121. Układy złożone. Dotychczas rozpatrywaliśmy niezmienne układy punktów, obecnie weźmiemy pod uwagę układy, złożone z pewnej ilości układów niezmiennych, t. j. złożone z pewnej ilości brył sztywnych; układ taki jest zmiennym, gdyż odległości punktów różnych brył, składających ten układ, mogą się zmieniać. Każden mechanizm, złożony z części, jest układem zmiennym, gdyż składa się on z kółek, suwaków, kierowników, osi i t. p. części, które mogą między sobą się przesuwać, zgodnie z ograniczeniami, stawianemi przez powierzchnie zetknięć. Przyjmijmy, że siły zewnętrzne, działające na taki układ, przyłożone są do różnych jego części i znajdźmy równania równowagi tych sił; przyjąwszy warunek, że siły połączeń, występujące pomiędzy oddzielnemi częściami układu, są normalne do powierzchni zetknięć; t. j. że, podczas ruchu tych części, siły tarcia nie występują. Przypadek ten sprowadzimy do poprzedniego, gdy bryła jest swobodną, przyjmując, że na każdą z tych brył działają siły zewnętrzne oraz siły odporowe pochodzące od brył, stykających się z każdą z nich. Ażeby siły, przyłożone do każdej bryły pozostawały w równowadze, suma ich prac wyobrażalnych powinna równać się zeru; — suma więc prac sił zewnętrznych i sił odporowych, podczas przesunięcia możliwego każdej bryły, równa się zeru; napiszemy zatem tyle równań równowagi, ile brył posiada układ; w każde z tych równań wchodzą prace sił zewnętrznych i prace sił połączeń, pochodzące od sąsiednich części układu; gdy te równania dodamy ze sobą i gdy zważymy, że suma prac każdych dwóch sił odporowych, zbiegających się w punkcie zetknięcia się części, równa się zeru, otrzymamy równanie, w które wchodzą wartości prac tylko sił zewnętrznych, których suma wobec ich równowagi równa się zeru; a zatem wypowiemy twierdzenie:

jeżeli siły, działające na złożony układ brył, są w równowadze i suma prac sił odporowych, podczas przesunięcia możliwego, równa się zeru, to praca ich, podczas przesunięcia możliwego, równa się zeru.

Twierdzenia odwrotnego dowiedziemy, wyszedłszy z zasady równowartości pracy i energii kinetycznej; gdy bowiem sumy prac sił zewnętrznych oraz sił odporowych równe są zeru, to żadna część mechanizmu nie może nabyć energii kinetycznej, t. j. nie może zmienić stanu swego ruchu; i gdy była w spoczynku, pozostanie w nim nadal, pomimo działania sił, których suma prac równa się zeru. Wniosek ten wypowiemy w sposób następujący:

do wyrażenia równowagi sił, przyłożonych do układu brył, pomiędzy któremi występują tylko siły połączeń, których suma prac podczas przesunięcia możliwego równa się zeru, jest niezbędnym i wystarczającym warunkiem, ażeby suma ich prac możliwych równała się zeru.

122. Przykłady obliczenia równowagi sił zewnętrznych. 1) Przykład. Na końcach sznura, przerzuconego przez wał nieruchomy, zawieszono ciężary Q_1 i Q_2; wyznaczyć warunki ich równowagi, przyjmując, iż pomiędzy sznurem a wałem niema tarcia, lub jest tak małe, że go nie uwzględniamy; rys. 141-szy.

Rozwiązanie. Sznur opiera się na wale i wywołuje siły odporowe, które są prostopadłe do powierzchni zetknięcia, pomiędzy sznurem a wałem. Nadajmy sznurowi przesunięcie zgodne z warunkami zadania, i w tym celu pociągnijmy np. jego koniec prawy ku dołowi, wtedy punkt przyłożenia siły A_1 podniesie się do punktu A_1', punkt zaś przyłożenia siły Q_2 opuści się do punktu A_2'. Jeżeli siły Q_1 i Q_2 są w równowadze, to suma ich prac powinna równać się zeru; co wyrazimy wzorem:

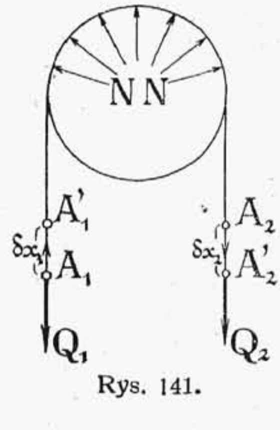
$$-Q_1 . \delta x_1 + Q_2 . \delta x_2 + \Sigma \left(N . \delta n\right) = 0.$$

Ponieważ siły N są, podług założenia, prostopadłe do przesunięcia sznura, przeto $\Sigma \left(N . \delta n\right) = 0$; a po podstawieniu otrzymamy:

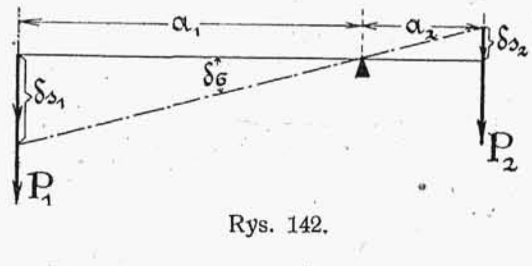
$$-Q_1 . \delta x_1 + Q_2 . \delta x_2 = 0.$$

Ponieważ sznur jest układem niezmiennych punktów (w kierunku rozciągania), przeto $\delta x_1 = \delta x_2$; po podstawieniu więc tych wartości w powyższe równanie otrzymamy:

$$(-Q_1 + Q_2) . \delta x_1 = 0; \text{ stąd } Q_1 = Q_2;$$



Rys. 141.



