Kinematyka.

I. Kinematyka punktu.

1. Miara długości i czasu. W § 1-szym i nast. tomu I-go zajmowaliśmy się przesunięciami punktu ruchomego niezależnie od czasu, w jakim on je wykonywał. Badania te były czysto geometrycznej natury i doszliśmy też za pomocą tych rozważań do pewnych, czysto geometrycznych twierdzeń. Obecnie wprowadzimy do naszych rozpatrywań miarę czasu; a więc będziemy mówili o przesunięciach, które wolniej, czy też prędzej odbywają się od innych przesunięć i t. p. Jasnem jest, iż wszystkie poprzednie twierdzenia muszą pozostać w swej mocy, gdyż wszelki ruch musi odpowiadać stosunkom przestrzennym. Dział ten mechaniki ogólnej nazywa się **kinematyką**.

Ponieważ w następnych rozpatrywaniach będziemy poszukiwali zależności pomiędzy długościami i czasem, musimy umówić się co do jednostek, w jakich mamy zamiar je mierzyć.

Pewną wielkość zmierzyć, to znaczy, porównać ją z drugą wielkością tegoż samego rodzaju i następnie stosunek ich oznaczyć pewną liczbą. Liczba ta wyraża wiele razy obrana wielkość, którą nazwiemy jednostką, mieści się w mierzonej wielkości. A więc długości możemy i musimy mierzyć tylko długościami; pola polami; objętość objętościami; czas czasem, i t. d.

Jako jednostkę długości przyjęto w praktyce technicznej metr również wielokrotność metra i części jego przyjmowane są za jednostki. Wielokrotność i podział metra wyraża się przez potęgi 10-ciu metrów.

Jako jednostkę czasu stosujemy sekundę; lecz również często obieramy minutę, lub godzinę*).

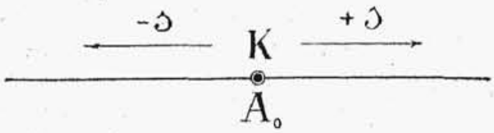
W każdym więc poszczególnym przypadku należy wymienić, jaką obieramy jednostkę miary. Zwracam uwagę, iż, szczególniej dla technika,

*) Określenie kinetyczne „czasu" podamy w dynamice punktu.

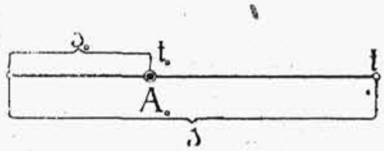
liczby, bez objaśnienia co do obranych jednostek miar nie posiadają **żadnej wartości** tak, iż jest koniecznem przy każdej liczbie dopisywać bezpośrednio jednostki, w jakich ta liczba jest wyrażoną.

A. Prostolinijny ruch punktu.

2. Początkowe warunki liczenia. Weźmy pod uwagę punkt ruchomy K, który wychodzi z miejsca A_0, rys. 1-szy, i zakreśla linię prostą. Na linii tej, licząc od miejsca A_0, obieramy zwrot ruchu dodatni i odjemny. Mówimy wtedy, że punkt K zakreśla drogę o długości s i o zwrocie dodatnim lub odjemnym; piszemy zatem, iż dany punkt zakreśli drogę: $(+s)$, lub $(-s)$. Czas, w którym obrany punkt K przebiega drogę, zaczynamy zwykle liczyć od chwili wyjścia punktu z miejsca A_0; wyrazimy ten warunek matematycznie: dla $s=0$, $t=0$. Na zasadzie tych oznaczeń, odjemnym okresem czasu będziemy nazywali okres, trwający przed chwilą, od której zaczęliśmy go liczyć; możemy więc teraz mówić o wielkościach $(\pm s)$, oraz $(\pm t)$. Moglibyśmy pod względem początku liczenia postawić inne założenia; wtedy i powyższe równania, wyrażające warunki liczenia, odpowiednio się zmienią. Liczenie czasu możemy zacząć np. w chwili, gdy zegarek wskazuje czas t_0, a punkt ruchomy przeszedł już drogę s_0; wtedy wyrazimy te warunki, dla $s=s_0$, $t=t_0$. Długość więc drogi, jaką punkt ruchomy zakreśli w czasie $(t-t_0)$, będzie równą $(s-s_0)$, rys. 2-gi.



Rys. 1.



Rys. 2.

3. Równania prostolinijnego ruchu punktu. Gdy obserwujemy ruch pewnego punktu, mierząc jednocześnie drogę przebytą i czas, w którym dany punkt ją przebywa, wtedy zauważymy, iż w każdej chwili punkt ruchomy znajdzie się w pewnej odległości od początku układu; jest tu więc pewna zależność pomiędzy wielkościami s i t. Matematycznie zależność ta wyrazi się pewną funkcyą; a więc napiszemy wogóle, że $s=f(t)$; z tego równania dla każdej wartości t otrzymamy odpowiednią wartość i odwrotnie s.

Równanie $s=f(t)$, które wskazuje matematyczną zależność pomiędzy przebytą drogą i czasem (s i t), nazywamy **równaniem ruchu pomiędzy drogą i czasem.** Dla unaocznienia zmian, zachodzących pomiędzy s i t, możemy równanie ruchu wykreślić w układzie np. osi prostokątnych, odnosząc np. na osi poziomej wartości t, na osi zaś pionowej wartości s; otrzymamy w ten sposób pewną krzywą, odniesioną do układu osi (s, t), którą nazwiemy **wykresem** (s, t) danego ruchu.

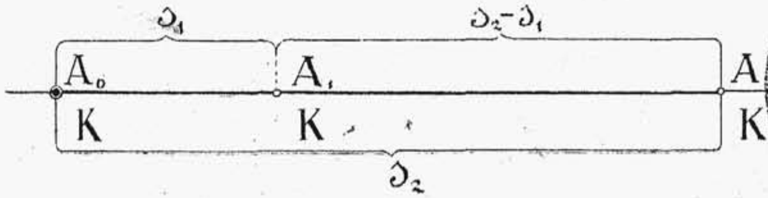
W praktyce mamy często dane, zamiast funkcyi lub wykresu, dwa szeregi liczb, z których jeden szereg wykazuje wartości s, drugi zaś — odpowiednie wartości t; z tych szeregów możemy bezpośrednio odczytać wartości dla s przy danem t, lub odwrotnie; wartości pośrednie można obliczyć za pomocą interpolacji. Możemy również z tego szeregu zrobić wykres (s, t).

Zadania. Zrobić wykres (s, t) dla równań ruchu:

1) $s = 5t$; 2) $s = 6t - t^2$ 3) $s = \sin t$.

W celu rozwiązania podobnych zadań, należy obliczyć szeregi wartości dla s i t i następnie wykreślić te krzywe, wyznaczając na rysunku punkt po punkcie.

