Długość np. mierzymy długością; pola mierzymy polami; objętość i t. d. Miarą wielkości pola jest iloczyn z dwóch długości; miarą objętości jest iloczyn z trzech długości. Gdy oznaczymy wielkość długości przez L; wtedy pole wyrązi się przez L^2; objętość przez L^3; i mówimy wtedy, iż pole ma wymiar długości w drugiej potędze, objętość zaś — w trzeciej potędze; i że te wielkości, t. j. pole i objętość są między sobą niewspółmierne.

Ponieważ każde równanie algebraiczne stwierdza równość dwu lub kilku wielkości; przeto wszystkie wyrazy w każdem równaniu, połączone znakami $+$ lub $-$, muszą przedstawiać wielkości tych samych wymiarów, gdyż łączenie znakiem równania lub $\pm$ wielkości o różnych wymiarach, nie może być zgodnem z rzeczywistością. Naprzykład wyraz: $ab + a^2b$, w którym a i b są pewne długości, nie może mieć żadnego rzeczywistego znaczenia; pierwszy bowiem wyraz przedstawia pole, którego wymiar L^2; drugi zaś przedstawia objętość, której wymiar L^3; dodawanie zaś pola i objętości nie ma żadnego rzeczywistego znaczenia.

Poleca się czytelnikowi sprawdzić w tym względzie wzory, znane z planimetryi lub stereometryi, które powinny mieć wymiary jednakowe. Oprócz długości wprowadziliśmy obecnie do rachunku miarę czasu, i pod tym względem wszystkie równania muszą zachować to samo prawo jednakowych wymiarów. Wymiary tych wielkości są następujące:

wymiar prędkości $v = LT^{-1}$, ... (8)

wymiar przyśpieszenia $p = LT^{-2}$. . . . . (9)

Po podstawieniu więc tych wyrazów we wszystkie równania kinematyki powinniśmy otrzymać równania tożsame; np. równanie $s = v_0 t + \frac{1}{2} pt^2$, po podstawieniu $s = L$; $v_0 = LT^{-1}$; $p = LT^{-2}$; zamieni się w równanie tożsame $L = LT^{-1}\,T + L^0 . L . T^{-2} . T^2$ a po uproszczeniu otrzymamy $L = L$ i powiadamy, że wymiar tego równania jest jednakowy.

Spółczynnik $\frac{1}{2}$ i wogóle liczby posiadają wymiar zera; również mówimy np. że L^0 t. j. L w potędze zero posiada wymiar zero; funkcye też trygonometryczne kątów jak sinus, cosinus i t. d., posiadają wymiar zero, są bowiem ilorazami dwóch długości.

Z wymienionych powodów wymiary równania muszą być także zachowane pod względem wektorowym, t. j. wszystkie wyrazy danego równania muszą być albo wielkościami wektorowemi, albo skalarnemi.

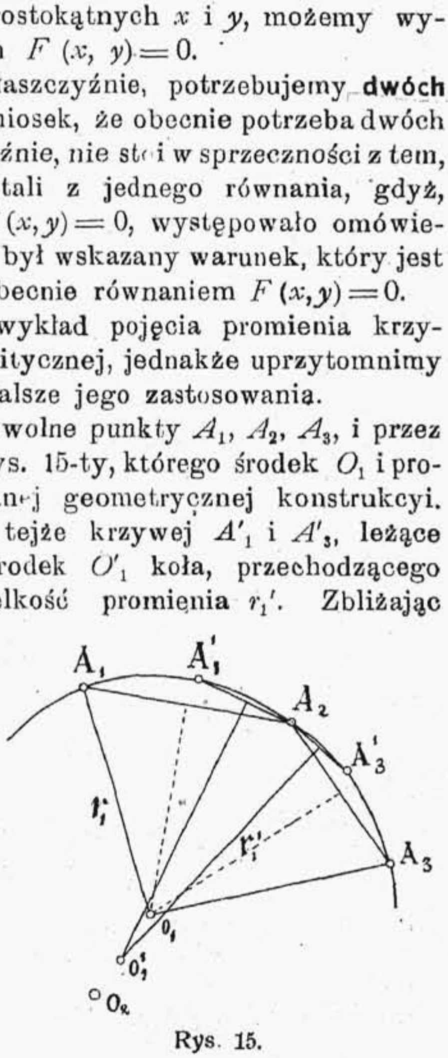
B. Krzywolinijny ruch punktu.

17. Równanie ruchu. W rozdziale poprzednim rozpatrywaliśmy ruch punktu po prostej linii. Ruch ten został w zupełności wyznaczony przez równanie ruchu $s = f(t)$. Przez wyrażenie „ruch wyznaczony” rozumiemy, iż w każdej chwili, t. j. dla każdej wartości t możemy wyznaczyć położenie punktu ruchomego na torze, przyjąwszy pewien początek liczenia czasu i drogi. Ponieważ, w omawianym obecnie przypadku, przyjmujemy, iż tor jest krzywolinijny, przeto równanie $s=f(t)$, chociaż wyznacza położenie punktu w każdej chwili, jednakże jest niewystarczającem do wyznaczenia ruchu, i w danym razie potrzebne są jeszcze dane, tyczące się postaci geometrycznej toru t. j. krzywej, po której punkt się porusza. Sposoby przedstawiania krzywych za pomocą równań daje geometrya analityczna i ona poucza, iż każdą krzywą płaską możemy określić za pomocą równania z dwiema zmiennemi. Odnosząc punkty krzywej do spółrzędnych osi prostokątnych x i y, możemy wyrazić każdą krzywą ogólnem równaniem $F(x, y)=0$.

Dla wyznaczania więc ruchu na płaszczyźnie, potrzebujemy **dwóch równań** 1) $s=f(t)$, oraz 2) $F(x,y)=0$. Wniosek, że obecnie potrzeba dwóch równań dla wyrażenia ruchu na płaszczyźnie, nie stoi w sprzeczności z tem, żeśmy w ruchu prostolinijnym korzystali z jednego równania, gdyż, w tym przypadku zamiast równania $F(x,y)=0$, występowało omówienie, że ruch ma być prostolinijny, t. j. był wskazany warunek, który jest jednakowy z warunkiem, wyrażonym obecnie równaniem $F(x,y)=0$.

18. Promień krzywizny. Chociaż wykład pojęcia promienia krzywizny należy do zakresu geometryi analitycznej, jednakże uprzytomnimy sobie tutaj to pojęcie, ze względu na dalsze jego zastosowania.

Na danej krzywej obieramy trzy dowolne punkty A_1, A_2, A_3, i przez te trzy punkty przeprowadzamy koło, rys. 15-ty, którego środek O_1 i promień r_1 wyznaczymy za pomocą znanej geometrycznej konstrukcyi. Obierając obecnie inne dwa punkty na tejże krzywej A'_1 i A'_3, leżące bliżej punktu A_2, otrzymamy inny środek O'_1 koła, przechodzącego przez te trzy punkty, oraz inną wielkość promienia r_1'. Zbliżając punkty A_1 i A_3 do punktu A_2, zauważymy, iż środki O_1, O_1' zbliżają się do pewnego oznaczonego punktu na płaszczyźnie. Środek ten O_2, który wykreślić możemy tylko w przybliżeniu, jest charakterystycznym dla punktu A_2 — krzywej, gdyż koło, zakreślone z tego środka, i krzywa mają **wspólne dwie cząstki łuku w sąsiedztwie punktu** A_2.

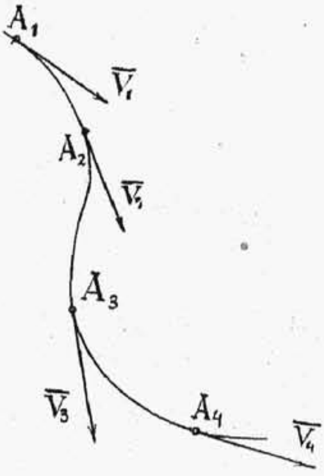


Rys. 15.

Środek O_2, do którego zbliżają się środki pomienionych kół, ze zbliżaniem się punktów A_1 i A_3, do A_2; nazywamy środkiem koła krzywizny. Promień tego koła nazywamy promieniem koła krzywizny, lub też krócej promieniem krzywizny danej krzywej w punkcie A_2. Ogólnie rozpatrując przedstawioną konstrukcyę, zauważymy, iż każdy punkt krzywej posiada inną wielkość promienia krzywizny i inne położenie jej środka.

