Wektor $\overline{M}$ przeto wskutek oddalenia punktu odniesienia od osi centralnej, tworzy z osią centralną kąt $tg\,\alpha = \frac{R.h}{M}$; kąt ten nie zmienia się przy stałej odległości punktu od osi. Położenie przeto wektora $\overline{M}$ względem różnych biegunów odniesienia na zasadzie powyższych rozpatrywań określimy w nast. sposób:

1) w każdym punkcie przestrzeni możemy wogóle wyznaczyć tylko jeden wektor $\overline{M}$:

2) wobec tego kierunki wektorów $\overline{M}$ nie przecinają się.

3) wszystkie wektory $\overline{M}$ są dłuższe od wektora $\overline{M_c}$; czyli wektor $\overline{M_c}$ jest najkrótszym wektorem że wszystkich wektorów, jakie w różnych punktach przestrzeni wyznaczyć można; co również wynika z § 58-go;

4) względem wszystkich punktów powierzchni walca, o podstawie kołowej, o promieniu h i osi wspólnej z osią centralną, —wektory $\overline{M}$ są styczne do tego walca, — tworzą stały kąt z osią centralną i wartości liczbowe posiadają jednakowe; a względem punktów, leżących na tworzącej tego walca, wektory $\overline{M}$ są oprócz tego wzajemnie równoległe; t. j. wektory $\overline{M}$ w tym razie są równe;

5) oddalając punkty odniesienia od osi centralnej; kąt nachylenia wektora $\overline{M}$ względem osi centralnej rośnie aż do wielkości 90^0; ten ostatni przypadek nastąpi; gdy biegun odniesienia przesuniemy do nieskończoności;

6) ponieważ ze zmianą położenia bieguna odniesienia kąt nachylenia wektora $\overline{M}$ względem osi centralnej zmienia się od 0 do 90^0 i przytem płaszczyzna tego kąta obraca się o 360^0, przeto kierunki te wyczerpują wszystkie możliwe kierunki, jakie dowolna prosta zająć może w przestrzeni; z tego wynika: że dla danego układu sił możemy zawsze znaleźć w przestrzeni taki punkt odniesienia, względem którego wektor $\overline{M}$ będzie równoległy do dowolnej prostej; przesuwając bowiem równolegle daną prostę w przestrzeni, musimy natrafić na prostą, na której znajduje się wektor $\overline{M}$ i z którą dana prosta się pokryje; punktem odniesienia będzie punkt, względem którego wektor $\overline{M}$ utworzono; lecz w myśl wniosku 4-go otrzymamy nieskończenie wiele takich punktów odniesienia, a geometrycznem ich miejscem jest tworząca walca; przechodząca przez punkt zetknięcia się wektora $\overline{M}$ z tym walcem.

62. Przypadki, gdy wektor $\overline{M} \perp \overline{R}$. W poprzednich paragrafach szukaliśmy takiego bieguna, względem którego wektory $\overline{R}$ i $\overline{M}$ byłyby równoległe; obecnie postawimy sobie pytanie, czy można znaleźć taki biegun, względem którego wektory $\overline{R}$ i $\overline{M}$ byłyby wzajemnie prostopadłe. Gdybyśmy taki biegun znaleźli, wtedy odpowiedni układ sił, możnaby przekształcić na jedną siłę lub na jedną parę; posiadalibyśmy bowiem parę sił i jedną siłę na wspólnej płaszczyźnie, które dają się przekształcić na jedną siłę, lub na jedną parę.

Ponieważ rzut wektora $\overline{M}$ na kierunek wektora $\overline{R}$ jest wogóle stałą wielkością dla każdego układu sił względem każdego bieguna w przestrzeni, przeto, jeżeli względem jednego bieguna wektory $\overline{M}$ i $\overline{R}$ są wzajemnie prostopadłe, to względem każdego innego bieguna będą one również prostopadłe; co może tylko nastąpić dla pewnych szczególnych układów sił, i bynajmniej nie zależy od położenia bieguna. Z tego wnioskujemy, że wogóle każdy układ sił można sprowadzić do jednej siły wypadkowej $\overline{R}$ i do momentu $\overline{M}$; a szczególne tylko układy sprowadzić się dają tylko do jednej siły, lub tylko do jednej pary, i to nastąpi wtedy, gdy wektor momentu $\overline{M}$ względem **jakiegobądź** bieguna, jest prostopadłym do $\overline{R}$.

Takimi szczególnymi układami sił są, między innymi, układy sił na płaszczyźnie; obrawszy bowiem biegun na płaszczyźnie sił, wektory ich momentów są do nich prostopadłe; a więc wektor wypadkowej $\overline{M}$ jest również prostopadły do kierunku siły $\overline{R}$.

W układach sił równoległych kierunki wypadkowe $\overline{R}$ i momentu $\overline{M}$ są również do siebie prostopadłe. Wektory bowiem $\overline{M}_k$ względem dowolnie obranego kierunku leżą w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku sił; wypadkowy zatem wektor $\overline{M}$ leży również w tej płaszczyźnie, jest więc prostopadły do kierunku sił. Wektor $\overline{R}$ wyznaczymy dla układu sił równoległych, gdy w obranym biegunie zbudujemy wielobok $\overline{R}=\Sigma\overline{P}_k$, który w danym razie przedstawi się w postaci wektora, równoległego do wspólnego kierunku sił, a wartość jego równać się będzie sumie algebraicznej sił. Wektory zatem $\overline{M}$ i $\overline{R}$ są w danym układzie do siebie prostopadłe, można więc je przekształcić na jedną siłę lub na jedną parę. Układ zatem sił równoległych czy to w płaszczyźnie, czy w przestrzeni można przekształcić na jedną siłę, lub na jedną parę sił.

Wniosek ten jest również wynikiem twierdzenia, że siły, przecinające się w jednym punkcie, mogą być zastąpione przez siłę wypadkową; siły bowiem wzajemnie równoległe przecinają się w jednym punkcie nieskończenie odległym, mają więc siłę wypadkową o wielkości skończonej lub nieskończenie małej.

63. Przekształcenie par sił. Przekształcenia oparte są również na przekształceniach zasadniczych; i postępowanie jest w tym razie takie same, jakie stosowaliśmy w poprzednich przykładach. Ponieważ wypadkowa pary sił leży w nieskończoności i równa się nieskończenie małemu wektorowi; którego prosta działania wyznaczona jest przez płaszczyznę pary i którego moment równa się momentowi pary jako jego sił składowych; przeto tę siłę wypadkową z jednej strony i jej składowe w postaci pary z drugiej strony uważać należy za dwa układy równoważne.

Układy par sił przekształcić przeto można względem każdego obranego bieguna w przestrzeni na siłę $\overline{R} = 0$ i moment $\overline{M} =$ niezmiennemu wektorowi; wszystkie przeto pary sił, leżące w płaszczyznach wzajemnie równoległych i posiadające wartości liczbowe momentów równe, są równoważne.

Jeżeli mamy pewną ilość par na jednej płaszczyznie, to można je przekształcić, § 57-my na jedną parę, której $M = \Sigma M_k$.