4. **Jednostajny ruch punktu i prędkość jego. Określenie.** Ruchem jednostajnym prostolinijnym punktu ruchomego nazywamy taki ruch, podczas którego punkt zakreśla drogę proporcyonalną do czasu.



Rys. 5.

Z tego określenia wypływa, że równanie ruchu jednostajnego i prostolinijnego ma postać $\frac{s}{t} = c$; gdzie c jest pewną stałą wartością dla danego ruchu, rys. 3-ci. Na zasadzie powyższego równania możemy napisać dla dwóch położeń punktu: $s_1 = ct_1$, oraz $s_2 = ct_2$; odejmując pierwsze równanie od drugiego, otrzymamy:

$$s_2 - s_1 = c(t_2 - t_1); \text{ skąd}$$

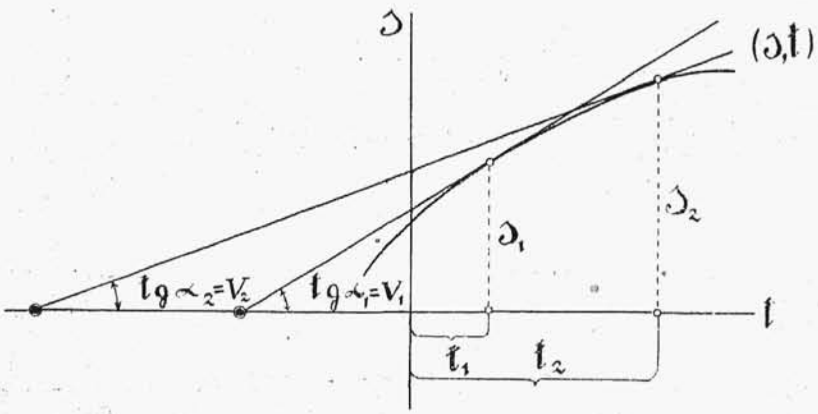
$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = c;$$

Znaczenie tego wzoru jest następujące: $(s_2 - s_1)$ oznacza pewną długość drogi, zaś wyraz: $(t_2 - t_1)$ okres czasu, w którym punkt ruchomy przebył tę drogę. Długość $(s_2 - s_1)$ nazywamy przyrostem drogi s i oznaczamy go, jeżeli on jest mały, przez Δs t. j. piszemy: $s_2 - s_1 = \Delta s$; w tenże sposób $(t_2 - t_1)$ nazwiemy przyrostem czasu i oznaczymy: $(t_2 - t_1) = \Delta t$. Na zasadzie tych określeń możemy wysłowić określenie ruchu jednostajnego w następujący sposób: ruchem jednostajnym i prostolinijnym nazywa się ruch, w którym **stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu**, w ciągu którego ten przyrost powstał,— jest stały. Wzór więc $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ = stałej, jest warunkiem ruchu jednostajnego.

Ponieważ ten stosunek zachodzi dla najmniejszych długości drogi i dla najmniejszych okresów czasu, przeto te wartości obrać możemy znikomo małemi i, oznaczając je przez ds i dt, warunek jednostajności ruchu prostolinijnego przedstawi się algebraicznie w postaci $\frac{ds}{dt} = c$; gdzie c jest wielkością stałą dla danego ruchu.

Równanie to należy rozumieć w ten sposób, iż w ruchu jednostajnym i prostolinijnym zachodzi proporcyonalność pomiędzy długością drogi i okresem czasu, w najdrobniejszych poruszeniach punktu.

5. **Prędkość zmienna prostolinijnego ruchu punktu**. W ruchu jednostajnym, poprzednio określonym, założyliśmy, że prędkość w każdej chwili jest stałą; lecz, gdy zwrócimy się do pomiarów ruchów, zacho-

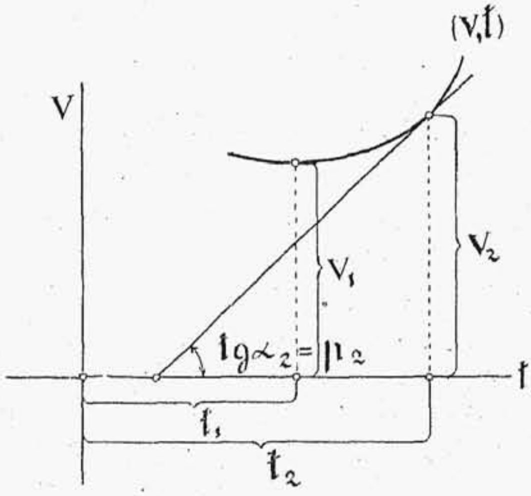


Rys. 4.

dzących w zjawiskach nas otaczających, zauważymy, iż bywają ruchy, które nieodpowiadają temu warunkowi. Mierząc np. długości różnych dróg i okresy czasu, w jakich punkt ruchomy zakreślił te drogi, znajdziemy, że stosunek $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ jest innym w każdej chwili czasu, lub też w każdem miejscu drogi. Symbol Δs oznacza długość pewnego odcinka drogi, Δt odpowiedni jemu okres czasu, gdy więc Δs i Δt zmniejszymy do nieskończenie małych wielkości, napiszemy **wtedy** dla danych przypadków z pominięciem wielkości nieskończenie małych wyższych rzędów, limes $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = F(t)$, lub $\frac{ds}{dt} = f(s)$, i powiemy, że stosunek $\frac{ds}{dt}$ dla danego ruchu nie jest stałym, lecz zmiennym zależnym od czasu; pociąg np., który wychodzi ze stacji, posiada zmienną prędkość. Oznaczając stosunek $\frac{ds}{dt} = v$, (v — velocitas), możemy również napisać powyższe równania w postaci $v = F(t)$. **Iloraz** $\frac{ds}{dt}$ nazwano **prędkością danego punktu w danej chwili.**

Dla zobrazowania sobie zależności pomiędzy zmiennemi v i t, możemy zbudować wykres tych zmiennych w spółrzędnych np. prostokątnych; wykres taki nazwiemy **wykresem** (v, t).

Z określenia ruchu jednostajnego wynika, iż wykres (v, t) tego ruchu jest prostą równoległą do osi t, gdyż w tym ruchu v = stałej. Mając ruch, którego prędkość jest zmienną, wyznaczymy prędkość punktu ruchomego w każdej chwili, biorąc pierwszą pochodną zmiennej s względem czasu t. j. $\frac{ds}{dt} = v$, gdy danem jest równanie ruchu w postaci $s = F(t)$. Wartość v możemy również wyznaczyć z wykresu (s, t), jeśli zważymy, iż wyraz $\frac{ds}{dt}$ jest tangensem kąta, utworzonego z osią t przez styczną, przeprowadzoną do krzywej (s, t) w pewnym jej punkcie, rys. 4-ty.



Rys. 5.

Dla chwili np. t_1, $s = s_1 = f(t_1)$; prędkość $v_1 = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=t_1} = \operatorname{tg} \alpha_1$, rys. 4-ty.

