

II 720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

**M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A**

KWARTALNIK

TOM 17 • ZESZYT 1

WARSZAWA 1979

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

W. KOŁEK, <i>Metody badań poznawczych i techniczne problemy elektromechaniki</i>	3
<i>Методы исследований и технические проблемы электромеханики</i>	
<i>Methods of investigation and technical problems of electromechanics</i>	
J. KASPERKIEWICZ, <i>Wytrzymałość i odkształcalność graniczna przy rozciąganiu fibrobetonu z włóknem stalowym</i>	19
<i>Прочность и предельные удлинения при растяжении бетона армированного короткими стальными волокнами</i>	
<i>Tensile strength and ultimate strain in steel fibre reinforced concrete</i>	
G. SZEFER, L. MIKULSKI, <i>Optymalne kształtowanie dysków wirujących z zastosowaniem zasady maksimumi Pontriagina</i>	35
<i>Применение принципа максимума Понтрягина к оптимализации вращающихся дисков</i>	
<i>Optimal design of rotating discs by using Pontriagin's principle</i>	
W. OSTACHOWICZ, J. TARNOWSKI, <i>Analiza drgań wałów wirujących obciążonych siłami osiowymi</i>	49
<i>Анализ колебаний вращающихся валов нагруженных осевыми силами</i>	
<i>Analysis of vibrations of rotating shafts loaded by axial forces</i>	
A. GAWEŃSKI, A. GARSTECKI, <i>Optymalizacja pierścieni sztywno-plastycznych z wężami geometrycznymi</i>	69
<i>Оптимальное проектирование пластических колец при геометрических ограничениях</i>	
<i>Optimal plastic design of rings with geometric constraints</i>	
J. KRUŻELECKI, <i>Pewne problemy kształtowania powłok osiowo-symetrycznych w stanie błonowym</i>	75
<i>Некоторые проблемы оптимального формирования осево-симметрических безмоментных оболочек</i>	
<i>Some problems of optimal design of the axially symmetrical shells in membrane state</i>	
T. KUŹMICEWICZ, J. MARYNIAK, <i>Stateczność dynamiczna obiektu latającego odwijającego z pokładu linę</i>	93
<i>Динамическая устойчивость летящего объекта развивающего из борта канат</i>	
<i>Dynamical stability of a flying object with a cable's uncoiling system</i>	
J. KOLENDĄ, <i>Uściślony opis drgań wymuszonych linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów</i>	105
<i>Уточненные формулы расчета вынужденных колебаний валопроводов с учетом асимметрии изгибной жесткости и податливости фундаментов</i>	
<i>A more precise description of forced vibrations of shaftings with flexural rigidity asymmetry on flexible foundations</i>	
E. WŁODARCZYK, <i>O przestrzennych frontach fal naprężenia w izotropowym ośrodku sprężystym</i>	127
<i>О пространственных фронтах волн напряжения в изотропной упругой среде</i>	
<i>On spatial fronts of stress waves in isotropic elastic medium</i>	
J. KOLENDĄ, <i>Losowe drgania linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów</i>	137
<i>Случайные колебания валопроводов с учетом асимметрии изгибной жесткости и податливости фундаментов</i>	
<i>Random vibrations of shaftings with flexural rigidity asymmetry on flexible foundations</i>	
BIULETYN INFORMACYJNY	155

y II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 17 · ZESZYT 1

WARSZAWA 1979

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR,
ANDRZEJ SZANIAWSKI — REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR,
MONIKA WĄGROWSKA — REDAKTOR,
JERZY DAŁEK — SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 660. Ark. wydawniczych 11,75. Ark. drukarskich 10,0. Papier druk sat. IV kl. 71 g, 70×100. Oddano do składania 30.X.1978 r. Druk ukończono w marcu 1979 r. Zam. 1537/78. C-36. Cena zł 30,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

METODY BADAŃ POZNAWCZYCH I TECHNICZNE PROBLEMY ELEKTROMECHANIKI

WŁADYSŁAW KOLEK (KRAKÓW)

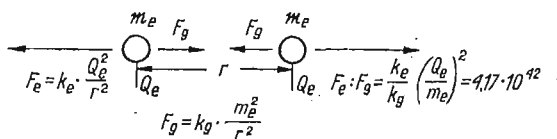
Elektromechanika — w fazie powstawania, dotychczasowej rozbudowy jak też w perspektywie przyszłego jej rozwoju — wykazuje szczególnie znamienne powiązania z Mechaniką. Cała metodyka tej dyscypliny opiera się zasadniczo na zdobyczach Mechaniki Teoretycznej, będącej zresztą podstawą dla wszelkich nauk stosowanych jako podstawowych dyscyplin techniki. Niniejszy artykuł ilustruje powyższą tezę i formułuje pewne jej implikacje.

1. Wstęp

Pozycja Elektromechaniki na tle metod Mechaniki Teoretycznej. Zbiór teorii matematycznych interpretowanych jako sformułowania praw fizyki, jej podstawowych zasad zachowania, stanowiących treściowe aksjomaty tych interpretacji w zastosowaniu do opisu ruchu materii, wchodzi w zakres dyscypliny naukowej: mechaniki teoretycznej. W tej dyscyplinie mają swoje wspólne źródło wszelkie nauki stosowane jak mechanika, elektrotechnika, chemia, ciepłotechnika i ich podstawowe dyscypliny teoretyczne.

Elektromechanikę określamy jako dyscyplinę formującą modele matematyczne makroskopowego ruchu ładunku elektrycznego związanego z ośrodkiem materialnym, którego makroskopowe fragmenty pozostają względem siebie w ruchu z małymi, w stosunku do prędkości światła prędkościami. Aby określić pozycję tej dyscypliny w tabeli zawierającej klasyfikację metod mechaniki teoretycznej, warto z fizyki przypomnieć dwie obserwacje dotyczące oddziaływań pomiędzy cząsteczkami zawierającymi masę i ładunek elektryczny.

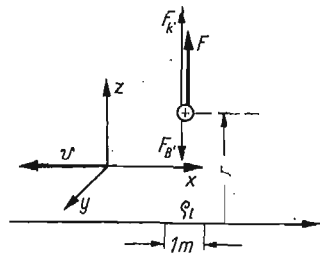
Podstawę dla ilościowego opisu obserwacji tych oddziaływań stanowi zasada zachowania ładunku oraz szczególna zasada względności Einsteina będące konsekwencją Zasady Niezmienniczości Galileusza. W obydwu rodzajach oddziaływania (grawitacyjnych i elektromagnetycznych) zależność sił od odległości jest taka sama. Stosunek tych sił jest zależny od stosunku iloczynów ładunków do iloczynów mas oddziaływujących na siebie cząstek. Rys. 1 ilustruje proporcje sił oddziaływania grawitacyjnego i elektromagnetycznego w przy-



Rys. 1.

padku dwóch elementarnych cząsteczek: elektronów. W przypadku protonów stosunek ten zmniejszy się ok. $4 \cdot 10^6$ krotnie. Wynika stąd poglądowy wniosek, że nawet nieznaczne naruszenie równowagi ładunków związanych z materią wywołuje obserwowalne efekty w postaci sił oddziaływania elektromagnetycznego. To naruszenie równowagi może mieć charakter globalny — jako jego skutki obserwujemy wówczas makroskopowe siły oddziaływania elektromagnetycznego pomiędzy makroskopowymi ciałami naładowanymi — lub też może mieć charakter lokalny — obserwujemy wówczas wewnętrzne, strukturalne własności mechaniczne ośrodka materialnego w wyniku sił oddziaływania elektromagnetycznego pomiędzy bliskimi sobie cząsteczkami materii.

Rys. 2. ilustruje efekt ujawnienia się relatywistycznego skutku zmiany układu współrzędnych obserwatora mierzącego siłę oddziaływania pomiędzy ładunkami elektrycznymi



$$F = Q[K + v \times B]$$

$$v = 0 \quad K = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho_l}{r} \quad B = 0$$

$$F_k = QK \quad F_B = 0 \quad F = F_k$$

$$v \neq 0 \quad K' = K \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad F'_k = F \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad F' = F \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$F'_B = F' - F'_k = -F'_k \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Rys. 2.

pozostającymi względem siebie w spoczynku. Skrócenie relatywistyczne naładowanego przewodnika prowadzi do zwiększenia gęstości liniowej ładunku. Obserwacja siły oddziaływania w ruchomym układzie współrzędnych wymaga opisu uwzględniającego relatywistyczny efekt Zasady Zachowania Ładunku. W warunkach bardzo silnych oddziaływań elektromagnetycznych ten relatywistyczny efekt ujawnia się już przy prędkościach 1 mm/s (rzędu prędkości średniej ruchu swobodnych elektronów przy przepływie prądu przez przewodnik). Wprowadzenie pojęcia pola magnetycznego jako dodatkowego fenomenu towarzyszącego przepływowi prądu elektrycznego pozwoliło zastąpić w ten sposób relatywistyczny opis zjawiska i zapisać wzór na siły oddziaływania elektromagnetycznego na ładunek w postaci Lorentza $\vec{F} = Q[\vec{K} + \vec{v} \times \vec{B}]$. Równania Maxwella rozróżniające i wiążące pomiędzy sobą dwa aspekty pola elektromagnetycznego: pole elektryczne (K) oraz magnetyczne (B) można uważać za model kryjący w sobie relatywistyczny aspekt elektromagnetyzmu (to, jakie przyjąć wartości składowych K oraz B tego pola, zależy wyłącznie od pozycji obserwatora, od jego prędkości względem układu współrzędnych). Tak więc u podstaw modelu matematycznego Elektromechaniki tkwią postulaty klasycznej

(niekwantowej) mechaniki relatywistycznej, jednak wprowadzenie do postulatów niezależnych definicji pola elektrycznego i magnetycznego oraz ładunku Q i prądu $i = \frac{dQ}{dt}$ pozwala w opisie makroskopowym ruchu materialnych obiektów (z dostatecznie małymi prędkościami) posługiwać się klasyczną mechaniką newtonowską.

Taka sytuacja określa związki pomiędzy postawą metodyczną Elektromechaniki oraz Mechaniki Teoretycznej i innych pokrewnych jej dyscyplin.

2. Równania Maxwella a podstawowy model Mechaniki Analitycznej

Przed około 110 laty Maxwell zbudował syntezę elektrodynamiki jako nauki doświadczalnej, ale wkrótce potem (w ciągu kilku dziesiątków lat) okazało się, że jest ona wyprowadzalna z wcześniejszych (o kilkadziesiąt lat przed sformułowaniem Maxwella) sformułowań Mechaniki Analitycznej opisującej oddziaływania pomiędzy cząstkami (punktami) materialnymi w próżni. Potrzebne tu były tylko: pojęcie ładunku elektrycznego, oddziaływania między ładunkami w próżni odwrotnie proporcjonalnego do kwadratu odległości, Zasada Zachowania Ładunku, Zasada Zachowania Energii oraz model mechaniki relatywistycznej. Najbardziej zwięzłą i przejrzystą postać uzyskuje model matematyczny zapisany w notacji wektorowej w postaci różniczkowej wzgl. całkowej

$$(1) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} K &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho & \oint_{\Sigma} K d\sigma &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q \\ \operatorname{div} B &= 0 & \oint_{\Sigma} B d\sigma &= 0 \\ \operatorname{rot} K &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \oint_{\Gamma} K ds &= -\frac{\partial \psi_B}{\partial t} \\ \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} B &= j + \varepsilon_0 \frac{\partial K}{\partial t} & \frac{1}{\mu_0} \oint_{\Gamma} B ds &= i + \varepsilon_0 \frac{\partial \psi_K}{\partial t} \end{aligned}$$

Model ten, uzupełniony wzorem Lorentza na siłę oddziaływania pola na ładunek

$$(2) \quad F = Q[K + v \times B]$$

oraz równaniem ruchu punktu materialnego o masie m związanej z ładunkiem Q

$$(3) \quad F = m \frac{dv}{dt}$$

pozwała rozwiązać każdy problem (w skali makroskopowej) mechaniki analitycznej oddziaływania ładunku związanego z cząstką materialną w przestrzeni pustej. Ziarnista struktura materii i to zarówno masy jak i ładunku czyni model wyrażony równaniami (1, 2, 3) bezużytecznym dla opisu oddziaływań w ośrodku materialnym. Koniecznym jest uzupełnienie tego modelu opisem własności materii oddziaływującej z polem tj. jej polaryzowalności pod wpływem pola K , magnesowalności pod wpływem pola B oraz zdolności przewodzenia prądu elektrycznego. Jedynie przypisanie materii cech ciągłości, jednorodności

i izotropowości pozwoliło Maxwellowi własności polaryzowalności i magnesowalności materii opisać przy pomocy współczynników liczbowych ϵ , μ oraz przy wprowadzeniu nowych wektorów $D = \epsilon\epsilon_0 K$ oraz $H = \frac{1}{\mu\mu_0} B$ zapisać pole w tak wyidealizowanej materii w postaci symetrycznych wzorów o analogicznej postaci jak (1):

$$(4) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} D &= \varrho & \oint_{\Sigma} D d\sigma &= Q \\ \operatorname{div} B &= 0 & \oint_{\Sigma} B d\sigma &= 0 \\ \operatorname{rot} K &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \oint_{\Gamma} K ds &= -\frac{\partial \psi_B}{\partial t} \\ \operatorname{rot} H &= j + \frac{\partial D}{\partial t} & \oint_{\Gamma} H ds &= i + \frac{\partial \psi_D}{\partial t}. \end{aligned}$$

Podstawowym modelem dla opisu zjawisk elektromagnetycznych jest model polowy Maxwella, ale technika mając do dyspozycji metody Mechaniki Analitycznej szybko doprowadziła do dyskretyzacji równań Maxwella i zastąpienia modelu polowego modelem obwodowym obowiązującym w Mechanice Analitycznej.

Całkowa postać równań Maxwella wskazuje drogę do dyskretyzacji opisu pola elektromagnetycznego w obiektach materialnych. Wyodrębniając w obiekcie przewodniki tj. te części obiektu w obrębie (wewnątrz) których może następować przepływ swobodnego ładunku, lub na których powierzchni może się swobodny ładunek gromadzić, określamy odpowiednio całki skalara gęstości ϱ :

$$\text{ładunki} \quad \int \varrho dV = Q,$$

$$\text{prądy} \quad \int \varrho \vec{v} d\sigma = \int \vec{j} d\sigma = i = \frac{dQ}{dt}.$$

Przechodząc od wektorów K , B określających lokalnie pole w punktach przestrzeni do ich skalarnych całek wzdłuż wyróżnionych przez przewodniki torów lub powierzchni określamy odpowiednio elektryczne napięcie

$$u_{ab} = \int_a^b \vec{K} d\vec{s}$$

$$\text{magnetyczne strumienie sprzężone } \psi_B = \int \vec{B} d\vec{\sigma}$$

otrzymujemy zapis związków pomiędzy tymi całkami w postaci liniowej

$$Q = Cu$$

$$\psi = Li$$

stanowiący równocześnie podstawę dla definicji pojemności C oraz indukcyjności L jako globalnych atrybutów obiektu. Wartości liczbowe tych atrybutów wynikają z geometrii obiektu oraz własności materiałowych (polaryzowalności i magnesowalności). Uwzględ-

niając, że przepływ prądu przez przewodnik jest uwarunkowany istnieniem pola elektrycznego $j = \gamma K$ (prawo Ohma), zapiszemy tę zależność w postaci całkowej

$$u = Ri \quad (\text{prawo Ohma}).$$

Rezultatem tak przeprowadzonej operacji dyskretyzacji jest równanie różniczkowe zwyczajne stanowiące globalny opis obiektu o wyróżnionej zamkniętej strudze prądu „ i ” przy pomocy jego globalnych parametrów R , L , C , obiektu zwanego prostym (pojedynczym) obwodem elektrycznym:

$$(5) \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = u$$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} (Q - Q_0) = u.$$

Powyższe równanie różniczkowe zwyczajne liniowe o stałych współczynnikach jest klasycznym równaniem w Mechanice Analitycznej opisującym ruch punktu materialnego

Bardzo wiele technicznych zagadnień elektrodynamiki znajdowało swoje rozwiązania w oparciu o obwodowe równania postaci (5) tj. w oparciu o podstawowy model Mechaniki Analitycznej ruchu punktu wzgl. układu punktów materialnych. Przechodzenie do modelu ruchu układu punktów materialnych było konsekwencją opisu złożonych obwodów elektrycznych, gdy mianowicie w rozpatrywanym obiekcie zostają wyróżnione odrębne lub ze sobą sprzężone zamknięte strugi prądowe w liczbie $n > 1$. Sprzężenie ze sobą poszczególnych strug prądowych następuje przez pole elektryczne lub magnetyczne, czemu odpowiadają pojęcia wzajemnych indukcyjności L_{jk} wzgl. pojemności C_{jk}

$$\psi_k = \sum_{j=1}^n L_{jk} i_j$$

$$Q_k = \sum_{j=1}^n C_{jk} u_j.$$

Innym rodzajem sprzężenia jest galwaniczne połączenie ze sobą częściowych odcinków strug prądowych wspólnymi przewodnikami, w których płyną wówczas odpowiednio sumy lub różnice prądów sprzęgających się strug prądowych.

Interpretacja teorii równań różniczkowych liniowych ze stałymi współczynnikami w elektrotechnice nazywana teorią obwodów liniowych została bardzo starannie i doszczętnie wyeksploatowana i zużytkowana dla rozwiązywania wielu technicznych problemów elektrotechniki stosowanej. Szczegółowe metody obliczeniowe opracowane w ramach tej teorii mogą być lub są z dużym pożytkiem stosowane nie tylko w problemach mechaniki analitycznej i elektrotechniki ale również w bardzo wielu innych więcej lub mniej pokrewnych dziedzinach: sieciach wodnych, gazowych, transporcie, układach sterowania i regulacji itp. Również w elektromechanice posługiwanie się takim modelem na długo okazywało się wystarczającym w bardzo wielu technicznych problemach. Ta utrzymująca się dominacja metod opartych o liniowy model zdyskretyzowanego pola elektromagnetycznego przyniosła też ujemne skutki: daleko posunięta rutyna technika w analizowaniu zjawisk oparta o liniowy model obwodowy osłabiała jego krytycyzm w ocenie granic technicznej użyteczności modelu.

3. Pojęcia energii — Analogie elektromechaniczne

Dalsza energiczna eksploatacja przez elektryków metod mechaniki analitycznej następowała w oparciu o wprowadzone w mechanice teoretycznej pojęcia energii postaci mechanicznej tj. związanej z ruchem materii. Sprzyjała temu okoliczność, że w mechanice analitycznej rozróżnia się dwa rodzaje energii: energię kinetyczną E_k związaną z pędem i prędkością

$$E_k = \int v dp$$

oraz energię potencjalną związaną z siłą i położeniem

$$E_p = \int F dx.$$

Przy nieliniowych funkcjach pędu $p(v)$ oraz siły $F(x)$ wprowadzenie pojęcia koenergii

$$E'_k = \int p dv = pv - \int v dp$$

$$E'_p = \int x dF = Fx - \int F dx$$

pozwała używać tych wielkości zamiennie rozpatrując stan energetyczny określony jednoznacznie przez współrzędne (zmiennie) stanu p , F , \dot{x} , x oraz ilość zmagazynowanej energii.

W elektrotechnice rozróżnia się również dwa rodzaje energii: energię pola magnetycznego związaną ze strumieniem i prądem

$$E_m = \int i d\psi$$

oraz energię pola elektrycznego E_e związaną z potencjałem i ładunkiem

$$E_e = \int u dQ.$$

Przy nieliniowych funkcjach strumienia $\psi(i)$ lub potencjału $u(Q)$ również i w elektrotechnice może się okazać użytecznym posługiwanie się odpowiednio pojęciem koenergii.

Paralelizm pojęć energii w mechanice i elektromagnetyzmie narzuca koncepcję analogii elektromechanicznych tj. przyjęcia odpowiedniości pomiędzy współrzędnymi oraz zmiennymi stanu w opisie ruchu punktów materialnych oraz pola elektromagnetycznego.

Wybór jednej z dwu możliwości ustalenia odpowiedniości jest tutaj jednakowo uprawniony. Tradycje elektromechaniki z techniczną realizacją układów głównie wykorzystujących magazynowanie energii w polu magnetycznym skłaniają do przyjęcia analogii:

Mechanika	— Elektryka	Symbol wspólny Elektromechaniki
energia potencjalna (położenia)	— en. pola elektrycznego	E_{pot}
energia kinetyczna (ruchu)	— en. pola magnetycznego	E_{kin}
położenie, kąt x, φ	ładunek Q	q
prędkości $\dot{x}, \dot{\varphi}$	napięcie prądu $\dot{Q} = i$	\dot{q}
siły, momenty F, \mathfrak{M}	napięcie u	F
pęd, kręt p, Θ	strumień skojarzony ψ	p

W ten sposób tworzy się wspólny język symboli a nawet nazw i wyrażań mechaniki i elektryki mający swoje oparcie i uzasadnienie we wspólnym modelu mechaniki teoretycznej, czemu daje wyraz ostatnia kolumna powyższej tabeli. Model ten to równanie różniczkowe drugiego rzędu. Jako równanie zwyczajne ma swoją interpretację w mechanice w opisie ruchu układu punktów materialnych lub układu ciał sztywnych, w elektryce natomiast w obwodach o elementach R, L, C lub w sieciach elektrycznych złożonych z przewodników prądu, kondensatorów i cewek jako magazynów energii pola elektrycznego i magnetycznego. W świetle tak przyjętych analogii jako słownika symboli, nazw i wyrażań mechaniki i elektryki widoczne są duże korzyści dla rozwiązywania technicznych problemów zarówno mechaniki jak i elektryki. Duża praktyczna przydatność mierniczej techniki elektrycznej — pomiarów i rejestracji napięcia — łatwość produkowania elementów R, L, C oraz ich zestawienia w układy sieciowe jak również osiągnięcia techniki w zakresie produkowania stabilnych wzmacniaczy o dużym wzmocnieniu — pozwalają szeroko i wydajnie wykorzystywać analogie elektromechaniczne dla rozwiązywania bardzo wielu i różnorodnych problemów technicznych z rozmaitych dziedzin techniki mających swój model matematyczny w postaci równań różniczkowych zwyczajnych a nawet równań różniczkowych cząstkowych (technika obliczeniowa z zastosowaniem maszyn analogowych).

Również elektromechanika korzysta z analogii elektromechanicznych w oparciu o podstawowy model mechaniki analitycznej. Należy tu jednak równocześnie podkreślić, że równanie (5) nie przedstawia modelu układu elektromechanicznego. Równanie (5) można tylko alternatywnie odczytywać już to w języku elektryki, już też w języku mechaniki, elektromechanika natomiast zaczyna się dopiero wówczas gdy w układzie pojawia się co najmniej jeden magazyn, którego poziom energetyczny zależy zarówno od współrzędnej mechanicznej jak i elektrycznej. W przyjętej poprzednio konwencji analogii elektromechanicznych typowy układ elektromechaniczny — „maszyna elektryczna” — zawiera taki magazyn w postaci cewek elektrycznych magazynujących kinetyczną energię pola magnetycznego, której poziom jest zależny od „pędu” ψ oraz współrzędnych położenia cewek lub innych ruchomych elementów obwodu magnetycznego:

$$p_k(\dot{q}_j, \dot{q}_k, q_l) = \psi_k(i_j, i_k, \varphi),$$

$$E_{kin} = \int \dot{q}_k dp_k = \int i_k d\psi_k.$$

4. Model układu elektromechanicznego

Prawem fizyki stanowiącym postulat dla interpretacji teorii matematycznej w modelu układu elektromechanicznego jest — jak zwykle w technice — Zasada Zachowania Energii. Układ elektromechaniczny stanowi zespół magazynów energii mechanicznej (kinetycznej, potencjalnej) i energii pola (magnetycznego, elektrycznego) w liczbie co najmniej dwu a w tym jeden energii mechanicznej oraz jeden energii pola, przy czym w co najmniej jednym magazynie poziom energii zależy zarówno od współrzędnej mechanicznej jak i elektrycznej. Wyrażenie na energię spełniające takie warunki układu elektromechanicznego zrealizowanego przy pomocy cewek magazynujących energię w polu magnetycznym ma zatem postać:

$$\mathcal{E}(\dot{q}_i, q_i) = \sum E_{kin}(\dot{q}_k, \dot{q}_j, q_i) + \sum E_{pot}(q_i).$$

Wzorem mechaniki analitycznej również w elektromechanice okazuje się pożytecznym posługiwanie się zamiennymi pojęciami: energii $\mathcal{E}(\dot{q}, q)$ jako funkcji położenia i prędkości, energii $\mathcal{H}(p, q)$ jako funkcji pędów i położenia (postać Hamiltona), potencjału kinetycznego $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$ jako funkcji położenia i prędkości przy znanych relacjach

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= E'_{kin} - E_{pot} = p\dot{q} - \mathcal{H} \\ \mathcal{E} &= \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} = \mathcal{H} \\ p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}.\end{aligned}$$

Model matematyczny odosobnionego układu elektromechanicznego stanowiący sformułowanie Zasady Zachowania Energii przyjmuje odpowiednio zamienne postaci:

$$(6a) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k} \cdot \ddot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} = 0,$$

$$(6b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0,$$

$$(6c) \quad \begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}.\end{aligned}$$

Treścią procesu energetycznego przebiegającego w układzie elektromechanicznym jest możliwość przemiany energii z jednej postaci w drugą. Aby proces ten był stacjonarnym i mógł służyć potrzebom techniki układ jest połączony z otoczeniem, z którym dokonuje wymiany energii kanałami mocy mechanicznej (iloczyn siły i prędkości ruchu postępowego względnie iloczyn momentu i prędkości ruchu obrotowego) oraz elektrycznej (iloczyn napięcia i prądu), ogólnie kanałami mocy dopływającej do układu z zewnątrz wyrażonej jako iloczyn uogólnionej siły i uogólnionej prędkości

$$F_{zk} \dot{q}_k.$$

W przypadku gdy otoczenie stanowią jedynie źródła tj. siły będące jedynie funkcjami czasu $F_{zk}(t)$, mówimy o sztywnym zasilaniu, siły te pojawiają się wówczas po prawej stronie odpowiednich równań sił (6a), (6b) wzgl. (6c):

$$(6a)' \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k} \cdot \ddot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} = F_{zk},$$

$$(6b)' \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = F_{zk},$$

$$(6c)' \quad \begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p}_k &= - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + F_{zk}.\end{aligned}$$

W przypadku elastycznego zasilania, gdy w otoczeniu znajdują się również magazyny energetyczne zależne od współrzędnych układu, wyrażenia \mathcal{E} , \mathcal{L} , \mathcal{H} zwiększają się odpowiednio o składniki określające poziomy energetyczne tych magazynów otoczenia.

Szczególnym rodzajem wymiany energii pomiędzy układem elektromechanicznym i otoczeniem jest dyssypacja energii tj. oddawanie energii do otoczenia w wyniku nieuporządkowanego mikroskopowego ruchu materii wewnątrz układu przy wzrastającym nieuporządkowaniu. W termodynamice uwzględnia się ten proces w modelu matematycznym przy pomocy pojęcia entropii wprowadzającej to pojęcie do wyrażenia Zasady Zachowania Energii w postaci I Zasady Termodynamiki oraz dołączenia sformułowania II Zasady Termodynamiki. W elektromechanice dyssypacja energii związana jest z mikroskopowym nieuporządkowanym ruchem cząstek materii towarzyszącym makroskopowemu (uporządkowanemu) ruchowi mechanicznemu (zjawisko tarcia) oraz makroskopowemu (uporządkowanemu) przepływowi prądu w przewodnikach (zjawisko Joule'a. Uwzględnienie dyssypacji w modelu elektromechaniki odbywa się tu przy pomocy pojęcia uogólnionej siły tłumienia F_D oraz odpływu do otoczenia mocy $F_{Dk}\dot{q}_k$ po kanale tej uogólnionej prędkości, z którą jest związana dyssypacja. Równania (6) modyfikują się zatem do postaci:

$$(6a)'' \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} = -F_{Dk} + F_{zk}$$

$$(6b)'' \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = -F_{Dk} + F_{zk}$$

$$(6c)'' \quad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} - F_{Dk} + F_{zk}.$$

Równania (6) a, b oraz c stanowią względem siebie równoważne i zamienne modele. Użycie tej lub innej postaci może być dyktowane względami na przyzwyczajenia, pogłębienie interpretacji lub wygodę rozwiązywania równań. Formuła b pozwala interpretować model z pozycji Hamiltona Zasady Najmniejszego Działania oraz użytkować pożyteczne czasem metody rachunku wariacyjnego (m.in. bezpośrednio metody poszukiwania ekstremum funkcyjonału). Formuła c najchętniej używana w przypadku poszukiwania rozwiązań metodami obliczeń cyfrowych.

Postać równań (6) jako matematycznego modelu ruchu układu punktów materialnych w mechanice analitycznej jest warunkowana niezależnością współrzędnych układu. Przyjmując z mechaniki analitycznej metodykę konstruowania i użytkowania modelu dla celów technicznych elektromechanika musi oczywiście przejąć również cały bagaż problemów więzów oraz stopni swobody.

Jeśli chodzi o więzy po stronie współrzędnych mechanicznych, to jest to na ogół problem prosty, a w wielu przypadkach nawet wogóle nie istnieje, gdy mianowicie obiekt ma tylko jeden stopień swobody mechanicznej (np. silnik elektryczny wykonujący pracę mechaniczną za pośrednictwem sztywnego przeniesienia). Po stronie elektrycznej maszyny bezkomutatorowe w konwencjonalnym wykonaniu pracujące w układach bez sterowania dostarczają również prostych równań więzów holonomicznych. Są to łatwo całkowalne

równania węzłowe Kirchhoffa bilansujące prądy gałęzi w łączących je węzłach. W takich prostych układach elektromechanicznych na model matematyczny układu składa się odpowiednia liczba równań „elektrycznych” tj. równań (6) odpowiadających różniczkowaniu po współrzędnej elektrycznej (w liczbie równej liczbie niezależnych oczek obwodu elektrycznego) oraz równania „mechaniczne” odpowiadające różniczkowaniu po współrzędnej mechanicznej (w liczbie równej liczbie stopni swobody ruchu mechanicznego). Pewną komplikację stanowią więzy elektromechaniczne, jakich dostarcza ślizgający się po uzwojeniu względnie dokonujący przełączeń styk wędrujący po uzwojeniu w wyniku ruchu cewek względem zasilającej je z zewnątrz sieci elektrycznej. W pewnych warunkach symetrii zasilania oraz wewnętrznej symetrii ruchomych uzwojeń te nieholonomiczne więzy można sprowadzić do postaci prostych więzów holonomicznych zależnych jedynie od czasu.

Innego rodzaju trudność powstaje, gdy w wyniku włączania w szereg z poszczególnymi fragmentami uzwojenia czy nawet cewkami maszyny elektrycznej lub innego rodzaju przetwornika diod'a zwłaszcza diod sterowanych więzy nabierają charakteru nierówności (słabych nierówności) jako więzy jednostronne.

5. Dwuliniowość i inne źródła nieliniowości modelu i ich konsekwencje

Z poprzednich rozważań wynika, że model układu elektromechanicznego nie jest prostym zesumowaniem modelu mechaniki i obwodu elektrycznego: nie jest to wynik nałożenia na obwód elektryczny o liczbie s_{el} stopni swobody układu mechanicznego o liczbie s_{mech} stopni swobody, lecz układ elektromechaniczny o liczbie $s = s_{el} + s_{mech}$ stopni swobody, którego modelem jest układ s równań różniczkowych o liczbie s niezależnych funkcji — zmiennych stanu. W równaniach elektrycznych występują również niewiadome zmienne mechaniczne i wzajemnie. Jest to wynikiem istnienia magazynów, których energia zależy zarówno od współrzędnych elektrycznych jak i mechanicznych.

Energia poszczególnych magazynów wyraża się formą kwadratową odpowiednich współrzędnych względnie zmiennych stanu. Stąd też uogólniona siła jako pochodna energii względem współrzędnej $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} \text{ wzgl. } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right)$ w przypadku liniowego magazynu o energii zależnej zarówno od współrzędnej elektrycznej jak i mechanicznej jest dwuliniową formą względem tych współrzędnych lub też dwuliniową formą jest odpowiedni składnik pochodnej odpowiedniego pędu względem czasu:

$$p_k = C(q_i) \dot{q}_k$$

$$\mathcal{H}_k = \frac{1}{2} p_k C^{-1}(q_i) p_j$$

$$(7a) \quad \dot{p}_k = C(q_i) \ddot{q}_k + \frac{\partial C(q_i)}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_i$$

$$(7b) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} p_k \frac{\partial C^{-1}(q_i)}{\partial q_i} p_j$$

W elektrycznym równaniu (równaniu napięciowym) pojawia się składnik typu (7a) jako napięcie rotacji (w przypadku maszyny wirującej):

$$\begin{aligned}\psi &= L(\varphi)i = L(\varphi)\dot{Q} \\ \dot{\psi} &= L(\varphi)\ddot{Q} + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \dot{\varphi}\dot{Q} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} \dot{\varphi}\dot{Q} &\stackrel{\text{def}}{=} e_{rot}\end{aligned}$$

W mechanicznym równaniu (równaniu momentów) pojawia się składnik typu (7b) jako moment elektromechaniczny:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \sum_k \sum_j \frac{1}{2} \psi_k \frac{\partial L^{-1}(\varphi)}{\partial \varphi} \psi_j$$

Dwie wyżej opisane cechy są znamienne dla matematycznego modelu w elektromechanice: sprzężenie wzajemne pomiędzy równaniami „elektrycznymi” (napięcie) i „mechanicznymi” (momentów wzgl. sił) oraz występowanie — w przypadku liniowych magazynów — dwuliniowych form w tych równaniach (napięcie rotacji oraz momenty elektromechaniczne). Pierwsza z nich wskazuje, że w ogólnym przypadku nie jest możliwe rozbijanie układu na „część elektryczną” i „część mechaniczną” celem oddzielnego rozwiązywania równań i odrębnego wnioskowania o elektrycznych i mechanicznych własnościach układu. Druga cecha nakazuje się liczyć z tym, że model jest nieliniowym i w najlepszym przypadku sprowadza się do występowania dwuliniowych form w równaniach różniczkowych. Nawyki nabyte dzięki rutynie przy analizowaniu liniowych obwodów elektrycznych mogą się tu stać dla elektryka przeszkodą we właściwym spojrzeniu na problemy elektromechaniki.

Tak więc struktura modelu w elektromechanice prowadzi do nieliniowości równań. Innym źródłem nieliniowości modelu staje się uwzględnienie własności materii. Własności materii mogą wpłynąć na odstępstwa od liniowości takich charakterystyk, jak: zależność sił tłumienia od prędkości (uogólnionych), sił sprężystości od przesunięć (odkształceń), pędu od prędkości — praktycznie bierze się tu pod uwagę jedynie zależność $\psi(i)$.

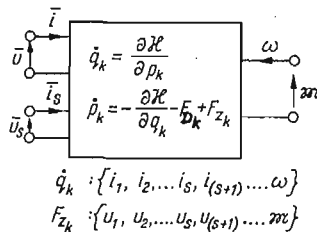
Jeżeli pierwsze spośród wymienionych źródeł nieliniowości (sprężystość, tłumienie elektryczne, tłumienie mechaniczne) w przypadku możliwości wyrażenia charakterystyk przez funkcje analityczne przynoszą jedynie mniej lub więcej znaczne utrudnienia w rozwiązywaniu równań, to nieliniowość magnetyczna przynosi o wiele większe trudności, a nawet jakościowo nowe problemy. Wynika to stąd, że pierwsze są funkcjami jednej zmiennej, podczas gdy strumienie ψ są funkcjami na ogół wielu zmiennych i odstępstwa od liniowości dotyczą nie poszczególnych zmiennych, lecz ich liniowych kombinacji. Superpozycja pól magnetycznych od poszczególnych cewek sprzężonych stanowiąca podstawę dla wyrażenia energii przez formę kwadratową upada a z nią upada możliwość określenia zmagazynowanej w polu magnetycznym energii za pomocą strumieni skojarzonych lub prądów poszczególnych cewek. Dla rozwiązywania technicznych problemów elektromechaniki rezygnuje się z uwzględniania nieliniowości obwodu magnetycznego, posługując się uśrednioną charakterystyką $\psi(i)$ zlinearyzowaną. Jeżeli odstępstwa od średniej są znaczne, można uśrednianie charakterystyk ograniczać do skończonych przedziałów

czasu tak, aby prowadziło to do ograniczania wahań funkcji $\psi(i)$ wokół prostej uśrednionej. Poszukiwanie skutecznych metod przybliżonych rozwiązywania równań elektromechaniki uwzględniających nieliniowość obwodu magnetycznego jest też przedmiotem prac badawczych w tym zakresie. Jest to poszukiwanie kompromisu pomiędzy skutecznością a kosztami obliczeń.

6. Współczesne problemy techniczne i ich implikacje w elektromechanice

O problemach technicznych elektromechaniki i jej współczesnym rozwoju decyduje rozwój potrzeb, jakim ona służy. Zapotrzebowanie pracy mechanicznej wzrasta wraz z rozwojem transportu (w najszerszym znaczeniu tego pojęcia), wraz z ilościowym i jakościowym wzrostem operacji towarzyszącym wciąż udoskonalanym oraz nowym procesom technologicznym w przemyśle, rzemiośle i domowej gospodarce. Wzrasta więc ciągle różnorodność i złożoność napędów elektrycznych tj. układów pozwalających energią elektryczną tak wygodną w przesyśle i rozdziale przetwarzać na pracę mechaniczną bezpośrednio w miejscu jej technologicznego spożycia. W nowoczesnym napędzie odbywa się ta dostawa energii bez potrzeby dalszego jej przekształcania lub co najwyżej przy zastosowaniu możliwie prostych i ekonomicznych urządzeń mechanicznego przekształcania celem dostosowania parametrów doprowadzanej mocy do potrzeb procesu technologicznego. Pierwotnie prosty pojedynczy napęd elektryczny rozwija się w system współpracujących ze sobą i wspólnie sterowanych przetworników elektromechanicznych. Złożoność procesu technologicznego pociąga za sobą złożoność systemu elektrycznego zasilania i sterowania.

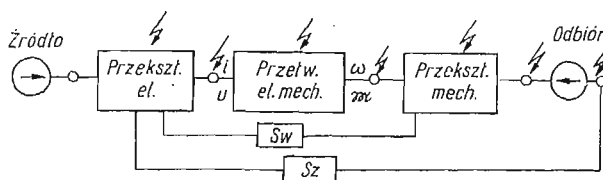
Rys. 3. przedstawia schematycznie (w postaci wielobiegunnika) model przetwornika elektromechanicznego z zapisem równań w postaci (6c). Pochodna \dot{q}_k mierzalna na wejściu



Rys. 3.

mechanicznym (na sprzęgle) jest prędkością ω , uogólniona siła F_{zk} — momentem obrotowym \mathcal{M} . Odpowiednio na wejściu elektrycznym oznaczono część pochodnych \dot{q}_k jako prądy wektora zasilania \bar{i} , część zaś jako prądy wektora sterowania \bar{i}_s i analogicznie F_{zk} jako wektor napięcia zasilania energią \bar{u} oraz napięcia sterowania \bar{u}_s . Przetwornik elektromechaniczny o tak przedstawionym modelu jest głównym elementem systemu elektromechanicznego (rys. 4), na którego całość składają się: źródło dostarczające energię do systemu za pośrednictwem urządzeń elektrycznych przesyłających, rozdzielających i przekształcających energię elektryczną, urządzenie mechaniczne przekształcające uzyskaną z przetwornika

energię mechaniczną i dostarczającą bezpośrednio na miejsce procesu technologicznego pracę oraz układy sprzężeń zwrotnych wewnętrznych (S_w) pomiędzy zmiennymi stanu wewnątrz systemu jak również sprzężeń zewnętrznych (S_z) pomiędzy wskaźnikami oceny jakości produktu i parametrami sterowania. Model samego przetwornika znacznie się teraz wzbogaca i komplikuje nowymi równaniami więzów sterowania. Mogą to być więzy holonomiczne zmniejszające liczbę stopni swobody, jednak na ogół trzeba się liczyć, że sterowanie w układzie zamkniętym (od sprzężeń zwrotnych) wnosi do modelu dalsze równania różniczkowe i stawia jako podstawowy problem stabilności rozwiązań. Dla



Rys. 4.

praktycznych potrzeb techniki orzekanie tylko o istnieniu, jednoznaczności i stabilności rozwiązań nie jest na ogół wystarczającym. Rozważania w elektromechanice na temat kryteriów i metod „technicznej stabilności” wymagają powiązania z analizą warunków eksploatacji, sposobów zabezpieczenia oraz niezawodności pracy całego systemu oraz poszczególnych jego elementów.

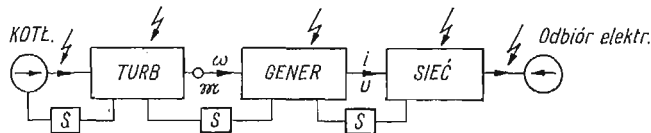
Sterowanie przy pomocy sprzężeń zwrotnych od wskaźników jakości produktu stwarza w elektromechanice szeroki problem optymalizacji układu napędowego jak również optymalizacji konstrukcji głównego jego składnika, przetwornika elektromechanicznego. Przy ciągle wzrastających żądaniach technicznych wzrostu wydajności procesów technologicznych w zagadnieniach optymalizacji wysuwa się na czoło dynamika procesu elektromechanicznego przetwarzania energii.

Już przy analizie modelu elementarnego przetwornika — równanie (6) — oczywistym stwierdzeniem była niemożliwość rozbicia modelu i rozwiązywania „równań elektrycznych” w wyodrębnieniu od „równania mechanicznego”. Tym bardziej obecnie przy dalszym powiązaniu pomiędzy zmiennymi i parametrami mechanicznymi i elektrycznymi przez sprzężenia zwrotne ewentualne próby rozcinania systemu na „część mechaniczną” i „elektryczną” byłyby oczywistym nieporozumieniem.

Na schemacie systemu (rys. 4) symbole zamieszczone nad węzłami oraz poszczególnymi elementami systemu przypominają, że funkcje zmiennych na wejściach jak również parametry systemu ulegają stochastycznym zakłóceniom. Uwzględnienie tej okoliczności nie zmienia deterministycznego charakteru modelu elektromechaniki, natomiast ma swoje implikacje we współczesnej technice pomiarów, w problemach identyfikacji elementów systemu elektromechanicznego, w metodyce oceny stabilności i niezawodności pracy systemu.

Nieustanny wzrost zapotrzebowania energii elektrycznej ma również swoje implikacje we współczesnej elektromechanice związanej z wytwarzaniem energii elektrycznej. Jak dotąd niemal wyłączną techniką jej wytwarzania jest przetwarzanie elektromechanicz-

ne w turbo i hydrogeneratorach. Dlatego też okresowi podwojenia zużycia energii elektrycznej towarzyszy też podobny okres podwojenia mocy jednostkowej turbogenerators. Projektowanie, produkcja i eksploatacja współczesnych turbogeneratorów największych mocy (w skali krajowej rzędu 500 MW, w skali światowej ponad 1000 MW) stawia współczesnej elektromechanice nowe problemy teoretyczne z zakresu konstrukcji przetworników oraz z zakresu eksploatacji systemów wielkich mocy. Konstruowanie przetwornika energii o tak dużej mocy jednostkowej jest związane z koniecznością doprowadzenia do uzwojenia bardzo dużego prądu (rzędu kilkunastu kA), przenoszenia przez wał bardzo dużego momentu (rzędu kilkunastu MNm — w stanach dynamicznych) oraz odprowadzenia z obiektu bardzo dużej mocy cieplnej (rzędu kilku MW), stanowi więc bardzo złożony problem nie tylko w sensie elektromagnetycznym ale równocześnie wytrzymałościowym i termodynamicznym. Przetwarzanie tak dużych mocy, ich przesył i doprowadzenie do wielkich



Rys. 5.

odbiorców, jakimi są wielkie zakłady przemysłowe i okręgowe sieci elektryczne, stwarza techniczną problematykę projektowania, budowy i eksploatacji wielkich systemów energetycznych (rys. 5), w których następuje analogiczne powiązanie mechanicznych i elektrycznych zmiennych stanu jak w przypadku elektromechanicznego systemu napędowego (rys. 4).

Jakkolwiek połowe równania Maxwella stanowiły wyjściową pozycję elektrotechniki, to jednak tradycja elektromechaniki poszła początkowo całkowicie w kierunku posługiwania się obwodowym modelem mechaniki analitycznej uzyskanym w drodze dyskretyzacji przestrzeni fizycznej do bezwymiarowych punktów przestrzeni zmiennych stanu. Użytkowanie równań Maxwella w ich polowej postaci sprowadzało się jedynie co najwyżej do metod obliczania globalnych parametrów zastępczego obwodu takich jak indukcyjność rozproszeniowa uzwojeń. Jednak nawet i w tych przypadkach w metodach obliczeń elektromechaniki obserwowana niechęć do analizy polowej była uzasadniona wielkimi trudnościami przyswajania analitycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych ze względu na wielką złożoność ukształtowania powierzchni, na których należy zadawać problemy brzegowe. W świetle współczesnych problemów elektromechaniki i równocześnie współczesnych możliwości, jakie daje technika obliczeniowa zaznacza się wzrastająca rola modelu polowego. Jak dotychczas wzrastające zainteresowanie użytkowaniem polowego modelu dla rozwiązywania technicznych problemów elektromechaniki dotyczy obliczania rozkładu stacjonarnych lub quasistacjonarnych pól magnetycznych przetwornika jako całości. Trudności wynikające z niekorzystnych (dla metod analitycznych) kształtów brzegów poszczególnych podobszarów, z jakich składa się pole przetwornika, znajdują tu szanse przezwyciężenia w systemach obliczeń cyfrowych zwłaszcza przy stosowaniu metod elementów skończonych. Te obliczenia — jakkolwiek angażujące bardzo

duże maszyny cyfrowe i kosztowne — okazują się opłacalnymi dla problemów projektowania bardzo dużych turbogeneratorów.

Naturalną konsekwencją zaangażowania polowego modelu w elektromechanice jest stosowanie tensorów w opisie obiektów elektromechaniki. I tu znów należy podkreślić podstawową rolę, jaką dla metod elektromechaniki odgrywa mechanika ośrodków ciągłych. W technicznych problemach elektromechaniki model polowy jest formułowany w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej zazwyczaj we współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych, przy rozpatrywaniu dwóch wektorów pola (K oraz B). Elektryczne i magnetyczne własności materii w modelu polowym przyjmującym jako założenie ciągłość materii określa pole tensorów drugiego rzędu μ , ε oraz γ przy pomocy których określone są wektory B , D oraz j jako funkcje wektorów H oraz K :

$$B^\lambda = \mu_\nu^\lambda H^\nu \quad D^\lambda = \varepsilon_\nu^\lambda K^\nu \quad j^\lambda = \gamma_\nu^\lambda K^\nu$$

(W teoretycznej elektrodynamice rozpatruje się jednolite pole elektromagnetyczne próżni w czterowymiarowej pseudoeuklidesowej przestrzeni Minkowskiego jako antysymetryczny czterotensor pola — o 6 współrzędnych: $K_x, K_y, K_z, B_x, B_y, B_z$).

7. Uwagi końcowe

Rozwój elektromechaniki jako dyscypliny, której metodyka prac badawczych jak również techniczna problematyka tak silnie są powiązane z mechaniką teoretyczną i stosowaną, pozwala na podkreślenie pewnych wniosków ogólnego charakteru.

- a) Metodyka rozwijana w pracach badawczych mechaniki i elektryki (a zwłaszcza elektromechaniki) wykazuje wspólne cechy — dotyczy to zwłaszcza pozycji wyjściowych. Wzajemne jej oddziaływanie jest dla obydwu dyscyplin pożyteczne.
- b) Projektowanie i technologia produkcji urządzeń (obejmowane tradycyjną nazwą przemysłu elektromaszynowego) to główna domena elektromechaniki, nie dającej się dzielić na dwa odrębne składniki: elektryczny i mechaniczny. Dotyczy ta uwaga również problemów projektowania i eksploatacji elektromechanicznych systemów napędowych.
- c) W świetle powyższych uwag uzasadnionym jest dążenie do bardziej zdecydowanego logicznie skonstruowanego systemu nauczania akademickiego elektromechaniki na szerokiej bazie teoretycznej mechaniki analitycznej oraz teorii pól (w tym pola elektromagnetycznego) w materii makroskopowo traktowanej jako ośrodek ciągły. Analogie elektromechaniczne stają się tutaj bardzo użytecznym i skutecznym środkiem metodycznym.
- d) Dalszy rozwój elektromechaniki będzie również uwarunkowany rozwojem metod teoretycznej mechaniki jako jej podstawowej dyscypliny.

Literatura cytowana w tekście

1. W. RUBINOWICZ, W. KRÓLIKOWSKI: *Mechanika teoretyczna*, Warszawa, PWN 1967.
2. A. PUCHAŁA: *Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych*, Warszawa, PWN 1977.

Резюме

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ

Электромеханика — в стадии формулирования, развития и будущей перспективы — сильно связана с механикой. Целая методика этой дисциплины опирается на достижениях теоретической механики, которая является основой для всех главных дисциплин механики.

Summary

METHODS OF INVESTIGATION AND TECHNICAL OF ELECTROMECHANICS

Electromechanics — at the stage of creation, development and future trends — exhibits remarkable ties with mechanics. The methods used in this discipline are based on the achievements of the theoretical mechanics which, by the way, are also fundamental for all applied disciplines of technology. The paper illustrates this thesis and formulates certain implications.

AKADEMIA GÓRNICZO HUTNICZA, KRAKÓW
INSTYTUT MASZYN I STEROWANIA
UKŁADÓW ELEKTROENERGETYCZNYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 maja 1978 r.

Referat przeglądowy wygłoszony na zjeździe z okazji XX-lecia PTMTiS

WYTRZYMAŁOŚĆ I ODKSZTAŁCALNOŚĆ GRANICZNA PRZY ROZCIĄGANIU FIBROBETONU Z WŁÓKNEM STAŁOWYM

JANUSZ KASPERKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Stan aktualny zagadnienia

Fibrobeton jest to kompozyt o matrycy cementowej, którą stanowi zaczyn cementowy, zaprawa lub beton, uzbrojonej krótko pociętymi, rozproszonymi włóknami z metalu, szkła, węgla lub tworzyw sztucznych. Matryca fibrobetonu jest krucha, odkształcalność graniczna włókien uzbrojenia znacznie wyższa od odkształcalności matrycy, a w odróżnieniu od kompozytów wysokiej wytrzymałości procent uzbrojenia jest bardzo niewielki — np. $\leq 3\%$ objętościowo. W związku z powyższym wszystkie informacje uzyskane na podstawie badań innych materiałów kompozytowych mają w odniesieniu do fibrobetonu ograniczoną przydatność i niezbędne jest w tym przypadku podejmowanie specjalnych badań o charakterze podstawowym.

Dla inżynierii budowlanej największe znaczenie ma fibrobeton z włóknem stalowym, zwany również drutobetonem. Do tego tylko tworzywa ograniczone były niniejsze badania.

Na temat fibrobetonu opublikowano stosunkowo wiele danych doświadczalnych. Pierwsze badania nad fibrobetonem z włóknem stalowym opisał ROMUALDI już w r. 1963 [1, 2], jednak liczba przeprowadzonych dotychczas badań nad rozciąganiem tego kompozytu jest znikoma [3]. Przyczyną są tu najprawdopodobniej trudności eksperymentalne. Mimo powszechnego zainteresowania betonem, dotychczas w nielicznych zaledwie przypadkach udało się uzyskać pełną krzywą σ — ϵ betonu nieuzbrojonego [4, 5], a podobne trudności występują również przy badaniach fibrobetonów. Brak jest publikacji dotyczących granicznej odkształcalności fibrobetonu zarówno przy rozciąganiu jak i przy zginaniu.

Wprowadzenie do kruchej matrycy cienkich włókien o wysokiej wytrzymałości daje w efekcie nowe tworzywo konstrukcyjne, nieporównywalne w zasadzie ani z betonem ani z żelbetem. Można przypuszczać, że obecność włókien zmienia właściwości otaczającej je matrycy, napewno zaś włókna mogą działać hamująco na propagację rys powstających przy zniszczeniu. W związku z tym szczególnej wagi nabierają obserwacje zachowania się materiału w fazie po zarysowaniu. Badania tego rodzaju prowadzić warto jedynie przy możliwie jednorodnym stanie naprężenia. Nie nadają się tu takie konwencjonalne próby wytrzymałościowe znane z technologii betonu, jak próba ściskania lub rozłupywania, ponieważ rzeczywisty rozkład naprężeń nie jest wówczas znany. Stosunkowo jednorodny stan deformacji występuje przy rozciąganiu osiowym, przy czym próba ta stanowi zarazem najsurowszy sprawdzian jakości wykonania materiału.

Wstępne prace własne oraz przegląd piśmiennictwa [3] wykazały, że proces zarysowywania się fibrobetonu, spowodowane zarysowaniem zmiany współczynnika odkształcalności itp., należy badać w dostatecznie sztywnej maszynie wytrzymałościowej, oraz w sztywnym układzie obciążającym. Chodzi tu o sztywność zarówno samej maszyny jak i szcęk, głowic, a nawet badanej próbki, ponieważ nadmiar energii zmagazynowanej w układzie rozciągającym spowoduje niekontrolowane zniszczenie rozciąganego elementu, bez możliwości obserwowania procesu zarysowywania się matrycy.

Jedną z podstawowych wątpliwości odnośnie fibrobetonu z włóknem stalowym dotyczy sposobu w jaki obecność gęsto rozproszonego, cienkiego włókna wpływa na pojawienie się i propagację rys w matrycy oraz na odkształcalność graniczną kompozytu. Zagadnienie odkształcalności granicznej postawiono już dawno w odniesieniu do tradycyjnego betonu i żelbetu: spowodowało ono zresztą liczne kontrowersje. Możliwość wzrostu odkształcalności granicznej matrycy w związku z nasyceniem jej uzbrojeniem rozproszonym przewidziano analitycznie [6], jednak doświadczalne potwierdzenie tej hipotezy — np [7] nasuwa szereg wątpliwości.

Prowadzenie prób czystego rozciągania w zbyt „miękkiej” maszynie wytrzymałościowej oraz ograniczanie się do układów uzbrojenia tylko 2D lub 3D, tj. dwu- lub trój-wymiarowych, były przyczyną wyciągnięcia wniosków o znikomym wpływie włókien na wytrzymałość fibrobetonu — por. np. [8].

Dopiero w ostatnich latach udało się pomyślnie zastosować linearyzację rozproszonego uzbrojenia stalowego w matrycy [9].

Również niedawno uzyskano pierwsze wyniki dotyczące analizy rzeczywistego rozkładu włókien rozproszonych w kompozycie — m. in. [10, 11]. Dotychczas jednak zagadnienie wytrzymałości i odkształcalności granicznej przy rozciąganiu fibrobetonu z włóknem stalowym, a zwłaszcza wpływu na te cechy struktury uzbrojenia włóknistego, nie zostało wyjaśnione.

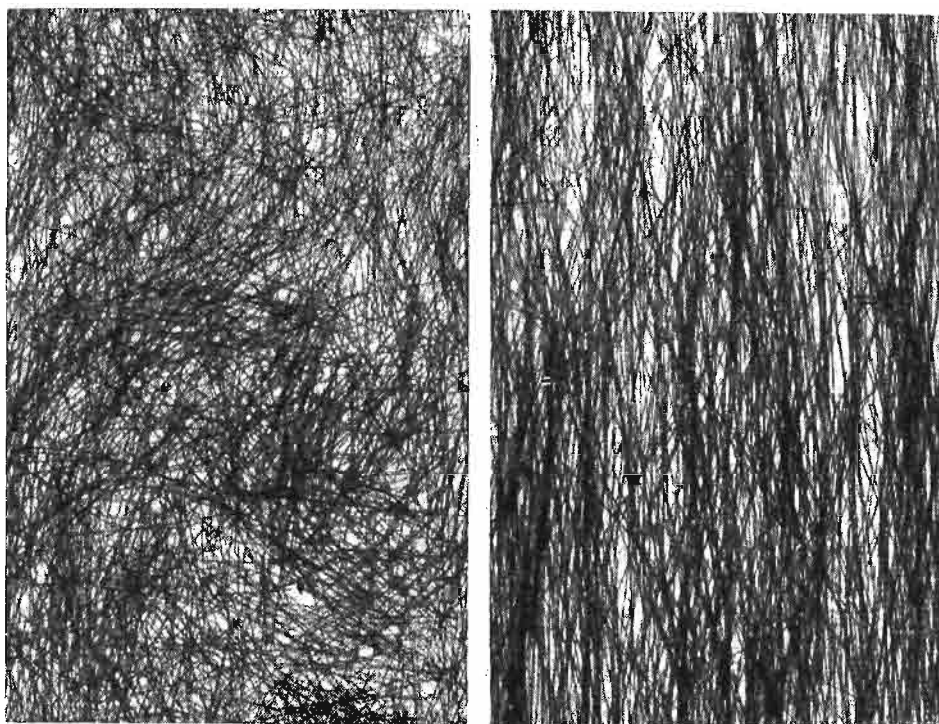
2. Cele, metoda i sposób przeprowadzenia badań

Celem niniejszych badań była dokładna obserwacja przebiegu zniszczenia w rozciąganych elementach z fibrobetonu uzbrojonego włóknem stalowym, a także stwierdzenie wpływu kształtu włókien oraz ich rozkładu na wytrzymałość i odkształcalność kompozytu. Układy pomiarowe zaprojektowano w ten sposób aby móc określić przy jakim obciążeniu i jakim odkształceniu pojawiają się pierwsze rysy, oraz jakie odkształcenie materiału można uznać za graniczne. Jako graniczne rozumiane jest tutaj odkształcenie jednostkowe, które występuje w materiale pod największym obciążeniem próbki rozciąganej, przy czym do odkształcenia tego wchodzi ewentualne mikrorysy. Eksperymenty miały ponadto wykazać jak wpływa obecność uzbrojenia włóknistego na rozkład i morfologię rys oraz czy w fibrobetonie z włóknem stalowym możliwe jest wystąpienie zarysowania wielokrotnego (multiple fracture — por. [6]), przewidywanego na drodze analitycznej ale dotychczas nie stwierdzonego doświadczalnie.

Celem podjętego programu badawczego było także stworzenie podstaw eksperymentalnych do analitycznego powiązania wytrzymałości i odkształcalności kompozytu z właś-

ciwościami i rozmieszczeniem uzbrojenia. Rozkład uzbrojenia obserwowany był za pomocą analizy zdjęć rentgenowskich, oraz przez pocięcie uprzednio zniszczonych w stanie osiowego rozciągania próbek i policzenie włókien widocznych na powierzchni przekroju poprzecznego. Wyniki tych obserwacji oraz teoria przedstawiona w [10, 11] powinny umożliwić określenie faktycznej zawartości włókien kompozycie, co stanowi jeden z najważniejszych parametrów fibrobetonu.

Z przebiegu dotychczasowych badań wiadomo było, że zawartość ta różni się często od zawartości projektowej, a uwzględnienie tej ostatniej wprowadza błędy wynikające z niewłaściwego mieszania, betonowania, linearyzacji itp. Przykłady radiogramów ilustrujące dwie odmienne struktury badanego materiału pokazano na rys. 1.

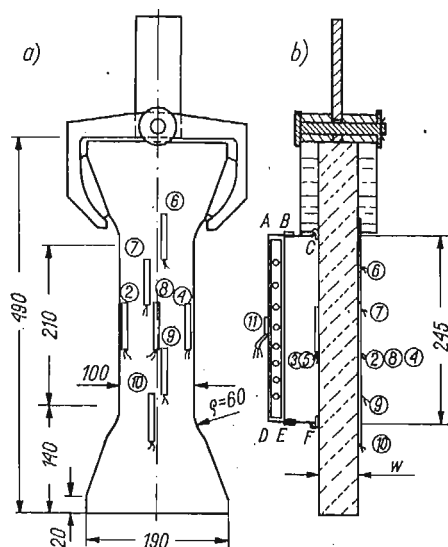


Rys. 1. Radiogramy wycinków ze środkowej części próbek włóknistych: a — dwuwymiarowy (2D) układ uzbrojenia w próbce nr 16, b — uzbrojenie zlinearyzowane (1D) w próbce nr 14; grubość warstwy fibrobetonu ok. 28 mm

Naprężenia rozciągające występują w większości rozmaicie obciążanych elementów konstrukcyjnych, w których stanowią lokalną, bezpośrednią przyczynę zniszczenia. Badania nad rozciąganiem są przeto niezbędne przy próbach opracowania podstaw projektowania konstrukcji fibrobetonowych, takich jak np. nawierzchnie drogowe (obciążenie w wyniku działania skurczu niejednorodnego), stracone formy do konstrukcji żelbetowych lub konstrukcje pływające (zginanie), konstrukcje powłokowe (dwuwymiarowe stany naprężenia) itp.

Wybór parametrów niniejszych badań oparto na przeprowadzonych doświadczeniach wstępnych. Zastosowano tylko jedną zawartość procentową uzbrojenia — 2% objętościowo, rozłożonego w matrycy w układzie jedno- i dwu-wymiarowym (1D i 2D). Włókno stalowe stosowano w dwóch gatunkach: krótsze i gładkie (długość \times średnica = $25 \times 0,38$ mm,) oraz dłuższe i z zakotwieniami typu opatentowanego przez firmę Bekaert ($30 \times 0,40$ mm). Badania miały wykazać w jakim stopniu zabieg linearyzacji układu włókien podnosi właściwości wytrzymałościowe kompozytu.

Do badań użyto próbek wiosełkowych, których kształt i wymiary, podobnie jak kształt szczęk do obciążania, zaprojektowano starając się uzyskać układ możliwie sztywny (rys. 2).



Rys. 2. Kształt próbki wiosełkowej i rozmieszczenie czujników do pomiarów odkształceń: a — widok boczny próbki, b — przekrój poprzeczny. Od 2 do 10 — elektrooporową tensometry o bazie 60 mm, przyklejane na powierzchni próbki, 11 — przykładany czujnik wydłużenia środkowej części próbki, o bazie pomiaru 254 mm, mocowany do reperów C i F przyklejonych na powierzchni betonu. Czujnik składa się ze sztywnego trzonu ABDE do którego przymocowano giętkie ramiona BC i EF, wyposażone w tensometry elektrooporowe w pełnym układzie mostkowym. W górnej części rysunku pokazano rozwiązanie konstrukcji szczęk do obciążania próbki

Z uwagi na wymiary szczęk, grubość próbek może sięgać 100 mm, jednak w omawianych badaniach ograniczono się do próbek o grubości 25 - 30 mm.

Matrycę zaprojektowano w ten sposób, że na 1 m³ fibrobetonu wypadało 550 kg cementu, 1375 kg piasku o średnicy ziaren do 4 mm, oraz 270 l wody. Świeża mieszanina miała konsystencję charakteryzującą się opadem stożka rzędu 110 - 150 mm¹⁾.

Do badań przygotowano ostatecznie 5 serii po 4 - 5 próbek, wg zestawienia jak poniżej:

¹⁾ Próbki do badań zostały wg szczegółowych wytycznych i pod nadzorem autora wykonane w CBI (Instytut Cementu i Betonu) w Sztokholmie, w ramach współpracy między PAN a Królewską Szwedzką Akademią Nauk.

