3. Warunki ogólne równowagi sił, działających na bryłę nieswobodną.

50. Bryły swobodne i nieswobodne. Jeżeli bryła, znajdując się w pewnem położeniu w przestrzeni, może przyjąć, pod działaniem sił (czynnych), — położenia, jakie jej nadadzą te siły, to zowiemy taką bryłę **swobodną**. W razie zaś jeżeli dana bryła pod działaniem danych sił nie może przyjąć położenia, jakie jej nadają te siły, wskutek tego, iż jest np. połączona z inną bryłą, lub oparta jest na innej bryle, to bryłę taką nazywamy **nieswobodną**; porów. § 20-ty.

Wobec tego, mówiąc o równowadze sił czynnych, które działają na bryłę, musimy rozróżniać przedewszystkiem, czy jest ona swobodną czy nie. W rozdziałach poprzednich rozpatrywaliśmy warunki sił, przyłożonych do brył swobodnych i doszliśmy do wyników, iż siły, działające na bryłę swobodną, będą w równowadze; gdy $\Sigma \overline{P}_k = 0$; oraz $\Sigma \overline{M}_k = 0$; lub też gdy sześć odpowiednich sum algebraicznych są równe zeru.

Jeżeli posiadamy bryłę **nieswobodną**, na którą działają siły $\overline{P}_k$, to bryła ta wogóle nie może wykonać ruchów, jakie byłyby wynikiem działania tych sił; gdyż połączenia na to nie zezwalają; w tym razie możemy przyjąć, jakieśmy już przyjmowali w przykładach poprzednich, że w miejscach połączeń występują pewne siły t. zw. siły połączeń lub inaczej siły odporowe, które łącznie z siłami czynnemi działają na daną bryłę, a wtedy otrzymamy bryłę swobodną; i do takiego układu sił możemy już zastosować warunki równowagi; — wniosek ten wysłowimy:

bryłę nieswobodną uczynimy bryłą swobodną, gdy do układu sił czynnych dołączymy siły odporowe, — wogóle siły połączeń.

Takiemi siłami odporowemi są n. p. siły, występujące w punktach podparcia belki; w tym przypadku przyłączamy siły odporowe do sił czynnych i stosujemy warunki równowagi, jak dla brył swobodnych; takieśmy też postępowali przy rozwiązaniu poprzednich zadań.

Zadaniem obecnem jest zestawienie warunków równowagi, jakim powinny wogóle podlegać siły czynne, działające na bryłę **nieswobodną**.

1) **Przykład.** Wyznaczyć warunki równowagi sił zewnętrznych, gdy bryła posiada jeden punkt nieruchomy.

Dane są siły $\overline{P}_k$ co do kierunków, zwrotów i wartości; siły te działają na bryłę, której jeden punkt jest unieruchomiony w przestrzeni i około którego może się ona kręcić.

W punkcie tym występuje siła odporowa $\overline{A}$, o której wiemy, iż przechodzi przez dany punkt nieruchomy; lecz nie znamy ani jej kierunku, ani zwrotu, ani wartości, gdy tę siłę niewiadomą przyłączymy do układu sił czynnych $\overline{P}_k$, wtedy możemy uważać daną bryłę za swobodną

Ogólne więc warunki równowagi wszystkich sił, działających na tę bryłę, wyrazimy wektorowo:

1) $\Sigma \bar{P}_k + \bar{A} = O$; oraz: 2) $\Sigma \bar{M}_k +$ (moment siły $\bar{A}) = O$;

względem dowolnie obranego bieguna w przestrzeni. Jeżeli biegun momentu obierzemy w punkcie nieruchomym, to równanie momentów przekształci się na równanie $\Sigma \bar{M}_k = 0$; moment bowiem siły $\bar{A}$ będzie w tym razie równy zeru.

Z tego równania wynika, że albo siły czynne są w równowadze; lub też posiadają wypadkową, przechodzącą przez punkt zawieszenia bryły. Siły przeto $\bar{P}_k$ nie mogą być dowolnie dane, gdy mają utrzymywać daną bryłę w równowadze, a muszą być takie, ażeby ich wypadkowa przechodziła przez punkt zawieszenia. Siłę odporową $\bar{A}$ obliczymy z równania 1-go.

Jeżeli siły czynne są siłami ciężkości, to do równowagi ciała, wspartego na jednym punkcie, potrzebnem jest, ażeby wypadkowa sił ciężkości oddzielnych punktów bryły przechodziła przez punkt podparcia; gdyż tylko wtedy zachodzi warunek równowagi: $\bar{C} + \bar{A} = 0$, w którym $\bar{C}$ oznacza ciężar bryły.

