

y II 720

**P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J**

PL ISSN 0079-3701

**M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A**

K W A R T A L N I K

T O M 1 7 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1 9 7 9

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

JAN SZMELTER — wspomnienie pośmiertne	163
K. GRYSA, R. SZCZEPAŃSKI, O płaskim quasi-statycznym zagadnieniu termodyfuzji dla sprężystego walca kołowego	169
Об одной квазистатической задачи термодиффузии для упругого кругового цилиндра On a certain quasi-static problem of termodiffusion in an elastic cylinder	
J. KUJAWSKI, Teoria średniej grubości ortotropowych tarcz trójwarstwowych	189
Теория ортотропных трехслойных плит средней толщины Theory of stretching orthotropic sandwich plates with moderate thickness	
K. KOWALCZYK, Powierzchnie graniczne dla modelu sprężysto-plastycznego pręta przy uwzględnieniu zmian geometrii	203
Предельные поверхности для модели упруго-пластического стержня при учете изменений геометрии Limit surfaces for a model of elastic-plastic bar with geometry changes taken into account	
J. TALER, Nieustalone, kołowo-niesymetryczne pole temperatury w wydrążonym walcu ogrzewanym na zewnętrznej poboczni	217
Неустановившееся кругонесимметричное температурное поле в бесконечном полем цилиндра нагреваемым на внешней поверхности Unsteady, axially nonsymmetric temperature distribution in an infinite hollow cylinder heated externally	
J. SZOPA, M. WOJTYŁAK, O wyznaczaniu charakterystyk probabilistycznych rozwiązań wahadła podwójnego o zmiennej długości poddanego wymuszeniom losowym	237
Об определении вероятностных характеристик решений двойного маятника с переменной длиной подверженного случайным вынуждениям On determination of probabilistic characteristics of solutions of double pendulum with varying length subject to random forcing	
S. WOJCIECH, Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności dynamicznej płyt pierścieniowych	247
Численное решение задачи динамической устойчивости кольцевой пластины Numerical solution to the problem of dynamic stability of annular plates	
W. ŁUCJANEK, K. SIBILSKI, Podłużna stateczność dynamiczna śmigłowca z podwieszonym ładunkiem w zawisie	263
Продольная динамическая устойчивость вертолёта с висящим грузом на режиме висения Longitudinal dynamic stability of a hovering helicopter with a hanging load	
M. MARKS, Analiza pasma płytowego jako ciała z więzami	277
Анализ полосы как тела со связями Analysis of the band plate considered as a constrained body	
K. MICHAŁEWICZ, Dynamika lotu zasobnika lotniczego z połączonymi przegubowo hamulcem aerodynamicznym, zrzuconego z samolotu	305
Динамика полёта летательного аппарата „со свободно отпущенным” аэродинамическим тормозом брошенного из самолёта Dynamics of flight of an external pack with an airbrake „set free” thrown out of an airplane	
BIULETYN INFORMACYJNY	319

y II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 7 · Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1 9 7 9
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR,
ANDRZEJ SZANIAWSKI — REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR,
MONIKA WĄGROWSKA — REDAKTOR,
JERZY DAŁEK — SEKRETARZ

РЕДАКЦЯ

00-901 W a r s z a w a, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 650, Ark. wydawniczych 14,25. Ark. drukarski 11,0. Papier druk sat. IV kl. 71 g, 70 × 100.
Oddano do składania 22.II.1979 r. Druk ukończono w czerwcu 1979 r. Zam. 288/79 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

JAN SZMELTER

wspomnienie pośmiertne

W dniu 20 października 1978 r. zmarł po krótkiej chorobie prof. dr inż. Jan SZMELTER, wybitny naukowiec i pedagog w dziedzinie mechaniki technicznej i metod obliczeń numerycznych.

Profesor Jan SZMELTER urodził się w 1920 roku w Bydgoszczy. Stopień magistra inżyniera mechanika uzyskał na Politechnice Łódzkiej w 1946 r., a stopień doktora nauk technicznych również w tej uczelni w 1950 roku. W latach od 1948 do 1966 pracował nieprzerwanie w Politechnice Łódzkiej przechodząc kolejne szczeble pracownika naukowo-dydaktycznego. W 1954 roku otrzymał tytuł profesora nadzwyczajnego, a w 1965 roku — profesora zwyczajnego.

W Politechnice Łódzkiej kierował Katedrą Mechaniki Technicznej i był wieloletnim dziekanem Wydziału Włókienniczego. W roku 1966 rozpoczął pracę w Wojskowej Akademii Technicznej, kierując Katedrą Mechaniki Teoretycznej i Wytrzymałości Materiałów.

Dziedziną działalności naukowej profesora J. SZMELTERA była, jak już wspomnieliśmy mechanika teoretyczna i stosowana, a zwłaszcza metody numeryczne w mechanice. Analiza i wybór tych metod miały na celu całkowanie równań różniczkowych teorii sprężystości dla różnych złożonych kształtów ciał występujących w realnych zagadnieniach konstrukcyjnych.

Podstawą pierwszych prac Jana SZMELTERA były metody energetyczne. Posłużyły one do obliczenia wytrzymałości wirnika sprężarki i rozkładu siły międzyzębnej z uwzględnieniem wpływu odkształcalności wieńca koła zębatego.

Drugą, obszerniejszą grupę Jego badań stanowiły zagadnienia rozwiązywane metodą różnic skończonych, dla których zaproponował szereg wariantów obliczeń iteracyjnych. Wymienione prace dotyczyły okresu, w którym narzędziem obliczeniowym był arytmometr, a metodą rozwiązania — rachunek relaksacyjny. Już w pracy p.t.: „Uproszczone metody różnic skończonych dla obliczenia stanu naprężenia i odkształcenia w elementach maszyn”, wykonanej w 1955 roku, zauważył możliwość tworzenia równań do rozwiązania problemów w płaskiej i w przestrzennej teorii sprężystości za pomocą metody, która obecnie nazywa się metodą elementów skończonych. Zasady tej metody dla siatek złożonych z elementów o dowolnych kształtach podał na sympozjum IUTAM w Warszawie



w 1958 roku. Przedstawiona wtedy praca jest cytowana w literaturze światowej jako zawierająca jedno z najważniejszych sformułowań problemu.

Profesor dr Jan SZMELTER był najwyższej klasy specjalistą z zakresu obliczeń numerycznych i twórcą polskiej szkoły obliczeń za pomocą elektronowych maszyn cyfrowych, znanej i uznawanej daleko poza granicami kraju. Bez reszty poświęcił się rozwojowi tej szkoły obliczeniowej, kształcąc wielu specjalistów i ogarniając zasięgiem swej działalności wiele uczelni i ośrodków w Kraju. Wymieńmy ścisłą współpracę z Politechniką Łódzką, Warszawską, Wrocławską, Gdańską, z Akademią Górniczo-Hutniczą w Krakowie, z Instytutem Lotnictwa, Przemysłowym Instytutem Motoryzacyjnym, ze Zjednoczeniem Przemysłu Maszyn Budowlanych i Zjednoczeniem Przemysłu Energetycznego w Warszawie. Był kierownikiem grupy tematycznej „Numeryczne obliczenia wytrzymałościowe konstrukcji przy użyciu EMC” i twórczym wykonawcą jednego z tematów w tej grupie, wchodzącej w skład problemu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”.

Plonem Jego głębokiej działalności naukowej było około 50 publikacji w czasopismach naukowych oraz 20 monografii i podręczników. Poważną pozycję stanowi monografia „Programy elementów skończonych” zawierająca zasady systemu opracowanego przez zespół pod Jego kierownictwem. System ten okazał się bardzo przydatny do obliczeń projektowych konstrukcji maszynowych i budowlanych wykonywanych za pomocą komputerów produkcji krajowej. Umożliwia on analizę odkształceń i naprężeń w układach płaskich i przestrzennych, pozwala na obliczanie częstości drgań i określanie postaci tych drgań we wspomnianych układach, a także na wyznaczenie przemieszczeń i naprężeń w tarczach i bryłach osiowo-symetrycznych obciążonych termicznie stacjonarnie i niestacjonarnie. Programy opracowane w ramach omawianego systemu były i są szeroko wykorzystywane w przemyśle motoryzacyjnym i lotniczym oraz w budownictwie. Jako przykłady zastosowania praktycznego podajmy obliczenia wytrzymałościowe korbowodów w silnikach spalinowych, podwozi i nadwozi do kontenerów, kadłubów samolotów i łopatek turbin. Programy posłużyły do obliczeń statycznych mostów, hal, dużych konstrukcji dachowych, wież ciśnieni i efektów działania fal uderzeniowych na obiekty podziemne. W górnictwie wykorzystano je do badania wpływu eksploatacji kopalni na wytrzymałość górotworu.

Profesor J. SZMELTER nie doczekał się wydania przygotowywanej do druku bardzo cennej książki pt.: „Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji” (wydawnictwo ARKADY) oraz ukazującego się obecnie podręcznika „Metody komputerowe w mechanice”, którego był autorem. Wydawane są również okresowe publikacje pod ogólnym tytułem „System WAT-KM”. Zawierają one zasady tworzenia i opisu modeli obliczeniowych oraz wprowadzania danych do dotychczas opracowanych programów.

Profesor J. SZMELTER należał do najwybitniejszych wychowawców młodej kadry naukowej. Był promotorem 21 prac doktorskich i opiekował się 6 pracami habilitacyjnymi. W kształtowaniu młodych naukowców cechowały Go nie tylko wymagania rzetelnej pracy, głębokiego poznania przedmiotu i wysokiego poziomu merytorycznego, ale również ogromna życzliwość i jak najdalej idąca pomoc w rozwiązywaniu problemów.

Poza swoją działalnością zawodową zajmował się bardzo czynnie pracą naukową i organizacyjną w Komitecie Mechaniki PAN, w Polskim Towarzystwie Mechaniki Teore-

tycznej i Stosowanej i w kilku radach naukowych. Stworzył i rozwijał Zespół Zastosowań Metod Komputerowych w Mechanice, był Członkiem Założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i przez wiele lat pełnił różne funkcje w Zarządzie Głównym i Oddziale Łódzkim Towarzystwa, w tym funkcję Sekretarza Generalnego.

Jego wyróżniająca się długoletnia praca naukowa i pedagogiczna była wielokrotnie uhonorowana nagrodami Polskiej Akademii Nauk, Ministerstwa Nauki, Szkolnictwa Wyższego i Techniki oraz Komendanta WAT i Rektora Politechniki Łódzkiej.

Niezwykle cenne, osobiste zasługi Profesora Jana SZMELTERA jako wychowawcy młodzieży, kadry naukowej i jako pracownika nauki o głębokim patriotyzmie znalazły zasłużone uznanie w nadaniu Mu tytułu „Zasłużony Nauczyciel PRL” w odznaczeniu Go Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski i Medalami: „Za Zasługi dla Obronności Kraju” oraz innymi medalami wojskowymi, a także Złotą Odznaką PTTK „Przyjaciel Młodzieży”.

Szeregi naszego, Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej opuścił Człowiek niezwykajny, humanista, wielce zasłużony dla rozwoju Towarzystwa i bardzo bliski Przyjaciel, pozostający we wdzięcznej pamięci ludzi Go znających.

Stanisław KOCAŃDA, Zbigniew ORŁOŚ

SPIS PRAC

A. Publikacje

1. *Pomiary stożków części zamiennych*. Przemysł Włókienniczy, 3, 1949, 1/2, str. 33—35.
2. *Równanie linii ugięcia belki o zmiennym przekroju*. Przegląd Mechaniczny, 8, 1949, 4—5—6, str. 143—148.
3. *Pomiar promienia dużych luków*. Przegląd Mechaniczny, 8, 1949, 10—11, str. 319—321.
4. *Rozwiązanie zagadnienia blony metodą różnic skończonych z użyciem specjalnego liczydła*. Rozprawy Inżynierskie, 20, 1954, str. 203—214.
5. *Rozkład siły międzyczębnej wzdłuż tworzącej zęba prostego*. Archiwum Budowy Maszyn, 2, 1955, 4, str. 373—394.
6. *Zastosowanie rachunku różnic skończonych do powłok kołowo-symetrycznych*. Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej — Włókiennictwo 1, 1953, 1, str. 93—118.
7. *Uproszczenie metody różnic skończonych dla obliczania stanu, naprężenia i odkształcenia w elementach maszyn*. Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej — Mechanika, 1, 1955, 3, str. 51—92.
8. *Teoria odwijania osnowy na stojakach klejarek*. Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej — Włókiennictwo, 4, 1959, str. 3—12.
9. *The Energy Method of Networks of Arbitrary Shape in Problems of the Theory of Elasticity*. Proceedings of an I.U.T.A.M. Symposium held in Warsaw, Sept. 1958, str. 111—120.
10. *Ditto — Bulletin de l'Ac. Pol. Sc. Série de sciences techniques*, 7, 2—3, 1959, str. 11.
11. *A Method of Sequence of Networks in Problems of Elasticity*. Arch. Mech. Stos. 3, 12 (1960), str. 357—370.
12. *Bending of a Rectangular Plate Clamped at one Edge*. (współautorzy: T. SULIKOWSKI i J. LIPIŃSKI). Arch. Mech. Stos. 1, 3 (1961) str. 63—75.
13. *Lewar wieloramienny*. Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej — Włókiennictwo, 9, 1962, str. 43—48.
14. *Linia ugięcia ścisłanego pręta po utracie stateczności*. (współautor: K. DELOFF). Algorytmy S1, 1963, str. 29—35.
15. *Eine Methode zur Berechnung aller Wurzeln eines Polynoms*. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg, 4, 1965, str. 409—411.
16. *Możliwość wykorzystania cyfrowej maszyny matematycznej ZAM-2 do rozwiązania zadania transportu we włókiennictwie*. Biul. Inst. Włókien. 18, 1966 nr 3, str. 1—2.

17. *Rozwiązanie zadania transportowego na maszynie matematycznej* (współautor: B. GADEK). Algotymy, 3, 1966 nr 6, str. 83—100.
18. *Optymalny podział pracy pomiędzy stanowiska robocze o różnych wydajnościach.* (Współautor: M. ROS-SOWSKA). Materiały konferencyjne, Łódź 1967, Stow. Włók. Polskich.
19. *Numerical Solution of the Two Dimensional Problem of Elasticity.* IV International Kongress über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften. Bd. 2 Weimar 1967, Berlin 1967, VEB Verlag für Bauwesen 4. str. 197—200.
20. *Obliczenie rytmu planowego w zespołach produkcyjnych odzież.* (Współautor: W. WIĘZŁAK). *Odzież*, 20, 1969, nr 3 str. 61—65.
21. *Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementu płyty.* (Współautor: S. DOBROCIŃSKI). *Biul. WAT*, 18, 4 (1969), str. 41—55.
22. *Algorytm obliczania reakcji i przemieszczeń dyskretnego liniowego układu sprężystego z więzami jedno i dwustronnymi.* (Współautor: J. WILCZKOWSKI). *Biul. WAT*, 19, 10 (1970), str. 47—59.
23. *Wykresy warstwcowe funkcji $F(x, y)$ wykonane na maszynie cyfrowej.* (Współautor: M. WIECZOREK). *Biul. WAT* 20, 5, (1971) str. 31—40.
24. *Program rozwiązujący równania metody elementów skończonych,* (Współautor: S. DOBROCIŃSKI). *Biul. WAT*, 20, 6, (1971), str. 43—51.
25. *Analiza statyczna płaskiego stanu naprężenia metodą elementów skończonych* (Współautorzy: S. DOBROCIŃSKI, S. PYRAK, M. WIECZOREK). *Inżynieria i Budownictwo*, 29 (1972), 5, str. 191—195.
26. *Analiza statyczna przestrzennych układów prętowych metodą elementów skończonych.* (Współautorzy: M. DACKO, S. PYRAK). *Inżynieria i Budownictwo*, 29 (1972), 7.
27. *Macierz sztywności elementu przestrzennego układu prętowego.* (Współautor: M. DACKO), *Biul. WAT*, 21, 7, (1972), str. 27—38.
28. *Programy obliczające macierze sztywności elementów znajdujących się w płaskim stanie naprężenia.* (Współautor: S. DOBROCIŃSKI) *Biul. WAT*, 7 (1972), str. 39—54.
29. *Niektóre metody doświadczalnej i teoretycznej analizy naprężeń w korbowodach.* (Współautorzy: W. JARZĘBOWSKI, Z. ORŁOŚ). *Biul. WAT* 21, 9, (1972) str. 41—50.
30. *Wykresy warstwcowe funkcji $F(x, y)$ w układzie lokalnym.* (Współautor: M. WIECZOREK). *Biul. WAT*, 24, 10, (1975), str. 49—57.
31. *Synteza krzywki wielomianowej o optymalnym zarysie w całym zakresie prędkości obrotowych silnika.* (Współautorzy: J. RANISZEWSKI, W. BORKOWSKI). *Arch. Bud. Maszyn*, 23, (1976), 2.
32. *Wyznaczenie przemieszczeń i reakcji statycznych dyskretnego nieliniowego układu zachowawczego z więzami nieliniowymi jedno i dwustronnymi.* (Współautorzy: J. WILCZKOWSKI, Z. ZUB), *Arch. Bud. Maszyn*, 23, (1976), 2.
33. *Pewien model elementu skończonego konstrukcji powłokowo-prętowych.* (Współautor: M. DACKO), *Biul. WAT*, 27, nr 12 (316) 1978, str. 65—72.
34. *Rozwiązanie równań statyki metodą gradientów sprzężonych.* (Współautor: T. NIEZGODA), *Biul. WAT*, 27, 1 (305), 1978 str. 41—50.
35. *Algorytm rozwiązania układu równań liniowych metodą gradientów sprzężonych dla wielu wariantów wyrazów wolnych.* (Współautor: T. NIEZGODA), *Biul. WAT*, 28 nr 3 (319) 1978, (w druku).
36. J. SZMELTER, Z. KUROWSKI — *Algorytm rozwiązania układu liniowych równań różniczkowych cząstkowych przy dowolnej dyskretyzacji obszaru*, *Mechanika i Komputer* (w druku).
37. J. SZMELTER, Z. KUROWSKI — *Problemy klasyfikacji związane z topologią dyskretyzowanego obszaru płaskiego*, *Mechanika i Komputer* (w druku).

B. Ważniejsze niepublikowane prace naukowe

1. *Wykreślne rozwiązanie równania membrany* (1950 — praca doktorska).
2. *Obliczenie wytrzymałości wirnika sprężarki.* (1951 — dla Instytutu Techniki Ciepłej w Łodzi).
3. *Analizator liniowych równań algebraicznych* (1957 — teoria i zrealizowany prototyp).
4. *Rozkład siły międzyzębnej w zębach prostych przy uwzględnieniu wpływu wieńca.* (Współautor: J. GLUZA), (1959).
5. *Obliczenie wytrzymałościowe wirnika złożonego z dwu sklejonnych tarcz o równomiernej wytrzymałości.* (1959 dla Inst. Badań Jądrowych).

6. *Rozplyw wody w sieci elektrociepłowni* (1965 — Program dla EMC, eksploatowany przez Elektrociepłownię Łódzką).
7. *Program obliczania receptury wybarwień*. (Współautor: M. WOŹNIAK), 2 programy eksploatowane przez Instytut Włókiennictwa w Łodzi.
8. *Plaski stan naprężenia*. (Współautorzy: S. DOBROCIŃSKI, A. KASPRZYK, M. WIECZOREK), 1970 — programy dla ZAM-41, 1976 — dla ODRY 1305, eksploatowane szeroko w kraju).
9. *Analiza statyczna przestrzennych układów prętowych*. (Współautor: M. DACKO — 1971 — programy, dla ZAM-41).
10. *Osiowo-symetryczny stan naprężenia*. (Współautorzy: J. ANTOSIK, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, B. MASTERNAK — 1972 — programy dla ZAM-41, 1975 przetłumaczony na ODRĘ 1305 — szeroko eksploatowany w kraju).
11. *Analiza statyczna układów powłokowo-prętowych*. (Współautor: M. DACKO), Program dla ZAM-41. Tłumaczony na ODRĘ-1305 i IBM-360. Stosowany szeroko w kraju.
12. *Analiza statyczna płyt metodą elementów skończonych*. (Współautor: M. DACKO), Program dla ZAM-41.
13. *Biblioteka podprogramów metody elementów skończonych*. (Jest to system obliczeń, realizowany przez zespół współpracowników w WAT, Politechnice Łódzkiej, AGH, zrealizowany na ZAM-41, ODR-1305, IBM-360, minikomputery PDP, stosowany w całości lub fragmentach w wielu ośrodkach w kraju).
14. *Analiza wyników badań elastoptycznych*. (Współautorzy: H. ZUB, A. PIĄTKOWSKI). Programy dla ZAM-41.

C. Referaty, komunikaty i prace przeglądowe

1. Zastosowanie maszyn matematycznych w przemyśle motoryzacyjnym — seminarium dla konstruktorów p.i.: *Zastosowanie ETO w przemyśle motoryzacyjnym*. Warszawa, czerwiec 68 r. 4 str. 1—6. Centr. Ośrodek Konstr. Bad. Przem. Mot.
2. *Zasady metody elementów skończonych — Zagadnienia zastosowania elektronicznej techniki obliczeniowej w projektowaniu konstrukcji mostowych*. Warszawa 1970 r. str. 1—11. Stow. Inż. i Tech. Komunikacji.
3. *Metody matematyczne przydatne w analizie konstrukcji*. (Współautorzy: Z. WASZCZYŹYŃ, K. WRZEŚNIEWSKI):
 - a) Materiały symposium „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji — Poznań 1973 r.
 - b) Archiwum Inżynierii Lądowej. 20, Z. 3/1974 r.
4. *Nieliniowa teoria sprężystości ciał podlegających dużym odkształceniom*. Konferencja ZMOC IPPT PAN 1954 r. Międzyzdroje.
5. *Najkrótsza metoda ścisłego wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych układu liniowych równań algebraicznych*. Symposium Metod Numerycznych w Mechanice — Łódź. 1960 r.
6. *Przybliżenie danych doświadczalnych wielomianem potęgowym z wykorzystaniem własności wielomianów Czebyszewa* — Sesja Naukowa 15-lecia Politechniki Łódzkiej — Łódź — 1965 r.
7. *Zastosowanie maszyn matematycznych w przemyśle motoryzacyjnym* — Seminarium dla głównych konstruktorów — Centralny Ośrodek Konstrukcyjno-Badawczy Przemysłu Motoryzacyjnego, Warszawa 1968 r.
8. *Zastosowanie metody elementów skończonych do niektórych problemów teorii sprężystości*. (Współautor: S. DOBROCIŃSKI), — Konferencja ZMOC IPPT PAN, Jaszowiec, 1969 r.
9. *Przykłady zastosowania metody elementów skończonych do rozwiązywania pewnych problemów technicznych*. (Współautor: S. DOBROCIŃSKI) — Konferencja ZMOC IPPT PAN — Jaszowiec 1970 r.
10. *Sytuacja w informatyce polskiej w zakresie obliczeń, inżynierskich na tle sytuacji światowej*. (Współautor: J. SAMBORSKI). III Krajowa Konferencja Zastosowania Informatyki w Zarządzaniu i Projektowaniu w Przemysle Budowlanym, Krynica 1972 r.
11. *Rozwiązanie dynamicznego płaskiego zadania teorii sprężystości metodą elementów skończonych*. VI Międzynarodowy Kongres Zastosowań Mechaniki w Budownictwie. Weimar 1972 r.
12. *Macierz sztywności z mnożnikami Lagrange'a* — XVII Konferencja Mechaniki Ciała Stałego — Szczyrk 1975 r.
13. Cykl wykładów: *Niektóre problemy metody elementów skończonych*. Jabłonna 1975 r.
14. *System KM Metody Elementów Skończonych* — Wykład na Politechnice w Karl-Marx-Stadt, 1975 r.

15. Cykl wykładów. Obliczenia części maszyn metodą elementów skończonych Konferencja Szkoleniowa PAN. Jabłonna 1976 r.

D. Monografie, podręczniki, skrypty

1. *Zbiór zadań z mechaniki*. Cz. I statyka, cz. II kinetyka, cz. III dynamika. Praca zbiorowa pod redakcją J. LEYKI i J. SZMELTERA. Wydanie: PWN Łódź i Warszawa: 1952, 1954, 1956, 1961, 1965, 1966, 1970.
2. *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*. Praca zbiorowa pod redakcją J. LEYKI, J. SZMELTERA. Tom I — Statyka, str. 210, Wyd. 1972, 1974, tom II — Kinetyka i dynamika — str. 435. PWN Warszawa 1972 r.
3. *Wytrzymałość materiałów dla mechanicznej technologii włókna oraz technologii celulozy i papieru*. Wyd. Studium Zaoczne Politechniki Warszawskiej, 1957 r.
4. *Wytrzymałość materiałów dla wydziału włókienniczego*. PWN Łódź, Warszawa, 1961 r.
5. *Wytrzymałość materiałów dla studiów zaocznych*. Wojskowa Akademia Techniczna im. J. Dąbrowskiego, Warszawa, 1971 r.
6. *Mechanika*. Rozdział w Poradniku Przemysłu Lekkiego i Spożywczego, Warszawa, 1961 r.
7. *Reologia teoretyczna* — tłumaczenie książki Markusa Reinerja. PWN 1958, str. 194.
8. *Słownik terminologii Mechaniki Klasycznej w pięciu językach* (udział w pracy zbiorowej):
 - a) *Mechanika* — PWT Warszawa 1959
 - b) *Wytrzymałość Materiałów* — PWT Warszawa 1960
 - c) *Wersja angielska* — PWT Warszawa 1962 oraz Pergamon Press.
 - d) *Wersja rosyjska* — PWT Warszawa 1965
9. *Własności lepko-sprężyste polimerów*. Tłumaczenie książki J. O. Ferry'ego. WNT, Warszawa 1965
10. *Programowanie SAKO dla początkujących*. (Współautorka: K. DELOFF)
 - a) Katedra Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej — Politechnika Łódzka, Łódź 1962
 - b) Wojskowa Akademia Techniczna 1969
 - c) Instytut Maszyn Matematycznych 1971, str. 103
11. *Programowanie SAKO na Mińsk-22*. (Współautor: H. ZUB) (Opracowano także translator i bibliotekę podprogramów) Warszawa 1970, Druk COKBPMot. str. 80.
12. *Programy metody elementów skończonych*. (Współautorzy: M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK), WAT 1972 r. str. 70.
13. *Programy metody elementów skończonych*. (Współautorzy: M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK). Arkady 1973, str. 152.
14. *Zastosowanie metod numerycznych w mechanice*. 12 zeszytów skryptu dla kursu doktoranckiego WAT 1972—1976.
15. *Zastosowanie programów metody elementów skończonych w mechanice*. Cz. I *Konstrukcje prętowe*, cz. II *Tarcze i bryły osiowo-symetryczne*, Cz. III — *Płyty i konstrukcje powłokowo-prętowe*. (Współautorzy: M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK). Skrypt WAT 1978 r.
16. *System WAT-KM. Wielostopniowa synteza struktury*. (Współautorzy: K. DEMS, W. KOBZA, J. LIPIŃSKI). Skrypt WAT 1978 r.
17. *Metody komputerowe w mechanice*. Złożone do druku w PWN w 1976 r.
18. *Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji*. (Współautorzy: M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK) Złożone do druku w Arkadach w 1976 r.
19. *System WAT-KM. Płaskie zadanie teorii sprężystości i termosprężystości*. (Współautorzy: M. AUGUSTYN, S. DOBROCIŃSKI, T. NIEZGODA, M. WIECZOREK). — skrypt WAT.
20. *System WAT-KM. Osiowo-symetryczne zadanie teorii sprężystości i termosprężystości* (Współautorzy: M. AUGUSTYN, S. DOBROCIŃSKI, T. NIEZGODA, M. WIECZOREK), — skrypt WAT.
21. *System WAT-KM. Podprogram REDAKCJA wyznaczania wyników obliczeń*. (Współautorzy: M. WIECZOREK, E. TUREK). W druku — skrypt WAT.
22. *System WAT-KM. Drgania własne konstrukcji płytowo-prętowych*. (Współautorzy: W. BORKOWSKI, S. DOBROCIŃSKI, T. NIEZGODA, M. WIECZOREK). — skrypt WAT.
23. *System WAT-KM. Drgania własne konstrukcji powłokowo-prętowych*. (Współautorzy: W. BORKOWSKI, M. DACKO, M. WIECZOREK). — skrypt WAT.
24. *System WAT-KM. Analiza statyczna konstrukcji powłokowo-prętowych*. Współautorzy: M. DACKO, Z. KUROWSKI, M. WIECZOREK). W druku: Skrypt WAT.

O PŁASKIM QUASI-STATYCZNYM ZAGADNIENIU TERMODYFUZJI DLA SPRĘŻYSTEGO
WALCA KOŁOWEGO

KRZYSZTOF GRYSA, RYSZARD SZCZEPAŃSKI (POZNAŃ)

1. Wstęp

Obróbka powierzchniowa części maszyn jest jednym z ważniejszych problemów współczesnego przemysłu. Jednym z rodzajów obróbki powierzchniowej jest wprowadzenie w cienką, zlokalizowaną przy samej powierzchni obrabianej części, warstwę pewnego czynnika, mającego nadać tej części określone wymogami technologicznymi i eksploatacyjnymi cechy. Jako przykład można tu przytoczyć proces azotowania, nawęglania czy cyjanowania powierzchni metalowych. Zjawisko to jest niczym innym jak pewnym procesem dyfuzji jednego ośrodka w drugi, przy czym podkreślić należy, że w warunkach rzeczywistych proces ten przebiega przy jednoczesnym poddaniu obrabianej części działaniu tak pola temperatury jak i pola sił.

W pracy niniejszej zajmiemy się próbą opisu wpływu procesu dyfuzji na naprężenia w nieskończenie długim walcu kołowym. Uwzględnimy przy tym wpływ pola temperatury na przebieg dyfuzji i na odwrót. Ponadto wyznaczymy koncentrację czynnika dyfundującego w ośrodek sprężysty jako funkcję czasu i zmiennych przestrzennych.

Założenia pracy są następujące:

- pobocznica walca jest wolna od obciążeń;
- temperatura pobocznic walca jest funkcją kąta opasania φ (geometria rozważanego walca narzuca prowadzenie obliczeń w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z) i czasu. Założenie to ma na celu uwzględnienie zarówno ruchów konwekcyjnych i w efekcie różnych od zera gradientów temperatury w płynie, do którego walec zostaje zanurzony w chwili $t = 0+$, jak i ewentualne stygnięcie tego płynu (założono tu eksponencjalne malenie temperatury w czasie);
- potencjał chemiczny ma na brzegu walca stałą, niezależną od czasu ani zmiennych przestrzennych wartość dla $t > 0$. Założenie to wynika w sposób dosyć oczywisty z faktu, iż ilość cząstek ośrodka dyfundującego, które wnikają do walca, wyraża się — biorąc pod uwagę np. mol ośrodka sprężystego — liczbą o kilkanaście rzędów wielkości niższą od liczby Avogadro, zatem nie mogą one w sposób widoczny zmienić potencjału chemicznego tego ośrodka. Można wprawdzie wpływać na zmianę potencjału chemicznego w wyniku oddziaływań np. elektrycznych, lecz tego przypadku nie bierzemy pod uwagę;
- własności termiczne, dyfuzyjne i mechaniczne walca są stałe;
- w walcu panuje płaski stan odkształcenia;
- temperatura, potencjał chemiczny i koncentracja są funkcjami zmiennymi r, φ, t ;
- w chwili początkowej temperatura walca jest stała, zaś potencjał chemiczny ma wartość równą zero. Zerowe są również przemieszczenia i naprężenia;

— pomija się wpływ sił masowych na naprężenia;
 — pomija się wpływ odkształceń tak na pole temperatury jak i na proces dyfuzji;
 — pomija się efekty inercyjne, jakie mogą być wywołane poprzez oddziaływanie termodyfuzyjne, gdyż modyfikacja funkcji opisujących pola mechaniczne uzyskana przy ich uwzględnieniu jest pomijalnie mała co do wartości, a postać ich bardzo się komplikuje (por. problemy podobnego typu dotyczące teorii naprężeń cieplnych, np. [14, 15, 16].

Przy tak sprecyzowanych założeniach wyznaczmy w pracy potencjał chemiczny, pole temperatury oraz stan naprężenia i koncentrację czynnika dyfundującego. Jest oczywiste, że rozwiązanie dla przypadku niezerowych warunków brzegowych dla obciążenia można łatwo uzyskać metodą superpozycji.

Temperaturę i potencjał wyznacza się w pracy w pełnej postaci wynikającej z powyższych założeń. Natomiast dla przemieszczeń, naprężeń oraz koncentracji wyznacza się tylko rozwiązanie odpowiadające zagadnieniu osiowosymetrycznemu. Rozwiązanie to wystarcza bowiem do przeprowadzenia analizy wpływów pól niemechanicznych nawzajem na siebie oraz na pola mechaniczne. Dla przypadku ogólnego (zależność od kąta φ) nazkicowano krótko drogę otrzymania wyników.

O wszystkich funkcjach, wprowadzonych w trakcie obliczeń zakładamy, że spełniają warunki Dirichleta tak dla $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$ jak i dla $r \in \langle 0, R \rangle$ (gdzie R jest promieniem rozważanego walca), oraz że są wystarczającą ilość razy różniczkowalne w sposób ciągły po obu tych zmiennych i po czasie.

2. Podstawowe związki i postawienie zagadnienia

W pracy oprzemy się na następującym układzie związków, opisujących potencjał chemiczny, temperaturę, koncentrację i stan naprężenia w ośrodku sprężystym, zapisanych w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z .

Równanie charakteryzujące zmianę potencjału chemicznego [1, 2]:

$$(2.1) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{K_M} \frac{\partial}{\partial t} \right) M - \delta_M \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0,$$

gdzie $M = M(r, \varphi, t)$ — potencjał chemiczny; $\Theta = \Theta(r, \varphi, t)$ — temperatura względna, odniesiona do temperatury początkowej; $K_M = D$ — współczynnik dyfuzji [2]; $\delta_M = = d/D$, gdzie d — współczynnik sprzężenia termodyfuzyjnego; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

Równanie charakteryzujące zmianę temperatury

$$(2.2) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{K_T} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta - \delta_T \frac{\partial M}{\partial t} = 0,$$

gdzie $K_T = \frac{ak}{(a\bar{n} + d^2)T_p}$ — termodyfuzyjny odpowiednik współczynnika przewodzenia temperatury [3]; $\delta_T = dT_p/(ak)$, T_p — temperatura odniesienia, a — współczynnik termodyfuzji [1, 2]; $k = L_{qq}T_p^{-2}$, L_{qq} — współczynnik w związkach Onsagera (por. np. [2] wzór 3.23)); \bar{n} — pewna stała. Sens fizyczny stałych k i \bar{n} wynika łatwo z równości $k/\bar{n} =$

$= \lambda_i / (\rho_0 c_s)$ (gdzie λ_i — współczynnik przewodnictwa cieplnego, ρ_0 — gęstość, c_s — ciepło właściwe przy stałej deformacji [11]) oraz z równania (4.22) podanego w pracy [2].

Stan naprężenia określimy, wykorzystując przemieszczeniowe równania ruchu oraz związki geometryczne i związki konstytutywne.

Równania przemieszczeniowe ruchu [1, 2]:

$$(2.3) \quad \begin{cases} (\lambda^* + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{1}{r^2} \left(u_r + 2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \gamma_T^* \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \gamma_M^* \frac{\partial M}{\partial r}, \\ (\lambda^* + \mu) \frac{\partial e}{r \partial \varphi} + \mu \left[\nabla^2 u_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(u_\varphi - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} + \gamma_T^* \frac{\partial \Theta}{r \partial \varphi} + \gamma_M^* \frac{\partial M}{r \partial \varphi}, \end{cases}$$

gdzie $\lambda^* = \lambda - \gamma_c^2 / a$; λ, μ — stałe Lamé'go [4], $\gamma_c = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c$, α_c — współczynnik dyfuzyjnej rozszerzalności liniowej [1, 2], ρ_0 — gęstość,

$\gamma_T^* = (\gamma_T a + \gamma_c d) / a$, $\gamma_T = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, α_t — współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej; $\gamma_M^* = \gamma_c / a$; u_r, u_φ — przemieszczenia,

$$(2.4) \quad e = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} \text{ — dylatacja;}$$

wobec założeń poczynionych na wstępie człony inercyjne w równaniach (2.3) pomijamy.

Związki geometryczne określają zależności pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami i są powszechnie znane (por. np. [4]); nie będziemy ich tu przytaczać. Związki konstytutywne mają — w przypadku zagadnień termodyfuzji w ośrodkach sprężystych — w ogólności postać [2]:

$$(2.5) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda^* e + \gamma_T^* \Theta + \gamma_M^* M) \delta_{ij},$$

gdzie $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — składowe stanu naprężenia i odkształcenia; δ_{ij} — delta Kroneckera.

Dla rozważanego przypadku — po zastąpieniu składowych stanu odkształcenia przez pochodne składowych stanu przemieszczenia — otrzymuje się związki

$$(2.6) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = (\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda^* \left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) - \gamma_T^* \Theta - \gamma_M^* M, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda^* + 2\mu) \left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) + \lambda^* \frac{\partial u_r}{\partial r} - \gamma_T^* \Theta - \gamma_M^* M, \\ \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \doteq \sigma_{\varphi r}, \\ \sigma_{zz} = \frac{\lambda^*}{2(\lambda^* + \mu)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{\mu}{\lambda^* + \mu} (\gamma_T^* \Theta + \gamma_M^* M). \end{cases}$$

Koncentrację c można znaleźć na podstawie następującego związku:

$$(2.7) \quad c = \gamma_M^* e + \frac{d}{a} \Theta + \frac{1}{a} M.$$

Powyższe związki określają równania i zależności, jakie muszą spełniać w rozważanym przypadku potencjał chemiczny M , temperatura Θ , przemieszczenia u_r, u_φ , naprężenia $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\varphi}$ i σ_{zz} oraz koncentracja c .

Warunki początkowe i brzegowe wynikające z odpowiednich ustaleń poczynionych we wstępie pracy, określone są następująco:

dla $t = 0$

$$(2.8) \quad M(r, \varphi, 0) = 0, \quad \Theta(r, \varphi, 0) = 0;$$

dla $r = R$ i $t > 0$

$$(2.9) \quad \begin{cases} M(R, \varphi, t) = M_0, & \Theta(R, \varphi, t) = T(\varphi)\exp(-\beta_T t) \\ \sigma_{rr}(R, \varphi, t) = 0, & \sigma_{r\varphi}(R, \varphi, t) = 0, \end{cases}$$

gdzie β_T — wartość stała.

Z uwagi na symetrię równań (2.1) i (2.2) wygodnie jest przyjąć do obliczeń warunek brzegowy (2.9)₁ w postaci

$$(2.9)_1 \quad M(R, \varphi, t) = M(\varphi)\exp(-\beta_M t),$$

gdzie β_M — stała. Kładąc $\beta_M = 0$ oraz $M(\varphi) \equiv M_0$ sprowadza się ten warunek do postaci (2.9)₁.

Warunków początkowych dla naprężeń czy przemieszczeń nie ma celu podawać, gdyż problem jest quasi-statyczny.

Warunki brzegowe (2.9)_{3 i 4} można przedstawić za pomocą funkcji M , Θ i u_α ($\alpha = r, \varphi$). Wykorzystując bowiem związki (2.6)_{1 i 2} możemy zapisać te warunki w postaci

$$(2.10) \quad \begin{cases} \left[\left(\lambda^* + 2\mu \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda^* \left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \right]_{r=R} = \gamma_T^* T(\varphi) e^{-\beta_T t} + \gamma_M^* M(\varphi) e^{-\beta_M t}, \\ \left[\frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right]_{r=R} = 0. \end{cases}$$

Równania (2.1) i (2.2) można rozwiązać niezależnie od równań (2.3). Fakt ten narzuca sposób rozwiązywania zagadnienia.

3. Rozwiązanie równań transportu ciepła i masy

W celu rozwiązania równań (2.1) i (2.2) z warunkami początkowymi (2.8)_{1 i 2} oraz brzegowymi (2.9)_{1 i 2} zakładamy, że funkcje $\Theta(r, \varphi, t)$ i $M(r, \varphi, t)$ spełniają warunki Dirichleta względem zmiennej $\varphi \in (-\pi, \pi)$ przy dowolnych, ustalonych $r \in \langle 0, R \rangle$ i $t \in (0, \infty)$. Mamy zatem

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} \Theta(r, \varphi, t) \\ M(r, \varphi, t) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{pmatrix} \Theta_n^c(r, t) \\ M_n^c(r, t) \end{pmatrix} \cos n\varphi + \begin{pmatrix} \Theta_n^s(r, t) \\ M_n^s(r, t) \end{pmatrix} \sin n\varphi \right),$$

gdzie $\Theta_0^s(r, t) \equiv M_0^s(r, t) \equiv 0$. Wstawiając funkcje Θ i M określone związkami (3.1) do równań (2.1) i (2.2) oraz warunków (2.8)_{1 i 2}, (2.9)₁ i (2.9)₂, otrzymujemy następujący zestaw równań różniczkowych i warunków:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - \frac{1}{K_T} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta_n^{c,s} - \delta_T \frac{\partial M_n^{c,s}}{\partial t} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - \frac{1}{K_M} \frac{\partial}{\partial t} \right) M_n^{c,s} - \delta_M \frac{\partial \Theta_n^{c,s}}{\partial t} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$(3.3) \quad M_n^{c,s}(R, t) = M_n^{c,s} e^{-\beta_M t}, \quad \Theta_n^{c,s}(R, t) = T_n^{c,s} e^{-\beta_T t},$$

$$(3.4) \quad M_n^{c,s}(r, 0) = 0, \quad \Theta_n^{c,s}(r, 0) = 0.$$

W zależnościach (3.3) wielkości $T_n^{c,s}$ i $M_n^{c,s}$ są współczynnikami rozwinięć fourierowskich funkcji $T(\varphi)$ i $M(\varphi)$. Oczywiście $T_0^s \equiv M_0^s \equiv 0$, $T_0^c \equiv T_0$, $M_0^c \equiv M_0$.

Równania transportu, po przedstawieniu poszczególnych poszukiwanych funkcji w postaci szeregu Fouriera, rozdzieliły się na układy równań na współczynniki rozwinięć fourierowskich funkcji Θ i M z odpowiednimi układami warunków brzegowych i początkowych. Układy te rozwiązujemy za pomocą skończonej transformacji Hankela rzędu n [5]. O warunkach stosowalności tego przekształcenia całkowego mówi następujące twierdzenie ([5], str. 83):

Jeśli funkcja $f(x)$ spełnia warunki Dirichleta w przedziale $(0, R)$, to jej transformata Hankela ma postać

$$(3.5) \quad \bar{f}(\mu_{ni}) = \int_0^R x f(x) J_n\left(\frac{x}{R} \mu_{ni}\right) dx,$$

gdzie μ_{ni} — i -ty pierwiastek równania przestępnego $J_n(\mu) = 0$ ($J_n(x)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju n -tego rzędu [6, 7]), zaś transformata odwrotna określona jest dla każdego $x \in (0, R)$, w którym funkcja $f(x)$ jest ciągła, zależnością

$$(3.6) \quad f(x) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(\mu_{ni}) J_n\left(\frac{x}{R} \mu_{ni}\right) [J'_n(\mu_{ni})]^{-2}.$$

Zastosowanie transformacji Hankela do układu równań (3.2) z warunkami (3.3) i (3.4) prowadzi do następujących równań różniczkowych zwyczajnych na transformaty Hankela współczynników rozwinięć fourierowskich funkcji Θ i M :

$$(3.7) \quad \begin{cases} \mu_{ni} T_n^{c,s} J'_n(\mu_{ni}) e^{-\beta_T t} + \mu_{ni}^2 \bar{\Theta}_n^{c,s} + \frac{R^2}{K_T} \frac{d\bar{\Theta}_n^{c,s}}{dt} + R^2 \delta_T \frac{d\bar{M}_n^{c,s}}{dt} = 0, \\ \mu_{ni} M_n^{c,s} J'_n(\mu_{ni}) e^{-\beta_M t} + \mu_{ni}^2 \bar{M}_n^{c,s} + \frac{R^2}{K_M} \frac{d\bar{M}_n^{c,s}}{dt} + R^2 \delta_M \frac{d\bar{\Theta}_n^{c,s}}{dt} = 0, \end{cases}$$

gdzie oczywiście $T_0^s \equiv M_0^s \equiv \bar{\Theta}_0^s \equiv \bar{M}_0^s \equiv 0$. Transformaty $\bar{\Theta}_n^{c,s}$ i $\bar{M}_n^{c,s}$ muszą spełniać jednorodne warunki początkowe, wynikające z warunków (3.4).

Równanie charakterystyczne [8] tego układu równań ma postać

$$(3.8) \quad r^2 + \frac{\mu_{ni}^2 \alpha_1}{R^2 \alpha_2} r + \frac{\mu_{ni}^4}{R^4 \alpha_2} = 0,$$

gdzie $\alpha_1 = \frac{1}{K_T} + \frac{1}{K_M}$, $\alpha_2 = \frac{1}{K_T K_M} - \delta_T \delta_M$. Równanie to ma dwa pierwiastki, gdyż — jak łatwo sprawdzić — jego wyróżnik jest zawsze dodatni. W celu zbadania znaków pierwiastków rozważmy znak wyrażenia α_2 (gdyż pozostałe wielkości tworzące współczynniki

równania (3.8) są dodatnie). Ponieważ [2]

$$K_T = \frac{ak}{(a\bar{n} + d^2)T_p}, \quad K_M = D, \quad \delta_T = \frac{dT_p}{ak}, \quad \delta_M = \frac{d}{D},$$

więc

$$(3.9) \quad \alpha_2 = \frac{1}{K_T K_M} (1 - K_T K_M \delta_T \delta_M) = \frac{1}{K_T K_M} \left(1 - \frac{d^2}{a\bar{n} + d^2} \right) > 0,$$

gdyż $d > 0$, $a > 0$ i $\bar{n} > 0$ [2]. Jak zatem wynika z (3.9), równanie (3.8) ma dwa pierwiastki ujemne.

Rozwiązania układu (3.7) mają postać

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{\Theta}_n^{c,s}(\mu_{ni}, t) &= \frac{J'_n(\mu_{ni})}{\mu_{ni}} \left[\frac{F_{ni}^{c,s}(t; T, M)}{2\chi - \alpha_1} - f_{ni}^{c,s}(t; T, M) \right], \\ \bar{M}_n^{c,s}(\mu_{ni}, t) &= \frac{J'_n(\mu_{ni})}{\mu_{ni}} \left[\frac{F_{ni}^{c,s}(t; M, T)}{2\chi - \alpha_1} - f_{ni}^{c,s}(t; M, T) \right]. \end{aligned}$$

Oznaczenia:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} f_{ni}^{c,s}(t; X, Y) &= X_n^{c,s} \frac{(\mu_{ni}^2 - R^2 \beta_X K_Y^{-1}) e^{-\beta_X t}}{R^2 (\beta_X - \mu_{ni}^2 r_1) (\beta_Y - \mu_{ni}^2 r_2)} + Y_n^{c,s} \frac{\delta_X \beta_Y e^{-\beta_Y t}}{(\beta_Y - \mu_{ni}^2 r_1) (\beta_X - \mu_{ni}^2 r_2)}, \\ F_{ni}^{c,s}(t; X, Y) &= \frac{\mu_{ni}^2}{R^2 \alpha_2} \left\{ \left[\left(\chi - \frac{1}{K_X} \right) f_{ni}^{c,s}(t; X, Y) - \delta_X f_{ni}^{c,s}(t; Y, X) \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_1 t} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\chi - \frac{1}{K_Y} \right) f_{ni}^{c,s}(t; X, Y) + \delta_X f_{ni}^{c,s}(t; Y, X) \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_2 t} \right\}, \\ r_1 &= \frac{\chi}{R^2 \alpha_2}, \quad r_2 = \frac{1}{R^2 \chi}, \quad \chi = \frac{1}{2} [\alpha_1 + (\alpha_1^2 - 4\alpha_2)^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

Wykorzystując wzory [10]:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho \mu_{ni})}{(\mu_{ni}^2 - x^2) (\mu_{ni}^2 - y^2) J'_n(\mu_{ni})} &= \frac{1}{2(y^2 - x^2)} \left[\frac{J_n(\varrho x)}{J_n(x)} - \frac{J_n(\varrho y)}{J_n(y)} \right], \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}^3 J_n(\varrho \mu_{ni})}{(\mu_{ni}^2 - x^2) (\mu_{ni}^2 - y^2) J'_n(\mu_{ni})} &= \frac{1}{2(y^2 - x^2)} \left[x^2 \frac{J_n(\varrho x)}{J_n(x)} - y^2 \frac{J_n(\varrho y)}{J_n(y)} \right], \end{aligned}$$

wprowadzając oznaczenia

$$(3.13) \quad S_n^I(\varrho; X, Y) = \frac{-1}{2\alpha_2 - \alpha_1 \chi} \left[\left(\alpha_2 - \frac{\chi}{K_Y} \right) \frac{J_n(\varrho \sqrt{\beta_X / r_1})}{J_n(\sqrt{\beta_X / r_1})} - \left(\chi^2 - \frac{\chi}{K_Y} \right) \frac{J_n(\varrho \sqrt{\beta_X / r_2})}{J_n(\sqrt{\beta_X / r_2})} \right],$$

$$S_n^{II}(\varrho; X) = \frac{-\chi}{2\alpha_2 - \alpha_1 \chi} \left[\frac{J_n(\varrho \sqrt{\beta_X / r_1})}{J_n(\sqrt{\beta_X / r_1})} - \frac{J_n(\varrho \sqrt{\beta_X / r_2})}{J_n(\sqrt{\beta_X / r_2})} \right],$$

oraz wykorzystując wzór (3.6) uzyskuje się następujące przedstawienie współczynników fourierowskich funkcji Θ i M :

$$\Theta_n^{c,s}(\varrho, t) = \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} F_{ni}^{c,s}(t; T, M) - T_n^{c,s} e^{-\beta T t} S_n^I(\varrho; T, M) +$$

$$+ M_n^{c,s} e^{-\beta M t} \delta_T S_n^{II}(\varrho; M),$$

(3.14)

$$M_n^{c,s}(\varrho, t) = \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} F_{ni}^{c,s}(t; M, T) - M_n^{c,s} e^{-\beta M t} S_n^I(\varrho; M, T) +$$

$$+ T_n^{c,s} e^{-\beta T t} \delta_M S_n^{II}(\varrho; T).$$

Wstawiając prawe strony zależności (3.14) do (3.1) otrzymujemy funkcje $\Theta(\varrho, \varphi, t)$ i $M(\varrho, \varphi, t)$, opisujące temperaturę i potencjał chemiczny w rozważanym procesie termodyfuzji:

$$\Theta(\varrho, \varphi, t) = \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} [F_{ni}^c(t; T, M) \cos n\varphi + F_{ni}^s(t; T, M) \sin n\varphi] -$$

$$- e^{-\beta T t} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^I(\varrho; T, M) [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi] +$$

$$+ \delta_T e^{-\beta M t} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{II}(\varrho; M) [M_n^c \cos n\varphi + M_n^s \sin n\varphi],$$

(3.15)

$$M(\varrho, \varphi, t) = \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} [F_{ni}^c(t; M, T) \cos n\varphi +$$

$$+ F_{ni}^s(t; M, T) \sin n\varphi] - e^{-\beta M t} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^I(\varrho; M, T) [M_n^c \cos n\varphi + M_n^s \sin n\varphi] +$$

$$+ \delta_M e^{-\beta T t} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{II}(\varrho; T) [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi].$$

W przypadku, gdy wartości funkcji opisujących temperaturę i potencjał chemiczny na brzegu walca nie zależą od czasu, we wzorach (3.11)—(3.15) należy położyć $\beta_X = 0$ ($X = T, M$). Wówczas $S_n^I(\varrho; X, Y) = -\varrho^n$, $S_n^{II}(\varrho; X) = 0$. Stąd otrzymujemy następującą postać temperatury i potencjału chemicznego dla problemu omówionego we wstępie pracy

$$\Theta(\varrho, \varphi, t) = e^{-\beta T t} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi] - \frac{2\delta_T M_0}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} -$$

$$-e^{-\mu_0^2 r_1^2 t} - \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho \mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} [\hat{F}_{ni}^c(t) \cos n\varphi + \hat{F}_{ni}^s(t) \sin n\varphi], \quad (3.16)$$

$$M(\varrho, \varphi, t) = M_0 - \frac{2M_0}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} \left[\left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) e^{-\mu_{0i}^2 r_1^2 t} + \right. \\ \left. + \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) e^{-\mu_{0i}^2 r_2^2 t} \right] - \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho \mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} [\hat{F}_{ni}^c(t) \cos n\varphi + \hat{F}_{ni}^s(t) \sin n\varphi].$$

Tutaj

$$\hat{F}_{ni}^{c,s}(t) = \frac{\mu_{ni}^2 T_n^{c,s} \exp(-\beta_T t)}{R^2 \alpha_2 (\beta_T - \mu_{ni}^2 r_1) (\beta_T - \mu_{ni}^2 r_2)} \left\{ \left[\left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) \left(\frac{\mu_{ni}^2}{R^2} - \frac{\beta_T}{K_M} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \delta_T \delta_M \beta_T \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_1^2 t} + \left[\left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) \left(\frac{\mu_{ni}^2}{R^2} - \frac{\beta_T}{K_M} \right) + \delta_T \delta_M \beta_T \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_2^2 t} \right\}, \quad (3.17)$$

$$\hat{F}_{ni}^s(t) = \frac{\mu_{ni}^2 \delta_M T_n^{c,s} \exp(-\beta_T t)}{R^2 \alpha_2 (\beta_T - \mu_{ni}^2 r_1) (\beta_T - \mu_{ni}^2 r_2)} \left\{ \left(\beta_T \chi - \frac{\mu_{ni}^2}{R^2} \right) e^{-\mu_{ni}^2 r_1^2 t} + \right. \\ \left. + \left[\beta_T (\chi - \alpha_1) + \frac{\mu_{ni}}{R^2} \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_2^2 t} \right\},$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$

4. Wyznaczenie przemieszczeń, naprężeń i koncentracji

Aby określić stan przemieszczenia, naprężenia i koncentrację czynnika dyfundującego w rozważanym walcu, należy rozwiązać równania (2.3) (przy pominiętych członach inercyjnych) z warunkami brzegowymi (2.10). Oprócz spełnienia tych warunków wymaga się od przemieszczeń, aby dla $r = 0$ osiągały wartość skończoną.

Zauważmy, że prawe strony równań (2.3) można w rozważanym przypadku ($\ddot{u}_\alpha \approx 0$) przedstawić w postaci odpowiednich pochodnych sumy

$$(4.1) \quad \gamma_T^* \Theta_0(r, t) + \gamma_M^* M_0(r, t) + \gamma_T^* \Theta^1(r, \varphi, t) + \gamma_M^* M^1(r, \varphi, t),$$

gdzie

$$(4.2) \quad \left. \begin{matrix} \Theta^1(r, \varphi, t) \\ M^1(r, \varphi, t) \end{matrix} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left. \begin{matrix} \Theta_n^c(r, t) \\ M_n^c(r, t) \end{matrix} \right\} \cos n\varphi + \left\{ \begin{matrix} \Theta_n^s(r, t) \\ M_n^s(r, t) \end{matrix} \right\} \sin n\varphi \right\};$$

funkcje $\Theta_0 \equiv \Theta_0^c$, $M_0 \equiv M_0^c$, $\Theta_n^{c,s}$, $M_n^{c,s}$ ($n = 1, 2, \dots$) można łatwo odczytać ze wzorów (3.14).

Równania przemieszczeniowe, po prawych stronach których znajdują się pochodne funkcji $\gamma_T^* \Theta_0(r, t) + \gamma_M^* M_0(r, t)$ opisują — wraz z warunkami (2.10) — osiowosymetryczny stan naprężeń w walcu, grzany na poboczniczy temperaturą eksponencjalnie malejącą

w czasie, przy czym potencjał chemiczny jest na tejże pobocznicy również określony funkcją malejącą w czasie.

Z uwagi na złożoność analizy w przypadku ogólnym, najpierw zajmiemy się zagadnieniem osiowosymetrycznym, a następnie dla przypadku ogólnego tylko naszkicujemy drogę otrzymania wyników.

4.1. Przemieszczenia i naprężenia w zagadnieniu osiowosymetrycznym. Równanie i warunki określające przemieszczenia mają postać następującą:

$$(4.3) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \right) u_r^0 = Rm_T \frac{\partial \Theta_0}{\partial \varrho} + Rm_M \frac{\partial M_0}{\partial \varrho},$$

$$\left. \frac{\partial u_r^0}{\partial \varrho} + (1-2c^2) \frac{u_r^0}{\varrho} \right|_{\varrho=1} = Rm_T T_0 e^{-\beta T t} + Rm_M M_0 e^{-\beta M t},$$

$$|u_r^0(0, t)| < \infty,$$

gdzie u_r^0 — przemieszczenie radialne, $c^2 = c_2^2/c_1^{*2}$, $c_1^{*2} = (\lambda^* + 2\mu)/\varrho_0$, $c_2^2 = \mu/\varrho_0$, $m_T = \gamma_T^*/\varrho_0 c_1^{*2}$, $m_M = \gamma_M^*/(\varrho_0 c_1^{*2})$, $T_0 \equiv T_0^0$, $M_0 \equiv M_0^0$, $\varrho = r/a$. Przemieszczenia w kierunku obwodowym są równe zero: $u_\varphi^0 = 0$. Znak 0 oznacza osiową symetrię.

Po prostych obliczeniach uzyskuje się następującą postać funkcji $u_r^0(\varrho, t)$:

$$(4.4) \quad u_r^0(\varrho, t) = -RT_0 e^{-\beta T t} \left\{ \frac{\varrho c^2}{1-c^2} [m_T S_0^{III}(1; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(1; T)] + \right.$$

$$\left. + m_T S_0^{III}(\varrho; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(\varrho; T) \right\} - RM_0 e^{-\beta M t} \left\{ \frac{\varrho c^2}{1-c^2} [m_M S_0^{III}(1; M, T) - \right.$$

$$\left. - m_T \delta_T S_0^{IV}(1; M)] + m_M S_0^{III}(\varrho; M, T) - m_T \delta_T S_0^{IV}(\varrho; M) \right\} -$$

$$- \frac{2c^2 \varrho R}{(1-c^2)(2\chi - \alpha_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} [m_T F_{0i}^c(t; T, M) + m_M F_{0i}^c(t; M, T)] -$$

$$- \frac{2R}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [m_T F_{0i}^c(t; T, M) + m_M F_{0i}^c(t; M, T)],$$

gdzie

$$(4.5) \quad S_0^{III}(\varrho; X, Y) = \frac{1}{\alpha_1 \chi - 2\alpha_2} \left[(\alpha_2 - \chi/K_Y) \frac{J_1(\varrho \sqrt{\beta_X/r_1})}{\sqrt{\beta_X/r_1} J_0(\sqrt{\beta_X/r_1})} - \right.$$

$$\left. - (\chi^2 - \chi/K_Y) \frac{J_1(\varrho \sqrt{\beta_X/r_2})}{\sqrt{\beta_X/r_2} J_0(\sqrt{\beta_X/r_2})} \right],$$

$$S_0^{IV}(\varrho; X) = \frac{\chi}{\alpha_1 \chi - 2\alpha_2} \left[\frac{J_1(\varrho \sqrt{\beta_X/r_1})}{\sqrt{\beta_X/r_1} J_0(\sqrt{\beta_X/r_1})} - \frac{J_1(\varrho \sqrt{\beta_X/r_2})}{\sqrt{\beta_X/r_2} J_0(\sqrt{\beta_X/r_2})} \right].$$

W przypadku, gdy wartości brzegowe temperatury lub potencjału chemicznego nie zależą od czasu, we wzorach (4.4) i (4.5) należy położyć $\beta_X = 0$ ($X = T$ lub M). Wówczas $S_0^{III}(\varrho; X, Y) = -\varrho/2$, $S_0^{IV}(\varrho; X) = 0$. Stąd następująca postać przemieszczenia u_r^0 dla

problemu omówionego we wstępie pracy:

$$(4.6) \quad u_r^0(\varrho, t) = -RT_0 e^{-\beta r t} \left\{ \frac{\varrho c^2}{1-c^2} [m_T S_0^{III}(1; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(1; T)] + \right. \\ \left. + m_T S_0^{III}(\varrho; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(\varrho; T) \right\} + \frac{RM_0 m_M \varrho}{2(1-c^2)} - \\ - \frac{2R}{2\chi - \alpha_1} \left(\frac{c^2 \varrho M_0}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_1 t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} \right\} + \frac{c_2 \varrho}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} [m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t)] + \right. \\ \left. + M_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_1 t} + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t)] \right\},$$

gdzie $\hat{F}_{0i}(t) \equiv \hat{F}_{0i}^c(t)$, $\hat{F}_{0i}(t) \equiv \hat{F}_{0i}^s(t)$; funkcje te określone są wzorami (3.17).

Naprężenia dla przypadków określonych warunkami brzegowymi (2.9)₁ i (2.9)_{2, 3, 4} dane są związkami

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{rr}^0(\varrho, t) &= 2 \frac{\mu}{\varrho} T_0 e^{-\beta r t} \left\{ m_T [S_0^{III}(\varrho; T, M) - \varrho S_0^{III}(1; T, M)] - m_M \delta_M [S_0^{IV}(\varrho; T) - \right. \\ &\left. \varrho S_0^{IV}(1; T)] \right\} + 2 \frac{\mu}{\varrho} M_0 e^{-\beta M t} \left\{ m_M [S_0^{III}(\varrho; M, T) - \varrho S_0^{III}(1; M, T)] - \right. \\ &\left. - m_T \delta_T [S_0^{IV}(\varrho; M) - \varrho S_0^{IV}(1; M)] \right\} + \\ &+ \frac{4\mu}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_T F_{0i}^c(t; T, M) + m_M F_{0i}^c(t; M, T)}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [J_1(\varrho \mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^0(\varrho, t) &= 2 \frac{\mu}{\varrho} T_0 e^{-\beta r t} \left\{ m_T [\varrho S_0^I(\varrho; T, M) - S_0^{III}(\varrho; T, M) - \varrho S_0^{III}(1; T, M)] - \right. \\ &\left. - m_M \delta_M [\varrho S_0^II(\varrho; T) - S_0^{IV}(\varrho; T) - \varrho S_0^{IV}(1; T)] \right\} + 2 \frac{\mu}{\varrho} M_0 e^{-\beta M t} \left\{ m_M \times \right. \\ &\times [\varrho S_0^I(\varrho; M, T) - S_0^{III}(\varrho; M, T) - \varrho S_0^{III}(1; M, T)] - m_T \delta_T [\varrho S_0^II(\varrho; M) - \\ &\left. - S_0^{IV}(\varrho; M) - \varrho S_0^{IV}(1; M)] \right\} - \frac{4\mu}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_T F_{0i}^c(t; T, M) + m_M F_{0i}^c(t; M, T)}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} \times \\ &\times [J_1(\varrho \mu_{0i}) - \varrho \mu_{0i} J_0(\varrho \mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})], \\ \sigma_{zz}^0(\varrho, t) &= \frac{1-2c^2}{2(1-c^2)} (\sigma_{rr}^0 + \sigma_{\varphi\varphi}^0) - \frac{c^2}{1-c^2} (\gamma_T^* \Theta_0 + \gamma_M^* M_0), \\ \sigma_{r\varphi}^0(\varrho, t) &\equiv 0. \end{aligned} \right.$$

Przejsięc we wzorach (4.7) z β_M do zera daje rozwiązanie dla przypadku będącego przedmiotem rozważań:

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \sigma_{rr}^0(\varrho, t) &= 2 \frac{\mu}{\varrho} T_0 e^{-\beta_T t} \{m_T [S_0^{III}(\varrho; T, M) - \varrho S_0^{III}(1; T, M)] - m_M \delta_M [S_0^{IV}(\varrho; T) - \\
 &\varrho S_0^{IV}(1; T)]\} + \frac{4\mu M_0}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - \right. \right. \\
 &\left. \left. - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_1 t} + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} \right\} + \\
 &+ \frac{4\mu}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t)], \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^0(\varrho, t) &= 2 \frac{\mu}{\varrho} T_0 e^{-\beta_T t} \{m_T [\varrho S_0^I(\varrho; T, M) - S_0^{III}(\varrho; T, M) - \varrho S_0^{III}(1; T, M)] - \\
 &- m_M \delta_M [\varrho S_0^{II}(\varrho; T) - S_0^{IV}(\varrho; T) - \varrho S_0^{IV}(1; T)]\} - \\
 &- \frac{4\mu M_0}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i}) - \varrho \mu_{0i} J_0(\varrho \mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - \right. \right. \\
 &\left. \left. - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_1 t} + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} \right\} - \\
 &- \frac{4\mu}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t)}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [J_1(\varrho \mu_{0i}) - \varrho \mu_{0i} J_0(\varrho \mu_{0i}) + \varrho J_1(\mu_{0i})].
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

4.2. Koncentracja czynnika dyfundującego w zagadnieniu osłowsymetrycznym. Postać koncentracji $c^0(\varrho, t)$ wyznaczamy w oparciu o związek (2.7). Wstawiając przemieszczenie u_r^0 określone związkiem (4.4) do (2.4), otrzymujemy postać dylatacji; wykorzystując ponadto wzory (3.14) otrzymuje się następującą funkcję, określającą koncentrację czynnika dyfundującego w walcu

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad c^0(\varrho, t) &= \left(\gamma_M^* m_T + \frac{d}{a} \right) \Theta_0(\varrho, t) + \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) M_0(\varrho, t) - \gamma_M^* \frac{2T_0 c^2}{1 - c^2} e^{-\beta_T t} \times \\
 &\times [m_T S_0^{III}(1; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(1; T)] - \gamma_M^* \frac{2M_0 c^2}{1 - c^2} e^{-\beta_M t} [m_M S_0^{III}(1; M, T) - \\
 &- m_T \delta_T S_0^{IV}(1; M)] - \frac{4c^2 \gamma_M^*}{(1 - c^2)(2\chi - \alpha_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} [m_T F_{0i}(t; T, M) + m_M F_{0i}(t; M, T)].
 \end{aligned}$$

Przejsięc z β_M do zera powoduje we wzorze (4.9) następujące zmiany: funkcje Θ_0 i M_0 mają postać określoną wzorami (3.16), $\exp(-\beta_M t) = 1$, nawias kwadratowy stojący przy M_0 ma wartość $-0,5 m_M$; zaś nawias kwadratowy stojący pod sumą da się rozdzielić — podobnie jak przy przejściu od wzorów (4.7) do (4.8) — na dwa składniki, z których

każdy opisuje bądź oddziaływanie temperatury, bądź potencjału chemicznego. Stąd ostateczna postać koncentracji dla rozważanego zagadnienia termodyfuzji:

$$(4.10) \quad c^0(\varrho, t) = \left(\gamma_M^* m_T + \frac{d}{a} \right) \Theta_0(\varrho, t) + \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) M_0(\varrho, t) - \gamma_M^* \frac{2T_0 c^2}{1-c^2} e^{-\beta r t} \times \\ \times [m_T S_0^{III}(1; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(1; T)] + \gamma_M^* \frac{M_0 m_M c^2}{1-c^2} - \frac{4c^2 \gamma_M^*}{(1-c^2)(2\chi - \alpha_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} \times \\ \times \left(m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t) + M_0 \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r^2 t} \right\} \right).$$

4.3. **Zagadnienie naprężeń i koncentracji w przypadku ogólnym.** Wykorzystując związki (4.1) i (4.2) można wyznaczyć naprężenia i koncentrację w zagadnieniu ogólnym metodą superpozycji. Pełna postać przemieszczeń i naprężeń będzie sumą rozwiązań uzyskanych w rozdziale (4.1) oraz rozwiązań następującego zagadnienia brzegowego:

$$(4.11) \quad \begin{cases} (\lambda^* + \mu) \frac{\partial e^1}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u_r^1 - \frac{1}{r^2} \left(u_r^1 + 2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] = \gamma_M^* \frac{\partial \Theta^1}{\partial r} + \gamma_M^* \frac{\partial M^1}{\partial r}, \\ (\lambda^* + \mu) \frac{\partial e^1}{r \partial \varphi} + \mu \left[\nabla^2 u_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(u_\varphi - 2 \frac{\partial u_r^1}{\partial \varphi} \right) \right] = \gamma_T^* \frac{\partial \Theta^1}{r \partial \varphi} + \gamma_M^* \frac{\partial M^1}{r \partial \varphi}, \\ \left[(\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial u_r^1}{\partial r} + \lambda^* \left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{u_r^1}{r} \right) \right]_{r=R} = \gamma_T^* T^1(\varphi) e^{-\beta r t} + \gamma_M^* M_0, \\ \left[\frac{\partial u_r^1}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right]_{r=R} = 0; \end{cases}$$

tutaj u_r^1 oznacza przemieszczenie wywołane temperaturą Θ^1 i procesem dyfuzji wywołanym działaniem potencjału chemicznego M^1 ; $u_\varphi^1 \equiv u_\varphi$, gdyż $u_\varphi^0 \equiv 0$. Funkcje $\Theta^1(\varrho, \varphi, t)$ i $M^1(\varrho, \varphi, t)$ można łatwo otrzymać ze wzorów (3.16).

