II. Statyka.

1. Określenie siły, momentu i równowagi.

17. Bryła i punkt materjalny. W geometrji i w kimematyce rozpatrujemy ciała tylko ze względu na ich przestrzenne właściwości; innych zaś właściwości czy to cieplnych, czy elektrycznych, czy też chemicznych w tych działach nauki nie rozpatrujemy. W mechanice z tych licznych właściwości zajmiemy się jedynie temi właściwościami, które nazwiemy dynamicznemi, t. j. właściwościami, które mają swój wpływ na przebieg **ruchu** danego ciała; z tego też względu stosować będziemy w mechanice dla ciała nazwę bryły materjalnej—lub krótko **bryły.**

Właściwości dynamiczne brył materjalnych sformułowane są w prawach zasadniczych, zwanych Newton'owskimi. Narazie przytoczymy jedno z tych praw, wyrażające bezwładność materji; jest ono bowiem potrzebne do określenia siły. Przedtem jednakże damy objaśnienie, co będziemy rozumieli przez **punkt materjalny.**

Gdy kula ziemska, obracając się około swej osi, przebiega jednocześnie po orbicie, natenczas każdy jej punkt zakreśla w przestrzeni pewien tor; gdy chcemy jednakże zwrócić uwagę wyłącznie na jedną stronę danego zjawiska np. na ruch kuli po orbicie, pomijając ruch obrotowy; wtedy wyobrażamy sobie całą kulę ziemską skupioną w jednym punkcie i mówimy o ruchu punktu po danym torze; i punktowi temu przypisujemy te same właściwości ruchu, jakie posiada kula ziemska.

Gdy pociąg przebiega po torze, wtedy różne jego części wykonują bardzo złożone ruchy; jeżeli zaś chcemy zwrócić uwagę naszą tylko na ruch jego wzdłuż toru, to wyobrażamy sobie cały pociąg w postaci jednego punktu, który posuwa się po torze i przypisujemy temu punktowi właściwości ruchu całego pociągu.

Punkt materjalny możemy również wyobrazić sobie w postaci dowolnie małej cząstki bryły materjalnej; tak małej, że ruchu jej obrotowego, jeżeli ona go wykonuje, można w danych rozpatrywaniach nieuwzględniać.

Pojęcie punktu materjalnego w mechanice jest takiemże pojęciem abstrakcyjnem, jakiem jest w geometryi pojęcie punktu geometrycznego; wprowadzenie zaś do naszych rozpatrywań tego pojęcia ma na celu ułatwienie; sprowadza ono bowiem badania więcej zawiłych zagadnień do badań zagadnień prostszych.

18. Prawo bezwładności. Prawo to wypowiemy w sposób następujący:

każdy punkt materjalny pozostawiony sam sobie, trwa w stanie spoczynku, lub w stanie ruchu jednostajnego i prostolinijnego tak długo, dopóki czynniki zewnętrzne nie zmienią tego stanu.

Prawo to, jak i inne prawa zasadnicze mechaniki nie może być stwierdzone bezpośrednio doświadczeniem; nie jesteśmy bowiem w stanie usunąć z doświadczeń pewnych czynników, które, oddziaływując na przebieg danego zjawiska, zmieniają jego wynik. Nie możemy np. usunąć siły ciążenia, tarcia, oporu powietrza (w większym zakresie) i t. p. Możemy jednakże pośrednio stwierdzić słuszność tego prawa. Gdy np. jedziemy tramwajem, który jest w ruchu jednostajnym; wtedy nie odczuwamy żadnych uderzeń, żadnych wstrząśnień; gdy jednakże tramwaj zatrzyma się, lub zboczy z drogi prostej, wtedy ciało nasze dąży do zachowania nabytej prędkości i dopiero czynniki zewnętrzne zmienić mogą tę prędkość. Zjawisko to uzewnętrznia się także np. przy wyskakiwaniu z tramwaju biegnącego: — nabytej prędkości w tym razie nie łatwo pozbyć się możemy.

Panowanie tego prawa, jak i pozostałych praw zasadniczych mechaniki, o których będzie mowa, jest wszechwładne i we wszystkich zjawiskach ruchu daje się ono odnaleźć.

19. Siła i jej miara. Jako wniosek z prawa bezwładności wypływa: jeżeli punkt zakreśla drogę krzywolinijną lub też prostolinijną z pewnem przyśpieszeniem, to punkt ten podlega działaniu pewnych czynników, które zmieniają jego prędkość: czynniki te nazwano **siłami.**

I odwrotnie, gdy mówimy, że pewna siła działa na punkt materyalny, to rozumiemy wtedy, że dany punkt otrzymuje pewne przyśpieszenie; a jeżeli był on w spoczynku przed działaniem siły, to otrzyma on pewien ruch. Jeżeli ruch punktu jest jednostajnie przyśpieszony, to mówimy, że działa na niego siła stała; i odwrotnie, jeżeli wiadomem jest, z innych badań, że na dany punkt działa siła stała, to powiemy, że punkt wykona ruch jednostajnie przyśpieszony.

Mierzyć przeto siłę możemy tylko zmianami, jakie ona wywołuje w ruchu punktu materyalnego i jest to ten sam sposób, jaki stosujemy do mierzenia innych właściwości fizycznych materji, np. temperatury, elektryczności; mierzymy bowiem te wielkości zmianami, jakie te działania wywołują. Zmiany, jakie wywołuje siła, ujawniają się wogóle w zmianie stanu ruchu punktu materyalnego, na który ona działa, w szczególności w zmianie stanu spoczynku; miarę taką nazwano miarą dynamiczną siły.

Ten sposób mierzenia wskazuje, iż sile należy przypisać właściwość kierunkową; ruch bowiem punktu wyznacza pewną ściśle okresloną prosta w przestrzeni, po której w danej chwili się porusza i prostę tę nazwiemy **prostą działania siły**. Ruch punktu a ściślej mówiąc przyśpieszenie może być większe lub mniejsze; sile przeto przypiszemy pewną **liczbową wartość**; i następnie ruch punktu posiada ścisle określony kierunek na prostej, po której się porusza, inaczej mówiąc posiada pewną strzałkę, (zwrot). Miarą przeto działania siły może być odcinek prostej, którego położenie w przestrzeni jest ściśle określone, którego długość ma tyle jednostek, ile jednostek posiada siła; i który zaopatrzony jest w strzałkę, wskazującą kierunek jej działania; odcinek taki nazwany **wektorem**, jednoznacznie określa działanie siły; siły przeto wyrażać będziemy wektorami; i w piśmie oznaczać będziemy literami z kreskami u góry.

Jako jednostkę liczbowej wartości siły przyjęto w technice siłę ciężaru, wyrażoną w kilogramach. Ten sposób mierzenia sił należy stosować w tych tylko przypadkach, w których przyśpieszenie ziemskie g jest stałe, t. j. gdy porównywamy między sobą ciężary w jednem i tem samem miejscu kuli ziemskiej; co też w praktyce zwykle zachodzi.

Sposób mierzenia sił ciężarami był najpierw stosowany, uzmysławia on bowiem wielkość sił przez wysiłki naszych muskułów. Dalszem rozwinięciem tej miary jest miara za pomocą wag sprężynowych; inaczej zwanych dynamometrami. Przyrządy te składają się ze sprężyny, której jeden koniec jest umocowany; na drugi zaś działa siła. Działanie tego przyrządu polega na większem lub mniejszem odchyleniu sprężyny od jej pierwotnego położenia. Odchylenia te wyznacza się najpierw za pomocą ciężarów, wyrażonych w kilogramach i w ten sposób otrzymuje się podziałkę, z której odczytujemy następnie wartość sił bezpośrednio w kilogramach.

Jeżeli zaś wyrazimy siłę w kilogramach, to dla jej ścisłego określenia powinniśmy mieć wskazanem, od jakiego punktu, w jakim kierunku i z jakim zwrotem nanieść mamy odcinek, którego długość równa jest w pewnej skali danej ilości kilegramów. W obydwóch sposobach wyrażenia wielkości siły korzystamy z pojęcia wektora, gdyż wektor jest jedyną miarą wielkości siły; — siła bowiem jest wielkością wektorową.

