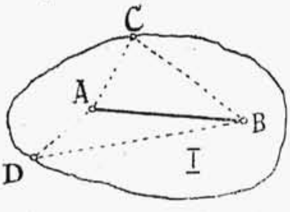
W rozpatrywaniach powyższych przyjęliśmy układ spółrzędnych prostokątny, do którego odnosiliśmy spółrzędne obranego punktu; lecz wnioski te bynajmniej nie są związane z rodzajem spółrzędnych; podstawą bowiem tych rozważań jest warunek, że **trzy niezależne zmienne** wyznaczają położenie punktu w przestrzeni, a warunek ten jest wymagany przez wszystkie układy spółrzędnych, jakie sobie możemy wyobrazić.

Matematycznym sposobem wyrażenia warunków, ograniczających ruch, są *równania* analityczne pomiędzy *spółrzędnemi* punktu, który podlega ograniczeniom ruchu. W równaniach takich jest nieraz dosyć trudno dopatrzyć się ich geometrycznego znaczenia; lecz to bynajmniej nie wpływa na oznaczenie ilości stopni swobody. Równanie np. $F(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, x_C) = 0$, w które wchodzą spółrzędne różnych punktów wyznaczających, jest, pod względem matematycznem, równaniem, które odejmuje ruchowi jeden stopień swobody; niezależnie od tego jakie ono posiada znaczenie geometryczne. Mówiąc więc o stopniach swobody bryły, należy zawsze mieć na uwadze **ilość niezależnych zmiennych**, jakie należy obrać, ażeby dany ruch, lub też w ogóle jakiekolwiek przemiany danego zjawiska ściśle określić. Przez te zmienne niezależne niekoniecznie mamy pojmować spółrzędne układu osi prostokątnych, lub też spółrzędne dowolnego układu; lecz należy je pojmować ogólnie, pomijając ich geometryczne znaczenie; a wtedy takie pojmowanie pozwoli przenieść wygłoszone twierdzenia o stopniach swobody z dziedziny geometrycznych i kinematycznych zjawisk do dziedziny zjawisk np. fizyczno-chemicznych, — których też teorye opierają się na takiem pojmowaniu.

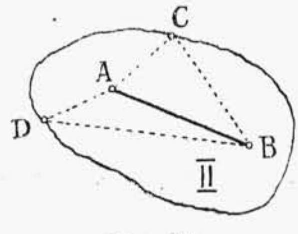
B. Prędkości ruchu płaskiego.

34. Środek obrotu. Mając na uwadze poprzednio postawione określenie ruchu płaskiego, sprowadzimy jego rozpatrywanie do rozpatrywania ruchu figur płaskich w ich płaszczyźnie; możemy bowiem przyjąć płaską figurę za przekrój danej bryły, lub za rzut jej punktów na płaszczyznę, wyznaczającą ruch. Gdy wyznaczymy ruch, w ten sposób utworzonej figury płaskiej, natenczas znajdziemy ruchy wszystkich innych punktów bryły ruchomej, ponieważ są one te same, jakie posiadają ruchy ich rzutów, tylko odbywają się w płaszczyznach różnych, lecz równoległych.

Z ogólnych rozpatrywań ruchu wywnioskowaliśmy, iż ruch płaski jest wyznaczony przez dwa punkty układu. Twierdzenie to sprawdzić możemy bezpośrednio; posiadając bowiem położenie dwóch punktów danej figury, możemy już wyznaczyć, za pomocą budowy np. trójkątów, położenia wszystkich innych punktów tejże figury; jak wskazują rysunki 34-ty i 35-ty.



Rys. 34.

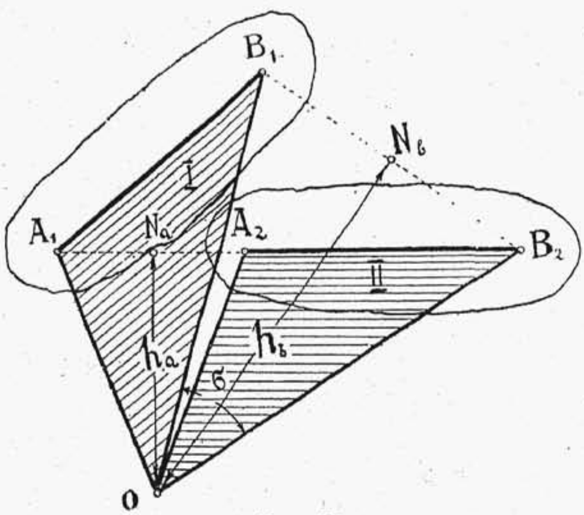


Rys. 35.

Z powyższego wynika wniosek:
ruch figury płaskiej w jej płaszczyźnie wyznaczony jest przez ruch dwóch jej punktów.

Biorąc tę właściwość pod uwagę będziemy rozpatrywali ruchy tylko dwóch punktów figury płaskiej; z ruchu bowiem tych dwóch punktów powinniśmy módz obliczyć ruchy wszystkich innych punktów tej figury.

Niech pewna figura płaska znajduje się w płaszczyźnie naszego rysunku w dwóch położeniach, oznaczonych na rys. 36-ym przez I i II. Punkty A_1, B_1 są punktami wyznaczającymi ruch i odpowiadają I-mu położeniu figury; punkty A_2, B_2 są temiż punktami w II-giem jej położeniu.



Rys. 36.

W celu dalszych rozpatrywań wyprowadźmy z punktów N_a i N_b, połowiących odcinki $A_1 A_2$ i $B_1 B_2$, prostopadłe h_a i h_b, to w przecięciu się tych prostopadłych otrzymamy punkt O. Zauważymy. następnie, że trójkąty zakreskowane $O A_1 B_1$ i $OA_2 B_2$ są wzajemnie równe i mogą się pokryć, gdyż trzy boki są wzajemnie równe; pokrycie się tych trójkątów możemy wykonać przez obrót np. trójkąta pierwszego około punktu O, aż do pokrycia trójkąta II-go.

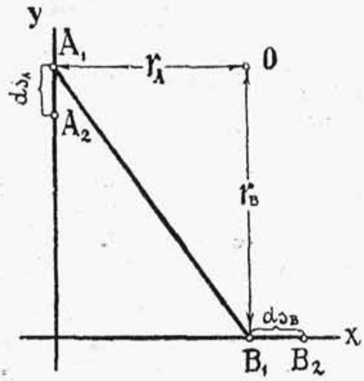
Jeżeli dwa punkty figury płaskiej przez opisany obrót pokryły się, to należy wywnioskować, na zasadzie poprzedniego twierdzenia, że i pozostałe jej punkty również się pokryły. Punkt O, wyznaczony za pomocą opisanej konstrukcyi, nazywamy **środkiem obrotu.** Powyższe wnioski wysłowimy w sposób następujący:

każda figura płaska może być przeprowadzoną w swej płaszczyźnie z jednego położenia do drugiego, przez obrót około pewnego punktu, znajdującego się w tejże płaszczyźnie.

Szczególne położenie bieguna nastąpi, gdy położenia odcinka AB, są wzajemnie równoległe, wtedy biegun obrotu leżyć będzie w nieskończoności; i odwrotnie, gdy środek wypadnie w nieskończoności, wtedy dane układy sprowadzić można do pokrycia się ruchem postępowym. Następny szczególny przypadek: gdy punkt A_1 pokryje się z B_2, oraz B_1 z A_2, wtedy środek obrotu leży w środku odcinka $A_1 B_1$; dowiedzenie tego pozostawiam czytelnikowi.

