gdzie σ oznacza ciężar właściwy pola; t. j. $\sigma = dQ : (dx \, . \, dy) = f(x, y)$. Jeżeli bryła lub pole jest jednostajnie ciężkie, to $\sigma =$ stałej, i wypadnie z tych równań; z czego wnioskujemy, że położenie środka ciężkości brył i pól jednostajnie ciężkich nie zależy od ciężaru właściwego; cośmy już zauważyli w przytoczonych przykładach, gdzie równania środków skracały się przez p_0 lub k_0.

Są to wzory ogólne, które można stosować do wszystkich brył i pól wyrażonych równaniami w spółrzędnych prostokątnych.

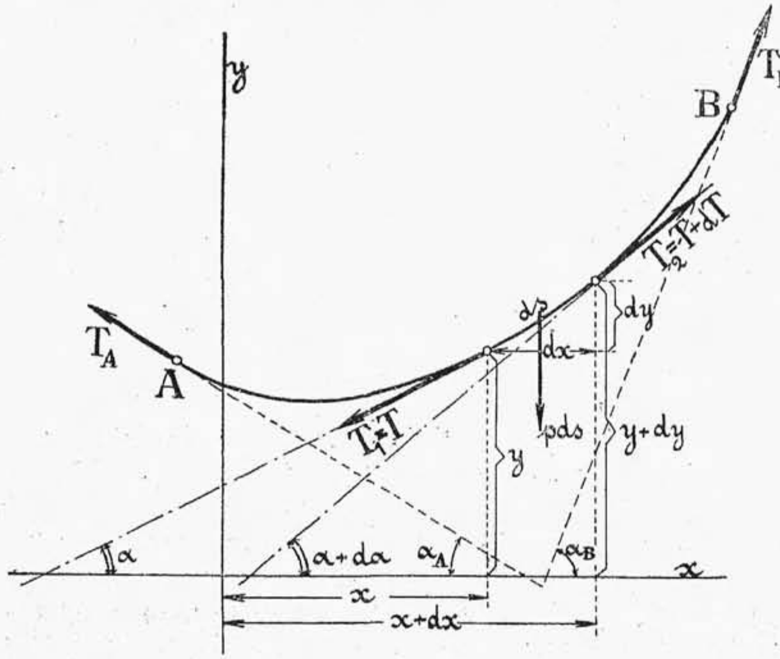
Postępowanie to jednakże, które jest zupełnie ogólne, staje się dla brył lub pól prostszych zbyt zawiłe i daje się uprościć przez stosowanie do obliczeń szczególnych właściwości geometrycznych takiej bryły; — jakieśmy to czynili w przytoczonych przykładach.

VI. Linie łańcuchowe.

86. Twierdzenie ogólne. Weźmy pod uwagę nić ciężką, którą umocowano w dwóch nieruchomych punktach. Gdy nić ta pod działaniem sił ciążenia pozostawać będzie w spoczynku, wtedy siły, działające na nią, będą w równowadze. Przyjmijmy w tych rozpatrywaniach, że nić jest nierozciągalna i zupełnie giętka. Nierozciągalność nici ujawnia się w ten sposób, iż pod działaniem sił w kierunki nici, nie zmieni ona swej długości; giętkość zaś wyraża się w ten sposób, iż moment, potrzebny do zgięcia tej nici w jakimbądź jej punkcie, równa się zeru. Dotychczas stosowaliśmy twierdzenia równowagi sił do układów punktów niezmiennych, t. j. do brył sztywnych; omawiana zaś tutaj nić przedstawia układ materyalny punktów, który stosownie do określenia jest niezmiennym tylko pod względem rozciągalności; dla innych zaś odkształceń układ ten jest zmienny.

W celu zastosowania do tego przykładu znanych już warunków równowagi, sprowadzimy ten układ zmienny do układu niezmiennego, przyjąwszy, iż nić dana składa się z cząstek nieskończenie małych i sztywnych i że cząstki te są połączone między sobą przegubowo; nić więc taką wyobrazić sobie możemy w postaci łańcucha o nieskończenie małych ogniwach; które obracać się mogą w przegubach bez tarcia.

