się a siły P i S wykonają prace, których suma wskutek ich równowagi = 0; skąd mamy równanie

$$P \,.\, \delta p - S \,.\, \delta a = 0;$$

przesunięcie δp i δa możemy wyrazić jedną niezależną zmienną np. α w nast. sposób

$$a = 2\, b \,.\, \sin \frac{\alpha}{2}; \text{ a więc } \delta a = b \,.\, \cos \frac{\alpha}{2} \,.\, \delta\alpha;$$

$$h = b \,.\, \cos \frac{\alpha}{2}; \; \delta h = - \delta p = - \frac{b}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \,.\, \delta\alpha;$$

a po podstawieniu w równanie pracy otrzymamy

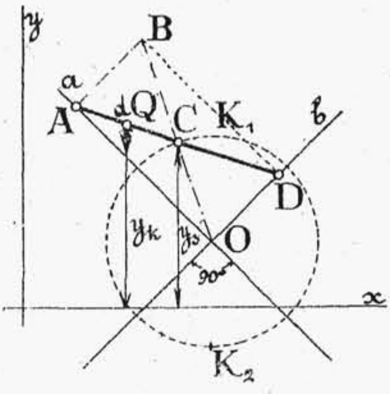
$$S = \frac{P}{2}\, tg\, \frac{\alpha}{2}$$

W podobny sposób można obliczyć naprężenia S w innych prętach i siły odporowe A i B.

Obliczenie rachunkowe przesunięć przedstawia często dosyć znaczne trudności natury formalnej; zastosowanie jednakże sposobów wykreślnych, jakie daje kinematyka czyni zasadę pracy możliwej ważnym narzędziem obliczeń dźwigarów; sposoby tego postępowania podamy w Kinematyce w dziale o prędkościach prostopadłych.

3. Rodzaje równowagi.

124. Równowaga sił ciężkości, działających na bryłę nieswobodną. Za przykład tej grupy zadań służyć może następujące zadanie. W płaszczyźnie pionowej dane są dwie osi wzajemnie prostopadłe, nachylone względem poziomej x, rys. 157-my; po osiach tych ślizgają się bez tarcia końce pręta materyalnego o długości $= l$; wyznaczyć położenie, w którem znajdować się on będzie w spoczynku.



Rys. 157.

W tym celu przeprowadźmy osi prostokątne x i y, i weźmy pod uwagę cząstkę pręta, której spółrzędne są x_k i y_k, a ciężar dQ_k. Nadajmy następnie temu prętowi przesunięcie możliwe, wtedy wszystkie cząstki pręta zakreślą pewne drogi; a pracę sił podczas tego przesunięcia, wyrazimy wzorem

$$\delta L = - \Sigma (dQ_k \,.\, \delta y_k);$$

lub też na zasadzie określenia środka ciężkości:

$$\delta L = - Q \,.\, \delta y_s \,.$$

Gdy pręt jest w spoczynku, wtedy siły przyłożone są w równowadze; praca zatem możliwa powinna być równą zeru: napiszemy więc

$$Q \,.\, \delta y_s = 0, \text{ skąd } \delta y_s = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Wynik ten wypowiemy w sposób następujący: pręt będzie wtedy w równowadze, gdy, podczas przesunięcia możliwego, środek jego ciężkości, pozostanie na tym samym poziomie; y_s wyznacza bowiem wysokość pewnego poziomu; δy_s zaś jest jej przyrostem. Wynik ten zobrazujemy jeszcze w inny sposób. Przesuwając dowolnie pręt, otrzymujemy za każdym razem inne położenie środka jego ciężkości; a więc dla nieskończenie wielu przesunięć, otrzymamy miejsce geometryczne położeń środka ciężkości w postaci pewnej krzywej. Gdy tę krzywą wyrazimy równaniem, odniesionem do układu spółrzędnych prostokątnych, w którym oś y jest pionowo ustawioną, wtedy równanie $\delta y_s = 0$, wyraża, że, podczas przesunięcia pręta, środek jego ciężkości znajduje się w punkcie krzywej, w którym styczna jest poziomą, a więc równoległą do osi x-ów.

