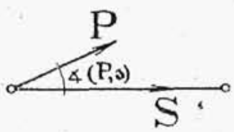
III. Praca sił i energia kinetyczna punktu.

1. Określenia i twierdzenia ogólne.

89. Określenie pracy. Punkt swobodny pod działaniem siły, nie zawsze przesunie się w jej kierunku, lecz może również zboczyć z tego kierunku; przyczyną tego zboczenia mogą być inne siły, działające na ten punkt; lub też może być prędkość, jaką punkt już posiadał, przed rozpoczęciem działania siły. Przyjmiemy zatem w następnych rozpatrywaniach, że kierunek siły jest różny od kiernnku przesunięcia, i że przesunięcie jest prostolinijne. Oznaczywszy długość przesunięcia literą s, rys. 114-ty, siłę, która przesuwa punkt ruchomy, literą P oraz kąt, utworzony przez siłę i kierunek przesunięcia, znakiem $\sphericalangle(P, s)$, postawimy określenie pewnej wielkości, która ma znaczenie w zjawiskach ruchu i spoczynku; wielkość tą nazwano pracą i określono ją w sposób następujący:



Rys. 114.

pracą siły $\overline{P}$, podczas przesunięcia punktu jej przyłożenia wzdłuż drogi $\overline{s}$, nazywamy iloczyn z wartości danej siły, długości przesunięcia i cosinusa kąta pomiędzy kierunkami siły i drogi.

Określenie to wyrazimy wzorem

$$L = P \, . \, s \, . \cos(P, s), \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

w którym litera L (labor) oznacza wartość pracy.

Mówiąc więc, że dana siła wykonywa pracę wzdłuż pewnego przesunięcia, rozumiemy przez to wartość iloczynu, określonego we wskazany sposób; a wszelkie wyjaśnienia, wielkości pracy, oparte na wysiłku istot organicznych, niczego nie uczą, zacieśniają zaś tylko dziedzinę zastosowań wielkości, określonej w sposób powyższy.

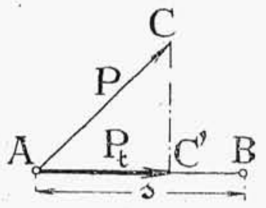
90. Inne sposoby wyrażania pracy. Wzór $L = P \, . \, s \, . \cos(P, s)$ można napisać w postaci:

1) $L = [P \, . \cos(P, s)] \, . \, s$; odczytamy go w tym razie w sposób następujący:

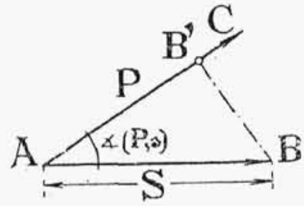
praca siły równa się iloczynowi **z rzutu siły na kierunek** przesunięcia i z długości przesunięcia; a więc $L = P_t \,.\, s$, rys. 115-ty; gdzie $P_t = AC' = P \,.\, \cos(P, s)$ jest rzutem siły na kierunek przesunięcia.

2) Przestawiwszy zaś czynniki, napisać możemy: $L = P \,.\, [\cos P, s) \,.\, s]$, i wysłowimy ten wyraz:

praca siły równa się iloczynowi z wartości siły i **rzutu przesunięcia na kierunek siły**; t. j. $L = P \,.\, AB'$; rys. 116-ty, gdzie AB' jest rzutem przesunięcia na kierunek siły.



Rys. 115.



Rys. 116.

91. Szczególne przypadki. W szczególnych przypadkach wzoru ogólnego:

1) gdy $\sphericalangle (P, s) = 0^0$; wtedy $\cos 0^0 = 1$; a wartość pracy $L = P \,.\, s$;

2) gdy $\sphericalangle (P, s) = 90^0$; wtedy $\cos 90^0 = 0$, a wartość pracy $L = P \,.\, 0 = 0$;

3) gdy $\sphericalangle (P, s) > 90^0$; wtedy $\cos (P, s) =$ wartości odjemnej; praca więc w danym razie przybiera również wartość odjemną; np. dla $\sphericalangle (P, s) = 180^0$, $L = - Ps$.