Rodzaj uzbrojenia	Numeracja próbek
Matryca bez uzbrojenia	nr 1 do nr 5
Włókno gładkie — układ 2D	6 do 10
j.w. — układ 1D	11 do 14
Włókno z zakotwieniami	
— układ 2D	15 do 19
j.w. — układ 1D	20 do 24

Przy okazji betonowania próbek wiosełkowych wykonano dodatkowo serie próbek w postaci płyt z fibrobetonu o analogicznym składzie, które po upływie ok. miesiąca zostały zniszczone na drodze rozciągania psiowego, bezpośrednio w szczękach maszyny wytrzymałościowej, przy czym odkształcenia materiału nie były mierzone.

Na podstawie wstępnych badań własnych oraz studiów piśmiennictwa zrezygnowano ze stosowania do rozciągania uchwytów zaciskowych, jak również uchwytów przyklejanych, wybierając próbki o kształcie dostosowanym do specjalnie zaprojektowanych szczęk rozciągających (rys. 2).

Do obserwacji najważniejszej z badanych charakterystyk materiału — jego wydłużenia — zaprojektowano dwa niezależne układy pomiaru odkształceń podłużnych. Wydłużenie środkowej części próbki mierzono za pomocą czujnika przykładanego — ABCDEF na rys. 2 (odkształcenie globalne) oraz za pomocą tensometrów elektrooporowych naklejonych na powierzchniach bocznych próbki (odkształcenia lokalne). Wskazania tensometrów elektrooporowych miały poinformować, w których miejscach należy poszukiwać pojawiających się rys.

Wszystkie badania rozciągania próbek wiosełkowych przeprowadzono przy użyciu maszyny wytrzymałościowej INSTRON 1251, wyposażonej w głowicę 200 kN (20 Ton), której tłok przemieszczał się ze stałą, zadaną prędkością — na ogół 0,5 mm/min. Odkształcenia centralnej części próbki w początkowej fazie obciążenia narastały z prędkością rzędu $100 \cdot 10^{-6}$ na minutę.²⁾

Zestawienie zastosowanych układów pomiarowych pokazano na rys. 3. Maszyna wytrzymałościowa wyposażona była we własny układ rejestracji siły rozciągającej w funkcji przesuwu tłoka, jednak uzyskiwany w ten sposób wykres traktowano jako wskazanie kontrolne, ponieważ mimo swojej znacznej sztywności odkształcalność szczęk sumowała się z odkształcalnością próbki, obniżając dokładność pomiaru.

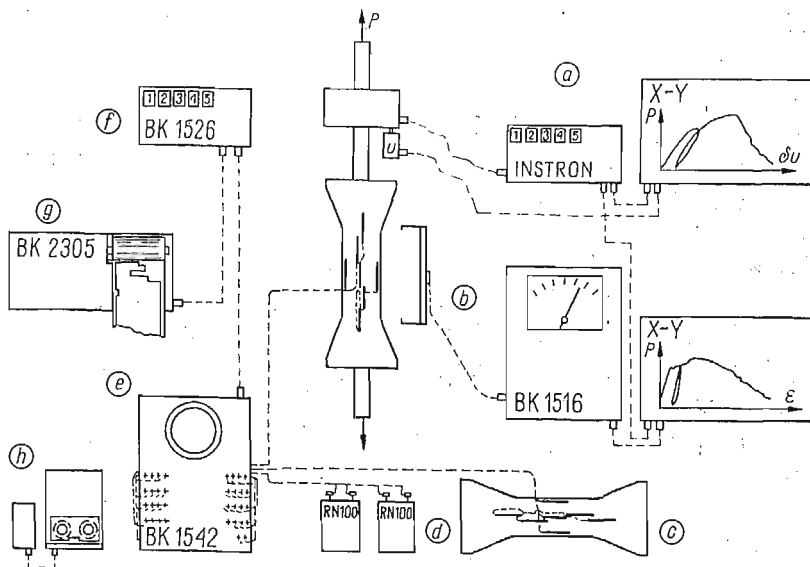
Pierwszy z zastosowanych układów do pomiaru wydłużenia próbki składał się (rys. 3 — układ b) z pokazanego uprzednio na rys. 2, czujnika przykładanego, mostka tensometrycznego, oraz rejestratora X—Y. Większość użytej aparatury pomiarowej była produkcji firmy Bruel i Kjaer (BK).

Czujnik przykładany własnej konstrukcji, mocowany był przed pomiarem w specjalnych reperach stalowych, (C i F — rys. 2), przyklejanych na bocznej powierzchni próbki. Baza pomiaru wynosiła 245 mm. Na obu ramionach czujnika wykonanych z hartowanej blachy stalowej o grubości 0,8 mm, naklejone były foliowe tensometry elektrooporowe pracujące

²⁾ $1 \cdot 10^{-6}$ — jednostka odkształcenia względnego, która w piśmiennictwie anglosaskim posiada własną nazwę „microstrain”, wobec braku odpowiednika polskiego, w tekście wszędzie stosowany jest mnożnik 10^{-6}

w układzie pełnego mostka. Czujnik cechowany był przed i po każdym cyklu pomiarów w specjalnej śrubie mikrometrycznej. Zakres liniowej pracy czujnika wynosił 4 mm, przy czym w razie potrzeby zakres ten dałoby się łatwo powiększyć poprzez wydłużenie ramion czujnika.

Odształcenia lokalne mierzono za pośrednictwem 9 tensometrów o długości bazy pomiarowej 60 mm i oporności 120 Ohm, rozmieszczonych jak pokazano na rys. 2. Tensometry o numerach od 2 do 5 służyły do oceny osiowości obciążenia, tensometry o numerach wyższych — do kontroli pojawiania się rys na całej długości użytkowej próbki.



Rys. 3. Zestawienie podstawowych układów pomiarowych: a — wskaźnik cyfrowy siły oraz rejestracja siły rozciągającej w funkcji przemieszczeń tłoka maszyny, b — rejestracja siły w funkcji wydłużenia środkowej części próbki, c — próbka kompensacyjna, d — para oporów wzorcowych podłączona jako tensometry nr 1, e — automatyczna skrzynka rozdzielcza, f — mostek tensometryczny ze wskaźnikiem cyfrowym i wyjściem analogowym, g — rejestrator poziomy, h — magnetofon z mikrofonem do dyktowania wskazań cyfrowych siły i odształceń na poszczególnych tensometrach

Każdy tensometr kompensowany był za pomocą analogicznego tensometru na próbce nie obciążanej (system 1-1), przy czym dokładne zrównoważenie układu uzyskiwano dzięki rezystorom na skrzynce rozdzielczej BK 1542.

Na pierwszym wejściu skrzynki rozdzielczej, jako parę tensometrów nr 1, włączono dwa opory wzorcowe RN 100 Ohm. Ponieważ wejście to odpowiada spoczynkowemu położeniu automatycznego wybieraka skrzynki, uzyskano dzięki temu kontrolę stabilności mostka, a także możliwość urzymywania mostka w stanie zrównoważonym, bez potrzeby przegrzewania któregośkolwiek z tensometrów czynnych. Układ pracował stabilnie i w przeciągu kilku godzin trwania pomiarów dryf zera nie przekraczał na ogół $1 \div 2 \cdot 10^{-6}$.

Odczytów dokonywano korzystając z mostka BK 1526, który posiada wyjście cyfrowe (na wskaźniku świetlnym), oraz wyjście analogowe. Sygnały z tego ostatniego wyjścia

zapisywano na rejestratorze poziomym BK 2305. Ponieważ papierowa taśma w tym rejestratorze może mieć szerokość co najwyżej 100 mm, zatem dokładność uzyskiwanego zapisu jest niewielka. W związku z tym rejestrację graficzną na taśmie papierowej potraktowano jako kontrolną w stosunku do zapisu na taśmie magnetofonowej, na którą operator dyktował kolejno wskazania odczytywane ze wskaźników cyfrowych mostka (odkształcenie) oraz maszyny wytrzymałościowej (siła rozciągająca). W sumie oba zapisy gwarantowały kontrolę kolejności prowadzenia odczytów oraz wysoką dokładność pomiarów. Pomiar prowadzono odczytując wskazania na mostku oraz wskazania wartości siły bez zatrzymywania ruchu tłoka maszyny wytrzymałościowej.

Wartości naprężeń odpowiadających poszczególnym wskazaniom tensometrów interpolowano liniowo przy opracowywaniu wyników pomiarów. Zastosowany układ umożliwił mierzenie odkształceń przy rozciąganiu w zakresie od $5000 \cdot 10^{-6}$ z dokładnością $10 \cdot 10^{-6}$, lub w zakresie do $2000 \cdot 10^{-6}$ z dokładnością $1 \cdot 10^{-6}$.

Cykl obciążeń każdej próbki składał się z jednego lub dwóch obciążeń wstępnych do naprężenia ok. 1 N/mm^2 (10 kG/cm^2), co pozwalało na sprawdzenie poprawności działania aparatury, osiowości ustawienia próbki etc., oraz z przebiegu zasadniczego. W przebiegu zasadniczym próbka była obciążana aż do stwierdzenia zarysowania, odciążana i ponownie obciążana aż do zniszczenia, tj. do widocznego rozdzielenia się jej na dwie części. Odciążanie i obciążenie ponowne stosowano niekiedy kilkakrotnie, co miało wykazać jak stabilny jest proces niszczenia się tworzywa.

Chwilę pojawienia się rys określano w sposób pośredni, na podstawie zmiany nachylenia wykresów uzyskiwanych z układów pomiarowych a i b (rys. 3), oraz na podstawie zaobserwowanych skokowych zmian wskazań tensometrów elektrooporowych. Ponieważ podczas obciążania dostęp do próbki był utrudniony (obecność tensometrów, reperów, kabli i czujników), a także ponieważ wyszukiwanie drobnych rys zajmuje wiele czasu, obserwacje i zaznaczanie rys prowadzono dopiero po pełnym zniszczeniu i odciążeniu próbki.

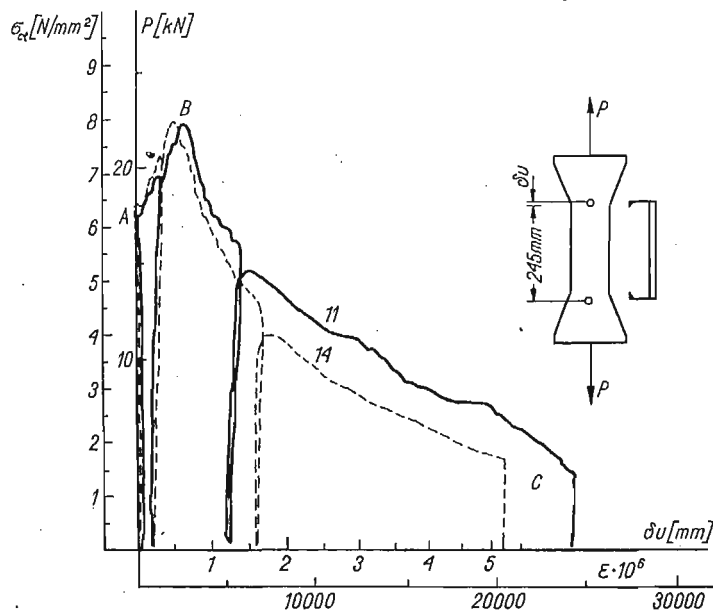
Do obserwacji rys stosowano mikroskop piórowy o powiększeniu $32 \times$, oraz mikroskop do badania odcisków metodą Brinella, wyposażony w skalę, o powiększeniu $25 \times$. Celem ułatwienia poszukiwań zastosowano barwienie badanej powierzchni mieszaniną w stosunku 1 : 5 nasyconych roztworów kwasu cytrynowego i nadmanganianu potasowego. Płyt ten lekko zabarwia beton i bardzo łatwo rozchodzi się wzdłuż istniejących rys. metoda ta wymaga jednak dalszego udoskonalenia. Podczas obciążania pojawianie się rys obserwowano tylko sporadycznie i bez stosowania układów powiększających (tzn. tylko gołym okiem), w związku z czym faktyczna kolejność w jakiej pojawiają się poszczególne rysy jest nieznaną.

3. Wyniki pomiarów

Przy badaniach w stanie rozciągania osiowego za źle przeprowadzone uważać należy doświadczenia, w których przełom następuje w miejscu o niezidentyfikowanym stanie naprężenia — np. w uchwytach lub na karbie wytworzonym w strefie zmiany kształtu próbki. W przeważającej większości omawianych tu wyników zniszczenie elementów

próbnych miało postać zadowalającą. Stwierdzony w środkowej części próbek mimośród nie przekraczał na ogół 2,5 mm, a ponadto z uwagi na pewną ciągliwość fibrobetonu znaczenie wycentrowania próbki malało w miarę zarysowywania się materiału. Mimośród ten spowodowany był prawdopodobnie niejednorodnością materiału lub wadami wykonania próbek, zaś ustawienie próbki w uchwytach miało nań wpływu drugorzędny. Ta ostatnia okoliczność świadczy o właściwym zaprojektowaniu układu obciążającego.

Dwa typowe wykresy uzyskane bezpośrednio z rejestratora $X-Y$ przy użyciu czujnika przykładanego pokazano na rys. 4. We wszystkich zbadanych próbkach, za wyjątkiem

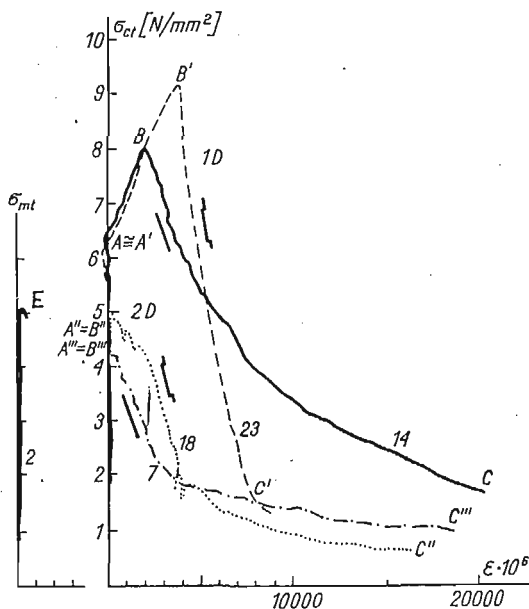


Rys. 4. Przykłady wykresów siły osiowej w funkcji wydłużenia, w próbkach nr 11 i 14, uzyskane bezpośrednio z rejestratora $X-Y$; dodatkowo pokazane skale naprężeń i odkształceń mają tylko charakter orientacyjny. Odcinek AB — wzmocnienie materiału, w punkcie B jedna z rys zaczyna się rozszerzać w sposób nieodwracalny; odcinek BC — osłabienie materiału

próbek z matrycy nieuzbrojonej, nie stwierdzono zniszczenia kruchego. Wszystkie próbki fibrobetonowe można było w trakcie badania odciążyć i ponownie obciążyć do tej samej, w przybliżeniu wartości naprężenia rozciągającego. W przypadku zlinearyzowanego układu uzbrojenia zauważyć można było charakterystyczne wzmocnienie materiału, a we wszystkich próbkach fibrobetonowych zauważyć było można ponadto osłabienie, tzn. stopniowy spadek siły w próbce wraz ze wzrastającym jej wydłużeniem.

Porównawcze zestawienie typowych wykresów $\sigma-\epsilon$, uzyskanych w poszczególnych grupach próbek, pokazano na rys. 5. Zastosowane uzbrojenie, dawało w przypadku dwuwymiarowego rozkładu włókien (2D) wyraźne zwiększenie ciągliwości materiału — odcinki $B''-C''$ oraz $B'''-C'''$ na rys. 5 — ale nie dawało zwiększenia wytrzymałości, która niekiedy nawet malała. Przyczyną tego spadku wytrzymałości może być ujemny wpływ obecności włókien na takie cechy matrycy jak stosunek w/c , urabialność, porowatość etc, przy niewielkiej jednocześnie efektywności uzbrojenia.

Na podstawie poczynionych obserwacji można przypuszczać że przebieg niszczenia próbek był następujący. Do naprężenia rzędu 4-6 N/mm² (40-60 kG/cm² — punkty A''', A'' oraz A na wykresach na rys. 5) odkształcenia rosły liniowo, były sprężyste, a rysy nie pojawiały się. Powyżej tej wartości naprężenia nie wzrastały w próbkach uzbrojonych dwuwymiarowo. W próbkach tych pojawiała się niewielka liczba rys, z których jedna zaczynała się od razu rozszerzać katastrofalnie. Uzyskiwany wykres odkształceń globalnych (wydłużenia próbki) był od tego miejsca (punkty A'' = B'' oraz A''' = B''') faktycznie wykresem wyłęknięcia włókien na powierzchni przełomu. W próbkach o uzbrojeniu zlinearyzowa-



Rys. 5. Przykłady wykresów uzyskanych za pomocą czujnika przykładanego, charakterystycznych dla poszczególnych serii próbek (liczby oznaczają numery próbek). Na wykresach pominięto wykonane cykle odciążania i ponownego obciążania próbek. Wykres po lewej stronie przedstawia wykres z rozciągania próbki niezbrojonej, która zniszczyła się w sposób kruchy (punkt E na wykresie)

nym, na odcinkach AB oraz A'B' następowało powstawanie nowych rys, prawdopodobnie przy nieznacznym powiększaniu się szerokości rozwarcia rys już istniejących. Tworzenie się powierzchni przełomu można było zaobserwować dopiero po osiągnięciu maksymalnej wartości naprężenia (wytrzymałości — punkty B oraz B'), przy czym powierzchnia ta nie wypadała na ogół w miejscu pierwszych rys zaobserwowanych gołym okiem.

Zestawienie najważniejszych uzyskanych wyników liczbowych podano w Tabl. 1. W tablicy tej zaznaczono również dla porównania dane o wytrzymałości fibrobetonu rozciąganego w wieku ok. 1 mies. Przyjmując, że różnica w technologii wykonania obu porównywanych badań ma znaczenie drugorzędne, można zauważyć że wzrost wytrzymałości matrycy niezbrojonej był w okresie 1 roku stosunkowo wyższy niż podobny wzrost w przypadku fibrobetonów.

Z porównania dwóch zastosowanych gatunków włókien wynika, że wpływ długości i przyczepności włókna na właściwości mechaniczne kompozytu jest bardziej widoczny

w przypadku uzbrojenia zlinearyzowanego niż w przypadku uzbrojenia o układzie dwuwymiarowym. Korzyść ze stosowania włókien z zakotwieniami widoczna jest wyraźnie dopiero wtedy gdy włókna ułożone są w kierunku działania głównych naprężeń rozciągających.

Tablica 1. Wyniki badań rozciągania włoselkowych próbek fibrobetonowych¹

Materiał w danej serii próbek	Układ włókien	Wytrzymałość N/mm ² 2)		Współcz. sprężystości przy naprężaniu $\sigma_{cr} = 3 \text{ N/mm}^2$ [GN/m ²] ³⁾	Maksymalne odkształcenie w materiale nie rozerwanym [10 ⁻⁶]
		Wg badań CBI po 28 ⁴⁾ dniach	Wg. badań na próbkach włoselkowych po ok. 300 dniach		
Matryca nieuzbrojona	—	1,7 (0,6)	4,93 (0,74)	35,4 (6,1)	125 (55)
2% obj. włókien gładkich 25 × 0,38 mm	2D	3,5 (0,6)	4,13 (0,76)	32,2 (4,3)	252 (95)
j.w.	1D	5,5 (0,7)	7,98 (0,67)	34,0 (6,6)	1324 (183)
2% obj. włókien z zakotwieniami (typu Bekaert) 30 × 0,40 mm	2D	3,8 (0,6)	4,42 (0,98)	36,2 (3,2)	409 (295)
j.w.	1D	6,4 (1,2)	9,88 (0,68)	40,9 (7,0)	2079 (728)

Uwagi: 1) w nawiasach podano wartości odchyłań standardowych.

2) 1 N/mm² = 10 kG/cm²

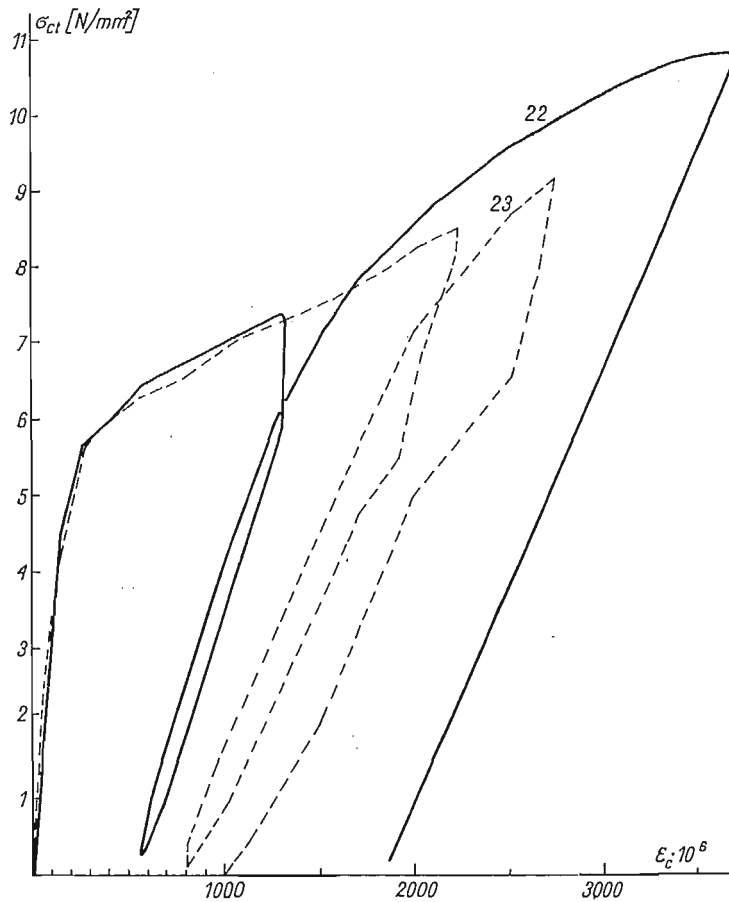
3) 10 GN/m² = 100 000 kG/cm²

4) próbki w kształcie płaskowników, zaciskane bezpośrednio w szczękach maszyny.

Czujnik przykładany mierzy poprawnie odkształcenia jednostkowe tylko do osiągnięcia wytrzymałości materiału. Dalsza część uzyskiwanego wykresu, chociaż przedstawia wydłużenie próbki wraz z powstającymi rysami, nie odpowiada odkształceniu materiału, ponieważ wydłużenie związane jest przede wszystkim z mechanizmem wywlekania włókien na pojedynczej powierzchni przelomu. Tensometry elektrooporowe naklejone wzdłuż próbki mierzą natomiast faktycznie odkształcenia lokalne, włącznie z rozwieraniem się lub zwieraniem przebiegających pod nimi mikrorys. Przykłady wykresów ze wskazań tensometrów powierzchniowych, uzyskanych przez uśrednienie odczytów z większości badanych punktów pomiarowych, pokazano na rys. 6. Przy uśrednianiu pominięto wskazania tensometrów ulegających zniszczeniu, tzn. przede wszystkim tych, przez które przebiegała powierzchnia przelomu. Uzyskano w ten sposób wykresy odkształceń lokalnych, dotyczące materiału obciążanego aż do naprężeń rzędu wytrzymałości i następnie odciążonego.

Pomiar tego rodzaju należałoby prowadzić korzystając z ciągłej rejestracji wskazań wszystkich tensometrów powierzchniowych. Natomiast przy przyjętej technologii pomiarowej trzeba było stosować interpolację wyników.

Uśrednione wykresy z lokalnych pomiarów odkształceń pokazano na rys. 7. Są one



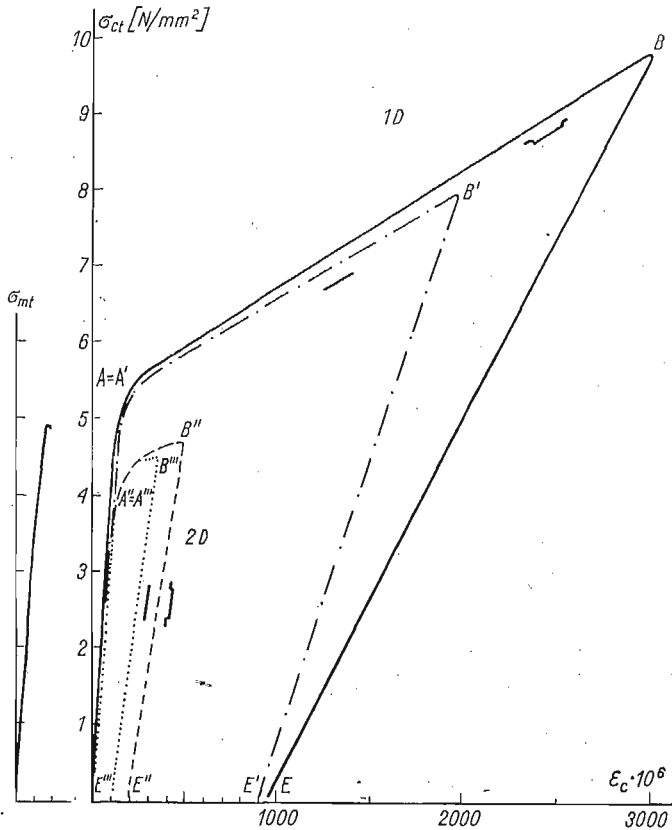
Rys. 6. Średnie odkształcenia lokalne zmierzone tensometrami oporowymi, w funkcji naprężenia rozciągającego. Włókna o układzie zlinearyzowanym (1D). Uwzględniono wskazania tensometrów: próbka nr 22 — 2, 7, 8, 9 i 10, próbka nr 23 — 6, 7, 8, 9 i 10 (oznaczenia tensometrów — rys. 2).

niesprzeczne z uzyskanymi inną techniką pomiarową wykresami na rys. 5, a dodatkowo uwidaczniają wspomniany już fakt, że zstępujące gałęzie wykresów na rys. 5 (odcinki BC , $B' C'$, $B'' C''$, $B''' C'''$) odzwierciedlają jedynie mechanizm lokalnego wywlekania włókien z powierzchni przełomu. Wykresów takich jak pokazano na rys. 6 i 7 nie możnaby wykonać w odniesieniu do samej strefy przełomu, rozkład naprężeń w przekroju próbki przestaje być jednorodny.

Na podstawie rys. 7 można wnioskować, że linearyzacja włókien podwyższa wartość naprężenia rysującego w fibrobetonie. Natomiast zarówno linearyzacja jak i sama obecność uzbrojenia włóknistego nie mają wpływu na wartość wydłużenia jednostkowego, przy którym pojawiają się w materiale rysy. Na podstawie analizy wskazań tensometrów powierzchniowych można przy puszczać, że rysy w fibrobetonie pojawiają się przy odkształceniach $100 - 200 \cdot 10^{-6}$, tj. przy takich samych odkształceniach granicznych jakie podane są odnośnie klasycznego betonu lub żelbetu. Niewątpliwym efektem linearyzacji jest

natomiast wyraźnie widoczne wzmocnienie materiału — odcinki AB oraz $A'B'$ na wykresach $\sigma - \epsilon$ (rys. 5 oraz rys. 7).

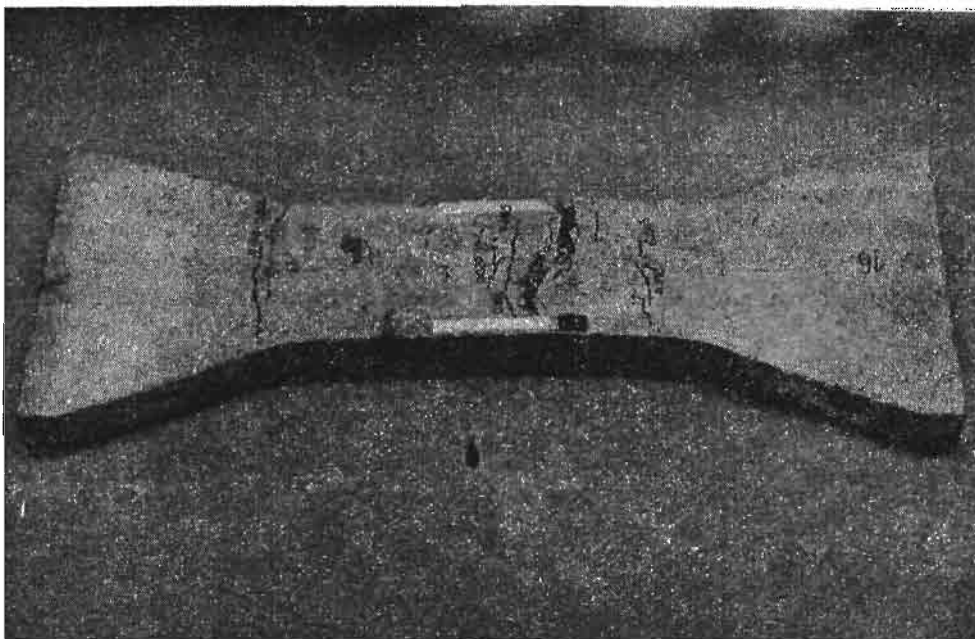
Wykresy na rys. 7 zgodne są z obserwacjami struktury zarysowania poszczególnych próbek. Przykłady obrazów rys na dwóch próbkach fibrobetonowych, uzbrojonych jedna dwuwymiarowo (2D) a druga włóknem o układzie zlinearyzowanym (1D), pokazano na



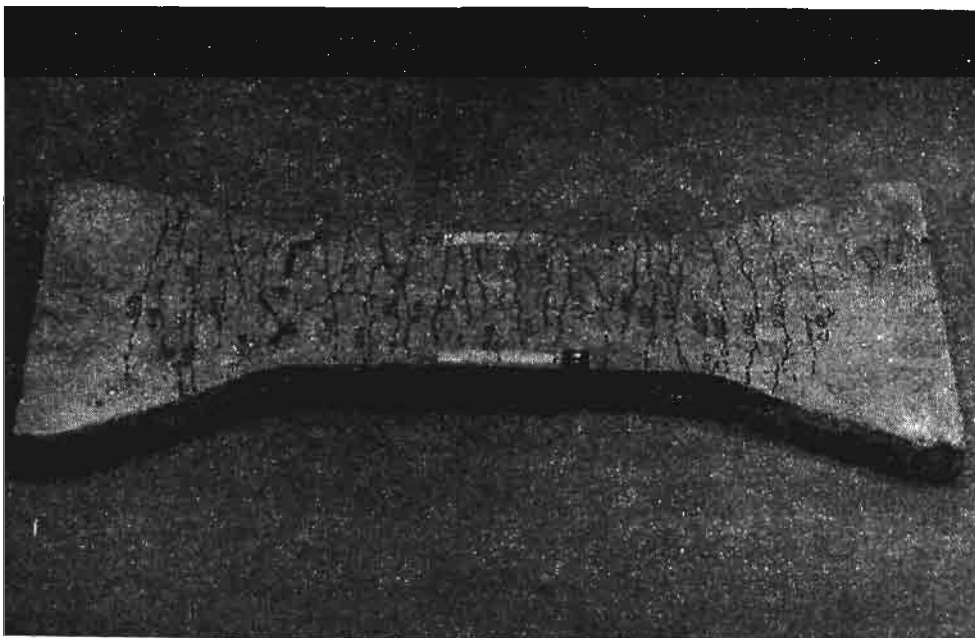
Rys. 7. Zestawienie uśrednionych przebiegów odkształceń lokalnych w niezniszczonym materiale próbek, dla wszystkich badanych serii materiału. Wykres po lewej stronie dotyczy rozciągania matrycy niezbrojonej

rys. 8 i 9. Próbki z matrycy niezbrojonej ulegały zniszczeniu przez rozwarcie się rysy pojedynczej, na próbkach z uzbrojeniem o układzie dwuwymiarowym (2D) można było po zniszczeniu stwierdzić 3 - 4 rysy, natomiast próbki zlinearyzowane ulegały zniszczeniu przy pojawieniu się kilkunastu rys, których średni rozstaw mierzony w kierunku osi próbki wynosił ok. 20 mm.

Stwierdzono, że w warunkach odpowiadających temu doświadczeniu, fibrobeton o odpowiednim układzie i odpowiedniej zawartości uzbrojenia może przenosić bez obniżenia wytrzymałości odkształcenia rzędu $2000 \cdot 10^{-6}$, tj. odkształcenia 10 - 20 razy większe niż w przypadku zwykłego betonu. Wartość tę można określić jako graniczne wydłużenie fibrobetonu. Odkształcenia te dotyczą oczywiście fibrobetonu w którym matryca



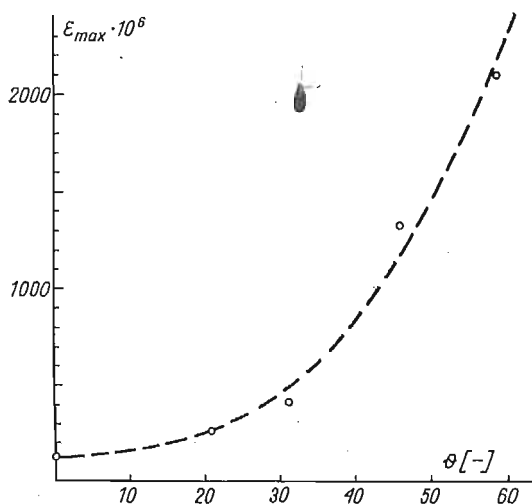
Rys. 8. Wygląd po zniszczeniu próbki o dwuwymiarowym rozkładzie uzbrojenia — próbka nr 16. Przy rysach zaznaczono ich rozwartości



Rys. 9. Wygląd po zniszczeniu próbki o zlinearyzowanym układzie uzbrojenia — próbka nr 20. Przy rysach zaznaczono ich rozwartości

jest już zarysowana, co o tyle nie ma znaczenia, że owe rysy nie wpływają na wytrzymałość kompozytu. Z rozważań wyłączono tu kwestię trwałości materiału. Poczynione niedawno obserwacje [12] pozwalają jednak sądzić, że również zarysowany fibrobeton jest dość odporny na korozję.

Do analitycznego przewidywania mechanicznych właściwości fibrobetonu autor zaproponował uprzednio, [13], tzw. parametr wzmocnienia (Θ). Wartość tego parametru jest wprost proporcjonalna do długości i przyczepności włókien oraz odwrotnie proporcjonalna do tzw. pozornego rozstawu włókien [10, 11]. Rozstaw pozorny włókien stanowi miarę rozmieszczenia włókien w kompozycie i zależy zarówno od kształtu i zawartości



Rys. 10. Zależność pomiędzy granicznym wydłużeniem fibrobetonu max a parametrem wzmocnienia Θ , określającym strukturę uzbrojenia fibrobetonu

włókien jak i od struktury kompozytu (rozkłady włókien trójwymiarowe, płaskie, zlinearyzowane etc.). Wartości parametru Θ obliczono dla nominalnych charakterystyk badanych fibrobetonów, przyjmując że przyczepność włókien zakotwionych jest o 30% wyższa od przyczepności włókien gładkich. Na rys. 10 naniesiono punkty, których odcięte stanowią znalezione w opisany sposób wartości parametru Θ , natomiast jako rzędne odłożono znalezione doświadczalnie wartości odkształcenia maksymalnego, wg. ostatniej kolumny w tabl. 1. Uprzednio stwierdzono [13], że wytrzymałość (na zginanie, rozciąganie i udarność) zależy liniowo od Θ . Z obecnych badań wynika, że wydłużenie graniczne fibrobetonu zależy od tego samego parametru w sposób nieliniowy, być może paraboliczny.

4. Wnioski

Badania wykazały, że odpowiednio uzbrojony fibrobeton z włóknem stalowym zachowuje się plastycznie, wykazując wyraźne wzmocnienie. Znaczący to, że powyżej granicy sprężystości odkształcenia trwale rosną wraz z naprężeniem rozciągającym. Przynajmniej

w pierwszym przybliżeniu wzrost ten uznać można za liniowy, zagadnienie wymaga jednak dalszych badań. Jako „odpowiednio” uzbrojony rozumiany tu jest fibrobeton zawierający ok. 2% obj. włókien o układzie zlinearyzowanym. Oddzielnie badania warto by podjąć celem określenia jakie najniższe zawartości włókien o układzie dwu- lub trój-wymiarowym dawałyby również efekt wzmocnienia.

Fibrobeton ze zlinearyzowanym układem uzbrojenia może odkształcać się do wartości rzędu $2000 \cdot 10^{-6}$, przy czym powstające jednocześnie rysy mają rozwarłość rzędu 0,03 - 0,05 mm. Rysy takie mają prawdopodobnie niewielki wpływ na trwałość kompozytu.

W fazie niezarysowanej fibrobeton odkształca się sprężysto, w zasadzie niezależnie od układu uzbrojenia. Moduł sprężystości kompozytu można określić w przybliżeniu na podstawie znanego prawa mieszania. Odkształcalność graniczna matrycy cementowej nie ulega zmianie w zakresie stosowanych parametrów doświadczenia (długość, średnica oraz zawartość objętościowa włókien).

Na zachowanie się fibrobetonu po zarysowaniu zasadniczy wpływ ma układ uzbrojenia. Wzmacniający matrycę efekt uzbrojenia będzie największy przy ułożeniu włókien wzdłuż kierunku głównych naprężeń rozciągających. Efektywność uzbrojenia fibrobetonu zależy również od przyczepności włókien, jednak i ten wpływ bardziej widoczny staje się przy zlinearyzowanym układzie uzbrojenia.

Wydaje się, że zaproponowany parametr odkształcenia maksymalnego dobrze charakteryzuje odkształcalność graniczną fibrobetonu. Można np. przypuszczać, że materiały charakteryzujące się podobną wydłużalnością jak powyżej omówione fibrobetony z uzbrojeniem zlinearyzowanym, byłyby również bardziej odporne na wymuszone przemieszczenia, skurcz jednorodny, naprężenia termiczne itp., niż tradycyjne konstrukcje betonowe.

Badania nie wykazały aby zastosowany procent uzbrojenia włóknistego był w stanie podwyższyć graniczną wartość odkształcenia matrycy, tak jak to przewidywane było w [6]. Ewentualna odpowiedź na to pytanie mogłaby wynikać z doświadczeń prowadzonych w stanie rozciągania osiowego na próbkach ze zlinearyzowanym uzbrojeniem, o maksymalnej, technologicznie możliwej do wymieszania w matrycy zawartości włókien.

Efekt włókien jest najbardziej widoczny w młodym betonie. Stąd wypływa celowość posługiwania się fibrobetonem do wykonywania form straconych, napraw, konstrukcji wznoszonych w ograniczonym czasie itp.

Literatura cytowana w tekście

1. J. P. ROMUALDI, G. B. BATSON, *Behaviour of reinforced beams with closely spaced reinforcement*. ACI Journal, Proc. 60, 6 (June), s. 775—790, (1963).
2. J. P. ROMUALDI, J. A. MANDEL, *Tensile strength of concrete affected by uniformly distributed and closely spaced short lengths of wire reinforcement*. ACI Journal, Proc. 67, 6 (June), s. 657—671, (1964).
3. J. KASPERKIEWICZ, *Odkształcalność przy rozciąganiu fibrobetonu z włóknem stalowym*. W zeszycie problemowym techniki mostowej pt. „Kompozyty betonowe — właściwości mechaniczne i zastosowania”, SITKOM-Kielce, (1974), 4, s. 65—93.
4. R. H. EVANS, M. S. MARATHE, *Microcracking and stress — strain curve for concrete in tension*, Matériaux et Constructions, 1, Jan.-Feb., s. 61—64, (1968).

5. B. P. HUGHES, G. P. CHAPMAN, *The complete stress-strain curve for concrete in direct tension*. Bulletin RILEM No 30, March. s. 95—97, (1966).
6. J. AVESTON, G. A. COOPER, A. KELLY, *Single and multiple fracture.*, Proc. Conf. on „The properties of fibre composites”, Nat. Phys. Lab., IPC Sc. a Techn. Press Ltd. 1971, s. 15—26.
7. K. KOBAYASHI, R. CHO, *Mechanics of concrete with randomly oriented short steel fibres*. Proc. of the II Intern. Conf. on Mech. Behaviour of Materials—16—20 August 1976, Boston, Massachusetts, s. 1938—1942.
8. J. EDGINGTON, D. J. HANNANT, R. I. T. WILLIAMS, *Steel fibre reinforced concrete*, Building Res. Establishment Current Paper — CP 69/74, 17 stron.
9. FIBERBETONG. NORDFORSK projektkomite' för FRC-material. 2 części: 140+521 stron. Stockholm (1977).
10. J. KASPERKIEWICZ, *Fibre spacing in steel fibre reinforced composites*, Matériaux et Constructions, 10, 55 (Jan.-Feb.) s. 25—31, (1977).
11. J. KASPERKIEWICZ, *Apparent spacing in fibre reinforced composites*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 26, 1, s. 55—63 (1978).
12. *Fibre reinforced cement and concrete*. RILEM Symposium London 1975, Ed. A. NEVILLE, *The Construction Press Ltd.*, Hornby 1975, vol. I+II, 650 stron.
13. J. KASPERKIEWICZ, *Reinforcement parameter for fibre reinforced concrete like composites*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 26, 1, s. 65—72 (1978).

Резюме

ПРОЧНОСТЬ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ УДЛИНЕНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ БЕТОНА
АРМИРОВАННОГО КОРОТКИМИ СТАЛЬНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Приведены результаты экспериментов на бетоне содержащем 2% (по объёму) дисперсной стальной арматуры в виде коротких волокон (фибробетон). Исследовались два типа ориентации волокон: плоско расположенных (2D) и линейно расположенных (1D). Измерение удлинений и деформаций обеспечивалось с помощью нескольких измерительных систем. Разрушение фибробетонных образцов происходило всегда по пластической (не хрупкой) схеме, а в случае 1D наблюдалось упрочнение а также явление многократного растрескивания.

Summary

TENSILE STRENGTH AND ULTIMATE STRAIN IN STEEL FIBRE REINFORCED CONCRETE

Fibre concrete specimens reinforced with 2% vol. of plain and hooked steel fibres have been tested in direct tension. The fibres were of two-dimensional (2D) orientation or they were magnetically aligned (1D). Several independent systems were used to measure strain and elongation of the specimens. The failure of fibre reinforced concrete was always ductile and the specimens of 1D type shown distinct strain hardening behaviour. In the latter case it was also possible to observe the multiple cracking of the matrix.

IPPT PAN
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1978 r.

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE DYSKÓW WIRUJĄCYCH Z ZASTOSOWANIEM ZASADY
MAKSIMUM PONTRJAGINA

GWIDON S Z E F Ę R, LESZEK M I K U Ł S K I (KRAKÓW)

1. Wstęp

Zagadnienie kształtowania dysków wirujących należy do klasycznych zadań mechaniki i było przedmiotem wielu prac między innymi [2, 3, 9], a tarcze równomiernej wytrzymałości nawet wchodzą w zakres opracowań monograficznych [4, 6, 7, 8].

Istniejące do tej pory rozwiązania ignorują jednak istotny z technicznego punktu widzenia fakt ograniczenia (od góry i od dołu) grubości dysku co czyni konwencjonalne rozwiązania często nieracjonalnymi.

W pracy niniejszej rozważymy problem kształtowania optymalnego wirujących tarcz kołowych i pierścieniowych na minimum przemieszczenia oraz minimum normy intensywności naprężeń w obecności ograniczeń geometrycznych nałożonych na przekrój dysku. Do rozwiązania przedstawionych zadań zastosujemy zasadę maksimum Pontriagina. Efektem pracy będą optymalne kształty dysków oraz wykresy naprężeń i przemieszczeń.

2. Sformułowanie problemu

W biegunowym układzie współrzędnych $\{0, r, \theta\}$ rozpatrujemy kołowo symetryczny problem tarczy zmiennej grubości $h(r)$, wirującej ze stałą prędkością kątową ω , w stałym polu temperatury T . Komplet relacji, opisujących stan układu sprężystego obejmuje wówczas znane równania:

i) równowagi

$$\frac{1}{h} \frac{d}{dr} (h\sigma_r) + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r = 0$$

ii) nierozdzielności

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0$$

ii2) geometryczne

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

*¹) Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych” — koordynowanego przez IPPT PAN.

iii) fizyczne

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha T$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha T$$

gdzie: σ_r, σ_θ — naprężenia, $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ — odkształcenia, γ — ciężar objętościowy, g — przyspieszenie ziemskie, α — współczynnik rozszerzalności cieplnej, u — przemieszczenie radialne, E — moduł Younga, ν — 1. Poissona.

Wprowadzając oznaczenie

$$S = rh\sigma_r,$$

a następnie rugując σ_θ (za pomocą związków fizycznych i geometrycznych) otrzymujemy ostatecznie z równań równowagi i nierozdzielności układ:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{dr} &= \frac{\nu}{r} S + \frac{E}{r} uh - \left(\alpha ET + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h, \\ \frac{du}{dr} &= \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{S}{rh} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu) \alpha T, \end{aligned}$$

dogodny dla dalszych rozwiązań.

Analizować będziemy pełne dyski kołowe z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad u(0) = 0 \quad S(R) = 0,$$

oraz pierścieniowe, z warunkami

$$(2.3) \quad S(R_1) = 0, \quad S(R_2) = 0.$$

Przystępując do sformułowania problemu optymalizacji, przyjmujemy jako zmienną decyzyjną grubość $h(r)$, a dla niej ograniczenia

$$(2.4) \quad \begin{aligned} H_1 &\leq h(r) \leq H_2 \\ \int_{R_1}^{R_2} 2\pi rh(r) dr &= V_0 = \text{const.} \end{aligned}$$

Rozpatrzmy dwa typy zagadnień optymalnego kształtowania;

I. na minimum przemieszczenia:

$$(2.5) \quad J(h) = u(R_2) \rightarrow \min_h,$$

II. na minimum normy (w przestrzeni L^2) intensywności naprężeń:

$$(2.6) \quad J(h) = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_i^2 dr \rightarrow \min_h,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta} &= \left[\left(\frac{S}{rh} \right)^2 + \left(\frac{\nu S}{rh} \right)^2 + \frac{2rS}{rh} \left(\frac{Eu}{r} - E\alpha T \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{Eu}{r} \right)^2 - \frac{2E^2 u \alpha T}{r} + E^2 \alpha^2 T \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

W dalszym ciągu ograniczenie stałej objętości (2.4)₂ uwzględnimy poprzez wprowadzenie mnożnika Lagrange'a, rozpatrując funkcjonały

$$(2.7) \quad \begin{aligned} J(h, \lambda) &= u(R_2) + \lambda \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r h dr && \text{dla przypadku I,} \\ J(h, \lambda) &= \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_i^2 + \lambda 2\pi r h) dr && \text{dla przypadku II.} \end{aligned}$$

Zbiór sterowań dopuszczalnych określimy więc ostatecznie jako

$$(2.8) \quad U_{dop} = \{h: H_1 \leq h(r) \leq H_2\}.$$

Wprowadzając dla zwartego opisu stanu (deformacji i naprężeń) wektor $y(S, u)$ a dla prawych stron układu (3.1) wektor

$$f \left[\frac{\nu}{r} S + \frac{E}{r} u h - \left(\alpha E T + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h; \quad \frac{1-\nu^2}{E} \frac{S}{r h} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu) \alpha T \right]$$

sformułujemy następujące dwa problemy optymalizacji; dane jest:

1° równanie układu (2.1) (w notacji wektorowej)

$$\frac{dy}{dr} = f(r, y, h)$$

2° zbiór sterowań dopuszczalnych (2.8),

3° funkcje celu określone funkcjonalami Lagrange'a (2.7).

Zadanie 1:

Wyznaczyć takie $h(r)$, aby spełniając równanie 1° z odpowiednimi warunkami brzegowymi (2.2) lub (2.3) i ograniczenie 2° uzyskać minimum funkcjonału (2.7)₁.

Zadanie 2:

Problem jak wyżej lecz dla funkcjonału (2.7)₂. Do rozwiązania tak określonych zadań użyjemy zasady maksimum Pontriagina (5). W tym celu wprowadzić należy hamiltonian

$$(2.9) \quad H(y, \psi, h) \stackrel{\text{def}}{=} (\psi, f) = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i$$

w którym wektor sprzężony $\psi(\psi_0, \psi_1, \psi_2)$ spełnia znane równanie

$$(2.10) \quad \frac{d\psi}{dr} = - \frac{\partial H}{\partial y}$$

z warunkami wynikającymi z warunków transwersalności, a funkcja f_0 określona jest wyrażeniem podcałkowym w (2.7). Szczegółowe wyznaczenie rozwiązania optymalnego z odpowiadającym mu stanem naprężeń i deformacji omówimy oddzielnie dla każdego przypadku.

3. Problem I — kształtowanie na minimum przemieszczenia

Funkcjonał Lagrange'a odpowiadający wyjściowej funkcji celu (2.5) i ograniczeniu (2.4)₂ ma postać (2.7)₁. tj.

$$(3.1) \quad J(h, \lambda) = u(R_2) + \lambda \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r h dr \rightarrow \min_{h \in U_{\text{dop}}},$$

Hamiltonian (2.9) będzie wówczas określony wyrażeniem

$$(3.2) \quad H = \psi_0 \lambda 2\pi r h + \psi_1 \left[\frac{\nu}{r} S + \frac{E}{r} u h - \left(\alpha E T + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h \right] + \\ + \psi_2 \left[\frac{1-\nu^2}{E} \frac{S}{r h} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu) \alpha T \right].$$

Stosownie do twierdzenia Pontriagina, dla optymalnego sterowania $h^*(r)$ jest $H(y^*, \psi^*, h^*) = \max_h H(y, \psi, h)$ skąd na podstawie warunku $\frac{\partial H}{\partial h} = 0$ mamy

$$(3.3) \quad h^*(r) = \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2(r)}{E \cdot r \left[2\pi r \lambda \psi_0 + \psi_1(r) \left(\frac{E}{r} u - \alpha E T - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}}$$

Przepis ten obowiązuje w przedziale, w którym $H_1 < h < H_2$. Układ równań sprzężonych ma zgodnie z (2.10) postać:

$$(3.4) \quad \frac{d\psi_1}{dr} = -\psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{h}, \quad \psi_0(r) = -1 \\ \frac{d\psi_2}{dr} = -\psi_1 \frac{Eh}{r} + \psi_2 \frac{\nu}{r}.$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek pierścienia, a zatem obowiązywać będą warunki brzegowe (2.3). Wektor $\psi(\psi_1, \psi_2)$ jest prostopadły do rozmaitości

$$(3.5) \quad \Theta_0 = \{y_0 : S(R_1) = 0\}, \quad \Theta_k = \{y_k : S(R_2) = 0\}.$$

Z uwagi na minimalizację wielkości zależnej od stanu końcowego modyfikacji podlega końcowy warunek transwersalności [5]:

$$G(0, u) \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 1, \\ -\psi_0 \left(\frac{\partial G}{\partial S} \eta_1 + \frac{\partial G}{\partial u} \eta_2 \right) + \psi_1 \eta_1 + \psi_2 \eta_2 = 0,$$

przy warunku

$$B\eta_1 = 0; \quad \left(-\psi_0 \frac{\partial G}{\partial u} + \psi_2 \right) \eta_2 = 0, \quad 1 + \psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_2(R_2) = -1.$$

A więc wartości funkcji sprzężonych wynoszą

$$(3.6) \quad \psi_2(R_1) = 0, \quad \psi_2(R_2) = -1.$$

Aby efektywnie wyznaczyć sterowanie optymalne* $h(r)$ (we wzorze (3.3) nieznane są) funkcje ψ_1 , ψ_2 oraz u) należy rozwiązać układ równań (2.1), (3.4) z uwzględnieniem (3.3). Będzie zatem

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dr} &= \frac{\nu}{r} S + \left(\frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[-2\pi r \lambda + \psi_1 \left(\frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}}, \\
 \frac{du}{dr} &= \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{S}{\sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[-2\pi r \lambda + \psi_1 \left(\frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}}} - \frac{\nu}{r} + (1+\nu)\alpha T, \\
 \frac{d\psi_2}{dr} &= -\psi_1 \frac{E}{r} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[-2\pi r \lambda + \psi_1 \left(\frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}} + \psi_2 \frac{\nu}{r}, \\
 \frac{d\psi_1}{dr} &= -\psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[-2\pi r \lambda + \psi_1 \left(\frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}}},
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

z warunkami:

$$\begin{aligned}
 S(R_1) &= 0, & S(R_2) &= 0, \\
 \psi_2(R_1) &= 0, & \psi_2(R_2) &= -1
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Do układu (3.7) dołączyć należy równanie:

$$\int_{R_1}^{R_2} 2\pi r \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[-2\pi r \lambda + \psi_1 \left(\frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}} dr = V_0
 \tag{3.9}$$

określające mnożnik Lagrange'a λ . Relacje (3.7) — (3.9) łącznie, pozwalają (przynajmniej formalnie) wyznaczyć cztery nieznane funkcje $S(r)$, $u(r)$, $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ i liczbę λ , a stąd sterowanie optymalne $h(r)$. Jest widoczne, że zadanie to można rozwiązać efektywnie jedynie na drodze numerycznej. Metoda bezpośredniego całkowania układu (3.7) wymaga znajomości wektora początkowego $[S(R_1), u(R_1), \psi_1(R_1), \psi_2(R_2)]$, zaś warunki (3.8) wskazują, że tylko dwie spośród tych wartości znane są zawczasu, pozostałe dwie muszą być tak dobrane by spełnić warunki na brzegu $r = R_2$. Mamy tu więc do czynienia z zadaniem dwugranicznym typu „2+2”. Sytuację utrudnia fakt doboru mnożnika λ . Algorytm rozwiązania będzie zatem następujący:

1° ustalamy najpierw przedział zmienności λ . W tym celu przyjmujemy $h = H_2$ i podstawiamy do (2.1) otrzymując układ

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dr} &= \frac{\nu}{r} S + \frac{E}{r} H_2 u - \left(\alpha ET + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) H_2, \\
 \frac{du}{dr} &= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{S}{r H_2} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu)\alpha T,
 \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi (2.3).

Podobnie rozwiązujemy układ równań sprzężonych (3.4)

$$\frac{d\psi_1}{dr} = -\psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{H_2},$$

$$\frac{d\psi_2}{dr} = -\psi_1 \frac{EH_2}{r} + \psi_2 \frac{\nu}{r},$$

z warunkami

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(R) = -1.$$

Tą drogą uzyskane funkcje $\psi_1(R)$, $\psi_2(R)$ oraz $u(r)$ podstawiamy do związku (3.9). Aproksymując całkę sumą skończoną dostaniemy

$$\sum_{n=1}^N r_n \left\{ \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \left[-2\pi r_n \lambda + \psi_1^n \left(\frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right) \right]} \right\}^{\frac{1}{2}} \Delta r = \frac{V_0}{2\pi}.$$

Rozwijając lewą stronę jako funkcję zmiennej λ w szereg Macklaurina i ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów otrzymamy

$$\sum_{n=1}^N r_n \left[\frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \psi_1^n \left(\frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \Delta r +$$

$$+ \lambda \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2} \left[\frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \psi_1^n \left(\frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n 2\pi r_n}{Er_n \psi_1^n \left(\frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \Delta r \right\} = \frac{V_0}{2\pi},$$

skąd ostatecznie

$$(3.10) \quad \lambda^* =$$

$$\frac{V_0}{2\pi} - \sum_1^N r_n \left[\frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \psi_1^n \left(\frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \Delta r$$

$$= \frac{\left\{ \sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2} \left[\frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \psi_1^n \left(\frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n 2\pi r_n}{Er_n \psi_1^n \left(\frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \Delta r \right\}}{1}$$

W analogiczny sposób dostaniemy wartości λ^{**} odpowiadającą ograniczeniu $h = H_1$.

2° Mając przedział znamienności $\lambda \in [\lambda^*, \lambda^{**}]$ całkujemy numerycznie układ (3.7) z warunkami (3.8) otrzymując nowe wartości S_n , u_n , ψ_1^n , ψ_2^n .

3° Wyznaczamy z (3.10) nową wartość λ i podstawiamy ją ponownie do układu (3.7) powtarzając wielokrotnie tę procedurę.

4° Optymalny kształt przekroju tarczy opisany jest w ogólności funkcją

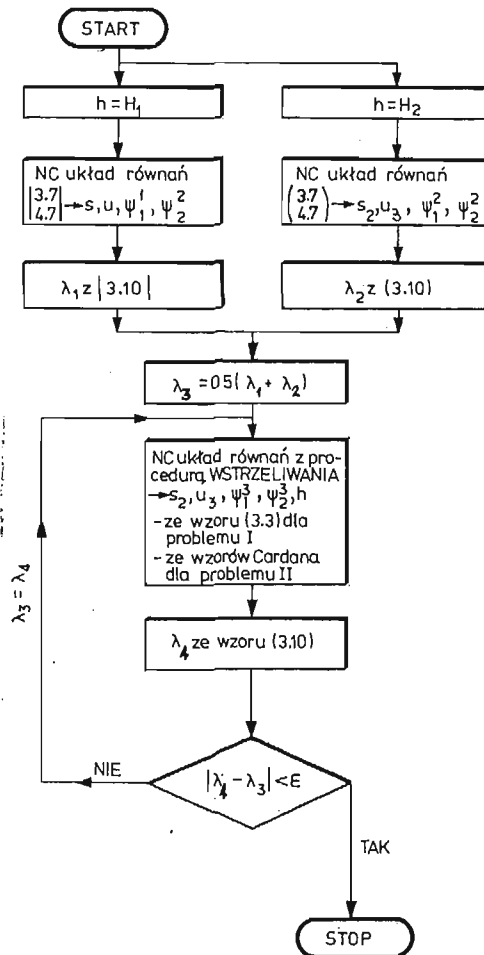
$$(3.11) \quad h^*(r) = \begin{cases} H_2 & r \in [R_1, r_1], \\ \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2(r)}{Er \left[-2\pi r \lambda + \psi_1(r) \left(\frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}} & r \in [r_1, r_2], \\ H_1 & r \in [r_2, R_2]. \end{cases}$$

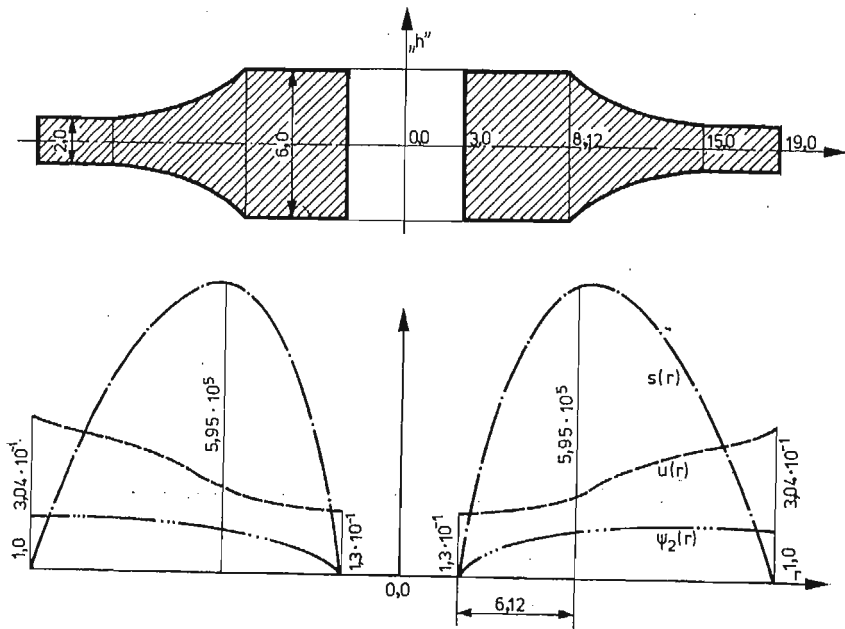
Istnienie i wartości odciętych r_1 oraz r_2 dają się stwierdzić w drodze realizacji omówionego algorytmu i zależą od parametrów zadania. Na każdym kroku r_n sprawdzamy wartość h_n i stwierdzamy zgodnie z (3.11), który przepis obowiązuje.

5° Proces iteracji dla ustalenia λ kończymy, gdy różnice pomiędzy kolejnymi rozwiązaniami dla całego układu na danym kroku (są mniejsze od przyjętej wartości błędu (np. 10^{-3})).

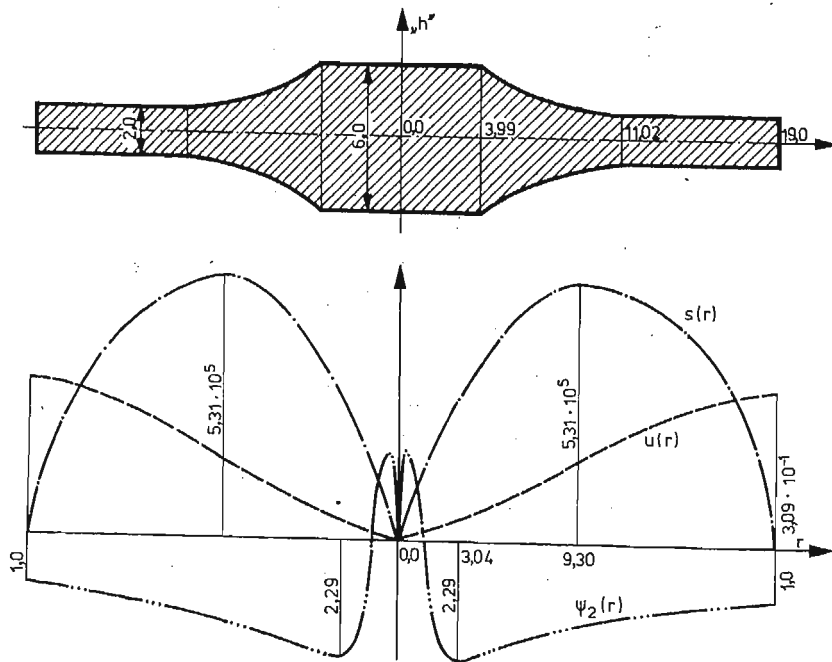
Schemat blokowy całego algorytmu optymalizacji podano na rys. 1.

SCHEMAT BLOKOWY





Rys. 2



Rys. 3

W pracy wykonano przykład liczbowy przyjmując dane:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 0,03 \text{ m}, & \omega &= 233,33 \frac{1}{s}, \\
 R_2 &= 0,19 \text{ m}, & T &= 500^\circ C, \\
 H_1 &= 0,01 \text{ m}, & \alpha &= 1,2 \cdot 10^5 \frac{1}{1^\circ C}, \\
 H_2 &= 0,03 \text{ m}, & \nu &= 0,3, \\
 V_0 &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \\
 E &= 2,1 \cdot 10^7 \frac{T}{m^2} & \frac{\gamma}{g} &= 7,84 \frac{T}{m^3}
 \end{aligned}$$

Wyniki uzyskane metodą Runge-Kutty z algorytmem rozwiązywania zadania dwugranicznego (procedura „wstrzeliwania”) według programu na EMC opracowanego przez OETO Politechniki Krakowskiej ilustruje rys. 2.

Równocześnie, wykonano obliczenia dla dysku pełnego ($R_1 = 0$), Jedynej zmianie ulegają wówczas warunki brzegowe, które są w postaci (2.2) reszta, a więc układ (3.7) (3.9) i przepis (3.11), pozostaje bez zmian. Rezultaty dla danych jak w poprzednim przykładzie — zestawiono na rys. 3.

