniusz Bielewicz	„Metody korelacyjne w losowych problemach mechaniki”	31
40.	13.06.79	dr inż. Jan Baran	„Pewne aspekty identyfikacji układów mechanicznych”	9
Oddział w Warszawie				
41.	18.04.79	C. Atkinson	„Zagadnienia mechaniki pękania”	19
42.	30.05.79	doc. dr W. J. Andrejew	„Zagadnienia koncentracji naprężeń w otoczeniu otworów w ośrodkach niejednorodnych”	15
43.	6.06.79	dr W. Kufel i prof. dr Z. Olesiak	„Mechanika stosowana na Uniwersytecie w Pizie”	14

Lp.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba uczestników
Oddział we Wrocławiu				
44.	21.02.79	prof. dr hab. Eugeniusz Brzuchowski	„Analiza działań technicznych we współrzędnych jakość-czas na przykładzie konstruowania i wytwarzania”	16
45.	30.05.79	prof. dr hab. Eugeniusz Brzuchowski	„Zagadnienia ekonomii działania”	8
46.	20.06.79	prof. Czesław Rodkiewicz	„Niektóre aspekty przepływu krwi przez arterie”	25

II. Sympozja i konferencje naukowe

1. Oddział Gliwice

a) w dniach 25.02. - 3.03.1979 r. odbył się w Wiśle XVIII sympozjon pod hasłem „Modelowanie w mechanice”. Sprawozdanie z Sympozjonu zostało opublikowane w MTiS.

2. Oddział w Krakowie

W dniach 23 - 24 marca odbył się V Sympozjon Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki, którego organizatorami byli: Instytut Mechaniki i Wibroakustyki AGH oraz Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej Oddział w Krakowie, a patronat sprawował Zespół Dynamiki Maszyn PAN.

W Sympozjonie uczestniczyło 125 osób, wygłoszono 51 referatów, a w dyskusji wzięło udział około 57 osób.

III. Seminaria

1. Oddział w Częstochowie

W dniach 19 - 20 czerwca 1979 r. Instytut Maszyn Ciepłych Politechniki Częstochowskiej oraz Częstochowski Oddział Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zorganizowały seminarium z zakresu termoaerodynamiki maszyn przepływowych.

W obradach, na których wygłoszono 19 referatów i komunikatów naukowych, uczestniczyło 30 pracowników nauki z dziewięciu krajowych ośrodków badawczych. Obrady przebiegały w pięciu odrębnych sesjach którym przewodniczyli kolejno: prof. dr hab. Janusz Elsner, prof. dr Władysław Porocznicki i doc. dr Tadeusz Chmielniak.

W podsumowaniu stwierdzono celowość kontynuacji tego typu spotkań specjalistycznych w cyklu dwuletnim przez ośrodek częstochowski.

2. Oddział w Gdańsku

W I kwartale w Oddziale Gdańskim rozpoczęto równolegle 2 seminaria. Obejmowały one również II kwartał 1979 r.

Pierwsze seminarium „Metoda elementów skończonych w obliczeniach drgań i stateczności konstrukcji”, było prowadzone przez: prof. J. Kruszewskiego, doc. W. Gawrońskiego, dr W. Ostachowicza, dr J. Tarnowskiego, dr E. Wittbrodta. Odbywało się ono raz w tygodniu (2 godziny), od stycznia do czerwca 1979 r. Brało w nim udział 35 uczestników.

Drugie seminarium n.t. „Metoda elementów skończonych w nieliniowych zagadnieniach mechaniki ośrodka ciągłego” prowadził dr Cz. Branicki. Uczestniczyło w nim 15 członków, trwało od stycznia do czerwca 1979 r.

3. Oddział w Szczecinie

W planie Oddziału Szczecińskiego znalazło się seminarium Zakładu Konstrukcji i Mechaniki Okrętów Instytutu Okrętowego PS na temat: „Zagadnienia nieliniowe w mechanice konstrukcji”. Seminarium to, prowadził doc. dr Marian Kmiecik.

W semestrze letnim roku akademickiego 1968-79, poruszano następującą tematykę:

1. „Równania teorii dużych ugięć płyt”.
2. „Metody analityczne i numeryczne rozwiązywania równań teorii dużych ugięć płyt”.
3. „Zachowanie się płyt po utracie stateczności”.
4. „Wpływ geometrii ugięć początkowych na naprężania w płytach osiowo ściskanych”

4. Oddział w Zielonej Górze

W Oddziale Zielonogórskim odbyło się seminarium z działów wybranych kinematyki.

IV. Kursy

Oddział w Łodzi

W Oddziale Łódzkim przeprowadzony został kurs na temat „Niestandardowa analiza i jej zastosowania w mechanice”.

W ramach kursu odbyły się 3 spotkania: 12 stycznia 1979 r. gdzie omawiano „Niestandardowe modele matematycznych i fizycznych teorii”, 19 stycznia 1979 r. — „Niestandardowe konstrukcje podstaw mechaniki”, 26 stycznia 1979 r. — „Elementy niestandardowych topologii i jej znaczenie w mechanice”

Oddział w Opolu

W Oddziale kontynuowano wykłady kursu na temat „Ogólne podstawy mechaniki ośrodków ciągłych”.

Wykładowcą był doc. Jan Kubik. Uczestników — 8.

Kontynuowano również kurs „Metody numeryczne w mechanice konstrukcji”. Wykłady prowadził dr Tadeusz Smoleń. Uczestniczyło 9 osób.

V. Działalność wydawnicza

Oddział w Gliwicach

Zbiór referatów XVIII Sympozjonu pod hasłem „Modelowanie w Mechanice”, z. 44, Gliwice 1979, ss. 402.

VI. Działalność organizacyjna

W okresie pierwszego półrocza 1979 roku odbyły się

- a) 1 Plenarne Zebranie Zarządu Głównego
- b) 2 Zebrania Prezydium Zarządu Głównego
- c) 31 Zebrań w Oddziałach Towarzystwa.

SPRAWOZDANIE Z CYKLU WYKŁADÓW PT.: „WYBRANE ZAGADNIENIA MECHANIKI PŁYNÓW”

Z inicjatywy Sekcji Mechaniki Cieczy i Gazów Komitetu Mechaniki PAN zorganizowano w Bydgoskiej Akademii Techniczno-Rolniczej w pierwszej połowie bieżącego roku cykl wykładów pt.:

„Wybrane zagadnienia mechaniki płynów”.

Celem wykładów była aktywizacja miejscowego środowiska naukowego i popularyzacja współczesnych problemów mechaniki płynów.

Do współdziałania w organizowaniu wykładów zaproszono: Bydgoski Oddział PTMTiS oraz uczel-
niane Koło SIMP przy AT-R. Udział Koła SIMP wyraził się w pokryciu kosztów rzeczowych.