W ten sposób wyznaczone prędkości w każdej chwili ruchu, możemy przenieść na osi (v, t), rys. 5-ty, i otrzymamy wykres funkcyonalnej zależności pomiędzy v i t.

6. Fizyczne pojmowanie prędkości. W powyższych równaniach podaliśmy określenie prędkości, jako stosunek $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v$, lub ogólniej:

$\frac{ds}{dt} = v$; te dwa wzory zasadniczo niczem się nie różnią między sobą; pierwszy z nich wyraża stosunek skończonej długości drogi, t. j. skończonego przyrostu drogi, do takiegoż okresu czasu; drugi zaś $\frac{ds}{dt} = v$, wskazuje, że te przyrosty zbliżają się do małych wartości.

Określenie prędkości przez stosunek $\frac{ds}{dt} = v$, jest zupełnie wystarczającem i ścisłem dla matematycznych obliczeń, gdyż takie określenie pozwala mówić nam o zmiennych prędkościach **w każdej chwili**. Mówimy więc wogóle o **prędkości w danej chwili**, gdyż ta prędkość może ciągle się zmieniać. Jadąc pociągiem, wyrażamy się często: pociąg w danej chwili posiada prędkość około 40 *km* na godzinę. Wyrażenie „w danej chwili pociąg posiada prędkość" taką a taką, zupełnie dobrze przedstawia stan biegu pociągu, gdyż, po upływie tej chwili, nie wiemy jaką będzie jego prędkość. Mówiąc w ten sposób o prędkości, oceniamy bezwiednie wartość stosunku $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v$. Takie przybliżone ocenianie prędkości matematyka udoskonala przez wprowadzenie symbolu $\frac{ds}{dt} = v$.

W ruchu jednostajnym, podług założenia, stosunek $\frac{ds}{dt} =$ stałej; a ponieważ wzór $\frac{ds}{dt}$ jest ilorazem, przeto możemy również wypowiedzieć jego znaczenie w ten sposób: w ruchu jednostajnym prędkość może być przedstawiona przez długość drogi, jaką punkt ruchomy zakreśli w jednostkę czasu; lecz w ruchu zmiennym tego obrazu nie możemy sobie utworzyć, gdyż prędkość w każdej chwili się zmienia i punkt ruchomy nie zdąży przebiedz ze **stałą** prędkością, naprzykład w jedną sekundę, pewnej części drogi, gdyż prędkość się zmieni. W tym ostatnim przypadku, jeżeli chcemy zobrazować prędkość, możemy stosunek $\frac{ds}{dt} = v$ pojmować jako długość drogi, która **przypada na jednostkę czasu;** zaznaczając w ten sposób matematyczne znaczenie tego stosunku **nie zaś rzeczywistą długość drogi**. Możemy również wzór $\frac{ds}{dt} = v$ w ten sposób pojmować, iż prędkość ruchu zmiennego w danej chwili jest to droga, którą punkt ruchomy **przebiegłby** w jednostkę czasu, **gdyby** od tej chwili ruch stał się jednostajnym.

Zobrazowanie sobie określenia prędkości jak również i innych wielkości, o których będzie mowa, w ten lub inny sposób, — nie wnosi nic nowego do ich pojmowania i pojęcie prędkości, określone przez stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu, jest ściste i pozostaje zawsze w swej mocy niezależnie od sposobu uzmysłowienia sobie tych określeń.

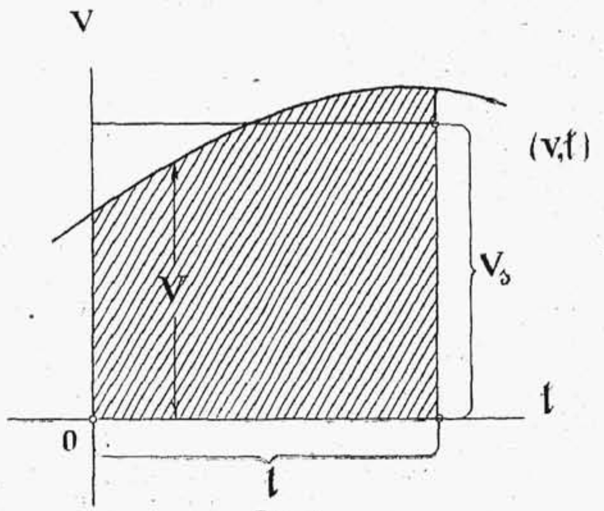
7. Prędkość średnia punktu. W praktyce stosujemy często pojęcie prędkości średniej, której wartość otrzymamy, dzieląc skończoną długość drogi, zakreślonej punktem ruchomym, przez okres czasu, w którym dany punkt przebył tę drogę. Oznaczając naprzykład długość drogi przez s, — czas, w którym ruchomy punkt przebiegł tę drogę przez t, — średnią prędkość przez v_s, otrzymamy $v_s = \frac{s}{t}$.

W ruchu jednostajnym prędkość średnia jest równą prędkości rzeczywistej; w ruchu zaś zmiennym wartość prędkości $v_s = \frac{s}{t}$, nie daje miary ruchu rzeczywistego. Dany punkt bowiem mógł **w ruchu zmiennym** rozmaicie zmieniać swą prędkość, równanie to jednakże nic nam o tem nie mówi. Liczbowo więc równanie $v_s = \frac{s}{t}$, da wtedy tylko rezultaty zgodne z rzeczywistością, gdy weźmiemy pod uwagę całą długość drogi.

Z równania $\frac{ds}{dt} = v$, napisać możemy $ds = v.\,dt$, skąd $s = \int v\,.\,dt$, przeto, chcąc wprowadzić do rachunku prędkość średnią, możemy napisać:

$$v_s\,.\,t = \int_0^t v\,.\,dt$$

gdyż droga, przebyta przez punkt z rzeczywistą prędkością v, ma być równą drodze, którą by punkt przebył w tymże czasie z prędkości średnią v_s.



Rys. 6.

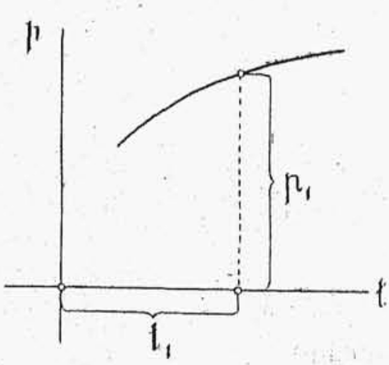
Wartość v_s obliczymy bezpośrednio z równania: $v_s = \frac{s}{t}$, jeżeli s i t są wiadome lub też z równania

$$v_s = \frac{\int_0^t v\,.\,dt}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gdy s nie jest bezpośrednio danem, lecz np. gdy dane jest równanie $v = f(t)$. Wykreślnym sposobem możemy wyznaczyć wartość v_s, gdy danym jest wykres (v, t); wtedy $\int v_{dt}$ przedstawia wielkość pola zawartego pomiędzy krzywą (v, t) i osią t. rys. 6-ty. Pole to podług określenia średniej prędkości powinno być równe $(v_s \, . \, t)$, t. j. równe polu prostokąta o podstawie t i wysokości v_s

Wartość prędkości średniej o tyle więcej zbliża się do prędkości rzeczywistej, o ile dany ruch więcej zbliża się do ruchu jednostajnego. W pewnych przybliżonych rachunkach zastępujemy często równanie ruchu zmiennego przez równanie ruchu jednostajnego. Prędkość więc średnia jest pojęciem pomocniczem w celu porównania ruchu zmiennego z ruchem jednostajnym.

