4. Przekształcanie układów sił.

51. Równoważne układy sił. Układy sił, które, będąc przyłożone **kolejno** do jednej i tej samej bryły, **wywołują jeden i ten sam ruch**, nawamy **układami równoważnymi**. W szczególnych przypadkach, gdy bryła jest w spoczynku; wtedy układami równoważnymi nazwiemy takie układy sił, które, przyłożone kolejno do danej bryły, nie zmienią jej spoczynku. Postępowanie, zapomocą którego wyznaczamy układ sił, równoważny danemu układowi, nazywamy przekształcaniem układu sił. Najprostrze przekształcenia, któremi posługiwać się będziemy we wszystkich wypadkach, nazywają się **przekształceniami zasadniczemi.**

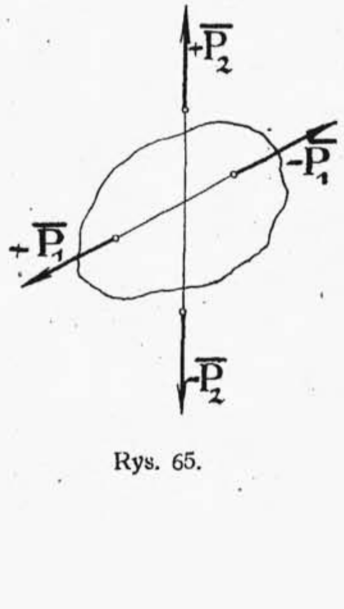
Przyjmujemy **trzy** sposoby zasadnicze przekształcania sił; dwa pierwsze z nich oparte są na następującej zasadzie:

stan ruchu danej bryły się nie zmieni, gdy przyłożymy do dwóch punktów, sztywno z nią związanych, dwie siły, wzajemnie równe, co do zwrotów przeciwne i działające w kierunku jednej prostej. Siły takie nazwiemy siłami **równoważącemi** się; siły, np. $+\overline{P}_1$ i $-\overline{P}_1$, rys. 65-ty są siłami równoważącemi się i nie wpływają na stan ruchu bryły, do której je przyłożymy. W innej postaci wysłowimy tę zasadę: stan ruchu danej bryły nie zmieni się, gdy odejmiemy od danego układu dwie równoważące się siły.

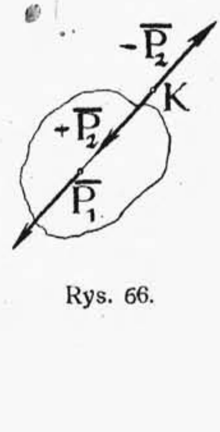
Słuszność tego przekształcenia jest ściśle związaną z warunkiem sztywności bryły; i przyjmujemy je jako stwierdzone doświadczeniami; nie widzimy bowiem powodu, dla którego bryła, pod działaniem dwóch sił równoważących się, miałaby zmienić stan swego ruchu lub spoczynku.

Na podstawie tej zasady polega jeszcze następujące przekształcenie:

stan ruchu danej bryły się nie zmieni jeżeli przesuniemy równolegle siłę do dowolnego punktu, leżącego na prostej jej działania; gdy ten punkt sztywno połączony jest z daną bryłą.



Rys. 65.



Rys. 66.

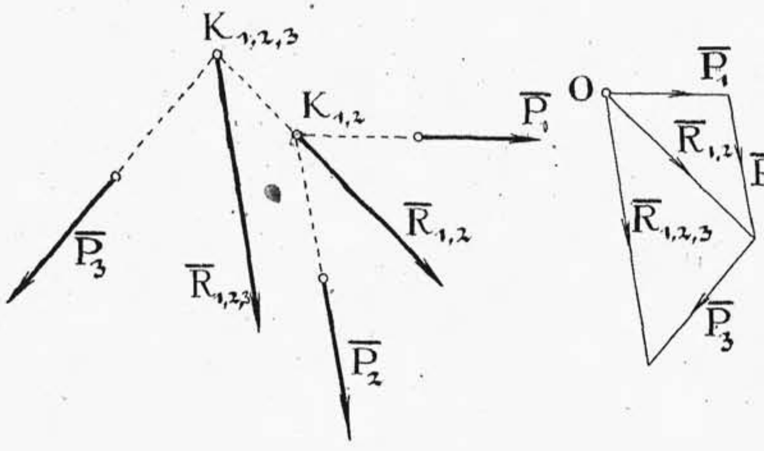
Niech np. na daną bryłę rys. 66-ty działa siła $\overline{P}_1$; następnie w dowolnym punkcie K, leżącym na prostej działania tej siły, przykładamy dwie równoważące się siły $+\overline{P}_2$ i $-\overline{P}_2$; których liczbowe wartości równają się wartości siły $\overline{P}_1$; na zasadzie twierdzenia powyższego siły $-\overline{P}_2$ i $\overline{P}_1$ wzajemnie się znoszą i pozostaje tylko siła $+\overline{P}_2$; zamiast więc siły $\overline{P}_1$ posiadamy obecnie siłę $\overline{P}_2$, równą co do wartości, zwrotu i kierunku sile $\overline{P}_1$, lecz przyłożoną w innym punkcie; rozpatrywanie to prowadzi nas do wniosku, iż punkt przyłożenia siły może być dowolnie przesunięty wzdłuż prostej jej działania, nie powodując zmiany ruchu danej bryły. Do wyznaczenia zatem ruchu bryły, wystarcza, gdy dana jest strzałka, wartość i położenie prostej działania siły; punktem zaś jej przyłożenia może być dowolny punkt tej prostej; wogóle wektory, mające tę właściwość, nazwano **wektorami przesuwnymi**.

Trzecie przekształcenie oparte jest na następującej zasadzie:

stan ruchu danej bryły się nie zmieni, gdy siły, przecinające się w jednym punkcie, zastąpimy ich wypadkową i odwrotnie; stan ruchu nie zmieni się, gdy pewną siłę zastąpimy przez jej składowe.

Stosując te trzy sposoby przekształceń, możemy zastąpić każdy układ sił **nieskończenie** wieloma układami równoważnymi. Z tych sposobów korzystać będziemy w celu przekształcenia więcej złożonych układów sił na układy prostsze; lub też wogóle w celu przekształcenia danego układu na inny, odpowiadający warunkom zadania.

52. Przekształcania sił na płaszczyźnie. Przekształcenia przytoczone zastosujemy najpierw do przekształcania układów sił, leżących w jednej płaszczyźnie. W tym celu, mając płaski układ sił, przedłużamy kierunki dwóch dowolnych sił do ich przecięcia się, następnie do



Rys. 67.

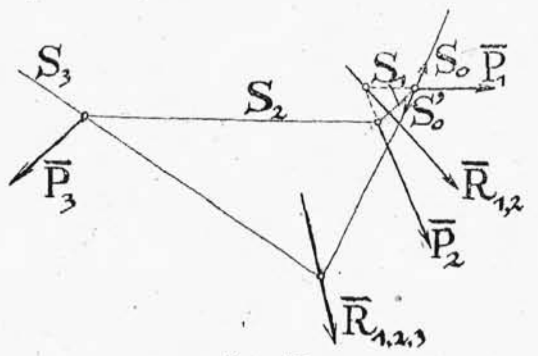
tego punktu przesuwamy punkty ich przyłożenia i wyznaczamy wypadkową. Wykonamy następnie te same przekształcenia z otrzymaną wypadkową i z jaką inną siłą danego układu i powtarzać będziemy tę konstrukcję dotąd, dopóki w wyniku nie otrzymamy jednej siły; lub też jednej pary sił, która powstanie, gdy kierunki dwóch pozostałych sił przesuną się do nieskończoności. Każdy więc układ sił na płaszczyźnie da się przekształcić na jedną siłę, lub na jedną parę sił.

