100. Równowartość pracy i energji kinetycznej punktu materyalnego. Gdy stała siła P działa na punkt materyalny swobodny, którego początkowa prędkość $= v_0$; kierunek jej zlewa się z kierunkiem siły; wtedy punkt otrzymuje ruch jednostajnie przyśpieszony w kierunku działania siły; droga więc przebyta przez ten punkt, wyrazi się przez wzór znany z kinematyki:

$$s = \frac{v^2}{2p} - \frac{v_0^2}{2p},$$

w którym p oznacza przyśpieszenie punktu ruchomego, v_0 — jego prędkość w początku drogi s; v — prędkość w jej końcu; mnożąc obydwie strony tego równania przez P, otrzymamy wzór:

$$P.s = \frac{Pv^2}{2p} - \frac{Pv_0^2}{2p},$$

zważywszy następnie, że $\frac{P}{p} = m =$ masie punktu ruchomego, napiszemy:

$$P.s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Równanie to mówi, że praca, wykonana przez siłę stałą, działającą na punkt materyalny swobodny, równa się różnicy dwóch wyrazów, które są iloczynami: z oderwanej liczby pół, z wartości masy i z wartości prędkości punktu w drugiej potędze.

Ze względu na ważność tego iloczynu w zjawiskach ruchu, dano mu oddzielną nazwę energii kinetycznej; czyli:

połowę iloczynu z masy i prędkości w drugiej potędze t. j. wyraz $= \frac{mv^2}{2}$ **nazywamy energią kinetyczną danego punktu.**

Równanie 67-me wysłowimy zatem:

praca, wykonana przez siłę stałą, działającą na punkt materyalny swobodny, równa się różnicy energii kinetycznej tego punktu.

Twierdzenie to nazwano zasadą równowartości pracy i energii kinetycznej; lub też **zasadą niezniszczalności pracy.**

Ażeby utworzyć sobie obraz, wyrażony przez ten wzór, wyobraźmy sobie punkt materyalny o masie m, którego prędkość w początku drogi jest v_0; czyli w początku drogi posiada on energię kinetyczną równą wartości wyrazu $\frac{mv_0^2}{2}$; jeżeli na ten punkt **nie działają** żadne siły, to na zasadzie bezwładności pozostanie on w ruchu jednostajnym i prostolinijnym, wartość więc wyrazu $\frac{mv_0^2}{2}$ nie zmieni się; czyli wartość energji kinetycznej punktu **bez działania sił** na niego nie zmieni się.

Gdy następnie na dany punkt w pewnem miejscu toru, od którego zaczniemy liczyć drogę s, zacznie działać siła P w kierunku ruchu punktu, wtedy prędkość powiększy się i w odległości s od tego miejsca będzie równą v, a zatem energia kinetyczna punktu w tem miejscu drogi równa się wartości wyrazu $\frac{mv^2}{2}$; a więc wyraz $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ jest różnicą czyli przyrostem energji kinetycznej. Wygłosimy zatem twierdzenie:

praca siły, działającej na swobodny punkt materyalny wzdłuż pewnej drogi, równa się przyrostowi jego energii kinetycznej.

Powyższy obraz nasuwa wrażenie rozpędu danego punktu, jakiego on nabywa pod działaniem siły P; mając ten obraz na uwadze, przyrost energii kinetycznej nazywają również pracą rozpędu. Twierdzenie to wypowiedzieć również możemy w nast. sposób:

przyrost energii kinetycznej punktu materyalnego podczas pewnego przesunięcia równa się pracy tej siły wzdłuż tegoż przesunięcia. Wniosek ten należy w ten sposób rozumieć; jeżeli powstaje lub zmniejsza się energia kinetyczna jakiegoś punktu materjalnego, to zmiana ta jest wynikiem działania pewnej siły, wzdłuż pewnej drogi; a wartość przyrostu energii kinetycznej równa się pracy tej siły.

Przykład. Punkt materyalny, ważący 15 *kg.*, spada pionowo. Jaką pracę wykonywa siła ciążenia i jaki przyrost energii zyskał dany punkt, gdy początkowa prędkość punktu $v_0 = 0$, i wysokość spadania $h = 3$ *m.*

Rozwiązanie. Praca $L = 15 \times 3$ *kg. m.* $= 45$ *kgm.* Przyrost energii kinetycznej wyrazi się wzorem: $\frac{mv^2}{2} - 0$; początkowa bowiem wartość energii $= 0$; a więc na zasadzie powyższego twierdzenia $\frac{mv^2}{2} = 45$; ponieważ $m = \frac{15}{g}$, przeto, po podstawieniu, otrzymamy $\frac{15}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = 45$; a po skróceniu: $v = \sqrt{2g3} = 7{,}67$ m/s. Wartość $\sqrt{2g.3}$ wzięta jest bezpośrednio z tablicy, pomieszczonej w „Techniku" na str. 147.

Zadanie to moglibyśmy rozwiązać również z równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego; podług tego równania $s = \frac{v^2}{2g}$; skąd $v = \sqrt{2gs}$.

Przykład. Pocisk, ważący $Q = 4$ *kg.*, wyrzucono z działa z prędkością $v = 600$ *m.* na sekundę; długość lufy działa $= 0,8$ *m.*; obliczyć siłę parcia gazów w lufie, przyjmując, iż jest ona stałą podczas rozprężania się.

Rozwiązanie. Pocisk przyjmiemy za punkt materyalny; siłę parcia oznaczymy przez P *kg*, wtedy

$$P \,.\, 0{,}8 = \frac{4}{g} \,.\, \frac{600^2}{2} - 0; \text{ gdyż } v_0 = 0; \text{ a zatem:}$$

$$P \,.\, 0{,}8 = \frac{1}{g} \,.\, 72 \,.\, 10^4 = 0{,}1019 \,.\, 72 \,.\, 10^4 = 7{,}337 \,.\, 10^4;$$

wreszcie: $P = 91700$ *kg.*

Przykład: Pocisk, wspomniany w poprzednim przykładzie, uderza w ziemię i zagłębia się na 2 *m*; — jaką siłę oporową przedstawia ziemia, zatrzymując pocisk. W danym razie energia kinetyczna pocisku zamienia się w pracę. Oznaczywszy przez W siłę oporu ziemi, napiszemy wzór: $- W \,.\, s = - \frac{1}{2} mv^2$; po podstawieniu odpowiednich wartości otrzymamy: $W \,.\, 2 = \frac{4}{g} \,.\, \frac{600^2}{2} = 73070$; skąd $W = 36685$ *kg.*

Przykład. Przyjmijmy, iż praca robotnika, obliczona w przykładzie § 95-tego, działa na rozpęd wózka kolejowego, ustawionego na poziomych szynach; — obliczyć prędkość wózka po upływie 20 sek., nie biorąc pod uwagę tarcia, oporu powietrza i t. d; jeżeli ciężar wózka z przyrządami i obciężeniem $Q = 500$ *kg.*

Rozwiązanie. Praca robotnika w przeciągu 20 sek. $= 10{,}5 \,.\, 20 = 210$ *kgm.*; masa wózka $= \frac{500}{g}$; przyjmujemy początkową prędkość: $v_0 = 0$; zatem: $210 = \frac{500}{g} \,.\, v^2$; skąd $v = \sqrt{\frac{210\, g}{500}} = 2{,}03$ *m*/sek.

Rozpatrywania powyższe wykazały zależność energii kinetycznej punktu materyalnego od pracy siły, gdy siła **niezmienna** działała na niego **w kierunku przesunięcia.** Obecnie znajdziemy tę zależność, gdy siła działa pod pewnym kątem do toru i gdy tor jest krzywolinijny. Niechaj siła P działa na punkt materyalny, umieszczony na torze, rys. 119-ty, który zakreśla cząstkę toru $= ds$; w celu zastosowania poprzedniego określenia przyjmiemy, że składowa P_t siły zmiennej P jest niezmienną na długości tej cząstki toru; praca wtedy tej siły wywoła przyrost energii kinetycznej punktu ruchomego wzdłuż tej cząstki toru; napiszemy zatem na zasadzie poprzedniego twierdzenia:

$$P_t \,.\, ds = d\left(\tfrac{1}{2}\, m v^2\right) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (68)$$

t. j. praca cząstkowa siły, działającej na punkt materyalny równa się przyrostowi energii kinetycznej.

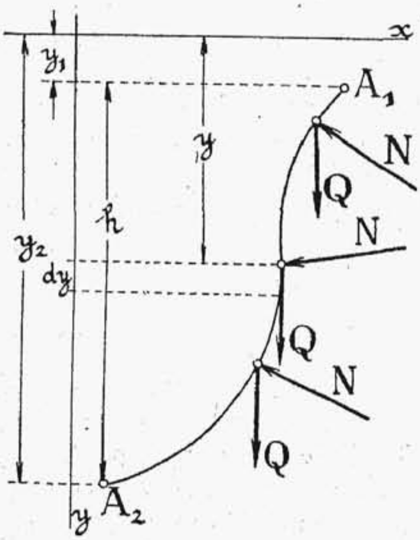
Zależność więc pomiędzy pracą siły zmiennej wzdłuż toru krzywolinijnego i energią kinetyczną, wywołaną przez tę pracę, wyrazimy za pomocą następującego równania

$$L = \int_{C_1}^{C_2} P_t\, ds = \int_{V_1}^{V_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right);$$

$$L = \tfrac{1}{2}\, mv_2^2 - \tfrac{1}{2}\, mv_1^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

t. j. praca siły wzdłuż pewnej drogi równa się przyrostowi energii kinetycznej, nabytemu po przejściu tej drogi.

101. Spadanie punktu ciężkiego po torze danym. Przyjmijmy, iż pewien punkt materyalny o ciężarze Q spada, pod działaniem siły ciążenia po pewnym wyznaczonym torze. Unaocznimy sobie ten przykład, przyjąwszy, iż tor zrobiony jest z drutu, odpowiednio wygiętego, a punkt materyalny wyobrazimy sobie w postaci nawleczonej na ten drut bryły materyalnej, która może się po nim ślizgać bez tarcia. Dla łatwiejszego rozpatrywania wyobraźmy sobie tor płaski w płaszczyźnie osi x, y; dodatni zwrot osi y obierzmy pionowo na dół t. j. w kierunku siły ciążenia, jak wskazuje rysunek 128-my.



