

KILKA UWAG TYCZĄCYCH SIĘ FUNKCYJ WIELOWYMIAROWYCH

PRZEZ

Władysława TRZASKĘ.

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa dnia 7 września 1871 roku.

Wiadomo w jaki sposób Koszi (CAUCHY) opierając się na ilościach *złożonych* ⁽¹⁾ (urojonych) drugiego stopnia zbudował teorię funkcyj, która następnie rozwinięta znakomitemi pracami panów Pjuize (POISEUX), Brijo (BRIOT) i Bukie (BOUQUET), Żordan (JORDAN), Loran (LAURENT) i innych, stanowi dzisiaj gałąź matematyki, odznaczającą się ścisłością i wykończeniem.

Poniżej znajdzie czytelnik uogólnienie pewnej małej części tych pojęć Kosziego, oraz dowodzenie pewnego twierdzenia dotyczącego się pewnego rodzaju funkcyj tak uogólnionych.

HAMILTON ⁽²⁾ zdaje się być pierwszym, który zaczął uważać ilości złożone w całej ogólności. Po nim najbardziej uprawiali ten przedmiot liczni matematycy angielscy jak CAYLEY, KIRKMAN, DE MORGAN, JOHN i CHARLES GRAVES, CARMICHAEL, COCKLE i wielu innych. Powstało tym sposobem wiele odmian ilości złożonych obdarzonych różnymi własnościami, jak *couples*, *doublets*, *triplets*, *tessarines*, *octaves*, *quaternions*, *pluquaternions*, *sets*, *algebra of the nth character* i t. d. Pomiędzy matematykami innych krajów zasługuje na uwagę przed innemi Koszi, który dał początek tak zwanym *kluczom algebrycznym* (*clefs algébriques*), ⁽³⁾ a które według zdania Hamiltona są szczególnym przypadkiem jego *sets* i późniejszemi od tych ostatnich. Można by tu wspomnieć innych jeszcze, lecz prace ich w ogólności nieliczne z wyjątkiem prac włoskiego matematyka pana Bellawitis (BELLAVITIS) twórcy teorii zwaną przez niego *Metodo* albo *Calcolo delle Equipollenze* ⁽⁴⁾, oraz naszego ziomka pana WAWRZYŃCA ŻMURKI, który zebrał prace swoje nad ilościami złożonemi przestrzeni trójwymiarowej i ogłosił takowe we Lwowie w roku 1864 w obszerném dwutomowém dziele ⁽⁵⁾. Zwrócimy też także uwagę na rachunek geometryczny szwedzkiego matematyka pana DILLNER. Kończąc tę krótką wycieczkę historyczną o ilościach złożonych, dodam, że najbardziej rozwiniętą (po ilościach złożonych drugiego stopnia) jest dzisiaj bez zaprzeczenia teoria *czwórków* ⁽⁶⁾ (quaternions) stworzona przez Hamiltona, który oprócz prac umieszczonych w różnych pismach czasowych a poświęconych jużło teorii czwórków, już też ich zastosowaniom do geometrii, mechaniki, fizyki, i t. d. poświęcił téj teorii nadto dwa obszerne dzieła. Teoria czwórków doczekała się już w Anglii dzieł wykładowych (elementarnych) między któremi piękne dzieło pana Tet

(FAIR) zajmować będzie długo pierwsze miejsce ⁽⁷⁾ tak pod względem wykładu, jako też z powodu licznych i rozmaitych zastosowań.

Przystąpię teraz do określenia pewnych ilości złożonych podług pojęć Hamiltona i do rozciągnięcia do nich pojęcia funkcji Kosziego.

Hamilton w swych poszukiwaniach uważał ilości złożone najogólniejsze pod nazwiskiem *sets*. Jako szczególny przypadek tych *sets* czyli *ilości zbiorowych*, z powodów pewnych rozumowań teoretycznych nastręczyły mu się ilości, które nazwę *złożonymi wielowymiarowymi* a które określe w następujący sposób.

Oznaczmy przez $\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_l$ jedności urojone jakiekolwiek, przez z_1, z_2, \dots, z_l tyleż ilości rzeczywistych, wtedy wyrażenie

$$z = \iota_1 z_1 + \iota_2 z_2 + \dots + \iota_l z_l$$

nazwiemy *ilością złożoną lwymiarową* lub w ogólności *wielowymiarową*. Dodam przytém, że zmieniłem cokolwiek znakowanie Hamiltona, który pisał dopiero wymienioną ilość z w ten sposób

$$z = z_1 \times_1 + z_2 \times_2 + \dots + z_l \times_l$$

w czém poszedłem za przykładem znakomitego matematyka angielskiego pana Kele (CAYLEY), który podobnegoż znakowania używał przedemną.

Uważmy teraz dwie ilości lwymiarowe

$$z = \iota_1 z_1 + \iota_2 z_2 + \dots + \iota_l z_l; \quad u = \iota_1 u_1 + \iota_2 u_2 + \dots + \iota_l u_l,$$

takie, że ilości rzeczywiste u_1, u_2, \dots, u_l są funkcjami rzeczywistymi, choćby najogólniejszemi ilości rzeczywistych z_1, z_2, \dots, z_l , to wtedy każdemu znaczeniu ilości z odpowiada znaczenie ilości u . Uogólniając więc myśl Kosziego, nazwiemy ilość u *funkcją lwymiarową ilości z*, lub w ogólności *funkcją wielowymiarową*.

Naprzykład jeżeli

$$l=2, \quad \iota_1=1, \quad \iota_2=\sqrt{-1}$$

znajdziemy się w dziedzinie funkcyj dwuwymiarowych a w szczególności w przypadku teorii Kosziego, która służyła za wzór do wyżej opisanego uogólnienia pojęcia funkcji.

