

ROZBIÓR KRYTYCZNY DZIEŁA

P. W. FOLKIERSKIEGO

POD TYTUŁEM

ZASADY

RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

TOM I-szy, RACHUNEK RÓŻNICZKOWY.

NAPISAŁ

ADOLF SĄGAJŁO

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa d. o. Października 1871 r.).

Nauki Matematyczne w całej dawniej Polsce, były zawsze wielce poważane, powszechnie wysoko cenione, i starannie uprawiane; w pięknych historycznych epokach kwitnącej narodowej oświaty, zwykle naturalnie okazałe, i niekiedy bardzo świetne. « Od początku piętnastego wieku do połowy szesnastego Akademia Krakowska była głównem w Europie nauk matematycznych siedliskiem » (*).

« Przy końcu XV wieku Węgrzy i Niemcy jeździli na nauki do Akademii Krakowskiej dla Michała z Wrocławia i Brudzewskiego (nauczyciela KOPERNIKA), jak niedawno jeździli Polacy do Berlińskiej dla Hegla i Ryttera » (**).

Po uszczupleniu i osłabieniu naszej Rzeczypospolitej, przez odpadnięcie wielu województw i przez ustęp z Polski Kozackiego narodu, nastąpił bolesny okres schyłku i dogorywania naszego politycznego bytu. Nauki ścisłe w każdej epoce los narodu dzielące, gdy przy końcu XVI wieku Humanisści popęd do nauk matematycznych stłumili, już nie pierwój, aż dopiero po zupełnych nauk i umiejętności

(*) Michała Wiszniewskiego *Historja Literatury Polskiej*. Tom IX. Kraków, (1837).

(**) Michała Wiszniewskiego *Historja Literatury Polskiej*. Tom III. Kraków, (1844).

w całym kraju reformach, podanych i szczęśliwie przeprowadzonych przez nieśmiertelnego ich twórcę : *Stanisława Konarskiego* pijara, na nowo się odradzać i rozwijać zaczęły.

W kilka lat po pierwszym rozbiórce Polski *Komisya Edukacyjna*, biorąc za wzór kwitnące w całej Polsce po *reformie Konarskiego* narodowe szkoły pijarów, postanowiła wprowadzić *nowy porządek nauk* do szkół narodowych świeckich. Całe to przekształcenie dawniej naszych ojców narodowej oświaty Lelewel wiernie zebrał, i w umiętętym poglądzie historycznym tak nam przedstawił :

« Po upadku zakonu jezuickiego, we wszystkich krajach katolickich, zjawiała się wielka w zakładach naukowych próżnia, którą nowemi urządzeniami i zakładami zapełnić wypadało. Po wielu krajach fundusze pojezuickie, w części, na potrzebę edukacyi przeznaczone, w Polsce zaraz na sejmie 1773 r. całkowicie na ten koniec obrócone; oprócz téj części, którą podchwyciły ręce prywatne. *Komisya edukacyjna*, szczęśliwie fundusz pojezuicki, stosownie do jego przeznaczenia, rozporządzając, potrafiła go polepszyć, ilość znacznie podnieść i *nie przestawała nad coraz dojrzałym szkół urządzeniem pracować*. Mało więc *nad milion* rocznego dochodu, w następnych kilku latach, *potrafiła* Komisya edukacyjna *do półtora miliona podnieść*. Pomagając dochód, postawiła się w możności podejmowania większych wydatków. *Usiłowała podźwignąć szkoły główne czyli uniwersytety Jagielloński i Batorowski, w Krakowie i Wileń* : oczekując po nich światła w naukach pomocy. Krakowski, z ciężkiego dawnych czasów przyćmienia, wydobyty, nie mógł tak prędko do światła wieku trafić. Uniwersytet Wileński, z jezuickiego na świecki przeistoczony, zasilił się przeniesionemi z Grodna do Wilna *Tyzenhauza* zakładami. »

Nie były to zaiste *zakłady Tyzenhauza fabryczne*, ale niezawodnie : 1° bogate *muzeum anatomiczne*, 2° wielkiej wartości *muzeum nauk przyrodzonych*. Dalej Lelewel, mówiąc o *zakładaniu szkół narodowych świeckich*, tak te prace wspólne Komisji i Pijarów ocenia.

« W swych naukowych staraniach, *znalazła* Komisya edukacyjna *największą pomoc w zgromadzeniu ksiąg pijarów, których szkoły i konwikt*, wyprowadzając pięknie usposobionych dla ojczyzny obywateli, *stawały się wzorem do zakładania szkół świeckich*. Nieustające starania, dążyły do ulepszenia szkół tak pijarskich jak świeckich. W planie nauk, lubo łacina czyli *filologia*, była jednym z najgłówniejszych nauki przedmiotem, wszelako szkoły te, jak rzadko gdzie w Europie, *wszystkie gałęzi wiadomości obejmując każdego z niemi oswajały*. Obejmując zaś razem wszystkie, takiemi się mieniej zajmowały, które mogły człowieka publicznego i prawdziwego kształcić obywatela. Ztąd historia, moralność, znajomość prawa politycznego i głównych ekonomii politycznej zasad, były w szkołach polskich istotnym przedmiotem. Potrzebowały te szkoły *ksiąg elementarnych*. Towarzystwo elementarne obowiązane było obmyślić środki aby téj potrzebie zadosyć uczynić. Pracą tedy wielu krajowców, a nadewszystko pijarów, były książki elementarne, dla szkół narodowych wygotowane. Niezacieśniano się do sił własnych; wezwani byli do téj ważnej pracy światli cudzoziemcy : *CONDILLAC* wygotował *loikę*, *LEHULLIER*, profesor Akademii genewskiej, dzieła matematyczne dla szkół polskich. Nie zdołała wprowadzić Komisya z towarzystwem elementarném, zaspokoić wszystkich szkół narodowych potrzeb; z tém wszystkiém, *szkół tych urządzenia i naukowe przepisy*, przetrwały upadek Polski, zyskały pochwałę u obcych i przez kilkadziesiąt lat następnych, nie przestały wpływać na upadły, a odrodzenia oczekający naród. »

Po zupełnym upadku kraju i *zyciu pogrobowém* wielkiego niegdyś w Europie narodu, dzięki gorliwym staraniom i niesłychanym przez pół wieku wysileniom wielkich twórców i organizatorów publicznego narodowego oświecenia : nieśmiertelnych *Czackich, Czartoryskich, Kotłatajów i Sniadeckich*, widzimy na całej przestrzeni tak nazwanej *Kongresówki*, od *Krakowa* do *Warszawy*, a osobliwie, na *Wotyniu i Litwie* ścisłe nauki matematyczne znakomicie kwitnące.

Któż, w ojczyźnie *KOPIERNIKA*, upadające katedry *Brudzewskich i Sniadeckich* z gruzów i ruin podnieść? Któż nam, wszystkie w ogólności *dzieła elementarne matematyczne*, te zasady i główne podstawy

wszelkiego umysłowego ukształcenia, krótko, jasno i zrozumiale po polsku napisze? Kłóż nam nakoniec, potrzebnych funduszków na kosztą druku i inne wydatki hojnie i wspaniale dostarczy?

W tym to właśnie celu, pod kierunkiem i protekcją, poświęconego na wszelkie wzniosłe przedsięwzięcia, Hr. Jana Działyńskiego od kilku lat w Paryżu otworzyło się i uorganizowanem zostało: *wydawnictwo matematycznych nowych dzieł polskich*. Ta ważna dzieł matematycznych publikacja, zaledwo od lat kilku otwartą, obecnie nietylko że nie ustaje, ale owszem coraz bardziej się rozwija, objawiając bogate i dojrzałe naszej umiejętności owoce.

Po zasługujących na uwagę pracach, o *Arytmetyce i Geometrii ogólnej*, pana Gracha Henryka Niewęgłowskiego, wkrótce się okazało w Paryżu dzieło *Wyższej Matematyki: Zasady Rachunku Różniczkowego i Całkowego*, napisane przez p. Wł. Folkińskiego. Zając się niezwłocznie ścisłym rozbiorem i gruntownym ocenieniem *Rachunku Różniczkowego* pana Wł. Folkińskiego będzie oczywiście naszych przychylnych dla autora uczuć niewątpliwym dowodem, i zarazem naszej obywatelskiej posługi surowym dopełnieniem.

STUDYUM III^{cio}.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

p. W. FOLKIŃSKIEGO.

I

Zanim przystąpimy do krytycznego rozbioru téj ważnej wyższego rzędu umiejętności, uważamy za stosowne dać czytelnikom naszym krótki rys historyczny rozwoju tejże nauki. Wiadomo powszechnie że Rachunek Różniczkowy, to największe późniejszych geometrów odkrycie, był wynalezionym przy końcu XVII wieku przez dwa najznakomitsze genjusze jakimi ludzkość poszczycić się może: przez Newtona i Lejbnitza. Pan Folkiński, w swój przedmowie do nowo wydanego dzieła, rozbiegając obszernie spór o pierwszeństwo jaki powstał tak pomiędzy samymi wynalazcami jak i pomiędzy ich uczniami, taką uwagę spór ten zamyka: oba wynalazcy, nieuważając na chronologiczną różnicę, doszli do odkrycia samodzielnie, niewiedząc nawet o wzajemnych pracach, a tém samym nie pożyczając jeden od drugiego naukowych pomysłów. Autor podaje dalej długi i świetny szereg następców tych olbrzymich genjuszów, zajętych nieprzerwanie od półtora wieku dopełnianiem i rozwojem pierwotnej twórców myśli. Znajdujemy tam nieśmiertelne imiona Lagrange'a i Gaussa, na widokregu odkryć nowożytnych wielkiem światłem jaśniejące.

W dzisiejszym stanie nauki, mamy w Matematyce pięć rachunków, które należy osobnym różnić nazwiskiem: 1° *Calculus differentiarum*, rachunek różnic; 2° *Calculus summatorius*, rachunek zbiorowy albo sumy; 3° *Calculus differentialis*, rachunek różniczkowy; 4° *Calculus integratis*, rachunek całkowy; 5° *Calculus Variationum*, rozległego w Geometrii i w Fizyce użycia, powinienby się u nas, idąc za światłem zdaniem Jana Śniadeckiego, *rachunkiem przemienności* nazywać.

Dwa pierwsze uważać można jako ciąg i odnogę Algebry, ale trzy ostatnie są rachunkiem jak nazywają *transcendentalnym*, to jest, wyższego rzędu.

Gdy do pięciu poprzedzających dodamy *Calculus Probabilitatis*, będziemy mieli zbiór wszystkich rachunków. Ten ostatni rachunek, który według Daniela Bernoulli należałoby nazwać *rachunkiem sztuki domysłowej*, albo *rachunkiem przypuszczalnym* (*Principia artis conjectandi*), właściwie jest u nas nazwany *rachunkiem prawdopodobieństwa*. D'Alembert i Condorcet użyli go do wielu zagadnień poli-

tycznych i fizycznych. Laplace i Lagrange wskazali pewne i ogólne sposoby prowadzenia tego rachunku stanowiącego dziś głęboki traktat algebraiczny.

Jeśli p. Folkierski, po ogłoszeniu w drugim tomie swego *rachunku całkowego*, zechciał się zająć napisaniem i ogłoszeniem w trzecim tomie potrzebnego nam *rachunku przemienności*, mielibyśmy tym sposobem, wszystkie trzy rachunki *transcendentalne*. Cokolwiekby, mamy już dzięki p. Folkierskiemu, dwa *wyższego rzędu* rachunki, najczęściej używane przy wszelkiego rodzaju zastosowaniach do różnych umiejętności.

Jakże wykazać jasno przedmiot tych dwóch umiejętności; *Rachunku różniczkowego i całkowego*? Byleby, mówi nasz znakomity matematyk Sniadecki, zrozumieć to (co i p. Folkierski ściśle w swém dziele dowodzi), że ilości zmniejszając się mogą zniknąć, ale ich stosunek i związek nie niknie lecz zamienia się na stosunek i związek innego rodzaju *w ogólności* skończony, byleby to zrozumieć, każdy pojmie już łatwo przedmiot tych dwóch umiejętności.

Gdy ilości ubywając ciągle, znikną, na co się zamieni ich stosunek i związek? Rozwiązanie tego pytania jest *rachunkiem różniczkowym*.

Mając stosunek i związek który powstał ze zniknięcia ilości, wynaleźć same ilości i ich związek pierwotny? Oto jest zadanie *rachunku całkowego*.

II

Po tych ogólnych określeniach dwóch umiejętności powyżej przytoczonych, przystępujemy do krytycznego rozbioru pięknego i starannie wydane go dzieła p. Wł. Folkierskiego.

Z prac zamierzonych przez siebie, p. Folkierski wydał tom pierwszy, zawierający trzy główne części: *Wiadomości wstępne. Rachunek Różniczkowy i Zastosowania*. Każda z tych części dzieli się znowu na pewną liczbę rozdziałów. Te zaś trzy główne jednej umiejętności części, jak gdyby trzy mocno z sobą spojęne jednej myśli ogniwa, stanowią podanego pod nasz rozbiór dzieła doskonałą całość. Powyższe ogólne twierdzenie ściśle uzasadnić nie omieszkamy. Zbyteczném byłoby usprawiedliwiać słusznie przyjęty porządek dwóch ostatnich części tomu pierwszego: w dziełach bowiem i w wykładach tak niższej jak i wyższej Matematyki, zwykle po teoriach następują ich rozliczne zastosowania. Pozostaje nam zatem wykazać, że porządek dwóch pierwszych części, równie logiczny i naturalny jak dwóch ostatnich, powinien być koniecznie w zupełności zachowany. Dobrzeby nawet było, przedmiot naszych usilnych poszukiwań powoli do wyżyn nauki podnosząc, raz na zawsze należycie uzasadnić, że myśl pierwotna wielkiego rachunku różniczkowego wynalazców, zarówno mocnym ogniwem spaja dwie ostatnie jak i dwie pierwsze części w tém jednolitym pisarza polskiego dziele. Kilka ważnych spostrzeżeń posłużą nam za dowód powyższego twierdzenia. Zauważmy *najprzód*: że rozdziały pierwszy i piąty wiadomości wstępnych, to jest: *teoryje ogólne funkcyj i szeregów* wraz z ich *rozlicznym zastosowaniem* są już oddawna do różnych znakomitych traktatów rachunku różniczkowego powszechnie wprowadzone. *Powtórze*: Rozdział czwarty i szósty wiadomości wstępnych, to jest: wprowadzenie do teoryj zasad rachunku różniczkowego *metody granic* i *metody nieskończenia matych* potrzebuje długiego usprawiedliwienia? Ta ostatnia metoda, przez wielu za nieściłą lub tylko przybliżoną uważana, mogłaż rzeczywiście do wykładu elementarnego wyższej Matematyki być użytą, dopóki jej ścisłość, doniosłość i pożytek nie zostały należycie wyświecone? *Potrzenie*: Pozostaje nam jeszcze ocenić rozdział drugi i trzeci wiadomości wstępnych, to jest przedstawienie geometryczne funkcyj i teoryja ogólna ilości urojonych. Rozdział drugi streszcza w sobie wiadomości z geometryi analitycznej niezbędne do zastosowań i przykładów podanych w dalszym ciągu dzieła. Zastosowania rachunku różniczkowego do geometryi są koniecznie potrzebne; ale wszelkie, choćby najkróć zebrałe, wiadomości

geometrii analitycznej umieszczone obok rachunku różniczkowego, dziwnie wydają się nam rażące.

Dwie główne części: *Geometria analityczna* i *Rachunek analityczny*, który się dzieli na różniczkowy i integralny, składają czystą *Matematykę ilości zmiennych* czyli *analizę nowoczesną*. Rachunek analityczny już mamy napisany. Geometria analityczna od czasu pokazania się znakomitych dzieł panów Salmona, Hessa i Painvena, ogromny postęp w dawniej analizie Descart'a zrobiła. Dzieło polskie, w duchu wielkich przewodników odrodzenia i zupełnego przekształcenia dawniej nauki Descart'a pojęte i porządnie wyłożone, byłoby dla nas w tej chwili niezmiernie pożądanym uabytkiem. I dlatego właśnie spodziewamy się, że przed powtórnicznym wydaniem rachunku analitycznego p. Folkierskiego znajdzie się ktokolwiek w światłym gronie uczonych polskich, obeznanych gruntownie z dzisiejszym rozwojem geometrii analitycznej, który zechce się zająć gorliwie napisaniem i ogłoszeniem obszernego dzieła zupełnie przekształconej Descart'a analizy, któreby to dzieło całkiem odpowiadające wszelkim potrzebom odrodzonej nauki, zarówno służyło nam za podstawę do rachunku analitycznego i nawzajem, w razie potrzeby, mogło się także wielkim światłem tegoż rachunku posiłkować. Tym tylko sposobem postępując, możemy *skrótowe przedstawienia geometryczne funkcji* należycie zastąpić. Co się zaś tyczy ilości urojonych, radzimy ich w zupełności zatrzymanie. Do tego postanowienia skłania nas ta ważna uwaga. Nie ma ścisłej nauki, której teorie nie są oparte na rozumowaniach i *dowodzeniach ogólnych*. A że ilości urojone wprowadzone bywają w rachunek dla *uogólnienia wypadków*, dlatego je właśnie przy rachunku różniczkowym chętnie zatrzymujemy.

Po tej ogólnej syntezie i przeglądzie całkiem zbiorowym, przystąpmy z kolei do szczegółów i krytycznej *Analizy Wiadomości wstępnych* (Część I) zawartych w pierwszych sześciu rozdziałach:

ROZDZIAŁ I. *O funkcjach*, którego treścią jest: określenie funkcji; różne jej rodzaje, a mianowicie funkcje algebraiczne, przestępne, funkcje funkcyj; zamiana zmiennych; różnice funkcyj; ciągłość zmiennych i funkcyj; wyznaczenie funkcji zadość czyniącej pewnym warunkom; wzory interpolacyjne Newtona i Lagrange'a; nie pozostawia nic do życzenia, tak, pod względem logicznego układu, dokładności i jasności w określeniach, jak również, pod względem prostoty i ścisłości w dowodzeniach.

ROZDZIAŁ II. Autor przedstawia geometrycznie funkcje jednej i dwóch zmiennych, zawsze z tą samą prostotą, ścisłością i dokładnością jak w rozdziale pierwszym; gdyby się więc nie wdał w przytaczanie wiadomości wstępnych z geometrii analitycznej, które bardziej do geometrii jak do rachunku należą, zasłużyłby na takie same pochwały, jak za rozdział pierwszy.

ROZDZIAŁ III za to, *o ilościach urojonych*, jest bardzo trafnie pomyślanym, w szczególności zaś, przez wstęp *o ilościach mieszanych*, daje początkującemu czytelnikowi bardzo jasne wyobrażenie, o zasadniczych własnościach ilości urojonych.

W Rozdziale IV, mówiąc o metodzie granic powszechnie w matematyce przyjętej, p. Folkierski potrafił dodać kilka nowych i trafnych spostrzeżeń, pomimo że ta część nauki doszła w ostatnich czasach na Zachodzie do wysokiego stopnia rozwoju.

W wielu dziełach elementarnych, pewną nawet wartość mających, brak jasnych i dokładnych definicji najchętniej dowodzi, ile ta strona przedstawia dla autora trudności. Nie wahamy się jednak wyznać, że nie znaleźliśmy nigdzie równie dokładnej definicji jak ta którą p. Folkierski o granicy wielkości zmiennych podaje:

« *Granicy wielkości zmiennych*, mówi p. Folkierski, *nazywamy wielkość oznaczoną, do której wielkość zmienna zbliża się nieograniczenie tak, że różnica pomiędzy jedną a drugą ciągle się zmniejszając, może stać się ostatecznie dowolnie małą, niezwiększając się dla żadnej z następnych wartości, jakie zmienna przybrać może.* »

Z tej definicyi wypływają *trzy twierdzenia zasadnicze metody granic* :

Twierdzenie I. *Ilość, która ciągle zwiększując się nie może stać się większą od pewnej ilości oznaczonej, ma granicę oznaczoną.*

Twierdzenie II. *Granice zmiennych równych są sobie równe.*

Dowodzenia tych dwóch twierdzeń odznaczają się prostotą i jasnością.

Następujący wniosek ; że *ilość zmienna nie może zdyżać jednocześnie do dwóch granic różnych* uważany powszechnie jako pewnik, p. Folkieski potrafił dowieść za pomocą metody znanj *przypowiedzenia do niedorzeczności*.

Twierdzenie III. *Granice funkcji ciągłych równych, zmiennych zdyżających do granic oznaczonych, są funkcjami równemi granic tychże zmiennych.*

Dowodzenie nie przedstawia żadnej trudności, a że twierdzenie jest *ogólne*, może się więc rozciągnąć do wszystkich przypadków szczególnych. Przeto, w szczególności : granica summy równa się sumie granic ; jeżeli

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

to

$$\text{gr} x = \text{gr} x_0 + \text{gr} x_1 + \text{gr} x_2 + \dots + \text{gr} x_n ;$$

granica iloczynu równa się iloczynowi granic ; jeżeli

$$x = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$

to

$$\text{gr} x = \text{gr} x_1 \cdot \text{gr} x_2 \cdot \text{gr} x_3 \cdot \dots \text{gr} x_n ;$$

granica ilorazu równa się ilorazowi granic ; jeżeli

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

to

$$\text{gr} x = \frac{\text{gr} x_1}{\text{gr} x_2} \quad \text{i t. p.}$$

Oto jest rzeczywiście piękny przykład uogólnienia wypadków szczególnych.

ROZDZIAŁ V.

Teorya Szeregów

Cauchy, który tyle przyczynił się do postępu nauk matematycznych w ogólności, stanowi także epokę w rozwoju *teoryi szeregów*. Przenikliwy umysł Cauch'ego nie mógł nigdy poprzestać na tych pół-dowodach które dla tylu innych geometrów były wystarczające ; zład wykład jego odznacza się wzorową ścisłością która nie jest bynajmniej nieprzyjaciółką prostoty, ale przeciwnie, wierną jej towarzyszką. Dowodzenie niezupełne, jest to trudność ukryta lecz nie rozwiązana, która prędzej czy później występując na jaw stanie się źródłem trudności nierównie większych, gdy przeciwnie, ścisłe dowodzenie usuwa je raz na zawsze. Dopóki Cauchy swych traktatów nie ogłosił (1826-29), dowodzenia twierdzeń zasadniczych Rachunku różniczkowego spoczywały bardzo często na rozważaniu pewnych szeregów które zwykle brano nie rozpoznając, a tém samém nie mogąc się zapewnić, czy te

szeregi były zbieżne, albo nawet czy były one istotnie wyrażeniem dokładnem funkcyj, które zlały się je z siebie wydawać. Cauchy nie przestawał nigdy powstawać na podobne nadużycia. Nigdy też wielki ten geometra nie przystąpił do rozwinięcia funkcyj jakiegokolwiek na szereg, dopóki naprzód należycie nie wykazał: możebności rozwoju funkcyj danój na szereg, prawa ciągłego wyrazów szeregu postępu, zbieżności otrzymanego szeregu, jego bytu jednem słowem, jako wyrażenia tój a nie innój funkcyj danój. Te są wielkie ulepszenia które Cauchy po wielu trudach do teoryi szeregów wprowadził.

Szeregiem nazywamy zbiór ilości dodatnich lub ujemnych, postępujących po sobie według pewnego prawa, których liczba jest nieograniczoną.

Jeżeli summa algebraiczna wyrazów szeregu dąży do pewnej granicy oznaczonej, gdy liczba tych wyrazów zwiększa się do nieskończoności, nazywamy szereg *zbieżnym*.

Jeżeli summa algebraiczna wyrazów szeregu zwiększa się nieograniczenie, w miarę jak powiększamy liczbę tych wyrazów, szereg nazywamy *rozbieżnym*.

Jeżeli summa algebraiczna wyrazów szeregu nie zdąży do żadnej oznaczonej granicy, ani też nie zwiększa się bez granic, gdy liczba wyrazów zwiększa się do nieskończoności, szereg nazywamy *nieoznaczonym*.

Warunki ogólne zbieżności szeregów.

Warunki ogólne zbieżności szeregów, p. Folkiński sprowadza do dwóch twierdzeń i tyłuż wniosków następujących.

Twierdzenie I. Jeżeli szereg jest zbieżnym, granicą reszty jest zero.

Twierdzenie II. Odwrotnie, szereg jest zbieżnym jeżeli granicą jego reszty jest zero.

To sławne twierdzenie Cauch'ego potrzebuje kilku słów całą wątpliwość wyjaśniających. Aby lepiej zrozumieć to co o nim p. Folkiński powiada, weźmy szereg

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \dots$$

wyraz n^{ty} szeregu

$$u_{n-1}$$

nazywać będziemy *wyrazem ogólnym*, sumę wyrazów następujących

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p-1}$$

resztą szeregu. Oznaczać będziemy przez skrócenie sumę n pierwszych wyrazów szeregu przez S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

a resztę przez R_n

$$R_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p-1}.$$

Mając przed oczyma resztę szeregu, łatwo zrozumiemy przypisek p. Folkińskiego usprawiedliwiający twierdzenie Cauch'ego. Oto są jego własne słowa: «Twierdzenie to podane po raz pierwszy przez Cauch'ego, było poddane pod wątpliwość przez niektórych matematyków, gdyż dawano przykłady szeregów, które nie były zbieżnymi, choć summa p wyrazów następujących po n^{tym} , gdy n dość wielkie, zdążyła do granicy zero. Lecz brano p równe lub zależne od n : przypuszczając p *jakiemkolwiek* niezależnem od n , wątpliwość zostaje usunięta. »

W kilku wierszach ostatnich zamyka się cała wyborna obrona twierdzenia Cauch'ego. Poczém przedstawia nam p. Folkierski następujące spostrzeżenie :

UWAGA. Szereg może być rozbieżnym, choć wyrazy jego zmniejszają się nicograniczenie, i wyraz ogólny ma za granicę zero ; bo summa wyrazów w liczbie nicograniczonej może być nieskończoną, choć każdy z tych wyrazów złącza do granicy zero.

Granica wyrazu ogólnego równa zero, jest więc warunkiem koniecznym, lecz niedostatecznym zbieżności szeregów. Lecz z dwóch powyższych twierdzeń wynika że : granica reszty szeregu równa zero, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu, byleby w tym ostatnim razie, liczba wyrazów reszty, była jakkolwiek, niezależną od liczby wyrazów poprzedzających pierwszy wyraz reszty.

Z powyższych twierdzeń łatwo także wyciągnąć dwa wnioski :

WNIOSEK I. Szereg jest zbieżnym, jeżeli wartości wyrazów jego bez względu na znak, tworzą szereg zbieżny.

WNIOSEK II. Jeżeli wyrazy szeregu, począwszy od pewnego wyrazu są naprzemian dodatnimi i ujemnymi, a wartości bezwzględne ich ciągle się zmniejszają, granica wyrazu ogólnego równa zero, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu.

Warunki szczególne zbieżności szeregów.

Mając dany szereg nie mamy sposobu ogólnego rozpoznania czy szereg jest zbieżnym lub nie. Sposoby szczególne polegają głównie na porównaniu szeregu danego z innym szeregiem którego zbieżność jest znana. Porównanie to polega na twierdzeniu następującóm :

TWIERDZENIE III. Jeżeli wyrazy szeregu zbieżnego, które zakładamy wszystkie jednakowego znaku, pomnożymy jeden po drugim przez jakiegokolwiek ilości dodatne lub ujemne, których wartość bezwzględna nie może się zwiększać do nieskończoności, otrzymamy nowy szereg zbieżny.

Dowodzenie tego twierdzenia ściśle i zrozumiale jest wyłożone. Łatwo dowieść sześciu wniosków z powyższego twierdzenia wynikających :

WNIOSEK I. Szereg, którego każdy wyraz jest mniejszym co do wartości od wyrazu tego samego rzędu szeregu zbieżnego, mającego wszystkie wyrazy jednakowego znaku, jest szeregiem zbieżnym.

WNIOSEK II. Szereg jest zbieżnym, jeżeli zacząwszy od pewnego wyrazu, stosunek wartości każdego wyrazu do poprzedzającego, bez względu na znak, jest mniejszym od pewnej oznaczonej ilości, mniejszej od jedności :

WNIOSEK III. Szereg, którego wszystkie wyrazy są jednakowego znaku, jest rozbieżnym, jeżeli począwszy od pewnego wyrazu, stosunek każdego wyrazu do poprzedzającego jest ciągle większym od pewnej oznaczonej ilości, której wartość jest większą od jedności.

WNIOSEK IV. Szereg jest zbieżnym, jeżeli stosunek wyrazu ogólnego do wyrazu poprzedzającego wyraz ogólny, ma granicę skończoną mniejszą od jedności, rozbieżnym, jeżeli wszystkie jego wyrazy są jednakowego znaku a granica ta jest większą od jedności.

WNIOSEK V. Szereg jest zbieżnym, jeżeli zacząwszy od pewnego wyrazu, pierwiastek stopnia n^{go} z wartości n^{go} wyrazu szeregu, jest ciągle mniejszym co do wartości arytmetycznej od pewnej oznaczonej ilości, mniejszej od jedności.

