6) Bąk, puszczony w ruch, obraca się około swej osi ze stałą prędkością $\bar{\varphi}_2$; oś tego obrotu obraca się ze stałą prędkością $\bar{\varphi}_1$ około pionu, wystawionego w punkcie oparcia bąka. Należy zastąpić te ruchy obrotowe przez toczenie się.

W zadaniu tem nie rozpatrujemy warunków, które wywołują dane ruchy, gdyż to należy do dynamiki, lecz, stwierdzając rodzaj ruchów, stawiamy sobie za zadanie te ruchy przekształcić.

Przed przystąpieniem do rozwiązania, należy określić np. obserwacyę zwrotów obrotów $\bar{\varphi}_2$ i $\bar{\varphi}_1$, jakie w danym ruchu zachodzą; gdyż od tych zwrotów należy odpowiedź. Obserwacya przyprowadzi nas do wyniku, że zwroty osi $\bar{\varphi}_2$ i $\bar{\varphi}_1$ są z sobą zgodne i kąt (φ_2, φ_1), który oznaczymy przez α, jest ostry. Stożek nieruchomy jest miejscem geometrycznem osi $\bar{\varphi}$ obrotu wypadkowego; gdyż tylko punkty tej osi posiadają chwilowe prędkości zero. Oznaczmy kąt między $\bar{\varphi}$ i $\bar{\varphi}_2$, przez β; wtedy otrzymamy

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varphi_1 \sin \alpha}{\varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2}, \text{ oraz } \varphi = \varphi_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

W celu wykończenia rozwiązania należy wykreślić oba stożki.

H. Przyśpieszenia punktów poruszającej się bryły.

64. Uwagi ogólne. Ruch bryły swobodnej jest określony przez sześć niezależnych parametrów; mogą być nimi np. trzy parametry wektora prędkości postępowej i trzy parametry prędkości obrotowej (§ 47-my) przez te dwa wektory ruch bryły jest ściśle określony, a więc i prędkość każdego jej punktu powinniśmy obliczyć z tych sześciu parametrów; rozwiązanie tego ogólnego i innych szczegółowych zadań podaliśmy w paragrafach poprzednich.

Obecnie przystąpimy do obliczenia **przyśpieszeń** punktów danej bryły, gdy dany jest jej ruch. Ażeby obliczyć wogóle przyśpieszenie punktu poruszającego się należy znać jego prędkość w dwóch nieskończenie blizkich okresach czasu; prędkości te oznaczymy literami $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$; a różnica tych wektorów rozdzielona przez okres czasu, w jakim ona powstała, daje wektor przyśpieszenia. Ażeby przeto obliczyć przyśpieszenie dowolnego punktu danej bryły należy znać jej ruch w **dwóch** po sobie następujących okresach czasu.

65. Przyśpieszenia punktów bryły, będącej w ruchu postępowym. Gdy bryła jest w ruchu postępowym (§ 32-gi); wtedy wszystkie jej punkty w tej samej chwili posiadają jednakowe prędkości $\bar{v}_1$; jeżeli w następnej chwili bryła wykonywa również ruch postępowy z prędkością wogóle inną $\bar{v}_2$, to znów wszystkie jej punkty posiadają prędkość $\bar{v}_2$; wszystkie przeto punkty danej bryły posiadają w danej chwili jednakowe przyrosty prędkości, t. j. jednakowe przyśpieszenia, określone przez przyśpieszenie jednego dowolnego jej punktu.

