geometrycznem miejscem tych środków jest prosta, łącząca środki ciężkości obydwóch podstaw. Ażeby wyznaczyć położenie jej środka ciężkości, przyczepmy we wszystkich punktach siły, proporcjonalne do przekrojów. Środek ciężkości tych sił będzie środkiem ciężkości graniastosłupa i leżeć on będzie w połowie długości odcinka, łączącego środki ciężkości obydwóch podstaw.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości ostrosłupa. Ostrosłup dany dzielimy w odstępach równych płaszczyznami, równoległemi do podstawy, na warstwy, dowolnie cienkie; podstawy tych warstw są geometrycznie podobne, a więc wielkości ich pól są proporcyonalne do kwadratów odległości od wierzchołka. Geometryczne miejsce środków ciężkości tych warstw leżą na prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy; zatem środek ciężkości tych warstw jest środkiem ciężkości ostrosłupa. W celu jego wyznaczenia przyczepiamy do punktów tej prostej siły proporcyonalne do ciężarów odnośnych warstw; ciężary te, wobec równości odstępów pomiędzy podstawami, są proporcjonalne do wielkości pól podstaw t. j. są proporcjonalne do kwadratów odległości od wierzchołka; a zatem zadanie sprowadza się do wyznaczenia środka ciężkości pręta, którego ciężar rośnie w stosunku do drugich potęg odległości od wierzchołka ostrosłupa. Zadanie to podane jest w § 75-tym; a szukany środek znajduje się w odległości $\frac{3}{4}$ długości od wierzchołka ostrosłupa; lub też w $\frac{1}{4}$ długości od podstawy.

Obliczenia środka ciężkości graniastosłupa i ostrosłupa, można stosować do walców z równoległemi podstawami i do stożków z dowolnemi podstawami.

79. Środek ciężkości powierzchni brył. Graniastosłup. Środek ciężkości powierzchni ścian (bez podstaw) graniastosłupa znajdziemy, wyznaczywszy środki ciężkości każdej ściany i przyczepiając w tych środkach siły proporcjonalne do wielkości pól tych ścian. Środek ciężkości tych sił będzie środkiem ciężkości powierzchni ostrosłupa.

Ściany graniastosłupa są równoległoboki, zatem środki ich ciężkości leżą w połowie wspólnej wysokości, a więc w jednej płaszczyźnie. Siły ciężkości, przyczepione w tych punktach, są proporcjonalne, do wielkości pól tych ścian, a więc, wobec wspólnej wysokości, są proporcjonalne do długości boków podstawy; środek więc cieżkości powierzchni graniastosłupa leży w połowie odcinka, łączącego środki ciężkości obwodów podstaw.

Ostrosłup. Ściany ostrosłupa przedstawiają trójkąty. Środki ciężkości każdego trójkąta leżą na wysokości $1/_3$ od podstawy; środki te leżą więc w jednej płaszczyźnie, przeprowadzonej równolegle do podstawy w $1/_3$ wysokości ostrosłupa. W każdym z tych środków należy przyczepić siły proporcjonalne do wielkości pól ścian; w ten sposób otrzymamy płaski układ sił równoległych, których środek wyznaczyć możemy sposobami wyżej wskazanymi.

Jeżeli ostrosłup jest foremny i prosty, to siły ciążenia, przyczepione do oddzielnych środków ciężkości, są wzajemnie równe i proporcyonalne do boków podstawy; a zatem środek ciężkości ścian ostrosłupa foremnego i prostego leży w $^1/_3$ długości odcinka, łączącego wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy. Te same sposoby dają się zastosować do wyznaczenia środka ciężkości płaszczy walców i stożków.

80. Określenia brył i powierzchni obrotowych. Gdy krzywa płaska obraca się około pewnej osi, leżącej w tej płaszczyźnie, wtedy opisuje ona w przestrzeni pewną powierzchnię, którą nazwano **powierzchnią obrotową**. Jeżeli krzywa jest zamknięta, to przez obrót około osi, leżącej w jej płaszczyźnie, wytwarza ona bryłę, którą nazwiemy **bryłą obrotową**. Możemy więc mówić o powierzchni brył obrotowych lub o ich objętości.