WNIOSEK VI. Szereg jest zbieżnym, jeżeli granicą pierwiastku arytmetycznego stopnia n^{go} z wartości wyrazu n^{go} , jest ilość oznaczona, mniejsza od jedności, gdy n zwiększa się nicograniczenie.

Szeregi urojone.

Niech będą

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, \dots$$

$$(2) \quad v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \dots$$

dwa szeregi ilości rzeczywistych (które przez skrócenie nazywać będziemy *szeregiami rzeczywistymi*).
Szereg.

$$(3) \quad u_0 + v_0 i, u_1 + v_1 i, u_2 + v_2 i, \dots, u_{n-1} + v_{n-1} i$$

gdzie i wyraża $\sqrt{-1}$, nazywać będziemy *szeregiem urojonym*. Każdy z wyrazów

$$u_0 + v_0 i = w_0, u_1 + v_1 i = w_1, \dots, u_{n-1} + v_{n-1} i = w_{n-1} \dots$$

nazywać będziemy wyrazem szeregu urojonego, którego zatem napisać będziemy mogli :

$$(4) \quad w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, \dots$$

Zamiast uważać każdy wyraz szeregu urojonego pod postacią

$$w = u + v i$$

możemy wyrazić go pod postacią :

$$w = \rho (\cos \omega + i \sin \omega)$$

gdzie ρ jest modułem, a ω argumentem : co oznaczamy pisząc

$$\rho = \text{mod } w \quad \omega = \text{arg } w$$

a szereg przedstawi się wtedy pod postacią

$$(5) \quad \rho_0 (\cos \omega_0 + i \sin \omega_0) + \rho_1 (\cos \omega_1 + i \sin \omega_1) + \dots + \rho_{n-1} (\cos \omega_{n-1} + i \sin \omega_{n-1}) \dots$$

Odwrotnie, szereg rzeczywisty może być uważanym jako szczególny przypadek szeregu urojonego : jak wiemy z teorii ilości urojonych, każde wyrażenie rzeczywiste, może być uważanem jako wyrażenie urojone, którego moduł równy jest wartości wyrażenia rzeczywistego bez względu na znak, a argument wielokrotności parzystej, lub nieparzystej π , stosownie do tego, czy wyrażenie rzeczywiste jest dodatnem lub odjemnem. Moduł przypuszczamy zawsze dodatnym : mamy bowiem

$$+a = a (\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi), \quad -a = a [\cos (2n+1)\pi + i \sin (2n+1)\pi].$$

Twierdzenie IV. Szereg jest zbieżnym, jeżeli szereg modułów jego wyrazów jest szeregiem zbieżnym.

Badania p. Folierskiego związków, zachodzących pomiędzy szeregami ilości urojonych, podają mu łatwy sposób uogólnienia kilku twierdzeń, rzucających wielkie światło na całą teorię szeregów. Wszystkie te dowodzenia twierdzeń ogólnych, są zarówno ścisłe, zwięzłe, pełne wdzięku i nadzwyczajnej prostoty. Żeby o tém nie wątpić, dosyć jest przeczytać z uwagą, nieocenionąj wartości dowodzenie powyższego twierdzenia.

« Aby nie powtarzać dwa razy twierdzeń, dotyczących i szeregów urojonych i rzeczywistych, będziemy brali pod uwagę pierwsze, to jest urojone, jako ogólniejsze; uważając, że aby udo-

wodnione twierdzenie, lub własność szeregów urojonych zastosować do rzeczywistych, dość jest uważać moduły wyrazów szeregów urojonych za wartości bezwzględne wyrazów szeregów rzeczywistych, a argumenty pierwszych, za wielokrotności π parzyste lub nieparzyste, stosownie do znaku drugich. Tak np. mówiąc: *szereg, którego moduły tworzą szereg zbieżny*, rozumiemy nie tylko szereg urojony, ale i rzeczywisty taki, którego wartości wyrazów bez względu na znak, tworzą szereg zbieżny.

Działania na szeregach.

Twierdzenie V. Granica summy szeregu zbieżnego się nie zmieni, jeżeli za pewną liczbę wyrazów po sobie następujących, podstawimy ich sumę algebraiczną.

Twierdzenie odwrotne nie zawsze ma miejsce.

Twierdzenie VI. Granica szeregu zbieżnego, którego moduły tworzą szereg zbieżny, nie zmieni się, jeżeli przedstawimy w jakikolwiek sposób porządek wyrazów.

P. Folkierski udowadnia najprzód to twierdzenie w przypadku szeregów rzeczywistych: granica szeregu zbieżnego, którego wartości wyrazów bez względu na znak tworzą szereg zbieżny, nie zmieni się i t. d.

Począł dowodzi to twierdzenie w przypadku ogólniejszym szeregów urojonych.

Uwaga. Rozróżnić więc możemy dwa rodzaje szeregów zbieżnych: te, które są zbieżnymi w skutek prawa według jakiego wartości wyrazów po sobie następują, czyli bez względu na znaki wyrazów, i te, których zbieżność polega jedynie na następstwie znaków. Czyli ogólniej: te, których szeregi modułów są zbieżnymi, bez względu na argumenty, (szeregi które nazywać będziemy *zbieżnymi co do modułów*), i te, które winny zbieżność swą jedynie argumentom.

Na zasadzie powyższego twierdzenia, zbieżność tych ostatnich polega także na porządku, w jakim wyrazy po sobie postępują, gdy tymczasem zbieżność pierwszych jest zupełnie niezależną od porządku wyrazów. Przesuwając wyrazy szeregu zbieżnego, lecz którego wyrazy co do wartości bez względu na znak nie tworzą szeregu zbieżnego, możemy otrzymać szereg rozbieżny, albo nawet zbieżny, lecz którego summa zdążyła do całkiem różnej granicy, jak summa szeregu pierwotnego.

Dodawanie szeregów.

Twierdzenie VII. Wyrazem ogólnym summy szeregów zbieżnych co do modułów, (w szczególności zbieżnych bez względu na znak) jest summa wyrazów ogólnych każdego szeregu, jeżeli liczba szeregów, którą dodajemy jest skończoną; jeżeli liczba szeregów tych jest nieograniczoną, summa ich stanowi szereg podwójny, którego wyrazem ogólnym będzie szereg utworzony z wyrazów ogólnych szeregów składających, byleby summy tych ostatnich, stanowiły również szereg zbieżny co do modułów.

Mnożenie szeregów.

Twierdzenie VIII. Niech będą szeregi zbieżne co do modułów:

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2 \dots, u_{n-1}, \dots$$

$$(2) \quad v_0, v_1, v_2 \dots, v_{n-1}, \dots$$

niech będzie U granicą summy wyrazów pierwszego, V granicą summy wyrazów drugiego: powia-

dam że iloczyn UV jest granicą summy szeregu zbieżnego

$$(3) \quad u_0 v_0, (u_0 v_1 + u_1 v_0), (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0), \dots, (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \dots + u_{n-2} v_1 + u_{n-1} v_0) \dots$$

którego wyrazem ogólnym jest

$$u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \dots + u_{n-2} v_1 + u_{n-1} v_0.$$

Łatwo się można przekonać że to twierdzenie jest udowodnionem w całej ogólności.

Podał je pierwszy Cauchy.

UWAGA. Twierdzenie nie miałoby miejsca, gdyby szeregi (1) i (2) były *złe zbieżnymi*, to jest, gdyby zbieżność ich polegała jedynie na znakach lub argumentach wyrazów, a nie na ich wartościach lub modułach.

Zastosowania i przykłady.

Po teorii wyłożonej następują jak zwykle zastosowania i przykłady.

SZEREG NEWTONA. « Niech będzie szereg :

$$(1) \quad 1, \frac{m}{1}x, \frac{m(m-1)}{1.2}x^2, \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3, \dots, \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}x^n, \dots$$

Jeżeli m jest całkowitem i dodatnim, szereg ten sprowadza się do $m+1$ wyrazów, których summa równa jest jak wiadomo, $(1+x)^m$.

Przypuścimy tu m jakimkolwiek, lecz rzeczywistém, również jak x (przypadek x lub m urojonego będzie uważanym w dalszym ciągu). Szereg (1) w takim razie, wyłączwszy przypadek m całkowitego i dodatniego, będzie się składał z nieograniczonej liczby wyrazów, tak gdy m będzie całkowitem lecz ujemnym, jak również, gdy m przypuścimy ułamkowym lub niewymiernym, dodatnim lub ujemnym. »

Pan Folkiński ściśle dowiódł : że summa szeregu (1) jest $(1+x)^m$

$$(2) \quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}x^n + \dots$$

a to dla wszystkich wartości rzeczywistych m , dodatnich lub ujemnych, całkowitych lub ułamkowych, a nawet niewymiernych, byleby szereg był zbieżnym to jest, $-1 < x < +1$.

Rozwinięcie (2) nazywają pospolicie rozwinięciem *dwumianu Newtona*.

Rozwinięcie w szereg zbieżny zasady logarytmów naturalnych. Zasadę układu logarytmów naturalnych oznaczają pospolicie głoską e , uważając ją jako granicę wyrażenia

$$(1) \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie przybierając wartości całkowite lub niecałkowite tak dodatnie jak ujemne. P. Folkiński dowodzi, że wyrażenie (1) może być uważanem jako granica szeregu zbieżnego, że zatem zdąża do granicy oznaczonej. Nic nie mamy powiedzieć przeciw temu sposobowi pojmowania p. Folkińskiego; przyznajemy nawet, że metoda jego dowodzeń jest dokładnie ściśłą i pełną wdzięku, to jednak wszystko wzięte pod uwagę nie wzbrania nam bynajmniej przedstawić do nowego wydania, zdaniem naszym, ulepszeń następujących :

Najprzód : Jeżeli w szeregu

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \dots,$$

przypuścimy

$$x = 1,$$

otrzymamy szereg liczebny

$$2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \dots,$$

szereg zbieżny, gdyż on jest przypadkiem szczególnym powyższego szeregu który jest zbieżny, dla wszelkich wartości x niezwiększających się nieograniczenie. Oznaczmy jego sumę głoską e .

Liczba e jest zawarta pomiędzy 2 i 3, gdyż mamy widocznie

$$e > 2 \quad \text{i} \\ e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, \quad e < 3.$$

two znaleźć granicę wyższą reszty R_n szeregu, albo summy

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (n+1)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (n+1) (n+2)} + \dots,$$

gdyż mamy

$$R_n < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right),$$

czyli

$$R_n < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \times \frac{1}{n}.$$

Widzimy że zbieżność jest bardzo prędką. Jedenaście pierwszych wyrazów daje w rzeczy samej $e = 2,7182818$, wartość przybliżoną o mniej niż jedna dziesięcio-milionowa.

Powtóre. Granica $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ gdy m zwiększa się nieograniczenie. Liczba e jest granicą do której dąży ilość $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ gdy m zwiększa się nieograniczenie.

Oto przedmiot téj części. Wszystkie przypadki przypuścić się dające pod względem różnych wartości rzeczywistych na m potrzeba dowieść za pomocą metody pięknie rozwiniętej w dziele p. Folkińskiego.

Potrzącie. Liczba e jest niewymierną. W rzeczy samej jeśliby e było liczbą wymierną $\frac{a}{b}$, mielibyśmy

$$\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots b} + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots b (b+1)} +$$

Przenosząc $2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots b}$ na pierwszą stronę równania, mnożąc przez $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots b$,

i oznaczając przez N liczbę całkowitą, będziemy mieli

$$N = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \dots$$

mamy więc

$$N > 0.$$

A że

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \dots < \frac{1}{1+b} + \frac{1}{(1+b)^2} + \dots,$$

zatem

$$N < \frac{1}{b}.$$

Mielibyśmy tym sposobem liczbę całkowitą zawartą pomiędzy 0 i $\frac{1}{b}$, co jest niedorzecznym; e więc pozostanie niewymiernym. Tym sposobem postępując, przyczynimy się znacznie do rozproszenia niektórych wątpliwości wielu osób mało z teorią i zastosowaniem szeregów zbieżnych obeznanych. I tak, na przykład wielu sobie wyobraża: że liczba e którą za pomocą szeregu liczebnego zbieżnego

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$$

można obliczyć z takim przybliżeniem jak się podoba, można także wyrazić *zupełnie dokładnie*. Lub inaczej: że liczba e zmniejszona o 2 jednostki, może się wyrazić w *ułamku dziesiętnym skończonym*; przypuszczenie nierazące żadną niedorzecznością dopóki nie wykazemy, że e będąc *niewymiernym* nie może być, tym samym, wyrażeniem *wymiernym*.

Uwagi nad użyciem szeregów są potrzebne i bardzo pożyteczne. Ostatnia jednak uwaga traktująca o szeregach, zasługuje na szczególną wzmiankę.

« Rozwinąć pewną ilość w szereg, jest to uważać tę ilość jako granicę summy szeregu zbieżnego. »

Metoda wyczerpywania (methodus exhaustionis).

« Mając daną wielkość niewymierną lub dość złożonego rodzaju, by ją wprost obliczyć można było, możemy rozłożyć wielkość tę na dwie części: jedną wymierną lub którą z łatwością obliczyć możemy, i resztę zwykle tego samego co wielkość dana gatunku. Resztę tę możemy znów rozłożyć na dwie części w podobny sposób jak wielkość daną: otrzymamy drugą wielkość wymierną i drugą resztę, którą rozkładamy znów jak powyżej i t. d. Jeżeli reszty te idą po sobie coraz zmniejszając się, tak że ostateczna reszta dąży do granicy zero, wielkość dana przedstawia się pod postacią summy szeregu wielkości wymiernych otrzymanych w powyższy sposób, przez rozkładanie każdej reszty. Metoda ta, którą nazwano *metodą wyczerpywania* używaną była w wielu razach do obliczenia powierzchni, brył i t. p. niewymiernych.

Zastosowanie tej metody.

Powierzchnia odcinka paraboli. Wiemy, że wzięwszy na paraboli jakikolwiek punkt 0, mamy dla tego punktu jako początku układ współrzędnych takich, że oś rzędnych jest styczną do paraboli w tym punkcie, oś zaś odcinków jest *średnicą*, to jest, dzieli każdą z cięciw równoległych do osi rzędnych na dwie równe części.

Szukamy powierzchni odcinka ograniczonego cięciwą i łukiem paraboli.

Trójkąt wpisany T jest połową równoległoboku opisanego R większego od odcinka szukanego; jest więc większym od połowy tego odcinka. Odejmując ten trójkąt, pozostają dwa odcinki, których summa jest mniejszą od połowy całego odcinka.

Postępując z temi odcinkami jak z całym odcinkiem, otrzymamy dwa trójkąty, z których każdy większym jest od połowy odcinka w który jest wpisanym; summa więc ich jest większą od czwartej części odcinka całego.

Postępując tak dalej, otrzymamy szereg trójkątów, których summa może być tak mało różną od powierzchni odcinka szukanego, jak się podoba, bo reszta, czyli summa odcinków pozostałych, najprzód mniejsza od połowy, potem od jednej czwartej, następnie od jednej ósmej i t. d. odcinka szukanego, może być tak małą jak się podoba. Szereg więc jest zbieżnym, a powierzchnia odcinka jest granicą jego summy.

Łatwo jest dowieść, że summa dwóch trójkątów drugiego rzędu, równa jest czwartej części trójkąta T pierwszego rzędu; i w ogólności summa trójkątów jakiegokolwiek rzędu, równa jest czwartej części summy trójkątów rzędu poprzedzającego.

Powierzchnia więc odcinka paraboli jest granicą summy szeregu

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4 \cdot 4}T + \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4}T + \dots$$

$$T \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} + \dots \right)$$

Szukając właśnie powierzchni odcinka paraboli, Archimedes znalazł pierwszy granicę summy powyższego szeregu, który jest postępem ilorazowym: summa ta równa się

$$\frac{4}{3}T;$$

a że

$$T = \frac{1}{2}R,$$

więc powierzchnia odcinka paraboli, równa jest $\frac{4}{3}$ trójkąta wpisanego, lub $\frac{2}{3}$ równoległoboku opisanego.

Oto genialny pomysł geometryczny, największego z tylu znakomych geometrów starożytności, przedstawiony w formie naturalnej i pełnej prostoty.

ROZDZIAŁ VI.

Metoda nieskończenie małych.

Carnot pierwszy w dziele swém *Reflexions sur la métaphysique des infiniment petits* wyjaśnił i znakomicie ulepszył *metodę nieskończenie małych*. W ostatnich latach swego życia, wielki geometra Poisson, wypowiedział wojnę *teorii funkcji analitycznych* takiej jaką stworzył genjusz Lagrange'a i użył całego talentu swego żeby zmusić niejako świat uczony do przyjęcia metody nieskończenie małych. Według niego, nieskończenie małe nie służą tylko za sam sposób badania wynaleziony przez geometrów,

lecz mają swój byt rzetelny, co ma znaczyć że istnieją wielkości które nie są bynajmniej zerami, które nawet mogą być podwójnemi, potrójnemi, poczwórnemi innych wielkości, i są jednakże mniejszemi w téj chwili jak wszelka wielkość dana.

Chociaż oparte na tak wielkiej powadze, te propozycje były mocno zbijane i odpierane : wiele nawet umysłów rozsądnych uważało w tém widoczne niepodobieństwo. W rzeczy saméj, albo te wielkości, mniejsze jak wszelka wielkość dana, są jeszcze rozciągte i podzielne, albo już są proste i niepodzielne. W pierwszym razie ich byt jest próżnym złudzeniem, ponieważ, koniecznie większe jak ich połowa, ich ćwierć i t. d., tém samém nie są mniejsze w téj chwili jak wszelka wielkość dana ; w drugim zaś założeniu przestałyby być wielkościami matematycznymi. Przyjąć je, byłoby to odrzucić ideę materii ciągłej, podzielnej do nieskończoności, punkt wyjścia konieczny i podstawa wszystkich nauk matematycznych. Kilka zastosowań mniej szczęśliwych tych zasad, których największym błędem było przywozić zanadto otwarcie naukę do jéj pierwotnego początku, dały lepiej uczuć potrzebę metod więcej ścisłych, których Poinssot i Cauchy stali się obrońcami. Dla tych geometrów, nieskończenie mała jest tylko ilością zmienną albo nieoznaczoną, która ma za granicę zero, i może zmniejszać się nieograniczenie, bez zatrzymania się na pewnej wartości ocenić się dającej ilość która wzięta odrębnie, może być pojęta mniejszą jak wszelka ilość dana. Ta definicya wystarcza dla usunięcia wszelkiej wątpliwości przy wprowadzeniu do rachunku reguł zasadniczych metody nieskończenie małych. Mimo to, w ostatnich dopiero czasach ostatecznie wprowadzoną została do wykładu elementarnego : między innymi wiele się do tego przyczynił p. Duhamel swoim wstępem do drugiego wydania dzieła pod tytułem : « *Eléments du calcul infinitésimal* » i swemi kilkunastoletnimi wykładami w Sorbonie.

« Zdaje mi się, mówi bardzo słusznie w swéj przedmowie p. Folkierski, że w ostatnim rozdziale części Iéj, dostateczną zgromadził liczbę objaśnień, aby nie pozostawić żadnej wątpliwości w umyśle najbardziej początkującego czytelnika pod względem ścisłości metody nieskończenie małych. »

My zaś, z naszej strony dodamy, że oprócz powyższych zalet, cały wykład metody nieskończenie małych p. Folkierskiego, jest powszechnie ścisły, jasny i głęboki.

W rzeczy saméj, nie może być więcej prostém i więcej ścisłym jak ta dokładna definicya i z niéj same przez się wypływające naturalne następstwa.

Ilością nieskończenie małą nazywamy ilość, którój granicą jest zero.

Pojęcie ilości nieskończenie małej w nicém nie jest różném od pojęcia granicy : pierwsze jest tylko szczególnym przypadkiem drugiego ; nieledwie zawsze użycie sposobu granic, można zastąpić sposobem nieskończenie małych ; bo jeżeli

$$\text{gr } x = a,$$

to z określenia

$$\text{gr}(x - a) = 0;$$

czyli uważać a , jako granicę zmiennéj x , wychodzi na to samo, co uważać $x - a$, jako nieskończenie małą. Samą granicę określiliśmy jako ilość oznaczoną, którój różnica ze zmienną nieoznaczoną, jest nieskończenie małą.

Summy, iloczyny, potęgi, pierwiastki nieskończenie małych są dobrze wyłożone.

Iloraz ilości skończonej przez ilość nieskończenie małą jest ilością nieskończenie wielką : bo

$$\text{gr} \frac{n}{\alpha} = \frac{n}{\text{gr } \alpha} = \infty ,$$

co właściwie należałoby wziąć za określenie ilości nieskończenie wielkiej, zamiast określenia ilorazu

ilości skończonęj przez zero; bo dzielić przez zero nie można, lecz można dzielić przez ilość tak mało różną od zera jak się podoba, a w takim razie czém dzielnik będzie mniejszym, tém iloraz będzie większym; jeżeli więc dzielnik jest nieograniczenie czyli nieskończenie małym, iloraz jest nieograniczenie czyli nieskończenie wielkim.

Stosunek dwóch ilości nieskończenie małych.

Stosunek ten może być ilością skończoną stałą, lub zmienną; ilością nieskończenie małą; a nawet nieskończenie wielką.

1°. Jeżeli α jest nieskończenie małą, a n ilością skończoną, $n\alpha$ będzie również ilością nieskończenie małą; a jednak

$$\frac{n\alpha}{\alpha} = n$$

iloraz, czyli stosunek tych dwóch nieskończenie małych jest skończonym, równym n .

2°. Stosunek dwóch ilości nieskończenie małych, może być również nieskończenie małym: tak, jeżeli α jest nieskończenie małą

$$\text{gr } \alpha = 0$$

α^2 będzie również nieskończenie małą:

$$\text{gr } \alpha^2 = 0,$$

a stosunek tych dwóch nieskończenie małych

$$\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$$

jest ilością nieskończenie małą α .

3°. Stosunek odwrotny

$$\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

jest ilością nieskończenie wielką: $\frac{1}{\alpha} = \infty$.

Jeżeli stosunek jednéj ilości nieskończenie małej do drugiej jest nieskończenie małym, pierwszą z tych ilości nazywamy *nieskończenie małą względem drugiej*. Odwrotnie, druga ilość będzie *nieskończenie wielką względem pierwszej*. Tak α^2 jest nieskończenie małą względem α , zaś α nieskończenie wielką względem α^2 .

Rzędy nieskończenie małych są pięknie wyprowadzone.

Twierdzenia zasadnicze metody nieskończenie małych.

Język czysty i naturalny wielkiego naszego matematyka Jana Śniadeckiego, połączony z największą jasnością i ścisłością dowodzeń, oto są cechy charakterystyczne wszystkich twierdzeń zasadniczych p. Folkierskiego.

Twierdzenie I. Jeżeli stosunek dwóch ilości nieskończenie małych, zależnych od siebie, zdąża do granicy jedność, gdy każda z tych nieskończenie małych zdąża do zera, ich różnica jest nieskończenie małą względem każdéj z nieskończenie małych danych, czyli nieskończenie małą wyższego rzędu niż dane.

Odwrotnie, jeżeli różnica dwóch nieskończenie małych danych jest nieskończenie małą względem każdej z nich, granicą ich stosunku jest jedność.

Twierdzenie II. Granica stosunku dwóch nieskończenie małych danych, jest równa granicy stosunku dwóch innych nieskończenie małych, mających z danymi odpowiednie stosunki w granicy równe jedności.

Wniosek. Granica stosunku dwóch nieskończenie małych, jest równa granicy stosunku dwóch innych nieskończenie małych, których różnice odpowiednie z pierwszymi są nieskończenie małymi wyższego rzędu od danych; a to na zasadzie poprzedzającego twierdzenia.

Twierdzenie III. Jeżeli summa ilości nieskończenie małych tego samego rzędu, w liczbie nieograniczonej lub zwiększającej się bez granic w miarę jak każda z nieskończenie małych zdąża do zera, jest skończoną lub ma granicę skończoną, pomnożywszy każdą z nieskończenie małych odpowiednio przez nieskończenie małe jakiegokolwiek, tak otrzymana summa będzie nieskończenie małą i zdążać będzie do granicy zero, wraz z nieskończenie małymi danymi.

Twierdzenie IV. Granica summy nieskończenie małych w liczbie nieograniczonej, jest równa granicy summy innych nieskończenie małych, w tej samej liczbie, mających z pierwszymi odpowiednie stosunki w granicy równe jedności.

Wniosek. Granica summy nieskończenie małych w liczbie nieograniczonej, jest równa granicy summy innych nieskończenie małych w tej samej liczbie, różniących się odpowiednio od poprzednich o ilości nieskończenie małe wyższego rzędu, czyli o nieskończenie małe względem danych; a to na zasadzie twierdzenia I^{go}.

Twierdzenie ogólne. Granica stosunku lub summy nieskończenie małych nie zmienia się, jeżeli podstawimy za nieskończenie małe dane inne nieskończenie małe, niekoniecznie równe pierwszym, lecz mające z nimi stosunki, których granicą jest jedność, lub różnice nieskończenie małe względem nieskończenie małych danych.

Twierdzenie ostatnie jest zebraniem w jedno trzech twierdzeń: I^{go}, II^{go} i IV^{go}.

Uwagi nad użyciem nieskończenie małych.

Powiedzieliśmy już wyżej że metoda nieskończenie małych jest tylko zastosowaniem szczególnym metody granic. Nieskończenie małe, podobnie jak ilości zmienne nieoznaczone, zdążające do granic oznaczonych, używane bywają zwykle jako ilości pomocnicze, które mogą się nie znajdować ani w danych, ani w wypadkach zadania. Widzieliśmy wyżej, że ilości skończone, oznaczone, mogą być wyrażone jako granice stosunków lub summ nieskończenie małych. Mając więc do porównania lub obliczenia pewne ilości skończone, lub też szukając w ogólności związków pomiędzy ilościami skończonymi, które mogą być dość złożonego rodzaju, aby związki te wprost znalezionemu być nie mogły z łatwością, możemy uważać ilości dane jako granice stosunków lub summ nieskończenie małych, które to nieskończenie małe są zwykle tego samego rodzaju co ilości dane, a zatem również złożone i równie trudne do badania. Lecz wiemy również że podstawiając za te nieskończenie małe *inne* nieskończenie małe, różniące się od pierwszych o nieskończenie małe względem nich samych, lub mające z nimi stosunki w granicy równe jedności, ilości oznaczone dane, które są granicami stosunków lub summ pierwszych, będą również granicami stosunków lub summ odpowiednich drugich. Te *inne* nieskończenie małe mogą być wybrane dowolnie, byleby czyniły zadosyć żądanemu warunkowi różnienia się nieskończenie mało *od*, lub *względem* ilości nieskończenie małych danych: mogą więc być prostymi, łatwymi do porównywania, stosownymi do znalezienia

związków, które, przechodząc do granic, będą związkami szukanymi między ilościami oznaczonymi danymi. Użycie więc metody nieskończenie małych, polega zwykle na czterech działaniach następujących :

1°. Wyrażenie ilości oznaczonych danych jako granic summ, lub stosunków ilości nieskończenie małych.

2° Podstawienie za te nieskończenie małe innych nieskończenie małych prostszego rodzaju, mających z pierwszymi stosunki odpowiednie równe w granicy jedności, lub różnice nieskończenie małe wyższego rzędu.

3° Szukanie związków zachodzących między temi ostatnimi podstawionymi nieskończenie małymi.

4° Przejście do granic stosunków lub summ tych nieskończenie małych podstawionych, które to granice będą ilościami oznaczonymi danymi, a związki znalezione, związkami szukanymi.

Podstawiając za nieskończenie małe, inne nieskończenie małe, mające z pierwszymi różnice nieskończenie małe względem nich samych, mówimy często « że opuszczając nieskończenie małe nie naruszamy wypadku; » podobnego wyrażenia używamy przechodząc od zmiennej do jej granicy; właściwiej byłoby powiedzieć że « granica stosunku lub summy drugich będzie tą samą, co granica stosunku lub summy pierwszych; » a że nam chodzi tylko o związki między granicami, których szukamy, więc podstawienie jednych za drugie jest usprawiedliwionem.

Podstawienie to nie wpływa jak widzimy na ścisłość wypadku w który wchodzi same granice : wypadek ten nie jest żadnym przybliżeniem, lecz jest *ściśle prawdziwym*.

Nie można nic więcej żądać od metody, które nam daje tak ściśle prawdziwe wypadki.

W naukach stosowanych często opuszczają bardzo małe wielkości w porównaniu z wielkimi, dla uproszczenia rachunku, lub niemożności przeprowadzenia go z całą dokładnością; wypadek otrzymany jest wtedy tylko przybliżeniem mniej lub więcej dokładnym, a jakkolwiek zachodzi niejaki podobieństwo metody przybliżeń różnych rzędów, z metodą nieskończenie małych, pierwsza nie ma nic wspólnego z ostatnią, która daje wypadki zupełnie dokładne, a nie przybliżone.