Zadanie. Wierzch stołu, który używa się zwykle do gry w karty, w postaci prostokąta o stosunku boków jak 1 do 2 spoczywa na ramie o 4-ch nogach; wierzch ten jest podwójny i po rozłożeniu stanowi kwadrat. Należy wyznaczyć środek obrotu, około którego wierzch złożony obróciwszy się o 90^0 we własnej płaszczyźnie, po rozłożeniu ułoży się symetrycznie na ramie stołu.

35. Środek obrotu chwilowego. Wybitnego znaczenia nabiera obrót układu około środka, gdy kąt obrotu będziemy zmniejszać i wreszcie, gdy uczynimy go nieskończenie małym; obrót bowiem jest wtedy zupełnie zgodny z rzeczywistym ruchem figury; gdyż wszystkie drogi, jakiemi możemy przeprowadzić punkty ruchome z jednego miejsca do drugiego nieskończenie bliskiego, pokrywają się w danym przypadku z cząstką łuku koła, zakreślonego przez ten punkt ze środka O.



Rys. 37.

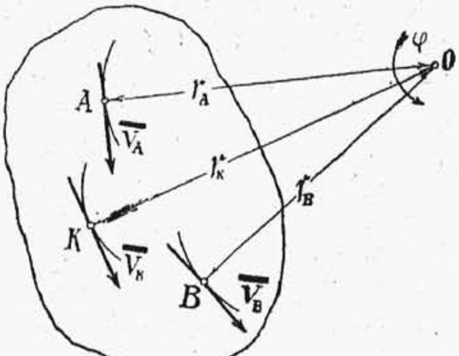
W celu wyznaczenia środka obrotu, dla dwóch nieskończenie bliskich położeń odcinka AB, wystarcza znajomość **kierunków** przesunięć A_1A_2, oraz B_1B_2, rys. 36-ty; albowiem ich długości są nieskończenie małe i punkty N_a i N_b, połowiące je, pokrywają się z punktami A_1 i B_1.

Przykład. Pręt AB, rys. 37-my, posuwa się końcami swymi wzdłuż wzajemnie prostopadłych osi x i y; należy wyznaczyć środek obrotu pręta w jego położeniu A_1 B_1. Środkiem tym jest punkt O, leżący w przecięciu się prostopadłych r_A i r_B, jak wskazuje rys. 37-my.

Jasnem jest, iż dla innego położenia pręta, i wogóle dla innego położenia figury płaskiej otrzymamy inny środek obrotu, wskutek czego nazwano ten środek **środkiem obrotu chwilowego** lub **środkiem chwilowym,** chcąc w ten sposób wyrazić, że środek ten podczas ruchu układu tylko

w danej chwili jest środkiem obrotu, w następnej zaś może być nim inny punkt. Ponieważ kąt obrotu, który oznaczymy przez $d\sigma$, posiada w danej chwili tę samą wielkość dla wszystkich punktów tego układu, przeto napiszemy stosunki $\frac{ds_A}{r_A} = \frac{ds_B}{r_B} = d\sigma$, w których r_A i r_B oznaczają promienie wodzące, wyprowadzone ze środka O do punktu A i B; zaś ds_A i ds_B są nieskończenie małemi przesunięciami. Równania te podzielmy przez okres czasu dt, w jakim powstał ten obrót, i zważywszy, że wyraz $\frac{ds_A}{dt} = v_A$ wyraża prędkość punktu A; w tenże sposób $\frac{ds_B}{dt} = v_B$, prędkość punktu B, otrzymamy wzór $\frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B} = \varphi$, w którym φ jest chwilową prędkością obrotu całej figury.

Wynik powyższego zadania uogólnimy, wyobraziwszy sobie płaski układ punktów, którego dwa punkty np. A i B, rys. 38-my, przesuwają się po dowolnych torach, wtedy normalne do torów w danych punktach wyznaczają środek O. Gdy następnie znaną będzie prędkość choć jednego punktu, np. prędkość punktu A, wtedy obliczymy prędkość i kierunek każdego innego punktu układu. Niechaj np. tym punktem, którego prędkość chcemy wyznaczyć, będzie punkt K, — prędkość jego v_K i promień r_K, wtedy napiszemy:

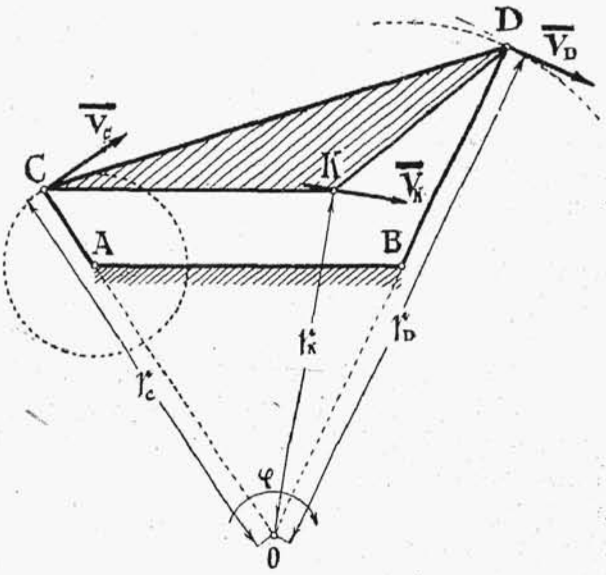


Rys. 38.

$$\frac{v_K}{r_K} = \frac{v_A}{r_A}, \text{ skąd } v_K = \frac{v_A}{r_A} r_K \quad . \quad (32)$$

Powyższe wnioski wypowiemy w sposób następujący: środek chwilowy ruchu płaskiego leży w przecięciu się normalnych, przeprowadzonych do torów, jakie zakreślają dwa punkty układu; lub też w przecięciu się prostopadłych do kierunków prędkości. Posiadając już środek chwilowego obrotu i prędkość jednego punktu układu, obliczymy **prędkość każdego innego punktu tego układu** co do kierunku, zwrotu i wartości; kierunki bowiem prędkości są prostopadłe do odpowiednich tym punktom promieni, **a wartości ich są proporcyalne do długości tych promieni. Prędkości** zatem w danej chwili punktów układu, będącego w ruchu płaskim, są wyznaczone przez **położenie środka** i przez **wartość prędkości obrotowej.**

Wniosek ten jest zgodny z wnioskiem ogólnym, że ruch figury płaskiej w swej płaszczyźnie posiada trzy stopnie swobody; środek bowiem obrotu określa się na płaszczyźnie przez dwie spółrzędne; a wartość prędkości obrotowej przez jedną. Każdy ruch może być w rozmaity sposób określony, byle te określenia odpowiadały ilościom stopni swobody i były niezależne; a więc i ruch płaski może być określony w najrozmaitszy sposób byle tylko był on wyrażony przez trzy niezależne spółrzędne. A więc ruch figury płaskiej jest określony: gdy np. jeden jej punkt jest unieruchomiony,—dwie spółrzędne i gdy dana jest prędkość obrotowa,—jedna spółrzędna; gdy dwa jej punkty pozostają na dwóch krzywych,—dwa równania i gdy dana jest prędkość obrotowa; gdy jeden punkt zmuszony jest pozostawać na danej krzywej, a drugi porusza się po innej krzywej z daną prędkością; gdy dana jest prędkość $\bar{v}$ jednego jej punktu—dwa równania $v_x = f_1(t)$; oraz $v_y = f_2(t)$ i prędkość obrotowa; gdy dany jest wektor prędkości jednego jej punktu, a drugi punkt zmuszony jest pozostawać na danej krzywej; gdy dwa punkty zmuszone są pozostawać na dwóch krzywych i gdy daną jest prędkość obrotowa i t. p.



