Za pomocą więc tych wzorów możemy, z równań ruchu pomiędzy **spółrzędnemi i czasem**, obliczyć właściwe prędkości i przyśpieszenia, tak co do ich wartości, jak i co do ich położenia w przestrzeni.

Przykład. Dane jest równanie ruchu pomiędzy spółrzędnemi i czasem

$$x = c_1 t^2, \quad y = c_2 t^2, \quad z = c_3 t^2;$$

wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie w chwili t, oraz napisać równania toru w spółrzędnych x, y, z.

Rozwiązanie. Z danych równań otrzymamy: $v_x = \frac{dx}{dt} = 2c_1 t$; $v_y = 2c_2 t$; $v_z = 2c_3 t$, skąd $v = 2t\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$.

Równanie to przedstawia ruch jednostajnie przyśpieszony. Wielkość przyśpieszenia obliczymy bezpośrednio (gdy zauważymy, że ruch jest prostolinijny): $p = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. Gdy zechcemy jednakże postępować metodycznie, powinniśmy napisać $p_x = \frac{dv_x}{dt} = 2c_1$, $p_y = \frac{dv_y}{dt} = 2c_2$, $p_z = \frac{dv_z}{dt} = 2c_3$, skąd: $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} =$ j. w.

Równanie toru tego ruchu napiszemy, gdy znajdziemy równanie pomiędzy x, y, z bez t. W tym celu obliczymy np. z 1-go równania t i podstawimy go w 2-gie i 3-cie, a otrzymamy szukane równania. Rugowanie wielkości w danym razie wykonać można, dzieląc np. równanie 1-sze przez 2-gie, następnie 2-gie przez 3-cie, a otrzymamy: $\frac{x}{y} = \frac{c_1}{c_2}$, oraz $\frac{y}{z} = \frac{c_2}{c_3}$. Tor w danym razie wyraża się dwoma równaniami pierwszego stopnia, które przedstawiają dwie płaszczyzny, linia ich przecięcia się jest torem danego ruchu. Zbadanie wyznaczenia położenia tej prostej względem osi, pozostawiono czytelnikowi.

II. Kinematyka brył.

A. Zasady ogólne.

31. Wyznaczenie ruchu brył. Stopnie swobody. Zbiór punktów, których **odległości wzajemne podczas** ruchu **nie zmieniają się,** nazwano niezmiennym układem punktów, lub bryłą sztywną, lub też krótko bryłą.

Znajomość ruchu bryły polega na znajomości ruchu **każdego** jej punktu. Ponieważ przyjmujemy, że bryła składa się z nieskończenie wielu punktów, przeto, podczas ruchu, będziemy mieli do czynienia z nieskończenie wieloma torami, z tyluż prędkościami i — przyśpieszeniami. Z warunków jednakże niezmienności układu wynika pewna zależność pomiędzy temi wielkościami; na podstawie której wyznaczyć można ruch każdego z punktów danego układu, z ruchów **niektórych** jego punktów.

Z warunku niezmienności układu wynika, że położenie trzech jego punktów, nieleżących na jednej prostej, wyznacza położenie całej bryły w przestrzeni. W celu tego dowiedzenia, obierzmy w danej bryle trzy dowolne, lecz nie leżące na jednej prostej, punkty *A, B, C*; punkty te mogą leżeć i poza bryłą, lecz w takim razie należy je sobie wyobrazić sztywno z nią złączonymi; a wtedy każdy inny punkt *K* tej bryły posiada już ściśle określone odległości od tych trzech punktów. Gdy obrane punkty umieścimy w przestrzeni, natenczas położenie wszystkich innych punktów tego układu jest przez to ściśle wyznaczone. Jeżeli następnie tym trzem punktom nadamy jaki ruch, to ruch wszystkich innych punktów tego układu jest już określony przez ruch tych trzech punktów. Wniosek ten wysłowimy w sposób następujący:

położenie lub ruch punktów bryły jest wyznaczony przez położenie lub ruch trzech jej punktów, nie leżących na jednej prostej.