Jeżeli zaś

$$l=3, \quad \iota_1=1, \quad \iota_2=\sqrt{-1}, \quad \iota_3=\sqrt{-1}$$

będziemy w dziedzinie funkcyj trójwymiarowych a w szczególności w przypadku ilości złożonych uważanych po raz pierwszy przez pana Żmurkę.

Jeżeliby było

$$l=4, \quad \iota_1=1, \quad \iota_2=i, \quad \iota_3=j, \quad \iota_4=k,$$

które to jedności urojone ulegają prawom następującym

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1,$$

$$ij=k=-ji, \quad jk=i=-kj, \quad ki=j=-ik,$$

i t. d. używanym przez Hamiltona, będziemy w dziedzinie funkcyj czterowymiarowych, a mianowicie w przypadku teorii *czwórników* tak świetnie rozpoczętej i uprawianej przez tego znakomitego matematyka. I t. d.

Określenia funkcji *ciągłej*, *jednowartościowej* ⁽⁸⁾ (monodrome), *jednopochodnej* ⁽⁹⁾ (monogene) *doskonałej* ⁽¹⁰⁾ (synectique), jakie zrobił Koszi, dają się z łatwością rozciągnąć i do funkcji wielowymiarowych. I tak, funkcja l -wymiarowa u zmiennej niezależnej l -wymiarowej z będzie w pewnym zakresie téjże zmiennej :

a) *ciągłą*, jeżeli w témże zakresie zmieniając zmienną niezależną z w sposób ciągły albo raczej ilości z_1, z_2, \dots, z_l , funkcja u zmienia się także w sposób ciągły, a raczej ilości u_1, u_2, \dots, u_l .

b) *jednowartościową*, jeżeli pomimo wszelkich możebnych zmian zmiennej niezależnej z wewnątrz zakresu, ilekroć razy zmienna niezależna wróci do pierwotnego znaczenia, funkcja powraca również do pierwotnego znaczenia

c) *jednopochodną*, jeżeli pochodna $\frac{du}{dz}$ w uważanym zakresie, ma przy każdym znaczeniu zmiennej niezależnej z jedno tylko znaczenie niezależne od przyrostku dz .

d) *doskonałą*, jeżeli w danym zakresie jest jednocześnie skończoną (co do znaczeń), ciągłą, jednowartościową i jednopochodną.

Własności powyższe gdyby się zdarzyły i na samych granicach zakresu, lub w zakresie nieograniczonym, to w określeniu funkcji wyraziłoby to można odpowiednio przez dodanie wyrazu i *na granicy*, lub wymienając sam przymiot tylko.

Zajmę się teraz bliżej funkcjami dwu i trójwymiarowymi, które możnaby nazwać *gieometrycznymi*, gdyż dają się łatwo przedstawić geometrycznie, gdy przeciwnie funkcje więcej jak trójwymiarowe nazwać ogólnie *hipergieometrycznymi*, gdyż zdaje się, że tegoż przymiotu nie posiadają.

Wiadomo, że Koszi używając przedstawiania ilości złożonych drugiego stopnia, podanego jeszcze przez znakomitego matematyka angielskiego WALLIS'A w dziele : *Treatise of Algebra, London, 1685*, przedstawia funkcję u zmiennej z , za pomocą dwóch płaszczyzn Z i U na których współrzędne prostokątne dwóch punktów odpowiadających z i u są odpowiednio z_1, z_2 , i u_1, u_2 . To przedstawienie można, rozciągnąć do wszelkich funkcji dwuwymiarowych.

Podobnież dwie przestrzenie trójwymiarowe Z i U w których odpowiednio współrzędne prostokątne z_1, z_2, z_3 i u_1, u_2, u_3 , oznaczają pozornie dwóch punktów odpowiadających z i u mogą służyć do przedstawienia geometrycznego wszelkich funkcji trójwymiarowych. Pan Żmurko stworzył właśnie swe ilości urojone do przedstawienia przestrzeni trójwymiarowej. Uwaga więc tycząca przestrzeni trójwymiarowej jest podobnym uogólnieniem myśli pana Żmurki, jak poprzedzająca tycząca płaszczyzny jest uogólnieniem myśli Kosziego.

Funkcja l -wymiarowa

$$u = f(z)$$

jest *okresową* ⁽¹¹⁾ (périodique), jeżeli istnieje ilość l -wymiarowa stała a taka, że przy wszelkiem znaczeniu zmiennej niezależnej z jest zawsze

$$f(z + a) = f(z)$$

i wtedy ilość a nazywa się *okresem* (période) funkcji u .

Wrazie funkcji *gieometrycznych* to jest dwu i trójwymiarowych jeżeli a , oznacza okres funkcji, poprowadziwszy odpowiednio przez punkta

$$z + ra, \quad (-\infty \leq r \leq +\infty)$$

gdzie r jest liczbą całkowitą, linje i powierzchnie równoległe, podzieliwszy odpowiednie płaszczyznę i przestrzeń trójwymiarową na pasy i warstwy takie, że funkcja w każdym z nich przybierać będzie

wszystkie swe możebne znaczenia. Linje i powierzchnie używane pospolicie do tego celu są proste i płaszczyzny.

Gdyby w razie funkcji dwuwymiarowej istniały dwa okresy $a = \iota_1 a_1 + \iota_2 a_2$, $b = \iota_1 b_1 + \iota_2 b_2$, to jeżeli wykreślimy na płaszczyźnie przedstawiającej funkcję dwuwymiarową punkta $z + ra$ wychodząc na przykład z punktu

$$z = 0$$

punkta te będą się znajdować na prostej przechodzącej przez początek współrzędnych w odległościach równych $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Jeżeli drugi okres b jest tego rodzaju że punkta

$$sb, \quad (-\infty \leq s \leq +\infty)$$

(gdzie s jest liczbą całkowitą rzeczywistą) nie leżą na prostej na której leżą punkta

$$ra, \quad (-\infty \leq r \leq +\infty)$$

lecz na innej prostej, przechodzącej wszakże przez początek współrzędnych, to wtedy widzimy, że punkta

$$z + ra + sb, \quad (-\infty \leq r \leq +\infty), \quad (-\infty \leq s \leq +\infty)$$

są wierzchołkami równoległoboków (mających boki równe $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$) które wypełniają płaszczyznę i funkcja dwuwymiarowa przybiera wewnątrz każdego z tych równoległoboków wszystkie swe możebne znaczenia.

