41. Równania równowagi sił w przestrzeni. Gdy siły, przyłożone w różnych punktach, działają w różnych kierunkach na niezmienny układ punktów, wtedy warunki równowagi tych sił wyrażają się dwoma równaniami wektorowemi: $\Sigma \overline{P}_k = 0$, oraz $\Sigma \overline{M}_k = 0$: równania te jednakże wskutek tego, że są w postaci wektorowej nie nadają się do liczbowego rachunku; celem więc naszym będzie zastąpienie je równaniami skalarnemi; do tego przekształcenia zastosujemy metodę rzutów wektorów momentów na trzy osi. W tem rozpatrywaniu spotkamy się, przeto z rzutem wektora momentu na osi obrane; rzuty te posiadają pewne statyczne znaczenie, któremi najpierw się zajmiemy.

42. Moment siły względem osi Jeżeli pewna siła, działającą na bryłę, wywołuje jej obrót około osi nieruchomej, to działanie tej siły jako **czynnika obracającego** może być rozmaite, zależnie od położenia tej siły względem osi obrotu. Jako przykład takiego działania wyobraźmy sobie np. wał, którego oś jest pochyloną pod pewnym kątem do poziomu; rys. 63-ci; na wał nawiniętą jest lina, a na końcu jej zawieszono ciężar P. Zwieszający się koniec liny przedstawia kierunek siły P, która obraca dany wał; miarą działania, wywołującego obrót jest wielkość zwana **momentem siły względem osi.** Wielkość tę określimy w nast. sposób:

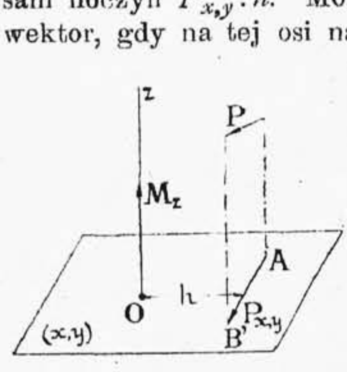
momentem siły względem osi nazywamy moment jej rzutu na płaszczyznę, prostopadłą do osi, względem punktu przecięcia się osi z tą płaszczyzną.

W celu zatem obliczenia momentu siły P względem osi należy przez dowolny jej punkt przeprowadzić płaszczyznę prostopadłą do niej; na tę płaszczyznę, oznaczoną dwiema literami (x,y), rys. 58-my, zrobimy rzut siły P, który oznaczymy przez $P_{x,y}$; momentem zatem siły P względem osi obrotu, będzie moment siły $P_{x,y}$ względem punktu przecięcia się osi z płaszczyzną (x,y). Niechaj płaszczyzną (x,y), będzie płaszczyzną rzutu; oś z niech będzie osią momentu, to moment siły P względem osi z:

$$M_z = P_{xy} \cdot h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (31)$$

gdzie h oznacza prostopadłą odległość bieguna O od kierunku rzutu $P_{x,y}$; M_z oznacza moment siły względem osi z.

Oczywistem jest, że wartość tego momentu nie zależy od położenia płaszczyzny rzutu; gdyż na każdą inną płaszczyznę, prostopadłą do osi obrotu, otrzymamy ten sam rzut siły i tę samą odległość, a więc i ten sam iloczyn $P_{x,y} . h$. Moment siły względem osi przedstawimy przez wektor, gdy na tej osi naniesiemy odcinek o długości, równej liczbowo iloczynowi $P_{x,y}.h$. W którym miejscu osi naniesiemy ten odcinek, jest to obojętnem dla określenia **momentu siły** względem osi. Do oznaczenia strzałki wektora $\overline{M}_z$ zastosujemy przyjęte już prawidło dodatniego i odjemnego obrotu. Zwrócić należy jeszcze uwagę, że wartość momentu siły względem osi równa się podwójnej wartości pola trójkąta, o podstawie $P_{x,y}$ i wierzchołku O; rys. 58-my.



