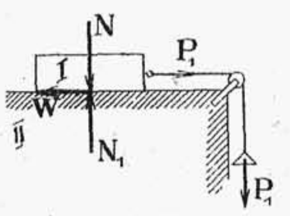
IV. Siły oporowe.

1. Tarcie.

128. Spółczynnik tarcia. Jeżeli dwie bryły materyalne, przyciśnięte do siebie, zechcemy przesuwać jedną względem drugiej, to doznamy pewnego oporu, który nazywamy **oporem tarcia**. Opór tarcia uważać powinniśmy za siłę, gdyż wpływa on na zmianę ruchu bryły, będącej pod działaniem siły zewnętrznej.



Rys. 160.

Rozpatrzymy przykład, gdy bryła ciężka leży na powierzchni szorstkiej poziomej, rys. 160-ty, siła ciężkości N przyciska ją do podstawy i wywołuje siłę odporową N_1. Do bryły tej przyczepiamy nić, a na drugim jej końcu zawieszamy talerz, na który będziemy kładli ciężarki. Ciężaru talerza i nici narazie nie bierzemy pod uwagę; gdyż możemy je zrównoważyć za pomocą jakiejś przeciwwagi. Jeżeli na talerz nałożymy pewien bardzo mały ciężar P_1, to na zasadzie określenia siły, bryła ta powinna otrzymać ruch (jednostajnie przyśpieszony); lecz doświadczenie uczy, że przy pewnych wartościach ciężaru P_1 pozostanie ona w spoczynku, z czego wnioskujemy, iż w kierunku ciągnącej nici, t. j. stycznie do płaszczyzn zetknięć, powstaje siła, która równoważy się P_1; siłę tę nazwano siłą tarcia.

Z powyższego widać, że siła tarcia nie jest w stanie wywołać ruchu; lecz jedynie może go zmniejszyć lub zniszczyć; a więc ma ona tę właściwość, jaką mają wogóle siły bierne t. j. występuje ona tylko pod działaniem sił czynnych. Jeżeliby np. nie było siły P_1, to nie wiedzielibyśmy nic o isnieniu siły tarcia. Siła tarcia jest **wielkością zmienną**; gdy bowiem powiększymy ciężar od P_1 do P_2, i on nie poruszy rozpatrywanej bryły, wtedy siła tarcia równa się sile P_2, i jest ona większą niż poprzednio; siła więc tarcia powiększa się w miarę powiększania się siły ciągnącej P_1. Dopiero, gdy siła P_1 przybierze pewną określoną wartość, którą oznaczymy przez P_{max}, nastąpi przesunięcie się bryły

I-ej po II-ej, rys. 160-ty. Siła tarcia doszła w tym razie do swojego maximum i nie jest już w stanie utrzymywać równowagi z powiększającą się siłą P.

Powiększając stopniowo siłę P, możemy **doświadczalnie** wyznaczyć siłę P_{max}, która odpowiada największej wartości siły tarcia; — tę **graniczną wartość** siły tarcia nazywać będziemy rozwiniętą siłą tarcia lub krótko siłą tarcia i oznaczać ją będziemy przez W; wartość zatem siły W wyznaczyć możemy tylko doświadczalnie. Równanie zatem $W = P_{max}$, daje bezwzględną wartość siły tarcia; kierunek jej pokrywa się z prostą przypuszczalnego ruchu; strzałka zaś jest **przeciwna** kierunkowi tego ruchu.

Wyniki doświadczeń, wykonanych w tej prostej postaci, w jakiej tutaj przedstawiliśmy, doprowadziły do wniosku, iż wielkość siły tarcia W zależy od wielkości siły normalnej i że zależność ta wyraża się przez wzór

$$W = \mu . N, \qquad \qquad (101)$$

w którym μ oznacza pewien spółczynnik, zwany spółczynnikiem tarcia; spółczynnik ten może być wyznaczony tylko na drodze doświadczalnej i odnosi się on do ściśle określonych warunków fizycznych, w jakich odbywało się doświadczenie.

Przykład. Bryła o ciężarze Q = 100 *kg* leży na płaszczyźnie poziomej; jakiej należy użyć siły, w kierunku poziomym, ażeby ją posunąć? Wartość spółczynnika tarcia niech będzie $\mu = 0{,}14$. Na zasadzie doświadczeń siła tarcia $W = \mu . N$; podstawiwszy więc N = 100 *kg*, otrzymamy W = 14 *kg*; za pomocą zatem siły 14 *kg* może pociągnąć ciężar, ważący 100 *kg*.

Wielkość spółczynników tarcia zależy od wielu warunków fizycznych, a przedewszystkiem od fizycznej właściwości stykających się powierzchni i również od materyału, z którego są one zrobione; następnie zależy od względnej prędkości ruchu trących się brył. Przy niewielkich prędkościach spółczynniki tarcia można przyjąć za niezależne od prędkości; przy prędkościach zaś, jakie bywają np. podczas hamowania pociągu, będącego w biegu, spółczynnik ten zależy od względnej prędkości ślizgania się koła po szynie; następnie spółczynnik tarcia zależy w pewnych granicach od wielkości powierzchni, stykających się; jeżeli np. na małą powierzchnię działa duże ciśnienie, to spółczynnik tarcia jest inny, niż gdy ciśnienie jest małe. Spółczynnik tarcia znakomicie się zmniejsza przez pokrycie powierzchni, trących się, — smarem.

Chcąc wprowadzić do rachunku pewną wartość liczbową spółczynnika tarcia, należy go dobrać z doświadczeń, najwięcej zbliżonych do przypadków, do których chcemy go zastosować; żadnych bowiem ogólnych i bezwzględnych teoryi nie posiadamy i być nie może.

129. Kąt tarcia. Gdy na bryłę, leżącą na płaszczyźnie szorstkiej, działa siła P prostopadle do powierzchni zetknięć, wtedy nie występuje siła tarcia; gdyż niema siły, któraby wywoływała wzajemne przesunięcie się tych ciał. Odchylając zaś kierunek siły P od normalnej, otrzymamy poziomą składową P_x, rys. 161-szy, pod której działaniem zacznie występować siła tarcia; powiększając następnie kąt pomiędzy siłą i normalną, oznaczony na rysunku przez α, natrafimy na pewną wielkość α_{max}, przy której ciało dane przesunie się wbrew powstającej sile tarcia; kąt ten α_{max}, oznaczymy przez ρ i nazwiemy go **kątem tarcia** pomiędzy danemi bryłami.

