leko ogólniejszą; może ona bowiem być stosowaną do wszelkich zjawisk fizycznych, w których przejawia się praca mechaniczna.

Carnot w r. 1824. powraca do zasady niemożności perpetuum mobile i stosuje ją do zjawisk cieplnych. Ciało pod wpływem ciepła rozszerza się i wykonuje pracę; a więc w myśl tej zasady wszelkie zjawiska cieplne, które wywołamy, lub też wyobrazimy sobie wywołanemi, nie mogą dać pracy bez nakładu jakiejś energii, która zresztą może być również wynikiem pracy; zastosowanie tej zasady łącznie z zasadą równowartości pracy i energii cieplnej, odkrytej przez I. R. Mayer'a w r. 1842, daje pewną zależność pomiędzy parametrami zjawisk cieplnych, np. pomiędzy ciepłem właściwem, temperaturą, objętością i ciśnieniem; zależność tę wypowiadamy w tak zwanem drugiem prawie termodynamiki. Zasada niemożności perpetuum mobile jest od tej pory stosowaną do różnych zjawisk fizycznych i wszędzie doprowadza ona do wniosków zgodnych z rzeczywistym ich przebiegiem.

Wcześniejsze sformułowanie zasady niemożności perpetuum mobile w dziedzinie zjawisk ruchu, skojarzyło tę zasadę do tego stopnia z pojęciem ruchu, iż wywołało przypuszczenie, że zasada ta, zastosowana do zjawisk fizycznych, powinna być również wynikiem jakichś ruchów; i na podstawie tego mniemania utworzono rozmaite teorye budowy materyi, które polegały na przypuszczalnym ruchu jej cząstek; ruchy te jednakże nie są do sprawdzenia; założenia więc rachunku były dowolne; i wreszcie hypotezy te okazały się zbytecznemi, gdyż nic nowego nie wnosiły do badań; należy im jednakże przyznać, iż ilustrowały one do pewnego stopnia przebieg danego zjawiska. Teorye te są nazwane kinetycznemi, w przeciwstawieniu do teoryi energetycznej, opierającej się na zasadzie zachowania energii, lub inaczej, na zasadzie niemożności perpetuum mobile, która wszechwładnie panuje nad zjawiskami fizycznemi i jest płodną w wyniki po dzień dzisiejszy.

## 3. Praca wyobrażalna i możliwa.

**116. Określenia.** W rozdziałach poprzednich rozpatrywaliśmy warunki równowagi sił, działających na układ niezmienny; lub też jak w przypadku lin, — sił, działających na układ, który uważać można za niezmienny (np. linia łańcuchowa w stanie równowagi). Jeżeli układ był nieswobodny, tośmy wprowadzali do rachunku siły odporowe i szukali równowagi sił zewnętrznych łącznie z siłami odporowemi. W praktyce nasuwa się często zadanie znalezienia warunków równowagi sił zewnętrznych t. j. sił, przyłożonych do układu, nie obliczając sił odporowych. Uniknięcie wprowadzenia do rachunku niewiadomych wielkości sił odporowych jest w tym razie pożądanem dla uproszczenia rachunku. Zasady pracy wyobrażalnej w ogólności, i pracy możliwej w szczególności, o której teraz będziemy mówili, dają nam te sposoby rachunku.

Jeżeli siły działają na punkt materyalny swobodny, to po upływie pewnego okresu czasu punkt ten wskutek działania sił przesunie się t. j. zakreśli drogę o pewnej długości; jeżeli okres czasu był nieskończenie krótki, to droga jest nieskończenie małą $ds$; a siły, przyłożone do tego punktu, wykonują pracę cząstkową $dL = \Sigma(P_k \,.\, dp_k)$; gdzie symbol $dp_k$ oznacza rzut przesunięcia punktu $k$—tego na kierunki odpowiednich sił. Przesunięcia, jakie wykona dany punkt, które są ściśle określone warunkami zadania, nazwiemy **przesunięciami rzeczywistemi**; a pracę $\Sigma(P_k \,.\, dp_k)$ pracą rzeczywistą danych sił.

Takim przesunięciom i takiej pracy przeciwstawiamy inne pojęcie, pojęcie **przesunięcia wyobrażalnego** i **pracy wyobrażalnej**. Przesunięciem wyobrażalnem nazwiemy zupełnie dowolne, niezależne od działania sił, nieskończenie małe przesunięcie punktu przyłożenia danej siły; — przesunięcie, które w rzeczywistości może niezachodzić; a które tylko wyobrażamy sobie dla pewnych celów rachunkowych. Pojęcie tej dowolności jest to samo, jakie stosowaliśmy przy wyborze osi rzutów lub też bieguna momentu sił.

Różnicę pomiędzy przesunięciami rzeczywistemi i wyobrażalnemi unaocznimy sobie na nast. przykładach; gdy np. na pewien punkt, znajdujący się w spoczynku, działają siły, które są w równowadze, to o przesunięciu rzeczywistem mowy być nie może; siły bowiem równoważące się nie wywołują ruchu; tymczasem możemy w tym przypadku mówić o przesunięciu wyobrażalnem; nic bowiem nie stoi na przeszkodzie wyobrazić sobie ten punkt **łącznie z siłami** nań działającemi dowolnie przesuniętym i wtedy będziemy mówić o pracy wyobrażalnej tych sił.

