

**B**

Nr 4382.  
Politechnika Warszawska

Prof. Inż. Dr. St. Kunicki.

**Konspekt z wykładów  
Statyki  
Budowlanej**

(z Cz. II-ej.)

Rok 1931/32.

WYD. PRZEZ KOMISJĘ NAUKOWĄ ZWIĄZKU SŁUCHA-  
CZÓW ARCHITEKTURY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.

4382



Komisja Naukowa Związku Słuchaczy Architektury  
składa podziękowanie p.prof.inż.Stanisławowi Kunickiemu  
za przeprowadzenie korekty niniejszej części "Statyki".

/-/ Stefan Jelnicki  
przewodniczący  
Kom.Nauk.Zw.Sł.Arch.

BIBLIOTEKA  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ  
Warszawa, ul. Koszykowa 1

2239 B 4382



O B E L K A C H C I A Ğ Ł Y C H .

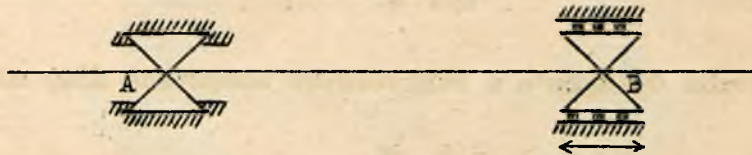
T r e ś ć

- 1/ Uwagi o belkach wspornikowych.
- 2/ Różniczkowe równanie linji ugięcia.
- 3/ Twierdzenie Mohr'a o linji ugięcia.
- 4/ Równanie Clapeyron'a o trzech momentach.
- 5/ Niektóre przykłady zastosowania równania Clapeyron'a.

# WSTĘP.

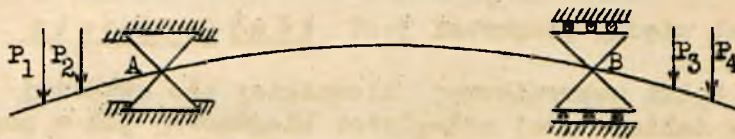
## U w a g i o b e l k a c h w s p o r n i k o w y c h .

Belki wspornikowe są to belki, leżące na dwóch podporach, których końce czyli wsporniki zwieszają się poza podporami /rys.1/



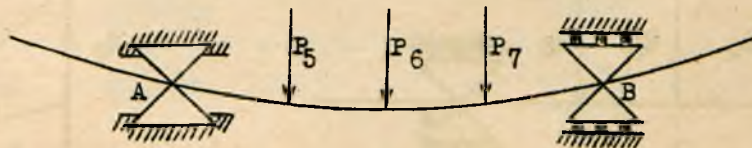
Rys.1. Belka wspornikowa.

Przy obciążeniu ciężarem skupionym tylko wsporników /przyczem rozpatrujemy belkę jako nieważką, ale sztywną, bowiem wpływ ciężaru własnego belki możemy rozpatrzyć oddzielnie/ belka wygina się w sposób, jak wskazuje rys.2.



Rys. 2.

Jeżeli obciążenie działa tylko na środkową część nieważkiej ale sztywnej belki wspornikowej, to belka wygnie się tak, jak wskazuje rys.3. t.j. w stronę przeciwną wygięciu od obciążenia tylko wsporników.



Rys. 3.

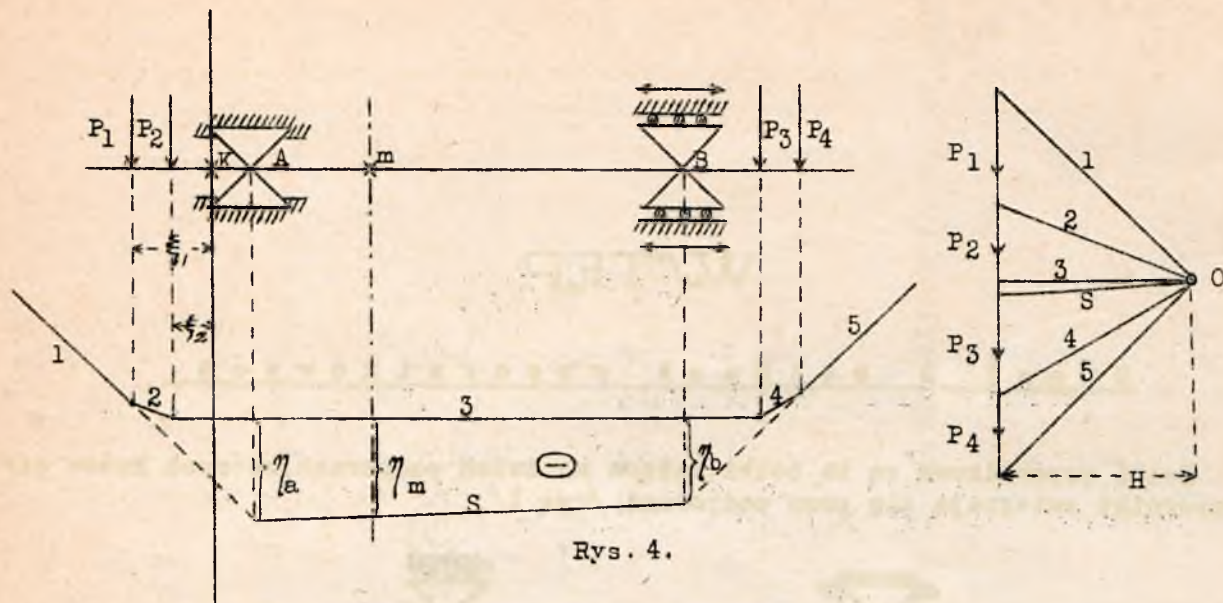
Wykres momentów zginających, ściślej - wielkości proporcjonalnych do momentów zginających belkę wspornikową, w wypadku obciążenia tylko wsporników, przy założeniu, że belka jest nieważką ale sztywną, pokazany jest na rys.4.

Weźmy jakiś przekrój k na wsporniku; moment zginający w tym przekroju będzie się równał:

$$M_k = -P_1 \cdot \xi_1 - P_2 \cdot \xi_2 < 0$$

$\xi_1$  i  $\xi_2$  oznaczają odległość działania sił  $P_1$  i  $P_2$  od przekroju k. Jak widzimy z powyższego równania moment w tym, rozpatrywanym przez nas przekroju k, jest ujemny; ponieważ rzędne wykresu momentów nie zmieniają na całej długości belki swego znaku /wartość ich nigdzie nie przechodzi przez zero/ zatem wszystkie rzędne są ujemne.





Rys. 4.

Na mocy twierdzenia Culmann'a o statycznych momentach mamy dla jakiegoś przekroju m belki:

$$M/m/ = - H \cdot \eta_m$$

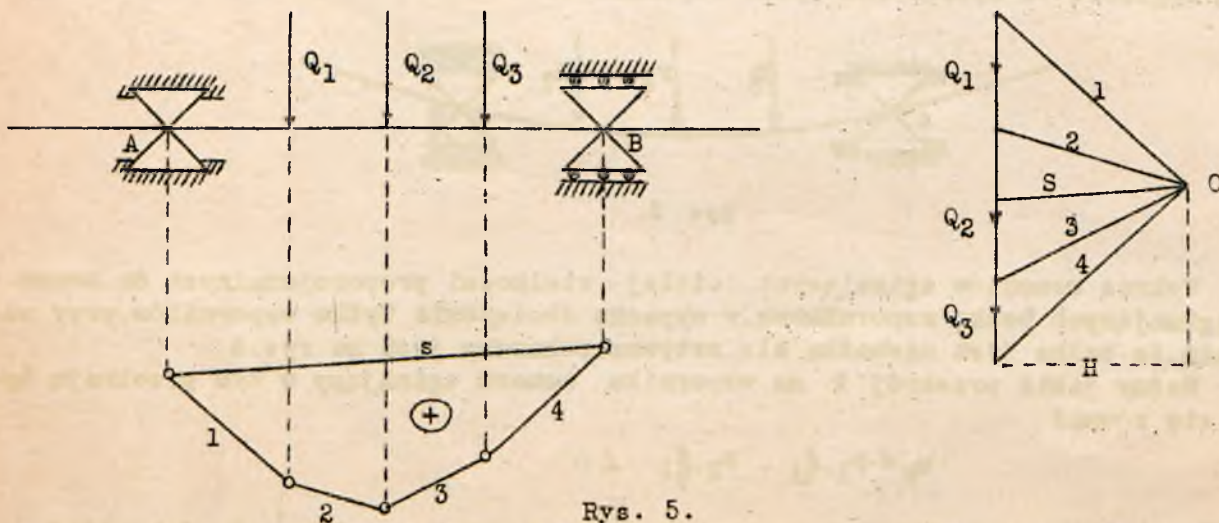
Momenty na podporach A i B belki będą również ujemne i będą się równać:

$$M_a = - H \eta_a$$

$$M_b = - H \eta_b$$

Linia momentów ujemnych między podporami jest linią prostą.

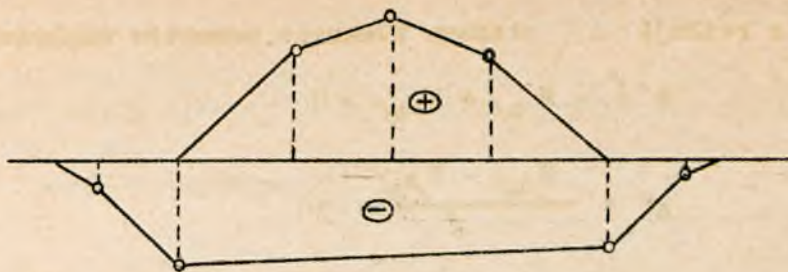
Przy obciążeniu belki wspornikowej /nieważkiej ale sztywnej/ tylko w środkowej części mamy, przy takiej samej odległości biegunowej jak w poprzednio rozpatrywanym przypadku, wykres wielkości proporcjonalnych do momentów zginających belkę, wskazany na rys.5. Widzimy, że w tym wypadku, tak jak w belce prostej, momenty zginające belkę w przekrojach nad podporami są równe zero i że wszystkie rzędne wykresu momentów są dodatnie.



Rys. 5.

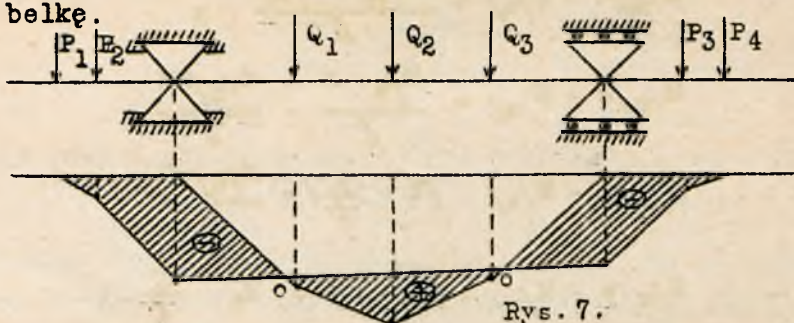
Odlóżmy od linii poziomej do góry rzędne dodatnie i na dół rzędne ujemne, a otrzymamy, jak wskazuje rys.6, złączony wykres momentów zginających belkę wspornikową od obciążenia wsporników siłami P i od obciążenia środkowej części belki siłami Q.





Rys. 6.

Jeżeli koło osi poziomej obrócimy o  $180^\circ$  wykres momentów dodatnich i nałożymy go na wykres momentów ujemnych, to otrzymamy wykres momentów zginających sumarycznych, pokazany na rys. 7. Postąpić tak możemy na zasadzie niezależności działania sił czyli na t.zw. zasadzie superpozycji. Zasadę tę stosować można tylko wtedy, kiedy odkształcenia nie wywołują żadnych nowych sił ani nowych momentów, działających na belkę.