PRZYKŁADY : I. Znaleźć stosunek okręgów i powierzchni dwóch kół.

W dowodzeniu tém postępowaliśmy wedle wyżej wskazanego prawidła : stosunki szukane nważaliśmy najprzód jako granice, lub po prostu, jako równe stosunkom dwóch nieskończenie małych, zamiast stosunku powierzchni stosunek wycinków, przez co nie ułatwiliśmy jeszcze zadania. Lecz podstawiając za łuki cięciwy, za wycinki trójkąty, stosunki szukane nie zmieniają się, a w granicy sprowadziliśmy stosunki nieznane do stosunków znanych, przez co zadanie zostało rozwiązanem.

II. Dowieść, że dwa ostrosłupy, mające podstawy i wysokości równe, są równoważne.

W tym przykładzie rozłożyliśmy wielkości dane na summy nieskończenie małych, tego samego co dane wielkości gatunku : za każdą z tych nieskończenie małych podstawiliśmy inną nieskończenie małą, (za ostrosłup ścięty, graniastosłup) prostszego rodzaju, różniącą się od pierwszej o ilość nieskończenie małą względem niej samej, przez co nie narusziliśmy granicy : z równości zachodzącej między temi ostatnimi, wnieśliśmy bez trudności równość granic.

Zastosowanie metody nieskończenie małych do teorii fun

Przyrostki nieskończenie małe funkcji. TWIERDZENIE OGÓLNE: Przyrostek funkcji ciągłej jest wogóle nieskończenie mały tego samego rzędu, co przyrostek nieskończenie mały zmiennej niezależnej. Wyjątki zachodzą tylko dla pojedynczych wartości zmiennej niezależnej, lub dla wartości, pomiędzy którymi funkcja się nie zmienia.

To twierdzenie ogólne jest z całą ścisłością udowodnionem.

WNIOSEK I. Stosunek przyrostku funkcji ciągłej do przyrostku nieskończenie małego zmiennej niezależnej zdąża w ogóle do granicy oznaczonej, gdy przyrostek zmiennej niezależnej zdąża do zera. Wyjątki mogą zachodzić tylko dla szczególnych, pojedynczych wartości zmiennej niezależnej.

Niech będzie funkcja ciągła

$$y = f(x)$$

stosunek

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - y_0}{\Delta x};$$

a więc i jego granice są funkcjami x_0 i y_0 , które są jakimikolwiek wartościami szczególnymi zmiennych x i y : czyli w ogólności, *granica stosunku przyrostku funkcji do przyrostku nieskończenie małego zmiennej niezależnej, jest funkcją zmiennej niezależnej x* : nazwijmy ją

$$f'(x) = \text{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

funkcja ta może być ciągłą lub nieciągłą, jakkolwiek funkcja $f(x)$ jest ciągłą.

UWAGA. Jeżeli granica stosunku przyrostku funkcji do przyrostku nieskończenie małego zmiennej niezależnej jest funkcją ciągłą zmiennej niezależnej, granica ta jest tą samą czy przyrostek zmiennej niezależnej uważać będziemy dodatnim, czy ujemnym.

WNIOSEK II. Odległość dwóch punktów na krzywej ciągłej jest w ogóle nieskończenie mały tego samego rzędu co różnica nieskończenie małe współrzędnych, odpowiadających tym punktom, lub przyrostek odpowiedni nieskończenie mały zmiennej niezależnej, której współrzędne punktów są funkcjami ciągłymi.

UWAGA. Odległość dwóch punktów na powierzchni jest nieskończenie mały tego samego rzędu, co różnica nieskończenie mała współrzędnych odpowiadających tym punktom, byleby przyrostki współrzędnych były nieskończenie małymi tego samego rzędu. Bo pomiędzy dwoma punktami na powierzchni, można zawsze poprowadzić krzywą ciągłą, dla której powyższy wniosek ma miejsce.

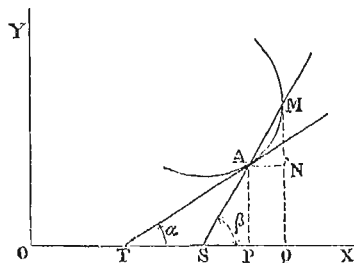
WNIOSEK III. Jeżeli prosta zmienia położenie swe w przestrzeni, wedle jakiegokolwiek prawa, lecz w sposób taki, że każde szczególne jęj położenie odpowiada szczególnej wartości pewnej zmiennej niezależnej, kąta nieskończenie mały, jaki tworzą dwa położenia tęj prostej po sobie następujące, jest nieskończenie mały tego samego rzędu, co różnica odpowiadających wartości zmiennej niezależnej.

Teoria stycznych. Styczną do krzywej danej w punkcie danym, nazywamy granicę kierunku siecznej przecinającej krzywą w punkcie danym i w punkcie znajdującym się na krzywej w odległości nieskończenie małej od punktu danego, gdy odległość ta zbliża się do zera.

Może się zdarzyć przypadek: że krzywa ma dwie styczne w punkcie danym. Punkt taki, o którym

będziemy mówić w dalszym ciągu, nazwiemy *punktem kątowym* krzywej, bo krzywa w takim punkcie dzieli się jakoby na dwie gałęzie tworzące kąt pomiędzy sobą.

Oznaczamy przez x i y spólrzędne prostokątne punktu A ;



przez $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, spólrzędne prostokątne punktu nieskończenie bliskiego M .

W trójkącie MAN , kąt $MAN = \beta$, a że

$$\text{sty } \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

przechodząc do granicy

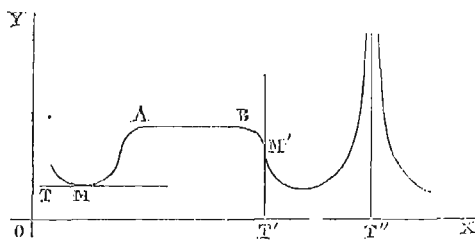
$$(1) \quad \text{sty } \alpha = \text{gr } \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Stosunek więc przyrostku funkcji do przyrostku odpowiedniego zmienną niezależną jest w granicy przedstawionym geometrycznie w spólrzędnych prostokątnych przez styczną trygonometryczną kąta, jaki styczna do krzywej tworzy z osią odciętych. Kąt ten wyznacza zupełnie styczną w danym punkcie A ; bo trójkąt prostokątny APT którego jednym bokiem jest rzędna AP , jest wyznaczonym, gdy kąt ostry α jest danym.

Dowiedliśmy wyżej, że stosunek przyrostku funkcji ciągłej do przyrostku nieskończenie małego zmienną niezależną ma granicę oznaczoną: z równania (1) wniesłby można, że każda ciągła ma styczną oznaczoną w każdym punkcie. Odwrotnie, dowiedliśmy że w punkcie danym na krzywej można w ogólności zawsze do tej krzywej poprowadzić styczną: wniesłby można z równania (1), że przyrostek funkcji ciągłej do przyrostku nieskończenie małego zmienną niezależną, ma granicę oznaczoną, bo każda funkcja ciągła, może być przedstawioną geometrycznie przez krzywą ciągłą.

Rozbierzmy niektóre szczególne przypadki.

Styczna kąta α równa zero odpowiada stycznej równoległej do osi odciętych; przypadek ten może

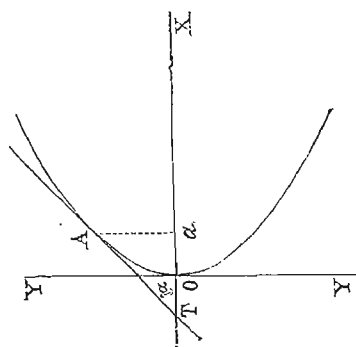


zdarzyć się tylko w jednym punkcie M , chyba by krzywa zamieniła się w pewnej swój części AB w prostą równoległą do osi odciętych; co się zupełnie zgadza z tém cośmy wyżej powiedzieli o granicy stosunku przyrostku funkcji do przyrostku nieskończenie małego zmienną niezależną, która

może być zerem tylko dla szczególnej wartości zmiennej niezależnej, lub dla wartości stałych funkcji. Styczna kąta α równa ∞ odpowiada stycznej prostopadłej do osi odciętych, co może mieć miejsce w szczególnym tylko punkcie M' , lub też odpowiadać zerwaniu ciągłości funkcji jak dla odciętej OT' chyba by krzywa zamieniła się w prostą prostopadłą do osi odciętych; co również zgadza się z tem cośmy powiedzieli wyżej.

PRZYKŁADY : Styczna do paraboli.

Niech będzie równanie paraboli, odniesionej do współrzędnych prostokątnych



$$y^2 = 2px.$$

Wiemy że

$$\text{sty} \alpha = \text{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

lecz

$$(y + \Delta y)^2 = 2p(x + \Delta x)$$

$$y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = 2px + 2p\Delta x.$$

czyli

$$2y\Delta y + \Delta y^2 = 2p\Delta x$$

a więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{y} - \frac{\Delta y^2}{2y\Delta x}$$

przechodząc do granicy, ponieważ,

$$\text{gr} \frac{\Delta y^2}{\Delta x} = 0,$$

bo Δy^2 jest nieskończenie małym względem Δx

$$\text{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{sty} \alpha = \frac{p}{y};$$

a że podstyczna

$$aT = \frac{\Delta a}{\text{sty} \alpha} = \frac{y^2}{p} = 2x,$$

więc podstyczna jest zawsze równą dwa razy odciętej, czyli $OT = Oa$.

Mamy nadto gdy $y=0$ $x=0$

$$\text{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{sty} \alpha = \infty$$

czyli że styczna jest prostopadłą do osi odciętych w wierzchołku paraboli. .

Gdy $y = \infty$ $x = \infty$

$$\text{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{sty} \alpha = \frac{p}{\infty} = 0$$

czyli że styczna nie może być równoległą do osi odciętych, lecz może zbliżyć się nieograniczenie do kierunku równoległego w miarę jak odcięta zwiększa się bez granic.

Są jeszcze i inne zastosowania, lecz tym przykładem zamknijmy nasze poszukiwania pod względem różnych teoryj starannie przez p. Folkierskiego wyłożonych w sześciu rozdziałach części pierwszej.

VII

Fundamenta i podstawy rachunku różniczkowego.

Ze wszystkich wielkich pojęć któremi umysł ludzki chlubić się może, analiza nieskończenie małych albo rachunek różniczkowy najwięcej zapewne zasługuje na uwagę, bądź to przez wybitną cechę wynalazku, bądź też przez rozmaite i rozległe jego użycia. Prawie w samym zawiązku, nadaje on geometryi i powoli innym częściom matematyki ruch wzrastający pospiesznie, stosownie do tego jak sztuka coraz bardziej się doskonali. Zagadnienia najwięcej nieuległe i wprost przeciwne dawnym metodom, poddają się bez trudności nowej analizie; ogólność i jednostajność środków zbliżają pod jeden punkt widzenia teorie, które dotąd zdawały się istnieć najwięcej rozdzielone i na pozór wcale niezależne jedne od drugich: budowa regularna, wspaniała wznosi się na podstawie stałej, która utrzymuje wszystkie jej części w dokładnej proporcji i doskonałej równowadze. Źródło rachunku różniczkowego, jak to wkrótce dokładniej wykażemy, wypływa z tej szczęśliwej i płodnej idei podstawienia zamiast stosunków wielkości i ilości zmiennych wziętych w nich samych, stosunków ich przyrostków nieskończenie małych albo ich elementów. Zrobiliśmy już na samym wstępie wzmiankę o tej wielkiej idei; wiadomo iż ona zrodziła się jednocześnie w najwznioślejszych dwóch umysłach czasów nowożytnych, Leibnitza i Newtona, którzy długo spór wiedli z sobą o pierwszeństwo wynalazku. Około 1655 r. Newton zaczął myśleć że byłaby wielka korzyść ze stanu przyrostku stopniowego ilości, wynaleźć wartości skończone i oznaczone, które te przyrostki nabywają później. Dla otrzymania tego, uważa on je nie już jako skupienia małych cząstek jednorodnych między sobą, lecz jako wypadki ruchów ciągłych, tak, że w tym sposobie widzenia, linie są zakresłone ruchem punktu, powierzchnie ruchem linii, bryły ruchem powierzchni, kąty obrotem ich boków, i t. d. Rozważając później, że wielkości tak utworzone są większe lub mniejsze, po przerwie czasów równych, stosownie jak ich prędkości rozwinięcia albo tworzenia są więcej lub mniej szybkie, Newton stara się wynaleźć ich wartości oznaczone, znając wyrażenia prędkości wspomnianych wyżej wartości które nazywa (*fluxiones*) *wy,tywającymi* czyli *pochodnemi*, nazywając (*fluentes*) *pierwotnemi* ilości skończone one same. Tak więc dla utkwienia myśli, gdy pewna krzywa, powierzchnia albo bryła natury danej są utworzone tym sposobem, różne elementa, które w ich skład wchodzi albo do nich należą, jako rzędne, odcinki, długości łuków, powierzchnie, objętości, nachylenia stycznych i płaszczyzn stycznych; wszystkie te elementa, zmieniają się różnie i nierównie, lecz jednakże w sposób wyraźny i oznaczony, za pomocą wyrażeń analitycznych przedstawiających dokładnie naturę krzywój, powierzchni albo bryły nad którą się zastanawiamy. Newton mógł zatem wyprowadzić z tego zrównania płynienia (*fluxiones*) albo prędkości przyrostku wszystkich tych elementów w funkcji jednej jakiegokolwiek ze zmiennych, i płynienie (*fluxio*) albo prędkość tej zmiennój, przypuszczając ją dowolną lub zmieniającą się wedle przyrostków stałych. Aby uczynić te pierwsze wiadomości więcej dotykalnemi, wyobraźmy sobie wielkość, która

zależy od drugiej w taki sposób, że zmiana w wartości drugiej sprowadza w pierwszej zmiany odpowiednie: gdy druga wielkość wzrasta lub ubywa w sposób stały i jednostajny, pierwsza będzie także wzrastać lub ubywać, lecz nie już więcej, w ogólności, jednostajnie; wzrost lub ubytek y' pierwszej wielkości y , będzie w ogólności funkcją drugiej zmiennej x i jej przyrostku jednostajnego x' , albo lepiej, jeśli ten przyrostek przypuścimy bardzo mały iloczyn x' przez funkcję x i y : a więc będziemy mieli:

$$y' = f(x, y) x';$$

owoż, x' i y' są to co Newton nazywa *ptynieniami* (fluxiones) wielkości x i y *pierwotnych* (fluentes).

W przypadku, na przykład, gdybyśmy mieli $y = x^3$, y' będzie równe $3x^2 x'$, tak zatem otrzymamy

$$y' = 3x^2 x'.$$

Fluksya y' albo prędkość wzrostu y , będąc sama funkcją x , może być uważaną jako nowa pierwotna (nova fluens), która będzie miała także swoją fluksję y'' , a ta będzie, rzeczywiście fluksją fluksyi, i t. d.

Newton przed rokiem 1635 miał więc jasno wyrobioną ideę o fluksjach; wyrachował je do wielkiej liczby funkcyj albo ilości pierwotnych (quantitates fluentes); użył te fluksje do rozwinięcia na szeregi i rozwiązania wielu zagadnień analizy i geometrii, i t. d. Zrobił on więcej; w swojej pięknej rozprawie, *De quadratura curvarum*, przyszedł, albo raczej powrócił z fluksyj do ilości pierwotnych (e fluxionibus ad fluentes): wychodząc z elementu nieskończenie małego łuku, powierzchni, objętości, wyrachował łuk, powierzchnię, objętość ichże samych. Zredagował on i zebrał te odkrycia analityczne w piśmie noszącem tytuł: *Analisis per aequationes numero terminorum infinitas*; lecz to pismo bynajmniej nie ogłosił i nawet swych spostrzeżeń nie komunikował nikomu przed rokiem 1704: aż nareszcie umieścił je natenczas przy pierwszej edycji swojej *Optyki*.

Zrozumiał on bezwątpienia, że czas był nadszedł żeby ustalić prawa swoje do odkrycia i zastosowania nowych metod które on mniemał że sam jeden posiada, a które jednakże kwitnęły już na ładzie w owym czasie.

Około roku 1676, Leibnitz, słysząc rozprawiających o nowych rezultatach otrzymanych przez Newtona, oświadczył geometrze angielskiemu, nazwiskiem Oldenbourg, sekretarzowi towarzystwa królewskiego w Londynie, chęć żywą jaką pałał do poznania takowych, a ten skłonił Newtona do udzielenia mu tej komunikacji, która tyle dlań była zaszczytną. Przeto, dnia 23 czerwca 1676 roku, Newton napisał do Oldenbourga list przeznaczony do przesłania Leibnitzowi w którym przedstawia mu wyrażenia rozwinięte na szeregi potęg dwumianowych, rozwinięcie wstawy przez łuk, łuku przez wstawę i t. d., wszystko dane bez dowodzeń i żadnego śladu jakiegokolwiek metody, mówiąc tylko iż on posiada jedną, za pomocą której te różne szeregi będąc dane, on może wynaleźć kwadratury krzywych skąd te szeregi pochodzą, jako też powierzchnie i środki ciężkości brył utworzonych ruchem wirowym tych krzywych około ich osi. W swojej odpowiedzi z dnia 27 sierpnia następującego roku, Leibnitz nawzajem donosi Newtonowi o metodzie przez niego odkrytej która się opiera na rozłożeniu wielkości na jej elementa, i na przekształceniu tych elementów na inne wyrażone analitycznie przez funkcje wymierne zmiennej niezależnej, odcinka na przykład; dodawał nakoniec, iż on odkrył sposoby wprost analityczne przez które przychodził z wielką łatwością ze stycznych do krzywych. Newton spostrzegł natenczas, że Leibnitz był przynajmniej na drodze analizy nieskończenie małych, że się nawet blisko tej kwestyi dotykał, jeżeli jej zupełnie nie posiadał, pospieszył zatem zawiadomić w swym liście z 24 października, iż posiadał on także na poprowadzenie stycznych do krzywych, metodę zarówno zastosować się dającą do zrównań wymiernych jako też niewymiernych czyli zawierających pierwiastki jakiegokolwiek stopnia; lecz przydał: « jako nie mogę rozwijać dalej

tłumaczenie moich sposobów, skryłem ich fundament pod to anagramma : »

Ga ad æ 13eff 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12vx.

Znaczenie jakie Newton do tego anagrammu przywiązywał było: *data æquatione quatuorque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versa*. Odpowiadając Newtonowi 21 Czerwca 1677 roku, Leibnitz nie używa ani anagrammu, ani żadnych kryjących sens formulek, lecz wystawia mu po prostu z całą dokładnością metodę rachunku nieskończenie małych z wygodnym oznaczeniem różniczkowym, prawidłami różniczkowania, tworzeniem równań różniczkowych, z zastosowaniami tych sposobów do zadań analizy i geometryi i wszystko to z temi samemi oznaczeniami, z tą samą wyraźną sygnaturą podaną w liście pisanym 24 czerwca roku zeszłego. Newton nie odpisał na ten list ze wszech miar zasługujący na uwagę. W 1684 roku, Leibnitz ogłosił swą metodę różniczkową w *Acta Eruditorum* w Lipsku, i samże Newton, w trzy lata później, uwiecznił prawa Leibnitza przyznając je w swój księdze *de Principiis*, gdzie się wyraża sposobem następującym (*):

« W korespondencyi listownej jaką miałem przed dziesięciu laty z bardzo biegłym geometrą p. Leibnitzem, doniosłem mu, iż posiadałem do wyznaczenia największości i najmniejszości, do poprowadzenia stycznych i innych działań odpowiednich, metodę dającą się zastosować zarówno do ilości wymiernych jak i niewymiernych, metodę, którą przed nim skryłem pod klucz utworzony z liter przełożonych. Ten znakomity uczony odpowiedział mi, że i on także doszedł do metody tegoż rodzaju, którą mi dokładnie przedstawił, a która nie różniła się od mojej, jak tylko sposobem wyrażenia, oznaczenia i tworzenia ilości. »

Nie myślimy powtarzać napróżno długiego ich sporu o pierwszeństwo wynalazku. Dziś nznano wszędzie, nawet w samej Anglii, że Leibnitz jest prawdziwym wynalazcą rachunku różniczkowego, chociaż przeczyć nie można, że Newton ze swój strony, położył pierwsze zasady tej gałęzi najpłodniejszej dokładnych umiejętności matematycznych. Nieskazono w swój pierwotnej formie i ścisły w gruncie, jeśli możemy tak się wyrazić, Newton pozostaje zimnym i obojętnym na cuda formy zewnętrznej, i właśnie ta wydatna na zewnątrz forma albo oznaczenie wyraźne metody pełnej wdzięku Leibnitza, wznosi się wysoko po nad niewygodną i omyłkom podległą sygnaturę Newtona. Różnica tych dwóch metod, uznana przez Keilla, i innych stronników Newtona za zupełnie małoważną, jest przeciwnie, pod tym względem rzeczywiście stanowiącą, gdyż to od niej zależy zastosowanie łatwe rachunku różniczkowego, sprowadzenie jego działań złożonych do prawideł ogólnych bardzo prostych, nakoniec możebność odkrycia i rozwinięcia analogij wskazanych niemal przez sam algorytm, analogij tyle pożytecznych w umiejętności, co wyraża swe działania za pomocą znaków. Jakiegoż nie potrzeba było wytężenia umysłu śledząc cierpliwie niewyraźne oznaczenia metody fluksyi, ażeby jasno pojąć i dokładnie obliczyć atrakcyje sferoid eliptycznych, na przykład!

Leibnitz rozwinął swą metodę z zapałem i płodnością geniuszu niestęchaną; przebiegł szybko krokiem zastosowania do teoryj krzywych, do wynalezienia stycznych, do wyznaczenia krzywych ściśle stycznych, w ogólności, i krzywych przecinających się, pod warunkami danymi, do zadań mechaniki, do zagadnień łanieuszką i t. d.; z każdym dniem, dodawał cokolwiek do wyjaśnienia metody, tak na przykład, gdy przedsięwziął rozważyć skutki zmienności stałych dowolnych, gdy gruntownie zbadał analogie między potęgami i różnicami, położył rzeczywiście podstawy świeżych odkryć, które dopiero znacznie później się urzeczywistniły. Słusznie jest wspomnieć, iż dwaj bracia Jan i Jakób Bernoulli, uczniowie Leibnitza i powiernicy jego myśli, wspólnie z ich mistrzem nad rozwojem i zastosowaniem rachunku różniczkowego gorliwie pracowali.

Poprzednicy Newtona i Leibnitza, Archimedes, Cavalieri, Wallis, Barrow, Fermat, Roberval tak

(*) *Scholium* czyli przypisek do lemmu IIgo, propozycyi VIIej, księgi IIej.

wiele zbliżyli się w swoich genialnych metodach do rachunku różniczkowego, że nie ma wątpliwości, iż niektórzy z nich przynajmniej, byłiby miejsce zajęli jednego z tych wielkich wynalazców, gdyby byli więcej obeznani z tajnikami analizy algebraicznej: po pracach Viëta, Descarta, Wallisa, przystęp do nowego rachunku został znakomicie ułatwionym.

Po Leibnitzu, Newtonie i braciach Berouillich, następstwo wielkich geometrów nie zostało przerwane. Euler i d'Alembert, Lagrange i Laplace, Gauss i Abel, Cauchy i Jacobi kierowali z kolei ruchem nieustającym nauk ścisłych matematycznych: każdy z tych geometrów umieścił się pod pewnym punktem widzenia szczególnym i rozwinął podług swego sposobu pojmowania zasady fundamentalne rachunku różniczkowego. Leibnitz przyjął metodę nieskończenie małych; uważa on głównie różne wielkości jako złożone z liczby nieskończonej elementów nieskończenie małych: jest to pewien rodzaj teorii atomicznej wielkości matematycznych. Niech nikt jednak nie mniema, żeby metodzie Leibnitza były wspólne błędy i złudzenia metody sławnego Poissona poprzednio przez nas rozebranej. Leibnitz bezwzględnie tak dalece się nie posunął; przyjmuje on jedynie, że wszelką wielkość wyobrazić sobie możemy podzieloną przez jakąkolwiek liczbę większą jak wszelka liczba dana na części mniejsze jak wszelka wielkość oznaczona; to wyrażenie zawiera w sobie to wszystko co właściwie stanowi język czysty i prawdziwie poprawny.

Newton wynalazł dwie teorie, jedna z nich jest to teoria pierwszych i ostatnich stosunków, druga zaś, teoria płynięć albo fluksyj: w pierwszej z tych teorii, która w gruncie jest metodą granic, przyjęciem powszechnie zostało podstawienie na miejscu stosunków wielkości stosunku ich przyrostków bardzo małych, albo raczej granicy do której dąży ten stosunek tych przyrostków, gdy każdy z wyrazów stosunku zbliża się do 0: stosunki tych przyrostków których wyrazy nieskończenie przybliżają się do 0, są to co Newton nazywa *ostatnimi i pierwszymi stosunkami*. Powiedzieliśmy już wyżej, na czym właściwie polega metoda płynięć (fluxionum); zawiera ona w sobie nader wielką niedogodność wprowadzając złożoną ideę ruchu do zadań analizy i czystej geometryi.

Euler, całe życie uprawą analizy gorliwie się zajmujący, nim przystąpił do rozwoju i upowszechnienia *rachunku analitycznego*, który się dzieli na różniczkowy i integralny, zajmował się najprzód rozszerzeniem i upowszechnieniem *analizy geometrycznej* albo raczej *algebraicznej*. Jakież był tej wysokości umiejętności znakomity początek i historyczny rozwój? lub inaczej, kłóż tę świetną analizę pierwszy odkrył i rozwinął? Oto pytanie, którego rozwiązaniem niezwłocznie się zajmniemy.

Pierwsze początki nauki zwanéj Geometrią z Egiptu i z krajów wschodnich wnieśli do Grecyi TALES z Miletu i PYTAGORAS z Samos: późniejsi uczeni greccy doskonalili ją i rozszerzali, EUKLIDES Aleksandryjski pierwszy napisał jęj wykład systematyczny, Archimedes poczynił w niej wiele wynalazków a APOLLONIUSZ z Pergamu jest autorem traktatu sekcij konicznych, których odkrycie winniśmy PLATONOWI i uczniom jego szkoły.

DIOFANTES z Aleksandryi, żyjący w IV^{ym} wieku po Chrystusie, pierwszy położył zasady Algebry: w następnych wiekach Arabowie uprawiali tę naukę którą w XV^{ym} wieku do Europy wprowadził KAMIL LEONARD Toskańczyk, a w XVI^{ym} wieku VIËTE z Fontenay nadał jęj postać ogólną. Również w XV^{ym} wieku żyli twórcy Trygonometrii PURBACH z Austrii i Jan MILLER REGIOMONTANUS z Frankonii. Te są znaczniejsze epoki w których umysł ludzki postępując drogą syntetyczną wznosił się od najprostszych wiadomości do coraz więcej złożonych.

Z tak przygotowanego przez wiele wieków i geniuszów stanowiska, można było rzucić okiem na przebieżoną już przestrzeń nauk matematycznych i na drogę po której iść należało. To stanowisko pierwszy zajął RENÉ DESCARTES, który algebrę uogólnioną przez swego poprzednika Viëte'a, zastosował do geometrii linii krzywych, i utworzył roku 1637 dzisiejszą (oprócz nowych metod genialnym pomysłem p. Salmona od kilku lat odkrytych i świeżo do nauki Descart'a szczęśliwie wprowadzonych)

analizę geometryczną; mówimy do geometrii linii krzywych, ponieważ zastosowanie algebry do początkowej geometrii jest daleko dawniejsze i należy do analizy starożytnych.

Na poparcie i wyjaśnienie powyżej przez nas podanej relacji, przytoczymy kilka odpowiednich wyjątków z rysu historycznego p. Chasles'a.

Geometria analityczna datuje od Descart'a, lecz jak to dobrze p. Chasles przy rozbiórce poryzmów Euklidesa (*Porismes d'Euclide*) wyraził (rys historyczny str. 276). « Brakowało tylko Euklidesowi « użycia algebry dla stworzenia systemów współrzędnych, które datują od Descart'a. » Euklides żył na lat 285 przed Chrystusem.

« Viète (1540 do 1603) po uzupełnieniu *metody analitycznej Platona* przez wynalezienie *Algebry* « albo *Arytmetyki ogólnej*, okrył się jeszcze sławą wprowadzając tę cudowną potęgę dźwignię do « ścisłej nauki rozciągłości, jużto aby wykreślić równania 2^{go} i 3^{go} stopnia czyli znaleźć ich pierwiastki w liniach, jużto aby przedstawić geometrycznie wypadki algebraiczne; pierwszy krok zrobiony « ku ścisłszemu związkowi *Algebry* z *Geometrią*, który musiał sprowadzić wielkie odkrycia « Descart'a (rys historyczny str. 52).