Wykonanie wykreślne tych przekształceń przedstawiliśmy na rys. 67-ym: a mianowicie: przedłużyliśmy kierunki sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ do przecięcia w $K_{1,2}$, i, przesunąwszy do tego punktu punkty ich przyłożenia, wykreśliliśmy wypadkową, oznaczoną przez $\overline{R}_{1,2}$. Dodawanie wektorowe sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ wykonane jest na oddzielnej figurze, z której otrzymujemy wielkość $\overline{R}_{1,2}$ co do kierunku, zwrotu i wartości; **położenie** zaś jej jest wyznaczone przez punkt $K_{1,2}$. Następnie postępujemy w tenże sposób z otrzymaną wypadkową i z inną siłą układu; t. j. szukamy punktu przecięcia się sił $\overline{R}_{1,2}$ i np. $\overline{P}_3$; punkt ten oznaczony jest literą $K_{1,2,3}$; dodajmy następnie wektorowo $\overline{R}_{1,2}$ z $\overline{P}_3$ a znajdziemy wypadkową $\overline{R}_{1,2,3}$. Gdy w układzie jest więcej sił, natenczas w tenże sposób będziemy kolejno szukali punktów przecięcia się i kolejno wykreślimy wypadkowe, aż dojdziemy do jednej wypadkowej, lub do jednej pary sił.

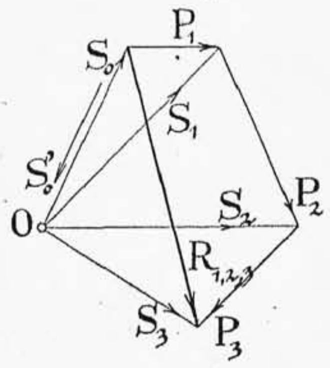
W wielu przypadkach niedogodne jest jednakże takie postępowanie szczególniej, gdy punkty przecięcia się sił wypadają poza rysunkiem podamy przeto inny sposób składania sił, — dogodniejszy. Sposób ten polega natem, że do danego układu sił dodajemy dwie dowolne, lecz równoważące się siły $\overline{S}_0$ i $\overline{S}_0'$, t. j. siły, które czynią zadość warunkowi $\overline{S}_0+\overline{S}_0'=0$, siły te nazwiemy pomocniczemi i wykonamy następnie przekształcenie danegoukładu sił łącznie z siłą np. $\overline{S}_0$; a w końcu dodamy do otrzymanej w ten sposób wypadkowej siłę $\overline{S}_0'$; wypadkowa w ten sposób otrzymana będzie wypadkową danego układu. Dowolny wybór wielkości i położenie sił pomocniczych pozwala dowolnie rozmieścić rysunek. W danym np przykładzie postępowanie to przedstawi się w nast. sposób: do siły $\overline{P}_1$, rys. 68-my, przykładamy w dowolnem miejscu dwie dowolne lecz równoważące się siły $\overline{S}_0$ i $\overline{S}_0'$; kreślimy $\overline{S}_1=\overline{S}_0+\overline{P}_1$ i nanosimy $\overline{S}_1$ we właściwem położeniu; szukamy następnie $\overline{S}_2=\overline{S}_1+\overline{P}_1$ i znów nanosimy ją we właściwem położeniu; postępujemy w ten sposób ze wszystkiemi siłami, aż otrzymany wypadkową pomocniczego układu, którą w danym razie jest $\overline{S}_3$; ażeby otrzymać wypadkową właściwą danego układu, należy dodać do $\overline{S}_3$ siłę $\overline{S}_0'$; a otrzymany wypadkową $\overline{R}$, która jest wypadkową danego układu sił.

Figurę pomocniczą, rys 69-ty, która powstała z dodawania sił, nazwano **planem sił**; punkt, w którym zbiegają się siły pomocnicze, nazwano **biegunem** planu siły; siły $\overline{S}$ w układzie sił, fig. 68-ma, nazwano

wielobokiem sznurowym; sznur bowiem obciążony danemi siłami P przybrałby taką postać, jaką te siły posiadają na rysunku. Postępowanie to możemy w ten sposób odmienić, że zamiast wybierać dowolnie siły pomocnicze $\bar{S}_0$ i $\bar{S}_0'$ wybierzemy dowolnie biegun O; nakreślimy plan sił i następnie wielobok sznurowy; a punkt przecięcia się boków skrajnych tego wieloboku sznurowego wyznaczy położenie wypadkowej w układzie sił; a wielkość i kierunek otrzymamy z planu sił. Z planu sił przeto wyznaczymy wielkość i strzałkę wypadkowej; z wieloboku zaś sznurowego jej **właściwe położenie** w danym układzie sił. Sposób wyznaczenia wypadkowej za pomocą wieloboku sznurowego jest szczególnie ważny dla sił równoległych.



Rys. 68.



Rys. 69.

Ze zmianą położenia bieguna zmieniają się wieloboki sznurowe położenie i wielkość jednakże wypadkowej nie może być przez to zmienioną; postępowanie bowiem oparte jest na przekształceniach zasadniczych.

Wieloboki sznurowe przedstawiają bardzo ciekawe i pożyteczne dla obliczeń statystycznych własciwości; rozpatrywanie ich jednakże nie wchodzi w zakres Mechaniki teoretycznej lecz w zakres Statyki budowlanej.

W przekształceniach tych możemy dowolnie zmieniać porządek dodawania; możemy np. wyznaczyć najpierw wielkość i położenie wypadkowej $\bar{R}_{1,3} = \bar{P}_1 + \bar{P}_3$, która będzie przechodzić przez odpowiedni punkt $K_{1,3}$; a następnie znajdziemy $\bar{R}_{1,3,2} = (\bar{P}_1 + \bar{P}_3) + \bar{P}_2$ i w odpowiedni sposób znajdziemy jej położenie. Nasuwa się przeto pytanie czy zmieniając porządek dodawania nie zmieni się wielkość lub też położenie wypadkowej?