8 Przyśpieszenie prostolinijnego ruchu punktu. Powiedzieliśmy, że wogóle prędkość się zmienia; jako miarę zmiany prędkości **przyjmiemy** stosunek jej przyrostu do okresu czasu, w którym ten przyrost powstał; a więc stosunek $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ przyjmiemy jako miarę zmiany prędkości. Stosunek ten nazwiemy przyśpieszeniem średniem. Jeżeli różnicę $(t_2 - t_1)$ zmniejszymy do nieskończenie małej wartości, to wartość $(v_2 - v_1)$ stanie się również nieskończenie małą, a iloraz dwóch tych wielkości nieskończenie małych przybierze, wogóle mówiąc, wartość skończoną. Wartość tę nazwiemy **przyśpieszeniem danego ruchu w danej chwili** i oznaczymy ją literą p; mamy zatem określenie: **stosunek przyrostu prędkości do okresu czasu, w jakim ten przyrost powstał, nazywamy przyśpieszeniem.** Określenie to wyrażamy wzorem $\frac{dv}{dt} = p$. Wogóle mówiąc, przyśpieszenie będzie zmienne w czasie t. j. $p = f(t)$, lecz w szczególnych przypadkach może być p wartością stałą, t. j. niezależną od t. Ruch taki, w którym p = stałej, nazwano **ruchem jednostajnie zmiennym.**



Rys 7.

Wartości przyśpieszeń możemy łatwo obliczyć z równania ruchu, posiadając bowiem równanie ruchu w postaci $s = f(t)$, obliczymy $v = \frac{ds}{dt} = f(t)$; następnie $p = \frac{dv}{dt}$;

lub inaczej pisząc $p = \frac{d^2s}{dt^2}$. Możemy również uskutecznić to obliczenie na wykresach; posiadając bowiem wykres (v, t) na rys. 5-tym, znajdziemy w każdej chwili wartość p; albowiem wyraz $p = \frac{dv}{dt}$ przedstawia w wykresie (v, t) wartość tangensa kąta, utworzonego przez styczną w danym punkcie krzywej z osią t. W ten sposób otrzymane wartości p możemy znowuż przedstawić w nowym wykresie (p, t), w ktorym p i t są osiami spółrzędnych, rys. 7-my.

Zadanie. Dla wyżej podanych, trzech zadań zbudować wykresy: (v, t), oraz (p, t) i obliczyć analitycznie wzory dla v i p.

9. Równania różniczkowe ruchu punktu i ich całkowanie. Równanie, w którem oprócz zmiennych s i t znajdują się i pochodne tych zmiennych, nazywamy równaniem różniczkowem ruchu; równanie zaś postaci $s = f(t)$ nazwiemy równaniem ruchu w skończonej postaci. Równanie różniczkowe np. ruchu jednostajnego prostolinijnego ma postać $\frac{ds}{dt} = c$ i jest pierwszego rzędu.

Posiadając równanie różniczkowe ruchu, możemy za pomocą całkowania znaleźć równanie ruchu w skończonej postaci, t. j. możemy znaleźć równanie postaci $s = f(t)$. Gdy np. danem jest równanie różniczkowe $\frac{ds}{dt} = c$, natenczas napiszemy $ds = c \, . \, dt$, a po scałkowaniu otrzymamy $s = ct + k$, gdzie k jest pewną stałą wielkością, dotychczas nieoznaczoną.

Stałą tę wyznaczamy z początkowych warunków ruchu, przyjąwszy np. że dla $t = 0$, będzie $s = 0$; podstawiamy wtedy te wartości dla s i t w powyższe równanie i otrzymamy: $0 = 0 + k$, skąd $k = 0$, a więc równanie ruchu, którego równanie różniczkowe ma postać $\frac{ds}{dt} = c$, przy warunkach, że dla $t = 0$, $s = 0$; będzie $s = ct$.

Moglibyśmy również skorzystać z innych warunków zadania w celu wyznaczenia wartości k. Gdyby np. był dany w zadaniu warunek, że dla $t = t_1$, jest $s = s_1$, natenczas, w celu obliczenia k, wprowadzimy do równania $s = s_1$, oraz $t = t_1$, i otrzymamy wtedy $s_1 = ct_1 + k$, skąd $k = s_1 - ct_1$. Wstawiając tę wartość w powyższe równanie, otrzymamy $s = ct + (s_1 - ct_1)$ lub inaczej: $s - s_1 = c(t - t_1)$.

Możemy mieć również równanie różniczkowe ruchu 2-go rzędu; np. dane jest $p = \varphi(t)$, należy znaleźć równanie ruchu. Ponieważ $p = \frac{d^2s}{dt^2}$, to, po podstawieniu, powyższe równanie przekształci się w równanie: $\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi(t)$, jest to równanie różniczkowe 2-go rzędu; które możemy przez całkowanie sprowadzić do równania pierwszego rzędu i wreszcie do równania skończonego.

Otrzymujemy nieraz pewne ułatwienie całkowania, gdy najpierw całkujemy równanie $\frac{dv}{dt} = \varphi(t)$, t. j. $v = \int \varphi(t) \, . \, dt = F(t)$; a następnie $\frac{ds}{dt} = F(t)$, lub inaczej $s = \int F(t) \, . \, dt = f(t)$.

Zastosujemy ten rachunek do równania ruchu jednostajnie zmiennego. Ruch jednostajnie zmienny wyraża się przez wzór $p =$ stałej$= p_0$, t. j. $p_0 = \frac{dv}{dt}$, skąd $v = \int p_0 \, . \, dt = p_0 t + k$; k — obliczymy z początkowych warunków ruchu; w zadaniu bowiem powinno być powiedziane, że np. dla, $t = t_1$, $v = v_1$.

Po podstawieniu tych wartości, jakeśmy to wyżej uczynili, otrzymamy $v - v_1 = p_0(t - t_1)$, lub inaczej $v = p_0 t + (v_1 - p_0 t_1)$. Dalej, ponieważ $v = \frac{ds}{dt}$, piszemy więc: $\frac{ds}{dt} = p_0 t + (v_1 - p_0 t_1)$, skąd znajdziemy:

$$s = \int p_0 t \, dt + \int (v_1 - p_0 t_1) \, . \, dt + k_2;$$

$$s = \frac{p_0 t^2}{2} + (v_1 - p_0 t_1) \, . \, t + k_2.$$

Mając dane znowuż pewne warunki początkowe, wyznaczymy k_2. Naprzykład, gdy przyjmiemy $t = 0$, $s = 0$, i postępując jak wyżej otrzymamy: $0 = 0 + (v_1 - 0) \; 0 + k_2$; skąd $k_2 = 0$; a wtedy $s = \frac{p_0 t^2}{2} + (v_1 - p_0 t_1) \, t$.

