

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

471 720

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 17 · ZESZYT 4



531

WARSZAWA 1979

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

<p>M. NOWAK, A. WŁOCHOWICZ, Analiza zmian trwałości zmęczeniowej i mikrostruktury poliamidu w funkcji stanu cieplnego formy i obróbki cieplnej Анализ изменений усталости и микроструктуры полиамида в функции термического состояния формы и термической обработки Analysis of changes in fatigue life and physical microstructure of polyamid as a function of thermal conditions of mould and thermal treatment</p>	463
<p>G. GLINKA, Teoretyczna i eksperymentalna analiza wzrostu szczelin zmęczeniowych w obecności spawalniczych naprężeń własnych Теоретический и экспериментальный анализ роста усталостных трещин при присутствии сварных остаточных напряжений Theoretical and experimental analysis of fatigue cracks growth in a presence of welding residual stresses</p>	479
<p>E. MACIĄG, Interakcja układu budynek-podłoże podlegającego działaniom sejsmicznym i parasejsmicznym Взаимодействие системы здание-основание при землетрясениях и парасейсмических колебаниях Building-foundation interaction during an earthquake and paraseismic vibrations</p>	497
<p>J. TALER, Nieustalone pole temperatury i naprężeń w nieskończenie długim, wydrążonym walcu ogrzewanym na zewnętrznej powierzchni i chłodzonym na wewnętrznej Нестационарные поля температуры и напряжений в бесконечном полом цилиндра нагреваемым на внешней и охлаждаемым на внутренней поверхностях Unsteady temperature and thermal stresses in a hollow cylinder heated on the outer and cooled on the inner surface</p>	537
<p>K. MAZUR-ŚNIADY, Skręcanie przymatycznych prętów jako ciał z wewnętrznymi więzami I Torsion of prismatic rods as bodies with internal constraints I Кручение призматических стержней как тел с внутренними связями I</p>	553
<p>K. MAZUR-ŚNIADY, Skręcanie przymatycznych prętów jako ciał z wewnętrznymi więzami II Torsion of prismatic rods as bodies with internal constraints II Кручение призматических стержней как тел с внутренними связями II</p>	567
<p>K. SZUWALSKI, Nośność rozdzielcza pierścieniowej tarczy kołowo-symetrycznej ze sztywną inkluzją Decohesive carrying capacity of annular axially-symmetrical disc with rigid inclusion Несущая способность осесимметричного кольцевого диска с жестким включением</p>	589
<p>S. KOSAŃDA, A. LISKOWSKI, Badania prędkości pęknięcia i kształtu pęknięcia w stali i podwyższonej wytrzymałości przy zmiennym zginaniu Исследование скорости роста и формы трещин в высокопрочной стали при циклическом изгибе Investigation of fatigue crack growth rate and crack shapes in high-strength steel under cyclic bending</p>	603
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	623

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

711720

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A



T O M 1 7 • Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1 9 7 9

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR,
ANDRZEJ SZANIAWSKI — REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR,
MONIKA WĄGROWSKA — REDAKTOR,
JERZY DAŁEK — SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 660, Ark. wydawniczych 13,0, Ark. drukarskich 10,75. Papier druk mat. V kl. 63 g, 70×100.
Oddano do składania 7.VIII.1979 r. Druk ukończono w grudniu 1979 r. Zam. 1007/79 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ANALIZA ZMIAN TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ I MIKROSTRUKTURY POLIAMIDU
W FUNKCJI STANU CIEPLNEGO FORMY I OBRÓBKI CIEPLNEJ

MARIAN NOWAK (WROCŁAW), ANDRZEJ WŁOCHOWICZ (BIELSKO-BIAŁA)

1. Wstęp

Wyroby z poliamidu — ze względu na jego specjalne własności w stanie stopionym — wykonuje się najczęściej metodą wtrysku. Parametry przetwórstwa ustala się wstępnie w oparciu o zalecenia producenta a następnie dokładnie w drodze bezpośrednich prób, w zależności od wielkości wyrobu, konstrukcji formy, typu wtryskarki i oprzyrządowania pomocniczego. Celem zapewnienia dobrej homogenizacji stopionej masy poliamidowej, utrzymania kształtki prostej o wysokiej jakości, bez niedolewów i widocznych linii pływic (tekstury) oraz aby przetwarzanie poliamidu odbywało się w warunkach ułatwiających w maksymalnym stopniu pełną rekrytalizację już podczas wtrysku, producenci tego tworzywa zalecają podgrzewanie formy. Według ZN-64/MPCh/SCh-223 [1] wydanej przez Zakłady Azotowe w Tarnowie (ZAT) temperatura powierzchni formy powinna wynosić $313 \div 323$ K. Inne źródła zalecają np. temperaturę około 413 K [2], informując przy tym, że największy wzrost krystaliczności — a więc zrealizowanie zasady pełnego wykrytalizowania poliamidu i związanej z tym większej stabilności wymiarów i własności mechanicznych — daje kilkugodzinna obróbka termiczna w parze wodnej. Na przykład 3-godzinna stabilizacja w tym ośrodku, w temperaturze 413 K (140°C) podnosi gęstość poliamidu do $1,1598 \text{ Mg/m}^3$ [2].

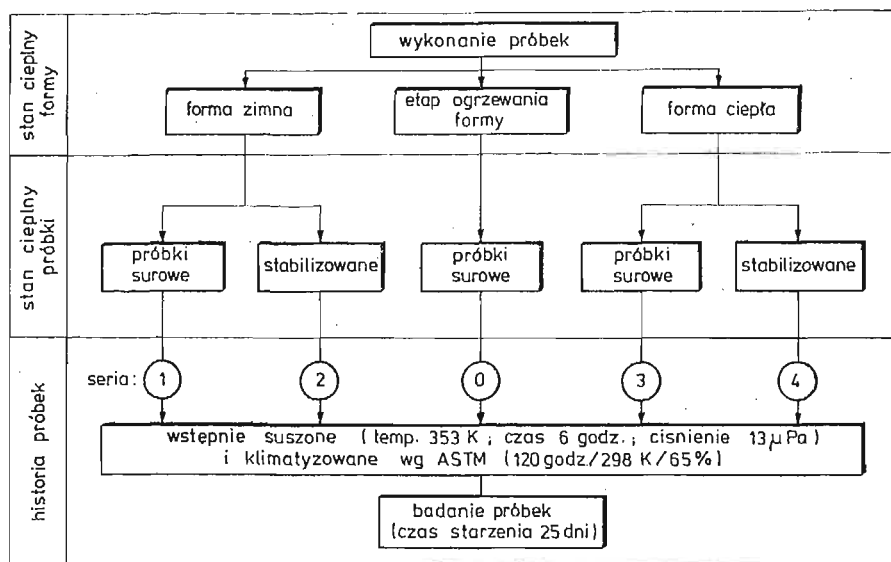
Zasada podgrzewania powierzchni formy opiera się na zjawisku zwiększonej ruchliwości makrocząsteczek w temperaturze wyższej od temperatury mięknięcia fazy bezpostaciowej. Dla czystego polikaprolaktamu w stanie suchym wynosi ona $293 \div 333$ K. Wilgotność, plastyfikator, monomer i podobnie działające substancje obniżają temperaturę mięknięcia [2].

Ponadto — niezależnie od wymaganej jakości kształtki — wtrysk tworzywa do nieogrzonej formy (tzw. zimnej) bardzo utrudnia wyjmowanie kształtki z formy i w konsekwencji sprzyja deformacji wyrobów w trakcie usuwania ich z formy przez automatyczny wyrzutnik.

Celem zbadania jak warunki formowania i obróbka cieplna (stabilizacja termiczna) wpływają na trwałość zmęczeniową i fizyczną mikrostrukturę poliamidu 6 przeprowadzono badania zmęczeniowe i strukturalne próbek wykonanych i przygotowanych do badań według określonego programu (tablica 1). Jego realizacja rozszerza informacje o własnościach poliamidu związanych z warunkami przetwórstwa i prowadzi do lepszego zaprogramowania parametrów wtrysku oraz daje pewne wytyczne co do celowości stosowania ob-

róbki cieplnej próbek nieuspokojonych. Tworzywem nieuspokojonym przyjęto nazywać takie, w którym tego typu zjawiska jak depolimeryzacja, degradacja i destrukcja chemiczna, powstawanie wolnych agresywnych makrorodników, ich rekombinacja itp. przebiegają bardzo intensywnie i prowadzą do równie intensywnego spadku własności mechanicznych — szczególnie trwałości zmęczeniowej [3].

Tablica 1. Schemat przygotowania próbek do badań i formy do wtrysku.



Należy dodać, że wyroby poliamidowe, które nie przeszły obróbki cieplnej, względnie kondycjonowania wykazują tendencję do rekryształizacji (wtórnej krystalizacji w stanie stałym) i podlegają często nakładaniu się dwóch, wzajemnie przeciwstawnych procesów. Procesowi wzrostu twardości — wskutek wzrostu stopnia krystaliczności oraz procesowi mięknienia — wskutek sorpcji wilgoci [2].

2. Wykonanie i przygotowanie próbek

Próbki do badań zmęczeniowych i strukturalnych przygotowano według następującego programu (tablica 1):

1. pierwszą serię wykonano przez wtrysk tworzywa do zimnej formy (nieogrzewanej, o temperaturze około 293 ÷ 303 K) i badano na zmęczenie oraz mierzono parametry strukturalne w stanie surowym;

2. drugą serię wykonano również w formie zimnej lecz badania przeprowadzono po uprzedniej stabilizacji termicznej w oleju;

3. trzecią serię zrealizowano przez wtrysk tworzywa do formy cieplej (o stałej temperaturze powierzchni 343 K) i badano na zmęczenie oraz oznaczano parametry strukturalne w stanie surowym;

4. czwartą serię wykonano w formie cieplej, a próbki badano w stanie stabilizowanym.

Ponadto wykonano 32 próbki (oznaczone w tablicy 1 symbolem „0”) przez wtrysk tworzywa do formy o wzrastającej temperaturze w przedziale 293 ÷ 343 K. Tą serię próbek badano tylko na zmęczenie (oznaczanie trwałości).

Szczegółowe parametry wtrysku, ustalone w oparciu o ogólne wytyczne dla przetwórstwa poliamidu oraz dane eksperymentalne, zawiera praca [3].

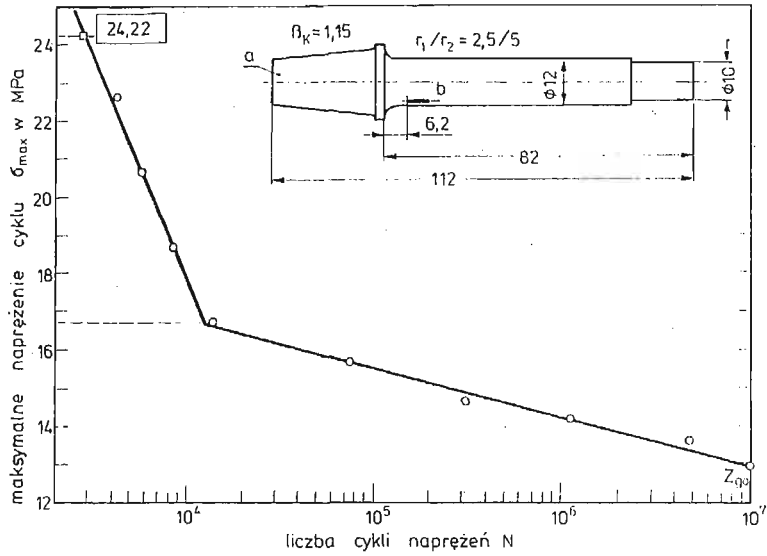
W konstrukcji formy uwzględniono rzadkoplątność poliamidu w stanie stopionym oraz wąski zakres temperatury topnienia. Dlatego też kanały dopływowe wykonano szerokie i bez odsadzenia (progu) w miejscu styku z próbką, poprowadzono je stycznie do osi kształtki oraz do grubszej jej części. Ogrzewanie formy i utrzymanie stałej temperatury na powierzchni zapewniał termostat z wymuszonym obiegiem cieczy.

Stabilizację próbek (obróbkę cieplną) przeprowadzono w oleju, w temperaturze 463 K, w czasie 1 godziny. Wartości te przyjęto w oparciu o liczne badania eksperymentalne własne [4, 5, 6] oraz w oparciu o informację, że krystalizacja wtórna przebiega z największą prędkością w temperaturze 453 ÷ 468 K [8]. Ponadto dla osiągnięcia równomiernego rozkładu fazy krystalicznej, próbki chłodzono bardzo powoli, w kąpeli olejowej, w czasie około 24 godzin. W celu doprowadzenia tworzywa do równowagi z normalnymi warunkami laboratoryjnymi, próbki do badań zmęczeniowych i strukturalnych wstępnie suszono w próżni (temperatura 353 K, czas 6 godz., ciśnienie 13 μ Pa), a następnie klimatyzowano nad roztworem wodnym gliceryny według ASTM D618-61 o współczynniku załamania światła 1,4264. Czas klimatyzowania wynosił 120 godz. w temperaturze 298 K, przy wilgotności względnej powietrza nad roztworem 65%.

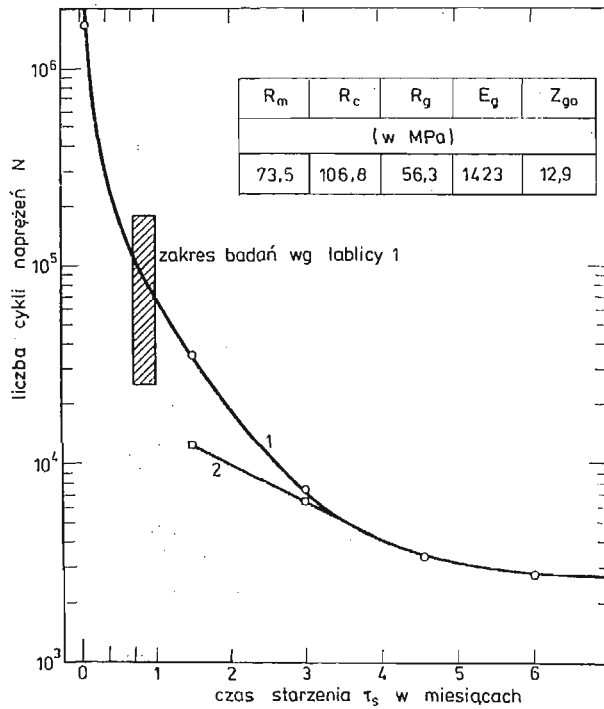
3. Badania zmęczeniowe i obliczenia statystyczne

Badania zmęczeniowe przeprowadzono metodą trwałości, przyjmując do oznaczeń maksymalne naprężenie cyklu $\sigma_{max} = 24,22$ MPa (rys. 1). Przy wyborze takiej wartości wzięto przede wszystkim pod uwagę czas trwania próby zmęczeniowej ($N_G = 10^6$ cykli), częstotliwość zmiany naprężenia, liczbę badanych na zmęczenie próbek ($\Sigma n = 143$) oraz prędkość i czas starzenia się Tarnamidu T-27. Ponadto kierowano się koncepcją, że wyniki pomiarów powinny reprezentować stan strukturalny próbek o minimalnym czasie starzenia, ale praktycznie na tyle dużym, aby wyeliminować wpływ niestabilności struktury. W oparciu o powyższe założenia i ograniczenia oraz wstępne eksperymenty ustalono optymalną wartość naprężenia na $\sigma_{max} = 24,22$ MPa. Pomiary realizowano na zmęczeniówce 12-wrzecionowej, w temperaturze $t_B = 298$ K, z częstotliwością $f = 15$ Hz, przy wilgotności względnej atmosfery $\varphi = 45 \div 50\%$. Zamocowanie próbki — wspornikowe, cykl wahadłowy ($\sigma_m = 0$; $\sigma_a = \sigma_{max}$).

Czas przygotowania próbek do badań (czas od chwili ich wykonania do momentu badania), obejmujący obróbkę cieplną, wstępne suszenie oraz klimatyzację wynosił 20 ÷ 30 dni. Jak wynika z wykresu trwałości zmęczeniowej w funkcji czasu naturalnego starzenia, próbki w trakcie badań zmęczeniowych znajdowały się w stanie nieuspokojonym (rys. 2). Dlatego też celem przeprowadzonej klimatyzacji było przyspieszenie osiągnięcia przez badane próbki stanu równowagi z warunkami otoczenia, zmniejszenie prędkości starzenia na okres badań zmęczeniowych (trwających 10 dni) oraz otrzymanie powtarzalnych wyników pomiaru bez względu na historię próbki w danej serii.



Rys. 1. Wykres zmęczenia Tarnamidu T-27 oraz próbka do badań zmęczeniowych (a) i rentgenograficznych (b); β_k — współczynnik karbu (czas starzenia $\tau_s = 7$ miesięcy.)



Rys. 2. Obszar badań zmęczeniowych na tle wykresu starzenia $N = f$ (czasu starzenia); 1 — wpływ czasu starzenia się na trwałość zmęczeniową próbek surowych wykonanych w formie ciepłej (seria 3 — tabl. 1); 2 — próbki klimatyzowane

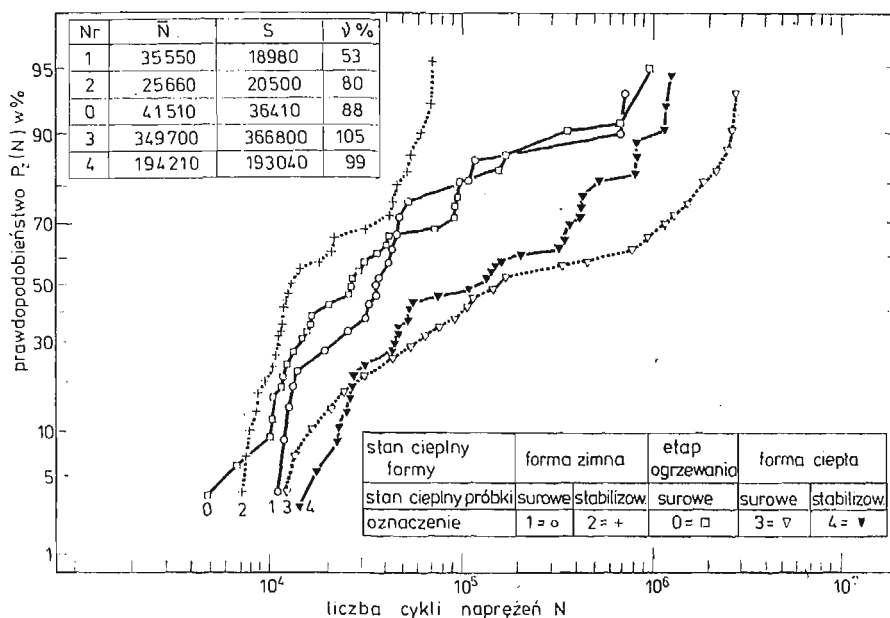
Wyniki pomiarów zmęczeniowych przedstawiono na rysunku 3. Do obliczenia liczb charakterystycznych (\bar{N} , S) zastosowano metodę z ograniczoną bazą [7]. Średnią arytmetyczną liczby cykli do złomu oraz odchylenie standardowe dla próbek złamanych oraz dla całej próby obliczono ze wzorów:

$$(3.1) \quad \bar{N}_r = \frac{1}{r} \sum N_i,$$

$$(3.2) \quad S_r = \sqrt{\frac{1}{r-1} \sum (N_i - \bar{N}_r)^2},$$

$$(3.3) \quad S = S_r k_s,$$

$$(3.4) \quad \bar{N} = \bar{N}_r + S k_N,$$



Rys. 3. Dystrybuanta rozkładu logarytmo-normalnego i rozkład częstości wyników N_i dla różnych stanów cieplnych formy

w których k_s i k_N — współczynniki zależne od stosunku próbek złamanych r do liczebności próby w danej serii n . Wartość bazy dla serii 0-1-2 przyjęto równą $N_G = 10^5$. Natomiast dla serii 3: $N_G = 10^6$, a dla serii 4: $N_G = 8 \cdot 10^5$. Wybór bazy przeprowadzono w oparciu o dystrybucję rozkładu logarytmo-normalnego i rozkład częstości wyników N_i (rys. 3) oraz statystyczną zasadę eliminacji próbek z obliczeń nie należących do badanej zbiorowości.

Ponadto statystyczną analizę wyników pomiarów na zmęczenie przeprowadzono metodą standardową, przyjmując w obliczeniach, że rozkład liczby cykli do złomu N_i jest normalny oraz logarytmo-normalny (tablica 2). Z porównania otrzymanych rezultatów wynika, że jakościowy charakter zjawiska, opisany liczbami charakterystycznymi nie ulega istotniejszym zmianom, a nawet wartości liczbowe współczynnika zmienności są w danej

Tablica 2. Porównanie liczb charakterystycznych określonych według różnych metod

Metoda obliczeń		Według rozkładu normalnego						Według rozkładu logarytmno-normalnego						
Liczby charakterystyczne		standardowa			z ograniczoną bazą [7]			standardowa			standardowa			
		r	\bar{N}_r	S_r	n_r %	n	\bar{N}	S	n %	r	$\lg \bar{N}_r$	\bar{N}_r	S_{lgN}	n_{lgN} %
1		16	29 860	14 600	49	20	35 550	18 980	53	16	4,4160	26 000	0,25	5,6
2		28	25 660	20 500	80	28	25 660	20 500	80	28	4,2810	19 100	0,33	7,7
0		27	32 770	28 900	88	32	41 510	36 410	88	27	4,3645	23 140	0,37	8,5
3		19	184 640	262 000	142	27	349 700	366 800	105	19	4,9116	81 600	0,57	11,6
4		30	145 950	152 000	104	36	194 210	193 040	99	30	4,9140	82 000	0,48	9,8
1	Względna		100		100		100		100			100		100
2	zmiana liczb		-14		+63		-28		+50			-27		+37
0	charakterystycznych		+9		+80		+17		+66			-11		+52
3	[%]		+518		+190		+883		+98			+214		+107
4			+388		+112		+446		+86			+215		+75

serii próbek do siebie zbliżone. Ponieważ metoda z ograniczoną bazą uwzględnia wszystkie wyniki pomiarów, oddaje zatem — zdaniem autorów — w sposób bardziej reprezentatywny wpływ ilościowy i jakościowy badanych czynników.

Rozrzut trwałości zmęczeniowej N_f osiągnął w podanych warunkach badań rozmiary typowe dla tworzyw sztucznych i tego typu obciążeń.

4. Zasady wyboru preparatów do badań strukturalnych

Badanie tworzyw sztucznych na zmęczenie metodą trwałości wymaga stosowania odpowiednio dużej liczby oznaczeń, uzasadnionej statystycznie i ekonomicznie. Liczebność próby, w zależności od strefy dokładności i wielkości rozrzutu jest dla polimerów z reguły znaczna. Ponieważ do badań strukturalnych wystarczą najczęściej trzy preparaty, a więc liczba ich jest znacznie mniejsza niż w badaniach zmęczeniowych, dlatego też zbadano wpływ populacji niskowytrzymałościowej, podstawowej i wysokowytrzymałościowej [3] w danej serii pomiarów na parametry strukturalne poliamidu, tj. krystaliczność, gęstość oraz poprzeczne wymiary krystalitów (tablica 3). Preparaty do badań wybrano z serii próbek zużonych, wykonanych w formie cieplej i stabilizowanych (seria 4 — tabl. 1 i rys. 4):

a) o najmniejszej liczbie cykli do złomu, populacja niskowytrzymałościowa — numer pomiaru 1, 2, 3;

Tablica 3. Wyniki pomiarów parametrów fizycznej mikrostruktury próbek zużonych, wykonanych w formie cieplej i stabilizowanych

Trwałość zmęczeniowa	Nr pomiaru	Liczba cykli do złomu N	Pomiar	X_m (%)	ρ (Mg/m ³)	X_v (%)	$\Delta_{(200)}$ (Å)	$\Delta_{(020)}$ (Å)
Minimalna (populacja niskowytrzymałościowa)	1	14 280	1	49,1	1,1458	45,6	44,9	43,1
	2	17 880	2	50,2	1,1458	45,6	42,8	41,1
	3	23 200	3	49,6	1,1458	45,6	47,3	41,1
	$\bar{N}_{1-3} = 18\ 450$		średnia	49,6	1,1458	45,6	45,0	41,8
Średnia (populacja podstawowa)	19	140 650	1	50,5	1,1445	44,3	49,9	41,1
	20	141 470	2	50,2	1,1449	44,8	47,3	41,1
	21	156 630	3	49,6	1,1449	44,8	49,9	45,3
	$\bar{N}_{19-21} = 146250$		średnia	50,1	1,1448	44,6	49,0	42,5
Maksymalna (populacja wysokowytrzymałościowa)	34	$1,2 \cdot 10^6 \text{ } \ominus$	1	51,4	1,1453	45,2	52,9	50,2
	35	$1,2 \cdot 10^6 \text{ } \ominus$	2	53,4	1,1457	45,6	56,1	50,2
	36	$1,2 \cdot 10^6 \text{ } \ominus$	3	51,9	1,1462	46,0	52,9	47,6
	$\bar{N}_{34-36} > 1,2 \cdot 10^6$		średnia	52,2	1,1457	45,6	53,9	49,3

b) o liczbie cykli do złomu zbliżonej do średniej arytmetycznej N , populacja podstawowa — numer pomiaru 19, 20, 21, oraz

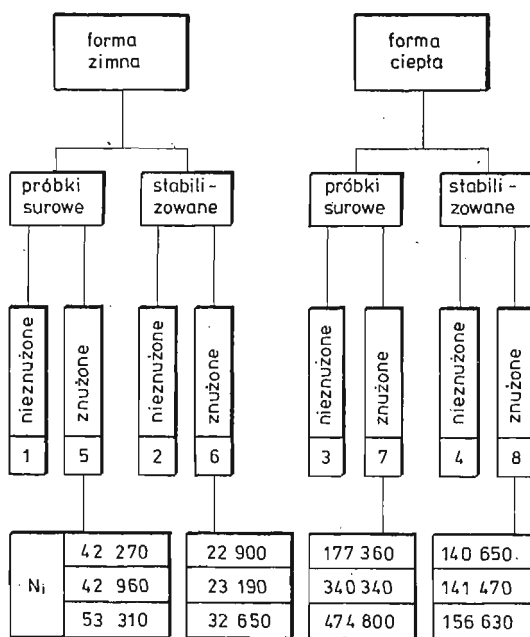
c) o największej liczbie cykli do złomu — populacja wysokowytrzymałościowa, numer pomiaru 34, 35 i 36.

Otrzymane wyniki badań zestawiono w tablicy 3. Wynika z nich, że masowy stopień krystaliczności X_m i gęstość ρ dla próbek z populacji nisko — i wysokowytrzymałościowej są prawie takie same jak dla populacji podstawowej (różnica $+4\%$ i -1%), natomiast wymiary poprzeczne krystalitów wykazują różnice rzędu -8% i $+16\%$ i nie można ich zatem uznać za jednakowe. A zatem wyboru preparatów do badań strukturalnych z serii o znacznej liczebności i rozrzucie należy dokonać w oparciu o populację reprezentatywną. W tym przypadku jest to seria o średniej trwałości zmęczeniowej (nr pomiaru 19, 20 i 21 — tablica 3).

5. Badania strukturalne

Zmiany strukturalne poliamidu spowodowane stanem cieplnym formy, stabilizacją termiczną oraz naprężeniem cyklicznym (rys. 4) scharakteryzowano za pomocą trzech wielkości:

- masowego i objętościowego stopnia krystaliczności X_m i X_v w %;
- poprzecznych wymiarów krystalitów $\Delta_{(200)}$ i $\Delta_{(020)}$ w Å;
- gęstości ρ w Mg/m^3 .



Rys. 4. Program badań strukturalnych i oznaczenie preparatów do badań z podaniem wartości poszczególnych spostrzeżeń N_i .

5.1. Stopień krystaliczności. Masowy stopień krystaliczności poliamidu określono metodą Hermansa i Weidingera [9] na preparatach cylindrycznych o średnicy \varnothing 1 mm i długości 5 mm, pobranych z kształtki na głębokości 1 mm, w odległości 10 mm od kołnierza próbki [1, 10] i wykonanych przez skrawanie. Analiza wieloboków częstości złomów wykazała [3], że odległość ta może być zachowana dla większości próbek zużytych, ponieważ średnia arytmetyczna miejsca typowych złomów zmęczeniowych wynosi $L_{TZ} = 6,2$ mm.

Zawartość fazy krystalicznej określono według wzoru:

$$(5.1) \quad X = \frac{100}{1 + \frac{h_{zr}}{kF_{zr}}} s$$

w którym: $k = 0,5$ mm/cm² stała równoważności; h_{zr} — zredukowana wysokość tła amorficznego, proporcjonalna do natężenia promieniowania rentgenowskiego rozproszonego na części bezpostaciowej; F_{zr} — zredukowana powierzchnia wykresu proporcjonalna do natężenia promieniowania rentgenowskiego ugiętego na obszarach krystalicznych.

Dla każdej serii pomiarów przeprowadzono trzy równoległe oznaczenia. Wartości pojedynczych spostrzeżeń zmierzone na rentgenogramie prostokątowym (F w cm²) oraz wielkości obliczone (X_m w %) są położone blisko średniej arytmetycznej. Dyspersja wyników pomiarów jest mała i świadczy o dobrej powtarzalności i reprodukowalności metody oraz badanych obiektów.

5.2. Średnia wielkość obszaru krystalicznego. Określono ją z poszerzenia prążka interferencyjnego, metodą Debye'a — Scherrera, stosując do obliczeń wzór Kochebdörfera-Dehlingera uproszczony przez Ruschera [9]:

$$(5.2) \quad \Delta I_{(hkl)} = \frac{R \cdot \lambda}{B_{h(hkl)} \cdot \cos \Theta_{(hkl)}}$$

w którym: $R = 114,7$ mm promień kasety rentgenowskiej; $\lambda = 1,53831$ długość fali użytego promieniowania; Θ — kąt odbłyску dla płaszczyzny (hkl) ; $B_{h(hkl)}$ — szerokość połówkowa prążka interferencyjnego.

Ponieważ preparaty nie wykazywały orientacji krystalitów, stosowano w badaniach preparat pełny, walcowy $\varnothing 1 \times 5$ mm, zamiast — jak tego wymaga metoda — sproszkowany.

Poprzeczne wymiary krystalitów są średnią arytmetyczną z trzech oznaczeń, bez korekcji, ponieważ niektóre szerokości połówkowe prążków interferencyjnych są mniejsze od 1,98 mm (wartość wymagana ze względu na korekcję grubości preparatu [3]).

Wprowadzając tzw. współczynnik równoległości makrocząsteczek jako stosunek szerokości od grubości krystalitu:

$$(5.3) \quad A = \frac{\Delta I_{(200)}}{\Delta I_{(020)}}$$

można ocenić stopień preferencji grubości nad jego szerokością. Współczynnik równoległości makrocząsteczek zmienia się od $A = 0,72$ dla serii próbek wykonanych w formie zimnej i surowych do $A = 1,03$ dla próbek wykonanych w formie ciepłej i stabilizowanych i wyraża układ sił międzycząsteczkowych typu Van der Waalsa oraz wodorowych. Otrzy-

mane wyniki pomiarów wskazują na większe znaczenie wiązań pobocznych typu Van der Waalsa w procesie dekohezji zmęczeniowej, określanej metodą trwałości na próbkach o krótkim czasie starzenia.

5.3. Oznaczanie gęstości – przeprowadzono metodą wypornościową w kolumnie gradientowej. Jako ciecz immersyjną zastosowano mieszaninę czterochloru węgla (CCl₄) i toluenu. Wartość średnią obliczono z trzech równoległych oznaczeń. Ponadto według wzoru:

$$(5.4) \quad X_m = \frac{d_{kr}(d_x - d_{am})}{d_x(d_{kr} - d_{am})}$$

określono stopień krystaliczności. W równaniu (5.4) oznaczają $d_{am} = 1,0973$ gęstość fazy bezpostaciowej; $d_{kr} = 1,2100$ gęstość fazy krystalicznej [2], d_x – gęstość badanej próbki. Po podstawieniu tych danych otrzymuje się:

$$(5.5) \quad X_m = \frac{1}{d_x}(9,46d_x - 10,4)$$

Zmiana gęstości o 0,01 Mg/m³ odpowiada zmianie stopnia krystaliczności o około 8 ÷ 10%

Tablica 4. Zestawienie wyników pomiarów stopnia krystaliczności, wielkości kryształitów i gęstości próbek dziewiczych i zużonych

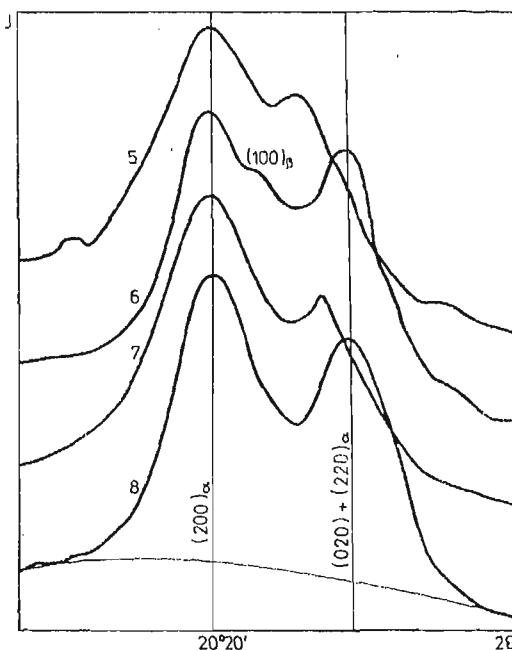
SERIA dziewicza			1	2	3	4			
STAN CIEPLNY FORMY			forma zimna		forma ciepła				
STAN CIEPLNY PRÓBKII			surowe	stabilizowane	surowe	stabilizowane			
Stan mechaniczny próbki:	DZIEWICZY	Parametry fizycznej mikrostruktury	1	\bar{X}_m (%)	41,8	46,8	43,3	48,7	
			2	\bar{X}_v (%)	38,6	43,6	39,4	43,6	
			3	$\bar{\rho}$ (Mg/m ³)	1,1381	1,1436	1,1389	1,1437	
			4	$\Delta_{(200)}$ (Å)	25,7	41,9	36,9	44,2	
			5	$\Delta_{(020)}$ (Å)	35,8	45,3	41,6	41,8	
		Liczby charakterystyczne	\bar{N} (cykle)	35 550	25 660	349 700	194 210		
			S (cykle)	18 980	20 500	366 800	193 040		
			ν (%)	53	80	105	99		
		ZNUŻONY	Parametry fizycznej mikrostruktury	1	\bar{X}_m (%)	39,5	50,9	42,1	50,1
				2	\bar{X}_v (%)	36,7	45,3	38,4	44,6
	3			$\bar{\rho}$ (Mg/m ³)	1,1360	1,1455	1,1377	1,1448	
	4			$\Delta_{(200)}$ (Å)	29,3	38,6	31,7	49,0	
	5			$\Delta_{(020)}$ (Å)	37,2	42,5	39,4	42,5	
	SERIA zużona			5	6	7	8		

Wyniki obliczeń stopnia krystaliczności w oparciu o pomiary gęstości i wzór (5.5) dobrze korespondują z wynikami oznaczeń metodą Hermansa i Weidingera.

Zbiornicze zestawienie wyników badań zmęczeniowych i strukturalnych zawiera tablica 4.

6. Analiza wykresów fotometrycznych

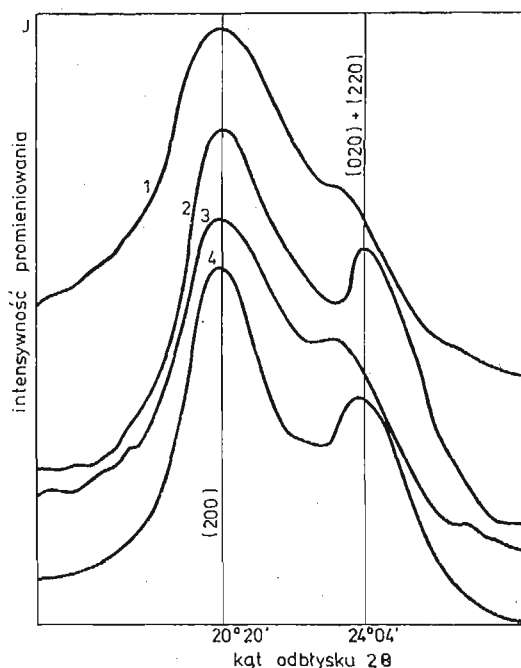
Typowe wykresy fotometryczne rentgenogramów Debye'a — Scherrera przedstawiono dla próbek dziewiczych (nieznużonych) na rysunku 5, a dla próbek znużonych na rysunku 6. Cechą charakterystyczną tych wykresów jest to, że wyraźnie oddzielenie się prążka



Rys. 5. Wykresy fotometryczne rentgenogramów Debye'a — Scherrera próbek dziewiczych (nieznużonych — oznaczenie wg rys. 4)

interferencyjnego płaszczyzny sieciowej (020) + (220) od prążka interferencyjnego płaszczyzny (200) jest dopiero widoczne po obróbce cieplnej, a nie jak można by przypuszczać już przez wtrysk tworzywa do formy ogrzewanej. Z wykresów fotometrycznych wynika dalej, że technologia wykonania próbek sprzyja krystalizacji poliamidu w układzie jednoskośnym (forma α). Tylko w jednym przypadku (rys. 6) widoczne są słabe ślady występowania dwóch układów w poliamidzie — układu jednoskośnego (forma α) i heksagonalnego (forma β). A więc wytworzenie w próbkach trwałego energetycznie układu jednoskośnego oraz dobrze wykształconej sieci przestrzennej następuje w wyniku dodatkowego zabiegu cieplnego — tj. stabilizacji termicznej w temperaturze, w której prędkość krystalizacji jest największa [8, 11]. Za taką — jak już nadmieniono — uważa się dla poliamidu temperaturę $453 \div 468$ K.

Przejście formy β w α ułatwiają i przyspieszają ślady wody i kaprolaktamu [12] oraz naprężenie σ_{max} , czas jego działania wyrażony liczbą cykli N oraz temperatura samowzbudna.



Rys. 6. Wykresy fotometryczne rentgenogramów Debye'a — Scherrer'a próbek zużytych

Układ heksagonalny jest typową formą stanu przechłodzonego i termodynamicznie nierównowagowego. W oparciu o tę zasadę Riddel, Koo i O'Tode [13] przeprowadzili badania zmęczeniowe policzterofluoroetyleny (tablica 5) o różnym stopniu krystaliczności. Trzy typy próbek — o dużej, średniej i małej krystaliczności otrzymano przez różną prędkość chłodzenia. Uzyskane rezultaty potwierdzają pogląd, że wzrost stopnia krystaliczności powoduje zmniejszenie tarcia wewnętrznego polimeru, wzrost sztywności oraz wzrost wytrzymałości Z_G .

Tablica 5. Wpływ krystaliczności na wytrzymałość zmęczeniową policzterofluoroetyleny [13]

Lp.	Prędkość chłodzenia preparatów	Stopień krystaliczności	Z_G (MPa)	Przyrost ΔZ_G w %
1	Chłodzenie wolne	duży	6,29	0
2	Chłodzenie szybkie	średni	6,10	-3
3	Chłodzenie powietrzem	mały	5,63	-10,5

Nazwa tworzywa: TFE-Halon; maszyna „Sonntag”, model SF-2U o stałej sile wymuszającej ugięcie próbki wspornikowej; $N_0 = 10^7$; $f = 30$ Hz

Na ścisły związek krystaliczności poliamidu z prędkością chłodzenia wskazują wyniki badań przeprowadzonych na preparatach pobranych z różnej głębokości próbki [10]. Warstwy zewnętrzne, które są szybciej chłodzone przez formę nieogrzewaną zawierają około 40%, wewnętrzne — chłodzenie wolniej — około 50% fazy uporządkowanej.

W procesie zmęczenia przy stałym naprężeniu $\sigma_{\max} = 24, 22$ MPa próbek o różnej historii cieplnej zachodzi zjawisko rozdzielania się prążków interferencyjnych, podobnie jak w trakcie obróbki cieplnej. Mogą więc na to wpływać — zmiana modułu i kierunku naprężenia oraz temperatura samowzbudna.

W prognozowaniu trwałości zmęczeniowej nie wystarczy tylko analiza wykresów fotometrycznych. Niezbędne są tu jeszcze dodatkowe badania, na przykład takie, jak oznaczenie ciężaru cząsteczkowego, stopnia polimeryzacji, badania elektronomikroskopowe [14, 15] itp.

Uwzględniając rolę polimorfizmu krystalograficznego (rys. 6) należy podkreślić, że zmniejszała on szerokość prążków interferencyjnych i obliczone wymiary poprzeczne krystalitów, a przede wszystkim grubość, obarczone są nieokreślonym bliżej błędem.

7. Wnioski

Ogrzewanie formy w procesie przetwórstwa poliamidu jest zabiegiem koniecznym przede wszystkim ze względu na zapewnienie łatwego wyjmowania kształtki z formy oraz związanego z tym zachowania jej kształtu. Zalety i korzyści wtórne, które wynikają z przedstawionych wyników badań zmęczeniowych i strukturalnych oraz ich analizy są następujące.

1. Trwałość zmęczeniowa próbek, wykonanych przez wtrysk tworzywa do formy ciepłej, jest wyższa od trwałości próbek przygotowanych według innej technologii.

2. Stabilizacja próbek z małą zawartością wilgoci i nieuspokojonych nie podwyższa ich trwałości zmęczeniowej lecz tylko może zmniejszać dyspersję wyników pomiaru.

3. Ze względu na zawartość fazy krystalicznej i wielkość krystalitów ogrzewanie formy poprawia, ale jeszcze nie zapewnia optymalnych warunków do krystalizacji. Stwarza je dopiero obróbka cieplna w oleju.

4. Odporność na dekohezję zmęczeniową próbek z poliamidu nie zależy w linii prostej od zawartości fazy krystalicznej. Działa tu zespół czynników związanych m.in. z historią próbki.

5. Wymiary poprzeczne krystalitów są największe dla próbek stabilizowanych, wykonanych w formie zimnej, jednak nie odbiegają one wyraźnie od wymiarów dla pozostałych serii.

6. W procesie dekohezji zmęczeniowej Ternamidu T-27 (będącego w trakcie badań w stanie intensywnego naturalnego starzenia) obserwuje się wzrost stopnia krystaliczności w próbkach stabilizowanych oraz spadek w próbkach surowych wykonanych zarówno w formie zimnej, jak i ciepłej. Zjawisko takie może mieć związek ze zmniejszeniem liczby przypadkowych wiązań i poziomu naprężeń wewnętrznych wskutek stabilizacji. Ich istnienie w próbkach surowych może działać hamująco na proces rekrytalizacji, zachodzący pod wpływem zmiennego pola naprężeń i temperatury samowzbudnej.

7. W wyniku takich zabiegów jak obróbka termiczna i podgrzewanie formy oraz w wyniku obciążeń zmiennych zachodzą wyraźne zmiany w strukturze submikroskopowej poliamidu (Tarnamidu T-27).

Literatura cytowana w tekście

1. Zakładowa Norma: ZN-64-MPCh/Sch-223. Tworzywa poliamidowe. Tarnamid T-27.
2. A. MÜLLER, R. PFLÜGER, *Eigenschaften, chemischer Aufbau und Kristallinität von Polyamidkunststoffen*, Kunststoffe, Heft 4, Bd. 50 (1960), s. 203.
3. M. NOWAK, *Wybrane zagadnienia wytrzymałości zmęczeniowej poliamidu stabilizowanego*, Prace Nauk. Inst. Materiałoznawstwa i Mech. Techn. Pol. Wrocławskiej Nr 11, Seria 3 (1972).
4. M. NOWAK, *Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu stabilizowanego w wodzie i w powietrzu*, Prace Nauk. Inst. Materiałoznawstwa i Mech. Techn. Pol. Wrocławskiej Nr 1, seria 1 (1969), s. 5.
5. M. NOWAK, *Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu stabilizowanego w oleju*, IV Symposium poświęcony reologii, Tom. I, PTMTS Wrocław 1969, s. 109.
6. M. NOWAK, *Badanie efektów starzenia i obróbki poliamidu 6 na bazie wytrzymałości zmęczeniowej*, Inst. Materiałoznawstwa i Mech. Techn. Pol. Wrocławskiej, Raport Nr 7, Wrocław 1973.
7. В. Я. СЕНИК, *Статистическая обработка результатов усталостных испытаний при органической базе*, Заводская Лаборатория, № 3, 33 (1967), с. 336.
8. М. И. ГАРБАРА, М. С. АКУТИНА, Н. М. ЕГОРОВА, *Справочник по пластическим массам*, Изд. „Химия” 1967, с. 241.
9. G. W. URBAŃCZYK, *Fizyka włókna, molekularna i nadmolekularna struktura włókna*, WNT Warszawa 1970.
10. A. WŁOCHOWICZ, M. NOWAK, *Badanie struktury submikroskopowej poliamidu znużonego*, Zesz. Nauk. Pol. Łódzkiej Nr 132, Włókiennictwo z. 22 (1971), s. 107.
11. W. ALBRECHT, S. CHRZCZONOWICZ, W. CZTERNASTEK, M. WŁODARCZYK, A. ZIABICKI, *Poliamidy*, WNT Warszawa 1964.
12. A. ZIABICKI, *Über die mesomorphe β — Form von Polycaproamid und ihre Umwandlung in die kristalline Form α* , Kolloid — Zeitschrift, H. 2, Bd. 167 (1959), s. 132.
13. M. N. RIDDEL, G. P. KOO, J. L. O'TOOLE, *Fatigue Mechanisms of Thermoplastics*, Polymer Eng. Sci., No. 4, 6 (1966), s. 363.
14. A. WŁOCHOWICZ, Z. KUBACKI, *Przyczynek do mechanizmu zniszczenia zmęczeniowego żyłek poliamidowych*, Mech. Teor. i Stos., 2, 9 (1971), s. 285.
15. A. WŁOCHOWICZ, *Zmiany fizycznej mikrostruktury włókna poliamidowego wywołane dokohezją zmęczeniową w miejscu zerwania*, Zesz. Nauk. Pol. Łódzkiej, Włókiennictwo z. 19, 1969.

Резюме

АНАЛИЗ ИЗМЕНЕНИЙ УСТАЛОСТИ И МИКРОСТРУКТУРЫ ПОЛИАМИДА В ФУНКЦИИ ТЕРМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ФОРМЫ И ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

В работе представлен анализ влияния температуры поверхности формы и термической обработки неуспокоенных образцов на усталостную прочность и физическую микроструктуру полиамида 6 (Тарнамида Т-27). Мерой процессов, происходящих в образцах, вызванных действием названных факторов, приняты количество циклов до излома образца (нагруженного консольно постоянным начальным напряжением $\sigma_0 = \text{конст}$), а также три структурных параметра — степень кристалличности, поперечные размеры кристаллитов и плотность.

Для статических расчётов результатов усталостных исследований был применён метод с ограниченной базой, а для определения значений структурных параметров — рентгенографический

метод (определение X , $A_{(200)}$ и $A_{(020)}$) и метод взвешивания (определение ρ). Кроме того, были определены принципы подбора препаратов для рентгенографических исследований из усталостных образцов со значительным разбросом устойчивости.

Проведен был анализ фотометрических диаграмм рентгенограмм Дебая-Шерера.

Установлено, что нагревание поверхности формы в процессе переработки полиамида является необходимым приёмом не только ввиду сохранения постоянной формы образца, но и желательным в связи с увеличением механической надёжности образцов — измеряемой усталостной устойчивостью.

Summary

ANALYSIS OF CHANGES IN FATIGUE LIFE AND PHYSICAL MICROSTRUCTURE OF POLYAMID AS A FUNCTION OF THERMAL CONDITIONS OF MOULD AND THERMAL TREATMENT

Experimental and physical analysis of influence of surface mould temperature and thermal treatment of unstabilised specimens on fatigue strength and physical microstructure of polyamid 6 (Tarnamid T-27) is presented.

The number of cycles to failure of specimen and three structural parameters (namely, degree of crystallinity, cross dimensions of crystallites and density) were taken as a measure of processes occurring in a specimen.

The method of limited base was employed in statistical calculations. In determining structural parameters the method of X-ray radiography and the method of displacement were used.

The principles of choice of preparations for X-ray measurements from the specimens showing large dispersion of fatigue life were specified.

Photometric diagrams of Debye-Scherrer X-ray photographs were analysed.

It was found that heating of the mould surface is not only indispensable manipulation in moulding process of polyamid to preserve its dimension stability but is also desired to improve the fatigue properties.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA
INSTYTUT MATERIAŁOZNAWSTWA I MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKA ŁÓDZKA, FILIA W BIELSKU-BIAŁEJ
INSTYTUT WŁÓKIENNICZY

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lipca 1978 r.

TEORETYCZNA I EKSPERYMENTALNA ANALIZA WZROSTU SZCELIN ZMĘCZENIOWYCH
W OBECNOŚCI SPAWALNICZYCH NAPRĘŻEN WŁASNYCH

GRZEGORZ G L I N K A (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jednym z częściej występujących typów uszkodzeń maszyn i konstrukcji stalowych są pęknięcia zmęczeniowe. Powstają one zwykle w miejscach wysokiej koncentracji naprężeń rozciągających, spowodowanej istnieniem karbów lub naprężeń własnych. Szczególnie często tego typu pęknięcia występują w konstrukcjach spawanych. Spawanie pozostawia po sobie rozciągające i ściskające naprężenia własne oraz zewnętrzne i wewnętrzne karby w postaci nadlewów oraz szczelino-podobnych wad spawalniczych. Są one potencjalnymi inicjatorami pęknięć zmęczeniowych, których sukcesywny wzrost prowadzi do zniszczenia zmęczeniowego lub kruchego [1].

Trwałość i nośność takich konstrukcji zależy więc od tego czy istniejące szczelino-podobne defekty będą rozrastać się i jak szybko. Jest to zagadnienie szczególnie ważne w przypadku niskostopowych stali o podwyższonych i wysokich wytrzymałościach, które są bardzo wrażliwe na działanie karbów. Są one szeroko stosowane na konstrukcje spawane i problem wzrostu szczelin zmęczeniowych staje się w takich przypadkach jednym z podstawowych zagadnień wytrzymałościowych. Okres wzrostu szczelin zmęczeniowych stanowi w takich konstrukcjach 50 - 100% ich całkowitej trwałości [2]. Znajomość czynników wpływających na wzrost szczelin zmęczeniowych stanowi więc istotny problem. Jednym z nich są naprężenia własne.

Najczęściej stosowanym narzędziem w analizie szczelin jest współczynnik intensywności naprężeń $K = \delta \cdot f(a)$ będący podstawowym parametrem mechaniki pęknięcia [3, 4]. P. C. PARIS [5] wykazał, że współczynnik intensywności stosowany wcześniej tylko do analizy pęknięć kruchych, nadaje się także do opisu wzrostu szczeliny zmęczeniowych. Prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej pod obciążeniem o stałej amplitudzie σ_a i stałym współczynniku asymetrii cyklu R można bowiem opisać wzorem:

$$(1) \quad \frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n,$$

gdzie: $\frac{da}{dN}$ — prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej,

a — długość lub połowa długości szczeliny zmęczeniowej.

N — liczba cykli obciążenia zmiennego

C, n — stałe.

Aktualnie istnieje wiele innych wzorów na prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych [7], które uwzględniają dodatkowe parametry jak np. współczynnik asymetrii cyklu R , odporność na pękanie K_c lub inne. Jednym z częściej stosowanych jest zmodyfikowany wzór Parisa (1) zaproponowany przez FORMANA i współpracowników [8].

$$(2) \quad \frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^n}{(1-R)K_c - \Delta K}$$

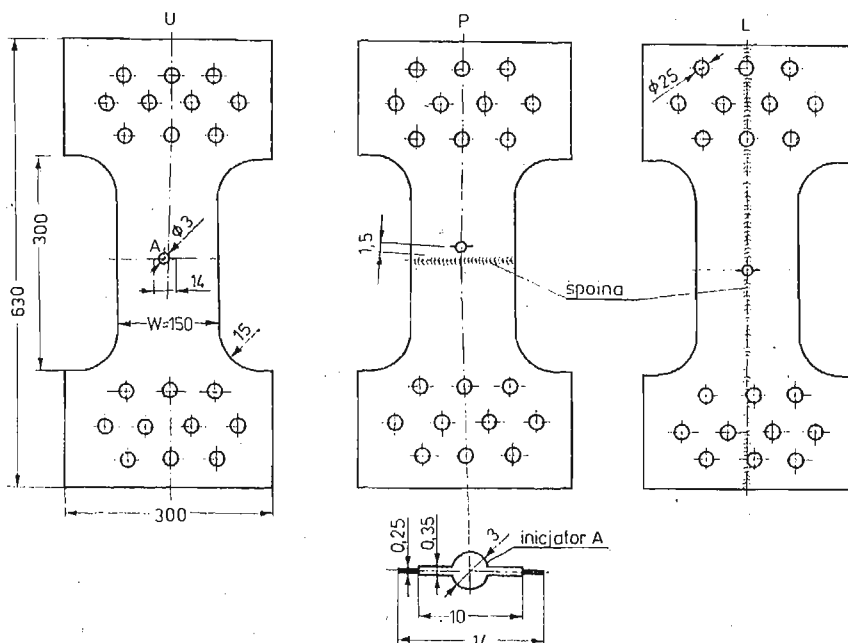
gdzie: K_c — odporność na pękanie

$$R = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} \text{ — współczynnik asymetrii cyklu.}$$

Znajomość stałych C , n i K_c dla rozważanego materiału umożliwia obliczanie prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych oraz trwałości dla dowolnych kształtów geometrycznych elementów, szczelin i typów obciążeń. Stałe C , n i K_c należy jednak wyznaczyć eksperymentalnie.

2. Materiał, próbki i opis eksperymentów

Próbki (rys. 1) wykonano z jednego arkusza blachy normalizowanej 18G2AV o grubości 4 mm. Jest to jedna z częściej stosowanych na konstrukcje spawane stali niskoprotentowych. Granica plastyczności i wytrzymałość na rozciąganie zmierzone na próbkach wyciętych z tego samego arkusza blachy wynosiły: $R_e = 625$ MPa, $R_m = 784$ MPa. Wszystkie próbki wycięto równoległe do kierunku walcowania. W celu uzyskania możliwie jedna-



Rys. 1. Kształt i wymiary próbek

kowych rozkładów naprężeń własnych, próbki spawano po uprzednim całkowitym ukształtowaniu poszczególnych elementów.

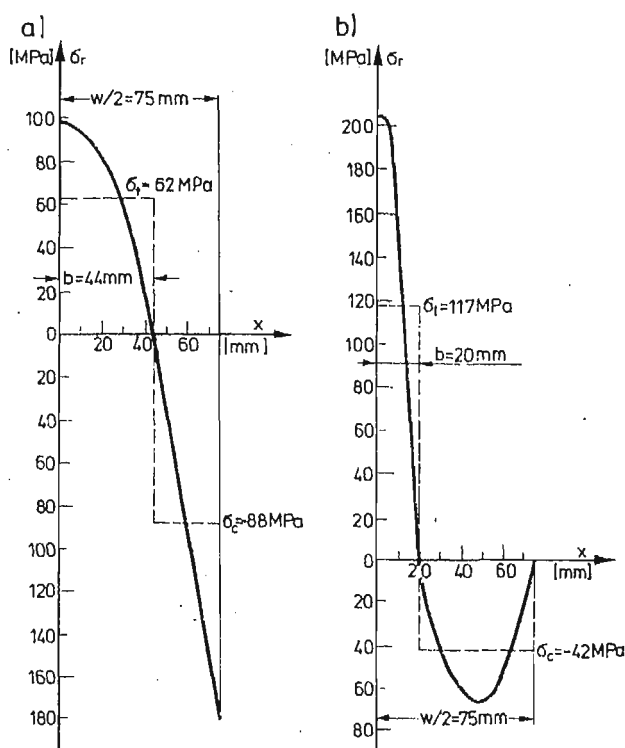
Spawanie było ostatnią operacją przygotowywania próbek.

Badano trzy rodzaje próbek:

- próbki niespawane U,
- próbki z czołową spoiną poprzeczną P,
- próbki z czołową spoiną wzdłużną L.

Próbki spawano ręcznie elektrodą EB-150 z prędkością $v_p = 12$ cm/min przy natężeniu prądu $I = 90$ A. Przed rozpoczęciem badań w każdej próbce wycinano inicjator przyspieszający inicjację szczeliny zmęczeniowej. Jego kształt i wymiary również przedstawiono na rys. 1.

Badania przeprowadzono na maszynie zmęczeniowej typu dźwigniowego z mechanicznym wymuszaniem obciążenia [9]. Długość szczeliny zmęczeniowej mierzono przy



Rys. 2. Rozkłady naprężeń własnych

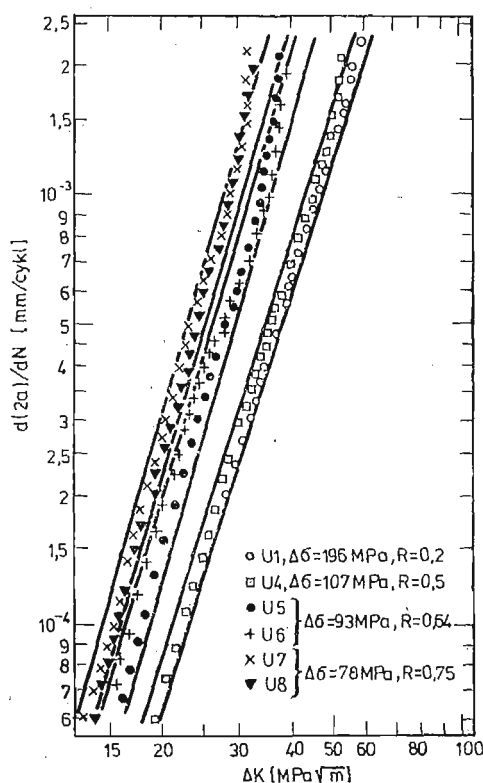
pomocy mikroskopu o powiększeniu $50\times$. Liczbę cykli zmian obciążenia rejestrowano za pomocą elektronowego licznika impulsów sprzężonego z fotodiodą.

Eksperyment polegał na notowaniu długości rosnącej szczeliny zmęczeniowej $2a$ i odpowiadającej tej długości liczby cykli obciążenia N . Obliczanie prędkości wzrostu szczeliny zmęczeniowej wykonywano według metody opisanej w pracach [10, 11]. Do obliczania współczynników intensywności naprężeń wykorzystywano wzór BROWNA [6].

Na podstawie losowo wybranych dwóch próbek typu P i dwóch próbek typu L wyznaczono rozkłady naprężeń własnych σ_r , przedstawione na rys. 2. Potrzebne w tym celu odkształcenia zmierzono metodą trepanacji za pomocą tensometrów oporowych [9].

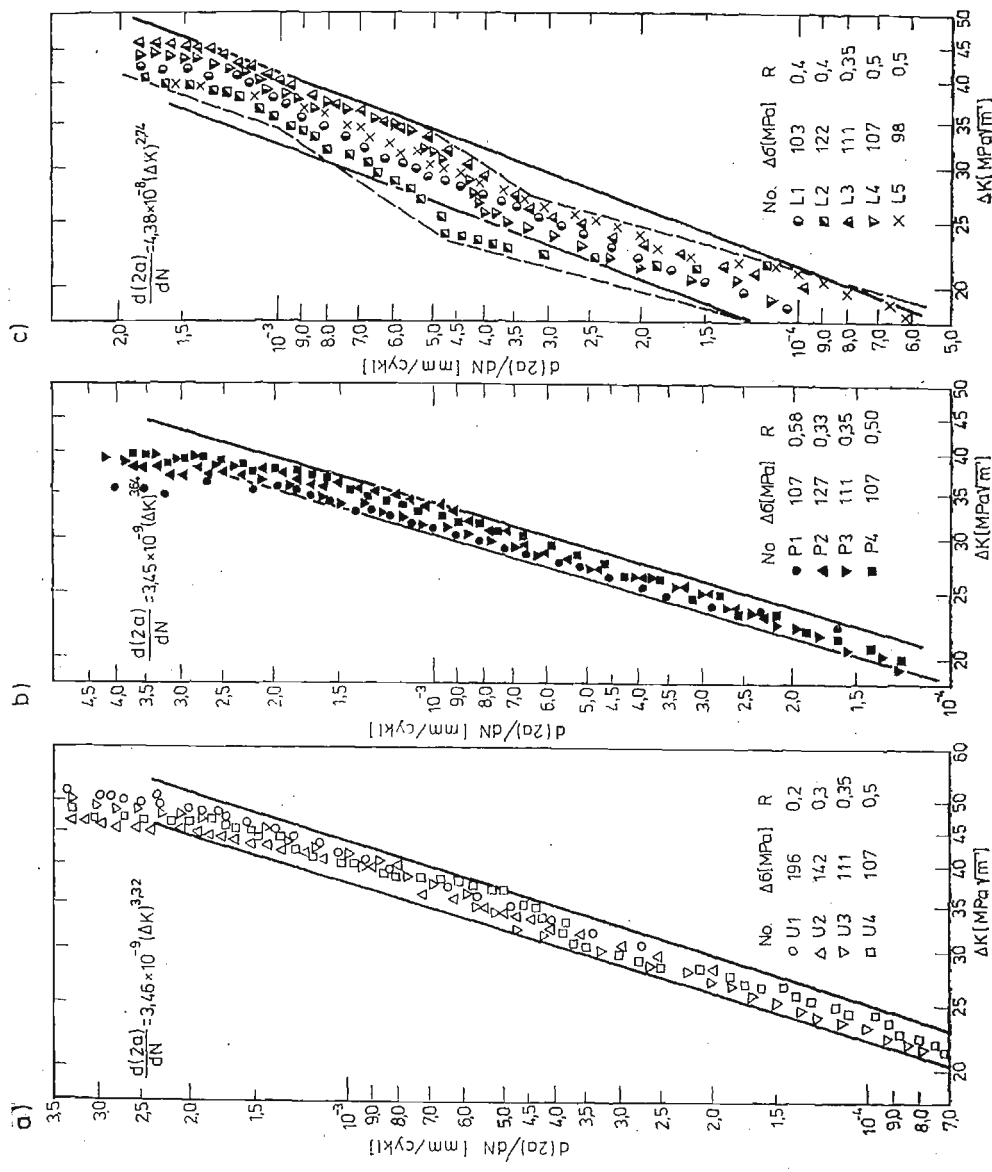
3. Prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych przy stałych amplitudach obciążenia

Wyniki badań przedstawiono w postaci wykresów $\log \frac{d(2a)}{dN} = f(\log(\Delta K))$ widocznych na rys. 3 i rys. 4 jako pasma rozrzutu wyników eksperymentalnych. Szerokość pasm rozrzutu wyznaczono dla prawdopodobieństwa $p = 95\%$. Badania próbek niespawanych U prowadzono przy różnych współczynnikach asymetrii cyklu $R = 0,2 \div 0,75$. Widocznym



Rys. 3. Wpływ współczynnika asymetrii cyklu R na prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych w materiale rodzimym

jest (rys. 3), że prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych w stali 18G2AV rośnie wraz ze wzrostem współczynnika asymetrii cyklu R . Wpływ ten jest większy przy wyższych wartościach R . Natomiast niewielki wpływ R zanotowano przy zmianach w zakresie $R = 0,2 \div 0,45$ (rys. 4a), szczególnie jeśli zmianom R nie towarzyszyły duże zmiany naprężenia średniego σ_m .



Rys. 4. Pasma rozrzutu wyników eksperymentalnych uzyskanych z badania próbek: a) niespawanych U, b) ze spoiną poprzeczną P, c) ze spoiną wzdłużną L.

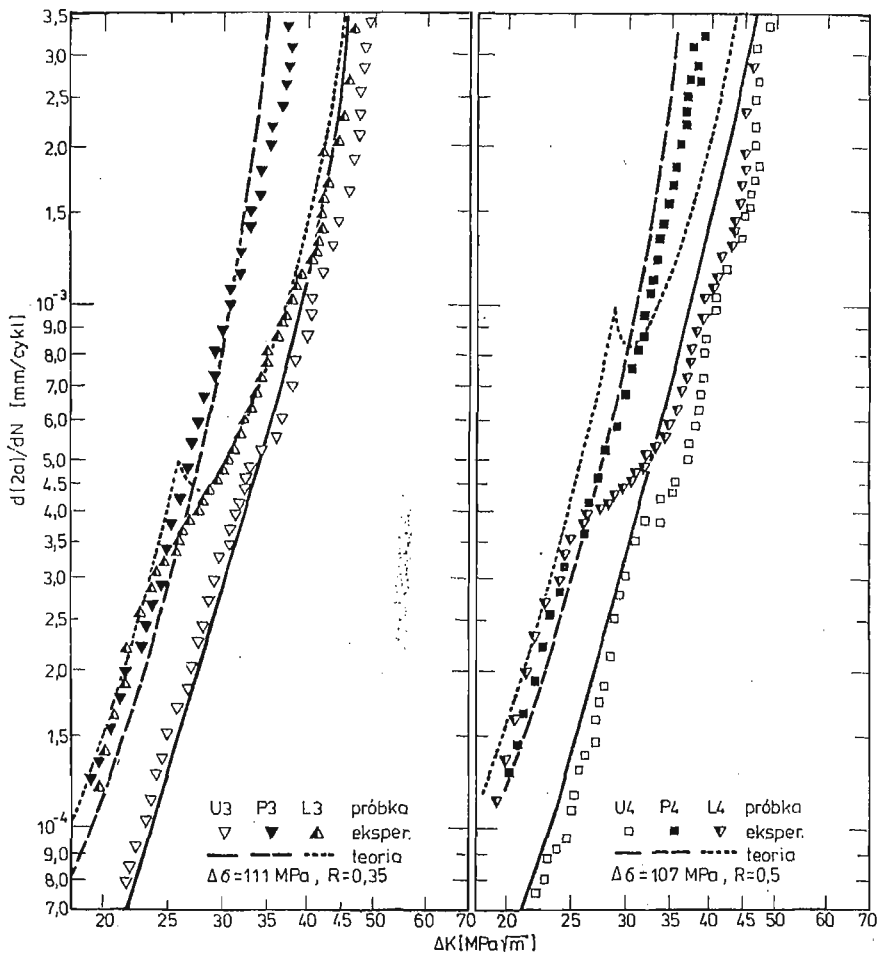
W każdym przypadku zależność $\frac{d(2a)}{dN} = f(\Delta K)$ dobrze opisywał wzór (1), gdyż przedstawione w podwójnie logarytmicznej podziałce wyniki badań układały się wzdłuż linii prostych. Najmniejszy współczynnik korelacji liniowej tak przedstawionych wyników badań wynosił $r = 0,98$. Oczywiście zależnie od wartości współczynnika asymetrii cyklu R zmieniały się wartości stałych C i n . Z tego względu do dalszej analizy zastosowano wzór Formana (1), którego stałe wyznaczone na podstawie wyników uzyskanych z próbek niespawanych U1 ÷ U8 wynoszą odpowiednio: $C = 1,69 \cdot 10^{-6}$, $n = 2,54$, $K_c = 108,5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Stałe wyznaczone dla prawdopodobieństwa $p = 50\%$. Sposób wyznaczania tych stałych opisano w pracach [9, 11].

