

# PRZEGLĄD KRYTYCZNY DZIEŁA

P. G. H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

POD TYTUŁEM

## TRYGONOMETRYA

Z TEORYĄ IŁOŚCI UROJONYCH I Z NOTAMI.

NAPISAŁ

WŁ. GOSIEWSKI.

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa d. 5 Października 1871 r.).

---

W dalszym ciągu wydawnictwa dzieł matematycznych przez Bibliotekę Kórnicką, ukazała się w roku 1870 *Trygonometria z teorią ilości urojonych i z notami* przez p. G. H. Niewęgłowskiego profesora matematyki. Paryż, w księgarni K. Królikowskiego 20, ulica de Seine. Warszawa, w księgarni M. Glücksberga na Krakowskim-Przedmieściu, 1870, in 8°, na pięknym białym papierze stronic 407. Książka ta stanowi trzeci tom z rzędu dzieł matematycznych tego samego autora, z których dwa pierwsze tomy to jest Arytmetyka i Geometria były krytycznie rozebranemi przez pana Adolfa Sagajło w pierwszym tomie *Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych* w Paryżu. W niniejszym artykule mam zamiar podać niektóre spostrzeżenia dotyczące tomu trzeciego.

Zhytecznóm jest zapewne nadmieniać o staranném wydaniu Trygonometrii p. Niewęgłowskiego, któróm jak zresztą już wiadomo odznaczają się wszystkie dzieła wychodzące nakładem Biblioteki Kórnickiej; przystępujemy zatem do właściwego jej ocenienia, dodając przytém uwagi odnoszące się do samego wykładu Trygonometrii.

Z dwóch różnych stanowisk na przedmiot, cel i ważność trygonometrii zapatrywać się wypada. Najprzód jako składowa część całej organizacji nauk matematycznych, trygonometria stanowi węzeł łączący matematykę elementarną z matematyką wyższą; w niej to uczeń pierwszy raz spotyka się z pojęciem funkcyi, tém zasadniczym jak wiadomo pojęciem całej wyższej matematyki; w niej nabywa również ogólniejszego wyobrażenia o znaczeniu znaków *mniej* i *więcej* i poznaje już gruntownie korzyści jakie się z przyjęcia ich osiągają; powtórę, podawszy zasadnicze własności funkcyj kołowych przystępuje do ich zastosowań geometrycznych, gdzie zapoznaje ze sposobem wprowadzenia w rachunek kątów, a raczej ze sposobem wyrugowania ich z rachunku za pomocą funkcyj kołowych. Te dwa ważne względy powinny zdaniem naszym przewodzić w wykładzie trygonometrii, co również profesor Niewęglowski uczynił odróżniając naukę o funkcyach kołowych od właściwej trygonometrii; cała Księga Pierwsza i ostatni rozdział (*funkcje kołowe zmiennych urojonych*) Księgi Czwartej zawierają studia nad samemi funkcyami kołowemi, podczas gdy w księgach drugiej i trzeciej traktuje się właściwa trygonometria prostolinijna i sferyczna.

Nauczyciel czy autor trygonometrii, pojmujący dobrze trudności jakich uczeń doświadcza w nabywaniu zasadniczych pojęć matematyki, wyłoży definicje i własności funkcyj kołowych z całą ścisłością i z całą oględnością na wszystkie delikatne punkty, któreby w umyśle początkującego mogły zrodzić jaką wątpliwość. Warunkom tym profesor Niewęglowski odpowiedział w zupełności; czujemy się jednak w obowiązku wyjawic nasze zdanie co do definicji funkcyj kołowych, które jak czytelnik zaraz zobaczy, jest cokolwiek odmiennem od zdania szanownego autora.