Przypadek pierwszy wysłowimy: praca siły, której kierunek i zwrot pokrywa się **zgodnie** z kierunkiem i zwrotem przesunięcia; — równa się iloczynowi z wartości siły i przesunięcia.

Przypadek drugi wypowiemy: praca siły, której kierunek jest prostopadły do przesunięcia, równa się zeru.

Trzeci wreszcie przypadek wypowiemy: jeżeli strzałka siły lub jej **rzutu** na kierunek przesunięcia jest zgodny ze strzałką przesunięcia, to praca jest dodatnią; jeżeli zaś strzałki te są przeciwne, to wartość pracy jest odjemną.

92. Jednostka i wymiar pracy. Jeżeli mierzyć będziemy siłę kilogramami — drogę metrami.; to miarą pracy będą kilogramometry; gdyż wyraz cos (P, s) jest liczbą. Jako jednostkę pracy przyjęto 1 kilogramometr; jest to praca, jaką wykonywa np. siła 1 *kg*, przesuwając punkt swego przyłożenia na długość 1 metra, w kierunku swego działania; lub też, ogólniej wyrażając się, jest to praca siły, która przesuwa punkt swego przyłożenia na taką długość, że iloczyn tej długości przez siłę równa się jednostce. Np. gdy $P = 0{,}5\ kg$, $S = 2\ m$; wtedy praca, wykonana przez tę siłę, będzie $L = 0{,}5 \times 2 = 1\ kgm$.

Z określenia pracy wynika, iż wartość jej nie zależy wyłącznie od wartości siły, lub też od długości przesunięcia, lecz zależy od iloczynu ich wartości i cosinusa kąta, zawartego pomiędzy kierunkiem siły $\overline{P}$ i kierunkiem przesunięcia $\overline{s}$; z wartości tej pracy nie możemy sądzić o wartości siły, przesunięcia lub kąta.

Wymiar pracy w wielkościach P i L otrzymamy, pisząc iloczyn z siły i długości; a więc wymiar pracy $[P.L]$.

Przykład. Na tłok silnika parowego działa prężność pary $p = 5$ atmosfer; średnica tłoka $d = 0,20\,m$; skok jego $s = 0,4\,m$; obliczyć pracę tego silnika podczas wykonania jednego skoku.

Rozwiązanie: Przyjąwszy, że 1 atm. $= 1\,kg/cm^2$, otrzymamy wartość siły $P = 5 . \frac{\pi . 20^2}{4} = 5 \times 314,1 = 1570,5\,kg$. Kierunek siły w tym przypadku jest zgodny z kierunkiem przesunięcia, przeto $\cos(P, s) = 1$ i praca silnika podczas jednego skoku, przyjąwszy, że siła jest stałą wielkością podczas przesunięcia

$$L\,(1 \text{ skoku}) = 1570,5 \;.\; 0,4 = 628,2\,kgm.$$

93. Określenie mocy. Pojęcie pracy, wyżej przytoczone, jest niezależne od czasu; mówiąc o iloczynie z siły i z przesunięcia, mówimy tylko o pracy, wykonanej na długości danego przesunięcia; nie mówimy zaś o czasie, w którym ta praca została wykonaną. Nie jest jednakże dla naszych rozpatrywań obojętnem, w jakim czasie dana praca została wykonaną; wprowadzamy przeto stosunek $\frac{L}{t}$ t. j. iloraz wartości pracy do wartości czasu; który wyraża ilość pracy, wykonanej w jednostkę czasu; iloraz ten nazwiemy **mocą** i oznaczymy go przez E; a więc napiszemy:

$$E = \frac{L}{t}$$

Jeżeli wartość pracy zmienia się z czasem; co np. następuje we wspomnianym wyżej tłoku, wartość bowiem siły P jest właściwie zmienną; to wyrazimy moc przez wzór

$$E = \frac{dL}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

i wysłowimy go

mocą nazywamy stosunek przyrostu pracy do okresu czasu, w którym ten przyrost powstał.

Wymiar mocy jest $[P . L . T^{-1}]$.