Jeżeli zaś dane pary leżą w płaszczyznach rozmaicie skierowanych w przestrzeni, to układ ten przekształcimy na równoważny; którego $\overline{R} = 0$, a $M = \Sigma \overline{M}_k$, dla każdego bieguna przestrzeni; co wypowiemy: **że wektor momentu pary, równoważnej wielu parom sił, równa się sumie wektorowej momentów tych par.**

64. Wzory analityczne siły $\overline{R}$ i momentu $\overline{M}$ względem obranego bieguna. Przytoczone twierdzenia o przekształceniu sił wyrazimy przez **składowe** w kierunku osi spółrzędnych i przez **spółrzędne punktów ich przyłożenia.** W tym celu przez dowolnie obrany biegun w przestrzeni przeprowadzamy spółrzędne prostokątne; —składowe sił P_k w kierunku osi oznaczymy, jak poprzednio, wskaźnikami x, y, z; spółrzędne zaś x, y, z punktów ich przyłożenia wskaźnikami k.

Wprowadziwszy te oznaczenia, napiszemy bezpośrednio równania następujące

$$R_x = \Sigma P_{k,x}, \quad M_x = \Sigma M_{k,x} = \Sigma(P_{k,y} z_k - P_{k,z} y_k),$$

$$R_y = \Sigma P_{k,y}, \quad M_y = \Sigma M_{k,y} = \Sigma(P_{k,z} x_k - P_{k,x} z_k),$$

$$R_z = \Sigma P_{k,z}, \quad M_z = \Sigma M_{k,z} = \Sigma(P_{k,x} y_k - P_{k,y} x_k):$$

z których

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$\cos(R,x) = \frac{R_x}{R}, \text{ i t. d.}; \quad \cos(M,x) = \frac{M_x}{M}, \text{ i t. d.}$$

Kąt pomiędzy wektorami $\overline{R}$ i $\overline{M}$ obliczymy na podstawie wzoru geometrji analitycznej, wyrażającego kąt, pomiędzy dwiema prostemi, gdy są dane ich kąty kierunkowe. Wzór ten, zastosowany do naszego przykładu, przedstawi się w postaci następującej:

$\cos(R,M) = \cos(R,x)\cos(M,x) + \cos(R,y)\cos(M,y) + \cos(R,z)\cos(M,z)$; z którego, po podstawieniu odpowiednich wartości, otrzymamy:

$$\cos(R,M) = \frac{1}{R\,.\,M}\cdot(R_x\,.\,M_x + R_y\,.\,M_y + R_z + M_z)\quad .\quad .\quad (40)$$

Dla każdego układu sił zachodzić mogą następujące przypadki:

1) gdy $R_x\,.\,M_x + R_y\,.\,M_y + R_z M_z \neq 0$; t. j. gdy $\sphericalangle (R, M) \neq 90^0$; wtedy układ dany można przekształcić na jedną parę i na jedną siłę, nie leżącą w płaszczyźnie pary;

2) gdy zaś $R_x\,.\,M_x + R_y\,.\,M_y + R_z\,.\,M_z = 0$; t. j. gdy $\sphericalangle (R,M) = 90^0$; wtedy zachodzić mogą trzy poszczególne przypadki:

a) jeżeli $R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2 \neq 0$, to układ sił, odpowiadających tęmu warunkowi, przekształcić można na jedną siłę;

b) gdy $R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2 = 0$; t. j. gdy $R_x = 0$; $R_y = 0$, $R_z = 0$, wtedy albo $M_x{}^2 + M_y{}^2 + M_z{}^2 \neq 0$, i układ taki można przekształcić na jedną parę; lub wreszcie

c) jeżeli $M_x = 0$, $M_y = 0$; $M_z = 0$, to układ taki nie ma ani siły wypadkowej, ani pary wypadkowej, t. j. znajduje się w równowadze.

Wartość wektora $\overline{M}_c$ obliczymy ze wzoru:

$$M_c = M\,.\,\cos(R,M) = \frac{1}{R}(R_x\,.\,M_x + R_y\,.\,M_y + R_z\,.\,M_z)\quad (41)$$

Przykład. Dane są dwie wzajemnie prostopadłe siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, których kierunki mijają się w przestrzeni, i których odległość równa się a, rys. 78-my, — wyznaczyć ich skrętnik, t. j. wyznaczyć położenie, kierunek i wartość siły wypadkowej $\overline{R}$ oraz moment tych sił $\overline{M}_0$.

Położenie osi skrętnika wyznaczymy przez kąty (R, P_1) i (R, P_2), jakie tworzy oś jego z kierunkami sił $\overline{P}$ i $\overline{P}_2$, oraz przez punkt C, w którym przecina oś centralna prostopadłą do kierunków sił.

Rozwiązanie. Obieramy kierunek siły $\overline{P}_1$ za oś x, rys. 78-my, wspólną prostopadłą do kierunków sił obieramy za oś z; równoległą zaś do kierunku siły $\overline{P}_2$ za oś y.

W tym układzie spółrzędnych otrzymamy na zasadzie ogólnych wzorów:

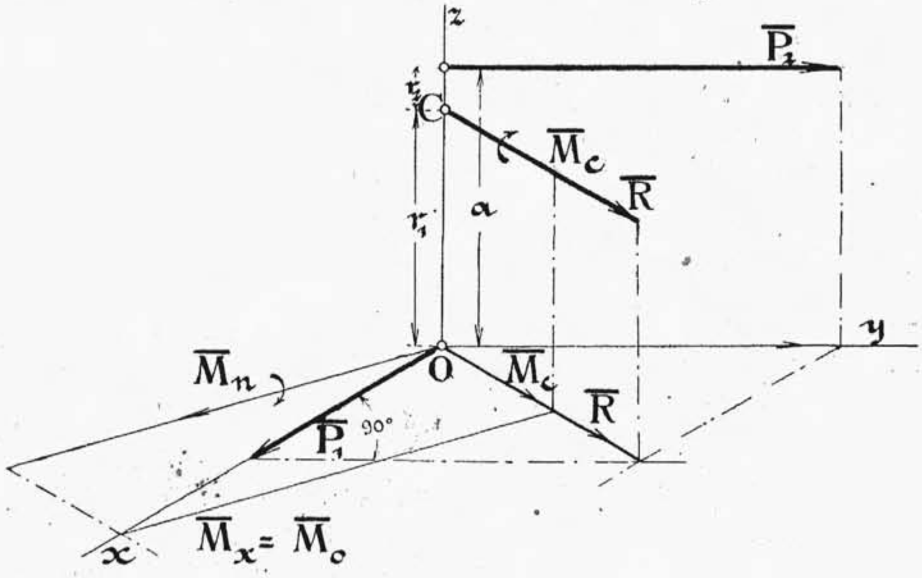
$$\Sigma P_{k,x} = P_1;\quad \Sigma P_{k,y} = P_2,\ \Sigma P_{k,z} = 0;\ \text{skąd}$$

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P^2{}_2};\ \cos(R,x) = \frac{P_1}{R};\ \cos(R,y) = \frac{P_2}{R};\ \cos(R,z) = 0.$$

Z kątów kierunkowych siły $\overline{R}$ wynika, że siła ta leży w płaszczyźnie równoległej do (x, y). Następnie napiszemy

$$\Sigma M_{k,x} = P_2 a, \quad \Sigma M_{k,y} = 0, \quad \Sigma M_{k,z} = 0; \text{ skąd}$$
$$M = \sqrt{(P_2 a)^2 + O + O} = P_2 . a.$$

Z tych równań wynika, że rzuty wektora $\overline{M}$ na osi y i z są równe zeru, przeto moment $\overline{M}$ danego układu sił, względem początku spółrzędnych, leży na osi x i wartość jego równa się iloczynowi $P_2 . a$; co również można bezpośrednio odczytać z rysunku.