Przyjawszy za określenie wstawy, zgodnie z profesorem Niewęglowskim definicję na stron. 4, (*« Wstawą łuku jest liczba, dodatna albo ujemna, która mierzy prostopadłą spuszczoną z jednej skrajności tego łuku na średnicę przechodzącą przez drugą skrajność »*) dalibyśmy za definicję dostawy to jej określenie które na stron. 17 wynika, (*« Dostawą łuku jest liczba, dodatna albo ujemna, która mierzy odległość środka kątów od spodka wstawy tego łuku »*) następnie zaś określilibyśmy  *stycznę, sieczną, dosieczną* i *dosieczną* jako funkcyje wstawy i dostawy. W ten sposób jak łatwo czytelnik widzieć może, uniknęłoby się nowej umowy co do znaków, którą profesor Niewęglowski w ustępie o *Siecznej* (stron. 13) wprowadza, umowy, niemogącej nawet mieć miejsca, albowiem prawo co do znaków siecznej i dosiecznej wynika bezpośrednio z definicji tych funkcyj i z umowy przyjętej co do znaków wstawy i dostawy.

Na mocy téj uwagi, dowodzenie geometryczne *związków pomiędzy liniami trygonometrycznemi jednego łuku* (str. 24) nie przedstawiałoby już uczącemu się żadnej prawie nowości pod względem samej nauki, ale tylko mogłoby służyć jako objaśnienie przyczyny nazwania takiego a nie innego funkcyj kołowych. Wreszcie, jednostajność jaka się w ten sposób zaprowadza ułatwia wiele początkującemu oryentowanie się co do znaków innych linii trygonometrycznych, jeżeli pamięta znaki wstawy i dostawy, co już jest rzeczą dosyć łatwą.

Témbardziej skłonni bylibyśmy do takiej a nie innej definicji funkcyj kołowych w przypadku, gdy profesor Niewęglowski zamieszcza wiadomości o *funkcyach kołowych zmiennych urojonych* (stron. 379), gdzie jak wiadomo wstawa i dostawa określają się przez szeregi, a pozostałe funkcyje kołowe definiują się jako funkcyje wstawy i dostawy.

Pomimo to uwaga moja, chociażby nawet najśluszniejsza, nie zmniejsza bynajmniej wartości poglądu p. Niewęglowskiego, który jest zgodny zresztą z poglądami we wszystkich innych dziełach o trygonometrii; i definicje geometryczne funkcyj kołowych, przy których szanowny autor

zostaje, mają także swoje korzyści, wrażając w umyśle młodego ucznia cały obraz linii trygonometrycznych.

Lecz co jest ważnem jeszcze do nadmienienia w księdze pierwszej, to sposób dodawania łuków (str. 37) to jest sposób otrzymania wzorów na  $\text{wst}(a+b)$ ,  $\text{dos}(a+b)$ , i t. d. Profesor Niewęgłowski używa w tym celu metody rzutów, których teorię na końcu poprzedzającego rozdziału (str. 29) bardzo przystępnie i jasno wyłożył. Metoda ta, nieużywana po większej części w innych nawet bardzo wysoko cenionych dziełach o trygonometrii, posiada tę zaletę że stosuje się w każdym przypadku, jakiekolwiek byłyby łuki  $a$  i  $b$  rzetelne, gdy tymczasem stosując w tym samym celu inne sposoby, prawdziwość otrzymanych wzorów potrzeba oddzielnie dowodzić, jeżeli chcemy przez  $a$  i  $b$  rozumieć łuki dodatne lub ujemne i większe od ćwierci okręgu koła. Niedogodność tę i trudności złąd wynikające dla ucznia czuł dobrze uczony profesor, czemu chcąc zaradzić umieścił bardzo dowcipny i łatwy sposób dowodzenia formuł na  $\text{wst}(a+b)$  i  $\text{dos}(a+b)$  za pomocą rzutów.