Rys. 39.

Przykład. Czworobokiem przegubowym nazywamy czworobok, złożony z czterech sztywnych prętów, połączonych z sobą końcami za pomocą przegubów, t. j. w ten sposób, że pręty mogą obracać się około punktów połączeń. Jeżeli jeden z boków tej figury uczynimy nieruchomym, to trzy pozostałe będą miały możność ruchu [1]. Załóżmy, że bok AB czworoboku $ABCD$, rys. 39-ty, jest unieruchomiony, to punkty C i D ruchomych boków AC i CD będą zakreślać koła, których środki leżą w punktach A i B; pręt zaś CD przyjmować będzie różne położenia. Zadanie polega na wyznaczeniu środka chwilowego obrotu boku CD w dowolnem jego położeniu.

Rozwiązanie. Torami punktów C i D są koła; środek zatem boku CD będzie leżał w przecięciu się normalnych do toru; normalnemi temi są promienie AC i BD; a więc w punkcie O, jako w przecięciu się tych

[1]) Czytelnik sobie wyjaśni możliwość tego ruchu na zasadzie stopni swobody.

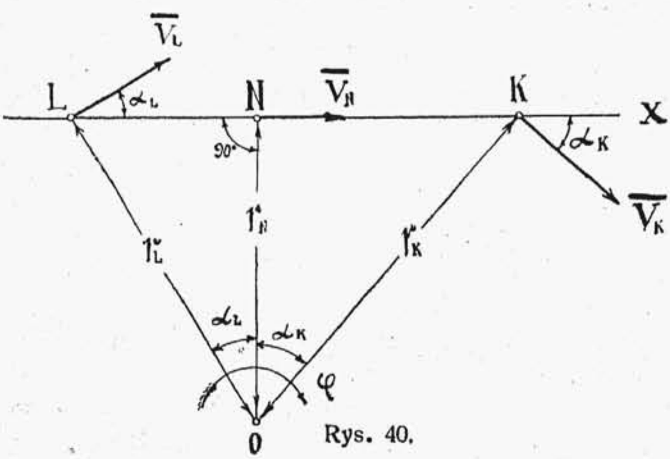
promieni, leży środek chwilowego obrotu boku CD, w danem jego położeniu.

Jeżeli obecnie przyjmiemy, że punkty C i D są punktami, wyznaczającymi ruch układu niezmiennego, to znajdziemy kierunek i wartość prędkości każdego punktu tego układu. Niechaj takim dowolnym punktem będzie punkt K, (punkt K należy sobie wyobrazić sztywno związany z punktami C i D), to prostopadła do promienia r_K daje kierunek prędkości tego punktu; wartość zaś jej obliczymy ze wzoru

$$\frac{v_K}{r_K} = \frac{v_c}{r_c}, \text{ z którego } v_K = v_c \frac{r_K}{r_c}.$$

kierunek zaś tej prędkości jest zgodny z kierunkiem obrotu całego układu. Znając więc np. prędkość v_c i położenie bieguna, możemy obliczyć v_k, t. j. prędkość dowolnego punktu, sztywno związanego z punktami C i D.

W celu ogólniejszego sposobu rozpatrywań obrotu chwilowego, wyobraźmy sobie bok CD, połączony sztywno z całą płaszczyzną ruchomą tak, iż będziemy obecnie mówić o ruchu jakiegobądź punktu **płaszczyzny ruchomej.** W przeciwieństwie do tej płaszczyzny będziemy mówili o **płaszczyźnie nieruchomej,** związanej z punktami nieruchomymi A i B. Stosując takie rozpatrywania, należy wyobrazić sobie dwie płaszczyzny, nałożone na siebie, z których jedna jest ruchomą, druga zaś nieruchomą. **Tory** punktów płaszczyzny ruchomej leżą na płaszczyźnie **nieruchomej; punkty zaś** C, D, K i inne sztywno z nimi związane, leżą na płaszczyźnie **ruchomej.** Środek chwilowego obrotu jest punkt wspólny dla obydwóch płaszczyzn; gdyż środek może być uważany za punkt płaszczyzny ruchomej, który podczas obrotu chwilowego posiada prędkość równą zeru; może być on również uważany za punkt związany z płaszczyzną nieruchomą, gdyż około niego odbywa się obrót chwilowy.



Rys. 40.

Jako zastosowanie wyłożonych twierdzeń, przytoczymy następujące przykłady.

36. Ruch linii prostej na płaszczyźnie. Weźmy pod uwagę prostą x, rys. 40-ty, która porusza się w płaszczyźnie rysunku i niechaj O będzie biegunem chwilowego obrotu o prędkości kątowej φ; wtedy prędkości $\bar{v}_K$ i $\bar{v}_L$ dowolnych punktów K i L tej prostej są prostopadłe do odpowiednich promieni i tworzą z ruchomą prostą pewne kąty, które oznaczymy literami α_K, α_L; stosując te oznaczenia, napiszemy następujące stosunki

$$\frac{v_L}{r_L} = \frac{v_K}{r_K} = \frac{v_N}{r_N}.$$

Uczyńmy obecnie rzuty tych prędkości na ruchomą prostą, i oznaczmy je przez wskaźniki x, wtedy napiszemy wzór rzutu prędkości każdego punktu tej prostej w sposób następujący:

$$v_{L_x} = v_L \,.\, \cos \alpha_L; \; v_{K_x} = v_K \,.\, \cos \alpha_K; \; v_{N_x} = v_N \,.\, \cos \alpha_N = v_N.$$

Podstawmy w te wzory: $\cos \alpha_L = \frac{r_N}{r_L}$, $\cos \alpha_K = \frac{r_N}{r_K}$ a otrzymamy

$$v_{L_x} = \frac{v_L}{r_L} r_N = \varphi \,.\, r_N; \; v_{K_x} = \frac{v_K}{r_k} r_N = \varphi \,.\, r_N;$$

z których wynika, że:

$$v_{L_x} = v_{K_x} = v_N = \varphi \,.\, r_N = \text{stałej} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (33)$$

Wniosek ten wysłowimy:

rzuty prędkości punktów prostej na jej kierunek są w danej chwili wzajemnie równe.

Stąd wniosek: jeżeli kierunek prędkości chwil jednego punktu, poruszającej się prostej, jest prostopadły do tej prostej; to w danej chwili kierunki prędkości każdego z jej punktów są prostopadłe do niej; t. j. środek chwilowego obrotu leży w danej chwili na tej prostej.

37. Prędkości prostopadłe. Wobec licznych zadań obliczenia prędkości punktów danego układu, jakie nasuwa praktyka techniczna, sformułowano w inny sposób twierdzenie o prędkościach punktów prostej, poruszającej się w danej płaszczyźnie; wprowadzono mianowicie wielkość pomocniczą, nazwaną prędkością prostopadłą. Prędkością prostopadłą danego punktu nazwano wektor, który powstał przez obrót wektora prędkości danego punktu o 90° około jego początku. Jeżeli umówimy się co do zwrotu tego obrotu; to dla każdego wektora prędkości znajdziemy prędkość prostopadłą i odwrotnie: do każdej prędkości prostopadłej danego punktu, znajdziemy położenie wektora prędkości właściwej.

Z określenia tego wynika:

1) Wektory prostopadłych prędkości punktów układu sztywnego leżą na promieniach wodzących, wyprowadzonych ze środka chwilowego obrotu do tych punktów;

2) Jeżeli dany punkt znajduje się w obrocie dodatnim i obroty wektorów prędkości przyjmiemy również za dodatnie; to strzałki pręd-

kości prostopadłych są zwrócone ku środkowi chwilowego obrotu i odwrotnie: jeżeli dany punkt wykonywa obrót odjemny to strzałki prędkości prostopadłych będą odwrócone od środka chwilowego obrotu.