Rys. 78.

Ażeby wyznaczyć na prostopadłej z położenie bieguna C, względem którego będzie $\overline{M} \| \overline{R}$, powinien moment siły $\overline{R}$, wzięty względem tego bieguna, równać się momentowi $\overline{M}_n$ i posiadać zwrot jemu przeciwny. Biegun taki leży pomiędzy kierunkami sił; oznaczywszy jego odległość od początku O przez r_1, napiszemy równanie:

$$- R r_1 + M_n = 0;$$

z rysunku 79-ego odczytamy:

$$M_n = M . \sin (R, M); \text{ lub inaczej } M_n = P_2 . a . \sin (R, x).$$

Wartość $\sin (\overline{R}, x)$, obliczymy z ogólnych wzorów, lub też bezpośrednio odczytamy z rysunku

$$\sin (R, x) = \frac{P_2}{R}, \text{ a więc}$$

$$M_n = \frac{P_2^2 a}{R};$$

po podstawieniu tej wartości w równanie momentów, otrzymamy:

$$r_1 = \frac{P_2^2}{R^2} . a.$$

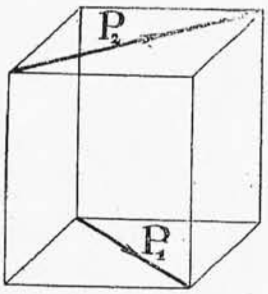
W tenże sposób obliczając, lub też zamieniając wskaźniki 1 na 2 i 2 na 1, napiszemy:

$$r_2 = \frac{P_1^2}{R^2} \cdot a;$$

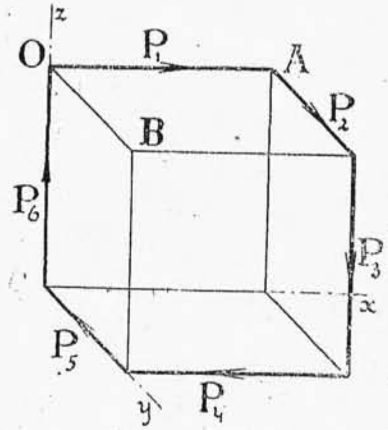
zadanie zatem jest rozwiązane.

Zadanie. Dany sześcian, którego krawędź równa się a, rys. 79-ty. W kierunkach prostopadłych przekątni dolnej i górnej podstawy działają siły P_1 i P_2, których wartości są wzajemnie równe. Wyznaczyć położenie osi centralnej i wektory $\overline{M}_C$ i $\overline{R}$.

Zadanie. Dany jest prostopadłościan, którego krawędzie posiadają długości $OA = 10$, $OB = 4$, $OC = 5$.



Rys. 79



Rys. 80

W kierunkach tych krawędzi działają siły, jak wskazuje rysunek 80-ty, których wartości są następujące: $P_1 = 4$; $P_2 = 6$; $P_3 = 3$; $P_4 = 2$; $P_5 = 6$; $P_6 = 8$. Wyznaczyć położenie osi centralnej oraz obliczyć M_C i R.

65. Spółrzędne wektora siły. Z przytoczonych sposobów przekształceń wynika, że każdy układ sił przekształcić można na nieskończenie wiele jemu równoważnych, jeżeli nie określono w zadaniu dostatecznie warunków, jakim podlegać powinien układ nowy. Warunki np. podane w § 54-tym, ażeby dany układ przekształcić na inny, złożony z dwóch sił, nie są dostateczne dla jednoznacznego określenia nowego układu; otrzymujemy bowiem nieskończenie wiele takich układów; o zadaniu takiem powiemy wogóle, że jest ono **możliwe lecz niedostatecznie określone** i że posiada przeto nieskończenie wiele rozwiązań. Warunki zaś, ażeby nowy układ składał się np. z dwóch sił, z których jedna ma przechodzić przez dany punkt, a druga ma leżeć na danej płaszczyźnie, § 55-ty, nazwiemy dostatecznymi; a zadanie **dostatecznie określonem**; otrzymujemy bowiem na podstawie tych warunków **jeden tylko** układ. Ażeby przeto otrzymać z danego układu sił układ równoważny **ściśle** określony, powinna być dana dostateczna ilość warunków, określających nowy układ; zadaniem naszem jest obecnie znalezienie tych warunków. Zadanie to jest takie same, jakie mamy w algiebrze, gdy stawiamy pytanie, ile równań powinno być danych, ażeby obliczyć pewną ilość niewiadomych: odpowiedź na to daje algebra, że **wogóle** powinno być tyle równań, ile jest niewiadomych i te równania powinny być **niezależne**. Ażeby nasze zadanie utożsamić z tym żądaniem, należy wielkości statyczne wyrazić w formie analitycznej; do tego służyć będzie pojęcie spółrzędnych; którego określenie jest następujące:

liczby niezależne, które określają ściśle pewną wielkość, nazywać będziemy jej spółrzędnemi; wielkości np. skalarne wymagają dla ich określenia jednej tylko liczby;—jednej spółrzędnej; wektor zaś siły wymaga dla jego określenia znajomości 5-ciu spółrzędnych t. j. 5-ciu liczb; wymaga bowiem znajomości położenia prostej działania; dla określenia której potrzebna jest znajomość czterech liczb l, m, l', m', jako spółczynników równań prostej: $y = lx + m$; $z = l'x + m'$; określających jej położenie w przestrzeni; oraz wymaga znajomości liczbowej wartości siły. Wektor momentu pary siły wymaga trzech spółrzędnych; wymaga bowiem znajomości np. dwóch kątów kierunkowych i wartości liczbowej wektora momentu; znajomości spółrzędnych punktu jego przyłożenia niepotrzeba, działanie bowiem pary sił nie zależy od położenia bieguna odniesienia.