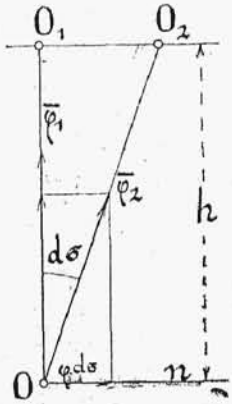
66. Przyśpieszenia punktów bryły, będącej w ruchu obrotowym. Jeżeli bryła jest w ruchu obrotowym około danej osi, która przynajmniej przez dwa nieskończenie małe okresy czasu niezmienia swego miejsca w przestrzeni, to przyśpieszenia punktów bryły mogą być obliczone jako przyśpieszenia punktów, poruszających się po kole; które określimy ze wzorów 15-tych; a więc wektor przyśpieszenia każdego punktu bryły, obracającej się około osi (nieruchomej), leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi i może być uważany jako złożony z dwóch wektorów: z jednego prostopadłego do promienia koła, jakie zakreśla dany punkt i z drugiego, który leży na tym promieniu ze strzałką zwróconą ku osi obrotu; wartości tych składowych przyśpieszeń

$$p_t = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}; \; p_n = r \cdot \varphi^2; \; p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2}; \; \cos(p, p_n) = \frac{p_t}{p_n} = \frac{d\varphi}{dt} : \varphi^2.$$

Z ostatniego wzoru wywnioskujemy, że kąty nachyleń, jakie tworzą wektory przyśpieszeń punktów bryły, obracającej się około osi, z odpowiedniemi promieniami wodzącymi, są w danej chwili wielkościami stałemi, niezależnemi od położenia punktu względem osi, t. j. niezależnemi od r; właściwość ta wynika z proporcyonalności przyśpieszeń p_t i p_n do r i ze stałych w danej chwili wartości φ i $\frac{d\varphi}{dt}$ dla wszystkich punktów bryły.

67. Przyśpieszenia punktów bryły, będącej w ruchu kulistym. Ruch kulisty bryły około punktu O, rys. 80-ty, w pierwszym okresie czasu określmy (§ 45-ty) przez prędkość obrotową $\bar{\varphi}_1$ około osi 1-szej, a w następnym okresie przez prędkość obrotową $\bar{\varphi}_2$ około osi 2-ej; kierunki tych osi przecinają się w punkcie nieruchomym bryły i tworzą kąt nieskończenie mały $d\sigma$.

W celu łatwiejszego określenia przyśpieszenia dowolnie obranego punktu danej bryły, przekształcimy te ruchy na inne, z których będziemy mogli bezpośrednio odczytać szukane przyśpieszenia; mianowicie rozłożymy prędkość obrotową $\bar{\varphi}_2$ na dwie składowe: na jedną w kierunku osi 1-szej, której wartość liczbowa $= \bar{\varphi}_2$ (z pominięciem nieskończenie małych drugiego rzędu); i na drugą składową, leżącą w płaszczyźnie kąta $d\sigma$ i skierowaną prostopadle do osi 1-szej; kierunek ten oznaczymy literą n; a wielkość tej składowej $= \varphi_2 \cdot d\sigma$; z pominięciem wielkości nieskończenie małych drugiego rzędu, gdyż może być uważaną za cząstkę łuku, zakreślonego promieniem φ_2 (lub promieniem φ_1; różnica bowiem będzie wielkością nieskończenie małą drugiego rzędu). Wskutek tego rozłożenia kolejne obroty około dwóch osi $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$ zastąpimy trzema kolejnemi obrotami około osi 1-szej z prędkościami φ_1 i φ_2 oraz obrotem około osi n z prędkością $\varphi_2 . d\sigma$ lub $= \varphi_1 . d\sigma$; te dwie bowiem wartości różnią się o nieskończenie małą wielkość drugiego rzędu. Dwa obroty około osi 1-szej wywołują przyśpieszenie każdego punktu bryły takie, jakie punkt posiada podczas obrotu około osi nieruchomej z prędkością zmienną (§ 66-ty). Obrót około osi n nadaje danemu punktowi prędkość $= \varphi_1 d\sigma . h$; gdzie h oznacza odległość danego punktu od osi n; prędkość ta rozdzielona przez dt wyrazi przyśpieszenie danego punktu, które oznaczymy przez p_0; a więc $p_0 = \varphi_1 \frac{d\sigma}{dt} h$; przyśpieszenie to nazwiemy przyśpieszeniem dodatkowem, wynikającem z ruchu kulistego. Wektor tego przyśpieszenia leży w płaszczyźnie przeprowadzonej przez dany punkt i prostopadły do osi n; w tej bowiem płaszczyźnie odbywa się ruch rozpatrywanego punktu podczas obrotu około osi n; a kierunek jest prostopadły do promienia wodzącego h, nie leży przeto wogóle na płaszczyźnie prostopadłej do φ_1; a tworzy z tą płaszczyzną pewien kąt, zależny od położenia obranego punktu w przestrzeni.



