2. Równowaga sił, działających na bryłę swobodną.

31. Układ niezmienny. Układem niezmiennym punktów nazywamy zbiór punktów, których wzajemne odległości nie zmieniają się pod działaniem sił. W otaczającej nas przyrodzie spotykamy ciała, które ze znacznem przybliżeniem dadzą się podciągnąć pod określenie układu niezmiennego; takie ciała nazywamy sztywnemi.

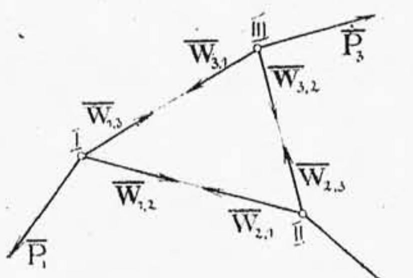
Pojęcie układu niezmiennego daje się stosować nietylko do ciał sztywnych, lecz w pewnych przypadkach i do ciał płynnych i wogóle do ciał odkształcalnych; jeżeli np. pod działaniem pewnych sił cząstki płynu nie zmieniaję swych położeń, to płyn w tym razie przedstawia niezmienny układ punktów.

Układ niezmienny punktów materjalnych będziemy również nazywali bryłą sztywną, lub ciałem sztywnem; — lub krótko **bryłą**.

Jeżeli bryła, znajdując się w pewnem położeniu w przestrzeni, może przyjąć, pod działaniem sił, — położenia, jakie jej nadadzą te siły, to zowiemy taką bryłę **swobodną**. W razie zaś jeżeli dana bryła pod działaniem pewnych sił nie może przyjąć położenia, jakie jej nadają te siły, wskutek tego, iż jest np. połączona z inną bryłą, to bryłę taką nazywamy **nieswobodną**, porów. § 20-ty.

32. Równowaga sił, wyrażona przez ich sumę. Określenie: gdy na bryłę działają siły, które nie nadają jej punktom **przyśpieszeń**; wtedy mówimy, że **siły się równoważą**; lub też inaczej, że siły są **w równowadze**.

Zadaniem naszem jest zestawić warunki, jakim podlegać siły powinny, jeżeli mają pozostawać w równowadze.



Rys. 42.

Weźmy naprzód pod uwagę układ niezmienny, złożony z trzech punktów, rys. 42-gi, który wyobrazić sobie możemy w postaci trójkąta, do którego wierzchołków przyłożone są siły $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ i $\overline{P}_3$; co do których zakładamy, że są w równowadze; należy zestawić zależności, jakim one w tym razie podlegają. Siły te, działając na dany układ punktów, wywołują pomiędzy punktami układu siły, które wyobrazimy sobie działającemi w kierunku prostych, łączących te punkty; § 20-ty; — siły te, nazwane siłami połączeń, lub inaczej siłami wewnętrznemi, występują w każdym boku po dwie, posiadają, na zasadzie prawa wzajemnego działania, zwroty przeciwne i wartości wzajemne równe. Jeżeli cały układ jest w pewnym stanie ruchu, to pod działaniem sił, które są w równowadze, nie zmieni on tego stanu, a więc i każdy punkt tego układu nie zmieni swego stanu ruchu; co wyrazimy, że suma wektorowa sił, działających na każdy punkt układu, powinna być równa zeru; § 23-ci. Na punkt I-szy, rys. 42-gi; działa siła $\overline{P}_1$ oraz dwie siły połączeń, które oznaczymy literami $\overline{W}_{1,2}$ i $\overline{W}_{1,3}$; równowaga tych sił, wyrazi się wzorem:

$$\overline{P}_1 + \overline{W}_{1,2} + \overline{W}_{1,3} = 0;$$

w tenże sposób pomiędzy siłami, przyłożonemi do punktu II-go, zachodzi równanie:

$$\overline{P}_2 + \overline{W}_{2,1} + \overline{W}_{2,3} = 0;$$

oraz dla punktu III-go:

$$\overline{P}_3 + \overline{W}_{3,1} + \overline{W}_{3,2} = 0;$$

jeżeli dodamy te równania wektorowo i jeżeli ugrupujemy dodajniki w sposób następujący:

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + (\overline{W}_{1,2} + \overline{W}_{2,1}) + (\overline{W}_{1,3} + \overline{W}_{3,1}) + (\overline{W}_{2,3} + \overline{W}_{3,2}) = 0;$$

to zauważywy, że działania sił $\overline{W}_{1,2}$ oraz $\overline{W}_{2,1}$ wzajemnie się znoszą t. j. $\overline{W}_{1,2} + \overline{W}_{2,1} = O$; to samo powiemy o pozostałych parach; otrzymamy sumę.

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 = 0.$$

Gdy układ złożony jest z wielu punktów, rozmieszczonych w przestrzeni i sztywno z sobą połączonych, i gdy na te punkty działają siły, które w pewnych punktach mogą być równe zeru, wtedy, w razie równowagi sił, zachodzi zależność pomiędzy niemi, do której wyrażenia dojdziemy drogą, poprzednio wskazaną; zależność ta wyrazi się równaniem:

$$\Sigma \overline{P}_k = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

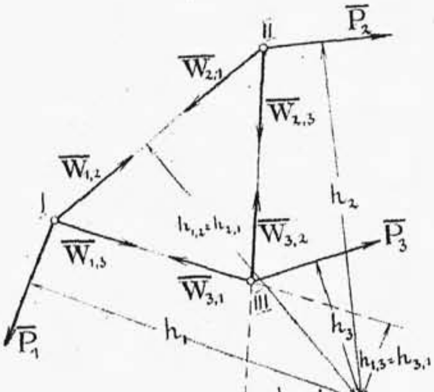
które wysłowimy:

jeżeli siły, działające na bryłę swobodną, są w równowadze, to ich suma wektorowa równa się zeru.

Twierdzenie to pozostaje w mocy dla układów punktów i sił, tak płaskich jak i przestrzennych i dla dowolnie skierowanych sił w przestrzeni.

Wynik powyższy głosi, iż **jeżeli** siły są w równowądze, to zachodzą takie a takie zależności pomiędzy temi siłami, lecz nie możemy bezpośrednio z tego wywnioskować, że jeżeli zachodzą te zależności, to siły są w równowadze. Warunek wypowiedziany jest **niezbędnym** do wyrażenia równowagi sił, lecz jest on **niewystarczającym**; gdyż np. suma wektorowa pary sił równa się zeru, a siły te nadają bryle ruch obrotowy; a więc nie są one w równowadze i wobec tego warunek równowagi, wyrażony równaniem $\Sigma\overline{P}_k = 0$, jest **niedostatecznym** do określenia równowagi sił. Niedostateczność tego warunku wynika z tego powodu, żeśmy niedostatecznie wyrazili równowagę sił połączeń, występujących w każdym pręcie. — Siły te, w myśl prawa wzajemnego działania, powinny wzajemnie się znosić; powinny być w równowadze; równowagę tę wyraziliśmy równaniem $\overline{W}_{1,2}+\overline{W}_{2,1}=0$; otóż równanie to nie wyraża dostatecznie tej równowagi; gdyż dwie siły odpowiadające temu równaniu, mogą stanowić parę sił; należy przeto jeszcze uzupełnić to równanie równaniem, że siły te działają wzdłuż jednej prostej; — wyrazem matematycznym tego jest równanie momentów: $P_1 . h_1 + P_2 . h_2 = 0$; a ponieważ z założenia wynika, że $P_1 = P_2$; przeto otrzymamy, że $h_1=h_2$ t. j. że siły dane leżą na jednej prostej; a więc gdy wprowadzimy równanie momentów tych sił do naszych rozpatrywań, otrzymamy warunki dostateczne równowagi sił. — W tym celu zastosujemy warunki równowagi sił, przyłożonych do jednego punktu, wyrażone równaniem momentów; § 28-my.

33. Równowaga sił wyrażona przez sumę wektorową ich momentów. Powtórzmy rozważania poprzednie, tyczące się równowagi sił, które działają na niezmienny układ punktów, stosując do tego równania momentów sił, działających na jeden punkt.



Rys. 43.