W obliczeniach technicznych przyjęto jako jednostkę mocy 1 *kgm*/sek.; lub 75 *kgm*/sek. i tę ostatnią jednostkę nazwano **koniem mechanicznym lub parowym**.

Przykład. Silnik, wyżej opisany, robi $n = 100$ obrotów, tj. dwuskoków tłoka na minutę; obliczyć pracę jego w 1 sek. t. j. obliczyć jego moc i wyrazić ją 1) w *kgm*; 2) w koniach mechanicznych (*km*).

Rozwiązanie. Z pewnem przybliżeniem przyjąć można, iż tłok, po uskutecznieniu jednego skoku, powraca do pierwotnego położenia, otrzymując prężność pary z przeciwnej strony; a więc praca jednego obrotu (dwuskoku) $= 2.628{,}2 = 1256{,}4$ *kgm*, a moc:

$$E = \frac{1256{,}4 \,.\, 100}{60} = 2094{,}0\, kgm/\text{sek.}; \text{ lub też:}$$

$$N = \frac{2094{,}4}{75} = 27{,}9\, km.$$

94. Praca siły zmiennej. W poprzednich rozpatrywaniach przyjęliśmy, że siła jest stała podczas przesunięcia punktu jej przyłożenia, jeżeli zaś siła P, działająca w kierunku przesunięcia, jest zmienną co do swej wartości; to przypadek ten sprowadzamy do poprzedniego; w którym siła P jest stałą; przyjmując siłę zmienną, jako stałą na nieskończenie małej długości przesunięcia ds; siłę zmienną oznaczymy przez P_s; praca zatem siły zmiennej P_s na długości ds wyrazi się wzorem

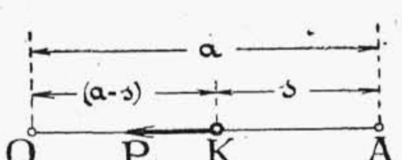
$$dL = P_s \,.\, ds,$$

i nazywa się **pracą cząstkową** siły; gdyż siła wykonuje pracę wzdłuż cząstki przesunięcia.

Pracę siły zmiennej P_s wzdłuż przesunięcia skończonego s wyraża zatem wzór

$$L = \Sigma\, dL = \int P_s \,.\, ds, \text{ w którym n. p. } P_s = f(s). \quad . \; . \; . \; . \quad (57)$$

Przykład. Punkt ruchomy K, rys. 117, jest przyciągany przez środek O siłą proporcyonalną do jego odległości od O; obliczyć pracę, jaką wykona siła przyciągania, gdy punkt ruchomy przesunie się z miejsca A do środka O; odległość punktu A od $O = a$.



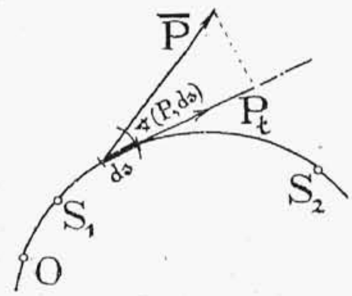
Rys. 117.

Rozwiązanie. Wyobraźmy sobie punkt ruchomy w dowolnem miejscu na torze w odległości s od A; wtedy stosownie do warunków zadania $P_s = K\,(a - s)$, gdzie K oznacza spółczynnik proporcyonalności. Praca zatem cząstkowa $dL = K\,(a - s)\,.\,ds$; a całkowita praca:

$$L = \int_o^a K\,(a-s)\,.\,ds\,;$$

podług bowiem zadania s zmienia się od 0 do a; po scałkowaniu otrzymamy

$$L = K\left(as - \frac{s^2}{2}\right)_0^a = \tfrac{1}{2} K a^2.$$



Rys. 118.