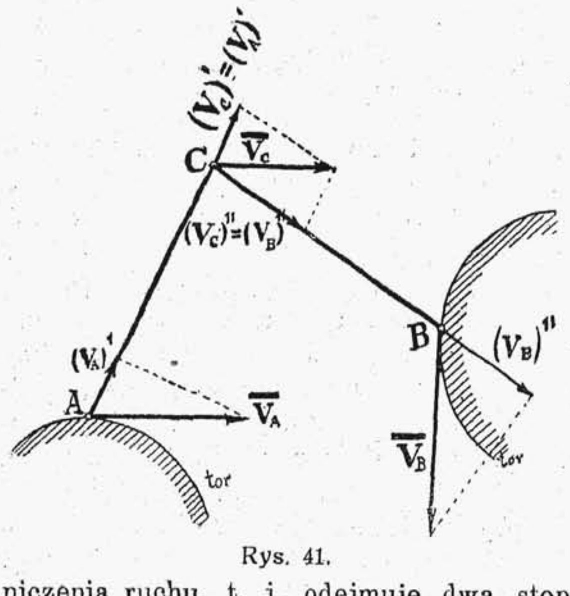
3) Strzałki prędkości prostopadłych punktów układu niezmiennego (sztywnego) są w danej chwili wszystkie zwrócone ku środkowi chwilowego obrotu lub wszystkie odwrócone od niego; wszystkie bowiem punkty takiego układu wykonują jednocześnie obrót dodatni lub odjemny.

4) Miejsce geometryczne końców prostopadłych prędkości punktów poruszającej się prostej leżą na prostej, równoległej do niej; wartości bowiem prędkości punktów układu sztywnego są proporcyonalne do długości odpowiednich promieni.

5) Końce prostopadłych prędkości punktów układu niezmiennego płaskiego tworzą wielobok geometrycznie podobny do wieloboku, utworzonego przez odpowiednie punkty układu danego. Poleca się czytelnikowi rozwiązać dalej przytoczone zadania sposobem bezpośredniego wyznaczania środków i sposobem wyznaczania prędkości prostopadłych.

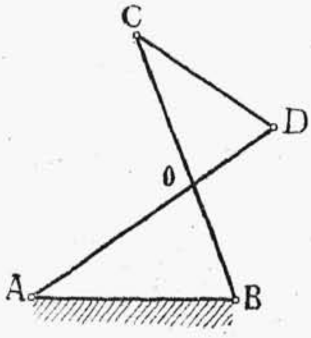
6) Jeżeli dany jest środek chwilowego obrotu układu sztywnego i wartość prędkości prostopadłej jednego jego punktu, to wykreśleniem figury podobnej można geometrycznie wyznaczyć prędkości wszystkich innych punktów tego układu.

38. Przykłady. 1) Dwa pręty AC i CB są połączone przegubowo w punkcie C. Końce A i B posuwają się po danych torach, rys. 41-szy z prędkościami danemi v_A i v_B; należy wyznaczyć prędkość punktu C; znaleźć środki chwilowych obrotów prętów AC i AB.



Rys. 41.

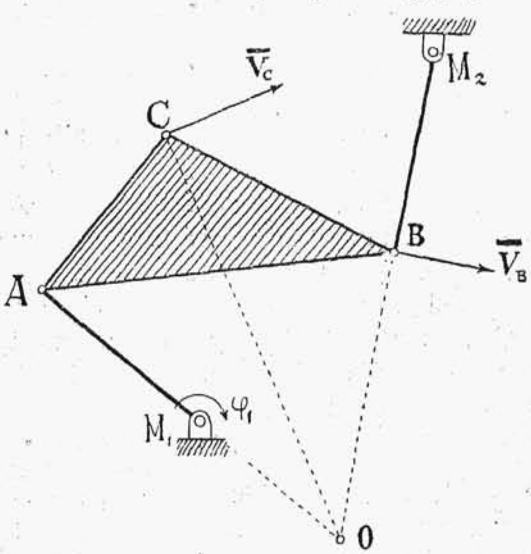
Rozwiązanie. Przedewszystkiem należy dowieść, że zadanie jest dostatecznie określone, t. j. że ruch obydwóch prętów jest ściśle określony. W tym celu zważymy, że dwa pręty swobodne, będące w ruchu płaskim posiadają $2 \times 3 = 6$ stopni swobody. Warunek, ażeby końce A i B ślizgały się po danych torach daje dwa ograniczenia ruchu, t. j. odejmuje dwa stopnie swobody; dane prędkości punktów A i B odejmują również 2^0; warunek zaś, że te dwa pręty mają wspólny punkt C, daje również dwa równania t. j. odejmuje 2^0; jeżeli bowiem oznaczymy spółrzędne punktu C, należącego do prostej AC przez x_A i y_A; a spółrzędne tegoż punktu, należącego do prostej BC przez x_B i y_B; to warunek, że te dwa punkty pokrywają się, wyrazimy dwoma równaniami $x_A = x_B$; $y_A = y_B$; razem więc mamy sześć równań; zadanie przeto jest dostatecznie określone i ruch każdego punktu sztywno połączonego z jednym lub drugim prętem może być wyznaczony. Ażeby wyznaczyć prędkość punktu C będziemy rozumować w nast. sposób: na zasadzie dowiedzionego twierdzenia, rzut prędkości v_A na AC jest równy rzutowi niewiadomej prędkości punktu C na tęż prostą; oznaczmy ten rzut przez v_A'; w tenże sposób otrzymamy rzut tejże prędkości v_C na prostą BC, rzutując v_B na BC; oznaczmy go przez v'_B; z tych dwóch rzutów obliczymy lub wykreślimy prędkość $\bar{v}_C$.



Rys. 42.

Poleca się czytelnikowi rozwiązać to zadanie za pomocą prędkości prostopadłych.

2) Wyznaczyć środek obrotu chwilowego pręta CD, który jest bokiem czworoboku przegubowego, przedstawionego na rys. 42-gim. Odpowiedź: jest nim punkt O przecięcia się boków AD i BC.



Rys. 43.

3) Dany jest czworobok przegubowy, rys. 42-gi; należy: 1) wyznaczyć na boku CD punkt, którego prędkość posiada kierunek równoległy do AB; 2) wyznaczyć miejsce geometryczne takich punktów, uważając całą płaszczyznę za ruchomą i związaną z punktami C i D.

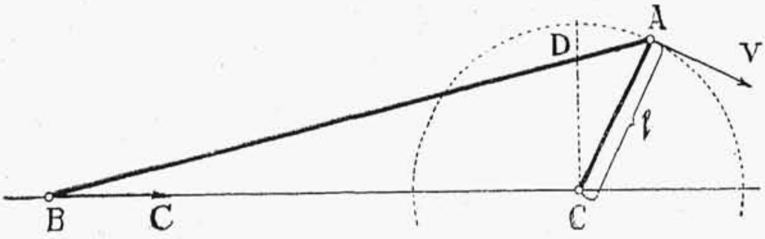
Odpowiedź: jest niem prostopadła, wyprowadzona z punktu O do AB.

4) Sztywny trójkąt ABC jest połączony przegubowo dwoma prętami z punktami nieruchomymi M_1 i M_2, rys. 43-ci, daną jest prędkość kątowa φ_1 pręta $M_1 A$; należy wyznaczyć prędkość punktu C.