Rezultaty badania prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych w próbkach spawanych P i L przedstawiono na rys. 4b i rys. 4c. Badania przeprowadzono przy współczynnikach asymetrii cyklu $R = 0,2 \div 0,5$, czyli w takich samych warunkach jak próbki niespawane U1 ÷ U4, z których uzyskano pasmo widoczne na rys. 4a. Na podstawie uzyskanych wyników badań wyznaczono szerokości pasm rozrzutów i stałe C i n występujące we wzorze Parisa (1) dla wszystkich trzech typów próbek (rys. 4). Niewielkie różnice pomiędzy tymi stałymi uzyskano tylko w przypadku próbek U i P. Wynoszą one $C = 3,46 \cdot 10^{-9}$ i $n = 3,32$ dla próbek U oraz $C = 3,45 \cdot 10^{-9}$ i $n = 3,64$ dla próbek P. Także prawie jednokowy był rozrzut wyników o czym świadczą szerokości pasm rozrzutu na rys. 4a i rys. 4b. Istotne różnice zanotowano natomiast w przypadku próbek spawanych ze spoinami wzdłużnymi (L). Zarówno bowiem stałe $C = 4,38 \cdot 10^{-8}$ i $n = 2,74$ jak i szerokość pasma rozrzutu odbiegają od wyników jakie otrzymano w przypadku próbek U i P. Także rezultaty badań uzyskane z poszczególnych próbek (rys. 4c) nie układały się wzdłuż prostych lecz tworzyły linie łamane. Charakterystycznym było to, że wspomniane załamania zawsze występowały wtedy gdy szczelina zmęczeniowa osiągnęła długość $2a = 35 \div 40 \text{ mm}$ a więc w momencie gdy wierzchołek szczeliny wychodził ze strefy rozciągających naprężeń własnych (rys. 2b). Było to także przyczyną większego rozrzutu i innego pochylenia całego pasma.

Przedstawione rys. 4 pasma rozrzutu uzyskano przy takich samych obciążeniach tzn. przy współczynnikach asymetrii cyklu $R = 0,2 \div 0,5$ i naprężeniach średnich $\sigma_m = 115 \div 160 \text{ MPa}$. Widocznym jest, że prędkości $\frac{d(2a)}{dN}$ różne są zależnie od typu próbki. Najszybciej na ogół szczeliny zmęczeniowe rosły w próbkach typu P natomiast najwolniej w próbkach niespawanych U. Pasma P jest przy tym prawie równoległe do pasma uzyskanego z próbek U. Podobny efekt uzyskano w próbkach niespawanych gdy podwyższono współczynnik asymetrii cyklu R (rys. 3). W przypadku próbek L wyraźny wpływ na prędkość $\frac{d(2a)}{dN}$ miała długość szczeliny. Dla szczelin o długościach $2a \leq 40 \text{ mm}$ prędkość wzrostu szczelin była zwykle wyższa od prędkości jaką w tych samych warunkach zanotowano w próbkach niespawanych U. Po przekroczeniu długości $2a \approx 40 \text{ mm}$ prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych gwałtownie zmniejszała się (rys. 4c) propagując później z taką samą prędkością jak w próbkach niespawanych. Należy zaznaczyć, że przez cały okres wzrostu szczelin zmęczeniowych w próbkach L ich wierzchołki znajdowały się poza strefą wpływu ciepła. Jediną przyczyną tak gwałtownych zmian prędkości wzrostu

szczelin zmęczeniowych w próbkach L (rys. 4c) mogły więc być tylko naprężenia własne. Stosunkowo wolny ich wzrost w przedziale $2a = 35 \div 65$ mm spowodowany był oddziaływaniem ściskających naprężeń własnych. Przy długościach $2a = 35 \div 40$ mm następowało bowiem wyjście szczelin ze strefy rozciągających naprężeń własnych i wejście w strefę naprężeń ściskających. Wzrost szczeliny zmęczeniowej powodował zmniejszanie oddziaływania naprężeń własnych wskutek wzajemnego znoszenia się wpływów naprężeń rozciągających i ściskających. Wskutek działania cyklicznie zmiennych obciążeń następuje także zanikanie naprężeń własnych [12]. Z tego względu prędkość wzrostu szczelin o długości $2a \geq 60$ mm była jednakowa w próbkach L i U.

W przypadku próbek P szczeliny zmęczeniowe ciągle znajdowały się w strefie wpływu ciepła. Jednak większa prędkość ich wzrostu w stosunku do próbek niespawanych U jest głównie spowodowana również działaniem naprężeń własnych. Zmiany strukturalne po-

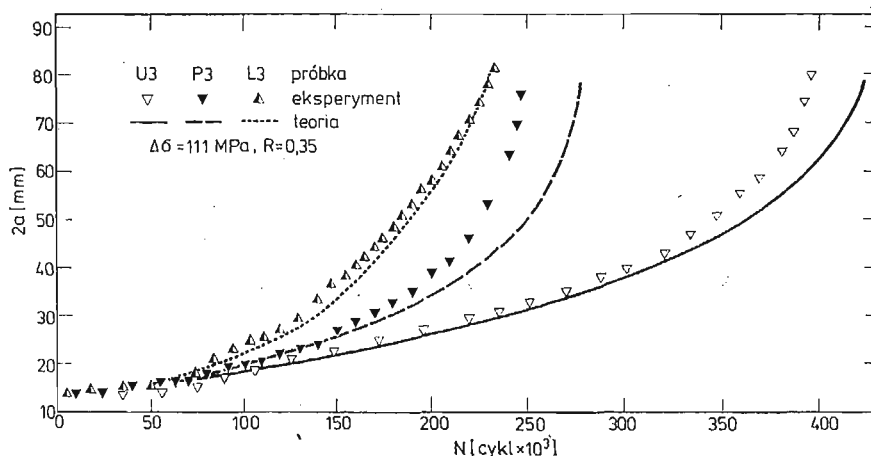


Rys. 5. Krzywe wzrostu szczelin zmęczeniowych $\frac{d(2a)}{d} = f(\Delta K)$ charakterystyczne dla różnych typów próbek

wstałe w strefie wpływu ciepła nie mogłyby bowiem spowodować tak dużych różnic [9, 13].

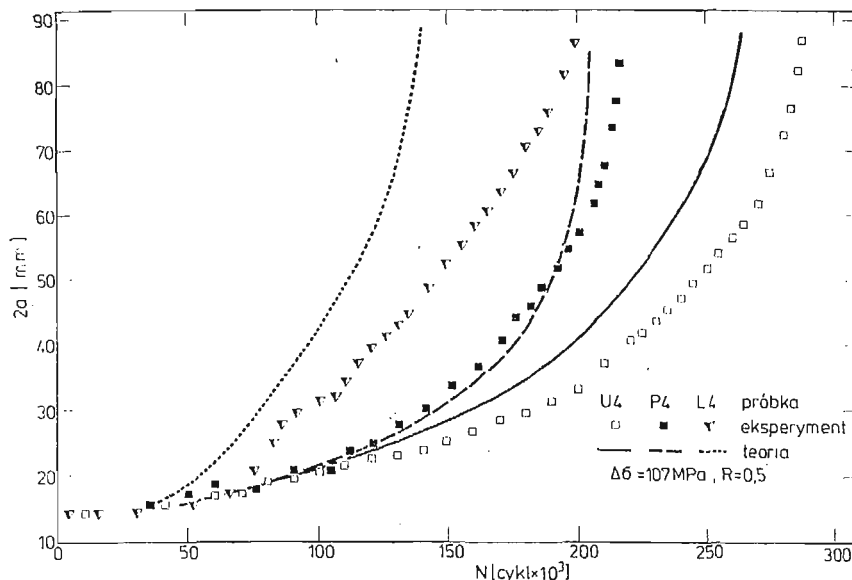
Opisane różnice pomiędzy prędkościami szczelin zmęczeniowych propagujących w różnych typach próbek wyraźnie widoczne są na rys. 5. Przedstawione wyniki badań dotyczą różnych typów próbek badanych przy identycznych obciążeniach. Widocznym jest, że przy małych wartościach $\Delta K < 25 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, czyli krótkich szczelinach ich prędkości w próbkach P i L są prawie jednakowe i kilkakrotnie wyższe od prędkości w próbkach niespawanych U. W przedziale $\Delta K = 25 \div 35 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ widoczny jest bardzo powolny wzrost prędkości w próbkach typu L. Natomiast przy zakresie współczynnika intensywności naprężeń $\Delta K > 35 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych w próbkach L i U są prawie jednakowe i kilkakrotnie niższe od prędkości w próbkach P. Brak załamania krzywych $\frac{d(2a)}{dN} = f(\Delta K)$ wyznaczonych dla próbek P wynika z tego, że próbki te ulegały całkowitemu zniszczeniu przed wyjściem szczeliny z szerokiej strefy rozciągających naprężeń własnych (rys. 2a) i przez cały okres propagacji znajdowały się tylko pod ich działaniem.

Podwyższenie prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych wskutek działania naprężeń własnych powoduje także skrócenie trwałości połączeń spawanych. Świadczą o tym rezultaty badań przedstawione na rys. 6 i rys. 7. Najkrótszymi trwałościami charakteryzo-



Rys. 6. Trwałości próbek U, P i L przy współczynniku asymetrii cyklu $R = 0,35$

wały się próbki L. Wynikało to stąd, że w przypadku próbek L występowały także najkrótsze okresy wzrostu szczelin zmęczeniowych natomiast okresy inicjacji w próbkach P i L były prawie jednakowe. W przypadku próbek L4, P4 i U4 okresy wzrostu szczelin zmęczeniowych od $2a = 16 \text{ mm}$ do $2a = 80 \text{ mm}$ wynosiły odpowiednio 185000 cykli, 202000 cykli i 245000 cykli natomiast okresy inicjacji 10000 cykli, 13000 cykli i 50000 cykli. Interesującym jest to, że trwałości próbek L były najkrótsze chociaż szczeliny o długości $2a > 40 \text{ mm}$ propagowały w nich z prawie taką samą prędkością jak w próbkach niespawanych U. O trwałości decyduje jednak początkowy okres wzrostu szczelin zmęczeni-



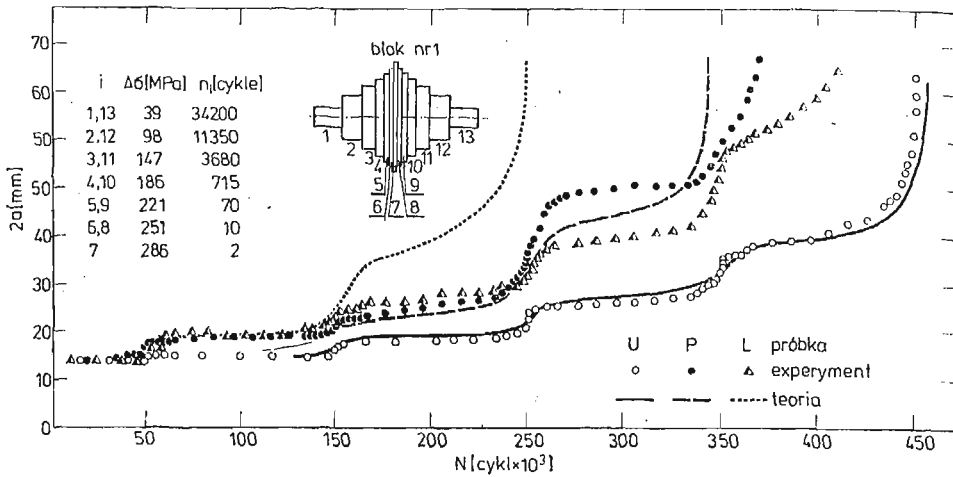
Rys. 7. Trwałości próbek U, P i L przy współczynniku asymetrii cyklu $R = 0,5$

niowych, gdy są one jeszcze krótkie. W przypadku próbek L prędkość wzrostu krótkich szczelin $2a < 40$ mm była najwyższa chociaż nieznacznie tylko różniła się od prędkości wzrostu analogicznych szczelin w próbkach P. Próbki L charakteryzowały się najkrótszymi trwałościami z tego względu, że najszybciej propagowały w nich krótkie szczeliny zmęczeniowe. Największe korzyści z punktu widzenia trwałości można więc osiągnąć wtedy, gdy zostanie maksymalnie zmniejszona prędkość szczelin zmęczeniowych w początkowym okresie gdy są one jeszcze małe.

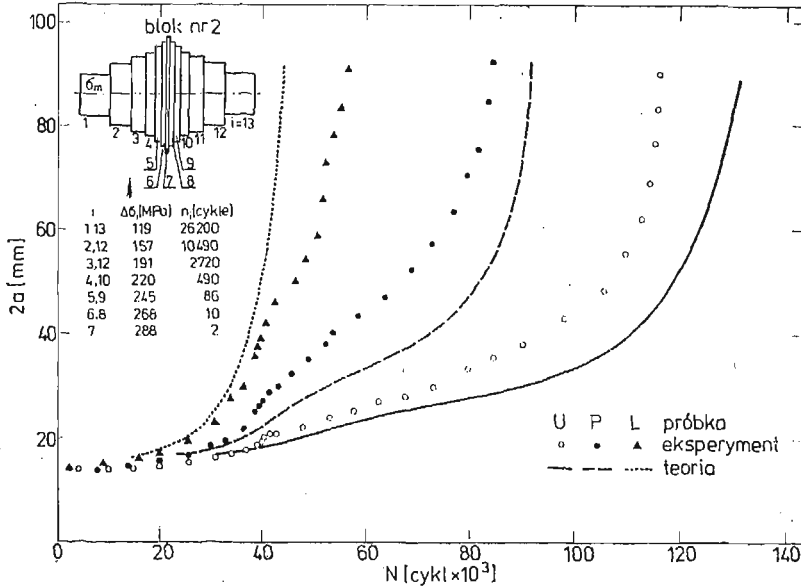
4. Wzrost szczelin zmęczeniowych przy zmiennych amplitudach obciążenia

W większości maszyn występują obciążenia o zmiennej amplitudzie. Jedną z metod często stosowaną w badaniach zmęczeniowych jest badanie trwałości zmęczeniowej przy obciążeniu zadawanym w postaci tzw. bloków Gassnera [14]. Przedstawione niżej wyniki badań dotyczą dwóch różnych bloków Gassnera (rys. 8 i rys. 9) reprezentatywnych dla obciążeń dźwignicowych. Szczegółowy opis tworzenia tych bloków podano w pracach [9, 14, 15]. Obydwa bloki naprężeń posiadały jednakowe i stałe naprężenia średnie σ_m i jednakowe amplitudy w stopniu nr 7. Blok naprężeń Nr 1 widoczny na rys. 8 posiadał natomiast mniejsze amplitudy na pozostałych stopniach i poszczególne jego stopnie były dłuższe (większe n_k) aniżeli odpowiadające im stopnie naprężeń w bloku Nr 2 widocznym na rys. 9.

Rezultaty badań uzyskane z próbek obciążanych według bloku Nr 1 przedstawiono rys. 8 w postaci zależności $2a = f(N)$. Obciążenie realizowano zaczynając od stopnia naprężenia nr 1. Badania wykazały, że pomimo jednakowych stopni naprężeń w obydwu połówkach bloku, powodowały one różne przyrosty szczelin zmęczeniowych. Otrzymano bowiem znacznie mniejsze przyrosty szczelin podczas realizacji drugiej połowy bloku



Rys. 8. Wzrost szczelin zmęczeniowych w próbkach U, P i L obciążonych według bloku naprężeń Nr 1.

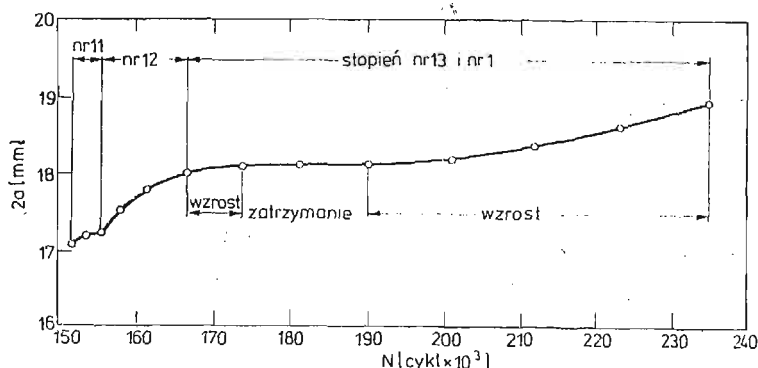


Rys. 9. Wzrost szczelin zmęczeniowych w próbkach U, P i L obciążonych według bloku naprężeń Nr 2

naprężeń, gdzie poszczególne amplitudy występowały w kolejności malejącej. Było to szczególnie wyraźne w przypadku próbek niespawanych U. Stopnie nr 2 i nr 3 bloku naprężeń powodowały ponad dwukrotnie większe przyrosty szczeliny zmęczeniowej aniżeli identyczne stopnie nr 11 i nr 12 realizowane w drugiej połowie bloku.

Po zmianie naprężenia ze stopnia nr 12 na stopień nr 13 następowało niekiedy nawet całkowite zatrzymanie szczeliny zmęczeniowej (rys. 10). Z powyższego wynika, że w przypadku obciążenia o zmiennych amplitudach ważną rolę odgrywa także kolejność występowania obciążeń. Znane jest bowiem zjawisko tzw. opóźniania się wzrostu szczelin zmęczeniowych [16], wskutek skokowego zmniejszenia naprężenia σ_{max} . Wyraża się ono tym,

że po skokowym zmniejszaniu σ_{\max} szczelina zmęczeniowa zatrzymuje się lub rośnie wolniej w stosunku do takiej samej szczeliny znajdującej się pod takim samym naprężeniem zmiennym realizowanym bez żadnych uprzednich zmian σ_{\max} . Podobne zjawiska zanotowano także w przypadku próbek L i P (rys. 8). Całkowita trwałość próbek spawanych była podobnie jak przy stałych amplitudach, krótsza od trwałości próbek niespawanych.



Rys. 10. Zwolnienie i zatrzymanie się szczeliny zmęczeniowej po zmianie stopnia naprężenia

Główną przyczyną były w tym przypadku znacznie krótsze okresy inicjacji szczelin zmęczeniowych w próbkach spawanych. Okresy wzrostu szczelin zmęczeniowych $2a = 16 \div 80$ mm we wszystkich trzech typach próbek były natomiast prawie jednakowe. Świadczy to o tym, że największy wpływ naprężenia własne mają na początkowy okres wzrostu szczelin zmęczeniowych.

Inne rezultaty otrzymano natomiast w przypadku próbek obciążanych według bloku naprężeń nr 2. Krótsze były (rys. 9) trwałości tych próbek i wyraźniejszy wpływ naprężeń własnych na okres wzrostu szczelin zmęczeniowych. Okresy wzrostu szczelin zmęczeniowych w próbkach P i L były bowiem krótsze niżeli w próbkach niespawanych U. Decydującym w tym przypadku był także szybki wzrost szczelin w okresie początkowym. Wiadomo bowiem, że wysokie naprężenia zmienne powodują zanikanie naprężeń własnych i ich bieżąca wartość zależy od liczby cykli przyłożonego obciążenia [12]. Oddziaływanie naprężeń własnych na długość okresu wzrostu szczelin zmęczeniowych jest więc tym większe im krótszy jest okres ich inicjacji. Znacznie krótsza trwałość próbek badanych według bloku Nr 2 wynika także częściowo i z tego, że nie zanotowano w ich przypadku zjawiska opóźniania się szczelin zmęczeniowych. Zbyt małe były bowiem różnice pomiędzy poszczególnymi stopniami naprężeń. W takich przypadkach rozciągające naprężenia własne mogą spowodować kilkukrotne skrócenie trwałości zmęczeniowej (rys. 9).

5. Analiza teoretyczna

Jedną z głównych przyczyn badania wzrostu szczelin zmęczeniowych jest stworzenie podstaw do przewidywania trwałości zmęczeniowej. Taką możliwość stwarza znajomość wzorów na prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych. Stwierdzono, że w przypadku obciążeń o stałych amplitudach szeroko stosowanym wzorem jest wspomniany wyżej wzór:

Formana (2). Zgodnie z danymi zamieszczonymi w części 3 wzór ten w przypadku badanego materiału (tj. stali 18G2AV) przybierze postać:

$$(4) \quad \frac{d(2a)}{dN} = \frac{1,69 \cdot 10^{-6} (\Delta K)^{2,54}}{(1-R)350 - \Delta K}.$$

Obliczone na podstawie tego wzoru krzywe $\frac{d(2a)}{dN} = f(\Delta K)$ przedstawiono na rys. 5. Linia ciągłą oznaczono krzywe odpowiadające próbkom niespawanym, które obliczono bez uwzględniania naprężeń własnych. Widocznym jest, że wzór (4) dobrze opisuje prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych tylko w próbkach niespawanych.

Z tego względu koniecznym było wprowadzenie do wzoru (4) również naprężeń własnych. Zastosowano metodę superpozycji zakładając, że efektywny współczynnik intensywności naprężeń K_{ef} jest sumą współczynnika intensywności od obciążenia zewnętrznego $K = f(\sigma)$ i od naprężeń własnych $K_r = f(\sigma_r)$. Zgodnie z powyższym maksymalną i minimalną wartość efektywnego współczynnika intensywności naprężeń obliczano jako:

$$(5) \quad \begin{aligned} K_{\max,ef} &= K_{\max} + K_r, \\ K_{\min,ef} &= K_{\min} + K_r. \end{aligned}$$

Efektywny zakres współczynnika intensywności naprężeń ΔK_{ef} i efektywny współczynnik asymetrii cyklu obliczano natomiast ze wzorów (6) i (7).

$$(6) \quad \begin{aligned} \Delta K_{ef} &= K_{\max,ef} - K_{\min,ef} && \text{dla } K_{\min,ef} > 0, \\ \Delta K_{ef} &= K_{\max,ef} && \text{dla } K_{\min,ef} \leq 0. \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} R_{ef} &= \frac{K_{\min,ef}}{K_{\max,ef}} && \text{dla } K_{\min,ef} > 0, \\ R_{ef} &= 0 && \text{dla } K_{\min,ef} \leq 0. \end{aligned}$$

Wartości K_{\max} i K_{\min} obliczano według wzoru (3) natomiast wartość współczynnika intensywności naprężeń od naprężeń własnych według wzoru KANAZAWY [17].

$$(8) \quad K_r = \int_{-a}^{+a} \sigma_r(x) \left[\frac{2 \sin \frac{\pi(a+x)}{W}}{W \sin \frac{2\pi a}{W} \sin \frac{\pi(a-x)}{W}} \right]^{1/2} dx.$$

W celu uproszczenia obliczeń rzeczywiste rozkłady naprężeń własnych (rys. 3) zastąpiono równoważnymi rozkładami prostokątnymi. Wzór Formana wykorzystywany w obliczeniach przyjął ostatecznie postać:

$$(9) \quad \frac{d(2a)}{dN} = \frac{1,69 \cdot 10^{-6} (\Delta K_{ef})^n}{(1-R_{ef})K_c - \Delta K_{ef}}.$$

Przedstawione na rys. 6 krzywe teoretyczne wskazują, że uwzględnienie naprężeń własnych wyraźnie poprawia dokładność przewidywań teoretycznych w przypadku próbek P i L. Odtworzone zostały nawet zmiany prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych powstające po wejściu w strefę naprężeń własnych ściskających. Nieciągłości krzywych teoretycznych $\frac{d(2a)}{dN} = f(\Delta K)$, jakie otrzymano w przypadku próbek L3 i L4 wynika

(rys. 5) z przyjęcia w obliczeniach uproszczonego prostokątnego rozkładu naprężeń własnych. Także w końcowym etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych prędkości obliczone ze wzoru (9) są wyższe aniżeli rzeczywiste prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych w próbkach spawanych. Spowodowane jest to prawdopodobnie tym, że w obliczeniach przyjęto stałe naprężenia własne, tymczasem obciążenia cyklicznie zmienne powodują zanikanie naprężeń własnych.

Wzór (9) umożliwia także obliczanie trwałości na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych. Polega ono na całkowaniu tegoż wzoru w granicach $2a_0$ i $2a_k$, którymi są początkowa i dopuszczalna długość szczeliny. Należy jednak pamiętać, że całkowita trwałość N_c jest sumą okresu inicjacji N_i i wzrostu szczeliny zmęczeniowej N_p

$$(10) \quad N_c = N_i + N_p$$

W wielu przypadkach, szczególnie w elementach spawanych okres inicjacji jest krótki i wtedy

$$(11) \quad N_c \approx N_p$$

Przy stałych parametrach obciążenia $\sigma_{\max} = \text{const}$ i $\sigma_{\min} = \text{const}$ trwałość oblicza się więc ze wzoru:

$$(11) \quad N_c = N_i + \int_{2a_0}^{2a_k} \frac{(1-R)K_c - \Delta K}{G \cdot (\Delta K)^n} da$$

Jeżeli zakres współczynnika intensywności naprężeń można opisać wyrażeniem (12)

$$(12) \quad \Delta K = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})\sqrt{a}Y = \Delta\sigma\sqrt{a}Y, \text{ gdzie } Y = \text{const}$$

to całkowanie wzoru (11) jest dość proste i ostateczny wzór na trwałość przybierze postać wyrażenia (13).

$$(13) \quad N_c = N_i + \frac{(1-R)K_c}{C\Delta\sigma^n \cdot Y^n} \frac{2}{2-n} \left[\left(\frac{1}{a_k} \right)^{\frac{n-2}{2}} - \left(\frac{1}{a_0} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] - \frac{1}{C \cdot \Delta\sigma^{n-1} \cdot Y^{n-1}} \frac{2}{3-n} \times \\ \times \left[(a_k)^{\frac{3-n}{2}} - (a_0)^{\frac{3-n}{2}} \right] \quad \text{dla } n \neq 2 \text{ i } n \neq 3$$

W większości przypadków współczynnik Y jest jednak złożoną funkcją długości i geometrii szczeliny oraz sposobu obciążenia. Całkowanie wzoru (11) możliwe jest wtedy tylko metodami numerycznymi. Czas pracy maszyny cyfrowej można jednak znacznie skrócić jeśli wykorzysta się odpowiednio wzór (13). Metodę numerycznego obliczania trwałości z wykorzystaniem wzoru (13) opisano w pracy [9]. Wykorzystano ją do wyznaczenia krzywych $2a = f(N)$ widocznych na rys. 6 i rys. 7. W przypadku próbek spawanych do wzoru (13) wstawiano oczywiście odpowiednie wartości ΔK_{ef} i R_{ef} . Całkowanie prowadzono w granicach $2a_0 = 16$ mm, $2a_k = 80$ mm. Wyznaczone krzywe także wskazują na duży wpływ naprężeń własnych. Nieuwzględnienie ich przy obliczaniu mogłoby doprowadzić do zbyt optymistycznego oszacowania trwałości połączeń spawanych.

Znacznie trudniejszy problem stanowi analiza wzrostu szczelin zmęczeniowych przy zmiennych amplitudach obciążenia. Szczególną trudność sprawia obliczanie opóźnień jakie powstają wskutek nagłych zmian parametrów obciążenia. Istnieje kilka uproszczonych modeli umożliwiających w pewnych warunkach obliczanie tych opóźnień, nie wy-

jaśniają one jednak całej złożoności zjawiska [18]. Jednym z nich jest model Wheelera [19]. Zgodnie z tym modelem zakłada się, że prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej, po nagłym zmniejszeniu obciążenia, zależy od stosunku stref uplastycznionych przed wierzchołkiem szczeliny, utworzonych przez obciążenie wyższe i następujące po nim obciążenie niższe. Występujące w takich przypadkach opóźnienie (zwolnienie) wzrostu szczeliny zmęczeniowej wyraża tzw. współczynnik opóźnienia C_{pi} .

$$(14) \quad C_{pi} = \begin{cases} \left(\frac{R_{yi}}{a_p - a_i} \right)^m & \text{jeśli } a_i + R_{yi} < a_p, \\ C_{pi} = 1 & \text{jeśli } a_i + R_{yi} \geq a_p, \end{cases}$$

gdzie: $a_p = a_s + R_{yp}$ — połowa długości szczeliny w momencie przyłożenia ostatniego cyklu obciążenia wyższego wraz ze strefą uplastycznioną utworzoną przez to obciążenie

a_s — połowa długości szczeliny w momencie przyłożenia ostatniego cyklu obciążenia wyższego

R_{yp} — wymiary strefy uplastycznionej utworzonej przez obciążenie wyższe

a_i — bieżąca długość (połowa) szczeliny w czasie realizacji obciążenia niższego

R_{yi} — wymiar bieżącej strefy uplastycznionej wytworzonej przez obciążenie niższe przed wierzchołkiem szczeliny o długości $2a_i$

m — stała wyznaczana eksperymentalnie.

Wymiar strefy uplastycznionej przed wierzchołkiem szczeliny obliczano ze wzoru (15) zakładając płaski stan naprężeń [4].

$$(15) \quad R_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{\max}}{R_e} \right)^2,$$

Prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej w obszarze działania poprzedniego obciążenia wyższego należy więc obliczać według wzoru (16)

$$(16) \quad \frac{d(2a)}{dN} = C_{pi} \frac{C(\Delta K)^n}{(1-R)K_c - \Delta K}$$

Oddziaływanie poprzedniego obciążenia wyższego trwa dopóty dopóki bieżąca strefa uplastyczniona R_{yi} nie osiągnie granicy strefy uplastycznionej R_{yp} utworzonej przez to obciążenie.

Oczywiście obliczanie trwałości i całkowanie wzoru (16) możliwe jest najczęściej tylko przy pomocy elektronicznych maszyn cyfrowych. Zwykle stosuje się tzw. metodę całkowania cykl po cyklu, polegającą na sumowaniu przyrostów szczeliny $\Delta 2a_i$ spowodowanych kolejnymi cyklami obciążenia.

$$(17) \quad 2a_i = 2a_0 + \sum_{i=1}^N C_{pi} \frac{C(\Delta K_i)^n}{(1-R_i)K_c - \Delta K_i}$$

Metoda ta wymaga wielokrotnego powtarzania obliczeń, gdyż dla każdego cyklu obciążenia należy obliczać wszystkie parametry występujące we wzorze (17). Opis takiego programu wykorzystywanego w niniejszych badaniach oraz sposób wyznaczania stałej m

podano w pracach [9, 15, 20]. Stałą m wyznaczono tylko na podstawie rezultatów uzyskanych z badania próbek niespawanych. Początkowo stałą m uważano za parametr materiałowy [19], jednak okazało się, że jej wartość zależy także od typu obciążenia [21]. W przypadku bloku naprężeń Nr 1 (rys. 9) jej wartość wynosi $m = 0,6$, natomiast w przypadku bloku Nr 2 (rys. 10) $m = 0$. Wartość $m = 0$ świadczy o tym, że w przypadku bloku naprężeń Nr 2 nie występowały opóźnienia wzrostu szczelin zmęczeniowych, co potwierdzają także wcześniejsze obserwacje.

Rezultaty całkowania wzoru (17) przedstawiono na rys. 8 i rys. 10 w postaci krzywych $2a = f(N)$. Linia ciągłą narysowano krzywe reprezentujące próbki niespawane, wyznaczone bez uwzględniania naprężeń własnych. Wprowadzenie do obliczeń naprężeń własnych, zgodnie z podaną wyżej metodyką, również w przypadku zmiennych amplitud umożliwia obliczanie trwałości połączeń spawanych. Dużą rozbieżność pomiędzy trwałością teoretyczną i rzeczywistą otrzymano tylko w przypadku próbek L obciążonych według bloku Nr 1 (rys. 8). Wynika ona z nieuwzględnienia szybkiego zanikania naprężeń własnych wskutek oddziaływania wysokich obciążeń zmiennych. Wyższe naprężenia własne zanikają szybciej i dlatego lepszą zbieżność wyników teoretycznych z rezultatami badań otrzymano w przypadku próbek P.

W większości przypadków nieuwzględnienie naprężeń własnych prowadzi jednak do zbyt optymistycznego oszacowania trwałości połączeń spawanych.

6. Wnioski

Prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych jest jednym z czynników decydujących o trwałości połączeń spawanych. Narzędziem stosowanym do analizy teoretycznej wzrostu szczelin zmęczeniowych jest najczęściej mechanika pękania. Współczynnik intensywności naprężeń umożliwia bowiem uwzględnienie wielu dodatkowych czynników pomijanych w tradycyjnych metodach określania wytrzymałości i trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych. Jednym z czynników wpływających na trwałość połączeń spawanych są spawalnicze naprężenia własne. Zastosowanie współczynnika intensywności naprężeń umożliwia uwzględnienie zarówno wielkości jak i rozkładu tych naprężeń. Szczególnie ważnymi parametrami są bowiem wielkość i szerokość strefy rozciągających naprężeń własnych. Ważnym jest także położenie szczeliny w stosunku do tej strefy.

Wpływ naprężeń własnych na prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych zależy także od wielkości obciążenia zewnętrznego. Wysokie naprężenia zmienne powodują bowiem szybkie zanikanie naprężeń własnych.

Uwzględnienie naprężeń własnych umożliwia obliczanie trwałości połączeń spawanych na podstawie rezultatów uzyskanych tylko z badania materiału rodzimego.

Literatura cytowana w tekście

1. T. KANAZAWA, A. KOBAYASHI, *Significance of defects in welded structures*. Proceedings of the Japan — U. S. Seminar, Tokyo, 1973
2. F. U. LAWRENCE, J. B. RADZIMIŃSKI, *Fatigue crack initiation and propagation in high — yield — strength steel weld metal*. Welding Journal, 1970 Nr 10

3. G. R. IRWIN, *Fracture mechanics*. Structural Mechanics — Proceedings of the 1st Symposium on Naval Structural Mechanics, California, 1958
4. G. GLINKA, S. OZIEMSKI, *Odporność na pękanie K jako kryterium wytrzymałościowe liniowo-sprężystej mechaniki pękania*. Przegląd Mechaniczny, 1977 Nr 20
5. P. C. PARIS, F. ERDOGAN, *A critical analysis of crack propagation laws*. Journal of Basic Engineering, 1963 Nr 4
6. W. F. BROWN, J. E. SRAWLEY, *Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials*. ASTM, STP 410, 1967
7. S. KOCANDA, *Zmęczeniowe niszczenie metali*, WNT, Warszawa, 1972
8. R. G. FORMAN, V. E. KEARNEY, R. M. ENGLE, *Numerical analysis of crack propagation in cyclic — loaded structures*. Journal of Basic Engineering, 1967 Nr 3
9. G. GLINKA *Badanie prędkości wzrostu pęknięć zmęczeniowych w złączach spawanych ze stali 18G2AV*. Przegląd spawalnictwa 1977 Nr 3.
10. R. A. SMITH, *The determination of fatigue crack growth rates from experimental data*. International Journal of Fracture, 1973 Nr 4
11. G. GLINKA, *Określanie prędkości wzrostu pęknięć zmęczeniowych*. Przegląd Mechaniczny, 1976 Nr 10
12. B. A. RJACHIN, G. N. MOSZKARIEW, W. W. JAKOWLEW, *Ostateczne naprężenia w swarnych metalokonstrukcjach stroitelnych i dorożnych maszyn*. Stroitelnyje i Dorożnyje Maszyny, 1969 Nr 10
13. S. J. MADDOX, *Fatigue crack propagation data obtained from parent plate, weld metal and HAZ in structural steels*. The Welding Institute, Research Report Nr E/48/72, September 1972
14. GASSNER, E. W. GRIESE, E. HAIBACH, *Ertragbare Spannungen und Lebensdauer einer Schwiessverbindung aus Stahl St37 bei verschiedenen Formen des Beanspruchungskollektivs*, Archiv für des Eisenhüttenwesen, 1964 Nr 3
15. G. GLINKA, W. SOBZYKIEWICZ, *Badanie prędkości rozwoju pęknięć zmęczeniowych w elementach ze stali o podwyższonej wytrzymałości w warunkach normatywnych widm obciążeń*. Archiwum Budowy Maszyn (w druku)
16. R. I. STEPHENS, *Wpływ przeciążeń na wzrost szczelin zmęczeniowych*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana (w druku)
17. T. KANAZAWA, H. OBA, S. MACHIDA, *The effect of welding residual stress on brittle fracture propagation*. Journal Society of Naval Architects of Japan, 1961 Nr 109
18. D. V. NELSON, *Review of fatigue crack growth prediction methods*. Experimental Mechanics, 1977 Nr 2
19. O. E. WHEELER, *Spectrum Loading and crack growth*. Journal of Basic Engineering, 1972 Nr 2
20. G. GLINKA, J. LUBOWICZ, *Numeryczne obliczanie trwałości połączeń spawanych*. Przegląd Mechaniczny, 1976 Nr 17
21. M. KATCHER: *Spectrum loading and crack growth*. Engineering Fracture Mechanics, 1973 Nr 4

Р е з ю м е

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РОСТА
УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН ПРИ ПРИСУТСТВИИ СВАРНЫХ
ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе рассматривается влияние сварочных остаточных напряжений на рост усталостных трещин в сварных соединениях из низко легированной стали 18G2AV повышенной прочности. Использовано три рода плоских образцов, а именно: не сварные, образцы с перпендикулярным соединением и образцы с продольным соединением. Распределение остаточных напряжений было измерено в сварочных образцах. Все образцы были исследованы при постоянной и переменной амплитуде нагрузки и соотношениях напряжений $R > 0$. Закон Формана и модель Вилера были применены для теоретического анализа. Сопоставление теоретических расчетов с экспериментом давало более удачные результаты при использовании в расчете эффективных величин коэффициента асимметрии цикла R_{eff} и размаха интенсивности напряжений ΔK_{eff} компенсирующих остаточные напряжения. Найдено, что растягивающие напряжения увеличивают рост усталост-

ных трещин, в то время как сжимающие — снижают. Чем ниже приложенная нагрузка, тем выше эффект остаточных напряжений. Распределение остаточных напряжений имеет сильное влияние на рост усталостных трещин, а также на выносливость образцов. В работе приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований роста усталостных трещин в сопоставлении с исследованиями на образцах из исходных материалов.

S u m m a r y

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF FATIGUE CRACKS GROWTH IN A PRESENCE OF WELDING RESIDUAL STRESSES

The article deals with the effect of welding residual stresses on fatigue crack growth in 18G2AV high strength low alloy steel weldments. Three kinds of flat specimens have been used — unwelded ones, specimens with butt perpendicular welds and specimens with butt longitudinal welds. Residual stress distributions have been measured in both kinds of welded specimens. All specimens were tested under constant and variable amplitude load with stress ratios $R > 0$. The Forman's law and Wheeler's model of crack retardation were used for theoretical analysis. The theoretical results were more realistic when effective stress ratio R_{eff} and effective stress intensity range ΔK_{eff} compensating for residual stresses had been used. It was found that the tension residual stresses increase the fatigue crack growth rate while compressive ones reduce it. The lower was the applied load the higher the residual stress effect. A distribution of residual stress had a significant effect on fatigue crack growth rate and fatigue life of welded specimens.

This report presents experimental results and analytical method of fatigue crack growth prediction in steel weldments on the basis of results obtained from parent material.

**POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MASZYN ROBOCZYCH CIĘŻKICH**

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1978 r.

INTERAKCJA UKŁADU BUDYNEK — PODŁOŻE PODLEGAJĄCEGO DZIAŁANIOM
SEJSMICZNYM I PARASEJSMICZNYM
(Praca przeglądowa)¹

EDWARD MACIĄG (KRAKÓW)

Wstęp

W dniach 7 - 8 kwietnia 1978 r. odbyło się w Krakowie ogólnopolskie sympozjum nt. „Wpływy sejsmiczne na budowle” zorganizowane przez Instytut Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej (z inicjatywy prof. dr hab. inż. Romana CIESIELSKIEGO), pod patronatem Sekcji Mechaniki Konstrukcji KILiW PAN. Pozornie może się wydawać, że znajomość zagadnień inżynierii sejsmicznej jest w Polsce zbędna. Uzasadnienie celowości poznania tych zagadnień omówione jest we wstępie do [57]²⁾. W/w sympozjum spotkało się z dużym zainteresowaniem pracowników placówek naukowo-badawczych jak i biur projektowych, w szczególności tych, które przygotowują dokumentacje techniczne dla obiektów przewidzianych do realizacji na terenach sejsmicznych (w ramach eksportu bądź samej dokumentacji bądź całych obiektów). Problematyka sympozjum dotyczyła głównie działania drgań pochodzących ze źródeł zewnętrznych (a więc będących poza obiektami) na budynki. Drgania takie propagują się przez podłoże gruntowe i przekazują na budynki. Wyróżnia się dwa zasadnicze źródła drgań zewnętrznych:

- a) źródła naturalne, niezależne od człowieka,
- b) źródła spowodowane działalnością człowieka (bezpośrednią i pośrednią);

W pierwszym przypadku mówimy o źródłach sejsmicznych, w drugim o parasejsmicznych. Do drgań sejsmicznych należą przede wszystkim ruchy podłoża gruntowego wywołane trzęsieniami ziemi. Źródłami drgań parasejsmicznych mogą być odstrzały w kamieniołomach, wbijanie pali fundamentowych i ścianek szczelnych, wybuchy nuklearne, wybuchy stosowane przy robotach ziemnych, budowlanych (np. wyburzenia) i geofizycznych, kafary hutnicze, młoty kuzienne, a także pojazdy drogowe i kolejowe. Coraz częściej w naszej praktyce inżynierskiej zachodzi potrzeba uwzględniania wymienionych działań parasejsmicznych. Krótkie charakterystyki w/w źródeł drgań zebrane są w [57]. Dotychczasowe badania wykazały, że jednym z najbardziej ważnych czynników w obliczeniach konstrukcji budowlanych poddanych działaniom sejsmicznym i im podobnym jest określenie charakterystyk sejsmicznych gruntów [38]. Z tego zakresu w niniejszym opracowaniu zajmniemy się wpływem cech podłoża pod budynkami i w ich otoczeniu na przekazywanie się drgań sejsmicznych i parasejsmicznych na te budynki oraz zagadnieniem wzajemnego oddziaływania układu budynek-podłoże.

¹⁾ Praca realizowana częściowo w ramach problemu węzłowego 05.12., temat 14.3.

²⁾ Por. też M. Robakiewicz, Projektowanie budowli na terenach trzęsień ziemi, Inż. i Bud. 1956, 12.

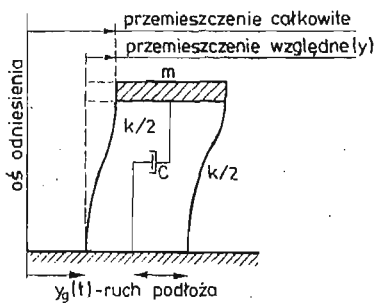
2. Interakcja układu budynek — podłoże

Napreżenia kontaktowe między podłożem i fundamentem, które są skutkiem fal sejsmicznych wywołują tak efekty w konstrukcjach jak też przyczyniają się do deformacji podłoża pod obiektami i w ich sąsiedztwie. To zjawisko współpracy konstrukcji i podłoża na działania sejsmiczne i parasejsmiczne wynikające z wzajemnego oddziaływania układu konstrukcja-podłoże w literaturze światowej nosi nazwę interakcji dynamicznej lub krótko interakcji [64].

Z jednej strony propagowane fale sejsmiczne mogą ulec modyfikacji z uwagi na pewne zmiany stanu gruntu na którym posadowiony jest budynek. Takie efekty były obserwowane po trzęsieniu ziemi w Mexico-City i w Japonii w miejscach występowania wyjątkowo podatnych gruntów [15]. Z drugiej strony siły wywołane w gruncie przez drgającą konstrukcję powodują deformowanie się podłoża, a to z kolei wpływa na zachowanie się budynku. W zagadnieniu interakcji układu budynek-podłoże należy więc wyróżnić dwa aspekty, które odgrywają główną rolę w inżynierii sejsmicznej. Po pierwsze, odpowiedź budynku posadowionego na odkształcalnym podłożu na działania sejsmiczne może się różnić od tej jaką może mieć budynek na sztywnym podłożu. Po drugie, ruch zarejestrowany na fundamencie konstrukcji, a także w bezpośrednim jego sąsiedztwie może być różny od tego jaki mógłby być zarejestrowany w przypadku braku budynku. Z inżynierskiego punktu widzenia ważne jest określenie warunków przy jakich interakcja budynek-podłoże ma znaczenie praktyczne. W zjawisku interakcji mamy więc do czynienia z wyraźnym sprzężeniem zachowania się budynku i podłoża. Powszechnie przyjmuje się, że przebadanie tego zagadnienia jest bardzo trudne.

3. Spektrum odpowiedzi

Poniżej w bardzo skróconej formie przedstawione będzie tzw. spektrum odpowiedzi. Pojęcie to jest szeroko stosowane w literaturze dotyczącej zagadnień inżynierii sejsmicznej. Oszacowania odpowiedzi budynków (które można modelować układem o jednym, a także i o wielu stopniach swobody) podlegających działaniom sejsmicznym można dokonywać na podstawie w/w spektrum odpowiedzi. Z tego względu w dalszej części opracowania wygodnie będzie posługiwać się tym pojęciem. W literaturze polskiej zagadnienie spektrum odpowiedzi nie jest znane, więc tym bardziej chociaż krótkie jego przedstawienie należy



Rys. 1. Obliczeniowy schemat oscylatora

uznać za celowe. Rozwinięcie idei spektrum odpowiedzi podane jest w następujących pracach [6], [27] [33], [34], [60], [106], a obszernie komentarze na ten temat znajdujemy w sprawozdaniu z drugiej światowej konferencji inżynierii sejsmicznej [42] oraz w [21], [22]. Dla oscylatora (rys. 1) równanie różniczkowe poziomych drgań sejsmicznych można zapisać w postaci

$$(3.1) \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_g.$$

Przemieszczenie względne konstrukcji (oscylatora) wyraża się wzorem:

$$(3.2) \quad y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_0^t \ddot{y}_g e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau = y(t, \omega, \xi),$$

gdzie

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m},$$

\ddot{y}_g — przyspieszenie drgań gruntu,

$\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ jest ułamkiem tłumienia krytycznego.

Czas trwania $\ddot{y}_g(t)$ wynosi od $t = 0$ do $t = t_1$.

Wobec małego ξ , można przyjąć $\omega' = \omega$. Przemieszczenie względne układu osiąga maksymalną wartość w chwili t_m i jego absolutna wartość nosi nazwę przemieszczeniowego spektrum odpowiedzi S_d (albo spektrum sejsmicznego przemieszczenia oscylatora³⁾)

$$(3.3) \quad \begin{aligned} S_d &= |y(t_m, \omega, \xi)|, \quad t_m \in (0, t_1), \\ S_d &= \max_{t \in (0, t_1)} |y(t, \omega, \xi)|. \end{aligned}$$

Względna maksymalna prędkość układu

$$(3.4) \quad \begin{aligned} S_v &= |\dot{y}(t_m, \omega, \xi)|, \quad t_m \in (0, t_1), \\ S_v &= \max_{t \in (0, t_1)} |\dot{y}(t, \omega, \xi)|, \end{aligned}$$

nazywana jest prędkościowym spektrum odpowiedzi (albo spektrum sejsmicznych prędkości oscylatora). W zakresie przyspieszenia interesuje nas nie względna jego wartość maksymalna ale maksymalna bezwzględna wartość całkowitego przyspieszenia,

$$(3.5) \quad \begin{aligned} S_a &= |\ddot{y}(t_m, \omega, \xi) + \ddot{y}_g(t_m, \omega, \xi)|, \quad t_m \in (0, t_1), \\ S_a &= \max_{t \in (0, t_1)} |\ddot{y}(t, \omega, \xi) + \ddot{y}_g(t, \omega, \xi)|, \end{aligned}$$

które nosi nazwę bezwzględnego spektrum przyspieszenia. Bywa jeszcze stosowane tzw. pseudo-prędkościowe spektrum odpowiedzi S_{pv} definiowane następująco [30]:

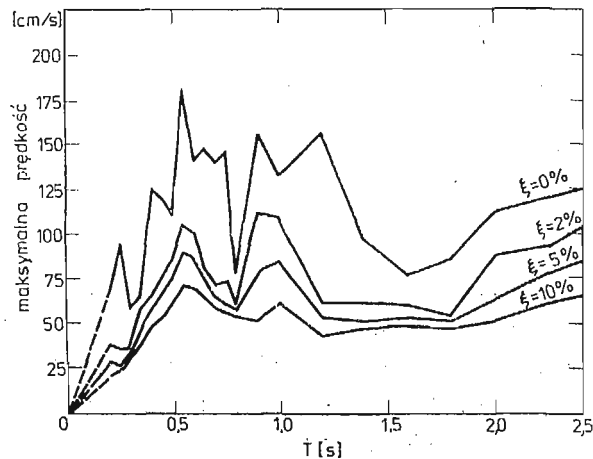
$$(3.6) \quad S_{pv} = \frac{T}{2\pi} S_a = \frac{2\pi}{T} S_d,$$

³⁾ W materiałach na wymienione we Wstępie sympozjum, zaproponowano nazwanie spektrum odpowiedzi układu o 1-ym stopniu swobody, umownym spektrum odpowiedzi dla odróżnienia od stosowanego też i mającego inne znaczenia spektrum częstotliwości obiektu jako układu złożonego.

gdzie T jest okresem nietłumionych drgań własnych układu. Ze wzoru (3.6.) widać prosty (przybliżony) związek między poszczególnymi spektrami. Maksymalną siłę sejsmiczną można wyrazić przez dowolne z podanych spektrów odpowiedzi

$$(3.7) \quad S = mS_a = m \frac{2\pi}{T} S_v = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 S_d.$$

Spektra odpowiedzi wykonuje się jako wykresy wskazujące zmianę wartości przemieszczenia (prędkości, przyspieszenia) jako funkcje okresu nietłumionych drgań własnych (lub częstości drgań własnych) układu o jednym stopniu swobody (oscylatora) poddanego funkcji wymuszenia kinematycznego. Dla zagadnień sejsmicznych tym wymuszeniem kinematycznym są zarejestrowane akcelerogramy (lub seismogramy) w czasie ruchu gruntu. Zwykle wykonuje się kilka krzywych dla ustalonych ξ dla zaobserwowania wpływu tłumienia. Odpowiednikiem ξ w normach [74], [75] jest $\gamma = 2\xi$. Dla konstrukcji żelbetowych przyjmuje się najczęściej $\xi = 0,02 \div 0,10$. Tak więc spektra odpowiedzi zależą od własności układu wyrażonych przez jego okres drgań własnych i jego tłumienie ξ oraz charakteru wzbudzenia oscylatora $\ddot{y}_g(t)$. Odpowiedzi wielu konstrukcji wynikają głównie z przemieszczenia odpowiadającego podstawowej formie drgań, więc wykresy spektralne dostarczają wygodnych środków do oszacowania odpowiedzi konstrukcji o znanym okresie drgań własnych na określony ruch gruntu. Możliwe jest wykonanie wyżej podanych spektrów odpowiedzi dla zarejestrowanych przemieszczeń gruntu $y_g(t)$ [8]. Przykładowe prędkościowe spektrum odpowiedzi podane jest na rys. 2. W związku z rozwojem maszyn

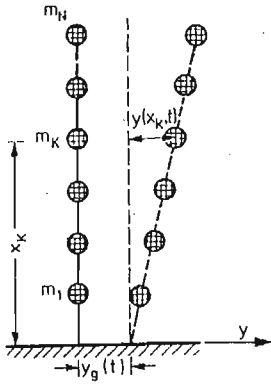


Rys. 2. Prędkościowe spektrum odpowiedzi S_v dla składowej poziomej przyspieszenia gruntu P-P zarejestrowanego w El Centro, California, maj 1940 r., [30]. T — okres drgań własnych oscylatora, ξ — ułamek tłumienia krytycznego

cyfrowych spektra odpowiedzi najczęściej wykreśla się na podstawie obliczeń wykonywanych na tych maszynach. Zasadniczą częścią tych obliczeń jest numeryczne całkowanie dla wyznaczenia $y(t)$ (lub jego pochodnych) zgodnie z równaniem (3.2). Konieczność całkowania numerycznego wynika ze skomplikowanej postaci zarejestrowanych przebiegów przyspieszeń drgań podłoża $\ddot{y}_g(t)$ występujących pod całką w równaniu (3.2).

Dla obiektów złożonych modelowanych przez dyskretyzację układami z masami skupionymi o wielu stopniach swobody (rys. 3) reakcję układu na działania sejsmiczne można wyznaczać stosując metodę współrzędnych normalnych (analizy modalnej). Przemieszczenie $y(x_k, t)$ (w poziomie k) układu przedstawia się jako sumę drgań normalnych $y^{(i)}(x_k, t)$:

$$(3.8) \quad y_k(t) = y(x_k, t) = \sum_{i=1}^N y^{(i)}(x_k, t) = \sum_{i=1}^N X_i(x_k) Y_i(t),$$



Rys. 3. Schemat obliczeniowy układu o N stopniach swobody

$X_i(x_k)$ jest funkcją określającą formę i -tego normalnego drgania odpowiadającego i -tej częstości drgań własnych ω_i układu, $Y_i(t)$ — funkcje czasu, tzw. współrzędne normalne. Współrzędne normalne, zależne od działania sejsmicznego tj. funkcji $\ddot{y}_\theta(t)$ wyrażają się następująco [18], [42]:

$$(3.9) \quad Y_i(t) = \frac{-R_i}{M_i \omega_i} \int_0^t \ddot{y}_\theta(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_i (t-\tau) d\tau,$$

gdzie:

$$R_i = \sum_{k=1}^N m_k X_i(x_k) \text{ — sejsmiczny współczynnik partycypacyjny,}$$

m_k — masa w poziomie k ,

$$M_i = \sum_{k=1}^N m_k X_i^2(x_k) \text{ — masa uogólniona,}$$

$$\omega'_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}.$$

Sejsmiczne siły bezwładności wynoszą odpowiednio [42]:

$$(3.10) \quad S_k(t) = S(x_k, t) = \sum_{i=1}^N S^{(i)}(x_k, t) = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 m_k X_i(x_k) Y_i(t).$$

Podane wyżej związki (3.8.) ÷ (3.10.) opisują dokładnie proces drgań sejsmicznych układów złożonych (różniczkując y względem t można otrzymać prędkości i przyspieszenia mas układu); jednakże praktyczne ich wykorzystanie jest trudne z uwagi na: złożony charakter przyspieszenia gruntu $\ddot{y}_\theta(t)$, niewielką liczbę dotychczas zarejestrowanych akcelero-

gramów silnych trzęsień ziemi itd. (por. [36], [73], [106]). Związki te wykorzystuje się głównie w pracach badawczych. Do obecnej chwili, w obliczeniach praktycznych poszukiwane wielkości sejsmiczne wyznacza się metodami przybliżonymi. Główną taką metodą jest tzw. metoda spektralna opierająca się na koncepcji spektrum odpowiedzi.

Z porównania związków (3.2.) i (3.9.) widać, że istnieje analogia między drganiami normalnymi układu złożonego i drganiami oscylatora: jeśli parametry oscylatora ω , ξ równe są odpowiednim parametrom ω_i i ξ_i i -tego drgania normalnego, to funkcja opisująca zmianę w czasie współrzędnej normalnej $Y_i(t)$ z dokładnością do stałego mnożnika $\left(\frac{R_i}{M_i}\right)$ pokrywa się z przemieszczeniem oscylatora

$$(3.11) \quad Y_i(t) = \frac{R_i}{M_i} y(t, \omega_i, \xi_i).$$

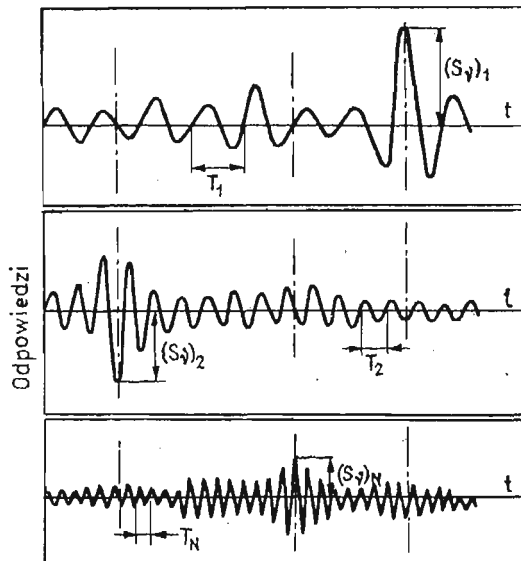
Wykorzystując wzory (3.3.), (3.8) i (3.11) napiszemy związek na maksymalne przemieszczenia mas układu dla i -tego drgania normalnego:

$$(3.12) \quad y^{(i)}(x_k) = \max |y^{(i)}(x_k, t)| = \frac{R_i}{M_i} X_i(x_k) S_d(T_i).$$

Analogicznie, wykorzystując wzory (3.3.), (3.6.) i (3.10.) otrzymamy wyrażenie na maksymalne siły bezwładności dla i -tego drgania normalnego

$$(3.13) \quad S_k^{(i)} = \max |S^{(i)}(x_k, t)| = m_k \frac{R_i}{M_i} X_i(x_k) S_d(T_i).$$

Jak widać spektra odpowiedzi pozwalają na wyznaczenie maksymalnych wartości wszystkich potrzebnych wielkości sejsmicznych dla oddzielnych drgań normalnych. Dla celów obliczeniowych najważniejszymi są całkowite maksymalne wartości poszukiwanych wiel-



Rys. 4. Przebiegi dla superpozycji kolejnych drgań normalnych układu o N stopniach swobody wg [59]

kości sejsmicznych wynikające zę zbioru wszystkich składowych normalnych. Spektra odpowiedzi nie dają jednak żadnych informacji o fazowych stosunkach drgań normalnych i z tego powodu całkowite maksimum odpowiedzi układu o wielu stopniach swobody nie może być otrzymane przez superpozycję indywidualnych modalnych maksimumów, ponieważ nie zachodzą one jednocześnie (por. rys. 4). W literaturze dotyczącej inżynierii sejsmicznej podawane są najrozmaitsze techniki kombinacji modalnych maksimumów dla aproksymacji całkowitej odpowiedzi złożonego układu (por. np. [4], [18], [48], [59], [106]). Poniżej wymienimy tylko niektóre z nich:

a) W momencie osiągnięcia przez obliczaną wielkość sejsmiczną maksymalnej wartości dla jednej ze składowych normalnych drgań, pozostałe składowe poszukiwanej wielkości traktuje się jako małe i pomija. Zwykle jest to wartość odpowiadająca pierwszej, podstawowej formie drgania normalnego. Tak obliczona wartość odpowiada dolnej granicy poszukiwanej wielkości.

b) Poszukiwana wielkość osiąga modalne maksima jednocześnie dla wszystkich składowych drgań; do obliczeń przyjmuje się sumę maksymalnych wartości wszystkich składowych normalnych $P = \sum P_i$. Jest to przypadek odpowiadający górnej granicy poszukiwanej wielkości. Jest to tzw. bezwzględne maksimum. Np. dla sejsmicznych sił bezwładności na podstawie wzorów (3.10.) i (3.13.) jest

$$(3.14) \quad S_{kmax} = \sum_{i=1}^N m_k \frac{R_i}{M_i} X_i(x_k) S_a(T_i).$$

c) Bazując na rachunku prawdopodobieństwa, uwzględnia się jednocześnie maksymalne wartości poszukiwanej wielkości wszystkich (lub niektórych) składowych normalnych zgodnie ze wzorem (3.15.)

$$(3.15) \quad P = \sqrt{\sum_{i=1}^N P_i^2},$$

d) Wykorzystuje się podstawową formę drgań normalnych i w poszczególnych przypadkach wprowadza się korekty uwzględniające wyższe formy drgań.

Metodyka obliczeń oparta o krzywe spektralne została przyjęta w normach dla budownictwa w rejonach sejsmicznych szeregu krajów — USA, ZSRR, Meksyku, Turcji, Chile i innych.

4. Badania teoretyczne interakcji dynamicznej układu budynek-podłoże

Przez długi okres w inżynierii sejsmicznej zakładano brak sprzężenia w układzie budynek-podłoże. Kiedy badano drgania budynków, przyjmowano, że nie mają one wpływu na ruch podłoża, gdy analizowano drgania podłoża, nie brano pod uwagę oddziaływania nań budynku.

Złożone cechy ośrodka podłoża (gruntu), geometria fundamentów budynków, charakter drgań sejsmicznych i im podobnych powodują, że problem interakcji jest wyjątkowo skomplikowanym i konieczne jest w ogólności przyjmowanie wielu upraszczających założeń w toku badania tego zjawiska. Poniżej omówione będą prace zajmujące się teoretyczną

analizą interakcji dynamicznej układu budynek-podłoże. Niektóre z tych prac, które można uznać za najbardziej typowe dla omawianej problematyki przedstawione będą obszerniej, o innych podane będą krótkie wzmianki. W pracach tych badane są różne wyidealizowane modele konstrukcji, które chociaż różnią się w istotnych szczegółach, tym nie mniej generalnie można by je podzielić na dwie kategorie grup:

- a) takie, które do badania dynamicznej odpowiedzi układów budynek-podłoże przyjmują ruch podłoża jako ustalony,
- b) takie, które do badania odpowiedzi układu przyjmują dowolny, z reguły poziomy ruch podłoża reprezentowany bądź przez zarejestrowane akcelerogramy i sejsmogramy rzeczywistych trzęsień ziemi, bądź przez symulowane ruchy podłoża przypominające drgania sejsmiczne. Teoretyczne badanie zjawiska interakcji najlepiej będzie prześledzić na przykładzie cyklu prac PARMELEE i zespołu [1], [14], [24], [68], [69], [70], [71], [72], [73], [76], [88]. Metodyka obliczeń prezentowana w w/w pracach jest najczęściej stosowaną w badaniu interakcji układu budynek-podłoże. W pracach tych przyjęto następujące (upraszczające) założenia:
 - a) podłoże gruntowe stanowi izotropową, liniową półprzestrzeń sprężystą,
 - b) własności podłoża nie ulegają zmianie podczas drgań,
 - c) nie ma poślizgu między podstawą fundamentu a podłożem (wyklucza się więc gwałtowne fale sejsmiczne mogące wywołać odkształcenia plastyczne albo oddzielenie się fundamentu budynku od podłoża),
 - d) fundament budynku (modelu budynku) spoczywa na powierzchni podłoża,
 - e) budynek i jego fundament mają kształt cylindra, kołowa płyta fundamentu jest sztywna,
 - f) fale sejsmiczne dochodzą do fundamentu pionowo z głębi ziemi,
 - g) fale sejsmiczne wywołują tylko poziome ruchy swobodnej powierzchni podłoża (a więc budynku); drgania tej powierzchni najczęściej są ustalone; niekiedy przyjmuje się symulowane ruchy mające reprezentować drgania określone akcelerogramami z rzeczywistych trzęsień ziemi.