Powyższy wykreślny sposób, wyznaczania środka koła i promienia krzywizny, jest oczywiście bardzo przybliżony, w celu zaś ścisłego wyznaczenia tych wielkości, stosujemy rachunek analityczny; w którym, za pomocą teoryi granic, zestawimy wzory algebraiczne promienia krzywizny, którego wartość przedstawi się w ogólnej postaci $\rho = \varphi(x, y)$, t. j. promień krzywizny ρ jest funkcyą spółrzędnych danego punktu na krzywej. Znak ρ (grecka litera — ro) oznacza wartość promienia krzywizny, kierunek zaś jego leży na prostopadłej, wyprowadzonej z danego punktu krzywej do stycznej w tymże punkcie, t. j. leży na normalnej w danym punkcie krzywej po stronie wklęsłej. Szczegółowe wzory wartości promienia ρ podaje geometrya analityczna.

19. Prędkość ruchu krzywolinijnego na płaszczyźnie. Prędkość ruchu po krzywych może być w tenże sposób określona, jak w ruchu prostolinijnym. W ruchu prostolinijnym prędkość wyrażamy wzorem $v = \frac{ds}{dt}$, i kierunek jej przyjmujemy za zgodny z kierunkiem ruchu. W ruchu zaś krzywolinijnym kierunki toru zmieniają się ze zmianą miejsca; **kierunki** więc prędkości **są różne** w różnych jego miejscach. W ruchu zatem krzywolinijnym wyraz $v = \frac{ds}{dt}$ **jest niewystarczającym** do określenia prędkości, gdyż należy jeszcze wskazać, w jakim kierunku ruch się odbywa.



Rys. 16.

Ponieważ cząstka łuku może być uważana za cząstkę linii prostej, przeto kierunek prędkości pokrywa się z kierunkiem tej cząstki t. j. z kierunkiem stycznej, przeprowadzonej do toru w miejscu, w którym chcemy wyznaczyć prędkość; zwrot tej prędkości będzie zgodny ze zwrotem ruchu, wielkość zaś jej algebraiczną obliczymy z równania $v = \frac{ds}{dt}$.

W celu wytworzenia sobie obrazu prędkości punktu, w różnych jego miejscach na torze, przeprowadźmy w tych miejscach styczne, rys. 16-ty, odłóżmy na nich odcinki, równe co do długości wartościom $\frac{ds}{dt}$, i nanieśmy na tych odcinkach strzałki ze zwrotami zgodnymi z ruchem punktu po torze, otrzymamy w ten sposób dokładny obraz prędkości punktu ruchomego we wszystkich miejscach toru, rys. 16-ty. Prędkość jest więc wielkością wektorową, gdyż posiada:

1) kierunek (stycznej);
2) strzałkę, (zwrot punktu ruchomego);
3) i długość, $\left(\frac{ds}{dt}\right)$.

Prędkość zatem ruchu krzywolinijnego powinniśmy oznaczać literami z kreskami, a więc np. $\bar{v}$ oznacza prędkość, tak co do liczbowej wielkości, jak i co do położenia w przestrzeni; literą zaś v bez kreski u góry oznaczać będziemy tylko jej wielkość liczbową.

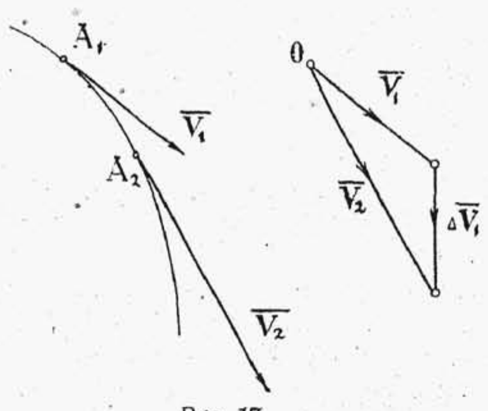
W oznaczeniach wektorowych napiszemy wzór prędkości w sposób następujący:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{s}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

który wyraża, że $\bar{v} \parallel d\bar{s}$, i oprócz tego, że wartość $v = \frac{ds}{dt}$ oraz, że strzałka wektora $\bar{v}$ jest zgodna z kierunkiem, w którym s — rośnie. Wzór zatem wektorowy wyraża wszystkie właściwości, które określają prędkość.

20. Przyśpieszenie ruchu krzywolinijnego na płaszczyźnie. W ruchu prostolinijnym przyśpieszeniem nazywaliśmy stosunek przyrostu prędkości do okresu czasu, w jakim ten przyrost powstał. W ruchu krzywolinijnym zatrzymamy to samo określenie, rozumieć jednakże będziemy przez przyrost prędkości **przyrost wektorowy**; nad rozwinięciem tego pojęcia chwilę się zatrzymamy.

W ruchu prostolinijnym wszystkie prędkości mogą być uważane za wektory, które leżą na jednej i tej samej prostej; działania więc nad nimi sprowadzają się w danym razie do działań algebraicznych; w ruchu zaś krzywolinijnym występują w całej pełni właściwości wektorowe i różnica dwóch wektorów $\bar{v}_2 - \bar{v}_1$ przedstawia się jako trzecia strona trójkąta, rys. 17-ty, utworzonego z wektorów $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$; porów. § 7-my. Napisać więc możemy, że przyrost $\Delta\bar{v}_1 = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$, rozumiejąc przez znak $\Delta\bar{v}_1$ **wektor**, jak to pokazano na rysunku 17-tym.



Rys. 17.

Przyrost więc prędkości posiada w ogóle **kierunek różny** od kierunku samych prędkości.

Na zasadzie tych wyjaśnień postawimy określenie: **przyśpieszeniem ruchu krzywolinijnego nazywamy stosunek wektorowego przyrostu prędkości do okresu czasu, w jakim ten przyrost powstał.**

Określenie to jest ogólniejszem od określenia przyśpieszenia ruchu prostolinijnego, gdyż może być zastosowane i do ruchu prostolinijnego, w tym bowiem przypadku przyrost wektorowy zamieni się na przyrost skalarny.

Przyśpieszenie zatem wyraża się wielkością, posiadającą kierunek, strzałkę i długość; jest ono więc wielkością **wektorową**, pisać przeto będziemy

$$\bar{p} = \text{limes} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

lub, gdy weźmiemy pod uwagę wzór 10-ty, napiszemy również

$$\bar{p} = \frac{d^2 \bar{s}}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Z określenia przyśpieszenia wynika b. ważna geometryczna jego właściwość, że wektor przyśpieszenia leży po stronie wklęsłej cząstki toru, którą zakreśla dany punkt; i następnie jeżeli tor jest podwójnej krzywizny, to wektor przyśpieszenia leży w płaszczyźnie ściśle stycznej; leży bowiem w płaszczyźnie dwóch sąsiednich prędkości, t. j. w płaszczyźnie, przechodzącej przez dwie sąsiednie styczne.

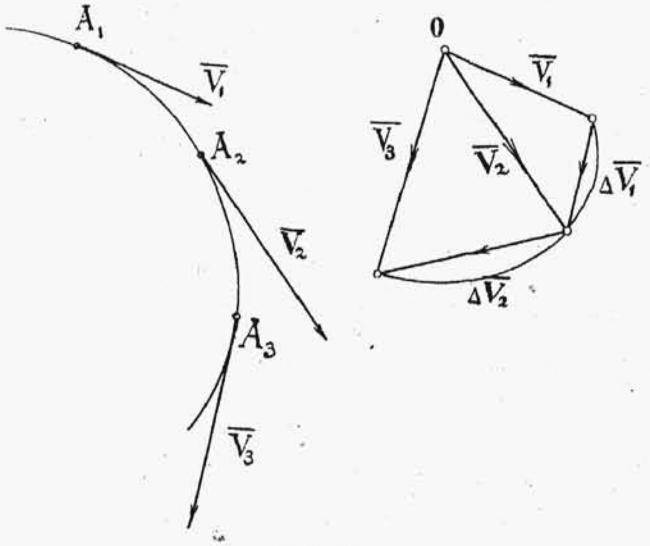
§ 21. Wykres wektorowy prędkości, (hodograf). W celu ogólnego badania ruchu krzywolinijnego przyjmiemy, że prędkości punktu ruchomego, w każdem jego miejscu na torze, są różne, i że tor jest krzywą przestrzenną.