Rys. 58.

Z tego określenia wynika, że moment siły względem osi równy jest zeru, gdy:

1) siła $P = O$; lub też

2) gdy siła $\overline{P}$ przecina oś obrotu; wtedy bowiem $h = 0$; lub też

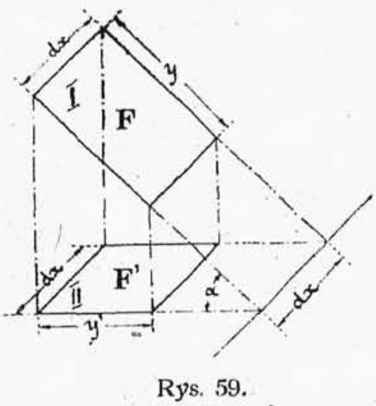
3) gdy siła $\overline{P}$ jest równoległą do osi obrotu; wtedy bowiem rzut siły na płaszczyznę prostopadłą do osi równa się zeru. W tych dwóch ostatnich przypadkach siła P i oś obrotu leżą w jednej płaszczyźnie.

Wnioski te wysłowimy w krótszy sposób:

moment siły względem osi równa się zeru: 1) gdy siła równa się zeru; lub 2) gdy siła i oś momentu leżą w jednej płaszczyźnie.

Dana siła wywołuje moment największy, gdy jest $\perp$ do osi; — najmniejszy gdy jest $\parallel$ do osi.

43. Twierdzenie pomocnicze z geometrji. Oznaczmy przez F wielkość pola dowolnej figury płaskiej; zróbmy rzut tej figury na inną dowolną płaszczyznę, — która tworzy z jej płaszczyzną kąt dwuścienny α, i oznaczmy przez F' wielkość pola zrzutowanej figury; natenczas zachodzi zależność: $F' = F . \cos \alpha$; którą należy dowieść. W tym celu podzielmy pole F, leżące w płaszczyźnie I-ej na pasy prostopadłe do prostej przecięcia się obydwóch płaszczyzn, rys. 59-ty; pasy te mogą być uważane za prostokąty lub trapezy o podstawach y i wysokościach dx; wtedy $dF = ydx$; zróbmy następnie rzut całej figury na płaszczyznę II-ą, a otrzymamy nową figurę; której pole $dF' = y^{\delta} . dx$; gdzie $y' = y . \cos \alpha$; przeto:

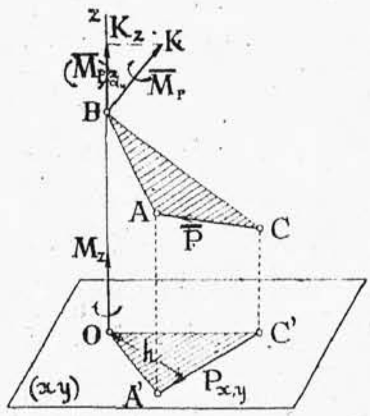


Rys. 59.

$$F' = \cos \alpha \int ydx = \cos \alpha . F;$$

co było do dowiedzenia.

44. Związek pomiędzy momentem siły względem osi i jej momentem względem bieguna, obranego na tejże osi. Obierzmy na osi z dowolny biegun B i wyznaczmy wektor momentu danej siły $\overline{P}$ względem tego bieguna; liczbowa jego wartość równa się podwójnej wartości pola trójkąta ABC, § 24-ty; wektor tego momentu, na zasadzie określenia, jest prostopadły do płaszczyzny tego trójkąta i skierowany stosownio do zwrotu obrotu; jak pokazano na rysunku 60-ym. Niech wektor $\overline{BK}$ oznacza wektor momentu siły $\overline{P}$ względem bieguna B; a więc długość jego:



Rys. 60.

$BK = 2 \,.\, (\text{pole } ABC)$, wzięte w pewnej skali.

