DOWÓD PEWNEGO TWIERDZENIA

TYCZĄCEGO FUNKCYJ WIELOWYMIAROWYCH OKRESOWYCH

NAPISAŁ

Władysław TRZASKA.

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa dnia 15 września 1871 roku.

W poprzedniéj mojéj pracy o funkcjach wielowymiarowych, dowiodłem gieometrycznie kilku twierdzeń tyczących funkcyj dwu i trójwymiarowych. Funkcje więcéj jak trójwymiarowe, nie dają się z równąż łatwością przedstawić gieometrycznie jak funkcje dwu i trójwymiarowe, i dla tego też, nie udało mi się dowieść dla pierwszych gieometrycznie twierdzenia tyczącego funkcyj okresowych, jak to zrobiłem dla drugich w poprzedniéj pracy. Trudności powiększają się jeszcze bardziéj w razie funkcyj o wielu zmiennych niezależnych. Starałem się więc znaleźć dowód, czysto za pomocą rachunku i takowy poniżéj opisuję. Oto wysłowienie twierdzenia które mam na widoku.

Jeżeli ilości l*wymiarowe o których mowa w niniéjszém twierdzeniu, ulegają zwykłym prawom dodawania algiebrycznego, to funkcja* l*wymiarowa* m *zmiennych niezależnych, nie będąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń, a jeżeli nieskończoną to nie różniących się nieskończenie mało, dla każdego układu znaczeń zmiennych niezależnych, nie może być więcéj jak* lm *okresową, to jest mieć więcéj jak* lm *układów okresów jednoczesnych różnych, rozumiejąc przez układy różne okresów jednoczesnych takie tylko układy, których okresy jednoczesne nie są summami wielokrotników całkowitych rzeczywistych jednakowych układów pozostałych, wszystkich lub w części lub też innych układów lecz w mniéjszéj liczbie.*

Pan Ermit (Hermite) znalazł poprzednio szczególny przypadek powyższego twierdzenia, mianowicie w razie funkcyj dwuwymiarowych uważanych przez Kosziego (Cauchy), lecz dowodu, o ile mi wiadomo nie ogłosił. Pan Pjuize (Puiseux) przedstawił Akademji nauk Paryzkiéj dwa dowody twierdzenia Pana Ermita [1], lecz takowe zdaje mi się nie zostały także ogłoszone. Twierdzenie zaś ogólne wyżéj wysłowione nie zostało (jeżeli się nie mylę) ani spostrzeżoném, ani dowiedzioném.

Nim przystąpię do dowodu twierdzenia głównego niniéjszéj pracy, podam kilka określeń i dowiodę kilku prawd pomocniczych.

Przedstawmy przez

$$z_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} n_\lambda z_{\mu,\lambda} \quad , \quad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

przez

$$u = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l} \iota_\varkappa u_\varkappa$$

$m+1$ ilości $l$wymiarowych w których ι_λ, $(1 \leqq \lambda \stackrel{=}{<} l)$ są jednościami urojonemi dowolnemi zaś l ilości rzeczywistych $u_\varkappa$, $(1 \leqq \varkappa \stackrel{=}{<} l)$, są funkcjami rzeczywistemi lm ilości rzeczywistych $z_{\mu,\lambda}$, $(1 \leqq \mu \stackrel{=}{<} m)$, $(1 \leqq \lambda \stackrel{=}{<} l)$; mianowicie:

$$u_\varkappa = f_\varkappa(z_{1,1}, \ldots, z_{1,\lambda_1}, \ldots, z_{1,l}; \ldots; z_{\mu,1}, \ldots z_{\mu,\lambda_\mu}, \ldots, z_{\mu,l}; \ldots; z_{m,1}, \ldots, z_{m,\lambda_m}, \ldots, z_{m,l}), \quad (1 \leqq \varkappa \stackrel{=}{<} l)$$

wtedy ilość u nazwę *funkcją lwymiarową* m *zmiennych niezależnych* z_μ, $(1 \leqq \mu \stackrel{=}{<} m)$ i wyrażę znakiem

$$u = f(z_1, \ldots, z_\mu, \ldots, z_m)$$

Funkcję tak określoną nazwę *okresową*, jeżeli istnieje przynajmniéj jeden układ m ilości stałych $l$wymiarowych a_μ, $(1 \leqq \mu \stackrel{=}{<} m)$ taki, że jest przy wszelkich znaczeniach zmiennych niezależnych z_μ, $(1 \leqq \mu \stackrel{=}{<} n)$

$$f(z_1 + a_1, \ldots, z_\mu + a_\mu, \ldots, z_m + a_m) = f(z_1, \ldots, z_\mu, \ldots, z_m)$$

a układ ilości stałych dopiero wymienionych *układem okresów jednoczesnych*.