20. Siły bierne i siły czynne. Z określenia wynika, że jeżeli pewna siła działa na punkt materyalny, to udziela mu przyśpieszenia w kierunku swego działania, zachodzić jednakże może przypadek, że punkt dany wskutek warunków **fizycznych**, w jakich się ruch odbywa, nie może wykonać ruchu w pewnym kierunku, i przyśpieszenie jego posiada inny kierunek, niż nadaje mu przyłożona siła; w tym razie, ażeby być w zgodzie z określeniem siły, przyjmujemy, że na dany punkt, oprócz siły przyłożonej, działają jeszcze inne siły, pochodzące od fizycznych przeszkód, zmieniających ruch punktu.

Punkt ciężki, staczając się np. po płaszczyźnie pochyłej, wykonywa ruch, który jest inny niż ruch, wywołany tylko przez siłę ciążenia: kierunek bowiem jego jest równoległy do tej płaszczyzny i wartość jego jest inna, niż kierunek siły ciążenia. Przyjmujemy zatem, że oprócz siły ciążenia działa na dany punkt jeszcze jakaś inna siła.

Każdy przedmiot, leżący np. na stole, jest pod działaniem siły ciążenia, powinien więc wykonać ruch z przyśpieszeniem, odpowiadającem tej sile; lecz on tego ruchu nie wykonywa, i pozostaje w spoczynku, **przeto przyjmujemy**, że działa na niego inna siła, która stawia opór w wykonaniu tego ruchu; lub też, inaczej się wyrażając, przyjmujemy, że występuje inna siła, która jak w danym przypadku znosi działanie na dany przedmiot siły ciążenia; siła ta musi być więc równą co do wartości i kierunku sile ciążenia, lecz co do zwrotu — przeciwną; gdyż przyśpieszenie tylko takiej siły jest w stanie znieść przyśpieszenie siły ciążenia;—siły takie nazywamy siłami **odporowemi**, a punkt, który podlega pewnym ograniczeniom w swoich ruchach, nazywamy **punktem nieswobodnym**; punkt zaś, który nie podlega ograniczeniom ruchu, t. j. punkt, który może zupełnie swobodnie poruszać się, nazwiemy **swobodnym**.

Siły, które wywołują pewien ruch, nazwiemy **czynnemi**; — siły zaś, które zmieniają lub wstrzymują ruch, wywołany przez siły czynne, nazwiemy **biernemi**.

Gdy na dwa punkty działają siły, to każdy z tych punktów, jeżeli niema żadnych ograniczeń ruchu, t. j. jeżeli jest swobodny, wykona ruch, odpowiedni otrzymanemu przyśpieszeniu; wysłowimy to zjawisko potocznie, że każdy z tych punktów pójdzie swoją drogą; lecz gdy punkty te np. sztywno połączymy, wtedy ruchy ich będą zależne, i nie będą odpowiadały przyśpieszeniom, udzielonym im przez siły przyłożone; w danym więc razie, ażeby być w zgodzie z określeniem siły, przyjmiemy, że pomiędzy tymi punktami występują siły, które zmieniają wielkości przyśpieszeń, udzielonych przez siły przyłożone; siły takie nazwiemy siłami **wewnętrznemi**. Siły wewnętrzne mają swój wyraz fizyczny w naprężeniu np. nici, lub w ciśnieniu, jakie występują w prężcie, łączącym dane punkty i t. p. Siły odporowe, i siły wewnętrzne, jako zjawiska fizyczne, są wywołane warunkami fizycznymi, w jakich znajduje się punkt ruchomy; pojęcia zaś ich matematyczne powstały z potrzeby pozostawania w zgodzie z określeniem siły.

Siły, tak odporowe jak i wewnętrzne, mają wspólną właściwość, że występują tylko pod działaniem sił czynnych, inaczej zwanych siłami **zewnętrznemi.**

Gdy czynnikiem, ograniczającym ruch danego punktu materyalnego; lub—też nadającym mu ruch, będzie nasza ręka, wogóle nasze muskuły, natenczas uczuwamy większy lub mniejszy wysiłek; wysiłek ten pozwala mierzyć w przybliżeniu, a właściwie oceniać wielkoś i zmiany ruchu, jakieby powstały pod działaniem naszej siły muskularnej: z tego powodu czynniki, zmieniające stan ruchu punktu, nazwano siłami; lecz w mechanice pojmowanie siły jako wysiłku muskularnego jest niepotrzebne; często nawet wikła zrozumienie pojęć mechaniki.

21. Składanie sił, działających na punkt swobodny. Jeżeli pewna ilość sił działa **kolejno** na punkt materyalny, to każda z nich nadaje mu pewne przyśpieszenie w kierunku swego działania; jeżeli teraz przyjmiemy, że te siły **jednocześnie** działają, to punkt dany otrzyma ściśle określone przyśpieszenie, które oczywiście można wywołać pewną ściśle określoną siłą; siłę tę nazwiemy siłą zastępczą lub **wypadkową**: a siły poszczególne siłami **składowemi.** Jak doświadczenie uczy: **wypadkowa sił, działających na jeden punkt, równa się sumie wektorowej sił składowych.**

Gdy oznaczymy siły składowe przez $\overline{P}_1, \overline{P}_2$, wogóle przez $\overline{P}_k$, gdzie $k = 1,2,...$; a siłę wypadkową przez $\overline{R}$: wtedy wyrazimy matematycznie to prawo wzorem wektorowym:

$$\overline{R} = \Sigma \overline{P}_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Wzór ten przedstawia wielobok, utworzony z wektorów sił, rys. 5-ty, którego bokiem zamykającym jest siła wypadkowa;—wielobok ten nazwano **wielobokiem sił.**

Ponieważ wielobok sił jest szczególnem zastosowaniem wieloboków wektorowych, przeto możemy zastosować do niego wszystkie twierdzenia, wyprowadzone w dziale o wektorach. Ważniejsze z tych twierdzeń, o rzutach wektorów, zastosowane do sił, wyrazimy w sposób następujący:

gdy siły działają na jeden punkt, wtedy rzut ich wypadkowej na dowolnie obraną oś, równa się sumie algebraicznej rzutów sił składowych; co wyrazimy równaniem: $R_x = \Sigma P_{k,x}$. Jeżeli układ sił jest **płaski,** to rzuty sił składowych na dwie osi wyznaczają siłę wypadkową co do kierunku, zwrotu i wartości; — jeżeli przytem obierzemy osi wzajemnie prostopadłe, to otrzymamy następujące wzory:

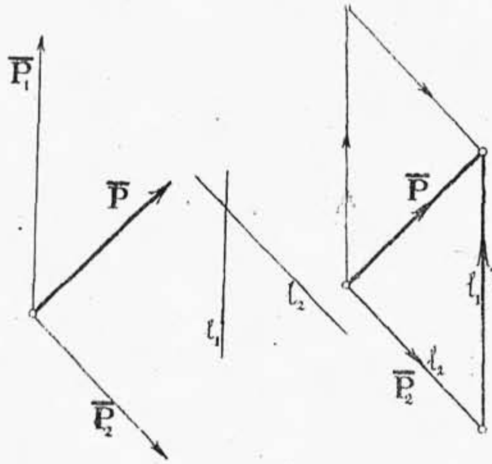
$$R=\sqrt{(\Sigma P_{k,x})^2+(\Sigma P_{k,y})^2};\ \cos\,(R,x)=\frac{\Sigma P_{k,x}}{R},\ \text{i t. p.}$$

Jeżeli układ sił jest **przestrzenny**; to dla wyznaczenia położenia i wartości siły wypadkowej, potrzebną jest znajomość rzutów tych sił na trzy osi, dowolnie obrane w przestrzeni, i wtedy z równań:

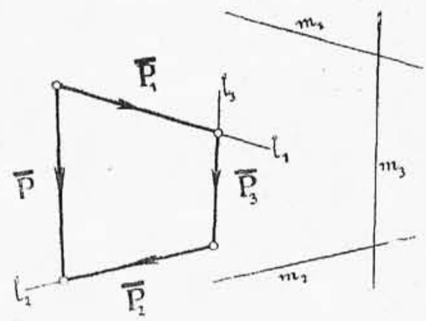
$$R_x=\Sigma P_{k,x},\ R_y=\Sigma P_{k,y},\ R_z=\Sigma P_{k,z}$$

wyznaczymy położenie i obliczymy wartość wypadkowej.