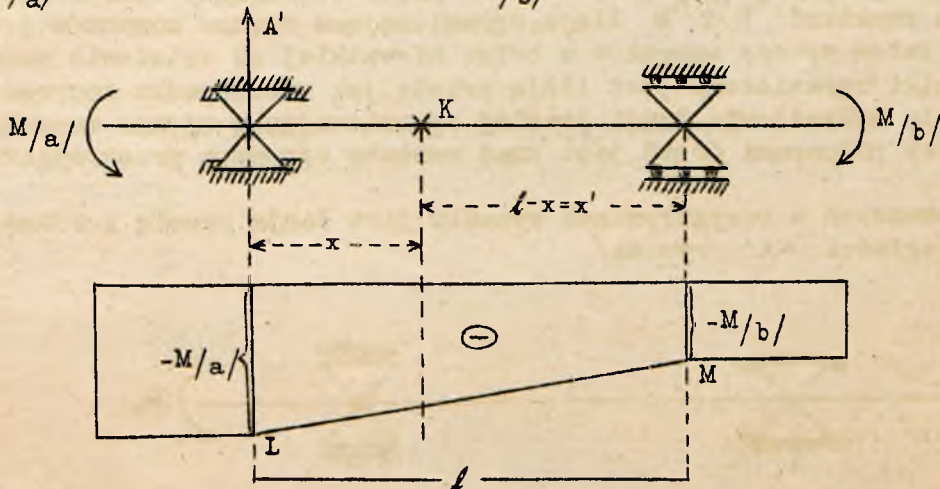


Rys. 7.

Z rys. 7 widzimy, że linja momentów ujemnych między podporami jest linią prostą, a linja momentów dodatnich jest łamaną lub krzywą /w wypadku obciążenia ciągłego/ i że między podporami znajdują się punkty zerowe sumarycznej linji momentów.

Działanie par sił na wsporniki.

Mamy obecnie do rozpatrzenia przypadek, wskazany na rys. 8, kiedy na wsporniki belki działają momenty par sił  $M/a/$  i  $M/b/$ . Załóżmy, że absolutna wartość momentu pary sił  $M/a/$  jest większa niż momentu  $M/b/$ ; belkę rozpatrujemy jako nieważką ale sztywną.



Rys. 8.

Określmy reakcję podpór  $A'$  i  $B'$ . Reakcja  $B'$  podpory B musi być prostopadłą do linji przesunięcia tj. w danym wypadku pionową, a zatem reakcja  $A'$  podpory A musi być także pionową, albowiem obie reakcje podpór muszą tworzyć parę sił, równoważącą moment pary sił działających na belkę, który jest równy różnicy momentów par sił, działających na wsporniki.



Dla otrzymania reakcji  $A'$  piszemy równanie momentów względem punktu B.

$$A' \cdot l - M/a/ + M/b/ = 0$$

$$A' = \frac{M/a/ - M/b/}{l} > 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$B' + A' = 0$$

$$B' = -A'$$

Aby narysować wykres momentów zginających, obliczamy moment zginający w dowolnym przekroju  $k$ , odległym od lewej podpory  $A/$  o  $x$ .

$$M/x/ = - M/a/ + A'x$$

$$M/x/ = - M/a/ + \frac{M/a/ - M/b/}{l} \cdot x$$

$$M/x/ = - M/a/ + \frac{M/a/ \cdot x}{l} - \frac{M/b/ \cdot x}{l}$$

$$M/x/ = - M/a/ \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{M/b/ \cdot x}{l}$$

$$M/x/ = - M/a/ \cdot \frac{l-x}{l} - M_b \cdot \frac{x}{l}$$

podstawiamy  $x'$  na miejsce  $l - x$

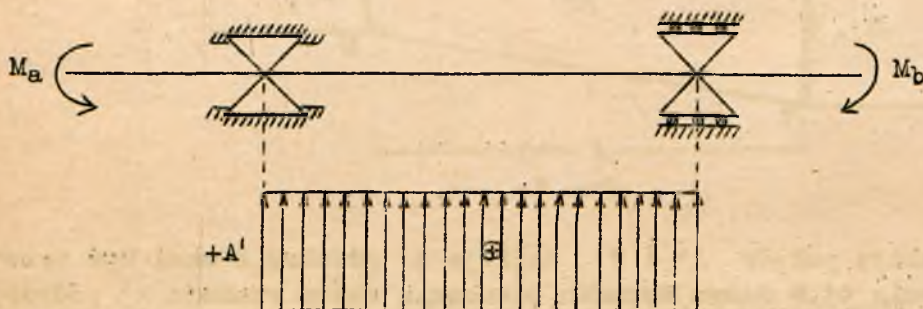
$$\underline{\underline{M/x/ = - M/a/ \cdot \frac{x'}{l} - M_b \cdot \frac{x}{l}}} \quad \text{tj. równanie linii prostej.}$$

Gdy  $x = 0$   $M/x/ = - M/a/$

$x = l$   $M/x/ = - M/b/$

Odkładając od poziomej linii odpowiednie rzędne, otrzymamy wykres momentów zginających. Poza punktami L i M linia, ograniczająca rzędne momentów, jest linią poziomą. A zatem wykres momentów w belce nieważkiej od działania momentów par sił na wsporniki ograniczony jest linią prostą, jak w przypadku poprzednim. W obu wypadkach dla wykreślenia linii prostej, ograniczającej ujemne momenty w części belki między podporami dosyć jest znać momenty ujemne w przekrojach nad podporami.

Wykres sił tnących w rozpatrywanym wypadku jest linią prostą i równoległą do poziomu na odległości  $+A'$  /rys. 8a/

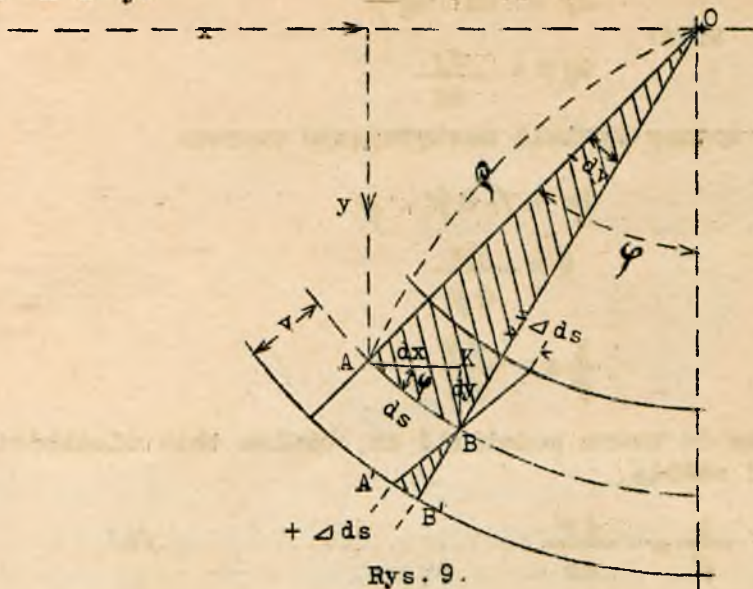


Rys. 8a.



R ó ż n i c z k o w e r ó w n a n i e l i n j i u g i ę c i a .

Belka pod wpływem ugięcia zmienia kierunek osi; oś staje się krzywą. Na rys.9 mamy pokazaną część ugiętej belki. Rozpatrujemy jakiś dowolny przekrój, który ma rzędne  $x$  i  $y$ .



Rys. 9.

Oznaczmy przez  $ds$  różniczkę długości krzywej. To wydłużenie, o które wydłużyły się dolne włókna belki sprężystej, oznaczmy przez  $+ \Delta ds$ , skrócenie zaś górnych fibr oznaczmy przez  $- \Delta ds$ . Na mocy doświadczalnego prawa Hooke'a o wydłużeniach sprężystych możemy napisać równanie następujące:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\sigma}{E}$$

Do tego równania zamiast  $\sigma$  możemy podstawić wyraz naprężenia zginającego ze znanego wzoru Navier'a z teorii zgięcia:

$$\sigma = \frac{M \cdot v}{J}$$

wtedy otrzymamy:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{M \cdot v}{E J} \dots \dots \dots /1/$$

Porównajmy dwa trójkąty OAB i A'B'B zaszczykowane na rys.9. Te trójkąty są podobne. Na mocy podobieństwa tych trójkątów możemy napisać następującą zależność między bokami:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{v}{\rho} \dots \dots \dots /2/$$

Porównajmy ze sobą równanie 1 i 2:

$$\frac{M v}{E J} = \frac{v}{\rho}$$

Po skróceniu przez  $v$  otrzymamy:

$$\frac{M}{E J} = \frac{1}{\rho} \dots \dots \dots /3/$$

$E J$  jest to wartość stała /przy stałym  $J$ /, szttywność belki, widzimy więc z tego równania, że krzywizna  $\frac{1}{\rho}$  jest proporcjonalna do momentu zginającego.



Jeżeli moment zginający równa się zero, to i krzywizna równa się zero; wykrzywienia niema. Rozpatrujemy teraz trójkąt KAB o przyprostokątnych dx i dy, a przeciwprostokątnej ds. Kąt między dx i ds równa się  $\varphi$ , możemy więc napisać:

skąd:  $dy = dx \cdot \operatorname{tg} \varphi$   
 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$

Długość łuku ds możemy wyrazić następującym wzorem:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$$
$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d\varphi}{dx}$$

Zamiast ds możemy do wzoru podstawić dx, bowiem obie wielkości nieskończenie mało różnią się od siebie.

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d\varphi}{dx} \dots \dots \dots /4/$$

Obecnie postaramy się d $\varphi$  wyrazić jako pewną zależność między dx i dy.

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi = \frac{dy}{dx}$$

Weźmy pochodną względem /x/ a otrzymamy:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Podstawimy otrzymaną wielkość do wzoru 4:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2 y}{dx^2}$$
$$- \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \dots \dots /5/$$

Porównajmy obecnie wzór 3 i 5, a otrzymamy ostateczne równanie linii ugięcia /6/.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{E y} \dots \dots \dots /6/$$

Analogiczne równanie można napisać dla krzywej sznurowej.

Dana jest belka o obciążeniu ciąglem, nierównomiernie rozłożonem /rys.10/ na długości belki tj. o zmiennej rzędnej  $q/z = f/x$

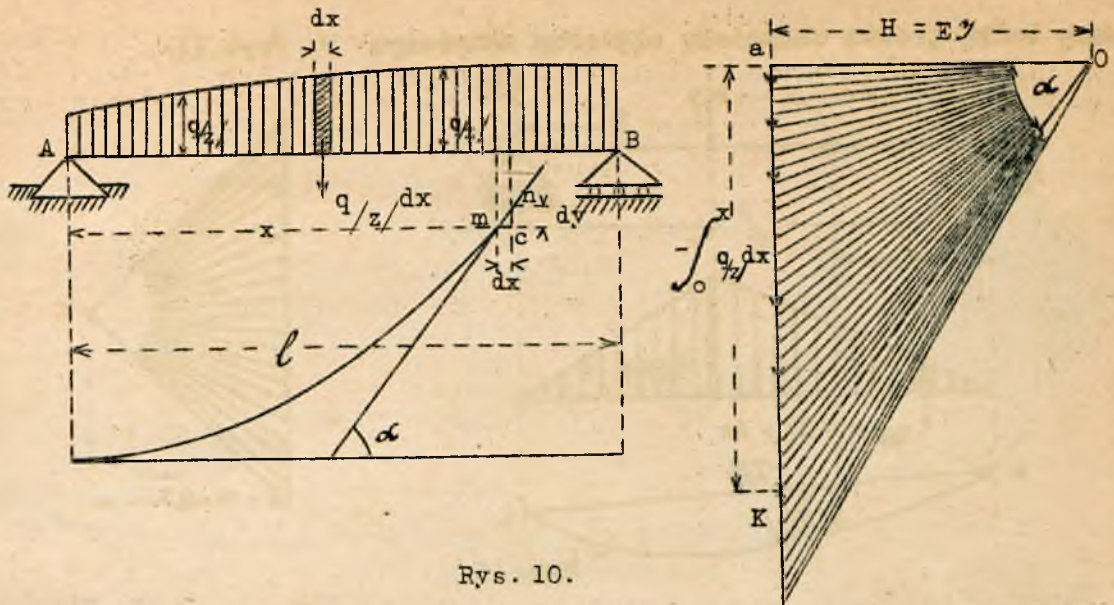
Całe obciążenie dzielimy na nieskończenie małe paseczki o szerokości dx. Ciężar takiego paseczka oznaczmy przez  $q/z \cdot dx$ .