Podobnież w ogólności do funkcji trójwymiarowych. Jeżeli funkcja jest trójokresową, której okresami niech będą a , b , c , poprowadźmy odpowiednio przez punkta

$$ta, \quad (-\infty \leq t \leq +\infty),$$

$$sb, \quad (-\infty \leq s \leq +\infty),$$

$$ra, \quad (-\infty \leq r \leq +\infty),$$

(gdzie r , s , t oznaczają liczby całkowite rzeczywiste) płaszczyzny równoległe do trzech płaszczyzn przechodzących odpowiednio przez punkta

$$0, \quad a, \quad b$$

$$0, \quad c, \quad a$$

$$0, \quad b, \quad c$$

to przestrzeń wypełnioną będzie przez równoległościany równe sobie, i w każdym z nich funkcja przybierać będzie wszystkie swe możebne znaczenia. W razie zaś, gdyby funkcja była dwuokresową, można by uważać ją jako trójokresową której okres trzeci jest nieskończony i dowolnego kierunku, i wtedy przestrzeń podzieloną byłą na równoległościany nieograniczone w jednym kierunku, i w każdym z nich funkcja przybierałaby podobnież wszystkie swe możebne znaczenia.

Powiedziałem wyżej w ogólności dla tego, że jeżeliby okresy były tego rodzaju że punkta im odpowiadające

$$z + ra + sb \quad \text{lub} \quad z + ra + sb + tc, \\ (-\infty \leq r \leq +\infty), \quad (-\infty \leq s \leq +\infty), \quad (-\infty \leq t \leq +\infty)$$

przypadły na jednej prostej w razie funkcji dwuwymiarowej dwuokresowej, albo też na jednej prostej

lub płaszczyźnie w razie funkcji trójwymiarowej, wtedy przedstawienie okresów przestałoby być wyrazistém jak w ogólnym przypadku. Niżej zwrócę jeszcze uwagę czytelnika na te szczególne przypadki z powodu, że takowe wpływają czasami na zmniejszenie liczby okresów, lub też na naturę samej funkcji.

Gdyby w razie funkcji geometrycznych to jest dwu lub trójwymiarowych funkcja miała większą liczbę okresów od liczby wymiarów, przedstawienie powyższe przestałoby być wyrazistém i nastęcza mimowolnie pytanie czy to się zdarzyć może i w jakich warunkach. Otóż w odpowiedzi na to pytanie dowiodę następującego twierdzenia.

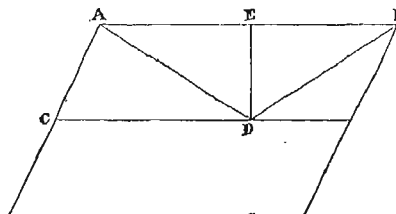
Jeżeli ilości lwymiarowe ulegają zwykłym prawom dodawania algebrycznego (¹²) to wtedy funkcja lwymiarowa tegoż rodzaju niebędąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń dla każdego znaczenia zmiennej niezależnej nie może być więcej jak lokresową, to jest mieć więcej jak 1 okresów różnych, rozumiejąc przez okresy różne takie tylko, które nie są summami wielokrotników całkowitych innych okresów w mniejszej liczbie.

Dowodziemy tego twierdzenia dla funkcji geometrycznych to jest w razie $l=2$ i $l=3$. Wrazie funkcji Kosziego twierdzenie jest znaném i istnieje wiele jego dowodzeń. Dowodzenia te stosują się do wszelkich funkcji dwuwymiarowych. Podam jednakże jedno dowodzenie dla oszczędzenia czytelnikowi szukania i dlatego, że bieg dowodzenia jest ten sam jak w przypadku $l=3$, który dotąd o ile mi wiadomo nie został ani spostrzeżonym, ani udowodnionym.

Nim jednakże przystąpię do dowodu twierdzenia wyżej wymienionego, dowiodę poprzednio dwóch następujących twierdzeń pomocniczych :

a) *Punkt leżący nie za obrębem powierzchni równoległoboku, jest odległy przynajmniej od jednego z czterech wierzchołków tegoż równoległoboku, mniej jak na długość największego z boków równoległoboku.*

b) *Punkt leżący nie za obrębem objętości równoległościanu jest odległy przynajmniej od jednego z ośmiu wierzchołków tegoż równoległościanu, mniej jak na długość największej z krawędzi równoległościanu.*



Co do równoległoboku, zważywszy, że tenże jest symetrycznym względem punktu przecięcia dwóch jego przekątnych, zwanego niekiedy *środkiem*, i że jeżeli punkt nieleżący za obrębem równoległoboku porusza prostopadłe ku jednemu z boków, to odległości tegoż punktu ruchomego od dwóch wierzchołków wspomnianego dopiero boku maleją, a odległości od dwóch pozostałych wierzchołków równoległoboku rosną, wniesć można, że twierdzenie jest prawdziwém zawsze, jeżeli dowiedziemy go dla punktów linii przechodzącej przez *środek* równoległoboku (a którą dlatego nazwiemy *średnicą* dla krótkości) równoległą do jednego z boków równoległoboku. Dowiedziemy więc twierdzenia uproszczonego następującego :

Punkt którykolwiek średnicy równoległój do jednego z boków równoległoboku, jest odległy przynajmniej od jednego z pomiędzy dwóch wierzchołków leżących na tymże boku, mniej jak na długość największego z boków równoległoboku.