Linję, obracającą się około osi, nazywać będziemy **linią tworzącą**, inaczej południkową. W następnych rozpatrywaniach mówić będziemy o długości s linii tworzącej; o środku jej ciężkości, przyjmując w tym przypadku, iż linia ta jest jednostajnie ciężką, t. j. $\frac{dQ}{ds}=$ stałej; odległość tego środka od osi obrotu oznaczymy przez x_s; następnie mówić będziemy o polu f, otoczonem przez linię tworzącą. Wreszcie mówić będziemy o środku ciężkości pola linii tworzącej, przyjmując, że pole to jest jednostajnie ciężkie, to jest przyjmujemy, że $\frac{dQ}{df}=$ stałej; odległość tego środka od osi obrotu oznaczamy przez ξ_s; również rozpatrywać będziemy pole F powierzchni bryły obrotowej i jej objętość V, gdy tworząca jest zamkniętą.

81. Twierdzenie pomocnicze z geometryi. Gdy odcinek AB obraca się koło osi y, wtedy wytwarza on w przestrzeni stożek prostościęty. Należy obliczyć pole płaszcza tegoż stożka, przyjmując, że długości AB nadamy wielkość nieskończenie małą $= ds$. W tym celu przedłużamy odcinek AB do przecięcia się z osią obrotu w punkcie K i stożek, utworzony przez obrót linii KB, rozwijamy na płaszczyźnie rysunku. Pole płaszcza ostrosłupa ściętego, którego tworzącą jest odcinek AB, przedstawi się w postaci wycinka pierścienia płaskiego, rys. 105-ty; pole tego wycinka:

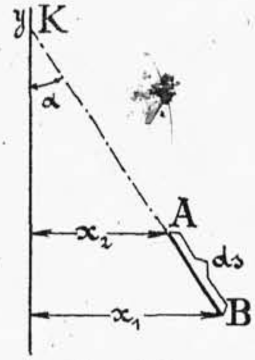
$$K = \tfrac{1}{2} . 2\pi x_1 KB - \tfrac{1}{2} 2\pi x_2 KA,$$

z rys. 105-go odczytamy: $x_1 = KB \sin\alpha$, oraz $x_2 = KA \sin\alpha$; po podstawieniu i wyniesieniu $\pi \sin\alpha$ przed nawias, otrzymamy:

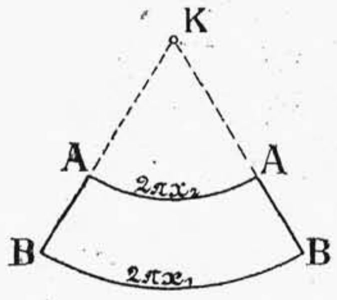
$$F = \pi \sin \alpha (KB^2 - KA^2)\text{; lub inaczej}$$
$$F = \pi \sin \alpha (KB + KA)(KB - KA);$$
$$F = \pi (KB \sin \alpha + KA \sin \alpha) . AB \text{ i wrzeszcie:}$$
$$F = \pi (x_1 + x_2) . AB.$$

Przyjmijmy $AB = ds$, wtedy $x_1 = x_2 = x$; $F = dF$, a po podstawieniu tych wartości w równanie ostatnie, otrzymamy

$$dF = 2\pi x . ds.$$

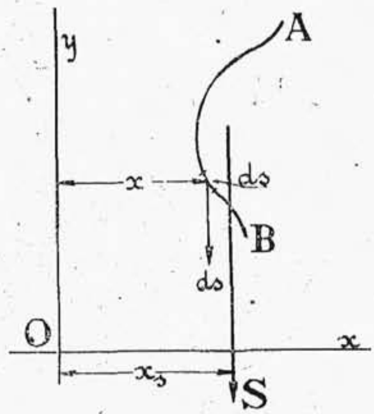


Rys. 104.