22. Rozkładanie sił. Nieraz zadanie wymaga rozłożenia pewnej



Rys. 23.



Rys. 24.

siły na dwie lub więcej siły; ażeby rozłożenie było jednoznaczne, powinny być dane odpowiednio ku temu warunki.

Przykład. Siłę $\overline{P}$ rozłożyć na dwie siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, których kierunki l_1 i l_2, rys. 23-ci, są dane i które leżą w jednej płaszczyźnie z daną siłą.

Trójkąt, którego jeden bok jest równy i równoległy do wektora siły $\overline{P}$, a pozostałe boki są równoległe do danych kierunków, wyznaczy szukane siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, gdyż z tego trójkąta odczytamy $\overline{P}=\overline{P}_1+\overline{P}_2$. Za pomocą tej konstrukcji otrzymamy dwa trójkąty, które jednakże wyznaczają te same siły co do kierunku, zwrotu i wartości. Punktem przyłożenia sił składowych jest **punkt przyłożenia** danej siły $\overline{P}$; jak i odwrotnie.

Z rozwiązania tego wynika, że każdą siłę można rozłożyć jednoznacznie w dwóch tylko kierunkach, gdy te kierunki i dana siła leżą w jednej **płaszczyźnie**; gdy zaś dane będą na jednej płaszczyźnie z siłą trzy kierunki, w których chcielibyśmy rozłożyć daną siłę, to zadanie takie posiada nieskończenie wiele rozwiązań, i mówimy wtedy, że zadanie jest **niedostatecznie określone.**

Siłę $\overline{P}$ można jednakże rozłożyć jednoznacznie w trzech kierunkach, gdy te kierunki i kierunek danej siły mijają się **w przestrzeni**. Rozłożenie siły $\overline{P}$ w trzech danych kierunkach w przestrzeni sprowadza się do zbudowania czworoboku wichrowatego, gdy dany jest jeden bok co do długości i położenia i gdy dane są kierunki trzech pozostałych boków. W celu rozwiązania tego zadania, oznaczmy dane kierunki przez m_1, m_2 i m_3 rys. 24-ty i przeprowadźmy przez początek danego wektora prostą l_1, równoległą do m_1; następnie przez koniec tegoż wektora przeprowadźmy prostą l_2, równoległą do m_2. Zadanie obecnie polega na przeprowadzeniu prostej l_3, przecinającej proste l_1 i l_2 i równoległej do m_3. W tym celu przez l_1 przeprowadźmy płaszczyznę równoległą do m_3, znajdźmy punkt przecięcia się tej płaszczyzny z prostą l_2, niechaj tym punktem będzie punkt A. Przeprowadzona przez ten punkt prosta l_3, równoległe do m_3, przetnie prostą l_1, gdyż leży z nią, na zasadzie wykonanej konstrukcyi, w jednej płaszczyźnie. Utworzony więc wielobok wichrowaty (P, l_1, l_2, l_3) jest zamknięty i przedstawia wielobok sił, w którym boki, leżące na prostych l_1, l_2 i l_3, są składowemi siły $\overline{P}$; lub inaczej, siła $\overline{P}$ może być uważana za siłę wypadkową sił, przedstawionych przez trzy pozostałe boki. Gdybyśmy zmienili porządek dodawania, co nam wolno bez zmiany wyniku, to otrzymalibyśmy równoległościan.

Z powyższej konstrukcji wynika, iż gdyby były dane w przestrzeni cztery kierunki, na które chcielibyśmy rozłożyć daną siłę, wtedy zadanie byłoby niedostatecznie określone i dawałoby nieskończenie wiele rozwiązań; a więc daną siłę możemy rozłożyć jednoznacznie tylko w trzech kierunkach, obranych w przestrzeni.

23. Równowaga sił, działających na punkt swobodny. Określenie: **jeżeli na punkt swobodny działa pewna ilość sił, nie udzielając mu przyśpieszenia, to powiadamy, że siły te są w równowadze.** Dla takich sił przyśpieszenie wypadkowe, a więc i siła wypadkowa, równa się zeru, a zatem wielobok takich sił musi być zamknięty. Wniosek ten można przedstawić przez równanie wektorowe: $\Sigma\overline{P}_k = 0$; analitycznie zaś wyrazimy go w przypadku, gdy siły leżą na jednej płaszczyźnie, **dwoma** równania:

$$\Sigma P_{k,x} = 0; \quad \text{oraz} \quad \Sigma P_{k,y} = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

gdy zaś są one w przestrzeni, wtedy wyrazimy analitycznie **trzema** równaniami:

$$\Sigma P_{k,x}=0, \; \Sigma P_{k,y} = 0; \; \Sigma P_{k,z} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Zwrócić tu należy uwagę na pewne utarte sprzeczności w wysłowieniu;

mówi się „równowaga punktu" lub „równowaga bryły"; jest to wyrażenie nieodpowiednie; gdyż do punktu lub bryły nie możemy stosować pojęcia równowagi; tylko do sił, nań działających. Jeżeli np. punkt jest w spoczynku, to siły nań działające są w równowadze; lecz również siły te są w równowadze, gdy punkt, na który one działają, znajduje się w ruchu prostolinijnym i jednostajnym, gdyż siły te nie zmieniają jego prędkości. Punkt więc materyalny lub bryła może być tylko w ruchu lub w spoczynku; siły zaś mogą znajdować się w równowadze, lub też mogą posiadać wypadkową. Powyższe wyrażenie „równowaga punktu lub bryły", jako już utarte w wielu językach, można pozostawić w użyciu; lecz należy je właściwie rozumieć.

Przykład. Punkt materjalny o ciężarze Q spoczywa na płaszczyznie pochylonej względem poziomu pod kątem α; obliczyć siłę S, utrzymującą dany punkt w spoczynku; i działającą równolegle do płaszczyzny danej; nieuwzględniając tarcia, jakie mogłoby wystąpić pomiędzy punktem a płaszczyzną, rys. 25-ty.

W zadaniu tem mamy do czynienia z punktem nieswobodnym, na który działają siły, pozostające w równowadze. Na punkt ten działa: 1) siła ciężkości Q, skierowana pionowo ku dołowi; 2) siła S, której kierunek jest dany; wartość jej jednakże liczbowa jest nieznana, jest to przeto jedna niewiadoma; 3) ponieważ punkt dany jest nieswobodny, jest bowiem ograniczony w swym ruchu płaszczyzną pochyłą, przeto prosta ta wywiera pewne działanie na niego, nie pozwalając mu spaść pionowo; działanie to przedstawimy sobie jako siłę, - narazie nieznaną; — siłę tę w myśl § 20-go nazwiemy siłą **odporową.** Prosta działania tej siły przechodzi przez dany punkt; i może być wogóle dowolnie skierowaną; w warunkach jednakże zadania powiedziano, że tarcia mamy nie uwzględniać; to się znaczy, że punkt nie posiada żadnych przeszkód w ewentualnym ruchu wzdłuż płaszczyzny, na której spoczywa; a jedynie znajduje przeszkodę w kierunku prostopadłym do niej; wobec tego siła odporowa posiadać może tylko kierunek prostopadły do tej płaszczyzny; co wskazuje na położenie prostej działania tej siły; nie znaną nam jest tylko jej wartość liczebna: — siłę tą oznaczymy literą N.

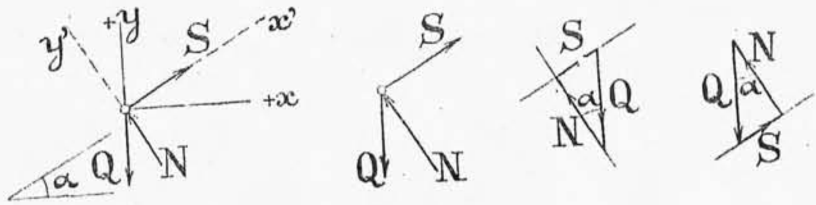
Na dany przeto punkt działają trzy siły, rys. 25-ty: siła Q, której wartość i kierunek są dane i siły S i N, których kierunki są dane, lecz wartości — nieznane; te trzy siły pozostają w równowadze.