4. Problem II — Kształtowanie na minimum normy intensywności naprężeń

Funkcja celu określona teraz związkem (2.6) przy ograniczeniu (2.4)₂ daje funkcjonal Lagrange'a

$$(4.1) \quad J(h, \lambda) = \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{s^2}{r^2 h^2} (1 + \nu^2) + \frac{2\nu SE}{rh} \left(\frac{u}{r} - \alpha T \right) + \left(\frac{Eu}{r} \right)^2 - \frac{2E^2 u \alpha T}{r} + \right. \\
 \left. + (E\alpha T)^2 + \lambda 2\pi r h \right\} dr \rightarrow \min_{h \in U_{\text{dop}}}$$

Skonstruowany dla tego przypadku hamiltonian

$$(4.2) \quad H = \psi_0 \left[\frac{s^2(1 + \nu^2)}{r^2 h^2} + \frac{2\nu SE}{rh} \left(\frac{u}{r} - \alpha T \right) + \left(\frac{Eu}{r} \right)^2 - \frac{2E^2 u \alpha T}{r} + (E\alpha T)^2 + \lambda 2\pi r h \right] + \\
 + \psi_1 \left[\frac{\nu}{r} S + \frac{Euh}{r} - \left(\alpha ET + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h \right] + \psi_2 \left[\frac{1 - \nu^2}{Er} \frac{S}{h} - \frac{\nu}{r} u + (1 + \nu) \alpha T \right]$$

proceedzi do równania, określającego sterowania optymalne

$$(4.3) \quad h^3 \left[\psi_1 \left(\frac{Eu}{r} - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) - 2\pi r \lambda \right] + h \left[\frac{2\nu S}{r} \left(\frac{Eu}{r} - E\alpha T \right) + \right. \\
 \left. - \frac{\psi_2(1 - \nu^2)}{Er} S \right] + \frac{2(1 + \nu^2)}{r^2} s^2 = 0, \quad H_1 < h < H_2.$$

Układ równań sprzężonych przybiera formę

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dr} &= \frac{2(1+\nu^2)S}{r^2 h^2} + \frac{2\nu}{rh} \left(\frac{Eu}{r} - E\alpha T \right) - \psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{h} \\ \frac{d\psi_2}{dr} &= \frac{2\nu ES}{r^2 h} + \frac{2E^2 u}{r^2} - \frac{2E^2 \alpha T}{r} - \psi_1 \frac{Eh}{r} + \psi_2 \frac{\nu}{r}. \end{aligned}$$

W konsekwencji ortogonalności wektora ψ do rozmaitości (3.5) otrzymujemy wartości

$$(4.5) \quad \psi_2(R_1) = 0; \quad \psi_2(R_2) = 0$$

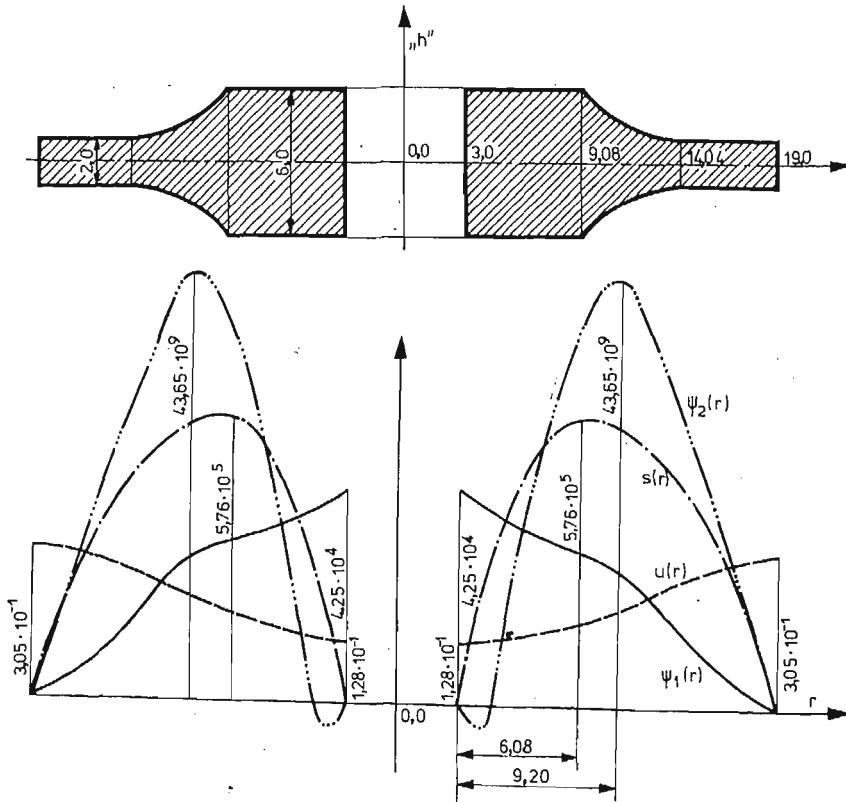
dla dysku pierścieniowego oraz

$$(4.6) \quad \psi_1(0) = 0 \quad \psi_2(R_2) = 0$$

dla tarczy pełnej.

Kompletna analiza zadania wymaga zatem rozwiązania układu:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{dr} &= \frac{\nu}{r} S + \frac{Euh}{r} - \left(\alpha ET + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h, \\ \frac{du}{dr} &= \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{S}{h} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu) \alpha T, \end{aligned}$$



Rys. 4

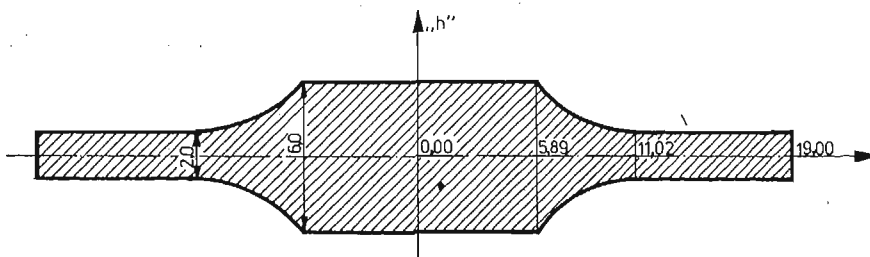
$$\frac{d\psi_1}{dr} = \frac{2(1+\nu^2)S}{r^2h^2} + \frac{2\nu}{rh} \left[\frac{Eu}{r} - E\alpha T \right] - \psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{h},$$

$$\frac{d\psi_2}{dr} = \frac{2\nu SE}{r^2h} + \frac{2uE^2}{r^2} - \frac{2E^2\alpha T}{r} - \psi_1 \frac{Eh}{r} + \psi_2 \frac{\nu}{r},$$

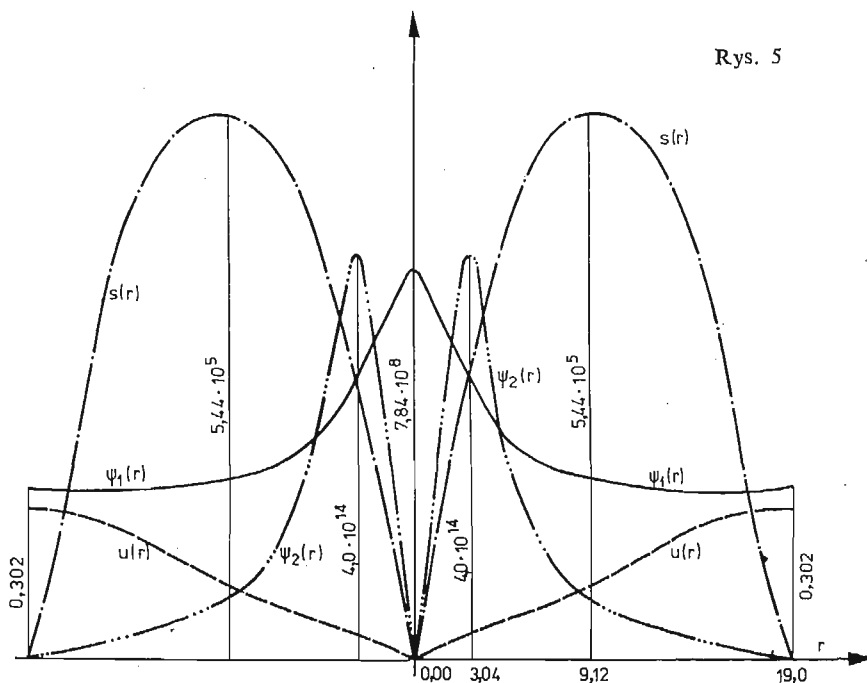
$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} rh dr = V_0,$$

z warunkami

$$(4.8) \quad \begin{aligned} S(R_1) &= 0, & S(R_2) &= 0, & \text{dla pierścienia,} \\ \psi_2(R_1) &= 0, & \psi_2(R_2) &= 0, \\ u(0) &= 0, & S(R) &= 0, & \text{dla koła.} \\ \psi_1(0) &= 0, & \psi_2(R) &= 0, \end{aligned}$$



Rys. 5



Układ (4.7) uzupełniony jest związkiem (4.3), który w odróżnieniu od poprzednio omawianego przypadku I — nie daje jawnej postaci optymalnego rozwiązania $h(r)$. Cały problem (4.3), (4.7) (4.8) wymaga więc numerycznej analizy w wyniku której otrzymujemy poszukiwane wielkości $u(r)$, $S(r)$, $h(r)$, $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$, λ . Procedura wyznaczenia tych wielkości jest identyczna z omówioną poprzednio, z tym że należało je uzupełnić o algorytm rozwiązania równania (4.3). Do tego celu użyto wzorów Cardana. Wyniki liczbowe dla danych jak w przykładzie I ilustrują rys. 4 i 5.

5. Zakończenie

Przeprowadzona w pracy analiza dowodzi skuteczności metody. Sformułowane zadania optymalizacyjne rozwiązano efektywnie, pokazując aktywność ograniczeń. Zastosowana procedura numerycznego całkowania złożonych układów równań nieliniowych z warunkami typu „2+2” okazała się w pełni zadowalająca dla liczby 100 kroków. Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej CYBER 72. Czas obliczeń pełnego kompletu funkcji wynosi średnio około 20 s. Warto przy okazji zwrócić uwagę na fakt, że postawione i rozwiązane w pracy zagadnienia optymalizacji odpowiadają w sformułowaniu dualnym poszukiwaniu minimum objętości przy zadanym przemieszczeniu zewnętrznego brzegu (zadanie I) lub zadanej wartości normy intensywności naprężeń (zadanie II).

Praca stanowi fragment szerszego studium nad efektywnością zastosowań zasady maksimum Pontriagina do optymalizacji elementów konstrukcji.

Literatura cytowana w tekście

1. M. ATHANS, FALB, „Sterowanie optymalne WNT Warszawa, 1966
2. J. CHERN, W. PRAGER, „Optimal Design of Rotating Disk for Given Radial Displacement of Edge” JOTA, 6, 2, 1970.
3. A. GAJEWSKI, „Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiałów o nieliniowości fizycznej” ZN Pol. Krak. Nr 5, 1975.
4. M. HUBER, „Steromechanika Techniczna” PWN, Warszawa 1958.
5. G. LEITMANN, „Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego” WNT, Warszawa 1971.
6. J. LIPKA, „Wytrzymałość maszyn wirnikowych” WNT, Warszawa 1967.
7. S. PONOMERIEW, „Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn” PWN, Warszawa 1957.
8. J. RABOTNOW, „Połuczest elementow konstrukcji”, Nauka, Moskwa 1966.
9. M. RANTA, „On the optimum shape of a rotating disk of any isotropic material”, Inf. 7. Solids Struct. 5, 1969.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРИАГИНА К ОПТИМАЛИЗАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

В публикации занимаемся решением задачи оптимализации для диска переменной толщины. Функция распределения толщины диска (конфигурация) изменяется в пределах ограничений. В первом случае рассмотрена задача нахождения конфигурации сообщающей оптимальное значение перемещению внешнего контура диска. Во втором случае функционал качества является нормой в пространстве L_2 интенсивности напряжений. Для решения задачи оптимализации использован принцип максимума Понтрягина.

S u m m a r y

OPTIMAL DESIGN OF ROTATING DISCS BY USING PONTRIAGIN'S PRINCIPLE

In the paper two problems of the optimal design of rotating discs have been considered. For each of these tasks the thickness of the discs was bounded. In the first case the displacement of the extremal edge was taken as the objective function. In the second case the norm in the L_2 sense of the stress intensity. The circular discs as well as the ring discs were considered. The solution by using Pontriagin's principle was obtained. This approach leads to the two-point boundary problems which was solved by numerical methods. Some illustrative examples are given.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1978 r.

ANALIZA DRGAŃ WAŁÓW WIRUJĄCYCH OBCIĄŻONYCH SIŁAMI OSIOWYMI

WIESŁAW OSTACHOWICZ, JANISŁAW TARNOWSKI (GDAŃSK)

1. Wstęp

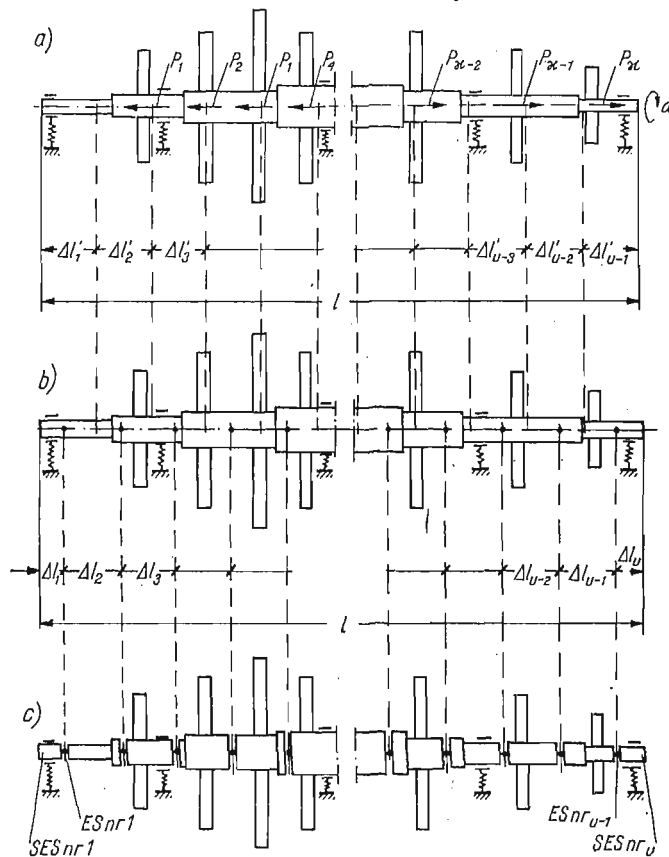
Jednym z podstawowych zadań związanych z analizą własności dynamicznych wałów i wirników jest określenie częstości drgań własnych układu i odpowiadających im postaci. Jakkolwiek zagadnienie to było poruszone w licznych pracach dotyczących dynamiki wirników [1, 4] niemniej problem pozostaje nadal aktualny i jest daleki od ostatecznego rozwiązania. Powstają coraz to nowsze i doskonalsze metody obliczeniowe, w szczególności metody komputerowe, pozwalające na budowę bardziej złożonych modeli obliczeniowych, lepiej odwzorowujących układy rzeczywiste aniżeli metody dawniej stosowane. Spośród metod komputerowych do analizy dynamicznej wałów i wirników najszerzej są stosowane metody elementów skończonych i metody bazujące na idei macierzy przeniesienia. Niniejsza praca stanowi kolejną próbę rozwiązania zagadnienia drgań własnych wałów napędowych, w szczególności wałów okrętowych oraz wirników różnego rodzaju maszyn wirnikowych w oparciu o metodę sztywnych elementów skończonych [2]. Wybór metody został podyktowany jej szczególną przydatnością do obliczeń dynamicznych układów prętowych, do których między innymi należą wały i wirniki.

Model obliczeniowy przyjęty w tej metodzie pozwala na uwzględnienie szeregu czynników determinujących drgania obrotowe wirników [6], których nie uwzględniają metody prezentowane dotychczas w dostępnej autorom literaturze. Dotyczy to przede wszystkim równoczesnego uwzględnienia efektów giroskopowych i sił osiowych oraz przebadania ich wpływu na częstości własne. Ważną zaletą zastosowanej metody sztywnych elementów skończonych jest możliwość pełnej, łącznie z przygotowaniem danych, automatyzacji obliczeń co wskazuje na jej zdecydowanie aplikacyjny charakter.

2. Modelowanie układu fizycznego

Przedmiotem analizy są wały i wirniki wykonujące drgania obrotowe, dowolnie łożyskowane i obciążone siłami osiowymi (rys. 1a). Wspomniana analiza dotyczy takich elementów konstrukcyjnych jak wirniki turbin, sprzężarek pomp, linii wałów okrętowych i innych. Zakłada się, że wał obraca się ze stałą prędkością kątową wokół własnej osi, a ponadto wykonuje ruch precesyjny wokół osi łożysk. Na wale w dowolnym miejscu mogą być osadzone sztywne tarcze odpowiadające w układach rzeczywistych np. okrętowej śrubie napędowej lub też tarczom wirnikowym turbiny. Utworzenie modelu obliczeniowego przy-

jętego układu fizycznego w oparciu o metodę sztywnych elementów skończonych przebiega w dwóch etapach. W pierwszym etapie dzielimy wał w sposób pomyślany na $u-1$ odcinków o długości Δl_i (rys. 1b). Własności sprężyste każdego odcinka skupiamy w środku jego długości w elementach sprężystych (ES). Elementy sprężyste są nieważkie, bezwymiarowe i mają charakterystyki liniowe. Pomędzy elementami sprężystymi znajdują się odcinki wału traktowane jako sztywne (zwane sztywnymi elementami skończonymi — SES).



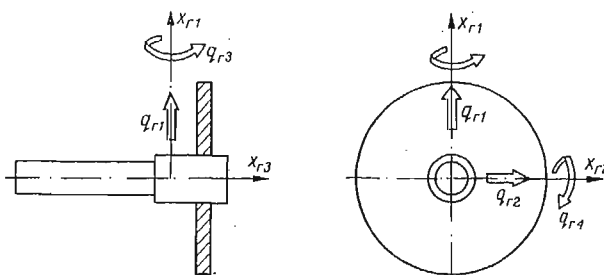
Rys. 1. Podział wirnika na sztywne elementy skończone i elementy sprężyste a) model fizyczny układu, b) podział pierwotny, c) model dyskretny

W ten sposób w drugim etapie podziału otrzymuje się u sztywnych elementów skończonych o długości Δl_i połączonych ze sobą elementami sprężystymi (rys. 1c). Własności sprężyste podpór w modelu obliczeniowym są reprezentowane przez elementy sprężyste łączące odpowiednie sztywne elementy skończone z ostoją.

Do opisanego ruchu przedstawionego modelu obliczeniowego wprowadza się związane z każdym sztywnym elementem skończonym i z każdym elementem sprężystym nieruchome układy odniesienia. Są to układy ortokartezjańskie pokrywające się w stanie równowagi modelu w przypadku SES z ich głównymi centralnymi osiami bezwładności, natomiast w przypadku elementów sprężystych z ich głównymi osiami deformacji. Główne osie

deformacji ES charakteryzują się tym, że siły i pary sił działające na ES powodują ich odkształcenia translacyjne i rotacyjne zgodnie z kierunkami działania tych sił i par sił. Z uwagi na charakter rozpatrywanych drgań przemieszczenia r -tego sztywnego elementu skończonego opisują cztery niezależne współrzędne: dwa przemieszczenia translacyjne q_{r_1} i q_{r_2} oraz dwa rotacyjne q_{r_3} i q_{r_4} (rys. 2). Wobec tego posiada on cztery stopnie swobody a współrzędne uogólnione opisujące jego położenie w układzie lokalnym tworzą blok o postaci

$$(2.1) \quad \mathbf{q}_r = \text{col}(q_{r_\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$



Rys. 2. Współrzędne uogólnione SES

Każdy SES określony jest blokiem współczynników bezwładności. Ze względu na to, że osie x_{r_1} , x_{r_2} , x_{r_3} są głównymi centralnymi osiami bezwładności blok ten jest macierzą diagonalną o postaci

$$(2.2) \quad \mathbf{m}_r = \text{diag}[m_{r_\alpha}], \quad \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie m_{r_1} i m_{r_2} oznaczają masę r -tego sztywnego elementu skończonego, m_{r_3} i m_{r_4} — masowe momenty bezwładności względem osi x_{r_1} i x_{r_2} (rys. 2).

Każdy EST określony jest blokiem współczynników sztywności. Ponieważ założono, że osie y_{k_1} , y_{k_2} są głównymi osiami deformacji EST bloki te są macierzami diagonalnymi i posiadają postać:

$$(2.3) \quad \mathbf{C}_k = \text{diag}[C_{k_\alpha}], \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Pierwsze dwa wyrazy diagonalne tego bloku są współczynnikami sztywności na ścinanie, pozostałe dwa współczynnikami sztywności na zginanie. Sposób wyznaczenia tych współczynników podano w pracach [2, 5, 6].

3. Model matematyczny

Równania ruchu wyprowadza się w oparciu o równania Lagrange'a drugiego rodzaju

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie T oznacza energię kinetyczną układu, q_σ — współrzędne uogólnione, Q_σ — siły uogólnione, t — czas, n — jest liczbą stopni swobody układu.

Ponieważ każdy sztywny element skończony ma cztery stopnie swobody, ruch r -tego SES opisują cztery równania (3.1) a dla całego układu należy ułożyć 4 u tych równań. Energię kinetyczną układu określa związek

$$(3.2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^u m_r \cdot \dot{q}_r^2.$$

Równanie (3.2) w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$(3.3) \quad T = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{q},$$

gdzie \mathbf{M} jest macierzą współczynników bezwładności składającą się z bloków m_r (2.2)

$$(3.4) \quad \mathbf{M} = \text{diag} \{m_1, m_2, \dots, m_r, \dots, m_{u-1}, m_u\},$$

a $\dot{\mathbf{q}}$ jest wektorem prędkości uogólnionych układu

$$(3.5) \quad \dot{\mathbf{q}} = \text{col} \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{u-1}, \dot{q}_u\}.$$

Zakłada się, że na układ oprócz sił potencjalnych działają jeszcze siły niepotencjalne. Siłę uogólnioną Q_σ zapisujemy w postaci sumy trzech składników

$$(3.6) \quad Q_\sigma = - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} + \Gamma_\sigma + Q_\sigma^*, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie V oznacza energię potencjalną układu, Γ_σ — siły giroskopowe, Q_σ^* inne siły niepotencjalne (poza giroskopowymi).

Przyjmuje się, że energia potencjalna jest funkcją jedynie współrzędnych uogólnionych (nie zależy jawnie od czasu)

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_r, \dots, q_{u-1}, q_u).$$

Energia potencjalna układu jest jednorodną formą kwadratową

$$(3.7) \quad V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q},$$

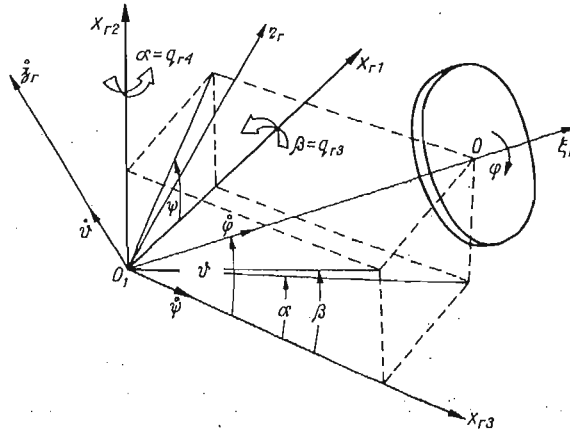
gdzie \mathbf{K} jest macierzą sztywności [2], \mathbf{q} wektorem współrzędnych uogólnionych układu. W rozważanym modelu matematycznym energia potencjalna reprezentuje energię elementów sprężystych.

Siły giroskopowe wyznaczmy wychodząc z zasady zachowania krętu. Ruch dowolnego elementu wału wykonującego drgania obrotowe, można z punktu widzenia dynamiki bryły, traktować jako ruch ciała sztywnego względem punktu nieruchomego. Dla przykładu rozpatrzmy ruch sztywnego elementu skończonego w kształcie tarczy, reprezentującego np. okrętową śrubę napędową lub tarczę łopatkową wirnika turbiny. Punkt przecięcia się stycznej do odkształconej osi wału w miejscu zamocowania tarczy, z osią łożysk jest w układzie r -tego SES punktem nieruchomym O_1 (rys. 3) względem którego odbywa się ruch tarczy. Położenie tarczy w układzie $x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}$, jest określone przez kąty Eulera, a mianowicie: ψ — kąt precesji, ϑ — kąt nutacji i φ — kąt obrotu własnego. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia momentów giroskopowych działających w kierunku zgodnym z przyjętymi współrzędnymi rotacyjnymi q_{r_3} i q_{r_4} , określonymi w tym przypadku przez kąty α i β .

W tym celu wprowadzamy związany z tarczą ruchomy układ odniesienia ξ_r, ζ_r, η_r . Ponieważ interesują nas jedynie przemieszczenia rotacyjne, zatem możemy przyjąć, że obydwa układy odniesienia, ruchomy i nieruchomy, mają wspólny początek w środku tarczy 0. Wychodząc z prawa zachowania krętu, wyznaczamy momenty działające na tarczę ze znanego wzoru

$$(3.8) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H},$$

gdzie \mathbf{H} jest krętem tarczy a $\boldsymbol{\omega}$ jej prędkością kątową.



Rys. 3. Wirujący element wału w ruchomym ξ_r, η_r, ζ_r i nieruchomym x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} układzie odniesienia

Rzutuując moment krętu na osie układu ruchomego, otrzymujemy następujące zależności:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} M_{\xi_r} &= \frac{dH_{\xi_r}}{dt} + \omega_{\eta_r} H_{\zeta_r} - \omega_{\zeta_r} H_{\eta_r} \\ M_{\eta_r} &= \frac{dH_{\eta_r}}{dt} + \omega_{\zeta_r} H_{\xi_r} - \omega_{\xi_r} H_{\zeta_r} \\ M_{\zeta_r} &= \frac{dH_{\zeta_r}}{dt} + \omega_{\xi_r} H_{\eta_r} - \omega_{\eta_r} H_{\xi_r}. \end{aligned}$$

Występujące we wzorze (3.9) składowe wektora krętu wyznacza się przy pomocy wzorów

$$(3.10) \quad \begin{aligned} H_{\xi_r} &= I_{O_r} \cdot \omega_{\xi_r} \\ H_{\eta_r} &= I_{x_r} \cdot \omega_{\eta_r} \\ H_{\zeta_r} &= I_{x_r} \cdot \omega_{\zeta_r}, \end{aligned}$$

gdzie I_{O_r} jest masowym momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek tarczy a I_{x_r} masowym momentem bezwładności względem średnicy tarczy. Składowe prędkości kątowej względem osi ξ_r, η_r, ζ_r są równe

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \omega_{\xi_r} &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \\ \omega_{\eta_r} &= -\dot{\psi} \sin \vartheta \\ \omega_{\zeta_r} &= \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu równań (3.10) i (3.11) zależność (3.9) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} M_{\xi_r} &= I_{0r} \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) \\ M_{\eta_r} &= -I_{xr} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \sin \vartheta) + I_{0r} \vartheta (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) - I_{0r} \vartheta \dot{\psi} \cos \vartheta \\ M_{\zeta_r} &= I_{0r} \ddot{\vartheta} + \dot{\psi} \sin \vartheta [I_{0r} \dot{\varphi} + (I_{0r} - I_{xr}) \dot{\psi} \cos \vartheta]. \end{aligned}$$

Prędkość kątowna ω_{ξ_r} odpowiada prędkości kątownej Ω obrotów własnych wału i jest z założenia stała

$$(3.13) \quad \omega_{\xi_r} = \Omega = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Podstawiając zależność (3.13) do (3.12) otrzymujemy wyrażenia

$$(3.14) \quad \begin{aligned} M_{\xi_r} &= 0 \\ M_{\eta_r} &= -I_{xr} (\ddot{\psi} \sin \vartheta + 2\dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta) + I_{0r} \Omega \dot{\vartheta} \\ M_{\zeta_r} &= I_{xr} \ddot{\vartheta} + \dot{\psi} \sin \vartheta [I_{0r} \Omega - I_{0r} \dot{\psi} \cos \vartheta]. \end{aligned}$$

Transformacja opisanych wzorem (3.14) momentów do układu nieruchomego odbywa się przy wykorzystaniu następujących relacji [3]

$$(3.15) \quad \begin{aligned} M_{x_{r2}} &= M_{\eta_r} \cos \vartheta \cos \psi - M_{\xi_r} \sin \psi \\ M_{x_{r3}} &= M_{\eta_r} \cos \vartheta \sin \psi + M_{\zeta_r} \cos \psi, \end{aligned}$$

gdzie przez $M_{x_{r2}}$ i $M_{x_{r3}}$ oznaczono momenty działające odpowiednio wokół osi x_{r2} i x_{r3} (rys. 3).

Pomiędzy kątami α i β określającymi chwilowe położenie tarczy w układzie nieruchomym x_{r1} i x_{r2} , x_{r3} a kątami ψ i ϑ opisującymi chwilowe położenie tarczy w układzie ruchomym ξ_r , η_r , ζ_r zachodzą relacje [3]

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \text{tg } \vartheta \cos \psi \\ \text{tg } \beta &= \text{tg } \vartheta \cdot \sin \psi \end{aligned}$$

Ponieważ rozpatrujemy małe drgania wału, przeto jedynie kąty ψ i φ mogą przyjmować dowolne wartości, pozostałe tj. ϑ , α i β są z założenia małe. Pozwala to na zlinearyzowanie związków (3.16), które przyjmują postać:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \alpha &= \vartheta \cdot \cos \psi \\ \beta &= \vartheta \cdot \sin \psi. \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe zależności przy podstawieniu wzoru (3.14) do (3.15) otrzymujemy

$$(3.18) \quad \begin{aligned} M_{r_{x2}} &= I_{r_{x2}} [- (\ddot{\psi} \vartheta - 2\dot{\psi} \dot{\vartheta}) \cos \psi - (\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \vartheta) \sin \psi] + I_{0r} \Omega [\dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\psi} \vartheta \sin \psi] \\ M_{r_{x3}} &= I_{r_{x3}} [- (\ddot{\psi} \vartheta + 2\dot{\psi} \dot{\vartheta}) \sin \psi + (\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \vartheta) \cos \psi] + I_{0r} \Omega [\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\psi} \vartheta \cos \psi]. \end{aligned}$$

Różniczkując zależności (3.17) i podstawiając do równań (3.18) otrzymujemy ostateczne wzory na składowe momentów działających na tarczę

$$(3.19) \quad \begin{aligned} M_{r_{x2}} &= I_{r_{x2}} \ddot{\beta} - I_{0r} \Omega \dot{\alpha} \\ M_{r_{x3}} &= I_{r_{x3}} \ddot{\alpha} + I_{0r} \Omega \dot{\beta}. \end{aligned}$$

We wzorze (3.19) wyrażenia $-I_{or}\Omega\dot{\alpha}$ i $I_{or}\Omega\dot{\beta}$ oznaczają momenty giroskopowe działające w kierunku rotacyjnych współrzędnych uogólnionych q_{r_3} i q_{r_4} r -tego SES. Wobec powyższego blok uogólnionych sił giroskopowych działających na r -ty SES można przedstawić w postaci

$$(3.20) \quad \Gamma_r^* = \text{col}\{0, 0 - I_{or}\Omega q_{r_3}, I_{or}\Omega q_{r_4}\}.$$

Równanie (3.20) możemy przedstawić w postaci iloczynu

$$(3.21) \quad \Gamma_r^* = -G_r \cdot \dot{q}_r,$$

gdzie:

$$(3.22) \quad G_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{or}\Omega \\ 0 & 0 & -I_{or}\Omega & 0 \end{bmatrix},$$

jest blokiem oddziaływań giroskopowych odpowiadającym r -temu SES. Następnie tworzymy macierz kolumnową o wymiarach $4u \times 1$

$$(3.23) \quad \Gamma_r = \text{col}\{0, \dots, 0, \Gamma_r^*, 0, \dots, 0\}.$$

Wektor uogólnionych sił żyroskopowych całego układu otrzymamy po zsumowaniu wektorów Γ_r dla wszystkich SES

$$(3.24) \quad \Gamma = \sum_{r=1}^u \Gamma_r = -G \cdot q,$$

gdzie:

$$(3.25) \quad G = \text{diag}\{G_r\}, \quad r = 1, 2, \dots, u,$$

jest macierzą giroskopową całego układu.

Wektor niepotencjalnych sił uogólnionych określa związek [5]

$$(3.26) \quad Q_\sigma^* = \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}, \quad \sigma = 1, \dots, n,$$

gdzie L oznacza sumę prac wszystkich osiowych sił przekrojowych. Oznaczając przez $v = v(x)$ oraz $w = w(x)$ ugięcia pręta w jego głównych płaszczyznach zginania a przez $N(x)$ osiową siłę przekrojową, pracę tej siły określa znana formuła energetyczna

$$(3.27) \quad L = \frac{1}{2} \int_{(i)} N(x) \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx,$$

gdzie

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cong q_{r_3}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \cong q_{r_4}.$$

W modelu dyskretnym, pracę sił osiowych określa się sumując prace wykonane na przemieszczeniach wszystkich sztywnych elementów skończonych.

Zakłada się że wielkości tych sił nie zmieniają się na długości poszczególnych SES.

Oznaczając przez N_r siłę obciążającą r -ty sztywny element skończony, pracę tej siły określa związek (przy założeniu niewielkich kątów obrotu)

$$(3.28) \quad L_r = \frac{1}{2} N_r \cdot l_r (q_{r_3}^2 + q_{r_4}^2).$$

Związek (3.28) zapisujemy w postaci macierzowej. Tworzymy macierz \mathbf{K}_G^r o wymiarach $4u \times 4u$, w której r -ty blok na głównej przekątnej przyjmuje postać

$$(3.29) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & N_r l_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & N_r l_r \\ \hline \end{array}$$

Wówczas

$$(3.30) \quad L_r = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_G^r \mathbf{q},$$

gdzie \mathbf{q} jest wektorem współrzędnych uogólnionych.

Sumowanie wszystkich prac prowadzi do utworzenia macierzy sztywności geometrycznej układu o strukturze jak (3.29)

$$(3.31) \quad L = \sum_{r=1}^n L_r = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_G \mathbf{q},$$

gdzie:

$$(3.32) \quad \mathbf{K}_G = \sum_{r=1}^n \mathbf{K}_G^r.$$

Wprowadzając (3.31) do równania (3.26) otrzymujemy

$$(3.33) \quad \mathbf{Q}_G^* = \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{q}.$$

Wprowadzając związki (3.7), (3.24) i (3.33) do (3.6) otrzymujemy

$$(3.34) \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_G \mathbf{q}.$$

Podstawiając (3.3) i (3.34) do równania (3.1) otrzymujemy równania ruchu układu w postaci

$$(3.35) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_G)\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

4. Drgania swobodne

Po wprowadzeniu podstawienia

$$(4.1) \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad \text{i} \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}$$

równanie (3.35) przyjmie postać

$$(4.2) \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

W równaniu (4.2) macierz \mathbf{A} jest skośnie symetryczna a \mathbf{B} jest symetryczna i dodatnio określona. Podstawiając do równania (4.2) rozwiązanie w postaci $\mathbf{y} = \gamma e^{pt}$ otrzymujemy układ $2n$ równań (n -liczba stopni swobody układu)

$$(4.3) \quad (\mathbf{B} + p\mathbf{A})\gamma = \mathbf{0}$$

Do rozwiązania równania (4.3), czyli do wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych wykorzystano metodę łańcuchów Sturma w połączeniu z techniką odwrotnej iteracji [7]. W tym celu równanie (4.3) przekształca się do postaci

$$(4.4) \quad (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{A}^*)\gamma = \mathbf{0}$$

gdzie $\mathbf{A}^* = i\mathbf{A}$ jest macierzą skośnie hermitowską, $\lambda = ip$ jest liczbą rzeczywistą a „ i ” jednostką urojoną. Zastosowana metoda polega na wykorzystaniu w pierwszym etapie własności łańcuchów Sturma do ustalenia liczby pierwiastków znajdujących się w dowolnym zadanym przedziale (a, b) , a następnie drogą kolejnego dzielenia przedziału (a, b) na ustaleniu przedziałów zawierających tylko po jednym pierwiastku. Wyizolowane w ten sposób pierwiastki są następnie obliczane z żadaną dokładnością. Do tego celu, jak wspomniano, wykorzystuje się technikę odwrotnej iteracji. W procesie odwrotnej iteracji równocześnie z wartościami własnymi obliczane są odpowiadające im wektory własne. Rozwiązanie równania (4.4) uzyskuje się w postaci par pierwiastków rzeczywistych $\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \dots, \lambda_n, -\lambda_n$ a odpowiadające im wektory są zespolone i parami sprzężone. Wartości własne równania (4.3) są równe λ/i z czego wynika, że są one urojone. Wektory własne nie ulegają zmianie. Zastosowanie takiej metody rozwiązania zagadnienia własnego (4.3) zapewnia:

- ekonomiczne wykorzystanie pamięci operacyjnej komputera dzięki zachowaniu pasmowego charakteru macierzy,
- stabilność numeryczną, pozwalającą na wyznaczanie wartości własnych z dowolną dokładnością,
- możliwość obliczania zadanej liczby najniższych wartości własnych w określonym przedziale.

Wyznaczone w procesie odwrotnej iteracji wektory własne są następnie normowane tak, aby pierwsza różna od zera składowa była równa jedności. Z otrzymanych w ten sposób wektorów modalnych

$$(4.5) \quad \gamma^{(i)} = \text{col}(1, \gamma_2^{(i)}, \gamma_3^{(i)}, \dots, \gamma_n^{(i)}), \quad (i = 1, 2, \dots, 2n)$$

można zbudować macierz modalną o postaci

$$(4.6) \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} & \dots & \gamma_2^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n^{(1)} & \gamma_n^{(2)} & \dots & \gamma_n^{(2n)} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie, rozwiązanie równania (4.2) można zapisać w postaci

$$(4.7) \quad \mathbf{q} = \mathbf{H}e^{p\mathbf{t}}\boldsymbol{\beta}$$

gdzie:

$$(4.8) \quad e^{p\mathbf{t}} = \text{diag}(e^{p_1 t}, e^{p_2 t}, \dots, e^{p_{2n} t}),$$

oraz

$$(4.9) \quad \boldsymbol{\beta} = \text{col}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n}),$$

jest wektorem o składowych, które wyznacza się z przyjętych dla rozwiązywanego przypadku warunków początkowych.

5. Program obliczeń

Program obliczeń drgań obrotowych wałów i wirników napisano w języku FORTRAN IV i uruchomiono na komputerze ICL-70. Program realizuje trzy zasadnicze etapy obliczeń

- 1) generowanie parametrów modelu obliczeniowego na podstawie danych o geometrii układu i stałych materiałowych,
- 2) budowa macierzy charakterystycznych układu,
- 3) obliczenie drgań swobodnych.

Szczególne uwagę zwrócono na proces przygotowania danych i kontrolę ich poprawności. Automatyzacja tej fazy obliczeń zwiększa efektywność korzystania z programu, przyczyniając się do wzrostu jego praktycznego znaczenia. Przykładowo, liczba danych opisujących linię wałów na statku o przeciętnej długości z 450 w przypadku przygotowania „ręcznego”, zmniejsza się do około 80 przy przygotowaniu automatycznym.

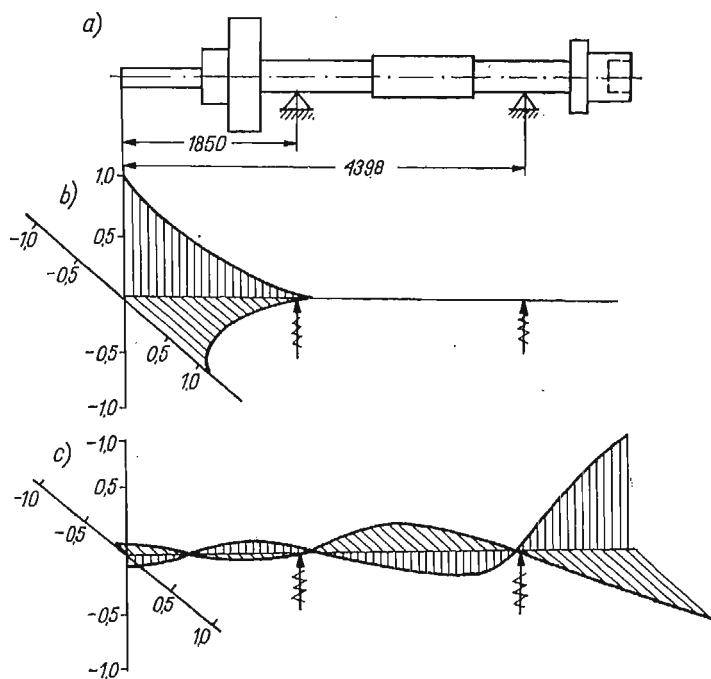
Program korzysta z pomocniczej pamięci zewnętrznej w postaci dysku magnetycznego, co umożliwia wykonywanie szeregu operacji na fragmentach macierzy, sukcesywnie ściąganych z dysku. Program zajmuje 150 kB pamięci operacyjnej i pozwala na obliczanie układów, których macierze charakterystyczne zawierają do 12000 elementów.

6. Przykład obliczeń

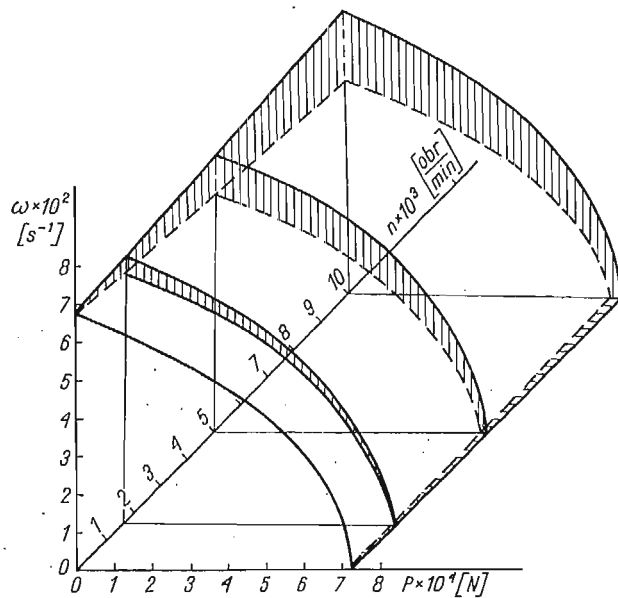
Wykonano obliczenia drgań obrotowych wirnika przedstawionego na rys. 4a. Geometrię wirnika opisano w tablicy 1. Wirnik jest wykonany ze stali o następujących stałych materiałowych

- moduł Younga $E = 2.1 \cdot 10^6$ [kG/cm²]
- moduł Kirchoffa $G = 0.83 \cdot 10^6$ [kG/cm²]
- ciężar właściwy $= 0.78 \cdot 10^{-2}$ [kG/cm³]

Wirnik podzielono na 10 sztywnych elementów skończonych i 11 elementów sprężystych (łącznie z ES reprezentującymi sztywności podpór). Wartości liczbowe parametrów modelu obliczeniowego zamieszczono w tablicach 2 i 3. W tablicy 3 przez r i p oznaczono numery SES pomiędzy którymi znajduje się k -ty ES, przez c_{k1} i c_{k2} oznaczono współczynniki sztywności wału na ścinanie, przez c_{k3} i c_{k4} współczynniki sztywności wału na zginanie



Rys. 4. Wirnik podparty na dwóch podporach: a) schemat układu, b) postać drgań 1 stopnia, c) postać drgań 2 stopnia



Rys. 5. Zależność częstości drgań własnych wirnika ω od wartości siły osiowej P i liczby obrotów n

Tablica 1

Nr odcinka wału	Średnica [mm]		Długość [mm]
	zewnątrzna	wewnętrzna	
1	51	0	630
2	102	0	290
3	203	0	330
4	66	0	1250
5	72	0	1298
6	66	0	1250
7	185	0	112
8	102	0	232
9	102	65	170

Tablica 2

Nr SES	Masa	Masowy moment bezwładności
	[kg]	[kgm ²]
1	0.4994	0.04077
2	2.3547	0.57084
3	9.3476	1.69215
4	1.6615	0.51987
5	1.7737	0.57084
6	1.9775	0.62181
7	1.8960	0.58103
8	1.6615	0.51987
9	3.5168	1.15188
10	1.7227	0.16309

Tablica 3

r	p	$c_{k1} \times 10^{-10}$	$c_{k2} \times 10^{-10}$	$c_{k3} \times 10^{-10}$	$c_{k4} \times 10^{-10}$	S_{rk}	S_{pk}
		[N/m]		[Nm/rad]		[cm]	[cm]
1	2	0.0274		0.1130		15.1	-39.8
2	3	0.1442		1.5646		20.8	-19.8
3	4	0.0488		0.3383		40.7	-30.3
4	5	0.0459		0.3168		30.3	-31.5
5	6	0.0534		0.4259		29.0	-30.3
6	7	0.0547		0.4488		30.3	-29.4
7	8	0.0481		0.3444		31.2	-30.3
8	9	0.0459		0.3168		30.3	-43.7
9	10	0.0718		0.7321		16.9	-11.8
4	4	0.0429	0.0627	0.8589	0.9547	3.3	—
8	8	0.0407	0.0472	0.5156	0.6130	15.9	—

a przez s_{rk} i s_{pk} oznaczono współrzędne zamocowania k -tego ES w lokalnym układzie odniesienia odpowiednio r -tego i p -tego SES. W dwóch ostatnich wierszach tablicy 3 podano współczynniki sztywności podpór oraz numery SES ($r = p$) do których są one dołączone.

W rezultacie przeprowadzonych obliczeń przebadano wpływ sił osiowych i efektów żyroskopowych, działających łącznie, na częstości drgań obrotowych wirnika. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie graficznej na rys. 5. Dodatkowo w tablicy 4 zestawiono częstości drgań własnych wirnika obliczone dla wybranych prędkości obrotowych wirnika i różnych wartości sił osiowych. Należy zaznaczyć, że obliczenia wykonano przy założeniu występowania jedynie precesji współbieżnej. Dwie pierwsze postacie drgań wirnika (dla $n = 0$) pokazano na rys. 4.

Tablica 4

$P \times 10^{-4} [N]$	$n \left[\frac{\text{obr}}{\text{min}} \right]$	Postać drgań	0	500	1500	5000	10000
			0	I	652.36	681.52	696.34
		II	839.27	878.95	898.38	913.16	942.72
1	I	634.42	662.35	677.24	688.42	710.76	
	II	818.49	856.92	876.14	890.55	919.38	
3	I	589.48	615.36	629.20	639.58	660.34	
	II	775.21	811.72	829.82	843.46	870.77	
5	I	538.64	562.35	574.99	584.48	603.45	
	II	729.05	763.29	780.40	793.24	818.91	
10	I	378.80	395.48	404.37	411.05	424.38	
	II	583.65	611.05	624.75	635.03	655.58	
12	I	274.08	286.14	292.58	297.40	307.05	
	II	505.75	529.50	541.37	550.27	568.09	
13	I	206.86	209.08	220.82	224.46	231.75	
	II	461.61	467.02	494.12	502.25	518.51	
13.5	I	153.19	159.94	163.53	167.29	171.68	
	II	434.99	455.41	465.71	472.31	488.69	

Bibliografia

1. J. JENSEN, F. NIORDSON, P. PEDERSEN — *Autor and kwick index on rotor dynamics*, IUTAM Symposium on Rotor Dynamics, Lyngby, Denmark, 1974.
2. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITBRODT, F. NAJBAR, S. GRABOWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, 1975.

3. K. MAGNUS, *Giroskop — teoria i primienienije*, Izd. Mir, Moskwa 1974.
4. A. MUSZYŃSKA, *Z zagadnień dynamiki wirników*, Prace IPPT Nr 14, 1971.
5. W. OSTACHOWICZ, *Dyskretny model obliczania drgań własnych i stateczności prętów osiowo obciążonych o dowolnie zmiennym przekroju*. Mech. Teor. i Stosow., 3, 13 1975.
6. J. TARNOWSKI, *Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń drgań wałów okrętowych z uwzględnieniem efektów giroskopowych*, Rozprawy Inżynierskie, Vol. 22, Nr 3, 1974.
7. K. K. GUPTA, *On a combined Sturm sequence and inverse iteration technique for eigenproblem solution of spinning structures*, Int. J. Num. Meth. Engng, 7, 1973.

Резюме

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ НАГРУЖЕННЫХ
ОСЕВЫМИ СИЛАМИ

В работе представлено влияние гироскопических эффектов и осевых сил на собственные колебания валов и роторов. На основе метода жестких конечных элементов принято вычислительную модель. Работу иллюстрирует конкретный пример. Метод разработан с точки зрения применения цифровых вычислительных методов. Вычислительная программа написана в языке Фортран IV.

Summary

ANALYSIS OF VIBRATIONS OF ROTATING SHAFTS LOADED BY AXIAL FORCES

The influence of gyroscopic effects and axial forces, acting simultaneously on natural frequencies of shafts has been examined.

The stiff finite element model has been used. Numerical results are presented for representative structures, solved by the computer program written in FORTRAN IV for the ICL-70 computer.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI
MASZYN

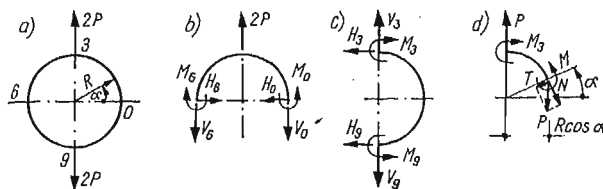
Praca została złożona w Redakcji dnia 20 lutego 1978 r.

OPTIMALIZACJA PIERŚCIENI SZTYWNO — PLASTYCZNYCH Z WIĘZAMI
GEOMETRYCZNYMI

ANDRZEJ GA WĘCKI, ANDRZEJ GARSTECKI (POZNAŃ)

1. Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest określenie kształtu optymalnych, idealnie plastycznych pierścieni kołowych obciążonych dwoma równoważącymi się siłami średnicowymi o wartości $2P$ (rys. 1). Projekty pierścieni uzyskano w oparciu o teorię nośności granicznej stosując wyłącznie podejście statyczne. Na kształt konstrukcji optymalnej nałożono więzy geometryczne polegające na tym, że przekrój poprzeczny pierścienia w obrębie danego



Rys. 1

kąta γ ma być stały. Podobne zadanie, w którym założono, że przekrój nie może być mniejszy od pewnej z góry określonej wartości, rozwiązał W. Prager [1]. Autor ten rozważał pierścień o przekroju idealnym dwuteowym (sandwiczowym) a projekt optymalny uzyskał w oparciu o kinematyczne kryterium sformułowane w pracy [2]. Porównanie rezultatów niniejszej pracy z rezultatami uzyskanymi przez W. Pragera ma dać odpowiedź na pytanie, jak dalece różnica w sposobie sformułowania ograniczeń geometrycznych w obu zadaniach wpływa na ostateczny kształt konstrukcji optymalnej i na własności rozwiązania.

2. Siły wewnętrzne

W celu uzyskania wzorów na siły wewnętrzne wykorzystamy symetrię zadania i równania równowagi (rys. 1). Z symetrii wynika, że $V_0 = V_6$ a z równań równowagi sił mamy $V_0 = V_6 = V_3 = P$ oraz $H_0 = H_3 = H_9 = 0$. Wobec powyższego siły normalne i pop-

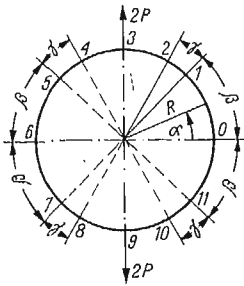
¹⁾ Pracę wykonano w ramach problemu węzłowego 05.12, koordynowanego przez IPPT PAN.

rzeczne można obliczyć korzystając tylko z równań równowagi. Wzór na moment zginający otrzymujemy z równania równowagi momentów (rys. 1d). W wyrażeniu tym występuje moment zginający w punkcie 3, którego wartość uzależniona jest od własności fizycznych materiału i od przekroju pierścienia jako funkcji kąta α . Komplet wzorów na siły wewnętrzne dla $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ przedstawiają równania (2.1):

$$(2.1) \quad \begin{cases} T(\alpha) = P \sin \alpha \\ N(\alpha) = P \cos \alpha \\ M(\alpha) = M_3 + PR \cos \alpha, \end{cases}$$

gdzie T , N i M oznaczają odpowiednio siłę poprzeczną, siłę normalną i moment zginający.

Ponieważ rozważany pierścień jest idealnie sztywno-plastyczny, siły wewnętrzne w obszarach uplastycznionych powiązane są odpowiednią zależnością graniczną. W dalszym ciągu przyjęto, że wpływ sił poprzecznych na uplastycznienie przekroju jest tak mały, że można go pominąć. Odpowiada to przyjęciu hipotezy Bernoulliego. Siła normalna w całym



Rys. 2

pierścieniu jest nieujemna i osiąga wartości równe zero w punktach 3 i 9. Zakładając, że w punktach tych następuje uplastycznienie, siła normalna i moment zginający spełniają warunki:

$$(2.2) \quad \begin{cases} N(\alpha) = P \cos \alpha \\ M(\alpha) = -M_{p3} + PR \cos \alpha, \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \Phi(M, N; M_p, N_p) \leq 0.$$

Indeks „p” oznacza graniczne wartości sił wewnętrznych a funkcja Φ przedstawia zależność graniczną. W obrębie kąta γ funkcja $\Phi < 0$, a w pozostałych częściach pierścienia $\Phi = 0$. Założenie powyższe jest naturalnym rozszerzeniem warunku optymalności na konstrukcje, w których wprowadza się więzy geometryczne. W rozważanym zadaniu (rys. 2) zakładamy więc, że w obrębie odcinków 1-2, 4-5, 7-8, 10-11 pierścień jest sztywny a w pozostałych pierścieniach jest uplastyczniony.

W dalszych paragrafach rozważymy szczegółowo przypadki pierścienia o przekroju dwuteowym i przekroju pełnym.

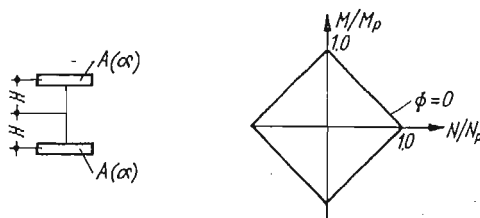
3. Pierścien dwuteowy

Dla idealnego przekroju dwuteowego (sandwiczowego) zależność graniczna (por. rys. 3) składa się z czterech linii prostych opisanych następującym związkiem:

$$(3.1) \quad \Phi = \frac{|M|}{M_p} + \frac{|N|}{N_p} = 1,$$

gdzie

$$(3.2) \quad N_p = 2A\sigma_p, \quad M_p = 2AH\sigma_p.$$



Rys. 3

W równaniach (3.2) σ_p oznacza granicę plastyczności materiału. W uplastycznionych partiach pierścienia wobec zależności (3.1) zachodzą równania:

$$(3.3) \quad M_p(\alpha) = \begin{cases} M(\alpha) + N(\alpha)H, & \text{jeśli } M > 0, N > 0 \\ -M(\alpha) + N(\alpha)H, & \text{jeśli } M < 0, N > 0. \end{cases}$$

Zależność (3.3) wykorzystamy wpieryw do wyznaczenia momentów granicznych w punkcie 1 ($M > 0, N > 0$) i w punkcie 2 ($M < 0, N > 0$):

$$(3.4) \quad \begin{cases} M_{p1} = M_p(\beta) = -M_{p3} + PR(1 + \bar{H})\cos\beta, & \bar{H} = H/R \\ M_{p2} = M_p(\beta + \gamma) = M_{p3} - PR(1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma) \end{cases}$$

Momenty graniczne M_{p1} i M_{p2} są sobie równe, gdyż z uwagi na założoną ciągłość funkcji pola przekroju, określają stały przekrój pierścienia w obrębie kąta γ . Wykorzystując ten fakt, z zależności (3.4) obliczamy moment graniczny w punkcie 3, M_{p3} , oraz moment graniczny odpowiadający stałemu przekrojowi pierścienia $M_s = M_{p1} = M_{p2}$:

$$(3.5) \quad M_{p3} = -M_s + PR(1 + \bar{H})\cos\beta = M_s + PR(1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma) = \\ = \frac{1}{2} PR[(1 + \bar{H})\cos\beta + (1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma)].$$

$$(3.6) \quad M_s = \frac{1}{2} PR[(1 + \bar{H})\cos\beta - (1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma)].$$

Funkcję momentów granicznych dla $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ wyznaczono z zależności (3.3) i równań równowagi (2.2). Uwzględniając fakt, że na odcinku 0-1 $M > 0$ i $N > 0$ a na odcinku 2-3 $M < 0$ i $N > 0$ oraz wykorzystując równania (3.5) otrzymujemy:

$$(3.7) \quad M_p(\alpha) = \begin{cases} M_s + PR(1 + \bar{H})(\cos \alpha - \cos \beta), & 0 \leq \alpha \leq \beta \\ M_s, & \beta \leq \alpha \leq \beta + \gamma \\ M_s + PR(1 - \bar{H})[\cos(\beta + \gamma) - \cos \alpha], & \beta + \gamma \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Równania (3.6) i (3.7) stanowią punkt wyjścia w poszukiwaniu rodziny optymalnych projektów pierścienia z różnymi więzami geometrycznymi.

Objętość materiału półek przekroju wynosi:

$$V = 2R \int_0^{2\pi} A(\alpha) d\alpha.$$

Podstawiając w powyższym wzorze według zależności (3.2)₂, że $A(\alpha) = \frac{M_p(\alpha)}{2H\sigma_p}$ otrzymamy

$$(3.8) \quad V = \frac{4R}{H\sigma_p} \int_0^{\pi/2} M_p(\alpha) d\alpha = \frac{4PR^2}{H\sigma_p} \int_0^{\pi/2} a(\alpha) d\alpha = \frac{4PR^2}{H\sigma_p} v,$$

gdzie $a(\alpha) = \frac{M_p(\alpha)}{PR} = \frac{2H\sigma_p}{PR} A(\alpha)$ oznacza bezwymiarowe pole przekroju półki a v bezwymiarową objętość ćwiartki pierścienia.

W przypadku, gdy więzem geometrycznym jest kąt γ , bezwymiarowe pole przekroju półki $a(\alpha)$ wyznacza się z równań (3.7), podstawiając w nich w miejsce M_s zależność (3.6):

$$(3.9) \quad a(\alpha) = \begin{cases} (1 + \bar{H}) \cos \alpha - \frac{1}{2} [(1 + \bar{H}) \cos \beta + (1 - \bar{H}) \cos(\beta + \gamma)], & 0 \leq \alpha \leq \beta \\ \frac{1}{2} [(1 + \bar{H}) \cos \beta - (1 - \bar{H}) \cos(\beta + \gamma)] = a_s, & \beta \leq \alpha \leq \beta + \gamma \\ -(1 - \bar{H}) \cos \alpha + \frac{1}{2} [(1 + \bar{H}) \cos \beta + (1 - \bar{H}) \cos(\beta + \gamma)], & \beta + \gamma \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Bezwymiarową objętość v występującą w zależności (3.8) otrzymano całkując pole przekroju $a(\alpha)$ określone wzorami (3.9):

$$(3.10) \quad v(\beta, \gamma) = \int_0^{\pi/4} a(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha = (1 + \bar{H}) \left[\sin \beta + \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) \cos \beta \right] + \\ + (1 - \bar{H}) \left[-1 + \sin(\beta + \gamma) + \left(\frac{\pi}{4} - \beta - \gamma \right) \cos(\beta + \gamma) \right].$$

Problem optymalizacji można sformułować dwojako:

— Zadanie pierwotne:

Dane jest obciążenie graniczne $2P$, znaleźć taki rozkład materiału, by objętość V osiągała wartość minimalną.

— Zadanie dualne:

Dana jest objętość materiału V , znaleźć taki rozkład materiału, by obciążenie graniczne $2P$ osiągało wartość maksymalną.

Omówimy obecnie rozwiązanie zadania pierwotnego. Minimum funkcji $v(\beta, \gamma)$ bez więzów nałożonych na kąt γ jest minimum globalnym. Minimum to uzyskano dla wartości β_0 i γ_0 obliczonych z warunków znikania pierwszych pochodnych funkcji $v(\beta, \gamma)$ względem γ i β :

$$(3.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \gamma} = (1 - \bar{H}) \left(\beta + \gamma - \frac{\pi}{4} \right) \sin(\beta + \gamma) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} = (1 + \bar{H}) \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) \sin \beta + (1 - \bar{H}) \left(\beta + \gamma - \frac{\pi}{4} \right) \sin(\beta + \gamma) = 0. \end{cases}$$

Z pierwszego z równań (3.11) otrzymujemy, że

$$(3.12) \quad \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad \beta + \gamma = 0.$$

Wstawiając (3.12)₁ do (3.11)₂ lub (3.12)₂ do (3.11)₂ dostajemy

$$(3.13) \quad \beta = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad \beta = 0.$$

Pierwsza pochodna funkcji v jest więc równa zero dla dwóch par wartości kątów β i γ :

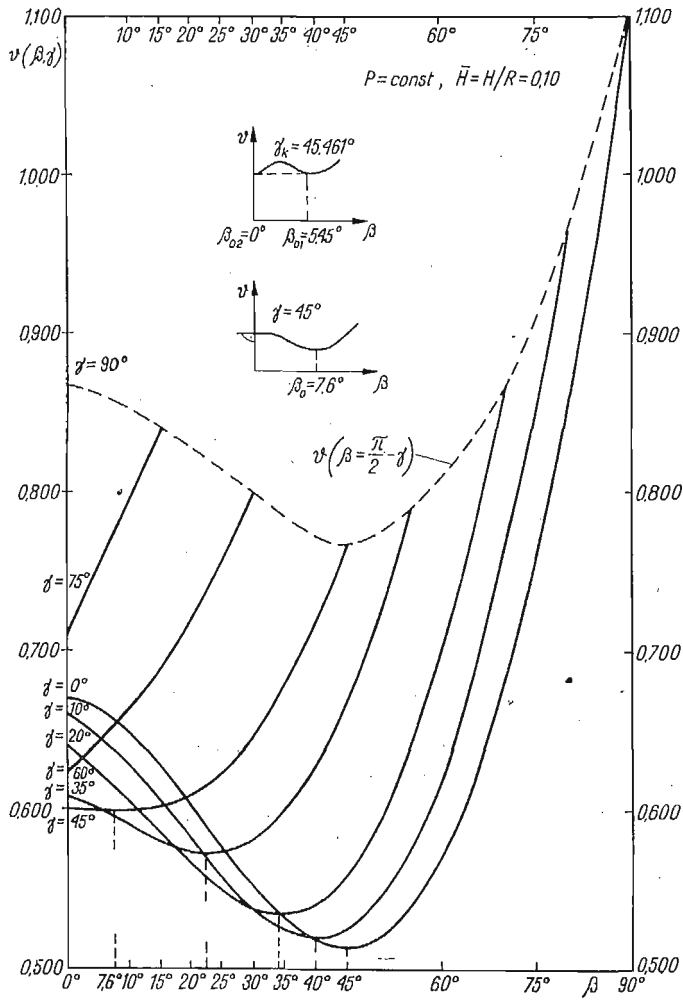
$$(3.14) \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = 0 \quad \text{oraz} \quad \beta = 0, \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Jeżeli podstawimy, że $\frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2} = s$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \gamma \partial \beta} = q$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = r$, to o wyborze punktu, w którym funkcja dwóch zmiennych osiąga ekstremum decyduje wyrażenie $\Delta = sr - q^2$ (por. [3] str 412). Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja $v(\beta, \gamma)$ w punkcie (β_0, γ_0) ma maksimum, gdy $s < 0$ a minimum, gdy $s > 0$. Jeśli $\Delta < 0$, to $v(\beta, \gamma)$ nie ma ani maksimum ani minimum. W rozważanym przypadku mamy:

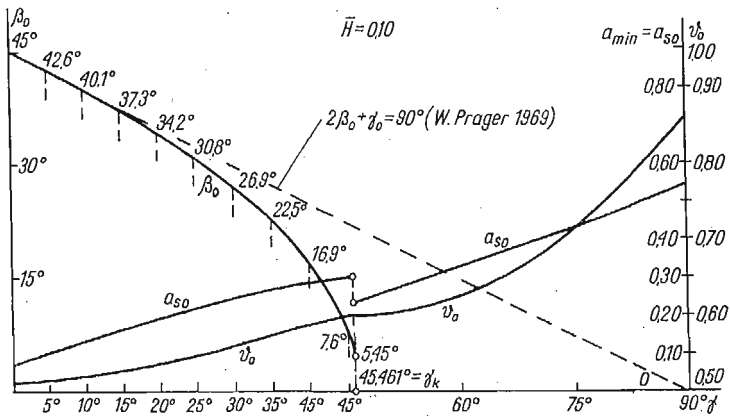
$$(3.15) \quad \begin{cases} s = \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2} = (1 - \bar{H}) \left[\sin(\beta + \gamma) + \left(\beta + \gamma - \frac{\pi}{4} \right) \cos(\beta + \gamma) \right] \\ q = \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma \partial \beta} = s \\ r = \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = (1 + \bar{H}) \left[\sin \beta + \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) \cos \beta \right] + q \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że tylko dla $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$ i $\gamma_0 = 0$ są spełnione warunki minimum funkcji $v(\beta, \gamma)$. Identyczny wynik uzyskał W. Prager [1].

