Ciężar R rozłoży się na dwa wałki; niech na wałek I-szy przypada ciężar Q_1, na wałek zaś II-gi ciężar Q_2. Siłę H rozłożymy na siłę H_1, przezwyciężającą opór wałka pierwszego oraz na H_2, przezwyciężającą opór wałka drugiego; przytem każda z tych sił jest sumą dwóch oporów: oporu toczenia się po AB i po CD; będziemy więc rozpatrywali opory $(H_1)_{AB}$ i $(H_1)_{CD}$, których suma

$(H_1)_{AB}+(H_1)_{CD}=H_1$; tak samo $(H_2)_{AB}+(H_2)_{CD}=H_2$ i wreszcie $H_1+H_2=H$.

Równanie momentu oporu wałka I-go przy toczeniu się po płaszczyźnie AB, rys. 191-szy, napiszemy:

$$Q_1 f' = (H_1)_{AB} \cdot 2r.$$

Takież równanie napiszemy dla oporu podczas toczenia się tegoż wałka po CD, rys. 192-gi:

$$Q_1 f'' = (H_1)_{CD} \cdot 2r.$$

Dodając te dwa równania, otrzymamy:

$$Q_1 f' + Q_1 f'' = [\,(H_1)_{AB} + (H_1)_{CD}\,] \,.\, r; \text{ skąd:}$$

$$H_1 = Q_1 \frac{f' + f''}{2r}.$$

Wzór ten moglibyśmy również bezpośrednio odczytać z rysunku 193-ego; iloczyn bowiem $H_1 . 2r$ jest to moment pary sił zewnętrznych H_1 i $-H_1$; wyraz zaś $Q(f'+f'')$ jest to moment pary sił oporowych Q_1 i $-Q_1$; pary te są w równowadze; co też wyraża wzór powyższy.

W tenże sposób wyprowadzimy:

$$H_2 = Q_2 \frac{f' + f''}{2r};$$

a wreszcie po dodaniu $H_1 + H_2 = H$, otrzymamy:

$$H = Q \frac{f' + f''}{2r}.\ ^{1)}$$

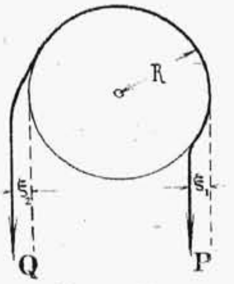
3. Opór wskutek sztywności lin.

142. Jeżeli daną linę zechcemy nawinąć na koło, to nie przybierze ona odrazu postaci kolistej, lecz z pewnym odgięciem ułoży się na kole. Jeżeli następnie będziemy obracali koło przez ciągnięcie liny za jeden koniec, to lina przybierze postać, jak wskazuje rys. 194-ty. Po lewej stronie tego rysunku pokazano położenie części liny, wchodzącej na wał,

---

1) Obliczenie oporu czopa na wałkach lub kulkach znajduje się na str. 369-ej wyd. 1 go.

po prawej zaś stronie części schodzącej liny. Odchylenie się liny od kierunku ciągnięcia pochodzi stąd, iż włókna, ułożone w linie wyprostowanej równolegle do jej osi, przy zgięciu jej wzajemnie się przesuwają, gdyż długość linii zewnętrznej liny musi być dłuższą od linii wewnętrznej. Gdyby lina była z materyału plastycznego przystosowanie się jej do nowej geometrycznej postaci nastąpiłoby kosztem rozciągnięcia się lub skrócenia się jej włókien i jeżeliby naprężenia były w granicach wytrzymałości, to po usunięciu sił przyłożonych, lina przybrałaby pierwotną swą postać prostolinijną. Odkształcenie jednakże liny odbywa się nie wskutek plastyczności materyału, lecz wskutek względnego przesuwania się włókien. Podczas tego przesuwania występują siły tarcia pomiędzy włóknami, wskutek czego, po usunięciu sił zewnętrznych, lina nie powróci do pierwotnej postaci; a w celu przywrócenia jej pierwotnej postaci należy znowuż przyłożyć pewne siły. Właściwość ta uzewnętrzni się na części liny schodzącej z koła; gdy koniec ten, przyjąwszy już postać kolistą, stara się ją zatrzymać, i dopiero pod działaniem siły ciągnącej przybierze jej kierunek; postać tę przedstawia prawa część rysunku; — właściwość tę odchylania się liny nazwano **sztywnością** liny. W obliczeniach statycznych powinniśmy brać pod uwagę te odchylenia, gdyż przy zestawieniu momentów, odchylenia wpływają na długość ramion. Oznaczywszy przez ξ_1 i ξ_2 wielkości tych odchyleń, wyrazimy sumę momentów sił, przyczepionych do końców liny, względem osi koła, przez następujące równanie



