około pokrywających się osi O i O' oraz z ruchu postępowego wzdłuż tych osi. Ruch obrotowy tego rodzaju nazwaliśmy ruchem „toczenia się"; a ruch postępowy nazwiemy w danym razie ruchem „ślizgania się"; przyjąwszy te nazwy streścimy wyżej wypowiedziane wyniki w sposób następujący:

ciągły ruch bryły może być wywołany jednoczesnem toczeniem się i ślizganiem się pewnej powierzchni prostolinijnej, sztywno związanej z ruchomą bryłą, po drugiej powierzchni również prostolinijnej, która pozostaje nieruchomą w przestrzeni. Proste, zetknięcia się tych powierzchni, są osiami skrętów chwilowych. Poprzednie więc twierdzenia, mówiące o toczeniu się walców podczas ruchu płaskiego lub stożków podczas ruchu kulistego, są szczególnymi przypadkami ruchu ogólnego.

Sposób wywołania każdego ruchu, wyrażony w powyższem twierdzeniu, określa ściśle ruch w stosunku do przestrzeni, nie daje on jednakże pojęcia o czasie, w jakim należy go wykonać. W celu uzupełnienia tego sposobu przedstawiania ruchów, ażeby ściśle on odtwarzał ruch tak w stosunku do przestrzeni, jak i w stosunku do czasu, — nanieśmy na osiach chwilowego obrotu, t. j. na tworzących powierzchnię nieruchomą, przynależne im wektory $\bar{\varphi}$ i $\bar{v}_\varphi$; a wtedy podług takiego obrazu geometrycznego, będziemy mogli z całą ścisłością wykonać jeden jedyny ruch.

G. Ruch złożony i jego prędkości.

49. Określenie. Jeżeli punkt nieswobodny porusza się po pewnym torze i gdy ten tor **jednocześnie** z tym punktem porusza się w przestrzeni, to ruch takiego punktu nazywamy ruchem **złożonym**; gdyż punkt taki posiada ruch własny po torze, oraz jednocześnie bierze on udział w ruchu toru.

Ruch punktu po torze, gdy tor jest w spoczynku, nazwiemy ruchem **względnym;** a ruch, który punkt wykonuje razem z torem, nie poruszając się wzdłuż niego nazwiemy ruchem **unoszącym**. Ruch zaś, który powstaje z tych dwóch ruchów, **jednocześnie** wykonanych, jest ruchem **złożonym**, inaczej **bezwzględnym** lub **wypadkowym**.

Jako obraz ruchu złożonego wyobraźmy sobie np. ruch człowieka, idącego po torze, nakreślonym na pokładzie statku, gdy statek jest w ruchu; ruch wzdłuż toru, gdy statek stoi w spoczynku, jest, w myśl danych określeń, ruchem względnym; ruch zaś, gdy człowiek zatrzyma się w pewnym miejscu toru, statek zaś jest w ruchu, będzie ruchem unoszącym; gdy następnie będzie szedł ów człowiek wzdłuż toru, tor zaś będzie się jednocześnie poruszać razem ze statkiem, to ruch człowieka jest ruchem złożonym.

Otrzymamy ścisły obraz ruchu złożonego, gdy pozwolimy poruszającemu się punktowi wykonywać wyłącznie ruch względny, t. j. gdy wyobrazimy sobie tor nieruchomym; wtedy będziemy mówili o drodze, prędkości i przyśpieszeniu ruchu względnego i będziemy stosować do tych pojęć wyżej już podane określenia tych wielkości.

Wyobraźmy sobie następnie punkt ruchomy umocowany do toru; wtedy wykona on ruch razem z torem. Gdy wyobrazimy sobie, że punkt ten, podczas ruchu, pozostawia w przestrzeni ślady trwałe, to wyznaczy on tor, który nazwiemy torem ruchu unoszącego; powstaje on bowiem wskutek unoszenia toru; prędkość zaś i przyśpieszenie punktu, jakie on posiada podczas tego ruchu, nazwiemy prędkością lub przyśpieszeniem punktu podczas ruchu unoszącego; — lub krótko prędkością i przyśpieszeniem unoszącem. Do tych wielkości można zastosować określenia, podane już w kinematyce punktu.

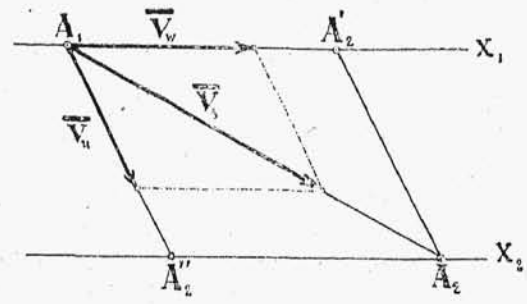
Ruch punktu, który powstaje z jednoczesnych ruchów, z ruchu po torze i ruchu samego toru, nazwiemy ruchem bezwzględnym lub wypadkowym; punkt ruchomy w danym razie zakreśli w przestrzeni tor różny od poprzednich torów; tor ten nazwiemy torem bezwzględnym lub torem właściwym i będziemy mówili o drodze, prędkości i przyśpieszeniu bezwzględnem.

W każdej chwili czasu punkt ruchomy posiada trzy prędkości: — prędkość względną, z **jakąby** przebiegał po torze ruchomym; prędkość unoszącą, z **jakąby** poruszał się wraz z torem, gdyby był przymocowany do niego; i prędkość bezwzględną, jaką właściwie **wykonuje**. To samo możemy powiedzieć o przyśpieszeniach.

Zadaniem naszem jest wykryć zależność pomiędzy temi trzema wielkościami. Zależność ta wyrazi się równaniami wektorowemi, które, na podstawie twierdzeń o rzutach, możemy przekształcić na równania analityczne.

50. Prędkości punktu, będącego w ruchu złożonym. W celu uproszczenia początkowych rozpatrywań, przyjmijmy, że tor ruchomy jest prostą linią, oznaczoną na rys. 55-ym przez x_1 i przyjmijmy, że wykonywa on ruch postępowy w płaszczyźnie rysunku. Względny ruch punktu jest wyznaczony przez prędkość wzdłuż toru, prędkość tę oznaczymy przez $\bar{v}_w$; ruch toru jest wyznaczony przez prędkość, dowolnego jej punktu, prędkość tę oznaczymy przez $\bar{v}_u$. Wskutek jednoczesnego wykonania obydwóch ruchów, punkt ruchomy zakreśli na płaszczyźnie rysunku, którą wyobrazimy sobie nieruchomą, tor bezwzględny z pewną prędkością, nazwaną bezwzględną.