Wielkość tego kąta możemy obliczyć z odpowiedniego danym ciałom spółczynnika tarcia w następujący sposób. Z rysunku 161-go odczytamy wartość siły stycznej P_x do powierzchni zetknięć

$$P_x = P \sin \alpha;$$

ażeby siły pozostawały w równowadze potrzeba, ażeby:

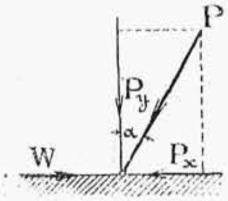
$$W = P_{x\, max}, \text{ t. j. ażeby } W = P \sin \rho;$$

na zasadzie zaś przyjętego prawa $W = \mu . N$; a ponieważ $N = P \cos \rho$, przeto $W = \mu . P \cos \rho$, a po podstawieniu tej wartości w powyższy wzór, otrzymamy:

$$P \sin \rho = \mu . P \cos \rho, \text{ skąd:}$$

$$\operatorname{tg} \rho = \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Znajomość kąta tarcia poucza nas, iż gdy siła P nachylona jest względem normalnej pod kątem $< \rho$, to ruch bryły nie nastąpi; gdy zaś $\alpha > \rho$, to ruch ciała nastąpi wbrew sile tarcia. Pojęcie kąta tarcia można uogólnić, wyznaczywszy w przestrzeni geometryczne miejsce kierunków $\alpha_{max} = \rho$; tem miejscem będzie stożek z wierzchołkiem na płaszczyźnie zetknięcia. Jeżeli spółczynnik tarcia: $\mu = \operatorname{tg} \rho$, jest stały we wszystkich kierunkach ruchu ciała, to stożek ten będzie stożkiem obrotowym, którego oś leży na normalnej do powierzchni zetknięć, a kąt wierzchołkowy $= 2\rho$; stożek ten nazwano **stożkiem tarcia.** Jeżeli zatem siła P, przechodząca przez wierzchołek stożka, znajduje się **wewnątrz** jego powłoki, to siła ta nie jest w stanie posunąć danego ciała.

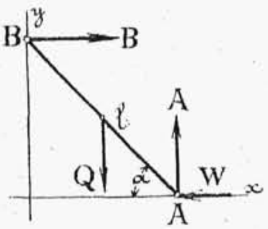


Rys. 161.

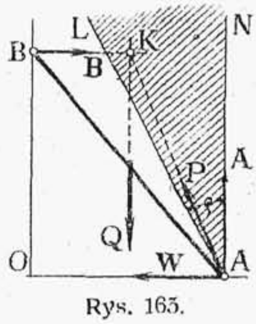
Należy zauważyć, iż kąt tarcia nie zależy od wielkości siły P, lecz jedynie od spółczynnika μ i gdy np. siła P leży w środku stożka, to największa jej wartość nie będzie w stanie przezwyciężyć siły tarcia. Wniosek ten wyjaśnimy sobie w ten sposób, że chociaż, z powiększeniem siły P, powiększa się siła styczna, lecz jednocześnie powiększa się i siła normalna, a więc i siła tarcia; dlatego też wielkość siły P nie wpływa na przezwyciężenie siły tarcia; a jedynie jej **położenie** względem powłoki stożka tarcia.

130. Równowaga sił z uwzględnieniem tarcia. Rozpatrując warunki równowagi sił, działających na pewną bryłę, będziemy obecnie brali pod uwagę siły tarcia, które występują pomiędzy ruchomemi częściami układu. Gdy bryła jest nieswobodna, to w punktach podparcia występują siły odporowe, które nie są prostopadłe do powierzchni zetknięć; składają się one bowiem z siły normalnej i z siły tarcia, stycznej do powierzchni zetknięć; wypadkowa tych dwóch sił jest dopiero właściwą siłą odporową.

Przykład. Pręt ciężki oparty jest pochyło o dwie płaszczyzny, pionową i poziomą; tarcia pomiędzy ścianą pionową i końcem pręta na razie nie uwzględnimy; natomiast uwzględnimy tarcie pomiędzy dolnym końcem pręta a płaszczyzną poziomą. Pręt dany przedstawia zatem bryłę nieswobodną, znajdującą się w równowadze; ażeby zestawić warunki równowagi, należy uczynić ją swobodną; co uskutecznimy przez przyłożenie do niej sił odporowych. Siłami temi jest siła B, rys. 162-gi, której kierunek, wskutek nieobecności tarcia, jest prostopadły do ściany pionowej; następnie w punkcie podparcia na płaszczyźnie pionowej występuje siła normalna A i siła tarcia W ze zwrotem przeciwnym, mogą-



Rys. 162.



Rys. 163.

cemu powstać ruchowi; przyłożywszy te siły do pręta, możemy go uważać za swobodny. Przyjmijmy, że pochylenie pręta jest takie, że najmniejsze przesunięcie w prawo spowoduje obsunięcie się jego; przez co chcemy zaznaczyć, że siła tarcia jest rozwinięta. Dla wyrażenia równowagi sił, przyłożonych do tego pręta, zastosujemy wzory ogólne

$$\Sigma P_{k,x} = 0,\ \Sigma P_{k,y} = 0,\ \text{oraz}\ \Sigma M_k = 0.$$

Wzory te, zastosowane do naszego zadania, dadzą następujące równania

$$1)\ B - W = 0;\quad 2)\ -Q + A = 0;$$

$$3)\ Bl \sin\alpha - Q\frac{1}{2}\cos\alpha = 0;$$

to ostatnie równanie wyraża sumę momentów względem bieguna A.

W tych równaniach posiadamy niewiadome A, B, W, oraz α t. j. posiadamy cztery niewiadome, a trzy równania statyczne; lecz dochodzi jeszcze równanie czwarte, wyrażające prawo tarcia

$$4)\ W = \mu . A.$$

Z tych równań wyznaczymy niewiadome i w tym celu z 2-go otrzymamy $A = Q$; zatem z 4-go $W = \mu . Q$; z 1-go $B = \mu Q$ i 3-go, po podstawieniu w nie odpowiedniej wartości, otrzymamy

$\mu . Q\, l \sin\alpha - Q\, l \frac{1}{2} \cos\alpha = 0$, skąd po wykonaniu skróceń $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\mu}$.

Jeżeli przyjmiemy np.: $\mu = 0{,}54$, to $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2 . 0{,}54} = \frac{1}{1{,}08} = 0{,}92593$ skąd $\alpha = 42^0 45'$.