Rys. 194.

$$- Q(R + \xi_2) + P(R - \xi_1) = 0; \text{ skąd:}$$

$$P = Q\,\frac{R + \xi_2}{R - \xi_1}\,; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (134)$$

z którego łatwo zauważyć, że $P > Q$ t. j. siła ciągnąca musi być większą od siły ciągnionej. Wielkości ξ_1 i ξ_2 wyznaczyć można tylko drogą doświadczalną. Wzór powyższy uprościmy, wziąwszy pod uwagę, że odchylenia ξ_1 i ξ_2 posiadają bardzo małe wartości w stosunku do promienia R i niewiele różnią się między sobą; przyjąć zatem można z dostateczną ścisłością: $\xi_1 = \xi_2 = \xi$; a wtedy napiszemy:

$$P = Q\left(\frac{R+\xi}{R-\xi}\right).$$

W celu uproszczenia tego wzoru rozwińmy wyraz $\frac{R + \xi}{R - \xi}$ w szereg, wykonując np. wskazane przez ten ułamek dzielenie; a więc

$$\frac{R+\xi}{R-\xi}=1+2\left(\frac{\xi}{R}\right)+2\left(\frac{\xi}{R}\right)^2+2\left(\frac{\xi}{R}\right)^3+\ldots\ldots$$

Odrzucając wielkości $\left(\frac{\xi}{R}\right)$ w drugiej i wyższych potęgach jako bardzo małe wartości, otrzymamy wzór:

$$P=Q\left(1+\frac{2\xi}{R}\right).\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(135)$$

Podczas wyłącznego nawijania liny, bez jej odwijania, wzór ten przybierze postać

$$P=Q\left(1+\frac{\xi}{R}\right).$$

Doświadczenia wykazały, iż wartości ξ zależą od materyału, z jakiego dana lina jest zrobiona i od jej średnicy. „Technik" w I tomie str. 234 podaje dla lin konopnych

$$\xi = 0{,}03\ d^2;\ \text{do}\ \xi = 0{,}09\ d^2\ \text{w cm.};$$

gdzie d oznacza średnicę przekroju liny w *cm*. Należy zwrócić uwagę, że ξ jest długością; przy stosowaniu więc tego spółczynnika należy zwrócić uwagę na jednostki w jakich jest on wyrażony.

Podczas nawijania łańcuchów na koła występuje tarcie pomiędzy ogniwami i łańcuch przybiera również postać linii odchylonej; w danym razie dla obliczenia momentów sił, przyczepionych do końców łańcucha, zastosujemy te same równania co i dla liny. Dla łańcucha przyjmuje „Technik" I, str. 234: $2\,\xi\,cm.=\mu d$; gdzie μ — spółczynnik tarcia pomiędzy ogniwami; $\mu \doteq 0{,}2$ do $\mu = 0{,}3$.

Przykład. Ciągnąca siła P podnosi ciężar Q za pomocą liny, przerzuconej przez krążek, obracający się około nieruchomej osi, rys. 195-ty; obliczyć siłę P, uwzględniając tarcie czopowe i sztywność liny.

Oznaczmy przez W siłę tarcia czopowego, działającą pod kątem ρ względem poziomu, a wartość $W = \mu_1 N$. Podczas równowagi sił suma momentów względem bieguna, który obierzemy w środku osi $= 0$; przeto

$$1)\quad -Q\,(R+\xi)+P(R-\xi)-\mu_1 Nr=0.$$

Wielkość siły N wyznaczymy, pisząc sumę rzutów na oś pionową sił, działających na krążek; wtedy

$$2)\quad Q-N\cos\rho-\mu_1 N_1\sin\rho+C+P=0;$$

skąd, po podstawieniu $\mu_1 = \operatorname{tg}\rho$ i po skróceniu, otrzymamy:

$$N = (Q+P+C)\cos\rho\,.$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie momentów i przyjąwszy, że w przybliżeniu $\sin\rho \doteq \operatorname{tg}\rho = \mu_1$; otrzymamy:

$$-Q\,(R+\xi)+P\,(R-\xi)-\mu_1\,(Q+C+P)\,r=0.$$

Podstawiając: $\xi = kd^2$, gdzie k oznacza spółczynnik doświadczalny, d średnicę przekroju liny; otrzymamy po uporządkowaniu

$$P(R - kd^2 - \mu_1 r) - Q(R + kd^2 + \mu_1 r) - \mu_1 Cr = 0; \text{ skąd}$$

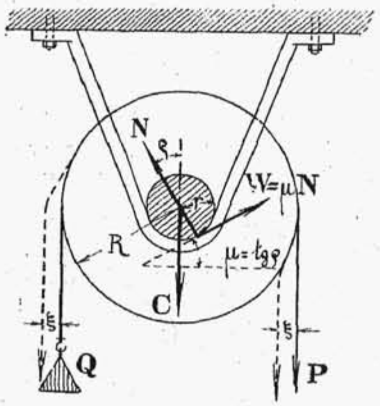
$$P = Q\frac{R + kd^2 + \mu_1 r}{R - kd^2 - \mu_1 r} + C\frac{\mu_1 r}{R - kd^2 - \mu_1 r}.$$

Ponieważ ciężar C posiada zwykle bardzo małą wartość w porównaniu z obciążeniem Q i przytem ponieważ licznik ułamka przy C jest bardzo mały w porównaniu z licznikiem ułamku przy Q, przeto cały wyraz z C możemy przyrównać do 0. Dzieląc następnie licznik przez mianownik mnożnika przy Q i odrzuciwszy małe wielkości wyższych potęg, otrzymamy

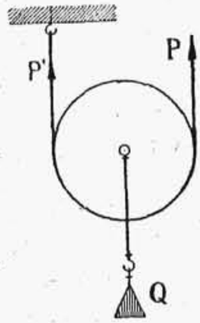
$$P = Q\left(1 + \frac{2kd^2}{R} + 2\mu_1 \frac{r}{R}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

Oznaczywszy wyraz $\left(1 + \frac{2kd^2}{R} + 2\mu_1 \frac{r}{R}\right)$ przez x, otrzymamy wyraz ogólny dla siły ciągnącej $P = Qx$, w którym $x > 1$; x nazwano spółczynnikiem oporu tarcia i sztywności lin danego mechanizmu. Wzór ten wysłowimy: siła ciągnąca równa jest sile ciągnionej, pomnożonej przez pewien spółczynnik, który jest większy od 1. W „Techniku" I, 1905 na str. 571 podano wartości x dla różnych mechanizmów.

Przykłady: 1) Wyznaczyć równowagę sił, przyłożonych do krążka przesuwnego, przedstawionego na rys. 196-tym. Zadanie to możemy



Rys. 195



Rys. 196.

rozwiązać metodycznie, jako poprzednie, lub też skorzystamy ze wzorów, wyprowadzonych w poprzedniem zadaniu; zastosujemy ten ostatni sposób, i sprowadzimy ten przykład do poprzedniego. W tym celu oznaczmy przez P' siłę dotychczas nieznaną, przyczepioną do końca liny, na której spoczywa krążek; wtedy uważać możemy dany krążek za stały, a siłę P za siłę ciągnącą, siłę zaś P' za ciągnioną; na zasadzie więc poprzedniego wzoru napiszemy

$$P = xP'.$$

Na zasadzie zaś równowagi sił napiszemy równanie

$$P + P' = Q;$$

a po podstawieniu z niego wartości P' w równanie poprzednie, otrzymamy

$$P = x(Q - P); \text{ skąd } P = Q\frac{x}{1+x}.$$

W celu uproszczenia tego wzoru weźmiemy pod uwagę, że x w większości mechanizmów jest większe od jedności o pewien ułamek rzeczywisty; oznaczywszy zatem wartość wyrazu:

$$\frac{kd^2}{R} + 2\mu_1\frac{r}{R} \text{ przez } \xi; \text{ napiszemy:}$$

$P = Q\dfrac{1+\xi}{2+\xi}$; a po rozdzieleniu i pominięciu wartości ξ w drugiej i wyższych potęgach napiszemy: [1])

$$P = \tfrac{1}{2}Q(1 + \tfrac{1}{2}\xi).$$

Jeżeli oporów nie uwzględnimy, to podstawimy $x=1$, lub $\xi = 0$ i otrzymamy: $P = \frac{1}{2}Q$; jest to wzór, któryśmy otrzymali inną dregą, gdyśmy nie uwzględniali tarcia.