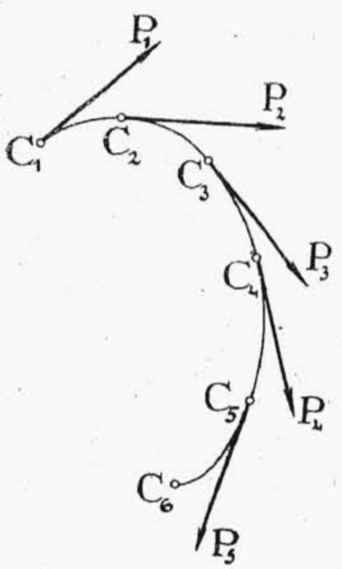
95. Praca siły wzdłuż drogi krzywolinijnej. Gdy tor punktu jest krzywolinijny, wtedy nie możemy stosować określenia pracy, odnoszącego się do przesunięcia o wielkości skończonej; nie byłoby to bowiem zgodnem z rzeczywistym przebiegiem zjawiska; przyjmiemy w tym razie, że tor jest złożony z cząstek prostych, nieskończenie małych rys. 118-ty; wtedy wartość pracy cząstkowej obliczymy ze wzoru:

$$dL = P\,.\,ds\,.\cos\,(P, ds)\,;\ \text{lub inaczej}\ dL = P_t\,.\,ds\,;$$

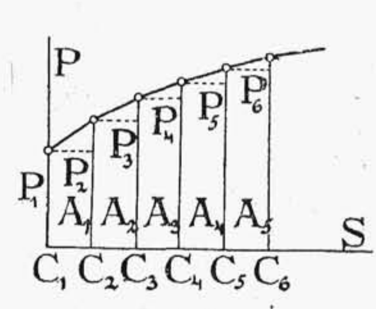
skąd wypływa określenie:

praca cząstkowa równa się iloczynowi z rzutu siły na styczną do toru i z przesunięcia cząstkowego; ds oznacza **przesunięcie cząstkowe.**

Jeżeli siła P zmienia swą wartość i kierunek w każdem miejscu toru, to wzór pracy



Rys. 119.



Rys. 120.

cząstkowej pozostaje pomimo tego w swej mocy, siła P_t zmienia tylko swą wartość.

Praca siły wzdłuż pewnej drogi o skończonej długości, rys. 118-ty wyrazi się wzorem:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} P_t . ds,$$

w którym s_1 i s_2 oznaczają długości drogi, liczone od przyjętego początku. Ażeby obliczyć za pomocą tego wzoru wartość pracy, powinna być dana zależność siły P_t od drogi, t. j. powinno być danem: $P_t = f(s)$.

W praktyce zachodzi nieraz potrzeba wykreślonego wyznaczenia wartości pracy, gdy daną jest siła i droga, wzdłuż której przesuwa się punkt jej przyłożenia.

Przykład. Wzdłuż danego toru $C_1 .. C_6$, rys. 120 ty, przesuwa się siła P, której kierunek jest styczny do toru, a wartości jej w każdem miejscu są dane; obliczyć wykreślnie wartość pracy, gdy punkt przyłożenia siły przesunie się z miejsca C_1 do miejsca C_6. Rozdzielamy długość toru na dowolnie małe cząstki, (C_1C_2), (C_2C_3), (C_3C_4) i t. d., odkładamy długość tych cząstek na osi poziomej s, rys. 120-ty, następnie w ich końcach wystawiamy prostopadłe i odcinamy na nich odpowiednie wartości sił, w ten sposób otrzymamy szereg rzędnych, których końce wyznaczają pewną krzywą, którą nazwać można krzywą $(P_t\ s)$. Następnie, przyjąwszy, że pomiędzy punktami C_1C_2, C_2C_3, i t. d. działają siły stałe i równe kolejno P_1, P_2 i t. d.; napiszemy:

$$L_1 = P_1 . (C_1C_2);\ L_2 = P_2 . (C_2C_3), \text{ i t. d.},$$

gdzie L_1, L_2 i t. d. oznaczają pracę sił wzdłuż cząstek toru.