Rys. 142.

co zresztą było do przewidzenia; przytoczyliśmy ten przykład jedynie w celu stwierdzenia wyłożonej teoryi.

2) Przykład. Pręt sztywny, podparty w jednym punkcie, około którego może się obracać w płaszczyźnie pionowej, obciążony jest dwiema siłami, jak wskazuje rys. 142-gi znaleźć warunek równowagi tych sił.

W punkcie podparcia występuje siła odporowa; ażeby nie wprowadzać jej do rachunku, nadamy danemu mechanizmowi ruch zgodny z warunkami zadania t. j. ruch możliwy, a praca tej siły będzie równa zeru. Ruchem takim jest ruch obrotowy pręta około punktu podparcia.

Punkty przyłożenia sił P_1 i P_2 zakreślą w danym razie cząstki łuków, które można uważać za cząstki prostej prostopadłej do promieni; sumę prac wyrazimy zatem wzorem

$$P_1 \,.\, \delta s_1 - P_2 \,.\, \delta s_2 = 0$$

a ponieważ:

$$\delta s_1 = a_1 \,.\, \delta\sigma\,; \quad \delta s_2 = a_2 \,.\, \delta\sigma\,;$$

przeto, po podstawieniu tych wartości w równanie pracy, otrzymamy $P_1 \,.\, a_1 \,.\, \delta\sigma - P_2 \,.\, a_2 \,.\, \delta\sigma = 0$; skąd, po skróceniu przez $\delta\sigma$, otrzymamy:

$$P_1 \,.\, a_1 - P_2 \,.\, a_2 = 0.$$

Jest to równanie, które napisać można również na podstawie twierdzenia o równowadze momentów.

3) **Przykład.** Dźwignica składa się z dwóch krążków, stałego i przesuwnego, jak wskazuje rys. 144-ty; wyznaczyć warunki równowagi ciężarów P i Q, z których jeden przyczepiony jest do krążka przesuwnego, drugi do końca liny. Mechanizm ten jest przykładem układu złożonego, odpowiadającego warunkom, opisanym w § 120-tym. Nadajmy zatem całemu mechanizmowi przesunięcie możliwe i zestawmy sumę prac sił zewnętrznych, jaką wykonują one podczas tego przesunięcia i przyrównajmy tę sumę do zera; a otrzymamy szukaną zależność pomiędzy P i Q. Sumę prac wyrazimy wzorem

$$-Q \,.\, \delta q + P \,.\, \delta p = 0.$$

Na zasadzie nierozciągliwości nici i geometrycznych stosunków, zachodzi zależność:

$$\tfrac{1}{2}\,\delta p = \delta q \,.\, \cos\alpha\,;$$

po podstawieniu tej wartości w równanie pracy, otrzymamy:

$$-Q \,.\, \delta q + P \,.\, 2 \,.\, \delta q \,.\, \cos\alpha = 0; \quad \text{stąd} \quad P = \frac{Q}{2 \,.\, \cos\alpha}.$$

Dla szczególnych przypadków

1) gdy $2\alpha = 0$; wtedy $P = \frac{1}{2}\,Q$;

2) gdy $2\alpha = \pi$; wtedy $P = \frac{Q}{2\cos\frac{\pi}{2}} = \infty$.

4) **Przykład:** Obliczyć stosunek siły nadanej do siły użytkowej wciągu różnicowego Westona, rys. 145-ty. Siłę ciągnącą P nazwiemy siłą nadaną, siłę zaś podnoszoną Q siłą użytkową.

Równanie pracy możliwej podczas przesunięcia siły P ku dołowi napiszemy

$$P \,.\, \delta p - Q \,.\, \delta q = 0.$$

Zależność geometryczną pomiędzy δp i δq znajdziemy, zauważywszy, że

$$\delta p = r_1 \,.\, \delta\sigma;$$

gdzie $\delta\sigma$ oznacza kąt nieskończenie mały, o który krążek o promieniu r_1 obróci się podczas przesunięcia możliwego. Wysokość podniesienia δq punktu A, byłaby równą $\frac{1}{2}\,\delta p$, gdyby krążek mały r_2 nie obracał się, ponieważ zaś on się obraca i odwija nić, przeto powoduje opuszczenia się punktu A o $\frac{1}{2}\, r_2 \,\delta\sigma$; a więc całkowite podniesienie

$$\delta q = \tfrac{1}{2}\,\delta p - \tfrac{1}{2}\, r_2 \,.\, \delta\sigma,$$

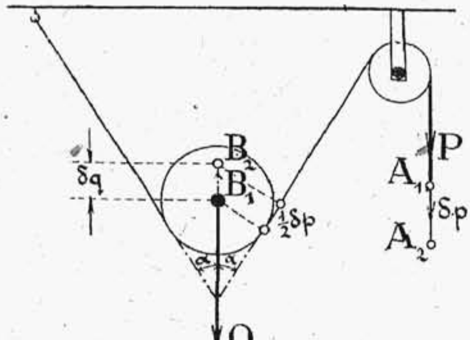
po podstawieniu wartości δp i δq w równanie pracy, otrzymamy

$$P r_1 \,.\, \delta\sigma - Q\, \tfrac{1}{2}\,(r_1 - r_2)\, \delta\sigma = 0; \quad \text{skąd}$$

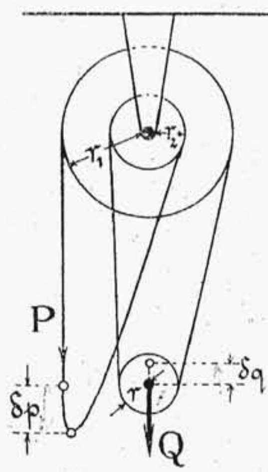
$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{r_1 - r_2}{r_1}.$$

5) **Przykład.** Obliczyć zależność sił Q i F w przykładzie, opisanym w § 110-tym, gdy pręt pozostaje w spoczynku. Jeżeli dany pręt ma pozostawać w spoczynku, to siły powinny być w równowadze; równowagę tę wyrazimy równaniem pracy możliwej, rys. 141-szy

$$Q\, \delta x - T\, \delta s_B = 0.$$



Rys. 144.