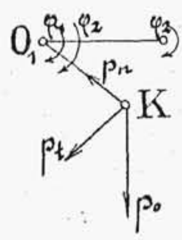
Rys. 80.

Właściwe przeto przyśpieszenie $\bar{p}$ dowolnego punktu bryły, wykonującej ruch kulisty, składa się z trzech przyśpieszeń

$$\bar{p} = (\bar{p}_t + \bar{p}_n) + \bar{p}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

W szczególnym przypadku jeżeli oś 1-sza nie zmienia podczas ruchu kulistego swego położenia w przestrzeni, t. j. gdy kąt $d\sigma = 0$; wtedy $p_0 = 0$, a punkt bryły otrzymuje tylko przyśpieszenia, wynikające z obrotu punktu około osi stałej ze zmienną prędkością, co jest słuszne, ruch bowiem kulisty zamienia się na obrotowy. Jeżeli zaś w innym przypadku liczbowa wartość prędkości obrotowej się nie zmienia, t. j. $\varphi_1 = \varphi_2$, a osi tworzą kąt $d\sigma$, wtedy przyśpieszenie każdego punktu takiej bryły składa się z przyśpieszenia normalnego p_n, z przyśpieszenia dodatkowego p_0 przyśpieszenia bowiem p_t równa się w tym razie O. Jeżeli zaś $\varphi_1 = \varphi_2$, jednocześnie $d\sigma = O$, to $\bar{p} = \bar{p}_n$.

68. Przyśpieszenia punktów bryły, będącej w ruchu płaskim. Ruch płaski powstanie z ruchu kulistego, gdy punkt nieruchomy odsuniemy do nieskończoności. W celu rozpatrzenie tego przypadku, przeprowadźmy przez dany punkt bryły ruchomej, rys. 80-ty, płaszczyznę prostopadłą do osi $\bar{\varphi}_1$; płaszczyzna ta przetnie tę oś w punkcie O_1, a oś $\bar{\varphi}_2$ w punkcie O_2, nieskończenie blizkim do O_1. Jeżeli następnie odsuwać będziemy punkt nieruchomy O do nieskończoności w ten sposób, ażeby punkty O_1 i O_2 pozostawały na miejscu, to ruch bryły będzie płaski a punkty O_1 i O_2 staną się środkami obrotów chwilowych; kąt $d\sigma = 0$; wektory zaś przyśpieszenia dodatkowego p_0 wszystkich punktów tej płaszczyzny będą leżały na tejże płaszczyźnie. Przyśpieszenie przeto właściwe składać się będzie w danym razie z trzech przyśpieszeń, rys. 81-szy: 1) z przyśpieszenia p_n; 2) z przyśpieszenia p_t i 3) z przyśpieszenia dodatkowego, którego kierunek będzie w tym razie prostopadły do $O_1 O_2$, a wartość $p_0 = \frac{O_1 O_2}{dt} . \varphi$; gdyż dla $h = \infty$ i dla $d\sigma = 0$; limes $h . d\sigma = O_1 O_2$.



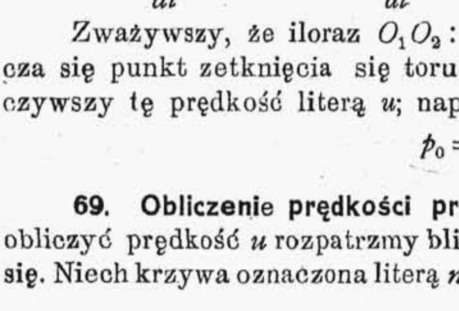
Rys. 81.