Praca zatem L całkowita siły zmiennej wzdłuż toru od C_1 do C_6:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots .$$

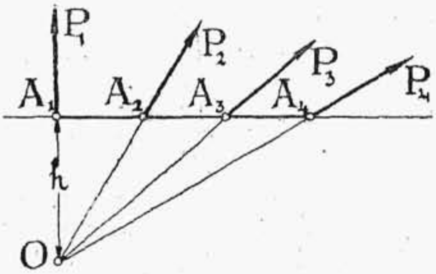
t. j. równa się, z pominięciem wielkości nieskończenie małych drugiego rzędu,—wartości pola, ograniczonego przez osi spółrzędnych i wykresem $(P_t,\ s)$. Zmierzywszy pole tej krzywej, otrzymamy wartość pracy siły zmiennej, stycznej do toru, której punkt przyłożenia zakreśla tor krzywolinijny. Wykres ten o tyle daje dokładniejsze wyniki, o ile drobniejsze będą cząstki drogi; zbytnie jednakże rozdrabnianie ma swą granicę w dokładności przyrządów kreślarskich.

Gdy zaś wartości sił są zmienne w ten sposób, że kierunki ich nie pokrywają się ze stycznemi toru; wtedy, w celu obliczenia ich pracy, wyznaczamy rzuty tych sił na styczne i postępujemy jak poprzednio.

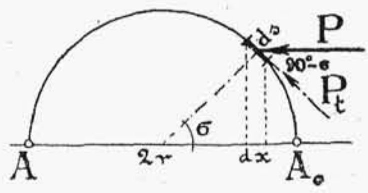
Zadanie. Tor punktu ruchomego jest prostą linią; wartość siły, działającej na ten punkt, jest stałą, kierunek zaś jej przechodzi przez pewien punkt nieruchomy; jak wskazuje rysunek 122-gi; zbudować wykres $(P_t,\ s)$ i obliczyć pracę, jaką siła dana wykona, przesuwając punkt swego przyłożenia na odległość od A_1 do $A_4 = a$. Rozwiązać następnie to zadanie analitycznie i porównać wyniki liczbowe, osiągnięte obydwoma sposobami.

Odpowiedź. Praca: $L = P\,(\sqrt{a^2+h^2} - h)$.

Przykład. Tor punktu ruchomego jest kołem; na punkt ten działa siła P, stała co do swej wartości i równoległa do poziomu; obliczyć pracę siły, gdy punkt ruchomy przybędzie z A_0 do A, rys. 123-ci. Rozwiązanie analityczne:



Rys. 122.



Rys. 123.

$$L = \int_{A_0}^{A} P_t \,.\, ds = \int_{A_0}^{A} P \,.\, \sin\sigma \,.\, ds = P\int_0^{\pi} \sin\sigma\; r \,.\, d\sigma;\ \text{następnie}$$

$$L = Pr\int_0^{\pi} \sin\sigma \,.\, d\sigma = -Pr\,|\cos\sigma|_0^{\pi};\ \text{skąd wreszcie:}$$

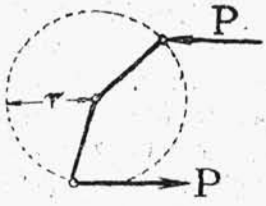
$$L_0^{\pi} = 2\,Pr.$$

Prościej rozwiążemy to zadanie, stosując inne określenie pracy; a mianowicie:

$$L = \int (\text{rzut przesunięcia na kierunek siły}).\quad P = \int_0^{2r} dx \,.\, P = 2P.r;$$

uproszczenie obliczenia w tym razie wynika z tego, żeśmy dostatecznie wyzyskali tę właściwość zadania, że siła P jest niezmienną co do wartości i kierunku.

Zadanie to znajduje zastosowanie przy obliczeniu mocy robotnika, pracującego przy korbie, gdy dana jest jego siła parcia. Przyjmując np. parcie, wywierane przez robotnika na korbę $P = 15\ kg$, promień korby $r = 0{,}35\ m$, czas trwania jednego obrotu $= 2$ sek., obliczymy moc robotnika ze wzoru poprzedniego:



Rys. 124.