Rozpatrujemy część belki o długości x. Obciążenie belki na długości x będzie się równało sumie wszystkich ciężarków  $q/z \cdot dx$ , odpowiadających tej długości; czyli całce od zera do x z  $q/z \cdot dx$

$$\int_0^x q/z \cdot dx$$

Ponieważ ta całka przedstawia siłę skierowaną na dół /jako obciążenie/, to możemy jej przypisać znak (-).





Rys. 10.

Narysujemy na siłach  $q/z/dx$  wielobok sznurowy, czyli krzywą sznurową przy odległości biegunowej równej  $EY$  /sztywności belki/ następnie poprowadzimy do niej styczną w punkcie  $m$  odpowiadającym odciętej  $x$ , styczna ta z poziomą tworzy kąt  $\alpha$ .

Rozpatrzmy  $\triangle mnc$  i  $\triangle oak$ . Przyprostokątna  $mc = dx$ ,  $nc = dy$ ; kąt  $nmc = \alpha$ , w trójkącie zaś  $oak$  kąt  $aok = \alpha$ . Trójkąty  $mnc$  i  $oak$  są podobne i na mocy tego podobieństwa możemy napisać następującą proporcję:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\int_0^x q/z/ dx}{H}$$

różniczkujemy to równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx = \frac{-q/z/ \cdot dx}{H}$$

po skróceniu przez  $dx$  otrzymujemy różniczkowe równanie krzywej sznurowej:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{q/z/}{H} \dots \dots \dots /7/$$

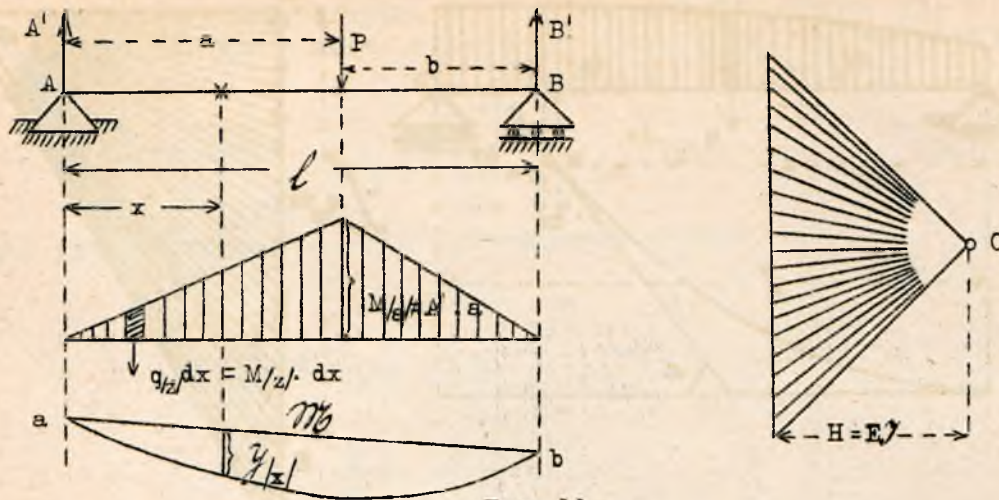
Twierdzenie Mohr'a o linii ugięcia.

Porównując równania 6 i 7 widzimy, że jeśli zamiast  $q/z/$  podstawić  $M/z/$  a zamiast  $H$  podstawić  $EY$ , to krzywa sznurowa przedstawi linię ugięcia. Skąd wypływa niżej podane twierdzenie Mohr'a o linii ugięcia.

Linia ugięcia belki może być wykreślona jako krzywa sznurowa dla wyobraźalnego obciążenia ciągłego belki polem momentów zginających daną belkę od rzeczywistego obciążenia przy odległości biegunowej, równej mierze sztywności belki  $/EY/$ .



Mamy belkę prostą obciążoną ciężarem skupionym P /rys.11/.



Rys. 11.

Reakcję podpór obliczymy za pomocą równania momentów względem punktu B.

$$\sum M/B/ = 0 \quad A' \cdot l - P \cdot b = 0$$

$$A' = P \cdot \frac{b}{l}$$

Narysujmy wykres momentów zginających przy obciążeniu rzeczywistym, P. Moment zginający największy będzie w punkcie C, wyrazi się on, jak następuje:

$$M/C/ = A' \cdot a$$

Podstawiając za A' wyżej otrzymaną wartość, mamy:

$$M/C/ = P \cdot \frac{a \cdot b}{l}$$

Moment zginający w przekroju belki na odległości x od podpory A będzie się wyrażał wzorem:

$$M/x/ = +A' \cdot x.$$

Przyjmujemy obecnie pole momentów zginających za jakieś fikcyjne obciążenie ciągle nierównomiernie rozłożone. Dzielimy całe pole na małe paseczki o szerokości dx i ciężarze  $q/z/ dx = M/x/ dx$ . Rysujemy plan sił  $q/z/ dx = M/x/ dx$  przy odległości biegunowej, równej sztywności belki  $E \mathcal{Y}$  i na liniach fikcyjnych ciężarów  $q/z/ dx$  rysujemy wielobok sznurowy, który będzie krzywą sznurową.

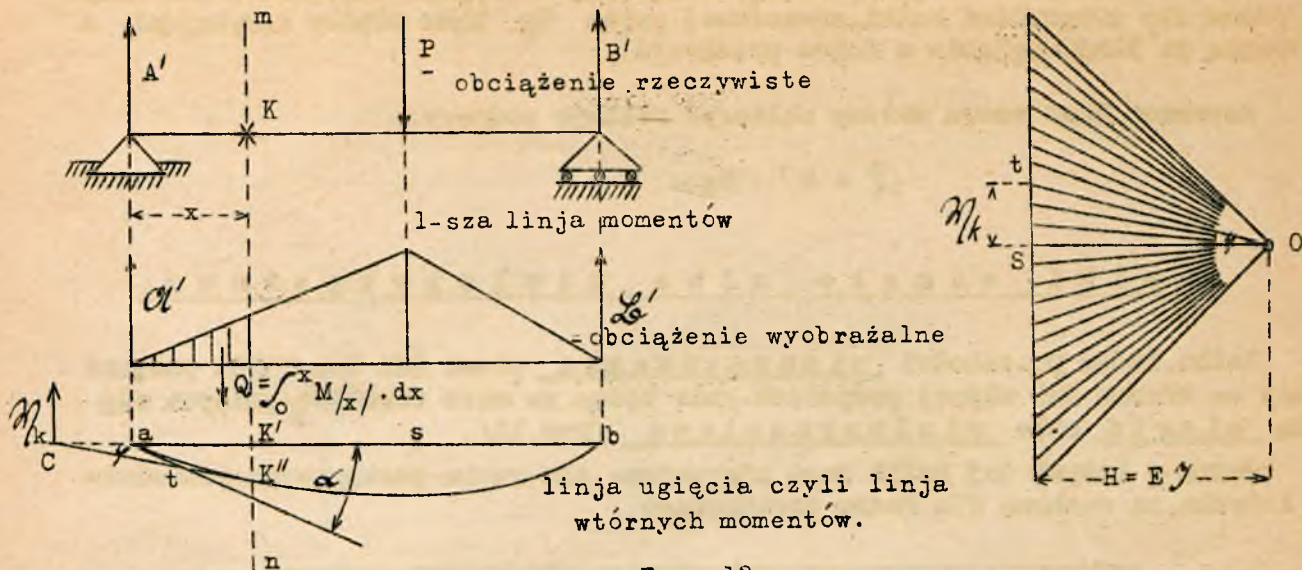
Ta krzywa sznurowa przedstawia linię ugięcia. Jak wiadomo z twierdzenia Culmann'a o statycznych momentach rzędna wieloboku sznurowego /lub krzywej sznurowej/, pomnożona przez odległość biegunową przedstawia moment zginający belkę w danym przekroju od danego obciążenia belki. Rzędna zatem krzywej sznurowej, pomnożona przez  $E \mathcal{Y}$  przedstawi moment zginający belkę w danym przekroju przy obciążeniu wyobraźnielnym polem momentów zginających od rzeczywistego obciążenia belki. Ten wtórny moment zginający oznaczymy przez  $M_b$ .

$$M_b/x/ = y/x/ \cdot H$$

$$M_b/x/ = y/x/ \cdot E \mathcal{Y}$$

Obecnie wyprowadzimy analityczny wyraz siły poprzecznej od wyobraźnielnego /fikcyjnego/ obciążenia belki polem momentów. Biegun momentu O można przesunąć tak, aby zamykająca ab linii sznurowej była linią poziomą /rys.12/.





Rys. 12.

Mamy dwie definicje siły poprzecznej: 1/ Siła poprzeczna w danym przekroju belki prostej jest to algebraiczna suma wszystkich sił, działających na lewy odcinek belki od lewej podpory do danego przekroju. 2/ Siła poprzeczna w danym przekroju belki prostej jest to wypadkowa wszystkich sił, działających na lewy odcinek belki od lewej podpory do danego przekroju.

W przekroju mn belki obciążonej polem momentów /rys.12/ działają siły  $\alpha'$  i wypadkowa  $Q = \int_0^x M/x/ dx$  fikcyjnych ciężarów  $M/x/ dx$ . Siłę poprzeczną w tym przekroju oznaczymy przez  $N_k$ . Przy obciążeniu rzeczywistym oznaczymy reakcje podpór, jak zawsze  $A'$  i  $B'$ , siły poprzeczne przez  $V$  a momenty zginające przez  $M$  /tj. oznaczenia łacińskie/. Dla obciążenia drugiego tj. wyobraźmalnego, polem momentów czyli siłami  $M/x/ dx$  oznaczamy reakcje podpór przez  $\alpha'$  i  $\beta'$ , siły poprzeczne przez  $N$  i momenty zginające przez  $M/x/$  /tj. oznaczenia gotyckie/.

$$N_k = N/x/ = \alpha' - Q$$

$$N_k = N/x/ = \alpha' - \int_0^x M/x/ \cdot dx.$$

Styczne  $t$  do linii ugięcia w punkcie  $K''$  jest przedłużeniem skrajnego promienia wieloboku, a właściwie krzywej sznurowej, ograniczającego rzędne sił fikcyjnych  $M/x/ dx$  w przekroju  $mn$ .

Tam, gdzie ta styczna przetnie się z zamykającą  $s$ , będzie punkt zaczepienia siły poprzecznej  $N_k$ . Wielkość siły  $N_k$  znajdziemy z planu sił, prowadząc z bieżąca momentów prostą  $Ot$ , równoległą do stycznej. Między promieniami  $Os$  i  $Ot$  będzie się znajdowała wartość siły poprzecznej.

Porównajmy trójkąty  $K'K''C$  i  $Ost$ . Trójkąty te są do siebie podobne, bo posiadają boki odpowiednio równoległe. Na mocy podobieństwa tych trójkątów możemy napisać następujący stosunek:

$$N/x/ : K'K'' = E\gamma : CK'$$

$$N/x/ = \frac{E\gamma \cdot K'K''}{CK'}$$

Stosunek  $K'K''$  do  $CK'$  jest  $\text{tg}$  kąta  $\varphi$ , możemy więc napisać:

$$\underline{N/x/ = E\gamma \cdot \text{tg}\varphi \dots\dots\dots /8/}$$



Siła poprzeczna w belce prostej, obciążonej fikcyjnym ciężarem, polem momentów, równa się sztywności belki, pomnożonej przez  $\text{tg}$  kąta między zamykającą  $s$  i styczną do linii ugięcia w danym przekroju.