Ze sposobu wyznaczenia wypadkowej, rys. 67-my figura prawa, wynika, że wektor $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_K$; a więc wielkość i kierunek wypadkowej nie zależy od porządku dodawania danych sił, § 5-ty. Należy przeto jeszcze zbadać, czy położenie jej względem danego układu nie zmienił się ze zmianą porządku dodajników. Przed tem jednakże dowiedziemy jeszcze twierdzenie, że suma momentów wszystkich sił dowolnie działających na płaszczyźnie, względem dowolnie obranego bieguna na tejże płaszczyźnie, równa się momentowi ich wypadkowej; gdy uwzględnimy jej właściwe położenie; t. j. jak w naszym przykładzie—położenie jej, przechodzące przez punkt $K_{1,2,3}$, rys. 67-my. Moment względem dowolnego bieguna na płaszczyźnie siły $R_{1,2}$, który oznaczymy literą $M_{1,2}$, równa się sumie momentów M_1 i M_2 sił składowych $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, jako przecinających się w jednym punkcie, § 26-ty; co wyrazimy $M_{1,2} = M_1 + M_2$; na tejże zasadzie moment $M_{1,2,3}$ siły $R_{1,2,3}$; jako wypadkowej siły $R_{1,2}$ i $\overline{P}_3$:

$$M_{1,2,3} = (M_1 + M_2) + M_3 \text{ i w ogóle } M_R = \Sigma M_K;$$

t. j. moment wypadkowej $R_{1,2,3}$ względem dowolnie obranego bieguna na płaszczyźnie sił, równa się sumie momentów sił składowych względem tegoż bieguna. Właściwość ta wynika z tego, że moment siły się nie zmieni, gdy siły przesuwać będziemy wzdłuż jej działania. Łatwo spostrzedz, że gdy zmienimy porządek dodawania, to nic nie zmieni się w tem twierdzeniu. Moment bowiem siły $R_{1,3}$ t. j. sił P_1 i P_3 równa się $M_1 + M_3$; a moment siły $(R_{1,3} + P_2)$ równa się $(M_1 + M_3) + M_2$; co wartości momentu nie zmieni; zmienia się tylko porządek dodawania. Dla układu przeto płaskiego sił, przyłożonych do **różnych punktów** płaszczyzny, pozostaje w mocy twierdzenie, któreśmy dowiedli dla sił przecinających się w jednym punkcie, § 26-ty, że **suma momentów sił, działających w jednej płaszczyźnie, równa się momentowi ich siły wypadkowej.**

Twierdzenie to pozwoli wyznaczyć bezpośrednio położenie wypadkowej bez uciekania się do kolejnego dodawania sił; w tym celu obliczymy względem dowolnego bieguna wartość $M_R = \Sigma M_K$; z równania $R \cdot h = M_R$, obliczymy h, t. j. odległość od obranego bieguna znanej już siły R; która wyznaczy położenie wypadkowej.

Każdy przeto płaski układ sił może być zastąpiony przez jedną tylko siłę, określoną co do wartości, kierunku i położenia na płaszczyźnie danego układu; — niezależnie od porządku dodawania.

Zadania. 1) Przekształcić parę sił o momencie M i jedną siłę $\overline{P}$, leżącą w płaszczyźnie tej pary, na jedną siłę $\overline{R}$. Rozwiązanie tego zadania może być dokonane wykreślnie podług zasad stosowanych w tym §-fie. Analitycznie zaś obliczymy położenie szukanej wypadkowej na zasadzie poprzedzającego twierdzenia, że moment wypadkowej równa się sumie momentów sił składowych; względem dowolnie obranego bieguna. W tym celu obierzmy biegun na kierunku danej siły P i, oznaczywszy przez h odległość szukanej siły od tego bieguna, napiszemy równanie $R.h = M$; skąd po uwzględnieniu, że $R = P$; otrzymamy $h = \frac{M}{P}$; wektor $\bar{R}$ umieścimy po tej stronie bieguna O; po której siła R wywołuje moment o zwrocie zgodnym ze zwrotem danego momentu M.

2) Przekształcić płaski układ sił na dwie siły; z których jedna ma przechodzić przez punkt, dany na płaszczyźnie układu, druga zaś ma działać wzdłuż danej prostej, leżącej na tejże płaszczyźnie. W celu rozwiązania tego zadania wyznaczamy w jaki bądź sposób wypadkową danych sił, np. za pomocą wieloboku sznurowego; wyznaczamy następnie punkt przecięcia się tej wypadkowej z daną prostą i łączymy ten punkt z punktem, przez który ma przechodzić szukana siła; otrzymana w ten sposób prosta i dana prosta przedstawiają dwa kierunki, na jakie znalezioną wypadkową należy rozłożyć; te dwie składowe odpowiadają warunkom zadania.

Drogą rachunkową można rozwiązać to zadanie, stosując twierdzenie; że suma momentów sił składowych przecinających się w jednym punkcie równa się momentowi ich wypadkowej. Siłami składowemi są dwie nieznane siły, a ich wypadkowa jest znana; ażeby w równanie momentów weszła tylko jedna niewiadoma, obierzmy biegun momentów w danym punkcie, przez który ma przechodzić jedna z szukanych sił; a z równania tego obliczymy wartość drugiej siły.

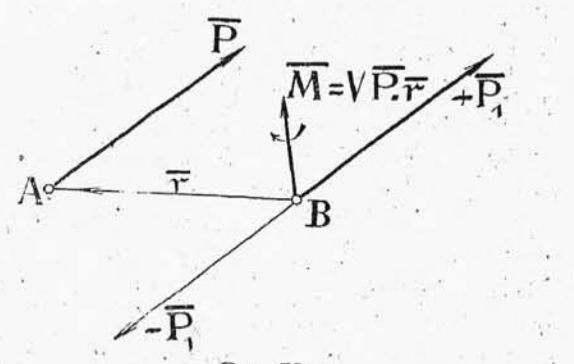
3) Przekształcić płaski układ sił na trzy siły, których proste działania nie przecinają się w jednym punkcie i są dane w płaszczyźnie układu. W celu rozwiązania przekształcamy najpierw dany układ na jedną siłę P; a następnie rozkładamy ją w trzech danych kierunkach; ażeby to wykonać, weźmiemy pod uwagę, że siła P i trzy szukane siły są układami równoważnymi, możemy przeto dla ułatwienia rozwiązania wyobrazić sobie siły szukane z odwróconymi strzałkami; a wtedy na zasadzie p-tu 5-go § 58-go wypowiemy to zadanie w nast. sposób; cztery siły, których proste działania są dane oraz jednej z nich wartość i strzałka, są w równowadze; należy obliczyć wartości tych trzech sił. Podstawą rozwiązania może być myśl, że jeżeli te siły mają być w równowadze, to wypadkowa dwóch z nich powinna być równa — lecz z odwrotną strzałką — wypadkowej dwóch drugich sił; na zasadzie tego można wykreślić czworobok czterech sił; z którego wyznaczymy wartości szukanych sił, a po odwróceniu ich strzałek otrzymamy trzy siły, które są równoważne danej sile, a więc i danemu składowi. Zbadać, przy jakich wyjątkowych położeniach prostych działania zadanie staje się niedostatecznie określone i posiada nieskończenie wiele odpowiedzi.

Zadanie to można rozwiązać bezpośrednio drogą rachunkową, opierając się na twierdzeniu; że momenty sił układów równoważnych względem tego samego bieguna są równe; w tym celu dla ułatwienia rachunku obieramy biegun na przecięciu się danych prostych działania dwóch sił; a wtedy z równania momentów obliczymy bezpośrednio wartość i znak siły działającej wzgłuż tej prostej; a mając już tę siłę, możemy bądź utworzyć czworobok tych sił; bądź też zastosować w dalszym ciągu twierdzenie o momentach.