Stroną organizacyjno-programową zajmował się bezpośrednio autor niniejszego sprawozdania —
Wiceprzewodniczący Zarządu Oddziału PTMTiS — przy aktywnej pomocy Sekretarza Zarządu mgr inż.
Andrzeja Golika.

Spis wykładów odbytych w ramach omawianego cyklu — wraz z terminami ich wygłaszania — przed-
stawia się jak następuje:

1. Doc. dr hab. Eustachy Burka — „Zagadnienia kawitacji i erozji kawitacyjnej” — 20 grudnia 1978 r.
2. Prof. dr hab. Andrzej Szaniawski — „Zagadnienia przepływowe przy przedzeniu włókien z tworzyw
sztucznych” — 23 marca 1979 r.
3. Prof. dr hab. Janusz Elsner — „Metody analizy przepływów turbulentnych” — 2 kwietnia 1979 r.
4. Prof. dr hab. Jerzy Krzyżanowski — „Niekóre aspekty stabilności fazy ciekłej w przepływie dwufa-
zowym” — 7 maja 1979 r.
5. Prof. dr hab. Romuald Puzyrewski — „Problematyka przepływu pary suchej i mokrej przez układy
łopatkowe turbin parowych” — 11 maja 1979 r.
6. Prof. dr hab. Stanisław Wroński — „Zagadnienia mechaniki płynów w inżynierii chemicznej” — 16 maja
1979 r.
7. Czł. Kor. PAN Włodzimierz Prosnak — „Niekóre aspekty stosowania metod numerycznych w mecha-
niece płynów” — 6 czerwca 1979 r.

Wykładów wysłuchało łącznie 280 pracowników naukowych i studentów AT-R. Ten liczny udział
świadczy o dużym zainteresowaniu miejscowego środowiska i potwierdza celowość organizowania po-
dobnych spotkań.

E. Walicki

SEMINARIUM NA TEMAT MECHANIKI ZNISZCZENIA FIBROBETONÓW NA UNIWERSYTECIE TECHNICZNYM W DELFT, 5.7.1979

Seminarium zostało przygotowane przez grupę badaczy w dziedzinie inżynierii materiałowej przez
Prof. dr F. H. Wittmanna, przy udziale specjalistów od konstrukcji betonowych z Prof. dr H. W. O. Rein-
hardtem, przy czym prace organizacyjne prowadzili Dr Y. M. de Haan i Dr P. Stroeven. W seminarium
wzięło udział około 50 osób głównie z Holandii, lecz także z Belgii, Anglii, Szwecji, Izraela i z Polski.

Seminarium obejmowało cztery wykłady:

- Dr Y. M. de Haan (Delft) — *Podstawowe elementy mechaniki zniszczenia,*
Prof. dr S. P. Shah (Chicago) — *Analiza zniszczenia belek fibrobetonowych,*
Dr P. Stroeven (Delft) — *Wpływ krótkich włókien stalowych w betonie na rozwój rys,*
Doc. dr A. M. Brandt i Dr J. Kasperkiewicz (Warszawa) — *Energia propagacji rys w betonie uzbrojonym
stalowymi włóknami.*

Pierwszy wykład był przeglądem pojęć i podstawowych zależności mechaniki zniszczenia, przygoto-
wany z punktu widzenia badania propagacji rys w betonie i zaprawach cementowych.

Autor drugiego wykładu przedstawił wyniki badań beleczek fibrobetonowych ze sztucznymi nacię-
ciami o zmiennej głębokości stosując różne metody mechaniki zniszczenia i poszukując najwłaściwszego
sposobu uwzględnienia roli włókien w zatrzymywaniu propagacji rys.

Tematem następnego wykładu było współdziałanie stalowych włókien z ośrodkiem kruchym, jakim
jest zaprawa cementowa. Do zaproponowanej zależności wyrażającej krytyczną wartość współczynnika
wyzwalania energii sprężystej wprowadził autor różne parametry, charakteryzujące układ włókien i ich
właściwości.

Ostatni wykład obejmował szczegółową dyskusję pojęć i metod mechaniki zniszczenia, przy czym
wskazano na ich niejednoznaczność w odniesieniu do fibrobetonów. Autorzy przedstawili również analizę
wyników doświadczalnych, zwracając uwagę na znaczenie zjawisk nieliniowych i na konieczność uwzględ-
niania szczególnych właściwości fibrobetonów. W konkluzji stwierdzono przydatność mechaniki zniszcze-
nia do zrozumienia zjawisk zachodzących w tego rodzaju materiałach.

W dyskusjach poruszono szerzej inne zagadnienia szczegółowe, związane m.in. z wpływem skali badanych elementów, w których następuje propagacja rys. Zwrócono także uwagę na odmienność ujęć nawiązujących do rozpoczęcia propagacji rys i pojęć uwzględniających energię całego procesu zniszczenia.

Seminarium było okazją do przedstawienia poglądów na nowe i często niedokładnie sformułowane zagadnienia, decydujące o doskonaleniu metod w mechanice kompozytów fibrobetonowych. Przedstawione wykłady obejmowały w znacznej części najnowsze wyniki badawcze, które można było poznać przedyskutować, nie czekając na ich opublikowanie. Dobra organizacja i gościnność gospodarzy zdecydowały także o powodzeniu tego spotkania.

A. M. Brandt

XIV SYMPOZJUM N.T. „WSPÓŁCZESNE PROBLEMY I METODY MECHANIKI PŁYNÓW”

Błażejewko, 2 - 8 września 1979 r.

XIV Sympozjum n.t. „Współczesne Problemy i Metody Mechaniki Płynów” odbyło się w dniach od 2 do 8 września w Błażejewku koło Kórnik, woj. poznańskie, w Ośrodku Szkoleniowo-Wypoczynkowym Zjednoczenia Państwowych Przedsiębiorstw Gospodarki Rolnej w Poznaniu. Sympozjum to było kolejnym ze spotkań organizowanych co dwa lata przez Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie, a gromadzących uczonych z kraju i zagranicy pracujących w dziedzinie mechaniki płynów. W spotkaniu tym wzięło udział około 200 uczestników z 18 krajów, a wśród nich wybitni uczeni G. K. Batchelor i A. A. Dorodnicyn. Po 8 osobowej delegacji polskiej najliczniejszą grupę stanowili uczeni z ZSRR (25 osób), a następnie z RFN (22 osoby) i USA (17 osób), z Francji i Wielkiej Brytanii (po 8 uczestników), a w dalszej kolejności inne, mniej liczne delegacje.

Zgodnie z tradycją naszych poprzednich spotkań, ostatnie Sympozjum nie miało charakteru specjalistycznego, lecz obejmując różne gałęzie mechaniki płynów stanowiło szeroki i kompetentny przegląd aktualnych problemów tej dziedziny wiedzy. Oficjalnym językiem obrad był język angielski.