Przyśpieszenie przeto każdego punktu figury płaskiej, będącej w ruchu w swej płaszczyźnie, obliczymy z odległości v tego punktu od środka chwilowego obrotu; — z prędkości obrotowej φ, z przyśpieszenia kątowego $\frac{d\varphi}{dt}$ i wielkości $\frac{O_1 O_2}{dt}$.

Zważywszy, że iloraz $O_1 O_2 : dt$ jest to prędkość z jaką przemieszcza się punkt zetknięcia się toru ruchomego z nieruchomym; — i oznaczywszy tę prędkość literą u; napiszemy

$$p_0 = u . \varphi. \qquad (44)$$

69. Obliczenie prędkości przenoszenia się środka obrotu. Ażeby obliczyć prędkość u rozpatrzmy bliżej właściwości geometryczne toczenia się. Niech krzywa oznaczona literą n, rys. 82-gi, przedstawia tor nieruchomy; krzywa r tor ruchomy; i niech tor ruchomy podczas ruchu bryły toczy się wewnątrz toru nieruchomego, obracając się kolejno około środków O_1 i O_2. Gdy literami $d\tau_n$ i $d\tau_r$ oznaczymy kąty, jakie tworzą styczne, przeprowadzone w następnych cząstkach torów ruchomego i nieruchomego ze styczną, przeprowadzoną przez środek obrotu, wtedy $\varphi = \frac{d\tau_r - d\tau_n}{dt}$;



Rys. 82.

cały bowiem układ płaski może obrócić się tylko o kąt $d\tau_r - d\tau_n$. — Zamiast kątów $d\tau_r$ i $d\tau_n$ wprowadzimy do obliczeń promienie krzywizny obydwóch torów w punktach ich zetknięcia się; w tym celu oznaczymy literą ρ_n promień krzywizny toru nieruchomego a literą ρ_r — promień krzywizny toru ruchomego; i napiszemy na zasadzie określenia promienia krzywizny $\rho_r = \frac{ds_r}{d\tau_r}$; $\rho_n = \frac{ds_n}{d\tau_n}$; gdzie ds_r i ds_n oznaczają cząstki łuków torów ruchomego i nieruchomego. Po podstawieniu z tych równań wartości $d\tau_r$ i $d\tau_n$ do wyrazu prędkości kątowej, zważywszy, że wskutek toczenia się $ds_n = ds_r = ds$; otrzymamy

$$\varphi = \frac{ds}{dt} \cdot \left(\frac{1}{\rho_r} - \frac{1}{\rho_n}\right) \text{ skąd}$$

$$u = \frac{ds}{dt} = \varphi \cdot \frac{1}{\frac{1}{\rho_r} - \frac{1}{\rho_n}} \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

Na zasadzie tego wzoru możemy obliczyć przyśpieszenie p_0 z prędkości obrotowej i z właściwości geometrycznych torów; a więc ze wzoru 44-go

$$p_0 = \varphi^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\rho_r} - \frac{1}{\rho_n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

W przypadku szczególnym, gdy np. $\rho_r = 0$; wtedy $u = 0$; czyli środek chwilowego obrotu pozostaje w spoczynku; figura przeto obraca się około danego środka przynajmniej przez dwa nieskończenie krótkie okresy czasu; co również wynika, że przy $\rho_r = 0$ tor nieruchomy staje się punktem.