Oznaczmy przez a, b wielkości boków równoległoboku w porządku nierosnącym, przez k kąt

między niemi zawarty, który co zawsze można weźmiemy rozwartym lub prostym, przez A wierzchołek kąta k , zaś pozostały koniec boku a przez B. Przypuścimy nadto, że średnica o której mowa w twierdzeniu jest równoległą do boku a .

Przypuścimy teraz, że punkt o którym mowa w twierdzeniu przebiega średnicę w kierunku równoległym do kierunku od A ku B, jego odległości więc od tych ostatnich, podług jak kąt k jest rozwartym lub prostym zmieniają się w następujący sposób. Pierwsza odległość to jest od A zaczyna maleć a później rośnie lub od razu ciągle rośnie, podczas gdy druga odległość od B ciągle i zawsze maleje. Zwrócimy przytém uwagę, że odległości punktu poruszającego się od punktów A i B są sobie równe gdy tenże znajduje się na przecięciu średnicy z prostopadłą do niej przechodzącą przez środek boku a i odległości są wtedy równe $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b \operatorname{wst} k)^2}$. Dodajmy że przecięcie to istnieje zawsze wewnątrz równoległoboku, bo pochyłe do średnicy wychodzące z punktu B leżą z jednej strony prostopadłej przechodzącej przez tenże punkt i zadość czynią nierówności

$$\frac{1}{2}b < \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b \operatorname{wst} k)^2}$$

albowiem takowa zmienia się na inną widoczną

$$(b \operatorname{dos} k)^2 < a^2$$

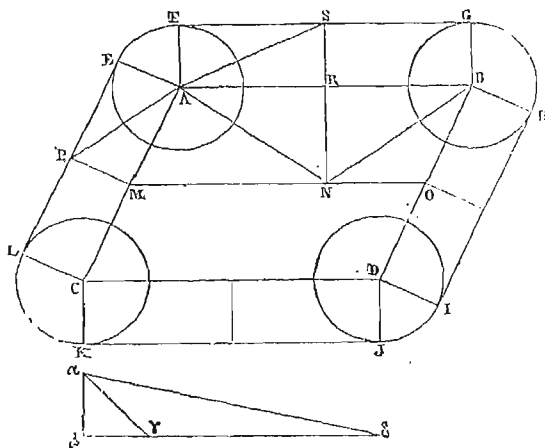
gdyż założenia $b \leq a$. Wrazie zaś kąta k prostego, rachunek pozostanie ten sam tylko krótsza z pochyłych jest prostopadłą. Zbierając razem co powiedziałem wyżej pokaże się, że twierdzenie będzie dowiedzionem, jeżeli go usprawiedliwimy dla dwóch punktów C i D, których odległości od punktu A są $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b \operatorname{wst} k)^2}$. Pozostaje więc dowieść dwóch nierówności

$$\frac{1}{2}b < a, \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b \operatorname{wst} k)^2} < a.$$

Pierwsze strony tych nierówności będą największe, gdy $b = a$ i kąt k prosty, dostatecznem więc jest uważać je w tym najniegodniejszym przypadku. Takowe z łatwością przemienić można na

$$2a < a, \quad 2a^2 < 4a^2$$

i twierdzenie z powodu ich widoczności zostaje ostatecznie dowiedzionem. Twierdzenie zresztą jest szczególnym przypadkiem następującego odnoszącego się do równoległoscianu, przypuszczając, że jedna z krawędzi jest zerem.



Co do równoległoscianu, zważywszy, że tenże jest symetrycznym względem punktu przecięcia czterech jego przekątnych wewnętrznych zwanego środkiem równoległoscianu i przypuszczając, że punkt

należący za obrębem równoległościanu porusza się prostopadle ku jednej ze ścian tegoż, spostrzeżemy że odległości punktu ruchomego od czterech wierzchołków wymienionych dopiero ściany maleją, a odległości od czterech pozostałych wierzchołków równoległościanu rosną, i wniesiemy, że twierdzenie będzie dowiedzionem, jeżeli potrafiemy go udowodnić dla punktów leżących na płaszczyźnie przechodzącej przez *środek* równoległościanu, (którą z tego powodu dla krótkości nazwiemy *średnicową*) równoległą do jednej ze ścian równoległościanu. Dowiedzimy więc twierdzenia uproszczonego następującego :

Punkt którykolwiek płaszczyzny średnicowej równoległej do jednej ze ścian równoległościanu, jest odległy przynajmniej od jednego z pomiędzy czterech wierzchołków téższej ściany mniej niż na długość największej krawędzi równoległościanu.

Oznaczmy przez a, b, c wielkości krawędzi równoległościanu w porządku nierosnącym, przez k kąt rozwarty lub prosty zawarty między bokami a i b , przez l kąt ostry między bokiem c i prostopadłą do ściany zawierającej kąt k . Kąty k i l zawsze w ten sposób dobrać można. Przypuścimy nadto, że płaszczyzna średnicowa jest równoległą do ściany zawierającej boki a, b a zatem i kąt k .

Wyobraźmy teraz rzut prostopadły ściany zawierającej boki a i b na płaszczyznę średnicową do niej równoległą. Ściana rzuci się więc w naturalnej swjej wielkości. Nazwijmy dla ułatwienia A rzut wierzchołka kąta k , B rzut drugiego końca boku a , C rzut podobny końca boku b , D rzut pozostałego wierzchołka ściany uważanej.

