zbudowaliśmy wielościan sprzężony m^0; a otrzymamy dwie figury geometryczne płaskie, złożone z wierzchołków i łączących te wierzchołki krawędzi. Dwie te figury, które oznaczyliśmy literami l' i m' są w pewnym pokrewnym względem siebie stosunku geometrycznym; a mianowicie:

1) każdej **krawędzi** figury l' odpowiada **krawędź** równoległa figury m'; są one bowiem rzutami osi sprzężonych;

2) każdemu **wierzchołkowi** figury l' odpowiada w figurze m' **wielobok** zamknięty, którego boki są równoległe do krawędzi, zbiegających się w tym wierzchołku;

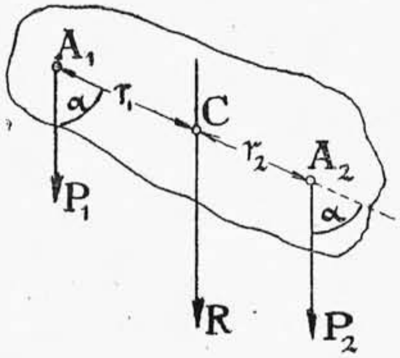
3) każdemu **wielobokowi** figury l', będącemu rzutem ściany wielościanu l^0 odpowiada **wierzchołek** figury m', w którym zbiegają się krawędzie równoległe do boków, tworzących rozpatrywany wielobok.

Warunki geometryczne, jakim odpowiadają te dwie figury, są te same, jakim odpowiadać powinien plan sił Cremon'y w stosunku do figury geometrycznej, przedstawiającej kratownicę (porówn. kratownice i plan sił Cremon'y).

Przestrzenne pochodzenie figur płaskich l' i m' pozwoliło Maxwell'owi odpowiedzieć na pytanie: dla jakich kratownic wykreślić można plan Cremon'y? odpowiedź ta brzmi: tylko dla tych kratownic można wykreślić plan Cremon'y, których figury geometryczne mogą być uważane za rzuty wielościanów przestrzennych. — Nieprzytaczam dowodzenia tego twierdzenia, przytoczę jednakże pobieżną uwagę, że staje się to twierdzenie bezpośrednio zrozumiałem, gdy weźmiemy pod uwagę tę okoliczność, że jeżeli plan sił Cremon'y może być uważany zawsze za rzut wielościanu (jest to bowiem sieć wieloboków podwójna i zamknięta), to, przypuszczalnie, i figura kratownicy łącznie z wektorami sił zewnętrznych powinna być rzutem wielościanu. — A więc nie dla wszystkich kratownic można wykreślić plan sił Cremon'y; ograniczenie to jednakże zostało usunięte przez twierdzenie: że dla każdej t. zw. statystycznie wyznaczalnej kratownicy można wykreślić plan sił Cremon'y po pewnem jej uzupełnieniu przez wyobrażalne pręty. Dalsze zastosowanie tych twierdzeń należy do Statyki budowlanej.

5. Środek ciężkości brył materjalnych.

71. Środek sił równoległych. Okazaliśmy w § 45-tym sposobem wykreślnym, że układ sił wzajemnie równoległych posiada ściśle określoną wypadkową; obliczymy ją teraz analitycznie i wskażemy na pewne jej właściwości. Weźmy w tym celu dwie siły, wzajemnie równoległe $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, przyłożone w punktach A_1 i A_2, rys. 82-gi; siły te przecinają się w jednym punkcie, nieskończenie odległym, przeto wypadkowa tych sił leży w ich płaszczyźnie; i ponieważ przechodzi ona przez punkt ich przecięcia się, musi być przeto do nich równoległą; wartość jej obliczymy z równania algebraicznego: $R = P_1 + P_2$; w którem R oznacza wartość szukanej wypadkowej; położenie zaś jej wyznaczymy na zasadzie, że moment wypadkowej równa się sumie momentów sił składowych. W celu uproszczenia rachunku, przyjmiemy biegun momentów na przecięciu się kierunku szukanej wypadkowej z prostą, łączącą punkty przyłożenia danych sił, biegun ten oznaczyliśmy na rys. 82-gi literą C i napiszemy równanie momentów względem niego:

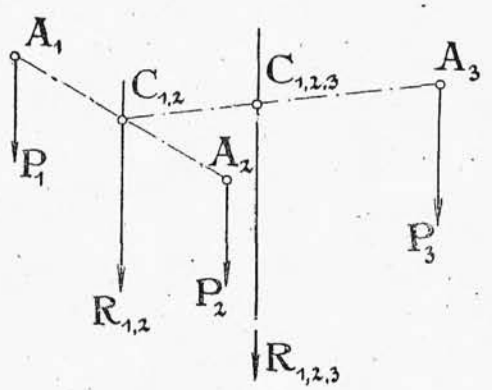


Rys. 82.

$$-P_1 r_1 \sin\alpha + P_2 r_2 \sin\alpha = 0;$$

$$P_1 r_1 = P_2 r_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Z równania tego oraz z równania: $r_1 + r_2 = A_1 A_2$ obliczymy odległości r_1 i r_2, wyznaczające położenie punktu C; przez który przechodzi wypadkowa R. Wartości r_1 i r_2, jak wskazuje rów. 42-gie, są **niezależne od kąta,** pod jakim działają siły względem prostej, łączącej ich punkty przyłożenia; z czego wynika, iż gdy zmieniać będziemy wspólny kierunek sił P_1 i P_2 w ten sposób, że siły pozostawać będą wzajemnie równolegle i co do swych wartości niezmienione; to wypadkowa ich, wyznaczona dla każdego nowego ich położenia, będzie zawsze przechodziła przez punkt C; gdy więc wyznaczymy punkt C dla jakiegokolwiekbądź położenia sił równoległych P_1 i P_2, natenczas przez ten punkt przechodzić będzie ich wypadkowa przy wszelkich innych położeniach. Punkt C, przez który przechodzą wypadkowe układów sił, określony w powyższy sposób, nazwiemy **środkiem sił równoległych.** Środek więc dwóch sił równoległych leży na prostej, łączącej punkty ich przyłożenia, a położenie jego daje się wyznaczyć z równania 42-giego. Dotychczas stwierdziliśmy, iż dwie siły równoległe posiadają środek, obecnie dowiedziemy, że środek taki istnieje dla dowolnej ilości sił równoległych. W tym celu obierzmy w przestrzeni trzy siły P_1, P_2 i P_3, wzajemnie równoległe i przyłożone w punktach A_1, A_2, A_3, rys. 83-ci, i wyznaczmy najpierw środek sił P_1 i P_2; oznaczywszy go przez $C_{1,2}$, przeprowadźmy przez niego wypadkową: $R_{1,2} = P_1 + P_2$ i szu-

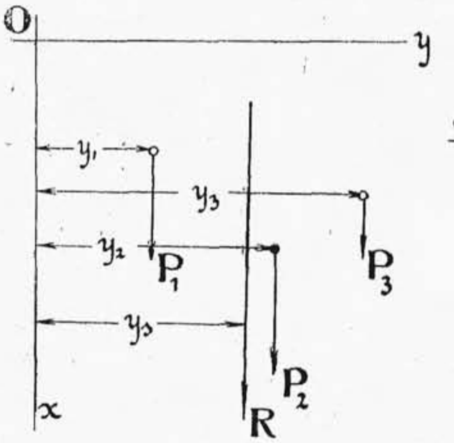


Rys. 83.