Wykreślmy obecnie z dowolnie obranego punktu O wektory, równe wektorom prędkości, jakie posiada punkt ruchomy w różnych miejscach na torze; otrzymamy wtedy w O pęk wektorów, których końce wyznaczają w przestrzeni szereg punktów; szereg ten, w razie dostatecznego powiększenia ilości wektorów, zamieni się na krzywą ciągłą; krzywą tę nazwano **hodografem** [1]); można ją też nazwać **wykresem wektorowym prędkości**, punkt zaś, z którego wykreślamy prędkości, nazwano **początkiem wykresu** lub hodografu, rys. 18-ty. Ze sposobu wykreślenia tej krzywej wynika, iż każda cięciwa, łącząca końce dwóch wektorów, przedstawia ich wektorową różnicę; np. $\Delta\bar{v}_1 = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$; $\Delta\bar{v}_2 = \bar{v}_3 - \bar{v}_2$ i t. d. Gdy weźmiemy obecnie pod uwagę dwie prędkości, w dwóch nieskończenie blizkich punktach toru, wtedy wektorowa ich różnica będzie cząstką łuku

[1]) Z greckiego „ὁδὸν γράφει", co przetłomaczymy: drogo—wykres.

wykresu; kierunek zaś tej różnicy jest kierunkiem stycznej, przeprowadzonej w końcu wektora prędkości do krzywej wykresu. Różnice te nazwaliśmy już przyrostami wektorów i tę nazwę nadal zatrzymamy.

Z tego rozpatrywania widzimy, iż wektorowy przyrost prędkości punktów, leżących nieskończenie blizko siebie, posiada kierunek ściśle oznaczony, różny od kierunku prędkości; kierunek ten można wyznaczyć za pomocą stycznej do wykresu prędkości. Skalarna wielkość przyrostu wektorowego prędkości w dwóch nieskończenie blizkich punktach toru, jest równą wielkości cząstki łuku wykresu i jest wielkością nieskończenie małą.

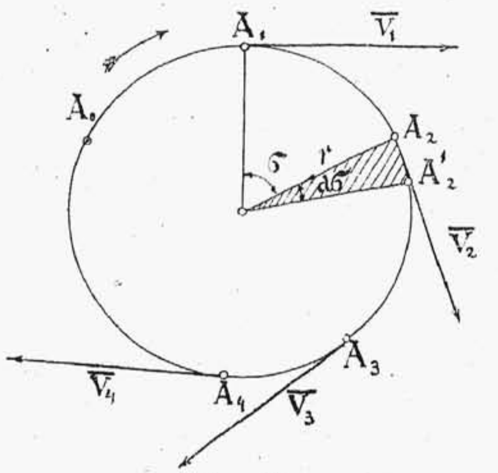


Rys. 18.

Ponieważ okres czasu, w jakim przebywa punkt ruchomy cząstkę toru, jest również nieskończenie małym, a więc stosunek $\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$, po przejściu do granic nieskończenie małych, przedstawia wielkość, którą nazwaliśmy przyśpieszeniem.

Ze sposobu wyznaczenia krzywej wykresu wektorowego wynika, że przyśpieszenie punktu ruchomego można uważać, jako prędkość końca wektora $\bar{v}$; gdyż dv jest cząstką drogi, jaką zakreśla koniec tego wektora; a zatem $\frac{dv}{dt}$ jest jego prędkością; — wyraz zaś wektorowy $\frac{d\bar{v}}{dt}$ wyraża wektorowe jej właściwości. Za pomocą wyłożonych sposobów możemy wyznaczyć wykreślnie kierunek i zwrot przyśpieszenia, lecz nie umiemy jeszcze wyznaczyć liczbowej jego wielkości, to wyłożymy w następnych rozdziałach.

22. Ruch jednostajny po kole. Przyjmujemy, w celu ułatwienia rozpatrywań, że tor posiada postać koła, i przyjmujemy, że punkt przebiega po nim ruchem jednostajnym.

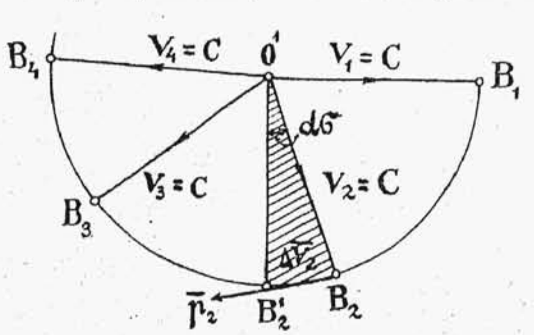


Rys. 19.

Ażeby wyznaczyć ruch punktu, obierzmy na obwodzie danego koła, rys. 19-ty, początek jego ruchu; niech nim będzie punkt A_1; jako zwrot dodatni obierzmy zwrot obrotu wskazówki zegara. Stoso..-nie do warunków danego żadania $v = \frac{ds}{dt} = c =$ stałej.

Wyznaczmy teraz wykres wektorowy prędkości; w tym celu przeprowadźmy styczne w różnych miejscach toru, na których, obrawszy zwrot dodatni, zgodny ze zwrotem ruchu punktu, odłożymy wartości $v = c$, w pewnych przyjętych jednostkach długości, rys. 19-ty. W ten sposób otrzymamy obraz prędkości punktu, w różnych jego miejscach na torze tak co do ich wartości jak i co do ich kierunku i zwrotu.

Wykres wektorowy prędkości tego ruchu otrzymamy, gdy wykreślimy, rys. 20-ty, z dowolnie obranego początku pęk wektorów równoległych do stycznych koła, a co do długości równych c. Utworzona przez końce tych wektorów krzywa jest kołem o promieniu c. Inaczej mówiąc, wykres wektorowy prędkości ruchu jednostajnego jest kołem; z tego wykresu otrzymamy bezpośrednio kierunek i zwrot przyśpieszenia punktu w każdym jego miejscu na torze.



Rys. 20.

W opisanym tu przykładzie przyśpieszenie punktu znajduje się w szczególnym geometrycznym stosunku do toru; mianowicie: ponieważ kierunek przyśpieszenia $\bar{p}_2$ punktu, w pewnym jego miejscu na torze A_2 jest prostopadły do kierunku prędkości punktu w tymże miejscu, co wynika z wykresu, rys. 20-ty, przeto kierunek ten pokrywa się z promieniem wodzącym punktu ruchomego po kole; strzałka zaś przyśpieszenia jest skierowaną do środka tego koła. Wniosek ten wysłowimy w następujący sposób: **kierunek przyśpieszenia ruchu jednostajnego po kole przechodzi przez jego środek i posiada strzałkę skierowaną ku temu środkowi**

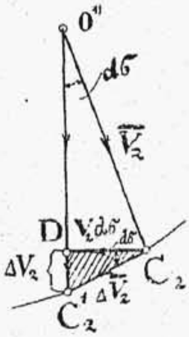
Obliczymy teraz wartość tego przyśpieszenia. Z wykresu na rys. 20-ym, odczytamy, że $p = \frac{B_2B'_2}{dt}$; a ponieważ B_2B_2' jest cząstką łuku, którego kąt środkowy $= d\sigma$ i promień $= c$, przeto $p = \frac{cd\sigma}{dt}$.

Z rys. 19-go odczytamy, że $d\sigma = \frac{A_2A_2'}{r} = \frac{ds}{r}$; po podstawieniu przeto w równanie poprzednie, otrzymamy $p = \frac{c}{r} \cdot \frac{ds}{dt}$; a ponieważ $\frac{ds}{dt} = c$, przeto

$$p = \frac{c^2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

z tego wzoru widzimy, że liczbowa wartość przyśpieszenia ruchu jednostajnego po obwodzie koła jest wielkością stałą dla danego ruchu i równą kwadratowi prędkości linijnej, podzielonemu przez promień koła.

23. Ruch zmienny po kole. Jeżeli w powyższym przykładzie założymy, że prędkość po torze jest zmienną, t. j. jeżeli ruch wyraża się przez ogólne równanie $s = f(t)$, to wykres wektorowy nie będzie kołem, gdyż długości v — są różne w różnych miejscach toru; otrzymamy więc w danym razie, jako wykres wektorowy prędkości, pewną krzywą linię. Następnie, kierunek przyrostu prędkości, a więc i kierunek przyśpieszenia ruchu zmiennego po kole, nie będzie prostopadłym do stycznej toru, gdyż w wykresie, rys. 21-szy, kierunki, np. $\bar{v}_2$ i $\Delta\bar{v}_2$, nie będą do siebie prostopadłe; jak to było przy ruchu jednostajnym.



Rys. 21.