« Największa przystuga oddana *Geometrii* należy się słusznie Descart'owi. Ten filozof swym nieocenionym pomysłem *Zastosowania Algebry do teorii krzywych* stworzył sobie sposoby do przebycia « przeszkód dotychczas wstrzymujących największych geometrów i do zmienienia postaci ścisłych « nauk matematycznych. (rys historyczny, str. 94).

« Descartes wskazał użycie współrzędnych przy teorii krzywych podwójnej krzywizny; zwykle on « je przedstawiał za pomocą zrównań ich rzutów na dwóch płaszczyznach prostokątnych. *Geometria* « analityczna w przestrzeni nie rozwija się jak dopiero więcej niż pół wieku później.

« PARENT, w 1700 roku, pierwszy przedstawia powierzchnię krzywą za pomocą zrównania z trzema « zmiennymi. I wnet potem zjawił się CLAIRAUT który w szesnastym roku życia rozwijając piękny « swój traktat o krzywych podwójnej krzywizny, wyłożył po raz pierwszy, sposobem metodycznym, « teorię współrzędnych w przestrzeni (rys historyczny, str. 138).

Jakkolwiek ważne jest i genialne dzieło Descart'a, mała jednak liczba osób mogła je zrozumieć i przeniknąć się ważnością treści jego: zresztą, dziwnem byłoby żeby ludzie porzucili odrazu dawny sposób rozumowania do którego przywykli zamieniając go na nowy. Przyjaciel tego geometry, FLORIMOND de BEAUNE, pierwszy upowszechniał i uprawiał jego naukę. Po Beaune, geometria kartezjańska winna Hollandrom i Flamandczykom swój wzrost i wydoskonalenie.

W roku 1707, wyszła w Londynie *Arithmetica universalis seu de resolutione et compositione mathematica* obejmująca algebrę i jej zastosowania do zadań geometrycznych. To ważne dzieło Newtona przetłumaczył na język francuzki Noël BEAUDEUX i powiększył je dodatkami i objaśnieniami w roku 1802.

Niektórzy uczeni XVIII^{go} wieku pisali sposobem starożytnych dzieła matematyczne: i tak, Robert SIMPSON Anglik, professor z Glasgow, jest autorem traktatu sekcij konicznych z roku 1733 tym sposobem napisanego: w dziełach wydanych dopiero po jego śmierci w 1787 roku, dopełnił Simpson prace Euklidesa i Apolloniusza. Ztąd p. Chasles wyciągnął Euklidesa poryzmy. Hutton, professor artylerji w Woolwich, jest autorem dzieła *Elements of conics sections* w tymże stylu jasno i dokładnie napisanego.

Descartes miał wszakże ciągle stronników swojej analizy. I tak, w roku 1706, wyszło w Londynie dzieło NEWTONA pod tytułem: *Enumeratio linearum tertii ordinis*. Autor opisuje postać linii 3^{go} rzędu i dzieli je na siedemdziesiąt dwie klasy. EULER napisał obszerny traktat linii rzędów wyższych w dziele *Introductio in analysim infinitorum*, Lausannie, 1747, w którym wynalazł wiele rzeczy i te

z dawniejszemi uporządkował. Tegoż rodzaju traktat odznaczający się jasnością i dokładnością, wydany został przez KRAMERA pod tytułem : *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, Genève, 1730.

Pomimo badań i prac analitycznych Descart'a, Newtona, Clairaut'a, Eulera, Kramera i wielu innych geometrów, dzieła elementarne XVIII^{go} wieku niżej stały stosunkowo do ówczesnego stanu nauki, a autorowie elementarnych dzieł nie pojęli jeszcze ducha analizy nowoczesnej chociaż swoje dowodzenia na algebrze opierali. Dzieło Jana Sniadeckiego : *Teorya rachunku algebracznego zastosowana do linii krzywych*, Kraków, 1783, nie tylko wolne od tego zarzutu, ale nawet tak jest ściśle napisane w duchu analizy nowoczesnej, iż pod tym względem przewyższa niektóre późniejsze tego rodzaju dzieła, jak na przykład wydane w roku 1813 *Essai de Géométrie analytique par Bror*, którego plan nie jest zupełnie analityczny. Bior bowiem, najprzód z przecięć ostrokręgu wywodzi linie drugiego rzędu, potem opisuje ich własności, a nareszcie pod tytułem dyskusyi wywodzi te linie z równania stopnia drugiego z dwiema ilościami zmiennymi i kończy rzecz na tém od czego właściwie zacząć był powinien. Liczne zalety dzieła Jana Sniadeckiego, tak są widoczne, że uważamy to dzieło wyższém nad ówczesny stan nauk matematycznych : że jednak ta znakomita praca nie dosyć w Polsce upowszechniona i użytą została, to pochodzi z téj jedynie przyczyny, iż w ciągu czterdziestu lat (ten sąd o dziele Sniadeckiego Adryan Krzyżanowski po raz pierwszy w roku 1822 objawił), od wyjścia na świat tego dzieła, nie zajął się autor nowém jego wydaniem, powiększoném w pewnych częściach a skróconém w innych, zbliżającém się więc do obecnego stanu umiętności. Dzieło to jest tém dla matematyki w Polsce czém praca Kopczyńskiego dla ojczystej mowy : obadwa doznały tego losu że w samém zjawieniu się oznaczone cechą doskonałości, więc przez swych twórców, niezależnie od ówczesnego stopnia oświaty, nie były tkniętymi.

Ten rozbiór scyentyficzny znakomych dzieł matematycznych Jana Sniadeckiego, wprawną ręką Adryana Krzyżanowskiego po raz pierwszy w roku 1822 napisany, z uczuciem dumy narodowej pod rozwagę uczonych polskich przedstawiamy. Wniósłmy jeszcze kilka słów powiedzieć o Sniadeckim jako pierwszym pisarzu narodowym na polu nauk ścisłych. Prawdziwym twórcą języka narodowego w matematyce jest niewątpliwie Jan Sniadecki. Któż z ludzi myślących nie wie u nas że cała Polska jemu zawdzięcza podniesienie i wzbogacenie jej naukowego języka. Pismnictwo naukowe polskie było w owym czasie dosyć ubogie i powszechnie zaniedbane ; Sniadecki jednak zostawił swym następcom język naukowy jasny, prosty, bogaty i tak pięknie wykończony, iż często pod biegłym piórem tego znakomitego pisarza, prace naukowe polskie zbliżały się do najcelniejszych utworów matematycznych wielkich i zdumiewających swą naiwną prostotą pisarzy francuzkich. Cztery tomy *Pism rozmaitych* Jana Sniadeckiego zawierają w sobie : 1^o Żywoty uczonych Polaków, 2^o rozprawy o języku i literaturze polskiej; 3^o przemowy uniwersyteckie, rozprawy naukowe, rozbiory scyentyficzne i recenzje różnych dzieł matematycznych tak własnych jak i obcych znakomych autorów. W trzeciej części na szczególną zasługuje uwagę uczona rozprawa Sniadeckiego o dziełach i wynalazkach rozlicznych de LAGRANGE'A. We wstępie do téj głębokiej rozprawy, Jan Sniadecki tak wzniośle nauki matematyczne ocenia :

« Nauki matematyczne trzymają bez wątpienia pierwsze miejsce w rzędzie wiadomości ludzkich :
« i dlatego, że są składem prawd pewnych, wzorowego ich związku i ścisłości ; i dlatego, że są rze-
« telnym zaszczytem ludzkiego rozumu w rozległych wynalazkach i w ważnych przysługach wyrzą-
« dzonych tyłu naukom i kunsztom. Po DESCARTESIE, NEWTONIE i LEIBNITZU miały one w ciągu ośm-
« nastego, i na początku dziewiętnastego wieku znaczną liczbę wielkich ludzi, którzy je wzbogacili,
« objaśnili i rozszerzyli użycie; ale w szeregu tych ludzi świetnieć zawsze będą dwa nieśmiertelnej
« sławy imiona, Leonarda EULERA i Józefa Ludwika DE LAGRANGE. »

Ta scyentyficzna Jana Sniadeckiego rozprawa posłuży nam do skreślenia *krótkiej wiadomości o dzie-*

łuch i odkryciach tych wielkich, w ciągu ośmnastego i na początku dziewiętnastego wieku, *Rachunku różniczkowego* przewodników.

Tym sposobem wróćmy na nowo do *Rachunku analitycznego*, któryśmy byli chwilowo zaniedbali, śledząc uważnie odkrycie i rozwój *Geometrii analitycznej*.

Mając z góry plan wytknięty, przystąpimy do praktycznego tegoż planu urzeczywistnienia. Jan Sniadecki, który wysoko cenił prace naukowe Eulera, w tych słowach daje nam o nich ogólne wyobrażenie :

« EULER rachunek linii trygonometrycznych z rzucenych od Rogera Cotes myśli do wysokiego « stopnia doskonałości przyprowadziwszy, i do wszystkich prawie odnóg matematyki wciągnawszy, « wielką masą nowych prawd, i rozwiązaniu wielu zawiłych zagadnień wyższe rachunki matema- « tyki zubożył, rozszerzył, i w porządek ułożył. Te znowu prawdy przystosowawszy do *Optyki*, « *Mechaniki* i *Astronomii*, daleko granice tych umiejętności rozprzestrzenił; i niezmiernie ważnemi « prawdami do znacznego stopnia doskonałości posunął skład instrumentów optycznych, budowę « okrętów, sztukę artylerji, prawa biegu w ciałach niebieskich, i ich tablice. Sposób i rachunek « analityczny nowemi napełniwszy myślami, okazał wielką i ledwo nieczarodziejską jego dzielność, « jakiej się przed Eulerem ledwo można było domyślać i spodziewać. »

Te badania Sniadeckiego nad matematycznymi dziełami Eulera jakkolwiek przyjmujemy w całości, potrzebujemy jednakże nad niektórymi z nich szczegółowie się zastanowić. Krytyka nowożytna dostarczy nam potrzebnych wiadomości o ważnych dziełach tego wielkiego geometry który się najwięcej przyczynił do wzrostu i wydoskonalenia umiejętności. *Wstęp do analizy nieskończonych* i *Rachunek różniczkowy* są dziełami Eulera tego rzędu. Wiemy już zkądną, iż Euler napisał obszerny traktat linii rzędów wyższych w dziele *Introductio in analysim infinitorum*, (Lausannae 1747 roku), w którym wynalazł wiele rzeczy i te z dawniejszemi uporządkował. Zauważmy także, iż geometrowie żyjący w świetnej epoce wielkich odkryć Newtona i Leibniza przedewszystkiem gorliwie się zajmowali rozwiązaniem zagadnień przełamując niesłychane trudności i używając wszelkich środków byleby tylko ułatwić lub przyspieszyć rozwiązanie podanych zadań. Ztąd wynikło, że gdy l'Hopital w 1694 i Euler w 1733 roku ogłosili swe dzieła które zawierają (osobliwie dzieła Eulera) obok poglądów wielkich i prawdziwych liczne i wyborne przykłady, jeden i drugi wyłożyli, po raz pierwszy, teorie ogólne genialnych nowożytnych odkryć. Oto są nakoniec piękne wynalazki Eulera które tyle wzbogaciły Rachunek różniczkowy. Wiemy, że mając jakikolwiek szereg, można go przekształcić na inny. Jedną z najślawniejszych transformacji (przemian) jest ta którą Euler nam przedstawia na szereg urządzony podług potęg wszelkiej zmiennej. Euler pierwszy także podał : 1° Rozwinięcia $w \sin x$ i $\cos x$ na szereg urządzony podług potęg $\sin x$ i $\cos x$; 2° Dał rozwinięcie $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ na szereg urządzony podług potęg zmiennej x ; 3° Wyprowadził formułę $(2 \cos x)^m = \cos mx + m \cos(m-2)x + \dots$ i t. d.

D'Alembert jasno określił początkową wiedzę o funkcjach pochodnych i współczynnikach różniczkowych i przyczynił się tym sposobem do oznaczenia więcej dokładnego pierwszych i ostatnich słowników Newtona.

De LAGRANGE, pierwszy geometra XVIII^{go} wieku, zeszedł z tego świata w roku 1813. Po jego śmierci, sławny astronom Delambre we Francji i Jan Sniadecki w Polsce wiadomość o życiu i wynalazkach De Lagrange'a ogłosili. Sniadecki o tym wielkim człowieku tak się wyraża :

« Sławny z głębokich i rozległych nauki, ze znakomitych dzieł, zasług i talentów geometra i astronom, « sekretarz I^{ej} klasy Instytutu Narodowego i podskarbi Uniwersytetu francuzkiego DELAMBRE, czytał « na publicznej sessji Instytutu 3^{go} stycznia 1814 roku wiadomość o życiu i niektórych wynalazkach « senatora De Lagrange, ogłoszoną w magazynie encyklopedycznym na miesiąc luty. Ztąd wycią-

«gnęliśmy treść niektórych wiadomości dla polskich czytelników; dopełniając, albo raczej całkiem nową zdając sprawę o jego wynalazkach z przydaniem uwag, jakie nasłuchując nam mogły czytanie i rozważanie dzieł, oraz znajomość osobista tego wielkiego człowieka. »

Sniadecki tak mówi dalej w swym ogólnym poglądzie nad dziełami i wynalazkami Legrang'a : « Zgruntowawszy najsubtelniejsze myśli Eulera, Lagrange zapuścił się i przeniknął jeszcze w większą ich głębię, i jednych niedokładność dopełnił, drugich zapory i trudności przełamał; odkrył nowe drogi i sposoby w sztuce rachunkowej; któremi jego geniusz tak dzielnie władał, iż najtrudniejsze napomknienia w nieśmiertelném dziele Newtona : *Philosophiae naturalis principia mathematica* objaśnił, sprostował albo dowiódł : wiele zagadnień zawiłych w układzie świata rozwiązał, Astro- nomii fizycznój, Mechanice i całej sztuce analitycznej nadał postać trudniejszą wprowadzić, ale śmielszą, głębszą, i dzielniejszą. W zawodzie tak rozległym, bo ledwo nie do wszystkich odnóg wiadomości ludzkich niosącym światło albo podpórę : tak trudnym, gdzie nawet do czystego rzeczy już odkrytych ogarnienia, potrzeba pewnego hartu głowy na głębsze i dzielniejsze rzeczy pojęcie : w zawodzie mówię tym, widzieć człowieka prawie igrającego z trudnościami uważanemi ledwo za podobne do pokonania, otwierającego nowe drogi do wysłedzenia prawd niezmiernie zawiłych; w tém co miano za skończone i doskonałe, objawiającego niedokładności, i rozleglejsze rzeczy ogarnienie; a w tém nawet, czego pokonać nie mógł, rzucającego nowe światło, i nowe widoki przyszłym pokoleniom do szczęśliwój rozwagi zostawione; zgoła nadającego całej nauce ledwo nie nową postać, a rozumowi ludzkiemu nowe sposoby i środki do przeniknięcia w głęboko ukryte tajemnice *Prawdy* i *Przyrodzenia*: widzieć zaiste takiego człowieka, jest to zjawiskiem obchodzącem wszystkie narody, naukami i prawdziwém oświeceniem ludzkiego umysłu szczerze zaprątnione. »

Sławne dzieło Lagrang'a, *Teoryę funkcji analitycznych*, Sniadecki głęboko roztrząsa. Z téj jego dyskusyi kilka skróconych ustępów przytoczymy : « Wszystkie prawie gatunki rachunku analitycznego w Matematyce, chciał de Lagrange jednym że tak powiem, wzrokiem rozumu ogarnąć, i ich fundamentalne początki z jednego źródła wyciągnąć, i z sobą powiązać. Ta śmiała i wielka myśl podała mu plan sławnego i głębokiego dzieła *Teorya funkcji analitycznych*. W niém jednak założył sobie szczególniej, *rachunek różniczkowania i całkowania z działań prostej Algebry wydobyć*. Nie tykając działań, których wypadki we wszystkich teoryach są te same, i niewątpliwe, chciał także de Lagrange odmienić fundament tłumaczenia i *sygnaturę* rachunku. Teorya funkcji jest pasmo ważnych, wielkich i wielu nowych prawd. »

« Ale fundamenta i początki rachunku różniczkowego wskazane przez de Lagrange'a są li ściślej, dokładniejsze i prostsze? Przyznam się, że czytając tylokrotnie to ważne dzieło, nie mogłem się o tém przekonać. Wyznaje de Lagrange że początek granic z dawnych geometrów wzięty jest ściśły, i prawdziwie geometryczny : ale, mówi, dawni geometrowie zbliżali tylko ilości do tych granic, ale ich nie uważali w stanie niknięcia : że stosunek ilości niknących nie daje się jasno pojmować; a zatem teorya granic nie jest początkiem tak prostym i czystym, jaki panować powinien w rachunku analitycznym. Odpowiadam : że dawni geometrowie nie mając języka rachunkowego, ale tłumacząc swoje rozumowanie językiem pospolitym nie mieli potrzeby uważać ilości w stanie niknącym ; bo tego, co nam pokazuje język rachunkowy, nie mógł im oczywiście wskazać język pospolity. Ale kiedy unikali to wyrażać, żeby mowy nie zaciemnić; mogliż tego w swych dowodach nie myśleć, co my myślimy? Kiedy Archimedes wpisuje i opisuje liniami prostemi koło, kiedy kwadrując *Parabolę* wpisuje w nią trójkąty, i tych liczbę coraz bardziej wzrastającą uważa; mógłże zrobić wniosek o stosunku obwodu do promienia w koło, albo do placów trójkątnych do placu parabolicznego w *Paraboli*, nie myśląc o zniknięciu téj różnicy, która zachodziła między obwodem koła a linijami wpisanymi i opisanymi, albo między placami trójkątnymi, a placem parabolicznym?

« Owszem wszystkie wnioski i twierdzenia dawnych geometrów wyciągnięte z początku wyczerpania (Methodus exhaustionis) nie mogłyby się utrzymać, gdyby nie mieli zawsze na myśli tej prawdy; że, « gdy ilości ciągle się zmniejszające zachowują ten sam niezmienny do siebie stosunek, stosunek ten « jest stosunkiem granic. Uważanie ilości w swoich granicach jest to właśnie krok, o któryśmy się « dalej posunęli nad starożytność, idąc za jej początkiem wcale nie tracąc na swą ścisłość « geometrycznej. Winniśmy ten dalszy krok rachunkowi, który wskazuje nam oczywiście wypadki « rodzące się z tej uwagi. Dziwno mi nawet, dla czego de Lagrange ma pojęcie wypadków rachun- « kowych powstających ze zniknięcia za niejasne; kiedy cała teoria jego na niemi się opiera. Wszakże « treść jego teorii zależy na tem: że rachunek różniczkowania nie innego nie jest, tylko sposób « oznaczenia współczynników funkeji rozwiniętej. Jakże on te współczynniki wynajduje? Oto, « rozdzieliwszy całe zrównanie rozwiniętej funkeji przez wzrost lub ubytek ilości zmiennej, ten « wzrost lub ubytek uważa w stanie nikającym: przez co jedna strona zrównania staje się $\frac{0}{0}$, co na- « zywa *funkeją pochodną*, druga strona zrównania daje termin niezawierający tego wzrostu lub ubytku « i ten termin (wyraz) jest wartością funkeji pochodnej. Jestże tu jakakolwiek różnica od tego, co « się robi w teorii granic tak wystawionej, jak jest przez p. Cousin ».

LA GRANGE, w swém sławném dziele o *Rachunku funkeji analitycznych*, bierze za punkt wyjścia rachunku różniczkowego rozwinięcie na szeregi podług wzoru Taylora, który, przedewszystkiém, ściśle udowadnia. Ta metoda w oczach dzisiejszych geometrów nie zdaje się być wcale racjonalną; rozwinięcie na szeregi jest prostém zastosowaniem rachunku różniczkowego, i niepodobna uniknąć wielkich niedogodności biorąc jakiegokolwiek rozwinięcie za punkt wyjścia. Wszelkie dowodzenie opierające się na użyciu szeregów, których zbieżność nie jest wprost wykazaną, jest koniecznie niezupełne: Cauchy oddał ogromną przysługę uniejętności wzbraniając bez restrykcyi podobnych szeregów użycie. Dalsze uwagi nad śmiałym przedsięwzięciem Lagranża do późniejszego rozbioru o wydoskonaleniu i uogólnieniu wzoru Taylora zostawiając, nateraz się zajmujemy wykazaniem jego pięknych w rachunku różniczkowym wynalazkach. Z tych zasługujących na szczególną uwagę są następujące: Wyrażenie Lagranża wyrazu dopełniającego czyli reszty szeregu Taylora. — Wzór Lagranża na rozwinięcie funkeji oznaczonej zrównaniem $z = u + x\varphi(z)$. — Uogólnienie tego wzoru należy się LAPLASOWI. — Jaki jest pierwiastek rozwinięty przez wzór Lagranża? — Drugie dowodzenie należy JACOBIEMU. — Zastosowanie wzoru do rozwinięcia $(1 - 2x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$. — Zastosowanie wzoru do rozwinięcia $\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1+x}}\right)^n$. — Rozwinięcie pierwiastku zrównania drugiego stopnia. — Rozwinięcie pierwiastku zrównania $x^{n+1} + ax - b = 0$. — Rozwinięcie pierwiastku zrównania

$$a_0 = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

— Rozwinięcie funkeji $\frac{1}{\varphi(z)}$ gdy się umie rozwinąć podług potęg całkowitych funkeję $\varphi(z)$. — Wyrażenie symboliczne szeregu Taylora. — Wzór Lagranża dla funkeji dwóch zmiennych. Zamknijemy wiadomości o Lagranżu przepisami Śniadeckiego dla czytelników chcących zgłębić ważne dzieło tego wielkiego geometry. « We wszystkich swoich dziełach jest de Lagrange bardzo zwięzły, wyciągający « po czytelniku oswojenia się ze sposobami i wzorami gdzieindziej już od niego użytymi; i dokładnej « znajomości tego, co jest już zrobione w rzeczy, o której pisze. Używa sygnatury dawnej, ale często « i swojej własnej. Chcąc przyzwyczaić uwagę czytających do czystej Analizy, i do trafego czytania « rachunków, naprzód rzadko używał rysunku i objaśnienia przez figury geometryczne, a potem zupeł- « nie je zniósł i porzucił. Poszedł za jego przykładem de LAPLACE w swojej *Mechanice Niebieskiej*: co « lubo dla wyćwiczonych analistów jest niepotrzebne; dla początkowych atoli czyni pojęcie rachunku « trudnóm i zawiłóm tam, gdzie zachodzą do uwagi linije, kąty i płaszczyzny. W każdej prawie

« materyi, o której pisze, wystawia wierną historję dawnych i teraźniejszych prac, każdemu oddaje « ścisłą sprawiedliwość w tém co zrobił, skazując co jeszcze do zrobienia pozostaje. Omyłki i « uchybienia drugich wytyka skromnie i z wielką wyrozumiałością. Niesłusznie nawet od drugich czy- « nione sobie zarzuty rozważa z tą ciszą, i z tym pokojem umysłu, jakie przystoją prawdzie, i geome- « trycznemu przekonaniu. Zgoła każdy prawie wstęp do jego pism, jest składem obszernój matema- « tycznej *erudycji*, zbiorem głębokich uwag, i oraz wzorem dokładnej historyi każdego wynalazku. « Sprawiedliwie powiedział de LAMBRE: że de LAGRANGE trwałą i nieporuszoną budowę matematycz- « nych nauk zamienił w pyszny i rozległy pałac odnowiwszy fundamenta i podniosłszy jego szczyt i « wyniosłość. Przechodząc się po tym wspaniałym gmachu, gdzie tyle umiejętności, sztuk i nauk, « szuka zasilenia i wzrostu; spotykamy ledwo nie co krok ze czcią i podziwieniem wieczne pa- « miątki jego nadzwyczajnego talentu i geniuszu: » Tak nasz znakomity matematyk pisał, wykladał, i z wszechnicy Jagiellońskiej w roku 1815 po całej Polsce wiadomości nauk ścisłych rozsiewał. Cześć Ci! wielki twórco narodowego w matematyce języka.

LAPLACE, wielki z początku dziewiętnastego wieku Geometra i nieśmiertelny *Mechaniki Niebieskiej* autor, zajmował się w chwilach od zatrudnień wolnych uprawą Rachunku różniczkowego. Jemuśmy winni: Nowe dowodzenie, które on wynalazł, do wzoru Lagranża. — Uogólnienie tegoż wzoru. — Jest on także autorem funkcij tworzących. — Dał wyrażenie symboliczne rozwinięcia funkcji $\varphi(x+h, y+k)$; rozciągnął wzór Lagranża dla funkcij dwóch zmiennych (niezależnych).

GAUSS (Karol, Fryderyk), jeden z największych Geometrów dziewiętnastego wieku, narodził się w Brunświku 23 kwietnia 1777 roku, umarł w nocy z 22 na 23 lutego 1855 r.

Z swego zacisza w Brunświku, gdzie Gauss przed wrzawą świata na zawsze ukryty, całkiem się oddał głębokim poszukiwaniom, jego prace występowały na widok publiczny z szybkością niepomatu niezonych Europy zdumiewającą. Każda praca stanowi epokę w historyi umiejętności, objawia rewolucyę, co wywracając dawne teorye i metody, nie waha się zastąpić je nowemi i podnosi umiejętność do takiej wysokości, na jakiej ją kiedykolwiek zobaczyć nikt nawet tego sobie wcale nie przypuszczał. Prace Gaussa są powszechnie wszystkie wybitnem piętnem najwyższej doskonałości naznaczone; jest to rodzaj w całym swym składzie zupełnie skończony, a tém samém, stanowczo odrzucający wszelkie zmiany i ulepszenia. Jego godłem było: *Pauca, sed matura*. Gauss posiadał umysł niezmiernie oryginalny, wszystkie zdumiewające sławnego Geometry odkrycia mają ich źródło w głębokości jego własnego geniuszu, i nie noszą na sobie żadnego śladu obcego wpływu. Nie myślimy bynajmniej zajmować się podaniem wiadomości o życiu i wszystkich nieśmiertelnych Gaussa odkryciach; przytoczymy tu tylko te, któremi ten wielki Geometra najbardziej się przyczynił do rozwoju i wydoskonalenia Rachunku różniczkowego. Gaussowi winniśmy: Prawidła zbieżności pewnej klasy szeregów. — Rozwinięcie na ułamek ciągły ogólnego szeregu
$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$
 Definiowania krzywój należącej do pewnej powierzchni, której postać jednym ze sposobów geometrycznych jest ściśle oznaczoną. — Kilka twierdzeń Gaussa dotyczące krzywizny całej mogą się policzyć do najpiękniejszych i najbardziej zasługujących na uwagę podań Geometrii. — Gdy się rozwija pewna powierzchnia krzywizna pozostaje niezmienną. — Wyrażenie iloczynu promieni krzywizny.

ABEL (Niels Henryk), jeden z najgenialniejszych geometrów naszych czasów, urodził się 5 sierpnia 1802 roku w Findöe w Norwegii, umarł 6 kwietnia 1829 roku w Froland przy Arendal, żyjąc niespełna lat dwadzieścia siedm. Po ukończeniu nauk szkolnych zatopił się młody Abel w czytaniu dzieł genialnych wielkich mistrzy umiejętności nowożytnej; później, zwiedził uczone zakłady obficie rozrzucone po całych Niemczech i Francji; nakoniec stwarzał i po dziennikach umięjętnych ogłaszał piękne i zupełnie skończone typy swych nieśmiertelnych badań matematycznych. Wspomniemy tu tylko o tych Abela wynalazkach, któremi się on najbardziej przyczynił do podniesienia i z bogacenia

Rachunku różniczkowego. Abelowi jesteśmy winni: Twierdzenie dotyczące zbieżności szeregów. — Twierdzenie dotyczące ciągłości szeregów urządzonych podług potęg pewnej zmiennej niezależnej. — Dowodzenie wzoru

$$\varphi(x' + a) = \varphi(x) + 2\varphi'(x + b) + \frac{a \cdot a - 2b}{1 \cdot 2} \varphi''(x + 2b) + \dots$$

Kilka przedziwnie pięknych twierdzeń należących do teorii funkcji urojonych.

CAUCHY, jeden z najsławniejszych tego wieku Geometrów francuzkich, urodził się w Paryżu, 21 sierpnia 1789 r., umarł w Seaux 22 maja 1857 roku.

Długo Cauchy pracował nad rozwiązaniem ogólnym i ściśłym kilku pytań zawiłych Rachunku różniczkowego. Tych ocenienie na później zostawiając, w tej chwili się zajmujemy podaniem jego wynalazków następujących: Wyrażenie Cauch'ego reszty szeregu Taylora. — Stworzył on także teorię resztek albo pozostałości. — Naszóm zdaniem oddał Cauchy niezmierną przysługę umiejętności wynajdując, przez prawdziwie genialne podejsia rachunkowe, pochodne funkcji prostych.