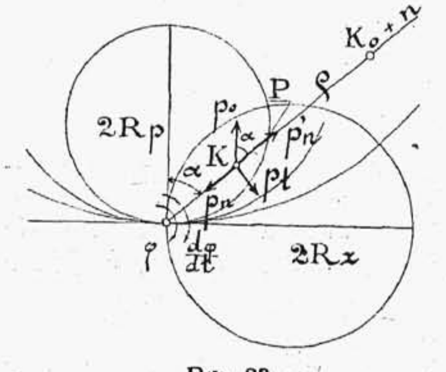
70. Właściwości geometryczne cząstek torów, jakie zakreślają punkty płaszczyzny, poruszającej się w swej płaszczyźnie. Ruch ciągły figury płaskiej w jej płaszczyźnie jest określony przez tor ruchomy, przez tor nieruchomy i przez chwilowe prędkości obrotowe. Jeżeli przeto zechcemy wyznaczyć tor, jaki zakreśli dowolny punkt tej figury; to możemy to uczynić obracając kolejno dany układ około odpowiednich środków o kąty równe odpowiednim wartościom $\varphi \cdot \Delta t$; mając przeto położenie początkowe punktu poruszającego się razem z układem płaskim, znajdziemy następne jego położenie zapomocą takich obrotów. Oczywistem jest, iż dokładność takiego bezpośredniego wykonania na rysunku jest o tyle większa, o ile obierzemy mniejsze kąty obrotu.

Dla naszych dalszych rozpatrywań będzie ważnem znajomość właściwości tylko cząstki toru, jaką zakreśli dowolny punkt płaszczyzny ruchomej; a mianowicie ważnem dla nas będzie:

1) znajomość stycznej w tym punkcie do toru jaki, zakreśli punkt ruchomy; 2) znajomość czy cząstka tego toru jest wklęsłą czy też wy-

pukłą względem dodatniego końca promienia; 3) znajomość promienia krzywizny w danym punkcie jego toru. Na te trzy pytania damy przeto odpowiedzi.

Styczna do toru, jaki punkt dany zakreśla w ruchu płaskim, jest prostopadłą do promienia wodzącego, wyprowadzonego ze środka chwilowego obrotu do danego punktu. Odpowiedź ta nie objaśnia nas jednakże, po której stronie tej stycznej leży cząstka danego toru; t. j. nie daje odpowiedzi czy cząstka toru jest zwróconą do środka chwilowego obrotu stroną wklęsłą czy też wypukłą. O tem rozstrzygnie położenie wektora przyśpieszenia danego punktu; wektor ten bowiem, § 20-ty, leży po stronie wklęsłej toru; wykreślenie przeto wektora przyśpieszenia danego punktu rozstrzygnie o położeniu cząstki toru względem stycznej; a więc i względem środka chwilowego obrotu. Myśl tę ujmiemy rachunkiem; gdy przyśpieszenie danego punktu zrzutujemy na jego promień wodzący, przyjąwszy kierunek dodatni przyśpieszenia w stronę rosnącego promienia wodzącego rys. 83-ci; t. j. ze strzałką obróconą od środka obrotu; jeżeli to przyśpieszenie wypadnie ze znakiem dodatnim, to będzie znaczyć, że punkt dany, podczas ruchu płaszczyzny ruchomej zakreśli cząstkę toru, zwróconą stroną wklęsłą do kierunku dodatniego promienia wodzącego. Zamiast obliczania wektora wypadkowego z równania tego i następnie zrzutowawania go, możemy zrzutować składowe przyśpieszenia i wziąść ich sumę, suma ta wyrażać będzie rzut przyśpieszenia właściwego. W tym celu przeprowadzamy ze środka obrotu chwilowego, odpowiadającego ruchowi płaszczyzny w danej chwili, promień wodzący n do rozpatrywanego punktu i oznaczymy literą α kąt, jaki tworzy ten promień z normalną do torów ruchomego i nieruchomego; wystawimy następnie w punkcie, którego ruch badamy, zgodnie z równaniem 43-em, trzy wektory, których suma rzutów na promień wodzący przedstawi przyspieszenie normalne $\bar{p}'_n$ ruchu danego punktu;



Rys. 83.

$$p'_n = u \cdot \varphi \cdot \cos\alpha - r \cdot \varphi^2 ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 46a$$

gdzie r oznacza promień wodzący rozpatrywanego punktu.