Rys. 21-szy przedstawia wykres wektorowy prędkości, gdy punkt ruchomy przebiega **po kole**, rys. 19-ty, **ruchem zmiennym.** W danym razie, liczbową wartość przyśpieszenia odczytamy z rys. 21-go: $p = \frac{C_2C_2'}{\Delta t}$. Ażeby obliczyć długość cząstki $C_2C'_2$, odłożymy $O''D = O''C_2 = v_2$, wtedy $DC'_2 = \Delta v$, t. j. $DC'_2 =$ skalarnemu przyrostowi prędkości v_2, następnie zauważymy, że $C_2D = v_2 \,.\, d\sigma$. Zbliżając się do granic nieskończenie małych, trójkąt zakreskowany, ($C_2DC'_2$) rys. 21-szy, uważać można za trójkąt prostokątny, a zatem

$(C_2C_2')^2 = (dv_2)^2 + (v_2 d\sigma)^2$; dzielimy następnie to równanie przez $(dt)^2$ i otrzymujemy: $p^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$; zważywszy, jak poprzednio, że $d\sigma = \frac{ds}{r}$; a więc $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{v}{r}$; po podstawieniu i zarzuceniu wskaźników przy v, napiszemy ogólnie

$$p^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Równanie to pozwala obliczyć liczbową wartość przyśpieszenia w dowolnem miejscu toru, gdy dane jest równanie ruchu w postaci $s = f(t)$.

Przykład. Punkt ruchomy porusza się po kole o promieniu $r = 1\ m$; należy obliczyć przyśpieszenie w miejscu A_2, dla którego $s = 2\ m$, jeżeli równanie ruchu punktu jest $s = 2\ t^3$. Chcąc skorzystać ze wzoru 14-go, obliczamy v, oraz $\frac{dv}{dt}$ dla oznaczonego miejsca A_2. Z danego równania otrzymamy $v = \frac{ds}{dt} = 6\ t^2$; oraz $\frac{dv}{dt} = 12\ t$, v wyrażone jest tu przez czas, a więc należy obliczyć czas, w którym przybędzie punkt ruchomy do A_2; podstawiamy w tym celu w równanie ruchu $s=2$ m i otrzymujemy $2 = 2\ t^3$, skąd: $t = 1$, a więc w miejscu A_2 $v = 6.1^2 = 6$; $\frac{dv}{dt} = 12.1 = 12$; podstawiamy te wartości w równanie 14-te i otrzymujemy

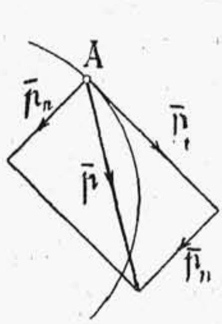
$$p^2 = 12^2 + \left(\frac{36}{1}\right)^2 = 1440, \text{ z którego: } p = \sqrt{1440} = 12\sqrt{10}.$$

Obliczyliśmy zatem liczbową wartość przyśpieszenia, kierunek zaś jego jest równoległy do stycznej, w odpowiednim punkcie wykresu wektorowego.

Ażeby uniknąć kreślenia wykresu wektorowego, zauważymy z trójkąta, zakreskowanego $(C_2DC'_2)$ na rys. 21-szym, że po przejściu do granic nieskończenie małych, kierunek boku DC_2' pokryje się z kierunkiem $\bar{v}_2$, t. j. stanie się równoległy do stycznej do toru; kierunek zaś boku C_2D będzie prostopadły do v_2 t. j. będzie miał kierunek normalny do toru w punkcie, w którym chcemy wyznaczyć przyśpieszenie; chociaż trójkąt ten stanie się nieskończenie małym, jednakże pozostanie dla niego w mocy równanie wektorowe: $\overline{C_2C_2'} = \overline{C_2D} + \overline{DC_2'}$; rodzielmy to równanie przez dt, a otrzymamy nowy trójkąt, podobny do pierwszego, którego jednakże boki posiadać będą skończone długości; zauważywszy następnie, że $\frac{C_2C_2'}{dt} = p$, $\frac{C_2D}{dt} = v.\frac{d\sigma}{dt} = \frac{v^2}{r}$ i posiada kierunek normalnej do toru i że $\frac{DC_2'}{dt} = \frac{dv}{dt}$ i ma kierunek stycznej do toru, wypowiemy wniosek: **przyśpieszenie punktu, poruszającego się po kole, jest sumą dwóch wielkości wektorowych, z których jedna posiada wartość $= \frac{v^2}{r}$, kierunek promienia wodzącego i zwrot do środka koła; a druga ma wartość $= \frac{dv}{dt}$, kierunek stycznej do koła i zwrot zgodny z ruchem punktu po kole.**

Wyraz $\frac{v^2}{r}$ uważać można za przyśpieszenie punktu, podczas jego ruchu jednostajnego po kole; przyśpieszenie to posiada kierunek normalny do toru, rys. 22-gi; wyraz ten, wskutek tego nazwano **przyśpieszeniem normalnem** i oznaczono go przez $\bar{p}_n$. Drugi wyraz $\frac{dv}{dt}$ może być uważany za przyśpieszenie punktu, gdyby ten punkt poruszał się po stycznej do toru ze zmienną prędkością v', wyraz ten nazwano **przyśpieszeniem stycznem** i oznaczono je przez $\bar{p}_t$; — a więc na zasadzie tych wywodów i oznaczeń napiszemy

$$\bar{p} = \bar{p}_n + \bar{p}_t \text{; gdzie } p_n = \frac{v^2}{r} \text{; } p_t = \frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$


Rys. 22.

Suma tych przyśpieszeń znajduje również swój wyraz w sposobie wykonania ruchu po torze, gdy przyjmiemy możność dodawania ruchów, o czem będziemy mówili dalej. Mianowicie ruch zmienny pewnego punktu od miejsca A_2 do A'_2, rys. 19-ty, możemy sobie wyobrazić w ten sposób, że punkt ruchomy przebywa drogę $A_2A'_2$ najpierw ruchem jednostajnym t. j. z prędkością stałą, a wtedy przyśpieszenie $= \frac{v^2}{r}$ i posiada kierunek normalnej do toru; następnie, zważywszy, że liczbowa wartość właściwej prędkości punktu w miejscu A_2' jest inną niż ta którą nabył przez powyższy ruch, nadajmy punktowi ruch przyśpieszony; przyśpieszenie wtedy $= \frac{dv}{dt}$ i posiada kierunek styczny do toru. Całkowite zatem przyśpieszenie jest sumą wektorową dwóch przyśpieszeń $\bar{p}_n$ i $\bar{p}_t$.

Kierunki przyśpieszeń $\bar{p}_n$ i $\bar{p}_t$ są wiadome, liczbowe zaś ich wielkości wyznaczymy z poprzednich równań; wektor więc $\bar{p}$, t. j. kierunek i wartość przyśpieszenia rzeczywistego, wyznaczymy z trójkąta, którego kierunki boków stanowi normalna i styczna w danym miejscu toru, długości zaś ich są równe algebraicznym wartościom wyrazów p_n i p_t; trzecia strona tego trójkąta jest wektorem, który przedstawia przyśpieszenie właściwe.

Możemy również obliczyć wartość i położenie wektora $\bar{p}$ z następujących wzorów analitycznych, rys. 22-gi

$$p = \pm \sqrt{p_t^2 + p_n^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

oraz np.

$$\cos(p_n, p) = \frac{p_n}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

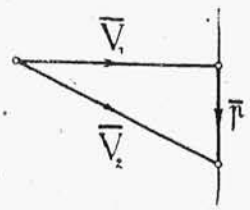
Mając zatem równanie ruchu w postaci $s = f(t)$, możemy obliczyć położenie, prędkość i przyśpieszenie rzeczywiste punktu ruchomego dla każdej wartości t lub dla każdej wartości s.

24. Zmienny ruch punktu po torze dowolnym. W poprzednim rozdziale rozpatrywaliśmy ruch zmienny punktu po kole i wykazaliśmy, w jaki sposób można obliczyć wielkość przyśpieszeń w każdem miejscu toru.

Jeżeli obecnie weźmiemy pod uwagę tor, przedstawiony przez dowolną krzywą, wyrażoną np. równaniem $f_1(x, y) = 0$, i ruch, wyznaczony równaniem $s = f_2(t)$, to rozpatrywania powyższe dadzą się w zupełności zastosować do tego ogólnego przypadku. W tym celu w obranym miejscu toru, w którym chcemy obliczyć przyśpieszenie punktu ruchomego, wykreślimy koło krzywizny i wyznaczymy jego promień; ponieważ w tem miejscu toru dwie cząstki jego łuku pokrywają się z dwiema cząstkami koła krzywizny, przeto wektor $\bar{p}$ może być wyznaczony jako przyśpieszenie punktu ruchomego, który przebiega po kole krzywizny. A więc dla pewnego miejsca toru napiszemy równania $p_t = \frac{ds}{dt}$, oraz $p_n = \frac{v^2}{\rho}$; w którem ρ jest promieniem krzywizny. Różnica wzorów dla tego ogólnego przypadku i dla ruchu po kole polega na tem, iż obecnie promień krzywizny ρ jest zmienny dla każdego punktu toru. Długość tego promienia obliczymy z odpowiednich wzorów, mając dane równanie toru.