Płaszczyzna średnicowa przecina równoległościan według równoległoboku równego równoległobokowi $ABDC$, którego boki są równoległe do boków równoległoboku $ABDC$, a wierzchołki znajdują się odpowiednio na czterech kołach zakreślonych z punktów A, B, C, D promieniem $\frac{1}{2}c$ wst l . Jeżeli poprowadzimy do tych czterech kół styczne zewnętrzne równoległe do boków równoległoboku $ABDC$, spostrzeżemy, że równoległobok podług którego przecina płaszczyzna średnicowa równoległościan, nie wyjdzie po za obręb powierzchni ograniczonej czterema łukami kół zakreślonych promieniem $\frac{1}{2}c$ wst l , mianowicie łukami EF, GH, IJ, KL z czterema prostymi FG, HI, JK, LE .

Jeżeli oprócz tego ze czterech wierzchołków ściany, której rzut wyżej robiliśmy na płaszczyznę średnicową, zakreślimy cztery kule promieniem równym największej krawędzi a , takowe przeczną płaszczyznę średnicową podług czterech kół zakreślonych z punktów A, B, C, D promieniem $\sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}c \cos l)^2}$ i pozostanie dowieść, że powierzchnia $EFGHIJKL$ nie zawiera ani jednego punktu takiego, którego by odległość od jednego przynajmniej z punktów A, B, C, D była większą od $\sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}c \cos l)^2}$.

Punkta powierzchni $EFGHIJKL$ leżą albo zewnątrz równoległoboku $ABDC$ lub wewnątrz. Uważmy więc naprzód, czy ostatnie punkta zadość czynią twierdzeniu, w drugiej zaś części dowodzenia zajmujemy się punktami pozostałemi.

Ponieważ równoległobok $ABDC$ jest symetrycznym względem swego środka, i ponieważ punkt nieleżący za jego obrębem a poruszający się prostopadle do boku a sprawia, że odległości jego od punktów A i B maleją podczas gdy odległości od punktów C i D rosną, i że to samo można by powiedzieć o trzech pozostałych bokach, dostatecznem więc będzie zapewnić się czy punkta średnicy MO równoległej do boku a mają zawsze przynajmniej jedną z odległości od punktów A i B mniejszą od $\sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}c \cos l)^2}$.

Uważając więc punkt przebiegający tę średnicę w kierunku równoległym w kierunku od A ku B spostrzeżemy, że w razie kąta rozwartego k odległość punktu ruchomego od punktu A jest równą $\frac{1}{2}b$ poczem maleje, przechodzi przez najmniejszość $\frac{1}{2}b \cos k$ a później rośnie, w razie zaś kąta k prostego od razu zaczyna rosnąć; odległość zaś od punktu B zawsze maleje. W tym przebiegu odległości punktu poruszającego się od punktów A i B stają się równe sobie i $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b \sin k)^2}$ gdy punkt znajdzie się

na przecięciu średnicy równoległoboku $ABDC$ z prostąpadłą do niej przechodzącą przez środek boku AB . To przecięcie istnieje zawsze wewnątrz $ABDC$ gdyż pochyłe jednostronne BO i BN do tejże średnicy zadość czynią nierówności $BO < BN$ czyli

$$\frac{1}{2}b < \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b \operatorname{wst} l)^2}$$

którą już raz wyżej dowiedliśmy.

Zbierając więc co powiedziałem o punkcie przebiegającym średnicę MO widzimy, że zawsze przynajmniej jedna z jego odległości nie przechodzi długości AM lub AN czyli $\frac{1}{2}b$ lub $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b \operatorname{wst} l)^2}$ które pozostaje dowieść, że są mniejszemi od $\sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}c \operatorname{dos} l)^2}$ czyli udowodnić dwóch następujących nierówności

$$\frac{1}{2}b < \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}c \operatorname{dos} l)^2}; \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b \operatorname{wst} l)^2} < \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}c \operatorname{dos} l)^2}$$

Tym nierównościom można nadać kształty

$$4a^2 < b^2 + c^2(\operatorname{dos} l)^2; \quad 3a^2 < b^2(\operatorname{wst} l)^2 + c^2(\operatorname{dos} l)^2$$

których drugie strony są największemi gdy $a = b = c$, i $(\operatorname{wst} l)^2 = (\operatorname{dos} l)^2 = 1$ i dają nawet w tym najniekorzystniejszym przypadku

$$4a^2 < 2a^2; \quad 3a^2 < 2a^2$$

z kądem zaś wnieść można, że są prawdziwemi.

Pozostaje teraz uważać punkta powierzchni $EF GHIJKL$ leżące na zewnątrz powierzchni $ABDC$. Całą tę powierzchnię można podzielić na cztery części takie, jak $AR SFEP M$ prowadząc przez środki boków równoległoboku $ABDC$ prostopadłe do tychże boków, i rozumiemy, że co powiemy o tej części to samo stosuje się i do trzech pozostałych. Dowiedzimy więc, że punkta zawarte w części $AR SFEP M$ są odległe od punktu A mniej niż na odległość $\sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}c \operatorname{dos} l)^2}$.

Uważmy punkt poruszający się po obwodzie $AR SFEP M$ wychodzący z punktu A w kierunku R : Odległość jego od A ciągle rośnie nawet gdy przejdzie B idąc ku S gdyż długości pochyłych ciągle rosną. Przeszedłszy S i idąc ku F odległość punktu ruchomego od punktu A maleje, poczem przeszedłszy F idąc ku S zachowują długość równą $\frac{1}{2}c \operatorname{wst} l$, przeszedłszy T idąc ku P odległość zaczyna rosnąć. Przeszedłszy na koniec P przechodząc M i wracając do A odległość ciągle maleje. Pokazuje się więc ostatecznie, że odległość punktu ruchomego od punktu A przechodzi w punktach S i P największe znaczenia, które są AP i AS to jest $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (c \operatorname{wst} l)^2}$ i $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (c \operatorname{wst} l)^2}$ i widocznie z powodu, że z założenia $b \leq a$ więc odległość AS nigdy mniejszą od AP nie jest. Ponieważ nadto widocznem jest, że punkta położone wewnątrz części $AR SFEP M$ są tém bardziej bliższe punktu A aniżeli punkt S , pozostaje więc dla dowiedzenia w zupełności twierdzenia dla równoległościanu, tylko udowodnić nierówność

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (c \operatorname{wst} l)^2} < \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}c \operatorname{dos} l)^2}$$

czyli

$$c^2 < 3a^2$$

która nawet w najniekorzystniejszym razie $c = a$ nie przestaje być prawdziwą.