Przytoczymy jeszcze inny bardzo zresztą ważny w naszych rozpatrywaniach przykład. Wyobraźmy sobie punkt materyalny ciężki, spoczywający na płaszczyznie pochyłej (jak to było w zadaniu § 25-go); na ten punkt w tym razie działają siły $\overline{Q}$, $\overline{N}$ i $\overline{S}$; jeżeli temu punktowi nadamy przesunięcie, oddzielające go od płaszczyzny, to w rzeczywistości siła $\overline{N}$ przestaje na niego działać, a działa na niego jakaś inna siła, podnosząca go; jeżeli zaś przesunięcie to uczynimy wyobrażalnem, to należy wyobrazić sobie, że te wszystkie siły $\overline{Q}$, $\overline{N}$, $\overline{S}$ działają na ten punkt podczas przesunięcia wyobrażalnego; nie powinniśmy bowiem, podczas takiego przesunięcia, zmieniać układu sił; a tylko zmienić jego położenie.

Różnica pomiędzy przesunięciami rzeczywistemi a wyobrażalnemi jest jeszcze ta, że przesunięcia **rzeczywiste zależą od sił**; siły te bowiem wywołują przesunięcie; gdy tymczasem przesunięcia **wyobrażalne nie zależą od sił**, są dowolne. Przesunięcie wyobrażalne nie zależy również od czasu; przesunięcia zaś rzeczywiste uwzględniają czas i zmianę warunków, jakie powstają w tym czasie. W celu rozróżnienia tych wielkości przesunięcia wyobrażalne i takąż pracę przyjęto oznaczać literą $\delta$; a wielkości rzeczywiste literą $d$; jako symbole nieskończenie małych wielkości.

Podane w rozdziale III-im . $A$, str. 140, określenia i twierdzenia o pracy sił nic się nie zmienią, gdy zastosujemy je do pracy wyobrażalnej; a więc pracę wyobrażalną siły $P$ przedstawimy przez wzór

$$\delta L = P . \delta s . \cos (P, \delta s), \qquad (88)$$

w którym $\delta L$ oznacza pracę wyobrażalną.

W celu zastosowania prostszego znakowania oznaczymy

$$\delta s . \cos (P, \delta s) \text{ przez } \delta p;$$

t. j. wprowadzimy do rachunku **rzuty przesunięć na kierunek siły**; których wielkości są dowolne; po podstawieniu tej wielkości we wzór pracy, napiszemy $\delta L = P \delta p$; lub też, jeżeli wiele sił działa

$$\delta L = \Sigma (P_k . \delta p_k) \qquad (89)$$

**117. Praca wyobrażalna sił, działających na jeden punkt.** Jeżeli pewna ilość sił działa na punkt **swobodny**; to na zasadzie twierdzenia o pracy napiszemy

$$\Sigma (P_k . \delta p_k) = R . \delta r;$$

gdzie $\delta r$ oznacza rzut przesunięcia wyobrażalnego na kierunek wypadkowej $R$.

W szczególnym przypadku, gdy:

$$R = 0; \quad \text{wtedy} \quad \Sigma (P_k . \delta p_k) = 0;$$

i to równanie wysłowimy:

**jeżeli siły, działające na punkt swobodny, są w równowadze, to suma algebraiczna ich prac wyobrażalnych równa się zeru.**

Ażeby dowieść twierdzenia odwrotnego t. j. jeżeli suma prac wyobrażalnych równa się zeru, to siły są w równowadze, rozpatrzymy dwa przypadki: gdy punkt jest swobodny i gdy jest on nieswobodny.

Jeżeli punkt jest **swobodny**, a praca sił działających na niego podczas każdego wyobrażalnego przesunięcia równa się zeru, to punkt ten, w myśl twierdzenia o zachowaniu energii nie dozna przyrostu energii kinetycznej; a więc wartość jego prędkości się nie zmieni; wniosek ten wypowiemy:

**jeżeli suma wyobrażalnych prac sił, działających na jeden punkt swobodny, równa się zeru, to siły te są w równowadze.**

Jeżeli zaś punkt ruchomy jest **nieswobodny**; to uczynimy go swobodnym, przyłączając do danych sił siłę odporową; powstającą od ograniczeń ruchu;—oznaczywszy ją przez $N$ i rzut przesunięcia na jej kierunek przez $\delta n$, wyrazimy warunek równowagi sił, na zasadzie poprzedniego twierdzenia, równaniem

$$\Sigma(P_k . \delta p_k) + N \delta n = 0.$$

Dla szczególnych przesunięć, w których siły odporowe są prostopadłe do przesunięć, suma $\Sigma(N . \delta n) = 0$; a zatem w tym szczególnym przypadku tylko wartość sumy $\Sigma(P_k . \delta p_k)$ rozstrzyga o równowadze sił; jeżeli ta wartość równa się zeru, to siły są w równowadze; jeżeli więc suma prac sił zewnętrznych, przyłożonych do punktu swobodnego lub nieswobodnego, podczas przesunięcia wyobrażalnego, lecz prostopadłego do kierunku siły odporowej, równa się zeru, t. j. jeżeli

$$\Sigma(P_k . \delta p_k) = 0;$$

to siły te są w równowadze, t. j. nie zmieniają one stanu ruchu danego punktu. Warunek więc ten jest nietylko niezbędnym do wyrażenia równwagi sił, działających na jeden punkt, lecz i wystarczającym.