Poszukiwanie projektów optymalnych przy więzach nałożonych na kąt γ jest o wiele bardziej pracochłonne. Punkty odpowiadające optymalnym wartościom kąta β dla ustalonych wartości kąta γ otrzymano stosując metodę przekrojów. Wyniki obliczeń ilustrują rysunki 4 - 7. Obliczenia numeryczne wykonano dla stosunku wysokości przekroju do średnicy pierścienia wynoszącego $H/R = 0,10$. Interesujące jest, że dla $\gamma = \gamma_k = 45,461^\circ$ otrzymano dwa równoważnościowe rozwiązania optymalne, a mianowicie dla $\beta_{01} = 5,45^\circ$ i dla $\beta_{02} = 0^\circ$. (por. rys. 4.5). Na rysunku 6 przedstawiono zależność pola przekroju półki od kąta α dla tych rozwiązań. Dla kątów $\gamma > \gamma_k$ optymalne projekty odpowiadają stałej wartości kąta $\beta_0 = 0$.

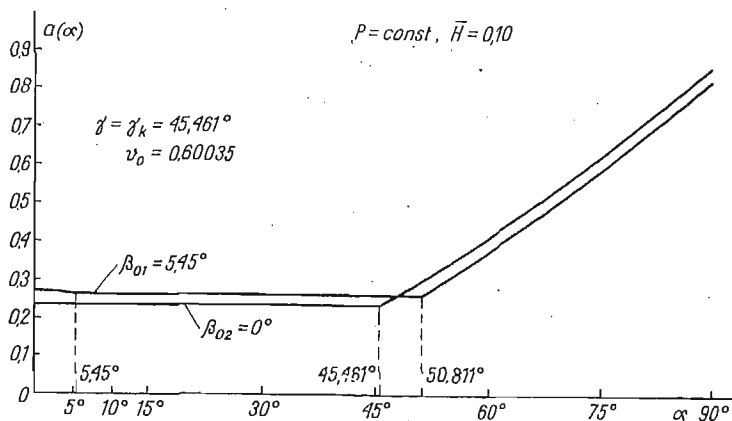


Rys. 4

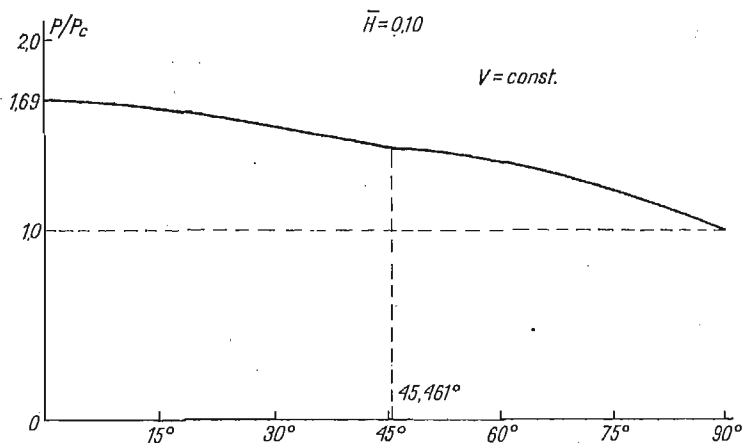


Rys. 5

Ilustracją wyników zadania dualnego, to jest zadania maksymalizacji obciążenia granicznego przy stałej objętości materiału pólek, jest rysunek 7. Przedstawia on zależność obciążenia granicznego dla rozwiązań optymalnych od wartości kąta γ . Siła P_c zaznaczona na rys. 7 odpowiada obciążeniu granicznemu pierścienia o stałym przekroju, którego objętość jest taka sama jak objętość pierścieni optymalnych.



Rys. 6



Rys. 7

Powróćmy jeszcze do zadania sformułowanego przez W. Pragera. Zadanie to polega na znalezieniu optymalnych kątów β_0 i γ_0 minimalizujących objętość w zadaniu pierwotnym lub maksymalizujących obciążenie graniczne w zadaniu dualnym, przy czym moment graniczny w obrębie całego pierścienia nie powinien być mniejszy od danej z góry wartości M_s . Omówimy bliżej zadanie pierwotne stosując nadal podejście statyczne. Wyjściowe równania (3.7) i (3.6) zapiszemy wpraw w postaci bezwymiarowej.

$$(3.16) \quad a(\alpha) = \begin{cases} m_s + (1 + \bar{H})(\cos \alpha - \cos \beta), & 0 \leq \alpha \leq \beta \\ m_s, & \beta \leq \alpha \leq \beta + \gamma \\ m_s + (1 - \bar{H})[\cos(\beta + \gamma) - \cos \alpha], & \beta + \gamma \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

gdzie $m_s = M_s/PR$.

Równanie (3.6) pełniące obecnie rolę równania więzów ma postać:

$$(3.17) \quad g(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} [(1 + \bar{H})\cos \beta - (1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma)] - m_s = 0.$$

Poszukiwanie minimum bezwymiarowej objętości v przy więzach (3.17) sprowadza się do badania funkcjonału pomocniczego v' :

$$(3.18) \quad v'(\beta, \gamma) = \int_0^{\pi/2} a(\alpha) d\alpha + \lambda g(\beta, \gamma),$$

gdzie λ jest mnożnikiem Lagrange'a przyjmującym pewną wartość stałą.

Podstawiając równania (3.17) i (3.16) do równania (3.18) i wykonując przepisane całkowanie otrzymujemy:

$$v'(\beta, \gamma) = \frac{\pi}{2} m_s + (1 + \bar{H})(\sin \beta - \beta \cos \beta) + (1 - \bar{H}) \left(\frac{\pi}{2} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon - 1 \right) + \\ + \lambda \left\{ \frac{1}{2} [(1 + \bar{H})\cos \beta - (1 - \bar{H})\cos \varepsilon] - m_s \right\},$$

gdzie $\varepsilon = \beta + \gamma$.

Wariacja v' względem β i ε prowadzi do równania:

$$(3.19) \quad \delta v' = (1 + \bar{H}) \left(\beta - \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \beta \delta \beta - (1 - \bar{H}) \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \varepsilon \delta \varepsilon = 0.$$

Z zależności (3.19) wynikają równania Eulera:

$$\left(\beta_0 - \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \beta_0 = 0 \\ \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_0 - \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \varepsilon_0 = 0,$$

skąd dla kątów zawartych w przedziale $< 0, \frac{\pi}{2} >$ dostajemy

$$(3.20) \quad \begin{cases} \beta_0 = 0 & \text{lub} & \beta_0 = \frac{1}{2} \lambda \\ \varepsilon_0 = 0 & \text{lub} & \varepsilon_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \lambda. \end{cases}$$

Badając wszystkie kombinacje β_0 i ε_0 okazuje się, że tylko jedna spełnia warunki zadania, a mianowicie $\beta_0 = \frac{1}{2} \lambda$ i $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \lambda$. Ponieważ $\varepsilon_0 = \beta_0 + \gamma_0$, rozwiązanie optymalne

charakteryzuje warunek:

$$(3.21) \quad 2\beta_0 + \gamma_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Warunek ten uzyskał również W. Prager na innej drodze [1]. Prostą (3.21) zaznaczono na rys. 5 linią przerywaną.

Tablica 1

$\gamma \geq \gamma_{\min}$	$M_p \geq M_s$
1. $\gamma = 19,88^\circ$ $\beta_0 = 34,17^\circ$ $v_0 = 0,534962$ $m_{s,0} = 0,190871$	2. $\gamma_0 = 19,88^\circ$ $\beta_0 = 35,06^\circ$ $v_0 = 0,535090$ $m_s = 0,191634$
3. $\gamma = 60^\circ$ $\beta_0 = 0^\circ$ $v_0 = 0,62555$ $m_{s,0} = 0,32500$	4. $\gamma_0 = 43^\circ$ $\beta_0 = 23,5^\circ$ $v_0 = 0,60785$ $m_s = 0,32500$

Jak widać oba rozważane zadania: przy nałożeniu więzów na kąt γ oraz więzów na minimalny przekrój pierścienia prowadzą do różnych optymalnych kątów β_0 , określających usytuowanie odcinka sztywnego o stałym przekroju. Dodać należy, że rozwiązania optymalne obu zadań przy założeniu tej samej nośności granicznej pierścienia wykazują niewielkie różnice w objętości materiału a niejednokrotnie bardzo duże różnice, jeżeli chodzi o konfigurację przekroju na obwodzie pierścienia. W Tablicy 1 podano wartości liczbowe charakteryzujące cztery rozwiązania optymalne zadania pierwotnego dla obu postaci formułowania więzów geometrycznych. Warto zwrócić uwagę na to, że w obu zadaniach objętość jest monotoniczną funkcją wartości ograniczeń (γ , m_s). Oznacza to, że optimum wypada na brzegu obszaru dopuszczalnego wyznaczonego nałożonymi więzami geometrycznymi.

4. Pierścień o przekroju prostokątnym

Przedstawimy tutaj jedynie zasadnicze wyniki charakteryzujące rozwiązania optymalne przy więzach nałożonych na kąt γ . Dla przekroju prostokątnego zależność graniczna składa się z dwóch gałęzi paraboli II stopnia (rys. 8):

$$(4.1) \quad \Phi = \frac{|M|}{M_p} + \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 - 1 = 0.$$

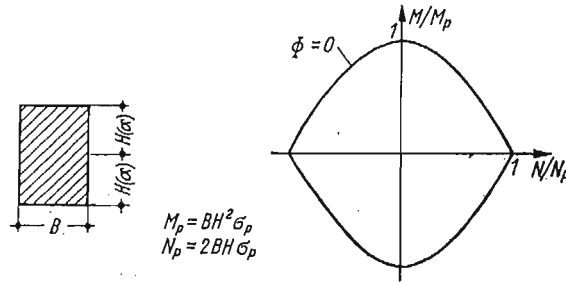
Wzory na funkcję zmiany przekroju i objętość pierścienia uzyskano w analogiczny sposób jak dla pierścienia o przekroju sandwiczowym. Istotną różnicą polega na tym, że zależność między objętością a obciążeniem granicznym jest teraz nieliniowa.

Przyjmując, że szerokość przekroju B jest stała, funkcję wysokości przekroju obliczono za pomocą następującego wzoru:

$$(4.2) \quad h(\alpha) = \begin{cases} \left\{ \cos^2 \alpha + \frac{1}{p} [\cos \alpha - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2}, & 0 \leq \alpha \leq \beta \\ \left\{ \cos^2 \beta + \frac{1}{p} [\cos \beta - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2} = h_s, & \beta \leq \alpha \leq \beta + \gamma \\ \left\{ \cos^2 \alpha - \frac{1}{p} [\cos \alpha - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2}, & \beta + \gamma \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{gdzie} \quad C(p, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} p [\cos \beta + \cos(\beta + \gamma)] \left[\cos \beta - \cos(\beta + \gamma) + \frac{1}{p} \right]$$

$$p = P/(4BR\sigma_p), \quad h(\alpha) = H(\alpha)/(2pR).$$



Rys. 8

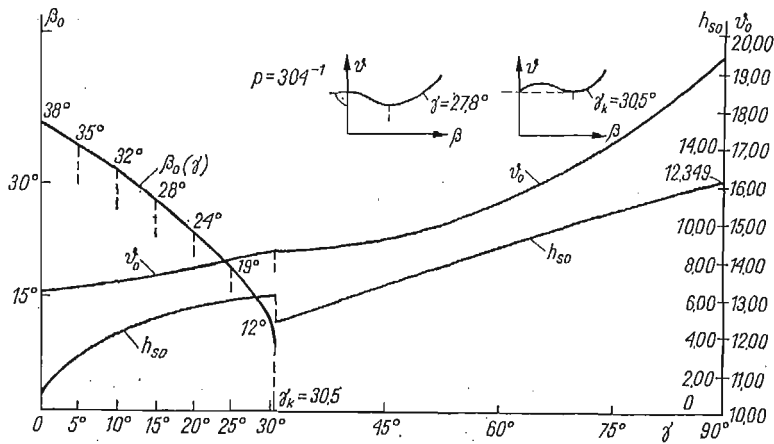
Objętość pierścienia obliczono z zależności

$$(4.3) \quad V(p, \beta, \gamma) = 2BR \int_0^{\pi/2} H(\alpha) d\alpha = 16BR^2 p v(p, \beta, \gamma),$$

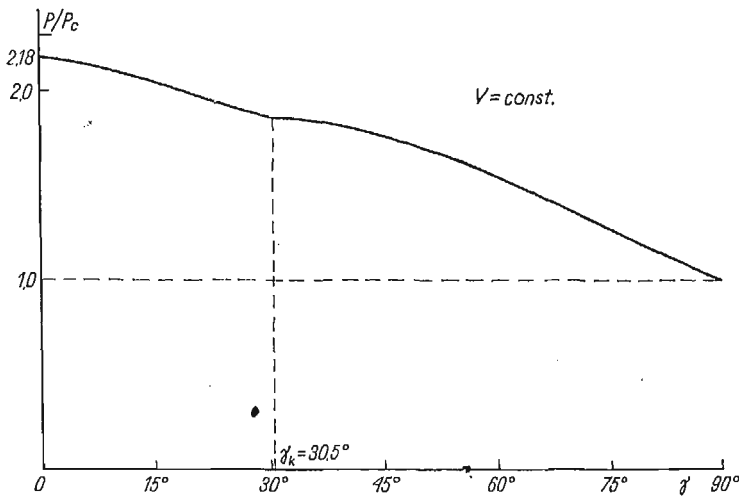
$$(4.4) \quad v(p, \beta, \gamma) = \int_0^{\beta} \left\{ \cos^2 \alpha + \frac{1}{p} [\cos \alpha - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2} d\alpha +$$

$$+ h_s(p, \beta, \gamma) \gamma + \int_{\beta+\gamma}^{\pi/2} \left\{ \cos^2 \alpha - \frac{1}{p} [\cos \alpha - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2} d\alpha.$$

Całki eliptyczne występujące we wzorze (4.4) utrudniają w istotny sposób analizę funkcji $v(p, \beta, \gamma)$. Obliczenia numeryczne, których zasadnicze wyniki przedstawiono na rysunkach 9 i 10, przeprowadzono dla $p = 1/304$ w zadaniu pierwotnym oraz dla objętości pierścienia o stałej wysokości przenoszącego obciążenie graniczne $p = 1/662 \cdot 6$ w zadaniu dualnym. Z zamieszczonych rysunków widać, że rozwiązanie optymalne pierścienia o przekroju prostokątnym nie zawiera istotnych różnic jakościowych, jeżeli chodzi o przebieg i charakter wykresów, w porównaniu z pierścieniem sandwiczowym. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że minimum globalne dla $\gamma = 0$ odpowiada kątowi $\beta_0 = 38^\circ$ wobec 45° w pierścieniu sandwiczowym.



Rys. 9



Rys. 10

5. Uwagi końcowe

Przytoczone przykłady optymalizacji z więzami geometrycznymi uwiadcniają, jak silny jest wpływ sposobu formułowania ograniczeń na ostateczny kształt konstrukcji optymalnych. Drogą różnorodnego formułowania więzów można na przykład uzyskać projekty o praktycznie takim samym koszcie (np. objętości materiału) i identycznym efekcie globalnym optymalizacji (np. nośności granicznej) przy różniącej się zasadniczo konfiguracji rozkładu materiału w obrębie konstrukcji (por. np. projekty 3 i 4 zestawione w Tabelcy 1). Okoliczność ta pozwala dokonywać dodatkowego wyboru spośród równoważnościowych projektów tego rozwiązania, za którym przemawiają względy praktyczne (np. prostsza technologia) lub inne cechy konstrukcji (np. zachowanie się konstrukcji w obszarze dużych przemieszczeń).

Wydaje się, że niniejsza praca jest dobrą ilustracją skutków pozornie nieistotnej zmiany w sformułowaniu ograniczeń. Wyniki zamieszczone w pracy zwracają uwagę na rozległość tematyki optymalnego projektowania konstrukcji w przypadkach wprowadzania dodatkowych więzów.

Optymalizacja pierścienia przy ograniczeniu kąta γ prowadzi do zadania niewypukłego, wielomodalnego. Odnotowano nawet przypadki zadań dających dwa równoważnościowe rozwiązania optymalne.

Literatura

- 1 W. PRAGER, *Optimal plastic design of rings*, Contributions to Mechanics, Pergamon Press, 1969, 163-169.
- 2 P. V. MARCAL, W. PRAGER, *A method of optimal plastic design*, Journal de Mécanique, 3, 4, 1964, 509 - 530.
- 3 I. N. BRONSZTEJN, K. A. SIEMIENDIAJEW, *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1968.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ КОЛЕЦ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

В работе представлено оптимальное проектирование пластических колец предполагая, что в области данного угла размеры поперечного сечения постоянные. Решения примальной и дуальной задачи для колец имеющих двухтавровое и прямоугольное сечения получено применяя статический метод. Результаты настоящей работы сравнено с решением полученным В. Прагером [1], где ограничено минимальное сечение кольца. Примеры представлены в работе доказуют, что способ формулирования ограничений сильно влияет на форму оптимальной конструкции и на однозначность решения.

Summary

OPTIMAL PLASTIC DESIGN OF RINGS WITH GEOMETRIC CONSTRAINTS

The static approach to optimal plastic design of circular rings with geometric constraints is described in the paper. These constraints consist in an assumption that the cross-section area within the region of a given angle is constant. Solutions of primal and dual problems for rings of sandwich and rectangular cross-section are presented. Final results are compared with the solution obtained by W. Prager [1] where the minimum cross-section constraint had been imposed. Numerical examples show that the form of constraint conditions strongly affect the form of optimal structure and uniqueness of solution.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1978 r.

PEWNE PROBLEMY KSZTAŁTOWANIA POWŁOK OSIOWO-SYMETRYCZNYCH W STANIE BŁONOWYM

JACEK KRUŻELECKI (KRAKÓW)

1. Powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym i w sensie szerszym

Eliminacja stanu giętnego w powłokach, o ile jest to możliwe ze względu na sposób obciążenia i podparcia, stanowi już pewien stopień optymalizacji. Prowadzi ona bowiem do równomiernego wyteżenia przekroju powłoki, a przy dodatkowym warunku wyrównania wyteżenia w poszczególnych punktach powierzchni środkowej do tzw. powłok równomiernej wytrzymałości. Szczegółowy przegląd prac dotyczący optymalizacji powłok podał M. Życzkowski [27].

Pierwsze prace zakładały najprostszą formę wyrównania naprężeń

$$(1.1) \quad \sigma_{\phi} = \sigma_{\theta} \pm \sigma_0,$$

którą nazwano tutaj „warunkiem równomiernej wytrzymałości w sensie węższym”. W wielu przypadkach zastosowanie warunku (1.1) jest nieuzasadnionym uproszczeniem problemu i związek ten winien być zastąpiony przez ogólniejszy

$$(1.2) \quad \sigma_{red} = f(\sigma_{\phi}, \sigma_{\theta}) = \sigma_0,$$

gdzie σ_{red} oznacza naprężenie zredukowane wg przyjętej hipotezy, σ_0 — naprężenie dopuszczalne, σ_{ϕ} i σ_{θ} odpowiednio naprężenia południkowe i obwodowe. Warunek (1.2) będzie nazwany tutaj „warunkiem równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym”. Warto zauważyć, że podczas gdy warunek (1.1) i dwa równania równowagi określają jednoznacznie np. powłokę obrotowo-symetryczną zarówno co do grubości ścianki jak i kształtu powierzchni środkowej, to warunek szerszy (1.2) nie jest warunkiem wystarczającym optymalności ponieważ pozostawia jedną z funkcji dowolną. Pozostały „stopień swobody” pozwala na zastosowanie dodatkowej optymalizacji np. z warunku minimum objętości.

W stanie błonowym rozkład naprężeń w powłoce jest statycznie wyznaczalny. Oznacza to, iż prawo fizyczne efektywnie nie interweniuje i powłoka optymalna w zakresie sprężystym jest również optymalna z uwagi na nośność graniczną czy też czas zniszczenia przy kruchym pękaniu wg teorii Kaczanowa obliczony w zależności od rodzaju materiału (Hayhurst, Leckie [10], [18]) bądź to w oparciu o kryterium maksymalnych naprężeń rozciągających lub też przy użyciu hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH). Z tą ostatnią związane jest również energetyczne kryterium zniszczenia (tzw. bariera dysypacji energii) wprowadzone przez Z. Bychawskiego i W. Olszaka [5], następnie rozwinięte

przez H. Kopeckiego i J. Walczaka [15] w zastosowaniu do tarcz wirujących. Tak więc optymalne powłoki równomiernej wytrzymałości mogą być traktowane również jako optymalne z uwagi na czas krytyczny — żywotność konstrukcji.

Przed sformułowaniem celu obecnej pracy omówimy krótko historię zagadnienia.

Jako pierwszy, bo już w roku 1908, M. Milanković [21] kształtował powłokę w stanie błonowym obciążoną ciężarem własnym i ciśnieniem cieczy. Zastosował on warunek (1.1). Wyniki liczbowe dla przypadku działania tylko ciężaru własnego podał G. Megareus [20]. W oparciu o ten sam warunek K. Federhofer [7] określił tzw. zbiorniki kroplokształtne, a ten sam autor wraz z J. Krebitzem [9] podał pewną metodę numerycznego całkowania uzyskanych równań. Stronę konstrukcyjną zbiorników kroplokształtnych rozważają T. Pöschl [22], E. Kottenmeier [17] i C. Bramski [2], [3]. Przypadek stałego ciśnienia rozważał F. Tölke [25], natomiast przegląd rozwiązań uzyskanych przez II wojnę światową dla powłok równomiernej wytrzymałości w sensie węższym podaje K. Federhofer [8].

Warunek typu (1.2) mianowicie warunek Treski-Guesta zastosował C. B. Biezeno [1]. Poszukiwał on optymalnego ukształtowania powierzchni środkowej dna kotła przy zawężeniu się do stałej grubości ścianki.

Zbliżoną problematykę poruszają prace R. A. Struble'a [24] i E. H. Browna [4]. Omówione powyżej prace dotyczą doboru optymalnej powierzchni środkowej przy stałej grubości ścianki. Równolegle rozwija się problematyka doboru grubości ścianki przy określonej powierzchni środkowej. Pierwszą jest tu praca H. Zieglera [26], której określił optymalną zmianę grubości kopuły sferycznej pod ciężarem własnym przy warunku równomiernej wytrzymałości Treski-Guesta w sensie szerszym.

W. Issler [13], [14] przeprowadził ogólną analizę istnienia rozwiązania takiego zagadnienia i zastosował warunek Hubera-Misesa dla różnych powierzchni obrotowych drugiego stopnia. P. Csonka [6] poszukiwał optymalnej grubości hiperboloidalnej wieży chłodniczej.

Z punktu widzenia optymalizacji najbardziej interesujące są prace dotyczące jednoczesnego doboru optymalnej grubości i powierzchni środkowej. Jednakże większość dotychczasowych prac ogranicza się do optymalizacji parametrycznej. G. A. Hoffinan [11], [12] dobiera optymalną grubość dna kotła i optymalne parametry powierzchni środkowej kolejno w oparciu o warunek T-G i HMM.

Podobne podejście zastosował w [23] W. S. Read, dobierając grubość i optymalne parametry pewnej powierzchni czwartego stopnia.

Podejście wariacyjne zastosował S. Łukasiewicz [19] do optymalizacji powłok poddanych obciążeniom skupionym przy warunku Treski-Guesta. Przy zastosowaniu warunku HMM, T-G lub Beltramiego, C. N. Kostem [16] zajmował się optymalizacją, z uwagi na minimum ciężaru, powłoki obciążonej ciśnieniem hydrostatycznym. Jako zmienną niezależną autor przyjął długość łuku s mierzoną wzdłuż południka powłoki. Występujące w równaniach równowagi zmienne r , z , ϕ (rys. 1) są zatem funkcjami s . Jedyńnię jedną z tych wielkości można przyjąć jako niezależną; pozostałe dwie związane są z wybraną równaniami różniczkowymi wynikającymi z geometrii powłoki. C. N. Kostem traktuje te wielkości jako niezależne nie uwzględniając związków geometrycznych. Dodatkowo przyjęty warunek T-G w postaci $\sigma_\phi - \sigma_\theta = \sigma_0$ nie może być spełniony w całym obszarze powłoki. Jakkolwiek autor przytacza graficzne opracowanie wyników numerycznych to poprawność sformułowania problemu w tej pracy budzi wątpliwości.

2. Cel obecnej pracy

Kształtowanie powłok w stanie błonowym przy spełnieniu warunków wytrzymałościowych w postaci równości prowadzi do pojęcia powłok równomiernej wytrzymałości. W literaturze, za powłoki optymalne uważane są zarówno konstrukcje określone przez równanie (1.1), jak i powłoki kształtowane w oparciu o rachunek wariacyjny przy zastosowaniu warunku wytrzymałościowego typu (1.2).

Obecna praca stawia sobie za cel analizę kilku zagadnień z zakresu optymalnego kształtowania powłok osiowo-symetrycznych, a mianowicie:

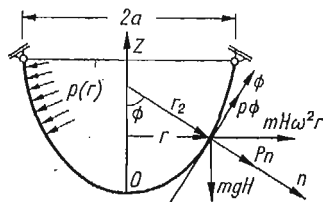
- 1) uporządkowanie klasyfikacji warunków wytrzymałościowych wykorzystywanych do kształtowania i wyraźne wyodrębnienie powłok optymalnych spośród szerszej klasy powłok równomiernej wytrzymałości nie będących na ogół konstrukcjami optymalnymi,
- 2) sformułowanie wariacyjne problemu optymalnego kształtowania powłok osiowo-symetrycznych przy dość ogólnym sposobie obciążenia reprezentowanym przez siły masowe (ciężar własny, wirowanie) i obciążenia powierzchniowe (ciśnienie),
- 3) podanie analityczno-numerycznej metody całkowania równań Eulera-Lagrange'a (wobec występowania w nich pewnych osobliwości) w przypadku ogólnym rozważonego obciążenia oraz podanie przykładów kształtów powłok optymalnych przy różnych kombinacjach obciążeń,
- 4) zbadanie problemu przy jakich obciążeniach zewnętrznych (powierzchniowych) powłoka spełniająca równanie Eulera-Lagrange'a zredukuje się do powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym (1.1) i czy taka konstrukcja może spełniać wszystkie wymagane warunki optymalności,
- 5) określenie rozkładu przemieszczeń w badanych powłokach przy dodatkowym założeniu sprężystości materiału.

3. Sformułowanie problemu powłok optymalnych

Rozważmy osiowo-symetryczną powłokę obciążoną ciśnieniem wewnętrznym lub zewnętrznym $p(r)$, ciężarem własnym oraz wirowaniem ze stałą prędkością kątową ω . Powłoka wsparta jest na pierścieniu o zadanym promieniu a , rys. 1.

Sformułujemy problem optymalizacji powłoki jako klasyczne zagadnienie rachunku wariacyjnego. Tak więc poszukiwać będziemy minimum funkcjonału — objętość powłoki

$$(3.1) \quad V = 2\pi \int_0^a \frac{rH}{\cos \phi} dr = \min.$$



Rys. 1

przy warunkach pobocznych, w postaci dwu równań równowagi

$$(3.2) \quad H[\sigma_\phi r \dot{\phi} \cos \phi + \sigma_\theta \sin \phi - r(mg \cos \phi + \omega^2 mr \sin \phi)] - rp(r) = 0,$$

$$(3.3) \quad H(\sigma_\phi - \sigma_\theta) + r(\dot{H}\sigma_\phi + H\dot{\sigma}_\phi) + Hr(\omega^2 mr - mg \operatorname{tg} \phi) = 0$$

oraz warunku HMM równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym

$$(3.4) \quad \sigma_\phi^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_\phi \sigma_\theta - \sigma_0^2 = 0$$

gdzie $\frac{d}{dr} = (\cdot)$, H , m , g oznaczają odpowiednio: grubość ścianki powłoki, masę właściwą, przyspieszenie ziemskie.

Równania (3.1), (3.2), (3.3) zostały wyprowadzone w najwygodniejszym dla takiego zadania układzie współrzędnych (r, ϕ) , który pozwala w porównaniu z układem współrzędnych najczęściej stosowanym (r, z) , zredukować równania rzędu drugiego do równań pierwszego rzędu ($\dot{z} = \operatorname{tg} \phi$).

Wprowadzając następujące wielkości bezwymiarowe $\varrho = \frac{r}{a}$, $h = \frac{H}{a}$, $v = \frac{V}{2\pi a^3}$, $\bar{p}(\varrho) = \frac{p(\varrho)}{\sigma_0}$, $\bar{\gamma} = \frac{mga}{\sigma_0}$, $w = \frac{\omega^2 ma^2}{\sigma_0}$, $s_\phi = \frac{\sigma_\phi}{\sigma_0}$, $s_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}$ oznaczające kolejno zmienną niezależną, grubość ścianki, objętość, ciśnienie, ciężar właściwy, kwadrat prędkości kątowej, naprężenia południkowe i obwodowe równania (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) zapiszemy w postaci

$$(3.5) \quad G_0 = v = \int_0^1 \frac{\varrho h}{\cos \phi} d\varrho,$$

$$(3.6) \quad G_1 = h[s_\phi \varrho \dot{\phi} \cos \phi + s_\theta \sin \phi - \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + w \varrho \sin \phi)] - \varrho \bar{p}(\varrho) = 0,$$

$$(3.7) \quad G_2 = h(s_\phi - s_\theta) + (h\dot{s}_\phi + h\dot{s}_\theta) + h\varrho(w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi) = 0,$$

$$(3.8) \quad G_3 = s_\phi^2 + s_\theta^2 - s_\phi s_\theta - 1 = 0.$$

Zagadnienie to rozwiążemy stosując metodę mnożników Lagrange'a. Nowy funkcjonał zapiszemy w formie

$$(3.9) \quad J = \int_0^1 \left(G_0 + \sum_{i=1}^3 \lambda_i G_i \right) d\varrho = \int_0^1 F^* d\varrho,$$

gdzie $\lambda_i(\varrho)$ — mnożniki Lagrange'a, a odpowiednie równania Eulera-Lagrange'a przyjmują postać

$$(3.10) \quad \frac{\partial F^*}{\partial x_i} - \frac{d}{d\varrho} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_i} = C_i,$$

gdzie $x_i = \phi, h, s_\phi, s_\theta$.

By wyjaśnić pojawienie się w (3.10) stałych C_i rozpatrzmy funkcjonał

$$(3.11) \quad J = \int F(x, \dot{x}, \ddot{x}) dx$$

w którym występuje zmienna niezależna i pochodne poszukiwanej funkcji. Odpowiednie

równanie Eulera-Lagrange'a po formalnym jednokrotnym scałkowaniu przyjmuje postać

$$(3.12) \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = c.$$

Podstawiając do (3.11) $\dot{z} = y$ otrzymujemy funkcjonał

$$(3.13) \quad J = \int F(x, y, \dot{y}) dx,$$

który powinien prowadzić do tej samej ekstremali.

Zapominając o różniczkowanym związku między y i z otrzymalibyśmy ekstremalę, której równanie nie da się sprowadzić do formuły (3.12) (stała c równa się zero). Łatwo to można sprawdzić na przykładzie prostego zadania o poszukiwaniu najkrótszego łuku łączącego dwa punkty. Ostatecznie więc równanie ekstremali otrzymane z (3.13) powinno mieć postać

$$(3.14) \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = c.$$

Stałą c występującą w (3.12) i (3.14) należy wyznaczyć bądź to z warunków brzegowych, albo też z odpowiedniego warunku transwersalności. Ogólnie powiedzieć można, bez przeprowadzenia dowodu, iż dla funkcjonału typu (3.11) stała c jest różna od zera i winna być wyznaczona z warunków brzegowych gdy ich ilość równa jest 3 lub 4 w zależności od rzędu równania (3.12). W przypadku gdy ilość warunków brzegowych jest mniejsza lub równa 2, wówczas stałą c wyznaczmy z warunku transwersalności

$$(3.15) \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \right|_{x=x_1} = 0$$

i wynosi ona zero, $c = 0$.

Powracając do rozpatrywanego zagadnienia dla $x_1 = h, s_\phi, s_\theta$ otrzymujemy $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Mając na uwadze różniczkowy związek między z a ϕ ($\dot{z} = \text{tg} \phi$) dla $x_1 = \phi$ w równaniu (3.10) pozostawiamy stałą C_1 i równanie to będzie całką pierwszą. Stałą C_1 wyznaczmy z warunku transwersalności (3.15) otrzymując $C_1 = 0$. Ostatecznie więc w rozważanym problemie wszystkie stałe C_i równe są zero, $C_i = 0$.

Po zastosowaniu równań (3.10) do (3.9), uporządkowaniu i eliminacji λ_3 otrzymujemy następujący układ równań

$$(3.16) \quad \lambda_2 \bar{\gamma} + \dot{\lambda}_1 s_\phi \cos^3 \phi - \sin \phi = 0,$$

$$(3.17) \quad \lambda_2 [\rho(w\rho - \bar{\gamma} \text{tg} \phi) - s_\phi] - \dot{\lambda}_2 \rho s_\phi + \lambda_1 [s_\phi \rho \dot{\phi} \cos \phi + \\ + s_\theta \sin \phi - \rho(\bar{\gamma} \cos \phi + w\rho \sin \phi)] + \rho / \cos \phi = 0,$$

$$(3.18) \quad \lambda_2 (2s_\phi - s_\theta) - \dot{\lambda}_2 \rho (2s_\theta - s_\phi) + \lambda_1 [\rho \dot{\phi} \cos \phi (2s_\theta - s_\phi) - \sin \phi (2s_\phi - s_\theta)] = 0,$$

które są podstawowymi związkami dla obu rozważanych przypadków.

4. Całkowanie równań Eulera-Lagrange'a w przypadku ogólnym

Dla zadanej wartości i rozkładu ciśnienia $\bar{p}(\rho)$ równania (3.16), (3.17), (3.18) wraz z równaniami równowagi (3.6), (3.7) oraz warunkiem równomiernej wytrzymałości (3.8) stanowią wystarczający układ, z którego wyznaczyć można nieznanne funkcje kształtu

$\phi = \phi(\varrho)$, $h = h(\varrho)$, rozkład naprężeń $s_\phi = s_\phi(\varrho)$, $s_\Theta = s_\Theta(\varrho)$ oraz $\lambda_1(\varrho)$ i $\lambda_2(\varrho)$. Powłoka określona w ten sposób będzie konstrukcją równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym o najmniejszym ciężarze.

Funkcje λ_1 i λ_2 nie mają w rozważanym zagadnieniu wyraźnej interpretacji fizycznej i najczęściej dąży się do ich eliminacji. W obecnej pracy zdecydowano się jednak na metodę bezpośredniego całkowania. W tym celu otrzymany układ równań przekształcimy do postaci wygodnej w obranej metodzie

$$(4.1) \quad \dot{\phi} = \frac{1}{s_\phi \cos \phi} \left[\frac{\bar{p}(\varrho)}{h} - s_\Theta \frac{\sin \phi}{\varrho} + \bar{\gamma} \cos \phi + w \varrho \sin \phi \right],$$

$$(4.2) \quad \dot{h} = h[s_\Theta - s_\phi - \varrho(w \varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi)],$$

$$(4.3) \quad h = n_\phi / s_\phi,$$

$$(4.4) \quad \dot{\lambda}_1 = \frac{\sin \phi - \bar{\gamma} \lambda_2}{s_\phi \cos^3 \phi},$$

$$(4.5) \quad \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{s_\phi \cos \phi} + \lambda_1 \frac{\bar{p}(\varrho)}{h} + \frac{\lambda_2}{\varrho s_\phi} [\varrho(w \varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi) - s_\Theta],$$

$$(4.6) \quad \lambda_1 \left[\varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + w \varrho \sin \phi) - \sin \phi \left(s_\Theta + \frac{2s_\phi - s_\Theta}{2s_\Theta - s_\phi} s_\phi \right) \right] - \\ - \varrho - \lambda_2 \left[\varrho(w \varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi) + \frac{2s_\phi - s_\Theta}{2s_\Theta - s_\phi} s_\phi - s_\Theta \right] = 0$$

gdzie n_ϕ oznacza siłę południkową. Kryterium wytrzymałościowe pozostaje bez zmian.

Powyższy układ równań wykazuje osobliwości w punkcie $\varrho = 0$. By zbadać te osobliwości rozwinięto wszystkie funkcje w szeregi potęgowe w otoczeniu $\varrho = 0$. Okazało się, iż proste szeregi

$$(4.7) \quad s_\phi = 1 + c_1 \varrho^2 + \dots, \quad \text{lub} \quad s_\phi = -1 + c_1 \varrho^2 + \dots,$$

$$(4.8) \quad s_\Theta = 1 + c_2 \varrho^2 + \dots, \quad \text{lub} \quad s_\Theta = -1 + c_2 \varrho^2 + \dots,$$

$$(4.9) \quad h = h_0 + h_2 \varrho^2 + \dots,$$

$$(4.10) \quad \phi = \phi_1 \varrho + \phi_3 \varrho^3 + \dots,$$

$$(4.11) \quad \lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda_{12} \varrho^2 + \dots,$$

$$(4.12) \quad \lambda_2 = \lambda_{21} \varrho + \lambda_{23} \varrho^3 + \dots,$$

$$(4.13) \quad \bar{p}(\varrho) = p_0 + p_2 \varrho^2 + \dots,$$

opisują te osobliwości, gdzie p_0 i p_2 znane współczynniki obciążenia. Przy rozwinięciach uwzględniono fakt, że naprężenie w zależności od sposobu obciążenia mogą być rozciągające lub ściskające.

Podstawiając (4.7 - 4.13) do związków (4.1 - 4.6) oraz do kryterium wytrzymałościowego (3.8) otrzymujemy układ 8 równań algebraicznych na 10 nieznanymi współczynnikami szeregów (różnica między liczbą niewiadomych współczynników a liczbą otrzymanych równań jest niezależna od zastosowanej ilości wyrazów szeregów i wynosi dwa). Dwa współ-

czynniki, które zasadniczo mogą być wybrane dowolnie, pozostają wstępnie nieokreślone. Okazuje się, iż najkorzystniej będzie pozostawić nieokreślone ϕ_1 i λ_{10} ; wówczas pozostałe wyrażają się następująco:

$$(4.14) \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{2} \left(w \mp 3\phi_1^2 - 3\phi_1 \bar{\gamma} \mp \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \right),$$

$$(4.15) \quad h_0 = \mp \frac{p_0}{2\phi_1 \pm \bar{\gamma}},$$

$$(4.16) \quad h_2 = -\frac{p_0}{2(2\phi_1 \pm \bar{\gamma})} (4c_1 + w - \bar{\gamma}\phi_1),$$

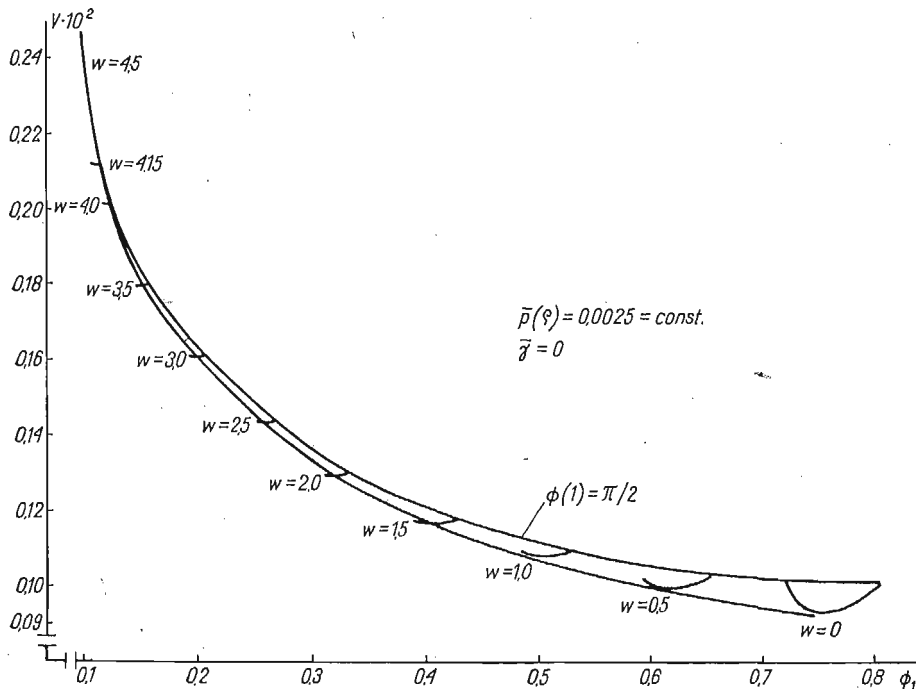
$$(4.17) \quad \phi_3 = \frac{1}{4} \left[\frac{p_2}{p_0} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp \frac{1}{2} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) (4c_1 + w - \bar{\gamma}\phi_1) + \frac{3}{2} \phi_1^3 \pm \phi_1 \left(\bar{\gamma} \frac{\phi_1}{2} - w \right) \right],$$

$$(4.18) \quad \lambda_{12} = \mp \frac{1}{2} \left\{ \phi_1 - \frac{1}{2} \bar{\gamma} [\lambda_{10} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1] \right\},$$

$$(4.19) \quad \lambda_{21} = \frac{1}{2} [\lambda_{10} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1],$$

$$(4.20) \quad \lambda_{23} = \frac{1}{2} \lambda_{10} \left(2\phi_3 - \frac{1}{3} \phi_1^3 \pm 6\phi_1 c_1 \right) \mp \frac{3}{2} c_1 [\lambda_{10} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1],$$

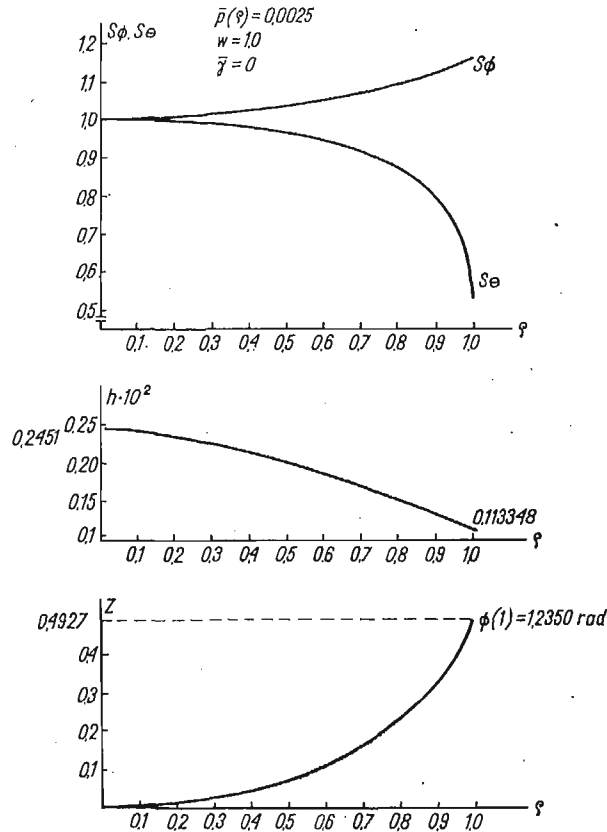
gdzie znak górny związany jest z przypadkiem naprężeń ujemnych. λ_{10} nie występuje w związkach (4.14 - 4.17) i nie ma wpływu na kształt powłoki optymalnej. Wniosek ten



Rys. 2

został również potwierdzony na drodze obliczeń numerycznych. Natomiast ϕ_1 (krzywizna powłoki dla $\varrho = 0$) winno być wyznaczone z warunku optymalności $v = \min$. (dodatkowa optymalizacja po wolnym parametrze).

Z numerycznego punktu widzenia problem będzie rozwiązany jako zadanie początkowe. Tak więc dla przedziału $0 \leq \varrho \leq 0.01$ zastosowano szeregi potęgowe (4.7 - 4.13). Następnie równania (4.1 - 4.5) rozwiązywano metodą Runge-Kutta 4 rzędu dla zmiennych wartości



Rys. 3

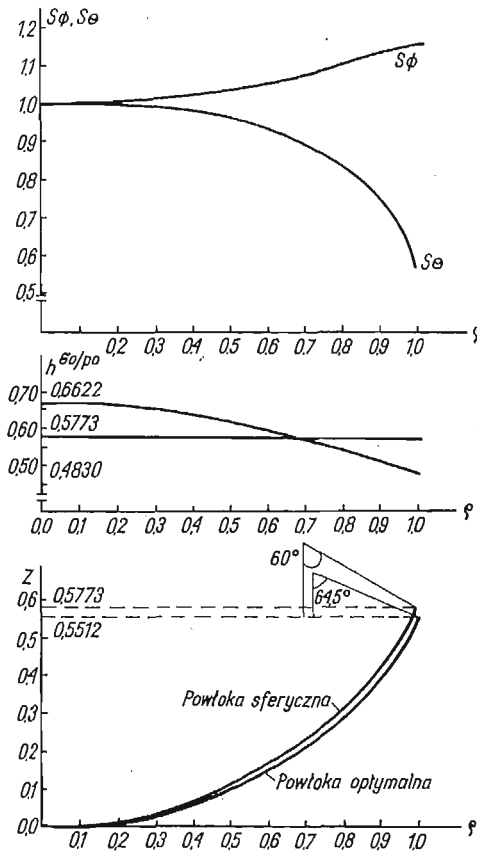
parametru ϕ_1 . Na każdym kroku całkowania rozwiązywano układ dwu równań algebraicznych (3.8) i (4.6) wyznaczając tym samym naprężenia s_ϕ i s_θ . Optymalną wartość parametru ϕ_1 dla każdej dopuszczalnej kombinacji obciążeń określono z warunku minimum objętości powłoki każdorazowo obliczając całką (3.5).

Okazuje się, iż parametr ϕ_1 nie może być dowolnie duży i ograniczony jest warunkiem

$$(4.21) \quad \phi(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Na rys. 2 pokazano krzywą optymalnych wartości parametru ϕ_1 oraz krzywą wynikającą z warunku (4.21) dla zmiennych wartości bezwymiarowej prędkości kątowej w przy $\bar{\gamma} = 0$ i ustalonym ciśnieniu $\bar{p}(\varrho) = 0.0025 = \text{const}$. (zmiana wartości ciśnienia \bar{p} nie

powoduje zmiany wartości parametru ϕ_1). Dla przedziału prędkości $0 \leq w < 4.15$ optymalna wartość parametru ϕ_1 pozwala osiągnąć minimum analityczne funkcjonau. Dla prędkości $w \geq 4.15$ obie krzywe „zlewają się” i optymalne ϕ_1 zdeterminowane jest warunkiem (4.21). Oznacza to, iż parametr ϕ_1 dobierany jest na brzegu dopuszczalnego przedziału. Podobne wykresy sporządzić można dla innych kombinacji obciążeń włączających przypadki naprężeń ujemnych, jednakże wnioski pozostają niezmienione.



Rys. 4

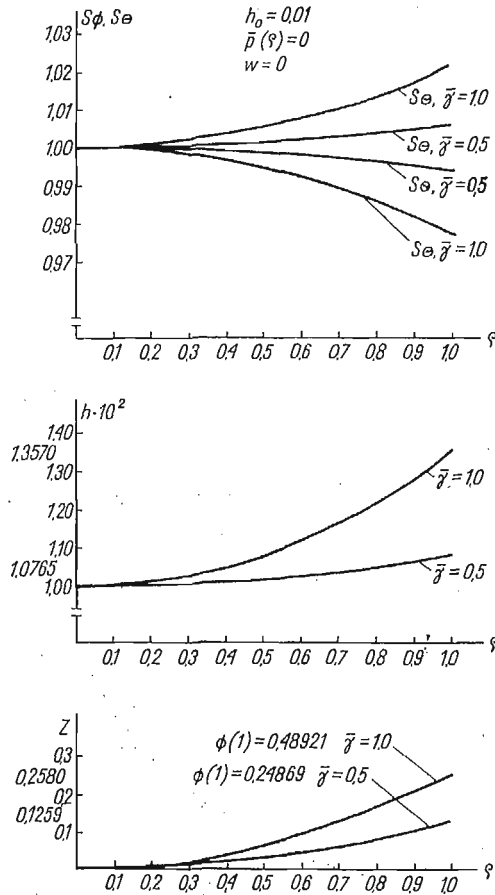
Rys. 3 przedstawia przykład powłoki optymalnej ($w = 1.0, \bar{\gamma} = 0, \bar{p} = 0.0025$). Pokazano rozkład grubości ścianki oraz rozkłady naprężeń s_ϕ i s_θ . Optymalna wartość parametru $\phi_1 = 0.505$.

Ciekawym przykładem jest również powłoka obciążona tylko stałym ciśnieniem p_0 . Okazuje się, że powłoka sferyczna o optymalnym kącie rozwarcia $\phi_0 = \pi/3$ (stałe naprężenia $s_\phi = s_\theta = 1$, stała grubość ścianki) uważana do tego czasu za optymalną nie jest konstrukcją najłżejszą. Można znaleźć powłokę lżejszą, która jest optymalna, posiada zmienną grubość ścianki i zmienny rozkład naprężeń. Zysk na ciężarze, w stosunku do optymalnej powłoki sferycznej, wynosi około $z \approx 3,8\%$.

Rys. 4 przedstawia optymalną powłokę sferyczną oraz optymalną powłokę równo-

miernej wytrzymałości w sensie szerszym. Pokazano również odpowiednie rozkłady grubości ścianek i naprężeń dla obu powłok.

Jako dalszy przypadek obciążenia rozważymy powłokę poddaną działaniu jedynie ciężaru własnego $\bar{\gamma}$ ($w = p = 0$). Ze związku (4.15) wynika, że ϕ_1 , nie jest tu dowolne i wynosi $\phi_1 = \bar{\gamma}/2$ (warunek spełnienia równania równowagi (2.6) dla $q = 0$). Początkowa



Rys. 5

grubość ścianki h_0 pozostaje dowolna i nie ma wpływu jakościowego na kształt powłoki optymalnej.

Na rys. 5 pokazano kształt powierzchni środkowej, zmiany grubości ścianek i rozkłady naprężeń dla dwu wybranych wartości bezwymiarowego ciężaru właściwego: $\bar{\gamma} = 0,5$, $\bar{\gamma} = 1,0$.

5. Powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym spełniające równania Eulera — Lagrange'a

Jak to wspomniano poprzednio powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym są określone jednoznacznie przez równania równowagi i kryterium wytrzymałościowe, ale w ogólności nie są one optymalne. Z drugiej strony warunek równomiernej wytrzyma-

łości w sensie szerszym jest niewystarczającym warunkiem optymalności i winien być uzupełniony równaniami Eulera-Lagrange'a.

Interesującym problemem teoretycznym jest zagadnienie kiedy powłoka optymalna może być przetransformowana do powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym (1.1) i czy taka konstrukcja pozostanie nadal optymalną. Transformacja taka może mieć miejsce przy pewnych obciążeniach zewnętrznych; tak więc poszukiwać będziemy odpowiedniej funkcji $\bar{p}(\varrho)$. W rozważanym przypadku $\bar{p}(\varrho)$ będzie dodatkową nieznaną funkcją, natomiast rozkład naprężeń założymy w formie

$$(5.1) \quad s_\phi = s_\vartheta = 1 \text{ lub } s_\phi = s_\vartheta = -1.$$

Podstawiając (5.1) do (3.6), (3.7), (3.16), (3.17), (3.18) otrzymujemy układ równań, który określa nieznane funkcje: $\phi(\varrho)$, $h(\varrho)$, $\bar{p}(\varrho)$ oraz $\lambda_1(\varrho)$ i $\lambda_2(\varrho)$. Układ ten przekształcimy do postaci nadającej się do numerycznego całkowania. W tym celu równania (2.17) i (2.18) odejmujemy stronami otrzymując równanie algebraiczne, które następnie różniczkujemy. Wykorzystując do eliminacji $\dot{\lambda}_1$ i $\dot{\lambda}_2$ równania (3.18) i (3.16) otrzymujemy

$$(5.2) \quad \dot{\phi} = \frac{\cos^2 \phi}{\varrho^2(\lambda_2 \bar{\gamma} - \sin \phi)} \left\{ \mp (\lambda_1 \sin \phi - \lambda_2) [2 \pm \varrho(w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi)] + \frac{\varrho}{\cos \phi} + \right. \\ \left. + \varrho \frac{\sin \phi - \lambda_2 \bar{\gamma}}{\cos^3 \phi} [2 \sin \phi \pm \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + w\varrho \sin \phi)] - \right. \\ \left. - \lambda_1 \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + 2w\varrho \sin \phi) + \lambda_2 \varrho(2w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi) \right\}.$$

Równanie różniczkowe określające grubość powłoki uzyskane ze związku (3.7) przybiera postać

$$(5.3) \quad \dot{h} = \pm h(w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi),$$

natomiast $\dot{\lambda}_1$ i $\dot{\lambda}_2$ obliczamy z równań (3.16) i (3.18)

$$(5.4) \quad \dot{\lambda}_1 = \mp \frac{\sin \phi - \lambda_2 \bar{\gamma}}{\cos^3 \phi},$$

$$(5.5) \quad \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{\varrho} [\varrho \dot{\phi} \cos \phi - \sin \phi] + \lambda_2.$$

Pozostałe równanie równowagi (3.7) posłuży do określenia poszukiwanego rozkładu ciśnienia

$$(5.6) \quad \bar{p}(\varrho) = \mp \frac{h}{\varrho} [\varrho \dot{\phi} \cos \phi + \sin \phi \pm \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + w\varrho \sin \phi)].$$

Uzyskany układ równań wykazuje osobliwości dla $\varrho = 0$, które zbadano rozwijając wszystkie występujące tutaj funkcje w szeregi potęgowe. Jednakże, w porównaniu z poprzednim przypadkiem ze względu na specyfikę otrzymanego układu równań (λ_{23} i ϕ_3 wyrażają się przez siebie i nie ma możliwości efektywnego ich określenia), przy rozwinięciach funkcji ϕ , λ_1 , λ_2 , należy wziąć pod uwagę o jeden wyraz szeregu więcej:

$$(5.7) \quad \phi = \phi_1 \varrho + \phi_3 \varrho^3 + \phi_5 \varrho^5 + \dots,$$

$$(5.8) \quad h = h_0 + h_2 \varrho^2 + \dots,$$

$$(5.9) \quad \lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda_{12}\varrho^2 + \lambda_{14}\varrho^4 + \dots,$$

$$(5.10) \quad \lambda_2 = \lambda_{21}\varrho + \lambda_{23}\varrho^3 + \lambda_{25}\varrho^5 + \dots,$$

$$(5.11) \quad \bar{p} = p_0 + p_2\varrho^2 + \dots,$$

Podstawiając (5.7 - 5.11) do równań (5.2 - 5.6) uzyskamy, w porównaniu z poprzednim przypadkiem, o dwa równania więcej. Pozwolą one na obliczenie ϕ_3 i ϕ_{23} . Ostatecznie ograniczymy się do efektywnego wyznaczenia współczynników dwóch wyrazów każdego z szeregów.

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$(5.12) \quad \phi_3 = \frac{1}{24(2\phi_1 \pm \bar{\gamma})} (-19\phi_1^3 \mp 14\bar{\gamma}\phi_1^2 - \frac{3}{2}\bar{\gamma}^2\phi_1 \mp 12\phi_1 w - 6w\bar{\gamma}),$$

$$(5.13) \quad p_0 = \mp h_0(2\phi_1 \pm \bar{\gamma}),$$

$$(5.14) \quad p_2 = h_0 \left[\mp 4\phi_3 \pm \frac{2}{3}\phi_1^3 + \phi_1 \left(\bar{\gamma} \frac{\phi_1}{2} - w \right) - \frac{1}{2}(2\phi_1 \pm \bar{\gamma})(w - \phi_1 \bar{\gamma}) \right],$$

$$(5.15) \quad h_2 = \pm \frac{1}{2} h_0(w - \bar{\gamma}\phi_1),$$

$$(5.16) \quad \lambda_{12} = \mp \frac{1}{2} \left\{ \phi_1 - \frac{1}{2}\bar{\gamma}[\lambda_{10}(2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1] \right\},$$

$$(5.17) \quad \lambda_{21} = \frac{1}{2} [\lambda_{10}(2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1],$$

$$(5.18) \quad \lambda_{23} = \frac{1}{2} \lambda_{10} \left(2\phi_3 - \frac{1}{3}\phi_1^3 \right).$$

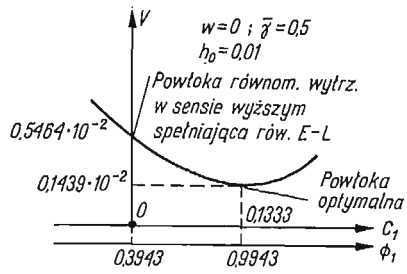
Tak jak i poprzednio λ_{10} pozostaje tutaj niewyznaczone i nie ma wpływu na kształt powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym, natomiast ϕ_1 nie jest dowolne, zdeterminowane jest tutaj warunkiem stałości naprężeń. Podstawiając do (4.14) $c_1 = c_2 = 0$ otrzymujemy

$$(5.19) \quad \phi_1 = \frac{3\bar{\gamma} + \sqrt{3\bar{\gamma}^2 - 12w}}{6} \quad \text{lub}$$

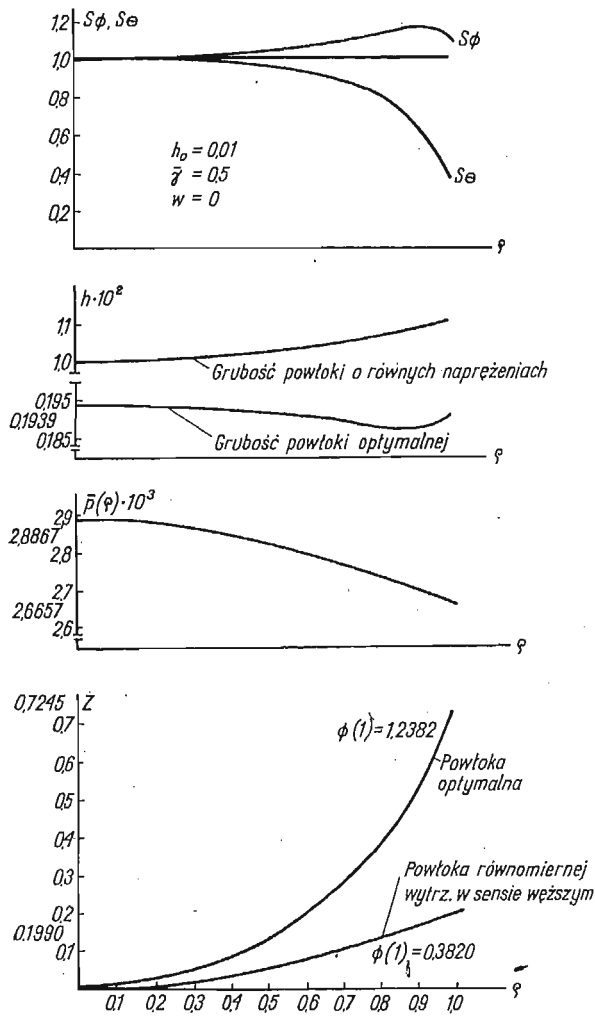
$$(5.20) \quad \phi_1 = \frac{-3\bar{\gamma} + \sqrt{3\bar{\gamma}^2 + 12w}}{6}.$$

Związek (5.19) odnosi się do przypadku naprężeń rozciągających przy czym obciążenia masowe muszą spełniać nierówność $\bar{\gamma} > 2\sqrt{w}$. Okazuje się również, iż pełna powłoka równomiernej wytrzymałości w sensie węższym spełniająca równania Eulera-Lagrange'a obciążona tylko „wirowaniem” w i odpowiednim ciśnieniem $\bar{p}(\varrho)$ nie może istnieć. Możliwa jest w tym przypadku jedynie konstrukcja z otworem, która nie będzie tutaj dyskutowana.

Związek (5.20) słuszny jest dla naprężeń ujemnych przy czym albo $\bar{\gamma} < 0$ (oznacza to, że ciężar własny wywołuje naprężenia ściskające; powłoka ma pozycję odwrotną niż pokazano to na rys. 1) lub też $w > \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2$.



Rys. 6



Rys. 7

Grubość ścianki h_0 dla $\varrho = 0$ dobiera się dowolnie i jednocześnie poprzez równanie (5.13) determinuje ono wartość początkową ciśnienia p_0 .

Metoda całkowania otrzymanych równań (5.2 - 5.5) jest taka jak poprzednio. Dla $0 \leq \varrho \leq 0.01$ zastosowano szeregi (5.7 - 5.11), następnie metodą Runge-Kutta jednocześnie z równania (5.6) obliczając poszukiwane ciśnienie $\bar{p}(\varrho)$. Okazało się, iż dla wszystkich możliwych kombinacji obciążeń powłoka równomiernej wytrzymałości w sensie węższym spełniająca równania Eulera-Lagrange'a nie jest konstrukcją optymalną. Zawsze można znaleźć dobierając odpowiednio ϕ_1 z warunku transversalności, pewną inną powłokę spośród powłok równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym, która jest powłoką optymalną wykazując mniejszy ciężar od tamtej.

Rys. 6 przedstawia zależność między objętością powłoki v i współczynnikiem c_1 określającym zmiany naprężeń lub parametrem ϕ_1 dla szczególnego przypadku obciążenia $w = 0$, $\bar{\gamma} = 0.5$ oraz $h_0 = 0.01$. Pokazany typ zależności powtarza się dla wszystkich kombinacji obciążeń.

Na rys. 7 pokazano powłokę równomiernej wytrzymałości w sensie węższym oraz powłokę optymalną, odpowiednie zmiany grubości ścianek i rozkłady naprężeń. Obie powłoki obciążone są w ten sam sposób, mianowicie: $w = 0$, $\bar{\gamma} = 0.5$ oraz pokazanym na rys. 7 rozkładem ciśnienia $\bar{p}(\varrho)$.

Powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym są zatem konstrukcjami o większym ciężarze niż odpowiednie optymalne powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym obliczone w oparciu o warunek HMH. Warto jednak na koniec zaznaczyć, że wniosek ten może ulec zmianie w przypadku zastosowania innego warunku wyłączenia np. hipotezy Treski-Guesta.