Rys. 128.

W danem zadaniu punkt materyalny nie jest swobodny; gdyby bowiem był swobodny, spadałby pod działaniem siły ciążenia po pewnej określonej krzywej. Ażeby zaś uczynić go swobodnym, należy, zgodnie z § 50-ym, przyłożyć do niego siłę odporu, jaką drut na niego wywiera; a wtedy na dany punkt działać będzie siła ciążenia Q i siła odporowa N; praca cząstkowa ich wypadkowej, § 97-my:

dL = (praca cząst. siły Q) + (praca cząst. siły N).

Chociaż siła N jest nieznaną co do swej wartości, lecz znany jej kierunek, jest on bowiem prostopadły do toru w każdem jego miejscu, więc prostopadły też do przesunięć ds, tarcia bowiem nie uwzględniamy; praca zatem tej siły równa się zeru; przeto wyraz drugi równania pracy równa się zeru; otrzymamy wskutek tego równanie pracy:

$dL = Q\,.\,ds\,.\cos(Q,\, ds)$, i zważywszy, że

$ds \cdot \cos(Q, ds) = ds \cdot \cos(y, ds) = dy$, otrzymamy:
$dL = Q \cdot dy$; i wreszcie:

$$L = \int_{y_1}^{y_2} Q \cdot dy = Q \cdot (y_2 - y_1) = Q \cdot h. \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Praca zatem siły ciążenia punktu materyalnego równa się iloczynowi z jego ciężaru i z odległości pomiędzy poziomami położeń krańcowych i jest **niezależną od postaci toru**, po którym przesunął się dany punkt.

Gdy przyjmiemy, że praca sił odporowych równa się zeru, wtedy pracę siły ciążenia obliczyć również można za pomocą wzoru analitycznego 62-go, podstawiając $P_x = 0$; $P_y = Q$.

Jeżeli w powyższym przykładzie punkt materyalny będzie się podnosił, to, w danym układzie spółrzdęnych, otrzymamy:

$$L = \int_{y_2}^{y_1} Q \cdot dy = Q \cdot (y_1 - y_2) = - Q \cdot h;$$

praca siły jest więc w tym razie odjemną; co jest zgodne z określeniem znaku pracy.

Szczególny przypadek. Jeżeli dany punkt zakreśli w polu sił ciążenia pewną drogę i powróci do miejsca, z którego wyszedł, to $h = 0$, a więc $L = 0$. Wynik ten można bezpośrednio zrozumieć, siła bowiem w danym razie wykonywa wzdłuż takiego toru pracę dodatnią i odjemną, o wartościach bezwzględnych równych, suma więc ich równa się zeru. Praca siły wzdłuż pewnej drogi równa się także zeru, — gdy punkt ruchomy przybędzie po dowolnym torze do tegoż **poziomu**, z którego wyszedł. Naprzykład z rys. 129-go odczytamy:

$$L_{A_0}^{A_1} = - Q \cdot h_1; \quad L_{A_2}^{A_1} = + Q \cdot h_1;$$

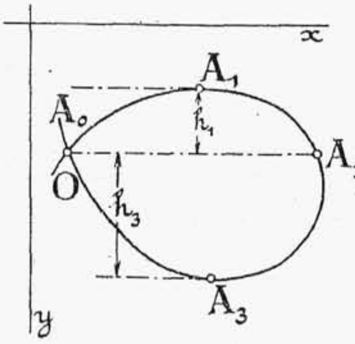
i suma ich równa się zeru.

W rozwiązaniu powyższego zadania ważną jest ta okoliczność, iż praca sił odporowych równa się zeru; co tylko wtedy następuje, gdy pomiędzy poruszającym się punktem, a torem niema tarcia. Stosowanie więc równań pracy przy takiem założeniu, odnoszącem się do sił odporowych, pozwala bezpośrednio **wyrugować** z rachunku **wielkości sił odporowych**.

Ponieważ praca, jaką siły wykonują, przesuwając punkt materyalny po torze, równa się powiększeniu jego energii kinetycznej, przeto punkt materyalny, przesuwając się po dowolnym torze (z warunkiem, aby siły odporowe były prostopadłe do toru), pod działaniem siły ciążenia, otrzymuje przyrost energii kinetycznej, którego wartość zależy tylko od **odległości poziomowej** położeń danego punktu i nie zależy od postaci toru; a więc jeżeli linie x_1 i x_2 rys. 130-ty przedstawiają dwa poziomy, to punkt C, przesuwając się z jakiegobądź miejsca poziomej x_1 do jakiegobądź miejsca poziomej x_2 i po jakimbądź torze, otrzymuje ten sam przyrost energii kinetycznej, której wartość obliczymy ze wzoru:

$$\tfrac{1}{2} mv^2_2 - \tfrac{1}{2} mv^2_1 = Q.h.$$

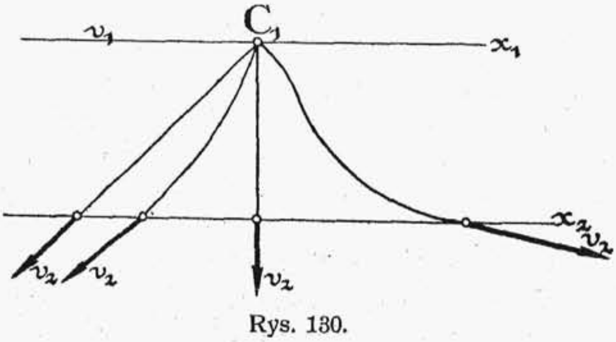
Jeżeli zatem punkt materyalny posiada w miejscu C_1 prędkość v_1, to we wszystkich punktach poziomej x_2 będzie posiadał tę samą prędkość $= v_2$, niezależnie od postaci toru, po jakim on przybył.



Rys. 129.

Oczywiście mowa tutaj tylko o liczbowych wartościach tych prędkości; ich wektorowe bowiem wielkości zmieniają się dla każdej drogi; posiadają kierunki styczne do torów, po których dany punkt się przesunął. Ograniczenie to wynika stąd, iż energia kinetyczna jest wielkością skalarną; gdy zaś zechcemy wyznaczyć kierunek prędkości, wtedy należy się zwrócić do innych warunków zadania, gdyż z wartości energii kinetycznej nie wyznaczymy kierunku prędkości. W danym przykładzie kierunki prędkości wyznaczone są jako styczne do toru, rys. 130-ty.

102. Praca sił, przyłożonych do bryły i jej energia kinetyczna. Dotychczas rozpatrywaliśmy pracę sił, przyłożonych do jednego punktu podczas jego przesunięcia; obecnie rozpatrzymy pracę sił, przyłożonych do różnych punktów danej bryły. Jeżeli bryłę, na którą działają dane siły, przesuniemy do innego położenia, to punkty przyłożenia tych sił przesuną się w przestrzeni; i każda z nich wykona odpowiednią pracę; sumę algebraiczną tych prac podczas przesunięcia się bryły, nazwiemy sumą prac danej bryły. Jeżeli to jest praca cząstkowa;



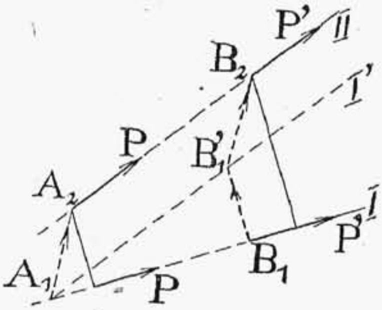
Rys. 130.

i przez dL oznaczymy tę sumę, a przez dp rzut przesunięcia punktu przyłożenia siły na jej kierunek; to wyrazimy określenie powyższe wzorem

$$dL = \Sigma (P_k \,.\, dp_k).$$

Znaczenie fizyczne tego wyrazu rozpatrzymy w dynamice; tutaj zaś przytoczymy nast. jej właściwości statyczne:

1) Praca siły, przyłożonej do danej bryły, podczas jej dowolnego lecz nieskończenie małego przesunięcia, nie zmieni się, jeżeli przesuniemy tę siłę do dowolnego punktu, leżącego na prostej jej działania. Ażeby tego dowieść wyobrazimy sobie prostą I, wzdłuż której działa siła P z punktem przyłożenia w A_1; gdy ta prosta przejdzie do położenia II-go; punkt A_1 przejdzie z nią do położenia A_2; a siła P wykona podczas tego pracę $=$ $=$ iloczynowi z rzutu przesunięcia $A_1 A_2$ na kierunek siły i z siły P. Obliczymy następnie pracę tejże siły P', gdy punkt jej przyłożenia jest w B_1 i gdy prosta ta przejdzie do położenia II-go, a punkt przyłożenia siły P' przejdzie do położenia B_2; siła P' dozna przez ten czas nieskończenie małego przyrostu, który możemy pominąć; praca przeto siły P' w tym razie $=$ (rzutowi B_1B_2 na I) P. — Jeżeli wartości tych dwóch prac t. j. wartości pracy siły, przyłożonej w A_1 i wartości pracy siły, przyłożonej w B_1, mają być równe; to powinien rzut $A_1 A_2$ na I $=$ $=$ rzutowi B_1B_2 na I. — Dowiedzenie tego, będące czysto geometrycznej natury, przeprowadzimy w następujący sposób: wyobraźmy sobie, że daną prostą przeprowadzimy z położenia I do II w następujący sposób: najpierw prostą I obrócimy około punktu A_1 w ten sposób, że przybierze ona położenie równoległe do II; oznaczymy to położenie przez I'; wtedy punkt B_1 zakreśli cząstkę łuku B_1B_1'; następnie przeprowadzimy tę prostą ruchem równoległym z położenia I' do pokrycia się z położeniem II; wtedy punkt B_1' wykona przesunięcie równoległe i równe przesunięciu A_1A_2.—Rzut przeto przesunięcia B_1B_2 na prostą I składa się z rzutu przesunięcia B_1B_1'; rzut ten$=0$; oraz z rzutu przesunięcia $B_1'B_2$, które jest równe rzutowi przesunięcia A_1A_2; przeto (rzut A_1A_2 na I) $=$ (rzutowi B_1B_2, na I); co było do dowiedzenia. Prace zatem siły P w dwóch tych położeniach są sobie równe.



Rys. 131.