Najczęściej spotykane w technice przypadki, w których siły odporowe są prostopadłe do kierunku przesunięć, zachodzą, gdy siły styczne do toru, po którym przesuwa się dany punkt, są równe zeru; a przesunięcie wykonano wzdłuż tego toru; wtedy bowiem siła odporowa jest normalną do przesunięcia; a zatem warunkiem równowagi sił zewnętrznych będzie: ażeby suma ich prac, podczas przesunięcia punktu po danym torze, równała się zeru; przesunięcie takie nazywamy przesunięciem możliwem (wirtualnem).

Należy zauważyć, że jeżeli suma prac sił, przyłożonych do punktu **nieswobodnego** równa się zeru; to z tego bynajmniej nie wynika, ażeby wypadkowa tych sił równała się zeru; równanie bowiem $\Sigma(P_k . \delta p_k) = 0$, wyraża tylko, że praca siły wypadkowej równa się zeru; a wtedy albo wypadkowa równa się zeru, t. j. zachodzi równowaga sił przyłożonych; lub też posiada ona skończoną wartość, lecz jest prostopadłą do przesunięcia; równoważy się więc w tym przypadku z siłą odporową i nie wpływa na zmianę stanu ruchu lub spoczynku danego punktu; wobec tego dla obydwóch przypadków warunek równowagi, wyrażony wzorem: $\Sigma(P_k . \delta p_k) = 0$, rozstrzyga o równowadze sił zewnętrznych, przyłożonych do punktu tak swobodnego, jak i nieswobodnego.

Jeżeli warunek równowagi sił, działających na jeden punkt swobodny, wyraża się ściśle i bezwzględnie przez równanie: $\Sigma(P_k . \delta p_k) = 0$, to powinno być możliwem wyprowadzenie z niego równań równowagi; któreśmy otrzymali w statyce; — i rzeczywiście, analitycznie pracę siły przedstawia równanie

$$dL = P_k . dp_k = P_x . dx + P_y . d_y + P_z . dz;$$

równanie więc pracy wyobrażalnej siły $P_k$ będzie:

$$P_k . \delta p_k \equiv P_{k,x} . \delta x_k + P_{k,y} . \delta y_k + P_{k,z} . \delta z_k,$$

gdzie $\delta x_k$, $\delta y_k$, $\delta z_k$ są rzutami przesunięć wyobrażalnych $\delta s_k$ na osi $x$, $y$ i $z$; dla wielu sił, przyłożonych do jednego punktu, napiszemy

$$\Sigma (P_k . \delta p_k) \equiv \Sigma (P_{k,x} . \delta x_k) + \Sigma (P_{k,y} . \delta y_k) + \Sigma (P_{k,z} . \delta z_k).$$

Następnie zauważymy, że wartość przesunięcia wyobrażalnego $\delta s_k$, chociaż jest zupełnie dowolna, jednakże, jako przesunięcie jednego i tego samego punktu, jest wspólna dla wszystkich sił, działających na ten punkt; wobec tego napiszemy: $\delta s_k = \delta s$, a więc również i rzuty:

$$\delta x_k = \delta x; \quad \delta y_k = \delta y; \quad \delta z_k = \delta z;$$

po podstawieniu tych wartości w powyższe równanie i wyniesieniu wspólnego czynnika przed znak sumy, otrzymamy

$$\Sigma (P_k . \delta p_k) \equiv \delta x . \Sigma P_{k,x} + \delta y . \Sigma P_{k,y} + \delta z . \Sigma P_{k,z}.$$

Jeżeli wielkości $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ są zupełnie dowolne i wzajemnie niezależne, co jest cechą wyobrażalnych przesunięć, to równanie

$$\delta x . \Sigma P_{k,x} + \delta y . \Sigma P_{k,y} + \delta z . \Sigma P_{k,z} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

może pozostawać tylko wtedy w mocy; gdy każden z czynników przy dowolnych wielkościach, oznaczonych literą $\delta$, równa się zeru, t. j. gdy:

$$\Sigma P_{k,x} = 0, \quad \Sigma P_{k,y} = 0, \quad \Sigma P_{k,z} = 0;$$

są to warunki równowagi już nam znane ze szczegółowego rozpatrywania równowagi sił.