Zróbmy obecnie rzut wektora $\overline{BK}$ na oś z, a otrzymamy odcinek o długości: $BK_z = BK \,.\, \cos\alpha$; gdzie α jest to kąt pomiędzy wektorem $\overline{BK}$ i osią z; kąt ten jest również miarą kąta dwuściennego zawartego pomiędzy płaszczyznami trójkątów ABC i $A'OC'$. Podstawmy w powyższe równanie wartość $BK = 2 \,.\, (\text{pole } ABC)$, to otrzymamy:

$BK_z = 2 \,.\, (\text{pole } ABC \,.\, \cos\alpha)$; zważywszy następnie, że:

$(\text{pole } ABC \,.\, \cos\alpha) = (\text{polu } A'OC')$; napiszemy:

$BK_z = 2 \,.\, (\text{pole } A'OC') =$ momentowi siły P względem osi z.

Twierdzenie to wypowiemy:

Rzut na pewną oś wektora momentu siły, względem dowolnego bieguna, obranego na tej osi, jest wielkością niezależną od położenia bieguna na tej osi i równą momentowi tej siły względem osi rzutu.

Twierdzenie to wyrazimy wzorem:

$$[\overline{M}]_z = M_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Z tego widzimy, że chociaż moment siły, względem obranego bieguna na osi, będzie miał różne wartości, zależne od położenia bieguna, jednakże rzut wektora tego momentu na oś z jest stałą wielkością dla danej siły i danej osi z i równa się momentowi siły względem osi.

Niezmienność wartości tego rzutu wyjaśnić sobie możemy w ten sposób: chociaż wartość momentu, np. z odsuwaniem bieguna do nieskończoności, rośnie również do nieskończoności; lecz jednocześnie kierunek jego, wektora zbliża się do kierunku prostopadłego względem osi rzutów w ten sposób, że rzut jego na tę oś będzie wielkością stałą.

Opierając się na tym wniosku, możemy uważać moment pewnej siły względem osi, jako rzut na nią wektora momentu siły względem dowolnego bieguna, obranego na tejże osi. Rozpatrywania więc właściwości momentów sił względem osi możemy zastąpić rozpatrywaniem momentów tychże sił względem bieguna, leżącego na tej osi i odwrotnie.

45 Moment wypadkowej sił, przecinających się w jednym punkcie, względem osi. Weźmy pod uwagę dowolną ilość sił, działających na jeden punkt w przestrzeni i obliczmy moment ich wypadkowej względem obranej osi; moment ten, który oznaczymy przez M_z będzie równy iloczynowi $R_{x,y}.h$, gdzie $R_{x,y}$ oznacza rzut wypadkowej na płaszczyznę (x,y), prostopadłą do osi z; h — jej ramię.

Zrzutujmy następnie dany pęk sił na płaszczyznę (x,y); otrzymamy płaski pęk sił; moment wypadkowej tego pęku względem osi równa się sumie algebraicznej momentów sił składowych, § 26-ty; przeto wypowiemy wniosek: moment, względem osi, wypadkowej wielu sił, działających na jeden punkt, równa się sumie algebraicznej momentów sił składowych względem tejże osi. Twierdzenie to daje możność obliczenia momentu wypadkowej siły względem osi z momentów sił składowych; nie obliczając siły wypadkowej.

46. Wyrażenie wektora momentu względem bieguna przez rzuty jego na osi. Moment siły $\overline{P}_k$ względem obranego bieguna O jest ściśle wyznaczony co do wartości, kierunku i zwrotu przez wektor tego momentu, który oznaczyliśmy literą $\overline{M}$; początek tego wektora leży w biegunie, kierunek zaś jego jest prostopadły do płaszczyzny $(O, \overline{P})$; — zwrot i wartość wyznaczymy podług prawideł wyżej wyłożonych.