Z tego określenia wynika, że jeżeli jest n układów okresowych jednoczesnych (odróżniając okresy różnych układów wskaźnikiem ν układu) $a_{\mu,\nu}$, $(1 \leqq \mu \stackrel{=}{<} m)$, $(1 \leqq \nu \stackrel{=}{<} n)$, jest także zawsze

$$f\left(z_1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{1,\nu} p_\nu, \ldots, z_\mu + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu} p_\nu, \ldots, z_m + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{m,\nu} p_\nu\right) = f(z_1, \ldots, z_\mu, \ldots, z_m)$$

gdzie p_ν, $(1 \leqq \nu \stackrel{=}{<} n)$ oznaczają n liczb całkowitych rzeczywistych dowolnych.

Dowiodę teraz twierdzenia pomocniczego następującego:

a) *Mając* r *ilości rzeczywistych*

$$a_\rho = \sum_{\pi=1}^{\pi=r+1} a_{\rho,\pi} p_\pi \quad , \quad (1 \leqq \rho \stackrel{=}{<} r)$$

w których $a_{\rho,\pi}$, $(1 \leqq \rho \stackrel{=}{<} r)$, $(1 \leqq \pi \stackrel{=}{<} r+1)$ *oznaczają* $r(r+1)$ *ilości rzeczywistych stałych, zaś* p_π, $(1 \leqq \pi \stackrel{=}{<} r+1)$ *oznaczają* $r+1$ *liczb całkowitych rzeczywistych; można zawsze te ostatnie dobrać tak, że bezwzględne znaczenia tych* r *wyrażeń* a_ρ, $(1 \leqq \rho \stackrel{=}{<} r)$ *będą odpowiednio mniejsze od* n *ilości rzeczywistych dodatnich tak małych jak się podoba.*

Jakkolwiek twierdzenie to jest znaném, przytaczam jednakże dowód takowego dla dogodności czytelnika.

Przypuśćmy twierdzenie prawdziwém dla liczb mniejszych od r, a dowiedziemy, że jest prawdziwém i dla r. Uważmy bowiem r wyrażeń

$$a_{\rho,r+2} = \sum_{\pi=1}^{\pi=r+1} a_{\rho,\pi} p_{1,\pi} \quad , \quad (1 \leqq \rho \stackrel{=}{<} r)$$

w których przynajmniéj jedna z r ilości $a_{\rho,r+1}$, $(1 \leqq \rho \stackrel{=}{<} r)$ jest różną od zera i przypuśćmy, że n a jest ilość $a_{r,r+1}$. Z powyższych r wyrażeń, wypada przez działania zawsze możebne r wyrażeń następujących

$$a_{\rho,r+2}-a_{r,r+2}\,a_{r,r+1}^{-1}\,a_{\rho,r+1}=\sum_{\pi=1}^{\pi=r}\begin{vmatrix} a_{\rho,\pi}, & a_{\rho,r+1} \\ a_{r,\pi}, & a_{r,r+1}\end{vmatrix} a_{r,r+1}^{-1}\,p_{1,\pi}\,; \qquad (1 \leqq \rho \leqq r-1)$$

$$a_{r,r+2}\,a_{r,r+1}^{-1}=\left(\sum_{\pi=1}^{\pi=r} a_{r,\pi}\,a_{r,r+1}^{-1}\,p_{1,\pi}\right)+p_{1,r+1}$$

z pomiędzy których $r-1$ pierwszych na mocy przypuszczenia zrobionego wyżéj, przez stosowny wybór r całkowitych $p_{1,\pi}$ $(1 \leqq \pi \leqq r)$ można uczynić co do bezwzględnych znaczeń mniejszemi odpowiednio od ilości rzeczywistych dodatnich danych tak małych jak się podoba; w ostatniém zaś wyrażeniu można zawsze dobrać całkowitą $p_{1,r+1}$ tak, że bezwzględne znaczenie tegoż wyrażenia będzie mniejsze od $\frac{1}{2}$. Z tego wypada, że znaczenia bezwzględne r wyrażeń $a_{\rho,r+2}$, $(1 \leqq \rho \leqq r)$ jeżeli nie są mniejsze odpowiednio od znaczeń bezwzględnych wyrażeń $\frac{1}{2}a_{\rho,r+2}$, $(1 \leqq \rho \leqq r)$ to bardzo mało są od nich większe. W każdym razie można napisać (oznaczając dla krótkości znaczenie bezwzględne wyrażenia danego pisząc przed niém z. b.)