Droga rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.11) jest identyczna, jak w przypadku termosprężystości (por. [17]). Polega ona na ustawieniu równań i warunków dla funkcji Φ i Ψ , powiązanych z przemieszczeniami u_r^1 i u_φ związkami [4]:

$$(4.12) \quad \begin{Bmatrix} u_r^1 \\ u_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{Bmatrix},$$

a następnie sprowadzeniu tych równań do zwyczajnych ze względu na zmienną r przez rozkład funkcji Φ i Ψ na szereg Fouriera.

5. Analiza otrzymanych wyników

Rozwiązanie problemu, który został naszkicowany we wstępie pracy, określają związki (3.16), (4.5), (4.8) i (4.10). Przeanalizujemy teraz przypadek, gdy wpływ temperatury na potencjał chemiczny (i na odwrót) jest niewielki.

O sprzężeniu równań transportu ciepła i masy decydują współczynniki δ_T i δ_M . Wyrażają się one poprzez inne stałe dotyczące procesu termodyfuzji w sposób następujący:

$$(5.1) \quad \delta_M = d/D, \quad \delta_T = dT_p/(ak),$$

gdzie wielkości D , d , T_p , a i k omówiono w rozdziale drugim pracy. Oba współczynniki zależne są od współczynnika sprzężenia termodyfuzyjnego d [1, 2]. Założenie niewielkiego wpływu dyfuzji na procesy termiczne i na odwrót jest równoznaczne z przyjęciem

$$(5.2) \quad d \ll D \text{ oraz } d \ll ak/T_p.$$

Zauważmy, że $D = K_M$, a $ak/T_p = (a\bar{n} + d^2)K_T \simeq a\bar{n}K_T$, tzn.

$$(5.2)' \quad d \ll a\bar{n}K_T \text{ oraz } d \ll K_M.$$

Założenie małości d nie oznacza, iż również współczynnik a ma być mały — decyduje o tym związek (2.7). Podobnie współczynnik \bar{n} może mieć wartość dowolną (dopuszczalną przez fizykochemię zjawiska) — z porównania związków określających entropię w procesie termodyfuzyjnym [2] i termosprężystym [4] wynika, że $\bar{n} \simeq c_v/T_p$, gdzie c_v — ciepło właściwe przy stałej objętości. Ponadto przyjmujemy, że proces stygnięcia powierzchni walca odbywa się bardzo długo, tzn. β_T jest tak małe, że $\beta_T R^2/K_X \ll 1$ ($X = T, M$) oraz można przyjąć $\beta_T^2 \simeq 0$ i $\beta_T d \simeq 0$.

Powyższe uwagi pozwalają stwierdzić, że gdy spełnione są nierówności (5.2), to

$$(5.3) \quad \alpha_2 \simeq \frac{1}{K_T K_M}, \quad \chi \simeq \frac{1}{K_M} \left(\text{lub } \frac{1}{K_T}, \text{ zależnie od tego, czy } K_T > K_M \text{ czy odwrotnie; nie ma to znaczenia dla dalszej analizy} \right),$$

$$r_1 \simeq K_T/R^2, \quad r_2 \simeq K_M/R^2 \quad (\text{lub odwrotnie}),$$

$$S_n^I(\varrho; T, M) \simeq - \frac{J_n(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_M})}{J_n(R \sqrt{\beta_T/K_M})} \simeq -\varrho^n,$$

$$S_n^{II}(\varrho; T) \simeq \frac{K_M K_T}{K_M - K_T} \left[\frac{J_n(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_T})}{J_n(R \sqrt{\beta_T/K_T})} - \frac{J_n(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_M})}{J_n(R \sqrt{\beta_T/K_M})} \right] \simeq 0,$$

$$S_0^{III}(\varrho; T, M) \simeq - \frac{J_1(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_M})}{R \sqrt{\beta_T/K_M} J_0(R \sqrt{\beta_T/K_M})} \simeq -\varrho/2,$$

$$S_0^{IV}(\varrho; T) \simeq \frac{K_M K_T}{K_M - K_T} \left[\frac{J_1(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_T})}{R \sqrt{\beta_T/K_T} J_0(R \sqrt{\beta_T/K_T})} - \frac{J_1(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_M})}{R \sqrt{\beta_T/K_M} J_0(R \sqrt{\beta_T/K_M})} \right] \simeq 0.$$

Przy powyższych założeniach związki określające poszczególne, wyznaczone w rozdziałach 3 i 4, wielkości upraszczają się do następującej postaci:

$$(5.4) \quad \Theta(\varrho, \varphi, t) \simeq e^{-\beta_T t} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi] - \frac{2dK_M M_0}{a\bar{n}(K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} \times \\ \times (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) - 2e^{-\beta_T t} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho\mu_{ni}) e^{-\mu_{ni}^2 F_0} [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi]}{(\mu_{ni}^2 - \beta_T R^2 / K_T) J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\},$$

$$(5.5) \quad M(\varrho, \varphi, t) \simeq M_0 \left[1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} \right] - \frac{2dK_T}{K_T - K_M} e^{-\beta_T t} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho\mu_{ni}) [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi]}{(\mu_{ni}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_{n+1}(\mu_{ni})} (e^{-\mu_{ni}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{ni}^2 F_0}) \right\},$$

$$(5.6) \quad u_r^0(\varrho, t) \simeq \frac{RT_0 m_T \varrho}{2(1-c^2)} e^{-\beta_T t} + \frac{RM_0 m_M \varrho}{2(1-c^2)} - \frac{2RdK_M M_0 m_T}{a\bar{n}(K_M - K_T)} \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) - 2RM_0 m_M \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} + \frac{2RdK_T m_M T_0}{K_M - K_T} e^{-\beta_T t} \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{J_1(\mu_{0i})} \left(\frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_M} - \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_T} \right) - \\ - 2RT_0 m_T e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_T) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 F_0},$$

$$(5.7) \quad \sigma_{rr}^0(\varrho, t) \simeq 4\mu m_T T_0 e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_T) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 F_0} + 4\mu m_M M_0 \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} + \frac{4\mu dK_T}{K_T - K_M} m_M T_0 e^{-\beta_T t} \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho J_1(\mu_{0i})} \left[\frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_M} - \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_T} \right] + \\ + \frac{4\mu K_M d m_T M_0}{a\bar{n}(K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}),$$

$$\begin{aligned}
 (5.8) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^0(\varrho, t) \simeq & -4\mu m_T T_0 e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_T) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 F_0} - \\
 & -4\mu m_M M_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} + \\
 & + \frac{4\mu d k_T}{k_M - k_T} m_M T_0 e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho J_1(\mu_{0i})} \times \\
 & \times \left(\frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_M} - \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_T} \right) + \frac{4\mu K_M d m_T M_0}{a\bar{n}(K_M - K_T)} \times \\
 & \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad c^0(\varrho, t) \simeq & T_0 e^{-\beta_T t} \left\{ \frac{d}{a} + \frac{\gamma_M^* m_T}{1-c^2} - \frac{4c^2 \gamma_M^* m_T}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_T} - \right. \\
 & - 2 \left(\gamma_M^* m_T + \frac{d}{a} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_T) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 F_0} - \frac{4c^2 \gamma_M^* d K_T m_M}{(1-c^2)(K_T - K_M)} \times \\
 & \times \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_M} - \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/k_T} \right) - \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) \frac{2dK_T}{K_T - K_M} \times \\
 & \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) \left. + M_0 \left\{ \frac{1}{a} + \frac{\gamma_M^* m_M}{1-c^2} - \right. \right. \\
 & - \frac{4c^2 \gamma_M^* m_M}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^2 e^{-\mu_{0i}^2 F_0} - 2 \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - \\
 & - \frac{4c^2 \gamma_M^* d K_T m_T}{(1-c^2) a \bar{n} (K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^2 (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) - \\
 & \left. \left. - \frac{2dK_M \gamma_M^* m_T}{a \bar{n} (K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

W powyższych wzorach oznaczono $F_0 = K_T t/R^2$, $\bar{F}_0 = K_M t/R^2$.

Spośród związków (5.4) — (5.9) tylko dwa pierwsze mają charakter ścisłych rozwiązań. Pozostałe wielkości — to rozwiązania zagadnienia quasi-statycznego. Ponieważ dla czasów bliskich chwili początkowej związki (5.6) — (5.9) nie obowiązują, więc celowym jest podanie takiej ich postaci, która opisywać będzie określone przez nie wielkości w sposób wystarczająco ścisły. Osiągnąć to można, specyfikując przedział czasu.

Z doświadczenia wiadomo, że proces dyfuzji przebiega znacznie wolniej, niż proces ogrzewania. Wynika stąd, że $K_T > K_M$, a co za tym idzie, wyrażenie $\exp(-\mu_{0i} F_0)$ prędzej dąży do zera niż $\exp(-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0)$. Zatem dla $F_0 > 0,5$ (dla tzw. regularnego reżimu cieplnego [9]), tzn. dla $t > R^2/(2K_T)$ wyrażenia $\exp(-\mu_{0i}^2 F_0)$ nie przekraczają wartości 0,05 podczas gdy wyrażenia $\exp(-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0)$ mogą być jeszcze stosunkowo bliskie jedności. Dla $F_0 > 1,5$ mamy $\exp(-\mu_{0i}^2 F_0) < 10^{-3}$ — zatem dla czasów $t > 3R^2/(2K_T)$ można pominąć składniki, zawierające tego typu potęgi. Związki (5.4) — (5.9) znacznie się wówczas upraszczają. I tak:

$$\begin{aligned}
 \Theta(\varrho, \varphi, t) &\simeq e^{-\beta_T t} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi] - \frac{2dK_M M_0}{an(K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i}) e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})}, \\
 M(\varrho, \varphi, t) &\simeq M_0 \left[1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} \right] - \\
 &\quad - \frac{2dK_T}{K_T - K_M} e^{-\beta_T t} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho\mu_{ni}) [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi]}{(\mu_{ni}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_{n+1}(\mu_{ni})} e^{-\mu_{ni}^2 \bar{F}_0} \right\}, \\
 u_r^0(\varrho, t) &\simeq \frac{R\varrho}{2(1-c^2)} [m_T T_0 e^{-\beta_T t} + m_M M_0] - 2M_0 R \left[\frac{dK_T m_T}{an(K_T - K_M)} + m_M \right] \times \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - \\
 &\quad - 2RT_0 e^{-\beta_T t} \left[\frac{dK_T m_M}{K_T - K_M} + m_T \right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}, \\
 \sigma_{rr}^0(\varrho, t) &\simeq 4\mu M_0 \left[\frac{dK_M m_T}{an(K_T - K_M)} + m_M \right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} + \\
 &\quad + \frac{4\mu dK_T}{K_T - K_M} m_M T_0 e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho (\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}, \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^0(\varrho, t) &\simeq -4\mu \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho \mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ M_0 \left[\frac{dK_M m_T}{an(K_T - K_M)} + m_M \right] \mu_{0i}^{-2} + \frac{4\mu dK_T m_M T_0 e^{-\beta_T t}}{(K_T - K_M) (\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1)} \right\} \right), \\
 c^0(\varrho, t) &\simeq T_0 e^{-\beta_T t} \left\{ \frac{d}{a} + \frac{\gamma_M^* m_T}{1-c^2} - \frac{2dK_T}{K_T - K_M} \left[\frac{2c^2 \gamma_M^* m_M}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{0i} J_0(\varrho \mu_{0i}) e^{-\mu_{0i}^2 \bar{r}_0}}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_1(\mu_{0i})} \Bigg] + M_0 \left\{ \frac{1}{a} + \frac{\gamma_M^* m_M}{1-c^2} - \right. \\
 & - \frac{4c^2 \gamma_M^*}{1-c^2} \left[\frac{dK_T m_T}{a n (K_T - K_M)} + m_M \right] \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{r}_0} - 2 \left[\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{dK_M \gamma_M^* m_T}{a n (K_T - K_M)} \right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{r}_0} \right\}.
 \end{aligned}$$

Ze związków (5.4) — (5.10) można odczytać szereg interesujących cech charakteryzujących proces termodyfuzji w ciałach stałych. Z pierwszych dwóch zależności, określających temperaturę i potencjał chemiczny wynika, że wpływ procesu dyfuzji na temperaturę jest znacznie mniejszy niż wpływ temperatury na wartość potencjału chemicznego, gdyż — jak to już zaznaczono wyżej — $K_T > K_M$. W procesach dyfuzji i ogrzewania, dotyczących ciał stałych, można nawet napisać silniejszą nierówność ($K_T \gg K_M$) gdyż wówczas współczynniki te różnią się o kilka rzędów wielkości. Jednakże oba wpływy — potencjału chemicznego na temperaturę i odwrotnie — są znikomo małe, gdyż składniki, opisujące te wpływy, mnożone są przez iloczyny dK_T lub dK_M .

O wpływie procesów termicznego i dyfuzyjnego na przemieszczenia decydują współczynniki m_T i m_M . Natomiast wielkości K_T i K_M określają czas trwania czysto niestacjonarnego procesu. Jak już wspomniano wyżej, czas trwania czysto niestacjonarnego procesu jest dla procesu termicznego znacznie krótszy niż dla dyfuzyjnego. Stąd rozpatrując problem od strony dynamicznej, w pierwszej fazie — dla $Fo \in (0; 0,5)$ — należy się spodziewać przede wszystkim wpływu ogrzewania na przemieszczenia; dla $Fo \in (0,5; 1,5)$ — wyrównania się obu wpływów, zaś dla $Fo > 1,5$ — już tylko wpływu procesu dyfuzji. Po odpowiednio długim czasie wartości przemieszczeń ustalają się, podobnie jak w procesie termicznym.

Naprężenia w procesie termodyfuzyjnym — podobnie jak w procesie czysto termicznym — po odpowiednio długim czasie stają się pomijalnie małe. Warto jednakże zwrócić uwagę na to, że również i tu w kolejnych fazach procesu notujemy początkowo większy wpływ ogrzewania, zaś po pewnym czasie przede wszystkim wpływ dyfuzji na naprężenia. Widać to szczególnie wyraźnie w związkach (5.10)_{4, 5}.

Wszystkie uwagi dotyczące temperatury, potencjału chemicznego i przemieszczeń, dotyczą również koncentracji (wynika to w sposób oczywisty ze związku (2.7)). Ponadto — jak widać z (5.10)₆ — po odpowiednio długim czasie wartość funkcji $c^0(\varrho, t)$ ustala się i — w przypadku osiowosymetrycznym — staje się niezależna od promienia. Podobnego efektu należy się spodziewać — przez analogię do procesu czysto termicznego — w przypadku nieosiowosymetrycznym. Natomiast wydaje się, że w walcu kołowym można osiągnąć koncentrację czynnika dyfundującego, będącą funkcją promienia ϱ , jeśli zada się potencjał chemiczny na powierzchni walca jako funkcję kąta opisanego φ , zaś sam walec wprawi się w ruch obrotowy wokół własnej osi z odpowiednio dobraną prędkością kątową. Wniosek ten wynika z analogii procesu termodyfuzyjnego i czysto termicznego, dla którego wyka-

zано tego typu zależność temperatury od promienia przy odpowiednio dobranym zespole warunków [9].

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Dynamic problems of thermodiffusion in elastic solids*, Proc. Vibr. Probl. 2, **15** (1974).
2. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. Stos., **2**, **13** (1975).
3. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła — podstawy teoretyczne*, PWN Warszawa 1963.
4. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN Warszawa 1970.
5. I. N. SNEDDON, *Fourier transform*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York 1951.
6. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1962.
7. N. W. MCLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN Warszawa 1964.
8. E. KAMKE, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1959; tłum. ros. Moskwa 1965.
9. K. GRYSA, *Nieustalone pole temperatury w wirującym walcu kołowym, wywołane utrzymywana na jego poboczniczy odcinkami stałą temperaturą*, Mech. Teoret. Stos. 2, **15** (1977).
10. K. GRYSA, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos. 2, **15** (1977).
11. B. A. BOLEY, J. A. WIENER, *Theory of thermal stresses*, J. Wiley and Sons, Inc., New York 1960.
12. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer-Verlag, Wien 1958; tłum. ros. Moskwa 1963.
13. S. TIMOSHENKO, I. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, ARKADY 1962.
14. K. GRYSA, M. KWIEK, *Stan naprężeń w walcu kołowym, wywołany przyłożeniem stałej temperatury na poboczniczy*, Mech. Teoret. Stos., **1**, **15** (1977).
15. W. DERSKI, *A dynamical problem of thermoelasticity concerning a thin circular plate*, Arch. Mech. Stos., **2**, **13** (1961).
16. T. MURA, *Dynamical thermal stress due to thermal shocks*, Res. Rep. Fac. of Engng., Meiji Univ., **8** (1956).
17. K. GRYSA, *Naprężenia i przemieszczenia w wirującym walcu kołowym ogrzewanym nieosiowosymetrycznie na poboczniczy*, Mech. Teoret. Stos., **3**, **15** (1977).

Резюме

ОБ ОДНОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОДИФФУЗИИ ДЛЯ УПРУГОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

В работе описано процесс термодиффузии в длинном круглом цилиндре при настоящих предположениях: боковая поверхность цилиндра свободна, температура этой поверхности дана в виде функции угла φ и времени, а химический потенциал — в виде функции постоянной. В цилиндре предположенно плоскую деформацию. В уравнениях движения пренебрегается внешними силами и инертными эффектами, а в уравнениях теплопроводности и диффузии — упругой дилатацией. Полученные результаты, описывающие температуру, химический потенциал, напряжения, перемещения и концентрацию, даны в виде рядов Фурье-Бесселя. В последней части работы проведена анализ полученных результатов.

ON A CERTAIN QUASI-STATIC PROBLEM OF THERMODIFFUSION IN AN ELASTIC CYLINDER

Summary

The thermodiffusion phenomenon in a long elastic cylinder is investigated in this paper. The following assumptions are made: the surface of cylinder is free, the temperature of the surface is a function of

angle φ and time, chemical potential is constant on the surface of the cylinder, the plane state of strains is considered; body forces and inertia terms in equations of motion and elastic dilatation in heat and diffusive equations are neglected. The obtained results, describing temperature, chemical potential, stresses, displacements and concentration fields are given in a form of Fourier-Bessel series. In the last part of the paper an analysis of obtained results is presented.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 sierpnia 1977 r.

TRZECIA MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA
NA TEMAT KOMPOZYTÓW
25 — 30 SIERPNI 1980, PARYŻ

Konferencja ta odbędzie się w Pałacu Kongresów w Paryżu. Rozpatrzone zostaną następujące zagadnienia:

własności kompozytów mechaniczne i fizyczne,
projektowanie i analiza materiałów i konstrukcji kompozytowych,
zagadnienia pęknięcia i zmęczenia,
aspekty ekonomiczne,
zastosowania,
produkcja kompozytów,
badania nieniszczące,
starzenie się kompozytów i ich użyteczność,
hybrydy, ich rodzaje i własności,
połączenia adhezyjne, mechaniczne kompozytów.

Streszczenia o objętości 500 słów należy przesłać w trzech egzemplarzach najpóźniej do 1 września 1979 na adres.

Third International Conference on Composite Materials
Dr A. R. Bunsell
Ecole des Mines de Paris
Centre des Matériaux
BP-87-91003 EVRY Cédex
France
tel. Paris 1-496-0360

TEORIA ŚREDNIEJ GRUBOŚCI ORTOTROPOWYCH TARCZ TRÓJWARSTWOWYCH

JERZY KUJAWSKI (BIAŁYSTOK)

Trójwarstwowe dźwigary powierzchniowe z uwagi na swoje zalety znajdują coraz szersze zastosowanie w technice. Konstrukcje te z reguły charakteryzują się dużą podatnością na poprzeczne odkształcenia.

Klasyczna teoria tarcz trójwarstwowych zakładająca występowanie płaskiego stanu naprężenia może powodować dość duże błędy szczególnie w tarczach z grubym i podatnym na poprzeczne odkształcenia rdzeniem.

Teoria klasyczna może również prowadzić do dużych błędów w następujących przypadkach: analizy naprężeń w pobliżu otworów, których średnica jest nieduża w porównaniu z grubością tarczy, tarczach wirujących, obciążenia tarczy siłami powierzchniowymi, obciążenia dynamicznych itp.

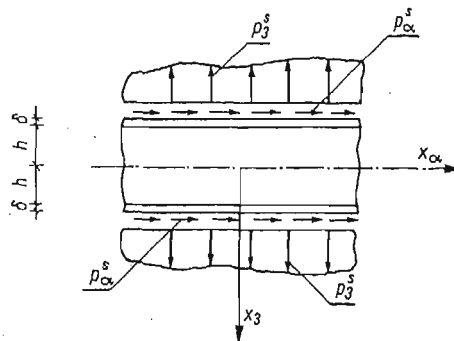
Ścisłe obliczenie warstwowych dźwigarów powierzchniowych jest bardzo skomplikowane [1 i 2]. Z tego względu istnieje kilka uściślonych metod obliczania trójwarstwowych płyt i powłok [3—5].

Natomiast dotychczas prawdopodobnie nie publikowano żadnych prac na temat uściślonego obliczania tarcz trójwarstwowych.

W niniejszej pracy podjęto próbę zbudowania uściślonej teorii ortotropowych tarcz trójwarstwowych o cienkich okładzinach. Praca stanowi uogólnienie technicznej teorii grubych ortotropowych tarcz jednorodnych [6, 7].

1. Równania podstawowe

1.1. Podstawowe związki teorii sprężystości. Rozpatrzmy w ramach liniowej teorii sprężystości tarczę trójwarstwową o jednakowych okładzinach. Zakładamy, że rdzeń i okładziny są wykonane z materiałów jednorodnych, ortotropowych i liniowo sprężystych (rys. 1).



Rys. 1

Rdzeń i okładziny są połączone bezpośrednio w sposób niepodatny.

W obszarze tarczy muszą być spełnione podstawowe związki teorii sprężystości to jest: związki Cauchy'ego

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

równania konstytutywne

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_{23} &= 2A_{44} \cdot \varepsilon_{23}, \\ \sigma_{31} &= 2A_{55} \cdot \varepsilon_{31}, \\ \sigma_{12} &= 2A_{66} \cdot \varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

oraz równania równowagi

$$(1.3) \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) oraz A_{nm} ($n = 4, 5, 6$) są współczynnikami sprężystości materiału rdzenia.

Zakładamy, że w cienkich z reguły okładzinach występuje błonowy stan naprężenia i przemieszczenia analogicznie jak w klasycznej teorii tarcz. Składowe stanu naprężenia w okładzinach mają zatem następującą postać

$$(1.4) \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}^f \\ \sigma_{22}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^f & B_{12}^f \\ B_{21}^f & B_{22}^f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_{33} &= \sigma_{\alpha 3}, \quad \alpha = 1, 2 \\ \sigma_{12}^f &= 2B_{66}^f \cdot \varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

tutaj $B_{\alpha\beta}^f$ i B_{66}^f są współczynnikami sprężystości dla ciała ortotropowego w płaskim stanie naprężenia (por. [5] str. 20 i [8] str. 46).

1.2. Pola przemieszczeń i naprężeń. Obciążenie tarczy stanowią siły przyłożone na jej powierzchniach zewnętrznych $x_3 = \pm(h + \delta)$

$$(1.5) \quad \sigma_{\alpha 3} = \pm p_{\alpha}^s, \quad \sigma_{33} = p_3^s,$$

oraz siły masowe

$$(1.6) \quad X_{\alpha} = X_{\alpha}(x_i), \quad X_3 = 0.$$

Zakładamy następujące pole przemieszczenia: w okładzinie dolnej

$$(1.7) \quad u_{\alpha}^f = u_{\alpha}^0, \quad u_3^f = u_3^0, \quad x_3 \in \langle h, h + \delta \rangle$$

w rdzeniu

$$(1.8) \quad \begin{aligned} u_{\alpha} &= u_{\alpha}^0 + u_{\alpha}^1(1 - \zeta^2), \quad u_3 = u_3^0 \zeta, \\ x_3 &\in \langle \pm h \rangle \end{aligned}$$

tutaj u_k^f ($k = 0, 1$) są nieznanymi funkcjami zmiennych x_{α} , $\zeta = x_3/h$.

Przyjęte pole przemieszczeń jest ciągłe w całym obszarze tarczy, z tym, że dla górnej okładziny $u_3^f = -u_3^0$.

Ze względu na symetrię względem płaszczyzny środkowej będziemy rozpatrywali tylko połowę tarczy $x_3 \in \langle 0, h + \delta \rangle$. Otrzymane wyniki będą słuszne dla całej tarczy.

Na podstawie (1.1), (1.2) i (1.4) pole naprężenia ma postać: w okładzinach

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^f &= B_{11}^f \cdot \varepsilon_{11}^0 + B_{12}^f \cdot \varepsilon_{22}^0, \quad \sigma_{22}^f = B_{12}^f \cdot \varepsilon_{11}^0 + B_{22}^f \cdot \varepsilon_{22}^0, \\ \sigma_{12}^f &= 2B_{66}^f \cdot \varepsilon_{12}^0, \end{aligned}$$

w rdzeniu

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11} \cdot [\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{11}^1(1 - \zeta^2)] + A_{12} \cdot [\varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{22}^1(1 - \zeta^2)] + A_{13} \cdot \varepsilon_{33}^0, \\ \sigma_{22} &= A_{12} \cdot [\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{11}^1(1 - \zeta^2)] + A_{22} \cdot [\varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{22}^1(1 - \zeta^2)] + A_{23} \cdot \varepsilon_{33}^0, \\ \sigma_{12} &= A_{66} \cdot [\varepsilon_{12}^0 + \varepsilon_{12}^1(1 - \zeta^2)], \quad \sigma_{\alpha 3} = G\tau_{\alpha} \left(-\frac{2}{h} u_{\alpha}^1 + u_{3,\alpha}^0 \right) \cdot \zeta, \end{aligned}$$

tutaj $\tau_1 = A_{55}/G$, $\tau_2 = A_{44}/G$, G jest dowolnie przyjętym porównawczym modułem sprężystości poprzecznej np. A_{66} .

Wzory (1.10) określają pole naprężenia w rdzeniu z wyjątkiem naprężenia σ_{33} . Na podstawie trzeciego równania równowagi

$$(1.11) \quad \sigma_{33} = -h \int \sigma_{\alpha 3, \alpha} d\zeta + C(x_{\alpha}),$$

stąd po podstawieniu (1.10) oraz przyjęciu, że dla $\zeta = \pm 1$ $\sigma_{33} \approx p_3^s$ otrzymujemy

$$(1.12) \quad \sigma_{33} = p_3^s - G\tau_{\alpha} \left(u_{\alpha}^1 - \frac{h}{2} u_{3,\alpha}^0 \right)_{,\alpha} (1 - \zeta^2).$$

Siły wewnętrzne w okładzinach i rdzeniu zdefiniowane są następująco

$$(1.13) \quad N_{\alpha\beta}^f = h \int_1^{1+\eta} \sigma_{\alpha\beta}^f d\zeta, \quad N_{\alpha\beta} = 2h \int_0^1 \sigma_{\alpha\beta} d\zeta$$

gdzie $\eta = \delta/h$.

Na podstawie 1.9), (1.10) i (1.13) otrzymujemy siły wewnętrzne w okładzinie

$$(1.14) \quad \begin{bmatrix} N_{11}^f \\ N_{22}^f \\ N_{12}^f \end{bmatrix} = \delta \cdot \begin{bmatrix} B_{11}^f & B_{12}^f & 0 \\ B_{21}^f & B_{22}^f & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,1}^0 \\ u_{2,2}^0 \\ u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0 \end{bmatrix},$$

i w rdzeniu

$$(1.15) \quad \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{bmatrix} = 2h \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1}^s \\ u_{2,2}^s \\ u_{1,2}^s + u_{2,1}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{u_3^0}{h},$$

$u_{\alpha}^s = u_{\alpha}^0 + \frac{2}{3} u_{\alpha}^1$ są uśrednionymi po grubości rdzenia przemieszczeniami.

1.3. Układ równań różniczkowych. Pola przemieszczenia i naprężenia są opisane za pomocą pięciu funkcji u_{α}^k i u_3^0 . Funkcje te wyznaczamy spełniając w sensie całkowym równania równowagi sił poziomych oddzielnie dla rdzenia i okładziny dolnej w następującej postaci

$$(1.16) \quad h \int_0^1 (\sigma_{\alpha\beta, \beta} + \sigma_{\alpha 3, 3} + X_{\alpha}) d\zeta = 0, \quad h \int_1^{1+\eta} (\sigma_{\alpha\beta, \beta} + \sigma_{\alpha 3, 3} + X_{\alpha}) d\zeta = 0.$$

Z uwagi na fakt, że naprężenie σ_{33} otrzymano spełniając w sposób ścisły równanie równowagi sił pionowych w rdzeniu brakujące piąte równanie otrzymamy uśredniając całkowo trzecie równanie konstytutywne w postaci

$$(1.17) \quad \int_0^1 (\sigma_{33} - A_{3i} \cdot \varepsilon_{il}) d\zeta = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jeśli podstawimy do (1.17) związki (1.8) i (1.12) to otrzymamy

$$(1.18) \quad A_{3\alpha} \left(u_\alpha^0 + \frac{2}{3} u_\alpha^1 \right)_{,\alpha} + A_{33} \frac{u_3^0}{h} + \frac{2}{3} G \tau_\alpha \left(u_\alpha^1 - \frac{h}{2} w_{,\alpha} \right) = p_3^s.$$

$$\begin{aligned} & \text{Z równań (1.16)}_2 \text{ po podstawieniu (1.9) i uwzględnieniu zależności } h \int_1^{1+\eta} \sigma_{\alpha 3, 3} d\zeta = \\ & = p_\alpha^s - G \tau_\alpha \left(-\frac{2}{h} u_\alpha^1 + u_{3,\alpha}^0 \right) \end{aligned}$$

wyznaczamy

$$(1.19) \quad \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = -\frac{h\delta}{2G} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} (B_{11}^f \partial_1^2 + B_{66}^f \partial_2^2), & \frac{1}{\tau_1} (B_{12}^f + B_{66}^f) \partial_{12}^2 \\ \frac{1}{\tau_2} (B_{12}^f + B_{66}^f) \partial_{12}^2, & \frac{1}{\tau_2} (B_{66}^f \partial_1^2 + B_{22}^f \partial_2^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} + \\ + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} u_3^0 - \frac{h}{2G} \begin{bmatrix} \frac{p_1^s}{\tau_1} \\ \frac{p_2^s}{\tau_2} \end{bmatrix}.$$

Na podstawie (1.10), (1.16)₁ i (1.18) po uwzględnieniu (1.19) dochodzimy do układu równań różniczkowych:

$$(1.20) \quad L_{ij} u_j^0 = f_i,$$

w którym

$$\begin{aligned} L_{11} = & -\frac{\eta h^3}{3G} \left\{ \frac{1}{\tau_1} A_{11} B_{11} \partial_1^4 + \left[\frac{1}{\tau_1} (A_{11} B_{66} + A_{66} B_{11}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\tau_2} (A_{12} + A_{66}) (B_{12} + B_{66}) \right] \partial_1^2 \partial_2^2 + \frac{1}{\tau_2} A_{66} B_{66} \partial_2^4 \right\} + \\ & + h(A_{11} + \eta B_{11}) \partial_1^2 + h(A_{66} + \eta B_{66}) \partial_2^2, \\ L_{12} = & -h \delta_{12}^2 \left\{ (B_{12} + B_{66}) \left[\frac{\eta h^2}{3G \tau_1} (A_{11} \partial_1^2 + A_{66} \partial_2^2) - \eta \right] + \right. \\ & \left. + (A_{12} + A_{66}) \left[\frac{\eta h^2}{3G \tau_2} (B_{66} \partial_1^2 + B_{22} \partial_2^2) - 1 \right] \right\}, \\ L_{13} = & \frac{h^2}{3} \partial_1 [A_{11} \partial_1^2 + (A_{12} + 2A_{66}) \partial_2^2] + A_{13} \partial_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= -p_1^s + \frac{h^2}{3G\tau_1} (A_{11} \partial_1^2 + A_{66} \partial_2^2) p_1^s + \frac{h^2}{3G\tau_2} (A_{12} + A_{66}) \partial_{12}^2 p_1^s - h(X_1 + \eta X_1^f), \\
L_{21} &= -h \partial_{12}^2 \left\{ (A_{12} + A_{66}) \left[\frac{\eta h^2}{3G\tau_1} (B_{11} \partial_1^2 + B_{66} \partial_2^2) - 1 \right] + \right. \\
&\quad \left. + (B_{12} + B_{66}) \left[\frac{\eta h^2}{3G\tau_2} (A_{66} \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2) - \eta \right] \right\}, \\
L_{22} &= -\frac{\eta h^3}{3G} \left\{ \frac{1}{\tau_2} A_{66} B_{66} \partial_1^4 + \left[\frac{1}{\tau_1} (A_{12} + A_{66}) (B_{12} + B_{66}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\tau_2} (A_{66} B_{22} + A_{22} B_{66}) \right] \partial_1^2 \partial_2^2 + \frac{1}{\tau_2} A_{22} B_{22} \partial_2^4 \right\} + h(A_{66} + \\
&\quad + \eta B_{66}) \partial_1^2 + h(A_{22} + \eta B_{22}) \partial_2^2, \\
L_{23} &= \frac{h^2}{3} \partial_2 [(A_{12} + 2A_{66}) \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2] + A_{23} \partial_2, \\
f_2 &= -p_2^s + \frac{h^2}{3G\tau_2} (A_{66} \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2) p_2^s + \frac{h^2}{3G\tau_1} (A_{12} + A_{66}) \partial_{12}^2 p_1^s - h(X_2 + \eta X_2^f), \\
L_{31} &= \frac{\eta h^2}{2} \cdot \partial_1 \left[\left(1 + \frac{A_{13}}{G\tau_1} \right) (B_{11} \partial_1^2 + B_{66} \partial_2^2) + \right. \\
&\quad \left. + (B_{12} + B_{66}) \left(1 + \frac{A_{32}}{G\tau_2} \right) \partial_2^2 \right] - \frac{3}{2} A_{13} \partial_2, \\
L_{32} &= + \frac{\eta h^2}{2} \partial_2 \left[\left(1 + \frac{A_{32}}{G\tau_2} \right) (B_{66} \partial_1^2 + B_{22} \partial_2^2) + \right. \\
&\quad \left. + (B_{12} + B_{66}) \left(1 + \frac{A_{31}}{G\tau_1} \right) \partial_1^2 \right] - \frac{3}{2} A_{23} \partial_2, \\
L_{33} &= -\frac{h}{2} \left(A_{31} \partial_1^2 + A_{32} \partial_2^2 + \frac{3}{h^2} A_{33} \right), \\
f_3 &= -\frac{3}{2} p_3^s + \frac{1}{2} h \left[\left(1 + \frac{A_{13}}{G\tau_1} \right) \partial_1 p_1^s + \left(1 + \frac{A_{23}}{G\tau_2} \right) \partial_2 p_2^s \right],
\end{aligned}$$

Równania (1.20) są uwikłanym układem różniczkowych równań cząstkowych łącznie dziesiątego rzędu. Rozwiązanie układu najwygodniej jest znaleźć numerycznie np. metodą różnic skończonych.

1.4. Warunki brzegowe. Warunki brzegowe wyprowadzimy korzystając ze znanego w rachunku wariacyjnym pojęcia naturalnych warunków granicznych.

Stąd otrzymujemy następujący związek na pobocznicę walca ograniczającej tarczę

$$(1.22) \quad \delta \left[\iint_F (\sigma_{nn} u_n + \sigma_{ns} u_s + \sigma_{n3} u_3) dx_3 ds \right] = 0,$$

tutaj δ oznacza wariację całki powierzchniowej.

Po podstawieniu (1.7) i (1.8) do (1.22) i wykonaniu całkowania po grubości tarczy mamy

$$(1.23) \quad \int_s \left[\left(\eta \sigma_{nn}^f + \sigma_{nn}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{nn}^1 \right) \delta u_n^0 + \frac{2}{3} \left(\sigma_{nn}^0 + \frac{4}{5} \sigma_{nn}^1 \right) \delta u_n^1 + \right. \\ \left. + \left(\eta \sigma_{ns}^f + \sigma_{ns}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{ns}^1 \right) \delta u_s^0 + \frac{2}{3} \left(\sigma_{ns}^0 + \frac{4}{5} \sigma_{ns}^1 \right) \delta u_s^1 + \frac{1}{3} x^r \delta u_3^0 \right] ds = 0,$$

gdzie

$$X^r = G \tau_\alpha \left(-\frac{2}{h} u_\alpha^1 + u_{3,\alpha}^0 \right).$$

Stąd otrzymujemy następujące jednorodne warunki brzegowe: statyczne

$$(1.24) \quad \eta \sigma_{nn}^f + \sigma_{nn}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{nn}^1 = 0, \quad \sigma_{nn}^0 + \frac{1}{5} \sigma_{nn}^1 = 0, \\ \eta \sigma_{ns}^f + \sigma_{ns}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{ns}^1 = 0, \quad \sigma_{ns}^0 + \frac{4}{5} \sigma_{ns}^1 = 0, \\ X^r = 0.$$

i geometryczne

$$(1.25) \quad u_n^0 = 0, \quad u_n^1 = 0, \quad u_s^0 = 0, \quad u_s^1 = 0, \quad u_3^0 = 0,$$

gdzie składowe stanu naprężenia σ^f i σ^k ($k = 0, 1$) są określone przez wzory (1.9) i (1.10).

Wynikowy układ równań różniczkowych dla tarczy trójwarstwowej jest łącznie dziesiątego rzędu. Pozwala to spełnić po pięć warunków brzegowych na pobocznicę walca ograniczającej tarczę. W warunkach brzegowych może więc występować w różnych kombinacjach pięć wielkości geometrycznych i statycznych spośród (1.24) i (1.25).

Poza wymienionymi mogą występować jeszcze inne kombinacje warunków brzegowych. Gdy mamy różne warunki brzegowe w obszarze rdzenia i okładzin wtedy spełniamy całkowo warunki brzegowe oddzielnie dla rdzenia i okładzin. W tym przypadku na pobocznicę walca ograniczającej tarczę może występować w różnych kombinacjach pięć wielkości geometrycznych

$$(1.26) \quad u_n^0, \quad u_n^0 + \frac{2}{3} u_n^1, \quad u_s^0, \quad u_s^0 + \frac{2}{3} u_s^1, \quad u_3^0$$

i pięć statycznych

$$(1.27) \quad \sigma_{nn}^f, \quad \sigma_{nn}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{nn}^1, \quad \sigma_{ns}^f, \quad \sigma_{ns}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{ns}^1, \quad X^r.$$

Przy jednorodnych warunkach brzegowych związki (1.26) są identyczne z (1.27). Pewne różnice występują w statycznych warunkach brzegowych. Na podstawie (1.27) mamy

$$(1.28) \quad \sigma^0 + \frac{4}{5} \sigma^1 = \sigma^0 + 0,8 \sigma^1 = 0,$$

natomiast związki (1.27) prowadzą do zależności

$$\sigma^0 + \frac{4}{6} \sigma^1 = \sigma^0 + 0,66 [6] \sigma^1 = 0.$$

Ze względu na antysymetryczny charakter przemieszczenia u_3 i naprężeń $\sigma_{\alpha 3}$ zachodzą związki

$$(1.29) \quad \int_{-(h+\delta)}^{h+\delta} u_3 dx_3 = 0, \quad \int_{-h}^h \sigma_{\alpha 3} dx_3 = 0.$$

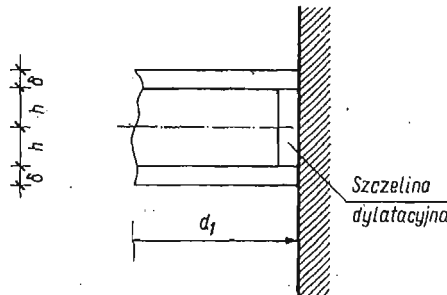
Wymienimy kilka kombinacji warunków brzegowych jakie mogą wystąpić w tarczy trójwarstwowej wzdłuż brzegu $x_1 = \alpha$.

Jeśli tarcza wzdłuż brzegu jest całkowicie utwierdzona wtedy mamy

$$(1.30) \quad u_1^0 = 0, \quad u_1^1 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_2^1 = 0, \quad u_3^0 = 0.$$

W tym przypadku warunki brzegowe są ściśle spełnione, gdyż żaden z punktów leżących na poboczniczy walca ograniczającej tarczę nie przemieszcza się.

W tarczy trójwarstwowej może wystąpić jeszcze inny rodzaj utwierdzenia. Utwierdzone mogą być tylko okładziny tarczy, a rdzeń może mieć jednorodne statyczne warunki brzegowe rys. 2.



Rys. 2

Jest to przykład nieciągłych warunków brzegowych w przekroju poprzecznym tarczy. Na podstawie (1.26) i (1.27) mamy

$$(1.31) \quad u_1^0 = 0, \quad \sigma_{11}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{11}^1 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad \sigma_{12}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{12}^1 = 0, \\ u_3^0 = 0.$$

W tym przypadku są ściśle spełnione warunki brzegowe w okładzinach, natomiast w rdzeniu w ten sposób, iż wypadkowe naprężenia brzegowych są równe zeru.

$$N_{11} = 2h \left(\sigma_{11}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{11}^1 \right) = 0, \quad N_{12} = 2h \left(\sigma_{12}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{12}^1 \right) = 0,$$

Pozostały warunek dotyczący zerowania się naprężeń σ_{13} jest spełniony w postaci (1.29)₂.

Jeśli wzdłuż nieobciążonego i swobodnego brzegu znajduje się nieskończenie sztywna w swojej płaszczyźnie, i doskonale wiotka z płaszczyzny przepona brzeg spełniająca warunki antysymetrii to korzystając z (1.24) i (1.25) otrzymujemy

$$(1.32) \quad \eta\sigma_{11}^f + \sigma_{11}^0 + \frac{2}{3}\sigma_{11}^1 = 0, \quad \sigma_{11}^0 + \frac{4}{5}\sigma_{11}^1 = 0, \\ u_2^0 = 0, \quad u_2^1 = 0, \quad u_3^0 = 0.$$

Przedstawione przykłady dotyczą jednorodnych warunków brzegowych.

Gdy na całkowicie utwierdzonym brzegu działa siła ściskająca N wtedy mamy

$$(1.33) \quad \eta\sigma_{11}^f + \sigma_{11}^0 + \frac{2}{3}\sigma_{11}^1 = -\frac{N}{2h}, \quad u_1^1 = 0, \quad u_2^0 = 0, \\ u_2^1 = 0, \quad u_3^0 = 0.$$

Jeśli brzeg utwierdzony jak na rys. 2 jest ściskany siłą N warunki brzegowe mają postać

$$(1.34) \quad N_{11}^f = \delta\sigma_{11}^f = -\frac{1}{2}N, \quad \sigma_{11}^0 + \frac{2}{3}\sigma_{11}^1 = 0, \quad u_2^0 = 0, \\ \sigma_{12}^0 + \frac{2}{3}\sigma_{12}^1 = 0, \quad u_3^0 = 0.$$

2. Uproszczenie teorii

Można wykazać, że w tarczach trójwarstwowych, w których rdzeń ma kilkakrotnie mniejsze stałe sprężystości niż okładziny, wpływ przemieszczenia u_3^0 na naprężenia $\sigma_{\alpha 3}$ jest znikomy. Po jego pominięciu mamy

$$(2.1) \quad \sigma_{\alpha 3} \approx -\frac{2G\tau_\alpha}{h}u_{\alpha\zeta}^1.$$

Konsekwencją założenia (2.1) przemieszczenia u_α^1 , naprężenia σ_{33} i układ równań (1.20) upraszczają się do postaci

$$(2.2) \quad \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = -\frac{h\delta}{2G} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1}(B_{11}^f \partial_1^2 + B_{66}^f \partial_2^2), & \frac{1}{\tau_1}(B_{12}^f + B_{66}^f) \partial_{12}^2 \\ \frac{1}{\tau_2}(B_{12}^f + B_{66}^f) \partial_{12}^2, & \frac{1}{\tau_2}(B_{66}^f \partial_1^2 + B_{22}^f \partial_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} - \\ - \frac{h}{2G} \begin{bmatrix} p_1^s \\ \tau_1 \\ p_2^s \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

$$(2.3) \quad \sigma_{33} = p_3^s - G\tau_\alpha u_{\alpha,\alpha}^1 (1 - \zeta^2),$$

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & A_{13} \partial_1 \\ L_{21} & L_{22} & A_{23} \partial_2 \\ L_{31} & L_{32} & -\frac{3}{2} \frac{A_{33}}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Z równania (2.4)₃ wyznaczamy

$$(2.5) \quad u_3^0 = \frac{2}{3} \frac{h}{A_{33}} (L_{3\alpha} \cdot u_\alpha^0 - f_3).$$

Jeśli podstawimy (2.5) do pozostałych równań (2.4) to otrzymamy następujący układ równań różniczkowych

$$(2.6) \quad L_{\alpha\beta}^i u_\beta^0 = f_\alpha',$$

gdzie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} L'_{11} &= L_{11} + \frac{2}{3} h \frac{A_{13}}{A_{33}} \partial_1 L_{31}, & L'_{12} &= L_{12} + \frac{2}{3} h \frac{A_{13}}{A_{33}} \partial_1 L_{32}, \\ L'_{21} &= L_{21} + \frac{2}{3} h \frac{A_{23}}{A_{33}} \partial_2 L_{31}, & L'_{22} &= L_{22} + \frac{2}{3} h \frac{A_{23}}{A_{33}} \partial_2 L_{32}, \\ f'_1 &= f_1 + \frac{2}{3} h \frac{A_{13}}{A_{33}} \partial_1 f_3, & f'_2 &= f_2 + \frac{2}{3} h \frac{A_{23}}{A_{33}} \partial_2 f_3. \end{aligned}$$

Układ równań (2.6) jest łącznie ósmego stopnia i zawiera tylko dwie niewiadome u_α^0 co znacznie ułatwia jego rozwiązanie.

Z uwagi na wysoki rząd układu równań (2.6) oraz złożoną budowę operatorów różniczkowych (2.7) rozwiązanie analityczne może nastęrczać duże trudności. Z tego względu rozwiązanie układu najwygodniej jest znaleźć numerycznie.

3. Przykład

Sposób korzystania z wyprowadzonych związków do uściślonej analizy tarcz trójwarstwowych zilustrujemy następującym przykładem. Rozpatrzmy trójwarstwowe pasmo tarczowe rozciągane siłami N . Na brzegach tarczy znajdują się przepony, które nie pozwalają na przemieszczenia punktów brzegowych w kierunku grubości tarczy. Zadanie rozwiążemy dla tarczy, w której rdzeń i okładziny są wykonane z materiałów izotropowych.

Zastosujmy teorię uproszczoną co pozwoli w łatwy sposób otrzymać ogólne wzory.

Jest to przypadek płaskiego stanu odkształcenia $\varepsilon_{22} = 0$. Równania różniczkowe teorii uproszczonej do wyznaczenia niewiadomych geometrycznych mają postać

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u^1 &= -\frac{\eta m h^2}{1-\nu} \frac{d^2 u^0}{dx^2}, & w &= \frac{2}{3} \frac{h}{1-\nu} \left[\frac{\eta m h^2}{2(1-\nu)} \frac{d^3 u^0}{dx^3} - \frac{3}{2} \nu \frac{du^0}{dx} \right], \\ & -\frac{1}{3} \eta m h^2 \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{d^4 u^0}{dx^4} + (1+\eta m) \frac{d^2 u^0}{dx^2} = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$m = \frac{1-\nu^2}{1-\nu_f^2} \frac{E^f}{E}, \quad E \text{ i } \nu \text{ oznaczają moduł sprężystości podłużnej i liczbę Poissona rdzenia}$$

a E^f i ν_f te same stałe dla okładzin, $u^0 = u_1^0$, $w = u_3^0$, $x = x_1$.

Rozwiązaniem równania różniczkowego są funkcje

$$(3.2) \quad u^0 = C_1 + C_2 \xi + C_3 \operatorname{Sh} k \xi + C_4 \operatorname{Ch} k \xi,$$

tutaj

$$k = \frac{a}{h} \sqrt{\frac{3(1-\nu)}{2-\nu} \left(1 + \frac{1}{\eta m}\right)}, \quad \xi = x/a.$$

Z uwagi na antysymetrię funkcji u^0 względem środka tarczy $C_1 = C_4 = 0$.
Stałe całkowania C_2 i C_3 wyznaczamy z następujących warunków brzegowych:

$$(3.3) \quad \text{dla } x = a \quad \begin{aligned} N_{11} &= 2h \frac{E}{1-\nu^2} \frac{d}{dx} \left[(1+\eta m)u^0 + \frac{2}{3}u^1 \right] = N, \\ w &= \frac{2}{3} \frac{h}{1-\nu} \left[\frac{\eta m h^2}{2(1-\nu)} \frac{d^3 u^0}{dx^3} - \frac{3}{2} \nu \frac{du^0}{dx} \right] = 0. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$(3.4) \quad C_2 = \frac{1}{2} \frac{N}{S} a, \quad C_3 = -\frac{1}{2} \frac{N}{S} \frac{a}{\kappa k \text{Ch} k},$$

Symbolami S i κ oznaczono wielkości

$$S = \frac{hE}{1-\nu^2} (1+\eta m), \quad \kappa = 1 - \frac{1}{\nu(2-\nu)} (1+\eta m),$$

gdzie $2S$ jest sztywnością tarczową rozważanego pasma występującą w teorii klasycznej (por. [5] str. 122).

Pola przemieszczeń i naprężeń określają związki:
w okładzinie dolnej

$$(3.5) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \frac{N}{S} a \left(\xi - \frac{1}{\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{k \text{Ch} k} \right), & w &= -\frac{1}{2} \frac{N}{S} \frac{\nu h}{1-\nu} \left(1 - \frac{\text{Ch} k \xi}{\text{Ch} k} \right), \\ \sigma_{11}^f &= \frac{1}{2} \frac{Nm}{h(1+\eta m)} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\text{Ch} k \xi}{\text{Ch} k} \right), \end{aligned}$$

w rdzeniu

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \frac{N}{S} a \left[\xi - \frac{1}{\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{k \text{Ch} k} \left(1 - \eta m \frac{h^2}{a^2} k^2 (1 - \xi^2) \right) \right], \\ w &= -\frac{1}{2} \frac{N}{S} \frac{\nu h}{1-\nu} \left(1 - \frac{\text{Ch} k \xi}{\text{Ch} k} \right) \zeta, \\ \sigma_{11} &= \frac{1}{2} \frac{N}{h} \frac{1}{1+\eta m} \beta(\xi, \zeta), \end{aligned}$$

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{4} (1 - \xi^2) \frac{Nh}{a^2} \frac{\eta m}{1+\eta m} \frac{k^2}{\kappa} \frac{\text{Ch} k \xi}{\text{Ch} k},$$

$$\sigma_{13} = -\frac{1}{2} \frac{N}{a} \frac{\eta m}{1+\eta m} \frac{k}{\kappa} \zeta \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k a},$$

$$\beta(\xi, \zeta) = 1 - \left[1 + \frac{\nu}{(2-\nu)(1-2\nu)} (1+\eta m) \left(1 - 3 \frac{(1-\nu)^2}{\nu} (1 - \xi^2) \right) \right] \frac{\text{Ch} k \xi}{\kappa \text{Ch} k}$$

Tutaj $\frac{1}{2} \frac{Nm}{h(1+\eta m)} = \sigma_{11}^*$ i $\frac{1}{2} \frac{N}{h(1+\eta m)} = \sigma_{11}^*$ są naprężeniami w okładzinie i rdzeniu otrzymanymi z teorii klasycznej.

Łatwo zauważyć, że różnica między rozwiązaniem klasycznym, a uściślonym jest duża dla małych wartości współczynnika k . Współczynnik ten maleje wraz ze wzrostem h/a , ηm i liczby Poissona ν . Dla dużych wartości k występują tylko zaburzenia brzegowe.

Jak wynika z powyższych związków na brzegu tarczy mogą występować duże różnice między klasycznymi naprężeniami σ_{11}^* i σ_{11}^{f*} a uściślonymi. Fakt ten wskazuje na dużą koncentrację naprężeń w otoczeniu brzegu z żeberkiem usztywniającym lub brzegu utwierdzonego. Z uwagi na całkowite spełnienie warunków brzegowych naprężenia σ_{11} na brzegu mogą być obarczone dużymi błędami z tego względu nie będziemy ich badać. W odległości $2h$ od brzegu różnice między naprężeniami klasycznymi a uściślonymi są niewielkie.

Przeprowadzimy zatem analizę wielkości naprężeń σ_{13} i σ_{33} :

$$\zeta = 1 \quad \sigma_{13} = -\frac{1}{2} \frac{N}{h} \frac{1}{1+\eta m} \lambda_1(\xi),$$

$$\zeta = 0 \quad \sigma_{33} = -\frac{1}{2} \frac{N}{h} \frac{1}{1+\eta m} \lambda_2(\xi),$$

gdzie $\lambda_1(\xi) = \frac{\eta m}{\kappa} \frac{h}{a} k \frac{\text{Sh}k\xi}{\text{Ch}k}$, $\lambda_2(\xi) = \frac{\eta m}{2\kappa} \left(\frac{h}{a}\right)^2 k^2 \frac{\text{Ch}k\xi}{\text{Ch}k}$.

Wyrażenie $\frac{1}{2} \frac{N}{h} \frac{1}{1+\eta m}$ oznacza naprężenie σ_{11}^* . Funkcje $\lambda_1(\xi)$ i $\lambda_2(\xi)$ przedstawiają stosunek naprężeń σ_{13} i σ_{33} do naprężenia σ_{11}^* w rdzeniu obliczonego na podstawie teorii klasycznej.

W tabelicy 1 zestawiono wartości funkcji $\lambda_1(1) = \sigma_{13}(1)/\sigma_{11}^*$ i $\lambda_2(1) = \sigma_{33}(1)/\sigma_{11}^*$ dla tarcz o $\eta = \delta/h = 0,10$ w zależności od wartości ν i m .

Tablica 1

$m = \frac{E^f}{E} \frac{1-\nu^2}{1-\nu_f^2}$		10	100	1000	∞
$\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}^*}$	$\nu = 0,25$	0,4490	0,4926	0,4957	0,4861
	$\nu = 0,45$	0,7813	0,7326	0,7210	0,7196
$\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{11}^*}$	$\nu = 0,25$	0,3600	0,2929	0,2824	0,2813
	$\nu = 0,45$	0,5700	0,3964	0,3738	0,3712

Analiza zestawionych w tabelicy współczynników wskazuje na występowanie dość dużych naprężeń σ_{13} i σ_{33} w otoczeniu brzegu tarczy. Na przykład dla $\nu = 0,25$ i $m = 100$ $\sigma_{13} = 0,49 \sigma_{11}^*$ a $\sigma_{33} = 0,29 \sigma_{11}^*$. Naprężenia te rosną ze wzrostem liczby Poissona rdzenia.

Z uwagi na dość duże różnice między teorią klasyczną a uściśloną analiza koncentracji naprężeń w otoczeniu brzegu powinna być przeprowadzona za pomocą teorii ogólnej układu równań (1.20). Pozwoli to dokładnie spełnić warunki brzegowe. W rozważanym

przypadku trzeci warunek brzegowy ma postać

$$(3.7) \quad \sigma_{11} = Ku_1^1,$$

gdzie K jest współczynnikiem sprężystości żeberka brzegowego.

Jeśli $K = \infty$ to $u_1^1 = 0$ i mamy krawędź całkowicie utwierdzoną.

4. Ocena zbieżności rozwiązania

Ścisłe ustalenie zbieżności rozwiązania dla tarczy trójwarstwowej nastęrcza duże trudności. Z tego względu oceny dokonamy w sposób przybliżony. Przyjmujemy, że błonowe równania równowagi są dostatecznie dokładne dla cienkich z reguły okładzin. Pozostaje zatem ocena zbieżności rozwiązania w rdzeniu. Równanie równowagi sił pionowych dla przyjętych założeń jest ściśle spełnione (1.11). Równania równowagi sił poziomych są uśrednione całkowo co w pewnych przypadkach może spowodować dość duże błędy.

Równanie równowagi sił poziomych w płaskim stanie odkształcenia ma postać

$$(4.1) \quad \sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0,$$

stąd

$$(4.2) \quad \sigma_{13} = - \int \sigma_{11,1} dx_3.$$

Jeśli do równania (4.2) podstawimy naprężenia σ_{11} określone związkem (3.6)₃ to otrzymamy

$$(4.3) \quad \sigma'_{13} = \frac{1}{2} \frac{N}{1+\eta m} \zeta \left[1 + \frac{\nu(1+\eta m)}{(2-\nu)(1-2\nu)} \left(1 - 3 \frac{(1-\nu)^2}{\nu} \left(1 - \frac{1}{3} \zeta^2 \right) \right) \frac{k}{a\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k} \right]$$

Jest to naprężenie jakie powinno towarzyszyć naprężeniom σ_{11} przy ścisłym spełnieniu równania równowagi sił poziomych w rdzeniu.

W wykonanym przykładzie mamy

$$(4.4) \quad \sigma_{13} = - \frac{1}{2} \frac{N}{a} \frac{\eta m}{1+\eta m} \frac{k}{\kappa} \zeta \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k}.$$

Różnica między naprężeniami wynosi

$$(4.5) \quad \Delta \sigma_{13} = \sigma'_{13} - \sigma_{13} = - \frac{1}{4} N \left[1 + \frac{\nu}{(2-\nu)(1-2\nu)} \right] \frac{k}{a\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k} (1 - \zeta^2) \zeta.$$

Wypadkowa $\Delta \sigma_{13}$ działająca na połowę tarczy wynosi

$$(4.6) \quad h \int_0^1 \Delta \sigma_{13} d\zeta = - \frac{1}{16} N \frac{h}{a} \vartheta \frac{k}{\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k},$$

gdzie

$$\vartheta = 1 + \frac{\nu}{(2-\nu)(1-2\nu)}.$$

Stosunek wypadkowej (4.6) do analogicznej wypadkowej naprężenia (4.4) wynosi

$$(4.7) \quad \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1}{4} \vartheta \frac{1+\eta m}{\eta m}.$$

W tarczach o $\nu = 0,25$ i $\nu = 0,45$ odpowiednio mamy

$$(4.8) \quad \frac{\Delta Q}{Q} = 0,2733 \frac{1 + \eta m}{\eta m}, \quad \frac{\Delta Q}{Q} = 0,9758 \frac{1 + \eta m}{\eta m}.$$

Jeśli $\eta = 0,10$ i $m = 10$ to wypadkowe naprężeń σ_{13} są mniejsze od σ'_{13} o $\varepsilon_1 = 100\% \cdot \Delta Q/Q = 30,06\%$ dla $\nu = 0,25$ i $\varepsilon_2 = 88,70\%$ dla $\nu = 0,45$.

Stąd wynika, że zbieżność rozwiązania jest dobra w tarczach o małej wartości ν i dużej wartości ηm .

5. Uwagi końcowe

W pracy wprowadzono równania uściślonej teorii ortotropowych tarcz trójwarstwowych, poddanych działaniu sił powierzchniowych o wszystkich trzech składowych i sił masowych.

Założono, że w rdzeniu tarczy są pełne tensory stanów naprężenia i odkształcenia, a w cienkich z reguły okładzinach występuje błonowy stan naprężenia i przemieszczenia.

Zadanie rozwiązano w przemieszczeniach, zakładając ciągłe pole przemieszczeń w całym obszarze tarczy.

W rezultacie otrzymano uwikłany układ trzech równań różniczkowych cząstkowych łącznie dziesiątego rzędu do wyznaczenia trzech wielkości geometrycznych u_i^0 ($i = 1, 2, 3$) stanowiących przemieszczenia okładziny tarczy.

Rozwiązanie układu najwygodniej jest znaleźć sposobem numerycznym na przykład metodą różnic skończonych.

Z uwagi na przyjęte założenia kinematyczne wielkości antysymetryczne względem płaszczyzny środkowej zmieniają się liniowo po grubości rdzenia. Fakt ten ogranicza zastosowanie teorii do tarcz o średniej grubości $h/a \leq 1/4$ i z rdzeniem o mniejszej nośności od okładzin $\eta E^f/E > 1$.

Wykonany przykład wskazuje, że w otoczeniu obciążonego brzegu utwierdzonego lub z żeberkiem usztywniającym może występować dość duża koncentracja naprężeń. Ma to istotne znaczenie gdyż w tarczach trójwarstwowych prawie zawsze występują kręwdziowe żeberka usztywniające.

Różnice między rozwiązaniem klasycznym, a uściślonym rosną ze wzrostem grubości, liczby Poissona, oraz podatności rdzenia tarczy.

Literatura cytowana w tekście

1. А. П. МЕЛКОНЯН, *Изгиб трехслойной толстой плиты*, Изв. Акад. Наук Армянской С.С.Р нр. 2/1959.
2. А. П. МЕЛКОНЯН, *Об изгибе двухслойной толстой плиты*, Изв. Акад. Наук Армянской С.С.Р нр. 5/1962.
3. А. Я. АЛЕКСАНДРОВ, Л. Е. БРЮККЕР, Л. М. КУРШИН, А. П. ПРУСАКОВ, *Расчет трехслойных панелей*. Оборонгиз, Москва, 1960.
4. F. J. PLANTEMA, *Sandwich Construction. The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates, and Shells*, New York, London, Sydney 1966.

5. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
6. J. KUJAWSKI, *Obrotowo symetryczny stan naprężenia w grubych tarczach o ortotropii cylindrycznej*, Rozprawy Inżynierskie Nr. 3/1975.
7. J. KUJAWSKI, *Techniczna teoria grubych tarcz ortotropowych*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Nr 2/1977.
8. С. А. АМБАРЦУМЯН, *Теория анизотропных пластин*, Наука Москва 1967.

Резюме

ТЕОРИЯ ОРТОТРОПНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛИТ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

В работе выведены уравнения уточненной теории ортотропных трехслойных плит под действием поверхностных сил с всех трех компонентах и массовых сил. Принимается, что в сердцевине плиты возникает состояние напряжения и деформации отвечающее полным матрицам соответствующих тензоров — с другой стороны, как правило, в ограничивающих слоях имеется мембранное состояние напряжения и деформации как в классической теории плит.

Задача решена в перемещениях при предположении непрерывного поля перемещений в целой области плиты. В результате получено нелинейную систему трех дифференциальных уравнений совместно десятого порядка для определения трех геометрических величин являющихся перемещениями в ограничивающих слоях. Работа проиллюстрирована примером, из которого вытекает существование сравнительно большой концентрации напряжений в окрестности нагруженного берега.

Summary

THEORY OF STRETCHING ORTHOTROPIC SANDWICH PLATES WITH MODERATE THICKNESS

The paper presents an improved method of calculation of orthotropic sandwich plates with moderate thickness. The loadings of the plate consist of surface forces with all three components acting symmetrically with respect to the middle plane and body forces. It has been assumed that full tensors of stresses and strains are in a core of plate and in usually thin faces of plates, the membrane stresses and strains are similar to those of the classical theory.

The problem is solved in displacements assuming a continuous field of displacements in the whole plate's region. The obtained system of three differential equations of tenth order allows to determine the three unknown displacements of the face of the plate. In the given example we show the stress concentration near the loaded boundary.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 listopada 1977 r.

POWIERZCHNIE GRANICZNE DLA MODELU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO PRĘTA PRZY UWZGLĘDNIENIU ZMIAN GEOMETRII

KAZIMIERZ KOWALCZYK (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

W sposób analityczny efekty geometryczne uwzględniał po raz pierwszy K. JEŽEK [6], przy ocenie nośności sprężysto-plastycznych słupów. W badaniach doświadczalnych C. DYRBYE i P. Lange HANSEN [3] zwrócili uwagę na wpływ tych efektów na plastyczne zachowanie się konstrukcji (łuki kołowe).

Obecnie istnieje dość znaczna liczba prac, w których autorzy analizowali wpływ nieliniowości geometrycznych. Dotyczą one różnych przypadków konstrukcji (ramy, belki, płyty, powłoki, a także tarcze i cylindry wirujące), warunków brzegowych i materiałów. Brak natomiast badań o charakterze ogólniejszym.

Stosunkowo słabo jest opracowana teoria powierzchni granicznych na szczeblu całego ciała (np. w przestrzeni obciążeń). P. G. HODGE i C. K. SUN [5] pomijając efekty geometryczne przy przyjęciu postulatu Druckera wykazali, dla ciał idealnie sztywno-plastycznych, twierdzenie o wypukłości powierzchni granicznych i prostopadłości do nich wektora plastycznego płynięcia. G. MAIER i D. C. DRUCKER w pracy [10] nie stawiali takich ograniczeń i uwzględniali zmiany w geometrii. W tym przypadku powierzchnie graniczne mogą być wklęsłe i jest to na ogół związane z utratą stateczności konstrukcji; sformułowali oni pewne warunki (macierzowe) istnienia wklęsłości powierzchni granicznych, jednoznaczności i stateczności układu.

W obecnej pracy będziemy badać sprężysto-plastyczne zachowanie się konstrukcji geometrycznie nieliniowych. Wykażemy wpływ efektów geometrycznych na kształt i wielkość powierzchni granicznych, które obejmują szerszą klasę powierzchni, zgodnie z klasyfikacją nośności konstrukcji M. ŻYCKOWSKIEGO [15]. Dobierzemy w tym celu odpowiedni typ konstrukcji i wykorzystamy niektóre z twierdzeń MAIERA i DRUCKERA [10]. Efektywne wyniki otrzymamy numerycznie.

2. Przyjęty model konstrukcji i założenia

Badania przeprowadzimy na modelu belki wspornikowej, składającym się z części odkształcalnej i wielokrotnie dłuższej części sztywnej, obciążonym siłami o ustalonych kierunkach rys. 1. W pracy [7] przedstawiono krótką analizę tego typu modeli konstrukcji używanych w badaniach wstępnych.

Przyjęte na rysunku zwroty P_1 i P_2 będziemy uważać za dodatnie. Konsekwentnie ten sam znak otrzyma odpowiednie przemieszczenie (i odkształcenie) wywołane działaniem wyłącznie siły P_1 lub P_2 (przy założeniu zasady zeszywnienia).