Punkty takie nazywać będziemy punktami **wyznaczającymi ruch danej bryły**. Które punkty danej bryły obierzemy za punkty wyznaczające, jest dla rozpatrywań obojętnem, byleby tylko nie leżały na jednej prostej. Położenie punktu w przestrzeni jest wyznaczone przez trzy spółrzędne; dla wyznaczenia przeto **położenia** trzech punktów *A, B, C* należy znać dziewięć spółrzędnych; lecz spółrzędne te nie są niezależne, gdyż pomiędzy niemi zachodzą trzy związki analityczne, wyrażające, iż odległości pomiędzy punktami są niezmienne; związki te wyrazimy przez równania o postaci:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2_{AB};$$

w którem l_{AB} oznacza niezmienną odległość pomiędzy punktami *A* i *B*, a *x, y, z* ze znakami *A*, *B* i *C* oznaczają spółrzędne tych punktów. Równań takich napiszemy trzy, zatem pozostaje tylko **sześć** spółrzędnych **niezależnych**, które wyznaczają położenie danej bryły w przestrzeni.

Ilość spółrzędnych niezależnych, za pomocą których zostaje wyznaczone położenie bryły swobodnej nazwano ilością jej **stopni swobody**.

Mówimy przeto, że bryła swobodna posiada sześć stopni swobody. W szczególnych przypadkach, gdy uczynimy pewne ograniczenie ruchu bryły, jak to zobaczymy dalej, będziemy mieli bryły, wyznaczone przez mniejszą ilość niezależnych spółrzędnych. Z tego rozpatrywania wynika, iż bryła nie może mieć więcej niż sześć stopni swobody, lecz w szczególnych przypadkach może mieć ich mniej.

Ilość stopni swobody układów dwu lub jednowymiarowych można określić również z równań analitycznych danego tworu geometrycznego. Z równania np., określającego położenie płaszczyzny w przestrzeni, $Ax + By + Cz = 1$; wywnioskujemy, że płaszczyzna posiada 3^0, (w ten sposób oznaczać będziemy ilość stopni swobody); równanie jej bowiem posiada trzy niezależne parametry A, B i C; ilość ta odpowiada geometrycznie np. trzem odległościom punktów przecięcia się tej płaszczyzny z osiami spółrzędnych od ich początku; lub też dwom kątom kierunkowym normalnej tej płaszczyzny$=2^0$,—i odległości jej od początku $= 1^0$; razem 3^0 i t. d. Prosta posiada 4^0, równania jej bowiem posiadają 4-ry parametry niezależne. Parametrami, określającemi położenie prostej mogą być również dwa kąty kierunkowe$=2^0$; odległość jej od początku układu $= 1^0$ i położenie jej określone np. przez kąt środkowy na walcu o promieniu, równym tej odległości, $= 1^0$ i t. p. Prosta przechodząca przez dany punkt posiada tylko 2^0; po podstawieniu bowiem w równaniu prostej wartości spółrzędnych danego punktu otrzymamy dwa związki pomiędzy czterema parametrami, pozostanie przeto tylko dwa wolne parametry.

Prosta, leżąca na danej płaszczyźnie, posiada 2^0. Prosta leżąca na danej płaszczyźnie i przechodząca przez dany punkt na tejże płaszczyźnie posiada 1^0; którym może być np. ,jej kąt kierunkowy względem osi, związanej z tą płaszczyzną.

32. Rodzaje ruchów bryły. Rozróżniamy następujące rodzaje ruchów:

1) Jeżeli punkty danego układu w ten sposób się poruszają, iż opisują drogi wzajemnie **równoległe i równe w tych samych okresach czasu, to taki ruch nazywamy postępowym.** Z tego określenia wynika, iż ruch postępowy jest wyznaczony przez ruch **jednego** tylko punktu układu, gdyż ruch wszystkich innych punktów może być wyznaczony z ruchu tego punktu.

Weźmy następnie pod uwagę nieskończenie małe przesunięcie postępowe, i rozdzielmy je przez okres czasu dt, w którym ono powstało, wypowiemy wtedy wniosek:

w ruchu postępowym wektory prędkości wszystkich punktów bryły w danej chwili są wzajemnie równe. Teorya ruchu postępowego jest więc zawartą w teoryi ruchu punktu.