Z równą także korzyścią, dla będącego w mowie dzieła, zastosował profesor Niewęgłowski podobną metodę w dowodzeniu *fundamentalnej formuły* trygonometrii sferycznej (str. 231). To ostatnie dowodzenie o ile mi wiadomo nie istniało dotąd w żadnej prawie trygonometrii, słusznie więc wdzięczność za nie winniśmy p. Niewęgłowskiemu. Nadmienię mi jednak wypada, że taki sam sposób dowodzenia formuł trygonometrii sferycznej znany mi był przed tém (1866 r.) od p. *Zygmunta Hojciechowskiego* obecnie Magistra Nauk Matematyczno-Fizycznych h. Szkoły Głównej Warszawskiej, a wówczas ucznia téż szkoły, który nie tylko tę jedną formułę ale i inne jeszcze za pomocą rzutów otrzymał. Na zakończenie przeglądu Księgi pierwszej należy jeszcze zanotować, że rozdział pod tytułem *Tablice funkcji kołowych* (str. 89) jest bardzo pięknie opracowanym, szczególnie zaś odznacza się samodzielnością ustęp o *logarytmach ilości trygonometrycznych od 0° do 5°* (str. 113).

Przechodząc do innych Ksiąg Trygonometrii p. Niewęgłowskiego, winniśmy mu oddać ten sam hołd, na jaki zasłużył za Księgę pierwszą. Przedmiot w ogóle wszędzie jest bardzo starannie i sumiennie opracowany i urozmaicony takimi ustępami jak *Poprzeczne i pęki*, *Rzuty powierzchni*, *Zagadnienia Pascala i Fermata*, w trygonometrii zaś sferycznej, cały ustęp pod tytułem *Zastosowania trygonometrii do figur sferycznych* stanowi prawdziwą ozdobę Trygonometrii p. Niewęgłowskiego, którą się tylko ona jedyna poszczycić może. W końcu dwie ostatnie Noty a szczególnie Nota II zasługują także na uwagę, tak pod względem swojej treści jak i samodzielnego opracowania. Winniśmy jednak wyrazić nasz żal, że w tak obszerném dziele jak Trygonometria p. Niewęgłowskiego, nie spotykamy ani wzorów różniczkowych trygonometrii sferycznej, ani innych formuł częstego w Astronomii i Geodezyi użycia, a któreby do Księgi czwartej powinny się zaliczać; spodziewamy się że uczony profesor, zważywszy na najwżaniejsze może zastosowanie trygonometrii w Astronomii i Geodezyi, braki te w nowém wydaniu uzupełni.

Jeżeliby chodziło o program wykładu Trygonometrii w całym znaczeniu tego wyrazu, dzieło p. Niewęgłowskiego stanowić może typ pod tym względem, z uwagami jednak które z ciągu recenzji wynikają. I tak, Księga pierwsza z dodaniem do niej ostatniego rozdziału (*Funkcje kołowe zmiennych urojonych*) Księgi czwartej poprzedzonego *teorią ilości urojonych*, powinna stanowić Księgę pierwszą, którąby można zatytułować «*Teoria funkcji kołowych*», Księgi druga i trzecia pozostają na swoich miejscach, czwarta zaś Księga wzbogacona formułami używanemi w Astronomii i Geodezyi i wzorami różniczkowymi trygonometrii sferycznej zamykałyby wykład całej Trygonometrii. Rozumie się samo przez się że program taki obejmuje Trygonometrię w całej rozciągłości, w miarę więc

zakresu jaki sobie naznaczamy zmienićby go wypadało. W elementarnych wykładach trygonometrii poprzestaje się zwyczajnie na teorii funkcji kołowych zmiennej rzeczywistej, i na zastosowaniu téż teorii do figur tylko płaskich, w szczególności zaś trójkątów płaskich, co stanowi Trygonometrię prostolinijną właściwą.

Po tych uwagach odnoszących się do samej treści układu i sposobu traktowania Trygonometrii przez p. Niewęgłowskiego, pozostaje w końcu ocenienie jego dzieła pod względem języka. Przedmiot to dla mnie nierównie trudniejszy; nie posiadając bowiem sam talentu pięknego pisania, podejmuję się wykazać przynioty i wady kogo innego. Na usprawiedliwienie moje posiadam tylko tę jedną zasadę, że *łatwiej jest widzieć cudze błędy, aniżeli samemu ich unikać*.