Niech w pewnej chwili tor ruchomy znajduje się w położeniu, oznaczonem na rysunku 55-ym przez x_1, punkt zaś ruchomy w A_1; po upływie czasu dt tor zajmie położenie x_2, a punkt ruchomy zajmie wtedy położenie A_2. Przesunięcie A_1A_2 jest cząstką toru bezwzględnego, jaki zakreślił punkt ruchomy. Przeprowadzenie punktu ruchomego z A_1 do A_2 możemy wykonać również w sposób następujący: wyobraźmy sobie, iż ten punkt jest umocowany do toru i odbywa ruch tylko razem z torem, wtedy przybędzie on z A_1 do A_2''; następnie niech tor pozostanie w spoczynku, a punkt niech wykona wzdłuż toru przesunięcie, jakie by wykonał w tymże okresie czasu razem z torem, przybędzie on wtedy z A_2'' do A_2. Pomiędzy temi przesunięciami zachodzi równanie wektorowe



Rys. 55.

$$\bar{A}_1\bar{A}_2 = \bar{A}_1\bar{A}_2'' + \bar{A}_2''\bar{A}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Moglibyśmy również przeprowadzić punkt ruchomy z A_1 do A_2, wykonując przesunięcia w odwrotnym porządku; a mianowicie: przesuwamy najpierw dany punkt wzdłuż toru do miejsca A_2', podczas tego ruchu przyjmiemy tor x_1 za nieruchomy, A_1A_2' jest przesunięciem względnem; następnie nadajmy torowi ruch postępowy, wskutek czego punkt ruchomy wykona przesunięcie z A_2' do A_2, i w ten sposób dosięgnie od miejsca A_2. Pomiędzy temi przesunięciami zachodzi równanie wektorowe

$$\bar{A}_1\bar{A}_2 = \bar{A}_1\bar{A}_2' + \bar{A}_2'\bar{A}_2.$$

Z rysunku odczytamy, że $\bar{A}_1\bar{A}_2' = \bar{A}_2''\bar{A}_2$; oraz $A_1A_2'' = A_2'A_2$.

Podzieliwszy powyższe równanie lub poprzednie przez algebraiczną wielkość dt, oznaczającą okres czasu, w którym punkt ruchomy przesunął się z A_1 do A_2, otrzymamy równanie wektorowe

$$\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{v}_u; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

gdyż podług określenia $\bar{v}_b = \dfrac{\bar{A}_1\bar{A}_2}{dt}$, $\bar{v}_w = \dfrac{\bar{A}_1\bar{A}_2'}{dt}$, oraz $\bar{v}_u = \dfrac{\bar{A}_1\bar{A}_2''}{dt}$.

Uogólnijmy to zadanie, przyjąwszy, że tor x_1 jest w ruchu dowolnym w przestrzeni. Poprzednio (§ 46-ty) dowiedliśmy, że każdy ruch układu sztywnego może być wywołany ruchem postępowym i obrotowym; wyobrazić sobie przeto możemy, że ruch toru x_1 w przypadku ogólnym składa się z ruchu postępowego $\bar{v}_u$ i obrotowego około punktu A_2'' o kąt $d\sigma$; ruchomy przeto punkt A nie zatrzyma się w miejscu A_2 jak było to poprzednio, lecz przesunie się jeszcze po łuku A_2A_3 (łuk ten nie naniesiono na rysunku); łuk ten jednakże jest wielkością nieskończenie małą drugiego rzędu w porównaniu z wielkościami przesunięć A_1A_2 lub A_1A_2''; gdyż długość łuku $A_2A_3 = A_2''A_2\, d\sigma$, t. j. równa się iloczynowi dwóch wielkości nieskończenie małych; przesunięcie przeto A_2A_3 może być w tym razie pominięte i równanie 37-me pozostanie w swej mocy również dla ruchu dowolnego w przestrzeni. Zwrócić należy uwagę, że wielkość nieskończenie małą drugiego rzędu, którą tu pomijamy, będzie musiała być uwzględnioną, gdy wielkości tego rzędu będziemy porównywali między sobą; co nastąpi przy obliczeniu przyśpieszeń tych punktów.

Uogólnijmy jeszcze zadanie powyższe do przypadku, w którym tor unoszący jest krzywolinijny. Dla tego przypadku całe powyższe rozumowanie zostanie w swej mocy; gdyż czyniąc nieskończenie małe przesunięcia po łuku, możemy, z pominięciem nieskończenie małych drugiego rzędu, uważać je za cząstki linii prostej tak, iż nic się nie zmieni w naszych rozpatrywaniach; wygłosimy przeto twierdzenie ogólne:

prędkość wypadkowa punktu, będącego w ruchu złożonym, równa się sumie wektorowej jego prędkości względnej i prędkości unoszącej.

Punkt ruchomy może brać udział nietylko w dwóch, lecz i w wielu ruchach; przypadek ten nastąpi, gdy np. płaszczyznę naszego rysunku, w której odbywa się ruch złożony, będziemy posuwać po stole, wtedy prędkość $\bar{v}_b$, którą nazwaliśmy bezwzględną, stanie się prędkością względną w stosunku do stołu, na którym leży rysunek, a prędkość bezwględna punktu, którą oznaczymy przez $\bar{v}_{b,s}$, t. j. prędkość względem stołu, wyznaczymy z równania $\bar{v}_{b,s} = \bar{v}_b + \bar{v}$ rysunku $= \bar{v}_w + \bar{v}_u + \bar{v}_r$. Wniosek powyższy uogólnimy zatem w sposób następujący:

prędkość wypadkowa punktu ruchomego jest równą sumie wektorowej prędkości składowych; przez prędkości składowe rozumiemy prędkości względne i unoszące.