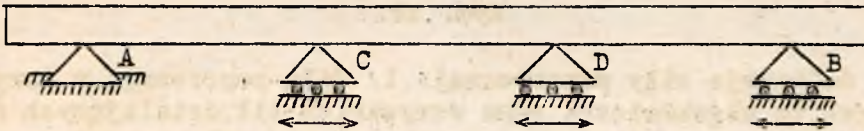
Zapomocą tego wzoru możemy obliczyć reakcję podpory.

$$Q' = EJ \cdot \text{tg} \alpha.$$

### Belki ciągłe albo wieloprzęsłowe.

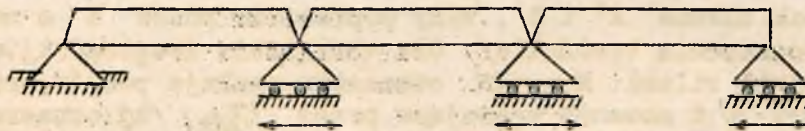
Belka, która przechodzi nieprzerwanie przez dwa lub kilka przęseł i leży na trzech lub więcej podporach /nie będąc na nich rozciętą/, nazywa się belką ciągłą albo wieloprzęsłową /rys.13/.

Jedno z łożysk tej belki jest nieruchome dla ruchu postępowego, pozostałe zaś łożyska są ruchome dla ruchu postępowego.

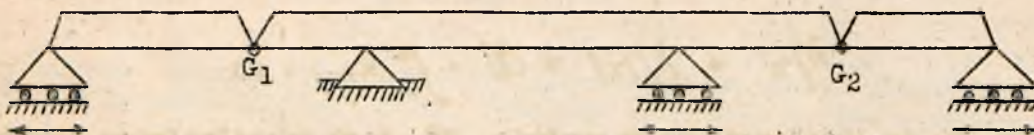


Rys. 13.

Belkę ciągłą należy odróżniać od szeregu belek rozciętych na podporach /rys.14/ oraz od kompleksu belek wspornikowych i prostych, połączonych przegubami w punktach  $G_1$  i  $G_2$ , jak wskazuje rys.15.



Rys. 14.



Rys. 15.

### Własności linii ugięcia.

- 1/ Linja ugięcia belki musi przejść przez wszystkie punkty podporowe.
- 2/ Linja ugięcia, jako linja sprężysta musi być ciągłą linią falistą bez punktów załamania.
- 3/ Styczna do linii ugięcia w punktach podporowych przęseł musi tworzyć z poziomą linią kąty równe sobie lecz przeciwnego znaku dla każdego z sąsiednich przęseł.
- 4/ Linja ugięcia jest krzywą sznurową narysowaną przy odległości biegunowej  $H = EJ$  dla obciążenia fikcyjnego każdego przęsła polem momentów od obciążenia rzeczywistego danego przęsła belki.

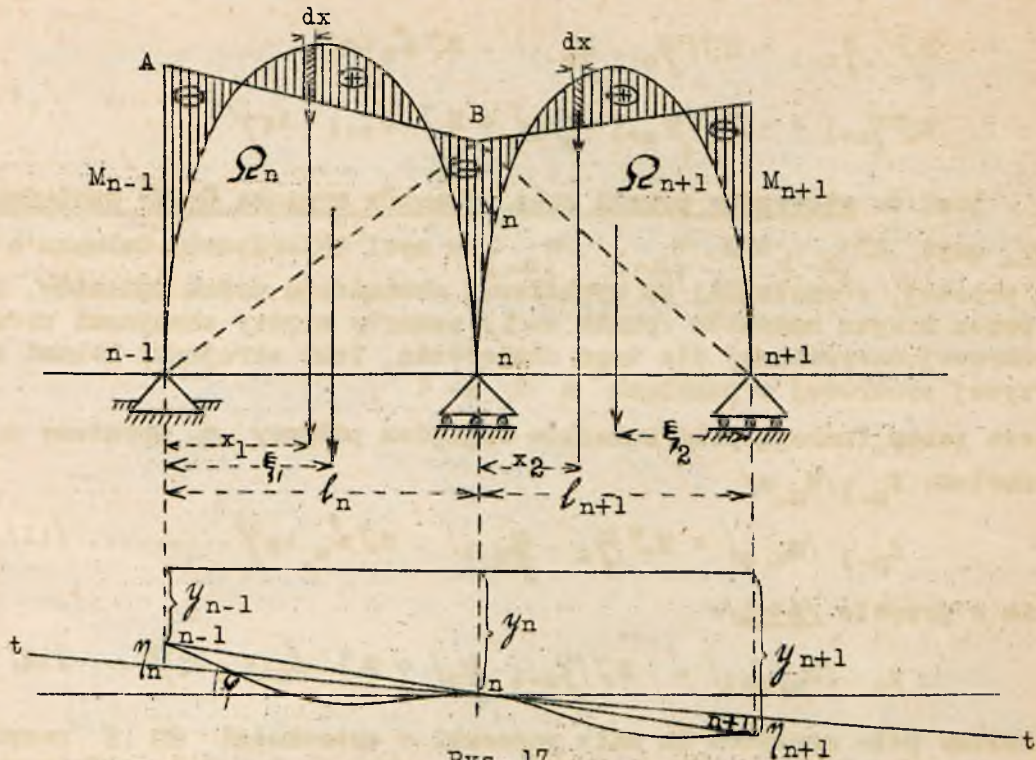
### Równanie Clapeyron'a, czyli równanie trzech momentów.

Mamy dwa przęsła belki ciągłej rys.17. Pod wpływem sił, działających na belkę ciągłą, powstają w niej oprócz dodatnich momentów zginających w przęsłach, także i ujemne momenty w przekrojach nad podporami. Równanie Clapeyrona o trzech momentach prowadzi do znalezienia wielkości tych ujemnych momentów w przekrojach nad



podporami belki ciągłej, mianowicie  $M_{n-1}$ ,  $M_n$  i  $M_{n+1}$ . Dla uogólnienia zagadnienia przyjmujemy, że podpory belki  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$  nie leżą na jednym poziomie.

Dla każdego przęsła belki ciągłej, jak dla belki prostej, można narysować linię ugięcia, jako krzywą sznurową od obciążenia wyobrażalnego polem momentów dla każdego przęsła przy odległości biegunowej równej  $EY$ .



Rys. 17

Narysujmy wykres momentów zginających od obciążenia rzeczywistego belki. Obciążenia rzeczywiste przęseł belki ciągłej mogą być rozmaite: siła pojedyncza, kilka sił skupionych, obciążenia ciągłe całego przęsła lub jego części itp. Stosownie do tego wykres momentów dodatnich dla danego przęsła, jako dla belki prostej /rozciętej na podporach/ będzie miał formę trójkąta, wieloboku, krzywej parabolicznej, prostych stycznych do parabolii etc.

W tym przypadku założyliśmy, że mamy do czynienia z rzeczywistym obciążeniem ciągłym, wykres momentów więc jest tu krzywą paraboliczną, nie zmienia to jednak zasad wyprowadzenia równania o trzech momentach. Przyjmujemy teraz wykres momentów sumarycznych tj. ujemnych i dodatnich za pole fikcyjnego obciążenia belki i rysujemy krzywą sznurową dla tego obciążenia.

Na zasadzie własności linii ugięcia krzywa ta musi przechodzić przez podpory i musi być ciągłą linią falistą.

Na średniej podporze  $n$  rysujemy styczną  $tt$  do linii ugięcia w punkcie  $n$ . Oznaczmy przez  $\varphi$  kąt, jaki ta styczna tworzy z poziomem, następnie przez  $y_{n-1}$ ,  $y_n$  i  $y_{n+1}$  - odległość podpór od poziomu i przez  $\eta_{n-1}$  i  $\eta_{n+1}$  wielkość odcinków na pionie, przechodzącym przez punkty podporowe  $n-1$  i  $n+1$ , zawartych między styczną  $tt$ , a stycznymi do linii ugięcia w tych punktach.

Z rysunku 17-go widać, że:

$$\eta_{n-1} = |y_n - y_{n-1}| - l_n \cdot \text{tg } \varphi \dots \dots \dots /9/$$

$$l_{n+1} \cdot \text{tg } \varphi = y_{n+1} - y_n + \eta_{n+1}$$

$$\eta_{n+1} = l_{n+1} \cdot \text{tg } \varphi - |y_{n+1} - y_n|$$

$$\eta_{n+1} = -|y_{n+1} - y_n| + l_{n+1} \cdot \text{tg } \varphi \dots \dots \dots /10/$$



Mnożymy obie strony równania 9 i 10 przez odległość biegunową planu sił  $H = E\mathcal{J}$ , należącego do krzywej sznurowej jako linii ugięcia, /samego planu sił tu nie rysujemy, gdyż on nie jest obecnie nam potrzebny, ponieważ na rys. 17 zadajemy się dowolną krzywą, odpowiadającą jednakże czterem własnościom linii ugięcia, jako tą linią. Przy wykreślaniu rzeczywistej linii ugięcia naturalnie musimy korzystać z odpowiedniego planu sił przy  $H = E\mathcal{J}$ , na mocy twierdzenia Mohra o linii ugięcia.

$$E\mathcal{J} \cdot \eta_{n-1} = E\mathcal{J} |y_n - y_{n-1}| - E\mathcal{J} l_n \operatorname{tg} \varphi$$

$$E\mathcal{J} \eta_{n+1} = -E\mathcal{J} |y_{n+1} - y_n| + E\mathcal{J} \cdot l_{n+1} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$E\mathcal{J} \cdot \eta_{n-1}$  - jest to statyczny moment pola momentów przesła  $n$ -ego względem podpory  $/n-1/$ , gdyż  $E\mathcal{J} \eta_{n-1} = H \cdot \eta_{n-1} \cdot \eta_{n-1}$  w myśl twierdzenia Culmann'a jest to odcinek prostej, równoległej do wypadkowej obciążenia polem momentów, przechodzącej przez biegun momentów /punkt  $n-1/$ , zawarty między skrajnymi promieniami krzywej sznurowej, narysowanej dla tego obciążenia. Temi skrajnymi bokami są styczne do krzywej sznurowej w punktach  $n$  i  $n-1$ .

$E\mathcal{J} \eta_{n-1}$  jest zatem funkcją pola momentów względem podpory  $n$ , wyrażamy to następującym symbolem:  $f_{n-1} / M_{x, n} /$

$$f_{n-1} / M_{x, n} / = E\mathcal{J} |y_n - y_{n-1}| - E\mathcal{J} l_n \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots /11/$$

analogicznie w przepśle  $/n+1/$ :

$$f_n \cdot / M_{x, n+1} / = -E\mathcal{J} |y_{n+1} - y_n| + E\mathcal{J} \cdot l_{n+1} \cdot \operatorname{tg} \varphi \dots \dots /12/$$

Podzielimy pole momentów na małe paseczki o szerokości  $dx$  i rozpatrzmy jeden taki paseczek. Środek ciężkości tego paseczka niech będzie oddalony o  $x$  od podpory  $/n-1/$ . Statyczny moment pola tego paseczka względem podpory  $/n-1/$  wyrazi się wzorem:

$$M_{/x, n} / \cdot dx \cdot x$$

gdzie  $M_{/x, n} /$  jest to zmienny sumaryczny bieżący moment dla przesła  $n$ -ego.