2) W podobny sposób można dowieść, że suma prac dwóch sił równoważących się $= 0$; a mając następnie na uwadze twierdzenie § 97-mego, że praca siły wypadkowej $= \Sigma$ (prac sił składowych), działających na jeden punkt; i mając na uwadze określenie równoważnych układów, § 51-szy; wygłosimy twierdzenie:

3) **suma prac danego układu sił, przyłożonych do danej bryły, równa się pracy sił układu równoważnego,** podczas tego samego przesu-

nięcia bryły. Pracę przeto sił danego układu, przyłożonych do bryły można obliczyć jako pracę np. dwóch sił sprzężonych; lub też jako pracę siły $\bar{R}$ i pary, wyrażonej momentem M; — jako sił równoważnych danemu układowi. Zwrócić tu należy uwagę, że twierdzenie to pozostaje w mocy tylko w tym przypadku, gdy odległości pomiędzy punktami, do których siły są przyłożone, się nie zmieniają. (Porówn. podobne twierdzenie co do momentu § 28-my). Wyobraźmy sobie następnie bryłę, złożoną z punktów materyalnych, połączonych z sobą niezmiennymi prętami, w których występują siły, zwane wewnętrznemi; jest to obraz, któryśmy stosowali w § 32-gim. Wyobraźmy sobie następnie, że na k-ty punkt działa siła P_k i siły połączeń $W_{k,\,i}$, gdzie i oznacza pozostałe punkty. Na zasadzie wzoru 69-ego, napiszemy przeto

$$P_k \,.\, dp_k + \Sigma(W_{k,\,i} \,.\, dp_k) = d(\tfrac{1}{2} m_k\, v_k^2);$$

napiszemy dla każdego punktu danej bryły takie równanie i, po dodaniu ich, otrzymamy:

$$\Sigma(P_k \,.\, dp_k) + \Sigma\Sigma(W_{k,\,i} \,.\, dp_k) = d\Sigma(\tfrac{1}{2} m_k\, v_k^2).$$

Lecz siły $W_{k,\,i}$ wzajemnie się znoszą, suma ich prac przeto równa się zeru; a wzór poprzedni przekształci się na nast.:

$$\Sigma(P_k \,.\, dp_k) = d\,\Sigma(\tfrac{1}{2} m_k\, v_k^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Wzór ten wysłowimy: **suma prac sił, przyłożonych do bryły swobodnej, równa się przyrostowi sumy energii kinetycznych jej punktów.** Jeżeli przeto siły wykonują pracę dodatnią, to bryła powiększy swą energię kinetyczną (t. j. sumę energii kinetycznych wszystkich jej punktów) o wartość, równą liczbowo wartości pracy; jeżeli zaś siły wykonują pracę **odjemną**, to energia kinetyczna danej bryły **się zmniejszy.**

W szczególnym przypadku, gdy bryła jest w spoczynku, a pod działaniem przyłożonych sił ma się poruszyć, **to poruszy się ona tylko wtedy, gdy praca sił, przyłożonych do niej podczas tego ruchu jest dodatnia.**

Bryła np. materyalna, puszczona swobodnie w polu sił ciążenia, nabędzie pewnej energii kinetycznej; praca bowiem siły ciążenia podczas tego ruchu jest dodatnią.

Wnioski te można uważać jako sposoby pojmowania fizycznego działania siły; że ruch powstaje w kierunku działania siły; zasada przeto równowartości pracy i energii kinetycznej jest tylko jednym ze sposobów wyrażania działania siły.

103. Praca sił ciężkości bryły materyalnej. W celu obliczenia pracy sił ciężkości, podczas przeprowadzenia bryły materyalnej z jednego jej położenia do drugiego, podzielimy ją w myśli na pojedyńcze punkty i przyłożymy do nich siły zewnętrzne i wewnętrzne; siłami zewnętrznemi w danym razie są siły ciężkości, siłami zaś wewnętrznemi siły połączeń pomiędzy punktami. Suma prac tych sił, podczas nieskończenie małego przesunięcia bryły, równa się pracy sił ciężkości oddzielnych punktów; suma bowiem prac sił wewnętrznych brył sztywnych równa się zeru.

Oznaczmy przez y_k odległości pionowe punktów bryły od dowolnie obranej płaszczyzny poziomej a napiszemy wtedy wzór pracy sił, podczas nieskończenie małego przesunięcia bryły materyalnej w polu ciężkości, w następujący sposób:

$$dL = \int dQ_k \,.\, dy_k\,;$$

we wzorze tym dQ_k oznacza ciężar k-go punktu; a dy_k rzut nieskończenie małego przesunięcia tego punktu na oś y, obraną pionowo.

Podczas przesunięcia bryły, wielkości dQ_k pozostają stałemi; napisać więc możemy równanie powyższe w następujący sposób

$$dL = d \int dQ_k \,.\, y_k.$$

Na podstawie wzoru 44-ego napiszemy:

$$\int dQ_k \,.\, y_k = y_s \,.\, Q\,;$$

gdzie Q oznacza ciężar całej bryły; y_s odległość jej środka ciężkości od obranej płaszczyzny; podstawiwszy te wartości we wzór pracy, otrzymamy

$$dL = d\,(y_s\, Q) = Q dy_s \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \quad (72)$$

Jeżeli przesunięcie wykonamy pomiędzy skończonemi granicami, to napiszemy równanie:

$$[L]_1^2 = Q\,[y_{s_2} - y_{s_1}], \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \quad (73)$$

które wysłowimy:

praca sił ciężkości bryły swobodnej równa się pracy jej ciężaru, przyczepionego do środka masy.

Twierdzenie to uzupełnimy uwagą, wynikającą z twierdzenia o pracy ciężkości jednego punktu materyalnego, że praca ciężkości bryły nie zależy ani od postaci dróg przebytych przez oddzielne punkty, ani też od postaci drogi, którą przebywa środek jej masy, lecz tylko od pionowej odległości pomiędzy poziomami środka masy.

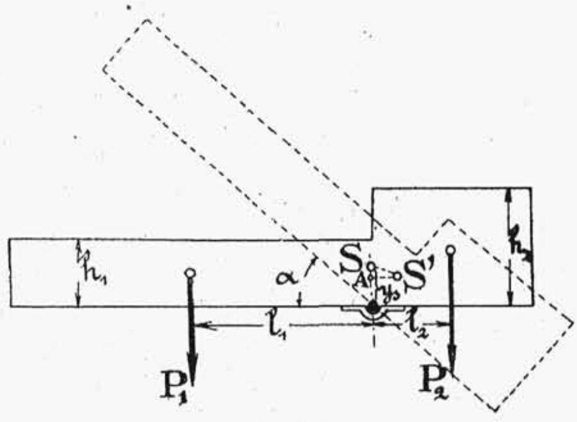
Z tego twierdzenia wynika: gdy środek ciężkości bryły, podczas jej ruchu, pozostawać będzie na jednym poziomie, wtedy siła ciężkości wykona pracę równą zeru; do wykonania więc tego ruchu nie trzeba nakładu żadnej pracy. Z wniosku tego korzystać można przy budowie mechanizmów, których zadaniem jest wykonywanie pewnych ruchów bez nakładu pracy; nieuwzględniając pracy sił oporowych (tarcia i t. p.), jakie występują podczas ruchu.

Przykład. Rogatka drogowa, składająca się z belki o przekroju prostokątnym, jest zrównoważona przeciwciężarem, jak wskazuje rys. 132-gi; obliczyć pracę, jakiej potrzeba użyć do zamknięcia rogatki, gdy była ona nachylona pod kątem α względem poziomu; mając przytem na uwadze, że środek jej ciężkości w położeniu zamkniętem znajduje się na pionowej, przechodzącej przez punkt podparcia; t. j., że zachodzi stosunek: $P_1 . l_1 = P_2 . l_2$.

Rozwiązanie. Znajdziemy y_s z równania momentów względem punktu obrotu, gdy wyobrazimy sobie siły ciążenia skierowane poziomo:

$$P_1 \frac{h_1}{2} + P_2 \frac{h_2}{2} - (P_1 + P_2)\, y_S = 0; \text{ skąd } y_S = \tfrac{1}{2}\, \frac{P_1 h_1 + P_2 h_2}{P_1 + P_2}.$$

Gdy rogatka otwarta, to środek ciężkości zajmuje położenie S' rys. 132-gi; gdy ją zamykamy, środek ciężkości zakreśla łuk i w położeniu poziomem rogatki zajmie on położenie S, a siła ciążenia wykona wtedy pracę:



Rys. 132.

$$L = -(P_1 + P_2) . AS = -(P_1 + P_2)\, y_S\, (1 - \cos \alpha); \text{ skąd.}$$

$$L = -\tfrac{1}{2}\,(P_1 h_1 + P_2 h_2) . (1 - \cos \alpha).$$

Znak odjemny wyraża, iż środek ciężkości, podczas zamykania rogatki, podnosi się ku górze; praca ta więc powinna być nadana z zewnątrz.

Przykład. Most zwodzony. Pomost AB, rys. 131-szy, obraca się około osi poziomej A. Łańcuch BC łączy ten pomost z belką poziomą CE, obciążoną pewnym ciężarem; belka ta ma oś obrotu w punkcie E, leżącym pionowo nad punktem A; — podać sposób obciążenia belek pomostu, ażeby można było go otwierać i zamykać bez nakładu pracy.

W myśl wyprowadzonego twierdzenia środek ciężkości całego układu, podczas obrotu mostu, powinien albo przesuwać się w płaszczyźnie poziomej, lub też pozostawać w jednem miejscu przestrzeni.

Jeżeli S_1 oznacza środek ciężkości momostu AB w dowolnem jego położeniu; S_2 — środek ciężkości górnych belek wraz z przeciwciężarem; i jeżeli punkt S, leżący na przecięciu się pionowej AE z prostą S_1S_2, będzie środkiem ciężkości obydwóch pomostów, to tenże punkt pozostanie środkiem ciężkości tych ciężarów we wszystkich położeniach belek.