4) Przenieść siłę daną do dowolnego punktu w przestrzeni. Jeżeli pewna siła $\overline{P}$ działa na bryłę, to, jakieśmy już mówili, siłę tę możemy dowolnie przesunąć w kierunku jej działania. Obecnie okażemy, iż siłę tę możemy przenieść do dowolnego punktu przestrzeni, sztywno połączonego z daną bryłą, dodając przytem parę sił. Wyobraźmy sobie np. siłę $\overline{P}$ przytkniętą do punktu A, rys. 70-ty, w celu przeniesienia jej np. do punktu B, przykładamy w B dwie siły równoważące się $+\overline{P}_1$ i $-\overline{P}_1$, których wartości równają się wartości siły $\overline{P}$ i kierunki są do niej równoległe; otrzymujemy w ten sposób układ złożony z pary sił $(\overline{P}, -\overline{P}_1)$, i z siły $\overline{P}_1$ z punktem przyłożenia w B. Przenieśliśmy zatem siłę $\overline{P}$ z punktu A do punktu B, ażeby zaś ruch bryły nie zmienił się, przykładamy parę sił, której moment $M = P.h$, a kierunek jego jest prostopadły do płaszczyzny (B,P); wniosek ten wysłowimy w sposób następujący:

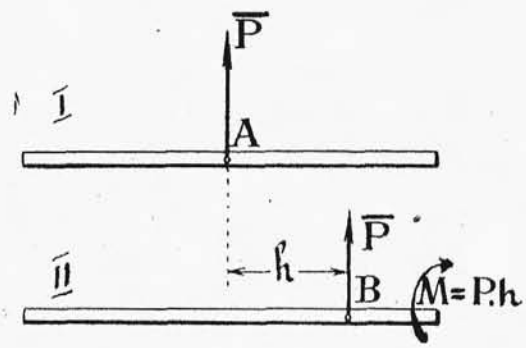
każdą siłę można przenieść do punktu, dowolnie obranego w przestrzeni dodając jednocześnie parę sił, której moment, równa się momentowi danej siły względem obranego bieguna, a jej płaszczyzna przechodzi przez daną siłę i obrany biegun.

Ażeby przeto utrzymać n. p. pręt ciężki w równowadze, przykładamy w środku jego ciężkości jedną siłę; lecz również utrzymamy go w równowadze, przyłożywszy tę siłę w innym punkcie tego pręta i jednocześnie parę sił. Na rys. 71-ym siłę $\overline{P}$, przyłożoną do punktu A (w przypadku I-szym), zastąpiliśmy siłą $\overline{P}$, przyłożoną do punktu B, (przypadek II-gi), oraz — momentem $P.h$.



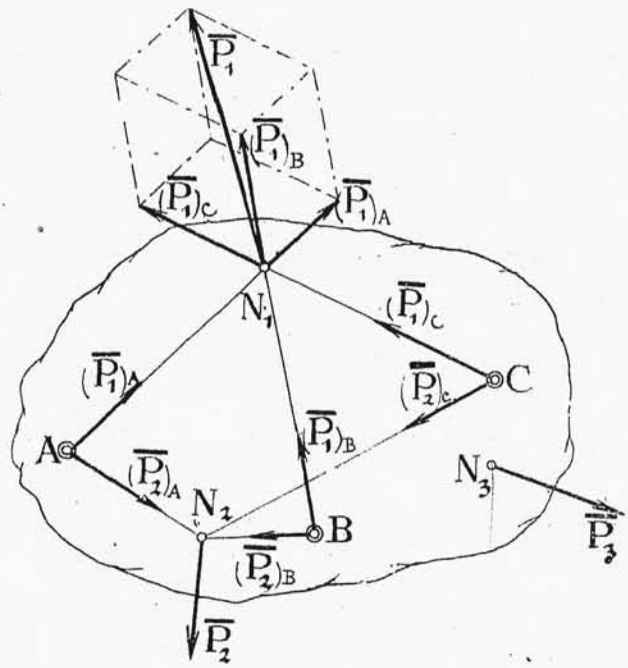
Rys 70.

Wynik ten zobrazujemy w ten sposób: do podtrzymywania pręta ciężkiego wystarczy podeprzeć go w środku ciężkości, co uskutecznimy położywszy go np. na palcu; gdy zaś podeprzeć go w innym punkcie, to zmuszeni będziemy oprócz podparcia pręta ująć go w dwa palce, podkładając jeden palec pod pręt, drugi zaś kładąc na pręt, ażeby w ten sposób wytworzyć parę sił. Wartości sił tej pary niekoniecznie mają być równe wartości siły P, mogą one być różne, byleby wartość momentu pary była równą iloczynowi $P.h$. O ile miejsce podtrzymywania pręta oddalać będziemy od punktu A, tem większy moment będziemy zmuszeni przyłożyć; co też daje się łatwo odczuć jako wysiłek palców, podtrzymujących dany pręt.



Rys. 71.

53. Przekształcenie przestrzennego układu sił na układ, złożony z trzech sił, przechodzących przez trzy dane punkty. Na daną bryłę sztywną rys. 72-gi działa dowolny układ sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3 \ldots$, których punkty przyłożenia oznaczono literami N_1, N_2 i N_3. Zadanie polega na przekształceniu tego układu sił na inny prostszy, złożony tylko z trzech sił, przechodzących przez trzy dowolnie obrane punkty A, B, C. W tym celu połączmy punkt przyłożenia siły $\overline{P}_1$ z obranymi punktami A, B, C prostemi i rozłóżmy ją w kierunkach tych prostych, a otrzymamy trzy siły, które oznaczymy literami $(\overline{P}_1)_A$, $(\overline{P}_1)_B$, $(\overline{P}_1)_C$. Przesuńmy następnie te trzy siły do punktów A, B, C, a otrzymamy zamiast siły $\overline{P}_1$, trzy siły, przechodzące przez obrane punkty; uczyniwszy te same przekształcenia z każdą siłą układu, otrzymamy zamiast całego układu sił trzy pęki sił z wierzchołkami w A, B i C. Następnie jeśli każdy z tych pęków zastąpimy przez jego wypadkową, to otrzymamy szukane trzy siły, które oznaczymy literami $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$. W szczególnym przypadku, gdyby wektor jednej z sił P, leżał w wspólnej płaszczyźnie z dwoma lub trzema punktami A, B, C, to rozłożylibyśmy tę siłę w dwóch kierunkach. Gdyby zaś punkt przyłożenia której z sił leżał na płaszczyźnie, utworzonej przez trzy punkty A, B, C, a prosta jej działania skierowana była zewnątrz tej płaszczyzny, to przesunęlibyśmy punkt przyłożenia tej siły na zewnątrz płaszczyzny, ażeby módz ją rozłożyć w trzech kierunkach, tworzących trójścian. Widoczne jest, że przekształcenie to jest możliwe, gdy punkty A, B, C leżą na jednej prostej. W ten sposób przekształcimy każdy układ sił na trzy siły, przechodzące przez trzy punkty, dowolnie obrane w przestrzeni; nie leżące jednakże na jednej prostej.



Rys. 72.