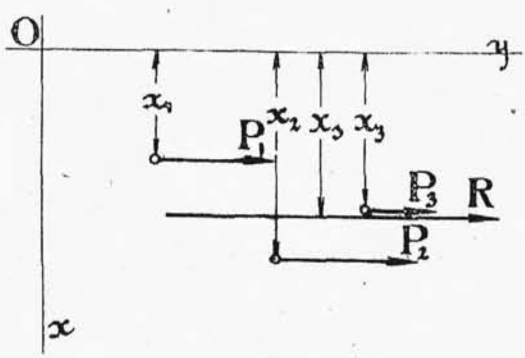
kajmy następnie środka sił $R_{1,2}$ i P_3; środek ten leży na prostej $C_{1,2}\,A_3$, oznaczyliśmy go literą $C_{1,2,3}$; przez ten punkt przechodzi zatem wypadkowa: $R_{1,2,3} = P_1 + P_2 + P_3$. Postępując w ten sposób, znajdziemy środek dowolnej ilości sił równoległych; który oznaczać będziemy literą C; środek ten będzie posiadał te same właściwości, jakie posiada środek dwóch sił, t. j. gdy będziemy obracali siły równoległe około punktów ich przyłożenia w ten sposób, ażeby w każdem położeniu pozostawały wzajemnie równoległemi i co do wartości równemi; natenczas wypadkowe ich będą przechodziły przez jeden i ten sam punkt C. Położenie punktu C, t. j. położenie środka sił równoległych, zależy od położenia ich punktów przyłożenia i od wartości i zwrotu sił, lecz **nie zależy od ich wspólnego kierunku.**

Wyznaczenie położenia środka sił równoległych może być wykonane sposobem wyżej wyłożonym, polegającym na kolejnem znajdowaniu środków; lub też sposobem analitycznym, który obecnie podamy.

72. **Wyznaczenie analityczne środka sił równoległych.** W celu wyznaczenia środka sił równoległych drogą analityczną, zastosujemy układ spółrzędnych prostokątnych x, y, z, i oznaczymy przez x_k, y_k i z_k spółrzędne punktu przyłożenia siły P_k, zas przez x_s, y_s i z_s spółrzędne środka tych sił. W każdem położeniu danego układu sił równoleglych zachodzi równanie: $R = \Sigma P_k$, z którego obliczymy wartość wypadkowej; równanie zaś momentów wyznaczy jej położenie w przestrzeni. W celu zesta-



Rys. 84.



Rys. 85.

wienia równań momentów nadajmy siłom danym kierunek równoległy, np. do osi x, i zestawmy dla tego ich położenia równanie momentów względem osi np. z. Rys. 84-ty przedstawia płaszczyznę (x, y) na którą zrzutowane są dane siły; oś z wyobrazimy sobie w punkcie O prostopadle do rysunku; — równanie zatem momentów napiszemy:

$$\Sigma (P_k . y_k) = R . y_s; \text{ skąd}$$

$$y_s = \frac{\Sigma (P_k . y_k)}{\Sigma P_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

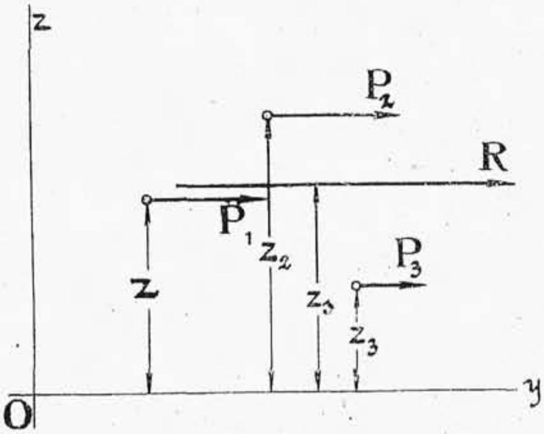
Obróćmy następnie, rys. 85-ty, siły dane równolegle do osi y, to z równania ich momentów względem tejże osi z, otrzymamy wzór:

$$x_s = \frac{\Sigma (P_k . x_k)}{\Sigma P_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Wyobraźmy sobie wreszcie, że siły skierowane są równolegle do osi y, a płaszczyzna (z, y) leży na płaszczyźnie naszego rysunku, rys. 86-ty, to otrzymamy z równania momentu względem osi x spółrzędną

$$z_s = \frac{\Sigma (P_k . z_k)}{\Sigma P_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Z powyższych trzech równań obliczymy spółrzędne środka sił równoległych. Gdy siły leżą w jednej płaszczyźnie, wtedy dwa pierwsze równania wystarczają do wyznaczenia ich środka; postępując w ten sposób moglibyśmy obliczyć jeszcze trzy równania momentów; które jednakże byłyby powtórzeniem już obliczonych; co potwierdzi, że układ sił równoległych posiada jeden tylko środek.



Rys. 86.

73. Środek ciężkości. Pojęcie środka sił równoległych ma bezpośrednie zastosowanie do przypadku, w którym pewna ilość punktów materjalnych, sztywno z sobą związanych, poddaną jest działaniu ciążenia; otrzymamy bowiem wtedy siły pionowe, które posiadają wypadkową siłę, nazwaną ciężarem danego układu materyalnego, a wartość jej i położenie wyznaczymy za pomocą poprzednich równań.

Lecz siły ciążenia nie zmieniają swego kierunku w przestrzeni, zmieniać się może tylko położenie bryły. Ażeby zdać sobie sprawę ze stosunku, w jakim znajdują się siły względem bryły, gdy zmienia ona swe położenia w przestrzeni, obierzmy trzy osi prostokątne i przyjmijmy, iż są one sztywno połączone z daną bryłą i następnie zmieniajmy położenie układu w przestrzeni wraz z osiami; kierunek sił ciążenia będzie wtedy przyjmował różne położenia **względem osi**; lecz te same położenia sił względem tych osi otrzymać możemy, unieruchomiając w przestrzeni osi wraz z bryłą, zmieniając natomiast wspólny kierunek sił; a więc siła ciążenia, jako wypadkowa sił równoległych, we wszystkich położeniach układu będzie przechodziła przez jeden punkt sztywno związany z bryłą; punkt ten nazwano **środkiem ciężkości danego układu punktów materyalnych; lub—bryły materjalnej.**

Z tego wynika, że to samo położenie sił ciążenia względem osi, jakie otrzymujemy, zmieniając położenie bryły w przestrzeni, otrzymamy również, gdy siły zmieniać będą swój kierunek, a układ będzie pozostawał w spoczynku. Do obliczenia więc spółrzędnych środka ciężkości możemy bezpośrednio zastosować wzory 43, 44 i 45. Lub też, odniósłszy dany układ do osi spółrzędnych, możemy kolejno nadawać siłom ciążenia różne kierunki, jakieśmy to czynili z siłami równoległemi; i w ten sposób zestawimy wyżej wyprowadzone równania. Chociaż obraz fizyczny obracania sił ciężkości jest niezgodny z rzeczywistością, gdyż siły te pozostają zawsze pionowemi, jednakże na wyznaczenie położenia środka ciężkości ta niezgodność nie wpływa i do tego celu możemy posiłkować się przedstawionym obrazem pomocniczym.

Z określenia położenia środka ciężkości wynika następująca jego właściwość statyczna: jeżeli przyłożymy do niego siłę, równą sile ciążenia, lecz ze zwrotem jej przeciwnym, to siła ta jest w równowadze z siłami ciążenia; co się ujawni w ten sposób, że układ podparty w środku ciężkości, pozostawać będzie w spoczynku we wszystkich położeniach; i odwrotnie: gdy siła, przyłożona do układu, utrzymuje go w spoczynku, wtedy na jej kierunku znajduje się środek ciężkości; — ta właściwość pozwala wyznaczyć środek ciężkości danej bryły sposobem doświadczalnym.