Szczególny przypadek zastosowania powyższych wzorów zajdzie, gdy prędkości $\bar{v}_w$ i $\bar{v}_u$ leżeć będą na jednej prostej, wtedy ich suma wektorowa zamieni się na sumę algebraiczną. Gdy np. pociąg biegnie z prędkością $\bar{v}_u = 20$ m/s., i gdy konduktor przechodzi, wzdłuż tego pociągu w kierunku jego biegu, z prędkością $v_w = 1$ m/s., wtedy bezwzględna prędkość konduktora $v_b = 20 + 1 = 21$ m/s; gdyby zaś przechodził on w odwrotnym zwrocie biegowi pociągu, wtedy $v_b = 20 - 1 = 19$ m/s. Gdyby dany pociąg biegł po równoleżniku kuli ziemskiej w zwrocie zgodnym z obrotem ziemi i gdybyśmy chcieli uwzględnić prędkości obrotu kuli ziemskiej, wtedy należałoby do 21 dodać algebraicznie prędkość punktu kuli ziemskiej, w którym rozpatrujemy ruch pociągu. Jeżeli kierunki ruchów są różne, to zamiast dodawania algebraicznego zastosujemy dodawanie wektorowe.

Przykład. Punkt ruchomy przesuwa się wzdłuż prostej ruchem jednostajnym, z prędkością c_w; podczas tego ruchu prosta obraca się również ruchem jednostajnym w płaszczyźnie rysunku około jednego ze swoich punktów, prędkość kątowa tego obrotu jest φ. Należy wyznaczyć prędkość bezwzględną punktu w różnych położeniach prostej unoszącej i wykreślić z tych punktów tor bezwzględny, przyjąwszy, że w początku liczenia punkt ruchomy znajdował się w środku obrotu. Ażeby rozwiązać to zadanie, należy wykreślić obracającą się prostą w kilku jej położeniach dla okresów czasu, np. $t = 0, 1, 2$ i t. d., i następnie na tych prostych należy wyznaczyć odpowiednie położenie punktu ruchomego; możemy to wykonać, gdyż znamy c_w i φ, w ten sposób wyznaczymy oddzielne punkty toru. Ażeby wyznaczyć prędkość punktu ruchomego w pewnem miejscu toru, uważać będziemy ruch punktu w każdem położeniu toru, jako niezależne zadanie, a prędkość jego wyznaczymy z równania $\bar{v}_b = \bar{c}_w + V\,\bar{r}\,\varphi$, w którem $\bar{r}$ oznacza promień wodzący punktu ruchomego, przytem $r = ct$, oraz $V\,\bar{r}\,\bar{\varphi} = \bar{v}_u$. Zadanie to poleca się rozwiązać wykreślnie, a następnie analitycznie.

Uwaga. Zauważyć należy, że podług określenia prędkości, kierunek jej pokrywa się z kierunkiem cząstki toru, t. j. kierunek prędkości punktu ruchomego jest styczny do toru, zakreślonego przez dany punkt; wyznaczenie zatem prędkości bezwzględnych pozwala wykreślić styczne do toru bezwzględnego. Zastosować tą myśl do wykreślenia stycznych do toru, jaki otrzymamy w zadaniu poprzedniem.

51. Prawo superpozycyi. Wyprowadzając wzór $\bar{v}_b = \bar{v}_u + \bar{v}_w$, zrobiliśmy pewną niedokładność w rozumowaniu, z której należy zdać sobie sprawę i bliżej ją omówić; mianowicie, w rozumowaniu tem **przyjęliśmy**, że prędkość $\bar{v}_w$ jest prędkością, z którą punkt ruchomy przebywa tor x, gdy ten tor jest w spoczynku, t. j. gdy $\bar{v}_u = 0$, i w tenże sposób przyjęliśmy, że $\bar{v}_u$ jest prędkością toru, gdy $v_w = 0$; następnie punktowi ruchomemu nadaliśmy obydwa ruchy jednocześnie, przyjmując milcząco, że prędkości $\bar{v}_w$ i $\bar{v}_u$, podczas ruchu jednoczesnego, nie zmienią się; w tem miejscu naszego rozumowania powinna się nasunąć wątpliwość, czy mamy prawo przyjąć, że, podczas ruchu **jednoczesnego**, prędkości $\bar{v}_w$ i $\bar{v}_u$ nie zmienią się.

Biorąc dane zjawisko, z ogólnie-fizycznego punktu widzenia, łatwo zauważymy, że czynniki, które działają **kolejno** i wywołują pewne skutki, — pewne zmiany, nie zawsze, działając **jednocześnie**, wywołują sumę tych skutków. Gdy jeden koń np. jest w stanie ciągnąć pewien ciężar z prędkością 2 m/sek., wtedy pięć koni, nie nada prędkości $5 \times 2 = 10$ m/s. Otóż w danym razie czynniki, składające dane zjawisko, **nie dodają się**.

Weźmy inny przykład. Człowiek idzie wzdłuż pociągu, będącego w spoczynku, z prędkością 1 m/sek. względem tegoż pociągu; gdy zaś pociąg będzie w biegu np. z prędkością 20 m/sek. ze zwrotem zgodnym z prędkością człowieka, wtedy powiemy, że bezwzględna prędkość człowieka $v_b = 20 + 1 = 21$ m sek. W tym przykładzie czynniki, składające dane zjawisko ruchu **dodają** się. Inaczej wyrażając się, powiemy, że w pierwszym przykładzie nie zachodzi prawo superpozycyi, t. j. dodawania czynników; w drugim zaś zachodzi prawo superpozycyi. Nasuwa się teraz pytanie, w jaki sposób możemy rozpoznać, czy dane zjawisko podlega prawu superpozycyi, czy nie? Jedyną drogą do orzeczenia tego jest droga spostrzegań, bo chociaż w powyższych przykładach jest „jasnem", w którym z nich zachodzi prawo superpozycyi, w którym zaś nie zachodzi; lecz to przeświadczenie posiada swoje źródło w naszem doświadczeniu, które zdobyliśmy mimo świadomości. Zjawiska np. chemiczne nie podlegają w wielu przypadkach prawu superpozycyi; lecz ten wniosek stanie się dopiero jasnym po zebraniu znacznej ilości danych.

Prawo więc superpozycyi ruchów, t. j. właściwość, że wynik równa się sumie (liczbowej lub wektorowej) oddzielnych czynników, jest prawem doświadczalnem i jest jednem z trzech praw zasadniczych mechaniki.