$$(1) \qquad \text{z.b}\,(a_{\rho,r+2}) < \text{z.b.}\,(u_1\,a_{\rho,r+1}), \qquad (1 \leqq \rho \leqq r)$$

gdzie u_1 oznacza ułamek właściwy dodatni mniejszy od jedności, mianowicie mniejszy albo też mało co większy od $\frac{1}{2}$. Gdyby niektóre z ilości $a_{\rho,r+1}$, $(1 \leqq \rho \leqq r-1)$ były zerami możnaby od razu napisać zamiast drugiéj strony odpowiedniéj nierówności (1) ilość dodatnią rzeczywistą tak małą jak się podoba.

Uważmy teraz r wyrażeń

$$a_{\rho,r+3}=\sum_{\pi=2}^{\pi=r+2} a_{\rho,\pi}\,p_{2,\pi}\,; \qquad (1 \leqq \rho \leqq r)$$

z któremi podobnież postępując jak z r wyrażeniami $a_{\rho,r+2}$, $(1 \leqq \rho \leqq r)$ przyjdziemy również do wniosku

$$(2) \qquad \text{z.b.}\,(a_{\rho,r+3}) < \text{z.b.}\,(u_2\,a_{\rho,r+2})\,; \qquad (1 \leqq \rho \leqq r)$$

. d.

Powtarzając takie postępowanie s razy przyjdziemy do wniosku

$$(s) \qquad \text{z.b.}\,(a_{\rho+s+1}) < \text{z.b.}\,(u_s\,a_{\rho,r+s})\,, \qquad (1 \leqq \rho \leqq r)$$

Nakonicc jeżeli u oznacza największy z pomiędzy ułamków $u_1, u_2, \ldots, u_s$, wniesiemy że

$$(s+1) \qquad \text{z.b.}\,(a_{\rho,r+s+1}) < u^s\left\{\text{z.b.}\,(a_{\rho,r+1})\right\}, \qquad (1 \leqq \rho \leqq r)$$

Ponieważ $a_{\rho,r+s+1}$, $(1 \leqq \rho \leqq r)$ wyrażone przez ilości $a_{\rho,\pi}$, $(1 \leqq \rho \leqq r)$, $(1 \leqq \pi \leqq r+1)$, mają właśnie kształt wyrażeń a_ρ, $(1 \leqq \rho \leqq r)$ o jakich mowa w twierdzeniu, i ponieważ potęgi całkowite ułamku właściwego u mogą się stać tak małemi jak się podoba, biorąc tylko potęgę dostatecznie wysoką, wniesiemy z nierówności $(s+1)$, że twierdzenie jest prawdziwém i dla r jak zamierzyliśmy dowieść.

Dowodzenie stosuje się prawie w zupełności i do przypadku $r = 1$. Jakoż uważając wyrażenie

$$a_{1,3} = a_{1,1} p_{1,1} + a_{1,2} p_{1,2}$$

zkąd jeżeli $a_{1,2}$ jest zerem

$$a_{1,3} a_{1,2}^{-1} = a_{1,1} a_{1,2}^{-1} p_{1,1} + p_{1,2}$$

Ponieważ zawsze można dobrać całkowitę $p_{1,2}$ w ten sposób żeby znaczenie bezwzględne wyrażenia $a_{1,3} a_{1,2}^{-1}$ było mniejsze od $\frac{1}{2}$, wniesiemy więc że:

$$\text{z.b.}(a_{1,3}) < \tfrac{1}{2}\,\text{z.b.}(a_{1,2})$$

Uważając znów wyrażenie

$$a_{1,2} = a_{1,2} p_{2,1} + a_{1,3} p_{2,2}$$

wniesiemy, że można dobrać całkowite $p_{2,1}, p_{2,2}$ tak że będzie

$$\text{z.b.}(a_{1,4}) < \tfrac{1}{2}\,\text{z.b.}(a_{1,3}),$$

i t. d. Powtarzając to działanie s razy, otrzymamy zbierając razem co powiedziano że:

$$\text{z.b.}(a_{1,s+2}) < (\tfrac{1}{2})^s\,\text{z.b.}(a_{1,2})$$

Lecz wyrażenie $a_{1,s+2}$ przez ilości $a_{1,1}$ i $a_{1,2}$ ma właśnie kształt wymagany przez twierdzenie, a nadto $(\frac{1}{2})^s$ można uczynić tak małém jak się podoba biorąc całkowitę s dostatecznie wielką. Ostatnia więc nierówność dowodzi twierdzenia w razie $r = 1$, i dowodzi ostatecznie twierdzenia w zupełności.