25. Przykłady. Jaki jest ruch punktu, jeżeli wykres wektorowy (hodograf) tego ruchu przedstawia: 1) jeden punkt, który pokrywa się z początkiem wykresu; 2) prostą linię, przechodzącą przez początek wykresu; 3) prostą linię, nie przechodzącą przez początek wykresu 4) jeżeli wykres jest kołem?

Rozwiązania. 1) Wykres pokrywający się z początkiem wykresu może być uważany za krzywą, której promienie wodzące są równe zeru; a zatem $v = 0$, t. j. odnośny punkt ruchomy jest w spoczynku. 2) Jeżeli wykres wektorowy jest prostą linią, przechodzącą przez początek wykresu, to prędkość rozpatrywanego punktu posiada jeden i ten sam kierunek, czyli ruch jest prostolinijny. O charakterze jednakże tego ruchu nic powiedzieć nie możemy, jeżeli nie jest dane prawo zmienności przyśpieszeń. 3) Jeżeli wykres jest prostolinijny, który nie przechodzi przez początek, rys. 23-ci, to kierunki prędkości są różne, a więc tor jest krzywolinijny; a przyśpieszenia we wszystkich miejscach toru są wzajemnie równoległe; taki ruch wykonywa np. punkt materyalny, wyrzucony w próżni, pod działaniem przyśpieszenia ziemskiego. O charakterze tego równania z tych danych w ogóle nic powiedzieć więcej nie możemy. 4) Jeżeli wykres wektorowy jest kołem, to liczbowe wartości są wzajemnie równe; ruch jest jednostajny i krzywolinijny.



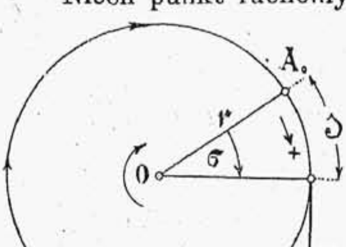
Rys 23.

Przykład. Okazać: jeżeli przyśpieszenie normalne równa się zeru to ruch jest prostolinijny.

Rozwiązanie: $p_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$; z tego wynika, że albo $v = 0$, co oznacza spoczynek i ten przypadek nie tyczy się naszego zadania, lub też $\rho = \infty$; co wyraża, że tor jest obwodem koła, którego środek leży w nieskończoności, czyli jest linią prostą.

26. Ruch po kole, jako ruch obrotowy. Przy rozpatrywaniu ruchu po kole stosujemy zwykle pojęcie prędkości i przyśpieszenia kątowego. Pojęcia te w zasadzie niczem się nie różnią od podanych pojęć i są jedynie ich przystosowaniami do tego szczególnego przypadku ruchu.

Niech punkt ruchomy zakreśla koło o promieniu r; ruch odbywa się podług ogólnego równania $s=f(t)$, rys. 24-ty. Obierzmy: 1) jako początek drogi na okręgu koła pewne miejsce A_0 i 2) pewien kierunek ruchu po obwodzie jako dodatni.



Rys. 24.

Długość drogi, przebytej przez punkt, mierzyliśmy wogóle długością drogi przebytej s, lecz możemy również mierzyć kątem σ, jaki zakreśla promień koła, gdy wyobrazimy sobie ten promień trwale połączonym z punktem ruchomym; w danym razie zachodzi proporcyalność $s = r\sigma$; na której podstawie dla każdej wartości s obliczymy jedną jedyną wartość kąta σ; i odwrotnie, dla każdego kąta σ obliczymy jedno jedyne położenie punktu ruchomego na torze. Znajomość więc kąta σ wystarcza w zupełności do wyznaczenia położenia punktu ruchomego na danem kole, wobec czego równanie ruchu po kole może mieć również postać $\sigma = f(t)$.

Kąt σ — nazywamy **kątem obrotu**, gdyż ruch punktu po kole, można sobie wyobrazić, jako jego obrót około osi, przechodzącej przez środek koła i prostopadłej do jego płaszczyzny; oś tę nazywamy osią obrotu. Jako miarę kąta przyjmujemy dla ułatwienia rachunku długość łuku koła, którego promień $r = 1$; koło to nazywamy kołem jednostkowem. Stąd wypływa, że ponieważ kątowi 360^0 odpowiada długość łuku koła jednostkowego równa 2π; kątowi zaś α^0, wyrażonemu w stopniach, odpowiada kąt σ, wyrażony w długości łuku koła jednostkowego; przeto kąt σ obliczamy ze wzoru następującego

$$\sigma^0 = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha^0 = 0{,}017\ \alpha^0;$$

lub odwrotnie, obliczymy

$$\alpha^0 = \frac{360}{2\pi} \cdot \sigma = 57^0, 296\ \sigma;$$

(porów. „Technik" I, str. 40).

27. Prędkość i przyśpieszenie kątowe. Wartość prędkości punktu wyraziliśmy wzorem $\frac{ds}{dt}$; gdy zaś ruch odbywa się po kole, wtedy po podstawieniu $s = \sigma r$, otrzymamy wzór $v = r\frac{d\sigma}{dt}$. Wyraz $\frac{d\sigma}{dt}$ nazywamy **prędkością kątową** i oznaczać go będziemy przez φ; zatem napiszemy $v = r\varphi$.

Przyśpieszenie styczne wyraża się wzorem $p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$; po podstawieniu w niego $v = r\varphi$, otrzymamy $p_t = r\frac{d\varphi}{dt} = r\frac{d^2\sigma}{dt^2}$. Wyraz $\frac{d\varphi}{dt}$ lub $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$, nazwano **przyśpieszeniem kątowem** poruszającego się punktu; oznaczywszy je przez γ, napiszemy $\gamma = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\sigma^2}{dt^2}$.

Wymiar wielkości s, v, p jest złożony z długości i czasu, (L i T); wymiar zaś wielkości σ, φ i γ jest zależny tylko od czasu, gdyż kąt jest liczbą oderwaną φ zatem ma wymiar T^{-1}, γ zaś T^{-2}. Z tego powodu wielkości s, v i p nazwano **wielkościami linijnemi**; wielkości zaś σ, φ i γ wielkościami **kątowemi**.

Prędkość i przyśpieszenie kątowe może być również w ten sposób określone, jakieśmy określili prędkość i przyśpieszenie linijne, z tą tylko różnicą, że zamiast długości drogi należy wprowadzić do określeń wielkość kąta. Wysłowienie tych określeń pozostawiono czytelnikowi.

Na zasadzie określeń prędkości i przyśpieszeń kątowych rozróżniać będziemy ruchy obrotowe jednostajne, gdy $\varphi =$ stałej; ruchy obrotowe jednostajnie przyśpieszone, gdy $\gamma =$ stałej; i wreszcie ruchy obrotowe zmienne, gdy ruch obrotowy wyrażony jest równaniem ogólnem $\sigma = f(t)$. Stosując te nowe symbole napiszemy wzory dla ruchu punktu po kole

$$v = r \cdot \varphi;\ p_t = r\frac{d\varphi}{dt};\ p_n = \frac{v^2}{r} = r\varphi^2.$$

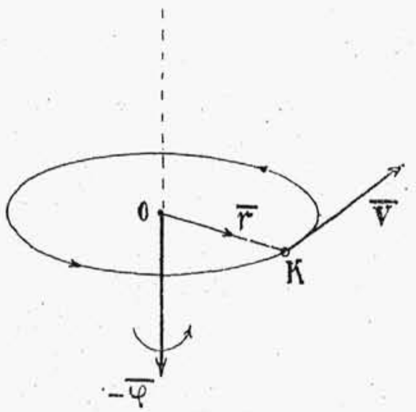
Jeżeli np. $\varphi = \varphi_0 =$ stałej wartości podczas ruchu punktu, to mamy tylko przyśpieszenie $p_n = r\varphi_0^2$; przyśpieszenie bowiem $p_t = 0$.