W programie Sympozjum znalazło się 9 następujących referatów przeglądowych, przygotowanych na zaproszenie Komitetu Organizacyjnego przez wybitnych specjalistów z różnych krajów:

1. K. I. Babenko (ZSRR) — *Numerical Investigation of the Stability of Fluid and Plasma Flow*,
2. J. Bona (USA) — *Salitary Waves and Other Long-Wave Phenomena*,
3. J. J. Chattot (Francja) — *Steady Transonic Flows Calculated by Relaxation Methods*,
4. J. Hackman (RFN) — *Surface Processes and Boundary Effects in Plasma-Wall Interactions*,
5. J. J. Hermans (USA) — *Hydrodynamic Fluctuations and Modern Theories of Brownian Motion*,
6. J. Heywood (Kanada) — *On the Existence of Classical Solutions of the Navier-Stokes Equations*,
7. T. Maxworthy (USA) — *Hydrodynamics of the Jupiter Atmosphere*,
8. M. V. Morkovin (USA) — *On Some Disagreements and Open Questions in Transition to Turbulence in Shear Layers*,
9. J. Zierep (RFN) — *Theory of Flows in Compressible Media with Heat Addition*.

Czas trwania referatu przeglądowego wynosił łącznie z dyskusją 1 godz. i 15 min.

Poradko zaprezentowano 104 komunikaty, z których 75 zostało wygłoszonych na 16 sesjach problemowych w formie tradycyjnych 15 minutowych komunikatów, zaś pozostałe 20 przedstawiono na dwóch 2,5 godzinnych sesjach posterowych. Ten ostatni sposób prezentacji, dotychczas na naszych Sympozjach nie stosowany, zyskał sobie aprobatę zarówno autorów jak i słuchaczy i w przyszłości wejdzie na trwałe do naszej praktyki, jako jeden z dwóch równoprawnych sposobów przedstawiania komunikatów naukowych.

Jeśli chodzi o tematykę komunikatów to największa ich liczba dotyczyła przepływów ściśliwych (23) oraz dynamiki gazów rozrzedzonych (13). Następnie w kolejności były przepływy wielofazowe (10) środowiskowa mechanika płynów (9), a dalej turbulencja, przepływy lepkie, warstwa przyścienna i inne. Referaty przeglądowe wygłoszone na Sympozjum zostaną opublikowane w X tomie „Fluid Dynamics Transactions”, zaś komunikaty w oddzielnym zeszycie „Archiwum Mechaniki Stosowanej”.

Program naukowy Sympozjum uzupełniły trzy wieczorne dyskusje na następujące tematy:

- 1) Możliwości wykorzystania laboratoriów kosmicznych do badań podstawowych w dziedzinie mechaniki płynów,
- 2) Fale uderzeniowe i zjawiska akustyczne w mieszaninach gazowych,
- 3) Ciągłe wyładowanie optyczne, jego właściwości fizyczne i możliwości zastosowań technicznych.

Urozmaiceniem Sympozjum były imprezy kulturalne i towarzyskie, z których można tu wspomnieć zwiedzenie pobliskiego Zamku i Parku Kórnickiego.

Poza oficjalnym programem miały miejsce liczne nieoficjalne spotkania i dyskusje, dla których szerokie możliwości staramy się stworzyć na naszych Sympozjach. Wzajemne kontakty między uczestnikami ułatwiała swobodna, nieformalna atmosfera Sympozjum, którą wysoko cenimy jako istotną i trwałą wartość naszych spotkań.

Andrzej Zachara

XXI POLSKA KONFERENCJA MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO

Porąbka-Kozubnik, 3 - 8 września, 1979

Kolejna Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego korzystając z gościnności Hutniczego Przedsiębiorstwa Remontowego z Katowic odbyła się w ośrodku wczasowym tego przedsiębiorstwa w Porąbce-Kozubniku w województwie bielsko-bialskim.

Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego był kierownik Zakładu Teorii Ośrodków Ciągłych IPPT PAN prof. Henryk Zorski. Korzystając z doświadczeń poprzednich konferencji i biorąc pod uwagę wielokrotnie wysuwane przez jej uczestników sugestie Komitet Organizacyjny podjął decyzję o skróceniu czasu jej trwania do sześciu dni co być może stworzyło pewne trudności organizacyjne lecz nie wpłynęło na charakter tego dorocznego spotkania polskich mechaników.

Konferencja zgromadziła 193 uczestników z Polski i z zagranicy. Uczestnicy zagraniczni reprezentowali 16 krajów: Australię, Bułgarię, Chiny, Czechosłowację, Holandię, Jugosławię, Meksyk, NRD, RFN, Rumunię, Stany Zjednoczone AP, Szwecję, Węgry, Wielką Brytanię, Włochy i Związek Radziecki. Uczestnicy krajowi w liczbie 150 w tym IPPT PAN 53, reprezentowali niemal wszystkie liczące się w Polsce ośrodki naukowe.

Podczas trwania konferencji wygłoszono 111 referatów w tym na specjalne zaproszenie Komitetu Organizacyjnego następujące wykłady generalne:

- | | |
|---------------------------------|---|
| W. T. Koiter (Holandia) | — <i>Pewne nowe spojrzenie na stare problemy wybożenia.</i> |
| Cz. Rymarz (Wojsk. Ak. Tech.) | — <i>Polowe modele kryształów ciekłych.</i> |
| R. S. Rivlin (USA) | — <i>Materiałowa i strukturalna stateczność w materiałach sprężystych.</i> |
| D. C. Drucker (USA) | — <i>Przewartościowanie pewnych podstaw i idealizacji w teorii plastyczności.</i> |
| D. Chillingworth (W. Bryt.) | — <i>Metody geometryczne w teorii bifurkacji.</i> |
| J. Stokłosa (Hut. Przeds. Rem.) | — <i>Mechanika w modernizacji polskiego przemysłu czarnej metalurgii.</i> |
| J. Hult (Szwecja) | — <i>Zniszczenie i propagacja szczelin.</i> |
| J. Ignaczak (IPPT PAN) | — <i>Termosprężystość ze skończonymi prędkościami falowymi.</i> |

Problematyka Konferencji tak jak i 20 poprzednich była dość zróżnicowana. Zgłoszone referaty zostały podzielone tematycznie i wygłoszone w ramach następujących sekcji:

- stateczność, stany krytyczne,
- kryształy, ośrodki nielocalne, pola sprzężone,
- optymalizacja,
- plastyczność, pelzanie,
- płyty, powłoki, tarcze,
- termomechanika,
- metody matematyczne, mechanika analityczna,
- metody stochastyczne,

- zniszczenie, propagacja szczelin,
- dyslokacje, dysklinacje,
- ośrodki porowate, inkluzje,
- układy konstrukcyjne i mechaniczne,
- sprężystość, lepko-sprężystość,
- geomechanika.

Obrady Konferencji toczyły się w dwóch grupach poprzedzane zarówno rano jak i po południu wspólnymi referatami generalnymi. Większość wystąpień, poza referatami generalnymi, stanowiły 25 minutowe komunikaty. Dawały one dobry przegląd głównych kierunków prowadzonych w Polsce badań i pewne pojęcie o problematyce badań i zainteresowań światowych.