Z równania tego odczytamy, że wyraz pierwszy prawej strony tego równania niezależy od r; wartość przeto jego dla wszystkich punktów danego promienia wodzącego jest stała; wartość drugiego wyrazu zmienia się z odległością punktu od środka obrotu. Z tego wynika, że na danym promieniu wodzącym są punkty, które zakreślają cząstki wypukłe oraz są punkty, które zakreślają cząstki wklęsłe; może być przeto taki punkt na każdym promieniu, który nieposiada przyśpieszenia normalnego, zakreśli przeto prostą cząstkę toru; położenie tego punktu na danym promieniu znajdziemy przyrównawszy

$$p_n' = 0 = u \,.\, \varphi \,.\, \cos\alpha - r_0 \,.\, \varphi^2; \text{ skąd } r_0 = \frac{u \,.\, \cos\alpha}{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

punkt taki jest punktem przegięcia toru, jaki zakreśla dany punkt; a promień krzywizny cząstki toru w tem miejscu $\rho = \infty$. Dla $r > r_0$ otrzymamy $p_n' < 0$; cząstka toru będzie zwrócona wklęsłością do patrzącego ze środka obrotu w kierunku dodatnim danego promienia; dla $r < r_0$; $p_n > 0$; cząstki torów tych punktów będą zwrócone wypukłością do patrzącego w sposób opisany.

Przyjmijmy, że w równaniu 47-em kąt α jest zmienny, a otrzymamy na płaszczyźnie ruchomej miejsce geometryczne punktów, które podczas ruchu płaszczyzny zakreślają cząstki prostolinijne; t. j. które będą punktami przegięć; równanie 47-me jest przeto równaniem biegunowem o spółrzędnych r_0 i α, miejsca geometrycznego punktów przegięć.

Z równania tego wynika, że $\dfrac{r_0}{\cos\alpha} = \dfrac{u}{\varphi} =$ stałej; czyli geometrycznem miejscem końców promieni wodzących r_0 jest koło, którego średnica

$$2 R_p = \frac{u}{\varphi}$$

a środek znajduje się na normalnej do torów ruchomego i nieruchomego w punkcie ich zetknięcia się; koło to nazwano **kołem przegięć**.

Koło przegięć posiada przeto tę właściwość, że wszystkie punkty płaszczyzny ruchomej, wewnątrz jego położone, zakreślają podczas ruchu cząstki torów, które są zwrócone wklęsłością ku dodatniemu końcowi promienia wodzącego; a wszystkie punkty zewnątrz niego leżące zakreślają cząstki torów, które są zwrócone wypukłością ku dodatniemu końcowi tegoż promienia. Koło przegięć znajduje zastosowanie w statyce przy określaniu rodzajów równowagi stałej lub chwiejnej.

Znajdźmy teraz miejsce geometryczne punktów, które podczas obrotu chwilowego płaszczyzny ruchomej nie posiadają przyśpieszenia stycznego. W tym celu zrzutujemy przyśpieszenie $\bar{p}$ na styczną do toru i przyrównamy wartość tego rzutu do zera; analitycznie otrzymamy wtedy rów. następujące, rys. 83-ci,

$$p_t - p_0 \,.\, \sin\alpha = 0$$

a po podstawieniu $p_t = r' \dfrac{d\varphi}{dt}$ gdzie r' oznacza promień wodzący szukanych punktów, otrzymamy

$$\frac{r'}{\sin\alpha} = p : \frac{d\varphi}{dt}$$

Z geometrycznych stosunków, wyrażonych przez to równanie, wynika, że miejscem geometrycznem szukanych punktów jest koło o średnicy $2R_z = p_0 : \dfrac{d\varphi}{dt}$, przechodzące przez środek chwilowego obrotu torów; koło to nazwano kołem **zmianowem.** Punkty przeto koła zmianowego mają tę właściwość; że podczas przynajmniej dwóch chwilowych obrotów zakreślają one dwie cząstki toru z prędkością liczbowo stałą. Przecięcie się koła zmianowego z kołem przegięć, pomijając środek chwilowego obrotu, w którym obydwa koła się przecinają, daje punkt, który łączy właściwości obydwóch kół; t. j. punkt ten nie posiada ani przyśpieszenia normalnego, ani stycznego; t. j. punkt ten zakreśla dwie cząstki toru prostolinijnego ruchem jednostajnym; punkt ten nazwano środkiem przyśpieszeń analogicznie do środka obrotu, który nie posiada prędkości.