Ze wzoru $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\mu}$ zauważymy, że z powiększeniem się tarcia t. j. z powiększeniem się spółczynnika μ, zmniejsza się $\operatorname{tg}\alpha$, a więc i kąt α. Jeżeli zaś tarcie zmniejszać się będzie, co wywołać możemy przez wygładzenie lub nasmarowanie powierzchni zetknięć, to graniczny kąt nachylenia α będzie musiał być coraz większy, t. j. dany pręt wypadnie ustawić bliżej ściany pionowej; gdy uczynimy wreszcie $\mu = 0$, t. j. gdy wcale tarcia nie będzie, wtedy $\operatorname{tg}\alpha = 1 : 0$; skąd $\alpha = 90^0$; pręt w danym przypadku powinien stać pionowo, ażeby się nie obsunął.

Zadanie powyższe możemy również rozwiązać wykreślnie, skorzystawszy z określenia kąta tarcia. Na zasadzie tego określenia kierunek wypadkowej sił, przytkniętych w punkcie A, nie powinien wychodzić z pomiędzy ramion kąta tarcia ρ; wykreślamy zatem w punkcie A kąt ρ, który otrzymamy z równania $\operatorname{tg}\rho = \mu$. Przyjąwszy np. w powyższym przykładzie

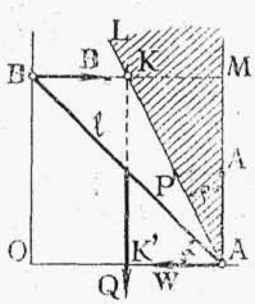
$$\mu = \operatorname{tg}\rho = 0{,}54,\ \text{otrzymamy}\ \rho = 28^0 20',$$

i wykreślimy go, jak pokazuje rys. 164-ty. Mogliśmy również wykreślić ten kąt bezpośrednio, zbudowawszy trójkąt prostokątny o stosunku przyprostokątnych$= \frac{45}{100}$. Przyjmijmy, że pręt jest ustawiony nie pod kątem granicznym α, jak poprzednio; wtedy w punkcie podparcia A występuje siła P, której kierunek, wartość i zwrot są nieznane. Na dany pręt działają zatem trzy siły P, Q i B; jeżeli te trzy siły są w równowadze, to powinny się przecinać w jednym punkcie, § 35-ty; a więc siła P powinna przechodzić przez punkt A oraz przez punkt przecięcia się kierunków sił Q i B; gdy tym punktem będzie punkt K, rys. 163-ci, wtedy KA jest kierunkiem siły P, i pręt dany obsunie się; — jeżeli zaś kierunek tej siły pokryje się z kierunkiem boku LA kąta tarcia, rys. 164-ty, to nastąpi graniczne położenie pręta. Obliczymy teraz z rys. 164-go kąt graniczny α; z trójkąta AKM odczytamy

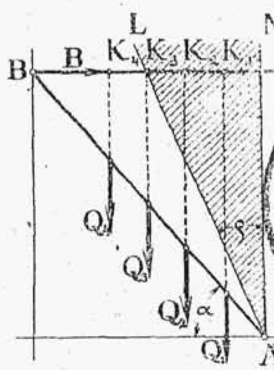
$$\operatorname{tg}\rho = \frac{KM}{MA} = \frac{K'A}{OB} = \frac{{}^1\!/_2\, l \cos\alpha}{l \sin\alpha}; \text{ lub inaczej: } \operatorname{tg}\rho = {}^1\!/_2 \operatorname{cotg}\alpha; \text{ skąd:}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\operatorname{tg}\rho} = \frac{1}{2\mu}.$$

Zadanie powyższe przedstawimy jeszcze w inny ogólniejszy sposób. Zamiast pręta wyobraźmy sobie drabinę, której ciężaru narazie nie uwzględniamy. Drabina jest ustawiona pod kątem dowolnym α i na nią wchodzi człowiek o ciężarze Q; w danym więc razie położenie Q zmienia się; wyznaczyć graniczne położenie ciężaru Q, w którem drabina nie obsunie się. W tym celu wykreślimy w punkcie A kąt tarcia ρ, rys. 165-ty, i zwrócimy uwagę na zmianę położenia punktu przecięcia się sił Q i B, podczas różnych położeń siły Q; punkty te oznaczono na rys. 165-tym literami K_1, K_2, i t. d. Jeżeli te punkty wypadają wewnątrz ramion kąta tarcia, jak np. K_1 lub K_2, to siły, działające na punkt A, znajdują się wewnątrz kąta tarcia, i drabina wtedy się nie obsunie; jeżeli zaś przesuniemy siłę Q np. do położenia Q_4, to nastąpi obsunięcie się drabiny; położenie Q_3 jest położeniem granicznem.



Rys. 164.



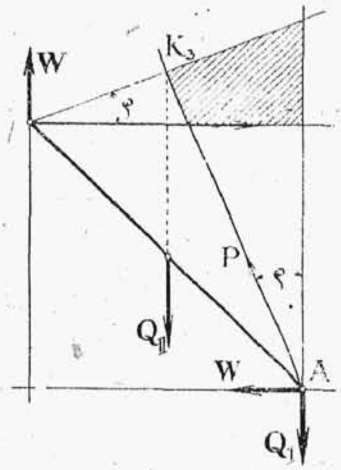
Rys. 165.

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

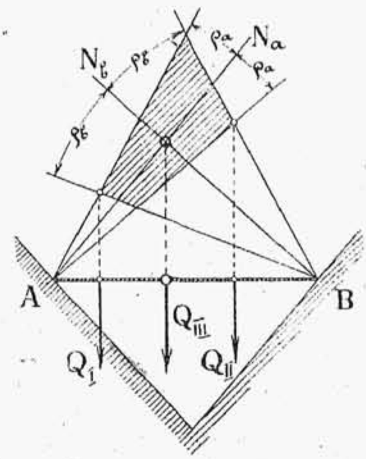
Jeżeli zaś drabina ma pozostawać w równowadze, podczas wszystkich położeń ciężarów Q, to punkt K_3 powinien się pokryć z punktem B; w tym celu należy drabinę ustawić pod kątem ρ względem pionu, i wtedy można będzie przejść po niej od dołu do góry, nie powodując jej obsunięcia.

Zadania powyższe mogą być jeszcze uogólnione w ten sposób, iż uwzględnimy tarcie obydwóch końców pręta. W tym przypadku otrzymamy warunek stateczności drabiny, gdy siła Q zajmie położenia pomiędzy krańcowemi położeniami Q_I i Q_{II}, rys. 166-ty.

Siłę przesuwalną Q możemy również uważać jako wypadkową kilku sił; np. jako wypadkową pewnej siły ruchomej i ciężaru nieruchomego drabiny; — rozpatrywania więc powyższe dadzą się zastosować do tego przypadku.