Analizując problematykę zgłoszonych prac można stwierdzić, że jakkolwiek reprezentowały one szeroką płaszczyznę zainteresowań badaczy to głównie skupiały się wokół problemów stateczności, plastycznego płynięcia, zniszczenia i propagacji szczelin jak również metod optymalizacji i projektowania optymalnego. Poziom wygłoszonych referatów, w wielu wypadkach wysoki, był jednak dość zróżnicowany. Wydaje się, że jest to nieuniknione jeśli chce się zachować dotychczasowy charakter konferencji (uczestnictwo pracowników z różnych ośrodków i z różnym stażem naukowym).

Uważam, że XXI Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego spełniła w zupełności swój cel szerokiego forum wypowiedzi, konfrontacji osiągnięć i wymiany myśli.

Marek Elżanowski

VIII-A WSZECHZWIĄZKOWA KONFERENCJA N.T. ELASTOOPTYKI „ELASTOOPTYKA-79” Tallin, 25 - 28 września 1979 r.

W dniach 25 - 28 września 1979 r. odbyła się w Tallinie VIII-a Wszeczhwiązkowa Konferencja, poświęcona polaryzacyjno-optycznym metodom badania naprężeń „ELASTOOPTYKA-79”. Konferencja zorganizowana została przez Instytut Cybernetyki Akademii Nauk Estońskiej S.R.R. Przewodniczącym 17-osobowego Komitetu Organizacyjnego Konferencji był prof. dr Hillar A b e n — dyrektor wspomnianego Instytutu. Przewodniczącym 14-osobowego Komitetu Programowego — był prof. dr N. J. P r i g o r o w s k i j.

Poprzednia, VII-a Wszeczhwiązkowa Konferencja n.t. polaryzacyjno-optycznych metod analizy naprężeń odbyła się w Tallinie w roku 1970.

Językami Konferencji były: rosyjski i angielski. W Konferencji wzięło udział ponad 300-u uczestników, w tym około 40-u osób z 14-u krajów spoza ZSRR. Z krajów kapitalistycznych reprezentowane były: RFN (najliczniej — 6 referatów), W. Brytania, Finlandia, Francja, Grecja, Japonia, Kanada i USA, natomiast z krajów socjalistycznych: Czechosłowacja (najliczniej — 5 referatów), Polska (4 referaty) oraz Bułgaria, NRD, Węgry i Jugosławia (po jednym referacie). W skład delegacji polskiej wchodziło 6 osób, reprezentujących trzy ośrodki krajowe, a mianowicie: Warszawę (3 osoby — 2 referaty), Kraków (2 osoby — 1 referat) oraz Łódź (1 osoba — 1 referat).

Z Republik Związku Radzieckiego reprezentowanych było 29 ośrodków naukowych. Najważniejszy wkład w obrady Konferencji wnieśli naukowcy: Moskwy (91 prac), Leningradu (32 prace), Kijowa (19 prac), Charkowa (15 prac), Nowosybiraska (10 prac) oraz Tallina (5 prac).

Zgłoszone na Konferencję prace dotyczyły: teoretycznych zagadnień polaryzacyjno-optycznych metod analizy naprężeń, materiałów optycznie czułych, metod i urządzeń badawczych, praktycznych zagadnień techniki eksperymentalnej oraz różnorodnych zastosowań wymienionych metod.

Tematyka Konferencji została podzielona na 12 głównych zagadnień, omawianych na kolejnych 12-tu sesjach plenarnych i towarzyszących im sesjach afiszowych. Na sesjach plenarnych przedstawiano w kilku referatach rozwój, dokonany w ciągu ostatnich 8-miu lat (t.j. w okresie między VII-ą i obecną VIII-ą Konferencją) oraz obecny stan wiedzy określonego typu zagadnień, z uwzględnieniem najnowszych wyników badań. Sesjom tym towarzyszyły kilkugodzinne sesje afiszowe, na których prezentowane były

wyniki zgłoszonych na Konferencję prac. Kilkustronicowe streszczenia tych prac wydane zostały uprzednio drukiem w Materiałach Konferencyjnych. Sama natomiast forma sesji afiszowych stwarzała bardzo dobre warunki do szerokiej i swobodnej dyskusji, wymiany myśli z wybitnymi specjalistami i znawcami określonych zagadnień oraz łatwego nawiązywania kontaktów z autorami prac. Po otwarciu obrad Konferencji przez prof. H. A b e n a, na I-ej Sesji plenarnej przedstawiono 3 referaty przeglądowe, dotyczące zagadnień ogólnych a mianowicie:

- a) — współczesnego stanu polaryzacyjno-interferencyjnych metod i efektywności ich zastosowań w różnego rodzaju obliczeniach inżynierskich w porównaniu z metodami numerycznymi (G. L. Hesin),
- b) — rozwoju elastooptyki radiacyjnej (W. J. Sawcenko),
- c) — współczesnych interferencyjno-optycznych metod badania odkształceń (A. J. Aleksandrow).

Podobnie, na sesji II-ej omówiono zagadnienia ogólne, a mianowicie:

- a) — teoretyczne podstawy pomiarów przy zastosowaniu metody elastooptycznej (J. Pindera),
- b) — współczesny stan elastooptyki mikrofalowej (W. N. Rudakow),
- c) — ostatnie osiągnięcia zastosowań elastooptyki przy badaniu zagadnień trójwymiarowych (A. Robert).

Na kolejnej, III-ej sesji plenarnej omówiono:

- a) — rozwój nowych optycznie czułych i optycznie nieczułych materiałów mających zastosowanie w elastooptyce, głównie polimerów (N. A. Szczegolenskaja),
- b) — badania dwuwymiarowych zagadnień kontaktowych metodą elastooptyki interferometrycznej (M. Nisida),
- c) — konstrukcję, zasadę działania i możliwości badawcze specjalnego polaryskopu typu KSP-10 z synchronizacją współrzędnych (E. I. Edelsztejn),
- d) — możliwości zastosowania metod numerycznych przy analizie danych, otrzymanych z badań elastooptycznych (R. Müller).

Natomiast bardziej szczegółowe prace, dotyczące wyżej wym. tematyki prezentowane były na Sesji IV — afiszowej, odbywającej się równolegle w dwóch salach. Na sesji tej przedstawiono wyniki 37 prac — w sali A oraz 42 prac — w sali B.