Oznaczenia wielkości bezwymiarowych

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sigma_0}{E}, \quad \eta = \frac{l}{H}, \quad \varphi = \frac{L}{H} && \text{— parametry materiałowe i konstrukcyjne; } \sigma_0 \text{ — granica plastyczności, } E \text{ — moduł Younga,} \\ p_1 &= \frac{P_1}{F\sigma_0}, \quad p_2 = \frac{3\varphi P_2}{F\sigma_0} && \text{— obciążenia,} \\ u_1 &= \frac{U_1}{l}, \quad u_2 = \frac{U_2}{3\varphi l} && \text{— przemieszczenia,} \\ n &= \frac{N}{FE}, \quad m = \frac{M}{FEH} && \text{— siła podłużna i moment zginający w przekroju,} \\ e_0 &= \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_0}, \quad k = \frac{EH\kappa}{\sigma_0} = \frac{\alpha}{\mu\eta} && \text{— odkształcenie warstwy środkowej i krzywizna warstwy obojętnej,} \\ q &= P_2, \quad \omega = \arctg \frac{P_1}{P_2} && \text{— zastępcze parametry obciążenia,} \\ s &= \frac{\sigma}{\sigma_0} && \text{— naprężenie,} \\ z &= \frac{Z}{H}, \quad z_+, \quad z_- && \text{— współrzędne przekroju pręta („+” uplastycznienie po stronie rozciągania, „-” po stronie ściskania).} \end{aligned}$$

Bezwymiarowe obciążenia zdefiniowano tak, aby osiągnięcie nośności sprężystej czy tego rozciągania oraz zginania wystąpiło dla $p_1 = \pm 1$ i $p_2 = \pm 1$, przy pominięciu zmian geometrii. Odpowiednie odkształcenia wynoszą wówczas $e_0 = \pm 1$ i $k = \pm 1$, natomiast n i m oraz u_1 i u_2 przyjęto ze spełnienia zasady prac wirtualnych.

Ograniczymy się do prętów krępych w części odkształcalnej i przyjmijmy linię ugięcia w postaci łuku okręgu. Wobec tego założymy, że siły wewnętrzne N i M są w tej części belki stałe, równe odpowiednio [7]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} N &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha N(\vartheta) d\vartheta, \\ M &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha M(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

i pominiemy siły poprzeczne, których wpływ na wyężenia jest tu nieznaczny. Zatem rozkład naprężeń w części odkształcalnej modelu jest niezależny od ϑ . Pozwala to na stosunkowo proste przejście w badaniach od szczebla przekroju do szczebla całego ciała.

Przyjmijmy hipotezę płaskich przekrojów i liniowy rozkład odkształceń w postaci

$$(2.2) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa Z, \quad -H \leq Z \leq H,$$

Do obliczeń numerycznych szczególnie wygodne są zastępcze parametry obciążenia q i ω . Wówczas warunki (3.2) przyjmują postać

$$(3.3) \quad \begin{aligned} n &= \frac{2\mu}{3\varphi\alpha\cos\omega} q \sin\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\frac{\alpha}{2}, \\ m &= \frac{\mu}{3\varphi\cos\omega} q \left\{ \varphi\cos(\omega + \alpha) + \frac{\eta(1 + \mu e_0)}{\alpha} \left[\sin(\omega + \alpha) - \frac{2}{\alpha} \sin\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\frac{\alpha}{2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Równania konstytutywne zapisane ogólnie

$$(3.4) \quad \begin{aligned} n &= n(e_0, k), \\ m &= m(e_0, k) \end{aligned}$$

można wyprowadzić w oparciu o związki fizyczne i warunki równowagi sił wewnętrznych dla poszczególnych faz pracy przekroju pręta [7].

Podamy teraz podstawowe równania w zapisie MAIERA i DRUCKERA [10], które wykorzystamy do zdefiniowania macierzy geometrycznej sztywności konstrukcji. Będą to trzy rodzaje równań, mianowicie

równanie nierozdzielności w formie przyrostowej

$$(3.5) \quad \delta \epsilon = \mathbf{B} \delta u,$$

gdzie ϵ — uogólnione odkształcenia,

u — uogólnione przemieszczenia,

\mathbf{B} — macierz zgodności,

równanie równowagi otrzymane z (3.5) przy wykorzystaniu zasady prac wirtualnych

$$(3.6) \quad \mathbf{B}^T \delta = \mathbf{P},$$

gdzie σ — uogólnione siły wewnętrzne,

\mathbf{P} — uogólnione obciążenia, a \mathbf{B}^T oznacza transponowaną macierz \mathbf{B} , oraz

równanie konstytutywne w postaci przyrostowej

$$(3.7) \quad \delta \sigma = \mathbf{C} \delta \epsilon,$$

gdzie $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ oznacza macierz sztywności przekrojowych [13].

Przyrosty przemieszczeń możemy zapisać

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \delta u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial e_0} \delta e_0 + \frac{\partial u_1}{\partial k} \delta k, \\ \delta u_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial e_0} \delta e_0 + \frac{\partial u_2}{\partial k} \delta k. \end{aligned}$$

Po obliczeniu odpowiednich pochodnych z (3.1) i wykorzystaniu (3.5) wyznaczymy elementy macierzy \mathbf{B}

$$(3.9) \quad \begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{A_1} [\varphi\alpha^2\cos\alpha + \eta(1 + \mu e_0) (\alpha \sin\alpha + \cos\alpha - 1)], \\ B_{12} &= \frac{3\varphi}{A_1} [\varphi\alpha^2\sin\alpha + \eta(1 + \mu e_0) (\sin\alpha - \alpha \cos\alpha)], \\ B_{21} &= -\frac{\alpha}{A_2} \sin\frac{\alpha}{2}, \\ B_{22} &= \frac{3\varphi\alpha}{A_2} \cos\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono $A_1 = \mu[\varphi\alpha \sin \alpha + \eta(1 + \mu e_0)(1 - \cos \alpha)]$,

$$A_2 = \mu \left[\varphi\alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \eta(1 + \mu e_0) \sin \frac{\alpha}{2} \right].$$

Można następnie sprawdzić, że elementy transponowanej macierzy \mathbf{B}^T w równaniu (3.6) odpowiadają współczynnikom przy n i m w odwróconych względem p_1 i p_2 warunkach równowagi (3.2). Dowodzi to poprawności uśrednienia uogólnionych sił wewnętrznych (2.1).

Przyjmijemy liniową zależność $\delta\mathbf{B}$ i $\delta\mathbf{u}$ w postaci

$$(3.10) \quad \delta\mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}\delta\mathbf{u}$$

i przepiszemy równanie (3.6) w formie przyrostowej

$$(3.11) \quad \mathbf{B}^T\delta\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{G}\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{P},$$

gdzie zdefiniowana równaniem (3.10) macierz \mathbf{G} jest symetryczną macierzą geometrycznej sztywności konstrukcji.

W (3.10) $\delta\mathbf{B}^T$ zastąpimy przez

$$(3.12) \quad \delta\mathbf{B}^T = \frac{\partial\mathbf{B}^T}{\partial e_0} \delta e_0 + \frac{\partial\mathbf{B}^T}{\partial k} \delta k$$

i podstawimy (3.5) za przyrosty odkształceń. Po porównaniu współczynników przy δu_i , po obydwu stronach każdego z równań (3.10), wyznaczmy elementy macierzy \mathbf{G}

$$(3.13) \quad \begin{aligned} G_{11} &= B_{11} \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial e_0} n + \frac{\partial B_{21}}{\partial e_0} m \right) + B_{21} \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial k} n + \frac{\partial B_{21}}{\partial k} m \right), \\ G_{12} &= B_{12} \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial e_0} n + \frac{\partial B_{21}}{\partial e_0} m \right) + B_{22} \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial k} n + \frac{\partial B_{21}}{\partial k} m \right), \\ G_{21} &= B_{11} \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial e_0} n + \frac{\partial B_{22}}{\partial e_0} m \right) + B_{21} \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial k} n + \frac{\partial B_{22}}{\partial k} m \right), \\ G_{22} &= B_{12} \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial e_0} n + \frac{\partial B_{22}}{\partial e_0} m \right) + B_{22} \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial k} n + \frac{\partial B_{22}}{\partial k} m \right). \end{aligned}$$

Efektywne określenie wartości wyznacznika \mathbf{G} wymaga jeszcze obliczenia odpowiednich pochodnych z (3.9).

Warunkiem wystarczającym statecznej pracy konstrukcji jest dodatnia półokreśloność macierzy geometrycznej sztywności [10]

$$(3.14) \quad \det \mathbf{G} \geq 0.$$

Nierówność (3.14) nie jest przy tym warunkiem koniecznym i nie pozwala na wyznaczenie przedziału obciążeń powodujących utratę stateczności. Dlatego (3.14) będziemy stosować jako warunek sprawdzający, używając równoległe innego warunku stateczności, który podamy w dalszej części pracy.

4. Powierzchnie graniczne w przestrzeni obciążeń

Opiszemy teraz rozgraniczenia poszczególnych faz pracy konstrukcji. Wyznamy odpowiednie powierzchnie, aż do wyczerpania nośności pręta lub rozpoczęcia procesów lokalnie plastycznie biernych występujących po czynnych [7]. W obecnej pracy nie przeprowadzimy szczegółowej analizy tych procesów.

Po podstawieniu odpowiednich związków konstytutywnych (3.4) do warunków równowagi (3.3) i wyrugowaniu q , otrzymamy równanie uwikłane typu

$$(4.1) \quad F(e_0, k, \omega) = 0.$$

Przy wyznaczaniu powierzchni granicznych, do równania (4.1) dołączymy stosowne warunki rozgraniczenia i przyjmimy chwilową stałość parametru

$$(4.2) \quad \omega = \text{const.}$$

Z uwagi na symetrię rozważanego układu względem P_2 , obliczenia prowadzono w przedziale

$$(4.3) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2},$$

a wyniki przedstawiono graficznie w górnej połowie płaszczyzny $p_1 - p_2$.

Omówione następnie powierzchnie graniczne zachowują ważność przy dowolnych drogach obciążenia $\omega \neq \text{const}$, pod warunkiem nie wystąpienia procesów lokalnie plastycznie biernych. Założenie (4.2) spełnia więc rolę pomocniczą i stanowi niewielkie ograniczenie ogólności badań.

Dla początkowych powierzchni neutralnych [15] (sprężystych [8]), odpowiednie warunki rozgraniczenia mają postać

$$(4.4) \quad s(\pm 1) = e_0 \pm k = \pm 1.$$

Na rys. 2 przedstawiono początkowe powierzchnie neutralne i wpływ parametrów μ , η i φ na ich kształt. Zwróćmy uwagę, że powierzchnie neutralne na części odpowiadającej dodatnim wartościom p_1 są zawsze wypukłe, natomiast na pozostałej części wklęsłe. Jest to zasadnicza różnica w stosunku do klasycznego przypadku zginania z siłą podłużną, wynikająca z uwzględnienia wpływu zmian geometrii.

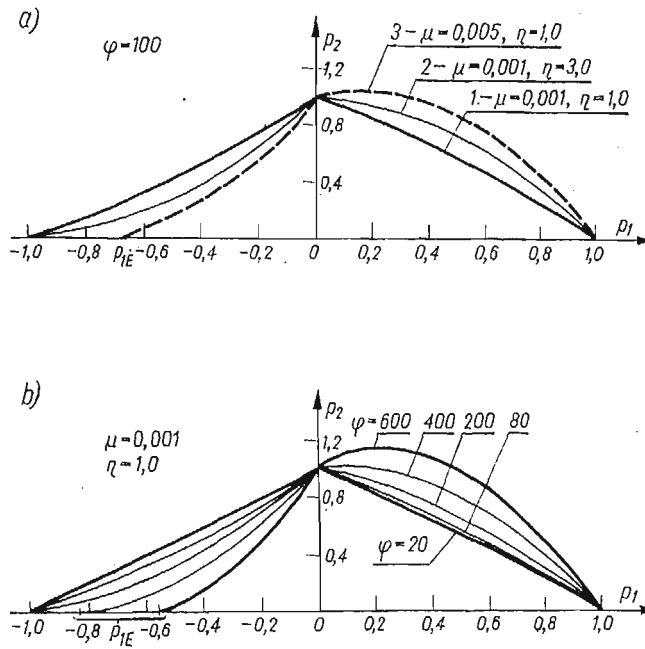
Dla dostatecznie dużych wartości μ , η , φ możliwa jest utrata stateczności konstrukcji w stanie sprężystym. Podamy wzór określający wartość odpowiedniej siły Eulera p_{1E} . Mianowicie, z dwóch rozwiązań układu równań (3.2) i (3.4), przy założeniu $p_2 = 0$ i $\alpha \rightarrow 0$, wybieramy bliższe zera

$$(4.5) \quad p_{1E} = -\frac{2}{\mu\eta [(3\varphi + \eta) + \sqrt{(3\varphi + \eta)^2 - 4}]}$$

Wyboczenie wystąpi w przypadku modelu pręta o parametrach spełniających nierówności

$$(4.6) \quad \begin{aligned} 3\varphi + \eta &\geq 2, \\ p_{1E} &\geq -1 \end{aligned}$$

i dla takich wartości μ , η , φ aktualny jest wzór (4.5).



Rys. 2. Zależność kształtu początkowych powierzchni neutralnych od parametrów μ , η i φ

Dodajmy, że dla $\varphi = 0$ (model konstrukcji bez części sztywnej) i pominięciu zmiany długości osi pręta, (4.5) przechodzi w znany związek na siłę krytyczną Eulera. Różnica współczynników liczbowych (3 zamiast $\frac{\pi^2}{4}$) jest wynikiem niesłuszności poczynionych założeń dla smukłego pręta jednoczęściowego.

Krzywe rozgraniczenia jednostronnego i dwustronnego uplastycznienia wyznaczmy z tych samych formalnie warunków (4.4). Różnica polega na innej kolejności dobierania znaków „+” i „-”. Dla obciążeń $p_1 > 0$ odpowiednia krzywa nie zamyka się (AD), natomiast dla $p_1 < 0$ pręt utraci stateczność (CE) przed osiągnięciem stanu obustronnego uplastycznienia, rys. 3a.

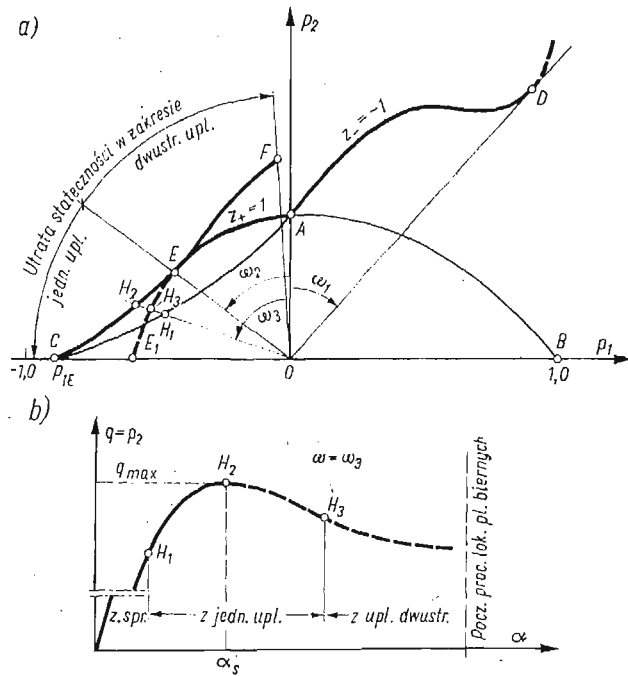
Krzywe utraty stateczności określimy z warunku

$$(4.7) \quad \frac{dq}{d\alpha} \geq 0,$$

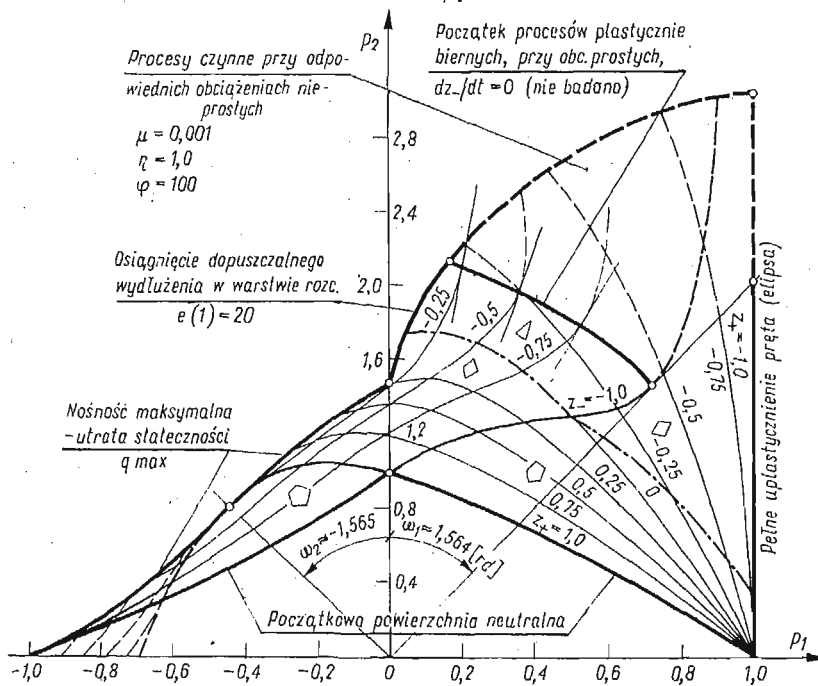
który jest aktualny jedynie dla obciążeń prostych typu (4.2); obciążenie wyznaczone z (4.7) przy spełnieniu równości będziemy nazywać nośnością maksymalną, rys. 3b.

Na nośność konstrukcji ma wpływ wiele czynników [14]. Omówione powyżej zjawiska są wynikiem wpływu efektów geometrycznych. Pierwsze badania stateczności przy uwzględnieniu zmian geometrii należą do R. HILLA [4] i E. T. ONATA [11, 12].

Należy podkreślić umowność przyjętej definicji nośności, ponieważ w niektórych przypadkach po „przeskoku” możliwe jest dalsze przenoszenie obciążenia. Również lokalne maksimum obciążenia może okazać się nieanalityczne i wówczas warunek typu (4.7) będzie niewłaściwy.



Rys. 3. Rozgraniczenie uplastycznienia jednostronnego od obustronnego i krzywe utraty stateczności oraz zależność $q(\alpha)$ przy obciążeniu prostym



Rys. 4. Komplet krzywych granicznych z pełnym opisem

Nośność rozdzielczą, odpowiadającą osiągnięciu dopuszczalnego odkształcenia w skrajnych włóknach pręta, opiszemy warunkiem

$$(4.8) \quad |e(\pm 1)| = |e_0 \pm k| \leq e_d.$$

Po raz pierwszy takie kryterium nośności stosowali J. DATSKO i C. T. YANG [2].

Wyczerpanie klasycznej nośności (pełne uplastycznienie pręta przez rozciąganie) wyznaczmy z warunku

$$(4.9) \quad z_+ = -1.$$

Procesy lokalnie plastycznie biernie nie pojawiają się jeżeli współrzędna z_+ będzie nierosnącą, a z_- niemalejącą funkcją czasu t . Stosowne warunki zapiszemy

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{dz_+}{dt} &\leq 0, \\ \frac{dz_-}{dt} &\geq 0, \end{aligned}$$

a odpowiednie krzywe początku tych procesów będziemy wyznaczać ze spełnienia równości w drugim z nich. Dodajmy, że w klasycznym przypadku zginania z siłą podłużną procesy lokalnie biernie nie pojawiają się w całym obszarze obciążeń proporcjonalnie rosnących typu (4.2).

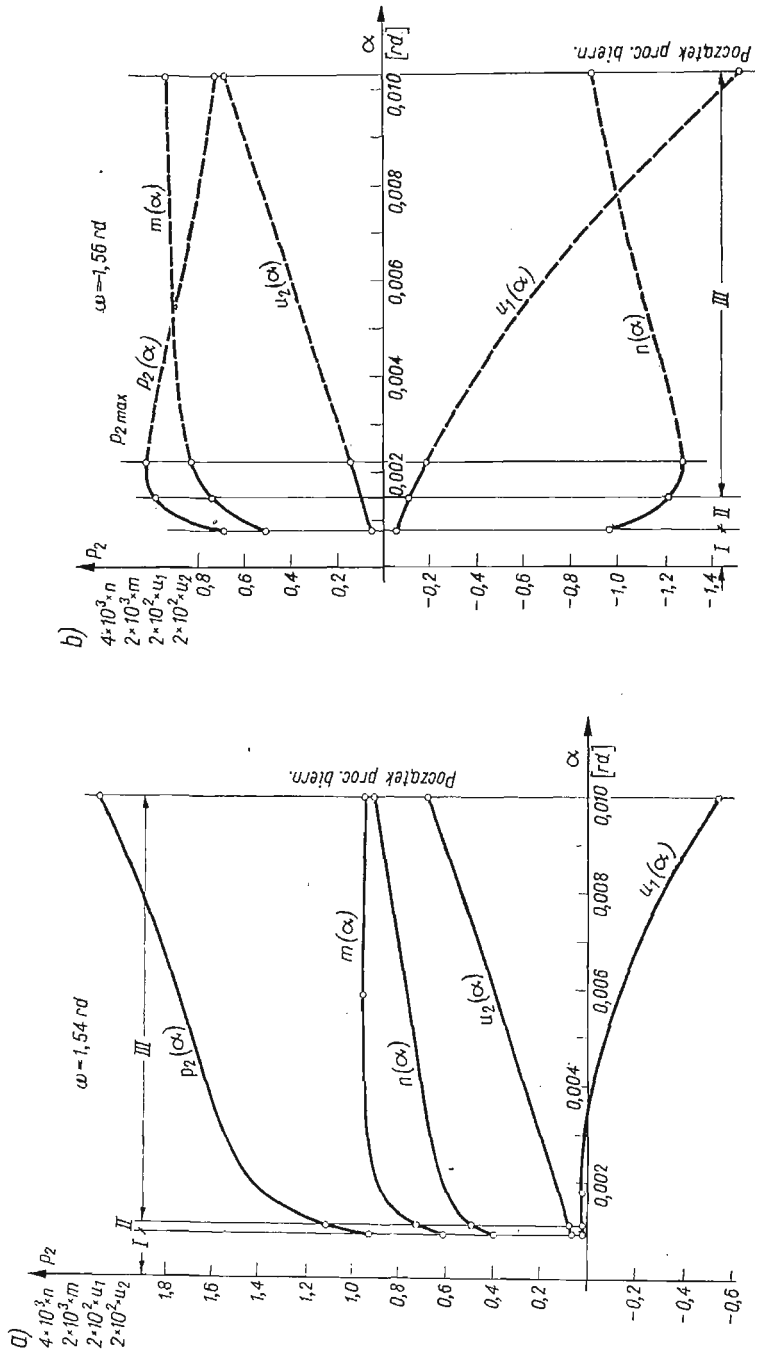
Komplet omówionych krzywych granicznych, z pełnym opisem, przedstawiono na rys. 4, na którym zaznaczono również linie stałych wartości współrzędnych uplastycznienia przekroju pręta $z_+ = \text{const}$ i $z_- = \text{const}$. Pozwala to na ocenę możliwości pojawienia się procesów plastycznie biernych przy różnych drogach obciążenia.

Poza granicą początku procesów lokalnie biernych, gdzie odpowiednie krzywe opisano liniami przerywanymi, mogą zachodzić procesy czynne pod warunkiem odpowiedniego sterowania zmianami sił zewnętrznych (obciążenia nieproste).

Poszczególne obszary na rys. 4 opisano znakami, które określają kształt zmienionych powierzchni neutralnych. Będą to odpowiednio pięciokąty, czworokąty i trójkąty krzywoliniowe. Tego typu obszary analizował E. CEGIELSKI [1], przy pominięciu zmian geometrii. Wówczas modyfikowane powierzchnie mają kształt tych samych figur, lecz o bokach prostoliniowych.

Obszar obciążeń, którym w wyniku modyfikacji odpowiadają powierzchnie neutralne nieobejmujące początku układu $p_1 - p_2$, również zależy od udziału efektów geometrycznych i może redukować się do zera dla dostatecznie dużych wartości μ , η i φ . Przy obciążeniach $\omega = \text{const}$ nie wystąpi degeneracja zmienionych powierzchni neutralnych jaką stwierdził J. A. KÖNIG [9] w przypadku geometrycznie liniowym. Modyfikacja taka (do odcinka linii prostej) może natomiast mieć miejsce dla odpowiednich obciążeń nieprostych. Szczegółowe badania zmienionych powierzchni neutralnych będą tematem oddzielnej pracy.

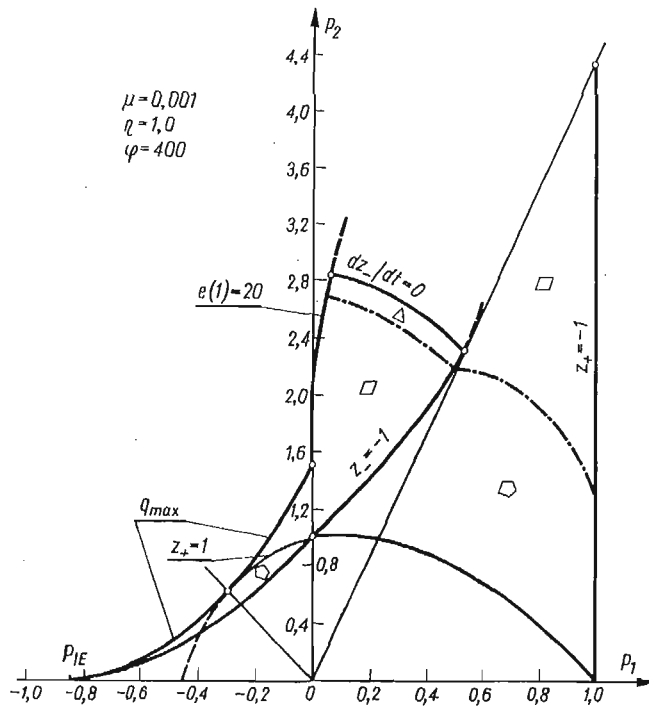
Na rys. 5 podano przebieg zmian niektórych parametrów w funkcji kąta ugięcia pręta. W pierwszym przypadku wykresy kończą się w miejscu rozpoczęcia procesów lokalnie biernych, natomiast w drugim wystąpi osiągnięcie nośności maksymalnej. Dalszą część wykresów, dla procesów sterowanych krzywizną pręta, opisano liniami przerywanymi.



Rys. 5. Zależność wybranych parametrów od kąta ugięcia pręta przy obciążeniach prostych

W przypadku konstrukcji o większej smukłości (rys. 6) wpływ geometrycznej nieliniowości jest silniejszy. Wypukłości i wklęsłości odpowiednich krzywych są większe, a utrata stateczności występuje przy mniejszych obciążeniach, biorąc pod uwagę bezwzględne wartości. Można stwierdzić wzrost nośności po stronie dodatnich p_1 i zmniejszenie w zakresie obciążeń $p_1 < 0$.

Omówione krzywe graniczne wyznaczano numerycznie. Podobnie sprawdzano warunki stateczności Maiera i Druckera (3.14), a odpowiednie programy nie posiadają wartości poznawczych.



Rys. 6. Krzywe graniczne dla modelu pręta o dużej smukłości

5. Wnioski końcowe

Wpływ zmian geometrii zależy od parametrów konstrukcyjnych i materiałowych, a jego charakter jest stabilizujący lub destabilizujący. Pierwszy występuje przy spełnieniu (3.14) i oznacza poprawienie warunków pracy konstrukcji. Powoduje wzrost wypukłości powierzchni granicznych, pojawienie się procesów łokanie plastycznie biernych i zwiększenie nośności. Destabilizujące efekty geometryczne są przyczyną wystąpienia wklęsłych powierzchni granicznych, związanej z tym niestateczności (konstrukcyjnej) i zmniejszenia nośności.

Przytoczone uwagi wskazują potrzebę prowadzenia dalszych badań, uwzględnienia wzmocnienia plastycznego, które może zmniejszyć wpływ osłabienia geometrycznego.

Literatura cytowana w tekście

1. E. CEGIELSKI, *Modyfikowane krzywe nośności sprężystej przy zginaniu z rozciąganiem belek o przekroju prostokątnym*, Czas. Techn., Z. 4-M (1976), 24—30.
2. J. DATSKO, C. T. YANG, *Correlation of bendability of materials with their tensile properties*, Trans. ASME 4, B 82 (1960), 309—313.
3. C. DYRBYE, P. LANGE HANSEN, *Studies on the load carrying capacities of steel structures*, Res. Lab. Build. Techn., Bull. No 3, Copenhagen 1954.
4. R. HILL, *A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids*, J. M. Phys., 6 (1958), 236—249.
5. P. G. HODGE, C. K. SUN, *General properties of yield-point load surfaces*, Trans. ASME 1, E 35 (1968) 107—110.
6. K. JEŽEK, *Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl*, Springer, Wien 1937.
7. K. KOWALCZYK, *Wpływ wzmocnienia plastycznego i wstępnej krzywizny na powierzchnie graniczne dla modelu pręta geometrycznie nieliniowego*, Pr. Kom. Mech. Stos., PAN Oddz. Kraków (w druku).
8. J. A. KÖNIG, *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos., 2, 18 (1966), 227—237.
9. J. A. KÖNIG, *A method of shake analysis of frames and arches*, Int. J. Solids and Structures, 7 (1971), 327—344.
10. G. MATER, D. C. DRUCKER, *Effects of geometry change on essential features of inelastic behaviour*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, EH 4, 99 (1973), 819—834.
11. E. T. ONAT, *The effects of non-homogeneity caused by strain-hardening on the small deformations of a rigid-plastic solid*, Proc. IUTAM Symp. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Perg. Press 1959, 171—180.
12. E. T. ONAT, *The influence of geometry changes on the load-deformation behaviour of plastic solids*, „Plasticity”, Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech., Perg. Press 1960, 225—238.
13. А. Р. Ржаницын, *К вопросу о мгновенной жесткости сечения*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж. 1966/2, 7—11.
14. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN Warszawa 1973.
15. M. ŻYCZKOWSKI, *Combined loadings in the theory of plasticity*, PWN-Noordhoff (w druku).

Резюме

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТВЕРЖНЯ ПРИ УЧТЕНИИ ИЗМЕНЕНИЙ ГЕОМЕТРИИ

Работа касается влияния изменений геометрии на предельные поверхности. Подобран соответствующий тип конструкции (рис. 1) и определены основные свойства этого влияния.

Стабилизационные геометрические эффекты (при выполнении условия Майера и Друкера (3.14)) вызывают выпуклость предельных поверхностей, выступление процессов местно пластически пассивных при простых нагрузках и увеличение несущей способности.

Дестабилизационные геометрические эффекты вызывают появление вогнутых предельных поверхностей, потер устойчивости конструкции и уменьшение несущей способности.

Соответствующие поверхности вычислены численно.

Summary

LIMIT SURFACES FOR A MODEL OF ELASTIC-PLASTIC BAR WITH GEOMETRY CHANGES TAKEN INTO ACCOUNT

The paper is concerned with the influence of geometric effects on limit surfaces. An appropriate perfectly elastic — plastic structural model is chosen for discussion of the problem, and some features of this influence on the behaviour of the structure are demonstrated.

Stabilizing geometric effects (with Maier — Drucker's stability condition satisfied) cause an increase of the convexity of limit surfaces, locally passive processes occur in the course of simple loadings, an increase of the maximal load carrying capacity is observed.

If destabilizing geometric effects are present, the concave limit surfaces are formed; this, as a rule, leads to unstable behaviour and decrease of the maximal load carrying capacity of the structure.

INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 kwietnia 1978 r.

NIEUSTALONE, KOŁOWO-NIESYMETRYCZNE POLE TEMPERATURY
W WYDRAŻONYM WALCU OGRZEWANYM NA ZEWNĘTRZNEJ POBOCZNICY

JAN TALER (KRAKÓW)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- A, B, C — stałe
 a — promień wewnętrzny walca
- $B_i = \frac{\alpha a}{\lambda}$ — liczba Biota
 b — promień zewnętrzny walca
 c — ciepło właściwe
- $F_o = \frac{\kappa \cdot \tau}{a^2}$ — liczba Fouriera
 $I_n(z)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela I-go rodzaju, n-tego rzędu
 $J_n(x)$ — funkcja Bessela I-go rodzaju, n-tego rzędu
 $K_n(z)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela II-go rodzaju n-tego rzędu
 $q'(\varphi, \tau)$ — strumień cieplny na zewnętrznej poboczniczy walca
 $q_m = q(\varphi = 0)$ — maksymalny strumień cieplny
 r — promień
- $t = \Theta - \Theta_0$ —
 $Y_n(x)$ — funkcje Bessela II-go rodzaju, n-tego rzędu
 α — współczynnik wnikania ciepła od wewnętrznej powierzchni walca do nośnika ciepła
 $\gamma_{n,m}$ — pierwiastki równania charakterystycznego
 Θ — temperatura
 Θ_0 — temperatura nośnika ciepła i początkowa walca
- $\kappa = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$ — współczynnik przewodzenia temperatury
 ρ — gęstość
 τ — czas
 φ — kąt
- $\omega_0 = \frac{b}{a}$ — stosunek promienia zewnętrznego walca do wewnętrznego

1. Wstęp

W wielu elementach maszyn i urządzeń zachodzi konieczność określenia nieustalonego pola temperatury wywołanego nagłym ich ogrzaniem.

Zagadnienie, stanowiące przedmiot niniejszej pracy występuje przy analizie warunków pracy rur ekranowych kotłów konwertorowych [1] a także przy ogrzewaniu rurociągów służących do przesyłania lepkich produktów przeróbki ropy naftowej i węgla [2, 3]. W wy-

mienionych wyżej przypadkach należy określić nieustalone pole temperatury w nieskończenie długiej rurze grubościennnej ogrzanej nagle na zewnętrznej powierzchni zmiennym w czasie, kołowo-niesymetrycznym strumieniem ciepłym i chłodzonej konwekcyjnie na wewnętrznej powierzchni.

2. Określenie pola temperatury

Rozkład temperatury w poprzecznym przekroju wydrążonego walca wyznaczony zostanie przy następujących założeniach:

1. Własności cieplne materiału walca są stałe i niezależne od temperatury;
 2. Strumień ciepły na zewnętrznej powierzchni walca jest stały wzdłuż jego osi;
 3. Współczynnik wnikania ciepła od wewnętrznej powierzchni walca do nośnika ciepła jest niezależny od czasu i temperatury;
 4. Temperatura nośnika ciepła Θ_c i początkowa walca Θ_p są sobie równe i wynoszą Θ_0 .
- Przy powyższych założeniach pole temperatury określone jest równaniem przewodzenia ciepła

$$(2.1) \quad \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial \tau} = \kappa \left[\frac{\partial^2 t(r, \varphi, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} \right],$$

warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad \lambda \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=b} = f(\tau) q(\varphi), \quad t > 0,$$

$$(2.3) \quad \lambda \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \alpha \cdot t(r, \varphi, \tau) \Big|_{r=a}, \quad t \geq 0$$

i warunkiem początkowym

$$(2.4) \quad t(r, \varphi, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia przeprowadzone zostanie w dwóch etapach. Niżej zostanie określone pole temperatury przy skokowym wzroście strumienia ciepłego na zewnętrznej powierzchni rury, tzn., że $f(\tau) = 1$ dla $t > 0$ i warunek brzegowy (2.2) przyjmuje postać

$$(2.5) \quad \lambda \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=b} = q(\varphi) \quad t > 0,$$

gdzie

$$(2.6) \quad q(\varphi) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos n\varphi.$$

W następnym punkcie uwzględniona zostanie zależność strumienia ciepłego na zewnętrznej powierzchni walca od czasu za pomocą całki DUHAMELA [4].

Najpierw określone zostanie pole temperatury przy skokowym wzroście strumienia ciepłego.

Stosując do równania (2.1) i warunków brzegowych (2.5) i (2.3) przekształcenie Laplace'a i uwzględniając warunek początkowy (2.4) otrzymuje się

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{p}{\varkappa} T,$$

$$(2.8) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = \frac{q_0}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{p} \cos n\varphi,$$

$$(2.9) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} = \alpha \cdot T|_{r=a},$$

gdzie

$$(2.10) \quad T(r, \varphi, p) = \int_0^{\infty} t(r, \varphi, \tau) e^{-p\tau} d\tau.$$

Równanie (2.7) stanowi równanie Helmholtza, które łatwo można rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych. Zakładając rozwiązanie w postaci

$$(2.11) \quad T = T_1(r) T_2(\varphi)$$

i podstawiając je do (2.7) otrzymuje się

$$(2.12) \quad \frac{r^2}{T_1} \cdot \frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{r}{T_1} \frac{dT_1}{dr} - k^2 r^2 = -\frac{1}{T_2} \frac{d^2 T_2}{d\varphi^2} = \mu^2.$$

Z (2.12) otrzymuje się 2 równania różniczkowe

$$(2.13) \quad \frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} - \left(k^2 + \frac{\mu^2}{r^2} \right) T_1 = 0,$$

gdzie

$$(2.14) \quad k^2 = \frac{p}{\varkappa},$$

oraz

$$(2.15) \quad \frac{d^2 T_2}{d\varphi^2} + \mu^2 T_2 = 0.$$

Rozwiązaniem (2.13) jest

$$(2.16) \quad T_1 = A'_\mu I_\mu(kr) + B'_\mu K_\mu(kr),$$

a równania (2.15)

$$(2.17) \quad T_2 = C_\mu \sin(\mu\varphi) + D_\mu \cos(\mu\varphi).$$

Z uwagi na warunek brzegowy (2.5) a także na fakt, że temperatura T powinna być jednoznaczna funkcją kąta φ rozwiązanie (2.11) powinno być funkcją okresową o okresie 2π a zatem μ powinno być liczbą całkowitą.

Poza tym z warunku (2.8) wynika, że $C_\mu = 0$.

Wprowadzając oznaczenia $A'_\mu \cdot D_\mu = A_\mu$ i $B'_\mu \cdot D_\mu = B_\mu$ rozkład temperatury wyraża się zależnością

$$(2.18) \quad T_n = [A_n I_n(kr) + B_n K_n(kr)] \cos n\varphi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Postępując podobnie jak w powyższym przypadku, dla $n = 0$ pole temperatury określa zależność

$$(2.19) \quad T_0 = (C_0 + D_0 \cdot \varphi) [A'_0 I_0(kr) + B'_0 K_0(kr)]$$

Ze względu na symetrię strumienia $q'(\varphi, \tau)$, tj. $q'(-\varphi, \tau) = q'(\varphi, \tau)$, $D_0 = 0$. Oznaczając $C_0 \cdot A'_0 = A_0$ i $C_0 B'_0 = B_0$, T_0 wynosi

$$(2.20) \quad T_0 = A_0 I_0(kr) + B_0 K_0(kr).$$

Ostatecznie pole temperatury w dziedzinie obrazu w wydrążonym walcu określa zależność

$$(2.21) \quad T = A_0 I_0(kr) + B_0 K_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_n(kr) + B_n K_n(kr)] \cos(n\varphi)$$

oraz warunki brzegowe (2.8) i (2.9), które zapisane zostaną w nieco innej postaci dla $n = 0$

$$(2.22) \quad \lambda \left. \frac{\partial T_0(r, p)}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{q_0}{p},$$

$$(2.23) \quad \lambda \left. \frac{\partial T_0(r, p)}{\partial r} \right|_{r=a} = \alpha T_0(a, p),$$

oraz dla $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(2.24) \quad \lambda \left. \frac{\partial T_n(r, \varphi, p)}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{1}{p} q_n \cos n\varphi,$$

$$(2.25) \quad \lambda \left. \frac{\partial T_n(r, \varphi, p)}{\partial r} \right|_{r=a} = \alpha T_n(a, \varphi, p),$$

Stałe A_0 i B_0 wyznaczone z warunków (2.22) i (2.23) po podstawieniu do nich (2.20) wynoszą

$$(2.26) \quad A_0 = \frac{q_0}{\lambda \cdot p} \frac{kK_1(ka) + \frac{\alpha}{\lambda} K_0(ka)}{k\psi_0(k)}$$

$$(2.27) \quad B_0 = \frac{q_0}{\lambda \cdot p} \frac{kI_1(ka) - \frac{\alpha}{\lambda} I_0(ka)}{k\psi_0(k)}$$

Stałe A_0 i B_0 zostały wyznaczone z wykorzystaniem związków [5]

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \frac{\partial I_0(kr)}{\partial r} &= kI_1(kr), \\ \frac{\partial K_0(kr)}{\partial r} &= -kK_1(kr), \end{aligned}$$

W wyrażeniach (2.26) i (2.27) $\psi_0(k)$ oznacza

$$(2.29) \quad \psi_0(k) = \frac{\alpha}{\lambda} [K_0(ka)I_1(kb) + K_1(kb)I_0(ka)] + k[K_1(ka)I_1(kb) - K_1(kb)I_1(ka)].$$

Stałe A_n i B_n wyznaczone przez podstawienie (2.18) do (2.24) i (2.25) określone są wyrażeniami

$$(2.30) \quad A_n = \frac{q_n}{\lambda \cdot p} \frac{\frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + kK_{n-1}(ka)}{\psi_n(k)},$$

$$(2.31) \quad B_n = \frac{q_n}{\lambda \cdot p} \frac{-\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + kI_{n-1}(ka)}{\psi_n(k)},$$

gdzie

$$(2.32) \quad \psi_n(k) = \left[\frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + kK_{n-1}(ka) \right] \left[-\frac{n}{b} I_n(kb) + kI_{n-1}(kb) \right] + \\ + \left[-\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + kI_{n-1}(ka) \right] \left[-\frac{n}{b} K_n(kb) - kK_{n-1}(kb) \right].$$

Przy określaniu (2.30) i (2.31) wykorzystane zostały związki [5]

$$(2.33) \quad \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} = -\frac{n}{r} I_n(kr) + kI_{n-1}(kr), \\ \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} = -\frac{n}{r} K_n(kr) - kK_{n-1}(kr).$$

Pole temperatury w ścianie walca określone zostanie za pomocą odwrotnego przekształcenia Laplace'a

$$(2.34) \quad t(r, \varphi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{p\tau} T(r, \varphi, p) dp.$$

Transformata $T(r, \varphi, p)$ określona wzorem (2.21) jest jednoznaczną funkcją p tzn. $T\left(r, \varphi - \sqrt{\frac{p}{\kappa}}\right) = T\left(r, \varphi, \sqrt{\frac{p}{\kappa}}\right)$ oraz stanowi iloraz dwóch uogólnionych wielomianów względem p , przy czym stopień licznika jest niższy niż stopień mianownika (Dodatek A). Spełnione są więc warunki zastosowania reguły Heaviside'a [6] (Waszczenki-Zacharczenki [4]) przy wykorzystaniu odwrotnej transformacji Laplace'a. Najpierw określone zostaną bieguny transformaty $T(r, \varphi, p)$ tj. bieguny (2.21).

Z analizy (2.21) widać, że pojedynczy biegun istnieje w $p = 0$ oraz wielokrotne bieguny równe pierwiastkom równań charakterystycznych:

$$(2.35) \quad \psi_0(k) = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0$$

$$(2.36) \quad \psi_n(k) = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dla wyrażenia (2.35) i (2.36) w funkcjach Bessela od argumentu rzeczywistego wprowadzone zostanie podstawienie

$$(2.37) \quad k_{n,m}a = i\gamma_{n,m} = \sqrt{\frac{p_{n,m}}{\alpha}} a,$$

stąd

$$(2.38) \quad k_{n,m} = \frac{i\gamma_{n,m}}{a}, \quad \text{zatem} \quad k_{n,m}b = i\gamma_{n,m}\omega_0.$$

Podstawiając (2.37) i (2.78) do (2.29) otrzymuje się dla $n = 0$

$$(2.39) \quad \frac{\alpha}{\lambda} [K_0(i\gamma_{0,m})I_1(i\omega_0\gamma_{0,m}) + K_1(i\omega_0\gamma_{0,m})I_0(i\gamma_{0,m})] + \\ + \frac{i\gamma_{0,m}}{a} [I_1(i\omega_0\gamma_{0,m})K_1(i\gamma_{0,m}) - K_1(i\omega_0\gamma_{0,m})I_1(i\gamma_{0,m})],$$

które po przekształceniach można zapisać w postaci

$$(2.40) \quad Bi[J_0(\gamma_{0,m})Y_1(\omega_0\gamma_{0,m}) - J_1(\omega_0\gamma_{0,m})Y_0(\gamma_{0,m})] + \\ + \gamma_{0,m}[J_1(\gamma_{0,m})Y_1(\omega_0\gamma_{0,m}) - J_1(\omega_0\gamma_{0,m})Y_1(\gamma_{0,m})] = 0,$$

gdzie

$$Bi = \frac{\alpha a}{\lambda}.$$

Następnie rozważone zostanie równanie charakterystyczne (2.36). Podstawiając (2.37) i (2.38) do (2.36) otrzymuje się

$$(2.41) \quad \psi(p) = [BiK_n(i\gamma_{n,m}) + nK_n(i\gamma_{n,m}) + i\gamma_{n,m}K_{n-1}(i\gamma_{n,m})] \left[-\frac{n}{b} I_n(i\omega_0\gamma_{n,m}) + \right. \\ \left. + kI_{n-1}(i\omega_0\gamma_{n,m}) \right] + [-BiI_n(i\gamma_{n,m}) - nI_n(i\gamma_{n,m}) + \\ + i\gamma_{n,m}I_{n-1}(i\gamma_{n,m})] \left[-\frac{n}{b} K_n(i\omega_0\gamma_{n,m}) - kK_{n-1}(i\omega_0\gamma_{n,m}) \right] = 0.$$

Przekształcając równanie (2.41) otrzymuje się równanie charakterystyczne wyrażone w funkcjach Bessela od argumentu rzeczywistego

$$(2.42) \quad [-BiY_n(\gamma_{n,m}) - nY_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}Y_{n-1}(\gamma_{n,m})] [-nJ_n(\omega_0\gamma_{n,m}) + \\ + \omega_0\gamma_{n,m}J_{n-1}(\omega_0\gamma_{n,m})] + [-BiJ_n(\gamma_{n,m}) - nJ_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}J_{n-1}(\gamma_{n,m})] [nY_n(\omega_0\gamma_{n,m}) - \\ - \omega_0\gamma_{n,m}Y_{n-1}(\omega_0\gamma_{n,m})] = 0.$$

Wyznaczanie pierwiastków równań charakterystycznych (2.40) i (2.42), które są równaniami przestępnymi jest dosyć kłopotliwe. Z tego też powodu brak jest dostatecznie obszernej tablic tych pierwiastków. Wartości pierwszych dziesięciu pierwiastków równania (2.40), dla $\omega_0 = 1,1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8$ i $2,0$ oraz $Bi = 5, 10, 20, 40, 60$ i 80 podano w pracy

[7]. Jest to jedno z najbardziej obszernych, w dotychczasowej literaturze zestawień pierwiastków równania (2.40). W pracy [8] obliczono dwa pierwsze pierwiastki dla $\omega_0 = 1,25$ i $1,5$ oraz $Bi = 0,5; 1; 3; 5; 7; 10$ a w pracy [9] również dwa pierwsze pierwiastki dla $\omega_0 = 1,5; 1,7; 2,0; 2,5; i 3,0$ oraz $Bi = 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4$ i 5 .

Kilka wartości pierwiastków omawianego równania przytoczono również w [10].

Pierwsze 10 pierwiastków równania (2.42) dla $n = 1$ i $\omega_0 = \frac{5}{3}$ i $\omega_0 = 1,6$ oraz $Bi = 3; 5; 10$ i 20 obliczono w pracy [1]. Bieguny transformaty (2.21) leżą na osi rzeczywistej, niedodatniej płaszczyzny zespolonej p , gdyż $p = 0$ i $p_{n,m} = -\frac{\kappa\gamma_{n,m}^2}{a^2}$

Jak już było powiedziane, odwrotne przekształcenie Laplace'a wykonane zostanie wg wzorów podanych przez Heaviside'a [6]. Ponieważ $p = 0$ stanowi biegun pojedynczy a $p_{n,m}$ pojedyncze bieguny wielokrotne, więc $t(r, \varphi, \tau)$ określona jest wyrażeniem

$$(2.43) \quad t(r, \varphi, \tau) = \frac{\kappa\Phi_0(0)}{[k^3\psi_0(0)]'} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa\Phi_n(0)}{[k^2\psi_n(0)]'} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa\Phi_0(p_{0,m})}{[k^3\psi_0(p_{0,m})]'} e^{p_{0,m}\tau} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa\Phi_n(p_{n,m})}{[k^2\psi_n(p_{n,m})]'} e^{p_{n,m}\tau}.$$

Wyrażenia Φ_0, Φ_n i ψ_0 i ψ_n określone są w dodatkach i wynikają z zapisu transformaty (2.21) w postaci

$$(2.44) \quad T = \frac{\kappa\Phi_0(k)}{k^3\psi_0(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa\Phi_n(k)}{k^2\psi_n(k)}.$$

Pole temperatury w walcu, wyznaczone wg (2.43), po wykonaniu odpowiednich przekształceń (Dodatek B) określone jest wyrażeniem

$$(2.45) \quad t(r, \varphi, \tau) = \frac{q_0 b}{\lambda} \left(\frac{1}{Bi} + \ln \frac{r}{a} \right) + \\ + \frac{\pi q_0 a}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_0(\gamma_{0,m}) J_0 \left(\frac{r}{a} \gamma_{0,m} \right) - L_0(\gamma_{0,m}) Y_0 \left(\frac{r}{a} \gamma_{0,m} \right)}{\gamma_{0,m} \left[\frac{L_0(\gamma_{0,m})}{J_1(\omega_0 \gamma_{0,m})} - (Bi^2 + \gamma_{0,m}^2) \frac{J_1(\omega_0 \gamma_{0,m})}{L_0(\gamma_{0,m})} \right]} e^{-\gamma_{0,m}^2 F_0 \tau} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{q_n b}{\lambda \cdot n} \omega_0^n (Bi + n)}{Bi(\omega_0^{2n} + 1) + n(\omega_0^{2n} - 1)} \left(\frac{r}{a} \right)^n - \frac{\frac{q_n b}{\lambda \cdot n} \omega_0^n (Bi - n)}{Bi(\omega_0^{2n} + 1) + n(\omega_0^{2n} - 1)} \left(\frac{a}{r} \right)^n \right] \cos n\varphi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi q_n a}{\lambda} \frac{N_n(\gamma_{n,m}) J_n \left(\gamma_{n,m} \frac{r}{a} \right) + L_n(\gamma_{n,m}) Y_n \left(\gamma_{n,m} \frac{r}{a} \right)}{G_n(\gamma_{n,m})} e^{-\gamma_{n,m}^2 F_0 \tau} \cos n\varphi,$$

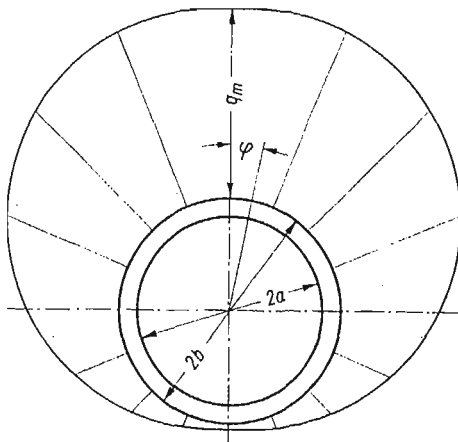
gdzie: $Bi = \frac{\alpha a}{\lambda}$, $Fo = \frac{\kappa \cdot \tau}{a^2}$,

$$\begin{aligned}
 N_0(\gamma_{0,m}) &= \gamma_{0,m} Y_1(\gamma_{0,m}) + Bi Y_0(\gamma_{0,m}), \\
 L_0(\gamma_{0,m}) &= \gamma_{0,m} J_1(\gamma_{0,m}) + Bi J_0(\gamma_{0,m}), \\
 L_n(\gamma_{n,m}) &= Bi J_n(\gamma_{n,m}) - \gamma_{n,m} J_{n-1}(\gamma_{n,m}) + n J_n(\gamma_{n,m}), \\
 N_n(\gamma_{n,m}) &= -Bi Y_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m} Y_{n-1}(\gamma_{n,m}) - n(Y_n(\gamma_{n,m})). \\
 M_n &= -\frac{n}{\omega_0} J_n(\omega_0 \gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m} J_{n-1}(\omega_0 \gamma_{n,m}), \\
 G_n(\gamma_{n,m}) &= \left(\gamma_{n,m}^2 - \frac{n^2}{\omega_0^2} \right) \frac{L_n(\gamma_{n,m})}{M_n(\gamma_{n,m})} + (n^2 - Bi^2 - \gamma_{n,m}^2) \frac{M_n(\gamma_{n,m})}{L_n(\gamma_{n,m})}.
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

Wzór (2.45) wykorzystano do obliczenia pola temperatury w rurze ekranowej kotła konwertorowego typu OKG-100-3G. Do obliczeń przyjęto następujące dane: $\omega_0 = 1,26667$ (rura 38×4), $Bi = 3,0$. Strumień cieplny na zewnętrznej powierzchni rury (obciążenie cieplne) określony jest zależnością (rys. 1) [1]

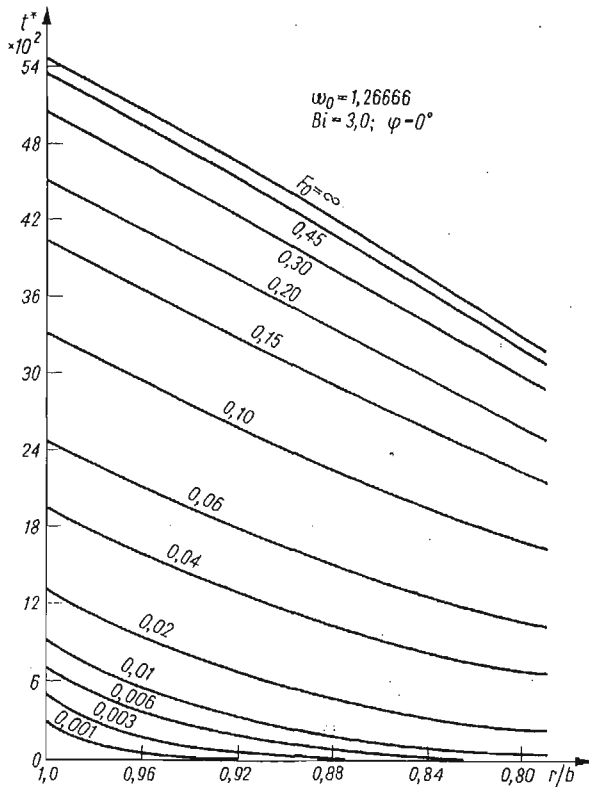
$$\begin{aligned}
 q'(\varphi) &= 0 & t \leq 0, \\
 q'(\varphi) &= 0,515q_m + 0,485q_m \cos \varphi & t > 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono rozkład temperatury w ścianie czołowej ($\varphi = 0^\circ$) i tylnej ($\varphi = 180^\circ$) omawianej rury, dla różnych wartości liczby Fouriera.



Rys. 1. Rozkład strumienia cieplnego na zewnętrznej powierzchni wydrążonego walca

Jak już zaznaczono na początku niniejszej pracy określone zostanie również pole temperatury w walcu przy strumieniu cieplnym na zewnętrznej poboczniczy zmiennym w czasie, wykorzystując całkę Duhamela [4]. Jest to możliwe ze względu na fakt, że zarówno równanie przewodzenia ciepła (2.1) jak i warunki brzegowe (2.3) — (2.5) są liniowe.



Rys. 2. Rozkład temperatury w ścianie walca dla $\varphi = 0$ rad przy skokowym wzroście strumienia cieplnego, $t^* = \frac{t \cdot \lambda}{q_m b}$

$$t^* = \frac{t \cdot \lambda}{q_m b}$$

Jeżeli przez $\bar{i}(r, \varphi, \tau)$ oznaczyć rozkład temperatury (2.45) wyznaczony przy skokowym wzroście strumienia cieplnego a przez $i(r, \varphi, \tau)$ przy zmiennym w czasie strumieniu cieplnym, to całka Duhamela określa związek między $\bar{i}(r, \varphi, \tau)$ i $i(r, \varphi, \tau)$

$$(2.48) \quad i^{(\tau)}(r, \varphi, \tau) = \int_0^{\tau} f(\xi) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{i}(r, \varphi, \tau - \xi) d\xi.$$

Niżej określone zostanie pole temperatury dla przypadku gdy funkcja $f(\tau)$ w warunku brzegowym (2.2) ma postać rys. 4

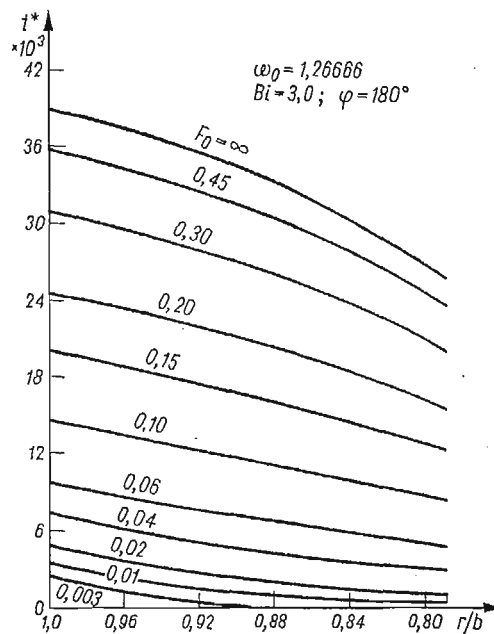
$$(2.49) \quad f(\tau) = 1 + c\tau,$$

gdzie

c jest stałą

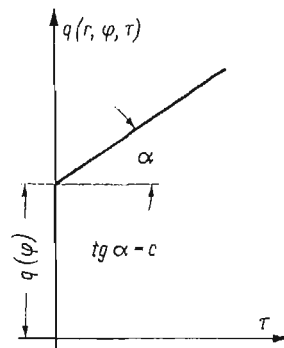
Dla, uproszczenia dalszych rozważań temperatura określona wzorem (2.45) zostanie zapisana w nieco odmiennej postaci:

$$(2.50) \quad \bar{i}(r, \varphi, \tau) = t_s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo},$$



Rys. 3. Rozkład temperatury w ścianie walca dla $\varphi = \pi$ rad przy skokowym wzroście strumienia ciepłego

$$t^* = \frac{r \cdot \lambda}{q_m b}$$



Rys. 4. Zmiany strumienia ciepłego na zewnętrznej powierzchni walca w zależności od czasu

gdzie:

$$(2.51) \quad t_s(r, \varphi) = \frac{q_0 b}{\lambda} \left(\frac{1}{Bi} + \ln \frac{r}{a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{q_n b}{\lambda \cdot n} \omega_0^n (Bi+n)}{Bi(\omega_0^{2n}+1) + n(\omega_0^{2n}-1)} \left(\frac{r}{a} \right)^n - \frac{\frac{q_n \cdot b}{\lambda \cdot n} \omega_0^n (Bi-n)}{Bi(\omega_0^{2n}+1) + n(\omega_0^{2n}-1)} \left(\frac{a}{r} \right)^n \right\} \cos n \varphi,$$

oraz

$$(2.52) \quad W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) = \pi \frac{q_n \cdot a}{\lambda} \left[\frac{N_n(\gamma_{n,m}) J_n\left(\gamma_{n,m} \frac{r}{a}\right)}{G_n(\gamma_{n,m})} + \frac{L_n(\gamma_{n,m}) Y_n\left(\gamma_{n,m} \frac{r}{a}\right)}{G_n(\gamma_{n,m})} \right] \cos n\varphi.$$

Łatwo zauważyć, że część niestalna wyrażenia (2.45) zapisana jest w (2.50) nieco inaczej.

Sprawdzić jednak można, że zapisując oddzielnie wyrażenie $\sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) \Big|_{n=0} \times e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo}$ i uwzględniając związki $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ i $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$ gdzie $n = 1, 2, \dots$, zależności (2.45) i (2.50) są identyczne. Podstawiając zatem (2.49) i (2.50) do (2.48) otrzymuje się temperaturę przy strumieniu ciepłym na zewnętrznej powierzchni walca zmieniającym się w czasie

$$(2.53) \quad \begin{aligned} t^{(\tau)} &= \int_0^{\tau} (1 + c\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[t_s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) \cdot e^{-\gamma_{n,m}^2 \frac{\kappa(\tau-\xi)}{a^2}} \right] d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ca^2}{\gamma_{n,m}^2 \kappa} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ca^2}{\gamma_{n,m}^2 \kappa} \dot{W}(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) \cdot \tau. \end{aligned}$$

Wynik ten można nieco uprościć wykorzystując warunek początkowy (2.4), z którego otrzymuje się

$$(2.54) \quad \bar{i}(r, \varphi, 0) = t_s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) = 0,$$

skąd

$$(2.55) \quad t_s(r, \varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}).$$

Uwzględniając (2.55) w (2.53), otrzymuje się ostatecznie

$$(2.56) \quad \begin{aligned} t^{(\tau)}(r, \varphi, \tau) &= (1 + c \cdot \tau) t_s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo} + \\ &+ \frac{ca^2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n,m}^2} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) - \frac{ca^2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n,m}^2} \dot{W}(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo}. \end{aligned}$$

Z analizy wyrażenia (2.56) wynika, że dla dostatecznie długiego czasu temperatura wynosi

$$(2.57) \quad t^{(\infty)} = (1+c\tau)t_s(r, \varphi) + \frac{ca^2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n,m}^2} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}).$$

Jest to temperatura w ścianie rury w tzw. stanie quasi-stacjonarnym. Zauważmy, że pierwszy człon (2.56) reprezentuje temperaturę ustaloną w wydrążonym walcu wywołaną aktualną wartością obciążenia cieplnego, tj. $q'(\varphi, \tau) = q(\varphi)(1+c\tau)$. Drugi człon przedstawia składową temperatury niezależną od czasu. Spadek temperatury w ścianie walca jest większy w stanie quasi-stacjonarnym niż w stanie ustalonym (przy tych samych wartościach strumienia cieplnego na zewnętrznej powierzchni walca).

3. Uwagi końcowe

Otrzymane w pracy zależności pozwalające określić pole temperatury w walcu przy kołowo-niesymetrycznym ogrzewaniu strumieniem cieplnym jego zewnętrznej poboczniczy i chłodzeniu konwekcyjnym wewnętrznej są dosyć skomplikowane. Rozwiązania przedstawione w pracy są jednak szybkobieżne, co ułatwia praktyczne ich zastosowanie.

Należy również zaznaczyć, że otrzymane rozwiązania dla przypadku gdy $\alpha = 0$ nie obowiązują i przypadek ten należy rozpatrzyć oddzielnie, mogą być natomiast stosowane w przypadku gdy $\alpha \rightarrow \infty$.

Literatura cytowana w tekście

1. J. TALER, *Analiza pola temperatury i naprężeń w rurach ekranowych kotłów pracujących przy wysokich i zmiennych obciążeniach cieplnych*, Praca doktorska (niepublikowana), Kraków 1977 r.
2. F. S. CHAPMAN, F. A. HOLLAND, *Keeping piping hot*, Chemical Engineering, 1, 17 (1966), 133.
3. J. N. BOWER, H. R. PETERSON, *Guide to steam tracing design*, Hydrocarbon Processing and Petroleum Refiner, 3, 42 (1963), 149.
4. A. V. LUKOV, *Analytical heat diffusion theory*, Academic Press, New York (1968).
5. JAHNKE-EMDE-LÖSCH, *Tafeln höherer Funktionen*, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1966).
6. G. A. KORN, T. M. KORN, *Mathematical Handbook*, McGraw-Hill, New York (1968).
7. Д. П. ЕЛИЗАРОВ, *К вопросу о тепловом ударе в паропроводах ТЭС*, Теплоэнергетика, 2, 17 (1971).
8. В. П. МЕРЗЛЯКОВ, *Функции Грина в решениях задач теплопроводности для полого цилиндра*, Инженерно-физический Журнал, 6, 21 (1971).
9. В. П. МЕРЗЛЯКОВ, *Об одной задаче теплопроводности для полого цилиндра*, Теплофизика Высокых Температур, 6, 5 (1967).
10. W. ENDRES, *Wärmespannungen beim Aufheizen dickwandiger Hohlzylinder*, BBC Mitteilungen 45 (1958).

Dodatek A

Wykazane zostanie, że transformata $T(r, \varphi, p) = T_0(r, p) + T_\varphi(r, \varphi, p)$ (2.21) stanowi iloraz dwóch wielomianów względem p , przy czym licznik jest wielomianem niższego

stopnia niż mianownik oraz, że transformata $T(r, \varphi, p)$ (2.21) jest jednoznaczna względem p , tzn. zachodzi związek

$$(A.1) \quad T(r, \varphi, -k) = T(r, \varphi, k),$$

gdzie

$$(A.2) \quad k = \sqrt{\frac{p}{\kappa}}.$$

Rozważania ograniczone zostaną tylko do $T_\varphi(r, \varphi, p)$, gdyż w identyczny sposób można je przeprowadzić dla $T_0(r, p)$. Transformata $T_\varphi(r, \varphi, p)$ zapisana zostanie w postaci

$$(A.3) \quad T_\varphi(r, \varphi, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa \Phi_n}{k^2 \psi_n(k)}.$$

Wyrażenia $\Phi_n(k)$ i $\psi_n(k)$ określone są w dalszej części dodatku. W celu przekształcenia $\Phi_n(k)$ i $\psi_n(k)$ wykorzystane zostaną definicje funkcji Bessela

$$(A.4) \quad I_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}.$$

Funkcje Bessela spełniają związki [5]

$$(A.5) \quad \begin{aligned} I_n(z) &= I_n(-z) && \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ -I_n(z) &= I_n(-z) && \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{aligned}$$

oraz

$$(A.6) \quad K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\left(\frac{\nu z}{2}\right) + W_n(z) + V_n(z),$$

gdzie

$$(A.7) \quad W_n(z) = \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{n+k} \frac{1}{l} \right),$$

$$(A.8) \quad V_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$\nu = e^\gamma = 1,781072418$, γ — stała Eulera.

Z uwagi na (A.7) i (A.8) zachodzą związki

$$(A.9) \quad \left. \begin{aligned} W_n(z) &= W_n(-z), \\ V_n(z) &= V_n(-z) \end{aligned} \right\} \text{gdyn } n \text{ jest liczbą parzystą}$$

oraz

$$(A.10) \quad \left. \begin{aligned} -W_n(z) &= W_n(-z), \\ -V_n(z) &= V_n(-z). \end{aligned} \right\} \text{gdyn } n \text{ jest liczbą nieparzystą}$$

W oparciu o podane zależności przekształcony zostanie licznik $T_\varphi(r, \varphi, k)$ (A.3), a mianowicie

$$\begin{aligned}
 (A.11) \quad \Phi_n(k) &= \frac{q_n}{\lambda} \left\{ \left[\frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + k K_{n-1}(ka) \right] I_n(kr) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) - \frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) \right] \cdot K_n(kr) \right\} = \\
 &= \frac{q_n}{\lambda} \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} (-1)^{n+1} \ln \left(\frac{\nu ka}{2} \right) I_n(ka) I_n(kr) + \frac{n}{a} (-1)^{n+1} \times \right. \\
 &\quad \times \ln \left(\frac{\nu ka}{2} \right) I_n(ka) I_n(kr) + (-1)^n \ln \left(\frac{\nu ka}{2} \right) k \cdot I_{n-1}(ka) I_n(kr) - \\
 &\quad - \frac{\alpha}{\lambda} (-1)^{n+1} \ln \left(\frac{\nu kr}{2} \right) I_n(ka) I_n(kr) - \frac{n}{a} (-1)^{n+1} \ln \left(\frac{\nu kr}{2} \right) \times \\
 &\quad \times I_n(ka) I_n(kr) + (-1)^{n+1} \ln \left(\frac{\nu kr}{2} \right) k I_{n-1}(ka) I_n(kr) + P(k) \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 (A.12) \quad \Phi_n(k) &= \frac{q_n}{\lambda} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{\alpha}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{r} \right) I_n(ka) I_n(kr) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n}{a} (-1)^{n+1} \ln \left(\frac{a}{r} \right) I_n(ka) I_n(kr) + (-1)^n \ln \left(\frac{a}{r} \right) k I_{n-1}(ka) I_n(kr) + P(k) \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (A.13) \quad P(k) &= \frac{q_n}{\lambda} \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} [W_n(ka) + V_n(ka)] + \frac{n}{a} [W_n(ka) + V_n(ka)] + \right. \\
 &\quad \left. + k [W_{n-1}(ka) + V_{n-1}(ka)] \right\} I_n(kr) + \\
 &\quad + \frac{q_n}{\lambda} \left[-\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) \right] \cdot [W_n(kr) + V_n(kr)].
 \end{aligned}$$

Z analizy (A.12) i (A.13) z uwzględnieniem (A.5), (A.9) i (A.10) oraz faktu, że $I_n(z)$ jest wielomianem uogólnionym [4], tj. zbieżnym szeregiem potęgowym o wykładnikach, które są liczbami naturalnymi, należy stwierdzić, że $\phi_n(k)$ jest uogólnionym wielomianem parzystym względem k , a więc zachodzi zależność

$$(A.14) \quad \phi_n(k) = \phi_n(-k)$$

Łatwo się o tym przekonać obliczając występujące w (A.12) i (A.13) iloczyny funkcji Bessela I_n i I_{n-1} oraz wielomianów W_n , W_{n-1} , V_n , V_{n-1} zgodnie z regułami mnożenia szeregów potęgowych [6]. Wielomian ten posiada wyraz wolny, który powstaje jako składowa iloczynów $I_n V_n$ i $I_{n-1} \cdot V_{n-1}$.