Rys. 166.



Rys. 167.

Przykład. Na dwóch płaszczyznach pochyłych wspiera się pręt, np. w postaci kładki, jak wskazuje rys. 167-my. Pomiędzy końcami pręta i płaszczyznami występuje tarcie, którego spółczynniki są znane. Po danej kładce przesuwa się ciężar Q; wyznaczyć wykreślnie położenia krańcowe ciężaru Q, przy których kładka się nie obsunie.

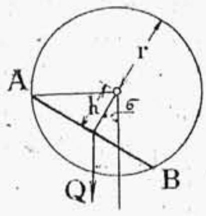
W celu rozwiązania tego zadania odkładamy kąty tarcia po obydwóch stronach normalnych; gdyż ruch końców pręta może następować w jedną i drugą stronę normalnej; w poprzednich zaś zadaniach ruch ten mógł powstawać tylko w jedną stronę. Przy odkładaniu więc kąta tarcia należy zwrócić na tę okoliczność uwagę; i należy odkładać kąt tarcia od normalnej w stronę przeciwną przypuszczalnemu ruchowi; kierunek bowiem siły tarcia jest przeciwny kierunkowi ruchu. Położenia Q_1 i Q_2 są szukanemi granicznemi położeniami.

Znaleźć następnie położenie ciężaru dla przypadku, gdy tarcie nie występuje.

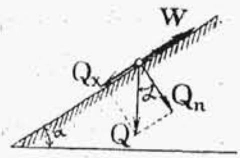
Zadanie. Wewnątrz obręczy, umieszczonej w płaszczyźnie pionowej, rys. 168-my, położony jest pręt AB, który wspiera się końcami na jej powierzchni. Odległość pręta od środka obręczy $= h$, promień koła $= r$; spółczynnik tarcia pomiędzy obręczą i końcami pręta $= \mu$; ciężar pręta wyobrażamy sobie w środku jego długości. Wyznaczyć kąt σ dla krańcowych położeń pręta, w których znajdować się on będzie w spoczynku. Na pręt działa zatem pięć sił: dwie siły tarcia, styczne do koła; dwie normalne do koła i siła ciężkości; siły te są w równowadze; zestawimy zatem trzy równania równowagi i dwa równania tarcia; niewiadomemi wielkościami są cztery siły i kąt σ.

Odpowiedź: $\operatorname{cotg} \sigma = \left(\frac{h}{r}\right)^2 \frac{1+\mu^2}{\mu} - \mu$.

Wykreślnie rozwiążemy to zadanie, odkładając kąty tarcia w dowolnem położeniu pręta, otrzymamy wtedy czworobok, jak poprzednio. Krańcowe położenia pręta znajdziemy, gdy odpowiednie wierzchołki czworoboku będą znajdowały się na kierunku ciężaru Q. Położenia te wyznaczymy za pomocą konstrukcyi geometrycznej; lub też drogą prób, obracając ten czworobok, wykreślony np. na kalce, około środka koła.



Rys. 168.



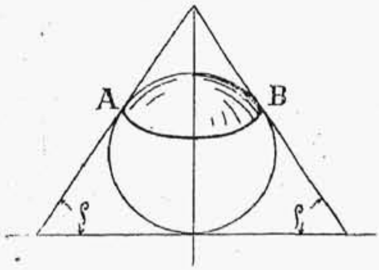
Rys. 169.

131. Tarcie na płaszczyźnie pochyłej. Na płaszczyźnie materyalnej, pochylonej względem poziomu pod kątem α, leży bryła ciężka, której ciężar $= Q$; jeżeli kąt α jest dostatecznie mały, to bryła dana, wskutek tarcia o płaszczyznę, nie spadnie; powiększając jednakże ten kąt natrafimy na taką jego wielkość, przy której bryła dana zacznie spadać. Ten graniczny kąt α_0 nazwiemy kątem tarcia płaszczyzny pochyłej. Wielkość tego kąta można obliczyć z wielkości spółczynnika tarcia; w tym celu rzutujemy równanie równowagi na normalną i styczną do płaszczyzny, i otrzymamy: normalną $Q_n = Q \cos \alpha$; styczną zaś $Q_x = Q \sin \alpha$. W chwili rozpoczęcia ruchu t. j. w chwili, gdy $\alpha = \alpha_0$, $Q_x = W$; podstawiając w nie $W = \mu N$, otrzymamy $Q \sin \alpha_0 = \mu Q \cos \alpha_0$, skąd $\operatorname{tg} \alpha_0 = \mu = \operatorname{tg} \rho$; wreszcie

$$\alpha_0 = \rho \quad \text{. . . . .} \quad (103)$$

Wartość więc kąta tarcia płaszczyzny pochyłej nie zależy od wielkości ciężaru, lecz tylko od wartości spółczynnika tarcia.

Przykład. Wyobraźmy sobie kulę materyalną, na której powierzchnię nasypano opiłki metalowe, rys. 170-ty; a zauważymy, iż część opiłek zsunie się z powierzchni kuli, część zaś pozostanie na niej. Pomiędzy cząsteczkami opiłek a powierzchnią kuli występuje tarcie; rozpatrywanie więc tego przykładu pod względem statycznym sprowadzić można do rozpatrywania równowagi brył ciężkich na płaszczyźnie pochyłej z uwzględnieniem tarcia. Bryłami temi w danym przykładzie są cząstki opiłek, płaszczyznami zaś są cząstki powierzchni kuli, które jednocześnie uważać można za cząstki płaszczyzn stycznych, przeprowadzonych do kuli w punktach, w których leżą cząstki opiłek. Na zasadzie powyższych rozpatrywań bryła ciężka będzie pozostawała w spoczynku na płaszczyźnie pochyłej, gdy kąt: $\alpha \leqq \rho$. Krańcowe więc położenia opiłek będą się znajdowały na okręgu koła, wytworzonego przez miejsce geometryczne płaszczyzn, stycznych do kuli i przeprowadzonych pod kątem $\alpha = \rho$ względem poziomu.



Rys. 170.

Płaszczyzny styczne w punktach, leżących na powierzchni wewnątrz tego koła, posiadają kąt nachylenia względem płaszczyzny poziomej mniejszy od ρ; z czego wynika, iż we wszystkich tych punktach opiłki będą pozostawały na powierzchni; poza tem zaś kołem nie utrzymają się na niej.