Zastosowanie tych twierdzeń do pojęcia środka ciężkości o tyle jest słuszne, o ile siły ciążenia przyjmiemy za równoległe.

74. Obliczenie środka ciężkości dwóch punktów materyalnych. Na zasadzie postawionych określeń środka ciężkości możemy go obliczyć sposobem analitycznym w spółrzędnych prostokątnych [1]). W tym celu można bezpośrednio korzystać ze wzorów wyżej wyprowadzonych, lub też ze sposobu obracania sił i obliczania momentów, jaki stosowaliśmy przy wyprowadzaniu odpowiednich wzorów; z tego też sposobu będziemy nadal korzystali.

Przykład. Dane są dwa punkty meteryalne, sztywno ze sobą związane, których ciężary są Q_1 i Q_2, rys. 87-my, wyznaczyć ich środek ciężkości nieuwzględniając ciężaru pręta ich łączącego. Przykład ten prosty przytaczamy w celu uwidocznienia metody postępowania. Ponie-

---

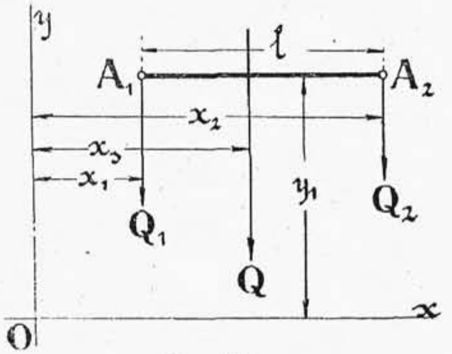
[1]) Wektorowe określenie położenia środka masy podane jest w wyd. 1-szem w § 158-ym.

waż położenie środka sił równoległych nie zależy od wspólnego kierunku sił, umieszczamy zatem, w celu uproszczenia rachunku, dany układ w płaszczyźnie spółrzędnych w ten sposób, że prosta, łącząca dane punkty, jest równoległą do osi x, rys. 88-my, i piszemy wtedy równania nast:

$$Q_1 + Q_2 = Q;\ x_s = \frac{Q_1 . x_1 + Q_2 . x_2}{Q};\ y_s = \frac{Q_1 . y_1 + Q_2 . y_2}{Q}.$$

Pierwsze z tych równań jest sumą sił; drugie i trzecie otrzymamy z równania momentów względem O; gdy wyobrazimy sobie siły równoległemi do osi y. Ostatnie z tych trzech równań przekształcimy, wprowadziwszy $y_s = y_2$; a więc

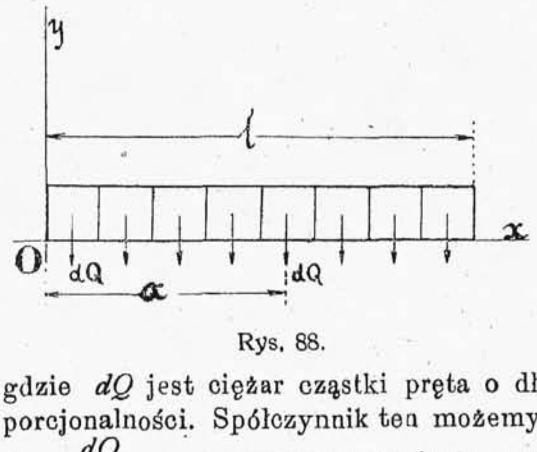
$$y_s = \frac{y_1 (Q_1 + Q_2)}{Q} = y_1.$$



Rys. 87.

Z tych równań wynika, że środek ciężkości danego układu leży na prostej, łączącej dwa dane punkty i znajduje się w odległości: $x_s = \frac{Q_1 . x_1 + Q_2 . x_2}{Q}$ od początku układu. Jeżeli zechcemy obliczyć odległość środka ciężkości od jednego z danych punktów, to obierzmy takie położenie układu, ażeby jeden z danych punktów leżał w początku spółrzędnych; wtedy podstawimy: $x_1 = 0$, $x_2 = l$, i otrzymamy $x_s = \frac{Q_2}{Q} l$.

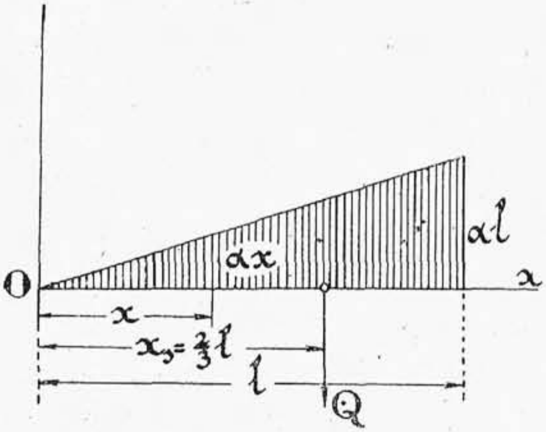
Jeżeli będzie $Q_1 = Q_2$; to $Q = 2Q_1$; a $x_s = \frac{1}{2} l$; t. j. środek ciężkości leży w danym poszczególnym przypadku w środku odległości tych punktów. —



Rys. 88.

75. Środek ciężkości linii materjalnych. Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości pręta materyalnego o długości l. Przyjmijmy, iż ciężar cząstki długości tego pręta jest proporcjonalny do jej długości; warunek ten wyrazi się wzoru $dQ = p_0 . dx$ gdzie dQ jest ciężar cząstki pręta o długości dx; p_0 zaś spółczynnik proporcjonalności. Spółczynnik ten możemy również przedstawić w postaci: $p_0 = \frac{dQ}{dx}$; a w tem przedstawieniu uważany być może jako ciężar pręta na jednostkę długości. Jeżeli podzielimy dany pręt na małe cząstki i uważać je będziemy jako punkty materyalne, to otrzymamy: $x_s = \frac{\Sigma(dQ \,.\, x)}{\Sigma dQ} = \frac{\Sigma\,(p_0 \,.\, dx \,.\, x)}{\Sigma\,(p_0 dx)}$; znak Σ zastąpimy całką, a więc zamiast: $\Sigma\,(p_0 \,.\, dx \,.\, x)$ napiszemy $\int p_0 \,.\, dx \,.\, x$; jak również zamiast $\Sigma p_0 \,.\, dx$ napiszemy $\int p_0 \,.\, dx$; i otrzymamy:

$$x_s = \frac{p_0 \int_0^l x \,.\, dx}{p_0 \int_0^l dx} = \frac{{}^1\!/_2 l^2}{l} = \frac{l}{2}.$$



Rys. 89.