Ruch postępowy może być prostolinijny lub krzywolinijny; ruch krzywolinijny postępowy nastąpi, gdy wszystkie punkty danej bryły zmieniają **co chwila** jednocześnie swoje kierunki; a więc i kierunki prędkości i przyśpieszeń.

2) Jeżeli dwa punkty, wyznaczające ruch, są unieruchomione, to prosta łącząca te dwa punkty pozostanie nieruchomą, a każdy inny punkt danej bryły podczas ruchu zakreśla koło, którego środek leży na tej prostej i którego płaszczyzna przechodzi przez punkt rozpatrywany i jest prostopadłą do tejże prostej. Ruch taki nazywamy **ruchem obrotowym**, a nieruchomą prostę — **osią obrotu**. Z określenia tego ruchu wynika, że znajomość ruchu **jednego punktu** wystarcza do wyznaczenia ruchu wszystkich innych punktów; gdyż z trzech punktów, wyznaczających ruch układu swobodnego, położenie dwóch jest już w tym razie dane.

Położenie bryły, obracającej się około danej osi, w przestrzeni jest określone przez kąt obrotowy, jaki tworzy płaszczyzna, sztywno związana z bryłą i przechodząca przez oś obrotu, — z inną płaszczyzną, przechodzącą również przez oś obrotu, lecz nieruchoma w przestrzeni; jedna przeto spółrzędna niezależna, t. j. kąt, wystarcza dla określenia położenia i ruchu obracającej się bryły w przestrzeni; gdy dane jest położenie osi obrotu.

Ruch postępowy można uważać jako szczególny przypadek ruchu obrotowego; jeżeli oś obrotu odsuniemy do nieskończoności; wtedy bowiem wszystkie koła zmienią się na proste wzajemnie równoległe, których kierunek jest prostopadły do osi obrotu. Dlatego też ruch postępowy jest wyznaczony przez ruch jednego punktu; pozostałe bowiem dwa punkty, wyznaczające ruch, leżą w nieskończoności. Z tego sformułowania można by wnioskować, że ruch postępowy posiada trzy stopnie swobody, gdy tymczasem jako szczególny przypadek ruchu obrotowego nie powinien mieć więcej jak jeden stopień swobody. Sprzeczność ta upadnie, gdy odejmiemy od tych trzech stopni swobody dwa stopnie, które wyznaczają położenie osi w nieskończoności; położenie bowiem prostej w nieskończoności określone jest przez dwa kąty kierunkowe płaszczyzny, w której ta oś leży.

3) Gdy jeden punkt bryły, wyznaczający ruch, uczynimy nieruchomym, wtedy każdy jej punkt porusza się po powierzchni kuli, której środkiem jest punkt nieruchomy. Ruch taki nazywamy **ruchem kulistym**; punkt nieruchomy nazywamy **środkiem** ruchu kulistego. Kulisty ruch bryły jest wyznaczony przez ruch **dwóch jej punktów**, gdyż położenie trzeciego jest wiadome. Ruch kulisty przeto posiada trzy stopnie swobody.

4) Jeżeli wszystkie punkty danej bryły zakreślają tory równoległe do pewnej nieruchomej płaszczyzny, to ruch taki nazywamy **płaskim**. Ruch płaski można uważać jako szczególny przypadek ruchu kulistego; gdy bowiem środek tego ruchu odsuniemy do nieskończoności, wtedy wszystkie powierzchnie kul, zakreślane przez punkty bryły, zamienią się

na płaszczyzny wzajemnie równoległe, i punkty bryły poruszać się wtedy będą po tych płaszczyznach. Ponieważ ruch kulisty wyznaczony jest przez ruch dwóch punktów, przeto i ruch płaski wyznaczony jest przez ruch **dwóch punktów.**

33. **Warunki, w których możliwy jest ruch bryły.** Gdy trzy dowolnie obrane punkty A, B, C, danej bryły, umocujemy nieruchomo w przestrzeni, natenczas bryła ta nie posiada żadnej swobody ruchu. Wyobraźmy sobie bryłę swobodną i mocujmy kolejno punkty, wyznaczające jej ruch, zwracając przytem uwagę na stopnie swobody, jakie jej pozostawiamy po każdem umocowywaniu. Najpierw umocujmy punkt A, co wyrazimy analitycznie, obierając **dowolnie trzy** wartości spółrzędnych danego punktu x_A, y_A, z_A. Bryła w ten sposób umocowana, może tylko zakreślać kule promieniami, równymi odległościom od punktu A.