Weźmy układ, złożony z trzech punktów, przyłóżmy do tych punktów siły zewnętrzne i wewnętrzne, jak poprzednio, i przyjmijmy, że są one w równowadze; wtedy napiszemy warunki równowagi sił, zbiegających się w każdym punkcie, i warunki te wyrazimy równaniami momentów; § 28-my. Obierzmy w tym celu dowolny biegun O w przestrzeni, rys. 43-ci, wyznaczmy ramiona momentów tych sił, a zestawimy następujące sumy wektorowe, § 26-ty, wyrażające równowagę sił, działających na każdy punkt układu:

$$\mathrm{V}\overline{P}_1\overline{h}_1 + \mathrm{V}\overline{W}_{1,2}\overline{h}_{1,2} + \mathrm{V}\overline{W}_{1,3}\overline{h}_{1,3} = 0,$$
$$\mathrm{V}\overline{P}_2\overline{h}_2 + \mathrm{V}\overline{W}_{2,1}\overline{h}_{2,1} + \mathrm{V}\overline{W}_{2,3}\overline{h}_{2,3} = 0,$$
$$\mathrm{V}\overline{P}_3\overline{h}_3 + \mathrm{V}\overline{W}_{3,1}\overline{h}_{3,1} + \mathrm{V}\overline{W}_{3,2}\overline{h}_{3,2} = 0,$$

w równaniach tych iloczyny $\mathrm{V}\overline{P}_1\overline{h}_1$ i t. d. są wektorami momentów odnośnych sił; wystawionymi w biegunie O; które zastąpimy symbolami $\overline{M}$.

Po dodaniu tych równań (sposobem wektorowym) i po uwzględnieniu, że sumy wektorów: $\mathrm{V}\overline{W}_{1,2}\overline{h}_{1,2} + \mathrm{V}\overline{W}_{2,1}\overline{h}_{2,1} = 0$, i t. d.; otrzymamy: $\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 = 0$; lub też ogólnie:

$$\Sigma\overline{M}_k = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Równanie to wysłowimy:
jeżeli siły, działające na bryłę swobodną są w równowadze, to suma wektorowa ich momentów, względem dowolnie obranego bieguna, równa się zeru.

34. **Niezbędne warunki równowagi sił.** Jeżeli równania powyższe, 23-cie i 24-te, zastosujemy do pary sił, to zobaczymy, że siły te nie są w równowadze, gdyż $P_1h_1 - P_2h_2 \gtrless 0$; czyli $\Sigma \overline{M}_k \gtrless 0$, chociaż: $\Sigma \overline{P}_k = 0$; ażeby zaś pary sił były w równowadze należy, ażeby $\Sigma \overline{M}_k = 0$. Równanie więc momentów dopełnia warunku równowagi sił, wyrażonego przez ich sumę.

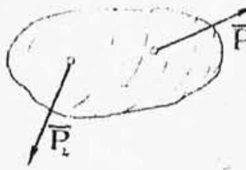
Nasunąć się tu może myśl, czy równanie momentów t. j. $\Sigma \overline{M}_k = 0$ nie będzie wystarczającym warunkiem równowagi sił; — otóż tak nie jest, poprzednie bowiem rozpatrywania właściwości momentów doprowadziły nas do wniosku, iż równanie $\overline{M} = 0$, może być wynikiem tej okoliczności, iż siła przechodzi przez biegun; suma więc momentów, która jest równą zeru, nie rozstrzyga o równowadze sił, działających na bryłę.

Siły więc działające na niezmienny układ punktów, będą wtedy w równowadze, gdy będą odpowiadały **jednocześnie** dwom warunkom, wyrażonym przez równania wektorowe:

$$\Sigma \overline{P}_k = 0, \text{ oraz } \Sigma \overline{M}_k = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Równania te wyrażają warunki równowagi układu sił tak na płaszczyźnie, jak i w przestrzeni, są one więc najogólniejszymi wyrazami równowagi. Ogólne te warunki zastosujemy następnie do szczególnych przypadków.

35. **Równowaga dwóch i trzech sił.** Jeżeli na bryłę działają dwie siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, rys. 44, dowolnie w przestrzeni skierowane, które są w równowadze; to powinny one odpowiadać warunkowi, że suma ich równa się zeru t. j. $\Sigma \overline{P}_k = 0$, czyli $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 = 0$. Równanie to mówi, że siły te muszą być do siebie równoległe, równe co do wartości i różne co do zwrotu; warunkom tym odpowiada tak dobrze para sił, jak i dwie siły, równoważące się. Drugi warunek równowagi żąda, aby $\Sigma \overline{M}_k = 0$, względem **dowolnie** obranego bieguna; obierzmy ten biegun na kierunku jednej z sił, to moment drugiej siły powinien być równy zeru, co może nastąpić tylko wtedy, gdy ramię momentu będzie $= 0$, t. j. gdy siły przecinają się; na zasadzie tego wypowiemy wniosek:



Rys. 44.

dwie dowolne siły, działające na układ niezmienny, są wtedy w równowadze, gdy kierunki ich leżą na jednej prostej, wartości ich są wzajemnie równe i zwroty przeciwne.

Szczególne przypadki:

1) gdy: $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = 0$, lecz $\bar{M}_1 + \bar{M}_2 \gtreqless 0$; wtedy bryła, na którą działają takie siły, podlega obrotowi;

2) gdy zaś: $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 \gtreqless 0$, lecz: $\bar{M}_2 + \bar{M}_2 = 0$; wtedy siły te mają wypadkową skierowaną przez biegun momentow, i bryła, pod działaniem tych sił, nie będzie się obracała, lecz dozna ruchu postępowego.

Warunek równowagi trzech sił: $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 = 0$, wyraża, że siły te tworzą trójkąt zamknięty, a więc kierunki ich muszą być równoległe do jednej płaszczyzny. Obierzmy następnie biegun na kierunku jednej z sił, np. na kierunku siły $\bar{P}_3$; wtedy równanie: $\Sigma \bar{M}_k = 0$, przedstawi się w postaci $\bar{M}_1 - \bar{M}_2 = 0$; równaniu temu będzie uczynione zadość tylko wtedy, gdy siły będą leżały na jednej płaszczyźnie z obranym biegunem; a że z poprzedniego równania wywnioskowaliśmy, że te trzy siły powinny być równoległe do jednej płaszczyźny; przeto wszystkie trzy siły powinny leżeć na jednej płaszczyznie; jeżeli następnie obierzemy biegun w punkcie przecięcia się dwóch sił; to moment trzeciej względem tego bieguna $= 0$; czyli ta siła będzie przechodzić przez ten biegun. Wyniki te wysłowimy w następujący sposób:

trzy siły są wtedy w równowadze, gdy leżą na jednej płaszczyźnie, kierunki ich przecinają się w jednym punkcie, i tworzą trójkąt zamknięty.

36. Równania skalarne równowagi sił na płaszczyźnie. Ażeby siły na płaszczyźnie były w równowadze, powinny odpowiadać one ogólnym warunkom: $\Sigma \bar{P}_k = 0$, oraz $\Sigma \bar{M}_k = 0$, względem dowolnego bieguna. W danym razie równanie $\Sigma \bar{P}_k = O$ należy rozumieć wektorowo, natomiast równanie $\Sigma \bar{M}_k = O$ skalarnie; jeżeli biegun momentu obierzemy w płaszczyźnie sił. W celu stosowania rachunku algebry skalarnej, równania wektorowe wyrazimy w innej postaci. Na zasadzie poprzednich wywodów, § 23-ci, równanie wektorowe $\Sigma \bar{P}_k = 0$, zastąpimy dwoma równaniami algiebraicznemi:

$$\Sigma P_{k,x} = 0; \quad \Sigma P_{k,y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Równanie zaś momentów może pozostać w swej postaci; gdyż jest już algebraiczne. Równanie to można przekształcić w ten sposób, ażeby wchodziły do niego rzuty sił, gdyż wchodzą one do równania 26-tego. Niech $\bar{P}_k$ przedstawia pewną siłę; x_k i y_k niech przedstawiają spółrzędne jej punktu przyłożenia; obierzmy następnie biegun momentów w początku spółrzędnych; wtedy moment tej siły względem początku układu, wyznaczymy w sposób wskazany, w § 27-ym:

$$M_k = P_{k,x} \cdot y_k - P_{k,y} \cdot x_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

a wtedy równanie $\Sigma M_k = 0$, przedstawi się w postaci:

$$\Sigma (P_{k,x} \cdot y_k - P_{k,y} \cdot x_k) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Równowaga zatem sił na płaszczyźnie wyraża się dwoma równaniami wektorowemi:

$$\Sigma \bar{P}_k = 0, \quad \Sigma \bar{M}_k = 0;$$

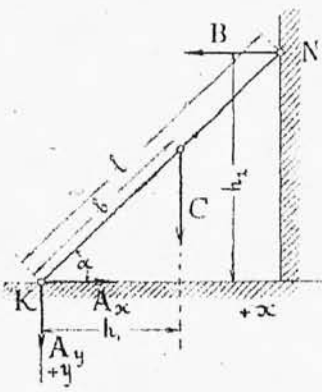
w postaci zaś skalarnej wyraża się trzema równaniami:

1) $\Sigma P_{k,x} = 0$, 2) $\Sigma P_{k,y} = 0$, 3) oraz $\Sigma (P_{k,x} \cdot y_k - P_{k,y} \cdot x_k) = 0$ (29)

Trzy zatem mamy równania dla wyrażenia równowagi sił na płaszczyźnie.