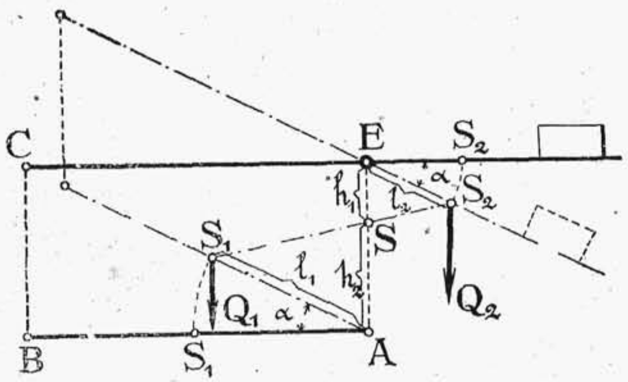
Weźmy bowiem pod uwagę pomost, będący w położeniu pochylonem względem poziomu pod dowolnym kątem α i ustawmy przeciwwagę w ten sposób, ażeby środek sił Q_1 i Q_2 leżał w punkcie przecięcia się prostej S_1S_2 z AE, wtedy napiszemy równanie momentów:

$$Q_1 l_1 \cdot \cos\alpha + Q_2 l_2 \cdot \cos\alpha = 0 \text{; stąd } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

lecz również

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{Q_1}{Q_2};$$

położenie zatem punktu S zależy tylko od stosunku ciężarów, lecz nie zależy od kąta α; gdy więc w jednem położeniu pomostu środek jego ciężkości wypadnie na pionowej AE, to we wszystkich innych położeniach pozostanie on w temże miejscu. Podnoszenie więc i opuszczanie pomostu, w ten sposób zbudowanego, odbywać się będzie bez nakładu pracy; praca będzie tylko potrzebna na przezwyciężenie oporów, jakie powstaną podczas ruchu pomostu.



Rys 133.

2. Pole sił.

104. Określenie pola sił. Polem sił nazywamy przestrzeń, mającą taką właściwość, iż punkt materyalny, umieszczony w jakiembądź jej miejscu, dozna działania ściśle określonej siły; t. j gdy w pewnem miejscu takiej przestrzeni pozostawimy dany punkt swobodnym, wtedy otrzyma on pewne przyśpieszenie; którego kierunkiem jest kierunek siły. W każdem więc miejscu takiej przestrzeni, należy sobie wyobrazić ściśle wyznaczony wektor, przedstawiający siłę.

Przestrzeń otaczająca kulę ziemską, jest przykładem pola sił; gdyż punkt materyalny, umieszczony w jakiembądź jej miejscu, dozna przyśpieszenia. Wektory, wzkazujące kierunek sił, są w danym razie liniami pionowemi a długości ich są równe. Pole to nazywamy polem ciążenia. W tenże sposób możemy mówić o polu sił, jakie się wytwarza około magnesu, około ciała naelektryzowanego i t. p.

Jeżeli n. p. kierunki sił pewnego pola zbiegają się w jednym punkcie, zwanym środkiem sił, i zwroty ich są skierowane ku temu środkowi, to mówimy, że ten środek przyciąga punkty materyalne, znajdujące się w jego polu, i nazwiemy go wtedy środkiem przyciągającym; jeżeli zaś zwroty sił wybiegają ze środka w przestrzeń, to mówimy, że dany środek odpycha. Wartości przytem sił mogą być rozmaite i mogą zależeć np. od oddalenia od środka, a nawet i od czasu.

Gdy umieścimy następnie w przestrzeni dwa takie przyciągające lub odpychające środki, wtedy w każdem jej miejscu powstają dwie siły, których wypadkowa jest wektorem, odpowiadającym danemu miejscu przestrzeni. W tym razie kierunki sił nie zbiegają się w jednym punkcie, lecz wogóle mijają się. Powiększając ilość punktów tak przyciągających, jak i odpychających i przyjmując różne prawa przyciągania lub odpychania, możemy tworzyć najróżnorodniejsze pola sił;—pola w ten sposób utworzone, nazywamy **polami sił środkowych.**

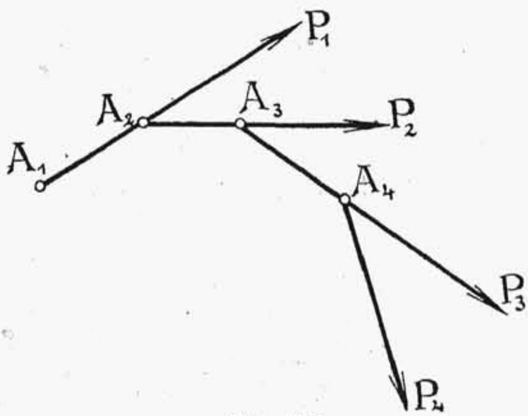
Wogóle pola sił powstają nietylko wskutek przyciągania lub odpychania, lecz również wskutek wielu innych warunków fizycznych. Mechanika wogóle, a więc rówież i teorja sił, nie zajmuje się pochodzeniem sił, a przyjmuje je jako już istniejące; natomiast bada ona działanie, uczy wnioskować o różnych właściwościach statycznych i dynamicznych danego pola z innych właściwości, określających to pole. **Pole sił** nazwiemy **określonem**, gdy danem będzie **prawidło,** podług którego będziemy mogli wyznaczyć wektory sił w każdem jego miejscu.

Rozróżniamy **pola niezmienne i zmienne.** Polem niezmiennem czyli statycznem nazywamy pole, w którem siły nie zmieniają się ze zmianą czasu; a przynajmniej przyjmujemy je za takie. Polem takiem jest pole, utworzone np. około magnesu; — jest niem również pole ciążenia. Gdy zaś wartości sił lub też ich kierunki zmieniają się z biegiem czasu; wtedy nazywają takie pola zmiennemi; ograniczymy się tutaj do rozpatrywania pól **niezmiennych.**

Jako szczególny przypadek pól niezmiennych są pola, w których wartości wektorów we wszystkich miejscach są stałe, a kierunki ich wzajemnie równoległe; pola takie nazwano polami **jednostajnemi** Pole ciążenia, rozważane w małej przestrzeni, jest z pewnem przybliżeniem polem jednostajnem.

105. Linie sił. Z dowolnego punktu A_1 pola sił, rys. 134-ty, wystawmy odpowiedni temu punktowi wektor $\bar{P}_1$; następnie z punktu A_2, obranego na kierunku siły P_1, nieskończenie blisko A_1, wystawmy wektor $\bar{P}_2$ właściwy punktowi A_2; powtórzywszy to postępowanie, jak wskazuje rys. 134-ty otrzymujemy pewną linję krzywą A_1 A_2 A_3, do której kierunki sił są styczne; — linie takie nazwano **liniami sił danego pola.**

Obrawszy inny punkt wyjścia zamiast A_1, zbudujemy inną linię sił, i w ten sposób wypełnić możemy całą przestrzeń takiemi liniami. Linie sił pola, utworzonego przez siły środkowe, są liniami prostemi, zbiegającemi się w tym środku; gdy zaś pole utworzone będzie z wielu takich środków, wtedy linie sił będą krzywemi, wógóle mówiąc, — przestrzennemi. Linie sił pola ciążenia można uważać z pewnem przybliżeniem za proste wzajemnie równoległe; lub też, ściślej rozpatrując, za zbiegające się w środku bryły ziemskiej.



Rys. 134.

Linii sił nie można brać za tory, które zakreśli swobodny punkt ruchomy, pod działaniem sił tego pola; podczas ruchu punktu kierunek jego prędkości w każdej chwili zależy od prędkości, jaką on posiadał w chwili poprzedniej; jest więc różny od kierunku siły; kierunek bowiem siły wskazuje kierunek przyśpieszenia t. j. kierunek zmiany wektora prędkości, jakiej dozna punkt ruchomy w danem miejscu pola. Postać więc tego punktu ruchomego zależy od miejsca wyjścia, od początkowej jego prędkości i następnie od pola sił. W szczególnym przypadku pola sił, gdy linie sił są proste i gdy punkt nie posiada prędkości początkowej, linie sił pokrywają się z torem punktu ruchomego; za przykład takiego ruchu służy tor punktu materyalnego, opuszczonego swobodnie w polu ciążenia.

106. Określenie analityczne pola sił i linii sił. W celu określenia pola sił za pomocą równań obierzmy w przestrzeni trzy wzajemnie prostopadłe osi spółrzędnych x, y, z; a wtedy położenie dowolnego punktu w przestrzeni wyznaczymy przez jego spółrzędne (x, y, z); punktowi temu odpowiada pewna siła, którą wyznaczyć możemy, posiadając jej składowe P_x, P_y, P_z, w kierunku obranych osi.

Wogóle mówiąc, kierunki sił i ich wartość są w każdem miejscu pola inne, a więc i wartości ich składowych są inne; zależność ich od miejsca wyrazimy analitycznie, przyjmując, że wartości składowych są funkcyami spółrzędnych; a więc każde pole sił, **niezmienne w czasie**, zostaje ściśle określone następującemi trzema równaniami:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= f_1(x, y, z); \\ P_y &= f_2(x, y, z); \\ P_z &= f_3(x, y, z). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Gdy dane są te funkcye, wtedy dla każdego punktu (x, y, z) pola obliczymy składowe, inaczej rzuty siły, a z nich wyznaczymy jej wektor. Równania zatem powyższe **wystarczają** w zupełności do określenia pola sił, i nazywają się **równaniami pola**.

Z równań pola obliczymy równania jego linii sił na podstawie określenia, że kierunek siły w danem miejscu pola jest styczny do linii sił. Kąty kierunkowe stycznej w punkcie (x, y, z) określają się wzorami:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds};$$

kąty zaś kierunkowe wektora siły w tymże punkcie wzorami:

$$\frac{P_x}{P}; \quad \frac{P_y}{P}; \quad \frac{P_z}{P};$$

ponieważ kąty kierunkowe stycznej i siły są wzajemnie równe; przeto napiszemy:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{P_x}{P}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{P_y}{P}; \quad \frac{dz}{ds} = \frac{P_z}{P}; \quad \text{lub inaczej}$$

$$\frac{dx}{P_x} = \frac{ds}{P}; \quad \frac{dy}{P_y} = \frac{ds}{P}; \quad \frac{dz}{P_z} = \frac{ds}{P}; \quad \text{skąd}$$

$$\frac{dx}{P_x} = \frac{dy}{P_y}; \quad \text{oraz} \quad \frac{dx}{P_x} = \frac{dz}{P_z}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Są to równania różniczkowe, które, po scałkowaniu, przedstawią linie sił pola, określonego przez trzy równania algebraiczne. Stałą, która powstanie po scałkowaniu, obliczymy, obrawszy jeden punkt pola, przez który ma przechodzić linia sił.