6. Przemieszczenie w powłokach równomiernej wytrzymałości

Kształty powłok i rozkłady naprężeń zostały uprzednio określone bez analizy stanu przemieszczeń. Rozkład przemieszczeń obliczony w oparciu o teorię błonową nie może wykazywać w żadnym punkcie powłoki osobliwości (zmierzania do nieskończoności). Pojawienie się bowiem takich osobliwości świadczyć by mogło o istnieniu w pewnych obszarach powłoki stanów giętnych co osłabiłoby wartość uzyskanych rozwiązań.

Wykażemy tutaj, iż przemieszczenia w rozważanych powłokach nie wykazują osobliwości — są skończone. Za punkt wyjścia przyjmujemy związki geometryczne

$$(6.1) \quad \varepsilon_\phi = \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} u_n \right) \cos \phi,$$

$$(6.2) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \Theta} + u_\phi \cos \phi + u_n \sin \phi \right),$$

$$(6.3) \quad \gamma_{\phi\theta} = \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \varrho} - \frac{u_\theta}{\varrho} \right) \cos \phi + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_\phi}{\partial \Theta},$$

gdzie u_θ , u_ϕ , u_n są bezwymiarowymi pomieszczeniami odpowiednio w kierunkach obwodowym, południkowym i normalnym do powierzchni środkowej powłoki.

Ze względu na osiową symetrię $u_\theta = 0$ i $\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} = 0$, stąd z równania (6.3) otrzymujemy $\gamma_{\phi\theta} = 0$.

Związki (6.1) i (6.2) pozwolą na obliczenie przemieszczeń u_ϕ , u_n . Po eliminacji u_n z (6.1) otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu pierwszego na poszukiwaną funkcję u_ϕ

$$(6.4) \quad \frac{du_\phi}{d\varrho} - u_\phi \frac{d\phi}{d\varrho} \operatorname{ctg} \phi = \frac{\varepsilon_\phi}{\cos \phi} - \frac{\varepsilon_\theta \varrho}{\sin \phi} \frac{d\phi}{d\varrho}.$$

Całka ogólna równania jednorodnego wynosi

$$(6.5) \quad u_\phi = f \sin \phi.$$

Stosując metodę uzmienniania stałej $f = f(\varrho)$ otrzymujemy

$$(6.6) \quad \frac{df}{d\varrho} = \frac{\varepsilon_\phi}{\cos \phi \sin \phi} - \frac{\varepsilon_\theta \varrho}{\sin^2 \phi} \frac{d\phi}{d\varrho}.$$

Stan naprężeń, a zatem i stan odkształceń określony jest na drodze numerycznej, tak więc podanie rozwiązania zamkniętego w całym obszarze powłoki nie jest możliwe.

Pewnych osobliwości w rozkładzie przemieszczeń spodziewać się można w okolicach podparcia powłoki lub też w otoczeniu punktu $\varrho = 0$. Założyliśmy wcześniej, iż podpory zapewniają stan błonowy (odpowiednie przemieszczenia), stąd interesującym nas obszarem będzie wierzchołek powłoki i w jego otoczeniu podamy rozkład przemieszczeń.

Korzystając z szeregów (4.7) i (4.6) oraz prawa Hooke'a (ograniczamy się do powłok sprężystych) otrzymujemy rozkłady odkształceń

$$(6.7) \quad \varepsilon_\phi = \frac{\sigma_0}{E} (1-\nu) + \frac{\sigma_0}{E} c_1 (1+\nu) \varrho^2 + \dots$$

$$(6.8) \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_0}{E} (1-\nu) - \frac{\sigma_0}{E} c_1 (1+\nu) \varrho^2 + \dots$$

Wykorzystując (6.7), (6.8) i (4.10) oraz uwzględniając dwa wyrazy szeregu, po jednokrotnym scałkowaniu (6.6) otrzymujemy

$$(6.9) \quad f = \left[\frac{\sigma_0}{E} (1-\nu) \frac{\phi_1}{2} - 2 \frac{\phi_3}{\phi_1^2} + \frac{\sigma_0}{E} \frac{c_1}{\phi_1} (1+\nu) \right] \varrho^2 + \dots + C.$$

Równanie (6.9) wraz z (6.5) określa rozkład przemieszczeń południkowych u_ϕ w otoczeniu punktu $\varrho = 0$. Łatwo sprawdzić, że przemieszczenia u_ϕ jak i u_n są skończone w punkcie $\varrho = 0$, zatem nie istnieje w tym ani żadnym innym punkcie stan giętny powłoki. Wniosek ten dotyczy powłok optymalnych równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym jak i powłok równomiernej wytrzymałości w sensie węższym.

7. Uwagi końcowe

Praca została zasadniczo poświęcona analizie kilku zagadnień z zakresu optymalnego kształtowania powłok osiowo symetrycznych w stanie błonowym.

Uporządkowano występującą w literaturze klasyfikację warunków wytrzymałościowych dzieląc je na dwie zasadnicze grupy, określone równaniami (1.1) i (1.2) oraz pokazano

różnice wynikające z zastosowania tych warunków. Zwrócono uwagę na konieczność wyodrębnienia powłok optymalnych równomiernej wytrzymałości spośród szerszej klasy powłok równomiernej wytrzymałości.

Problem optymalizacji powłok poddanych obciążeniom masowym i powierzchniowym sformułowano jako klasyczne zagadnienie rachunku wariacyjnego oraz zaproponowano metodę szeregów potęgowych, pozwalającą na uzyskanie rozwiązań w otoczeniu punktu osobliwego $\varrho = 0$. Stwierdzono również, że powłoka optymalna kształtowana w oparciu o warunek równomiernej wytrzymałości HMH przy pewnych obciążeniach zewnętrznych, (których poszukiwano) może stać się powłoką równomiernej wytrzymałości w sensie węższym (1.1), jednakże konstrukcja taka nie spełnia wszystkich wymaganych warunków optymalności (a mianowicie warunków transversalności) i wykazuje większy ciężar od tamtej. Ostatni wniosek może ulec zmianie w przypadku zastosowania innego warunku wyteżenia.

Wykazano też, że przemieszczenia w rozważanych powłokach nie wykazują osobliwości (są skończone).

Na zakończenie warto podkreślić fakt, że w stanie błonowym powłoki optymalne w zakresie sprężystym są również optymalne z uwagi na nośność graniczną, czy też czas zniszczenia przy kruchym pękaniu według teorii Kaczanowa — Hayhursta — Leckie'go.

Literatura cytowana w tekście

1. C. B. BIEZENO, *Bijdrage tot de berekening van ketelfronten, de Ingenieur*, 37 (1922), 781.
2. C. BRAMSKI, *Niektóre problemy obliczeń stalowych zbiorników kropłokształtnych*, XII Konf. PZITB — PAN, Krynica 1967, 349 - 357.
3. C. BRAMSKI, *Obrotowo-symetryczne zbiorniki kropłokształtne*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, 8, 1967.
4. E. H. BROWN, *The minimum weight design of closed shells of revolution*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 15 (1962), 1, 109 - 128.
5. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *Creep failure of nonlinear rotational shells*, „8th Congress International Association for Bridge and Structural Engineering”, Publ. by Secretariat of JABSE in Zurich, New York 1968.
6. P. CSONKA, *Hyperboloid shaped cooling tower with a mantle — wall of equal strength*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung., 44 (1963), 1 - 2, 215 - 221.
7. K. FEDERHOFER, *Über die Form des Wölbmantelbeckens*, Eisenbau 4, (1913), Heft 10.
8. K. FEDERHOFER, *Über Schalen gleicher Festigkeit*, Bauingenieur, 20, (1939), 366.
9. K. FEDERHOFER, J. KREBITZ, *Über die strenge Ermittlung der Form einer allseitig gleich gespannten Rotationsmembrane*, Eisenbau, 5 (1914), Helf 6.
10. D. R. HAYHURST, *Creep rupture under multi-axial states of stress*, J. Mech. Phys. Solids., vol. 20 (1972), 381 - 390.
11. G. A. HOFFMAN, *Minimum-weight proportions pressure vessel heads*, Trans. ASME E 29, 4 (1962), 662 - 668.
12. G. A. HOFFMAN, *Optimal proportions of pressure vessel heads*, J. Aerospace Sci., 29 (1962), 12, 1471 - 1475.
13. W. ISSLER, *Eine Kuppel gleicher Festigkeit*, Z. angew. Math., 10 (1959), 6.
14. W. ISSLER, *Membranschalen gleicher Festigkeit*, Ingen-Archiv., 33 (1969), 5, 330 - 345.
15. H. KOPECKI, J. WALCZAK, *The energy dissipation barrier as a criterion of creep failure of rotating discs*, Arch. Bud. Maszyn, 4 (1976), 23, 455 - 460.
16. C. N. KOSTEM, *Tensile optimum weight membrane containers*, IASS Pacific Symposium, October 17 - 23, 1971, Tokyo and Kyoto.

17. E. KOTTENMEIER, *Der Stahlbehälterbau*, Stahlbau, 3 (1930), 17, 49, 73.
18. F. A. LECKIE, D. R. HAYHURST, *Creep rupture of structures*, Proc. Roy. Soc. London, A 340, No 1622 (1974), 323 - 347.
19. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, IPPT-PAN, PWN Warszawa, 1976.
20. G. MEGAREUS, *Die Kuppel gleicher Festigkeit*, Bauingenieur, 20 (1939), 232.
21. M. MILANKOVIĆ, *O membranama jednakog otpora*, Rad. Jugoslovenske Akademija, Zagreb, 175, (1908), 140 - 152.
22. T. PÖSCHL, *Technische Daten über tropfenförmige Mineralölbehälter*, Bauingenieur, 8 (1927).
23. W. S. READ, *Cassian domes for pressure vessels design*, Paper Amer. Soc. Mech. Eng., (1962), N, Ar-54.
24. R. A. STRUBLE, *Biezeno pressure vessel heads*, J. Appl. Mech. 23 (1956), 642 - 645.
25. F. TÖLKE, *Über Rotationsschalen gleicher Festigkeit für konstanten — Innen und Aussendruck*, Z. angew. Math. Mech., 19 (1939), 338.
26. H. ZIEGLER, *Kuppeln gleicher Festigkeit*, Ing.-Archiv, 26 (1958), 5, 378—382.
27. M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe powłok, w pracy zbiorowej „Konstrukcje powłokowe”*, IPPT-PAN, PWN Warszawa, 1978.

С о д е р ж а н и е

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ФОРМИРОВАНИЯ ОСЕВОСИММЕТРИЧЕСКИХ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Проблемой настоящей работы является оптимальное формирование осево-симметрических безмоментных оболочек, с довольно общими системами нагружений презентированными массовыми силами (собственный вес, вращение), а также внешнее нагружение (давление). В качестве функции цели принят объем оболочки; задача решалась при использовании классического вариационного исчисления...

Поиски решений велись в разряде оболочек равномерной прочности, выделяя два основные типы условий прочности „условия равномерной прочности в более узком смысле” (1.1), а также „условия равномерной прочности в более широком смысле” (1.2).

Опираясь на условие типа (1.2), а именно условие ГМГ приведены формы оболочек оптимальных при различных комбинациях нагружений. Исследована также проблема оболочки равномерной прочности в более узком смысле (1.1) — как конструкция оптимальная. С этой целью велись поиски внешних нагружений при которых оболочка выполняющая уравнения Эйлера-Лагранжа редуцируется к оболочке равномерной прочности в более узком смысле (1.1). Оказалось, что оболочка такого типа не выполняет всех требуемых условий оптимальности.

S u m m a r y

SOME PROBLEMS OF OPTIMAL DESIGN OF THE AXIALLY SYMMETRICAL SHELLS IN MEMBRANE STATE

The paper deals with the optimal design of axially symmetrical shells in membrane state loaded by general system of loadings represented by body forces (own weight, rotation) and by external loading — pressure. As a criterion of design the minimal volume of the shell has been assumed. The problem has been formulated as a classical problem of calculus of variations.

The possible solution shаве to be found in the class of uniform strength shells. Two basic types of strength conditions have been distinguished: „condition of the uniform strength in narrower sense” (1.1) and the more general one „condition of the uniform strength in broader” (1.2).

With the aid of the HMH conditions (broader sense) the shape of the optimal shells under different system of loadings have been given.

The question, if the shell of uniform strength in narrower sense is optimal one has been examined. In order to answer this we looked for external loading which transforms the shell satisfying the Euler-Lagrange equations into the shell of the uniform strength in narrower sense (1.1). It turns out that such a shell does not satisfy all demanded conditions of optimality.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI
MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 23. lutego 1978 r.

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA OBIEKTU LATAJĄCEGO ODWIJAJĄCEGO Z POKŁADU LINĘ

TADEUSZ KUŹMICEWICZ, JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Rozciąganie lin, przewodów łączności itp. poprzez wystrzeliwanie ich w pojemnikach latających obiektów i następnie odwijanie podczas lotu obiektu, znajduje obecnie coraz szersze zastosowanie. Tę metodę wykorzystuje się m.in. przy przerzucaniu przewodów łączności, lin ratowniczych przez przeszkody terenowe uniemożliwiające lub utrudniające ciągnięcie. Powyższy sposób wykorzystuje się również do rozciągania lin za pośrednictwem których steruje się raketami.

Odwijanie liny ze szpuli znajdującej się na lecącym obiekcie charakteryzuje się szeregiem ciekawych efektów dynamicznych. W dostępnej literaturze istnieje szereg prac dotyczących stateczności obiektów holujących i holowanych za pośrednictwem liny [11, 12, 13, 19]. W pracach tych w badaniu stateczności obiektu wpływ liny holowniczej (holowanej) uwzględniano wprowadzając jako dodatkowe siły i momenty w punkcie zamocowania liny do obiektu.

W przypadku rozciągania liny z lecącego obiektu lina nie ma jednego punktu przymocowania do obiektu (jak w przypadku liny holowniczej) lecz opuszcza obiekt przez obwodową szczelinę. Lina po wyjściu z obiektu ma przestrzenną konfigurację a jej obwódka przyjmuje kształt gruszki. Rozmiary gruszki zależą od parametrów geometrycznych i kinematycznych lecącego obiektu. Aby uniknąć zahaczania się liny o elementy konstrukcyjne obiektu wyjścia liny stosuje się zawsze w jego tylnej części.

Przyłożenie naciągu liny do obiektu jest więc w znacznej odległości od środka masy obiektu i ma charakter zmienny. Badania dynamiki liny odwijającej się z ruchomego obiektu latającego w zależności od prędkości obiektu i promienia szpuli, na której jest ona nawinięta przedstawiono w pracy [8, 10].

W niniejszej pracy rozpatrzono wpływ odwijanej liny oraz szeregu parametrów charakteryzujących wyjście liny i parametrów geometrycznych i kinematycznych obiektu na jego stateczność dynamiczną. Do badania stateczności dynamicznej obiektu odwijającego ze swego pokładu linę zastosowano metody rozwinięte w dynamice lotu [1, 2, 14] i stosowane z dobrymi wynikami w pracach dotyczących stateczności szybowców holowanych, samolotów holujących oraz całego zespołu holowniczego [11, 12, 13, 19].

Równania ruchu obiektu zapisano we współrzędnych układu związanego z obiektem [7]. Następnie układ ten zlinearyzowano. Zmiany sił i momentów aerodynamicznych względem małych zmian prędkości kątowej i liniowej obiektu od stanu równowagi opisano przy

użyciu pochodnych aerodynamicznych [2, 3, 10, 14, 17]. Natomiast do opisu zmian sił i momentów wynikających z oddziaływania odwijanej liny wprowadzono pochodne liniowe [9, 10].

Rozwiązanie układu równań różniczkowych liniowych sprowadzono do zagadnienia znajdowania wartości własnych i wektorów własnych macierzy niesymetrycznej [10, 14, 15, 19].

Znajomość wartości własnych pozwoliła na określenie oscylacji i tłumienia ruchów obiektu. Określono stateczność obiektu w locie z odwijaną liną oraz w locie bez liny w funkcji niektórych parametrów kinematycznych obiektu.

Obliczenia wpływu odwijania liny z lecącego obiektu na stateczność obiektu przeprowadzono dla zmodyfikowanego pocisku klasy Bölkow-Cobra i przewodu kierowania o typowych charakterystykach wymiarowych i ciężarowych. Wszystkie obliczenia przedstawiono na wykresach.

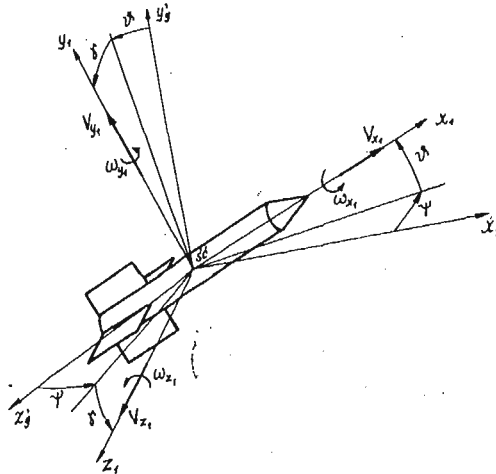
2. Równania ruchu obiektu odwijającego z pokładu liny

W literaturze omawiającej dynamikę obiektów takich jak samoloty, rakiety równania ruchu zapisywane są najczęściej w kilku układach współrzędnych. Zastosowanie różnych układów współrzędnych daje prostszą formę zapisu różniczkowych równań ruchu.

Do opisu dynamiki obiektu ruchomego niezbędne są cztery układy odniesienia [14]:

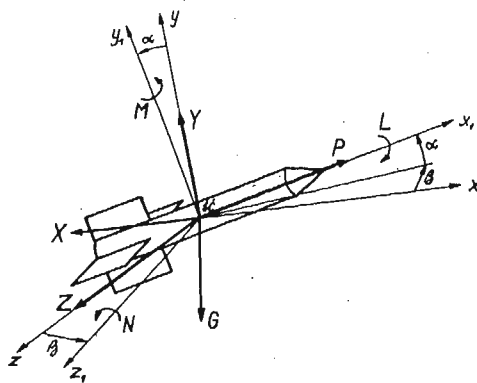
- nieruchomy układ grawitacyjny związany z ziemią $0x_g y_g z_g$,
- układ grawitacyjny $0x'_g y'_g z'_g$ związany z poruszającym się obiektem równoległy do układu nieruchomego $0x_g y_g z_g$ znajdujący się w ustalonym ruchu postępowym rys. 1,
- układ prędkościowy $0x y z$ związany z kierunkiem przepływu ośrodka omawiającego obiekt rys. 2,
- układ $0x_1 y_1 z_1$ związany sztywno z poruszającym się obiektem rys. 1.

Ruch środka masy opisywany jest zwykle we współrzędnych układu związanego z wektorem prędkości a ruch wokół środka masy — we współrzędnych układu związanego



Rys. 1. Przyjęty układ odniesienia związany z obiektem oraz wprowadzone prędkości liniowe i kątowe

z obiektem. Układ równań ruchu zamykają równania opisujące ruch środka masy i ruch wokół środka masy we współrzędnych układu związanego z ziemią oraz zależności między kątami stosowanych układów współrzędnych. Przy badaniu stateczności wygodniej jest zapisać ruch obiektu w jednym układzie współrzędnych tj. w układzie związanym z obiektem wówczas zbędne są równania opisujące ruch obiektu względem ziemi.



Rys. 2. Przyjęty układ prędkościowy związany z przepływem

Różniczkowe równania ruchu obiektu zapisano we współrzędnych układu związanego z obiektem (Rys. 1) mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{dV_{x_1}}{dt} + V_{z_1} \omega_{y_1} - V_{y_1} \omega_{z_1} \right) &= X_1 + X_{1N} \\
 m \left(\frac{dV_{y_1}}{dt} + V_{x_1} \omega_{z_1} - V_{z_1} \omega_{x_1} \right) &= Y_1 + Y_{1N} \\
 m \left(\frac{dV_{z_1}}{dt} + V_{y_1} \omega_{x_1} - V_{x_1} \omega_{y_1} \right) &= Z_1 + Z_{1N} \\
 J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= L + L_N \\
 J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{x_1} \omega_{z_1} &= M + M_N \\
 J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{x_1} \omega_{y_1} &= N + N_N \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_{x_1} - (\omega_{y_1} \cos \gamma - \omega_{z_1} \sin \gamma) \operatorname{tg} \vartheta \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{y_1} \sin \gamma + \omega_{z_1} \cos \gamma \\
 \frac{d\psi}{dt} &= (\omega_{y_1} \cos \gamma - \omega_{z_1} \sin \gamma) \frac{1}{\cos \vartheta}
 \end{aligned}$$

(1)

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{V_{y_1}}{V_{x_1}}$$

$$\sin \beta = \frac{V_{z_1}}{\sqrt{V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2 + V_{z_1}^2}}$$

gdzie

$$X_1 = P + Y \sin \alpha - X \cos \alpha \cos \beta - G \sin \vartheta - Z \cos \alpha \sin \beta$$

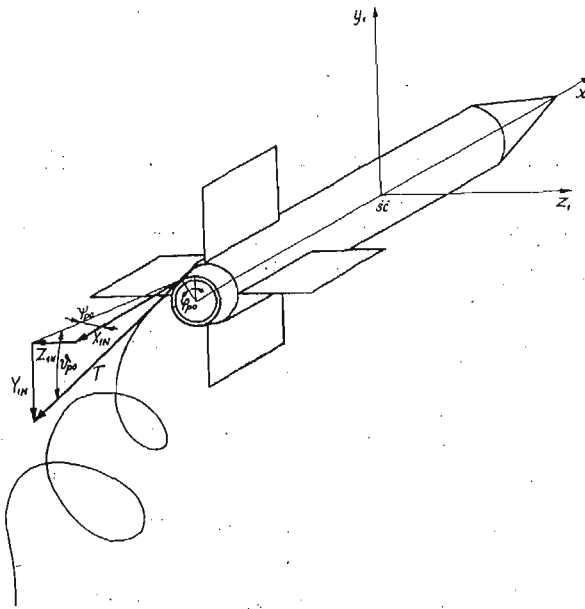
$$Y_1 = Y \cos \alpha - X \sin \alpha \cos \beta - G \cos \vartheta \cos \gamma + Z \sin \alpha \sin \beta$$

$$Z_1 = Z \cos \alpha - G \cos \vartheta \sin \gamma - X \sin \beta$$

$$X_{1N} = -T \cos \vartheta_{p0} \cos \psi_{p0}$$

$$Y_{1N} = -T \sin \vartheta_{p0}$$

$$Z_{1N} = -T \cos \vartheta_{p0} \sin \psi_{p0}$$



Rys. 3. Kierunek działania naciągu liny na wyjściu z obiektu

Szczegółowe badania naciągu liny [10] wykazały jego zależność od niektórych parametrów kinematycznych obiektu oraz kąтового położenia liny na wyjściu z obiektu względem jego korpusu (Rys. 3). W związku z tym przyjęto, że naciąg liny można zapisać jako:

$$(2) \quad T(V_0, \vartheta, \dot{\gamma}, \vartheta_{p0}, \psi_{p0}) = T_0(V_0, \vartheta_{p0}, \psi_{p0}) + T^\vartheta(V_0) \cdot \vartheta + T^\gamma(V_0) \cdot \dot{\gamma}$$

Składowa naciągu liny T_0 jest zależna od prędkości lotu ustalonego obiektu oraz stałych warunków rozwijania charakterystycznych dla danego obiektu. Początkowe kątowne położenie liny na wyjściu z obiektu opisano kątami ϑ_{p0} i ψ_{p0} leżącymi odpowiednio w płaszczyznach symetrii obiektu Ox_1z_1 i Ox_1y_1 . Wielkość tych kątów jest zależna od stałych wartości ϑ_r i ψ_r oraz kąta obiegu liny w szczelinie — φ_{p0} .

$$\begin{aligned}\vartheta_{p0} &= -\vartheta_r \cos \varphi_{p0} - \psi_r \sin \varphi_{p0} \\ \psi_{p0} &= \vartheta_r \sin \varphi_{p0} - \psi_r \cos \varphi_{p0}\end{aligned}$$

Stałe wartości kątów ϑ_r i ψ_r uwarunkowane są prędkością odwijania, wartością siły niezbędnej do odklejania liny ze szpuli oraz kształtem tylnej części kadłuba obiektu.

3. Linearyzacja równań ruchu obiektu

Przy rozpatrywaniu stateczności dynamicznej obiektu przyjęto, że obiekt znajduje się w poziomym prostoliniowym locie ustalonym i ma stałe następujące parametry lotu:

$$\begin{aligned}\omega_{y_1 0} = \omega_{z_1 0} = V_{z_1 0} = \gamma_0 &= 0 \\ \vartheta_0 = \omega_{x_1 0} = V_{x_1 0} = V_{y_1 0} = \alpha_0 &= \text{const} \neq 0\end{aligned}$$

Zakłócenia lotu ustalonego tzn. zmiany prędkości liniowej i kątowej oraz położenia kątownego rakiety wywołują zmiany siły aerodynamicznej, momentu aerodynamicznego oraz zmianę naciągu liny. Małe zmiany prędkości liniowej, kątowej oraz położenia kątownego obiektu oznaczono następująco:

- v_x, v_y, v_z składowe zmian prędkości liniowej obiektu;
- γ_1 zmiana kąta przechylenia;
- ψ_1 zmiana kąta odchylenia;
- ϑ_1 zmiana kąta pochylenia;
- $\dot{\gamma}_1$ zmiana prędkości kątowej przechylania;
- $\dot{\psi}_1$ zmiana prędkości kątowej odchylenia;
- $\dot{\vartheta}_1$ zmiana prędkości kątowej pochylenia.

Po uwzględnieniu powyższych założeń otrzymano liniowy układ równań ruchu dla małych zakłóceń:

$$\begin{aligned}m \left(\frac{dv_x}{dt} - V_{y_1 0} \bar{\omega}_{z_1} \right) &= \Delta X_1 + \Delta X_{1N} - \vartheta_1 G \cos \vartheta_0 \\ m \left(\frac{dv_y}{dt} - V_{x_1 0} \bar{\omega}_{z_1} \right) &= \Delta Y_1 + \Delta Y_{1N} - \vartheta_1 G \sin \vartheta_0 \\ m \left(\frac{dv_z}{dt} + V_{y_1 0} \bar{\omega}_{x_1} - V_{x_1 0} \bar{\omega}_{y_1} \right) &= \Delta Z_1 + \Delta Z_{1N} - \gamma_1 G \sin \vartheta_0 \\ J_{x_1} \frac{d\bar{\omega}_{x_1}}{dt} &= \Delta L + \Delta L_N \\ (3) \quad J_{y_1} \frac{d\bar{\omega}_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{x_1 0} \bar{\omega}_{z_1} &= \Delta M + \Delta M_N \\ J_{z_1} \frac{d\bar{\omega}_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{x_1 0} \bar{\omega}_{y_1} &= \Delta N + \Delta N_N \\ \bar{\omega}_{x_1} &= \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\psi_1}{dt} \sin \vartheta_0\end{aligned}$$

$$\bar{\omega}_{y_1} = \frac{d\psi_1}{dt} \cos \vartheta_0$$

$$\bar{\omega}_{z_1} = \frac{d\vartheta_1}{dt}$$

gdzie $\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1, \Delta L, \Delta M, \Delta N$ — składowe zmiany siły aerodynamicznej i momentu aerodynamicznego wynikłe z małych zmian parametrów obiektu;

$\Delta X_{1N}, \Delta Y_{1N}, \Delta Z_{1N}, \Delta L_N, \Delta M_N, \Delta N_N$ — składowe zmiany naciągu i momentu naciągu liny wynikłe z małych zmian parametrów obiektu.

Oddziaływanie liny na obiekt uwzględniono przez wprowadzenie do prawych stron równań (3) składowych siły i momentu siły naciągu liny wyrażonych jako iloczyny pochodnych liniowych i odpowiednich zmian parametrów lotu obiektu. Pochodne linowe przedstawiono w pracy [9, 10]. Składowe zmiany siły aerodynamicznej i momentu aerodynamicznego opisano przy użyciu pochodnych aerodynamicznych wyprowadzonych w pracy [3].

Po uwzględnieniu pochodnych liniowych i aerodynamicznych i przekształceniach układ równań (3) zapisany macierzowo przyjmuje postać:

$$(4) \quad \mathcal{P}\dot{\mathcal{U}} + \mathcal{Q}\mathcal{U} = 0$$

gdzie \mathcal{U} macierz kolumnowa zakłóceń

$$\mathcal{U} = \text{col}[\dot{\gamma}_1, \dot{\vartheta}_1, \dot{\psi}_1, v_x, v_y, v_z, \gamma_1, \vartheta_1, \psi_1]$$

$$\mathcal{P} = [p_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, 9 \\ j = 1, 2, \dots, 9 \end{array}$$

$$\mathcal{Q} = [q_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, 9 \\ j = 1, 2, \dots, 9 \end{array}$$

4. Rozwiązanie równań ruchu

Po przekształceniu i pomnożeniu lewostronnie (4) przez macierz odwrotną \mathcal{P}^{-1} otrzymujemy

$$(5) \quad \dot{\mathcal{U}} = \mathcal{R}\mathcal{U}$$

gdzie macierz stanu \mathcal{R} ma postać

$$(6) \quad \mathcal{R} = \mathcal{P}^{-1}(-\mathcal{Q})$$

Rozwiązanie ogólne układu (5) jest liniową kombinacją wszystkich rozwiązań szczególnych i przy różnych wartościach własnych ma postać:

$$\mathcal{U} = \sum_{j=1}^9 C_j \mathcal{U}_{w_j} \exp \lambda_j t$$

gdzie:

\mathcal{U}_{w_j} wektor własny odpowiadający j -ej wartości własnej,

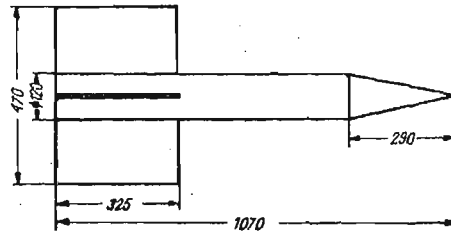
C_j stałe wyznaczone z warunków początkowych będących wartościami zakłóceń od ruchu ustalonego dla chwili $t = 0$,

$\lambda_{j,j+1} = \xi_{j,j+1} \pm i\eta_{j,j+1}$ wartości własne macierzy stanu
 ξ_j współczynnik tłumienia,
 jeżeli $\xi_j < 0$ wahania są tłumione tzn. ruch obiektu jest stateczny, czas stłumienia amplitudy do połowy $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\xi_j}$
 η_j częstość oscylacji o okresie $T_j = \frac{2\pi}{\eta_j}$.

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się więc do wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych macierzy stanu \mathcal{R} . Wyznaczenie wektorów własnych, odpowiadających wartościom własnym pozwala na identyfikację ruchów obiektu. Macierz stanu \mathcal{R} jest macierzą kwadratową stopnia 9-go. Ze względu na występowanie sił aerodynamicznych macierz \mathcal{R} jest macierzą niesymetryczną.

5. Przykład liczbowy i wnioski

Badania stateczności dynamicznej obiektu odwijającego z pokładu linę przeprowadzono na przykładzie rakiety kierowanej przewodowo klasy Bölkow-Cobra (rys. 4).



Rys. 4. Rakieta klasy Bölkow-Cobra

Do obliczeń przyjęto następujące charakterystyki geometryczne i masowe rakiety:

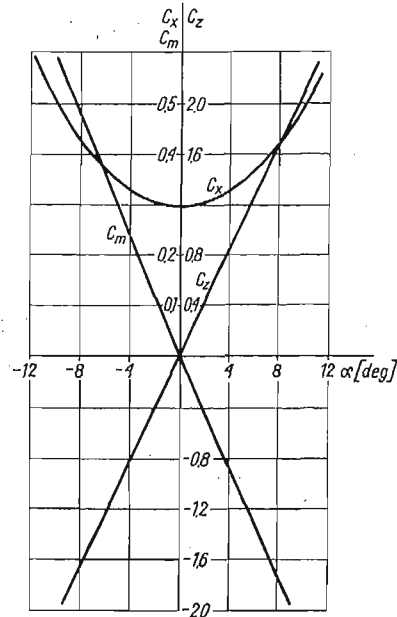
$$\begin{aligned} L &= 1,07 \text{ m} & G &= 9,5 \text{ kG} \\ D &= 0,120 \text{ m} & I_{x_1} &= 0,0025 \text{ kGs}^2\text{m} \\ L_s &= 0,290 \text{ m} & I_{y_1} &= I_{z_1} = 0,025 \text{ kGs}^2\text{m} \\ B &= 0,470 \text{ m} \end{aligned}$$

Charakterystyki aerodynamiczne rakiety w zakresie poddźwiękowym przedstawiono na rys. 5.

Obliczenia stateczności dynamicznej rakiety z uwzględnieniem oddziaływania przewodu kierowania i bez przewodu prowadzono dla prędkości lotu ustalonego w zakresie 60-140 m/s. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6 i rys. 7. Na wykresach liniami ciągłymi naniesiono współczynniki tłumienia — ξ^p i częstości oscylacji — η^p ruchów rakiety w locie z przewodem kierowania, natomiast liniami przerywanymi — tłumienia i oscylacje w locie swobodnym rakiety.

Na podstawie wektorów własnych dokonano identyfikacji ruchów rakiety. Odpowiednim wartościom własnym odpowiadają następujące ruchy rakiety:

- $\lambda_{1,2} = \xi_{1,2} \pm i\eta_{1,2}$ oscylacje prędkości v_y sprzężone z oscylacjami prędkości kątowej pochylenia $\dot{\psi}_1$,
- λ_3 aperiodyczne zmiany prędkości v_z sprzężone ze zmianami prędkości kątowej odchylenia $\dot{\psi}_1$,
- λ_4 aperiodyczne zmiany prędkości v_z sprzężone z prędkością v_y i prędkością kątową pochylenia $\dot{\psi}_1$,



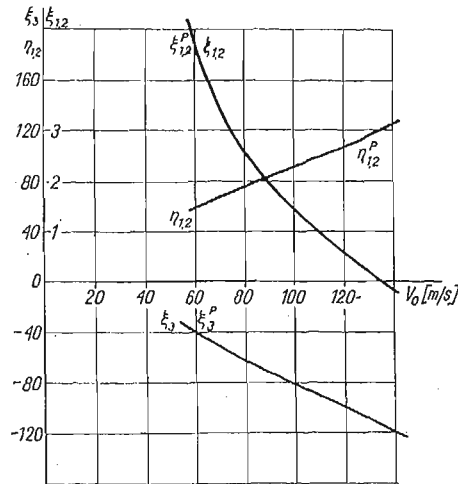
Rys. 5. Charakterystyki aerodynamiczne rakiety klasy Bólkow-Cobra

- λ_5 aperiodyczne zmiany prędkości kątowej przechylenia $\dot{\gamma}_1$ sprzężone z prędkością v_z i prędkością kątową odchylenia $\dot{\psi}_1$,
- λ_6 aperiodyczne zmiany kąta odchylenia ψ_1 sprzężone ze zmianami kąta przechylenia γ_1 ,
- λ_7 aperiodyczne zmiany prędkości v_x sprzężone z prędkością v_y , prędkością kątową $\dot{\psi}_1$ oraz kątem przechylenia γ_1 ,
- λ_8 aperiodyczne zmiany prędkości v_x sprzężone z kątami przechylenia γ_1 i odchylenia ψ_1 .

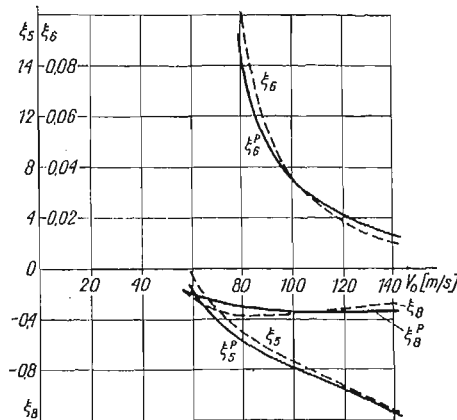
Na rys. 6 przedstawiono zmianę współczynników tłumienia poprzecznych prędkości rakiety i częstości oscylacji w funkcji prędkości lotu.

Bardzo szybkie oscylacje prędkości v_y sprzężone z prędkością kątową pochylenia $\dot{\psi}_1$ wraz ze wzrostem prędkości lotu rakiety przechodzą z nietłumionych w tłumione (przy $V_0 = 135$ m/s). Częstość oscylacji v_y narasta.

Aperiodyczne zmiany prędkości v_z sprzężone z prędkością odchylenia $\dot{\psi}_1$ i prędkością v_y są tłumione (ξ_3^p) w całym zakresie prędkości lotu. Ze wzrostem prędkości lotu tłumienie wzrasta. Przewód kierowania nie wpływa istotnie na poprzeczne prędkości środka masy rakiety. Współczynnik tłumienia $\xi_{1,2}^p$ jest większy o 3,7% od $\xi_{1,2}$ a ξ_3^p — o 0,2%.



Rys. 6. Zmiana współczynników tłumienia prędkości poprzecznych rakiety w funkcji prędkości lotu ustalonego



Rys. 7. Zmiana współczynników tłumienia ruchów kątowych oraz prędkości podłużnej rakiety w funkcji prędkości lotu ustalonego.

Zmianę współczynników tłumienia ruchów kątowych w funkcji prędkości lotu ustalonego przedstawiono na rys. 7. Ruchy kątowe ψ_1 sprzężone z γ_1 są aperiodycznie nietłumione (ξ_6^p). Tłumienie wzrasta ze wzrostem prędkości lotu. Przewód kierowania przy prędkościach lotu $V_0 < 100$ m/s powoduje zwiększenie współczynnika tłumienia ξ_6^p o 15% w stosunku do współczynnika tłumienia w locie swobodnym. Powyżej prędkości $V_0 = 100$ m/s przewód kierowania zmniejsza współczynnik tłumienia o 20%.

Zmiany prędkości kątowej przechylenia $\dot{\gamma}_1$ sprzężone z prędkością poprzeczną v_z środka masy są aperiodycznie tłumione (ξ_5^p , rys. 7). Tłumienie narasta w funkcji prędkości lotu ustalonego. Przewód kierowania zwiększa współczynnik tłumienia ξ_5^p w całym zakresie prędkości: o 127% przy prędkości $V_0 = 60$ m/s i o około 1% przy prędkości $V_0 = 140$ m/s.

Przewód kierowania powoduje zmniejszenie tłumienia zmian prędkości podłużnej

sprężonej z kątami przechylenia γ_1 i odchylenia ψ_1 w zakresie prędkości lotu ustalonego $V_0 = 60-110$ m/s oraz zwiększenie tłumienia przy prędkościach $V_0 > 110$ m/s (ξ_3^p rys. 7).

Przyjęty do obliczeń liczbowych model rakiety wykazuje niestateczność dynamiczną: Obliczenia wykazały, że:

- 1) przewód kierowania ustatecznia ruchy kątowne rakiety (ξ_3^p, ξ_6^p , rys. 7) w zakresie prędkości lotu ustalonego do $V = 100$ m/s. Dla prędkości $V_0 > 100$ m/s oddziaływanie przewodu ma charakter uniestateczniającego,
- 2) przewód kierowania ustatecznia zmiany prędkości podłużnej v_x sprzężone z kątem przechylenia γ_1 i prędkością kątową odchylenia $\dot{\psi}_1$ (ξ_6^p , rys. 7)
- 3) przewód kierowania nie wpływa na tłumienie zmian prędkości poprzecznych (w kierunku osi y_1 i z_1) środka masy rakiety ($\xi_{1,2}^p, \xi_3^p$, rys. 6).

Obliczenia liczbowe przeprowadzono dla jednego przewodu kierowania w związku z tym powyższych wniosków nie należy uogólniać na przewody o innych charakterystykach. Dla przewodu o odmiennych charakterystykach relacja między siłami aerodynamicznymi i siłami bezwładności zmieni się, co może nadać inny charakter naciągowi przewodu.

Również dla rakiety o innych charakterystykach geometrycznych i masowych przewodów kierowania może mieć zupełnie inny wpływ na jej charakterystyki dynamiczne.

Ważniejsze oznaczenia

X, Y, Z [kG]	składowe siły aerodynamicznej w układzie współrzędnych związanym z przepływem,
X_1, Y_1, Z_1 [kG]	składowe siły aerodynamicznej w układzie współrzędnych związanym z obiektem
X_{1N}, Y_{1N}, Z_{1N} [kG]	składowe naciągu liny w układzie współrzędnych związanym z obiektem
L, M, N [kGm]	składowe momentu aerodynamicznego w układzie współrzędnych związanym z obiektem
L_N, M_N, N_N [kGm]	składowe momentu naciągu liny w układzie współrzędnych związanym z obiektem,
T [kG]	naciąg w linie
$\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ [1/s]	składowe prędkości kątowej obiektu w układzie związanym z obiektem
$\bar{\omega}_{x_1}, \bar{\omega}_{y_1}, \bar{\omega}_{z_1}$ [1/s]	składowe zmiany prędkości kątowej obiektu
γ, ϑ, ψ [rad]	kąt przechylenia, pochylenia i odchylenia obiektu
$\gamma_1, \vartheta_1, \psi_1$ [rad]	małe zmiany kąta przechylenia, pochylenia i odchylenia obiektu
$V_{x_1}, V_{y_1}, V_{z_1}$ [m/s]	składowe prędkości obiektu w układzie współrzędnych związanych z obiektem
v_x, v_y, v_z [m/s]	małe zmiany składowych prędkości obiektu
V_0 [m/s]	całkowita prędkość lotu ustalonego obiektu
$\vartheta_{p0}, \psi_{p0}$ [rad]	składowe początkowego kątowego położenia liny na wyjściu z obiektu leżące odpowiednio w płaszczyznach symetrii obiektu $O_{x_1 z_1}$ i $O_{x_1 y_1}$
φ_{p0} [rad]	kąt obiektu liny w szczelinie na wyjściu z obiektu
ϑ_r, ψ_r [rad]	stałe wartości uwarunkowane kształtem tylnej części kadłuba obiektu, siłą odklejania liny oraz prędkością odwijania
$\lambda = \xi \pm i\eta$	wartości własne układu równań różniczkowych
ξ	współczynnik tłumienia
η	częstość oscylacji

Literatura

1. B. ETKIN — *Dynamics of Flight*, New York — London 1959.
2. B. ETKIN — *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York 1972.
3. W. FISZDON — *Mechanika lotu*, Cz. I i II, PWN, Warszawa 1961.
4. R. GUTOWSKI — *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, R. VOGT — *Opis matematyczny kierowanego ruchu rakiety o zmiennej masie z uwzględnieniem oddziaływania rozwijających się przewodów*, PTUiR 1975 r. Zeszyt 13 Rok V.
6. R. GUTOWSKI — *Mechanika analityczna*, Warszawa 1971 PWN.
7. С. А. ГОРБАТЕНКО, Э. М. МАКАШОВ, Ю. Ф. ПОЛУШКИН, Л. В. ШВЕТЕЛЬ, *Механика полёта, Машиностроение*, Москва 1969
8. T. KUŹMICEWICZ — *Dynamika liny odwijającej się z ruchomego obiektu latającego*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 1, 13 (1975).
9. T. KUŹMICEWICZ — *Współczynniki sił przewodu kierowania ppk — pochodne linowe*, PTUiR, Nr 15, 1976.
10. T. KUŹMICEWICZ — *Wpływ przewodu kierowania na stateczność rakiety*. Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1976 (nie publikowana).
11. J. MARYNIAK — *Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 1, 5 (1967).
12. J. MARYNIAK — *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 3, 5 (1967).
13. J. MARYNIAK — *Uproszczona analiza stateczności bocznej szybowca holowanego na linie*, *Mech. Teoretyczna i Stosowana*, 1, 7 (1969).
14. J. MARYNIAK — *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, *Prace naukowe Politechniki Warszawskiej — Mechanika* nr 32, Warszawa 1975.
15. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA — *Badanie teoretyczne własności dynamicznych lotu obiektów zrzuconych z samolotu*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, Tom 15, zeszyt 1, PWN Warszawa 1977.
16. S. MINOVIČ — *Dinamičke jednačine kretanja upravljivog, rotirajućeg, osno simetričnog projektila*, *Naučno-tehnički PREGLED Beograd* 1966, br. 4 i 5.
17. S. MINOVIČ — *Kompleksne aerodinamičke prenosne funkcije ososimetrične letelice koja lagano rotira, svedene na normalizovan oblik*, *Naučno-tehnički PREGLED*, Beograd 1970 br 5.
18. K. OGATA — *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa 1974.
19. G. PALJARUCI, J. MARYNIAK — *Uticaj brino leta na ryvnotezu i dinamičke karakteristike jedrilice vucene uzertem od strane teskog avjona*, *Materiały XIII Jugosłowiańskiego Kongresu Mechaniki*, Sarajevo 1976 A 4-5.
20. R. VOGT — *Dynamika naprowadzania raketowych pocisków przeciwpancernych kierowanych przewodowo*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1971.
21. R. VOGT — *Zasady i właściwości modelowania matematycznego procesów sterowania ruchem raket*, PTUiR 1974, Rok IV, zeszyt 11.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕТАЮЩЕГО ОБЪЕКТА
РАЗВИВАЮЩЕГО ИЗ БОРТА КАНАТ

В работе рассматривается устойчивость летающего объекта развивающего канат управления из борта.

Движение объекта описано нелинейными дифференциальными уравнениями в системе координат жестко связанных с объектом. После этого уравнения движения линеаризировано.

В уравнениях движения объекта учтено воздействие каната путем введения переменной точки действия силы от напряжения каната.

Решение системы линейных дифференциальных уравнений сведено к вопросу вычисления собственных значений и соответствующих им собственных векторов. Исследования влияния каната развивающегося из борта объекта на его динамическую устойчивость иллюстрировано примером вычисления устойчивости ракеты управляемой канатом управления.

S u m m a r y

DYNAMICAL STABILITY OF A FLYING OBJECT WITH A CABLE'S UNCOILING SYSTEM

The main purpose of this paper is an analysis of the stability problem of a flying vehicle with a cable's uncoiling system.

The flying vehicle motion is described in set of axes fixed with the vehicle and nonlinear differential equations are developed. Authors give a description of the linearized mathematical model of this kind of system. The mathematical model is a set of linearized differential equations and involves description of the cables influence on the dynamics of vehicle.

The solution of the linearized differential equations is based on calculating the eigenvalues and eigenvectors.

Authors have given a numerical example of the investigated problem.

- 1) WOJSKOWY INSTYTUT TECHNICZNY UZBROJENIA
- 2) POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 marca 1978 r.

UŚCIŚLONY OPIS DRGAŃ WYMUSZONYCH LINII WAŁÓW Z UWZGLĘDNIENIEM
ASYMETRII SZTYWNOŚCI NA ZGINANIE I PODATNOŚCI FUNDAMENTÓW

JANUSZ KOŁENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Przyjęty w pracy [1] mechaniczny model linii wałów nie obejmuje szeregu występujących w rzeczywistych układach czynników, które mogą być uwzględniane w ramach liniowej teorii drgań. Celowość i sposoby uściślenia modelu zależą od typu rozpatrywanych linii wałów i warunków ich eksploatacji. Przykładowo, na drgania linii wałów okrętowych siłowni spalinowych istotny wpływ wywierać mogą m.in. takie pominięte w [1] czynniki, jak stała składowa naporu śruby i tłumienie wewnętrzne wałów. Mniejsze znaczenie praktyczne mają tu na ogół sprzężenia pomiędzy poszczególnymi rodzajami drgań [2], a także — ze względu na stosunkowo małą prędkość obrotową wału śrubowego — momenty żyroskopowe. W niniejszej pracy uwzględniono wpływ stałej siły poosiowej, tłumienia wewnętrznego, odkształceń postaciowych od sił poprzecznych i momentów sił bezwładności obrotu oraz podjęto próbę uwzględnienia asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów w układach przekładniowych. Przedstawiono również możliwość dokładniejszego opisu drgań linii wałów zawierających wały korbowe lub inne zespoły o skomplikowanych kształtach poprzez zastosowanie podziału tych zespołów na elementy skończone.

2. Zależności obliczeniowe dla uściślonego modelu odcinka wału

Lepkosprężyste cechy materiału linii wałów opisano poniżej przy pomocy modelu Voigta¹⁾. Zachowano przy tym sposób podziału linii wałów na odcinki obliczeniowe oraz założenia i oznaczenia jak w pracy [1].

Równanie drgań podłużnych, równanie drgań giętych (w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach) z uwzględnieniem stałej ściskającej siły poosiowej $f_{01}^{w(0)}$ oraz równanie drgań skrętnych mają dla i -tego odcinka wału postać:

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 u_{ix1}}{\partial t^2} - \left(\frac{E}{\rho}\right)_i \left(\frac{\partial^2 u_{ix1}}{\partial x^2} + \tau_i \frac{\partial^3 u_{ix1}}{\partial t \partial x^2} \right) = 0,$$

$$(2.2) \quad (\rho A)_i \frac{\partial^2 u_{ix2}}{\partial t^2} + f_{01}^{w(0)} \frac{\partial^2 u_{ix2}}{\partial x^2} + (EI_2)_i \left(\frac{\partial^4 u_{ix2}}{\partial x^4} + \tau_i \frac{\partial^5 u_{ix2}}{\partial t \partial x^4} \right) = 0,$$

¹⁾ W przypadku przyjęcia innego liniowego modelu reologicznego procedura postępowania jest analogiczna.

$$(2.3) \quad (\rho A)_i \frac{\partial^2 u_{ix3}}{\partial t^2} + f_{01}^{w(0)} \frac{\partial^2 u_{ix3}}{\partial x^2} + (EI_3)_i \left(\frac{\partial^4 u_{ix3}}{\partial x^4} + \tau_i \frac{\partial^5 u_{ix3}}{\partial t \partial x^4} \right) = 0,$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 u_{ix4}}{\partial t^2} - \left(\frac{C}{I_s} \right)_i \left(\frac{\partial^2 u_{ix4}}{\partial x^2} + \tau_{zi} \frac{\partial^3 u_{ix4}}{\partial t \partial x^2} \right) = 0.$$

Współczynniki τ_i , τ_{zi} charakteryzują tłumienie materiałowe w i -tym odcinku wału zgodnie z modelem Voigta [3]. Dodatkowe uwzględnienie wpływu na linię ugięcia odkształceń postaciowych oraz bezwładności obrotu prowadzi zamiast (2.2), (2.3) do równań:

$$(2.5) \quad (\rho A)_i \frac{\partial^2 u_{ix2(3)}}{\partial t^2} + f_{01}^{w(0)} \frac{\partial^2 u_{ix2(3)}}{\partial x^2} + (EI_{2(3)})_i \left(\frac{\partial^4 u_{ix2(3)}}{\partial x^4} + \tau_i \frac{\partial^5 u_{ix2(3)}}{\partial t \partial x^4} \right) - \\ - (\rho I_{2(3)})_i \left[1 + \left(k_{2(3)} \frac{E}{G} \right)_i \right] \frac{\partial^4 u_{ix2(3)}}{\partial t^2 \partial x^2} + \left(\rho^2 k_{2(3)} \frac{I_{2(3)}}{G} \right)_i \frac{\partial^4 u_{ix2(3)}}{\partial t^4} = 0,$$

w których G_i jest modułem odkształcenia postaciowego, natomiast $(k_2)_i$, $(k_3)_i$ są współczynnikami kształtu przekroju [3].

Skupione wymuszenia zewnętrzne, działające w końcowym przekroju i -tego odcinka wału, mają postać [1]:

$$(2.6) \quad f_{ix}^w = \sum_{\mu} f_{ix}^{w(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots$$

W analogicznej postaci poszukiwać będziemy rozwiązań równań (2.1) ÷ (2.5):

$$(2.7) \quad u_{ix\alpha} = \sum_{\mu} u_{ix\mu}^{(\alpha)} \exp(j\mu\omega t), \quad \alpha = 1, \dots, 4.$$

Podobnie opisywać się będą kąty ugięć, określone zależnościami

$$(2.8) \quad u_{ix5} = - \frac{\partial u_{ix3}}{\partial x}, \quad u_{ix6} = \frac{\partial u_{ix2}}{\partial x}.$$

W wyniku podstawienia (2.7) do (2.1) ÷ (2.4) otrzymuje się równania różniczkowe zwyczajne, których rozwiązania można z uwzględnieniem (2.8) przedstawić w postaci:

$$(2.9) \quad u_{ix}^{(\mu)} = C_{ix}^{(\mu)} a_i^{(\mu)}, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots,$$

gdzie:

$$u_{ix}^{(\mu)} = \{u_{ix\alpha}^{(\mu)}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad a_i^{(\mu)} = \{a_{iq}^{(\mu)}\}, \quad q = 1, \dots, 12,$$

$$(2.10) \quad C_{ix}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \lambda_2^{(0)} x & \sin \lambda_2^{(0)} x & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \lambda_3^{(0)} x & \sin \lambda_3^{(0)} x & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3^{(0)} \sin \lambda_3^{(0)} x & -\lambda_3^{(0)} \cos \lambda_3^{(0)} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^{(0)} \sin \lambda_2^{(0)} x & \lambda_2^{(0)} \cos \lambda_2^{(0)} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(\mu)}$$

$$(2.11) \quad C_{ix}^{(\mu)} = [c_{xmn}^{(\mu)}]_{(i)}, \quad \mu \neq 0, \quad m = 1, \dots, 6, \quad n = 1, \dots, 12,$$

$$c_{x11}^{(\mu)} = \exp[(\lambda_{r1}^{(\mu)} + j\lambda_{r2}^{(\mu)})x],$$

$$c_{x4,11}^{(\mu)} = \exp[(\lambda_{s1}^{(\mu)} + j\lambda_{s2}^{(\mu)})x],$$

$$c_{x12}^{(\mu)} = \exp[-(\lambda_{r1}^{(\mu)} + j\lambda_{r2}^{(\mu)})x],$$

$$c_{x4,22}^{(\mu)} = \exp[-(\lambda_{s1}^{(\mu)} + j\lambda_{s2}^{(\mu)})x],$$

$$\begin{aligned}
 c_{x23}^{(\mu)} &= \exp[(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})x], & c_{x57}^{(\mu)} &= -(\lambda_{31}^{(\mu)} + j\lambda_{32}^{(\mu)})c_{x37}^{(\mu)}, \\
 c_{x24}^{(\mu)} &= \exp[-(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})x], & c_{x58}^{(\mu)} &= (\lambda_{31}^{(\mu)} + j\lambda_{32}^{(\mu)})c_{x38}^{(\mu)}, \\
 c_{x25}^{(\mu)} &= \exp[(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})x], & c_{x59}^{(\mu)} &= -(\lambda_{33}^{(\mu)} - j\lambda_{34}^{(\mu)})c_{x39}^{(\mu)}, \\
 c_{x26}^{(\mu)} &= \exp[-(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})x], & c_{x5,10}^{(\mu)} &= (\lambda_{33}^{(\mu)} - j\lambda_{34}^{(\mu)})c_{x3,10}^{(\mu)}, \\
 c_{x37}^{(\mu)} &= \exp[(\lambda_{31}^{(\mu)} + j\lambda_{32}^{(\mu)})x], & c_{x63}^{(\mu)} &= (\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})c_{x23}^{(\mu)}, \\
 c_{x38}^{(\mu)} &= \exp[-(\lambda_{31}^{(\mu)} + j\lambda_{32}^{(\mu)})x], & c_{x64}^{(\mu)} &= -(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})c_{x24}^{(\mu)}, \\
 c_{x39}^{(\mu)} &= \exp[(\lambda_{33}^{(\mu)} - j\lambda_{34}^{(\mu)})x], & c_{x65}^{(\mu)} &= (\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})c_{x25}^{(\mu)}, \\
 c_{x3,10}^{(\mu)} &= \exp[-(\lambda_{33}^{(\mu)} - j\lambda_{34}^{(\mu)})x], & c_{x66}^{(\mu)} &= -(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})c_{x26}^{(\mu)}.
 \end{aligned}$$

Pozostałe elementy macierzy $C_{ix}^{(\mu)}$ są zerowe. Poszczególne wielkości $\lambda^{(\mu)}$ oznaczają:

$$(2.12) \quad (\lambda_2^{(0)})_i = \sqrt{\frac{1}{(EI_2)_i} f_{\delta 1}^{w(0)}}, \quad (\lambda_3^{(0)})_i = \sqrt{\frac{1}{(EI_3)_i} f_{\delta 1}^{w(0)}},$$

$$(2.13) \quad \begin{cases} (\lambda_{r1}^{(\mu)})_i = \mu\omega \sqrt{\frac{\varrho_i}{2E_i[1+(\mu\omega\tau_i)^2]} [\sqrt{1+(\mu\omega\tau_i)^2} - 1]}, \\ (\lambda_{r2}^{(\mu)})_i = \mu\omega \sqrt{\frac{\varrho_i}{2E_i[1+(\mu\omega\tau_i)^2]} [\sqrt{1+(\mu\omega\tau_i)^2} + 1]}, \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} (\lambda_{s1}^{(\mu)})_i = \mu\omega \sqrt{\frac{(I_s)_i}{2C_i[1+(\mu\omega\tau_{si})^2]} [\sqrt{1+(\mu\omega\tau_{si})^2} - 1]}, \\ (\lambda_{s2}^{(\mu)})_i = \mu\omega \sqrt{\frac{(I_s)_i}{2C_i[1+(\mu\omega\tau_{si})^2]} [\sqrt{1+(\mu\omega\tau_{si})^2} + 1]}, \end{cases}$$

$$(2.15) \quad \begin{cases} (\lambda_{21}^{(\mu)})_i = (d_{21}^{(\mu)})_i \sqrt{(d_{22}^{(\mu)})_i - (d_{23}^{(\mu)})_i}, & (\lambda_{22}^{(\mu)})_i = (d_{21}^{(\mu)})_i \sqrt{(d_{22}^{(\mu)})_i + (d_{23}^{(\mu)})_i}, \\ (\lambda_{23}^{(\mu)})_i = (d_{21}^{(\mu)})_i \sqrt{(d_{24}^{(\mu)})_i - (d_{25}^{(\mu)})_i}, & (\lambda_{24}^{(\mu)})_i = (d_{21}^{(\mu)})_i \sqrt{(d_{24}^{(\mu)})_i + (d_{25}^{(\mu)})_i}, \end{cases}$$

$$(2.16) \quad \begin{cases} (d_{21}^{(\mu)})_i = \frac{1}{2\sqrt{(EI_2)_i[1+(\mu\omega\tau_i)^2]}}, \\ (d_{22}^{(\mu)})_i = \sqrt{[1+(\mu\omega\tau_i)^2] \{ (f_{\delta 1}^{w(0)})^2 + (r_2^{(\mu)})_i - f_{\delta 1}^{w(0)} \sqrt{2[(r_2^{(\mu)})_i + (z_2^{(\mu)})_i]} \}}, \\ (d_{23}^{(\mu)})_i = f_{\delta 1}^{w(0)} - \sqrt{\frac{1}{2} [(r_2^{(\mu)})_i + (z_2^{(\mu)})_i]} - \mu\omega\tau_i \sqrt{\frac{1}{2} [(r_2^{(\mu)})_i - (z_2^{(\mu)})_i]}, \\ (d_{24}^{(\mu)})_i = \sqrt{[1+(\mu\omega\tau_i)^2] \{ (f_{\delta 1}^{w(0)})^2 + (r_2^{(\mu)})_i + f_{\delta 1}^{w(0)} \sqrt{2[(r_2^{(\mu)})_i + (z_2^{(\mu)})_i]} \}}, \\ (d_{25}^{(\mu)})_i = f_{\delta 1}^{w(0)} + \sqrt{\frac{1}{2} [(r_2^{(\mu)})_i + (z_2^{(\mu)})_i]} + \mu\omega\tau_i \sqrt{\frac{1}{2} [(r_2^{(\mu)})_i - (z_2^{(\mu)})_i]}, \\ (z_2^{(\mu)})_i = (f_{\delta 1}^{w(0)})^2 + 4(EI_2 \varrho A)_i (\mu\omega)^2, \quad (r_2^{(\mu)})_i = \sqrt{(z_2^{(\mu)})_i^2 + [4(EI_2 \varrho A)_i (\mu\omega)^2 \tau_i]^2}. \end{cases}$$

Jak łatwo stwierdzić, uwzględnienie wpływu odkształceń postaciowych i bezwładności obrotu zgodnie z (2.5) wymaga zastąpienia w zależnościach (2.16) wielkości $f_{\delta 1}^{w(0)}$ przez

$$f_{\delta 1}^{w(0)} + (\mu\omega)^2 (\varrho I_2)_i \left[1 + \left(k_2 \frac{E}{G} \right)_i \right]$$

oraz wielkości A_i przez

$$A_i - (\mu\omega)^2 \left(\rho k_2 \frac{I_2}{G} \right)_i.$$

Wielkości $(\lambda_{31}^{(\mu)})_1$, $(\lambda_{31}^{(\mu)})_i$, $(\lambda_{33}^{(\mu)})_i$, $(\lambda_{34}^{(\mu)})_i$ różnią się od wielkości (2.15) jedynie występowaniem $(I_3)_i$ zamiast $(I_2)_i$ oraz $(k_3)_i$, zamiast $(k_2)_{i1}$. W dalszej części p. 2 pominięto indeks μ w oznaczeniach elementów macierzy opatrzonych tym indeksem.

Na podstawie zależności (2.9) oraz znanych relacji pomiędzy siłami wewnętrznymi $p_{ix\alpha}$ i przemieszczeniami $u_{ix\alpha}$ [1] zapisać można macierz kolumnową amplitud μ -tych składowych tych sił $p_{ix}^{(\mu)} = \{p_{ix\alpha}^{(\mu)}\}$ w postaci

$$(2.17) \quad p_{ix}^{(\mu)} = A_{ix}^{(\mu)} a_i^{(\mu)}$$

gdzie:

$$(2.18) \quad A_{ix}^{(0)} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_2 \lambda_2^3 \sin \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^3 \cos \lambda_2 x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_3 \lambda_3^3 \sin \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^3 \cos \lambda_3 x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & CI_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_3 \lambda_3^2 \cos \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^2 \sin \lambda_3 x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_2 \lambda_2^2 \cos \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2 x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$(2.19) \quad A_{ix}^{(\mu)} = [a_{xmn}]_{(i)}, \quad \mu \neq 0, \quad m = 1, \dots, 6, \quad n = 1, \dots, 12,$$

$$\begin{aligned} a_{x11} &= EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2}) c_{x11}, & a_{x4*11} &= CI_s(\lambda_{51} + j\lambda_{52}) c_{x4,11}, \\ a_{x12} &= -EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2}) c_{x12}, & a_{x4,12} &= -CI_s(\lambda_{51} + j\lambda_{52}) c_{x4,12}, \\ a_{x23} &= -EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^3 c_{x23}, & a_{x57} &= EI_3(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^2 c_{x37}, \\ a_{x24} &= EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^3 c_{x24}, & a_{x58} &= EI_3(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^2 c_{x38}, \\ a_{x25} &= -EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^3 c_{x25}, & a_{x59} &= EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34})^2 c_{x39}, \\ a_{x26} &= EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^3 c_{x26}, & a_{x5,10} &= EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34})^2 c_{x3,10}, \\ a_{x37} &= -EI_3(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^3 c_{x37}, & a_{x63} &= -EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2 c_{x23}, \\ a_{x38} &= EI_3(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^3 c_{x38}, & a_{x64} &= -EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2 c_{x24}, \\ a_{x39} &= -EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34})^3 c_{x39}, & a_{x65} &= -EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2 c_{x25}, \\ a_{x3,10} &= EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34})^3 c_{x3,10}. & a_{x66} &= -EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2 c_{x26}. \end{aligned}$$

Pozostałe elementy macierzy $A_{ix}^{(\mu)}$ są zerowe.