Rys. 111-ty przedstawia nić ciężką, giętką, zawieszoną swobodnie w dwóch punktach A i B. Ażeby obliczyć postać geometryczną, jaką przybierze ta nić pod działaniem swego ciężaru, oraz naprężenia, jakie występują w różnych jej przekrojach, wyobrazimy sobie, żeśmy cząstkę tej nici o długości nieskończenie małej odcięli; ażeby zaś niezmienić stanu równowagi tej cząstki, w jakim znajdowała się przed jej odcięciem, przyczepimy do jej końców siły T_1 i T_2 stycznie do krzywej, jaką ić tworzy. Na cząstkę przeto ds działać będą trzy siły: T_1, T_2 i $p.ds$, dzie p oznacza ciężar jej jednostki długości nici; siły te są w równo- adze; warunki równowagi wyrazimy równaniami rzutów. W tym celu



Rys. 111.

rzeprowadźmy osi x i y; oznaczmy spółrzędne jednego końca literami i y; literami zaś $(x+dx)$ i $(y+dy)$ drugiego jej końca; siłę T_1 literą T siłę T_2 literą $(T+dT)$; kąty nachylenia tych sił względem osi x lite- umi α i $(\alpha+d\alpha)$. Równania zatem równowagi tych sił są następujące:

$$(T+dT)\,.\cos(\alpha+d\alpha)-T\,.\cos\alpha=0;$$

ą to rzuty na oś x; następnie

$$(T+dT)\,.\sin(\alpha+d\alpha)-T\,.\sin\alpha-p\,.ds=0,$$

ą rzuty na oś y.

Równania te przedstawiają zupełne różniczki funkcyi dwóch zmien- ych; mogą więc być napisane w postaci następującej:

$$1)\quad d(T.\cos\alpha)=0;\ \text{oraz}\quad 2)\quad d(T.\sin\alpha)=p.ds.$$

ównania te scałkujemy w granicach, wyznaczonych przez punkty za- ieszenia A i B, i otrzymamy:

$$1)\quad T_B\,.\cos\alpha_B-T_A\,.\cos\alpha_A=0,\ \text{oraz}$$

$$2)\quad T_B\,.\sin\alpha_B-T_A\,.\sin\alpha_A=\int_A^B p\,.ds;$$

w których T_B i T_A oznaczają siły zawieszenia nici w punktach A i B; α_A i α_B zaś kąty, jakie one tworzą z osią x. Gdy zważymy, że punkty A i B mogą być obrane w dowolnych miejscach nici i że wyraz $\int_A^B p \,.\, ds$ jest ciężarem nici, pomiędzy punktami zawieszenia; wtedy dla powyższych równań znajdziemy następujące statyczne znaczenie:

1) równanie 1-sze mówi, że poziome rzuty sił, naprężających nić w punktach zawieszenia, są sobie równe; równanie zaś drugie, że rzuty ich pionowe są równe ciężarowi nici, zawartej pomiędzy punktami zawieszenia.

2) obydwa te równania, wykazujące zależność pomiędzy siłami T_A, T_B i $\int p \,.\, ds$, wyrażają ich równowagę w sposób, jak gdyby część nici, zawarta pomiędzy punktami A i B, stanowiła niezmienny układ punktów.

I rzeczywiście, jeżeli, po przyjęciu przez nić stanu równowagi, przyjmiemy ją za sztywną, to przez to w niczem nie zmienimy danego układu i możemy stosować do niego warunki równowagi sił, działających na układ niezmienny; a wtedy bezpośrednio napiszemy powyższe równania równowagi. Wniosek ten daje się uogólnić i wypowiedzieć w sposób następujący:

jeżeli siły, przyłożone do jakiegokolwiek układu punktów, zatem i do zmiennego, są w równowadze, to nie naruszymy tej równowagi, gdy rozpatrywać go będziemy, jako układ niezmienny.

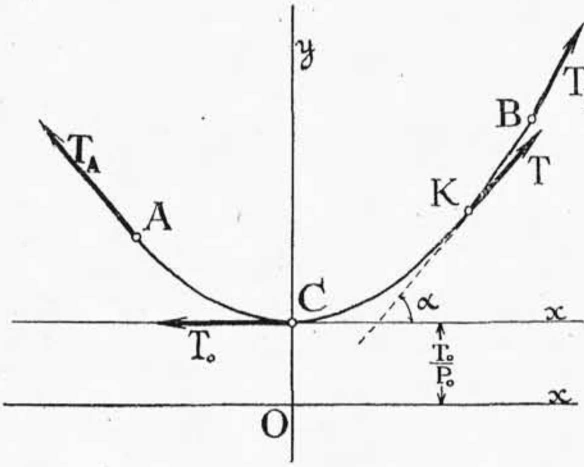
Jest to uogólnienie, mające szerokie zastosowanie w różnych działach mechaniki i fizyki ze względu na ułatwienie, jakie wprowadza ono do rozpatrywań równowagi sił, działających na układy zmienne. Zasada ta jest znaną w fizyce pod nazwą zasady Stevina i jest również stosowaną pod nazwą zasady zesztywnienia układów.