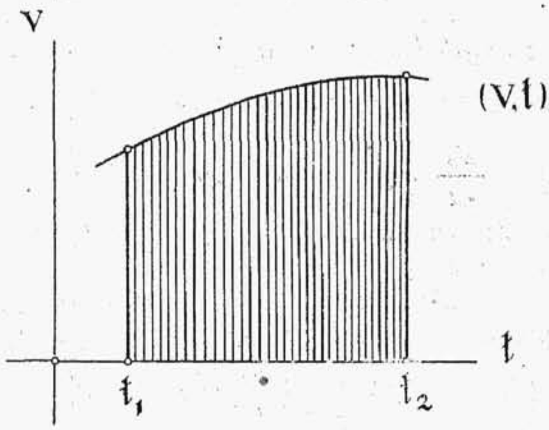
W rachunku tym charakterystycznem jest, iż w celu napisania równania ruchu, należy wyznaczyć dwie niewiadome k_1 i k_2. Niewiadome te wyznaczymy, gdy będziemy posiadali dwie pary wartości, odnoszących się do danego ruchu; te dwie pary wyrażają najczęściej początkowe warunki ruchu; lecz, mówiąc wogóle, mogą być i dowolnie dane, byleby odnosiły się do tej samej chwili.

O równaniu ruchu jednostajnie zmiennego, na zasadzie równania $s = \frac{p_0 t^2}{2} + (v_1 - p_0 t_1) \, t$, powiemy, iż jest ono drugiego stopnia względem zmiennej t i pierwszego stopnia względem s.

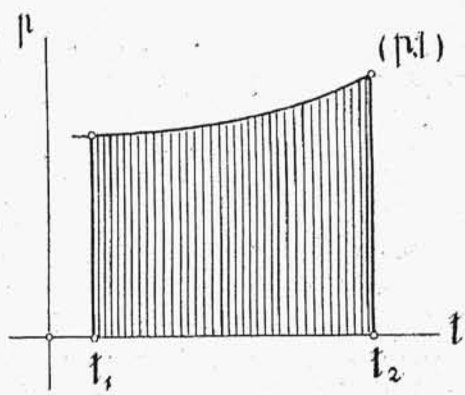
Całkowanie równania różniczkowego można również uskutecznić wykreślnie, przez wymierzenie wielkości pola odpowiedniego wykresu.

W wykresie np. (v, t), rys. 8-my, wielkość pola, zawartego pomiędzy krzywą (v, t) i osią t przedstawia liczbowo wielkość drogi, t. j. daje nam całkę $s = \int_{t_1}^{t_2} v \,.\, dt$.

Posiadając zaś wykres (p, t), rys. 9-ty, wielkość pola, pomiędzy krzywą (p, t) i osią t, przedstawia wartość prędkości, gdyż $v = \int_{t_1}^{t_2} p \,.\, dt$.



Rys. 8.



Rys. 9.

Sposoby te mogą być z korzyścią stosowane, gdy posiadamy wykres ruchu, a nie posiadamy jego funkcyi; lub gdy taka funkcya trudną jest do znalezienia.

Zadanie. Czy każde równanie ruchu drugiego stopnia ze względu na t i pierwszego ze względu na s, przedstawia ruch **jednostajnie przyśpieszony.**

Rozwiązanie. Ogólne równanie, odpowiadające warunkom zadania, ma postać: $s = at^2 + bt + c$, gdzie a, b, c są pewne stałe wielkości; z tego równania otrzymamy: $v = \frac{ds}{dt} = 2\,at + b$, następnie $p = \frac{dv}{dt} = 2a$, czyli przyśpieszenie jest stałe, a więc ruch przedstawiony przez równanie $s = at^2 + bt + c$, — jest jednostajnie przyśpieszony.

10. Przykład ruchu jednostajnie przyśpieszonego. *Galileusz* w r. 1638 ogłosił pracę, w której przytoczył cały szereg doświadczeń, stwierdzających, iż wszystkie ciała w próżni spadają w kierunku środka ziemi ruchem jednostajnie przyśpieszonym. Prawo to, w ten sposób zdobyte, jest czysto doświadczalne i niema nic wspólnego z pojęciami o sile wogóle i o sile przyciągania ziemi w szczególe. Postawmy się więc obecnie na tem historycznem stanowisku i, oparłszy się na stwierdzeniu tego prawa, będziemy mogli rozwiązywać zadania, tyczące się spadania ciał w próżni.

Zadanie. W pewnym punkcie przestrzeni dany punkt zostaje swobodnie puszczony t. j. dla $t=0$ i $s=0$, posiada on $v=0$. Należy zestawić równanie ruchu.

Ponieważ ruch w tym razie jest jednostajnie przyśpieszony, przeto $p=\frac{dv}{dt}=$ stałej, którą zwykle oznaczają przez g; a więc $\frac{dv}{dt}=g$, skąd $dv=gdt$. Całkując ten wzór otrzymamy $v=gt+k_1$. Przyjęliśmy dla $t=0$, $v=0$, przeto i $k_1=0$, a zatem $v=gt$. Podstawiając następnie $v=\frac{ds}{dt}$, otrzymamy $\frac{ds}{dt}=gt$; lub $ds=gt.dt$, skąd $s=\int gt.dt=g\int t.dt=g\frac{t^2}{2}+k_2$. Ponieważ dla $t=0$ $s=0$, przeto $k_2=0$; a więc równanie ruchu otrzyma postać $s=\frac{1}{2}gt^2$.

Inaczej trochę powyższe równanie przedstawi się, gdy spadające ciało posiadało już przy $t=0$, pewną prędkość $v=v_0$. W danym razie rachunek będzie następujący $\frac{dv}{dt}=g$; $v=gt+k$, ponieważ dla $t=0$, $v=v_0$ a więc $k_1=v_0$ i po podstawieniu $v=gt+v_0$. Następnie $\frac{ds}{dt}=gt+v_0$, po scałkowaniu tego równania $s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+k_2$. W danym przypadku dla $t=0$, $s=0$, przeto $k_2=0$ i wreszcie $s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$.