Rys. 145.

Pomiędzy przesunięciami δx i δs_B jest jednakże pewna zależność geometryczna, którą znajdziemy w następujący sposób; oznaczmy przez y

odległość punktu przyłożenia siły Q od osi poziomej, rys. 139 ty i przez t odległość punktu przyłożenia sin T od O; wtedy: $y^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 = (A_1B_1)^2$;

różniczkujemy to równanie, i otrzymujemy:

$$y . \delta y + \tfrac{1}{4} t . \delta t = 0;$$

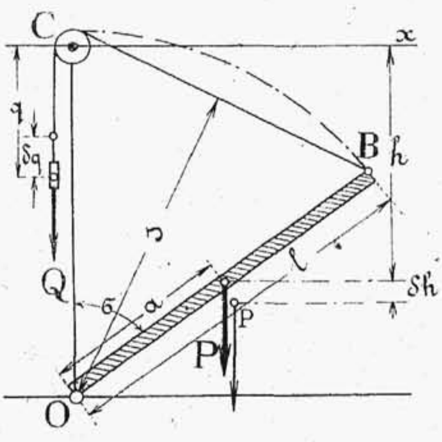
a ponieważ $\delta y = - \delta x$, $\delta s_B = \delta t$, przeto, po podstawieniu tych wartości, otrzymamy związek geometryczny, pomiędzy przesunięciami

$$-y . \delta x + \tfrac{1}{4} t . \delta s_B = 0.$$

Po wyrugowaniu z tego równania i z równania pracy jednego z przesunięć otrzymamy

$$T = \tfrac{1}{4} Q . \frac{t}{y}; \text{ lub inaczej } \frac{T}{Q} = \tfrac{1}{2} \, ctg \alpha.$$

Jest to wynik zgodny z rozwiązaniem zadania 2-go § 36-ego; gdy podstawimy w nie $\beta = 0$.



Rys. 146.

6) **Przykład.** Pręt OB, rys. 146-ty o długości l, może obracać się w płaszczyźnie pionowej około osi, przechodzącej przez koniec jego O, rys. 146-ty; do drugiego jego końca przymocowano sznurek i przerzucono go przez krążek C, mogący się obracać; — do końca tego sznurka przyczepiony jest ciężar Q; do pręta zaś siła P w odległości a od osi obrotu; obliczyć wielkość kąta σ, przy którym pręt pozostaje w spoczynku.

W punktach O i C powstają siły odporowe, których praca, podczas przesunięcia możliwego, równa się zeru, napiszemy zatem wyraz pracy możliwej, gdy nadamy prętowi nieskończenie mały obrót o kąt $\delta\sigma$; wtedy punkty przyłożenia sił F i Q przesuną się o δh i δq, i otrzymamy następujące równanie

$$P . \delta h - Q . \delta q = 0;$$

Pomiędzy przesunięciami δh i δq zachodzi geometryczna zależność, którą odczytamy z rysunku 146-go

$$\delta q = \delta (CB);$$

t. j. podniesienie δq jest równe przyrostowi długości sznura CB; następnie odczytamy z trójkąta COB

$\frac{1}{2} CB = l . \sin \frac{\sigma}{2}$; skąd $CB = 2l . \sin \frac{\sigma}{2}$; a więc

$$\delta q = \delta\,(CB) = 2l\tfrac{1}{2} . \cos . \frac{\sigma}{2} . \delta\sigma = l \cos . \frac{\sigma}{2} . \delta\sigma.$$

Wreszcie

$h = (OC) - a . \cos \sigma$; skąd po zróżniczkowaniu

$\delta h = + a . \sin \sigma . \delta\sigma$, i po podstawieniu w równanie pracy otrzymamy

$$Pa . \sin \sigma\, \delta\sigma - Ql . \cos \frac{\sigma}{2} . \delta\sigma = 0;$$ skąd

$Pa \sin \sigma - Ql \cos \frac{\sigma}{2} = 0$; rozłóżmy funkcyę kąta σ na funkcyę kąta $\frac{\sigma}{2}$, a otrzymamy

$$2 . Pa \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\sigma}{2} - Ql \cos \frac{\sigma}{2} = 0;$$ z czego wynika

1) $\cos \frac{\sigma}{2} = 0$; więc $\sigma = 180^0$,

2) $2 Pa \sin \frac{\sigma}{2} - Ql = 0$, skąd

$$\sin \frac{\sigma}{2} = \frac{Q}{P} \frac{l}{2a}.$$

Czytelnik powinien zdać sobie sprawę z odpowiedzi, gdy $\sigma = 180^0$.