Na V-ej z kolei Sesji (plenarnej) przedstawiono referaty dotyczące następujących zagadnień:

- a) — mechanicznego modelowania termosprężystych stanów naprężenia w zagadnieniach trójwymiarowych (N. N. Prigorowski),
- b) — wyznaczania szczątkowych naprężeń spawalniczych w obszarze nagrzania — na modelach poliwęglanowych — metodą dyspersji współczynników piezo-optycznych (L. M. Łobanow),
- c) — modelowania oraz badania zagadnień dynamicznych metodą elastooptyczną (I. Kostin, G. I. Pietraszen),
- d) — teoretycznych i doświadczalnych badań propagacji jednowymiarowych fal lepkosprężystych i związanych z nimi zagadnień oceny efektów dynamicznych, występujących w materiałach optycznie czułych (A. V. Dmochowski).

Na Sesji VI-ej wygłoszono cztery referaty, poświęcone głównie zagadnieniom niesprężystym. Dotyczyły one:

- a) — modelowania pełzania metodą funkcjonalnego podobieństwa (G. S. Wardanian),
- b) — badania naprężeń w elementach konstrukcyjnych, wykonanych z tworzyw polimeryzujących (I. I. Bugakow),
- c) — badania rozproszenia izochrom i jego zastosowanie w rozwiązywaniu nieliniowych zagadnień fotomechaniki (S. P. Wasiliew),
- d) — efektów foto-lepkosprężystych i ich wykorzystania przy badaniach zagadnień kontaktowych (K. Laermann).

Na następnej, VII-ej sesji plenarnej omówiono:

- a) — elastooptyczne badania procesów pękania z uwzględnieniem pełzania materiału modeli (W. I. Tatarin),
- b) — metodę elastooptyczną w zestawieniu z metodami numerycznymi wyznaczania naprężeń i odkształceń (N. I. Prigorowski),
- c) — zastosowanie holografii w elastooptyce (I. W. Zaworonok).

Wyniki bardziej szczegółowych prac, dotyczących wyznaczania naprężeń termicznych, zagadnień

dynamicznych, mechaniki pęknięcia oraz porównania dokładności metody elastooptycznej z innymi metodami analizy naprężeń i odkształceń — zostały przedstawione na Sesji VIII-ej — afiszowej. Zaprezentowano na niej 29 prac w sali A oraz 25 prac w sali B.

Sesja IX była również sesją afiszową, poświęconą zaprezentowaniu wyników prac, dotyczących kompozytów, kryształów oraz różnorodnych zastosowań metody elastooptycznej. Na sesji tej, w sali A przedstawiono wyniki 27-miu prac, a w sali B — 53-ech.

Wymienionej wyżej tematyce poświęcono również trzy ostatnie sesje plenarne. Na X-ej omówiono:

- a) — elastooptyczne badania naprężeń w ciałach anizotropowych (V. N. Netrebko),
- b) — badania naprężeń w konstrukcjach kompozytowych (W. N. Uszakow),
- c) — nowe zastosowania i uogólnienia metody elastooptycznej w badaniu kryształów (V. Indenbom).

Na Sesji XI-ej przedstawiono 6 następujących referatów:

- a) — anizotropowa analogia prawa Wertheima przy określaniu naprężeń w pojedynczych kryształach przestrzennych (I. I. Afanasjew),
- b) — zastosowanie elastooptyki do rozwiązywania zagadnień kontaktowych w procesie walcowania (V. A. Nikołajew),
- c) — badanie naprężeń w połączeniach wielowypustowych przy zastosowaniu elastooptycznej metody multiplikacji prążków (H. J. Schoepf),
- d) — badanie naprężeń w wirniku turbo-kompresora (A. G. Frołow),
- e) — kompleksowe badania naprężeń w cienkościennych, przestrzennych konstrukcjach żelbetowych elektrowni jądrowej (W. I. Taratorin),
- f) — zastosowanie metody elastooptycznej do kompleksowej analizy stanu naprężenia — odkształcenie w żelbetowych korpusach elektrowni jądrowych (A. R. Kirilow).

Ostatnia sesja, Sesja XII-a (plenarna) poświęcona była różnorodnym zastosowaniom metody elastooptycznej. Omówiono na niej m.in.:

- a) — badania naprężeń w konstrukcjach hydrotechnicznych przy złożonym obciążeniu (S. I. Zawaliszin),
- b) — pewne zagadnienia biomechaniki, rozwiązywane przy zastosowaniu metod optycznych (M. Milbauer),
- c) — zastosowanie metody elastooptycznej do badania zagadnień mechanicznych układu kostnego zwierząt (I. Husar),
- d) — badania naprężeń górnych warstw z uwzględnieniem reologicznych własności skał (G. A. Kałaczewa),
- e) — elastooptyczne badania naprężeń i odkształceń, a także kruchego pęknięcia brył węgla (G. A. Katkow),
- f) — badania wpływu warstwowego ekranu na zmniejszenie się dynamicznych charakterystyk fal sejsmicznych (A. G. Melik-Elian), itp.

Ogółem na sesjach plenarnych wygłoszono 36 referatów (w tym 7 przez gości zagranicznych) oraz zaprezentowano wyniki 212 prac. Z tej liczby 26 prac przedstawili autorzy spoza ZSRR. W podsumowującym Konferencję wystąpieniu zarówno prof. H. Aben — przewodniczący Komitetu Organizacyjnego, jak i prof. N. Prigorowski — przewodniczący Komitetu Programowego, podkreślili wysoki poziom prezentowanych prac oraz prowadzonych dyskusji. Skróty prac, zgłoszonych na VIII-ą Wszechniową Konferencję „ELASTOOPTYKA-79” zostały wydane drukiem — w wersjach przygotowanych przez autorów — w czterotomowym wydawnictwie Instytutu Cybernetyki Akademii Nauk Estońskiej SRR p.t. „Materiały VIII Wsjesojuznoj Konferencji po metodu Fotouprugosti” — Tallin, 25 - 28.09.1979. („Proceedings of the Eighth All-Union Conference on Photoelasticity”).

W tomie I, o objętości 220 stron, zamieszczono dwa rozdziały, obejmujące prace o następującej tematyce:

- a) Rozdział I p.t. „Metody badania zagadnień sprężystych” — 22 prace (w tym 5 prac spoza ZSRR), str. 152 - 218,
- b) Rozdział II p.t. „Materiały i przygotowanie modeli” — 23 prace (w tym jedna praca spoza ZSRR), str. 152 - 218.

Tom II — o objętości 228 stron — zawiera trzy następujące rozdziały:

- a) Rozdział III p.t. „Metody i aparatura pomiarowa, technika przeprowadzania badań” — 29 prac (w tym 7 prac spoza ZSRR), str. 10 - 139,

- b) Rozdział IV p.t. „Optycznie czułe pokrycia” — 10 prac (w tym jedna praca spoza ZSRR) — str. 140 - 179,
 c) Rozdział V p.t. „Naprężenia termiczne” — 10 prac (w tym 2 spoza ZSRR) — str. 180 - 226.