Drugie twierdzenie pomocnicze jest następujące:

b) *Jeżeli ilości* lwymiarowe *o których mowa niżéj, ulegają zwykłym prawom dodawania algiebrycznego, to funkcja* lwymiarowa m *zmiennych niezależnych, niebędąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń lub jeżeli nieskończoną to nieróżniących się nieskończenie mało, dla każdego układu znaczeń zmiennych niezależnych, nie może mieć więcéj jak* km *układów okresów jednoczesnych różnych, przypuszczając, że w skład każdego z okresów, wchodzi tylko pewnych* k *z pomiędzy* l *jedności urojonych, składających tak zmienne niezależne jako też i samą funkcję.*

Przypuśćmy, że k jednościami urojonemi wchodzącemi w skład okresów są naprzykład k jedności ι_λ, $(1 \leqq \lambda \gtreqless k)$, i że m okresów jednoczesnych ν^{go} układu są:

$$a_{\mu,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \iota_\lambda a_{\mu,\nu,\lambda} \quad , \quad (1 \leqq \mu \gtreqless m)$$

Ponieważ funkcja jest z założenia okresową, nie zmieni się więc jeżeli odpowiednio każdą z m zmiennych niezależnych z_μ, $(1 \leqq \mu \gtreqless m)$ powiększymy odpowiednio o

$$(s+2) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu} p_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \iota_\lambda a_{\mu,\nu,\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \iota_\lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu,\lambda} p_\nu ; \qquad (1 \leqq \mu \gtreqless m)$$

gdzie n oznacza liczbę układów okresów jednoczesnych jaką funkcja uważana posiada.

Jeżeliby n było tylko równe $km+1$, to według wyżéj dowiedzionego twierdzenia pomocniczego, możnaby dobrać n całkowitych p_ν, $(1 \leqq \nu \leqq n)$ tak, że powiększenia te a raczéj współczynniki przy k jednościach urojonych i_λ, $(1 \leqq \lambda \leqq k)$ byłyby mniejszemi odpowiednio co do znaczenia bezwzględnego, od tyluż ilości danych jakkolwiek małych. Skoro więc funkcja przy małych zmianach zmiennych niezależnych nie zmienia się, jest więc stałą lub przybiera wszelkie możebne znaczenia w liczbie nieskończonéj nieskończenie mało się różniące między sobą dla każdego układu znaczeń zmiennych niezależnych, co przeciwne twierdzeniu i co zatém dowodzi takowego.

Dowód powyższy przypuszcza, że wyrażenia $(s+2)$ nie są zerami jednocześnie, co też jest koniecznćm następstwem założenia zrobionego w samém twierdzeniu, że układy okresów jednoczesnych są różne, to jest że okresy tych układów nie są summami wielokrotników całkowitych jednakowych okresów jednoczesnych innych układów w liczbie $n-1$ lub mniejszéj. Okażemy bowiem że:

Jeżeli jest m *równań*

$$(s+3) \qquad 0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu} p_\nu \quad , \quad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

to wtedy okresy jednoczesne któregokolwiek z n *układów wyrażają się przez okresy jednoczesne* n — 1 *układów innych, mianowicie:*

$$a_{\mu,1} = (d_1^{-1} a_{\mu,1})\, d_1 \; ;$$

$$a_{\mu,\rho} = (d_1^{-1} a_{\mu,1})(p_1 r_{1,\rho}) + \sum_{\nu=2}^{\nu=\rho-1} \begin{vmatrix} a_{\mu,\rho}, & a_{\mu,\nu} \\ r_{1,\rho}, & r_{1,\nu} \end{vmatrix} (d_1^{-1} p_\nu) + \sum_{\nu=\rho+1}^{\nu=n} \begin{vmatrix} a_{\mu,\rho}, & a_{\mu,\nu} \\ r_{1,\rho}, & r_{1,\nu} \end{vmatrix} (d_1^{-1} p_\nu),$$