Twierdzenia dopiero dowiedzione dotyczące równoległoboku i równoległościanu, prowadzą do dowodu geometrycznego twierdzenia algebrycznego następującego :

Jeżeli

$$a_{s,t}, \quad (1 \leq s \leq l+1), \quad (1 \leq t \leq l)$$

oznaczają ilości rzeczywiste, takie, że pomiędzy nimi nie istnieje jednocześnie 1 warunków kształtu

$$0 = \sum_{s=1}^{s=t+1} r_s a_{s,t} \quad ; \quad (1 \leq t \leq l)$$

jeżeli nadto znaczenia wyrażen

$$\sum_{t=1}^{t=l} a_{s,t}^2 \quad ; \quad (1 \leq s \leq l)$$

jest największe przy $s=1$; wtedy istnieje zawsze 1 takich liczb całkowitych rzeczywistych

$$r_s, \quad (1 \leq s \leq l)$$

które zadość czynią nierówności

$$\sum_{t=1}^{t=l} \left\{ \sum_{s=1}^{s=l+1} r_s a_{s,t} - a_{l+1,t} \right\}^2 < \sum_{t=1}^{t=l} a_{r,t}^2$$

Rozumie się, że dowodzenia stosują się tylko do dwóch przypadków mianowicie

$$l=2 \quad \text{ i } \quad l=3,$$

nie będę się jednak nadtęmiem zatrzymywał, i przejdę do dowodu twierdzenia głównego tyżącego funkcyj okresowych dwu i trójwymiarowych.

a) *Funkcja dwuwymiarowa, niebędąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń dla każdego znaczenia zmiennój niezależnej, lub jeżeli nieskończoną to różniących się o ilości skończone, nie może być więcej jak dwuokresowa, to jest mieć więcej jak dwa okresy różne, zastrzegając, że ilości dwuwymiarowe ulegają zwykłemu prawom dodawania algebrycznego.*

Gdyby twierdzenie było prawdziwem, byłby wtedy przynajmniej trzeci okres różny od dwóch okresów różnych przypuszczonych i można by było wybrać z pomiędzy nich dwa zwroty najmniejsze⁽¹³⁾. Poprowadziwszy więc na płaszczyźnie Z przedstawiającej zmienną niezależną z , dwa układy prostych równoległych do dwóch prostych przechodzących przez punkta 0 i a , oraz przez punkta 0 i b , (a, b, c oznaczają trzy okresy funkcyj dwuwymiarowej uważanej, ustawione co do długości w porządku nie malejącym) takowe podzielią całą płaszczyznę Z na równoległoboki. Jeżeli teraz z jednego z wierzchołków któregośkolwiek z równoległoboków poprowadzimy prostą wyobrażającą trzeci okres (tak co do wielkości jakoteż i kierunku), to drugi koniec tej prostej nie upadnie w żadnym z wierzchołków tego lub innego równoległoboku, lecz wewnątrz, gdyż inaczej trzeci okres byłby sumą wielokrotności dwóch pierwszych okresów a zatem nie byłby różnym, co przeciwne założeniu.

Lecz na mocy twierdzenia o równoległoboku wyżej dowiedzionego, ten drugi koniec linii przedstawiającej trzeci okres funkcyj, jest bliższy przynajmniej z wierzchołków równoległoboku w którym się znajduje, aniżeli na długość największego z boków tegoż równoległoboku, czyli wielkość jednego z dwóch okresów najmniejszych. Wnieśmy więc, że dwóch najmniejszych okresów dobrać nie można, bowiem odległość o której dopiero mówiliśmy jest okresem mniejszym od jednego z dwóch najmniejszych przypuszczonych i że przeciwnie, można je dobrać mniejszemi od wszelkich długości danych jakkolwiek małych.

Skoro więc funkcja przy zmianach zmiennój niezależnej, mniejszej od wszelkiej danej ilości jakkolwiek małej, nie zmienia swego znaczenia, jest więc albo stałą, albo też ma nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących przy każdym znaczeniu zmiennój niezależnej. Przypuszczając

więc istnienie trzech okresów różnych wyebodzimy zawsze z zastrzeżeń twierdzenia, i tym sposobem twierdzenie zostaje dowiedzionem dla funkcji dwuwymiarowych.

Przejdziemy teraz do funkcji trójwymiarowych dla których twierdzenie nie zostało o ile mi wiadomo, ani spostrzeżonem, ani dowiedzionem.

b) *Funkcja trójwymiarowa niebędąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń dla każdego znaczenia zmiennej niezależnej, lub jeżeli nieskończoną to różniących się o ilości skończone, nie może być więcej jak trójokresowa, to jest mieć więcej jak trzy okresy różne, zastrzegając, że ilości trójwymiarowe ulegają zwykłym prawom dodawania algebrycznego.*

Gdyby twierdzenie nie było prawdziwem, byłby wtedy przynajmniej czwarty okres różny od trzech okresów różnych przypuszczonych i możnaby wybrać z pomiędzy nich trzy zwroty najmniejsze. Poprowadziwszy w przestrzeni Z przedstawiającej zmienną niezależną z trzy układy płaszczyzn równoległych do trzech płaszczyzn oznaczonych przez punkta $0, b, c; a, 0, c; a, b, 0$; (a, b, c, d oznaczają tu cztery okresy funkcji w porządku nie malejącym) i które to płaszczyzny podzielią przestrzeń Z na równoległościany, których krawędziami będą wielkości trzech najmniejszych okresów. Jeżeli teraz z jednego z wierzchołków któregośkolwiek z równoległościanów, poprowadzimy prostą wyobrażającą czwarty okres (tak co do wielkości jak i kierunku), drugi jej koniec nie upadnie w żadnym z wierzchołków tegoż lub innego równoległościanu, lecz wewnątrz, gdyż inaczej czwarty okres byłby sumą wielokrotników trzech pierwszych okresów, to jest nie byłby różnym, co przeciwne założeniu.