Prawo superpozycyi daje również dogodną metodę badania zjawisk ruchu, każdy bowiem więcej złożony ruch możemy rozłożyć na ruchy składowe,—prostsze; następnie po zbadaniu właściwości każdego z nich, będziemy mogli orzec o właściwościach ruchu złożonego. Ruch np. ciał, wyrzuconych w próżni, składa się z dwóch ruchów, jednostajnego i jednostajnie przyśpieszonego; z tych dwóch rodzajów ruchu możemy złożyć całość zjawiska i określić jego kinematyczne i geometryczne właściwości.

52. Złożony ruch bryły i prędkości jej punktów. Mówiąc o ruchu bryły, rozumiemy ruchy oddzielnych jej punktów. Nietylko punkt lecz i bryła może posiadać dwa i więcej ruchów; każden ze składowych ruchów danej bryły powinien być przytem ściśle określony. Zadanie w danym razie polega na wyznaczeniu prędkości każdego punktu bryły z wielkości, określających jej ruchy składowe. Rozpatrzymy przedewszystkiem sposoby wyznaczania prędkości wypadkowych, a następne sposoby wyznaczania przyśpieszeń wypadkowych; w tym celu rozpatrywać będziemy kolejno najprostsze ruchy składowe; następnie rozpatrzymy ogólne przypadki.

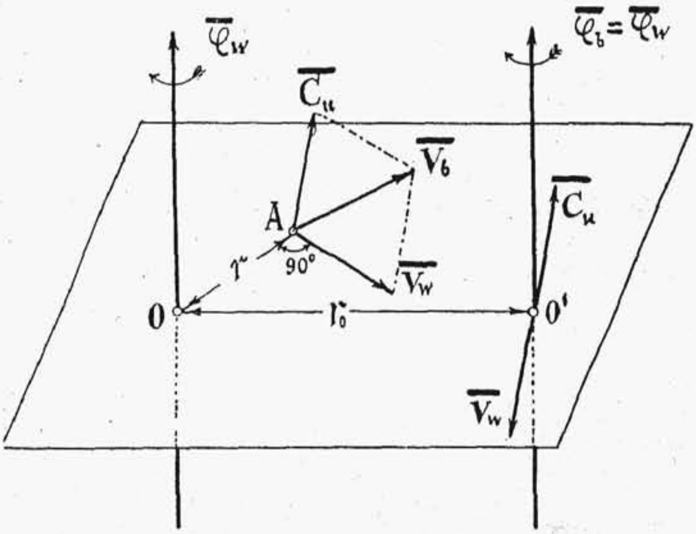
53. Dwa ruchy postępowe. Przypadek tego ruchu zachodzi, gdy np. łódka jest unoszoną przez prąd rzeki ruchem postępowym i jednocześnie, wskutek działania wioseł, zdąża ona poprzek rzeki również ruchem postępowym; każdy punkt łódki posiada w danym razie dwa ruchy postępowe.

Gdy bryła dana posiada dwa ruchy postępowe, wtedy każdy jej punkt posiada dwie prędkości, które wyznaczają jego prędkość wypadkową. Ponieważ przyjęliśmy, że ruchy danej bryły są postępowe, przeto prędkości składowe wszystkich jej punktów w danej chwili są wzajemnie równe i równoległe, zatem i ich wypadkowe będą wzajemnie równe i równoległe. Wniosek ten wyrazimy w sposób następujący:

ruch bryły, wywołany przez ruchy postępowe, jest również ruchem postępowym i prędkość jego jest równa sumie wektorowej prędkości ruchów składowych.

54. Ruch obrotowy i postępowy, prostopadły do osi obrotu. Obraz takiego ruchu przedstawimy sobie, gdy osi, obracającej się bryły, nadamy ruch postępowy, którego kierunek jest prostopadły do tej osi. Zadaniem naszem jest wyznaczyć prędkości bezwzględne punktów tej bryły, gdy dane są: prędkość ruchu postępowego $\bar{c}_u$ i prędkość kątowa $\bar{\varphi}_w$.

Podczas obrotu bryły punkty jej otrzymują prędkości, które uważać możemy za prędkości względne, zatem napiszemy równanie $v_w = r \cdot \varphi_w$, w którem r oznacza odległość rozpatrywanego punktu od osi obrotu; tenże punkt posiada drugą prędkość $\bar{c}_u$ ruchu postępowego, która jest prędkością unoszącą. Prędkości $\bar{v}_w$ i $\bar{c}_u$ leżą w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu; prędkość zatem bezwzględna rozpatrywanego punktu $\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{c}_u$, jest również prostopadłą do osi obrotu. W ten sposób moglibyśmy wyznaczyć prędkości bezwzględne wszystkich punktów bryły. Sposób ten da się jednakże uogólnić, gdy zważymy, że ruch złożony w sposób opisany jako ruch płaski, można wywołać przez obrót całej bryły około pewnej osi równoległej do pierwszej osi, § 34-ty, wtedy $\bar{v}_b$ obliczymy z prędkości obrotowej około nowej osi i z odległości danego punktu od tej osi. W celu wyznaczenia tej osi, przetnijmy daną bryłę płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu; wtedy otrzymamy figurę płaską, rys. 56-ty, która obraca się około osi $\bar{\varphi}_w$, i której każdy punkt A posiada dwie prędkości $\bar{v}_w$ i $\bar{c}_u$, prędkości te wyznaczają prędkość bezwzględną tego punktu, t. j. $\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{c}_u$. Jeżeli ten ruch złożony może być wywołany przez obrót, to na danej płaszczyźnie powinien znajdować się punkt O', który będzie środkiem tego obrotu. Środek ten wyznaczymy, jeżeli znajdziemy punkt bryły, którego prędkość bezwzględna podczas ruchu równa się zeru; to jest dla takiego bieguna $\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{c}_u = O$; lub inaczej $v_w = -\bar{c}_u$; powinniśmy więc znaleźć punkt, którego prędkość $\bar{v}_w$ równa się co do kierunku i co do wartości prędkości $\bar{c}_u$; a zwrot jej jest przeciwny zwrotowi prędkości $\bar{c}_u$. Punkt taki leżeć może tylko na prostopadłej do kierunku wektora $\bar{c}_u$, wyprowadzonej z O, i na tej stronie tej osi, na której zwroty obydwóch prędkości są przeciwne. Odległość r_0 tego punktu od O obliczymy z równania $r_0\,\varphi_w = c_u$. Środek ten znaleźć można również z dwóch dowolnych położeń wektora prędkości, § 34-ty.