36. Przykłady równowagi płaskich układów sił.

1) Koniec pręta o długości l, rys. 45-ty, umocowany jest za pomocą zawiasy do płaszczyzny poziomej w ten sposób, iż obracać się może tylko w płaszczyźnie pionowej; drugim swym końcem opiera się on na ścianie pionowej, opora ta jest w ten sposób urządzona, że pomiędzy prętem i ścianą niema tarcia, ani też zaczepienia; wobec czego kierunek siły odporowej, która występuje wskutek oparcia pręta, jest **prostopadły** do ściany. Pręt ten obciążony jest siłą C, przyczepioną na odległości b od zawiasy. Należy wyznaczyć siły odporowe A i B co do ich wielkości i strzałki. Dane więc mamy w zadaniu wielkości: C, l, b, α, należy wyznaczyć $\bar{A}$ i $\bar{B}$.

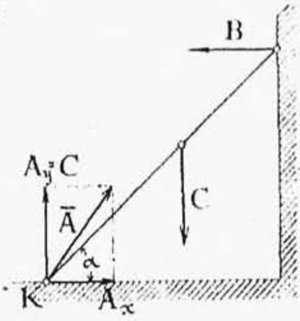


Rys. 45.

O sile $\bar{A}$ wiemy, że przechodzi ona przez punkt K, lecz nie znamy ani jej kierunku, ani zwrotu, ani wielkości; o sile $\bar{B}$ możemy powiedzieć, że znamy jej kierunek, pozostaje zatem obliczyć jej wartość i strzałkę. Wszystkie te siły $\bar{A}, \bar{B}$ i $\bar{C}$ są w równowadze, gdyż pręt pod ich działaniem pozostaje w spoczynku; a więc muszą zachodzić równania $\Sigma \bar{P}_k = 0$; oraz $\Sigma M_k = 0$; lub też odpowiednie trzy równania analityczne. Obierzmy osi x i y, jak wskazuje rysunek 45-ty, zróbmy rzuty niewiadomej siły $\bar{A}$ na osi x i y; rzuty te nieznane oznaczymy literami A_x i A_y; i napiszemy równania rzutów.

$$- B + A_x = 0; \text{ oraz: } A_y + C = 0.$$

Suma momentów względem bieguna np. K daje równanie następujące: $C.h_1 - B.h_2 = 0$; podstawiając: $h_1 = b \,.\, \cos \alpha$; $h_2 = l.\sin \alpha$, otrzymamy: $C.b \cos \alpha - B.l. \sin \alpha = 0$; z tego równania obliczymy: $B = C.\frac{b}{l}. \operatorname{cotg} \alpha$; podstawiając następnie tę wartość w równanie sił, otrzymamy: $A_x = C.\frac{b}{l}. \operatorname{cotg} \alpha$; oraz $A_y = - C$; wobec tego, że A_y jest odjemne, przeto właściwa składowa A_y ma zwrot przeciwny zwrotowi, **któryśmy przyjęli za dodatni**; czyli składowa ta posiada zwrot



Rys. 46.

taki, jaki wskazuje rys. 46-ty. Następnie napiszemy: $A = \sqrt{A^2_x + A^2_y} =$
$= C \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{l}\right)^2 \cdot \operatorname{cotg}^2 \alpha + 1}$; kierunek siły A obliczymy z równania:

$$\operatorname{tg}(A_x, A) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{C}{C \frac{b}{l} \operatorname{cotg} \alpha} = \frac{l}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

Przypadki szczególne:

1) gdy $\alpha = 90^0$; wtedy $B = 0$; $A = C$; $\operatorname{tg}(A_x, A) = \infty$ skąd; $\sphericalangle (A_x, A) = 90^0$;

2) gdy $\alpha = 0$; wtedy $B = \infty$; $A_x = \infty$; $A_y = C$; $\sphericalangle (A_x, A) = 0^0$.

Otrzymane odpowiedzi, $B = \infty$ oraz $A_x = \infty$, wyrażają, że za pomocą dwóch sił poziomych, o skończonej wartości, nie jesteśmy w stanie utrzymać w położeniu poziomem pręt, obciążony siłą pionową, rys. 47-my; i rzeczywiście, w takiem położeniu zawsze się on wyślizgnie, choćbyśmy najsilniej go zaciskali; w założeniu, że niema tarcia pomiędzy końcem pręta i ścianą, o którą się on opiera. Zadanie to rozwiązać można wykreślnie, stosując twierdzenie o równowadze trzech sił, § 35-ty. Na podstawie tego twierdzenia powiemy, że siły $\bar{A}$, $\bar{B}$ i $\bar{C}$ powinny przecinać się w jednym punkcie; a że punkt przecięcia się sił B i C możemy wyznaczyć, przeto kierunek nieznanej siły A będzie określony; te trzy siły utworzą trójkąt, którego jeden bok C jest znany, a dwóch drugich znane są kierunki.

2) Pręt ciężki oparty jest pochyło o dwie płaszczyzny gładkie,— poziomą i pionową; ażeby zapobiedz obsunięciu połączymy jeden jego punkt z punktem nieruchomym np. z punktem O za pomocą nici nierozciągliwej lub pręta, rys. 48-my; wskutek czego powstanie w tej nici pewne naprężenie S; które unaocznimy sobie, gdy nić przetniemy i przyłożymy do odciętego końca siłę S, zastępującą naprężenie nici;— obliczyć siły odporowe, występujące w punktach oparcia się pręta o płaszczyzny i — naprężenie nici; — rozpatrzyć następnie przypadki szczególne położenia pręta i przyczepienia nici do pręta. Ciężar C pręta wyobrażamy sobie przyczepionym w połowie jego długości, którą oznaczymy przez l; kąt nachylenia jego względem poziomej oznaczymy przez α; kąt β wyznacza położenie nici, podtrzymującej pręt. Dane więc mamy: C, l, α i β; należy wyznaczyć wielkości sił odporowych i natężenie S nici. Bryłę, którą tu rozpatrujemy, jest pręt AB; — bryła ta jest **nieswobodna**; — należy przeto przedewszystkiem wprowadzić siły odporowe i uczynić tę bryłę **swobodną**. Ponieważ przyjmujemy, że pomiędzy końcami pręta i płaszczyznani niema tarcia, lub też, że jest tak małe, że go niebierzemy pod uwagę; — czego możemy dopiąć np. przez za-

opatrzenie końców pręta w kółka;—przeto siły odporowe mają kierunek prostopadły do tych płaszczyzn. Na powyższy więc układ działają siły A, B, S, C; z których dana jest siła C oraz znane są kierunki A, B i S. Ponieważ te cztery siły są w równowadze; przeto stosownie do ogólnych warunków $\Sigma P_x = 0$; $\Sigma P_y = 0$; $\Sigma M = 0$; napiszemy, obrawszy osi rzutów na kierunkach ścian:

$$1)\quad B - S.\cos\beta = 0;$$
$$2)\quad -C - S.\sin\beta + A = 0.$$

Gdy biegun momentów obierzemy w początku spółrzędnych, wtedy sumę momentów wyrazimy równaniem:

$$3)\quad B.l.\sin\alpha - A.l.\cos\alpha + C.\frac{l}{2}.\cos\alpha = 0.$$

Mamy przeto trzy równania z trzema niewiadomemi A, B, S. Z drugiego równania mamy $A = C + S.\sin\beta$; z pierwszego $B = S.\cos\beta$; podstawiamy te wartości w równanie trzecie, a otrzymamy:

$$S.\cos\beta.l.\sin\alpha - (C + S.\sin\beta).l.\cos\alpha + C.\frac{l}{2}.\cos\alpha = 0;$$

po uporządkowaniu wyrazów podług S, napiszemy:

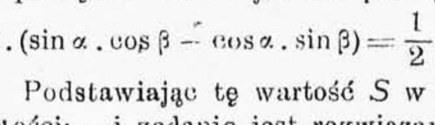
$$S.l.(\sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta) = \frac{1}{2}C.l.\cos\alpha;\ \text{skąd}\ S = \frac{1}{2}C\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Podstawiając tę wartość S w równanie dla A i B, otrzymamy ich wartości; — i zadanie jest rozwiązane.