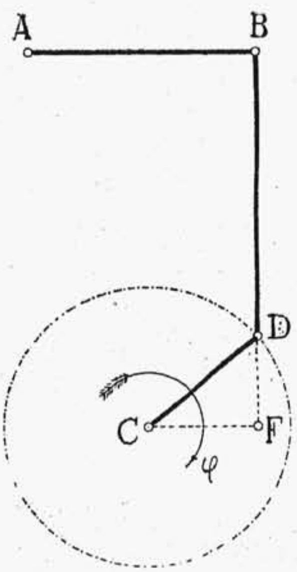
Odpowiedź $\frac{v_c}{OC} = \frac{v_A}{OA}$; $v_A = AM_1 . \varphi_1$,

a więc $v_C = \varphi_1 . \frac{OC}{OA} . AM_1$;

oraz $v_C \perp OC$.



Rys. 44.



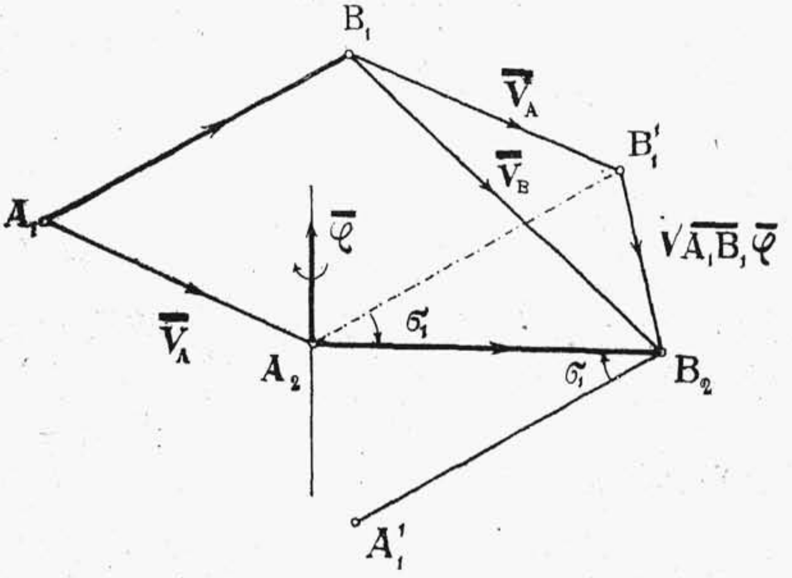
Rys. 45.

5) Wyznaczyć zależność prędkości v czopa korby, t. j. punktu A, od prędkości c krzyżulca, t. j. od prędkości punktu B napędu korbowego, rys. 44-ty. Odpowiedź: po wyznaczeniu bieguna O znajdziemy, że $c = v \frac{r_c}{r}$. Zrobić następnie wykres prędkości c, gdy np. $v =$ = stałej. (Porów. „Technik" I. Str. 551 i nast.).

6) Ramiona korby AB i korby CD posiadają punkty obrotu w A i C; punkty B i D są połączone przegubowo korbowodem BD. Wyznaczyć kierunki i zależność prędkości punktów B i D, rys. 45-ty. **Odpowiedź:** $v_B =$ $= CF . \varphi$; gdzie φ oznacza prędkość obrotową korby CD; punkt zaś F otrzymamy z przecięcia się przedłużenia BD z równoległą do AB, wyprowadzą ze środka C.

39. Ruch płaski jako ruch złożony. Oprócz wyżej podanego sposobu wywołania ruchów płaskich przez obrót około środka chwilowego, podamy jeszcze inny sposób. W tym celu weźmy pod uwagę figurę płaską w dwóch jej położeniach; punkty A_1 i B_1, rys. 46-ty, niech będą punktami, wyznaczającymi jej ruch. Ażeby przeprowadzić tę figurę, z położenia I-go do położenia II-go, które wyznaczają punkty A_2, B_2, wyobraźmy sobie, że odcinek $A_1 B_1$, przeprowadzimy ruchem postępowym do pokrycia się punktu A_1 z punktem A_2; wtedy odcinek ten znajdzie się w położeniu $A_2 B_1'$, a wszystkie punkty figury wykonają ruch postępowy, którego kierunek wyznacza wektor $A_1 A_2$; następnie odcinek $A_2 B_1'$ obrócimy około A_2 aż do pokrycia się punktu B_1' z B_2, kąt obrotu oznaczymy literą σ. Sposób tego przesunięcia opiszemy jak następuje: każdy niezmienny płaski układ punktów może być przeprowadzony z jednego położenia do drugiego dwoma ruchami:

1) **ruchem postępowym** całego układu, aż do pokrycia się punktu wyznaczającego w dwóch jego położeniach (A_1 z A_2); 2) **ruchem obrotowym** około tegoż punktu (A_2), aż do pokrycia się drugiego punktu wyznaczającego z tymże punktem, w drugiem jego położeniu (B_1' z B_2).



Rys. 46.

Ponieważ położenia punktów wyznaczających mogą być obrane dowolnie w danym układzie, przeto posiadamy nieskończenie wiele dróg, po których możemy przeprowadzić dany układ z jednego położenia do drugiego. Obrany punkt, który wyznacza ruch postępowy, i około którego odbywa się obrót, nazywać będziemy **biegunem ruchu;** w powyższym przykładzie punkt A_1 jest biegunem ruchu.

Ten sposób przeprowadzenia układu z jednego położenia do drugiego, jest ogólniejszy od poprzedniego; poprzedni bowiem będzie szczególnym jego przypadkiem, gdy znajdziemy taki biegun, którego przesunięcie podczas ruchu postępowego będzie równe zeru; wtedy bowiem ruch układu będzie tylko obrotem około tego bieguna, jak było poprzednio.

Ze zmianą bieguna ruchu zmienia się kierunek ruchu postępowego, wartość jednakże i zwrot kąta obrotu, w każdym takim przypadku, pozostają te same. Ażeby tego dowieść, obierzmy punkt B jako biegun, rys. 46-ty, i sprowadźmy do pokrycia się najpierw punkty B_1 i B_2, wtedy punkt A_1 zajmie położenie A_1'; następnie przez obrót układu około B_2 o kąt σ_2 doprowadzamy punkty A_1' i A_2 do pokrycia się. Ten sposób przeprowadzenia składa się również z dwóch ruchów: postępowego i obrotowego. Postępowy ruch w tym razie posiada inny kierunek, niż poprzedni, lecz wartości kątów obrotu σ_1 i σ_2, tak w pierwszym sposobie jak i w drugim pozostają wzajemnie równe, gdyż $A_2B_1' \parallel B_2A_1'$ i zwroty tych obrotów są zgodne z sobą; na rys. 46-tym są obydwa zgodne ze zwrotem wskazówki zegara.

Wielkość kąta obrotu, potrzebnego dla przeprowadzenia figury płaskiej z jednego położenia do drugiego, **jest jedna i ta sama co do wartości i zwrotu dla wszystkich biegunów,** jedynie kierunek ruchu postępowego zależy od położenia obranego bieguna.

Można jeszcze uzupełnić ten wniosek przez dowiedzenie, że kąt ten jest niezależny od porządku, w jakim uskutecznimy oddzielne ruchy. W tym celu należy wpierw wykonać ruch obrotowy, a następnie postępowy, i w ten sposób wykazać, że otrzymany wynik jest zgodny z poprzednim; będzie to zarazem bezpośredniem okazaniem przemienności porządku tych ruchów; należy bowiem zwrócić uwagę, że niewszystkie ruchy posiadają tę właściwość.