Jeżeli np. punkt zaczyna obrót, ze stanu spoczynku, to w danej chwili $\varphi = 0$; lecz $\frac{d\varphi}{dt}$ posiada pewną wartość skończoną; punkt przeto posiada

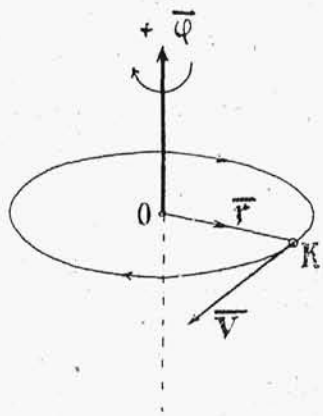
$$p_t = r\frac{d\varphi}{dt};\ p_n = 0.$$

28. Wektor prędkości kątowej. W oznaczeniach wektorowych prędkość φ wyrazimy wektorem, umieszczonym na osi obrotu; długość jego przyjmiemy równą liczbowo wartości φ, a strzałkę, zwróconą ku patrzącemu, gdy obrót odbywa się zgodnie z ruchem wskazówki zegara; zwrot, w ten sposób określony, nazwiemy dodatnim; prędkość kątową, w ten sposób określoną, będziemy oznaczali literą $\bar{\varphi}$. Dogodność takiego przedstawienia prędkości kątowej polega na tem, że, mając dany w przestrzeni wektor $\bar{\varphi}$, możemy ściśle wyznaczyć obrót każdego punktu. Gdy danym jest np. wektor $\bar{\varphi}$, rys. 25-ty, co do kierunku zwrotu i wartości i gdy wyznaczone jest położenie punktu K przez wektor $\bar{r}$, prostopadły do $\bar{\varphi}$, to obrót tego punktu wykonamy w ten sposób, że patrząc na koniec strzałki wektora $\bar{\varphi}$, nadamy obrót temu punktowi około wektora $\bar{\varphi}$, (jak około osi obrotu), zgodny z obrotem wskazówki zegara. Gdyby strzałka wektora $\bar{\varphi}$ zwróconą była, jak pokazano na rys. 26-tym, wtedy zwrot obrotu odnajdziemy w tenże sposób, jakieśmy wyżej opisali; w tym celu umieścimy się naprzeciw strzałki wektora, (a więc w danym przypadku patrzyć będziemy z dołu do góry) i obrotowi nadamy zwrot dodatni t. j. zwrot zgodny z obrotem wskazówki zegara; moglibyśmy również patrzyć na ten wektor z góry, wtedy przedstawi się zwrot jego jako odjemny, a więc, patrząc z **tego** miejsca obserwacyjnego, nadamy ruchowi punktu zwrot przeciwny ruchowi wskazówki zegara; postępując w ten sposób, zauważymy z rysunku 26-go, że w obydwóch tych przypadkach, patrząc z góry czy też z dołu na strzałkę wektora, otrzymamy zawsze jeden i ten sam ruch punktu w przestrzeni; wektor więc $\bar{\varphi}$ **określa ściśle i jednoznacznie obrót** dowolnie obranego punktu w przestrzeni

Przytem należy zaznaczyć, że wybór początku wektora $\bar{\varphi}$ na osi obrotu jest dowolny i nie wpływa on bowiem na określenie ruchu; wektor, posiadający taką właściwość, nazwiemy **wektorem przesuwnym.** Tej właściwości nie posiadają np. wektory prędkości i przyśpieszeń punktów ruchomych; odnoszą się one bowiem tylko do danego punktu; należy więc w tym razie umieszczać je w ten sposób, ażeby początki ich popokrywały się z punktem ruchomym; wektory takie nazwiemy **wektorami ze stałymi punktami przyłożenia**, lub **umiejscowionymi**.



Rys. 25.



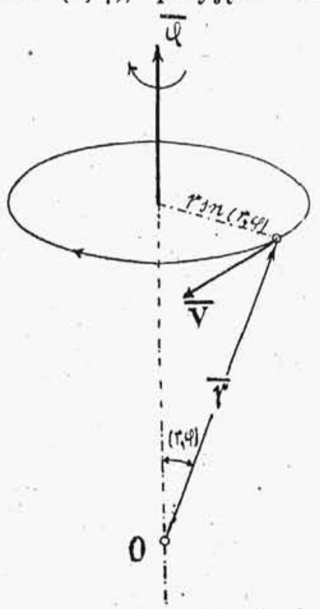
Rys. 26.

Umówimy się jeszcze, w jaki sposób mamy wyrażać wektor prędkości punktu ruchomego w oznaczeniach wektorowych. Liczbowo prędkość $v = r\varphi$, ażeby zaś wyrazić jej właściwość wektorową, napiszemy wzór

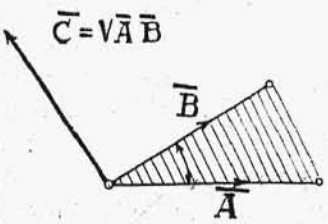
$$\bar{v} = \mathrm{V}\,\bar{r}\,\bar{\varphi}, \qquad (18)$$

w którym znak V jest pierwszą literą słowa „Vector" i wskazuje, że $\bar{v}$ należy pojmować jako wektor, rys. 25-ty, którego wartość liczbowa równa się iloczynowi $r\varphi$, którego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\bar{r}$ i $\bar{\varphi}$, i zwrot jest zgodny z ruchem wskazówki zegara, gdy umieścimy się naprzeciw strzałki wektora $\bar{\varphi}$.

29. Iloczyn wektorowy. W rachunku wektorowym stosujemy wzór $\bar{v} = \mathrm{V}\bar{r}\bar{\varphi}$ do ogólniejszych przypadków i pojmujemy przez $\bar{r}$ promień, niekoniecznie prostopadły do osi $\bar{\varphi}$, jak wskazuje rys. 25-ty, lecz rozumiemy przez $\bar{r}$ odległość punktu ruchomego od bieguna O, dowolnie obranego na prostej wektora $\bar{\varphi}$, rys. 27-my, i piszemy w tym razie również $\bar{v} = \mathrm{V}\,\bar{r}\,\bar{\varphi}$. W danym więc przypadku, ażeby ten wyraz oznaczał prędkość, powinien wejść do iloczynu jeszcze czynnik $\sin(r, \varphi)$, gdyż w danym razie bezwzględna wartość prędkości: $v = r.\varphi.\sin(r,\varphi)$; lecz czynnik $\sin(r,\varphi)$, przyjęto we wzorach wektorowych przepuszczać, pozostawiając go domysłowi; wyraz $V\bar{r}\bar{\varphi}$, pojęty w ten sposób, nazwano **iloczynem wektorowym dwóch wektorów.** Wektory $\bar{r}$ i $\bar{\varphi}$ posiadają w powyższym przykładzie ściśle określone znaczenie; lecz, podane określenie iloczynu wektorowego, stosuje się wogóle do jakichbądź dwóch wektorów; i posiada różnorodne znaczenie w mechanice. Korzystając z przytoczonych oznaczeń, postawimy określenie ogólne, rys. 28-my; (porów. tom I-szy § 25-ty),



Rys. 27.



Rys. 28.

iloczynem wektorowym dwóch wektorów $\bar{A}$ i $\bar{B}$ nazywamy taki wektor trzeci $\bar{C}$: 1) który jest prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez obydwa wektory $\bar{A}$ i $\bar{B}$; 2) którego strzałka zwróconą jest do patrzącego na obrót wektora $\bar{A}$, gdy ten wektor zakreśla kąt $(\bar{A}, \bar{B})$ w zwrocie przeciwnym obrotowi wskazówki zegara; 3) którego długość $= A\,B\,.\sin(A,B)$; gdzie A i B są liczbowemi wartościami danych wektorów. Określenie to wyrazimy wzorem wektorowym:

$$\bar{C} = V\bar{A}\bar{B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

którego skalarna wartość:

$$C = A\,.\,B\,.\sin(A,B) \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Przytoczymy następujące szczególne przypadki, wynikające z tego określenia:

1) Iloczyn $V\bar{A}\bar{A}$ jest zawsze równy zeru, gdyż kąt $(A, A) = 0$; a zatem sinus $(A, A) = 0$, a więc i wartość $A\,.\,A\,.\sin 0 = 0$. Gdy zastosujemy ten przypadek do obliczenia prędkości obrotowej pewnego punktu, to równość wektorów $\bar{r} = \bar{\varphi}$ we wzorze $\bar{v} = V\bar{r}\bar{\varphi}$ wskazuje, że punkt ruchomy znajduje się na osi obrotu; i rzeczywiście, w tym przypadku punkty na osi obrotu posiadają prędkość obrotową równą zeru.

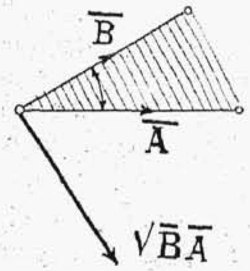
2) Gdy $V\bar{A}\bar{B} = 0$, lub w zastosowaniu do przykładu na prędkości, gdy $V\bar{r}\bar{\varphi} = 0$, natenczas albo $\bar{r} = 0$, albo $\bar{\varphi} = 0$; albo $\bar{r} \parallel \bar{\varphi}$, gdyż wtedy $\sin(r, \varphi) = 0$, i rzeczywiście w tych przypadkach $v = 0$.