JACOBI (Karol Gustaw Jakób), jeden z najsławniejszych tego wieku geometrów niemieckich, urodził się w Poczdamie 1804 roku, umarł w Berlinie w r. 1854. Ten wielki Geometra długo przewodził świetnemu rozwojowi Rachunku różniczkowego. Teoria wyznacznika jakiegokolwiek liczby funkcji zawierających równą liczbę zmiennych niezależnych należy się prawie całkiem Jacobiemu. Definicja tego wyznacznika jest taką, że w przypadku jednej funkcji ten się zamienia na pochodną. Analogia wyznaczników i pochodnych jest wreszcie zupełną, i ważność zastosowań, podanych po największej części przez sławnego autora teorii, daje temu genialnemu pomysłowi prawo figurowania pomiędzy zasadami Rachunku różniczkowego. Oprócz tego pięknego odkrycia, dał jeszcze Jacobi wyrażenie proste pochodnej

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}.$$

— Nowe dowodzenie wzoru Lagranża. — Nowe dowodzenie wzoru Lagranża w przypadku dwóch zmiennych niezależnych. — Twierdzenie tyczące się jakiegokolwiek bądź krzywej zamkniętej.

Zdaje nam się iż, w dzisiejszym stanie umiejętności, jedna metoda ściśła i przypuścić się dająca jest ta która się opiera na wyprowadzeniu wprost z funkcji danych tychże funkcje pochodne.

Aby można było łatwiej schwycić charakter każdej metodzie właściwy, podamy dwie propozycje, jedną z Geometrii, drugą z Algebry, w języku dla każdej z nich odpowiednim.

Propozycja geometryczna. *Metoda nieskończenie małych.* Łuk nieskończenie mały jest równy swój cięciwie.

Metoda pierwszych i ostatnich stosunków. Gdy łuk koła zmniejsza się nieograniczenie, jego stosunek ostatni ze swą cięciwą jest stosunkiem równości; gdy łuk bierze swój początek poczynając od 0, jego stosunek pierwszy, albo stosunek łuku rodzącego się ze swą cięciwą, jest stosunkiem równości; jednym słowem, łuk się poczyni i kończy stając się równym swój cięciwie.

Metoda płynień albo fluxyj. Gdy łuk wzrasta, poczynając od 0, z prędkością jednostajną, prędkość z jaką cięciwa wzrasta jest, w pierwszej chwili, równa prędkości łuku.

Metoda granic. Gdy łuk i, następnie, cięciwa zmniejszają się nieograniczenie, granica stosunku łuku do cięciwy jest równą jedności.

Analiza resztek albo pozostałości Landena. Gdy łuk koła jest zerem, stosunek tego łuku do cięciwy,

lubo przedstawiający się pod kształtem $\frac{0}{0}$, jest właściwie równy 1, jak to widać dzieląc oba wyrazy ułamku który wyraża ten stosunek, przez czynnik im spólny co znikał jednocześnie z łukiem.

Teorya funkcyj de la Grange'a. Rozwijając łuk A na szereg uporządkowany podług potęg cięciwy C , otrzymamy

$$A = C + AC^3 + AC^5 + \dots$$

rozdzieliwszy całe zrównanie przez C , to nam daje

$$\frac{A}{C} = 1 + AC + AC^2 + \dots$$

owoż, gdy C staje się zerem, przez co jedna strona zrównania staje się $\frac{0}{0}$, druga strona 1;

a więc $\frac{C}{A} = 1$, z kąd $A = C$.

Propozycya analityczna. *Metoda nieskończenie małych.* Jeśli przypuścimy że x przyjmuje wzrost nieskończenie mały dx , x^3 przybiera wzrost nieskończenie mały $3x^2 dx$.

Metoda pierwszych i ostatnich stosunków. Stosunek wzrostu x do wzrostu jeden po drugim następującego x^3 jest ostatecznie stosunkiem 1 do $3x^2$.

Metoda fluksyj. Gdy x jest pewną linią co wzrasta z prędkością, x' , x^3 będzie wzrastać z prędkością $3x^2 x'$.

Metoda granic. Granica stosunku otrzymanego dzieląc wzrost x^3 przez wzrost x , co go wydaje, jest, przypuszczając że ten ostatni wzrost zmniejsza się niżej wszelkiej granicy, równą $3x^2$.

Analiza resztek albo pozostałości Landena. Ponieważ

$$\frac{y^3 - x^3}{y - x} = x^2 + xy + y^2,$$

będzie, biorąc

$$y = x, \quad \frac{x^3 - x^3}{x - x} = 3x^2.$$

Teorya funkcyj. Jeśli rozwiniemy $(x + h)^3$ wedle potęg rosnących h , współczynnik pierwszej potęgi h jest równym $3x^2$.

W rzeczy samój,

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3;$$

z kąd

$$\frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2;$$

owoż gdy $h = 0$, pierwsza strona zrównania staje się $\frac{0}{0}$, druga strona $3x^2$; a więc stosunek

$$\frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2.$$

Zobaczymy wkrótce, iż p. Folkiński przyjął jako najprostszą i najściślejszą metodę nieskończenie małych albo funkcyj pochodnych.

Po opowiedzeniu dość obszerném historycznego rozwoju Rachunku różniczkowego i wykazaniu

ducha różnych metod, damy teraz poznać ich oznaczenia i ich fundamentalne zasady.

Pan Folkiński wyprowadza naprzód *pochoďną i różniczkę*. Tak przy wyprowadzeniu tych dwóch zasad fundamentalnych nowożytnego odkrycia, jak równie i przy innych poszukiwaniach w Rachunku różniczkowym i jego zastosowaniach natrafionych, p. Folkiński nie przestanie używać za punkt wyjścia i stałego swych twierdzeń oparcia *metody nieskończenie małych* uprzednio dokładnie wyłożonej. Winniśmy także, raz na zawsze ostrzedz, iż jakkolwiek zachodzi niejaki podobieństwo metody przybliżenia różnych rzędów, z metodą nieskończenie małych, pierwsza nie ma nic wspólnego z ostatnią, która daje wypadki zupełnie dokładne, a nie przybliżone.

Pochodna. Niech będzie y funkcją ciągłą zmiennej x :

$$(1) \quad y = f(x)$$

jeżeli zmiennej x nadamy przyrostek Δx i nazwiemy Δy przyrostek odpowiedni funkcji y :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

z określenia ciągłości funkcji wiemy, że przypuściwszy przyrostek Δx nieskończenie małym, przyrostek funkcji Δy będzie również nieskończenie małym. Dowiedliśmy nadto (VI), że nieskończenie małe Δx i Δy są *w ogólności* nieskończenie małymi tego samego rzędu, gdy x zmienia się pomiędzy dwiema jakimikolwiek wartościami szczególnymi x_0 i X , pomiędzy którymi funkcja jest ciągłą, że zatem granica stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest *w ogólności* skończoną oznaczoną funkcją zmiennej x , a tylko dla *szczególnych*, pojedynczych wartości zmiennej niezależnej stosunek ten może być w granicy nieoznaczonym, nieskończenie wielkim dodatnim lub ujemnym, lub zerem. Granicą stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdy x zdąży do zera nazywamy *pochoďną* funkcji i oznaczamy ją, według Lagrange'a, krótkując znak funkcyjny

$$(2) \quad f'(x) = \text{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{gr} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

co możemy wyrazić mówiąc, że

Pochodną funkcji nazywamy granicę stosunku przyrostku funkcji do przyrostku odpowiedniego zmiennej niezależnej, gdy przyrostek ten zdąży do zera.

Różniczka. Jeżeli $f'(x)$ jest granicą $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, to jak wiemy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

gdzie ε oznacza nieskończenie małą zdążającą do zera wraz z Δx ; a więc

$$(3) \quad \Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon \Delta x.$$

Widzimy ztąd, że przyrostek Δy funkcji, który jest nieskończenie małą tego samego w ogóle rzędu co przyrostek Δx zmiennej niezależnej, składa się z dwóch części :

1°. $f'(x) \Delta x$, która jest nieskończenie małą tego samego rzędu co Δx , bo ma z Δx w ogólności stosunek skończony, równy pochodnej $f'(x)$.

2°. $\varepsilon \Delta x$, która jest nieskończenie małą wyższego rzędu niż Δx bo ma z Δx stosunek nieskończenie mały ε .

Pierwszą tę część przyrostku Δy funkcji, nazywamy *różniczką* funkcji, i oznaczamy ją przez dy a zatem

$$(4) \quad dy = f'(x) \Delta x$$

Różniczką funkcji nazywamy iloczyn pochodnej przez przyrostek nieskończenie mały zmiennej niezależnej.

Mamy również

$$(5) \quad \frac{dy}{\Delta x} = f'(x) = \text{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

a zatem

Różniczką dy funkcji, nazywamy nieskończenie mały, którego stosunek do przyrostku nieskończenie małego Δx zmiennej niezależnej, równa się granicy stosunku przyrostku odpowiedniego Δy funkcji, do tegoż przyrostku Δx zmiennej niezależnej, gdy Δx zdąży do zera.

Wyrażenie różnicy pomiędzy przyrostkiem Δy a różniczką dy

$$(6) \quad \Delta y - dy = \varepsilon \Delta x,$$

pokazuje nam że :

Przyrostek Δy funkcji nie jest równym różniczce dy téjże funkcji : lecz przyrostek Δy jest nieskończenie mały różniący się od nieskończenie małej dy , którą nazwaliśmy różniczką, o ilość $\varepsilon \Delta x$ nieskończenie małą względem niej samej,

Z tego wypada [VII] że

$$(7) \quad \text{gr} \frac{\Delta y}{dy} = 1,$$

Przyrostek funkcji Δy i różniczka dy są nieskończenie małymi tego samego rzędu, których stosunek w granicy równa się jedności.

Przyrostek Δx zmiennej niezależnej można zawsze uważać jako niezmienny jakkolwiek funkcję x , jak : $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ bierzemy pod uwagę : bo przyrostek ten będąc stałym, niezależnym ani od x , ani od funkcji x , można go nie zmieniać przechodząc z jednej funkcji do drugiej. Weźmy w szczególności pod uwagę funkcję

$$y = x,$$

mamy

$$\Delta y = \Delta x,$$

czyli

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dx}{\Delta x} = \text{gr} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

a zatem

$$\Delta x = dx,$$

więc w tym przypadku przyrostek Δx zmiennej niezależnej równym jest różniczce dx . A zatem i dla wszelkiej innej funkcji przyrostek zmiennej niezależnej Δx możemy wziąć równym różniczce dx téjże zmiennej niezależnej. Różniczka dx zmiennej niezależnej będzie więc uważaną jako *stała* to jest niezależna od x , równa przyrostkowi Δx zmiennej niezależnej. Możemy więc używać znaku Δx

lub dx zarówno, jak nam będzie dogodnie. I tak możemy napisać

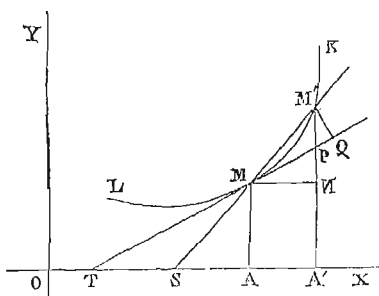
$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{lub} \quad dy = f'(x) dx.$$

Ztąd to pochodną nazywają niekiedy *ilorazem różniczkowym*, bo pochodna równa jest ilorazowi różniczki funkcji i różniczki zmiennej niezależnej; lub jeszcze *spółczynnikiem różniczkowym*, bo mnożąc przez pochodną różniczkę zmiennej niezależnej, otrzymujemy różniczkę funkcji.

Jakkolwiek przyrostek funkcji nie jest równym jej różniczce, jednak na zasadzie twierdzenia ogólnego metody nieskończenie małych, *za przyrostek funkcji można podstawić jej różniczkę lub odwrotnie, ile razy chodzi o granicę stosunku lub summy nieskończenie małych*; bo z równania (6) i (7) widzimy, że te dwie nieskończenie małe różnią się o nieskończenie małą względem nich samych, czyli mają stosunek równy w granicy jedności.

Przedstawienie geometryczne pochodnej i różniczki. Niech będzie krzywa LK przedstawiająca funkcję

$$(1) \quad y = f(x).$$



$OA = x$, $AM = y$, współrzędne jakiegokolwiek punktu M tej krzywej;

$OA' = x + \Delta x$, $A'M' = y + \Delta y$, współrzędne punktu M' w odległości nieskończenie małej MM' od punktu M .

Stosunek

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{MN}{MN} = \frac{\text{wst } M'MN}{\text{wst } MM'N}$$

przyrostku funkcji do przyrostku zmiennej niezależnej jest współczynnikiem kątowym siecznej MM' : w rzeczy samej oznaczywszy przez X , Y współrzędne tej siecznej i przedstawivszy jej równanie na przód pod ogólnym kształtem równania prostej

$$(2) \quad Y = mX + n$$

na wyznaczenie współczynników m i n mamy dwa równania, wskazujące że prosta przechodzi przez punkta M i M' , że zatem współrzędne tych punktów czynią zadosyć równaniu (2)

$$y = mx + n$$

$$y + \Delta y = m(x + \Delta x) + n;$$

zskąd otrzymujemy odejmując pierwsze od drugiego

$$\Delta y = m\Delta x \quad \text{czyli} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Otrzymamy również

$$n = y - \frac{\Delta y}{\Delta x} x,$$

tak że zrównaniem siecznej MM' będzie, podstawiając te wartości w (2)

$$(3) \quad Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x} (X - x).$$

W granicy, gdy $M'M$ zdąży do zera, sieczna MM' zdąży do stycznej MT : zrównaniem więc stycznej będzie

$$(4) \quad X - y = f'(x)(X - x) \quad \text{czyli} \quad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x);$$

a jęj spółczynnikiem kątowym

$$\operatorname{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{gr} \frac{M'N}{MN} = \operatorname{gr} \frac{\operatorname{wst} M'MN}{\operatorname{wst} MMN} = \frac{\operatorname{wst} PMN}{\operatorname{wst} MPN} = \frac{PN}{MN},$$

lub

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{PN}{MN};$$

czyli że :

Pochodna przedstawiona jest geometrycznie przez spółczynnik kątowy stycznej.

Lecz mamy również

$$dx = \Delta x = MN, \quad \Delta y = M'N,$$

a więc z (5)

$$(6) \quad dy = PN,$$

czyli że :

Różniczka przedstawiona jest geometrycznie przez przyrostek nieskończenie mały rzędnej stycznej, odpowiadający przyrostkowi nieskończenie małemu odciętej punktu styczności.

Różnica pomiędzy przyrostkiem nieskończenie małym funkcji a jęj różniczką

$$\Delta y - dy = \epsilon \Delta x = M'N - PN = M'P$$

przedstawiona jest przez odległość $M'P$ punktu M' na krzywej od punktu P na stycznej, liczoną równoległą do osi rzędnych, nieskończenie małą względem Δx , równie jak odległość prostopadła $M'Q$, byleby styczna nie była równoległą do osi rzędnych.

W razie spółrzędnych prostokątnych, spółczynnik kątowej stycznej jest styczną trygonometryczną kąta, jaki styczna tworzy z osią odciętych

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{st} M'TX,$$

ta styczna trygonometryczna przedstawia więc w tym razie pochodną.

Pochodna równa zero dla pewnej szczególnej wartości zmiennej niezależnej, przedstawia styczną równoległą do osi odciętych w punkcie odpowiednim téj wartości odciętej : w rzeczy samęj, spółczynnikiem kątowym téj stycznej jest zero i odwrotnie.

Pochodna równa nieskończoności, przedstawia styczną równoległą do osi rzędnych. Jedno i drugie może mieć miejsce tylko w szczególnych punktach, chybaży krzywa zmieniała się w prostą przedstawiającą wartość stałą zmiennej niezależnej lub funkcji.

Kilka twierdzeń ogólnych metody nieskończenie małych posłużyły p. Folkierskiemu do ścisłego wyprowadzenia *pochodnej i różniczki*. Możnaż było jaśniej, prościej, więcej ogólniej i naturalniej, przez inną jakąkolwiek metodę zasady fundamentalne Rachunku różniczkowego wyprowadzić? Za pomocą ścisłej *metody granic* głęboki i oryginalny geniusz STURMA pięknie i gruntownie wyprowadził fundamentalne zasady swego sławnego Rachunku różniczkowego. W innym języku i za pomocą innej metody młody nasz pisarz tenże sam przedmiot traktując z równym wdziękiem, prostotą i ścisłością główne i zasadnicze swego Rachunku różniczkowego zadanie *w ogólności* rozwiązał.

Cel rachunku różniczkowego. Rachunek różniczkowy ma na celu wyznaczenie pochodnej, lub różniczki dla wszelkiej funkcji danej, jakoteż badanie własności i związków zachodzących pomiędzy funkcjami i ich pochodnymi lub różniczkami. Geometrycznie możnaby powiedzieć, że rachunek różniczkowy jest to teoria ogólna prostych stycznych do krzywych.

Widzieliśmy powyżej, że *pochodna i różniczka* funkcji odpowiadają jednemu i temu samemu pojęciu: pochodna jest ilorazem dwóch różniczek, różniczka funkcji i różniczka zmiennej niezależnej. Pochodna jest ilością skończoną, różniczka nieskończenie małą: używając pochodnej postępujemy według metody granic; używając różniczki według równoważnej z metodą granic metody nieskończenie małych. Znając pochodną, znamy różniczkę i odwrotnie.

$$\frac{dx}{dy} = f'(x), \quad \text{z kąd} \quad dy = f'(x)dx.$$

Możnaby przeprowadzić cały rachunek różniczkowy nie wspominając o różniczkach, tak jak z drugiej strony nie łatwiejszego, jak zastąpić wyrażenie pochodnej, przez iloraz dwóch różniczek: lecz metoda nieskończenie małych daje nam tyle ułatwień w rachunku za pomocą twierdzeń podanych w poprzedzającym rozdziale, że użycie różniczek przedstawia liczne korzyści, których innym sposobem osiągnąć niepodobna.

Metoda nieskończenie małych posłuży także p. Folkierskiemu do przeprowadzenia *własności ogólnych funkcji pochodnych*.

Twierdzenie I. Jeżeli pochodna funkcji jest dodatnią dla pewnej wartości szczególnej zmiennej niezależnej, funkcja się zwiększa; jeżeli pochodna ta jest ujemną, funkcja się zmniejsza, gdy zwiększamy zmienną niezależną i odwrotnie.

Wniosek. Jeżeli pochodna funkcji jest dodatnią dla wszelkich wartości zmiennej niezależnej x zawartych pomiędzy x_0 i X , funkcja ciągle się powiększa, gdy x przechodzi od x_0 do X .

Twierdzenie II. Jeżeli pochodna funkcji jest równa zero dla wszelkich wartości zmiennej niezależnej zawartych pomiędzy pewnymi jej wartościami szczególnymi, funkcja jest stałą pomiędzy temi granicami.

Uwaga. Zauważmy naprzód, że pochodna może być zerem dla jednej szczególnej wartości zmiennej niezależnej, choć funkcja nie będzie stałą gdy zmienimy zmienną niezależną o ilość skończoną.

Jeżeli tak funkcja $f(x)$, jak jej pochodna $f'(x)$ są funkcjami ciągłymi zmiennej niezależnej x , pochodna z dodatniej nie może stać się ujemną, lub odwrotnie, nie przechodząc przez wartość zero; więc dla wartości szczególnej zmiennej niezależnej, dla której funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniejszać lub odwrotnie, pochodna musi być równą zero.

Odwrotnie, nie można powiedzieć żeby dla wartości szczególnej x , dla której pochodna jest równą zero, funkcja koniecznie miała przestać się zwiększać a zacząć zmniejszać lub przeciwnie: bo pochodna będąc nawet ciągłą, może z dodatniej stać się zerem, a później znów dodatnią nie przybierając wartości ujemnych, i przeciwnie. Lecz jeżeli pochodna nie przestając być ciągłą, z dodatniej staje się ujemną lub przeciwnie, przechodząc przez wartość zero, funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniejszać lub przeciwnie, dla wartości odpowiedniej zmiennej niezależnej.

Wartości te szczególne nazwanemi zostały *największościami* lub *najmniejszościami* funkeyi, bo wartości te są większemi w pierwszym razie, mniejszemi w drugim, od wartości sąsiednich, odpowiadających przyrostkowi dodatnemu i odjemnemu zmiennej niezależnej.

Twierdzenie III. Dwie funkeye jednej i téj samój zmiennej niezależnej, których różnica jest stałą, mają pochodne i różniczki równe.

Twierdzenie IV. Odwrotnie, dwie funkeye, których pochodne lub różniczki są sobie równe, różnić się mogą tylko o ilość stałą.

Twierdzenie V. Jeżeli pochodna jednej funkeyi jest ciągle większą od pochodnej drugiej funkeyi jednej i téj samój zmiennej, przyrostek pierwszej funkeyi odpowiadający przyrostkowi skończonemu zmiennej niezależnej, jest większym od przyrostku drugiej funkeyi, odpowiadającego temu samemu przyrostkowi skończonemu zmiennej niezależnej.

Twierdzenie VI. Iloraz różniczek dwóch funkeyj jest równym pochodnej jednej funkeyi względem drugiej, uważanej za zmienną niezależną.

Wszystkie sześć poprzednich twierdzeń zostały przez p. Folkińskiego ściśle i wybornie dowiedzione.

Pochodna funkeyi funkeyj. Z twierdzenia powyższego (VI) z łatwością wyprowadzić możemy правило, jak otrzymać pochodną funkeyi funkeyj, nie sprowadzając jęj do funkeyi pojedynczej. Niech będzie funkeya u funkeyi v zmiennej niezależnej x

$$u = f(v) \quad v = \psi(x)$$

możnaby podstawiając za v wartość

$$u = f[\psi(x)] = \varphi(x)$$

otrzymać wprost funkeyę u wyrażoną przez x , i szukać jęj pochodnej: lecz można również wyrazić tę pochodną przez pochodną u względem v , jako zmiennej niezależnej to jest przez $f'(v)$, i przez pochodną $\psi'(x)$ funkeyi v . W rzeczy samój

$$du = f'(v) dv$$

z twierdzenia poprzedzającego; a więc

$$(1) \quad \frac{du}{dx} = f'(v) \frac{dv}{dx} = f'(v) \psi'(x)$$

pochodna więc funkeyi funkeyj równa się iloczynowi pochodnej funkeyi danej względem funkeyi uważanej za zmienną niezależną, przez pochodną téj ostatniej względem zmiennej niezależnej.

Równanie (1) piszą niekiedy w następujący sposób:

$$(2) \quad du = \frac{du}{dv} dv$$

$$\text{bo } f'(v) = \frac{du}{dv}.$$

Twierdzenie to z łatwością uogólnić można, rozciągając je do iluokolwiek funkeyj jednej zmiennej niezależnej.

Niech będą zmienne

$$u, v, w, \dots, z, x$$

zależne od siebie za pomocą związków

$$u = f(v), \quad v = \varphi(w), \quad \dots, \quad z = \psi(x)$$

Jedną z tych zmiennych na przykład x możemy uważać za zmienną niezależną, pozostałe będą jej funkcjami.

Mamy na zasadzie poprzedzającego

$$du = f(v)dv, \quad dv = \varphi'(w)dw \dots dz = \psi'(x)dx$$

a więc

$$du = f'(v)\varphi'(w) \dots \psi'(x)dx$$

czyli

$$\frac{du}{dx} = f'(v)\varphi'(w) \dots \psi'(x);$$

co niekiedy piszemy

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \dots \frac{dz}{dx}.$$

Pochodna funkcji odwrotnej. Niech będzie funkcyą

$$(1) \quad u = f(v)$$

gdzie w ogólności tak u , jak v , mogą być funkcjami pewnej niezależnej x . Wyciągnąwszy z równania (1) v wyrażone przez u lub przypuszczając działanie to wykonane, otrzymamy

$$v = F(u)$$

funkcyę $F(u)$ nazywamy *odwrotną funkcji* $f(v)$.

Mamy widocznie

$$du = f'(v)dv \quad dv = F'(u)du$$

oznaczając przez $f'(v)$ pochodną $f(v)$ względem v , a przez $F'(u)$ pochodną $F(u)$ względem u , wziętą tak jakby u było zmienną niezależną: a zatem mnożąc powyższe zrównania przez siebie, znosząc czynnik spólny $du dv$ otrzymamy

$$f'(v)F'(u) = 1;$$

czyli

$$F'(u) = \frac{1}{f'(v)}$$

pochodna funkcji odwrotnej, jest odwróceniem pochodnej funkcji danej.

Może być co prościęj i przystępnięj wyłożone? Tém ostatniém prawdziwie piękném twierdzeniem p. Folkiński zasady fundamentalne swego Rachunku różniczkowego zamyka.

VIII

RÓŻNICZKOWANIE FUNKCYJ PROSTYCH czyli ZASADNICZYCH

JEDNĘJ ZMIENNĘJ NIEZALEŻNĘJ.

Przedewszystkiém, należy ściśle określić: co to jest właściwie *różniczkować funkcję*?

Różniczkować funkcję, jestto mając daną funkcję, szukać jej pochodnej lub różniczki: znając pochodną znamy różniczkę i odwrotnie.

Otrzymywanie pochodnych i różniczek wszystkich znanych nam dotąd funkcyj sprowadza się, jak

zobaczmy poniżej, do znajomości pochodnych i różniczek pewnej liczby funkcji prostych, samej zmiennej niezależnej, lub utworzonych w sposób prosty z innych funkcji zmiennej niezależnej. Te różniczki i pochodne nazywać będziemy *zasadniczymi* i zajmujemy się, dla pokazania sposobów używanych przez p. Folkińskiego, *niektórych z nich* wyznaczeniem.

Różniczki i pochodne zasadnicze są :

1° Różniczki i pochodne funkcji algebraicznych. — Summa. — Iloczyn. — Iloraz. — Potęga. — Wielomian algebraiczny.

2° Różniczki i pochodne funkcji przestępnych. — Funkcje : logarytmowa. — Wykładnicza. — Trygonometryczne. — Kołowe.

Weźmy na przykład z funkcji algebraicznych iloczyn.

Iloczyn. 1° Niech będzie a ilością stałą, u funkcją jakąkolwiek zmiennej niezależnej x :

$$u = f(x)$$

weźmy pod uwagę funkcję

$$y = au.$$

Nadając zmiennej niezależnej przyrostek Δx , oznaczając przez Δu , Δy , przyrostki odpowiednie funkcji u i y , zważając że a jako stała pozostaje tą samą, mamy

$$y + \Delta y = a(u + \Delta u)$$

czyli odejmując $y = au$:

$$\Delta y = a\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = a;$$

przechodząc do granicy, ponieważ $\text{gr} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}$,

$$\frac{dy}{du} = a;$$

a więc

$$dy = a du$$

różniczka iloczynu zmiennej przez stałą, równa się iloczynowi różniczki zmiennej, przez stałą.

2° Niech będą dwie funkcje zmiennej niezależnej x :

$$u = f(x) \quad v = \varphi(x)$$

i ich iloczyn

$$y = uv.$$

Nadając zmiennej niezależnej przyrostek Δx i oznaczając przez Δu , Δv , Δy przyrostki odpowiednie u , v i y mamy

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$$

dzieląc przez Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta x$$

przechodząc do granic i zważywszy że

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta x = 0$$

otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

czyli

$$dy = vdu + u dv$$

różniczka iloczynu dwóch funkcji, równa się summie iloczynów różniczki pierwszej funkcji przez funkcję drugą, i różniczki drugiej funkcji przez funkcję pierwszą.

Dzieląc powyższe równanie przez iloczyn $y = uv$, otrzymamy

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Horaz różniczki funkcji przez samą funkcję jak $\frac{dy}{y}$, $\frac{du}{u}$, $\frac{dv}{v}$ nazywać będziemy *różniczką logarytmową*: tak jak logarytm iloczynu równym jest summie logarytmów czynników, tak: *różniczka logarytmowa iloczynu równa jest summie różniczek logarytmowych czynników.*

3° Niech będzie ilekolwiek funkcji zmiennej niezależnej x :

$$u = f(x) \quad v = \varphi(x) \quad w = \psi(x) \dots z = F(x)$$

a ich iloczyn

$$y = u \cdot v \cdot w \dots z$$

Stosując wzór poprzedzający, otrzymamy kolejno:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{d(vw \dots z)}{vw \dots z} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{d(w \dots z)}{w \dots z} = \dots$$

a w końcu

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots + \frac{dz}{z};$$

Różniczka logarytmowa iloczynu iluokolwiek czynników równa jest summie różniczek logarytmowych czynników.

Aby otrzymać różniczkę zwyczajną, dość jest pomnożyć wzór poprzedzający przez iloczyn

$$y = uvw \dots z$$

co daje

$$dy = vw \dots z du + uv \dots z dv + uv \dots z dw + \dots + uvw \dots dz.$$

Pochodna iloczynu iluokolwiek czynników będzie miała wyrażenie

$$\frac{dy}{dx} = vw \dots z \frac{du}{dx} + uv \dots z \frac{dv}{dx} + uv \dots z \frac{dw}{dx} + \dots + uvw \dots \frac{dz}{dx}.$$

Weźmy teraz z funkcji przestępnych naprzód logarytm.