Statyczny moment względem podpory  $/n-1/$  całego pola momentów będzie całką:

$$\int_0^{l_n} M_{/x, n} / \cdot dx \cdot x$$

Podstawimy tę całkę do równania  $/11/$  i analogiczną do równania  $/12/$ , otrzymamy:

$$f_{n-1} / M_{x, n} / = \int_0^{l_n} M_{/x, n} / \cdot dx \cdot x$$

$$f_n / M_{x, n+1} / = \int_0^{l_{n+1}} M_{/x, n+1} / \cdot dx \cdot /l_{n+1} - x/.$$

Ten statyczny moment możemy wyrazić jako różnicę statycznych momentów pola momentów dodatnich, które oznaczymy przez  $\Omega_n$  i pola momentów ujemnych:

$$f_{n-1} / M_{x, n} / = \Omega_n \cdot \xi_{11} - \frac{1}{2} M_{/n-1} / \cdot l_n \frac{l_n}{3} - \frac{1}{2} M_n \cdot l_n \cdot \frac{2}{3} l_n$$

$$f_n / M_{x, n+1} / = \Omega_{n+1} \xi_{22} - \frac{1}{2} M_n \cdot l_{n+1} \cdot \frac{2}{3} l_{n+1} - \frac{1}{2} M_{n+1} \cdot l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} l_{n+1}$$



$\xi_1$  i  $\xi_2$  oznaczają odległości środków ciężkości pola momentów dodatnich  $R_n$  i  $R_{n+1}$  od podpór  $/n-1/$  i  $/n+1/$ .

$$f_{n-1}/M_{x,n}/ = R_n \cdot \xi_1 - \frac{1}{6} M_{n-1} \cdot l_n^2 - \frac{1}{3} M_n \cdot l_n^2$$

$$f_n/M_{x,n+1}/ = R_{n+1} \cdot \xi_2 - \frac{1}{3} M_n \cdot l_{n+1}^2 - \frac{1}{6} M_{n+1} \cdot l_{n+1}^2$$

Podstawimy teraz zamiast  $f_{n-1}/M_{x,n}/$  i  $f_n/M_{x,n+1}/$  wartości ich z równania 11 i 12.

$$EJ(y_n - y_{n-1}) - EJ \cdot l_n \cdot \text{tg } \varphi = R_n \cdot \xi_1 - \frac{1}{6} M_{n-1} \cdot l_n^2 - \frac{1}{3} M_n \cdot l_n^2 \dots \dots \dots /13/$$

$$- EJ(y_{n+1} - y_n) + EJ \cdot l_{n+1} \text{tg } \varphi = R_{n+1} \xi_2 - \frac{1}{6} M_{n+1} \cdot l_{n+1}^2 - \frac{1}{3} M_n \cdot l_{n+1}^2 \dots \dots \dots /14/$$

Oznaczmy przez  $K_1$  i  $K_2$  wartości stojące w prawej stronie równań 13 i 14.

$$EJ(y_n - y_{n-1}) - EJ \cdot l_n \cdot \text{tg } \varphi = K_1$$

$$- EJ(y_{n+1} - y_n) + EJ \cdot l_{n+1} \cdot \text{tg } \varphi = K_2$$

$$EJ \cdot l_n \cdot \text{tg } \varphi = EJ \cdot (y_n - y_{n-1}) - K_1$$

$$EJ \cdot l_{n+1} \cdot \text{tg } \varphi = EJ \cdot (y_{n+1} - y_n) + K_2$$

Wyznamy  $\text{tg } \varphi$  z jednego i drugiego równania i przyrównamy.

$$\text{tg } \varphi = \frac{EJ \cdot (y_n - y_{n-1}) - K_1}{EJ \cdot l_n} ; \quad \text{tg } \varphi = \frac{EJ \cdot (y_{n+1} - y_n) + K_2}{EJ \cdot l_{n+1}}$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{K_1}{EJ \cdot l_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} + \frac{K_2}{EJ \cdot l_{n+1}}$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} = \frac{K_1}{EJ \cdot l_n} + \frac{K_2}{EJ \cdot l_{n+1}}$$

Mnożymy obie części równania przez  $EJ$ :

$$EJ \left\{ \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} \right\} = \frac{K_1}{l_n} + \frac{K_2}{l_{n+1}}$$

Podstawimy zamiast  $K_1$  i  $K_2$  ich wartości:

$$EJ \left\{ \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} \right\} = \frac{R_n \cdot \xi_1}{l_n} - \frac{1}{6} M_{n-1} \cdot l_n - \frac{1}{3} M_n \cdot l_n + \\ + \frac{R_{n+1} \cdot \xi_2}{l_{n+1}} - \frac{1}{6} M_{n+1} \cdot l_{n+1} - \frac{1}{3} M_n \cdot l_{n+1}$$

Przenosimy wyrazy, zawierające momenty  $M_{n-1}$ ,  $M_n$  i  $M_{n+1}$  na jedną stronę i mnożymy wszystko przez 6:

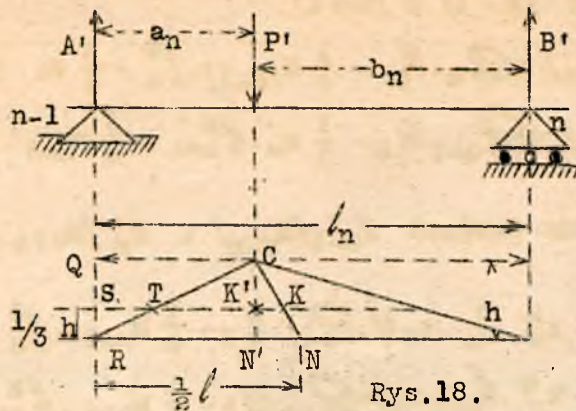
$$M_{n-1} \cdot l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6 EJ \left\{ \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} \right\} + \\ + \frac{6 R_n \cdot \xi_1}{l_n} - \frac{6 R_{n+1} \cdot \xi_2}{l_{n+1}} \dots \dots \dots /15/$$

Zależy nam obecnie na znalezieniu tych wyrazów w powyższym równaniu, które zawierają  $R_n$  i  $R_{n+1}$  tj. pola momentów dodatnich.

Rozpatrzmy najpierw wypadek, kiedy na belkę działa jeden ciężar skupiony, później działanie kilku skupionych ciężarów i wreszcie obciążenie ciągłe.



Rozpatrzmy przęśło /n/, na które działa ciężar skupiony P' w odległości a<sub>n</sub> od podpory /n-1/ i b<sub>n</sub> od podpory /n/.



$$b_n = l_n - a_n$$

Rys.18.

Obliczmy reakcję podpory /n-1/ t.j. /A'/ zapomocą równania momentów względem punktu n.

$$A' \cdot l_n - P' \cdot b_n = 0$$

$$A' = P' \cdot \frac{b_n}{l_n}$$

Moment w punkcie działania siły P' równa się:

$$M/a_n/ = \frac{P' \cdot a_n \cdot b_n}{l_n}$$

Obliczmy teraz pole tego trójkąta /Ω<sub>n</sub>/:

$$\Omega_n = \frac{1}{2} \frac{P' \cdot a_n \cdot b_n}{l_n} \cdot l_n = \frac{1}{2} P' a_n b_n$$

Postaramy się wyrazić odległość środka ciężkości od podpory /n-1/ ξ<sub>1</sub> za pomocą l<sub>n</sub> i a<sub>n</sub>.

Z podobieństwa trójkątów CKT i CRN wynika, że:

$$\frac{TK}{2} : \frac{l_n}{2} = \frac{2}{3} h : h$$

$$\overline{TK} = \frac{l_n}{3}$$

Z podobieństwa trójkątów CRQ i TRS piszemy następującą proporcję:

$$\overline{ST} : \overline{CQ} = \overline{RS} : \overline{RQ}$$

$$\overline{ST} : a_n = \frac{1}{3} h : h$$

$$\overline{ST} = \frac{a_n}{3}$$

$$\xi_1 = \overline{ST} + \overline{TK}; \quad \xi_1 = \frac{l_n}{3} + \frac{a_n}{3}$$

Mając Ω<sub>n</sub> i ξ<sub>1</sub>, możemy obliczyć  $\frac{6 \Omega_n \cdot \xi_1}{l_n}$  /patrz zrównanie 15/, gdy działa jeden ciężar skupiony:

$$\begin{aligned} \frac{6 \Omega_n \cdot \xi_1}{l_n} &= \frac{6 \cdot P' \cdot a_n \cdot b_n}{2 \cdot l_n} \cdot \frac{l_n + a_n}{3} = \frac{P' \cdot a_n \cdot b_n / l_n + a_n / l_n}{l_n}; \quad \frac{6 \Omega_n \cdot \xi_1}{l_n} = \\ &= \frac{P' \cdot a_n / l_n - a_n / l_n}{l_n + a_n / l_n}; \quad \frac{6 \Omega_n \cdot \xi_1}{l_n} = \frac{P' \cdot a_n / l_n^2 - a_n^2 / l_n}{l_n} \end{aligned}$$



Analogicznie dla przęsła /n+1/ mamy:

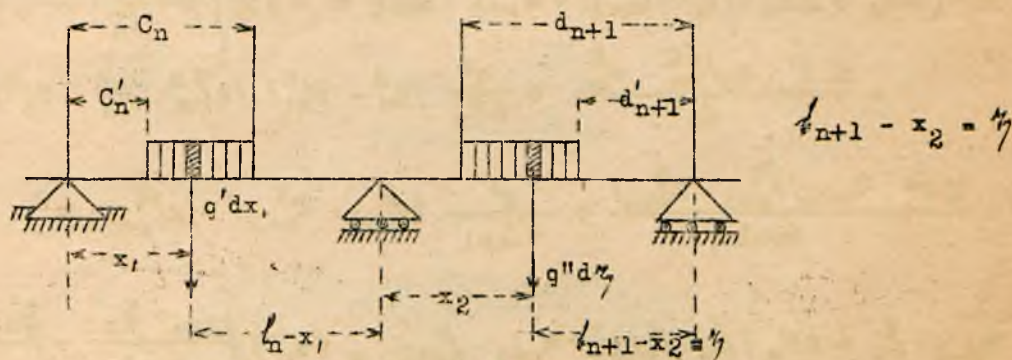
$$\frac{6 \Omega_{n+1} \cdot \xi_2}{l_{n+1}} = \frac{P'' \cdot b_{n+1} \cdot (l_{n+1}^2 - b_{n+1}^2)}{l_n}$$

Gdy ciężarów skupionych będzie więcej niż 1, to bierzemy sumę podobnych wyrazów dla wszystkich ciężarów:

$$\frac{6 \Omega_n \cdot \xi_1}{l_n} = \frac{\sum P' \cdot a_n \cdot (l_n^2 - a_n^2)}{l_n}$$

$$\frac{6 \Omega_{n+1} \cdot \xi_2}{l_{n+1}} = \frac{\sum P'' \cdot b_{n+1} \cdot (l_{n+1}^2 - b_{n+1}^2)}{l_{n+1}}$$

Pozostaje nam jeszcze do rozpatrzenia wypadek, gdy na belkę działa obciążenie ciągłe; dla uogólnienia rozpatrzmy obciążenie ciągłe cząstkowe.



Rys. 19.