Zastosujmy te wyniki do powyższego zadania i przyjmijmy, że pręt jest jednostajnie ciężki; środek zatem jego ciężkości znajduje się w połowie długości, punkt ten oznaczyliśmy literą C; jeżeli pręt będziemy przesuwać zgodnie z warunkami danego mechanizmu, to punkt C zakreśli koło o promieniu $^1/_2\, l$. W przypadku równowagi położenie jego środka ciężkości powinno znajdować się w punktach zetknięcia się ze styczną poziomą. Wyznaczywszy te punkty, wyznaczymy położenie pręta, w którem będzie on pozostawał w spoczynku położenia te będą położeniami równowagi. W danem zadaniu mamy dwa takie położenia równowagi. Stany jednakże równowagi w obydwóch tych położeniach nie są jednakowe. W celu ich rozróżnienia rozpatrzmy przypadek ogólny. Gdy na pewną bryłę działają siły, pozostające w pewnym jej położeniu w równowadze i gdy nadamy tej bryle pewnego ruchu np. przez uderzenie; wtedy bryła odchyli się od położenia równowagi, a siły przyłożone wyjdą z równowagi i wywołają zmianę jej ruchu, — a mianowicie, jeżeli praca tych sił podczas tego ruchu będzie dodatnią (§ 91-szy), to energia kinetyczna t. j. ruch jego stosownie do twierdzenia § 100-ny będzie wzrastać; t. j. bryła będzie się oddalać od położenia równowagi: jeżeli zaś praca będzie odjemną, to nadana energja kinetyczna będzie się zmniejszać, będzie wygasać, § 100-ny, aż do stanu spoczynku bryły; a następnie pod działaniem sił do niej przyłożonych, wskutek wyprowadzenia ich z równowagi wykona drogę odwrotną ku położeniu równowagi, około którego wskutek nadanej jej energji będzie się wahać. Widzimy z tego, że bryła po **wyprowadzeniu** jej z położenia równowagi może posiadać **dwojakiego rodzaju** zachowanie się; albo będzie się oddalała od położenia równowagi; i w tym razie nazwiemy to położenie położeniem równowagi **nietrwałej** lub też powróci ona do położenia równowagi, a wtedy nazwiemy to położenie — położeniem równowagi stałej inaczej **trwałej**. Pozostaje możliwość jeszcze jednego przypadku, mianowicie, gdy praca sił podczas odchylania bryły z położenia równowagi równa się zeru; wtedy bryła nie zmieni swego stanu ruchu i równowaga będzie zachodzić w każdem sąsiedniem jej położeniu; położenie takie nazwiemy położeniem równowagi **obojętnej**.

Znak przeto **pracy**, jaką wykonają siły, przyłożone do bryły podczas przesunięcia jej nieskończenie małego, rozstrzyga o rodzaju równowagi, w jakiej się ona znajduje. Przy stosowaniu tych wniosków do bryły nieswobodnej, na którą działają siły ciężkości, weźmy pod uwagę, że praca sił przyłożonych do niej sprowadza się do pracy tylko sił ciężkości, prace bowiem sił odporowych występujących w punktach podparcia, o ile tarcia nieuwzględniamy, równe są zeru; a że suma prac sił ciężkości bryły równa się pracy jego ciężaru, § 103-ci, przyłożonego w środku ciężkości; wygłosimy przeto twierdzenie: równowaga bryły będącej pod działaniem sił ciążenia i takich sił odporowych, które nie wchodzą do wyrazu pracy możliwej, jest **trwałą**, jeżeli środek jej ciężkości zajmuje położenie **możliwie najniższe**; jest **nietrwała**, jeżeli zajmuje położenie **najwyższe**. W przytoczonym przeto przykładzie z prętem, gdy pręt znajdować się będzie w położeniu takiem, że środek jego pokryje się z wierzchołkiem K_1 koła, jakie ten środek zakreśla, to równowaga jego będzie nietrwałą; gdy zaś środek jego pokryje się z najniższym punktem K_2 koła, to równowaga będzie trwałą.

Postępowanie, jakie należy zastosować w celu orzeczenia o rodzaju równowagi brył ciężkich, może być analityczne lub geometryczne. W analitycznem postępowaniu należy wyrazić wysokość środka ciężkości danej bryły ponad pewien poziom przez spółrzędną zmienną, określającą jej położenie w przestrzeni; jak w naszym przykładzie wystarczy tylko jedna taka spółrzędna, np. kąt jaki tworzy dany pręt np. z osią x; oznaczmy ten kąt przez α, a otrzymamy $y_s = f(\alpha)$; w równanie to wejdą i inne wielkości określające położenie pręta; lecz one będą stałe np. długość pręta, kąty nachylenia osi itp.;—a maxima lub minima wartości y_s przy zmiennej α, obliczone podług prawideł matematyki, wyznaczą położenia równowagi danej bryły i jej rodzaj. Jeżeli położenie bryły w przestrzeni musi być określone przez kilka spółrzędnych, to postępowanie to nic się w zasadzie nie zmieni, będziemy mieli zadanie na maxima i minima z wielu zmiennemi niezależnemi.