Ażeby umocować drugi jej punkt np. B, nie możemy już **dowolnie** obrać trzech spółrzędnych tego punktu, lecz możemy obrać tylko **dwie**, np. x_B, y_B; trzecia bowiem zostanie wyznaczona z warunku, że punkt B powinien leżeć na powierzchni kuli, zakreślonej z A promieniem AB; w celu wyznaczenia tej spółrzędnej wystawimy w punkcie x_B, y_B, który leży na płaszczyźnie (x, y), prostopadłą z, aż do przecięcia się z powierzchnią wspomnianej kuli, w ten sposób wyznaczymy spółrzędną z_B. Otrzymamy w danym razie dwa punkty przecięcia się; lecz to bynajmniej nie zmienia wypowiedzianego wniosku, tyczącego się zależności spółrzędnej z_B, od obranych spółrzędnych x_B, oraz y_B. Bryła, w ten sposób umocowana, może się tylko obracać około osi AB, i wszystkie jej punkty zakreślać mogą koła, których środki leżą na osi AB.

Ażeby wreszcie umocować trzeci jej punkt C, możemy obrać tylko **jedną** spółrzędną np. x_C, gdyż ta spółrzędna przedstawia płaszczyznę, która przetnie koło, zakreślone przez punkt C, w punktach, które wyznaczą miejsce umocowania punktu trzeciego. Jeżeliby, przy geometrycznem wykonaniu wspomnianych czynności, prostopadła z_B, lub płaszczyzna x_C nie przecięła powierzchni kuli, zakreślonej przez punkt B, lub nie przecięła koła, zakreślonego przez punkt C; to ten przypadek nie zmieni powyższych wniosków; gdyż w danym razie, traktując zadanie analitycznie, otrzymalibyśmy pierwiastki urojone, które w matematycznych rozpatrywaniach mają takież znaczenie jak i rzeczywiste.

Powyższe postępowanie nasuwa następujące wnioski:

jeżeli umocujemy w przestrzeni **pierwszy** punkt bryły, to pozbawimy ją **trzech** stopni swobody; jeżeli umocujemy punkt **drugi**, to pozbawimy ją **dwóch** stopni swobody i jeżeli umocujemy **trzeci** punkt, pozbawimy daną bryłę **jednego** i ostatniego stopnia swobody;—czyli mocując trzy punkty bryły, nie leżące na jednej prostej, odbieramy jej sześć stopni swobody; — bryła jest zatem unieruchomioną. Gdy bryła była swobodna, wtedy posiadała sześć stopni swobody; te sześć stopni swobody kolejno jej odjęto i pozostała wreszcie bez możności ruchu. Na podstawie tych wniosków powiemy, że ruchy obrotowe, oraz postępowe posiadają: $6-(3+2)=1$ stopień swobody, gdy dwa punkty są umocowane; w tenże sposób ruch kulisty i ruch płaski posiada: $6-3=3$ stopnie swobody.

Gdy z sześciu stopni swobody ruchu, jakie posiada każda bryła swobodna, pozostanie choć **jeden stopień**, wtedy bryła ta jest w możności wykonywania pewnych ruchów. Gdy bryła posiada jeden stopień swobody, t. j. posiada jedną tylko niezależną spółrzędną, wyrażającą jej położenie w przestrzeni, wtedy tej zmiennej można nadać ∞ wiele wartości, co się wyrazi geometrycznie, że każdy punkt bryły przebiegać będzie po pewnej **linii**, każdej bowiem wartości niezależnej spółrzędnej powinno odpowiadać jedno jedyne położenie punktu w przestrzeni.