7) **Przykład.** Obliczyć stosunek siły nadanej do siły użytkowej w mechanizmie, zwanym przystawką, rys. 147-my, (porów. „Technik" str. 676). Przyjąwszy na zasadzie omówienia w § 118-ym, że suma prac sił połączeń równa się zeru, napiszemy równanie pracy możliwej, gdy nadamy korbie nieskończenie mały obrót; wtedy wzór pracy możliwej

$$Pa . \delta\sigma_1 - Q . \delta q = 0;$$

gdzie $\delta\sigma_1$ oznacza kąt obrotu korby, zaś δq przesunięcie ciężaru Q podczas tego obrotu. Zależność geometryczną pomiędzy $\delta\sigma_1$ i δq_2 znajdziemy z następujących stosunków

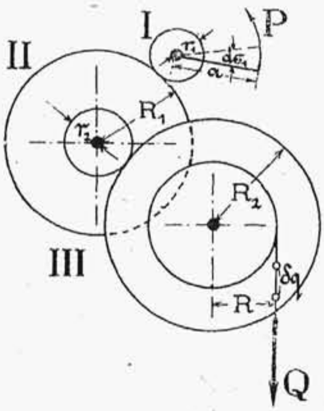
1) $r_1 . \delta\sigma_1 = R_1 . \delta\sigma_2$,

gdyż podczas obrotu długości łuków, dwóch toczących się po sobie kół, są wzajemnie równe. Podczas tego obrotu krążek o promieniu r_2

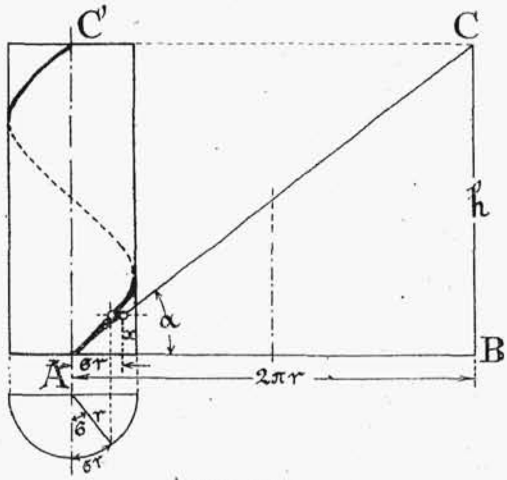
obróci się również o kąt $\delta\sigma_2$, a wtedy zachodzi taki sam stosunek geometryczny

$$2)\ r_2 . \delta\sigma_2 = R_2\delta\sigma_3, \text{ i w tenże sposób } 3)\ R . \delta\sigma_3 = \delta q.$$

Z tych trzech równań wyrugujemy $\delta\sigma_2$ i $\delta\sigma_3$ i otrzymamy jedno równanie, wykazujące zależność pomiędzy $\delta\sigma_1$ i δq.



Rys. 147.



Rys. 148.

Rugowanie to uskutecznić możemy przez wzajemne przemnożenie powyższych równań i otrzymamy

$$a . r_2 . R . \delta\sigma_1 = R_1 . R_2 \delta q.$$

Równanie to łącznie z równaniem pracy da wzór

$$Pa . \delta\sigma_1 - \frac{Qr_1r_2R}{R_1R_2} . \delta\sigma_1 = 0; \text{ skąd po skróceniu}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_1r_2R}{R_1R_2a}.$$

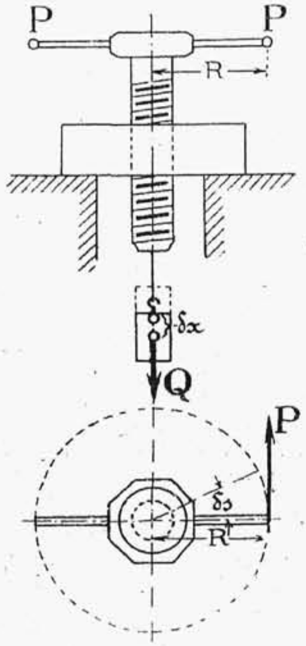
8) Przykład. Śruba. Jeżeli na walec prosty o promieniu r nawiniemy trójkąt prostokątny w ten sposób, ażeby jedna przyprostokątna pokryła się z obwodem podstawy walca, to przeciwprostokątna utworzy na walcu linię śrubową rys. 148-my. Kąt α, utworzony przez przeciwprostokątną i przyprostokątną, nazwano kątem pochylenia linii śrubowej.

Gdy $AB = 2\pi r$ wtedy, po nawinięciu trójkąta na walec, punkt C będzie się znajdował na tworzącej walca, która przechodzi przez punkt A, t. j. znajduje się w punkcie C' walca; odcinek: $AC' = BC$, oznaczymy przez h i nazwiemy go skokiem linii śrubowej. Łatwo zauważyć stosunek

$$tg\alpha = \frac{h}{2\pi r} = \frac{x}{\sigma r};$$

lub inaczej $\frac{x}{\sigma} = \frac{h}{2\pi}$; jeżeli zaś kąt σ jest nieskończenie mały, to otrzymamy wzór $\frac{dx}{d\sigma} = \frac{h}{2\pi}$; z którego często będziemy korzystali.

Jeżeli pewien prostokąt lub trójkąt posuwać będziemy wzdłuż linii śrubowej w ten sposób, że jeden jego bok będzie ciągle przystawał do walca, a płaszczyzna jego będzie stale przechodziła przez oś walca, to prostokąt ten (czy też trójkąt) zakreśli w przestrzeni pewną powierzchnię, którą nazwiemy gwintem prostokątnym (lub trójkątnym); inaczej płaskim (lub ostrym). Ażeby skorzystać z takiej śruby, jako części maszyny, należy zastosować do niej naśrubek t. j. bryłę wydrążoną w ten sposób, ażeby otaczała ona walec z gwintem, dając możność naśrubkowi obracać się około osi śruby, lub też śrubie w naśrubku.



Rys. 149.

Jeżeli naśrubek unieruchomimy, to możemy obracać śrubę; obróciwszy ją o kąt 2π, każdy jej punkt przesunie się w kierunku osi śruby o długość h; jeżeli zaś śrubę obrócimy o kąt σ, to każdy punkt śruby przesunie się w kierunku osi śruby o długość x, którą obliczamy ze stosunku:

$\frac{x}{\sigma} = \frac{h}{2\pi}$; gdy zaś kąt obrotu jest nieskończenie mały, wtedy: $\frac{dx}{d\sigma} = \frac{h}{2\pi}$.