Metoda powyższa wyznaczania środka ciężkości może być również zastosowaną, gdy ciężar na jednostkę długości pręta nie jest stałym t. j. gdy stosunek: $\frac{dQ}{dx}$ = zmiennej = p. Przyjmijmy np. że: $p = kx$; gdzie k oznacza pewien stały spółczynnik. Wzór $p = kx$ wskazuje, iż ciężar na jednostkę długości wzrasta z odległością od 0; dla takiego prętu otrzymamy:

$$x_s = \frac{\int dx \,.\, x \,.\, x}{\int x\, dx} = \frac{\int_0^l x^2 \,.\, dx}{\int_0^l x \,.\, dx} = \frac{\frac{l^3}{3}}{\frac{l^2}{2}} = \frac{2}{3}\, l;$$

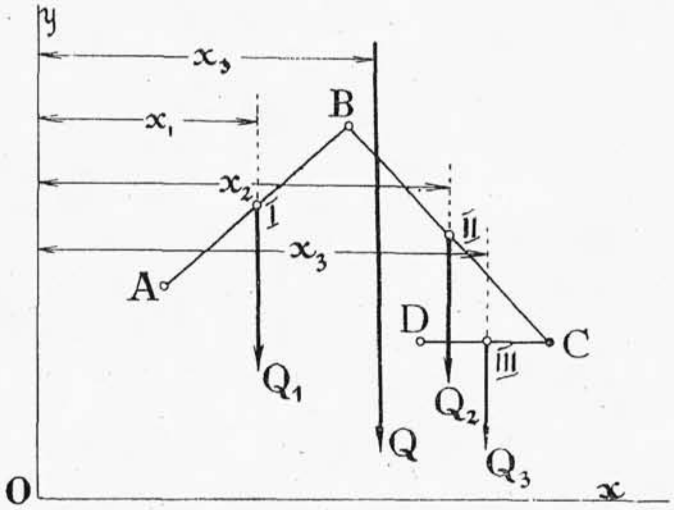
t. j. środek ciężkości tego pręta, w porównaniu ze środkiem z poprzedniego przykładu, przybliża się do cięższego końca pręta.

Ciężar pręta, dla którego zachodzi stosunek: $\frac{dQ}{dx} = kx$, możemy przedstawić geometrycznie w ten sposób, że wartości: $p = kx$ odłożymy na prostopadłych, wystawionych z odnośnych punktów pręta, otrzymamy wtedy trójkąt, który przedstawia geometrycznie ciężar belki, rys. 89-ty.

Ciężar pręta może być wyrażony wogóle przez $p = f\,(x)$; a podany sposób obliczania jego środka ciężkości w niczem się nie zmieni.

Żadanie. Ciężar pręta jest rozłożony wzdłuż pręta w ten sposób, że $\frac{dQ}{dx} = kx^2$; wyznacza jego środek ciężkości. Odpowiedź $x_s = \frac{3}{4}\, l.$

Przykład. Obliczyć środek ciężkości linii łamanej, przedstawionej na rys. 90-tym. Linię tę przedstawmy sobie, złożoną z prętów materyalnych. Wyznaczenie położenia środka ciężkości takiej figury można wykonać podług ogólnych metod; można jednakże zastosować pewne uproszczenia rachunkowe, które wynikają z charakteru danego zadania; (co zresztą we wszystkich zadaniach należy uwzględniać). Posiadamy



Rys. 90.

zatem w danem zadaniu linię materjalną $ABCD$, złożoną z oddzielnych prętów I, II, i III; oznaczmy ciężar jednostki długości każdego z prętów przez p_1, p_2 i p_3; a otrzymamy spółrzędną środka ciężkości całej linii:

$$x_s = \frac{\int_A^D p \,.\, dl \,.\, x}{\int_A^D p \,.\, dl};$$

dodajniki tych sum, na zasadzie ich rozdzielności, ugrupujemy w następujący sposób:

$$x_s = \frac{\int_A^B (p_1 \,.\, dl_1 \,.\, x) + \int_B^C (p_2 \,.\, dl_2 \,.\, x) + \int_C^D (p_3 \,.\, dl_3 \,.\, x)}{\int_A^B p_1 \,.\, dl_1 + \int_B^C p_2 \,.\, dl_2 + \int_C^D p_3 \,.\, dl_3},$$

we wzorze tym dl_1, dl_2, dl_3 oznaczają cząstki długości odnośnych prętów.

Ponieważ:

$$\int p_1 \,.\, dl_1 = Q_1; \quad \int p_2 \,.\, dl_2 = Q_2; \quad \int p_3 \,.\, dl_3 = Q_3;$$

oraz:

$$\int p_1 \,.\, dl_1 \,.\, x = Q_1 \,.\, x_1; \quad \int p_2 \,.\, dl_2 . x = Q_2 . x_2; \quad \int p_3 \,.\, dl_3 \,.\, x = Q_3 \,.\, x_3;$$

gdzie, x_1, x_2, x_3 oznaczają rzędne środków ciężkości oddzielnych prętów, przeto, po podstawieniu tych wartości we wzór dla x_s otrzymamy:

$$x_s = \frac{Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3}{Q_1 + Q_2 + Q_3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

W tenże sposób obliczymy y_s; obróciwszy siły Q równolegle do osi x.

Uproszczenie, z którego korzystaliśmy w tym razie, wypowiemy w sposób następujący: **środek ciężkości układu punktów materyalnych jest środkiem ciężkości wszystkich części, na jakie rozłożymy dany układ.** Jasnem jest, że to twierdzenie jest bezpośrednim wynikiem rozdzielności i łączności dodajników. W danym więc przypadku szukamy najpierw środków ciężkości każdego z prętów, przyczepiamy następnie do nich ciężary tych prętów i szukamy ich wspólnego środka ciężkości.

Postępowanie takie stosować będziemy szczególniej do przypadków, gdy dany układ materyalny można podzielić na takie części, których ciężary i środki są znane. Przez takie postępowanie znakomicie nieraz uprościmy wyznaczenie środka ciężkości złożonej figury. W powyższym przykładzie p_1, p_2 i p_3 przyjęliśmy jako stałe wartości dla każdego z prętów, środki więc ich ciężkości leżą w połowie ich długości. Jeżeli zaś p_1, p_2 i p_3 byłyby zmienne dla każdego pręta z osobna, to wyznaczylibyśmy w odpowiedni sposób, najpierw położenia środków ciężkości każdego z prętów i następnie środek całego układu.

Przykład. Dany jest trójkąt, złożony z prętów materyalnych, których ciężar na jednostkę długości jest stały; — wyznaczyć jego środek ciężkości. W danym razie przyczepiamy siły ciężkości każdego z boków w ich środkach i szukamy środka ciężkości trzech sił.

Ażeby to wykonać, umieszczamy trójkąt *ABC* podstawą na osi spółrzędnych, a jeden z wierzchołków w ich początku i napiszemy:

$$Q_1 = l_1 p_1; \quad Q_2 = l_2 p_2; \quad Q_3 = l_3 p_3;$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3; x_s = \frac{Q_1 \,.\, x_1 + Q_2 . x_2 + Q_3 \,.\, x_3}{Q}.$$

Obrócimy następnie siły Q równolegle do osi x i obliczymy y_s.

Przykład. Obliczyć środek ciężkości łuku koła o promieniu r i kącie środkowym 2α. Przyjmiemy, że ciężar łuku na jednostkę jego długości jest stały, t. j. oznaczając przez s długość łuku i przez Q jego ciężar, warunek ten wyrazimy równaniem $\frac{dQ}{ds} = p_0$.

W celu obliczenia spółrzędnych środka ciężkości tego łuku umieścimy środek koła w początku spółrzędnych i cięciwę AB danego łuku umieścimy równolegle do osi x-ów, rys. 91-szy. Ciężary cząstek łuku są $dQ = p_0 . ds$; równanie momentów względem początku układu:

$$s . p^0 . x_s = \int_{-\alpha}^{+\alpha} ds . p_0 . x;$$

zważywszy, że $ds = r . d\sigma$; $x = r . \sin\sigma$, otrzymamy $x_s = 0$; wypadkowa zatem przechodzi przez dwusieczną kąta środkowego danego łuku; co zresztą wynika z symetryczności łuku; t. j. z symetryczności momentów cząstek łuku po lewej i po prawej stronie osi y.

