

J

Nr 114.

Politechnika Warszawska

III. 1.

KWIECIEŃ — LIPIEC 1924.

№ 8.

WARSZAWSKIE TOWARZYSTWO POLITECHNICZNE.

SPRAWOZDANIA I PRACE

COMPTES RENDUS DE LA SOCIÉTÉ POLYTECHNIQUE DE VARSOVIE

WYDANE Z ZAPOMOZI WYDZIAŁU NAUKI
MSTWA W. R. i O. P.



TREŚĆ.

O równaniach całkowitych z osobliwością
biegunową — *Witold Pogorzelski.*

Warunki fizyczne powstawania wybo-
czenia sprężystego — *H. Czopowski.*

Badania nad dielektrykami —
Mieczysław Wolfke.

Stała dielektryczna ciekłego helu —
M. Wolfke i H. Kamerlingh Onnes.

Stała dielektryczna ciekłego i stałego wo-
doru — *M. Wolfke i H. Kamerlingh Onnes.*

Pierwszy międzynarodowy zjazd, poświę-
cony mechanice stosowanej.
H. Mierzejewski.

Sprawozdania z posiedzeń W. T. P.

SOMMAIRE.

Sur les équations intégrales singulières de
première espèce — *Witold Pogorzelski.*

Les conditions physiques de l'existence
de flambement — *H. Czopowski.*

Recherches sur les diélectriques —
Mieczysław Wolfke.

La constante diélectrique du hélium liquide
M. Wolfke et H. Kamerlingh Onnes.

La constante diélectrique de l'hydrogène
liquide et solide —
M. Wolfke et H. Kamerlingh Onnes.

Conférence internationale de mécanique.
H. Mierzejewski.

Comptes rendus de séances.

NAKLAD WARSZAWSKIEGO TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO.

WARSZAWSKIE TOWARZYSTWO POLITECHNICZNE

SPRAWOZDANIA I PRACE

WYDANE Z ZAPOMOZI WYDZIAŁU NAUKI M. W. R. i O. P.

TREŚĆ: O równaniach całkowych z osobliwością biegunową, przez *Witolda Pogorzelskiego*.— Warunki fizyczne powstawania wyboczenia sprężystego, przez *H. Czopowskiego*.— Badania nad dielektrykami, przez *M. Wolfkego*.— Stała dielektryczna ciekłego helu, przez *M. Wolfkego i H. Kamerlingh Onnes'a*.— Stała dielektryczna ciekłego i stałego wodoru, przez *M. Wolfkego i H. Kamerlingh Onnes'a*.— Pierwszy międzynarodowy zjazd, poświęcony Mechanice stosowanej, przez *H. Mierzejewskiego*.— Sprawozdania z posiedzeń W. T. P.— Od Redakcji

O równaniach całkowych z osobliwością biegunową.

PRZEZ

WITOLDA POGORZELSKIEGO.

BIBLIOTEKA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

STRESZCZENIE REFERATU WYGŁOSZONEGO NA 33-ciem POSIEDZENIU NAUKOWEM W. T. P.
10.XI.23.

W pracy tej badaliśmy równanie całkowe

$$\int_a^b N(x, y) \varphi(y) dy = f(x); (a < x < b);$$

gdzie jądro $N(x, y)$ jest funkcją analityczną z osobliwością biegunową dla $y = x$; symbol całki ma sens następujący:

$$\int_a^b N(x, y) \varphi(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x-\varepsilon} N \cdot \varphi \cdot dy + \int_{x+\varepsilon}^b N \cdot \varphi \cdot dy \right].$$

Badania rozszerzyliśmy następnie na przypadek równania całkowego z jądrem nieanalitycznym:

$$K(x, y) = A(x, y) N(x, y) + B(x, y);$$

$N(x, y)$ jest powyżej określoną funkcją, zaś $A(x, y)$ i $B(x, y)$ są funkcjami nieanalitycznymi. Wreszcie rozważyliśmy wypadek równania nieliniowego z osobliwością biegunową.

W badaniach powyższych oparliśmy się na własności dwukrotnego całkowania funkcji analitycznych z osobliwością biegunową, podanej przez *H. Poincarégo* (*Théorie des marées*, 1910); własność tę rozszerzyliśmy dla funkcji nieanalitycznych w celu zbadania równań całkowych z jądrem osobliwym nieanalitycznym.

Szczegółowe obliczenie podane jest w załączonym tekście francuskim.

Sur les équations intégrales singulières de première espèce.

PAR

WITOLD POGORZELSKI.

COMMUNICATION PRÉSENTÉE À LA SOCIÉTÉ POLYTECHNIQUE DE VARSOVIE 10.XI.23.

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier une classe des équations intégrales de première espèce dont le noyau admet la singularité polaire. Les équations de cette espèce étaient étudiées pour la première fois par *O. Kellogg*¹⁾ d'après les formules de *D. Hilbert*²⁾, dans le cas particulier du noyau singulier $\text{Cotg}(x-y)$. Ensuite *H. Poincaré*³⁾ a donné une méthode générale pour l'étude des équations de seconde espèce avec le noyau singulier *analytique*. Dans ce travail nous avons étudié les équations intégrales de première espèce linéaires et non linéaires avec le noyau singulier *non analytique*.

I. Les propriétés d'une intégrale singulière.

Soit $N(x, y)$ une fonction analytique, qui pour $x=y$ admet la même singularité que la fonction $\text{Cotg}(x-y)$. Nous désignons la valeur principale de *Cauchy* de la façon suivante

$$(1) \dots \dots F(x) = \int_a^b N(x, y) dy = \lim \left[\int_a^{x-\varepsilon} N \cdot dy + \right. \\ \left. + \int_{x+\varepsilon}^b N \cdot dy \right]; \quad (a < x < b)$$

et nous l'appellerons l'intégrale singulière. On sait que la valeur (1) est égale à la moyenne arithmétique de deux intégrales $\int_c^x N(x, y) \cdot dy$, $\int_x^c N(x, y) \cdot dy$ le

¹⁾ Göttingen Nachr.

²⁾ *D. Hilbert*. Grundzüge allg. th. d. Integralgl. (1910).

³⁾ *H. Poincaré*. Théorie des marées. (1910).

long des chemins curvilignes C et C' situés dans le plan de la variable complexe y et embrassant le segment réelle (a, b).

La fonction F(x) admet les dérivées de tous les ordres dans l'intervalle (a, b). Si f(y) est une fonction dérivable, le symbole

$$(2) \quad \Phi(x) = \int_a^b N(x, y) f(y) dy$$

conserve encore le sens. Il est facile à montrer que la fonction (2) admet les dérivées de deux ordres dans (a, b), si f(y) admet les dérivées de trois ordres. La fonction (2) en général augmente logarithmiquement si x tend vers l'extrémité d'intervalle (a, b); mais si nous supposons que N(x, y) est une fonction analytique périodique par rapport aux variables x et y de période égal à (b - a) et que la fonction f(y) remplit les conditions

$$(3) \quad f(a) = f(b); f'(a) = f'(b); f''(a) = f''(b); f'''(a) = f'''(b),$$

la fonction (2) avec ses deux dérivées tend vers les limites déterminées, si x tend vers l'extrémité d'intervalle (a, b). L'intégrale singulière (1) est permutable avec l'intégrale simple

$$(4) \quad \int_a^b \left[\int_a^b N(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_a^b N(x, y) dx \right] dy$$

mais cela n'a pas lieu dans le cas de l'intégrale singulière doublement appliquée. Soient donc deux fonctions analytiques périodiques N(x, y) et N₁(y, y') avec les singularités polaires pour x = y et y = y'. Considérons deux expressions déterminées

$$(5) \quad \left\{ \int_a^b N(x, y) \left[\int_a^b N_1(y, y') dy' \right] dy \right. ; (a < x < b) \\ \left. \int_a^b \left[\int_a^b N(x, y) N_1(y, y') dy \right] dy' \right.$$

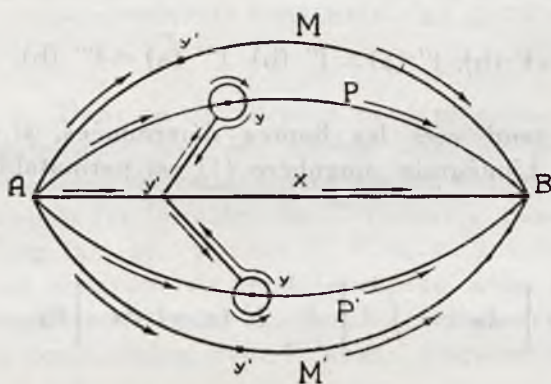
Nous signalons que la fonction

$$(6) \quad \int_a^b N(x, y) N_1(y, y') dy$$

de deux variables réelles (x, y') est égale à la moyenne arithmétique des intégrales curvilignes le long de deux chemins embrassant le segment réelle (a, b) , donc cette fonction et tous ses dérivées *restent finies lorsque la différence $x-y'$ tend vers zéro*. H. Poincaré (l. c.) a démontré que les expressions (5) remplissent la relation fondamentale suivante:

$$(7) \dots \int_a^b N(x, y) \left[\int_a^b N_1(y, y') dy \right] dy = \\ = \int_a^b \left[\int_a^b N(x, y) N_1(y, y') dy \right] dy' - \pi^2 R(x) \cdot R_1(x)$$

$R(x)$ et $R_1(x)$ désignent les résidus des fonctions $N(xy)$ et $N_1(xy)$ considérées comme les fonctions de la variable y , pour le pôle $y=x^*$). Nous donnons brièvement de la façon un peu modifiée la démonstration de la propriété (7). Considérons donc dans le plan de



la variable complexe deux chemins curvilignes AMB et $AM'B$ joignant les extrémité A et B du segment réelle (a, b) et embrassant ce segment. Expression

$$(8) \dots F(y) = \frac{1}{2} \int_{AMB} N_1(yy') dy' + \\ + \frac{1}{2} \int_{AM'B} N_1(yy') dy'$$

est une fonction holomorphe de la variable y dans le domaine embrassé par la courbe $AMB M' A$ qui prend les valeurs égales à l'intégrale singulière

$\int_a^b N_1(yy') dy'$ aux points du segment réelle AB . Supposons dans l'expression (8) la variable y réelle et considérons l'intégrale singulière suivante

$$(9) \dots \int_a^b F(y) \cdot N(x, y) dy \equiv \\ \equiv \int_a^b N(x, y) \left[\int_a^b N_1(y, y') dy' \right] dy$$

x étant une valeur réelle comprise dans l'intervalle (a, b) . D'après la propriété de la fonction $F(y)$, l'intégrale (9) a le sens et sa valeur coïncide avec la

*) Dans l'ouvrage citée se trouve une erreur concernant le signe devant l'expression $\pi^2 R(x) \cdot R_1(x)$.

moyenne arithmétique de deux intégrales le long de chemins A P B et A P' B situées dans le domaine d'holomorphic (A M B M' A) de la fonction F (y) et embrassant le segment (a, b):

$$(10) \dots\dots\dots 2 \int_a^b F(y) N(x,y) dy =$$

$$= \int_{\substack{APB \\ (y)}} F(y) N(x,y) dy + \int_{\substack{AP'B \\ (y)}} F(y) N(x,y) dy$$

Nous signalons que la fonction (9) est dérivable par rapport à x. D'après (8), nous aurons

$$(11) \dots\dots\dots 4 \int_a^b N(x,y) \left[\int_a^b N_1(y,y') dy' \right] dy =$$

$$= \int_{\substack{APB \\ (y)}} \int_{\substack{AMB \\ (y')}} N \cdot N_1 \cdot dy \cdot dy' + \int_{\substack{APB \\ (y)}} \int_{\substack{AM'B \\ (y')}} N \cdot N_1 \cdot dy \cdot dy' +$$

$$+ \int_{\substack{AP'B \\ (y)}} \int_{\substack{AMB \\ (y')}} N \cdot N_1 \cdot dy \cdot dy' + \int_{\substack{AP'B \\ (y)}} \int_{\substack{AM'B \\ (y')}} N \cdot N_1 \cdot dy \cdot dy'$$

Nous signalons que les symboles y et y' désignent les valeurs réelles dans le premier terme et que les chemins curvilignes ne traversent les pôles correspondant.

Changeons maintenant l'ordre de l'intégration dans le premier des expressions (11). L'intégration par rapport à y fournit la fonction

$$(12) \dots\dots\dots \int_a^b N(x,y) N_1(y,y') dy = \Phi(x,y')$$

de deux variables x et y' comprises dans l'intervalle (a, b) qui est bornée avec

ses dérivées même quand $x - y'$ tend vers zéro. La seconde intégration ordinaire de la fonction (12) par rapport à y' nous donne la valeur

$$(13) \dots \dots \dots 2 \int_a^b \Phi(x, y') dy' =$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\substack{APB \\ (y)}} N(x, y) N_1(y, y') dy \right] dy' + \int_a^b \left[\int_{\substack{AP'B \\ (y)}} N(x, y) N_1(y, y') dy \right] dy'$$

y' et x désignent deux nombres réelles d'intervalle (a, b) .

Nous allons comparer les expressions (11) et (13); y étant un pôle des fonctions N et N_1 situé sur le chemin APB , compris entre AMB et le segment AB , nous construisons le lacet issu du point arbitraire du segment AB entourant le pôle y et nous aurons (regardez la figure)

$$(14) \dots \dots \dots \int_{AMB} N_1(y, y') dy' = \int_a^b N_1(y, y') dy' +$$

$$+ 2\pi i R_1(y); (y \text{ sur } APB)$$

Si le point correspondant à la variable y sera situé sur le chemin $AP'B$, on aurait

$$(15) \dots \dots \dots \int_{AMB} N_1(y, y') dy' = \int_a^b N_1(y, y') dy' ; (y \text{ sur } AP'B)$$

De même nous aurons les relations

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \int_{AM'B} N_1(y, y') dy' = \int_a^b N_1(y, y') dy' + 2\pi i R_1(y); (y \text{ sur } AP'B) \\ \int_{AM'B} N_1(y, y') dy' = \int_a^b N_1(y, y') dy' ; (y \text{ sur } APB) \end{array} \right.$$

Nous signalons que dans le cas (14) le lacet est parcouru dans le sens retrograde et dans le cas (16) dans le sens direct.

Appliquons maintenant les relations (14), (15) et (16) à la formule (11); nous aurons

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \dots \int_a^b N(x,y) \left[\int_a^b N_1(y,y') dy' \right] dy = \\
 & = 2 \int_{\substack{APB \\ (y)}} \int_a^b N(x,y) N_1(y,y') dy dy' + 2 \int_{\substack{AP'B \\ (y)}} \int_a^b N(x,y) N_1(y,y') dy dy' + \\
 & \quad + 2 \pi i \int_{\substack{(AP'BPA) \\ (y)}} N(x,y) R_1(y) dy
 \end{aligned}$$

Or la fonction $N(x,y)$ admet le pôle réelle $y=x$ avec le résidu $R(x)$ donc

$$\int_{(AP'BPA)} N(x,y) R_1(y) dy = 2\pi i R(x) \cdot R_1(x)$$

En comparant les expressions (17) et (13) nous arrivons à la relation fondamentale (7).

