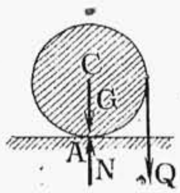
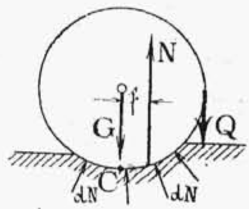
## 2. Opór podczas toczenia się.

**139.** Wałek ciężki, umieszczony na płaszczyźnie poziomej, styka się z nią wzdłuż tworzącej, która na rysunku 186-ym przedstawia się w postaci punktu $A$. W tem położeniu ciężar wałka $G$ i powstająca siła odporowa $N$ równoważą się i wałek pozostanie w spoczynku lub też w ruchu jednostajnym, gdy znajdował się w nim w początku naszej obserwacyi. Gdy jeden bok wałka obciążymy ciężarem $Q$, wtedy równowaga sił ustanie i wałek powinien potoczyć się; doświadczenie jednakże uczy, że, gdy siła $Q$ jest dostatecznie mała, wałek pozostanie w spoczynku; i dopiero, po nadaniu sile $Q$ pewnej określonej wielkości, nastąpi jego toczenie się. Z tego doświadczenia wnioskujemy, iż istnieje pewien opór przeciw toczeniu się; opór ten nazwiemy oporem podczas toczenia się.

Zbadajmy, jakie warunki fizyczne składają się na powstanie tego oporu. Gdyby wałek i płaszczyzna, na której on spoczywa, były ciałami zupełnie twardemi, wtedy najmniejsza siła $Q$ wytworzy moment $Qr$,



Rys. 186.



Rys. 187.

który, będąc nie zrównoważony, wywołałby obrót wałka; lecz wałek jak i płaszczyzna, na której on spoczywa, są z materyału częściowo sprężystego, częściowo plastycznego. Przy takich właściwościach ciał, przebieg zjawiska odbywa się w odmienny sposób, niż opisany; wałek bowiem i podkład pod wzajemnem ciśnieniem odkształcają się, jak wskazuje rys. 187-my; powstają wskutek tego ciśnienia $dN$ na pewnej części obwodu walca nie w jednym punkcie. Wypadkową $N$ sił $dN$ równoważą siły $G$ i $Q$; kierunek więc wypadkowej jest w danym razie do nich równoległy; sumę zatem momentów wszystkich sił względem bieguna np. $C$ przedstawia wzór, który odczytamy z rys. 187-ego:

$$-Nf + Qr = 0,$$

w którym $f$ oznacza nieznane ramię siły $N$. Następnie z tej równowagi wynika: $N - Q - G = 0$; po wyrugowaniu z tego równania $N$ i po podstawieniu w równanie momentów, otrzymamy

$$-(G + Q)f + Qr = 0.$$

Z równania tego obliczymy $f$, gdy będzie dane $G$ i $Q$; a więc

$$f = \frac{Q}{Q+G} \cdot r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (132)$$

Wielkość $f$ nazwano spółczynnikiem oporu podczas toczenia. Zauważyć należy, że spółczynnik ten jest ramieniem siły $N$ względem bieguna $C$, posiada więc wymiar długości; przy stosowaniu zatem wartości tego spółczynnika do rachunku, należy zwrócić uwagę na jednostkę długości, w jakiej jest on wyrażony; gdyż mogą stąd powstać błędy liczbowe. Np. dla oporu toczenia się koła żelaznego po szynie $f = 0{,}0005$ metra. W zadaniach więc na opór przy toczeniu zakładamy znajomość odpowiednich spółczynników, wyrażonych w pewnych jednostkach długości i wyznaczonych drogą doświadczalną.

Rozpatrzmy obecnie przykład ogólniejszy, mianowicie zamiast siły $Q$, prostopadłej do płaszczyzny toczenia, weźmy pod uwagę siłę $Q$, działającą w płaszczyźnie przekroju wałka w dowolnym kierunku, jak wskazuje rys. 188-my, w danym przypadku wypadkowa sił odporowych, którą oznaczyliśmy na rys. 187-ym przez $F$, nie będzie prostopadła do płaszczyzny, po której wałek się toczy, jak to było w przykładzie poprzednim; lecz będzie tworzyła pewien kąt z tą płaszczyzną. Ażeby ten przypadek sprowadzić do poprzedniego, rozłóżmy siłę $F$ na prostopadłą do płaszczyzny zetknięć, którą oznaczymy przez $N$, i na równoległą do niej; — ponieważ moment tej ostatniej względem bieguna $C$ będzie bardzo mały w porównaniu z momentami sił $N$ i $Q$, ze względu na bardzo małą wartość siły poziomej oraz jej ramienia, przeto wartość momentu siły $F$ względem bieguna $C$ możemy przyjąć równą momentowi składowej $N$ względem tegoż bieguna i wtedy napiszemy

$$Nf + (\text{mom. sił zewn. względem } C) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (133)$$

Oznaczając moment sił zewnętrznych przez $M_z$, napiszemy ogólnie wzór powyższy:

$$Nf = M_z;$$

w którym $N$ jest sumą rzutów sił zewnętrznych na normalną do płaszczyzny zetknięć; zaś $M_z$ jest sumą momentów sił zewnętrznych względem bieguna $C$.