W analitycznym rachunku każdy wektor może być przedstawiony przez rzuty, na trzy dowolne osi w przestrzeni. W celu wprowadzenia do rachunku rzutów wektora $\overline{M}$, wyprowadźmy w przestrzeni z obranego bieguna O trzy osi wzajemnie prostopadłe x, y, z i zrzutujmy na nie wektor $\overline{M}$, a otrzymamy trzy rzuty M_x, M_y i M_z.

Gdy odwrotnie dane będą rzuty $\overline{M}_x$, $\overline{M}_y$ i $\overline{M}_z$ wtedy obliczymy analitycznie wielkość i położenie właściwego wektora $\overline{M}$. Geometrycznie więc, w prostokątnym układzie spółrzędnych, wektor $\overline{M}$ jest przekątnią prostopadłościanu, zbudowanego na bokach: $\overline{M}_x$, $\overline{M}_y$ i $\overline{M}_z$; analitycznie zaś:

$$M = \sqrt{M_x{}^2 + M_y{}^2 + M_z{}^2} \text{ oraz}$$

$$\cos(M,x) = \frac{M_x}{M}; \cos(M,y) = \frac{M_y}{M}; \cos(M,z) = \frac{M_z}{M} \quad . \ . \ . \quad (33)$$

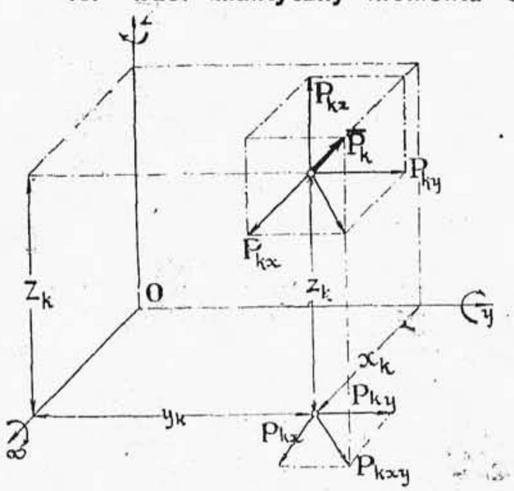
47. Obliczenie rzutów wektora momentu. Wielkości M_x, M_y i M_z są **rzutami** wektora $\overline{M}$ na osi x, y i z; lecz na zasadzie poprzedniego twierdzenia mogą być również uważane **jako momenty** siły $\overline{P}$ **względem osi** x, y i z; momenty zatem pewnej siły, zestawione względem trzech przecinających się osi w przestrzeni, wyznaczają wektor jej momentu $\overline{M}$

względem bieguna, leżącego na przecięciu się tych osi. Jeżeli obrane osi x, y, z są wzajemnie prostopadłe, to dla wyznaczenia momentu sposobem analitycznym można zastosować wzory 33-cie. Dla wyznaczenia zaś wektorowego, służy wzór wektorowy.

$$\overline{M} = \overline{M}_x + \overline{M}_y + \overline{M}_z$$

W celu analitycznego przedstawienia momentu siły względem obranego bieguna, będziemy zatem stosowali rzuty wektora momentu na trzy wzajemnie prostopadłe osi, przechodzące przez dany biegun; lub też, inaczej się wyrażając, będziemy ten moment wyznaczali przez momenty danej siły względem trzech osi, wzajemnie prostopadłych i przechodzących przez obrany biegun.

48. Wzór analityczny momentu siły względem obranego bieguna.



Rys. 61.

Mamy dany bigun O i siłę $\overline{P}_k$; w celu wyrażenia analitycznego jej momentu **względem bieguna**, przeprowadzamy przez ten biegun trzy wzajemnie prostopadłe osi x, y i z. Moment siły $\overline{P}_k$ względem bieguna O obliczymy z trzech rzutów wektora tego momentu na obrane osi; rzuty zaś te wyznaczymy, obliczając, § 47-my, momenty danej siły względem tych osi.