Tak więc z przeprowadzonej analizy wynika, że $\phi_n(k)$ jest również wielomianem względnym p (po uwzględnieniu (A.2)). Następnie rozpatrzony zostanie mianownik (A.3)

$$(A.15) \quad k^2 \psi_n(k) = k^2 \left\{ \left[\frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + k K_{n-1}(ka) \right] \times \right. \\ \times \left[-\frac{n}{b} I_n(kb) + k I_{n-1}(kb) \right] + \left[-\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) \right] \times \\ \left. + \left[-\frac{n}{b} K_n(kb) - k K_{n-1}(kb) \right] \right\} = k^2 \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \left[(-1)^{n+1} I_n(ka) \ln \left(\frac{\nu ka}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + W_n(ka) + V_n(ka) \right] + \frac{n}{a} \left[(-1)^{n+1} I_n(ka) \ln \left(\frac{\nu ka}{2} \right) + W_n(ka) + V_n(ka) \right] + \right. \\ \left. + k \left[(-1)^n I_{n-1}(ka) \ln \left(\frac{\nu ka}{2} \right) + W_{n-1}(ka) + V_{n-1}(ka) \right] \right\} \times \\ \times \left[-\frac{n}{b} I_n(kb) + k I_{n-1}(kb) \right] + k^2 \left[-\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) \right] \times \\ \times \left\{ -\frac{n}{b} \left[(-1)^{n+1} I_n(kb) \ln \left(\frac{\nu kb}{2} \right) + W_n(kb) + V_n(kb) \right] - \right. \\ \left. - k \left[(-1)^n I_{n-1}(kb) \ln \left(\frac{\nu kb}{2} \right) + W_{n-1}(kb) + V_{n-1}(kb) \right] \right\}.$$

Ostatecznie po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$(A.16) \quad k^2 \psi_n(k) = k^2 \left\{ \frac{\alpha n}{\lambda \cdot b} (-1)^{n+1} \ln \omega_0 I_n(ka) I_n(kb) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha k}{\lambda} (-1)^{n+1} \ln \omega_0 I_n(ka) I_{n-1}(kb) + \frac{kn}{b} (-1)^n \ln \omega_0 I_n(kb) I_{n-1}(ka) - \right. \\ \left. - (-1)^n k^2 \ln \omega_0 I_{n-1}(ka) I_{n-1}(kb) + \frac{n}{a} (-1)^n k \ln \omega_0 I_n(ka) I_{n-1}(kb) \right\} + Q(k),$$

gdzie

$$(A.17) \quad Q(k) = k^2 \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} [W_n(ka) + V_n(ka)] + \frac{n}{a} [W_n(ka) + V_n(ka)] + \right. \\ \left. + k [W_{n-1}(ka) + V_{n-1}(ka)] \right\} \left[-\frac{n}{b} I_n(kb) + k I_{n-1}(kb) \right] + \\ + k^2 \left[-\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) \right] \times \\ \times \left\{ -\frac{n}{b} [W_n(kb) + V_n(kb)] - k [W_{n-1}(kb) + V_{n-1}(kb)] \right\}.$$

Podobnie jak w przypadku licznika i mianownik jest wielomianem o wykładnikach parzystych (wynika to z analizy (A.16) i (A.17) a więc zachodzi związek

$$(A.18) \quad (-k)^2 \psi_n(-k) = k^2 \psi_n(k).$$

Z porównania (A.12) z (A.16) wynika, że stopień licznika jest niższy niż stopień mianownika. Ponieważ $\phi_n(k)$ i $\psi_n(k)$ są parzyste więc $T_\varphi(r, \varphi, p)$ (A.3) jest jednoznaczna funkcją p , gdyż

$$(A.19) \quad T_\varphi(r, \varphi, (-k)) = T_\varphi(r, \varphi, k).$$

Tak więc transformata $T(r, \varphi, k)$ (A.3) spełnia warunki konieczne i dostateczne zastosowania wzorów Heaviside'a (2.43). Łatwo sprawdzić, że warunki te spełnia również transformata $T_0(r, k)$.

Dodatek B

Dla jasności rozważań temperatura $t(r, \varphi, \tau)$ (2.43) zostanie zapisana w postaci

$$(B.1) \quad t(r, \varphi, \tau) = t_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} t_n^s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} t_n(r, \varphi, \tau),$$

gdzie

$$(B.2) \quad t_0(r) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\kappa \phi_0(k)}{[k^3 \psi_0(k)]'} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Phi_0(k)}{[pk \psi_0(k)]'},$$

$$(B.3) \quad t_n^s(r, \varphi) = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa \Phi_n(k)}{[k^2 \psi_n(k)]'} = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(k)}{[p \psi_n(k)]'},$$

oraz

$$(B.4) \quad t_n(r, \varphi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa \Phi_n(k)}{[k^2 \psi_n(k)]'} e^{p\tau} \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(k)}{[p \psi_n(k)]'} e^{p\tau} \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}}.$$

Znak pochodnej odnosi się do różniczkowania po p . Najpierw obliczona zostanie składowa $t_0(r)$.

Mianownik (B.2) wynosi

$$(B.5) \quad [pk \psi_0(k)]' = \frac{d}{dp} [pk \psi_0(k)] = k \psi_0(k) + p[k \psi_0(k)]',$$

gdzie $\psi_0(k)$ określone jest wyrażeniem (2.29)

Zatem

$$(B.6) \quad \lim_{p \rightarrow 0} [pk \psi_0(k)]' = \lim_{p \rightarrow 0} \{k \psi_0(k) + p[k \psi_0(k)]'\}.$$

Łatwo wykazać, że

$$\lim_{p \rightarrow 0} p[k \psi_0(k)]' = 0,$$

a więc

$$(B.7) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} [pk \psi_0(k)] = \lim_{p \rightarrow 0} k \psi_0(k).$$

Przy obliczaniu (B.7) wykorzystane zostaną następujące związki, zachodzące w przypadku funkcji Bessela dla małych wartości x , tj. gdy $0 < x \ll 1$ [5]

$$(B.8) \quad \begin{aligned} I_n(x) &\approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \\ K_0(x) &\approx \ln \frac{2}{\nu x}, \quad K_n(x) \approx \frac{1}{2} \Gamma(n) \left(\frac{2}{x}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Podstawiając (B.8) do (B.7) otrzymuje się

$$(B.9) \quad \lim_{p \rightarrow 0} [k\psi_0(k)] = k \left[\frac{1}{2} k \left(\frac{2}{ka}\right) \left(\frac{kb}{2}\right) + \frac{\alpha}{\lambda} \ln \left(\frac{2}{\nu ka}\right) \left(\frac{kb}{2}\right) - \right. \\ \left. - k \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{kb} \cdot \frac{ka}{2} + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{kb} \right] = \frac{\alpha}{\lambda \cdot b}.$$

Licznik wyrażenia $t_0(r)$ (B.2) wynosi natomiast

$$(B.10) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \phi_0(k) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{q_0}{\lambda} \left\{ k [I_0(kr)K_1(ka) + I_1(ka)K_0(kr)] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\lambda} [I_0(kr)K_0(ka) - I_0(ka)K_0(kr)] \right\}.$$

Uwzględniając (B.8) w (B.10) otrzymuje się

$$(B.11) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \Phi_0(k) = \frac{q_0}{\lambda} \left\{ k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{ka} + \frac{\alpha}{\lambda} \ln \frac{2}{\nu ka} + \left(k \cdot \frac{ka}{2} - \frac{\alpha}{\lambda} \right) \ln \frac{2}{\nu kr} \right\} = \\ = \frac{q_0}{\lambda} \left[\frac{1}{a} + \frac{\alpha}{\lambda} \left(\ln \frac{2}{\nu ka} - \frac{2}{\nu kr} \right) \right] = \frac{q_0}{\lambda} \left[\frac{1}{a} + \frac{\alpha}{\lambda} \ln \frac{r}{a} \right].$$

Ostatecznie, po uwzględnieniu w (B.2), (B.9) i (B.11) $t_0(r)$ wynosi

$$(B.12) \quad t_0(r) = \frac{q_0}{\lambda} \frac{\frac{1}{a} + \frac{\alpha}{\lambda} \ln r}{\frac{\alpha}{\lambda \cdot b}} = \frac{q_0 \cdot b}{\lambda} \left(\frac{1}{Bi} + \ln \frac{r}{a} \right).$$

W identyczny sposób można wyznaczyć składową $t_n^s(r, \varphi)$ (B.3), która wynosi

$$(B.13) \quad t_n^s(r, \varphi) = \left\{ \frac{q_n b}{\lambda \cdot n} \cdot \frac{1}{a^n} \omega_0^n (Bi + n) r^n - \frac{q_n \cdot b}{\lambda \cdot n} a^n \omega_0^n (Bi - n) r^{-n} \right\} \cos(n\varphi).$$

Do obliczenia $t(r, \varphi, \tau)$ (B.1) pozostała jeszcze jedna składowa $t_n(r, \varphi, \tau)$ (B.4).

Najpierw obliczony zostanie mianownik (B.4)

$$(B.14) \quad [p\psi_n(k)] = \frac{d}{dp} [p\psi_n(k)] = \psi_n(k) + p \frac{d\psi_n(k)}{dp},$$

gdzie $\psi_n(k)$ określone jest wyrażeniem (2.32) Z uwagi na (2.41):

$$\psi_n(k) \Big|_{k = \frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = 0$$

i

$$(B.15) \quad p \frac{d\psi_n(k)}{dp} = p \frac{d\psi_n(k)}{dk} \cdot \frac{dk}{dp} = k^2 x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{d\psi_n}{dk} = \frac{1}{2} k \frac{d\psi_n(k)}{dk}$$

(B.14) wynosi

$$(B.16) \quad [p\psi_n(k)]' \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = \frac{1}{2} \left(k \frac{d\psi_n(k)}{dk} \right) \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}}$$

Pochodna $\frac{d\psi_n}{dk}$ obliczona z wykorzystaniem związków [5]

$$(B.17) \quad \begin{cases} \frac{dI_n(kx)}{dk} = -\frac{n}{k} I_n(kx) + x I_{n-1}(kx), \\ \frac{dI_{n-1}(kx)}{dk} = \frac{n}{k} I_{n-1}(kx) - \frac{1}{k} I_{n-1}(kx) + x I_n(kx), \\ \frac{dK_n(kx)}{dk} = -\frac{n}{k} K_n(kx) - x K_{n-1}(kx), \\ \frac{dK_{n-1}(kx)}{dk} = \frac{n}{k} K_{n-1}(kx) - \frac{1}{k} K_{n-1}(kx) - x K_n(kx) \end{cases}$$

i równania charakterystycznego (2.36) zapisanego w postaci

$$(B.18) \quad \frac{\frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + k K_{n-1}(ka)}{-\frac{n}{b} K_n(kb) - k K_{n-1}(kb)} = \frac{-\frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) - \frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka)}{-\frac{n}{b} I_n(kb) + k I_{n-1}(kb)} = \varrho.$$

wynosi

$$(B.19) \quad \frac{d\psi_n}{dk} = \frac{1}{\varrho} \left\{ -\frac{\alpha^2 a}{\lambda^2} [I_{n-1}(ka)K_n(ka) + I_n(ka)K_{n-1}(ka)] + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{a} [I_n(ka)K_{n-1}(ka) + I_{n-1}(ka)K_n(ka)] + k^2 a [I_n(ka)K_{n-1}(ka) + \right. \\ \left. + I_{n-1}(ka)K_n(ka)] \right\} + \varrho \left\{ -\frac{n^2}{b} [I_n(kb)K_{n-1}(kb) + I_{n-1}(kb)K_n(kb)] - \right. \\ \left. - k^2 b [I_{n-1}(kb)K_n(kb) + I_n(kb)K_{n-1}(kb)] \right\}.$$

Uwzględniając związki [5]

$$(B.20) \quad \begin{aligned} I_{n-1}(ka)K_n(ka) + I_n(ka)K_{n-1}(ka) &= \frac{1}{ka}, \\ I_{n-1}(kb)K_n(kb) + I_n(kb)K_{n-1}(kb) &= \frac{1}{kb}, \end{aligned}$$

w (B.19) otrzymuje się

$$(B.21) \quad \frac{d\psi_n(k)}{dk} = \varrho \left(-\frac{n^2}{kb} - k \right) + \frac{1}{\varrho} \left(-\frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{n^2}{a^2} + k^2 \right),$$

zatem

$$(B.22) \quad \left. \left(\frac{1}{2} k \frac{d\psi_n(k)}{dk} \right) \right|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = \frac{1}{2a^2} \left[\varrho \left(i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right) \left(\gamma_{n,m}^2 - \frac{n^2}{\omega_0^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varrho \left(i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right)} (n^2 - Bi^2 - \gamma_{n,m}^2) \right].$$

Dla obliczenia $\varrho \left(i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right)$ wykorzystana zostanie prawa strona (B.18).

$$(B.23) \quad \varrho \left(i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right) = - \frac{-\frac{n}{a} I_n(i\gamma_{n,m}) + \frac{i\gamma_{n,m}}{a} I_{n-1}(i\gamma_{n,m}) - \frac{\alpha}{\lambda} I_n(i\gamma_{n,m})}{-\frac{n}{b} I_n(i\omega_0 \gamma_{n,m}) + \frac{i\gamma_{n,m}}{a} I_{n-1}(i\omega_0 \gamma_{n,m})} = \\ = - \left[-\frac{\alpha}{\lambda} e^{\frac{1}{2} n\pi i} J_n(\gamma_{n,m}) + \frac{i\gamma_{n,m}}{a} e^{\frac{1}{2} (n-1)\pi i} J_{n-1}(\gamma_{n,m}) - \frac{n}{a} e^{\frac{1}{2} n\pi i} J_n(\gamma_{n,m}) \right] \times \\ \times \left[-\frac{n}{b} e^{\frac{1}{2} n\pi i} J_n(\omega_0 \gamma_{n,m}) + \frac{i\gamma_{n,m}}{a} e^{\frac{1}{2} (n-1)\pi i} J_{n-1}(\omega_0 \gamma_{n,m}) \right]^{-1}.$$

Po podzieleniu licznika i mianownika (B.23) przez $e^{\frac{1}{2} n\pi i}$ i uwzględnieniu, że

$$(B.24) \quad e^{-\frac{1}{2} \pi i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

otrzymuje się

$$(B.25) \quad \varrho = - \frac{-BiJ_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}J_{n-1}(\gamma_{n,m}) - nJ_n(\gamma_{n,m})}{-\frac{n}{\omega_0} J_n(\omega_0 \gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}J_{n-1}(\omega_0 \gamma_{n,m})}$$

W podobny sposób można wyznaczyć $\Phi_n \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}}$ gdzie $\Phi_n(k)$ określone jest wyrażeniem

(A.11). Podstawiając do $\Phi_n(k)$, $k = \frac{i\gamma_{n,m}}{a}$ otrzymuje się

$$(B.26) \quad \phi_n \left(i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right) = \frac{1}{2a} \frac{\pi q_n}{\lambda} \left\{ [-BiY_n(\gamma_{n,m}) - nY_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}Y_{n-1}(\gamma_{n,m})] J_n \left(\gamma_{n,m} \frac{r}{a} \right) + \right. \\ \left. + [BiJ_n(\gamma_{n,m}) + nJ_n(\gamma_{n,m}) - \gamma_{n,m}J_{n-1}(\gamma_{n,m})] Y_n \left(\gamma_{n,m} \frac{r}{a} \right) \right\} \cos n\varphi.$$

Po podstawieniu do (B.4): (B.22), (B.25), (B.26) i uwzględnieniu że

$$(B.27) \quad e^{\nu\tau} \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = e^{k^2 \kappa r} \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = e^{-\gamma_{n,m}^2 \kappa r}$$

otrzymuje się $t_n(r, \varphi, \tau)$

Po podstawieniu $t_0(r)$ (B.12), $t_n^s(r, \varphi)$ (B.13) oraz $t_n(r, \varphi, \tau)$ do (B.1) otrzymuje się temperaturę $t(r, \varphi, \tau)$, której postać jest nieco odmienna od wyrażenia (2.45). Łatwo jednak wykazać, że $\sum_{n=0}^{\infty} t_n(r, \varphi, \tau)$ można przekształcić do postaci

$$(B.28) \quad \sum_{n=0}^{\infty} t_n(r, \varphi, \tau) = t_0(r, \varphi, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} t_n(r, \varphi, \tau)$$

gdzie

$$(B.29) \quad t_0(r, \tau) = \frac{\pi q_0 a}{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[N_0 J_0 \left(\frac{r}{a} \gamma_{0,m} \right) - L_0 Y_0 \left(\frac{r}{a} \gamma_{0,m} \right) \right] e^{-\gamma_{0,m}^2 F_0}}{\gamma_{0,m} \left[\frac{L_0}{J_1(\omega_0 \gamma_{0,m})} - (Bi^2 + \gamma_{0,m}^2) \frac{J_1(\omega_0 \gamma_{0,m})}{L_0} \right]}$$

zapisując w (B.1) oddzielnie człon $t_0(r, \varphi, \tau)$ i przekształcając go za pomocą związków [5]

$$(B.30) \quad \begin{aligned} J_{-1}(x) &= -J_1(x) \\ Y_{-1}(x) &= Y_1(x) \end{aligned}$$

do postaci (B.29).

Резюме

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ, КРУГОНЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ НАГРЕВАЕМЫМ НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Определено неустановившиеся температурное поле в бесконечном полом цилиндре нагреваемым на внешней поверхности (задан несимметрический удельный тепловой поток) и охлаждаемым на внутренней поверхности по закону Ньютона. Принимается равномерное распределение температуры в начальный момент времени. Решение получено с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени и метода разделения переменных. Материал цилиндра считается однородным и изотропным и его термические свойства не зависят от температуры.

Summary

UNSTEADY, AXIALLY NONSYMMETRIC TEMPERATURE DISTRIBUTION IN AN INFINITE HOLLOW CYLINDER HEATED EXTERNALLY

The unsteady temperature distribution in an infinite circular hollow cylinder heated externally (prescribed nonsymmetric heat flux at the surface) and cooled internally by fluid has been calculated. The initial temperature distribution has been assumed to be uniform.

Solution has been obtained by means of the Laplace transform with respect to time and the usual method of separation of variables.

The considered medium is homogeneous, isotropic, with thermal properties independent of position and temperature.

INSTYTUT APARATURY
PRZEMYSŁOWEJ I ENERGETYKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1978 r.

O WYZNACZANIU CHARAKTERYSTYK PROBABILISTYCZNYCH ROZWIĄZAŃ WAHADŁA
PODWÓJNEGO O ZMIENNEJ DŁUGOŚCI PODDANEGO WYMUSZENIOM LOSOWYM

JANUSZ SZOPA i MAREK WOJTYŁAK
(GLIWICE, KATOWICE)

Streszczenie

W pracy podano metodę wyznaczania charakterystyk probabilistycznych rozwiązań równań ruchu wahadła podwójnego o zmiennej długości poddanego wymuszeniom losowym. Oparta jest ona na wykorzystaniu stochastycznego równania całkowego Volterra II-go rodzaju, a nie na wielowymiarowej impulsowej funkcji przejścia trudnej do wyznaczenia w przypadku układu równań różniczkowych o zmiennych w czasie parametrach.

Wprowadzono wzory na funkcję korelacji oraz korelacji wzajemnej rozwiązań. Numerycznie wyznaczono wariancję rozwiązań dla dwóch typów procesów stochastycznych będących wymuszeniami ruchu wahadła.

1. Wstęp

Równania ruchu wahadła podwójnego o zmiennej długości poddanego wymuszeniom losowym stanowią układ dwóch nieliniowych równań różniczkowych o zmiennych w czasie współczynnikach. Przy założeniu małych kątów wychylenia wahadła od pionu można przyjąć, że równania są liniowe. Nawet to założenie nie pozwala w ogólnym przypadku na rozwiązanie rozważanego układu równań. Dlatego też zwraca się uwagę na wyznaczenie charakterystyk probabilistycznych rozwiązania przy znanych charakterystykach wymuszeń. W przypadku układu równań liniowych można stosować metodę wielowymiarowej impulsowej funkcji przejścia [2—6] trudnej jednak do wyznaczenia gdy współczynniki są funkcjami czasu.

Poszukiwane charakterystyki probabilistyczne można jednak wyznaczyć przy wykorzystaniu stochastycznych równań całkowych Volterra II-go rodzaju, którymi zajmowano się w [1, 14, 15]. Podstawowe wyniki teoretyczne oraz aspekty praktyczne wyznaczania charakterystyk probabilistycznych przy badaniu układów o zmiennej inercji opisanych równaniem różniczkowym n -tego rzędu były przedstawione w [7—9, 12].

Rozważany model wahadła o zmiennej długości jest układem dwóch liniowych równań różniczkowych o zmiennych w czasie współczynnikach. Układ ten zostanie sprowadzony do dwóch równań, z których każde zawiera tylko jedną ze zmiennych. Dla tego układu można już stosować metodę wyznaczania charakterystyk podaną w [7—10]. Za jej pomocą zo-

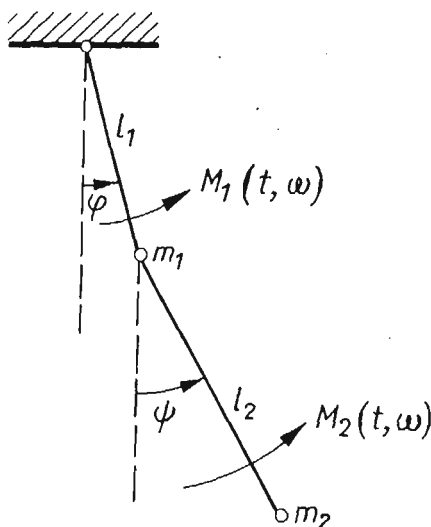
staną wyprowadzone wzory na funkcję korelacji oraz korelacji wzajemnej rozwiązań, a na ich podstawie wyliczona wariancja rozwiązań wg algorytmów zawartych w [11, 12, 16] dla dwóch typów procesów stochastycznych będących wymuszeniami.

2. Równanie ruchu wahadła podwójnego

Rozważać będziemy wahadło podwójne przedstawione na rys. 1. gdzie m_1, m_2 — masy; l_1, l_2 — długość wahadeł; φ, ψ — kąty wychyleń od pionu; $M_1(t, \omega), M_2(t, \omega)$ — wymuszenia — procesy stochastyczne.

Do dalszych rozważań założono m_1, m_2, l_2 — constans oraz $l_1 = l_1(t)$. Wykorzystując równania Lagrange'a II-go rodzaju otrzymano następujący układ równań:

$$(1) \quad \begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi} + 2m_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi} + m_2 [l_1^2 \ddot{\varphi} + 2l_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi} + l_1 l_2 \ddot{\psi} \cos(\psi - \varphi) - l_1 l_2 \dot{\psi}^2 \sin(\psi - \varphi)] + \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi = M_1(t, \omega), \\ m_2 [l_2^2 \ddot{\psi} - \dot{l}_1 l_2 \sin(\psi - \varphi) + 2\dot{l}_1 l_2 \dot{\varphi} \cos(\psi - \varphi) + l_1 l_2 \ddot{\varphi} \cos(\psi - \varphi) + l_1 l_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\psi - \varphi) + \\ + g l_2 \sin \psi] = M_2(t, \omega). \end{aligned}$$



Rys. 1

Przy założeniu niewielkich wychyleń wahadeł od pionu układ nieliniowy (1) można sprowadzić do postaci liniowej:

$$(2) \quad \begin{aligned} l_1 [(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi} + 2(m_1 + m_2) \dot{l}_1 \dot{\varphi} + (m_1 + m_2) g \varphi + m_2 l_2 \ddot{\psi}] = M_1, \\ m_2 l_2 [l_2 \ddot{\psi} + (g - \ddot{l}_1) \psi + l_1 \ddot{\varphi} + 2\dot{l}_1 \dot{\varphi} + \ddot{l}_1 \varphi] = M_2. \end{aligned}$$

Układ ten można sprowadzić do równań 4-go rzędu, w których występuje zmienna φ lub ψ .

Wystarczy pierwsze z równań pomnożyć przez l_2 , a drugie przez l_1 oraz odjąć stronami wyliczając ψ za pomocą $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$. Różniczkując tak otrzymane ψ i podstawiając do pierwsze-

go z równań otrzymuje się równanie ze zmienną φ . Aby otrzymać równanie ze zmienną ψ trzeba pierwsze z równań układu (2) pomnożyć przez $m_2 l_2$, a drugie przez $(m_1 + m_2) l_2$. Po odjęciu równań stronami wyliczamy φ oraz podstawiamy do drugiego z nich otrzymując równanie ze zmienną ψ .

Powyższe przekształcenia zastosowano przy założeniu, że $m_1 = m_2 = 1$ [kg], $l_2 = 1$ [m], $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$, $M_1 \equiv 0$,

$$(3) \quad l_1(t) = \begin{cases} 2 - \alpha t & \text{dla } t \leq \frac{1}{\alpha} \\ 1 & \text{dla } t > \frac{1}{\alpha} \end{cases} \text{ [m]}$$

otrzymując układ równań

$$(4) \quad \begin{aligned} l_1 \ddot{\varphi} + 4\dot{l}_1 \dot{\varphi} + 19,62(1 + l_1) \ddot{\psi} + 39,24\dot{l}_1 \dot{\psi} + 192,4722\varphi &= -\ddot{M}_2, \\ l_1 \ddot{\psi} + 2\dot{l}_1 \dot{\psi} + 19,62(1 + l_1) \ddot{\psi} + 39,24\dot{l}_1 \dot{\psi} + 192,4722\psi &= 2l_1 \ddot{M}_2 + 4\dot{l}_1 \dot{M}_2 + 19,62M_2. \end{aligned}$$

3. Funkcja korelacji oraz korelacji wzajemnej, rozwiązań równań ruchu wahadła podwójnego o zmiennej długości

Równania układu (4) można zapisać w ogólnej postaci:

$$(5) \quad a_4(t) \ddot{\ddot{x}} + a_3(t) \ddot{\dot{x}} + a_2(t) \ddot{x} + a_1(t) \dot{x} + a_0(t) x = P(t, \omega),$$

gdzie x jest odpowiednio równe φ lub ψ .

Z podstawienia

$$(6) \quad a_4(t) \ddot{\ddot{x}}(t, \omega) \stackrel{\text{df}}{=} y(t, \omega)$$

wynika, że

$$(7) \quad x^{(4-k)} - x_0^{(4-k)} - x_0^{(4-k+1)} \cdot t - \dots - x_0 \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \int_0^t \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{y(u, \omega)}{a_4(u)} du,$$

gdzie przez x_0 , \dot{x}_0 , \ddot{x}_0 , $\ddot{\ddot{x}}_0$ oznaczono warunki początkowe dla (5), a $k = 1, 2, 3, 4$.

Wykorzystując zależności (6) i (7) w równaniu (5) można je zapisać w postaci stochastycznego równania całkowego Volterra II-go rodzaju:

$$(8) \quad y(t, \omega) = h(t, \omega) - \int_0^t K(t, u) y(u, \omega) du,$$

gdzie

$$(9) \quad h(t, \omega) \stackrel{\text{df}}{=} P(t, \omega) - \left\{ a_3(t) \ddot{\ddot{x}}_0 + a_2(t) \cdot [\ddot{\ddot{x}}_0 + \ddot{\ddot{x}}_0 \cdot t] + a_1(t) \cdot \left[\dot{x}_0 + \ddot{x}_0 \cdot t + \ddot{\ddot{x}}_0 \cdot \frac{t^2}{2} \right] + \right. \\ \left. + a_0(t) \cdot \left[x_0 + \dot{x}_0 \cdot t + \ddot{x}_0 \cdot \frac{t^2}{2} + \ddot{\ddot{x}}_0 \cdot \frac{t^3}{6} \right] \right\}$$

oraz jądro,

$$(10) \quad K(t, u) \stackrel{\text{df}}{=} \left[a_3(t) + a_2(t) \cdot (t-u) + a_1(t) \cdot \frac{(t-u)^2}{2} + a_0(t) \cdot \frac{(t-u)^3}{6} \right] \cdot \frac{1}{a_4(u)}.$$

Jeśli utworzyć rezolwentę $R(t, u)$ dla równania całkowego (8) wtedy można je przepisać w postaci:

$$(11) \quad y(t, \omega) = h(t, \omega) - \int_0^t R(t, u) h(u, \omega) du.$$

Ta postać jest najdogodniejsza do wyznaczenia funkcji korelacji procesu $y(t, \omega)$. Zachodzi:

$$(12) \quad K_y(t_1, t_2) \stackrel{\text{df}}{=} E\{[y(t_1, \omega) - Ey(t_1, \omega)] \cdot [y(t_2, \omega) - Ey(t_2, \omega)]\} = K_h(t_1, t_2) - \\ - \int_0^{t_1} R(t_1, u_1) K_h(t_2, u_1) du_1 - \int_0^{t_2} R(t_2, u_2) K_h(t_1, u_2) du_2 + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R(t_1, u_1) R(t_2, u_2) \cdot \\ \cdot K_h(u_1, u_2) du_2 du_1,$$

gdzie $K_h(u_1, u_2)$ — funkcja korelacji procesu $h(t, \omega)$. Wg (7) dla $k = 4$ jest

$$(13) \quad x(t, \omega) = x_0 + \dot{x}_0 t + \ddot{x}_0 \frac{t^2}{2} + \ddot{\ddot{x}}_0 \frac{t^3}{6} + \int_0^t \frac{(t-u)^3}{6} \cdot \frac{y(u, \omega)}{a_4(u)} du.$$

Zakładając, że warunki początkowe są zdeterminowane, zachodzi wg (9) równość $K_h(t_1, t_2) = K_P(t_1, t_2)$. Ponadto

$$(14) \quad x(t, \omega) - Ex(t, \omega) = \int_0^t \frac{(t-u)^3}{6} \cdot \frac{y(u, \omega) - Ey(u, \omega)}{a_4(u)} du$$

czyli funkcja korelacji dla kątów φ lub ψ jest postaci

$$(15) \quad K_x(t_1, t_2) \stackrel{\text{df}}{=} E\{[x(t_1, \omega) - Ex(t_1, \omega)] \cdot [x(t_2, \omega) - Ex(t_2, \omega)]\} = \\ = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{(t_1 - u_1)^3 \cdot (t_2 - u_2)^3}{36 \cdot a_4(u_1) \cdot a_4(u_2)} K_y(u_1, u_2) du_2 du_1.$$

[7—10].

Jeśli w związkach (5)—(11) dopisać indeksy „1” w przypadku rozważania ich dla kąta φ i „2” w przypadku ψ to wzór na funkcję korelacji wzajemnej rozwiązań φ i ψ przyjmie postać:

$$(16) \quad K_{\varphi\psi}(t_1, t_2) \stackrel{\text{df}}{=} E\{[\varphi(t_1, \omega) - E\varphi(t_1, \omega)] \cdot [\psi(t_2, \omega) - E\psi(t_2, \omega)]\} = \\ = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{(t_1 - u_1)^3 \cdot (t_2 - u_2)^3}{36 I_1^2(u)} K_{y_1, y_2}(u_1, u_2) du_2 du_1,$$

gdzie

$$(17) \quad K_{y_1, y_2}(t_1, t_2) \stackrel{\text{df}}{=} E\{[y_1(t_1, \omega) - Ey_1(t_1, \omega)][y_2(t_2, \omega) - Ey_2(t_2, \omega)]\} = \\ = K_{h_1, h_2}(t_1, t_2) - \int_0^{t_1} R_1(t_1, u_1) K_{h_1, h_2}(u_1, t_2) du_1 - \int_0^{t_2} R_2(t_2, u_2) K_{h_1, h_2}(t_1, u_2) du_2 + \\ + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_1(t_1, u_1) \cdot R_2(t_2, u_2) K_{h_1, h_2}(u_1, u_2) du_2 du_1$$

$h_1(t, \omega)$ i $R_1(t, u)$ są liczone dla pierwszego z równań układu (4), a $h_2(t, \omega)$ i $R_2(t, u)$ dla drugiego.

4. Analiza numeryczna

Przedstawioną metodą obliczono wariancję rozwiązań dla układu równań (4). Wykorzystano wzory (15) (podstawiając $t_1 = t_2$) i (12) oraz algorytmy podane w [11, 16]. Funkcję korelacji procesu $M_2(t, \omega)$ przyjęto w dwóch postaciach:

$$(18) \quad K_{M_2}(t_1, t_2) = C \cdot e^{-\beta(t_1^2 + t_2^2)},$$

gdzie $C, \beta > 0$ oraz

$$(19) \quad K_{M_2}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} EA^2 \cdot \cos \gamma(t_1 - t_2).$$

Wzór (19) odpowiada założeniu, że proces $M_2(t, \omega)$ jest postaci

$$(20) \quad M_2(t, \omega) = A(\omega) \cdot \cos(\gamma t + \lambda(\omega)) \cdot l_2,$$

gdzie $l_2 = 1$ a A i λ — nieskorelowane zmienne losowe oraz funkcja gęstości

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \left[H(x) - H(x - 2\pi) \right].$$

Do dalszych rozważań przyjęto, że stałe $C = EA^2 = 1$. Stosując metody analizy korelacyjnej [3, 4] otrzymano dla procesów występujących po prawych stronach równań układu (4) następujące postacie funkcji korelacji:

a) dla przypadku (18)

$$(21) \quad K_h(t_1, t_2) = K_p(t_1, t_2) = K_{-\ddot{M}_2}(t_1, t_2) = 4 \cdot \beta^2 (1 - 2\beta t_1^2) \cdot (1 - 2\beta t_2^2) \cdot e^{-\beta(t_1^2 + t_2^2)},$$

oraz

$$(22) \quad K_{2l_1 \ddot{M}_2 + 4j_1 \dot{M}_2 + 19,62M_2}(t_1, t_2) = 4 \cdot e^{-\beta(t_1^2 + t_2^2)} \cdot \{4\beta^2 l_1(t_1) l_1(t_2) (1 - 2\beta t_1^2) (1 - 2\beta t_2^2) + \\ + 16\beta^2 t_1 t_2 \dot{l}_1(t_1) \dot{l}_1(t_2) + 96,2361 + 8\beta^2 t_2 l_1(t_1) \dot{l}_1(t_2) (1 - 2\beta t_1^2) - 19,62\beta l_1(t_1) \cdot \\ \cdot (1 - 2\beta t_1^2) + 8\beta^2 t_1 \dot{l}_1(t_1) l_1(t_2) (1 - 2\beta t_2^2) - 39,24\beta t_1 \dot{l}_1(t_1) - 19,62\beta l_1(t_2) (1 - 2\beta t_2^2) - \\ - 39,24\beta t_2 \dot{l}_1(t_2)\}.$$

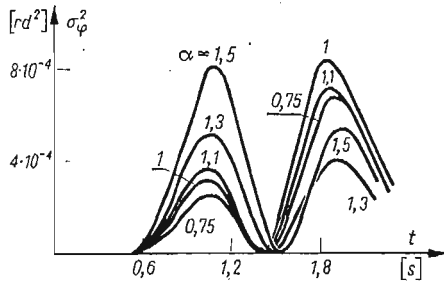
b) dla przypadku (19)

$$(23) \quad K_{-\ddot{M}_2}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \gamma^4 \cos \gamma(t_1 - t_2),$$

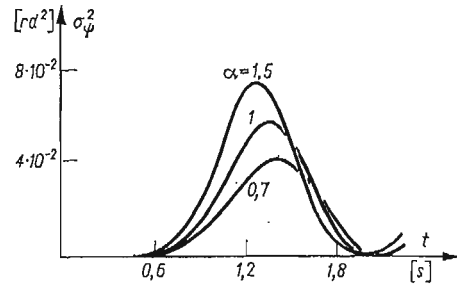
oraz

$$(24) \quad K_2 l_1 \ddot{M}_2 + 4i_1 \dot{M}_2 + 19,62M_2(t_1, t_2) = 2 \left\{ \cos \gamma(t_1 - t_2) \cdot \left[\gamma^4 l_1(t_1) l_1(t_2) + \gamma^2 (4\dot{l}_1(t_1) \dot{l}_1(t_2) - 9,81(l_1(t_1) + l_1(t_2))) \right] + 384,9444 \right\} + 2\gamma \sin \gamma(t_1 - t_2) \cdot \left[\gamma^2 (l_1(t_1) l_1(t_2) - \dot{l}_1(t_1) \dot{l}_1(t_2)) + 9,81(\dot{l}_1(t_2) - \dot{l}_1(t_1)) \right]$$

Na rysunkach 2—5 przedstawiono wykresy wariancji rozwiązań dla układu (4) gdy wymuszenie jest procesem stochastycznym o funkcji korelacji typu (18) [13].



Rys. 2

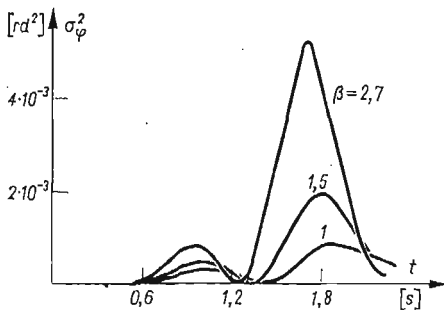


Rys. 3

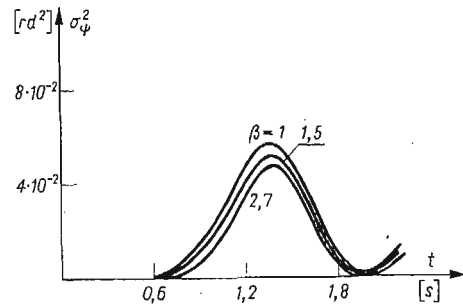
Rys. 2 i 3 przedstawiają wariancję σ_φ^2 i σ_ψ^2 przy różnej szybkości zmian długości wahadła (współczynnik α we wzorze na $l_1(t)$).

Na rys. 2 przyjęto $\alpha = 0,75; 1; 1,1; 1,3; 1,5$ a na rys. 3 $\alpha = 0,7; 1; 1,5$ przy jednoczesnym założeniu, że β we wzorze (18) wynosi 1.

Zaobserwowano, że szybszym zmianom długości wahadła dla początkowych czasów odpowiadają większe wartości maksimów wariancji. Rys. 4 i 5 przedstawiają wpływ współczynnika występującego we wzorze na funkcję korelacji (18).



Rys. 4

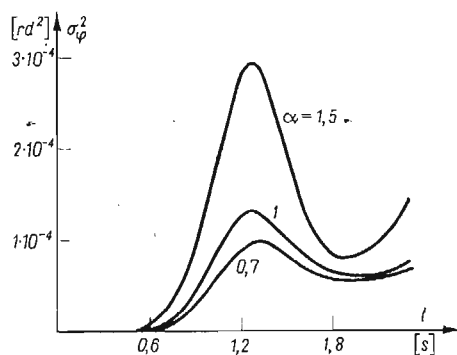


Rys. 5

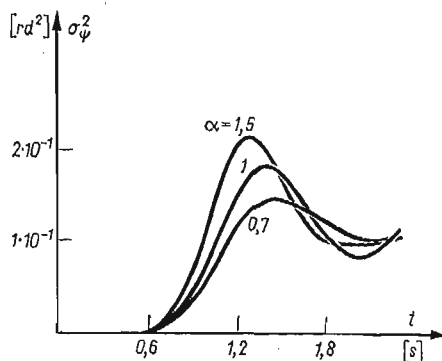
Przyjęto $\alpha = 1$ oraz $\beta = 1; 1,5; 2,7$.

Wariancja σ_φ^2 jest większa, gdy współczynnik β jest większy (rys. 4) a dla σ_ψ^2 jest na odwrót.

Na rys. 6—9 przedstawiono wykresy wariancji rozwiązań dla układu (4), gdy wymuszenie jest procesem stochastycznym o funkcji korelacji postaci (19).

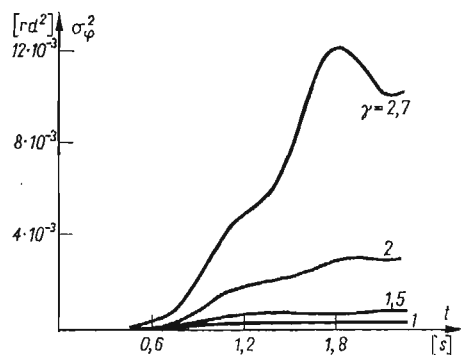


Rys. 6

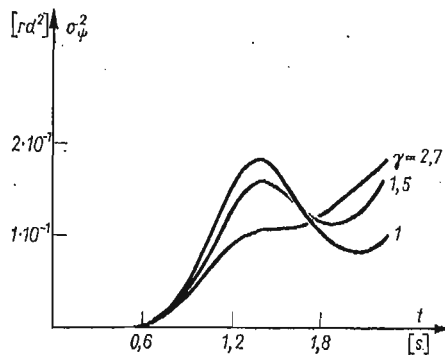


Rys. 7

Na rys. 6 i 7 przyjęto $\alpha = 0,7; 1; 1,5$ oraz $\beta = 1$. Szybszym zmianom długości wahadła odpowiadają większe wartości maksimum wariancji. Na rys. 8 i 9 przyjęto $\gamma = 1; 1,5; 2,7$ (na rys. 8 dodatkowo $\gamma = 2$) oraz $\alpha = 1$.



Rys. 8



Rys. 9

Większym wartościom β odpowiadają większe wartości wariancji dla kąta φ (rys. 8) a dla kąta ψ dla początkowych czasów jest na odwrót (rys. 9) a powyżej pewnej wartości t tak samo jak w przypadku kąta φ .

5. Wnioski końcowe

Proponowana metoda wyznaczania charakterystyk probabilistycznych rozwiązań wahadła podwójnego o zmiennej długości poddanego wymuszeniom losowym może być stosowana łącznie z algorytmami do badania stochastycznych układów dynamicznych o n stopniach swobody i o zmiennej inercji.

Założenie, że warunki początkowe są zdeterminowane nie jest konieczne, jednak postacie funkcji korelacji i korelacji wzajemnej rozwiązań będą w tym przypadku znacznie bardziej skomplikowane. Można także wyprowadzić w podobny sposób jak to przedstawiło w pracy wzory na funkcje momentów centralnych wyższych rzędów.

Literatura cytowana w tekście

1. A. T. BHARUCHA-REID — *Random Integral Equations*. Academic Press, New York and London 1972.
2. F. A. MICHAJLOV, E. D. TIERAJEV (i inni) — *Dinamika niestacjonarnych liniowych sistem*. Izdat. Nauka, Moskwa 1967.
3. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI — *Procesy stochastyczne w dynamice*. PWN Warszawa 1972.
4. K. SOB CZYK — *Metody dynamiki statystycznej*. PWN Warszawa 1973.
5. A. V. SOLODOV, F. S. PETROV — *Linijnye avtomatliczeskie sistemy s pierieniennymi parametrami*. Izdat. Nauka, Moskwa 1971.
6. V. V. SOLODOVNIKOV, Ju. I. BORODIN, A. B. IONNISUAN — *Castotnyje metody analiza i sinteza niestacjonarnych liniowych sistem*. Bibl. Technicz. Kibernetiki, Izdat. Soviet. Radio, Moskwa 1972.
7. J. SZOPA — *Application of Volterra stochastic integral equations of the II-nd kind to the analysis of dynamic systems of variable inertia*. Journal of Technical Physics, **17**, 4, 1976.
8. J. SZOPA — *Metoda wyznaczania funkcji momentów „wyjścia” stochastycznych liniowych układów niestacjonarnych*. Archiwum Automatyki i Telemekhaniki **22**, 4, 1977.
9. J. SZOPA — *O funkcji korelacyjnej dla równania Volterra II-go rodzaju*. Zesz. Nauk. Polit. Śl., seria Automatyka z. **28**, 1974.
10. J. SZOPA — *Wyznaczanie funkcji momentów w stochastycznych układach dynamicznych o dwóch stopniach swobody*. III Konf. Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, PTMTiS i PAN, Opole — maj 1977.
11. J. SZOPA, M. WOJTYŁAK — *Numeryczne metody obliczeń charakterystyk probabilistycznych w układach o zmiennej inercji*. II Konf. Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, PTMTiS i PAN, Gdańsk — listopad 1975.
12. J. SZOPA, M. WOJTYŁAK — *Wariancja wahadła o zmiennej długości*. VII Symp. Drgania w Układach Fizycznych, PTMTiS i Inst. Mech. Techn. Polit. Poznańskiej, Błażejewko — maj 1976.
13. J. SZOPA, M. WOJTYŁAK — *Wyznaczanie wariancji rozwiązań wahadła podwójnego o zmiennej długości poddanego wymuszeniom losowym*. I Konf. Metody i Środki Projektowania Automatycznego. Inst. Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej, Warszawa, listopad 1977.
14. Ch. P. TSOKOS — *On a Stochastic Integral Equation of the Volterra Type*. Math. Systems Theory, Vol. **3**, No 3, 1969.
15. Ch. P. TSOKOS, W. J. PADGETT — *Random Integral Equations with Applications to Stochastic Systems*. Springer-Verlag, Berlin 1971.
16. M. WOJTYŁAK — *Numeryczne problemy obliczania wariancji dla układów opisanych stochastycznym równaniem całkowym Volterra II rodzaju*. Zesz. Nauk. Polit. Śl., seria Matematyka — Fizyka, z. **28**, 1976.

Резюме

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРОБАБИЛИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕШЕНИЙ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА С ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНОЙ ПОДВЕРЖЕННОГО СЛУЧАЙНЫМ ВЫНУЖДЕНИЯМ

В работе дан метод определения пробабилистических характеристик решений уравнений движения двойного маятника с переменной длиной подверженного случайным вынуждениям. Метод основан на использовании стохастического интегрального уравнения Вольтерры второго рода,

а не на многомерной импульсной функции перехода, трудной до определения для случая системы дифференциальных уравнений с переменными со временем параметрах.

Находятся формулы для корреляции и взаимной корреляции решений. Численно определена дисперсия решений для двух типов стохастических процессов, которые вынуждают движение маятника.

S u m m a r y

ON DETERMINATION OF PROBABILISTIC CHARACTERISTICS OF SOLUTIONS OF DOUBLE PENDULUM WITH VARYING LENGTH SUBJECT TO RANDOM FORCING

A method for determining the probabilistic characteristics of solutions of the double pendulum with varying length subject to random forcing is given. The method is based on the stochastic integral Volterra equation of the second kind and not, as usually, on the multidimensional impulse transition function which is difficult to determine in the case of the system of differential equations parameters of which change in time.

Formulae for the correlation function as well as the autocorrelation function of the solutions are given. The variance of the solutions for two types of the stochastic processes forcing the pendulum motion is calculated numerically.

INSTYTUT MECHANIKI TEORETYCZNEJ
POLITECHNIKA ŚLĄSKA
I INSTYTUT MATEMATYKI
UNIwersytet ŚLĄSKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 maja 1978 r.

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ PŁYT PIERŚCIENIOWYCH

STANISŁAW WOJCIECH (BIELSKO BIAŁA)

1. Wstęp

W pracy przedstawiono uzyskane metodą dyskretyzacji (prostych) rozwiązanie zagadnienia dużych ugięć ortotropowych płyt pierścieniowych z wygięciem wstępnym. Założono, że płyty są obciążone ściskającymi siłami promieniowymi, równomiernie rozłożonymi, szybko rosnącymi w czasie, działającymi na brzeg wewnętrzny i zewnętrzny płyty.

Przeprowadzono obliczenia umożliwiające zbadanie wpływu sposobów podparcia i obciążenia płyty, wartości promienia bezwymiarowego i współczynnika ortotropii na wartości krytyczne, przy założeniu że obciążenie rośnie liniowo w czasie. Zbadano wpływ ugięcia wstępnego i szybkości narastania obciążenia na przebieg ugięcia. Założono osiowosymetryczną postać wygięcia wstępnego płyty, a ponadto ograniczono się do przypadków, w których przy statycznym obciążeniu płyty idealnie płaskiej, jej powierzchnia po wyboczeniu jest powierzchnią obrotową [2].

Pozwala to przyjąć, że ugięcie płyty, przynajmniej do momentu zmiany znaku przez prędkość ugięcia, jest osiowosymetryczne. Potem może nastąpić utrata osiowosymetrycznej postaci ugięcia wskutek przeskoku. W rozwiązaniu pominięto zagadnienie rozchodzenia się fal sprężystych w kierunku promieniowym.

Rozwiązanie zagadnienia jest przedmiotem badań wielu autorów. Znane są jedynie rozwiązania, w których przyjmowano jednoparametrową funkcję ugięcia.

A. S. WOŁMIŃ w pracy [1] przedstawił rozwiązanie zagadnienia stateczności dynamicznej płyt prostokątnych.

W pracy [3] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia stateczności dynamicznej płyt kołowych, a w pracy [4] płyt pierścieniowych. Rozwiązania dotyczą płyt izotropowych i zostały uzyskane metodą Galerkinia.

2. Równania różniczkowe zagadnienia

Warunki brzegowe i początkowe. Równanie równowagi dynamicznej płyty i równanie nierozdzielności odkształceń, mają w rozważanym przypadku postać następującą [5]:

$$(2.1) \quad D_r \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 w_1}{\partial \rho^3} - \frac{k^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} + \frac{k^2}{\rho^3} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \right) = \frac{h}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - \frac{\gamma}{g} h r_z^4 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{k_1^2}{\rho_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{k_1^2 E_r}{2} \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{dw_0}{d\rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 \right],$$

gdzie

$w_0 = w_0(\varrho)$ — ugięcie wstępne płyty,
 $w_1 = w_1(\varrho, t)$ — ugięcie wywołane działaniem sił zewnętrznych,
 $w = w_0 + w_1$ — ugięcie całkowite,

$\varrho = \frac{r}{r_z}$ — promień bezwymiarowy,

t — czas,

$\Phi = \Phi(\varrho, t)$ — funkcja naprężeń dobrana tak, aby

$$(2.2) \quad \sigma_r = \frac{1}{r_z^2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{r_z^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2},$$

σ_r, σ_θ — naprężenie w kierunku promieniowym i obwodowym,

k, k_1 — współczynniki ortotropii $k^2 = \frac{D_\theta}{D_r}, k_1^2 = \frac{E_\theta}{E_r}$,

D_r, D_θ — sztywności płytowe w kierunku promieniowym i obwodowym,

E_r, E_θ — moduły sprężystości podłużnej w kierunku promieniowym i obwodowym,

γ — ciężar właściwy materiału płyty,

g — przyspieszenie ziemskie,

h — grubość płyty

W rozważanym w tej pracy przypadku ortotropii materiałowej ($k = k_1$) sztywności płytowe D_r i D_θ określone są wzorami:

$$(2.3) \quad D_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad \nu_r, \nu_\theta \text{ — liczby Poissona.}$$

W pracy rozważane będą przypadki podparcia płyt będące dowolną kombinacją brzegu utwierdzonego i swobodnie podpartego. Z przyjętej postaci ugięcia całkowitego $W = W_0 + W_1$ wynika, że ugięcie całkowite W spełni warunki podparcia, jeśli spełniać je będą ugięcia wstępne W_0 i dodatkowe W_1 .

W przypadku brzegu utwierdzonego ugięcie i kąt ugięcia muszą być zerem:

$$(2.4) \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varrho} = 0.$$

Dla brzegu swobodnie podpartego, zerować się muszą ugięcie i promieniowy moment gnący:

$$(2.5) \quad w = 0, \quad M = -\frac{D_r}{r_z^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho^2} + \frac{\nu_\theta}{\varrho} \frac{\partial w_1}{\partial \varrho} \right) = 0$$

Warunki początkowe mające postać:

$$(2.6) \quad w|_{t=0} = W_0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

można zapisać w następującej postaci:

$$(2.7) \quad w_1|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_1}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Z warunków obciążenia brzegów płyty, wynikają następujące zależności:

$$(2.8) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_w} = -p_w r_z^2, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = -p_z r_z^2.$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych:

$$(2.9) \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{h}, \quad \bar{w}_1 = \frac{\bar{w}_1}{h}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h},$$

$$F = \frac{h}{D_r} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho},$$

$$p^* = \frac{h r_z^2}{D_r} p,$$

oraz przyjęciu, że:

$$(2.10) \quad p_w^* = \delta_1 p^*, \quad \delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla brzegu wewnętrznego obciążonego,} \\ 0 & \text{dla brzegu wewnętrznego nieobciążonego,} \end{cases}$$

$$p_z^* = \delta_2 p^*, \quad \delta_2 = \begin{cases} 1 & \text{dla brzegu zewnętrznego obciążonego,} \\ 0 & \text{dla brzegu zewnętrznego nieobciążonego,} \end{cases}$$

$$p^* = a \cdot t \text{ — obciążenie na brzegach rośnie liniowo w czasie z prędkością } a,$$

$$t^* = \frac{p^*}{p_{kr}^*} = \frac{a}{p_{kr}^*} t \text{ — gdzie } p_{kr}^* \text{ jest wartością bezwymiarowego obciążenia, przy}$$

którym płyta bez wygięcia wstępnie traci stateczność w zagadnieniu statycznym,

równania (2.1) przyjmują postać:

$$(2.11) \quad \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 \bar{w}_1}{\partial \rho^3} - \frac{k^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \rho^2} + \frac{k^2}{\rho^3} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial F}{\partial \rho} \left(\frac{d\bar{w}_0}{d\rho} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} \right) + \right. \\ \left. + F \left(\frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \rho^2} \right) \right] - \frac{S}{(p_{kr}^*)^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial t^{*2}},$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{k_1^2}{\rho^2} F = \frac{l_2}{\rho} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} \left(2 \frac{d\bar{w}_0}{d\rho} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} \right),$$

gdzie:
$$S = \frac{\gamma h r_z^4}{g D_r} a^2$$

$$l_2 = 6k_1^2(\nu_r \nu_0 - 1).$$

Warunki brzegowe i warunek początkowy po przyjęciu, że funkcja \bar{w}_0 spełnia warunki podparcia płyty, mają postać następującą:

$$(2.13) \quad \bar{w}_1 = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} = 0 \quad \text{dla brzegu utwierdzonego,}$$

$$(2.14) \quad \bar{w}_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \rho^2} + \frac{\nu_0}{\rho} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} = 0 \quad \text{dla brzegu swobodnie podpartego,}$$

$$(2.15) \quad F|_{\rho=\rho_w} = -\delta_1 \rho_w p_{kr}^* t^*, \quad F|_{\rho=1} = -\delta_2 p_{kr}^* \cdot t^*,$$

$$(2.16) \quad \bar{w}_1|_{t^*=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t^*} \Big|_{t^*=0} = 0.$$

3. Rozwiązanie zagadnienia

Przedstawione poprzednio równania różniczkowe zagadnienia, są równaniami różniczkowymi cząstkowymi o dwóch zmiennych q i t^* . Większość znanych metod rozwiązywania takich równań polega na doprowadzeniu do zagadnienia rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych.

W tej pracy, w celu doprowadzenia zagadnienia (2.11)—(2.16) do zagadnienia początkowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych, zdyskretyzowano względem zmiennej q i przybliżono pochodne funkcji \bar{w}_1 i F względem zmiennej q w punktach dyskretyzacji przez różnice skończone [8].

Niech n — przyjęta liczba przedziałów, na które dzieli się przedział $\langle q_w, 1 \rangle$,

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{1 - q_w}{n}, \\
 q_i &= q_w + i \cdot b, \quad \text{dla } i = -1, 0, 1, \dots, n, n+1, \\
 (3.1) \quad \left. \frac{d\bar{w}_0}{dq} \right|_{q=q_i} &= S_i, \\
 \left. \frac{d^2\bar{w}_0}{dq^2} \right|_{q=q_i} &= \bar{S}_i, \\
 \bar{w}_1(q_i, t^*) &= X_i(t^*), \\
 F(q_i, t^*) &= Y_i(t^*).
 \end{aligned}$$

Zgodnie z [6] przyjęto:

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad \left. \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial q} \right|_{q=q_i} &= \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2b}, & \left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_{q=q_i} &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2b}, \\
 \left. \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial q^2} \right|_{q=q_i} &= \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{b^2}, & \left. \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \right|_{q=q_i} &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{b^2}, \\
 \left. \frac{\partial^3 \bar{w}_1}{\partial q^3} \right|_{q=q_i} &= \frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + 2x_{i-1} - x_{i-2}}{2b^3}, \\
 \left. \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial q^4} \right|_{q=q_i} &= \frac{x_{i+2} - 4x_{i+1} + 6x_i - 4x_{i-1} + x_{i-2}}{b^4}.
 \end{aligned}$$

Wzory te dają błędy rzędu $O(b^2)$.

Po przyjęciu, że równania (2.11) i (2.12) są spełnione, jeśli są spełnione dla $q = q_1, q_2, \dots, \dots, q_{n-1}$ i wykorzystaniu (3.1) i (3.2), po przekształceniach otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad \varepsilon_{i1} x_{i-2} + \varepsilon_{i2} x_{i-1} + \varepsilon_{i3} x_i + \varepsilon_{i4} x_{i+1} + \varepsilon_{i5} x_{i+2} &= b \left[\frac{1}{4} a_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \cdot \right. \\
 &\left. \cdot (2s_i b + x_{i+1} - x_{i-1}) + a_i y_i (\bar{s}_i b^2 + x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \right] - \frac{Sb^4}{(p_{kr}^*)^2} \frac{d^2 x_i}{dt^{*2}},
 \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad f_{i1}y_{i-1} + f_{i2}y_i + f_{i3}y_{i+1} = \frac{l_2}{4b} a_i (4s_1 b + x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1}),$$

dla $i = 1, 2, \dots, n-1,$

gdzie: $a_i = \frac{b}{\varrho_i},$

$$\varepsilon_{i1} = 1 - a_i, \quad \varepsilon_{i2} = -4 + 2a_i - k^2 a_i^2 - \frac{k^2}{2} a_i^3, \quad \varepsilon_{i3} = 6 + 2k^2 a_i^2,$$

$$\varepsilon_{i4} = -4 - 2a_i - k^2 a_i^2 + \frac{k^2}{2} a_i^3, \quad \varepsilon_{i5} = 1 + a_i,$$

$$f_{i1} = 1 - \frac{a_i}{2}, \quad f_{i2} = -2 - k^2 a_i^2, \quad f_{i3} = 1 + \frac{a_i}{2}.$$

Zagadnienie zostało więc sprowadzone do problemu rozwiązania układu $n-1$ równań różniczkowych zwyczajnych, nieliniowych postaci (3.3). Sformułowane wcześniej warunki brzegowe wynikające ze sposobu podparcia płyty, pozwalają określić wartości ugięć na warstwicach $-1, 0, n, n+1$:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x_0 &= x_n = 0, \\ x_{-1} &= \lambda_1 x_1, \\ x_{n+1} &= \lambda_2 x_{n-1}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\lambda_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla brzegu wewnętrznego utwierdzonego,} \\ \frac{2\varrho_w + \nu_0 b}{\nu_0 b - 2\varrho_w} & \text{dla brzegu wewnętrznego swobodnie podpartego,} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} 1 & \text{dla brzegu zewnętrznego utwierdzonego,} \\ \frac{\nu_0 b - 2}{2 + \nu_0 b} & \text{dla brzegu zewnętrznego swobodnie podpartego.} \end{cases}$$

Z warunków obciążenia brzegów płyty (2.15) wynika, że:

$$(3.6) \quad y_0 = -\delta_1 \varrho_w p_{kr}^* t^*, \quad y_n = -\delta_2 p_{kr}^* t^*.$$

Z warunku (2.16) otrzymuje się:

$$(3.7) \quad x_i|_{t^*=0} = 0, \quad \left. \frac{dx_i}{dt^*} \right|_{t^*=0} = 0.$$

Przez dyskretyzację względem zmiennej ϱ , problem został sprowadzony do rozwiązania następującego zagadnienia początkowego:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \ddot{\mathbf{X}} = \frac{(p_{kr}^*)^2}{Sb^4} [b \cdot \mathbf{R} - \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{X}}], \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \\ \vdots \\ x_2(t^*) \\ \vdots \\ x_{n-2}(t^*) \\ x_{n-1}(t^*) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{13} + \lambda_1 \varepsilon_{11} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & \varepsilon_{44} & \varepsilon_{45} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{n-2,1} & \varepsilon_{n-2,2} & \varepsilon_{n-2,3} & \varepsilon_{n-2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{n-1,1} & \varepsilon_{n-1,2} & \varepsilon_{n-1,3} + \lambda_2 \varepsilon_{n-1,5} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} a_1 (y_2 + \delta_1 \varrho_w p_{kr}^* t^*) (2s_1 b + x_2) + a_1 y_1 (\bar{s}_1 b^2 + x_2 - 2x_1) \\ \frac{1}{4} a_2 (y_3 - y_1) (2s_2 b + x_3 - x_1) + a_2 y_2 (\bar{s}_2 b^2 + x_3 - 2x_2 + x_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{4} a_i (y_{i+1} - y_{i-1}) (2s_i b + x_{i+1} - x_{i-1}) + a_i y_i (\bar{s}_i b^2 + x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \\ \frac{1}{4} a_{n-2} (y_{n-1} - y_{n-3}) (2s_{n-2} b + x_{n-1} - x_{n-3}) + a_{n-2} y_{n-2} (\bar{s}_{n-2} b^2 + x_{n-1} - 2x_{n-2} + x_{n-3}) \\ \frac{1}{4} a_{n-1} (\delta_2 p_{kr}^* t^* - y_{n-2}) (2s_{n-1} b - x_{n-2}) + a_{n-1} y_{n-1} (\bar{s}_{n-1} b^2 - 2x_{n-1} + x_{n-2}) \end{bmatrix}.$$

Składowe wektora $\mathbf{Y} = [y_1(t^*), \dots, y_{n-1}(t^*)]^T$ oblicza się ze wzoru:

$$(3.9) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{H},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} f_{12} & f_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_1 & f_2 & f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{n-1,1} & f_{n-1,2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{4b} a_1 (4S_1 b + x_2) x_2 + \delta_1 \varrho_w p_{kr}^* t^* f_{11} \\ \vdots \\ \frac{l_2}{4b} a_i (4S_i b + x_{i+1} - x_{i-1}) (x_{i+1} - x_{i-1}) \\ \vdots \\ \frac{l_2}{4b} a_{n-1} (4S_{n-1} b - x_{n-2}) (-x_{n-2}) + \delta_2 p_{kr}^* t^* f_{n,3} \end{bmatrix},$$

4. Wyznaczenie wartości statycznego obciążenia krytycznego p_{kr}

Wartości p_{kr}^* (których znajomość jest potrzebna przy rozwiązywaniu zagadnienia początkowego (3.8)) wyznacza się z równań (2.11) (2.12) po odrzuceniu członu bezwładnościowego i nieliniowego oraz przyjęciu $w_0 = 0$, otrzymując:

$$(4.1) \quad \frac{d^4 \bar{w}}{d\varrho^4} + \frac{2}{\varrho} \frac{d^3 \bar{w}}{d\varrho^3} - \frac{k^2}{\varrho^2} \frac{d^2 \bar{w}}{d\varrho^2} + \frac{k^2}{\varrho^3} \frac{d\bar{w}}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho} \left[\frac{dF}{d\varrho} \frac{d\bar{w}}{d\varrho} + F \frac{d^2 \bar{w}}{d\varrho^2} \right],$$

$$(4.2) \quad \frac{d^2 F}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF}{d\varrho} - \frac{k_1^2}{\varrho^2} F = 0.$$

Rozwiązaniem zagadnienia tarczowego danego równaniem (4.2) z warunkami brzegowymi:

$$(4.3) \quad F|_{\varrho=\varrho_w} = -\delta_1 \varrho_w p^*, \quad F|_{\varrho=1} = -\delta_2 p^* \quad \text{jest funkcja}$$

$$(4.4) \quad F = p^*(l_1 \varrho^{k_1} + l_2 \varrho^{-k_1}), \quad \text{gdzie} \quad c_1 = \frac{\delta_2 \varrho_w^{-k_1} + \delta_1 \varrho_w}{\varrho_w^{k_1} - \varrho_w^{-k_1}}, \quad c_2 = \frac{\delta_1 \varrho_w - \delta_2 \varrho_w^{k_1}}{\varrho_w^{k_1} - \varrho_w^{-k_1}}.$$

Wstawiając tak wyznaczoną funkcję F do równania (4.1), po zastąpieniu pochodnych przez różnice skończone (podobnie jak to zrobiono w równaniu (2.11)) otrzymuje się:

$$(4.5) \quad \varepsilon_{i1} x_{i-2} + \varepsilon_{i2} x_{i-1} + \varepsilon_{i3} x_i + \varepsilon_{i4} x_{i+1} + \varepsilon_{i5} x_{i+2} = p^* \frac{b^2}{\varrho_i} [x_{i+1}(d_i + \bar{e}_i) - 2d_i x_i + (d_i - \bar{e}_i)x_{i-1}],$$

dla $i = 1, 2, \dots, n-1$,

gdzie ε_{ij} wyrażają się tak samo jak w (3.3),

$$x_i = \bar{w}(\varrho_i),$$

$$d_i = c_1 \varrho_i^{k_1} + c_2 \varrho_i^{-k_1},$$

$$\bar{e}_i = \frac{k_1 b}{2} (c_1 \varrho_i^{k_1-1} - c_2 \varrho_i^{-k_1-1}).$$

Równania (4.5) można zapisać w następującej, równoważnej macierzowej postaci:

$$(4.6) \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = p^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X},$$

gdzie \mathbf{B} jest macierzą określoną jak w (3.8)

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}]^T,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{12} & m_{13} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-1,1} & m_{n-1,2} \end{bmatrix}$$

$$m_{i1} = (d_i - \bar{e}_i) \frac{b^2}{\varrho_i},$$

$$m_{i2} = -2d_i \frac{b^2}{\varrho_i},$$

$$m_{i3} = (d_i + \bar{e}_i) \frac{b^2}{\varrho_i} \quad \text{fdla} \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Układ (4.6) ma rozwiązanie nietrywialne, jeśli:

$$(4.7) \quad \det(\mathbf{B} - p^* \mathbf{M}) = 0.$$

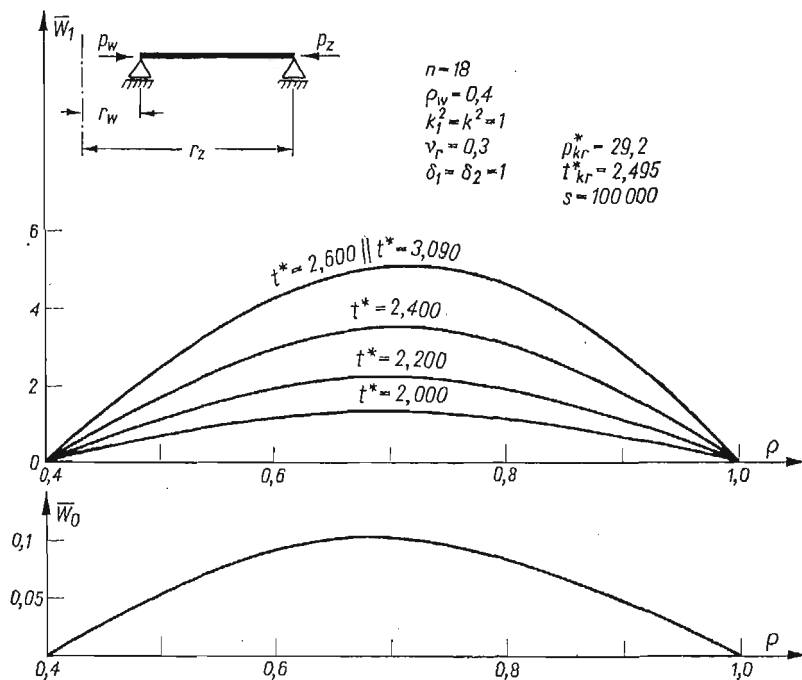
Z równania (4.7) będącego uogólnionym zagadnieniem wartości własnych, można otrzymać $n-1$ wartości własnych macierzy $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{M}$, przy czym w dalszych obliczeniach przyjmowano p_{kr}^* równe najmniejszej z wartości własnych. Z rozwiązania równania (4.6) można bezpośrednio otrzymać wektory własne odpowiadające poszczególnym wartościom p_{kr}^* , a ich składowe określają ugięcie płyty w chwili utraty stateczności.