Nous allons généraliser la propriété précédente pour les fonctions non analytiques. Soit la fonction de deux variables $f(x,y)$, déterminée et continue avec les *dérivées secondes* dans le domaine

$$(18) \quad \dots \quad a \leq x \leq b \quad ; \quad a \leq y \leq b$$

et vérifiant aux bords de ce domaine les conditions

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & f(a,y) = f(b,y) \quad ; \quad f(x,a) = f(x,b) \\
 & \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=a} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=b} \quad ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y=a} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y=b} \\
 & \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=a} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=b} \quad ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=a} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=b}
 \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons donc considérer la fonction $f(x,y)$ comme une fonctions périodique de période $b-a$, qui est continue avec ses dérivées premières. D'après les remarques précédentes, l'intégrale singulière

$$(20) \quad \dots \quad F(y) = \int_a^b N_1(y,z) f(y,z) dz$$

sera une fonction de la variable y déterminée et dérivable dans l'intervalle (a,b) qui tend avec sa dérivée vers les valeurs déterminées, y tendant vers les extrémité d'intervalle (a,b) . L'intégrale

$$(21) \quad \Psi(x) = \int_a^b N(x,y) \left[\int_a^b N_1(y,z) f(y,z) dz \right] dy$$

sera donc une fonction continue et déterminée dans (a,b) . Posons

$$(22) \quad \varphi(y,z) = \frac{f(y,z) - f(y,y)}{\sin \alpha (y-z)} ; \alpha = \frac{2\pi}{b-a} ;$$

d'après les propriétés de la fonction f , la fonction (22) sera périodique, dérivable et bornée pour $y=z$. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \int_a^b N(x,y) \left[\int_a^b N_1(y,z) dz \right] f(y,z) dy + \\ &+ \int_a^b N(x,y) \left[\int_a^b N_1(y,z) \sin \alpha (y-z) \cdot \varphi(y,z) dz \right] dy \end{aligned}$$

en posant

$$(23) \quad \psi(x,y) = \frac{f(y,y) - f(x,x)}{\sin \alpha (x-y)}$$

nous aurons ensuite

$$\begin{aligned} (24) \quad \Psi(x) &= f(x,x) \int_a^b N(x,y) \left[\int_a^b N_1(y,z) dz \right] dy + \\ &+ \int_a^b N(x,y) \psi(x,y) \sin \alpha (x-y) \left[\int_a^b N_1(y,z) dz \right] dy + \\ &+ \int_a^b N(x,y) \left[\int_a^b N_1(y,z) \sin \alpha (y-z) \varphi(y,z) dz \right] dy \end{aligned}$$

Le dernier terme a le sens, la fonction $\varphi (y, z)$ étant dérivable. Changeons maintenant l'ordre d'intégration dans (21). D'après (22) et (23), on aura

$$\begin{aligned}
 (25) \quad \dots \dots \Phi (x) &= \int_a^b \left[\int_a^b N (x, y) N_1 (y, z) f (y, z) dy \right] dz = \\
 &= f (x, x) \int_a^b \left[\int_a^b N (x, y) N_1 (y, z) dy \right] dz + \\
 &+ \int_a^b \left[\int_a^b N (x, y) \sin \alpha (x - y) \psi (x, y) N_1 (y, z) dy \right] dz + \\
 &+ \int_a^b \left[\int_a^b N_1 (y, z) \sin \alpha (y - z) \varphi (y, z) N (x, y) dy \right] dz
 \end{aligned}$$

Comparons les expressions (24) et (25). Les fonctions $N (x, y) \sin (x - y) \alpha$ et $N_1 (y, z) \sin \alpha (y - z)$ étant régulières pour $x = y$ et $y = z$, les deux derniers termes dans les expressions (24) et (25) ne contiennent qu'une intégrale impropre et par conséquent sont respectivement égaux (voir la formule (4)). Quant aux premiers termes, nous avons d'après la relation (7) de *H. Poincaré*:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b N (x, y) \left[\int_a^b N_1 (y, z) dz \right] dy &= - \pi^2 R (x) R_1 (x) + \\
 &+ \int_a^b \left[\int_a^b N (x, y) N_1 (y, z) dy \right] dz
 \end{aligned}$$

nous avons donc démontré la propriété suivante:

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \dots \dots \int_a^b N (x, y) \left[\int_a^b N_1 (y, z) f (y, z) dz \right] dy &= \\
 &= - \pi^2 R (x) R_1 (x) f (x, x) + \\
 &+ \int_a^b \left[\int_a^b N (x, y) N_1 (y, z) f (y, z) dy \right] dz
 \end{aligned}$$

qui généralise la relation (7) de *Poincaré* pour les fonctions non analytiques. Nous nous servons de la relation (26) dans l'étude suivante des équations intégrales.

II. Le noyau singulier fermé.

Soit $\mathfrak{M}(x, y)$ une fonction analytique avec la singularité polaire pour $x = y$. La fonction $\mathfrak{M}(x, y)$ sera dite *le noyau singulier fermé*, si l'équation intégrale

$$(27) \quad \dots \int_a^b \mathfrak{M}(x, y) h(y) dy = 0$$

n'admet d'autre solution que la solution banale $h = 0$.

Le noyau sera dit fermé au sens impropre, si la condition (27) n'est satisfaite par aucune fonction, admettant les deux dérivées déterminées, outre la fonction $h = 0$. Considérons une fonction $h(y)$ qui satisfait à la relation (27) et admet les dérivées du second ordre; elle va de même remplir la relation

$$(28) \quad \dots \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) \left[\int_a^b \mathfrak{M}(x, y) h(y) dy \right] dx = 0$$

donc, d'après l'identité (10), la relation

$$(28') \quad \dots - \pi^2 R^2(z) h(z) + \int_a^b \left[\int_a^b \mathfrak{M}(z, x) \mathfrak{M}(x, y) dx \right] h(y) dy = 0$$

$R(z)$ étant le résidu de la fonction $\mathfrak{M}(z, x)$ pour le pôle $x = z$ que nous supposons différent de zéro:

$$(28'') \quad \dots |R(z)| \neq 0$$

dans tout le domaine. Le noyau de l'équation intégrale homogène (28') est borné avec ses dérivées pour $z = y$, d'après la propriété citée de l'intégrale (6). Nous en concluons le résultat suivant: pour que le noyau singulier $\mathfrak{M}(x, y)$ soit fermé au sens impropre il faut et il suffit que le noyau

$$(29) \quad \dots \frac{1}{R^2(z)} \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) \mathfrak{M}(x, y) dx$$

n'admet la valeur caractéristique $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$

La condition est en effet suffisante, puisque dans ce cas l'équation homogène (28') n'admet que la solution banale $h = 0$; elle est aussi nécessaire, puisque la solution $h(z)$ de (28') admet les dérivées de tous les ordres, d'après la propriété du noyau (29), par conséquent la relation (28') entraîne la relation (28), donc la relation (27), le noyau \mathfrak{M} étant fermé.

Considérons maintenant le cas général du noyau non analytique de la forme

$$(30) \quad \dots, \quad K(x, y) = A(x, y) N(x, y) + B(x, y)$$

$N(x, y)$ est une fonction analytique périodique (période égal à $b - a$) avec la singularité polaire pour $x = y$; $A(x, y)$ est une fonction déterminée, bornée et admet les dérivées des quatre ordres; $B(x, y)$ est de même bornée et admet les dérivées des trois ordres. En outre la fonction $A(x, y)$ avec les dérivées de trois ordres et $B(x, y)$ avec les dérivées de deux ordres remplissent les conditions analogues aux relations (19) dans le domaine (18). Le noyau singulier K est dit fermé, si l'équation

$$(31) \quad \dots \int_a^b K(x, y) h(y) dy = 0$$

n'admet que la solution banale $h = 0$; il sera dit fermé au sens impropre, si la fonction $h = 0$ est la solution unique admettant les dérivées secondes. La fonction h , admettant les dérivées de deux ordres et vérifiant l'équation (31), va aussi remplir la relation

$$(32) \quad \dots \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) \left[\int_a^b K(x, y) h(y) dy \right] dx = 0$$

\mathfrak{M} étant le noyau singulier fermé. D'après la propriété (26), cette fonction h satisfait alors à la relation

$$(32') \quad \dots \pi^2 R(z) R_1(z) A(z, z) h(z) +$$

$$+ \int_a^b \left[\int_a^b \mathfrak{M}(z, x) K(x, y) dx \right] h(y) dy = 0; \quad (\text{dans } a, b)$$

$R_1(z)$ étant le résidu de la fonction $N(z, x)$ au pôle $x = z$, nous admettons:

$$(32'') \quad \dots | R(z) R_1(z) A(z, z) | \neq 0$$

Le noyau de l'équation (32') est borné, d'après la propriété de l'intégrale (26):

nous allons montrer que ce noyau admet les dérivées des deux ordres bornées. Considérons donc l'expression

$$(33) \dots \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) K(x, y) dx = \\ = \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) N(x, y) A(x, y) dx + \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) B(x, y) dx$$

dont le second terme admet les dérivées de deux ordres; z et y étant deux valeurs différentes comprises entre a et b .

Nous pouvons écrire ensuite

$$(34) \dots \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) N(x, y) A(x, y) dx = \\ = A(z, z) \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) N(x, y) dx + \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) \sin \alpha (z-x) \cdot \\ \cdot \psi(z, x) N(x, y) dx + \int_a^b N(x, y) \sin \alpha (x-y) \cdot \varphi(x, y) \mathfrak{M}(z, x) dx$$

on a posé

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} \psi(z, x) = \frac{A(x, x) - A(z, z)}{\sin(z-x)\alpha}; \varphi(x, y) = \frac{A(x, y) - A(x, x)}{\sin\alpha(x-y)} \\ \alpha = \frac{2\pi}{b-a} \end{array} \right.$$

La première intégrale à droite dans la relation (34) admet les dérivées d'ordre arbitraire qui restent bornées lorsque y tend vers z . Les deux autres intégrales dans (34) sont évidemment dérivables deux fois par rapport à la variable z , d'après la propriété de la fonction $A(x, y)$. L'existence des dérivées secondes bornées, pour $y-z$ tendant vers zéro, du noyau (33) est donc démontrée.

La solution h de (32') admet donc les dérivées secondes et cette solution va remplir inversement l'équation (32). Le raisonnement, identique avec celui concernant le noyau \mathfrak{M} , fournit la propriété suivante:

pour que le noyau $K(x, y)$ soit fermé au sens impropre il faut et il suffit que le noyau borné

$$(36) \dots \dots \dots \frac{1}{R(z) R_1(z) A(z, z)} \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) \cdot K(x, y) dx$$

n'admet la valeur caractéristique $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$. Si le noyau $\mathfrak{M}(z, x)$ n'était pas fermé, la condition énoncée n'était que suffisante.

Cherchons par exemple de la condition plus explicite pour le noyau de la forme particulière

$$(37) \dots \dots \dots, K(x, y) = A_1(y) \cdot \text{Cotg } \alpha(x - y) + A_2(x) \cdot A_3(y); \alpha = \frac{\pi}{b - a}$$

La solution $h(y)$ de l'équation

$$(38) \dots \dots \dots \int_a^b K(x, y) h(y) dy = 0$$

va remplir de même l'équation

$$(38') \dots \dots \dots \int_a^b \left[\text{Cotg } \alpha(x - z) + \mu \right] \left[\int_a^b K(z, y) h(y) dy \right] dz = 0$$

μ étant une constante différente de zéro. La relation (38') entraîne, d'après (26), la relation

$$(39) \dots \dots \dots - \pi^2 R^2(x) A_1(x) h(x) + \int_a^b \left[\int_a^b (\text{Cotg } \alpha(x - z) + \mu) K(z, y) dz \right] h(y) dy = 0$$

où

$$R(x) = \frac{1}{\alpha} = \frac{b - a}{\pi}$$

Or

$$\int_a^b \text{Cotg } \alpha(x - y) dy = 0$$

donc

$$\int_a^b (\text{Cotg } \alpha (x-z) + \mu) K(z, y) dz =$$

$$= A_1(y) \int_a^b \text{Cotg } \alpha (x-z) \text{Cotg } \alpha (z-y) dz + \mu A_3(y) \int_a^b A_2(z) dz +$$

$$+ A_3(y) \cdot \int_a^b A_2(z) \text{Cotg } \alpha (x-z) dz$$

D'après les relations

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} \text{Cotg } \alpha (x-z) \cdot \text{Cotg } \alpha (z-y) = 1 + \text{Cotg } \alpha (x-y) \cdot \\ \quad \cdot [\text{Cotg } \alpha (x-z) + \text{Cotg } \alpha (z-y)] \\ \int_a^b \text{Cotg } \alpha (x-z) dz = \int_a^b \text{Cotg } \alpha (z-y) \cdot dz = 0 \end{array} \right.$$

on a

$$\int_a^b \text{Cotg } \alpha (x-z) \cdot \text{Cotg } \alpha (z-y) \cdot dz = b-a;$$

donc l'équation homogène (39) aura la forme:

$$(41) \dots \dots \dots A_1(x) \cdot h(x) = \lambda \int_a^b [A_1(y) (b-a) +$$

$$+ A_3(y) (\mu k + \bar{A}_2(x))] h(y) dy$$

où l'on a posé

$$(42) \dots \dots \dots \bar{A}_2(x) = \int_a^b A_2(z) \cdot \text{Cotg } \alpha (x-z) dz;$$

$$k = \int_a^b A_3(z) dz; \lambda = \frac{1}{(b-a)^2}$$

Or l'équation intégrale (41) peut être résolue directement; on aura pour son déterminant caractéristique l'expression

$$(43) \dots \dots \dots D(\lambda) = -\mu \lambda \cdot \int_a^b A_2(y) \cdot dy \cdot \int_a^b \frac{A_3(y)}{A_1(y)} dy$$

Le noyau (37) est donc fermé, si les fonctions A_1, A_2, A_3 remplissent la condition:

$$(44) \dots \dots \dots \int_a^b A_2(y) dy \cdot \int_a^b \frac{A_3(y)}{A_1(y)} dy \neq 0$$

III. L'équation intégrale singulière linéaire de première espèce.

Soit l'équation intégrale de première espèce

$$(45) \dots \dots \dots \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x);$$

le noyau singulier K a la forme (30) et $f(x)$ est une fonction déterminée admettant les dérivées troisièmes qui vérifient les conditions (3). On suppose que le noyau $K(x, y)$ est fermé.

Considérons le noyau auxiliaire fermé $\mathfrak{M}(z, x)$ précédemment précisé. La fonction $\varphi(y)$ qui remplit la relation (30) et admet les dérivées de deux ordres, satisfait de même à la relation

$$(46) \dots \dots \dots \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) \left[\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy - f(x) \right] dx = 0$$

par conséquent de même à la relation

$$(47) \dots \dots \dots -\pi^2 R(z) R_1(z) A(z, z) \varphi(z) + \int_a^b \left[\int_a^b \mathfrak{M}(z, x) K(x, y) dx \right] \varphi(y) dy = \int_a^b \mathfrak{M}(z, x) f(x) dx = f_1(z)$$

Le noyau $K(x, y)$ étant fermé, le noyau borné (36) de l'équation de *Fredholm* (32') n'admet la valeur caractéristique $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$. L'équation (47) admet donc une et une seule solution déterminée $\varphi(y)$ donnée par la formule connue de *Fredholm*. Mais la fonction $f_1(z)$ et le noyau (36) admettent les dérivées du

second ordre bornées, donc la solution de l'équation (47) admet aussi la dérivée du second ordre et par conséquent elle remplit la relation (46) et alors la relation proposée (45), le noyau \mathfrak{M} étant fermé.