W tym celu rozkładamy siłę $\overline{P}_k$ w kierunkach trzech osi i otrzymujemy siły składowe $P_{k,x}$, $P_{k,y}$ i $P_{k,z}$ rys. 61-szy. Na zasadzie twierdzenia, że moment siły względem osi równy jest sumie algebraicznej momentów jej składowych względem tejże osi, napiszemy sumę momentów tych trzech sił względem osi np. x w sposób następujący:

Moment siły $P_{k,x}$ (względem osi x) $= 0$

„ „ $P_{k,y}$ („ „ x) $= P_{k,y} z_k$;

„ „ $P_{k,z}$ („ „ x) $= - P_{k,z} y_k$; skąd

„ „ P_k („ „ x) $= M_{k,x} = P_{k,y} z_k - P_{k,z} y_k$. (34)

W tenże sposób otrzymamy z rysunku 61-go, lub przez cykliczne przestawienie liter:

$$M_{k,y} = P_{k,z} x_k - P_{k,x} z_k;$$

$$M_{k,z} = P_{k,x} y_k - P_{k,y} x_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Równania powyższe przedstawiają jednocześnie **rzuty** na trzy osi

wektora momentu siły P_k **względem bieguna** O; a z tych trzech rzutów obliczyć można wektor momentu co do wartości kierunku i zwrotu.

49. Równania analityczne równowagi sił w przestrzeni. Dowiedliśmy już poprzednio, iż siły, działające na niezmienny układ punktów, są w równowadze, gdy sumy wektorowe: $\Sigma \overline{P}_k = 0$ i $\Sigma \overline{M}_k = 0$; na zasadzie twierdzeń o rzutach sum wektorowych, oraz na zasadzie § 48-go warunki te wyrazić natępującemi równaniami skalarnemi:

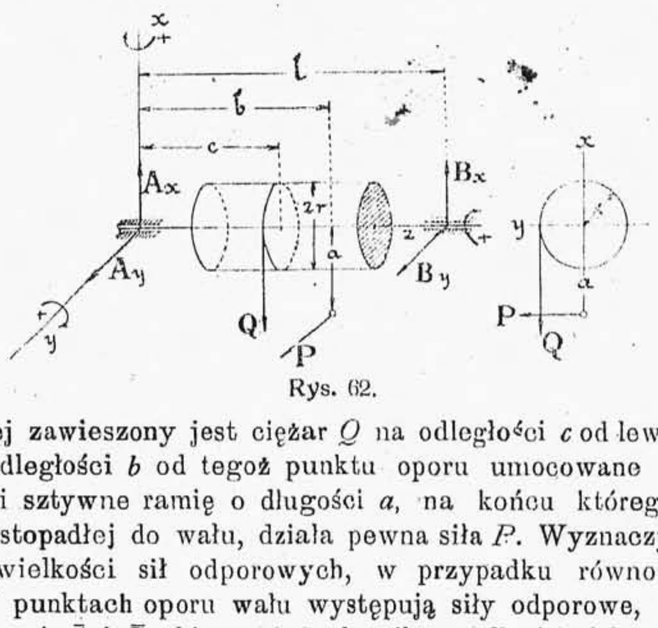
$$1)\ \Sigma P_{k,x} = 0;\quad 4)\ \Sigma (P_{k,y} z_k) - \Sigma (P_{k,z} y_k) = 0;$$
$$2)\ \Sigma P_{k,y} = 0;\quad 5)\ \Sigma (P_{k,z} x_k) - \Sigma (P_{k,x} z_k) = 0;$$
$$3)\ \Sigma P_{k,z} = 0;\quad 6)\ \Sigma (P_{k,x} y_k) - \Sigma (P_{k,y} x_k) = 0; \quad . \ . \quad (36)$$

które streścimy w sposób następujący:

siły, przyłożone do układu niezmiennego, są w równowadze, gdy sumy algebraiczne ich rzutów i sumy ich momentów względem trzech osi, są równe zeru względem każdej osi zosobna.