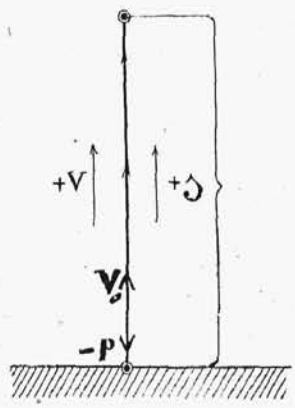
W powyższych wzorach zauważamy charakterystyczny stosunek, iż prędkość ciała spadającego, które miało początkową prędkość v_0, — składa się z dwóch wyrazów: 1) z wyrazu gt, który przedstawia prędkość ciała spadającego, z początkową prędkością równą zeru; 2) z prędkości początkowej v_0. Wzór zaś dla s składa się również z dwóch dróg: 1) z drogi, gdy początkowo: $v=0$, jest to wyraz $\frac{1}{2}gt^2$; 2) i z drogi ruchu jednostajnego v_0t.

Zadanie. Punkt spada swobodnie z wysokości 10 metrów należy obliczyć prędkość w końcu drogi s, oraz czas, w którym on przebiegnie tę drogę.

Zadanie. W pewnej chwili czasu $t=0$, zostaje ciało puszczone swobodnie z pewnego miejsca przestrzeni; po upływie 1 sekundy, t. j., gdy $t=1$, zostaje z tegoż miejsca puszczone drugie ciało; należy obliczyć wzajemną odległość tych ciał po upływie 1 sek. od puszczenia pierwszego ciała, t. j. dla $t=1$, oraz obliczyć ich odległość po upływie 10 sek., t. j. $t=10$.

11. Ruch jednostajnie zwolniony. W powyższych przykładach spadania ciał przyjęliśmy, że początkowa prędkość v_0 i przyśpieszenie posiadają ten sam zwrot, i w tymże zwrocie liczyliśmy dodatnie wartości dla s. Obecnie przyjmijmy, iż prędkość i przyśpieszenie posiadają zwroty przeciwne, długości zaś $+s$ przyjmiemy ze zwrotem zgodnym z v_0, rys. 10-ty.

Założenia te w zastosowaniu do spadania ciał wyrażą się w ten sposób, iż $(+v_0)$ i $(+s)$ liczymy np. na pionach od dołu do góry, przyśpieszenie wtedy przy spadaniu ciał będzie miało zwrot na dół. W danym przypadku przyrost prędkości posiada odjemne wartości, t. j. $\frac{dv}{dt}=-g$. Dalsze postępowanie jest takież, jak poprzednio wskazaliśmy; a zatem: $v=-gt+k$, dla $t=0$ i $v=v_0$, $k=v_0$; po podstawieniu $v=v_0-gt$; $\frac{ds}{dt}=v_0-gt$; $s=v_0t-\frac{gt^2}{2}+k_2$; dla $t=0$; $s=0$; więc $k_2=0$ i wreszcie: $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. Wzór ten otrzymamy również z poprzedniego wzoru; gdy zamienimy w nim $(+g)$ na $(-g)$. Mogliśmy również w poprzednich wzorach zmienić znaki przy s i v_0, gdyż dodatnie s i v_0 liczyliśmy poprzednio z góry na dół, a obecnie przyjęliśmy dodatni z dołu do góry, gdy więc uczynimy tę zmianę, otrzymamy natenczas równanie: $-s=-v_0t+\frac{1}{2}gt^2$, które po przemnożeniu przez (-1) przedstawi się w postaci $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$.



Rys. 10.

12. Znaki prędkości i przyśpieszenia. W myśl określenia prędkości jako przyrostu drogi prędkość będzie miała znak dodatni, gdy długość drogi w rozpatrywanym okresie dt wzrosła; w przeciwnym razie jeżeli długość drogi zmniejszyła się, wtedy możemy powiedzieć, dla ujednostajnienia pojęć, że przyrost drogi jest odjemny, a więc i prędkość w danej chwili będzie odjemną; w tym razie powiemy językiem potocznym, że punkt taki się cofa; długość bowiem drogi ubywa. W tenże sposób wprowadzimy znaki dla przyśpieszeń. Jeżeli w okresie czasu dt wartość liczbowa w kierunku tejże prędkości wzrośnie, to przyśpieszenie będzie dodatnie, w przeciwnym razie odjemne.

Jeżeli przeto otrzymamy z obliczeń przyśpieszenie pewnego ruchu ze znakiem odjemnym, a prędkość z dodatnim, to znaczy, że punkt porusza się naprzód, lecz zwalnia w swym ruchu. Jeżeli zaś prędkość będzie odjemną a przyśpieszenie dodatnie, to znaczy, że punkt się cofa ze wzrastającą prędkością; jeżeli zaś prędkość i przyśpieszenie jest odjemne to punkt się cofa z prędkością malejącą. Streśćmy przeto to rozumowanie w następujący sposób:

jeżeli $v>0$ długość drogi wzrasta;

jeżeli $v=0$ długość drogi nie zmienia się, punkt stoi w miejscu;

jeżeli $v < 0$ długość drogi maleje, punkt przeto się cofa;

jeżeli $p > 0$ prędkość wzrasta;

jeżeli $p = 0$ prędkość w danej chwili niezmienia się; punkt porusza się chwilowo ze stałą prędkością;

jeżeli $p < 0$ prędkość maleje; t. j. punkt zwalnia w swym biegu.

13. Ilość niewiadomych i ilość równań. W powyższe równania wchodzi pięć wielkości: s, v, v_0, p, i t, pomiędzy któremi zachodzą dwa związki $\frac{ds}{dt} = v$, oraz $\frac{dv}{dt} = p$; trzy więc z powyższych wielkości powinny być dane, lub też trzy równania pomiędzy niemi; wtedy bowiem otrzymamy pięć równań z pięcioma niewiadomemi, które możemy obliczyć.

Przykład. Dane jest równanie ruchu w postaci $s = 2t^3$, początkowa prędkość $v_0 = 0$; należy obliczyć v i p w czasie $t = 5$ sek. Dane więc są trzy zależności, możemy zatem obliczyć v i p; $v = \frac{ds}{dt} = 6\,t^2$, dla $t = 5$; $v = 150$ m./sek. Następnie $p = \frac{dv}{dt} = 12\,t$; dla $t = 5$; $p =$ 60 m./sek.². Wartość p — jest zależną od czasu, a więc ruch jest zmienny.