Weźmy pod uwagę przypadek, w którym kąt pochylenia płaszczyzny względem poziomu jest większy od kąta tarcia; w tym przypadku bryła ciężka zsunie się z płaszczyzny; siła bowiem tarcia nie jest w stanie zrównoważyć składowej w kierunku płaszczyzny; ażeby zaś dana bryła nie zsunęła się, przyłożymy do niej siłę P, która ma ją podtrzymywać t. j. zabezpieczyć od spadania. Siłę tę wyobrazimy sobie na razie równolegle do płaszczyzny pochyłej.

Rola tej siły może być dwojaka: 1) może ona przeciwdziałać li tylko spadnięciu bryły z płaszczyzny pochyłej, lub 2) siła ta może utrzymywać bryłę w takim stanie równowagi, iż najmniejsze jej powiększenie spowoduje przesunięcie się bryły w kierunku tej siły.

Oznaczywszy siłę, przyłożoną w pierwszym przypadku przez P_1; w drugim zaś przez P_2, powiemy, iż każda siła F mniejsza od P_1 nie utrzyma danej bryły na powierzchni pochyłej; siła zaś równa P_1, t. j. siła $F = P_1$ jest w stanie ją utrzymać, lecz najdrobniejsze zmniejszenie tej siły spowoduje spadnięcie bryły.

Powiększając następnie przyłożoną siłę, t. j. czyniąc $F > P_1$, zabezpieczamy daną bryłę od spadnięcia; a gdy uczynimy: $F = P_2$, wtedy otrzymamy znowuż przypadek krańcowy; siła bowiem $F > P_2$ wywoła przesunięcie bryły w kierunku siły P_2.

Przypadek 1-szy. Gdy siła przyłożona ma tylko zapobiedz spadaniu; wtedy zwrot występującej siły tarcia, jest ku górze; gdyż kierunek tarcia jest przeciwny mogącemu powstać ruchowi, rys, 171-szy.

W celu osiągnięcia równowagi powinno być w tym razie

$P_1 + W - Q \sin\alpha = 0$; a ponieważ; $W = \mu\, Q \cos\alpha$, przeto

$$P_1 = Q \sin\alpha - \mu\, Q \cos\alpha,$$

skąd

$$P_1 = Q\,(\sin\alpha - \mu \cos\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (104)$$

Przykład. $Q = 10\,kg.$; $\alpha = 45^0$; $\mu = 0{,}14$; $P_1 = 10\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1 \quad 0{,}14) = 6{,}2\;kg.$

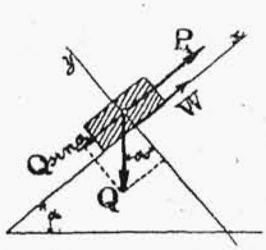
Weźmy teraz przypadek, gdy siła przyłożona ma na celu utrzymanie bryły w ruchu ku górze. W danym razie zwrot siły tarcia skierowany jest ku dołowi, rys. 172-gi, równanie zatem równowagi jest następujące

$P_2 - W - Q \sin\alpha = 0$; a ponieważ: $W = \mu\, Q \cos\alpha$; przeto

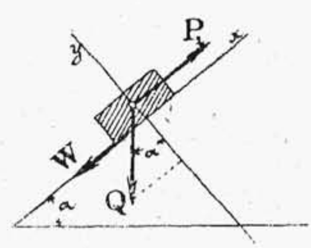
$$P_2 = Q\,(\sin\alpha + \mu \cos\alpha). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

Dla przykładu, wyżej przytoczonego, otrzymamy

$$d_2 = 10 . \frac{1}{\sqrt{2}} . (1 + 0{,}14) = 10 . \frac{1}{\sqrt{2}} . 1{,}14 = 8{,}1\;kg.$$



Rys. 171.



Rys. 172.

Porównywując powyższe wzory dla P_1 i P_2, zauważymy, że różnią się one znakiem spółczynnika μ; i rzeczywiście, znak przy μ zależy od znaku siły tarcia, w pierwszym przypadku znaki siły tarcia i siły P_1 są zgodne z sobą, a więc wielkości te, napisane po jednej stronie równania, będą miały znaki zgodne; co też wyraża wzór siły P_1; we wzorze zaś siły P_2 następuje odwrotny stosunek.

Rozpatrzmy obecnie te przykłady w ogólniejszej postaci, gdy siła przyłożona działa pod kątem β względem normalnej do powierzchni zetknięć, rys. 173-ci; siłę tę oznaczymy przez F.

Weźmy pod uwagę pierwszy przypadek równowagi, gdy siła F ma na celu tylko zabezpieczyć dany ciężar Q od spadnięcia; siła tarcia jest wtedy skierowana ku górze; warunek równowagi wyrazimy przez rzuty na oś równoległą do płaszczyzny pochyłej

$$W + F_1 \sin\beta - Q \sin\alpha = 0.$$

Równanie tarcia: $W = \mu N$; a ponieważ $N = (Q \cos\alpha + F_1 \cos\beta)$, przeto po podstawieniu tych wartości w równanie poprzednie, otrzymamy: $\mu (Q \cos\alpha + F_1 \cos\beta) + F_1 \sin\beta - Q \sin\alpha = 0$, skąd po uporządkowaniu:

$$F_1 = Q \frac{\sin\alpha - \mu \cos\alpha}{\mu \cos\beta + \sin\beta}.$$

Wzór ten przedstawimy w innej postaci, wprowadziwszy zamiast spółczynnika μ—kąt tarcia ρ, t. j. podstawiwszy $\mu = tg\,\rho$, otrzymamy

$$F_1 = Q \frac{\sin\alpha - tg\,\rho \cos\alpha}{tg\,\rho \cos\beta + \sin\beta};$$

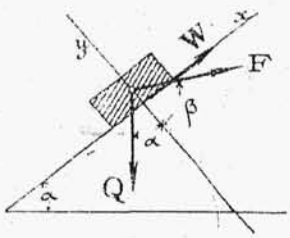
pomnóżmy następnie licznik i mianownik przez $\cos\rho$, a otrzymamy

$$F_1 = Q \frac{\sin\alpha \cos\rho - \sin\rho \cos\alpha}{\sin\rho \cos\beta + \cos\rho \sin\beta}; \text{ lub inaczej}$$

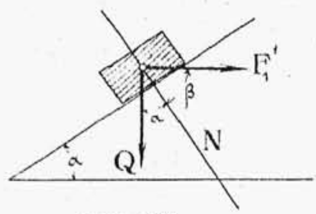
$$F_1 = Q \frac{\sin(\alpha - \rho)}{\sin(\beta + \rho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

Dla drugiego przypadku, gdy siła przyłożona wciąga ciężar, zmienimy znak przy ρ, i otrzymamy

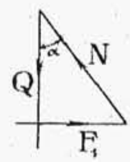
$$F_2 = Q \frac{\sin(\alpha - \rho)}{\sin(\beta - \rho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (107)$$



Rys. 173.