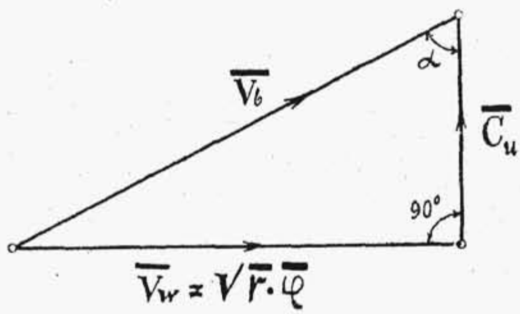
Rys. 56.

W ten sposób wyznaczony punkt O' posiada, podczas chwilowego ruchu bryły, prędkość wypadkową równą zeru; jest więc on środkiem obrotu. Ponieważ opisany ruch bryły jest płaski, przeto równoległa, wyprowadzona z tego punktu do danej osi obrotu, będzie osią wypadkowego obrotu bryły. Wyznaczywszy położenie tej osi, **obliczymy prędkość bezwzględną dowolnego punktu bryły, jako prędkość wywołaną obrotem około** O'; jeśli wiadomą jeszcze będzie prędkość obrotowa około tej nowej osi; prędkość tę nazwiemy wypadkową prędkością obrotową, wielkość jej obliczymy, znając prędkość wypadkową jakiegobądź punktu bryły; w tym celu zauważymy, że punkt O posiada prędkość bezwzględną $v_b = c_u$, napiszemy więc $\varphi_b r_0 = c_u$, skąd $\varphi_b = \frac{c_u}{r_0} = \varphi_w$; zauważymy następnie, że zwrot obrotu φ_b jest ten sam, co zwrot obrotu φ_w, co, łącznie z warunkiem równoległości osi, wyrazimy wektorowo, że $\bar{\varphi}_b = \bar{\varphi}_w$. Wszystko, wyżej powiedziane, streścimy w sposób następujący:

ruch bryły, wywołany przez obrót około pewnej osi i przez jednoczesny ruch postępowy w kierunku prostopadłym do niej, jest ruchem obrotowym z tymże zwrotem i z tą samą prędkością kątową około innej osi, która jest równoległa do pierwszej.

Płaszczyzna obydwóch osi jest prostopadła do kierunku prędkości $\bar{c}_u$ ruchu postępowego; wzajemna ich odległość $r_0 = \frac{c_u}{\varphi}$, i należy ją odłożyć na tę stronę osi obrotu względnego, po której prędkości $\bar{v}_w$ i $\bar{c}_u$ posiadają zwroty przeciwne.

55. Ruch obrotowy i postępowy wzdłuż osi obrotu. Obraz tego ruchu przedstawimy sobie, gdy oś obrotu, wraz z obracającą się bryłą, przesuwać będziemy wzdłuż tejże osi. Podczas tego ruchu, każdy punkt bryły pozostaje na powierzchni walca, którego osią jest oś obrotu, a promieniem jego podstawy jest odległość r, danego punktu, od tej osi. W danem zadaniu posiadamy $\bar{\varphi}_w$, prędkość kątową ruchu względnego, oraz prędkość $\bar{c}_u$ ruchu unoszącego, która jest równoległa do osi obrotu.



Rys. 57.

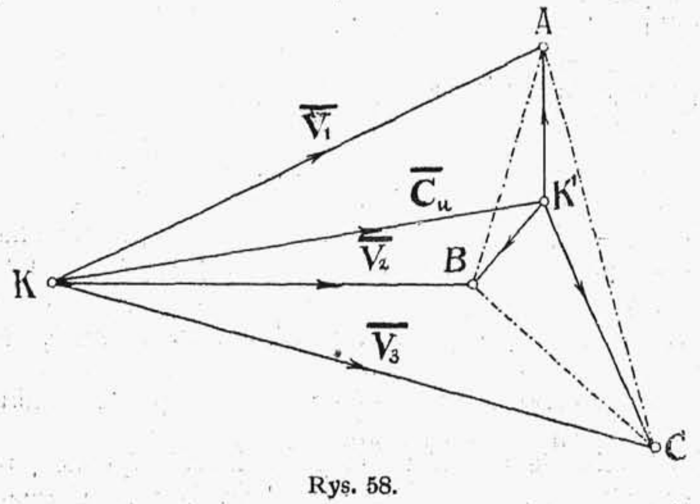
Prędkość względna punktu, oddalonego od osi na długość r, wyznaczymy z równania $v_w = r \cdot \varphi_w$, z nadmienieniem, że jej kierunek jest prostopadły do osi obrotu. Prędkość bezwzględną tego punktu wyznaczymy z równania ogólnego $\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{c}_u$. Ponieważ $\bar{v}_w$ jest prostopadłą do $\bar{c}_u$, rys. 57-my, przeto napiszemy wzór analityczny $v_b = \sqrt{v_w^2 + c_u^2}$, lub wektorowy $\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{c}_u$.

Jeżeli podczas ruchu pewnego punktu, prędkości $\bar{v}_w$, oraz $\bar{c}_u$ są wielkościami stałemi, to napiszemy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varphi_w r}{c_u}$; to znaczy, że punkt ten zakreśla, na odpowiednim jemu walcu, krzywą, której styczne posiadają niezmienny względem osi tego walca kąt; krzywą taką nazwaliśmy już linią śrubową.

Gdy więc bryła wykonywa np. **obrót jednostajny** około pewnej osi nieruchomej i jednocześnie **posuwa się wzdłuż tej osi ruchem również jednostajnym**, wtedy wszystkie jej punkty zakreślają linie śrubowe i mówimy, że dana bryła znajduje się **w ruchu śrubowym**; oś obrotu nazywamy wtedy **osią ruchu śrubowego**.

Jako szczególny przypadek ruchu śrubowego może być obrót, gdy $c_u = 0$; lub ruch postępowy, gdy $\varphi_w = 0$.