Lecz na mocy twierdzenia o równoległościanie, wyżej dowiedzonego, ten drugi koniec prostej wyobrażający czwarty okres funkcji, jest bliżej jednego z wierzchołków równoległościanu, w którym się znajduje, jak na długość największej krawędzi równoległościanu, czyli wielkość jednego ze trzech okresów najmniejszych. Wnieśliśmy więc, że trzech najmniejszych okresów dobrać nie można, bowiem odległość o której mówiliśmy można uważać jako okres mniejszy od jednego ze trzech najmniejszych przypuszczonych, i że przeciwnie, można zawsze dobrać trzy okresy mniejsze od trzech ilości danych jakkolwiek małych.

Skoro więc funkcja przy zmianach zmiennej niezależnej, mniejszych od wszelkiej danej ilości jakkolwiek małej, nie zmienia swego znaczenia, jest więc albo stałą, albo też ma nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących przy każdym znaczeniu zmiennej niezależnej. Przypuszczenie więc istnienia czterech okresów różnych, prowadzi nieuniknienie do sprzeczności z twierdzeniem, i dowodzi twierdzenia w zupełności.

Dokończywszy dowodu twierdzenia głównego zakończę kilku wyrazami odnoszącemi się do szczególnego przypadku, gdy przy przedstawianiu funkcji dwu lub trójwymiarowych okresowych zdarzy się, że okresy są tego rodzaju, że punkta

$$z = ra + sb, \quad z + ra + sb + tc, \quad \left(-\infty \leq \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \leq +\infty \right)$$

przypadają na jedną prostą lub na jedną płaszczyznę.

Jeżeliby w razie funkcji okresowej dwuwymiarowej, punkta o których mowa leżały na linii jednej prostej, mogłoby się zdarzyć oprócz tego, że wielkości dwóch okresów odpowiednich byłyby współmierne lub nie. W pierwszym razie funkcja byłaby tylko jednookresowa, w drugim zaś byłaby stałą lub posiadałaby nieskończoną liczbę znaczeń różniących się między sobą nieskończenie mało dla każdego znaczenia zmiennej niezależnej.

Oznaczmy bowiem przez w_1, w_2 wielkości dwóch okresów a_1, a_2 funkcji, które przypuścimy naprzód współmiernymi i których największą wspólną miarą niech będzie w . Jeżeli więc r_1, r_2 oznaczają liczby całkowite pierwsze między sobą stosowne, to można napisać

$$w_1 = w r_1, \quad w_2 = w r_2$$

punkta więc odpowiadające okresom i leżące w linii prostej wyraża się przez

$$z + a_1 s_1 + a_2 s_2 = w(r_1 s_1 + r_2 s_2)$$

gdzie s_1, s_2 , oznaczają liczby całkowite rzeczywiste dowolne. Ponieważ r_1, r_2 są pierwszymi między sobą można więc na zasadzie znanego twierdzenia algebrycznego dobrać całkowite s_1, s_2 tak że

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 = 1$$

i funkcja mieć będzie widocznie jeden tylko okres a , którego wielkość w .

Jeżeliby zaś wielkości w_1, w_2 okresów były niewspółmierne, wtedy według znanej własności ułamków ciągłych spostrzeżemy, że różnica pomiędzy znaczeniem bezwzględnie ułamku $\frac{w_1}{w_2}$ i dostatecznie odległym ułamkiem przywróconym jest mniejszą bezwzględnie od jedności podzieloną przez kwadrat z mianownika tegoż ułamku przywróconego, i który to mianownik można wziąć większym od wszelkiej ilości danej jakkolwiek wielkiej, biorąc tylko ułamek przywrócony dostatecznie odległy. Wnieśmy ztąd, że wielkość wyrażenia $a_1 s_1 + a_2 s_2$ można wtedy uczynić mniejszą od wszelkiej ilości danej jakkolwiek małej. Skoro więc funkcja niezmiennia swego znaczenia przy tak małej jak się podoba zmianie znaczenia zmienną niezależną, jest więc stałą lub też ma nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących dla każdego znaczenia zmienną niezależną, jak to wyżej powiedziano.

Jakkolwiek to dowiedziono już dla funkcji Kosziego, powtórzyłem dowód dla dogodności czytelnika, zwracając przytém uwagę, że się to stosuje do wszelkich funkcji dwuwymiarowych.

Gdyby w razie funkcji trójwymiarowych dwuokresowych, zdarzyło się, że punkta odpowiadające okresom były na jednej linii prostej wyciągnęlibyśmy podobnie wnioski mianowicie w razie współmierności wielkościokresów, zmniejszenie liczby okresów; w razie zaś niewspółmierności funkcja byłaby stałą lub miałaby nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących dla każdego znaczenia zmienną niezależną.

Jeżeliby zaś w razie funkcji trójokresowej trójwymiarowej zdarzyło, że punkta odpowiadające trzem okresom a_1, a_2, a_3 , a mianowicie punkta

$$z + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3$$

(gdzie s_1, s_2, s_3 , oznaczają całkowite rzeczywiste) dowolne znajdowały się na jednej płaszczyźnie, można by wtedy uważać daną funkcję na téjże płaszczyźnie lub na wszelkiej płaszczyźnie równoległej, jako dwuwymiarową mającą trzy okresy różne. Na mocy więc twierdzenia wyżej dowiedzonego, wnieśli byśmy, że funkcja jest stałą lub też ma nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących dla każdego znaczenia zmienną niezależną.