IV. L'équation intégrale non linéaire de première espèce.

Nous exposons encore brièvement l'étude de l'équation singulière non linéaire de première espèce:

$$(48) \quad \dots \int_a^b K(x, y) F[x, y, \varphi(y)] dy = f(x)$$

φ étant la fonction inconnue. $K(x, y)$ et $f(x)$ présentent les propriétés précédemment précisées. La fonction $F(x, y, \varphi)$ est déterminée et bornée dans le domaine

$$(49) \quad \dots a \leq x \leq b; a \leq y \leq b; \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

et admet les dérivées secondes par rapport aux variables (x, y, φ) . La fonction F et ses dérivées par rapport aux variables x et y remplissent au bord du domaine $a \leq (x; y) \leq b$ les conditions analogues aux relations (19). En outre nous supposons que la fonction F est monotone par rapport à la variable φ dans le domaine (34) et que le module de la dérivée $|F'_\varphi|$ admet dans (34) une borne inférieure différente de zéro.

Considérons donc un noyau fermé $\mathfrak{M}(x, z)$ et la relation

$$(50) \quad \dots \int_a^b \mathfrak{M}(x, y) \left[\int_a^b K(z, y) F(z, y, \varphi(y)) dy - f(x) \right] = 0$$

La solution de l'équation (48), admettant les dérivées secondes, satisfait à l'équation (50) et à l'équation

$$(51) \quad \dots \pi^2 R(x) R_1(x) A(x, x) F[x, x, \varphi(x)] + \int_a^b \Phi[x, y, \varphi(y)] dy = f_1(x)$$

où l'on a posé

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, y, \varphi) = \int_a^b K(z, y) \mathfrak{M}(z, z) F(z, y, \varphi) dz \\ f_1(x) = \int_a^b \mathfrak{M}(x, z) f(z) dz \end{array} \right.$$

les fonctions $R(x)$ et $R_1(x)$ représentent les résidus des noyaux $\mathfrak{M}(x, y)$ et $N(x, y)$ pour $y = x$, on suppose

$$(52') \quad \dots \dots \dots |R(x) R_1(x) A(x, x)| \neq 0 \quad \text{dans} \quad (a, b).$$

D'après les substitutions évidente, nous écrivons l'équation intégrale (36) sous la forme:

$$(52'') \quad \dots \quad F(x, x, \varphi(x)) = f_2(x) + \int_a^b \Phi_1[x, y, \varphi(y)] dy$$

les fonctions F, f_2, Φ_1 sont bornées et déterminées.

Nous sommes donc amené à résoudre l'équation non linéaire (52'').

Nous pouvons fixer les deux nombres μ_1 et μ_2 telles qu'on ait

$$(53) \quad \dots \quad \mu_1 < f_2(x) + \int_a^b \Phi_1[x, y, \psi(y)] dy < \mu_2$$

pour toute la fonction continue $\psi(y)$ qui remplit la condition $\alpha \leq \psi(y) \leq \beta$ dans (a, b) et pour toute la valeur positive $b - a \leq \eta$. Soient M_1 et M_2 les bornes de la fonction F dans le domaine (49):

$$(54) \quad \dots \dots \dots M_1 \leq F(x, y, \varphi) \leq M_2$$

nous supposons que

$$(55) \quad \dots \dots \dots M_1 < \mu_1 < \mu_2 < M_2.$$

Soit maintenant une fonction dérivable $\varphi_0(x)$ vérifiant la condition $\alpha \leq \varphi_0 < \beta$ dans (a, b) ; d'après la propriété (55) et la propriété de la fonction $F(x, y, \varphi)$ concernant la variable φ , la relation de récurrence

$$(56) \quad \dots \quad F(x, x, \varphi_n(x)) = f_2(x) + \int_a^b \Phi_1[x, y, \varphi_{n-1}(y)] dy$$

fournit d'une façon unique une suite infinie des fonctions déterminées et dérivables

$$(57) \quad \dots \dots \dots \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots \dots \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \dots \dots$$

qui remplissent la condition

$$\alpha < \varphi_n(x) < \beta \quad \text{dans} \quad (a, b).$$

Or, d'après l'existence de la borne inférieure positive de $|F'_\varphi|$, on pourra fixer pour toute la suite (42) une constante positive k , telle que

$$(58) \quad \dots \dots \dots |\varphi_n - \varphi_{n-1}| < k \left\{ \int_a^b \Phi_1 [x, y, \varphi_{n-1}(y)] dy + \right. \\ \left. - \int_a^b \Phi_1 [x, y, \varphi_{n-2}(y)] dy \right\}$$

on a donc, quelque soit n ,

$$(59) \quad \dots \dots \dots |\varphi_n - \varphi_{n-1}| < k k' (b - a) |\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}|$$

k' étant la borne supérieure de $\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right|$. On en conclut, pour $b-a$ suffisamment petite, l'existence de la limite $\varphi = \lim \varphi_n$ de la suite (57) qui est la solution de l'équation (51). Or, d'après l'identité (51), cette fonction φ admettra les dérivées secondes, donc elle satisfait à l'équation (50) et à l'équation proposée (48), le noyau auxiliaire \mathfrak{M} étant fermé.

Warunki fizyczne powstawania wyboczenia sprężystego.

PRZEZ

H. CZOPOWSKIEGO.

PRACA REFEROWANA NA 34-tem POSIEDZENIU NAUKOWEM W. T. P. d. 16/II—1924 r.

Jeżeli pręt sprężysty, ustawiony np. pionowo i obciążony wzdłuż swej osi, odchylimy nieco z tego położenia w jaki bądź sposób, np. siłą uboczną (pomocniczą) i następnie pozostawimy go samemu sobie, usunąwszy uprzednio siłę uboczną, to może nastąpić dwojakiego rodzaju zjawisko: albo pręt, pod działaniem sił, na niego działających, powróci do pierwotnego położenia, lub też odchylić się będzie dalej *pomimo usunięcia* siły ubocznej*). W przypadku, gdy pręt, po usunięciu siły odchyłającej, powróci do pierwotnego położenia, mówimy, że pręt znajduje się w równowadze stałej; w drugim zaś przypadku — gdy pręt będzie się dalej odchylił — mówimy, że jest on w równowadze niestałej; w ten sposób określa się zwykle zjawisko „wyboczenia”. Który z tych przypadków będzie miał miejsce w danym przykładzie, zależy od wielkości siły obciążającej, przy zresztą tych samych warunkach fizycznych.

Dla pewnych wartości sił obciążających równowaga bywa stałą, dla innych — niestałą; zmieniając np. w sposób ciągły wielkość siły obciążającej, natrafimy na taką jej wielkość, że najdrobniejsze jej powiększenie wytworzy równowagę np. niestałą; — a zmniejszenie — stałą. Wartość tej siły nazywają krytyczną i oznaczają literą P_{kr} .

Charakterystyczną stroną tego zjawiska jest to, iż wyboczenie może nastąpić dopiero po przekroczeniu przez siłę obciążającą ściśle określonej wartości $P = P_{kr}$; gdy tymczasem w ogóle układy sprężyste ujawniają odkształcenia jednocześnie z rozpoczęciem działania siły odkształcającej. Charakterystyczną cechą wyboczenia sprężystego jest jeszcze ta okoliczność, że rodzaj równowagi przy przekroczeniu siły $P = P_{kr}$ zmienia się nie wskutek zmiany położenia bryły lub geometrycznej postaci jej podpory, jak to bywa w wielu innych przykładach, lecz jedynie wskutek zmiany wartości siły obciążającej. Clebsch**) obliczając od-

*) Rozpatrywać będziemy to zjawisko ze strony tylko statycznej; o drganiu przeto mówić nie będziemy.

**) Theorię d, el. str. 221.

kształcenia, powstające przy wyboczeniu, zaznacza, że spotykamy się tutaj z „przypadkiem godnym uwagi”, że odchylenie takiego pręta nie nastąpi, jeżeli siła obciążająca P jest mniejsza od pewnej ściśle określonej wartości P_{kr} .

Stwierdzić tu przeto należy, że w zjawisku wyboczenia zachodzi pewna nieciągłość właściwości statycznych przy przejściu wartości siły $P = P_{kr}$; rodzaj bowiem równowagi pręta zmienia się nagle.

W celu „wyjaśnienia” sobie tej nieciągłości, szukano analogji w zjawiskach równowagi sztywnych układów punktów. Föppl np. porównywa zjawisko wyboczenia bądź ze zwykłym przykładem bryły, będącej w położeniu równowagi niestałej, bądź też, wychodzi z innych właściwości zjawiska wyboczenia*). Jeden z angielskich autorów**) przytacza pewien model mechaniczny, który ma służyć do zilustrowania zachodzących w wyboczeniu stosunków.

Przykłady te jednakże niedostatecznie ujmują warunki wyboczenia i nie dają tych korzyści czy to naukowych, czy też dydaktycznych (na te ostatnie kładzie autor niniejszego szczególny nacisk), jakie powinny dawać tego rodzaju analogje.

Zadanie, jakie sobie tutaj postawiłem, polega na znalezieniu takiego modelu mechanicznego, któryby posiadał właściwości podobne do zjawiska wyboczenia mianowicie, ażeby w nim następowała zmiana rodzaju równowagi nie przez zmianę układu, lecz tylko przez zmianę wartości siły; i w którym moglibyśmy widzieć wzajemne działanie czynników, wywołujących tę nagłą zmianę rodzaju równowagi; ażeby następnie porównać te warunki z takimiż warunkami wyboczenia sprężystego; i w ten sposób mógłby dać odpowiedź na pytanie: jakie warunki fizyczne powodują wyboczenie sprężyste.

W tym celu weźmy pod uwagę przykład, znany w elementarnej mechanice, mianowicie, weźmy pod rozpatrywanie punkt materialny ciężki, który jest przyczepiony do jednego końca nici nierozciągliwej, której drugi koniec jest umocowany do punktu nieruchomego w przestrzeni (t. zw. wahadło matematyczne). Punkt ten zawieszony spokojnie przyjmie położenie pionowe; gdy zaś odchylimy go od pionu i nadamy mu obrót około osi pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia, wtedy położenie jego równowagi (względnej) będzie odchyłone od pionu i będzie wyznaczone przez pewien kąt α , jaki utworzy nić z pionem; oczywiście jest, że kąt α pozostaje w zależności od prędkości obrotowej φ .

Związek między temi wielkościami (α, φ) znajdziemy sposobem elementarnym z warunków równowagi (względnej) danego punktu i w tym celu przyłożymy do niego siłę bezwładności $m x \varphi^2$, ciężar mg i naprężenie nici S ; suma rzutów tych sił na prostopadłą do kierunku nici da bezpośrednio nast. równanie równowagi

$$m x \varphi^2 \cdot \cos \alpha - mg \cdot \sin \alpha = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

*) „Drang u. Zwang” 1920. II str. 322.

**) Southwell. Phil. Trans. Roy Soc. London. Ser. A vol. 213. 1913 str. 187; (jest w odbitce i znajduje się w Biblij. Uniwers. Warsz.: sygn. 19. 21. $\frac{6}{1}$).

a po podstawieniu w to równanie $x = l \cdot \sin \alpha$, gdzie x jest postopadłą odległością punktu od osi obrotu, napiszemy równanie

$$\sin \alpha \cdot (l \varphi^2 \cos \alpha - g) = 0; \dots \dots \dots (2)$$

z którego otrzymamy dwie odpowiedzi:

$$1) \sin \alpha = 0; \dots \dots \dots (3)$$

$$2) l \varphi^2 \cdot \cos \alpha - g = 0; \text{ skąd } \cos \alpha = \frac{g}{l \varphi^2} \dots \dots \dots (4)$$

Pierwsza odpowiedź wskazuje, że przy $\alpha = 0$, zachodzi równowaga niezależnie od prędkości φ , t. j. niezależnie od czynnika, wywołującego odchylenie wahać; druga zaś odpowiedź daje związek między odchyleniem α i prędkością φ ; godnym w tym przykładzie uwagi dla naszych rozpatrywań jest ten wynik, że odchylenie rozpocząć się może dopiero przy $\varphi^2 > \frac{g}{l}$, t. j. rozpocząć się może od skończonej wartości φ ; jak to było w wyboczeniu z siłą P_{kr} ; dla mniejszych wartości $\varphi^2 < \frac{g}{l}$, odchylenia nie otrzymamy, choć wyprowadzimy ten punkt z położenia równowagi.

Patrząc na ten wynik z matematycznego stanowiska, widzimy w tym razie zwykły przypadek funkcji dwóch zmiennych, z których jedna przyrównana do zera nie daje dla drugiej zmiennej wartości zera; funkcje takie przedstawiają się przez wykresy nie przechodzące przez początek układu osi. Fizycznie zaś biorąc tę sprawę, zjawisko to uderza swą nieciągłością, odchylenie bowiem nie następuje jednocześnie z rozpoczęciem obrotu, gdyż np. dla $\varphi = 0$, $\alpha = 0$; lecz dopiero po przekroczeniu pewnej wartości dla φ . Przykład ten należy uważać za analogiczny do wyboczenia.

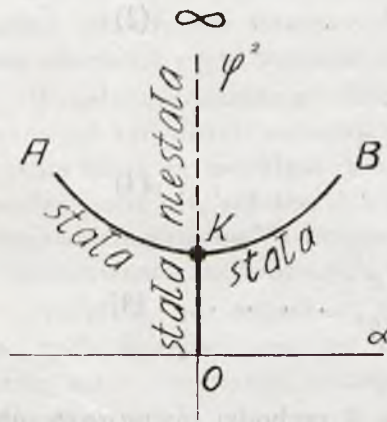
Analogja ta dalej sięgnie, jeżeli rozpatrzemy rodzaje równowagi, w jakich znajduje się dany punkt. W celu obliczenia *rodzaju* równowagi naszego wahać, zastosujemy twierdzenie Dirichlet'a: że równowaga jest stałą, gdy wartość funkcji sił w danym położeniu równowagi jest największą t. j. gdy druga pochodna funkcji siła względem niezależnej zmiennej i dla jej wartości, odpowiadającej położeniu równowagi, posiadać będzie znak ujemny.