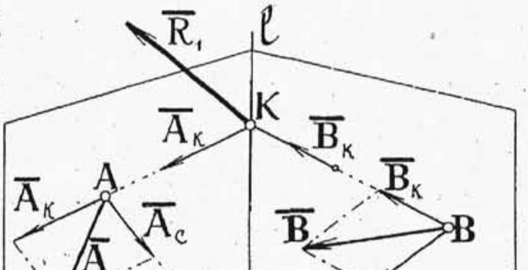
54. Przekształcenie dowolnego układu sił na układ, złożony z dwóch tylko sił. Układ trzech sił $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, otrzymany drogą poprzednich przekształceń, przekształcimy obecnie na dwie siły. W tym celu przez punkt np. C, który był dowolnie obrany, i przez kierunek siły np. A przełożymy płaszczyznę (A, C), rys. 73-ci, i uczynimy to samo, kładąc płaszczyznę przez punkt C i siłę $\bar{B}$; te dwie płaszczyzny dają prostą przecięcia się; na tej prostej obieramy dowolnie punkt K i przeprowadzamy proste AK i AC; rozłożywszy następnie siłę $\bar{A}$ w kierunkach tych prostych, otrzymamy dwie jej składowe $\bar{A}_K$ i $\bar{A}_C$; w tenże sposób, rozłożywszy siłę $\bar{B}$, otrzymamy składowe $\bar{A}_K$ i $\bar{B}$. Siły $\bar{A}_C$ i $\bar{B}_C$ z punktami przyłożenia w A i B przesuwamy do punktu C i wyznaczamy ich wypadkową $\bar{R}_2$ łącznie z siłą $\bar{C}$; t. j. znajdujemy:

$$\bar{R}_2 = \bar{A}_C + \bar{B}_C + \bar{C}.$$

W tenże sposób przesuwamy siły $\bar{A}_K$ i $\bar{B}_K$ do punktu K i wyznaczamy:

$$\bar{R}_1 = \bar{A}_K + \bar{B}_K.$$

Otrzymujemy zatem wogóle jako wynik przekształceń **każdego układu sił, dwie siły** $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, których kierunki wogóle mijają się w przestrzeni. Jedna z tych sił przechodzi przez **dowolnie** obrany punkt C, druga zaś przechodzi przez punkt K, którego położenie jest już w pewnej zależności od położenia punktu C i od położenia sił $\bar{A}$ i $\bar{B}$.



Rys. 73.

W szczególnym przypadku, jeżeliby np. punkt C i siły A i B leżały w jednej płaszczyźnie, to płaszczyznę tę uważalibyśmy za podwójną; a każdą dowolną prostą l, nakreśloną na tej płaszczyźnie, przyjęlibyśmy za linję ich przecięcia się; wobec tego podane postępowanie nie zmieniłoby się dla tego przypadku.

Wniosek ten łącznie z poprzednim da się streścić w następujący sposób:

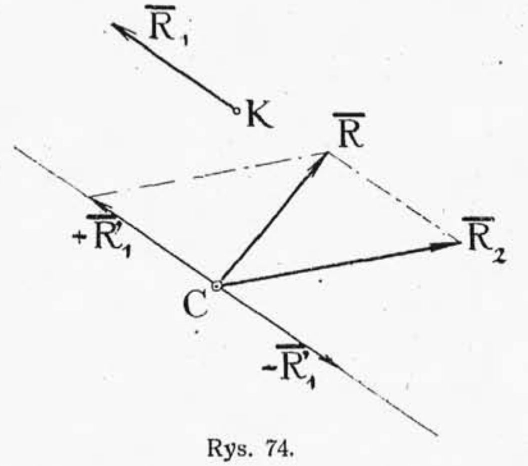
każdy układ sił, działających na bryłę, można przekształcić na układ równoważny, złożony tylko z dwóch sił.

55. Przekształcenie przestrzennego układu sił na dwie siły; z których jedna przechodzić ma przez dany punkt O; druga zaś działać ma w danej płaszczyźnie. W celu rozwiązania tego zadania okażemy najpierw, że każdą siłę rozłożyć można na dwie składowe; z których jedna przechodzić będzie przez dany punkt; a druga działać będzie w danej płaszczyźnie; jeżeli to okażemy, to można będzie przekształcić każdą siłę danego układu na dwie takie składowe i otrzymamy zamiast danego układu dwa układy: jeden z nich będzie płaski w danej płaszczyźnie; drugi zaś utworzy pęk sił, zbiegających się w danym punkcie; każdy z tych układów oddzielnie da się następnie przekształcić na jedną siłę i otrzymamy dwie siły odpowiadające postawionym warunkom.

Ażeby uczynić takie przekształcenie z jedną siłą, powinniśmy skorzystać z warunku danego zadania; że szukane dwie składowe łącznie z daną siłą i punktem, przez który ma przechodzić jedna ze składowych, muszą działać w jednej płaszczyźnie; przeprowadzimy przeto przez daną siłę i dany punkt płaszczyznę pomocniczą; a prosta działania jednej z szukanych składowych będzie prostą, łączącą punkt dany z punktem przecięcia się kierunku danej siły z daną płaszczyzną; druga zaś będzie prostą, powstałą z przecięcia się danej płaszczyzny z płaszczyzną pomocniczą. Sposób ten nie zmieni się, gdy wszystkie lub niektóre z tych sił będą równoległe do danej płaszczyzny.

56. Przekształcenie na jedną siłę i na jedną parę sił. Zamiast ogólnego układu sił, będziemy obecnie rozpatrywali tylko dwie siły $\bar{R}_1$, i $\bar{R}_2$, rys. 74-ty, przyłożone w punktach K i C, i dowiedziemy, że te dwie siły można przekształcić na jedną siłę i na jedną parę sił.

W tym celu, na podstawie przekształceń zasadniczych, przyłożymy do punktu C dwie siły, równoważące się $+\bar{R}'_1$ i $-\bar{R}'_1$, których kierunek jest równoległy do $\bar{R}$ i wartości bezwzględne są równe wartości siły przyłożonej w K; wtedy siły $\bar{R}'_1$ i $\bar{R}_2$ dodamy wektorowo, t. j. wyznaczymy: $\bar{R} = \bar{R}'_1 + \bar{R}_2$, i otrzymamy jako wynik tych przekształceń, siłę $\overline{R}$ oraz parę sił $\overline{R}_1, -\overline{R}'_1$. Wniosek ten wysłowimy w sposób następujący:



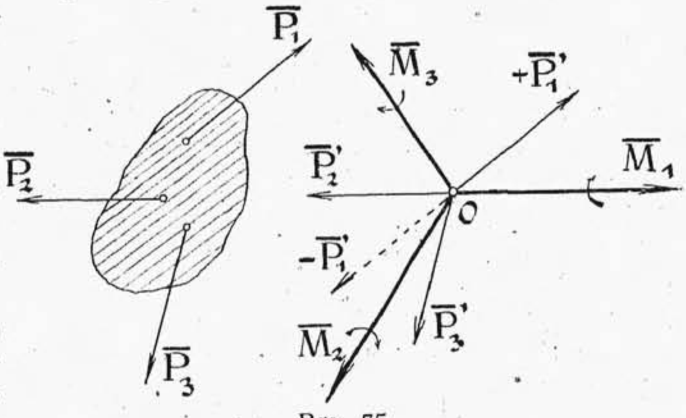
Rys. 74.

każdy układ sił, działających na bryłę, można przekształcić na układ, złożony z jednej siły, przechodzącej przez punkt dowolnie obrany w przestrzeni; — i z jednej pary sił.