Znajdziemy jeszcze inne znaczenia równania 90-go, gdy podstawimy w nie: $\Sigma P_{k,x} = R_x$; $\Sigma P_{k,y} = R_y$; $\Sigma P_{k,z} = R_z$, wtedy przekształci się ono na następujące

$$R_x . \delta x + R_y . \delta y + R_z . \delta z = 0.$$

Rozdzielmy je przez iloczyn $R . \delta s$, a otrzymamy równanie

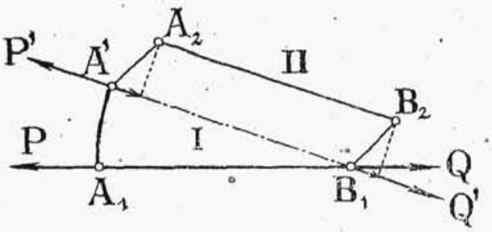
$$\frac{R_x}{R} \cdot \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{R_y}{R} \cdot \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{R_z}{R} \cdot \frac{\delta z}{\delta s} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

które wyraża w pojęciach geometryi analitycznej, że cos $(R, \delta s)$ równa się zeru; czyli $\sphericalangle (R, \delta s) = 90^0$; nie wykluczając jednakże przypadku, że może być $R = 0$. Jest to wynik zgodny z wyżej wypowiedzianem wyjaśnieniem o wypadkowej sił, gdy punkt jest nie swobodny.

**118. Praca wyobrażalna sił, działających na bryłę swobodną.** Rozpoczniemy te rozpatrywania od przykładu najprostszego i przyjmiemy, że na daną bryłę działają dwie siły równoważące się; obliczymy następnie pracę tych sił, gdy przeprowadzimy tę bryłę do innego nieskończenie blizkiego położenia w przestrzeni.

Obierzmy bryłę w postaci pręta sztywnego $A_1\ B_1$, rys. 137-my, w punktach $A_1$ i $B_1$ przyłóżmy siły $P$ i $Q$, równoważące się; przesuńmy następnie ten pręt w przestrzeni do dowolnego położenia $A_2B_2$; przesunięcie to możemy wykonać w ten sposób, iż obrócimy go najpierw około punku $B_1$ i nadamy mu położenie $A_1'B_1$, równoległe do $A_2B_2$; podczas tego obrotu siła $P$ przyjmie położenie $P'$ i wykona pracę równą zeru; przesunięcie bowiem $A_1A'$ jest prostopadłe do siły; siła $Q$, podczas tego obrotu, przyjmie położenie $Q'$, nie zmieniając przytem położenia swego punktu przyłożenia, a zatem i nie wykonując pracy. Podczas więc przesunięcia pręta z położenia $A_1B_1$ do położenia $A'B_1$ siły $P$ i $Q$ wykonały pracę równą zeru.

Następnie przesuńmy pręt $A'B_1$ równolegle, aż do pokrycia się z położeniem $A_2B_2$. Praca siły $P'$ przedstawi się w tym razie jako iloczyn z siły i rzutu przesunięcia na kierunek pręta $A'B_1$; praca zaś siły $Q'$ równa się iloczynowi z siły $Q'$ i z rzutu przesunięcia $B_1B_2$ na tenże kierunek. Zważywszy wreszcie, że rzuty tych przesunięć na kierunek pręta są wzajemnie równe, przesunięcia bowiem $A'A_2$ i $B_1B_2$, wobec sztywności pręta, są wzajemnie równe i równoległe, i że podług założenia $P' = Q'$, wypowiemy wniosek, że suma prac, podczas tego przesunięcia, równa się zeru. Wniosek ten łącznie z poprzednim wypowiemy ogólnie:



Rys. 137.

**suma prac wyobrażalnych dwóch sił, równoważących się, przyłożonych do bryły sztywnej, podczas przesunięcia wyobrażalnego, równa się zeru.**

Weźmy następnie pod uwagę przypadek ogólniejszy, gdy na daną bryłę **swobodną** działają siły, dowolnie w przestrzeni skierowane i przytknięte do różnych jej punktów i przyjmijmy, iż siły te są w równowadze, t. j. nie udzielają one danemu układowi przyśpieszenia. Nadajmy następnie danemu układowi dowolne t. j. wyobrażalne przesunięcie i obliczmy pracę, jaką wykonają siły, do niego przyłożone. W tym celu zastosujemy twierdzenia o pracy wyobrażalnej sił, działających na jeden punkt, rozdzieliwszy dany układ na oddzielne punkty, pomiędzy którymi, pod działaniem sił zewnętrznych, występują siły wewnętrzne, wzajemnie równe i co do zwrotów przeciwne; o czem już mówiliśmy w statyce, § 32-gi.