Pierwszą pochodną tej funkcji przedstawia już równanie 2-gie; drugą zaś pochodną obliczymy przez obliczenie pochodnej tego równania względem α ; pochodna ta

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = l (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \varphi^2 - g \cdot \cos \alpha. \dots \dots \dots (5)$$

Dla punktów prostej $\alpha = 0$, wykresu (α, φ^2) , rys 1-szy; gdy:

$l\varphi^2 - g < 0$; t. j. gdy $\varphi^2 < \frac{g}{l}$; wyraz $\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}$ posiada znak ujemny i to jest



Rys 1.

max; dla wartości więc $0 < \varphi^2 < \frac{g}{l}$, punkt dany znajduje się w równowadze stałej. Dla przypadku zaś, gdy $\frac{g}{l} < \varphi^2 < \infty$, punkt dany

znajduje się w równowadze niestąlej, gdyż druga pochodna ma znak dodatni i najdrobniejsze w tym razie odchylenie za pomocą siły ubocznej z położenia pionowego spowoduje *po usunięciu tej siły* dalsze jego odchylenie. W razie zaś jeżeli punkt dany znajduje się w równowadze przy pewnej skończonej wartości α , to po podstawieniu z równania 4-go:

$l\varphi^2 = \frac{g}{\cos \alpha}$ do równania 5-go otrzymamy

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

co wyraża; że punkty na gałęzi AB dla wszystkich $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ wyrażają

równowagę stałą. Analogia przeto tego modelu z prętem, obciążonym osiowo, zachodzi bardzo daleko; pręt bowiem obciążony idealnie środkowo pozostanie prostym przy wszelkich wartościach siły P od 0 do ∞ ; zmienia on jedynie przy pewnej wartości $P = P_{kr}$ rodzaj równowagi: przy $P < P_{kr}$ będzie on w równowadze stałej, przy $P > P_{kr}$ — w równowadze niestąlej.

Analogia przebiegu zjawiska wyboczenia i położenia tego wahadła pochodzi z podobieństwa układów sił, jakie występują w obydwóch przypadkach. Ażeby to podobieństwo uwidocznić, wyobraźmy sobie w przykładzie z wahadłem strzałki wszystkich sił odwrócone w przeciwną stronę i zamiast nici wyobraźmy sobie pręt sztywny, a otrzymany układ sił nie zmieni naszego rachunku i będzie ten układ sił podobny do układu sił, występujących przy wyboczeniu; punkt bowiem dany będzie przyciągany do położenia pionowego siłą zależną od odchylenia (jak pręt siłą sprężystości), a ciężar punktu będzie go odciągał od tego położenia (jak obciążenie pionowe w pręcie); otrzymujemy przeto układ sił, który jest podobny do sił, działających na pręt obciążony osiowo; — stąd ta analogia.

Zbadajmy teraz warunki statyczne danego wahadła, przy których następuje zmiana rodzaju równowagi. W tym celu weźmy pod uwagę punkt naszego modelu, zawieszony idealnie pionowo; nie dozna on w tem położeniu odchylenia przy największej prędkości φ , siła bowiem odśrodkowa, mogąca go odchylić, nie wystąpi w tem położeniu; odchylmy następnie ten punkt siłą np. poziomą równą ΔH o kąt $\Delta \alpha$, któremu odpowiada rzędna Δx , wtedy powstanie siła odśrodkowa

$m \cdot \Delta x \cdot \varphi^2$; odchylenie pod działaniem prędkości φ po usunięciu siły ΔH nastąpi tylko wtedy, gdy będzie siła $m \cdot \Delta x \cdot \varphi^2 > \Delta H$, t. j. gdy siła odśrodkowa stanie się większą od siły pomocniczej odchyłającej $= \Delta H$. Ponieważ ΔH i Δx są wielkościami nieskończenie małymi tegoż rzędu, otrzymamy przeto dla φ pewną skończoną wartość, z powiększeniem której po usunięciu siły ΔH może nastąpić odchylenie; na podstawie tych rozpatrywań statycznych powiemy poglądowo, że prędkość φ od 0 do φ_{kr} idzie na wywołanie sił odśrodkowych, zmniejszających siłę uboczną ΔH przy tem samym odchyleniu, a po zrównaniu się z nią przewyżka jej idzie na właściwe odchylenie wahadła. Prędkość przeto krytyczna jest to taka wielkość prędkości, która wywołuje siłę odśrodkową równą sile ubocznej, która odchyliła dany punkt, z powiększeniem której przeto rozpoczyna się odchylenie dalsze pomimo usunięcia siły ΔH .

Takież same stosunki statyczne zachodzą przy wyboczeniu omawianych prętów sprężystych, obciążonych osiowo. Przez odchylenie bowiem końca pręta od położenia pionowego o Δf siłą uboczną poziomą ΔH , — wywołamy moment $P \cdot \Delta f$, a odchylenie dalsze może nastąpić wtedy, gdy $P \cdot \Delta f > \Delta H \cdot l$. Ponieważ ΔH i Δf są wielkościami nieskończenie małymi tego samego rzędu (Δf przyjmujemy proporcjonalne do siły ΔH), siła przeto P_{kr} musi być wielkością skończoną.

Siłą przeto krytyczną wyboczenia jest to ta siła, której moment stanie się równy momentowi siły ubocznej ΔH .

Zjawisko więc wyboczenia powstaje wtedy, gdy w danym układzie powstają dwojakiego rodzaju siły: jedne, które dany układ odchylają od położenia równowagi; np. siła odśrodkowa w wahadle; lub moment P siły obciążającej pręt; drugie, które sprowadzają dany układ do położenia równowagi; np. składowa ciężaru wahadła; lub siły sprężystości w pręcie.

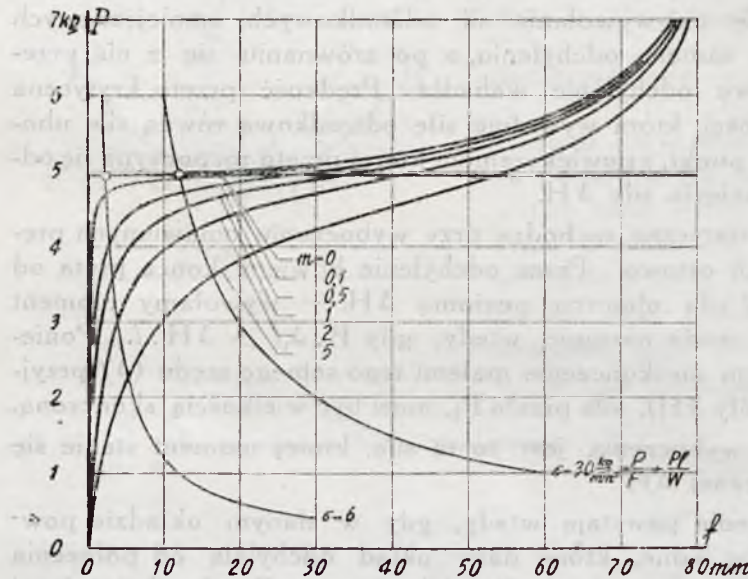
Z takim pojmowaniem zjawiska wyboczenia zgadza się również pojęcie „stopni stateczności“, wyprowadzone przez Sommerfelda (Zft. d. Ver. D. Ing. 1905 st. 1321) na podstawie dynamicznego zachowania się pręta pod obciążeniem, zbliżającym się do krytycznego; — w statycznych zaś rozpatrywaniach, tutaj przedstawionych, stopnie te wyrażą się wartością różnicy obydwóch momentów.

Na podstawie takiego pojmowania siły krytycznej, możemy postawić wniosek, że gdy punkt zawieszenia naszego wahadła umocujemy nieco z boku osi obrotowej, — t. j. mimośrodkowo, to odchylenie rozpocznie się jednocześnie z rozpoczęciem obrotu; występuje tu bowiem z początkiem obrotu siła odśrodkowa o prędkości przeto krytycznej, w znaczeniu tu stosowanem, mowy być nie może. Podobnego też przebiegu zjawiska należy się spodziewać w przykładzie z prętem mimośrodkowo obciążonym.

W niektórych jednakże podręcznikach Nauki o Wytrzymałości spotykamy się z tego rodzaju postępowaniem, że autorzy dla obliczenia siły P_{kr} przyjmują, że mimośród istnieje od początku obciążenia; obliczają na tej zasadzie odchylenie pręta i otrzymują dla pewnej wartości P , jak się wyrażają, niepomiernie wielkie odkształcenia. Wynik ten byłby przeto sprzeczny z przedstawionem tutaj pojmowaniem wyboczenia. Ażeby bliżej tę sprawę zbadać, obliczyłem bezpośrednio związek (P, f) dla pręta z różnymi mimośrodkami, stosując do tego dokładny wzór dla promienia krzywizny w przypuszczeniu, że sprzeczność, jaka

wynika z tego rozumowania z wynikami obliczeń pochodzi z rozszerzeniu zakresu stosowalności wzoru, opartego na przybliżonym wyrazie promienia krzywizny.

W danym przykładzie przyjąłem do obliczenia pręt o przekroju prostokątnym 12×1 m/m, długości 100 m/m i obliczyłem związek (P, f) , przyjmując ściśle wyraz dla promienia krzywizny. Obliczenie to



Rys. 2.

zrobiłem dla mimośródów od $m = 5,0$ do $0,1$ m/m. Do obliczeń liczbowych stosowałem odpowiednie tablice; obliczenie to umieściłem w „Czasopiśmie technicznym” Nr. 7 1924 r.

Wykresy obliczeń przedstawiłem na rys. 2-gim, z których wynika, że siła P wcale się nie zbliża asymptotycznie do siły Eulerowskiej $P_{kr} = 4,946$ kg.; jak się mówi w podręcznikach; ani też nie posiada żadnej granicznej

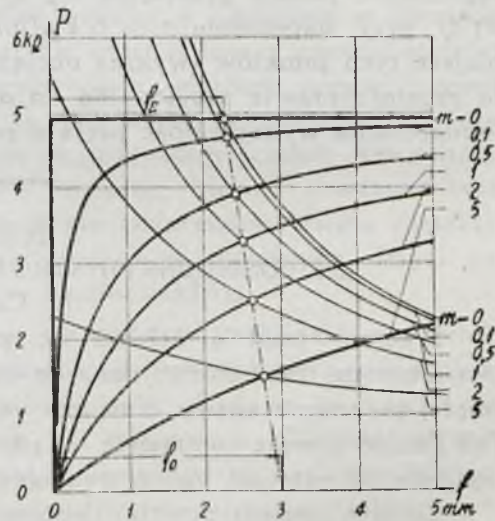
wartości; a przeciwnie, przekracza wartość siły Eulerowskiej bez jakiej bądź nieciągłości odkształceń, i odchylenie przy tem przejściu nie rośnie niepomernie, a rośnie z powiększeniem się siły obciążającej w sposób mniej lub więcej szybki, lecz w sposób ciągły. A więc wyniki tego ścisłego obliczenia są zgodne z wyłożonym tu pojmowaniem zjawiska wyboczenia. Jeżeli przeto istnieje mimośród obciążenia, — o sile Euler’a mowy być nie może. Mistycznie też brzmi wniosek, oparty na obliczeniach przybliżonych, a przytaczany przez różnych autorów; że obciążenie pręta, wspartego na dwóch podporach, siłą poprzeczną i osiową, nie wpływa na wartość siły krytycznej. Jeżeli siła poprzeczna i podłużna są skończone, to mamy zwykłe gięcie. Jeżeli zaś siła poprzeczna jest nieskończenie małą, a siła podłużna rośnie, to otrzymamy zwykły przypadek wyboczenia; a więc i zwykłą w tym razie wartość siły wyboczenia; niema więc w tym wyniku nic wybitnego.

Na podstawie takiego pojmowania zjawiska, wyboczenia możemy dać odpowiedź na dosyć ogólne pytanie, jakim warunkom geometrycznym i fizycznym powinien odpowiadać układ prętów sztywnych i układ sił na niego działających, ażeby dany układ w całości doznał wyboczenia; inaczej — jaki powinien być układ prętów, któryby, będąc w równowadze pod działaniem danych sił zewnętrznych, ze zmianą, proporcjonalną wartości wszystkich sił, znajdował się w różnych rodzajach równowagi. W danym razie nie idzie o wyboczenie poszczególnych prętów, przyjmujemy je bowiem sztywnymi, lecz idzie o warunki wyboczenia danego układu jako całości.

W celu dania odpowiedzi wyobraźmy sobie geometrycznie zmienny układ prętów, połączonych przegubowo. Pomimo tego, że układ taki jest geometrycznie zmienny, możemy go obciążyć szczególnym układem sił, pod działaniem których będzie on pozostawał w równowadze; oczywiście jest, że dany układ prętów pod działaniem takich sił będzie pozostawał w równowadze i wtedy, gdy wszystkie te siły powiększać będziemy lub zmniejszać proporcjonalnie. Jeżeli następnie układ taki wyprowadzimy np. dowolną siłą uboczną z tego położenia, to powstaną momenty sił zewnętrznych, które po usunięciu siły ubocznej, albo sprowadzą dany układ do pierwotnego położenia, lub go oddalą będą od tego położenia, to zależy od rodzaju równowagi sił; przyjmijmy następnie, że wartość funkcji danych sił nie jest max., t. j. że równowaga wytworzona jest nie stałą. Przyjmijmy następnie, że odkształcenia kątów pomiędzy prętami, spotykającymi się w węzłach, są sprężyste; wtedy powstałe momenty sił zewnętrznych, gdy układ nie przedstawia max. pracy, nie zawsze wywołają dalszą zmianę układu; powstałe bowiem momenty obciążenia znajdują sprzeciw w odkształceniu w momentach, powstałych w węzłach sprężystych.

Następnie zwrócić należy uwagę, że momenty, występujące w węzłach sprężystych przy danym odkształceniu są wielkościami stałymi, momenty zaś sił zewnętrznych przy temże odchyleniu od położenia równowagi mogą się zmieniać, zależnie od współczynnika proporcjonalności, wspólnego dla wszystkich sił obciążających; przy pewnych przeto wartościach tego współczynnika układ taki, odchyłony z położenia równowagi, może powrócić do położenia równowagi, przy innych zaś wykona dalsze odchylenie.

Wartość współczynnika od którego rozpocznie się odchylenie nazwać możemy współczynnikiem krytycznym. Współczynnik ten odpowiada sile krytycznej (lub prędkości krytycznej). Wszystkie przeto linje ciśnień (o ile przyjmijemy że są nierozciągliwe i nieściślowe), mogą być uważane za układy geometryczne zmienne ze sprężystymi węzłami; a obciążone siłami, mającemi wartość funkcji sił nie maximum, — posiadać muszą współczynniki krytyczne.



Rys. 3.

Pręt prosty, wyżej rozpatrywany, może być również uważany za układ złożony z pewnej ilości nieskończenie małych prętów (w tym razie ściśliwych lub sztywnych), połączonych z sobą węzłami sprężystymi i tworzących linię prostą; żadne obciążenie wzdłuż osi takiego układanie nie wyprowadzi go z postaci prostopadłej; uboczne odchylenie jednakże przy pewnej wielkości siły obciążającej, może wywołać wyboczenie. Wyrazem momentów w tym razie występujących w węzłach jest wielkości J i E ; wyrazem zaś momentów sił zewnętrznych są wielkości P i l .

W takich warunkach znajduje się również np. rura o przekroju kołowym,

o cienkich ściankach, poddana zewnętrznemu ciśnieniu np. hydraulicznemu; rura taka posiada też ciśnienie krytyczne t. j. współczynnik krytyczny.