Obliczyć stosunek siły nadanej P do użytkowej Q, gdy siła P przyłożona jest do ramienia, obracającego śrubę w naśrubku nieruchomym; a siła Q działa w kierunku osi śruby; rys. 149-ty. Obróciwszy śrubę o nieskończenie mały kąt $\delta\sigma$, napiszemy równanie pracy

$$PR.\delta\sigma - Q.\,\delta x = 0.$$

Z poprzednich rozpatrywań mamy zależność $\delta x = \frac{h}{2\pi}\,\delta\sigma$; po podstawieniu tej wartości w równanie pracy i po skróceniu otrzymamy

$$PR = \frac{h}{2\pi} Q;\ \text{skąd}\ \frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi R}.$$

9) **Przykład.** Obliczyć stosunek siły nadanej P do siły użytkowej Q w ciągu ślimakowego rys. 150-ty.

Obróćmy korbę o nieskończeniu mały kąt $\delta\sigma$ i napiszmy równanie pracy

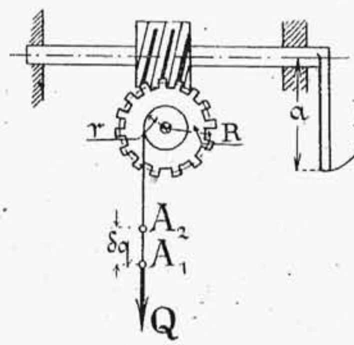
$$Pa \,.\, \delta\sigma - Q \,.\, \delta q = 0.$$

Szukajmy teraz geometrycznej zależności pomiędzy $\delta\sigma$ i δq. Ponieważ śruba w danym razie nie może się przesunąć w kierunku swej osi, przeto obróci ona wał na długość łuku $\delta x = \frac{h}{2\pi}\delta\sigma$; podczas tego obrotu wał obróci się o kąt $\delta\sigma_1$, a ponieważ długość δx równa się długości cząski łuku, na jaką obróci się wał, przeto mamy zależność

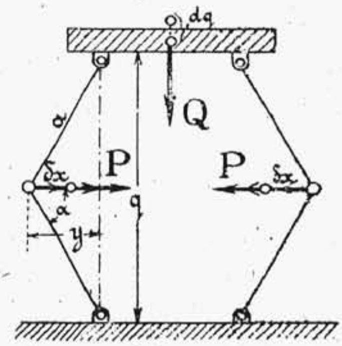
$$R\delta\sigma_1 = \delta x; \text{ oraz } \delta q = r\delta\sigma_1;$$

z tych równań wyrugujemy $\delta\sigma_1$ i $\delta\sigma$, mnożąc je wzajemnie, i otrzymamy

$$\delta q \,.\, R = \frac{h}{2\pi}\delta\sigma \,.\, r;$$



Rys. 150.



Rys. 151.

po postawieniu δq w równanie pracy i po skróceniu będzie ostatecznie

$$Pa\delta\sigma - Q\frac{hr}{2\pi R}\delta\sigma = 0; \text{ skąd}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{hr}{2\pi Ra}$$

10) **Przykład.** Obliczyć stosunek $\frac{P}{Q}$, gdy dany jest kąt α w mechanizmie, przedstawionym na rys. 151-szym.

Równanie pracy możliwej, podczas wzajemnego zbliżenia punktów przyłożenia sił P, jest następujące:

$$2P \,.\, \delta x - Q \,.\, \delta q = 0.$$

Szukajmy następnie zależności pomiędzy δx i δq; — z rysunku 151-ego odczytamy:

$$y = a \,.\, \cos \alpha; \text{ skąd } \delta y = -a \sin \alpha \,.\, \delta\alpha.$$

Ponieważ $\delta x = -\delta y$, przeto

$$\delta x = a \sin \alpha \,.\, \delta\alpha.$$

Następnie odczytamy:

$$q = 2\,a \,.\, \sin \alpha; \text{ skąd } \delta q = 2\,a \cos \alpha \,.\, \delta\alpha;$$

po podstawieniu wartości δx i δq w równanie pracy, otrzymamy

$$2\,Pa \sin \alpha \,.\, \delta\alpha - 2\,Qa \cos \alpha \,.\, \delta\alpha = 0; \text{ skąd.}$$

$$P \sin \alpha = Q \cos \alpha; \text{ lub}$$

$$P = Q \operatorname{cotg} \alpha.$$

11) **Przykład.** Pomost AB, rys. 152-gi, obraca się około osi poziomej, przechodzącej przez jeden jego bok A; — do przeciwległego boku B przymocowano koniec łańcucha, przerzuconego przez krążek obrotowy, którego środek leży prostopadle nad osią obrotu; — do drugiego zaś końca tego łańcucha przywieszono ciężar Q; który ma możność posuwania się bez tarcia po pewnym torze; wyznaczyć postać tego toru, która pozwoli utrzymać się ciężarowi Q w spoczynku w każdem położeniu pomostu, jeśli dane są wielkości sił P i Q i odległość a siły P.