71. Obliczenie promienia krzywizny, jaki zakresla dowolny punkt płaszczyzny, poruszającej się w swej płaszczyźnie. Promień ten obliczymy ze wzoru

$$\rho = \frac{v^2}{p'_n}$$

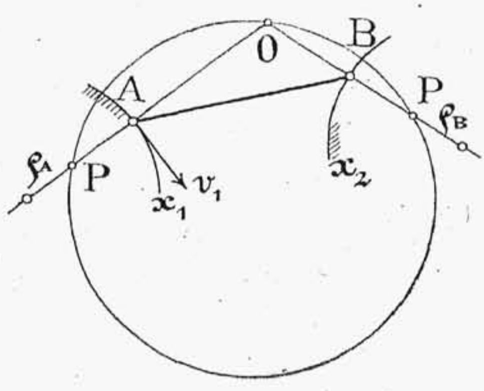
po podstawieniu z równania 46a-go wartości p'_n oraz $v_k = r_k . \varphi$; otrzymamy

$$\rho = \frac{r^2 . \varphi^2}{u . \varphi . \cos\alpha - r\varphi^2};$$

w równaniu tem wszystkie wielkości po prawej stronie są znane, gdy dane są tory środków chwilowych obrotów; prędkość obrotowa φ i położenie punktu poruszającego się (r, α). W celu wyznaczenia drogą geometryczną tego promienia przekształcimy ten wzór, rozdzieliwszy licznik i mianownik przez φ i wprowadziwszy $u : \varphi = 2R_p$; otrzymamy wtedy

$$\rho = \frac{r^2}{2Rp . \cos\alpha - r} = \frac{r^2}{KP} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

gdzie KP, rys. 83-ci, oznacza odcinek promienia wodzącego, zawartego pomiędzy punktem ruchomym i kołem przegięć. Mając przeto wykreślone koło przegięć, znajdziemy z rysunku odcinek KP; środek zaś koła krzywizny cząstki, zakreślonego toru przez punkt, znajdziemy, gdy z punktu K odłożymy w stronę dodatnią lub odjemną promienia wodzącego długość ρ, obliczoną z tego wzoru. Z mianownika równania 48-ego odczytamy, że odcinek KP jest dodatni, gdy punkt K leży wewnątrz koła przegięć; KP zaś jest odjemny, gdy punkt leży zewnątrz tego koła; jeżeli przeto punkt K leży zewnątrz koła, t. j. gdy KP jest odjemne to i ρ jest odjemne, a wtedy odłożymy ρ w stronę odjemną promienia wodzącego, t. j. od K ku środkowi obrotu, co się zgadza z wyżej przytoczoną właściwością koła przegięć. Często bywa dane w zadaniu położenie punktu i promienia ρ cząstki toru, jaki ten punkt zakreśla, wtedy z tego wzoru obliczyć można KP; t. j. można obliczyć jeden punkt P koła przegięć.



Rys. 84.

Przykład. Pręt AB ślizga się końcami swemi po dwóch danych torach krzywych x_1 i x_2, leżących w płaszczyźnie pręta, rys. 84-ty. Znaleźć środek chwilowego obrotu pręta i wykreślić koło przegięć.

Płaszczyznę ruchomą wyobrazimy sobie połączoną z danym prętem; następnie z warunków ślizgania się pręta znajdziemy środek O chwilowego obrotu; punkt O jest przeto jeden z punktów, przez który przechodzi koło przegięć. OA jest promień wodzący punktu A; punkt A jest punktem, który oznaczaliśmy poprzednio przez K; ρ_A jest promień krzywizny toru, jaki punkt A zakreśla; promień ten jest przeto dany i jest on odjemny; ze wzoru przeto 47-ego obliczymy odcinek KP i, odłożywszy go w stronę promienia krzywizny, znajdziemy punkt P, który jest drugim punktem koła przegięć. W tenże sposób, stosując do obliczeń położenie punktu B, znajdziemy trzeci punkt koła przegięć.