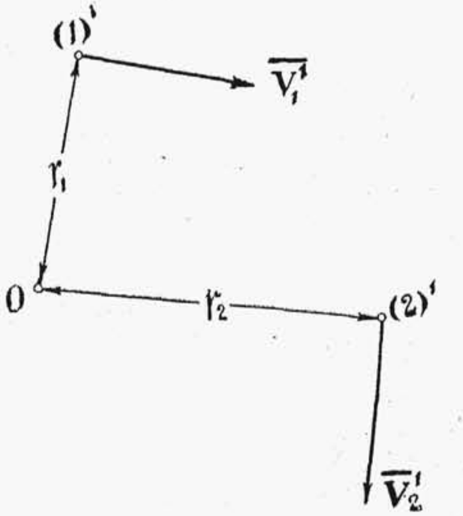
Z rys. 57-go odczytamy, że rzuty prędkości bezwzględnych na oś obrotu, są w danym ruchu równe prędkości $\bar{c}_u$; cośmy już dowiedli przy określeniu ruchu śrubowego. Właściwość ta pozwala wyznaczyć położenie osi ruchu śrubowego bryły, której prędkości są znane co do kierunku i wartości. W celu wyznaczenia położenia tej osi (porów. § 44), obieramy trzy punkty danej bryły, których prędkości wektorowe są nam znane, i szukamy w przestrzeni takiego położenia prostej, na którą rzuty tych trzech prędkości będą wzajemnie równe. Ażeby taką prostą wyznaczyć, wyprowadzimy z dowolnego punktu K, obranego w przestrzeni, trzy wektory $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ i $\bar{v}_3$, równe trzem prędkościom obranych punktów, przez końce tych wektorów przeprowadzimy płaszczyznę i opuścimy na nią z wierzchołka K prostopadłą KK', wtedy oś ruchu śrubowego jest do niej równoległą; pozostaje jeszcze wyznaczyć właściwe jej położenie w przestrzeni; w tym celu przeprowadzimy płaszczyznę dowolną, lecz prostopadłą do prostej KK', zrzutujemy na nią dwa jakiebądź punkty ruchomej bryły i ich prędkości, tymi punktami mogą być również dwa z wyżej już stosowanych trzech punktów. Niechaj tą płaszczyzną będzie płaszczyzna naszego rysunku, rys. 59-ty, punkty $(1)'$ i $(2)'$ niech przedstawiają rzut właściwych punktów, prędkości, $\bar{v}'_1$ i $\bar{v}'_2$ niech będą rzutami właściwych przędkości to punkty $(1)'$ i $(2)'$ podczas ruchu bryły zakreślają koła spółśrodkowe, które mogą być uważane za podstawy walców, na których znajdują się właściwe punkty; rzuty $\bar{v}_1'$ oraz $\bar{v}_2'$ są stycznemi do pomienionych kół, środek więc ich łatwo już wyznaczyć, wyprowadziwszy prostopadłe w punktach $(1)'$ i $(2)'$ do wzajemnego ich przecięcia się w O; prosta przeprowadzona przez punkt O i równoległa do KK', lub prostopadła do przeprowadzonej płaszczyzny, wyznacza w przestrzeni właściwe położenie osi ruchu śrubowego.



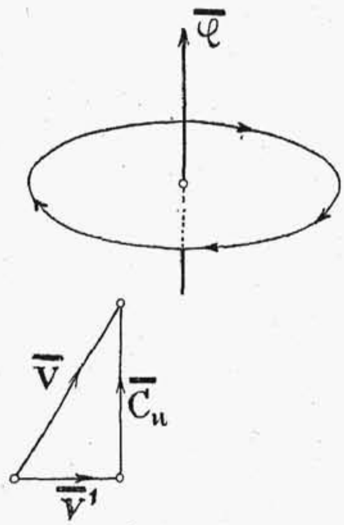
Rys. 58.

Wyznaczywszy następnie odległość r_1 punktu $(1)'$ od O, napiszemy

$\varphi r_1 = v_1'$, skąd otrzymamy wartość prędkości obrotowej $\varphi = \frac{v_1'}{r_1}$. Z rysunku 58-go odczytamy, że prędkość ruchu postępowego równa się odcinkowi KK', oraz, że $v_1 = AK'$.



Rys. 59.



Rys. 60.

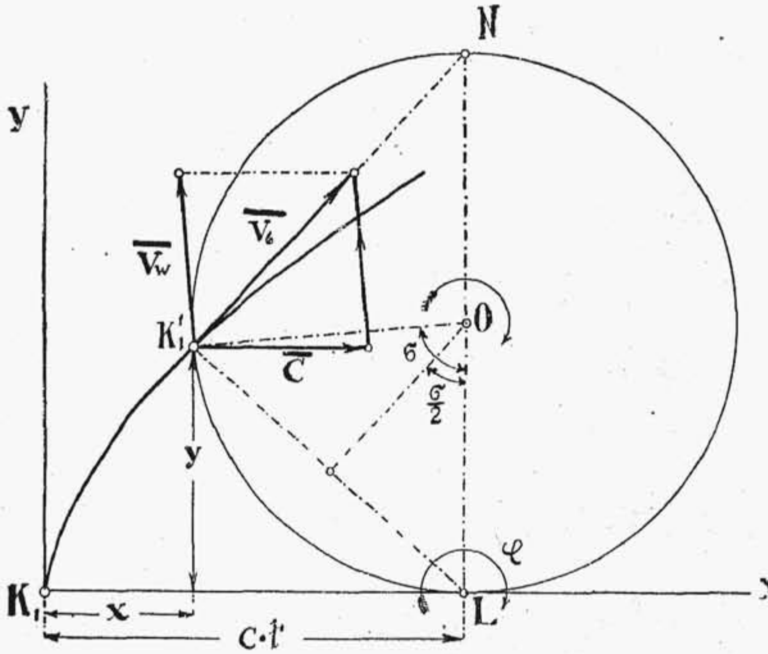
Zwrócić należy uwagę, iż w zadaniu tem jest nadmierna ilość danych; przyjęliśmy bowiem dla uproszczenia zadania jako dane trzy wektory prędkości, które stanowią dziewięć wielkości liczbowych, gdy ruch bryły określony jest przez sześć wielkości.