Przykład 2) Obliczyć sprawności krążka stałego i przesuwnego, i obliczyć stosunek tych sprawności.

Niech η_s oznacza sprawność krążka stałego; zaś η_p przesuwnego; wtedy:

$$\eta_s = \frac{Q\delta q}{P\delta p} = \frac{1}{x};$$

gdyż dla tego krążka $\delta q = \delta p$;

Następnie, dla krążka przesuwnego $\eta_p = \dfrac{Q\delta q}{P\delta p}$; dla którego: $\delta p = 2\delta q$; przeto: $\eta_p = \dfrac{Q}{2P} = \dfrac{1+x}{2x}$; wreszcie

---

[1]) Tego rodzaju uproszczenia arytmetyczne mogą być stosowane na podstawie wzoru ogólnego: $\frac{1+\xi_1}{1+\xi_2} = 1 + (\xi_1 - \xi_2)$, w którym potęgi drugie i wyższe ułamków rzeczywistych ξ_1 i ξ_2 pominięto. Na tejże podstawie: $(1+\xi)^2 = 1 + 2\xi$; $(1+\xi)^3 = 1 + 3\xi$ i t. d. Gdy zaś potęga jest wyższą, niż trzecia, należy zachować pewne ostrożności w skrócaniu; spółczynniki bowiem przy wyższych potęgach powiększają się, i mogą spowodować zbyt duże błędy. W przykładzie powyższym napiszemy zatem:

$$\frac{1+\xi}{2+\xi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\xi}{1+{}^1/_2\,\xi} = {}^1/_2\,(1 + {}^1/_2\,\xi).$$

$$\frac{\eta_s}{\eta_p} = \frac{1}{x} : \frac{1+x}{2x} = \frac{2}{1+x} = (1 - \tfrac{1}{2}\xi).$$

W szczególnym przypadku, gdy nie uwzględniamy oporu podstawimy $x = 1$, i otrzymamy $\frac{\eta_s}{\eta_p} = 1$.

Sprawność zatem krążka stałego jest mniejszą od sprawności krążka przesuwnego, co wynika z tej okoliczności, że ciśnienie na czop krążka stałego jest większe, a więc i tarcie jest większe.

Przykład 3). Dla układu krążków, pokazanego na rysunku 365-tym, obliczyć stosunek sił oraz sprawność tego mechanizmu; gdy krążki są jednakowej wielkości. Oznaczywszy przez S_1 do S_5 naprężenia w linach, jak pokazano na rys. 197-ym napiszemy równania.

$$S_1 + S_2 + S_3 = Q; \quad P = xS_1;$$
$$P + S_1 = S_4; \quad S_4 = xS_2;$$
$$S_4 + S_2 = S_5; \quad S_5 = xS_3.$$

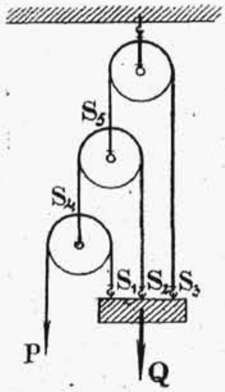
Z tych sześciu równań wyrugujemy pięć wielkości naprężeń, i otrzymamy jedno równanie, w którym będą wielkości P, Q i x; z równania tego napiszemy:

$$P = \frac{x}{1 + 3x + 3x^2} Q.$$

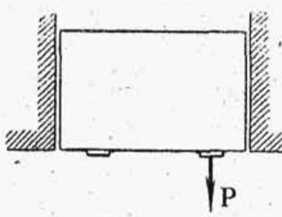
lub wprowadzając: $x = 1 + \xi$;

$$P = \frac{(1+\xi)^3}{1 + 3(1+\xi) + 3(1+\xi)^2} Q \cong \frac{1 = 3\xi}{7 + 9\xi} Q + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 + 3\xi}{1 + \frac{9}{7}\xi} Q; \text{ wreszcie:}$$

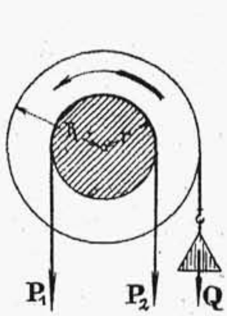
$$P = \tfrac{1}{7}(1 + {}^{12}/_{7}\,\xi)\, Q.$$



Rys. 197.



Rys. 198.



Rys. 199.