Sześć zatem mamy równań dla wyrażenia równowagi sił, przyłożonych do bryły **swobodnej** i sześć przeto może być w zadaniu niewiadomych.

Przykład. Dany jest wał, rys. 62-gi, którego średnica $= 2r$, odległość pomiędzy podporami $= l$. Na wał ten nawiniętą jest lina, na



Rys. 62.

końcu której zawieszony jest ciężar Q na odległości c od lewego punktu oporu; na odległości b od tegoż punktu oporu umocowane jest prostopadle do osi sztywne ramię o długości a, na końcu którego, w płaszczyźnie prostopadłej do wału, działa pewna siła P. Wyznaczyć jej wielkość oraz wielkości sił odporowych, w przypadku równowagi całego układu. W punktach oporu wału występują siły odporowe, które oznaczymy literami $\overline{A}$ i $\overline{B}$; kierunki tych sił i wielkości ich są nieznane, wiemy tylko, że przechodzą one przez punkty podporu wału. Posiadamy zatem cztery siły $\overline{Q}$, $\overline{P}$, $\overline{A}$ i $\overline{B}$, które działają na wał i są w równowadze; ażeby zestawić warunki równowagi podług wzorów 36-tych, rozkładamy te siły w kierunkach obranych osi x, y, z, rys. 62-gi, i otrzymujemy:

$$
\begin{array}{llll}
P_x = 0, & Q_x = -Q, & A_x = ?, & B_x = ?, \\
P_y = P, & Q_y = 0, & A_y = ?, & B_y = ?, \\
P_z = 0, & Q_z = 0, & A_z = 0, & B_z = 0.
\end{array}
$$

Następnie napiszemy spółrzędne punktów przyłożenia tych sił:

$$
\begin{array}{llll}
x_P = a, & x_Q = 0, & x_A = 0, & x_B = 0, \\
y_P = 0, & y_Q = r, & y_A = 0, & y_B = 0, \\
z_P = b, & z_Q = c, & z_A = 0, & z_B = l.
\end{array}
$$

Na podstawie wzoru: $\Sigma P_{k,x} = 0$, napiszemy: 1) $0 - Q + A_x + B_x = 0$,

„ $\Sigma P_{k,y} = 0$, „ 2) $P + 0 + A_y + B_y = 0$,

„ $\Sigma P_{k,z} = 0$, „ 3) $0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

Sumę momentów względem osi x otrzymamy z rysunku 62-giego; składając najpierw momenty sił równoległych do osi y, następnie do osi z, siły bowiem równoległe do osi x dają moment względem tejże osi $= 0$, a więc:

$$(P.b + Q.C + A_y.0 + B_y.l) - (0.0 + 0.r + 0.0) = 0; \text{ skąd:}$$

$$4)\ P.b + B_y.l = 0.$$

Sumę momentów względem osi y zestawimy, wziąwszy najpierw momenty sił, równoległych do z następnie do x:

$$(0.a + 0.0 + 0.0 + 0.0) - (0.b + (-Q.c) + A_x.0 + B_x.l) = 0; \text{ skąd}$$

5) $Q.c - B_x.l = 0$; w tenże sposób momenty względem z:

$$(0.0 - Q.r + A_x.0 + B_x.0) - (-P.a + 0.0 + A_y.0 + B_z.0) = 0; \text{ skąd:}$$

$$6)\ -Q.r + P.a = 0.$$

Zestawimy te równania:

$$
\begin{array}{ll}
1)\ A_x + B_x = Q; & 4)\ P.b + B_y.l = 0; \\
2)\ A_y + B_y + P = 0; & 5)\ Q.c - B_x.l = 0; \\
3)\ 0 = 0; & 6)\ P.a - Q.r = 0.
\end{array}
$$