5. Obliczenia, wyniki

Podstawową trudność numeryczną stanowi rozwiązanie zagadnienia (3.8). Z uwagi na bardzo dużą liczbę działań koniecznych do wykonania przy liczeniu wartości wektora R w poszczególnych punktach osi t^* , do rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę ekstrapolacyjno-interpolacyjną czwartego rzędu Adamsa-Bashfortha, z automatycznym doбором kroku całkowania. Przyjęto, że błędy obcięcia nie mogą co do wartości bezwzględnej przekroczyć 10^{-5} .

Do rozwiązania zagadnienia wartości własnych (4.7) wykorzystano algorytm QR, po uprzednim sprowadzeniu macierzy $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{M}$ do górnej macierzy Hessenberga.

W celu wykonania obliczeń, napisano program w języku Fortran IV wykorzystując w programie podprogramy z grupy FSCE biblioteki Odry 1300. Obliczenia przeprowadzono na EMC ODRA 1305.

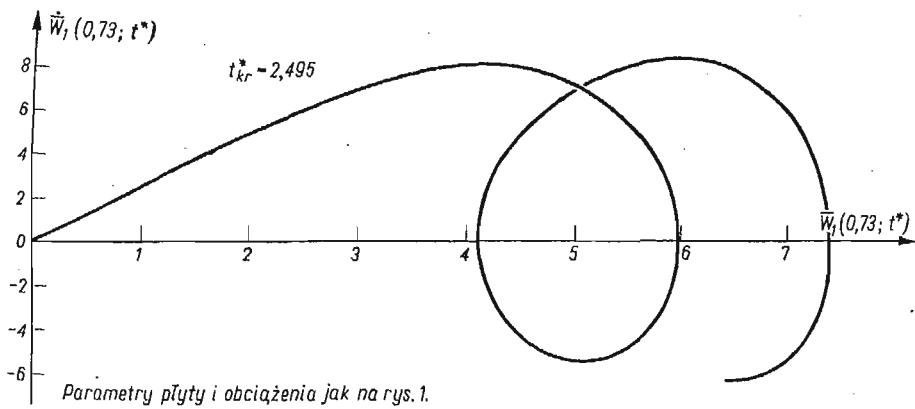


Rys. 1

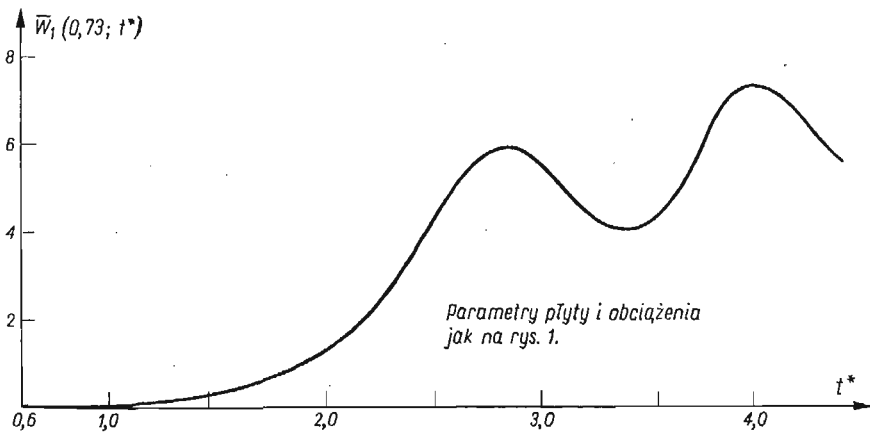
W dalszych rozważaniach przyjmuje się za Wolmirem [1], że płyta obciążona dynamicznie traci stateczność, gdy prędkość ugięcia osiąga pierwsze maksimum ($\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial t^{*2}} = 0$), a odpowiadającą temu wartość obciążenia działającego na brzegu płyty nazywa krytycznym obciążeniem dynamicznym i oznacza p_{krd}^* . Stosunek krytycznych obciążeń: dynamicznego do statycznego oznacza się $t_{kr}^* = \frac{p_{krd}^*}{p_{kr}^*}$. Na rysunku 1 przedstawiono wpływ wielkości obciążenia na ugięcie płyty izotropowej, dwustronnie swobodnie podpartej, obciążonej na obu brzegach. Łatwo zauważyć, że przy różnych t^* ugięcie płyty jest maksymalne prawie zawsze przy tej samej wartości ϱ .

Podobnego spostrzeżenia dokonano we wszystkich rozważanych przypadkach. Spotykane przesunięcia punktu nie przekraczały długości 3 podprzedziałów (3b).

Na rysunku 2 i 3 przedstawiono przebieg ugięcia gdy $\varrho = 0,73$ przy tej bowiem wartości ugięcie jest maksymalne. Na rysunku 2 przedstawiono przebieg ugięcia na płaszczyźnie fazowej, a na rysunku 3 pokazano zależność $\bar{w}_1 = \bar{w}_1(0,73, t^*)$.



Rys. 2



Rys. 3

Wykresy dotyczą płyty przedstawionej na rysunku 1. Wykres na płaszczyźnie fazowej pozwala bardzo wyraźnie zidentyfikować bezwymiarowy czas utraty stateczności.

Z uwagi na bezpośrednie powiązanie t^* z wartością obciążenia, wszystkie następane rysunki podają zależność maksymalnego ugięcia od t^* w sposób przedstawiony na rysunku 3.

W tabelicy 1 przedstawiono wpływ n na wartości p_{kr}^* , t_{kr}^* i $\bar{w}_1 \max$. Zamieszczone tam wyniki (potwierdziły to pozostałe obliczenia) wskazują, że wystarczającą dokładność wyników uzyskuje się gdy $n \geq 12$.

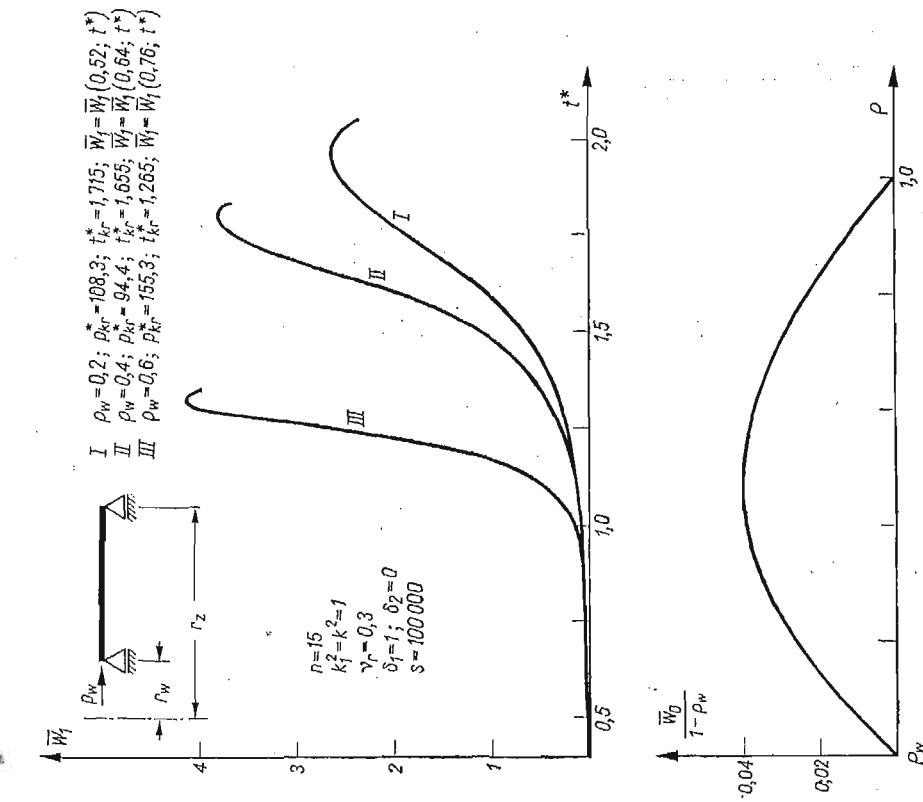
Jednak przyjęcie dużego n powoduje znaczne zwiększenie czasu obliczeń. W przypadku płyty dwustronnie utwierdzonej opisanej w tabelicy 1, przy $n = 12$ czas obliczeń wynosił 20 minut, a przy $n = 24$ wynosił 4.5 godziny. W dalszych obliczeniach przyjęto $n = 15$ jako liczbę zapewniającą otrzymanie wystarczająco dokładnych wyników.

Tabela 1

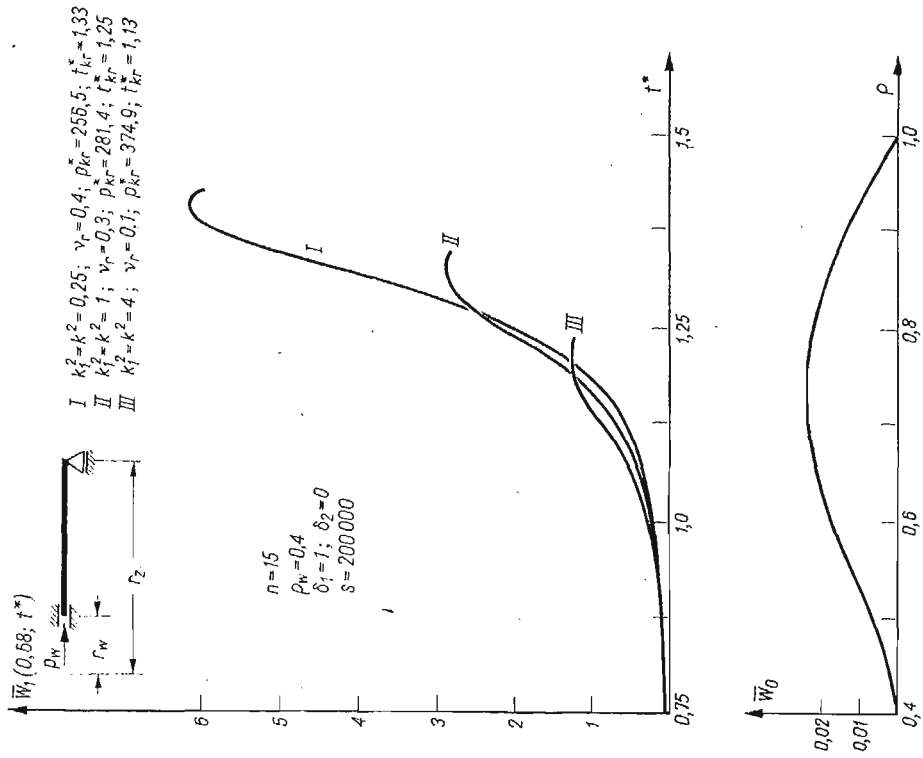
n	$\varrho_w = 0.4, k_1^2 = k^2 = 1, \nu_r = 0.3, \delta_1 = 1, \delta_2 = 0, S = 100000$			$\varrho_w = 0.4, k_1^2 = k^2 = 1, \nu_r = 0.3, \delta_1 = \delta_2 = 1, S = 100000$		
	p_{kr}^*	t_{kr}^*	$\max_{\varrho_w \leq \varrho < 1} \{\bar{w}_1(\varrho, t_{kr}^*)\}$	p_{kr}^*	t_{kr}^*	$\max_{\varrho_w \leq \varrho < 1} \{\bar{w}_1(\varrho, t_{kr}^*)\}$
12	381,11	1,09	1,51	29,1	2,495	4,20
15	385,72	1,09	1,55	29,2	2,495	4,23
18	388,16	1,09	1,55	29,2	2,495	4,25
21	389,61	1,09	1,55	29,2	2,495	4,25
24	390,55	1,09	1,55	29,2	2,495	4,25
27	391,19					
30	391,64					
33	391,98					
36	392,23					
wg [7]	393,57					

Jak wykazują wyniki zamieszczone w tabelicy 1 błąd w określeniu krytycznego obciążenia dynamicznego p_{krd}^* jest proporcjonalny do błędu w wyznaczeniu krytycznego obciążenia statycznego p_{kr}^* wobec faktu, że t_{kr}^* praktycznie nie zmienia się ze zmianą n (dla $n \geq 12$).

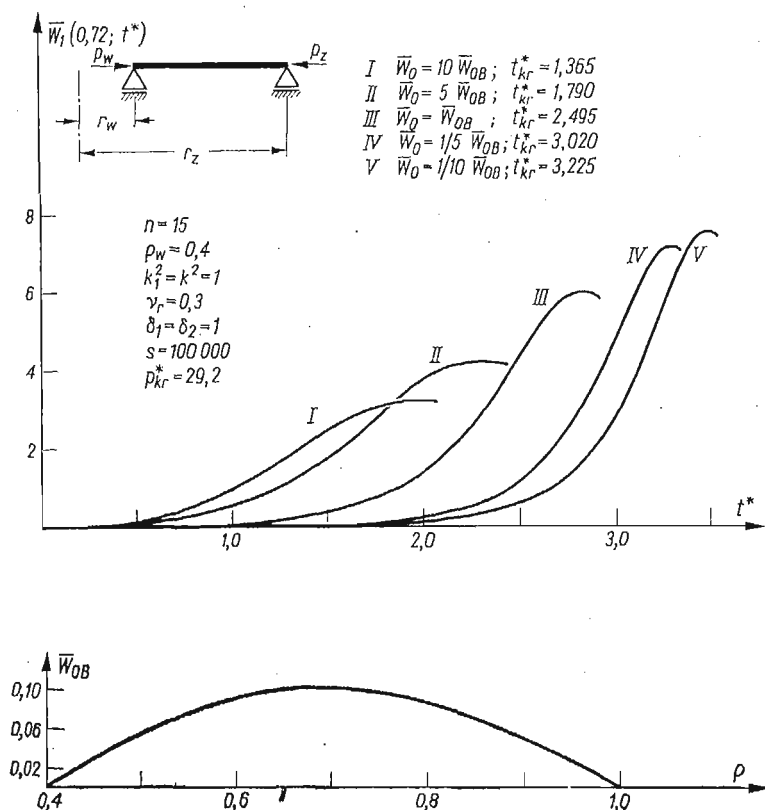
Na rysunku 4 przedstawiono, dotyczące izotropowej płyty swobodnie podparte na obu brzegach i obciążonej na brzegu wewnętrznym wykresy maksymalnego ugięcia dla różnych wartości bezwymiarowego promienia wewnętrznego. Założono, że $\bar{w}_0/(1 - \varrho_w) = \text{const}$. Rysunek 5 pokazuje wpływ współczynnika ortotropii na zależność $\bar{w}_1(\varrho, t^*)$. Widać, że ze wzrostem współczynnika ortotropii maleje t_{kr}^* i wartość ugięć płyty gdy $t^* = t_{kr}^*$, mimo wyraźnego wzrostu wartości krytycznych obciążeń statycznych. Wpływ



Rys. 4



Rys. 5



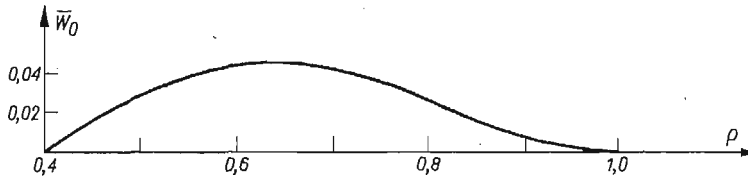
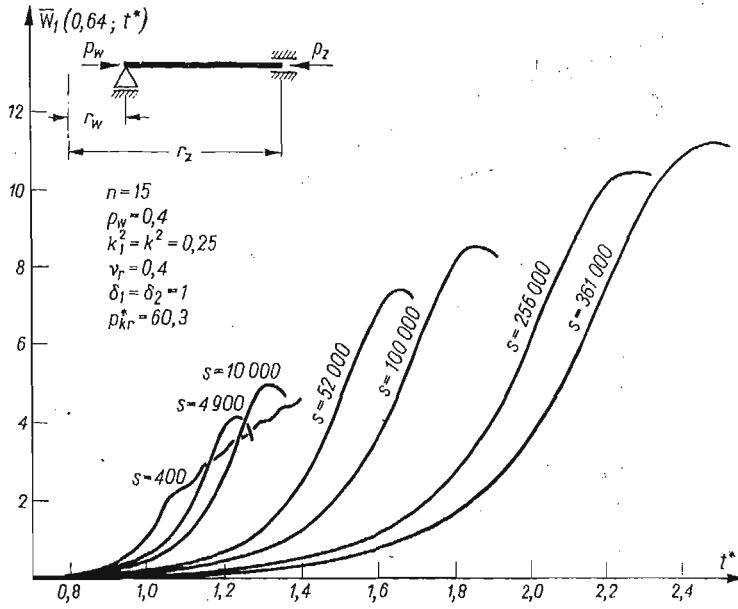
Rys. 6

wielkości wygięcia wstępnego na przebieg ugięcia przedstawia rysunek 6. Ze wzrostem ugięcia wstępnego maleje wartość krytycznego obciążenia i wartości ugięcia $w_1(\rho, t_{kr}^*)$.

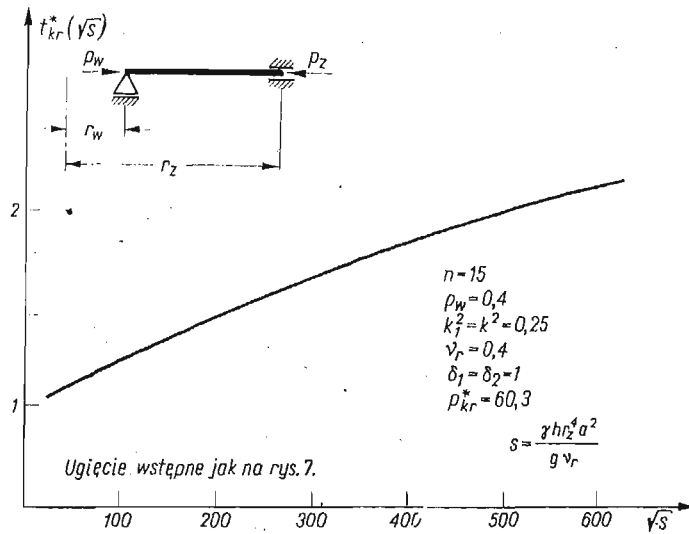
Na rysunku 7 przedstawiono wpływ stałej S na przebieg ugięcia płyty utwardzonej wzdłuż brzegu zewnętrznego i swobodnie podpartej na brzegu wewnętrznym, obciążonej na obu brzegach jednakowo. Gdy $S = 400$ ($S = \frac{\gamma hr^4}{g D_r} a^2$), gdzie a — prędkość narastania obciążenia na brzegach, ugięcie płyty stale rośnie mimo, że druga pochodna ugięcia względem czasu zmienia znak. Wynika to z faktu, że przy małej prędkości narastania obciążenia, przebieg ugięcia jest podobny jak w zagadnieniu quasistatycznym. Widać, że ze wzrostem prędkości narastania obciążenia, rośnie t_{kr}^* , a tym samym wartość krytycznych obciążeń dynamicznych.

Tej samej płyty i ugięcia wstępnego, dotyczy rysunek 8, na którym przedstawiono zależność $t_{kr}^*(\sqrt{s})$ (wpływ prędkości narastania obciążenia).

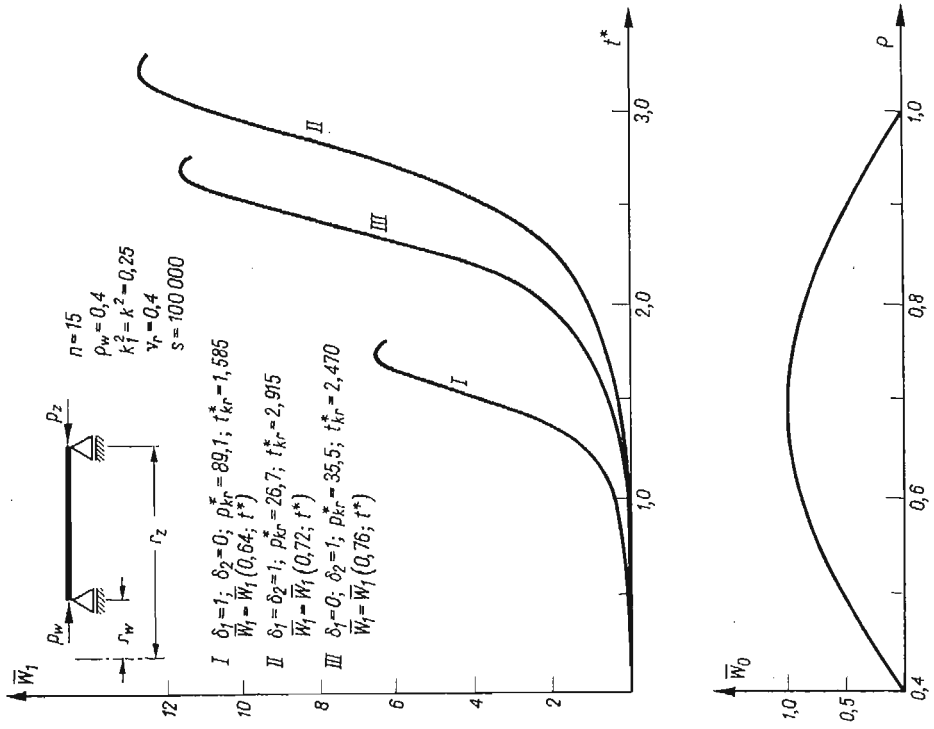
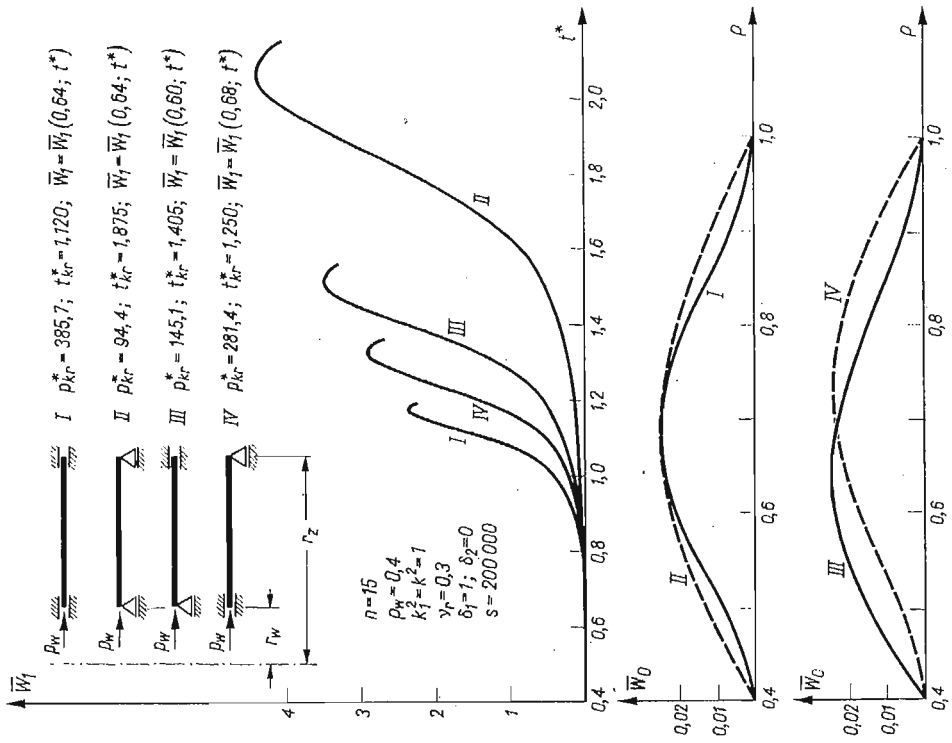
Na rysunku 9 przedstawiono wpływ sposobu podparcia na przebieg ugięcia płyty izotropowej, obciążonej na brzegu wewnętrznym przy założeniu, że we wszystkich przypadkach podparcia, ugięcie wstępne ma tę samą wartość maksymalną równą 0,024 grubości płyty.



Rys. 7



Rys. 8



Zależność przebiegu ugięcia od sposobu obciążenia płyty, przedstawiono na wykresach rysunku 10. W przedstawionym tam przypadku obciążenia siłami działającymi na brzegu zewnętrznym płyta traci stateczność przy niesymetrycznej postaci ugięcia, jednak z uwagi na istnienie osiowosymetrycznego ugięcia wstępnego i dla pełności wyników, zamieszczono na rysunku uzyskane w tym przypadku wyniki.

6. Wnioski

Podstawową zaletą przedstawionego rozwiązania zagadnienia jest nie nakładanie żadnych ograniczeń na rozwiązanie. Ponadto łatwo sprowadzić zagadnienie do problemu (3.8) dającego się efektywnie rozwiązać numerycznie.

Bezpośredni wpływ na czas obliczeń, oprócz liczby n ma wartość stałej S . Czas obliczeń maleje ze wzrostem S .

Z rysunku 8 wynika, że zależność $t_{kr}^* \sqrt{S}$ jest prawie liniowa. Przedstawione rozwiązanie może być łatwo przeniesione na przypadek płyt obciążonych siłami promieniowymi zmieniającymi się nieliniowo w czasie. Można uzyskać wyniki określające naprężenia w płycie, według wzoru (3.9).

Zaletą przedstawionego rozwiązania jest fakt, że w czasie opracowywania algorytmu obliczeń, nie trzeba znać kształtu i wartości ugięcia wstępnego.

Dużą dokładność wyników uzyskiwana przy $n \geq 12$ pozwala przypuszczać, że przedstawiona metoda może być stosowana do rozwiązania szeregu podobnych zagadnień dynamicznych.

Dziękuję pracownikom Ośrodka Obliczeniowego przy Bielskiej Fabryce Maszyn Włókienniczych „BEFAMA” za pomoc w realizacji obliczeń na maszynie cyfrowej.

Literatura cytowana w tekście

1. A. S. WOLMIR, *Nieliniowa dynamika plastinok i obłoczek*, Moskwa (1972),
2. A. S. STRZELCZYK, S. WOJCIECH, *Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności ortotropowych płyt pierścieniowych*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 1, 15 (1977),
3. M. KŁOSOWICZ, *Stateczność dynamiczna płyty kołowej*, Z. N. Politechniki Łódzkiej, *Mechanika* z. 45 (1976),
4. M. TROMBSKI, S. WOJCIECH, *Stateczność dynamiczna płyty pierścieniowej pod działaniem obciążeń promieniowych równomiernie rozłożonych*, Z. N. Politechniki Łódzkiej, *Mechanika*, z. 51 (1978),
5. M. TROMBSKI, J. LEYKO, *Zagadnienia dużych ugięć wiotkich płyt pierścieniowych z wygięciem wstępnym*, Z.N. Politechniki Łódzkiej, *Mechanika*, z. 33 (1973),
6. G. N. POŁOŻY, *Metody przybliżonych obliczeń*, WNT, Warszawa (1974),
7. G. K. RAMAIAH, K. VIJAYAKUMAR, *Buckling of popular orthotropic annular plates under uniform internal pressure*, *AIAA Journal* 12, 8 (1974),
8. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT Warszawa (1974).

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ

В работе представлено полученное методом конечных разностей решение задачи устойчивости кольцевых пластинок динамически нагруженных.

Решение получено при предположении, что начальные прогибы пластинки и дополнительные прогибы вызванные нагрузкой являются поверхностями вращения. Предположено, что сжимающая, равномерно распределённая вдоль краев нагрузка действующая в срединной плоскости, растёт пропорционально времени. Исследовано влияние принятого числа точек дискретизации на точность результатов, а также влияние значения начального прогиба, способа закрепления краев и скорости нарастания нагрузки на процесс прогиба пластинок.

Summary

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF DYNAMIC STABILITY OF ANNULAR PLATES

A solution obtained by the finite difference method of the annular plate dynamic stability problem has been presented. To obtain the solution it has been assumed that the preliminary plate deflection and the additional deflection due to the load are axisymmetric. The plate has been loaded by uniformly distributed, along edges, radial forces increasing linearly in time. The effect of the assumed discretisation points number on the accuracy of results as well as the effects of the magnitude of preliminary deflection the way of support and velocity of the load increase on the plate deflection have been investigated.

INSTYTUT MECHANICZNO-KONSTRUKCYJNY
POLITECHNIKA ŁÓDZKA
FILIA W BIELSKU-BIAŁEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 maja 1978 r.

PODŁUŻNA STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA ŚMIGŁOWCA
Z PODWIESZONYM ŁADUNKIEM W ZAWISIE

WIESŁAW ŁUCJANEK, KRZYSZTOF SIBILSKI (WARSZAWA)

Podano model fizyczny jednowirnikowego śmigłowca z podwieszonym ładunkiem oraz równania opisujące ruch podłużny tego zespołu w stanie zawisu. Uwzględniono trzy stopnie swobody: pochylanie śmigłowca oraz poziome przemieszczenia śmigłowca i ładunku. Stateczność zanalizowano metodą małych zaburzeń stanu równowagi. W oparciu o dane liczbowe dla typowego lekkiego śmigłowca określono postacie ruchu układu oraz wpływ ciężaru ładunku, długości liny i miejsca jej zamocowania do śmigłowca na stateczność zespołu.

Spis ważniejszych oznaczeń

- A** — bezwymiarowa macierz bezwładności występująca w równaniach (4) i (16). W rozważanym w pracy przypadku jest to macierz jednostkowa,
 $A_w = \Omega \cdot R^2$ — pole powierzchni zakreślonej przez końce łopat wirnika nośnego [m²],
 $a = dC_z/d\alpha$ — pochodna współczynnika siły nośnej profilu łopaty względem kąta natarcia [rad⁻¹],
 $a_0 = (t_4 \cdot \vartheta_R - t_5 \cdot \vartheta_T - t_3 \cdot \lambda_0)/(\gamma + c_k)$ — kąt stożka wirnika nośnego [rad],
 a_{1c} — amplituda kąta wahań łopat wirnika nośnego odniesiona do płaszczyzny tarczy sterującej, mierzona w płaszczyźnie podłużnej śmigłowca [rad],
B — bezwymiarowa macierz tłumienia określona w równaniu (6),
 b — liczba łopat wirnika nośnego,
C — bezwymiarowa macierz sztywności określona w równaniu (7),
 $c_k = 8 \cdot k_B/\rho \cdot \Omega^2 \cdot R^4 \cdot a \cdot c_0$ — współczynnik sztywności łopaty w przegubie poziomym,
 c_0 — ciężwa łopaty wirnika nośnego u nasady [m],
 $c_T = M \cdot g/\rho \cdot V_T^2 \cdot A_w \cdot \sigma$ — współczynnik ciągu wirnika nośnego śmigłowca bez podwieszonego ładunku,
 C_z — współczynnik siły nośnej profilu łopaty,
D — bezwymiarowa macierz wyrazów wolnych określona w równaniu (8),
 d — odległość punktu zamocowania liny z ładunkiem od środka ciężkości śmigłowca mierzona wzdłuż prostej przechodzącej przez środek piasty wirnika nośnego i środek ciężkości śmigłowca [m],
E — macierz jednostkowa,
 g — przyspieszenie ziemskie [m/s²],
 h — odległość środka piasty wirnika nośnego od środka ciężkości śmigłowca [m],

- I_F — moment bezwładności łopaty wirnika nośnego względem przegubu poziomego $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]_1$,
 I_y — centralny moment bezwładności śmigłowca względem osi y $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$,
 \mathbf{K} — macierz określona w równaniu (17),
 k_H — sztywność zamocowania łopaty w przegubie poziomym $[\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}]$,
 l — długość liny, na której jest podwieszony ładunek $[\text{m}]$,
 M — masa śmigłowca bez podwieszonego ładunku $[\text{kg}]$,
 m — masa podwieszonego ładunku $[\text{kg}]$,
 $\bar{m} = m/M$ — względna masa podwieszonego ładunku,
 \mathbf{q} — wektor stanu określony w równaniu (15),
 q — prędkość kątowa pochylania śmigłowca $[\text{s}^{-1}]$,
 \mathbf{R} — macierz określona w równaniu (16),
 R — promień wirnika nośnego $[\text{m}]$,
 $r_y = \sqrt{I_y/M}$ — centralny promień bezwładności śmigłowca względem osi y $[\text{m}]$,
 T — ciąg wirnika nośnego $[\text{N}]$,
 t — czas $[\text{s}]$,
 $t_a = M/\dot{q} \cdot V_T \cdot A_w \cdot \sigma$ — czas aerodynamiczny, $[\text{s}]$
 t^* — zbieżność łopaty wirnika nośnego,
 $t_i = 4 \cdot \int_{x_0}^{\bar{x}_k} (1 - t^* \cdot x) x^{i-1} dx, (i = 1 \dots 5)$ — współczynniki charakteryzujące kształt łopaty wirnika nośnego [8],
 $V_T = \Omega \cdot R$ — prędkość końców łopat wirnika nośnego $[\text{m}/\text{s}]$,
 V — prędkość pozioma śmigłowca $[\text{m}/\text{s}]$,
 \mathbf{x} — wektor określony w równaniu (5),
 x_k — promień wirnika nośnego z uwzględnieniem strat siły nośnej na końcach łopat $[\text{m}]$,
 x_l — współrzędna środka ciężkości podwieszonego ładunku $[\text{m}]$,
 x_s — współrzędna środka ciężkości śmigłowca $[\text{m}]$,
 x_z — współrzędna punktu zamocowania liny z ładunkiem do śmigłowca $[\text{m}]$,
 x_0 — odległość od środka piasty do przekroju łopaty u nasady $[\text{m}]$,
 $x_1 = (M \cdot x_s + m \cdot x_l)/(M + m)$ — współrzędna środka ciężkości układu śmigłowiec-podwieszony ładunek $[\text{m}]$,
 $x_2 = x_l - x_s$ — odległość środka ciężkości śmigłowca od środka ciężkości podwieszonego ładunku mierzona wzdłuż osi x $[\text{m}]$,
 α — kąt natarcia profilu łopaty $[\text{rad}]$,
 $\gamma = 8 \cdot I_F / q a \cdot c_0 \cdot R^4$ — stała masowa łopaty,
 δ_3 — współczynnik sprzężenia wahań i przekręceń łopaty,
 η — część urojona wartości własnej λ (bezwymiarowa częstość oscylacji),
 Θ — kąt pochylecia śmigłowca $[\text{rad}]$,
 Θ_L — kąt między linią z podwieszonym ładunkiem i pionem, mierzony w podłużnej płaszczyźnie śmigłowca $[\text{rad}]$,
 Θ_T — kąt między wektorem ciągu wirnika nośnego i prostą łączącą piastę wirnika ze środkiem ciężkości śmigłowca mierzony w podłużnej płaszczyźnie śmigłowca $[\text{rad}]$,
 ϑ_R — kąt nastawienia łopaty wirnika nośnego $[\text{rad}]$,

ϑ_T — kąt skręcenia końcowego profilu łopaty wirnika nośnego względem profilu przy nasadzie [rad],

$\lambda = \xi \pm \sqrt{-1} \cdot \eta$ — wartość własna macierzy \mathbf{R} ,

λ_0 — współczynnik przepływu pionowego,

$\mu_0 = M/\rho \cdot R \cdot A_w \cdot \sigma$ — względna gęstość śmigłowca,

ξ — część rzeczywista wartości własnej λ (bezwymiarowy współczynnik tłumienia),

ρ — gęstość powietrza [kg/m^3],

$\sigma = b \cdot c_0/\pi \cdot R$ — współczynnik wypełnienia wirnika nośnego,

$\tau = t/t_a$ — czas bezwymiarowy,

(\cdot) — pochodna względem czasu bezwymiarowego,

$(-)$ — wielkość bezwymiarowa.

1. Wstęp

Coraz szersze stosowanie śmigłowców do prac dźwigowych stwarza potrzebę zbadania stateczności śmigłowca z podwieszonym ładunkiem. Opublikowane piśmiennictwo na temat dynamiki układu śmigłowiec-podwieszony ładunek jest stosunkowo ubogie. Wprawdzie ukazały się prace dotyczące zarówno rozważań teoretycznych [1], [2], [3], jak i wyników prób w locie [4], [5], jednakże mają one charakter analiz wstępnych, obejmują proste modele fizyczne (np. śmigłowiec jest traktowany jak punkt materialny [3]) i stanowią próbę przede wszystkim oszacowań jakościowych.

Praca niniejsza stanowi próbę analizy ilościowej. Parametrami zagadnienia są: długość liny, na której jest podwieszony ładunek oraz stosunek masy ładunku do masy śmigłowca i odległość punktu zamocowania liny z ładunkiem od środka ciężkości śmigłowca. Wybór tych parametrów jest podyktowany względami poznawczymi, a ponadto w przypadkach szczególnych umożliwi porównanie wyników z rezultatami prac innych autorów, np. przy zerowej masie podwieszonoego ładunku z wynikami dotyczącymi śmigłowca izolowanego, lub przewidzenie rezultatu na podstawie przesłanek fizycznych, np. przy podwieszeniu ładunku w środku ciężkości śmigłowca — rozprężnięcie wahań ładunku i pochylenia śmigłowca.

2. Założenia

1) Ruchy: podłużny i boczny układu śmigłowiec-podwieszony ładunek są rozprężnięte.

2) Równania opisujące ruch podłużny śmigłowca i ładunku można rozdzielić na dwa niezależne układy, z których jeden dotyczy przemieszczeń śmigłowca i ładunku wzdłuż osi poziomej oraz pochylenia śmigłowca, a drugi przemieszczeń układu wzdłuż osi pionowej. Uzasadnienie tego założenia można znaleźć np. w pracach: [6], [7] i [9].

3) Przemieszczenia układu wzdłuż osi pionowej nie będą uwzględnione, gdyż w przypadku śmigłowca izolowanego ta postać ruchu jest nieoscylacyjna i tłumiona [9], a wpływ z założenia małych ruchów podwieszonoego ładunku jest niewielki.

4) Śmigłowiec jest traktowany jako sztywna bryła o masie M i centralnym momencie bezwładności I_y .

5) Na śmigłowcu, poza jego ciężarem, działają następujące siły zewnętrzne: ciąg pojedynczego wirnika nośnego i naciąg pojedynczej liny, na której wisi ładunek.

6) Ciąg wirnika jest stały i równy sumie ciężarów śmigłowca i ładunku.

7) Tarcza sterująca wirnika nośnego jest nieruchoma (stateczność „z trzymanym drążkiem”).

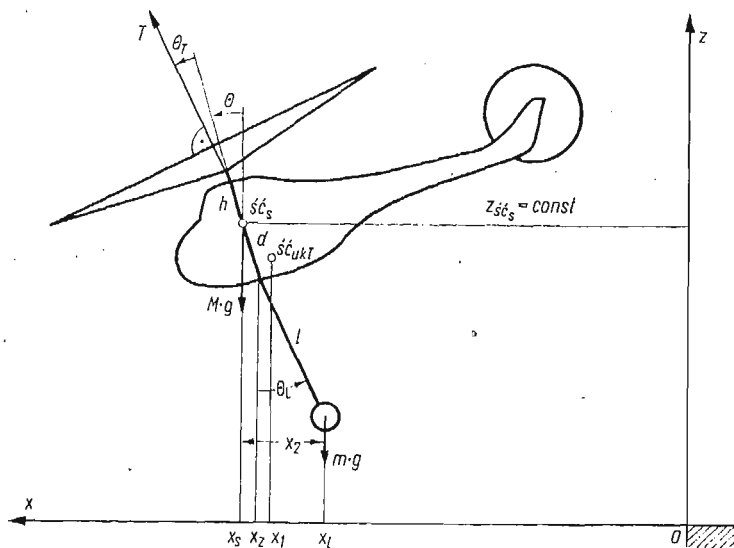
8) Ładunek jest reprezentowany przez punkt o masie m zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej linie (wahadło matematyczne) w odległości d od środka ciężkości śmigłowca.

9) Stanem równowagi śmigłowca jest zawis.

10) Zaburzeniami są małe zakłócenia stanu równowagi.

3. Modele: fizyczny i matematyczny

Ruch zespołu: śmigłowiec-podwieszony ładunek jest opisany w prostokątnym prawoskrętnym układzie współrzędnych x, y, z związanym z Ziemią. Oś z jest skierowana pionowo do góry, a oś x leży w podłużnej płaszczyźnie śmigłowca i jest skierowana do przodu kadłuba (rys. 1).



Rys. 1

Dla rozpatrywanych trzech stopni swobody zespołu: poziome przemieszczenie śmigłowca x_s , pochylenie śmigłowca θ i poziome przemieszczenie podwieszonoego ładunku x_L , można otrzymać następujący układ równań opisujących ruch śmigłowca i ładunku [7] (oznaczenia jak na rys. 1):

$$(1) \quad M \frac{d^2 x_s}{dt^2} = (M+m)g \sin(\theta + \theta_T) - mg \cos \theta_L \sin \theta_L,$$

$$(2) \quad m \frac{d^2 x_L}{dt^2} = mg \cos \theta_L \sin \theta_L,$$

$$(3) \quad I_y \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = (M+m)gh \sin \Theta_T + mg(x_z - x_s) \cos^2 \Theta_L + mgd \cos \Theta_L \sin \Theta_L,$$

gdzie: $x_z = x_s - d \sin \Theta$ oraz $\sin \Theta_L = (x_z - x_l) / l$.

Układ ten po linearyzacji względem małych zaburzeń stanu równowagi, wyrażeniu kąta Θ_T przez pochodne aerodynamiczne wirnika [8] i zmienne stanu oraz zamianie współrzędnych x_s i x_l na wielkości x_1 i x_2 , w formie bezwymiarowej¹ przybiera postać [7]:

$$(4) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D} = \mathbf{0},$$

gdzie:

$$(5) \quad \mathbf{x} = \text{col}[\bar{x}_1, \Theta, \bar{x}_2],$$

$$(6) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$(7) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0, & c_{12}, & 0 \\ 0, & c_{22}, & c_{23} \\ 0, & c_{32}, & c_{33} \end{bmatrix},$$

$$(8) \quad \mathbf{D} = \text{col} \left[0, \frac{\bar{m}}{r_y} \cdot (1 + \bar{d}/\bar{l}) \cdot c_T \cdot \mu_0 \cdot \bar{s}, -(1 + \bar{m}) \cdot c_T \cdot \mu_0 \cdot \bar{s}/\bar{l} \right].$$

Elementy macierzy \mathbf{B} i \mathbf{C} można obliczyć z zależności:

$$(9) \quad \begin{cases} b_{11} = \frac{\partial a_{1c}}{\partial V} \cdot c_T \cdot \mu_0, & b_{12} = - \left(\frac{\partial a_{1c}}{\partial q} \cdot \frac{da'}{da_1} - \bar{h} \cdot \frac{\partial a_{1c}}{\partial V} \right) \cdot c_T \cdot \mu_0, \\ b_{13} = \frac{\bar{m}}{1 + \bar{m}} \cdot \frac{\partial a_{1c}}{\partial V} \cdot c_T \cdot \mu_0; \\ b_{21} = -(1 + \bar{m}) \cdot \bar{h} \cdot \frac{\partial a_{1c}}{\partial V} \cdot \frac{c_T \cdot \mu_0}{r_y}, \\ b_{22} = -(1 + \bar{m}) \cdot \bar{h} \cdot \left(\frac{\partial a_{1c}}{\partial q} \cdot \frac{da'}{da_1} - \bar{h} \cdot \frac{\partial a_{1c}}{\partial V} \right) \cdot \frac{c_T \cdot \mu_0}{r_y}, \\ b_{23} = -\bar{m} \cdot \bar{h} \cdot \frac{\partial a_{1c}}{\partial V} \cdot \frac{c_T \cdot \mu_0}{r_y}; \\ b_{31} = (1 + \bar{m}) \cdot \frac{\partial a_{1c}}{\partial V} \cdot c_T \cdot \mu_0, \\ b_{32} = -(1 + \bar{m}) \cdot \left(\frac{\partial a_{1c}}{\partial q} \cdot \frac{da'}{da_1} - \bar{h} \cdot \frac{\partial a_{1c}}{\partial V} \right) \cdot c_T \cdot \mu_0, \\ b_{33} = \bar{m} \cdot \frac{\partial a_{1c}}{\partial V} \cdot c_T \cdot \mu_0; \end{cases}$$

¹⁾ Zasady przekształcenia równań z postaci wymiarowej w bezwymiarową są opisane np. w [9] (s. 191–193), gdzie jako podstawowe wielkości odniesienia przyjęto: R , V_T i $\sigma \cdot A_w$.

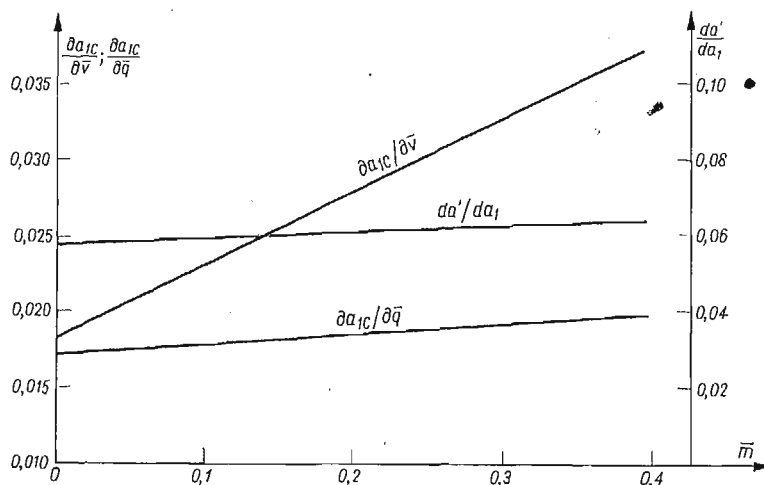
$$(10) \quad \begin{cases} c_{12} = c_T \cdot \mu_0; \\ c_{22} = -\frac{\bar{m}}{\bar{r}_y} \cdot \bar{d} \cdot (1 + \bar{d}/\bar{l}) \cdot c_T \cdot \mu_0, & c_{23} = -\frac{\bar{m}}{\bar{r}_y} \cdot \frac{\bar{d}}{\bar{l}} \cdot c_T \cdot \mu_0; \\ c_{32} = -(1 + \bar{m}) \cdot (1 + \bar{d}/\bar{l}) \cdot c_T \cdot \mu_0, & c_{33} = (1 + \bar{m}) \cdot \frac{c_T \cdot \mu_0}{\bar{l}}. \end{cases}$$

Pochodne aerodynamiczne wirnika: $\frac{\partial a_{1c}}{\partial \bar{V}}$, $\frac{\partial a_{1c}}{\partial \bar{q}}$ i $\frac{da'}{da_1}$ zostały określone na podstawie [8] i mają postać:

$$(11) \quad \frac{\partial a_{1c}}{\partial \bar{V}} = \frac{(2t_3 \cdot \vartheta_R - 2t_4 \cdot \vartheta_T - t_2 \cdot \lambda_0) + (a_0 \cdot t_3/t_4 + 1) \cdot (c_k + t_4 \cdot \text{tg } \delta_3)}{\mu_0 \cdot [t_4 + (c_k + t_4 \cdot \text{tg } \delta_3)^2/t_4]},$$

$$(12) \quad \frac{\partial a_{1c}}{\partial \bar{q}} = -\frac{2[\gamma + (c_k + t_4 \cdot \text{tg } \delta_3)/2]}{\Omega \cdot t_a \cdot [t_4 + (c_k + t_4 \cdot \text{tg } \delta_3)^2/t_4]},$$

$$(13) \quad \frac{da'}{da_1} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{t_3 \cdot \vartheta_R - t_4 \cdot \vartheta_T}{24c_T} \right).$$



Rys. 2

Na rys. 2 są przedstawione pochodne aerodynamiczne w funkcji \bar{m} .

Równania (4) tworzą układ trzech liniowych niejednorodnych równań różniczkowych drugiego rzędu, który można przekształcić do układu sześciu równań rzędu pierwszego o postaci:

$$(14) \quad \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{R}\mathbf{q} + \mathbf{K} = \mathbf{0},$$

gdzie:

$$(15) \quad \mathbf{q} = \text{col}[\bar{x}_1, \dot{\Theta}, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \Theta, \bar{x}_2],$$

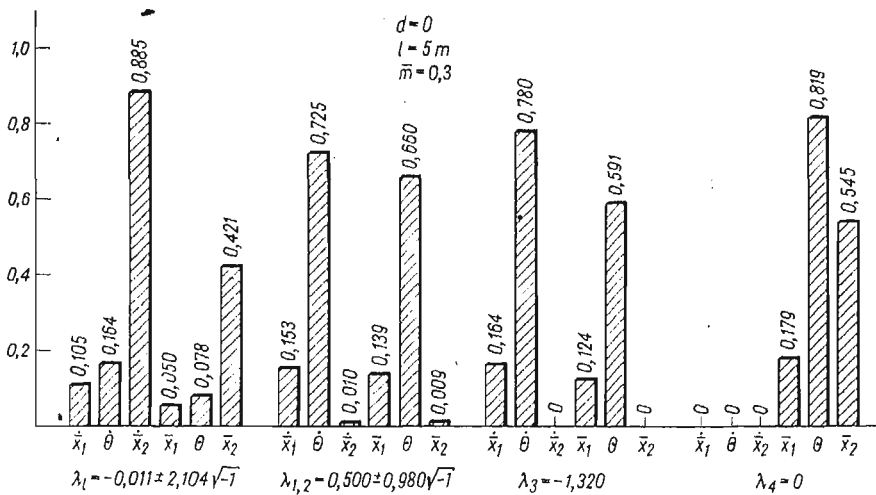
$$(16) \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$(17) \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

W celu określenia stateczności układu zostaną wyznaczone wartości własne macierzy \mathbf{R} , a w celu określenia postaci ruchu śmigłowca i podwieszonoego ładunku — odpowiadające tym wartościom wektory własne.

4. Przykład obliczeniowy

Ze względu na złożoną postać równań (14), zbadanie stateczności ich rozwiązań na drodze analitycznej jest praktycznie niemożliwe. Wobec tego wykonano obliczenia numeryczne dla lekkiego śmigłowca klasy „Mi-2” o następujących danych: $b = 3$, $t_1 = 4(0,96^t - 0,1^t)/i$, $R = 7,25$ m, $M = 2.600$ kg, dla zakresu parametrów: $0 \leq \bar{m} \leq 0,4$, $0 \leq l \leq 30$ m, $0 \leq d \leq 1$ m. Przykładowe rozwiązanie jest przedstawione na rys. 3. Moduły wektorów własnych zostały unormowane w ten sposób, że suma ich kwadratów jest równa jedności dla każdej wartości własnej λ macierzy \mathbf{R} [10].



Rys. 3

Z porównania wysokości „słupków” na rys. 3, a także z dalszych wykonanych w ramach tej pracy obliczeń wynika, że poszczególne wartości własne charakteryzują następujące ruchy:

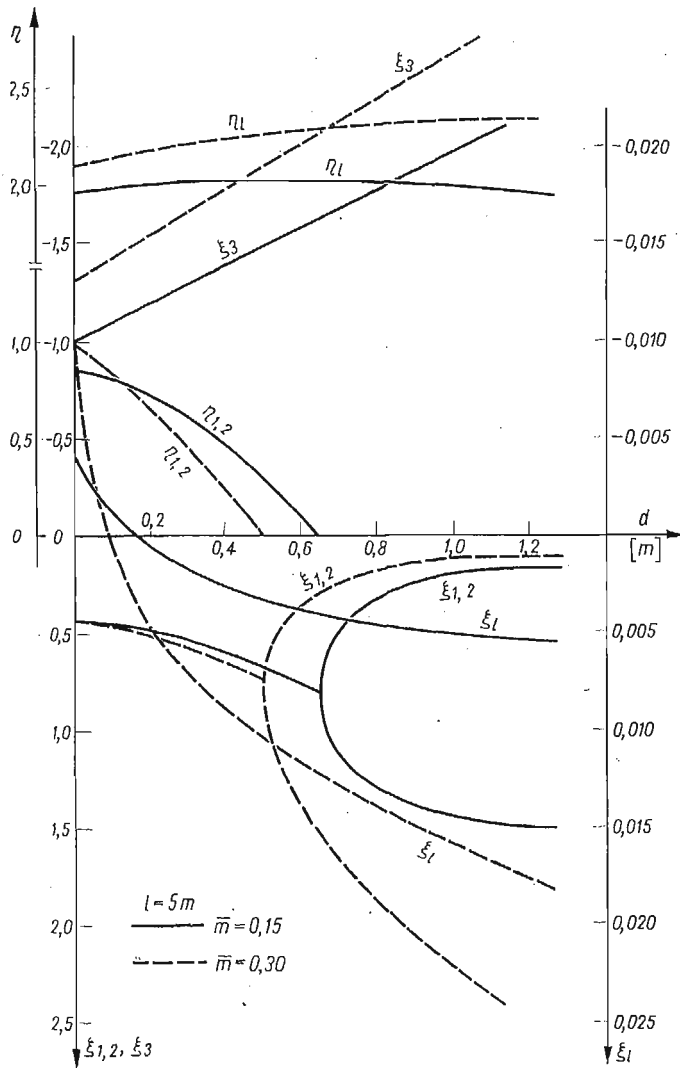
- a) $\lambda_t = \xi_t \pm \sqrt{-1} \eta_t$ — wahania ładunku podwieszonoego pod śmigłowcem,
- b) $\lambda_{1,2} = \xi_{1,2} \pm \sqrt{-1} \eta_{1,2}$ — wolne rozbieżne oscylacje lub ruchy nieoscylacyjne odpowiadające pochylaniu śmigłowca i prędkości poziomych przesunięć środka ciężkości układu,
- lub $\lambda_1 = \xi_1$ i $\lambda_2 = \xi_2$

- c) $\lambda_3 = \xi_3$ — silnie tłumiony ruch nieoscylacyjny odpowiadający pochylaniu śmigłowca i prędkości poziomych przesunięć środka ciężkości układu,
 d) $\lambda_4 = 0$ — niezależne od czasu położenia środka ciężkości układu.

5. Wyniki

Wyniki obliczeń zostały przedstawione w formie wykresów obrazujących zależność wartości własnych (poza $\lambda_4 = 0$) od rozpatrywanych parametrów.

Wpływ odległości d punktu podwieszenia liny z ładunkiem od środka ciężkości śmigłowca został określony dla jednej długości liny ($l = 5$ m) i dwóch ciężarów ładunku: $\bar{m} = 0,15$ i $0,30$. Typowe wyniki obliczeń są przedstawione na rys. 4.

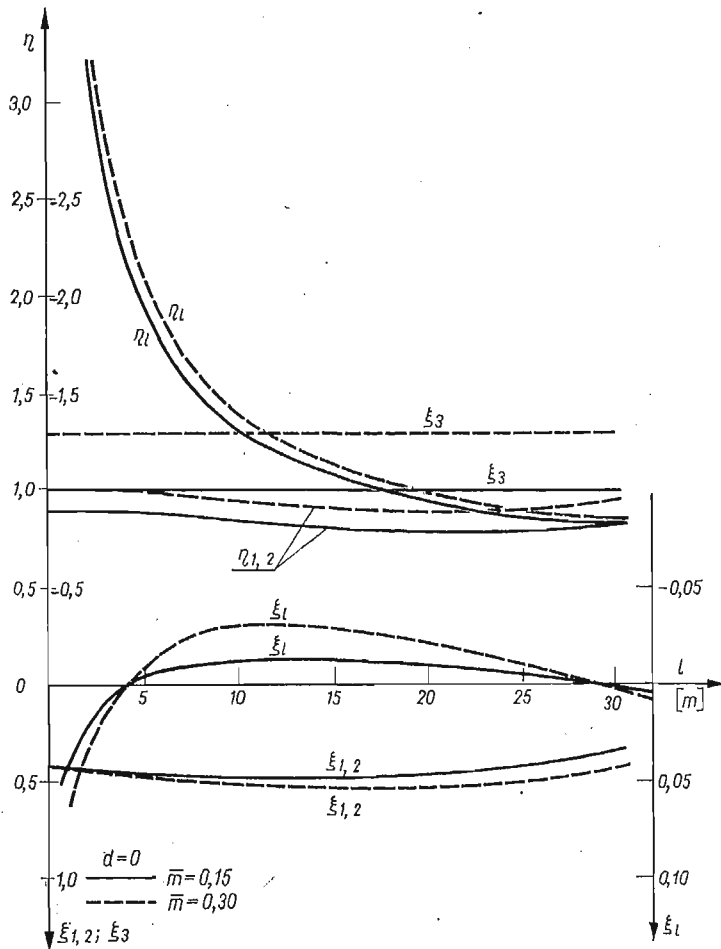


Rys. 4

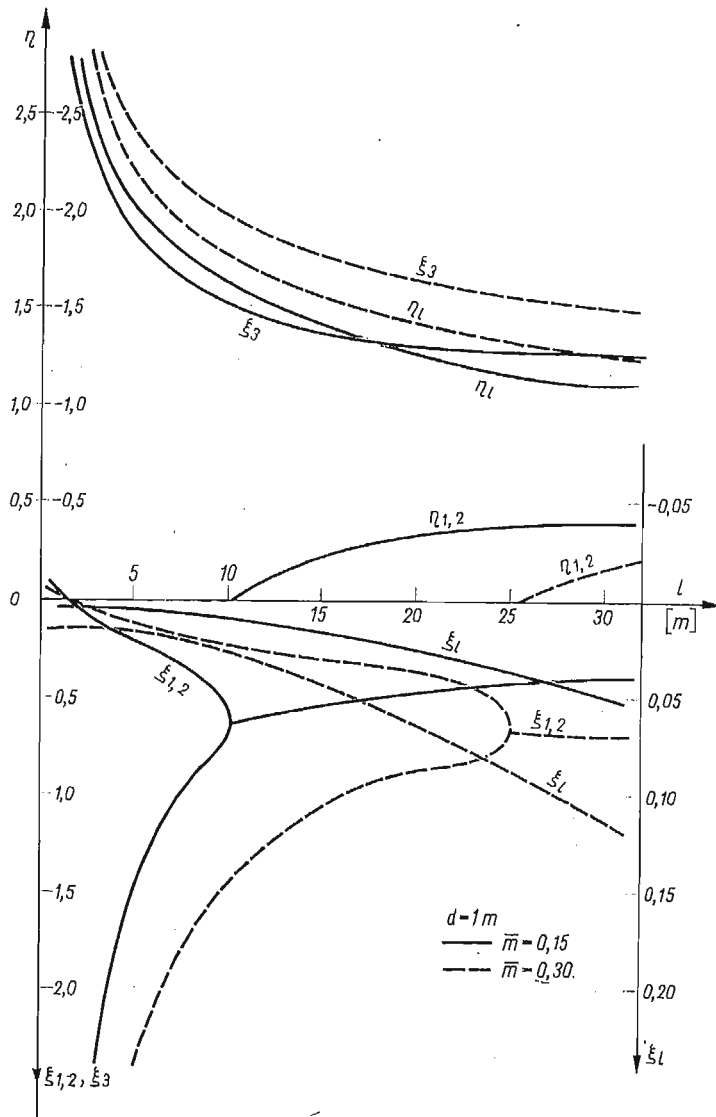
Zwiększeniu odległości punktu zamocowania liny od środka ciężkości śmigłowca towarzyszy zmniejszenie λ_3 , czyli wzrost tłumienia postaci ruchu odpowiadającej tej wartości własnej. Charakter zmian dla obu ciężarów jest taki sam, przy czym większemu ciężarowi odpowiada większe tłumienie.

W przypadku $\lambda_{1,2}$ dla obu ciężarów ładunku ruch jest rozbieżny, przy czym występuje krytyczna odległość d_k , rozdzielająca wolne ($0 < \eta_{1,2} < 1$) oscylacje dla $0 \leq d < d_k$ od dwóch ruchów nieoscylacyjnych dla $d > d_k$; wielkość d_k jest mniejsza przy większym ciężarze ładunku ($d_k \cong 0,65$ i $0,50$ odpowiednio dla $\bar{m} = 0,15$ i $0,30$).

Na wartość λ_l położenie punktu zamocowania liny wpływa głównie poprzez jej część rzeczywistą, przy czym maleniu d towarzyszy spadek ξ_l , tak, że dla d bliskich zera może wystąpić $\xi_l < 0$, czyli tłumienie wahań ładunku. Dla lżejszego ładunku ruch ma mniejszą częstość i staje się tłumiony przy większej wartości d . ($0,16$ m i $0,08$ m odpowiednio dla $\bar{m} = 0,15$ i $0,30$).



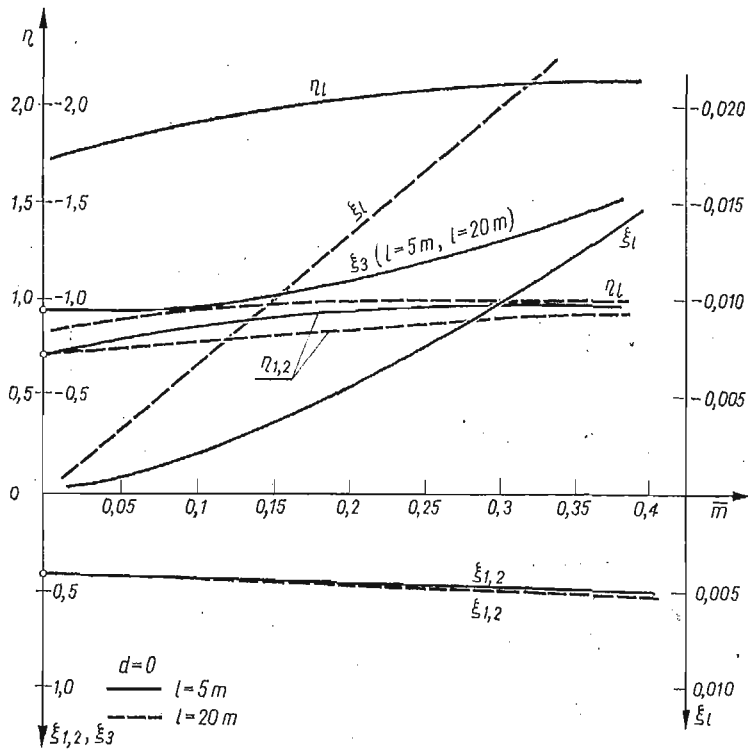
Rys. 5



Rys. 6

Wpływ długości liny l został określony dla dwóch miejsc jej zamocowania do śmigłowca ($d = 0$ i $d = 1$ m) i dwóch ciężarów ładunku ($\bar{m} = 0,15$ i $0,30$).

W przypadku podwieszenia liny w środku ciężkości śmigłowca ($d = 0$, rys. 5) jej długość wpływa istotnie tylko na ruch ładunku. Częstość wahań η_1 , jak łatwo przewidzieć, pamiętając, że ładunek jest modelowany wahadłem matematycznym, maleje ze wzrostem długości l i jest mało wrażliwa na ciężar ładunku, natomiast przebieg funkcji $\xi_1(l)$ wykazuje minimum, co oznacza, że istnieje optymalna z punktu widzenia tłumienia ruchu ładunku długość liny, w rozpatrywanym przykładzie $l \approx 12$ m, praktycznie niezależna od ciężaru



Rys. 7

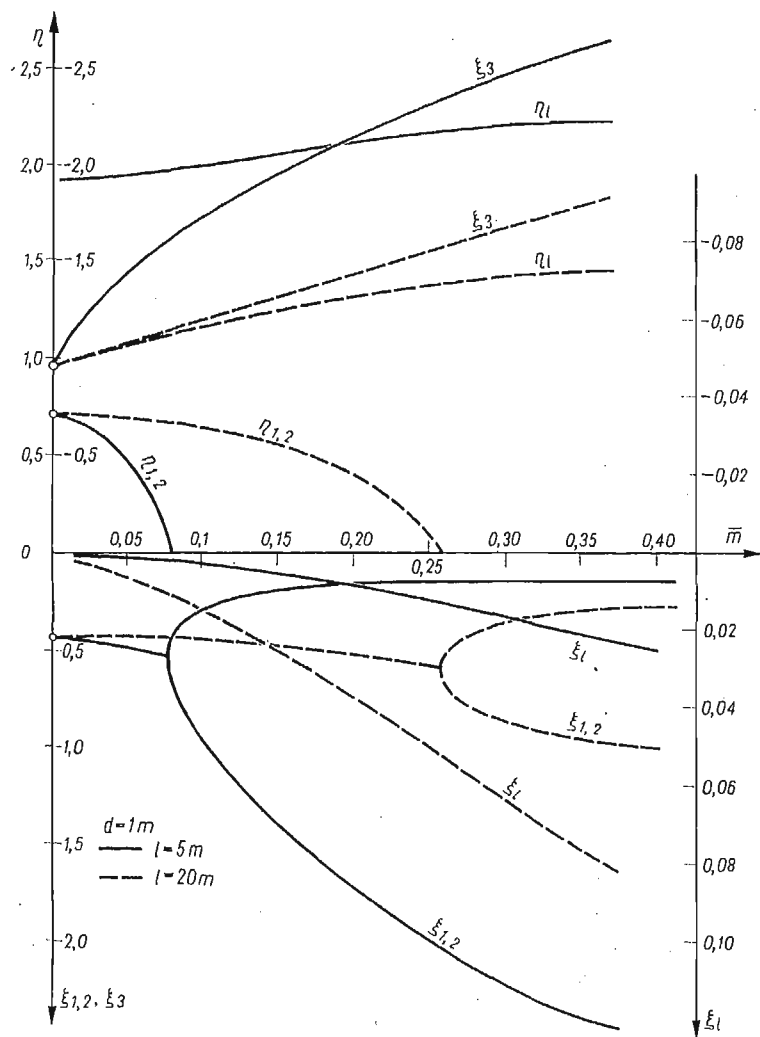
podwieszonoego ładunku. Ten wynik jest jakościowo zgodny z informacją podaną w [3], gdzie jednak ze względu na bardziej uproszczony model układu, maksimum tłumienia występowało dla znacznie dłuższych lin.

W przypadku $d = 1\text{ m}$ (rys. 6), wzrost długości linii dla obu ciężarów podwieszonoego ładunku wpływa przede wszystkim na tłumienie ruchu ładunku (niekorzystnie, bo $\xi_i(l)$ jest funkcją rosnącą).

Wpływ długości linii na ruch śmigłowca dotyczy przede wszystkim wartości własnej $\lambda_{1,2}$, która przy pewnej długości linii l_k staje się zespolona, czyli początkowo istniejące dwa nietłumione ruchy nieoscylacyjne przechodzą w rozbieżne oscylacje o małej częstotliwości. Wzrostowi ciężaru ładunku towarzyszy wydłużenie l_k ($l_k \approx 10\text{ m}$ i 25 m odpowiednio dla $\bar{m} = 0,15$ i $0,30$).

Wpływ ciężaru podwieszonoego ładunku został określony dla dwóch długości linii: $l = 5\text{ m}$ i 20 m i dwóch miejsc jej zamocowania do śmigłowca: $d = 0$ i $d = 1\text{ m}$.