$$(1 \leqq \mu \leqq m) , \qquad (2 \leqq \rho \leqq n)$$

gdzie przypuszcza się że całkowite p_ν, $(1 \leqq \nu \leqq n)$ *są pierwszemi między sobą; że największym wspólnym dzielnikiem* n — 1 *całkowitych* p_ν, $(2 \leqq \nu \leqq n)$ *jest* d_1, *i że nakoniec całkowite* $r_{1,\rho}$, $(2 \leqq \rho \leqq n)$ *zadość czynią równaniu*

$$1 = \sum_{\rho=2}^{\rho=n} d_1^{-1} p_\rho r_{1,\rho}$$

co zawsze jest możebném, bo w tém równaniu pierwszego stopnia współczynniki przy nieznanych $r_{1,\rho}$, $(2 \leqq \rho \leqq n)$ *są całkowitemi pierwszemi między sobą.*

Gdyby $n-1$ układów okresów jednoczesnych

$$d_1^{-1} a_{\mu,1} \; ; \quad \begin{vmatrix} a_{\mu,\rho}, & a_{\mu,\nu} \\ r_{1,\rho}, & r_{1,\nu} \end{vmatrix} ;$$

$$(1 \leqq \mu \leqq m) , \qquad (2 \leqq \rho \leqq n)$$

nie były różnemi, to możnaby je podobnież wyrazić przez $n-2$ innych układów, i postępując tak daléj przyszlibyśmy do pewnéj liczby układów okresów jednoczesnych, któréjby zmniejszyć nie można. i układy te ostatnie byłyby różnemi. Lecz nateraz dowiedziemy tylko niemożebności równań

$(s+3)$ które dają m równań:

$$(s+4) \qquad d_1^{-1} a_{\mu,1} p_1 = \sum_{\nu=2}^{\nu=n} (-d_1^{-1} p_\nu) a_{\mu,\nu}, \qquad (1 \leqq \mu \overset{=}{<} m)$$

i zkąd wnosimy, że układ m ilości $d_1^{-1} a_{\mu,1} p_1$, $(1 \leqq \mu \overset{=}{<} m)$ jest układem okresów jednoczesnych, jako złożony z wielokrotników całkowitych jednakowych okresów danych układów. Ponieważ dwie całkowite d_1 i p_1 są z założenia pierwszemi między sobą, można więc zawsze dobrać dwie inne całkowite $s_{1,1}$ i $s_{1,2}$ takie, że będzie:

$$d_1 s_{1,1} + p_1 s_{1,2} = s_1$$

gdzie s_1 oznacza którąkolwiek liczbę rzeczywistą całkowitą. Przytém układ ilości

$$a_{\mu,1} s_{1,1} + d_1^{-1} a_{\mu,1} p_1 s_{1,2} = (d_1^{-1} a_{\mu,1}) s_1; \qquad (1 \leqq \mu \overset{=}{<} m)$$

jest także układem okresów jednoczesnych, i właściwiéj okresami tego układu są ilości:

$$d_1^{-1} a_{\mu,1}; \qquad (1 \leqq \mu \overset{=}{<} m)$$

Pomnóżmy teraz równania $(s+4)$ przez jednę z całkowitych $r_{1,\rho}$, $(2 \leqq \rho \overset{=}{<} n)$ otrzymamy $m(n-1)$ równań

$$(d_1^{-1} a_{\mu,1})(p_1 r_{1,\rho}) = \sum_{\nu=2}^{\nu=n} -d_1^{-1} p_\nu r_{1,\rho} a_{\mu,\nu}; \qquad (1 \leqq \mu \overset{=}{<} m), \quad (2 \leqq \rho \overset{=}{<} n)$$

i zastąpmy w tych równaniach ilości $-d_1^{-1} p_\rho r_{1,\rho}$ przez wyrażenia odpowiednie

$$-d_1^{-1} p_\rho r_{1,\rho} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\rho-1} d_1^{-1} p_\nu r_{1,\nu} - 1 + \sum_{\nu=\rho+1}^{\nu=n} d_1^{-1} p_\nu r_{1,\nu}, \qquad (2 \leqq \rho \overset{=}{<} n)$$

a otrzymamy także $m(n-1)$ równań następujących

$$(d_1^{-1} a_{\mu,1})(p_1 r_{1,\rho}) =$$

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=\rho-1} -d_1^{-1} p_\nu r_{1,\rho} a_{\mu,\nu} + \left(\sum_{\nu=2}^{\nu=\rho-1} d_1 p_\nu r_{1,\nu} - 1 + \sum_{\nu=\rho+1}^{\nu=n} d_1^{-1} p_\nu r_{1,\nu} \right) a_{\mu,\rho} + \sum_{\nu=\rho+1}^{\nu=n} -d_1^{-1} p_\nu r_{1,\rho} a_{\mu,\nu} =$$

