WYDAWNICTWA NAUKOWE
„KOMISJI WYDAWNICZEJ"
TOWARZYSTWA BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

MECHANIKA
TEORETYCZNA

DLA

INŻYNIERÓW, TECHNIKÓW I STUDJUJĄCYCH

INŻ. H. CZOPOWSKIEGO.
PROF. POLIT. WARSZ.

Tom I — STATYKA

WYDANIE DRUGIE.

Z ZAPOMOGI MINISTERSTWA
WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO.

WARSZAWA — 1921.

SPÓŁKA AKC. ZAKŁADÓW GRAFICZNYCH „DRUKARNIA POLSKA" SZPITALNA N

KLISZE WYKONANO W ZAKŁADZIE FOTOCHEMIGRAFICZNYM
ROMANA SAWICKIEGO, WSPÓLNA Nr. 45.

Przedmowa do wydania drugiego.

Wydanie 1-sze tego podręcznika, wykonane w r. 1911 — **Staraniem Komitetu Wydawniczego na Upamiętnienie Dziesięciolecia Stowarzyszenia Techników w Warszawie** — zostało wyczerpane. Przystępując do drugiego wydania, treść jego uzupełniłem i dostosowałem do studjów wyższych, jakie prowadzone są w naszych Politechnikach.

Program Politechnik wymaga zwykle możliwie szybkiego udzielenia studentom wiadomości ze Statyki, dlatego rozpoczynam to wydawnictwo Statyką; uważając jednakże, iż rozpoczęcie wykładów Kinematyką jest prawidłowsze; zresztą nie przeszkadza ten układ do rozpoczęcia studjów, o ile warunki na to pozwalają, od Kinematyki. Program Statyki i Kinematyki znacznie powiększyłem, chcąc w ten sposób dać szerokie podstawy do studjów teorji Statyki Budowlanej. Przytem składam całe **uznanie dla starań i energji Komisji Wydawniczej Towarzystwa Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej,** która zorganizowała i przeprowadziła to wydawnictwo.

H. Czopowski.

Warszawa, we wrześniu 1921 r.

I. Wielkości kierunkowe i ich właściwości geometryczne.

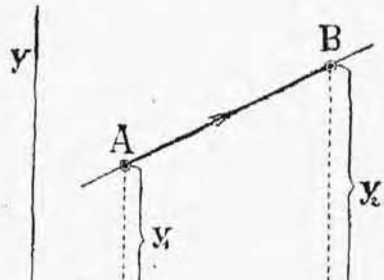
1. Przesunięcia punktu. Gdy mówimy o ruchu, powstaje w umyśle naszym:

1) obraz przedmiotu poruszającego się i 2) zmiana jego miejsca względem innych otaczających go przedmiotów.

Obraz więc, jaki w danym razie przedstawiamy sobie, jest czysto geometrycznej natury. Rozpocznijmy badania od najprostszej postaci przedmiotu poruszającego się, t. j. od **punktu.** Przez punkt w danym przypadku będziemy rozumieli pewne miejsce w przestrzeni. Punkt tak pojęty nazywa się **punktem geometrycznym** w przeciwstawieniu do punktów, którym będziemy przypisywali pewne fizyczne właściwości i o których będziemy mówili w następstwie.

Drogę, którą opisuje punkt poruszający się, nazywamy **torem.**

Najprostszym przypadkiem ruchu będzie przesunięcie punktu w przestrzeni po linii prostej, t. j. po torze prostym; przy tej czynności mówimy, iż punkt ruchomy, który oznaczymy literą K, przesuwamy z miejsca A do miejsca B toru prostego, rys. 1-szy. W danym razie ruchomy punkt K zakreśla w przestrzeni odcinek AB. Symbol AB rozumieć należy w ten sposób, iż punkt K wyszedł z miejsca A i przeszedł po prostej linii do miejsca B. Odcinek więc AB jest drogą punktu K i posiada ściśle wyznaczone położenie w przestrzeni. Punkt A nazwiemy początkiem odcinka AB, punkt B jego końcem.



Rys. 1.

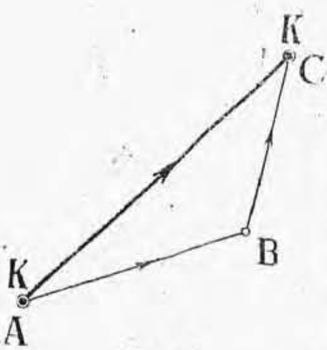
Położenie to w wykonaniu praktycznem może być utrwalone, np. przez pręt, umocowany do umyślnie w tym celu zbudowanego rusztówania. Dla badań jednakże matematycznych wyznaczamy położenie tego odcinka przez spółrzędne jego początku i końca: $(x_1 y_1)$ i $(x_2 y_2)$, gdy ruch zachodzi na płaszczyźnie; lub przez spółrzędne $(x_1 y_1 z_1)$ oraz $(x_2 y_2 z_2)$, gdy ruch odbywa się w przestrzeni. Dla ułatwienia rachunku układ spółrzędnych przyjęto prostokątny.

2. Określenie wektora. Przesunięcie zatem punktu w przestrzeni jest określone:

1) przez **początek**, który oznaczyliśmy literą A, 2) przez **prostą**, na której dany odcinek się znajduje, 3) przez **strzałkę** (zwrót), wskazującą w jakim kierunku ruch się odbywa; i 4) przez **liczbę**, wykazującą długość odcinka. Za pomocą tych danych położenie i wielkość przesunięcia są jednoznacznie w przestrzeni wyznaczone. Miarą wielkości, które są określone przez cztery opisane warunki, niekoniecznie ma być tylko przesunięcie, lecz może być również wielkość inna, która posiada **kierunek, strzałkę i długość;** wielkość taką nazywamy **wektorem** i przedstawiamy ją geometrycznie przez odcinek AB, rys. 1-szy.

W rozpatrywaniach następnych przez wektor będziemy wogóle rozumieli odcinek, którego **kierunek, strzałka i długość** są dane, początek zaś, inaczej punkt przyłożenia, będzie za każdym razem określony przez warunki zadania.

3. Dodawanie wektorów. Wyobraźmy sobie obecnie, iż punkt ruchomy K przesuwamy najpierw od A do B, rys. 2-gi, inaczej powiemy, że punkt K zakreśla wektor AB; następnie tenże punkt K zakreśla wektor BC, przyjmujemy przytem dla uogólnienia, iż miejsce C nie leży na prostej wektora AB; mówimy w takim razie, że punkt K zakreśla dwa wektory AB i BC i znajduje się pod koniec tej czynności w miejscu C. Chcąc przesunąć punkt K z miejsca A do miejsca C, moglibyśmy nadać mu przesunięcie bezpośrednio po wektorze AC. W ten sposób znalazłby się ruchomy punkt **również** w punkcie C, chociaż doszedłby do niego po innej dzodze, niż to poprzednio uskutecznił.



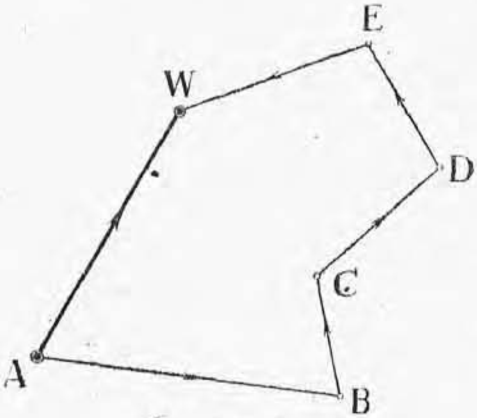
Rys. 2.

Jeżeli w tych rozpatrywaniach nie idzie o długość dróg przebytych, lecz tylko o wyznaczenie krańcowego **położenia ruchomego punktu** K, to wykonane wyżej przesunięcia możemy symbolicznie oznaczyć przez:

$$AB + BC = AC.$$

Wzór ten nie jest sumą w znaczeniu algebraicznem, — nie wskazuje on, że mamy dodać długości odcinków, lecz wskazuje **czynności**, jakie powinniśmy wykonać w przestrzeni z pewnym punktem ruchomym. Wzór powyższy tak pojęty przedstawia trójkąt, którego boki są AB, BC i AC, rys. 2 gi. Możemy przeto sobie wyobrazić, że po bokach tego trójkąta przebiega punkt K w porządku kolejnym, jak to wskazują nazwy wektorów, lub strzałki naniesione na bokach tego trójkąta.

Przesunięcia punktu K możemy uskutecznić w różnorodny sposób.