Trygonometria p. Niewęgłowskiego która ze względu na treść, układ i sposób traktowania należy niezawodnie do pierwszorzędnych dzieł tego rodzaju, traci cokolwiek swojej wartości, z powodu niejasnego języka. Sposoby i metody dowodzenia używane przez uczonego profesora, a zkadnąd jasne i łatwe, stają się przez to mniej zrozumiałemi. Na poparcie naszego zdania dajemy przykład wzięty z miejsca gdzie się książka otworzyła (str. 153) « Żeby trójkąt istniał, musi  $\log \text{wst} B$ , znaleziony za pomocą tablic, być mniejszy od 10, a najwyżej równy 10. Jeżeli taki jest  $\log \text{wst} B$ , wtedy  $\text{wst} B$  odpowiada dwóm kątom spełniającym. etc. » Ustęp ten byłby daleko zrozumialszym i łatwiejszym do czytania gdyby powiedziano: « Ażeby trójkąt mógł istnieć, znaleziony w tablicach  $\log \text{wst} B$  powinien być mniejszy od 10 lub najwyżej równy 10; w takim bowiem tylko razie  $\text{wst} B$  odpowiada kąt, a właściwie, dwa kąty spełniające.

Również także pojedyncze wyrazy tak naukowe jako też i pospolite są czasem niewłaściwie użyte. I tak, w tytule ~~swojego dzieła~~ pisze profesor Niewęgłowski « *Trygonometria z Teorią ilości urojonych i z Notami*, » zamiast napisać po polsku « *z przypisami*. » Wyraz naprzykład *zwiastować* możnaby zastąpić odpowiedniejszym lub go unikać. Na stronie znowuż (265) czytamy « *Ta, jako mówią, elegancka formuła znaleziona przez Symona Lhuilera* », etc. zamiast *piękna formuła znaleziona przez Szymona Lhuilera*. Podobnie także nie należało wprowadzać nowego wyrażenia *zbytek sferyczny* mając na to bardzo dobre i utarte wyrażenie *przepelnienie sferyczne*.

Kończąc temi uwagami właściwy przegląd Trygonometrii p. Niewęgłowskiego, pozostaje mi jeszcze wykazać jój stanowisko jakie w literaturze naszej zajmuje. Począwszy od roku 1816, daty pierwszego wydania *Początków trygonometrii płaskiej* przez Michała POLIŃSKIEGO (PEŁKĘ), mieliśmy w 1817 roku *Trygonometrię kulistą, analitycznie wyłożoną* przez Jana ŚNIADECKIEGO, w 1821 roku drugie wydanie *Trygonometrii* POLIŃSKIEGO powiększona *tablicami logarytmowemi*, w 1822 roku drugie wydanie *Trygonometrii* Jana ŚNIADECKIEGO, w 1828 roku trzecie wydanie *Trygonometrii* POLIŃSKIEGO powiększone *tablicami logarytmowemi i wzorami trygonometrycznemi*; w ostatnich zaś czasach, to jest od roku mniej więcej 1830, mieliśmy trzy dzieła o trygonometrii, mianowicie: tłumaczenie *Trygonometrii* LEFEBURE'a de FOURCY przez A. BERNHARDTA, *Trygonometrię* przez Stanisława PRZYSTAŃSKIEGO i *Trygonometrię* przez Turno. Ze wszystkich tych dzieł, jedno jak Polińskiego i Śniadeckiego są za stare i niekompletne, drugie, jak Bernhardta, Przystańskiego i Turno, jakkolwiek zawierające obie trygonometrie to jest płaską i sferyczną, nie odpowiadają jednak dzisiejszym wymaganiom z powodu swojej szczupłości. Dlatego też dzieło p. Niewęgłowskiego można bez przesady nazwać koroną wszystkich trygonometrii w polskim języku, témbardziej zaś wtenczas, kiedy uczony profesor przebywając w ognisku matematycznej oświaty, miał sposobność korzystania z najpierwszych źródeł w tym rodzaju.