W celu zastosowania postępowania geometrycznego dla orzeczenia o rodzaju równowagi — warunki najwyższego i najmniejszego położenia środka ciężkości określi postać cząstki toru, jaką zakreśli środek ciężkości, podczas nieskończenie małego przesunięcia bryły; jeżeli ta cząstka jest zwrócona wypukłością ku dołowi, to środek ten zajmuje najniższe położenie; jeżeli zaś zwrócona jest wypukłością ku górze, to środek zajmuje położenie najwyższe; sposoby, dające możność określenia postaci tej cząstki toru, i przykłady podamy w kinematyce w dziale o przyspieszeniach figur płaskich i o kole przegięć.

Przykład obliczenia położenia równowagi układu złożonego. Znaleźć równanie krzywej, której postać przyjmie nić ciężka, zawieszona w dwóch stałych punktach. Jest to to samo zadanie, któreśmy rozwiązali w § 86-tym, stosując do tego statyczne warunki równowagi, obecnie rozwiążemy je na zasadzie twierdzenia pracy możliwej. W tym celu zestawimy równanie pracy możliwej sił $p.ds$, T_1 i T_2, § 86-ty, działających na obraną cząstkę nici $\bar{1}$, przyrównawszy ją do zera, pg. wzoru 63-go, siły te bowiem są w równowadze, otrzymamy równanie:

$$pds\,.\,\delta y + T_{1y}\,.\,\delta y + T_{2y}\,.\,\delta y + T_{1x}\,.\,\delta x + T_{2x}\,.\,\delta x = 0;$$

w którym T_{1x} i T_{2x}, T_{1y}, T_{2y} są rzutami sił T_1 i T_2 na kierunki osi x i y. Równania takie napiszemy dla każdej cząstki nici i następnie dodamy je; wtedy, zważywszy, że prace sił T_1 i T_2, zniosą się z pracami takichże sił, przyłożonych do sąsiednich cząstek, — otrzymamy w wyniku pracę sił ciężkości cząstek nici oraz pracę sił odporowych, występujących w punktach zawieszenia; lecz prace sił odporowych równają się zeru, gdyż przyjmujemy, że punkty zawieszenia są nieruchome; otrzymamy zatem równanie pracy ciężarów cząstek nici w postaci

$$\int_{.}^{..} pds\,.\,\delta y = 0;$$

a zważywszy, że ciężar każdej cząstki jest niezmienny, przyjmujemy bowiem, że nić jest jednostajnie ciężką, napiszemy je w postaci

$$\delta \int_{.}^{..} pds\,.\,y = 0;$$

a wreszcie, wprowadzając do rachunku spółrzędne środka ciężkości szukanej krzywej, z równania $\int_{.}^{..} pds\,.\,y = Q\,.\,y_s$, w którem Q oznacza ciężar całej nici, napiszemy równanie:

$$\delta y_s = 0.$$

Z równania tego odczytamy, że nić o danej długości przyjmie postać takiej krzywej, która przechodzi przez dwa dane punkty zawieszenia, i której środek ciężkości będzie leżał możliwie najniżej. Rozwiązanie więc danego zadania sprowadza się do zadania matematycznego, znalezienia równania krzywej, odpowiadającej warunkowi, że jej środek ciężkości ma zajmować najniższy poziom, jaki dosięgnąć może; właściwość tę wyrazimy równaniem:

$$\int_{.}^{..} pds \,.\, y = \text{minimum} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (99)$$

Wzór ten nie przedstawia zwykłego zadania na minimum, polegającego na wyznaczeniu takich wartości zmiennych, któreby, po podstawieniu w daną funkcyę, dały jej wartość najmniejszą; w powyższym bowiem zadaniu zmienną jest funkcya $y = f(x)$; **funkcya** zatem $f\,(x)$ jest tą nieznaną, którą należy określić w ten sposób, ażeby wartość całki 99-ej była najmniejszą.

Praktycznie rozwiązaliśmy to zadanie, wykreśliwszy pomiędzy punktami zawieszenia nieskończenie wiele krzywych o długościach, równych danej nici i wybrawszy z nich taką krzywą, której środek ciężkości leży najniżej. Teoretycznie zaś zadania tego rodzaju rozpatrują się w dziale matematyki, zwanym rachunkiem waryacyjnym.

Pod względem więc rachunkowym metoda statyczna jest prostszą; powyższy jednakże sposób określenia szukanej krzywej, jako krzywej z najniższym środkiem ciężkości, nadzwyczaj obrazowo przedstawia zasadę fizyczną, podług której nić dana się układa.