107. Praca sił danego pola podczas przesuwania punktu ruchomego. Gdy w dowolnem lecz niezmiennem polu sił puścimy swobodnie punkt materyalny, wtedy zakreśli on pod działaniem tych sił tor, wogóle krzywy, i po przejściu pewnej drogi nabędzie energii kinetycznej. Tor ten może być ściśle wyznaczony, gdy będzie wskazane miejsce wyjścia punktu ruchomego, oraz początkowa jego prędkość: te same wymagania są też stawiane np. przy wyznaczeniu krzywej punktu ruchomego w polu ciążenia. Możemy również wyznaczyć tor, po którym ma przebiegać punkt materyalny, wyobraziwszy go sobie w postaci materyalnej linii sztywnej, po której dany punkt pod działaniem sił pola może się ślizgać bez tarcia. W obydwóch tych jednakże przypadkach, t. j. gdy punkt jest swobodny lub nieswobodny, praca sił, podczas przesunięcia punktu z jednego miejsca pola do drugiego, wyrazi się tylko przez pracę sił, występujących wzdłuż obranego toru; praca bowiem sił odporowych, jakie występują pomiędzy torem materyalnym a bryłą, równa się zeru. W myśl tego wyjaśnienia będziemy mówili o pracy sił podczas przesunięcia punktu ruchomego po różnych krzywych obranych w danem polu; obrazując sobie to fizycznie za pomocą np. drutu, po którym dany punkt materyalny się porusza. Gdy zatem w polu sił przesuwa się punkt swobodny lub nieswobodny z miejsca A_1 do A_2, wtedy siły pola wykonują pracę, którą obliczymy ze wzoru $L = \int_{A_1}^{A_2} (P_x\, dx + P_y\, dy + P_z\, dz)$; gdzie A_1 i A_2 oznaczają wartości spółrzędnych tych miejsc. Ażeby módz wogóle scałkować ten wyraz, należy znać postać toru, po którym dany punkt przeszedł z miejsca A_1 do A_2; tor wyrazimy analitycznie przez dwa równania pomiędzy (x, y, z); z tych dwóch równań wyrugujemy dwie zmienne i podstawimy je we wzór, znajdujący się pod znakiem całki, i otrzymamy wzór z jedną tylko zmienną, który, wogóle mówiąc, można scałkować. Ponieważ pomiędzy dwoma miejscami przestrzeni przeprowadzić można nieskończenie wiele krzywych, przeto i wartość pracy będzie **w ogóle** różną i zależną od ich postaci.

Przykład. Mamy dane pole, określone przez równania następujące:

$$P_x = y^2;\ P_y = -x^2;\ P_z = 0;$$

obliczyć pracę sił, gdy punkt ruchomy przybędzie z A_1 do A_2 po następujących drogach, rys. 133-ci.

1) po linii prostej A_1A_2, gdy $OA_1 = OA_2$;

2) po łuku, zakreślonym z O promieniem: $OA_1 = 1$;

3) po linii łamanej A_1OA_2,

Na zasadzie ogólnego wzoru pracy dla każdej drogi w danem polu napiszemy równanie:

$$L = \int_{A_2}^{A_1} (y^2 \,.\, dx - x^2 \,.\, dy).$$

1) Równanie toru prostego A_1A_2 jest: $y = 1 - x$; po podstawieniu zmiennej y w całkę pracy otrzymamy:

$$L = \int_0^1 [(1 - x)^2 dx + x^2 dx] = \int_0^1 (1 - 2x + 2x^2) dx; \text{ skąd:}$$

$$L = \left[x - x^2 + \tfrac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Jest to zatem wartość pracy, gdy punkt przybędzie z A_1 do A_2 drogą prostą A_1A_2.

2) Obliczymy następnie pracę, gdy punkt ruchomy przejdzie z A_1 do A_2 po łuku koła, zakreślonego z 0 promieniem $= 1$; równanie tego koła: $x^2 + y^2 = 1$. Obliczenie to moglibyśmy wykonać jak poprzednio, podstawiając np. y z równania koła do równania pracy; prościej jednakże przedstawi się rachunek, gdy wprowadzimy jako zmienną kąt σ, który również wyznacza położenie punktu na łuku, rys. 135-ty; wtedy:

$$x = \cos\sigma;\quad y = \sin\sigma;\quad dx = -\sin\sigma\,.\,d\sigma;\quad dy = \cos\sigma\,.\,d\sigma;$$

po postawieniu tych wartości we wzór pracy, otrzymamy:

$$L = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin^3\sigma\,.\,d\sigma - \cos^3\sigma\,.\,d\sigma) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin^3\sigma + \cos^3\sigma)\,.\,d\sigma;$$

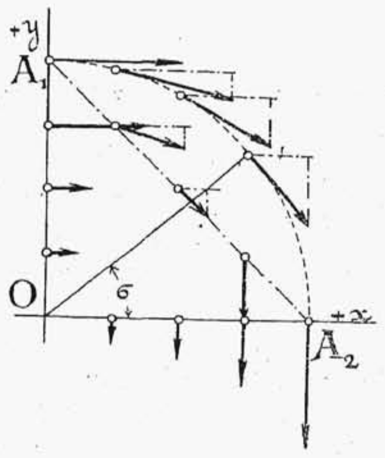
a po scałkowaniu i podstawieniu granic, wartość pracy

$$L = \frac{4}{3}.$$

3) Przeprowadźmy wreszcie punkt ruchomy A_1 do A_2 drogą A_1O i następnie drogą OA_2 i obliczmy pracę sił.

Wartość pracy, podczas przejścia punktu ruchomego z A_1 do O otrzymamy, podstawiając w równanie pracy $x = 0$, jest to bowiem równanie toru A_1O, oraz $dx = 0$; zatem wartość $L = 0$. Praca więc wzdłuż drogi, A_1O jest równą zeru; w tenże sposób otrzymamy wartość pracy wzdłuż OA_2, która także równa się zeru; czyli praca sił danego pola, podczas przeprowadzenia punktu ruchomego z A_1 do A_2 po drodze A_1OA_2, równa się zeru.

Ażeby zdać sobie sprawę z tych wyników, wykreśliliśmy na rys. 135-tym z równań danego pola w pewnych punktach wektory sił; z wykresu tego widzimy, że siły, przyczepione w punktach koła, posiadają znaczniejsze wartości niż siły, położone bliżej początku osi spółrzędnych; co również bezpośrednio wynika z równań analitycznych danego pola; i przytem kierunki ich są prawie styczne do koła, a więc wartość ich pracy jest większą; aniżeli sił, wyznaczonych np. wzdłuż osi, których kierunki są do osi prostopadłe; a więc praca sił, podczas przesuwania się punktu ruchomego wzdłuż tych osi, równa się zeru.



Rys. 135.

Jeżeli więc punkt ruchomy przejdzie z A_1 do A_2 po łuku, i następnie powróci do A_1 po drodze łamanej A_1OA_2, to siły wykonają pracę, równą $\frac{1}{3}$ jednostkom; praca ta ujawnić się może np. przez przyrost energii kinetycznej punktu ruchomego. Wynik ten zobrazujemy sobie w ten sposób, że wygniemy drut w postaci toru $A_1A_2OA_1$, lub np. w postaci krzywej zbliżonej do tego toru, i nawleczemy na niego bryłkę materyalną, która będzie w stanie ślizgać się po drucie bez tarcia; wtedy pod działaniem sił tego pola nawleczona bryła będzie się przesuwała po danym torze z miejsca A_1, aż powróci do niego z powiększoną energią o $\frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{1}{3}$ jednostki pracy; a następnie, będąc pędzoną siłami pola, przebiegnie powtórnie wytkniętą drogę i powróci z podwójną energią $\frac{1}{2}\, mv^2_1 = 2 \, . \, \frac{1}{3}$; takie więc pole jest źródłem niewyczerpanem energii kinetycznej. I tak jest w rzeczywistości, umieszczone np. w takiem polu koło, mogące obracać się bez tarcia około swej osi, nabywać będzie coraz większej prędkości, t. j. nabywać będzie pod działaniem sił pola coraz większej energii kinetycznej. Przyczyną tego zjawiska jest ta okoliczność, że na pewną część tego koła działają siły, wywołujące większy moment niż siły, działające na pozostałą jego część. Koło w takiem polu znajduje się w tychże warunkach, w jakich jest koło wodne, na którego jeden bok uderza woda.

Widzimy tutaj różnicę pomiędzy danem polem sił a polem np. sił ciążenia, w którem koło, w ten sposób umieszczone, nie poruszy się; a poruszone będzie obracać się z jednakową prędkością; t. j. zachowa wartość nadanej mu energii kinetycznej, o ile nie pochłonie ją praca sił oporowych.

Wynik ten zdaje się zaprzeczać zasadzie niemożebności perpetuum mobile; lecz tak nie jest, gdyż dla wywołania i utrzymania takiego pola potrzeba pewnego nakładu energii; potrzebne jest inne źródło energii, wytwarzające i utrzymujące tego rodzaju pole; koło wodne, ażeby się obracać, wymaga również pewnej różnicy poziomów wody; — t. j. wymaga nagromadzonej energii. Przykładem tego rodzaju zjawiska są między innemi pola, utworzone w elektromotorach, gdyż są one źródłem energii kinetycznej; lecz dla wytworzenia i utrzymania takiego pola potrzebną jest praca, którą wydobywamy z energii cieplnej; a więc zjawisko to jest tylko szeregiem przekształceń energii fizycznych na kinetyczną.

Zadanie. Obliczyć przyrost energii kinetycznej punktu ruchomego, gdy przejdzie on n — razy pod działaniem sił pola, określonego w tem zadaniu, z A_1 do A_2 po łuku i wróci z A_2 do A_1 po prostej A_2A_1.