Zgodnie z wynikami BYCROFT'a [13], dla sztywnej płyty kołowej spoczywającej na półprzestrzeni sprężystej mamy następujące związki: dla przemieszczenia poziomego środka ciężkości płyty poddanej poziomemu obciążeniu harmonicznemu Pe^{ipt}

$$(4.1) \quad U_B(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{Pe^{ipt}}{\mu r} [f_{1H}(a, \nu) + if_{2H}(a, \nu)] \right\},$$

dla kąta obrotu płyty (względem osi poziomej) wywołanego harmonicznym zmiennym momentem Me^{ipt}

$$(4.2) \quad \Phi(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{Me^{ipt}}{\mu r^3} [f_{1R}(a, \nu) + if_{2R}(a, \nu)] \right\},$$

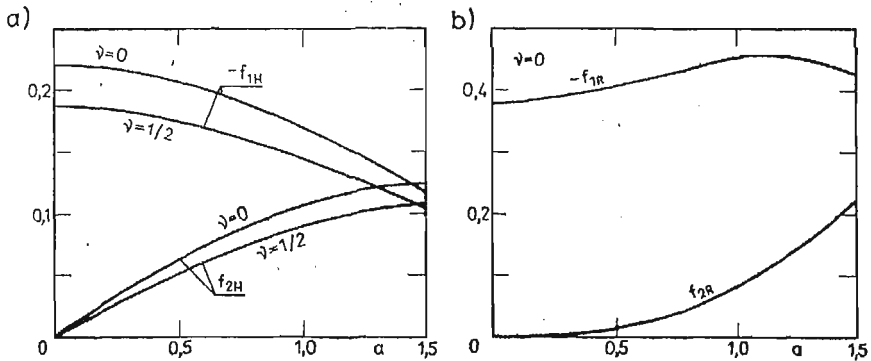
gdzie

$$a = \frac{pr}{V_s}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

W równaniach tych: p — jest częstością kołową wymuszenia, r — promieniem płyty, μ i ν są odpowiednio modułem sztywności i współczynnikiem Poissona sprężystego podłoża, a — jest tzw. bezwymiarową częstością, ρ — gęstością ośrodka podłoża, V_s — prędkością

rozchodzenia się fali poprzecznej S . Funkcje f_{1H} , f_{2H} , f_{1R} i f_{2R} określone są [13] w granicach $0 \leq a \leq 1,5$, przy czym f_{1H} i f_{1R} są ujemne. Charakteryzują one ustaloną odpowiedź półprzestrzeni sprężystej i są funkcjami bezwymiarowej częstości a i współczynnika Poissona ν . Graficzne przedstawienie tych funkcji podane jest na rys. 5a i b. W świetle równania (4.1) i jego pochodnej $\frac{dU_B(t)}{dt}$, HSIEH [32] pokazał, że

$$(4.3) \quad f_{1H} p U_B(t) - f_{2H} \frac{dU_B(t)}{dt} = \frac{p}{\mu r} P e^{pt} (f_{1H}^2 + f_{2H}^2).$$



Rys. 5. Funkcje Bycrofta [13]

Wynika stąd, że mając poziome przemieszczenia $U(t)$ obliczymy składową poziomą reakcji w postaci:

$$(4.4) \quad P e^{pt} = -A_1 U(t) - A_2 \frac{dU(t)}{dt},$$

$$A_1 = -\mu r \frac{f_{1H}}{f_{1H}^2 + f_{2H}^2}, \quad A_2 = \frac{\mu r}{p} \frac{f_{2H}}{f_{1H}^2 + f_{2H}^2} = \frac{\mu r^2}{a V_s} \frac{f_{2H}}{f_{1H}^2 + f_{2H}^2}.$$

Podobnie równanie (4.2.) prowadzi do:

$$(4.5) \quad M e^{pt} = -B_1 \Phi(t) - B_2 \frac{d\Phi(t)}{dt},$$

$$B_1 = -\mu r^3 \frac{f_{1R}}{f_{1R}^2 + f_{2R}^2}, \quad B_2 = \frac{\mu r^3}{P} \frac{f_{2R}}{f_{1R}^2 + f_{2R}^2} = \frac{\mu r^4}{a V_s} \frac{f_{2R}}{f_{1R}^2 + f_{2R}^2}.$$

Współczynniki A_1 i B_1 wiążą się z dynamiczną sztywnością ośrodka podłoża, a A_2 i B_2 z dysypacją energii w tym ośrodku.

Podane wyżej związki wykorzystane zostały w analizie interakcji układu budynek-podłoże na przykładzie modelu podanym na rys. 6a. Układ z rys. 6a traktowany jest jako mający trzy stopnie swobody: poziome przemieszczenie górnej masy m_1 , poziome przemieszczenie masy m_0 (płyty fundamentu), przemieszczenie wahadłowe (rotacyjne) układu względem osi poziomej prostopadłej do rysunku i przechodzącej przez punkt b. W układzie

budynek-podłoże (por. rys. 6b) podlegającym ruchom wywołanym harmonicznymi poziomymi drganiami swobodnej powierzchni podłoża wyróżniono:

u_g — przemieszczenie swobodnej powierzchni podłoża (gruntu),

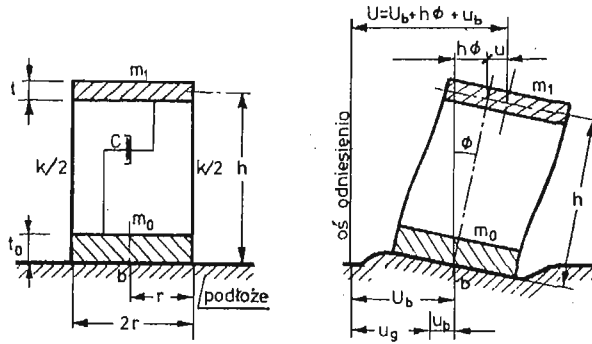
u_b — interakcyjne przemieszczenie środka masy fundamentu m_0 , spowodowane drganiami swobodnej powierzchni podłoża,

$U_b = u_g + u_b$ — bezwzględne poziome przemieszczenie środka masy fundamentu m_0 (względem osi odniesienia),

ϕ — interakcyjny kąt obrotu płyty fundamentu,

u — sprężyste poziome przemieszczenie środka górnej masy m_1 względem masy fundamentu m_0 ,

$U = U_b + h\phi u$ — bezwzględne poziome przemieszczenie środka górnej masy m_1 (względem stałej osi odniesienia).



Rys. 6. Model dynamiczny wg [68]
a) przed przemieszczeniem b) po przemieszczeniu

Równania ruchu dla układu z rys. 6 mają postać:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{U} + m_0 \ddot{U}_B - Pe^{ipt} &= 0, \\ I\ddot{\phi} + m_1 h \ddot{U} - Me^{ipt} &= 0, \\ m_1 \ddot{U} + c\dot{u} + ku &= 0, \end{aligned}$$

gdzie:

Pe^{ipt} i Me^{ipt} są odpowiednio reakcjami sprężystego podłoża w wyniku wystąpienia $u_b(t)$ i $\phi(t)$.

I jest momentem bezwładności mas m_1 i m_0 względem osi poziomej przechodzącej przez środek podstawy fundamentu; pozostałe oznaczenia podane są na rys. 6. Po podstawieniu (4.4) i (4.5) do (4.6) i prostych przekształceniach, ostatecznie równania ruchu badanego układu przyjmują następującą postać:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \ddot{u}_b + \alpha \ddot{u}_\phi + \alpha \ddot{u} + \bar{A}_2 \dot{u}_b + \bar{A}_1 u_b &= -\ddot{u}_g, \\ \ddot{u}_b + \eta \ddot{u}_\phi + \ddot{u} + \bar{B}_2 \dot{u}_\phi + \bar{B}_1 u_\phi &= -\ddot{u}_g, \\ \ddot{u}_b + \ddot{u}_\phi + \ddot{u} + 2\omega_r \xi \dot{u} + \omega_r^2 u &= -\ddot{u}_g. \end{aligned}$$

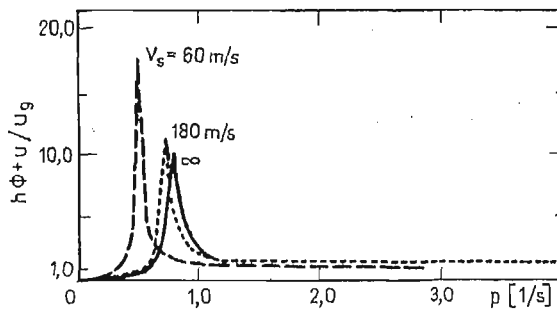
W równaniach tych:

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_0}, \quad \eta = 1 + \frac{\left(\frac{r}{h}\right)^2}{4\alpha},$$

$$u_\varphi = h\varphi, \quad \omega_r^2 = \frac{k}{m_1}, \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km_1}},$$

$$\bar{A}_i = \frac{\alpha A_i}{m_1}, \quad \bar{B}_i = \frac{B_i}{m_1 h^2}, \quad i = 1, 2.$$

Rozwiązań równań (4.7) dla określonego zakresu częstości wzbudzenia (tak aby $0 \leq a \leq 1,5$) dokonywano numerycznie (przy użyciu maszyn cyfrowych) dla dyskretnych wartości p . Wpływ różnych parametrów modeli budynków i podłoża na zjawisko interakcji badano przez analizę serii obiektów. Jeśli przyjmowano, że obiekty w rzucie poziomym są prostokątne (rozwiązania BYCROFT'a [13] podane są dla płyt kołowych), dokonywano transformacji prostokąta na figurę kołową wyznaczając jej promień z warunku równych powierzchni (na podstawie wyników THOMSON'a i KOBORI [94]). Współczynnik tłumienia ξ (jako ułamek tłumienia krytycznego) przyjmowano równy 0,01 lub 0,05. Zmianę V_s dla ośrodka podłoża przyjmowano w granicach $60 \div 300$ m/s. Dla celów porównawczych, dla oszacowania efektu interakcji, analizowano też modele budynków z rys. 6 przy założeniu, że są sztywno związane z niepodatnym podłożem, a więc mające jeden stopień swobody (poziome przemieszczenie u). Na rys. 7 podane są typowe krzywe odpowiedzi dla budynku spoczywającego na różnych podłożach (poprzez różnicowanie V_s). Wyniki analizy wskazują, że najistotniejszym czynnikiem w zjawisku interakcji jest prędkość V_s .



Rys. 7. Typowe krzywe odpowiedzi dla modelu budynku jak na rys. 6

Wpływ jej ujawnia się głównie w przemieszczeniu górnej masy m_1 wynikającym z ruchu wahadłowego układu. Dla wymuszeń harmoniczných stwierdzono, że interakcja redukuje odpowiedź konstrukcji. Na tej podstawie w [63] sformułowano, zbyt pochopnie, ogólny wniosek, że interakcja przyczynia się do lepszego zachowania się budynków w czasie trzęsienia ziemi. W jednej z następnych prac, o czym później, autorzy wycofali się z tego wniosku. Dla badania zjawiska interakcji w przypadku drgań sejsmicznych przyjęto aproksymacyjny akcelerogram mający symulować drgania występujące w czasie trzęsienia ziemi. Porównywano prędkościowe spektrum odpowiedzi dla modelowego akcelerogramu z śred-

nioną krzywą prędkościowego spektrum odpowiedzi opracowaną przez Housner'a [30] (na podstawie akcelerogramów z rzeczywistych trzęsień ziemi) uzyskując dobrą zgodność wyników, co zdaniem autorów [69] świadczy o poprawnej symulacji drgań sejsmicznych przyjętym akcelerogramem. W następnej pracy tych samych autorów [72] przy przyjęciu nieco innego symulacyjnego akcelerogramu, wobec stwierdzenia, że zachowanie się układu interakcyjnego jak na rys. 6 jest silnie zależne od postaci krzywej prędkościowego spektrum odpowiedzi, wnioskuje się, że uśrednione krzywe spektralne Housner'a nie są adekwatnym narzędziem do badania interakcyjnej odpowiedzi. Z powodu wygładzenia i uśrednienia krzywych nie można uzyskać dokładnych zmian spektrum odpowiadających zwiększającemu się podstawowemu okresowi drgań własnych układu w przypadku uwzględnienia podatności podłoża.

Aby można było wykorzystać równania (4.7), odpowiadające harmonicznemu ruchowi podłoża, przyjęty modelowy akcelerogram rozkładano w szereg Fouriera. Wykazano, że z zupełnie wystarczającą dokładnością dla obliczeń praktycznych współczynniki A_i i B_i ($i = 1, 2$) zależne od częstości, można przyjąć jako pewne średnie wartości stałe (por. też [56]):

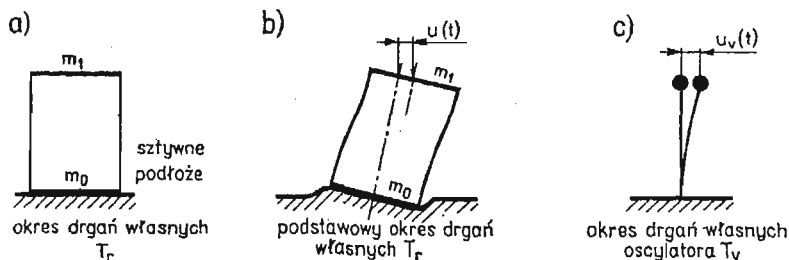
$$(4.8) \quad \begin{aligned} A_1 &= K_T = 4.4V_s^2 \varrho r, & A_2 &= D_T = 2.7 V_s \varrho r^2, \\ B_1 &= K_w = 2.3V_s^2 \varrho r^3, & B_2 &= D_w = 0.31V_s \varrho r^4. \end{aligned}$$

K_T i K_w nazywane są dynamicznymi sztywnościami ośrodka podłoża odpowiednio dla przemieszczeń translacyjnych i wahadłowych, zaś D_T i D_w radiacyjnym tłumieniem ośrodka podłoża odpowiednio dla ruchów translacyjnych i wahadłowych. Dla symulowanego ruchu sejsmicznego badano wpływ zmiany podłoża na odpowiedź różnego rodzaju jednokondygnacyjnych układów budynek-podłoże. Badanymi parametrami były:

$$(4.9) \quad \vartheta = \frac{u(t)_{\max}}{u_r(t)_{\max}}, \quad \vartheta^* = \frac{u_r(t)_{\max}}{u_v(t)_{\max}},$$

gdzie

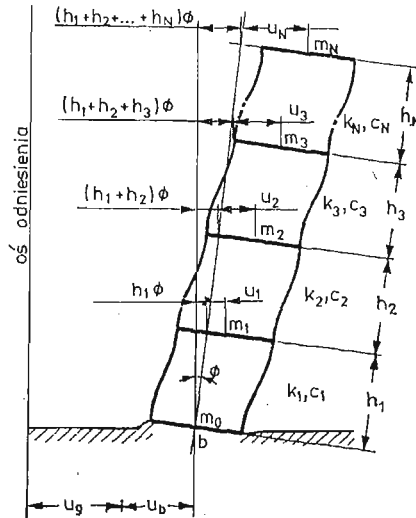
$u(t)_{\max}$ i $u_r(t)_{\max}$ są maksymalnymi giętnymi przemieszczeniami konstrukcji odpowiednio na podatnym i sztywnym podłożu, $u_v(t)_{\max}$ jest maksymalnym giętnym przemieszczeniem jednomasowego oscylatora o okresie drgań T_v równym podstawowemu okresowi drgań własnych interakcyjnego układu o trzech stopniach swobody (rys. 8 a, b i c). Im podłoże jest bardziej podatne, co wyraża się zmniejszaniem V_s , to ϑ maleje monotonicznie od wartości 1. Charakter zmian ϑ zależy też od własności dynamicznych budynku. Z ana-



Rys. 8. Interakcyjne parametry T_v , T_r , $\vartheta^* = \frac{u_r(t)_{\max}}{u_v(t)_{\max}}$.

lize wynika, że główny udział w całkowitym przemieszczeniu masy m_1 mają drgania-giętne budynku.

W [70] zajmowano się zjawiskiem interakcji dla budynków wysokich na przykładzie modelu jak na rys. 9 (jest to tzw. model budynku pracujący wyłącznie na ścinanie). Opierano się na założeniach uprzednio podanych, z tym, że wzbudzenia drgań miały charakter



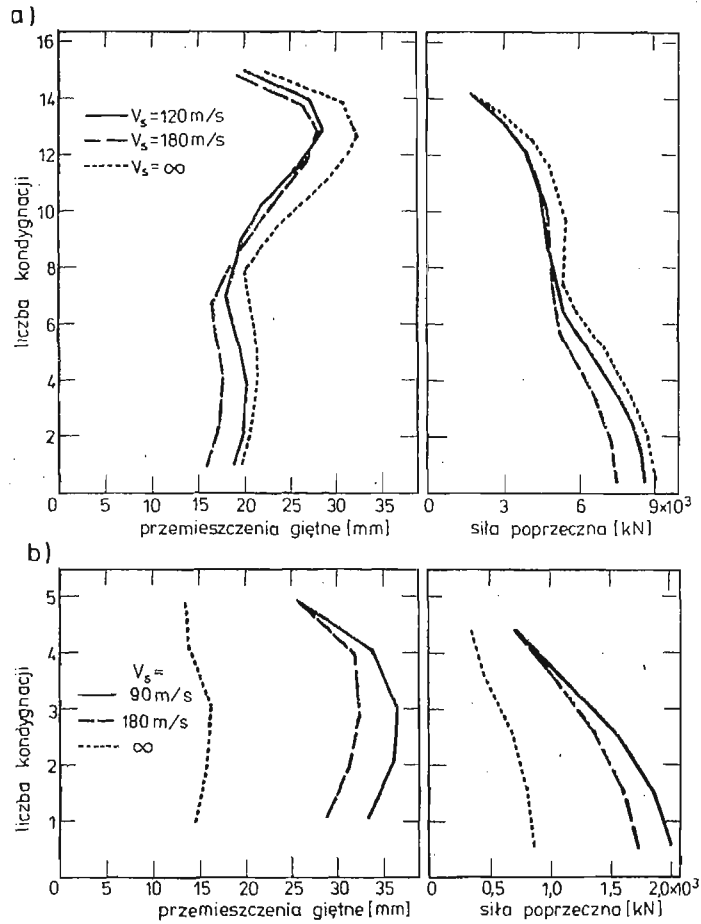
Rys. 9. Dynamiczny model budynku o N kondygnacjach [70]

sejsmiczny (nieustalony). Przy okazji badano też wpływ podatności podłoża na częstotliwości drgań własnych układu i wskazano, że wpływ ten jest duży dla wyższych częstotliwości. Wniosek ten spotkał się z krytyczną odpowiedzią TAJIMI [90], w której udowodniono, przyjmując model bardziej adekwatny dla rzeczywistego budynku, że dla wyższych częstotliwości wpływ podatności podłoża jest dużo mniejszy niż dla częstotliwości podstawowej i że wpływ ten tak na wyższe częstotliwości drgań własnych jak i odpowiedź układu (na wymuszenia sejsmiczne) z formami odpowiadającymi tym wyższym częstotliwościom praktycznie można pominąć. Na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych ukazało się wyjątkowo dużo teoretycznych prac traktujących o zagadnieniu dynamicznej interakcji. CASTELLANI [15] przebadał stosując transformację Laplace'a, całą serię budynków jak na rys. 6, analizując wpływ ciężaru i wymiarów fundamentów na zjawisko interakcji. Bazując na pracach PARMELEE i zespołu, w których stwierdzono, że w ostatecznych przemieszczeniach układu interakcyjnego jak na rys. 6, udział drugiej i trzeciej postaci przemieszczeń jest niewielki, zajmował się odpowiedzią sejsmiczną tych układów odpowiadającą tylko podstawowemu okresowi ich drgań własnych. Również FAGEL i LIU [23], [51] zajmowali się badaniem interakcji układów z rys. 6 i 9, lecz przy zastosowaniu transformacji Fouriera. Dokonywali oni numerycznej analizy odpowiedzi wielu układów przyjmując drgania swobodnego podłoża na podstawie akcelerogramów z rzeczywistych trzęsień ziemi. W numerycznej technice obliczeniowej zastosowali tzw. szybką transformację Fouriera. Potwierdzili oni uwagę TAJIMI z [90]. RAINER w [77] również zajmował się modelem budynku jak na rys. 6. Podał on metodę transformacji układu interakcyjnego z rys. 6 o trzech stopniach swobody w ekwi-

walentny układ o jednym stopniu swobody, co znacznie upraszcza badanie odpowiedzi interakcyjnych układów poddawanych złożonym działaniom sejsmicznym. Możliwe jest wówczas stosowanie techniki spektrów odpowiedzi. RAINER porównując odpowiedzi układów interakcyjnych i będących na sztywnym podłożu zwrócił uwagę na fakt, że wyniki mogą być bardziej wrażliwe na charakterystyki wymuszeń niż na podatność podłoża. Z uwagi na powyższe badał zjawisko interakcji dla szerokiego zakresu częstości wzbudzeń tak w ruchu ustalonym jak i stochastycznym. W [79] zastosowano z kolei całą Fouriera dla wyrażenia zależności między przemieszczeniami podłoża i siłami interakcyjnymi. Praca reprezentuje pewne nowe podejście do zagadnienia interakcji lecz bez jakichkolwiek wniosków. Bardzo obszerną pracę z zakresu interakcji budynek-podłoże opublikowali JENNINGS i BIELAK [37]. Rozpatrywanym modelem jest układ z rys. 9 mający N kondygnacji i $N+2$ stopnie swobody, poddawany ustalonym i sejsmicznym wymuszeniom. Zaproponowali oni nową metodę obliczania odpowiedzi na w/w obciążenia kinematyczne budynków wielokondygnacyjnych posadowionych na sprężystej półprzestrzeni. Odpowiedź taka może być zapisana jako suma odpowiedzi na zmodyfikowane wzbudzenie $N+2$ układów (oscylatorów) o 1-ym stopniu swobody spoczywających na sztywnym podłożu. Powyższe osiągnięto stosując technikę współrzędnych normalnych i otrzymując zastępcze modele liniowe, z ekwiwalentnym wiskotycznym tłumieniem (jeśli nawet wyjściowy interakcyjny układ nie posiadał klasycznych normalnych form drgań).

Można podać następujące ogólne wnioski, spostrzeżenia i uwagi w świetle dotychczas omówionych prac teoretycznych (typowych dla zagadnienia interakcji):

- a) Tak dla ustalonych jak i nieustalonych drgań swobodnego podłoża działających na badane budynki (modele) o jednej i wielu kondygnacjach, podatność podłoża określana parametrem V_s , ma wpływ na reakcję budynku tylko wówczas, gdy $V_s \leq 300$ m/s, dla większych V_s podłoże można traktować jako sztywne.
- b) Współczynnik Poissona ośrodka podłoża wpływa na odpowiedź sejsmiczną układu interakcyjnego. Badania numeryczne wskazują, że zmiana ν może wpływać na wzrost lub spadek siły poprzecznej u dołu budynku; dla rozpatrywanej klasy budynków te zmiany Q są małe i dlatego większość obliczeń wykonywano dla $\nu = 0$ (sporadycznie dla $\nu = 0,25$ lub $0,40$).
- c) Dla wzbudzeń ustalonych podatność podłoża wpływa na redukcję giętnych przemieszczeń rozpatrywanych modeli budynków względem wartości otrzymywanych dla przypadku sztywnego podłoża. W ogólnym przypadku (dla wymuszeń typu sejsmicznego) podatność podłoża może zmniejszać lub zwiększać giętne odpowiedzi budynków w zależności od charakterystyk dynamicznych obiektów, rodzaju podłoża i typu wzbudzenia sejsmicznego. Powyższe ilustrują obwiedniowe odpowiedzi modeli budynków (z rys. 9) o 5 i 15 kondygnacjach podane na rys. 10. Tak więc zachowanie się układów interakcyjnych budynek-podłoże podlegających działaniom sejsmicznym nie może być przewidywane na podstawie wniosków wynikających z odpowiedzi tych układów na wzbudzenia ustalone.
- d) Największe przyspieszenia w poziomie poszczególnych kondygnacji występują wtedy, gdy budynek posadowiony jest na sztywnym podłożu, a dominująca częstość przebiegów drgań podłoża osiąga podstawową częstość drgań własnych; interakcja spowodowana podatnym podłożem może wówczas zredukować te przyspieszenia.



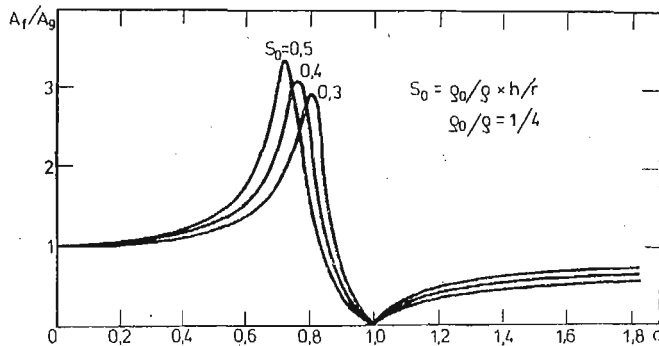
Rys. 10. Obwiednie odpowiedzi budynków 5 i 15 kondygnacyjnych podlegających działaniu sejsmiczemu — na podstawie akcelerogramu z trzęsienia ziemi w El Centro, 1940, [70]: a) w kierunku P-P, b) w kierunku W-Z

- e) Wpływ przemieszczeń wynikających z ruchu wahadłowego wzrasta wraz z wysokością budynku. Efekt interakcji konstrukcja-podłoże na odpowiedź sejsmiczną dla budynków wielokondygnacyjnych ujawnia się głównie w postaci przemieszczenia odpowiadającego podstawowej częstości drgań. Chociaż wszystkie częstości rezonansowe układu maleją jako wynik interakcji, tylko częstości podstawowe maleją w sposób istotny, gdy grunt staje się bardziej podatny. Z wyjątkiem budynków krótkich spadek częstości wynika bardziej z przemieszczeń wahadłowych niż z przemieszczeń translacyjnych fundamentu.
- f) Dla masywnych i sztywnych konstrukcji o niskim stosunku wysokości obiektu do wysokości fundamentu (o dużej masie m_0), względne przemieszczenia fundamentu i ruch wahadłowy wpływają na redukcję częstości i na efekt interakcji. Wzrost masy fundamentu nieco redukuje odpowiedź konstrukcji i w pewnym stopniu przyczynia się do jej korzystniejszego zachowania się w czasie trzęsienia ziemi. Powyższe wynika z dy-

sypacji energii do gruntu na skutek ruchu masy m_0 . Dla budynków wielokondygnacyjnych wpływ masy m_0 tak na zmianę częstości drgań własnych jak i odpowiedź budynku na drgania sejsmiczne jest zanedbywalnie mały. Nawet dla budynków o jednej kondygnacji wpływ masy m_0 na dynamiczne własności układu jak na rys. 6 może być pominięty.

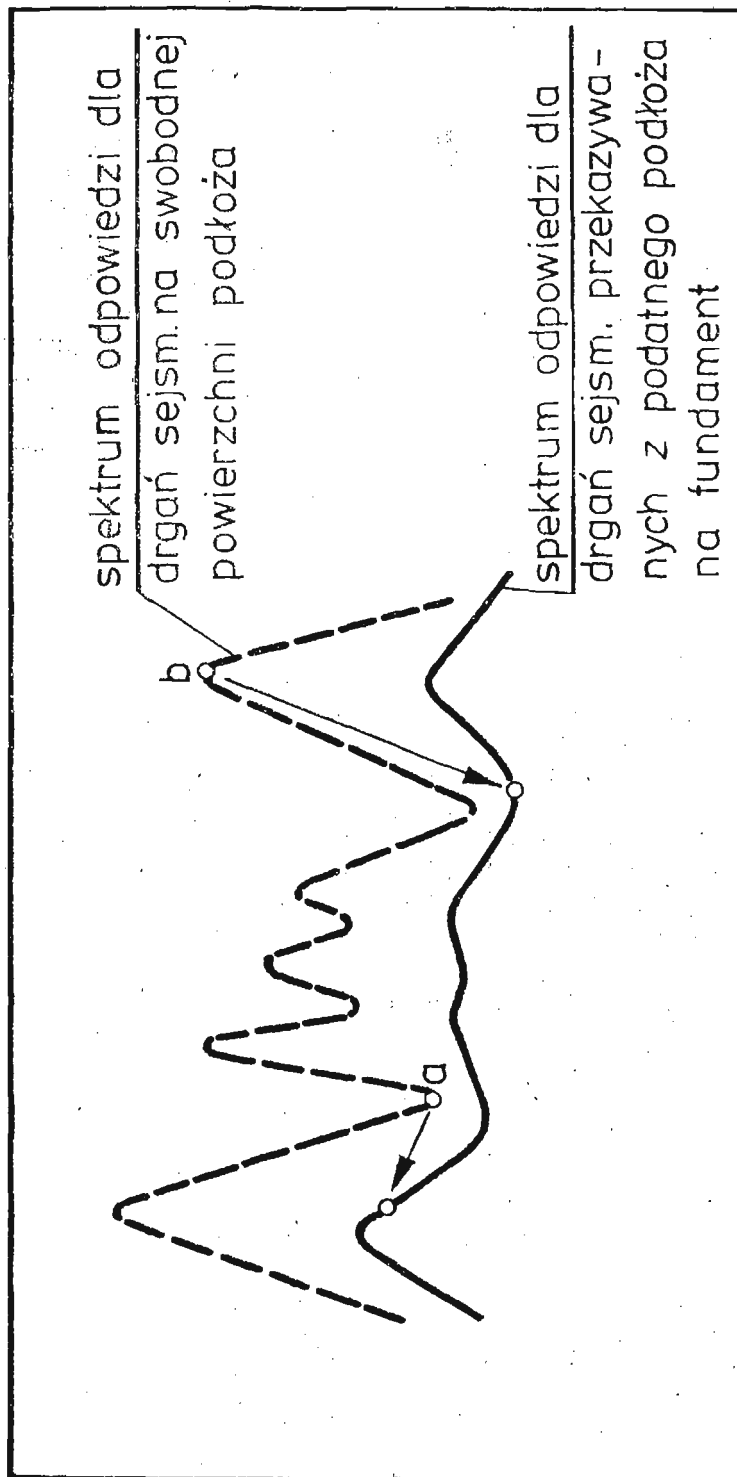
- g) Nie ma istotnego efektu interakcji dla bardzo lekkich i podatnych konstrukcji posadowionych na względnie sztywnym podłożu. Dla sztywnych konstrukcji spoczywających na względnie podatnym podłożu wpływ interakcji może być znaczący.

W kontekście dotychczas omówionych prac teoretycznych należy jeszcze wymienić prace SATŌ i YAMAGUCHI [80], [81]. W pracach tych przyjęto wszystkie wymienione na początku niniejszego punktu założenia. Badanymi modelami były: a) sztywna bryła podlegająca harmonicznym poziomym drganiom translacyjnym i wahadłowym wokół osi poziomej, b) układ jak na rys. 6 z zanedbywalnie małą masą fundamentu, przyjmowano więc że $m_0 = 0$, c) układ (pręt) ciągły pracujący wyłącznie na ścinanie. Wykazano, co jest zaskakujące i z praktycznego punktu widzenia wątpliwe, że jeśli częstości harmonicznym poziomym drgań wymuszających podłoża pokrywają się z częstościami drgań własnych uproszczonego układu z rys. 6 (z masą $m_0 = 0$) to fundament układu nie doznaje ruchu (por. rys. 11). Dla układu ciągłego jest kilka stref z zerowymi wartościami amplitud funda-



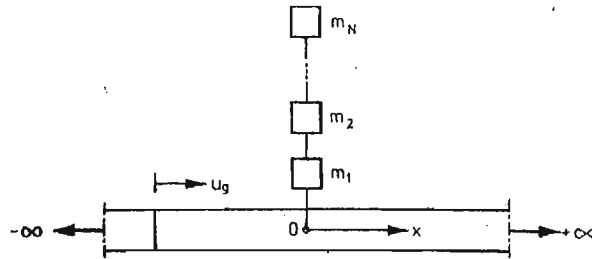
Rys. 11. Stosunek amplitud drgań podstawy fundamentu (A_f) układu z rys. 6 (przy $m_0 = 0$) do amplitud drgań swobodnego podłoża (A_g) [80]. ρ_0 = gęstość materiału budynku.

mentu (dla praktycznego zakresu częstości drgań wymuszających). Prace [80] i [81] zapoczątkowały całą serię publikacji uprzednio omówionych i podobnie badających interakcję układu budynek-podłoże. HOUSNER i CASTELLANI [31] wykazali, że odstępianie od stosowanego założenia, że fundament jest sztywny ma niewielki wpływ na zjawisko interakcji. Wg. WHITMAN'a [21], [104], z projektowego punktu widzenia wpływ interakcji w przypadku obciążeń sejsmicznych jest prawie zawsze korzystny z uwagi na spadek naprężeń w konstrukcji. Powyższe wynika z badania zmian spektrów odpowiedzi siły poprzecznej i momentu zginającego. Z rys. 12 widać, że z powodu większego tłumienia w układzie interakcyjnym konstrukcja-podłoże (niż w samej konstrukcji) odpowiednia krzywa wszędzie położona jest poniżej tej która odpowiada konstrukcji na sztywnym podłożu. Jeśli konstrukcja ma częstość drgań własnych odpowiadającą dolnemu punktowi na krzywej spektralnej (punkt „a” na rys. 12), to efekt interakcji może ujawnić się niewielkim przy-



Rys. 12. Typowy efekt interakcji konstrukcja-podłoże na spektra odpowiedzi [103]

rostem odpowiedzi. Jeśli jednak punkt na krzywej spektralnej odpowiadający częstotliwości drgań własnych konstrukcji na sztywnym podłożu leży blisko lub na „piku” (punkt „b” na rys. 12) wpływ interakcji wyrazi się istotnym spadkiem odpowiedzi (symbolicznie zaznaczono to strzałką). W projektowaniu obiektów na tych samych terenach sejsmicznych należy uwzględnić możliwe różne ruchy podłoża (w pewnym zakresie), efekt których może być aproksymowany wygładzonymi lub uśrednionymi spektrami (por. też [30]) i wówczas przesunięcie w zakresie częstotliwości drgań własnych na rys. 12 będzie mieć mały wpływ na maksymalne odpowiedzi. Posługując się wygładzonymi spektrami przy uwzględnieniu interakcji otrzymuje się zawsze spadek w odpowiedziach układów. Zastrzeżenie dotyczące posługiwania się wygładzonym spektrum było już przedstawione uprzednio. Kolejną grupę prac zasługujących na omówienie są publikacje SCAVUZZO i zespołu [85], [86], [87]. W [85] analizowano interakcję między poziomym ruchem swobodnego podłoża i poziomymi drganiami fundamentu wielomasowego obiektu modelując podłoże jako jednowymiarowy układ (belkę nieskończenie długą) — por. rys. 13. W pozostałych dwu pracach



Rys. 13. Model układu interakcyjnego wg [85]

podłoże traktowano jako ośrodek dwuwymiarowy (półpłaszczyznę sprężystą). Wyróżniono poziome drgania swobodnej powierzchni podłoża $u_g(t)$ oraz poziome drgania środka podstawy fundamentu $u_b(t)$. Siła bezwładności fundamentu wynikająca z jego przyspieszenia $\ddot{u}_b(0, 0, t)$ ma postać [86]

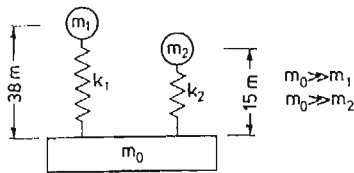
$$(4.10) \quad F(t) = - \sum N_i \omega_i \int_0^t \ddot{u}_b(0, 0, \tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau,$$

$$N_i = \frac{(\sum_k m_k X_i(x_k))^2}{\sum_k m_k X_i(x_k)}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{A},$$

gdzie: A — podstawa powierzchni fundamentu. W oparciu o rozwiązanie zagadnienia otrzymano $u_b(t)$ i $\ddot{u}_b(t)$ jako funkcje $f(t)$, $\ddot{u}_g(t)$ i V_s . Funkcje $u_g(t)$ przyjmowano w postaci różnego typu pseudosinusoid, np.

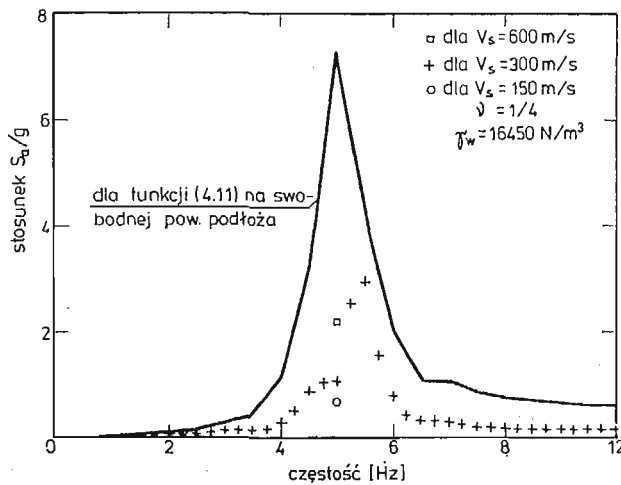
$$(4.11) \quad \ddot{u}_g(t) = \begin{cases} \frac{5t}{8} \sin 10\pi t, & 0 \leq t < 0,8 \text{ s}, \\ \frac{5(2-t)}{14} \sin 10\pi t, & 0,8 < t < 2,0 \text{ s}, \\ 0, & t > 2,0 \text{ s}, \end{cases}$$

i akcelerogramu z trzęsienia ziemi Golden Gate Park, 1957. Badania interakcji prowadzono na dwu przykładach: budynku Alexander⁴⁾ w San Francisco oraz siłowni nuklearnej modelowanej układem jak na rys. 14. Efekt interakcji oceniono przez porównanie spektrów odpowiedzi dla w/w typów wzbudzeń drgań odpowiadających swobodnej powierzchni podłoża $u_g(t)$ i obliczanych dla fundamentu $u_b(t)$. Na rys. 15 podane jest przykładowo przyspieszeniowe spektrum odpowiedzi dla $u_g(t)$ określonego przez (4.11) i obliczonego



Rys. 14. Model dynamiczny siłowni nuklearnej [86].

dla fundamentu $u_b(t)$ układu z rys. 14 (z $m_2 = 0$). Interakcyjne spektrum wyznaczone w całym zakresie rozważanych częstości tylko dla $V_s = 300$ m/s, a dla innych prędkości fali S wartości spektrum podane są tylko dla częstości 5,0 Hz odpowiadającej częstości drgań własnych układu z rys. 14 (z $m_2 = 0$) w przypadku masy m_0 sztywno związanej z podłożem. Dla częstości 5,0 Hz redukcja (jako efekt interakcji) w wartościach np. dla

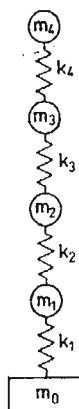


Rys. 15. Spektrum odpowiedzi dla przebiegów drgań: swobodnego podłoża (wg funkcji [4.11]) i środka podstawy fundamentu układu z rys. 14 (z $m_2 = 0$) dla wybranych V_s .

$V_s = 300$ m/s wynosi $\frac{1.08g}{7.18g} = 0.165$, a więc jest wyjątkowo duża (83.5%). Z badania spektrum odpowiedzi dla $\ddot{u}_g(t)$ na podstawie akcelerogramu z trzęsienia ziemi Golden Gate Park oraz dla $\ddot{u}_b(t)$ budynku Alexander odpowiadającego trzem pierwszym częstościom drgań własnych tego budynku, wynikło, że podłoże z $V_s > 300$ m/s ma również znaczny wpływ na zjawisko interakcji (niezgodność w tym względzie z wnioskiem PARMELEE).

⁴⁾ Słynnego z uwagi na jego wielokrotne badania teoretyczne i doświadczalne na działania dynamiczne w tym i sejsmiczne

Nie rozpatrywano tu w ogóle drgań wahadłowych i nie brano pod uwagę spadku częstości drgań własnych układów na skutek podatności podłoża przy ocenie efektywności interakcji na krzywych spektralnych. Inne wnioski z ostatnich trzech prac pokrywają się z uprzednio podanymi. W 1968 r. SCAVUZZO i RAFTOPOULUS [84] na zlecenie Uniwersytetu w Toledo wykonali raport przeglądowy (u nas niedostępny) na temat interakcji konstrukcja-podłoże. SAVINOV i UZDIN [82] podobnie jak w [85] przyjęli podłoże w postaci sprężystego pręta (półnieskończenie długiego) lecz skierowanego pionowo i podlegającego drganiom o tym samym kierunku z masą nad prętem reprezentującą konstrukcję połączoną (z prętem) sprężyną. Zupełnie podobną problematykę, lecz przy założeniu, że pręt jest lepkosprężysty, omawiają prace [44a] i [97]. Inną metodę badania zjawiska przedstawili LYCAN i NEWMARK [55]. Głównym celem pracy jest pokazanie wpływu cech dynamicznych różnych konstrukcji, przez wariantowanie modelu jak na rys. 16, na przebiegi drgań ich fun-



Rys. 16. m_0 — reprezentuje podłoże, pozostałe elementy układu przedstawiają model konstrukcji [55].

damentów podlegających ruchom sejsmicznym lub parasejsmicznym. Efekty interakcji wykazywane są poprzez spektra odpowiedzi. W [5] zwrócono uwagę na niedostatek modelu z rys. 16 z powodu reprezentowania podłoża przez jedną masę. Oryginalne podejście do zagadnienia interakcji przedstawiają KANAI i YOSHIKAWA w [40]. Przyjmują oni, że jeśli poziomą falę wędrującą pionowo do góry na swobodnej powierzchni podłoża można zapisać w formie

$$(4.12) \quad u_g = F(t),$$

to przekazana na fundament w miejscu styku budowli z podłożem ma postać

$$(4.13) \quad u_f = nF(t), \quad |n| < 1,$$

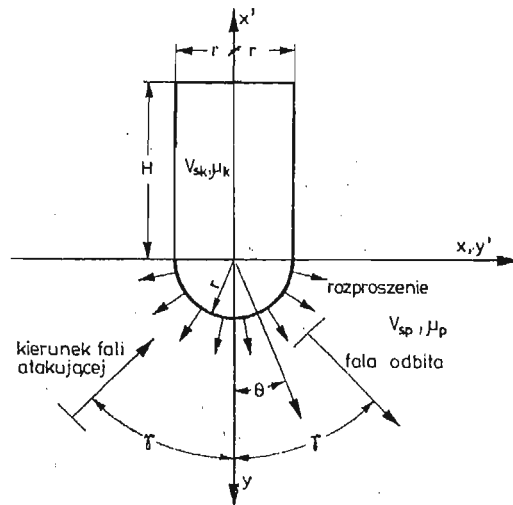
gdzie n jest współczynnikiem przekazywania się fal z gruntu na konstrukcję.

Z kolei na szczycie budowli o wysokości H

$$(4.14) \quad u_d = nF\left(t - \frac{H}{V}\right),$$

gdzie V jest prędkością fali w konstrukcji. Dalej przyjmują, że fale ulegają wielokrotnemu odbiciu na styku gruntu i konstrukcji ze współczynnikiem $|\beta| < 1$ i na szczycie budynku ze współczynnikiem 1 (pominięto tłumienie w materiale konstrukcji). W pracy podano

związki na przemieszczenie u dołu i u góry budynku, stwierdzając, że mając pomierzone drgania na szczycie budynku można będzie, znając tylko parametr konstrukcji $\frac{H}{V}$, określić przebieg drgań w podłożu budynku. Wyniki teoretyczne porównano z pojedynczym pomiarem doświadczalnym otrzymując wyjątkowo dobrą zgodność. W części drugiej pracy [40] rozwinięto koncepcję z części pierwszej. Z kolei w [41] wykorzystując niektóre dane z [40] analizowano propagację płaskiej fali poziomej wędrującej pionowo w dwuwarstwowym ośrodku, a następnie badano zagadnienie przekazywania się tej fali z ośrodka dolnego na budynek traktowany jako jednorodna górna warstwa. Ustalono analityczny związek na współczynnik n , a następnie określono jego konkretną wartość na podstawie danych pomiarowych. Pomiary składowych poziomych przemieszczeń drgań pochodzących od kilku bardzo słabych trzęsień ziemi wykonano na dwu stanowiskach — na płycie fundamentowej budynku (o 17 kondygnacjach) i na powierzchni gruntu w pobliżu budynku. Amplitudy drgań fundamentu budynku wyniosły średnio 64% wartości amplitud na powierzchni gruntu. Należy zgłosić szereg wątpliwości w odniesieniu do prac [40] i [41]. Związki analityczne otrzymano przy założeniu, że drgania są sinusoidalne, dane pomiarowe wzięto z przebiegów drgań bardzo nieregularnych. Wyznaczony współczynnik przekazywania się drgań n dotyczy jednego konkretnego budynku. Współczynnik ten musi zależeć od cech dynamicznych budynku i od charakteru dochodzących drgań o czym w pracach tych się nie wspomina. Nie wiadomo też w jakiej odległości od budynku mierzo no drgania na gruncie i czy zatem na charakter przebiegów tych drgań nie miało wpływu oddziaływanie budynku. Serię prac z zakresu interakcji opublikowali LUCCO i TRIFUNAC z zespołem [52], [54], [95], [100], [101]. Badano tu proces interakcji między obiektami reprezentowanymi przez nieskończone długie ściany pracujące wyłącznie na ścinanie i posadowione na sztywnych fundamentach, a podłożem traktowanym jako półprzestrzeń sprężysta (rys. 17). Fale sejsmiczne przyjmowane jako harmoniczne dochodzące do fun-

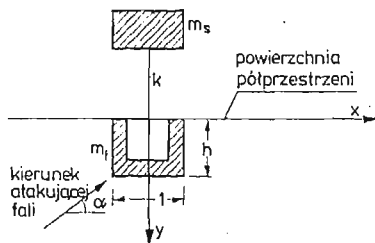


Rys. 17. Ściana pracująca na ścinanie, fundament oraz podłoże. V_{sp} i V_{sk} — odpowiednio prędkości fali S w podłożu i konstrukcji, μ_p i μ_k — odpowiednio stałe Lamégo dla konstrukcji i podłoża

damentów i swobodnej powierzchni podłoża z głębi ziemi pionowo lub ukośnie wywołując poziomy ruch podłoża, fundamentu i ściany w kierunku jej osi podłużnej (w kierunku z t.j. prostopadle do płaszczyzny rys. 17). Rozkład ruchu wzdłuż osi z jest stały. Badano, poprzez stosunek amplitud przemieszczeń fundamentu do amplitud drgań swobodnego podłoża, wpływ następujących parametrów na interakcję: masy fundamentu (długości jednostkowej wzdłuż osi podłużnej ściany, masy ściany (w zależności od H i r — por. 17), V , ośrodka podłoża i materiału ściany, szerokości $2r$, częstości wzbudzenia oraz kształtu przekroju poprzecznego fundamentu. Przyjmowano, że fundamenty są zagłębione w podłożu i że mają następujące kształty: pół koła (założenie najczęściej przyjmowane) oraz pół elipsy (dwa warianty). Ponadto badano interakcje, poprzez podłoża, pomiędzy dwu oraz kilku nieskończenie długimi ścianami usytuowanymi równolegle. W tym ostatnim przypadku przy ustalonym kształcie przekroju fundamentu (w postaci pół koła), materiale ścian i podłoża, parametryzowano odległości między ścianami i wymiary ich przekroju poprzecznego. Z analizy wynikało, że:

- jeśli częstość wzbudzenia równa się częstościom drgań własnych układu jak na sztywnym podłożu — przemieszczenia fundamentu wynoszą zero,
- interakcyjny efekt spowodowany obecnością drugiej konstrukcji jest istotny dla niskich częstości (a więc jak dla drgań sejsmicznych) i w sąsiedztwie częstości drgań własnych, (tej drugiej konstrukcji) liczonych przy niepodatnym podłożu; dla wysokich częstości wystarczy uwzględnić interakcję jak dla istnienia pojedynczego obiektu. Interakcja jest szczególnie istotna dla małej ściany usytuowanej blisko dużej,
- zwiększone zagłębienie fundamentu powoduje większe rozproszenie energii.

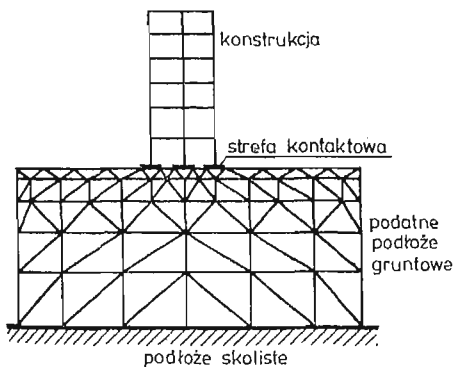
Należy tu jeszcze dodać, że OKAMOTO w [66] omawia kilka prac japońskich, w których badane jest zjawisko interakcji dla pojedynczych obiektów typu przyjętego przez LUCCO, TRIFUNAC'a i zespół. Z w/w pracami łączą się dwie publikacje THAU'a i UMEK'a [92] [93].



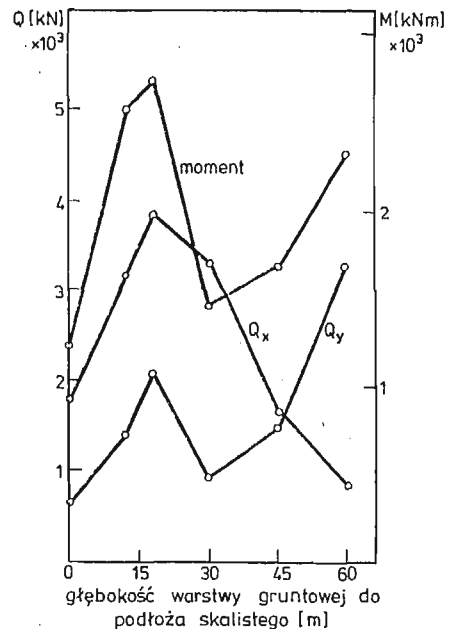
Rys. 18. Geometria modelu wg [93]

Pierwsza dotyczy badania odpowiedzi dynamicznej zagłębionego w gruncie fundamentu o podstawie prostokątnej, druga układu (patrz rys. 18) złożonego z zagłębionego fundamentu (masa m_f) i sztywnej konstrukcji naziemnej o masie m_s , połączonych bezmasową ścianą pracującą na ścinanie o charakterystyce K . Wzbudzenie ruchu układów przyjmowano w postaci impulsu lub wymuszenia harmonicznego. Badano wpływ różnych parametrów (takich jak h i α — por. rys. 18) na odpowiedź fundamentu i konstrukcji. Wzrost h redukuje szczytowe wartości odpowiedzi obu elementów układu. Wpływ wykopyt na przekazywanie się powierzchniowych fal Rayleigh'a na obiekt posadowiony na dnie tego wykopyt badał BROWN [12]. Przesłanką do podjęcia badania tego problemu jest fakt wytłumienia się fal powierzchniowych wraz z głębokością. Treść pracy częściowo odbiega

od zapowiedzi podanej we wstępie artykułu. Spadek przekazywanej energii jest znaczący gdy podłoże jest luźnym piaskiem i gdy wysokość obiektu jest równa lub niewiele większa od głębokości i wykopu. Konstrukcja nie powinna się stykać ze ścianami wykopu. Autor [12] przypuszcza, że dla obiektów bardziej wysokich o podstawowym okresie drgań 2,5 - 4,5 s spadek przekazywanej energii będzie nieistotny dla długich fal Rayleigh'a; „efekt wykopu” jak i innych przeszkód jest wówczas nieistotny. W ostatnich latach ukazało się szereg prac z zakresu interakcji w których wykorzystano metodę elementów skończonych [1], [3], [7], [19], [46], [47], [98], [102], [105]. Metoda elementów skończonych (MES) pozwala na analizę złożonych układów interakcyjnych. Najwięcej zastosowań MES w zagadnieniach interakcji notuje się w badaniu zapór, którymi tu jednak się nie zajmujemy i z tego powodu prac tych nie podaje się. MES znalazła głównie zastosowanie w badaniu tzw. podwójnej interakcji: skaliste podłoże — gruntowe podłoże — budynek. Ostatnio, coraz częściej głoszone są poglądy, że intensywność trzęsienia ziemi należy podawać nie w odniesieniu do powierzchni ziemi, a następnie uwzględniać lokalne warunki geologiczne zgodnie z mikrorejonezacją sejsmiczną, lecz względem skalistego podłoża zalegającego pod warstwami gruntu. Zachodzi wówczas konieczność poznawania mechanizmu przekazywania się drgań sejsmicznych z podłoża skalistego na podatne warstwy wyżej leżące, a następnie na fundamenty obiektów. Na ogół układy interakcyjne traktowane są jako płaskie, wyjątkowo jako trójwymiarowe [108]. Zdaniem [98] istnieje wiele trudności w zastosowaniu MES w zagadnieniach interakcji z uwagi na: potrzebę gęstej siatki wynikającej z propagacji fal, potrzebę analizy zachowania się ogromnego masywu gruntowego oraz warunki

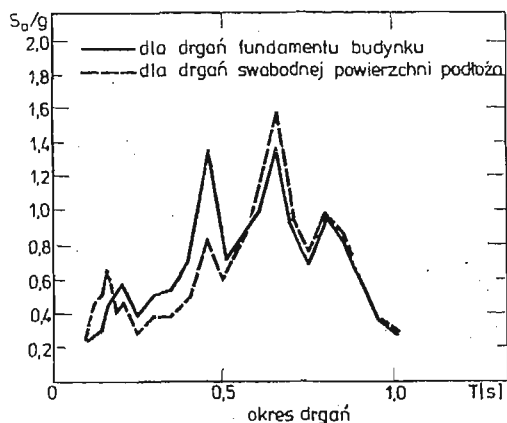


Rys. 19. Siatka MES typowego układu interakcyjnego [19]



Rys. 20. Maksymalne siły poprzeczne Q i momenty zginające M w poziomie 1-ej kondygnacji modelu budynku; x i y — odpowiednio kierunki osi poprzecznej i podłużnej budynku, $\xi = 10\%$ [101]

brzegowe między rozważanym masywem gruntowym, a otaczającym podłożem. Na rys. 19 pokazany jest przykładowy interakcyjny model z zastosowaniem siatki dla MES (por. [19]). Na rys. 20 przytoczone są (por. [102]) wykresy reprezentujące siły poprzeczne i moment zginający w modelu dziesięciokondygnacyjnego budynku o konstrukcji stalowej w poziomie 1-ej kondygnacji w zależności od głębokości warstwy gruntowej (do podłoża skalistego) dla wymuszenia sejsmicznego (przez 12s) odpowiadającego trzęsieniu ziemi Eureka (Kalifornia, 1954). Biorąc pod uwagę w/w trudności w stosowaniu MES, w [98] zaprezentowano metodę odrębnego potraktowania podłoża (niezależnie od obiektu) dla otrzymania jego dynamicznych podatnościowych charakterystyk, a następnie są one uwzględniane w równaniach ruchu konstrukcji. W [45] zwrócono uwagę na pewne niedostatki proponowanej metody i ograniczony zakres jej zastosowania, co spowodowało opublikowanie drugiej uzupełniającej części omawianej pracy [99]. KHANNA [47]⁵⁾ badał wzajemne oddziaływanie konstrukcji o 3-ch kondygnacjach i warstwa gruntu zalegającą na skalnym podłożu na głębokości 10 i 30 m. Obliczenia prowadzono przyjmując dwa odmienne rodzaje gruntu. Drgania sejsmiczne przyjęto na podstawie akcelerogramów z rzeczywistych trzęsień ziemi. Podłoże przyjmowano jako półprzestrzeń sprężystą. Z badań wynika, że podatność gruntu mało wpływa na podstawową częstość drgań własnych konstrukcji, natomiast wpływ tej podatności jest duży dla 2-ej i 3-ej częstości. Spadek tych dwu ostatnich częstości dla warstwy gruntu o 10 m może wynosić odpowiednio 20 i 50%, a dla warstwy o 30m, 70 i 85% (dla bardzo podatnego gruntu). Ten interesujący fakt



Rys. 21. Spektra odpowiedzi, okres drgań własnych budynku $T_w = 0,19$ s

sprzeczny zresztą z wielu dotychczasowymi wynikami badań, może mieć duże znaczenie praktyczne i byłoby dobrze potwierdzić go doświadczalnie. Szczególnie ważną rolę odgrywa interakcja w obiektach siłowni nuklearnych. Okazuje się że dla tego typu konstrukcji wpływ interakcji dla pewnych częstości (jeśli są dominującymi) może ujawnić się (analizę prowadzono przy użyciu MES) bądź wzrostem, bądź spadkiem odpowiedniego spektrum

⁵⁾ por. też. *Sowremiennoje sostojanije teorii sejmstojkosti i sejmstojkije sooruzenija*, Moskwa 1973; sprawozdanie z IV Międzynarodowej Konferencji Inżynierii Sejsmicznej, Chile, 1969, a wykonane przez zespół pod redakcją S. W. Poljakowa.

odpowiedzi (por. rys. 21, [3]): Efekt interakcji może być znaczny nawet dla $V_s > 300$ m/s gdy dominującą częstotliwością w akcelerogramie będzie $f > 2,5$ Hz.

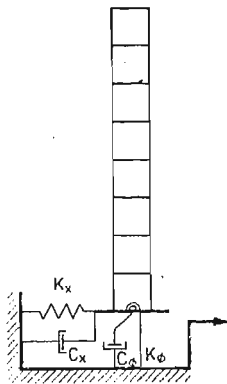
Wpływ czasu trwania ruchu podłoża zbliżonego do działania sejsmicznego na zachowanie się długich obiektów badano w pracy [11]. W pracy [49] rozpatrywano drgania obiektów typu wieżowego z uwzględnieniem sprężystych i bezwładnościowych własności podłoża traktowanego jako jednorodna półprzestrzeń sprężysta. W pracach [25], [26] podano spektra odpowiedzi układu o 1-y stopniu swobody posadowionego na uwarstwowionym podłożu traktowanym jako lepkosprężysta półprzestrzeń. Działanie sejsmiczne dochodzące z głębi ziemi traktowano jako proces stacjonarny. Uwzględniono wielokrotne odbijanie się fal w przyjętym uwarstwowionym podłożu. Współpracę konstrukcji z podłożem, na którym obiekt wsparty jest punktowo omawia KARCIWADZE w [43]. Przyjęto konstrukcję jako układ dyskretny, podłoże jako ośrodek ciągły. Wprowadza się funkcję wymuszenia reprezentującego działanie sejsmiczne na powierzchni swobodnego podłoża i dodatkową funkcję reprezentującą zmianę ruchu gruntu wynikającą z istnienia obiektu. Praca kończy się zestawieniem równań. Budową równań ruchu dla różnych prostych układów posadowionych na podatnym podłożu (jednorodna półprzestrzeń i półpłaszczyzna sprężysta, odmienne warstwy sprężyste) zajmują się prace [44], [83]. W równaniach tych uwzględnia się różne koncepcje tłumienia. Równania te są zestawione z myślą o budowie odpowiedzi spektralnych dla działań sejsmicznych. Wiele ukazało się prac, w których omawiana jest interakcja między podłożem a prostymi wyidealizowanymi układami takimi jak płyty (najczęściej kołowe) i elementy prostopadłościenne (mające reprezentować stopy fundamentowe lub fundamenty pod maszyny). Układy te poddawano działaniu drgań ustalonych, drgań symulujących trzęsienia ziemi oraz drgań otrzymanych na podstawie akcelerogramów z rzeczywistych trzęsień ziemi. Przyjmowano różne koncepcje podłoża. Badania tych prostych układów mogą być pomocne w analizie interakcji układów bardziej złożonych jak np. budynki czy obiekty przemysłowe⁶⁾. Bogaty spis literatury dotyczący w/w układów podany jest w [46], [53], [64], [78]. Z tego zakresu należy też odnotować jedną pracę polską MINOROWICZA [62]. W kontekście omawiania prostych układów interakcyjnych należy wymienić układy „podłoże-pała fundamentowy” poddawane różnym obciążeniom dynamicznym a głównie drganiom sejsmicznym. Kilka prac z tego zakresu przedstawiono w czasie IV-tej Międzynarodowej Konferencji Inżynierii Sejsmicznej odbytej w Chile w 1969 r⁷⁾. Przedstawione wyniki dotyczyły głównie zachowania się bloków fundamentowych na palach oraz samych pali zagłębionych w gruncie. Poza jedną wszystkie prace miały charakter teoretyczny. Prawie we wszystkich przedstawionych pracach przyjmowano, że podłoże stanowi półprzestrzeń sprężystą. Odmianą koncepcję podłoża, mniej ogólną ale cechującą się prostotą przyjęli HOUSNER i MERRIT [58]. Podłoże przyjęli oni jako układ dyskretnych elementów sprężystych (sprężyn) o stałych charakterystykach podlegających deformacjom w ruchu wahadłowym budynków. Pominęto poziomą podatność podłoża. Badano wpływ podatności podłoża na zachowanie się 5, 10 i 15 kondygnacyjnych budynków pracujących na ścinanie poddanych działaniom sejsmicznym reprezentowanym przez akcelerogramy z rzeczywistych trzęsień ziemi. Budynki i ich kinema-

⁶⁾ Przykładem tego były prace Parmelee i zespołu, w których wykorzystano rozwiązania Bycroft'a [13].

⁷⁾ Por. Proc. of the fourth world conf. on earth. eng., Chile, 1969 oraz przypis na str. 520.

tyczne obciążenia modelowano na specjalnie budowanych analogach elektrycznych. Badania prowadzono dla szerokiego zakresu zmienności cech podłoża. Stwierdzono, że siła poprzeczna u podstawy wysokich budynków zmienia się w niewielkim stopniu względem wartości otrzymanych w przypadku sztywnego podłoża. Badano też wpływ podatności podłoża na podstawową częstość drgań własnych. (Zmniejsza się o ok. 10%). Otrzymany wynik w tym względzie jest zgodny z rezultatami podawanymi w literaturze (a w szczególności w [48]). Koncepcja traktowania podłoża jako niezależnych odkształcalnych sprężyn i badanie zmian częstości drgań własnych różnych układów na skutek uwzględnienia podatności obrotowej i poziomej podłoża jest powszechnie przyjmowana w literaturze radzieckiej.

Podobną koncepcję dyskretyzacji podłoża przyjął też TSAI [96] przyjmując sprężystą podatność i tłumienie wiskotyczne podłoża w kierunku poziomym jak i dla ruchu obrotowego (por. rys. 22). W bardzo interesującej pracy [96] zaproponował on nową metodę



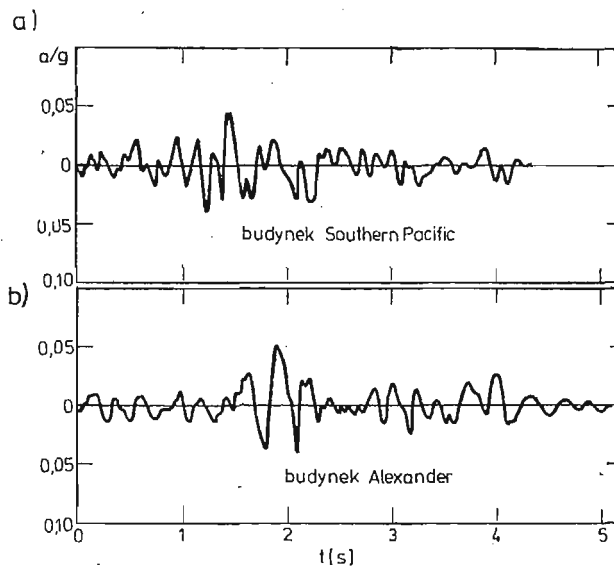
Rys. 22. Model interakcyjny wg [96]

określenia tłumienia modalnego dla interakcyjnych wielokondygnacyjnych budynków stosując sposób współrzędnych normalnych (przez znajdowanie ekwiwalentnego tłumienia dla każdej postaci drgań własnych układu). W ogólności, jak wiadomo układ interakcyjny jak na rys. 22 nie posiada klasycznych normalnych form drgań. Opublikowano też szereg przyczynków [63] stanowiących dyskusję nad pracą [96]. Tematycznie z [96] łączy się praca TAKEMIYA [91] dotycząca analizy odpowiedzi całego układu interakcyjnego drogą redukcji stopni swobody złożonych układów interakcyjnych (poprzez stosowanie unormowanych form drgań). W [65] stwierdzono, na przykładzie wieloblokowego budynku o 12 kondygnacjach, że dla sejsmicznych obciążeń normowych (por. [89]) podatność podłoża zmniejszyła siłę poprzeczną i moment zginający u podstawy budynku aż o 38%. W niniejszym opracowaniu w zasadzie nie zajmujemy się zagadnieniem wpływu podatności podłoża na same charakterystyki budynków jak np. na częstości drgań własnych układów. Zagadnienie to wiąże się nie tylko z problemem drgań sejsmicznych i parasejsmicznych, ale i z działaniami dynamicznymi innego typu i może być traktowane odrębnie. W opracowaniu wzmiankowano o tym na tyle, na ile było to niezbędne w kontekście badania zachowania się budynków na wymuszenie ruchów przez podłoże.

5. Doświadczalne badania interakcji układu budynek-podłoże

Przez długi okres mierząc drgania sejsmiczne budynków, umieszczano urządzenia pomiarowe na ich fundamentach i tak otrzymane przebiegi drgań traktowano jako drgania podłoża. HOUSNER [28] (1957) jako pierwszy zajął się analizą różnic między przebiegami drgań sejsmicznych pomierzonych na swobodnej powierzchni podłoża obok budynku oraz na fundamencie budynku posadowionego na podatnym podłożu. Wzmianki na temat możliwości występowania różnic w wyżej wymienionych przebiegach drgań podawali już BENIOFF (1938) i WHITE [103] (1939).