Znajomość macierzy $C_{ix}^{(\mu)}$ oraz $A_{ix}^{(\mu)}$ umożliwia wyznaczenie macierzy przejścia, wiążących macierz kolumnową współczynników $a_{i+1}^{(\mu)}$ dla $(i+1)$ -go odcinka z macierzą $a_i^{(\mu)}$ w przypadkach występowania sił skupionych, masy dyskretnej, sprzęgła elastycznego etc. Poniżej ograniczono się do przypadku, gdy pomiędzy i -tym oraz $(i+1)$ -ym odcinkiem występują siły skupione $f_{i\alpha}$ (wymuszenia zewnętrzne lub reakcje łożyska). Gdy osie lokalnych układów współrzędnych obu sąsiednich odcinków są do siebie odpowiednio równoległe, zachodzą warunki [1]:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} u_{i\alpha}^{(\mu)} &= u_{i+1,0\alpha}^{(\mu)}, & \alpha &= 1, \dots, 6, \\ p_{i\alpha}^{(\mu)} &= p_{i+1,0\alpha}^{(\mu)} + f_{i\alpha}^{(\mu)}, & \alpha &= 1, \dots, 4, \\ p_{i\alpha}^{(\mu)} &= p_{i+1,0\alpha}^{(\mu)} - f_{i\alpha}^{(\mu)}, & \sigma &= 5, 6 \end{aligned}$$

Po podstawieniu do (2.20) wyrażeń określających amplitudy przemieszczeń i sił wewnętrznych zgodnie z (2.9) i (2.17) wyznaczyć można poszczególne współczynniki $a_{i+1,q}^{(\mu)}$ ($q = 1, \dots, 12$). Wynikowa zależność przy oznaczeniu $a_{i+1}^{(\mu)} = \{a_{i+1,q}^{(\mu)}\}, f_i^{(\mu)} = \{f_{i2}^{(\mu)}\}$ ma postać:

$$(2.21) \quad a_{i+1}^{(\mu)} = B_i^{(\mu)} a_i^{(\mu)} + F_i^{(\mu)} f_i^{(\mu)}, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots$$

$B_i^{(\mu)}$ jest macierzą blokowo diagonalną

$$(2.22) \quad B_i^{(\mu)} = [B_{i1}^{(\mu)}, \dots, B_{i4}^{(\mu)}]_{12},$$

$$B_{i1}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{(EA)_i}{(EA)_{i+1}} & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{i4}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{(CI_s)_i}{(CI_s)_{i+1}} & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{(EI_2 \lambda_2^2 \cos \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}} & \frac{(EI_2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}} & 0 & 0 \\ -\frac{(EI_2 \lambda_2^3 \sin \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}} & \frac{(EI_2 \lambda_2^3 \cos \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}} & 0 & 0 \\ \frac{(EI_2 \lambda_2^3 \sin \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}} - (\lambda_2 \sin \lambda_2 l)_i & (\lambda_2 \cos \lambda_2 l)_i - \frac{(EI_2 \lambda_2^3 \cos \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}} & 1 & 0 \\ \cos(\lambda_2 l)_i - \frac{(EI_2 \lambda_2^2 \cos \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}} & \sin(\lambda_2 l)_i - \frac{(EI_2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}} & l_i & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{i1}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} b_1 c_{111} & b_2 c_{112} \\ b_2 c_{111} & b_1 c_{112} \end{bmatrix}_{(i)}, \quad B_{i4}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} b_3 c_{14,11} & b_4 c_{14,12} \\ b_4 c_{14,11} & b_3 c_{14,12} \end{bmatrix}_{(i)}$$

$$B_{i2}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} (b_5 - b_7) c_{123} & (b_6 - b_8) c_{124} & (b_9 - b_{11}) c_{125} & (b_{10} - b_{12}) c_{126} \\ (b_6 - b_8) c_{123} & (b_5 - b_7) c_{124} & (b_{10} - b_{12}) c_{125} & (b_9 - b_{11}) c_{126} \\ (b_{13} - b_{15}) c_{123} & (b_{14} - b_{16}) c_{124} & (b_{17} - b_{19}) c_{125} & (b_{18} - b_{20}) c_{126} \\ (b_{14} - b_{16}) c_{123} & (b_{13} - b_{15}) c_{124} & (b_{18} - b_{20}) c_{125} & (b_{17} - b_{19}) c_{126} \end{bmatrix}_{(i)}$$

$$(b_{1,2})_i = \frac{[EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2})]_{i+1} \pm [EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2})]_i}{2[EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2})]_{i+1}},$$

$$(b_{3,4})_i = \frac{[CI_s(\lambda_{s1} + j\lambda_{s2})]_{i+1} \pm [CI_s(\lambda_{s1} + j\lambda_{s2})]_i}{2[CI_s(\lambda_{s1} + j\lambda_{s2})]_{i+1}},$$

$$(b_{5,6})_i = \frac{1}{e_{11}} [EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2]_i [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1} \pm (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_i],$$

$$(b_{7,8})_i = \frac{1}{e_{11}} [EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]_{i+1} [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1} \pm (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_i],$$

$$(b_{9,10})_i = \frac{1}{e_{11}} [EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]_i [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1} \pm (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_i],$$

$$(b_{11,12})_i = \frac{1}{e_{11}} [EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]_{i+1} [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1} \pm (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_i],$$

$$(b_{13,14})_i = \frac{1}{e_{12}} [EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2]_{i+1} [\lambda_{23} - j\lambda_{24}]_{i+1} \pm (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_i],$$

$$\begin{aligned}
(b_{15,16})_i &= \frac{1}{e_{12}} [EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2]_i [(\lambda_{23} - j\lambda_{24})_{i+1} \pm (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_i], \\
(b_{17,18})_i &= \frac{1}{e_{12}} [EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2]_{i+1} [(\lambda_{23} - j\lambda_{24})_{i+1} \pm (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_i], \\
(b_{19,20})_i &= \frac{1}{e_{12}} [EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]_i [(\lambda_{23} - j\lambda_{24})_{i+1} \pm (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_i], \\
e_{11} &= 2 \{EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22}) [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2 - (\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]\}_{i+1}, \\
e_{12} &= 2 \{EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24}) [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2 - (\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]\}_{i+1}.
\end{aligned}$$

Macierze $B_{i3}^{(0)}$ i $B_{i3}^{(\mu)}$ różnią się od macierzy $B_{i2}^{(0)}$ i $B_{i2}^{(\mu)}$ występowaniem I_3 , λ_3 i $\lambda_{3\gamma}$ ($\gamma = 1, \dots, 4$) zamiast I_2 , λ_2 i $\lambda_{2\gamma}$. Wielkości c_{imn} są elementami macierzy $C_{ix}^{(\mu)}$ (2.11) dla $x = I_i$. Macierz $F_1^{(\mu)}$ ma postać:

$$(2.23) \quad F_1^{(\mu)} = [h_{rs}]_{12 \times 6}.$$

Elementy h_{rs} wynoszą dla $\mu = 0$:

$$\begin{aligned}
h_{11} &= -\frac{1}{(EA)_{i+1}}, \quad h_{36} = h_{52} = -h_{66} = \frac{1}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}}, \quad h_{42} = -\frac{1}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}}, \\
h_{83} &= -\frac{1}{(EI_3 \lambda_3^3)_{i+1}}, \quad h_{93} = h_{10,5} = -h_{75} = \frac{1}{(EI_3 \lambda_3^3)_{i+1}}, \quad h_{11,4} = -\frac{1}{(CI_s)_{i+1}}
\end{aligned}$$

oraz dla $\mu \neq 0$:

$$\begin{aligned}
h_{11} &= -h_{21} = -\frac{1}{2[EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2})]_{i+1}}, \quad h_{32} = -h_{42} = \frac{1}{e_{11}}, \\
h_{36} &= h_{46} = -\frac{1}{e_{11}} (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1}, \quad h_{52} = -h_{62} = -\frac{1}{e_{12}}, \\
h_{56} &= h_{66} = \frac{1}{e_{12}} (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_{i+1}, \quad h_{73} = -h_{83} = \frac{1}{e_{13}}, \\
h_{75} &= h_{85} = -\frac{1}{e_{13}} (\lambda_{31} + j\lambda_{32})_{i+1}, \quad h_{93} = -h_{10,3} = -\frac{1}{e_{14}}, \\
h_{95} &= h_{10,5} = \frac{1}{e_{14}} (\lambda_{33} - j\lambda_{34})_{i+1}, \quad h_{11,4} = -h_{12,4} = -\frac{1}{2[CI_s(\lambda_{s1} + j\lambda_{s2})]_{i+1}}, \\
e_{13} &= 2 \{EI(\lambda_{31} + j\lambda_{32}) [(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^2 - (\lambda_{33} - j\lambda_{34})^2]\}_{i+1}, \\
e_{14} &= 2 \{EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34}) [(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^2 - (\lambda_{33} - j\lambda_{34})^2]\}_{i+1}.
\end{aligned}$$

Pozostałe elementy macierzy $F_1^{(\mu)}$ są zerowe.

W przypadku, gdy odcinki i -ty oraz $(i+1)$ -y nie różnią się stałymi materiałowymi, macierz $B_i^{(\mu)}$ ($\mu \neq 0$) staje się diagonalna:

$$(2.24) \quad B_i^{(\mu)} = [c_{111}, c_{112}, c_{123}, c_{124}, c_{125}, c_{126}, c_{137}, c_{138}, c_{139}, c_{13,10}, c_{14,11}, c_{14,12}]_{(i)}.$$

Oznacza to, że mnożenie $B_{i+1}^{(\mu)} \cdot B_i^{(\mu)} \dots$ sprowadza się wówczas do sumowania długości odpowiednich odcinków wałów w wykładnikach funkcji eksponencjalnych c_{imn} . Podobnie

postępuje się przy mnożeniu $B_{i+1}^{(0)} \cdot B_i^{(0)} \dots$ gdy stałe materiałowe kolejnych odcinków są jednakowe.

Sposób wyznaczania drgań wymuszonych linii wałów na podstawie powyższych zależności jest analogiczny jak w [1]. Uwzględnić przy tym należy, że zgodnie z (2.13) ÷ (2.16), dla odcinków wału o własnościach lepkosprężystych nie zachodzą dla $\nu = |\mu|$ równości:

$$C_{ix}^{(\nu)} = C_{ix}^{(-\nu)}, A_{ix}^{(\nu)} = A_{ix}^{(-\nu)} \text{ etc.},$$

jak to miało miejsce dla idealnie sprężystych odcinków wału [1]. Mamy tu zatem

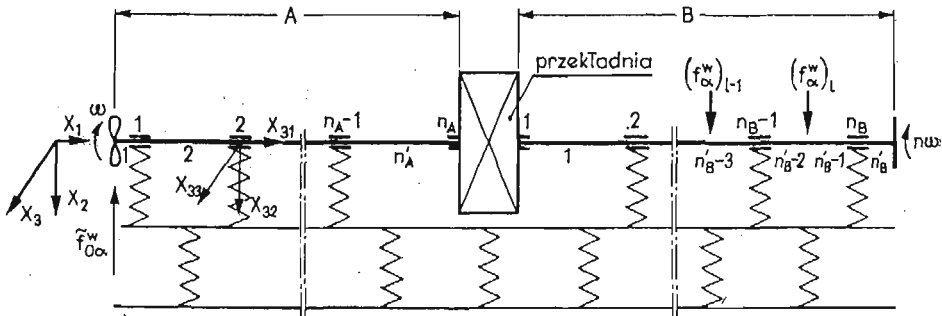
$$(2.25) \quad u_{ix} = \sum_{\nu} [(C_{ix}^{(\nu)} a_i^{(\nu)} + C_{ix}^{(-\nu)} a_i^{(-\nu)}) \cos \nu \omega t + j(C_{ix}^{(\nu)} a_i^{(\nu)} - C_{ix}^{(-\nu)} a_i^{(-\nu)}) \sin \nu \omega t],$$

tnz. wzdłuż odcinka o własnościach lepkosprężystych kąty przesunięć fazowych przemieszczeń (sił wewnętrznych) względem wymuszeń są zmienne.

3. Drgania wymuszone linii wałów w układach przekładniowych z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów

Uwzględnienie asymetrii sztywności na zginanie przy pominięciu sprzężeń pomiędzy poszczególnymi rodzajami drgań nie wpływa na drgania podłużne i skrętne linii wałów, dlatego też poniżej ograniczono się do opisu drgań giętnych na przykładzie układu przedstawionego schematycznie na rys. 1. Zakłada się, że część A linii wałów zawiera odcinki o kołowej symetrii sztywności na zginanie, natomiast odcinki w części B wykazują asymetrię sztywności na zginanie. Układ ten może być zatem traktowany jako model linii wałów okrętowej siłowni spalinowej z przekładnią, w którym pominięto czynniki nieistotne dla poniższych rozważań (np. wpływ innych mas dyskretnych poza śrubą okrętową).

W celu uproszczenia opisu można drgania w części A rozpatrywać w nieruchomych układach współrzędnych, których osie są odpowiednio równoległe do osi układu odniesienia konstrukcji podpierającej x_1, x_2, x_3 . Drgania w części B wymagają opisu w ruchomych



Rys. 1. Model obliczeniowy układu przekładniowego, $\tilde{f}_{0\alpha}^w, (f_{\alpha}^w)_n$ — uogólnione siły zewnętrzne; ω — prędkość kątowa wirowania wałów w części A; $n\omega$ — prędkość kątowa wirowania wału w części B; 1, 2, ..., n_A ; 1, 2, ..., n_B — numery kolejnych łożysk w A i B; 1, 2, ..., n'_A ; 1, 2, ..., n'_B — numery kolejnych odcinków obliczeniowych w A i B; x_{31}, x_{32}, x_{33} — nieruchomy układ współrzędnych odcinka nr 3; X_1, X_2, X_3 — nieruchomy układ odniesienia konstrukcji podpierającej.

układach współrzędnych, których odpowiednie osie są równoległe do głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego danego odcinka [1]. Warunki brzegowe dla części A zapisać można w postaci:

$$(3.1) \quad \check{p}_{10\alpha}^A \mp m_{0\alpha} \ddot{u}_{10\alpha}^A \mp b_{0\alpha} \dot{u}_{10\alpha}^A = \mp \check{f}_{0\alpha}^w, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6,$$

$$(3.2) \quad \check{p}_{n'_A\alpha}^A = \pm \check{f}_{n'_A\alpha}^A.$$

Przy podwójnych znakach "+" i "-" górny znak dotyczy $\alpha = 2, 3$, dolny — $\alpha = 5, 6$. Wielkości oznaczone wężykiem odnoszą się do nieruchomego układu współrzędnych. Współczynniki $m_{0\alpha}$ i $c_{0\alpha}$ są odpowiednimi elementami macierzy bezwładności śruby okrętowej (z uwzględnieniem masy wody towarzyszącej) i macierzy współczynników lepkościowego tłumienia wody, natomiast $\check{f}_{0\alpha}^w$ jest znaną siłą działającą na śrubę okrętową w kierunku α , którą przedstawić można w postaci analogicznej do (2.6):

$$(3.3) \quad \check{f}_{0\alpha}^w = \sum_{\mu} \check{f}_{0\alpha}^{w(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad \mu = \dots, \nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots$$

Siła $\check{f}_{n'_A\alpha}^A$ jest nieznaną reakcją działającą w kierunku α na odcinek n'_A w łożysku o numerze n_A . Warunki brzegowe dla części B mają postać:

$$(3.4) \quad P_{10\alpha}^B = \mp f_{0\alpha}^B,$$

$$(3.5) \quad P_{n'_B\alpha}^B = 0.$$

gdzie $f_{0\alpha}^B$ jest nieznaną reakcją łożyska nr 1 w kierunku α .

W części B działają wymuszenia od silnika, które w ruchomych układach współrzędnych przy prędkości kątowej silnika $n\omega$ wynoszą:

$$(3.6) \quad (f_{\alpha}^w)_h = \sum_{\mu} (f_{\alpha}^{w(\mu\xi n)})_h \exp(j\mu\xi n\omega t), \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu \dots$$

Indeksem h oznaczono numer punktu przyłożenia sił wymuszających w części B, natomiast ξ jest liczbą cykli pracy silnika, przypadającą na 1 obrót wału ($\xi = \frac{1}{2}$ dla silników czterosuwowych i $\xi = 1$ dla dwusuwowych).

Wprowadzając ciągi indeksów $1, 2, \dots, n_A$ oraz $1, 2, \dots, n_B$, odpowiadających kolejnym podporom łożyskowym w części A i B, utworzyć można macierze kolumnowe reakcji w łożyskach i przemieszczeń wału w miejscach podpór łożyskowych:

$$(3.7) \quad \check{f}^A = \{\check{f}_i^A\}, \check{f}_i^A = \{\check{f}_{i\alpha}^A\}, \check{u}^A = \{\check{u}_i^A\}, \check{u}_i^A = \{\check{u}_{i\alpha}^A\}, i = 1, \dots, n_A, \alpha = 2, 3, 5, 6,$$

$$(3.8) \quad f^B = \{f_i^B\}, f_i^B = \{f_{i\alpha}^B\}, u^B = \{u_i^B\}, u_i^B = \{u_{i\alpha}^B\}, i = 1, \dots, n_B, \alpha = 2, 3, 5, 6.$$

W celu uwzględnienia wpływu podatności fundamentów należy przetransformować wielkości (3.8) do nieruchomego układu współrzędnych:

$$\check{f}^B = \Pi f^B, \quad \check{u}^B = \Pi u^B,$$

$$\Pi = \check{\Pi} \exp(-jn\omega t) + \hat{\Pi} \exp(jn\omega t),$$

$$\check{\Pi} = [\check{\Pi}_i]_{4n_B}, \quad \hat{\Pi} = [\hat{\Pi}_i]_{4n_B}, \quad i = 1, \dots, n_B,$$

$$(3.9) \quad \check{H}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 0 & 0 & j & 1 \end{bmatrix} \exp(-j\delta_i), \quad \hat{H}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 & 0 \\ -j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & -j & 1 \end{bmatrix} \exp(j\delta_i),$$

gdzie δ_i oznacza kąt obrotu lokalnego ruchomego układu współrzędnych odcinka podpartego na swym lewym końcu i -tym łożyskiem, mierzony względem nieruchomego układu współrzędnych x_1, x_2, x_3 w kierunku wirowania wału silnika w chwili $t = 0$ [1]. Jak wynika z zależności (3.3), (3.6) i (3.9), na skutek wzajemnych oddziaływań obu części linii wałów i fundamentu należy przewidywać następującą postać nieznanych wielkości:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \check{u}_{ix}^A &= \sum_{\mu, k} \{ \check{u}_{ix}^{A(\mu+kn)} \exp[j(\mu+kn)\omega t] + \check{u}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} \exp[j(\mu\xi+k)n\omega t] \}, \quad i = 1, \dots, n'_A, \\ \check{p}_{ix}^A &= \sum_{\mu, k} \{ \check{p}_{ix}^{A(\mu+kn)} \exp[j(\mu+kn)\omega t] + \check{p}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} \exp[j(\mu\xi+k)n\omega t] \}, \\ \check{f}_i^A &= \sum_{\mu, k} \{ \check{f}_i^{A(\mu+kn)} \exp[j(\mu+kn)\omega t] + \check{f}_i^{A(\mu\xi+kn)} \exp[j(\mu\xi+k)n\omega t] \}, \\ k &= \dots, -s, \dots, -1, 0, 1, \dots, s, \dots, \quad \check{u}_{ix}^A = \{ \check{u}_{ix\alpha}^A \}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6, \\ \check{u}_{ix}^{A(\mu+kn)} &= \{ \check{u}_{ix\alpha}^{A(\mu+kn)} \}, \quad \check{u}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} = \{ \check{u}_{ix\alpha}^{A(\mu\xi+kn)} \} \text{ etc.} \end{aligned}$$

i analogicznie dla wielkości $u_{ix}^B, p_{ix}^B, f_i^B$ w części B. Źródłem składowych o częstościach $(\mu+kn)\omega$ są wymuszenia działające na śrubę, a składowych o częstościach $(\mu\xi+kn)\omega$ — wymuszenia od silnika. Liczba członów po k w szeregach (3.10) zależy od krotności obiegu składowych o częstościach $\mu\omega$ i $\mu\xi n\omega$ przez pęta sprzężeń pomiędzy fundamentem i linią wałów, a więc do tłumienia w układzie. Na skutek tłumienia ze wzrostem wartości $|k|$ amplitudy szukanych wielkości maleją. Występujące w (3.10) macierze kolumnowe amplitud przemieszczeń i sił wewnętrznych w przekroju x i -tego odcinka wyrażają się zgodnie z (2.9) i (2.17) zależnościami:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \check{u}_{ix}^{A(\mu+kn)} &= C_{ix}^{A(\mu+kn)} a_i^{A(\mu+kn)}, \quad \check{p}_{ix}^{A(\mu+kn)} = A_{ix}^{A(\mu+kn)} a_i^{A(\mu+kn)}, \\ \check{u}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} &= C_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} a_i^{A(\mu\xi+kn)}, \quad \check{p}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} = A_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} a_i^{A(\mu\xi+kn)}, \\ a_i^{A(\mu+kn)} &= \{ a_{iq}^{A(\mu+kn)} \}, \quad a_i^{A(\mu\xi+kn)} = \{ a_{iq}^{A(\mu\xi+kn)} \}, \quad q = 3, 4, \dots, 10. \end{aligned}$$

Macierze $C_{ix}^{A(\mu+kn)}, A_{ix}^{A(\mu+kn)}$ etc. stanowią bloki macierzy (2.10), (2.11), (2.18) i (2.19) dotyczące drgań giętych, w których należy μ zastąpić przez $(\mu+kn)$ lub $(\mu\xi+kn)$ oraz podstawić $(I_2)_i = (I_3)_i, (k_2)_i = (k_3)_i$ w blokach dotyczących części A. Podobnie wykorzystując odpowiednie bloki macierzy (2.22), (2.23) i relację (2.21) można dla konkretnej linii wałów sprowadzić warunki brzegowe (3.1), (3.2) do postaci:

$$(3.12) \quad \begin{cases} A^{A(\mu+kn)} a_1^{A(\mu+kn)} = 0, & k \neq 0, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots, \\ A^{A(\mu+kn)} a_1^{A(\mu+kn)} + \bar{E} \check{f}_0^{\nu(\mu)} = 0, & k = 0, \\ A^{A(\mu\xi+kn)} a_1^{A(\mu\xi+kn)} = 0, & k = \dots, -s, \dots, -1, 0, 1, \dots, s, \dots, \end{cases}$$

$$(3.13) \quad \begin{cases} \bar{B}^{A(\mu+kn)} a_1^{A(\mu+kn)} + \sum_{j=1}^{n_A-1} \bar{B}_j^{A(\mu+kn)} \check{f}_j^{A(\mu+kn)} = \bar{E} \check{f}_{n_A}^{A(\mu+kn)}, \\ \bar{B}^{A(\mu\xi+kn)} a_1^{A(\mu\xi+kn)} + \sum_{j=1}^{n_A-1} \bar{B}_j^{A(\mu\xi+kn)} \check{f}_j^{A(\mu\xi+kn)} = \bar{E} \check{f}_{n_A}^{A(\mu\xi+kn)}, \end{cases}$$

gdzie:

$$\tilde{f}_0^{w(\mu)} = \{\tilde{f}_{0\alpha}^{w(\mu)}\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Przy tworzeniu analogicznych wyrażeń z warunków (3.4) i (3.5) należy uwzględnić, że gdy osie lokalnych układów współrzędnych sąsiednich odcinków nie są do siebie odpowiednio równoległe ($\delta_i \neq \delta_{i+1}$), zależność (2.21) winna być wyznaczona po odniesieniu wielkości dotyczących i -tego odcinka w warunkach (2.20) do lokalnego układu współrzędnych $(i+1)$ -go odcinka. Ogólna postać wyrażeń analogicznych do (3.12) i (3.13), uzyskiwanych na podstawie warunków (3.4) i (3.5), jest następująca:

$$(3.14) \quad \begin{cases} A^{B(\mu+kn)} a_1^{B(\mu+kn)} + \bar{E} f_1^{B(\mu+kn)} = 0, \\ A^{B(\mu\xi n+kn)} a_1^{B(\mu\xi n+kn)} + \bar{E} f_1^{B(\mu\xi n+kn)} = 0, \end{cases}$$

$$(3.15) \quad \begin{cases} \bar{B}^{B(\mu+kn)} a_1^{B(\mu+kn)} + \sum_{j=2}^{n_B} \tilde{B}_j^{B(\mu+kn)} f_j^{B(\mu+kn)} = 0, \\ \bar{B}^{B(\mu\xi n+kn)} a_1^{B(\mu\xi n+kn)} + \sum_{j=2}^{n_B} \tilde{B}_j^{B(\mu\xi n+kn)} f_j^{B(\mu\xi n+kn)} = 0, \quad k \neq 0, \\ \bar{B}^{B(\mu\xi n+kn)} a_1^{B(\mu\xi n+kn)} + \sum_{j=2}^{n_B} \tilde{B}_j^{B(\mu\xi n+kn)} f_j^{B(\mu\xi n+kn)} + \sum_{h=1}^l B_h^{B(\mu\xi n+kn)} (f^{w(\mu\xi n)})_h = 0, \quad k = 0, \end{cases}$$

gdzie:

l — liczba punktów przyłożenia znanych sił wymuszających w części B.

$$(f^{w(\mu\xi n)})_h = \{(f_{\alpha}^{w(\mu\xi n)})_h\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6.$$

Zależności dotyczące składowych o częstościach $(\mu+kn)\omega$ w warunkach (3.14) i (3.15) zapisać można jednym równaniem:

$$(3.16) \quad \bar{A}^{B(\mu+kn)} a_1^{B(\mu+kn)} + \tilde{B}^{B(\mu+kn)} f^{B(\mu+kn)} = 0,$$

gdzie:

$$\bar{A}^{B(\mu+kn)} = \begin{bmatrix} A^{B(\mu+kn)} \\ \bar{B}^{B(\mu+kn)} \end{bmatrix}_8, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \bar{E} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2^{B(\mu+kn)} & \tilde{B}_3^{B(\mu+kn)} & \dots & \tilde{B}_{n_B}^{B(\mu+kn)} \end{bmatrix}_{8 \times 4n_B}.$$

$$f^{B(\mu+kn)} = \{f_i^{B(\mu+kn)}\}, \quad i = 1, \dots, n_B, \quad f_i^{B(\mu+kn)} = \{f_{i\alpha}^{B(\mu+kn)}\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6.$$

Poniżej wyznaczono amplitudy składowych o częstościach $(\mu+kn)\omega$, gdyż postępowanie przy wyznaczaniu amplitud składowych o częstościach $(\mu\xi n+kn)\omega$ jest analogiczne. Rozpatrzono ogólny przypadek, gdy analiza winna objąć składowe o częstościach $(\mu+kn)\omega$ dla $\mu = -r, \dots, -1, 0, 1, \dots, r$ oraz $k = -s, \dots, -1, 0, 1, \dots, s$ (r, s — dowolne liczby naturalne). Niezbędna w tym celu jest znajomość macierzy współczynników podatności dynamicznej fundamentu $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$, wiążących macierze kolumnowe amplitud reakcji w łożyskach i przemieszczeń wałów w miejscach podpór łożyskowych:

$$(3.17) \quad \tilde{u}^{(\mu+kn)} = -\tilde{D}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{(\mu+kn)},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(\mu+kn)} &= \{\tilde{u}_i^{A(\mu+kn)}, \tilde{u}_i^{B(\mu+kn)}\}, \quad \tilde{f}^{(\mu+kn)} = \{\tilde{f}^{A(\mu+kn)}, \tilde{f}^{B(\mu+kn)}\}, \\ \tilde{u}_i^{A(\mu+kn)} &= \{\tilde{u}_{i\alpha}^{A(\mu+kn)}\}, \quad i = 1, \dots, n_A, \quad \tilde{u}_i^{A(\mu+kn)} = \{\tilde{u}_{i\alpha}^{A(\mu+kn)}\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6, \\ \tilde{u}_i^{B(\mu+kn)} &= \{u_i^{B(\mu+kn)}\}, \quad i = 1, \dots, n_B \text{ etc.} \end{aligned}$$

Uogólniając zależności wyprowadzone w [1], macierz $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$ traktuje się jako sumę macierzy współczynników podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej linię wałów $D^{(\mu+kn)}$ i blokowo diagonalnej macierzy współczynników podatności dynamicznej filmu olejowego w łożyskach $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$:

$$(3.18) \quad \tilde{D}^{(\mu+kn)} = D^{(\mu+kn)} + \tilde{D}^{(\mu+kn)},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} D^{(\mu+kn)} &= [D_{ij}^{(\mu+kn)}], \quad \tilde{D}_i^{(\mu+kn)} = [\tilde{D}_i^{(\mu+kn)}], \quad i, j = 1, 2, \dots, n_A + n_B, \\ D_{ij}^{(\mu+kn)} &= [d_{ij\alpha\beta}^{(\mu+kn)}], \quad \tilde{D}_i^{(\mu+kn)} = [\tilde{d}_{ij\alpha\beta}^{(\mu+kn)}], \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

$\tilde{d}_{ij\alpha\beta}^{(\mu+kn)}$ — zespolony współczynnik podatności dynamicznej filmu olejowego w i -tym łożysku, określony analogicznie jak $d_{ij\alpha\beta}^{(\mu)}$ w [1]. Macierz $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$ w zależności (3.17) zawiera elementy odnoszące się do $\alpha = 2, 3, 5, 6$ (tj. do drgań giętnych) i jest stopnia $4(n_A + n_B)$. W macierzy $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$ można wydzielić podmacierze

$$(3.19) \quad -D^{(\mu+kn)} = \left[\begin{array}{cc|c} D_{AA}^{(\mu+kn)} & D_{AB}^{(\mu+kn)} & \\ \hline D_{BA}^{(\mu+kn)} & D_{BB}^{(\mu+kn)} & \\ \hline \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} 4n_A \text{ wierszy} \\ \} 4n_B \text{ wierszy} \end{array} \right\} 4n_A \text{ kolumn}$$

Wartości modułów elementów macierzy $D_{AB}^{(\mu+kn)}$ i $D_{BA}^{(\mu+kn)}$ są miarą sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi w części A a podporami łożyskowymi w części B , decydując tym samym o celowości łącznego rozpatrywania drgań giętnych obu części linii wałów. Przy założeniu, że sprzężenia te nie są zaniedbywalne, z (3.17) i (3.19) otrzymuje się:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^{A(\mu+kn)} &= D_{AA}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{A(\mu+kn)} + D_{AB}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{B(\mu+kn)}, \\ \tilde{u}^{B(\mu+kn)} &= D_{BA}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{A(\mu+kn)} + D_{BB}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{B(\mu+kn)}. \end{aligned}$$

Zgodnie z (3.9) mamy

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \tilde{f}^{B(\mu+kn)} &= \check{\Pi} f^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} f^{B[\mu+(k-1)n]}, \\ \tilde{u}^{B(\mu+kn)} &= \check{\Pi} u^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} u^{B[\mu+(k-1)n]}, \end{aligned}$$

zatem

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^{A(\mu+kn)} &= D_{AA}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{A(\mu+kn)} + D_{AB}^{(\mu+kn)} (\check{\Pi} f^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} f^{B[\mu+(k-1)n]}), \\ \check{\Pi} u^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} u^{B[\mu+(k-1)n]} &= D_{BA}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{A(\mu+kn)} + D_{BB}^{(\mu+kn)} (\check{\Pi} f^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} f^{B[\mu+(k-1)n]}). \end{aligned}$$

Pełny układ równań (3.22) dla wszystkich uwzględnianych składowych zapisać można w postaci:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^{A(r,s)} &= D_{AA}^{(r,s)} \tilde{f}^{A(r,s)} + D_{AB}^{(r,s)} f^{B(r,s)}, \\ \check{\Pi} u^{B(r,s)} &= D_{BA}^{(r,s)} \tilde{f}^{A(r,s)} + D_{BB}^{(r,s)} f^{B(r,s)}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{A(r,s)} &= \{\tilde{u}^{A(r-s)}, \tilde{u}^{A(r-s+1)}, \dots, \tilde{u}^{A(r,s-1)}, \tilde{u}^{A(r,s)}\}, \\ \tilde{u}^{A(r,k)} &= \{\tilde{u}^{A(-r+kn)}, \tilde{u}^{A(-r+1+kn)}, \dots, \tilde{u}^{A(r-1+kn)}, \tilde{u}^{A(r+kn)}\}, \\ D_{AA}^{(r,s)} &= [D_{AA}^{(r-s)}, D_{AA}^{(r-s+1)}, \dots, D_{AA}^{(r,s-1)}, D_{AA}^{(r,s)}]_{4n_A(2r+1)(2s+1)}, \\ D_{AA}^{(r,k)} &= [D_{AA}^{(-r+kn)}, D_{AA}^{(-r+1+kn)}, \dots, D_{AA}^{(r-1+kn)}, D_{AA}^{(r+kn)}]_{4n_A(2r+1)},\end{aligned}$$

$$\Pi^{(r,s)} = \begin{bmatrix} 0 & \check{H}^{(r)} & & & \\ \hat{H}^{(r)} & 0 & \check{H}^{(r)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \hat{H}^{(r)} & 0 & \check{H}^{(r)} \\ & & & \hat{H}^{(r)} & 0 \end{bmatrix}_{4n_B(2r+1)(2s+1)}$$

$$\hat{H}^{(r)} = [\hat{H}_1, \hat{H}_2, \dots, \hat{H}_{4n_B(2r+1)}], \quad \check{H}^{(r)} = [\check{H}_1, \check{H}_2, \dots, \check{H}_{4n_B(2r+1)}],$$

$$D_{BB}^{(r,s)} = \begin{bmatrix} 0 & \check{D}_{BB}^{(r,-s)} & & & \\ \hat{D}_{BB}^{(r,-s+1)} & 0 & \check{D}_{BB}^{(r,-s+1)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \hat{D}_{BB}^{(r,s-1)} & 0 & \check{D}_{BB}^{(r,s-1)} \\ & & & \hat{D}_{BB}^{(r,s)} & 0 \end{bmatrix}_{4n_B(2r+1)(2s+1)}$$

$$\check{D}_{BB}^{(r,k)} = [D_{BB}^{(-r+kn)} \check{H}_1, D_{BB}^{(-r+1+kn)} \check{H}_2, \dots, D_{BB}^{(r-1+kn)} \check{H}_{4n_B(2r+1)}, D_{BB}^{(r+kn)} \check{H}_{4n_B(2r+1)}],$$

$$\hat{D}_{BB}^{(r,k)} = [D_{BB}^{(-r+kn)} \hat{H}_1, D_{BB}^{(-r+1+kn)} \hat{H}_2, \dots, D_{BB}^{(r-1+kn)} \hat{H}_{4n_B(2r+1)}, D_{BB}^{(r+kn)} \hat{H}_{4n_B(2r+1)}].$$

Pozostałe bloki macierzy $\Pi^{(r,s)}$ i $D_{BB}^{(r,s)}$ są zerowe. Macierze kolumnowe $u^{B(r,s)}$, $f^{A(r,s)}$, $f^{B(r,s)}$ tworzy się analogicznie jak $\tilde{u}^{A(r,s)}$, macierz $D_{BA}^{(r,s)}$ tworzy się jak $D_{AA}^{(r,s)}$, a macierz $D_{AB}^{(r,s)}$ — jak $D_{BB}^{(r,s)}$.

Postępując podobnie z warunkami (3.12), (3.13) i (3.16) jak z równaniami (3.22) otrzymuje się:

$$(3.24) \quad \begin{aligned}A^A(r,s) a_1^A(r,s) + \bar{E}^{(r,s)} \tilde{f}_0^w(r,s) &= 0, \\ \bar{B}^A(r,s) a_1^A(r,s) + \tilde{B}^A(r,s) \tilde{f}^A(r,s) &= 0, \\ \bar{A}^B(r,s) a_1^B(r,s) + \tilde{B}^B(r,s) f^B(r,s) &= 0,\end{aligned}$$

gdzie:

$$a_1^A(r,s) = \{a_1^A(r-s), a_1^A(r-s+1), \dots, a_1^A(r,s-1), a_1^A(r,s)\},$$

$$a_1^A(r,k) = \{a_1^A(-r+kn), a_1^A(-r+1+kn), \dots, a_1^A(r-1+kn), a_1^A(r+kn)\},$$

$$\tilde{f}_0^w(r,s) = \{0, 0, \dots, 0, \tilde{f}_0^w(r), 0, \dots, 0\},$$

$(s+1)$ — a kolumna $4(2r+1)$ -elementowa

$$\tilde{f}_0^w(r) = \{\tilde{f}_0^w(-r), \tilde{f}_0^w(-r+1), \dots, \tilde{f}_0^w(r-1), \tilde{f}_0^w(r)\}.$$

Utworzenie pozostałych macierzy w (3.24) nie następuje trudności.

Z kolei należy wyrazić macierze kolumnowe amplitud przemieszczeń wałów w miejscach podpór łożyskowych w funkcji pozostałych niewiadomych. Jeśli na końcu i -tego odcinka wału w części A znajduje się j -te łożysko, to zgodnie z (3.11) dla $x = l_i$ mamy:

$$(3.25) \quad \tilde{u}_{i1}^{A(\mu+kn)} = C_{i1}^{A(\mu+kn)} a_i^{A(\mu+kn)}.$$

W wyniku wykorzystania relacji (2.21) otrzymuje się zależność o postaci:

$$(3.26) \quad \tilde{u}_{i1}^{A(\mu+kn)} = \tilde{u}_j^{A(\mu+kn)} = \bar{C}_j^{A(\mu+kn)} a_1^{A(\mu+kn)} + \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{C}_{ji}^{A(\mu+kn)} \tilde{f}_i^{A(\mu+kn)}.$$

Kojarząc zależności (3.26) dla $j = 1, 2, \dots, n_A$ otrzymuje się:

$$(3.27) \quad \tilde{u}^{A(\mu+kn)} = \bar{C}^{A(\mu+kn)} a_1^{A(\mu+kn)} + \tilde{C}^{A(\mu+kn)} \tilde{f}^{A(\mu+kn)},$$

gdzie:

$$\bar{C}^{A(\mu+kn)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1^{A(\mu+kn)} \\ \bar{C}_2^{A(\mu+kn)} \\ \vdots \\ \bar{C}_{n_A}^{A(\mu+kn)} \end{bmatrix}_{4n_A \times 8}, \quad \tilde{C}^{A(\mu+kn)} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ \tilde{C}_{21}^{A(\mu+kn)} & & 0 & & & & & & \\ \tilde{C}_{31}^{A(\mu+kn)} & \tilde{C}_{32}^{A(\mu+kn)} & & 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ \tilde{C}_{n_A 1}^{A(\mu+kn)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{C}_{n_A n_A - 1}^{A(\mu+kn)} & 0 & \end{bmatrix}_{4n_A}$$

Podobne postępowanie dla części B daje:

$$(3.28) \quad u^{B(\mu+kn)} = \bar{C}^{B(\mu+kn)} a_1^{B(\mu+kn)} + \tilde{C}^{B(\mu+kn)} f^{B(\mu+kn)}.$$

Z (3.27) i (3.28) wynikają poszukiwane zależności:

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^{A(r,s)} &= \bar{C}^{A(r,s)} a_1^{A(r,s)} + \tilde{C}^{A(r,s)} \tilde{f}^{A(r,s)}, \\ u^{B(r,s)} &= \bar{C}^{B(r,s)} a_1^{B(r,s)} + \tilde{C}^{B(r,s)} f^{B(r,s)}. \end{aligned}$$

Z wyrażeń (3.23), (3.24) i (3.29) uzyskuje się rozwiązania:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} a_1^{A(r,s)} &= \begin{bmatrix} A^{A(r,s)} \\ \bar{B}^{A(r,s)} + \tilde{B}^{A(r,s)} F(r,s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\bar{E}^{A(r,s)} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{f}_0^{w(r,s)}, \\ \tilde{f}^{A(r,s)} &= F(r,s) a_1^{A(r,s)}, \quad f^{B(r,s)} = G(r,s) \tilde{f}^{A(r,s)}, \\ a^{B(r,s)} &= -(\bar{A}^{B(r,s)})^{-1} \tilde{B}^{B(r,s)} f^{B(r,s)}, \end{aligned}$$

gdzie:

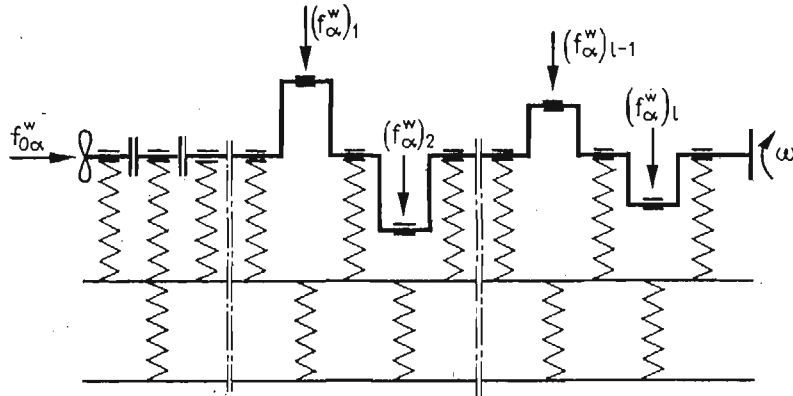
$$\begin{aligned} F(r,s) &= [E + (D_{AA}^{(r,s)} - \bar{C}^{A(r,s)})^{-1} D_{AB}^{(r,s)} G(r,s)]^{-1} (D_{AA}^{(r,s)} - \bar{C}^{A(r,s)})^{-1} \bar{C}^{A(r,s)}, \\ G(r,s) &= [II(r,s) \tilde{C}^{B(r,s)} - II(r,s) \bar{C}^{B(r,s)} (\bar{A}^{B(r,s)})^{-1} \tilde{B}^{B(r,s)} - D_{BB}^{(r,s)}]^{-1} D_{BA}^{(r,s)}, \end{aligned}$$

E — macierz jednostkowa.

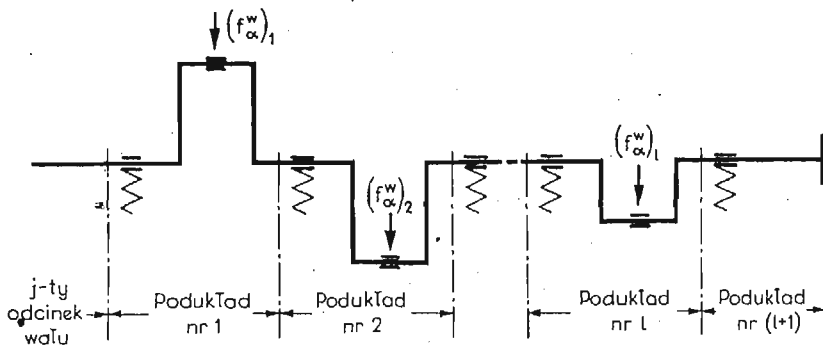
4. Zastosowanie podziału na elementy skończone

Metody elementów skończonych (odkształcalnych [4] i sztywnych [5]) zapewniają wysoką jakość analizy układów ciągłych, dlatego celowe jest rozpatrzenie możliwości zastosowania tych metod do opisu drgań wirujących układów ciągłych, podpartych podat-

nie. Dla uproszczenia rozważań, zarówno zastosowanie metody odkształcalnych elementów skończonych (OES) jak i metody sztywnych elementów skończonych (SES) zilustrowano na przykładzie tego samego układu, przedstawionego schematycznie na rys. 2. Podziałem na elementy skończone objęto ten fragment układu, dla którego dokładny opis drgań przy pomocy równań różniczkowych cząstkowych nie jest możliwy — tj. wał korbowy.



Rys. 2. Schemat rozpatrywanego układu. $f_{0\alpha}^w$ — wymuszenie działające na śrubę okrętową; $(f_{\alpha}^w)_k$ — wymuszenia od silnika, działające na czopek korbowy w k -tym wykorbieniu; ω — prędkość kątowa wirowania linii wałów.



Rys. 3. Schemat podziału wału korbowego o l wykorbieniach na podukłady elementów skończonych.

bowy. W wałe korbowym o l wykorbieniach wyodrębniono l podukładów, z których każdy podzielono jednakowo na dowolną liczbę elementów skończonych. Przykładowy schemat podziału wału korbowego na podukłady przedstawiono na rys. 3.

Stosując metodę SES, podukłady nr 1, 2, ..., l podzielono na m elementów SES o 6 stopniach swobody, połączonych v elementami sprężystymi²⁾. Odcinek wału z tarczą przednią stanowi podukład nr $(l+1)$, zawierający $m'+1$ elementów SES i v' elementów sprężystych (rys. 4). Dla cylindrycznych odcinków wału korbowego przyjęto cylindryczny kształt SES. Każdemu SES przyporządkowano lokalny układ współrzędnych, wirujący

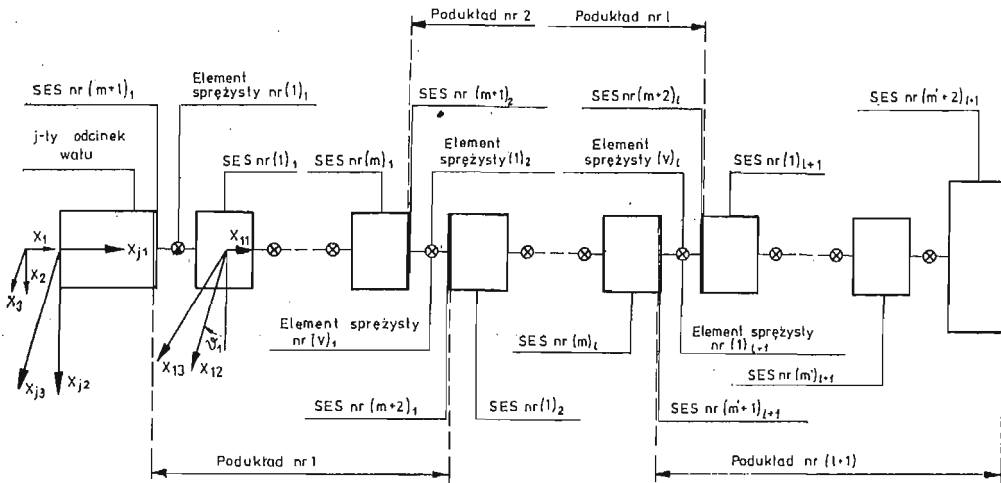
²⁾ Uwzględnienie lepkościowego tłumienia nie wprowadza istotnych zmian do poniższych rozważań, dlatego zostało ono pominięte.

z prędkością kątową ω względem osi linii wałów i pokrywający się w stanie spoczynku z głównymi centralnymi osiami bezwładności tego SES. Dodatkowo zwroty uogólnionych sił działających na SES i jego uogólnionych przemieszczeń przyjęto jak na rys. 2 w pracy [1] dla sił $f_{i\alpha}$ i przemieszczeń $u_{i,x\alpha}$. Każdy SES określony jest blokiem współczynników bezwładności

$$M_e = [m_{e\alpha}], \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad e = 1, \dots, m.$$

Każdemu elementowi sprężystemu przyporządkowano lokalny układ współrzędnych, pokrywający się w stanie spoczynku z głównymi osiami tego elementu. Każdy element sprężysty określony jest blokiem współczynników sztywności

$$C_k = [c_{k\alpha}], \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad k = 1, \dots, v.$$



Rys. 4. Schemat podziału wału korbowego na sztywne elementy skończone (SES). x_{11}, x_{12}, x_{13} — lokalny układ współrzędnych elementu SES nr 1; ϑ_1 — kąt pomiędzy płaszczyzną pierwszego wykorbieńa a płaszczyzną utworzoną przez osie x_{j1}, x_{j2} układu współrzędnych j -tego prostego odcinka linii wałów; X_1, X_2, X_3 — nieruchomy układ odniesienia konstrukcji podpierającej.

Ze względu na identyczny podział na SES, w podukładach nr 1, ..., l zachodzi $c_{1\alpha} = c_{v\alpha}$. Element sprężysty nr v jest równocześnie pierwszym elementem sprężystym następnego podukładu. Analogicznie określone są elementy sprężyste i SES w podukładzie nr $(l+1)$.

W celu łatwiejszego wyznaczenia odpowiednich macierzy przejścia, w granicznych przekrojach poszczególnych podukładów wprowadzono dodatkowo bezmasowe SES, oznaczone na rys. 4 numerami $(m+1)_1, (m+2)_1, \dots, (m'+1)_{l+1}$. Indeksami dolnymi oznaczono przynależność tych elementów do danego podukładu. Indeksy dolne elementów SES nr 1, ..., m oraz 1, ..., m' i wszystkich elementów sprężystych pominięto w dalszej części pracy.

Kąty pomiędzy płaszczyznami kolejnych wykorbień a płaszczyzną utworzoną przez osie x_{j1}, x_{j2} j -tego prostego odcinka linii wałów (rys. 4) oznaczono $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_l$. Zakłada się, że osie x_{e1}, x_{e2} każdego cylindrycznego i każdego bezmasowego SES w danym

podukładzie leżą w płaszczyźnie wykorbienia znajdującego się w tym podukładzie. Osie x_{e1}, x_{e2} cylindrycznych i bezmasowego SES w podukładzie nr $(l+1)$ leżą w płaszczyźnie odchylonej o dowolny kąt ϑ_{l+1} od płaszczyzny utworzonej przez osie x_{j1}, x_{j2} j -tego odcinka. Osie x_{j2}, x_{j3} są w chwili $t = 0$ odpowiednio równoległe do osi x_2, x_3 nieruchomego układu odniesienia konstrukcji podpierającej.

Składowe sił od silnika odnosi się do lokalnych układów współrzędnych SES nr p , które przejmują wymuszenia w łożyskach korbowych. Dla k -tego wykorbienia zapiszemy je analogicznie do (3.6), ograniczając się do przypadku $\xi = 1$:

$$(4.1) \quad (f_{\alpha}^w)_k = \sum_{\mu} (f_{\alpha}^{w(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots$$

Elementy SES, których główna centralna oś bezwładności nie pokrywa się z osią linii wałów, poddane są działaniu sił odśrodkowych. Dla SES nr g_i oznaczymy je $f_{g_i\alpha}^{c(0)}$ ($\alpha = 1, \dots, 6$). Ponadto na SES nr h działają nieznanne reakcje w łożysku ramowym:

$$(4.2) \quad (f_{h\alpha})_k = \sum_{\mu} (f_{h\alpha}^{(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t).$$

Dla k -tego podukładu tworzymy macierze kolumnowe 6-elementowe

$$(f^w(\mu))_k = \{(f_{\alpha}^{w(\mu)})_k\}, \quad (f_h^{(\mu)})_k = \{(f_{h\alpha}^{(\mu)})_k\}, \quad f_{g_i}^{c(0)} = \{f_{g_i\alpha}^{c(0)}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad i = 1, 2, \dots$$

oraz macierze kolumnowe $(6m)$ -elementowe:

$$\overline{(f^w(\mu))}_k = \{0, \dots, 0, \underbrace{(f^w(\mu))_k}_{p\text{-ta kolumna 6-elementowa}}, 0, \dots, 0\},$$

$$\overline{(f_h^{(\mu)})}_k = \{0, \dots, 0, \underbrace{(f_h^{(\mu)})_k}_{h\text{-ta kolumna 6-elementowa}}, 0, \dots, 0\},$$

$$\overline{f^{c(0)}} = \{0, \dots, 0, \underbrace{f_{g_i}^{c(0)}, \dots, f_{g_i}^{c(0)}}_{q_i\text{-ta kolumna 6-elementowa}}, \dots, 0\},$$

$$(4.3) \quad (f^z(\mu))_k = \overline{(f^w(\mu))}_k + \overline{(f_h^{(\mu)})}_k + \delta_{0\mu} \overline{f^{c(0)}},$$

gdzie: $\delta_{0\mu}$ — delta Kroneckera,

$$(f_e^{\mu})_k = \{(f_e^{(\mu)})_k\}, \quad e = 1, \dots, m, \quad (f_e^z(\mu))_k = \{(f_{e\alpha}^z(\mu))_k\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6.$$

Zachowując podstawowe oznaczenia stosowane w [5], wyodrębniono w k -tym podukładzie m elementów SES o „nieznanym” ruchu

$$(4.4) \quad (q_{e\alpha})_k = \sum_{\mu} (q_{e\alpha}^{(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad e = 1, \dots, m, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

na które działają wyżej wymienione siły o postaci

$$(4.5) \quad (f_{e\alpha}^z)_k = \sum_{\mu} (f_{e\alpha}^{z(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad e = 1, \dots, m$$

oraz dwa elementy SES o „danym” ruchu

$$(4.6) \quad (z_{e\alpha})_k = \sum_{\mu} (z_{e\alpha}^{(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad e = (m+1)_k, (m+2)_k,$$

na które działają określone niżej siły o postaci

$$(4.7) \quad (r_{e\alpha})_k = \sum_{\mu} (r_{e\alpha}^{(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad e = (m+1)_k, (m+2)_k.$$

Równania ruchu dla układu złożonego z elementów SES o „nieznanym” ruchu i o „danym” ruchu mają w ogólnym przypadku postać [5]:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{K}''\mathbf{z} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{M}'\ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{K}'')^T\mathbf{q} + \mathbf{K}'\mathbf{z} &= \mathbf{r}, \end{aligned}$$

gdzie: \mathbf{M} — macierz bezwładności układu o „nieznanym” ruchu, \mathbf{M}' — macierz bezwładności układu o „danym” ruchu, \mathbf{K} — macierz sztywności układu o „nieznanym” ruchu, \mathbf{K}' — macierz sztywności układu o „danym” ruchu, \mathbf{K}'' — macierz sztywności połączeń układu o „nieznanym” ruchu z układem o „danym” ruchu. Sposób wyznaczenia tych macierzy podano w [5]. Macierz kolumnową $w_e = \{z_e, r_e\}$ nazywać będziemy wektorem stanu elementu SES nr $e = (m+1)_k$ lub $e = (m+2)_k$.

Tworząc macierze kolumnowe

$$\begin{aligned} (q^{(\mu)})_k &= \{(q_e^{(\mu)})_k\}, \quad e = 1, \dots, m, \quad (q_e^{(\mu)})_k = \{(q_{e\alpha}^{(\mu)})_k\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \\ (z^{(\mu)})_k &= \{(z_{m+1}^{(\mu)})_k, (z_{m+2}^{(\mu)})_k\}, \quad (z_{m+1}^{(\mu)})_k = \{(z_{m+1,\alpha}^{(\mu)})_k\}, \quad (z_{m+2}^{(\mu)})_k = \{(z_{m+2,\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ (r^{(\mu)})_k &= \{(r_{m+1}^{(\mu)})_k, (r_{m+2}^{(\mu)})_k\}, \quad (r_{m+1}^{(\mu)})_k = \{(r_{m+1,\alpha}^{(\mu)})_k\}, \quad (r_{m+2}^{(\mu)})_k = \{(r_{m+2,\alpha}^{(\mu)})_k\} \end{aligned}$$

i wykorzystując równania (4.8) otrzymuje się dla pierwszego podukładu SES

$$(4.9) \quad (q^{(\mu)})_1 = (\mathbf{K}^{(\nu)})^{-1}[(f^{z(\mu)})_1 - \mathbf{K}''(z^{(\mu)})_1],$$

$$(4.10) \quad \mathbf{T}^{(\nu)}(z^{(\mu)})_1 + (r^{(\mu)})_1 = \mathbf{P}^{(\nu)}(f^{z(\mu)})_1,$$

gdzie:

$$\mathbf{K}^{(\nu)} = \mathbf{K} - (\nu\omega)^2\mathbf{M}, \quad \nu = |\mu|, \quad \mathbf{T}^{(\nu)} = \mathbf{P}^{(\nu)}\mathbf{K}'' - \mathbf{K}', \quad \mathbf{P}^{(\nu)} = (\mathbf{K}'')^T(\mathbf{K}^{(\nu)})^{-1}.$$

W macierzach $\mathbf{T}^{(\nu)}$ i $\mathbf{P}^{(\nu)}$ można wydzielić podmacierze o odpowiednio jednakowych wymiarach

$$\mathbf{T}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} T_1^{(\nu)} & T_2^{(\nu)} \\ \dots & \dots \\ T_3^{(\nu)} & T_4^{(\nu)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} P_1^{(\nu)} \\ \dots \\ P_2^{(\nu)} \end{bmatrix}$$

i napisać równanie (4.10) w postaci:

$$(4.11) \quad T_1^{(\nu)}(z_{m+1}^{(\mu)})_1 + T_2^{(\nu)}(z_{m+2}^{(\mu)})_1 + (r_{m+1}^{(\mu)})_1 = P_1^{(\nu)}(f^{z(\mu)})_1,$$

$$(4.12) \quad T_3^{(\nu)}(z_{m+1}^{(\mu)})_1 + T_4^{(\nu)}(z_{m+2}^{(\mu)})_1 + (r_{m+2}^{(\mu)})_1 = P_2^{(\nu)}(f^{z(\mu)})_1.$$

Z równań (4.11), (4.12) otrzymuje się

$$(4.13) \quad (w_{m+2}^{(\mu)})_1 = \mathbf{B}_s^{(\nu)}(w_{m+1}^{(\mu)})_1 + \mathbf{F}_s^{(\nu)}(f^{z(\mu)})_1,$$

gdzie $\mathbf{B}_s^{(\nu)}$ stanowi macierz przejścia dla pierwszego podukładu SES, wiążącą amplitudy μ -tych składowych wektorów stanu

$$(w_{m+1}^{(\mu)})_1 = \{(z_{m+1}^{(\mu)})_1, (r_{m+1}^{(\mu)})_1\}, \quad (w_{m+2}^{(\mu)})_1 = \{(z_{m+2}^{(\mu)})_1, (r_{m+2}^{(\mu)})_1\}$$

elementów SES znajdujących się na krańcach tego podukładu. Macierze $\mathbf{B}_s^{(\nu)}$ i $\mathbf{F}_s^{(\nu)}$ mają postać

(4.14)

$$\mathbf{B}_s^{(v)} = \begin{bmatrix} -(T_2^{(v)})^{-1} T_1^{(v)} & -(T_2^{(v)})^{-1} \\ -T_3^{(v)} + T_4^{(v)}(T_2^{(v)})^{-1} T_1^{(v)} & T_4^{(v)}(T_2^{(v)})^{-1} \end{bmatrix}_{12}, \quad F_s^{(v)} = \begin{bmatrix} (T_2^{(v)})^{-1} P_1^{(v)} \\ -T_4^{(v)}(T_2^{(v)})^{-1} P_1^{(v)} + P_2^{(v)} \end{bmatrix}_{12 \times 6m}$$

i są identyczne dla wszystkich podukładów SES obejmujących wykorbienia. Amplitudy wektora stanu elementu SES nr $(m+1)_1$ są związane z amplitudami wektora stanu na końcu j -tego odcinka wału relacją wynikającą z (2.9), (2.17) i rys. 4:

$$(4.15) \quad (w_{m+1}^{(\mu)})_1 = \begin{bmatrix} Q_1 C_{jl}^{(\mu)} \\ Q_1 A_{jl}^{(\mu)} \end{bmatrix} a_j^{(\mu)},$$

gdzie macierz Q_1 utworzona jest z macierzy kosinusów kierunkowych między osiami układów x_{j1}, x_{j2}, x_{j3} i x_{11}, x_{12}, x_{13} :

$$(4.16) \quad Q_1 = [Q'_1, Q_1], \quad Q'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 \\ 0 & -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix}.$$

Siły działające na SES nr $(m+2)_1$ i $(m+1)_2$ są reakcjami elementu sprężystego nr v (rys. 4), zależnymi od względnych przemieszczeń tych dwóch SES. Zatem amplitudy wektora stanu na początku i na końcu drugiego podukładu wynoszą

$$(4.17) \quad (w_{m+1}^{(\mu)})_2 = \begin{bmatrix} Q_2 & -Q_2 C_v^{-1} \\ 0 & -Q_2 \end{bmatrix} (w_{m+2}^{(\mu)})_1, \quad (w_{m+2}^{(\mu)})_2 = B_s^{(v)}(w_{m+1}^{(\mu)})_2 + F_s^{(v)}(f^{z(\mu)})_2,$$

gdzie:

$$(4.18) \quad Q_2 = [Q'_2, Q_2], \quad Q'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) & \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ 0 & -\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) & \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \end{bmatrix}.$$

Na końcu l -tego podukładu otrzymuje się podobnie

$$(4.19) \quad (w_{m+2}^{(\mu)})_l = B_s^{(v)} \begin{bmatrix} Q_l & -Q_l C_v^{-1} \\ 0 & -Q_l \end{bmatrix} (w_{m+2}^{(\mu)})_{l-1} + F_s^{(v)}(f^{z(\mu)})_l,$$

gdzie Q_l jest macierzą analogiczną do Q_2 (4.18) dla $(\vartheta_l - \vartheta_{l-1})$.

W podukładzie nr $(l+1)$ elementy SES o „danym” ruchu oznaczono numerami $(m'+1)_{l+1}, (m'+2)_{l+1}$ (rys. 4). Macierz bezwładności drugiego z tych elementów nie jest zerowa. Podobnie do (4.19) zachodzi zależność

$$(4.20) \quad (w_{m'+2}^{(\mu)})_{l+1} = (B_s^{(v)})_{l+1} \begin{bmatrix} Q_{l+1} & -Q_{l+1} C_v^{-1} \\ 0 & -Q_{l+1} \end{bmatrix} (w_{m'+2}^{(\mu)})_l + (F_s^{(v)})_{l+1}(f^{z(\mu)})_{l+1},$$

gdzie macierze $(B_s^{(v)})_{l+1}, (F_s^{(v)})_{l+1}, Q_{l+1}$ tworzy się analogicznie jak $\mathbf{B}_s^{(v)}, \mathbf{F}_s^{(v)}$ (4.14) i Q_2 (4.18), jednakże macierz $(T^{(v)})_{l+1}$ ze względu na istnienie niezerowego bloku w macierzy bezwładności $(M')_{l+1}$ układu o „danym” ruchu ma odmienną postać od macierzy $\mathbf{T}^{(v)}$:

$$(4.21) \quad (T^{(v)})_{l+1} = (K'')_{l+1}^T (K^{(v)})_{l+1}^{-1} (K'')_{l+1} - (K')_{l+1} + (v\omega)^2 (M')_{l+1}.$$

Warunek brzegowy dla rozpatrywanej linii wałów wynika z braku zewnętrznych wymuszeń na element SES nr $(m'+2)_{l+1}$

$$(4.22) \quad (r_{m'+2}^{(\mu)})_{l+1} = 0.$$

W celu wyznaczenia rozwiązań metodą przedstawioną w [1] należy ponadto określić amplitudy przemieszczeń elementów SES nr h , znajdujących się w podpartych podatnie łożyskach ramowych. Dla k -tego podukładu wynoszą one zgodnie z (4.9)

$$(4.23) \quad (q_h^{(\mu)})_k = K_h^{(v)}[(f^{z(\mu)})_k - K''(z^{(\mu)})_k],$$

gdzie $K_h^{(v)}$ jest h -tym pasmem poziomym macierzy $(\mathbf{K}^{(v)})^{-1}$, natomiast $(z^{(\mu)})_k$ na podstawie (4.11) wynosi

$$(4.24) \quad (z^{(\mu)})_k = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -(T_2^{(v)})^{-1}T_1^{(v)} & -(T_2^{(v)})^{-1} \end{bmatrix} (w_{m+1}^{(\mu)})_k + \begin{bmatrix} 0 \\ (T_2^{(v)})^{-1}P_1^{(v)} \end{bmatrix} (f^{z(\mu)})_k$$

Wyprowadzone powyżej i w [1] zależności pozwalają przedstawić wielkości określone wyrażeniami (4.22) i (4.23) w funkcji nieznanymi współczynników $a_{1q}^{(\mu)}$ (dotyczących pierwszego odcinka wału śrubowego) i amplitud reakcji w łożyskach linii wałów. Sposób wyznaczenia tych niewiadomych jest analogiczny jak w [1].