Tom III — o objętości 302 stron — zawiera 5 kolejnych rozdziałów, obejmujących prace o następującej tematyce:

- a) Rozdział VI p.t. „Deformacje i naprężenia przy obciążeniach dynamicznych” — 15 prac, str. 13 - 75,
 b) Rozdział VII p.t. „Zagadnienia niesprężyste oraz zagadnienia płynięcia” — 13 prac (w tym jedna praca spoza ZSRR) — str. 76 - 136,
 c) Rozdział VIII p.t. „Zagadnienia mechaniki pękania” — 9 prac (w tym jedna praca spoza ZSRR) — str. 137 - 172,
 d) Rozdział IX p.t. „Elastoptyka w powiązaniu z innymi metodami eksperymentalnymi i obliczeniowymi” — 16 prac (w tym jedna praca spoza ZSRR) — str. 173 - 234,
 e) Rozdział X p.t. „Kompozyty” — 14 prac (w tym jedna praca spoza ZSRR) — str. 235 - 300.

Tom IV — o objętości 283 strony — zawiera 2 rozdziały, obejmujące prace o następującej tematyce:

- a) Rozdział XI p.t. „Kryształy” — 16 prac, str. 13 - 75,
 b) Rozdział XII p.t. „Zastosowanie metody elastoptycznej” — łącznie 58 prac, zgrupowanych w następujących czterech podrozdziałach:
 — „Budowa maszyn i aparatów” — 26 prac (w tym jedna praca spoza ZSRR) — str. 76 - 157,
 — „Urządzenia budowlane i hydrotechniczne” — 17 prac (w tym jedna praca spoza ZSRR) — str. 158 - 213,
 — „Zagadnienia geologiczne warstw górnych” — 11 prac, str. 214 - 251,
 — „Biomechanika” — 4 prace (w tym 3 prace spoza ZSRR) — str. 252 - 280.

Na końcowych stronach każdego z tomów zamieszczono alfabetyczny wykaz autorów prac, zawartych w danym tomie. Uzupełnieniem wyżej wymienionych materiałów Konferencji „ELASTOPTYKA-79” było wydanie bibliograficznego informatora p.t.

„Поляризационно-оптический Метод Исследования Напряжений” — Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1971 - 1978 гг. — К VIII Всесоюзной Конференции „ФОТОУПРУГОСТЬ-79” — Москва, 1979.

Informator został opracowany przez Wydział informacji naukowo-technicznej Instytutu Maszynoznawstwa im. ak. A. A. Blagonrawowa w Moskwie, pod redakcją k.n.t. E. H. Filimonowej. Zawiera on wykaz pozycji literaturowych (książki, rozprawy, artykuły, patenty) jakie zostały opublikowane w latach 1971 - 1978 z dziedziny polaryzacyjno-optycznych metod analizy naprężeń i odkształceń. Informator ten stanowi kontynuację poprzedniego informatora bibliograficznego, obejmującego pozycje literaturowe z wym. dziedziny wiedzy, jakie ukazały się w latach 1966 - 1970, a wydanego w związku z VII-ą Wszzechzwiązkową Konferencją n.t. polaryzacyjno-optycznych metod analizy naprężeń, jaka odbyła się w Tallinie w roku 1970. Materiał bibliograficzny zawarty w obecnie opracowanym informatorze obejmuje łącznie 2028 pozycji literaturowych, które zostały podzielone na 10 grup tematycznych. Każdą z nich podzielono dodatkowo na (od trzech do ośmiu) podgrupy szczegółowe. Cały ten materiał rozmieszczono w odpowiednich rozdziałach i podrozdziałach odpowiadających dokonaniem podziałowi. Ponadto, w celu ułatwienia korzystania z tego informatora, podano na jego końcu imienny wykaz autorów prac, z podziałem na autorów rosyjskich i zagranicznych.

Przebieg Konferencji należy ocenić bardzo wysoko. Jej ukierunkowanie tematyczne i zwartość zagadnień, omawianych na poszczególnych sesjach, odbiły się niezwykle pozytywnie na rzeczowości i żywości prowadzonych dyskusji. Na podkreślenie zasługuje również wysoki poziom organizacji Konferencji, sprężystość prowadzenia obrad oraz wzorowe przygotowanie sal i pomieszczeń pomocniczych, zwłaszcza sal przeznaczonych na sesje afiszowe.

Organizatorzy zadbali nie tylko o zapewnienie uczestnikom Konferencji jak najlepszych warunków odbywania obrad, lecz również o zorganizowanie interesującego i urozmaiconego programu socjalnego.

Władysław Walczak

III-CIE SYMPOZJUM STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI

Łódź, 26 - 27 października 1979 r.

W dniach 26 - 27 października 1979 r., odbyło się w Łodzi III-cie Ogólnopolskie Sympozjum „Stateczności Konstrukcji” zorganizowane pod patronatem J. M. Rektora Politechniki Łódzkiej, prof. dr hab. Edwarda Galas przez:

- Oddział Łódzki PTMTIS,
- Zespół Stateczności Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN,
- Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej,
- Sekcję Wytrzymałości i Badania Materiałów Oddziału Łódzkiego SIMP.

W skład Komitetu Organizacyjnego wchodził prof. dr Jerzy Leyko (przewodniczący), mgr inż. Seweryn Jakubowski (sekretarz organizacyjny), dr inż. Katarzyna Kowal (sekretarz naukowy) oraz członkowie: doc. dr hab. Marian Królak, doc. dr Janusz Lipiński, prof. dr hab. Stanisław Łukasiewicz, mgr inż. Julian Piątek, doc. dr Władysław Wąlczak.

Członkami honorowymi Komitetu byli; prof. dr Zbigniew Brzoska — czł. koresp. PAN, z-ca przewodniczącego Komitetu Budowy Maszyn PAN, prof. dr Marian Suchar — prorektor d/s nauki Politechniki Łódzkiej i doc. dr Mirosław Banasiak — dziekan Wydziału Mechanicznego Politechniki Łódzkiej.

Obrady Sympozjum odbywały się w salach Oddziału Wojewódzkiego NOT w Łodzi.

W Sympozjum wzięło udział 95 osób, w tym dwie z zagranicy (z Politechniki w Karl-Marx-Stadt, NRD).

Na Sympozjum zgłoszono ogółem 51 prac, w tym: 13 z Łodzi, 10 z Wrocławia, 7 z Poznania, 5 z Warszawy, 4 z Bielska Białej, po 3 prace z Gdańska i Krakowa, po 2 prace z Karl-Marx-Stadt i Rzeszowa oraz po 1 pracy z Piły i Szczecina.

Z liczby tej przedstawiono na Sympozjum 49 prac. Dotyczyły one zagadnień stateczności i stanów zakrytycznych płyt i powłok — ze znacznym udziałem płyt i powłok trójwarstwowych, prętów i układów prętowych, a także konstrukcji tarczowych i tarczowo-prętowych. Na podkreślenie zasługuje znaczna liczba (10) prac poświęconych w całości — lub w znacznej części badaniom doświadczalnym stanów krytycznych i zakrytycznych konstrukcji cienkościennych, a w zakresie teoretycznych badań tych stanów — prace poświęcone metodom numerycznym (metodzie elementów skończonych). Po krótkim zagajeniu przez prof. dr Jerzego Leyko, oraz krótkim wystąpieniu J. M. Rektora Politechniki Łódzkiej, rozpoczęły się merytoryczne obrady, które prowadzone były równoległe w dwóch Sekcjach.