Weźmy następnie pod uwagę dwa nieskończenie bliskie położenia danego układu, wtedy przesunięcie $B_1 B_2$, które będzie nieskończenie małe, rys. 46-ty, stanie się rzeczywistem przesunięciem punktu B_1. Z rys. 46-go odczytamy równanie wektorowe: $\overline{B_1 B_2} = \overline{B_1 B_1'} + \overline{B_1' B_2}$ i przekształcimy je w następujące: $\overline{B_1 B_2} = \overline{A_1 A_2} + \mathrm{V}\overline{A_1 B_1} \,.\, d\sigma$; rozdzielimy je przez dt i zważywszy, że wyraz $\dfrac{\overline{B_1 B_2}}{dt} = \bar{v}_B$ jest prędkością punktu B_1; wyraz $\dfrac{\overline{A_1 A_2}}{dt} = \bar{v}_A$ jest prędkością punktu A_1 i wreszcie $A_1 B_1 \,.\, \dfrac{d\sigma}{dt}$ jest prędkością punktu B_1 podczas obrotu około A_1, jako środka obrotu; prędkość tę wyrazimy przez znany już symbol iloczynu wektorowego: $\mathrm{V}\overline{A_1 B_1} \,.\, \bar{\varphi}$, w którym $\varphi = \dfrac{d\sigma}{dt}$. Podstawiwszy te wyrazy w równanie poprzednie, otrzymamy wzór

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \mathrm{V}\overline{AB} \cdot \bar{\varphi}, \qquad (34)$$

który wysłowimy w sposób następujący: podczas ruchu płaskiej figury w jej płaszczyźnie, prędkość $\bar{v}_B$ dowolnego jej punktu B, może być uważaną jako suma wektorowa dwóch prędkości:

1) **prędkości $\bar{v}_A$ dowolnego punktu tejże figury, oraz**
2) **prędkości** $V \bar{A}\bar{B} \bar{\varphi}$ **punktu** B, **powstałej wskutek obrotu.**

Zbadajmy obecnie, czy równanie 34-te jest w zgodzie z zasadą ilości swobody ruchu bryły. — Równanie 34-te daje możność obliczenia prędkości dowolnego punktu B z wielkości $\bar{v}_A$ i $\bar{\varphi}$, wyrażających ruch tego układu. Ponieważ rozpatrywaliśmy ruch płaski, przeto ruch ten powinien być określony przez trzy wielkości liczbowe. Wektor $\bar{v}_A$, jako wektor ruchu postępowego na płaszczyźnie, może być przyczepiony do dowolnego punktu płaszczyzny ruchomej; dla jego przeto określenia wystarczy tylko kąt kierunkowy i wartość t. j. dwie wielkości liczbowe; kierunek wektora $\bar{\varphi}$ jest określony przez płaszczyznę danego ruchu; pozostaje przeto określić tylko jego wartość, obydwa przeto wektory—dają się w tym razie wyrazić jednoznacznie przez trzy liczbowe wartości, co też jest niezbędnym warunkiem określenia ruchu płaskiego.

Gdy punkt A obierzemy w środku chwilowego obrotu danego układu płaskiego, wtedy $v_A = 0$ i prędkości wszystkich punktów są prędkościami obrotowemi $= AB \,.\, \varphi$; lub wyrażając wektorowo $= V\, \overline{AB}\, \bar{\varphi}$.

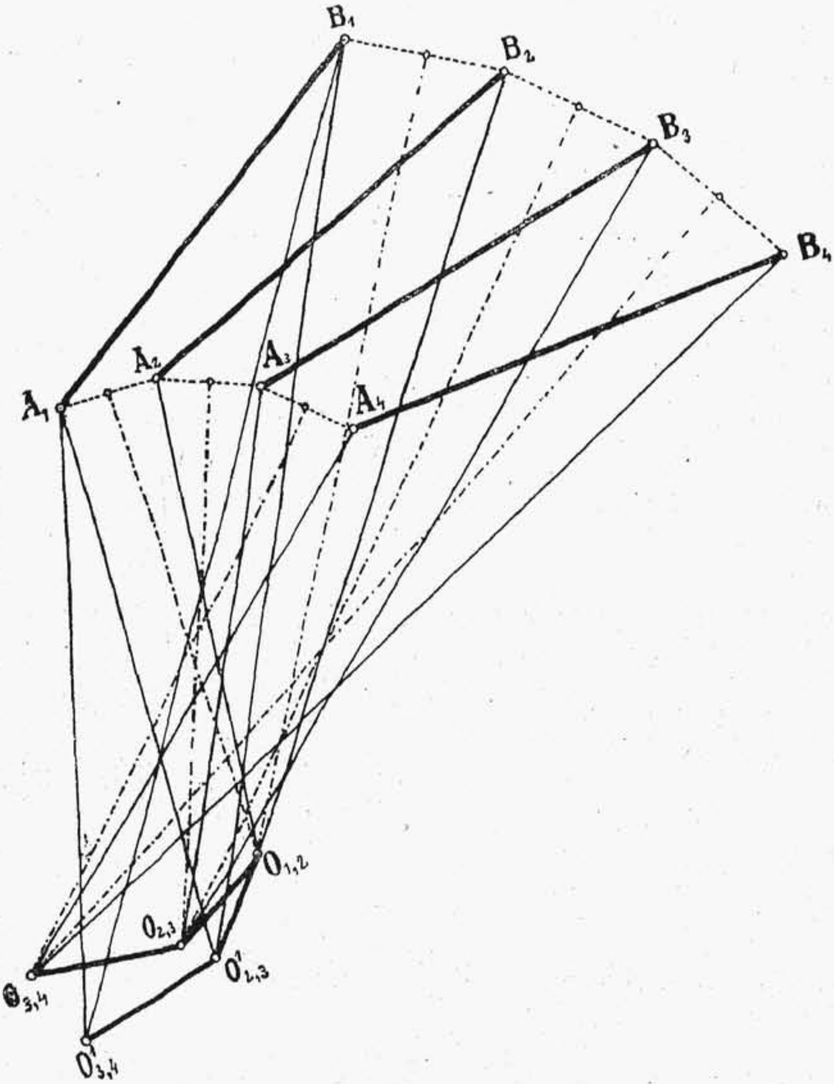
40. Ruch ciągły na płaszczyźnie. Gdy bryła lub punkt, przechodząc z jednego miejsca przestrzeni do drugiego, przechodzi przez wszystkie pośrednie położenia, to ruch taki nazywamy **ruchem ciągłym.** Wszystkie ruchy, z którymi mamy w rzeczywistości do czynienia, są ruchami ciągłymi.

Gdy wyobrazimy sobie pewien układ punktów w dwóch położeniach w przestrzeni, to przejście jego z jednego położenia do drugiego musi nastąpić przez cały szereg nieskończenie bliskich położeń.

Zastosujemy te ogólne uwagi do ruchu figury płaskiej w jej płaszczyźnie, i, obrawszy dwa punkty wyznaczające, powiemy, że każde nowe położenie tych punktów może być otrzymane przez obrót chwilowy około odpowiedniego środka; gdy więc figura ruchoma zajmuje ciągły szereg położeń, to i odpowiednie środki wyznaczą ciągły szereg punktów. Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem i zbadaniem właściwości geometrycznego miejsca tych środków.