Jeżeli zrobimy przesunięcie możliwe, przesuwając ciężar Q ku dołowi, to otrzymamy wzór pracy

$$Q \,.\, dq - P \,.\, dp = 0.$$

Przesunięcia dp i dq wyrazimy następnie w spółrzędnych punktu przyłożenia siły Q i w tym celu obierzmy układ biegunowy spółrzędnych z początkiem w O i osią OA; oznaczmy następnie przez ρ promień wodzący i przez σ kąt biegunowy; a z rysunku odczytamy

$$p = a \cos \alpha; \text{ skąd } dp = -a \sin \alpha d\alpha; \text{ następnie:}$$

$$q = \rho \cos \sigma; \text{ skąd } dp = d\,(\rho \cos \sigma);$$

po podstawieniu tych wartości w równanie pracy, otrzymamy:

$$Qd\,(\rho \cos \sigma) + Pa \sin \alpha d\alpha = 0;$$

w równaniu tem oprócz zmiennych ρ i σ jest jeszcze zmienna α, którą należy wyrazić przez zmienne ρ i σ; zależność między temi zmiennemi odczytamy z trójkąta OAB. Gdy oznaczymy długość całego łańcucha przez l, wtedy $OB = (l - \rho)$; następnie oznaczywszy OA przez h, AB przez s, napiszemy:

$$(l - \rho)^2 = s^2 + h^2 - 2\,hs \cos \alpha.$$

Ponieważ potrzebną nam jest wielkość $d\alpha$, przeto zróżniczkujemy to równanie podług zmiennych ρ i α i otrzymamy

$$-2\,(l - \rho)\, d\rho = 2\,hs \sin \alpha d\alpha;$$

skąd rugujemy wartość sin $\sigma d\alpha$, a po podstawieniu jej w przekształcone równanie pracy otrzymamy

$$Q d(\rho \cos \sigma) - P \frac{l-\rho}{hs} a d\rho = 0;$$

jest to równanie różniczkowe szukanego toru, zawiera ono dwie tylko zmienne ρ i σ; całkujemy więc je i otrzymamy równanie toru w skończonej postaci w spółrzędnych biegunowych

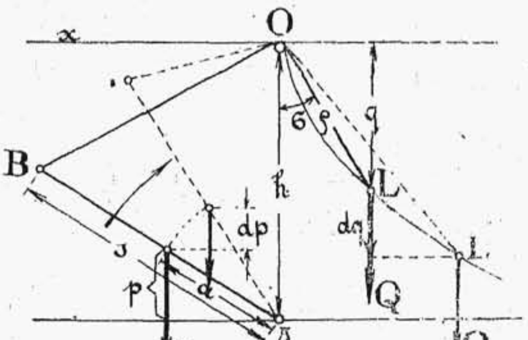
$$Q\rho \cos \sigma + P \frac{a}{hs} \cdot \frac{1}{2} (l-\rho)^2 + C = 0.$$

Stałą C obliczymy, stawiając warunek, że np. dla $\rho = 0$, będzie $\sigma = 0$; po podstawieniu tych wartości, otrzymamy

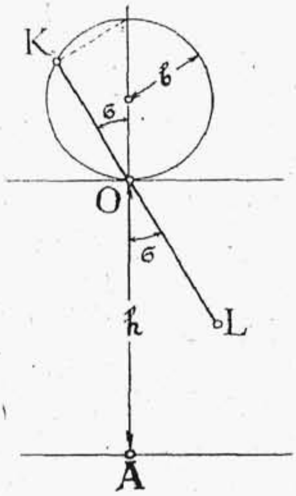
$$P \frac{a}{hs} \cdot \frac{1}{2} l^2 + C = 0; \text{ skąd } C = -\frac{1}{2} P \frac{a}{hs} l^2; \text{ a więc równanie toru}$$

$$Q \rho \cos \sigma + \frac{1}{2} P \frac{a \cdot (l-\rho)^2}{hs} - \frac{1}{2} P \frac{a}{hs} l^2 = 0;$$

po rozwinięciu dwumianu i skróceniu przez ρ, otrzymamy wzór



Rys. 152.



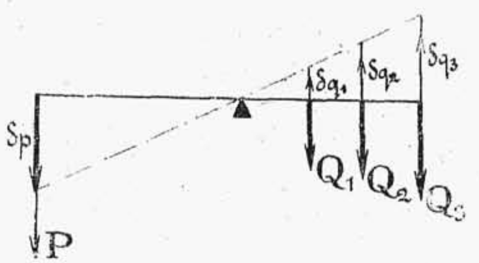
Rys. 153.

$$Q \cos \sigma - P \frac{al}{hs} + \frac{1}{2} P \frac{a}{hs} \rho = 0; \text{ skąd ostatecznie}$$

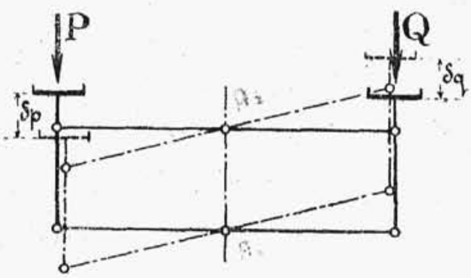
$$\rho = 2l - 2 \frac{Q}{P} \cdot \frac{hs}{a} \cos \sigma.$$

Z równania tego można obliczyć spółrzędne biegunowe punktów szukanego toru. Można również wykreślić ten tor sposobem geometrycznym, jak następuje: przyjmijmy wyraz $\frac{Q}{P} \cdot \frac{hs}{a} = b$, a wtedy: $\rho = 2l - 2b \cos\sigma$; gdy następnie, rys. 153-ci, z punktu, obranego na pionowej AO, zakreślimy koło przez punkt O promieniem równym b, wtedy każda cięciwa $OK = 2b \cos\sigma$; gdy następnie na tej cięciwie odetniemy $KL = 2l$, wtedy $OL = \rho = 2l - 2b \cos\sigma$; w ten sposób wyznaczone punkty L przedstawią szukaną krzywą.