**Przykład.** Obciążenie jednego koła czterokołowego wagonu wynosi $Q_1 = 2500$ *kg*, promień koła $R = 0{,}50$ *m*; średnica czopa osi $2r = 10$ *cm*; obliczyć siłę, która będzie mogła utrzymać wagon w ruchu jednostajnym na szynach poziomych, lub inaczej mówiąc, którą zrównoważy opór toczenia się i opór tarcia czopowego; gdy dany jest spółczynnik tarcia czopowego $\mu = 0{,}03$, i spółczynnik oporu przy toczeniu $f = 0{,}05$ *cm*.

Moment oporu toczenia się równa się $Q_1 f = 2500 \,.\, 0{,}05$ kilogramocentymetrów; siłę $H_1$, ciągnącą cały wagon i przezwyciężającą opór toczenia się, należy sobie wyobrazić przyłożoną pośrednio czy też bezpośrednio do osi; przyjmijmy, że na jedno koło przypada $\frac{1}{4} H_1$; wtedy napiszemy:

$$2500 \,.\, 0{,}05 = \tfrac{1}{4} H_1 R; \text{ skąd } H_1 = 10 \; kg.$$

Oznaczmy obecnie przez $H_2$ siłę, przezwyciężającą tarcie czopowe; wtedy na jedno koło przypada $\frac{1}{4} H_2$. Na zasadzie poprzednich rozważań o tarciu czopowem napiszemy, iż moment tarcia czopowego równa się $\mu Q_1 r$; wskutek równowagi momentów, moment ten musi być równy momentowi siły zewnętrznej $\frac{1}{4} H_2$ t. j.

$$-\mu Q_1 r + \tfrac{1}{4} H_2 R = 0; \text{ skąd: } \tfrac{1}{4} H_2 = \mu \frac{Q_1 r}{R};$$

a po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

$$H_2 = 4 \,.\, 0{,}03 \frac{2500 \,.\, 5}{50} = 30 \; kg.$$

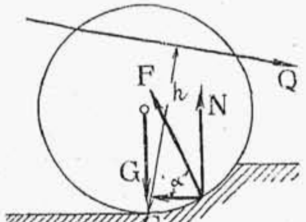
Całkowita zatem siła pociągowa: $H = H_1 + H_2 = 10 + 30 = 40 \; kg$.

W praktyce mówi się nieraz o stosunku siły pociągowej do obciążenia wagonu; dla przytoczonego zatem przykładu stosunek ten przedstawimy wzorem $\frac{H}{4Q_1} = \frac{1}{250}$.

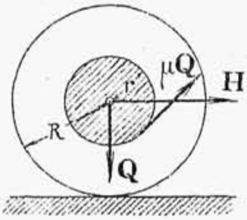
Wzór ogólny siły, przezwyciężającej opór toczenia się i tarcie czopowe, jest następujący: $H = H_1 + H_2 = \frac{4\, Q_1 f}{R} + \frac{4\mu Q_1 r}{R}$; oznaczając całkowite obciążenia przez $Q = 4Q_1$, napiszemy wzór:

$$H = \frac{Q}{R}(f + \mu\, r).$$

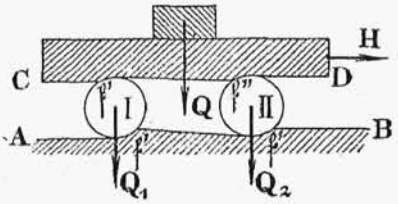
Wyraz $\frac{f + \mu r}{R}$ oznacza się często jednym spółczynnikiem $\mu_c$; na-



Rys. 188.



Rys. 189.



Rys. 190.

zywając go spółczynnikiem oporu całkowitego; przyjąwszy to oznaczenie, napiszemy $H = Q \,.\, \mu_c$. Dla powyższego przykładu $\mu_c = 0{,}004$.

W zadaniu powyższem przyjęliśmy, że obciążenie wagonu $Q$ rozkłada się równomiernie na 4 koła; pozostaje zatem rozwiązać je, przyjąwszy, że obciążenie rozkłada się nierównomiernie; wynik jednakże będzie ten sam; gdy bowiem na jedno koło przypadnie większy ciężar, to na inne mniejszy, co w sumie stanowi całkowite obciążenie, można to zresztą sprawdzić rachunkowo.

**140 Praca stracona podczas toczenia.** Pracę tę obliczymy ze wzoru pracy cząstkowej $dL_s$ przy obrocie walca o kąt $d\alpha$; praca ta równa się

$$dL = M_f d\alpha;$$

gdzie $M_f$ oznacza moment tarcia.