Przy zastosowaniu metody OES [4] każdy podukład zawierający wykorbienie podzielono jednakowo na m elementów OES, połączonych ze sobą v węzłami oraz z sąsiednimi podukładami v' węzłami. Zakłada się, że każdy węzeł ma 6 stopni swobody. Położenie elementów OES określone jest względem ortogonalnych lokalnych układów współrzędnych x_{e1}, x_{e2}, x_{e3} ($e = 1, 2, \dots, m$), wirujących z prędkością kątową ω względem osi linii wałów. W danym podukładzie lokalne układy współrzędnych mają osie odpowiednio równoległe do siebie, przy czym osie x_{e1}, x_{e2} są równoległe do płaszczyzny wykorbienia w tym podukładzie. Jako współrzędne uogólnione przyjęto przemieszczenia i obroty węzłów względem osi lokalnego układu współrzędnych. Dodatkowo zwroty przemieszczeń węzłów i sił działających w węzłach przyjęto jak dla przemieszczeń $u_{i\alpha}$ i sił $f_{i\alpha}$ na rys. 2[1]. Węzły znajdujące się w płaszczyznach oddzielających podukład nr k od sąsiednich podukładów traktowane są jako węzły o „danym” ruchu z , obciążone siłami r . Pozostałych v węzłów k -tego podukładu stanowi węzły o „nieznanym” ruchu q , wywołanym siłami f . Wprowadzono oznaczenia:

$$q = \sum_{\mu} q^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad q^{(\mu)} = \{q_n^{(\mu)}\}, \quad n = 1, \dots, v, \quad q_n^{(\mu)} = \{q_{n\alpha}^{(\mu)}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

$$f = \sum_{\mu} f^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad f^{(\mu)} = \{f_n^{(\mu)}\}, \quad n = 1, \dots, v, \quad f_n^{(\mu)} = \{f_{n\alpha}^{(\mu)}\},$$

$$z = \sum_{\mu} z^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad z^{(\mu)} = \{z_n^{(\mu)}\}, \quad n = v+1, v+2, \dots, v+v', \quad z_n^{(\mu)} = \{z_{n\alpha}^{(\mu)}\},$$

$$r = \sum_{\mu} r^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad r^{(\mu)} = \{r_n^{(\mu)}\}, \quad n = v+1, v+2, \dots, v+v', \quad r_n^{(\mu)} = \{r_{n\alpha}^{(\mu)}\}.$$

Przynależność poszczególnych wielkości do danego podukładu oznaczana jest poniżej indeksem dolnym. Element OES nr e określony jest macierzą bezwładności \mathbf{M}_e i macierzą sztywności \mathbf{K}_e , wyznaczanymi według [4]. Macierze \mathbf{M}_e i \mathbf{K}_e są stopnia $6v_e$, gdzie v_e — liczba węzłów należących do OES nr e . Z macierzy tych tworzy się macierze $\bar{\mathbf{M}}_e$ i $\bar{\mathbf{K}}_e$ stopnia $6(v+v')$. Macierz $\bar{\mathbf{M}}_e$ powstaje w ten sposób [5], że $(v_e)^2$ bloków 6×6 macierzy \mathbf{M}_e umieszcza się w miejscach przecięć pasm poziomych i pionowych o numerach węzłów tego OES.

Pozostałe bloki macierzy $\bar{\mathbf{M}}_e$ są zerowe. Analogicznie tworzy się macierz $\bar{\mathbf{K}}_e$. Oznaczając

$$\bar{\mathbf{M}} = \sum_{e=1}^m \bar{\mathbf{M}}_e, \quad \bar{\mathbf{K}} = \sum_{e=1}^m \bar{\mathbf{K}}_e$$

oraz dzieląc $\bar{\mathbf{M}}$ i $\bar{\mathbf{K}}$ na podmacierze

$$\bar{\mathbf{M}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{M}'' \\ \hline (\mathbf{M}'')^T & \mathbf{M}' \end{array} \right]_{6\nu, 6\nu'}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{K}'' \\ \hline (\mathbf{K}'')^T & \mathbf{K}' \end{array} \right]_{6\nu, 6\nu'}$$

można dla k -tego podukładu napisać równania [5]

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}(\ddot{q})_k + \mathbf{M}''(\ddot{z})_k + \mathbf{K}(q)_k + \mathbf{K}''(z)_k &= (f)_k, \\ (\mathbf{M}'')^T(\dot{q})_k + \mathbf{M}'(\dot{z})_k + (\mathbf{K}'')^T(q)_k + \mathbf{K}'(z)_k &= (r)_k. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku równań (4.8) otrzymuje się

(4.26)

$$(w^{(\mu)})_{k,k+1} = B_0^{(\nu)}(w^{(\mu)})_{k,k-1} + F_0^{(\nu)}(f^{(\mu)})_k, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots; \nu = |\mu|.$$

$B_0^{(\nu)}$ i $F_0^{(\nu)}$ mają postać macierzy $B_S^{(\nu)}$ i $F_S^{(\nu)}$ (4.14), przy czym $T_1^{(\nu)}, \dots, T_4^{(\nu)}$ oraz $P_1^{(\nu)}$ i $P_2^{(\nu)}$ oznaczają podmacierze (utworzone jak poprzednio dla SES) macierzy

$$\mathbf{T}^{(\nu)} = \mathbf{P}^{(\nu)}\bar{\mathbf{K}}^{(\nu)} - (\bar{\mathbf{K}}^{(\nu)})', \quad \mathbf{P}^{(\nu)} = (\bar{\mathbf{K}}^{(\nu)})^T(\mathbf{K}^{(\nu)})^{-1},$$

gdzie

$$\mathbf{K}^{(\nu)} = \mathbf{K} - (\nu\omega)^2\mathbf{M}, \quad \bar{\mathbf{K}}^{(\nu)} = \mathbf{K}'' - (\nu\omega)^2\mathbf{M}, \quad (\bar{\mathbf{K}}^{(\nu)})' = \mathbf{K}' - (\nu\omega)^2\mathbf{M}'.$$

W zależności (4.26) oznaczono

$$(w^{(\mu)})_{k,k-1} = \{(z^{(\mu)})_{k,k-1}, (r^{(\mu)})_{k,k-1}\}, \quad (w^{(\mu)})_{k,k+1} = \{(z^{(\mu)})_{k,k+1}, (r^{(\mu)})_{k,k+1}\},$$

gdzie indeks $(k, k-1)$ dotyczy węzłów k -tego podukładu w przekroju granicznym z $(k-1)$ -ym podukładem:

$$\begin{aligned} (z^{(\mu)})_{k,k-1} &= \{(z_{n_1}^{(\mu)})_k, (z_{n_2}^{(\mu)})_k, \dots, (z_{n_s}^{(\mu)})_k\}, & (z_{n_1}^{(\mu)})_k &= \{(z_{n_1\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ (r^{(\mu)})_{k,k-1} &= \{(r_{n_1}^{(\mu)})_k, (r_{n_2}^{(\mu)})_k, \dots, (r_{n_s}^{(\mu)})_k\}, & (r_{n_1}^{(\mu)})_k &= \{(r_{n_1\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ n_1, n_2, \dots, n_s &= \nu + 1, \nu + 2, \dots, \nu + \frac{1}{2}\nu', & \alpha &= 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

natomiast indeks $(k, k+1)$ odnosi się do węzłów k -tego podukładu w przekroju granicznym z $(k+1)$ -ym podukładem:

$$\begin{aligned} (z^{(\mu)})_{k,k+1} &= \{(z_{n_1}^{(\mu)})_k, (z_{n_2}^{(\mu)})_k, \dots, (z_{n_s}^{(\mu)})_k\}, & (z_{n_1}^{(\mu)})_k &= \{(z_{n_1\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ (r^{(\mu)})_{k,k+1} &= \{(r_{n_1}^{(\mu)})_k, (r_{n_2}^{(\mu)})_k, \dots, (r_{n_s}^{(\mu)})_k\}, & (r_{n_1}^{(\mu)})_k &= \{(r_{n_1\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ n_1, n_2, \dots, n_s &= \nu + \frac{1}{2}\nu' + 1, \nu + \frac{1}{2}\nu' + 2, \dots, \nu + \nu', & \alpha &= 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Przy zachowaniu jednakowego podziału na OES w podukładach nr 1, ..., l macierze $B_0^{(\nu)}$ i $F_0^{(\nu)}$ są identyczne dla tych podukładów.

Z położenia lokalnych układów współrzędnych w k -tym i w $(k-1)$ -ym podukładzie

wynika następująca zależność, dotycząca węzłów w przekroju oddzielającym oba te podukłady:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} (1\nu^{(\mu)})_{k,k-1} &= \{Q_k(z_{n_1}^{(\mu)})_{k-1}, \dots, Q_k(z_{n_s}^{(\mu)})_{k-1}, Q_k(r_{n_1}^{(\mu)})_{k+1}, \dots, Q_k(r_{n_s}^{(\mu)})_{k-1}\} \\ n_1, n_2, \dots, n_s &= v + \frac{1}{2}v' + 1, v + \frac{1}{2}v' + 2, \dots, v + v', \end{aligned}$$

gdzie Q_k ma postać (4.18) dla $(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})$.

Wyrażenia (4.26) i (4.27) pozwalają wyznaczyć zależność wiążącą amplitudy przemieszczeń i sił w węzłach na końcu l -tego podukładu z analogicznymi wielkościami na początku podukładu nr 1. Ponadto należy wyznaczyć związek pomiędzy amplitudami przemieszczeń i sił w węzłach podukładu nr 1 łączących się z j -tym odcinkiem linii wałów a amplitudami przemieszczeń $u_{jl}^{(\mu)} = C_{jl}^{(\mu)} a_j^{(\mu)}$ i sił wewnętrznych $p_{jl}^{(\mu)} = A_{jl}^{(\mu)} a_j^{(\mu)}$ w tym przekroju odcinka. Oznaczając przez $a_{n_1}, b_{n_1}, \dots, a_{n_s}, b_{n_s}$ odległości węzłów znajdujących się w tym przekroju od płaszczyzn utworzonych przez osie x_{j1}, x_{j3} oraz x_{j1}, x_{j2} , mierzone w stanie spoczynku w kierunkach osi x_{j2} oraz x_{j3} , można macierz kolumnową amplitud μ -tych składowych przemieszczeń tych węzłów wyrazić w postaci:

$$(4.28) \quad (z^{(\mu)})_{1,0} = \begin{bmatrix} Q_1 S_{n_1} \\ Q_1 S_{n_2} \\ \vdots \\ Q_1 S_{n_s} \end{bmatrix} C_{jl}^{(\mu)} a_j^{(\mu)}, \quad n_1, n_2, \dots, n_s = v + 1, v + 2, \dots, v + \frac{1}{2}v',$$

gdzie Q_1 określono zależnością (4.16), natomiast

$$S_{n_l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{n_l} & -a_{n_l} \\ 0 & 1 & 0 & -b_{n_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relację pomiędzy $(r^{(\mu)})_{1,0}$ i $p_{jl}^{(\mu)}$ wyznaczyć można zwykłymi metodami statyki.

Dla $(l+1)$ -go podukładu macierze $(B_0^{(v)})_{l+1}$ i $(F_0^{(v)})_{l+1}$ wyznacza się podobnie jak $B_0^{(v)}$ i $F_0^{(v)}$ dla k -tego podukładu. Tym samym można określić macierze przejścia dla całej linii wałów i warunki brzegowe. Ogólny schemat rozwiązania i w tym przypadku jest analogiczny jak w [1].

5. Uwagi końcowe

Przedstawione w niniejszej pracy i w [1] sposoby opisu wymuszonych drgań linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów prowadzą do pewnej komplikacji obliczeń w prównaniu z dotychczasowymi metodami, tym niemniej ich stosowanie może być celowe w przypadkach, gdy pożądana jest większa dokładność obliczeń. Należy zaznaczyć, że przy znajomości charakterystyk wymuszeń niezbędne do dokładniejszych obliczeń dane dodatkowe dotyczą jedynie podatności fundamentów i są możliwe do uzyskania m.in. w sposób ukazany w [1]. Dla uproszczenia procedury identyfikacji podatności fundamentów przy dużej liczbie częstości wymuszeń (zwłaszcza przy

układach przekładniowych) wydaje się celowym sporządzanie wykresów zmian wartości współczynników podatności w funkcji częstości na podstawie interpolacji wyników pomiarów przy ograniczonej liczbie częstości wymuszeń.

Literatura cytowana w tekście

1. J. KOLENDA, *Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów. Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów linii wałów*, W Redakcji Mech. Teoret. i Stos.
2. DNV SEMINAR ON SHIP VIBRATION, *Papers, Oslo, June 1977*.
3. S. KALISKI (red.), *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
4. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
5. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI i in., *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1975.

Резюме

УТОЧНЕННЫЕ ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛОПРОВОДОВ С УЧЕТОМ АСИММЕТРИИ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ И ПОДАТЛИВОСТИ ФУНДАМЕНТОВ

Работа касается линейных колебаний валопроводов при периодических возмущениях. Выведенные формулы описывают влияние внутреннего трения валов, постоянной аксиальной нагрузки, деформации сдвига и инерции поворота на изгибные колебания. Приводятся тоже зависимости касающиеся продольных и крутильных колебаний с учетом внутреннего трения. Представляется способ расчета изгибных колебаний валопроводов с учетом асимметрии изгибной жесткости и податливости фундаментов в системах с передачей. Иллюстрируется возможность применения метода конечных элементов (деформируемых или жестких). В качестве примера принят коленчатый вал. Считается, что каждый узел (или жесткий конечный элемент) обладает шестью степенями свободы. Для уменьшения размеров матриц системы применяются матрицы перехода, связывающие коэффициенты решений для соседних участков валопровода или относящиеся к одному колену, в случае применения метода конечных элементов.

Summary

A MORE PRECISE DESCRIPTION OF FORCED VIBRATIONS OF SHAFTINGS WITH FLEXURAL RIGIDITY ASYMMETRY ON FLEXIBLE FOUNDATIONS

The paper deals with linear vibrations of shaftings at periodic excitations. The derived formulae are describing the influence of an internal damping, constant axial force, shear forces and rotary inertia on flexural vibrations. There are also given the formulae concerning with longitudinal and torsional vibrations with an internal damping taken into account. The solution method for a flexural vibrations problem in flexible supported, geared shaft systems with flexural rigidity asymmetry is presented. The possibility of applying the deformable (or stiff) finite element technique is illustrated for the case of a crankshaft. It is assumed that each node (or stiff finite element) has 6 degrees of freedom. The size of system matrices is reduced by means of transfer matrices related to solution coefficients for adjacent shaft pieces or by use of transfer matrices referred to one crank when the finite element technique is applied.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT OKRĘTOWY

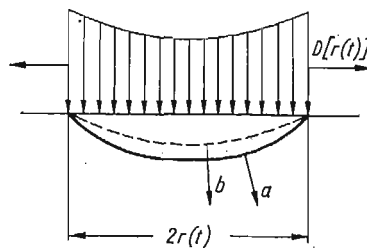
Praca została złożona w Redakcji dnia 14 kwietnia 1978 r.

O PRZESTRZENNYCH FRONTACH FAL NAPRĘŻENIA W IZOTROPOWYM OŚRODKU SPRĘŻYSTYM

EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Oddziaływanie powietrznej fali uderzeniowej na powierzchnię gruntu, wygenerowanej wybuchem punkowego ładunku jądrowego lub klasycznego, można sprowadzić do ruchomego obciążenia normalnego, przyłożonego na kołowej powierzchni, której promień rośnie z upływem czasu, ze zmienną prędkością $D[r(t)]$ (rys. 1).



Rys. 1

Obciążenie to generuje z kolei w gruncie odpowiedni układ fal naprężeń. Jeśli mechaniczne właściwości gruntu zaaprosymować liniowym izotropowym ośrodkiem sprężystym, to otrzymamy układ dwóch frontów fal — front fali podłużnej, propagujący się z prędkością a i front fali poprzecznej, propagujący się z prędkością b . Obraz taki otrzymamy przy założeniu, że $D[r(t)] \geq a$ [1 - 4]. Dla pozostałych zakresów prędkości obraz falowy ulega znacznemu skomplikowaniu i nie będziemy go w niniejszej pracy rozpatrywać. Przypadek $D[r(t)] \geq a$ występuje najczęściej w praktyce inżynierskiej i dlatego jest przedmiotem badań zawartych w niniejszej pracy.

Celem pracy jest podanie prostej metody określania kształtów frontów przestrzennych fal naprężeń, wygenerowanych ruchomym obciążeniem, w oparciu o teorię optyki geometrycznej.

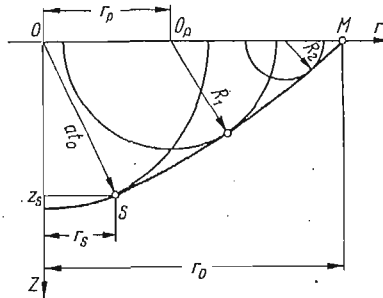
2. Wyprowadzenie równań na fronty fal naprężeń

Dla określenia frontów fal naprężeń wykorzystamy zasadę C. V. Huygensa. Zgodnie z tą zasadą, każdy punkt powierzchni ziemi, do którego dociera front ciśnienia powietrznej fali uderzeniowej, staje się źródłem elementarnych fal kulistych, rozprzestrzeniających

się w głąb ośrodka, z prędkością fal podłużnych i poprzecznych. Obwiednie wymienionych fal elementarnych tworzą powierzchnię poszukiwanych frontów fal podłużnych i poprzecznych (rys. 2).

Przy określaniu tych obwiedni będziemy korzystać z następujących oznaczeń (rys. 2):

- r_p współrzędna punktu na powierzchni półprzestrzeni, który generuje elementarne fale kuliste — podłużne i poprzeczne;
- r_0 promień okręgu, na którym przyłożone jest ciśnienie powietrznej fali uderzeniowej — maksymalny promień zasięgu frontów fal w gruncie, odpowiadający chwili t_0 ;



Rys. 2

- z_s, r_s współrzędne punktu S na płaszczyźnie r, z , który wydziela część kulistą obwiedni;
- t_0 i t_p czasy, po upływie których front fali uderzeniowej propagujący się wzdłuż powierzchni półprzestrzeni obejmie obszary odpowiednio o promieniu r_0 i r_p .
- a prędkość propagacji fal podłużnych;
- b prędkość propagacji fal poprzecznych.

W dalszym ciągu rozważań wzory będziemy wyprowadzać dla fal podłużnych. Wzory te zachowują tę samą postać dla fal poprzecznych z tym, że w miejsce a kładziemy w nich b . W przypadkach, w których występują istotne różnice, będziemy wypisywać wzory dla obydwu rodzajów fal jednocześnie.

Zgodnie z podanymi oznaczeniami, równanie dla elementarnej fali kulistej przyjmuje postać:

$$(2.1) \quad z^2 + (r - r_p)^2 = a^2 \left[\int_0^{r_0} \frac{d\xi}{D(\xi)} - \int_0^{r_p} \frac{d\xi}{D(\xi)} \right]^2 = a^2 \left[\int_{r_p}^{r_0} \frac{d\xi}{D(\xi)} \right]^2$$

Różniczkując równanie (2.1) po parametrze r_p mamy:

$$(2.2) \quad r - r_p = \frac{a^2}{D(r_p)} \int_0^{r_0} \frac{d\xi}{D(\xi)}$$

Po wyeliminowaniu z (2.1) i (2.2) parametru r_p otrzymalibyśmy w jawnej postaci równanie obwiedni — front fali (podłużnej lub poprzecznej). Jednak w ogólnym przypadku zmiany prędkości $D(r_p)$, eliminacja parametru r_p jest niemożliwa i wobec tego wygodniej jest przedstawić równanie obwiedni w postaci parametrycznej, a mianowicie:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} r(r_0, r_p) &= r_p + \frac{a^2}{D(r_p)} \int_{r_p}^{r_0} \frac{d\xi}{D(\xi)} \\ z(r_0, r_p) &= a \sqrt{1 - \frac{a^2}{D^2(r_p)}} \int_{r_p}^{r_0} \frac{d\xi}{D(\xi)} \end{aligned}$$

dla $r_s \leq r \leq r_0(t_0)$, $0 \leq z \leq z_s$ oraz

$$(2.4) \quad r^2 + z^2 = (at_0)^2, \quad t_0 = \int_0^{r_0} \frac{d\xi}{D(\xi)}$$

dla $0 \leq r \leq r_s$, $z_s \leq z \leq at_0$

gdzie:

$$(2.5) \quad r_s = \frac{a}{D(0)} at_0, \quad z_s = \sqrt{1 - \left[\frac{a}{D(0)} \right]^2} at_0$$

— dla fal podłużnych oraz

$$(2.6) \quad r_s = \frac{b}{D(0)} at_0, \quad z_s = \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left[\frac{b}{D(0)} \right]^2} at_0$$

— dla fal poprzecznych.

Wyprowadzone wzory obowiązują dla przypadku, kiedy front fali uderzeniowej porusza się z nadsejsmiczną prędkością tj. dla:

$$(2.7) \quad \frac{a}{D} \leq 1$$

Przypadek ten obejmuje praktycznie cały zakres zagadnień spotykanych w problemach fortyfikacyjnych.

3. Analiza kształtów frontów fal naprężenia

Wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} R &= \frac{r}{h}, & Z &= \frac{z}{h}, & T &= \frac{at}{h}, & R_p &= \frac{r_p}{h}, & R_k &= \frac{r_k}{h} \\ R_e &= \frac{r_e}{h}, & R_0 &= \frac{r_0}{h}, & H_z &= \frac{h_z}{h}, & H_p &= \frac{h_p}{h} \\ h &= 3.5 \sqrt[3]{q} = 4.41 \sqrt[3]{q_f}, & \alpha &= \frac{a}{D} \\ \beta &= \frac{b}{D} = \gamma \alpha, & \gamma &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

gdzie:

h graniczna wysokość między wybuchem powietrznym i naziemnym w $[m]$;

h_p wysokość wybuchu powietrznego w $[m]$;

h_z współrzędna (w kierunku osi z) punktu leżącego na froncie fali naprężenia w gruncie w odległości r_e od epicentrum wybuchu (rys. 5);

- r_e odległość od epicentrum wybuchu mierzona na powierzchni ziemi.
 r_k promień okręgu na którym prędkość obciążenia na powierzchni osiąga wartość prędkości fal podłużnych;
 q równoważnik trotylowy ładunku jądrowego w tonach;
 q_f 0,5 q .

W wielkościach bezwymiarowych (3.1) wzory (2.3 ÷ 2.6) przyjmują postać:

$$(3.2) \quad R = R_p + \alpha(R_p) \int_{R_p}^{R_0} \alpha(\xi) d\xi, \quad R_{S_1} \leq R \leq R_0$$

$$(3.3) \quad Z = \sqrt{1 - \alpha^2(R_p)} \int_{R_p}^{R_0} \alpha(\xi) d\xi, \quad 0 \leq z \leq Z_{S_1}$$

$$R^2 + Z^2 = T_0^2, \quad 0 \leq R \leq R_{S_1}, \quad Z_{S_1} \leq Z \leq T_0$$

— dla fal podłużnych

oraz:

$$(3.4) \quad R = R_p + \gamma^2 \alpha(R_p) \int_{R_p}^{R_0} \alpha(\xi) d\xi, \quad R_{S_2} \leq R \leq R_0$$

$$(3.5) \quad Z = \gamma \sqrt{1 - \gamma^2 \alpha^2(R_p)} \int_{R_p}^{R_0} \alpha(\xi) d\xi, \quad 0 \leq Z \leq Z_{S_2}$$

$$R^2 + Z^2 = \gamma^2 T_0^2, \quad 0 \leq R \leq R_{S_2}, \quad Z_{S_2} \leq Z \leq T_0$$

— dla fal poprzecznych,

gdzie:

$$(3.6) \quad R_{S_1} = \alpha(0) T_0, \quad Z_{S_1} = \sqrt{1 - \alpha^2(0)} T_0$$

$$R_{S_2} = \gamma^2 \alpha(0) T_0, \quad Z_{S_2} = \gamma \sqrt{1 - \gamma^2 \alpha^2(0)} T_0$$

$$T_0 = \int_0^{R_0} \alpha(\xi) d\xi, \quad 0 \leq R_0 \leq R_k$$

$$\alpha(R_k) = 1 \rightarrow R_k$$

Z podanych wzorów wynika, że kształty frontów fal determinowane są przez funkcję:

$$(3.7) \quad \alpha(R) = a/D(R)$$

Zgodnie z [5] prędkość propagacji fali uderzeniowej w powietrzu D związana jest z nadciśnieniem na jej froncie następującym wzorem:

$$(3.8) \quad D = D_0 \sqrt{\frac{k+1}{2k} \frac{p_m + p_0}{p_0} + \frac{k-1}{2k}}$$

gdzie:

- p_m nadciśnienie na froncie fali;
 p_0 ciśnienie przed frontem fali;
 k wykładnik adiabaty dla powietrza;
 D_0 prędkość propagacji fali dźwiękowej w powietrzu niezaburzonym.

Jeżeli przyjąć dla niezaburzonego powietrza:

$$p_0 = 101325 \text{ N/m}^2, \quad \rho_0 = 1,226 \text{ kg/m}^3, \quad D_0 = 340 \text{ m/s}$$

to wzór (3.8) można przedstawić w postaci:

$$(3.9) \quad D(r) = 340 \sqrt{1 + 8,46 \cdot 10^{-6} p_m(r)} \text{ [m/s]}$$

gdzie $p_m(r)$ podstawiamy w N/m^2 .

Zatem, aby określić $D(r)$, a tym samym i funkcję $\alpha(R)$, należy znać nadciśnienie na froncie fali $p_m(r)$.

Zgodnie z [5], dla wybuchu naziemnego mamy:

$$(3.10) \quad p_m(r) = \left[1,06 \frac{\sqrt[3]{q_f}}{r} + 4,3 \left(\frac{\sqrt[3]{q_f}}{r} \right)^2 + 14 \left(\frac{\sqrt[3]{q_f}}{r} \right)^3 \right] \cdot 98066,5 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

gdzie równoważnik q_f należy podstawić w kg.

Wyrażając $p_m(r)$ w zmiennych bezwymiarowych (3.1), z (3.7) i (3.9) otrzymamy:

$$(3.11) \quad \alpha(R) = a/340 \sqrt{1 + 8,46 \cdot 10^{-6} f(R)}$$

gdzie:

$$(3.12) \quad f(R) = \left[1,06 \left(\frac{1}{0,441R} \right) + 4,3 \left(\frac{1}{0,441R} \right)^2 + 14 \left(\frac{1}{0,441R} \right)^3 \right] \cdot 98066,5.$$

Dla wybuchu powietrznego wartości nadciśnienia $p_m(r)$ podawane są na wykresach lub w tabelach [5] dla odpowiednich wysokości wybuchu h_p .

Ostatecznie kształty frontów fał można wyrazić analitycznie za pomocą następujących wzorów:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} R &= R_p + \left(\frac{a}{340} \right)^2 F(R_p) I(R_0, R_p); & R_{S_1} \leq R \leq R_0 \\ Z &= \sqrt{1 - \left(\frac{a}{340} \right)^2 F^2(R_p) I(R_0, R_p)}; & 0 \leq Z \leq Z_{S_1} \\ R^2 + Z^2 &= \left(\frac{a}{340} \right)^2 I^2(R_0, 0); & 0 \leq R \leq R_{S_1}; \quad Z_{S_1} \leq Z \leq \left(\frac{a}{340} \right) I(R_0, 0) \end{aligned}$$

— dla fał podłużnych oraz

$$(3.14) \quad \begin{aligned} R &= R_p + \left(\gamma \frac{a}{340} \right)^2 F(R_p) I(R_0, R_p); & R_{S_2} \leq R \leq R_0 \\ Z &= \sqrt{1 - \left(\gamma \frac{a}{340} \right)^2 F^2(R_p) I(R_0, R_p)}; & 0 \leq Z \leq Z_{S_2} \\ R^2 + Z^2 &= \left(\gamma \frac{a}{340} \right)^2 I^2(R_0, 0); & 0 \leq R \leq R_{S_2}; \quad Z_{S_2} \leq Z \leq \left(\gamma \frac{a}{340} \right) I(R_0, 0) \end{aligned}$$

— dla fał poprzecznych

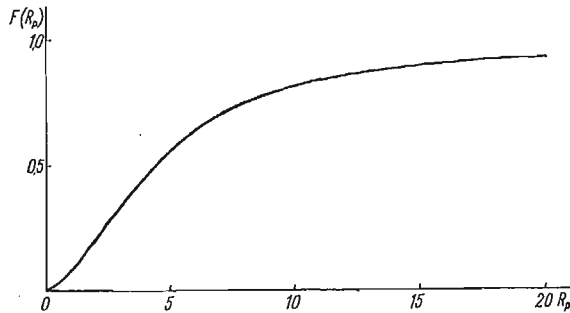
gdzie:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} F(R_p) &= 1/\sqrt{1 + 8,46 \cdot 10^{-6} f(R_p)} \\ I(R_0, R_p) &= \int_{R_p}^{R_0} F(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

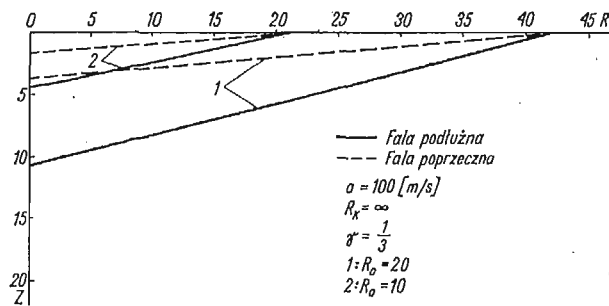
Wartości funkcji $F(R_p)$ dla wybuchu naziemnego podajemy na rys. 3.

Funkcję $I(R_0, R_p)$ określamy planimetrując pole pod krzywą $F(R_p)$ w przedziale $R_p - R_0$. Po określeniu wartości funkcji $F(R_p)$ i $I(R_0, R_p)$ podstawiamy je do wzorów (3.13) oraz (3.14) i wyznaczamy z nich współrzędne fali naprężenia.

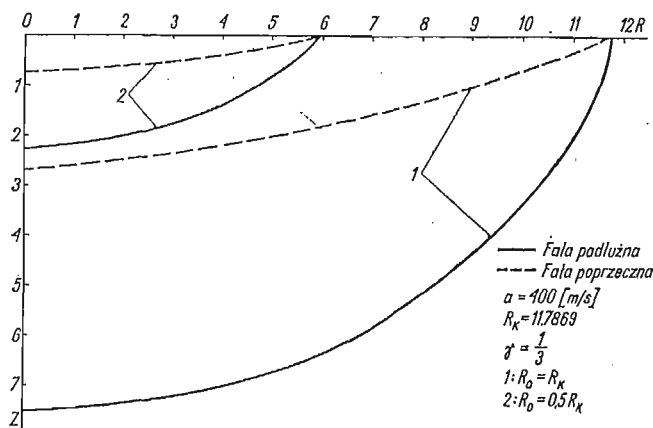
Za pomocą wyprowadzonych wyżej wzorów wykonano obliczenia liczbowe. Wybrane wyniki tych obliczeń przedstawiamy na wykresach (patrz rys. 4a ÷ c). Pokazujemy na nich



Rys. 3



Rys. 4a

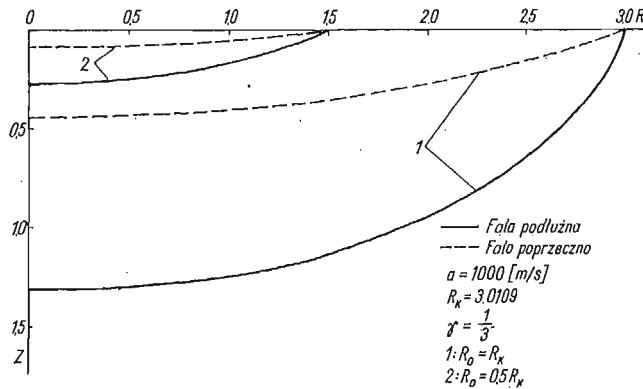


Rys. 4b

kształty frontów fal podłużnych i poprzecznych dla prędkości propagacji zaburzeń $a = 100, 400$ i 1000 m/s, przy dwóch wartościach parametru R_0 (dwie chwile czasowe). Wartości parametrów, dla których wykonano wykresy podajemy na rysunkach.

Z zamieszczonych wykresów widać, że kształty frontów fal dość silnie zależą od prędkości propagacji a . Dla małych wartości a fronty zbliżone są do linii prostej, poprowadzonej pod kątem:

$$(3.16) \quad \delta = \arcsin \frac{a}{D(R_0)}$$



Rys. 4c

Ze wzrostem prędkości a fale robią się coraz bardziej wypukłe i aproksymacja takich frontów linią prostą poprowadzoną pod kątem δ prowadzi do kilkudziesięciu, a w niektórych przypadkach nawet do kilkusetprocentowych błędów. Błędy te rosną, wraz ze wzrostem głębokości wnikania frontu fali naprężenia w głąb ośrodka.

4. Określenie kąta padania fali naprężenia w gruncie

W konkretnych obliczeniach dynamicznych konstrukcji podziemnych bardzo często potrzebna jest znajomość kąta padania fali w danym punkcie. Kąt ten jednoznacznie można określić za pomocą kąta nachylenia stycznej do frontu, następującym wzorem:

$$(4.1) \quad \delta = \arcsin \left[- \frac{dZ}{dR_p} \sqrt{ \left(\frac{dR}{dR_p} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dR_p} \right)^2 } \right].$$

Praktyczne korzystanie z tego wzoru jest bardzo pracochłonne i żmudne. Dlatego, w oparciu o teorię liniowej optyki, wyprowadzimy bardziej wygodny do stosowania w praktyce inżynierskiej wzór przybliżony.

Jak wiadomo z optyki geometrycznej, zaburzenia propagują się wzdłuż promieni. Jeśli założyć, że na odcinku $r_e - r_p$ (rys. 5) prędkość propagacji fali uderzeniowej $D = D(r_p) \approx \text{const}$, wówczas na głębokości h_z mamy:

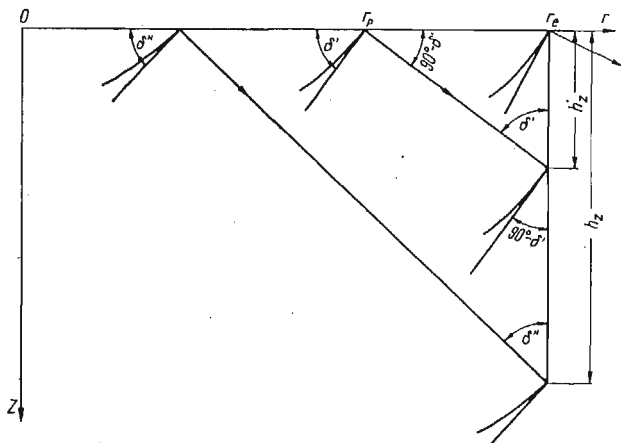
$$(4.2) \quad \sin \delta = \frac{r_e - r_p}{\sqrt{h_z^2 + (r_e - r_p)^2}} \approx \frac{a}{D(r_p)}$$

lub w formie bezwymiarowej:

$$(4.3) \quad \frac{a}{340} = \Phi(R_p, R_e, H_z) / F(R_p)$$

gdzie:

$$(4.4) \quad \Phi(R_p, R_e, H_z) = \frac{R_e - R_p}{\sqrt{H_z^2 + (R_e - R_p)^2}}$$



Rys. 5

Dla ustalonych wartości a , R_e i H_z z (4.3) wyliczamy pierwiastek $R_p = R_p^*$ tego równania. Podstawiając z kolei $R_p = R_p^*$ do (4.2) znajdujemy poszukiwany kąt padania fali. Wzór (4.2) można stosować dla obiektów typu wykopowego umieszczonych na małych głębokościach.

Dla obiektów tunelowych umieszczonych głęboko pod ziemią należy posługiwać się wzorem ścisłym (4.1).

5. Przykład

Określmy kąt padania sprężystej podłużnej fali naprężenia w zwartej glinie ($a = 1000$ m/s) na głębokości $h_z = 50$ m, spowodowanej naziemnym wybuchem jądrowym, w odległości od epicentrum wybuchu $r_e = 1000$ m. Moc wybuchu $q = 2 \cdot 10^6$ ton.

Na podstawie wymienionych danych, obliczamy następujące wielkości:

$$h = 3,5 \sqrt[3]{q} = 3,5 \sqrt[3]{2 \cdot 10^6} = 441 \text{ m}$$

$$R_e = \frac{r_e}{h} = \frac{1000}{441} = 2,2676$$

$$H_z = \frac{h_z}{h} = \frac{50}{441} = 0,1134$$

$$\frac{a}{340} = \frac{1000}{340} = 2,9412$$

$$\Phi = \frac{2,2676 - R_p}{\sqrt{0,1134^2 + 2,2676 - R_p}}^2$$

Пierwiastek spełniający równanie (4.3) przy przyjętych danych wynosi:

$$R_{p_0}^* = 2,165$$

Poszukiwany kąt padania fali wynosi:

$$\sin \delta = \frac{a}{340} F(R_{p_0}^*) = 2,9412 \cdot 0,2283 = 0,6715$$

$$\delta = 42^\circ 11'$$

6. Wnioski końcowe

Na podstawie przeprowadzonej w niniejszej pracy analizy propagacji frontów przestrzennych fal naprężenia w gruncie, wywołanych działaniem powietrznej fali uderzeniowej wybuchu jądrowego, można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Stosowana w dotychczasowej literaturze technicznej liniowa aproksymacja frontów fal może być stosowana tylko dla gruntów o małej prędkości propagacji zaburzeń i na małych głębokościach ($a < 1000$ m/s, $h_z < 20$ m).

2. Należy stosować aproksymację frontów fal linią łamaną (cięciwami) po uprzednim wyznaczeniu ich wg wzorów ścisłych, wyprowadzonych w niniejszej pracy. Unikamy wówczas dużych błędów (rzędu 100%) przy określaniu lokalnego kąta padania fali, od którego zależą w sposób istotny parametry fal odbitych i załamanych [6, 7].

Literatura cytowana w tekście

1. Y. C. FUNG, *Foundation of solid mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1965.
2. F. SHWALCZYK, J. RAFA, E. WŁODARCZYK. *Propagation of two-dimensional non-stationary pressure wave in a layer of perfect compressible liquid*, Proc. Vibr. Probl. 14, 3, 1973.
3. А. Г. БАГДОВ, *Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами*, Изд. АН Армянской ССР, Ереван 1901
4. X. A. РАХМАТУЛИН, Я. У. САГАТОВ, П. Ф. САБОДАШ, И. Г. ФИЛИППОВ, *Двумерные задачи по неустановившемуся движению сжимаемых сред*, Изд. „ФАН” Узбекской ССР, Ташкент — 1969.
5. Ю. С. ЯКОВЛЕВ, *Гидродинамика взрыва*, Изд. Судпромгиз, Ленинград, 1961.
6. Г. М. АРУТЮНЯН, Л. В. КАРЧЕВСКИЙ, *Отраженные ударные волны*, Машиностроение, Москва 1973.

Содержание

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФРОНТАХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЯ В ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

В работе выведены формулы для форм пространственных фронтов волн напряжения распространяющихся в грунте, вызванных наземным или воздушным взрывом ядерного заряда. Доказано, что применяемая до сих пор аппроксимация этих фронтов одной плоскостью ведет к ошибкам нескольких десятков процентов, а в некоторых случаях (большие скорости распространения и глубокое основание объектов) к ошибкам нескольких сот процентов.

S u m m a r y

ON SPATIAL FRONTS OF STRESS WAVES IN ISOTROPIC ELASTIC MEDIUM

The formulae have been derived for the shapes of spatial fronts of the stress waves propagating in soil and produced by a surface or air explosion of a nuclear charge. It has been demonstrated that the approximation used so far of those fronts by a single plane leads to tens of per cent errors, and in certain cases (high propagation speeds and deep subsite of structure) — to errors of hundreds of per cent.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1978 r.

LOSOWE DRGANIA LINII WAŁÓW Z UWZGLĘDNIENIEM ASYMETRII
SZTYWNOŚCI GIĘTNEJ I PODATNOŚCI FUNDAMENTÓW

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Wpływ procesów stochastycznych na liniowe i niezmiennie w czasie układy ciągłe może być określony przy pomocy funkcji przenoszenia, stanowiących transformaty Fouriera (względem czasu i zmiennych przestrzennych) impulsowych funkcji przejścia [1]. Rozpatrywane w pracach [2] i [3] liniowe układy nie są niezmiennie w czasie, gdyż zawierająca kołowo asymetryczne odcinki linia wałów wiruje względem podatnej konstrukcji podpierającej. Bezpośrednie wykorzystanie znanych z literatury zależności nie jest tu zatem możliwe. Podatność konstrukcji podpierającej stwarza dodatkową komplikację zagadnienia, gdyż losowe drgania linii wałów stają się przez to funkcją nie tylko wymuszeń stochastycznych o znanych charakterystykach, lecz także nieznanymi a priori losowych reakcji w łożyskach. Oznacza to również konieczność wyznaczania funkcji przenoszenia nie tylko na drodze: źródła znanych wymuszeń — badany przekrój linii wałów, lecz także od poszczególnych podpór łożyskowych do badanego przekroju wzdłuż linii wałów i poprzez konstrukcję podpierającą. Wymienione problemy rozpatrzono poniżej przy założeniu, że prędkość kątowna linii wałów może być traktowana jako stała.

2. Wyznaczenie funkcji przenoszenia

Niniejsza praca dotyczy podatnie podpartych linii wałów, w których nie wszystkie odcinki wykazują kołową symetrię sztywności giętnej. W charakterze przykładu przyjęto układ przedstawiony schematycznie na rys. 1, dla którego na wstępie zakłada się, że jego model w części odnoszącej się do wału korbowego zawiera odcinki wału o zróżnicowanych głównych centralnych momentach bezwładności przekroju poprzecznego [2]. Warunki brzegowe rozpatrywanej linii wałów zapisać można w ruchomych układach współrzędnych następująco:

$$(2.1) \quad p_{10\alpha} \pm m_{0\alpha} \ddot{u}_{10\alpha} \pm b_{0\alpha} \dot{u}_{10\alpha} = \pm f_{0\alpha}^w,$$

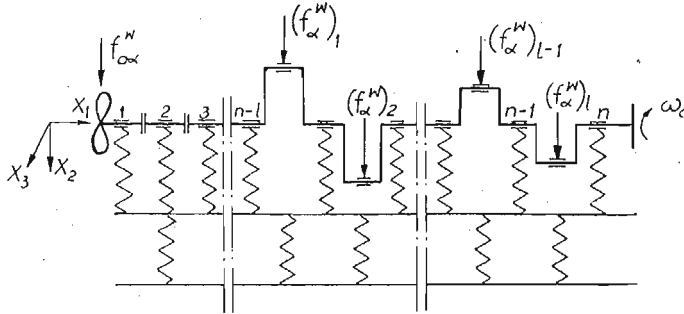
$$(2.2) \quad p_{n'l} = 0,$$

gdzie zachowano oznaczenia jak w pracy [3], przy czym n' jest liczbą obliczeniowych odcinków w rozpatrywanym układzie. Zachowuje się przyjęty w [2] podział linii wałów, zgodnie z którym wszystkie odcinki obliczeniowe obciążane są jedynie w swych końcowych przekrojach. Umożliwia to uwzględnianie losowych wymuszeń jedynie w warunkach

brzegowych dla poszczególnych odcinków oraz zastosowanie transformacji Fouriera \mathcal{F} tylko względem czasu:

$$(2.3) \quad \bar{h}(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Pozwala to bezpośrednio wykorzystać szereg zależności wyprowadzonych w [2] i [3]. Dokonując bowiem transformacji Fouriera jednorodnych równań różniczkowych cząstkowych, opisujących drgania podłużne, giętne i skrętne i -tego odcinka wału, otrzymuje się



Rys. 1. Schemat rozpatrywanego układu. $f_{0\alpha}^w = f_{0\alpha}^w(t)$ — wymuszenia działające na śrubę okrętową; $(f_{\alpha}^w)_k = [f_{\alpha}^w(t)]_k$ — wymuszenia od silnika, działające na czop korbowy w k -tym wykorbieniu; l — liczba cylindrów silnika; 1, 2, ..., n — numery kolejnych łożysk linii wałów; X_1, X_2, X_3 — nieruchomy ortogonalny układ odniesienia konstrukcji podpierającej; ω_0 — prędkość kątowa wirowania linii wałów.

równania różniczkowe zwyczajne, których rozwiązania wraz z zależnościami określającymi siły wewnętrzne zapisać można w postaci:

$$(2.4) \quad \bar{u}_{ix} = C_{ix} a_i,$$

$$(2.5) \quad \bar{p}_{ix} = A_{ix} a_i,$$

gdzie $\bar{u}_{ix}, \bar{p}_{ix}$ są macierzami kolumnowymi transformat Fouriera uogólnionych przemieszczeń i sił wewnętrznych w przekroju x i -tego odcinka wału

$$\bar{u}_{ix} = \{\bar{u}_{ix\alpha}\}, \quad \bar{p}_{ix} = \{\bar{p}_{ix\alpha}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

a_i jest macierzą kolumnową nieznanymi współczynnikami rozwiązań

$$a_i = \{a_{iq}\}, \quad q = 1, \dots, 12,$$

natomiast $C_{ix} = C_{ix}(\omega), A_{ix} = A_{ix}(\omega)$ są macierzami identycznymi z wyprowadzonymi w [2] macierzami $C_{ix}^{(v)}, A_{ix}^{(v)}$ przy $v = 1$ lub z macierzami $C_{ix}^{(\mu)}, A_{ix}^{(\mu)}$ przy $\mu = 1$ dla uściślonego modelu odcinka wału [3]:

$$(2.6) \quad C_{ix} = C_{ix}^{(1)}, \quad A_{ix} = A_{ix}^{(1)}.$$

Dla odróżnienia od wprowadzonej transformacją (2.3) wielkości ω , prędkość kątową linii wałów oznaczono poniżej ω_0 .

W przypadku, gdy w przekroju łączącym i -ty odcinek wału z $(i+1)$ -ym odcinkiem działają reakcje łożyska $f_{ix}(t)$, można dzięki relacjom (2.6) napisać:

$$(2.7) \quad a_{i+1} = B_i a_i + F_i f_i,$$

gdzie $\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_l^{(1)}$, $\mathbf{F}_l = \mathbf{F}_l^{(1)}$ określono w [3], a $\bar{f}_l = \{\bar{f}_{l\alpha}\}$ oznacza macierz kolumnową transformat Fouriera reakcji $f_{l\alpha}(t)$. Podobnie wykorzystać można inne wyznaczone w [2] i [3] macierze przejścia, podstawiając $\nu = 1$ (lub $\mu = 1$). Dotyczy to również macierzy wyznaczonych dla $\nu \neq 0$ przy podziale wału korbowego na elementy skończone [3]. Przykładowo, transformaty Fouriera wektorów stanu sztywnych elementów skończonych (SES) znajdujących się na krańcach k -tego podukładu SES, związane są relacją:

$$(2.8) \quad (\bar{w}_{m+2})_k = \mathbf{B}_s(\bar{w}_{m+1})_k + \mathbf{F}_s(\bar{f}^z)_k,$$

gdzie $\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_s^{(1)}$, $\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s^{(1)}$ określono w [3], a macierz kolumnowa $(\bar{f}^z)_k$, utworzona analogicznie jak $(f^{z(\mu)})_k$ dla $\mu \neq 0$ [3], zawiera transformaty Fouriera reakcji konstrukcji podpierającej i wymuszeń pochodzących od silnika, przyłożonych do elementów SES w łożyskach ramowym i korbowym k -tego podukładu SES.

Wykonując transformację Fouriera warunków (2.1) i (2.2) otrzymuje się:

$$(2.9) \quad \bar{p}_{10\alpha} \pm \omega^2 m_{0\alpha} \bar{u}_{10\alpha} \pm j\omega b_{0\alpha} = \pm \bar{f}_{0\alpha}^w,$$

$$(2.10) \quad \bar{p}_{n'l\alpha} = 0.$$

Zgodnie z (2.4) i (2.5) warunek (2.9) można zapisać w postaci:

$$(2.11) \quad \bar{\mathbf{A}}a_1 = \bar{f}_0^w,$$

gdzie:

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{1x} + \bar{\mathbf{C}}_{1x}, \quad \bar{f}_0^w = \{\bar{f}_{0\alpha}^w\}.$$

Macierz $\bar{\mathbf{A}}_{1x}$ powstaje z macierzy \mathbf{A}_{1x} przez pomnożenie czterech pierwszych jej wierszy przez (-1) ; macierz $\bar{\mathbf{C}}_{1x}$ powstaje z macierzy \mathbf{C}_{1x} przez pomnożenie kolejnych jej wierszy przez $(j\omega b_{01} - \omega^2 m_{01})$, $(j\omega b_{02} - \omega^2 m_{02})$, ..., $(j\omega b_{06} - \omega^2 m_{06})$. Warunek (2.10) można przedstawić w postaci dogodnej do dalszych obliczeń

$$(2.12) \quad \bar{\mathbf{B}}a_1 + \sum_{k=1}^l \bar{\mathbf{B}}_k(\bar{f}^w)_k + \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{B}}_i \bar{f}_i = 0$$

lub

$$(2.13) \quad \bar{\mathbf{B}}a_1 + \bar{\mathbf{B}}\bar{f}^w + \tilde{\mathbf{B}}\bar{f} = 0,$$

gdzie:

$$\bar{\mathbf{B}} = [\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{B}}_2 \dots \bar{\mathbf{B}}_l]_{6 \times 6l}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{B}}_2 \dots \tilde{\mathbf{B}}_n]_{6 \times 6n},$$

$$\bar{f}^w = \{(\bar{f}^w)_k\}, \quad k = 1, \dots, l, \quad (\bar{f}^w)_k = \{(\bar{f}_{\alpha}^w)_k\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad \bar{f} = \{\bar{f}_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Macierze $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{B}}_k$, $\tilde{\mathbf{B}}_i$ powstaje z wymnożenia odpowiednich macierzy przejścia dla całej linii wałów, \bar{f}^w jest macierzą kolumnową transformat wymuszeń od silnika o l cylindrach, n jest liczbą łożysk linii wałów.

Korzystając z wyrażenia (2.4) oraz z odpowiednich macierzy przejścia można wyznaczyć macierze kolumnowe transformat Fouriera przemieszczeń wałów w miejscach kolejnych łożysk w postaci:

$$(2.14) \quad \bar{u}_i = \bar{\mathbf{C}}_i a_i + \sum_{j=1}^l \tilde{\mathbf{C}}_{ij} \bar{f}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n-l,$$

$$(2.15) \quad \bar{u}_i = \bar{\mathbf{C}}_i a_i + \sum_{j=1}^l \tilde{\mathbf{C}}_{ij} \bar{f}_j + \sum_{h=1}^k \bar{\mathbf{C}}_{ih} (\bar{f}^w)_h, \quad i = n-l+k, \quad k = 1, \dots, l.$$

Kojarząc wszystkie równania (2.14) i (2.15) otrzymuje się:

$$(2.16) \quad \bar{u} = \bar{C}a_1 + \tilde{C}\bar{f} + \bar{C}\bar{f}^w,$$

gdzie

$$\bar{u} = \{\bar{u}_i\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \bar{u} = \{\bar{u}_{i\alpha}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \vdots \\ \bar{C}_n \end{bmatrix}_{6n \times 12}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & & & & & \\ & \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ \tilde{C}_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{C}_{nn} \end{bmatrix}_{6n},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ C \end{bmatrix}_{6n \times 6t}, \quad C = \begin{bmatrix} \bar{C}_{n-l+1,1} & & & & & \\ & \bar{C}_{n-l+2,1} & \bar{C}_{n-l+2,2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ \bar{C}_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \bar{C}_{ln} \end{bmatrix}_{6t}.$$

Oddziaływanie konstrukcji podpierającej na linię wałów jest związane z występowaniem w zależnościach (2.13) i (2.16) transformat sił $f_{i\alpha}(t)$, reprezentujących reakcje w łożyskach. Do wyznaczenia funkcji przenoszenia niezbędne jest uwzględnienie dynamicznych własności tej konstrukcji. Można w tym celu wykorzystać macierz impulsowych funkcji przejścia konstrukcji podpierającej

$$\mathbf{H} = [H_{ij}]_{6n}, \quad H_{ij} = [h_{ij\alpha\beta}]_6, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6,$$

gdzie $h_{ij\alpha\beta}(t)$ jest odpowiedzią na i -tej podporze łożyskowej w kierunku α w chwili t na impuls jednostkowy, przyłożony, na j -tej podporze w kierunku β w chwili $t - \tau$. Jeżeli $u_{i\alpha}, f_{i\alpha}$ oraz $\tilde{u}_{i\alpha}, \tilde{f}_{i\alpha}$ oznaczają uogólnione przemieszczenia i siły reakcji w funkcji czasu odnoszące się do i -tego łożyska w ruchomym układzie współrzędnych oraz w nieruchomym układzie współrzędnych, a $\bar{u}_{i\alpha}, \bar{f}_{i\alpha}, \tilde{u}_{i\alpha}, \tilde{f}_{i\alpha}$ — transformaty Fouriera tych wielkości, to można napisać:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \tilde{u} &= -\mathbf{H} * \tilde{f}, & \bar{u} &= -\bar{\mathbf{H}} \bar{f}, \\ \tilde{u} &= \mathbf{\Pi} u, & \tilde{u} &= \bar{\mathbf{\Pi}} * \bar{u}, \\ \tilde{f} &= \mathbf{\Pi} f, & \tilde{f} &= \bar{\mathbf{\Pi}} * \bar{f}, \end{aligned}$$

gdzie zgodnie z [2] macierz $\mathbf{\Pi}$ ma przy prędkości kątowej linii wałów ω_0 postać:

$$(2.18) \quad \mathbf{\Pi} = \Gamma \mathbf{\Pi}_i \Gamma_{6n} = \check{\mathbf{\Pi}} \exp(-j\omega_0 t) + \tilde{\mathbf{\Pi}} + \hat{\mathbf{\Pi}} \exp(j\omega_0 t),$$

$$\mathbf{\Pi} = \Gamma \mathbf{\Pi}'_i \Gamma_{6n}, \quad \check{\mathbf{\Pi}} = \Gamma \check{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_{6n}, \quad \tilde{\mathbf{\Pi}} = \Gamma \tilde{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_{6n}, \quad \hat{\mathbf{\Pi}} = \Gamma \hat{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_{6n},$$

$$\check{\mathbf{\Pi}}_i = \Gamma \check{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_{6n}, \quad \tilde{\mathbf{\Pi}}_i = \Gamma \tilde{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_{6n}, \quad \hat{\mathbf{\Pi}}_i = \Gamma \hat{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_{6n},$$

$$\mathbf{\Pi}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_0 t + \delta_i) & -\sin(\omega_0 t + \delta_i) \\ 0 & \sin(\omega_0 t + \delta_i) & \cos(\omega_0 t + \delta_i) \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{\Pi}}'_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \exp(-j\delta_i), \quad \tilde{\mathbf{\Pi}}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{\Pi}}'_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix} \exp(j\delta_i).$$

Wielkość δ_i oznacza kąt obrotu lokalnego układu współrzędnych, w którym opisane są przemieszczenia u_i (2.11), (2.15), względem nieruchomego układu odniesienia x_1, x_2, x_3 konstrukcji podpierającej (rys. 1) w kierunku wirowania linii wałów w chwili $t = 0$. Dla przemieszczeń (2.14) przyjęto $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{n-1} = 0$, natomiast $\delta_{n-l+1} = \vartheta_1, \delta_{n-l+2} = \dots = \delta_n = \vartheta_l$, gdzie $\vartheta_1, \dots, \vartheta_l$ są kątami pomiędzy płaszczyznami kolejnych wykorbień a płaszczyzną utworzoną przez osie x_1, x_2 w chwili $t = 0$. $\bar{\mathbf{H}}$ i $\bar{\mathbf{\Pi}}$ są macierzami transformat Fouriera elementów macierzy \mathbf{H} i $\mathbf{\Pi}^{(1)}$; "*" oznacza splot. Znaki "-" w zależnościach (2.17) wynikają stąd, że \tilde{f} reprezentuje reakcje działające na wały w łożyskach, które są równe lecz przeciwnie skierowane do sił działających na konstrukcję podpierającą. Macierze $\mathbf{\Pi}$ są ortogonalne i równe macierzom zespolonym sprzężonym

$$(2.19) \quad \mathbf{\Pi}^{-1} = \mathbf{\Pi}^T,$$

$$(2.20) \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^*,$$

przy czym

$$(2.21) \quad \tilde{\mathbf{\Pi}}^T = \tilde{\mathbf{\Pi}},$$

$$(2.22) \quad \hat{\mathbf{\Pi}}^* = \check{\mathbf{\Pi}}.$$

Z zależności (2.17) otrzymuje się z uwzględnieniem (2.19)

$$(2.23) \quad \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{f}},$$

$$(2.24) \quad \bar{\mathbf{V}} = -\bar{\mathbf{\Pi}}^T * \bar{\mathbf{H}} * \bar{\mathbf{\Pi}}.$$

Z równań (2.11), (2.13), (2.16) i (2.23) wynika zależność

$$(2.25) \quad \bar{\mathbf{N}} \mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{S}} \begin{Bmatrix} \bar{f}_0^w \\ \bar{f}^w \end{Bmatrix},$$

gdzie:

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{C}})^{-1} \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}_{12}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & -\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{C}})^{-1} \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}_{12 \times 6(l+1)},$$

\mathbf{E} — macierz jednostkowa.

Przy założeniu, że $\bar{\mathbf{N}}$ nie jest macierzą osobliwą, zależność (2.25) pozwala z uwzględnieniem (2.4) i (2.5) napisać wyrażenie na transformatę Fouriera wektora stanu w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego

¹⁾ Funkcje $h_{l\alpha\beta}(t)$ traktuje się jako realizowalne fizycznie, zatem istnieją ich transformaty Fouriera $\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega)$. Odminną metodę wyznaczania funkcji $\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega)$ umożliwia fakt, że współczynnik dynamicznej podatności konstrukcji podpierającej linię wałów

$$\tilde{d}_{l\alpha\beta}^{(1)} = -\tilde{u}_{l\alpha}^{(1)} \exp(j\omega_0 t) [\tilde{f}_{l\beta}^{(1)} \exp(j\omega_0 t)]^{-1} = -\tilde{u}_{l\alpha}^{(1)} (\tilde{f}_{l\beta}^{(1)})^{-1}$$

jest dyskretną reprezentacją funkcji $\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega)$ w punkcie $\omega = \omega_0$. Funkcja $\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega)$ może być więc wyznaczona również jako suma funkcji

$$\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega) = g_{l\alpha\beta}(\omega) + j\bar{g}_{l\alpha\beta}(\omega),$$

gdzie $g_{l\alpha\beta}(\omega)$ jest równaniem krzywej obrazującej przebieg zmienności wartości części rzeczywistej współczynnika $\tilde{d}_{l\alpha\beta}^{(1)}$ na płaszczyźnie $\text{Re}(d_{l\alpha\beta}^{(1)})$, ω , a $\bar{g}_{l\alpha\beta}(\omega)$ jest równaniem analogicznej krzywej dla części urojonej współczynnika $\tilde{d}_{l\alpha\beta}^{(1)}$. Krzywe te można uzyskać interpolując w interesującym zakresie częstości dyskretne wyniki identyfikacji współczynników dynamicznej podatności konstrukcji podpierającej przy odpowiedniej liczbie kolejnych wymuszeń o różnych częstościach [2].

$$(2.26) \quad \bar{w}_{1x} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1x} \\ \bar{p}_{1x} \end{Bmatrix} = \bar{G}_{1x}^w \begin{Bmatrix} \bar{f}_0^w \\ \bar{f}^w \end{Bmatrix},$$

gdzie $\bar{G}_{1x}^w = \bar{G}_{1x}^w(\omega)$ stanowi macierz funkcji przenoszenia, określonych dla wektora stanu w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego, przy wymuszeniach pochodzących od silnika i śruby okrętowej, z uwzględnieniem wpływu podatności konstrukcji podpierającej linię wałów

$$(2.27) \quad \bar{G}_{1x}^w = \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix} \bar{N}^{-1} \bar{S}.$$

Analogicznie wyznaczyć można macierze funkcji przenoszenia dla wektorów stanu (przemieszczeń lub sił wewnętrznych) w innych przekrojach linii wałów lub dla przemieszczeń elementów skończonych w podukładach wału korbowego.

3. Drgania linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności gładkiej i podatności fundamentów przy wymuszeniach stochastycznych

W niniejszej pracy zakłada się, że losowe drgania rozpatrywanej linii wałów są wynikiem wymuszeń pochodzących zarówno od śruby okrętowej jak i od silnika. Wymuszenia te traktuje się jako procesy stochastyczne o wartościach oczekiwanych równych zeru.

Tworzymy procesy wektorowe:

$$\begin{aligned} f_1^w &= \{f_{0\alpha}^w\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \\ f^w &= \{(f^w)_k\}, \quad k = 1, \dots, l, \quad (f^w)_k = \{(f_\alpha^w)_k\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \\ f &= \{f_i\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad f_i = \{f_{i\alpha}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

gdzie:

$f_{0\alpha}^w = f_{0\alpha}^w(t)$ losowe wymuszenia od śruby okrętowej,

$(f_\alpha^w)_k = [f_\alpha^w(t)]_k$ losowe wymuszenia od silnika,

$f_{i\alpha} = f_{i\alpha}(t)$ losowe reakcje, działające na wał w łożyskach.