Rys. 174.



Rys. 175.

Gdy siła F_1 jest równoległą do płaszczyzny, t. j. gdy przyjmiemy: $\beta = 90^0$, otrzymamy wtedy wzór $F_1 = Q \frac{(\sin(\alpha - \rho)}{\cos\rho}$; który jest jednakowy ze wzorem siły P_1 przykładu poprzedniego.

Rozpatrzymy szczególny przypadek powyższych wzorów, gdy siła F jest poziomą, wtedy $\beta = (90^0 - \alpha)$, a po podstawieniu i odróżnienia tej siły przez znaczek, otrzymamy

$$F'_1 = Q \frac{\sin(\alpha - \rho)}{\cos(\rho - \alpha)} = Q \frac{(\sin.\alpha - \rho)}{\cos(\alpha - \rho)}, \text{ skąd}$$

$$F'_1 = Q\, tg\,(\alpha - \rho) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

Gdy uczynimy np. $\mu = tg\,\rho = 0$, a więc $\rho = 0$, t. j. gdy nie uwzględnimy tarcia, otrzymamy wzór $F'_1 = Q\,tg\,\alpha$, który łatwo wyprowadzić bezpośrednio z trójkąta wektorowego, rys. 175-ty.

Ażeby obliczyć F'_2 t. j. siłę, podnoszącą dany ciężar; zmienimy $+\mu$ na $-\mu$ lub kąt $+\rho$ na $-\rho$, a otrzymamy dla tego przypadku:

$$F'_2 = Q\,tg + (\alpha + \rho) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 109)$$

Jeżeli we wzorze 108-ym przyjmiemy, że $\alpha > \rho$, w takim razie otrzymamy dla F'_1 wartość dodatnią; co znaczy, że do podtrzymania danego ciężaru na płaszczyźnie pochyłej, powinniśmy przyłożyć pewną siłę F'_1 ze zwrotem, jaki przyjęliśmy za dodatni t. j. ku górze. Jeżeli następnie uczynimy: $\alpha = \rho$, to $F'_1 = 0$, t. j. do utrzymania ciężaru na płaszczyźnie, której kąt nachylenia równa się ρ, nie potzeba żadnej siły i ciężar dany nie zsunie się; gdy przyjmiemy wreszcie $\alpha < \rho$, otrzymamy wtedy: $F'_1 < 0$, czyli będziemy mogli przyłożyć do danej bryły pewną siłę ze zwrotem przeciwnym zwrotowi, przyjętemu w naszym przykładzie za dodatni, a bryła dana nie spadnie.

Jeżeli płaszczyznę pochyłą będziemy uważali za mechanizm, (służący np. do wciągania ciężarów do góry), to nazwiemy go w przypadku gdy: $\alpha \leqq \rho$ mechanizmem **samohamownym**. Wogóle mechanizmem samohamownym nazywamy mechanizm, który, wykonując ruch pod działaniem sił zewnętrznych w jednym zwrocie, po ich usunięciu nie wykona ruchu w zwrocie przeciwnym; inaczej mówiąc, — nie cofnie się.

132. Stosunek sił i prac w mechanizmach. Każdą bryłę, na którą działają siły, możemy uważać z punktu widzenia praktycznego, jako pewien mechanizm. Gdy mechanizm składa się z wielu brył, wtedy nazwiemy go **mechanizmem złożonym,** w przeciwstawieniu do mechanizmu, stanowiącego jedną tylko bryłę, który nazwiemy **mechanizmem prostym.** Dźwignia jest mechanizmem prostym; — wciąg różnicowy — mechanizmem złożonym.

Do każdego mechanizmu są przyłożone dwojakiego rodzaju siły: **siły nadane i siły użytkowe.** Podział ten jest zresztą względny i zależny od zastosowania danego mechanizmu. W przykładzie np. z płaszczyzną pochyłą, siła F jest siłą nadaną, jeżeli np. tą się wyciągamy lub opuszczamy dany ciężar Q; ciężar Q jest wtedy siłą użytkową. Gdybyśmy zaś płaszczyznę pochyłą użyli w ten sposób, iż za pomocą siły Q ściągać zechcemy jakąś bryłę, która przedstawia opór równy sile F, wtedy role tych sił zamieniłyby się. Zwykle mechanizmy są zbudowane dla pewnych celów tak, iż rodzaje przyłożonych sił łatwo dają się rozróżnić.

Oznaczmy przez P siłę nadaną, przez Q siłę użytkową;

$$\text{stosunek } \frac{\text{siły użytkowej}}{\text{siły nadanej}} = \frac{Q}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (110)$$

nazywamy **przełożeniem** dango mechanizmu lub też **spółczynnikiem przełożenia** i oznaczymy go literą ψ. Naprzykład ze wzoru $F'_2 = Q\,tg\,(\alpha+\rho)$ otrzymamy : $\frac{\text{siła użytkowa}}{\text{siła nadana}} = \frac{Q_1}{F_2} = \frac{1}{tg\,(\alpha+\rho)}$.

Przełożenie może mieć różne wartości stosownie do celów danego mechanizmu. Jeżeli za pomocą małej siły nadanej chcemy podnieść duży ciężar, to robimy przekładnię, dla której wartość ψ będzie większą od jedności. Wciąg np. różnicowy daje przełożenie równe $\frac{Q}{P} = 2\frac{r_1}{r_1 - r_2}$, któremu nadać możemy dowolnie duże wielkości, zmieniając odpowiednio średnicę krążków.