125. Równowaga sił, posiadających funkcyę. Rozwiążmy zadanie, podane w § 124-tym, w postaci ogólniejszej; przyjmijmy mianowicie, że na daną bryłę działają siły dowolne, wtedy warunkiem równowagi tych sił jest równanie: $\Sigma\,(P_k \,.\, \delta p_k) = 0$ i równanie to wyrazić możemy również pg. wzoru 64-go

$$\Sigma\,[P_{k,x} \,.\, \delta x_k + P_{k,y} \,.\, \delta y_k + P_{k,z} \,.\, \delta z_k] = 0.$$

Jeżeli siły posiadają funkcyę sił (str. 167), którą oznaczymy literą U jako funkcyę spółrzędnych niezależnych, określających położenie danej bryły, to powyższe równanie wyrazimy wzorem:

$$\delta U = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (100)$$

gdzie znak δ wyraża różniczkowanie cząstkowe względem niezależnych zmiennych funkcyi U; równanie przeto 100 nie rozpadnie się na tyle równań, ile jest niezależnych zmiennych w funkcyi U tj.: ile jest niezależnych spółrzędnych, określających położenie bryły w przestrzeni, a wartości ich, obliczone z tych równań, określą położenie lub położenia równowagi danej bryły; a zarazem wartości te, podstawione do funkcyi U uczynią jej wartość największą lub najmniejszą. — Ażeby przeto określić położenie równowagi bryły, na którą działają siły, posiadające funkcyę, należy szukać takich wartości dla jej spółrzędnych, przy których U będzie maximum lub minimum.

Jeżeli dla pewnego położenia bryły $U = \text{max.}$; to w sąsiednich jej położeniach $U < U\,\text{max.}$; czyli praca, jaką siły wykonają po wyprowadzeniu bryły z równowagi musi być odjemną; — a więc energja kinetyczna wyprowadzająca bryłę z równowagi, wskutek wykonywania przez siły pracy odjemnej, będzie się zmniejszać i zanikać; równowaga przeto bryły w położeniu, w którem $U = \max.$ jest trwałą; jeżeli zaś w pewnem położeniu bryły $U =$ minimum; to w sąsiednich położeniach $U > U \min.$; a więc podczas przesunięcia się bryły praca sił jest w tym razie dodatnią, energja jej przeto kinetyczna wzrasta; równowaga przeto bryły w położeniu, w którem $U = \min.$, jest nietrwałą.

W przykładzie, rys. 157-my $U = -Q . y_s + C$; $\delta U = -Q . \delta y_s = 0$;

$U = \max.$; jeżeli $y_s = \min.$; równowaga trwała;

$U = \min.$; jeżeli $y_s = \max.$; równowaga nietrwała;

co się zgadza z poprzednimi wnioskami.

4. Zastosowania pracy wyobrażalnej.

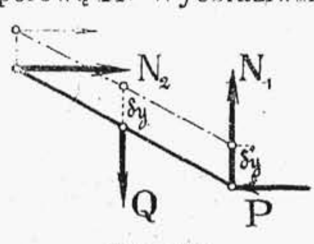
126. Obliczenie sił odporowych za pomocą przesunięć wyobrażalnych. Przesunięcia możliwe mają na celu usunąć z rachunku wielkości sił odporowych. Za pomocą tych więc przesunięć możemy zestawić równania równowagi sił zewnętrznych, gdy przyjmiemy, że siły odporowe są prostopadłe do powierzchni zetknięć. Gdy zaś zechcemy obliczyć siły odporowe, powinniśmy stosować inne przesunięcia, któreby właśnie wprowadzały te siły do wyrazu pracy wyobrażalnej.

Ogólny wzór pracy wyobrażalnej sił zewnętrznych i odporowych, działających na układ nieswobodny punktów, podczas dowolnego t. j. wyobrażalnego przesunięcia, jest następujący:

$$\Sigma(P . \delta p) + \Sigma(N . \delta n) = 0.$$

We wzorze tym litery P oznaczają siły zewnętrzne, zaś N siły odporowe; w celu obliczenia sił odporowych, należy dobrać odpowiednie danemu zadaniu przesunięcia.

Gdy np. belka, obiążona siłą Q, wspiera się na dwóch punktach A i B (przykład 3-ci na str. 51-ej), to siły odporowe A i B obliczymy np. w ten sposób: nadajmy belce obrót około punktu B a otrzymamy równanie pracy, w które wchodzi siła odporowa A i siła dana Q; z równania więc tego obliczymy bezpośrednio siłę odporową A. Wyobraziwszy sobie następnie drugi obrót około punktu A, otrzymamy równanie, z którego obliczymy siłę odporową B.



Rys. 158.

Siły odporowe np. pręta, podanego w przykładzie na str. 190-tej, obliczymy, nadając prętowi przesunięcie w kierunku osi y, rys. 158-my otrzymamy wtedy równanie:

$$N_1 . \delta y - Q . \delta y = 0; \text{ skąd: } N_1 = Q;$$

pracą bowiem sił N_2 i P, podczas tego przesunięcia, równa się zeru.