Oznaczmy przez A_1B_1 pierwsze położenie punktów wyznaczających ruch; przez A_2B_2 — drugie ich położenie; przez A_3B_3 — trzecie i t. d., rys. 47-my. Ażeby przejść z pierwszego położenia do drugiego, wyznaczamy, podług prawideł wyłożonych, środek $O_{1,2}$; ażeby następnie przejść z drugiego położenia do trzeciego, wyznaczamy środek $O_{2,3}$ i t. d. Dla całego szeregu położeń odcinka AB, otrzymamy odpowiedni szereg środków; środki te leżą na płaszczyźnie nieruchomej i nie biorą udziału w ruchu układu. Gdy wyznaczymy w ten sposób miejsca geometryczne środków, odpowiadające nieskończenie bliskim położeniom odcinka AB, otrzymamy wtedy krzywą, którą nazwiemy **nieruchomym torem środków**.

W celu wykazania pewnych właściwości ruchu plaskiego, wpro-



Rys. 47.

wadzimy do rozpatrywań krzywą, zwaną ruchomym torem środków; krzywą tę wykreślimy w sposób następujący. Weźmy np. trójkąt $A_2B_2O_{2,3}$ którego podstawą jest odcinek A_2B_2 i wierzchołkiem środek $O_{2,3}$; wyobraźmy sobie następnie trójkąt ten nakreślony na płaszczyźnie ruchomej i znajdźmy położenie tego trójkąta, gdy odcinek A_2B_2 znajdował się w położeniu A_1B_1. W tym celu na A_1B_1, jako na podstawie, wykreślamy trójkąt, którego boki będą równe bokom rozpatrywanego trójkąta $A_2B_2O_{2,3}$ i oznaczymy wierzchołek tego trójkąta literą $O'_{2,3}$. Następnie; w tenże sposób wykreślimy na podstawie A_1B_1 trójkąt $A_3B_3O_{3,4}$ i oznaczymy wierzchołek jego przez $O'_{3,4}$. Postępowanie to zastosujemy do wszystkich kolejnych położeń odcinka AB i wykreślimy odpowiednie tym położeniom trójkąty na obranej podstawie A_1B_1; inaczej mówiąc, cofniemy wszystkie trójkąty, utworzone przez odcinki AB i odpowiednie środki chwilowych obrotów, — do położenia pierwotnego; a miejsce geometryczne wierzchołków tych trójkątów przedstawi pewną krzywą, nazwaną **ruchomym torem środków**; tor ten bowiem wyznaczamy na ruchomej płaszczyźnie.

Jeżeli figura płaska porusza się w swej płaszczyźnie, to, znając jej ruch, wykreślić można w ten sposób tor nieruchomy na płaszczyźnie nieruchomej; — jak również tor ruchomy na płaszczyźnie figury ruchomej. Podczas ruchu tej figury tor nieruchomy i tor ruchomy są względem siebie w pewnej zależności; w celu znalezienia tej zależności, zbadajmy ruch, jaki wykona tor ruchomy, poruszając się razem z odcinkiem AB. Ażeby np. dany odcinek przeprowadzić z położenia A_1B_1 do położenia A_2B_2, obracamy całą płaszczyznę ruchomą wraz z torem ruchomym i tym odcinkiem około środka $O_{1,2}$, aż do przejścia odcinka do położenia A_2B_2. Gdy to nastąpi, wtedy punkt $O'_{2,3}$ pokryje się z $O_{2,3}$; albowiem uczyniliśmy poprzednio trójkąt $A_1E_1O_2{}'_{,3} = A_2B_2O_{2,3}$. Do następnego położenia A_3B_3 danego odcinka dojdziemy, jeżeli cały układ obrócimy około bieguna $O_{2,3}$ (z którym w danej chwili pokrywa się $O_2{}'_{,3}$); gdy dany odcinek przyjmie położenie A_3B_3, wtedy punkt $O'_{3,4}$ pokryje się z $O_{3,4}$. W tenże sposób przeprowadzimy dany odcinek do następnego położenia A_4B_4; punkt $O'_{4,5}$ pokryje się wtedy z biegunem $O_{4,5}$; i w takiż sposób następnie przechodzić będziemy kolejno z jednego położenia do drugiego. Ruch więc toru ruchomego posiada następujące właściwości: gdy odcinek AB, wyznaczający ruch figury płaskiej, wychodzi z pewnego położenia, które nazwiemy początkowem, i przechodzi przez nieprzerwany szereg innych położeń, wtedy punkty toru ruchomego pokrywają się kolejno z punktami toru nieruchomego, a wspólny ten punkt jest środkiem chwilowego obrotu; przytem zachodzą następujące zależności geometryczne:

1) styczna we wspólnym punkcie do jednego toru jest jednocześnie styczną do drugiego; gdy bowiem tor ruchomy obraca się około jednego bieguna, np. $O_{1,2}$, aż do pokrycia się następnego bieguna $O_{2,3}$ z $O'_{2,3}$; wtedy cząstki łuków $(O_{1,2}\,O_{2,3})$ i $(O'_{1,2}\,O'_{2,3})$ wzajemnie się pokrywają; a więc i styczna jest wspólną do obydwóch torów;

2) długości łuków, zawarte pomiędzy odpowiedniemi punktami torów, np. łuk $(O_{2,3}, O_{3,4})$ i łuk $(O'_{2,3}, O'_{3,4})$, są wzajemnie równe, co wynika bezpośrednio z poprzedniego wniosku. Ruch tego rodzaju **nazywamy toczeniem się jednej krzywej po drugiej.**

Ciągły ruch odcinka AB może być przeto wywołany przez toczenie się toru ruchomego, związanego sztywno z punktami A i B, o torze nieruchomym. Gdy zatem **wykreślimy obydwa tory** dla danego ruchu odcinka AB, natenczas **odtworzymy** w zupełności ruch danego układu, za pomocą toczenia się jednego toru po drugim. Wnioski powyższe dadzą się wysłowić w sposób następujący:

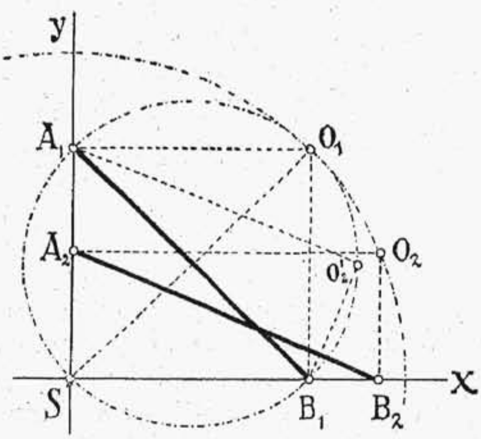
ruch ciągły na płaszczyźnie może być wywołany przez toczenie się pewnej krzywej, związanej sztywno z układem ruchomym, po drugiej krzywej, która leży w płaszczyźnie nieruchomej; punkty zetknięcia się tych krzywych są środkami chwilowego obrotu.

Ruch przeto ciągły figury płaskiej w jej płaszczyźnie jest ściśle określony przez postaci geometryczne torów ruchomego i nieruchomego i przez wartości chwilowych prędkości obrotowych.

We wszystkich więc zadaniach, tyczących się ruchu płaskiego, będziemy starali się wyrazić ruchy płaskie przez toczenia się ruchomego toru biegunów po torze nieruchomym i w tym celu będziemy dążyli do wyznaczenia geometrycznej postaci obydwóch torów; tory te wyznaczyć można z warunków danego zadania

41. Przykłady. 1) Pręt AB o długości l ślizga się końcami po dwóch wzajemnie prostopadłych osiach x i y; należy wyznaczyć tor ruchomy i nieruchomy; rys. 48-my.