Obróćmy następnie siły ciężkości równolegle do osi x-ów, a obliczymy y_s z następującego równania momentów:

$$y_s . s . p_0 = \int_{-\alpha}^{+\alpha} ds . p_0 . y; \text{ a po skróceniu przez } p_0; y_s . s = \int_{-\alpha}^{+\alpha} ds . y.$$

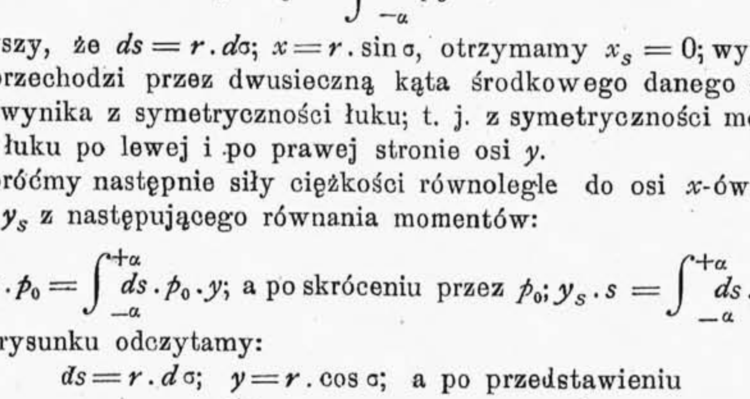
Z rysunku odczytamy:

$ds = r . d\sigma$; $y = r . \cos\sigma$; a po przedstawieniu

$$y_s . s = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\sigma . d\sigma = r^2 . 2 \sin\alpha;$$

podstawiwszy $s = 2 r \alpha$; otrzymamy:

$$y_s = r . \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$



Rys. 91.

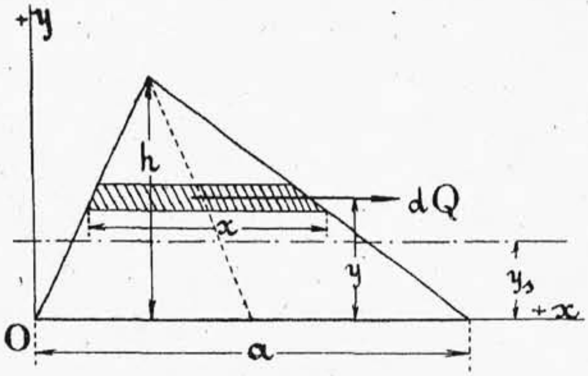
W szczególnym przypadku dla połowy obwodu koła podstawimy $2\alpha = \pi$ i otrzymamy:

$$y_s = \frac{2r}{\pi}; \text{ dla całego koła } 2\alpha = 2\pi; \; y_s = 0. \quad . \; . \; . \quad (48)$$

76. Środek ciężkości pól. Gdy podzielimy dane pole na cząstki, wtedy ciężar każdej cząstki może być wogóle zmiennym: oznaczywszy przez dQ ciężar cząstki, wielkość zaś jej pola przez dF, a stosunek $\frac{dQ}{dF}$ przez k; wtedy k może być zmienną lub stałą wielkością w różnych miejscach pola, zależnie od jego fizycznej budowy. Przyjmiemy, że $\frac{dQ}{dF} = k_0 =$ stałej, czyli ciężar każdej cząstki pola jest proporcyonalny do wielkości tegoż pola; wskutek tego zamiast ciężarów cząstek wprowadzić możemy do rachunku wielkości pól; a wynik rachunku, mającego na celu wyznaczenie środka ciężkości, pozostanie niezmieniony; zrobiwszy takie założenie, mówimy zwykle o momencie statycznym pola.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości pola trójkąta.

Postępować będziemy metodycznie i w tym celu stawiamy dany trójkąt podstawą na oś x-ów, rys. 92-gi; obieramy oś y prostopadle do niej i oznaczamy wielkość podstawy przez a, wysokość zaś przez h. Dzielimy następnie pole trójkąta na pasy równoległe do osi x-ów; wielkość pola każdego z tych pasów będzie równa $x.dy$; gdzie x oznacza długość pasa; dy zaś jego wysokość; ciężar takiego pasa: $dQ = x.dy.k_0$.



Rys. 92.

Przyjmijmy, iż siły działają równolegle do osi x-ów i napiszmy równania momentów, względem początku spółrzędnych, i otrzymamy:

$y_s \int dQ = \int dQ.y$; podstawiając w nie $dQ = dF.k_0 = x.dy \,.\, k_0$; a po skróceniu przez k_0, otrzymamy

$\int x\,.\,dy.y = y_s \int x\,.\,dy$; i po przekształceniu:

$$\int_0^h x\,.\,y\,.\,dy = y_s.\,F;$$

gdzie F oznacza wielkość pola danego trójkąta. Ażeby scałkować, wyrazimy geometryczne właściwości trójkąta wzorem:

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}\,;\ \text{skąd}\ x = \frac{a}{h}\,.\,(h-y);$$

po podstawieniu tej wartości w całkę, otrzymamy:

$$\int_0^h \frac{a}{h} \cdot (h - y) \cdot y \cdot dy = \tfrac{1}{2}\, y_s \cdot a \cdot h;$$ a po rozwiązaniu nawias

$$\int_0^h \frac{a}{h} \cdot h \cdot y \cdot dy - \int_0^h \frac{a}{h} \cdot y^2 \cdot dy = \tfrac{1}{2}\, y_s \cdot a \cdot h;$$ lub inaczej

$$a \int_0^h y \cdot dy - \frac{a}{h} \int_0^h y^2 \cdot dy = \tfrac{1}{2}\, y_s \cdot a \cdot h;$$ całkujemy i skracamy przez a

$$\frac{h^2}{2} - \frac{1}{h}\,\frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{2}\, y_s \cdot h;$$ skąd wreszcie

$$y_s = \tfrac{1}{3}\, h.$$

Zatem środek ciężkości trójkąta leży na prostej, równoległej do jednej ze stron tegoż trójkąta w odległości równej $\frac{1}{3}$ jego wysokości. Ponieważ to samo rozumowanie zastosować możemy do każdego z pozostałych boków, przeto wyznaczymy środek ciężkości trójkąta, przeprowadziwszy dwie takie równoległe; punkt ich przecięcia się będzie szukanym środkiem. Wiadomem jest również z plamimetrji, że ten punkt jest przecięciem się trzech prostych, przepoławiających strony trójkąta; możemy więc również z tego skorzystać w celu wyznaczenia środka ciężkości.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości pola, ograniczonego parabolą i spółrzędnemi a i b rys. 93-ci.