W związku z obliczeniem i wykresem (P, f), zrobionym dla obciążeń danego pręta z rozmaitymi mimośrodami, rys. 2 gi i 3-ci, zauważę, że przebieg geometryczny wykresów tych jest podobny do wykresów, sporządzonych na podstawie doświadczeń, podawanych np. u Timoszenki *) lub u R. Meyera **). Z tego podobieństwa wynika; że w tych doświadczeniach występowały mimośrod, i gdy np. ze wzoru ścisłego obliczyłem mimośród dla jednego z podanych przez Kirscha ***) doświadczeń, to otrzymałem wartości odchyłeń, wymierzone z doświadczeń. Obliczenie, przytoczone zaprzecza przeto twierdzeniu, że te wykresy empiryczne zbliżają się asymptotycznie do granicy Eoulerowskiej, jak głoszą niektórzy autorzy; należały przeto przyjąć, że przebieg ich jest taki, jaki wypada z obliczenia i jaki, jest przedstawiony na rys 2-im.

Na rys. 3-cim, który jest rys. 2-gim w powiększonej skali, naniósłem jeszcze wykresy (P, f) z równania

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P}{W} (f + m)$$

dla $\sigma = 6 \text{ kg./mm.}^2$ i dla tych samych m i wymiarów pręta, jakie stosowałem poprzednio; punkty przecięcia się tych wykresów z poprzednimi, dają związek (P, f) przy naprężeniu $\sigma = 6 \text{ kg./mm.}^2$; jak widzimy z rysunku, geometryczne miejsce tych punktów (wykres obciążeń bezpiecznych) przedstawia linię, zbliżoną do prostej i prawie prostopadłą do osi f; co wskazuje z jako szybkością spada dopuszczalna wytrzymałość pręta z powiększeniem mimośrodu.

R É S U M É.

LES CONDITIONS PHYSIQUES DE L'EXISTENCE DE FLAMBEMENT.

H. CZOPOWSKI.

L'auteur tend à éclairer au point de vue physique les conditions de l'existence de flambement; dans ce but il analyse la stabilité relative du pendule simple, qui tourne autour d'un axe vertical passant par le point de suspension et d'où l'angle d'écart commence à partir d'une certaine valeur finie de la vitesse angulaire de rotation, valeur analogue à la force d'Euler.

Ensuite l'auteur montre l'analogie par rapport au changement des conditions de stabilité et l'existence du point de bifurcation fig. 1.

Le travail est complété par le calcul numérique des déformations de la barre soumise à l'effort de compression avec une excentricité (m) donnée. Le calcul, exécuté par la formule exacte du rayon de courbure, démontre que la déformation de barre se produit d'une manière tout à fait continue et que cette continuité est conservée même pendant le passage de la valeur de force par la limite d'Euler, fig. 2 et 3, résultat contraire aux opinions, énoncées dans beaucoup des traités spéciaux.

*) Timoszenko. Wytrzymałość, str. 336,

***) Rudolf Meyer. Der Knickfestigkeit, st. 126,

****) Zft. d. V. D. Ing. 1905.

BADANIA NAD DIELEKTRYKAMI.

PRZEZ

MIECZYŚŁAWA WOLFKEGO.

PRACA REFEROWANA NA POSIEDZENIACH NAUKOWYCH W. T. P. d. 1/III i 22/III. 24.

Opierając się na teorii dielektryków zapoczątkowanej przez P. Debye'a, która tłumaczy zależność stałej dielektrycznej od temperatury przez egzystencje samoistnie spolaryzowanych molekuł, tak zwanych „dipoli“, próbowałem otrzymać trwałe spolaryzowane dielektryki przez zestalanie ich w polu elektrycznym. Badaniom tym poddałem początkowo parafinę i siarkę, a następnie w temperaturze ciekłego powietrza następujące dielektryki: eter etylowy, alkohol etylowy i metylowy, aceton, chloroform, czterochlorek węgla, siarczek węgla, benzol, naftę i glicerynę. Okazało się, że wszystkie te dielektryki, niezależnie od tego, czy posiadają dipole, czy też nie, zestalone w polu elektrycznym 300 volt/cm wykazały zjawiska odpowiadające polaryzacji trwałej. Bliższe zbadanie tych zjawisk dowiodło jednak, że przyczyną ich jest nie polaryzacja trwała dielektryków, a jony elektrolityczne „zamrożone“ znajdujące się w dielektyku dzięki słabemu przewodnictwu jego elektrolitycznemu w stanie ciekłym.

W trakcie tych doświadczeń zauważyłem, że podczas zestalania się dielektryka bez pola elektrycznego na elektrodzie, izolowanej, umieszczonej ponad jego powierzchnią, powstają ładunki elektryczne indukowane. Ładunki te rosną i maleją skokami, przyczem każdej nagłej zmianie ich odpowiada charakterystyczny trzask wewnątrz dielektryka zestalonego. Szereg doświadczeń wykonanych nad powyżej wymienionymi dielektrykami zamrożonymi w temperaturze ciekłego powietrza przekonał mię, że przyczyną powstawania tych ładunków jest pękanie zestalonego dielektryka. Dalsze badania w tym kierunku wykonałem nad dielektrykami stałymi. Okazało się, że prawie wszystkie przezemnie badane *kryształy, lub ciała o budowie mikrokryształicznej* o ile były dobrymi izolatorami, *wykazywały przy łupaniu ich na powierzchniach łupania swobodne ładunki elektryczne*. Najsilniejsze były te ładunki u miki, soli kamiennej i fluorytu, słabiej dawały to zjawisko siarczan potasu, kalcyt, octan miedzi, kwas winowy i inne.

Do interpretacji tego nowego zjawiska zastosowałem teorię prawdopodobieństwa podziału poszczególnych jonów danego kryształu pomiędzy obydwie powierzchnie łupania. W wyliczeniach mych oparłem się na najprostszej hipotezie, że prawdopodobieństwo, iż jakiś dowolny jon dodatni lub ujemny, po roz-

łupaniu znajdzie się na jednej z dwóch powierzchni łupania jest niezależne od rozkładu pozostałych jonów. Na podstawie tego założenia obliczyłem prawdopodobieństwo wielkości powstających przez łupanie ładunków i stąd średnią wartość tych ładunków dla wielkiej ilości doświadczeń. Ilościowe doświadczenia przeprowadzone dla soli kamiennej dały wartość średnią rzędu wielkości obliczonej teoretycznie, lecz cokolwiek od tej ostatniej większą.

Miałem zamiar zjawisko to zbadać w próżni, lecz dowiedziałem się od prof. Ehrenfesta w Leiden (w maju r. b.), że prof. Joffe z Pietrogradu również zaobserwował to zjawisko i badał je następnie dla soli i miki w próżni, otrzymując niezmiernie doniosłe i ciekawe wyniki. Pracę swoją referował prof. Joffe w końcu kwietnia r. b. na kongresie Solveyowskim w Brukseli.

R É S U M É.

En train de ses recherches sur les diélectriques l'auteur a constaté, que *sur les surfaces de clivage des cristaux, qui sont bons isolateurs, ils se produisent pendant le clivage des charges électriques libres.* L'auteur a étudié ce phénomène qualitativement et quantitativement, en mesurant les charges produites; il a donné aussi une interpretation théorique de ce nouveau phénomène.

Après avoir fini son travail l'auteur a appris de M. Ehrenfest, professeur à Leyde, que M. Joffe, professeur à Petrograd, a trouvé le même phénomène et l'a étudié dans le vide. M. Joffe a referé son travail à la fin du mois d'avril a. c. au Congrès de Bruxelles.

Stała dielektryczna ciekłego helu.

PRZEZ

M. WOLFKEGO z Warszawy i H. KAMERLINGH ONNES'A z Leydy.

PRACA ZŁOŻONA W KRÓL. AMSTERDAMSKIEJ AKAD. NAUK.

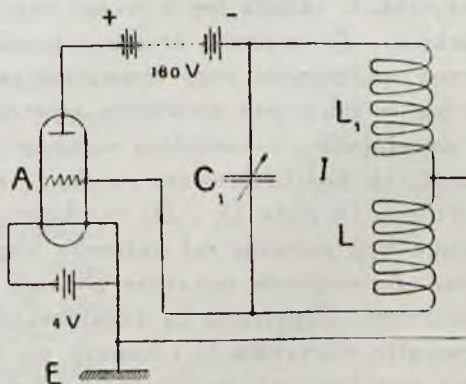
W Zakładzie Kryogenicznym Uniwersytetu Lejdejskiego oznaczyliśmy po raz pierwszy stałą dielektryczną ciekłego helu w temperaturze jego wrzenia pod ciśnieniem atmosferycznym.

Metoda pomiarów przez nas użyta, posługująca się drganiami niegasącymi o wysokiej częstotliwości, została uprzednio przez jednego z nas wypracowana w Zakładzie Fizycznym I-ym Politechniki Warszawskiej.

Aparatura pomiarowa składa się w zasadzie z dwóch obwodów drgających I i II (rys. 2) luźnie ze sobą sprzężonych zapomocą cewek samoindukcyjnych L_1 i L_2 .

Obwód I służy jako generator prądów szybkozmiennych. Schemat jego jest przedstawiony na rys. 1. Właściwy obwód składa się z kondensatora obrotowego C_1 i dwóch cewek samoindukcyjnych L i L_1 . Zapomocą audjonu A wytwarzają się w obwodzie tym drgania niegasące o wysokiej częstotliwości. Zarządza się katoda audjonu jest w punkcie E uziemiona. Ten system łączenia okazał się jako najbardziej gwarantujący stałe amplitudy drgań*).

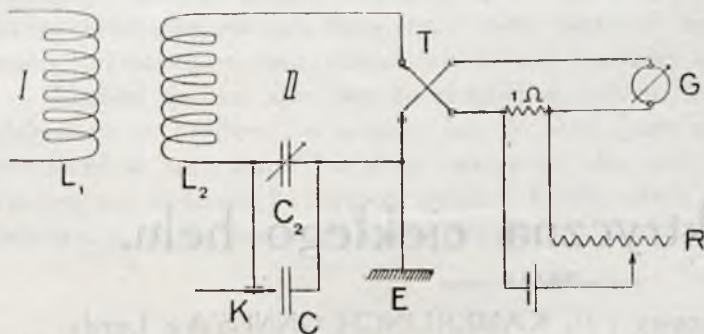
Obwód drgań II (rys. 2) jest właściwym obwodem mierniczym, składa się on z cewki samoindukcyjnej L_2 , z precyzyjnego kondensatora obrotowego dokładnie wycechowanego C_2 i z termoelementu próżniowego T , który służy tutaj jako detektor prądów szybkozmiennych. Z kondensatorem C_2 związana jest pojemność C , która zapomocą ruchomego kontaktu K może być dołączoną równolegle do kondensatora C_2 , lub też od niego odłączoną. Pojemność tę stanowi



Rys. 1.

*) Porówn. J. Herweg, Verh. d. D. Phys G. 21. 572. 1919.

mały kondensatorek cylindryczny, zawarty w szklanym naczynku i zanurzony w kryostacie opisanym poniżej (rys. 3). Kondensatorek ten może być napełniony substancją, której stała dielektryczna ma być wyznaczoną, lub też może on być wypróżniony zapomocą pompy próżniowej. Obwód jest uziemiony w punkcie E.



Rys. 2.

Siła elektromotoryczna termoelementu T mierzy się metodą kompensacyjną z pomocą precyzyjnej skrzynki oporowej R i galvanometru G, który służy jako instrument zerowy. Używany przez nas termoelement daje 7,5 mV na 10 mA prądu w obwodzie II. Czułość galvanometru wynosiła $2 \cdot 10^{-9}$

A na mm skali w odległości 6.5 m.

Obrotowy kondensatorek C, posiada odpowiednie urządzenie tak, iż może być precyzyjnie nastawionym zapomocą przekładni z linkami z miejsca obserwatora. Do odczytywania nastawienia tego kondensatora służy skala o długości przeszło 5 m umieszczona wkoło osi kondensatora na kole zakreślonym promieniem o długości 2 m. Małe wklęsłe lustro umieszczone na osi kondensatora w punkcie środkowym tego koła rzuca powiększony obraz rzeczywisty silnie oświetlonej szczeliny o szerokości 0.2 mm. Przesunięcie się promienia świetlnego na skali o 1 cm odpowiada zmianie pojemności kondensatora o 0.518 cm. Podobny sposób odczytywania metodą subiektywną zapomocą lornetki był użyty przez M. Jeżewskiego*) w jego pomiarach stałej dielektrycznej. Myśmy obrali metodę obiektywną ze względu na wygodę pomiarów.

Kondensatorek C wraz z kryostatem jest przedstawiony na rys. 3. Sam kondensatorek C składa się z 5-ciu koncentrycznie umieszczonych mosiężnych cylinderek. Zewnętrzna średnica kondensatora wynosi 34 mm, zaś długość około 100 mm, pojemność jego równa się mniejwięcej 90 cm. Kondensatorek ten znajduje się w szklanym wewnątrz wysrebronem naczynku G. Naczynko to może być napełniane odpowiednią substancją, której stałą dielektryczną chcemy wyznaczyć, za pośrednictwem rurek T₁ i T₂. Naczynko G znajduje się w dwóch naczyniach Dewara D₁ i D₂ zamkniętych u góry nakrywkami H i W. Naczynia te mogą być zależnie od potrzeby napełnione ciekłym wodorem, lub też ciekłym helem. Zewnętrznie naczynie Dewara D₃ jest otwarte i napełnia się ono ciekłym powietrzem. Elektroda E₁ kondensatora jest izolowaną; wyprowadzona jest ona nazewnątrz naczynka G i kończy się metalową kapsłą. Bezpośrednio ponad tą kapsłą znajduje się ruchomy kontakt K, który zapomocą rączki K₁ może być opuszczony aż do zetknięcia się z elektrodą E₁, lub też podniesiony i odłączony od niej. Druga elektroda E₂ prowadzi od zewnętrznego cylinderka kondensatora C; jest ona połączona z wewnętrzną powierzchnią posrebroną naczynka G

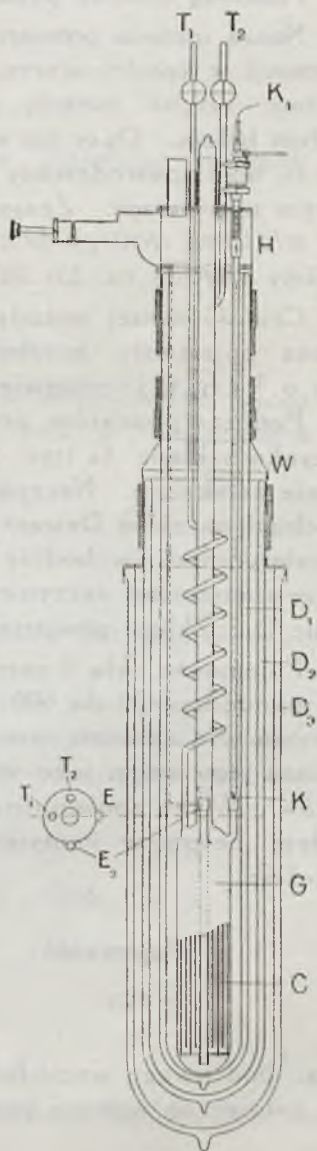
*) M. Jeżewski, Krak. Akad. t. IX. Ser. A. Str. 73. 1920.

i wyprowadzona nazewnątrz tego naczynka łączy się z nakrywkami H i W. Nakrywki te, a tem samem i elektroda E_2 są połączone z uziemioną zbroją kondensatorka C_2 (rys. 2). Cały ten system uziemienia stanowi dostateczną ochronę pojemności C przeciwko zewnętrznym wpływom.