(¹) Używam tu nazwy *ilość złożona* (complese, complex i t. d.) zamiast pospolicie używaną *ilość urojona*, gdyż pierwsza lepijć rzecz przedstawia i dzisiaj jest prawie ogólnie używaną w językach włoskim, angielskim i t. d. Zostawiam jednakże nazwę *jedność urojona* zgodnie z matematykami cywilizowanego Zachodu, gdyż rzeczywiście natura jęj ma coś nieujętego w prawidła, coś że tak powiem fantastycznego, gdyż nadajemy jęj własności najrozmaitsze jakie uznajemy za stosowne do skrócenia lub ułatwienia w rozwiązaniu zadania lub dowodzeniu twierdzenia które mamy na uwadze.

(²) Najlepszą wskazówką w rozwoju teorii ilości złożonych [uważanych po raz pierwszy przez matematyków włoskich a mianowicie Kardana (CARDANO)] jest zdaje mi się przedmowa obszerna jaką zrobił Hamilton do swego dzieła: *Lectures on Quaternions*,... By Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, ... Dublin: Hodges and Smith, ... London: Whittaker and Co, ... Cambridge: Macmillan and Co. 1853, 8ka, stronie 71, 64, 736, 2. Dodamy tu jeszcze dzieło pośmiertne

tegoż wielkiego matematyka: *Elements of Quaternions. By the late Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, ... Edited by his son WILLIAM EDWIN HAMILTON, ... London: Longmans, Green, and Co. 1866.* 8ka, stronice 6, 2, 60, 762. Dwa dopiero wymienione dzieła stanowią dwie obszerne prace jakie Hamilton zostawił w tym przedmiocie.

(3) Czytelnik znajdzie takową obszernie rozwiniętą w pracy Kosziego: *Mémoire sur les clefs algébriques* zawartą na stronicach 356 do 400, tomu 4 pisma: *Exercices d'analyse et de physique mathématique, par le Baron AUGUSTIN CAECHY, ... Paris, Bachelier, ... 1840, 1841, 1844, 1847,* tomów 4, 4ka. Zdaje się jednakże, że pierwsze prace Kosziego nad *kluczami algebrycznymi* sięgają 1853 roku i zatem przytoczona wyżej praca nie jest wcześniejszą.

(4) Z pomiędzy licznych i pięknych prac Pana Bellawitis przytoczę następujące, naprzód dla tego, że Hamilton zdaje się ich wcale nie znać i dla tego że rzeczywiście zasługują na uwagę.

- a) *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica (Calcolo delle equipollenze); Padova, 1835.*
- b) *Saggio sull'algebra degli immaginari; Venezia, 1832.*
- c) *Sposizione del metodo delle equipollenze; Modena, 1834.*
- d) *Calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton, e sua relazione col metodo delle equipollenze; Modena, 1838.*
- e) *Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica; Venezia, 1860.*
- f) *Determinazione numerica delle radici immaginarie delle equazioni algebriche; Venezia, 1864.*
- h) *Elementi di geometria, di trigonometria e di geometria analitica, ... Padova, 1862.*

(b) *Wykład Matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach. Napisał WAWRZYNIEC ŻMURKO, ... Nakładem Włodzimierza Hr. Dzieduszyckiego. Ławów. Z drukarni Kornela Pillera. 1864.* 8ka, 2 tomy, tom pierwszy zawiera stronice 24, 372, 4; drugi zaś zawiera stronice 26, 698, 8.

(6) Po raz pierwszy zdaje mi się przychodzi użyć wyrazu polskiego odpowiadającego wyrazowi angielskiemu *quaternion*. W niewiedomości, czy kto już go przetłumaczył ośmielam się użyć wyrazu *czwórki*, który zdaje mi się przypominać poczwórną naturę tego rodzaju ilości i tłumaczyć niejako nazwisko nadane przez Hamiltona.

(7) *An elementary treatise on quaternions by P. G. TAIT, ... Oxford, at the Clarendon press, 1867. London. Macmillan and Co. publishers to the University of Oxford.* 8ka stronice 20 i 320.

(8) (9) (10) (11) Nazwisk tych użył Pan Folkiński w swym dziele: *Zasady Rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami...* Tom 1.... Nakładem biblioteki Kónickiej. Paryż, księgarnia Luxemburska, ... Warszawa, księgarnia M. Glücksberga ... 1870. 8ka, stronice 50 i 1088, odpowiednio na stronicach 664 i następnych, 704 i następnych, 718 i następnych, oraz na stronie 13.

(12) To jest jeżeli

$$(i_1 a_1 + i_2 a_2 + \dots + i_n a_n) + (i_1 b_1 + i_2 b_2 + \dots + i_n b_n) = i_1(a_1 + b_1) + i_2(a_2 + b_2) + \dots + i_n(a_n + b_n)$$

(13) Nazywamy tu odpowiednio z powodów geometrycznych *długością* lub *wielkością* ilości dwu i trójwymiarowej

$$i_1 z_1 + i_2 z_2, \quad i_1 z_1 + i_2 z_2 + i_3 z_3$$

wyrażenia dodatnie

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad i \quad \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$$

To określenie *wielkości* ilości wielowymiarowej stosuje się i do ilości więcej jak trójwymiarowych, i nazywamy z pomiędzy dwóch ilości wielowymiarowych większą tę, która ma wielkość większą. Na koniec dodam jeszcze, że kierunek linii przechodzącej przez początek współrzędnych i przez punkt z_1, z_2 lub z_1, z_2, z_3 nazwiemy kierunkiem ilości dwu lub trójwymiarowej.