Pisząc np. iloczyn $V\bar{A}\bar{B}$, rozumiemy, że wartość jego równą jest $AB\sin(A,B)$; gdy zaś napiszemy wyraz $V\bar{B}\bar{A}$, wtedy wartość jego obliczymy z wzoru $BA\sin(B,A)$; porządek mnożników iloczynu liczbowego nie wpływa ani na jego wartość, ani na znak; lecz, wprowadzając do rachunku wielkości kątów, należy rozróżnić, z jakim zwrotem zakreślamy je, a zwrot ten zależy od porządku liter; przyjmiemy, że $\sphericalangle(AB) = -\sphericalangle(BA)$ i wskutek tego $\sin(A,B) = -\sin(B,A)$. Zmieniając więc **porządek mnożników iloczynu wektorowego zmieniamy przez to jego znak.**

Kątem **dodatnim** nazwiemy, **w tym razie**, kąt, który jest zakreślony w zwrocie **przeciwnym** obrotowi wskazówki zegara; np. na rys. 28-ym $\sphericalangle(A,B)$ jest dodatni; — gdyż kąt ten, stosownie do symbolu (A,B), utworzymy, obracając wektor $\bar{A}$ w zwrocie przeciwnym obrotowi wskazówki zegara, aż do pokrycia się z wektorem $\bar{B}$. Gdy wyobrazimy sobie wektory $\bar{A}$ i $\bar{B}$ na płaszczyźnie rysunku, natenczas stronę wierzchnią tej płaszczyzny t. j. stronę zwróconą ku widzowi, nazwiemy stroną dodatnią płaszczyzny kąta, wyznaczonego przez symbol $V\bar{A}\bar{B}$; stronę zaś spodnią tej płaszczyzny nazwiemy stroną odjemną; i rzeczywiście, patrząc na nią z pod spodu, zwrot obrotu wektora $\bar{A}$ będzie przeciwny zwrotowi, przyjętemu za dodatni. Nazwy strony dodatnej i odjemnej wprowadzamy, w celu łatwiejszego wyznaczenia zwrotu wektora $\bar{C} = V\bar{A}\bar{B}$.

Jako przykłady, wyznaczenia zwrotu wektora $V\bar{A}\bar{B}$, służyć mogą rys. 28 my i 29-ty. Symbol $V\bar{A}\bar{B}$ wskazuje, że wektor $\bar{A}$ obrócić należy około jego początku, aż do pokrycia się z $\bar{B}$; zakreślony w ten sposób kąt jest dodatni, i strona płaszczyzny tego kąta, która jest zwróconą do patrzącego, jest stroną dodatnią płaszczyzny i **na tej stronie** wystawimy wektor $\bar{C} = V\bar{A}\bar{B}$, jak pokazuje rys. 28-my; symbol zaś $V\bar{B}\bar{A}$, gdy wektory $\bar{A}$ i $\bar{B}$ leżą, jak pokazano na rys. 29-ym, wyraża, że strona płaszczyzny kąta, utworzonego przez symbol $V\bar{B}\bar{A}$ i zwrócona ku widzowi, jest odejmną, przeto wektor $\bar{C} = V\bar{B}\bar{A}$, przyłożymy do odwrotnej strony tej płaszczyzny, gdyż ona jest dodatnią.

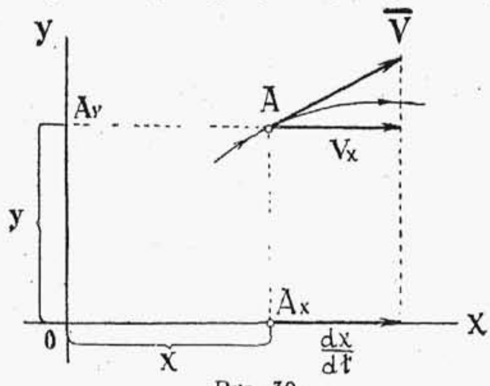
Należy jeszcze zaznaczyć, że wektor $\bar{C}$, niekoniecznie ma być przyłożony do punktu przecięcia się wektora $\bar{A}$ z wektorem $\bar{B}$, może on być bowiem przyłożony do punktu w przestrzeni, zależnie od warunków zadania, powinien jednakże przytem umieszczeniu zachować kierunek, zwrot i swą wartość.



Rys. 29.

Jeżeli np. wektor $\bar{C}$, rys. 28-my, przyłożymy do końca wektora $\bar{A}$, to otrzymamy znaczenie kinematyczne wzoru $\bar{C} = V\bar{A}\bar{B}$ w sposób następujący: wektor $\bar{A}$ uważajmy za promień wodzący $\bar{r}$ punktu, wyznaczonego przez ten koniec; wektor $\bar{B}$ przyjmijmy za oś obrotu $\bar{\varphi}$ wtedy iloczyn $V\bar{r}\bar{\varphi}$ przedstawia prędkość obrotową punktu, wyznaczonego przez promień wodzący $\bar{r}$, a zatem $V\bar{r}\bar{\varphi} = \bar{v}$; skąd: $v = r\varphi \sin(r,\varphi)$, kierunek zaś tej prędkości **jest** prostopadły do płaszczyzny $(\bar{r},\bar{\varphi})$, i zwrot jej skierowany jest ku widzowi, któremu strona płaszczyzny kąta $(\bar{r},\bar{\varphi})$ przedstawia się dodatnią; jak pokazano na rys. 27-ym. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów wyraża również moment siły względem pewnego bieguna; porów. tom. I-szy str. 34-ta.

30. Ruch punktu, wyrażony spółrzędnemi prostokątnemi. W celu przedstawienia ruchu punktu za pomocą równań pomiędzy drogą i czasem, które podajemy w paragrafach poprzednich, stosujemy jeszcze równania pomiędzy **spółrzędnemi** punktu ruchomego **i czasem.** Do sposobu tego przedstawiania dojdziemy, gdy wprowadzimy do rachunku zamiast ruchu **właściwego punktu,** — ruch **rzutu** jego na osi spółrzędnych, — i w danym razie mówić będziemy o drodze, prędkości i przyśpieszeniu **rzutu punktu** ruchomego na obraną oś.



Rys. 30.

Ruch tego rzutu jest w pewnej ścisłej zależności od ruchu punktu właściwego. Niechaj A będzie punktem ruchomym, rys. 30-ty, A_x — jego rzutem prostopadłym na oś x; ruch punktu A_x możemy wyrazić równaniem pomiędzy jego drogą i czasem: $x = f(t)$, w którem x jest droga, jaką przebywa rzut punktu. Jeżeli obierzemy dwie osi rzutów wzajemnie prostopadłe i na wspólnej płaszczyźnie z punktem A, to możemy mówić o ruchu dwóch rzutów punktu A, t. j. o ruchu punktu A_x i A_y. Równania ruchu tych dwóch punktów niech będą nast.

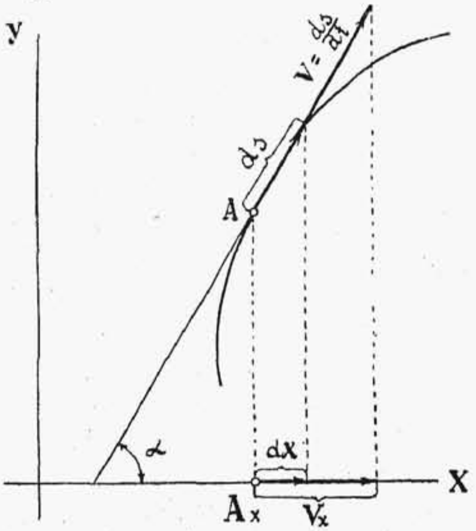
$$x = f_1(t);\; y = f_2(t).$$

Weźmy pod uwagę, że te dwa równania wyznaczają w zupełności ruch właściwego punktu A, dla każdej bowiem wartości t otrzymamy ściśle określone wartości x i y, które są spółrzędnemi właściwego punktu; wskutek tego położenie właściwego punktu jest przez to w każdej chwili wyznaczone. Zatem powyższe dwa równania są równaniami ruchu, i nazywamy je równaniami ruchu **pomiędzy spółrzędnemi i czasem.**