Rys. 3.

Przesuwając punkt K, rys. 3-ci kolejno z punktu A do punktu B, następnie do C, D, E i t. d., otrzymamy wielobok, który, wogóle mówiąc, będzie wielobokiem wichrowatym i niezamkniętym. Boki AB, BC i t. d., zaopatrzone w strzałki, będą przedstawiały wektory przesunięć.

Jeżeli np. punkt W będzie krańcowym punktem powyższego wieloboku, to możemy powiedzieć, iż wektor AW przedstawia przesunięcie, za którego pomocą ruchomy punkt przeniósłby się bezpośrednio z punktu A do punktu W; — wektor AW nazywamy **wektorem zastępczym lub wypadkowym**, wskazuje on bowiem w jaki sposób możemy zastąpić cały szereg poszczególnych przesunięć — jednem przesunięciem. Symbol tych przesunięć przedstawia się, jak następuje:

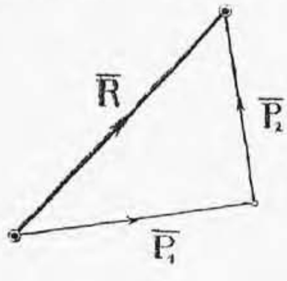
$$AB + BC + CD + \ldots . EW = AW.$$

Wektory AB, BC, CD i t. d. będziemy nazywali **wektorami składowymi**, gdyż z tych wektorów składa się czynność przesuwania. W poprzednim przykładzie, rys. 2, wektory AB, BC i t. d., są wektorami składowymi, wektor zaś AC wektorem zastępczym, inaczej wypadkowym.

Obserwując kierunki strzałek wektorów składowych i wektorów zastępowych, zauważymy, iż strzałki wektorów składowych posiadają jeden i ten sam kierunek, strzałka zaś wektora zastępczego posiada kierunek przeciwny do poprzednich t. j. **strzałki** wektorów składowych i zastępczego **zwrócone są do punktu krańcowego**.

4. **Oznaczenia wektorów.** W celu odróżnienia, kiedy dany symbol przedstawia wektor, a kiedy tylko liczbę, będziemy oznaczali wektory przez kreski umieszczone u góry symbolu i przytem oznaczać będziemy wektor nie dwiema literami lecz jedną. Wektory więc AB, BC i t. d. oznaczymy np. literami $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ i t. d., lub też literami $\bar{A}$, $\bar{B}$ i t. p.

W ten sposób, rozróżniając sposoby oznaczania wielkości wektorowych od wielkości liczbowych, inaczej zwanych **skalarnemi**, unikniemy pomyłek, jakie mogłyby zajść przy rozumieniu wzorów matematycznych; np. przez wzór: $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{R}$ należy rozumieć trzy boki $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ i $\bar{R}$ trójkąta, rys. 4-ty, który jest ściśle wyznaczony.



Rys. 4.

Gdybyśmy przez symbole $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ i $\bar{R}$ chcieli rozumieć tylko długości tych wektorów, to wzór $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{R}$ byłby błędnym, gdyż stosunek długości boków tego trójkątu wyraża się innem równaniem, a mianowicie, oznaczając długości boków literami bez kresek P_1, P_2 i R, napiszemy równanie:

$$R^2 = P^2_1 + P^2_2 - 2 P_1 P_2 \,.\, \cos\,(P_1 P_2),$$

w którem $\cos\,(P_1 P_2)$ oznacza cosinus kąta, utworzonego przez boki P_1 i P_2. Należy zwrócić uwagę na pojmowanie tych symboli.

Wzór postaci:

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 \ldots\ldots \bar{P}_n = \bar{R}$$

lub też, ogólniej pisząc, wzór:

$$\Sigma \bar{P}_k = \bar{R}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

w którym k jest kolejno równe: $1, 2, 3 \ldots n$, nazywa się **sumą wektorową**, lub inaczej geometryczną, i przedstawia odpowiedni **wielobok** w przestrzeni; wzór zaś:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\, P_n,$$

jest **sumą algebraiczną** i wyraża sumę **długości** boków wieloboku, która **nie jest równą długości** R, gdyż w ogóle $\Sigma P_k > R$.

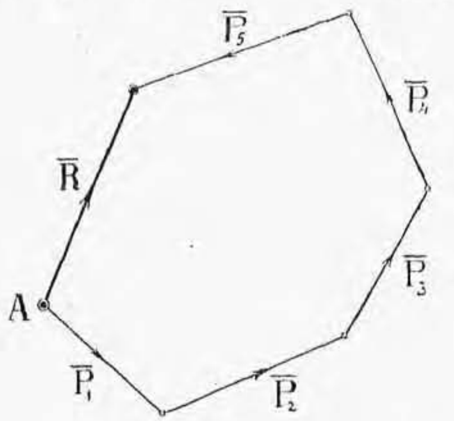
Suma wektorowa wskazuje **czynności**, jakie mamy wykonać z ruchomym punktem, oraz położenie jego w przestrzeni, gdy uskutecznimy te przesunięcia: suma zaś algebraiczna wskazuje wyłącznie **sumę długości** przesunięć.

W szczególnym przypadku, gdy ruchomy punkt K powróci do miejsca wyjścia, — otrzymamy **wielobok zamknięty**. W tym razie $\bar{R}$ równa się zeru; przebieg więc takiego punktu przedstawi się w przyjętym sposobie oznaczania:

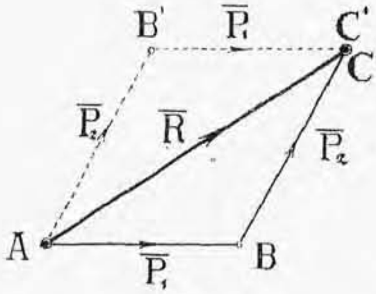
$$\Sigma \bar{P}_k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

i powiemy w tym razie, że wektor zastępczy równy jest zeru.

Gdy więc spotkamy się ze wzorem sumy wektorowej postaci $\Sigma \bar{P}_k = 0$, powinniśmy sobie przedstawić w przestrzeni wielobok **zamknięty**. Jeżeli zaś posiadamy wzór $\Sigma \bar{P}_k = \bar{R}$, to powinniśmy sobie wyobrazić wielobok niezamknięty, (t. j. linię łamaną), którego boki stanowią wektory $\bar{P}_k$ ze strzałkami z jednakowym zwrotem, wektor zaś $\bar{R}$ należy sobie przedstawić jako bok, zamykający wspomniany wielobok, ze strzałką przeciwną zwrotowi strzałek wektorów $\overline{P}$, rys. 5-ty.



Rys 5.



Rys. 6.

5. Właściwości sumy wektorów. Rozważmy obecnie pewne właściwości sumy wektorów i weźmy pod uwagę ruchomy punkt K; umieśćmy go najpierw w A, rys. 6-ty i przesuńmy prostolinijnie do punktu B, następnie z punktu B do punktu C; oznaczając przesunięcie AB przez $\overline{P}_1$, przesunięcie BC przez $\overline{P}_2$, zastępcze zaś przesunięcie AC przez $\overline{R}$ napiszemy $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 = \overline{R}$.

Wykonajmy obecnie czynności przesunięć w innym porządku, rys. 6-ty, t.j. wykonajmy najpierw przesunięcie wzdłuż wektora $\overline{P}_2$, następnie $\overline{P}_1$, natenczas punkt ruchomy dojdzie do miejsca C'. Ażeby wykonać te przesunięcia, przesuwamy ruchomy punkt K z miejsca A do miejsca B' w ten sposób, że czynimy stosownie do założenia AB' równoległem i równem BC, następnie z punktu B' przesuwamy ruchomy punkt do C', czyniąc $B'C'$ równoległem i równem AB. W ten sposób punkt C' przedstawia miejsce, do którego przejdzie punkt ruchomy po innej drodze. Z geometrycznego stosunku wektorów: AB, BC, AB' i $B'C'$ wynika, iż wykreślona figura $(ABCC'B'A)$ przedstawia równoległobok; czyli że punkt C i C' muszą się pokryć, co doprowadza nas do wniosku, że jeżeli przesuniemy punkt ruchomy w porządku wektorów $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, lub też w innym porządku, np. najpierw po wektorze $\overline{P}_2$ następnie po wektorze $\overline{P}_1$, to tak w pierwszym jak i w drugim przypadku dojdziemy zawsze do jednego i tego samego punktu C, którego miejsce w przestrzeni wyznacza jeden wektor $\overline{R}$. Wniosek ten przedstawia się symbolicznie: $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 = \overline{P}_2 + \overline{P}_1 = \overline{R}$.