Zadanie to pozornie nie miało nic wspólnego z wyłożonemi tu pojęciami, lecz po tych wyjaśnieniach stało się zadaniem, odpowiadającem tym pojęciom. i teraz dopiero, po postawieniu w ten sposób zadania, rys. 26-ty, możemy stosować twierdzenia statyki i — przystąpić do obliczeń. Siły te mają być w równowadze; a więc w myśl § 23-go:

$\Sigma \bar{P}_k = 0$: t. j. w naszym przykładzie $\bar{Q} + \bar{S} + \bar{N} = 0$. Równanie to wyrazimy **geometrycznie**, kreśląc trójkąt, rys. 27 my; którego jeden bok Q jest znany oraz znane są kierunki dwóch pozostałych boków; a długości boków S i N, wzięte w tej skali, w jakiej wykreśliliśmy bok Q, przedstawią wartość sił S i N. — Ponieważ w trójkącie tym strzałki muszą mieć obieg jednozwrotny, zgodny ze strzałką siły Q: przeto i zwroty ich są określone.

Z trójkąta tego można również drogą trigonometryczną obliczyć wartości sił S i N; co zechce czytelnik wykonać: będzie to rozwiązanie geometryczne.

Można również rozwiązać to zadanie drogą **analityczną**; stosując równanie 14-te. W tym celu przeprowadźmy dowolnie osi rzutów x i y rys. 26-ty i obliczmy sumę rzutów trzech sił; a otrzymamy dwa równania, w których będzie dwie niewiadome S i N; zadanie jest przeto roz-



Rys. 25, 26, 27. 28.

wiązane. Położenie osi rzutów oczywiście może być dowolne; powinniśmy przeto je tak obrać, ażeby możliwie uprościć przebieg rachunku. Jeżeli np. obierzemy oś x poziomo, oś y pionowo, to otrzymamy równanie:

$$\left.\begin{array}{l} S \cdot \cos\alpha - N \cdot \sin\alpha = 0 \\ S \cdot \sin\alpha + N \cdot \cos\alpha - Q = 0 \end{array}\right\} \text{ z których obliczymy:}$$

$$S = Q \cdot \sin\alpha; \text{ oraz } N = Q \cdot \cos\alpha.$$

Obliczenie to, aczkolwiek w danym razie nie jest zawiłe; może jednakże być uproszczone przez wybór innego położenia osi rzutów. Obierzmy np. oś x' wzdłuż prostej nachylonej; y' prostopadle do niej; otrzymamy wtedy równania rzutów:

$$S - Q \cdot \sin\alpha = 0, \text{ oraz } N - Q \cdot \cos\alpha = 0;$$

z których obliczymy niewiadome, co do ich wartości i znaków; znaki bowiem naniesione na rysunku, były dowolne. Uproszczenie rachunku wynikło w tym razie z tego powodu; że oś x' jest prostopadłą do siły N; a więc w równanie rzutów na tę oś nie weszła ta siła; z tegoż powodu, że $y' \perp S$ w równanie drugie nie weszła niewiadoma S. Przed wyborem przeto położenia osi rzutów należy wziąść pod uwagę dogodności rachunkowe, jakie otrzymamy przy rzutowaniu.

Dyskusya obpowiedzi. Po zestawieniu wzorów szukanych wielkości; należy je wogóle sprawdzić dla pewnych szczególnych przypadków danego zadania.

Przyjmijmy np.: 1) $\alpha = 0$; wtedy z powyższych wzorów:

$$S = Q \,.\, \sin 0 = 0; \text{ a } N = Q \,.\, \cos 0 = Q;$$

co nie znaczy; jeżeli płaszczyzna oporu jest pozioma, to nie potrzebna jest siła S dla podtrzymania punktu odześlizgnięcia się; a potrzebna jest jedynie siła odporowa $N =$ ciężarowi punktu, co się zgadza z naszem fizycznem pojmowaniem. Przyjmijmy następnie np. 2) $\alpha = 90^0$; wtedy $S = Q$; $N = 0$; znaczenie fizyczne tego wyniku zechce czytelnik znaleźć. Przy rzutowaniu wektorów sił na osi należy zwrócić uwagę na znaki rzutów, które zależą od obranych znaków osi spółrzędnych.

Zatrzymałem się nieco dłużej przy rozwiązaniu tego prostego zadania; chciałem bowiem wskazać **metodę**, jaką należy stosować przy rozwiązywaniu wszelkich zadań z mechaniki; metoda ta bowiem powtarzać się będzie przy rozwiązaniu najzawilszych zadań.

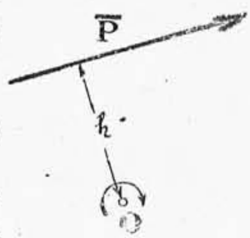
24. Moment statyczny siły Wyobraźmy sobie w przestrzeni pewną siłę, przedstawioną przez wektor $\overline{P}$; oraz punkt 0, leżący zewnątrz kierunku tej siły, rys. 29-ty, a postawimy określenie:

iloczyn z wartości siły i z odległości obranego punktu od prostej działania tejże siły, nazywamy momentem statycznym danej siły względem obranego punktu [1]**; lub krótko momentem siły względem obranego punktu.**

Obrany punkt nazwano **biegunem** momentu; odległość, którą znaczymy przez h, nazwano **ramieniem** momentu; i płaszczyznę, w której leży siła i biegun — płaszczyzną momentu; a zatem określimy moment przez wartość

$$M = P \,.\, h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

oraz przez położenie płaszczyzny momentu.



Rys. 29.

Jeżeli biegun momentu wyobrazimy sobie jako punkt nieruchomy; a płaszczyznę, w której działa obrana siła, jako ruchomą; to siła ta obróci płaszczyznę około bieguna. W sposobie tego obrotu po-

[1]) Nazwa moment w danym razie nie ma nic wspólnego z takimże wyrażeniem w mowie potocznej, które odnosi się do pojęcia czasu. Słowo moment inaczej movimentum pochodzi od czasownika movere—poruszać. Nazwa momentu stosowaną jest wogóle w mechanice do oznaczeń miary różnych działań; a w danym razie moment jest miarą czynnika, wywołującego ruch obrotowy. Iloczyn ten nazywają również momentem pierwszego stopnia, lub momentemymniniji.

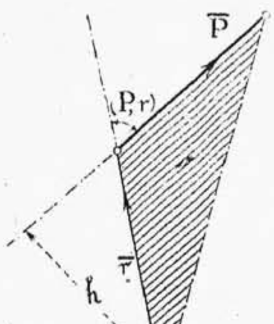
winniśmy odróżnić **zwroty**, z jakim obróciłaby się płaszczyzna. Przyjęto nazywać obrotem dodatnim; — jeżeli przypuszczalny obrót ruchomej płaszczyzny, pod działaniem siły, odbywa się w zwrocie zgodnym z obrotem wskazówki zegara; gdy zegar położymy na płaszczyźnie momentu, i zwrócimy go tarczą do widza; w ten sposób zwrot dodatni jest ściśle określony; zwrotem zaś odjemnym nazwiemy zwrot, przeciwny obrotowi wskazówki zegara;—rozróżniamy zatem momenty **dodatnie i odjemne**.

Zbadajmy obecnie, przy jakich warunkach wartość momentu równa się zeru. Ponieważ: $M = P.h$; przeto moment jest równy zeru: 1) gdy $P = O$; lub 2) gdy $h = 0$. przypadek pierwszy mówi, że gdy niema siły, to nie może być mowy o jej momencie; przypadek drugi nastąpi, gdy kierunek siły przechodzi przez obrany biegun; i rzeczywiście, obrazując przypadek ten fizycznie, łatwo spostrzeżemy, że siły takie nie mogą wywołać obrotu.

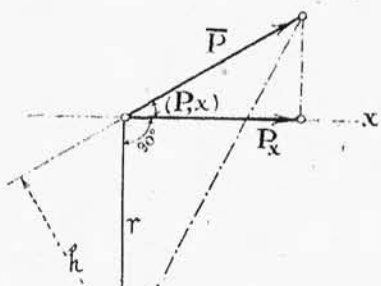
Nieraz zamiast odległości h — bieguna od kierunku siły, daną jest odległość r punktu przyłożenia siły do bieguna, rys. 30-ty, odległość tę nazwiemy promieniem wodzącym punktu przyłożenia siły; ażeby w tym razie obliczyć wielkość momentu, potrzebną jest jeszcze znajomość kąta (P,r); gdyż dopiero wówczas napiszemy $h = r. \sin (P,r)$, następnie:

$$M = P.h = P.r. \sin (P,r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Gdy jest dany promień wodzący punktu przyłożenia siły, natenczas zestawimy jeszcze następujący wzór momentu; — przez punkt przyłożenia siły, rys. 31-szy, przeprowadzamy prostą x, prostopadłą od pro-



Rys. 30.