Rys. 105.

82. Twierdzenie o powierzchniach brył obrotowych. Daną jest tworząca AB, rys. 106-ty, która obraca się około osi y; obliczyć wielkość pola F powierzchni obrotowej. Rozdzielmy tworzącą na cząstki ds, każda z tych cząstek zakreśli podczas obrotu powierzchnię stożka prostościętego, którego pole $dF = 2\pi x . ds$; suma wielkości tych pól jest wielkością pola powierzchni obrotowej, a więc



Rys. 106.

$$\Sigma dF = \Sigma 2\pi . x . ds;$$

lub inaczej

$$F = 2\pi . \int x . ds.$$

Wykonamy całkowanie tego wzoru, gdy wprowadzimy do rachunku równanie krzywej postaci $y = f(x)$, które doprowadzi nas bezpośrednio do tej całki; lecz nadajmy inny kierunek naszemu rozumowaniu.

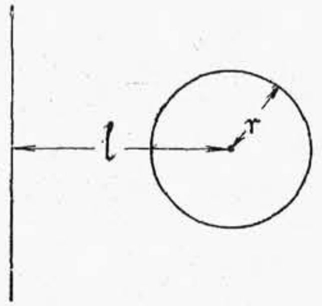
W tym celu przyjmijmy, że krzywa AB jest krzywą materyalną o jednostajnym ciężarze, wtedy cząstka łuku ds jest proporcyonalną do jej ciężaru, a wzór $\Sigma x . ds$, lub $\int x . ds$ przedstawi sumę momentów sił rówwnoległych do osi y względem bieguna O, dowolnie obranego na tejże osi; sumę tych momentów możemy zastąpić przez moment siły wypadkowej, t. j. podstawimy

$\int x \, . \, ds = x_s \, . \, s$, gdzie $s = \Sigma ds = \int ds$, t. j. s równa się długości łuku AB; po podstawieniu tej całki w równanie momentów, otrzymamy wzór:

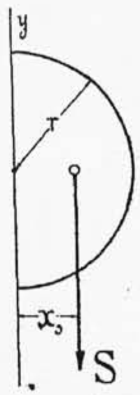
$$F = 2\pi \, . \, x_s \, . \, s; \qquad (50)$$

który wysłowimy:

pole powierzchni obrotowej równa się iloczynowi z czynnika 2π, z odległości środka ciężkości tworzącej od osi obrotu i z długości tej tworzącej:



Rys. 107.



Rys. 108.

Iloczyn ten możemy jeszcze przedstawić w postaci wzoru:

$$F = (2\pi \, . \, x_s) \, . \, s;$$

który wysłowimy:

pole powierzchni obrotowej równa się iloczynowi z długości koła, zakreślonego przez środek ciężkości tworzącej, i z długości tejże tworzącej.

We wzorze powyższym znajduje się iloczyn dwóch długości x_s i s, wymiar zatem tego wzoru jest L^2; co też odpowiada wymiarowi pól.

W powyższem rozpatrywaniu przyjęliśmy, iż tworząca nie przecina osi obrotu, w razie zaś, gdy ona ją przecina, należy w celu obliczenia pola powierzchni obrotowej, uważać gałęzie, leżące po różnych stronach osi, jako oddzielne krzywe, i do każdej z nich zastosować przytoczone prawidło.

Przykład. Obliczyć pole F pierścienia, utworzonego przez obrót koła o promieniu r; jeśli odległość środka koła od osi obrotu równa się l, rys. 107-my.

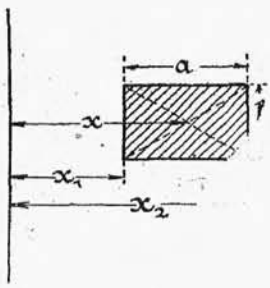
W danym razie: $x_s = l$; $s = 2\pi r$, a więc: $F = 2\pi l 2 . \pi r = 4\pi^2 l r$.