W/w procesy odnoszą się do ruchomych układów współrzędnych. Z kolei tworzymy N -wymiarowy proces stochastyczny

$$(3.1) \quad y = \begin{Bmatrix} f_0^w \\ f^w \end{Bmatrix} = \{y_n\}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad N = 6(l+1)$$

i macierz korelacyjną

$$(3.2) \quad \mathbf{R}^{yy} = [\varrho_{n_1 n_2}^{yy}]_N, \quad n_1, n_2 = 1, \dots, N,$$

gdzie:

$$(3.3) \quad \varrho_{n_1 n_2}^{yy} = \langle y_{n_1}(t_1) y_{n_2}^*(t_2) \rangle = \langle y_{n_1}(t+\tau) y_{n_2}^*(t) \rangle,$$

$\langle \rangle$ — wartość oczekiwana, (*) — wielkość zespolona sprzężona. Rozpatrzmy przypadki:

I. losowe wymuszenia są procesami stacjonarnymi (całkowicie lub w szerszym sensie) i ich funkcje korelacyjne mają postać:

$$(3.4) \quad \bigwedge_{n_1} \bigwedge_{n_2} \varrho_{n_1 n_2}^{yy}(t_1, t_2) = \varrho_{n_1 n_2}^{yy}(t_1 - t_2) = \varrho_{n_1 n_2}^{yy}(\tau),$$

II. losowe wymuszenia są procesami niestacjonarnymi, przy czym ich funkcje korelacyjne są bezwzględnie całkowlne na płaszczyźnie $t_1 t_2$

$$(3.5) \quad \bigwedge_{n_1} \bigwedge_{n_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varrho_{n_1 n_2}^{yy}(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty,$$

III. losowe wymuszenia są procesami niestacjonarnymi, przy czym ich funkcje korelacyjne spełniają warunku (3.5).

Ad I. Ze względu na zmienność rozpatrywanego układu w czasie, założenie (3.4) w ogólnym przypadku nie musi za sobą pociągać spełnienia analogicznego warunku przez funkcje autokorelacji i korelacji wzajemnej losowych procesów, zachodzących w linii wałów. W celu uwidocznienia właściwości procesów zachodzących w linii wałów posłużymy się warunkami brzegowymi (2.11) i (2.13), z których wyznaczyć można transformatę Fouriera wektora stanu w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego

$$(3.6) \quad \bar{w}_{1x} = \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & -\bar{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_0^w \\ \bar{f}^w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{B} \end{bmatrix} \bar{f} \right).$$

Analogiczne relacje wyznaczyć można dla dowolnych punktów linii wałów, zatem procesy zachodzące w linii wałów będą stacjonarne wtedy, gdy procesy wektorowe y i f będą stacjonarne i stacjonarnie skorelowane. Stacjonarność procesu f zbadamy na przykładzie drgań poprzecznych wału w miejscu i -tej podpory łożyskowej odcinka o kołowej symetrii sztywności giętej²⁾. Dla uproszczenia rozważań pominiemy wpływ podatności fundamentu, jedynie podporę łożyskową traktować będziemy jako idealnie sprężystą, dla której macierz podatności D_{ii} jest diagonalna, o współczynnikach podatności $1/C_{i2}$ w kierunku pionowym i $1/c_{i3}$ w kierunku poziomym. Pomiedzy reakcjami f_i i przemieszczeniami u_i w miejscu i -tej podpory łożyskowej istnieje zależność analogiczna do (2.23)

$$u_i = -\Pi_i^T D_{ii} \Pi_i f_i,$$

czyli

$$(3.7) \quad f_i = \Pi_i^T D_{ii}^{-1} \Pi_i u_i.$$

Utwórzmy macierze korelacyjne

$$R_{ff}^{\alpha\beta} = [\varrho_{ii\alpha\beta}^{ff}]_6, \quad R_{ii}^{\alpha\beta} = [\varrho_{ii\alpha\beta}^{ii}]_6, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6,$$

gdzie:

$$\varrho_{ii\alpha\beta}^{ff} = \langle f_{i\alpha}(t+\tau) f_{i\beta}^*(t) \rangle, \quad \varrho_{ii\alpha\beta}^{ii} = \langle u_{i\alpha}(t+\tau) u_{i\beta}^*(t) \rangle$$

i założmy, że

$$(3.8) \quad \bigwedge_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \varrho_{ii\alpha\beta}^{ii} = (t, t+\tau) = \varrho_{ii\alpha\beta}^{ii}(\tau).$$

Można zatem na podstawie (3.7) i (2.20) napisać:

$$(3.9) \quad R_{ff}^{\alpha\beta} = \Pi_i^T(t+\tau) D_{ii}^{-1} \Pi_i(t+\tau) R_{ii}^{\alpha\beta}(\tau) \Pi_i^T(t) (D_{ii}^{-1})^T \Pi_i(t),$$

²⁾ Dla takiego odcinka macierz Π_i (2.18) nie zawiera nieistotnego w poniższych rozważaniach kąta przesunięcia fazowego ($d_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$).

skąd

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \varrho_{ii22}^{ff} & \varrho_{ii23}^{ff} \\ \varrho_{ii32}^{ff} & \varrho_{ii33}^{ff} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \omega_0(t+\tau) & \sin \omega_0(t+\tau) \\ -\sin \omega_0(t+\tau) & \cos \omega_0(t+\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i2} & 0 \\ 0 & c_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_0(t+\tau) & -\sin \omega_0(t+\tau) \\ \sin \omega_0(t+\tau) & \cos \omega_0(t+\tau) \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \varrho_{ii22}^{uu} & \varrho_{ii23}^{uu} \\ \varrho_{ii32}^{uu} & \varrho_{ii33}^{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i2} & 0 \\ 0 & c_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix}, \\ \varrho_{ii22}^{ff} &= \frac{1}{4} \left\{ \varrho_{ii22}^{uu} (c_{i2} + c_{i3})^2 + \frac{1}{2} [(\varrho_{ii22}^{uu} + \varrho_{ii33}^{uu}) \cos 2\omega_0 \tau + (\varrho_{ii32}^{uu} - \varrho_{ii23}^{uu}) \sin 2\omega_0 \tau + \right. \\ &+ (\varrho_{ii22}^{uu} - \varrho_{ii33}^{uu}) \cos 2\omega_0 (2t + \tau) - (\varrho_{ii23}^{uu} + \varrho_{ii32}^{uu}) \sin 2\omega_0 (2t + \tau)] (c_{i2} - c_{i3})^2 + \\ &+ [\varrho_{ii22}^{uu} \cos 2\omega_0 (t + \tau) + \varrho_{ii22}^{uu} \cos 2\omega_0 t - \varrho_{ii23}^{uu} \sin 2\omega_0 (t + \tau) - \\ &\left. - \varrho_{ii32}^{uu} \sin 2\omega_0 t] (c_{i2}^2 - c_{i3}^2) \right\}. \end{aligned}$$

Z zależności (3.10) wynika, że przy założeniu (3.8) wtedy zachodzi

$$\varrho_{ii22}^{ff} = \varrho_{ii22}^{ff}(\tau),$$

gdy spełniony jest dodatkowy warunek:

$$c_{i2} = c_{i3}.$$

Dla $c_{i2} \neq c_{i3}$ jest

$$\varrho_{ii22}^{ff} = \varrho_{ii22}^{ff}(t, t + \tau),$$

przy czym

$$\varrho_{ii22}^{ff}(t, t + \tau) = \varrho_{ii22}^{ff}(t + l_1 T_0, t + \tau + l_2 T_0)$$

($T_0 = \pi/\omega_0$, l_1 i l_2 — dowolne liczby całkowite), co zgodnie z (3.6) oznacza, że pomimo spełnienia warunku (3.4) założenie (3.8) nie może być spełnione. Funkcja ϱ_{ii22}^{ff} nie spełnia wówczas także warunku (3.5). Identyczne uwagi odnoszą się do funkcji korelacyjnych ϱ_{ii23}^{ff} , ϱ_{ii32}^{ff} , ϱ_{ii33}^{ff} . Można stąd wnioskować, że przy stacjonarnych wymuszeniach procesy zachodzące w okrętowych liniach wałów, których konstrukcje podpierające są z reguły anizotropowo podatne, są procesami okresowo stacjonarnymi w szerszym sensie³⁾, a ich funkcje korelacyjne mają postać:

$$(3.11) \quad \varrho(t, t + \tau) = \sum_k \varrho_k(\tau) \exp(jk\omega_0 t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dla takich procesów można wyznaczyć macierze średnich gęstości widmowych mocy, zastępując ich funkcje korelacyjne uśrednionymi funkcjami korelacyjnymi

$$(3.12) \quad \bar{\varrho}(\tau) = \varrho_0(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varrho(t, t + \tau) dt$$

i dokonując transformacji Fouriera funkcji $\bar{\varrho}(\tau)$ [4]. Po podstawieniu do (3.10) funkcji $\varrho_{ii\alpha\beta}^{uu}$ w postaci (3.11) i wykonaniu operacji (3.12) otrzymuje się

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \bar{\varrho}_{ii22}^{ff}(\tau) &= \frac{1}{4} \bar{\varrho}_{ii22}^{uu}(\tau) (c_{i2} + c_{i3})^2 + \frac{1}{8} \{ [\bar{\varrho}_{ii22}^{uu}(\tau) + \bar{\varrho}_{ii33}^{uu}(\tau)] \cos 2\omega_0 \tau + \\ &+ [\bar{\varrho}_{ii32}^{uu}(\tau) - \bar{\varrho}_{ii23}^{uu}(\tau)] \sin 2\omega_0 \tau \} (c_{i2} - c_{i3})^2. \end{aligned}$$

³⁾ Procesy te są okresowo stacjonarne w szerszym sensie także w przypadku wymuszeń okresowo stacjonarnych w szerszym sensie, niezależnie od charakterystyk podatności konstrukcji podpierającej.

Analogicznie otrzymuje się macierz uśrednionych skrośnych funkcji korelacyjnych $\bar{Q}_{ii\alpha\beta}^u(\tau)$ dla wymuszeń $f_{i\alpha}$ i przemieszczeń $u_{i\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 6$)

$$(3.14) \quad \bar{R}_{ii}^u(\tau) = -(\check{\Pi}_i^T D_{ii}^{-1} \hat{\Pi}_i + \check{\Pi}_i D_{ii}^{-1} \check{\Pi}_i + \hat{\Pi}_i^T D_{ii}^{-1} \check{\Pi}_i) \bar{R}_{ii}^u(\tau),$$

gdzie

$$\bar{R}_{ii}^u(\tau) = [\bar{Q}_{ii\alpha\beta}^u]_6, \quad \bar{R}_{ii}^w(\tau) = [\bar{Q}_{ii\alpha\beta}^w]_6.$$

Transformacja Fouriera wyrażenia (3.13) daje związek pomiędzy uśrednionymi gęstościami widmowymi mocy $\bar{\gamma}(\omega)$ procesów f_{i2}, u_{i2}, u_{i3} oraz uśrednionymi gęstościami widmowymi mocy wzajemnej procesów u_{i2} i u_{i3} :

$$(3.15) \quad \bar{\gamma}_{i22}^{ff}(\omega) = \frac{1}{4} \bar{\gamma}_{ii22}^w(\omega)(c_{i2} + c_{i3})^2 + \frac{1}{16} \left\{ \bar{\gamma}_{ii22}^w(\omega - 2\omega_0) + \bar{\gamma}_{ii22}^w(\omega + 2\omega_0) + \right. \\ \left. + \bar{\gamma}_{ii33}^w(\omega - 2\omega_0) + \bar{\gamma}_{ii33}^w(\omega + 2\omega_0) + \frac{1}{j} [\bar{\gamma}_{ii32}^w(\omega - 2\omega_0) - \bar{\gamma}_{ii32}^w(\omega + 2\omega_0) + \right. \\ \left. + \bar{\gamma}_{ii23}^w(\omega + 2\omega_0) - \bar{\gamma}_{ii23}^w(\omega - 2\omega_0)] \right\} (c_{i2} - c_{i3})^2.$$

Wyrażenie (3.15) zawiera m.in. gęstości widmowe mocy uzyskane z uśrednionych funkcji korelacyjnych, zmodulowanych w wyniku wirowania wału z prędkością kątową ω_0 .

W wyrażeniach wyprowadzonych w p. 2 wpływ wirowania wałów na podatnej konstrukcji podpierającej określony jest macierzą \bar{V} (2.24). Chcąc wyznaczyć macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy losowego wektora stanu w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego wyodrębnimy tę macierz w macierzy funkcji przenoszenia $\bar{G}_{1,x}^w$ (2.27). W tym celu wykorzystamy zależność (3.6) i wyrażenie uzyskane z zależności (2.11), (2.13), (2.16) i (2.23):

$$(3.16) \quad (\bar{V} + \bar{W})\bar{f} = \bar{Y}\bar{y},$$

gdzie:

$$\bar{W} = \bar{C} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \end{bmatrix} - \bar{C}, \quad \bar{Y} = \bar{C} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{E} & 0 \\ 0 & -\bar{B} \end{bmatrix} + [0 \quad \bar{C}], \quad \bar{y} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_0^w \\ \bar{f}^w \end{Bmatrix}.$$

Ponieważ odwrotna transformacja Fouriera wyrażenia (2.24) daje

$$(3.17) \quad \mathbf{V}(t) = -\mathbf{\Pi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Pi},$$

można więc z uwzględnieniem (2.18) napisać:

$$(3.18) \quad \mathbf{V}(t) + \mathbf{W}(t) = \sum_{k=1}^5 \mathbf{V}_k(t),$$

gdzie $\mathbf{W}(t) = \mathcal{F}^{-1}[\bar{\mathbf{W}}(\omega)]$ oznacza macierz, której jawna postać nie jest tu wykorzystywana, natomiast

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \mathbf{V}_1(t) &= -\mathbf{V}_{(-2)} \exp(-2j\omega_0 t), & \mathbf{V}_{(-2)} &= \check{\Pi}^T \mathbf{H} \check{\Pi}, \\ \mathbf{V}_2(t) &= -\mathbf{V}_{(-1)} \exp(-j\omega_0 t), & \mathbf{V}_{(-1)} &= \check{\Pi}^T \mathbf{H} \check{\Pi} + \check{\Pi} \mathbf{H} \check{\Pi}, \\ \mathbf{V}_3(t) &= -\mathbf{V}_{(0)} + \mathbf{W}(t), & \mathbf{V}_{(0)} &= \check{\Pi}^T \mathbf{H} \hat{\Pi} + \check{\Pi} \mathbf{H} \check{\Pi} + \hat{\Pi}^T \mathbf{H} \check{\Pi}, \\ \mathbf{V}_4(t) &= -\mathbf{V}_{(1)} \exp(j\omega_0 t), & \mathbf{V}_{(1)} &= \check{\Pi} \mathbf{H} \hat{\Pi} + \hat{\Pi}^T \mathbf{H} \check{\Pi}, \\ \mathbf{V}_5(t) &= -\mathbf{V}_{(2)} \exp(2j\omega_0 t), & \mathbf{V}_{(2)} &= \hat{\Pi}^T \mathbf{H} \hat{\Pi}. \end{aligned}$$

Wracając na płaszczyznę transformacji Fouriera mamy

$$(3.20) \quad \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}} = \sum_{k=1}^5 \bar{\mathbf{V}}_k.$$

Macierz $\bar{\mathbf{Y}}$ również przedstawiamy w postaci sumy

$$(3.21) \quad \bar{\mathbf{Y}} = \sum_{k=1}^5 \bar{\mathbf{Y}}_k,$$

gdzie $\bar{\mathbf{Y}}_k$ określone są relacjami

$$(3.22) \quad \bar{\mathbf{V}}_k \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{Y}}_k \bar{\mathbf{y}}$$

i wynoszą

$$(3.23) \quad \bar{\mathbf{Y}}_k = \bar{\mathbf{V}}_k (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \bar{\mathbf{Y}}, \quad k = 1, \dots, 5.$$

Otrzymujemy stąd dogodną do dalszych rozważań postać wyrażenia określającego macierz kolumnową transformat Fouriera reakcji w łożyskach:

$$(3.24) \quad \bar{\mathbf{f}} = \left[\sum_{k=1}^5 (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \bar{\mathbf{V}}_k (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \right] \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{y}}.$$

Po podstawieniu (3.24) do (3.6) otrzymuje się

$$(3.25) \quad \bar{\mathbf{w}}_{1x} = \bar{\mathbf{G}}_{1x}^w \bar{\mathbf{y}},$$

gdzie

$$(3.26) \quad \bar{\mathbf{G}}_{1x}^w = \bar{\mathbf{Z}}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_2 \left[\sum_{k=1}^5 (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \bar{\mathbf{V}}_k (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \right] \bar{\mathbf{Y}},$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 = \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & -\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_2 = \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}.$$

Rozpatrywany wektor stanu wyraża się w funkcji czasu zależnością

$$(3.27) \quad \mathbf{w}_{1x}(t) = \left[\mathbf{Z}_1(t) + \mathbf{Z}_2(t) * \left\{ \sum_{k=1}^5 [\mathbf{V}(t) + \mathbf{W}(t)]^{-1} * \mathbf{V}_k(t) * \right. \right. \\ \left. \left. * [\mathbf{V}(t) + \mathbf{W}(t)]^{-1} \right\} * \mathbf{Y}(t) \right] * \mathbf{y}(t),$$

zatem macierz korelacyjna tego wektora przyjmuje postać:

$$(3.28) \quad R_{1x}^{ww}(t_1, t_2) = \left[\mathbf{Z}_1(t_1) + \mathbf{Z}_2(t_1) * \left\{ \sum_{k=1}^5 [\mathbf{V}(t_1) + \mathbf{W}(t_1)]^{-1} * \mathbf{V}_k(t) * \right. \right. \\ * [\mathbf{V}(t_1) + \mathbf{W}(t_1)]^{-1} \left. \right\} * \mathbf{Y}(t_1) \right] * \mathbf{R}^{yy}(t_1 - t_2) * \left[\mathbf{Z}_1(t_2) + \mathbf{Z}_2(t_2) * \right. \\ \left. * \left\{ \sum_{k=1}^5 [\mathbf{V}(t_2) + \mathbf{W}(t_2)]^{-1} * \mathbf{V}_k(t_2) * [\mathbf{V}(t_2) + \mathbf{W}(t_2)]^{-1} \right\} * \mathbf{Y}(t_2) \right]^{*T},$$

gdzie:

$$R_{1x}^{ww}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} R_{1x}^{uu} & R_{1x}^{up} \\ R_{1x}^{pu} & R_{1x}^{pp} \end{bmatrix}_{12},$$

$$\begin{aligned} R_{1x}^{uu} &= [\varrho_{1x\alpha\beta}^{uu}(t_1, t_2)]_6, & R_{1x}^{up} &= [\varrho_{1x\alpha\beta}^{up}(t_1, t_2)]_6, & \alpha, \beta &= 1, \dots, 6, \\ R_{1x}^{pu} &= [\varrho_{1x\alpha\beta}^{pu}(t_1, t_2)]_6, & R_{1x}^{pp} &= [\varrho_{1x\alpha\beta}^{pp}(t_1, t_2)]_6, \\ \varrho_{1x\alpha\beta}^{uu}(t_1, t_2) &= \langle u_{1x\alpha}(t_1) u_{1x\beta}^*(t_2) \rangle, & \varrho_{1x\alpha\beta}^{up}(t_1, t_2) &= \langle u_{1x\alpha}(t_1) p_{1x\beta}^*(t_2) \rangle, \\ \varrho_{1x\alpha\beta}^{pu}(t_1, t_2) &= \langle p_{1x\alpha}(t_1) u_{1x\beta}^*(t_2) \rangle, & \varrho_{1x\alpha\beta}^{pp}(t_1, t_2) &= \langle p_{1x\alpha}(t_1) p_{1x\beta}^*(t_2) \rangle \end{aligned}$$

W celu uniknięcia wykonywania operacji (3.12) na wyrażeniu (3.28) skorzystamy z twierdzenia, że jeśli funkcja $\gamma(\omega_1, \omega_2)$, uzyskana w wyniku podwójnej transformacji Fouriera funkcji korelacyjnej $\varrho(t_1, t_2)$

$$(3.29) \quad \gamma(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(t_1, t_2) e^{-j(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

jest sumą funkcji regularnych oraz osobliwych funkcji odpowiadających przypadkowi $\omega_1 = \omega_2$, to uśredniona gęstość widmowa mocy $\bar{\gamma}(\omega)$ obejmuje jedynie funkcje osobliwe [4]. W wyniku zastosowania transformacji (3.29) do wyrażenia (3.28) otrzymuje się:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} F_{1x}^{wv}(\omega_1, \omega_2) &= [\bar{Z}_1(\omega_1) + \bar{Z}_2(\omega_1) \left\{ \sum_{k=1}^5 [\bar{V}(\omega_1) + \bar{W}(\omega_1)]^{-1} \bar{V}_k(\omega_1) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [\bar{V}(\omega_1) + \bar{W}(\omega_1)]^{-1} \bar{Y}(\omega_1) \right\} \Gamma^{yy}(\omega_1) 2\pi\delta(\omega_2 - \omega_1) [\bar{Z}_1^*(\omega_2) + \\ &\quad \left. + \bar{Z}_2^*(\omega_2) \left\{ \sum_{k=1}^5 [\bar{V}^*(\omega_2) + \bar{W}^*(\omega_2)]^{-1} \bar{V}_k^*(\omega_2) [\bar{V}^*(\omega_2) + \bar{W}^*(\omega_2)]^{-1} \bar{Y}^*(\omega_2) \right\}^T \right]^T, \end{aligned}$$

przy czym zgodnie (3.19) i (3.20) zachodzą zależności:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \bar{V}(\omega_1) + \bar{W}(\omega_1) &= \sum_{k=1}^5 \bar{V}_k(\omega_1), \\ \bar{V}_1(\omega_1) &= -[\check{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_1 + 2\omega_0), \\ \bar{V}_2(\omega_1) &= -[\check{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi} + \check{\Pi} \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_1 + \omega_0), \\ \bar{V}_3(\omega_1) &= -\check{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \hat{\Pi} - \check{\Pi} \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi} - \hat{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi} + \bar{W}(\omega_1), \\ \bar{V}_4(\omega_1) &= -[\check{\Pi} \bar{H}(\omega_1) \hat{\Pi} + \hat{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_1 - \omega_0), \\ \bar{V}_5(\omega_1) &= -[\hat{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \hat{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_1 - 2\omega_0), \end{aligned}$$

δ — dystrybucja Diraca.

Ponieważ $\Pi^* = \Pi$, czyli $V^*(t) = -\Pi^T H^* \Pi$, więc w zależności (3.30) mamy:

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \bar{V}^*(\omega_2) + \bar{W}^*(\omega_2) &= \sum_{k=1}^5 \bar{V}_k^*(\omega_2), \\ \bar{V}_1^*(\omega_2) &= -[\check{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_2 - 2\omega_0), \\ \bar{V}_2^*(\omega_2) &= -[\check{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi} + \check{\Pi} \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_2 - \omega_0), \\ \bar{V}_3^*(\omega_2) &= -\check{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \hat{\Pi} - \check{\Pi} \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi} - \hat{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi} + \bar{W}^*(\omega_2), \\ \bar{V}_4^*(\omega_2) &= -[\check{\Pi} \bar{H}^*(\omega_2) \hat{\Pi} + \hat{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_2 + \omega_0), \\ \bar{V}_5^*(\omega_2) &= -[\hat{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \hat{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_2 + 2\omega_0). \end{aligned}$$

Zachowując w zależności (3.30) jedynie człony istniejące przy $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ oraz uwzględniając, że $\hat{\Pi}^* = \hat{\Pi}$, otrzymuje się macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy procesów zachodzących w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego w postaci

$$(3.33) \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{ww}(\omega) = \mathbf{P}_{(-2)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(-2)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(-1)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(-1)}^{*T}(\omega) + \\ + \mathbf{P}_{(0)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(0)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(1)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(1)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(2)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(2)}^{*T}(\omega),$$

gdzie: $\Gamma^{yy}(\omega)$ — macierz gęstości widmowych mocy procesu (3.1),

$$\bar{\Gamma}_{1x}^{ww}(\omega) = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{1x}^{uu} & \bar{\Gamma}_{1x}^{up} \\ \bar{\Gamma}_{1x}^{pu} & \bar{\Gamma}_{1x}^{pp} \end{bmatrix}_{12}, \\ \bar{\Gamma}_{1x}^{uu} = [\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}^{uu}(\omega)]_6, \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{up} = [\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}^{up}(\omega)]_6, \\ \bar{\Gamma}_{1x}^{pu} = [\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}^{pu}(\omega)]_6, \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{pp} = [\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}^{pp}(\omega)]_6, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6, \\ (3.34) \quad \mathbf{P}_{(-2)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \check{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega + 2\omega_0) \check{\Pi}]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega), \\ \mathbf{P}_{(-1)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \check{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega + \omega_0) \check{\Pi} - \check{\Pi} \bar{\mathbf{H}}(\omega + \omega_0) \check{\Pi}]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega), \\ \mathbf{P}_{(0)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_1(\omega) + \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \check{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega) \hat{\Pi} - \check{\Pi} \bar{\mathbf{H}}(\omega) \check{\Pi} - \hat{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega) \check{\Pi} + \bar{\mathbf{W}}(\omega)]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega), \\ \mathbf{P}_{(1)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \hat{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega - \omega_0) \check{\Pi} - \check{\Pi} \bar{\mathbf{H}}(\omega - \omega_0) \check{\Pi}]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega), \\ \mathbf{P}_{(2)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \hat{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega - 2\omega_0) \hat{\Pi}]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega).$$

Odwrotna transformacja Fouriera wyznaczonych w ten sposób uśrednionych gęstości widmowych mocy $\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}(\omega)$ daje uśrednione funkcje korelacyjne

$$(3.35) \quad \bar{q}_{1x\alpha\beta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Macierz $\bar{\Gamma}_{1x}^{ww}$ (3.33) powstaje z wszystkich macierzy składowych macierzy funkcji przenoszenia $\bar{\mathbf{G}}_{1x}^w$ (3.26), lecz w odróżnieniu od macierzy Γ_{1x}^{ww} (3.30) nie zawiera iloczynów, w których równocześnie występują macierze transformacji Fouriera zmodulowanych impulsowych funkcji przejścia konstrukcji podpierającej linię wałów o różnych głębokościach modulacji i różnych kierunkach przesunięcia widm. Wynika stąd prosta reguła tworzenia macierzy uśrednionych gęstości widmowych mocy reakcji tego typu układów na stacjonarne wymuszenia losowe:

— dla wszystkich składowych członów macierzy funkcji przenoszenia różniących się modulacją należy oddzielnie wyznaczyć macierze gęstości widmowych mocy i wyniki zsumować.

Biorąc pod uwagę zależności (3.14) i (3.34) można napisać wyrażenie na macierz uśrednionych skrośnych gęstości widmowych mocy procesów zachodzących w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego i procesów wymuszających⁴⁾:

$$(3.36) \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{wy}(\omega) = \mathbf{P}_{(0)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega),$$

gdzie:

$$\bar{\Gamma}_{1x}^{wy}(\omega) = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{1x}^{uy} \\ \bar{\Gamma}_{1x}^{py} \end{bmatrix}_{12 \times N},$$

⁴⁾ Wyrażenie to może również służyć do wyznaczenia macierzy $\mathbf{P}_{(0)}(\omega)$, gdy znane są macierze Γ^{yy} i $\bar{\Gamma}_{1x}^{wy}$ (lub Γ^{yy} i $\bar{\Gamma}_{1x}^{uy}$).

$$\begin{aligned} \bar{T}_{1x}^{uy} &= [\bar{\gamma}_{1x\alpha n}^{yy}(\omega)]_{6 \times N}, & \bar{T}_{1x}^{py} &= [\bar{\gamma}_{1x\alpha n}^{py}(\omega)]_{6 \times N}, \\ \alpha &= 1, \dots, 6, & n &= 1, \dots, N, & N &= 6(l+1). \end{aligned}$$

Macierz $\bar{G}_{1x}^w(\omega) = \mathbf{P}_{(0)}(\omega)$ można nazwać macierzą uśrednionych funkcji przenoszenia, stanowiących transformaty Fouriera względem czasu uśrednionych impulsowych funkcji przejścia analizowanego układu, określonych dla wektora stanu w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego przy wymuszeniach pochodzących od śruby okrętowej i od silnika.

Dla każdego innego przekroju x' pierwszego odcinka wału śrubowego można wykorzystać wyznaczone zgodnie z (3.33) i (3.36) macierze $\bar{T}_{1x'}^{ww}$ i $\bar{T}_{1x'}^{wy}$, gdyż na podstawie (2.4), (2.5) i (3.25) otrzymuje się:

$$(3.37) \quad \bar{w}_{1x'} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1x'} \\ \bar{p}_{1x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1x'} \\ A_{1x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix}^{-1} \bar{G}_{1x}^w \bar{y},$$

$$(3.38) \quad \bar{T}_{1x'}^{ww}(\omega) = \begin{bmatrix} C_{1x'} \\ A_{1x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix}^{-1} \bar{T}_{1x}^{ww}(\omega) \left(\begin{bmatrix} C_{1x'} \\ A_{1x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix}^{-1} \right)^{*T},$$

$$(3.39) \quad \bar{T}_{1x'}^{wy}(\omega) = \begin{bmatrix} C_{1x'} \\ A_{1x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix}^{-1} \bar{T}_{1x}^{wy}(\omega).$$

Analogicznie można wyznaczyć macierze uśrednionych gęstości widmowych mocy wektorów stanu (przemieszczeń lub sił wewnętrznych) w dowolnych przekrojach pozostałych odcinków wałów bądź macierze uśrednionych gęstości widmowych mocy przemieszczeń elementów skończonych dowolnych podukładów wału korbowego oraz macierze uśrednionych skrośnych gęstości widmowych mocy dla tych przekrojów i podukładów.

Ad. II. W przypadku, gdy funkcje korelacyjne (3.3) spełniają warunek (3.5), wyznaczyć można macierz widm średniej energii wzajemnej procesów (3.1)

$$\Psi^{yy}(\omega) = [\xi_{n_1 n_2}^{yy}(\omega)]_N, \quad n_1, n_2 = 1, \dots, N.$$

Widma $\xi_{n_1 n_2}^{yy}(\omega)$ średniej energii wzajemnej procesów $y_{n_1}(t)$ i $y_{n_2}(t)$ wynoszą [4]:

$$(3.40) \quad \xi_{n_1 n_2}^{yy}(\omega) = \gamma_{n_1 n_2}^{yy}(\omega, \omega),$$

przy czym $\gamma_{n_1 n_2}^{yy}(\omega_1, \omega_2)$ jest podwójną transformatą Fouriera (3.29) funkcji korelacyjnej $\varrho_{n_1 n_2}^{yy}(t_1, t_2)$. Podając zatem wyrażenie

$$(3.41) \quad R_{1x}^{ww}(t_1, t_2) = G_{1x}^w(t_1) * R^{yy}(t_1, t_2) * [G_{2x}^w(t_2)]^{*T}$$

podwójnej transformacji Fouriera i uwzględniając zależność (3.40) otrzymuje się wyrażenie określające macierz widm średniej energii wzajemnej losowych procesów w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego

$$(3.42) \quad \Psi_{1x}^{ww}(\omega) = \bar{G}_{1x}^w(\omega) \Psi^{yy}(\omega) [\bar{G}_{1x}^w(\omega)]^{*T} + \mathbf{P}_{(1)}(\omega) \Psi^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(1)}^{*T}(\omega) + \\ + \mathbf{P}_{(-1)}(\omega) \Psi^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(-1)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(2)}(\omega) \Psi^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(2)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(-2)}(\omega) \Psi^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(-2)}^{*T}(\omega),$$

gdzie:

$$\Psi_{1x}^{ww}(\omega) = \begin{bmatrix} \Psi_{1x}^{uu} & \Psi_{1x}^{up} \\ \Psi_{1x}^{pu} & \Psi_{1x}^{pp} \end{bmatrix}_{12},$$

$$\Psi_{1x}^{uu} = [\xi_{1x\alpha\beta}^{uu}(\omega)]_6, \quad \Psi_{1x}^{up} = [\xi_{1x\alpha\beta}^{up}(\omega)]_6,$$

$$\Psi_{1x}^{pu} = [\xi_{1x\alpha\beta}^{pu}(\omega)]_6, \quad \Psi_{1x}^{pp} = [\xi_{1x\alpha\beta}^{pp}(\omega)]_6, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6.$$

Wykorzystując macierz uśrednionych funkcji przenoszenia \bar{G}_{1x}^w , można określić macierz widm średniej energii wzajemnej losowych procesów w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego i losowych wymuszeń

$$(3.43) \quad \Psi_{1x}^{wy}(\omega) = \bar{G}_{1x}^w(\omega) \Psi^{yy}(\omega),$$

gdzie:

$$\Psi_{1x}^{wy}(\omega) = \begin{bmatrix} \Psi_{1x}^{wy} \\ \Psi_{1x}^{py} \end{bmatrix}_{12 \times N},$$

$$\Psi_{1x}^{wy} = [\xi_{1x\alpha n}^{wy}(\omega)]_{6 \times N}, \quad \Psi_{1x}^{py} = [\xi_{1x\alpha n}^{py}(\omega)]_{6 \times N}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad n = 1, \dots, N.$$

Ad. III. W przypadku I funkcje korelacyjne procesów wyjściowych nie spełniają warunku (3.5). Uwzględnienie, że funkcje korelacyjne (3.3) procesów wymuszających również nie są bezwzględnie całkowalne na płaszczyźnie t_1, t_2 , prowadzi do analogicznych zależności, jak dla przypadku I. Macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy losowych procesów w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego oraz macierz uśrednionych skrośnych gęstości widmowych mocy losowych procesów w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego i losowych wymuszeń wyrażają się następująco:

$$(3.44) \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{ww}(\omega) = \bar{G}_{1x}^w(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) [\bar{G}_{1x}^w(\omega)^*{}^T + \mathbf{P}_{(1)}(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(1)}^*{}^T(\omega) + \\ + \mathbf{P}_{(-1)}(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(-1)}^*{}^T(\omega) + \mathbf{P}_{(2)}(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(2)}^*{}^T(\omega) + \mathbf{P}_{(-2)}(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(-2)}^*{}^T(\omega)],$$

$$(3.45) \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{wy}(\omega) = \bar{G}_{1x}^w(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega)$$

Macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy procesów wymuszających

$$\bar{\Gamma}^{yy}(\omega) = [\bar{\gamma}_{n_1 n_2}^{yy}(\omega)]_N, \quad n_1, n_2 = 1, \dots, N$$

otrzymuje się w wyniku dokonania podwójnej transformacji Fouriera na elementach macierzy korelacyjnej (3.2) i zachowania członów osobliwych (istniejących przy $\omega_1 = \omega_2$), bądź przez poddanie tych elementów operacji (3.12) i pojedynczej transformacji Fouriera.

Dla zilustrowania przypadku tego typu procesów, wymuszenia od śruby okrętowej i od silnika przedstawimy w postaci zespolonej:

$$(3.46) \quad \check{f}_x^w = \sum_{\nu} \check{f}_{0\alpha}^{w(\nu)} \exp(j\nu\omega_0 t), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \\ (\check{f}_\alpha^w)_k = \sum_{\nu} (\check{f}_\alpha^{w(\nu)})_k \exp(j\nu\omega_0 t), \quad k = 1, \dots, l, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \alpha = 1, \dots, 6.$$

Przy występowaniu losowych oddziaływań zespolone amplitudy harmoniczných wymuszeń stają się zmiennymi losowymi, które mogą być przedstawione w postaci:

$$(3.47) \quad \check{f}_{0\alpha}^{w(\nu)} = \langle \check{f}_{0\alpha}^{w(\nu)} \rangle + f_{0\alpha}^{w(\nu)}, \\ (\check{f}_\alpha^{w(\nu)})_k = \langle (\check{f}_\alpha^{w(\nu)})_k \rangle + (f_\alpha^{w(\nu)})_k,$$

gdzie:

$\langle \check{f}_{0\alpha}^{w(\nu)} \rangle, \langle (\check{f}_\alpha^{w(\nu)})_k \rangle$ wartości oczekiwane,
 $f_{0\alpha}^{w(\nu)}, (f_\alpha^{w(\nu)})_k$ zmienne losowe o wartościach oczekiwanych równych zeru.

Wartości oczekiwane parametrów drgań linii wałów mogą być wyznaczone jak w pracach [2], [3]. Poniżej rozpatrzono oddziaływanie procesów stochastycznych

$$(3.48) \quad \begin{aligned} f_{0\alpha}^w &= \sum_{\nu} f_{0\alpha}^{w(\nu)} \exp(j\nu\omega_0 t), \\ (f_{\alpha}^w)_k &= \sum_{\nu} (f_{\alpha}^{w(\nu)})_k \exp(j\nu\omega_0 t). \end{aligned}$$

Tworzymy procesy wektorowe:

$$(3.49) \quad \begin{aligned} f_0^w &= \{f_{0\alpha}^w\}, \quad f^w = \{(f^w)_k\}, \quad (f^w)_k = \{(f_{\alpha}^w)_k\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad k = 1, \dots, l, \\ \mathbf{y} = \{f_0^w, f^w\} &= \{y_n\}, \quad y_n = \sum_{\nu} y_n^{(\nu)} \exp(j\nu\omega_0 t), \\ \nu &= 0, 1, 2, \dots, \quad \kappa = 1, \dots, N \end{aligned}$$

i macierz korelacyjną

$$(3.50) \quad R^{yy}(t_1, t_2) = [\varrho_{n_1 n_2}^{y_1 y_2}(t_1, t_2)]_N, \quad \kappa_1, \kappa_2 = 1, \dots, N,$$

gdzie:

$$(3.51) \quad \varrho_{n_1 n_2}^{y_1 y_2}(t_1, t_2) = \sum_{\nu_1} \sum_{\nu_2} \varrho_{n_1 n_2}^{\nu_1 \nu_2} \exp[j\omega_0(\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2)],$$

$$(3.52) \quad \varrho_{n_1 n_2}^{\nu_1 \nu_2} = \langle y_{n_1}^{(\nu_1)} (y_{n_2}^{(\nu_2)})^* \rangle, \quad \nu_1, \nu_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Macierz (3.50) może być przedstawiona w postaci sumy macierzy:

$$(3.53) \quad \begin{aligned} R^{yy}(t_1, t_2) &= [\varrho_{n_1 n_2}^{00}] + [\varrho_{n_1 n_2}^{10}] \exp(j\omega_0 t_1) + [\varrho_{n_1 n_2}^{01}] \exp(-j\omega_0 t_2) + \\ &+ [\varrho_{n_1 n_2}^{11}] \exp[j\omega_0(t_1 - t_2)] + [\varrho_{n_1 n_2}^{20}] \exp(2j\omega_0 t_1) + [\varrho_{n_1 n_2}^{02}] \exp(-2j\omega_0 t_2) + \\ &+ [\varrho_{n_1 n_2}^{21}] \exp[j\omega_0(2t_1 - t_2)] + [\varrho_{n_1 n_2}^{12}] \exp[j\omega_0(t_1 - 2t_2)] + [\varrho_{n_1 n_2}^{22}] \exp[2j\omega_0(t_1 - t_2)] + \dots, \end{aligned}$$

skąd w wyniku podwójnej transformacji Fouriera otrzymuje się

$$(3.54) \quad \begin{aligned} \Gamma^{yy}(\omega_1, \omega_2) &= (2\pi)^2 \{ [\varrho_{n_1 n_2}^{00}] \delta(\omega_1) \delta(\omega_2) + [\varrho_{n_1 n_2}^{10}] \delta(\omega_1 - \omega_0) \delta(\omega_2) + \\ &+ [\varrho_{n_1 n_2}^{01}] \delta(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_0) + [\varrho_{n_1 n_2}^{11}] \delta(\omega_1 - \omega_0) \delta(\omega_2 - \omega_0) + \dots \}. \end{aligned}$$

Macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy procesów wymuszających (3.48) stanowi zatem ciąg impulsów rozłożonych w punktach $\omega = 0, \omega_0, 2\omega_0, \dots$:

$$(3.55) \quad \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) = 2\pi \{ [\varrho_{n_1 n_2}^{00}] \delta(\omega) + [\varrho_{n_1 n_2}^{11}] \delta(\omega - \omega_0) + [\varrho_{n_1 n_2}^{22}] \delta(\omega - 2\omega_0) + \dots \}$$

i równa się macierzy gęstości widmowych mocy procesów (3.48) w przypadku, gdy amplitudy harmonicznych tych wymuszeń są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi:

$$(3.56) \quad \bigwedge_{n_1} \bigwedge_{n_2} \varrho_{n_1 n_2}^{\nu_1 \nu_2} = 0, \quad \nu_1 \neq \nu_2.$$

Macierze uśrednionych gęstości widmowych mocy $\bar{\Gamma}_{1x}^{yy}(\omega)$ i uśrednionych skrośnych gęstości widmowych mocy $\bar{\Gamma}_{1x}^{wy}(\omega)$ stanowią zgodnie z (3.44) i (3.45) również ciągi impulsów, różniące się amplitudami tych impulsów.

4. Uwagi końcowe

Zależności wyznaczone w niniejszej pracy oraz w [2], [3] i [5] umożliwiają dokładniejszą analizę drgań linii wałów z kołowo asymetrycznymi odcinkami w porównaniu z dotychczasowymi metodami. W szczególności mogą być one wykorzystane do obliczeń drgań linii wałów zawierających wały korbowe, a częściowo także w problemach dynamiki i statyki belek wielopodporowych. Znaczenie rozpatrywanych zagadnień wynika z roli tego typu układów w praktyce.

Uzyskane wyniki mogą być przydatne w dalszych pracach, których główne kierunki winny dotyczyć m.in. optymalnej syntezy, a także doskonalenia metod praktycznej realizacji procesów identyfikacji dynamicznych własności rozpatrywanych układów.

Literatura cytowana w tekście

1. K. SOB CZYK, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa 1973.
2. J. KOLENDA, *Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów. Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów linii wałów*, W Redakcji Mech. Teoret. i Stos.
3. J. KOLENDA, *Uściślony opis drgań wymuszonych linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów*, Mech. Teor. i Stos., 17, 1, 1979.
4. A. PAPOULIS, *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa 1972.
5. J. KOLENDA, *Metoda analizy drgań linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów przy wymuszeniach nieokresowych*, Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej, „Budownictwo Okrętowe”, w druku.

Резюме

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛОПРОВОДОВ С УЧЕТОМ АСИММЕТРИИ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ И ПОДАТЛИВОСТИ ФУНДАМЕНТОВ

Работа касается случайных колебаний валопроводов, являющихся вместе с упругими фундаментами линейными и зависящими от времени системами с распределенными параметрами. Указывается, что при стационарных случайных возмущениях стохастические процессы, происходящие в валопроводе с асимметрией изгибной жесткости, являются вследствие ротации валопровода на упругом фундаменте периодически стационарными в широком смысле. Матрицы усредненных спектральных плотностей этих процессов содержат трансформаты Фурье модулированных импульсных функции ответа фундамента. Определяется матрица усредненных передаточных функций, которая используется для получения матрицы усредненных взаимных спектральных плотностей выходных процессов в анализируемом сечении валопровода и входных процессов. Рассматривается случай нестационарных случайных возмущений при предположении, что угловая скорость валопровода может считаться постоянной.

Summary

RANDOM VIBRATIONS OF SHAFTINGS WITH FLEXURAL RIGIDITY ASYMMETRY ON FLEXIBLE FOUNDATIONS

The paper deals with random vibrations of shaftings constituting together with flexible foundations the linear and time-dependent continua. It is shown that at stationary random excitations the stochastic processes in the shaftings with flexural rigidity asymmetry are periodically stationary in wide sense due to

rotation of shafts on flexible foundations. The matrices of averaged power spectral densities of these processes contain Fourier transforms of the modulated impulse responses of a foundation. The matrix of averaged transfer functions is defined and used to determine the averaged cross power spectral densities of output processes at the analysed shafting point and of input processes. The case of nonstationary random excitations is considered under the assumption that a rotating speed of the shafting can be treated as a constant value.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT OKRĘTOWY

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 maja 1978 r.

I U L E T Y N I N F O R M A C Y J N Y

100 KOŁOKWIUM EUROMECHU PT. MATEMATYCZNA TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I 21 SYMPOZJUM TOWARZYSTWA FILOZOFII NATURALNEJ

Przypadek chyba zrzucił, że setne kolokwium Euromechu odbyło się w Pizie — mieście, w którym żył, i przeprowadzał swoje słynne doświadczenia z mechaniki — jeden z największych uczonych Średowiecza, Galileo Galileusz. Obie, wymienione w tytule, imprezy odbyły się w „Domu Galileusza”, w budynku, w którym przechowywane są rękopisy Galileusza oraz zbiór książek z całego świata poświęconego życiu i działalności.

W Kolokwium, które odbyło się w dniach 15 - 17 maja 1978 wzięło udział około 60 uczestników krajów (USA, I, Pl, GB, Irl, F, E, D i Ch), w tym duża grupa wybitnych mechaników amerykańskich. Kolokwium poświęcone było zagadnieniom istnienia w nieliniowej teorii sprężystości, homogenizacji, odom teorii grup, niezmienniczym rozwiązaniom zagadnienia de Saint-Venanta, zagadnieniem stateczności, termicznym i falowym. Organizatorami byli profesorowie G. Capriz i T. Manacorda z Pizy oraz I. Knops z Uniwersytetu Heriota-Watta w Edynburgu. Wygłoszone zostały następujące jednogodzinne referaty generalne (w kolejności chronologicznej): R. J. Knops: Jamy potencjału i stateczność w zagadnieniu teorii sprężystości skończonych odkształceń,

Fichera (Rzym): Zagadnienie de Saint-Venanta,

Dafermos (Brown, USA): Stateczność i drugie prawo termodynamiki,

A. Ball (Edynburg): Analityczne konsekwencje nierówności konstytutywnych w teorii sprężystości skończonych odkształceń,

Hayes (Dublin): Prędkość grupowa i strumień energii dla fal sprężystych,

Navarro (Barcelona): Krótki przegląd teorii półgrup i jej zastosowań.

W ramach Kolokwium, wygłoszono 17 referatów półgodzinnych, w tym dwa polskie: prof.

Wojniaka i niżej podpisanego. Subiektywnie wyróżniłbym referat młodej Francuzki M. Schatzman: „Klasie zagadnień hiperbolicznych z jednostronnymi więzami; drgająca struna uderzająca o przegrodę”, z H. J. Weinitschke: „O istnieniu rozwiązań nieliniowych zagadnień brzegowych w teorii blon”. W pierwszym z wymienionych referatów autorka, stosując aparat analizy funkcjonalnej i teorii dystrybucji, zbadała istnienie szerokiej klasy problemów i uzyskała efektywne wyniki liczbowe dla niebanalnego zagadnienia. Rozwiązanie zagadnienia w sposób zasadniczy zależy od tego, czy przeszkoda jest wypukła, też wklęsła, zbadano również kiedy ruch może być okresowy. W drugim z wymienionych referatów użyto, stosunkowo prostymi metodami, obszary w których rozwiązanie istnieje dokładnie jedno, co najmniej jedno, lub nie istnieje, rozpatrzone zostały membrany kołowe i pierścieniowe.

Obrady Kolokwium zakończył specjalny wykład profesora C. A. Truesdella pt.: Koncepcyjny zarys dynamiki dla studentów mechaniki.

W dniach 18 - 20 maja, w tym samym miejscu odbyło się sympozjum — zebranie Towarzystwa Filozofii Naturalnej poświęcone zagadnieniom niesprężystego zachowania się kontinuu. Uczestniczyli w nim, oprócz innych wybitni mechanicy amerykańscy: C. A. Truesdell, B. D. Coleman, D. R. Owen, M. E. Gurtin, R. A. Toupin. Sesja przedpołudniowa pierwszego dnia obrad dotyczyła zagadnień mechaniki doświadczalnej i osiągnięć J. B. Bella w tej dziedzinie. Referaty poświęcone jego osobie i działalności naukowej wygłoszili C. A. Truesdell oraz G. del Piero (Reggio di Calabria, w zastępstwie chorego P. Villaggia). Referat przeglądowy na podstawie prac własnych pt. „Fizyczne podstawy kontynualnych teorii plastyczności skończonych odkształceń” wygłosił prof. J. B. Bell. Odbyły się trzy dyskusje „okrągłego stołu”. Pierwszej przewodniczył M. E. Gurtin, a podstawą do dyskusji były 3 referaty, pani H. Lanchon (Nancy, Francja): Skręcanie niejednorodnych (heterogenicznych) prętów walcowych, B. D. Colemana (Pittsburg): O termodynamice układów nieliniowych i D. R. Owena (Pittsburg): O entropii materiałów niesprężystych.

Drugą dyskusję prowadził P. Podio Guidugli (Piza), a podstawą jej były referaty: M. E. Gurtina: Optymalne drogi odkształcenia w liniowej lepko-sprężystości, P. Potier-Ferry'ego (Paryż): Twierdzenie o istnieniu i stateczności w lepko-sprężystości odkształceń skończonych, oraz S. L. Passmana (Atlanta, USA): Przepływy materiałów ziarnistych. Trzecią sesję „okrągłego stołu” prowadził B. D. Coleman na podstawie referatów wprowadzających: S. Barathy (Hamilton, Kanada): Lokalne twierdzenia o istnieniu w przypadku elastostatyki odkształceń skończonych, C. Navarry (Barcelona): O monotoniczności i symetrii funkcji relaksacji w liniowej lepko-sprężystości, G. Galdiego i S. Rionery (Neapol): O twierdzeniu o ciągłej zależności i ograniczeniach rozwiązań zagadnień elastostatyki, oraz S. Antmana (Maryland, USA): Duże, wędrujące fale w prętach.

Oprócz powyższych referatów moderujących dyskusje wymienię referaty G. del Piery (Reggio di Calabria): Zachowanie się materiałów sprężysto plastycznych w świetle teorii prostych materiałów Nolla, Z. Zarki (Palaiseau, Francja): Globalne cykliczne zachowanie się konstrukcji, T. W. Tinga (Chicago): Zagadnienie odciążenia w znacznie skreślonych prętach, oraz I. Müllera (Paderborn, RFN): Model materiału z pamięcią kształtu. Konferencja zakończyła się wykładem R. A. Toupina: O hamiltonowskich i onsagerowskich układach dynamicznych.

Obie konferencje były bardzo interesujące, dyskusje często ostre, dowcipne, lecz dotyczące spraw podstawowych, a nie marginesowych. Warunki do pracy w Pizie, w spokojnym mieście, z dala od wielkomiejskiego zgiełku, były znakomite, a gościnność gospodarzy — rzadko spotykana.

Po przejeździe do Pizy dowiedzieliśmy się, że zaraz po omawianych dwóch imprezach ma się jeszcze odbyć, w Wenecji w dniach 23 - 26 maja 1978, sympozjum włosko-amerykańskie zorganizowane przez National Science Foundation i Consiglio Nazionale. Program przewidywał wygłoszenie 23 jedno-godzinnnych referatów. Tytuł sympozjum „Nieliniowa mechanika kontinuum”.

Również podano do wiadomości, że bezpośrednio przed Międzynarodowym Kongresem Matematyki w Helsinkach odbędzie się, w dniach 7 - 9 sierpnia 1978, w Edynburgu, sympozjum na temat analizy nieliniowej i jej zastosowań. Organizował je Dr R. G. Muncaster z Uniwersytetu Heriota-Watta.

Z. Olesiak

IV KONFERENCJA „METODY KOMPUTEROWE W MECHANICE KONSTRUKCJI”, KOSZALIN 25—28 KWIETNIA 1979 r.

Konferencja będzie miała charakter naukowo-szkoleniowy. Przedmiotem konferencji będzie przegląd aktualnych osiągnięć z zakresu teorii i zastosowań metod komputerowych w szeroko pojętej mechanice konstrukcji. Przewiduje się, że konferencja składać się będzie z dwóch części: ogólnej i problemowej. Część ogólna poświęcona będzie prezentacji i dyskusji referatów indywidualnych uczestników. Część problemową stanowić będą referaty wygłoszone przez zaproszonych specjalistów z różnych ośrodków naukowych.

Konferencję organizuje Sekcja Mechaniki Konstrukcji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Instytut Budownictwa WSI w Koszalinie i Oddział Wojewódzki NOT w Koszalinie.

Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego Konferencji jest doc. dr inż. Jan Filipkowski, Wyższa Szkoła Inżynierska, Zakład Mechaniki Budowli, ul. Raclawicka 15 - 17, 75 - 620 Koszalin, tel. 278-81 w. 272.

MIĘDZYNARODOWE SYMPOZJUM „MECHANIKA POWSTAWANIA DŹWIĘKU W PRZEPŁYWACH”

W Getyndze, w dniach 28 - 31 sierpnia 1979 r. odbędzie się sympozjum międzynarodowe pt. „Mechanika powstawania dźwięku w przepływach” (The mechanics of sound generation in flows). Sympozjum jest organizowane przez Międzynarodową Unię Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM), International

Commission on Acoustics (ICA), oraz przez American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA). Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego jest prof. E. A. Müller, Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Böttingerstr. 4 - 8, D 3400 Göttingen.

15 KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ (IUTAM)

odbędzie się w dniach 18 - 23 sierpnia 1980 r. w Toronto, University of Toronto, Ontario, Canada. Kongres obejmie całą dziedzinę mechaniki teoretycznej i stosowanej. Streszczenia (Abstract, 100 - 150 słów) oraz rozszerzone streszczenia (Extended Summary, 500 słów) należy przysyłać na adres Biura Kongresu:

Mr. Ken Charbonneau
Executive Secretary, ICTAM Toronto
National Research Council
Ottawa, Ontario K1A 0R6, Canada

Zarówno streszczenia jak i rozszerzone streszczenia powinny dotrzeć do Biura Kongresu nie później niż 4 lutego 1980 r. Powinny one zawierać dokładne wskazówki dotyczące otrzymanych nowych wyników naukowych, zastosowanej metody i związków z innymi pracami. Międzynarodowy Komitet wybierze z spośród nadesłanych streszczeń około 300 prac oraz 15 referatów sekcyjnych. Ponadto, na zaproszenie, zostanie przedstawionych dalszych 15 referatów sekcyjnych i 5 wykładów generalnych. Planuje się wydanie tomu zawierającego wykłady generalne i referaty sekcyjne. Osoby mające zamiar uczestniczyć w pracach Kongresu są proszone o podanie swoich nazwisk i adresów, celem przesłania dalszych informacji i formularzy rejestracyjnych.

VIII SYMPOZJUM „DRGANIA W UKŁADACH FIZYCZNYCH”

W dniach 18 - 20 maja 1978 r., w Błażejewku k/Kórniku, odbyło się VIII Sympozjum nt. „Drgania w układach fizycznych”. Organizatorami Sympozjum był Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej oraz Instytut Mechaniki Technicznej Politechniki Poznańskiej. 116 uczestników spotkania, wśród których przeważali pracownicy wyższych uczelni i placówek PAN, obradowało w trzech sekcjach:

1. Modele ciągle obiektów mechanicznych — wygłoszono 31 referatów,
2. Modele dyskretne obiektów mechanicznych — wygłoszono 21 referatów,
3. Drgania maszyn — wygłoszono 23 referaty.

Ponadto wygłoszone zostały trzy referaty plenarne:

1. Prof. dr M. Dietrich „Problemy stochastyczne w mechanice maszyn”,
2. Prof. dr C. Cempel „Wibroakustyczna diagnostyka maszyn”,
3. Prof. dr Z. Wesołowski „Fale w nieliniowym materiale sprężystym”.

Łącznie wygłoszono 78 referatów. Drukiem wydano zbiór streszczeń referatów. Następne sympozjum o tej samej tematyce planowane jest na wiosnę 1980 r.

Jarosław Stefaniak,

SYMPOZJA MIĘDZYNARODOWEJ UNII MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ (IUTAM)

Poprzednią informację w tej sprawie zamieściliśmy w numerze 2 (15), 1977 Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

rok 1979

1. The IUTAM Symposium on Physics of Ice,
miejsce: Kopenhaga, Dania
termin: 6—10 sierpnia, 1979,

- organizator: prof. P. Tryde, Technical University of Denmark
DK-2800 Lyngby,
2. The IUTAM(ICA)AIAA Symposium on Sound Generation in Flows,
miejsce: Getynga, RFN
termin: 23—28 sierpnia 1979
organizator: prof. E.A. Müller,
 3. The IUTAM Symposium on Optical Methods in Solid Mechanics,
miejsce: Poitiers, Francja
termin: 10—14 września 1979
organizator: prof. A. Lagarde, Laboratoire de Mécanique des Solides, Université de Poitiers, 40
Avenue de Recteur-Pineau, F-86022,
 4. The IUTAM Symposium on Approximation Methods for Navier-Stokes Problems,
miejsce: Paderborn, RFN
termin: sierpień/wrzesień 1979
organizator: prof. H. Rautmann,
 5. The IUTAM Symposium on Structural Control,
miejsce: Waterloo, Ontario, Kanada
termin: brak danych
organizator: prof. H.H.E. Leipholz,
 6. The IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition,
miejsce: Oberwolfach, RFN
termin: 16—22 sierpnia 1979
organizator: prof. R. Eppler.

SYMPOZJA PLANOWANE W LATACH 1980-81 (PROPOZYCJE)

1. The IUTAM/IUGG Symposium on Energetics of Uncommon Atmospheric Events, 1981, Francja
prof. M. Roy,
2. The IAHR/IUTAM Symposium on Field Experience with Flow Induced Vibrations, 1980, Włochy,
3. The IUTAM Symposium on interaction of Particles in Colloidal Suspensions, 1980—81, Research
School of Physical Sciences, The Australian National University, Canberra, Australia,
4. The IUTAM Symposium on the Mechanics and Physics of Bubbles in Fluids, 1980—81, Holandia,
5. The IUTAM Symposium on Three Dimensional Turbulent Boundary Layers, 1981, Politechnika
w Berlinie Zachodnim, lub RWTH w Akwizgranie (Aachen) Prof. Fernholz lub prof. Krauze,
6. The IUTAM Symposium on Finite Elasticity Theory, USA, Prof. P.M. Naghdi i prof. R.S. Rivlin,
7. The ICF/IUTAM Symposium on Foundations of Fracture Mechanics, 1980—81, USA, prof. J.R.
Rice,
8. The IUTAM Symposium on Mechanics of Composite Materials, 1980—81,
9. The IUTAM Symposium on Physical Non-linearities in Structural Analysis, 1980, CETIM, 2 avenue
Félix Louat, B.P. 67, 60304 Senlis, Francja,
10. The second IUTAM Symposium on Stability in the Mechanics of Continua, 1980—81, Bergische
Universität-Gesamthochschule Wuppertal, RFN,
11. The IUTAM Symposium on Three-dimensional Constitutive Relations, maj 1980, Ecole Polytechnique,
Laboratoire de Mécanique de Solides, 91128 Palaiseau Cedex, prof. J. Mandel, Francja,
12. The IUTAM Sympozjum on Unsteady Turbulent Shear Flows, 1980—81, Ecole Nationale Supérieure
de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, Francja,
13. The ICHMT/IUTAM Symposium on Heat and Mass Transfer, jesień 1979, lub wiosna 1980, Dubrow-
nik, Jugosławia,
14. The IUTAM Symposium on High-Temperature Gas Dynamics, Instytut Termomechaniki Czecho-
słowackiej Akademii Nauk, Praha, prof. M. Pichal, Czechosłowacja.

**WYKAZ KONFERENCJI
Z DZIEDZINY MECHANIKI ORGANIZOWANYCH W POLSCE
1979 ROK**

1. XVII Sympozjum „Modelowanie w mechanice”
Termin i miejsce: 26.02—4.03 Beskid Śląski
Organizator: PTMTiS Oddział w Gliwicach i Zarząd Główny
2. V Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki
Termin i miejsce: 23.03—24.03, Kraków
Organizator: PTMTiS Oddział w Krakowie, AGH
3. IX Konferencja Europejskiego Towarzystwa Fizycznego
„Struktura i własności sieci polimerowych”
Termin i miejsce: 23.04—28.04, Jabłonna
Organizator: IPPT — PAN prof. A. Ziabicki
4. Euromech Kolokwium — „Płynięcie i zniszczenie materiałów niesprężystych”
Termin i miejsce: 6.06—9.06, Jabłonna
Organizator: IPPT — PAN, Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych
prof. P. Perzyna
5. IX Sympozjum FORM 79 „Nowe technologie, konstrukcje, maszyny, przyrządy i urządzenia do obróbki plastycznej metali”
Termin i miejsce: 11.06—16.06, Poznań
Organizator: Instytut Obróbki Plastycznej, Poznań, ul. Zamenhoffa 2/4
6. Euromech Kolokwium „Dynamika i analiza zaburzeń konstrukcji plastycznych”
Termin i miejsce: sierpień, Jabłonna
Organizator: IPPT — PAN Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych
doc. T. Wierzbicki
7. XXI Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego
Termin i miejsce: 2.09—9.09, Porąbka—Kozubnik
Organizator: IPPT — PAN Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych
prof. H. Zorski
8. XIV Sympozjum „Współczesne problemy i metody mechaniki płynów”
Termin i miejsce: 3.09—8.09, Błazejewek k/Poznań
Organizator: IPPT — PAN Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów
9. Euromech Kolokwium „Ośrodki stochastyczne”
Termin i miejsce: 18.09—22.09, Jabłonna
Organizator: IPPT — PAN Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych
doc. K. Sobczyk
10. Metody analizy funkcjonalnej w mechanice
Termin i miejsce: 22.09—30.09 lub 16.09—22.09, Łańcut
Organizator: IPPT — PAN Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych
prof. A. Sawczuk
11. Nieniszczące badania przy wykorzystaniu holografii
Termin i miejsce: 1.10—13.10, Jachranka
Organizator: Komitet Mechaniki doc. J. Stupnicki
12. Metody teoretyczne i doświadczalne w mechanice zniszczenia
Termin i miejsce: 7.10—13.10, Jabłonna
Organizator: Komitet Mechaniki i WAT prof. S. Kocańda, dr A. Dragon
13. Przepływ ciepła i masy w ciele stałym
Termin i miejsce: Opole
Organizator: PTMTiS Oddział w Opolu

14. Ogólnopolskie sympozjum na temat stateczności konstrukcji
Termin i miejsce: Łódź
PTMTiS Oddział w Łodzi, Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej

PROPOZYCJE NA ROK 1980

1. Euromech kolokwium „Zmiana fal i wybrzeża w strefie przyboju”
Miejsce: Gdańsk
Organizator: Instytut Budownictwa Wodnego PAN, Gdańsk, ul. Cystersów 11
2. Sprężysto-plastyczne modele ośrodków rozdrobnionych
Miejsce: Jabłonna
Organizator:
3. IX Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”
Miejsce: Błażejewek k/Poznania
Organizator: PTMTiS Oddział w Poznaniu i Instytut Mechaniki Politechniki Poznańskiej, Poznań,
ul. Piotrowo 3

W następnym zeszycie ukaza się prace:

JAN SZMELTER — wspomnienie pośmiertne

- K. GRYSA, R. SZCZEPAŃSKI, O płaskim quasi-statycznym zagadnieniu termodyfuzji dla sprężystego walca kołowego
Об одной квазистатической задачи термодиффузии для упругого кругового цилиндра
On a certain quasi-static problem of termodiffusion in an elastic cylinder
- J. KUJAWSKI, Teoria średniej grubości ortotropowych tarcz trójwarstwowych
Теория ортотропных трехслойных плит средней толщины
Theory of stretching orthotropic sandwich plates with moderate thickness
- K. KOWALCZYK, Powierzchnie graniczne dla modelu sprężysto-plastycznego pręta przy uwzględnieniu zmian geometrii
Предельные поверхности для модели упруго-пластического стержня при учете изменений геометрии
Limit surfaces for a model of elasto-plastic bar with geometry changes taken into account
- J. TALER, Nieustalone, kołowo-niesymetryczne pole temperatury w wydrążonym walcu ogrzewanym na zewnętrznej poboczniczy
Неустановившееся кругоноесимметричное температурное поле в бесконечном полом цилиндре нагреваемым на внешней поверхности
Unsteady, axially nonsymmetric temperature distribution in an infinite hollow cylinder heated externally
- J. SZOPA, M. WOJTYŁAK, O wyznaczaniu charakterystyk probabilistycznych rozwiązań wahadła podwójnego o zmiennej długości poddanego wymuszeniom losowym
Об определении пробабилистических характеристик решений двойного маятника с переменной длиной подверженного случайным вынуждениям
On determination of probabilistic characteristics of solutions of double pendulum with varying length subject to random forcing
- S. WOJCIECH, Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności dynamicznej płyt pierścieniowych
Численное решение задачи динамической устойчивости вертолѐта кольцевой пластинки
Numerical solution to the problem of dynamical stability of annular plates
- W. ŁUCJANEK, K. SIBILSKI, Podłużna stateczność dynamiczna śmigłowca z podwieszonym ładunkiem w zawisie
Продольная динамическая устойчивость вертолѐта с висящим грузом на режиме висения
Longitudinal dynamic stability of a hovering helicopter with a hanging load
- M. MARKS, Analiza pasma płytowego jako ciała z więzami
Анализ полосы как тела со связями
Analysis of the band plate considered as a constrained body
- K. MICHAŁEWICZ, Dynamika lotu zasobnika lotniczego z połączonym przegubowo hamulcem aerodynamicznym, zrzuconego z samolotu
Динамика полѐта летательного аппарата „со свободно отпущенным” аэродинамическим тормозом брошенного из самолѐта
Dynamics of flight of an external pack with an airbrake „set free” thrown out of an airplane

BIULETYN INFORMACYJNY

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i cały rok następny,
- do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