Rys. 31.

mienia r i, uczyniwszy następnie rzut siły P na tę oś, napiszemy $P_x = P. \sin (P,r)$. Wyraz ten, podstawiony w równanie 17-te; da nowy wzór momentu

$$M = P_x.r, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

który wysłowimy: moment siły, względem obranego bieguna, równa się iloczynowi z rzutu tej siły na oś, prostopadłą do promienia, i z długości promienia.

Posiadamy zatem trzy sposoby wyrażenia wielkości momentu siły:

$$1)\ M = P.h;\quad 2)\ M = P.r.\sin(Pr);\quad 3)\ M = P_x.r; \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

zrozumiałem jest, że wzory te są równoważne, t. j. dają one jedną i tę samą wartość momentu danej siły względem danego bieguna.

Jeżeli siłę wyobrazimy sobie jako odcinek prostej, to iloczyn z jego długości i ramienia obrotu posiada pewne geometryczne znaczenie; mianowicie: iloczyn $P.h$ przedstawia podwójną wartość pola trójkąta o podstawie $\overline{P}$ i wysokości h; lub też przedstawia wielkość pola równoległoboku, zbudowanego na wektorach $\overline{P}$ i $\overline{r}$; w tenże sposób wyraz $M = P_x.r$ przedstawia pole prostokąta, którego boki są $\overline{P}_x$ i $\overline{r}$; łatwo sprawdzić geometrycznie, że te pola są równe. Należy jeszcze zauważyć, że, posiadając wartość momentu siły względem obranego bieguna, nie wyznaczymy z niej ani wielkości siły, ani jej odległości od bieguna; gdyż tę samą wartość iloczynu otrzymać możemy z ∞ wielu wartości mnożników.

Jeżeli siły mierzymy kilogramami, — długości metrami, to miarą momentów będą kilogramometry i za jednostkę momentu przyjmujemy jeden kilogramometr. Wymiar momentu jest: siła $\times$ długość; co wyrazimy [$P.\ L$], gdzie L jest symbolem w ogóle długości, a P — siły.

Z określenia momentu siły wynikają nast. jego właściwości:

1) moment siły względem obranego bieguna się nie zmieni, gdy siłę przesuwać będziemy wzdłuż prostej jej działania;

2) moment danej siły jest stały względem każdego bieguna, obranego na prostej, równoległej do prostej działania danej siły;

3) moment siły względem obranego bieguna zmieni swój znak, lecz nie zmieni swej liczbowej wartości, gdy odwrócimy strzałkę danej siły;

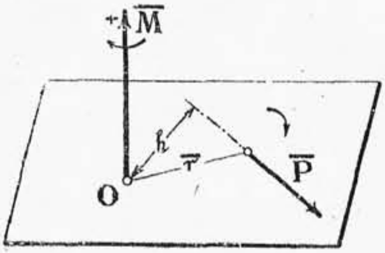
4) prosta działania siły dzieli płaszczyznę, na której leży, na dwie dziedziny; punkty leżące po prawej stronie tej prostej, patrząc ze strzałką siły, są biegunami, względem których moment danej siły jest odjemny; punkty zaś, leżące po lewej jej stronie, są biegunami, względem których momenty są dodatnie; moment siły względem bieguna, obranego na prostej działania tej siły równa się zeru. — Wniosek ten można odwrócić; jeżeli moment pewnej siły równa się zeru, to biegun tego momentu może leżeć tylko na prostej działania tej siły;—o ile siła ma skończoną wartość;

5) momenty danej siły względem biegunów, więcej oddalonych od prostej działania siły, posiadają wartości liczbowe większe niż momenty względem biegunów, leżących bliżej prostej działania siły.

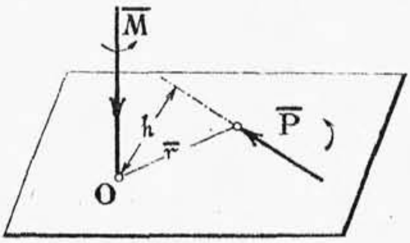
25. Wektorowe wyrażenie momentu. Do ścisłego określenia siły, oprócz liczbowej jej wartości, wyrażonej np. w *kg*, potrzebną jest jeszcze znajomość kierunku i zwrotu jej działania; te właściwości wyraża określenie siły przez wektor $\overline{P}$.

Do ścisłego zaś określenia momentu, oprócz liczbowej jego wartości i zwrotu, potrzebną jest jeszcze znajomość **położenia płaszczyzny**, w której dany obrót się odbywa; te warunki, określające moment, wyrazić można również przez wektor.

Wielkość momentu siły przedstawimy za pomocą wektora w sposób następujący: z bieguna O wystawimy prostopadłą do płaszczyzny momentu i na tej prostopadłej odetniemy podług obranej skali wartość iloczynu $\overline{P}.h$, i na utworzonym w ten sposób odcinku naniesiemy strzałkę ze zwrotem ku widzowi, jeżeli zwrot obrotu jest dodatni; — jak pokazano na rys. 32-im; gdy zaś zwrot jest odjemny, wtedy naniesiemy strzałkę w zwrocie przeciwnym, rys. 33-ci. W ten sposób utworzony



Rys. 32.



Rys. 33.

wektor z całą ścisłością wyznacza wartość, zwrot i płaszczyznę momentu; wektor ten oznaczymy literą $\overline{M}$. Gdy więc danym będzie wektor $\overline{M}$ z omówieniem; że przedstawia on moment statyczny siły, wtedy przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do kierunku tego wektora, a będzie to płaszczyzna momentu; długość wektora $\overline{M}$, wzięta w odpowiedniej skali, daje wartość momentu t. j. daje wartość iloczynu $\overline{P}.h$; zwrot jego strzałki wskazuje dodatni lub odjemny zwrot obrotu; porów. rys. 32-gi i 33-ci. Moment siły będziemy więc przedstawiali za pomocą wektora i nazywać go będziemy **wektorem momentu**, lub też krótko—momentem. W rachunku wektorowym wektor momentu wyraża się symbolem $V\overline{P}\overline{r}$; gdzie symbol V, jako początkowa litera słowa „Vector", wskazuje, że dana wielkość jest wektorem; $\overline{P}$ jest, jak w danych rozpatrywaniach, wektorem siły; $\overline{r}$ jest wektorem wodzącym punktu przyłożenia siły.

Symbol ten nie należy utożsamiać ze zwykłym iloczynem $P.r$; gdyż było by to sprzeczne z określeniem momentu.

Symbol przeto $V\overline{P}\overline{r}$ wyraża wektor:

1) który jest prostopadły do płaszczyzny (P,r), rys 32-gi;

2) którego strzałka zwrócona jest do patrzącego, gdy obrót siły przedstawia mu się dodatnio;

3) którego długość $= P.r.\sin(P,r)$, gdzie P i r oznaczają liczbowe wartości siły i wektora wodzącego; a (P,r) kąt, jaki tworzy siła P z promieniem r; przytem umówimy się dla uniknięcia nieścisłości w mierzeniu tego kąta; że przez kąt (P,r) będziemy rozumieli kąt, jaki zakreśli wektor P, obracając się około swego początku w stronę **przeciwną** obrotowi wskazówki zegara; aż do zgodnego pokrycia się z promieniem wodzącym. Przez zgodne pokrycie się dwóch wektorów rozumiemy, gdy strzałki ich będą w tę samą stronę skierowane; przyjmując, iż strzałka promienia wodzącego zwrócona jest od bieguna do punktu przyłożenia siły. Wogóle symbol $V\overline{P}.\bar{r}$ nazwano **iloczynem wektorowym dwóch wektorów.**

26. Moment wypadkowej wielu sił, działających na jeden punkt i leżących na płaszczyźnie. Gdy przyjmiemy, że na dany punkt A działa pewna ilość sił; wtedy możemy mówić o momentach każdej siły zosobna, oraz o momencie ich siły wypadkowej, względem obranego bieguna.