Logarytm. Niech będzie funkcyą

$$y = \log x$$

gdzie x jest zmienną lub funkcyą zmienną niezależną, a y jej logarytm wziętym względem jakiegokolwiek zasady (base), którą nazwiemy a . Przypuszczamy nadto, że x zmieniając się przybierać może tylko wartości dodatne, większe od zera. Używając zwykłego znakowania, mamy

$$y + \Delta y = \log(x + \Delta x)$$

złąd

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

oznaczywszy przez m stosunek $\frac{\Delta x}{x}$, czyli założywszy

$$\Delta x = \frac{x}{m}$$

m zwiększa się bez granic, (x z założenia jest większym od zera) w miarę jak Δx zdąża do zera; podstawiając, otrzymamy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{x} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Lecz wiemy z wiadomości wstępnych o szeregach, że

$$\operatorname{gr}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = 2,718981829439035 \dots$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie; więc

$$\operatorname{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log e$$

czyli pochodna

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e$$

lub różniczka

$$(1) \quad dy = \frac{dx}{x} \log e$$

różniczka logarytmu zmienną, równa się ilorazowi różniczki zmienną podzielonej przez zmienną, pomnożonemu przez logarytm liczby e .

Jeżeli logarytm dany jest logarytmem naturalnym

$$y = l.x$$

którego zasadą jest e

$$l.e = 1$$

mamy

$$(2) \quad d \log x = \frac{dx}{x}$$

różniczka logarytmu naturalnego zmiennej, równa się ilorazowi różniczki zmiennej przez samą zmienną.

Gdyby x nie było zmienną niezależną, lecz funkcją pewnej zmiennej niezależnej z , pochodna wyrażona byłaby przez

$$(3) \quad \frac{d \log x}{dz} = \frac{\log e}{x} \frac{dx}{dz}$$

$$(4) \quad \frac{d \log x}{dz} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dz}.$$

Weźmy jedną z funkcji trygonometrycznych czyli kątowych.

WSTAWA. Niech będzie

$$y = \text{wst } x,$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmiennej niezależnej. Używając zwykłego znakowania :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)$$

czyli

$$\Delta y = \text{wst}(x + \Delta x) - \text{wst } x = 2 \text{wst} \frac{\Delta x}{2} \text{dos} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

złąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{wst} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \text{dos} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

przechodząc do granic i zważywszy, że gdy Δx zdąży do zera :

$$\text{gr} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \text{gr} \frac{\text{wst} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1, \quad \text{gr} \text{dos} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \text{dos } x$$

otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \text{dos } x \quad \text{lub} \quad dy = \text{dos } x \, dx;$$

a że $\text{dos } x = \text{wst} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \text{wst} \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$, więc powyższe wyrażenie można napisać

$$d \text{wst } x = \text{wst} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx.$$

Różniczka wstawy równa się dostawie pomnożonej przez różniczkę łuku; a uważając x za zmienną niezależną, pochodna wstawy względem łuku równa się dostawie, lub wstawie łuku zwiększonego o $\frac{\pi}{2}$.

Nakoniec, weźmy jedną z funkcji kołowych.

ŁUK $\text{wst } x$. Niech będzie

$$y = \text{łuk wst } x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmienną niezależną; ztąd

$$x = \text{wst } y$$

a zatem

$$dx = \text{dos } y \quad dy = \sqrt{1-x^2} \, dy$$

czyli

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{lub} \quad d\text{łuk wst } x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

znak pierwiastku wziąć należy ten sam, co znak $\text{dos } y$, to jest odpowiadającej wartości zmiennej x , czyli wstawie daną.

Podobnie znaleźć można różniczki i innych funkcji kołowych.

IX

ROZNICZKOWANIE FUNKCYJ ZŁOŻONYCH I NIEWYRAŻNYCH JEDNEJ ZMIENNEJ NIEZALEŻNEJ.

Znając różniczki funkcji prostych, za pomocą twierdzenia na różniczkowanie funkcji funkcji, z łatwością możemy różniczkować wszelkie funkcje znane, złożone z funkcji zasadniczych, których otrzymaliśmy różniczki i pochodne. Najłatwiej jest postępować według jednego z dwóch następujących sposobów:

1^o Różniczkowanie przez podstawienie.

Różniczkowanie za pomocą *podstawienia* polega na tem, że funkcję daną uważamy jako złożoną z kilku funkcji prostszych, i otrzymujemy jej różniczkę wyrażoną przez różniczki tych funkcji prostszych. Każda z tych ostatnich funkcji może być znów złożona z kilku funkcji jeszcze prostszych i różniczka jej wyrażoną przez różniczki tych ostatnich i t. d. aż ostatecznie działanie sprowadzonym zostaje do różniczek funkcji zasadniczych znanych, które podstawione w poprzednie i t. d. dadzą na wypadek różniczkę funkcji daną, wyrażoną przez różniczkę zmiennej niezależnej, pomnożoną przez pewną funkcję zmiennej niezależnej.

2^o Różniczkowanie częściowe.

Niech będzie funkcja ciągła

$$(1) \quad y = F(u, v)$$

dwóch funkcji ciągłych u i v zmiennej niezależnej x :

$$(2) \quad u = \varphi(x) \quad v = \psi(x).$$

Pan Folkierski używając częścią zwykłego, częścią na nowo przybranego znakowania otrzymuje za pomocą ścisłego rozumowania, na pochodną funkcji y względem zmiennej niezależnej x wyrażenie równie jasne jak proste następujące:

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = F_u(u, v) \frac{du}{dx} + F_v(u, v) \frac{dv}{dx}$$

pochodna funkcji złożonej z dwóch funkcji, równa się sumie iloczynów pochodnych częściowych względem

każdą z funkcji składających, przez pochodną odpowiedniej funkcji składającej względem zmiennej niezależnej.

Różniczkę funkcji złożonej otrzymamy mnożąc przez dx

$$(4) \quad dy = F'_u(u, v) du + F'_v(u, v) dv$$

gdzie $F'_u(u, v)du$, $F'_v(u, v)dv$ są różniczkami funkcji danej otrzymanymi uważając kolejno jedną z funkcji składających za stałą.

Pochodne częściowe oznaczать będziemy w następujący sposób :

$$F'_u(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$F'_v(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v}$$

mamy zatem

$$(5) \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Ile razy używać będziemy znaku ∂ uważać będziemy, że różniczkując funkcję złożoną uważamy jedną tylko funkcję składającą za zmienną, inne za stałe.

Iloczyn $\frac{\partial y}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial v} dv$, pochodnej częściowej, względem jednej ze zmiennych u, v przez różniczkę téjże zmiennej, nazywamy *różniczkami częściowymi*.

Twierdzenie zawarte w równaniu (5) rozciągnąć można z łatwością do funkcji złożonych z ilukolwiek funkcji. Niech będzie funkcja

$$y = F(u, v, w \dots z)$$

gdzie $u, v, w \dots z$ są funkcjami zmiennej niezależnej. P. Folkierski ściśle rozumując otrzymuje

$$(6) \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \dots + \frac{\partial y}{\partial z} dz$$

gdzie $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w} \dots \frac{\partial y}{\partial z}$, wyrażają pochodne częściowe, funkcji y względem $u, v, w \dots z$; czyli $\frac{\partial y}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial w} dw \dots \frac{\partial y}{\partial z} dz$ różniczki funkcji y otrzymane, uważając kolejno jedną z funkcji $u, v, w \dots z$ za zmienną, a pozostałe za stałe. Możemy więc wysłowić :

TWIERDZENIE. *Różniczka funkcji złożonej z ilukolwiek funkcji jednej zmiennej niezależnej, równa się summie różniczek częściowych otrzymanych, uważając kolejno jedną z funkcji składających jako zmienną, pozostające jako stałe.*

W wyrażeniu (6) różniczki dy funkcji złożonej, zmienna niezależna x wcale się nie znajduje wyraźnie. Biorąc pochodną, dość jest podzielić różniczkę tę (6) przez różniczkę dx zmiennej niezależnej :

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{dw}{dx} + \dots + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{dz}{dx}.$$

Lecz wyrażenie (6) jest ogólniejszém, bo zamiast zmiennej niezależnej x możemy z łatwością pod-

w dalszym ciągu: nateraz przypuścimy, że do związku (1) dodane zostają warunki określające ściśle y jako funkcję x : na przykład w razie równania 2go stopnia że pierwiastek ma być brany zawsze ze znakiem $+$, lub zawsze ze znakiem $-$.

I. Weźmy zatem pod uwagę funkcję daną przez równanie $f(x, y) = 0$ pomiędzy dwiema zmiennymi x i y . Równanie to daje nam y jako funkcję x , więc

$$f(x, y)$$

może być uważane jako funkcja złożona, a różniczka jój będzie [różniczkowanie częściowe]

$$d[f(x, y)] = \frac{\partial [f(x, y)]}{\partial x} dx + \frac{\partial [f(x, y)]}{\partial y} dy,$$

co zwykle przez skrócenie piszemy

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy;$$

a że $f(x, y)$ jest stałą, to jest równą zero, jój różniczka zupełna df jest równą 0, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

równanie, które daje nam różniczkę

$$dy = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} dx$$

lub pochodną

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

funkcyi y względem zmiennej niezależnej x .

II. Zanim przyjdziemy do przypadku ogólnego, weźmy jeszcze pod uwagę dwa równania

$$(4) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

pomiędzy trzema zmiennymi x, y, z . Ponieważ jedną z tych zmiennych, na przykład y , możemy wyrugować, otrzymując jój wartość z drugiego równania i podstawiając w pierwsze, które da nam w takim razie z wyrażone przez x ; ponieważ moglibyśmy również wyrugowawszy z , otrzymać y wyrażone przez samo x : więc układ (4) przedstawia nam jedną tylko zmienną niezależną na przykład x i dwie funkcje tej zmiennej niezależnej y i z . Uważając funkcje f i F jako złożone, prawidłó (6) da nam, zakładając różniczki zupełne funkcyj tych stałych, bo równych zero, równaniemi zero:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując dwa równania (2), co do dy, dz , otrzymamy :

$$(3) \quad \begin{cases} dy = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z}} dx \\ dz = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z}} dx \end{cases}$$

a że pochodne częściowe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ a z łatwością otrzymać możemy z równań (4), więc wartości (3) wyznaczają nam zupełnie różniczki i pochodne funkcji y i z względem zmiennej niezależnej x , przyczem niepotrzebujemy rozwiązywać równań (2).

III. Przejdźmy na koniec do przypadku ogólnego. Niech będzie n równań

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, x_{n+1}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, x_{n+1}) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, x_{n+1}) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

między $n+1$ zmiennymi. Możemy, rozwiązując te równania, wyrazić kolejno każdą z n zmiennych na przykład $x_2, x_3, \dots x_{n+1}$, przez jedną z nich : x_1 . Układ (1) przedstawia nam więc n funkcji $x_2, x_3, \dots x_{n+1}$ jednej niezależnej na przykład x_1 . Uważając więc funkcje $f_1, f_2, f_3, \dots f_n$ jako funkcje złożone, różniczkując według prawidła (6) i zakładając różniczki te funkcji równych 0, równani 0, otrzymamy :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial f_3}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_3}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_n}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Równania te stopnia 1^{go} w liczbie n pomiędzy $n+1$ nieznanymi : $dx_1, dx_2, dx_3 \dots dx_n, dx_{n+1}$, wyznaczają nam w ogólności n z tych nieznanych różniczek funkcji, przez jedną z nich uważaną jako różniczkę zmiennej niezależnej. Za zmienną niezależną możemy przyjąć którąkolwiek ze zmiennych $x_1, x_2, x_3 \dots x_n, x_{n+1}$, niezmieniając układu (2) : pozostałe będą jej funkcjami. Spółczynniki

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} \dots$$

otrzymamy z łatwością z równań (1). Działanie za pomocą którego z układu (1) otrzymujemy układ (2), nazywamy różniczkowaniem równań (1).

stałymi dowolnymi $c_1, c_2, c_3 \dots c_n$. Różniczkując układ (1) podług znanego prawidła otrzymamy :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dx_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dx_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} \frac{dx_{n+1}}{dx_1} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dx_1} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dx_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} \frac{dx_{n+1}}{dx_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial f_n}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dx_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dx_1} + \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} \frac{dx_{n+1}}{dx_1} = 0 \end{cases}$$

n równań, w których stałe dowolne $c_1, c_2, c_3 \dots c_n$ znajdują się pod znakami funkcyjnymi $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$. Rugując n stałych $c_1, c_2, c_3 \dots c_n$, z $2n$ równań (1) i (2) (na przykład wyciągając ich wartości z (1) i podstawiając w (2)) otrzymamy na wypadek w ogólności n równań kształtu :

$$\begin{aligned} F_1 \left(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, x_{n+1}, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \dots, \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_{n+1}}{dx_1} \right) &= 0 \\ F_2 \left(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, x_{n+1}, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \dots, \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_{n+1}}{dx_1} \right) &= 0 \\ \dots \\ F_n \left(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, x_{n+1}, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \dots, \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_{n+1}}{dx_1} \right) &= 0 \end{aligned}$$

po między $n+1$ zmiennymi i ich różniczkami lub pochodnymi, w które równania nie wchodzi już stałe $c_1, c_2, \dots c_n$, wyrugowane. Równania te nazywają *równaniami różniczkowymi jednoczesnymi*.

X

POCHODNE I RÓŻNICZKI WYŻSZYCH RZĘDÓW FUNKCYJ JEDNEJ ZMIENNEJ NIEZALEŻNEJ.

Rzędy pochodnych. Pochodna funkcyj pewnej zmiennej niezależnej, jest sama funkcją téj zmiennej niezależnej (w szczególnych tylko przypadkach może być zerem lub stałą); wzięwszy znów pochodną téj ostatniej funkcyj, otrzymamy *pochodną drugiego rzędu* funkcyj danej; wzięwszy pochodną téj pochodnej drugiego rzędu, otrzymamy *pochodną trzeciego rzędu* funkcyj danej, i t. d. : pochodna pochodnej $m-1$ rzędu, będzie *pochodną m -go rzędu* funkcyj danej.

Nicch będzie na przykład funkcya

$$y = x^m$$

pochodna jéj

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

jest funkcją zmiennej x ; oznaczmy ją przez y' :

$$y' = mx^{m-1}$$

Biorąc pochodną funkcyj y'

$$\frac{dy'}{dx} = m(m-1)x^{m-2} = y''$$

funkcja y' będzie pochodną drugiego rzędu funkcji y ; podobnie

$$\frac{dy''}{dx} = m(m-1)(m-2)x^{m-3} = y'''$$

będzie pochodną trzeciego rzędu funkcji y ; w ogólności

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = m(m-1)(m-2)\dots(m-u+1)x^{m-n} = y^{(n)}$$

będzie pochodną n -tego rzędu funkcji y .

Niech będzie w ogólności funkcja

$$y = f(x)$$

pochodną pierwszego rzędu, oznaczyliśmy przez

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

pochodne wyższych rzędów oznaczać będziemy przez

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} \text{ pochodną drugiego rzędu;}$$

$$f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx} \text{ pochodną trzeciego rzędu;}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} \text{ pochodną } n\text{-go rzędu.}$$

Nie potrzebujemy dodawać, że w ogólnym wyrażeniu, znak (n) lub $(n-1)$ nad znakiem funkcyjnym oznacza nie wykładnik, lecz rząd pochodnej.

Rzędy różniczek. Różniczkę funkcji

$$(1) \quad y = f(x)$$

określiliśmy przez równanie

$$(2) \quad dy = f'(x) dx$$

powiedzieliśmy nadto, że różniczką zmiennej niezależnej dx równą przyrostkowi nieskończenie małemu Δx uważamy zwykle jako niezależną od x .

Zastrzeżenie to, nie było jednak koniecznym przy uważaniu różniczek pierwszego rzędu. Przy uważaniu pochodnych wyższych rzędów zakładać będziemy koniecznie różniczkę dx zmiennej niezależnej, niezależną od zmiennej niezależnej x , to jest uważać ją będziemy jako stałą.

Różniczki zaś funkcji dy podobnie jak pochodna $f'(x)$ są *zmiennymi*, bo są zmieniającymi się zależnie od (x) .

Różniczkując więc wyrażenie (2), w którym uważamy dy i $f'(x)$ za zmienne, dx za stałą, zważywszy że z powyższego określenia

$$df'(x) = f''(x) dx$$

otrzymamy

$$d(dy) = dx d[f'(x)] = dx [f''(x) dx]$$

czyli

$$d.dy = f''(x) dx^2$$

Wyrażenie

$$d.dy$$

nazywamy *różniczką drugiego rzędu* funkcji y , i piszemy je przez skrócenie

$$d^2y$$

tak że

$$(3) \quad d^2y = f''(x) dx^2.$$

W podobny sposób różniczkując wyrażenie (3), w którym dx^2 podobnie jak dx , ma być uważanym jako stała, otrzymamy

$$d(d^2y) = dx^2 d[f''(x)]$$

a że określenia

$$df''(x) = f'''(x) dx$$

więc

$$d(d^2y) = dx^2 [f'''(x) dx]$$

czyli

$$(4) \quad d^3y = f'''(x) dx^3$$

oznaczając przez skrócenie

$$d.d^2y = d^3y$$

nazywając wyrażenie to *różniczką 3go rzędu* funkcji y .

W ogólności, różniczką n tego rzędu będzie

$$d.d^{n-1}y = dx^{n-1} d[f^{(n-1)}(x)]$$

czyli

$$(5) \quad d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$$

co możemy napisać także

$$(6) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Na oznaczenie pochodnych wyższych rzędów funkcji używamy często znakowania (6); różniczkę w takim razie napiszemy

$$d^n y = \frac{d^n y}{dx^n} dx^n$$

co jest tożsamością z określenia, że pochodna n tego rzędu jest ilorazem z różniczki n tego rzędu funkcji, przez n ta potęgę różniczki zmiennej niezależnej.

Dogodnym jest często znakowanie Cauch'ego pochodnej jedną głoską D , przyczem zmienna niezależna pisze się jako wskaźnik u dołu, a rząd pochodnej jak wykładnik u góry: tak, że

$$D_x y = \frac{dy}{dx} \quad D^2_x y = \frac{d^2 y}{dx^2} \dots D^n_x y = \frac{d^n y}{dx^n}$$

lub

$$D_x f(x) = f'(x), \quad D^2_x f(x) = f''(x), \quad \dots \quad D^n_x f(x) = f^{(n)}(x).$$

UWAGA. Nie potrzebujemy dodawać, że

$$d^2y, d^ny, \dots d^{n-1}y, dy \dots$$

oznaczają nie potęgi $2^{\text{go}}, 3^{\text{ci}}, \dots n^{\text{ty}}$ różniczek dy , lecz są różniczkami rzędów $2^{\text{go}}, 3^{\text{go}}, \dots n^{\text{go}}$ funkcji y ; potęgi oznaczać będziemy jak zwykle przez

$$dy^2, dy^3, dy^{n-1}, dy^n \dots$$

tak, że

$$d^2y = d(dy), \quad d^3y = d(d^2y) \dots d^ny = d(d^{n-1}y)$$

zaś

$$dy^2 = (dy)^2, \quad dy^3 = (dy)^3 \dots dy^n = (dy)^n$$

co jest znów różnym od różniczek pierwszego rzędu :

$$d(y^2) = 2ydy, \quad d(y^3) = 3y^2dy \dots d(y^n) = ny^{n-1}dy$$

potęgi $2^{\text{ej}}, 3^{\text{ej}} \dots n^{\text{tej}}$ funkcji y .

Nie należy również uważać

$$dx^2, dx^3 \dots dx^n \dots$$

za różniczek drugiego trzeciego $\dots n^{\text{go}}$ rzędu zmienną niezależną: bo różniczka pierwszego rzędu będąc stałą, to jest niezależną od x , jakśmy to tyle razy powtarzali, pochodne jej a więc i różniczki wyższych rzędów są wszystkie zerami :

$$d^2x = 0, \quad d^3x = 0 \dots d^nx = 0 \dots$$

Twierdzenie że pochodna jest ilorazem różniczek funkcji i zmienną niezależną, nie może mieć miejsca dla różniczek i pochodnych wyższych rzędów nad pierwszy.

Zamiast mówić: *pochodna lub różniczka pierwszego, drugiego $\dots n^{\text{go}}$ rzędu*, mówią często: *pochodna, różniczka pierwsza, druga $\dots n^{\text{ta}}$* , przez skrócenia.

Jak ta uwaga p. Folkierskiego dla początkujących jest ważną nie potrzebujemy nad tém długo się zastanawiać.

Różniczki wyższych rzędów funkcji zasadniczych.

Funkcje algebraiczne. Niech będzie funkcja

$$y = x^m$$

widzieliśmy już powyżej, że

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)x^{m-n}$$

Ogólności tego wzoru, można z łatwością dowieść wiadomym sposobem, zakładając, że ma miejsce dla $n=k$, gdzie k oznacza całkowitą dodatnią i dowodząc go dla $n=k+1$. Jakoż różniczkując pochodną

$$\frac{d^k y}{dx^k} = m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)x^{m-k}$$

otrzymamy

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)(m-k)x^{m-(k+1)}$$

wypadek z podstawienia $n=k+1$ we wzorze danym.

Wzór więc ten zachodząc dla $k=1, k=2$, zachodzi dla $k=3, k=4 \dots k=n$, a więc jest ogólnym.

Jeżeli m jest całkowitą dodatnią, m -ta pochodna będzie stałą, a zakładając $m=n$ w powyższym wyrażeniu otrzymamy:

$$\frac{d^m x^m}{dx^m} \text{ lub } \frac{d^m y}{dx^m} = m(m-1)(m-2) \dots 3.2.1$$

następne pochodne będą więc zerami.

Podobnie, wielomian całkowitego stopnia m -go

$$y = ax^m + bx^{m-1} + \dots + px + q$$

ma m -tą pochodną stałą

$$\frac{d^m y}{dx^m} = am(m-1)(m-2) \dots 3.2.1$$

a następne równe zero.

Funkcja logarytmowa. Niech będzie funkcja

$$y = \log x$$

Mamy

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1} \log e$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -1 \cdot x^{-2} \log e$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 1 \cdot 2x^{-3} \log e$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} 1.2.3 \dots (n-1)x^{-n} \log e.$$

Jeżeli logarytm jest naturalnym

$$\frac{d^n 1.x}{dx^n} = (-1)^{n-1} 1.2.3 \dots (n-1)x^{-n}$$

Pochodne wszystkich rzędów funkcji logarytmowej są funkcjami algebraicznymi.

Funkcja wykładnicza. Niech będzie

$$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x (\ln a)^2 \dots$$

a więc

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^x (\ln a)^n$$

Jeżeli $a = e$

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$$

Ogólności tych wzorów można z łatwością udowodnić jak powyżej.

Wszystkie pochodne funkcji wykładniczej są takimi samymi funkcjami wykładniczymi, pomnożonymi przez stałą potęgę całkowaną logarytmu naturalnego zasady.

Funkcje trygonometryczne. Niech będzie

$$y = \text{wst} x \quad y = \text{dos} x$$

mamy, biorąc kolejno pochodne

$$\begin{array}{ll} \frac{dy}{dx} = \text{dos} x & \frac{dy}{dx} = -\text{wst} x \\ \frac{dy^1}{dx^2} = -\text{wst} x & \frac{dy^2}{dx^2} = -\text{dos} x \\ \frac{dy^3}{dx^3} = -\text{dos} x & \frac{dy^4}{dx^3} = \text{wst} x \\ \frac{dy^5}{dx^4} = \text{wst} x & \frac{dy^6}{dx^4} = \text{dos} x \end{array}$$

Pochodne powtarzają się co cztery rzędy. Aby znaleźć wzór ogólny, weźmy pod uwagę funkcję.

$$x = \text{wst}(x + \alpha)$$

gdzie α jest stałą :

$$\frac{dy}{dx} = \text{dos}(x + \alpha) = \text{wst}\left(x + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

tak, że pochodną wstawy otrzymujemy dodając do łuku stałą $\frac{\pi}{2}$ i biorąc znów wstawę. Jakiegolwiek więc będzie n mamy zawsze

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \text{wst}\left(x + \alpha + n \frac{\pi}{2}\right)$$

Zakładając $\alpha = 0$ lub $\alpha = \frac{\pi}{2}$ otrzymamy dwa wzory ogólne :

$$\begin{array}{l} \frac{d^n \text{wst} x}{dx^n} = \text{wst}\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{d^n \text{dos} x}{dx^n} = \text{dos}\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

Można więc powiedzieć że i funkcyje trygonometryczne rodzą pochodne podobne im samym, własność podobna funkcyom wykładniczym.

Funkcye kołowe mają pierwsze zaraz pochodne algebraiczne, a zatém co do dalszych, podchodzą pod ogół funkcyj algebraicznych.

Pochodne i różniczki wyższych rzędów funkcyj złożonych i niewyraźnych.

Umiejąc znaleźć pochodną pierwszego rzędu funkcyi złożonej, z łatwością przez n różniczkowań po sobie następujących otrzymać możemy pochodną n^{go} rzędu. Często jednak pożytecznóm będzie postawienie ogólnego wzoru na pochodną lub różniczkę n^{go} rzędu funkcyi złożonej, wyrażoną przez pochodne lub różniczki funkcyj prostych składających

Pochodna iloczynu. Weźmy naprzód pod uwagę funkcyę

$$y = uv$$

będącą iloczynem dwóch funkcyj u i v zmiennej niezależnej x . Wiemy już że

$$(1) \quad dx = vdu + u dv.$$

Różniczkując powtórnie otrzymamy

$$d^2y = d(vdu) + d(udv) = v d^2u + dv du + u d^2v + du dv$$

czyli

$$(2) \quad d^2y = v d^2u + 2dv du + u d^2v.$$

Różniczkując jeszcze raz otrzymamy w podobny sposób

$$d^3y = v d^3u + 3dv d^2u + 3du d^2v + u d^3v;$$

czyli

$$(3) \quad d^3y = v d^3u + 3dv d^2u + 3du d^2v + u d^3v.$$

Porównyując wzory (1), (2), (3), widzimy że w rozwinięciach różniczek funkcyi złożonej, rząd jednej z funkcyj składających zmniejsza się o jedność, a rząd drugiej zwiększa się o jedność od wyrazu do wyrazu, współczynniki liczebne są współczynnikami wyrazów odpowiednich rozwinięciu dwumianu; naprowadzeni więc jesteśmy na napisanie wzoru ogólnego

$$(4) \quad \begin{aligned} d^n y = & v d^n u + \frac{n}{1} dv d^{n-1} u + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2 v d^{n-2} u + \dots \\ & + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} d^k v d^{n-k} u + \dots + d^n v \cdot u \end{aligned}$$

Aby dowieść ogólności wzoru (4) dość jest dowieść, że jeżeli zachodzi dla rzędu n , zachodzi również dla rzędu $n+1$: wniesiemy następnie, że ponieważ zachodzi dla $n=3$ zrównania (3), zachodzi dla $n=4$, a więc i dla $n=5$ i t. d., jest więc ogólnym.

Różniczkując wzór (4), otrzymamy w samą rzecz:

$$\begin{aligned} d^{n+1} y = & v d^{n+1} u + \frac{n}{1} dv d^n u + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2 v d^{n-1} u + \dots + d^n v du \\ & + dv d^n u + \frac{n}{1} d^2 v d^{n-1} u + \dots + \frac{n}{1} d^n v du + d^{n+1} v \cdot u \end{aligned}$$

Łącząc wyrazy podobne jak $\frac{n}{1} dv d^n u$ i $dv d^n u$, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2 v d^{n-1} u$ i $\frac{n}{1} d^2 v d^{n-1} u$ i t. d. otrzymamy:

$$d^{n+1}(uv) = v d^{n+1} u + \frac{n+1}{1} dv d^n u + \frac{u(n+1)}{1 \cdot 2} d^2 u d^{n-1} u + \dots + d^{n+1} v \cdot u$$

wzór, którego otrzymalibyśmy byli wprost z (4), podstawiając za n wartość $n+1$. Wzór więc (4) jest ogólnym.

Wzór (4) można napisać *symbolicznie* w następujący sposób:

$$(5) \quad d^n(uv) = (du + dv)^{(n)}$$

uważając, że w rozwinięciu n -tej potęgi dwumianu

$$\begin{aligned} (du + dv)^n &= 1 \cdot du^n + \frac{n}{1} dv du^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} dv^2 du^{n-2} + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} dv^k du^{n-k} + \dots + dv^n \cdot 1 \end{aligned}$$

wszędzie zamiast wykładników różniczek du i dv pisać należy wskaźniki rzędów różniczkowania; w pierwszym zaś wyrazie, zastąpić 1, to jest potęgę 0 różniczki dv , przez v , w ostatnim potęgę 0 różniczki du przez u , przyjmując że różniczką rzędu 0 funkcji jest sama funkcja, co jest usprawiedliwionem.