Dzielimy zatem w wyobraźni daną bryłę na pojedyncze punkty, i do każdego z nich przyczepiamy siły zewnętrzną $P_k$ i siły połączeń $W_{k,n}$, jakie występują pomiędzy rozpatrywanym $k$-tym punktem i pozostałymi $n$ — 1-mi punktami; nie wyłączając jednakże możliwości, że niektóre z tych sił dla pewnych punktów tej bryły mogą równać się zeru. Jeżeli układ tych punktów pod działaniem sił ma nie zmieniać swego ruchu lub spoczynku, to każden punkt tej bryły nie powinien również zmieniać stanu swego ruchu, t. j. praca sił, przyłożonych do każdego z nich, jak do punktu swobodnego, powinna być równa zeru; a zatem dla każdego punktu zachodzi równanie równowagi:

$$P_k \,.\, \delta p_k + \Sigma(W_{k,n} \,.\, \delta w_k) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (92)$$

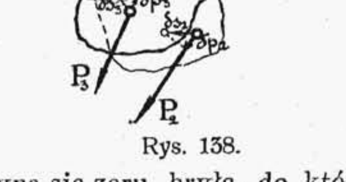
Napiszemy takie równanie dla każdego punktu i, dodawszy je algebraicznie, otrzymamy:

$$\Sigma(P\delta p_k \,.\, \delta p_k) = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (93)$$

prace bowiem sił połączeń, jako sił równoważących się parami, równają się zeru; a zatem, przy zastrzeżeniu, że praca sił połączeń równa się zeru, co przysługuje układowi sztywnemu, warunek równowagi sił zewnętrznych, działających na bryłę swobodną, wyraża równanie 93-cie; równanie to wysłowimy w sposób następujący: gdy siły, działające na bryłę swobodną, są w równowadze, wtedy suma ich prac, podczas przesunięcia wyobrażalnego, równa się zeru.

Z tego jednakże wniosku bynajmniej nie wynika, że gdy równanie powyższe zachodzi, wtedy siły są w równowadze; ono tylko mówi, że jeśli siły są w równowadze, to takie równanie ma miejsce. Przykładem takiej nieodwracalności wniosków służy warunek równowagi sił, wyprowadzony w statyce, w § 32-gim; dowiedliśmy tam najpierw, że gdy siły są w równowadze, wtedy ich wypadkowa równa się zeru; lecz jakieśmy bliżej rozpatrzyli ten warunek, tośmy zauważyli, że jest on niezbędny lecz **niewystarczający** i szukaliśmy innego warunku, któryby go dopełnił i znaleźliśmy go w postaci sumy momentów.

Warunek więc, wyrażony równaniem 93-ciem jest niezbędny, lecz może być niewystarczającym do wyrażenia równowagi sił, trzeba to dopiero zbadać. Przyjmijmy zatem, że jest on niewystarczającym, i pomimo, że suma prac sił zewnętrznych równa się zeru, bryła, do której te siły przyłożono, zmienia stan swego ruchu, t. j. pewne jej punkty powiększają lub zmniejszają swą energię kinetyczną; otrzymujemy w takim razie przyrost lub stratę energii kinetycznej bez nakładu pracy dodatniej lub odjemnej, co jest sprzeczne z zasadą zachowania energii;



Rys. 138.

gdyż energia kinetyczna nie może powiększyć się ani też zmniejszyć się bez nakładu pracy sił, a zatem w danym razie warunek powyższy jest wystarczającym do wyrażenia równowagi sił; i wobec tego wygłosimy twierdzenie:

**do wyrażenia równowagi sił, przyłożonych do bryły swobodnej, jest niezbędnym i wystarczającym warunkiem, ażeby suma ich prac wyobrażalnych równała się zeru.**

Równanie 93-cie zobrazujemy w sposób następujący; — wyobraźmy sobie, że bryłę, rys. 138-my, do której przyłożono siły, przesunięto do dowolnego lecz nieskończenie blizkiego położenia; wtedy każdy jej punkt wykona przesunięcie $\delta s_k$; a gdy suma iloczynów z sił i z rzutów tych przesunięć na kierunki sił równa się zeru; wtedy siły te są w równowadze. Zrozumiałem jest, że dla uczynienia zadość temu twierdzeniu dodajniki tej sumy muszą być dodatnie i odjemne.

**119. Wyprowadzenie wzorów statycznych równowagi sił.** Jeżeli wzór $\Sigma(P_k \,.\, \delta p_k) = 0$, ma ściśle i bezwzględnie wyrażać warunek równowagi sił, działających na układ niezmienny i swobodny; to powinno być możliwem wyprowadzenie z niego warunków równowagi w postaci, w jakiej podaliśmy je w statyce; i rzeczywiście, dojdziemy do tego drogą następujących rozważań.