Rozwiązanie. Środek chwilowego obrotu dla dowolnego położenia pręta, np. dla położenia A_1 B_1, wyznaczymy, wystawiając prostopadłe w punktach A_1 i B_1; punkt ich przecięcia się O_1 jest środkiem szukanym; w ten sposób wyznaczyć można miejsce geometryczne środków dla różnych położeń danego odcinka. Z prostokąta jednakże $SA_1O_1B_1$, rys. 48-my, zauważymy, że $SO_1 = A_1B_1 = l$; czyli dla każdego położenia pręta odległość SO_1 jest wielkością stałą $= l$, z czego wnioskujemy, że tor nieruchomy środków jest kołem, którego środek leży w początku układu S i promień jego $= l$.



Rys. 48.

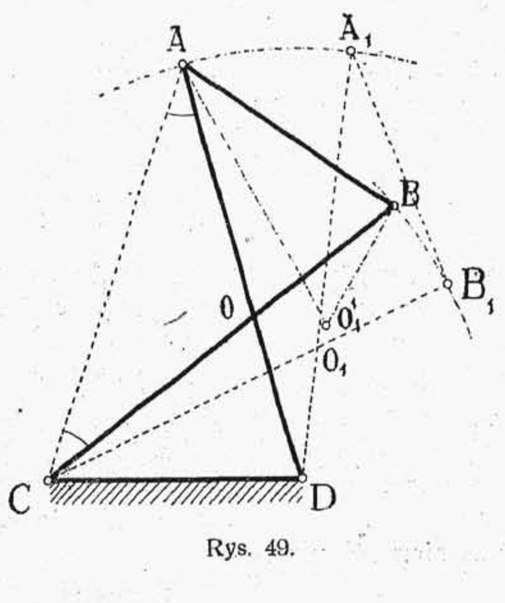
W celu wyznaczenia ruchomego toru, postępujemy w tenże sposób, jakieśmy to mówili w ogólnych rozważaniach. Weźmy dowolne A_2B_2 danego pręta; odpowiedni do tego położenia biegun chwilowego obrotu będzie O_2; wykreślmy następnie trójkąt $A_2O_2B_2$ na podstawie A_1B_1 i wyznaczmy położenie bieguna O'_2. Zmieniając położenie pręta, wykreślimy na podstawie A_1B_1 różne trójkąty z wierzchołkami O'; wszystkie te wierzchołki wytworzą ruchomy tor biegunów. Ażeby znaleść jakąś geometryczną prawidłowość w układzie punktów O', zauważymy, że w trójkącie $A_1O_2'B_1$ kąt wierzchołkowy $A_1O_2'B_1 = 90^0$; — i te kąty we wszystkich trójkątach są równe 90^0; z czego wynika, że punkty O' są miejscem geometrycznem wierzchołków kąta prostego, którego ramiona wspierają się na odcinku A_1B_1; wszystkie te punkty tworzą więc obwód koła o średnicy A_1B_1; koło to jest zatem torem ruchomym biegunów, i, na mocy tego, wypowiemy następujący wniosek:

ruch pręta, którego końce ślizgają się po dwóch wzajemnie prostopadłych osiach, może być wywołany toczeniem się koła, wykreślonego na tym pręcie jako na średnicy, po kole nieruchomym, o średnicy $= 2l$.

Rozpatrywania powyższe pozwalają twierdzić, iż ruch pręta, który ślizga się końcami swymi wzdłuż dwóch wzajemnie prostopadłych osi, jest tożsamym z ruchem obranej średnicy koła, toczącego się wewnątrz drugiego koła, o średnicy $= 2l$. W ten sposób wywołujemy jeden i ten sam ruch pręta, za pomocą dwóch różnych mechanizmów.

Zadanie. Rozwiązać powyższe zadanie, gdy osi x i y tworzą pomiędzy sobą kąt γ. **Odpowiedź:** tor nieruchomy jest kołem, którego średnica $= \dfrac{2l}{\sin\gamma}$; tor ruchomy jest kołem o średnicy $d = \dfrac{l}{\sin\gamma}$.

2) Przykład. Jeżeli równoległobok przegubowy przekręcimy w ten sposób, żeby boki równoległe się skrzyżowały, to otrzymamy czworobok, który nazwiemy równoległobokiem skrzyżowanym, rys. 49-ty. Umocujmy krótszy jego bok nieruchomo, pozostawiając bokom pozostałym swobodę ruchu płaskiego i zastąpmy ruch boku AB przez toczenie się. **Rozwiązanie.** Wyznaczamy najpierw tor nieruchomy. Biegunem chwilowego obrotu pręta AB jest punkt przecięcia się boków AD i BC i to nastąpi we wszystkich jego położeniach; punkty te wyznaczają



Rys. 49.

tor nieruchomy. Położenie każdego punktu O uwarunkowane jest przez następujące stosunki geometryczne; trójkąty ABC i CDA są wzajemnie równe, gdyż podług zadania: $CD = AB$, $CB = AD$, a więc $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$, kąty te są zakreślone na rysunku 49-tym, stąd wynika: $AO = CO$, $BO = DO$. Zauważymy następnie, że $CO + BO =$ długości boku CB, a ponieważ $BO = DO$, przeto $CO + DO =$ stałej wielkości. Wynik ten wysłowimy: suma odległości bieguna chwilowego obrotu, w każdem położeniu pręta, od punktów C i D, jest wielkością stałą; z czego wynika, że miejscem geometrycznem środków jest elipsa; której ogniska leżą w wierzchołkach C i D.

Ażeby wyznaczyć tor ruchomy, należy wziąć różne położenia pręta AB, np. A_1B_1 i następnie trójkąt $A_1B_1O_1$ przenieść na podstawę AB, otrzymamy wtedy położenie punktu O'_1. Następnie można dowieść, że $AO'_1 + O'_1B =$ stałej wielkości, a więc punkty O' wytwarzają elipsę, której ogniska leżą w punktach A i B i której średnica równa się CB. Ruch więc odcinka AB może być zastąpiony przez toczenie się elipsy ruchomej po nieruchomej.

3) **Zadanie.** Postawmy równoległobok skrzyżowany na boku dłuższym; należy wyznaczyć tor ruchomy i nieruchomy dla boku przeciwległego. W odpowiedzi otrzymamy, że ruch przeciwległego boku może być zastąpiony przez toczenie się hyperboli ruchomej po hyperboli nieruchomej.

42. Ruch płaski w przestrzeni. Rozpatrywanie ruchu figur płaskich w ich płaszczyźnie było tylko uproszczeniem rozpatrywania ruchu płaskiego bryły, t. j. ruchu, w którym wszystkie punkty bryły ruchomej zakreślają tory, równoległe do pewnej płaszczyzny, którą nazwaliśmy płaszczyzną ruchu. Twierdzenia powyższe mogą być więc zastosowane do ruchu płaskiego brył w przestrzeni i wtedy wypowiemy je w sposób następujący:

chwilowy ruch bryły, która jest w ruchu płaskim, może być wywołany przez obrót około pewnej osi, prostopadłej do płaszczyzny ruchu.

Twierdzenie zaś o ruchu ciągłym wypowiemy w sposób następujący:

ciągły ruch bryły, która jest w ruchu płaskim, może być wywołany przez toczenie się pewnego walca, sztywno związanego z bryłą ruchomą, do drugim walcu, nieruchomo umieszczonym w przestrzeni.

Zadanie. Wierzchołki trójkąta ABC przesuwają się po trzech równoległych płaszczyznach; dane są prędkości dwóch wierzchołków $\bar{v}_A$ i $\bar{v}_B$, należy wyznaczyć prędkość $\bar{v}_C$. W tym celu należy zrzutować trójkąt na płaszczyznę równoległą do ruchu i wyznaczyć oś obrotu i t. d. Okazać, że zadanie to jest nadmiernie określone i wykazać w czem się ta nadmierność ujawnia.