Równanie paraboli: $y^2 = 2\,px$; zastąpmy parament p przez granice pola a i b; w tym celu podstawiamy w nie $x = a$, $y = b$, i otrzymujemy $b^2 = 2\,p \cdot a$; skąd: $2\,p = \frac{b^2}{a}$;

po podstawieniu tej wartości, równanie paraboli będzie następujące:

$$y^2 = \frac{b^2}{a}\, x.$$

Podzielmy następnie pole paraboli na pasy, równoległe do osi y; pole takiego pasa $dF = y \cdot dx$; a równanie momentów: $\int_0^a y \cdot dx \cdot x = x_s \int_0^a y dx$;

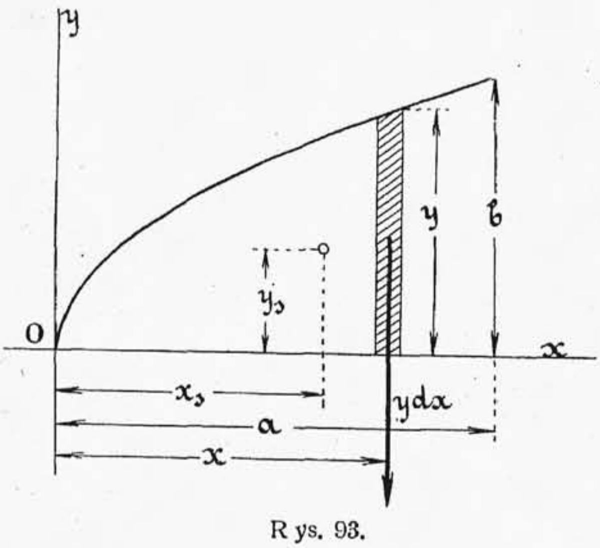
z równania paraboli mamy: $x = \frac{a}{b^2}\, y^2$; skąd po zróżniczkowaniu $dx =$ $= 2\,\frac{a}{b^2}\, y \cdot dy$; a po podstawieniu w powyższą całkę, otrzymamy równanie

$$\int_0^b y \,.\, 2 \,.\, \frac{a}{b^2}\, y \,.\, dy \frac{a}{b^2}\, y^2 = x_s \int_0^b y \,.\, 2 \,.\, \frac{a}{b^2}\, y \,.\, dy; \text{ skąd}$$

$$\frac{a}{b^2} \int_0^b y^4 \,.\, dy = x_s \int_0^b y^2 \,.\, dy; \text{ a po scałkowaniu:}$$

$$\frac{a}{b^2} \cdot \frac{b^5}{5} = x_s\, \frac{b^2}{3}\,; \text{ skąd wreszcie}$$

$$x_s = \frac{3}{5}\, a.$$



Rys. 93.

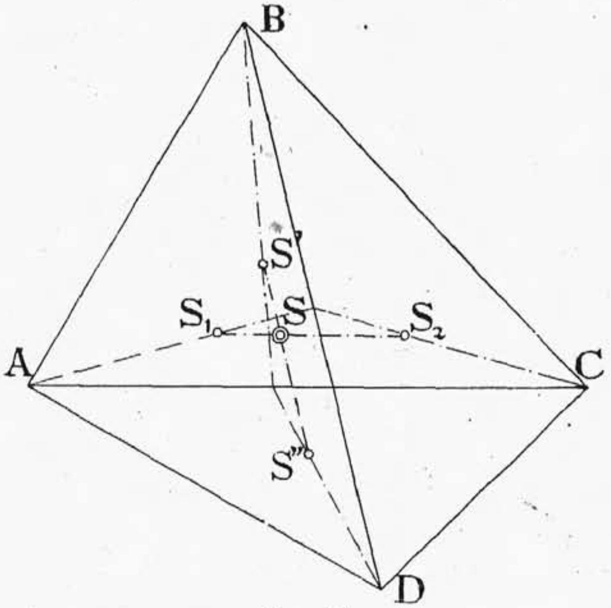
Dzieląc w tenże sposób pole paraboli na pasy równoległe do osi x-ów i biorąc równanie momentów, otrzymamy z niego:

$$y_s = \tfrac{3}{8}\, b.$$

Te ogólne sposoby wyznaczania środka ciężkości mogą być często, w celu ułatwienia rachunku, zastąpione innymi sposobami. Jednym ważniejszym z tych sposobów jest rozdzielenie danej figury na takie oddzielne figury, których położenia środków ciężkości są znane, lub są łatwe do wyznaczenia; o czem mówiliśmy już w § 75-tym; wtedy bowiem przyłożymy w tych środkach ciężary tych figur i będziemy szukali wspólnego ich środka ciężkości.

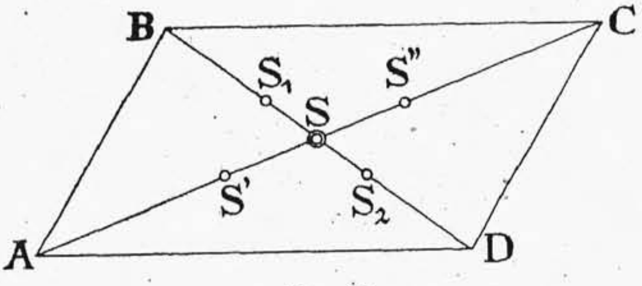
Do wyznaczenia np. środka ciężkości trójkąta rozdzielamy go na pasy równoległe do jednego z boków, pasy te uważać możemy za pręty materyalne, których środki ciężkości leżą w połowie ich długości. Środki zaś ciężkości tych pasów leżą na prostej, połowiącej podstawę trójkąta; środek zatem ciężkości wszystkich pasów leży na prostej wychodzącej z wierzchołka i połowiącej przeciwległy bok; to samo rozumowanie zastosujemy do innego boku i otrzymamy wynik, poprzednio wyprowadzony drogą analityczną.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości pola czworoboku $ABCD$. W tym celu dzielimy go przekątnią AC na dwa trójkąty i wyznaczamy ich środki ciężkości S' i S''; w tych punktach przyczepiamy ich ciężary, rys. 94-ty, a wtedy środek tych ciężarów jest środkiem ciężkości całego czworoboku; środek ten leży zatem na prostej, łączącej punkty S' i S'', i może być wyznaczony za pomocą równań momentów; lub też można tego uniknąć, rozdzieliwszy czworobok przekątnią na dwa inne trójkąty i wyznaczywszy ich środki S_1 i S_2, przecięcie się prostej $S'S''$ z prostą $S_1 S_2$ wyznacza położenie szukanego środka.



Rys. 94.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości pola równoległoboku, stosując sposób powyższy. Zauważymy, że w danym razie, rys. 95-ty środki S_1, S_2 i S', S'' leżą na przekątniach danego równoległoboku;—środek zatem jego ciężkości leży na przecięciu się przekątni.



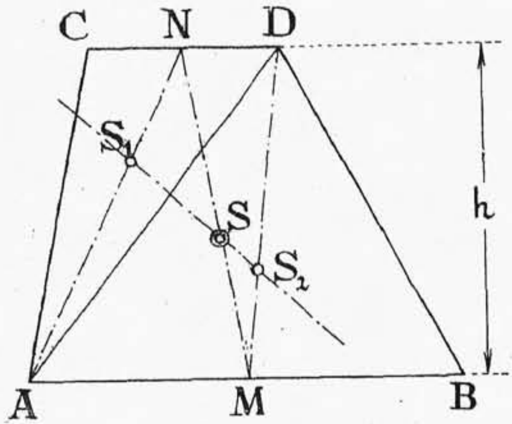
Rys. 95.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości pola trapezu.

Rozdzielimy pole trapezu na pasy, równoległe do podstawy, środki ich leżą na prostej NM, rys. 96-y, połowiącej boki równoległe trapezu, i na tej prostej leży środek ich wypadkowej, t. j. środek trapezu. Następnie gdy rozdzielimy trapez na dwa trójkąty ACD i ADB, wtedy na prostej S_1S_2, łączącej środki ich ciężkości, leży szukamy środek; w punkcie więc przecięcia się tych prostych leży szukany środek.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości figury, przedstawionej na rys. 97-mym.

1) Sposób za pomocą sumy momentów. Rozkładamy daną figurę na prostokąty; $ABCG$ oraz $DEFG$; — moment ich względem bieguna A;



Rys. 96.

$$F_1 \frac{a}{4} + F_2 \tfrac{3}{4} a = F x_s;$$

a po podstawieniu wielkości pól:

$$\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{4} + \frac{a^2}{4}\tfrac{3}{4} a = \tfrac{3}{4} a^2 x_s; \text{ skąd:}$$

$$x_s = \tfrac{5}{12} a.$$

W tenże sposób znajdziemy $y_s = \frac{5}{12} a$.