Mamy dowieść: jeżeli $\Sigma(P_k . \delta p_k) = 0$; to również $\Sigma \overline{P}_k = 0$; oraz $\Sigma \overline{M}_k = 0$, rów. 25-te; w tym celu przekształcimy dany układ sił, działających na bryłę swobodną, na skrętnik t. j. na siłę $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_k$, i $\overline{M}_c = \Sigma \overline{M}_k$; przekształcenie to nie zmieni stanu ruchu lub stanu spoczynku danej bryły; — niezmieni również sumy prac wyobrażalnych, wykonanych przez dane siły, § 102 . 3; a więc jeżeli $\Sigma(P_k . \delta p_k) = 0$, to również suma prac siły $\overline{R}$ i pary sił, wyrażonej wektorem $\overline{M}$, także równać się musi zeru dla każdego wyobrażalnego przesunięcia. Wyobraźmy sobie przeto bryłę, przesuniętą w kierunku wypadkowej, przytem w ten sposób, ażeby wszystkie jej punkty zakreśliły cząstki dróg wzajemnie równe i równoległe i przyrównajmy sumę prac, jakie wykonają siły $R$ i siły pary $\overline{M}$, podczas tego przesunięcia, do zera. Praca siły $R$ podczas tego przesunięcia równa się $R . \delta r$; gdzie $\delta r$ oznacza omówione przesunięcie; praca zaś sił pary, wyrażonej wektorem $\overline{M}$, równa się zeru; przeto suma tych prac: $R . \delta r = 0$, skąd $R = 0$. Obróćmy następnie całą bryłę około osi, przechodzącej przez siłę $\overline{R}$; siła $\overline{R}$ w tym razie niewykona pracy; para zaś sił wykona pracę $M . \delta\sigma$; rów. 58-me; gdzie $\delta\sigma$ oznacza wielkość kąta obrotu; ponieważ suma prac $= 0$; przeto $M . \delta\sigma = 0$; a więc i $M = 0$; co było do dowiedzenia; porów. zakończenie § 13-ego.

**120. Praca wyobrażalna sił, działających na bryłę nieswobodną.** Jeżeli bryła jest nieswobodną, to pewne jej punkty zmuszone są zakreślać pewne z góry wyznaczone tory, lub muszą znajdować się na pewnych danych powierzchniach. Geometryczne ograniczenia ruchu dadzą się zastąpić w wielu przypadkach, i o tych tylko będziemy mówili, przez siły odporowe, które, będąc przyłożone do danej bryły, nadadzą jej ten sam ruch, któryby wykonała pod wpływem sił zewnętrznych i sił, pochodzących z ograniczeń ruchu. Na zasadzie § 60-go i § 50-go uczynimy tę bryłę swobodną, gdy do sił zewnętrznych dołączymy siły odporowe; w myśl tego do punktów danej bryły przykładamy siły odporowe i wtedy, w celu wyrażenia równowagi, stosujemy równanie pracy wyobrażalnej, jak dla bryły swobodnej, a więc

$$\Sigma (P_k . \delta p_k) + \Sigma (N_k . \delta n_k) = 0;$$

równanie to na zasadzie poprzedniego twierdzenia, jest nietylko niezbędnym lecz i wystarczającym warunkiem wyrażenia równowagi sił. Jeżeli następnie przyjmiemy, że siły odporowe są normalne do powierzchni lub do torów, po których ich punkty przyłożenia posuwają się i jeżeli uczynimy przesunięcie zgodne z możliwym ruchem danej bryły t. j. możliwe; to

$$\Sigma (N_k . \delta n_k) = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

a zatem niezbędnym i wystarczającym warunkiem równowagi sił, działających na bryłę nieswobodną, gdy siły odporowe są prostopadłe do przesunięć, jest jedno jedyne równanie:

$$\Sigma (P_k . \delta p_k) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

które wysłowimy w sposób następujący:

**do wyrażenia równowagi sił, przyłożonych do bryły nieswobodnej, jest niezbędnym i wystarczającym warunkiem, ażeby suma ich prac, podczas przesunięcia, zgodnego z warunkami jej ruchu, równała się zeru.**

Przesunięcie zgodne z warunkami ruchu danej bryły, nazwiemy przesunięciem możliwem, nazywają je również przygotowanem, przystosowanem (do warunków, ograniczających ruch); a stąd odpowiednią pracę nazwiemy **pracą możliwą, (wirtualną).**

Ażeby jednakże zastosować równanie 95 te do wyrażenia równowagi sił, przyłożonych do bryły nieswobodnej, należy zbadać w jakich przypadkach suma prac sił odporowych, równa się zeru: t. j. należy zbadać przypadki, w których zastosować można warunek równowagi, wyrażony równaniem 95-tem.

Rozpatrzmy tutaj spotykane częściej w praktyce technicznej przypadki ograniczeń ruchu brył, w których praca sił odporowych równa się zeru.

1) Przyjmijmy np., że dana bryła umocowana jest jednym swym punktem do innej bryły nieruchomej w ten sposób, że bryła może się tylko kręcić około tego punktu. Siła odporowa, wywołana siłami przyłożonemi do bryły, przechodzi w danym razie przez punkt nieruchomy;

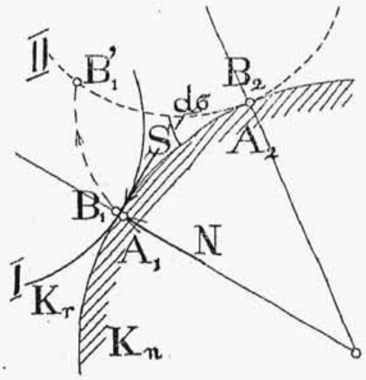
wielkość i kierunek jej jest nieznany, siła ta może być obliczoną z równań statycznych; praca jej jednakże podczas ruchu bryły zgodnego z warunkami zadania, t. j. praca możliwa, równa się zeru; punkt bowiem jej przyłożenia nie przesuwa się podczas ruchu możliwego bryły.