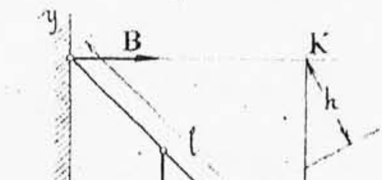
Wielkość S można prościej obliczyć, stosując uwagę, wyżej wypowiedzianą, o wyborze bieguna. Obierzmy w tym celu biegun na przecięciu się kierunków sił A i B t. j. w punkcie K, rys. 48-my, a siły te nie wejdą w równanie sumy momentów; i otrzymamy wtedy sumę momentów względem bieguna K jak następuje:

$$+S.h - C.\frac{l}{2}.\cos\alpha = 0;\ \text{skąd}\ S = \frac{C}{2}.\frac{l}{h}.\cos\alpha;$$

h oznacza odległość punktu K od kierunku siły S; odległość tę możemy obliczyć z geometrycznych stosunków danego układu; lub też, jeżeli rysunek wykonany jest podług skali, możemy ją zmierzyć.



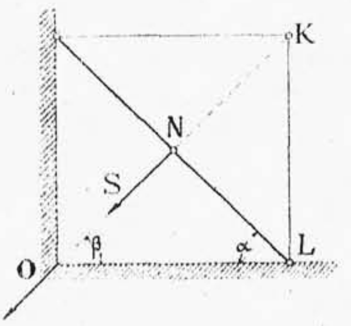
Rys. 47.



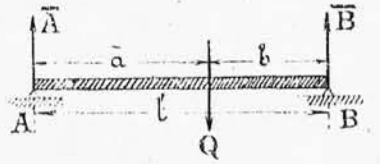
Rys. 48.

Weźmy pod uwagę przypadek szczególny: gdy $h = 0$; wtedy $S = \infty$; wynik ten wskazuje, że gdy kierunek nici przechodzi przez punkt przecięcia się sił A i B, wtedy nie będziemy w stanie, za pomocą siły skończonej, wstrzymać ten pręt od obsunięcia się; zbadajmy bliżej ten szczególny przypadek. Ze wzoru $S = \frac{1}{2} . C . \frac{l}{h} . \cos \alpha$ odczytamy: gdy wartość h będzie malała, wtedy siła S będzie wzrastała: jeżeli h wypadnie po przeciwnej stronie punktu K, wtedy h a zatem i S przyjmie wartość odjemną lecz skończoną; a siła ciągnąca nici nie będzie w stanie utrzymać danego prętu; lecz mógłby tego dokonać tylko sztywny pręt. Gdy zaś $h = 0$, wtedy nić przyczepioną jest we środku pręta, rys. 49-ty; z czego wynika, że $ON = NL = \frac{l}{2}$, czyli, podczas różnych położeń pręta, geometrycznem miejscem punktów przyczepienia nici jest koło, zakreślone ze środka O promieniem $ON = \frac{l}{2}$. Oczywistem jest, że wskutek takiego przyczepienia nici, końce pręta będą ślizgać się swobodnie po danych płaszczyznach, **nie wywołując** naprężenia nici; niema przeto żadnej siły skończonej, która utrzyma pręt w równowadze.

Ponieważ w tym szczególnym przypadku jest również $\alpha = \beta$, przeto, po podstawieniu tych wielkości we wzór: $S = \frac{C}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$, otrzymujemy $S = \infty$, — jak poprzednio.



Rys 49.



Rys. 50.

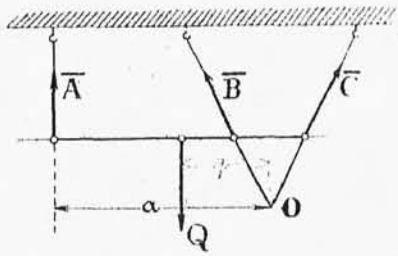
Uwaga. W zadaniach powyższych szukamy równowagi trzech sił, gdy dane są ku temu pewne dane. Warunki równowagi trzech sił rozpatrywaliśmy w § 35-tym, i możemy je zastosować do powyższych zadań: do tego celu nadaje się sposób wykreślny rozwiązania, t. j. na rysunku zrobionym w skali szukamy punktu przecięcia się sił, i kreślimy następnie odpowiednie trójkąty, z których wyznaczamy wielkości szukanych sił;— wykonanie tego poleca się czytelnikowi jako b. ważne ćwiczenie.

3) Belka wsparta poziomo w dwóch punktach, rys. 50-ty, obciążona jest ciężarem Q, którego punkt przyłożenia wyznaczają odległości a i b; obliczyć siły odporowe A i B; nie uwzględniając ciężaru belki.

Rozwiązanie. Jeżeli zestawimy sumę momentów względem punktów oparcia, § 26-ty; to otrzymamy następujące równania; suma momentów

względem punktu B jest następująca: $A.l - Q.b = 0$; skąd $A = Q.\frac{b}{l}$.
W tenże sposób suma momentów względem punktu A: $-B.l + Q.a = 0$; skąd $B = Q.\frac{a}{l}$. Sprawdzeniem służyć może warunek: $A + B = Q$.

Poleca się powtórzyć to zadanie, gdy kilka sił Q_1 obciąża belkę; jak również obliczyć siły odporowe z uwzględnieniem ciężaru belki.



Rys. 51

4) Pręt o stałym przekroju, którego ciężar Q kg, zawieszony jest poziomo na trzech niciach, jak wskazuje rys. 51-szy; obliczyć naprężenia w niciach. Rozwiązanie: podług twierdzeń równowagi powinno być: $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{Q} = 0$; oraz suma momentów tych sił, względem obranego bieguna, powinna być równa zeru. Możemy to zadanie rozwiązać w spółrzędnych prostokątnych lub też bez użycia tych spółrzędnych w sposób następujący. W celu obliczenia za pomocą momentów obierzmy punkt przecięcia się kierunków sił B i C jako biegun momentów, to otrzymamy równanie momentów sił względem niego: $Aa - Qq = 0$; gdzie a i q są ramionami odnośnych sił; w tem równaniu jedna jest niewiadoma A, możemy więc ją obliczyć. Siły B i C obliczymy w tenże sposób, obrawszy biegun w przecięciu się sił A i C; a następnie w przecięciu się sił A i B. Możemy również, obliczywszy siłę n. p. A z równania momentów, wykreślić czworobok $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{Q} = 0$, z którego bezpośrednio wyznaczymy $\overline{B}$ i $\overline{C}$.

4) Walec o ciężarze Q i promieniu r stacza się po płaszczyźnie pochylonej względem poziomu pod kątem α; obliczyć siłę przyczepienia do obwodu walca (n. p. przyczepioną do końca liny, obwijającej walec); która wstrzymuje go od staczania się, oraz obliczyć siłę odporową płaszczyzny, po której walec się toczy.