Gdy bryła posiada **dwa stopnie swobody**, t. j. posiada dwie spółrzędne niezależne np. x_C i y_C, wtedy punkt C, oraz każdy inny jej punkt, podczas ruchu bryły, przybierze ∞^2 ilość położeń w przestrzeni; gdyż x_C i y_C posiadają po ∞ wiele wartości, każda taka wartość jednej zmiennej łącznie z ∞ ilością wartości drugiej zmiennej, przedstawia ∞ ilość par wartości; kombinując w ten sposób, otrzymamy ∞^2 par wartości, które geometrycznie przedstawiają ∞^2 punktów, punkty te są ciągle t. j. bez przerw rozmieszczone w przestrzeni i tworzą wogóle pewną **powierzchnię**. Wniosek ten wysłowimy w sposób następujący: każdy punkt bryły, która posiada dwa stopnie swobody, porusza się po pewnej powierzchni. W szczególnym przypadku poruszać się on może po jednej i tej samej krzywej, lecz wtedy przebiega ją nieskończenie wiele razy.

Rozpatrzyć przypadek, w którym bryła może obracać się naokoło osi i posuwać wzdłuż tej osi.

Gdy zaś bryła posiada trzy stopnie swobody, natenczas każdy jej punkt ma możność poruszania się we wszystkich kierunkach przestrzeni, ponieważ jest w stanie zająć ∞^3 położeń. W szczególnym przypadku może on poruszać się po pewnej powierzchni i wtedy przebiega po niej ∞ ilość razy; np. w ruchu kulistym.

W powyższych rozpatrywaniach, w celu ograniczenia ruchu bryły, unieruchomialiśmy w przestrzeni pewne jej punkty; lecz możemy stawiać i inne warunki, ograniczające ruch. Warunki te mogą być wyrażone w postaci geometrycznej, lub analitycznej.

Rozpatrzymy teraz warunki, w których pewne punkty danej bryły, podczas jej ruchu, są zmuszone pozostawać trwale na danych powierzchniach lub na danych liniach. Geometrycznie przedstawimy model takiego ruchu, gdy pewne punkty danej bryły będą zmuszone np. poruszać się po pewnych powierzchniach lub pewnych liniach, nie opuszczając tych powierzchni lub linii; tworząc ten obraz należy przyjąć, że bryła i dana powierzchnia są dla siebie przenikliwe. Ażeby warunki te wprowadzić do rachunku, należy wyrazić je równaniami.

Warunek np. ażeby punkt A danej bryły pozostawał na pewnej powierzchni, wyrazimy analitycznie równaniem $F(x_A, y_A, z_A) = 0$; które wprowadza do rachunku jedną zależność pomiędzy sześciu niezależnie zmiennemi. Wniosek ten wypowiemy:

warunek, ażeby pewien punkt bryły ruchomej pozostawał trwale na danej powierzchni, pozbawia bryłę jednego stopnia swobody ruchu.

Gdy następnie postawimy warunek, ażeby pewien punkt bryły podczas ruchu pozostawał na danej krzywej linii, natenczas wyrazimy go przez dwa równania analityczne pomiędzy spółrzędnemi tego punktu, i wysłowimy:

warunek, ażeby pewien punkt bryły ruchomej pozostawał trwale na danej linii, pozbawia bryłę dwóch stopni swobody.

Warunki możliwości lub niemożliwości ruchu są teraz w wielu przypadkach łatwe do przewidzenia; a więc np. bryła będzie unieruchomioną w przestrzeni, t. j. posiadać będzie **zero** stopni swobody, w następujących przypadkach: 1) gdy sześć jej punktów będzie zmuszone pozostawać na sześciu powierzchniach, 2) gdy cztery jej punkty mają pozostawać na czterech powierzchniach, piąty zaś na danej linii; 3) gdy trzy punkty mają pozostawać na powierzchni, a czwarty będzie umocowany; 4) gdy trzy punkty pozostają na powierzchniach, dwa inne zaś pozostają na dwóch liniach i t. p.