2) Przyjmijmy następnie, że dwa punkty bryły są w powyższy sposób unieruchomione; bryła przeto może tylko obracać się około osi, przechodzącej przez te punkty. Siły odporowe w tym razie przechodzą przez te punkty; a więc praca ich podczas obrotu bryły równa się zeru.

3) Dana bryła może się tylko ślizgać bez tarcia wzdłuż danej osi nieruchomej lub też ślizgać się i jednocześnie obracać się około niej; siły odporowe są w obydwóch przypadkach prostopadłe do przesunięć; praca ich więc równa się zeru.

4) Przyjmijmy teraz, że pewien punkt danej bryły zmuszony jest pozostawać na pewnej powierzchni nieruchomej w ten sposób, że może się ślizgać po niej bez tarcia. Siła odporowa tej płaszczyzny musi być w tych warunkach normalną do powierzchni nieruchomej; założyliśmy bowiem, że siły styczne do niej nie występują; przesunięcie możliwe siły odporowej w tych warunkach jest prostopadłe do siły; praca przeto możliwa równa się zeru.

5) Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym jedna bryła toczy się po drugiej nieruchomej. Przyjmijmy, że krzywa ruchoma $K_r$ toczy się po krzywej nieruchomej $K_n$ w pewnej chwili punkt $B_1$ krzywej ruchomej styka się z punktem $A_1$ krzywej nieruchomej. Pod działaniem sił, przyłożonych do krzywej ruchomej, — jako do bryły, — wystąpi w punkcie zetknięcia się $B_1$ siła odporowa, pochodząca od krzywej nieruchomej. Siłę tę wyobrazimy sobie rozłożoną na normalną $N$ do krzywej i na styczną $S$; siła styczna $S$ musi powstać, jeżeli przyjęliśmy, że krzywa ruchoma ma się toczyć bez ślizgania po krzywej nieruchomej.



Rys. 139.

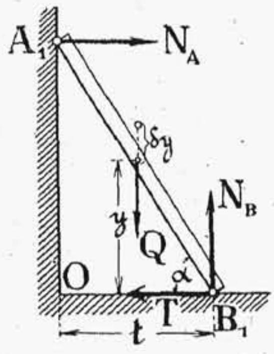
Wyobraźmy sobie następnie, żeśmy krzywej ruchomej nadali przesunięcie możliwe, które w danym razie jest ruchem potoczenia się; — położenie II na rys. 139-tym, z punktem zetknięcia się $B_2$; a wtedy należy sobie wyobrazić, że punkt $B_1$ wraz z siłami do niego przyłożonemi $N$ i $S$ dozna przesunięcia $B_1B_1'$ w ten sposób, że $B_2B_1 = B_2B_1'$. Praca siły odporowej podczas tego wyobrażalnego i możliwego przesunięcia składa się z pracy siły $N$ i z pracy siły $S$. Praca siły $N$ wyrazi się iloczynem $N.B_1B_1'$, gdzie $B_1B_1'$ jest cząstką łuku, jaką zakreśli punkt $B_1$

podczas tego potoczenia się, i który może być uważany za prostopadły do cząstki łuku $B_1B_2$, a więc pokrywający się z siłą $N$. Ponieważ promień $B_1B_2$ tego łuku i kąt obrotu $d\sigma$ są wielkościami nieskończenie małemi, to łuk $B_1B_1'$ jako ich iloczyn jest wielkością nieskończenie małą rzędu drugiego; a więc wartość pracy siły $N$, wobec wartości prac sił zewnętrznych, które wyrażają się wielkościami nieskończenie małemi rzędu pierwszego, może być pominiętą. Praca siły $S$ podczas tego przesunięcia równa się zeru, kierunek bowiem tej siły jest prostopadły do przesunięcia $B_1B_1'$; a zatem praca siły odporowej podczas wyobrażalnego potoczenia się jednej krzywej po drugiej, musi być w porównaniu z pracą sił zewnętrznych—pominiętą.

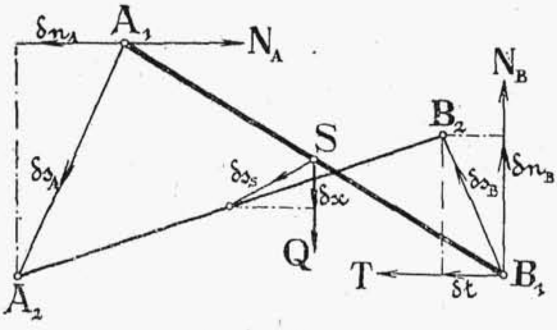
6) W praktyce technicznej spotykamy się często z zastosowaniem łańcuchów pasów, które nazwiemy wogóle cięgnami. Przyjmijmy do obliczeń, że cięgna są giętkie i nierozciągliwe, t. j. że można je zginać bez pracy, i że długości ich nie zmieniają się pod działaniem sił.