56. Ruch obrotowy i postępowy w dowolnym kierunku. W danym przypadku rozkładamy prędkość $\bar{v}$ ruchu postępowego w kierunku osi obrotu i prostopadle do niej, rys. 60-ty. Składając prędkości ruchu obrotowego z prędkością prostopadłą do osi, otrzymamy ruch obrotowy około osi równoległej do danej osi; oś tę wyznaczymy na zasadzie poprzednich rozważań. Pozostaje obecnie dodać ruch obrotowy około nowej osi, z pozostałym z rozłożenia ruchem postępowym, równoległym do osi; w rezultacie tego dodania otrzymamy ruch śrubowy. Wynik tego rozumowania wypowiemy w sposób następujący:

ruch bryły, który jest wywołany przez obrót około osi i przez jednoczesny ruch postępowy w dowolnym kierunku, jest ruchem śrubowym.

57. Przykłady. 1) Koło toczy się w swojej płaszczyźnie ruchem jednostajnym po prostej linii, należy wyznaczyć ruch wypadkowy punktu obranego na tym kole, gdy prędkość $\bar{c}$ środka koła i średnica jego r są dane, rys. 61-szy.

Punkty koła wykonywują podwójny ruch, ruch postępowy jednostajny i ruch jednostajny obrotowy około środka. Tor względny punktu jest koło; ruch unoszący jest postępowy i prostolinijny. Gdy wyobrazimy sobie przez O przeprowadzoną oś prostopadłą do płaszczyzny koła, to otrzymamy przykład ruchu obrotowego i postępowego, prostopadłego do osi obrotu.



Rys. 61.

Przystąpimy najpierw do obliczenia prędkości obrotowej φ około środka. Gdy koło toczy się po pewnej linii, to długość łuku koła odkłada się na linii, po której się ono toczy. Jeżeli więc w pewnej chwili ruchu punkty K_1 i K_1' pokrywały się, to podczas toczenia się długość łuku $K_1'L$ = długości K_1L. Dla okresu więc czasu t, licząc od chwili, w której punkty K_1' i K pokrywały się, łuk $K_1'L = r\varphi t$, oraz $K_1L = c.\ t$, przeto $r\varphi t = ct$, skąd $r\varphi = c$. Wyraz $r\varphi$ przedstawia wartość prędkości względnej punktu, znajdującego się na kole i jest ona równa prędkości unoszenia c. W celu wyznaczenia położenia środka obrotu wypadkowego, zastosujemy wyprowadzony wzór, że $r_0 = \frac{c}{\varphi}$, który, łącznie z poprzednim, da wielkość $r_0 = r$. Punkty więc zetknięcia koła z prostą x są środkami obrotów chwilowych, co zresztą wynika z warunku toczenia się. Zakreśliwszy z tego punktu cząstkę koła o promieniu $K_1'L$, otrzymamy cząstkę toru bezwzględnego, jaki zakreśla obrany punkt.

Podczas toczenia się koła, punkt zetknięcia zmienia swe położenie, punkt więc ten jest środkiem chwilowego obrotu. Znajomość położenia tego środka pozwala wyznaczyć prędkości chwilowe dowolnych punktów, związanych sztywno z danym kołem, gdy zauważymy, że prędkość obrotu wypadkowego równa jest danej prędkości t. j. $= \frac{c}{r}$. Kierunek prędkości bezwzględnej, np. punktu K_1', wyznaczymy, przeprowadzając prostopadłą do promienia $K_1'L$, wartość zaś jej

$$v_b = \varphi . K_1'L = \varphi . 2 r \sin\frac{\sigma}{2} = 2 c \sin\frac{\sigma}{2}.$$

Ponieważ prędkość wypadkowa v_b jest prostopadła do promienia $K_1'L$, przeto kierunek jej przechodzi przez koniec średnicy, przeprowadzonej ze środka chwilowego obrotu; z czego również wynika geometryczna konstrukcya stycznych do toru, zakreślonego przez dowolny punkt, sztywno związany z kołem; krzywe te nazywają się cykloidami.

Równanie toru bezwzględnego wyliczymy, stosując zasadę, że kierunek $\bar{v}_b$ jest kierunkiem stycznej w danym punkcie toru. Lecz ten sposób, w danym razie, posiada pewne niedogodności rachunkowe, i prościej wyprowadzimy to równanie, korzystając z własności geometrycznych ruchu toczenia się. W tym celu wprowadźmy do rachunku kąt σ, jest to kąt względnego obrotu i napiszemy z rysunku 61-go, $x = K_1L - K'_1O \sin\sigma$, skąd, na zasadzie, że $K_1L =$ łukowi $K_1'L = r\sigma$ otrzymamy $x = r . \sigma - r \sin\sigma$, lub

1) $x = r(\sigma - \sin\sigma)$; następnie

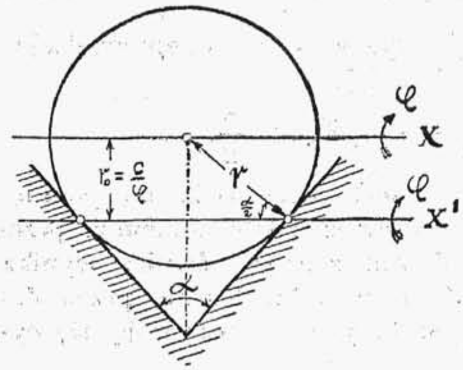
$y = OL - K_1'O \cos\sigma$, skąd $y = r - r\cos\sigma$, lub

2) $y = r(1 - \cos\sigma)$.

Z równania 1-go i 2-go możemy σ wyrugować i otrzymamy wtedy jedno równanie z dwiema zmiennemi x i y, będzie to równanie toru. Zwykle jednakże ze względu na dogodności rachunkowe, krzywą tę przedstawia się przez dwa równania z trzema zmiennemi. Krzywą, zakreśloną przez punkt, leżący na obwodzie koła, nazywają cykloidą pospolitą.

2) **Przykład.** Kula o promieniu r ma obracać się ze stałą prędkością około osi poziomej, przechodzącej przez jej środek i jednocześnie ma posiadać ruch postępowy, prostopadły do osi obrotu, o stałej prędkości $\bar{c}$. Ruchy te chcemy wywołać przez toczenie się kuli we wpuście klinowym prostolinijnym; należy zbudować ten wpust, t. j. należy wyznaczyć kąt jego zbieżności.