2) Sposób za pomocą różnicy momentów. Daną fig., rys. 98-my, przedstawimy jako różnicę dwóch kwadratów $ABHF$ — $CHED$, których pola

$$F_1 = a^2; \; F_2 = \frac{a^2}{4}; \text{ a zatem: } F = \tfrac{3}{4} a^2.$$

Moment względem A:

$$F_1 \frac{a}{2} - F_2 \tfrac{3}{4} a = F x_s, \text{ po podstawieniu wielkości pól}$$

$$\frac{a^3}{2} - \frac{3a^3}{16} = \tfrac{3}{4} a^2 x_s; \text{ skąd}$$

$$x_s = \tfrac{5}{12} a.$$

W tenże sposób wyznaczymy y_s.

3) Sposób wykreślny. Rozłóżmy daną figurę na prostokąty $ABCG$ i $DEFG$ i wykreślmy prostą S_1S_2, łączącą ich środki ciężkości; następnie rozłóżmy ją na prostokąty $BCDR$ i $KEFA$ i wyznaczmy prostą $S'S''$. Punkt przecięcia się tych prostych jest środkiem ciężkości; rys. 99-ty.

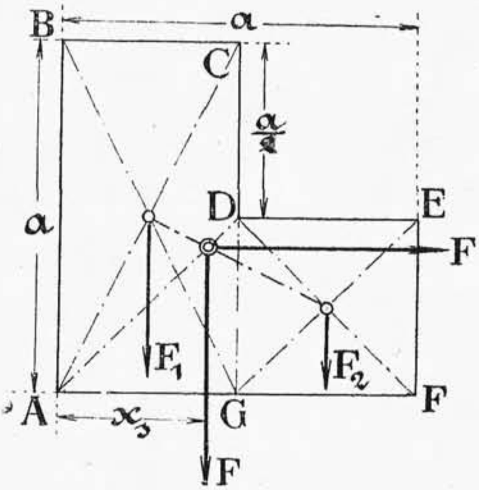
Przykład. Obliczyć środek ciężkości figury zakreskowanej, przedstawionej na rys. 100-nym.

W tym celu przyjmiemy tę figurę jako różnicę dwóch kół: $F_1 = \pi R^2$; oraz $f = \pi r^2$; a zatem: $F = \pi (R^2 - r^2)$. Równanie momentów względem środka ciężkości, gdy przez x_s oznaczymy odległość jego od O_1, jest następujące:

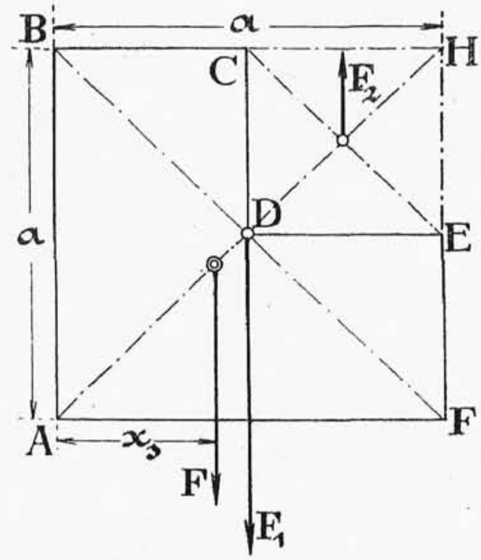
$$-F_1 x_s - f(e - x_s) = 0; \text{ skąd: } x_s = -e\frac{r^2}{R^2 - r^2}.$$

Ze wzoru tego wynika, że x_s należy odciąć na lewą stronę punktu O_1.

Przykład. Obliczyć środek ciężkości wycinka koła, którego kąt środkowy$=2\alpha$, rys. 101-szy. Rozdzielmy dany wycinek na trójkąty nieskończenie małe i szukajmy ich środków ciężkości. Geometrycznem ich

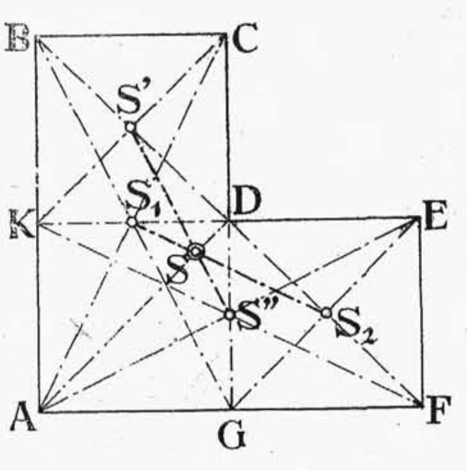


Rys. 97.

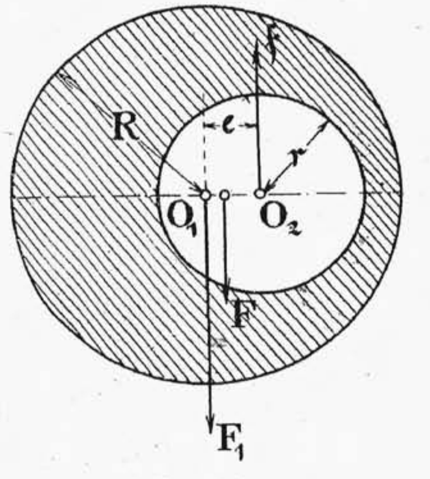


Rys. 98.

miejscem jest łuk, zakreślony promieniem $r' = \frac{2}{3} r$. Wyobraźmy sobie, że w tych punktach przyłożone są siły proporcyonalne do pól dF każdego wycinka, w ten sposób zadanie sprowadzi się do wyznaczenia środka ciężkości łuku, którego promień: $r' = \frac{2}{3} r$, i którego ciężar cząst-



Rys. 99.



Rys. 100.

ki $= dF$. Środek ten wyznaczymy ze znanych już wzorów $y_s = r' \frac{\sin \alpha}{\alpha}$; a po podstawieniu wartości r', otrzymamy:

$$y_s = \tfrac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \qquad (49)$$

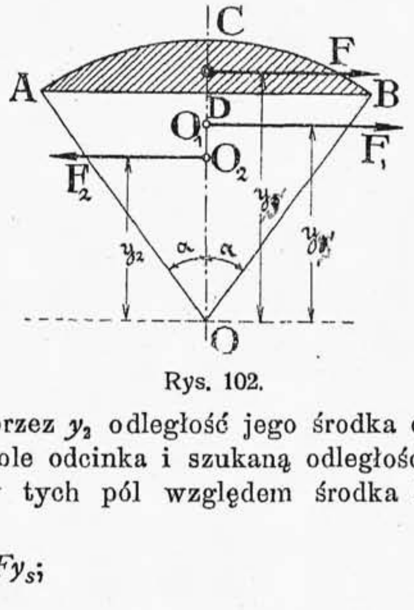
Zadanie. Obliczyć środek ciężkości półkola.

Podstawiwszy w poprzedni wzór $2\alpha = \pi$; otrzymamy

$$y_s = \tfrac{4}{3} \frac{r}{\pi} \cong 0{,}424\, r.$$

Przykład. Obliczyć środek ciężkości odcinka koła. Rozkładamy dany odcinek, rys. 102-gi, na wycinek i na trójkąt i oznaczamy przez F_1 pole wycinka; przez y_1 odległość jego środka ciężkości od środka

Rys. 101.