W Sekcji I-ej, której obradom przewodniczyli kolejno: prof. Z. Brzoska, Z. Waszczyszyn oraz doc. J. Lipiński, przedstawione zostały następujące prace:

- 1) — *Stateczność płyt podpartych i obciążonych punktowo* — A. Biegus (Wrocław),
- 2) — *Stateczność i stan zakrytyczny płyty trapezowej poddanej ścisłaniu* — R. Grądzki (Łódź),
- 3) — *Stan zakrytyczny uźbrowanej tarczy prostokątnej przy działaniu jednokierunkowego obciążenia liniowo zmiennego* — A. Kelm (Łódź),
- 4) — *Kształtowanie sprężystych płyt pierścieniowych o zmiennej grubości ze względu na wyboczenie* — K. Rzegocińska-Pelech, Z. Waszczyszyn (Kraków),
- 5) — *Jednoparametrowa optymalizacja płyt pierścieniowych o zmiennej grubości z uwagi na wyboczenie* — A. Strzelczyk (Bielsko-Biała),
- 6) — *Temperatury krytyczne i zachowanie się płyt pierścieniowych w stanie podkrytycznym* — J. Kukuczka (Bielsko-Biała),
- 7) — *Numeryczna analiza stateczności płyt pierścieniowych w niestabilnym polu temperatury* — S. Wojciech (Bielsko-Biała),
- 8) — *Przybliżona analiza stateczności żebrowanych ścianek dźwigara skrzynkowego poddanego zginaniu ze ścisłaniem bądź rozciąganiem* — T. Galkiewicz (Łódź),
- 9) — *Racjonalne projektowanie przekroju poprzecznego dźwigara skrzynkowego poddanego zginaniu* — T. Galkiewicz, K. Kowal-Michalska (Łódź),
- 10) — *Przybliżona metoda obliczania cienkościennego dźwigara skrzynkowego poddanego jednoczesnemu zginaniu i działaniu siły osiowej po utracie stateczności środników* — S. Jakubowski (Łódź),
- 11) — *Stateczność i prace w zakresie zakrytycznym cienkościennych dźwigarów skrzynkowych poddanych zginaniu i ścisłaniu* — M. Królak, Z. Kołakowski, E. Ostrowska (Łódź),

- 12) — *Utrata stateczności dźwigarów skrzynkowych w świetle badań doświadczalnych* — K. Kluk, R. Kutyłowski, Z. Mańko, R. Szczygielski (Wrocław),
- 13) — *Zastosowanie metody pasm skończonych do analizy przęseł skrzynkowych* — Z. Mańko (Wrocław),
- 14) — *Stateczność aerosprężystych wieloprzęsłowych przekryć membranowych* — R. Sygulski (Poznań),
- 15) — *Przypadki wyboczenia rusztów siatkowych* — J. Lewiński (W-wa).

Natomiast obradom prowadzonym równolegle w Sekcji II przewodniczyli kolejno: profesorowie S. Łukasiewicz, E. Bielewicz oraz doc. Władysław Walczak. W czasie obrad wygłoszone zostały następujące referaty:

- 1) — *Stateczność tarczy trójwarstwowej z miękkim wypełniaczem poddanej nierównomiernemu ścisnaniu i ścinaniu* — M. Kotelko (Łódź),
- 2) — *Stateczność trójwarstwowej płyty prostokątnej poddanej działaniu liniowo zmiennego ściskania tarczowego* — W. Walczak, R. Mania (Łódź),
- 3) — *Stateczność jednokierunkowo ścisanej prostokątnej tarczy trójwarstwowej typu sandwicz, wzmocnionej zębem podłużnym* — K. H. Hahn (Karl-Marx-Stadt),
- 4) — *Optymalizacja tracącej stateczność płyty przekładkowej z rdzeniem komórkowym* — L. Stricker, P. Wrzecioniarz (Wrocław),
- 5) — *Badanie stateczności modeli rdzenia komórkowego* — L. Stricker (Wrocław),
- 6) — *Badanie stateczności płyt przekładkowych z rdzeniem o zmiennej charakterystyce* — P. Wrzecioniarz (Wrocław),
- 7) — *Teoretyczna i doświadczalna analiza stateczności ścisanych tarcz prostokątnych gęsto uźbrowanych po jednej stronie* — J. Leyko, J. Weselak (Łódź),
- 8) — *Elastoptyczne badania modelowe ścinanej płyty prostokątnej, wykazującej cechy ortotropii* — M. Janowski, H. Kopecki (Rzeszów),
- 9) — *Analiza stateczności w zakresie sprężystym wycinka trójwarstwowej powłoki stożkowej* — K. Magnucki (Poznań),
- 10) — *Analiza stateczności trójwarstwowej sprężysto-plastycznej powłoki stożkowej* — J. Zielnica (Poznań),
- 11) — *Energia sprężysta i stateczność ścinanych trójwarstwowych powłok o odkształcalnych rdzeniach* — F. Romanów, J. Czmochoński (Wrocław),
- 12) — *Stateczność trójwarstwowej powłoki walcowej przy skręcaniu* — M. Ostwald (Poznań),
- 13) — *Wyboczenie sprężyste trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej poddanej działaniu obciążenia złożonego* — Z. Sekulski (Poznań),
- 14) — *Uwagi o dokładności metody Galerkina do analizy pracy w zakresie zakrytym powłok* — W. Szyszkowski (Warszawa),
- 15) — *Stateczność walcowej konstrukcji powłokowej (wpływ wstępnych odchyłek i luzów na siły wewnętrzne)* — J. Zwoliński (Warszawa).