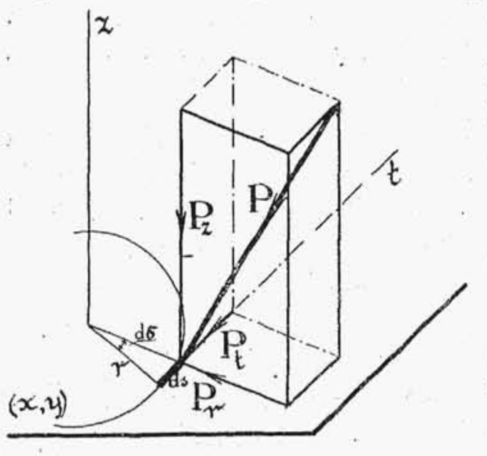
$$E = 2 \,.\, \frac{P \times 2r}{2} = 2 \,.\, \frac{15 \,.\, 2 \,.\, 0{,}35}{2} = 10{,}5\ kgm/\text{sek.} =$$

$$= \frac{10{,}5}{75} = 0{,}14\ km.$$

W rozwiązaniu tego zadania przyjęto, że robotnik w górnej połowie koła pcha korbę; — w dolnej zaś ciągnie i że kierunek parcia i ciągnienia pozostaje poziomym, rys. 124-ty.

96. Wyraz pracy siły podczas ruchu obrotowego. Jako szczególną postać toru, zakreślonego przez punkt ruchomy, przyjmiemy w danym razie koło. Obliczenie pracy siły, przyłożonej do tego punktu niczem się nie różni od ogólnych sposobów obliczenia pracy; ze względu jednakże na liczne zastosowania ruchów obrotowych wyrazimy pracę bezpośrednio przez moment siły i kąt obrotu.

Niech płaszczyzna (x, y) będzie płaszczyzną koła, rys. 125-ty, po której przesuwa się dany punkt, a prostopadła wystawiona w środku danego koła niech będzie osią z; do punktu ruchomego przykładamy siłę P, dowolnie skierowaną w przestrzeni. Ażeby obliczyć pracę tej siły, postępujemy podług wyżej przytoczonego określenia, robiąc rzut siły P na kierunek ds, t. j. na kierunek stycznej do toru; pracę cząstkową tej siły wyrazimy przez iloczyn z tego rzutu i z drogi ds; zatem:



Rys. 125.

$$dL = P_t \, . \, ds;$$

z rysunku 125-go wynika, że $ds = r d\sigma$, a po podstawieniu otrzymamy:

$$dL = P_t r \, . \, d\sigma.$$

Zważywszy, że wyraz $P_t r$ jest momentem siły P względem osi z, § 41-szy; wtedy otrzymamy szukany wzór pracy cząstkowej:

$$dL = M_z \, . \, d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

w którym M_z jest momentem siły P względem osi z.

Wzór ten wysłowimy:

praca cząstkowa siły, podczas obrotu punktu jej przyłożenia około osi, równa się iloczynowi z wartości momentu tej siły względem osi obrotu i wielkość kąta obrotu.

Gdy punkt ruchomy zakreśli kąt o skończonej wielkości, wtedy wartość pracy obliczymy ze wzoru:

$$L = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} M_z \, d\sigma; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

ażeby go scałkować, powinno być danem $M_z = f(\sigma)$.

W szczególnym przypadku gdy M_z jest stałą wielkością:

$$L = M_z \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma = M_z (\sigma_2 - \sigma_1);$$

praca więc podczas jednego obrotu, gdy $M_z =$ stałej, $L = M_z . 2\pi$.

Ten przypadek znajduje zastosowanie w praktyce np. przy przenoszeniu siły za pomocą napędu pasowego (transmisyi), za pomocą kół zębatych i t. p. W tych bowiem przykładach siła działa stycznie do obwodu i jest, po ustaleniu się ruchu silnika, stałą, Ponieważ w tym razie $M_z = Pr$, gdzie P jest siła obwodowa, t. j. styczna do koła, r — promień koła obrotowego, przeto pracę podczas jednego obrotu przedstawimy przez wzór $L = 2\pi r . P$.

Twierdzenie powyższe to może być zastosowane do rozwiązania zadania poprzedniego z korbą; a mianowicie: $dL = M . d\sigma$; $M = P . y = P . r . \sin \sigma$; t. j otrzymujemy wzór poprzedni.