Wykażemy obecnie zależność pomiędzy momentami sił składowych, a momentem ich wypadkowej, i uczynimy to najpierw dla przypadku, gdy siły, działające na jeden punkt, działają w jednej płaszczyźnie i gdy biegun obierzemy na tejże płaszczyźnie; a następnie rozpatrzymy przypadek ogólny, gdy siły, działające na jeden punkt, rozmaicie są skierowane w przestrzeni.

Przeprowadźmy w tym celu, rys. 34-ty, przez punkt, na który działają siły, w płaszczyźnie ich działania prostą x, prostopadłą do promienia wodzącego tego punktu; zróbmy następnie rzuty danych sił na tę prostą; a napiszemy wtedy równanie algebraiczne $R_x = \Sigma P_{k,x}$; pomnóżmy następnie obydwie strony tego równania przez wartość r, a otrzymamy wzór:

$$R_x . r = \Sigma (P_{k,x} . r).$$

Wyraz $\Sigma (P_{k,x} . r)$ przedstawia sumę momentów sił składowych; wyraz $R_x . r$ wyraża moment siły wypadkowej; na zasadzie tego wysłowimy powyższe równanie w sposób następujący:

moment wypadkowej wielu sił, leżących w jednej płaszczyźnie i działających na jeden punkt, względem bieguna, obranego na tejże płaszczyźnie, równa się sumie algebraicznej momentów sił składowych względem tegoż bieguna. Wzór powyższy pozwala zatem obliczyć moment siły wypadkowej z momentów sił składowych.

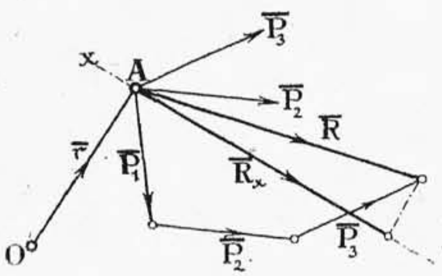
Twierdzenie to wyrazimy wzorem:

$$M_R = \Sigma M_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

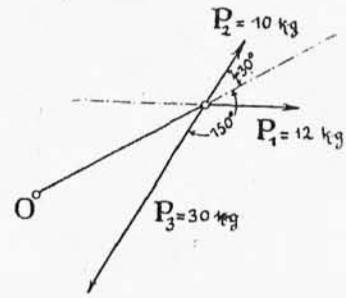
Twierdzenie to pozwoli znaleźć znaczenie statyczne wyrazu $M = P_x . r$, obliczonego na podstawie stosunków geometrycznych w § 24-ym; a mianowicie: rozłóżmy daną siłę $\overline{P}$, rys. 31-szy, na dwie składowe; jedną prostopadłą do promienia wodzącego, którą oznaczymy literą P_x i drugą w kierunku tegoż promienia P_r; a na zasadzie dowiedzionego twierdzenia obliczymy moment siły P, jako sumę momentów siły P_x i siły P_r. Moment siły P_x równa się iloczynowi $P_x \cdot r$; a moment siły P_r równa się zeru; przeto $M{=}P_x\, r$; — takie więc jest znaczenie statyczne tego wzoru.

W szczególnym przypadku, gdy siły, przyłożone do danego punktu, są w równowadze t. j. gdy $R=0$, natenczas $\Sigma(P_{k,x} \cdot r) = 0$: równanie to wysłowimy:

jeżeli pewna ilość sił, działających w jednej płaszczyźnie i przyłożonych do jednego punku, jest w równowadze, to suma algebraiczna ich momentów, względem dowolnego bieguna na tejże płaszczyźnie, równa się zeru.



Rys. 34.



Rys. 35.

Treści twierdzenia tego odwrócić jednakże nie możemy; jeżeli bowiem $\Sigma P_{k,x} \cdot r = 0$; to niekoniecznie ich wypadkowa równa się zeru; może ona bowiem przechodzić przez biegun i wtedy moment jej równa się zeru, a wypadkowa posiada wartość skończoną.

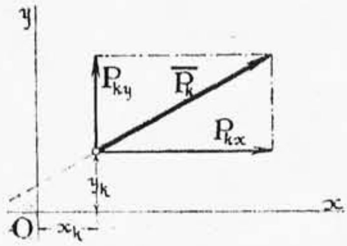
Ażeby wyrazić równowagę sił, działających w jednej płaszczyźnie i przyłożonych do jednego punktu, za pomocą momentów; powinny sumy momentów sił składowych względem **dwuch** biegunów równać się zeru; — byle te bieguny wraz z danym punktem nie leżały na jednej prostej; a zatem mamy w tym razie dwa równania równowagi.

Przykład. Obliczyć moment wypadkowej sił, przedstawionych na rysunku 35-tym, względem bieguna O. Oznaczymy przez M_1 moment siły P_1 i t. d., i napiszemy:

$$\begin{aligned}
M_1 &= P_1 r \sin(P_1, r) = 12 \cdot 2 \cdot \sin 30^0 = 12\ kgm \\
M_2 &= P_2 r \sin(P_2, r) = -10 \cdot 2 \cdot \sin 30^0 = -10\ \text{,,} \\
M_3 &= P_3 r \sin(P_3, r) = 30 \cdot 2 \cdot \sin 30^0 = 30\ \text{,,} \\
&\text{Moment siły wypadkowej} = 32\ kgm
\end{aligned}$$

Poleca się sprawdzić ten wynik wykreślnie i analitycznie, wyznaczywszy najpierw wypadkową R i obliczywszy następnie jej moment ze wzoru $M = R \cdot r \cdot \sin(R,r)$.

27. Moment siły, wyrażony przez dwie składowe. Zadanie obecne polega na wyrażeniu momentu siły P_k, względem dowolnie obranego bieguna — przez składowe $P_{k,x}$ i $P_{k,y}$ tej siły w kierunku osi spółrzędnych oraz przez spółrzędne x_k, oraz y_k punktu jej przyłożenia; rys. 36-ty. W tym celu rozkładamy siłę P_k na dwie składowe $P_{k,x}$ i $P_{k,y}$; a moment M_k tej siły względem bieguna, przez który przeprowadziliśmy osi — obliczymy, na zasadzie § 26 go, jako sumę momentów sił składowych. Z rys. 36-go odczytamy bezpośrednio:

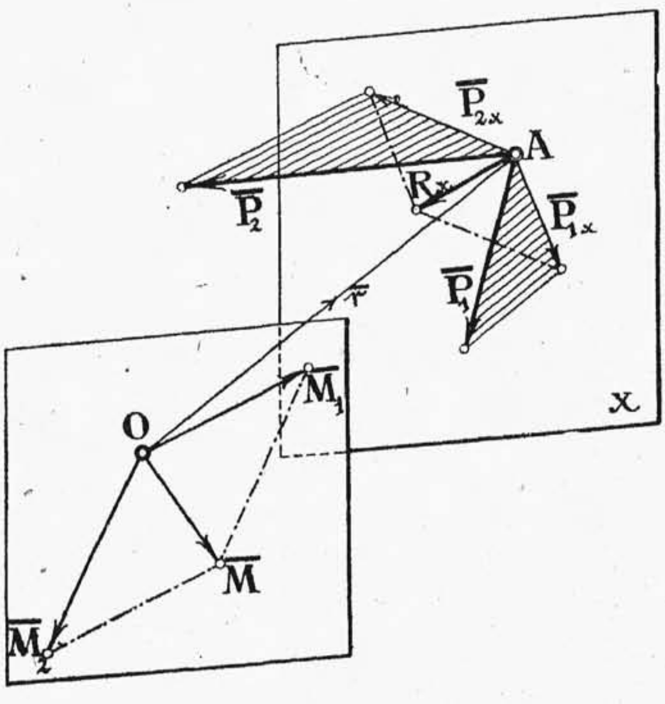


Rys. 36.

$$M_k = P_{k,x} \cdot y_k - P_{k,y} \cdot x_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Jest to szukany wyraz momentu.