12) **Przykład. Wagi.** Wagi służą do wzajemnego porównywania ciężerów brył materyalnych, umieszczonych w polu ciążenia. Do tego celu użyć można, najpospolitszy przyrząd, złożony z pręta, podpartego w połowie swej długości; ciężary, umieszczone na końcach pręta, są między sobą równe, jeżeli prąt pozostaje w spoczynku. Warunkiem prawidłowego działania takich wag jest, pomiędzy innymi, warunek, ażeby ciała, których ciężary porównujemy między sobą, były zawieszone w ściśle oznaczonych miejscach takiego pręta; gdyż ze zmianą położenia zmienia się stosunek ramion. Trudność praktycznego wykonania tego warunku (t. j. stałości punktów przyczepienia ciężarów) zmusiła mechanikę stoso-



Rys. 154.



Rys. 155.

waną do zbudowania wagi, w której położenie ciężaru nie wpływa na równowagę. Jasnem jest, że do tych celów nie mogą służyć wagi, polegające na zasadzie zwykłej dźwigni, gdyż przesuwając np. bryłę Q wzdłuż długości ramienia otrzymamy różne ciężary Q, które będą w równowadze ze stałym porównawczym ciężarem P.

Stosując do obliczenia dźwigni zasadę pracy możliwej, otrzymamy dla powyższego przykładu równania

$$P \cdot \delta p - Q_1 \cdot \delta q_1 = 0; \text{ lub } P \cdot \delta p - Q_2 \delta q_2 = 0 \text{ i t. d.}$$

dla różnych miejsc przyczepienia ciężaru Q, rys. 154-ty. Jeżeli siłę P przyjmiemy za stałą wielkość, jako porównawczą; Q jako ciężar niezmienny bryły, który chcemy wyznaczyć w stosunku do ciężaru P, to na zasadzie równania pracy powinno być $Q\delta p =$ stałej; a więc wielkość

δq powinna być również stałą; pomost więc czy też talerz, na który kładziemy ciężar Q, powinien się podnosić przy ruchu wagi w ten sposób, ażeby $\delta q =$ stałej; a wtedy iloczyn $Q . \delta q$ będzie niezależnym od położenia ciężaru na pomoście. Ażeby to miało miejsce, pomost przy podnoszeniu powinien pozostawać zawsze równoległym do swego poprzedniego położenia. Na tej zasadzie wykonano wiele konstrukcyi; przytoczymy jedną z nich, tak zwaną wagę Roberval'a.

Prostokąt, utworzony z prętów materyalnych, połączonych przegubowo, rys. 155-ty, oparty jest w środkach boków poziomych na punktach stałych, około których cały prostokąt może się obracać. Podczas obrotu około tych punktów, prostokąt zamieni się w równoległobok; poziome jego bowiem boki przyjmą położenie pochyłe, pionowe zaś pozostaną pionowymi, gdyż pozostaną równoległymi do prostej, łączącej obydwa punkty obrotu, która jest pionową. Przesunięcia możliwe, w ten sposób zbudowanego pomostu, są wzajemnie równe dla wszystkich jego puktów. Praca więc możliwa ciężarów, umieszczonych na takiej wadze, wyrazi się wzorem

$$P . \delta p - Q . \delta q = 0; \text{ skąd } \frac{Q}{P} = \frac{\delta p}{\delta q} = \text{stałej;}$$

a jest w danym przykładzie $= 1$; — dla wszystkich punktów, w których umieścimy ciężary P i Q oraz dla wszystkich przesunięć możliwych.

123. Obliczenie naprężeń w prętach kratownicy dostatecznie sztywnej. W § 40-ym określiliśmy jako kratownicę **dostatecznie** sztywną taką kratownicę, która po usunięciu jednego z prętów stanie się zmienną: t. j. stanie się mechanizmem w rodzaju, przytoczonym w przykładach tego działu; właściwość ta pozwala zastosować do obliczenia naprężenia w dowolnym jej pręcie twierdzenie o pracy możliwej. Postępowanie w danym razie jest nast.: pręt, którego naprężenie chcemy obliczyć, usuwamy z danej kratownicy; kratownica przez to staje się zmienną: ażeby jednakże niezmienić równowagi układu przez usunięcie pręta, wyobrażamy sobie przyłożone w węzłach tego pręta i wzdłuż jego osi dwie siły wzajemnie równe ze znakami przeciwnymi $\pm S$, które zastępują działanie statyczne pręta w kratownicy; w ten sposób otrzymujemy układ zmienny, na który działają siły zewnętrzne i dwie siły wzdłuż usuniętego pręta; nadajmy następnie prętom tego układu — po umocowaniu jednego z nich — pewne przesunięcie; wtedy każdy z węzłów wykona ściśle określone przesunięcie, a siły zewnętrzne i siły, przyłożone w pręcie usuniętym, wykonają prace możliwe.

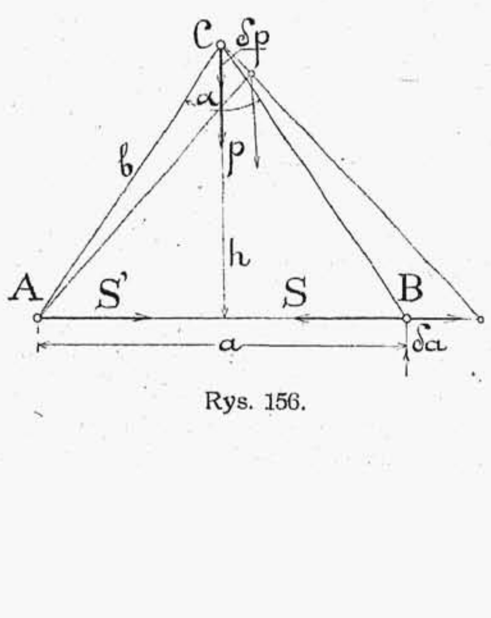
Równanie równowagi jest nast.