Jeżeli na końce odcinka takiego cięgna działają siły zewnętrzne, to cięgno się wyprostuje i siły mogą działać tylko wzdłuż osi cięgna. Jeżeli odcinek taki wraz z siłami przyłożonemi do jego końców przesuniemy wzdłuż prostej działania sił, siły te wykonują prace, których suma równa się zeru; gdyż siły są równe, co do znaków przeciwnie; a przesunięcia punktów przyczepienia sił są wskutek nierozciągliwości cięgna równe i co do zwrotów zgodne. Jeżeli takiemu odcinkowi nadamy ruch postępowy, to z tychże powodów suma ich prac równa się zeru. Jeżeli jeden koniec takiego cięgna umocujemy w przestrzeni, a drugim zakreślimy cząstkę łuku; to każda z sił przyłożonych do tych końców wykona pracę równą zeru; a więc i suma ich równa się zeru. Jeżeli następnie nadamy takiemu odcinkowi ruch dowolny w przestrzeni, to suma prac tych sił będzie także równa zeru, gdyż ruch dowolny składa się z ruchu obrotowego i postępowego; porów. rys.137-my gdzie odcinek $AB$ może przedstawiać odcinek cięgna.

Wyobraźmy sobie, że cięgno z przyłożonemi w końcach siłami jest nawinięte np. na walec o powierzchni zupełnie gładkiej i może się po nim ślizgać bez tarcia. Suma prac sił odporowych podczas możliwego przesunięcia cięgna równa się zeru; gdyż przesunięcia są prostopadłe do sił odporowych walca; a w miejscach, w których cięgno wchodzi i schodzi z walca prace te są wielkościami nieskończenie małemi drugiego rzędu; jak to było przy toczeniu się brył. Jeżeli cięgno nawinięte jest na walec lub na krążek o powierzchni chropowatej tak, iż nie może się ślizgać, lecz tylko obracać razem z krążkiem, to łatwo zauważyć, że suma prac sił odporowych krążka, podczas przesunięcia możliwego, równa się zeru; praca sił odporowych osi także o ile nie uwzględnimy tarcia równa się zeru; wobec tego praca sił odporowych krążka wraz z cięgnem podczas obrotu równa się zeru. Jeżeli przeto spotkamy się przy obliczeniach mechanizmów z temi przypadkami, to możemy bezpośrednio przyjąć, że suma prac sił odporowych równa się zeru, i możemy zastosować równ. 95-te; w innych zaś przypadkach należy zbadać za każdym razem czy równanie 94-te zachodzi.

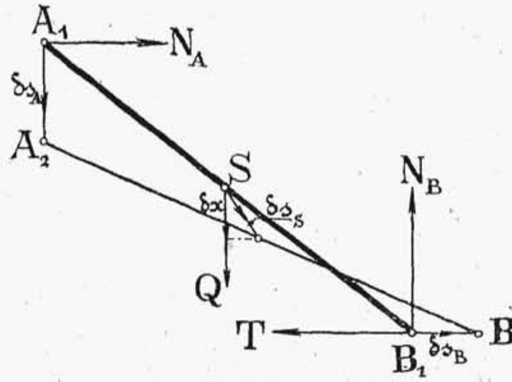


Rys. 139.



Rys. 140.

**Przykład.** O dwie płaszczyzny pionową i poziomą, zupełnie gładkie, opiera się pręt materyalny o ciężarze $Q$; ażeby on się nie obsunął, przyłożono do jednego końca siłę $T$, jak wskazuje rys. 139 ty. Pręt dany jest więc nieswobodny, gdyż końce jego zmuszone są znajdować się na danych płaszczyznach. Wobec założenia, iż płaszczyzny są zupełnie gładkie, t. j., że nie występują siły styczne do toru, twierdzić możemy, że siły odporowe są prostopadłe do tych płaszczyzn. Na rysunku siły te oznaczono literami $N_A$ i $N_B$. Cały ten mechanizm zastąpić możemy przez układ sił, przedstawiony na rys. 140-tym; gdzie $A_1B_1$ oznacza pewne położenie danego pręta; $A_2B_2$ drugie, wyobrażalne, jego położenie; $\delta s_A$, $\delta s_B$, $\delta s_S$, oznaczają wyobrażalne przesunięcia punktów $A_1$, $B_1$ i $S$; $\delta n_A$, $\delta n_B$ i $\delta x$ są rzutami tych przesunięć na kierunki sił $N_A$, $N_B$ i $Q$. Wzór pracy **wyobrażalnej** tych sił odczytamy z rys. 140-go



Rys. 141.

$$\delta L = -N_A \,.\, \delta n_A + Q \,.\, \delta x + N_B \,.\, \delta n_B + T \,.\, \delta t.$$

Wzór zaś pracy **możliwej**, odczytamy z rys. 141-go, na którym pokazano przesunięcia możliwe

$$\delta L = Q \,.\, \delta x - T \,.\, \delta s_B.$$