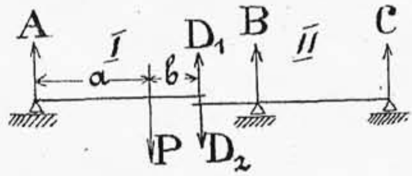
Na walec działa siła Q, S i siła odporowa, której znamy tylko punkt przyłożenia; siłę tę (nieznaną) rozkładamy w kierunku płaszczyzny T i w kierunku normalnym do niej N; niewiadomemi są przeto siły S, T i N; równania równowagi są następujące: jeżeli osi rzutów przyjmiemy równolegle i prostopadle do płaszczyzny, a biegun momentów w punkcie przecięciu się sił T i N, t. j. w punkcie zetknięcia się walca z płaszczyzną:

$$S + T - Q.\sin = 0; \quad N - Q\cos\alpha = 0; \quad -T.r + S.r = 0.$$

Obliczyć następnie położenie siły odporowej oraz sprawdzić otrzymane odpowiedzi dla szczególnych położeń płaszczyzny: $\alpha = 0$, oraz $\alpha = 90^0$.

38. Układy złożone. Często bywa w zadaniu dany układ brył, pomiędzy któremi są pewne połączenia; bryły te np. opierają się o siebie lub są powiązane z sobą; wyznaczenie w tym razie warunków równowagi sił, przyłożonych do tych brył, można wykonać w ten sposób, że dzielimy myślowo taki układ na oddzielne bryły, przykładamy do każdej z nich siły połączeń i wyrażamy w sposób znany warunki równowagi sił, przyłożonych do każdej bryły oddzielnie, włączając do tych sił, siły bezpośrednio przyłożone i siły połączeń, pochodzące od brył sąsiednich. Zwrócić tu należy uwagę, że siły połączeń, występujące pomiędzy bryłami, są wzajemnie równe, lecz ze znakami przeciwnymi. Gdy przeto dla wyrażenia równowagi jednej bryły wprowadzimy pewne siły odporowe, to do wyrażenia równowagi bryły drugiej, która wywierała ten odpór, wejdzie ta sama siła, lecz z odwrotną strzałką. Otrzymamy przeto tyle zadań, ile brył jest w układzie. Z równań jakie w ten sposób otrzymamy, możemy wyrugować siły połączeń.

Przykład. Obliczyć siły odporowe układu belek, pokazanych na rys. 52-gim. W celu rozwiązania zestawiamy warunki równowagi dla belki I-ej, wprowadzając dwie siły odporowe A i D_1; obliczymy stąd A i D_1. Przystąpimy następnie do obliczenia równowagi sił, przyłożonych do belki II-ej. Siłami temi są D_2 B i C. Wartość siły $D_2 = D_1$; przeto obliczymy siły odporowe B i C.

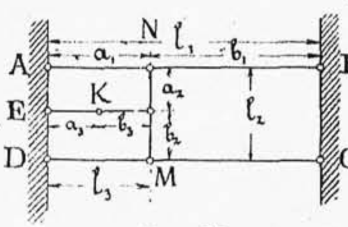


Rys. 52

Przykład. Na dwóch wzajemnie równoległych i pionowych ścianach oparte są poziomo dwie belki AB i DC, rys. 53-ci; na tych belkach wspiera się belka NM; następnie na niej i na ścianie położono belkę trzecią, na której w punkcie K spoczywa ciężar Q. Należy obliczyć siły odporowe w punktach A, B, C, D, E.

Odpowiedź. $A = Q\,\frac{a_3}{a_1}\cdot\frac{b_2}{l_2}\cdot\frac{b_1}{l_1}$; $B = Q\,\frac{a_3}{l_1}\cdot\frac{b_2}{l_2}$;

$$C = Q\,\frac{a_2}{l_2}\cdot\frac{a_3}{l_1};\quad D = Q\,\frac{a_3}{a_1}\cdot\frac{a_2}{l_2}\cdot\frac{b_1}{l_1}\quad E = Q\,\frac{b_3}{a_1}.$$



Rys. 53

Jako sprawdzenie służyć może warunek, że $A + B + C + D + E - Q = O$.

39. Wybór osi rzutów i bieguna momentów. Przy rozwiązaniu zadań jest wielkiem udogodnieniem rachunkowem odpowiedni wybór położenia osi rzutów i bieguna momentu. Dążeniem przy tym wyborze powinno być otrzymanie najmniejszej ilości niewiadomych, wchodzących do każdego równania; niepomiernie to bowiem upraszcza rachunek. Osi rzutów powinniśmy przeto wybierać prostopadle do kierunków sił nieznanych; a bieguny wybierać na przecięciu się sił nieznanych, gdy kierunki ich są znane; co się zwykle zdarza, gdy mamy do czynienia z siłami odporowemi bez tarcia.

Z powyższych rozważań wynika, że niekoniecznie mamy stosować do obliczenia równowagi sił na płaszczyźnie: dwa równania rzutów i jedno momentów; lecz możemy również stosować n. p. **dwa równania momentów** względem dwóch biegunów i **jedno** równanie rzutów sił, byle tylko nie na oś prostopadłą do prostej, łączącej te dwa bieguny lub też—**trzy równania momentów** względem biegunów, nie leżących na jednej prostej.

40. Kratownice. Zespół prętów, połączonych końcami zapomocą przegubów, nazwiemy **kratownicą**. Jeżeli wszystkie pręty i siły, działające na kratownicę, leżą w jednej płaszczyźnie, to kratownicę taką nazwiemy **płaską**; w przeciwnym razie **przestrzenną**.

Jeżeli pręty danego zespołu są w takiej ilości i w ten sposób rozmieszczone, że mogą względem siebie się przesuwać, to kratownicę taką nazwiemy geometrycznie **zmienną;** czworobok np. bez przekątni, lub pięciobok z jedną przekątnią lub bez przekątni są kratownicami zmiennemi.

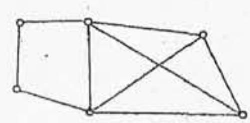
Jeżeli zaś pręty są w takiej ilości i w ten sposób rozmieszczone, że kratownica cała jest sztywną, t. j. odległości wzajemne jej punktów się nie zmieniają; to kratownicę taką nazwiemy **sztywną**;—niezmienną.

Kratownice sztywne bywają dwojakiego rodzaju; albo posiadają tylko tyle prętów ile **niezbędnem** jest do jej usztywnienia, t. j. posiadają tyle prętów, że po usunięciu choć jednego z nich stanie się ona zmienną; taką kratownicę nazwiemy **dostatecznie sztywną;** a pręty jej **niezbędnymi**—do usztywnienia; albo też kratownice posiadają więcej prętów, niż potrzeba do jej usztywnienia; kratownicę taką nazwiemy **przesztywnioną**; a pręty, które nadają jej ten charakter, nazwiemy **przesztywniającymi**. Czworobok np. z dwiema przekątniami jest kratownicą przesztywnioną. Usunięcie z kratownicy przesztywnionej pręta przesztywniającego nie czyni ją zmienną; lecz zamienia na dostatecznie sztywną lub pozostawia przesztywnioną; zależnie od ilości prętów przesztywniających. Dla zbudowania kratownicy dostatecznie sztywnej, długości prętów mogą być wogóle dowolnych długości, — długości te są od siebie **niezależne**; np. długości boków trójkąta są niezależne od siebie; jak również cztery boki i przekątnia czworoboku;—długości zaś prętów przesztywniających są ściśle określone przez długości prętów niezbędnych; np. długość drugiej przekątni czworoboku zależy od długości pozostałych boków. Przesztywnienie nazwiemy wielokrotnem w zależności od ilości prętów przesztywniających. Punkty czyli przeguby, w których zbiegają się końce prętów nazwiemy **węzłami**. Kratownica składa się przeto z pewnej ilości prętów; którą oznaczamy literą p i z pewnej ilości węzłów którą oznaczymy literą w. Trójkąt posiada $w=3$; $p=3$; w czworoboku płaskim, dostatecznie sztywnym, $w=4$; i $p=5$; w czworoboku zaś raz przesztywnionym $w=4:p=6$;—w ogóle w czworoboku przesztywnionym $p>5$; w ostrosłupie dostatecznie sztywnym o podstawie trójkątnej $w=4$; $p=6$, itp.