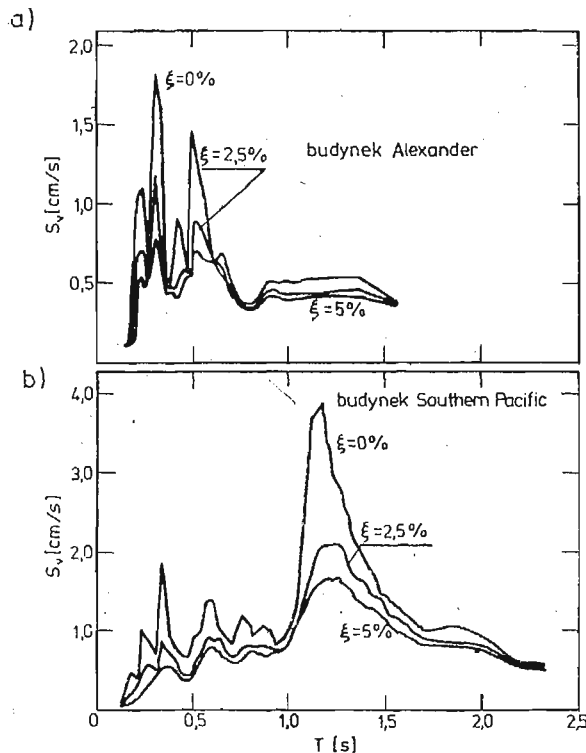
W pracy [28] przedstawione są wyniki jednoczesnego pomiaru drgań sejsmicznych (w czasie trzęsienia ziemi Arvin Techachapi, 1952) na płycie fundamentowej budynku (Hollywood Storage Company) i na powierzchni podłoża niedaleko od tego budynku (w odległości 34 m). Przebiegi drgań poziomych pomierzone w kierunku osi poprzecznej budynku tak na gruncie jak i na fundamencie były takie same, natomiast różniły się, aczkolwiek w niewielkim stopniu, składowe poziome drgań pomierzone na fundamencie w kierunku osi podłużnej budynku. Spektra odpowiedzi reprezentujące spodziewaną reakcję układu dla pierwszych przebiegów drgań były oczywiście takie same, dla tych drugich różniły się jednak istotnie. Autor uważa, że na wymienione różnice w przebiegach drgań, a więc i w spektrach odpowiedzi ma wpływ stosunek wymiarów rzutu poziomego i różnice w sztywnościach budynku w kierunku dwu jego osi. Długość jest ponad 4 razy większa od szerokości, a sztywność ok. 6 razy większa w kierunku podłużnym (oceny sztywności dokonano na podstawie pomierzonych podstawowych okresów drgań własnych, $T_{1x} = 0,49$ s, $T_{1y} = 1,25$). Jeśli jednak poziome sprzężenie byłoby duże, wówczas drgania budynku z podstawowym okresem drgań własnych ujawniłyby się w akcelerogramie otrzymanym na fundamencie i w efekcie krzywa spektralna, głównie z $\xi = 0$, musiałaby mieć



Rys. 23. Przebiegi poziomych drgań fundamentów budynków w czasie trzęsienia ziemi San Francisco, 1957 [29]. a — pomierzone przyspieszenie, g — przyspieszenie ziemskie

„pik” odpowiadający podstawowemu okresowi drgań własnych $T_{1x} = 0,49$ s (czego jednak nie było). Z uwagi na badania dotyczące jednego pomiaru wykonanego na jednym budynku nie można wyciągać z prezentowanej pracy zbyt daleko idących wniosków. Również WHITE [103] wysunął przypuszczenie, że na krzywych spektralnych dla przebiegów drgań pomierzonych na fundamencie występujące „piki” mogą być uwarunkowane oddziaływaniem budynku na grunt.

HOUSNER [29] w ramach dyskusji nad [55] podaje dwa akcelerogramy (por. rys. 23 a, b) otrzymane na fundamentach dwu budynków (Alexander Building o 15 kondygnacjach i Southern Pacific Building o 12 kondygnacjach) w czasie słabego trzęsienia ziemi w San Francisco, 1957. Budynki te odległe od siebie 750 m, posadowione były na różnych gruntach: ten pierwszy bezpośrednio na sztywnym podłożu, drugi na stalowych palach. Grunty otaczające części podziemne tych budynków były odpowiednio sztywnymi i podatnymi, a więc stanowiącymi odmienne więzy dla przemieszczeń poziomych. Mimo znacznego po-



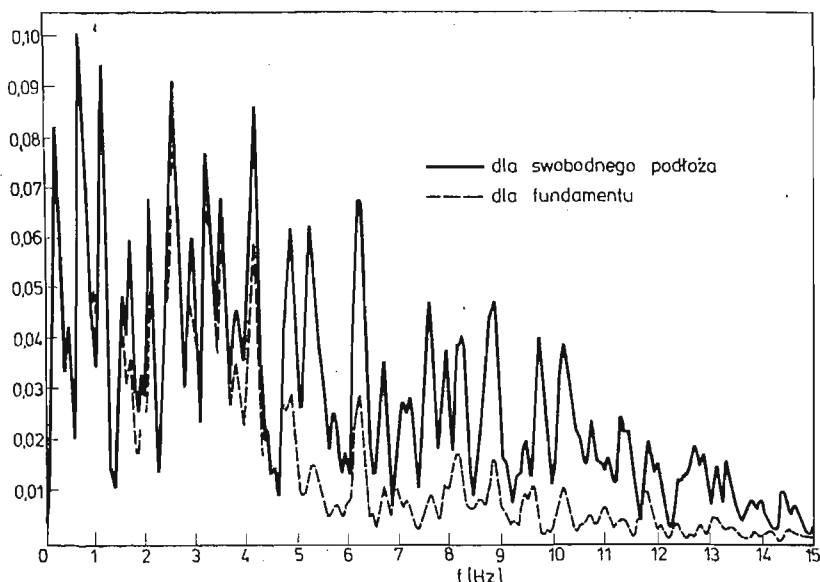
Rys. 24. Spektre odpowiedzi dla przebiegów drgań z rys. 23

dobieństwa obu akcelerogramów z rys. 23a, b, widać, że przebieg drgań odpowiadający budynkowi Alexander zawiera składowe o wyższej częstotliwości drgań. Podłoże budynku Southern Pacific nie jest na tyle sztywne by wzbudzić te wyższe częstotliwości drgań fundamentu. Spektre odpowiedzi obliczone dla omawianych przebiegów drgań podane są na rys. 24 a, b. Spektrum odpowiedzi z rys. 24a zawiera „pik” dla okresu $T = 1,2$ s co dokładnie odpowiada podstawowemu okresowi drgań własnych budynku Southern Pacific; podobnego zjawiska nie notowano dla budynku Alexander.

Bardzo ciekawą pracę dotyczącą badania własności dynamicznych budynku oraz jego interakcji z podłożem opublikowali JENNINGS i KUROIWA [36]. Badania dotyczyły żelbetowego budynku o 9-u kondygnacjach (plus przyziemie), w którym elementami nośnymi były ściany podlegające ścinaniu (był to budynek Kalifornijskiego Instytutu Technologicznego — CIT). Badano częstotliwości i postacie drgań własnych budynku (w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach) wymuszając drgania obiektu dwiema wibromaszynami umieszczonymi na dachu. Jednocześnie badano zagadnienie przekazywania się drgań na podłoże gruntowe w sąsiedztwie budynku. Sporo uwagi poświęcono zachowaniu się części podziemnej budynku. Istnienie lub brak obsypania gruntem na zewnątrz budynku do poziomu terenu praktycznie nie wpływa na zmianę drgań jego części podziemnej. Autorzy uzasadniają to tym, że przyrost amplitud drgań na wysokości kondygnacji podziemnej jest niewielki, a odpór gruntu też maleje wraz ze wzrostem wysokości do powierzchni gruntu. Z tego też powodu proponuje się przyjmować, że budynek mocowany jest nie w poziomie gruntu lecz w poziomie jego posadowienia. Czynnikiem uzasadniającym powyższe jest również fakt, że podłoże pod budynkiem nie jest naruszone i było stopniowo obciążane w trakcie wznoszenia obiektu ulegając konsolidacji i stając się bardziej odpornym na przemieszczenia translacyjne i rotacyjne. Stwierdzono, że budynek podlega drganiom wahadłowym, tym nie mniej przyrost poziomego przemieszczenia w poziomie dachu wynikający z drgań wahadłowych jest mniejszy od 1% względem przemieszczeń pochodzących z deformacji budynku i może być pominięty. Zupełnie podobne badania, lecz na mniejszą skalę w budynku Hollywood Storage Company prowadził też CARDER (por. [103]). W pracy KANAI i SUZUKI [39] badano tego samego typu budynki (o 4 kondygnacjach) posadowione na różnych podłożach i podlegające (wielu) słabym, a nawet średnim trzęsieniom ziemi. Obserwacje obejmowały maksymalne amplitudy przemieszczeń w poziomie dachu (A_{max}) oraz amplitudy (A_f) i okresy drgań im odpowiadające (T_f) fundamentu w chwili występowania A_{max} . Stosunek A_{max} do A_f wynosi 2 - 4; wartość mniejsza odpowiada bardziej podatnemu podłożu.

W pracy ISHIZAKI i HATAKEYAMA [35] podano wyniki pomiarów 8 jednakowych żelbetowych monolitycznych budynków szkolnych o 3-ch kondygnacjach usytuowanych w różnych częściach Tokio i posadowionych na różnych gruntach. Mierzono mikrosejsmy gruntu (w odległości 3 - 6m od budynku) i wywołane nimi drgania budynków.

Tak budynek Hollywood Storage Company jak i budynek biblioteki CIT, o których była mowa powyżej, były przedmiotem badań tak teoretycznych jak i dalszych eksperymentalnych [20]. W pracy tej wykorzystano zastępczy model BIELAKA [37], który poddawano wymuszeniu pochodzącemu z akcelerogramów otrzymanych w czasie trzęsienia ziemi w San Fernando, 1971. Wyniki porównywano z danymi w [36]. Oceny interakcji dokonywano poprzez tzw. funkcję transformacyjną (wg [37]) wiążącą drgania swobodnego podłoża z drganiami modyfikowanymi istnieniem budynku. Choć funkcje te otrzymane teoretycznie i eksperymentalnie w zarysie zgadzały się, to w wielu szczegółach różniły się istotnie. Amplitudalne spektra Fouriera obliczane dla przebiegów drgań poziomych pomierzonych na fundamencie budynku Hollywood Storage i obok na swobodnej powierzchni podłoża (techniką szybkiej transformacji Fouriera) wskazują na dobrą ich zgodność dla częstotliwości do 4 Hz. Dla częstotliwości wyższych wartości odpowiedniej krzywej spektralnej dla drgań swobodnego podłoża są dużo większe (por. rys. 25). Wynika stąd, że przebieg drgań



Rys. 25. Amplitudalne spektrum Fouriera dla przebiegów drgań na swobodnym podłożu i fundamencie budynku Hollywood Storage Company pomierzone w czasie trzęsienia ziemi San Fernando, 1971 [20]

na fundamencie ma częściowo wytłumione składowe drgań z wyższymi częstotliwościami, czyli budynek spełnia rolę filtrującą dla przebiegów drgań swobodnego podłoża. Faktu tego nie udało się ujawnić na drodze teoretycznej (poprzez funkcje transformacyjne).

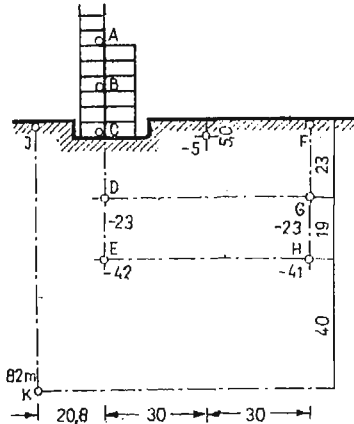
Przy okazji badania budynków w Las Vegas podlegających drganiom wywołanym podziemnymi wybuchami atomowymi w Nevadzie (w odległości 130 - 290 km od badanych budynków) dochodzącymi do 1200 KT zajmowano się również zjawiskiem interakcji [9], [10]. Akcelerogramy i seismogramy pomierzone na swobodnym podłożu i w dwu budynkach posiadających ponad 20 kondygnacji nie wykazywały różnic (przyspieszenia gruntu były rzędu 0,01 g).

W [61] badano przekazywanie się drgań z gruntu wywołanych wybuchem na budynek z kamienia o 3-ch kondygnacjach. Pomierzono maksymalne przyspieszenia sejsmometrami i przemieszczenie na gruncie obok budynku oraz w budynku. Maksymalne przyspieszenie w budynku jest 1,9 razy mniejsze niż w gruncie. Stosunek przyspieszeń dla okresu drgań 0,2s (okres bliski okresowi drgań własnych budynku wynoszący 0,185s) wynosi 1,85. Dla okresu 0,05s zmniejszenie sejsmicznego efektu jest ponad 3-krotne. Przypadek działań parasejsmicznych na budynek omawiany jest też przez LEWINA w [50]. Drgania gruntu od uderzenia kłosa złomowego trwają przez kilka cykli, a ich częstość pozostaje w przedziale 4 - 7 Hz. Biorąc pod uwagę fakt, że częstość podstawowych drgań własnych wielu budynków pozostaje w podanym zakresie częstości, autor rozważał możliwość takiego przekazywania się drgań, które mogły wywołać rezonansową odpowiedź budynku.

OSAWA i in. w [67]⁸⁾ przytaczają wstępne wyniki badań dynamicznych budynku Instytutu Sejsmologii i Inżynierii Sejsmicznej w Tokio (z lat 1963 - 1967). Duża część pracy

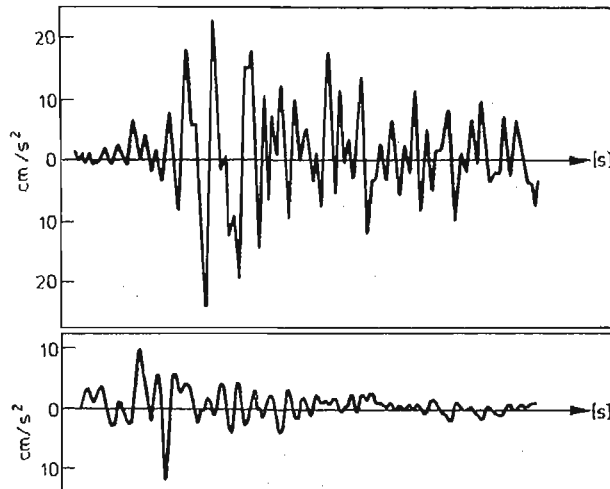
⁸⁾ Por. przypis na str. 520.

dotyczy interakcji. W budynku o 5-u kondygnacjach (plus przyziemie) zainstalowano: akcelerografy typu SMAK dla automatycznego zapisu przyspieszeń większych niż 0,01 g, deformometry (Carlsona) oraz tensometry oporowe (na betonie i zbrojeniu elementów nośnych budynku). W podłożu, w tym i na głębokości 82 m, zainstalowano szereg sejsmografów (por. rys. 26). Sejsmometr K (w poziomie gruntu skalistego) miał za zadanie, wg



Rys. 26. Schemat rozmieszczenia czujników pomiarowych oznaczonych literami w budynku i gruncie [67]

autorów, mierzyć tzw. czyste trzęsienie ziemi bez nakładnia się fal odbitych od swobodnej powierzchni. Maksymalne przyspieszenia pomierzone w budynku w czasie szeregu małych i jednego średniego trzęsienia ziemi odpowiadały drganiom o okresie $T = 0,35$ s, zaś w gruncie 0,5 i 82 m poniżej terenu dla $T = 0,2$ i 0,5 s. Podstawowe pomierzone okresy drgań własnych budynku wynosiły: w kierunku podłużnym 0,29 s, a poprzecznym 0,32 s. Badania przewidziane są jako wieloletnie. Praca [2] poświęcona jest badaniom drgań modeli (3-ch) masywnych konstrukcji. Mierzono drgania od lekkich trzęsień ziemi na różnych

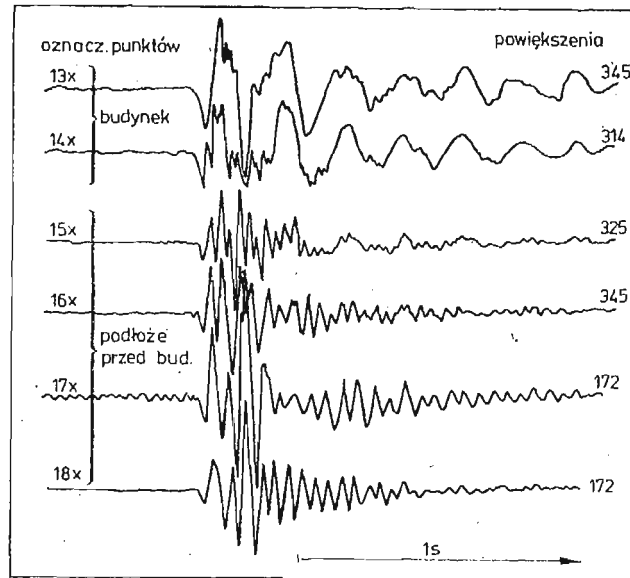


Rys. 27. Zarejestrowane przebiegi przyspieszeń drgań sejsmicznych [66]: a) na swobodnej powierzchni gruntu, b) na głębokości 37,0 m poniżej istniejącego terenu

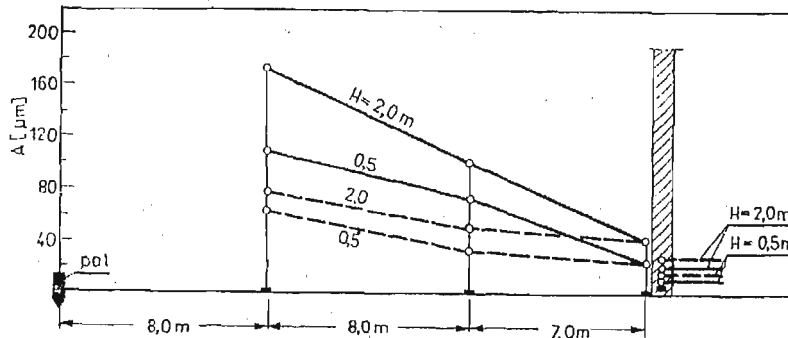
wysokościach doświadczalnych konstrukcji, na powierzchni gruntu i w otworach do głębokości 20 m. Z danych o rozkładzie intensywności przyspieszeń po głębokości wynika, że dla silniejszych trzęsień już na małych głębokościach następuje istotne zmniejszenie przyspieszeń drgań gruntu. Podobne badania do wyżej omawianych, obszernie prezentowane są przez OKAMOTO [66]. Z monografii tej [66] wzięty jest rys. 27 przedstawiający przebiegi drgań sejsmicznych pomierzone na swobodnej powierzchni gruntu i w ziemi na głębokości 37 m potwierdzający silny spadek przyspieszeń drgań sejsmicznych wraz z głębokością.

W Instytucie Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej podjęto zagadnienie przekazywania się drgań z podłoża na budynki. Badania mają charakter doświadczalny. Obecnie zajmujemy się zagadnieniem przekazywania drgań wywołanych wbijaniem pali fundamentowych (dokładnie rur obsadowych pali wibro-L i Franki) w sąsiedztwie istniejących budynków, jak również wywołanych odstrzałami w kamieniołomach. Przekazywanie się drgań od wbijania pali dotyczyło budynków małych jedno i dwukondygnacyjnych głównie wykonanych z cegły oraz powszechnie stosowanych (aktualnie) mieszkalnych budynków prefabrykowanych pięciokondygnacyjnych typu „Domino”, WUFT. Dla badania przekazywania się drgań czujniki pomiarowe (najczęściej sejsmografy S55 i WEGIK) ustawiano na gruncie obok budynków oraz w budynkach w poziomie terenu. Tak w budynkach jak i obok nich mierzono trzy składowe przemieszczeń drgań. Badania obejmują też pomiar drgań na odcinku kilku metrów przed i za budynkiem. Chodzi o zbadanie czy fakt istnienia budynku wpływa na ewentualną zmianę przebiegów drgań począwszy od pewnej odległości od niego w stosunku do propagowanych drgań z tego samego źródła (wbijanego pala) ale na swobodnej powierzchni (przy tej samej odległości od źródła drgań). Dla pomiaru ewentualnych drgań wahadłowych budynku, na dwu przeciwległych ścianach lub fundamentach ustawiano czujniki do pomiaru składowych drgań pionowych—oczywiście ich rejestracja powinna odbywać się na tej samej taśmie. Podobny sposób rozmieszczenia czujników stosowano w przypadku badania drgań wywołanych odstrzałami w kamieniołomach. Rejestrację drgań w przypadku wbijania pali prowadzono seriami w zależności od uwarstwienia przebijanego podłoża. Dla każdej serii wykonywano pomiary przy zmieniających wysokościach spadania młota. Wysokości te wynosiły odpowiednio: dla pali wibro-L — 0,5 ÷ 4,0 m, dla pali Franki 1,0 ÷ 10,0 m.

Na rys. 28 podano przykładowe przebiegi drgań budynku w poziomie terenu i gruntu przed budynkiem. Na sejsmogramie tym wyjątkowo dobrze widać istotne różnice o przebiegach drgań na gruncie i w budynku w poziomie terenu. Odległość czujników od budynku wynosiła odpowiednio (por. rys. 28): 0,4 m (punkt 15 ×), 1,4 (punkt 16 ×), 2,4 m (punkt 17 ×) i 3,4 m (punkt 18 ×). Odległość pala od budynku wynosiła 23,0 m. Przed budynkiem na odcinku ok. 2,0 m następuje silny spadek A_{max} wynikający z istnienia budynku. Ten spadek A_{max} jest dużo większy niż w tej samej odległości od źródła drgań na swobodnej powierzchni podłoża. Przykładowe zmiany maksymalnych amplitud (A_{max}) przemieszczeń drgań na gruncie w zależności od pala i spadek wartości A_{max} na styku grunt—budynek reprezentuje rys. 29. Na rysunku tym widoczny jest też wpływ zmiany wysokości spadania młota na wartości A_{max} . A_{max} w budynkach w poziomie terenu lub na fundamentach są mniejsze lub co najwyżej równe A_{max} gruntu tuż przed budynkiem. Spadek A_{max} jest na ogół większy dla większych zagłębień pali i może wynosić od 30 - 70%



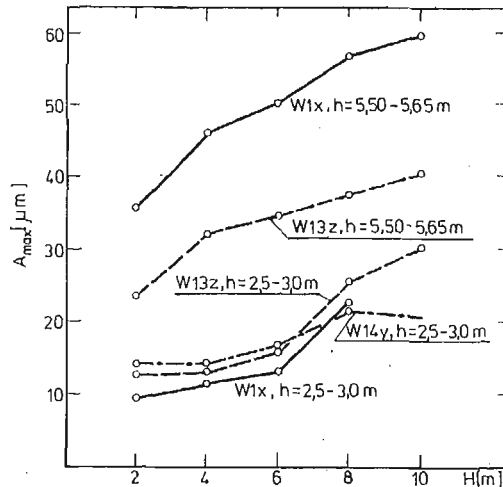
Rys. 28. Przykładowe przebiegi drgań budynku (w poziomie terenu) i podłoża przed budynkiem wywołane wbijaniem pała Franki. Zagłębienie pała $h = 6,30$ m, wysokość spadania młota $H = 6,0$ m



Rys. 29. Wpływ odległości od pała i wysokości spadania młota H na wartości A_{max} drgań poziomych (linia ciągła) i pionowych (linia przerywana) podłoża gruntowego (przy zagłębieniu pała wibro-L, oraz redukcja A_{max} na styku podłoże-gruntowe-ściana budynku K 23

Z kolei na rys. 30 podano wykresy A_{max} w zależności od wysokości spadania młota H dla różnych zagłębień pała Franki dla punktów pomiarowych zlokalizowanych tuż przed budynkiem. Zupełnie podobny charakter krzywych (różnice dotyczą wartości A_{max}) otrzymano dla punktów pomiarowych w budynku i na swobodnej przestrzeni podłoża. Nie stwierdzono drgań wahadłowych budynków. Obszerniejsze dane o badaniach tu omawianych przedstawione są w [16], [17]. Jeśli chodzi o wyniki badań interakcji dla drgań od ostrzałów w kamieniołomach to są one skromniejsze. Stwierdzono, że przebiegi drgań na gruncie przed budynkami (od różnych ładunków materiału wybuchowego, w różnych budynkach i dla odmiennych podłoży) dla składowych poziomych drgań są dokładnie takie same jak w budynku w poziomie posadowienia. Niekiedy miały miejsce paru procentowe redukcje amplitud bez zmiany ogólnego charakteru przebiegu. Dla drgań pionowych

wych, mających zresztą wyższe częstotliwości, a mniejsze amplitudy niż składowe poziome, przekazywanie się drgań jest bardziej niejednorodne. Miały miejsce przypadki dokładnego przekazywania się przebiegów drgań z ewentualnym minimalnym spadkiem amplitud lecz występowało i pewne zróżnicowanie przebiegów drgań przy badaniu tego samego obiektu:



Rys. 30. Wykres zależności maksymalnych amplitud przemieszczeń (A_{max}) drgań w punktach pomiarowych umieszczonych przed budynkiem od wysokości spadania młota H (pal Franki), budynek przy ul. Wł. 18

5. Uwagi końcowe

Z badań teoretycznych modeli budynków o 1-ej kondygnacji posadowionych na podłożu traktowanym jako półprzestrzeń sprężysta wynika, że interakcja na ogół ma korzystny wpływ na zachowanie się układów podlegających drganiom sejsmicznym i im podobnym. Ujawnia się to mniejszymi siłami dynamicznymi działającymi na te budynki w stosunku do wartości jakie by wystąpiły gdyby budynek stał na sztywnym podłożu. W modelach budynków wysokich oraz niektórych obiektów niskich interakcja może mieć wpływ korzystny lub niekorzystny na ich odpowiedź dynamiczną w zależności od własności konstrukcji, typu wzbudzenia oraz rodzaju podłoża. Określonej jednoznacznej tendencji nie można jednak podać. W normie radzieckiej dotyczącej budownictwa w rejonach sejsmicznych [89], aczkolwiek w sposób pośredni, przyjęto, że podatność podłoża z reguły zmniejsza siły sejsmiczne, a tylko dla względnie małych okresów drgań własnych konstrukcji nie wpływa na zmianę tych sił. Z rozważań teoretycznych, w których przyjmuje się, że budynki posadowione są na półprzestrzeni sprężystej, wynika, że na odpowiedź budynku mogą znaczny wpływ mieć drgania wahadłowe. Dotychczasowe badania doświadczalne tego nie potwierdzają. Prace teoretyczne podające szereg metod uwzględnienia i obliczania wpływu interakcji mają ważne znaczenie poznawcze. Nie można dać jednak jednoznacznej odpowiedzi na ile przyjmowane w nich wyidealizowane modele budynków i gruntów mogą reprezentować rzeczywiste obiekty i podłoża podlegające działaniom sejsmicznym i parasejsmicznym.

Z kilku prac teoretycznych wynika, że interakcja wpływa w paru procentach na zmiany sił przekrojowych w badanych modelach budynków (do ok. 8%). Niektórzy więc badacze uważają, że w projektowaniu rzeczywistych obiektów mających podlegać działaniom sejsmicznym, na etapie założeń jest brak tak wielu ścisłych danych (np. spodziewane ruchy podłoża), że „bicie się” o te paru procentowe spadki odpowiedzi układów w praktyce inżynierskiej nie ma istotnego znaczenia. Z przedstawionych prac wynika, że przemieszczenia, nawet budynków wysokich, wywołane drganiami sejsmicznymi, wynikają głównie z postaci drgań odpowiadającej podstawowej częstości drgań własnych tych budynków (z wyłączeniem budynków bardzo wysokich). Z naszych badań doświadczalnych na obiektach rzeczywistych wynika, że dla wymuszeń parasejsmicznych (np. od odstrzałów w kamieniołomach, wbijanie pali fundamentowych) budynki o 11 kondygnacjach (a więc niezbyt wysokie) mogą doznawać przemieszczeń odpowiadających głównie drugiej częstości ich drgań własnych.

Prac doświadczalnych z omawianej dziedziny jest mało. Wyniki badań są nawet rozbieżne. W bardzo wielu przypadkach ruch swobodnej powierzchni podłoża jest inny niż ruch fundamentu budynku stojącego obok. Jeśli zadaniem naszym jest poznanie ruchu podłoża to nie można stawiać czujników pomiarowych na fundamencie budynku i traktować, że pomierzone drgania reprezentują drgania gruntu. Jeśli chcemy poznać ruchy fundamentu budynku to nie jest obojętnym, w których miejscach na nim będzie ustawiona pomiarowa aparatura. Z dokonanego przeglądu widać jednak, że przedstawione tu zagadnienie traktowane jest w inżynierii sejsmicznej jako bardzo ważne, czego dowodem jest opublikowanie w ostatnim dziesięcioleciu tak wielu prac z tego zakresu.

Literatura cytowana w tekście

1. M. E. AGABEIN, R. A. PARMELEE, S. L. LEE, *A model for the study of soil- structure interaction*, Proc. Eight Congres Inter Association for Bridge and Structural Eng., New York, 1968, Final report.
2. K. AKINO, T. OTA, H. YAMAHARA, *Seismic observation of rigid structure on various soils and its review*, Proc. of the fourth world conf. on earth. eng., Chile, 1969.
3. J. C. ANDERSON, *Seismic response effects on embedded structures*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 1., 62, 1972.
4. A. S. ARIAS, R. J. HUSID, *Discussion of „Earthquake analysis by response spectrum superposition”* by R. W. Clough, Bull. Seism. Soc. Amer., No 3, 53, 1963.
5. R. O. BELSHEIM, G. J. O'HARA, *Discussion of „Effect of structure and foundation interaction”*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 2, 89, 1962.
6. M. A. BIOT, *Analytical and experimental methods in engineering seismology*, Proc. A. S. C. E, Transactions, 108, 1943.
7. D. N. BIRULJA, *Dinamiczeskaja reakcja sistemy „zdanije-osnowanije”, modelirujemoj koniecznymi elementami*, Stroitel'naja mechanika i rascziot sooruzenij, 2, 1974.
8. J. A. BLUME, *Spectral response to ground displacement at Hattiesburg resulting from nuclear event SALMON*, Bull. Seism. Soc. Amer. No 1, 59, 1969.
9. J. A. BLUME, *Response of highrise buildings to ground motion from underground nuclear detonations*. Bull. Seism. Soc. Amer., No 6., 59, 1969.
10. J. A. BLUME, *The motion and damping of buildings relative to seismic response spectra*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 1, 60, 1970.
11. J. L. BOGDANOFF, J. E. GOLDBERG, A. J. SCHIFFT, *The effect to ground transmission time on the response of long structures*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 3, 55, 1965.

12. C. B. BROWN, *Seismic energy transmission to deep — founded structures*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 3, 61, 1971.
13. G. N. BYCROFT, *Forced vibration of a rigid circular plate on a seminfinitesimal elastic space and on a elastic stratum*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Series A, No 948, 1956.
14. A. CASTELLANI, *Discussion of Seismic response of single-story interaction systems*, Journ. Struct. Div., ST8, 95, 1969.
15. A. CASTELLANI, *Foundation compliance effects on earthquake response spectra*, Journ. Soil. Mech. Found. Div., 96, SM4, 1970.
16. R. CIESIELSKI, E. MACIĄG, K. STYPUŁA, *Wyniki wstępnych badań redukcji drgań wywołanych wbijaniem pali na styku podłoże gruntowe-budynek*, Badania doświadczalne konstrukcji, Janowice-Kraków, 1977.
17. R., CIESIELSKI, E. MACIĄG, K. STYPUŁA, *Propagation of vibrations of soil caused by pile driving*, Czechoslovak Conf. Dynamics of Engineering Structures, Smolenice — Bratislava, 1977.
18. R. W. CLOUGH, *Earthquake analysis by response spectrum superposition*, Bull., Seism., Soc., Amer., No 3, 52, 1962.
19. R. W. CLOUGH, J. PENZIEN, *Dynamics of structure*, Mc Graw-Hill, Inc., 1975,
20. C. B. CROUSE, P. C. JENNINGS, *Soil structure interaction during the San Fernando earthquake*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 1.
21. A. T. DERECHO, M. FINTEL, *Earthquake — resistant structures*, Handbook of concrete engineering, edited by M. Fintel, 1973.
22. *Earthquake engineering* (editor R. L. WIEGEL) Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1970.
23. L. W. FAGEL, S. C. LIÜ, *Earthquake interaction for multistory buildings*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 4, 98, 1972.
24. R. H. FERAHIAN, *Discussion of Seismic response of single — story interaction systems*, Journ. Struct. Div., ST 7, 95, 1969.
25. J. HERRERA, E. ROZENBLUETH, *Response spectra on stratified soil*, Proc. of the third world conf. on earth. eng., New Zealand, 1965.
26. J. HERRERA, E. ROZENBLUETH, O. RASCON, *Earthquake spectrum prediction for the Valley of Mexico*, Proc. of the third world conf. on earth. eng., New Zealand, 1965.
27. G. W. HOUSNER, R. R. MARTEL, J. L. ALFORD, *Spectrum analysis of strong — motion earthquakes*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 2, 42, 1953.
28. G. W. HOUSNER, *Interaction of building and ground during an earthquake*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 2, 47, 1957.
29. G. W. HOUSNER, *Discussion of „Effect of structure and foundation interaction”*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 1, 88, 1962.
30. G. W. HOUSNER, *Strong ground motion*, *Earthquake Engineering*, editor R. L. Wiegel, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1970.
31. G. W. HOUSNER, A. CASTELLANI, *Discussion on the paper F. Richart and A. Whitman*, Journ. Soil. Mech. Div., SM 1, 95, 1969.
32. T. K. HSIEH, *Foundation vibrations*, Proc. of the Institution of Civil Eng., 22, June, 1962.
33. D. E. HUDSON, *Response spectrum techniques in engineering seismology*, Proc. of the first world conf. on earth. eng., Berkeley, 1956.
34. D. E. HUDSON, *Some problems in the application of spectrum techniques to strong — motion earthquake analysis*, Bull. Seism. Soc. Amer., 2, 52, 1962.
35. H. ISHIZAKI, N. HATAKEYAMA, *Experimental and numerical studies on vibrations of buildings*, Proc. of the sec. world conf. on earth. eng., Tokyo, 1960.
36. P. C. JENNINGS, J. H. KUROIWA, *Vibration and soil structure interaction tests of nine — story reinforced concrete building*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 3, 58, 1968.
37. P. C. JENNINGS, J. BIELAK, *Dynamics of building soil interaction*, Bull. Seism. Soc., Amer., No 1, 63, 1973.
38. K. KANAI, R. TAKAHASHI, H. KAWASUMI, *Sejsmiczeskije charakterystyki grunta*, Proc. of the first world conf. on earth. eng., Berkeley, 1956 (tłumaczenie rosyjskie — Międzynarodnaja Konf. po sejsmostojkosti stroitelstwa, Moskwa 1961).

39. K. KANAI, T. SUZUKI, *Relation the property of building vibration and the nature of ground* (Observation of the earthquake motion at actual buildings), Bull. Earthq. Res. Inst., Tokyo, No 4, 31, 1953; cz. II, nr 1, 33, 1955; cz. III, nr 1, 34, 1956.
40. K. KANAI, S. YOSHIZAWA, *Some new problems of seismic vibrations of a structure*, Part 1, Bull. Earth. Res. Inst. 41, 1963; Part 2, Bull. Earth. Res. Inst., 42, 1964.
41. K. KANAI, *Transmission coefficient of seismic waves to structure*, Bull. Earth. Res. Inst., 43, 1965.
42. G. N. KARCIWADZE, S. W. MIEDWIEDIEW, SZ. S. NAPETWARDZE, *Sejsmostojkoje stroitielstwo za rubieżom*, Moskwa, 1961,
43. G. N. KARCIWADZE, *Obszczije urawnienija sejsmiczeskich kolebanij dyskretnych system z toczecznym opiraniem na grunt z ucetom wzajemiejstwija z osnovaniem*, Mechanika 77, Trieti kongres, Warna, 1977.
44. B. D. KAUFMAN, S. G. SZULMAN, *Niestacjonarnyje kolebanija oscyljatora wzajemiejstwujuszczego s uprugoj poluplaskostju*, Sb. Sowierszestwowanije metodow rascziota i projektrowanija hidrotechnicznychk sooruzenij wozwodimych w sejsmiczeski aktywnych rajonach, „Energija”, 1976.
- 44a. B. D. KAUFMAN, S. G. SZULMAN, *O wzajemiejstwi sooruzenija s uprugo-wiaskim osnovaniem pri zemletrjasenij*, Izwiestja Wsesoj. Nauczno — Issled. Inst. Gidrotechniki, t. 109, 1975.
45. E. KAUSEL, V. CHANG-LIANG, *Discussion of Earthquake finite element analysis of structure — foundation systems*, Journ. Eng. Mech. Div., EM6, 101, 1975.
46. E. KAUSEL, J. ROËSSET, G. WAAS, *Dynamic analysis of footings on layered media*, Journ. Eng. Mech. Div., 101, EM5, 1975.
47. I. KHANNA, *Elastic soil — structure interaction*, Proc. of the fourth world conf. on earth. eng., Chile. 1969.
48. I. L. KORCZYŃSKI i in., *Osnovy projektrowania zdaniw w sejsmiczeskich rejonach*, Moskwa, 1961.
49. B. G. KORENEW, Y. A. ILYICZEV, L. M. REZNIKOV, *Oscillation of the tower — like structures with account of inertia and elasticity of solid medium*, Proc. of the fourth world conf. on earthq. eng., Chile, 1969.
50. G. W. LEWIN, *Dinamiczeskoje wozdiejstwie fundamentow bojnych koprow na okrużajuszczje sooruzenija*, Dinamika osnovanij i fundamentow (trudy wtorej konf.), t. II, Moskwa, 1969,
51. S. C. LIU, L. W. FAGEL., *Earthquake interaction by fast Fourier Transform.*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 4, 97, 1971.
52. J. E. LUCO, *Dynamic interaction of a shear wall with the soil*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 2, 95, 1969.
53. J. E. LUCO, R. A. WESTMANN, *Dynamic response of circular foutings*, Journ, Eng. Mech. Div. EM 5 97, 1971.
54. J. E. LUCO, L. CONTESSA, *Dynamic structure — soil — structure interaction*, Bull. Seism., Soc. Amer. No 4, 63, 1973.
55. D. L. LYCAN, N. M. NEWMARK, *Effect of structure and foundation interaction*, Journ. Eng. Mech. Div. EM 5, 87, 1961.
56. J. LYSMER, F. E. RICHART, *Dynamic response of footings to vertical loading*, Journ. Soil Mech. Found. Div., SM 1, 92, 1966.
57. *Materiały na sympozjum „Wplywy sejsmiczne na budowle”*, Kraków, 1978.
58. R. G. MERRIT, G. W. HOUSNER, *Effect of foundation compliance on earthquake stresses in multistory buildings*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 4, 44, 1954.
59. H. C. MERCHANT, D. E. HUDSON, *Mode superposition in multidegree of freedom systems using earthquake response spectrum data*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 2, 52, 1962.
60. S. W. MIEDWIEDIEW, *Inżyniernaja sejsmologia*, Strojizdat, 1962,
61. S. W. MIEDWIEDIEW, B. K. KARAPETJAM, K. A. BYCHOWSKIJ, *Sejsmiczeskije wozdiejstwija na zdanije i soruzenija*, Moskwa, 1968.
62. W. MIRONOWICZ, *W sprawie oceny drgań podłoża gruntowego*, Inż. i Budown. z. 2, 1976.
63. *Model damping for soil — structure intraction*:
 - a) Journ. Eng. Mech. Div., vol. 100, EM 6, 1974 str. 1269 - 1272, autorzy: H. J. EPSTEIN, G. R. JOHNSON, P. CHRISTIANO, J. O’ROURKE, CHANG CHEN;
 - b) Journ. Eng. Mech. Div., 100, EM 2, 1975, autor J. M. ROËSSET.

64. N. M. NEWMARK, E. ROSENBLUETH, *Fundamentals of earthquake engineering*, Prentice Hall, Inc. Englewood, Cliffs, N. J., 1971.
65. JU. I. NIEMCZINOW *K woprosu ob opredelenij sejsmiczeskoj nagruzki na vysokije zdanija s ucetom podatliwosti osnowanij*, Stroitelnyje konstrukciji, wypusk 2, Sejsmostojkost' zdaniij i inżeniernych sooruzenij, Moskwa, 1969.
66. S. OKAMOTO, *Introduction to earthquake engineering*, University of Tokyo Press, 1973,
67. Y. OSAWA, T. TANAKA, M. MURAKAMI, Y. KITAGAWA, *Earthquake measurerents in an around a reinforced concrete building*, Proc. of the fourth world conf. on earth. eng., Chile, 1969.
68. R. A. PARMELEE, *Building — foundation interaction effects*, Journ. Eng. Mech. Div. EM 2, 93, 1967.
69. R. A. PARMELEE, D. S. PERELMAN, S. L. LEE, L. M. KEER, *Seismic response of structure — foundation systems*, Journ. Eng. Mech. Div. EM 6, 94, 1968.
70. R. A. PARMELEE, D. S. PERELMAN, S. L. LEE, *Seismic response of multiple — story structures on flexible foundations*, Bull. Seism. Soc. Amer. No 3, 59, 1969.
71. R. A., PARMELEE, J. H. WRONKIEWICZ, *Seismic design of soil — structure interaction systems*, Journ. Struct. Div., ST 10, 97, 1971.
72. D. S. PERELMAN, R. A. PARMELEE, S. L. LEE, *Seismic response of single — story interaction systems*, Journ. Struc. Div. St 11, 94, 1968.
73. D. S. PERELMAN, R. A. PARMELEE, S. L. LEE, *Discussion of Seismic response of single — story interaction systems*, Journ. Struct. Div., ST. 3, 96, 1970.
74. PN-67/B-03040, *Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny*,
75. PN/B-02170, *Ocena szkodliwosci wplywow drgań i wstrząsów w budynkach*.
76. J. H. RAINER, *Discussion of Seismic response of structure — foundation systems*, Journ. Eng. Mech. Div., 95, 1969.
77. J. H. RAINER, *Structure — ground interaction in earthquakes*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 5, 97, 1971.
78. F. E. RICHART (Jr), *Some effects of dynamic soil properties on soil — structure interaction*, Journ. Geot., Eng. Div, 101, GT 12, 1976.
79. L. A. ROSENBERG, *On the interaction between ground and structure during earthquakes*, Bull. Inter. Inst. Seim. and Earth. Eng., 2, 1965.
80. Y. SATŌ, R. YAMAGUCHI, *Vibration building upon the elastic foundation*, Bull. Earth. Res. Inst., Tokyo, No 3, 35, 1957.
81. Y. SATŌ, R. YAMAGUCHI, *Coupling effect of shear vibration of the structure with elastic foundations and the maximum response of rocking motion*, Bull. Earth. Res. Inst. Tokyo, No 2, 38, 1960.
82. O. A. SAVINOV, A. M. UZDIN, *O niekotorych osobienostiach mechaniczeskowo wzajemiejstwija sooruzenija i jego osnowanija pri zemletrjasenij*, Izwestija Wsesojuznogo Nauczno — Isledowatielskogo Instytutu Gidrotechniki, t. 106, 1974.
83. O. A. SAVINOV, S. G. SZULMAN, *Wzajemiejstwie sooruzenij z osnowaniem pri zemletrasenij*, Mechanika 77, Treti kongres, Warna, 1977.
84. R. J. SCAVUZZO, D. RAFTOPOULOS, „Literature review of structure — foundation interaction” USAEC Contract No. AT — (40 - 1) — 3822, Technical Report. No 1, the Research Foundation, University of Toledo, Oct. 1968,
85. R. J. SCAVUZZO, *Foundation — structure interaction in the analysis of wave motions*, Bull. Seism. Soc. Amer. No 4, 57, 1967.
86. R. J. SCAVUZZO, J. L. BAILEY, D. D. RAFTOPOULOS, *Lateral structure interaction with seismic waves*, Journ. Appl. Mech., 38, 2, 1971.
87. R. J. SCAVUZZO, D. D. RAFTOPOULOS, J. L. BAILEY, *Lateral structure — foundation interaction of structures with base masses*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 2., 62, 1972.
88. F. SCREWALA, *Discussion of seismic response of structure — fuondation systems*, Journ. Eng. Mech. Div. 95, 1969.
89. *Stroitelstwo w sejsmiczeskich rejonach*, Stroizdat, Moskwa, 1977, CH u II II A. 12.69 cz. II, rozdz. 12,
90. H. TAJIMI, *Discussion of Building — foundation interaction effects*, Journ. Eng. Mech. Div. EM 6, 93, 1967

91. H. TAKEMIYA, *Simplified model for building foundation interaction*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 2, 103, 1977.
92. S. A. THAU, A. UMEK, *Transient response of a buried foundation to antiplane shear waves*, Journ. Appl. Mech. 40, No 4, 1973.
93. S. A. THAU, A. UMEK, R. ROSTAMIAN, *Seismic motion of buildings with buried foundations*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 5, 100, 1974.
94. W. T. THOMSON, T. T. KOBORI, *Dynamical compliance of rectangular foundations on an elastic half-space*, Journ. Appl. Mech., 30, series E, No 4, 1963.
95. M. D. TRIFUNAC, *Interaction of shear wall with the soil for incident plane SH — waves*, Bull. Seism. Soc., Amer., No 1, 62, 1972.
96. N. Y. TSAI, *Model damping for soil — structure*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 2, 100, 1974.
97. A. M. UZDIN, *K woprosu ob uczenie nieuprugich soprotiwlenij pri analizie wzajemnojestwa sooruzenija i jego osnowanija pri zemletrasenij*, Izwiestja Wsesoj. — Nauczno — Issled. Inst. Gidriotechniki, t. 108, 1975.
98. A. K. VAISH, A. K. CHOPRA, *Earthquake finite element analysis of structure — foundations systems*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 6, 100, 1974.
99. A. K. VAISH, K. CHOPRA, *Closure of discussion Earthquake finite element analysis of structure — foundation systems*, Journ. Eng. Mech. Div., EM 5, 102, 1976.
100. H. L. WONG, M. D. TRIFUNAC, *Interaction of a shear wall with the soil for incident plane SH — waves: Elliptical rigid foundation*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 6, 64, 1974.
101. H. L. WONG, A. D. TRIFUNAC, *Two-dimensional, antiplane building interaction for two or more buildings and incident plane SH waves*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 6, 65, 1975.
102. W. WEAVAR. (Jr), E. BRANDOW, K. HÖEG, *Three — dimensional soil structure response to earthquakes*, Bull. Seism. Soc. Amer., No 3, 63, 1973.
103. M. P. WHITE, *The meqning spectra of earthquake records obtained in near structures*, Proc. of the sec. world conf. on earth. eng. Tokyo, 1960.
104. R. V. WHITMAN, „Soil — structure interaction”, *Seismic design for nuclear power plants*, Ed. by R. J. Hansen, MIT Press, Cambridge, Mass., 1970.
105. E. L. WILSON, *A method of analysis for the evaluation of foundation — structure interaction*. Proc. of the 4th world conf. on earth. eng., Chile, 1969.
106. K. S. ZAWRIEW i inni, *Osnowy teorij sejsmostojkosti zdaniij i sooruzenij*, Rukowodstwo po projektowaniu sejsmostojkich zdaniij i sooruzenij, t. II, Moskwa, 1970.

Р е з ю м е

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ ЗДАНИЕ-ОСНОВАНИЕ ПРИ
ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯХ И ПАРАСЕЙСМИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Работа имеет обзорный характер: в ней рассматривается проблема спектра сейсмического реагирования и представляются труды в которых показаны результаты теоретического и экспериментального анализа взаимодействия системы здание-основание при землетрясениях и парасейсмических колебаниях. Приводятся тоже предварительные результаты получены в Институте Строительной Механики Краковской Политехники относящиеся к передаче колебаний вследствие погружения свай.

Summary

**BUILDING — FOUNDATION INTERACTION DURING AN EARTHQUAKE AND
PARASEISMIC VIBRATIONS**

In this review paper we discuss the problem of the response spectrum and the papers in which the results of theoretical and experimental analysis of building-foundation interaction during an earthquake and paraseismic vibrations take place. The results concerning transmission of vibrations due to pile driving, obtained in the Institute of Structural Mechanics of the Cracow Polytechnic, have also been given

**POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI**

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 września 1978 r.

NIEUSTALONE POLE TEMPERATURY I NAPRĘŻEŃ W NIESKOŃCZENIE DŁUGIM,
WYDRAŻONYM WALCU OGRZEWANYM NA ZEWNĘTRZNEJ POWIERZCHNI
I CHŁODZONYM NA WEWNĘTRZNEJ

JAN TALER (KRAKÓW)

W pracy wyznaczono ściśle i przybliżone zależności określające nieustalone pole temperatury i naprężeń w wydrążonym walcu wywołane skokowym wzrostem strumienia cieplnego na zewnętrznej powierzchni walca i chłodzonym konwekcyjnie na wewnętrznej. Rozwiązanie ściśle otrzymano stosując przekształcenie Laplace'a po czasie, natomiast przybliżone za pomocą metody bilansu cieplnego.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

a — promień wewnętrzny walca

$$Bi = \frac{\alpha \cdot a}{\lambda} \text{ — liczba Biota}$$

b — promień zewnętrzny walca

c — ciepło właściwe

E — moduł sprężystości wzdłużnej

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{a^2} \text{ — liczba Fouriera}$$

$J_n(x)$ — funkcja Bessela I-go rodzaju n -tego rzędu rzeczywistego argumentu

$$k = \frac{b}{a} \text{ — stosunek promienia zewnętrznego walca do wewnętrznego}$$

q — strumień cieplny

r — promień

$$T = \Theta - \Theta_{cz}$$

$$T^* = \frac{T \cdot \lambda}{q \cdot b} \text{ — temperatura bezwymiarowa}$$

t — czas

$Y_n(x)$ — funkcja Bessela II-go rodzaju n -tego rzędu rzeczywistego argumentu

α — współczynnik wnikania ciepła od wewnętrznej powierzchni wydrążonego walca do czynnika wewnątrz walca

α_T — współczynnik rozszerzalności temperaturowej

γ_n — pierwiastek równania charakterystycznego

$\delta(t)$ — głębokość wnikania ciepła

$$\alpha = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \text{ — współczynnik przewodzenia temperatury}$$

λ — współczynnik przewodzenia ciepła

ν — współczynnik Poissona

ρ — gęstość materiału

θ — temperatura

θ_{cz} — temperatura czynnika wewnątrz walca

σ — naprężenie

$$\sigma^* = \frac{\sigma(1-\nu)\lambda}{\alpha_T E q b} \text{ — naprężenie bezwymiarowe}$$

σ_{rr} — naprężenie promieniowe

$\sigma_{\theta\theta}$ — naprężenie obwodowe

σ_{zz} — naprężenie osiowe

1. Wstęp

Pole temperatury i naprężeń w wydrążonym walcu analizowane było za pomocą metod analitycznych w wielu pracach [1 - 10]. Wadą rozwiązań otrzymanych w wymienionych pracach jest ich trudność praktycznego wykorzystania ze względu na ich złożoność.

W niniejszej pracy wyznaczone zostanie nieustalone pole temperatury i naprężeń w wydrążonym walcu wywołane skokowym wzrostem strumienia cieplnego na zewnętrznej jego powierzchni i chłodzonym konwekcyjnie na wewnętrznej. Temperatura początkowa walca jest stała i niezależna od promienia.

Zagadnienie to zostanie rozwiązane równocześnie za pomocą analitycznej metody ścisłej i przybliżonej, co umożliwi ocenę dokładności rozwiązania przybliżonego oraz zalet i wad obydwóch rozwiązań.

1. Pole temperatury

Rozkład temperatury w walcu określony jest równaniem różniczkowym przewodzenia ciepła

$$(1.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{T} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right],$$

warunkami brzegowymi

$$(1.2) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = q,$$

$$(1.3) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = \alpha T \Big|_{r=a}$$

i warunkiem początkowym

$$(1.4) \quad T|_{t=0} = 0$$

Jak już wspomniano, przedstawione zostaną dwa rozwiązania sformułowanego wyżej zagadnienia: ścisłe i przybliżone.

1.1. Rozwiązanie ścisłe. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (1.1. - 1.4.) otrzymane z wykorzystaniem całkowego przekształcenia Laplace'a po czasie t ma postać

$$(1.5) \quad T(r, t) = \frac{q \cdot b}{\lambda} \left(\frac{1}{\text{Bi}} + \ln \frac{r}{a} \right) + \frac{\pi q a}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[N_0 \cdot J_0 \left(\frac{r}{a} \cdot \gamma_n \right) - L_0 \cdot Y_0 \left(\frac{r}{a} \cdot \gamma_n \right) \right] e^{-\gamma_n^2 \text{Fo}}}{\gamma_n \left[\frac{L_0}{J_1(k \cdot \gamma_n)} - (\text{Bi}^2 + \gamma_n^2) \frac{J_1(k \cdot \gamma_n)}{L_0} \right]}$$

gdzie

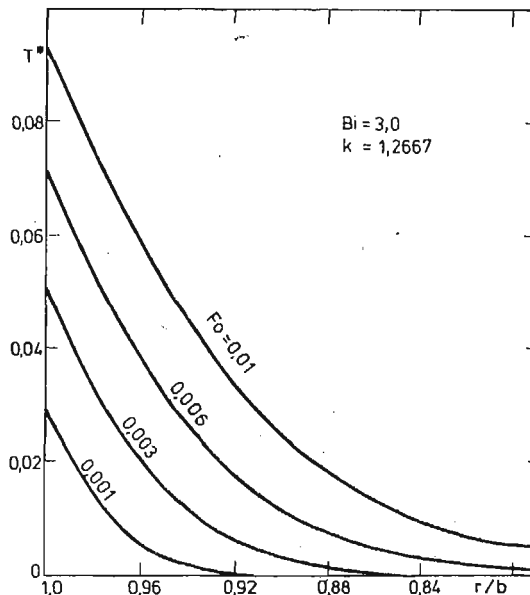
$$(1.6) \quad \begin{aligned} N_0 &= \gamma_n Y_1(\gamma_n) + \text{Bi} Y_0(\gamma_n), \\ L_0 &= \gamma_n J_1(\gamma_n) + \text{Bi} J_0(\gamma_n), \\ \text{Bi} &= \frac{\alpha a}{\lambda}, \quad \text{Fo} = \frac{\kappa \cdot t}{a^2}, \end{aligned}$$

γ_n — pierwiastki następującego równania charakterystycznego

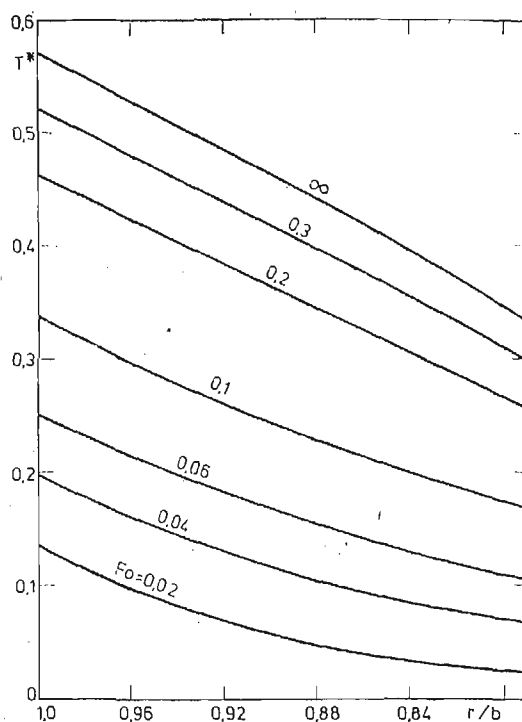
$$(1.7) \quad \text{Bi} [J_0(\gamma_n) Y_1(k \cdot \gamma_n) - J_1(k \cdot \gamma_n) Y_0(\gamma_n)] + \gamma_n [J_1(\gamma_n) Y_1(k \cdot \gamma_n) - J_1(k \cdot \gamma_n) Y_1(\gamma_n)] = 0.$$

Rozkład temperatury (1.5) jest szczególnym przypadkiem rozwiązań przedstawionych w pracach [2, 11].

Zmiany temperatury T w ścianie wydrążonego cylindra w zależności od liczby Fouriera Fo dla $k = \frac{19}{15}$ i $\text{Bi} = 3$ przedstawiono na rysunkach 1 i 2. Obliczając $T(r, t)$ wg wzoru



Rys. 1. Rozkład temperatury w ścianie wydrążonego walca dla małych liczb Fouriera; $\text{Bi} = 3$, $k = \frac{19}{15}$



Rys. 2. Rozkład temperatury w ścianie wydrążonego walca dla większych liczb Fouriera; $Bi = 3$, $k = \frac{19}{15}$

(1.5) uwzględniono 8 wyrazów szeregu. Z rysunku 1 wynika, że w pierwszych chwilach od momentu skokowego wzrostu strumienia ciepłego nagrzewają się powierzchniowe warstwy cylindra, podczas gdy temperatura wewnętrznej powierzchni jest równa początkowej.

1.2. Rozwiązanie przybliżone. Przybliżony rozkład temperatury w cylindrze zostanie wyznaczony za pomocą metody bilansu cieplnego. Temperatura w I i II-giej fazie wnikania ciepła zostanie przybliżona wielomianem II-go stopnia, co zmniejsza dokładność rozwiązania przybliżonego [12]. Jednakże dzięki aproksymacji pola temperatury wielomianem, wyrażenia określające naprężenia są bardzo proste i jak wynika z pracy [12] dokładność ich jest niewiele mniejsza od wyrażeń otrzymanych przy zastosowaniu zmodyfikowanego profilu temperatury gdy stosunek promienia zewnętrznego rury do wewnętrznego nie jest zbyt duży $k < \sim 3$.

W pierwszej fazie wnikania ciepła nagrzewanie wydrążonego cylindra przebiega identycznie jak nagrzewanie pełnego cylindra, gdyż „front temperatury” nie dociera do jego wewnętrznej powierzchni i opisane jest zależnościami [12].

$$(1.8) \quad \begin{aligned} T_{II}^* &= \frac{T \cdot \lambda}{q \cdot b} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{b} \left(1 - \frac{b-r}{\delta}\right)^2; & (b-\delta) \leq r \leq b, \\ T_I^* &= 0 & a \leq r \leq (b-\delta), \end{aligned}$$

gdzie głębokość wnikania ciepła wyznacza się z równania

$$(1.9) \quad Fo = k^2 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{\delta}{b}\right)^3 \right].$$

W drugiej fazie wnikania ciepła pole temperatury przybliżone zostanie wielomianem

$$(1.10) \quad T_{II}^* = a + br + cr^2 \quad Fo \geq Fo_1$$

Liczbę Fouriera Fo_1 odpowiadającą zakończeniu pierwszej fazy wnikania ciepła otrzymuje się podstawiając w (1.9) $\delta = b - a$. Po wyznaczeniu stałych a , b i c z warunków (1.2) i (1.3) oraz z warunku

$$(1.11) \quad T_{II}|_{r=a} = a = u(t)$$

i ponownym ich podstawieniu do (1.10) oraz zapisaniu temperatury w postaci bezwymiarowej otrzymuje się

$$(1.11) \quad T_{II}^* = \frac{T_{II} \cdot \lambda}{q \cdot b} = \frac{1}{2k(k-1)} + \frac{u^*(2k-2-2Bik+Bi)}{2(k-1)} - \frac{1-Bik^2 \cdot u^*}{k(k-1)} \frac{r}{a} + \frac{1-Biku^*}{2k(k-1)} \left(\frac{r}{a}\right)^2; \quad Fo \geq Fo_1.$$

gdzie

$$u^* = \frac{u \cdot \lambda}{qb}$$

Temperaturę wewnętrzną powierzchni walca $u(t)$ wyznacza się z równania bilansu cieplnego, które otrzymuje się mnożąc przez r równanie (1.1), a następnie całkując je po dr w granicach od b do a :

$$(1.13) \quad \frac{d\psi_{II}}{dt} = \alpha \cdot au(t) - b \cdot q,$$

gdzie

$$(1.14) \quad \psi_{II} = \int_b^a c \cdot q \cdot r \cdot T_{II}(r, t) dr.$$

Po podstawieniu T_{II} z (1.12) do (1.13) otrzymuje się równanie różniczkowe dla określenia $u(t)$, które po scałkowaniu przy warunku początkowym $u(t = t_1) = 0$ prowadzi do wyniku

$$(1.15) \quad u^* = \frac{1}{Bi} \{1 - \exp[-\mu^2(Fo - Fo_1)]\}$$

gdzie: $Fo_1 = \frac{\kappa t_1}{a^2}$

$$(1.16) \quad \mu^2 = 54 Bi(k-1) [12 k^3 - 12 k^2 - 12 Bi k^3 + 6 Bi k^2 - 12 k + 12 + 4 Bi k - 3 Bi + 5 Bi k^4]^{-1}$$

Porównanie wartości temperatur obliczonych wg wzoru ścisłego (1.5) i przybliżonego (1.12) przedstawiono w tablicy 1.1. Z analizy tablicy wynika, że dokładność wzorów przybliżonych jest dobra.

Porównując strukturę (1.5) dla $r = a$ i dla większych $Fo_0 (Fo_0 \geq Fo_1)$ — gdy w (1.5) można ograniczyć się do $n = 1$, gdyż pozostałe wyrazy można pominąć z uwagi na ich małą war-

Tablica 1.1.* Porównanie przybliżonych (1.12) i dokładnych (1.5) wartości temperatury T^* dla wybranych liczb Fouriera

Fo	r/b						
	1,0	0,96	0,92	0,88	0,84	0,8	0,789
0,02	0,1361	0,0996	0,0700	0,0474	0,0318	0,0231	0,0220
	0,1334	0,0973	0,0689	0,0478	0,0337	0,0255	0,0244
0,04	0,1989	0,1618	0,01303	0,1045	0,0843	0,0698	0,0669
	0,1975	0,1605	0,1294	0,1042	0,0848	0,0705	0,0677
0,06	0,2527	0,2150	0,1819	0,1533	0,1292	0,1097	0,1053
	0,2512	0,2136	0,1808	0,1528	0,1295	0,1103	0,1059
0,1	0,3382	0,2996	0,2638	0,2308	0,2005	0,1731	0,1664
	0,3364	0,2979	0,2626	0,2302	0,2006	0,1734	0,1668
0,2	0,4647	0,4247	0,3850	0,3455	0,3061	0,2669	0,2567
	0,4626	0,4229	0,3836	0,3447	0,3059	0,2670	0,2568
0,3	0,5227	0,4822	0,4407	0,3982	0,3546	0,3053	0,2982
	0,5205	0,4802	0,4391	0,3973	0,3543	0,3100	0,2982
0,45	0,5566	0,5158	0,4732	0,4289	0,3829	0,3352	0,3224
	0,5544	0,5137	0,4716	0,4280	0,3826	0,3351	0,3224

* — w dolnych wierszach podano wartości temperatury obliczone wg wzoru ścisłego (1.5)

Tablica 1.2.* Porównanie przybliżonych (1.16) i dokładnych [7] wartości pierwszego pierwiastka równania charakterystycznego (1.7)

Bi	k							
	1,1*	1,2*	1,26667	1,4*	1,6*	1,8*	2,0*	3,0*
3	5,094	3,365	2,791	2,100	1,534	1,201	0,980	0,480
	—	3,363	2,79	—	1,541	—	—	—
5	6,383	4,117	3,369	2,479	1,765	1,359	1,090	0,608
	6,376	4,106	3,357	2,47	1,766	1,366	1,108	—
10	8,439	5,198	4,156	2,953	2,028	1,521	1,202	
	8,3998	5,15	4,106	2,92	2,01	1,522	1,217	
20	10,665	6,202	4,835	3,322	2,214	1,630	1,2734	
	10,516	6,059	4,710	3,24	2,178	1,62	1,283	
60	13,747	7,319	5,531	3,659	2,370	1,718	1,328	
	13,203	6,97	—	3,51	2,305	1,695	1,333	

* — w dolnych wierszach podano wartości dokładne wg pracy [7]

tość — z rozwiązaniem przybliżonym (1.15) widać, że zachodzą związki

$$\frac{qb}{\lambda Bi} \approx -\frac{\pi qa}{\lambda} \frac{J_0(\gamma_1) Y_1(\gamma_1) - J_1(\gamma_1) Y_0(\gamma_1)}{L_0(\gamma_1) - (Bi^2 + \gamma_1^2) \frac{J_1(k\gamma_1)}{L_0(\gamma_1)}}$$

i $\gamma_1 \approx \mu$

W tablicy 1.2. porównano dokładne wartości pierwszego pierwiastka równania (1.7) z przybliżonymi obliczonymi wg (1.16). Wartości przybliżone nieznacznie różnią się od dokładnych [5], co świadczy o dobrej dokładności rozwiązania przybliżonego.

2. Pole naprężeń

Naprężenie cieplne wywołane kołowo — symetrycznym polem temperatury, przy założeniu, że E , α_T i ν nie zależą od temperatury i położenia określone są wzorami [1]:

$$(2.1) \quad \sigma_{rr} = \frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) (\bar{T} - \bar{T}_r),$$

$$(2.2) \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \bar{T} + \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \bar{T}_r - 2T \right]$$

oraz naprężenia osiowe dla przypadku swobodnych końców cylindra

$$(2.3) \quad \sigma_{zz} = \frac{E\alpha_T}{1-\nu} (\bar{T} - T) = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta},$$

gdzie

$$(2.4) \quad \bar{T}_r = \frac{2}{r^2 - a^2} \int_a^r T r dr,$$

$$(2.5) \quad \bar{T} = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T \cdot r dr$$

Podstawiając do powyższych wzorów ścisły i przybliżony rozkład temperatury łatwo określić naprężenia.