Pomiar pojemności C (rys. 2) uskutecznia się w następujący sposób. Obwód I nastawia się zapomocą kondensatorka obrotowego C_1 na odpowiednią długość fali, która przy naszych pomiarach wynosiła 400 do 600 m. Przy otwartym kontakcie K i pewnem określonym nastawieniu kondensatorka mierniczego C_2 kompensuje się prąd w obwodzie galwanometru do zera. Następnie kontakt K zostaje zamknięty, przez co pojemność C dołącza się do pojemności kondensatorka C_2 . Poczem zmniejsza się pojemność kondensatorka mierniczego przez obracanie jego osi aż do chwili, gdy naruszona równowaga w obwodzie galwanometru zostanie przywróconą i galwanometr wskazuje znów zero. W ten sposób dodana do kondensatorka mierniczego pojemność C zostaje skompensowana przez odpowiednie zmniejszenie jego własnej pojemności. Liczba podziałek na skali kondensatorka mierniczego, o którą promień świetlny się przesunął przy tej kompensacji pojemnościowej, daje nam pojemność kondensatorka C w jednostkach względnych. Oczywiście zależność pomiędzy odczytaniami na skali kondensatorka mierniczego, a jego zmianami pojemności musi być przytem ściśle linjową, co też w obszarze naszych pomiarów było sprawdzone.

Stała dielektryczna danej substancji oblicza się jako stosunek pojemności kondensatorka C napełnionego tą substancją do pojemności jego w próżni w tej samej temperaturze. Próżnia daje się z łatwością wytworzyć w naczynku G (rys. 3) zawierającym kondensatorki zapomocą pompy próżniowej.

Wobec tego, że kontakt K, łączący kondensatorki C z kondensatorkiem miernicznym C_2 znajduje się bezpośrednio przy elektrodzie E_1 , to pozostaje jedynie pojemność kapsli tej elektrody, która może powodować błąd w oznaczeniu stałej dielektrycznej. Błąd ten daje się łatwo ocenić; pojemność tej kapsli wynosi około 0,4 cm, t. j. mniej niż 0,6% pojemności C, wobec tego jednak, że pojemność kondensatorka napełnionego ciekłym helem, według naszych pomiarów, różni się jedynie o ca. 5% od pojemności jego w próżni, to błąd spowodowany przez dodatkową pojemność kapsli nie wyniesie więcej niż 0,03% otrzymanej wartości stałej dielektrycznej.



Rys. 3.

Odczytania na skali kondensatorka mierniczego mogą być uczynione z dokładnością do jednego milimetra, co przy obserwowanych przez nas wychyleniach gwarantuje dokładność pomiaru 0,1%. Błąd prawdopodobny (niesystematyczny) wynosił przy wszystkich naszych pomiarach znacznie mniej.

Podobną metodę pomiarów używał niedawno Bryan*).

Nasza metoda pomiarów stałej dielektrycznej nie uwzględnia przewodnictwa substancji w kondensatorze. Aby ocenić błąd spowodowany przez to, zmierziliśmy zgruba metodą galwanometryczną opór kondensatora napełnionego ciekłym helem. Opór ten wynosił niewiele więcej $2 \cdot 10^7$ omów, wobec czego jasnym jest, że błąd spowodowany przez przewodnictwo ciekłego helu nie potrzebuje być brany pod uwagę. Znając wymiary kondensatorka C, możemy obliczyć *oporność właściwą ciekłego helu* na cm^2 przekroju i cm długości, w ten sposób otrzymaliśmy wartość ca. $2,6 \cdot 10^{10}$ omów.

Czułość naszej metody daje się z tego ocenić, że w stanie skompensowania zmiana pojemności kondensatorka mierniczego, odpowiadająca odchyleniu na skali o 1 cm , t. j. niewiele więcej 0,5 cm pojemności około 6-ciu centymetrów.

Podczas pomiarów pojemności kondensatorka napełnionego ciekłym helem, naczynko szklane G (rys. 3) było napełnione ciekłym helem dopełna i hermetycznie zamknięte. Naczynko to było również zanurzone w ciekłym helu, który wypełniał naczynie Dewara D_1 ; hel z tego naczynia odparowywał pod ciśnieniem atmosferycznym swobodnie do wielkiego gazometru. Dla ochrony przeciwko ciepłu zewnętrznemu naczynie Dewara D_2 było napełnione ciekłym wodorem, a naczynie D_3 ciekłym powietrzem.

Pojemność była 6 razy mierzona przy 3-ch różnych długościach fal zawartych pomiędzy 400 do 600 m . Każdy pomiar jest średnią arytmetyczną z 6-ciu odczytań. Na zasadzie metody najmniejszych kwadratów obliczyliśmy dla każdego pomiaru jego wagę, jako wielkość odwrotnie proporcjonalną do sumy kwadratów błędów. W ten sposób otrzymaliśmy dla pojemności kondensatorka napełnionego ciekłym helem w centymetrach skali kondensatorka mierniczego następujące wartości;

Pojemność:	178,9	178,9	179,0	178,9	178,8	178,9
Waga:	45,5	9,8	7,3	10,75	40,0	14,5

Biorąc pod uwagę względne wartości wag powyższych rezultatów, otrzymujemy, jako ostateczną wartość pojemności:

$$178,9 \dots \dots \dots (1)$$

Po skończonych tych pomiarach naczynko szklane zawierające kondensatorkę zostało zapomocą pompy próżniowej opróżnione i pojemność kondensatorka w próżni była mierzona w ten sam sposób, jak poprzednio. Otrzymałyśmy następujące wartości:

*) A. B. Bryan, Phys. Rev. 22, 399, 1923.

Pojemność:	170,5	170,7	170,8	171,1	170,2	170,7
Waga:	20,0	66,7	2,58	8,2	4,98	12,8

z kąd jako wartość ostateczna wynika:

$$\underline{170,7} \dots \dots \dots (2).$$

Stałą dielektryczną ciekłego helu otrzymujemy, obliczając stosunek pojemności (1) do (2):

$$K = \frac{178,9}{170,7} = 1,048.$$

Wobec tego, że pomiary nasze są wykonane z dokładnością około 0,1%, możemy jako wartość stałej dielektrycznej ciekłego helu w temperaturze jego wrzenia pod ciśnieniem atmosferycznym przyjąć:

$$\underline{K = 1,048 \pm 0,001.}$$

Podczas tych pomiarów ciśnienie barometryczne wynosiło 765 mm, co odpowiada temperaturze wrzenia helu 4,2° abs. *).

W związku z temi pomiarami wykonaliśmy również pomiar kontrolujący pojemności kondensatorka C w próżni w temperaturze pokojowej mniej więcej 25° C. Pomiary wykonane w ten sam sposób jak poprzednio dały następujące wartości:

Pojemność:	171,6	171,7	171,65	171,7	171,7	171,8
Waga:	12,7	8,34	8,47	9,8	2,08	7,15

z kąd wynika:

$$\underline{171,7} \dots \dots \dots (3).$$

Wobec tego, że pojemność kondensatora jest funkcją linjową jego wymiarów możemy założyć następujące równanie:

$$\Delta C = \alpha \cdot C \cdot \Delta T,$$

gdzie ΔC oznacza przyrost pojemności kondensatora, C jego pojemność, α współczynnik rozszerzalności termicznej i ΔT przyrost temperatury. W naszym wypadku będzie: $\Delta C = 1$, jako różnica pomiędzy wartością (3) i (2), $C = 170,7$

*) H. Kamerlingh Onnes i S. Weber, Leiden Comm. Nr. 147b. 1915.

i $\Delta T = 293,8$. Podstawiając te wartości w powyższe równanie, otrzymujemy współczynnik rozszerzalności dla mosiądzu, z którego był zrobiony nasz kondensator:

$$\alpha = 0,00002.$$

Wartość ta zgadza się w zupełności z tą jaką otrzymał Henning*) dla czystego mosiądzu w temperaturach pomiędzy -191° i 16°C , co jest jednym sprawdzianem więcej dokładności naszej metody.

R É S U M É,

LA CONSTANCE D'ÉLECTRIQUE DU HELIUM LIQUIDE.

Deposé à l'Acad. Roy. d'Amsterdam.

Dans le Laboratoire Cryogénique de l'Université de Leyde nous avons mesuré pour la première fois la constante diélectrique du helium liquide. La méthode employée était élaborée par un de nous à l'Institut de Physique de l'École Polytechnique de Varsovie. Cette méthode consistait dans le remplacement de la capacité inconnue par une capacité connue d'un condensateur à précision dans un circuit oscillant à haute fréquence. Nous avons obtenu pour la constante diélectrique du helium liquide à la température de $4,2^{\circ}$ abs. la valeur:

$$1,048 \pm 0,001.$$

*) Landolt—Bernstein, Tabellen II, str. 1219. 1924.

Stała dielektryczna ciekłego i stałego wodoru.

PRZEZ

M. WOLFKEGO z Warszawy i H. KAMERLINGH ONNES'A z Leydy.
PRACA ZŁOŻONA W KRÓL. AMSTERDAMSKEJ AKADEMJI NAUK.

Pomiary wstępne przygotowawcze stałej dielektrycznej ciekłego wodoru były mniej więcej przed rokiem wykonane w Laboratorjum Kryogenicznem w Leydzie przez panów G. Breita i H. Kamerlingh Onnesa*). Myśmy obecnie pomiary te wykonali w sposób bardziej dokładny i wyznaczyliśmy jednocześnie stałą dielektryczną stałego wodoru.

Metoda pomiarów i aparatura była ta sama, którą użyliśmy poprzednio przy pomiarach stałej dielektrycznej ciekłego helu**), dlatego też nie powtarzamy tutaj opisu metody pomiarów, a odsyłamy do wyżej wymienionej publikacji.

Tak samo jak dla helu zmierzaliśmy przedewszystkiem *opór właściwy ciekłego i stałego wodoru*; otrzymaliśmy następujące wartości:

Wodór ciekły: $1,3 \cdot 10^9$ omów, wodór stały: powyżej 10^{11} omów na 1 cm^2 przekroju i 1 cm długości. Widzimy zatem, że i tutaj ewentualny błąd wywołany przez przewodnictwo jest znikomy i nie potrzebuje być brany pod uwagę.

Dla pomiaru pojemności kondensatorka napełnionego ciekłym wodorem, naczynko zawierające ten kondensatorek było dopełna napełnione ciekłym wodorem i szczelnie zamknięte. Naczynko to było zanurzone również w ciekłym wodrze w naczyniu Dewara, które to znajdowało się w drugim naczyniu Dewara napełnionem ciekłym powietrzem. Same pomiary były uskutecznione w identyczny sposób, jak dla ciekłego helu. Otrzymaliśmy następujące wartości;

Pojemność:	210,5	210,4	210,6	210,3	210,5	210,1.
Waga:	5,56	8,85	1,37	45,5	24,4	8,92

z kąd wynika:

$$\underline{210,3} \dots \dots \dots (1)$$

Po wypompowaniu wodoru i opróżnieniu naczynka zawierającego kondensatorek, zmierzaliśmy pojemność jego w próżni w tej samej temperaturze co poprzednio; otrzymaliśmy następujące wartości:

Pojemność:	171,7	171,9	172,1	171,5	172,0	171,8
Waga:	33,3	0,99	1,9	9,9	8,47	2,38

*) Praca jeszcze nie opublikowana.

**) M. Wolfke i H. Kamerlingh Onnes, praca poprzednia.

skąd otrzymujemy :

$$171,7 \dots \dots \dots (2)$$

Stałą dielektryczną otrzymujemy ze stosunku pojemności (1) do (2).

$$K = \frac{210,3}{171,7} = 1,225.$$

Drugi szereg pomiarów wykonany w identyczny sposób dał nam wartość :

$$K = 1,224.$$

Otrzymane wartości różnią się od siebie mniej niż o 0,08%. My uważamy pierwszą wartość za dokładniejszą, gdyż w następnym pomiarze pojemność kondensatora w próżni nie była wykonaną bezpośrednio po oznaczeniu pojemności jego w ciekłym wodorze, lecz później. Wobec tego przyjmujemy dla stałej dielektrycznej ciekłego wodoru w temperaturze jego wrzenia pod ciśnieniem atmosferycznym następującą wartość:

$$\underline{K = 1,225 \pm 0,001.}$$

Pozatem oznaczyliśmy zależność stałej dielektrycznej ciekłego i stałego wodoru od temperatury. W tym celu naczynie Dewara, zawierające ciekły wodór, w którym było zanurzone naczynko z kondensatorem, zostało połączone z pompą próżniową. Przez odpompowywanie parującego wodoru można było dowolnie ciśnienie parowania zredukować i tem samem obniżyć temperaturę kąpieli wodorowej. Specjalne urządzenie używane w tym celu w laboratorium Lejdejskim pozwalało utrzymywać godzinami stałe ciśnienie pary wodoru i tem samem stałą temperaturę. Mierzyliśmy jedynie pojemność kondensatora napełnionego wodorem, zaś dla pojemności kondensatora w próżni użyliśmy stałej wartości, mierzonej poprzednio, a to ze względu na niewielką wartość współczynnika rozszerzalności w tych niskich temperaturach i przeto nieznaczną deformację kondensatora z temperaturą.

Temperatury odpowiadające mierzonym ciśnieniom zredukowanym pary wodoru ciekłego obliczyliśmy z pracy Catha i Kamerling Onnesa*).

Temperatury odpowiadające stanom równowagi termodynamicznej stałego wodoru z jego parą obliczone zostały według wzoru Simona**).

Pomiary stałej dielektrycznej w tych doświadczeniach nie były z tą samą dokładnością wykonane, jak poprzednie pomiary, gdyż ze względu na parowanie wodoru należało pomiary uskuteczyć dość szybko. Tak samo też ze względu na bardzo słabe przewodnictwo cieplne ciekłego i stałego wodoru nie mamy pewności, czy równowaga temperatur pomiędzy kąpielą wodorową, a wodorem wewnątrz kondensatora nastąpiła w dostatecznym stopniu.

*) P. G. Cath and H. Kamerling Onnes, Leiden Comm. Nr. 152a. 1917.

**) Simon, ZS. f. Phys. 15.

Otrzymane przez nas wartości są zestawione w podanej poniżej tabelce.

	Ciśnienie mm.	Temp. abs.	K
wodór ciekły	755	20,38	1,225
" "	357	18,05	1,234
" "	80	14,64	1,241
" stały	58	14,2	1,248
" "	42	13,6	1,224
" "	35	13,3	1,212
" "	32	13,2	1,211

Z rezultatów tych wynika, że stała dielektryczna ciekłego wodoru rośnie z malejącą temperaturą, osiąga wartość najwyższą w bliskości punktu zamarzania i następnie szybko maleje w stanie stałym wraz z temperaturą.

Podobna zależność pomiędzy stałą dielektryczną, a temperaturą przy przejściu ze stanu ciekłego do stanu stałego, była w wielu wypadkach obserwowana*).