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=\rho-1} \begin{vmatrix} a_{\mu,\nu}, & a_{\mu,\rho} \\ r_{1,\nu}, & r_{1,\rho} \end{vmatrix} (d_1 p_\nu) - a_{\mu,\rho} + \varrho' \sum_{\nu=\rho+1}^{\nu=n} \begin{vmatrix} a_{\mu,\nu}, & a_{\mu,\rho} \\ r_{1,\nu}, & r_{1,\rho} \end{vmatrix} (d_1^{-1} p_\nu);$$

$$(1 \leqq \mu \overset{=}{<} m), \qquad (2 \leqq \rho \overset{=}{<} n)$$

z których to równań otrzymujemy wyrażenia $m(n-1)$ okresów $a_{\mu,\rho}$, $(1 \leqq \mu \overset{=}{<} m)$, $(2 \leqq \rho \overset{=}{<} n)$ przez tyleż ilości

$$(s+5) \qquad d_1^{-1} a_{\mu,1}; \qquad \begin{vmatrix} a_{\mu,\nu}, & a_{\mu,\rho} \\ r_{1,\nu}, & r_{1,\rho} \end{vmatrix};$$

$$(1 \leqq \mu \overset{=}{<} m), \qquad (2 \leqq \rho \overset{=}{<} m)$$

z których drugie są okresami, jako summy wielokrotników jednakowych okresów dawnych okresów, a zaś pierwsze stanowią układ okresów jednoczesnych jakto wyżéj dowiodłem. Nakoniec okresy $\bar{a}_{\mu,1}$, $(1 \leqq \mu \leqq m)$ wyrażają się także przez okresy $d_1^{-1} a_{\mu,1}$, $(1 \leqq \mu \leqq m)$ mianowicie

$$a_{\mu,1} = (d_1^{-1} a_{\mu,1})\, d_1\,; \quad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

i tym sposobem wszystkie okresy dawne

$$a_{\mu,\rho}, \quad (1 \leqq \mu \leqq m), \quad (1 \leqq \rho \leqq n)$$

wyrażają się przez okresy $n-1$ układów $(s+5)$ jak to zamierzyłem dowieść.

W szczególności gdy $k=l$ mamy twierdzenie wymienione na początku niniejszego pisma. Jeżeli nadto $m=1$, zaś $l=2$ lub $l=3$ otrzymamy dwa twierdzenia tyczące funkcyj okresowych dwu i trójwymiarowych jednéj zmiennéj niezależnéj, których dowiodłem gieometrycznie w poprzedniéj pracy na stronicach 35 i 36 drugiego zeszytu niniéjszego Pamiętnika.

W razie zaś gdyby $l=1$ i nadto $\iota_1=1$ mamy godne uwagi twierdzenie następujące:

c) *Funkcja rzeczywista* m *zmiennych niezależnych rzeczywistych, nie może mieć więcéj nad* m *układów okresów jednoczesnych rzeczywistych, jeżeli nie jest stałą, ani też nie posiada dla każdego układu znaczeń zmiennych niezależnych nieskończonéj liczby znaczeń różniących się między sobą tak mało jak się podoba.*

Dodajmy nakoniec że twierdzenie główne niniejszéj pracy możnaby dowieść jeszcze w następujący sposób. Dowiodłszy naprzód twierdzenia pomocniczego a) możnaby następnie dowieść twierdzenia szczególnego c) z którego następnie przejśćby można do twierdzenia b) którego twierdzenie główne jest szczególnym przypadkiem. Lecz zdaje się byłoby zbytecznćm podawać to drugie dowodzenie, gdyż takowe po powyższych wskazówkach nie może przedstawiać trudności.

(1) Przedstawione 11 sierpnia i 6 października 1856 roku. Wzmianki o tém znajdują się w *Comptes rendus* tomie 43 na stronicach 321 i 681.