Pomiędzy ilościami węzłów i prętów kratownicy sztywnej zachodzą pewne związki geometryczne; związki te znajdziemy, gdy obierzemy jakiś sposób tworzenia kratownic. Tworzenie kratownicy sztywnej płaskiej możemy wyobrazić sobie np. w następujący sposób. Za najprostszą kratownicę sztywną przyjmiemy jeden pręt: $w=2$; $p=1$; powiększymy tę kratownicę, gdy przyłączymy do końców tego pręta nowy węzeł zapomocą dwóch prętów; ta nowa kratownica będzie dostatecznie sztywna; gdyż dla określenia położenia punktu na płaszczyźnie wystarczają dwie odległości od pewnego układu sztywnego; t. j. dwa pręty; w ten sposób możemy dowolnie powiększać ilość węzłów. Związek pomiędzy ilością w i p takiej kratownicy ujmiemy w formę matematyczną zważywszy, że dołączenie każdego węzła wymaga dwóch prętów oprócz pierwszego pręta; a więc płaskie układy dostatecznie sztywne posiadają prętów:

$$p=1+2\,(w-2);\ \text{czyli}\ p=2\,w-3 \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Każda przeto kratownica płaska i dostatecznie sztywna posiada ilości prętów i węzłów, które czynią zadość temu równaniu. Podobny związek obliczymy dla układu przestrzennego; weźmiemy w tym razie pod uwagę, że położenie punktu w przestrzeni określone jest przez trzy jego odległości; a zatem przyjąwszy jako najprostszą kratownicę trójkąt otrzymamy wzór: $p=3+3\ (w-3)$; skąd $p=3w-6$; w ostrosłupie n. p. o podstawie trójkątnej $p=3.4-6=6$, co się zgadza z obrazem przestrzennym. Ostrzedz jednakże należy, że jeżeli dana kratownica posiada wskazane przez te wzory ilości pretów; to nie wynika z tego, że jest ona sztywną; kratownica np. rys. 54-ty jest zmienną, chociaż $p=2.6-3=9$; a to z tego powodu, że jedna część tej kratownicy jest przesztywnioną druga zaś niedosztywnioną; warunki przeto sztywności, wyrażone podanemi równaniami, są **konieczne** lecz **nie wystarczające**; przytem zaznaczyć należy,



Rys. 54.

że wzory te przynajmniej narazie możemy stosować tylko do kratownic, które powstały w sposób wskazany. Szczegółowe badanie tych stosunków należy do statyki budowlanej, tutaj zaś podałem tylko ogólne właściwości, które są potrzebne do dalszych rozpatrywań. Kratownice sztywne, lub przesztywnione odpowiednio umocowane służą w budownictwie jako dźwigary mostowe, dachowe i t. p.

Zadanie statyki w stosunku do kratownic polega:

1) na obliczeniu sił odporowych, wywołanych w punkcie oparcia kratownicy na punktach stałych;

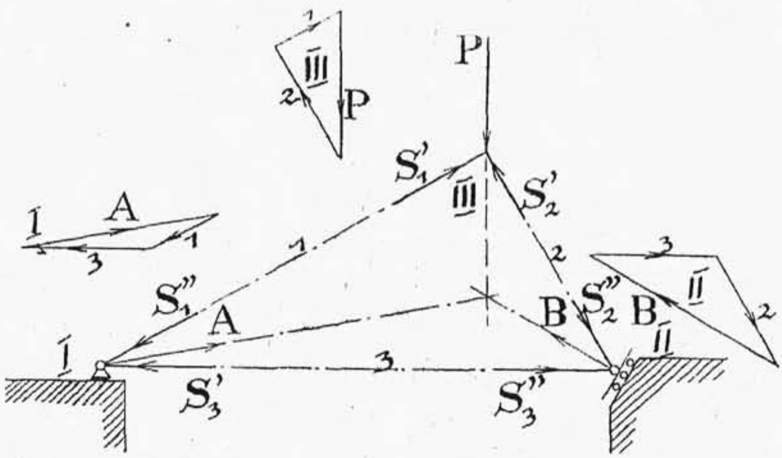
2) na obliczeniu naprężeń w prętach;

3) na obliczeniu odkształceń kratownicy, gdy przyjmiemy, że pręty są sprężyste.

Dwa pierwsze zadania mogą być rozwiązane dla kratownic dostatecznie sztywnych w tym dziale statyki: choć również można je rozwiązać stosując twierdzenia o pracy możliwej i twierdzenia z kinematyki; o czem będzie mowa w odpowiednich działach. Zagadnienia, objęte punktem trzecim, można rozwiązać za pomocą twierdzeń o pracy możliwej lub za pomocą twierdzeń kinematyki o dodawaniu obrotów.

W celu wskazania sposobu obliczenia sił odporowych i naprężeń w kratownicach dostatecznie sztywnych przytoczymy następujące proste przykłady.

1-szy przykład. Kratownicą niech będzie trójkąt, utworzony z trzech prętów, połączonych końcami swymi za pomocą przegubów, rys. 55-ty. Jeden wierzchołek I-szy tego trójkąta umocowany jest przegubowo do przyczółka; II-gi swobodnie spoczywa na przyczółku; na III-im zaś węźle zawieszono ciężar P kg. Obliczyć siły A i B w podporach i naprężenia w prętach: jakie wywołuje siła P. W celu rozwiązania tego zadania, wyobrazimy sobie np. węzeł, na którym zawieszono ciężar P, odciętym;



Rys. 55.

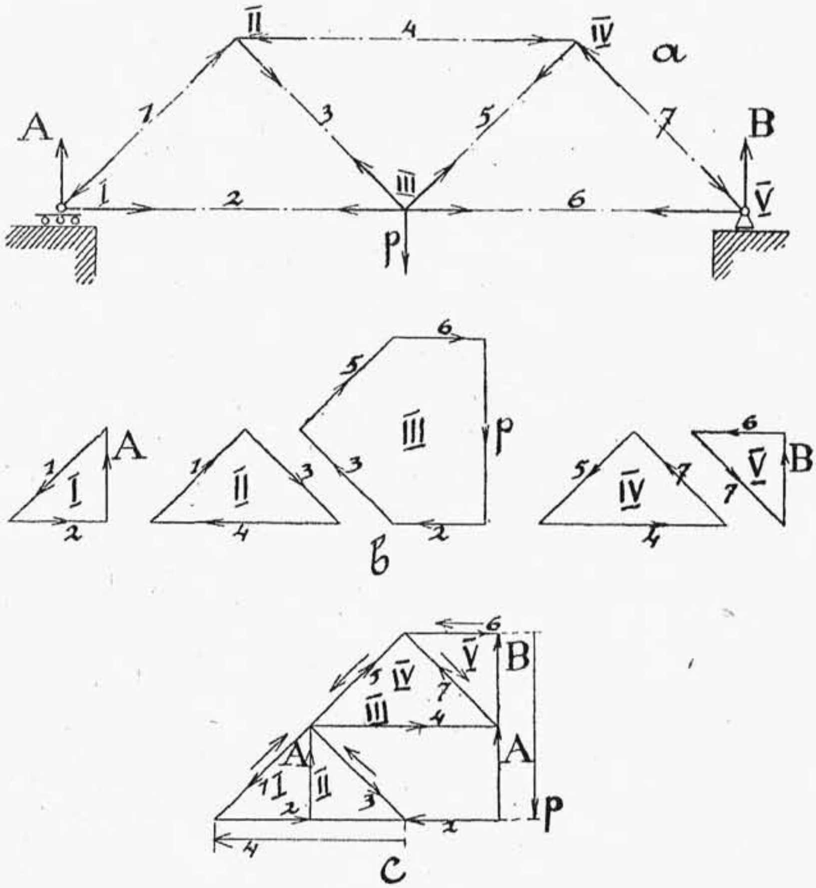
ażeby jednakże nie zmienić równowagi układu, przyłożymy wzdłuż osi tych prętów siły S_1' i S_2' równe naprężeniom S_1 i S_2 w nich występującym. W ten sposób otrzymujemy trzy siły S_1', S_2' i P, które zbiegają się w jednym punkcie i są w równowadze. Zadanie to jest jednakowe z zadaniem, podanem w § 23-ci i może być rozwiązane sposobami tam wskazanymi. Sposób wykreślny polega na wykreśleniu trójkąta $\bar{S}_1' + \bar{S}_2' + \bar{P} = 0$; z którego wyznaczymy wielkości sił S_1' i S_2; jest to wykonano w trójkącie III-cim. Sposób analityczny polega na napisaniu dwóch równań rzutów, § 23-ci.