97. Praca wypadkowej wielu sił, działających na jeden punkt wzdłuż jednej prostej. Gdy na punkt materyalny swobodny, działa w jednej prostej kilka sił P_1, P_2 i t. d., wtedy pracę każdej z tych sił wyrazimy wzorami

$$dL_1 = P_1 . ds_1; \quad dL_2 = P_2 . ds_2 \text{ i t. d.},$$

a pracę ich wypadkowej wzorem

$$dL_R = R . ds, \text{ w którym } R = \Sigma P_k.$$

Znajdźmy obecnie zależność pomiędzy wartościami prac sił składowych, a wartością pracy ich wypadkowej; w tym celu dodajmy algebraicznie wartości prac sił składowych, a otrzymamy wzór:

$$\Sigma dL_k = \Sigma (P_k . ds_k)$$

Ponieważ siły te działają na jeden punkt materyalny; wszystkie przeto przesunięcia s_k, jako przesunięcia jednego i tego samego punktu, są między sobą równe; a więc $ds_k = ds =$ stałej i wzór powyższy, po podstawieniu tej wartości, przekształci się na następujący:

$$\Sigma dL_k = ds . \Sigma P_k;$$

ponieważ $\Sigma P_k = R$, przeto napiszemy:

$$dL_R = \Sigma dL_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

i wygłosimy twierdzenie:

praca wypadkowej wielu sił, działających na jeden punkt wzdłuż **jednej prostej** i równa się sumie algebraicznej prac sił składowych.

Uogólnijmy powyższe rozpatrywanie i przyjmijmy, iż na dany punkt działa pewna ilość sił, dowolnie skierowanych w przestrzeni, i że punkt ruchomy przesunie się z miejsca C_1 do C_2, rys. 126-ty.

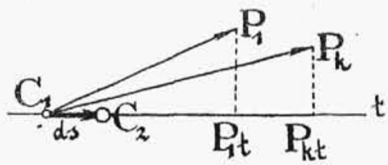
Praca cząstkowa dL_1 siły P_1 $dL_1 = P_{1t} . ds$, i wogóle praca cząstkowa siły P_k:

$$dL_k = P_{k,t} . ds;$$

sumując algebraicznie pracę wszystkich sił, otrzymamy:

$$\Sigma dL_k = \Sigma P_{k,t} . ds = ds . \Sigma P_{k,t} = ds . R_t .$$

Ostatni wyraz tych równań wyraża pracę siły wypadkowej; — którą oznaczymy przez dL_R; napiszeme przeto równanie:



Rys. 126.

$$aL_R = \Sigma dL_k; \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

i wypowiemy je:

jeżeli na dany punkt działa pewna ilość sił, dowolnie skierowanych w przestrzeni, to **praca siły wypadkowej wzdłuż nieskończenie małego przesunięcia równa się sumie algebraicznej prac sił składowych wzdłuż tegoż przesunięcia.**

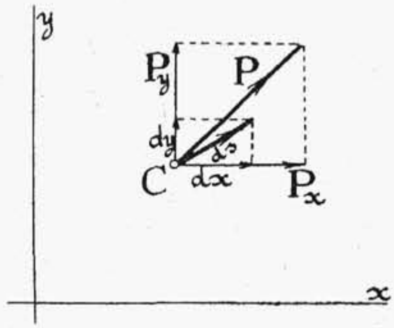
Porównajmy to twierdzenie z podobnem twierdzeniem, wyprowadzonem w § 25-tym, o momencie siły wypadkowej. Moment siły wypadkowej równa się sumie **wektorowej** momentów sił składowych; praca zaś siły wypadkowej równa się sumie **algebraicznej** prac sił składowych. Moment bowiem siły jest wielkością wektorową; praca zaś jest wielkością skalarną, została bowiem określona jako iloczyn skalarny.