108. Funkcya sił. Szczególnym rodzajem pól są pola, dla których wyraz pracy:

$$L = \int P_x\, dx + \int P_y\, dy + \int P_z\, dz$$

daje się bezpośrednio scałkować; przykładem tego jest pole, wyznaczone np. przez następujące równania:

$$P_x = a.x;\ P_y = a.y;\ P_z = 0,$$

w których a oznacza pewną stałą wartość; w danym więc przykładzie:

$$L = \int ax.dx + \int ay.dy = \left[\tfrac{1}{2}ax^2 + \tfrac{1}{2}ay^2\right]_{A_1}^{A_2},$$

oznaczywszy spółrzędne punktu A_1 przez x_1 i y_1, punktu zaś A_2 przez x_2 i y_2, otrzymamy:

$$L = \tfrac{1}{2}a\,(x^2_2 + y^2_2) - \tfrac{1}{2}a\,(x^2_1 + y^2_1).$$

Dla takiego pola wartość pracy sił, podczas przejścia punktu ruchomego z miejsca A_1 do A_2, jest funkcyą spółrzędnych początkowego i krańcowego położenia; nie zależy zatem od drogi, po której przeszedł punkt ruchomy; a zależy tylko od położenia t. j. od spółrzędnych miejsc krańcowych. Wogóle więc praca sił w takiem polu, podczas przeprowadzenia ruchomego punktu z jednego miejsca (x_1, y_1, z_1) do drugiego (x_2, y_2, z_2), wyrazi się wzorem:

$$L = U\,(x_2, y_2, z_2) - U\,(x_1\ y_1, z_1);\ \text{lub po prostu:}$$

$$L = U_2 - U_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

gdzie U oznacza pewną funkcyę trzech niezależnie zmiennych, które jak w danym przykładzie, są spółrzędnemi obranych miejsc w polu sił; funkcyę tę nazwano **funkcyą sił** danego pola. Litery U_2 i U_1 oznaczają wartości tej funkcyi, gdy zmienne zastąpimy pewnemi określonemi wartościami. Gdy posiadamy zatem funkcyę sił pewnego pola, wtedy otrzymamy wartość pracy, jaką wykonają siły tego pola, podczas przesuwania punktu ruchomego z jednego miejsca do drugiego, podstawiwszy w nią zamiast zmiennych spółrzędne dwóch położeń punktu, a różnica tych wartości przedstawi wartość pracy.

Korzystając z tej właściwości funkcyi sił, możemy wyobrazić sobie każde pole sił wypełnione punktami, o pewnych wartościach liczbowych, obliczonych z funkcyi sił; różnica algebraiczna dwóch wartości, odpowiadających dowolnie obranym miejscom, wyraża wartość pracy sił, jaką one wykonają, podczas przejścia punktu ruchomego z jednego miejsca do drugiego.

Gdy funkcja sił jest jednowartościową, wtedy pola takie posiadają tę znamienną właściwość, że praca sił wzdłuż każdej drogi zamkniętej równa się zeru; wartości bowiem U_2 i U_1 są wtedy wzajemnie równe, różnica więc ich równa się zeru; z właściwością tą spotkaliśmy się już w przypadku szczególnym, rozpatrywanym w § 101-ym.

Gdy w polu takiem umieścimy tor zamknięty w postaci drutu gładkiego, po którym może się ślizgać nawleczona bryła materyalna; wtedy bryła ta pod działaniem sił pola w części swej drogi, w której praca sił jest dodatnią, nabywać będzie energię kinetyczną; w drugiej zaś części, w której praca jest odjemną, nabyta energia będzie się zmniejszała; a ponieważ praca sił w tem polu wzdłuż drogi zamkniętej, t. j. gdy punkt ruchomy powróci do miejsca wyjścia, równa się zeru, przeto punkt ruchomy przybędzie do miejsca wyjścia, wogóle mówiąc, z tą samą energią, którą posiadał przy wyjściu. Ta właściwość jest znamienną dla pól, które posiadają funkcyę sił jednowartościową. Gdy zaś funkcja sił jest wielowartościową, np. $U = \operatorname{artg}\left(\frac{y}{x}\right)$, wtedy wartość pracy sił, podczas obiegu zamkniętego, jest wielokrotnością 2π, i może się przytem równać zeru; te pola nie posiadają więc wspomnianej właściwości, że praca obiegu zamkniętego równa się zeru; a obydwa rodzaje tych pól, posiadających funkcję sił, są w zupełnem przeciwieństwie do właściwości pól, nie posiadających funkcyi sił.

109, Pola skalarne. Obraz przestrzeni, utworzony przez wypisanie w każdym jej punkcie liczb, które otrzymamy z funkcyi sił, po podstawieniu w nie spółrzędnych, różni się od obrazu pola wektorowego, który przedstawia zbiór wektorów, przyczepionych do każdego punktu danego pola.

Przestrzeń, której punktom przypisujemy pewne liczbowe wartości, nazywamy polem skalarnem; — drugi zaś obraz przestrzeni nazwaliśmy już polem wektorowem.

Z pola więc wektorowego możemy wytworzyć pole skalarne, gdy znajdziemy jego funkcyę sił. Lecz nie każde pole wektorowe posiada funkcyę sił, nie każde więc pole wektorowe można zastąpić przez pole skalarne.

110. Potencyał. Potencyałem nazywamy wartość, określoną przez funcyę sił $U(x, y, z)$ **lecz ze znakiem odwrotnym.** Potencyał więc wyrazimy przez wzór:

$$\varphi(x, y, z) = -U(x, y, z)\text{; lub króciej}$$

$$\varphi = -U, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

w którym literą φ oznaczono wartość potencyału w miejscu (x, y, z) danego pola sił. Pojęcie potencyału, wyrażone w ten sposób, posiada następujące znaczenie fizyczne. Na zasadzie określenia powyższego napisać możemy równanie:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2.$$

Wyraz $(U_1 - U_2)$ zgodnie z poprzedniemi określeniami oznacza pracę punktu ruchomego podczas przejścia z miejsca A_2 do miejsca A_1; gdy przeto punkt ruchomy wyobrazimy sobie w miejscu A_2, wtedy wartość różnicy potencyałów $(\varphi_2 - \varphi_1)$ wyraża wartość pracy, jakąby siły pola wykonały, gdyby punkt ruchomy przeszedł z A_2 do A_1; lub inaczej przedstawia **możność** wykonania tej pracy; i stąd też nazwa potencyał — in potentia — jest w możności. Gdy miejsce A_1 obierzemy nieruchomem w danem polu i dobierzemy funkcyę $\varphi(x, y, z)$ w ten sposób, że wartość jej w tem miejscu równą będzie zeru, wtedy wartość potencyału każdego innego miejsca danego pola wyraża pracę, jaką punkt ruchomy **mógłby** wykonać, przeszedłszy z tego miejsca do obranego; wartość potencyału w tym razie nazywają energią potencyalną punktu ruchomego w danem miejscu pola.

Dla przykładu zbadamy pole sił ciążenia, obliczymy jego funkcyę sił oraz potencyał. Obierzemy w tym celu układ spółrzędnych prostokątnych, którego oś z umieścimy pionowo ze zwrotem dodanim ku górze, osi zaś x i y w płaszczyźnie poziomej; wtedy na dany punkt działają siły:

$$P_x = 0;\ P_y = 0;\ P_z = -Q;$$

są to równania analityczne danego pola; zatem

$$dL = P_x dx + P_y dy + \mathrm{d}_z dz = -Q dz = dU; \text{ stąd:}$$

$$U = -\int_0^z Q dz = -Q \cdot z;$$

jest to funkcya sił pola ciążenia; potencyał zaś tego pola wyrazi się wzorem:

$$\varphi = Q \cdot z;$$

który nas uczy, że o ile dany punkt leży wyżej od poziomu, od którego liczymy odległość, o tyle jest większa jego energia potencyalna; t. j. o tyle większą pracę jest on **w stanie** wykonać, gdyby przeszedł do poziomu niższego.

111. Powierzchnie równych potencyałów. Wartość potencyału w każdem miejscu (x, y, z) pola, posiadającego funkcye sił, jest pewną funkcyą jego spółrzędnych; przechodząc od punktu do punktu danego pola otrzymamy różne wartości tego potencyału; godnemi uwagi są miejsca pola, w których wartości potęncyałów są sobie równe. Znając funkcyę sił, lub też, co na jedno w danym razie wychodzi, znając funkcyę potencyalną danego pola, wyznaczymy analitycznie miejsce geometryczne takich punktów, gdy przyrównamy

$$\varphi(x, y, z) = C, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

gdzie C jest stałą wartością; równanie to przedstawia powierzchnię, której punkty posiadają wartość potencyału stałą i równą C. Dla każdej wartości C otrzymamy jedną powierzchnię; zmieniając więc wartość C wypełnimy całą przestrzeń takiemi powierzchniami. Powierzchnie te nie przecinają się, gdy funkcya sił czy też potencyał sił jest funkcyą jednowartościową; gdyby bowiem w tym razie przecinały się, to dla jednego punktu, leżącego na przecięciu się takich powierzchni mielibyśmy dwie lub kilka wartości potencyałów, co jest sprzeczne z założeniem.

Powierzchnie, przedstawione przez równanie $\varphi(x, y, z) = C$, nazywają **powierzchniami równych potęncyałów**, lub inaczej — równiami potencyalnemi. W przykładzie pola ciążenia powierzchnie potencyalne są płaszczyznami, a potencyały otrzymują wartości coraz większe z powiększeniem się wartości z; gdyż $\varphi = Q . z$; idąc więc ku górze wartości potencyałów rosną, a idąc ku dołowi maleją; w danym razie możemy powiedzieć, że **przyrost** potencyału jest dodatni, gdy punkt ruchomy posuwamy ku górze; a jest odjemny, gdy schodzimy ku dołowi.

Wartość pracy sił, podczas przejścia punktu ruchomego z jednej powierzchni na drugą, jest niezależną od postaci drogi. Gdy praca sił pola, podczas tego przejścia, wywołuje energię kinetyczną punktu ruchomego, wtedy punkt ten, przechodząc z jednej powierzchni na drugą, nabywa energii kinetycznej, a traci zato na wartości energii potencyalnej.