87. Równanie linji łańcuchowej. Zadanie niniejsze polega na obliczeniu równania krzywej, jaką przedstawia nić, zawieszona swobodnie na dwóch punktach, gdy ciężar jej jest jednostajny.

W celu rozwiązania tego zadania możemy skorzystać bezpośrednio z równań ogólnych, wyżej wyprowadzonych, lub też, możemy rozwiązać je na podstawie wniosku o chwilowej sztywności układu zmiennego; z tych dwóch sposobów zastosujemy w danym razie ten drugi.

Nić nierozciągliwa i giętka, umocowana w płaszczyźnie pionowej w dwóch punktach A i B, przyjmie pod wpływem swego ciężaru pewną postać geometryczną, rys. 112-ty. W celu uproszczenia rachunku oś spółrzędnych x obieramy poziomo, oś y pionowo, i przeprowadzamy ją przez punkt najniższy krzywej łańcuchowej. Długość nici od A do B

oznaczamy literą l; ciężar jej literą $Q=pl$; siły, które należy przyłożyć do końców nici w punktach jej zawieszeń, oznaczamy przez T_A i T_B. Przetnijmy daną nić w dwóch miejscach, w miejscu najniższem C i w drugiem dowolnem miejscu K. Siły, jakie wypadnie przyłożyć do tych końców, ażeby nić pozostawała nadal w pierwotnem położeniu, oznaczamy przez T_0 i T, długość zaś CK przez s; a więc ciężar jej będzie $Q=\int_C^K p\,.\,ds$.



Rys. 112.

Gdy nić jest w równowadze, uważamy ją za układ sztywny, a więc siły T_0, T i Q powinny być w równowadze, co wyrazimy równaniami

$$T\,.\cos\alpha - T_0 = 0; \text{ oraz } T\,.\sin\alpha - p\,.\,s = 0.$$

Rugując z tych równań T, co uskuteczniamy, dzieląc drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{T_0}s$.

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, przeto

$$1)\quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{p}{T_0}\right).\,s.$$

Pomiędzy zmiennemi x, y i s zachodzi jeszcze zależność

$$2)\quad dx^2 + dy^2 = ds^2.$$

Jeżeli z tych dwóch równań wyrugujemy s, otrzymamy jedno równanie, wykazujące zależność pomiędzy x i y, i ono będzie równaniem szukanej krzywej. W tym celu w pierwszem równaniu należy wprowadzić zamiast s pochodną ds, do czego dojdziemy, różniczkując je podług x, a wtedy otrzymamy równania następujące:

$$1)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{p}{T_0}\right)\frac{ds}{dx}, \text{ oraz:}$$

$$2)\quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Po wyrugowaniu z nich ds, otrzymujemy równanie, w którem są tylko pochodne dwóch zmiennych x i y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{p}{T_0}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, przedstawiające linię, nazwaną łańcuchową. W celu scałkowania tego równania przekształcamy je na równanie różniczkowe rzędu pierwszego; podstawiając

$\frac{dy}{dx} = z$, a więc $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; otrzymamy przeto:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p}{T_0}\sqrt{1 + z^2};$$

skąd, po podzieleniu przez $\sqrt{1 + z^2}$ i pomnożeniu przez dx, otrzymamy:

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \left(\frac{p}{T_0}\right) dx.$$

Całkując obydwie strony tego równania, otrzymamy:

$$ln\,(z + \sqrt{1 + z^2}) = \left(\frac{p}{T_0}\right) x + C_1.$$

Stałą C_1 określimy przyjmując oś x równolegle do stycznej w najniższym punkcie szukanej krzywej, a wtedy dla:

$$x = 0;\ \text{tg}\ \alpha = 0;\ z = 0;$$

po podstawieniu tych wartości w równanie powyższe, otrzymamy:

$ln\,(O + \sqrt{1 + O}) = O + C_1$; inaczej $ln\ 1 = C_1$ skąd $C_1 = 0$; równanie więc powyższe przyjmie postać:

$ln\,(z + \sqrt{1 + z^2}) = \left(\frac{p}{T_0}\right) x$; a po zmianie na funkcję wykładniczą:

$$e^{\frac{p}{T_0}x} = z + \sqrt{1 + z^2}.$$

W celu obliczenia z tego równania wartości z, należy pozbyć się pierwiastku; co też uczynimy, postawiwszy go na jednej stronie równania, t. j.:

$$e^{\frac{p}{T_0}x} - z = \sqrt{1 + z^2};$$

następnie podnosząc je do drugiej potęgi, i po wykonaniu odpowiednich skróceń, i rozwiązaniu względem z, otrzymamy:

$$z = \frac{e^{2\frac{p}{T_0}x} - 1}{2e^{\frac{p}{T_0}x}};\ \text{lub}\ z = \tfrac{1}{2}\left[e^{\frac{p}{T_0}x} - e^{-\frac{p}{T_0}x}\right].$$