Na rysunku 62-gim pokazana jest kula i pozioma oś obrotu x, kierunek prędkości $\bar{c}$ nie jest pokazany, gdyż jest on prostopadły do płaszczyzny rysunku, zwrot tej prędkości przyjmiemy skierowany za płaszczyznę rysunku. Na rysunku jest również pokazany przekrój wpustu, w którym kula przez toczenie się ma nabywać prędkości postępowej c i obrotowej φ; należy wyznaczyć kąt α. Ruchem wypadkowym tych dwóch prędkości jest obrót około osi równoległej do x, odległej od niej na $r_0 = \frac{c}{\varphi}$ i odciętej po stronie osi x, gdzie prędkości składowe posiadają zwroty przeciwne, oś tę oznaczyliśmy na rysunku literą x'. Jeżeli kula ma się toczyć, to punkty, przecięcia się osi x' z kulą, powinny być punktami zetknięcia się kuli z powierzchnią wpustu; na tej zasadzie wykreślimy kąt α i z rys. 62-go odczytamy bezpośrednio $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r_0}{r} = \frac{c}{\varphi \cdot r}$.



Rys. 62.

Kula, zmieniając swe położenie, zmienia również położenie osi wypadkowej x'; gdy następnie wyobrazimy sobie te osi przymocowanemi do kuli, to utworzą one walec, którego osią jest oś x, a promień jego podstawy jest $r_0 = \frac{c}{\varphi}$. Walec ten przetnie kulę po kołach, które są geometrzycznem miejscem zetknięć kuli z płaszczyznami wpustu. Gdy zaś wyobrazimy sobie osi x', umocowanemi w przestrzeni nieruchomej, t. j. przymocowanemi do wpustu, to miejsce ich geometryczne będzie płaszczyzna równoległa do kierunku osi x i kierunku prędkości postępowej c. Ruch więc żądany można wywołać przez toczenie się kuli we wpuście, lub też przez toczenie się wspomnianego walca po płaszczyźnie. Sprowadzenie danego ruchu do toczenia się jest zgodne z twierdzeniem ogólnem dla ruchów płaskich, że wszystkie ruchy płaskie mogą być wywołane przez toczenie się jednego walca po drugim.

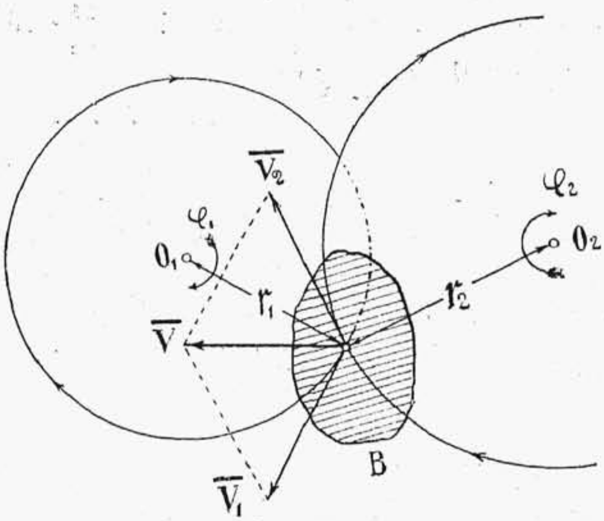
Szczególne przypadki powyższego przykładu. Wzór $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{\varphi \cdot r}$, daje matematyczny związek pomiędzy wielkościami α, c i φ, dla kuli o promieniu r. Znając dwie z tych wielkości, możemy obliczyć trzecią.

a) Gdy $\alpha = 180^0$, wtedy $\sin\left(\frac{180^0}{2}\right) = \frac{c}{\varphi r}$, skąd $c = \varphi r$; jest to warunek toczenia się po płaszczyźnie kuli lub koła o promieniu r.

b) Gdy $\alpha = 0^0$, t. j. gdy ściany wpustu są wzajemnie równoległe, wtedy $0 = \frac{c}{\varphi r}$, skąd $\frac{c}{\varphi} = 0$; przyjmujemy bowiem $r > 0$, a więc $r_0 =$

$=\frac{c}{\varphi}=0$, t. j., walec, toczący się, przechodzi w prostą linię i niema w danym razie ruchu toczenia się, jest tylko obrót kuli około nieruchomej osi.

58. Ruchy obrotowe około osi równoległych. Jeżeli bryła obraca się około pewnej osi, i oś ta obraca się jednocześnie około innej osi do niej równoległej, to każdy punkt tej bryły posiada dwie prędkości, które dają prędkość wypadkową; zajmiemy się obecnie wyznaczeniem tej prędkości. W tym celu przeprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do obydwóch osi i niechaj punkty O_1 i O_2 będą punktami przecięcia się jej z osiami obrotów, a figura zakreskowana B — przecięciem się z bryłą. Niechaj figura płaska, rys. 63-ci, obraca się około środka O_2, środek zaś O_2 niech obraca się około O_1. Obierzemy następnie dowolny punkt figury ruchomej, będzie on w tym ruchu posiadał prędkości składowe $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$, które dadzą prędkość bezwzględną $\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2$. Czyniąc to dla każdego punktu danej figury, wyznaczymy w ten sposób prędkości bezwzględne wszystkich jej punktów; wyznaczenie jednakże wszystkich tych prędkości będzie uproszczone i otrzymamy ogólniejszy pogląd na ich rozmieszczenie w przestrzeni, gdy zważymy, że ruch jest płaski, prędkości przeto bezwzględne takiego ruchu są prędkościami, które można wywołać obrotem bryły około innej osi, § 34-ty. Myślą przewodnią poszukiwania takiej osi będzie zasada, że bezwzględne prędkości punktów, leżących na niej, są $=0$; a więc dla punktów takiej osi zachodzi równanie $\bar{v}_1+\bar{v}_2=0$; co może nastąpić, gdy $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ leżeć będą na jednej prostej i gdy ich wartości będą wzajemnie równe, a zwroty przeciwne. Zamiast osi szukać będziemy na naszym rysunku punktu, którego prędkość podczas chwilowego obrotu $=0$, i punkt ten będzie środkiem obrotu. Środek taki leżeć może tylko na prostej x, łączącej O_1 i O_2, rys. 64-ty, gdyż składowe prędkości jej punktów leżą na prostopadłych do niej; i przytem leżeć on może w tej części prostej, w której prędkości składowe posiadają zwroty



Rys. 63.