Gdy bryłę, unieruchomioną w przestrzeni, uwolnimy od warunku, ograniczającego jej ruch i wyrażonego jednem równaniem; wtedy posiadać ona będzie jeden stopień swobody, i każden jej punkt zakreślać będzie pewną ściśle określoną krzywą linię. Jeżeli np. pięć punktów danej bryły ma pozostawać na pięciu powierzchniach, to bryła posiada jeden stopień swobody i każdy jej punkt podczas ruchu zakreśli pewną linię i t. p.

W szczególnych przypadkach, ograniczenia ruchu pozbawiają nieraz mniej stopni swobody, niż to jest przewidziane przez powyższe warunki, np. gdy trzy linie, na których mają pozostawać trzy punkty bryły, będą proste i wzajemnie równoległe, wtedy bryła może wykonać ruch postępowy, posiada zatem jeden stopień swobody. Przypadek ten zachodzi, gdy te ograniczenia są od siebie zależne. Dwa równania np., z których jedno jest wynikiem drugiego, przedstawiają tylko jedno równanie.

W rozpatrywaniach powyższych przyjęliśmy układ spółrzędnych prostokątny, do którego odnosiliśmy spółrzędne obranego punktu; lecz wnioski te bynajmniej nie są związane z rodzajem spółrzędnych; podstawą bowiem tych rozważań jest warunek, że **trzy niezależne zmienne** wyznaczają położenie punktu w przestrzeni, a warunek ten jest wymagany przez wszystkie układy spółrzędnych, jakie sobie możemy wyobrazić.

Matematycznym sposobem wyrażenia warunków, ograniczających ruch, są równania analityczne pomiędzy spółrzędnemi punktu, który podlega ograniczeniom ruchu. W równaniach takich jest nieraz dosyć trudno dopatrzyć się ich geometrycznego znaczenia; lecz to bynajmniej nie wpływa na oznaczenie ilości stopni swobody. Równanie np. $F(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, x_C) = 0$, w które wchodzą spółrzędne różnych punktów wyznaczających, jest, pod względem matematycznem, równaniem, które odejmuje ruchowi jeden stopień swobody; niezależnie od tego jakie ono posiada znaczenie geometryczne. Mówiąc więc o stopniach swobody bryły, należy zawsze mieć na uwadze **ilość niezależnych zmiennych,** jakie należy obrać, ażeby dany ruch, lub też w ogóle jakiekolwiek przemiany danego zjawiska ściśle określić. Przez te zmienne niezależne niekoniecznie mamy pojmować spółrzędne układu osi prostokątnych, lub też spółrzędne dowolnego układu; lecz należy je pojmować ogólnie, pomijając ich geometryczne znaczenie; a wtedy takie pojmowanie pozwoli przenieść wygłoszone twierdzenia o stopniach swobody z dziedziny geometrycznych i kinematycznych zjawisk do dziedziny zjawisk np. fizyczno-chemicznych, — których też teorye opierają się na takiem pojmowaniu.

B. Prędkości ruchu płaskiego.

34. Środek obrotu. Mając na uwadze poprzednio postawione określenie ruchu płaskiego, sprowadzimy jego rozpatrywanie do rozpatrywania ruchu figur płaskich w ich płaszczyźnie; możemy bowiem przyjąć płaską figurę za przekrój danej bryły, lub za rzut jej punktów na płaszczyznę, wyznaczającą ruch. Gdy wyznaczymy ruch, w ten sposób utworzonej figury płaskiej, natenczas znajdziemy ruchy wszystkich innych punktów bryły ruchomej, ponieważ są one te same, jakie posiadają ruchy ich rzutów, tylko odbywają się w płaszczyznach różnych, lecz równoległych.

Z ogólnych rozpatrywań ruchu wywnioskowaliśmy, iż ruch płaski jest wyznaczony przez dwa punkty układu. Twierdzenie to sprawdzić możemy bezpośrednio; posiadając bowiem położenie dwóch punktów danej figury, możemy już wyznaczyć, za pomocą budowy np. trójkątów,