Oznaczywszy moment pary przez wektor $\overline{M}$, powiemy ogólniej: każdy układ wektorów przesuwnych da się przekształcić na dwa wektory $\overline{R}$ i $\overline{M}$, odniesione do obranego bieguna w przestrzeni.

57. Sposób bezpośredni przekształcenia na jedną siłę i na jedną parę. Niech na bryłę sztywną działa układ sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3 \ldots$, dowolnie skierowanych w przestrzeni i przyczepionych w różnych jej punktach rys. 75-ty; w celu przekształcenia tego układu obierzmy w przestrzeni dowolny punkt O, sztywno związany z bryłą, który nazwiemy **biegunem przekształceń**, i wykonamy następujące przekształcenia:

przez obrany biegun przeprowadzamy równolegle do siły np $\overline{P}_1$ dwie równoważące się siły $+\overline{P}'_1$ i $-\overline{P}_1'$, których bezwzględne wartości równają się wartości siły $\overline{P}_1$; wtedy siły $\overline{P}_1$ i $-\overline{P}'_1$ są parą sił, której moment przedstawia wektor $\overline{M}_1$; wynikiem więc tego przekształcenia jest wektor $\overline{M}_1$ i wektor P_1' równy wektorowi $\overline{P}_1$, lecz z punktem przyłożenia w O; punkt przyłożenia wektora $\overline{M}_1$ jako moment pary jest dowolny w przestrzeni, obierzemy go więc w O. Wykonajmy takież przekształcenia kolejno ze wszystkiemi siłami, a otrzymamy w O pęk wektorów $\overline{P}_k$, oraz pęk wektorów $\overline{M}_k$; te dwa pęki przedstawiają układ sił i par, które są równoważne danemu układowi sił; otrzymaliśmy je bo-



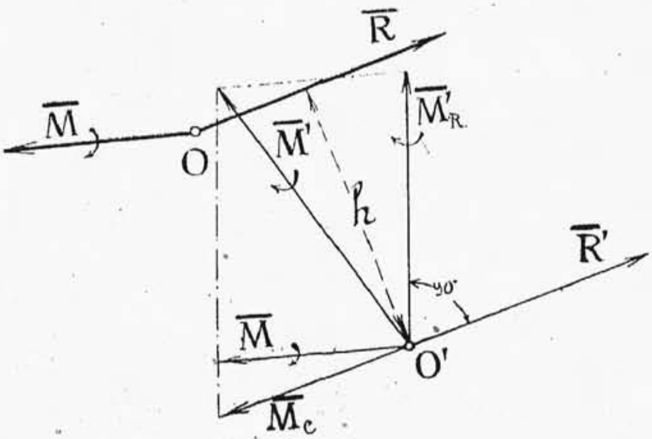
Rys. 75.

wiem drogą przekształceń zasadniczych. Jeżeli następnie wyznaczymy w O siłę:

$$\bar{R} = \Sigma \bar{P}_k; \text{ oraz wektor momentu } \bar{M} = \Sigma \bar{M}_k; \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

to wynikiem tych przekształceń będzie siła $\bar{R}$ i para sił, wyznaczona wektorem $\bar{M}$.

58. Zmiana położenia bieguna. Mając już dla danego układu sił wyznaczone dwa wektory $\bar{R}$ i $\bar{M}$ względem obranego bieguna O, rys. 76 ty, wyznaczmy je dla tegoż układu względem innego bieguna O' obranego



Rys. 76.

dowolnie w przestrzeni, W tym celu z O', na zasadzie poprzedniego, prawidła, wystawiamy wektory $\bar{R}'$ i $\bar{M}$, równe takimże wektorom w O oraz wektor momentu siły R względem bieguna O', którego algebraiczna wartość $= R.h$, a kierunek jest prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez O' i R; wektor ten nazwiemy **dodatkowym** i oznaczymy go literą $\bar{M}'_R$; z tych dwóch wektorów momentów wyznaczamy wektor $\bar{M}' = \bar{M} + \bar{M}'_R$.

Jeżeli więc posiadamy dla pewnego układu sił wektory $\bar{M}$ i $\bar{R}$ względem bieguna O, to względem innego bieguna O', dowolnie obranego w przestrzeni, wektory te, które oznaczymy literami $\bar{R}'$ i $\bar{M}'$, wyznaczymy ze wzorów;

$$\bar{R}' = \bar{R};$$
$$\bar{M}' = \bar{M} + \bar{M}'_R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Równania to wysłowimy: wypadkowa danego układu sił, względem dowolnego bieguna odniesienia, jest wielkością stałą; a wektor sumy momentów zmienia się z położeniem bieguna odniesienia; a mianowicie: wektor ten względem dowolnego bieguna odniesienia O' równa się takiemuż wektorowi względem innego bieguna O, więcej wektor momentu siły wypadkowej, przyłożonej w biegunie O, względem nowego bieguna O'.

Rozpatrzmy pewne szczególne przypadki:

1) Jeżeli $\Sigma \bar{P}_k = 0$; a $\bar{M} \neq 0$; to $\bar{M}'$ jest wielkością stałą względem każdego punktu odniesienia: Wniosek ten pokrywa się z twierdzeniem, że moment pary jest niezależny od punktu odniesienia; — w tym bowiem przypadku układ sił sprowadza się do jednej pary.

2) Jeżeli $\Sigma \bar{P}_k \neq 0$; a $\bar{M}$ względem pewnego punktu odniesienia $= 0$; to $\bar{M}'$ tego układu sił względem różnych punktów odniesienia, przybierać będzie w ogóle różne wielkości i położenia, zależne od położenia punktu odniesienia względem wektora $\bar{R}$; dla pewych szczególnych położeń punktu odniesienia wektory $\bar{M}'$ mogą być jednakowe.

3) Jeżeli $\Sigma \bar{P}_k = 0$ i $\bar{M} = 0$, względem pewnego bieguna; to i **względem każdego innego bieguna są one równe zeru.** W tej właściwości momentów znajduje bezpośrednie wyjaśnienie prawidło zestawienia równania momentów dla wyrażenia równowagi sił — względem **dowolnego** bieguna. Jeślibyśmy przeto zestawiali równania równowagi dla różnych biegunów, to równania te nie wnosiłyby żadnych nowych właściwości t. j. byłyby tylko powtórzeniem równań, napisanych dla jednego bieguna.

4) Wektory $\bar{R} = \Sigma \bar{P}_k$ i $\bar{M} = \Sigma \bar{M}_k$, względem pewnego bieguna odniesienia, są jednakowe dla wszystkich układów między sobą równoważnych; przekształcenia bowiem zasadnicze nie wpływają ani na wielkości ani na kierunki wektorów składowych, a więc i wypadkowych $\bar{R}$ i $\bar{M}$.— Pomiędzy przeto układami równoważnymi zachodzą dwa związki wektorowe:

$$\Sigma \bar{P}_K = \Sigma \bar{P}'_k; \text{ oraz } \Sigma \bar{M}_k = \Sigma \bar{M}'_i \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

lub też odpowiednie **sześć** związków skalarnych; wyrażonych np. przez sumy rzutów tych wektorów na trzy osi spółrzędnych.— W równaniach tych litery z kreskami oznaczają wektory sił i momentów układu równoważnego, którego siły i momenty oznaczono literami bez kresek.