2) **Przykład.** Wyznaczyć warunki równowagi sił czynnych, gdy bryła posiada dwa punkty nieruchome. Bryła dana może obracać się tylko około prostej, łączącej te punkty. W punktach tych występują siły odporowe, które oznaczymy przez $\bar{A}$ i $\bar{B}$ i których nie znamy wartości, kierunku i zwrotu, a tylko wiadomemi są punkty, przez które przechodzą ich proste działania. Jeżeli dołączymy te siły do układu sił czynnych, to otrzymamy bryłę swobodną, na którą działają siły $\bar{P}_k$, $\bar{A}$ i $\bar{B}$.

Jedno z równań równowagi będzie $\Sigma \bar{P}_k + \bar{A} + \bar{B} = 0$; — w równanie to wchodzą siły odporowe, służyć więc ono łącznie z równaniami momentów może do ich wyznaczenia.

W celu zestawienia równania momentów, odniesiemy układ cały do spółrzędnych prostokątnych; z których jedna, np. z niech przechodzi przez punkty nieruchome, pozostałe zaś dwie w płaszczyźnie prostopadłej do osi z; — zresztą dowolnie. Zauważymy teraz, że równania momentów względem osi x i y będą zawierały wielkości sił $\bar{A}$ i $\bar{B}$; jedynie tylko równanie momentów względem osi z nie będzie ich posiadało; natomiast będzie posiadało wyłącznie wielkości sił czynnych; wobec tego warunek równowagi sił czynnych, działających na bryłę, której dwa punkty są nieruchome, wyrazi równanie momentów tych sił względem osi obrotu. Równanie zatem $\Sigma M_{k,s} = 0$, wyraża w danym przypadku zależność pomiędzy siłami zewnętrznemi, gdy są one w równowadze.

Wniosek ten ma swoje znaczenie kinematyczne. Bryła, unieruchomiona w dwóch punktach, może tylko obracać się około osi, przechodzącej przez te punkty; - jeżeli zatem momenty, które obracają tę bryłę, będą w równowadze, to równowaga całego układu będzie już przez to zapewniona. Siły odporowe $\bar{A}$ i $\bar{B}$ obliczymy z pozostałych równań równowagi, jakieśmy wykonali w przykładzie § 49-tego.

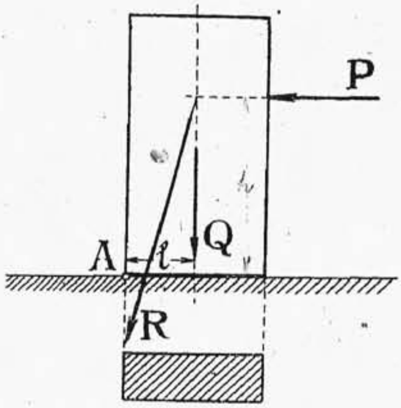
3) **Przykład.** Napisać równania równowagi sił, działających na bryłę, która może obracać się około nieruchomej osi i posuwać się wzdłuż tej osi. W danym razie ruch jest dwojaki: obrotowy około osi i postępowy wzdłuż tej osi. Równowagę sił czynnych, działających na taką bryłę, wyrazimy równaniami:

$$\Sigma M_{k,z} = 0; \text{ oraz } \Sigma P_{k,z} = 0;$$

w których oś nieruchomą obraliśmy za oś z.

4) **Przykład.** Warunki równowagi, gdy bryła może tylko posuwać się wzdłuż osi ruchomej (np. gdy oś posiada przekrój prostokątny i na nią nałożona jest bryła). Obierzmy tę oś, wzdłuż której ciało może się przesunąć, za oś z; a warunek równowagi sił czynnych będzie $\Sigma P_{k,z} = 0$.

5) **Przykład.** Przyjmijmy, że na bryłę ciężką, spoczywają podstawą na płaszczyźnie poziomej, prócz siły ciężkości działa jeszcze pewna siła pochylona względem poziomu. Rys 64-ty przedstawia w rzucie pionowym i poziomym prostopadłościan, na który działa siła ciężkości Q i siła pozioma P. Ciężar Q słupa wywołuje siły odporowe, które podtrzymują dany słup w spoczynku; siła zaś P dąży do wywrócenia tego słupa przez obrót około krawędzi A. Jeżeli moment



Rys 64.

$$Q \,.\, l > P \,.\, h.$$

to słup pozostaje w spoczynku; jeżeli zaś:

$$Q \,.\, l < P \,.\, h,$$

to następuje obrót słupa około krawędzi, i gdy podstawa słupa nie jest przymocowaną do płaszczyzny, na której się wspiera, i gdy tarcie jest tak znaczne, że bryła nie poślizgnie się, wtedy następuje jego wywrócenie.