Ponieważ różnica wartości potencyałów w dwóch miejscach na jednej i tej samej powierzchni potencyalnej równa się zeru, przeto i praca sił, podczas przesunięcia punktu ruchomego na powierzchni, równa się zeru; a ponieważ praca sił, podczas przesunięcia punktu ruchomego, równa się tylko wtedy zeru, gdy siły są prostopadłe do toru, przyjmujmy bowiem, że siły są różne od zera, przeto **linie sił są prostopadłe do powierzchni potencyalnych.**

112. Pochodna funkcyi sił i potencyału. Gdy weźmiemy różnicę wartości funkcyi sił w dwóch dowolnych miejscach pola i rozdzielimy ją przez odległość l tych miejsc, wtedy otrzymamy wartość, którą uważać można za wartość siły, mogącej wykonać pracę, równą różnicy wartości funkcyi sił, podczas przejścia danego punktu wzdłuż drogi l.

Stosunek $\dfrac{U_2 - U_1}{l}$ przedstawia zatem siłę zastępczą, która jednakże nie posiada żadnego znaczenia fizycznego dla danego pola; punkt bowiem ruchomy, przebywając przestrzeń z jednego miejsca do drugiego, mógł ją przebyć różnemi drogami, wzdłuż których siły są zmienne; lecz gdy te dwa miejsca będą nieskończenie blizkie siebie, wtedy te różne drogi zlewają się z cząstką drogi dl, a siły wzdłuż niej mogą być zastąpione przez jedną stałą siłę P_l. Pracę zatem cząstkową, podczas przesunięcia punktu ruchomego z jednego miejsca pola do drugiego, nieskończenie blizkiego, wyrazimy wzorem:

$$dU = P_l . dl;$$

w którym P_l jest siłą, działającą wzdłuż drogi dl.

Lecz ta praca cząstkowa może być również wykonaną przez siłę P, występującą w danem miejscu pola, podczas przesunięcia jej punktu przyłożenia wzdłuż drogi dl i działającą pod pewnym kątem do przesunięcia; w tym razie

$$dU = P \,.\, dl \,.\, \cos(P,dl).$$

Z porównania tego wzoru z poprzednim wynika, że siła:

$$P_l = P \,.\, \cos(P,dl); \text{ a ponieważ } P_l = \frac{dU}{dl}, \text{ przeto:}$$

$$\frac{dU}{dl} = P \,.\, \cos(P,dl); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

wzór ten wysłowimy:

stosunek przyrostu funkcyi sił, w pewnym obranym kierunku, do cząstki drogi, wzdłuż której on powstał, równa się rzutowi siły, właściwej danemu miejscu pola, na obrany kierunek.

Iloraz $\frac{dU}{dl}$ nazywają **pochodną funkcyi sił w pewnym obranym kierunku.**

Obierzmy te nieskończenie małe drogi kolejno w kierunkach osi x, y, z, a otrzymamy równania:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P_x\,; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = P_y\,; \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = P_z\,; \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

które przedstawiają składowe siły, występującej w miejscu (x, y, z); z tych trzech składowych możemy wyznaczyć właściwy wektor $\overline{P}$ w danem miejscu pola.

Gdy zaś funkcyę sił zastąpimy funkcyą potencyalną, wtedy napiszemy wzory:

$$-\frac{d\varphi}{dl} = P \,.\, \cos(P,dl); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

a w szczególnych przypadkach:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P_x\,; \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = P_y\,; \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = P_z \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

Nazwawszy wogóle pochodną ze znakiem odjemnym **spadkiem** danej funkcyi, wysłowimy te równania:

spadek potencyału w pewnym kierunku równa się składowej siły, właściwej danemu miejscu pola w kierunku spadku. [1])

113. Warunki matematyczne, przy jakich dane pole posiada potencyał. Dane pole wektorowe posiada potencyał, gdy praca cząstkowa **jest różniczką zupełną** pewnej funkcyi, wtedy bowiem praca sił, podczas

---

[1]) Określenie symbola grad. oraz operatora Hamiltona podane jest w 1-em wydaniu tego podręcznika w § 202-gim i 203-im.

przejścia punktu ruchomego z jednego miejsca pola do drugiego, wyraża się funkcyą spółrzędnych danych miejsc; jeżeli zatem wyrażenie

$$P_x dx + P_y dy + P_z dz \text{ równa się } - d\varphi(x, y, z); \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

to dane pole posiada potencyał. Ażeby zaś pewna różniczka z trzema zmiennemi była różniczką zupełną pewnej funkcyi, powinna ona odpowiadać trzem następującym matematycznym warunkom

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial P_y}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad (84)$$

Gdy więc równania 74-te, wyznaczające pewne pole, odpowiadają tym warunkom, wtedy pole to posiada funkcyę potencyalną, a więc również funkcyę sił. Z tego jednakże jeszcze nie wynika, żeby np. praca sił danego pola podczas obiegu zamkniętego była równą zeru, do tego jeszcze potrzeba, ażeby funkcya sił była jednowartościową, wtedy bowiem dopiero praca sił pola pomiędzy dwoma jego miejscami jest również wielkością jednowartościową, i, podczas zakreślenia przez punkt drogi zamkniętej, równa się zeru.

Gdy np. funkcya sił ma np. postać artg $\frac{y}{x}$, wtedy wartości pracy sił, wzdłuż toru zamkniętego, różnią się między sobą o wielokrotność 2π.

Poleca się czytelnikowi sprawdzić, które z pól, określonych przez równania, podane w zadaniach poprzednich, odpowiadają tym warunkom.

Gdy równania analityczne, wyznaczające pewne pole, nie odpowiadają warunkom, wyrażonym równaniami 84-temi, wtedy wartość pracy między dwoma miejscami takiego pola zależy od drogi, po której przebiega punkt ruchomy; i w celu jej obliczenia, należy wprowadzić zależności pomiędzy zmiennemi t. j należy wskazać tę drogę za pomocą równań. Gdy zaś punkt ruchomy przejdzie w takiem polu drogę zamkniętą, wtedy praca sił posiada pewną wartość skończoną, — dodatnią lub odjemną. Gdy jest ona dodatnią, wtedy zyskujemy pewną wartość pracy, która ujawnić się może przez powiększenie np. energii kinetycznej punktu ruchomego (lub też innej energii, np. cieplnej lub elektrycznej, jeżeli mowa jest o zjawisku fizycznem); powtarzając ten przebieg dowolną ilość razy, zyskiwać będzie ten punkt na energii, t. j. punkt materyalny, umieszczony w polu takiem, będzie nabierał coraz większej prędkości, coraz większej energii kinetycznej; — w takiem więc polu znajdujemy stałe i niewyczerpane źródło energii kinetycznej. I tak jest w rzeczywistości; — lecz energia ta nie przychodzi z niczego; do wywołania i podtrzymania takiego pola potrzeba doprowadzać nieustannie energię, która może być w innej postaci fizycznej.

Pola, które nie posiadają funkcyi potencyonalnej, nazywają się **polami wirowemi**; nazwa ta pochodzi od pewnych właściwości fizycznych, jakie występują w zjawiskach hydrodynamicznych [1]).

114. Pola zachowawcze. Gdy pewne pole wektorowe posiada funkcyę potencyalną jednowartościową, wtedy praca sił wdłuż **każdej** drogi zamkniętej w tem polu równa się zeru. Ważną grupę pól w zjawiskach fizycznych stanowią pola, wywołane przez siły środkowe. Zbadamy obecnie potencyały tych pól. W tym celu weźmy najpierw pod uwagę pole, którego siły zbiegają się w jednym tylko punkcie t. j. pole z jednym środkiem przyciągania lub odpychania. Wartości sił niech będą nieznaną lecz jednowartościową funkcyą odległości od środka, a dowiedziemy, że pole takie posiada potencyał jednowartościowy, lub też co na jedno wyjdzie, że praca sił tego pola wzdłuż drogi zamkniętej równa się zeru. Gdy w takiem polu przeprowadzimy ze środka sił powierzchnie kul o dowolnych promieniach, to praca sił, podczas przesuwania punktu ruchomego po powierzchni takich kul, równa się zeru; gdyż kierunki sił są prostopadłe do przesunięć, wykonanych po jej powierzchni; czyli powierzchnie tych kul są powierzchniami jednakowych potencyałów.

Jeżeli w takiem polu obierzemy dwa dowolne miejsca, to praca sił podczas przejścia punktu ruchomego po dowolnej drodze, przeprowadzonej pomiędzy tymi punktami, równa się różnicy wartości potencyałów powierzchni, przechodzących przez te punkty; a ponieważ w danem polu przez każden punkt można przeprowadzić tylko jedną powierzchnię potencyalną, przeto różnica potencyałów jest jednowartościową, i, na zasadzie poprzednich twierdzeń, równa się pracy sił wzdłuż dowolnej drogi pomiędzy temi powierzchniami. Chcąc obliczyć wartość tej pracy, obliczymy ją dla drogi, wzdłuż której rachunek okaże się najprostszy. Taką drogą jest droga wzdłuż odcinka, leżącego na promieniu, i zawartego pomiędzy powierzchniami kul, przechodzących przez te punkty; gdyż praca wzdłuż drogi, leżącej na powierzchni potencyalnej równa się zeru.

Weźmy przypadek, gdy środek sił przyciąga, a wartość sił jest odwrotnie proporcyonalną do kwadratu odległości od środka sił (prawo Newtona); wartość więc siły P w odległości r

$$P=\frac{k}{r^2},$$

gdzie k jest spółczynnikiem proporcyonalności; praca więc podczas przejścia punktu ruchomego z jakiegobądź miejsca jednej powierzchni poten-

[1]) Wyraz matematyczny wiru (curl) podano w wydaniu 1-szem w § 2?5-em.

cyalnej o promieniu r_1 do innego dowolnego punktu na drugiej powierzchni o promieniu r_2, równa się

$$L = -\int_{r_1}^{r_2} P \, . \, dr = -k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = k \left| \frac{1}{r} \right|_{r_1}^{r_2} = k \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Znak minus w pierwszej całce, wynika z niezgodności zwrotu siły ze zwrotem przyrostu $d\bar{r}$, rys. 136-ty.

Gdy $r_2 < r_1$, to jest gdy punkt ruchomy zbliża się do środka, wtedy wartość pracy jest dodatnią; i rzeczywiście wtedy zwrot przesunięcia jest zgodny ze zwrotem siły; gdy zaś $r_2 > r_1$, wtedy następuje ruch przeciw zwrotowi siły i wzór ten wyrazi pracę odjemną.