Gdybyśmy mieli sumę wektorową złożoną z większej ilości wektorów, to moglibyśmy dowolnie przemieniać porządek dodawania wektorów, przez co jednakże nie zmieniłby się wynik przesunięć; czyli wszystkie te sumy będą posiadać jeden i ten sam wektor zastępczy, — wektor wypadkowy.

Wniosek ten da się wysłowić w następujący sposób:

suma wektorów jest niezależną od porządku dodajników. Jest to więc prawo jednakowe z prawem dodawania liczbowego i nazywa się prawem **przemienności dodajników.** Z określenia dodawania wektorów wypływa prawo **łączności** dodajników; t. j. mając sumę wielu wektorów

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{P}_4 + \ldots = \overline{R}.$$

możemy, dowolnie łącząc niektóre dodajniki, wyznaczać ich wypadkowe, i następnie suma tych wypadkowych da wektor wypadkowy wszystkich wektorów. Dodawanie np. wspomnianych wektorów uskutecznić możemy w następujący sposób: wyznaczamy najpierw: $\overline{P}_1+\overline{P}_2={}_1\overline{R}$, następnie $\overline{P}_3+\overline{P}_4=\overline{R}_2$; i wreszcie: $\overline{R}_1+\overline{R}_2=\overline{R}$ i t. p.

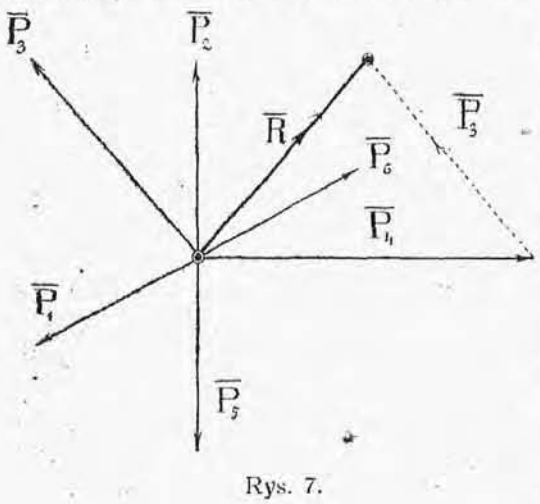
Z określenia sumy wektorów wynikają następujące jej właściwości:

1) Jeżeli powiększymy lub zmniejszymy wielokrotnie wektory składowe pewnej sumy, to i wypadkowa ich powiększy się lub zmniejszy się w tymże stosunku; sumy takie będą przedstawiały wieloboki geometrycznie podobne.

2) Jeżeli wszystkie wektory składowe obrócimy o jeden i ten sam kąt w płaszczyźnie czy w przestrzeni, to i wypadkowa ich obróci się o ten sam kąt.

3) Jeżeli daną sumę wektorową zrzutujemy w jaki bądź sposób na dowolnie obraną płaszczyznę w przestrzeni, to otrzymamy nową sumę wektorową, której wypadkowa jest rzutem właściwej wypadkowej.

6. Skracanie i dodawanie wektorów. Na zasadzie powyżej wyprowadzonego twierdzenia o niezależności sumy wektorów od porządku dodajników, jasnem jest, iż z danego pęku wektorów, t. j. z danego zbioru wektorów możemy zbudować bardzo wiele wieloboków, lecz wszystkie te wieloboki doprowadzają nas do jednego i tego samego punktu krańcowego, t. j. wyznaczą one jeden jedyny wektor zastępczy.



Rys. 7.

W pęku wektorów mogą się znajdować wektory, leżące na wspólnej prostej i przytem co do wielkości wzajemnie równe i ze strzałkami przeciwnemi. Ponieważ suma wektorów niezależną jest od porządku dodajników, przeto dodamy najpierw z sobą takie wektory, i usuniemy je z układu, gdyż suma ich równa się zeru.

Dwa więc wektory, posiadające te same kierunki i te same długości, lecz strzałki przeciwne, mogą być z pęku usunięte bez sprowadzenia zmiany wektora wypadkowego; inaczej mówiąc, dwa takie wektory możemy zawsze skreślić bez wpływu na wynik dodawania.

Jeżeli np. w przedstawionym na rys. 7-ym pęku wektorów przyjmiemy, że wektory $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_6$ leżą na jednej prostej i długości ich są równe, to można napisać: $\overline{P}_1 + \overline{P}_6 = 0$; tak samo, np. $\overline{P}_2 + \overline{P}_5 = 0$. Powyższą sumę napiszemy w następującym porządku:

$$[\overline{P}_1 + \overline{P}_6] + [\overline{P}_2 + \overline{P}_5] + \overline{P}_3 + \overline{P}_4 = \overline{R},$$

skąd otrzymamy:

$$\Sigma \overline{P}_k = \overline{P}_3 + \overline{P}_4 = \overline{R}.$$

Dodawanie więc sześciu wektorów sprowadza się w danym razie do dodawania dwóch wektorów, co znakomicie upraszcza działanie.

Z prawa usunięcia dwóch wektorów, leżących na jednej wspólnej prostej i równych co do swej wielkości, lecz z przeciwnymi kierunkami strzałek, wynika również prawo przyłączania do danego pęku wektorów dwóch takichże wektorów, t. j. równych, lecz ze zwrotami przeciwnymi, które to przyłączanie nie sprowadza żadnej zmiany wyniku dodawania. Wprowadzenie takich dwóch wektorów do rachunku bywa nieraz korzystne przy wykreślaniu wieloboku wektorów.

7. **Różnica dwóch wektorów.** Różnicą dwóch wektorów $\overline{P}_1 - \overline{P}_2$ nazwiemy taki trzeci (nie znany dotychczas) wektor $\overline{R}'$, który dodany do $\overline{P}_2$ da wektor $\overline{P}_1$; — a więc taki wektor $\overline{R}'$, który uczyni zadość równaniu:

$$\overline{P}_2 + \overline{R}' = \overline{P}_1$$

Działanie to przedstawione jest na rys. 10-ym. Działanie takie nazwiemy odejmowaniem. Odejmowanie przeto zastąpimy dodawaniem, gdy zmienimy strzałkę wektora, który mamy odjąć, t. j. gdy wykonamy konstrukcję geometryczną pg. nast. symbolu:

$$\overline{P}_1 + (-\overline{P}_2) = \overline{R}'.$$

8. **Przykłady:**

1) Dane są dwa wektory $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ rys. 8; należy wykreślić wektory zastępcze podług następujących wzorów:

a) $\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$; rozwiązanie na rys. 9-ym;

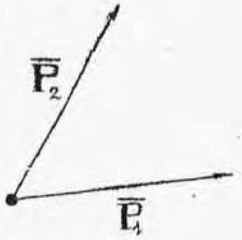
b) $\overline{R} = \overline{P}_2 + \overline{P}_1$; rozwiązanie na rys. 9-ym;

c) $\overline{R}' = \overline{P}_1 - \overline{P}_2$; rozwiązanie na rys. 11-ym;

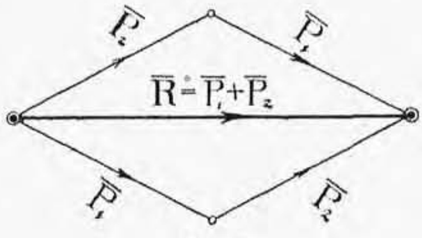
d) $\overline{R}'' = \overline{P}_2 - \overline{P}_1$; rozwiązanie na rys. 10-ym;

2) Dane są wektory $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ takie, że $P_1 = P_2$ (t. j. długości ich są równe, rys. 12-ty), wykreślić ich różnicę: $\overline{R} = \overline{P}_2 - \overline{P}_1$.

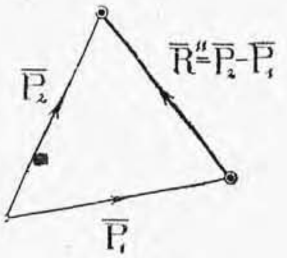
3) Dane są cztery wektory, których $\Sigma \overline{P}_k = 0$; wykreślić z nich wszystkie możliwe czworoboki, odpowiadające temu warunkowi.



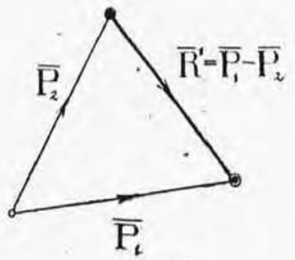
Rys. 8.