Różnicę momentów

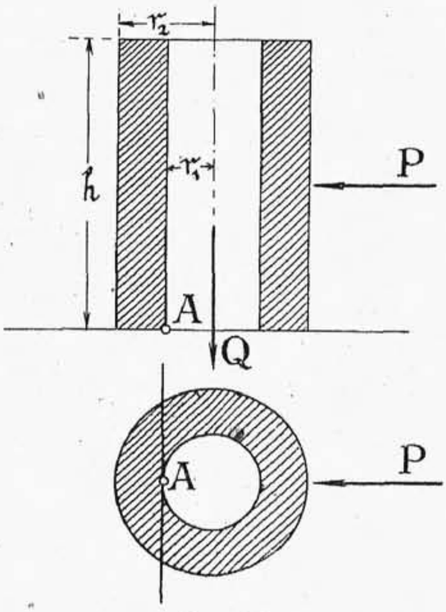
$$Q \,.\, l - P \,.\, h = M_s,$$

określającą stateczność bryły nazywamy momentem jego stateczności. Jeżeli $M_s = 0$, t. j. jeżeli $Q \,.\, l - P \,.\, h = 0$, to mówimy, iż ciało znajduje się w równowadze chwiejnej; najmniejsze bowiem powiększenie siły P sprawi przewrócenie się słupa. Określenie stateczności możemy jeszcze wyrazić inaczej. Wiemy, że suma momentów wielu sił równa się momentowi ich wypadkowej, a więc, jeżeli

$Q . l - P . h > 0$, to wypadkowa sił Q i P t. j. $\bar{R} = \bar{Q} + \bar{P}$, wywoła obrót danego słupa w tymże zwrocie, jaki przyjęliśmy za dodatni i w tym przypadku siła R przechodzić będzie z wewnętrznej strony krawędzi obrotowej; wtedy bowiem wywołuje ona obrót dodatni.

Wniosek ten, który może służyć również jako określenie stateczności, wysłowimy:

do zachowania stateczności bryły ciężkiej należy, ażeby punkt przecięcia się wypadkowej sił, działających na daną bryłę, nie wychodził z pola, ograniczonego krawędziami, około których bryła dana mogłaby się obrócić. Z takiego określenia wynika, iż moment stateczności jest różny dla jednej i tej samej bryły i dla danego układu sił i zależy od położenia krawędzi, około której siła dana może ją obrócić. W naszym przykładzie, zachowując wartość siły P i odległość jej od płaszczyzny podparcia, powiemy, iż najmniejszym momentem stateczności danej bryły będzie moment względem krawędzi, która leży najbliżej rzutu środka ciężkości na płaszczyznę podpierającą, gdyż wtedy iloczyn $Q . l$ posiada najmniejszą wartość; czyli moment $M_s = Q . l - P . h$ jest najmniejszy, gdy l jest najmniejsze, i około tej krawędzi najłatwiej wywróci daną bryłę.



Rys. 64a.

Zadanie. Na komin o przekroju pierścieniowym i promieniu wewnętrznym r_1 oraz o wysokość h, działa siła pozioma P; wielkość jej nie zależy od zewnętrznej średnicy komina, punkt zaś jej przytknięcia leży w połowie wysokości komina; — obliczyć zewnętrzny promień podstawy, ażeby wypadkowa siły P i ciężaru komina przechodziła przez punkt A, leżący wewnątrz pierścienia; rys. 64-ty a.

W celu rozwiązania tego zadania należy zestawić sumę momentów sił P i Q względem punktu A; a ponieważ przez ten punkt ma przechodzić wypadkowa, przeto suma tych momentów względem stycznej do koła w tym punkcie równać się powinna zeru.

Odpowiedź: $r_2 = \sqrt{r^2_1 + \frac{P}{2\pi r_1 \gamma}}$; gdzie r_2 oznacza zewnętrzny promień podstawy komina, γ — zaś ciężar właściwy komina.

Zadanie. Rozwiązać powyższe zadanie, gdy siła P jest proporcyonalna do promienia zewnętrznego komina; t. j. $P = kr_2$.