W tym wypadku rolę P odgrywa mała siła  $q'dx$ , lub  $q''d\eta$ ,  $a_n = x$ ,  $b_n = l_n - x_2 = \eta$

$$\frac{6 \Omega_n \cdot \xi_1}{l_n} = \int_{C'_n}^{C_n} \frac{q' dx \cdot x \cdot (l_n^2 - x^2)}{l_n} \dots \dots \dots /16/$$

$$\frac{6 \Omega_{n+1} \cdot \xi_2}{l_{n+1}} = \int_{d'_{n+1}}^{d_n} \frac{q'' d\eta \cdot \eta \cdot (l_{n+1}^2 - \eta^2)}{l_{n+1}}$$

Pozostaje tylko rozwiązać te całki.

$$\int_{C'_n}^{C_n} \frac{q' dx \cdot x \cdot (l_n^2 - x^2)}{l_n} = \frac{q'}{l_n} \int_{C'_n}^{C_n} x \cdot (l_n^2 - x^2) dx = \frac{q' \cdot l_n^2}{l_n} \int_{C'_n}^{C_n} x dx -$$

$$- \frac{q'}{l_n} \int_{C'_n}^{C_n} x^3 dx = \frac{q' \cdot l_n^2}{l_n} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{C'_n}^{C_n} - \frac{q'}{l_n} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{C'_n}^{C_n}$$

$$\int_{C'_n}^{C_n} \frac{q' dx \cdot x \cdot (l_n^2 - x^2)}{l_n} = \frac{q' \cdot l_n^2}{2 l_n} (C_n^2 - C_n'^2) - \frac{q'}{4 l_n} (C_n^4 - C_n'^4) =$$

$$= \frac{1}{l_n} \left[ \frac{q' \cdot l_n^2}{2} (C_n^2 - C_n'^2) - \frac{q'}{4} (C_n^4 - C_n'^4) \right] =$$

$$= \frac{q' \cdot (C_n^2 - C_n'^2)}{4 l_n} \left[ 2 l_n^2 - C_n^2 - C_n'^2 \right]$$



Otrzymane rozwiązanie całki podstawimy do równania 16

$$\frac{6\Omega_n \cdot \xi_1}{l_n} = \frac{q' \cdot /C_n^2 - C_n'^2/}{4l_n} \left[ 2l_n^2 - C_n^2 - C_n'^2 \right] \dots \dots \dots /17/$$

Analogicznie rozwiążemy drugą całkę i otrzymamy:

$$\frac{6\Omega_{n+1} \xi_2}{l_{n+1}} = \frac{q'' \cdot /d_{n+1}^2 - d_{n+1}'^2/}{4l_{n+1}} \left[ 2l_{n+1}^2 - d_{n+1}^2 - d_{n+1}'^2 \right] \dots \dots /18/$$

Jeżeli na belkę działa obciążenie ciągłe i skupione, to osobno obliczamy wyrazy:  $\frac{6\Omega_n \cdot \xi_1}{l_n}$  i  $\frac{6\Omega_{n+1} \xi_1}{l_{n+1}}$  od obciążenia skupionymi ciężarami i od obciążenia ciągłego.

Otrzymane wyrazy podstawimy do równania /15/.

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n \cdot /l_n + l_{n+1}/ + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6EJ \left\{ \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} \right\} +$$

$$+ \frac{\sum P' \cdot a_n / l_n^2 - a_n^2 /}{l_n} + \frac{q'}{4l_n} / C_n^2 - C_n'^2 / \cdot / 2l_n^2 - C_n^2 - C_n'^2 / +$$

$$+ \frac{\sum P'' \cdot b_{n+1} / l_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 /}{l_{n+1}} + \frac{q''}{4l_{n+1}} / d_{n+1}^2 - d_{n+1}'^2 / \cdot / 2l_{n+1}^2 - d_{n+1}^2 - d_{n+1}'^2 /$$

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n \cdot /l_n + l_{n+1}/ + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = 6EJ \left\{ \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} - \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} \right\} +$$

$$+ \frac{\sum P' \cdot a_n / l_n^2 - a_n^2 /}{l_n} + \frac{q'}{4l_n} / C_n^2 - C_n'^2 / \cdot / 2l_n^2 - C_n^2 - C_n'^2 / +$$

$$+ \frac{\sum P'' \cdot b_{n+1} / l_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 /}{l_{n+1}} + \frac{q''}{4l_{n+1}} / d_{n+1}^2 - d_{n+1}'^2 / \cdot / 2l_{n+1}^2 - d_{n+1}^2 - d_{n+1}'^2 /$$

Momenty  $M_{n-1}$ ,  $M_n$  i  $M_{n+1}$  powinny być ujemne, musimy więc w prawej stronie równania zmienić znaki na ujemne, otrzymamy wówczas równanie Clapeyrona w ogólnej postaci, dla obciążenia ciągłego i skupionego:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n \cdot /l_n + l_{n+1}/ + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6EJ \left\{ \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} - \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} \right\} -$$

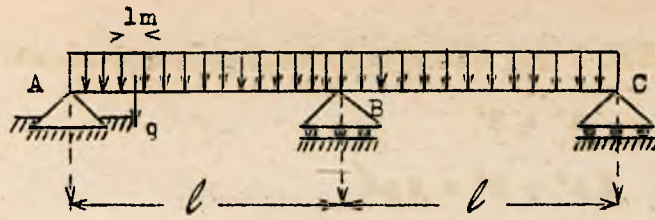
$$- \frac{\sum P' \cdot a_n / l_n^2 - a_n^2 /}{l_n} - \frac{q''}{4l_n} / C_n^2 - C_n'^2 / \cdot / 2l_n^2 - C_n^2 - C_n'^2 / -$$

$$- \frac{\sum P'' \cdot b_n / l_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 /}{l_{n+1}} - \frac{q''}{4l_{n+1}} / d_{n+1}^2 - d_{n+1}'^2 / \cdot / 2l_{n+1}^2 - d_{n+1}^2 - d_{n+1}'^2 / \dots /19/$$

Niektóre przykłady zastosowania równania Clapeyron'a.

I/ Dana jest belka dwuprzęsłowa przy obciążeniu ciągłym, równomiernie rozłożonym, pokrywającym całą belkę: obliczyć momenty na środkowej podporze. Moment na podporach A i C równa się zero, a zatem mamy obliczyć moment tylko na podporze B. Zakładamy, że podpory te leżą na jednym poziomie.





Rys. 20.

Na mocy równania /19/ przy:  $y_{n+1} - y_n = 0$ ;  $y_n - y_{n-1} = 0$ ;  $P' = 0$  i  $P'' = 0$ , oraz  $M_A = 0$  i  $M_C = 0$ , przy  $l_n = l_{n+1} = l$

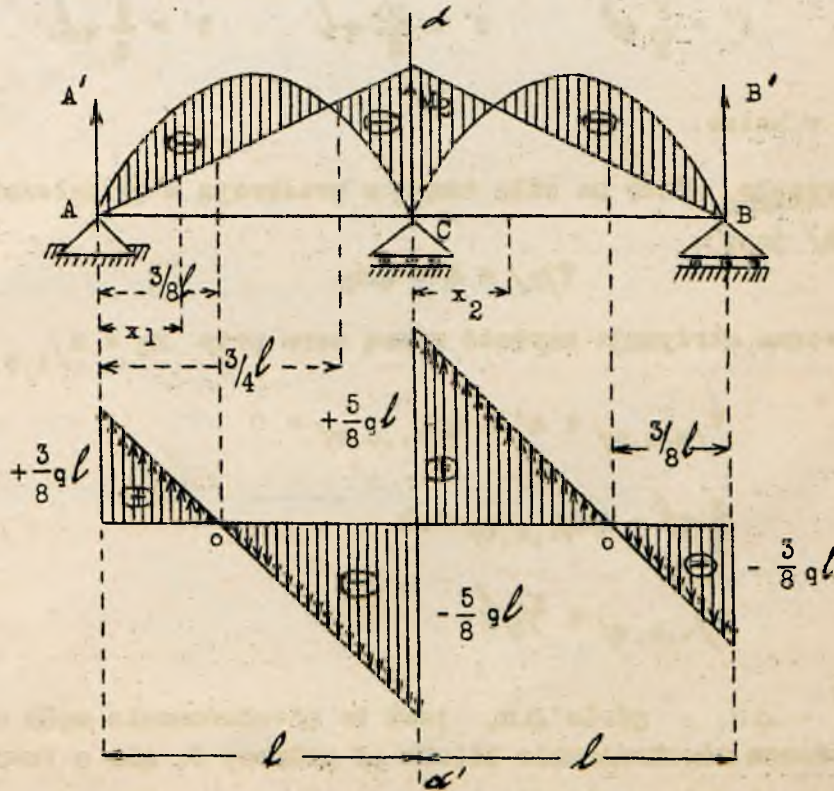
mamy:  $2M_B / l + l / 4 = - \frac{2q}{4l} \cdot l^2 / (2l^2 - l^2)$

$$2M_B \cdot 2l = - \frac{2ql^4}{4l}$$

$$M_B = - \frac{2ql^4}{4 \cdot 4l^2}, \text{ t.j. } \underline{\underline{M_B = - \frac{ql^2}{8}}}$$



Wykres momentów zginających



Rys. 21.

$$M_1 = 0 \quad M_3 = 0 \quad M_2 = - \frac{ql^2}{8}$$

Na mocy określenia momentu zginającego w danym przekroju belki mamy:

$$M_2 = A' l - \frac{ql^2}{2} = - \frac{ql^2}{8}$$

skąd

$$A' - \frac{ql}{2} = - \frac{ql}{8}$$

$$A' = + \frac{ql}{2} - \frac{ql}{8}$$

$$\underline{\underline{A' = \frac{3}{8} ql}}$$





Wskutek symetrii belki i jej obciążenia względem osi  $\alpha-\alpha'$  mamy:

$$A' = B'$$

a zatem:

$$2A' + C' = 2ql$$

$$C' = 2ql - 2A' = 2ql - 2 \cdot \frac{3}{8} ql$$

$$\underline{C' = \frac{10}{8} ql}$$

Sprawdzenie wartości  $C'$  zapomocą sumy momentów względem punktu /B/

$$A' \cdot 2l - ql \cdot \frac{3}{2}l + C'l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\text{skąd: } \frac{6}{8} ql^2 - 2ql + C'l = 0$$

$$\text{a zatem: } C' = \frac{6}{8} ql \quad C' = \frac{10}{8} ql$$

Reakcje podpór belki są:

$$A' = \frac{3}{8} ql \quad C' = \frac{10}{8} ql \quad B' = \frac{3}{8} ql$$

Siły tnące w belce.

Pierwsze przęsło. Wzór na siłę tnącą w przekroju w odległości  $x_1$  od lewej podpory /A/ jest:

$$V/x_1/ = A' - qx_1$$

Siła poprzeczna otrzymuje wartość równą zero przy  $x_1 = x_{1,0,V}/$

$$V/x_{1,0,V}/ = A' - qx_{1,0,V}/ = 0$$

$$\frac{3}{8} ql - qx_{1,0,V}/ = 0$$

$$\text{skąd: } x_{1,0,V}/ = \frac{3}{8} l$$

Dla  $x_1 = l - \Delta x_1$ , gdzie  $\Delta x_1$  jest to nieskończenie mała wielkość czyli w przekroju położonym nieskończenie blisko od podpory C, ale z lewej jej strony, siła tnąca przedstawia się następującym wzorem:

$$V/l-\Delta x_1/ = \frac{3}{8} ql - ql = -\frac{5}{8} ql$$

Drugie przęsło. Wzór na siłę tnącą w przekroju w odległości  $x_2$  w prawo od podpory  $C_1$  przedstawia się następująco:

$$V/x_2/ = A' - ql + C_1 - qx_2 = \frac{3}{8} ql - ql + \frac{10}{8} ql - qx_2$$

$$V/x_2/ = \frac{5}{8} ql - qx_2$$



Przy  $x_2 = 0$  tj. w drugim przęśle bezpośrednio wprawo od podpory C:

$$V/x_2/ = \frac{5}{8} ql$$

Przy  $x_2 = l$

$$V/x_2=l/ = + \frac{5}{8} ql - ql = - \frac{3}{8} ql$$

Wartości momentów dodatnich w przęslach 1-szem i 2-em są wskutek symetrii jednakowe w odpowiednich symetrycznych przekrojach belki. Zatem dosyć jest zbadać zmianę tych wartości dla jednego przęsla np. pierwszego.