28. Moment wypadkowej wielu sił, działających w przestrzeni na jeden punkt. Przyjmijmy obecnie, iż na dany punkt A działa przestrzen-



Rys 37.

ny pęk sił; należy wyznaczyć moment siły wypadkowej, tak co do wartości, jak co do położenia; t. j. należy wyznaczyć **wektor momentu siły**

wypadkowej. W tym celu wyznaczmy najpierw moment każdej siły względem obranego bieguna O; ażeby to wykonać, przeprowadźmy przez biegun O i przez każdą z sił płaszczyznę momentów; ponieważ wszystkie te płaszczyzny przechodzą przez biegun O i jednocześnie przez punkt A, przecinają się one przeto po linii OA, rys. 37-my. W każdej z tych płaszczyzn działa moment $P_1.h_1$, $P_2.h_2$ i t. d. Wektory tych momentów wyznaczymy, gdy z bieguna O wystawimy prostopadłe do płaszczyzn momentów i odłożymy na nich długości, równe liczbowo odnośnym momentom: $M_1 = P_1.h_1$, $M_2 = P_2.h_2$, $M_k = P_k.h_k$ ze zwrotami zgodnymy z obrotami sił; w ten sposób otrzymamy w biegunie O pęk wektorów $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, i t. d. Ponieważ wektory te są prostopadłe do płaszczyzn, które przecinają się po prostej OA, przeto są one prostopadłe do tej prostej, t. j. wektory momentów sił składowych tworzą pęk płaski, którego płaszczyzna jest prostopadła do promienia wodzącego OA.

Zwróćmy się następnie do pęku sił i przeprowadźmy przez punkt A w płaszczyznach momentów proste x_k, prostopadłe do promienia wodzącego OA; zrzutujmy na te proste odnośne siły $\overline{P}_k$, a otrzymamy w A pęk wektorów $\overline{P}_{k,x}$; pęk ten jest płaski i płaszczyzna jego jest prostopadła do OA; płaszczyznę tę oznaczyliśmy na rys. 37-ym przez x. Pomiędzy pękami wektorów $\overline{M}_k$ i $\overline{P}_{k,x}$ zachodzi pewna geometryczna zależność, którą wypowiemy w ten sposób: każden wektor $\overline{M}_k$ jest prostopadły do odnośnego wektora $\overline{P}_{k,x}$; a długości ich są proporcyonalne, gdyż każda wartość: $M_k = P_{k,x}.r$; porów. wzór 18-ty.

Pomnóżmy następnie wektory $\overline{P}_{k,x}$ przez wartość r i zbudujmy z nich wielobok $\Sigma\overline{P}_{k,x}.r = \overline{R}_x.r$; zbudujmy również z wektorów $\overline{M}_k$ wielobok $\Sigma\overline{M}_k = \overline{M}$; dwa te wieloboki leżeć będą w płaszczyznach równoległych, boki ich będą do siebie prostopadłe, a długości równe; wskutek czego ich boki zamykające będą także równe i do siebie prostopadłe; a więc wartość $\Sigma\,\overline{M}_k = R_x.r$. Wyraz $R_x.r$ jest wartością momentu siły wypadkowej; wektor tego momentu jest prostopadły do płaszczyzny (R_x,r). Ażeby przeto wyznaczyć moment siły wypadkowej $\overline{R}$, należy zbudować wielobok wektorów $\overline{M} = \Sigma\overline{M}_k$, a bok jego $\overline{M}$ jest wektorem momentu siły wypadkowej; wynik ten wypowiedany w sposób następujący:

wektor momentu wypadkowej wielu sił, działających na jeden punkt, względem dowolnego bieguna, równa się sumie wektorów momentów sił składowych.

Twierdzenie to wyrazimy wzorem:

$$\overline{M}_R = \Sigma\overline{M}_k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (22)$$

Czytelnik wyprowadzi z tego twierdzenia poprzednie dla przypadku, gdy siły i biegun leżały na jednej płaszczyźnie.

W celu zatem wyznaczenia wektora momentu siły wypadkowej, skorzystamy z powyższego twierdzenia w sposób następujący: wystawimy w biegunie O wektory $\overline{M}_k$ (prostopadłe do płaszczyzn odnośnych momentów), a ich **wektor wypadkowy** jest momentem **siły wypadkowej**; wektor więc ten wyraża wielkość i kierunek momentu siły wypadkowej.

W szczególnym przypadku, gdy wypadkowa sił jest równa zeru, t. j. gdy $\overline{R} = O$; natenczas $\overline{M} = O$, co wysłowimy:

gdy siły, działające na jeden punkt, są w równowadze, natenczas suma wektorowa ich momentów, względem dowolnie obranego bieguna w przestrzeni, równa się zeru.

Dla wyrażenia zaś równowagi sił, działających na jeden punkt, rozmaicie w przestrzeni skierowanych, powinny sumy ich momentów względem dwóch dowolnie obranych w przestrzeni biegunów równać się zeru względem każdego bieguna zosobna; byle te bieguny nie leżały na jednej prostej z punktem przyłożenia sił.

Równań skalarnych niezależnych dla wyrażenia tej równowagi napiszemy w tym razie **trzy**; gdyż sumę momentów sił, zbiegających się w jednym punkcie, względem jednego bieguna wyrazimy dwoma równaniami; wektory bowiem ich momentów leżą w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do prostej, łączącej dany biegun z punktem przyłożenia sił; a sumę płaskiego układu wektorów wyraża się dwoma równaniami. Sumę zaś momentów względem drugiego bieguna, wyrazimy jednem tylko skalarnem równaniem; jest to bowiem moment wypadkowej, która ewentualnie działać może wzdłuż prostej łączącej biegun poprzedni z punktem przyłożenia sił.

Należy zwrócić uwagę, iż **ilość** równań równowagi dla tego samego rodzaju układów sił jest jedna i ta sama, czy wyrazimy tę równowagę za pomocą momentów, czy za pomocą rzutów sił; porów. 14-ty i 15-ty wzór.

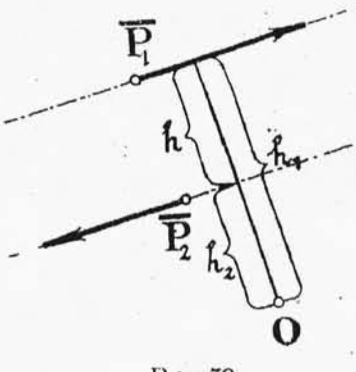
29. Para sił i jej moment. Określenie.

dwie siły równoległe, liczbowo równe i mające zwroty przeciwne nazywamy parą sił.

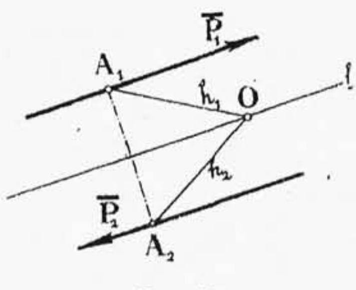
Z działania pary sił korzystamy nietylko w technice, lecz często i w życiu codziennem; nakręcając np. zegarek kieszonkowy, przykładamy do główki kluczyka parę sił; ujmując ją bowiem w dwa palce i obracając, przykładamy w ten sposób dwie siły wzajemnie równe, ze zwrotami przeciwnymi; ażeby zaś cały zegarek, podczas nakręcenia, nie obracał się, trzymamy go jednocześnie drugą ręką w ten sposób że wytwarzamy znowuż parę sił ze zwrotem przeciwnym zwrotowi pierwszej pary. Korzystamy następnie z pary sił, gdy puszczamy np. bąka (giroskop) za pomocą palców; lub gdy wkręcamy śrubę; i wogóle stosujemy pary sił we wszystkich przypadkach, w których chcemy wywołać obrót bez ruchu postępowego.

Miarą działania pary sił jest moment ich wypadkowej: zajmiemy się zatem wyznaczeniem tego momentu. Parę sił będziemy rozpatrywali jako dwie siły, przecinające się w punkcie nieskończenie odległym. Do wyznaczenia więc wektora momentu takich dwóch sił, zastosujemy twierdzenie, wyżej wyłożone o momencie wypadkowej. Weźmy najpierw pod rozpatrywanie przypadek prostszy i w tym celu obierzmy biegun na płaszczyźnie pary sił, rys. 38-my; sumę momentów tych sił względem obranego bieguna O wyrazimy wzorem algebraicznym: $M=+P_1.h_1-P_2.h_2$, a ponieważ stosownie do założenia $P_1=P_2=P$, przeto: $M=P(h_1-h_2)=P.h$; gdzie: $h=h_1-h_2$ i jest odległością pomiędzy kierunkami sił: w danym więc razie, gdy biegun jest obrany na płaszczyźnie pary, wielkość momentu wypadkowej jest niezależną od położenia bieguna i równa się iloczynowi z siły i odległości pomiędzy niemi.