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości łuku półkola, rys. 108-my. Uważajmy półkole jako tworzącą kuli; średnicę jego ob... oś obrotu. W danym razie znane jest pole bryły ob... i długość tworzącej; niewiadomem zaś jest ... tworzącej. Ze wzoru ogólnego napiszemy:

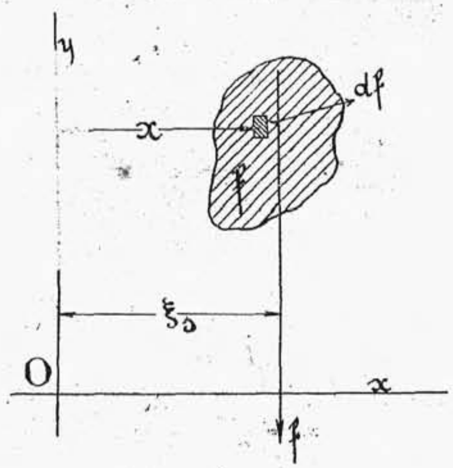
$$4\pi r^2 = 2\pi x_s \pi r; \text{ skąd: } x_s = \frac{4\pi r^2}{2\pi^2 r}$$

Wzór 50-ty wykazuje zależność po... gdy więc dwie z tych wielkości są ... też uczyniliśmy w przykładach przy...

83. Twierdzenie pomocnicze z... utworzonej przez obrót prostokąta, ... do osi obrotu, rys. 109-ty. Wytwor...



Rys. 109.



Rys. 110.

kroju prostokątnym, objętość tego pierścienia obliczymy jako różnicę objętości dwóch prostych walców o wysokości b i o promieniach podstaw x_1 i x_2. Objętość zatem pierścienia: $V = \pi x_2^2 b - \pi x_1^2 b = \pi b (x_2^2 - - x_1^2)$; po rozłożeniu tego wyrazu na mnożniki, otrzymamy:

$$V = \pi b (x_2 + x_1)(x_2 - x_1),$$

zważywszy, że $x_2 - x_1 = a$, otrzymamy:

$$V = \pi b a (x_2 + x_1).$$

Przyjąwszy następnie, że a i b są wielkościami nieskończenie małemi, napiszemy:

$$ab = df;\ V = dV;\ x_2 = x_1 = x;$$

po podstawieniu tych wartości w równanie powyższe, otrzymamy:

$$dV = 2\pi x \,.\, df.$$

84. Twierdzenie o objętościach brył obrotowych. Weźmy pod uwagę linję tworzącą zamkniętą, która nie przecina osi obrotu, rys. 110-ty; wskutek jej obrotu pole zawarte w tej krzywej zakreśli w przestrzeni bryłę. Objętość tej bryły może być uważana za sumę objętości pierścieni prostokątnych o przekroju df, na zasadzie zatem poprzedniego twierdzenia napiszemy:

$$V = \Sigma\,(2\pi x \,.\, df) = 2\pi \int x \,.\, df.$$

Przez df rozumieć możemy ciężar cząstki pola tworzącej; a wtedy $\int x \,.\, df$ jest sumą momentów względem O. Sumę tych momentów zastąpimy momentem wypadkowej, czyli

$$\int x \,.\, df = \xi_s \,.\, f,$$

po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy wzór:

$$V = 2\pi \,.\, \xi_s \,.\, f, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (51)$$

który wysłowimy

objętość bryły obrotowej równa się iloczynowi z czynnika 2π, z odległości środka ciężkości pola tworzącej od osi obrotu i z wielkości tegoż pola.

Przykład. Obliczyć objętość pierścienia, utworzonego przez obrót koła o promieniu r; odległość środka koła od osi obrotu jest l. W danym razie: $\xi_s = l$; $f = \pi r^2$; a więc:

$$V = 2\pi l \pi r^2 = 2\pi^2 l r^2.$$

Przykład. Wyznaczyć środek ciężkości pola półkola. Uważajmy pole półkola jako tworzącą kuli, wtedy

$$f = \tfrac{1}{2}\pi r^2;$$

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3;$$

po podstawieniu we wzór poprzedni, otrzymamy

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\xi_s \, \tfrac{1}{2}\pi r^2; \text{ skąd}$$

$$\xi_s = \frac{4}{3\pi} \,.\, r$$

porówn. str. 124-ta. Twierdzenia powyższe nazwane są twierdzeniami Guldin'a.