Ponieważ: $z = \frac{dy}{dx}$, przeto po podstawieniu napiszemy:

$$dy = \tfrac{1}{2}\left[e^{\frac{p}{T_0}x} - e^{-\frac{p}{T_0}x}\right] dx.$$

W celu scałkowania podstawiamy: $\frac{p}{T_0} x = u$, i otrzymujemy:

$$dy = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{T_0}{p} [e^u - e^{-u}]\, du;$$ skąd bezpośrednio

$$y = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{T_0}{p} [e^u + e^{-u}] + C_2;$$

a po powrotnem podstawieniu:

$$y = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{T_0}{p}\left[e^{\frac{p}{T_0}x} + e^{-\frac{p}{T_0}x}\right] + C_2.$$

Wartość C_2 obliczymy, przyjmując $x = 0$, i $y = \frac{T_0}{p}$, a wtedy $C_2 = 0$, i równanie krzywej przyjmie postać:

$$y = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{T_0}{p}\left[e^{\frac{p}{T_0}x} + e^{-\frac{p}{T_0}x}\right] \quad \ldots \ldots \quad (54)$$

88. Krzywa mostów wiszących. W danem zadaniu przyjmujemy, że siły, działające na nić nie są proporcyonalne do jej długości, lecz są proporcyonalne do ciężaru mostu i obciążenia jego, t. j. są proporcyonalne do długości poziomej; w tym przypadku ciężar dQ jest proporcyonalny do dx, — nie do ds, czyli: $\frac{dQ}{dx} = p =$ stałej.

Równania równowagi, gdy T oznacza naprężenie nici w dowolnem jej miejscu, T_0 zaś w miejscu, w którem styczna do nici jest poziomą, rys. 112-ty, są następujące:

$$T \cdot \cos\alpha - T_0 = 0,$$
$$T \cdot \sin\alpha - p \cdot x = 0.$$

Rugując T i podstawiając $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, otrzymamy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{T_0} x.$$

Po scałkowaniu w granicach od zera do x, otrzymamy równanie krzywej:

$$y = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p}{T_0} x^2.$$

Postać krzywej zatem, jaką przyjmuje nić, swobodnie zawieszona i obciążona jednostajnie na poziomej długości,—jest parabolą.

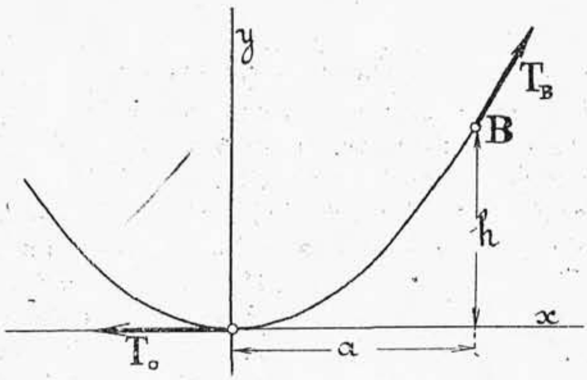
Wynik ten będzie zgodny z rzeczywistością, gdy pominiemy ciężar samego łańcucha i jego wiązań z pomostami, i gdy następnie nieuwzględnimy tarcia pomiędzy ogniwami łańcucha. Ponieważ te warunki w praktyce nie są wykonalne, przeto i krzywa, wyznaczona przez powyższe równanie, jest tylko przybliżonym obrazem krzywej rzeczywistej.

Z wyprowadzonego równania możemy obliczyć T_0, gdy dane będą warunki zawieszenia łańcucha; np. dla: $x = a$, oraz dla $y = h$, rys. 113-ty, otrzymamy po podstawieniu równanie:

$$h = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p}{T_0} a^2, \text{ skąd } T_0 = \left(\frac{p}{h}\right) \frac{a^2}{2};$$

z równania tego obliczymy siłę naprężającą łańcuch w punkcie najniższym, gdy dany jest ciężar i rozpiętość mostu oraz wysokość zawieszenia.

Możemy również równanie paraboli wyrazić przez spółrzędne punktów zawieszenia, podstawiając obliczoną wartość T_0 w równanie krzywej; otrzymamy wtedy:



Rys. 113.

$$y = \frac{s}{2} h \frac{2}{a^2} x^2; \text{ lub inaczej } y = \frac{h}{a^2} x^2.$$

Jasnem jest, że dla obliczenia T_0 niekoniecznie muszą być dane l i h, mogą również być dane i inne warunki.