Rozpatrzmy teraz przypadek ogólny, gdy biegun nie leży na płaszczyźnie pary, lecz w dowolnym punkcie przestrzeni. W celu obliczenia momentu wypadkowej względem tego bieguna, zastosujemy dodawanie wektorowe momentów podług prawidła, podanego w § 28-ym. Niech bę-



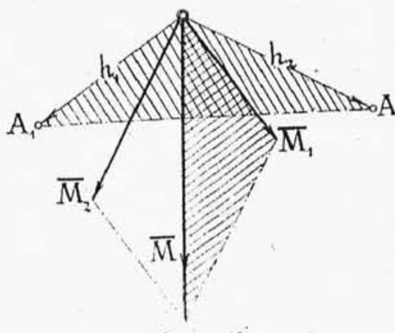
Rys. 38.



Rys. 39.

dzie para sił, jak wskazuje rysunek 39-ty i dowolny biegun O w przestrzeni; przeprowadzamy przez obrany biegun i kierunki sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ płaszczyzny, prostą przecięcia się tych płaszczyzn oznaczymy przez l; h_1 i h_2 niech będą odległości bieguna O od kierunków sił; wtedy: $M_1=P_1h_1$, oraz $M_2=P_2h_2$; wektory tych momentów wyznaczymy, gdy z bieguna O wystawimy prostopadłe do ich płaszczyzn, i na tych prostopadłych odłożymy długości P_1h_1, oraz P_2h_2; wektory, w ten sposób utworzone, oznaczymy $\overline{M}_1$ i $\overline{M}_2$; zauważymy następnie, że wektory te oraz ramiona h_1 i h_2 momentów sił są prostopadłe do prostej l, a więc leżą one wraz z ramionami w jednej płaszczyźnie, przechodzącej przez O i prostopadłej do wspólnego kierunku sił. Połóżmy tę płaszczyznę na płaszczyznę naszego rysunku, to otrzymamy rys. 40-ty, na którym długości h_1, h_2, $\overline{M}_1$ i $\overline{M}_2$ przedstawią się w rzeczywistych swych wielkościach; wykreślimy następnie moment wypadkowy $\overline{M}=\overline{M}_1+\overline{M}_2$, a zauważymy, że trójkąty $A_1 OA_2$, oraz $OM_1 M$, na rysunku zakreskowane, są podobne; gdyż dwa ich boki są proporcyonalne i kąty, utworzone przez nie—równe; długość bowiem boku $OM_1=P.h_1$; oraz boku: $OM_2=M_1M=P.h_2$; a po wzajemnem podzieleniu tych równań otrzymamy $\frac{OM_1}{M_1M}=\frac{h_1}{h_2}$; oprócz tego $\sphericalangle A_1OA_2 = = \sphericalangle OM_1M$; a wiec napiszemy $OM = A_1A_2 . P$, t. j. wielkość momentu wypadkowej pary sił jest równa iloczynowi z siły i wzajemnej odległości ich kierunków; jest ona zatem niezależną od położenia bieguna **w przestrzeni.**

Wyznaczymy obecnie kierunek wektora $\overline{M}$. Dwa boki rozpatrywanych trójkątów są wzajemnie prostopadłe i trójkąty są podobne, a więc bok OM jest prostopadły do boku A_1A_2; a ponieważ OM leży w płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny pary, przeto wnioskujemy, iż M, t. j. wektor momentu wypadkowego jest prostopadły do płaszczyzny pary.



Rys. 40.

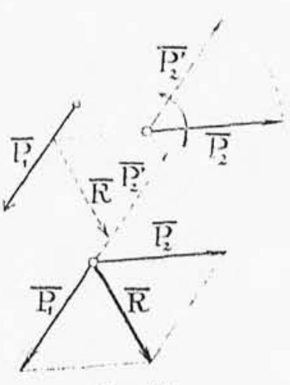
Moment $\overline{M}$ nazywa się momentem pary sił; wzajemną ich odległość $A_1 A_2$ nazwano ramieniem pary; płaszczyznę, w której leży para sił, płaszczyzną pary.

Moment pary jest zatem wektorem ściśle oznaczonym **co do kierunku, wartości i zwrotu, a początkiem jego może być dowolny punkt w przestrzeni.** Wektor taki nazwano wogóle **przenośnym.**

Szczególny przypadek. Gdy moment pary równa się zeru, wtedy albo siły są równe zeru; lub też wzajemna ich odległość równa jest zeru, jeżeli siły posiadają skończone wartości; czyli, w tym przypadku, siły leżą na jednej prostej.

Pary sił są przykładem najprostszym układu sił, których suma równa się zeru, t. j. $\Sigma\overline{P}_k = 0$, a moment ich wypadkowej jest jednakże skończoną wielkością.

30. Wypadkowa pary sił i jej moment. Do powyższego wyniku dojdziemy również drogą następującego rozumowania. Proste działania sił, tworzących parę sił, przecinają się w punkcie nieskończenie odległym; prosta działania zatem ich wypadkowej przechodzi przez ten punkt i leży w ich płaszczyźnie. Wartość siły wypadkowej w danym razie równa się zeru; przez wartość zera będziemy w tym razie rozumieli wektor o bardzo małej długości, który jednakże ma pewien kierunek; kierunek ten wyznaczymy, gdy weźmiemy do naszych rozpatrywań dwie siły równe, lecz przecinające się w skończoności i gdy następnie punkt ich przecięcia się będziemy odsuwali do nieskończoności; t. j. gdy do tych rozpatrywań zastosujemy metodę granic; — limes. Oznaczmy te siły przyłożone do różnych punktów, rys. 41-szy, przez $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, wypadkową ich przez $\overline{R}$; gdy będziemy obracali np. siłę $\overline{P}_2$ około jej punktu przyłożenia, czyniąc jej kierunek równoległym do kierunku siły $\overline{P}_1$, wtedy w odpowiednim równoległoboku sił wartość wypadkowej R zbliżać się będzie do zera, a kierunek jej zbliżać się będzie do kierunku prostopadłego względem $\overline{P}_1$; a ponieważ przechodzić ma ona przez punkt ich przecięcia się, przeto kierunek wypadkowej pary sił oddalać się będzie do nieskończoności; wskutek czego odległość h dowolnie obranego bieguna od kierunku tej wypadkowej $h = \infty$, i pozostaje ona nieskończonością dla wszystkich biegunów, znajdujących się w przestrzeni skończonej; wartość momentu siły wypadkowej przedstawia iloczyn $0 \times \infty$, który jest niezmienny dla **wszystkich biegunów** przestrzeni skończonej. Ażeby następnie obliczyć tę wartość, obliczmy sumę momentów sił składowych, suma ta bowiem, na zasadzie poprzednich twierdzeń, jest momentem siły wypadkowej; w tym celu obierzmy takie położenie bieguna, względem którego najłatwiej obliczyć tę sumę; w takiem położeniu są punkty, leżące na kierunku jednej z sił; gdyż wtedy bezpośrednio odczytamy, że, $M=P.h$. Kierunek wektora momentu wypadkowej pary sił jest prostopadły do płaszczyzny jej momentu; a więc jest on w danym razie pr stopadły do płaszczyzny pary; z czego również wynika, że nietylko wartość, lecz i zwrot momentu jest ten sam dla każdego bieguna.



Rys. 41.

W geometrji rzutowej przyjmuje się, że płaszczyzny wzajemnie równoległe przecinają się po jednej prostej, leżącej w nieskończoności; położenie przeto prostej działania wypadkowej pary siły, można sobie wyobrazić nietylko w płaszczyźnie pary, ale i na wszystkich płaszczyznach, które są do niej równoległe; z tego też powodu przyjąć jesteśmy zmuszeni, że wektor momentu tej siły nieskończenie odległej;—czy też pary sił jest stały względem wszystkich punktów przestrzeni.