Rys. 102.

koła; przez F_2 pole trójkąta OAB; przez y_2 odległość jego środka ciężkości od środka koła; przez F i y_s pole odcinka i szukaną odległość jego środka od środka koła. Momenty tych pól względem środka koła wyraża następujące równanie:

$$F_1 y_1 - F_2 y_2 = F y_s;$$

w które podstawimy:

$$F_1 = \tfrac{1}{2} 2\alpha r^2 = \alpha r^2,\ F_2 = \tfrac{1}{2} AB \,.\, OD = \tfrac{1}{2} 2r \sin\alpha \,.\, r\cos\alpha = r^2 \sin\alpha \cos\alpha;$$

$$y_1 = \tfrac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha};\ y_2 = \tfrac{2}{3} r \cos\alpha; \text{ i otrzymamy:}$$

$$\alpha r^2 \tfrac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha} - r^2 \sin\alpha\cos\alpha\, \tfrac{2}{3} r \cos\alpha = F y_s; \text{ skąd:}$$

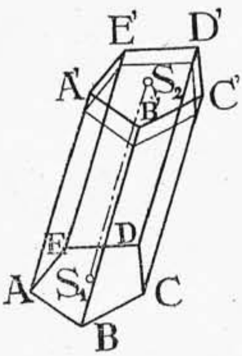
$$F y_s = \tfrac{2}{3} r^3 (\sin\alpha - \sin\alpha \,.\, \cos^2\alpha) = \tfrac{2}{3} r^3 \sin\alpha\, (1 - \cos^2\alpha); \text{ inaczej:}$$

$$F y_s = \tfrac{2}{3} r^3 \sin^3\alpha; \text{ wreszcie:}$$

$$y_s = \tfrac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3\alpha}{F}.$$

77. Wyznaczenie środka ciężkości sposobem doświadczalnym. Należy w tym celu zawiesić daną bryłę materyalną na giętkiej nici; bryła pozostaje wtedy pod działaniem dwóch sił, pod działaniem siły ciężkości i naprężenia nici. Dwie siły są w równowadze, jeżeli kierunki ich leżą na jednej prostej, bezwzględne ich wielkości są wzajemnie równe i zwroty przeciwne; — zatem na kierunku nici leży środek ciężkości; — powtórzmy to doświadczenie, przyczepiając nić do innego punktu bryły, a otrzymamy środek ciężkości w punkcie przecięcia się tych kierunków.

78. Środek ciężkości brył materyalnych. Każdą bryłę materyalną możemy podzielić na nieskończoną ilość małych cząstek; każda taka cząstka, gdy bryłę poddamy sile ciążenia, przedstawia siłę skierowaną pionowo ku dołowi, otrzymujemy w ten sposób układ nieskończenie wielu nieskończenie małych sił równoległych. Do wyznaczenia ich środka stosować możemy wzory 42, 43, 44, zastępując znak sumy znakiem całki.



Rys. 103.

Ciężar nieskończenie małej cząstki oznaczamy przez dQ, objętość jej przez dV, stosunek $\frac{dQ}{dV}$ przez k, a więc: $\frac{dQ}{dV} = k$. Wartość k wogóle może być zmienną dla różnych punktów tej samej bryły; matematycznie wyrazimy tę zmienność przez równanie: $k = f(x, y, z)$, w którem x, y, z są spółrzędnemi punktów bryły.

W szczególnym przypadku, gdy $k =$ stałej, spółczynnik ten jest ciężarem właściwym danej bryły. Bryłę taką, dla której $k =$ stałej, nazwiemy jednostajnie ciężką lub jednolitą. W celu wyznaczenia środka ciężkości brył jednostajnie ciężkich można do rachunku wprowadzić objętości cząstek zamiast ich ciężarów, są one bowiem do nich proporcyonalne.

W następnych przykładach przyjęto, iż bryły dane są jednolite, a więc przyjęto, że $\frac{dQ}{dV} = k_0 =$ stałej dla każdego punktu. Sposoby, które stosować będziemy do obliczenia środka ciężkości brył są te same, któreśmy stosowali do układów płaskich.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości graniastosłupa ukośnego; rys. 103-ci. W tym celu podzielimy dany graniastosłup płaszczyznami równoległemi do podstaw w odstępach dowolnie małych; a otrzymamy wtedy cały szereg warstw o jednostajnej ciężkości; w środku ciężkości każdej warstwy wyobraźmy sobie przyczepioną siłę proporcyonalną do wielkości przekroju, do którego ciężar warstwy jest proporcyonalny geometrycznem miejscem tych środków jest prosta, łącząca środki ciężkości obydwóch podstaw. Ażeby wyznaczyć położenie jej środka ciężkości, przyczepmy we wszystkich punktach siły, proporcjonalne do przekrojów. Środek ciężkości tych sił będzie środkiem ciężkości graniastosłupa i leżeć on będzie w połowie długości odcinka, łączącego środki ciężkości obydwóch podstaw.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości ostrosłupa. Ostrosłup dany dzielimy w odstępach równych płaszczyznami, równoległemi do podstawy, na warstwy, dowolnie cienkie; podstawy tych warstw są geometrycznie podobne, a więc wielkości ich pól są proporcyonalne do kwadratów odległości od wierzchołka. Geometryczne miejsce środków ciężkości tych warstw leżą na prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy; zatem środek ciężkości tych warstw jest środkiem ciężkości ostrosłupa. W celu jego wyznaczenia przyczepiamy do punktów tej prostej siły proporcyonalne do ciężarów odnośnych warstw; ciężary te, wobec równości odstępów pomiędzy podstawami, są proporcjonalne do wielkości pól podstaw t. j. są proporcjonalne do kwadratów odległości od wierzchołka; a zatem zadanie sprowadza się do wyznaczenia środka ciężkości pręta, którego ciężar rośnie w stosunku do drugich potęg odległości od wierzchołka ostrosłupa. Zadanie to podane jest w § 75-tym; a szukany środek znajduje się w odległości $\frac{3}{4}$ długości od wierzchołka ostrosłupa; lub też w $\frac{1}{4}$ długości od podstawy.

Obliczenia środka ciężkości graniastosłupa i ostrosłupa, można stosować do walców z równoległemi podstawami i do stożków z dowolnemi podstawami.

79. Środek ciężkości powierzchni brył. Graniastosłup. Środek ciężkości powierzchni ścian (bez podstaw) graniastosłupa znajdziemy, wyznaczywszy środki ciężkości każdej ściany i przyczepiając w tych środkach siły proporcjonalne do wielkości pól tych ścian. Środek ciężkości tych sił będzie środkiem ciężkości powierzchni ostrosłupa.

Ściany graniastosłupa są równoległoboki, zatem środki ich ciężkości leżą w połowie wspólnej wysokości, a więc w jednej płaszczyźnie. Siły ciężkości, przyczepione w tych punktach, są proporcjonalne, do wielkości pól tych ścian, a więc, wobec wspólnej wysokości, są proporcjonalne do długości boków podstawy; środek więc cieżkości powierzchni graniastosłupa leży w połowie odcinka, łączącego środki ciężkości obwodów podstaw.

Ostrosłup. Ściany ostrosłupa przedstawiają trójkąty. Środki ciężkości każdego trójkąta leżą na wysokości $^1/_3$ od podstawy; środki te leżą więc w jednej płaszczyźnie, przeprowadzonej równolegle do podstawy w $^1/_3$ wysokości ostrosłupa. W każdym z tych środków