Ilość spółrzędnych niezależnych, potrzebnych dla ścisłego i jednoznacznego określenia danej wielkości nazwano jej **ilością stopni swobody**. Siła przeto wogóle posiada pięć stopni swobody; dla jej bowiem określenia potrzebna jest znajomość pięciu liczb t. j. pięciu spółrzędnych; jeżeli przeto siła jest niewiadoma w danem zadaniu, to przedstawia ona pięć niewiadomych. Ilość spółrzędnych, określających działanie sił, może być mniejszą, gdy są dane pewne warunki, ograniczające jej położenie. Jeżeli powiemy, np. że prosta działania siły szukanej ma przechodzić przez dany punkt (x_1, y_1, z_1) w przestrzeni, to pomiędzy te pięć liczb wprowadzamy pewne zależności, które wyrażą się związkami funkcjonalnemi pomiędzy niemi; jak w danym przykładzie liczby l, m, l', m' muszą uczynić zadość dwom równaniom: $y_1 = lx_1 + m$; $z_1 = l'x_1 + m'$, wyrażającem, że prosta działania siły przechodzi przez dany punkt; równania takie nazwiemy **warunkowemi**. Dla określenia przeto siły, przechodzącej przez dany punkt w przestrzeni, należy znać tylko trzy spółrzędne, gdyż dwie mogą być określone z równań warunkowych Jeżeli takie równania występują, to mówimy, że każde z nich odejmuje danej wielkości jeden stopień swobody; a więc w danym przykładzie warunek, że dana siła ma przechodzić przez dany punkt, odejmuje jej dwa stopnie swobody. Jeżeli siła ma działać np. wzdłuż danej prostej, to warunek ten odejmuje jej 4 stopnie swobody; dane są bowiem w tym razie 4-ry spółrzędne l, m, l', m'; dla określenia przeto tej siły wystarcza jedna spółrzędna; t. j. wartość liczbowa siły. Siła, np. działająca w danej płaszczyźnie, posiada 3-y stopnie swobody; gdyż położenie prostej $y = lx + m$ na płaszczyźnie określa się dwoma spółrzędnemi l i m; a trzecia spółrzędna powinna wyrażać wartość liczbową siły; w tenże sposób możemy powiedzieć, że siła, leżąca na danej płaszczyźnie i przechodząca przez dany punkt (x_1, y_1) na tej płaszczyźnie, posiada dwa stopnie swobody; gdyż pomiędzy dwoma parametrami l i m zachodzi jeden związek: $y_1 = lx_1 + m$; który odejmuje jej jeden stopień swobody.

Para sił posiada trzy stopnie swobody; jest ona bowiem określoną przez dowolne lecz wzajemnie równoległe płaszczyzny; dla określenia zaś położenia takich płaszczyzn wystarczają dwa kąty kierunkowe; a dla określenia wartości momentu pary wystarcza jedna liczba; razem przeto para posiada trzy stopnie swobody. Do tegoż wniosku dojdziemy, wyszedłszy z określenia wektorowego pary; wektor pary jest przenośny, a więc dla jego określenia wystarczają trzy rzuty; lub dwa kąty kierunkowe i liczba.

Przytoczone jednakże spółrzędne niezupełnie ściśle określają działanie siły; nie można z nich bowiem odczytać zwrotu działania t. j. nie określają one strzałki jej wektora. W celu uwzględnienia tego wymagania, stosuje się jeszcze inne spółrzędne, zwane spółrzędnemi Plücker'a. Temi spółrzędnemi są rzuty siły na trzy osi i rzuty na te osi jej momentu względem obranego bieguna; sześć przeto wielkości $P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z$, mają wyznaczyć jednoznacznie działanie siły. Ażeby to okazać, zbudujemy z danych rzutów P_x, P_y, P_z wektor $\overline{P}$; który posiada ściśle określone kąty kierunkowe, długość i ściśle określoną strzałkę; rzuty bowiem mają swe strzałki; położenie jednakże tego wektora w przestrzeni nie jest jeszcze przez te trzy spółrzędne określone. Położenie tego wektora dokładnie wyznaczymy z rzutów M_x M_y, M_z, wektora jej momentu. Ażeby to położenie znaleść dodamy te trzy wektory i rozpatrywać będziemy wektor $\overline{M} = \overline{M}_x + \overline{M}_y + \overline{M}_z$; który jest wektorem momentu szukanej siły względem danego bieguna; w płaszczyźnie przeto, przechodzącej przez ten biegun i prostopadłej do wektora $\overline{M}$ na odległości od bieguna $h = M : P$ powinien leżeć wektor szukanej siły; lecz takich położeń może być dwa; możemy bowiem przeprowadzić dwie styczne do koła o promieniu h, których kierunek jest dany; lecz znak momentu wskaże, po której stronie bieguna leżeć będzie wektor siły; w ten sposób znajdziemy jedno jedyne położenie prostej działania siły, jej wartość i jej strzałkę. W tem rozpatrywaniu powiedzieliśmy, że siła $\overline{P}$ powinna leżeć w płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\overline{M}$; to się znaczy, że dwa wektory $\overline{P}$ i $\overline{M}$ czy też ich rzuty nie są niezależne od siebie; te dwa wektory są od siebie zależne; gdyż z określenia momentu siły względem bieguna wynika, że $\overline{M} \perp \overline{P}$. Zależność tę wyrazimy analitycznie, gdy weźmiemy pod uwagę, że cosinus kąta kierunkowego wektorów $\overline{P}$ i $\overline{M}$ wyraża się wzorami $P_x : P$ itd. oraz $M_x : M$, a ponieważ kąt pomiędzy nimi ma być prosty, powinien przeto zachodzić związek:

$$P_x \cdot M_x + P_y \cdot M_y + P_z \cdot M_z = 0.$$

Pomiędzy przeto podanemi sześciu spółrzędnemi siły istnieje jedno równanie warunkowe; **pięć** przeto tylko jest **niezależnych** spółrzędnych określających wektor siły; co jest zgodne z poprzednimi wnioskami o ilości stopni swobody wektora siły.

Jeżeli wektor $\overline{M}$ nie jest momentem jednej siły, lecz jest sumą momentów pewnego układu sił, dowolnie w przestrzeni rozłożonych, wtedy położenie wektorów $\overline{R}$ i $\overline{M}$ nie podlega żadnemu ograniczeniu i nie będzie zachodzić w tym razie żadna zależność, jak to było z jedną siłą; **układ** zatem przestrzenny sił posiada **wogóle** sześć niezależnych spółrzędnych; co się również zgadza z poprzednimi wnioskami. Zrozumiałem jest, że wnioski, wypowiedziane poprzednio co do ilości stopni swobody wektorów sił, są niezależne od wyboru sposobów wyrażania spółrzędnych.

66. Związki pomiędzy równoważnymi układami sił. W § 58.4 okazaliśmy, że pomiędzy układem przestrzennym sił, przyłożonych do bryły swobodnej, a układem jemu równoważnym istnieje sześć równań skalarnych; jeżeli szukany układ ma być dostatecznie określony, to powinien posiadać sześć niewiadomych; każdy przeto układ sił przestrzenny może być przekształcony jednoznacznie tylko na taki, który wyraża się sześcioma niewiadomemi; gdyż te sześć niewiadomych dadzą się obliczyć z sześciu równań, wyrażających warunek równoważności układów.