Rozpatrzmy obecnie stosunki prac sił, działających na mechanizmy. Siła nadana P, działając wzdłuż drogi dp wytwarza pracę $dL_n = Pds$; pracę tę nazwiemy **pracą nadaną** i oznaczymy ją przez L_n. Podczas przesunięcia się siły nadanej P, następuje przesunięcie się siły użytkowej Q; pracę, wykonaną przez tę siłę nazwiemy **pracą użytkową** i wyrazimy przez wzór. $dL_u = Qdq$; w którym dL_u oznacza pracę siły użytkowej, a dq oznacza rzut przesunięcia na jej kierunek. Jeżeli uwzględnimy w mechanizmach siłę tarcia, to mówić możemy o pracy sił tarcia; pracę tę oznaczymy przez L_s i nazwiemy **pracą szkodliwą.**

Zasada przesunięć wyobrażalnych uczy nas, iż gdy siły są w równowadze, wtedy suma ich prac $= 0$; napisać więc możemy:

$$dL_n - dL_u - dL_s = 0.$$

Prace cząstkowe dL_u i dL_s są odjemne, jeżeli przyjmiemy pracę nadaną za dodatnią; siła bowiem nadana przesuwa się w kierunku swego działania, siły zaś użytkowe i tarcia, przesuwają się w kierunku przeciwnym. Ze wzoru tego wynika:

$$dL_n = dL_u + dL_s \quad \dots\dots\dots \quad (111)$$

Jeżeli rozważamy pracę podczas pewnego skończonego przesunięcia, to powyższy wzór będzie:

$$L_n = L_u + L_s \quad \dots\dots\dots \quad (112)$$

Stosunek:

$$\frac{\text{pracy użytkowej}}{\text{pracy nadanej}} = \frac{L_u}{L_n} = \eta;$$

nazwano **sprawnością** lub spółczynnikiem pracy użytkowej danego mechanizmu. Ponieważ: $L_u < L_n$, przeto dla wszystkich mechanizmów:

$$\eta < 1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (113)$$

Przykład. Weźmy pod uwagę przykład z płaszczyzną pochyłą i jako siłę nadaną uważajmy siłę F_2'; zaś siłę Q jako siłę użytkową. Podczas przesunięcia nieskończenie małego

$$dL_n = F_2'\,dy;\; dL_u = Q dx; \text{ a więc:}$$

$$\eta = \frac{dL_u}{dL_n} = \frac{Q dx}{F_2' dy}.$$

Podstawiamy ze wzoru, wyżej wyprowadzonego $F'_2 = Q\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \rho)$, i otrzymujemy

$$\eta = \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\rho)} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{tg\,\alpha}{\mathrm{tg}(\alpha+\rho)};\ \text{gdyż } \frac{dx}{dy} = tg\,\alpha.$$

Sprawność mechanizmu wyrażamy często w procentach; w przykładzie np., wyżej przytoczonym, przyjąwszy np. $\alpha = 45^0$; $\mu = 0{,}54$ (drzewo o drzewo, porów. „Technik" I, 217), t. j.: $\rho \cong 28^0$, otrzymamy

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\,45^0}{\mathrm{tg}\,(45^0 + 28^0)} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,73^0} = \frac{1}{\cong 3{,}4} = 0{,}29 \cong 0{,}3.$$

Wynik ten wysłowimy: sprawność danego mechanizmu $= 30\%$; a 70% pracy nadanej tracimy na pracę tarcia.

Udoskonalmy jednakże ten mechanizm w ten sposób, iż dajmy powierzchnie trące się z żelaza, wtedy, podług „Technika" I, 217, $\mu = 0{,}14$; $\rho = 8^0$, a zatem:

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\,45^0}{\mathrm{tg}\,53^0} = \frac{1}{1{,}3} = 0{,}76;$$

sprawność tego mechanizmu jest 76%, a tylko 24% pracy nadanej tracimy.

Załóżmy następnie, że powierzchnia pochyła jest z płyt lodowych, ciężar zaś, który wciągamy, leży na saniach, wtedy podług „Technika" I, 218:

$$\mu = 0{,}014;\ \rho \leqq 1^0;\ \text{a zatem:}$$

$$\eta = \frac{1}{\mathrm{tg}\,46^0} = \frac{1}{1{,}03} = 0{,}97;$$

mechanizm ten posiada sprawność 97%; tylko 3% pracy nadanej przepada.

133. Sprawność mechanizmu złożonego. Sprawność mechanizmu złożonego możemy obliczyć ze sprawności oddzielnych mechanizmów. Części mechanizmu złożonego są z sobą w ten sposób połączone, że praca użytkowa jednego z nich, jest pracą nadaną następnego; takim mechanizmem jest np. wielokrążek.

Niechaj będzie L_n pracą nadaną mechanizmowi, który nazwiemy pierwszym; pracę użytkową tego mechanizmu obliczymy ze wzoru $L_{1u} = \eta_1 L_n$, w którym η_1 jest sprawnością tego pierwszego mechanizmu. Praca L_{1u} przenosi się na mechanizm drugi, odpowiednio sprzężony z pierwszym, dla tego mechanizmu praca L_{1u} jest pracą nadaną, przeto pracę użytkową drugiego mechanizmu, obliczymy ze wzoru

$$L_{2u} = \eta_2 L_{1u} = \eta_1 . \eta_2 . L_u ;$$

w którym η_2 jest sprawnością wyłącznie drugiego mechanizmu. Mając cały szereg mechanizmów sprzężonych i znając sprawności η_1, η_2 .... i t. d. każdego z nich, napiszemy wzór pracy użytkowej mechanizmu złożonego jak następuje

$$L_u = \eta_1 . \eta_2 . \eta_3 \dots \eta_k L_u \dots \dots \quad (114)$$

Ponieważ wogóle $\eta < 1$, przeto wzór ten daje pojęcie, z jaką prędkością zmniejsza się sprawność całkowita złożonego mechanizmu, z powiększeniem ilości mechanizmów składowych.

Iloczyn spółczynników sprawności mechanizmu złożonego oznaczymy jednym spółczynnikiem η_c, i napiszemy wzór

$$\eta_c = \eta_1 . \eta_2 . \eta_3 \dots \eta_k ; \dots \dots \quad (115)$$

w którym η_c nazywać będziemy całkowitą sprawnością danego mechanizmu; na zasadzie tego określenia napiszemy dla mechanizmu złożonego [1])

$$L_u = \eta_c . L_n \dots \dots \quad (116)$$

134. Tarcie czopów. Walec, obracający się w łożysku, przedstawia mechanizm, zwany wałem; części tego wała, wspierające się na łożyskach, nazywamy czopami. Przyjmijmy, iż oś wała jest w położeniu poziomem i czop jest umieszczony w łożysku, którego promień jest nieco większy od promienia przekroju czopa. Jeżeli wał znajduje się w spoczynku t. j. nie wykonuje ruchu obrotowego, to tarcie pomiędzy czopem i łożyskiem nie występuje. Siła odporowa N łożyska jest wtedy pionową i środek O koła przekroju czopa znajduje się w danym razie na tej pionowej, rys. 176-ty. Jeżeli zaś nastąpi obrót wała ze zwrotem strzałki, rys. 177-my, to środek przekroju przyjmie położenie O_1 i punkt zetknięcia się czopa z łożyskiem przeniesienie się z A do A_1. W tem nowem położeniu, przy obrocie wała następuje równowaga sił N, W, P i momentu M, który wywołuje obrót wała; P oznacza siłę pionową, której punkt przyłożenia przyjmujemy w środku koła. W celu zestawienia warunków równowagi rzutujemy siły na kierunek siły W, i piszemy równanie

$$W - P \sin \alpha = 0;$$

a ponieważ

$$W = \mu N = \mu P \cos \alpha,$$

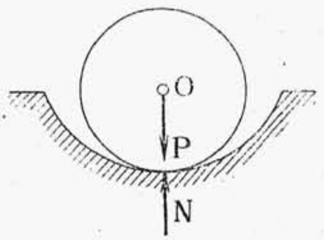
---

[1]) Obliczenie tarcia śrub i klinów znajdują się w wydaniu I-szem str 331-sza i nast.