Zadanie to rozwiążemy obecnie za pomocą równań, odniesionych do spółrzędnych prostokątnych. W tym celu przez środek sił, przeprowadzamy osi x, y, z i na zasadzie podanego określenia pola napiszemy

$$P_x = -P \, . \cos(P,x) = -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -k \frac{x}{r^3}; \text{ w tenże sposób:}$$

$$P_y = -k \frac{y}{r^3}; \; P_z = -k \frac{z}{r^3}; \text{ gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

W celu zbadania, czy dane pole nie posiada wirów, zastosujmy wzory 84-te i otrzymamy, że wartości każdego z tych trzech równań równają się zeru; a zatem pole dane posiada funkcyę sił, którą obliczymy ze wzoru

$$U = \int P_x \, . \, dx + \int P_y \, . \, dy + \int P_z \, . \, dz; \text{ po podstawieniu wartości sił}$$

$$U = -k \int \frac{x \, . \, dx + y \, . \, dy + z \, . \, dz}{r^3} = -\tfrac{1}{2} k \int \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} = -\tfrac{1}{2} k \int \frac{d(r^2)}{(r^2)^{\frac{3}{2}}};$$

skąd

$$U = \frac{k}{r} + C.$$

Z równania tego dla każdej wartości U otrzymamy pewną stałą wartość r, i odwrotnie dla każdej wartości U, otrzymamy $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =$ $=$ stałej; z czego wynika, że powierzchniami równych potencyałów są kule, zakreślone ze środka sił.

W myśl określenia funkcyi sił, różnica ich wartości w dwóch miejscach pola, jest wartością pracy sił wzdłuż dowolnej drogi, przeprowadzonej między tymi punktami; a więc:

$$L = U_2 - U_1; \text{ a ponieważ:}$$

$$U_2 = \frac{k}{r_2} + C; \;\; U_1 = \frac{k}{r_1} + C, \text{ przeto:}$$

$$L = k \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Jest to ten sam wzór, jaki otrzymaliśmy poprzednio. Wartość pracy otrzymujemy w danym razie przez odjęcie wartości funkcyi sił; lecz można bezpośrednio odczytać wartości pracy z wartości funkcyi sił: gdy zrobimy odpowiednie założenie co do wielkości C. Gdy np. przyjmiemy, że dla pewnej wartości $r = r_0$, wartość $U = 0$, wtedy, $U = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}$; zatem U przedstawia wartość pracy, gdy punkt ruchomy przejdzie z powierzchni kuli o promieniu r na kulę o promieniu r_0. Dla danego przykładu najdogodniej bywa pod względem rachunkowym przyjąć $r_0 = \infty$; gdyż wtedy $U = \frac{k}{r}$, i dla każdej wartości r wartość U przedstawia pracę, jaką siły wykonały, podczas przejścia punku z nieskończoności na powierzchnię kuli r.

Promienie powierzchni potencyonalnych wyznaczymy z równania $r = \frac{k}{U}$; i w tym celu przyjmiemy dla k wartość np. 1000, w ten sposób dobraną, że siła P wyrazi się w kilogramach; a przyjąwszy r w metrach, U będzie w kilogramometrach; jeżeli następnie wielkości U nadany kolejno wartości 10, 20, 30 *kgm* i t. d., to otrzymamy, cały szereg powierzchni kul, których różnica potencyałów stanowić będzie 10 *kgm*. Jak widać z załączonej tablicy lub też z rysunku 136-tego, na którym naniesiono przekroje kul, odstępy pomiędzy powierzchniami kul maleją ze zbliżeniem się do środka; przyczyną tego jest, że wartości sił przyciągających rosną nadzwyczaj szybko ze zbliżeniem się ku środkowi tak, iż bliżej środka praca 10 *kgm* będzie wykonaną na drodze krótszej ze względu na większą wartość siły.

Jeżeli zamiast funkcyi sił wprowadzimy jej potencyał, to dany obraz w niczem się nie zmieni, tylko obliczone wartości otrzymają znaki przeciwne i będą one wyrażać pracę, jakąby punkt, umieszczony w polu sił, wykonał, gdyby przesunął się do nieskończoności. Praca w danym razie byłaby odjemną, co też wyrażają wartości potencyałów; w danym więc razie na odpowiednich kołach należy napisać $\varphi_1 = -10$ *kgm*; $\varphi_2 = -20$ *kgm*, i t. d.

Gdy punkt ruchomy przesunie się w polu sił, które posiada jednowartościową funkcyę sił, wtedy siły wykonają pracę dU; a ponieważ praca sił równa się przyrostowi energii kinetycznej punktu ruchomego, przeto napiszemy

$$d\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right) = dU; \text{ skąd:}$$

$$\tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0{}^2 = U - U_0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

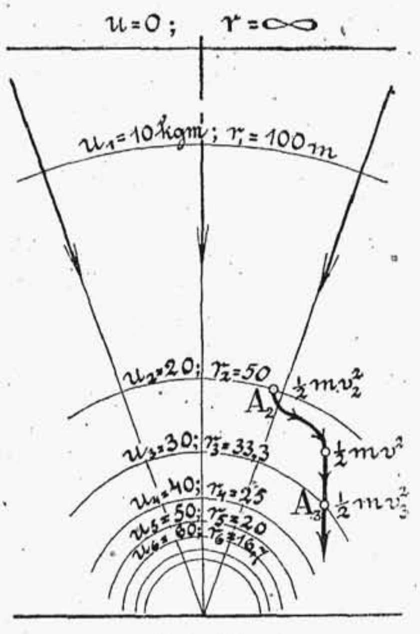
równanie to wypowiemy:

przyrost energii kinetycznej między dwoma położeniami punktu ruchomego w polu sił, które posiada funkcyę, równa się różnicy wartości

tych funkcyi. Jeżeli np. punkt ruchomy pod działaniem sił wychodzi z miejsca A_2 z prędkością v_2 rys. 136-ty, to jego energię kinetyczną w miejscu np. A_3 obliczymy ze wzoru

$$\tfrac{1}{2} mv^2_3 = (30 - 20) + \tfrac{1}{2} mv^2_2;$$

niezależnie od postaci toru, po jakim on przebiegł. Z powyższego również wynika: punkt ruchomy w polu niewirowem i jednowartościowem przechodzi te same powierzchnie potencyalne z niezmienioną prędkością. W tej postaci wypowiedziane twierdzenie nazywamy zasadą zachowania energii; pola więc, posiadające jednowartościową funkcyę sił, nazywają również polami sił zachowujących, lub krótko polami zachowawczemi, w przeciwstawieniu do pól wirowych, które nazywają polami sił rozpraszających; w nich bowiem punkt ruchomy przechodzi te same powierzchnie potencyalne z różnemi prędkościami.



Rys. 136.

U	r
0	∞
10	100,0
20	50,0
30	33,3
40	25,0
50	20,0
. . .	. . .
. . .	. . .
∞	0

Wzór 85-ty przedstawimy w innej postaci, gdy wprowadzimy wielkości potencyałów; t. j. gdy podstawimy $U = -\varphi$; otrzymamy wtedy po odpowiedniem przeniesieniu wyrazów, wzór:

$$\tfrac{1}{2} mv^2 + \varphi = \tfrac{1}{2} mv^2_0 + \varphi_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

Wyrazy po prawej stronie tego równania zależą od wartości potencyału i energii kinetycznej w miejscu wyjścia; dla punktu więc, poruszającego się w polu potencyalnem jednowartościowem, otrzymamy równanie:

$$\tfrac{1}{2} mv^2 + \varphi = \text{stałej}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

które wysłowimy:

suma energii kinetycznej i potencyalnej podczas ruchu punktu w polu potencyalnem jednowartościowem (i niezmiennem) posiada stałą wartość, zależną od wartości potencyału i energii kinetycznej w miejscu wyjścia.

Nazwawszy sumę tych energii energią całkowitą danego punktu, powiemy: **energia całkowita punktu ruchomego w każdem miejscu pola potencyalnego jednowartościowego zachowuje swą wartość.**

Twierdzenia te można stosować tak do ruchu punktu swobodnego jak i do nieswobodnego, aby tylko, w tym ostatnim przypadku, praca sił odporowych równała się zeru.

115. Zasada zachowania energii Twierdzenie powyższe jest również zwane **zasadą zachowania energii**; gdyż, przyjąwszy je jako prawo doświadczalne, może służyć za podstawę całej mechaniki, bez korzystania z praw zasadniczych Newton'a. Prawo zachowania energii w dziedzinie zjawisk ruchu było uznawane na podstawie przeświadczenia przez uczonych przed Newtonem. Uczeni z tych czasów podzielili się pod tym względem na dwa obozy, jedni starali się zbudować mechanizm, któryby bez żadnego nakładu dostarczał czy to pracy, czy też energii kinetycznej; drudzy, mając na uwadze bezowocne starania w tym kierunku, stanęli na stanowisku, że mechanizm taki t. j. perpetuum mobile, nie może istnieć. Wnioski, oparte na zasadzie niemożliwości perpetuum mobile, doprowadziły Stevin'a w 1605 r. do prawa równoległoboku sił[1]); które jednakże sformułował ściśle dopiero Newton w r. 1686.

Dzisiejsza mechanika opiera swoje wywody, między innemi, na prawie równoległoboku sił, wypowiedzianem przez Newton'a; a wynikiem matematycznym tego prawa jest twierdzenie o zachowaniu energii; lub wypowiedziane w innej postaci, o równowartości pracy i energii kinetycznej; twierdzenia więc te w mechanice są bezpośrednim wynikiem określenia siły i pracy. Moglibyśmy jednakże oprzeć wywody mechaniki na prawie zachowania energii, a wtedy zasada równoległoboku sił stałaby się jego wynikiem.

Prawo równoległoboku sił zasłoniło zasadę główną, na jakiej właściwie zostało zbudowane, i zacieśniło jej stosowanie; gdyż to prawo jest zastosowaniem zasady niemożności perpetuum mobile tylko do zjawisk ruchu i sił mechanicznych; gdy tymczasem zasada sama jest da-

---

[1]) Historję tego prawa, jak również innych praw mechaniki, znajdzie czytelnik w bardzo przystępnem dziele „Dr. Ernst Mach. Die Mechanik in ihrer Entwickelung".