W ogólności P. Folkierski ściśle dowodzi, że różniczka iloczynu ilużkolwiek czynników $u, v, w \dots z$ będących funkcjami jednej zmiennej niezależnej x , może być przedstawioną za pomocą wzoru *symbolicznego*.

$$(6) \quad d^n(nuv \dots z) = (du + dv + dw + \dots + dz)^{(n)}$$

różniącego się od rozwinięcia n -tej potęgi summy różniczek tem, że wszędzie zamiast potęg odpowiednich różniczek, piszemy wskaźniki rzędów różniczkowania i że zastępujemy potęgę zero tej różniczki która nie znajduje się w pewnym wyrazie czyli jedność, przez odpowiednią funkcję.

Różniczkowanie częściowe wyższych rzędów.

Twierdzenie. Oznaczmy przez $f(u, v)$ funkcję dwóch funkcji u i v zmiennej niezależnej x , przez $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$, $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$ pochodne częściowe funkcji $f(u, v)$ względem u i v : powiadam, że pochodna częściowa wyrażenia $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$ względem v równa się pochodnej częściowej wyrażenia $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$ względem u ; to jest, że

$$\frac{\partial \left[\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right]}{\partial v} = \frac{\partial \left[\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \right]}{\partial u}$$

byłoby

$$f(u, v), \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$$

były funkcjami ciągłymi zmiennych u i v .

To twierdzenie P. Folkierski ściśle uzasadnia.

Pochodne te drugiego rzędu oznaczamy przez skrócenie przez $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$: twierdzenie poprzedzające zawartém będzie w równości

$$\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v \partial u}$$

która wyraża że *porządek różniczkowania częściowego nie wpływa na wartość pochodnej częściowej*.

Twierdzenie to, które z łatwością uogólnić można do funkcji złożonej z itukolwiek funkcji jednej zmiennej niezależnej, daje nam wyrażenia pochodnych częściowych wyższych rzędów funkcji złożonych.

Niech będzie funkcja

$$(3) \quad y = f(u, v, w \dots z)$$

złożona z m funkcji $u, v, w \dots z$ zmiennej niezależnej x . Ponieważ możemy brać pochodne częściowe tej funkcji względem każdej ze zmiennych $u, v, w \dots z$, otrzymamy m pochodnych pierwszego rzędu

$$\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} \dots \frac{\partial y}{\partial z}$$

Każda z tych pochodnych jest w ogólności funkcją wszystkich zmiennych $u, v, w \dots z$, każda więc miałaby znów m pochodnych częściowych, czyli mielibyśmy razem m^2 pochodnych drugiego rzędu. Lecz ponieważ porządek różniczkowania częściowego nie wpływa na wartość pochodnych, właściwie będziemy mieli tylko tyle pochodnych częściowych drugiego rzędu, ile możemy uczynić zestawień z m przedmiotów dwa po dwa, (wraz z temi, które otrzymujemy podstawiając jeden dwa razy) to jest

$$\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m^2 - m + 2m}{2} = \frac{m^2 + m}{2} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Pochodne te oznaczać będziemy jak następuje

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}, & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z} \\ & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}, & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z} \\ & & \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}, & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial w \partial z} \\ & & & & \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}. \end{array}$$

W podobny sposób, różniczkując częściowo pochodne drugiego rzędu, otrzymamy

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3}$$

pochodnych częściowych trzeciego rzędu, które oznaczymy przez

$$\frac{\partial^3 y}{\partial u^3}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial u^2 \partial v}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v^2}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v \partial w} \quad \text{i t. d.}$$

W podobny sposób otrzymać można różniczki wyższych rzędów d^3y, d^4y, \dots ; lecz wzory stają się coraz dłuższymi i w praktyce zwykle daleko łatwiej postępować wprost, otrzymując naprzód wyrażenie *różniczki zupełnej pierwszego rzędu* jako funkcję zmiennych danych (podstawiając za pochodne częściowe ich wartości); następnie różniczkując tak otrzymane wyrażenie zwykłym sposobem, utworzyć *różniczkę drugą* w funkcji zmiennych danych; z różniczki drugiej różniczkę trzecią ... z różniczki $(n-1)$ różniczkę n ą.

Pochodne: drugą, trzecią ... funkcji y względem zmiennej niezależnej x otrzymamy, dzieląc różniczkę zupełną drugą, trzecią, ... przez potęgę drugą, trzecią, ... przyrostku stałego dx zmiennej niezależnej x .

UWAGA. Gdyby funkcje składające $u, v, w \dots$ z były wszystkie funkcjami linijnymi zmiennej niezależnej x :

$$u = a_1x + b_1, \quad v = a_2x + b_2, \quad w = a_3x + b_3, \quad \dots \quad z = a_nx + b_n$$

mielibyśmy

$$d^2u = 0 \quad d^2v = 0 \quad d^2w = 0 \quad \dots \quad d^2z = 0$$

a wzór (4) stałby się

$$\begin{aligned} d^2y = & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} du dv + \dots + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z} du dz \\ & + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} dv^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z} dv dz \\ & + \dots + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz^2; \end{aligned}$$

wyrażenie, które przedstawić możemy symbolicznie:

$$d^2y = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \dots + \frac{\partial y}{\partial z} dz \right)^{(2)} = (dy)^{(2)}$$

rozwijając w wyrażeniu (1) różniczki pierwszego rzędu jak kwadrat i zastępując wykładniki przez wskaźniki rzędów różniczkowania.

Prawidło to uogólnić można dla różniczki jakiegokolwiek rzędu:

Jeżeli funkcje $u, v, w \dots$ z składające funkcję

$$y = f(u, v, \dots, z)$$

są funkcjami linijnymi zmiennej niezależnej x , powiadam że

$$d^ny = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \dots + \frac{\partial y}{\partial z} dz \right)^{(n)} = (dy)^{(n)}$$

byleby rozwijając nawias jak n ą potęgę, zastępować wszędzie wykładniki przez wskaźniki rzędów różniczkowania: to jest iloczyn

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^{\alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^{\beta} \dots \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^{\mu}$$

przez pochodne częściowe

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots+\mu} f}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \dots \partial z^{\mu}}$$

Ogólności tego twierdzenia udowodnić można z łatwością, przypuszczając że zachodzi dla rzędu n i dowodząc że zachodzi również dla rzędu $n+1$: jak powyżej.

Różniczki wyższych rzędów funkcji niewyraźnych. Weźmy naprzód pod uwagę funkcję jednej zmiennej niezależnej, wyrażoną przez równanie

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

które daje y jako funkcję zmiennej niezależnej x . Uważając funkcję tę jako funkcję złożoną i zakładając różniczki zupełne tej funkcji mającej wartość stałą równą zero, równaniami zera, otrzymamy uważając dx za stałą, dy i pochodne częściowe za zmienne:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \right) + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y = 0 \\ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 \right) \\ \quad + 3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \right) d^2 y + \frac{\partial f}{\partial y} d^3 y = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

Pierwsze z tych równań daje nam wartość pierwszej różniczki dy podstawivszy wartość tę w równanie drugie, otrzymamy z niego wartość drugiej różniczki $d^2 y$; podstawivszy tą i poprzednią wartość w równanie trzecie otrzymamy z niego wartość trzeciej różniczki $d^3 y$ i t. d. Różniczki te wyrażone są przez pochodne częściowe różnych rzędów funkcji $f(x, y)$ które to pochodne z równania (1) z łatwością, różniczkując, otrzymanymi być mogą.

Mając różniczki, mamy od razu pochodne dzieląc przez odpowiednią potęgę dx :

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \dots$$

Weźmy teraz przykład ogólny n równań

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0 \end{array} \right.$$

między $n+1$ zmiennymi. Z tych równań moglibyśmy w ogólności wyrugować $n-1$ zmiennych czyli wyrazić wszystkie zmienne przez jedną z nich. Mamy więc tu jedną zmienną niezależną (którąkolwiek z x_1, x_2, \dots, x_{n+1}); i n funkcji tej zmiennej niezależnej (pozostałe z x_1, \dots, x_{n+1}); idzie nam o wyznaczenie różniczek i pochodnych różnych rzędów tych funkcji.

Różniczki pierwszego rzędu w liczbie n są wyznaczone jakieśmy widzieli za pomocą n równań

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \end{cases}$$

pierwszego stopnia co do $dx_1, dx_2, \dots, dx_n, dx_{n+1}$, które wyznaczają n z tych różniczek przez jedną uważaną jako różniczkę zmiennej niezależnej. Pochodne częściowe funkcji f_1, f_2, \dots, f_n otrzymamy z łatwością przez różniczkowanie równań (1).

Różniczkując układ (2) otrzymamy

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} d^2 x_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} d^2 x_2 + \dots \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} d^2 x_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} d^2 x_2 + \dots \right) = 0 \\ \dots \\ \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} d^2 x_1 + \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2^2} d^2 x_2 + \dots \right) = 0 \end{cases}$$

n równań pierwszego stopnia co do różniczek drugiego rzędu $d^2 x_1, d^2 x_2, \dots, d^2 x_{n+1}$ w liczbie $n+1$. Lecz różniczka drugiego rzędu zmiennej niezależnej jest równa 0 (jeżeli na przykład x_1 obierzemy za zmienną niezależną, założyć należy $d^2 x_1 = 0$), bo różniczka jej pierwszego rzędu jest stałą: mamy więc n równań o n nieznanach różniczkach drugiego rzędu funkcji: różniczki te z równań powyższych otrzymać możemy, podstawiając w nich różniczki pierwszego rzędu otrzymane z równań (2), i pochodne otrzymane przez różniczkowanie równań (1).

W podobny sposób otrzymać można różniczki i pochodne 3go, 4go \dots rzędu: różniczkując równania (3) i t. d.

Rugowanie stałych dowolnych. Równania różniczkowe wyższych rzędów.

Niech będzie równanie

$$(1) \quad f(x, y, c_1, c_2, c_3 \dots c_n) = 0$$

zawierające dwie zmienne x i y , i n stałych: $c_1 \dots c_n$.

Różniczkując n razy to równanie, otrzymamy n równań

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

(podzieliwszy pierwsze przez dx , drugie przez $dx^2 \dots$, aby zamiast różniczek wprowadzić pochodne)

między pochodnymi funkei y względem zmiennej niezależnej x od pierwszego aż do n -go rzędu włącznie i pochodnymi częściowymi funkei f względem x i y od pierwszego aż do n -go rzędu włącznie, pochodnymi, które zawierają w ogólności stałe c_1, c_2, \dots, c_n . Rugując te n stałych pomiędzy $n+1$ równaniami (1) i (2), otrzymamy równanie

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

między zmienną niezależną x , funkcją y i pochodnymi od pierwszego aż do n -go rzędu włącznie funkei względem zmiennej niezależnej. Równanie to, niezawierające wyrugowanych stałych, nazywamy *równaniem różniczkowym n -go rzędu*, którego równanie (1) jest równaniem pierwotnym.

XI

RÓŻNICZKOWANIE FUNKCYJ WIELU ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH.

Określenia. — Pochodne i różniczki częściowe funkei wielu zmiennych niezależnych. — Różniczka zupełna i jej własności. — Pochodne częściowe i różniczki zupełne wyższych rzędów. — Funkeie złożone i niewyraźne wielu zmiennych niezależnych. — Rugowanie funkei dowolnych. — Równania różniczkowe o pochodnych częściowych. — Własności funkei jednorodnych.

Wszystkie te twierdzenia i własności Rachunku różniczkowego ściśle, jasno i wyborną polszczyzną pan Folkiński starannie udowodnił.

ZAMIANA ZMIENNYCH.

Zamiana zmiennych dla funkei jednej zmiennej niezależnej. — Zamiana zmiennej niezależnej. — Zamiana wszystkich zmiennych. — Zamiana zmiennych dla funkei wielu zmiennych niezależnych. — Przekształcenie Legendre'a.

Ścisłość, jasność i często naturalna wielkich pisarzy narodowych prostota są główne cechy znamienujące dobitnie piękne dowodzenia pana Folkińskiego. Tym sposobem bez przerwy i niejako jednym ciągiem pióra młody nasz autor przeprowadził dokładnie cały swój Rachunek różniczkowy. Rozliczne i wyborne dobrane na końcu każdego rozdziału umieszczone całkiem rozwiązane przykłady i podane do rozwiązania ćwiczenia dopełniają i stanowczo wykazują niezmierną dla młodzieży kształcącej się użyteczność elementarnego dzieła pana Folkińskiego.

XII

ZASTOSOWANIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO TEORII FUNKCYJ.

WZÓR TAYLORA.

Dzieło Taylora pod tytułem *Methodus incrementorum* zawiera, obok bardzo pięknych zastosowań, nowy sposób przedstawienia analizy nieskończenie małych przywiązując ją do rachunku różnic skończonych. Tam to ogłosił on po raz pierwszy sławne swe twierdzenie które nosi jego imię, i którego prace największych geometrów ciągle odtąd podnosiły wziętość. Wszystkie szeregi dotąd znane są łatwemi powyższego twierdzenia wnioskami, i może ono przytém dostarczyć nieskończoną ilość jeszcze innych. Taylor jednak nie przytoczył żadnego swego wzoru zastosowania, i ta okoliczność jasno

tłumaczy niewielką ważność jaką geometrowie zdają się na początku przywiązywać do jego odkrycia. Dziś nawet twierdzenie Taylora, zmienione w sposób nieznaczący, często bywa wytknięte pod imieniem/twierdzenia Maclaurina, i było często cytowane jako należące do pomysłów D'alamberta, który, nie wiedząc o jego poprzednim i bardzo już dawnym ogłoszeniu, podał je jako nowe w ówczesnej Encyklopedyi.

Taylor jest dalekim wreszcie od zupełnego ogarnienia rozległego znaczenia kwestyi; badanie warunków koniecznych żeby jego szereg był zbieżnym nie mogło się wyrobić jak tylko z wielkim trudem i powoli. Sławni geometrowie nie wahali się wprowadzić wiele głębokich spostrzeżeń do swych nowych wzorów Taylora dowodząc wyjaśniających coraz lepiej wszystkie dotyczące zbieżności szeregu przepisy, i oto dopiero niedawno Cauchy potrafił наконец zamknąć je pod pewne ogólne prawo, które słusznie sam autor uważał jako jedno z najważniejszych swoich odkryć.

Wszyscy geometrowie jednomyślnie dziś się zgadzają uważać zbieżność szeregu jako warunek konieczny jego prawego użycia. Pierwsi wynalazcy tej wielkiej teorii podzielali to zdanie, co zdaje się wreszcie równie prostym jak naturalnym. Szeregi których oni używali powinny były zawsze, podług nich, dawać wartość liczebną funkcyi przedstawionej. Leibnitz występuje pierwszy z żądaniem wyraźnym przepisów zbieżności.

Czytamy w liście przezeń do Hermanna adresowanym, 2 lipca 1705 roku :

« Nie żądam ja wcale aby poszukiwano wartości jakiegokolwiek szeregów pod formą skończoną; takie zagadnienie przewyższałoby widocznie siły geometrów. Pragnąłbym jednak usilnie, ażeby wynaleziono sposób decydujący stanowczo czy wartość wyrażona przez pewien szereg jest możliwa, to jest zbieżna, i to nieznając bynajmniej pochodzenia szeregu. W rzeczy samej, warunkiem jest koniecznym, w razie gdy szereg nieograniczony przedstawia ilość skończoną, żeby można było dowieść zbieżności tego szeregu, i żeby można było się zapewnić przedłużając go dostatecznie iż błąd popełniony może się stać mniejszym od pewnej oznaczonej ilości, tak małej jak się podoba. »

Przez długi czas jednakże geometrowie, prawie bez wyjątku, przyjęli na tym punkcie doktrynę dosyć dziwną; nieprzestając na zwykłych zastosowaniach dotyczących rozwinięć na szeregi w przypadkach prawych, to jest, gdy szeregi są zbieżne, mniemali za rzecz słuszną rozciągnąć te zastosowania bez restrykcji. Sam nawet Euler w błąd powszechny wpadając długo się przy nim fatalnie utrzymywał.

Dopiero na początku tego wieku Poisson uwagę geometrów ku prawdzie i ścisłości skierował, pokazując do jakich wypadków może doprowadzić użycie szeregów rozbieżnych. Kilka słów ognistych i oburzeń energicznych Gaussa i Abela zarówno się przychyliły tak do umorzenia tego geometrycznego zgorszenia (skandalu) jak i do trwałego ustalenia zupełnej potrzeby zbieżności, wyrzucając raz na zawsze z umiejętności błąd co, przywiązany do zasad, mógł zrodzić mnóstwo innych.

Prawidła pozwalające sądzić o zbieżności szeregu nabywają nowej wziętości gdy ta zbieżność została uznana za nieuchronnie potrzebną. Rozwiązanie zagadnienia w kilku przypadkach szczególnych jest tak dawne jak użycie szeregów; lecz całe i głębokie nad tym przedmiotem studium nie zostało wykonane jak tylko daleko później.

Możemy zacytować naprzód kilka przepisów prawie widocznych wskazanych przez D'alamberta, i dotyczących szeregów liczebnych, wyrażenie reszty szeregu Taylora przez Lagranża, studium ważnego szeregu którego Gauss podał warunek zbieżności przywiązując doń przepisy pełne wdzięku, i nakoniec liczne metody, z pod których bardzo mało przypadków wyłamać się mogą, służące dla wyznaczenia zbieżności szeregów liczebnych złożonych z wyrazów dodatnich.

Do badań warunków zbieżności szeregów, możemy przyłączyć, wykład metod ułatwiających ich summowanie przybliżone w razie gdy szeregi są powoli zbieżne. Powszechnie są użyte trzy opierające

się na zasadach bardzo różnych, i z których każda osobno wzięta, w pewnych przypadkach, będzie mogła się znaleźć daleko korzystniejszą aniżeli dwie inne. Jedna z tych metod należy się Stirlingowi, druga Eulerowi, a trzecią, co jest prawdziwie równie piękna jak wytworna, świeżo nam przedstawił p. Kummer.

Szereg Taylora, z przyczyny swego wielkiego uogólnienia, powinien być więcej jak jakakolwiek inna praca zwrócić uwagę geometrów; wyrażenie reszty, kolejno otrzymanej pod różnemi kształtami więcej lub mniej zastosowanemi do przypadków najznakomitszych które miano traktować, zdawało się, przed pięknymi pracami Cauchego, wydawać ostatnie słowo kwestyi uważanej pod względem teoretycznym. Zgłębiając wypadek Taylora, byleby tylko nie spuszczać z uwagi punktu widzenia pod jakim się on umieścił, spostrzega się tam naprzód i dosyć łatwo uogólnienie zasady na której spoczywa Rachunek różniczkowy: wzrost nieskończenie mały jakiegokolwiek bądź funkcyi, jeśli w rozwinięciu zaniedbamy nieskończenie małe rzędu wyższego nad pierwszy, jest proporcjonalny do wzrostu zmiennej niezależnej; wyjątki których możebność jest widoczna, ponieważ funkcyja pozostaje nieoznaczoną, nie mogą nigdy zachodzić tylko dla pewnych wartości szczególnych zmiennej niezależnej i twierdzenie pozostaje dokładnem w ogólności i dla wszelkiej funkcyi ciągłej. Jeśli się zajmiemy zgłębianiem kwestyi bliżej, ograniczając się zawsze jednak do przypadku wzrostu nieskończenie małego, dostředz albo dowieść łatwo można, że przewyżka przyrostku funkcyi nad częścią co może się nazwać główną i proporcjonalną do przyrostku zmiennej niezależnej, stanie się koniecznie proporcjonalną do kwadratu tegoż przyrostku, byleśmy w rozwinięciu zaniedbali nieskończenie małe rzędu wyższego nad drugi; część główna która została zaniedbaną w tém drugiem przybliżeniu jest sama proporcjonalną do sześciastu z przyrostku zmiennej niezależnej, i tak dalej nieograniczenie; wyjątki możebne zachodzą, nie dla funkcyj szczególnych, gdyż twierdzenie jest następstwem koniecznem prawa ciągłości, lecz dla wartości szczególnych zmiennej niezależnej dla których ciągłość jest zerwaną.

Ten punkt widzenia bardzo ważny i bardzo świetny twierdzenia Taylora nie dawałby przecież o niem jak tylko niezupełną znajomość.

Cauchy miał honor zająć się pierwszy przywiązaniem téj kwestyi ważnej do jój prawdziwych zasad. Możebność lub niemożebność rozwinięcia pewnej funkcyi podług wzoru Taylora może być rozeznana niepotrzebując napróżno wynajdywać wyrazów szeregu, byleby funkcyja mająca się rozwinąć była określona za pomocą wartości rzetelnych i urojonych zmiennej niezależnej. To wprowadzenie ilości urojonych do kwestyi dla której ich teoria zdaje się naprzód zupełnie obcą jest jednym z największych postępów jaki analiza pod wpływem genialnych pojęć Cauchego zrobiła w tym wieku.

Wyrażenia urojone przedstawiają się jako następstwa konieczne najprostszych formuł Algebry; pierwiastki zrównań drugiego stopnia niepodobne mają formę $a + b\sqrt{-1}$, co także jest formą pierwiastków wszelkiego zrównania algebraicznego, i w ogólności wypadków wynikłych z działań algebraicznych jakichkolwiek, wykonanych na takichże wyrażeniach. Te twierdzenia były przyjęte przez geometrów wprzód nim przystąpiono zająć się jasnym wykładem ich ścisłych dowodzeń. Euler umieścił je 1742, w *Miscelanea Berolinensia*, jakby już były mu dobrze natenczas znane. Wszakże dopiero w 1746 znajduje się pierwsze ich dowodzenie ogólne dane przez Dalemberta, dowodzenie niedostateczne, przynależć należy, równie jak i te wszystkie co były dane aż do memoriału w którym Gauss rozbiera na nowo tę kwestyę słusznie: ganiąc rozumowania przedstawione aż do czasu jego badań. Mało kwestyj wreszcie były częściej traktowane niż ilości urojone. Gauss im poświęcił nie mniej nad pięć memoriałów, i Cauchy, któremu często przyznawano pierwsze dowodzenie ścisłe, samże do urojonych powrócił w kilkokrotnych powtórzeniach.

Nietylko działania algebraiczne wykonane na wyrażeniach urojonych dają na wypadek wyrażenia téjże formy co one same, lecz jeszcze logarytm wyrażenia urojonego przyjmuje nieskończoną ilość

wartości, wszystkie formy $a + b\sqrt{-1}$, i potęga której wykładnik jest urojony może być podciągnięta pod tę samą formę, do jakiej każde wyrażenie urojone po wykonaniu na niem jakichkolwiek przekształceń algebraicznych zostaje zawsze przywiedzione. Jest to odkrycie ważne Eulera, przynoszące tém więcej honoru jego przenikliwości, iż dyskusye Leibnitza i Bernoulli'ego nad tym przedmiotem témbardziej jeszcze kwestyę podaną zaciemniły niewskazując żadnej drogi do jej rozwiązania. Euler rozproszył wszystkie te ciemności dając poznać wyrażenie linii trygonometrycznych za pomocą wyrażen wykładniczych urojonych, z kąd wyprowadzono tyle pięknych następstw, wskazanych po większej części przez niego samego. Eulerowi równie winniśmy szeregi wstawy i dostawy wielokrotności łuku w funkcji potęg całkowitych wstawy lub dostawy tegoż łuku, i odwrotnie potęgi całkowite wstawy lub dostawy łuku rozwinięte na szereg którego wyrazy są wstawy lub dostawy wielokrotności tegoż łuku; wypadki które on daje poznać są poddane, w rzeczy samój, pod pewne restrykcyje zupełnie dlań nieznane, i geometrowie złudzeni swemi idciami o uogólnieniu formuł algebraicznych, przez długi czas wypadki Eulera nie posądzaży bynajmniej uległy jakimkolwiek restrykcyom. Poisson wskazał pierwszy sprzeczność jaką one przedstawiają, i której wyjaśnienie nie było dane bezpośrednio; lecz w matematyce formuły nigdy wzajemnie się nie przeczą, i jeśli się w téj nauce przedstawia jakiś wypadek zdaniu powszechnemu przeciwny, można śmiało twierdzić że pod głębszą rozwąga cała ta trudność zupełnie zniknie. Poinssot pospieszył niebawem, w rzeczy samój, w swym memoryale o przecięciach kątowych, dokładnie oznaczyć kierunek i warunki ścisłości tych różnych rozwinięć. Badanie zbieżności powyższych szeregów jest na nieszczęście całkiem w jego pracy zaniedbane, i było wykonane po raz pierwszy przez Abła, w jego ważnym memoryale dotyczącym własności przy rozwinięciu na szereg jakiegokolwiek formy dwumianu.

Ten memoryał Abła sprowadza nas na nowo do teoryi funkcyj urojonych, od której nie oddaliliśmy się jak tylko na pozór mówiąc o szeregach trygonometrycznych. Sławny geometra norwegijski bada tam, ze ścisłością dotąd bardzo rzadką w kwestyach tego rodzaju, szereg dwumianu, w którym przypuszcza dla liter w tém wyrażeniu położonych wartości urojone. Nie zamierza on sobie bynajmniej przekonać się jedynie czy wzór Newtona pozostaje ścisłym i przedstawia jeszcze $(1+x)^m$, gdy x i m są urojone. Takie podanie nie miałoby żadnego dokładnie oznaczonego sensu. Szereg, w rzeczy samój, jest zupełnie oznaczonym gdy x i m są dane, i funkcyja przyjmuje, podług definicyi, nieskończoną ilość wartości; która z nich jest ta co właściwie reprezentuje szereg? Abel rozwiązuje zupełnie kwestyę, przygotowując tym sposobem przez głębokie badanie jednego przypadku szczególnego trudnego i ważnego teoryę ogólną stworzoną nieco później przez Cauchego, i która przybrała nagle taką wziętość, że musimy się nad tém zjawiskiem zastanowić szczególnie.

Aby zrozumieć doniosłość téj teoryi, potrzeba naprzód dokładnie sobie wyrobić ideę czystą stopnia uogólnienia zamkniętego w tém wyrażeniu: *funkcyja urojona jakakolwiek*, i nie dać się obłąkać przez analogię bardzo zwodniczą, jaką funkcyja podana przedstawia tą razą, z funkcyją rzetelną jakakolwiek. Mamy ideę bardzo jasną stopnia nieoznaczenia jakie obejmuje to wyrażenie: *funkcyja jakakolwiek zmiennej rzetelnej*. Tak się wyrażając rozumiemy że, dla wszelkiej wartości zmiennej niezależnej można, wybrać dowolnie wartość funkcyi, ten wybór nie będąc ograniczony żadnym innym warunkiem jak tylko byleby funkcyja była zobowiązana dostarczyć ciągly szereg wartości przedstawiających punkta pewnej krzywej której postać pozostaje zupełnie dowolną. Analogia zniewala nas bardzo naturalnie uważać jakakolwiek funkcyję urojoną jako uwikłaną pod równy stopień nieoznaczenia, mogącą przyjąć, dla pewnej wartości danej zmiennej $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, część rzetelną i część urojoną, dowolne zarówno obiedwie, bez żadnych innych restrykcyj, prócz tych które wypływają z warunku ciągłości. Biorąc, jedném słowem, α , β za spółrzedne punktu mającego za trzecią spółrzedną część rzetelną wartości odpowiedniej funkcyi dowolnej, należy wnosić niezwłocznie, że powierzchnia zakreślona tym punktem jest całkiem dowolną, jak funkcyja co ją tworzy; lecz tak rozumując popełnilibyśmy błąd

goromny. Warunek posiadania pochodnej oznaczonej równoważy w rzeczy samej dwóm zrównaniom. co są przywiązane tak dobrze do części rzetelnej jak i do części urojonej funkcji jakiegokolwiek, i jakie to zrównania przypuszczać będziemy warunkom podanym zawsze zadość czyniące. Istnienie tych zrównań tłumaczy jakim sposobem funkcja której określenie nie jest dane, może mieć jednak własności bardzo dokładne, i przyznaje całą słuszność uzasadnionego bytu pięknych twierdzeń Cauchego, które bez tego byłyby całkiem niezrozumiałemi. Ograniczymy się w naszych poszukiwaniach na przytoczeniu jak łatwo powyższe rozumowania zastosowane do wartości nieskończonych albo źle oznaczonych funkcji dają poznać téż funkcji granice na zewnątrz których jej rozwinięcie jest niepodobnem. Ta teoria jest témbardziej ważną, iż Lagrange utrzymuje w swém sławném dziele że twierdzenie Taylora, nie tylko nie powinno być uważane jako następstwo rachunku różniczkowego, lecz przeciwnie musi być wprost dowiedzione i powinno zawierać prawdziwe zasady tego rachunku, niezależne od wszelkiej idei nieskończenia małej albo granicy. Dowodzenie dane przez sławnego autora, pomimo powagi nakazującej poszanowanie dla jego imienia, nie mogło być przez geometrów przyjęte, lecz nie należy mniej podziwiać to zeznanie tak stanowcze, lubo nieusprawiedliwione, równie ważnej jak świetnej zasady, co ustalona w pół wieku później na podstawach zupełnie różnych, powinna była na być jednocześnie stopień uogólnienia o którym stronnicy tych idei nie pomyśleli nawet natenczas. Widząc ile objaśnień delikatnych potrzeba nagromadzić na utkwienie znaczenia i granic twierdzenia Taylora, pojmujemy że owe twierdzenie ściśle się wiąże z prawdami przystępu zbyt trudnego aby można było żeń zrobić, jak tego sobie życzył Lagrange, kamień węgielny i niewzruszone fundamenta rozległego gmachu nowożytniej umiejętności; jakkolwiek bądź elegancka i łatwa jest doktryna do jakiej jesteśmy przywiezieni zajmując na samym wstępie tak wysokie stanowisko, geometrowie nie mogą zapomnieć że zwięzłość dokładnych wysłowień i moc zupełna ścisłych dowodów są cechą główną umiejętności matematycznych; i jeśli się nie zważa bynajmniej na chwilowe zaniedbanie tych przepisów, byleby tylko równie łatwo jak pospiesznie można było osiągnąć cel ważny, niepodobna nigdy okazać się zbyt surowym gdy idzie o położenie podstaw długiego łańcucha teoryj.