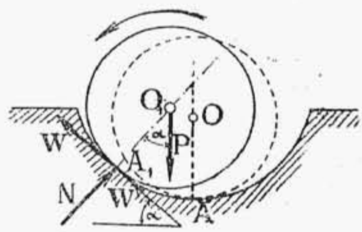
przeto, po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy

$$\mu P \cos \alpha = P \sin \alpha, \text{ skąd}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu = \operatorname{tg} \rho; \text{ lub: } \alpha = \rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$



Rys. 176.



Rys. 177.

Wzór ten wysłowimy w sposób następujący: kąt α, który tworzy normalna z pionową, podczas jednostajnego obrotu wała, równa się kątowi tarcia. Znając więc kąt ρ obliczymy siłę tarcia ze wzoru

$$W = P \sin \rho.$$

Znajdźmy teraz zależność pomiędzy wielkościami P i M. Równowaga wymaga, ażeby suma momentów była równą zeru; w celu tego wyrażenia, obierzmy biegun momentu np. w środku koła i otrzymamy wzór

$$M = Wr,$$

w którym r oznacza promień przekroju czopa; po podstawieniu w ten wzór: $W = P \sin \rho$ otrzymamy:

$$M = Pr \sin \rho; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

moment ten nazywamy momentem tarcia.

Ponieważ w mechanizmach udoskonalonych spółczynniki tarcia posiadają małe wartości, przeto możemy przyjąć, z pominięciem bardzo małych wielkości w drugiej i wyższych potęgach:

$$\mu = \operatorname{tg} \rho \cong \sin \rho;$$

a po podstawieniu tej wartości we wzory powyższe otrzymamy

$$W = P\mu, \text{ oraz } M = Pr\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Wzory te byłyby zupełnie zgodne z wynikami doświadczeń, gdyby założenia, przyjęte w tym rachunku, wyrażały ściśle warunki, jakie zachodzą w rzeczywistości; w praktyce jednakże mogą zachodzić inne warunki fizyczne i wtedy rachunek powyższy nie będzie im odpowiadał. Parcie np. czopa na łożysko nie jest skupione w jednym punkcie, jakeśmy to w rachunku przyjęli; lecz rozkłada się wzdłuż pewnego łuku; przeto i ciśnienia normalne posiadają różne wartości, a wskutek tego i wartość siły tarcia zmienia się. Te i tym podobne odstępstwa, które przyjmujemy w rachunku, od warunków, w jakich odbywają się doświadczenia, czynią wyniki rachunku niezupełnie zgodnymi z wynikami doświadczeń. Technika zwraca się w takich przypadkach do bezpośredniego wyznaczenia wartości spółczynników i w danym przykładzie przyjmuje wzór tarcia czopowego

$$W = P\mu_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

w którym μ_1 oznacza spółczynnik tarcia; wyznaczony bezpośre'nio z doświadczenia; wartości tego spółczynnika są podane w „Techniku", I, 236.

Obliczymy obecnie pracę szkodliwą podczas jednego obrotu wała. Praca ta, na zasadzie wzoru 58-go, w § 96-ym, równa się

$$L_s = 2\pi M = 2\pi Pr\mu_1.$$

Z tego wzoru wynika, iż praca szkodliwa rośnie z powiększeniem promienia przekroju czopa; należy więc, w celu zaoszczędzenia pracy nadanej, dawać czopy o średnicy jaknajmniejszej. Lecz zmniejszenie średnicy czopa, zmniejsza wytrzymałość jego i zwiększa ścieranie się jego podczas obrotu; zmniejszenie przeto średnicy posiada granice, oznaczone praktycznemi względami.

135. Przykłady. 1) **Równowaga dźwigni.** Przyjmijmy, że siła A, rys. 178-my jest siłą nadaną t. j. przyjmiemy, że siła ta podnosi ciężar B; obrót dźwigni odbywa się zatem zgodnie z obrotem siły A; a tarcie, występujące w łożysku, posiada zwrot przeciwny. Jeżeli prędkość obrotu jest jednostajną, to siły działające są w równowadze. Równowaga ta wyrazi się przez warunek, że suma momentów jest równą zeru; napiszemy więc tę sumę względem osi obrotu

$$Aa - Bb - Wr = 0.$$

Ponieważ $W = P\mu_1 = (A + B)\mu_1$; przeto po podstawieniu otrzymamy

$$Aa = Bb + (A + B)\mu_1 r; \text{ skąd}$$

$$A = B\,\frac{b + \mu_1 r}{a - \mu_1 r}.$$

Jeżeli przyjmiemy $\mu_1 = 0$, to siłę A, którą dla tego szczególnego przypadku oznaczymy przez A_0, obliczymy ze wzoru $A_0 = B\,\frac{b}{a}$; a więc

$$A > A_0.$$

2) **Krążek stały.** Na końce sznura, porzuconego przez krążek; obracający się, działają siły P i Q; wyznaczyć ich równowagę, uwzględniając tarcie czopa; promień czopa oznaczamy przez r i promień krążka przez R. Ciśnienie na czop $N = P + Q$. Przyjmujemy następnie, że ruch krążka odbywa się jednostajnie w zwrocie, wskazanym na rysunku 179-ym; t. j. siła P jest siłą ciągnącą; tarcie, a więc i moment tarcia, powstaje wtedy w zwrocie przeciwnym.

Zestawiając sumę momentów sił względem środka krążka, jako bieguna (wybór ten ma tę dogodność, iż rugujemy z rachunku siłę N), otrzymamy wzór

$$PR - Wr - QR = 0;$$

ponieważ: $W = (P + Q)\mu_1$; przeto po podstawieniu

$$PR - (P + Q)\mu_1 r - QR = 0;$$