W analizie wpływu ciężaru ładunku szczególne znaczenie ma rozwiązanie dla $\bar{m} = 0$, gdyż w tym przypadku ulega uproszczeniu układ równań (1)–(3), (np. znika równanie (2)). Obliczenia wykonano jednakże w oparciu o układ (14), co umożliwiło porównanie tego szczególnego rozwiązania numerycznego z danymi dla śmigłowca izolowanego, publikowanymi nawet w literaturze podręcznikowej, np. [9]. Jak było do przewidzenia,



Rys. 8

wystąpiły tylko trzy, zamiast pięciu, niezerowe wartości własne, charakteryzujące pochylenie i poziome przemieszczenia śmigłowca: jedna rzeczywista ujemna, odpowiadająca silnie tłumionemu ruchowi aperiodycznemu λ_3 i dwie zespolone $\lambda_{1,2}$ opisujące nietłumione wolne oscylacje.

W przypadku $d = 0$ (rys. 7) wzrost ciężaru ładunku wpływa głównie na tłumienie ξ_1 , powiększając je, z tym, że przy krótszej linii wzrost tłumienia jest wolniejszy.

W przypadku $d = 1m$ (rys. 8) wpływ ciężaru jest ogólnie bardziej wyraźny niż poprzednio. Ruch ładunku jest niestacyczny, przy czym ze wzrostem ciężaru ładunku i długości linii staje się szybciej rozbieżny. Ruch śmigłowca ($\lambda_{1,2}$) jest też nietłumiony, a przy pewnej wartości \bar{m}_k pojawiają się dwa ruchy nieoscylacyjne. Wartość \bar{m}_k wzrasta ze wzrostem długości linii (0,075 i 0,25 odpowiednio dla $l = 5m$ i $20m$).

6. Wnioski

Z rezultatów obliczeń wynika, że wszystkie badane parametry w pewnym stopniu wpływają na ruch układu, śmigłowiec jednakże zawsze pozostaje niestateczny, a obecność ładunku tę niestateczność powiększa. Stosunkowo najmniej niekorzystnie wpływa ładunek podwieszony w środku ciężkości śmigłowca, co jest konsekwencją najsłabszego sprzężenia ruchu ładunku z ruchem śmigłowca. Fakt ten jest uwzględniany w konstrukcjach śmigłowców przewidzianych do pracy w charakterze dźwigów.

Zachowanie się śmigłowca z podwieszonym ładunkiem w zawisie było przedmiotem badań doświadczalnych [5] ilościowych, a także opartych o wrażenia pilotów wyrażone w 10-punktowej skali Coopera [11] (1 punkt — aparat optymalny, 10 punktów — lot niemożliwy). Wyniki tych badań są jakościowo zgodne z rezultatami opisanymi w tej pracy obliczeń.

Literatura cytowana w tekście

1. T. A. DUKES: *Maneuvering Heavy Sling Loads Near Hover*. Part 1: Damping the Pendulous Motion. J. American Helicopter Society, **18**, 2, April 1973.
2. L. B. LUCASSEN, F. J. STERK: *Dynamic Stability Analysis of a Hovering Helicopter with a Sling Load*. American Helicopter Society Journal, **10**, 2, April 1965.
3. E. M. CLIFF, D. B. BAILEY: *Dynamic Stability of a Translating Vehicle with a Simple Sling Load*. J. Aircraft, **12**, 10, October 1975.
4. D. J. DICARLO, H. L. KELLEY, K. R. YENNI: *An Exploratory Flight Investigation of Helicopter Sling Load Placements Using a Closed-Circuit Television*. NASA TN D-7776, November 1974.
5. „Śmigłowiec „Mi-2”. Wyniki badań w locie z ładunkiem podwieszonym pod kadłubem”. Sprawozdanie Instytutu Lotnictwa Nr 4/70/ZA, Warszawa 1970 (niepublikowane).
6. A. R. S. BRAMWELL: *Longitudinal Stability and Control of the Single Rotor Helicopter*. R. and M., No 3104, January 1957.
7. K. SIBILISKI: *Wpływ podwieszenia ładunku na podłużną stateczność dynamiczną i osiągi śmigłowca w zawisie*. Praca magisterska wykonana na Wydziale Mechanicznym Energetyki i Lotnictwa Politechniki Warszawskiej, 1976 r. (niepublikowana).
8. P. R. PAYNE: *Helicopter Dynamics and Aerodynamics*. London, 1959.
9. A. R. S. BRAMWELL: *Helicopter Dynamics*. London, 1976.
10. J. KLIMKOWSKI, W. ŁUCJANEK: *Teoretyczna analiza bocznej stateczności dynamicznej miękkołata*. Arch. Bud. Masz., 1, **24**, 1977.
11. G. E. COOPER: *Understanding and Interpreting Pilot Opinion*. Aero. Eng. Rev., 3, **16**, March 1957.

Р е з ю м е

ПРОДОЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТОЛЕТА
С ВИСЯЩИМ ГРУЗОМ НА РЕЖИМЕ ВИСЕНИЯ

В работе дана физическая модель одно-винтового вертолета с висящим грузом и уравнения движения этой системы на режиме висения. Рассматривались три степени свободы: наклон вертолета и горизонтальные перемещения вертолета и груза. Устойчивость была проанализирована методом небольших возмущений состояния равновесия. На основе численного примера для легкого вертолета определены формы движения системы, а также влияние на устойчивость системы веса груза, длины троса и места его крепления к вертолету.

S u m m a r y

LONGITUDINAL DYNAMIC STABILITY OF A HOVERING HELICOPTER
WITH A HANGING LOAD

Physical model and equations of motion of a hovering single-rotor helicopter with a hanging load are given. Three degrees of freedom are considered: pitching of the helicopter as well as horizontal translations of the helicopter and the load. Stability is analyzed by the method of small perturbations. As a numerical example, the modes of motion of the helicopter-load system as well as the influence of the load mass, the link length and the suspension offset of the link are investigated for the typical light helicopter.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 maja 1978 r.

ANALIZA PASMA PŁYTOWEGO JAKO CIAŁA Z WIĘZAMI

MARIA MARKS (WARSZAWA)

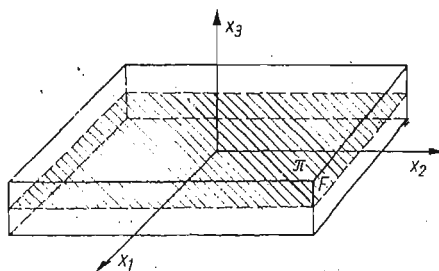
Wstęp

Ogólne sformułowanie mechaniki ośrodka ciągłego z więzami zostało przedstawione przez WOŹNIAKA w pracach [1], [3—7]. W oparciu o powyższe prace sformułowano zagadnienie płyt sprężystych, traktując jako więzy ograniczenia narzucone na funkcję deformacji. Przyjmując funkcję przemieszczeń w postaci szeregu potęgowego zmiennej pionowej, wyprowadzono podstawowy układ równań. Zagadnienie pasma płytowego rozwiązano przy trzech szczególnych postaciach funkcji przemieszczeń. W dwóch przypadkach otrzymano siły reakcyjne niezerowe, natomiast w trzecim przypadku, siły reakcyjne równe zero. Jest to zatem rozwiązanie zgodne z rozwiązaniem klasycznej mechaniki continuum.

Różnice między składowymi naprężeń i przemieszczeń wyznaczonymi z rozwiązania mechaniki continuum z więzami i klasycznej mechaniki continuum nazwane są umownie „błędami”. W pracy [2] wskazano na zależność między wielkościami średnich „błędów” a siłami reakcyjnymi i wprowadzono kryterium oceny „dokładności” rozwiązań na podstawie wielkości tych sił. Rozwiązane w niniejszym opracowaniu przypadki stanowią ilustrację powyższych zależności.

1. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy płytę prostokątną sprężystą jako ciało z więzami, z narzuconymi ograniczeniami na funkcję deformacji. Płyta zajmuje obszar Ω , który można przedstawić w postaci $\Omega \cong F \times \pi$, gdzie π jest powierzchnią środkową, a F odcinkiem $\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$ (rys. 1).



Rys. 1

Przyjęto funkcję przemieszczeń w następującej postaci

$$(1.1) \quad u(x_K, x_3, t) = \sum_{\alpha=0}^l \varphi_{(\alpha)}(x_K, t) (x_3)^\alpha,$$

przy czym $\varphi_{(\alpha)}$ są poszukiwanymi funkcjami różniczkowalnymi zależnymi od współrzędnych $x_K \in \pi$, $K = 1, 2$, współrzędnej czasowej $t \in R$, natomiast $x_3 \in F$.

Dla tak przyjętej funkcji przemieszczeń, zgodnie z [2], równania ruchu w układzie współrzędnych kartezjańskich są następujące

$$(1.2) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK, K} dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_m dx_3 + p_m^{(+)} - p_m^{(-)} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \dot{\varphi}_{m(0)}}, \quad \alpha = 0,$$

$$m = 1, 2, 3$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK, K} (x_3)^\alpha dx_3 - \alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{m3} (x_3)^{\alpha-1} dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_m (x_3)^\alpha dx_3 + p_m^{(+)} \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha +$$

$$- p_m^{(-)} \left(-\frac{h}{2}\right)^\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \dot{\varphi}_{m(\alpha)}}, \quad \alpha = 1, \dots, l.$$

gdzie

$$x = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^l \sum_{\beta=0}^l \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (x_3)^\alpha (x_3)^\beta dx_3 \right) \dot{\varphi}_{K(\alpha)} \dot{\varphi}_{K(\beta)},$$

$$p_m^{(+)} = p_m(x_K, t), \quad \text{przy } x_3 = \frac{h}{2}$$

$$p_m^{(-)} = p_m(x_K, t), \quad \text{przy } x_3 = -\frac{h}{2}.$$

Na brzegu o normalnej zewnętrznej n trzeba spełnić warunki brzegowe

$$(1.3) \quad \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK} (x_3)^\alpha dx_3 \right) n_K = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_m (x_3)^\alpha dx_3 \quad \alpha = 0, \dots, l.$$

Jeśli przy $\alpha = \alpha_1$ w równaniu (1.1) $\varphi_{(\alpha_1)} = 0$ wtedy równania ruchu (1.2) i warunki brzegowe przy $\alpha = \alpha_1$ znikają. Po określeniu poszukiwanych funkcji $\varphi_{(\alpha)}$ można wyznaczyć siły reakcyjne objętościowe i powierzchniowe z następujących zależności

$$(1.4) \quad r_m = \rho \ddot{\varphi}_m - (\rho b_m + \sigma_{mK, K} + \sigma_{m3, 3}) \quad \text{w } \Omega = F \times \pi, \quad t \in R,$$

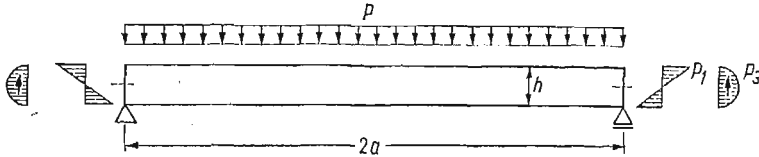
$$s_m = \sigma_{mK} n_K - p_m \quad \text{przy } F \times \partial\pi, \quad t \in R,$$

$$s_m = \sigma_{m3} n_3 - p_m \quad \text{przy } \partial F \times \pi, \quad t \in R.$$

Funkcje $\varphi_{(\alpha)}$ występujące w zależności (1.1) przy $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ mają prostą interpretację fizyczną. Funkcje $\varphi_{i(0)}$ opisują składowe przemieszczenia powierzchni środkowej.

Funkcje $\varphi_{1(1)}$ i $\varphi_{2(1)}$ opisują odpowiednio w kierunku x_1 i x_2 składowe wektora, który w konfiguracji odniesienia był wektorem normalnym do powierzchni środkowej; natomiast funkcja $\varphi_{3(1)}$ charakteryzuje wydłużenie w kierunku tego wektora.

W rozpatrywanych przykładach założono, że na pasmo płytowe o nieskończonej długości w kierunku x_2 działają następujące siły (rys. 2).



Rys. 2

$$(1.5) \quad \begin{aligned} b_i &= 0, \\ p_k &= 0, \quad p_3 = -p \quad \text{przy } x_3 = \frac{h}{2}, \\ p_i &= 0 \quad \text{przy } x_3 = -\frac{h}{2}, \end{aligned}$$

oraz

$$(1.6) \quad \begin{aligned} p_1 &= \begin{cases} \left(\frac{12M}{h^3} + \frac{3p}{5h} \right) x_3 - \frac{4p}{h^3} x_3^3 & \text{przy } x_1 = a, \\ - \left(\frac{12M}{h^3} + \frac{3p}{5h} \right) x_3 + \frac{4p}{h^3} x_3^3 & \text{przy } x_1 = -a, \end{cases} \\ p_2 &= 0 \quad \text{przy } x_1 = \pm a, \\ p_3 &= \frac{3p}{2h} a - \frac{6p}{h^3} a x_3^2 \quad \text{przy } x_1 = \pm a. \end{aligned}$$

Przez $M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2\tilde{p}}{h} x_3^2 dx_3$ oznaczono tu moment zginający przyłożony do krawędzi

płyty $x_1 = a$. Założono ponadto, że funkcja przemieszczenia u jest niezależna od czasu.

Przy tych założeniach rozwiązano zagadnienie pasma płytowego przyjmując funkcje przemieszczeń w następującej postaci:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} a) \quad & u_k = \varphi_{k(0)} + \varphi_{k(1)} x_3 \quad k = 1, 3, \\ & u_2 = 0, \\ b) \quad & u_k = \varphi_{k(0)} + \varphi_{k(1)} x_3 + \varphi_{k(2)} x_3^2 \quad k = 1, 3, \\ & u_2 = 0, \\ & u_1 = \varphi_{1(0)} + \varphi_{1(1)} x_3 + \varphi_{1(3)} x_3^3, \\ c) \quad & u_2 = 0, \\ & u_3 = \varphi_{3(0)} + \varphi_{3(1)} x_3 + \varphi_{3(2)} x_3^2 + \varphi_{3(4)} x_3^4, \end{aligned}$$

Przyjęcie funkcji przemieszczeń w postaci (1.7)_a odpowiada uogólnionej teorii Reissnera. Natomiast założenie, że funkcja przemieszczeń zależy również od wyższych potęg x_3 umożliwia dokładniejsze wyznaczenie stanu naprężenia.

W wyniku przyjęcia funkcji przemieszczeń w postaci (1.7)_a i (1.7)_b otrzymano rozwiązanie zagadnienia z niezerowymi siłami reakcyjnymi określonymi zależnościami (1.4). Natomiast przyjmując funkcję przemieszczeń w postaci (1.7)_c, uzyskano rozwiązanie, w którym siły reakcyjne znikają czyli jest ono rozwiązaniem klasycznej teorii sprężystości.

Dysponując rozwiązaniem klasycznej teorii sprężystości można określić stopień dokładności rozwiązania uzyskanego wg teorii z więzami wprowadzając wielkości określające średnie i maksymalne błędy składowych naprężeń i przemieszczeń.

$$\eta_{ij} = \frac{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)} - \sigma_{ij}^{(p)}| d\Omega}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)}| d\Omega},$$

(1.8)

$$\Theta_i = \frac{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_i^{(d)} - u_i^{(p)}| d\Omega}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_i^{(d)}| d\Omega},$$

(1.9)

$$\kappa_{ij} = \frac{\max_{x \in \Omega} |\sigma_{ij}^{(d)} - \sigma_{ij}^{(p)}|}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)}| d\Omega},$$

$$\varrho_i = \frac{\max_{x \in \Omega} |u_i^{(d)} - u_i^{(p)}|}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_i^{(d)}| d\Omega},$$

gdzie

$\sigma_{ij}^{(d)}$ — składowa naprężenia wyznaczona wg klasycznej teorii sprężystości

$\sigma_{ij}^{(p)}$ — składowa naprężenia wyznaczona wg teorii z więzami,

$u_i^{(d)}$ — składowa przemieszczenia wyznaczona wg klasycznej teorii sprężystości,

$u_i^{(p)}$ — składowa przemieszczenia wyznaczona wg teorii z więzami.

W celu oszacowania rozwiązań uzyskiwanych wg teorii ciał z więzami ($\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$) w oparciu o kryterium przedstawione w pracy [2] należy wyznaczyć cztery następujące wielkości

$$\gamma_{\alpha} = \frac{g_{\alpha}}{\sigma_0},$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{f_{\alpha}}{\sigma_0}, \quad \alpha = 1, 2$$

(1.10)

gdzie

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{\beta_1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} d\Omega + \frac{\beta_2}{|\pi|} \int_{\pi} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} d\pi + \frac{\beta_3}{|S_b|} \int_{S_b} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} dS_b, \\
 g_2 &= \frac{\beta_1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_3| d\Omega + \frac{\beta_2}{|\pi|} \int_{\pi} |s_3| d\pi + \frac{\beta_3}{|S_b|} \int_{S_b} |s_3| dS_b, \\
 f_1 &= \beta_1 \sup_{x \in \Omega} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} + \beta_2 \sup_{x \in \pi \times \delta F} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} + \beta_3 \sup_{x \in F \times \delta \pi} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}, \\
 f_2 &= \beta_1 \sup_{x \in \Omega} |r_3| + \beta_2 \sup_{x \in \pi \times \delta F} |s_3| + \beta_3 \sup_{x \in F \times \delta \pi} |s_3|,
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

tu $S_b = \partial\pi \times F$

$|\Omega|, |\pi|, |S_b|$ — miary odpowiednich obszarów

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — stałe dodatnie

σ_0 — maksymalne wyężenie płyty.

Znając wielkości γ_α można na podstawie zależności

$$\begin{aligned}
 \eta_{ij} &= F_{ij}(\gamma_\alpha), \\
 \Theta_i &= G_i(\gamma_\alpha),
 \end{aligned}
 \tag{1.112}$$

ocenić średnie błędy składowych naprężenia i przemieszczenia uzyskane z rozwiązania wg teorii z więzami. Zależność (1.12) wyznaczamy na podstawie przykładów rozwiązań przy założeniu różnych typów więzów i rozwiązań ścisłych.

Porównanie natomiast wielkości σ_α i γ_α , które charakteryzują średnie i maksymalne wartości poziomych i pionowych składowych sił reakcyjnych, pozwala na ocenę największych błędów składowych stanu naprężenia i przemieszczenia.

2. Rozwiązanie pasma płytowego przy $l = 1$

Przyjęto funkcję przemieszczeń odpowiadającą uogólnionej teorii Reissnera tzn. w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 u_k &= \psi_k + d_k x_3 \\
 u_2 &= 0
 \end{aligned}
 \quad k = 1, 3.
 \tag{2.1}$$

W tym przypadku składowe tensora naprężenia wyrażają się następującymi zależnościami

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{F}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu d_3 + (1-\nu) \frac{\partial d_1}{\partial x_1} x_3 \right], \\
 \sigma_{22} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + d_3 + \frac{\partial d_1}{\partial x_1} x_3 \right], \\
 \sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) d_3 + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial d_1}{\partial x_1} x_3 \right], \\
 \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial d_3}{\partial x_1} x_3 \right], \\
 \sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0.
 \end{aligned}$$

Warunki równowagi (1.2) przy $l = 1$ sprowadzają się do następującego układu równań

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial d_3}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial d_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1^2} - \frac{2(1+\nu)p}{Eh} &= 0, \\ \frac{(1-\nu)h^2}{6(1-2\nu)} \frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2} - d_1 - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{h^2}{24} \frac{\partial^2 d_3}{\partial x_1^2} - \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} d_3 - \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \frac{(1+\nu)p}{2E} &= 0 \end{aligned}$$

Są to dwa układy równań zawierające po dwie niewiadome. Z układu równań (2.2)₂ i (2.2)₃ wyznaczono niewiadome funkcje d_1 , ψ_3 , które mają następującą postać

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)Eh^3} (px_1^3 + 3C_1 x_1^2) + C_2 x_1 + C_3, \\ \psi_3 &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)Eh^3} (px_1^4 + 4C_1 x_1^3) + \frac{1}{2} \left(\frac{2(1+\nu)p}{Eh} - C_2 \right) x_1^2 + \left(\frac{2(1+\nu)}{Eh} C_1 - C_3 \right) x_1 + C_4. \end{aligned}$$

Natomiast z równań (2.2)₁ i (2.2)₄ wyznaczono pozostałe funkcje

$$\begin{aligned} d_3 &= A_2 e^{\beta x_1} + A_3 e^{-\beta x_1} - \frac{1+\nu}{E} \left(\nu A_1 + \frac{(1-\nu)p}{2} \right), \\ \psi_1 &= -\frac{\nu}{(1-\nu)\beta} (A_2 e^{\beta x_1} - A_3 e^{-\beta x_1}) + \frac{1+\nu}{E} \left[(1-\nu) A_1 + \frac{\nu p}{2} \right] x_1 + A_4, \end{aligned}$$

gdzie

$$\beta^2 = \frac{24}{(1-\nu)h^2}$$

Przemieszczenie u_i musi być antysymetryczne względem x_1 przy każdym $x_3 \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right)$ co jest równoważne z antysymetrią funkcji ψ_1 i d_1 . Funkcje ψ_1 i d_1 spełniają warunek antysymetrii, jeśli

$$A_2 = A_3, A_4 = 0, C_1 = C_3 = 0$$

Na powierzchni $x_1 = a$ o normalnej $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ oraz na powierzchni $x_1 = -a$ o $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ powinny być spełnione warunki brzegowe (1.3) przy $l = 1$, gdzie p_m określone jest zależnością (1.6).

Warunki brzegowe (1.3) przy $l = 1$ po uwzględnieniu antysymetrii funkcji ψ_1 i d_1 sprowadzają się do następujących zależności

$$\begin{aligned} \left[(1-\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu d_3 \right]_{(x_1=a)} &= 0, \\ \left[\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) \right]_{(x_1=a)} &= pa, \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(1-\nu)Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial d_1}{\partial x_1} \right]_{(x_1=a)} = M,$$

$$\left(\frac{\partial d_3}{\partial x_1} \right)_{(x_1=a)} = 0.$$

Drugi warunek brzegowy spełniony jest tożsamościowo, a z pozostałych wynikają następujące relacje:

$$A_1 = 0,$$

$$C_2 = \frac{12(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)Eh^3} \left(M - \frac{p}{2} a^2 \right),$$

$$A_2 = 0.$$

Stałą C_4 wyznaczamy z warunku, aby $u_3 = 0$ przy $x_1 = a$ i $x_3 = 0$. Jest ona równa

$$C_4 = -\frac{1+\nu}{Eh} \left[\frac{5(1-2\nu)p}{2(1-\nu)h^2} a^4 + pa^2 - \frac{6(1-2\nu)M}{(1-\nu)h^2} a^2 \right]$$

Po uwzględnieniu wyznaczonych stałych, wyrażenia na moment zginający oraz po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych $\xi_1 = \frac{x_1}{a}$, $\xi_3 = \frac{x_3}{h}$ składowe przemieszczenia (2.1) mają następującą postać

$$u_1 = \frac{(1+\nu)a}{E} \left\{ \frac{\nu p}{2} \xi_1 + \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \left[p \left(\frac{a}{h} \right)^2 \xi_1^3 + \tilde{p} \xi_1 - 3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 \xi_1 \right] \xi_3 \right\},$$

$$u_2 = 0,$$

$$u_3 = \frac{(1+\nu)a}{E} \left\{ \left[\frac{(1-2\nu)p}{1-\nu} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} \xi_1^4 + 3\xi_1^2 - \frac{5}{2} \right) - p(1-\xi_1^2) + \frac{(1-2\nu)\tilde{p}}{1-\nu} (1-\xi_1^2) \right] \frac{a}{h} - \frac{(1-\nu)p}{2} \frac{h}{a} \xi_3 \right\},$$

składowe stanu naprężenia są następujące

$$\sigma_{11} = -2 \left[3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1-\xi_1^2) - \tilde{p} \right] \xi_3,$$

$$\sigma_{22} = -\frac{\nu p}{2} - \frac{2\nu}{1-\nu} \left[3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1-\xi_1^2) - \tilde{p} \right] \xi_3,$$

$$(2.3) \quad \sigma_{33} = -\frac{p}{2} - \frac{2\nu}{1-\nu} \left[3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1-\xi_1^2) - \tilde{p} \right] \xi_3,$$

$$\sigma_{13} = p \frac{a}{h} \xi_1,$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0.$$

Znając składowe naprężenia można określić ze związku (1.4)₁ siły reakcyjne objętościowe

$$(2.4) \quad \begin{aligned} r_1 &= -\frac{12p}{h} \frac{a}{h} \xi_1 \xi_3, \\ r_2 &= 0, \\ r_3 &= -\frac{1}{h} \left\{ p - \frac{2\nu}{1-\nu} \left[3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \tilde{p} \right] \right\}, \end{aligned}$$

ze związku (1.4)₂, po uwzględnieniu (1.6), siły reakcyjne powierzchniowe:
przy $\xi_1 = 1$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} s_1 &= p \left(-\frac{3}{5} + 4\xi_3^2 \right) \xi_3, \\ s_3 &= \frac{p}{2} \frac{a}{h} (-1 + 12\xi_3^2), \end{aligned}$$

(2.5) przy $\xi_1 = -1$

$$\begin{aligned} s_1 &= p \left(\frac{3}{5} - 4\xi_3^2 \right) \xi_3, \\ s_3 &= \frac{p}{2} \frac{a}{h} (-1 + 12\xi_3^2), \end{aligned}$$

a ze związku (1.4)₃ po uwzględnieniu (1.5) siły reakcyjne powierzchniowe:

przy $\xi_3 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} s_1 &= p \frac{a}{h} \xi_1 \\ s_3 &= \frac{1}{2} \left\{ p - \frac{2\nu}{1-\nu} \left[3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \tilde{p} \right] \right\}, \end{aligned}$$

(2.6) przy $\xi_3 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} s_1 &= -p \frac{a}{h} \xi_1 \\ s_3 &= \frac{1}{2} \left\{ p - \frac{2\nu}{1-\nu} \left[3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \tilde{p} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru (1.11) obliczono

$$\begin{aligned} f_1 &= h \sup_{x \in \Omega} |r_1| + \sup_{x \in \pi \times \partial F} |s_1| + \frac{h}{a} \sup_{x \in F \times \partial \pi} |s_1| = 7p \frac{a}{h} + 0,2p \frac{h}{a} \\ f_2 &= h \sup_{x \in \Omega} |r_3| + \sup_{x \in \pi \times \partial F} |s_3| + \frac{h}{a} \sup_{x \in F \times \partial \pi} |s_3| \end{aligned}$$

gdym

$$p + \frac{2\nu}{1-\nu} \tilde{p} > 0$$

$$f_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2}p + \frac{3\nu}{1-\nu} \left[3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p} \right] & \text{przy } \frac{a}{h} \geq \sqrt{\frac{1-\nu}{3\nu} + \frac{2\tilde{p}}{3p}} \\ \frac{5}{2}p + \frac{3\nu}{1-\nu} \tilde{p} & \text{przy } \frac{a}{h} < \sqrt{\frac{1-\nu}{3\nu} + \frac{2\tilde{p}}{3p}} \end{cases}$$

gdym

$$p + \frac{2\nu}{1-\nu} \tilde{p} < 0$$

$$f_2 = -\frac{1}{2}p + \frac{3\nu}{1-\nu} \left[3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p} \right]$$

$$g_1 = \frac{h}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_1| d\Omega + \frac{1}{2|\pi|} \left(\int_{\pi \times \left(\frac{h}{2} \right)} |s_1| d\pi + \int_{\pi \times \left(-\frac{h}{2} \right)} |s_1| d\pi \right) + \frac{h}{a} \frac{1}{|S_b|} \int_{S_b} |s_1| dS_b =$$

$$= 2p \frac{a}{h} + \frac{13}{200} p \frac{h}{a},$$

$$g_2 = \frac{h}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_3| d\Omega + \frac{1}{2|\pi|} \left(\int_{\pi \times \left(\frac{h}{2} \right)} |s_3| d\pi + \int_{\pi \times \left(-\frac{h}{2} \right)} |s_3| d\pi \right) + \frac{h}{a} \frac{1}{|S_b|} \int_{S_b} |s_3| dS_b,$$

gdym

$$\frac{1-\nu}{2\nu} + \frac{\tilde{p}}{p} > 0$$

$$g_2 = \begin{cases} \left[\frac{(27+4\sqrt{3})}{18} p - \frac{3\nu}{1-\nu} \left[2p \left(\frac{a}{p} \right)^2 - \tilde{p} \right] \right] & \text{przy } \frac{h}{a} \geq \sqrt{\frac{3}{\frac{1-\nu}{2\nu} + \frac{\tilde{p}}{p}}} \\ -3 \left\{ p - \frac{2\nu}{1-\nu} \left[3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{3} \xi_1^2 \right) - \tilde{p} \right] \right\} \xi_1 + \frac{(27+4\sqrt{3})p}{18} - \frac{3\nu}{1-\nu} \left[2p \left(\frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p} \right] & \text{przy } 0 < \frac{h}{a} < \sqrt{\frac{3}{\frac{1-\nu}{2\nu} + \frac{\tilde{p}}{p}}} \end{cases}$$

gdzie

$$\xi_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1-\nu}{2\nu} + \frac{\tilde{p}}{p} \right) \left(\frac{h}{a} \right)^2};$$

gdy

$$\frac{1-\nu}{2\nu} + \frac{\tilde{p}}{p} < 0;$$

$$g_2 = \frac{(-27+4\sqrt{3})p}{18} + \frac{3\nu}{1-\nu} \left[2p \left(\frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p} \right].$$

Jako wyłączenie σ_0 przyjęto maksymalne naprężenie σ_{11} czyli σ_{11} przy $\xi_1 = 0$ i $\xi_3 = -\frac{1}{2}$,

$$\sigma_0 = 3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p}.$$

Wówczas

$$\sigma_1 = \frac{p \left[7 + 0,2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \frac{h}{a}}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a} \right)^2},$$

gdy

$$p + \frac{2\nu}{1-\nu} \tilde{p} > 0$$

$$\delta_2 = \begin{cases} \frac{-\frac{p}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a} \right)^2} + \frac{3\nu}{1-\nu}, & \text{przy } \frac{a}{h} \geq \sqrt{\frac{1-\nu}{3\nu} + \frac{2\tilde{p}}{3p}} \\ \frac{\frac{5}{2} p \left(\frac{h}{a} \right)^2 + \frac{3\nu}{1-\nu} \tilde{p}}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a} \right)^2}, & \text{przy } \frac{a}{h} < \sqrt{\frac{1-\nu}{3\nu} + \frac{2\tilde{p}}{3p}} \end{cases}$$

gdy

$$p + \frac{2\nu}{1-\nu} \tilde{p} < 0$$

$$\delta_2 = \frac{-\frac{p}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a} \right)^2} + \frac{3\nu}{1-\nu},$$

$$\gamma_1 = \frac{p \left[2 + \frac{13}{200} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \frac{h}{a}}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a} \right)^2},$$

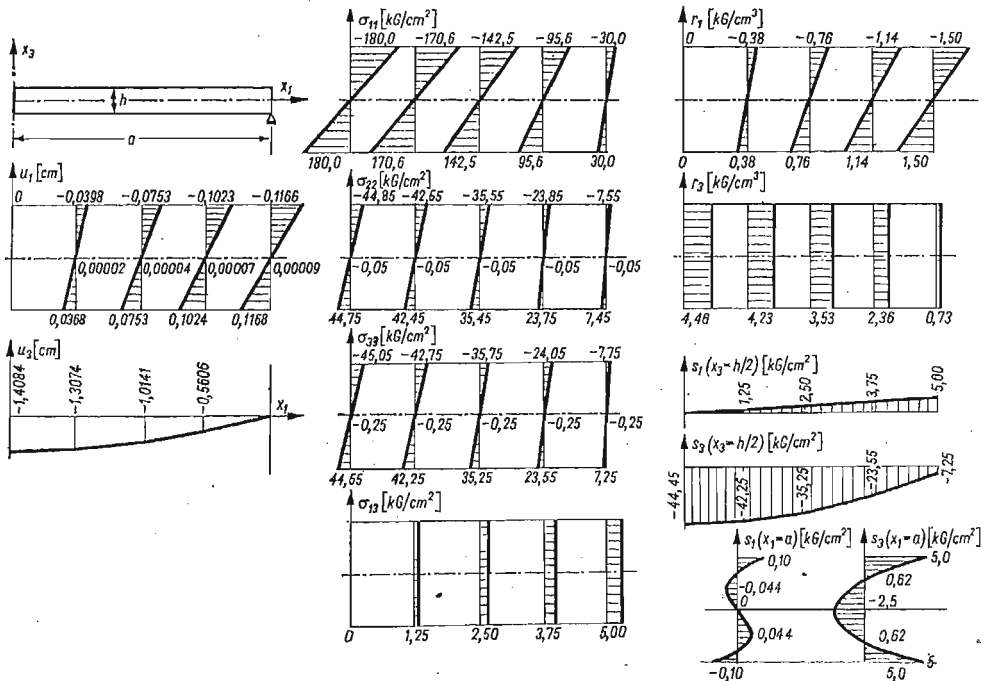
gdy

$$\frac{1-\nu}{2\nu} + \frac{\tilde{p}}{p} > 0$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \frac{\frac{(27+4\sqrt{3})p}{18} \left(\frac{h}{a}\right)^2 - \frac{3\nu}{1-\nu} \left[2p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2}, & \text{przy } \frac{h}{a} \geq \sqrt{\frac{3}{\frac{1-\nu}{2\nu} + \frac{\tilde{p}}{p}}}, \\ -3 \left\{ \frac{p \left(\frac{h}{a}\right)^2 - \frac{2\nu}{1-\nu} \left[3p \left(1 - \frac{1}{3} \xi_1^2\right) - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2} \right\} \xi_1 + \\ + \frac{\frac{(27+4\sqrt{3})p}{18} \left(\frac{h}{a}\right)^2 - \frac{3\nu}{1-\nu} \left[2p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2}, & \text{przy } 0 < \frac{h}{a} < \sqrt{\frac{3}{\frac{1-\nu}{2\nu} + \frac{\tilde{p}}{p}}} \end{cases}$$

gdymy $\frac{1-\nu}{2\nu} + \frac{\tilde{p}}{p} < 0$

$$\gamma_2 = \frac{\frac{(-27+4\sqrt{3})p}{18} \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \frac{3\nu}{1-\nu} \left[2p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2}$$



Rys. 3

Przykład liczbowy. Przyjmując dane $a = 200$ cm, $h = 20$ cm, $p = 0,5$ kG/cm², $M = 2000$ kGcm/cm ($\tilde{p} = -30$ kG/cm²), $E = 200\,000$ kG/cm², $\nu = 0,2$ otrzymano następujące wielkości δ_α i γ_α

$$\delta_1 = 0,1945 \quad \gamma_1 = 0,0556$$

$$\delta_2 = 0,7453 \quad \gamma_2 = 0,5382$$

Na rys. 3 pokazano wykresy przemieszczeń, naprężeń i sił reakcyjnych w przekrojach ξ_1 równych $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

3. Rozwiązanie pasma płytowego przy $l = 2$

Przyjęto funkcję przemieszczeń według (1.1) przy $l = 2$ tzn. w następującej postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_m &= \psi_m + d_m x_3 + k_m x_3^2 \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \quad m = 1, 3$$

składowe stanu naprężenia wyrażone są następującymi związkami

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \left[(1-\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu d_3 \right] + \left[(1-\nu) \frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2\nu k_3 \right] x_3 + (1-\nu) \frac{\partial k_1}{\partial x_1} x_3^2 \right\},$$

$$\sigma_{22} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + d_3 \right) + \left(\frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2k_3 \right) x_3 + \frac{\partial k_1}{\partial x_1} x_3^2 \right],$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \left[(1-\nu) d_3 + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right] + \left[2(1-\nu) k_3 + \nu \frac{\partial d_1}{\partial x_1} \right] x_3 + \nu \frac{\partial k_1}{\partial x_1} x_3^2 \right\},$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \left(2k_1 + \frac{\partial d_3}{\partial x_1} \right) x_3 + \frac{\partial k_3}{\partial x_1} x_3^2 \right],$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0.$$

Warunki równowagi (1.2) przy $l = 2$ sprowadzają się do następującego układu równań

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial d_3}{\partial x_1} + \frac{(1-\nu)h^2}{12} \frac{\partial^2 k_1}{\partial x_1^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 k_3}{\partial x_1^2} - \frac{2(1+\nu)p}{Eh} &= 0, \\ \frac{h^2}{12(1-2\nu)} \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2} - (1-6\nu) \frac{\partial k_3}{\partial x_1} \right] - d_1 - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{h^2}{24} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(2k_1 + \frac{\partial d_3}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{1-2\nu} \left[\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + (1-\nu) d_3 + \frac{\nu h^2}{12} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \right] - \frac{(1+\nu)p}{2E} &= 0, \\ (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial d_3}{\partial x_1} + \frac{3(1-\nu)h^2}{20} \frac{\partial^2 k_1}{\partial x_1^2} - (1-2\nu) \left(2k_1 + \frac{\partial d_3}{\partial x_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) + \frac{3h^2}{20} \frac{\partial^2 k_3}{\partial x_1^2} - \frac{4}{1-2\nu} \left[\nu \frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2(1-\nu) k_3 \right] - \frac{6(1+\nu)p}{Eh} &= 0. \end{aligned}$$

który można rozseparować na dwa układy niezależne. W wyniku przekształceń równań (3.2)₂, (3.2)₃ i (3.2)₆ wyznaczono funkcje ψ_3 , d_1 , k_3 w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 k_3 &= D_1 e^{\beta x_1} + D_2 e^{-\beta x_1} - \frac{3\nu(1+\nu)}{Eh^3} (px_1^2 + 2A_1 x_1 + 2A_2) - \frac{(1-\nu^2)(10+\nu)p}{20Eh}, \\
 d_1 &= -\frac{2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\beta} (D_1 e^{\beta x_1} - D_2 e^{-\beta x_1}) + \frac{2(1-\nu^2)}{Eh^3} (px_1^3 + 3A_1 x_1^2 + 6A_2 x_1) + \\
 &\quad + \frac{\nu(1+\nu)(10+\nu)p}{10Eh} x_1 + D_3, \\
 \psi_3 &= -\frac{(5-\nu)h^2}{60} (D_1 e^{\beta x_1} + D_2 e^{-\beta x_1}) - \frac{1-\nu^2}{Eh^3} \left(\frac{p}{2} x_1^4 + 2A_1 x_1^3 + 6A_2 x_1^2 \right) + \\
 &\quad + \frac{(1+\nu)(20-5\nu-\nu^2)}{20Eh} px_1^2 + \frac{(1+\nu)(4+\nu)}{2Eh} A_1 x_1 + D_3 x_1 + \\
 &\quad + \frac{(1-\nu^2)(10+\nu)ph}{240E} + \frac{\nu(1+\nu)}{2Eh} A_2 + D_4,
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

gdzie

$$\beta^2 = \frac{120}{(1-\nu)h^2}.$$

Natomiast po przekształceniu równań (3.2)₁, (3.2)₄, (3.2)₅ wyznaczono funkcje ψ_1 , d_3 , k_1 w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 k_1 &= C_1 e^{a_1 x_1} \cos b_1 x_1 + C_2 e^{-a_1 x_1} \cos b_1 x_1 + C_3 e^{a_1 x_1} \sin b_1 x_1 - C_4 e^{-a_1 x_1} \sin b_1 x_1, \\
 d_3 &= 2C_1 e^{a_1 x_1} \left[\frac{1}{\gamma} (a_1 \cos b_1 x_1 - b_1 \sin b_1 x_1) - \frac{1}{(a_1^2 + b_1^2)} (a_1 \cos b_1 x_1 + b_1 \sin b_1 x_1) \right] - \\
 &\quad - 2C_2 e^{-a_1 x_1} \left[\frac{1}{\gamma} (a_1 \cos b_1 x_1 + b_1 \sin b_1 x_1) + \frac{1}{(a_1^2 + b_1^2)} \times \right. \\
 &\quad \times (-a_1 \cos b_1 x_1 + b_1 \sin b_1 x_1) \left. \right] + 2C_3 e^{a_1 x_1} \left[\frac{1}{\gamma} (b_1 \cos b_1 x_1 + a_1 \sin b_1 x_1) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{(a_1^2 + b_1^2)} (b_1 \cos b_1 x_1 - a_1 \sin b_1 x_1) \left. \right] - 2C_4 e^{-a_1 x_1} \left[\frac{1}{\gamma} (b_1 \cos b_1 x_1 - \right. \\
 &\quad - a_1 \sin b_1 x_1) + \frac{1}{(a_1^2 + b_1^2)} (b_1 \cos b_1 x_1 + a_1 \sin b_1 x_1) \left. \right] - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \beta_1 - \frac{(1-\nu^2)p}{2E}, \\
 \psi_1 &= C_1 e^{a_1 x_1} \left\{ -\frac{2\nu}{1-\nu} \frac{1}{(a_1^2 + b_1^2)} \left[\left(\frac{a_1}{\gamma} - \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) (a_1 \cos b_1 x_1 + b_1 \sin b_1 x_1) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{b_1}{\gamma} + \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) (a_1 \sin b_1 x_1 - b_1 \cos b_1 x_1) \right] - \frac{h^2}{12} \cos b_1 x_1 \right\} + C_2 e^{-a_1 x_1} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} \left[\left(\frac{a_1}{\gamma} - \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) (-a_1 \cos b_1 x_1 + b_1 \sin b_1 x_1) - \right. \right.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{b_1}{\gamma} + \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) (a_1 \sin b_1 x_1 + b_1 \cos b_1 x_1) \left] - \frac{h^2}{12} \cos b_1 x_1 \right\} + C_3 e^{a_1 x_1} \times \\
& \quad \times \left\{ - \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} \left[\left(\frac{b_1}{\gamma} + \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) (a_1 \cos b_1 x_1 + b_1 \sin b_1 x_1) + \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{a_1}{\gamma} - \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) (a_1 \sin b_1 x_1 - b_1 \cos b_1 x_1) \right] - \frac{h^2}{12} \sin b_1 x_1 \right\} + C_4 e^{-a_1 x_1} \times \\
& \quad \times \left\{ \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} \left[\left(\frac{b_1}{\gamma} + \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) (-a_1 \cos b_1 x_1 + b_1 \sin b_1 x_1) + \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{a_1}{\gamma} - \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) (a_1 \sin b_1 x_1 + b_1 \cos b_1 x_1) \right] + \frac{h^2}{12} \sin b_1 x_1 \right\} + \\
& \quad + \frac{1-\nu^2}{E} B_1 x_1 + \frac{\nu(1+\nu)p}{2E} x_1 + B_2,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha\gamma} \right)} \\
b_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha\gamma} \right)} \\
\alpha &= \frac{24}{(1-\nu)h^2} \\
\gamma &= \frac{30(1-2\nu)}{(1-\nu)h^2}.
\end{aligned}$$

Funkcja u_1 określona wzorem (3.1) musi spełniać następujący warunek

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{x_1 \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)} u_1(x_1 = -\hat{x}_1) = -u_1(x_1 = \hat{x}_1) &\Leftrightarrow \psi_1(x_1 = -\hat{x}_1) = \\
&= -\psi_1(x_1 = \hat{x}_1) \wedge d_1(x_1 = -\hat{x}_1) = d_1(x_1 = \hat{x}_1) \wedge k_1(x_1 = \\
&= -\hat{x}_1) = -k_1(x_1 = \hat{x}_1)
\end{aligned}$$

stąd wynikają relacje:

$$\begin{aligned}
A_1 = D_3 = 0, \quad D_1 = D_2, \\
C_1 = -C_2, \quad C_3 = C_4, \quad B_2 = 0
\end{aligned}$$

Na powierzchni $x_1 = a$ o normalnej $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ i na powierzchni $x_1 = -a$ o $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ powinny być spełnione warunki brzegowe zgodnie z (1.6) i (1.3) przy $l = 2$. Po wykorzystaniu antysymetrii funkcji ψ_1, d_1, k_1 i symetrii funkcji ψ_3, d_3, k_3 warunki brzegowe sprowadzają się do następującego układu zależności

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad & \left[(1-\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu d_3 + \frac{(1-\nu)h^2}{12} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \right]_{(x_1=a)} = 0, \\
& \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial k_3}{\partial x_1} \right]_{(x_1=a)} = \frac{2(1+\nu)pa}{Eh},
\end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} \left[(1-\nu) \frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2\nu k_3 \right]_{(x_1=a)} = \frac{12(1+\nu)(1-2)M}{Eh^3}, \\ \left[2k_1 + \frac{\partial d_3}{\partial x_1} \right]_{(x_1=a)} = 0, \\ \left[(1-\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu d_3 + \frac{3(1-\nu)h^2}{20} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \right]_{(x_1=a)} = 0, \\ \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{3h^2}{20} \frac{\partial k_3}{\partial x_1} \right]_{(x_1=a)} = \frac{6(1+\nu)pa}{5Eh}. \end{cases}$$

Warunek (3.5)₂ spełniony jest tożsamościowo. Natomiast warunki (3.5)₄ i (3.5)₅ tworzą układ dwóch jednorodnych równań o wyznaczniku różnym od zera, zatem

$$C_1 = C_3 = 0.$$

Z pozostałych warunków wynikają następujące relacje:

$$B_1 = 0,$$

$$A_2 = M - \frac{p}{2}a^2,$$

$$D_1 = - \frac{3(2-\nu)(1+\nu)pa}{Eh^3 \beta \sinh(\beta a)}.$$

Po uwzględnieniu zależności (3.3) i (3.4) z wyznaczonymi stałymi oraz wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych, składowe przemieszczenia (3.1) mają następującą postać

$$u_1 = \frac{(1+\nu)a}{E} \left\{ \frac{\nu p}{2} \xi_1 + \left[\frac{\nu(2-\nu)p}{10 \sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} \sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right) - 6(1-\nu)p \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3} \xi_1^2\right) \xi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu)\tilde{p}\xi_1 + \frac{\nu(10+\nu)p}{10} \xi_1 \right] \xi_3 \right\},$$

$$u_2 = 0,$$

$$u_3 = \frac{(1+\nu)a}{E} \left\{ - \frac{(5-\nu)(2-\nu) \sqrt{\frac{2}{15}(1-\nu)} p}{40 \sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} \left[\cosh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right) - \cosh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right) \right] + \right. \\ + (1-\nu)p \left(\frac{a}{h}\right)^3 \left(-\frac{1}{2} \xi_1^4 + 3\xi_1^2 - \frac{5}{2} \right) + (1-\nu)\tilde{p} \frac{a}{h} (1-\xi_1^2) - \frac{(20-5\nu-\nu^2)p}{20} \frac{a}{h} (1-\xi_1^2) - \\ - \frac{(1-\nu)p}{2} \frac{h}{a} \xi_3 + \left[- \frac{3(2-\nu) \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}} p}{2 \sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} \cosh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right) + 3\nu p \frac{a}{h} (1-\xi_1^2) - \right. \\ \left. - \frac{(10+\nu)(1-\nu)}{20} p \frac{h}{a} - \nu\tilde{p} \frac{h}{a} \right] \xi_3 \right\},$$

gdzie

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{120}{1-\nu}}$$

Składowe stanu naprężenia są następujące

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= - \left[6p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - 2\tilde{p} \right] \xi_3, \\ \sigma_{22} &= \nu \left\{ - \frac{p}{2} - \left[\frac{3(2-\nu)}{1-\nu} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}} p \frac{a}{h} \frac{\cosh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} + 6p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\tilde{p} + \frac{10+\nu}{10} p \right] \xi_3 \right\}, \\ (3.6) \quad \sigma_{33} &= - \frac{p}{2} - p \left[\frac{3(2-\nu)}{1-\nu} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}} \frac{a}{h} \frac{\cosh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} + \frac{10+\nu}{10} \right] \xi_3, \\ \sigma_{13} &= p \left\{ \frac{2-\nu}{4} \frac{a}{h} \frac{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} + \frac{4+\nu}{4} \frac{a}{h} \xi_1 - \left[3(2-\nu) \frac{a}{h} \frac{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3\nu p \frac{a}{h} \xi_1 \right] \xi_3 \right\}, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0. \end{aligned}$$

Znając składowe naprężenia można określić ze związku (1.4)₁ siły reakcyjne objętościowe

$$\begin{aligned} r_1 &= - \frac{6(2-\nu)}{h} p \frac{a}{h} \left[\xi_1 - \frac{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} \right] \xi_3, \\ (3.7) \quad r_2 &= 0, \\ r_3 &= - \frac{3p}{h} \left[4(2-\nu) \sqrt{\frac{15}{2(1-\nu)}} \frac{a}{h} \frac{\cosh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} + \nu \right] \left(\frac{1}{20} - \xi_3^2 \right); \end{aligned}$$

ze związku (1.4)₂ po uwzględnieniu (1.6) siły reakcyjne powierzchniowe

$$\begin{aligned}
 & \text{przy } \xi_1 = 1 \\
 & s_1 = p \left(-\frac{3}{5} + 4\xi_3^2 \right) \xi_3; \\
 & s_3 = 0 \\
 & \text{przy } \xi_1 = -1 \\
 & s_1 = p \left(\frac{3}{5} - 4\xi_3^2 \right) \xi_3, \\
 & s_3 = 0;
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

a ze związku (1.4)₃ po uwzględnieniu (1.5) siły reakcyjne powierzchniowe

$$\begin{aligned}
 & \text{przy } \xi_3 = \frac{1}{2} \\
 & s_1 = -\frac{2-\nu}{2} p \frac{a}{h} \left[\frac{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} - \xi_1 \right], \\
 & s_3 = -\frac{p}{2} \left[\frac{3(2-\nu)}{1-\nu} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}} \frac{a}{h} \frac{\cosh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} + \frac{\nu}{10} \right], \\
 & \text{przy } \xi_3 = -\frac{1}{2} \\
 & s_1 = \frac{2-\nu}{2} p \frac{a}{h} \left[\frac{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} - \xi_1 \right], \\
 & s_3 = -\frac{p}{2} \left[\frac{3(2-\nu)}{1-\nu} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}} \frac{a}{h} \frac{\cosh\left(\beta_1 \frac{a}{h} \xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)} + \frac{\nu}{10} \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Jeżeli założymy, że na pasmo płytowe nie działa obciążenie pionowe p , a jedynie na powierzchni $\xi_1 = \pm 1$ siła

$$p_1 = \begin{cases} 2\tilde{p} \xi_3 & \text{przy } \xi_1 = 1, \\ -2\tilde{p} \xi_3 & \text{przy } \xi_1 = -1, \end{cases}$$

wtedy wszystkie siły reakcyjne objętościowe i powierzchniowe są równe zero, a otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem ścisłym w sensie klasycznej teorii sprężystości.

Na podstawie wzoru (1.11) obliczono

$$f_1 = h \sup_{x \in \Omega} |r_1| + \sup_{x \in \pi \times \partial F} |s_1| + \frac{h}{a} \sup_{x \in F \times \partial \pi} |s_1| =$$

$$= p \left\{ \frac{7}{2} (2-\nu) \frac{a}{h} \left[1 - \frac{\ln \left(\beta_1 \frac{a}{h} \right)}{\beta_1 \frac{a}{h}} - \frac{1}{\beta_1 \frac{a}{h}} \right] + 0,2 \frac{h}{a} \right\},$$

$$f_2 = h \sup_{x \in \Omega} |r_3| + \sup_{x \in \pi \times \partial F} |s_3| + \frac{h}{a} \sup_{x \in F \times \partial \pi} |s_3| = \frac{13}{5} p \left[(2-\nu) \sqrt{\frac{15}{2(1-\nu)}} \frac{a}{h} \frac{\cosh \left(\beta_1 \frac{a}{h} \right)}{\sinh \left(\beta_1 \frac{a}{h} \right)} + \frac{\nu}{4} \right],$$

$$g_1 = \frac{h}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_1| d\Omega + \frac{1}{2|\pi|} \left(\int_{\pi \times \left(\frac{h}{2}\right)} |s_1| d\pi + \int_{\pi \times \left(-\frac{h}{2}\right)} |s_1| d\pi \right) + \frac{h}{a} \frac{1}{|S_b|} \int_{S_b} |s_1| dS_b =$$

$$= p \left\{ (2-\nu) \frac{a}{h} - \frac{2-\nu}{2} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}} \frac{\left[\cosh \left(\beta_1 \frac{a}{h} \right) - 1 \right]}{\sinh \left(\beta_1 \frac{a}{h} \right)} + \frac{13}{200} \frac{h}{a} \right\},$$

$$g_2 = \frac{h}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_3| d\Omega + \frac{1}{2|\pi|} \left(\int_{\pi \times \left(\frac{h}{2}\right)} |s_3| d\pi + \int_{\pi \times \left(-\frac{h}{2}\right)} |s_3| d\pi \right) + \frac{h}{a} \frac{1}{|S_b|} \int_{S_b} |s_3| dS_b = 0,479 p.$$

Jako wytyżenie σ_0 przyjęto maksymalne naprężenie σ_{11} czyli σ_{11} przy $\xi_1 = 0$ i $\xi_3 = -\frac{1}{2}$.

$$\sigma_0 = 3p \left(\frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p}.$$

Wówczas

$$\delta_1 = \frac{7(2-\nu)p \frac{h}{a} \left[1 - \frac{\ln \left(\beta_1 \frac{a}{h} \right)}{\beta_1 \frac{a}{h}} - \frac{1}{\beta_1 \frac{a}{h}} \right]}{2 \left[3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]} + \frac{0,2p \left(\frac{h}{a} \right)^3}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a} \right)^2},$$

$$\delta_2 = \frac{13(2-\nu) \sqrt{\frac{15}{2(1-\nu)}} p \frac{h}{a} \frac{\cosh \left(\beta_1 \frac{a}{h} \right)}{\sinh \left(\beta_1 \frac{a}{h} \right)}}{5 \left[3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]} + \frac{13 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \nu p}{20 \left[3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]},$$

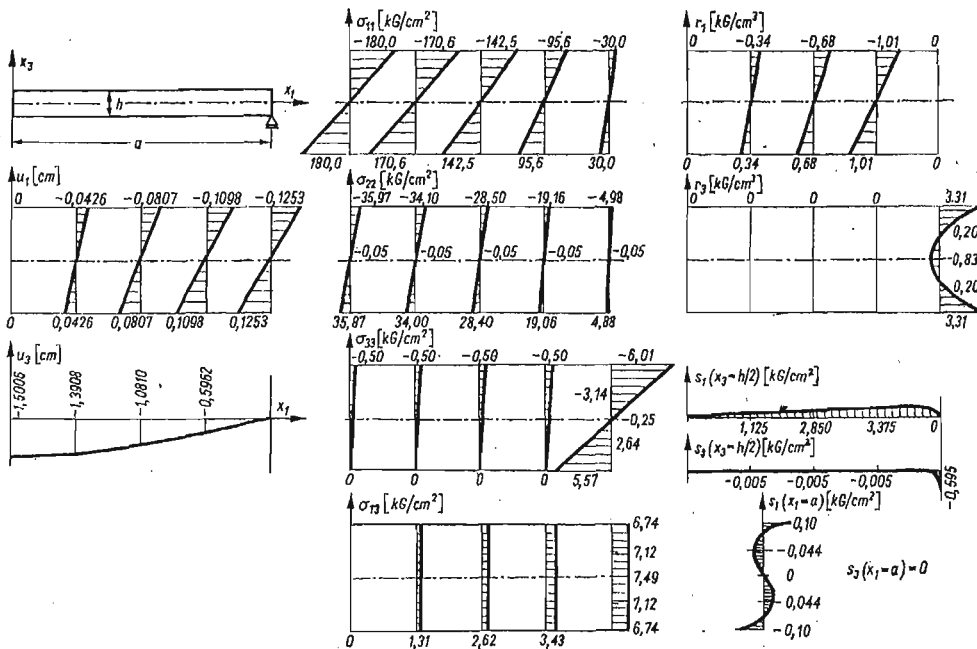
$$\gamma_1 = \frac{(2-\nu)p \frac{h}{a}}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h^2}{a}\right)} - \frac{(2-\nu) \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}} p \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\left[\cosh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right) - 1\right]}{\sinh\left(\beta_1 \frac{a}{h}\right)}}{2 \left[3p - \tilde{p} \left(\frac{h^2}{a}\right)^2\right]} + \frac{13p \left(\frac{h}{a}\right)^3}{200 \left[3p - \tilde{p} \left(\frac{h^2}{a}\right)^2\right]},$$

$$\gamma_2 = \frac{0,479 p \left(\frac{h}{a}\right)^2}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h^2}{a}\right)^2}.$$

Przyjmując dane $a = 200$ cm, $h = 20$ cm, $p = 0,5$ kG/cm², $M = -2000$ kGcm/cm ($\tilde{p} = -30 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$), $E = 200000$ kG/cm², $\nu = 0,2$ otrzymano następujące wielkości δ_α i γ_α

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0,1668 & \gamma_1 &= 0,0492 \\ \delta_2 &= 0,3984 & \gamma_2 &= 0,0013 \end{aligned}$$

Na rys. 4 pokazano wykresy przemieszczeń, naprężeń i sił reakcyjnych w przekrojach ξ_1 równych $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.



Rys. 4

4. Rozwiązanie pasma płytowego przy $l = 4$

Przyjęto, że na pasmo płytowe działa obciążenie (1.5) i (1.6) a poszukiwane przemieszczenia mają następującą postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_1 &= \psi_1 + d_1 x_3 + k_1 x_3^3, \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= \psi_3 + d_3 x_3 + l_3 x_3^2 + m_3 x_3^4. \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętymi przemieszczeniami składowe tensora naprężenia wyrażają się następującymi zależnościami

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu d_3 + \left[(1-\nu) \frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2\nu l_3 \right] x_3 + \right. \\ &\quad \left. + \left[(1-\nu) \frac{\partial k_1}{\partial x_1} + 4\nu m_3 \right] x_3^3 \right\}, \\ \sigma_{22} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + d_3 + \left(\frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2l_3 \right) x_3 + \left(\frac{\partial k_1}{\partial x_1} + 4m_3 \right) x_3^3 \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial d_3}{\partial x_1} x_3 + \left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1} \right) x_3^2 + \frac{\partial m_3}{\partial x_1} x_3^4 \right], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) d_3 + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \left[2(1-\nu) l_3 + \nu \frac{\partial d_1}{\partial x_1} \right] x_3 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\nu \frac{\partial k_1}{\partial x_1} + 4(1-\nu) m_3 \right] x_3^3 \right\}, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0 \end{aligned}$$

Równania równowagi (1.2) sprowadzają się do następującego układu równań

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial d_3}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1} \right) + \frac{h^4}{80} \frac{\partial^2 m_3}{\partial x_1^2} - \frac{2(1+\nu)p}{Eh} &= 0, \\ (1-\nu) \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{h^2}{6} \frac{\partial l_3}{\partial x_1} + (1-\nu) \frac{h^4}{80} \frac{\partial^2 k_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{h^4}{20} \frac{\partial m_3}{\partial x_1} - \\ &\quad - \frac{1-2\nu}{2} \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{h^2}{12} \left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1} \right) + \frac{h^4}{80} \frac{\partial m_3}{\partial x_1} \right] = 0, \\ \frac{h^2}{24} \frac{\partial^2 d_3}{\partial x_1^2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} d_3 - \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \frac{(1+\nu)p}{E} &= 0, \\ (1-\nu) \frac{h^2}{20} \frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{h^2}{10} \frac{\partial l_3}{\partial x_1} + (1-\nu) \frac{h^4}{112} \frac{\partial^2 k_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{h^4}{28} \frac{\partial m_3}{\partial x_1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1-2\nu}{2} \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{3h^2}{20} \left(3k_1 + \frac{3l_3}{\partial x_1} \right) + \frac{3h^4}{112} \frac{\partial m_3}{\partial x_1} \right] = 0, \\
 & \frac{1-2\nu}{4} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) + \frac{3h^2}{20} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1} \right) + \frac{3h^4}{112} \frac{\partial^2 m_3}{\partial x_1^2} \right] - 2(1-\nu)l_3 - \\
 (4.2) \quad & -\nu \frac{\partial d_1}{\partial x_1} - \frac{3h^2}{20} \left[4(1-\nu)m_3 + \nu \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \right] - \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)p}{2Eh} = 0, \\
 \text{[cd.]} \quad & \frac{1-2\nu}{8} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) + \frac{5h^2}{28} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1} \right) + \frac{5h^4}{144} \frac{\partial^2 m_3}{\partial x_1^2} \right] - 2(1-\nu)l_3 - \\
 & -\nu \frac{\partial d_1}{\partial x_1} - \frac{5h^2}{28} \left[4(1-\nu)m_3 + \nu \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \right] - \frac{5(1+\nu)(1-2\nu)p}{4Eh} = 0.
 \end{aligned}$$

Równania (4.2) można rozseparować na dwa niezależne układy. Pierwszy obejmuje równania (4.2)₁ i (4.2)₄ zawierające niewiadome ψ_1 , d_3 . Jest on identyczny jak układ równań (2.2)₁ i (2.2)₄. Drugi układ stanowią pozostałe równania (4.2) zawierające niewiadome funkcje d_1 , k_1 , ψ_3 , l_3 , m_3 .