85. Wzory ogólne środka ciężkości. Wzory ogólne spółrzędnych środka ciężkości bryły, wyrażonej równaniem jej powierzchni $f(x, y, z) = 0$; obliczymy ze wzorów 43, 44 i 45 zważywszy, że siłę należy zastąpić ciężarem cząstki bryły. Jeżeli nieskończenie małą cząstkę danej bryły, wyrażonej spółrzędnemi prostokątnemi, wyobrazimy sobie w postaci prostopadłościanu; to objętość jej w miejscu (x, y, z) wyrazimy iloczynem $dx \,.\, dy \,.\, dz$; oznaczywszy ciężar właściwy bryły w tem miejscu przez σ, to ciężar cząstki $dQ = \sigma \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$; gdzie wogóle może być $\sigma = \varphi\,(x, y, z)$; lub w szczególnym przypadku może być wielkością stałą; moment ciężaru tej cząstki względem osi np. x rys. 110-ty wyrazi się wzorem $(\sigma, dx, dy, dz) \,.\, z$. Ażeby utworzyć sumę tych momentów, jak to wskazano w rów. 45-tem, należy przyjąć pewien porządek sumowania, odpowiadający właściwościom geometrycznym obranych spółrzędnych. W układzie osi prostokątnych porządek sumowania obierzemy w nast. sposób:

1) najpierw przyjmiemy x i z za stałe, a y za zmienne i wykonamy sumowanie, które wyrazimy po wyniesieniu wielkości stałych przed znak całki $= x \,.\, dx \,.\, dz \int_{y_1}^{y_2} \sigma \,.\, dy$; wyraz ten jest sumą momentów ciężarów cząstek bryły o przekroju $dx \,.\, dz$, rozłożonych wzdłuż osi, równoległej do y; przyjmijmy następnie z za zmienne, pozostawiając x stałem; — to sumę momentów tych cząstek wyrazimy wzorem $x . dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{y_2} \sigma \,.\, dy$; wyraz ten jest sumą momentów cząstek warstwy równoległej do płaszczyzny (z, y) o grubości dx; pozostaje jeszcze zsumowanie momentów cząstek równoległych do osi x; w tym celu przyjmiemy x za zmienną i otrzymamy sumę momentów ciężarów wszystkich cząstek względem osi x, jako całkę potrójną $\int_{x_1}^{x_2} x \,.\, dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y^1}^{y_2} \sigma \,.\, dy$.

2) W ten sposób rozumując wyrazimy $\Sigma\, dQ_k$ wzorem $\int\!\!\int\!\!\int \sigma \,.\, dx . dy . dz$: a więc spółrzędne szukane:

$$x_s = \frac{\int\!\!\int\!\!\int \sigma \,.\, x . dx . dy . dz}{\int\!\!\int\!\!\int \sigma \,.\, dx . dy . dz}; \quad y_s = \frac{\int\!\!\int\!\!\int \sigma \,.\, y . dx . dy . dz}{\int\!\!\int\!\!\int \sigma \,.\, dx . dy . dz};$$

$$z_s = \frac{\int\!\!\int\!\!\int \sigma \,.\, z . dx . dy . dz}{\int\!\!\int\!\!\int \sigma \,.\, dx . dy . dz} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

W tenże sposób dla pól materyalnych:

$$x_s = \frac{\int\!\!\int \sigma \,.\, x . dx . dy}{\int\!\!\int \sigma \,.\, dx . dy}; \quad y_s = \frac{\int\!\!\int \sigma \,.\, y . dx . dy}{\int\!\!\int \sigma \,.\, dx . dy} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$