2.1. Ścisły rozkład naprężeń. Po podstawieniu (1.5) do (2.1) — (2.3), po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$(2.6) \quad \sigma_{rr}^* = \frac{\sigma_{rr} \cdot (1-\nu) \cdot \lambda}{\alpha_T \cdot E \cdot q \cdot b} = \frac{1}{2} k^2 \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}{k^2 - 1} \ln k - \frac{1}{2} \ln \frac{r}{a} +$$

$$\left[+\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ N_0(\gamma_n) \left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}{k^2 - 1} J_1(k \cdot \gamma_n) - \frac{1}{k} \left(\frac{a}{r}\right) J_1\left(\frac{r}{a} \cdot \gamma_n\right) + \frac{1}{k} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{k^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{k^2 - 1} J_1(\gamma_n) \right] - L_0(\gamma_n) \left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}{k^2 - 1} Y_1(k \gamma_n) - \frac{1}{k} \left(\frac{a}{r}\right) Y_1\left(\frac{r}{a} \cdot \gamma_n\right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{k} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{k^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{k^2 - 1} Y_1(\gamma_n) \right] \right\} e^{-\gamma_n^2 r_0} \cdot \frac{1}{M},$$

gdzie $M = \gamma_n^2 \left[\frac{L_0}{J_1(k \cdot \gamma_n)} - (Bi^2 + \gamma_n^2) \frac{J_1(k \cdot \gamma_n)}{L_0} \right]$

$$(2.7) \quad \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{\sigma_{\theta\theta}(1-\nu)\lambda}{\alpha_T E q b} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{r} \right)^2 \frac{\left(\frac{r}{a} \right)^2 + 1}{k^2 - 1} \ln k - \frac{1}{2} \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{2} +$$

$$+ \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ N_0(\gamma_n) \left[\frac{\left(\frac{r}{a} \right)^2 + 1}{k^2 - 1} \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_1(k\gamma_n) - \frac{k^2 + \left(\frac{r}{a} \right)^2}{k^2 - 1} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cdot \frac{1}{k} J_1(\gamma_n) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{k} \left(\frac{a}{r} \right) \cdot J_1 \left(\frac{r}{a} \gamma_n \right) - L_0(\gamma_n) \right] \left[\frac{\left(\frac{r}{a} \right)^2 + 1}{k^2 - 1} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 Y_1(k \cdot \gamma_n) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{k^2 + \left(\frac{r}{a} \right)^2}{k^2 - 1} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{1}{k} Y_1(\gamma_n) + \frac{1}{k} \left(\frac{a}{r} \right) Y_1 \left(\frac{r}{a} \gamma_n \right) \right] \right\} \cdot \frac{1}{M} e^{-\gamma_n^2 F_0} -$$

$$- \frac{\pi}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left[N_0(\gamma_n) J_0 \left(\frac{r}{a} \gamma_n \right) - L_0(\gamma_n) Y_0 \left(\frac{r}{a} \gamma_n \right) \right] \cdot \frac{1}{M} e^{-\gamma_n^2 F_0},$$

oraz σ_{zz}^*

$$(2.8) \quad \sigma_{zz}^* = \frac{\sigma_{zz}(1-\nu)\lambda}{\alpha_T E q b} = \frac{k^2}{k^2 - 1} \ln k - \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{2} +$$

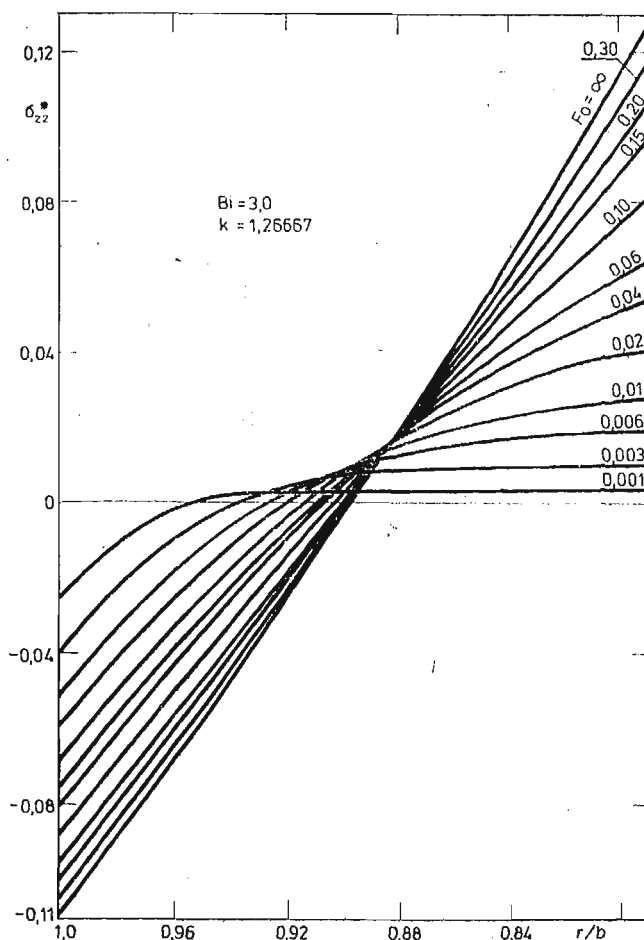
$$+ 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ N_0(\gamma_n) \left[\frac{1}{k^2 - 1} J_1(k\gamma_n) - \frac{1}{k(k^2 - 1)} J_1(\gamma_n) \right] - L_0(\gamma_n) \left[\frac{1}{k^2 - 1} Y_1(k\gamma_n) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{k(k^2 - 1)} Y_1(\gamma_n) \right] \right\} e^{-\gamma_n^2 F_0} \cdot \frac{1}{M} - \frac{\pi}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \left[N_0(\gamma_n) J_0 \left(\frac{r}{a} \gamma_n \right) - \right.$$

$$\left. - L_0(\gamma_n) Y_0 \left(\frac{r}{a} \gamma_n \right) \right] \cdot \frac{1}{M} e^{-\gamma_n^2 F_0}.$$

Zmiany naprężeń osiowych w zależności od liczby Fouriera dla $k = \frac{19}{15}$ i $Bi = 3$ przedstawiono na rysunku 3. Z analizy rysunku wynika, że dla małych liczb Fouriera F_0 występuje koncentracja naprężeń ściskających w powierzchniowych warstwach walca, podczas gdy dla większych wartości F_0 naprężenia ściskające na zewnętrznej powierzchni walca i rozciągające na wewnętrznej są tego samego rzędu (co do wartości bezwzględnej).

2.2. Przybliżony rozkład naprężeń. Zależności określające naprężenia w pierwszej fazie wnikania ciepła otrzymuje się podstawiając (1.8) do (2.1) — (2.3) [13]:



Rys. 3. Rozkład naprężeń osiowych w ścianie wydrążonego walca w zależności od liczby Fouriera; $Bi = 3$, $k = \frac{19}{15}$

$$(2.9) \quad \sigma_{zz}^* = \frac{1}{24 \left(\frac{\delta}{b}\right) \left(\frac{r}{b}\right)^2} \left\{ \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^2 - \left(\frac{1}{k}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2} \cdot \left[3 - 8 \left(1 - \frac{\delta}{b}\right) + 6 \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^2 - \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^4 \right] - 3 \left(\frac{r}{b}\right)^4 + 8 \left(\frac{r}{b}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{\delta}{b}\right) - 6 \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^2 \left(\frac{r}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^4 \right\}, \quad (b - \delta) \leq r \leq b$$

$$(2.10) \quad \sigma_{rr}^* = \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^2 - \left(\frac{1}{k}\right)^2}{24\left(\frac{\delta}{b}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^2\left[1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2\right]} \cdot \left[3 - 8\left(1 - \frac{\delta}{b}\right) + 6\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^2 - \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^4\right], \quad a \leq r \leq (b - \delta)$$

$$(2.11) \quad \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{1}{24\left(\frac{\delta}{b}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^2} \left\{ \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2} \left[3 - 8\left(1 - \frac{\delta}{b}\right) + 6\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^2 - \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^4\right] - 9\left(\frac{r}{b}\right)^4 + 16\left(\frac{r}{b}\right)^3\left(1 - \frac{\delta}{b}\right) - 6\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^2\left(\frac{r}{b}\right)^2 - \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^4 \right\}; \quad (b - \delta) \leq r \leq b$$

$$(2.12) \quad \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{1}{24\left(\frac{\delta}{b}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^2} \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2} \left[3 - 8\left(1 - \frac{\delta}{b}\right) + 6\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^2 - \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^4\right], \quad a \leq r \leq (b - \delta)$$

$$(2.13) \quad \sigma_{zz}^* = \frac{3 - 8\left(1 - \frac{\delta}{b}\right) + 6\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^2 - \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^4}{12\left(\frac{\delta}{b}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2\right]} - \frac{\left[\frac{r}{b} - \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)\right]^2}{2\left(\frac{\delta}{b}\right)}; \quad (b - \delta) \leq r \leq b$$

$$(2.14) \quad \sigma_{zz}^* = \frac{3 - 8\left(1 - \frac{\delta}{b}\right) + 6\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^2 - \left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^4}{12\left(\frac{\delta}{b}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2\right]}; \quad a \leq r \leq (b - \delta)$$

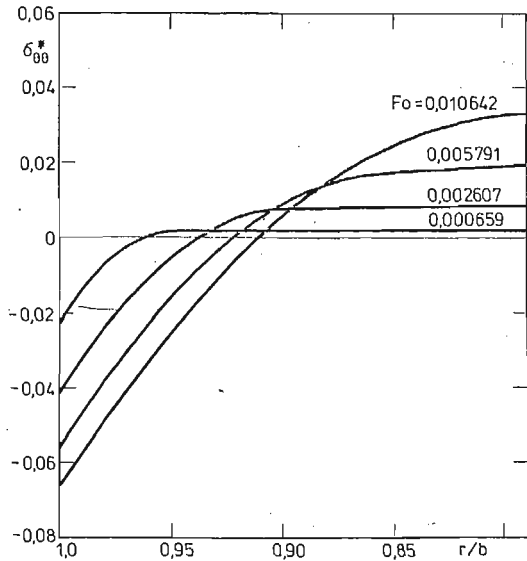
W drugiej fazie wnikania ciepła wzory określające naprężenia otrzymuje się podstawiając $T_{II}(1.12)$ do (2.1)—(2.3):

$$(2.15) \quad \sigma_{rr}^* = \frac{\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1\right](Bi \cdot k^2 \cdot u^* - 1)(k^3 - 1)}{3k\left(\frac{r}{a}\right)^2(k - 1)(k^2 - 1)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1\right](1 - \text{Bi} \cdot k \cdot u^*) (k^4 - 1)}{8 \left(\frac{r}{a}\right)^2 k \cdot (k - 1) (k^2 - 1)} - \frac{\left[\left(\frac{r}{a}\right)^3 - 1\right] (\text{Bi} \cdot k^2 \cdot u^* - 1)}{3k(k-1) \left(\frac{r}{a}\right)^2} - \\
 & - \frac{\text{Bi} \cdot u^* \left[\left(\frac{r}{a}\right)^4 - 1\right]}{8k(k-1) \left(\frac{r}{a}\right)^2}; \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1 \\
 (2.16) \quad \sigma_{\theta\theta}^* & = \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r}{a}\right)^2} \left[\frac{(\text{Bi} \cdot k^2 \cdot u^* - 1) (k^3 - 1)}{3k(k-1) (k^2 - 1)} + \frac{[1 - \text{Bi} \cdot k \cdot u^*] (k^4 - 1)}{8k(k-1) (k^2 - 1)} \right] + \\
 & + \frac{\text{Bi} \cdot k^2 \cdot u^* - 1}{3k(k-1)} \left[\frac{r}{a} - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] + \frac{(1 - \text{Bi} \cdot k \cdot u^*)}{8k(k-1)} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] - \\
 & - \frac{\text{Bi} \cdot k^2 \cdot u^* - 1}{k(k-1)} \left(\frac{r}{a}\right) - \frac{1 - \text{Bi} \cdot k \cdot u^*}{2k(k-1)} \left(\frac{r}{a}\right)^2; \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1
 \end{aligned}$$

oraz

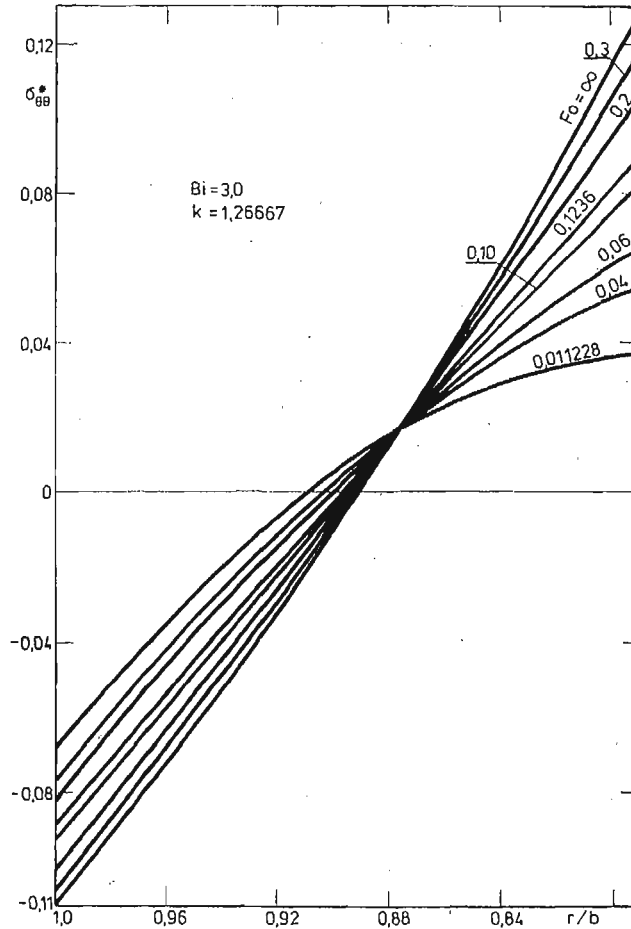
$$\begin{aligned}
 (2.17) \quad \sigma_{zz}^* & = \frac{2 \cdot (\text{Bi} \cdot k^2 \cdot u^* - 1) (k^3 - 1)}{3k(k-1) (k^2 - 1)} + \frac{(1 - \text{Bi} \cdot k \cdot u^*)}{4(k-1)k} - \frac{1 - \text{Bi} \cdot k \cdot u^*}{2k(k-1)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \\
 & - \frac{\text{Bi} \cdot k^2 \cdot u^* - 1}{k(k-1)} \left(\frac{r}{a}\right); \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1
 \end{aligned}$$



Rys. 4. Przybliżony rozkład naprężeń obwodowych w ścianie wydrążonego walca w pierwszej fazie wnikania ciepła; $\text{Bi} = 3$, $k = \frac{19}{15}$, $\text{Fo}_1 = 0,010642$

Wyniki obliczeń naprężeń wg wyprowadzonych wyżej wzorów przedstawiono na rysunkach 4 - 6.

Rysunki 4 i 5 przedstawiają zmiany naprężeń obwodowych w zależności od liczby Fouriera odpowiednio w pierwszej i drugiej fazie wnikania ciepła, natomiast rysunek 6 zmiany na-

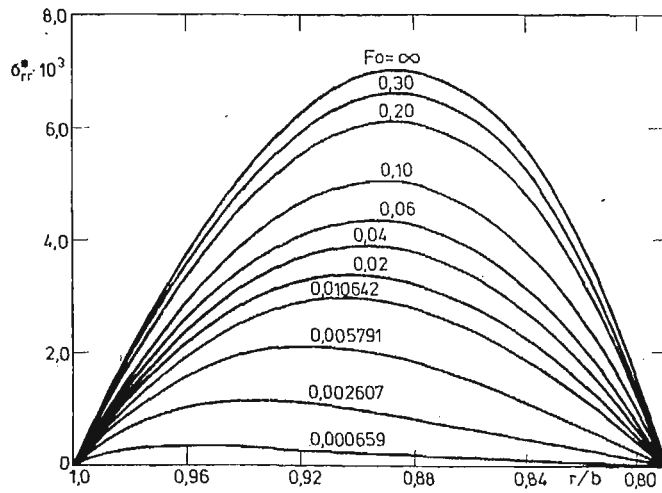


Rys. 5. Przybliżony rozkład naprężeń obwodowych w ścianie wydrążonego walca w drugiej fazie wnikania ciepła: $Bi = 3$, $k = \frac{19}{15}$, $Fo_1 = 0,010642$

prężeń promieniowych w pierwszej i drugiej fazie wnikania ciepła. Bezwymiarowy czas, po którym rozpoczyna się druga faza wnikania ciepła wynosi $Fo_1 = 0,010642$.

W celu oceny dokładności wzorów przybliżonych porównano w tabelicy 2.1. wartość naprężeń osiowych obliczonych wg wzorów ścisłych (2.8) i przybliżonych (2.17) dla $k = \frac{19}{15}$ i $Bi = 3$.

Z analizy omawianej tabelicy wynika, że dokładność przybliżonego wzoru jest dobra.



Rys. 6. Przybliżony rozkład naprężeń promieniowych w ścianie wydrążonego walca w pierwszej i drugiej fazie wnikania ciepła; $Bi = 3$, $k = \frac{19}{15}$, $Fo_1 = 0,010642$

Tablica 2.1. Porównanie przybliżonych (2.17) i dokładnych (2.8) wartości naprężeń osiowych σ_{zz}^* dla wybranych liczb Fouriera

Fo	r/b						
	1,0	0,96	0,92	0,88	0,84	0,8	0,78947
0,02	-0,0709	-0,0344	-0,0048	0,0178	0,0334	0,0421	0,0432
	-0,0683	-0,0322	-0,0038	0,0173	0,0314	0,0396	0,0407
0,04	-0,0765	-0,0393	-0,0078	0,0180	0,0382	0,0526	0,0555
	-0,0754	-0,0384	-0,0073	0,0179	0,0373	0,0515	0,0544
0,06	-0,0813	-0,0436	-0,0104	0,0182	0,0422	0,0617	0,0661
	-0,0803	-0,0427	-0,0100	0,0181	0,0414	0,0606	0,0650
0,1	-0,0890	-0,0504	-0,0146	0,0184	0,0487	0,0761	0,0828
	-0,0879	-0,0495	-0,0141	0,0183	0,0478	0,0750	0,0817
0,2	-0,1003	-0,0604	-0,0207	0,0188	0,0582	0,0973	0,1076
	-0,0993	-0,0596	-0,0203	0,0186	0,0574	0,0963	0,1065
0,3	-0,1055	-0,0650	-0,0235	0,0190	0,0626	0,1071	0,1190
	-0,1045	-0,0642	-0,0231	0,0188	0,0617	0,1060	0,1178
0,45	-0,1086	-0,0677	-0,0251	0,0191	0,0651	0,1128	0,1257
	-0,1075	-0,0669	-0,0248	0,0189	0,0643	0,1117	0,1245
∞	-0,1099	-0,0689	-0,0259	0,0192	0,0663	0,1154	0,1287
	-0,1089	-0,0681	-0,0255	0,0189	0,0654	0,1142	0,1275

* — w dolnych wierszach podano wartości obliczone wg wzoru ścisłego (2.8)

3. Uwagi końcowe

Wyznaczone w pracy przybliżone zależności pozwalają na ścisłe i przybliżone obliczanie pola temperatury i naprężeń w wydrążonym walcu, oraz ocenę wad i zalet obydwu rozwiązań. Z przeprowadzonego porównania wynika, że wzory przybliżone są stosunkowo proste a ich dokładność dostateczna dla obliczeń inżynierskich. Zależności przybliżone są szczególnie przydatne przy obliczeniu temperatury i naprężeń dla małych liczb Fouriera, kiedy to dla uzyskania dobrej dokładności w przypadku stosowania wzorów ścisłych należy uwzględnić dużą liczbę wyrazów w szeregach nieskończonych. Poza tym przy obliczaniu temperatury nie zachodzi konieczność wyznaczania pierwiastków równania charakterystycznego.

Podobne zależności można łatwo wyznaczyć dla przypadku zmiennego strumienia ciepłego stosując całą Duhamela przy wyznaczaniu wzorów ścisłych, jak np. w pracach [3, 11]. Tok postępowania przy wyznaczaniu wzorów przybliżonych nie ulega zmianie.

Należy podkreślić, że przedstawione w pracy zależności nie obowiązują, gdy współczynnik wnikania ciepła od powierzchni cylindra do czynnika jest równy zero, tj. gdy $Bi = 0$. Rozkład temperatury dla omawianego przypadku analizowany był w pracy [3].

Literatura cytowana w tekście.

1. G. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer Verlag, Wien, 1959.
2. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959
3. J. E. RHYTHIAN, *Cylindrical heat flow with arbitrary heating rates*, AIAA Journal, 4, 1 (1963), str. 925—927.
4. S. BRUIN, W. A. BEVERLOO, *Transient temperature distributions in cylindrical shells*, Int. J. Heat Mass Transfer, 11 (1968), str. 1653—1656.
5. R. C. PFAHL, *Transient radial temperature distributions in cylindrical shells*, Int. J. Heat Mass Transfer, 12 (1969), str. 1704—1706.
6. W. ALBRECHT, *Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern*, Konstruktion, 6, 18, (1966), str. 224—231.
7. Д. П. ЕЛИЗАРОВ, *К вопросу о тепловом ударе в паропроводах ТЭС*, Теплоэнергетика, Nr 2, 1971, str. 78 - 82
8. П. В. Цой, *Теплопроводность и температурные напряжения в оболочках при несимметричных обогревах*, Теплофизика Высоких Температур 1, 16 (1978), str. 123 - 130
9. Г. Н. ТРЕТЯЧЕНКО, Б. С. КАРПИНОС, *Тепловое состояние полых цилиндров при внутреннем одностороннем нагреве*, Проблемы прочности, Nr 5, 1977, str. 56 - 58
10. Г. Н. ТРЕТЯЧЕНКО, Б. С. КАРПИНОС, *Термонапряженное состояние полых цилиндров при внутреннем одностороннем нагреве*, Проблемы прочности, Nr 9, 1977, str. 21 - 24.
11. J. TALER, *Nieustalone, kolowo — niesymetryczne pole temperatury w wydrążonym walcu ogrzewanym na zewnętrznej poboczniczy*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana (praca w recenzji).
12. J. TALER, *Aproksymacje nieustalonego pola temperatury w ciałach walcowych i kulistych*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 2, 16, (1978) str. 247—263.
13. F. MLYNARSKI, J. TALER, *Wpływ naprężeń pochodzących od udaru cieplnego na trwałość rur ekranowych konwertorowych kół odzysklotowych*, Archiwum Energetyki, Nr 3, 1976, str. 115—127.

Резюме

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И НАПРЯЖЕНИЙ
В БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ НАГРЕВАЕМЫМ НА ВНЕШНЕЙ
И ОХЛАЖДАЕМЫМ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТЯХ

Получены точные и приближенные формулы для определения нестационарных полей температуры и напряжений в бесконечном полом цилиндре при нулевой начальной температуре. В момент $t = 0$ тепловой поток на внешней поверхности повышается до постоянной величины. На внутренней поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

Точное распределение температуры определено с помощью преобразования Лапласа а приближенное решение получено используя интегральный метод теплового баланса.

Summary

UNSTEADY TEMPERATURE AND THERMAL STRESSES IN A HOLLOW CYLINDER HEATED
ON THE OUTER AND COOLED ON THE INNER SURFACE

The purpose of this paper is to find temperature and thermal stresses distributions in a hollow cylinder with prescribed heat flux across the outer surface and cooled internally by fluid.

The cylinder is assumed to have zero initial temperature. Exact solution for the temperature distribution is obtained applying the Laplace transform with respect to time t and approximate solution by heat balance integral method.

Approximate temperature and thermal stresses profiles are compared with the exact solutions. The agreement is quite good.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT APARATURY
PRZEMYSŁOWEJ I ENERGETYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1978 r.

SKRĘCANIE PRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW JAKO CIAŁ Z WEWNĘTRZNYMI WIĘZAMI¹. I.

KRYSTYNA MAZUR-ŚNIADY (WROCLAW)

Przedstawione w niniejszej pracy liniowe techniczne teorie skręcania pryzmatycznych prętów wyprowadzone zostały na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1].

Jest to oryginalny sposób podejścia do zagadnienia skręcania, nie spotykany w dotychczasowej literaturze problemu bazującej na klasycznej teorii sprężystości uzupełnionej pewnymi dodatkowymi hipotezami.

Dzięki zastosowaniu mechaniki analitycznej kontinuum materialnego przedstawione w pracy techniczne teorie skręcania są wewnętrznie niesprzeczne, podejście do nich jest jednolite, pozwalające na przejście od teorii ogólnej do szczególnych poprzez narzucenie na ruch pręta dodatkowych więzów. Pojęcie więzów pozwala przyjąć zupełnie dowolne warunki brzegowe, jak np. unieruchomienie całego przekroju podporowego oraz pozwala na konstruowanie dowolnych teorii w sposób pewny. Zastosowanie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego pozwala na ocenę zakresu stosowalności każdej z otrzymanych teorii poprzez porównanie obliczonych dla zadanego pręta sił reakcji więzów z danymi obciążeniami zewnętrznymi.

W pierwszym rozdziale pracy przedstawia się podstawy mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1].

W drugim rozdziale pracy konstruuje się ogólną teorię skręcania pryzmatycznych prętów opartą na założeniu nieodkształcalności rzutów przekrojów poprzecznych pręta na płaszczyzny normalne do osi pręta. Równania omawianej teorii wyprowadza się bez narzucania ograniczeń na funkcję obrazującą spaczenie przekroju, a więc inaczej niż w literaturze, gdzie od razu tworzone szczególne teorie, w zależności od rodzaju pręta i charakteru obciążenia.

W trzecim rozdziale otrzymuje się teorię skrępowanego skręcania prętów cienkościennych o otwartych przekrojach poprzez narzucenie na ruch pręta opisany przez więzy przedstawione w rozdziale drugim dodatkowych więzów, polegających na pominięciu kątów odkształcenia postaciowego na powierzchni środkowej pręta (znane założenie Vlasova [2]).

Inne szczególne teorie skręcania oraz przykład zostaną przedstawione w drugiej części pracy o tym samym tytule.

¹⁾ Panu Profesorowi Czesławowi Woźniakowi serdeczne podziękowania za cenne wskazówki udzielone przy wykonywaniu niniejszej pracy składa autorka.

1. Podstawy mechaniki analitycznej kontinuum materialnego²

W rozdziale tym zawarte są podstawowe założenia oraz rezultaty części pracy [1], dotyczącej równań mechaniki ciał z więzami geometrycznymi.

Pojęciami pierwotnymi są: funkcja deformacji

$$\chi = (\chi^k(X, t), X = (X^k), X \in B_R, t \in R, k = 1, 2, 3,$$

gdzie B_R jest obszarem zajęтым przez ciało w konfiguracji odniesienia, gęstość masy w konfiguracji odniesienia $\rho_R = \rho_R(X)$, siły masowe $b = b^k(X, t)$, zewnętrzne siły powierzchniowe $p_R = (p_k)$ oraz pierwszy tensor extra — naprężenia Pioli-Kirchhoffa określający reakcję materiału ciała na stan odkształcenia $T_R = (T^{kj})$.

W dalszym ciągu przyjmuje się, że dane są:

1. równania definicyjne więzów wewnętrznych $\gamma_m(X, t, \chi, \nabla \chi, \dots, \nabla^k \chi) = 0, \nabla$ oznacza gradient materialny, $m = 1, \dots, l$, które przez wprowadzenie nowych niewiadomych funkcji $\vartheta = (\vartheta^a(X, t))$, $a = 1, 2, \dots, n$ będących w kolejności oznaczeniami dla gradientów $\chi^j_{,\delta}, \dots, \chi^j_{,\delta_1} \dots \chi^j_{,\delta_{k-1}}$ można sprowadzić do układu równań rzędu pierwszego względem funkcji wektorowych χ i ϑ :

$$(1.1) \quad h_\nu(X, t, \chi, \nabla \chi, \vartheta, \nabla \vartheta) = 0, \nu = 1, \dots, r,$$

2. równania definicyjne więzów brzegowych (określanych na σB_R) i kontaktowych (określanych na $B_R \cap (\cup \partial B_\gamma), \cup \bar{B}_\gamma = \bar{B}_R, \gamma = 1, \dots, m, B_\gamma \cap B_\delta = \emptyset$ dla każdego $\gamma \neq \delta$)

$$(1.2) \quad R_\rho(\chi, \vartheta) = 0, \quad \rho = 1, \dots, s,$$

3. równanie konstytutywne

$$(1.3) \quad T_R(X, t) = \overset{\infty}{G}_R(X, \nabla \chi(X, t-s)),$$

w którym G_R jest znanym funkcjonałem konstytutywnym materiału prostego,

4. zasada prac przygotowanych

$$(1.4) \quad \int_{B_R} \rho_R(b - \ddot{\chi}) \cdot \delta \chi dv_R + \int_{\partial B_R} p_R \cdot \delta \chi d\sigma_R = \int_{B_R} T_R \cdot \nabla(\delta \chi) dv_R,$$

dla każdego $\delta \chi$ i t , gdzie kropka między symbolami oznacza iloczyn skalarny.

Następnie definiuje się następujące wielkości kolejno jako masowe, brzegowe i kontaktowe siły reakcji więzów

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \rho_R r &\equiv \rho_R(\ddot{\chi} - b) - \text{Div } T_R, & X \in B_\gamma, \\ s_R &\equiv T_R n_R - p_R, & X \in S_R \cap \partial B_R \equiv \partial B_R, \\ s_R &\equiv \llbracket T_R \rrbracket n_R, & X \in S_R \cap B_R, \end{aligned}$$

¹⁾ Oznaczenia wzorowane są na pracy [1]. *Literami podkreślonymi u dołu* oznaczono wektory i tensory. Wskaźniki greckie α, β przebiegają ciąg 1, 2, wskaźniki łacińskie i, j, k, l przebiegają ciąg 1, 2, 3, zaś wskaźnik a przebiega ciąg 1, 2, ..., n . Obowiązuje umowa sumacyjna względem wszystkich wskaźników. (w tym również wprowadzonych w tekście). Przecinek poprzedzający wskaźnik oznacza pochodną cząstkową względem odpowiedniej współrzędnej materialnej, kropka nad symbolem oznacza pochodną podług czasu, a symbol ∇ oznacza gradient materialny. Kropka między symbolami oznacza iloczyn skalarny tak wektorów jak i macierzy, natomiast mnożenie macierzy przez macierz i macierzy przez wektor zapisuje się bez użycia znaku działania.

gdzie $\mathbf{n}_R = (n_j)$ jest wektorem jednostkowym zewnętrznie normalnym do powierzchni $S_R = \cup \partial B_R$, nawias podwójny prostokątny oznacza skok zawartej w nim wielkości przy przejściu przez powierzchnię S_R w kierunku wektora $-\mathbf{n}_R$, przy czym (1.5)_{2, 3} są spełnione tylko na gładkich płatach powierzchni S_R .

Zasadę prac przygotowanych można (przy założeniu odpowiedniej regularności składowych T_R) po zastosowaniu twierdzenia o divergencji zapisać w postaci zasady idealności więzów:

$$(1.6) \quad \int_{B_R} \varrho_R \mathbf{r} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} dV_R + \int_{S_R} \mathbf{s}_R \cdot \delta \boldsymbol{\chi} d\partial_R = 0, \quad \text{dla każdego } \delta \boldsymbol{\chi} \text{ i } t,$$

Prawa zachowania wyprowadzone w punkcie 4 pracy [1] są, podobnie jak zasada idealności więzów, twierdzeniami mechaniki analitycznej kontinuum, w której jako aksjomat przyjęto zasadę prac przygotowanych (1.4). Inne, równoważne podejście podane jest w punkcie 16 pracy [1].

Można wyróżnić trzy rodzaje równań definicyjnych więzów ([1]):

1. Równania definicyjne więzów fizycznych, wyrażające te własności materiału ciała, które nie są opisywane równaniami konstytutywnymi, a także opisujące warunki podparcia ciała.
2. Równania definicyjne więzów modelowych, wyrażające pewne hipotezy odnośnie do ruchu lub odkształcenia ciała w danym problemie.
3. Równania definicyjne więzów mające tylko pomocniczy charakter, tj. nie ograniczające w istocie ruchu ciała.

Każdemu równaniu definicyjnemu więzów odpowiada pewien mnożnik Lagrange'a λ^v lub μ^q . Jak wykazano w pracy [3], mnożniki Lagrange'a odpowiadające pomocniczym równaniom definicyjnym więzów można wyrugować z równań ruchu i warunków brzegowych, wyrażając je liniowo poprzez pozostałe mnożniki Lagrange'a. Siły reakcji więzów można przedstawić w postaci

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}'(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\lambda}') + \mathbf{r}''(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\lambda}''), \\ \mathbf{s}_R &= \mathbf{s}'_R(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\vartheta}; \boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\mu}') + \mathbf{s}''_R(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\vartheta}; \boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\mu}''), \end{aligned}$$

w której \mathbf{r}' , \mathbf{s}' , \mathbf{r}'' i \mathbf{s}'' są pewnymi operatorami liniowymi względem mnożników Lagrange'a $\lambda^v = (\lambda^v)$, $v = 1, \dots, r'$, $\mu^q = (\mu^q)$, $q = 1, \dots, s'$ odpowiadającym tylko więzom fizycznym oraz mnożników $\lambda'' = (\lambda'')$, $v = r'+1, \dots, r''$, $\mu'' = (\mu'')$, $q = s'+1, \dots, s''$, odpowiadającym tylko więzom modelowym. Jeżeli rozkład (1.7) jest jednoznaczny, wtedy układ sił $\mathbf{r}'(X, t)$, $\mathbf{s}'_R(X, t)$ nazywa się układem sił reakcji utrzymujących więzy fizyczne, natomiast układ sił $\mathbf{r}''(X, t)$, $\mathbf{s}''_R(X, t)$ układem sił reakcji utrzymujących więzy modelowe.

Ponieważ więzy modelowe w rzeczywistości nie występują w rozpatrywanym ciele (są to jedynie hipotezy dotyczące przewidywanej deformacji ciała), dlatego utrzymujący je układ sił reakcji należy interpretować jako pewien „fikcyjny” układ sił, który należy dodatkowo przyłożyć do ciała, aby deformowało się zgodnie z postulowanymi więzami modelowymi. Układ tych sił (\mathbf{r}'' , \mathbf{s}''_R) nie działa w rzeczywistości na ciała, jeżeli jednak jest on pomijalnie mały wobec układu sił ($\mathbf{r}' + \mathbf{b}$, $\mathbf{s}'_R + \mathbf{p}_R$) działających w rzeczywistości na ciała

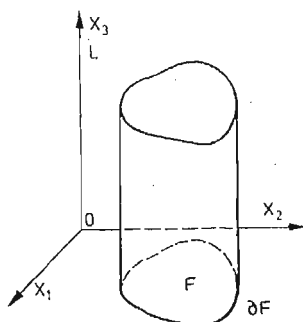
(np. jest rzędu wielkości sił, które pomijamy zestawiając obciążenia danego elementu konstrukcyjnego), to więzy modelowe zostały wprowadzone w sposób właściwy dla danego zagadnienia. Wynika stąd następujące kryterium fizycznej poprawności więzów modelowych ([1] s. 250 - 252)

$$(1.8) \quad \|(r'', s_R')\| \leq \delta \|(b + r', p_R + s_R')\|$$

gdzie $\| \dots \|$ jest normą w przestrzeni wszystkich sił działających na ciało, odpowiednio przyjętą dla danego zagadnienia oraz δ , $0 < \delta \leq 1$, jest daną a priori dopuszczalną odchyłką, charakteryzującą zakres stosowalności więzów modelowych.

2. Ogólna teoria skręcania prętów prostych

Przedmiotem rozważań jest pręt, zajmujący w konfiguracji odniesienia obszar $F \times P$, gdzie F jest jednospójnym obszarem na płaszczyźnie OX_1X_2 , ograniczonym krzywą odciwkami gładką, a P jest odcinkiem $\langle 0, L \rangle$ osi X_3 kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych (rys. 2.1).



Rys. 2.1

Gęstość masy pręta oznaczmy przez $\rho_R = \rho_R(\mathbf{X})$, pole zewnętrznych obciążeń masowych $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, zaś pole zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $\mathbf{p}_R = (p_1, p_2, p_3)$.

Równania ogólnej teorii skręcania prostych pryzmatycznych prętów wyprowadzone na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1] przedstawiono w [4].

Teoria oparta jest na założeniu nieodkształcalności rzutów przekrojów poprzecznych pręta na płaszczyznie prostopadłe do osi pręta, co uzyskuje się narzucając na funkcję deformacji $\chi(\mathbf{X}, t)$ następujące więzy

$$(2.1) \quad \chi^{m,\alpha} \chi_{m,\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

gdzie wskaźniki greckie przebiegają ciąg 1, 2, wskaźniki łacińskie ciąg 1, 2, 3,

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{dla } \alpha = \beta, \end{cases}$$

$$(\cdot)_{,k} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_k},$$

a umowa sumacyjna dotyczy zarówno greckich jak i łacińskich wskaźników.

Łatwo zauważyć, że w ramach teorii liniowej więzy (2.1) są całkowalne względem χ . Wyrażając funkcję deformacji za pomocą wektora przemieszczenia $u = \chi - X$, otrzymuje się po linearyzacji układ równań (2.1) w postaci

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u_{1,1} &= 0, \\ u_{1,2} + u_{2,1} &= 0, \\ u_{2,2} &= 0 \end{aligned}$$

dającej się scałkować

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_1 &= \psi_1 - \varphi X_2, \\ u_2 &= \psi_2 + \varphi X_1, \\ u_3 &= \zeta, \end{aligned}$$

gdzie $\varphi = \varphi(X_3, t)$, $\psi_1 = \psi_1(X_3, t)$, $\psi_2 = \psi_2(X_3, t)$, $\zeta = \zeta(X_1, X_2, X_3, t)$ są dowolnymi, niezależnymi, różniczkowalnymi funkcjami wszystkich argumentów, pełniącymi rolę współrzędnych uogólnionych. Funkcja φ jest kątem obrotu, ψ_α przesunięciami rzutu przekroju pręta na płaszczyznę OX_1X_2 , ζ stanowi funkcję spaczenia przekroju.

Należy podkreślić, że równania omawianej ogólnej teorii są wyprowadzane bez narzucania ograniczeń na funkcję deplanacji, a więc inaczej niż w literaturze, gdzie od razu konstruuje się szczególne teorie w zależności od rodzaju pręta i charakteru obciążenia.

Dla prostego pryzmatycznego pręta zasadę idealności więzów (1.6) można zapisać w postaci

$$(2.4) \quad \int_1^L \left[\int_{\partial F} s_R \cdot \delta \chi d(\partial F) + \int_F \rho_R r \cdot \delta \chi dF \right] dX_3 + \left| \int_F s_R \cdot \delta \chi dF \right|_{\substack{X_3=0 \\ X_3=L}} = 0,$$

gdzie $\rho_R r \equiv \rho_R(\ddot{\chi} - b) - \text{Div } T_R$ są masowymi siłami reakcji więzów, $s_R = T_R n_R - p_R$ są brzegowymi siłami reakcji więzów, $n_R = (n_j)$ jest wektorem jednostkowym zewnętrznym normalnym do powierzchni brzegowej,

$$(\dot{\quad}) = \frac{\partial(\quad)}{\partial t}.$$

T_R jest pierwszym tensorem extra naprężenia Pioli-Kirchhoffa i wyraża reakcję materiału ciała na stan odkształcenia (1.3). Z warunku (2.4) po podstawieniu składowych przemieszczeń wirtualnych

$$\begin{aligned} \delta \chi_1 &= -\delta \varphi X_2 + \delta \psi_1, \\ \delta \chi_2 &= \delta \varphi X_1 + \delta \psi_2, \\ \delta \chi_3 &= \delta \zeta \end{aligned}$$

i zastosowaniu lematu du Bois-Reymonda otrzymuje się następujące równania ruchu:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} T^{3j} + \rho_R b_3 &= \rho_R \ddot{\chi}_3, \\ \rho_{\alpha,3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F \rho_R b_\alpha dF &= \int_F \rho_R \ddot{\chi}_\alpha dF, \\ M_{3,3} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \int_F \rho_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF &= \\ &= \int_F \rho_R (\ddot{\chi}_2 X_1 - \ddot{\chi}_1 X_2) dF, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.6) \quad \begin{aligned} Q_\alpha &\equiv \int_F T^{3\alpha} dF, \\ M_3 &\equiv \int_F (T^{23}X_1 - T^{13}X_2) dF, \end{aligned}$$

oraz następujące dynamiczne warunki brzegowe

$$(2.7) \quad \begin{aligned} T^{3\alpha}n_\alpha - p_3 &= 0 \quad \text{dla} \quad X_1, X_2 \in \partial F, \\ T^{33}n_3 - p_3 &= 0 \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ Q_\alpha n_3 - \int_F p_\alpha dF &= 0 \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ M_3 n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= 0 \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L. \end{aligned}$$

Ogranicza się rozważania do jednorodnych materiałów liniowo-sprężystych dla których płaszczyzny $X_3 = \text{const}$ (przekroje poprzeczne pręta) są płaszczyznami symetrii sprężystej. Równania konstytutywne (1.3) można zatem zapisać w postaci

$$(2.8) \quad \begin{aligned} T_{ij} &= C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \\ \varepsilon_{kl} &\equiv \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \end{aligned}$$

gdzie (C^{ijkl}) jest tensorem modułów sprężystości, przy czym, $C^{1123} = C^{1131} = C^{2223} = C^{2231} = C^{3323} = C^{3331} = C^{2312} = C^{3112} = 0$, zaś pozostałe 13 współczynników jest różnych od zera.

W rezultacie, po uwzględnieniu (2.3) otrzymuje się (2.8) w postaci

$$(2.9) \quad \begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= T^{\beta\alpha} = C^{\alpha\beta 33} \zeta_{,3}, \\ T^{\alpha 3} &= T^{3\alpha} = C^{\alpha 313} (\zeta_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3} X_2) + C^{\alpha 323} (\zeta_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1), \\ T^{33} &= C^{3333} \zeta_{,3}. \end{aligned}$$

Podstawiając (2.9) do (2.5) otrzymuje się następujący układ równań — jedno różniczkowe i trzy różniczkowo-całkowe dla czterech współrzędnych uogólnionych

$$(2.10) \quad \begin{aligned} &C^{1313} \zeta_{,11} + 2C^{1323} \zeta_{,12} + C^{2323} \zeta_{,22} + C^{3333} \zeta_{,33} + \zeta_{,R} b_3 = \varrho_R \ddot{\zeta} \\ &C^{1313} \int_F \zeta_{,13} dF + C^{1323} \int_F \zeta_{,23} dF + C^{1313} F \psi_{1,33} + C^{1323} F \psi_{2,33} + \\ &\quad + (-C^{1313} S_1 + C^{1323} S_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \varrho_R \int_F b_1 dF = \varrho_R (F \ddot{\psi}_1 - S_1 \ddot{\varphi}), \\ &C^{1323} \int_F \zeta_{,13} dF + C^{2323} \int_F \zeta_{,23} dF + C^{1323} F \psi_{1,33} + C^{2323} F \psi_{2,33} + \\ &\quad + (-C^{1323} S_1 + C^{2323} S_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \varrho_R \int_F b_2 dF = \varrho_R (F \ddot{\psi}_2 + S_2 \ddot{\varphi}), \\ &-C^{1313} \int_F \zeta_{,13} X_2 dF + C^{1323} \int_F (\zeta_{,13} X_1 - \zeta_{,23} X_2) dF + C^{2323} \int_F \zeta_{,23} X_1 dF + \end{aligned}$$

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & + (-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\psi_{1,33} + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\psi_{2,33} + \\ & + (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,33} + \int_{\partial F} (p_2X_1 - p_1X_2)d(\partial F) + \\ & + \varrho_R \int_F (b_2X_1 - b_1X_2)dF = \varrho_R(-S_1\ddot{\psi}_1 + S_2\ddot{\psi}_2 + J_0\ddot{\varphi}), \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.11) \quad \begin{aligned} S_1 & \equiv \int_F X_2 dF, \\ S_2 & \equiv \int_F X_1 dF, \\ J_1 & \equiv \int_F X_2^2 dF, \\ J_2 & \equiv \int_F X_1^2 dF, \\ J_{12} & \equiv \int_F X_1 X_2 dF, \\ J_0 & \equiv J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Otrzymane w podobny sposób dynamiczne warunki brzegowe mają postać:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} & C^{\alpha 313}n_\alpha \zeta_{,1} + C^{\alpha 323}n_\alpha \zeta_{,2} + C^{\alpha 313}n_\alpha \psi_{1,3} + C^{\alpha 323}n_\alpha \psi_{2,3} + \\ & + (C^{\alpha 323}n_\alpha X_1 - C^{\alpha 313}n_\alpha X_2)\varphi_{,3} - p_3 = 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\ & C^{3333}\zeta_{,3} - n_3 p_3 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ & C^{1313} \int_F \zeta_{,1} dF + C^{1323} \int_F \zeta_{,2} dF + C^{1313} F \psi_{1,3} + C^{1323} F \psi_{2,3} + \\ & + (-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\varphi_{,3} - n_3 \int_F p_1 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ & C^{1323} \int_F \zeta_{,1} dF + C^{2323} \int_F \zeta_{,2} dF + C^{1323} F \psi_{1,3} + C^{2323} F \psi_{2,3} + \\ & + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\varphi_{,3} - n_3 \int_F p_2 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ & -C^{1313} \int_F \zeta_{,1} X_2 dF + C^{1323} \int_F (\zeta_{,1} X_1 - \zeta_{,2} X_2) dF + C^{2323} \int_F \zeta_{,2} X_1 dF + \\ & + (-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\varphi_{1,3} + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\psi_{2,3} - \\ & - n_3 \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF = 0. \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu wielkości φ , ψ_α , ζ z równań ruchu (2.10), dynamicznych warunków brzegowych (2.12) oraz odpowiednich warunków początkowych można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_k(X, t)$ z (2.3), składowe stanu naprężenia $T^{kl}(X, t)$ z (2.9)

oraz składowe sił reakcji więzów ze wzorów

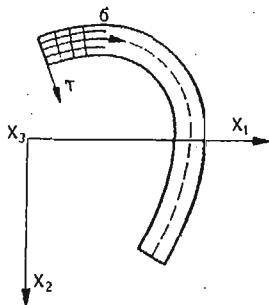
$$\begin{aligned}
 q_R r_1 &= -T^{1j},_j - q_R b_1 + q_R(\ddot{\psi}_1 - \ddot{\varphi} X_2), \\
 q_R r_2 &= -T^{2j},_j - q_R b_2 + q_R(\ddot{\psi}_2 + \ddot{\varphi} X_1), \\
 (2.13) \quad q_R r_3 &= -T^{3j},_j - q_R b_3 + q_R \ddot{\zeta}, \\
 s_{Rj} &= T^{j\alpha} n_\alpha - p_j \quad \text{dla} \quad X_1, X_2 \in \partial F, X_3 \in (0, L), \\
 s_{Rj} &= T^{j3} n_3 - p_j \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L.
 \end{aligned}$$

Więzy (2.1) są więzami modelowymi. Porównanie sił reakcji tych więzów (2.13) z obciążeniami zewnętrznymi za pomocą (1.8) pozwala oszacować błąd otrzymanego rozwiązania w stosunku do rozwiązania ścisłego.

3. Skręcanie prętów cienkościennych o otwartych przekrojach

W niniejszym rozdziale wyprowadza się na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1] równania liniowej teorii skrępowanego skręcania prętów cienkościennych [4], przyjmując założenia V. Z. VLASOWA [2].

Przedmiot rozważań stanowi cienkościenny pręt o dowolnym otwartym przekroju poprzecznym (rys. 3.1), o gęstości masy $q_R(X)$, obciążony polem zewnętrznych obciążeń masowych $b = (b_1, b_2, b_3)$ oraz polem zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $p_R = (p_1, p_2, p_3)$.



Rys. 3.1

Na ruch pręta narzuca się oprócz więzów (2.1), dodatkowe więzy wewnętrzne, polegające na pominięciu kątów odkształcenia postaciowego na powierzchni środkowej pręta cienkościennego (tj. na powierzchni $\tau = 0$) zawartych między śladami płaszczyzn parametrycznych $X_3 = \text{const}$ i $\sigma = \text{const}$.

W ramach teorii infinytezymalnej hipotezę tę można przedstawić w postaci

$$(3.1) \quad \frac{\partial u_\sigma}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \sigma} = 0.$$

Całkując powyższą równość względem współrzędnej σ oraz uwzględniając (2.3) otrzymuje się:

$$(3.2) \quad u_3 = \zeta = \zeta_0 - \psi_{1,3} X_1 - \psi_{2,3} X_2 - \varphi_{,3} \omega,$$

gdzie $\zeta_0 = \zeta_0(x_0, \cdot)$ jest nową współrzędną uogólnioną a

$$(3.3) \quad \omega = \omega(\sigma, \tau) = \int_0^\sigma \left[X_1 \frac{\partial X_2}{\partial \sigma} - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial \sigma} \right]_{\tau=0} d\sigma + \tau \left[X_2 \frac{\partial X_2}{\partial \sigma} + X_1 \frac{\partial X_1}{\partial \sigma} \right]_{\tau=0}$$

jest współrzędną wycinkową.

W ten sposób zagadnienie teorii prętów cienkościennych sprowadza się do zagadnienia ciała z więzami wewnętrznymi, przedstawionymi przy pomocy czterech niezależnych współrzędnych uogólnionych $\varphi, \psi_1, \psi_2, \zeta_0$ będących funkcjami współrzędnej X_3 i czasu t .

W wyniku narzucenia dodatkowych więzów powstają dodatkowe siły reakcji więzów, które wprowadza się do równań ruchu (2.5)

$$(3.4) \quad \begin{aligned} T^{3j} + \varrho_R b_3 + r_\zeta &= \varrho_R \ddot{\chi}_3, \\ Q_{\alpha,3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_\alpha dF + r_{\psi_\alpha} &= \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_\alpha dF, \\ M_{3,3} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \int_F \varrho_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF + \\ &+ r_\varphi = \int_F \varrho_R (\ddot{\chi}_2 X_1 - \ddot{\chi}_1 X_2) dF, \end{aligned}$$

oraz do warunków brzegowych (2.7)

$$(3.5) \quad \begin{aligned} T^{3\alpha} n_\alpha - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\ T^{33} n_3 - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ Q_{\alpha} n_3 - \int_F p_\alpha dF &= S_{\psi_\alpha} \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ M_{3} n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= S_\varphi \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L. \end{aligned}$$

Wykorzystując zasadę idealności (1.6) dla więzów dodatkowych

$$(3.6) \quad \int_0^L \left(\int_{\partial F} S_\zeta \delta \zeta d(\partial F) + \int_F r_\zeta \delta \zeta dF + r_{\psi_1} \delta \psi_1 + r_{\psi_2} \delta \psi_2 + r_\varphi \delta \varphi \right) dX_3 + \\ + \left| \int_F S_\zeta \delta \zeta dF + s_{\psi_1} \delta \psi_1 + s_{\psi_2} \delta \psi_2 + s_\varphi \delta \varphi \right|_{X_3=0 \text{ i } X_3=L} = 0,$$

podstawiając za $\delta \zeta = \delta \zeta_0 - X_1 \delta \psi_{1,3} - X_2 \delta \psi_{2,3} - \omega \delta \varphi_3$, oraz stosując lemat du Bois-Reymonda otrzymuje się następujące równania ruchu

$$(3.7) \quad \begin{aligned} Q_{,3} + \int_{\partial F} p_3 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_3 &= \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_3 dF, \\ M_{\alpha,33} + \int_{\partial F} (p_{3,3} X_\alpha + p_\alpha) d(\partial F) + \int_F [(\varrho_R b_3)_{,3} X_\alpha + \varrho_R b_\alpha] dF &= \\ &= \int_F [(\varrho_R \ddot{\chi}_3)_{,3} X_\alpha + \varrho_R \ddot{\chi}_\alpha] dF, \\ M_{,3} + M_{\omega,33} + \int_{\partial F} (p_{3,3} \omega - p_1 X_2 + p_2 X_1) d(\partial F) + \end{aligned}$$

$$(3.7) \quad + \int_F [(\varrho_R b_3)_{,3} \omega - \varrho_R (b_1 X_2 - b_2 X_1)] dF = \int_F [(\varrho_R \ddot{\chi}_3)_{,3} \omega + \\ \text{[cd]} \quad + \varrho_R (-\ddot{\chi}_1 X_2 + \ddot{\chi}_2 X_1)] dF,$$

oraz równania konstytutywne dla uogólnionych sił

$$(3.8) \quad Q \equiv \int_F T^{33} dF, \\ M_\alpha \equiv \int_F T^{33} X_\alpha dF, \quad \alpha = 1, 2, \\ M \equiv \int_F [T^{23}(X_1 - \omega_{,2}) - T^{13}(X_2 + \omega_{,1})] dF, \\ M_\omega \equiv \int_F T^{33} \omega dF.$$

W analogiczny sposób otrzymuje się dynamiczne warunki brzegowe, które obowiązują na skrajnych przekrojach ($X_3 = 0$ i $X_3 = L$)

$$(3.9) \quad Q_\alpha n_3 - \int_F p_3 dF = 0, \\ M_\alpha n_3 - \int_F p_3 X_\alpha dF = 0, \\ M_\omega n_3 - \int_F p_3 \omega dF = 0, \\ M_{\alpha,3} + \int_F \varrho_R b_3 X_\alpha dF + \int_{\partial F} p_3 X_\alpha d(\partial F) - n_3 \int_F p_\alpha dF - \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_3 X_\alpha dF = 0, \\ M_{\omega,3} + M + \int_F \varrho_R b_3 \omega dF + \int_{\partial F} p_3 \omega d(\partial F) - n_3 \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF - \\ - \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_3 \omega dF = 0.$$

Ogranicza się rozważania do jednorodnych materiałów liniowo-sprężystych, dla których płaszczyzny $X_3 = \text{const}$ (przekroje pręta) są płaszczyznami symetrii sprężystej (2.9), co po uwzględnieniu (3.2) daje konstytutywne równania materiału w postaci

$$(3.10) \quad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = C^{\alpha\beta 33} (\zeta_{0,3} - \psi_{1,33} X_1 - \psi_{2,33} X_2 - \varphi_{,33} \omega), \\ T^{\alpha 3} = T^{3\alpha} = [C^{\alpha 313} (-X_2 - \omega_{,1}) + C^{\alpha 323} (X_1 - \omega_{,2})] \varphi_{,3}, \\ T^{33} = C^{3333} (\zeta_{0,3} - \psi_{1,33} X_1 - \psi_{2,33} X_2 - \varphi_{,33} \omega).$$

Po podstawieniu (3.10) do (3.8) otrzymuje się uogólnione siły w postaci

$$(3.11) \quad Q \equiv C^{3333} (\zeta_{0,3} F - \varphi_{,33} S_\omega), \\ M_1 \equiv C^{3333} (-\psi_{1,33} J_{12} - \psi_{2,33} J_1 - \varphi_{,33} S_{\omega 1}), \\ M_2 \equiv C^{3333} (-\psi_{1,33} J_2 - \psi_{2,33} J_{12} - \varphi_{,33} S_{\omega 2}), \\ M \equiv \varphi_{,3} \left[C^{1313} \int_F (X_2 + \omega_{,1})^2 dF - 2C^{1323} \int_F (X_2 + \omega_{,1}) (X_1 - \omega_{,2}) dF + \right. \\ \left. + C^{2323} \int_F (X_1 - \omega_{,2})^2 dF \right], \\ M_\omega = C^{3332} (\zeta_{0,3} S_\omega - \psi_{1,33} S_{\omega 2} - \psi_{2,33} S_{\omega 1} - \varphi_{,33} J_\omega),$$

gdzie

$$\begin{aligned} S_\omega &\equiv \int_F \omega dF, \\ S_{\omega 1} &\equiv \int_F \omega X_2 dF, \\ S_{\omega 2} &\equiv \int_F \omega X_1 dF, \\ J_\omega &\equiv \int_E \omega^2 dF, \end{aligned}$$

natomiast równania ruchu (3.7) w postaci układu czterech sprzężonych równań różniczkowych

$$\begin{aligned} (3.12) \quad & C^{3333}(F\zeta_{0,33}^* - S_2\psi_{1,333} - S_1\psi_{2,333} - S_\omega\varphi_{,333}) + \int_{\partial F} p_3 d(\partial F) + \\ & + \varrho_R \int_F b_3 dF = \varrho_R(F\ddot{\zeta}_{0,3} - S_2\ddot{\psi}_{1,3} - S_1\ddot{\psi}_{2,3} - S_\omega\ddot{\varphi}_{,3}), \\ & C^{3333}(S_2\zeta_{0,333} - J_2\psi_{1,3333} - J_{12}\psi_{2,3333} - S_{\omega 2}\varphi_{,3333} + \\ & + \int_{\partial F} (p_{3,3}X_1 + p_1)d(\partial F) + \varrho_R \int_F (b_{3,3}X_1 + b_1)dF = \varrho_R(S_2\ddot{\zeta}_{0,3} - J_2\ddot{\psi}_{1,33} - \\ & - J_{12}\ddot{\psi}_{2,33} - S_{\omega 2}\ddot{\varphi}_{,33} - S_1\ddot{\varphi}_{,3} + F\ddot{\psi}_1), \\ & C^{3333}(S_1\zeta_{0,333} - J_{12}\psi_{1,3333} - J_1\psi_{2,3333} - S_{\omega 1}\varphi_{,333}) + \\ & + \int_{\partial F} (p_{3,3}X_2 + p_2)d(\partial F) + \varrho_R \int_F (b_{3,3}X_2 + b_2)dF = \varrho_R(S_1\ddot{\zeta}_{0,3} - J_{12} \\ & \ddot{\psi}_{1,3} - J_1\ddot{\psi}_{2,33} - S_{\omega 1}\ddot{\varphi}_{,33} + S_2\ddot{\varphi}_{,3} + F\ddot{\psi}_2), \\ & C^{3333}(S_\omega\zeta_{0,333} - S_{\omega 2}\psi_{1,3333} - S_{\omega 1}\psi_{2,3333} - J_\omega\varphi_{,3333}) + \\ & + GJ_D\varphi_{,33} + \int_{\partial F} (p_{3,3}\omega + p_2X_1 - p_1X_2)d(\partial F) + \\ & + \varrho_R \int_F (b_{3,3}\omega + b_2X_1 - b_1X_2)dF = \varrho_R(S_\omega\ddot{\zeta}_{0,3} - S_{\omega 2}\ddot{\psi}_{1,33} - \\ & - S_{\omega 1}\ddot{\psi}_{2,33} - J_\omega\ddot{\varphi}_{,33} + J_0\ddot{\varphi}_{,3} - S_1\ddot{\psi}_1 + S_2\ddot{\psi}_2), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} (3.13) \quad & GJ_D \equiv C^{1313} \int_F (X_2 + \omega_{,1})^2 dF - 2C^{1323} \int_F (X_1 - \omega_{,2})(X_2 + \omega_{,1}) dF + \\ & + C^{2323} \int_F (X_1 - \omega_{,2})^2 dF. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (3.9) dla przekrojów $X_3 = 0$ i $X_3 = L$, po uwzględnieniu (3.11) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
& C^{3333}(F\zeta_{0,3} - S_2\psi_{1,33} - S_1\psi_{2,33} - S_\omega\varphi_{,33}) - n_3 \int_F p_3 dF = 0, \\
& C^{3333}(S_2\zeta_{0,3} - J_2\psi_{1,33} - J_{12}\psi_{2,33} - S_{\omega 2}\varphi_{,33}) - n_3 \int_F p_3 X_1 dF = 0, \\
& C^{3333}(S_1\zeta_{0,3} - J_{12}\psi_{1,33} - J_1\psi_{2,33} - S_{\omega 1}\varphi_{,33}) - n_3 \int_F p_3 X_2 dF = 0, \\
& C^{3333}(S_\omega\zeta_{0,3} - S_{\omega 2}\psi_{1,33} - S_{\omega 1}\psi_{2,33} - J_\omega\varphi_{,33}) - n_3 \int_F p_3 \omega dF = 0, \\
& C^{3333}(S_2\zeta_{0,33} - J_2\psi_{1,333} - J_{12}\psi_{2,333} - S_{\omega 2}\varphi_{,333}) + \varrho_R \int_F b_3 X_1 dF + \\
(3.14) \quad & + \int_{\partial F} p_3 X_1 d(\partial F) - n_3 \int_F p_1 dF = \varrho_R(S_2\ddot{\zeta}_0 - J_2\ddot{\psi}_{1,3} - J_{12}\ddot{\psi}_{2,3} - S_{\omega 2}\ddot{\varphi}_{,3}), \\
& C^{3333}(S_1\zeta_{0,33} - J_{12}\psi_{1,333} - J_1\psi_{2,333} - S_{\omega 1}\varphi_{,333}) + \varrho_R \int_F b_3 X_2 dF + \\
& + \int_{\partial F} p_3 X_2 d(\partial F) - n_3 \int_F p_2 dF = \varrho_R(S_1\ddot{\zeta}_0 - J_{12}\ddot{\psi}_{1,3} - J_2\ddot{\psi}_{2,3} - S_{\omega 1}\ddot{\varphi}_{,3}), \\
& C^{3333}(S_\omega\zeta_{0,33} - S_{\omega 2}\psi_{1,333} - S_{\omega 1}\psi_{2,333} - J_\omega\varphi_{,333}) + GJ_D\varphi_{,33} + \\
& + \varrho_R \int_F b_3 \omega dF + \int_{\partial F} p_3 \omega d(\partial F) - n_3 \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF = \\
& = \varrho_R(S_\omega\ddot{\zeta}_0 - S_{\omega 2}\ddot{\psi}_{1,3} - S_{\omega 1}\ddot{\psi}_{2,3} - J_\omega\ddot{\varphi}_{,3}).
\end{aligned}$$

Po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych φ , ψ_α , ζ_0 z równań ruchu (3.12), dynamicznych warunków brzegowych (3.14) oraz odpowiednich warunków początkowych można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_\alpha(X, t)$ z (2.3) i $u_3(X, t)$ z (3.2), składowe stanu naprężenia $T^{kl}(X, t)$ z (3.10) oraz dodatkowe siły reakcji więzów ze wzorów (3.4) i (3.5).

Należy przypomnieć, że oprócz dodatkowych sił reakcji więzów występują takie siły reakcji więzów wyrażone wzorami (2.13), w których T^{ij} oblicza się z (2.9), a współrzędne uogólnione ζ , ψ_1 , ψ_2 , φ stanowią rozwiązanie układu równań (2.10) wraz z warunkami brzegowymi (2.12) i warunkami początkowymi.

Otrzymany opisaną wyżej metodą układ równań (3.12) można porównać, przy założeniu, że materiał ciała jest jednorodny i izotropowy, z układem równań ruchu prętów cienkościennych o przekrojach otwartych, otrzymanym przez V. Z. Vlasova w [2], s. 448 - 452. Całkowita zgodność obu podejść zachodzi, gdy obliczamy współrzędną wycinkową zmieniającą się na grubości przekroju pręta — w niniejszej pracy według wzoru (3.3) a w pracy [2] jak na s. 189. Wyrażenie GJ_D (3.13) jest wówczas, tak jak u V. Z. Vlasowa, sztywnością przekroju pręta cienkościennego przy skręcaniu.

Dzięki zastosowanemu w niniejszej pracy podejściu porównanie sił reakcji więzów (2.13), (3.4) i (3.5) z obciążeniami zewnętrznymi za pomocą (1.8) pozwala oszacować błąd otrzymanego rozwiązania w stosunku do rozwiązania ścisłego.

Literatura cytowana w tekście

1. CZ. WOŹNIAK, *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego*, (w:) Dynamika układów sprężystych (praca zbiorowa), Wrocław 1976.
2. V. Z. VLASOV, *Tonkostiennyje uprugije stierżni*, Moskva 1959.
3. H. STOLARSKI, *On the problem of real and imaginary reaction forces in constrained continuum mechanics*, Bull. Acad. Polon. Sci., sci. techn. (w druku).
4. K. MAZUR-ŚNIADY, *Some problems of torsion of prismatic rods as bodies with internal constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., sci. techn., 22, 1974.

Резюме

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ КАК ТЕЛ
С ВНУТРЕННИМИ СВЯЗЯМИ. I.

Темой работы является вывод некоторых технических теорий кручения призматических стержней на основе механики тел с внутренними связями [1]. Получается общую теорию кручения основанную на гипотезе недеформируемости проекций сечений стержня на плоскости перпендикулярные к оси стержня и теорию тонкостенных стержней с открытыми сечениями основанную на известных предположениях Власова.

Summary

TORSION OF PRISMATIC RODS AS BODIES WITH INTERNAL CONSTRAINTS. I.

The aim of the present work is to derive some technical theories of torsion of prismatic rods on the basis of the theory of bodies with internal constraints [1]. We obtain general theory of torsion based on the assumption that the projections of rod's cross-sections on the plane normal to the axis rod is rigid and theory of thin-walled rods with open cross-sections, based on well known Vlasov's assumption.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1978 r.

SKRĘCANIE PRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW JAKO CIAŁ Z WEWNĘTRZNYMI WIĘZAMI. II

KRYSTYNA MAZUR-ŚNIADY (WROCLAW)

W pierwszej części pracy przedstawione zostały ogólna teoria skręcania pryzmatycznych prętów oraz teoria skrupowanego skręcania prętów cienkościennych o otwartych przekrojach, wyprowadzone na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1].

W 1 i 2 rozdziale niniejszej pracy narzuca się (podobnie jak w rozdziale 3 pracy [2]) na ruch pręta opisany więzami realizującymi nieodkształcalność rzutów przekrojów poprzecznych pręta na płaszczyzny normalne do osi pręta dodatkowe więzy, co pozwala otrzymać inne szczególne teorie skręcania.

W pierwszej części rozdziału pierwszego dodatkowe więzy rozdzielają zmienne w funkcji spaczenia przekroju oraz przedstawiają sobą pewien układ równań różniczkowych (w postaci ogólnej). W ten sposób otrzymuje się teorię skrupowanego skręcania prętów o zwartym przekroju.

W celu ilustracji otrzymanej teorii w drugiej części rozdziału pierwszego przedstawia się równania otrzymane w przypadku wspornika o zwartym przekroju.

W rozdziale drugim dodatkowe więzy uniezależniają funkcję spaczenia od położenia przekroju poprzecznego pręta, co pozwala otrzymać techniczną teorię skręcania prętów o zwartych przekrojach.

Rozdział trzeci zawiera przykład, jego przedmiotem jest jednorodny, izotropowy, nieważki pręt o przekroju w kształcie elipsy, o poboczniczy wolnej od obciążeń zewnętrznych, skręcany w sposób statyczny parami sił działającymi w końcowych przekrojach.

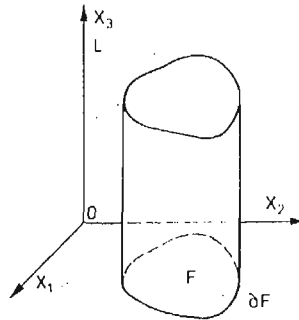
W celu uzyskania rozwiązania stosuje się najpierw ogólną teorię skręcania, przedstawioną w rozdziale drugim niniejszej pracy, obliczając przemieszczenia, naprężenia oraz siły reakcji więzów. Następnie stosuje się techniczną teorię skręcania prętów o przekroju zwartym, przedstawioną w rozdziale piątym, obliczając przemieszczenia, naprężenia oraz dodatkowe siły reakcji więzów.