Przystąpimy teraz do obliczenia naprężeń prętów, zbiegających się w punkcie II-im. W tym celu odcinamy ten węzeł i przykładamy siłę S_3'' w kierunku pręta 3-go, S_2'' w kierunku osi pręta 2-go i siłę $\bar{B}$ prostopadłą do płaszczyzny podparcia, gdyż przy oparciu bez tarcia siła odporowa może być tylko normalna do powierzchni oparcia. Mamy w tym węźle znaną z poprzedniego obliczenia siłę S_2'' (lecz z odwróconą strzałką) i dwa kierunki nieznanych sił S_3'' i B_1, możemy przeto utworzyć trójkąt II gi, z którego wyznaczymy wartości tych sił i ich właściwe strzałki. W węźle I-szym zbiegają się również trzy siły, z których dwie są znane co do kierunku, znaku i wartości; a trzecia odporowa A nieznana ani co do kierunku ani co do wartości; wskutek bowiem umocowania tego węzła nie możemy sądzić o tych wielkościach; siłę tę wyrazimy trzecim bokiem trójkąta, utworzonego z wektorów dwóch znanych sił; trójkąt ten oznaczono I. Równowagę sił, zbiegających się w jednym punkcie możemy również wyrazić analitycznie, jakieśmy to uczynili w przykładzie str. 29-ta; zestawiając dla każdego węzła po dwa równania rzutów; otrzymamy w ten sposób sześć równań; w których będzie sześć niewiadomych: trzy naprężenia w prętach i trzy siły odporowe: siła bowiem odporowa w odporze przegubowym wyraża się dwiema niewiadomemi; w ten sposób obliczyć można naprężenie danej kratownicy.

Zwrócić tu należy uwagę na tę okoliczność; że kratownica dana jest sztywna, siły przeto zewnętrzne P, A i B powinny być w równowadze; możeby więc o ile tego okaże się potrzeba, obliczyć te siły bezpośrednio, nie uciekając się do obliczenia naprężeń w prętach; a w każdym razie warunek ten może być sprawdzianem wykonanego obliczenia szczegółowego. W przykładzie przytoczonym mamy trzy siły zewnętrzne P, A i B; trzy siły są w równowadze, gdy przecinają się w jednym punkcie i rzeczywiście po naniesieniu kierunków sił A i B we właściwe położenie, siły te przetną się w jednym punkcie, co stwierdza prawidłowość i ścisłość wykonania. Sposób rozwiązania tego zadania może być rozszerzony do kratownic, złożonych z dowolnej ilości trójkątów.

2-gi przykład. Weźmy kartownicę, przedstawioną na rys. 56-tym, jest to kratownica w postaci dźwigara mostowego.

Dźwigar ten posiada $w = 5$; $p = 7$; a więc odpowiada warunkowi $p = 2 . 5 - 3$; **może** być przeto sztywny; o sztywności jego rozstrzygnie możność utworzenia go z trójkątów. Ażeby zastosować do obliczenia naprężeń sposoby poprzednie, powinniśmy zacząć obliczenie od węzła, w którym wektor jednej siły i kierunki dwóch pozostałych są dane; takimi węzłami są w tym razie węzły A i B; gdy obliczymy siły odporowe A i B sposobami, wskazanymi w zadaniu 3-em lub 4-ym, lub in-



Rys. 56.

nymi sposobami, które podaje statystyka wykreślna; wtedy, przechodząc od węzła do węzła w sposób, wskazany w poprzednim przykładzie, obliczymy naprężenia na wszystkich prętach, czy to sposobem wykreślnym czy **też analitycznym**; w danym przykładzie $A = {}^1/_2\, P$ i $B = {}^1/_2\, P$. Na rys. b przedstawiono warunki naprężenia sił zewnętrznych, zbiegających się w każdym węźle. Tworzenie trójkątów względnie wieloboków dla każdego węzła można uprościć, łącząc z sobą boki, przedstawiające naprężenie w tych samych prętach w jedną figurę geometryczną rys. c.; plan przeto sił (tak nazwiemy zbiór tych wieloboków sił) przedstawi się w postaci figury geometrycznej; która znajduje się w ścisłej zależności od figury, przedstawiającej kratownicę łącznie z linjami prostych działania sił, obciążających ją; zależność ta jest następująca:

1) proste w planie sił są równoległe do osi odpowiednich prętów kratownicy;.

2) proste w planie sił, odpowiadające prętom i prostym działania sił zewnętrznych, zbiegających się w jednym węźle, — tworzą wielobok zamknięty ze strzałkami **jednozwrotnie** skierowanemi; siły te bowiem, jako zbiegające się w jednym punkcie, są w równowadze. W krótkości wypowiemy tę właściwość, że **każdemu węzłowi kratownicy odpowiada w planie sił wielobok zamknięty;**

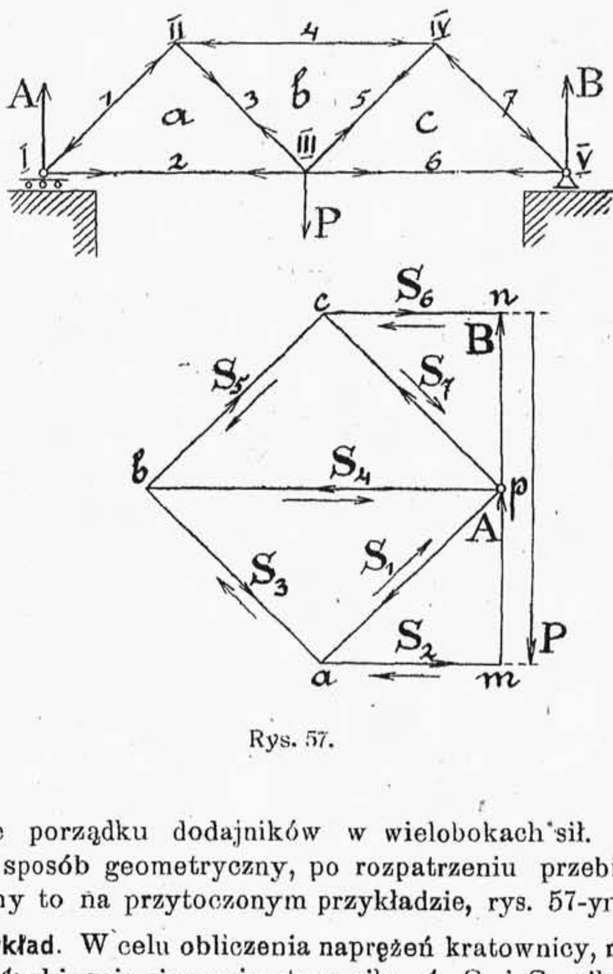
3) proste w planie sił, odpowiadające kierunkom sił zewnętrznych utworzyć powinny wielobok zamknięty; siły te bowiem (łącznie z odporowemi) są w równowadze.

Warunki te, które nazwać można statycznymi, pozwalają jednakże na wykreślenie różnych pod względem geometrycznym planów sił dla jednej i tej samej kratownicy i tego samego obciążenia.

Różnorodność tych figur wynika z tej okoliczności, że dodawanie sił w każdym wieloboku, można wykonać w różnym porządku, każdy przeto wielobok sił, zbiegających się w obranym węźle, może być w wielokrotny sposób nakreślony. Jeżeli np. siła P ma pozostawać w równowadze z dwoma siłami, które mają być równoległe do dwóch danych prostych; to, w celu obliczenia wartości tych sił, możemy utworzyć dwa różne trójkąty; dla każdego przeto węzła możemy utworzyć wieloboki, dające te same ilościowe wyniki, posiadające jednakże odmienne postacie geometryczne; zależne od przyjętego porządku dodajników. Dowolność ta może być wyzyskana dla zaspokojenia np. następującego warunku.

Plan sił Cremony. Należy ułożyć plan sił danej kratownicy i danego obciążenia w ten sposób, ażeby wektor każdej siły był naniesiony w planie tylko raz jeden; ażeby np. nie było, tak jak, na rys. c; że wektory sił 2-ej i 4-ej wykreślone są po dwa razy: wymaganie to ma na celu uproszczenie wykreślania planów sił; a stąd i większą dokładność rysunku, oraz ma na celu danie przejrzystości rysunkowi, a stąd możność kontroli wykonanych działań wykreślnych; wtedy bowiem plan sił przedstawić musi układ geometryczny ściśle lub też ściślej określony, niż bez tych warunków. Warunki i prawidła utworzenia takiego planu opracował w ostatecznej formie Cremona; nazwano też ten plan **planem sił Cremony.** — Czy ten warunek jest do spełnienia dla wszystkich kratownic czy też tylko dla pewnych kratownic i czy on rzeczywiście jednoznacznie określi plan sił, tego w ogólnej formie nie będziemy rozpatrywać; a zastosujemy go tylko do kratownic, złożonych z trójkątów.