Równania te nazwiemy **równaniami równoważności.** Jeżeli zaś układ sił jest **płaski**, to te sześć równań sprowadza się do **trzech** względem punktu odniesienia, obranego na płaszczyźnie układu; dla układów przeto płaskich, istnieje tylko trzy równań równoważności. Jeżeli bowiem obierzemy w tym razie osi x i y na płaszczyźnie układu, a oś z prostopadle do niej, to otrzymamy dwa równania sumy rzutów sił na osi x i y; suma bowiem rzutów na oś z daje równania identyczne zeru; a suma momentów daje tylko jedno równanie względem osi z; sumy ich bowiem względem osi x i y równają się także identycznie zeru.

5) Jeżeli każdej sile jednego z dwóch układów równoważnych nadamy kierunki odwrotne, nie zmieniając ani wartości ani też położenia prostych działania tych sił; to układ w ten sposób powstały będzie w równowadze z układem, któremu był przedtem równoważny. Właściwość ta wynika z tego powodu, że układy równoważne sprowadzić się dają względem pewnego bieguna do jednakowych $\overline{R}_1 = \overline{R}_2$ i jednakowych $\overline{M}_1 = \overline{M}_2$; jeżeli zaś w układzie np. 2-gim odwrócimy strzałki sił; to również wektory $\overline{R}_2$ i $\overline{M}_2$ odwrócą swe strzałki, a więc zrównoważą siłę $\overline{R}_1$ i $\overline{M}_1$ pierwszego układu. Ten wniosek uwydatnia różnicę pomiędzy układami **równoważnymi** z jednej strony, a układami **równoważącymi się** z drugiej strony.

Odwrotne temu twierdzeniu jest twierdzenie nast.: jeżeli dwa układy sił są w równowadze, to odwróciwszy kierunki sił jednego z nich, otrzymamy układ równoważny drugiemu.

6) Jeżeli zrzutujemy dwa układy równoważne na dowolną płaszczyznę, to otrzymamy dwa nowe również równoważne układy. Jeżeli bowiem wektor siły przesuniemy wzdłuż prostej jej działania; to i rzut tego wektora przesunie się wzdłuż rzutu tej prostej; jeżeli siły, zbiegające się w jednym punkcie, zastąpimy ich wypadkową, to rzut tej wypadkowej jest wypadkową rzutów sił składowych.—Wyrazimy to w skróceniu: że równoważność rzutów pierwszych układów równoważnych, wynika z tego, że rzuty przekształceń zasadniczych każdego układu, są przekształceniami zasadniczemi rzutów tych układów.

7) Z konstrukcji rys. 76-go wynika, że wektor dodatkowy $\overline{M}'_R$, rów. 38-me, względem każdego bieguna w przestrzeni, pozostaje prostopadłym do wektora $\overline{R}$; przeto rzut wektora $\overline{M}'$, względem dowolnego bieguna w przestrzeni, na kierunek siły $\overline{R}$ jest wielkością niezmienną dla **danego układu sił** i jest niezależną od położenia bieguna; wynik ten wysłowimy w sposób następujący:

rzut wektora $\overline{M}$ **na kierunek siły wypadkowej jest wielkością stałą dla danego układu sił i nie zmienia się ze zmianą położenia bieguna;** rzut ten oznaczymy przez $\overline{M}_C$. Wektory $\overline{R}$ i $\overline{M}_C$ danego układu nazywają się jego **niezmiennikami.**

59. Oś centralna. Ponieważ $\overline{M}$ zmienia kierunek i wielkość ze zmianą bieguna odniesienia, sprobujmy wyznaczyć takie szczególne położenie bieguna w przestrzeni, względem którego wektor $\overline{M}$ będzie równoległy do wektora $\overline{R}'$; gdy dane będą wektory $\overline{M}$ i $\overline{R}$ względem pewnego bieguna O. Na zasadzie poprzedniego twierdzenia, wektor momentu względem szukanego bieguna O' jest równy rzutowi danego momentu $\overline{M}$ na kierunek siły, czyli jest on równy wektorowi $\overline{M}_C$; a więc wartość, kierunek i zwrot wektora momentu względem szukanego bieguna są znane; należy jeszcze wyznaczyć jego położenie w przestrzeni.

W tym celu rozłóżmy dany wektor $\overline{M}$ na dwie składowe, rys. 77-my, jedną w kierunku $\overline{R}$, którą oznaczyliśmy już przez $\overline{M}_c$; drugą w kierunku prostopadłym do $\overline{R}$, którą oznaczymy przez $\overline{M}_n$; a więc robimy $\overline{M} = \overline{M}_c + \overline{M}_n$. Moment względem dowolnego bieguna O', jakieśmy już $\overline{M'} = \overline{M} + \overline{M'}_R$, lub inaczej

$$\overline{M'} = \overline{M}_c + M_n + \overline{M'}_R;$$

biegun ten będzie szukanym biegunem, gdy zachodzić będzie względem niego równanie:

$$\overline{M}_R + \overline{M}_R = 0;$$

t. j. gdy moment siły $\overline{R}$, przyłożonej w biegunie O, względem szukanego bieguna O' będzie równy, lecz co do zwrotu przeciwny, momentowi $\overline{M}_n$; — wtedy bowiem będzie: $\overline{M'} = \overline{M}_c$.

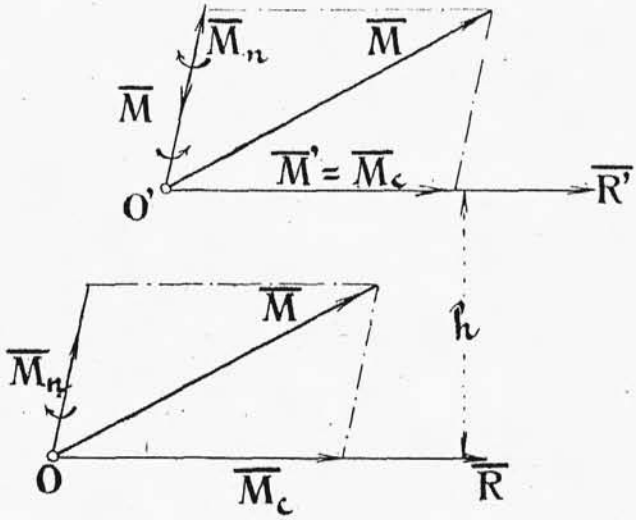
Może być uczynionem zadość równaniu $\overline{M}_n + M'_R = 0$, tylko wtedy, gdy te dwa wektory leżeć będą na jednej prostej, wzajemnie równać się sobie, a strzałki ich będą przeciwne. Pierwszy warunek wypełnimy, gdy biegun O' obierzemy w płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\overline{M}_n$, czyli w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny $(M, \overline{R})$; drugi warunek wypełnimy, jeżeli uczynimy $h = \frac{M_n}{R}$, gdzie h oznacza odległość szukanego bieguna od kierunku siły $\overline{R}$; wreszcie trzeci warunek będzie wypełniony, gdy obrót momentu $R.h$ będzie miał zwrot przeciwny zwrotowi momentu $\overline{M}_n$; te warunki wystarczają do wyznaczenia bieguna szukanego. Ażeby to rozwiązanie przedstawić na rysunku, wyobraźmy sobie $\overline{M}_n$ prostopadle do płaszczyzny rysunku, rys. 77-my, i, przyjąwszy M_n ze zwrotem dodatnim, jak pokazuje strzałka obrotu, umieścimy biegun O' w ten sposób, ażeby siła R, przyłożona w O, wywoływała moment odjemny względem bieguna O'. Widzimy z tej konstrukcji, że otrzymujemy nie jeden biegun O', lecz geometryczne ich miejsca, które leżą na kierunku wypadkowej $\overline{R}$.