Rys. 9.

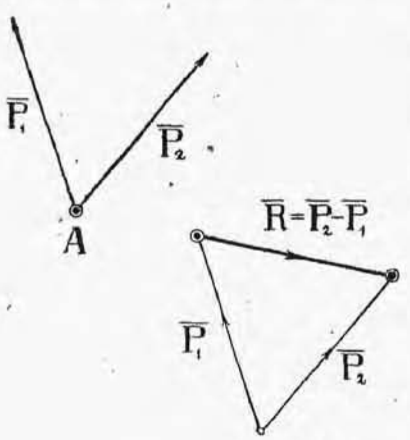


Rys. 10.



Rys. 11.

9. **Układy szczególne.** Rozpatrywania powyższe tyczyły się wektorów dowolnie w przestrzeni skierowanych, t. j. tyczyły się przesunięć punktu ruchomego po bokach wieloboków wichrowatych, był to więc przestrzenny układ wektorów.



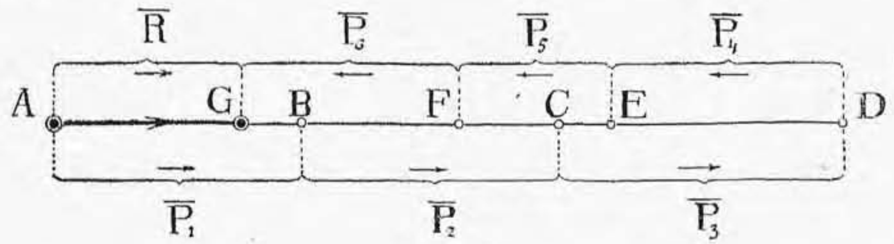
Rys. 12.

Jako szczególne przypadki układów wektorów można uważać te, w których wszystkie rozpatrywane wektory leżeć będą na jednej płaszczyźnie, wtedy powiemy, że posiadamy **płaski** układ wektorów. Suma płaskiego układu wektorów przedstawi się w postaci wieloboku płaskiego.

Następny szczególny przypadek zajdzie, gdy wszystkie wektory leżeć będą na jednej prostej, wtedy powiemy, że mamy do czynienia z układem wektorów **prostolinijnym.** Suma wektorów układu prosolinijnego przedstawi się w następujący sposób, rys. 13-ty.

$$\Sigma P_k = R;$$

O sumie tej, jakieśmy to już wyżej wzmiankowali powiedzieć możemy, iż dodawanie wektorów układu prostolinijnego, wykonywa się podług metod dodawania algebraicznego. Dodawanie więc algebraiczne uważać można, jako szczególny przypadek dodawania wektorowego i zachodzi ono, gdy wszystkie rozpatrywane wektory leżeć będą na jednej prostej. Zwrócić jeszcze należy uwagę, że w układzie prostolinijnym należy przy dodawaniu zachować również kierunki strzałek jak w układach przestrzennych.



Rys 13.

10. Wektory na płaszczyźnie i ich rzuty na osi. Wyprowadzimy tutaj pewne geometryczne właściwości układów płaskich. Wykreślmy w tym celu na płaszczyźnie rysunku, rys. 14-ty, wektor $\overline{P}$; nakreślmy następnie na tej płaszczyźnie prostą, którą nazwiemy osią x i opuśćmy z końców tego wektora proste prostopadłe do tej osi, (proste te nazywają się **promieniami rzutującymi**). Punkty przecięć promieni rzutujących z osią x dają dwa punkty A_x i B_x, które są **rzutami punktów** A i B na oś x. Odcinek $A_x B_x$ oznaczymy przez P_x i nazwiemy go **rzutem wektora** P **na oś** x. Ze stosunku trygonometrycznego wynika zależność:

$$P_x = P . \cos (P,x); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

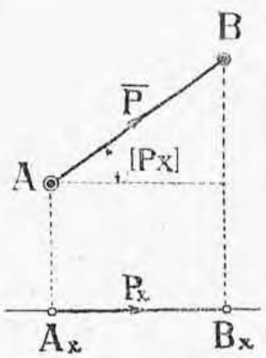
w której $\cos (P,x)$ jest cosinus kąta, utworzonego przez wektor $\overline{P}$ i oś x.

Wykreślmy obecnie wielobok płaski zamknięty, rys. 15-ty, przedstawiony przez wzór $\Sigma \overline{P}_k = 0$; w danym przykładzie kolejno: $k=1, \ldots 5$. Zrzutujmy wierzchołki $A, B, C, \ldots$ tego wieloboku na dowolnie obraną oś x, lecz leżącą w jego płaszczyźnie; a otrzymamy cały szereg wektorów $\overline{P}_{1,x}, \overline{P}_{2,x} \ldots$ i t. d., które stanowią układ wektorów prostolinijny. Sumowanie rzutów wektorów wykonać należy podług prawideł dodawania algebraicznego. Z figury odczytać możemy następujące twierdzenie: gdy układ płaski wektorów tworzy wielobok zamknięty, to suma algebraiczna ich rzutów na dowolnie obraną oś równa się zeru.

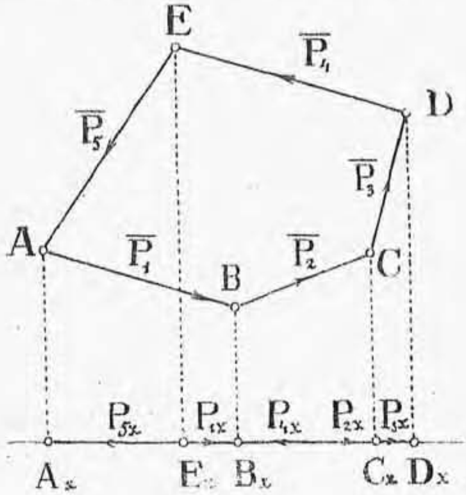
Twierdzenie to da się wyrazić wzorami wektorowymi w następujący sposób:

$$\text{jeżeli } \Sigma \overline{P}_k = 0, \text{ to } \Sigma P_{k,x} = 0.$$

Weźmy obecnie pod uwagę układ wektorów, tworzących wielobok **niezamknięty**; łatwo wtedy spostrzedz, że suma algebraiczna rzutów tych wektorów na obraną oś **nie** będzie wogóle równą zeru. Jeżeli wielobok niezamknięty, zamkniemy za pomocą wektora zastępczego R, to rzut tego wektora na oś x będzie równy sumie **algebraicznej** rzutów danych wektorów. Wniosek ten można ująć w następujące twierdzenie:



Rys. 14.



Rys. 15.

jeżeli wektory tworzą na płaszczyźnie wielobok niezamknięty, to algebraiczna suma ich rzutów na dowolną oś równa się rzutowi wektora zastępczego. Twierdzenie to wyraża się wzorem wektorowym:

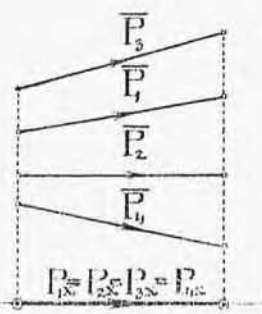
$$\text{jeżeli } \overline{R} = \Sigma \overline{P}_k, \text{ to } R_x = \Sigma P_{k,x}.$$

Zbadajmy obecnie, czy treść pierwszego z tych twierdzeń o rzutach wieloboku zamkniętego nie da się odwrócić, t. j. czy można powiedzieć, jeżeli suma algebraiczna rzutów płaskiego układu wektorów na pewną oś równa się zeru, czy w tem razie wektory te przedstawiają wielobok zamknięty; należy zatem sprawdzić: czy, jeżeli $\Sigma P_{k,x} = 0$, to i $\Sigma \overline{P}_k = 0$? Po rozpatrzeniu się w tem twierdzeniu zauważymy, że takie odwrócenie nie może mieć miejsca, jeżeli bowiem wektor zastępczy będzie stał prostopadle do osi rzutów, to suma ich rzutów na tę oś będzie równą zeru; pomimo tego, że wielobok wektorów jest niezamknięty; posiada on bowiem wektor zastępczy prostopadły do osi rzutów, a rzut takiego wektora równa się zeru. Ażeby więc wyrazić za pomocą rzutów, że wielobok płaski jest zamknięty, należy rzutować wielobok wektorowy na dwie dowolne, lecz nierównoległe osi x i y i jeżeli sumy algebraiczne rzutów tego wieloboku są zerem dla każdej osi **zosobna**, to tylko wtedy wielobok wektorowy będzie zamknięty. Powyższe równanie da się streścić w twierdzeniu: jeżeli sumy algebraiczne rzutów płaskiego wieloboku wektorowego na dwie nierównoległe osi rzutów równe są zeru dla każdej osi zosobna, to odpowiadający tym rzutom wielobok wektorowy jest zamknięty. Co się wyraża wektorowo:

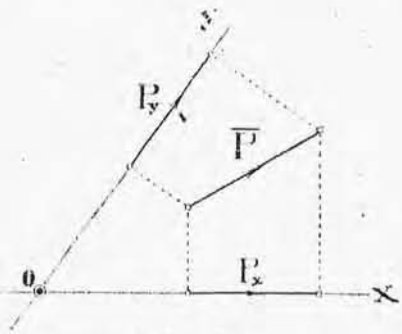
jeżeli $\Sigma P_{k,x} = 0$, **oraz** $\Sigma P_{k,y} = 0$, to $\Sigma \overline{P}_k = 0$. . . . . (4)

Niezbędny warunek stosowania w danym przypadku rzutów na dwie osi, a nie na jedną, objaśnia się jeszcze tem, iż rzut pewnego wektora na jedną tylko oś nie wystarcza do wyznaczenia właściwego wektora; gdyż rzut ten może odpowiadać nieskończenie wielu wektorom, rys. 16-ty. Dopiero gdy dane będą rzuty na dwie osi nierównoległe x i y, wtedy dopiero możemy wyznaczyć jednocześnie odpowiedni wektor. Naprzykład, gdy dane są dwa rzuty P_x i P_y na osi x i y, to dopiero z tych dwóch rzutów wykreślimy tylko jeden jedyny wektor $\overline{P}$, jak to wskazuje rys. 17-ty.

Warunek analityczny, aby wielobok płaski był zamknięty, wymaga przeto: ażeby **sumy algebraiczne rzutów na dwie osi były równe zeru dla każdej osi zosobna.**



Rys. 16.



Rys. 17.

11. Wektory w przestrzeni i ich rzuty na osi. To ostatnie twierdzenie o płaskim układzie wektorów postaramy się zastosować do przestrzennego układu wektorów. Przy rozpatrywaniu płaskiego układu wektorów, osi rzutów, stosownie do założenia, znajdowały się w jednej płaszczyźnie z wektorami; obecnie wektory i osi, na które mamy robić rzuty, nie znajdują się na jednej płaszczyźnie, t. j. są względem siebie w wichrowatem położeniu. Określmy naprzód, co mamy rozumieć przez rzut wektora na daną oś w przestrzeni. Ażeby otrzymać rzut wektora $\overline{P}$ na dowolnie obraną oś w przestrzeni, którą oznaczymy np. przez x, przeprowadzamy przez krańcowe punkty tego wektora dwie płaszczyzny prostopadłe do obranej osi (płaszczyzny te nazywają płaszczyznami rzutującemi). Punkty przecięcia się tych płaszczyzn rzutujących z obraną osią wyznaczają odcinek, który nazwiemy rzutem wektora $\overline{P}$ na oś x

i oznaczymy go przez P_x. Strzałka wektora P_x musi być zgodną ze strzałką $\overline{P}$, t. j. rzut początku wektora powinien być początkiem rzutu tegoż wektora; tak samo powinno być z krańcowym punktem wektora i jego rzutu.

Różnica więc w tworzeniu rzutów wektorów na oś w układzie płaskim i przestrzennym jest ta, iż w układzie płaskim do tworzenia rzutów stosujemy proste prostopadłe do osi x, w układzie zaś przestrzennym—płaszczyzny prostopadłe do tejże osi. Inaczej mówiąc, w pierwszym przypadku stosujemy proste rzutujące, w drugim — płaszczyzny rzutujące.

Stosunek długości wektorów $\overline{P}$ i $\overline{P}_x$, które są w danym razie względem siebie w wichrowatym położeniu, da się wyrazić przez wzór trygonometryczny: $P_x = P.\cos(P,x)$, jaki stosowaliśmy do wektorów w układzie płaskim, rozumiejąc przez (P,x), kąt, utworzony przez dwie wichrowate proste, na których leżą wektory P i P.

Przypomnę tutaj określenie z geometrji przestrzennej, iż miarą kąta, utworzonego przez dwie wichrowate proste, jest kąt płaski, utworzony przez dwie przecinające się proste, przeprowadzone z jakiegobądź punktu przestrzeni równolegle do danych prostych.

Szczególne przypadki rzutów. 1) Gdy dany wektor jest równoległy do osi rzutów, to rzut jego równa się danemu wektorowi, t j. gdy $x \parallel P$, to $P_x = P$; 2) gdy dany wektor leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi rzutów, to rzut jego równa się zeru t. j. jeżeli $x \perp \overline{P}$, to $P_x = 0$.

Przedstawmy sobie następnie wichrowaty wielobok wektorów, wielobok ten, którego wierzchołki oznaczymy przez A, B, C, D i t. d., a którego boki stanowią wektory $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ i t. d. niech będzie zamknięty. Symbolicznie wielobok ten oznaczymy przez $ABCD \ldots A$ lub inaczej:

$$\Sigma \overline{P}_k = 0; \qquad \text{gdzie } k = 1, 2, 3 \ldots n.$$

Obierzmy obecnie w przestrzeni oś rzutów x i przeprowadźmy przez punkty $A, B, C \ldots$ szereg płaszczyzn rzutujących, t. j., prostopadłych do osi x. Punkty przecięcia się tych płaszczyzn z osią x oznaczamy odpowiednio przez A_x, B_x i t. d. Odcinki $(A_x B_x)$, $(B_x C_x)$ lub $P_{1,x} P_{2,x}$ i t. d. są rzutami boków AB, BC, i t. d. t. j. przedstawiają rzuty wektorów $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \ldots$ Jeżeli następnie płaszczyzna rzutująca przebiega kolejno wszystkie punkty A, B, C i t. d. i powróci do miejsca A, to na osi x utworzy się cały szereg punktów A_x, B_x, C_x i t. d., z krańcowym punktem A_x, czyli suma algebraiczna rzutów wektorów na oś x równa się zeru; co napiszemy: **jeżeli** $\Sigma \overline{P}_k = 0$, **to** $\Sigma P_{k,x} = 0$;

Jeżeli zaś rozpatrujemy wielobok niezamknięty, to łatwo spostrzedz, że suma algebraiczna rzutów wszystkich wektorów na oś x, jest równą rzutowi wektora zastępczego czyli w danym razie:

$$\textbf{jeżeli } \Sigma \overline{P}_k = \overline{R}, \qquad \textbf{to } \Sigma P_{k,x} = R_x.$$

Wysłowienie tych twierdzeń było już przytoczone wyżej przy jego wyprowadzeniu dla układu płaskiego.

Postawmy sobie zapytanie analogiczne do poprzedniego, czy treść tego twierdzenia da się odwrócić, t. j. jeżeli np. $\Sigma P_{k,x}=0$, to czy $\Sigma \bar{P}_k=0$? inaczej mówiąc: jeżeli suma algebraiczna rzutów na dowolną oś równa jest zeru, czy odpowiadające tym rzutom wektory będą tworzyły wielobok zamknięty?

Otrzymamy w tym razie odpowiedź przeczącą, jaką również otrzymaliśmy przy rozpatrywaniu układu płaskiego; każdy bowiem wielobok wichrowaty, którego wektor zastępczy będzie leżał w płaszczyznie prostopadłej do osi rzutów, przedstawi się w rzutach jako $\Sigma P_{k,x}=0$; w danym bowiem przypadku wektor $\bar{R}$ zrzutuje się na oś rzutów w postaci jednego punktu, t. j. będzie $R_x=0$; pomimo że $\bar{R}$ posiadać będzie pewną wielkość skończoną. Obierzmy więc drugą oś rzutów, nierównoległą do pierwszej, którą odznaczymy literą y; o rzutach na tę oś możemy powiedzieć, jak poprzednio, t. j. jeżeli wektor zastępczy będzie się znajdował w płaszczyznie prostopadłej do osi y, to suma algebraiczna rzutów takiego wieloboku będzie równa zeru, gdy tymczasem odpowiadający wielobok nie będzie zamknięty.