Z warunku toczenia się wynika, że $ds = Rd\alpha$, gdzie $ds$ jest długością cząstki łuku, odpowiadającego kątowi $d\alpha$, i jednocześnie jest to cząstka drogi, o jaką przesunęła się oś koła. Po podstawieniu zatem we wzór pracy

$$d\alpha = \frac{ds}{R}; \text{ oraz } M_f = Qf;$$

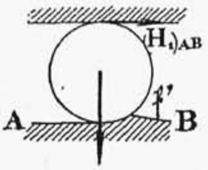
otrzymamy:

$$dL_s = Qf \frac{ds}{R} \text{ skąd } L_s = \frac{Qfs}{R};$$

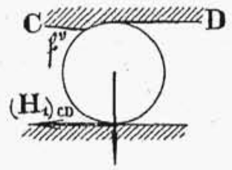
gdzie $s$ jest długość drogi, jaką przebyła oś koła.

Wzór ten można bezpośrednio napisać, rozpatrując przebieg toczenia się; wyraz bowiem $\frac{Qf}{R}$ przedstawia siłę oporu przy toczeniu się, przyłożoną do środka koła; wzór więc $\frac{Qfs}{R}$ przedstawia pracę siły pociągowej wzdłuż drogi $s$.

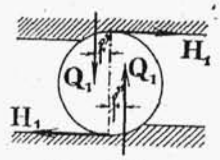
**141. Toczenie na wałkach.** Na drodze poziomej leżą dwa wałki I i II o promieniach wzajemnie równych, rys. 190-ty; na wałkach tych leży płyta, na której spoczywa ciężar $Q$. Jaką siłę $H$ należy przyłożyć



Rys. 191.



Rys. 192.



Rys. 193.

do płyty równolegle do drogi, ażeby módz ruchem jednostajnym potoczyć dany ciężar. W danym przykładzie następuje podwójny opór toczenia się każdego wałka; wałki bowiem toczą się po drodze $AB$ i jednocześnie po powierzchni $CD$ danej płyty; odkształcają więc one drogę $AB$ i powierzchnię płyty $CD$; — należy zatem wprowadzić dwa współczynniki oporu podczas toczenia się $f'$ i $f''$.

Ciężar $R$ rozłoży się na dwa wałki; niech na wałek I-szy przypada ciężar $Q_1$, na wałek zaś II-gi ciężar $Q_2$. Siłę $H$ rozłożymy na siłę $H_1$, przezwyciężającą opór wałka pierwszego oraz na $H_2$, przezwyciężającą opór wałka drugiego; przytem każda z tych sił jest sumą dwóch oporów: oporu toczenia się po $AB$ i po $CD$; będziemy więc rozpatrywali opory $(H_1)_{AB}$ i $(H_1)_{CD}$, których suma

$(H_1)_{AB}+(H_1)_{CD}=H_1$; tak samo $(H_2)_{AB}+(H_2)_{CD}=H_2$ i wreszcie $H_1+H_2=H$.

Równanie momentu oporu wałka I-go przy toczeniu się po płaszczyźnie $AB$, rys. 191-szy, napiszemy:

$$Q_1 f' = (H_1)_{AB} \cdot 2r.$$

Takież równanie napiszemy dla oporu podczas toczenia się tegoż wałka po $CD$, rys. 192-gi:

$$Q_1 f'' = (H_1)_{CD} \,.\, 2r.$$

Dodając te dwa równania, otrzymamy:

$$Q_1 f' + Q_1 f'' = [\,(H_1)_{AB} + (H_1)_{CD}\,] \,.\, r; \text{ skąd:}$$

$$H_1 = Q_1 \frac{f' + f''}{2r}.$$

Wzór ten moglibyśmy również bezpośrednio odczytać z rysunku 193-ego; iloczyn bowiem $H_1 \,.\, 2r$ jest to moment pary sił zewnętrznych $H_1$ i $-H_1$; wyraz zaś $Q(f'+f'')$ jest to moment pary sił oporowych $Q_1$ i $-Q_1$; pary te są w równowadze; co też wyraża wzór powyższy.

W tenże sposób wyprowadzimy:

$$H_2 = Q_2 \frac{f' + f''}{2r};$$

a wreszcie po dodaniu $H_1 + H_2 = H$, otrzymamy:

$$H = Q \frac{f' + f''}{2r}.$$ [1]

## 3. Opór wskutek sztywności lin.

**142.** Jeżeli daną linę zechcemy nawinąć na koło, to nie przybierze ona odrazu postaci kolistej, lecz z pewnym odgięciem ułoży się na kole. Jeżeli następnie będziemy obracali koło przez ciągnięcie liny za jeden koniec, to lina przybierze postać, jak wskazuje rys. 194-ty. Po lewej stronie tego rysunku pokazano położenie części liny, wchodzącej na wał,

[1] Obliczenie oporu czopa na wałkach lub kulkach znajduje się na str. 369-ej wyd. 1 go.