Do wyznaczenia ruchu na płaszczyźnie potrzeba i wystarcza **dwa** równania; gdy zaś ruch odbywa się w przestrzeni, t. j., gdy tor jest krzywą np. podwójnej krzywizny, natenczas wyznaczymy ruch **trzema** równaniami

$$x = f_1(t);\quad y = f_2(t);\quad z = f_3(t). \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Prędkość rzutu punktu na oś x równa się $\frac{dx}{dt}$; prędkość zaś właściwego punktu $v = \frac{ds}{dt}$. Zrzutujmy obecnie wektor prędkości punktu właściwego na oś x i oznaczmy go przez v_x, to otrzymamy $v_x\ v.\cos\alpha =$ $= \frac{ds}{dt}.\cos\alpha$. Zważywszy, rys. 31-szy, że $ds.\cos\alpha = dx$, otrzymamy



Rys. 31.

$$v_x = \frac{dx}{dt};$$

co wysłowimy: **rzut prędkości punktu równa się prędkości jego rzutu.**

Powtórzywszy to rozpatrywanie, dla rzutu na oś y, otrzymamy $v_y = \frac{dy}{dt}$

Mając dwa prostokątne rzuty prędkości punktu na dwie wzajemnie prostopadłe osi, obliczyć już możemy prędkość właściwego punktu ze wzoru

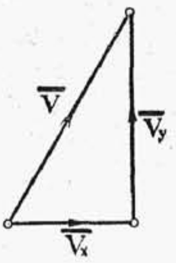
$$v = \pm\sqrt{v^2x + v^2y} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

lub wektorowo, rys. 32-gi

$$\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y \quad . \; . \; . \quad (23)$$

Rozpatrywanie powyższe odnosiło się do ruchu na płaszczyźnie; lecz można je również zastosować do toru przestrzennego i otrzymamy wtedy

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$



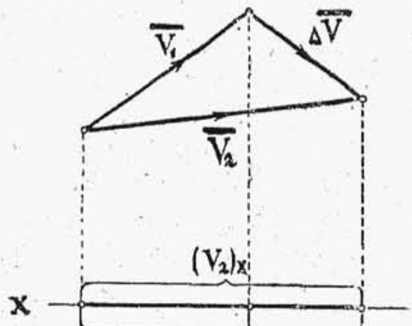
Rys. 32.

oraz $\quad v = \pm\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$

lub $\quad \bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$

Wnioski te i wzory pozwalają obliczyć prędkość właściwą punktu z równań ruchu pomiędzy spółrzędnemi i czasem.

Znajdźmy następnie związek pomiędzy rzutem przyśpieszenia punktu ruchomego a przyśpieszeniem rzutu jego na obraną oś. Podług określenia, przyśpieszenie punktu właściwego $\bar{p} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$; gdzie $\Delta\bar{v}$ jest przyrostem wektorowym prędkości w dwóch blisko siebie leżących miejscach toru. Jeżeli $\bar{v}_2$ i $\bar{v}_1$ oznaczają wektory prędkości w miejscach danego toru, to $\Delta\bar{v}$ wykreślimy, budując trójkąt podług równania wektorowego $\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$, rys. 33-ci. Zrzutujemy następnie boki tego trójkąta na dowolnie obraną oś x; wtedy otrzymamy, iż rzut $\Delta\bar{v}$ na oś x, który oznaczymy przez $(\Delta\bar{v})_x$, jest równy **algebraicznej** róż-



Rys. 33.

nicy pomiędzy rzutami $(v_2)_x$ i $(v_1)_x$ t. j. $(\Delta \bar{v})_x = (\bar{v}_2)_x - (\bar{v}_1)_x$; dzieląc to równanie przez Δt, otrzymamy $\frac{(\Delta \bar{v})}{\Delta t} x = \frac{\text{algeb. przyrostowi } v_x}{\Delta t}$, a więc $p_x = \frac{dv_x}{dt}$, gdzie p_x oznacza rzut przyśpieszenia właściwego na oś x; wynik ten wypowiemy:

rzut przyśpieszenia punktu równa się przyśpieszeniu jego rzutu.

Gdy uczynimy rzuty na dwie wzajemnie prostopadłe osi x i y, natenczas otrzymamy

$$p_x = \frac{dv_x}{dt}, \text{ oraz } p_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

lub inaczej

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ i } p_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

z tych równań napiszemy

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}; \text{ lub } \bar{p} = \bar{p}_x + \bar{p}_y \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Wyrazy więc v_x i p_x posiadają w ten sposób podwójne znaczenie kinematyczne; raz uważane być mogą jako rzuty prędkości właściwych lub przyśpieszeń; drugi raz, jako prędkości i przyśpieszenia rzutu punktu właściwego. Dwoistość takiego pojmowania zaznaczyliśmy już w rachunku wektorowym w §·16-ym tomu I.

Dla ruchu w przestrzeni możemy w tenże sposób, jak dla ruchu na płaszczyźnie, dowieść, iż rzut przyśpieszenia punktu ruchomego na pewną oś równa się przyśpieszeniu rzutu tegoż punktu.

A więc napiszemy następujące równania, w których oznaczymy p_x, p_y i p_z rzuty przyśpieszeń na oś x, y i z

$$\left.\begin{array}{ll} p_x = \frac{dv_x}{dt}, & \text{lub } p_x = \frac{d^2x}{dt^2} \\ p_y = \frac{dv_y}{dt} & \;\text{"}\;\; p_y = \frac{d^2y}{dt^2} \\ p_z = \frac{dv_z}{dt} & \;\text{"}\;\; p_z = \frac{d^2z}{dt^2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Za pomocą tych wzorów obliczymy właściwe przyśpieszenie z trzech jego rzutów

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}.$$

Kąty, jakie tworzy kierunek prędkości z osiami x, y i z obliczymy z następujących równań:

$$\left.\begin{array}{ll} & \cos(v, x) = \frac{v_x}{v}; \; \cos(v, y) = \frac{v_y}{v}; \; \cos(v, z) = \frac{v_z}{v}. \\ \text{oraz} & \cos(p, x) = \frac{p_x}{p}; \; \cos(p, y) = \frac{p_y}{p}; \; \cos(p, z) = \frac{p_z}{p}. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (31)$$

Za pomocą więc tych wzorów możemy, z równań ruchu pomiędzy **spółrzędnemi i czasem**, obliczyć właściwe prędkości i przyśpieszenia, tak co do ich wartości, jak i co do ich położenia w przestrzeni.

Przykład. Dane jest równanie ruchu pomiędzy spółrzędnemi i czasem

$$x = c_1 t^2, \quad y = c_2 t^2, \quad z = c_3 t^2;$$

wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie w chwili t, oraz napisać równania toru w spółrzędnych x, y, z.

Rozwiązanie. Z danych równań otrzymamy: $v_x = \frac{dx}{dt} = 2c_1 t$; $v_y = 2c_2 t$; $v_z = 2c_3 t$, skąd $v = 2t\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$.

Równanie to przedstawia ruch jednostajnie przyśpieszony. Wielkość przyśpieszenia obliczymy bezpośrednio (gdy zauważymy, że ruch jest prostolinijny): $p = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. Gdy zechcemy jednakże postępować metodycznie, powinniśmy napisać $p_x = \frac{dv_x}{dt} = 2c_1$, $p_y = \frac{dv_y}{dt} = 2c_2$, $p_z = \frac{dv_z}{dt} = 2c_3$, skąd: $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} =$ j. w.

Równanie toru tego ruchu napiszemy, gdy znajdziemy równanie pomiędzy x, y, z bez t. W tym celu obliczymy np. z 1-go równania t i podstawimy go w 2-gie i 3-cie, a otrzymamy szukane równania. Rugowanie wielkości w danym razie wykonać można, dzieląc np. równanie 1-sze przez 2-gie, następnie 2-gie przez 3-cie, a otrzymamy: $\frac{x}{y} = \frac{c_1}{c_2}$, oraz $\frac{y}{z} = \frac{c_2}{c_3}$. Tor w danym razie wyraża się dwoma równaniami pierwszego stopnia, które przedstawiają dwie płaszczyzny, linia ich przecięcia się jest torem danego ruchu. Zbadanie wyznaczenia położenia tej prostej względem osi, pozostawiono czytelnikowi.

II. Kinematyka brył.

A. Zasady ogólne.

31. Wyznaczenie ruchu brył. Stopnie swobody. Zbiór punktów, których **odległości wzajemne podczas** ruchu **nie zmieniają się,** nazwano niezmiennym układem punktów, lub bryłą sztywną, lub też krótko bryłą.

Znajomość ruchu bryły polega na znajomości ruchu **każdego** jej punktu. Ponieważ przyjmujemy, że bryła składa się z nieskończenie