Posługując się otrzymanymi przez nas wartościami stałej dielektrycznej dla ciekłego wodoru, możemy sprawdzić wzór Clausius - Mosotti'ego. W tym celu obliczamy gęstości odpowiednie ciekłego wodoru z pracy Mathiasa, Crommelina i Kamerlingh Onnesa**) i podstawiając wartości te we wzór Clausius - Mosotti'ego obliczymy stałą const. wzoru tego:

$$\frac{K - 1}{K + 2} \cdot \frac{1}{D} = \text{const.}$$

Wyniki podajemy w następującej tabelce:

Temp. abs.	Gęstość	K	const.
20,38	0,07084	1,225	0,985
18,05	0,07328	2,234	0,987
14,64	0,07647	1,241	0,973

Widzimy z tego, że wzór Clausius - Mosotti'ego sprawdza się z dokładnością do 1%.

I na tem miejscu pragniemy podziękować technicznemu kierownikowi instalacji kryogenicznych Laboratorium Lejdejskiego, panu G. J. Flimowi, jak również i personalowi technicznemu tegoż laboratorium za umiejętną pomoc przy trudnych pomiarach.

*) Porówn. np. H. Isnardi, ZS. f. Phys. 9. 153. 1922.

**) E. Mathias, C. A. Crommelin aud H. Kamerlingh Onnes, Leiden Comm. Nr. 154 b. 1921.

R É S U M É

LA CONSTANCE DIELECTRIQUE DE L'HYDROGÈNE LIQUIDE ET SOLIDE.

Deposé à l'Acad. Roy. d'Amsterdam.

Nous avons mesuré la constante diélectrique de l'hydrogène liquide et solide par la même méthode, que nous avons employé auparavant pour les mesures de celle du helium, Ces mesures nous avons fait aux différentes temperatures entre 20°abs. jusqu'à 13°abs. Nous avons trouvé, que la constante diélectrique de l'hydrogène liquide augmente, quand la temperature diminue, elle obtient la plus grande valeur au voisinage du point de solidification et puis en état solide elle diminue rapidement avec la temperature.

Nous avons prouvé la formule Clausius-Mosotti et il suit, qu'elle est d'accord avec nos mesures à 1⁰/₁₀ près.

Pierwszy międzynarodowy zjazd, poświęcony mechanice stosowanej.

PRZEZ

H. MIERZEJEWSKIEGO.

REFERAT WYGŁOSZONY NA 38-em POSIEDZENIU NAUKOWEM W. T. P. d. 24.V.1924 r.

Przewodnią myślą międzynarodowego zjazdu, poświęconego mechanice stosowanej, jaki się zebrał w kwietniu r. b. w Delfcie, siedzibie znanej politechniki holenderskiej, było nawiązanie łączności pomiędzy specjalistami, tak teoretykami, jak i eksperymentatorami, pracującymi w różnorodnych działach mechaniki stosowanej, jak również wytworzenie nowego terenu współdziałania pomiędzy inżynierami, fizykami i matematykami, w celu wspólnego rozwiązywania następujących się ważkich a zawiłych zagadnień naukowych w zakresie techniki i dziedzin pokrewnych. Jakkolwiek owe współdziałanie było zawsze jedną z podstawowych cech postępu techniki i wszystkie przełomowe przejawy twórczości technicznej były oparte na głębokiej znajomości zjawisk przyrody, lub na umiejętnym władaniu rachunkiem, to jednak w pewnych okresach łączność pomiędzy naukami ścisłymi, a stosowanymi, bardzo się rozluźniała. Najdobitniej wyraziło się to w tych czasach, gdy technika znalazła się pozornie u szczytu swej potęgi, uzyskując dominujący wpływ na przemysł, a tą drogą pośrednio i na całe życie społeczne. Inicjatywa techniczna stwarzała istotnie cuda dla szerokiego ogółu. Pola dla pracy rutynowanego inżyniera, posługującego się ustalonymi metodami działania, nie wychodzącymi zresztą zbytnio poza zakres nabywanych w szkole wiadomości, było pod dostatkiem. Można było podziwiać, jak w kreślarniach i biurach fabrycznych powstawały szybko projekty i plany techniczne, konstrukcje budowlane i maszynowe, udane i pewne, gdyż wielokrotnie sprawdzone w wykonaniu. Były to czasy, gdy inżynier-konstruktor stawał się coraz bardziej organizatorem, niż badaczem i twórcą.

Rozwój szkolnictwa politechnicznego, powstanie licznych laboratoriów państwowych i przemysłowych, wreszcie przełomowe wynalazki, jak np. lotnictwo, zaczęły się stopniowo składać na zmianę istniejącego stanu rzeczy. Ostatnio wybuch wojny wszechświatowej i związany z nim przewrót w stosunkach gospodarczych, nie pozostał bez wpływu na kształtowanie się nowych pojęć. Zjawily się nowe zagadnienia techniczne niezmiernie ważnej, których nie można było rozwiązać zapomocą metod, będących w powszechnym użytku. Rozpowszechnienie

i spopularyzowanie wiedzy technicznej, odpowiadającej przeciętnemu poziomowi umysłowemu inżyniera, przyczyniło się do zbanalizowania tych wiadomości, których posiadanie było przedtem prerogatywą specjalisty w tej czy innej dziedzinie.

Zbyt wąskie pojmowanie zadań nauk technicznych i empiryzm, któremu świadomie, czy nieświadomie, hołdowali najdzielniejsi inżynierowie w przemyśle, co jest rzeczą poniekąd zrozumiałą, a nawet wielu profesorów, posiadających wpływ na rozwój i kierunek szkolnictwa politechnicznego, wywołało reakcję, wyrażającą się w nawrocie do wiedzy ścisłej i przeciwstawieniu się skrajnemu utylitaryzmowi. Zaczęto powszechnie wyczuwać, że poważniejsze etapy postępu technicznego muszą być poprzedzone intensywnym rozwojem odnośnej gałęzi wiedzy ścisłej, przyczem pracownicy w tej dziedzinie muszą stawiać sobie cele bardziej ogólne i idealne. Inżynier twórczy stawia sobie ponadto konkretny cel spożytkowania tych nowych wartości naukowych. Ten konkretny cel był zawsze potężnym bodźcem w kierunku rozwoju samych badań, nie może być on jednak osiągnięty bez odwołania się do umiejętnie skojarzonego badania teoretycznego i doświadczalnego.

Reakcja przeciwko empiryzmowi w technice, a pośrednio i przeciwko obecnemu kierunkowi kształcenia inżynierów, daje się odczuwać we wszystkich prawie krajach. Ograniczę się do podania kilku przykładów, mniej lub więcej znanych. Tak np. w Niemczech wyraziła się ona w przeniesieniu ośrodka badań technicznych, wymagających specjalnej pieczołowitości teoretycznej i doświadczalnej, do uniwersytetu (Getynga), w założeniu specjalnych towarzystw (Stowarzyszenie matematyki i mechaniki stosowanej, towarzystwo fizyki technicznej, towarzystwo metaloznawcze i t. d.), powstaniu nowych czasopism, propagujących zbliżenie kierunków teoretycznych. Zacięte polemiki pomiędzy przedstawicielami wrogich kierunków (Riedler — Gumbel) przyczyniły się do spopularyzowania istoty sporu pomiędzy dawnym a nowym kierunkiem w technice. W Stanach Zjednoczonych A. P., a więc w kraju typowego empiryzmu doświadczalnego, reakcja przeciwko poprzedniemu stanowi rzeczy wyraża się w chwili obecnej w postaci reformy laboratorjów technicznych, nie tylko państwowych i uniwersyteckich, lecz i przemysłowych, w kierunku podejmowania przez nie szerszych prac naukowych, gdyż zbyt utylitarny program działalności pracowni amerykańskich doprowadzał z natury rzeczy do wyjąłowania twórczości.

Podobne przykłady można zacytować z łatwością w odniesieniu do Anglii, Francji i innych krajów. Pewien przełom w umysłowości kół technicznych, daje się, na szczęście, wyczuć i w naszym kraju.

Podczas obrad zjazdowych dało się zauważyć wysunięcie nieco naprzód dwóch ważnych spraw: właściwej interpretacji zjawisk hydro i aerodynamicznych w związku z zagadnieniem burzliwego ruchu cieczy, oraz fizycznych podstaw wytrzymałości materiałów na tle zagadnień plastyczności metali i teorii pękania. Tym tematem poświęcono wiele czasu i uwagi, nie zaniehbując jednak poszczególnych działów mechaniki i matematyki w zastosowaniu do badań technicznych.

G. I. Taylor (Cambridge) demonstrował i omawiał wyniki swych pięknych doświadczeń nad ruchem wirowym cieczy, mających na celu wykazanie o ile teorie hydrodynamiczne sprawdzają się w rzeczywistości. Wyniki poszczególnych doświadczeń były przewidziane z góry na mocy odnośnych obliczeń matematycznych i doświadczenie miało wykazać wpływ warunków brzegowych, jako jednego

z ważnych czynników ruchu cieczy. Jedno z doświadczeń wykazało, że w cieczy pomiędzy dwoma współśrodkowymi cylindrami, obracającymi się z różną prędkością kątową, powstają prawidłowe wiry.

Th. v. Kàrmàn (Akvizgran) w referacie wygłoszonym z wielką swadą i temperamentem, omówił szczegółowo i krytycznie różne poglądy na warunki stateczności ruchu cieczy w warstwie brzegowej, dając wyjaśnienie zjawisk turbulencji z punktu widzenia teorii kinetycznej.

J. M. Burgers (Delft) zdał sprawozdanie ze swych doświadczeń, wykonanych wspólnie z *van der Hegge Zijnen* nad ruchem powietrza w warstwie brzegowej. W pewnym dość specjalnym przypadku udało się zbadać rozkład prędkości i ustalić równoczesną obecność ruchu laminarnego i burzliwego w warstwie brzegowej, oraz amplitudy fluktuacji prędkości.

C. Witoszyński w referacie, który obudził duże zainteresowanie w kołach specjalistów, przeprowadził krytykę zasady cyrkulacji. W innym referacie rozwinął on teorię profilów lotniczych.

T. Levi-Civita (Rzym) w wytwornym wykładzie dał teorię fali o amplitudzie skończonej na powierzchni cieczy ciężkiej.

E. Hahn (Nancy) zreferował teorię turbomaszyn.

A. Friedmann (Petersburg) zreferował kilka prac własnych oraz uczonych rosyjskich z zakresu hydro i aerodynamiki.

V. Bjerkness (Bergen—Norwegja) demonstrował doświadczenia z pulsującymi w wodzie kulami i cylindrami, które wskutek drgań przyciągały się lub odpychały. Prelegent uzasadniał przytem analogie, wygłoszone przed laty przez jego ojca *A. C. Bjerkness'a*, pomiędzy istnieniem pola grawitacyjnego i elektrycznego a pulsacjami cieczy.

Podobnie jak burzliwemu ruchowi cieczy, tak i zagadnieniem plastyczności i pękania ciał poświęcono znaczną część czasu, przypadającego na posiedzenie plenarne, a pozatem jedno całkowite posiedzenie sekcyjne. Referowane były przytem prace teoretyczne i doświadczalne wchodzące w zakres wytrzymałości materiałów, częściowo metalografji i fizyki, składając się na dość wszechstronny obraz stanu wiedzy w tej sprawie.

L. Prandtl (Getynga) w wyczerpującem sprawozdaniu zestawił dotychczasowe wyniki prac nad rozkładem naprężeń w ciałach plastycznych. Zagadnienie dwuwymiarowe, dotyczące „ciała nawpółplastycznego” w pewnych prostych przypadkach obciążenia, można uważać częściowo za rozwiązane i zgodne z doświadczeniem. Zapoczątkował teorię w tym dziale *Haar* i *Kàrmàn* (1909) i *Mises* (1913), pierwsze szczęśliwe rozwiązanie dał *Prandtl*, rozwinął teorię dzielnie *Hencky* (Delft), później znowu *Prandtl*, zaś poważne matematyczne uzasadnienie nowej teorii dał *Càratheodory* i *Schmidt*. Zagadnienie plastycznego skręcania podjął *Nàdai* (Getynga) i *Trefftz*. Uzupełnieniem doświadczalnem prac *Prandtl'a* i jego szkoły był referat *Nadai'a*.

H. Hencky, któremu zawdzięczamy kilka śmiałych pomysłów w zakresie nowej teorii plastyczności, w referacie swym porzucił częściowo swe poprzednie stanowisko, zbliżając go do *Prandtl'a* i rozwinął nowy pogląd na tą sprawę, stanowiący do pewnego stopnia syntezę dawniejszej pracy (1904) *M. T. Hubera* (Lwów) i późniejszej *Haar'a* i *Kàrmàn'a* (1909). Mianowicie, posiłkując się pojęciem twardości plastycznej, czyli gęstości energii odkształcenia postaciowego

i ustosunkowując działy pracy sprężystej i odkształcenia plastycznego, otrzymał on warunki równowagi ciała plastycznego zapomocą metod rachunku warjacyjnego. Na uwagę zasługiwało przytem poglądowe zobrazowanie układu naprężeń, różniące się od wykresu Mohr'a,

A. A. Griffith (Farnborough) zwrócił uwagę na to, że siły kohezyjne przewyższają niejednokrotnie naprężenia średnie w próbkach wytrzymałościowych w chwili pęknięcia od 20 do 100 razy. Kres wytrzymałości danego ciała może być znacznie powiększony, o ile usunąć wszelkie drobne pęknięcia wewnętrzne i ryski na powierzchni, w których lokalizuje się energia powierzchniowa. Pałeczki szklane, wykonane w podobny sposób jak znane łezki batawskie, wytrzymują przejściowo do 600 kg/mm^2 przy rozrywaniu pod warunkiem, że na powierzchni ich niema żadnych rysek. Nagły spadek wytrzymałości przypisać należy spontanicznej krystalizacji. Ryski o szerokości kilku mikronów wpływają na gwałtowny spadek wytrzymałości.

A. F. Joffè (Petersburg), fizyk rosyjski, w gorąco oklaskiwanym referacie przyjął się do wywodów Griffith'a. Referował on swe doświadczenia nad odkształceniami kryształu soli kuchennej, który dzięki stałemu zasklepianiu tworzących się rysek zapomocą zanurzenia kryształu w stężonym roztworze soli kuchennej, osiągnął wytrzymałość stali.

Na uwagę zasługuje opracowana przez Joffè'go metoda określania granicy sprężystości zapomocą interferencji promieni Röntgen'a. Mianowicie röntgenogram, obserwowany na ekranie fluoryzującym, wykazuje w momencie przekraczania granicy sprężystości, wyraźnie zjawisko asteryzmu.

B. P. Haigh (Greenwich) rozwinął swój pogląd na istotę pęknięcia wskutek zmęczenia, poparty szeregiem pięknych obserwacji i doświadczeń.

J. Czochralski (Frankfurt nad Menem) obudził żywe zainteresowanie wynikami swych prac nad otrzymywaniem wielkich kryształów aluminium, miedzi i t. d., co stanowi wielką zdobycz współczesnej metalografji, będąc punktem wyjścia dla poważnych teorii wytrzymałościowych. Jego badania nad zgniotem, oparte na interpretacji röntgenogramów wywołały żywą dyskusję i opozycję ze strony *Polanyi'ego* (Berlin) i jego szkoły. Mianowicie według *Czochralskiego* zgniot polega na lokalnych zniszczeniach siatki krystalicznej, gdy pogląd przeciwny upatruje istotę zgniotu w odkształceniu ogólnem siatki krystalicznej (struktura włóknista). Występują przytem trudności należytego interpretowania röntgenogramów.