Przeprowadza się analizę rozwiązań uzyskanych według obu teorii uwzględniając wielkość sił reakcji więzów, która, jak wiadomo, stanowi kryterium zakresu stosowalności teorii.

Ponadto rozdział szósty zawiera porównanie równań wraz z rozwiązaniami technicznej teorii skręcania prętów o zwartym przekroju w przypadku pręta będącego przedmiotem przykładu z równaniami i rozwiązaniami teorii swobodnego skręcania, otrzymanymi przez Saint-Venanta w ramach klasycznej teorii sprężystości ([3] s. 177 - 187, [4] s. 366 - 387).

1. Skręcanie skrępowane prętów o zwartych przekrojach¹

1.1. Ogólne równania Przedmiotem rozważań jest pryzmatyczny pręt o zwartym przekroju, ograniczonym krzywą odcinkami gładką (rys. 1.1). Gęstość masy pręta oznacza się jak poprzednio przez ρ_R i zakłada się, że dane są pola zewnętrznych obciążeń masowych $b = (b_1, b_2, b_3)$ i zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $p_R = (p_1, p_2, p_3)$.



Rys. 1.1

Równania teorii wyprowadzone na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1] przedstawiono w [5], ograniczając ruch pręta opisany w [2] za pomocą więzów (2.1) dodatkowymi więzami wewnętrznymi narzuconymi na funkcję spazenia

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} \zeta - (1 + \varepsilon)\Phi &= 0, \\ \varepsilon &= \varepsilon(X_3, t), \\ \Phi &= \Phi(X_1, X_2, t), \end{aligned}$$

oraz układem równań różniczkowych

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} \gamma_{\nu'}(\varphi, \psi_1, \psi_2, \varepsilon, \varphi_{,3}, \psi_{1,3}, \psi_{2,3}, \varepsilon_{,3}) &= 0 \\ &\text{dla } 0 < X_3 < L, \nu' = 1, 2, \dots, p', \\ \gamma_{\nu''}(\Phi, \nabla\Phi) &= 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in F, \nu'' = p'+1, p'+2, \dots, p'+p'', \end{aligned}$$

gdzie ∇ oznacza gradient materialny.

Uwzględnimy tu także istnienie geometrycznych więzów brzegowych w postaci układu równań różniczkowych

$$(1.1.3) \quad \begin{aligned} \beta_{\varrho'}(\varphi, \psi_1, \psi_2, \varepsilon) &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \varrho' = 1, 2, \dots, l', \\ \beta_{\varrho''}(\Phi, \Phi_{,s}) &= 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \varrho'' = 1, 2, \dots, l'', \end{aligned}$$

gdzie $(\)_{,s}$ oznacza różniczkowanie po stycznej do brzegu ∂F .

Rozdzielając zmienne w funkcji spazenia przekroju za pomocą więzów (1.1.1) wprowadzono nowe współrzędne uogólnione ε i Φ , przy czym $\varepsilon(X_3, t)$ określa stopień skrępo-

¹⁾ Oznaczenia wzorowane są na pracy [1]. Literami półgrubymi oznaczono wektory i tensory. Wskaźniki i, j przebiegają ciąg 1, 2, 3, wskaźniki α, β , przebiegają ciąg 1, 2. Obowiązuje konwencja sumacyjna względem wszystkich wskaźników. Przecinek poprzedzający wskaźnik oznacza pochodną cząstkową względem odpowiedniej współrzędnej materialnej, kropka nad symbolem oznacza pochodną podług czasu a symbol ∇ oznacza gradient materialny.

wania skręcania na długości pręta, a $\Phi(X_1, X_2, t)$ zależy od kształtu przekroju poprzecznego w danej chwili t .

Więzy (1.1.2)₁ narzucone są na współrzędne uogólnione będące funkcjami zmiennych X_3 i t oraz na ich pochodne cząstkowe względem współrzędnej materialnej X_3 , więzy (1.1.2)₂ natomiast narzucone są na funkcję Φ oraz jej gradient materialny.

Blizsza interpretacja techniczna więzów (1.1.2) jest utrudniona z powodu ogólnej postaci opisujących je układów równań. Zaletą takiego sformułowania równań więzów wewnętrznych jest otrzymanie teorii w miarę ogólnej, zawierającej w sobie wiele teorii szczególnych, między innymi teorię swobodnego skręcania prętów o zwartych przekrojach, dla której równania (1.1.2)₁ można przedstawić w postaci

$$\gamma_1 = \varepsilon_{,3} = 0,$$

zaś lewe strony równań (1.1.2)₂ i (1.1.3) przyjąć tożsamościowo równe zeru. Inną szczególną teorią może być teoria, w której narzuca się z góry postać funkcji Φ , przyjmując ją np. jako wielomian.

Więzy brzegowe (1.1.3)₁ narzucone są na funkcje zależne od X_3 i t na końcach prętów natomiast (1.1.3)₂ na funkcję Φ i jej pochodną po stycznej do brzegu ∂F na poboczniczy pręta.

W drugiej części rozdziału pierwszego zostanie przedstawiony przykład więzów brzegowych (1.1.3), będą to więzy realizujące pełne utwierdzenie całego przekroju poprzecznego skręcanego wspornika.

W dalszych rozważaniach zawartych w omawianym podrozdziale pracy korzysta się z ogólnej postaci więzów (1.1.2) i (1.1.3), wprowadzając mnożniki Lagrange'a λ'' i λ''' odpowiadające układowi równań (1.1.2) oraz $\mu^{e''}$ i $\mu^{e'''}$ odpowiadające warunkom brzegowym (1.1.3).

W wyniku wprowadzenia dodatkowych więzów (1.1.1), (1.1.2) i (1.1.3) powstają dodatkowe siły reakcji więzów, które, analogicznie jak w rozdziale (3) pracy [2], wprowadza się do równań ruchu (2.5) w [2]:

$$\begin{aligned} T^{3j},_j + Q_R b_3 + R_\xi &= Q_R \ddot{\chi}_3, \\ Q_{\alpha,3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F Q_R b_\alpha dF + R_{\nu\alpha} &= \int_F Q_R \ddot{\chi}_\alpha dF, \\ (1.1.4) \quad M_{3,3} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \int_F Q_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF + R_\rho &= \\ &= \int_F Q_R (\ddot{\chi}_2 X_1 - \ddot{\chi}_1 X_2) dF, \end{aligned}$$

oraz do warunków brzegowych (2.7) w [2]

$$\begin{aligned} T^{3\alpha} n_\alpha - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla} \quad X_1, X_2 \in \partial F, \\ T^{33} n_3 - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ (1.1.5) \quad Q_\alpha n_\alpha - \int_F p_\alpha dF &= S_{\nu\alpha} \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ M_3 n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= S_{\nu\alpha} \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \end{aligned}$$

gdzie Q_α i M_3 dane są równaniami konstytutywnymi (2.6) w [2].

Następnie korzysta się z zasady idealności więzów dla więzów dodatkowych, która po wprowadzeniu mnożników Lagrange'a i zastosowaniu twierdzenia o divergencji przyjmuje postać

$$(1.1.6) \quad \int_0^L \left\{ \int_{\partial F} S_\zeta \delta \zeta d(\partial F) + \int_F R_\zeta \delta \zeta dF + R_{\psi_1} \delta \psi_1 + R_2 \delta \psi_2 + R_\varphi \delta \varphi - \right. \\ \left. - \int_{\partial F} \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{,\alpha}^m} n_\alpha \delta \chi^m d(\partial F) - \int_F \left[\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \lambda^m} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{,k}^m} \right)_{,k} \right] \delta \chi^m dF - \right. \\ \left. - \int_{\partial F} \mu^{\rho'} \frac{\partial \beta_{\rho'}}{\partial \chi_{,s}^3} \delta \chi^3 + \mu^{\rho''} \left(\frac{\partial \beta_{\rho''}}{\partial \chi_{,s}^3} \delta \chi_{,s}^3 \right) d(\partial F) \right\} dX_3 + \\ + \left| \int_F S_\zeta \delta \zeta dF + S_{\psi_1} \delta \psi_1 + S_{\psi_2} \delta \psi_2 + S_\varphi \delta \varphi - \int_F \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{,3}^m} n_3 \delta \chi^m dF - \right. \\ \left. - \int_F \mu^{\rho'} \frac{\partial \beta_{\rho'}}{\partial \chi^m} \delta \chi^m dF \right|_{X_3=0, X_3=L} = 0,$$

gdzie wskaźnik ν przebiega ciąg $1, 2, \dots, p', p'+1, p'+2, \dots, p'+p''$, zaś sumowanie należy wykonać po $\nu, \rho', \rho'', m, \alpha, k$.

Dzięki wprowadzeniu mnożników Lagrange'a można traktować wariacje funkcji $\varphi, \psi_\alpha, \varepsilon, \Phi$ jako niezależne. Podstawiając do (1.1.6) składowe przemieszczeń wirtualnych

$$(1.1.7) \quad \begin{aligned} \delta \chi_1 &= -\delta \varphi X_2 + \delta \psi_1, \\ \delta \chi_2 &= \delta \varphi X_1 + \delta \psi_2, \\ \delta \chi_3 &= \Phi \delta \varepsilon + (1 + \varepsilon) \delta \Phi \end{aligned}$$

stosując lemat du Bois-Reymonda otrzymuje się następujący układ równań

$$(1.1.8) \quad \begin{aligned} \int_0^L \left[-R_\zeta + \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta_{,k}} \right)_{,k} \right] (1 + \varepsilon) dX_3 + \left| \left(-S_\zeta + \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta_{,3}} n_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu^{\rho'} \frac{\partial \beta_{\rho'}}{\partial \zeta} \right) (1 + \varepsilon) \right|_{X_3=0, X_3=L} = 0, \\ \int_F \left(-S_\zeta + \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta_{,\alpha}} n_\alpha + \mu^{\rho''} \frac{\partial \beta_{\rho''}}{\partial \zeta} \right) \Phi d(\partial F) + \int_{\partial F} \mu^{\rho''} \frac{\partial \beta_{\rho''}}{\partial \zeta_{,s}} \Phi_{,s} d(\partial F) + \\ + \int_F \left[-R_\zeta + \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta_{,k}} \right)_{,k} \right] \Phi dF = 0, \\ -R_{\psi_1} + \int_F \left[\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_1} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{1,k}} \right)_{,k} \right] dF + \int_{\partial F} \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{1,\alpha}} n_\alpha d(\partial F) = 0, \\ -R_{\psi_2} + \int_F \left[\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_2} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{2,k}} \right)_{,k} \right] dF + \int_{\partial F} \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{2,\alpha}} n_\alpha d(\partial F) = 0, \end{aligned}$$

$$(1.1.8) \quad -R_\varphi + \int_F \left\{ \left[\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_2} - \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{2,k}} \right)_{,k} \right] X_1 - \left[\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_1} - \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{1,k}} \right)_{,k} \right] X_2 \right\} dF +$$

$$[cd] \quad + \int_{\partial F} \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{2,\alpha}} n_\alpha X_1 - \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{1,\alpha}} n_\alpha X_2 \right) d(\partial)F = 0,$$

oraz następujące warunki brzegowe

$$\int_0^L \left[-S_\xi + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \xi_{,\alpha}} n_\alpha + \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi} - \left(\mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi_{,s}} \right)_{,s} \right] (1 + \varepsilon) dX_3 = 0$$

dla $X_1, X_2 \in \partial F$,

$$\int_0^L \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi_{,s}} (1 + \varepsilon) dX_3 = 0 \quad \text{w miejscach połączenia gładkich płytów brzegu } \partial F,$$

$$(1.1.9) \quad \int_F \left(-S_\xi + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \xi_{,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \xi} \right) \Phi dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L,$$

$$-S_{\varphi_1} + \int_F \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{1,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \chi_1} \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L,$$

$$-S_{\varphi_2} + \int_F \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{2,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \chi_2} \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L,$$

$$-S_\varphi + \int_F \left[\left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{2,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \chi_2} \right) X_1 - \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{1,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \chi_1} \right) X_2 \right] dF = 0$$

dla $X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L$.

Równania (1.1.8) po podstawieniu sił reakcji więzów ze wzorów (1.1.4) i (1.1.5) oraz po zastosowaniu twierdzenia o divergencji przyjmują postać

$$(1.1.10) \quad \int_0^L \left[T^{3\alpha}{}_{,\alpha} (1 + \varepsilon) - T^{33} \varepsilon_{,3} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \xi} (1 + \varepsilon) \right] dX_3 + \left[\left(\mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \xi} + p_3 \right) (1 + \varepsilon) \right]_{X_3=0}^{X_3=L} +$$

$$+ \int_0^L \varrho_R b_3 (1 + \varepsilon) dX_3 = \int_0^L \varrho_R [(1 + \varepsilon) \ddot{\Phi} + \ddot{\varepsilon} \Phi] dX_3,$$

$$\int_F \left(T^{33}{}_{,3} \Phi - T^{3\alpha} \Phi_{,\alpha} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \xi} \Phi \right) dF + \int_{\partial F} \left(\mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi} \Phi + \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi_{,s}} \Phi_{,s} \right) d(\partial F) +$$

$$+ \int_{\partial F} p_3 \Phi d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_3 \Phi dF = \int_F \varrho_R [(1 + \varepsilon) \ddot{\Phi} + \ddot{\varepsilon} \Phi] dF,$$

$$\int_F \left(T^{13}{}_{,3} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_1} \right) dF + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_1 dF = \int_F \varrho_R (\ddot{\psi}_1 - \ddot{\psi} X_2) dF,$$

$$\int_F \left(T^{23}{}_{,3} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_2} \right) dF + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_2 dF = \int_F \varrho_R (\ddot{\psi}_2 + \ddot{\psi} X_1) dF,$$

$$(1.1.10) \quad \int_F \left[(T^{23}X_1 - T^{13}X_2)_{,3} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial X_2} X_1 - \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial X_1} X_2 \right] dF + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) +$$

$$[cd] \quad + \int_F q_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF = \int_F q_R [\ddot{\psi}_2 X_1 - \ddot{\psi}_1 X_2 + \ddot{\varphi}(X_1^2 + X_2^2)] dF,$$

gdzie

$$(1.1.11) \quad T^{ij} \equiv \bar{T}^{ij} - \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial X_{i,j}}.$$

Po podstawieniu sił reakcji więzów (1.1.5) oraz zależności (1.1.11) do warunków brzegowych (1.1.9), otrzymuje się je w następującej postaci

$$\int_0^L \left[T^{3\alpha} n_\alpha - \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \zeta} + \left(\mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \zeta_{,s}} \right)_{,s} - p_3 \right] (1 + \varepsilon) dX_3 = 0$$

dla $X_1, X_2 \in \partial F$,

$$\int_0^L \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \zeta_{,s}} (1 + \varepsilon) dX_3 = 0 \text{ w punktach połączenia gładkich płatów brzegu } \partial F,$$

$$\int_F \left(T^{33} n_3 - \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \zeta} - p_3 \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,$$

$$(1.1.12) \quad \int_F \left(T^{13} n_3 - \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial X_1} - p_1 \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,$$

$$\int_F \left(T^{23} n_3 - \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial X_2} - p_2 \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,$$

$$\int_F \left[(T^{23}X_1 - T^{13}X_2) n_3 - \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial X_2} X_1 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial X_1} X_2 - p_2 X_1 + p_1 X_2 \right] dF = 0$$

dla $X_3 = 0$ i $X_3 = L$.

Występujące w dynamicznych warunkach brzegowych (1.1.9) i (1.1.12) zewnętrzne siły powierzchniowe interpretuje się albo jako obciążenia zewnętrzne albo reakcje podparć.

Po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych $s, \Phi, \psi_1, \psi_2, \varphi$ dla danego materiału opisanego równaniem konstytutywnym (1.3) w [2], z równań ruchu (1.1.10), dynamicznych warunków brzegowych uwzględniających sposób podparcia pręta (1.1.12) oraz warunków początkowych można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_\alpha^s(X, t)$ z (2.3) w [2] i $u_3(X, t)$ z (1.1.1), składowe stanu naprężenia T^{kl} oraz dodatkowe siły reakcji więzów ze wzorów (1.1.4) i (1.1.5).

Oprócz dodatkowych sił reakcji więzów występują takie siły reakcji więzów (2.11) w [2], dla których T^{ij} oblicza się z (2.9) w [2], a współrzędne uogólnione $\zeta, \psi_1, \psi_2, \varphi$ stanowią rozwiązanie układu równań (2.10) w [2] wraz z warunkami brzegowymi (2.12) w [2] i warunkami początkowymi.

Stosując kryterium fizycznej poprawności więzów modelowych przedstawione w pracy [2] za pomocą wzoru (1.8) należy zwrócić uwagę na fakt, że więzami modelowymi są tylko więzy (2.1) w [2] oraz (1.1.1), natomiast więzy (1.1.2) i (1.1.3) są więzami fizycznymi.

1.2. Równania skrępowanego skręcania wspornika Przedmiotem rozważań jest pręt o dowolnym zwartym przekroju ograniczonym krzywą odcinkami gładką (rys. 1.1) utwierdzony w przekroju $X_3 = 0$. Utwierdzenie uniemożliwia przemieszczenie punktów przekroju podporowego (przekrój podporowy nie pacy się, nie wykonuje obrotu i nie przesuwa się w płaszczyźnie OX_1X_2).

Gęstość pręta oznaczmy przez $\rho_R(X)$, pole zewnętrznych obciążeń masowych przez $b = (b_1, b_2, b_3)$, pole zewnętrznych obciążeń powierzchniowych przez $p_R = (p_1, p_2, p_3)$.

Obowiązują więzy (2.1) w [2] i (1.1.1), lewe strony (1.1.2) są różnicami równe zeru

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{r'}(\varphi, \varepsilon, \psi_1, \psi_2, \varphi_{,3}, \psi_{1,3}, \psi_{2,3}, \varepsilon_{,3}) &= 0 \quad \text{dla } X_3 \in (0, L), \\ \gamma_{r''}(\Phi, \nabla\Phi) &\equiv 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in F, \end{aligned}$$

natomiast geometryczne więzy brzegowe (1.1.3) przyjmują postać

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} \beta_1 &= (1 + \varepsilon) = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\ \beta_2 &= \varphi = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\ \beta_3 &= \psi_1 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\ \beta_4 &= \psi_2 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\ \beta_{e'}(\varphi, \psi_1, \psi_2, \varepsilon) &\equiv 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\ \beta_{e''}(\Phi, \Phi_s) &\equiv 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (1.2.1) i (1.2.2) równania (1.1.10) przyjmują postać

$$(1.2.3) \quad \begin{aligned} \int_0^L [T^{3\alpha}_{, \alpha}(1 + \varepsilon) - T^{33}_{, 3}\varepsilon_{, 3}]dX_3 + |p_3(1 + \varepsilon)|_{X_3=L} + \int_0^L \rho_R b_3(1 + \varepsilon)dX_3 &= \\ &= \int_0^L \rho_R [(1 + \varepsilon)\ddot{\Phi} + \ddot{\varepsilon}\Phi]dX_3, \\ \int_F (T^{33}_{, 3}\Phi - T^{3\alpha}_{, \alpha}\Phi) dF + \int_{\partial F} p_3 \Phi d(\partial F) + \int_F \rho_R b_3 \Phi dF &= \int_F \rho_R [(1 + \varepsilon)\ddot{\Phi} + \ddot{\varepsilon}\Phi] dF, \\ \int_F T^{13}_{, 3} dF + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \int_F \rho_R b_1 dF &= \int_F \rho_R (\ddot{\psi}_1 - \ddot{\varphi}X_2) dF, \\ \int_F T^{23}_{, 3} dF + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \int_F \rho_R b_2 dF &= \int_F \rho_R (\ddot{\psi}_2 + \varphi X_1) dF, \\ \int_F (T^{23}X_1 - T^{13}X_2)_{, 3} dF + \int_F (p_2X_1 - p_1X_2) d(\partial F) + \int_F \rho_R (b_2X_1 - b_1X_2) dF &= \\ &= \int_F \rho_R [\ddot{\psi}_2X_1 - \ddot{\psi}_1X_2 + \ddot{\varphi}(X_1^2 + X_2^2)] dF. \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymuje się warunki brzegowe (1.1.12)

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} \int_0^L (T^{3\alpha}_{, \alpha}n_\alpha - p_3)(1 + \varepsilon)dX_3 &= 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\ \int_F (-T^{33} - p_3)\Phi dF - \mu_1 F &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\bar{F}} (T^{33} - p_3) \Phi dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
& \int_{\bar{F}} (-T^{13} - p_1) dF + \mu_2 \int_{\bar{F}} \frac{1}{X_2} dF - \mu_3 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
& \int_{\bar{F}} (T^{13} - p_1) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
(1.2.4) \quad & \int_{\bar{F}} (-T^{23} - p_2) dF - \mu_2 \int_{\bar{F}} \frac{1}{X_1} dF - \mu_4 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
[\text{cd}] \quad & \int_{\bar{F}} (T^{23} - p_2) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
& \int_{\bar{F}} (-T^{23} X_1 + T^{13} X_2 - p_2 X_1 + p_1 X_2) dF - \mu_2 2F - \mu_4 S_2 + \mu_3 S_1 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
& \int_{\bar{F}} (T^{23} X_1 - T^{13} X_2 - p_2 X_1 + p_1 X_2) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L.
\end{aligned}$$

W dalszym ciągu ogranicza się rozważania do przypadku jednorodnych marteiałów liniowo-sprężystych, dla których płaszczyzny $X_3 = \text{const}$ są płaszczyznami symetrii sprężystej, co po uwzględnieniu (2.9) w [2] i (1.1.1) prowadzi do

$$\begin{aligned}
(1.2.5) \quad & T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = C^{\alpha\beta 33} \varepsilon_{,3} \Phi, \\
& T^{\alpha 3} = T^{3\alpha} = C^{\alpha 313} [\Phi_{,1}(1+\varepsilon) + \psi_{1,3} - \varphi_{,3} X_2] + C^{\alpha 323} [\Phi_{,2}(1+\varepsilon) + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1], \\
& T^{33} = C^{3333} \Phi_{,3}.
\end{aligned}$$

Podstawiając (1.2.5) do (1.2.3) otrzymuje się następujący układ pięciu równań różniczkowo-całkowych

$$\begin{aligned}
(1.2.6) \quad & (C^{1313} \Phi_{,11} + 2C^{1323} \Phi_{,12} + C^{2323} \Phi_{,22}) \int_0^L (1+\varepsilon)^2 dX_3 - C^{3333} \Phi \int_0^L \varepsilon_{,3}^2 dX_3 + \\
& + [p_3(1+\varepsilon)]_{X_3=L} + \varrho_R \int_0^L b_3(1+\varepsilon) dX_3 = \varrho_R \ddot{\Phi} \int_0^L (1+\varepsilon) dX_3 + \varrho_R \Phi \int_0^L \ddot{\varepsilon} dX_3, \\
& C^{3333} \varepsilon_{,33} \int_{\bar{F}} \Phi^2 dF - \left(C^{1313} \int_{\bar{F}} \Phi_{,1}^2 dF + 2C^{1323} \int_{\bar{F}} \Phi_{,1} \Phi_{,2} dF + C^{2323} \int_{\bar{F}} \Phi_{,2}^2 dF \right) \\
& (1+\varepsilon) - \left(C^{1313} \int_{\bar{F}} \Phi_{,1} dF + C^{1323} \int_{\bar{F}} \Phi_{,2} dF \right) \psi_{1,3} - \left(C^{1323} \int_{\bar{F}} \Phi_{,1} dF + C^{2323} \right. \\
& \left. \int_{\bar{F}} \Phi_{,2} dF \right) \psi_{2,3} - \left[-C^{1313} \int_{\bar{F}} \Phi_{,1} X_2 dF + C^{1323} \int_{\bar{F}} (\Phi_{,1} X_1 - \Phi_{,2} X_2) dF + C^{2323} \right. \\
& \left. \int_{\bar{F}} \Phi_{,2} X_1 dF \right] \varphi_{,3} + \int_{\partial F} p_3 \Phi d(\partial F) + \varrho_R \int_{\bar{F}} b_3 \Phi dF = \varrho_R (1+\varepsilon) \int_{\bar{F}} \ddot{\Phi} dF + \varrho_R \ddot{\varepsilon} \int_{\bar{F}} \Phi dF, \\
& \left(C^{1313} \int_{\bar{F}} \Phi_{,1} dF + C^{1323} \int_{\bar{F}} \Phi_{,2} dF \right) \varepsilon_{,3} + C^{1313} F \psi_{1,33} + C^{1323} F \psi_{2,33} + \\
& + (-C^{1313} S_1 + C^{1323} S_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \varrho_R \int_{\bar{F}} b_1 dF = \varrho_R (F \ddot{\psi}_1 - S_1 \ddot{\varphi}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(C^{1323} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2} dF \right) \varepsilon_{,3} + C^{1323} F \psi_{1,33} + C^{2323} F \psi_{2,33} + \\
& + (-C^{1323} S_1 + C^{2323} S_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_2 d(\partial)F + \varrho_R \int_F b_2 dF = \varrho_R (F \ddot{\psi}_2 + S_2 \ddot{\varphi}), \\
(1.2.6) \quad & - \left[C^{1313} \int_F \Phi_{,1} X_2 dF + C^{1323} \int_F (\Phi_{,2} X_2 - \Phi_{,1} X_1) dF - C^{2323} \int_F \Phi_{,2} X_1 \right] \varepsilon_{,3} - \\
& \quad \quad \quad - (C^{1313} S_1 - C^{1323} S_2) \psi_{1,33} - (C^{1323} S_1 - C^{2323} S_2) \psi_{2,33} + (C^{1313} J_1 - \\
& \quad \quad \quad - 2C^{1323} J_{12} + C^{2323} J_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial)F + \varrho_R \int_F (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF = \\
& \quad \quad \quad = \varrho_R (-S_1 \ddot{\psi}_1 + S_2 \ddot{\psi}_2 + J_0 \ddot{\varphi}).
\end{aligned}$$

Podobnie, podstawiając (1.2.5) do (1.2.4) otrzymuje się warunki brzegowe w następującej postaci

$$\begin{aligned}
& [C^{1313} \Phi_{,1} n_1 + C^{1323} (\Phi_{,2} n_1 + \Phi_{,1} n_2) + C^{2323} \Phi_{,2} n_2] \int_0^L (1+\varepsilon)^2 dX_3 + \\
& + [-C^{1313} X_2 n_1 + C^{1323} (X_1 n_1 - X_2 n_2) + C^{2323} X_1 n_2] \int_0^L \varphi_{,3} (1+\varepsilon) dX_3 + \\
& + (C^{1313} n_1 + C^{1323} n_2) \int_0^L \psi_{1,3} (1+\varepsilon) dX_3 + (C^{1323} n_1 + C^{2323} n_2) \int_0^L \psi_{2,3} (1+\varepsilon) dX_3 - \\
& - \int_0^L p_3 (1+\varepsilon) dX_3 = 0 \quad \text{dla } X_1 X_2 \in \partial F, \\
& -C^{3333} \varepsilon_{,3} \int_F \Phi^2 dF - \int_F p_3 \Phi dF - \mu_1 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
(1.2.7) \quad & C^{3333} \varepsilon_{,3} \int_F \Phi^2 dF - \int_F p_3 \Phi dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
& -C^{1313} F \psi_{1,3} - C^{1323} F \psi_{2,3} - \int_F p_1 dF + \mu_2 \int_F \frac{1}{X_2} dF - \mu_3 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
& \left(C^{1313} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{1323} \int_F \Phi_{,2} dF \right) (1+\varepsilon) + C^{1313} F \psi_{1,3} + C^{1323} F \psi_{2,3} + \\
& \quad \quad \quad + (-C^{1313} S_1 + C^{1323} S_2) \varphi - \int_F p_1 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
& -C^{1323} F \psi_{1,3} - C^{2323} F \psi_{2,3} - \int_F p_2 dF - \mu_2 \int_F \frac{1}{X_1} dF - \mu_4 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
& \left(C^{1323} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2} dF \right) (1+\varepsilon) + C^{1323} F \psi_{1,3} + C^{2323} F \psi_{2,3} + \\
& \quad \quad \quad + (-C^{1323} S_1 + C^{2323} S_2) \varphi - \int_F p_2 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\psi_{1,3} - (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\psi_{2,3} - \\
 & \quad - (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,3} - \int_F (p_2X_1 - p_1X_2)dF - \\
 (1.2.7) \quad & -2F\mu_2 + S_1\mu_3 + S_2\mu_4 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
 [\text{cd}] \quad & \left[-C^{1313} \int_F \Phi_{,1}X_2dF + C^{1323} \int_F (\Phi_{,1}X_1 - \Phi_{,2}X_2)dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2}X_1dF \right] \\
 & (1 + \varepsilon) + (-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\psi_{1,3} + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\psi_{2,3} + \\
 & \quad + (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,3} - \int_F (p_2X_1 - p_1X_2)dF = 0 \\
 & \quad \quad \quad \text{dla } X_3 = L.
 \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu układu równań (1.2.6) z uwzględnieniem warunków brzegowych (1.2.7) i (1.2.2) oraz warunków początkowych ze względu na niewiadome współrzędne uogólnione Φ , ε , ψ_1 , ψ_2 , φ , można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_\alpha(X, t)$ z (2.3) w [2] i $u_3(X, t)$ z (1.1.1), składowe stanu naprężenia T^{kl} z (1.2.5) oraz dodatkowe siły reakcji więzów ze wzorów (1.1.4) i (1.1.5).

Należy uwzględnić także siły reakcji więzów przedstawione w [2] za pomocą (2.13), gdzie T^{ij} oblicza się z (2.9) w [2] natomiast współrzędne uogólnione ξ , ψ_1 , ψ_2 , φ z układu równań (2.10) w [2] z warunkami brzegowymi (2.12) w [2] i odpowiednimi warunkami początkowymi.

Stosując kryterium fizycznej poprawności więzów modelowych przedstawione w pracy [2] za pomocą wzoru (1.8) należy zwrócić uwagę na fakt, że więzami modelowymi są tylko więzy (2.1) w [2] oraz (1.1.1), natomiast więzy (1.2.1) i (1.2.2) są więzami fizycznymi.

2. Techniczna teoria skręcania prętów o zwartych przekrojach

Rozważa się pręt pryzmatyczny o dowolnym zwartym jednorodnym przekroju poprzecznym (rys. 1.1) i o swobodnych końcach. Przyjmuje się, że obciążenie zewnętrzne dane jest w postaci sił masowych $b = (b_1, b_2, b_3)$ i sił powierzchniowych $p_R = (p_1, p_2, p_3)$.

Ruch pręta ogranicza się, oprócz więzów opisanych w pracy [2] za pomocą zależności (2.1), więzami dodatkowymi:

$$(2.1) \quad u_3 = \xi = \Phi,$$

gdzie $\Phi = \Phi(X_1, X_2, t)$ jest nową współrzędną uogólnioną.

W ten sposób uzyskuje się funkcję spaczenia przekroju stałą na całej długości pręta i zależną od kształtu przekroju poprzecznego pręta w danej chwili t .

Inaczej można by otrzymać równania omawianej teorii korzystając z teorii skręcania skrępowanego prętów o zwartych przekrojach jak to przedstawiono w rozdziale 1.

Sposób zastosowany w niniejszym rozdziale jest znacznie prostszy.

Wprowadzając dodatkowe więzy (2.1) należy uwzględnić powstanie dodatkowych sił reakcji więzów, które wprowadza się, analogicznie jak w rozdziałach 3 pracy [2] i 1 niniejszej pracy, do równań ruchu (2.5) w [2]

$$\begin{aligned}
 T^{3j},_j + \varrho_R b_3 + R_\zeta &= \varrho_R \ddot{\chi}_3, \\
 Q_{\alpha,3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_\alpha dF + R_{\varphi\alpha} &= \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_\alpha dF, \\
 (2.2) \quad M_{3,3} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \int_F \varrho_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF + R_\varphi &= \\
 &= \int_F \varrho_R (\ddot{\chi}_2 X_1 - \ddot{\chi}_1 X_2) dF,
 \end{aligned}$$

oraz do warunków brzegowych (2.7) w [2].

$$\begin{aligned}
 T^{3\alpha} n_\alpha - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
 T^{33} n_3 - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 (2.3) \quad Q_\alpha n_3 - \int_F p_\alpha dF &= S_{\varphi\alpha} \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 M_3 n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= S_\varphi \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,
 \end{aligned}$$

gdzie Q_α i M_3 dane są równaniami konstytutywnymi (2.6) w [2].

Zasada idealności dla więzów dodatkowych przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad \int_0^L \left[\int_{\partial F} S_\zeta \delta \zeta d(\partial F) + \int_F R_\zeta \delta \zeta dF + R_{\varphi 1} \delta \psi_1 + R_{\varphi 2} \delta \psi_2 + R_\varphi \delta \varphi \right] dX_3 + \\
 + \left[\int_F S_\zeta \delta \zeta dF + S_{\varphi 1} \delta \psi_1 + S_{\varphi 2} \delta \psi_2 + S_\varphi \delta \varphi \right]_{X_3=0 \text{ i } X_3=L} = 0.
 \end{aligned}$$

Podstawiając składowe przemieszczeń wirtualnych

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad \delta \chi_1 &= -\delta \varphi X_2 + \delta \psi_1, \\
 \delta \chi_2 &= \delta \varphi X_1 + \delta \psi_2, \\
 \delta \chi_3 &= \delta \Phi.
 \end{aligned}$$

do równania (2.4) i korzystając z niezależności wariacji współrzędnych uogólnionych oraz z lematu du Bois-Reymonda otrzymuje się następujący układ równań

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad \int_0^L R_\zeta dX_3 + |S_\zeta|_{X_3=0 \text{ i } X_3=L} &= 0, \\
 R_{\varphi 1} &= 0, \\
 R_{\varphi 2} &= 0, \\
 R_\varphi &= 0,
 \end{aligned}$$

oraz odpowiadające mu warunki brzegowe

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad \int_0^L S_\zeta dX_3 &= 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
 S_{\varphi 1} &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\
 S_{\varphi 2} &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\
 S_\varphi &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L.
 \end{aligned}$$

Równania (2.6) po podstawieniu sił reakcji więzów ze wzorów (2.2) i (2.3) oraz po zastosowaniu twierdzenia o divergencji przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L T^{3\alpha}{}_{,\alpha} dX_3 + p_3 \Big|_{X_3=L}^{X_3=0} + \int_0^L \varrho_R b_3 dX_3 = \int_0^L \varrho_R \ddot{\Phi} dX_3, \\
 & \int_F T^{13}{}_{,3} dF + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_1 dF = \int_F \varrho_R (-\ddot{\psi} X_2 + \ddot{\psi}_1) dF, \\
 (2.8) \quad & \int_F T^{23}{}_{,3} dF + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_2 dF = \varrho_R (\ddot{\psi} X_1 + \ddot{\psi}_2) dF, \\
 & \int_F (T^{23} X_1 - T^{13} X_2)_{,3} dF + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \\
 & + \int_F \varrho_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF = \int_F \varrho_R [\ddot{\psi} (X_1^2 + X_2^2) + \ddot{\psi}_2 X_1 - \ddot{\psi}_1 X_2] dF,
 \end{aligned}$$

natomiast warunki brzegowe (2.7) po analogicznych przekształceniach dane są przez

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L (T^{3\alpha} n_\alpha - p_3) dX_3 = 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
 & \int_F (T^{13} n_3 - p_1) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\
 (2.9) \quad & \int_F (T^{23} n_3 - p_2) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\
 & \int_F [(T^{23} X_1 - T^{13} X_2) n_3 - p_2 X_1 + p_1 X_2] dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L.
 \end{aligned}$$

Ograniczając rozważania do materiałów jednorodnych, liniowo-sprężystych, dla których płaszczyzny $X_3 = \text{const}$ są płaszczyznami symetrii sprężystej i uwzględniając (2.9) w [2] i (2.1) otrzymuje się równania konstytutywne materiału w postaci

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad & T^{\alpha 3} = T^{3\alpha} = C^{\alpha 313} (\Phi_{,1} + \psi_{1,3} - \psi_{,3} X_2) + C^{\alpha 323} (\Phi_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1), \\
 & T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = T^{33} = 0.
 \end{aligned}$$

Podstawiając (2.10) do (2.8) otrzymuje się układ czterech równań różniczkowych dla czterech współrzędnych uogólnionych $\Phi, \psi_1, \psi_2, \varphi$:

$$\begin{aligned}
 & L(C^{1313} \Phi_{,11} + 2C^{1323} \Phi_{,12} + C^{2323} \Phi_{,22}) + p_3 \Big|_{X_3=L}^{X_3=0} + \varrho_R \int_0^L b_3 dX_3 = \varrho_R L \ddot{\Phi}, \\
 (2.11) \quad & C^{1313} F \psi_{1,33} + C^{1323} F \psi_{2,33} + (-C^{1313} S_1 + C^{1323} S_2) \varphi_{,33} + \int_F p_1 d(\partial F) + \\
 & + \varrho_R \int_F b_1 dF = \varrho_R (F \psi_1 - S_1 \ddot{\psi}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C^{1323}F\psi_{1,33} + C^{2323}F\psi_{2,33} + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \\
& \quad + \varrho_R \int_F b_2 dF = \varrho_R (F\ddot{\psi}_2 + S_2\ddot{\varphi}), \\
& -(C^{1313}S_1 - C^{1323}S_2)\psi_{1,33} - (C^{1323}S_1 - C^{2323}S_2)\psi_{2,33} + \\
& \quad + (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,33} + \int_F (p_2X_1 - p_1X_2) d(\partial F) + \\
& \quad + \varrho_R \int_F (b_2X_1 - b_1X_2) dF = \varrho_R (-S_1\ddot{\psi}_1 + S_2\ddot{\psi}_2 + J_0\ddot{\varphi}).
\end{aligned}$$

Analogicznie otrzymuje się warunki brzegowe, wstawiając (2.10) do (2.9)

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \{ [C^{1313}(\Phi_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3}X_2) + C^{1323}(\Phi_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3}X_1)]n_1 + \\
& \quad + [C^{1323}(\Phi_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3}X_2) + C^{2323}(\Phi_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3}X_1)]n_2 \} dX_3 - \\
& \quad - \int_0^L p_3 dX_3 = 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
& C^{1313} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{1323} \int_F \Phi_{,2} dF + C^{1313}F\psi_{1,3} + C^{1323}F\psi_{2,3} + (-C^{1313}S_1 + \\
& \quad + C^{1323}S_2)\varphi_{,3} - n_3 \int_F p_1 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
(2.12) \quad & C^{1313} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2} dF + C^{1323}F\psi_{1,3} + C^{2323}F\psi_{2,3} + (-C^{1323}S_1 + \\
& \quad + C^{2323}S_2)\Phi_3 - n_3 \int_F p_2 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
& -C^{1313} \int_F (\Phi_{,1}X_2) dF - C^{1323} \int_F (\Phi_{,2}X_2 - \Phi_{,1}X_1) dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2}X_1 dF - \\
& \quad - (C^{1313}S_1 - C^{1323}S_2)\psi_{1,3} - (C^{1323}S_1 - C^{2323}S_2)\psi_{2,3} + \\
& \quad + (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,3} - n_3 \int_F (p_2X_1 - p_1X_2) dF = 0 \\
& \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L.
\end{aligned}$$

Po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych Φ , φ , ψ_1 , ψ_2 z równań ruchu (2.11) i dynamicznych warunków brzegowych (2.12) oraz odpowiednich warunków początkowych można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_\alpha(X, t)$ z (2.3) w [2] oraz $u_3(X, t)$ z (2.1), składowe stanu naprężenia $T^{kl}(X, t)$ z (2.10) oraz dodatkowe siły reakcji więzów ze wzorów (2.2) i (2.3).

Ponieważ zachodzą związki (2.6) i (2.7), różnymi od zera dodatkowymi siłami reakcji więzów są

$$(2.13) \quad R_t = -T^{3\alpha}_{, \alpha} - \varrho_R b_3 + \varrho_R \ddot{\Phi} = -C^{1313}\ddot{\Phi}_{,11} - 2C^{1323}\ddot{\Phi}_{,12} - C^{2323}\ddot{\Phi}_{,22} - \\
\quad - \varrho_R b_3 + \varrho_R \ddot{\Phi},$$

$$S_{\zeta} = -p_3 \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,$$

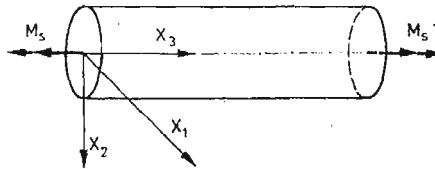
$$S_{\zeta} = T^{3\alpha} n_{\alpha} - p_3 = [C^{1313}(-\varphi_{,3} X_2 + \psi_{1,3} + \Phi_{,1}) + C^{1323}(\varphi_{,3} X_1 + \psi_{2,3} + \Phi_{,2}) + C^{1323}(-\varphi_{,3} X_2 + \psi_{1,3} + \Phi_{,1}) + C^{2323}(\varphi_{,3} X_1 + \psi_{2,3} + \Phi_{,2})] n_2 - p_3$$

dla $X_1, X_2 \in \partial F$.

Oprócz sił reakcji więzów (2.13) występują także siły reakcji więzów (2.13) w [2], dla których T^{ij} należy wyznaczyć z (2.9) w [2] a współrzędne uogólnione $\zeta, \psi_1, \psi_2, \varphi$ stanowią rozwiązanie układu równań (2.10) w [2] wraz z warunkami brzegowymi (2.12) w [2] i warunkami początkowymi.

3. Przykład

Rozpatruje się pryzmatyczny, jednorodny, izotropowy pręt o długości L i o przekroju poprzecznym w kształcie elipsy. Osie X_1 i X_2 układu współrzędnych kartezjańskich $OX_1 X_2 X_3$ są zarazem głównymi, centralnymi osiami bezwładności przekroju. Przyjmuje się, że pręt obciążony jest w sposób statyczny parami sił działającymi w końcowych przekrojach pręta, natomiast powierzchnia boczna pręta jest wolna od obciążeń zewnętrznych. Pomija się wpływ sił masowych. Rys. 3.1 przedstawia pręt obciążony momentami skręcającymi $M_s > 0$ (zwrot wektora momentu przyjęto zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej).



Rys. 3.1

W celu uzyskania rozwiązania zastosujemy najpierw ogólną teorię skręcania, przedstawioną w rozdziale drugim pracy [2].

Uwzględniając izotropię materiału oraz sposób obciążenia pręta otrzymuje się układ równań (2.10) w [2] z niewiadomymi współrzędnymi uogólnionymi $\zeta(X_1, X_2, X_3), \psi_1(X_3), \psi_2(X_3), \varphi(X_3)$ w następującej postaci:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \zeta_{,11} + \zeta_{,22} + \zeta_{,33} &= 0, \\ \int_F \zeta_{,13} dF + F\psi_{1,33} &= 0, \\ \int_F \zeta_{,23} dF + F\psi_{2,33} &= 0, \\ \int_F (\zeta_{,23} X_1 - \zeta_{,13} X_2) dF + J_0 \varphi_{,33} &= 0, \end{aligned}$$

natomiast warunki brzegowe (2.12) w [2] w postaci

$$\begin{aligned}
 & (\zeta_{,1} + \varphi_{1,3} - \varphi_{,3} X_2) n_1 + (\zeta_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1) n_2 = 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
 & \zeta_{,3} = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 & \int_F \zeta_{,1} dF + F \psi_{1,3} = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 & \int_F \zeta_{,2} dF + F \psi_{2,3} = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 & C^{1313} \left[\int_F (\zeta_{,2} X_1 - \zeta_{,1} X_2) dF + J_0 \varphi_{,3} \right] = M_s \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

gdzie

$$M_s = n_3 \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF.$$

Ze względu na warunek brzegowy (3.2)₂ wykonuje się na równaniu (3.1)₁ skończoną cosinusową transformację Fouriera względem zmiennej X_3 , otrzymując

$$\bar{\zeta}_{n,11} + \bar{\zeta}_{n,22} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \bar{\zeta}_n = 0,$$

gdzie

$$\bar{\zeta}_n = \int_0^L \zeta \cos \left(\frac{n\pi X_3}{L} \right) dX_3,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Funkcji $\bar{\zeta}_n$ poszukuje się w postaci

$$\bar{\zeta}_n = A_n e^{\omega_n(x_1+x_2)}$$

Po podstawieniu (3.4) do równania (3.3) otrzymuje się

$$\omega_n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L},$$

stąd

$$\bar{\zeta}_n = A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1+X_2)} + A_{2n} \kappa_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1+X_2)},$$

gdzie A_{1n} , A_{2n} są dowolnymi stałymi, natomiast

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= \begin{cases} 1 & \text{gdy } X_1 + X_2 \leq 0, \\ 0 & \text{gdy } X_1 + X_2 > 0, \end{cases} \\
 \kappa_2 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } X_1 + X_2 \leq 0, \\ 1 & \text{gdy } X_1 + X_2 > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymuje się

$$\zeta_1 = \frac{2}{L} \sum_{n=1} \left[A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1+X_2)} + A_{2n} \kappa_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1+X_2)} \right] \cos \left(\frac{n\pi}{L} X_3 \right).$$

Jak łatwo zauważyć, również funkcja

$$\zeta_2 = \tilde{A} X_1 X_2,$$

gdzie \tilde{A} jest dowolną stałą, niezależną od zmiennej X_3 spełnia równanie (3.1)₁.

Ostatecznie szukane rozwiązanie przyjmuje postać

$$(3.5) \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = \tilde{A} X_1 X_2 + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} + \right. \\ \left. + A_{2n} \kappa_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L} X_3\right).$$

Po podstawieniu funkcji (3.4) do równania (3.1)₂ otrzymuje się

$$\psi_1 = \tilde{B}_1 X_3 + \tilde{B}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2}{F} \frac{B_n}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L} X_3\right),$$

gdzie

$$B_n = -\frac{\sqrt{2}}{L} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \int_F \left[A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} - A_{2n} \kappa_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} \right] dF,$$

W podobny sposób z równania (3.1)₃ otrzymuje się

$$\psi_2 = \tilde{C}_1 X_3 + \tilde{C}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2}{F} \frac{B_n}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L} X_3\right),$$

natomiast z równania (3.1) otrzymuje się

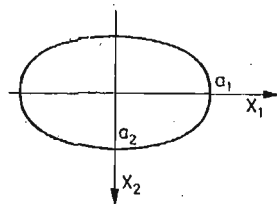
$$\varphi = \tilde{D}_1 X_3 + \tilde{D}_2 - \frac{L^2}{J_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L} X_3\right),$$

gdzie

$$K_n = -\frac{\sqrt{2}}{L} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \int_F \left[A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} + A_{2n} \kappa_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} \right] (X_2 - X_1) dF$$

Z warunku brzegowego (3.2)₃ otrzymuje się $\tilde{B}_1 = 0$, z warunku (3.2)₄ $\tilde{C}_1 = 0$, a z warunku (3.2)₅

$$\tilde{D}_1 = \frac{M_s}{C^{1313} J_0} + \tilde{A} \frac{J_1 - J_2}{J_0}$$



Rys. 3.2

Jeżeli konturem przekroju jest elipsa (rys. 3.2) o równaniu

$$(3.6) \quad \frac{X_1^2}{a_1^2} + \frac{X_2^2}{a_2^2} = 1$$

z warunku brzegowego (3.2)₁ wynika, że

$$A_{1n} = 0,$$

$$A_{2n} = 0,$$

$$\tilde{A} = \frac{M_s(a_2^2 - a_1^2)}{2C^{1313}(J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2)}.$$

Ostatecznie szukane funkcje przyjmują postać

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \zeta &= \frac{M_s(a_2^2 - a_1^2)X_1 X_2}{2C^{1313}(J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2)}, \\ \psi_1 &= B_2, \\ \psi_2 &= C_2, \\ \varphi &= \frac{M_s(a_1^2 + a_2^2)X_3}{2C^{1313}(J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2)} + \tilde{D}_2. \end{aligned}$$

Następnie wyznacza się składowe stanu przemieszczenia podstawiając (3.7) do (2.3) w [2]

$$(3.8) \quad \begin{aligned} u_1 &= \tilde{B}_2 - \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} - \tilde{D}_2 X_2, \\ u_2 &= \tilde{C}_3 + \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} + \tilde{D}_2 X_1, \\ u_3 &= \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_2^2 - a_1^2)X_1 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} \end{aligned}$$

oraz składowe stanu naprężenia (2.9) w [2], które po uwzględnieniu (3.7) przyjmują postać

$$(3.9) \quad \begin{aligned} T^{13} &= T^{31} = -\frac{M_s a_1^2 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2}, \\ T^{23} &= T^{32} = \frac{M_s a_2^2 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2}, \\ T^{11} &= T^{22} = T^{33} = 0. \end{aligned}$$

Spośród sił reakcji więzów (2.13) w [2] różnymi od zera są następujące:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} s_1 &= -\frac{M_s a_1^2 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} n_3 - p_1 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ s_2 &= \frac{M_s a_2^2 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} n_3 - p_2 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L. \end{aligned}$$

Jeżeli rozkład obciążeń zewnętrznych w przekrojach $X_3 = 0$ i $X_3 = L$ będzie dokładnie taki sam jak rozkład naprężeń $p_1 = -\frac{M_s a_1^2 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} n_3$, $p_2 = \frac{M_s a_2^2 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} n_3$, wówczas wszystkie siły reakcji więzów będą równe zeru.

Okazuje się, że dla pręta obciążonego w podany wyżej sposób więzy wewnętrzne (2.1) w [2] upraszczając matematyczny opis problemu, nie wywierają żadnego wpływu na fizyczny charakter tego problemu, tzn. ciało w sposób „naturalny” odkształca zgodnie z założeniem.

Następnie zastosujemy do omówionego na wstępie pręta techniczną teorię skręcania prętów o przekroju zwartym przedstawioną w rozdziale drugim. Po uwzględnieniu izotropii materiału i sposobu obciążenia pręta równania (2.11) przyjmują znacznie prostszą postać

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \Phi_{,11} + \Phi_{,22} &= 0, \\ \psi_{1,33} &= 0, \\ \psi_{2,33} &= 0, \\ \varphi_{,33} &= 0. \end{aligned}$$

a ich rozwiązaniami są funkcje

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \Phi &= AX_1X_2, \\ \psi_1 &= B_1X_3 + B_2, \\ \psi_2 &= C_1X_3 + C_2, \\ \varphi &= D_1X_3 + D_2. \end{aligned}$$

gdzie $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ oznaczają dowolne stałe.

Warunki brzegowe (2.12) przyjmują następującą postać

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \int_0^L [(\Phi_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3}X_2)n_1 + (\Phi_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3}X_1)n_2]dX_3 &= 0 \\ &\text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\ F\psi_{1,3} + \int_F \Phi_{,1}dF &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ F\psi_{2,3} + \int_F \Phi_{,2}dF &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ C^{1313} \left[\int_F (\Phi_{,2}X_1 - \Phi_{,1}X_2)dF + J_0\varphi_{,3} \right] &= M_s \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \end{aligned}$$

gdzie

$$M_s = n_3 \int_F (p_2X_1 - p_1X_2)dF$$

Jeżeli konturem przekroju jest elipsa (rys. 3.2) o równaniu (3.6), to po wyznaczeniu stałych z warunków brzegowych (3.13) współrzędne uogólnione (3.12) przyjmują postać

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_2^2 - a_1^2)X_1X_2}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2}, \\ \psi_1 &= B_2, \\ \psi_2 &= C_2, \\ \varphi &= \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2} + D_2. \end{aligned}$$

Następnie można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia podstawiając (3.14) do (2.3) w [2] i (2.1)

$$(3.15) \quad \begin{aligned} u_1 &= B_2 - \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3X_2}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2} - D_2X_2, \\ u_2 &= C_2 + \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3X_1}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2} + D_2X_1, \\ u_3 &= \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_2^2 - a_1^2)X_1X_2}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2} \end{aligned}$$

oraz składowe stanu naprężenia (2.10), które po uwzględnieniu (3.14) przyjmują postać

$$(3.16) \quad \begin{aligned} T^{13} &= T^{31} = \frac{-M_s a_1^2 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2}, \\ T^{23} &= T^{32} = \frac{M_s a_2^2 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2}, \\ T^{\alpha\beta} &= T^{\beta\alpha} = T^{33} = 0. \end{aligned}$$

Po podstawieniu (3.16) do (2.13) okazuje się, że wszystkie dodatkowe siły reakcji więzów są równe zeru. Należy także uwzględnić istnienie sił reakcji więzów (2.13) w [2], które, jak to już przedstawiono przy omawianiu rozwiązania według ogólnej teorii skręcania, także są równe zeru, jeżeli rozkład obciążeń zewnętrznych w przekroju $X_3 = 0$ i $X_3 = L$ jest dokładnie taki sam jak rozkład naprężeń.

Analiza rozwiązań, otrzymanych dla omawianego pręta według teorii ogólnej i technicznej teorii skręcania prętów o zwartych przekrojach wykazuje, że dodatkowe więzy wewnętrzne (2.1) upraszczając znacznie sposób rozwiązania także nie wywarły żadnego wpływu na fizyczny charakter problemu.

Współrzędne uogólnione (3.7) w teorii ogólnej są, z dokładnością do dowolnych stałych, takie jak współrzędne uogólnione (3.14) w technicznej teorii skręcania prętów o zwartych przekrojach, podobnie jest z przemieszczeniami (3.8) i (3.15), co w rezultacie daje identyczność składowych stanu naprężenia, wyrażonych wzorami (3.9) i (3.15).

Okazuje się, że dla omawianego pręta wystarczy rozwiązanie równań technicznej teorii skręcania prętów o zwartych przekrojach, ponieważ znikanie dodatkowych sił reakcji więzów pozwala stwierdzić, że będą zachodziły omówione wyżej zależności między przemieszczeniami i naprężeniami w obu teoriach, pozwalające na obliczenie sił reakcji więzów (2.13) w [2] korzystając z (3.16).

Porównajmy teraz otrzymane tu równania technicznej teorii skręcania prętów o zwartym przekroju w przypadku izotropowego, nieważkiego pręta poboczniczy wolnej od obciążeń, skręcanego statycznie parami sił, działającymi w końcowych przekrojach o momentach skręcających M_s , z równaniami wyprowadzonymi przez Saint-Venanta ([3] s. 177 - 187, [4] s. 366 - 387) dla swobodnie skręcanego pręta w ramach klasycznej teorii sprężystości.

Według teorii Saint-Venanta funkcja spaczenia przekroju $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(X_1, X_2)$ jest rozwiązaniem równania

$$(3.17) \quad \tilde{\varphi}_{,11} + \tilde{\varphi}_{,22} = 0,$$

z warunkiem brzegowym

$$(3.18) \quad (\tilde{\varphi}_{,1} - X_2)n_1 + (\tilde{\varphi}_{,2} + X_1)n_2 = 0$$

dla $X_1, X_2 \in \partial F$.

Dla przekroju poprzecznego w kształcie elipsy (rys. 3.2) o równaniu (3.6) funkcja spazczenia przekroju otrzymana przez Saint-Venanta przyjmuje postać

$$(3.19) \quad \tilde{\varphi} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} X_1 X_2,$$

składowe stanu przemieszczenia wyrażają się wzorami

$$(3.20) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\tilde{\omega} X_2 X_3, \\ u_2 &= \tilde{\omega} X_1 X_3, \\ u_3 &= \tilde{\omega} \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} X_1 X_2, \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{\omega} = \frac{M_s}{D_s}$,

$$D_s \equiv C^{1313} \int_F (X_1^2 + X_2^2 - X_2 \tilde{\varphi}_{,1} + X_1 \tilde{\varphi}_{,2}) dF = \frac{2C^{1313}(a_1^2 J_1 + a_2^2 J_2)}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{C^{1313} \pi a_1^3 a_2^3}{a_1^2 + a_2^2},$$

natomiast składowe stanu naprężenia są następujące

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \tau^{13} &= \tau^{31} = -\frac{2C^{1313} a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} X_2, \\ \tau^{23} &= \tau^{32} = \frac{2C^{1313} a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} X_1, \\ \sigma^{11} &= \sigma^{22} = \sigma^{33} = \tau^{12} = \tau^{21} = 0. \end{aligned}$$

Porównując równania (3.11) i (3.13) z (3.17) i (3.18) można stwierdzić, że zasadniczą różnicę stanowi postać warunków brzegowych (3.18) i (3.13). W teorii Saint-Venanta wektor naprężenia na powierzchni bocznej pręta musi być skierowany stycznie do brzegu ze względu na brak obciążeń zewnętrznych na poboczniczy, natomiast w wyprowadzonej w niniejszej pracy technicznej teorii skręcania prętów o zwartych przekrojach składową naprężenia wypadkowego prostopadłą do brzegu równoważą powierzchniowe siły reakcji więzów s_1 i s_2 .

Dla omawianego w przykładzie sposobu obciążenia pręta pochodne współrzędnych uogólnionych Φ , ψ_1 , ψ_2 , φ (3.13) nie zależą od współrzędnej X_3 i w rezultacie otrzymuje się równość (z dokładnością do dowolnych stałych) składowych stanu przemieszczenia (3.15) i (3.20) oraz identyczność składowych stanu naprężenia (3.16) i (3.21).

Zauważmy jeszcze, że w przypadku szczególnym, gdy $a_1 = a_2$ mamy do czynienia z przekrojem kołowym i, zgodnie z oczekiwaniem, przekrój pręta nie doznaje spazczenia, a największe naprężenia styczne występują na obwodzie koła.

4. Podsumowanie

Dotychczasowe prace poświęcone analizie skręcania prętów zakładały zawsze jakąś z góry przyjętą hipotezę, co powodowało trudności w porównywaniu różnych teorii — wyniki trzeba było weryfikować doświadczalnie.

Podejście do zagadnień skręcania zastosowane w niniejszej pracy jest jednolite i pozwala na przejście od teorii ogólnej do teorii szczególnych przez narzucenie na ruch pręta dodatkowych ograniczeń.

Ponadto równania opisujące zagadnienie brzegowe pozwalają oszacować błąd rozwiązania brzegowego w stosunku do rozwiązania ścisłego.

Rozpatrywany w pracy model matematyczny skręcanych prętów pryzmatycznych nie był dotychczas badany.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego*, (w:) Dynamika układów sprężystych (praca zbiorowa), Wrocław 1976.
2. K. MAZUR-ŚNIADY, *Skręcanie pryzmatycznych prętów jako ciał z wewnętrznymi więzami*. I. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 4, 17, 1979
3. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
4. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
5. K. MAZUR-ŚNIADY, *Skręcanie pryzmatycznych prostych prętów jako ciał z wewnętrznymi więzami*, *Prace Nauk. Inst. Inż. Łąd. Polit. Wrocł.*, Konferencje, 20, 1976.

Резюме

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ КАК ТЕЛ
С ВНУТРЕННИМИ СВЯЗЯМИ. II.

Темой работы является вывод некоторых технических теорий кручения призматических стержней на основе механики тел с внутренними связями [1]. Получается теория стесненного кручения сплошных стержней и техническую теорию сплошных стержней, которая более общая чем теория Сен-Венанта. В примере рассматривается свободно крутящийся стержень с поперечным сечением в виде эллипса, а задача решается по общей теории и технической теории, после этого приведен анализ результатов.

Summary

TORSION OF PRISMATIC RODS AS BODIES WITH INTERNAL CONSTRAINTS. II.

The aim of the present work is to derive some technical theories of torsion of prismatic rods on the basis of the theory of bodies with internal constraints [1]. We obtain theory of constrained torsion of rods with compact cross-sections and technical theory of rods with compact cross-sections, which is more general than the Saint-Venant theory. In an example we study the rod with elliptic cross-section exposed to unconstrained torsion, obtaining solutions of general theory presented in Sec. 2 in [2] and of technical theory of torsion of rods with compact cross-sections and the analysis of the results.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1978 r.

NOŚNOŚĆ ROZDZIELCZA PIERŚCIENIOWEJ TARCZY KOŁOWO-SYMETRYCZNEJ ZE SZTYWNĄ INKLUZJĄ

KRZYSZTOF SZUWAŃSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

W teorii plastyczności często mamy do czynienia z powierzchniami, na których naprężenia bądź przemieszczenia, czy ich prędkości, zmieniają się w sposób skokowy. Powierzchnie te nazywane powierzchniami nieciągłości (dla zagadnień płaskich będą to linie nieciągłości), odgrywają szczególnie dużą rolę w zagadnieniach nośności granicznej. Szczegółową analizę warunków, które mają być spełnione na powierzchniach nieciągłości podają w swoich pracach m.in. IWLEW [2], PRAGER [4], THOMAS [9].

Wykazali oni, że na powierzchni nieciągłości naprężeń musi zostać zachowana ciągłość wszystkich składowych stanu naprężenia działających w kierunku prostopadłym do tej powierzchni. Skokowo mogą zmieniać się tylko składowe równoległe do powierzchni nieciągłości. Niespełnienie tego warunku oznaczałoby naruszenie warunków równowagi wewnętrznej. Podobne warunki muszą być zachowane na powierzchni (linii) nieciągłości przemieszczeń.

Z warunku ciągłości ośrodka wynika, że w punktach leżących na tej powierzchni spośród wszystkich składowych wektora przemieszczenia, lub wektora prędkości ruchu punktu, ciągłość muszą zachować składowe normalne do powierzchni nieciągłości. Gdyby ten warunek nie został zachowany, wówczas dwie części materiału musiałyby zachodzić na siebie, lub musiałyby się tworzyć lokalne pustki.

Nieco odmienne podejście zaproponował HILL [1] wprowadzając „złagodzone” warunki ciągłości w których dopuścił możliwość skokowej zmiany prędkości normalnych. Jednakże można stosować takie podejście tylko do opisu zjawisk na końcu procesu, natomiast jeśli ma on być kontynuowany to prowadzi ono do niedopuszczalnych nieciągłości przemieszczeń, przynajmniej na gruncie teorii małych odkształceń.

Okazuje się, że nie zawsze jest możliwe uzyskanie rozwiązania problemu nośności granicznej, bez przyjęcia pewnych niedopuszczalnych nieciągłości pola przemieszczeń. Przykłady tego typu zagadnień podał SHOEMAKER [5, 6]. SZUWAŃSKI i ŻYCZKOWSKI [7], analizowali przypadki w których nośność graniczna układu była poprzedzona pojawieniem się lokalnych nieciągłości przemieszczeń w kierunku normalnym, Prowadziło to w efekcie do rozdzielenia się dwóch części układu-dekohezji, a zatem obciążenie przy którym do tego dochodziło określało kres pracy układu jako całości. Zostało ono nazwane nośnością rozdzielczą układu.

Szczególne znaczenia nabiera nośność rozdzielcza w przypadku obciążeń termicznych [13], kiedy stanowi ona jedyną możliwość określenia krytycznej wartości tych ob-

ciężen wobec braku nośności granicznej. Przykłady obliczania nośności rozdzielczej belek statycznie niewyznaczalnych podali TRAN-LE BINH i SZUWALSKI [9]. Takie podejście umożliwiło wyjaśnienie znanego paradoksu STÜSSI-KOLLBRUNNEAR, co uczynili w swojej pracy TRAN-LE BINH i ŻYCZKOWSKI [10].

2. Tarcza pierścieniowa ze sztywną inkluzją

W rzeczywistych materiałach proces plastyczny zawsze prowadzi do dekohezji. Jest to oddzielne zjawisko fizyczne, rządzone oddzielnymi prawami. Jednakże nawet przy założeniu nieskończenie długiego wykresu $\sigma - \varepsilon$, bez żadnego fizycznego kryterium dekohezji może czasami wystąpić kres istnienia rozwiązania ciągłego. Wśród przykładów ilustrujących to zjawisko podanych w pracy [7] omówiono także nieograniczoną tarczę z kołową sztywną inkluzją, rozciąganą równomiernym obciążeniem p w nieskończoności. W tarczy tej przy pewnej wartości obciążenia powodującej powstawanie stosunkowo niewielkiej (dla materiału nieściśliwego zmierzającej do zera) strefy plastycznej, odkształcenia promieniowe w miejscu styku tarczy z inkluzją zmierzają do nieskończoności. Oznacza to pojawienie się w tym miejscu niedopuszczalnej nieciągłości przemieszczenia promieniowego, co w efekcie prowadzi do oddzielenia się tarczy od inkluzji. Tarcza taka pracując jako swobodna jest w stanie dalej przenosić wzrastające obciążenie, lecz układ jako całość przestaje istnieć.

Inaczej może ten proces przebiegać w przypadku tarczy ograniczonej. Jeżeli będzie ona dostatecznie wąska, to obciążenie powodujące uwolnienie tarczy od inkluzji (nośność rozdzielcza), może wystarczyć do jej całkowitego uplastycznienia jako tarczy swobodnej (wyczerpanie nośności granicznej).

Wówczas nawet część układu nie będzie w stanie przenieść obciążeń przekraczających nośność rozdzielczą. Sprawdźmy, kiedy to zjawisko będzie mieć miejsce. Zajmiemy się tarczą pierścieniową z kołową sztywną inkluzją (rys. 1.) poddaną równomiernemu rozciąganiu obciążeniem p na promieniu zewnętrznym b . Tarcza o stałej grubości jest wykonana z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Przyjmujemy, że tarcza jest połączona ze sztywną inkluzją w sposób uniemożliwiający przemieszczenie w kierunku promieniowym, lecz dopuszczający możliwość zmiany grubości tarczy w miejscu połączenia. Zagadnienie będzie rozwiązywane we współrzędnych biegunowych $r - \theta$ pod założeniem płaskiego stanu naprężenia.

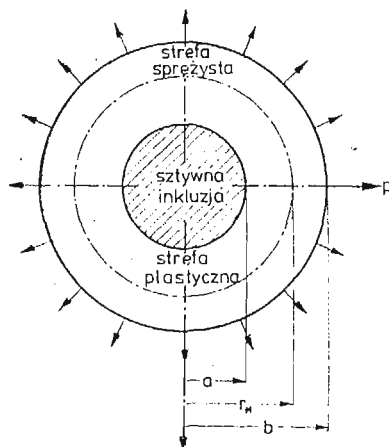
Jak wykazano w pracy [7] tarcza taka nie będzie mogła się całkowicie uplastyczyć w wyniku mieszanych warunków brzegowych. Jedynie w przypadku tarczy o brzegach swobodnych, czyli jednorodnych naprężeniowych warunków brzegowych możliwy będzie do osiągnięcia stan plastyczny w każdym punkcie tarczy. Zagadnienie to zostanie omówione w punkcie 4.