98. Analityczny wzór pracy. Wyraźmy pracę składowemi siły i rzutami przesunięcia na osi x, y i z; t. j. pracę siły P wyrazimy wielkościami P_x, P_y, P_z, oraz dx, dy, dz. Rozpatrzmy przypadek, w którym siła, droga i osi spółrzędnych leżą w jednej płaszczyźnie. Przyjmujemy, że punkt przyłożenia siły P przesuwa się wzdłuż drogi ds, rys. 127-my; a zatem na zasadzie określenia pracy napiszemy

$$dL = P . ds . \cos (P, ds).$$

Przyjmując następnie siłę P jako wypadkową dwóch sił P_x i P_y, na które ją rozłożymy, napiszemy na zasadzie poprzedniego twierdzenia:

$$dL = P_x . \cos (P_x, ds) . ds + P_y . \cos (P_y, ds) . ds.$$



Rys. 127.

Ponieważ

$$ds . \cos (P_x, ds) = dx, \text{ oraz } ds . \cos (P_y, ds) = dy;$$

przeto, po podstawieniu w równanie poprzednie, otrzymamy wzór

$$dL = P_x . dx + P_y . dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Wzór ten bezpośrednio odczytać można z rys. 127-go, zastosowawszy określenie pracy jako iloczyn z rzutu przesunięcia na kierunek siły i z wartości siły; wtedy praca siły P_x równa się $P_x \cdot dx$; tak samo praca siły P_y równa się $P_y \cdot dy$; a praca siły P równa się sumie prac sił składowych.

Jeżeli osi spółrzędnych nie leżą w jednej płaszczyźnie z siłą i przesunięciem, to siłę P rozłożymy na siły równoległe do obranych osi x, y, z i napiszemy:

$$dL = P_x \cdot \cos(P_x, ds) \cdot ds + P_y \cdot \cos(P_y, ds) + P_z \cdot \cos(P_z, ds) \cdot ds;$$

skąd na zasadzie geometrycznych stosunków, lub bezpośrednio, jakieśmy wyżej uczynili, napiszemy:

$$dL = P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63)$$

Gdy na dany punkt materyalny działa pewna ilość sił, natenczas, w celu obliczenia ich pracy, wyznaczymy ich wypadkową i na zasadzie poprzedniego wzoru napiszemy:

$$dL = \Sigma(P_x \cdot dx) + \Sigma(P_y \cdot dy) + \Sigma(P_z \cdot dz) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (64)$$

Jeżeli praca odbywa się na pewnej skończonej długości toru, np. od punktu (x_1, y_1, z_1) do punktu (x_2, y_2, z_2); to praca siły P wyrazi się przez wzór:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} P_x . dx + \int_{y_1}^{y_2} P_y . dy + \int_{z_1}^{z_2} P_z \cdot dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65)$$

99. Praca siły wzdłuż przesunięcia złożonego. Jeżeli punkt przyłożenia siły zakreśla pewną linję łamaną o nieskończenie małych długościach; to suma prac wzdłuż przesunięć składowych równa się pracy tejże siły wzdłuż przesunięcia wypadkowego. Ażeby to dowieść wyobraźmy sobie, że punkt przyłożenia siły P przesuwa się kolejno wzdłuż odcinków $\overline{ds_1}$, $\overline{ds_2}$ i t. d. i wykonuje pracę podczas każdego przesunięcia dL_1, dL_2, i t. d. Jeżeli do obliczenia pracy zastosujemy określenie, że dL = iloczynowi z rzutu przesunięcia na kierunek siły i z wartości siły; to suma tych prac t. j. suma tych iloczynów = iloczynowi sumy rzutów przesunięć na kierunek siły i z siły; ta praca jest pracą siły wzdłuż przesunięcia wypadkowego. Wyrazimy to twierdzenie wzorem:

$$\Sigma[P \cdot ds_k \cdot \cos(P, ds_k)] = P \cdot ds \cdot \cos(P, ds); \text{ gdzie } \overline{ds} = \Sigma \overline{ds}_k \quad (66)$$

Twierdzenie to zastosować można do wyprowadzenia wzoru 64-go gdy dx, dy, dz uważać będziemy za przesunięcie złożone; a $\overline{ds}$ za przesunięcie wypadkowe.