Byłoby błędem mniemać, że wyczerpujące dyskusje i referaty nad plastycznością i pękaniem przesłoniły znaczenie bardziej klasycznych zagadnień wytrzymałościowych. Na posiedzeniach sekcyjnych poruszony został szereg tematów specjalnych, bardzo żywotnych dla techniki. Byłoby niepodobieństwem omówić je w niniejszem sprawozdaniu; podobnie też, jak to uczyniłem w stosunku do tematów hydro i aerodynamicznych, wiele z nich będę zmuszony pominąć, odsyłając czytelników do skrótu, wydanego przez komitet zjazdu*).

*) Internationaal Congres voor Technische Mechanica. Utreksels der Voordrachten. Wyd. Technische Boekhandel en Drukkerij J. Waltman Jr. Delft. 1924. Skróty referatów są podane w językach angielskim, niemieckim i francuskim. W opracowaniu znajdują się rozprawy zjazdu (w przybliżeniu około 500 stron druku).

C. B. Biezeno (Delft) zreferował swe metody wykreślne wyznaczania naprężeń w belkach i płytach.

E. G. Coker (Londyn) wywołał ogólne zainteresowanie swemi badaniami nad rozkładem naprężeń w przezroczystych modelach zapomocą światła spolaryzowanego. Jego wytrwała wieloletnia działalność w tym kierunku wyraziła się w zademonstrowaniu szeregu barwnych przezroczy, ilustrujących wiele ciekawych kwestji praktycznych. Aparatura doświadczalna została przez *Coker'a* tak ulepszona, że pomiary noszą precyzyjny charakter.

R. V. Southwell (Teddington) zajmował się statecznością cienkiej wstęgi sprężystej pod działaniem sił ścinających. Nierówności faliste na modelach z blachy miedzianej wykazały zgodność teorii z doświadczeniem. Zwróconą została przytem uwaga na pewną analogję hydrodynamiczną, polegającą na otrzymywaniu t. zw. ukośnych wirów *Lorentz'a*, których kształt odpowiada w zupełności nierównościom falistym blachy w doświadczeniach *Southwell'a*.

K. Terzaghi (Konstantynopol) rozważał wytrzymałość fundamentów plastycznych z mokrej gliny. Osiadanie się z biegiem czasu takiego fundamentu ujął on w równanie różniczkowe, odpowiadające prostolinjowemu przewodnictwu ciepła.

Z matematyków, którzy wzięli czynny udział w zjeździe, wymienić należy *R. Courant'a* z Getyngi, który wygłosił referat o metodzie *Ritz'a* rozwiązywania zagadnień brzegowych i *Mises'a* (Berlin), który rozwijał pewne nowe teorie z zakresu rachunku wektorowego.

Geneza zjazdu w Delfcie była następująca. W jesieni 1922 r. z inicjatywy *Kármán'a* i *Levi-Civita* zwołana została w Insbrucku „konferencja hydro i aerodynamiczna“, która zgromadziła okazałą liczbę specjalistów. Powodzenie tej konferencji skłoniło profesorów politechniki delfckiej pp. *Biezeno*, *Burgers'a*, *Schouten'a* i *Wolff'a* do zorganizowania międzynarodowego zjazdu, poświęconego mechanice stosowanej. Wkrótce też powstał komitet organizacyjny, w którym wzięli udział uczeni wszystkich krajów, za wyjątkiem francuzów, którzy powstrzymali się od udziału w zjeździe ze względu na ówczesne położenie polityczne (obecność Niemców na zjeździe). Dla nas Polaków powstrzymanie się francuzów od udziału w zjeździe było jego przykrą stroną.

W Zjeździe wzięło udział 214 osób. Najliczniej reprezentowani byli Holendrzy (105) i Niemcy (54), potem Anglicy (15). Pozatem w zjeździe wzięli udział uczeni z odległych nieraz krajów świata.

Organizacja zjazdu była wzorowa. Ze względu na to, że uczestnicy zjazdu nie reprezentowali rządów, czy instytucji naukowych, otwarcie i zamknięcie zjazdu trwało krótko. Obradami kierował przewodniczący zjazdu prof. *Biezeno*, sekretarzem był prof. *Burgers*. Dzięki sprężystemu przewodniczeniu dyskusje nie przeciągały się i program zjazdu nie ulegał zmianom. Następnym zjazd komitet organizacyjny zdecydował zwołać w Zurychu we wrześniu 1926 r.

Stosunki koleżeńskie nie pozostawiały nic do życzenia w warunkach powojennych. Dawała się zauważyć wszędzie chęć zbliżenia i nawiązania stosunków naukowych na terenie międzynarodowym. Silne animozje polityczne, dzielące obecnie państwa i narody, były tym razem głęboko ukryte. Wpływała na to gościnność gospodarzy holenderskich, którzy nie szczędzili trudów, by uprzyjemnić pobyt uczestnikom zjazdu. Miłe wrażenie pozostało wszystkim po po-

bycie w pięknym i starożytnym miasteczku jakim jest Delft, po wycieczkach do Amsterdamu, gdzie zwiedzaliśmy instytut aerodynamiczny, do Hagi i Scheveningen. Ci, którzy po raz pierwszy, jak my polacy, zwiedzaliśmy Holandję, oczarowani byliśmy rozkwitającymi polami tulipanów pod Haarlemem. Podziw budziła pracowitość i wytrwałość holendrów, zdobywających ciągle nowe ziemie, wydzielane morzu. Może wszakże więcej wysiłków wkłada ten naród niziny w walce o odrębność narodową, o prawo do życia państwa z kilkumilionową ludnością, otwartego dla obcych wpływów językowych i kulturalnych. Nauka jest w Holandji orężem walki o byt. Świadczą o tem nie tylko sławne uniwersytety i politécnika: wystarczy wziąć do ręki pierwszą lepszą gazetę holenderską by dowiedzieć się, że w życiu społeczeństwa tutejszego „Wetenschappen“ umiejętności budzą tyle zainteresowania, powszechnego co i życie gospodarcze lub sporty.

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ W. T. P.

Sprawozdanie z posiedzenia Zarządu Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego z dnia 10 listopada 1923 r. *Obecni na posiedzeniu* pp. H. Czopowski, C. Domaniewski, A. Pszenicki, I. Radziszewski, L. Staniewicz, K. Taylor, A. Wasiutyński, C. Witoszyński.

Przewodniczy p. H. Czopowski

1. Odczytano i przyjęto protokół z posiedzenia Zarządu dnia 24/III—1923 r.

2. Ustalono następujący porządek obrad ogólnego zebrania Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego:

1. Odczytanie i przyjęcie protokołu z poprzedniego posiedzenia ogólnego z dnia 27/I—1923 r.

2. Sprawozdanie z działalności Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego za rok ubiegły.

3. Sprawozdanie Komisji rewizyjnej.

4. Wybory Zarządu Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego na rok bieżący.

5. Zaproszenie nowych członków w osobach panów C. Kłosa, A. Kryńskiego, C. Mikulskiego.

3. Zasadniczo uznano za pożądane urządzenia zebrania dorocznego,

pozostawiając szczegóły wykonania rządowi.

4. Przewodniczący podnosi potrzebę rozwinięcia agitacji w celu zyskania prac do druku w organie Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego.

Sprawozdanie z zebrania ogólnego Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego z dnia 24 listopada 1923 r.

Obecnych 23 osób. Otwiera posiedzenie p. H. Czopowski przemówieniem charakteryzującym ogólnie działalność Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego, poczem zaprasza na przewodniczącego prof. F. Kucharzewskiego.

1. Sekretarz p. C. Witoszyński odczytuje protokół z posiedzenia ogólnego z d. 27/I. 1923. Protokół przyjęto.

2. Przyjęto odczytane przez Sekretarza p. C. Witoszyńskiego następujące sprawozdanie z działalności Towarzystwa: Sprawozdanie z działalności W. T. P. w r. akademickim 1922/23.

Rok ubiegły 1922/23 jest drugim rokiem istnienia Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego. Liczba członków wynosi 135. Oprócz tego mamy kilkunastu członków, którzy zmienili miejsce zamieszkania nie zawiadamiając Towarzystwa, z tymi członkami

mimowoli łączność jest zerwana. Podana liczba ogólna zawiera 6-ciu członków zamiejscowych. W roku ubiegłym odbyto 15 posiedzeń naukowych od 19-go do 33 włącznie. Sprawozdania z posiedzeń do 32-go wydrukowano w Sprawozdaniach i Pracach. Sprawozdanie z ostatniego 33-go posiedzenia umieszczone będzie w jednym z Nr. Nr. następnych. Frekwencja na posiedzeniach wynosiła od 15 do 30 osób. Oprócz posiedzeń naukowych odbyło się w ciągu roku sprawozdawczego 3 posiedzenia Zarządu: 26/IX.22, 24/III.23 oraz 10/XI.23 r. Sprawozdania z pierwszych dwóch podano w Sprawozdaniach i Pracach, trzecie będzie podane w najbliższym zeszycie. Dalej odbyło się zebranie ogólne dn. 27 I.23 ogłoszone drukiem w zeszycie 3-cim 1924 r. W roku bieżącym zorganizowane zostały kursy dla inżynierów, uchwalone na zebraniu ogólnym 21/X.22. Realizacja tych kursów uskuteczniła została według programu przedstawionego w swoim czasie na wymienionym zebraniu przez kierownika kursów prof. I Radziszewskiego.

Wydawnictwa. Warszawskie Towarzystwo Politechniczne wydaje w dalszym ciągu organ własny pod tytułem „Sprawozdania i Prace Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego”; w roku sprawozdawczym wyszedł zeszyt 4 tomu I oraz zeszyt podwójny 1, 2 tomu II; zeszyt 3 tomu II wyjdzie w dniach najbliższych. Materiał na zeszyt 4 tomu II jest przewidywany w dostatecznej mierze. Wymiana z Towarzystwami Naukowymi, Krajowymi i Zagranicznymi utrzymana jest w dalszym ciągu, należy jednak stwierdzić, że nadsyłanie organów Towarzystw Zagranicznych nie jest regularne. Oprócz organu „Sprawozdania i Prace” Warszawskie Towarzystwo Politechniczne wydało szereg odbitek wykla-

dów, ogłoszonych na kursach dla inżynierów, drukowanych w Przeglądzie Technicznym i w Przeglądzie Elektrotechnicznym.

3. P. I. Radziszewski uzupełnia sprawozdanie udzieleniem wiadomości o Kursach dla inżynierów. Dalej odczytuje sprawozdanie finansowe oraz sprawozdanie Komisji Rewizyjnej. Sprawozdania te będą wydrukowane w następnym zeszycie.

4. *Wybory.* Na przewodniczącego powołano p. H. Czopowskiego. Na członków zarządu wybrano: pp. J. Radziszewskiego, L. Staniewicza, C. Witozyńskiego i M. Wolfkiego.

Powołani zostali jako delegaci wydziałów:

Z Wydziału Inżynierji Lądowej p. H. Czopowski.

Z Wydziału Inżynierji Wodnej p. E. Warchałowski.

Z Wydziału Mechanicznego p. H. Mierzejewski.

Z Wydziału Elektrotechnicznego p. M. Pożaryski.

Z Wydz. Chemji p. C. Grabowski.

Z Wydziału Architektury p. C. Domaniewski.

Do Komisji Rewizyjnej wybrano ponownie pp. B. Hummla, S. Płużańskiego, Z. Straszewicza.

5. Zaproszono do Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego nowych członków:

Inż. A. Kryńskiego, inż. C. Kłosa, inż. C. Mikulskiego.

6. Uchwalono wyrazić podziękowanie Wydziałowi Nauki Ministerstwa Wyznań Religijnych i Ośw. Publicznego w szczególności p. Michalskiemu za poparcia, udzielane na wydawnictwa Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego.

Sprawozdanie z posiedzenia Zarządu Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego z dn. 3 grudnia 1923 r.

Obecnie na posiedzeniu p. C. Witoszyński, H. Czopowski, C. Grabowski, I. Radziszewski, M. Wolfke, L. Staniewicz, E. Warchałowski.

1. Podział funkcji pomiędzy członkami Zarządu.

Wiceprzewodniczącym obrano p. L. Staniewicza, Sekretarzami p. M. Wolfkiego i p. C. Witoszyńskiego, Skarbnikiem p. I. Radziszewskiego, do zarządzania sprzedażą wydawnictw W. T. P. p. E. Warchałowski, Redaktorem Sprawozdań i Prac pozostaje p. H. Czopowski.

2. Odczytano i przyjęto do wiadomości list Kasy Mianowskiego w sprawie organizacji prac i wydawnictw naukowych.

Sprawozdanie z posiedzeń naukowych Warsz. Tow. Politechnicznego.

Posiedzeń naukowych w ciągu roku akad. 1923/24 odbyło się siedem w następującej kolejności:

Posiedzenie 33-cie dnia 10/XI.23. Referat p. W. Pogorzelskiego: *Równanie całkowe z osobliwością biegunową.*

Posiedzenie 34-e d. 16/II.24. Referat p. H. Czopowskiego: *O warunkach fizycznych powstawania wyboczenia.*

Posiedzenie 35-e d. 1/III.24. Referat p. M. Wolfkiego: *Badania nad dielektrykami w punkcie ich topnienia.*

Posiedzenie 36-e dn. 22/III.24. Referat p. M. Wolfkiego: *Badania nad dielektrykami w punkcie ich topnienia (dokończenie).*

Posiedzenie 37-e. Referat p. S. Millera: *Badania nad równowagą prętów sprężystych pierwotnie prostoliniowych ściskanych i jednocześnie zginanych w pewnych poszczególnych przypadkach obciążenia i podparcia.*

Posiedzenie 38-e dn. 24/V.24. Referat p. H. Mierzejewskiego: *Sprawozdanie ze Zjazdu Mechaniki Technicznej w Delft w Holandji.*

Posiedzenie 39-e dn. 31/V.24. Referat p. S. Millera: *Uwagi nad podstawami teoretycznymi stateczności sprężystej.*

OD REDAKCJI.

Praca prof. C. Witoszyńskiego „Mechanika profilów lotniczych”, referowana na posiedzeniu naukowym Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego dnia 13/21. 1923 roku, wyszła obecnie w Paryżu w języku francuskim pod tytułem „La mécanique des profils d'Aviation” jako tłumaczenie z polskiego, wykonane przez inż. S. Ziemińskiego.

Redakcja zwraca uwagę na uzupełnienie numeracji zeszytów „Sprawozdań”: u góry po prawej stronie okładki i pierwszej stronicy będzie umieszczony Nr. kolejny zeszytu od roku poczęcia wydawnictwa; numer zaś zeszytu danego tomu będzie umieszczony po lewej stronie tejże stronicy przy Nr. tomu.

W sprawach W. T. P. oraz redakcyjnych i administracyjnych zwracać się należy do
Sekretariatu W. T. P., Warszawa, Politechnika; godziny 12—1 po poł. Telef 78-21.

REDAKTOR
H. CZOPOWSKI.

WYDAWCA
WARSZAWSKIE T^{wo} POLITECHNICZNE.