Szukany przeto plan sił, powinien odpowiadać przytoczonym wyżej trzem warunkom statycznym; i oprócz tego warunkowi, że wektor każdej siły, tylko raz jeden powinien być naniesiony na rysunku. Wypełnienie tego warunku odbędzie się kosztem dowolności, jaka zachodzi



Rys. 57.

przy wyborze porządku dodajników w wielobokach sił. Warunek ten wyrazimy w sposób geometryczny, po rozpatrzeniu przebiegu dodawania sił; zróbmy to na przytoczonym przykładzie, rys. 57-ym.

3-ci przykład. W celu obliczenia naprężeń kratownicy, rys. 57-y, odcinamy węzeł A; zbiegają się w nim trzy siły A, S_1 i S_2, siła A jest znaną; w celu obliczenia pozostałych niewidomych wykreślamy jeden z trójkątów: 1) $\bar{A} + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 0$; lub 2) $\bar{A} + \bar{S}_2 + \bar{S}_1 = 0$;

np. 1-szy; co też uczyniono w planie sił rys. dolny i wyznaczmy z niego siłę 1-szą i 2-gą. Przystępujemy następnie do węzła II-go; zbiegają się w nim trzy siły: S_1 znana (ze strzałką odwrotną poprzedniej), S_3 i S_4 nieznane co do wartości i kierunków strzałek; możemy przeto utworzyć z tych trzech sił również dwa trójkąty $\bar{S}_1 + \bar{S}_3 + \bar{S}_4 = 0$; lub $\bar{S}_1 + \bar{S}_4 + \bar{S}_3 = 0$; wybór ten jednakże wobec warunku dodatkowego nie jest tym razem dowolny; liczyć się bowiem musimy z tą okolicznością, że wektor $\bar{S}_3$ wchodzić będzie również do wieloboku sił, zbiegających się w węźle III-cim; ażeby przeto niewykreślać wektora $\bar{S}_3$ w planie sił dwa razy, nanieść go należy tak, ażeby go można było dodać z siłą S_1 i z siłą S_2, które wchodzą do obydwóch wieloboków II-go i III-go; prosta przeto działania siły S_3 powinna przechodzić w planie sił przez punkt przecięcia się sił S_1 i S_2, który oznaczyliśmy literą a; wtedy bowiem siła S_3 będzie mogła być dodaną bezpośrednio z każdą z tych sił; spełniając ten warunek wybór trójkąta dla sił węzła II-go jest jednoznacznie określony; jest nim trójkąt $\bar{S}_1 + \bar{S}_4 + \bar{S}_3 = 0$; który też wykreślono w planie sił. Wniosek co do wyboru położenia prostej siły S_3 możemy uogólnić, powtarzać się on bowiem będzie przy obliczeniu naprężeń we wszystkich węzłach danej kratownicy; i wypowiemy go w postaci prawidła, podług którego wykreślać należy plany sił Cremony: **kierunki naprężeń w prętach, tworzących trójkąt w kratownicy, powinny w planie sił przecinać się w jednym punkcie.** Związek przeto geometryczny po między kratownicą a planem siły Cremony jest taki: **że każdemu węzłowi kratownicy odpowiada w planie sił jeden wielobok; a każdemu trójkątowi kratownicy jeden węzeł w planie sił.**

Po tych ogólnych uwagach, obliczymy naprężenia w węźle III-cim; w węźle tym mamy cztery naprężenia i siłę daną P; dwa naprężenia S_2 i S_3 i kierunki naprężeń S_5 i S_6 są dane; pięciobok przeto tych sił można wykreślić; ponieważ wektory sił $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$ są w planie już naniesione w poprzednim obliczeniu, pozostaje przeto, przy tworzeniu pięcioboku dowolność w umieszczeniu wektora $\bar{P}$ i prostych S_5 i S_6; nakreślić bowiem możemy z tych danych kilka pięcioboków, czyniących zadość warunkóm statycznym; weźmy jednakże pod uwagę, jak poprzednio, że wektor $\bar{S}_5$, ażeby się nie powtarzał, musi być tak naniesiony w planie, ażeby mógł być dodany do wektora $\bar{S}_3$ i do wektora $\bar{S}_4$; ażeby zaś uczynić zadość temu warunkowi, prosta działania siły S_5 powinna przechodzić przez punkt przecięcia się sił S_3 i S_4, który jest już wyznaczony na planie przez poprzednią konstrukcję; S_5 przechodzi przeto przez punkt b, jako przez punkt przecięcia się prostych S_3 i S_4. Teraz pozostaje jeszcze wybór: czy połączyć siłę P czy też siłę S_6 z początkiem tego wieloboku t. j. z punktem m; lecz zważywszy, że proste sił S_5, S_6 i S_7 powinny w planie sił przeciąć się w jednym punkcie; siła P powinna połączyć się z S_2 w punkcie *m*; a wtedy kierunek siły S_6 wyprowadzony z początku wektora *P*, zamknie szukany wielobok; z którego wyznaczymy siły S_5 i S_6.

Trójkąty naprężeń, jakie zbiegają się w następnych węzłach; IV-tym i V-ym, są nadmiernie określone; a to z tego powodu, żeśmy uprzednio obliczyli siły odporowe; wykreślenie tych trójkątów jest przeto tylko sprawdzeniem prawidłowego liczenia i dokładności kreślenia. W ten sposób możemy obliczać wszelkie kratownice, złożone z trójkątów.

Plan sił, wykreślony w powyższy sposób, posiada różne geometryczne właściwości, związane z postacią geometryczną kratownicy i jej obciążenia; zwrócę uwagę np. na tę właściwość, że siły zewnętrzne w planie sił Cremony układają się bezpośrednio w wielobok sił; w naszym przykładzie tym wielobokiem jest wielobok *mpnm*; który uważać należy za czworobok; którego boki leżą na jednej prostej; jest on przytem zamknięty; co stwierdza równowagę sił zewnętrznych, przyłożonych do kratownicy.

Następną charakterystyczną właściwością planu sił Cremony jest to; że pola wieloboków sił pokrywają płaszczyznę planu sił dwa razy; o czem można się przekonać naocznie, gdy zakreskujemy każden z wieloboków wyrażających równowagę naprężeń w węzłach, wtedy cała figura jak w podanym przykładzie figura *mabcnpm*; pokryje się dwiema warstwami kresek. Właściwość ta wynika z tej okoliczności, że każdy pręt w kratownicy łączy dwa węzły; w planie sił przeto odpowiedni temu prętowi wektor naprężenia będzie wspólnym bokiem dla dwóch wieloboków; plan przeto sił składać się musi z wieloboków, które łączą się wzajemnie bokami; jest to obraz taki, jaki otrzymamy np. po zrzutowaniu jakiegoś wielościanu przestrzennego na płaszczyznę; wtedy bowiem wszystkie ściany danego wielościanu zrzutują się jako wieloboki o wspólnych bokach;—będzie to zamknięta sieć wieloboków.

Zrozumiałem jest, że dany plan sił może być rzutem nieskończonej ilości wielościanów. Układ np. trójkątów w planie sił, podanego przykładu, może być uważany za rzut płaszczyzn dachu zbudowanego na podstawie *mabcn*; pola rzutów dachów i podłogi wzajemnie się pokrywają; lecz wysokości słupów tego dachu mogą być najrozmaitsze.

Podobieństwo planu sił Cremony i rzutu wielościanu dało podstawę ważnym twierdzeniom, odnoszącym się do obliczania kratownic; których jednakże rozpatrywanie wchodzi w zakres statyki budowlanej,—nie będą tu przeto przytoczone; chociaż jeszcze raz powrócimy do tego przedmiotu, przy wyznaczaniu płaszczyzn zerowych układów sił. Na tem zakończymy dział równowagi sił na płaszczyźnie.