Tak więc dzięki gorliwości p. Niewęgłowskiego i poświęceniu właściciela *Biblioteki Kórnickiej*

p. hr. Jana Działyńskiego, który nie szczędzi swoich funduszków na podniesienie oświaty narodowej, mamy już trzy elementarne dzieła: *Arytmetykę*, *Geometrię i Trygonometrię*; wkrótce wyjść mające tym samym nakładem *Algebra i Geometria analityczna* przez p. Adolfa SĄGAJŁĘ uzupełnią cały szereg dzieł zawierających *kompletny wykład elementarnej matematyki*.

Dziwnego rodzaju obojętność naszych rodaków na dzieła matematyczne w polskim języku, zmusza mnie do zwrócenia na to uwagi polskiej publiczności. Nie wiem dla czego, czy z braku zaufania w polski rozum, czy też z przyzwyczajenia i mody, tak ucząca się młodzież polska jak i ich nauczyciele posługują się zwykle dziełami obcemi, mając równie dobre w narodowym języku. Czas by już wreszcie pozbyć się tych przesądów, Lombardziej, kiedy znajdują się szlachetni ludzie, którzy nie szczędzą kosztów ani na to, ażeby dzieła przez nich wydawane nie ustępowały w niczem dziełom zagranicznym, ani na to, ażeby były jak najprzystępniejsze pod względem swojej ceny.

KONIEC TOMU DRUGIEGO

## SPIS RZECZY TOMU II<sup>go</sup>:

1) Kilka uwag o liczbie różnych wartości jakie funkcyja może przybierać w skutku przestawień zmiennych do niej wchodzących, przez Wł. GOSIEWSKIEGO.....	4
2) Kilka uwag dotyczących się funkcyj wielowymiarowych, przez Wł. TRZASKĘ.....	27
3) Dowód pewnego twierdzenia dotyczącego funkcyj wielowymiarowych okresowych, napisał Wł. TRZASKA.....	39
4) Rozbiór krytyczny dzieła p. Folkińskiego p.t. Zasady Rachunku Różniczkowego i Całkowego, Tom I <sup>szy</sup> , Rachunek Różniczkowy, przez A. SĄGAJŁĘ.....	47
5) O Astronomii w Polsce, przez Feliksa KUCHARZEWSKIEGO.....	123
6) O Nitroglicerynie i Dynamicie, przez ŻALIŃSKIEGO.....	22
7) Przegląd krytyczny dzieła p. G. H. NIEWĘGŁOWSKIEGO pod tytułem Trygonometrya etc., przez Wł. GOSIEWSKIEGO.....	241

*Od Redakcyi.*

*Ustawa Towarzystwa Nauk Ścisłych.*

*O Sprężystości Ciał Stałych Jednorodnych, przez Wł. Gosiewskiego.*

*O Funkcyach Jednorodnych i Jednogatunkowych, przez Wł. Gosiewskiego.*

*Dowód na twierdzenie Hesse'go o wyznaczniku funkcyjnym, napisał Wawrzyniec Żmurko.*

*Przyczynek do Teoryi największości i najmniejszości funkcyi wielu zmiennych, napisał Wawrzyniec Żmurko.*

*O Względnościach wykreślnych zachodzących między rzutami systemów Geometrycznych, napisał Jan Nep. Franke.*

*O niektórych własnościach pewnego rodzaju funkcyj jednej zmiennój urojonej, przez Wł. Trzaskę.*

*O pewnem zastosowaniu wyznaczników funkcyjnych, napisał Wł. Trzaska.*

*O nakreśleniu do trzech kół danych leżących na powierzchni jednej kuli czwartego koła stycznego leżącego na tejże powierzchni, przez Wł. Trzaskę.*

*Rozbiór krytyczny Dzieł p. G. H. Niewęglowskiego, napisał Adolf Sgajło,*

*Studyum I<sup>sze</sup> Arytmetyka.*

*Studyum II<sup>gie</sup> Geometrya.*

*Program przedstawionego do konkursu przez Towarzystwo Nauk Ścisłych zadania: Ocenienie prac matematycznych H. Wronskiego.*

*O Funkcyach Jednoczesnych i Jednogatunkowych przez Wł. Gosiewskiego. Nota do Twier. VI Roz. II, 17.*

---

TYMŻE SAMYM NAKŁADEM WYSZŁY:

G. H. NIEWĘGŁOWSKI. ARYTMETYKA z teorią przybliżeń liczebnych i z notami. 8<sup>ka</sup> tom jeden, str. 352.  
Cena fr. 4. Paryż, rok 1866.