14. Zestawienie wzorów ruchu jednostajnie zmiennego. 1) Równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego, gdy początkowa prędkość $v_0 = 0$:

$$s = \tfrac{1}{2} p t^2 \qquad (2)$$

$$v = pt \qquad (3)$$

2) Równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego z początkową prędkością $= v_0$:

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} p t^2 \qquad (4)$$

$$v = v_0 + pt \qquad (5)$$

3) Równania ruchu jednostajnie zwolnionego z początkową prędkością $= v_0$:

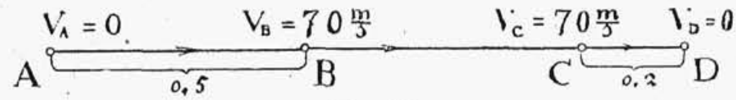
$$s = v_0 t - \tfrac{1}{2} p t^2 \qquad (6)$$

$$v = v_0 - pt \qquad (7)$$

15. Przykłady. 1) Przykład. Ze stacyi A wyjeżdża lokomotywa z prędkością: $v_A = 0$ i przejeżdża ruchem jednostajnie przyśpieszonym drogę długości $s = 500\ m$, osiągając przytem prędkość $v_B = 70$ *km* na godzinę; dalszą drogę przebywa ona ruchem jednostajnym i dopiero na odległości 200 *m* przed stacyą, na której ma się zatrzymać, nabiera ruchu jednostajnie zwolnionego i w końcu zatrzymuje się na tej stacyi. Odległość między stacyami równa się 20 *km* i droga jest linią prostą. 1) Należy obliczyć okresy czasu, w jakim lokomotywa przebywa odległość między stacyami; 2) należy napisać równania ruchu w każdej z trzech części drogi. Dla rozwiązania przyjąć początek liczenia drogi i czasu w miejscu A; jako jednostkę długości i czasu przyjąć kilometr i godzinę.

Obliczenie. Przedstawmy sobie zadanie geometrycznie w następujący sposób:

Ruch na drodze AB. Mamy dane $s = 0{,}5$; $v_A = 0$; $v_B = 70$ *km*/godz. Dla ruchu jednostajnie przyśpieszonego mamy $s = \frac{1}{2}pt^2$; oraz: $v = pt$; podstawiamy w te równania dane wartości i otrzymujemy $0{,}5 = \frac{1}{2}pt^2$; oraz: $70 = pt$; posiadamy zatem dwa równania z dwiema niewiadomemi p i t. Rugowanie uskutecznimy, w danym razie, przez wzajemne podzielenie tych równań, a więc: $\frac{0{,}5}{70} = \frac{1}{2}t$; skąd: $t_{AB} = {}^1/_{70}$ godziny $= 51$ sek. $^3/_7$; podstawiając następnie tę wartość w równanie: $70 = pt$, otrzymamy: $p = \frac{70}{1:70} = 4900$ *km* 1 godzinę. Równanie ruchu na drodze AB ma postać: $s = \frac{1}{2}pt^2$; ponieważ $p = 4900$, otrzymamy przeto: $s_{AB} = 2450\,t^2$; gdzie: t w godzinach, s w kilometrach.



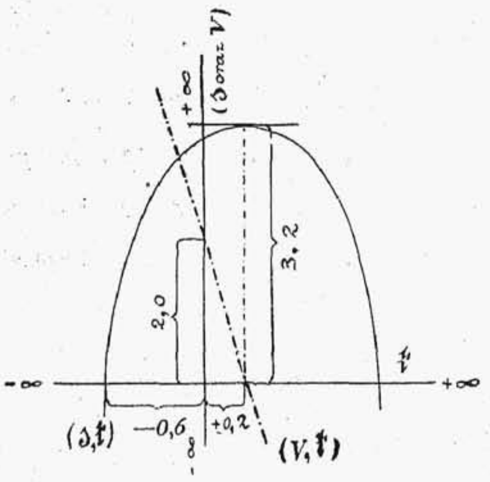
Rys. 11.

Ruch na drodze BC. Równanie ruchu jednostajnego: $s = vt$, gdzie $s = 20 - (0{,}5 + 0{,}2) = 19{,}3$ *km*; $v = 70$ *kg/g*; a więc: $t_{BC} = \frac{19{,}3}{70} = 16$ *m* 32 *s* $\frac{4}{7}$.

Równanie ruchu $s_{BC} = 70\,t$, gdzie t w godzinach i s w kilometrach.

Ruch na drodze CD. Równania ruchu jednostajnie zwolnionego: $s = v_0 t - {}^1/_2\,pt^2$, oraz: $v = v_0 - pt$; $v_0 = 70$ *km*/godz.; $s = 0{,}2$ $v_D = 0$; po podstawieniu otrzymamy: $0{,}2 = 70t - {}^1/_2\,pt^2$ oraz: $0 = 70 - pt$; mamy dwa równania z dwiema niewiadomemi. Z drugiego: $p = \frac{70}{t}$, podstawiamy w pierwsze i otrzymujemy: $0{,}2 = 70\,t - {}^1/_2\,\frac{70}{t}\,.\,t^2$; inaczej: $0{,}2 = 70\,t - 35\,t$; skąd: $t_{CD} = \frac{0{,}2}{35}$ godz. $= 20$ sek. $^4/_7$, oraz: $p_{CD} = \frac{70}{0{,}2:35} = 12250$ *km* 1^2 godz. Równanie zatem ruchu na tej części drogi jest nast.: $s_{CD} = 70\,t - \frac{1}{2}\,.\,12250\,t^2$, krócej: $s_{CD} = 70\,t - 6125\,t^2$ *km*, gdzie t w godzinach. Czas w powyższych wzorach jest liczony od chwili wyjazdu lokomotywy z miejsc: A, B lub C. Okres czasu, w jakim przebyła lokomotywa ze stacyi A do D: $t_{AD} = \frac{1}{70} + \frac{19{,}3}{70} + \frac{0{,}2}{35} = \frac{20{,}7}{70}$ godz. $= 17$ *m* 44 *s* $^4/_7$.

2) **Przykład.** Zbadać ruch wyrażony równaniem $s = -5t^2 + 2t + 3$, gdzie s w metrach, t—w godzinach. **Obliczenie:** $v = \frac{ds}{dt} = -10t + 2$, oraz $p = \frac{dv}{dt} = -10$; ruch ten jest zatem jednostajnie zwolniony, ze zwolnieniem $= 10$ mtr./sek.^{2} lub z przyśpieszeniem $p = -10$. Póki $v > 0$, t. j. póki $-10t + 2 > 0$, ruch punktu odbywa się w zwrocie dodatnim; gdy zaś $-10t + 2 = 0$; t. j. w chwili: $t = \frac{1}{5}$ godz., punkt ruchomy zatrzymuje się i następnie gdy $t > \frac{1}{5}$, zaczyna się on wracać.



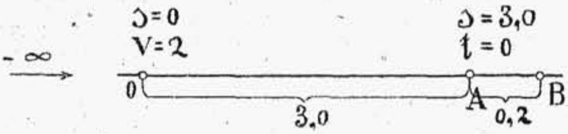
Rys. 12.

Dla dalszego rozwinięcia zadania, należy znaleźć wykresy (s, t) oraz (v, t), rys. 12-ty. Wykres (s, t) jest parabolą, której wierzchołek posiada spółrzędne: $t_W = 0{,}2$; $s_W = 3{,}2$ jednostek długości mierzonych podług przyjętej skali. Wykres (v, t) przedstawia prostą, której równanie: $v = -10t + 2$.