Gdy obecnie skorzystamy jednocześnie z tych dwóch warunków, t. j., jeżeli $\Sigma P_{k,x}=0$ i $\Sigma P_{k,y}=0$, czy wielobok będzie zamknięty? O ile w układzie płaskim te dwa warunki były wystarczające do wywnioskowania, że odpowiedni wielobok płaski będzie zamknięty, to w danym razie, t. j. w układzie przestrzennym wektorów, te dwa warunki są niewystarczające; możemy bowiem zawsze wyobrazić sobie taką prostą, która jednocześnie będzie prostopadłą do obydwóch osi x i y. Taką prostą otrzymamy, jako przecięcie się dwóch płaszczyzn, które stoją prostopadle do osi x i y. Gdy na niej lub na innej do niej równoległej znajdzie się wektor zastępczy $\bar{R}$ wtedy $R_x=0$, oraz $R_y=0$, gdy tymczasem $\bar{R}$ może posiadać wielkość skończoną. Warunek, iż układ wektorów przestrzenny jest zamknięty, wyrazimy przeto analitycznie, że dla takiego układu, **sumy algebraiczne rzutów na trzy dowolne osi**, (nierównoległe do jednej płaszczyzny) **powinny być równe zeru dla każdej osi zosobna**.

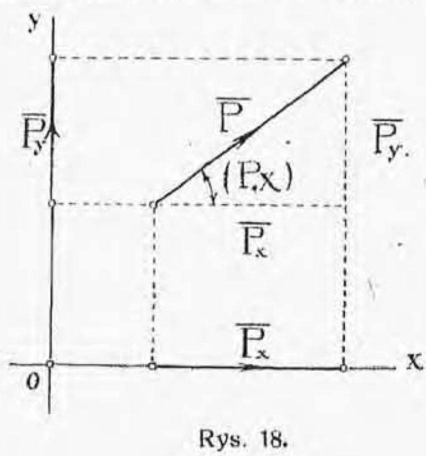
Powyższe twierdzenie stanie się równie zrozumiałem, gdy wyjdziemy z innego sposobu rozpatrywań. W tym celu postawmy pytanie: na ilu osiach potrzebne są rzuty pewnego wektora, znajdującego się w przestrzeni, aby ten wektor można było jednoznacznie wyznaczyć? W odpowiedzi na to załóżmy najpierw, że posiadamy—rzuty na dwie osi, t. j. posiadamy odcinki $A_x B_x$ i $A_y B_y$. Ażeby znaleźć położenie punktu A w przestrzeni, przeprowadźmy przez A_x i A_y płaszczyzny, prostopadłe do osi x i y; przecięcie się tych płaszczyzn da nam prostą, która będzie geometrycznem miejscem punktów A, (przyjmijmy przytem, że punkt A oznacza początek wektora). Uczyńmy to samo z punktami B_x i B_y, a otrzymamy geometryczne miejsce punktów krańcowych szukanego wektora, (gdyż B oznacza krańcowy punkt szukanego wektora). Z tego rozpatrywania wynika, że przez rzuty na dwie osi, wektor w przestrzeni nie jest jeszcze ściśle wyznaczony i dopiero gdy dany będzie rzut na trzecią oś, (którą oznaczymy np. literą z), t. j., gdy będzie dany trzeci rzut $A_z B_z$, wtedy dopiero położenie punktów A i B będzie ściśle wyznaczone w przestrzeni, co wysłowimy: **wektor jest ściśle wyznaczony przez rzuty na trzy osi, które nie są równoległe do jednej płaszczyzny.**

12. Układ osi rzutów. Wybór położenia osi x i y w układzie płaskim, lub osi x, y i z w układzie przestrzennym, nie poddawaliśmy dotychczas żadnym ograniczeniom. Położenie każdej z tych osi mogło być dowolnie obrane, twierdzenia więc powyższe pozostają w swej mocy dla dowolnie obranych osi.

W celach jednakże uproszczenia rozpatrywań, będziemy w następstwie stosowali dla płaskiego układu wektorów dwie osi x i y, wzajemnie prostopadłe; dla układu zaś przestrzennego trzy osi x, y i z, które przechodzą przez jeden punkt w przestrzeni i są również wzajemnie prostopadłe.

Z układami takich osi, zwanymi układami prostokątnymi mamy do czynienia w geometrji analitycznej i tutaj też układy takie stosować będziemy.

13. Sposób analityczny wyrażenia wektorów. Analitycznie w układzie płaskim wektor $\overline{P}$ przedstawiony być może jednoznacznie przez **dwa** rzuty $\overline{P}_x$ i $\overline{P}_y$, w układzie zaś przestrzennym przez **trzy** rzuty $\overline{P}_x$, $\overline{P}_y$ i $\overline{P}_z$.



Rys. 18.

Przyjmując układ osi prostokątny i oznaczając literami P, P_x, P_y (bez kresek u góry) **długości** wektorów, otrzymamy następujące stosunki geometryczne w układzie płaskim, rys. 18-ty:

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{P_x}{P} = \cos(P, x) \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\frac{P_y}{P} = \cos(P, y) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Przykład. Dane jest: $P_x = 3\ m$; $P_y = 4\ m$; obliczyć położenie i wielkość wektora odpowiedniego $\overline{P}$. $P = \pm\sqrt{3^2 + 4^2} = \pm 5\ m$, następnie:

$$\cos(P,x) = \frac{P_x}{P} = {}^3/_5 = 0,6,$$

skąd $\sphericalangle (P_1\, x) = 53^0\ 10'$ i t. d.

Przykłyd. Dane: $P = 10\ m$; $\sphericalangle\ (P,x) = 30^0$; skąd $\frac{P_x}{P} = \cos(P,x)$;

$\frac{P_x}{10} = \cos 30^0$; $P_x = 10 \cdot \cos 30^0 = 10 \cdot 0,86603 = 8,6603\ m$ i t. d.

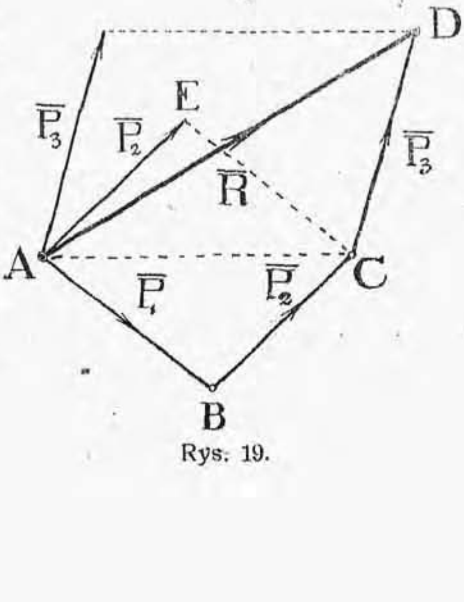
Jeżeli dany będzie płaski układ wektorów, dla którego szukamy wektora zastępczego, to rozwiązanie tego zadania możemy uskutecznić sposobem wektorowym, pisząc $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_k$ i następnie, budując odpowiedni wielobok.

Możemy również rozwiązać to zadanie sposobem analitycznym; w tym celu należy obliczyć rzuty $P_{k,x}$ oraz $P_{k,y}$, danych wektorów $\overline{P}_k$ na prostopadłe do siebie osi x i y; a wtedy znajdziemy $R_x = \Sigma P_{k,x}$; $R_y = \Sigma P_{k,y}$; skąd na zasadzie poprzednich wzorów obliczymy:

$$R = \sqrt{R^2_x + R^2_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Przykład. Punkt ruchomy K podlega kolejnym przesunięciom, przedstawionym przez wektory $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ i $\overline{P}_3$, należy wyznaczyć wektor zastępczy. Rysunek załączony, rys. 19-ty, przedstawia wektory $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$. Ponieważ mamy znaleźć sumę $\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3$; przeto budujemy wielobok $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3$ i otrzymujemy wektor $\overline{R}$; jest to rozwiązanie geometryczne.

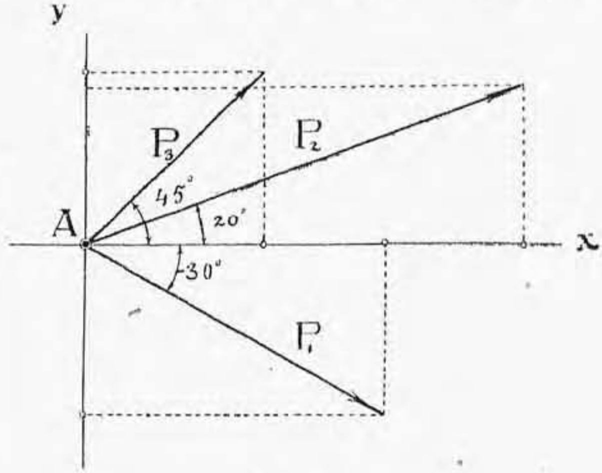
Analitycznie zaś rozwiążemy to zadanie w następujący sposób. Przeprowadźmy dwie osi x i y i, w celu uproszczenia, przeprowadzimy je przez punkt A, rys. 20-ty. Ażeby wyznaczyć położenie wektorów względem osi x i y, potrzebna jest znajomość kątów (P_1, x); (P_3, x), oraz wielkości liczbowe P_1, P_2, P_3. Przyjmijmy: $\sphericalangle\ (P_1, x) = -30^0$, $\sphericalangle\ (P_2, x) = 20^0$, $\sphericalangle\ (P_3, x) = 45^0$, $P_1 = 10\ m$, $P_2 = 15\ m$, $P_3 = 8\ m$.