G. H. NIEWĘGŁOWSKI. GEOMETRYA, wydanie drugie całkiem przerobione i powiększone 8<sup>ka</sup>, tom jeden  
str. 778. Cena fr. 8. Paryż, rok 1869.

G. H. NIEWĘGŁOWSKI. TRYGNOMETRYA, z teorią ilości urojonych i z notami; 8<sup>ka</sup>, str. 407. Cena 4 fr. 50 c.  
(4 rub. 50 kop.) Paryż, 1870 r.

W. FOLKIERSKI. ZASADY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO z Zastosowaniami, wyłożone w sposób przy-  
stępny dla początkujących; tom I<sup>szy</sup>: Wiadomości wstępne, Rachunek Różniczkowy i Zastosowania; po-  
większony przypiskiem Wł. TRZASKI: O WYZNACZNIKACH. 8<sup>ka</sup>, str. XLIII i 1087; cena fr. 10 (3 rub. sr.),  
Paryż, księgarnia Luxemburska, ulica Tournon 16 i Warszawa księgarnia Glücksberga, ulica Krakowskie  
Przedmieście; rok 1870.

ZNAJDUJĄ SIĘ OBECNIE W DRUKU:

W. FOLKIERSKI. ZASADY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO: Tom II<sup>ty</sup>: RACHUNEK CAŁKOWY.

A. SĄGAJŁO. ALGEBRA.

Wł. GOSIEWSKI. WYKŁAD MECHANIKI CZĄSTECZKOWEJ (Molekularnej).

WYJDA WKRÓTCE:

Wł. FOLKIERSKI: ZASADY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO. T. III<sup>ci</sup>. CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZ-  
KOWYCH.

G. H. NIEWĘGŁOWSKI. MECHANIKA ROZUMOWA.

A. SĄGAJŁO. GEOMETRYA ANALITYCZNA.

Wł. KLUGER i F. KUCHARZEWSKI. WYKŁAD HYDRAULIKI wraz z teorią Maszyn hydraulicznych, poprzedzony  
wiadomościami wstępnymi z Hydrostatyki i Hydrodynamiki.

HULEWICZ. O BUDOWIE MOSTÓW.





Dotychczas niżej wymienione księgarnie zgłaszały się z obietnicą sprzedawania po ustalonych cenach wszystkich wydań Biblioteki Kórnickiej i odbierają je wprost od Zarządu zaraz po wykończeniu każdego tomu.

w WARSZAWIE	PP.	Michał Gluecksberg.
" "	"	Gebethner i Wolf.
" "	"	J. J. Okoński.
w KRAKOWIE	"	Fr. Trzcieski. ( <i>Księgarnia wydawnictwa dzieł tanich i pożytecznych</i> ).
w LWOWIE	"	P. D. Bartoszewicz. ( <i>Księgarnia Polska, Ulica Kopernika L. 12.</i> )
" "	"	F. H. Richter.
" "	"	Karol Wild.
" "	"	Gubrynowicz i Schmidt.
w TORUNIU	"	F. T. Rakowicz.
w SREMIE	"	K. Gąsiorowski.
w POZNANIU	"	F. H. Richter.
" "	"	Mieczysław Leitgeber.
" "	"	J. K. Żupański.
w PARYŻU	"	Księgarnia Luksemburska, 10 rue de Tournon.

Nazwiska autorów polegich układających to dzieło

JAN NIEZIŁOŚCICKI  
ANTONI BERTKE  
WALERDY KOKIARSKI  
TROFIL LEMAN.