Wartość bieżącego momentu zginającego dla przekroju belki w odległości  $x_1/$  od lewej podpory  $A/$  wyraża się wzorem:

$$M/x_1/ = A'x_1 - \frac{qx_1^2}{2} = \frac{3}{8} ql x_1 - \frac{qx_1^2}{2}$$

Wartość tego momentu równa się zeru przy  $x_{1,0,m}/$ , które określimy z następującego równania:

$$\frac{3}{8} ql x_{1,0,m}/ - \frac{qx_{1,0,m}/^2}{2} = 0$$

$$\frac{3}{8} ql = \frac{q \cdot x_{1,0,m}/}{2}$$

skąd:

$$x_{1,0,m}/ = \frac{6}{8} l = \frac{3}{4} l$$

Dla określenia  $\max M/x_1/$  mamy równanie:

$$\frac{d M/x_1/}{dx_1} = 0$$

Skąd znajdujemy odpowiadające temu  $x_{1,max m}/$

$$\frac{d M_{x_1}}{dx_1} = \frac{3}{8} ql - qx_{1,max m}/ = 0$$

$$x_{1,max m}/ = \frac{3}{8} l$$

$$\max M/x_1/ = A' \cdot \frac{3}{8} l - \frac{q}{2} \cdot \frac{3}{8} l^2$$

$$\max M/x_1/ = \frac{3}{8} ql \cdot \frac{3}{8} l - \frac{q}{2} \cdot \frac{9}{64} l^2$$

$$\max M/x_1/ = \frac{9}{64} ql^2 - \frac{9}{128} ql^2$$

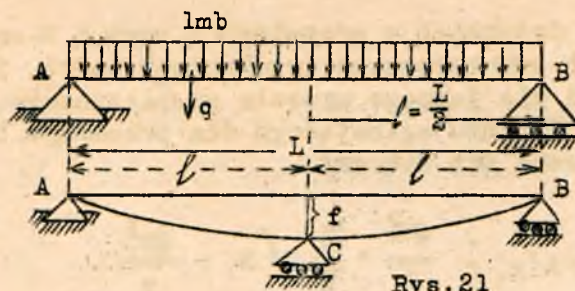
$$\max M/x_1/ = \frac{9}{128} ql^2$$

Dla  $x_1 = \frac{3}{8} l$  mamy  $\max M/x_1/ = \frac{9}{128} ql^2$  a siłę tnącą równą zeru.



II. Obliczyć wielkość ugięcia pośrodku belki prostej, obciążonej ciąglem obciążeniem, równomiernie rozłożonym.

W miejscu największego ugięcia belki tj. pośrodku belki wyobrażamy sobie fikcyjną podporę /C/. Podpora ta jest obniżona o wielkość strzałki ugięcia /f/. Wtedy pozostaje belka ciągła dwuprzęsłowa, dla której momenty w przekrojach nad podporami nam są znane. Więc odwrotnie można ze zrównania Clapeyron'a określić ugięcie belki.



Rys. 21

Wiemy, że dla belki prostej jest:  $M_A = 0$ ;  $M_B = 0$ ;  $M_{\frac{l}{2}} = \frac{qL^2}{8}$  = momentowi zginającemu pośrodku belki od obciążenia ciągłego, równomiernie pokrywającego całą belkę.

$$2 \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot 2l = -6E\gamma \left\{ \frac{0-f}{l} - \frac{f-0}{l} \right\} - \frac{ql^2}{4l} \cdot l^2 - \frac{q}{4l} \cdot l^2 \cdot l^2$$

$$\frac{q \cdot L^2 \cdot l}{2} = +6E\gamma \cdot \frac{2f}{l} - \frac{ql^3}{2}$$

$$12fE\gamma = \frac{4 \cdot l^2 \cdot ql^2}{2l} + \frac{ql^4}{2}$$

$$12fE\gamma = 2ql^4 + \frac{ql^4}{2}$$

$$12fE\gamma = \frac{5ql^4}{2}$$

$$f = \frac{5ql^4}{24E\gamma}, \quad \text{t.j.} \quad f = \frac{5qL^4}{384E\gamma}, \quad \text{ponieważ } l = \frac{L}{2}$$

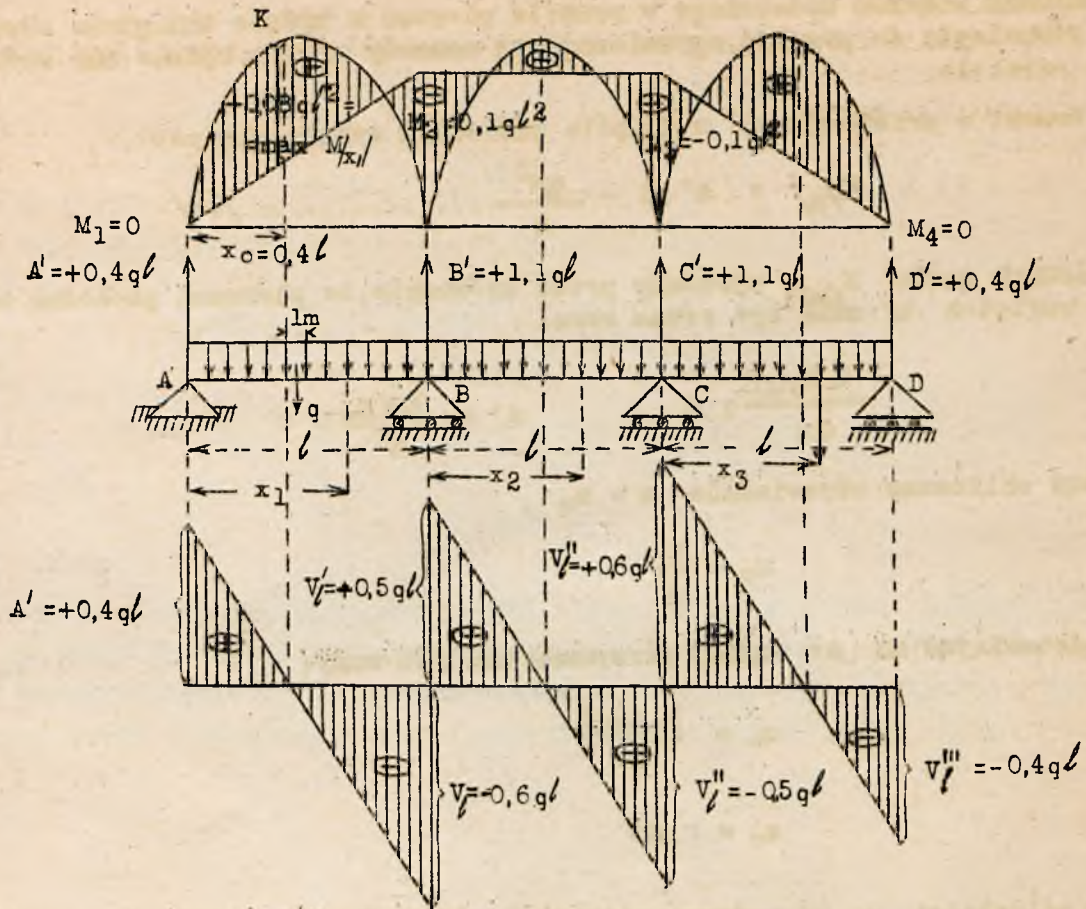
Tę samą wartość tego ugięcia otrzymaliśmy poprzednio innym sposobem. Podstawmy dane liczbowe do otrzymanego wzoru: Niech to będzie belka dwuteowa Nr. 38 o długości  $L = 6$  mtr. i  $\gamma = 24012 \text{ cm}^4$   $q = 2000 \text{ kg/m.} = 20 \text{ kg/cm.}$

$$f = \frac{5 \cdot 20 \cdot 1296 \cdot 10^8}{384 \cdot 2 \cdot 100.000 \cdot 24012}$$

po przeliczeniu:  $f = 0,67 \text{ cm.} < \frac{1}{600} l$

III. Dana jest belka trójprzęsłowa o przęsłach jednakowej rozpiętości /l/ pod obciążeniem ciąglem równomiernie rozłożonym i pokrywającym całą belkę; podpory na jednym poziomie. Obliczyć momenty w przekrojach nad podporami; narysować wykresy momentów zginających belkę i sił tnących.





Rys. 22.

Momenty na podporze 1 i 4 są równe zero, musimy znaleźć zatem momenty na podporze 2 i 3; w tym celu stosujemy równanie Clapeyron'a dwa razy: raz dla podpór 1,2,3, potem 2,3,4, t.j. raz dla przęsła 1 i 2-go, drugi raz dla przęsła 2-go i 3-go.

Momenty na podporze 2 i 3 są sobie równe, ponieważ belka posiada obciążenie ciągle równomiernie rozłożone i przęsła są jednej długości, t.j. zachodzi pełna symetria wzgl. środka belki.

$$4M_2l + M_2l = -2 \frac{q}{4l} l^2 l^2$$

$$5M_2l = -2 \cdot \frac{ql^3}{4}$$

$$M_2 = -\frac{ql^2}{10}$$

Obecnie znajdziemy maximum momentów w przęśle pierwszym. W tym celu musimy znaleźć reakcję podpory A za pomocą momentu względem podpory 2-jej.

$$M_2 = -\frac{ql^2}{10} = A' \cdot l - \frac{ql^2}{2}$$

$$A' = -\frac{ql}{10} + \frac{ql}{2}$$

$$A' = 0,4ql$$

$$\sum Y = 0$$

$$-3ql + 2A' + 2B' = 0$$

$$2B' = 3ql - 0,8ql$$

$$B' = 1,1ql$$



Maximum momentu dodatniego w przęśle pierwsz m będzie tam, gdzie styczna równoległa do prostej, ograniczającej momenty ujemne, będzie się stykała z parabolą.

Moment w przekroju x w przęśle pierwszym wyraża się nast.:

$$M/x/ = A' \cdot x - \frac{qx^2}{2} \dots\dots\dots /20/$$

Warunek maxim  $M/x/$  wyrażamy przez zrównanie, że pierwsza pochodna tej funkcji względem  $x/$  musi być równa zeru:

$$\frac{d M/x/}{dx} = 0 \qquad A' - \frac{2qx}{2} = 0$$

Stąd obliczamy odpowiednie  $x = x_0$

$$x_0 = \frac{A'}{q}$$

Podstawiając na  $A'$  wyżej otrzymaną wartość mamy:

$$x_0 = \frac{0,4ql}{q}$$

$$x_0 = 0,4l$$

Na odległości x od podpory pierwszej będziemy mieli maximum momentu dodatniego w przęśle pierwszym. Wielkość maksymalnego momentu w tym przęśle otrzymamy, podstawiając do wzoru /20/ wielkość  $x_0$ , powyżej znalezioną.

$$\max M/x/ = M/x_0/ = 0,16ql^2 - 0,08ql^2$$

$$\max M/x/ = \underline{M/x_0/ = 0,08ql^2}$$

Wykreślmy jeszcze wykres sił tnących /rys.22/

Siła tnąca nad podporą pierwszą  $A/$  równa się reakcji podpory  $A'/$ .

Siła tnąca w przekroju  $x_1$  wyrazi się wzorem:

$$V/x_1/ = A' - qx_0$$

Jeżeli  $V/x_1/ = 0$ , to  $x_1 = x_0 = 0,4l$ , t.j.  $V/x_1/ = 0$  odpowiada odciętej, przy której mamy  $\max M/x_1/$  t.j. max momentu dodatniego w pierwszym przęśle.