Z tego bezpośrednio wynika, że układ sił w przestrzeni nie można przekształcić na jedną siłę; gdyż jedna siła posiada tylko pięć stopni swobody; w sześciu przeto równaniach, wyrażających równoważność układów sił, było by pięć niewiadomych; których określenie jest możliwe w szczególnych tylko przypadkach; które zachodzą, gdy te sześć równań są od siebie zależne; gdy np. jedno z nich jest wynikiem pozostałych. Układ natomiast płaski, można przekształcić na jedną siłę; siła bowiem na płaszczyźnie określa się trzema spółrzędnemi; dla obliczenia których mamy trzy równania równoważności układów płaskich, § 58,4.

Jeżeli chcielibyśmy układ przestrzenny przekształcić na dwie bliżej nieokreślone siły; to zadanie takie byłoby niedostatecznie określone; dla obliczenia bowiem 10 ciu niewiadomych, określających wektory dwóch sił, posiadamy tylko sześć równań, wyrażających równoważność układów; jest w tem zadaniu przeto duża nieokreśloność; zadanie to daje nieskończenie wiele odpowiedzi; którą to ilość określić można wielkością ∞^4.

Ażeby przeto uczynić to zadanie dostatecznie określonem, należy z dziesięciu niewiadomych, mających określić dwa wektory sił, odjąć 4-ry stopnie swobody; co osiągniemy, gdy postawimy np. warunek, że jedna z tych sił ma leżeć na danej prostej, przez co odejmujemy układowi cztery stopnie swobody; pozostaje przeto do określenia sześć niewiadomych; zadanie to rozwiążemy w § 68-ym.

Warunki, ograniczające ilość stopni swobody szukanego układu, można w rozmaity sposób postawić; postawmy np. warunek, że jedna z tych dwóch sił ma przechodzić przez dany punkt. Warunek ten daje dwa równania warunkowe pomiędzy spółrzędnemi; t. j. odejmuje układowi dwa stopnie swobody; — druga zaś ma działać w danej płaszczyźnie, nie przechodzącej przez ten punkt; warunek ten odejmuje również dwa stopnie swobody; siła bowiem na płaszczyźnie posiada 3 stopnie; — dwa przeto straciła; szukany przeto układ posiada 6 stopni. Można również postawić warunek; ażeby jedna z nich przechodziła przez dany punkt, przez co odejmujemy dwa stopnie swobody; druga zaś ma leżeć w nieskończoności, przez co odejmujemy dwa stopnie swobody; inaczej mówiąc dany układ mamy przekształcić na siłę przechodzącą przez dany punkt, i na parę sił; zadanie to rozwiązaliśmy jednoznacznie szukając $\bar{R}$ i $\bar{M}$ względem danego punktu. Można np. rozłożyć dany układ na dwie siły, których proste działania są równoległe do dwóch danych prostych. Można również dany układ zastąpić przez parę, leżącą w danej płaszczyźnie i przez siłę bliżej nieokreśloną; para ta przedstawia jeden stopień swobody, — siła pięć; — razem sześć. Zadanie np. przekształcenia danego układu sił na jedną siłę, pięć stopni swobody i na parę sił, trzy stopnie swobody z warunkiem, że np. kierunek szukanej siły ma tworzyć z płaszczyzną szukanej pary dany kąt, co odejmuje jeden stopień swobody, posiada $5+3-1=7$ stopni swobody; jest to przeto zadanie o ∞ wielu odpowiedziach; i rzeczywiście w rozpatrywaniach, § 61.4, przyszliśmy do wniosku, że wektory $\bar{M}$ danego układu, które tworzą dany kąt z $\bar{R}$ są styczne do walca w punktach jego przekroju poprzecznego, t. j. układów takich otrzymamy ∞ wiele.

Każdy układ możemy przekształcić nietylko na dwie siły, lecz i na więcej, byle tylko ilość stopni swobody tego nowego układu nie była ani mniejsza ani większa od sześciu. Największą ilością sił, na jakie można rozłożyć jednoznacznie każdy układ, jest w ogóle sześć sił, działających wzdłuż sześciu danych prostych; jest tu bowiem sześć skalarnych niewiadomych. Przy przekształcaniu par sił należy mieć dane trzy warunki, którym odpowiadać powinien nowy układ; gdyż w wyniku zawsze musi być para sił; a więc dany układ par może być przekształcony np. na jedną parę lub na trzy pary, leżące w trzech danych płaszczyznach itp.

Z pewnej ilości równań linijnych z tyluż niewiadomemi nie zawsze można obliczyć wszystkie niewiadome; a więc również i w naszych zadaniach, pomimo jednakowych ilości równań i stopni swobody, niezawsze rozwiązanie zadania jest zupełnie określone. Weźmy przykład; przekształcić dany układ sił na dwie siły, z których każda ma przechodzić przez dany punkt w przestrzeni. Każdy punkt, przez który ma przechodzić prosta, odbiera zadaniu dwa stopnie swobody; obydwa przeto warunki odejmują cztery st. sw.; pozostaje przeto sześć st. sw. Rozwiążmy to zadanie analitycznie; w tym celu oznaczmy spółrzędne dwóch danych punktów przez (x_A, y_A, z_A), oraz (x_B, y_B, z_B); oznaczmy następnie przez $\bar{A}$ i $\bar{B}$ wektory szukanych sił; a ich rzuty na osi spółrzędnych przez A_x, A_y, A_z; oraz B_x, B_y, B_z; obierzmy następnie dla ułatwienia obliczeń początek osi spółrzędnych w punkcie np. A i przeprowadźmy jedną z osi układu spółrzędnych np. oś z przez punkt B; a osi x i y dowolnie, lecz oczywiście prostopadle do z; a napiszemy nast. równania równoważności układów sił pg. rów. 34-go i 35-go:

1) $A_x + B_x = R_x$ 4) $(A_y . O - A_z . O) + (B_y . z_B - B_z . O) = M_x$
2) $A_y + B_y = R_y$ oraz 5) $(A_z . O - A_x . O) + (B_z . O - B_x . z_B) = M_y$
3) $A_z + B_z = R_z$ 6) $(A_x . O - A_y . O) + (B_x . O - B_y . O) = M_z$;

gdzie R i M a więc i ich rzuty są dane.

W równaniach momentów widzimy, iż wiele spółczynników przy niewiadomych równa się zeru; co wynika z tego, że ramiona niektórych sił $= 0$; a w szóstem równaniu wszystkie spółczynniki równają się zeru; przypadek ten zachodzi wskutek tego, że kierunki szukanych sił przechodzą przez oś z, względem której obliczaliśmy momenty i wskutek tego jedno równanie ubywa; z czego wynika, że nie każdy układ sił w danem zadaniu daje się przekształcić na układ, spełniający postawione warunki; zadanie to daje się przeto rozwiązać tylko wtedy, gdy suma momentów M_z sił danego układu względem osi, łączącej dwa dane punkty, równa się zeru, rów. 6-te. Warunek ten jest statycznie zrozumiałym; jeżeli bowiem dane siły wywołują moment względem pewnej osi; to nie mogą być zastąpione siłami, których moment względem tej osi $= 0$; w danych warunkach jest przeto pewna sprzeczność. Zadanie to jest tylko w tym razie możliwe do rozwiązania; gdy suma momentów sił danych, względem prostej, przechodzącej przez dany punkt $= 0$.