Analizować będziemy zakres sprężysto-plastycznej pracy tarczy przedstawionej na rys. 1. Zakładamy zatem, że obciążenie tarczy jest większe od jej nośności sprężystej:

$$(2.1) \quad \bar{q} = \frac{\bar{p}}{\sigma_0} = \frac{(1-\nu)\beta^2 + 1 + \nu}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}$$

gdzie σ_0 — oznacza granicę plastyczności,
 ν — liczbę Poissona,
 β — parametr charakteryzujący szerokość tarczy:

$$(2.2.) \quad \beta = \frac{a}{b}$$



Rys. 1

w strefie sprężystej dla $r_* \leq r \leq b$ obowiązują znane wzory Lamégo określające rozkład naprężeń:

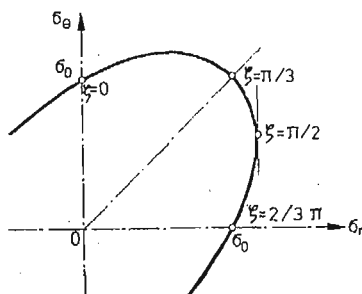
$$(2.3.) \quad \sigma_r = A + \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2},$$

oraz przemieszczenia promieniowego:

$$(2.4.) \quad u = \frac{1}{E} \left[(1-\nu)Ar - (1+\nu)\frac{B}{r} \right].$$

W strefie plastycznej dla $a \leq r \leq r_*$ wykorzystamy trygonometryczną parametryzację warunku plastyczności Hubera-Misesa-Henckyego typu Nadai-Sokołowskiego:

$$(2.5.) \quad \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \cdot \sin \zeta; \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \cdot \sin \left(\zeta + \frac{\pi}{3} \right),$$



Rys. 2

gdzie ζ jest parametrem, który wobec dodatniości obu naprężeń przy warunku że $\sigma_r > \sigma_\theta$ przyjmuje wartości z przedziału od $\pi/3$ do $2\pi/3$ (rys. 2).

Z równania równowagi wewnętrznej można określić rozkład tego parametru w formie funkcji odwrotnej:

$$(2.6.) \quad r = \frac{C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta\right)}{\sqrt{\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{3}\right)}}$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania.

Ponieważ warunek brzegowy dla strefy plastycznej określony jest dla przemieszczeń należy wyznaczyć funkcje określające rozkład przemieszczeń i odkształceń w strefie plastycznej. Przyjmując prawo podobieństwa dewiatorów odkształceń i naprężeń oraz zakładając sprężystą zmianę objętości otrzymamy: [7]:

$$(2.7.) \quad u = \frac{C_1 \sigma_0 \sin \zeta \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta\right)}{3\sqrt{3}K \sqrt{\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{3}\right)}} + C_1 C_2 \frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta\right)}{\sqrt{\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{3}\right)}}$$

$$(2.8.) \quad \varepsilon_r = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}K} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{C_2}{\cos \zeta} \sin\left(\zeta - \frac{\pi}{6}\right) \exp(-\sqrt{3}\zeta),$$

$$(2.9.) \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}K} \sin \zeta + C_2 \exp(-\sqrt{3}\zeta),$$

gdzie K oznacza moduł ściśliwości, a C_2 jest kolejną stałą całkowania.

Przystąpimy teraz do zszywania obu stref: sprężystej i plastycznej. Wykorzystamy w tym celu następujące warunki brzegowe:

$$(2.10.) \quad \text{dla } r = a \quad \zeta = \zeta_a; \quad u^{(p)} = 0,$$

$$(2.11.) \quad \text{dla } r = r_* \quad \zeta = \zeta_*; \quad u^{(e)} = u^{(p)}; \quad \sigma_r^{(e)} = \sigma_r^{(p)}; \quad \sigma_i^{(e)} = \sigma_0;$$

$$(2.12.) \quad \text{dla } r = b \quad \sigma_r^{(e)} = p,$$

w których indeks (p) u góry oznacza wielkości w strefie plastycznej, a indeks (e) wielkości w strefie sprężystej, natomiast:

$$(2.13.) \quad \sigma_i^{(e)} = \sqrt{A^2 + 3 \frac{B^2}{r^2}}$$

oznacza intensywność naprężeń według hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego. Powyższe siedem warunków brzegowych umożliwia wyznaczenie czterech stałych całkowania: A i B w strefie sprężystej oraz C_1 i C_2 w strefie plastycznej, promienia rozgraniczającego te strefy r_* , oraz wartości parametru ζ_a i ζ_* odpowiadające promieniom a i r_* .

Po wykorzystaniu wszystkich warunków brzegowych otrzymamy stałe w strefie plastycznej:

$$(2.14.) \quad C_1 = a \sqrt{\sin\left(\zeta_a - \frac{\pi}{3}\right)} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_a\right),$$

$$C_2 = -\frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}K} \sin \zeta_a \exp(\sqrt{3}\zeta_a),$$

identyczne jak dla tarczy nieograniczonej [7], co wynika z faktu, że dla strefy plastycznej obowiązują te same warunki brzegowe.

Inne są natomiast stałe w strefie sprężystej:

$$(2.15.) \quad \begin{aligned} A &= \sigma_0 \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right), \\ B &= b^2 \left[p - \sigma_0 \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

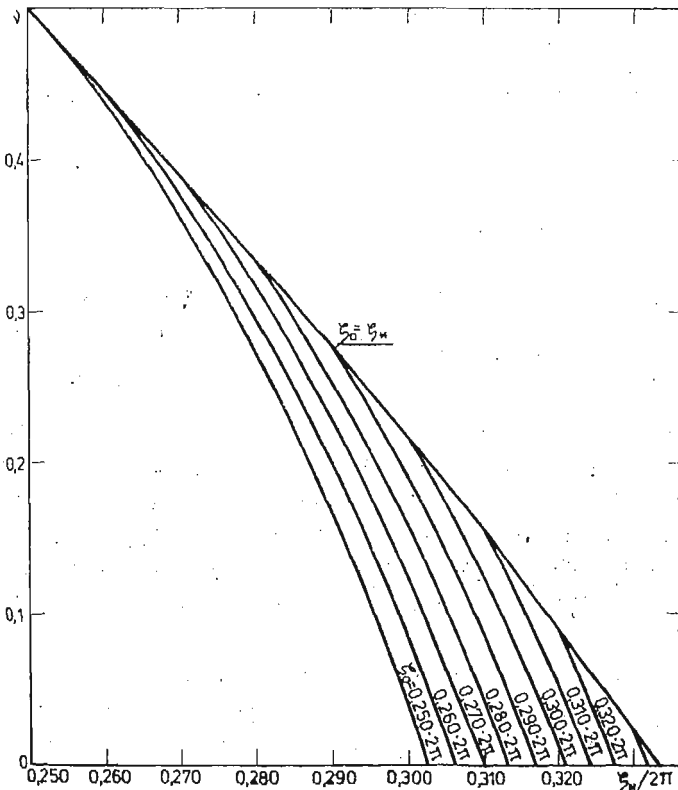
Stałe te są wyrażone poprzez parametry ζ_a i ζ_* które są ze sobą oraz z liczbą Poissona powiązane równaniem przestępnym

$$(2.16.) \quad \nu = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\cos \zeta_*}{\sin \zeta_a} \exp[\sqrt{3}(\zeta_* - \zeta_a)]$$

analogicznym jak dla tarczy nieograniczonej [7]. Rozwiązanie tego równania zostało przedstawione graficznie na wykresie 3.

Parametry ζ_a i ζ_* są uzależnione od wielkości bezwymiarowego obciążenia zewnętrznego $q = \frac{p}{\sigma_0}$ poprzez związek:

$$(2.17.) \quad q = \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \beta^2 \sin\left(\zeta_a - \frac{\pi}{3}\right) \exp[\sqrt{3}(\zeta_* - \zeta_a)].$$



Rys. 3

Poszukiwać będziemy kresu ciągłego rozwiązania, wyznaczonego przez zmierzanie do nieskończoności pochodnej funkcji przemieszczania u , czyli odkształcenia promieniowego ε_r . Jak wykazał ŻYCKOWSKI [11] zachodzi to w punkcie w którym naprężenia promieniowe są dwa razy większe od obwodowych. Jak łatwo sprawdzić warunek ten jest spełniony w punkcie w którym parametr ζ osiąga wartość $\frac{\pi}{2}$.

W strefie plastycznej parametr ζ jest rosnącą funkcją promienia i najmniejszą możliwą wartość $\frac{\pi}{2}$ może osiągnąć dla promienia wewnętrznego tarczy a , w miejscu gdzie jest ona połączona ze sztywną inkluzją, co wykazano w pracy [7].

Oznacza to w tym miejscu skokową zmianę przemieszczenia promieniowego u , czyli dekohezję. Wielkość obciążenia przy którym to nastąpi, czyli nośność rozdzielczą można więc wyznaczyć z równania (2.17.) po podstawieniu $\zeta_a = \frac{\pi}{2}$:

$$(2.18.) \quad \hat{q} = \cos\left(\zeta_{*0} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\beta^2 \exp\left[\sqrt{3}\left(\zeta_{*0} - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Wartość ζ_{*0} którą należy podstawić do tego wzoru odczytujemy z wykresu 3 dla ustalonej wartości ν przy $\zeta_a = 0,25 \cdot 2\pi$ lub obliczamy z (2.16.) przy podstawieniu $\zeta_a = \frac{\pi}{2}$:

$$(2.19.) \quad \sqrt{3} \cos \zeta_{*0} \exp\left[\sqrt{3}\left(\zeta_{*0} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\nu - 1.$$

Widać, że nośność rozdzielcza tarczy pierścieniowej jest wyższa niż tarczy nieograniczonej ($\beta = 0$).

3. Tarcza pracująca po całkowitym uplastycznieniu

Przeprowadzone w poprzednim punkcie rozważania są słuszne jedynie wtedy, gdy w chwili dekohezji w tarczy występują dwie strefy: sprężysta i plastyczna. Dla bardzo wąskich pierścieni może okazać się, że zanim parametr ζ_a osiągnie wartość $\frac{\pi}{2}$, czyli zanim dojdzie do dekohezji strefa plastyczna może już objąć całą tarczę, czyli promień graniczny r_* zrówna się z b . Aby to się zdarzyło promień zewnętrzny tarczy musi być mniejszy od promienia granicznego w chwili dekohezji. Jak wynika z przytoczonych powyżej rozwiązań, dla materiału o tej samej liczbie Poissona rozkład naprężeń, odkształceń i przemieszczenia w strefie plastycznej, jak również jej wielkość określona promieniem r_* w chwili dekohezji są takie same, bez względu na wielkość promienia zewnętrznego b (może on również zmierzać do nieskończoności).

Zatem krytyczne wartości stosunku promieni β równe stosunkowi promienia a do promienia r_* w chwili dekohezji dla różnych wartości ν można wyliczyć w oparciu o wyniki otrzymane w pracy [7], (wykres 6). Wahać się one będą od 0,911 dla $\nu = 0$ do 1,0 dla $\nu = 0,5$ kiedy to nie dochodzi do rozwinięcia się strefy plastycznej w chwili dekohezji.

Dla tarcz, dla których stosunek promieni β jest większy od krytycznego obciążenie przy którym nastąpi pełne uplastycznienie określa wzór:

$$(3.1.) \quad q_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \zeta_{b1}$$

w którym ζ_{b1} oznacza wartość parametru ζ_* wyliczoną z układu równań (2.16.) oraz (2.17.) po podstawieniu (3.1.). Drugą niewiadomą w tym układzie jest odpowiadający ζ_{b1} parametr ζ_a .

Okazuje się, że całkowite uplastycznienie tarczy nie oznacza jeszcze kresu jej pracy. Podobny przykład układu w którym całkowite uplastycznienie nie pokrywa się z jego nośnością graniczną przytacza ŻYCZKOWSKI [12].

Tarcza będzie w stanie przenosić obciążenia wzrastające powyżej q_1 (3.1.). Będzie już ona wtedy pracowała w zakresie plastycznym, a zatem obowiązywać będzie w niej rozwiązanie (2.5 - 2.9.) przy warunkach brzegowych (2.10.) na brzegu wewnętrznym oraz warunkach:

$$(3.2.) \quad \text{dla } r = b \quad \zeta = \zeta_b, \quad \sigma_r = p,$$

na brzegu zewnętrznym. Parametry ζ_a i ζ_b są ze sobą powiązane równaniem przestępnym.

$$(3.3.) \quad \beta \sqrt{\frac{\sin\left(\zeta_a - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\zeta_b - \frac{\pi}{3}\right)}} \exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\zeta_b - \zeta_a)\right] = 1.$$

O tym, że proces będzie w dalszym ciągu przebiegał można się przekonać obliczając przemieszczenie przykładowo na promieniu b :

$$(3.4.) \quad u_b = \frac{\sigma_0 b}{3\sqrt{3}K} \left\{ \sin \zeta_b - \sin \zeta_a \exp\left[\sqrt{3}(\zeta_a - \zeta_b)\right] \right\}.$$

Jest to funkcja określona jednoznacznie, zatem pomimo pełnego uplastycznienia nie występuje tutaj płynięcie plastyczne. Odkształcenia plastyczne, którym towarzyszą przegrupowania naprężeń będą wzrastały aż do chwili gdy parametr ζ_a osiągnie wartość $\frac{\pi}{2}$, co oznacza dekohezję na promieniu a .

Odpowiednią nośność rozdzielczą określa wzór:

$$(3.5.) \quad \hat{q} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \zeta_{b0},$$

gdzie ζ_{b0} jest pierwiastkiem równania przestępnego:

$$(3.6.) \quad \beta \exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\zeta_{b0} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{2 \sin\left(\zeta_{b0} - \frac{\pi}{3}\right)}.$$

Wobec wcześniejszego całkowitego uplastycznienia tarczy nośność rozdzielcza tym razem nie zależy od liczby Poissona ν , a jedynie od β .

4. Tarcza swobodna (po dekohezji)

Gdy obciążenie zewnętrzne osiągnie wartość \hat{q} (2.18.) następuje oddzielenie się tarczy od inkluzji i staje się ona tarczą swobodną, z otworem kołowym. Tarcza ta będzie mogła dalej przenosić obciążenie pod warunkiem, że będzie ona dostatecznie szeroka — wykluczamy zatem z dalszych rozważań tarcze omówione w punkcie 3.

Zakładamy, że pod obciążeniem \hat{q} tarcza swobodna jeszcze nie uplastyczniała się całkowicie. W dalszej analizie pominiemy wpływ pierwotnych odkształceń plastycznych (przed dekohezją), co jest usprawiedliwione małymi rozmiarami pierwotnej strefy plastycznej.

W rozważanej swobodnej tarczy, w jej strefie sprężystej (zewnętrznej) obowiązują ogólne rozwiązania Lamégo (2.3.), a w strefie plastycznej (wewnętrznej) zastosujemy trygonometryczną parametryzację warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego (2.5.). Należy zaznaczyć, że będziemy mieli tutaj do czynienia z innym niż w przypadku tarczy z inkluzją uszeregowaniem naprężeń. Oba naprężenia będą wprawdzie dodatnie, lecz tym razem $\sigma_\theta > \sigma_r$, co oznacza zgodnie z rys. 2, że parametr ζ przyjmuje wartości z przedziału od 0 do $\frac{\pi}{3}$.

Powoduje to inną postać odwrotnej funkcji rozkładu parametru ζ i zamiast (2.6.) otrzymamy:

$$(4.1.) \quad r = C_1 \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta\right)}{\sqrt{\sin\left(\zeta + \frac{2}{3} \pi\right)}}.$$

Rozważane zagadnienie jest statycznie wyznaczalne — warunki brzegowe, którymi dysponujemy są warunkami czysto naprężeniowymi. Nie ma potrzeby przeprowadzenia analizy odkształceń, czyli dalej otrzymane wyniki są niezależne od przyjętej teorii plastyczności.

Mamy tym razem do wyznaczenia sześć niewiadomych: stałe A i B w strefie sprężystej, stałą C_1 w strefie plastycznej, promień rozgraniczający strefy r_* oraz wartości parametru ζ_a i ζ_* odpowiadające promieniom a i r_* . Żądamy spełnienia przez rozwiązania (2.3.), (2.5.) i (3.1.) następujących warunków brzegowych:

$$(4.2.) \quad \text{dla } r = a \quad \zeta = \zeta_a \quad \sigma_r^{(p)} = 0,$$

$$(4.3.) \quad \text{dla } r = r_* \quad \zeta = \zeta_* \quad \sigma_r^{(p)} = \sigma_r^{(e)} \quad \sigma_\theta^{(e)} = \sigma_0,$$

$$(4.4.) \quad \text{dla } r = b \quad \sigma_r^{(e)} = p = q\sigma_0.$$

Z warunków (4.2.) wynika natychmiast, że:

$$(4.5.) \quad \zeta_a = 0 \quad \text{i} \quad C_1 = a \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Pozostałe niewiadome wyrażone poprzez parametr ζ_* są równe:

$$(4.6.) \quad A = \sigma_0 \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$B = -\frac{1}{2} \sigma_0 a^2 \exp(\sqrt{3} \zeta_*)$$

$$(4.6) \quad [cd] \quad r_* = a \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_*\right)}{\sqrt{\sin\left(\zeta_* + \frac{2}{3} \pi\right)}}$$

Parametr ζ_* jest uzależniony od obciążenia zewnętrznego i szerokości tarczy:

$$(4.7.) \quad q = \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \beta^2 \exp(\sqrt{3} \zeta_*).$$

Nośność sprężysta tarczy pierścieniowej będzie osiągnięta gdy $r_* = a$, czyli $\zeta_{*a} = 0$. Nastąpi to przy obciążeniu

$$(4.8.) \quad \bar{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \beta^2.$$

Obciążenie to jest wyraźnie mniejsze niż nośność rozdzielcza tarczy z inkluzją (2.18.), czyli że po dekohezji uwolniona tarcza będzie co najmniej częściowo uplastyczniona. Całkowite uplastycznienie nastąpi, gdy $r_* = b$ co odpowiada obciążeniu:

$$(4.9.) \quad \bar{q} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \zeta_{*b}$$

gdzie ζ_{*b} jest pierwiastkiem równania przestępnego $f(\zeta_{*b}, \beta) = 0$. Z równania tego można wyliczyć funkcję odwrotną:

$$(4.10) \quad \beta^2 = \left(\cos \zeta_{*b} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \zeta_{*b} \right) \exp(-\sqrt{3} \zeta_{*b})$$

Parametr ζ_{*b} , a co za tym idzie i nośność graniczna tarczy swobodnej zależą więc od stosunku promieni tarczy β . Dla tarczy nieograniczonej, gdy $\beta \rightarrow 0$ parametr $\zeta_{*b} = \frac{\pi}{2}$, czyli $\bar{q} = 1$ co pokrywa się ze znanym rozwiązaniem NADAI'A [3].

5. Kryterium pracy tarcz po dekohezji

Fakt czy tarcza po dekohezji będzie w stanie przetrwać jeszcze większe obciążenie, będzie zależał od tego, czy nośność graniczna tarczy pracującej jako swobodna \bar{q} , będzie większa od nośności rozdzielczej \hat{q} . Jest to z kolei uzależnione od wymiarów tarczy, dokładniej od stosunku promieni β .

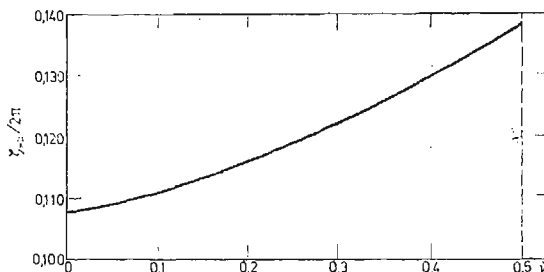
Wyznamy graniczną wartość β_{gr} , przy której z chwilą oddzielenia się tarczy od inkluzji dojdzie do jej całkowitego uplastycznienia. Nastąpi to gdy nośność rozdzielcza \hat{q} i nośność graniczna tarczy swobodnej \bar{q} będą sobie równe. Wykorzystujemy równania określające \hat{q} (2.18.) i (2.19.) oraz \bar{q} (4.9.) i (4.10.). Otrzymujemy łącznie z warunkiem $\hat{q} = \bar{q}$ układ pięciu równań z których po wyeliminowaniu \hat{q} , \bar{q} , ζ_{*0} i ζ_{*b} można wyliczyć wartość β_{gr} .

Ponieważ równania (2.19.) i (4.10.) są równaniami przestępnymi ze względu na niewiadome ζ_{*0} i ζ_{*b} nie udaje się uzyskać końcowego rozwiązania w formie zamkniętej.

Po przekształceniu otrzymamy:

$$(5.1.) \quad \cos\left(\zeta_{*0} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \hat{\zeta}_{*b} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos \hat{\zeta}_{*b} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \hat{\zeta}_{*b} \exp\left[\sqrt{3}\left(\zeta_{*0} - \hat{\zeta}_{*b} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0.$$

Przez $\hat{\zeta}_{*b}$ oznaczono tutaj wartość jaką osiągnie parametr ζ po dekohezji na promieniu zewnętrznym b w tarczy dla której nośność rozdzielcza i graniczna pokrywają się ze sobą. Wartość tę można wyznaczyć z równania (5.1.), po podstawieniu za ζ_{*0} wartości odczy-

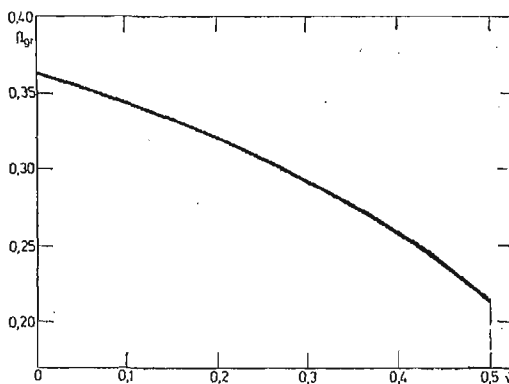


Rys. 4

tanej z wykresu 3 dla zadanej liczby Poissona ν na linii $\zeta_a = 0,250 \cdot 2\pi$ lub wartości wyliczonej z równania (2.19.). Obliczone w ten sposób wartości $\hat{\zeta}_{*b}$ dla różnych ν przedstawia wykres 4. Przez $\hat{\zeta}_{*b}$ wyraża się kwadrat granicznego stosunku promieni tarczy.

$$(5.2.) \quad \beta_{gr}^2 = \left(\cos \hat{\zeta}_{*b} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \hat{\zeta}_{*b} \right) \exp(-\sqrt{3} \hat{\zeta}_{*b}).$$

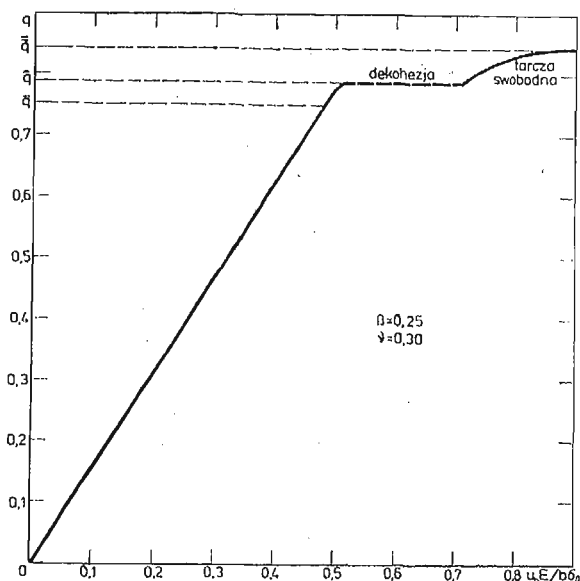
Dla tarcz szerszych — gdy $\beta < \beta_{gr}$ możliwa jest jeszcze praca tarczy po jej oddzieleniu się od inkluzji, natomiast w przypadku tarczy węższej $\beta > \beta_{gr}$ dekohezja prowadzi do natychmiastowego zniszczenia tarczy. W tym drugim przypadku nośność rozdzielcza \hat{q} określa faktyczną nośność układu. Inkluzja ma wówczas działanie „wzmacniające” tarczę, gdyż bez niej do zniszczenia doszłoby już przy mniejszym obciążeniu, $\bar{q} < \hat{q}$.



Rys. 5

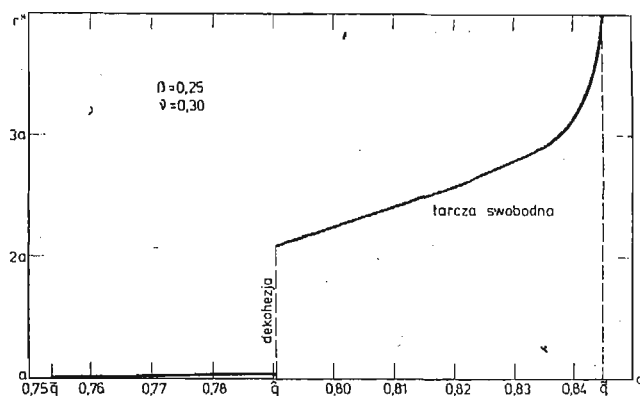
Na wykresie 5 przedstawiono zależność β_{gr} od jedynej wielkości od której ona zależy — współczynnika Poissona.

Przykładowo dla tarczy o promieniu zewnętrznym $b = 4a$ ($\beta = 0,25$) wykonanej z materiału o $\nu = 0,3$ sporządzono wykres ilustrujący zależność pomiędzy obciążeniem zewnętrznym q a przemieszczeniem zewnętrznego promienia tarczy u_b (rys. 6.).



Rys. 6

Dla obciążeń mniejszych od $\bar{q} = 0,7536$ tarcza doznaje odkształceń sprężystych, wykres jest więc linią prostą. Przy dalszym wzroście obciążenia zaczyna rozwijać się pierwotna strefa plastyczna i do wartości $\hat{q} = 0,7904$ wykres nieco się zakrzywia. Przy \hat{q} następuje oddzielenie się tarczy od inkluzji i przy większych obciążeniach będzie już ona pracować jako tarcza z otworem kołowym. Dekohezji odpowiada skokowe zwiększenie się wartości u_b — zaznaczone linią przerywaną. Zwiększanie się obciążenia powoduje dalsze



Rys. 7

powiększenie się strefy plastycznej, aż przy $\bar{q} = 0,8451$ obejmuje ona całą tarczę. Wartości \bar{q} odpowiadać będzie dowolnie duże u_b , co na wykresie obrazuje prosta pozioma.

Sporządzony został również wykres obrazujący rozwijanie się strefy plastycznej w tej tarczy w zależności od obciążenia.

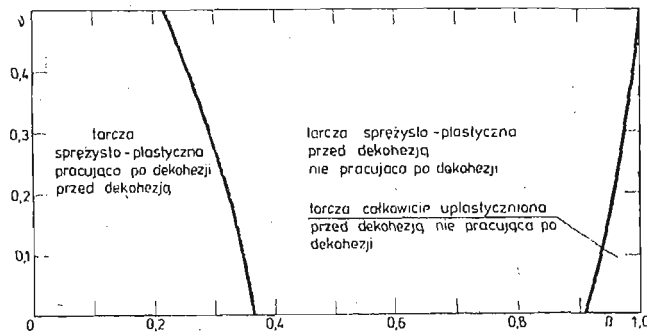
Wykres ten (rys. 7.) ilustruje na ile uzasadnione było pominięcie pierwotnego uplastycznienia, przy analizowaniu pracy tarczy swobodnej, po dekohezji. W momencie dekohezji (dla \hat{q}) następuje przeszło 40-krotny wzrost promienia granicznego r_* .

6. Uwagi końcowe

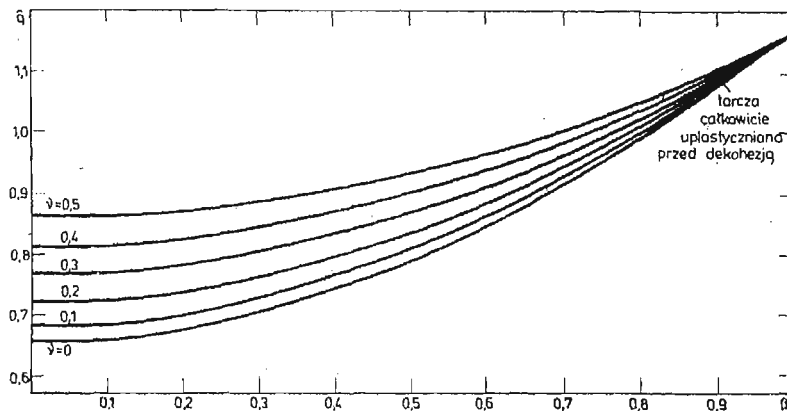
Omówione przykłady wykazały, że nie zawsze wystąpienie dekohezji oznacza kres pracy układu. Oddzielona część układu może niekiedy dalej przenosić nawet wzrastające obciążenia. Uzależnione jest to od szerokości tarczy, charakteryzowanej parametrem β oraz od liczby Poissona dla materiału, z którego tarcza została wykonana ν (rys. 8.)

Wydaje się jednak, że w każdym przypadku obciążenie powodujące rozdzielenie układu na dwie części będzie określało jego rzeczywistą nośność.

Nośność rozdzielcza tarczy w funkcji jej szerokości β dla różnych wartości ν została przedstawiona na wykresie 9. Dla tarcz, w których w chwili dekohezji występują zarówno

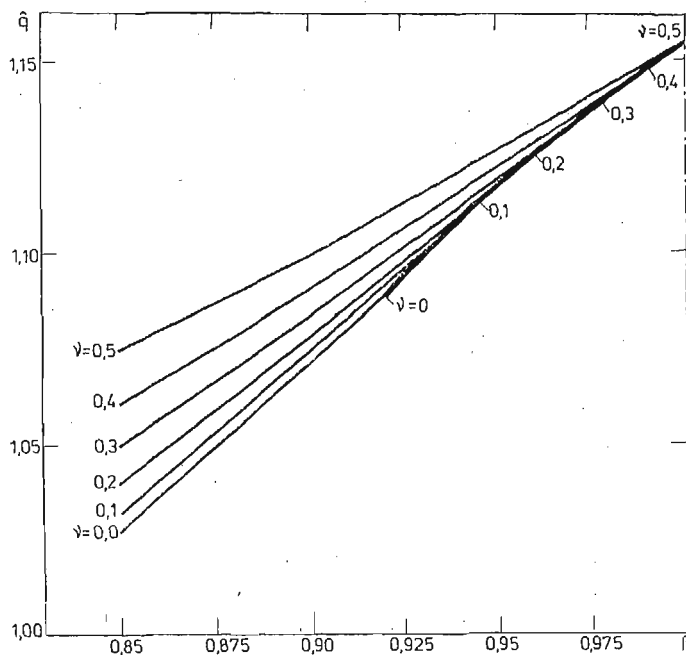


Rys. 8



Rys. 9

strefa uplastyczniona jak i jeszcze sprężysta, wykres ma przebieg paraboliczny zgodnie z (2.18.). Istnieje możliwość, że przed dekohezją tarcza zostanie już całkowicie uplastyczniona, wtedy nośność rozdzielcza staje się oczywiście niezależna od stałej sprężystej ν . Nośność rozdzielczą takich tarcz przedstawia na wykresie 10 linia grubsza. Krzywe dla różnych wartości ν dochodzą do tej linii stycznie, a punkty styczności mają współrzędną β odpowiadającą zasięgowi strefy uplastycznionej w chwili dekohezji dla tarczy wykonanej z materiału o danej wartości ν (rys. 10.).



Rys. 10

W obliczeniach posługiwano się teorią małych odkształceń co powodowało wewnętrzną sprężystość, jako że badano stany powodujące zmierzanie odkształceń do nieskończoności. Jednakże stwierdzono [14], że uwzględnienie odkształceń skończonych, a przede wszystkim zmiany grubości tarczy w trakcie procesu nie wprowadza istotnych zmian jakościowych. Efekt dekohezji wówczas również wystąpi, a nośność rozdzielcza będzie nieco niższa.

Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *Discontinuity relations in mechanics of solids*. Prog. Solid Mech. 2, (1961), 247 - 276.
2. D. D. IWLEW, *Teoria idealnej plastyczności*. Nauka, Moskwa 1966.
3. A. NADAI, *Theory of flow and fracture of solids*, vol. 1. Mc Graw-Hill, 1950.
4. W. PRAGER, *Discontinuous fields of plastic stress and flow*. Proc. Sec. U. S. Congr. Appl. Mech. (1955) 21 - 34.
5. E. M. SHOEMAKER, *Some paradoxes associated with elastic-plastic limit load analysis*. Arch. Mech. Stos. (1968) 4. 20.

6. E. M. SHOEMAKER, *On velocity discontinuities in elastic-plastic boundary value problems*. Arch. Mech. Stos. (1974) 26.
7. K. SZUWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *On the phenomenon of decohesion in perfect plasticity*. Int. J. Solids Structures, (1973) 9. 85 - 98.
8. T. Y. THOMAS, *Singular surfaces and lines in the theory of plasticity*. J. Ration. Mech. An. (1953) 2. 339 - 381.
9. TRAN-LE BINH, K. SZUWALSKI, *Nośność rozdzielcza idealnie sprężysto-plastycznych belek statycznie niewyznaczalnych*. Czas. Techn. 4-M (203) (1977).
10. TRAN-LE BINH, M. ŻYCZKOWSKI, *The Stüssli-Kollbrunner paradox in the light of the concept of decohesive carrying capacity*. Arch. Mech. Stos. 4, 24, (1976),
11. M. ŻYCZKOWSKI, *Certain general equations for plane circularly symmetrical plastic states*. Arch. Mech. Stos, (1958), 10, 463 - 478
12. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN 1973
13. M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI, *Decohesive carrying capacity in thermal stress problems*. Trans. 3rd Int. Conf. „Structural Mechanics in Reactor Technology” vol. 5 part. paper L 2/4 London.
14. M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI, *On the termination of the proces of finite plastic deformations*. Coll. „Finite deformations in plasticity” (Euromech. 54), Warszawa 1974.

R e z y o m e

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Нагрузку при которой непрерывное решение теряет смысл для систем из идеально упруго-пластического материала называем „несущей способностью распределения”. В работе [7], в качестве одного из примеров систем, в которой она выступает, приведен неограниченный диск с круговым жестким включением, растягиваемый в бесконечности равномерной нагрузкой.

Настоящая работа касается кольцевого диска с конечным внешним радиусом. Рассмотрена возможность дальнейшей работы диска после освобождения от включений. Дан критерий дальнейшей работы после распределения. Рассмотрен также случай очень узкого диска, который подвергается полной пластификации до расщепления. Для всех этих дисков определена их несущая способность, как функция размеров диска, а также числа Пуассона.

S u m m a r y

DECOHESIVE CARRYING CAPACITY OF ANNULAR AXIALLY-SYMMETRICAL DISC WITH RIGID INCLUSION

The loading at which the continuous solution breaks for systems made of ideally elastic — plastic material is called decohesive carrying capacity. In paper [7] as one of examples of systems in which it may occur, an infinite sheet with circular rigid inclusion, extended at infinity with uniform traction q was given. Here an annular disc with finite outer radius is considered. The possibility of its further work, after decohesion is discussed. The case of very narrow disc, which can be totally in plastic state before decohesion is also considered. For all types of discs their decohesive carrying capacity as a function of their dimensions and Poisson's ratio is determined.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1977 r., ponownie dnia 23 lutego 1979 r.

BADANIA PRĘDKOŚCI PĘKANIA I KSZTAŁTU PĘKNIĘCIA W STALI O PODWYŻSZONEJ
WYTRZYMAŁOŚCI PRZY ZMIENNYM ZGINANIU¹⁾

STANISŁAW K O C A Ń D A, ANDRZEJ L I K O W S K I (WARSZAWA)

1. Uwagi wstępne

Badania prędkości zmęczeniowego pęknięcia w warunkach obciążeń różnych od rozciągania czy rozciągania — ściskania są nieco trudniejsze. Dla przykładu — przy obrotowym zginaniu istnieją niewielkie możliwości pomiaru rozwoju pęknięć w czasie trwania obciążenia. Oświetlenie miejsca rozwoju pęknięcia lampą stroboskopową jest tylko w niewielkim stopniu pomocne. Dlatego też najczęściej dokonuje się pomiaru przy zatrzymaniu urządzenia badawczego obserwując wydłużenie się pęknięcia na powierzchni walcowej próbki za pomocą metody replik. Rozwój pęknięcia wgłęb próbki zaznacza się w postaci linii zmęczeniowych wywołanych określonymi cyklami przeciążeniowymi po ustalonych przedziałach liczb cykli obciążenia podstawowego. Wprowadza to naturalnie nieprawidłowość w obliczeniach prędkości pęknięcia. Inną metodą jest różnego rodzaju utlenianie powierzchni pęknięć, na przykład, przez umiejętne nagrzewanie. Te nieciągłe pomiary są obarczone dość dużymi błędami. Dlatego też najchętniej korzysta się z badań mikrofraktograficznych, zliczając prążki na wycinkach złomów różnie oddalonych od miejsc inicjacji pęknięć. Przyjmuje się wtedy, że jeden prążek odpowiada jednemu cyklowi obciążenia. Założenie to nie jest jednak spełnione w początkowym okresie pęknięcia. Znacznie łatwiej śledzi się ciągły rozwój pęknięcia metodami optycznymi przy zginaniu próbek płaskich. Pewne trudności napotyka się tu przy wyższych amplitudach naprężenia.

Prędkość zmęczeniowego pęknięcia przy zginaniu oblicza się według klasycznego wzoru Parisa

$$(1) \quad \frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^m$$

w którym $\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{l}$, a C i m są wielkościami wyznaczonymi doświadczalnie zależnymi przede wszystkim od materiału i rodzaju obciążenia, $\Delta\sigma$ jest zakresem naprężenia: $\Delta\sigma = 2\sigma_a$, a $2l$ — długością pęknięcia. Obszerną dyskusję tego wzoru i wzorów pochodnych przeprowadzono w książce [1]. Przystosowanie wzoru (1) do różnych warunków obciążenia zginającego nie naruszyło w zasadzie rdzenia tego wzoru. Trudności pojawiają się jednak w przyjęciu współczynników korekcyjnych w obliczaniu ΔK dotyczących skończoności wymiarów badanych elementów kształtu inicjatora pęknięć i kształtu pęknięcia,

¹⁾ Praca stanowi rozszerzenie referatu wygłoszonego na VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego. PTMTS et al., Warszawa 1978

a zwłaszcza pęknięcia powierzchniowego i współczynników uwzględniających zmianę osi obojętnej zginania w miarę powiększania się pęknięcia od powierzchni w głąb próbki.

Wspomniane trudności wynikają z bardzo ograniczonej liczby wzorów do obliczeń tego rodzaju współczynników, wyprowadzonych metodami teoretycznymi, czy doświadczalnie określonymi.

Na odmiennosc rozwoju pęknięć zmęczeniowych przy zginaniu aniżeli przy rozciąganiu zwrócono uwagę w pracy [2]. Przedmiotem badań były płaskie próbki z karbem ze stopu aluminium. Pokazano wyraźnie załamany wykres $\frac{dl}{dN} = f(K)$. Rozwój pęknięcia w drugim stadium był najczęściej niezależny od odległości od osi obojętnej. Przypuszcza się, że przyczyną tego jest lokalna redystrybucja naprężeń w wyniku odkształceń plastycznych, które łącznie z czynnikiem geometrycznym decydującym o kształcie czoła pęknięcia, czyniły niezależność K od przyjętego układu osi współrzędnych.

W omawianej pracy prędkości zmęczeniowego pęknięcia określone na podstawie odległości międzyprążkowych na powierzchni złomu w pewnych przedziałach prędkości różnią się o dwa rzędy wielkości od prędkości ustalonych innymi metodami. Takich różnic nie obserwowano w warunkach zmiennego rozciągania czy rozciągania — ściskania.

Rozwój pęknięcia w obrotowo zginanych próbkach ze stali węglowej obserwowano w pracy [3] metodą replik. W próbkach wykonano nawiercenie o średnicy i głębokości 0,2 mm będące inicjatorem pęknięcia. Dwustopniowe obciążenie próbek powyżej i poniżej granicy zmęczenia miało na celu dostarczenie danych o rozwoju pęknięcia w takich warunkach obciążenia. Prędkość pęknięcia przy stałej amplitudzie naprężenia ujęto wzorem

$$(2) \quad \frac{dl}{dN} = C \cdot l$$

Wpływ geometrii karbu na inicjację i prędkość pęknięcia w próbkach ze stali o wysokiej zawartości węgla (0,87% C) i ze stali chromowej (0,13% C, 12,3% Cr) poddanych obrotowemu zginaniu był tematem pracy [4]. Inicjatorem pęknięcia był karb obrączkowy. Rozwój pęknięć na powierzchni próbek obserwowano za pomocą mikroskopu, a metodę utleniania zastosowano do pomiarów głębokości pęknięcia. Stwierdzono, że powiększenie się długości pęknięcia na powierzchni próbek jest niezależne od kształtu karbu, ale zależne od rodzaju materiału. Natomiast na prędkość pęknięcia w głąb próbek wpływ posiada kształt karbu. Wykazano również poprawność wzoru Parisa do opisu prędkości pęknięcia przy zmiennym zginaniu.

H. NAKAZAWA i H. KOBAYASHI [5] badali początkowy rozwój pęknięcia, a więc tzw. I stadium zmęczeniowego pęknięcia w obrotowo zginanych próbkach ze stali o małej zawartości węgla (0,15% C). Głębokość pęknięcia oceniano makroskopowo, stwierdzając schodkowy rozwój pęknięcia już po okresie inicjacji pęknięcia.

Interesującą propozycję opisu statystycznej fluktuacji wzrostu pęknięcia zmęczeniowego uwarunkowanej niejednorodnością mikrostruktury przedstawili T. KUNIO i współpracownicy [6]. Za podstawę modelu przyjęto wielkość pierwotnego ziarna austenitu d_m jako miarę niejednorodności oraz wielkość strefy plastycznej r_p obliczonej metodą mechaniki ośrodków ciągłych. Wykazano, że zmiany w prędkości pęknięcia zależą od stosunku r_p/d_m . Fluktuacje wielkości dl/dN są silniejsze przy małych wartościach K_{max} i przy $r_p \approx d_m$;

zaznaczają się znacznie mniej przy wysokich K_{\max} i przy $r_p \gg d_m$. Doświadczalną podstawę opisu stanowiły wyniki badań wydrążonych próbek ze stali o zawartości 0,17% C z inicjatorem pęknięcia, którym było nawiercenie o średnicy 0,2 mm, poddanych obrotowemu zginaniu. Przyrost pęknięcia na obwodzie próbki śledzono metodą replik. Średnią prędkość pęknięcia obliczono wg wzoru

$$(3) \quad \frac{dl}{dN} = \beta(K_{\max})^{\delta}.$$

We wielkości K_{\max} uwzględniono współczynnik korekcyjny kształtu próbki i inicjatora.

N. IINO [7] badał wpływ jednoczesnego rozciągania i zginania na prędkość zmęczeniowego pęknięcia w stopie aluminium. Rozwój pęknięcia mierzono od półeliptycznej szczeliny na powierzchni próbki i wzdłuż jej grubości. Prędkość pęknięcia opisywano nieco zmienionym wzorem Parisa:

$$(4) \quad \frac{dl}{dN} = C \left(\frac{K_{\max}}{\Delta K} \right) \Delta K^m.$$

Półeliptyczny kształt szczeliny zachował się w zasadzie w miarę wzrostu pęknięcia. Jednak wraz z powiększeniem się udziału zginania powiększyła się również długość pęknięcia w kierunku szerokości płyty.

P. C. PARIS i H. TADA [8] rozważali możliwość zmiany współczynnika K w warunkach wahadłowego zginania ($R = -1$) próbek z jednostronnym karbem. W przypadku działania dodatniego momentu zginającego istnieje pełne otwarcie pęknięcia i wtedy będzie K^+ ; dla ujemnego momentu — K^- . Badano stosunek K^-/K^+ i wykazano, że K^- może być pominięte w stosunku do K^+ (wynosiło od 1 do 5,4%). Była to próba zwiększenia dokładności określenia współczynnika K przy zmiennym zginaniu.

L. H. BURCK [9] wykazał przydatność prostego modelu rozwoju pęknięcia zmęczeniowego dla półeliptycznych pęknięć zmęczeniowych opartego na założeniach konwencjonalnych. Trudność w opisie pęknięcia przy zmęczeniowym zginaniu polegała na tym, że ΔK na czole pęknięcia nie jest adekwatny do opisu zmęczeniowego pęknięcia półeliptycznego.

L. H. Burck badał płaskie próbki ze stopu niklu z półeliptycznym inicjatorem pęknięcia poddając je płaskiemu zginaniu. Różne prędkości rozwoju pęknięcia na czole pęknięcia, wywołane progresywną zmianą geometrii pęknięcia dają się jednak określić wzorem Parisa (1), w którym ΔK określono jako

$$(5) \quad \Delta K = \Delta \sigma \sqrt{a} \cdot f \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{g}, \Phi \right),$$

gdzie: $\Delta \sigma$ — zakres naprężeń.

Φ — określa lokalność zjawisk na czole pęknięcia,

$f \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{g}, \Phi \right)$ — obejmuje, poza Φ , wpływ geometrii pęknięcia, gradient naprężeń,

$2c$ i a są długościami pęknięć w kierunku większej i mniejszej osi elipsy, a g grubością próbki.

Ze względu na aproksymowanie pęknięcia półelipsą, obliczono prędkość rozwoju pęknięcia tylko dla dużej i małej osi elipsy:

$$(6) \quad \frac{dc}{dN} = C(\Delta K_A)^m,$$

$$(7) \quad \frac{da}{dN} = C(\Delta K_B)^m.$$

ΔK_A i ΔK_B dotyczą pęknięć rozwijających się wzdłuż większej i mniejszej osi elipsy. Przyrost głębokości pęknięcia obliczano przez dodanie δa do istniejącej głębokości pęknięcia:

$$(8) \quad \delta a = (\Delta K_B / \Delta K_A)^m \delta c,$$

w ten sposób określono geometrię pęknięcia dla kolejnego przyrostu głębokości pęknięcia. Opisane postępowanie można zapisać poprzez scałkowanie równania (6) od c_0 do c_k :

$$(9) \quad N = \int_{c_0}^{c_k} dc / C \left[\Delta K_A \left(a, \frac{a}{c}, \frac{a}{g} \right) \right]^m,$$

gdzie zależność a od c określona jest jako:

$$(10) \quad a = \int_{c_0}^c (\Delta K_B / \Delta K_A)^m dc + a_0.$$

Wykazano więc możliwość opisu prędkości pęknięcia wzdłuż dużej i małej osi elipsy wzorem Parisa, którą potwierdzono wcześniej uzyskanymi wynikami eksperymentalnymi.

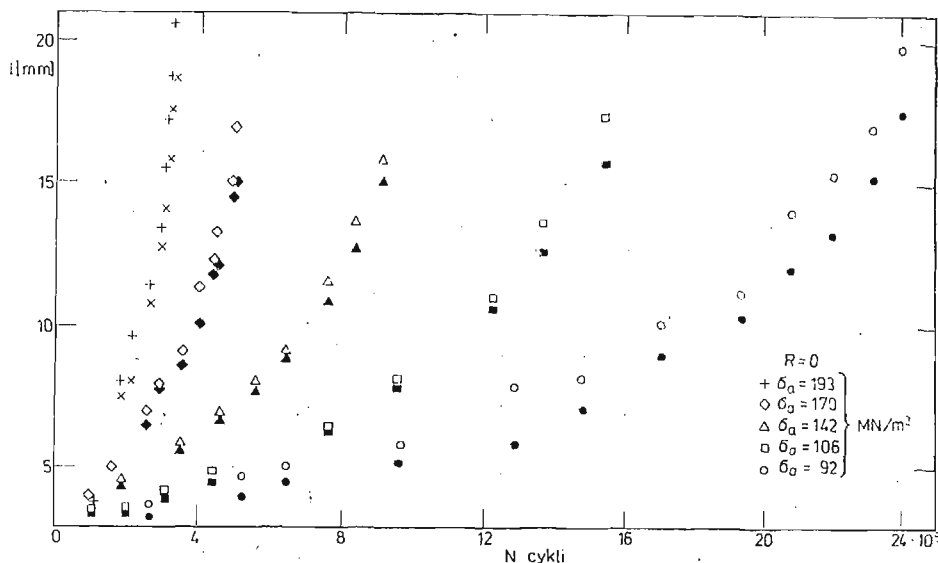
Z przytoczonych powyżej prac wynika, że badania prędkości pęknięcia przy zmiennym zginaniu zaczynają właściwie się rozwijać. Trwają poszukiwania najodpowiedniejszych metodyk badawczych i opisów wyników badań.

Najwięcej korzysta się z doświadczeń jakie uzyskano w badaniach pęknięcia przy zmiennym rozciąganiu czy rozciąganiu — ściskaniu, co ma miejsce również w naszych badaniach. Badania te są kontynuacją wcześniejszych badań własnych w stalach o podwyższonej wytrzymałości przy innych od zginania rodzajach obciążenia. Przedstawiono je, między innymi, w [10] [11] [12].

2. Metodyka i wyniki badań prędkości pęknięcia

Badania własne prowadzone były na próbkach ze stali 20G2ANbY (0,2% C, 1,5% Mn, 0,02% Si, 0,027% P, 0,025% S, 0,01 - 0,03% Nb) $R_m = 701 \frac{MN}{m^2}$, $R_{0.2} = 530 \frac{MN}{m^2}$ przy zmiennym, płaskim zginaniu. W płaskich próbkach o szerokości 45 mm o grubości 2,9 mm wykonano inicjatory pęknięć w postaci środkowych otworów o średnicy 3 mm z bocznymi nacięciami o długości 1,5 mm. Próbki poddano zginaniu wahadłowemu ($R = -1$) i odzerowo-tętnięcemu ($R = 0$) przy zmianie amplitudy naprężenia odpowiednio od 177 do 275 $\frac{MN}{m^2}$ i od 92 do 193 $\frac{MN}{m^2}$. Badania wykonano przy częstotli-

wości obciążenia 1500 cykli/min. Przyrosty długości pęknięcia obserwowano za pomocą przyrządów optycznych na powierzchni próbek, rejestrując długości pęknięcia w zależności od liczby cykli N . Przykładowy wykres $l = f(N)$ przedstawiony na rys. 1 nie odbiega od typowych. Znaki pomiarowe na wykresie nie zaczernione dotyczą długości pęknięcia z jednej strony próbki, zaczernione — z drugiej (l_1 i l_2). Uwagę zwraca jednak nierównomier-



Rys. 1. Zmiana długości pęknięcia l przy odzerowo-tętniącym zginaniu i przy różnych amplitudach naprężenia σ_a w zależności od liczby cykli N

ność rozwoju pęknięcia po obydwóch stronach niektórych próbek — jak na przykład przy $\sigma_a = 92 \frac{MN}{m^2}$, spowodowana przede wszystkim niejednorodnością struktury. Następnie obliczono kolejne wartości $\Delta l/\Delta N$ oraz wartości zakresu współczynnika intensywności naprężeń ze znanego wzoru:

$$(11) \quad \Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi l} M_k,$$

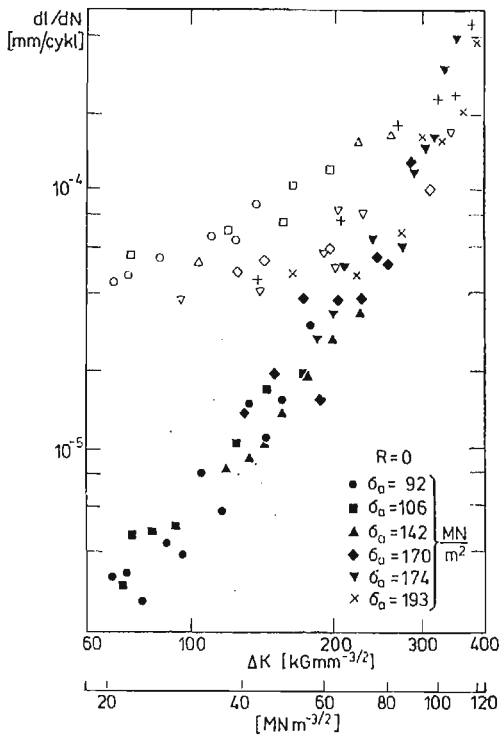
w którym $\Delta \sigma = 2\sigma_a$, $2l$ — jest długością pęknięcia, a M_k — współczynnikiem korekcyjnym uwzględniającym, zgodnie z zasadami mechaniki pęknięcia, skończoność szerokości elementów.

Współczynnik ten obliczamy ze wzoru:

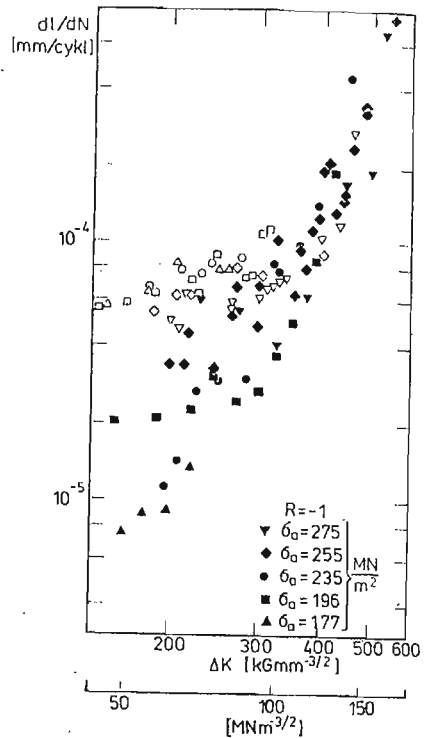
$$(12) \quad M = 1 - 0,1 \left(\frac{2l}{b} \right) + \left(\frac{2l}{b} \right)^2$$

We wzorze tym b jest szerokością próbki. Tak obliczony współczynnik obowiązuje w zasadzie dla przypadku rozciągania lub ściskania. Dlatego też mogą zaistnieć niewielkie błędy w wartości ΔK . Jednak, jak dotychczas, nie zostały wyraźnie sprecyzowane współczynniki M_k dla zginanych elementów ze środkowym otworem.

Wykresy prędkości zmęczeniowego pęknięcia $\frac{dl}{dN} = f(\Delta K)$ dla $R = 0$ i $R = -1$ przedstawiono na rys. 2 i 3 — zaczernione znaki pomiarowe. Do wykresów tych powrócimy jeszcze w dalszej części artykułu. Wyniki badań prędkości pęknięcia przy zginaniu wykazują dość duży obszar rozrzutu, bo sięgający dla $R = -1$ pół rzędu wielkości (rys. 3). Był on wywołany przede wszystkim nieregularnością przyrostów pęknięcia w bardzo wąskich przedziałach pomiarowych. Mniejszy obszar rozrzutu pomiarów zaobserwowano przy $R = 0$ (rys. 2).



Rys. 2. Korelacyjny wykres prędkości zmęczeniowego pęknięcia w stali 20G2ANbY przy odzerowującym zginaniu; punkty zaczernione dotyczą pomiarów długości pęknięcia na powierzchni próbek, a niezaczernione — pomiarów odległości międzyprążkowych na powierzchni pęknięć



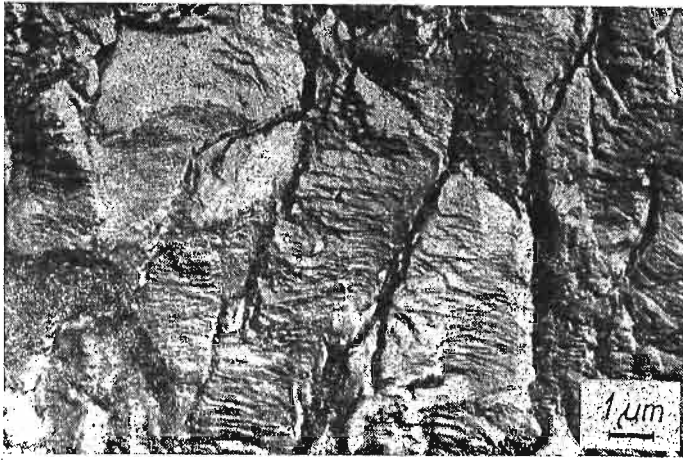
Rys. 3. Korelacyjny wykres prędkości zmęczeniowego pęknięcia w stali 20G2ANbY przy wahadłowym zginaniu; objaśnienia jak w podpisie rys. 2.

Zbiory punktów pomiarowych przykładowo przedstawione na omawianych wykresach umożliwiły ich przybliżony opis podstawowym równaniem (1). Stałą C i wykładnik m wyznaczono na podstawie przedstawionych wykresów na rys. 2 i 3. Dla $R = 0$ wielkości te wynoszą: $C = 6,34 \cdot 10^{-11}$, $m = 2,502$ a dla $R = -1$: $C = 4,33 \cdot 10^{-12}$, $m = 2,871$.

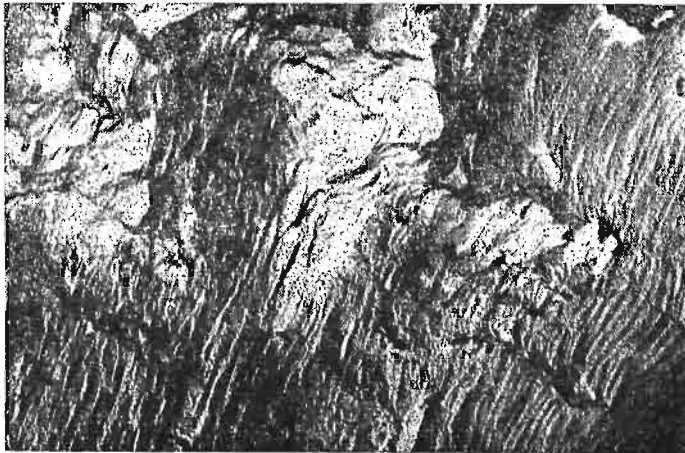
Porównanie uzyskanych wyników z rezultatami wcześniejszych badań własnych tej samej stali przy zmiennym rozciąganiu i rozciąganiu — ściskaniu wskazuje na istotnie mniejszą prędkość pęknięcia przy zmiennym zginaniu. Ponadto w znacznie mniejszym stop-

niu oddziałuje przy zginaniu współczynnik asymetrii cyklu R . Można sądzić, że tzw. „działanie podporowe” zaznacza się również korzystnie w prędkości rozwoju pęknięcia.

Analizy mikrofraktograficznej dokonano na podstawie dwustopniowych replik acetylocelulozowo-węglowych cieniowanych platyną, które badano na mikroskopie elektronowym transmisyjnym. Wybrane obrazy wycinków powierzchni pęknięć pokazano na zdjęciach elektrooptycznych na rysunkach od 4 do 11. Przy $R = 0$ jak i przy $R = -1$ przy mniejszych długościach pęknięć, a zatem i mniejszych prędkościach pęknięcia występują nieciągłości rozwoju pęknięcia oraz liczne uskoki zmieniające lokalne nachylenia mikroobszarów złomów w stosunku do płaszczyzny i kierunku głównego pęknięcia (rys. 4, 8, 11). Złomy wykazują charakter mieszany. Oprócz cech pęknięcia typowo zmęczeniowego (rys. 11) badanej stali zaznaczają się oznaki pęknięcia łupliwego (rys. 6). Występują

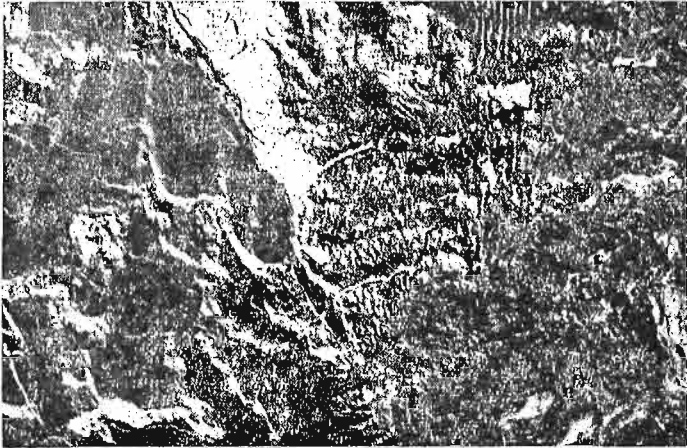


Rys. 4. Obraz wycinka powierzchni pęknięcia w stali 20G2ANbY jako przykład badań przy $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0$, $\sigma_a = 193 \text{ MN/m}^2$, $l = 3,8 \text{ mm}$, $N = 1,2 \cdot 10^5$.

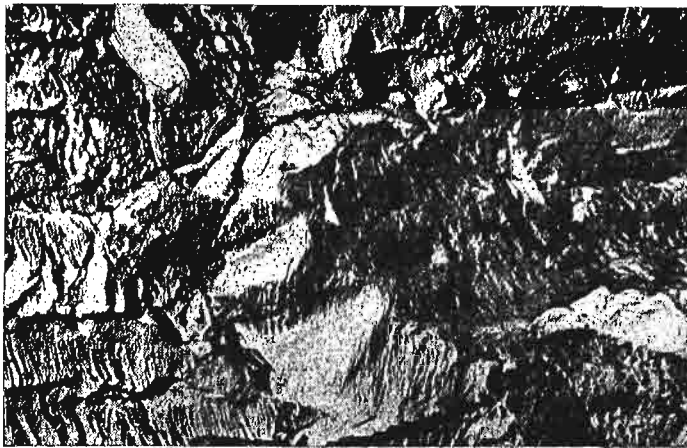


Rys. 5. Obraz wycinka powierzchni pęknięcia w stali 20G2ANbY przy $R = 0$, $\sigma_a = 193 \text{ MN/m}^2$, $l = 17,2 \text{ mm}$, $N = 3,2 \cdot 10^5$.

także wycinki o różnych długościach międzyprążkowych przy prawie tej samej długości pęknięcia i miejscowe zmiany kierunku rozwoju pęknięć (rys. 7). Świadczy to o miejscowym przyspieszaniu lub opóźnianiu pęknięcia. Przy większych prędkościach pęknięcia układy prążków obejmowały większe wycinki powierzchni i były regularniejsze (rys. 5). Występują także wycinki podobne do układów prążków kruchych. Dość liczne miejscowe za-



Rys. 6. Wycinek powierzchni pęknięcia z oznakami pęknięcia łupliwego w stali 20G2ANbY przy $R = 0$, $\sigma_a = 92 \text{ MN/m}^2$, $l = 6,0 \text{ mm}$, $N = 1,1 \cdot 10^6$.



Rys. 7. Przykład różnych odległości między prążkami na powierzchni pęknięcia w stali 20G2ANbY przy $R = 0$, $\sigma_a = 92 \text{ MN/m}^2$, $l = 12,5 \text{ mm}$, $N = 2,0 \cdot 10^6$

gniecenia powierzchni wystąpiły przy obciążeniu wahadłowym. Zachowana została jednak na powierzchni pęknięcia ogólna prostopadłość prążków do głównego kierunku pęknięcia, mimo wspomnianych lokalnych nieregularności.

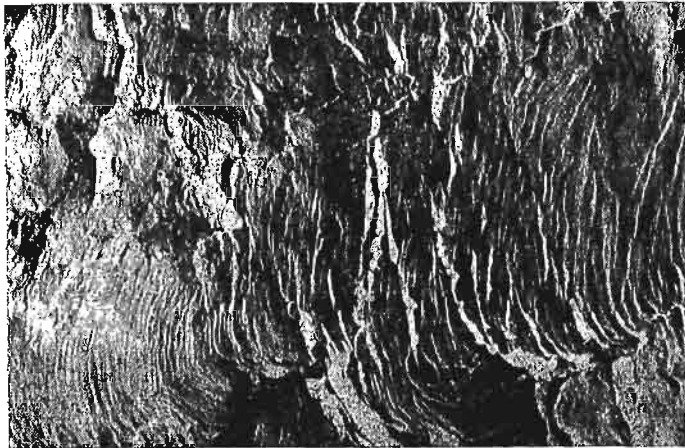
Przebieg zmęczeniowego pęknięcia przy zginaniu w stali 20G2ANbY jest podobny jak przy rozciąganiu i rozciąganiu — ściskaniu tej stali. Jest także mniej regularny, aniżeli w stalach uspokojonych z powodu niejednorodności strukturalnej. Jednakże i przy zgi-

naniu prążki dostarczają podstaw do obliczeń prędkości zmęczeniowego pęknięcia i odtwarzania historii obciążenia.

Podstawą analizy porównawczej prędkości zmęczeniowego pęknięcia był pomiar odległości międzyprążkowych na odpowiednio wybranych odcinkach na poszczególnych zdjęciach elektrooptycznych oraz wyniki badań prędkości pęknięcia otrzymane z obser-



Rys. 8. Przykład licznych miejscowych zagnieceń powierzchni pęknięcia w stali 20G2ANbY przy $R = -1$, $\sigma_a = 275 \text{ MN/m}^2$, $L = 10,3 \text{ mm}$, $N = 1,8 \cdot 10^5$.