Rys. 19.

Na podstawie tych danych napiszemy:

$$P_{1,x} = P_1 \, . \cos(-30^0) = P_1 \, . \cos 30^0 = 10 \, . \cos 30^0 = 8{,}6603.$$
$$P_{2,x} = P_2 \, . \cos 20^0 = 15 \, . \cos 20^0 = 14{,}0953.$$
$$P_{3,x} = P_3 \, . \cos 45^0 = 8 \, . \cos 45^0 = 5{,}6569.$$



Rys. 20.

Ażeby obliczyć rzuty tych wektorów na oś y, zauważmy, że kąt: $(P_{1,y}) = 90^0 - \sphericalangle(P_1,x)$, a ponieważ wogóle: $\cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$, przeto:

$$P_{1,y} = P_1 \, . \sin(P_1,x) = 10 \, . \sin(-30^0) = -10 \, . \sin 30^0 = -5{,}0000 \text{ m},$$
$$P_{2,y} = P_2 \, . \sin(P_2,x) = 15 \, . \sin 20^0 = 15 \, . \sin 20^0 = 5{,}1303 \text{ m},$$
$$P_{3,y} = P_3 \, . \sin(P_3,x) = 8 \, . \sin 45^0 = 8 \, . \sin 45^0 = 5{,}6569 \text{ m}.$$

Z tych wyników otrzymamy:

$$R_x = P_{1,x} + P_{2,x} + P_{3,x} = 8{,}6603 + 14{,}0953 + 5{,}6569 = 28{,}4125$$
$$R_y = P_{1,y} + P_{2,y} + P_{3,y} = -5{,}0000 + 5{,}1303 + 5{,}9569 = 5{,}7872$$

wreszcie:

$$R = \sqrt{R^2_x + R^2_y} = \pm\sqrt{807{,}27 + 33{,}52} = \sqrt{678{,}68} = 28{,}95,$$

jest to długość szukanego wektora.

Ażeby wyznaczyć położenie jego względem osi spółrzędnych, wystarczy znajomość kąta (R,x), kąt ten otrzymamy:

$$\cos(R,x) = \frac{R_x}{R} = \frac{28{,}41}{28{,}95} = 0{,}982,$$

skąd $\sphericalangle (R,x) \cong 11^0$.

Znając już R, jako długość wektora i kąt jego nachylenia (R,x) względem osi x, wyznaczymy właściwy wektor $\overline{R}$, zauważywszy przytem, że zwrot wektora zastępczego $\overline{R}$ jest skierowany do punktu A, jest to zatem taki zwrot, jaki został przyjęty za dodatni.

Algebraiczną postać równania wypadkowej R będziemy często przedstawiali w sposób następujący:

$$R = \sqrt{(\Sigma P_{k,x})^2 + (\Sigma P_{k,y})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Zastosujmy powyższy analityczny sposób rozpatrywania właściwości wektorów do układu przestrzennego. W danym przypadku będziemy mieli do czynienia z trzema osiami x, y i z, rys. 21-szy, które przechodzą przez jeden punkt w przestrzeni, zwany początkiem układu spółrzędnych, i które są względem siebie prostopadłe. Dowiedliśmy już wyżej, że dla wyznaczenia położenia wektora w przestrzeni potrzebną jest znajomość trzech jego rzutów: P_x, P_y oraz P_z, posiadając bowiem te trzy wartości, możemy zawsze wyznaczyć wielkość wektora $\overline{P}$.

Jeżeli trzy obrane osi przeprowadzimy przez punkt początkowy wektora $\overline{P}$, otrzymamy w przestrzeni prostopadłościan, którego krawędzie będą równe wielkościom: P_x, P_y i P_z i którego przekątna przedstawi wektor $\overline{P}$; stąd wynika wzór:

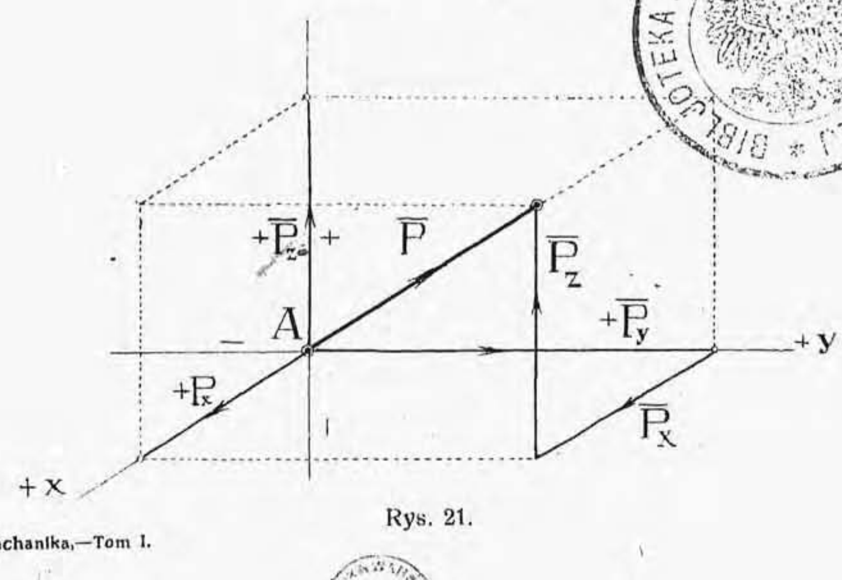
$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}.$$

Kąty, jakie tworzy dany wektor $\overline{P}$ z osiami x, y i z, otrzymamy ze stosunków:

$$\cos(P,x) = \frac{P_x}{P}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\cos(P,y) = \frac{P_y}{P},$$

$$\cos(P,z) = \frac{P_z}{P}.$$



Rys. 21.

W tych czterech równaniach posiadamy siedem wielkości: P, P_x, P_y, P_z, $\sphericalangle (P,x)$, $\sphericalangle (P,y)$ i $\sphericalangle (P,z)$; ażeby wszystkie te wielkości obliczyć, musimy mieć dane lub przyjąć za wiadome trzy z nich, któreby były niezależne od siebie, a wtedy pozostanie cztery równania z czterema niewiadomemi.

Przypomnieć jednakże tu należy, iż nie możemy dowolnie obrać trzech wielkości kątów: (P,x), $(P,y$ i $P,z)$, gdyż obrawszy dwa z tych kątów, trzeci już jest przez nie wyznaczony, nie stanowi więc nowego warunku zadania, albowiem między tymi kątami zachodzi związek znany z geometryi analitycznej:

$$\cos^2 (P,x) + \cos^2 (P,y) + \cos^2 (P,z) = 1.$$

Dlatego też w powyższem wysłowieniu zaznaczono, iż obrane wielkości powinny być **niezależne od siebie**. Tę samą ostrożność należy zachować przy wyborze kątów (P,x) i (P,y) w układzie płaskim, gdyż kąty te są również od siebie zależne.

Przykład. Dane są trzy rzuty: P_x, P_y i P_z; obliczyć wektor, odpowiadający tym rzutom.