Jeżeli ten warunek jest spełniony, to rozwiązanie zadania jest możliwe, choć pozostanie w rozwiązaniu tego zadania pewna nieokreśloność; dla obliczenia bowiem sześciu niewiadomych posiadamy tylko pięć równań. Nieokreśloność ta ujawni się przy obliczeniu niewiadomych; mianowicie z równań 1-go, 2-go, 4-go i 5-go obliczymy bez przeszkód cztery niewiadome: A_x, A_y, B_x i B_y; z pozostałego zaś równania 3-go odczytamy tylko, że suma dwóch niewiadomych jest znaną; oddzielnych jednakże niewiadomych nie obliczymy. Wynik ten jest również ze stanowiska statycznego zrozumiały; nie możemy bowiem jednej siły np. R_z rozłożyć jednoznacznie na dwie siły, działające wzdłuż prostej działania tejże siły.

Uwaga. Zaznaczyć jednakże należy, że w świecie fizycznym rozkład taki faktycznie zachodzi; ciężar np. drzwi zawieszonych na dwóch zawiasach rozkłada się na dwie pionowe siły; i na każdą z takich zawias działa siła pionowa ściśle określona, jako część ciężaru drzwi. Obliczenie jednakże tych sił może nastąpić po wzięciu pod uwagę fizycznych właściwości materyału, czego zasady statyki nie uwzględniają. Zadania tego rodzaju nazywają się statycznie niewyznaczalnemi i tworzą szczególny dział statyki budowlanej.

67. Oś zerowa, płaszczyzna zerowa i punkt zerowy danego układu sił. Przy obliczaniu momentów sił danego układu względem danej osi, nasuwa się pytanie, czy można znaleźć takie położenie osi, względem której suma momentów sił danego układu równałaby się zeru? Osi takie, jeżeli one istnieją, nazwiemy **osiami zerowemi danego układu sił.**

Zrozumiałem jest, że dla układu płaskiego wszystkie osi, leżące w płaszczyźnie tego układu, są osiami zerowemi; w przestrzeni zaś dla przypadku np. dwóch sił, których proste działania się mijają, osią zerową będzie każda oś, która przecina obydwie proste ich działania. Jeżeli np. na jednej z tych prostych obierzemy punkt dowolny; to wszystkie osi przechodzące przez ten punkt i przez drugą prostą będą osiami zerowemi danego układu dwóch sił; osi te utworzą płaszczyznę, przechodzącą przez dany punkt, obrany na jednej prostej, i przez drugą prostą. Zmieniając położenie punktu na prostej działania jednej z sił, za każdym razem otrzymamy inną taką płaszczyznę z odpowiednim punktem, przez który przechodzić będą osi zerowe.

Ażeby zaś znaleźć oś zerową dla dowolnego układu sił w przestrzeni; przekształcimy dany układ na układ równoważny — prostszy; a oś zerowa t. j. oś, względem której suma momentów sił tego prostszego układu będzie równa zeru, będzie również równa zeru dla sił układu pierwotnego; przekształcenia bowiem zasadnicze nie zmieniają sumy momentów układów równoważnych. Jeżeli przeto dany układ przekształcimy na układ, złożony np. z dwóch sił, § 55-ty, to zadanie wyznaczenia osi zerowej każdego układu sił sprowadzimy do przypadku poprzedniego.

Otrzymamy jednakże pewne uproszczenie rozpatrywań; gdy układ dany rozłożymy na dwie siły; z których jedna działać będzie w skończoności, a druga w nieskończoności, t. j. gdy rozłożymy dany układ na siłę $\bar{R}$ i parę, wyrażoną momentem $\bar{M}$, w odniesieniu do pewnego, dowolnie obranego punktu; wtedy oś zerowa powinna leżeć w płaszczyźnie pary i przecinać jednocześnie prostą siły $\overline{R}$; w tym bowiem tylko razie suma momentów siły $\overline{R}$ i pary sił względem takiej osi równa się zeru; w ten sposób otrzymamy pęk takich osi, które przechodzić będą przez obrany biegun i leżeć będą w płaszczyźnie pary. Przez każdy przeto punkt przestrzeni przeprowadzić się daje wogóle pęk osi zerowych dla każdego przestrzennego układu sił; osi te tworzą płaszczyzny, nazwane **płaszczyznami zerowemi** danego układu sił w danych punktach; punkt, w którym przecinają się osi zerowe, nazwano **punktem zerowym** danej płaszczyzny dla danego układu sił.

Ze stanowiska geometrycznego powiemy, płaszczyzna zerowa danego punktu jest płaszczyzną pary w odniesieniu układu do danego punktu; a punkt ten nazwiemy punktem zerowym. Te różne nazwy mają na celu zwrócić uwagę na różne właściwości statyczne, jakie posiadają w danym razie płaszczyzna pary i punkt odniesienia z jednej strony, a płaszczyzna zerowa i punkt zerowy z drugiej strony; choć geometrycznie są to twory te same.

Z tych określeń wynikają nast. właściwości punktu zerowego, oraz osi i płaszczyzn zerowych dla danego układu sił:

1) w każdym dowolnym punkcie przestrzeni przeprowadzić można jedną tylko płaszczyznę zerową dla danego układu sił; jeden bowiem tylko wektor $\overline{M}$ możemy wyznaczyć względem danego bieguna odniesienia; § 61,1.

2) na każdej płaszczyźnie, dowolnie obranej w przestrzeni, wyznaczyć można wogóle jeden tylko punkt zerowy dla danego układu sił; gdyby bowiem było ich więcej; to mielibyśmy w przestrzeni punkty odniesienia, względem których wektory $\overline{M}$ byłyby równoległe; co jest sprzeczne z równaniem 38-em; wykazującem wogóle zmienność wektora $\overline{M}$ ze zmianą położenia punktu odniesienia. Wniosek ten jest bezpośrednio widoczny z obrazu rozmieszczenia wektora $\overline{M}$, § 61-szy. W szczególnych jednakże układach sił wektory $\overline{M}$ względem różnych punktów mogą być równoległe a mianowicie, gdy wektor dodatkowy w równ. 38-em, $\overline{M}_1' = 0$; co nastąpi w dwóch przypadkach: a) gdy $\overline{R} = 0$; t. j. gdy układ sił sprowadza się do pary sił; b) gdy $M' = 0$, a $\overline{R}$ leży w danej płaszczyźnie; lub inaczej gdy układ sił daje się sprowadzić do jednej pary lub też gdy układ sił daje się sprowadzić do jednej siły, a dana płaszczyzna przechodzi przez linję działania tej siły.

Zadania. Wyznaczyć płaszczyznę zerową w danym punkcie przestrzeni dla danego układu sił. Zadanie to sprowadzić można do znalezienia wektora $\overline{M}$ danego układu sił względem tego punktu, jako punktu odniesienia, § 58-my; a płaszczyzna, przeprowadzona przez ten punkt prostopadle do wektora $\overline{M}$, będzie szukaną płaszczyzną zerową.