Ogólne rozwiązanie układu równań (4.2), po uwzględnieniu antysymetrii składowej przemieszczenia u_1 , otrzymano w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= -\frac{\nu}{(1-\nu)\beta} (e^{\beta x_1} - e^{-\beta x_1}) D_2 + \frac{1-\nu^2}{E} D_1 x_1 + \frac{\nu(1+\nu)p}{2E} x_1, \\
 (4.3) \quad d_1 &= \frac{h^2}{10} \left[\left[-\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)} \kappa \alpha^2 - \frac{\nu^2 h^2}{35(1-2\nu)} \alpha - \frac{3}{2} \kappa \right] C_1 (e^{\alpha x_1} - e^{-\alpha x_1}) + \right. \\
 & \left. + \left[\left[-\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)} (d^2 - b^2) - \frac{\nu^2 h^2}{35(1-2\nu)} (d\delta_1 - b\delta_2) - \frac{3}{2} \right] (e^{d x_1} - e^{-d x_1}) \cos b x_1 + \right. \right. \\
 & \left. + \frac{h^2}{35(1-2\nu)} \left[\frac{\nu(1-\nu)}{2} b d + \nu^2 (b\delta_1 + d\delta_2) \right] (e^{d x_1} + e^{-d x_1}) \sin b x_1 \right] M_1 - \\
 & - \left[\frac{h^2}{35(1-2\nu)} \left[\frac{\nu(1-\nu)}{2} b d + \nu^2 (b\delta_1 + d\delta_2) \right] (e^{d x_1} - e^{-d x_1}) \cos b x_1 + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)} (d^2 - b^2) + \frac{\nu^2 h^2}{35(1-2\nu)} (-b\delta_2 + d\delta_1) + \frac{3}{2} \right] \times \right. \\
 & \left. \times (e^{d x_1} + e^{-d x_1}) \sin b x_1 \right] M_2 \left. \right] + \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} A_2 x_1 + \frac{(1+\nu)p}{Eh} \left[\frac{2(1-\nu)}{h^2} x_1^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{3(2+3\nu)}{10} \right] x_1, \\
 k_1 &= \kappa C_1 (e^{\alpha x_1} - e^{-\alpha x_1}) + (e^{d x_1} - e^{-d x_1}) \cos b x_1 M_1 + (e^{d x_1} - e^{-d x_1}) \sin b x_1 M_2 - \\
 & - \frac{2(2-\nu)(1+\nu)p}{Eh^3} x_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad \psi_3 = & \frac{h^2}{10} \left[\left\{ \frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)} \kappa \alpha + \frac{\nu^2 h^2}{35(1-2\nu)} - \frac{\kappa}{\alpha} - \frac{h^4}{12} \left[\frac{(1-\nu)^2}{280(1-2\nu)} \kappa \alpha^3 + \right. \right. \right. \\
\text{[c.d.]} \quad & \left. \left. \left. + \frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)} \alpha^2 \right] + \frac{h^2}{8} \right\} (e^{\alpha x_1} + e^{-\alpha x_1}) C_1 + \left\{ \left[\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)} d + \frac{\nu^2 h^2}{35(1-2\nu)} \delta_1 - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{d}{d^2+b^2} - \frac{h^4}{12} \left(\frac{(1-\nu)^2}{280(1-2\nu)} (d^3 - 3b^2 d) + \frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)} (d^2 \delta_1 - b^2 \delta_1 - 2bd\delta_2) \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{h^2}{8} \delta_1 \right] (e^{dx_1} + e^{-dx_1}) \cos bx_1 + \left[-\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)} b - \frac{\nu^2 h^2}{35(1-2\nu)} \delta_2 - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{b}{b^2+d^2} + \frac{h^4}{12} \left(\frac{(1-\nu)^2}{280(1-2\nu)} (-3b^3 + 3bd^2) + \frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)} \times \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times (-b^2 \delta_2 + d^2 \delta_2 + 2bd\delta_1) \right) - \frac{h^2}{8} \delta_2 \right] (e^{dx_1} - e^{-dx_1}) \sin bx_1 \right\} M_1 + \\
& + \left\{ \left[-\frac{\nu(1-2)h^2}{140(1-2\nu)} b + \frac{\nu^2 h^2}{35(1-2\nu)} \delta_2 + \frac{b}{d^2+b^2} - \frac{h^4}{12} \left(\frac{(1-\nu)^2}{280(1-2\nu)} \times \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times (3bd^2 - b^3) + \frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)} (d^2 \delta_2 - b^2 \delta_2 + 2bd\delta_1) \right) + \frac{h^2}{8} \delta_2 \right] (e^{dx_1} + e^{-dx_1}) \times \right. \\
& \left. \times \cos bx_1 + \left[\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)} \frac{(3b^2 d + d^3)}{(d^2+b^2)} + \frac{\nu^2 h^2}{35(1-2\nu)} \delta_1 - \frac{d}{d^2+b^2} + \frac{h^4}{12} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(\frac{(1-2)^2}{280(1-2\nu)} (-d^3 + 3b^2 d) + \frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)} (b^2 \delta_1 - d^2 \delta_1 + 2bd\delta_2) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{h^2}{8} \delta_1 \right] (e^{dx_1} - e^{-dx_1}) \sin bx_1 \right\} M_2 \right] - \frac{(1+\nu)p}{2Eh} \left(\frac{1-\nu}{h^2} x_1^2 - \frac{3(8-3\nu)}{10} \right) x_1^2 - \\
& - \frac{1+\nu}{2Eh} \left(\frac{12(1-\nu)}{h^2} x_1^2 - \nu \right) A_2 + A_1,
\end{aligned}$$

$$d_3 = D_2(e^{\beta x_1} - e^{-\beta x_1}) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} D_1 - \frac{(1-\nu^2)p}{2E},$$

$$\begin{aligned}
l_3 = & \frac{h^2}{10} \left[\left[\frac{(1-\nu)^2 h^2}{280(1-2\nu)} \kappa \alpha^3 + \frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)} \alpha^3 - 3 \right] C_1 (e^{\alpha x_1} + e^{-\alpha x_1}) + \right. \\
& + \left\{ \left[\frac{(1-\nu)^2 h^2}{280(1-2\nu)} (d^3 - 3b^2 d) + \frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)} (d^2 \delta_1 - b^2 \delta_1 - 2bd\delta_2) - 3\delta_1 \right] \times \right. \\
& \left. \times (e^{dx_1} + e^{-dx_1}) \cos bx_1 + \left[-\frac{(1-\nu)^2 h^2}{280(1-2\nu)} (-3b^3 + 3bd^2) - \frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times (-b^2 \delta_2 + d^2 \delta_2 + 2bd\delta_1) + 3\delta_2 \right] (e^{dx_1} - e^{-dx_1}) \sin bx_1 \right\} M_1 + \\
& + \left\{ \left[\frac{(1-\nu)^2 h^2}{280(1-2\nu)} (3bd^2 - b^3) + \frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)} (d^2 \delta_2 - b^2 \delta_2 + 2bd\delta_1) - 3\delta_2 \right] \times \right.
\end{aligned}$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & \times (e^{dx_1} + e^{-dx_1}) \cos bx_1 + \left[-\frac{(1-\nu)^2 h^2}{280(1-2\nu)} (-d^3 + 3b^2 d) - \frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)} \times \right. \\ & \left. \times (b^2 \delta_1 - d^2 \delta_1 + 2bd\delta_2) - 3\delta_1 \right] (e^{dx_1} - e^{-dx_1}) \sin bx_1 \Big\} M_2 \Big] - \frac{6\nu(1+\nu)}{Eh^3} A_2 - \\ & - \frac{3\nu(1+\nu)p}{Eh^3} x_1^2 - \frac{3(5-3\nu)(1+\nu)p}{30Eh}, \\ m_3 = & C_1(e^{\alpha x_1} + e^{-\alpha x_1}) + M_1 [(e^{dx_1} + e^{-dx_1}) \delta_1 \cos bx_1 - (e^{dx_1} - e^{-dx_1}) \delta_2 \sin bx_1] + \\ & + M_2 [(e^{dx_1} + e^{-dx_1}) \delta_2 \cos bx_1 + (e^{dx_1} - e^{-dx_1}) \delta_1 \sin bx_1] + \frac{(1+\nu)^2 p}{2Eh^3}. \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{24}{(1-\nu)h^2}, \\ \alpha &= \frac{\frac{h^2}{(1-2\nu)} \left(-\frac{\nu(1-\nu)h^2}{60} \alpha^3 + \alpha \right)}{\frac{(1-\nu)^2 h^4}{240(1-2\nu)} \alpha^4 - \frac{(1-\nu)h^2}{2(1-2\nu)} \alpha^2 + 5}, \\ \chi &= \frac{-\frac{(1-\nu)^2 h^4}{240(1-2\nu)} [d^4 - 6b^2 d^2 + b^4 + 4bd(d^2 - b^2)i] + \frac{(1-\nu)h^2}{2(1-2\nu)} [d^2 - b^2 + 2bdi] - 5}{\frac{h^2}{1-2\nu} \left\{ \frac{\nu(1-\nu)h^2}{60} [d(d^2 - 3b^2) + b(3d^2 - b^2)i] - d - bi \right\}}, \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \operatorname{re} \chi,$$

$$\delta_2 = \operatorname{lm} \chi,$$

natomiast $\alpha, -\alpha, d+ib, -(d+ib), d-ib, -(d-ib)$ są pierwiastkami równania

$$\gamma^6 - \frac{840}{(1-\nu)h^2} \gamma^4 + \frac{1680(41-46\nu)}{(1-\nu)^2 h^4} \gamma^2 - \frac{4233600}{(1-\nu)h^6} = 0.$$

Warunki (1.3) i (1.6) na powierzchniach $x_1 = a$ o normalnej $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ i $x_1 = -a$ o $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ są równoważne następującym zależnościom

$$(4.4) \quad \begin{aligned} & \left[(1-\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu d_3 \right]_{(x_1=a)} = 0, \\ & \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{h^2}{12} \left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1} \right) + \frac{h^4}{80} \frac{\partial m_3}{\partial x_1} \right]_{(x_1=a)} = 0, \\ & \left\{ (1-\nu) \frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2\nu l_3 + \frac{3h^2}{20} \left[(1-\nu) \frac{\partial k_1}{\partial x_1} + 4\nu m_3 \right] \right\}_{(x_1=a)} = \frac{12(1+\nu)(1-2\nu)M}{Eh^3}, \\ & \left(\frac{\partial d_3}{\partial x_1} \right)_{(x_1=a)} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (1-\nu) \frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2\nu l_3 + \frac{5h^2}{28} \left[(1-\nu) \frac{\partial k_1}{\partial x_1} + 4\nu m_3 \right] \right\}_{(x_1=a)} = \\
 (4.4) \quad & = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \left(\frac{12M}{h^3} - \frac{4}{35} \frac{p}{h} \right), \\
 [\text{cd.}] \quad & \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{3h^2}{20} \left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1} \right) + \frac{3h^4}{112} \frac{\partial m_3}{\partial x_1} \right]_{(x_1=a)} = \frac{6(1+\nu)pa}{5Eh}, \\
 & \left[d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{5h^2}{28} \left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1} \right) + \frac{5h^4}{144} \frac{\partial m_3}{\partial x_1} \right]_{(x_1=a)} = \frac{6(1+\nu)pa}{7Eh}.
 \end{aligned}$$

Warunek (4.4)₂ jest spełniony tożsamościowo. Z warunków (4.4)₁, (4.4)₃ i (4.4)₄ wynikają następujące relacje

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 0, \\
 A_2 &= M - \frac{pa^2}{2}, \\
 E_2 &= 0,
 \end{aligned}$$

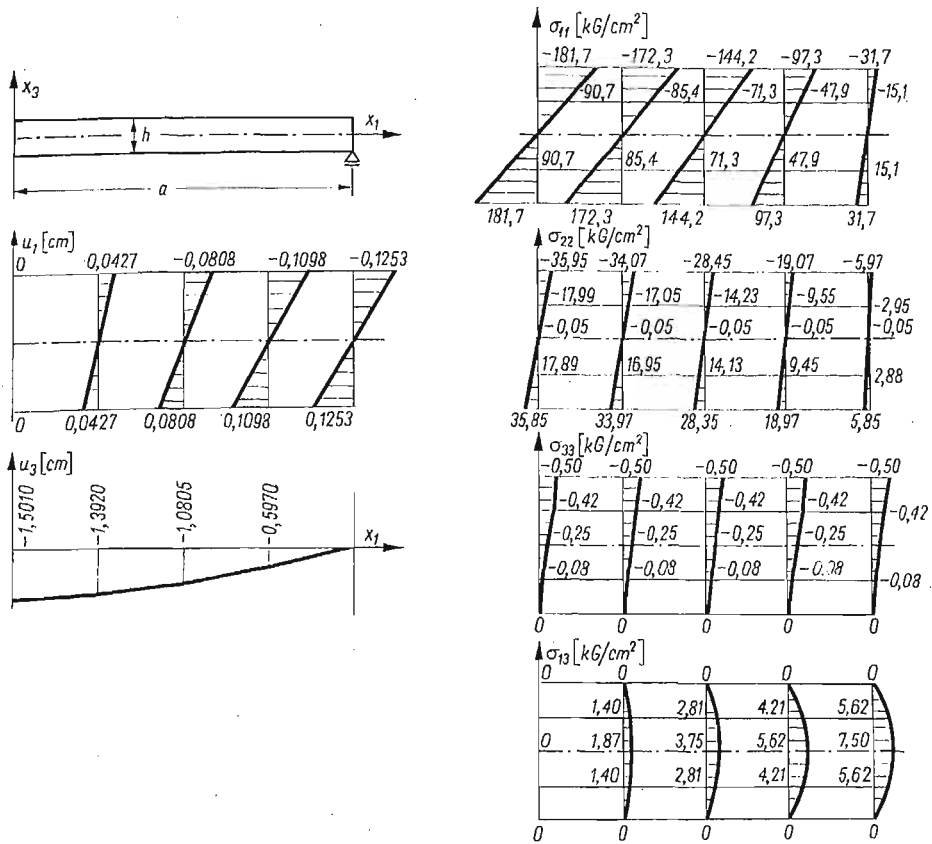
Natomiast zależności (4.4)₅, (4.4)₆ i (4.4)₇ tworzą układ trzech równań jednorodnych, których wyznacznik przy realnych stałych materiałowych i wymiarach jest różny od zera, zatem $C_1 = M_1 = M_2 = 0$.

Po uwzględnieniu wyznaczonych stałych i wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych, składowe przemieszczenia mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{(1+\nu)a}{E} \left\{ \frac{\nu p}{2} \xi_1 + \left[-6(1-\nu)p \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{\xi_1^2}{3} \right) \xi_1 + 2(1-\nu)\tilde{p} \xi_1 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{3(2+3\nu)p}{10} \xi_1 \right] \xi_3 - 2(2-\nu)p \xi_3^3 \right\}, \\
 u_2 &= 0, \\
 u_3 &= \frac{(1+\nu)a}{E} \left\{ \left[-\frac{3(8-3\nu)p}{20} (1-\xi_1^2) - \frac{(1-\nu)p}{2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 (\xi_1^4 - 6\xi_1^2 + 5) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (1-\nu)\tilde{p}(1-\xi_1^2) \right] \frac{a}{h} - \frac{(1-\nu)p}{2} \frac{h}{a} \xi_3 + \left[3\nu p \frac{a}{h} (1-\xi_1^2) - \nu \tilde{p} \frac{h}{a} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{3(5-3\nu)p}{20} \frac{h}{a} \right] \xi_3^3 + \frac{(1+\nu)p}{2} \frac{h}{a} \xi_3^4 \right\}.
 \end{aligned}$$

Składowe stanu naprężenia wyrażają się następującymi wzorami

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= - \left[6p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1-\xi_1^2) - 2\tilde{p} - \frac{3}{5}p \right] \xi_3 - 4p \xi_3^3, \\
 \sigma_{22} &= -\nu \left\{ \frac{p}{2} + \left[6p \left(\frac{a}{h} \right)^2 (1-\xi_1^2) - 2\tilde{p} + \frac{9}{10}p \right] \xi_3 + 2p \xi_3^3 \right\}, \\
 (4.5) \quad \sigma_{33} &= -\frac{p}{2} - \frac{3}{2}p \xi_3 + 2p \xi_3^3, \\
 \sigma_{13} &= 3p \frac{a}{h} \left(\frac{1}{2} - 2\xi_3^2 \right) \xi_1, \\
 \sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0.
 \end{aligned}$$



Rys. 5

Siły reakcyjne objętościowe (1.4)₁ i powierzchniowe (1.4)₂ i (1.4)₃ są równe zero, a zatem uzyskano ściśle rozwiązanie pasma płytowego w sensie klasycznej teorii sprężystości.

Na rys. 5 pokazano wykresy przemieszczeń i naprężeń w przekrojach ξ_1 równych: $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, przyjmując identyczne dane jak w przykładach liczbowych w rozdziałach 2 i 3.

5. Wnioski

Dysponując rozwiązaniem pasma płytowego w założeniach klasycznej teorii sprężystości i rozwiązaniami uzyskanymi wg teorii z więzami można określić zależności między γ_α i δ_α (1.10) a średnimi i maksymalnymi błędami w składowych naprężeniach i przemieszczeniach η_{ij} , θ_i (1.8) oraz wielkościami κ_{ij} , ϱ_i (1.9) [2].

W przypadku, gdy funkcja przemieszczeń przyjęta jest w postaci $u_i = \psi_i + d_i x_3$ wielkości γ_α i δ_α są następujące

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0,0556 & \delta_1 &= 0,1945 \\ \gamma_2 &= 0,5362 & \delta_2 &= 0,7453 \end{aligned}$$

Wielkościom tym odpowiadają następujące odchylenia zestawione w tablicy 5.1.

Tablica 5.1.

σ_{ij}, u_i	η_{ij}, Φ_i	χ_{ij}, ϱ_i
σ_{11}	0,0002	0,0015
σ_{22}	0,2456	0,6841
σ_{33}	64,08	178,20
σ_{13}	0,3849	2,00
u_1	0,0615	0,2086
u_3	0,0620	0,0976

W przypadku, gdy funkcja przemieszczeń przyjęta jest w postaci $u_i = \psi_i + d_i x_3 + k_i x_3^2$ wielkości γ_α i δ_α są następujące

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0,0492, & \delta_1 &= 0,1694 \\ \gamma_2 &= 0,0013, & \delta_2 &= 0,3710. \end{aligned}$$

Wielkościom tym odpowiadają następujące błędy zestawione w tablicy 5.2.

Tablica 5.2.

σ_{ij}, u_i	η_{ij}, θ_i	χ_{ij}, ϱ_i
σ_{11}	0,0002	0,0015
σ_{22}	0,0077	0,0822
σ_{33}	2,1076	22,04
σ_{13}	0,3409	2,6960
u_1	0,0011	0,0163
u_3	0,0009	0,0020

Z powyższych zestawień wynika, że za pomocą uogólnionej teorii Reissnera ($l = 1$) można wyznaczyć przemieszczenia oraz naprężenia normalne σ_{11} i σ_{22} , natomiast nie może ona służyć do wyznaczania naprężeń σ_{33} . Naprężenia styczne wyznaczone na podstawie tej teorii są stałe na całej wysokości płyty, podczas gdy wg rozwiązania klasycznej teorii sprężystości zmieniają się parabolicznie wzdłuż jej wysokości. Średnie naprężenia w obu rozwiązaniach są jednakowe a największe różnice występują na krawędziach płyty. Nie ma to jednak istotnego znaczenia ze względu na nieznaczne wartości tych naprężeń wobec naprężeń normalnych.

Wielkości γ_1 i δ_1 maleją do zera gdy stosunek wysokości płyty do jej szerokości dąży do zera. Natomiast wielkości γ_2 i δ_2 dążą wówczas do granicy różnej od zera. Wynika stąd, że uogólniona teoria Reissnera nie jest ścisła nawet dla płyt bardzo cienkich.

Rozwiązanie przy $l = 2$ jest znacznie dokładniejsze niż przy $l = 1$. Przemieszczenia oraz naprężenia normalne wyznaczone są w płycie w sposób prawie dokładny.

Jedynie na powierzchniach brzegowych $x_1 = \pm a$ naprężenia σ_{33} znacznie różnią się od wyznaczonych wg klasycznej teorii sprężystości. Naprężenia styczne σ_{13} zachowują się podobnie jak w rozwiązaniach przy $l = 1$.

Natomiast wszystkie wielkości γ_α i δ_α dążą do zera gdy stosunek wysokości do jej szerokości maleje do zera.

Literatura cytowana w tekście

1. W. GUTKOWSKI, W. NOWACKI, Cz. WOŹNIAK, *Dźwigary powierzchniowe*, Ossolineum 1975.
2. M. MARKS, *Płyty w ujęciu mechaniki ciał z więzami* (w druku).
3. Cz. WOŹNIAK, *Nonlinear mechanics of the constrained and discretized material continua*, wykłady w Udine 1973.
4. Cz. WOŹNIAK, *Constrained Continuous Media*, Part I, II, III, Bull. Acad. Polon. Sci. sci. techn., No 3, 4 — 1973.
5. Cz. WOŹNIAK, *Nonlinear mechanics of constrained material continua I. Foundations of the theory*, Archives of Mechanics, 26, 1 — 1974.
6. Cz. WOŹNIAK, *Elastics bodies, with constrains imposed on deformations stresses and momenta*, Bull. Acad. Polon. Sci., sci. techn. 22, 1974.
7. Cz. WOŹNIAK, *Analytical mechanics of elastic media*, wykłady w Udine, 1975.

Резюме

АНАЛИЗ ПОЛОСЫ КАК ТЕЛА СО СВЯЗЯМИ

В работе рассмотрена проблема анализа полосы с точки зрения механики тел со связями. Принимая функцию перемещений в виде степенного ряда относительно вертикальной переменной получено исходную систему уравнений. Задача полосы решена для трёх различных видов функции перемещений. В двух случаях силы реакции получены отличные от нуля, в одном равны нулю, значит решение в третьем случае отвечает полученному методами классической механики сплошной среды. Силы реакции отличны от нуля допускают оценить точность решения полученного методами механики среды со связями. Взаимозависимость сил реакции и точности решения проиллюстрирована численными примерами.

Summary

ANALYSIS OF THE BAND PLATE CONSIDERED AS A CONSTRAINED BODY

The elastic band plate is solved as a body with internal constrains. To obtain the basic equations the deformation function is assumed in the form of polynomial series. The problem of the band plate is solved for three cases of the deformation function. In two cases the reaction forces disappear. The nonvanishing reaction forces describe a degree of accuracy of the solutions. The relation between the reaction forces and the accuracy of the solutions is given and a general criterium is proposed.

IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 sierpnia 1978 r.

DYNAMIKA LOTU ZASOBNIKA LOTNICZEGO Z POŁĄCZONYM PRZEGUBOWO HAMULCEM
AERODYNAMICZNYM, ZRZUCONEGO Z SAMOŁOTU

KAZIMIERZ MICHAŁEWICZ

1. Wstęp

W niniejszej pracy rozpatrzono dynamikę lotu zasobnika lotniczego hamowanego „wolno puszczonego” hamulcem aerodynamicznym. Obiekt traktowano jako układ mechaniczny sztywny [1, 3, 10, 23, 25] z ruchomym (wychylanym) hamulcem aero.

Równania ruchu w układzie współrzędnych związanych z zasobnikiem wyprowadzono w quasi-współrzędnych stosując równania Boltzmanna-Hamela [8, 13, 14, 15] dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych.

Uwzględniono siedem stopni swobody, w tym pięć stopni swobody zasobnika: prędkości przemieszczeń U, V, W , pochylania Θ i odchylenia Ψ oraz dwóch stopni swobody hamulca aero α_s i γ_s [4, 5, 6, 11, 13, 16, 18, 22, 23, 24].

Zastosowanie równań Boltzmanna-Hamela [8, 13, 14, 15] do wyprowadzenia równań ruchu obiektów ruchomych w układzie współrzędnych związanych z obiektem umożliwia w stosunkowo prosty sposób uwzględnienie dodatkowych stopni swobody wynikających z względnych ruchów elementów rozpatrywanego obiektu [7, 9, 13, 14, 15].

Przykładowe obliczenia numeryczne wykonano wg własnych programów [12]. Wyprowadzone w pracy równania ruchu są uniwersalne i można je zastosować do opisu ruchu obiektów swobodnych w przyjętych układach odniesienia.

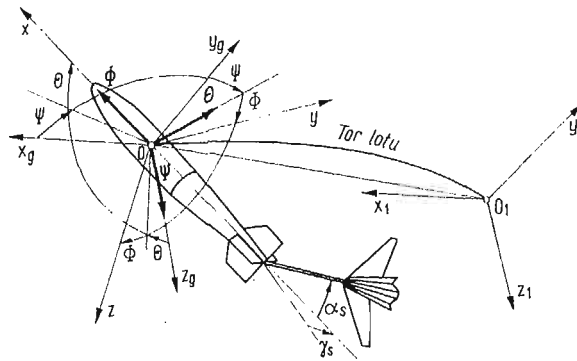
Charakterystyki aerodynamiczne uzyskano w wyniku badań modelowych w tunelu aerodynamicznym w Instytucie Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej. Geometrię i rozkłady mas wyznaczono na drodze obliczeń teoretycznych.

2. Dynamiczne równania ruchu obiektu

Do opisu dynamiki obiektu swobodnego niezbędne są cztery układy odniesienia [2, 5, 6, 13, 16]

- układ $O x y$ z sztywno związany z poruszającym się zasobnikiem,
- układ prędkościowy $O x_a y_a z_a$ związany z kierunkiem przepływu ośrodka,
- układ grawitacyjny $O x_g y_g z_g$ związany z poruszającym się obiektem, równoległy do układu $O x_1 y_1 z_1$,
- nieruchomy układ grawitacyjny $O x_1 y_1 z_1$ związany z Ziemią (rys. 1).

Ruch obiektu został opisany w centralnym układzie współrzędnych $O x y z$ sztywno związanym z obiektem. Chwilowe położenie zasobnika lotniczego określone przez poło-



Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia

żenie środka masy obiektu $\bar{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ mierzone względem nieruchomego układu współrzędnych $O x_1 y_1 z_1$ oraz kątów obrotu Φ, Θ, ψ [5, 13, 23].

Składowe wektorów chwilowych prędkości liniowej i kątowej oraz wektory sił zewnętrznych i momentów sił zewnętrznych w przyjętym układzie podano w [5, 13, 15, 18, 23].

Równania ruchu obiektu otrzymano z równań Boltzmann-Hamela [8, 13, 14, 15]:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \gamma_{\alpha\mu}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^*,$$

gdzie: $\mu = 1, 2, \dots, k$ — ilość stopni swobody,

ω_μ — quasi-prędkości,

T_μ — quasi-współrzędne,

T^* — energia kinetycznych w quasi-prędkościach,

Q_μ^* — siły uogólnione,

$\gamma_{\mu\alpha}^r$ — trójwskaźnikowe mnożniki Boltzmann, w postaci:

$$\gamma_{\alpha\mu}^r = \sum_{\sigma=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{r\lambda}}{\partial q_\sigma} \right) b_{\sigma\mu} b_{\lambda\alpha}.$$

Obliczone na podstawie definicji niezerowe symbole Boltzmann wynoszą:

$$(2) \quad \begin{aligned} \gamma_{35}^1 &= \gamma_{62}^1 = \gamma_{16}^2 = \gamma_{43}^2 = \gamma_{24}^3 = \gamma_{51}^3 = \gamma_{65}^4 = \gamma_{46}^5 = \gamma_{54}^6 = 1 \\ \gamma_{26}^1 &= \gamma_{53}^1 = \gamma_{34}^2 = \gamma_{61}^2 = \gamma_{51}^3 = \gamma_{42}^3 = \gamma_{56}^4 = \gamma_{64}^5 = \gamma_{45}^6 = -1 \end{aligned}$$

Równania ruchu dla przyjętego modelu mają następującą postać:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial U} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial W} Q - \frac{\partial T^*}{\partial V} R &= Q_U^*, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial V} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial U} R &= Q_V^*, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial W} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial U} Q &= Q_W^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial Q} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial U} W - \frac{\partial T^*}{\partial W} U = Q_Q^*, \\
 [cd.] \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial R} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial U} V + \frac{\partial T^*}{\partial V} U = Q_R^*, \\
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\alpha}_s} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \alpha_s} = Q_{\alpha_s}^*, \\
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\gamma}_s} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \gamma_s} = Q_{\gamma_s}^*.
 \end{aligned}$$

Prawe strony równań ruchu obiektu stanowią siły uogólnione Q_i^* . Siły uogólnione pochodzą od sił aerodynamicznych i masowych (grawitacyjnych) [5, 6, 10, 13, 16, 17, 18, 19, 23].

Siły i momenty aerodynamiczne pomierzone w układzie prędkościowym $O x_a y_a z_a$ transformowane są do układu związanego $O x y z$ i mają następującą postać:

siły od zasobnika

$$\begin{aligned}
 (4) \quad X_B &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 [-C_{x_B}(\alpha, \gamma) \cos \alpha \cos \gamma + C_{y_B}(\gamma) \sin \gamma \cos \alpha + C_{z_B}(\alpha) \sin \alpha], \\
 Y_B &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 [-C_{x_B}(\alpha, \gamma) \sin \gamma - C_{y_B}(\gamma) \cos \gamma], \\
 Z_B &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 [-C_{x_B}(\alpha, \gamma) \cos \gamma \sin \alpha + C_{y_B}(\gamma) \sin \gamma \sin \alpha - C_{z_B}(\alpha) \cos \alpha],
 \end{aligned}$$

siły od hamulca aerodynamicznego

$$\begin{aligned}
 (5) \quad X_H &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 [-C_{x_H}(\alpha_v, \gamma_v) \cos \alpha \cos \gamma + C_{y_H}(\gamma_v) \sin \gamma \cos \alpha + C_{z_H}(\alpha_v) \sin \alpha], \\
 Y_H &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 [-C_{x_H}(\alpha_v, \gamma_v) \sin \gamma - C_{y_H}(\gamma_v) \cos \gamma], \\
 Z_H &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 [-C_{x_H}(\alpha_v, \gamma_v) \cos \gamma \sin \alpha + C_{y_H}(\gamma_v) \sin \gamma \sin \alpha - C_{z_H}(\alpha_v) \cos \alpha],
 \end{aligned}$$

momenty od zasobnika

$$\begin{aligned}
 (6) \quad M_B &= \frac{1}{2} \rho S L_H V_c^2 C_{m_B}(\alpha) \cos \gamma, \\
 N_B &= \frac{1}{2} \rho S L_H V_c^2 [-C_{m_B}(\alpha) \sin \gamma \sin \alpha + C_{n_B}(\gamma_v) \cos \alpha],
 \end{aligned}$$

momenty od hamulca aero

$$\begin{aligned}
 (7) \quad M_H &= \frac{1}{2} \rho S L_H V_c^2 C_{m_H}(\alpha_v) \cos \gamma, \\
 N_H &= \frac{1}{2} \rho S L_H V_c^2 [-C_{m_H}(\alpha_v) \sin \gamma \sin \alpha + C_{n_H}(\gamma_v) \cos \alpha].
 \end{aligned}$$

Momenty powstałe na skutek oddziaływania hamulca aero na zasobnik:

$$(8) \quad \begin{aligned} M_{HB} &= (Z_H + Z_B)l_s, \\ N_{HB} &= -(Y_H + Y_B)l_s. \end{aligned}$$

Momenty powstałe na skutek oddziaływania zasobnika na hamulce aero:

$$(9) \quad \begin{aligned} M_{BH} &= -(Z_B + Z_H)l_H + (X_H - X_B)l_H \sin \alpha_s, \\ N_{BH} &= (Y_B + Y_H)l_H - (X_H - X_B)l_H \sin \gamma_s, \end{aligned}$$

przy czym

$$\alpha_V = \alpha + \alpha_s,$$

$$\gamma_V = \gamma + \gamma_s.$$

Pochodne aerodynamiczne zasobnika lotniczego wyznaczono z następujących zależności:

$$(10) \quad \begin{aligned} X_Q &= \frac{1}{2} \rho \frac{S}{S_b} \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_{x_B}}{\partial \alpha} \int_{x_2}^{x_1} C_B(x) x dx, \\ X_R &= \frac{1}{2} \rho \frac{S}{S_b} \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_{x_B}}{\partial \gamma} \int_{x_2}^{x_1} C_B(x) x dx, \\ Y_R &= -\frac{1}{2} \rho \frac{S}{S_b} \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_{y_B}}{\partial \gamma} \int_{x_2}^{x_1} C_B(x) x dx, \\ Z_Q &= \frac{1}{2} \rho \frac{S}{S_b} \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_{z_B}}{\partial \alpha} \int_{x_2}^{x_1} C_B(x) x dx, \\ M_Q &= -\frac{1}{2} \rho \frac{S}{S_b} L_H \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_{m_B}}{\partial \alpha} \int_{x_2}^{x_1} C_B(x) x dx, \\ N_R &= \frac{1}{2} \rho \frac{S}{S_b} L_H \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_{n_B}}{\partial \gamma} \int_{x_2}^{x_1} C_B(x) x dx. \end{aligned}$$

Pochodne aerodynamiczne (X_{QH} , X_{RH} , Y_{RH} , Z_{QH} , M_{QH} , N_{RH}) hamulca aerodynamicznego wyznaczono z podobnych zależności [5, 6, 16, 18, 23].

Po wyznaczeniu pochodnych energii kinetycznej całego obiektu, tj. zasobnika lotniczego i hamulca aero i sił uogólnionych, stanowiących prawe strony równań, równania ruchu dla przyjętego modelu przedstawiają się następująco:

— równanie sił na kierunku Ox

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{U}m_c + \dot{Q}S_{x_2} - \dot{R}S_{y_2} + \ddot{\alpha}_s S_{l_H} \sin \alpha_s \cos \gamma_s + \ddot{\gamma}_s S_{l_H} \cos \alpha_s \sin \gamma_s = \\ = -WQm_c + VRm_c + \dot{\gamma}_c R S_{l_H} \cos \gamma_s - \dot{\alpha}_s Q S_{l_H} \cos \alpha_s + \\ + 2\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s S_{l_H} \sin \alpha_s \sin \gamma_s - (\ddot{\alpha}_s^2 + \ddot{\gamma}_s^2) S_{l_H} \cos \alpha_s \cos \gamma_s + \\ + R^2 S_{x_2} + (Q + \dot{\alpha}_s) X_{qH} + (R + \dot{\gamma}_s) X_{rH} + QX_q + RX_r - m_c g \sin \Theta + X_H + X_B, \end{aligned}$$

równanie sił na kierunku $O y$

$$(12) \quad \dot{V}m_c + \dot{R}S_{x_2} + \ddot{\gamma}_s S_{I_H} \cos \gamma_s = -URm_c - QRS_{z_2} + \\ + R^2 S_{y_2} - \dot{\alpha}_s R S_{I_H} \sin \alpha_s \cos \gamma_s - \dot{\gamma}_s R S_{I_H} \cos \alpha_s \sin \gamma_s + \\ + \dot{\gamma}_s^2 S_{I_H} \sin \gamma_s + (R + \dot{\gamma}_s) Y_{r_H} + RY_r + Y_B + Y_H,$$

równanie sił na kierunku $O z$

$$(13) \quad \dot{W}m_c - \dot{Q}S_{x_2} + \ddot{\alpha}_s S_{I_H} \cos \alpha_s = UQm_c - QRS_{y_2} + \dot{\alpha}_s Q S_{I_H} \sin \alpha_s \cos \gamma_s + \\ + \dot{\gamma}_s Q S_{I_H} \cos \alpha_s \sin \gamma_s + \dot{\alpha}_s^2 S_{I_H} \sin \alpha_s + Q^2 S_{z_2} + (Q + \dot{\alpha}_s) Z_{q_H} + QZ_q + m_c g \cos \Theta + Z_B + Z_H,$$

równanie momentów pochylających zasobnika

$$(14) \quad \dot{U}S_{z_2} - \dot{W}S_{x_2} + \dot{Q}(I_{y_1} + I_{y_2}) - \dot{R}I_{y_2} + \ddot{\alpha}_s (I_{I_H z} \sin \alpha_s \cos \gamma_s + I_{I_H} \cos \alpha_s) + \\ + \ddot{\gamma}_s I_{I_H z} \cos \alpha_s \sin \gamma_s = -(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) I_{I_H z} \cos \alpha_s \cos \gamma_s + 2\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s I_{I_H z} \sin \alpha_s \sin \gamma_s - \\ - \dot{\alpha}_s^2 I_{I_H x} \sin \alpha_s - QWS_{z_2} + RWS_{y_2} + QUS_{x_2} + U\dot{\alpha}_s^2 S_{I_H} \cos \alpha_s - W\dot{\alpha}_s S_{I_H} \sin \alpha_s \cos \gamma_s + \\ - W\dot{\gamma}_s S_{I_H} \cos \alpha_s \sin \gamma_s + QM_q + M_B + M_{HB} + gS_{I_H} \cos \alpha_s \cos \Theta,$$

równanie momentów odchylających zasobnika

$$(15) \quad -\dot{U}S_{y_2} + \dot{V}S_{x_2} - \dot{Q}I_{y_2} + \dot{R}(I_{z_1} + I_{z_2}) - \ddot{\alpha}_s I_{I_H y} \sin \alpha_s \cos \gamma_s + \\ + \ddot{\gamma}_s (I_{I_H x} \cos \gamma_s - I_{I_H y} \cos \alpha_s \sin \gamma_s) = (\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) I_{I_H y} \cos \alpha_s \cos \gamma_s + \\ - 2\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s I_{I_H y} \sin \alpha_s \sin \gamma_s + \dot{\gamma}_s^2 I_{I_H x} \sin \gamma_s + QVS_{z_2} - RVS_{y_2} - RUS_{x_2} + \\ - U\dot{\gamma}_s S_{I_H} \cos \gamma_s + V\dot{\alpha}_s S_{I_H} \sin \alpha_s \cos \gamma_s + V\dot{\gamma}_s S_{I_H} \cos \alpha_s \sin \gamma_s + RN_r + N_B + N_{HB},$$

równanie momentów pochylających hamulca aero

$$(16) \quad \dot{U}S_{I_H} \sin \alpha_s \cos \gamma_s + \dot{W}S_{I_H} \cos \gamma_s + \dot{Q}(I_{I_H z} \sin \alpha_s \cos \gamma_s - I_{I_H} \cos \alpha_s) + \\ - \dot{R}I_{I_H y} \sin \alpha_s \cos \gamma_s + \ddot{\alpha}_s I_{I_H} (\sin^2 \alpha_s \cos^2 \gamma_s + \cos^2 \gamma_s) + \ddot{\gamma}_s \frac{I_{I_H}}{4} \sin 2\alpha_s \sin 2\gamma_s = \\ = \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s I_{I_H} \sin^2 \alpha_s \sin 2\gamma_s - \dot{\alpha}_s^2 I_{I_H} \left(\sin 2\alpha_s \cos^2 \gamma_s - \sin 2\alpha_s + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sin 2\dot{\alpha}_s \cos^2 \gamma_s \right) - \dot{\gamma}_s^2 I_{I_H} \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha_s \cos 2\gamma_s - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_s \sin^2 \gamma_s \right) + \\ + (Q + \dot{\alpha}_s) M_{q_H} + M_H + M_{BH} - gS_{I_H} (\Theta \sin \alpha_s \cos \Theta + \alpha_s \cos \alpha_s \cos \Theta),$$

równanie momentów odchylających hamulca aero

$$(17) \quad \dot{U}S_{I_H} \cos \alpha_s \sin \gamma_s + \dot{V}S_{I_H} \cos \gamma_s + \dot{Q}I_{I_H z} \cos \alpha_s \sin \gamma_s + \\ + \dot{R}(I_{I_H x} \cos \gamma_s - I_{I_H y} \cos \alpha_s \sin \gamma_s) + \ddot{\alpha}_s I_{I_H} \frac{1}{4} \sin 2\alpha_s \sin 2\gamma_s + \\ + \ddot{\gamma}_s I_{I_H} (\cos^2 \alpha_s \sin^2 \gamma_s + \cos^2 \gamma_s) = \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s I_{I_H} \sin 2\alpha_s \sin^2 \gamma_s - \frac{1}{2} \dot{\alpha}_s^2 (\cos 2\alpha_s \sin 2\gamma_s) + \\ + \sin 2\gamma_s \sin^2 \alpha_s) I_{I_H} + \dot{\gamma}_s^2 (\sin 2\gamma_s + \sin 2\gamma_s \cos^2 \alpha_s) I_{I_H} + (R + \dot{\gamma}_s) N_{r_H} + N_H + N_{BH}.$$

Celem uzyskania pełnego układu równań uzupełniono powyższy układ następującymi równaniami.

Związki między prędkościami uogólnionymi $\dot{\Theta}$, $\dot{\Psi}$ a prędkościami kątowymi \dot{Q} , \dot{R} :

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{\Theta} &= Q, \\ \dot{\Psi} &= \frac{R}{\cos \Theta}, \end{aligned}$$

Związki kinematyczne

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= U \cos \Theta \cos \Psi - V \sin \Psi + W \sin \Theta \cos \Psi, \\ \frac{dy_1}{dt} &= U \cos \Theta \sin \Psi + V \cos \Psi + W \sin \Theta \sin \Psi, \\ \frac{dz_1}{dt} &= -U \sin \Theta + W \cos \Theta. \end{aligned}$$

Kąt natarcia i ślizgu

$$(20) \quad \begin{aligned} \alpha &= \arcsin \frac{W}{\sqrt{U^2 + W^2}}, \\ \gamma &= \arcsin \frac{V}{V_c}. \end{aligned}$$

Prędkość całkowita

$$(21) \quad V_c = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}.$$

3. Przykład liczbowy i wnioski

Rozwiązanie równań (11÷21) wykonano na maszynie cyfrowej ODRA, wykorzystując zmodyfikowaną metodę Mersona [12]. Rozpatrzono przypadek zrzutu układu z wysokości $z_1 = 150$ m z początkową prędkością $V_c = 125; 175; 225$ i 275 m/s. Wymienione wartości początkowe pozwalają na przeprowadzenie analizy parametrów torów lotu dla najważniejszych przypadków.

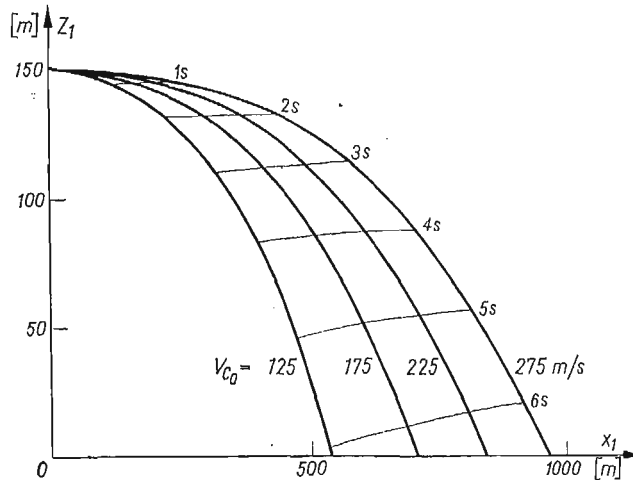
Charakterystyczne wyniki analizy numerycznej badanego modelu przedstawiono na rysunkach 2 - 16 w formie wykresów.

Z analizy uzyskanych rezultatów obliczeń numerycznych wynika, że profil toru lotu zasobnika (rys. 2) w istotny sposób zależy od parametrów lotu nosiciela oraz efektywności hamowania hamulca aerodynamicznego.

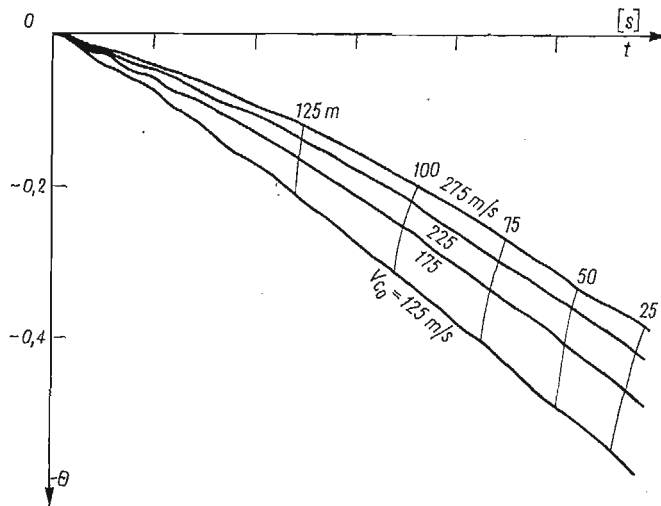
Zwiększenie prędkości zrzutu obiektu V_{co} powoduje:

- zwiększenie zasięgu (x_1), ale jego przyrost jest coraz mniejszy (rys. 2),
- zmniejszenie kąta upadku (pochylenia toru) Θ_k (rys. 3),
- większe wyhamowanie prędkości całkowitej (rys. 4).

Obiekty zrzucane z różną prędkością V_{co} w innych odstępach czasu osiągają podłoże (rys. 2).



Rys. 2. Tory lotu zasobnika z hamulcem aero dla różnych prędkości zrzutu

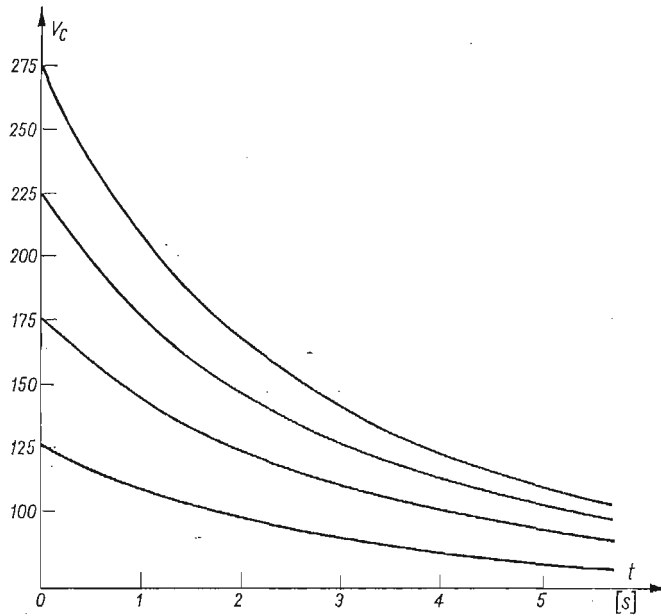
Rys. 3. Zmiany kąta pochylenia obiektu θ dla różnych prędkości zrzutu.

Zasobnik i hamulce aero w czasie lotu wykonują ruch obrotowy (rys. 15 i 16), którego charakter w dużym stopniu uzależniony jest od prędkości zrzutu.

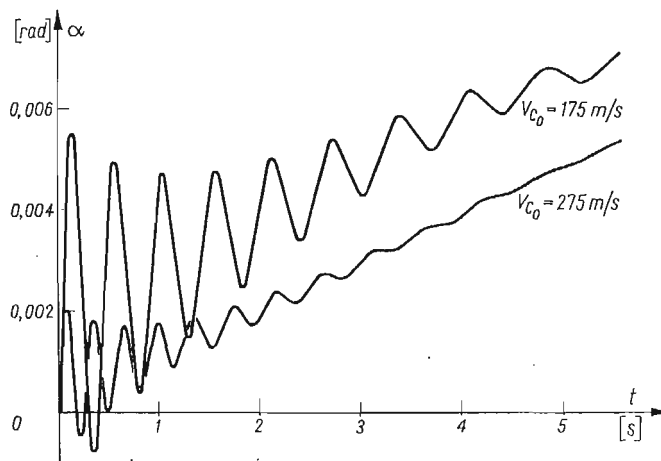
W czasie lotu zasobnika z „wolno puszczonego” hamulcem aero zauważa się silne tłumienie wahań kątów natarcia α i ślizgu γ (rys. 5 i 10) oraz kątów α_s i γ_s (rys. 6 i 11).

Charakter zmian prędkości poprzecznej W (rys. 8) i bocznej V (rys. 13) jest bardzo podobny do zmian kąta natarcia α (rys. 5) i ślizgu γ (rys. 10), ponieważ te wielkości są ściśle zależne od siebie.

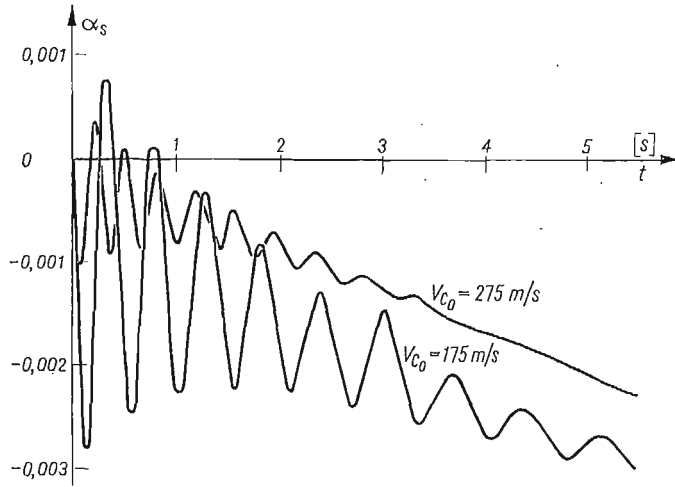
Na rys. 9 i 14 przedstawiono zmianę prędkości kątowej pochylenia Q i odchylenia R w czasie lotu zasobnika. Oscylacja $R = R(t)$ zanikają po czasie około $1,5 \div 2$ s, natomiast



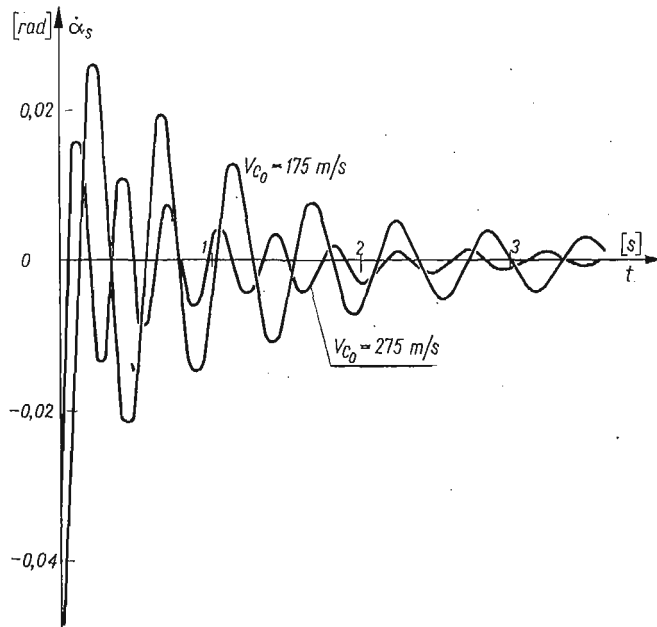
Rys. 4. Zmiany prędkości całkowitej V_c zasobnika dla różnych prędkości zrzutu V_0 .



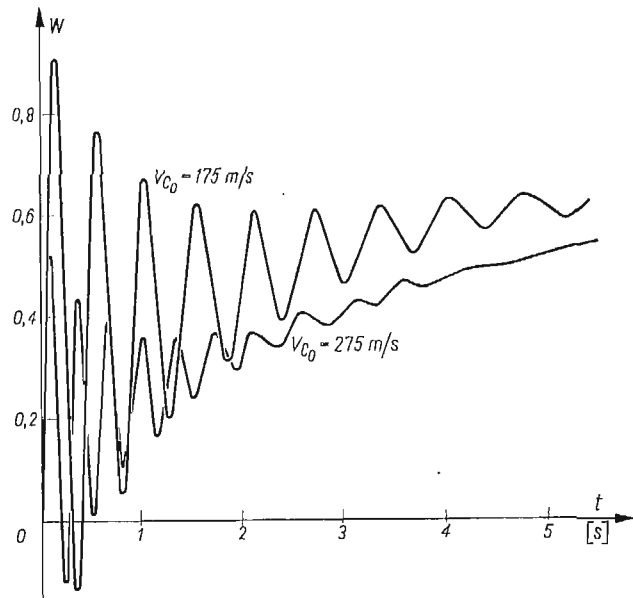
Rys. 5. Zmiany kąta natarcia α zasobnika



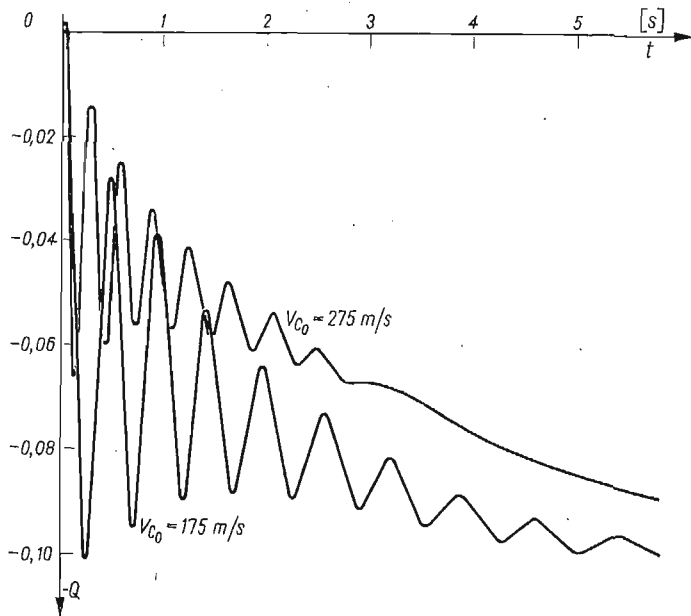
Rys. 6. Zmiany kąta pochylenia hamulca aero α_s względem zasobnika



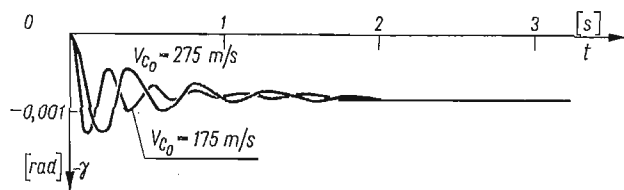
Rys. 7. Oscylacje prędkości kątowej pochylenia hamulca aero $\dot{\alpha}_s$.



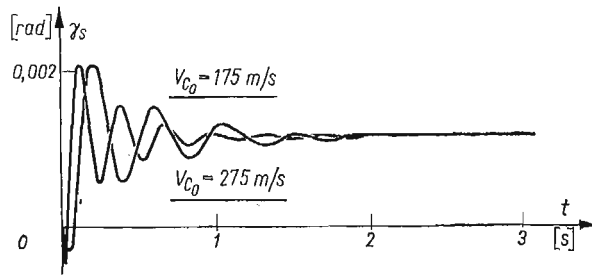
Rys. 8. Oscylacja prędkości poprzecznej W zasobnika



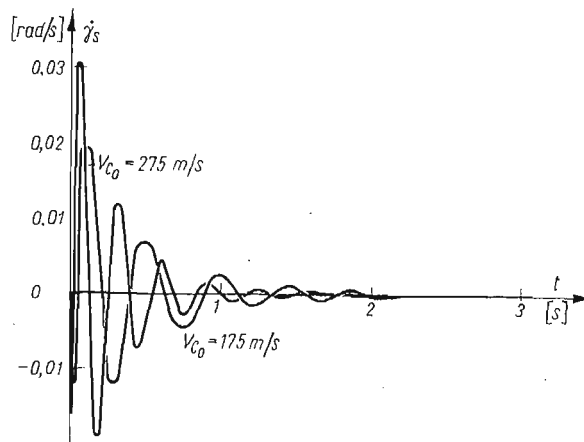
Rys. 9. Oscylacja prędkości kątowej pochylecia Q zasobnika



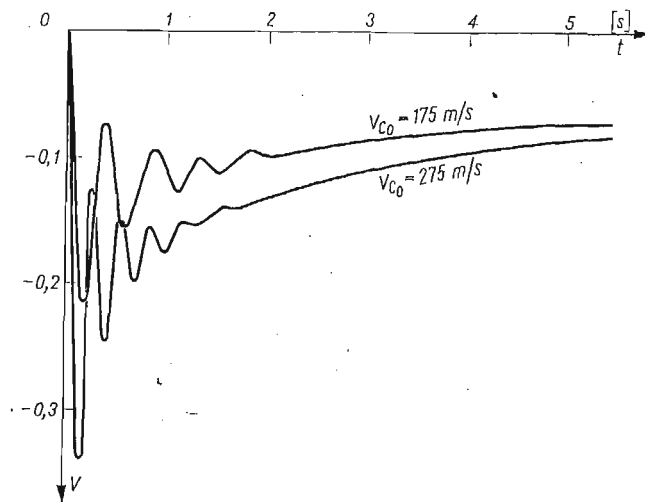
Rys. 10. Zmiany kąta ślizgu γ zasobnika



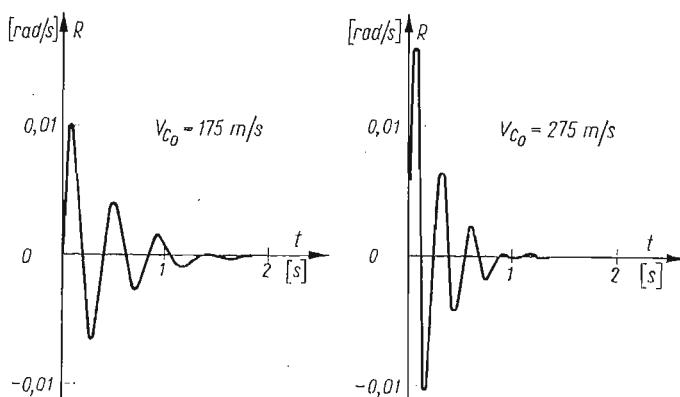
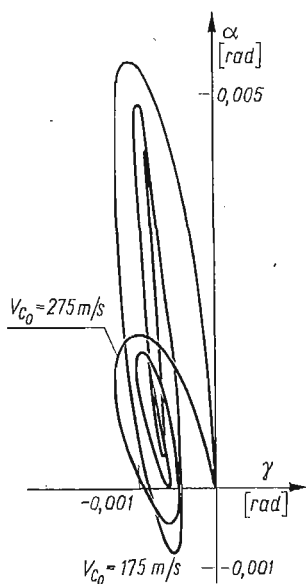
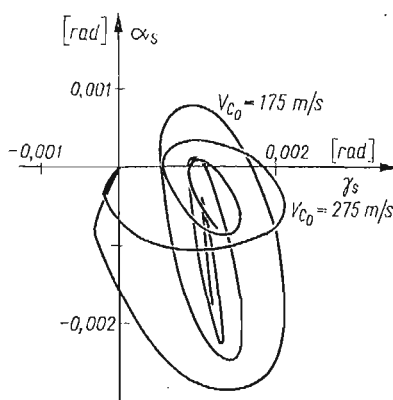
Rys. 11. Zmiany kąta odchylenia hamulca aero γ_s względem zasobnika



Rys. 12. Oscylacja prędkości kątowej odchylenia hamulca aero $\dot{\gamma}_s$.



Rys. 13. Oscylacje prędkości bocznej V zasobnika

Rys. 14. Oscylacja prędkości kątowej odchylenia R zasobnikaRys. 15. Przebieg zmian kąta natarcia α w funkcji kąta ślizgu γ zasobnikaRys. 16. Przebieg zmian kąta pochylenia α_s w funkcji kąta odchylenia γ_s hamulca aero

$Q = Q(t)$ trwają o wiele dłużej i ich średnia wartość stale rośnie. Spowodowane to jest działaniem w płaszczyźnie rzutu siły ciężkości.

Prędkości kątowe pochylenia $\dot{\alpha}_s$ i odchylenia $\dot{\gamma}_s$ hamulca aero względem zasobnika pokazano na rys. 7 i 12. Średnie ich wartości oscylują w pobliżu zera. Prędkość kątowa $\dot{\gamma}_s$ po czasie około 2 s zostaje całkowicie wytłumiona.

Hamulec aerodynamiczny wykorzystywany do wyhamowania prędkości ruchu obiektu charakteryzuje się cechami, które szczególnie predystynują go do zastosowania w proponowanym układzie, a mianowicie:

prędkość końcowa w małym stopniu zależy od prędkości zrzutu (rys. 4),

mimo gwałtownego spadku prędkości V_c zasobnik wraz z hamulcem dobrze stabilizują się.

4. Uwagi końcowe

Rezultaty analizy dynamiki lotu zasobnika lotniczego z połączonym przegubowo hamulcem aerodynamicznym, przedstawione w niniejszej pracy wskazują, że istniejące sprzężenie między parametrami ruchów symetrycznych i antysymetrycznych ma istotny wpływ na dynamikę układu.

Powyższa analiza pozwoliła ustalić podstawowe charakterystyki i zależności w przypadku zrzutu takich układów z samolotu.

Ważniejsze oznaczenia

- $I_{y_1}, I_{z_1}, I_{y_2}, I_{z_2}$ — osiowe momenty bezwładności zasobnika i hamulca aero,
 $I_{I_H}, I_{I_{H_x}}, I_{I_{H_y}}, I_{I_{H_z}}, I_{x_{y_2}}, I_{y_{z_2}}, I_{z_{x_2}}$ — momenty dewiacyjne hamulca aero,
 m_c — masa całkowita zasobnika i hamulca,
 M_B, M_H, N_B, N_H — aerodynamiczne momenty pochylające i odchylające zasobnika i hamulca,
 $M_Q, M_{Q_H}, N_R, N_{R_H}$ — pochodne aerodynamiczne momentu pochylającego i odchylającego względem zmian prędkości kątowych zasobnika i hamulca,
 Q — prędkość kątowa pochylania zasobnika,
 R — prędkość kątowa odchylania zasobnika,
 $S_{I_H}, S_{x_2}, S_{y_2}, S_{z_2}$ — momenty statyczne hamulca,
 U, V, W — prędkość środka masy zasobnika w układzie sztywno związanym z zasobnikiem,
 X_B, X_H — opór zasobnika i hamulca,
 $X_Q, X_{Q_H}, X_R, X_{R_H}$ — pochodne aerodynamiczne oporu względem prędkości kątowych zasobnika i hamulca,
 Y_B, Y_H, Z_B, Z_H — aerodynamiczne siły boczne i nośne zasobnika i hamulca,
 $Y_R, Y_{R_H}, Z_Q, Z_{Q_H}$ — pochodne aerodynamiczne siły bocznej i nośnej zasobnika i hamulca względem zmian prędkości kątowych Q i R ,
 α — kąt natarcia zasobnika,
 α_s — kąt wychylenia hamulca względem zasobnika,
 γ — kąt ślizgu zasobnika,
 γ_s — kąt odchylenia hamulca względem zasobnika.

Literatura cytowana w tekście

1. W. ALBRING, *Angewandte Stromungslehre*, Dresden und Leipzig 1961.
2. Z. DŻYGADŁO, A. KRZYŻANOWSKI, E. PIOTROWSKI, *Dynamika lotu osiowosymetrycznego ciała ze sztywnym urządzeniem hamującym*, Biuletyn WAT, 257, Warszawa 1974.
3. R. H. CANON jr. *Dynamika układów fizycznych*, WNT, Warszawa 1973.
4. S. DUBIEL, *Więzy uogólnione i ich zastosowanie do badania sterowalności obiektów latających*, Dodatek do Biuletynu WAT, 256, Warszawa 1973.
5. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York 1972.
6. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, cz. I i II, PWN, Łódź—Warszawa 1961.
7. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
8. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
9. R. GUTOWSKI, *Podstawy mechaniki analitycznej*, Materiały pomocnicze do wykładów, Politechnika Warszawska, Warszawa 1976.

10. S. F. HOERNER, *Aerodynamics Drag*, Ohio 1951.
11. J. KLIMKOWSKI, W. ŁUCJANEK, *Teoretyczna analiza bocznej stateczności dynamicznej miękkołata*, Archiwum Budowy Maszyn, Zeszyt 1, Warszawa 1977.
12. A. KRUTKOW, A. KRUTKOW, *Dynamika lotu zasobnika lotniczego zrzuconego z samolotu*, Program KAMI, ITWL, Warszawa 1978.
13. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe — Mechanika Nr 32, Politechnika Warszawska, Warszawa 1975.
14. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, *Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu i oscylacje steru*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Zeszyt 2, PWN, Warszawa 1975.
15. J. MARYNIAK, M. ZŁOCKA, *Stateczność boczna samolotu i drgania lotek z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydeł i sprężystości układu sterowania*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Zeszyt 1, PWN, Warszawa 1975.
16. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, F. MISIAK, Z. WINCZURA, *Obliczenia teoretyczne własności dynamicznych bomb lotniczych*, Informator ITWL, Nr 49, Warszawa 1975.
17. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, J. OSTROWSKI, Z. WINCZURA, *Zagadnienia aerodynamiki bomb lotniczych w zakresie prędkości poddźwiękowych*, Informator ITWL, Nr 52, Warszawa 1977.
18. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, *Wpływ spadochronu na ruch zasobnika osiowosymetrycznego zrzuconego z samolotu*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Zeszyt 1, Warszawa 1978.
19. J. N. NIELSEN, *Missile Aerodynamics*, New York, Toronto, London 1960.
20. T. ZAWADZKI, *Balistyka zewnętrzna raket*, cz. II, WAT, Warszawa 1976.
21. S. ЗИЕМВА, *Analiza drgań*, tom I i II, PWN, Warszawa 1957.

Резюме

ДИНАМИКА ПОЛЁТА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА „СО СВОБОДНО
ОТПУЩЕННЫМ” АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ ТОРМОЗОМ БРОШЕННОГО
ИЗ САМОЛЁТА

Принимается, что объект является механической неподвижной системой с подвижным (высунанным) аэротормозом. Уравнения движения выведены в квази-координатах, используя уравнение Больцмана-Гамела для механических систем с голономными связями в системе координат связанных с объектом.

Summary

DYNAMICS OF FLIGHT OF AN EXTERNAL PACK WITH AN AIRBRAKE
„SET FREE” THROWN OUT OF AN AIRPLANE

The object has been treated as an invariable material system with a movable (deflected) airbrake. The equations of motion have been derived in terms of quasi co-ordinates, using the Boltzmann-Hamel equations for the material systems with holonomic constraints in the system of co-ordinates related to the pack.

INSTYTUT TECHNICZNY WOJSK LOTNICZYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 sierpnia 1978 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w pierwszym półroczu 1978 r.

I. DZIAŁALNOŚĆ NAUKOWA

A. Zebrania naukowe

Tematyka referatów wygłoszonych podczas zebrań była następująca:

L.p.	Data	Prelegent	Temat	liczba uczestników
Oddział w Bydgoszczy (brak danych)				
Oddział w Częstochowie				
1.	5.01.78	Prof. dr hab. A. Gierek	Perspektywy rozwoju inżynierii tworzyw metalicznych	63
2.	26.01.78	Doc. dr E. Walicki	Mechanika płynów polarnych	18
3.	23.02.78	Prof. dr hab. Roman Gutowski	Zagadnienie stateczności ruchu ośrodków ciągłych na przykładzie struny i belki	37
4.	23.03.78	Dr Jerzy Wąsowski	Badanie ugięć płyt metodą Mory	
5.	23.03.78	Dr Jacek Kapkowski	Analiza sprężysto-plastyczna jarzma sworzniowego	
6.	23.03.78	Dr Ryszard Wojnar	Wyznaczenie dewiatora naprężeń na podstawie obrazu izochrom	
7.	27.04.78	Doc. dr hab. Andrzej Zieliński	Kryteria zniszczenia stosowane w zagadnieniach fundamentowania	40
8.	26.05.78	Dr inż. W. Kühn	Eksperymentalne badania zależności między strukturą turbulencji, a dyfuzją ciepła	14
9.	6.06.78	Mgr inż. Józef Pękała	Warunki realizacji budowy wielkich elektrowni cieplnych	40
Oddział w Gdańsku				
10.	13.01.78	Mgr inż. Bożena Budzarska	Jedno i dwuwymiarowe zagadnienia statystycznie niejednorodnego ośrodka lekkosprężystego	16
11.	14.03.78	Dr Aleksander Waberski	Zastosowanie R-funkcji w metodzie elementów skończonych	14
Oddział w Gliwicach				
12.	20.03.78	Doc. dr W. Tarnawski	Uogólniony model wyboru w projektowaniu	11

L.p.	Data	Prelegent	Temat	liczba uczestników
13.	1.03.78	Dr M. Węgrzyn	Wpływ wstępnego sprężenia na częstość drgań własnych belki betonowej	18
14.	6.06.78	Doc. dr W. Tarnawski	Kryteria stawiane pracom naukowym o charakterze konstrukcyjnym	18
15.	13.06.78	Doc. dr M. Mieczynski	O podstawach termodynamiki w ujęciu aksjomatycznym	19
Oddział w Krakowie				
16.	20.01.78	Prof. dr Z. Waszczyszyn, Dr W. Przybyło, Dr M. Radwańska, Mgr E. Pabisek	Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania układów płytowo-żebrowych	27
17.	24.03.78	Prof. G.T.S. Done (Uniwersytet w Edynburgu)	Modyfikacja strukturalna układów	21
18.	15.05.78	Dr St. Czareński	O pewnych aspektach dynamicznych astronautyki	13
19.	19.06.78	Dr Walter Strasny (Bratysława)	Wpływ charakterystyk sprzęgła na układ silnik-mechanizm karbowy	24
Oddział w Łodzi				
20.	12.01.78	Dr P. Wiewiórski	Przechodzenie słabych fal uderzeniowych przez rozgałęzienie przewodów rurowych	
21.	12.01.78	Dr J. Bajkowski	Generowanie rezonansów pobocznych przez impulsy sił w nieliniowych układach drgających	
22.	6.04.78	Prof. Stephen H. Crandall	Fluid-Structure Interaction: A case History	
23.	6.04.78	Dr James M. Prentis	Technical Education in England at The University of Cambridge	
24.	18.05.78	Dr B. Michalak	Ciała z cienką wstwą na powierzchni brzegowej	
25.	22.06.78	Dr M. Jaroniek	Badanie elementów perforowanych z uwzględnieniem zastosowań do obliczeń płyt	
Oddział w Opolu				
26.	25.02.78	Doc. dr hab. Jan Kubik	Związki między termofuzją w ciele stałym, a teorią mieszanin	12
27.	4.03.78	Doc. dr. hab. Wojciech Pietraszkiewicz	Obroty skończone w nieliniowej teorii powłok	15
28.	6.03.78	Doc. dr hab. Wojciech Pietraszkiewicz	Współczesne problemy w teorii konstrukcji	11
29.	26.06.78	Mgr inż. J. Wyrwał	Metoda Rietza w zadaniach sprężonej termofuzji lekkosprężystej	9
Oddział w Poznaniu				
30.	24.04.78	Prof. dr E. Tuliscka	Równanie Navier'a Stokesa prądów i momentów prądów	8

L.p.	Data	Prelegent	Temat	liczba uczestników
Oddział w Szczecinie				
31.	12.01.78	Dr Zygmunt Meyer	Wpływ nierównomiernego rozkładu prędkości w otworze dopływowym na hydrauliczne warunki dopływu wody do ujęcia usytuowanego w zbiorniku na dużej głębokości	6
32.	30.06.78	Prof. dr Helmuth Phau (WSI w Wismarze)	Obliczenia drgań własnych płyt izotropowych ze zmienną sztywnością przy zastosowaniu metody pertrubacji	15
Oddział w Warszawie				
33.	5.06.78	Prof. dr hab. Z. Dźygadło	Problematyka wybranych zagadnień dynamiki lotu rozwijanych w Instytucie Techniki Lotniczej Wojskowej Akademii Technicznej	57
34.	„ „ „	Prof. dr hab. J Maryniak	Problematyka wybranych zagadnień dynamiki lotu rozwijanych w Instytucie Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej	
35.	5.06.78	Doc. dr hab. Stanisław Dubiel	Problematyka wybranych zagadnień dynamiki lotu obiektów sterowanych automatycznie rozwijanych na Wydziale Elektromechanicznym w WAT	
Oddział we Wrocławiu				
36.	14.01.78	Dr inż. St. Azarewicz	Dynamika rozruchu dużych przenośników taśmowych	8
37.	21.01.78	Dr inż. Romuald Będziński	Badanie naprężeń i odkształceń w części lędźwiowej kręgosłupa	10
38.	20.02.78	Dr Andrzej Wall		
		Prof. dr Marek Zakrzewski	O równaniu Duhamela Neumanna	20
39.	3.04.78	Prof. dr Stanisław Dmitruk	Problemy formułowania modeli	15
40.	2.06.78	Doc. dr Franciszek Romanow	Stateczność konstrukcji trójwarstwowej z rdzeniem odkształcalnym w kierunku poprzecznym	8
41.	10.06.78	Doc. dr W. Bojarski	Model optymalizacji rozwoju krajowego systemu paliwoenergetycznego	10
Oddział w Zielonej Górze				
Osiem zebrań (brak danych)				

II. Sympozja i konferencje naukowe

1. Oddział w Gdańsku

Udział w organizacji II konferencji n.t. „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowania”

2. Oddział w Gliwicach

W ramach XVIII Zjazdu Delegatów PTMTS zorganizowano Sesję Naukową w dniach 9—11 marca 1978 r. w Ustroniu.

3. Oddział w Poznaniu

Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej przy współudziale Instytutu Mechaniki Technicznej i Politechniki Poznańskiej zorganizował VIII Sympozjum n.t. „Drgania w układach fizycznych, które odbyło się w dniach 18—20 maja 1978 r. W Sympozjum uczestniczyło 116 pracowników wyższych uczelni i PAN. Obradowano w 3 sekcjach:

1. Modele ciągłe obiektów mechanicznych — wygłoszono 31 referatów
2. Modele dyskretne obiektów mechanicznych — „ 21 „
3. Drgania maszyn — „ 23 referaty

Ponadto wygłoszono 3 referaty plenarne:

1. Prof. dr hab. M. Dietrich — „Problemy stochastyczne w mechanice maszyn”
2. Prof. dr C. Cempel — „Wibroakustyczna diagnostyka maszyn”
3. Prof. dr Z. Wesołowski — „Fale w nieliniowym materiale sprężystym”

Łącznie wygłoszono 78 referatów. Drukiem wydano Zbiór streszczeń referatów. Następne sympozjum o tej samej nazwie planowane jest na wiosnę 1980 roku.

III. Seminaria

1. Oddział w Gdańsku

W pierwszym kwartale 1978 r. kontynuowano rozpoczęte w listopadzie 1977 roku Seminarium na temat „Nieliniowa Teoria Powłok”.

Prelegentem był Doc. dr hab. Wojciech Pietraszkiewicz. Brało w nim udział 18 członków PTMTS. Drugie seminarium odbyte w I kwartale 1978 r. dotyczyło „Linijowej teorii powłok”. Prowadzącym seminarium był Dr inż. Mirosław Skowronek. W seminarium uczestniczyło 12 członków. W II kwartale 1978 r. kontynuowano seminarium „Linijowa teoria Powłok” z prelegentem Doc. dr hab. Wojciechem Pietraszkiewiczem, w którym uczestniczyło 16 członków.