Po tych naszych, widocznie, długich i mozolnych, lecz zarazem, przyznać także należy, dokładnie historycznych i prawdziwie wielkie światło, na rozliczne przekształcenia w rozmaitych epokach twierdzenia Taylora, obficie rzucających badaniach, należy nam się zająć niezwłocznie krótkim rozbiorem niemniej pięknych jak umiejętnych nad tym ważnym przedmiotem P. Folkińskiego poszukiwań.

O téj własnej jego pracy, młody nasz autor, w swéj przedmowie tak się wyraża :

« Wzór Taylor'a, na którym cała część pierwsza zastosowań rachunku różniczkowego do *teoryj funkcyj* głównie się opiera, jest zwykle wyprowadzony w sposób naciągany, często niedokładny, lub za mało ogólny: jest to zwykle najślabza strona bardzo zresztą szacownych traktatów Rachunku Różniczkowego. Wyprowadziliśmy go *w sposób najbardziej zbliżony do sposobu podanego przez wynalazcę*, udoskonalony tylko i uogólniony. »

Metoda Wynalazców (*Méthode des Inventeurs*) powszechnie w matematyce jest wysoko cenioną. W niej to geometrowie zwykle czerpią obok idei wynalazców, te proste i zupełnie skończone kwestyj ważne rozwiązania, jakie umiejętność, pomimo jej ciągłych postępów, na prostsze i ogólniejsze trudno przekształcić podoła. Te uwagi widocznie zastosować się nie dadzą do wzoru Taylora, gdzie, jak wiemy, dowodzenie pierwotne (przez samegoż wynalazcę tego wzoru podane) nie ma zupełnej matematycznej ścisłości. W takim położeniu P. Folkiński zostając łatwo zrozumiał, że przed rozwinięciem przyrostku funkcji podług potęg zwiększających się przyrostku zmienną niezależną, należy mu koniecznie uprzednio przygotować wyraz dopełniający, czyli resztę rozwinięcia. Winniśmy także dodać; iż reszta, tylko co chwila, przez pisarza polskiego otrzymana w niczem się nie różni i ma kształt zupełny sławnej *reszty Lagrange'a*, ale jest ona daleko inaczej i bardzo naturalnie z *przyrostków*

skończonych funkcji wyprowadzoną. Po tém dopiero młody nasz matematyk wyprowadza wzór Taylor'a w sposób najbardziej zbliżony do sposobu podanego przez wynalazcę, to jest, rozwija najprzód funkcję $f(x+h)$, i niezwłocznie na końcu rozwiniętej funkcji przyłącza powyższą resztę. Tak postępując otrzymamy:

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x + \theta h)$$

Wzór ten znanym jest pod nazwiskiem *wzoru Taylor'a*; wyrażenie

$$(2) \quad R_n = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x + \theta h)$$

nazywamy *Resztą* lub *wyrazem dopełniającym* rozwinięcia.

Po tém pierwszém, przyznać należy, zbyt lekkim i prawie nie nieznaczacém ulepszeniu przystąpił P. Folkierski niezwłocznie do swych *ważnych uwag nad wzorem Taylora*. Nie należy sądzić żeby wzór Taylora mógł zawsze stać się szeregiem: gdybyśmy zamiast napisać po $(n-1)^{\text{ym}}$ wyrazie *resztę* w rozwinięciu (1) chcieli prowadzić rozwinięcie to do nieskończoności, otrzymalibyśmy szereg niekoniecznie zbieżny, a choćby był zbieżnym, niekoniecznie równy $f(x+h)$: tak że równanie (1) mogłoby się stać nieprawdziwem. Z tych pięknych dyskusyj wyprowadza nasz znakomity pisarz warunki konieczne i dostateczne rozwinięcia do nieskończoności, zbieżności i granicy szeregu Taylora. Wszystkie te warunki są zamknięte w twierdzeniu ogólném następującem:

Szereg Taylor'a. *Jeżeli tak funkcja dana, jak wszystkie jej pochodne są ciągłemi i nie stają się nieskończenie wielkimi w granicach pomiędzy jakimi zmieniamy zmienną niezależną; jeżeli nadto granicą wyrazu dopełniającego wzoru Taylor'a jest zero, kiedy powiększamy nieograniczenie liczbę wyrazów rozwinięcia: rozwinięcie to jest szeregiem zbieżnym, postępującym podług potęg zwiększających się przyrostku zmiennej niezależnej, a granicą summy tego szeregu jest wartość funkcji odpowiadająca uważanemu przyrostkowi zmiennej niezależnej.*

Jeżeli w rozwinięciu

$$(3) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + R_n$$

tak funkcja $f(x)$ jak i jej pochodne $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, \dots , $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$ \dots do nieskończoności są i pozostają ciągłemi, gdy zmieniamy x pomiędzy granicami x_0 i X ; jeżeli nadto

$$(4) \quad \text{gr } R_n = \text{gr } \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x + \theta h) = 0$$

gdy n zwiększa się nieograniczenie, powiadam że rozwinięcie to przedłużone do nieskończoności, będzie szeregiem zbieżnym którego granicą jest: $f(x+h)$; to jest że mieć będziemy

$$(5) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x) + \dots$$

W rzeczy samej, z założenia wiemy że dla wszelkiego n , pochodna n^{ta} nie przestaje być ciągłą skończoną: możemy więc wziąć tyle wyrazów rozwinięcia, ile nam się podoba. Lecz różnica pomiędzy $f(x+h)$ a summą n wyrazów rozwinięcia, którą nazwalismy resztą R_n coraz się zmniejsza i może stać się tak małą jak się podoba biorąc n dość wielkiem: summa więc n wyrazów rozwi-

niecia, gdy n zwiększa się nieograniczenie, zbliża się nieograniczenie do $f(x+h)$, ma więc granicę skończoną $f(x+h)$; rozwinięcie zatem jest szeregiem zbieżnym. Szereg ten (5) nazywamy *szeregiem Taylora*; jest on wzorem Taylora rozwiniętym do nieskończoności, i wymaga więc warunków niż wzór (I): bo gdy ten ostatni ogranicza warunki ciągłości i wartości skończonych do pewnej tylko liczby pierwszych pochodnych, szereg Taylora wymaga tyle warunków dla wszystkich pochodnych.

Oto jest dowodzenie ściśle, proste i ogólne szeregu Taylora.

Parę uwag granicy reszty szeregu Taylora dotyczących. — Parę przypadków szczególnych ogólnego twierdzenia Taylora na uwagę zasługujących. — Piękne wyrażenie Cauch'ego na resztę wzoru Taylora

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n)}(x + \theta h). —$$

nakoniec, rozwinięcie przyrostku nieskończenie małego funkcji, podług różniczek rzędów zwiększających się téjże funkcji. — Wszystkie te kwestye, powyżej przytoczone, razem zebrane posłużyły P. Folkierskiemu na wydoskonalenie już zogólnionego wzoru Taylor'a.

Jest jeszcze inne, równie świetne jak znakomite, wyrażenie wyrazu dopełniającego, czyli Reszły wzoru Taylor'a. Ta reszta zwykle się wyraża

$$R = \frac{(X-x)^{n+1} (1-\theta)^{n-p}}{1.2.3 \dots n (p+1)} \varphi^{n+1}[x + \theta(X-x)].$$

Biorąc $X-x=h$, formuła na początku podana staje się po tém podstawieniu istotném rozwinięciem szeregu Taylor'a

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1} \varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2} \varphi''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} \varphi^n(x) + \frac{h^{n+1} (1-\theta)^{n-p}}{1.2 \dots n (p+1)} \varphi^{n+1}(x + \theta h).$$

To nowe wyrażenie reszły wzoru Taylor'a jednocześnie przez p. Schlömilch'a i przez p. Roche'a od lat kilkunastu odkryte, niebawem przez geometrów do swych traktatów specyalnych wprowadzone, dziś nareszcie, powszechnie w nowoczesnej analizie uprzejmie przyjęte i wysoko cenione, każdodziennie coraz większej wziętości nabiera. Dobrzeby zatem było, żeby P. Folkierski to piękne dwóch znakomitych geometrów odkrycie do nowego wydania swego Rachunku różniczkowego wprowadzić nie omieszczał. Należałoby równie, przy powtórzném wydaniu dzieła P. Folkierskiego, starannie rozwinąć genialne dowodzenie szeregu Taylor'a niedawno wynalezione przez p. Todhunter'a. Jest to jedno z najważniejszych odkryć sławnego geometry angielskiego; przytém, jest ono także jednóm z najpiękniejszych dowodzeń szeregu Taylor'a i pod tym względem, zdaniem naszym, w niczym nie ustępuje pięknej pracy Cauch'ego. Słuszną jest także nadmienić: iż p. Rouché wiele się przyczynił do wydoskonalenia powyższego dowodzenia przydając doń pod jednóm ogólném wyrażeniem dwie formy (dwa kształty) reszły wzoru Taylor'a.

ROZWIJANIE FUNKCYJ NA SZEREGI.

Wzory Taylor'a i Maclaurin'a. — Warunki rozwijalności funkcji podług tych wzorów. — Rozwinięcie na szereg funkcji wykładniczej. — Wstawy. — Dostawy. — Logarytmu. — Rachunek logarytmów naturalnych i logarytmów pospolitych. — Dwumian Newtona. — Inne wzory na rozwijanie funkcji na szeregi. Wzór Bernoulli'ego. — Metoda spółczynników niewyznaczonych. — Rozwinięcie funkcji na szereg podług potęg funkcji danej. — Uogólnienie powyższych wzorów dla funkcji wielu zmiennych niezależnych. — Twierdzenie funkcji jednorodnych.

P. Folkierski w tym rozdziale dał obszernie zastosowanie wzoru Taylora' do rozwijania funkcji na szeregi, przyczém zwracał ciągle uwagę na ścisłość i ogólność, względy tak często zaniedbywane w tego rodzaju kwestyach.

XIII

WYRAŻENIA NIEOZNACZONE.

Określenia. — Granica stosunków ilości dążących do zera, lub do nieskończoności. — Granice iloczynów z których jeden dąży do zera a drugi do nieskończoności. — Granice poleg przedstawiających się jako wyrażenia nieoznaczone. — Przykłady. — Wyrażenia nieoznaczone wielu zmiennych niezależnych.

W zastosowaniach Rachunku różniczkowego do wyznaczenia wyrażen nieoznaczonych P. Folkierski starał się usunąć niektóre niedokładności; a gdy te całkiem usunięte zostaną wyznaczenie wyrażen nieoznaczonych stanie się prostszem i zupełnie niewątpliwem.

NAJWIĘKSZOŚCI I NAJMNIEJSZOŚCI.

Określenia. — Warunki analityczne największości i najmniejszości. — Przykłady: — Iloczyn dwóch czynników, których summa jest stałą. — Najmniejszości funkcy x^x . — Trójkąt utworzony przez dwa boki dane. — Najmniejszość siły działającej na drąg ciężki. — Zadanie Fermat'a. — Największość i najmniejszość odległości punktu od krzywej. — Najmniejszości i największości funkcy niewyraźnych. — Największości i najmniejszości funkcy wielu zmiennych niezależnych, funkcy zmiennych czyniących zadosyć pewnym warunkom. — Najmniejszości i największości względne. — Przykłady i zastosowania. — Odległość dwóch krzywych. — Odległość punktu od powierzchni. — Ćwiczenia.

Teorya największości i najmniejszości traktowana w całej obszerności, jaką dziś jej w elementarném dziele nadać można, objaśniona jest licznemi przykładami, dającemi miarę jej bezpośredniego praktycznego zastosowania. Najlepiej nas o téj prawdzie przekona przytoczenie jakiegokolwiek bądź z powyższej teoryi zastosowania.

PRZYKŁAD. *Znaleźć najmniejszość funkcy*

$$y = x^x$$

gdzie x przybiera wartości większe od zera, całkowite lub ułamkowe.

Nie pytamy o największość, gdyż ta widocznie nie istnieje, bo zwiększając x , funkcyja powiększa się nieograniczenie.

Różniczkując dwa razy otrzymamy

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1.x + 1$$

$$\frac{1}{y} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x}$$

Ponieważ z założenia ani x ani y nie może przejść przez zero, ani przybrać wartości zero, żadna z tych ani następnych pochodnych nie może stać się nieskończoną; funkcyja więc jest rozwijalną według szeregu Taylor'a.

Zakładając pierwszą pochodną równą zeru, otrzymamy

$$1.x + 1 = 0 \quad \text{czyli} \quad x = -\frac{1}{e} = 0,36787944 \dots, \quad y = \left(-\frac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{e}} = 0,6922065$$

a podstawiając wartość tę w drugą pochodną

$$\frac{1}{y} \frac{d^2y}{dx^2} = e, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e \left(-\frac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{e}}$$

a ponieważ ta wartość szczególna $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest dodatnią, więc dla $x = \frac{1}{e}$, funkcyja x^x staje się najmniejszą.

Słusznie przyznać należy: iż niektóre części wyższej analizy w ostatnich latach w Polsce znakomity postęp zrobiły. Pierwszą z analizy wyższej istotnie ważną pracę professor Zajączkowski przedstawił p. t. *Przyczynę do teoryi największości i najmniejszości*, w Rocznikach Towarzystwa Naukowego Krakowskiego na rok 1867. Nieco pierwiej, professor Żmurko już był także ogłosił swą głęboką o tymże samym przedmiocie pracę p. t. *Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima*, naprzód po niemiecku, w pamiętnikach Akademii Wiedeńskiej na rok 1866; w kilka lat zaś potem, ta piękna znacznie powiększona i zmieniona praca, wyszła z pod prasy drukarskiej Paryża, poprawnie napisana i starannie odbita po polsku, w Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych na rok 1871. Jest to, zdaniem naszém, w obecnej chwili *ostatnie wymówione słowo* o tój ważnej teoryi. Ten piękny i oryginalny utwór profesora Żmurki ze wszelkich miar zasługuje na swe, o ile tylko podobna, jak najobszerniejsze w całej Polsce upowszechnienie. Spodziewać się zatem należy: że P. Folkierski o postęp nauki gorliwie zrobiwszy z tój pięknej pracy stosowne wyciągi, te, jasno i elementarnym sposobem wyłożone, do nowego wydania swego Rachunku różniczkowego, na pożytek naszej kształcącej się w matematyce młodzieży, należycie wprowadzić nie omieszką.

XIV

FUNKCJE ZMIENNYCH UROJONYCH.

Określenia. — Ciągłość zmiennych urojonych. — Funkcje jednowartościowe. — Określenie funkcji zasadniczych zmiennych urojonych. — Funkcje algebraiczne. — Funkcje określone przez szeregi zbieżne. — Funkcja wykładnicza, wstawa, dostawa, ... zmiennej urojonej. — Funkcje odwrotne. — Logarytmy. — Różniczkowanie funkcji zmiennych urojonych. — Funkcje jedнопochodne. — Funkcje doskonałe.

Zmienne urojone i funkcje ich wprowadzone zostały do analizy przez Cauch'ego. Cauchy dał im określenie całkiem ogólne takie, jak się to znajduje dokładnie podane, na str. 657 N° 322, w dziele elementarném P. Folkierskiego. Późniejsi geometrowie zauważyli, że teorya funkcji tak ogólnie pojętą nie przedstawia wielkiego użytku, redukując się do teoryi funkcji 2 zmiennych niezależnych: Bertrand i Serret przyjmują za funkcje zmiennych urojonych tylko funkcje jedнопochodne (monogènes); zobacz, określenie tych funkcji na str. 703 N° 361. Jednakże, aby nie zmniejszać ogólności i nie wprowadzać zaciemniającej dla początkującego restrykcji, P. Folkierski zachował w zupełności określenie Cauch'ego, rozróżniając razem z nim: funkcje *jedнопochodne* (monogènes), *jednowartościowe* (monodromes) i *doskonałe* (synectiques). Cauchy i inni geometrowie wyprowadzają własności tych funkcji z szeregów które je określają: młody nasz matematyk podał przedstawienie całkiem elementarne własności tych funkcji gdzie tylko można było i przedstawienie ich geometryczne, aby przyzwyczaić początkującego do urojonych i pokazać mu: że one wyrażają tak jak rzeczywiste pewne pojęcia określone tylko w odmienny jak rzeczywiste sposób, a nie po prostu *niedorzeczności* jak początkujący często przez myłą naukę sądzą; lub też coś *mylnego* i *dwuznacznego*, z czém ostrożnie! żeby przypadkiem nie uleść złudzeniu stawiania matematyki na ilościach urojonych, jak to znowu inni zawołani przeciwnicy *postępowej umiejętności* szumnie w swych manifestach rozgłaszać nie przestają. Zasady podane w Rozdziale XVIII^m, których *nigdzie* w elementarny sposób wyłożonych nie widzieliśmy, usunąć muszą wszelką wątpliwość co do nieścisłości w używaniu zmiennych urojonych. W tém jest pierwsza ważna polskiego pisarza zasługa.

Ścisłe określenie funkcji *jednowartościowych* (patrz, str. 668 N° 333), stosujące się nawet do funkcji *rzeczywistych* nigdzie przed ogłoszeniem dzieła P. Folkierskiego nie było jasno i kategorycznie podane. Nazywano je w elementach *fonctions bien déterminées*, nieokreślając ściślej samych funkcji

i nie tłumaczyć co się pod tym wyrazem rozumie. Dla braku tego określenia, jak również koniecznego *zastrzeżenia* które twierdzenie stosują się do wszystkich funkcji urojonych, które do jednowartościowych, które do jednopochodnych lub doskonałych, bardzo wiele błędów popełnionymi były, sam Cauchy ciągle tworząc i drukując z pośpiechu nie mało błędów nie dostrzegł, zład mniemanie nieślusne jakoby teorye oparte na urojonych były *zwodnicze*.

Przekonał się że P. Folkiński podał na początek dostateczną segregację tych funkcji i cechy po których je rozróżnić można: przy każdym twierdzeniu powiedzianem jest wyraźnie do jakich funkcji podane twierdzenie wprost się stosuje. Odróżnienie to jest ważnem nawet dla funkcji rzeczywistych, na co pospolicie autorowie piszący o tym przedmiocie nie zwracają uwagi (patrz, str. 335 N° 177; str. 839 N° 443; str. 840 N° 444 i inne podziały).

Dla funkcji zasadniczych dowodzenia co do ich gatunku znakomity nasz autor przeprowadził wszystkie, również co do szeregów ważniejszych funkcye *doskonałe* (synectiques) grają podobną rolę względem innych, jak *szeregi dobrze zbieżne* względem *źle zbieżnych*, *rozbieżnych* lub *nieoznaczonych*: funkcye doskonałe będą przedewszystkiem używane w dalszych zastosowaniach. Do nich to stosuje się to ważne twierdzenie Cauch'ego: *Wszelka funkcya doskonała jest rozwijalną zbieżnie na szereg Taylora*, i odwrotnie, wszelka funkcya określona zbieżnym szeregiem Taylora jest funkcją doskonałą. Lecz twierdzenie to dowodzi się w bardzo prosty, ogólny i ściśły sposób tylko za pomocą *Rachunku Całkowego*: wolał więc P. Folkiński odłożyć je do drugiego tomu, niż dawać w pierwszym dowodzenie naciągane sposobem Cauch'ego lub jak w Serrecie. Twierdzenie to i wnioski z niego wynikające będą dalej podane.

Abel, jak sam zeznaje, zaczerpnął wszystkie swe wiadomości matematyczne w pismach Cauch'ego: takie sławnego geometry norweskiego zeznanie jest najlepszym panegirykem, jak go Terquem nazywa, Gauss'a francuzkiego. Mistrz i jego świetny uczeń już od dawna w grobie spoczęli, ale ich prace nieprzerwanie wielkie światło na całą ludzkość rzucają. Oprócz Cauch'ego i Abela nie wiemy czy kto co ważnego w teorii funkcji urojonych *I^o rodzaju* kiedykolwiek napisał (o innych wiele w angielskich znajduje się pismach). Czytając te genialne płody dwóch największych swego czasu geometrów, zanurzając się głęboko w teorii funkcji urojonych, P. Folkiński uczuł w sobie po raz pierwszy zapal szlachetny *doświadczenia sił własnych* przy opracowaniu tak trudnego przedmiotu. Co nasz autor skorzystał z Cauch'ego, co się dało naciągnąć w elementa, to tylko to co się znajduje na 17^{tu} stronach pierwszych Briot i Bouquet *Théorie des fonctions doublement périodiques* i trochę z Serreta, a i z tego dowodzenia niektóre pozmieniane noszą na sobie *wybitne piętno* indywidualnej naszego autora samodzielności.

Taka jest piękna (ostatnia w Rachunku różniczkowym) praca naszego młodego matematyka, która go jednym skokiem stawia w pierwszym rzędzie obecnie żyjących matematycznych w Polsce pisarzy.

XV

Trzy pierwsze Części klassycznego dzieła P. Folkińskiego to jest: *Wiadomości wstępne*, *Rachunek Różniczkowy* i *Zastosowanie tegoż rachunku do teorii funkcji* będąc już uprzednio przez nas należycie ocenione, pozostaje nam jeszcze, dla uzupełnienia naszych umiejętności poszukiwań, kilka słów powiedzieć o *czwartej* i ostatniej Części tego dzieła to jest: o *ważnych zastosowaniach Rachunku Różniczkowego do Geometrii*. W tych zastosowaniach pospolicie rozróżniamy *dwie odrębne kategorie*: 1^{da}. Zastosowania Rachunku Różniczkowego do figur geometrycznych jakkolwiek położonych na płaszczyźnie; 2^{re} zastosowania tegoż rachunku do figur geometrycznych zajmujących jakiekolwiek miejsce w przestrzeni.

Z pomiędzy zastosowań należących do *pierwszej kategorii* na szczególną uwagę zasługują: Asymptoty czyli niemalejące. — Punkta przegięcia. — Wklęsłość i wypukłość. — Koło ściśle styczne. — Poszukiwania bardzo ważne punktów nadzwyczajnych płaskich. — Różniczka powierzchni ograniczonej linią krzywą. — Różniczka łuku krzywej na płaszczyźnie. — Krzywość linii na płaszczyźnie. — Koło krzywości. — Promień i środek krzywości. — Rozwinięte i rozwijające. — Obwinięte i obwijające. — Zastosowania i przykłady: Linie drugiego stopnia. — Cykloida. — Epicykloida. — Spiralne. — Linie palące przez odbicie.

Z pomiędzy zastosowań należących do *drugiej kategorii* szczególnie się odznaczają: Prosta styczna i płaszczyzna normalna do krzywej jakiegokolwiek w przestrzeni. — Płaszczyzna styczna i prosta normalna do powierzchni. — Różniczka łuku krzywej w przestrzeni. — Powierzchnia ściśle styczna. — Płaszczyzna ściśle styczna. — Normalna główna. — Kula ściśle styczna do krzywej w przestrzeni. — O styczności krzywych pomiędzy sobą w przestrzeni. — Krzywe ściśle styczne. — Powierzchnie ściśle styczne. — Pierwsza krzywość linii skośnych. — Promień i środek krzywości. — Prosta biegunowa. — Różnica łuku i cięciwy krzywej jakiegokolwiek. — Skręcenie, czyli druga krzywość linii skośnych. — Koło i promień skręcenia. — Piękne twierdzenie p. Serret'a. — Spółrządne środka kuli ściśle stycznej. — O powierzchniach obwijających. — Linia charakterystyczna i krawędź zwrotu. — O powierzchniach rozwijalnych. — O rozwiniętych linii krzywych w przestrzeni. — Powierzchnia biegunowa. — Zastosowania: Linia śrubowa. *Nakoniec*: O krzywości linii nakreślonych na powierzchni. — Twierdzenie Meunier'a. — Krzywość przecięć normalnych. — Przecięcia główne. — Punkta krzywości kulistej czyli pępki powierzchni. — Linia wskazująca. — Styczne sprzężone. — Wzory ogólne na promienie krzywości główne. — O układzie potrójnym prostokątnym powierzchni. — Twierdzenie Karola Dupin'a. — Układ potrójny prostokątny drugiego stopnia. — Przykłady: Punkta krzywości kulistej elipsoidy. — Linie krzywości powierzchni obrotowych. — Powierzchnie rozwijalnych.

Oto są ważne kwestye przedstawiające nam dokładnie prosty i naturalny układ *czwartej części* dzieła naszego autora. Eleganckie tych ważnych kwestyj przedstawienie, piękne i proste rozlicznych wzorów i symetrycznych równań rozwijanie, nakoniec, trafne wykazanie najnowszych metod nowoczesnych mistrzów umiejętności, charakteryzuje ten bogaty i kunsztownie wykończony analizy nowoczesnej ułamek.

XVI

« Dołączony na końcu dzieła przypisek p. Trzaski o *Wyznacznikach*, wykazując głęboką znajomość przedmiotu, zawiera wszystko co jest godnym uwagi w tej teorii i co w tak szczupłym rozmiarze (w 50 str.) zawrzeć można. Eleganckie przedstawienie kwestyj i *dowodzenie wielu twierdzeń zaledwie wystawionych w różnych dziełach* charakteryzuje ten przypisek. »

To trafne i umiejętne przypisku p. Trzaski ocenienie, skreślone biegłym piórem bezimiennego *Przeglądu Polskiego* krytyka, wyszło z druku na widok publiczny po raz pierwszy w Krakowie 1 kwietnia 1870 roku. Ten światły sąd, jako zupełnie zgodny z naszym wewnętrznym przekonaniem, uznając za nasz własny bezwarunkowo przyjmujemy. A przecież, pomimo tylu znakomitych zalet, przypisek p. Trzaski ma także i swą stronę ujemną. W istocie, piękna praca p. Trzaski o wyznacznikach nie może być przystępną dla każdego posiadającego nawet dokładnie samą tylko niższą matematykę. A jeśli mała liczba naszych matematycznych znakomitości czytając ten oryginalny utwór p. Trzaski przyjmie go z zapałem i serdecznie powita; to natomiast, bardzo wątpimy aby nasza gimnazjalna a nawet uniwersytecka młodzież, jeszcze nieobznajmiona z *kongruencyjami* GAUSSA lub też z *ilościami* które pierwszy używał GALOA (GALLOIS), mogła cokolwiek z tej pięknej pracy obecnie skorzystać.

Tenże sam znakomity krytyk, mówiąc o dziele P. Folkińskiego, tak się zaszczytnie o nim wyraża:

« Pan Folkierski sumienném skompletowaniem wszystkiego co stanowi zasady rachunku różniczkowego i co najliczniejsze ma zastosowania, daje swém dziełem, każdemu posiadającemu niższą matematykę, możność postawienia się na stopniu takim by z zupełną łatwością posługiwać się tym rachunkiem we wszystkich zawodach mających styczność z matematyką, czytać bez trudu utwory mistrzów, rozwijając w całym obszarze różne teorye lub zastosowania, wreszcie iść samemu na tém polu naprzód bez żadnych przeszkód. Być pożytecznym jak największej liczbie, było kierującą myślą w całym dziele; tam tylko autor wprowadził własny sposób przedstawienia kwestyi, gdzie dotychczasowe sposoby zostawiły coś do życzenia. Dzieło to posłuży zarazem za nowy dowód bogactwa i dojrzałości naszego języka, wykazując że nawet subtelności matematyczne mogą być wyrażone jasno i zwięźle. »

Tym ustępem zdrowo dzieło P. Folkierskiego oceniającym kończąc nasze sprawozdanie, dowodzimy jak wielką dziełu temu przyznajemy wartość.

Naturalna przeto że gorąco pragniemy uzupełnienia jego, zapowiedzianym przez autora Rachunkiem Całkowym. Śniemy nawet upraszać P. Folkierskiego aby przez wzgląd na postęp w nauce młodzieży naszej umiejętnościom ścisłym poświęcającej się, druk dzieła przyspieszać raczył.

My zaś z góry przekonani, że jak Rachunek Różniczkowy zalicza się do pierwszorzędnych dzieł elementarnych tak i Rachunek Całkowy na téj wysokości stanie, zobowiązujemy się do zwięzłego a umiejętnego ocenienia nowój pracy młodego Matematyka naszego.

Pisałem w Paryżu dnia 27 Lipca 1871 roku.

Adolf SĄGAJŁO.