W drugim dniu Sympozjum — podobnie jak w pierwszym — obrady odbywały się również w dwóch równoległych Sekcjach. Podczas obrad Sekcji I, którym przewodniczyli kolejno: docenci Henryk Kopecki oraz Jerzy Głuza przedstawiono następujące prace:

- 1) — *Zastosowanie elementów skończonych do nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych* — Z. Waszczyszyn, Cz. Cichoń, M. Radwańska, E. Pytel, Nguyen-Cao-Dung (Kraków),
- 2) — *Analiza stateczności za pomocą metody elementów skończonych* — H. Aurich (Karl-Marx-Stadt),
- 3) — *Zastosowanie metody elementów skończonych do wyznaczania naprężeń krytycznych płyt o liniowo zmiennej grubości* — W. Berczyński (Łódź),
- 4) — *Zastosowanie elementów skończonych do analizy stateczności dynamicznej konstrukcji w zakresie obliczeń rezonansów kombinowanych* — W. Ostachowicz (Gdańsk),
- 5) — *Określenie stateczności tarczy jako kryterium obciążenia zewnętrznego konstrukcji prętowo-tarczowych metodą elementów skończonych* — E. Rusiński (Wrocław),
- 6) — *Równania dynamicznej stateczności płyty prostokątnej poddanej działaniu zginania tarczowego* — Wł. Walczak (Łódź),
- 7) — *Stateczność utwierdzonej płyty prostokątnej o dowolnych kierunkach ortotropii* — M. Janowski (Rzeszów),

- 8) — *Tarcza prostokątna obciążona nierównomiernym ściskaniem i ścinaniem* — stan krytyczny i zakrytyczny — J. Zaraś (Łódź),
- 9) — *Wpływ geometrii ugięć początkowych na naprężenia w osiowo-ściskanych płytach* — M. Kmiecik (Szczecin) i M. Majewski (Gdańsk),
- 10) — *Nieliniowe zagadnienie stateczności ściskanych tarcz prostokątnych przy różnych warunkach brzegowych* — A. Żeligowski (Łódź).

Obradom, prowadzonym w Sekcji II przewodniczyli kolejno: prof. St. Wiśniewski oraz doc. F. Jarzyński. Przedstawiono tu niżej wymienione prace:

- 1) — *Losowe naprężenia krytyczne kruche go pęknięcia prętów sprężysto-plastyczno-kruchych* — Z. Kowal, W. Łaban (Wrocław),
- 2) — *Oblężenie parametrów krytycznych wirujących prętów znajdujących się w przepływie* — S. Janecki (Gdańsk),
- 3) — *Stateczność aerodynamiczna układu ciągnowo-prętowego* — F. Jarzyński (Poznań),
- 4) — *Stateczność pręta sprężystego a niedokładności jego kształtu* — Z. Kordecki (Kraków),
- 5) — *Stateczność płaskiej postaci zginania belki obciążonej siłą pionową i wzdłużną przyłożoną mimośrodowo* — J. Kobzdej (Piła),
- 6) — *O wyboczeniu skrętnym prętów cienkościennych o przekroju dwuteowym* — Cz. Szymczak (Gdańsk),
- 7) — *Pseudodynamiczne zagadnienie stateczności koła o konstrukcji spawanej* — W. Majchrzak (Poznań),
- 8) — *Aualiza warunków zamocowania na długości pasów dźwigarów kratowych ze względu na stateczność płaskiej postaci zginania* — J. Misiak (Warszawa),
- 9) — *Stateczność globalna przestrzennych czteropasowych dźwigarów kratowych* — J. Misiak, B. Wierchowski (Warszawa).

Symposium zostało zakończone sesją plenarną, poświęconą podsumowaniu obrad, którego — w zakresie ogólnych danych — dokonał prof. dr Jerzy Leyko. Natomiast prof. dr Zb. Brzoska oraz prof. dr hab. E. Bielewicz, dokonując próby merytorycznego podsumowania przebiegu i tematyki obrad, zwrócili uwagę na aktualność poruszanej tematyki, znaczny udział prac eksperymentalnych — co ma duże znaczenie dla praktyki oraz rozwój zastosowań metod numerycznych do rozwiązywania zagadnień stateczności. Zwrócili również uwagę na wartości aplikacyjne referowanych prac, z których większość miała swą genezę w zagadnieniach praktycznych. Zainteresowanie wynikami tych prac ze strony techniki stwarza dobre warunki szerszego uświadomienia, że praca konstrukcji cienkościennych w zakresie zakrytycznym — przy spełnieniu odpowiednich warunków — jest praktycznie możliwa. Za celowe uznali kontynuację prac z zakresu tematyki, zaprezentowanej na Symposium, zwracając jednakże uwagę na konieczność podjęcia również prac o ogólniejszym charakterze oraz silniejszego zaakcentowania zagadnień związanych z określeniem obciążeń niszczących.

Obszerne streszczenia nadesłanych ma Symposium prac, zostały wydane drukiem w materiałach konferencyjnych p.t. „III-e Symposium Stateczności Konstrukcji” — Referaty Łódź 26—27.X.1979 r. — w wersjach opracowanych przez autorów prac. Łącznie materiały obejmują 352 strony i zawierają skrótów teksty 48-miu referatów.

Władysław Walczak

VII Symposium Poświęcony Reologii odbędzie się we Wrocławiu w dniach 25—27 września 1981 r. Organizatorzy proszą o przygotowanie referatów (nigdzie dotąd nie ogłaszanych) z bieżącej działalności naukowej. Materiały te będą wydane na prawach rękopisu. Tradycyjnie będą reprezentowane działy: reologia metali i polimerów, reologia betonu i gruntów, a także problemy reologii teoretycznej i doświadczalnej.

OGÓLNOKRAJOWY KONKURS NA NAJLEPSZĄ PRACĘ Z MECHNIKI STOSOWANEJ

Konkurs organizuje Oddział Wrocławski PTMTS w porozumieniu z Zarządem Głównym PTMTS. W konkursie mogą brać udział członkowie PTMTS nie posiadający tytułu profesora, docenta lub tytułu doktora habilitowanego. Prace konkursowe zawierające elementy nowości należy przesłać do Sekretariatu Oddziału Wrocławskiego PTMTS, Politechnika Wroclawska, ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, w nieprzekraczalnym terminie do 30 października 1980 r., przy czym obowiązuje data stempla pocztowego.

Maszynopis pracy należy przesłać w trzech egzemplarzach (łącznie z rysunkami) w formie nadającej się do druku, w objętości co najwyżej 20 stron.

Strona tytułowa winna być opatrzona godłem, umieszczonym zarówno na każdym egzemplarzu pracy, jak i na wewnętrznej kopercie. Nazwisko i imię oraz adres i miejsce pracy należy przesłać w zaklejonej kopercie. W konkursie uczestniczą wyłącznie prace dotąd nie publikowane. Konkurs prowadzony będzie zgodnie z regulaminem Konkursów Naukowych PTMTS, a prace oceniać będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału Wrocławskiego PTMTS w porozumieniu z Zarządem Głównym.

Nagrody: I-sza — 12.000.—zł, II-ga — 8.000.—zł, III-cia — 5.000.—zł.

Sąd Konkursowy zastrzega sobie prawo zmiany wysokości nagród lub innego ich podziału. Nagrodzone prace Autorzy referują na publicznym zebraniu naukowym w terminie określonym przez Zarząd Oddziału. Ponadto zostaną one przekazane do opublikowania. Prace nie nagrodzone będą zwrócone Autorom po zatrzymaniu jednego egzemplarza w archiwum Oddziału.

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
półrocznie zł 60.—
rocznie zł 120.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku bieżącego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki społecznej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmują RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11- w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy. Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki. piętro 17 pokój 1724)

Mech. Teor. T. 18, z. 2, s. 149—346, Warszawa 1979, Indeks 36523