$$\Sigma (P_k . \delta p_k) - S . \delta l = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

gdzie δp_k oznaczają, jak poprzednio, rzuty przesunięć punktów przyłożenia sił zewnętrznych na kierunki tych sił; a δl przyrost odległości pomiędzy węzłami pręta usuniętego, jaki powstał wskutek przesunięcia możliwego. Trudności może sprawić obliczenie związków pomiędzy δp_k i δl; zważywszy jednakże, że wielkości te są w wielu przykładach od siebie zależne; są one przytem jak w danym i podobnych przykładach od siebie w ten sposób zależne, że obrawszy dowolną jedną z nich, wszystkie inne będą już ściśle określone (założenie to rozpatrzymy ogólniej w kinematyce); w równaniu przeto pracy jest tylko jedno przesunięcie **niezależne**, wszystkie inne zaś są funkcyami określonemi tego jednego przesunięcia. Funkcye te możemy wyobrazić sobie rozwinięte w szeregi Taylor'a podług zmiennej obranego dowolnie przesunięcia; a ponieważ wartości przesunięć przyjmujemy nieskończenie małemi, przeto drugie ich potęgi mogą być pominięte, otrzymamy przeto w wyniku tego postępowania, że każde przesunięcie δp_k jak również przesunięcie δl jest linijną funkcyą obranego dowolnie przesunięcia; wartość przeto tej niezależnej zmiennej, jako wspólna wszystkim dodajnikom sumy może być wyniesioną przed cały wyraz tego równania; a wskutek tego wielkości niezależnie zmienne, oznaczone symbolami δ muszą być zastąpione wielkościami przesunięć rzeczywistych, jakie węzły danej kratownicy wykonają i równanie przekształci się wskutek tego na następujące:

$$\Sigma(P_k \,.\, dp_k) - S \,.\, dl = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

skąd można obliczyć S. Ażeby to obliczenie wykonać, należy obliczyć przesunięcia punktów przyłożenia sił P_k i siły S, jakie powstaną po nadaniu danemu mechanizmowi dowolnego przesunięcia. Dla zobrazowania tego postępowania przytoczymy jeden z prostszych przykładów. Posiadamy trójkąt równoramienny, zbudowany z trzech prętów, połączonych z sobą przegubami rys. 156-ty; trójkąt ten jednym wierzchołkiem połączony jest przygubami z podporą A, drugim zaś swobodnie opiera się na drugiej podporze B; na trzeci wierzchołek C działa siła P; obliczyć naprężenie np. w pręcie AB. Trójkąt ten jest układem sztywnym; ażeby go zrobić zmiennym, przetniemy pręt AB i zamiast niego przyłożymy dwie siły $S=S'$ i otrzymamy w ten sposób układ zmienny; w celu obliczenia naprężenia S nadamy mu nieskończenie mały możliwy ruch przez posunięcie wierzchołka B poziomo, wtedy punkt przyłożenia siły P przesunie



Rys. 156.

się a siły P i S wykonają prace, których suma wskutek ich równowagi $= 0$; skąd mamy równanie

$$P . \delta p - S . \delta a = 0;$$

przesunięcie δp i δa możemy wyrazić jedną niezależną zmienną np. α w nast. sposób

$$a = 2\, b . \sin\frac{\alpha}{2}; \text{ a więc } \delta a = b . \cos\frac{\alpha}{2} . \delta\alpha;$$

$$h = b . \cos\frac{\alpha}{2}; \; \delta h = - \delta p = - \frac{b}{2} \sin\frac{\alpha}{2} . \delta\alpha;$$

a po podstawieniu w równanie pracy otrzymamy

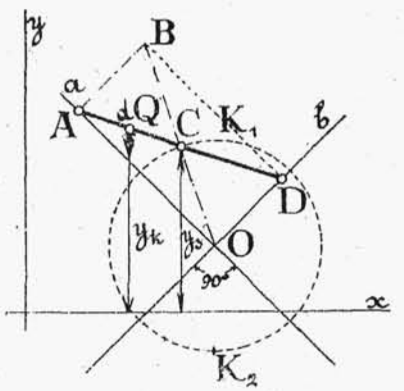
$$S = \frac{P}{2}\, tg\, \frac{\alpha}{2}$$

W podobny sposób można obliczyć naprężenia S w innych prętach i siły odporowe A i B.

Obliczenie rachunkowe przesunięć przedstawia często dosyć znaczne trudności natury formalnej; zastosowanie jednakże sposobów wykreślnych, jakie daje kinematyka czyni zasadę pracy możliwej ważnym narzędziem obliczeń dźwigarów; sposoby tego postępowania podamy w Kinematyce w dziale o prędkościach prostopadłych.

3. Rodzaje równowagi.

124. Równowaga sił ciężkości, działających na bryłę nieswobodną. Za przykład tej grupy zadań służyć może następujące zadanie. W płaszczyźnie pionowej dane są dwie osi wzajemnie prostopadłe, nachylone względem poziomej x, rys. 157-my; po osiach tych ślizgają się bez tarcia końce pręta materyalnego o długości $= l$; wyznaczyć położenie, w którem znajdować się on będzie w spoczynku.



Rys. 157.

W tym celu przeprowadźmy osi prostokątne x i y, i weźmy pod uwagę cząstkę pręta, której spółrzędne są x_k i y_k, a ciężar dQ_k. Nadajmy następnie temu prętowi przesunięcie możliwe, wtedy wszystkie cząstki pręta zakreślą pewne drogi; a pracę sił podczas tego przesunięcia, wyrazimy wzorem

$$\delta L = - \Sigma (dQ_k . \delta y_k);$$

lub też na zasadzie określenia środka ciężkości:

$$\delta L = - Q . \delta y_s .$$