2. Oddział Warszawa

Wspólnie z Zakładem Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN, zorganizowano pierwsze seminarium z zakresu optycznych metod doświadczalnej analizy odkształceń i naprężeń, które odbyło się 14.06.1978 r. Wygłoszono na nim dwa referaty:

- 1) Dr inż. Jerzy Lictz, Dr Bogdan Michalski, Dr Ryszard Wojnar — n.t. „Elastooptyczne badania ośrodka plastycznego z otworem wałcowym, metodą kolejnych rozwiązań sprężystych”
- 2) Mgr inż. Ludomir Jankowski — n.t. „Rozkłady i koncentracje naprężeń w nitowanych węzłach ram pojazdów samochodowych z wykorzystaniem elastoplastycznej warstwy powierzchniowej i interferometrii holograficznej”

3. Oddział w Zielonej Górze

W ramach zebrań naukowych Oddział przeprowadził 2 seminaria z czego 3 zebrania dotyczyły seminarium z zakresu teorii optymalizacji, a 5 zebrań dotyczyło seminarium z zakresu teorii sprężystości.

IV. Kursy

1. Oddział w Częstochowie

W styczniu 1978 r. ukończono kurs rozpoczęty w poprzednim kwartale. Tematem kursu była „Analiza korelacyjno-spektralna w przepływach turbulentnych”, prowadził go Prof. dr hab. Janusz Elsner, a udział brało 16 uczestników

2. Oddział w Gliwicach

Kontynuowano kurs „Zastosowanie grafów w mechanice i technice”. Wykłady prowadzili: Dr J. Kaczmarek i Doc. dr J. Wojnarowski

V. Konkursy naukowe

1. Oddział w Gliwicach

Oddział w Gliwicach ogłosił konkurs na najlepszą pracę teoretyczną z mechaniki.

VI. Działalność wydawnicza

Wydano kronikę „Dwudziestolecie PTMTiS Oddział Gliwice”. Ponadto wydano materiały na XVIII Zjazd Delegatów PTMTS — „Sesja naukowa z okazji XX-lecia PTMTS. Streszczenia referatów”. W II kwartale wydano „Mechanika Teoretyczna i Stosowana w Politechnice Śląskiej”

VII. Działalność organizacyjna

W okresie II kwartału 1978 odbyły się następujące zebrania organizacyjne

- a) Zjazd Delegatów PTMTS
- b) 3 Plenarne zebranie Zarządu Głównego
- c) 1 zebranie Zarządu Głównego
- d) 1 zebranie Głównej Komisji Rewizyjnej
- e) 58 zebrań (w tym walne zebrania) w Oddziałach Towarzystwa.

VIII SYMPOZJUM DOŚWIADCZALNYCH BADAŃ W MECHANICE CIAŁA STAŁEGO

Odbyło się w dniach 4—6 września 1978 r. w Warszawie.

Głównym jego celem, podobnie jak w latach ubiegłych, było zaprezentowanie najważniejszych kierunków w badaniach doświadczalnych prowadzonych w kraju.

Udział w tym roku naukowców z kilkunastu rozwiniętych ośrodków badawczych za granicą, pozwolił ponadto na bezpośrednie porównanie osiągnięć krajowych i zagranicznych w tej dziedzinie. Sympozjum patronowali: Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej — Oddział Warszawski, Zespół Mechaniki Doświadczalnej Komitetu Mechaniki PAN oraz Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej.

Komitet Organizacyjny Sympozjum pracował w składzie: prof. dr Zbigniew Brzoska (przewodniczący), dr inż. Leon Adamiec (sekretarz), mgr inż. Jerzy Bojanowski (sekretarz), doc. dr hab. Przemysław Jastrzębski, dr inż. Jacek Kapkowski, prof. dr Stanisław Kocańda, doc. dr hab. Jacek Stupnicki, prof. dr Wojciech Szczepiński.

Uczestniczyło 180 osób w tej liczbie 16 gości zagranicznych. Wygłoszono 68 referatów omawiających badania prowadzone w kraju oraz 15 referatów prezentujących badania prowadzone w Belgii (1), Czechosłowacji (1), Francji (1), Kanadzie (1), NRD (3), RFN (2), Szwecji (1), na Węgrzech (1), w Wielkiej Brytanii (1) oraz w Związku Radzieckim (3).

Otwarcia obrad dokonał prof. Zbigniew Brzoska — przewodniczący Komitetu Organizacyjnego. Przemówienie powitalne wygłosił także prof. Marek Dietrich — przewodniczący Zarządu Głównego PTMTiS, zarazem dyrektor Inst. Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej P.W. Odczytano również list prof. Antoniego Sawczuka — przewodniczącego Komitetu Mechaniki PAN.

Obrazy toczyły się w dziewięciu sesjach. Oto w skrócie ich przebieg:

Sesja I. Metody Badań Doświadczalnych

Sesji przewodniczyli kolejno profesorowie M. Dietrich i S. Łukasiewicz. Wygłoszono następujące referaty: H. Aben (ZSRR) „Integrated photoelasticity”

- H. Fessler (Wielka Brytania) „Practical consideration in frozen — stress photoelasticity”.
- J. T. Pindera (Kanada) „Problem of reliability of common models of basic responses of materials and systems”.
- W. T. Treszczenko (ZSRR) „Deformacjonnyje i energetyczskije kriterii ustalostnogo razruszenija metalow”.
- J. Ebbeni (Belgia) „Coherent light uses in applied mechanics”.
- W dyskusji nad referatami zabralo głos 10 mówców.

Sesja II a. Metody Optyczne.

- Sesji przewodniczyli kolejno docenci J. Stupnicki i P. Jastrzębski. Wygłoszono następujące referaty:
- G. Wernicke (NRD) „Untersuchung von Nichtlinearen Schwingungen mit Hilfe der Holografischen Interferometrie”.
- W. Bachmacz, J. Pisarek (Częstochowa) „Model matematyczny hologramu Fresnela rejestrowanego i rekonstruowanego w układzie optycznym z rozbieżną wiązką odniesienia”.
- M. Lech, I. Mruk, J. Stupnicki (Warszawa) „Badanie kształtu mikronierówności powierzchni metodą interferometrii holograficznej”.
- A. Belzowski, M. Zakrzewski (Wrocław) „Badanie pochodnych funkcji ugięcia płyt zginanych z zastosowaniem metod interferometrii holograficznej”.
- J. Stupnicki, R. Wójcik (Warszawa) „O przydatności metody elastooptycznej warstwy powierzchniowej i metody interferometrii plamkowej do badań odkształceń wokół czoła pęknięcia”.
- W. Łoziński, B. Michalski (Warszawa) „Przykłady zastosowania metody elastooptycznej do badania zjawiska kruche go pęknięcia”.
- J. Komorowski, J. Stupnicki (Warszawa) „Źródła błędów w odczycie rzędu izochromy przy skośnym prześwietlaniu powierzchniowej warstwy optycznie czynnej”.
- R. Wojnar (Warszawa) „Badanie dużych odkształceń metodami optycznymi”.
- J. Kapkowski, J. Wąsowski (Warszawa) „Zastosowanie techniki mory w analogii błonowej”.
- P. Jastrzębski, S. Lutomirski, S. Wichniewicz (Warszawa) „Przykład badania rozwoju odkształceń w pasmach metalowych metodą mory”.
- W dyskusji uczestniczyło 27 osób.

Sesja II b. Zmęczenie i Pełzanie.

- Sesji przewodniczyli kolejno prof. S. Kocańda oraz doc. J. Hajduk. Wygłoszono następujące referaty:
- M. Anisimowicz, A. Jakowluk (Białystok) „Wpływ cyklicznie zmiennego naprężenia normalnego na prędkość pełzania w płaskim stanie naprężenia”.
- N. Buba, R. Żuchowski (Wrocław) „Ocena trwałości próbki na podstawie kształtu pętli histerezy w układzie temperatura-odkształcenia”.
- J. Jeleńkowski, J. Wawrzczek (Płock) „Analiza wpływu czynnika strukturalnego na szybkość propagacji szczeliny zmęczeniowej w stali eutektoidalnej”.
- A. Jakowluk, W. Jermolaj (Białystok) „Badania wpływu kształtu rowka na zmienność współczynnika karbu przy ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej”.
- A. Krzyżewski (Warszawa) „Wytrzymałość zmęczeniowa złączy spawanych ze stali 14HNMBCu na tle znormalizowanej krzywej Wöhlera”.
- K. Dzieduszycki, S. Kubera, K. Lutowicz, A. Wołoszyn (Gdańsk) „Metoda badań zmęczeniowych złożonych węzłów okrętowych konstrukcji spawanych”.
- A. Cichociński, A. Skorupa, M. Skorupa (Kraków) „Teoretyczno-doświadczalna analiza wytrzymałości zmęczeniowej złączy ze spoinami pachwinowymi”.
- C. Goss, S. Kocańda (Warszawa) „Badania trwałości zmęczeniowej stali o podwyższonej wytrzymałości w zakresie małej liczby cykli”.

- M. Nowak, A. Wawrykowicz (Wrocław) „Wytrzymałość zmęczeniowa wybranych tworzyw sztucznych wzmocnionych szkłem”.
- T. Kilian (Wrocław) „Wpływ czynników geometrycznych i obróbki cieplnej na wytrzymałość zmęczeniową rur szeregu 4 z PCW.
- W dyskusji uczestniczyło 22 mówców.

Sesja III. Metody Badań Doświadczalnych.

Sesji przewodniczył prof. Z. Orłoś.

Wygłoszono następujące referaty:

- S. Kocańda, A. Likowski (Warszawa) „Badanie prędkości pękania w stali o podwyższonej wytrzymałości przy zmiennym zginaniu”.
- B. N. Uszakow (ZSRR) „Metod opredieleniya temperaturnykh napriazheniy w kompozitnykh konstruktsiyakh”.
- J. Naumann (NRD) „Messung Plastischer Deformationen mit Hilfe des Moire Verfahrens”.
- L. Jilken, J. Backlund (Szwecja) „Electromagnetic measurements in solid mechanics”.
- K. H. Laerman (RFN) „Experimental investigation of plates on a yielding subgrade considering friction in the interface”.

W dyskusji zabrało głos 21 osób.

Sesja IV a. Metody i Techniki Badań.

Sesji przewodniczyli kolejno docenci S. Mazurkiewicz W. Bachman R. Żuchowski i dr J. Lietz. Wygłoszono następujące referaty:

- J. Kapkowski, B. Kozłowska (Warszawa) „Komputeryzacja procesu analizy wyników otrzymanych metodami polaryzacyjno-optycznymi.
- J. Lietz, R. Wojnar, B. Michalski (Warszawa) „Elastoptyczne badanie ośrodka plastycznego z otworem walcowym metodą kolejnych rozwiązań sprężystych”.
- J. Szmelter, H. Zub (Warszawa) „Zastosowanie metody elementów skończonych i metody najmniejszych kwadratów do opracowania wyników badań elastoptycznych”.
- Z. Hendzel-Powierża, J. Choroś (Warszawa) „Próba zastosowania termowizji do badania strefy plastycznej na wierzchołku karbu”.
- S. Mazurkiewicz, L. Kuc (Kraków) „Zastosowanie metody światła rozproszonego do analizy naprężeń w szkłe hartowanym”.
- T. Brezcko (Białystok) „Przykłady zastosowania rentgenograficznych metod pomiaru naprężeń w ciałach polikrystalicznych”.
- Z. Gabryszewski, W. Śródka (Wrocław) „Wykorzystanie zjawiska sprzężenia między polem odkształcenia a polem temperatury w mechanice doświadczalnej”.
- Z. Orłoś, K. Tomaszewski (Warszawa) „Doświadczalna analiza naprężeń termosprężystych przy wykorzystaniu modeli z tworzyw epoksydowych”.
- S. Żukowski (Warszawa) „Metoda pomiaru naprężeń własnych”.
- W. Golygowski, J. Skrzynicki (Lublin) „Metodologia doświadczalnych badań w mechanice ośrodków glebowych”.
- J. Lewiński (Warszawa) „Ukośne zderzenie ciał sztywnych”.
- J. Wojnarowski, W. Kaliński (Gliwice) „Badanie pola naprężeń własnych w całowalcowanych kołach kolejowych”.
- W. Dobrucki, R. Gregorczyk (Kraków) „Badanie obciążeń dynamicznych w mechanizmach korbowo-dźwigniowych stołu wahadłowego”.
- W. Dobrucki, A. Świątoniowski (Kraków) „Badanie eksperymentalne zjawisk dynamicznych występujących w klatce walcowniczej”.

W dyskusji zabrało głos 21 osób.

Sesja IV b. Badania Własności Materiałów.

Sesji przewodniczyli kolejno: doc. A. Jakowluk oraz prof. S. Butnicki. Wygłoszono następujące referaty:
Z. Stradomski, W. Ziewiec (Częstochowa) „Całka Ricc'a jako kryterium oceny odporności stali na pękanie”.

A. Lubuska, E. Wieczorek (Gliwice) „Rozwój pęknięć w stalach niskowęglowych”.

S. Butnicki (Gdańsk) „Mechanika pęknięcia jako metoda badania materiałów”.

J. Ujma, S. Stachura (Częstochowa) „Zastosowanie metody pomiaru sprężystej podatności w badaniu kinetyki pęknięcia stali w ośrodku H_2S ”.

A. Jakowluk, S. Onopiuk (Białystok) „Badania nad ustaleniem kryterium zniszczenia w płaskim stanie naprężenia żeliwa szarogo ZL30”.

S. Joniak, M. Piwecki (Poznań) „Próba dynamicznego skręcania twardych stali”.

A. Litewka, E. Rogalska (Poznań) „Badanie plastyczności materiału perforowanego przy osiowym rozciąganiu”.

J. Kubissa (Płock) „Nośność graniczna belek ze stali wstępnie trwale wydłużonej”.

J. Grabowski (Warszawa) „Zjawisko Bauschingera w prętach metalowych poddanych znacznym wydłużeniom trwałym”.

F. Bieda (Warszawa) „Rozszerzone badania trwałości łożysk tocznych”.

W dyskusji uczestniczyło 12 osób.

Sesja V a. Badania Modelowe.

Sesji przewodniczyli kolejno: doc. W. Walczak oraz prof. J. Leyko. Wygłoszono następujące referaty:

R. Będziński (Wrocław) „Badanie rozkładów naprężeń w elastooptycznym modelu cięgna przy ciernym sprzężeniu z bębniem napędowym”.

B. Krasnowski, T. Bulanowski (Warszawa) „Badanie rozkładu obciążenia w złączu wielowypustowym metodą zamrażania naprężeń”.

J. Szlagowski (Warszawa) „Kształtowanie pewnego typu węzłów konstrukcji stalowych wg kryterium nośności granicznej”.

A. Barchan, H. Frąckiewicz, Z. Tereszowski (Kielce) „Próba teoretyczno-doświadczalnej analizy stanu naprężeń w elementach nitowych”.

H. Frąckiewicz, Z. Tereszowski, S. Trela (Kielce) „Badania stanów zgięciowych w złączach ram cienkościennych metodą rastrów”.

W. Bodaszewski, A. Cichopek, J. Mucha (Kielce) „Elastooptyczne badania zbrojonych lokalnie tarcz ukształtowanych metodą nośności granicznej”.

M. Jaroniek (Łódź) „Badanie elementów perforowanych oraz zastosowanie modelu makrostruktury do obliczeń płyt”.

L. Baran, J. Kwaśniewski, A. Walter (Gdańsk) „Ulepszona metoda obliczania odkształceń na podstawie pomiarów tensometrycznych na zaporze”.

K. Donten, M. Knauff, A. Sadowski, W. Scibak (Warszawa) „Badania dynamiczne modelu obudowy bezpieczeństwa reaktora jądowego”.

R. Świtka, R. Sygulski (Poznań) „Wpływ masy otaczającego powietrza na drgania membrany w świetle badań doświadczalnych”.

M. Gołbiewska-Rozanow (Częstochowa), L. Jamroz (Opole) „Modelowanie matematyczne rozkładu odkształceń i naprężeń w przekrojach zginanych belek żeliwnych w oparciu o asymetrię zależności $\sigma-\epsilon$ z prób prostego rozciągania i ściskania”.

K. Grudziński, W. Jaroszewicz, J. Lorkiewicz (Szczecin) „Badania fundamentowanych złączy z podkładką z tworzywa chemoutwardzalnego”.

A. Świder, W. Łakota, S. Tor (Rzeszów) „Pomiar momentów w układzie napędowym ładowarki kołowej”.

K. Grudziński, K. Konowski (Szczecin) „Badania podatności styków przewodnicowych obrabiarek”.

W dyskusji uczestniczyło 18 osób.

Sesja V b. Badania Własności Materiałów.

Sesji przewodniczył prof. S. Kocańda. Wygłoszono następujące referaty:

- E. Gelencsér (Węgry) „Bedeutung der Modellversuche bei der Lösung von Gesteinsmechanischen Problemen”.
- W. Szusćik, E. Zastawny (Gliwice) „Laboratoryjne badanie węgla kamiennego dla określenia obrazu przestrzeni naprężeń, w którym występują łapania”.
- J. Zawada (Warszawa) „Doświadczalna analiza ściskania bloku skalnego pomiędzy płytami”.
- C. Schleicher (NRD) „Der Einsatz eines Kleinrechners zur Steuerung und Auswertung von Messungen an Baukonstruktionen im on-line-Betrieb”.
- S. Misztal, W. Porębski (Zielona Góra) „Nieniszczące badania wytrzymałości betonu w istniejących konstrukcjach budowlanych”.
- I. Słowikowska, A. Kozłowski, K. Zalewska (Warszawa) „Epoksydowe kompozycje o zmniejszonej reaktywności do celów elastooptycznych”.
- A. Kozłowski, I. Słowikowska (Warszawa) „Nowe materiały epoksydowe typu estrów glicydowych do celów elastooptycznych”.
- M. Wolna (Warszawa) „Specjalne kruche materiały elastooptyczne na podstawie żywicy Epidian 2”.
- M. Kotelko, W. Walczak (Łódź) „Wpływ poprzecznego zbrojenia na stan naprężenia w tarczy prostokątnej, poddanej działaniu siły skupionej”.
- J. Kalwak, A. Kania, J. Zawadzki (Wrocław) „Wpływ geometrii i stopnia zbrojenia próbek pierścieniowych na wytrzymałość doraźną kompozytu epoksydowo-szklanego w normalnej i obniżonej temperaturze”.
- J. Kłepaczko, J. Garbarski (Warszawa) „Dynamiczne jednoosiowe rozciąganie wybranych tworzyw sztucznych”.

W dyskusji uczestniczyło 26 osób.

Sesja VI. Metody Badań Doświadczalnych.

Sesji przewodniczył prof. S. Łukasiewicz. Wygłoszono następujące referaty:

- J. Javornicky (CSRS) „Photoplastic methods, the state of art.”.
- A. Lagarde (Francja) „Point-by-point methods of three-dimensional photoelasticity utilizing the phenomenon of light scattering as a polarizer or an analyzer”.
- A. Kuske (RFN) „Items of photoelastic stress analysis at the Institut für Maschinenwesen der TU Clausthal”.
- Z. Brzoska, M. Bijak-Żochowski (Warszawa) „Badanie stanu naprężeń metodą penetratora”.

W dyskusji uczestniczyło 14 mówców.

Zamknięcia obrad dokonał prof. Z. Brzoska

Podsumowując krótko wyniki Sympozjum stwierdził iż obserwuje się znaczny rozwój badań doświadczalnych prowadzonych w Kraju. Rozwój ten przejawia się wzrostem ilościowym (np. wygłoszono niemal dwukrotnie więcej referatów w porównaniu z VII Sympozjum) jak i merytoryczną treścią prowadzonych badań. Nastąpił znaczny postęp w stosowanych metodach pomiarowych. Coraz wyraźniej rysuje się współpraca z zagranicą (po raz pierwszy pojawiła się na Sympozjum tak liczna grupa badaczy zagranicznych). Główne niedomagania, które zdaniem prof. Z. Brzoski ujawnił przebieg VIII Sympozjum to zbyt małe jeszcze zainteresowanie badaniami zjawisk dynamicznych a co także chyba charakterystyczne w naszym życiu naukowym wogóle, mało ofensywnie prowadzona dyskusja naukowa.

Na zakończenie prof. Z. Brzoska podziękował wszystkim uczestnikom za udział w Sympozjum oraz w imieniu własnym pozostałym członkom Komitetu Organizacyjnego za pracę przy jego organizacji.

Jerzy Bojanowski

MECHANIKA NIESPRĘŻYSTYCH OŚRODKÓW KONSTRUKCJI MIĘDZYNARODOWE SYMPOZJUM, WARSZAWA, 13—18 września 1978 r.

Jedną z form działalności Komitetu Mechaniki PAN, współodpowiedzialnego za rozwój mechaniki w Polsce, jest organizowanie międzynarodowych i dwustronnych kolokwium. Jako przykład mogą tu służyć już odbyte trzy sympozja polsko-francuskie, sympozja polsko-radzieckie oraz sympozja polsko-włoskie. Istniejące liczne kontakty naukowe pomiędzy ośrodkami badawczymi i akademickimi Polski oraz Republiki Federalnej Niemiec stworzyły podstawy i potrzebę spotkania się w jednym miejscu mechaników obu krajów w celu podzielenia się wynikami ukończonych badań.

Zorganizowanemu przez Komitet Mechaniki sympozjum na temat „Mechaniki Niesprężystych Ośrodków i Konstrukcji” patronowali prezes PAN Witold Nowacki oraz prezydent Deutsche Forschungsgemeinschaft Heinz Maier-Leibnitz.

W obradach wzięły udział 72 osoby: 21 z RFN (Bergische Universität-Gesamthochschule Wuppertal, Rheinische Westfälische Technische Universität Aachen, Ruhr Universität Bochum, Technische Universität Hannover, Technische Hochschule Darmstadt, Technische Universität Braunschweig, Universität Essen, Technische Universität München, Gesamthochschule Paderborn, Max-Planck-Institut für Eisenforschung Düsseldorf, Universität Karlsruhe, 46 z Polski (Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Politechnika Krakowska, Wojskowa Akademia Techniczna, Uniwersytet Warszawski, Politechnika Białostocka, Politechnika Świętokrzyska, Instytut Budownictwa Wodnego PAN Gdańsk, Instytut Badań Jądrowych Świerk, Politechnika Warszawska, ETOB Warszawa, 4 z Japonii (Uniwersytety w Nagoya i Kyoto) oraz 1 z Włoch (Politecnico de Milano).

Współprzewodniczącymi Sympozjum byli Antoni Sawczuk, przewodniczący Komitetu Mechaniki PAN i Oscar Mahrenholtz, Dyrektor Instytutu Mechaniki Uniwersytetu w Hannoverze, zaś sekretarzem Sympozjum — Witold Kosiński.

Otwierając Sympozjum Przewodniczący Komitetu Mechaniki PAN stwierdził, że obecne spotkanie koncentruje się na nieliniowych problemach mechaniki — dziedzinie o dużym zainteresowaniu badawczym i znaczeniu technologicznym oraz technicznym — przyczyni się do poszerzenia istniejących kontaktów naukowych i stworzenia warunków dla następnych projektów i studiów badawczych.

W swoim wystąpieniu do uczestników Sympozjum współprotector Sympozjum — Prezes PAN zwrócił uwagę na znaczną rolę jaką Komitet Mechaniki PAN odgrywa w organizacji i rozwoju badań w zakresie mechaniki w Polsce. Mówiąc o poparciu jakim PAN obdarza rozwój międzynarodowej współpracy naukowej, prezes PAN stwierdził, że polska nauka i kultura zawsze była otwarta na przepływ idei i wymianę twórczych doświadczeń. W naszym rozumieniu, powiedział Prezes W. Nowacki, Nauka jest wspólnym zadaniem służącym dla dobra człowieka i szczęścia ludzkości. Życząc uczestnikom owocnych obrad Prezes PAN wyraził nadzieję, że Sympozjum przyczyni się do pogłębienia wzajemnego zaufania i zrozumienia tak potrzebnych we współczesnym — pełnym napięć i konfliktów — świecie. Następnie został odczytany list współprotectora Sympozjum Prezydenta DFG H. Maiera-Leibniza skierowany na ręce prezesa PAN, w którym wyrażone zostało przekonanie o dużym znaczeniu obecnego spotkania w istniejących kontaktach między naukowcami obu krajów a także życzenie rozszerzenia tych kontaktów oraz ich przyszłej intensyfikacji.

W swoim wystąpieniu do uczestników współprzewodniczący Sympozjum O. Mahrenholtz wyraził zadowolenie z zorganizowania obecnego Sympozjum i nadzieję na następne spotkanie mechaników obu krajów w RFN.

Obrady były podzielone na siedem tematycznych sesji, w trakcie których wygłoszono 47 referatów w tym 5 generalnych. Pełne teksty większości wystąpień zostaną opublikowane w specjalnym wydawnictwie książkowym w 1979 r.

Problematyka poruszana w czasie Sympozjum dotyczyła: mechaniki niesprężystych deformacji, różnych opisów niestateczności, pęknięcia i zniszczenia, mechanicznej i termodynamicznej analizy skończonych deformacji sprężysto-plastycznych, nowych rezultatów doświadczalnych w mechanice ciał stałych, analizy modelowej w ramach podejść deterministycznego i statystycznego, analizy i dyskusji pewnych szczególnych problemów współczesnej technologii i techniki jak formowanie metali, walcowanie oraz rozwiązań ważnych zagadnień mechaniki konstrukcji z wykorzystaniem numerycznych technik obliczeniowych.

Pierwsza sesja (środa 13.IX) była poświęcona problemowi odkształcenia niesprężystego. Referat ge-

neralny wygłosił H. Lippmann (Monachium). Przedstawił w nim wyniki badań doświadczalnych i teoretycznych nad mechaniką urabiania węgla. Przedstawił kilka hipotez opisu zjawiska rozdrabniania skał wraz z ich weryfikacją metodą elastyczno-plastoopieczną. Wykład został zilustrowany filmem przedstawiającym badania doświadczalne.

Referat J. A. Königa (Warszawa) dotyczył analizy konstrukcji w procesie przystosowania. Analiza ta została uzupełniona przedstawieniem metod obliczeniowych i weryfikacji eksperymentalnej oraz prezentacją praktycznych zastosowań inżynierskich.

Kolejnym mówcą był H. Eggers (Unterhaching), który zajął się konstytutywnym opisem konstrukcji sprężysto-plastycznych oraz stosowanymi do nich technikami obliczeniowymi.

K. H. Laermann (Wuppertal) zajął się w swoim wystąpieniu numeryczną i doświadczalną analizą wpływu własności lepkich materiałów na problemy kontaktowe występujące w mechanice konstrukcji.

Z kolei M. Becker (Wuppertal) wygłaszając wspólny referat z W. Haugerem zajął uwagę słuchaczy pytaniem czy ośrodek ziarnisty jest plastycznym ośrodkiem typu Cosseratów. Przedstawiona przez niego odpowiedź na te pytania miała obie części składowe: doświadczalną i teoretyczną wraz z wynikami obliczeń.

Przedostatni referat w tej sesji wygłoszony przez P. Wildego (Gdańsk) dotyczył dyskusji związków konstytutywnych dla ośrodków ziarnistych w świetle przeprowadzonych badań doświadczalnych.

Kończąc tę sesję referat A. Dreschera i Z. Mroza (Warszawa) był poświęcony analizie tzw. pseudo-kontaktowego podejścia do opisu zlokalizowanych deformacji w ośrodku ziarnistym wykazującym niestateczności w swoim zachowaniu.

Popołudniowa sesja, poświęcona szczególnym problemom mechaniki ośrodków niesprężystych i ich rozważaniom zapoczątkował wspólny referat L. Gaula i O. Mahrenholta (Hannover). Przedstawiono w nim rozwiązania problemów brzegowych drgań elementów konstrukcji opartych na lepkosprężystej półprzestrzeni.

W następnym wystąpieniu M. Życzkowski (Kraków) zajął się przeglądem rozwiązań problemów optymalnego projektowania konstrukcji w warunkach pełzania a uzyskanych na Politechnice Krakowskiej.

Z kolei Cz. Woźniak (Warszawa) przedstawił matematyczną ideę opisu klasy przestrzennych problemów sprężysto-plastycznych ciał pryzmatycznych jako jednowymiarowych problemów brzegowych. Idea ta wykorzystywała rozwijaną przez referenta teorię ośrodków z więzami.

Studia i rozwiązania zagadnień czystego zginania początkowo płaskich blach z materiałów sprężysto-lepko plastycznych w warunkach płaskiego stanu odkształcenia zostały omówione w referacie V. Mannla (Monachium).

J. Betten (Akwizgran) zajął się w swoim wystąpieniu rozwiązaniem zagadnienia pełzania sprężysto-plastycznej cienkościennej powłoki cylindrycznej poddanej wewnętrznemu ciśnieniu.

Ostatni referat tej sesji wygłoszony przez D. Besdo (Essen) dotyczył zastosowania metody linii poślizgu do przestrzennych zagadnień osiowosymetrycznych uwzględniających wzmocnienie i wpływ ciśnienia hydrostatycznego na granicę plastyczności.

Drugi dzień obrad rozpoczął generalny referat Z. Mroza na temat zachowania się różnych materiałów w warunkach płynięcia plastycznego a wykazujących znaczne deformacje przy ścisnaniu i kruche pękaniu przy rozciąganiu.

Następnie O. Bruhns (Bohum) przedstawił problem dotyczący zagadnień stateczności gwałtownie obciążonych zbiorników ciśnieniowych, które występują w konstrukcjach elektrowni atomowych.

Z kolei W. Szczepiński (Warszawa) zajął się dyskusją dwuwymiarowych modeli ośrodków — poddawanych obciążeniom cyklicznym — z punktu widzenia badań doświadczalnych. Jeden z modeli wykorzystywał koncepcję mikronaprężeń; drugi model miał za zadanie opisać mechanizm prowadzący do wewnętrznego szyjkowania.

Wspólny referat A. Borkowskiego i M. Sarana (Warszawa) dotyczył plastycznej analizy układów prętowych uwzględniającej geometryczną nieliniowość z punktu widzenia stosowania numerycznych metod obliczeniowych.

Wystąpienie Z. Olesiaka (Warszawa) było poświęcone znalezieniu średnicy plastycznej strefy wokół pierścieniowej szczeliny ciała z cylindrycznym otworem.

Następny wspólny referat A. Dragona (Warszawa) z K. Ohji (Osaka) dotyczył opisu zjawiska znisz-

czenia w metalach i zlokalizowanego płynięcia w ramach teorii plastyczności z wewnętrznymi zmiennymi (tzw. parametrami wewnętrznymi).

Kolejny referat R. B. Pęcherskiego (Warszawa) było poświęcony wyznaczeniu temperatury kruchego przejścia w zbiorniku kulistym poddanym napromieniowaniu neutronowemu.

Ostatni referat D. Grossa i Th. Müllera (Darmstadt) tej sesji zajął uwagę słuchaczy analizą J-calki (tzw. calki Rice'a) jako kryterium zniszczenia.

Popołudniowa sesja wypełniona była referatami z zagadnień tzw. mechaniki komputerowej. Pierwszy — J. Argirysa, M. Haasego i J. Orkisha (Stuttgart, Kraków) wygłoszony przez J. Orkisha dotyczył wykorzystania naturalnego podejścia (tj. lokalnie eliminującego z rozważań sztywny ruch ciała) w metodzie elementów skończonych do analizy dużych odkształceń w powłokach elementów wyższego rzędu.

Referat J. Skrzypka (Kraków) poświęcony był rozwiązywaniu dwupunktowego problemu brzegowego występującego w analizie pokrytycznego zachowania się geometrycznie nieliniowej powłoki toroidalnej.

W wystąpieniu B. H. Kröplina (Brunswick) zostało przedstawione zastosowanie metody elementów skończonych w rozwiązaniu problemu brzegowego sprężysto-plastycznej płyty. Tę sesję zakończył referat H. Wintera (Karlsruhe), który problem lepkiego zachowania się gliu rozpatrzył w trzech płaszczyznach: eksperymentu, metody opisu i rozwiązania problemu brzegowego.

Ranną sesję piątkową 15 września poświęconą skończonym odkształceniom niesprężystym rozpoczął wykład generalny Th. Lehmana (Bochum). Autor przedstawił w nim jednolite podejście do termodynamiki dużych deformacji sprężysto-plastycznych.

Referaty sekcyjne zapoczątkowało wystąpienie P. Perzyny (Warszawa), w którym poddano analizie wyniki doświadczalne niestatecznego (szybkowanie) zachowania się ciał (próbek) sprężysto-lepkoplastycznych w próbie rozciągania i zaproponowano teoretyczny opis tego zjawiska.

Z kolei S. Zahorski (Warszawa) przedstawił ostatnie wyniki dotyczące niestacjonarnych i niewiskozymetrycznych przepływów cieczy lepkosprężystych.

Referat W. Kosińskiego (Warszawa) dotyczył dyskusji istniejących teorii materiału z parametrami wewnętrznymi oraz proponowanej ich modyfikacji z punktu widzenia istnienia różnych stanów równowagi materiałów poddawanych trwałym deformacjom.

B. Raniecki (Warszawa) wyprowadził w swoim wystąpieniu warunki potencjalności dla związków konstytutywnych wraz z warunkami jednoznaczności problemu brzegowego w termoplastyczności dla dużych odkształceń.

Ostatni referat tej sesji S. Murakamiego (Nagoya) i A. Sawczuka (Warszawa) był poświęcony zastosowaniu reprezentacji funkcji tensorowych do sformułowania i zbadania związków konstytutywnych wstępnie odkształconego ośrodka stałego wykazującego niewrażliwość na zmianę skali czasu.

Sesja popołudniowa dotyczyła metod doświadczalnych. Rozpoczął ją referat generalny J. Kłepaczki (Warszawa) zawierający przegląd ostatnich wyników badań laboratoryjnych wpływu historii temperatury i prędkości odkształcenia na reakcję polikrystalicznych metali.

O. Pawelski (Düsseldorf) przedstawił, w swoim referacie, pewną metodę doświadczalną symulującą szybkie procesy walcowania na gorąco.

Praca W. Cudnego, Z. Dyląga i Z. Orłosa (Warszawa) przedstawiona przez Z. Orłosa omawiała metodę doświadczalną wykorzystującą spolaryzowane światło oraz optycznie czułe materiały do analizy dużych odkształceń, nawet w zakresie plastycznym.

Przedostatni referat M. Anisimowicza, A. Jakowluka i A. Sawczuka (Białystok, Warszawa), wygłoszony przez A. Sawczuka dotyczył analizy doświadczalnej procesów pełzania w złożonym stanie naprężenia przy obecności oddziaływań cyklicznych. Podano propozycję opisu pełzania przez reprezentację funkcji tensorowych.

Referat ostatni tej sesji, wygłoszony przez P. Haupta (Darmstadt) przyniósł analizę własności tłumiących nieliniowo-lepkosprężystych elementów konstrukcyjnych używanych we współczesnej technice.

Po dniu przerwy, przeznaczonym na wycieczkę krajoznawczą na Kurpie, niedzielne przedpołudnie uczestnicy spędzili na drugiej sesji mechaniki komputerowej. Rozpoczął ją wykład F. Steina (Hannover) poświęcony prezentacji metody przyrostowej rozwiązywania dyskretyzowalnych nieliniowych układów w mechanice kontinuum. Po nim P. Rafalski (Świerk) mówił na temat globalnych zasad minimalnych i ich zastosowaniu do rozwiązywania problemów brzegowych ciał sprężysto-plastycznych.

Kolejny referat H. Stumpfa (Bochum) także dotyczył zasad eksperymentalnych lecz w zastosowaniu do rozwiązywania problemów nieliniowej teorii powłok.

Referat kolejny i ostatni tej sesji wygłosił J. Litoński (Warszawa) na temat numerycznej analizy procesów plastycznej deformacji rurki i tarczy poddanych ścinaniu. W analizie uwzględniono sprzężone efekty ciepłe spowodowane deformacją plastyczną.

Ostatnia sesja Sympozjum dotyczyła modeli ośrodków niesprężystych. Rozpoczęta referatem I. Müllera (Paderborn) o modelu ośrodka wykazującego pamięć swego kształtu była kontynuowana jeszcze przez czterech referentów z Polski.

Z. Bychawski (Kielce) poświęcił swoje wystąpienie omówieniu własności modelu ośrodka reologicznego o potencjalnych operatorach konstytutywnych. K. Sobczyk (Warszawa) przedstawił w swoim referacie stochastyczne modele opisujące zmęczeniowe rozprzestrzenianie się szczelin i pęknięć.

W wystąpieniu K. Dolińskiego (Warszawa) przedstawiono analizę i rozszerzenie oszacowań nośności granicznej dla konstrukcji w podejściu stochastycznym.

Sesję zakończył referat T. Wierzbickiego i W. Abramowicza (Warszawa) poświęcony statycznej i dynamicznej analizie zgniatania cienkościennych kolumn o przekroju zamkniętym. Przedstawiono uproszczony model występowania lokalnych i globalnych postaci wyboczenia kolumn.

Referaty przedstawione przez uczestników dotyczyły w większości najnowszych problemów mechaniki ciał odkształcalnych niesprężyste i wzbudzały tak żywe zainteresowanie, że często przewodniczący obrad byli zmuszeni przerywać dyskusję po referatach i przenieść ją na zakończenie sesji.

Na podkreślenie zasługuje rzeczowość dyskusji oraz roboczy charakter spotkania kompetentnych grup specjalistów.

Wśród uczestników zagranicznych można było spotkać osoby bezpośrednio współpracujące z naukowcami polskimi, autorów wspólnych prac, a wśród uczestników polskich — osoby które odbyły dłuższe staże naukowe w ośrodkach akademickich RFN-u. Sympozjum było dobrym miejscem do dyskusji wspólnych projektów badawczych na przyszłość oraz stworzyło możliwość zaznajomienia szerszego grona naukowców polskich z wybijającymi się wynikami badawczymi naukowców RFN.

W podsumowaniu obrad Przewodniczący Komitetu Mechaniki PAN zwrócił uwagę na szeroką gamę zagadnień poruszanych przez uczestników w referatach i podczas dyskusji. Dziękując za udział w Sympozjum, życzył uczestnikom dalszych sukcesów naukowych i ważkich rezultatów do przedstawienia przy następnym spotkaniu.

W imieniu delegacji uczestników z RFN podziękowanie za zaproszenie do udziału w Sympozjum oraz za jego organizację złożył H. Lippmann. Wyraził też nadzieję na następne spotkanie w RFN. W swoim końcowym wystąpieniu podał następujący wzór na zbiór S uczestników Sympozjum

$$S = \{G \cup P\} \cup J: J \rightarrow \{G \cup P\} \cup \{I: I \rightarrow P\} \cup \{MIMS\} \cup \{P: P \rightarrow G\}$$

gdzie G oznacza zbiór osób z RFN, P — zbiór osób z Polski, J — zbiór osób z Japonii, I — zbiór osób z Włoch, {MIMS} — zbiór osób zainteresowanych tematem Sympozjum (Mechanics of Inelastic Media and Structures). Symbol \rightarrow oznacza jakieś powiązanie między poprzednikiem a następnikiem.

Z imprez towarzyszących, obok wspomnianej wycieczki na Kurpie, ciekawie szczególnie było zwiedzenie Pałacu w Wilanowie połączone z koncertem muzyki polskiej w wykonaniu Haliny Czerny Stefańskiej — fortepian, Krzysztofa Jakowicza — skrzypce, Feliksa Gałęckiego — śpiew oraz Krystyny Borucińskiej i Aliny Liwskiej — akompaniament.

Uczestnicy byli zaproszeni także przez Ambasadę RFN na cocktail w salach hotelu Forum.

Witold Kosiński

POLSKO-RADZIECKIE SYMPOZJUM "NIEKLASYCZNE ZAGADNIENIA MECHANIKI"

Kraków — Janowice 18—23.IX.1978 r.

Kontynuując okresowe dwustronne spotkania mechaników polskich i ukraińskich, Komitet Mechaniki PAN zorganizował kolejne sympozjum na temat nieklasycznych zagadnień mechaniki.

Uwzględniając opinie Prezydium Komitetu rozszerzono dotychczasową tematykę nieklasycznych zagadnień teorii sprężystości na problemy teorii plastyczności lepko-sprężystości i pękania. W szczególności

uwzględniono takie tematy jak: nielokalność, mechanika kompozytów i ośrodków wielofazowych, zagadnienia falowe, mechanika pękania. Celem sympozjum był krytyczny przegląd prac oraz wymiana doświadczeń w zakresie badań prowadzonych przez obydwie strony (polską — i ukraińską) w teorii materiałów, metodach numerycznych oraz technice doświadczalnej.

Konferencja zgromadziła 24 uczestników z Polski oraz 10 osób z Ukrainy. Wygłoszono w sumie 26 referatów.

Strona radziecka przedstawiła prace głównie ośrodka kijowskiego koncentrującego się wokół zagadnień mechaniki kompozytów w (Huż, Babicz, Kubienko) ośrodków wielofazowych (Choroszun, Podilczuk, Ruszczycki) teorii powłok (Grigorienko), teorii plastyczności (Szewczenko) metod perturbacji w mechanice nieliniowej (Kajuk). Ośrodek lwowski reprezentował Panasiuk poruszając zagadnienie równowagi granicznej ciał ze szczelinami przy obciążeniach stałych i cyklicznych.

Prace polskie dotyczyły wybranych problemów mechaniki ciała stałego o dosyć zróżnicowanej tematyce jak i sposobie ujęcia. I tak, nowe niestandardowe sformułowanie zagadnień mechaniki teoretycznej i stosowanej przedstawił Woźniak, nielokalne teorie ośrodka ciągłego omawiali Rymarz i Wilmański, zastosowanie teorii plastyczności prezentowali Sawczuk, Litewka, Dietrich i Szczepiński, problemy teorii konsolidacji rozważali Derski, Dziecielak i Szefer, zaś zagadnienia mechaniki z więzami wewnętrznymi Gałka, Maniewicz i Woźniak. Ponadto wygłoszono referaty z zakresu teorii szczelin (Matczyński, Wesołowski) termodyfuzji (Kubik), ośrodków stochastycznych (Gambin) optymalizacji konstrukcji (Gutkowski-Bauer-Iwanow) oraz metod doświadczalnych w dynamice pękania (Klepaczko). Przechodząc do oceny merytorycznej spotkania należy zwrócić uwagę na kilka okoliczności. Po pierwsze, zgodnie z intencjami inicjatorów tych spotkań, sympozja polsko-radzieckie nie mają stanowić oderwanego ciągu prezentacji luźno dobranych tematów lecz odzwierciedlać konsekwentnie rozwój mechaniki wysuwając na czoło te zagadnienia, które w określonym okresie zasługują na miano nietypowych, niekonwencjonalnych a więc w tym rozumieniu nieklasycznych. Omawiane spotkanie wyszło na przeciw tym tendencjom poszerzając tematykę referatów i dyskusji o problemy niesprężyste i nielokalne. Chociaż nie zrzeczowano z takich tematów jak pola sprężone, fale w ośrodku sprężystym, ośrodki z więzami itp. postanowiono tym razem uwzględnić również i takie zagadnienia jak mechanika pękania, problemy mechaniki kompozytów, mechaniki górotworu, teorii konsolidacji, teorii plastyczności. Oczywiście tak szeroko pomyślany zakres problemów groził pewnym rozproszeniem i niejednorodnością tematyki, dał jednak podstawę do interesujących zmian dotyczących kierunków przyszłych spotkań. Przedstawione na symozjum prace odznaczały się aktualnością rezultatów, w dużej mierze oryginalnością i niekonwencjonalnością metod, sposobów ujęcia i treści.

Drugim walorem omawianego sympozjum była decyzja opracowania kilku referatów generalnych, ujmujących temat problemowo. Referaty takie przygotowała strona polska (Szczepiński — O mechanizmach deformacji plastycznej metali przy odkształceniu cyklicznym, Szefer — Nieliniowa teoria konsolidacji, Woźniak — Analiza niestandardowa w mechanice teoretycznej i stosowanej, Gutkowski i współautorzy — Optymalizacja dyskretna w teorii konstrukcji). Dalszą okolicznością godną podkreślenia był fakt zorganizowania spontanicznej dyskusji panelowej na temat mechaniki ośrodków wielofazowych. Jaka jest zatem ocena merytoryczna omawianej konferencji? Wydaje się, że spotkanie osiągnęło swój cel. Prezentowane prace stały na dobrym poziomie naukowym a dyskusje były żywe i merytoryczne. Niekonwencjonalna treść i sposób ujęcia spowodowały, że kilka tematów skoncentrowało uwagę ogółu uczestników i dyskutantów. Strona radziecka przedstawiła ciekawe rezultaty z zakresu trójwymiarowych zagadnień stateczności kompozytów. Ośrodek kijowski ma tu bogaty dorobek obejmujący zarówno podstawy teorii jak i rozwiązania licznych problemów brzegowych. Podobnie dało się zauważyć, że mechanika ośrodków wielofazowych w tym i porowatych jest silnie rozwijana przez obydwie strony. Przedstawiono nowe rezultaty dotyczące opisu deformacji i własności fenomenologicznych materiałów wieloskładnikowych na podstawie znajomości własności jego komponentów i struktury geometrycznej ośrodka. Znacznego postępu dokonano w teorii konsolidacji, gdzie procesy deformacji, oddziaływań międzyfazowych, filtracji cieczy i zmiany porowatości doczekały się ujęcia w ramach opisu mechaniki racjonalnej. Problemy pękania analizowano w warunkach obciążeń cyklicznych zaś zagadnienia plastyczne dla złożonych procesów obciążenia (obciążenia cykliczne, nieizotermiczne) jak i w warunkach złożonej geometrii (układy z perforacją). Dalsze rozwinięcie teorii i zastosowań zademonstrowano w pracach poświęconych obecności wężów wewnętrznych (powłoki, więzy operatorowe).

Jak już wspomniano poprzednio, uczestnicy zdecydowali odbyć dyskusję „okrągłego stołu” na temat mechaniki ośrodków wielofazowych. Należy to zapewne przypisać okoliczności, że wiele z prezentowanych prac (w tym i jedna problemowa) dotyczyło opisu i analizy procesów deformacji w tych złożonych ośrodkach. Głównym tematem na którym skoncentrowano uwagę, dyskusji był problem oddziaływań międzyfazowych.

Dyskutanci poruszali tu różne aspekty i opisy (podejście statystyczne i czysto fenomenologiczne, parametry wewnętrzne, zamkniętość i obiektywność równań). W sumie dyskusja potwierdziła aktualność problematyki, zasygnalizowała też potrzebę dalszych badań i poszukiwań (zarówno teoretycznych jak i eksperymentalnych) w złożonych strukturach i materiałach (mieszaniny, ośrodki porowate, kompozyty).

W zakresie wymiany myśli naukowej konferencja spełniła więc swe zadanie. Obok tych merytorycznych celów, spotkaniu towarzyszyły również pewne imprezy okolicznościowe. Uroczystego otwarcia sympozjum dokonano w sali senackiej Collegium Maius Uniwersytetu Jagiellońskiego, połączonego ze zwiedzaniem muzeum uniwersytetu. Delegację radziecką oraz przedstawicieli Komitetu Mechaniki PAN przyjął prezydent Miasta Krakowa a o samym sympozjum pisała miejscowa prasa.

Obrady toczyły się w ośrodku szkoleniowym Politechniki Krakowskiej w Janowicach k. Tarnowa.

Bilansując rezultaty konferencji należy obok oczywistych efektów wymiany myśli i osobistego kontaktu wymienić następujące ustalenia:

- zdecydowano rozpocząć przygotowania mające na celu zorganizowanie w roku 1980 szkoły letniej dotyczącej mechaniki ośrodków wielofazowych, z udziałem specjalistów z innych krajów. Jako miejsce zaplanowano Jabłonę, a organizacji podjęła się strona polska.
- goście radzieccy wyrazili chęć zorganizowania kolejnego sympozjum za 3 lata na Ukrainie.
- uznano za właściwe rozpoznanie możliwości i celowości skoncentrowania tematyki przyszłych konferencji na bardziej jednorodnej problematyce pozostając przy nieklasycznych zagadnieniach mechaniki. Spotkanie było zatem pożyteczne i celowe. Należy sądzić, że ustalenia sympozjum będą trwałym efektem serii tych dwustronnych spotkań polsko-radzieckich.

Gwidon Szefer

XX POLSKA KONFERENCJA MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO

Porąbka—Kozubnik, 3—11 września, 1978 r.

Polskie Konferencje Mechaniki Ciała Stałego zajmują trwałe miejsce w kalendarzu spotkań naukowych poświęconych mechanice w Polsce. Ich znaczenie wykracza zresztą poza skalę krajową. Już w latach sześćdziesiątych nasze spotkania zyskały pozycję międzynarodową, której potwierdzeniem było późniejsze (w r. 1973) oficjalne przyznanie takiego statusu przez Międzynarodową Unię Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM). Liczne uczestnictwo gości zagranicznych w kolejnych konferencjach potwierdza wysoką pozycję polskiej mechaniki teoretycznej i stosowanej na świecie. Uczestnicy ostatniej XX Konferencji Mechaniki Ciała Stałego, w liczbie 213, reprezentowali 19 krajów: Arabię Saudyjską, Belgię, Bułgarię, Brazylię, Czechosłowację, Finlandię, Francję, Japonię, Jugosławię, NRD, Polskę, RFN, Rumunię, Stany Zjednoczone AP, Szwecję, Węgry, Wielką Brytanię i ZSRR.

Konferencje Mechaniki Ciała Stałego są organizowane od 25 lat, najpierw z przerwami a następnie corocznie, przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN. Pierwsze spotkanie pod nazwą Konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych PAN (ZMOC) zorganizował prof. Waław Olszak w roku 1953. Profesorowie Witold Nowacki i Waław Olszak byli inicjatorami kolejnych spotkań w początkowym okresie, w latach pięćdziesiątych. Były one przeglądem dorobku szybko rozwijającego się — choć jeszcze skromnego liczebnie — środowiska naukowego mechaniki. Prezes PAN, prof. Witold Nowacki i prof. Waław Olszak pełniący obecnie funkcję Rektora Międzynarodowego Ośrodka Nauk Mechanicznych (CISM) w Udine, byli honorowymi gośćmi XX Konferencji. Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego był prof. Antoni Sawczuk, obecny kierownik ZMOC i Przewodniczący Komitetu Mechaniki PAN. XX Konferencja utrzymała charakter poprzednich spotkań i stanowiła miejsce konfrontacji osiągnięć prawie wszystkich ośrodków krajowych pracujących nad zagadnieniem mechaniki ciała stałego i mechaniki

konstrukcji. Uczestnicy krajowi w liczbie 156 osób reprezentowali następujące ośrodki: IPPT PAN, Politechniki: Gdańską, Krakowską, Łódzką (wraz z Filią w Bielsku-Białej), Poznańską, Śląską, Świętokrzyską, Wrocławską i Warszawską, Akademię Górniczo-Hutniczą w Krakowie, Uniwersytet Warszawski, Wojskową Akademię Techniczną, Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej oraz instytuty badawcze przemysłu: ETOB, Przemysłowy Instytut Maszyn Budowlanych i Instytut Lotnictwa. Prace konferencji odbywały się w ośrodku szkoleniowo-wypoczynkowym Hutniczego Przedsiębiorstwa Remontowego (HPR) w Kozubniku-Porąbce w Beskidzie Małym (woj. bielsko-bialskie).

Otwarcia konferencji dokonał prof. Antoni Sawczuk nawiązując do roli Polskich Konferencji Mechaniki Ciała Stałego w Kształtowaniu tematyki badawczej i rozwoju tej dyscypliny w naszym kraju. Omówił on ewolucję kierunków badań w ciągu 25 lat od klasycznych zagadnień teorii sprężystości i wyteżenia do współczesnych problemów mechaniki nieliniowej. Kolejne konferencje były ilustracją tego procesu; dyskutowano na nich wyniki z zakresu teorii plastyczności, termosprężystości, pól sprzężonych, mechaniki ciał niejednorodnych i anizotropowych, a więc dziedzin w których mechanika polska notowała szczególne sukcesy.

Po wprowadzeniu Przewodniczącego Konferencji i po powitaniu uczestników przez gospodarzy regionu bielsko-bialskiego, wygłoszone zostały dwa wykłady inauguracyjne. Pierwszy wykład przedstawił Doc. J. Stokłosa (HPR), który mówił o praktycznych problemach jakie stawia mechanice nowoczesne budownictwo hutnicze; podkreślony tu został inżynierski cel i sens uprawiania mechaniki. Drugi wykład, przedstawiony przez Doc. B. Ranieckiego (IPPT PAN), dotyczył teorii naprężeń hartowniczych. Po inauguracji obrady konferencji odbywały się równoległe w dwu sekcjach i trwały sześć dni. Poszczególne sesje tematyczne poprzedzane były wprowadzającymi referatami problemowymi przygotowanymi przez zaproszonych specjalistów z kraju i zagranicy. Niezależnie od obrad w sekcjach, każdy dzień konferencji rozpoczynał się od wykładu generalnego adresowanego do wszystkich uczestników. Wykłady te wygłoszili prof. prof. N. Czernouszko (ZSRR), C. Cavarini (Włochy), Fritz John i J. R. Rice (Stany Zjednoczone AP) oraz Y. Yamada (Japonia). Bliższe omówienie tematyki tych wystąpień oraz referatów problemowych w sekcjach podajemy w dalszej części tekstu.

Tematyka konferencji koncentrowała się wokół następujących zagadnień:

- niesprężyste zachowanie się ciał stałych (metali, skał, gruntów, polimerów); modele plastyczności, lepkoplastyczności i pełzania oraz zagadnienia ich identyfikacji i zastosowania;
- nieliniowa teoria sprężystości; nielocalne teorie ośrodków ciągłych; zagadnienia propagacji fal w ciałach sprężystych; teoria dyslokacji; modele stochastyczne ciał i procesów;
- mechanika konstrukcji; metody analizy i syntezy konstrukcji; zagadnienia dynamiki i stateczności; teoria przystosowania; metody optymalizacji i projektowanie optymalne;
- mechanika zniszczenia i pękania; sprężysto-plastyczna analiza wzrostu szczelin; zmęczenie metali; zagadnienia dynamiczne w mechanice zniszczenia; ośrodki porowate;
- metody rozwiązywania zagadnień brzegowych; metody numeryczne w nieliniowej mechanice ośrodków ciągłych; metody elementów skończonych;
- metody doświadczalne w nieliniowej mechanice ośrodków ciągłych.

Na konferencji akcentowano szczególnie zagadnienia mechaniki nieliniowej, a zwłaszcza zastosowania teorii ośrodków niesprężystych w analizie konstrukcji, w opisie zniszczenia i pełzania, w projektowaniu optymalnym, etc... Jednak i klasyczne zagadnienia teorii sprężystości, stateczności sprężystej i fal były omawiane dość szeroko w komunikatach i referatach problemowych. W sumie przedstawiono 141 prac, wśród nich 55 przedstawili goście zagraniczni. Szczegółową problematykę poszczególnych sesji obrazują dość dobrze tematy wykładów generalnych i referatów problemowych w sekcjach, z których większość reprezentowała najwyższy poziom naukowy. Można tu przykładowo wymienić wykłady prof. J. Rice'a (Stany Zjednoczone AP) na temat sprężysto-plastycznej mechaniki wzrostu szczelin, profesorów F. Johna (USA) i P. Chadwicka (W. Brytania) o propagacji fal w ośrodkach sprężystych, N. Czernouszki (ZSRR) i M. Save'a (Belgia) o teorii optymalizacji i projektowaniu optymalnym, C. Gavariniego (Włochy) o statycznym i dynamicznym przystosowaniu konstrukcji. Zagadnienia stateczności sprężystej konstrukcji omówił prof. R. Knops (W. Brytania); problemy stateczności powłok z uwzględnieniem plastyczności i pełzania przedstawili prof. prof. G. D. Galletly (W. Brytania) i S. Murakami (Japonia). Metody numeryczne w mechanice nieliniowej były przedmiotem wystąpienia doc. M. Kleibera (IPPT); prof. Y. Yamada

z Japonii mówił o zastosowaniu systemów komputerowych w analizie konstrukcji. Przegląd metod doświadczalnych w mechanice ośrodków ciągłych dał doc. J. Stupnicki (Politechnika Warszawska), prof. S. Kocańda (WAT) przedstawił omówienie zjawiska zmęczenia w metalach od strony analizy doświadczalnej; zasygnalizował też problemy nie wyjaśnione w tym zakresie. Zagadnienia zniszczenia były także omawiane przez doc. J. Klepaczkę (IPPT), który skoncentrował się na doświadczalnej analizie dynamiki szczelin. Teoria równań konstytutywnych plastyczności była dyskutowana przez prof. J. Kratochvíla (Czechosłowacja). Kierunki mechaniki blisko związane z zastosowaniami inżynierskimi reprezentowali: prof. S. Kalliszky (Węgry), który mówił o inżynierskich zastosowaniach teorii plastyczności i prof. S. Chamecki (Brazylia), który przedstawił metodę projektowania konstrukcji z uwzględnieniem jej współpracy z podłożem gruntowym. Krótkie komunikaty przedstawione w sesjach po referatach problemowych dotyczyły szczegółowych zagadnień i metod a czasem sygnalizowały nowe koncepcje i teorie. Poziom komunikatów był nierówny, co jednak jest nicunikiłnione przy tak dużej konferencji dającej możliwość wystąpienia wielu młodym pracownikom mechaniki reprezentującym różne ośrodki. Do bardzo udanych sesji należały posiedzenia dotyczące zagadnień plastyczności, plastyczności cyklicznej, teorii nielokalnych i przystosowania. *Najliczniejsze pod względem ilości prac były sesje poświęcone analizie konstrukcji i teorii optymalizacji.* W sumie konferencja dała dobry przegląd głównych kierunków badań we współczesnej mechanice w Polsce i na świecie i jako taka stanowiła jedno z ciekawszych spotkań naukowych w mechanice w roku 1978. Średni poziom prac i dyskusji był wysoki. Konferencja wykazała wysoki stopień zaawansowania wielu nieklasycznych dyscyplin mechaniki ciała stałego i konstrukcji. Stanowiąc w całości pewną syntezę stanu badań i problemów, konferencja pokazała że sytuacja mechaniki w chwili obecnej i jej przenikanie do technologii wymagają dalszego rozwijania teorii nieliniowych zwłaszcza teorii dotyczących procesów sprzężonych, cyklicznych, długotrwałych, pełzania, etc. Nowych impulsów wymaga też mechanika zniszczenia, która w większym jeszcze stopniu niż dotychczas zbliżyć się powinna do teorii plastyczności. Z drugiej strony niezbędny jest dalszy rozwój metod doświadczalnych a także metod analizy przybliżonej w celu zastosowania bardziej złożonych modeli konstytutywnych w praktyce. Należy też na nowo przemyśleć zagadnienie nauczania mechaniki na uczelniach wyższych w celu umożliwienia absolwentom zrozumienia i stosowania osiągnięć współczesnej mechaniki.

Profesor Witold Nowacki był jednym z kilku mówców, którzy przemawiali na zakończenie konferencji. Podkreślił on fakt, że pozycja mechaniki polskiej związana jest z otwarciem jej środowiska naukowego na wymianę myśli i osiągnięć ze światem. Profesor Antoni Sawczuk zwrócił natomiast uwagę na złożoność i uwarunkowania tej dziedziny, na jej przynależność do kultury umysłowej jak i do kultury materialnej tzn. zwrócenie z jednej strony w kierunku zastosowań inżynierskich a z drugiej — oparcie o silne podstawy matematyczne i wynikającą stąd dyscyplinę logiczną badań. Oba kierunki wymagają jednakowej uwagi bowiem zachodzą między nimi wzajemne związki. Wydaje się, że w syntetycznym przeglądzie jaki dała XX Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego została zachowana równowaga i oba cele — poznawczy i inżynierski zostały, należycie wyeksponowane.

Andrzej Dragon

III konferencja na temat: Metody komputerowe w mechanice konstrukcji

W dniach 26—28 maja 1977 r. odbyła się nad Jeziorem Turawskim k. Opola III Konferencja nt. „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji”.

Konferencja była organizowana przez Sekcję Mechaniki Konstrukcji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Zespół Metod Komputerowych w Mechanice Komitetu Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN i Wyższą Szkołę Inżynierską w Opolu.

W skład Komitetu Organizacyjnego Konferencji wchodziły następujące osoby: O. Mateja (przewodniczący), J. Golaś (sekretarz), M. Gryczmański, J. Kubik, R. Kałuża, J. Żmuda (członkowie).

Konferencja była kolejnym — trzecim spotkaniem pracowników wyższych uczelni, instytutów naukowych oraz przedstawicieli przemysłu stosujących metody komputerowe do rozwijania zadań mechaniki konstrukcji.

Obrady odbywały się w dwóch sekcjach: jednej poświęconej metodom komputerowym w mechanice oraz drugiej z zakresu stosowania metod komputerowych w praktyce inżynierskiej.

Ogółem wygłoszono 80 referatów w tym sześć referatów problemowych. Tematyka referatów obejmowała głównie zagadnienia: statyki i dynamiki układów prętowych, powierzchniowych, przestrzenne zadania statyki. Oprócz prac z zakresu tradycyjnie pojmowanych zagadnień statyki i dynamiki reprezentowane były prace z zagadnień statycznych w mechanice, a także zadania z przepływów ciepła i optymalizacji. Spora grupa referatów dotyczyła problemów związanych z zagadnieniami numerycznymi mechaniki.

Referaty obejmowały następujące zagadnienia:

problemy statyki układów prętowych i powierzchniowych (16 referatów),
 problemy dynamiki i stateczności układów prętowych i powierzchniowych (15 referatów),
 zagadnień nieliniowych fizycznie i geometrycznie (13 referatów),
 ogólnych zagadnień metod komputerowych (14 referatów),
 specjalnych zadań inżynierskich (17 referatów).

Referaty problemowe natomiast reprezentowały ogólne kierunki rozwojowe metod numerycznych i ich powiązania z mechaniką ośrodka ciągłego.

Tytuły referatów problemowych były następujące:

- D. Rogula — Mechanika — komputer — człowiek;
 Sz. Woźniak — Dyskretyzacja fizyczna, a dyskretyzacja numeryczna w mechanice;
 J. Kruszewski — Metoda sztywnych elementów skończonych w obliczeniach dynamicznych konstrukcji okrętowych;
 A. Borkowski — Programowanie matematyczne w analizie i optymalizacji konstrukcji;
 M. Kleiber — Numeryczne aspekty analizy ciała i konstrukcji sprężysto-plastycznych;
 J. Gołaś, M. Gryczmański, O. Mateja — Niektóre zastosowania metod komputerowych w analizie konstrukcji na przykładzie prac polskich.

W czasie Konferencji odbyły się również dyskusje „okrągłego stołu” nt. modernizacji treści nauczania mechaniki budowli (G. Rakowski) oraz rozwoju metody elementów skończonych w Polsce (dyskusję prowadził Z. Waszczyszyn). Dyskusję generalną prowadził A. Sawczuk a ogólnej oceny Konferencji dokonał J. Szmelter. Podkreślono w niej ogólny postęp wyrażający się opracowaniem efektywnych programów umożliwiających analizę i projektowanie struktur przestrzennych spotykanych w budownictwie przemysłowym oraz analizę zagadnień współpracy budowli z podłożem, drgań konstrukcji budowlanych i okrętowych i zadań utraty stateczności konstrukcji. Obserwuje się wzrost prac badawczych poświęconych problemom mechaniki inspirowanych przez postęp inżynierii a mianowicie zagadnień optymalizacji, zadań mechaniki statystycznej i nieliniowych problemów mechaniki.

Wśród referatów przedstawionych na konferencji dominowały zagadnienia rozwiązywane przy użyciu metody elementu skończonego; stanowiły one blisko połowę referatów konferencji. Mimo wyraźnego w ostatnim okresie rozwoju zastosowań metod komputerowych w zagadnieniach mechaniki i dyscyplin pokrewnych obserwuje się zbyt dużą liczbę programów o bardzo wąskim zakresie; stosowalności, napisanych w różnych językach okazjonalnie i o zróżnicowanym poziomie naukowym. W związku z tymi faktami w czasie dyskusji postulowano konieczność działań w celu osiągnięcia pewnej modularyzacji programów. Postulowano, aby poszczególne ośrodki naukowe dokonały wymiany programów i w większym stopniu informowały się wzajemnie o uzyskanych wynikach. Zwracano również uwagę na konieczność opracowywania programów problemowo-zorientowanych oraz prac związanych z szerszym zastosowaniem metod komputerowych w zagadnieniach niezawodności, zniszczenia, geomechaniki pęknięcia oraz zadań mechaniki wynikających z rozwoju nowych technologii.

W czasie dyskusji zaproponowano przygotowanie ekspertyzy o stanie i trendach rozwojowych metod komputerowych mechaniki w Polsce.

Uznano za konieczne zorganizowanie za dwa lata następnej konferencji z zakresu metod komputerowych w mechanice oraz podjęcie starań w celu zorganizowania w Polsce międzynarodowych spotkań poświęconych problemom z tego zakresu.

Jan Kubik

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- C. Goss, S. KOCANĀDA, Doświadczalny i analityczny opis własności stali o podwyższonej wytrzymałości w zakresie małej liczby cykli
Экспериментальные и аналитические исследования свойств высокопрочных сталей при малом числе циклов нагрузки
Experimental and analytical studies on high-strength steels within the range of low cycle fatigue
- L. JILKĚN, J. VÄSKLUND, Pomiarы elektromagnetyczne w mechanice ciała stałego
Электроманнитные измерения в механике твердого тела
Electromagnetic measurements in solid mechanics
- H. KОРЕСКИ, М. КОРКОВИЧ, J. СМУКЛА, Modele badania koncentracji naprężeń w węzłach ustrojów nośnych metodą pokryć optycznie czynnych
Модельные исследования концентрации напряжений в узлах несущих систем методом покрытий оптически деятельных
Investigation of the stress concentrations in joints of structures by the "Modeltech" method
- M. ЛЕШИ, I. МРУК J. STUPНИСКИ, Metoda imersyjna interferometrii holograficznej do badania kształtu i odkształceń
Иммерсионный метод голографической интерферометрии для исследования формы и деформаций
Immersion method of holographic interferometry for investigation of shape and deformations
- J. LIETZ, B. MIĆHALSKI, R. WOJNAR, Zastosowanie metody kolejnych rozwiązań sprężystych do elastooptycznego badania ośrodka sprężysto-plastycznego z otworem walcowym
Применение метода последовательных упругих решений к поляризациино-оптическим исследованиям упруго-пластической среды с цилиндрическим отверстием
Application of the method of successive solutions to photoelastic investigations of an elastoplastic medium with a cylindrical cavity
- S. MAZURKIEWICZ, L. KUC, M. SIKOŃ, Rozproszenie światła przy skośnym prześwietlaniu w zastosowaniu do analizы naprężeń w szkle hartowanym
Рассеяние света при косом просвечивании в применении к анализу напряжений в закаленном стекле
Scattering of light in oblique incidence in application for analyzing stresses in tempered glass
- J. NAUMANN, Pomiar odkształceń plastycznych metodą moiré
Измерение пластических деформаций методом муара
Measurements of plastic deformations by means of moiré method
- M. NOWAK, Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu 6 w funkcji czasu starzenia i zawartości włókna szklanego
Усталостная прочность полиамида 6 в зависимости от времени старения и добавки стеклянного волокна
Ageing time and glass fiber content in fatigue strength tests on polyamid 6
- E. DRESZER, R. MIĆHAŁOWSKI, Ultradźwiękowa metoda badania gęstości ośrodków ziarnistych w procesach deformacji
Акустический метод исследования плотности зернистых сред в процессах деформации
The acoustic method of measuring the density of granular media in plane deformation process

BIULETYN INFORMACYJNY

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półroczu roku następnego i na cały rok następnym,
- do 10 czerwca na II półroczu roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa; konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona — Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P. O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy, S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