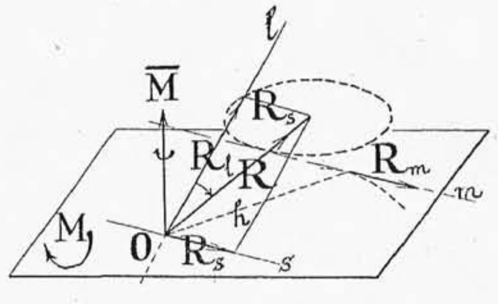
Zadanie odwrotne, znalezienia na danej płaszczyźnie punktu zerowego dla danego układu sił, można rozwiązać w nast. sposób: w dwóch dowolnych punktach danej płaszczyzny wyznaczamy płaszczyzny zerowe; a proste przecięcia się tych płaszczyzn z płaszczyzną daną, wyznaczą szukany punkt zerowy. Proste bowiem są osiami zerowemi dla danego układu sił, punkt przeto ich przecięcia się jest punktem zerowym płaszczyzny, wyznaczonej przez nie. Właściwość tę możemy wypowiedzieć w ogólnej formie: jeżeli w dowolnych punktach danej płaszczyzny przeprowadzimy płaszczyzny zerowe danego układu sił, to proste przecięcia się płaszczyzn zerowych z daną płaszczyzną zbiegną się w jednym punkcie, który jest punktem zerowym tej płaszczyzny.

68. Siły i osie sprzężone. Do tych pojęć dojdziemy, rozwiązując następujące zadanie. Dany układ sił przekształcić na układ równoważny, złożony z dwóch sił; z których jedna ma działać wzdłuż prostej l, której położenie w przestrzeni jest dane; druga zaś nie podlega żadnym ograniczającym warunkom.

Z dziesięciu przeto spółrzędnych, potrzebnych dla określenia dwóch sił w przestrzeni, dane jest cztery spółrzędne l, m, l', m'; jako spółczynniki równań danej prostej; pozostaje przeto sześć niewiadomych spółrzędnych do obliczenia; co odpowiada ilości równań równoważności układów przestrzennych; zadanie zatem jest dostatecznie i jednoznacznie określone.

W celu jego rozwiązania, przekształcamy w sposób już znany dany układ sił na jedną siłę $\bar{R}$ i parę $\bar{M}$ względem bieguna O, obranego dowolnie na prostej l, rys. 81-szy; następnie siłę $\bar{R}$ rozłożymy w kierunku l; którą oznaczymy literą $\bar{R}_l$ i w kierunku prostej, leżącej na płaszczyźnie pary, siłę tę oznaczymy literą $\bar{R}_s$. W celu dokonania tego rozłożenia, przeprowadzimy płaszczyznę (R,l); która przetnie się z płaszczyzną pary po linji s, a wtedy rozłożymy R w kierunku l i s. Siłę $\bar{R}_s$, leżącą na płaszczyźnie pary i parę sił, określoną przez wektor $\bar{M}$, jako siły, leżące na jednej płaszczyźnie, sprowadzimy następnie do jednej siły $\bar{R}_m$ (zadanie to było); i w ten sposób otrzymamy układ dwóch sił $\bar{R}_l$ i $\bar{R}_m$, równoważny danemu układowi i czyniący zadość warunkom danego zadania. Z tego wynika, że danej prostej l odpowiada, ściśle określona co do położenia swego w przestrzeni, jedna tylko prosta m; te dwie proste są prostemi działania szukanych sił; dwie takie proste, ze względu na ich geometryczną zależność nazwano **osiami sprzężonemi** danego układu sił; a siły $\bar{R}_l$ i $\bar{R}_m$ **siłami sprzężonemi.** Gdy przeto położenie jednej z prostych jest dane, wtedy położenie drugiej jest już ściśle określone; rozumie się, w zależności od danego układu sił; tę samą zależność wykazują i wektory sprzężone. Wektor $\bar{R}_m$, stosownie do rozwiązania zadania na str. 79-tej, znajduje się na odległości $h = M : R$ od punktu O po tej stronie, po której on wywołuje moment zgodny z momentem M danej pary.

Z rozwiązania tego zadania wynika, że **każdej osi** l, przechodzącej przez punkt O, odpowiada **jedna oś sprzężona** m, która leży w płaszczyźnie pary sił, określonej wektorem $\overline{M}$; pękowi przeto prostych l, zbiegających się w punkcie dowolnym O, odpowiada zbiór prostych m, leżących w płaszczyźnie zerowej punktu O.



Rys. 81.

Dla różnych położeń osi l, przechodzących przez dany punkt O, otrzymamy przeto różne położenia osi m; a gdy przeprowadzimy przez O pęk takich l, któreby dawały R_s = stałej wartości, wtedy i odległość h będzie stałą wartością, a osi m, sprzężone z osiami l tego pęku, będą stycznemi do koła o promieniu h, zakreślonego z O. Pęk osi l, przy których R_s = stałej, tworzy stożek ukośny, którego wierzchołek leży w O; a podstawą jest koło w płaszczyźnie, przechodzącej przez koniec wektora R i równoległej do płaszczyzny pary i którego promień $= R_s$. Każdej przeto tworzącej l ten stożek, odpowiada oś sprzężona m, która jest styczną do koła o promieniu h i równoległa do odpowiedniego śladu s.

Zmniejszając kąt (l, R) przez zbliżanie l do R, R_s się zmniejsza, h zaś się powiększa; a gdy l pokryje się z kierunkiem R, t. j. $\sphericalangle(C, R) = 0$; wtedy $R_s = 0$; $h = \infty$, czyli oś sprzężona do osi l, przechodzącej przez kierunek siły R, leży w nieskończoności; a siła sprzężona z siłą R jest wypadowa pary sił M. Gdy l przyjmie położenie prostopadłe do płaszczyzny pary t. j. pokryje się z kierunkiem wektora M, to odpowiednia oś sprzężona m przyjmie pewne określone położenie na płaszczyźnie pary; i otrzymamy szczególny przypadek wzajemnego położenia osi, a mianowicie przypadek, w którym osi sprzeżone mijają się pod prostym kątem, i są odległe między sobą na $h_0 = M : [R, \sin(R, M)]$. Oś m, prostopadła do osi l, przechodzącej przez punkt O, nazwano **charakterystyką** danej płaszczyzny zerowej.

Gdy następnie oś l zbliżać będziemy do pokrycia się z płaszczyzną pary, wtedy $\lim R_s = \infty$; $\lim h = o$; i wreszcie, gdy l pokryje się z s to i m pokryje się z s; czyli otrzymujemy dwie osi sprzężone l i m, które się wzajemnie pokrywają; osi takie nazwać można **samosprzężonemi**; każda przeto oś zerowa przedstawia dwie osi samosprzężone. Z tych rozpatrywań wynika, że **jeżeli przeprowadzimy przez dowolny punkt** O **pęk do-**

wolnych osi, to odpowiednie im osi sprzężone utworzą jedną płaszczyznę; płaszczyznę zerową tego punktu.