Jeżeli  $x_1 = l$  to:

$$V/x_1/ = V/l = 0,4ql - ql$$

$$\underline{V/l = -0,6ql}$$

Siła tnąca w przekroju  $x_2$  w przęśle drugim:

$$V/x_2/ = A' - ql + B' - qx_2$$



Gdy  $x_2 = l$

$$V/x_2/ = V_l'' = 0,4ql - ql + 1,1ql - ql$$

$$V_l'' = - 0,5ql.$$

Siła tnąca w przekroju  $x_3$  w przepęśle trzecim:

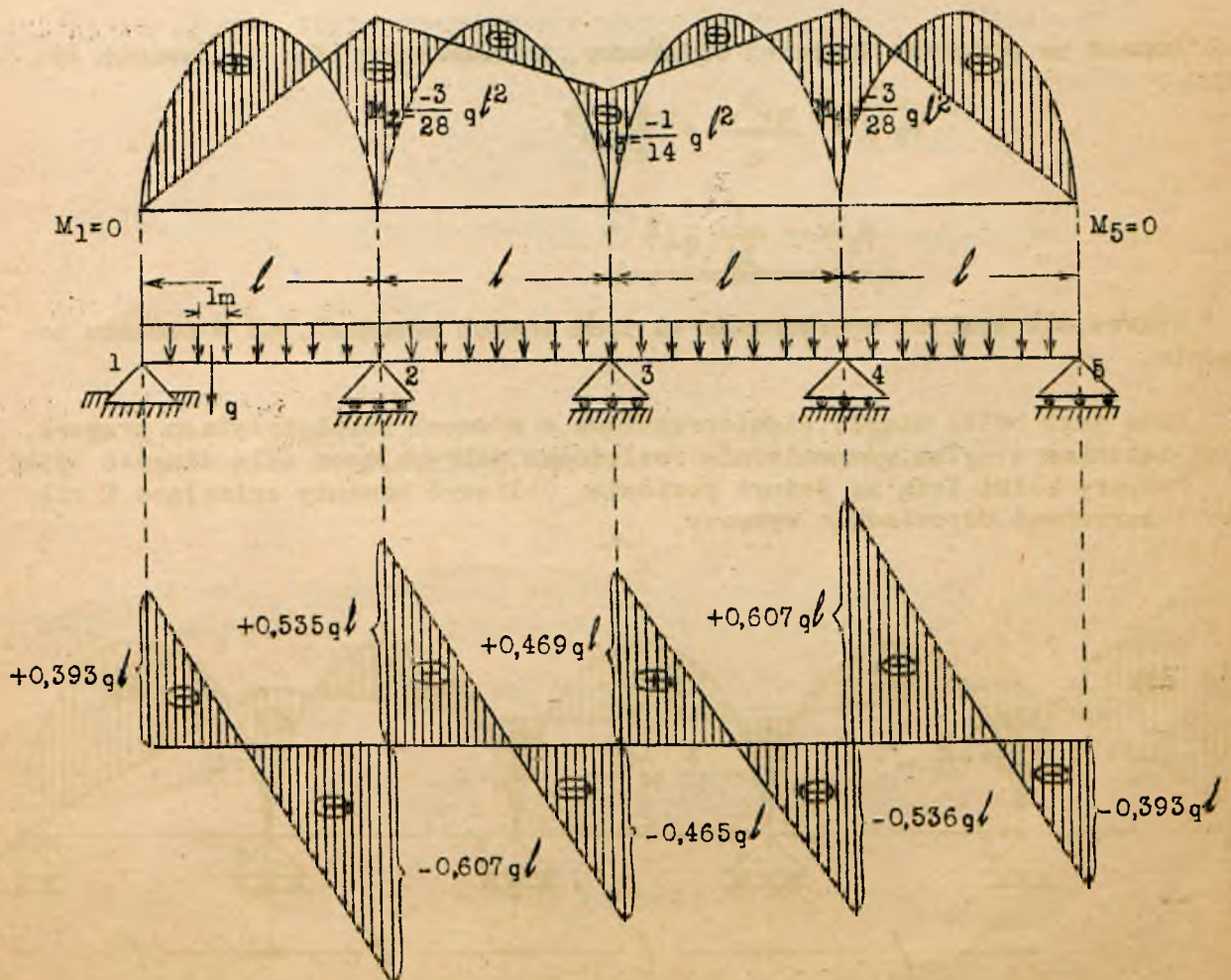
$$V/x_3/ = A' - ql + B' - ql + C' - qx_3$$

Gdy  $x_3 = l$

$$V/x_3/ = V_l''' = 0,4ql - ql + 1,1ql - ql + 1,1ql - ql$$

$$V_l''' = - 0,4ql.$$

IV. Dana jest belka czteroprzęsłowa /rys.23/, o przepęslach jednakowej rozpiętości  $l$  przy obciążeniu ciąglem, równomiernie rozłożonym, pokrywającym całą długość belki i podporach na jednym poziomie. Znaleźć momenty ujemne w przekrojach nad podporami i narysować wykres momentów zginających i sił tnących.



Rys. 23.



Moment na podporze 1 i 5 równa się zero; moment na podporze 2-ej równa się momentowi na podporze 4-ej.

Stosujemy równanie Clapeyron'a dwa razy: 1/ dla podpór 1,2,3 i 2/ dla podpór 2,3,4.

$$4M_2 + M_3 = -\frac{ql^3}{2} \dots\dots\dots /21/$$

$$M_2 + 2M_3 + M_2 = -\frac{ql^3}{2}$$

$$2M_2 + 4M_3 = -\frac{ql^3}{2} \dots\dots\dots /22/$$

Mnożymy równanie 21 przez 4 i odejmujemy od niego równanie 22.

$$16M_2 + 4M_3 = -2ql^2$$

$$- \quad 2M_2 + 4M_3 = -\frac{ql^2}{2}$$

---


$$14M_2 = \frac{3}{2}ql^2$$

$$M_2 = -\frac{3}{28}ql^2$$


---

Moment na podporze trzeciej otrzymamy, podstawiając  $M_2$  do równania 22.

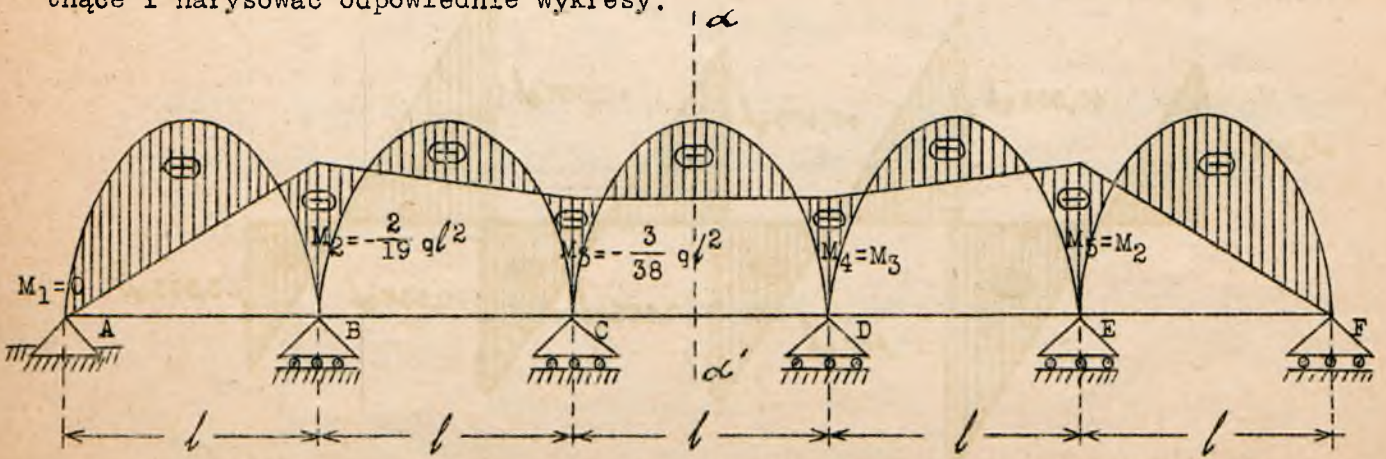
$$M_3 = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3}{7}ql^2$$

$$M_3 = -\frac{1}{14}ql^2$$


---

Wykres sił tnących sporządzamy na tych samych zasadach, jak w zadaniu poprzednim.

V. Dana jest belka ciągła, pięcioprzęsłowa, o równych rozpiętościach przęseł, pod obciążeniem ciągłym, równomiernie rozłożonym, pokrywającym całą długość belki. Podpory belki leżą na jednym poziomie. Obliczyć momenty zginające i siły tnące i narysować odpowiednie wykresy.





Określamy na mocy równania Clapeyron'a ujemne momenty. Symetria belki i obciążenia względem osi pionowej  $d d'$  daje nam  $M_3 = M_4$ ;  $M_2 = M_5$ . Oprócz tego mamy  $M_1 = M_6 = 0$ . Należy zatem określić tylko momenty  $M_2$  i  $M_3$ .

Piszemy równanie Clapeyron'a dla przęseł; pierwszego i drugiego, a następnie dla przęseł: drugiego i trzeciego.

$$M_1 \cdot l + 2M_2 \cdot 2l + M_3 l = - \frac{2ql^4}{4l} \dots\dots\dots /1/$$

$$M_2 l + 2M_3 \cdot 2l + M_4 l = - \frac{2ql^4}{4l} \dots\dots\dots /2/$$

Podstawiając  $M_1 = 0$ ;  $M_4 = M_3$  otrzymujemy:

$$4M_2 l + M_3 l = - \frac{ql^3}{2} \dots\dots\dots /1'/$$

$$M_2 l + 5M_3 l = - \frac{ql^3}{2} \dots\dots\dots /2'/$$

Mnożymy równanie 1' przez 5 i odejmujemy od niego równanie 2'.

$$20M_2 l + 5M_3 l = - \frac{5}{2} ql^3$$

$$M_2 l + 5M_3 l = - \frac{ql^3}{2}$$

---


$$19M_2 l = - 2ql^3$$

$$M_2 = - \frac{2}{19} ql^2 \qquad M_2 = 0,10526 ql^2$$

Podstawiając otrzymaną wartość  $M_2$  do równania 2' znajdujemy  $M_3$ :

$$- \frac{2}{19} ql^2 + 5M_3 l = - \frac{ql^3}{2}$$

Skąd:

$$M_3 = - \frac{3}{38} ql^2 \qquad M_3 = \approx 0,08 ql^2$$

Reakcje podpór.

Dla pierwszej podpory mamy reakcję  $A'$ , którą znajdziemy z wyrazu ujemnego momentu zginającego  $/M_2/$  w przekroju nad drugą podporą.

$$M_2 = - \frac{2}{19} ql^2 = A' l - \frac{ql^2}{2}$$

stąd:

$$A' = + \frac{ql}{2} - \frac{2ql}{19} = \frac{19-4}{38} ql$$

$$A' = \frac{15}{38} ql$$

Reakcję drugiej podpory znajdziemy w podobny sposób z wyrazu momentu zginającego ujemnego  $/M_3/$ , dla trzeciej podpory, a mianowicie:



$$M_3 = -\frac{3}{38} ql^2 = + A' \cdot 2l - 2ql^2 + B' \cdot l$$

stąd:

$$-\frac{3}{38} ql^2 = \frac{30ql^2}{38} - 2ql^2 + B'l$$

$$B' = 2ql - \frac{3}{38} ql - \frac{30}{38} ql$$

$$\underline{B' = -\frac{43}{38} ql} \quad B' = \approx 1,13 ql$$

Reakcję /C'/ trzeciej podpory otrzymujemy z wyrazu ujemnego momentu zginającego w przekroju nad podporą czwartą.

$$M_4 = M_3 = -\frac{3}{38} ql^2 = + A' \cdot 3l - \frac{3}{2} l \cdot 3ql + B' \cdot 2l + C'l$$

Podstawiając na A' i B' otrzymane wyżej wartości  $\frac{15}{38} ql$  i  $\frac{43}{38} ql$  znajdujemy C'.

$$C' = -\frac{3}{38} ql - \frac{45}{38} ql + \frac{9}{2} ql - \frac{86}{38} ql$$

$$\underline{C' = \frac{37}{38} ql}$$

Sprawdzenie

$$\sum Y = 0$$

$$- 5ql + 2A' + 2B' + 2C' = 0$$

$$- 5ql + 2A' + B' + C' = 0$$

$$- \frac{5 \cdot 38ql}{38} + \frac{2/15 + 43 + 37}{38} ql = 0$$

$$- 5ql + 5ql = 0.$$

Mając reakcje podpór łatwo wykonać wykres sił tnących i znaleźć największy moment zginający w każdym przęśle z tym warunkiem, że dla  $\max M/x/$  musi być

$$\frac{d M/x/}{dx} = 0.$$