Wyniki tych przekształceń wypowiemy w sposób następujący:

każdy układ sił da się przekształcić na układ, złożony z jednej siły i z jednej pary sił, której płaszczyzna jest prostopadłą do kierunku tej siły.

Każdy więc układ wektorów przesuwnych, takimi bowiem są wektory sił, da się przekształcić na układ, złożony z wektora przesuwnego $\overline{R}$ i z równoległego do niego wektora przenośnego, który oznaczymy literą $\overline{M}_c$ t. j. każdy układ daje się zastąpić przez dwa wektory, leżące na jednej prostej; wektory te wyrażają w najprostszy sposób wynik przekształceń dowolnego układu sił; prostą, na której leżą wektory $\overline{R}$, i $\overline{M}_c$ nazwano **osią centralną danego układu sił.**

Położenie osi centralnej w przestrzeni może być zatem wyznaczone dla każdego układu sił za pomocą przytoczonej konstrukcyi. Jeżeli np. przekształciliśmy dany układ sił na wektory $\overline{R}$ i $\overline{M}$ względem dowolnego bieguna O; to wyznaczymy położenie osi centralnej, gdy przeprowadzimy przez $\overline{R}$ płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny, utworzonej przez $\overline{R}$ i $\overline{M}$, i gdy na niej wyznaczymy biegun O' w odległości $h = \frac{M_n}{R}$ od kierunku siły $\overline{R}$ i po tej stronie tej siły, po której zwrot jej momentu względem tego bieguna będzie przeciwny zwrotowi $\overline{M}_n$; prosta, równoległa do $\overline{R}$ i przechodząca przez ten biegun, będzie osią centralną.



Rys. 77.

60. Skrętnik. Układ, złożony z siły $\overline{R}$ i równoległego wektora momentu $\overline{M}_c$, nazwano skrętnikiem. Z powyższych rozważań wynika, że każdy układ sił da się sprowadzić wogóle do skrętnika. Szczególnymi przypadkami skrętnika jest jedna siła, gdy $\overline{M}_c = 0$; — lub para sił, gdy $\overline{R} = 0$.

Stosunek $\frac{M_c}{R} = p$ nazwano parametrem danego układu sił; inaczej jego niezmiennikiem.

61. Rozmieszczenie w przestrzeni wektorów $\overline{R}$ **i** $\overline{M}$. Wektory $\overline{R}$ w każdym punkcie przestrzeni są między sobą równe; wektory zaś $\overline{M}$ zmieniają się wogóle ze zmianą punktu odniesienia. W celu znalezienia prawidłowości w rozmieszczeniu wektora $\overline{R}$ względem różnych punktów przestrzeni, weźmy najpierw pod uwagę punkty osi centralnej, a zauważymy, że dla wszystkich punktów odniesienia, obranych na tej osi $\overline{M} =$ stałej i $\doteq \overline{M}_c$; jeżeli zaś punkt odniesienia odsuniemy od osi centralnej, to położenie wektora $\overline{M}$ się zmieni; a mianowicie: moment $\overline{M}$ względem bieguna odniesienia, odległego od osi centralnej na r,

$$\overline{M} = \overline{M}_c + \overline{M'}_R.$$

Wektory te tworzą trójkąt prostokątny, w którym $\overline{M}_c$ jest stałe dla wszystkich punktów przestrzeni, wektor zaś dodatkowy zmienny.

Wektor $\overline{M}$ przeto wskutek oddalenia punktu odniesienia od osi centralnej, tworzy z osią centralną kąt $tg\alpha = \frac{R.h}{M}$; kąt ten nie zmienia się przy stałej odległości punktu od osi. Położenie przeto wektora $\overline{M}$ względem różnych biegunów odniesienia na zasadzie powyższych rozpatrywań określimy w nast. sposób:

1) w każdym punkcie przestrzeni możemy wogóle wyznaczyć tylko jeden wektor $\overline{M}$:

2) wobec tego kierunki wektorów $\overline{M}$ nie przecinają się.

3) wszystkie wektory $\overline{M}$ są dłuższe od wektora $\overline{M_c}$; czyli wektor $\overline{M_c}$ jest najkrótszym wektorem że wszystkich wektorów, jakie w różnych punktach przestrzeni wyznaczyć można; co również wynika z § 58-go;

4) względem wszystkich punktów powierzchni walca, o podstawie kołowej, o promieniu h i osi wspólnej z osią centralną, —wektory $\overline{M}$ są styczne do tego walca, — tworzą stały kąt z osią centralną i wartości liczbowe posiadają jednakowe; a względem punktów, leżących na tworzącej tego walca, wektory $\overline{M}$ są oprócz tego wzajemnie równoległe; t. j. wektory $\overline{M}$ w tym razie są równe;

5) oddalając punkty odniesienia od osi centralnej; kąt nachylenia wektora $\overline{M}$ względem osi centralnej rośnie aż do wielkości 90°; ten ostatni przypadek nastąpi; gdy biegun odniesienia przesuniemy do nieskończoności;

6) ponieważ ze zmianą położenia bieguna odniesienia kąt nachylenia wektora $\overline{M}$ względem osi centralnej zmienia się od 0 do 90° i przytem płaszczyzna tego kąta obraca się o 360°, przeto kierunki te wyczerpują wszystkie możliwe kierunki, jakie dowolna prosta zająć może w przestrzeni; z tego wynika: że dla danego układu sił możemy zawsze znaleźć w przestrzeni taki punkt odniesienia, względem którego wektor $\overline{M}$ będzie równoległy do dowolnej prostej; przesuwając bowiem równolegle daną prostę w przestrzeni, musimy natrafić na prostą, na której znajduje się wektor $\overline{M}$ i z którą dana prosta się pokryje; punktem odniesienia będzie punkt, względem którego wektor $\overline{M}$ utworzono; lecz w myśl wniosku 4-go otrzymamy nieskończenie wiele takich punktów odniesienia, a geometrycznem ich miejscem jest tworząca walca; przechodząca przez punkt zetknięcia się wektora $\overline{M}$ z tym walcem.

62. Przypadki, gdy wektor $\overline{M} \perp \overline{R}$. W poprzednich paragrafach szukaliśmy takiego bieguna, względem którego wektory $\overline{R}$ i $\overline{M}$ byłyby równoległe; obecnie postawimy sobie pytanie, czy można znaleźć taki biegun, względem którego wektory $\overline{R}$ i $\overline{M}$ byłyby wzajemnie prostopadłe. Gdybyśmy taki biegun znaleźli, wtedy odpowiedni układ sił,