Otrzymaliśmy pięć równań, jedno bowiem zamieniło się identycznie w zero; w tych równaniach jest pięć niewiadomych: A_x, A_y, B_x, B_y oraz P, które obliczymy w następujący sposób:

z 6-go: $P = Q \cdot \frac{r}{a}$;

„ 5-go: $B_x = Q \cdot \frac{c}{l}$;

„ 2-go: $A_y = -\frac{Q.r}{l} + \frac{Q.b.r}{a.l} = -Q\frac{r.(l-b)}{a.l}$;

„ 4-go: $B_y = -\frac{P.b}{l} = -Q \cdot \frac{b.r}{a.l}$;

„ 1-go: $A_x = Q - B_x = Q - \frac{Q.c}{l} = Q \cdot \frac{l-c}{l}$.

W celu wykończenia rozwiązania należy wykreślić rzuty A_x i A_y oraz B_x i B_y i wyznaczyć w przestrzeni lub obliczyć właściwe położenie odnośnych sił.

Szczególne przypadki: 1) jeżeli $Q=0$; to wszystkie niewiadome $=0$.

2) jeżeli $r=0$; to $P=0$; $A_y=0$; $B_y=0$;

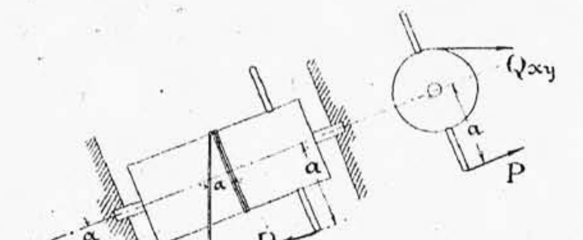
3) jeżeli $c=0$; oraz $b=0$; to $B_x=0$;

$$A_y = -Q \cdot \frac{r}{a} = -P;\ B_y=0;\ A_x = Q;\ \text{itp.}$$

Czytelnik zechce znaleść znaczenia fizyczne tych odpowiedzi.

Znacznie uprościliśmy rachunek dogodnym wyborem położenia osi spółrzędnych. Przeprowadziwszy bowiem oś z przez dwa punkty podparcia, nie wprowadziliśmy do równania momentów względem tej osi czterech niewiadomych A_x, A_y, B_x, B_y; i dlatego otrzymaliśmy rów. 5-te bez tych niewiadomych; a jedynie z jedną niewiadomą P. Również przeprowadzenie osi x i y przez punkt A uprościło o tyle rachunek, że momenty sił A_x i A_y nie weszły w równania momentów względem tych osi. Przez wybór osi y i z prostopadle do siły P, uniknęliśmy wprowadzenia tej niewiadomej do równania rzutów na tę osi.

Zadanie z wałem możemy uogólnić, przyjąwszy np, że wał jest pochyło ustawiony względem poziomu, i bez trudności je rozwiążemy, stosując wypowiedziane uwagi. Przyjmijmy, że oś wału jest nachyloną względem poziomu pod kątem α, rys. 63-ci, lina zaś, na której zawieszono ciężar, jest pionowo spuszczona, wtedy równanie równowagi, na zasadzie rozważań powyższych, jest $\Sigma M_{k,z}=0$; ażeby tę sumę obliczyć, przeprowadźmy płaszczyznę, prostopadłą do osi z; zróbmy rzut siły Q na tę płaszczyznę, a otrzymamy $Q_{x,y} = Q \cdot \cos\alpha$, i napiszemy równanie momentu:



Rys. 63.

$$Q \cdot \cos\alpha \cdot r - P \cdot a = 0,\ \text{skąd: } P = Q \cdot \frac{r}{a} \cdot \cos\alpha.$$

W szczególnym przypadku, gdy $\alpha=0$, otrzymamy wzór poprzedni.

Zrozumiałem jest, iż do obliczenia sił odporowych należy zestawić wszystkie sześć równań.