Przyjąwszy np. pg. „Technika" $x = 1{,}06$, wtedy: $\xi = 0{,}06$; a zatem $P \cong Q \cdot \tfrac{1}{7}\, 1{,}103 = Q \cdot 0{,}1576$; podług zaś dokładnego wzoru: $P = Q \cdot 0{,}1577$.

Sprawność tego mechanizmu obliczymy z ogólnego wzoru: $= \eta \frac{Q.\delta q}{P.\delta p}$; stosunek zaś $\frac{\delta q}{\delta p}$ obliczymy bezpośrednio z danego mechanizmu; lub też obliczymy go ze stosunku $\frac{P}{Q}$, gdy nie uwzględnimy tarcia; w tym celu podstawimy we wzór, już wprowadzony $x = 1$; a oznaczywszy te siły przez P_0 i Q_0, otrzymamy: $\frac{P_0}{Q^0} = \frac{1}{7}$; a ponieważ na zasadzie pracy możliwej: $P_0 . \delta p = Q_0 . \delta q$; przeto $\frac{\delta q}{\delta p} = \frac{1}{7}$; a więc: $\eta = \frac{1 + 3x + 3x^2}{7x} = (1 - {}^{12}/_7 \xi)$; np. dla $x = 1{,}06$; $\eta = 0{,}897 \cong 0{,}9$.

143. Zadania. 1) W celu wysunięcia szuflady ze stołu, zrobiono w przednim jej boku dwa symetrycznie rozłożone uchwyty rys. 198 my; wyznaczyć granice ich rozmieszczenia, przy którem będzie możliwem wyciągnąć szufladę za pomocą jednego tylko uchwytu. Dać odpowiedź, czy wielkość siły wyciągającej P wpływa na możność wysunięcia szuflady?

2) Ciężar Q zostaje podnoszony na zupełnie giętkiej linie, nawiniętej na krążek, osadzony na wale o promieniu R. Obrót wała wraz z krążkiem wywołują dwie siły P_1 i P_2, przyczepione do dwóch końców liny, przerzuconej przez wał; jak wskazuje rys. 199-ty, obliczyć te siły nie uwzględniając tarcia czopowego i sztywności lin.

Właściwą siłą obracającą wał jest siła tarcia, występująca pomiędzy liną a wałem; siła ta zależy od wielkości sił ciągnących P_1 i P_2 i t. d.

Odpowiedź:

$$P_1 = kQ\,\frac{R}{r}\,.\,\frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi} - 1}; \quad P_2 = kQ\,\frac{R}{r}\,.\,\frac{1}{e^{\mu\pi} - 1};$$

gdzie k oznacza spółczynnik bezpieczeństwa, > 1.

3) Na płaszczyźnie, pochyłej pod kątem 45^0 względem poziomu, znajduje się ciężar $Q = 500$ *kg*, na który działa P pod kątem 30^0 względem poziomu. Obliczyć, jaką pracę wykona siła P, gdy wciągnie dany ciężar na wysokość, mierzoną pionowo: $h = 4$ *m*; jaka sprawność jest tego mechanizmu, i jaka jego stratność, gdy $\mu = 0{,}2$.

4) Za pomocą wała z korbą chcemy podnieść ciężar $Q = 50$ *kg* na wysokość $h = 4$ *m*. Promień wała $= 0{,}15$ *m*; promień czopa $= 0{,}1$; promień korby $R = 0{,}45$. Jaką siłę należy przyłożyć do korby, ażeby podnieść dany ciężar, przyjmując, iż siła robotników działa prostopadle do drąga korbowodu; jaka sprawność mechanizmu, jaką pracę należy włożyć?

5) Po płaszczyźnie, pochylonej pod kątem 45^0 względem poziomu, opuszczamy ruchem jednostajnym ciężar $Q = 500$ *kg*; — jaką siłę należy w tym celu przyłożyć w kierunku równoległym do płaszczyzny? Jaką siłę należy przyłożyć i jaką pracę należy włożyć, ażeby podnieść ten ciężar na wysokości: $h = 10$ *m*?

6) Po drodze pochyłej wciągamy wóz, którego ciężar wraz z obciążeniem $Q = 1000$ *kg*. Jaką siłę należy zaprządz do wozu, gdy podniesienie drogi jest 1 : 100 i całkowity spółczynnik oporu: $\mu = 0{,}035$? — porów. „Technik" I, str. 219,

KONIEC TOMU PIERWSZEGO.