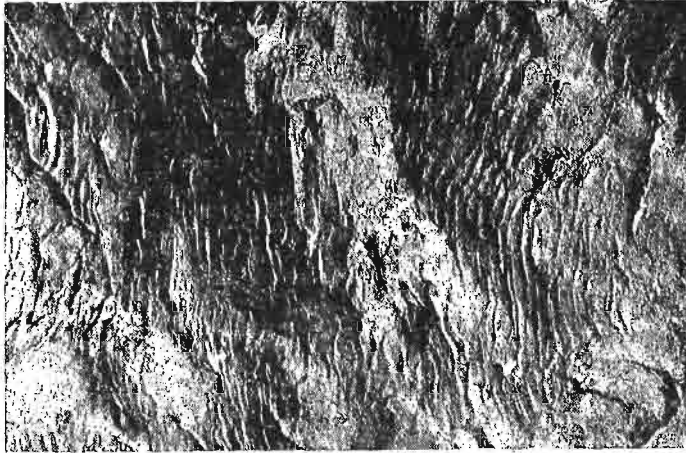


Rys. 9. Obraz wycinka powierzchni pęknięcia w stali 20G2ANbY przy $R = -1$, $\sigma_a = 275 \text{ MN/m}^2$, $l = 13,5 \text{ mm}$, $N = 2,3 \cdot 10^5$.

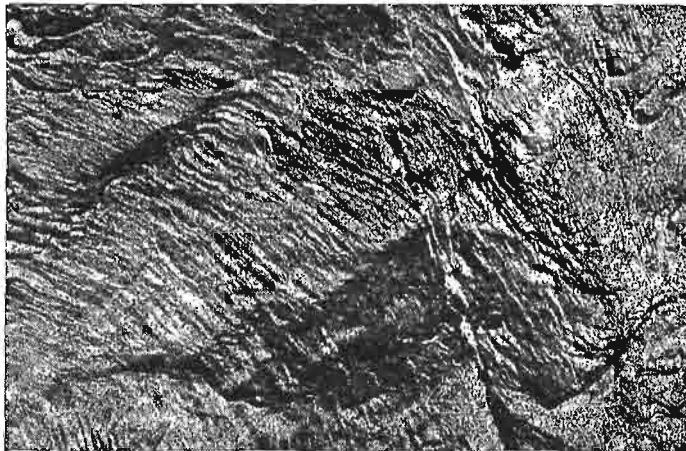
wacji na powierzchni próbki. Wykresy korekcyjne przedstawiono na wspomnianych już rys. 2 i 3. Znaki pomiarowe na wykresach niezaczernione dotyczą prędkości pęknięcia określonej z odległości między prążkami, a zaczernione — prędkości pęknięcia obliczone z pomiarów na powierzchni elementów. Zwraca uwagę dość duży obszar rozrzutu wyników badań uzyskanych obydwojema metodami. Jest to spowodowane przebiegiem pęknięcia wyraźnie odzwierciedlającym się w mikrobudowie. Na większą prędkość pęknięcia, podobnie

jak przy zmiennym rozciąganiu, wskazują pomiary ze zdjęć elektronooptycznych w danym zakresie prędkości pękania.

Lepsza korelacja zachodzi dla $R = -1$, natomiast dla $R = 0$ różnice pomiarów mogą sięgać rzędu wielkości prędkości pękania, jeżeli porównamy skrajne układy punktów w dolnym paśmie rozrzutu.



Rys. 10. Układy prążków na powierzchni pęknięcia w stali 20G2ANbY przy $R = -1$, $\sigma_a = 275 \text{ MN/m}^2$, $l = 14,3 \text{ mm}$, $N = 2,4 \cdot 10^5$



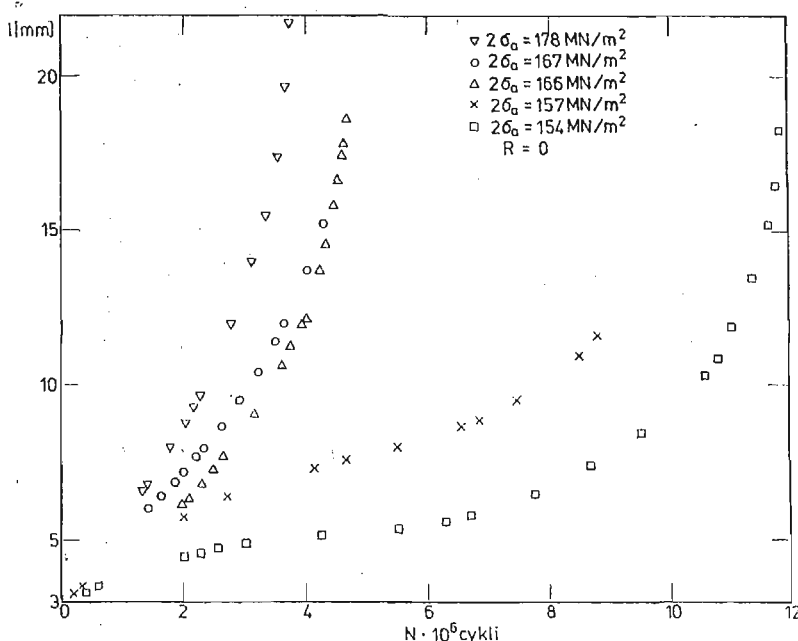
Rys. 11. Wycinek powierzchni pęknięcia z plastycznymi prążkami w stali 20G2ANbY przy $R = -1$, $\sigma_a = 255 \text{ MN/m}^2$, $l = 4,8 \text{ mm}$, $N = 6,5 \cdot 10^4$

Duży rozrzut pomiarów ze zdjęć elektronooptycznych przy $R = 0$ można wyjaśnić występowaniem drobnych uskoków łudzaco podobnych do prążków zmęczeniowych. Zaznacza się tu wyraźnie niejednorodność strukturalna uwypuklająca się silniej jak należało przypuszczać, przy działaniu naprężenia średniego σ_m , a więc a przy $R = 0$. W środkowym zakresie prędkości pękania korelacja jest zdecydowanie lepsza przy obydwóch wartościach R .

3. Metodyka i wyniki badań kształtu czola pęknięcia

Do badań wykorzystano płaskie próbki ze stali 20G2ANbY o szerokości 45 mm i grubości 2,7 mm, w których wykonano inicjatory pęknięć w postaci środkowych otworów o średnicy 3 mm z bocznymi nacięciami o długości 1,5 mm oraz jako półeliptyczne szczeliny o długości 5 mm, głębokości 0,8 mm i szerokości 0,5 mm. Próbki poddano zginaniu odzerowo-tętnięcemu ($R = 0$) przy wartościach zakresu zmiany naprężeń $2\sigma_a$ wynoszących odpowiednio dla próbek z otworem środkowym od 154 do 176 $\frac{MN}{m^2}$ oraz ze szczeliną półeliptyczną od 481 do 510 $\frac{MN}{m^2}$.

Przyrosty długości pęknięcia obserwowano przy pomocy mikroskopu optycznego na powierzchni próbek rejestrując długość pęknięcia l w zależności od liczby cykli N . Na tej podstawie sporządzono wykresy $l = f(N)$. Przykładowe przebiegi, dla próbek z otworem



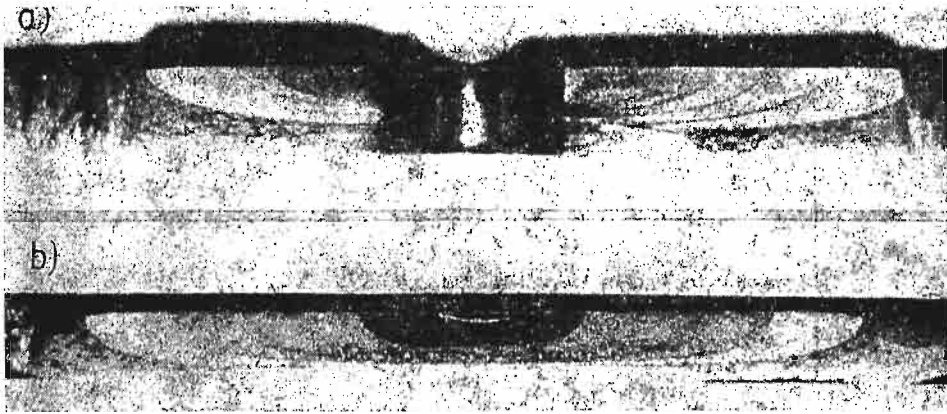
Rys. 12. Rozwój pęknięcia przy odzerowo-tętnięcym zginaniu i niskich wartościach amplitudy naprężenia σ_a

środkowym nieodbiegające od typowych, przedstawiono na rys. 12. Dotyczą one, w porównaniu z wykresem na rys. 1 ($2\sigma_a = 190-386 \frac{MN}{m^2}$), powolnego rozwoju pęknięcia ($2\sigma_a = 154-176 \frac{MN}{m^2}$).

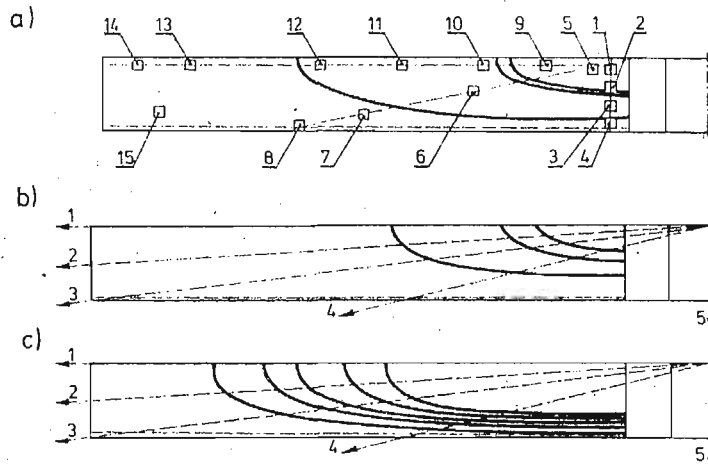
W celu określenia kształtu czola pęknięcia zastosowano metodę barwienia, co pozwoliło na uniknięcie okresowych przeciążeń próbek. Barwienie przeprowadzono bez wyłączenia

czania maszyny zmęczeniowej. Niewprowadzenie dodatkowych naprężeń, jak i zachowanie ciągłości obciążenia jest niewątpliwą zaletą metody. Należy jednak pamiętać, że w zastosowanej metodzie wnikania cieczy do dna pęknięcia mogą wystąpić pewne, aczkolwiek niewielkie zakłócenia w rozwoju pęknięcia. Wiąże się to ze zjawiskiem zaciskania lub zamykania się pęknięcia w malejącej części cyklu obciążenia [1]. Jednak w naszym przypadku nie posługiwaliśmy się w opisie prędkości pęknięcia tzw. efektywnym współczynnikiem intensywności naprężeń uwzględniającym wspomniane zjawisko. Tym niemniej w związku z pewną zmianą stanu energetycznego nowotworzących się powierzchni pęknięć w obecności cieczy, aczkolwiek bardzo krótkotrwałej, mogą wystąpić również pewne zmiany w prędkości pęknięcia.

Przykłady rozwoju czoła pęknięcia przedstawiono na zdjęciach na rys. 13 a dla próbki z otworem środkowym przy $R = 0$ i $2\sigma_a = 216 \frac{MN}{m^2}$ oraz na rys. 13 b dla próbki ze



Rys. 13. Przykłady rozwoju czoła pęknięcia przy odzerowo-tętniącym zginaniu dla próbki ze środkowym otworem (a) oraz półeliptyczną szczeliną (b)

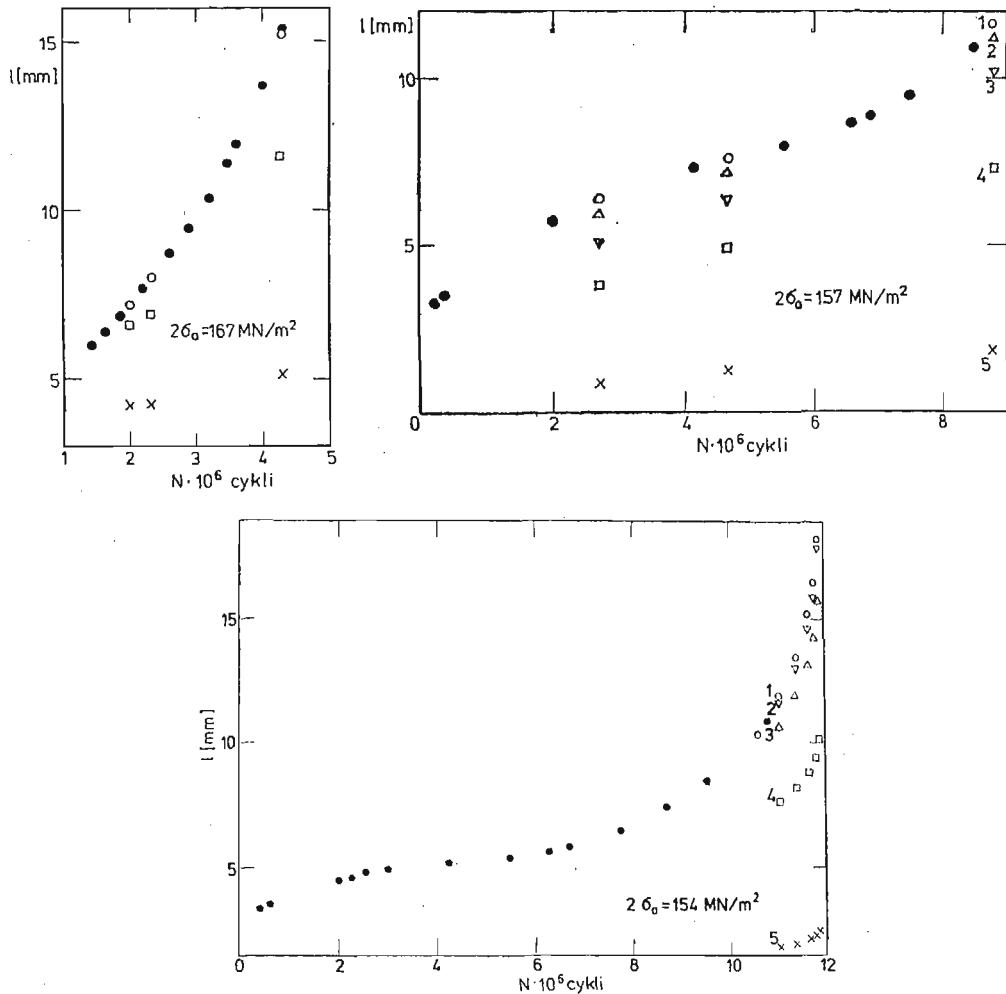


Rys. 14. Przykłady rozwoju czoła pęknięcia przy odzerowo-tętniącym zginaniu i przy $2\sigma = 167 \frac{MN}{m^2}$ (a), $2\sigma_a = 157 \frac{MN}{m^2}$ (b) i $2\sigma_a = 154 \frac{MN}{m^2}$ (c)
Strzałki wskazują kierunki badania przebiegu pęknięcia

szczeliną póleliptyczną przy $R = 0$ i $2\sigma_a = 484 \frac{MN}{m^2}$. Na zdjęciach tych widoczny jest wyraźny kształt eliptyczny czoła pęknięcia, który w miarę rozwoju pęknięcia przybiera kształt coraz bardziej spłaszczonej elipsy; stosunek małej półosi elipsy do dużej wyraźnie maleje. W końcowej fazie pęknięcia uwidacznia się wpływ przeciwległej powierzchni próbki.

W próbkach z otworem środkowym przy $R = 0$ prześledzono przebieg rozwoju pęknięcia w 3 i 5 kierunkach na powierzchni pęknięcia jak przedstawiono na rys. 14a dla $2\sigma_a = 167 \frac{MN}{m^2}$, na rys. 14b dla $2\sigma_a = 157 \frac{MN}{m^2}$ i na rys. 14c dla $2\sigma_a = 154 \frac{MN}{m^2}$. Na tej podstawie, wykonano wykresy $l = f(N)$ (rys. 15a, b i c).

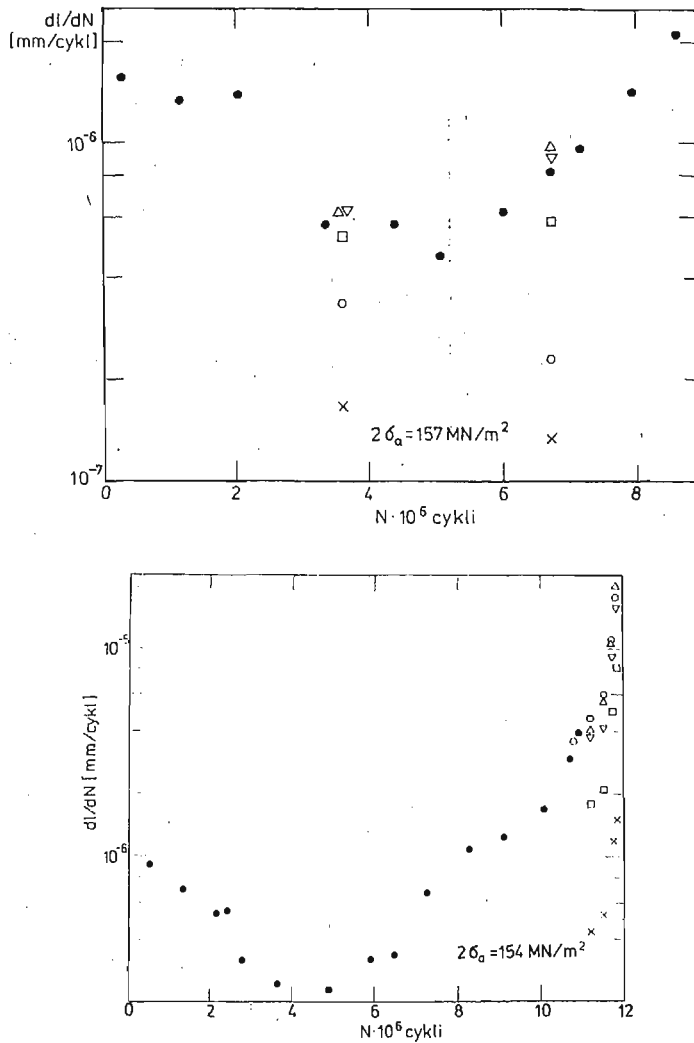
Znaki pomiarowe zaznaczone na tych wykresach dotyczą pomiarów dokonanych przy pomocy mikroskopu optycznego na powierzchni próbek, natomiast niezaznaczone po-



Rys. 15. Układy punktów pomiarowych pokazujących przebieg pęknięcia w kierunkach i dla obciążeń jak na rys.14

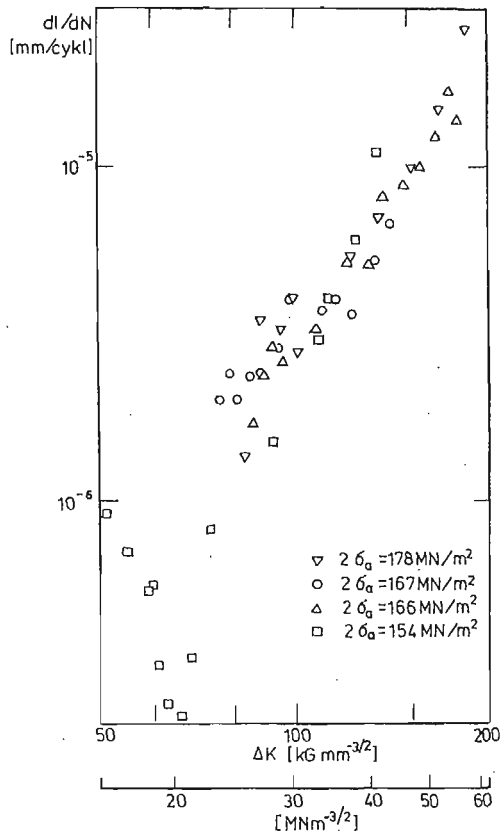
miarów dokonanych z wykorzystaniem linii uzyskanych przy pomocy barwienia i obrazujących kolejne położenia czoła pęknięcia na powierzchniach złomów. W miarę przechodzenia od kierunku 1 do 5 przyrosty pęknięcia są coraz mniejsze. Natomiast prędkość pęknięcia $\frac{dl}{dN} = f(N)$ dla dwóch z tych próbek przedstawiono na rys. 16a, b. Tutaj również znaki pomiarowe zaczernione dotyczą kierunku 1 czyli prędkości pęknięcia na powierzchniach próbek. Z wyników tych wynika, że prędkość pęknięcia w początkowym okresie może nawet zmniejszać się.

Wartości $\Delta I/\Delta N$ oraz odpowiednie im wartości ΔK dla próbek z otworem środkowym, przy $R = 0$ i $2\sigma_a$ wynoszącym od 154 do 176 $\frac{MN}{m^2}$ posłużyły do sporządzenia wykresów



Rys. 16. Układy punktów pomiarowych prędkości pęknięcia przy odzerowo-tętniacym zginaniu i przy $2\sigma_a = 157 \text{ MN/m}^2$ (a) oraz $2\sigma_a = 154 \text{ MN/m}^2$ (b)

prędkości zmęczeniowego pęknięcia $\frac{dl}{dN} = f(\Delta K)$. Wykresy te wykonane w układzie współrzędnych logarytmicznych przedstawiono na rys. 17. Zakres współczynnika intensywności naprężeń ΔK obliczono w sposób podobny jak przy rozciąganiu. Wykresy te dotyczą prędkości pęknięcia na powierzchniach próbek. Podobnie jak w badaniach wcześniejszych zauważono dość duży obszar rozrzutu wartości prędkości pęknięcia przy zginaniu spowodowany niejednorodnością struktury i z nią związaną nieregularnością przebiegu pęknięcia.



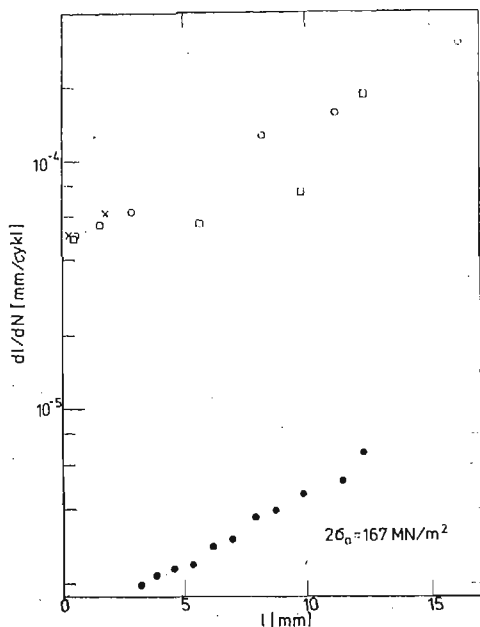
Rys. 17. Układy punktów pomiarowych prędkości pęknięcia przy odzerowo-tętniącym zginaniu i różnych amplitudach naprężeń σ_a

Z powierzchni pęknięcia próbki $\left(R = 0, 2\sigma_a = 167 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}\right)$ w wybranych kierunkach i w ustalonych odległościach (rys. 14a) wykonano dwustopniowe repliki acetylocelulozowo-węglowe, które cieniowano platyną. Repliki badano na mikroskopie elektronowym transmisyjnym. Dokonana analiza mikrofraktograficzna dostarczyła informacji o charakterze przebiegu pęknięcia potwierdzających wyniki badań już wcześniej przeprowadzonych dla tej stali.

Porównanie prędkości pęknięcia $\frac{dl}{dN} = f(l)$ otrzymanej z pomiarów na powierzchni

próbki i z odległości międzyprążkowych wskazuje na znaczną różnicę wyników uzyskanych obydwoma metodami i sięgającą półtora rzędu wielkości (rys. 18).

Uzyskane zdjęcia fraktograficzne ułożono zgodnie z miejscami obserwacji na powierzchni złomu. Przedstawiono je na rys. 19. Zdjęcia zostały rozmieszczone w sposób odpowiadający schematowi pobrania replik z próbki (rys. 14a). Układy prążków zachowują ogólnie



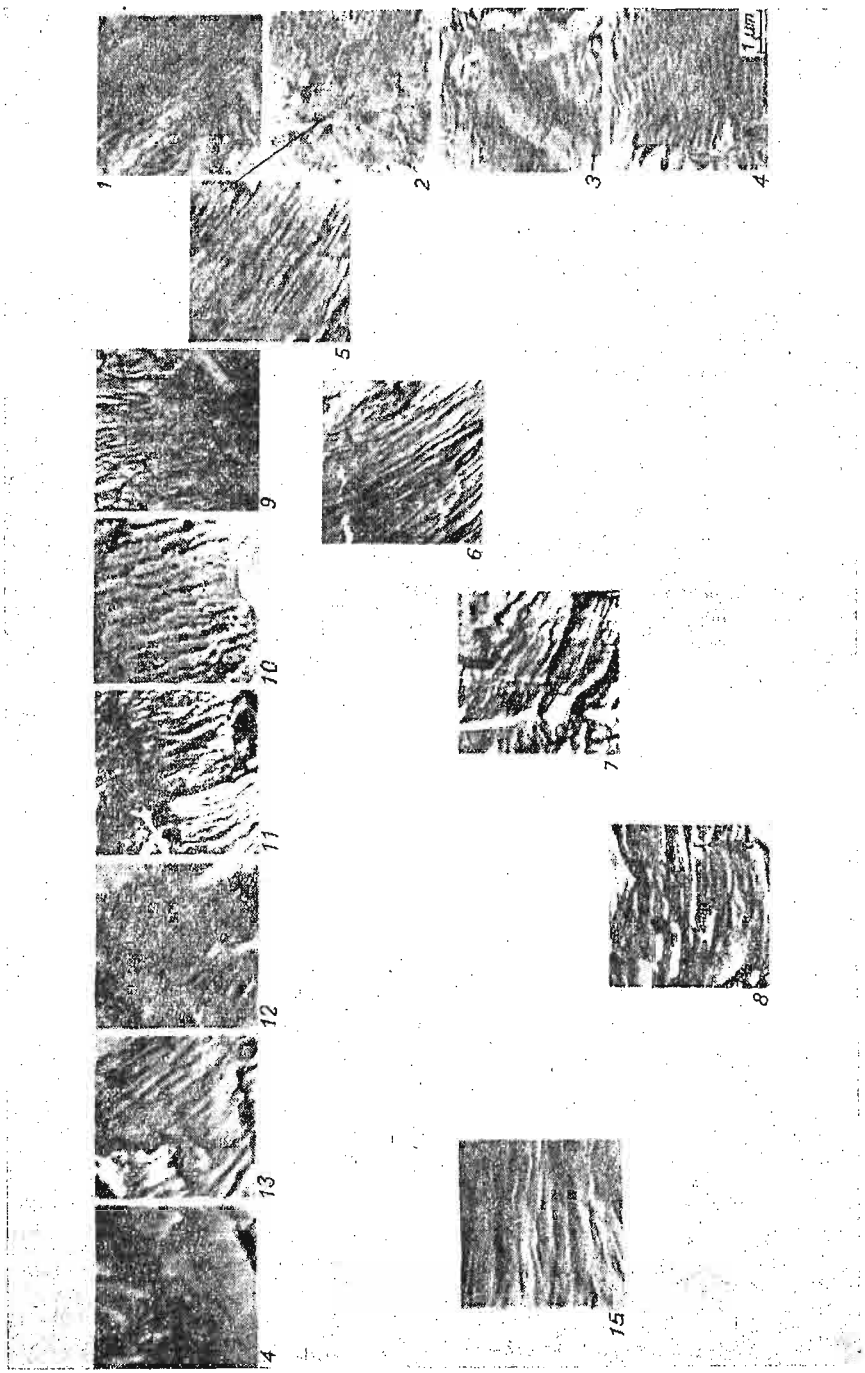
Rys. 18. Porównanie prędkości pęknięcia uzyskanej z pomiarów na powierzchni próbki (punkty zaczerpnięte) i z odległości między prążkami przy odzerowo-tętniącym zginaniu i przy $2\sigma_a = 167 \text{ MN/m}^2$ na równoległość do linii czoła pęknięcia na powierzchni złomu uzyskanych metodą barwienia. Zachowana została więc zasada prostopadłości układów prążków do głównego kierunku rozwoju pęknięcia.

W badaniach próbek zginanych ze szczeliną półeliptyczną pojawiają się trudności w obliczaniu ΔK . Dla szczeliny o długości $2c$ ($2l$) i głębokości a przy rozciąganiu próbki stosunek $\frac{a}{c}$ jest wielkością prawie stałą. Natomiast przy zginaniu, w miarę rozwoju szczeliny, stosunek ten wyraźnie maleje, (rys. 20) stąd trudności w określeniu całki eliptycznej 2-go rodzaju Φ we wzorze:

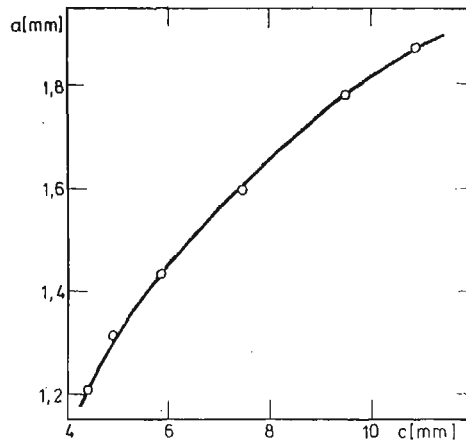
$$(13) \quad \Delta K = M \frac{\Delta\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{\Phi^2 - 0,212(\sigma/R_e)^2}}$$

gdzie M jest współczynnikiem korekcyjnym uwzględniającym skończoność wymiarów elementu, a wyrażenie w mianowniku pod pierwiastkiem określa się jako współczynnik kształtu pęknięcia Φ . Całkę Φ oblicza się z zależności:

$$(14) \quad \Phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$



Rys. 19. Układy prążków na powierzchni pęknięcia rozmieszczone według schematu zdjęcia replik na na rys. 14a.



Rys. 20. Przykład zmiany głębokości pęknięcia a w zależności od jego długości c na powierzchni próbki przy odzerowo-tętniącym zginaniu

We wzorze (13) σ jest naprężeniem nominalnym a Re — granicą plastyczności. W ostatniej zależności (14) długość $2c$ i głębokość pęknięcia a zmieniają się zatem przy zginaniu całkowicie inaczej, aniżeli przy rozciąganiu czy rozciąganiu ściskaniu. Dlatego też wykonanie skrótowo przedstawionych badań w celu dokładnego określenia wielkości c i a i budowy wykresów jak na rys. 20 okazało się pilną koniecznością. Podjęto próbę analitycznego opisu kształtu czoła pęknięcia w warunkach zginania. Trudności istnieją jednak w uwzględnieniu oddziaływania skończonej grubości elementu.

Wnioski

1. Prędkość pęknięcia w stali 20G2ANbY przy zmiennym zginaniu daje się opisać klasycznym wzorem Parisa. Jest ona zdecydowanie niższa od prędkości pęknięcia przy zmiennym rozciąganiu przy tym samym współczynniku asymetrii cyklu.
2. Mikrobudowa powierzchni pęknięć zmęczeniowych w stali 20G2ANbY badana elektronooptycznie odzwierciedla przebieg zmęczeniowego pęknięcia i stwarza możliwość odtworzenia prędkości pęknięcia na podstawie układów prążków zmęczeniowych. Przebieg pęknięcia jest nieregularny zwłaszcza w początkowym etapie rozwoju pęknięcia.
3. Uzyskano dość dobrą korelację wyników badań prędkości pęknięcia otrzymanych z bezpośrednich obserwacji zmian długości pęknięć na powierzchniach próbek i wyznaczonych pośrednio z odległości międzyprążkowych. W początkowym okresie rozwoju pęknięć na większą prędkość pęknięcia wskazują odległości międzyprążkowe. Różnice między skrajnymi wynikami pomiarów uzyskanych obydwojma metodami sięgają rzędu wielkości. Jest to spowodowane głównie niejednorodnością materiału i lokalnie różnymi mechanizmami pęknięcia.
4. Zastosowana w badaniach metoda określania kształtu czoła pęknięcia poprzez barwienie umożliwia zachowanie ciągłości obciążenia i dostarcza danych do określania prędkości pęknięcia. Czoło pęknięcia przy płaskim zginaniu elementów z półeliptycznymi

szczelinami zachowuje kształt elipsy, która jednak w miarę rozwoju pęknięcia ulega coraz większemu spłaszczeniu (stosunek a/c maleje).

5. Badania mikrofraktograficzne wzdłuż trzech kierunków rozwoju pęknięcia w elementach z półeliptycznymi szczelinami umożliwiły orientacyjne określenie prędkości pęknięcia w tych kierunkach. Prędkość pęknięcia w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zginania jest najmniejsza. Na całej powierzchni złomu zachowana została zasada prostopadłości prążków do kierunków pęknięcia.
6. Rozrzut pomiarów prędkości pęknięcia $\frac{dl}{dN} = f(\Delta K)$ na powierzchni próbki wskazuje na nieregularności rozwoju pęknięcia. Dla ustalenia prędkości pęknięcia w innych kierunkach konieczne jest określenie właściwej wartości ΔK w tych kierunkach.

Literatura cytowana w tekście

1. S. KOCANĀDA, *Zmęczeniowe niszczenie metali*. II wydanie. WNT Warszawa, 1978.
2. P. J. CAIN, R. PLUNKETT, T. E. HUTCHINSON, *Fatigue crack propagation rates for duralumin in simple bending*. Transactions ASME, Journal of Engineering Materials and Technology, April 1975, s. 179 — 186.
3. H. MISAWA, Y. KAWADA: *On the crack propagation by cyclic stresses below the fatigue limit in specimens with a pinhole*. Bulletin JSME, **18**, nr 125, 1975, s. 1201 - 1208.
4. Y. HAGIWARA, T. JOSHINO, T. KUNIO, *Propagations of the surface fatigue cracks in various kinds of notched specimens*, Bulletin JSME, **18**, nr 120, 1975, s. 551 - 559.
5. H. NAKAZAWA, H. KOBAYASHI, *On the stage I and stage II fatigue crack propagation behaviours*. Strength and Structure of Solid Materials. Noordhoff International Publishing Leyden 1976 s. 299 - 309
6. T. KUNIO, M. SHIMIZU, Y. AMADA, Y. KIMURA, *A study on the statistical fluctuation of fatigue crack growth rate associated with the heterogeneity of the microstructure*. Ibidem, s. 251 - 263.
7. N. LINO, *Fatigue crack growth in a structural member subjected to combined tensile and bending stress*. Ibidem, s. 343 - 354.
8. P. PARIS, H. TADA, *The stress intensity factors for cyclic reversed bending of a single edge cracked strip including crack surface interference*. International Journal of Fracture, **11**, nr 6, 1975, s. 1070 - 1072.
9. L. H. BURCK, *Fatigue growth of surface cracks in bending*. Engineering Fracture Mechanics **9**, 1977, s. 389 - 395.
10. S. KOCANĀDA, J. SADOWSKI, *Archiwum Budowy Maszyn*, t. **24**, z. 2, 1977, s. 239 - 363.
11. S. KOCANĀDA, A. LIKOWSKI, J. SADOWSKI, *Badania prędkości zmęczeniowego pęknięcia w stali 20G2ANbY przy różnym rodzaju obciążenia*. II Sympozjum Zespołu Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji LUBLIN, 1977, s. 80 - 84.
12. S. KOCANĀDA, A. LIKOWSKI, *Badania prędkości w stali o podwyższonej wytrzymałości przy zmiennym zginaniu*. VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego. Warszawa, 1978, Cz. 2, str. 68 - 75

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ РОСТА И ФОРМЫ ТРЕЩИН В ВЫСОКОПРОЧНОЙ СТАЛИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ

В работе представлены результаты исследований скорости роста усталостных трещин при изгибе элементов из стали повышенной прочности 20G2ANbY (0,2% C, 1,5% Mn, 0,03% Nb) с полуэллиптическими поверхностями трещинами и отверстиями. Проведено анализ скорости роста трещин при изгибе по сравнению со скоростью при растяжении. Представлено изменение формы и скорость роста усталостной трещины по различным направлениям при изгибе.

S u m m a r y

INVESTIGATION OF FATIGUE CRACK GROWTH RATE AND CRACK SHAPES IN HIGH-STRENGTH STEEL UNDER CYCLIC BENDING

The crack growth rate and crack tip shapes in high-strength steel specimen (0,2%C, 1,5%Mn, 0,03Nb) with semi-elliptical surface crack and with central holes under bending has been investigated. It is lower than under cyclic tension. The fatigue crack growth rate obtained by measurements made on the specimens surfaces is compared with the crack growth rate calculated from the striation spacing.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1979 roku.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

Z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w drugiej połowie 1978 roku

I Działalność naukowa

Odbyły się 22 zebrania naukowe o następującej tematyce:

Oddział w Bydgoszczy

1. 30 października, N. N. Gorbacz, *O wielomianach najmniej odchyłających się od zera*
2. 20 grudnia, E. Burka, *Kawitacja i erozja kawitacyjna*

Oddział w Częstochowie

3. 7 października, F. Moles, Czechosłowacja, *Interakcja fali uderzeniowej z różnego kształtu rurociągami*
4. 7 października, P. Zdeno, Czechosłowacja, *Badania eksperymentalne efektu diodowego w rozgałęzieniach przewodów*
5. 23 listopada, O. Wołczek, *Badania planet układu słonecznego*

Oddział w Gdańsku

6. 25 września, H. Stumpf, *Complementary and extremum principles in the non-linear shell theory*
7. 28 października, A. P. Popow, ZSRR, *Pewne problemy pracy elementów niewspółosiowo łączących silniki okrętowe z przekładniami*
8. 4 listopada, L. Dziemidowicz-Tkacz, *Zastosowanie trójwymiarowych elementów skończonych w teorii płyt*

Oddział w Gliwicach

9. 4 października, A. Buchacz, *Grafy i liczby strukturalne w badaniu drgań dyskretno-ciągłych układów mechanicznych*
10. 25 października, W. Sobczyk, *Wybrane zagadnienia projektowania procesów technologicznych budowy maszyn*
11. 15 listopada, W. Sileikis, *Metodyka projektowania czujnika odległości z komorą wirową*
12. 13 grudnia, T. Jeleniewski, *Przykład komputerowego wspomagania nauczania metod programowania*

Oddział w Krakowie

13. 25 października, J. Pindera, Kanada, *Doświadczalne badania w mechanice. Podstawowe pojęcia i twierdzenia teorii ergodycznej*

Oddział w Łodzi

14. 15 września, W. King, *Laser methods of stress wave measurements (holography and spectral photography)*
15. 26 października, A. Kelm, *Praca nęzbrowanej tarczy prostokątnej w stanie zakrytycznym przy działaniu jednokierunkowego obciążenia liniowo zmiennego*

Oddział w Opolu

16. 5 grudnia, A. Zybur, *Dyfuzyjne modele korozji żelbetu*
17. 15 października, T. Smoleń, *Dystorsje w powłokach lekkosprężystych*

Oddział w Poznaniu

18. 20 listopada, H. Zorski, *Termodynamika ośrodków ciągłych ze skończoną prędkością propagacji ciepła*

Oddział w Szczecinie

19. 31 listopada, W. Majewski, *Wpływ prostowania na wytrzymałość osiowo ściskanych płyt poszycia statku*
 20. 1 grudnia, M. Kmiecik, M. Kulik, *Metody oceny efektywności udziału nadbudówek względnie pokładówek w ogólnym zginaniu kadłuba*
 21. 13 grudnia, W. Paczkowski, *Niekonwencjonalne stany graniczne struktur prętowych*

Oddział we Wrocławiu

22. 27 listopada, M. Zakrzewski, *Zmęczenie cieplne i zjawiska pokrewne — próba systematyki*

II Sympozja i konferencje naukowe

Oddział w Warszawie zorganizował VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego w dniach 4 - 6 września 1978 r. Sprawozdanie ukazało się w numerze 2/79 MTiS.

Oddział we Wrocławiu zorganizował VII Sympozjum poświęcone reologii, które odbyło się w dniach 25 - 26 września 1978 r. Sprawozdanie ukazało się w numerze 3/79 MTiS.

III Seminarya i kursy

Oddział w Gdańsku w II kwartale 1978 roku kontynuował seminarium: Liniowa teoria powłok z prelegentem W. Pietraszkiewiczem. W seminarium uczestniczyło 16 osób

Oddział w Rzeszowie zorganizował 2 seminarya szkoleniowe — wygłoszono po dwa referaty. Uczestników było 13. Na seminarium: Mechanika konstrukcji wygłoszono 9 referatów. Uczestników było 23.

Oddział w Zielonej Górze w ramach zebrań naukowych przeprowadził 2 seminarya, z czego 3 zebrań dotyczyły seminarium z zakresu teorii optymalizacji, a 5 zebrań dotyczyło seminarium z zakresu zastosowań teorii sprężystości.

Oddział w Gliwicach kontynuował kurs: Zastosowanie grafów w mechanice i technice. Wykłady prowadzili: J. Kaczmarek i J. Wojnarowski.

Oddział w Łodzi zorganizował kurs: Analiza niestandardowa i jej zastosowanie w mechanice. Kurs prowadził Cz. Woźniak.

Oddział w Opolu rozpoczął kurs: Ogólne podstawy mechaniki ośrodków ciągłych. Odbyła się pierwsza część wykładów dotycząca rachunku tensorowego i jego zastosowań. Wykładowcą jest J. Kubik. Uczestników 8.

IV Konkursy naukowe

Oddział w Gliwicach ogłosił konkurs na prace teoretyczne z mechaniki. Wpłynęło prac. W dniu 20.XII.78 odbyła się sesja Ogólnopolskiego Konkursu Naukowego na prace teoretyczne z mechaniki. Sąd konkursowy w osobach J. Antoniuk, R. Bąk, K. Biernatowski, S. Borkowski — Przewodniczący, T. Lamber, B. Skalmierski, Z. Sulimowski, J. Szargut, W. Szuścik, W. Tarnawski, J. Wojnarowski przyznał:

I nagrodę — Jadwidze Jędrzejczak (Gliwice) za pracę pt. *Zginanie płyt fizycznie nieliniowych.*

II nagrodę — Andrzejowi Buchaczowi (Gliwice) za pracę pt. *Analiza złożonych dyskretnociągłych układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych*

Ponadto trzy wyróżnienia otrzymali:

Józef Suchoń (Gliwice) za pracę pt. *Analiza stanu obciążeń i odkształceń w trójprasmowych ciągłach łączonych z wielu odcinków*

Gabriel Wróbel (Gliwice) za pracę pt. *Algebraiczne metody analizy drgań złożonych przekładni zębatych*

Jerzy Wyrwał (Opole) za pracę pt. *Twierdzenie wariacyjne sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej.*

Oddział w Częstochowie ogłosił wyniki konkursu na najlepszą pracę z mechaniki płynów. Zgłoszono 12 prac. Sąd konkursowy w składzie: R. Puzyrewski, J. Ostrowski, R. Wolański, K. Biernatowski, na posiedzeniu w dniu 8.09.1978 r. zaproponował przyznanie następujących nagród:

- I nagroda — Paweł Wiewiórski (Łódź) za pracę pt. *Efekt przejściowy przy przenikaniu słabej fali uderzeniowej przez rozgałęzienie przewodów*
- II nagroda — Jacek Lebrecht (Łódź) za pracę pt. *Naddźwiękowy przepływ w obszarze wylotowym dośrodkowego wieńca kierującego*
- III nagroda — Zbigniew Popiołek, Włodzimierz Ślązak (Gliwice) za pracę pt. *Interpretacja sygnału termomanometru w silnie burzliwych przepływach o małych prędkościach*

V Działalność organizacyjna

1. W roku 1978 liczba członków PTMTS wzrosła do 901 osób.
2. W okresie roku 1978 odbyło się 87 zebrań organizacyjnych.
3. Na zebraniu plenarnym Zarządu Głównego PTMTS w dniu 9 grudnia 1978 r. powołano nowy oddział PTMTS z siedzibą w Lublinie. Przewodniczącą Oddziału została doc. dr Zdzisława Rotter.

MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA MECHANIKI PĘKANIA W ZASTOSOWANIACH INŻYNIERSKICH

Bengalur (Bangalore, India) 26 - 30 marca 1979

Konferencja ta została zorganizowana przez Narodowe Laboratorium Aeronautyczne (NAL, India na terenie zakładów w Bengalurze we współpracy z Uniwersytetem Lehigh (Pensylwania, St. Zjedn. A. P.)- W czasie pięciodniowej Konferencji odbyło się 21 sesji naukowych, nie licząc sesji inauguracyjnej i zamykającej obrady. Większość ok. 220 zarejestrowanych uczestników stanowili oczywiście Hindusi i współorganizatorzy amerykańscy (16 osób) z pośród których wymienimy najbardziej znanych: G. C. Sih (współprzewodniczący Konferencji), H. Liebowitza, S. Nemat-Nassera i J. D. Achenbacha, przewodniczącym komitetu organizacyjnego był dyrektor NAL dr S. R. Valluri. Pozostali uczestnicy byli przedstawicielami następujących krajów: Japonii (6), Hong-Kongu (2), Korei Południowej (1), Singapuru (1), Burmy (1), Australii (1), Wielkiej Brytanii (5), Holandii (3), Francji (2), Szwecji (1) i Polski (1).

Sesje naukowe obejmowały szeroki krąg zagadnień mechaniki pęknięcia, a mianowicie: modele mechaniki ośrodków ciągłych, metody doświadczalne i badanie materiałów (2 sesje), zagadnienia mikrostruktury, pęknięcie metali i stopów, kompozyty (2 sesje), odkształcenia niesprężyste, zagadnienia metalurgiczne, zmęczenie (4 sesje), pęknięcie skał i materiałów budowlanych, zagadnienia inżynierskie i zastosowania w projektowaniu, analiza naprężeń, dynamiczna propagacja szczelin, zagadnienia numeryczne, szczeliny a analiza pęknięcia, dobór kryteriów pęknięcia.

Wygłoszono 66 referatów, które obejmowały tematykę od prac teoretycznych i badań doświadczalnych do zastosowań w konkretnych zagadnieniach inżynierskich i badań, lub obliczeń typu rutynowego. Z pośród przedstawionych referatów hinduskich było 31, amerykańskich 17, japońskich 5, angielskich 4, holenderskich i z Hong-Kongu po dwa, oraz z Australii, Korei Południowej, Francji, Polski i Szwecji po jednym.

Organizatorzy wydali broszurę ze streszczeniami referatów, w niedługim czasie ukaże się pod redakcją prof. G. C. Sih książka zawierająca szereg referatów wygłoszonych na Konferencji. Konferencję uzupełniała wystawa usystematyzowanych próbek materiałów oraz części maszyn i konstrukcji, które uległy zniszczeniu na skutek działania różnego rodzaju sił, procesów technologicznych, warunków eksploatacji itp.

Na małej wystawie książek z dziedziny mechaniki pęknięcia dużym zainteresowaniem i uznaniem cieszyła się książka S. Kocańdy „Fatigue failure of metals”.

Gościnni gospodarze umożliwili zapoznanie się z historycznymi świątyniami (Belur, Halebid), lub, do wyboru z pałacem i ogrodami w Mysore. Przed bankietem specjalny wykład o ciekłych kryształach wygłosił znany w tej dziedzinie uczoney hinduski prof. S. Chandrasekhar.

Następna konferencja tego typu ma się odbyć w Rzymie w dniach 21 - 27 czerwca 1980.

Z. Olesiak

KONFERENCJA PN „MECHANICZNE WŁASNOŚCI MATERIAŁÓW PRZY DUŻYCH PRĘDKOŚCIACH ODKSZTAŁCENIA

Oxford, 28 - 30 marzec 1979

Uniwersytet w Oksfordzie — Wydział Nauk Inżynierskich oraz Instytut Fizyki Stowarzyszenia Inżynierów Mechaników (brytyjskich) organizują tradycyjnie co pięć lat międzynarodowe konferencje mające na celu podsumowanie bieżącego stanu wiedzy w zakresie badania własności mechanicznych materiałów poddawanych obciążeniom dynamicznym. Konferencje te zyskały sobie duże uznanie w kręgach naukowych i inżynierskich ze względu na szeroki przekrój tematyczny oraz wysoki poziom materiałów konferencyjnych.

Ostatnia konferencja była poświęcona pamięci J. D. Campbella, którego niepodziewany zgon nastąpił w końcu roku 1978. Dr J. D. Campbell pracował od 1950 roku na Uniwersytecie w Oksfordzie i był autorem lub współautorem wielu prac o pionierskim charakterze, na tematy związane z dynamiczną plastycznością metali. Przebywał on kilkakrotnie w naszym kraju, był przyjacielem Polski.

Konferencja zgromadziła ponad stu uczestników z dziesięciu krajów w tym z Czechosłowacji i Polski. Zaprezentowano trzydzieści trzy referaty, które przedstawiono w czterech następujących sekcjach:

1. Techniki badawcze w zakresie dynamicznym oraz zachowanie się materiałów,
2. Mechanika falowa oraz mechanika pękania,
3. Zachowanie się konstrukcji przy obciążeniach dynamicznych,
4. Zastosowania — procesy w których występują duże prędkości odkształcenia.

Główny referat poświęcony pamięci J. D. Campbella został wygłoszony przez prof. J. Duffy (Brown University, Providence, USA), tytuł referatu: „Techniki badawcze oraz zachowanie się materiałów przy dużych prędkościach odkształcenia”.

Trudno omówić w tym miejscu wszystkie zaprezentowane na konferencji prace, należy jednak podkreślić, że ogólny poziom reprezentowanych technik badawczych bardzo się podniósł. Równocześnie obserwuje się znaczne rozszerzenie zakresu badawczego w szczególności w odniesieniu do różnorodnie obciążonych próbek i różnych badanych w ten sposób parametrów. Materiały konferencyjne w postaci książkowej mają się ukazać z końcem bieżącego roku nakładem Instytutu Fizyki.

J. Klepaczek

II POLSKO-SZWEDZKIE SYMPOZJUM NA TEMAT CIAŁ STAŁYCH MIKROSPRĘŻYSTYCH

Symposium odbyło się tym razem w Sztokholmie w dniach 11 - 15 czerwca 1979. Naszej, ośmio-osobowej delegacji przewodniczył Prezes PAN prof. W. Nowacki. W Symposium uczestniczyli również mechanicy i matematycy ze Stanów Zjednoczonych A. P., Bułgarii, Francji i Węgier, liczba uczestników nie przekroczyła jednak 40 osób. Tematyka Symposium dotyczyła mechaniki kontinuum układów dyskretnych, elektromagnetycznego oddziaływania w ciałach stałych, defektów w siatce krystalicznej, mechaniki kompozytów, nielokalnych teorii pola, polarnych teorii pola. 11 referatów, lub obszernych streszczeń odbito metodą kserograficzną dla uczestników Symposium. Materiałom Symposium ma być poświęcony specjalny zeszyt Archiwum Mechaniki Stosowanej. Referaty były godzinne względnie półgodzinne, wygłoszono ich 23 ponadto odbyła się dyskusja okrągłego stołu.

Uczestnicy Symposium zostali zaproszeni na obiad w Ratuszu przez Mera Sztokholmu, oraz na przyjęcia zorganizowane przez Ambasadora PRL w Szwecji w Instytucie Polskim, przez przewodniczącego Komitetu Organizacyjnego prof. O. Brulina, oraz przez Rektora Królewskiego Instytutu Technologicznego na Uczelni. Podajemy tytuły wygłoszonych referatów w porządku chronologicznym ich wygłaszania:

- H. ZORSKI — Nielocalne teorie ośrodków ze strukturą wewnętrzną,
 I. KÖVÁCS (Budapeszt) — Nielocalne oddziaływanie między defektami punktowymi i dyslokacjami,
 W. NOWACKI, J. P. NOWACKI — Kilka zagadnień hemitropowego kontinuum mikropolarnego,
 Z. OLESIAK, W. FRYDRYCHOWICZ, S. MATYSIAK — Naprężenia cieplne w warstwie mikropolarnej,
 O. BRULIN, S. HJALMARS (Sztokholm) — Gradientowa teoria mikropolarna i równoważne ośrodki,
 J. IGNACZAK — Twierdzenie o obszarze wpływu w asymetrycznej elastodynamice,

- L. SÖDERHOLM (Sztokholm) — O zakresie ważności materialnej niezależności od układu współrzędnych,
M. WĄGROWSKA, Z. OLESIAK — Kilka uwag o plastyczności mikropolarnej,
H. STRIFORS (Sztokholm) — Mikromorficzne warunki na osobliwych brzegach szczeliny jako wynik niezależności od układu,
Cz. WOŹNIAK — Więzy w mechanice dyskretnej i kontynuualnej. Zastosowania w teorii ośrodków mikropolarnych,
G. A. MAUGIN (Paryż) — Elektromagnetyczne zmienne wewnętrzne w ośrodkach elektromagnetycznych,
J. P. NOWACKI — Liniowe i powierzchniowe defekty w ośrodku Cosseratów,
R. K. T. HSIEH (Sztokholm) — Śrubowe dyslokacje w ośrodku ferromagnetycznym,
M. ŻÓRAWSKI — Zastosowania teorii ciał hemitropowych do kryształów jonowych,
L. G. KARLSSON (Sztokholm) — Mechaniczne modele drgań siatki,
K. MARKOW (Sofia) — O teorii materiałów kompozytowych składających się z mikropolarnych faz,
K. BERGLUND (Sztokholm) — Koncentracja naprężeń w ziarnistych kompozytach,
P. MARINOW (Sofia) — Kontynuualna interpretacja fal podłużnych w sprężystych kompozytach warstwowych,
E. LUNDGREN (Lund) — Teoria kompozytów w oparciu o kontynuualną teorię mieszanin,
A. J. A. MORGAN (Los Angeles) — O podstawach kontynuualnych teorii pola,
W. E. JAHSMAN, R. D. GAUTHIER (Boulder, USA) — Poszukiwanie stałych mikropolarnych II, rozważania analityczne, R. D. GAUTHIER, W. E. JAHSMAN (Golden, USA) — Poszukiwanie stałych mikropolarnych II badania doświadczalne,
Dyskusja okrągłego stołu (przew. H. ZORSKI) .

Podstawiono kontynuować konferencje o podobnej tematyce, następne sympozjum ma się odbyć w Polsce prawdopodobnie za dwa lata.

Z. Olesiak

SYMPOZJUM MODELE CIĄGŁE UKŁADÓW DYSKRETYCH

W Freudenstadt, RFN, odbyło się w dniach 24 - 30 czerwca 1979 trzecie międzynarodowe sympozjum pod hasłem „Modele ciągłe układów dyskretnych”, („Continuum Models of Discrete Systems”). Dwa poprzednie sympozja pod tym hasłem odbyły się kolejno w Polsce, w 1975 roku, oraz w Kanadzie w 1977 roku. Problematyka sympozjum była zawarta w dziesięciu sesjach naukowych obejmujących zagadnienia: układów dyskretnych i teorii ośrodków ciągłych, mikrostruktury i uogólnionych ośrodków ciągłych, sprężystości siatek krystalicznych, zniszczenia, polimerów, hydrodynamiki i ciekłych kryształów, rozchodzenia się fali, defektów w ciałach stałych, termodynamiki i plastyczności, materiałów kompozytowych, nielokalnej teorii sprężystości. W ramach tej problematyki wygłoszono 54 referaty, z których niektóre miały charakter ogólny, przeglądowy, a pozostałe były referatami specjalistycznymi. Ze strony polskiej w sympozjum wzięło udział 9 osób przy czym 7 osób wygłosiło referaty. Większość prac reprezentowała bardzo wysoki poziom naukowy. Tematyka sympozjum wykraczała nieraz dosyć daleko poza jego hasło tytułowe obejmując większość najnowszych kierunków współczesnej mechaniki fenomenologicznej i strukturalnej. Na wzmiankę zasługuje także wzorowa organizacja obrad co jest zasługą organizatorów: Instytutu Fizyki Teoretycznej i Stosowanej Uniwersytetu w Stuttgarcie oraz Instytutu Maxa Plancka w Stuttgarcie. Następne sympozjum z tego cyklu ma się odbyć za dwa lata w Szwecji.

Czesław Woźniak

KOŁOKWIA EUROMECHU W R. 1980

Euromech 125	Rarefied flows and surface interactions, 9—11 styczeń 1980, Oxford	Dr C. L. Brundin, Dept. of Eng. Science, Univ. of Oxford, Parks Road, Oxford OXI 3PJ, oraz Dr J. K. Harvey, Dept. of Aeronautics, Imperial College Prince Consort Road, London SW7 2BY,
Euromech	Aerodynamic problems related to hypersonic flight, 9—11 kwietnia 1980 Berlin Zachodni	Prof. Dr Ing. U. Ganzer, Institut für Luft- u. Raumsfahrt, Technische Universität Berlin, Sekt. F. 2, Marchstrasse 14, 1000 Berlin 10,
Euromech 127	Wave propagation in viscoelastic media, 14—18 kwietnia 1980 Taormina, Włochy	Prof. F. Mainardi, Istituto di Fisica, Uni- versità di Bologna, 40126, Bologna oraz prof. G. Palotti, Bologna,
Euromech 128	Stability, buckling and postbuckling beha- viour, foundations and analysis, kwiecień 1980, Delft, Holandia	Prof. dr. W. T. Koiter, Prof. dr. P. Meijers Laboratory of Eng. Mechanics, Delft Uni- versity, Mekelweg 2, 2628 CD Delft,
Euromech 129	Computation of flow around systems of airfoils, maj 1980 Warna, Bułgaria,	Prof. L. Panov, Applied Math. Centre VMEI "Lenin", Sofia, P.B. 384, Bułgaria, oraz Prof. W. J. Prosnak, Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej, Pol. Warszawska, ul. Nowowiejska 24, 00—665 Warszawa,
Euromech 130	Turbulent diffusion and dispersion in open channel flow 30 czerwca — 3 lipca 1980, Belgrad, Jugosławia,	Prof. Dr K. Hanjalić, Masinski fakultet Omladinsko setaliste, 71000 Sarajewo, oraz Prof. Dr S. Bruk, Belgrade i Dr C. Maksimovic, Belgrade,
Euromech 131	Identification problems in structural dyna- mics, 15—30 czerwca 1980, Besancon, Francja,	Prof. R. Chaleat, Dr C. Lallement, Labora- toire de Mécanique Appliquée, University of Besancon, La Bouloie, Route de Gray, 25030 Besancon Cedex,
Euromech 132	Hot-wire, hot-film anemometry and condi- tions measurement, 2—4 lipca 1980, Lyon, Francja,	Prof. G. Comte-Bellot, Dr G. Charnay, Dr J. Sabot, Ecole Centrale de Lyon, 36, Route de Dardilly BP 163, 69130 Ecully,
Euromech 133	Statics and dynamics of granular materials, 14—16 lipca 1980, Oxford, W. Brytania,	Prof. C. P. Wroth, Dept. of Eng. Science, Parks Road, Oxford OXI 3PJ,
Euromech 134	Design against failure in solids, lato 1980, Lyngby, Dania,	Prof. Bent Hansen, Dr Niels Krebs Ovesen, Soil Mechanics Laboratory, Techn. Univer- sity of Denmark, Maglebjergvej 1, 2800 Lyngby,
Euromech 114	Waves and beach changes in surf zones, 23—25 września 1980, Gdańsk, Polska,	Dr S. R. Massel, Instytut Budownictwa Wodnego PAN, 80-953 Gdańsk 5, Cyster- sów 11, oraz Prof. M. S. Longuet-Higgins, Cambrid- ge, i Dr B. Boczar-Karakiewicz, Gdańsk,

Euromech 135	Unsteady separation and reversed flow in external fluid dynamics, 7—10 października 1980, Marsylia, Francja,	Dr C. Maresca, Institut de Mécanique des Fluides, Université d'Aix-Marseille, 1, Rue Honnorat, 13003 Marseille,
Euromech 136	Local problems in plates and shells, wrzesień 1980, Jabłonna, Polska,	Prof. Dr S. Łukasiewicz Politechnika Warszawska, ul. Nowowiejska 24, 00-665 Warszawa.

II MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA NT. „METODY NUMERYCZNE W MECHANICE PĘKANIA, (NUMERICAL METHODS IN FRACTURE MECHANICS)

odbędzie się w dniach 6—11 lipca 1980 w University College of Swansea, W. Brytania. Streszczenia zawierające przynajmniej 300 słów należy przesłać do przewodniczącego nie później niż 31 sierpnia 1979. Adres: Dr. D.R.J. Owen, Dept. of Civil Eng., University College, SWANSEA SA2 8PP, W. Brytania.

III EUROPEJSKIE KOŁOKWIUM NA TEMAT PĘKANIA EGF3 (EUROPEAN GROUP ON FRACTURE)

odbędzie się w dniach 8—10 września 1980 w Imperial College, Londyn. Tematyka kolokwium: 1. Elastic plastic fracture mechanics, 2. Thin sheet fracture mechanics, 3. Micromechanisms of fracture. Streszczenia o objętości ok. 500 słów należy przesłać na adres: Dr. John C. Radon, Imperial College, Mech. Eng. Dept. Exhibition Road, London SW7 2AZ.

III MIĘDZYNARODOWY KONGRES TRYBOLOGII EUROTRIB 81 — WARSZAWA, 71—20 WRZEŚNIA 1981 R.

Decyzję ITC (Międzynarodowej Rady Trybologii) organizację III Międzynarodowego Kongresu Trybologii powierzono Polskiemu Komitetowi Trybologii NOT. Celem Kongresu jest prezentacja na międzynarodowym forum oryginalnych niepublikowanych prac naukowo-badawczych w następujących grupach tematycznych:

1. Mechanika, fizyka i chemia w procesach tarcia, zużycia i smarowania.
2. Materiały trybotechniczne i ich zastosowanie.
3. Metody badań trybologicznych.
4. Zastosowanie trybologii w technice.
5. Inne.

Zgłoszenia referatów, wraz z 2 egz. krótkiego streszczenia (ok. 1 str. w jęz. angielskim) należy przesłać na adres Komitetu Organizacyjnego w terminie do dnia 28 lutego 1980 r. Międzynarodowa Rada Naukowa Kongresu przeprowadzi kwalifikację referatów zgłoszonych do wygłoszenia na Kongresie. Autorzy referatów zostaną poinformowani o decyzji Rady Naukowej w terminie do dnia 30 kwietnia 1980 r. W tym samym czasie Autorzy zakwalifikowanych referatów otrzymają wytyczne opracowania materiałów. Ostateczny termin przekazania referatów opracowanych w języku angielskim, zgodnie z wytycznymi, ustalono na dzień 30 czerwca 1980 r. Referaty będą wydane w formie książkowej, natomiast komunikaty i doniesienia naukowe — w formie skryptu. Zgłoszenia referatów i udziału w Kongresie prosimy kierować na adres Komitetu Organizacyjnego, ul. Świętojerska 5/7, 00-236 Warszawa PL, tel. 314621, telex 814469 opt pl, (Przewodniczący prof. dr hab. Michał Hebda).

MIĘDZYNARODOWE KONFERENCJE NAUKOWE

1. International Conference on Analytical and Experimental Fracture Mechanics, Rzym, 23—26 czerwca 1980, Dr. Manilio Mirabile, Centro Sperimentale Metallurgico S.p.A., Via di Castel Romano, C.P. 10747 Roma Eur — Italy, lub Prof. G.C. Sih, Institute of Fracture Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania 18015-USA,
2. 17 Annual Meeting Society of Engineering Science, Atlanta, 15—17 grudnia 1980, Prof. A.W. Marris, School of Engineering Science and Mechanics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332, USA,
3. International Conference on Energy and Environment, Manila, Filipiny, Dr. S.L. Koh, School of Mechanical Engineering, Purdue University, W. Lafayette, IN 47907, USA,
4. International Symposium on the Mechanical Behaviour of Structured Media, Ottawa, 18—21 maja 1981, Prof. A.P.S. Selvadurai, Dept. of Civil Engineering, Carleton University, Ottawa, Ontario, K1S 5B6, Canada.
5. The Second International Symposium on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Science, Montreal, 16—20 czerwca 1980, Prof. A.A. Lakis, Dept. of Mechanical Engineering, Ecole Polytechnique de Montreal, C.P. 6079, Station A, Montreal, Quebec, Canada, H3C 3A7.
6. 3rd I.U.T.A.M. Symposium on Creep in Structures, 8—12 września 1980, Leicester, Anglia, Prof. Alan Ponter, Dept. of Engineering, University of Leicester, Leicester LE1 7RH, W. Brytania.
7. Symposium on Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics, Sheraton National Motor Hotel, Washington, D.C. (USA), 6—8 października 1980, Professor Ahmed K. Noor, Mail Stop 246, The George Washington University, NASA Langley Research Center, Hampton Virginia 23665.

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- M. MALATYŃSKI, J. KLEPACZKO, Szacowanie efektów bezwładnościowych podczas szybkiej osiowej deformacji próbek walcowych
Оценка инерциальных эффектов при быстрой деформации цилиндрического образца
Estimation of inertial effects during the fast axial deformation of cylindrical samples
- J. ОГТЕ, Przegląd krytyczny metod analizy osiowo-symetrycznego przepływu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych
Критический обзор методов анализа осесимметрического течения через системы лопаток турбомашин
Critical review of analysis methods of axially-symmetric flow through blades systems of turbo machinery
- A. SNUDZIKIEWICZ, J. KISŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI, Próba modyfikacji liniowego modelu dyskretnego o wielu stopniach swobody na przykładzie pojazdu szynowego
Попытка модификации линейной дискретной модели о многих степенях свободы на примере рельсового вагона
An attempt of the modification of linear discrete model of multi degrees of freedom by a rail vehicle
- Z. NOWAK, K. RUP, Zastosowanie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w obrazie transformacji Laplace'a
Применение метода осреднения функциональных поправок в области преобразования Лапласа
Application of Laplace transform to the method of averaging of functional corrections
- K. ŻMIĘWSKI, Zginanie sprężystej powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej podpartej na żebcach
- T. KUŹMICEWICZ, J. MARUŃIAK, Wpływ zjawiska odwijania przewodu kierowania i niektórych parametrów geometrycznych rakiety na jej stateczność dynamiczną
Влияние разматывания троса управления и некоторых геометрических параметров ракеты на динамическую устойчивость
Influence of cable's uncoiling and certain geometrical parameters of rocket on its dynamical stability

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę **na kraj** przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki **za granicę** przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „oDomu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscribe's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona — Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland, Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauk i, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor. T. 17, z. 4, s. 461—632, Warszawa 1979, Indeks 36523