Wyniki powyższych rozważań zestawimy w tablicy następującej:

t	s	v	p	Rodzaj ruchu
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	-10	Ruch jednostajnie zwolniony ze zwrotem na prawo (rys. 11-ty).
$-0{,}6$	∓ 0	$+8{,}0$	-10	
± 0	$+3{,}0$	$+2{,}0$	-10	
$+0{,}2$	$+3{,}2$	± 0	-10	Zmiana zwrotu ruchu.
$+1{,}0$	± 0	$-8{,}0$	-10	Ruch jednostajnie przyśpieszony ze zwrotem na lewo; gdyż p i v posiadają te same znaki.
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	-10	

Na zasadzie tych rozważań opiszemy ruch punktu, który jest określony przez powyższe równanie, w sposób następujący. Niechaj prosta nieskończenie długa przedstawia tor, rys. 13-ty; w czasie $t = 0$, niechaj punkt znajduje się w miejscu A, wtedy $s = 3{,}0$; co znaczy, że początek liczenia drogi przy-



Rys. 13.

pada w miejscu 0, odległem na 3 jednostki długości od miejsca A na lewo (jeżeli dodatni zwrót drogi przyjmiemy na prawo).

Punkt ruchomy, z rosnącem t od $-\infty$ do ∞, wychodzi z lewej strony toru ku prawej z prędkością dosyć znaczną, (począwszy od $v=\infty$) przechodzi następnie miejsce 0 z prędkością $v=8{,}0$ i w miejscu $-B$, w odległości od 0 równej 3,2 m, przystaje, (gdyż $v=0$), i z tego miejsca z odjemną prędkością biegnie na powrót do $-\infty$. A więc punkt ruchomy znajduje się dwa razy w każdym miejscu toru, pomiędzy $-\infty$ i B, i posiada dwie prędkości równe co do ich bezwzględnych wartości, lecz ze zwrotami przeciwnymi. Tę okoliczność łatwo odczytać z równania ruchu; jeżeli bowiem drogę wyrazimy funkcyą prędkości, to otrzymamy równanie, które będzie drugiego stopnia względem v i pierwszego względem s, czyli dla jednej wartości s otrzymamy dwie wartości rzeczywiste dla v.

Pytanie: jakiej części toru będą odpowiadały urojone pierwiastki równania pomiędzy s i t?

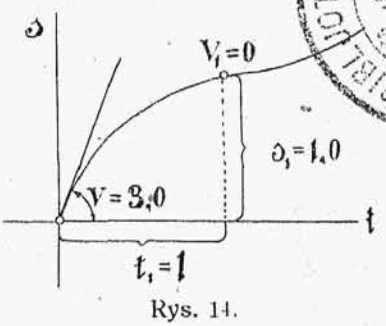
3) **Przykład.** Zbadać ruch prostolinijny, wyrażony równaniem $s=(t-1)^3+1$. Z równania ruchu wynika $v=\frac{ds}{dt}=3\,(t-1)^2$, oraz

$$p=\frac{dv}{dt}=6\,(t-1).$$

Tablica ruchu:

t	s	v	p
0	0	3	-6
:	:	:	:
1	1	0	0
:	:	:	:
2	2	3	6
3	9	12	12
:			
∞	∞	∞	∞

Wykres (s, t).



Rys. 14.

Z tych zestawień widzimy, że punkt ruchomy przebiega drogę z jednym zwrotem w czasie od $t=0$, do $t=\infty$; gdyż $v>0$; prędkość jego w chwili $t=0$ jest równa $v=3\,m$ i następnie zmniejsza się; po upływie jednostki czasu prędkość $v=0$, t. j. punkt ruchomy zatrzymuje się, ażeby na nowo rozpocząć ruch z szybko rosnącem przyśpieszeniem, (od 0 do $+\infty$).

16. Wymiary. Mierzyć jest to porównywać między sobą te same właściwości różnych zjawisk.

Długość np. mierzymy długością; pola mierzymy polami; objętość i t. d. Miarą wielkości pola jest iloczyn z dwóch długości; miarą objętości jest iloczyn z trzech długości. Gdy oznaczymy wielkość długości przez L; wtedy pole wyrazi się przez L^2; objętość przez L^3; i mówimy wtedy, iż pole ma wymiar długości w drugiej potędze, objętość zaś — w trzeciej potędze; i że te wielkości, t. j. pole i objętość są między sobą niewspółmierne.

Ponieważ każde równanie algebraiczne stwierdza równość dwu lub kilku wielkości; przeto wszystkie wyrazy w każdem równaniu, połączone znakami $+$ lub $-$, muszą przedstawiać wielkości tych samych wymiarów, gdyż łączenie znakiem równania lub $\pm$ wielkości o różnych wymiarach, nie może być zgodnem z rzeczywistością. Naprzykład wyraz: $ab + a^2b$, w którym a i b są pewne długości, nie może mieć żadnego rzeczywistego znaczenia; pierwszy bowiem wyraz przedstawia pole, którego wymiar L^2; drugi zaś przedstawia objętość, której wymiar L^3; dodawanie zaś pola i objętości nie ma żadnego rzeczywistego znaczenia.

Poleca się czytelnikowi sprawdzić w tym względzie wzory, znane z planimetryi lub stereometryi, które powinny mieć wymiary jednakowe. Oprócz długości wprowadziliśmy obecnie do rachunku miarę czasu, i pod tym względem wszystkie równania muszą zachować to samo prawo jednakowych wymiarów. Wymiary tych wielkości są następujące:

wymiar prędkości $v = LT^{-1}$, ... (8)

wymiar przyśpieszenia $p = LT^{-2}$. . . . . (9)

Po podstawieniu więc tych wyrazów we wszystkie równania kinematyki powinniśmy otrzymać równania tożsame; np. równanie $s = v_0 t + \frac{1}{2} pt^2$, po podstawieniu $s = L$; $v_0 = LT^{-1}$; $p = LT^{-2}$; zamieni się w równanie tożsame $L = LT^{-1}\,T + L^0 . L . T^{-2} . T^2$ a po uproszczeniu otrzymamy $L = L$ i powiadamy, że wymiar tego równania jest jednakowy.

Spółczynnik $\frac{1}{2}$ i wogóle liczby posiadają wymiar zera; również mówimy np. że L^0 t. j. L w potędze zero posiada wymiar zero; funkcye też trygonometryczne kątów jak sinus, cosinus i t. d., posiadają wymiar zero, są bowiem ilorazami dwóch długości.

Z wymienionych powodów wymiary równania muszą być także zachowane pod względem wektorowym, t. j. wszystkie wyrazy danego równania muszą być albo wielkościami wektorowemi, albo skalarnemi.

B. Krzywolinijny ruch punktu.

17. Równanie ruchu. W rozdziale poprzednim rozpatrywaliśmy ruch punktu po prostej linii. Ruch ten został w zupełności wyznaczony przez równanie ruchu $s = f(t)$. Przez wyrażenie „ruch wyznaczony" rozumiemy, iż w każdej chwili, t. j. dla każdej wartości t mo-