Wyobraźmy sobie wszystkie przez punkt O przeprowadzone osi w postaci ∞ wielu stożków ze wspólnym wierzchołkiem O o podstawach kołowych, jak to było wyżej przedstawione; to odpowiednie im osi sprzężone będą styczne do kół spółśrodkowych ze środkiem w O tak, że wypełnią one całą płaszczyznę zerową wszystkiemi możliwemi prostemi; wobec czego twierdzenie poprzednie można odwrócić; i powiedzieć: **jeżeli przeprowadzimy dowolną oś m na danej płaszczyźnie, to odpowiednia jej oś sprzężona l przejdzie przez punkt zerowy tej płaszczyzny.**

Z przytoczonego sposobu rozwiązania danego zadania możnaby wywnioskować, że można w przestrzeni znaleść więcej osi m sprzężonych z jedną osią l; gdyż dla każdego punktu O na prostej l przeprowadzić można płaszczyzny zerowe; lecz zadanie przekształcenia danego układu sił na dwie siły, gdy prosta działania jednej z nich jest dana, jest zadaniem, jakieśmy już zauważyli, jednoznacznie określonem; przeto jedna tylko prosta może być sprzężona z daną prostą; z czego wnioskujemy, że płaszczyzny zerowe wszystkich punktów prostej l przecinają się po jednej prostej z nią sprzężonej; a więc i odwrotnie: płaszczyzny zerowe punktów prostej m przecinają się po prostej l. Wynik ten jest również bezpośrednio widoczny; jeżeli bowiem obierzemy punkt odniesienia na prostej działania jednej z dwóch sił; to płaszczyzna zerowa tego punktu przejść musi przez prostą działania drugiej siły; tylko bowiem ta płaszczyzna jest prostopadła do wektora $\overline{M}$ tego układu sił, wyznaczonego w danym punkcie. Wyobraźmy sobie teraz płaszczyzny zerowe pewnego układu sił przeprowadzone przez różne punkty danej lecz dowolnej płaszczyzny; wtedy ślady ich zbiegną się, jako osi zerowe, w punkcie zerowym danej płaszczyzny, a proste przecięcia się płaszczyzn zerowych pomiędzy sobą będą sprzężone z prostemi, łączącemi odpowiednie tym płaszczyznom punkty zerowe. W ten sposób płaszczyzny zerowe punktów, leżących na pewnej płaszczyźnie, utworzą wogóle pęk płaszczyzn z wierzchołkiem w punkcie zerowym tej płaszczyzny; a proste ich przecięcia się, czyli krawędzie tego pęku będą sprzężone z prostemi, łączącemi odpowiednie tym płaszczyznom punkty zerowe. Jeżeli np. punkty, leżące na obranej płaszczyźnie połączymy w wielobok zamknięty; to płaszczyzny zerowe, przeprowadzone w wierzchołkach tego wieloboku, utworzą kąt bryłowy, o tylu ścianach, ile posiada ten wielobok wierzchołków.

69. Rzuty szczególne osi sprzężonych. W § 58.6. wykazaliśmy, że rzuty dwóch wogóle przestrzennych, równoważnych z sobą układów sił, utworzą dwa układy płaskie, które są także równoważne z sobą, weźmy teraz dwa układy sił: jeden złożony z dwóch sił sprzężonych i drugi z nim równoważny, złożony z wypadkowej $\overline{R}$ i z momentu $\overline{M}$ względem dowolnego punktu odniesienia, zrzutujmy następnie te dwa układy sił na płaszczyznę, prostopadłą do wypadkowej $\bar{R}$; a wtedy rzut układu $\bar{R}$ i $\bar{M}$ przedstawi się w postaci tylko pary sił; a więc i rzut dwóch sił sprzężonych, przedstawi również parę sił; stąd wniosek ważny dla następnych rozpatrywań: **rzuty osi sprzężonych na płaszczyznę, prostopadłą do wypadkowej, odpowiednich tym osiom, sił sprzężonych, są równoległe.** Jeżeli przeto zrzutujemy, rozpatrywany w paragrafie poprzednim, wielobok płaski i sprzężony z nim kąt bryłowy wielościenny na płaszczyznę prostopadłą do wypadkowej sił, dla których przeprowadzone były płaszczyzny zerowe, to otrzymamy dwie figury płaskie; jedna będzie wielobokiem, a druga pękiem prostych; figury te będą z sobą w takim geometrycznym stosunku: 1) że ilość boków wieloboku równać się będzie ilości promieni, znajdujących się w pęku; 2) że boki wieloboku będą równoległe do odpowiednich promieni pęku.

70. Wielościany sprzężone i wieloboki wzajemne. Rozważania nad układami osi sprzężonych doprowadzają do pewnych wniosków natury geometrycznej, które dają szersze oświetlenie obliczeniom statystycznym. Wyobraźmy sobie w przestrzeni dowolny wielościan o pewnej ilości ścian płaskich; — o odpowiedniej ilości krawędzi i wierzchołków i oznaczmy cały ten wielościan literą l^0; przyjmijmy następnie wierzchołki tego wielościanu za punkty zerowe pewnego danego układu sił; i przeprowadźmy w każdym z tych wierzchołków płaszczyzny zerowe; a otrzymamy zbiór płaszczyzn, które utworzą nowy wielościan m^0 z nowemi krawędziami i nowymi wierzchołkami. Na zasadzie poprzednich rozważań powiemy: **krawędzie** (ściślej mówiąc proste, na których leżą te krawędzie) wielościanu m^0 są sprzeżone z krawędziami wielościanu l^0; gdy bowiem pewna krawędź wielościanu l^0 łączy dwa jego wierzchołki, wtedy prosta, przecięcia się płaszczyzn zerowych tych wierzchołków, będzie krawędzią sprzężoną wielościanu m_0.

Krawędzie przeto obydwóch wielościanów są z sobą sprzężone; — oczywiście dla jednego i tego samego układu sił; z tej właściwości wynikają nast. stosunki geometryczne pomiędzy temi wielościanami:

1) każdemu wierzchołkowi W wielościanu l^0 odpowiada w wielościanie m^0 ściśle określona ściana w; płaszczyzna bowiem tej ściany jest płaszczyzną zerową punktu W; *a* krawędzie, **ograniczające** ścianę w, są sprzężone z krawędziami, **zblegającemi** się w wierzchołku W.

2) każdej ścianie S wielościanu l^0 odpowiada w wielościanie m^0 ściśle określony wierzcholek s; jest to bowiem punkt zerowy ściany S; a krawędzie, **zbiegające** się w węźle s, są sprzężone z krawędziami **ograniczającemi** ścianę S. — Dwa takie wielościany nazwiemy **sprzężonymi.** Wyobraźmy sobie następnie dwa takie wielościany zrzutowane na płaszczyznę prostopadłą do wypadkowej $\bar{R}$ układu sił, na podstawie którego