Niechaj będzie dane:

$$P_x = 2, \; P_y = 3, \; P_z = 5,$$

to otrzymamy:

$$P = \sqrt{P^2_x + P^2_y + P^2_z};$$

$$P = \pm \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \pm \sqrt{38} = 6{,}1644,$$

$$\cos (P,x) = \frac{P_x}{P} = \frac{2}{6{,}1644} = 0{,}32444; \; \sphericalangle (P,x) = 71^0 4' 3'';$$

$$\cos (P,y) = \frac{P_y}{P} = \frac{3}{6{,}1644} = 0{,}48668; \; \sphericalangle (P,y) = 60^0 52' 42'';$$

$$\cos (P,z) = \frac{P_z}{P} = \frac{5}{6{,}1644} = 0{,}81110; \; \sphericalangle (P,z) = 35^0 47' 48''.$$

Ażeby obliczyć wektor zastępczy przestrzennego układu wektorów, należy zbudować wielobok wektorów, który w danym razie będzie w ogóle wichrowaty. Budowę tego wieloboku moglibyśmy uskutecznić w modelu; lub też za pomocą sposobów wykreślnej geometryi; analityczne zaś rozwiązanie tego zadania nastąpi w ten sposób, iż obliczymy rzuty wszystkich wektorów na osi x, y i z i otrzymamy: $P_{1,x}$, $P_{2,x}$, $P_{3,x}$ i wogóle $P_{k,x}$, jako rzuty na oś x; takie same otrzymamy, rzutując dane wektory na osi z i y. Na zasadzie poprzednich twierdzeń obliczymy rzuty wektora R na osi x, y, z:

$$R_x = \Sigma P_{k,x}; \; R_y = \Sigma P_{k,y}; \; R_z = \Sigma P_{k,z},$$

następnie ze wzoru: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ obliczymy wartość wektora R;

położenie zaś jego względem osi znajdziemy ze wzorów $\cos(R,x) = \frac{R_x}{R}$ i t. d. Wielkość wektora zastępczego obliczymy ze wzoru:

$$R = \sqrt{(\Sigma P_{k,x})^2 + (\Sigma P_{k,y})^2 + (\Sigma P_{k,z})^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

W szczególnym wypadku, gdy wektory tworzą wielobok zamknięty; t. j. gdy $R = 0$:

$$\Sigma P_{k,x} = 0; \quad \Sigma P_{k,y} = 0; \quad \Sigma P_{k,z} = 0$$

Do tych samych wyników dojdziemy również drogą analityczną, ponieważ:

$$R = \sqrt{(\Sigma P_{k,x})^2 + (\Sigma P_{k,y})^2 + (\Sigma P_{k,z})^2};$$

przeto jeżeli $R = 0$, to wyraz pod pierwiastkiem równać się musi zeru, wyraz ten jednakże jest złożony z dodajników, z których każdy, będąc w drugiej potędze, musi być dodatni; ponieważ zaś suma dodajników dodatnich może być w tym tylko razie równą zeru, gdy każdy z nich pojedyńczo będzie równy zeru; przeto otrzymamy wzory:

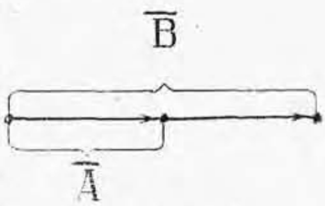
$$\Sigma P_{k,x} = 0; \quad \Sigma P_{k,y} = 0; \quad \Sigma P_{k,z} = 0;$$

co stwierdza zgodność poprzednich wyników, zdobytych drogą geometryczną.

14. Mnożnik skalarny. Wektor jednostkowy. Każdy wektor możemy pomnożyć przez pewgą liczbę t. j. skalar i otrzymamy nowy wektor, który będzie posiadał ten sam kierunek i strzałkę co poprzedni; lecz wartość jego t. j. długość będzie różną od poprzedniego. Równanie: $\bar{B} = \alpha\bar{A}$, oznacza wektor $\bar{B}$, jak wskazuje rys. 22-gi, który jest α razy dłuższy od wektera $\bar{A}$; w danym razie α jest liczbową wielkością.

Wektory więc $\bar{A}$ i $\bar{B}$, pomiędzy którymi zachodzi zależność, wyrażona przez równanie. $\bar{B} = \alpha . \bar{A}$, są między sobą równoległe.

Wyraz $\Sigma \bar{P}_k = 0$ przedstawia pewien wielobok zamknięty, wyraz zaś $\Sigma\alpha\bar{P}_k = 0$ przedstawia wielobok inny, którego boki są równoległe i proporcjonalne do boków pierwszego wieloboku: wzory te przedstawiają zatem dwa wieloboki podobne. Z tego wynika, że jeżeli $\Sigma\bar{P}_k = 0$, to również $\Sigma\alpha\bar{P}_k = 0$ i odwrotnie.



Rys. 22.

Jeżeli wektorowi $\bar{A}$ nadamy długość $= 1$, to otrzymamy wektor, który nazwiemy wektorem jednostkowym. Na zasadzie tego określenia możemy powiedzieć, iż wektor jednostkowy wyznacza tylko kierunek i strzałkę wektora. **Wektor jednostkowy** należy więc sobie wyobrazić jako odcinek, którego długość = 1 (np. 1 *cm*) i którego kierunek i strzałka są ściśle w przestrzeni wyznaczone. Niech $\bar{i}$ oznacza pewien wektor jednostkowy, to $\alpha\bar{i}$ oznacza wektor o długości α (np. centymetrów) i o kierunku i strzałce zgodnej z wektorem $\bar{i}$. Każdy więc wektor może być przedstawiony przez iloczyn z wektora jednostkowego i z wielkości liczbowej, np. $\bar{A} = \alpha\,\bar{i}$.

15. Znaczenia fizyczne wektora. Pojęcie wektora oparliśmy na określeniu przesunięcia punktu w przestrzeni. Zastosowanie jednak tego pojęcia nie ogranicza się tylko do przypadku przesunięć, lecz i do wielu innych zjawisk: mamy bowiem wiele zjawisk w przyrodzie, dla których określenia potrzebne jest pojęcie kierunku, gdyż pojęcie samej ilości, t. j. liczby jest w tych razach niewystarczającem. Masa, gęstość, temperatura, ilość ciepła, praca, energia kinetyczna, są to wielkości, które zupełnie ściśle określimy przez ilość odpowiednich jednostek, t. j. przez liczby. Wielkości te nazywano **skalarnemi** inaczej **liczbowemi.**

Gdy jednakże jakiś punkt przesuwa się w przestrzeni lub porusza się z pewną prędkością, obraca się około pewnej osi i t. p., to dla ścisłego określenia takiego zjawiska jest niewystarczającem pojęciem — liczba; w tym razie musi być dany jeszcze kierunek; a więc kierunek przesunięcia, — kierunek prędkości, — kierunek osi obrotu i t. d. W tych więc przypadkach powinniśmy stosować miary, zawierające właściwości kierunku. Wielkości te nazywano wielkościami **kierunkowemi**, inaczej wektorowemi i określić je można **wektorami** w postaci odcinka, który posiada **kierunek, strzałkę i długość.** Do zjawisk kierunkowych zaliczamy np. działanie magnesu na opiłki metaliczne ujawniają się bowiem w tym razie działania kierunkowe magnesu na opiłki; również siła jest wielkością kierunkową. W mechanice, która rozpatruje zjawiska ruchu, mamy przeważnie do czynienia z wielkościami wektorowemi; dlatego też wykład mechaniki poprzedziłem pojęciami wektorowemi.

Geometryczne właściwości wektorów nie kończą się na powyższych rozważaniach, i dalsze ich rozważania podam w miarę potrzeb, jakie się okażą przy wykładzie zasad mechaniki; gdyż w ten sposób otrzymamy fizyczną ilustrację twierdzeń, których pochodzenie jest czysto geometrycznej natury.

16. Rzuty wektorów—jako wektory składowe. Rzuty $\bar{P}_x$, $\bar{P}_y$ i $\bar{P}_z$ pewnego wektora $\bar{P}$ na trzy osi x, y i z możemy uważać jako trzy **wektory składowe**, t. j. jako wektory, po których np. punkt ruchomy przebiega; lub które są np. siłami; wektor zaś $\bar{P}$ możemy uważać jako wektor zastępczy wypadkowy, rys. 21-szy. Przy takiem pojmowaniu wektory składowe oznaczymy przez P_x, P_y, P_z i napiszemy:

$$\bar{P} = \bar{P}_x + \bar{P}_y + \bar{P}_z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Nazywając zaś P_x **rzutem wektora** $\bar{P}$ **na oś** x, rozumiemy wtedy wielkość **geometrycznie** określoną przez równanie: $P_x = P \cdot \cos(P,x)$.

Z matematycznej strony widzenia jest to obojętnem, jaki charakter nadamy wielkości P_x, czy charakter rzeczywiście wykonywanego przesunięcia (t. j. charakter fizyczny), czy też charakter wielkości matematycznej, i dla tego też te dwa pojęcia „składowa" i „rzut" należy uważać pod względem matematycznym za pojęcia równoważne. Dwoistość tego pojmowania przeplata się przez całą teorję mechaniki, na co teraz już zwracam uwagę.