W zadaniu tem dane były przeto dwa tory, jakie zakreślają dwa punktu układu płaskiego ruchomego, a ze znajomości tych torów znaleźliśmy bezpośrednio środek chwilowego obrotu i koła przegięć; nie wykreślając torów tych środków i ich promieni krzywizny.

72. Związek pomiędzy przyspieszeniami dwóch punktów figury płaskiej. Wyrazimy obecnie przyśpieszenie punktu układu płaskiego, poruszającego się w swej płaszczyźnie, z prześpieszenia innego punktu tegoż układu i z przyśpieszenia obrotowego podobnie, jak wzór 35-ty wyraża prędkość punktu B prędkością innego punktu A i prędkością obrotową. Przyśpieszenie punktu B wyrazimy wzorem

$$\bar{p}_B = \lim \frac{\bar{v}_{B,2} - \bar{v}_{B,1}}{\Delta t}$$

gdzie $\bar{v}_{B,2}$ i $\bar{v}_{B,1}$ są wektorami prędkości punktu B w dwóch nieskończenie blisko po sobie następujących chwilach.

Ze wzoru 35-ego odczytamy, że

$$\bar{v}_{B,1} = \bar{v}_{A,1} + \mathrm{V}\,\bar{r}_1 \,.\, \bar{\varphi}_1;$$

gdzie $\mathrm{V}\,\bar{r}_1\bar{\varphi}_1$ wyraża prędkość punktu B, wywołanego obrotem około środku A z prędkością φ_1. W następnej chwili otrzymamy podobnież

$$\bar{v}_{B,2} = \bar{v}_{A,2} + \mathrm{V}\,\bar{r}_2\bar{\varphi}_2.$$

Ażeby otrzymać wyraz przyśpieszenia odejmujemy od rów. 2-go pierwsze i rozdzielmy przez dt, a otrzymamy wzór

$$\bar{p}_B = \bar{p}_A + \frac{d}{dt}\,\mathrm{V}\,\bar{r}_1\bar{\varphi}_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (48)$$

z którego odczytamy, że przyśpieszenie dowolnego punktu B układu płaskiego podczas ruchu chwilowego równa się przyśpieszeniu innego punktu A tegoż układu więcej przyśpieszenie jakie punkt B otrzymuje podczas obrotu; — inaczej wyraziwszy się: więcej przyśpieszenie normalne wzdłuż promienia wodzącego, wyprowadzonego z A do B i przyspieszenie styczne; suma wektorowa tych trzech przyśpieszeń przedstawi przyspieszenie właściwe danego punktu.

Ze wzoru 48-go można otrzymać wzór 43 ci; jeżeli punkt A obierzemy w środku chwilowego obrotu O_1, rys. 81-szy. Środek ten w pierwszej chwili nie posiada prędkości, lecz w drugiej chwili otrzymuje prędkość wskutek obrotu układu około środka O_2; prędkość ta nieskończenie mała jest prostopadłą do cząstki łuku O_1O_2 i posiada zwrot, określony przez zwrot obrotu około O_2; wielkość jego $= ds\,.\,(\varphi_1 + d\varphi_1)$ lub inaczej z pominięciem wielkości nieskończenie małych drugiego rzędu, równa się $ds\,.\,\varphi$; rozdzieliwszy tę wartość, wyrażającą przyrost prędkości przez dt, otrzymany przyspieszenie punktu A

$$p_A = \varphi \,.\, \frac{ds}{dt};$$

które jest tożsamo z przyśpieszeniem oznaczonem poprzednio przez P_0; po podstawieniu tej wartości w rów. 48-e otrzymamy rów. 43-cie. Jeżeli punkt A umieścimy w środku przyśpieszeń, to przyśpieszenie każdego innego punktu jest przyśpieszeniem, wynikającem tylko z obrotu jego około środka przyśpieszeń. Znajomość przeto położenia środka przyśpieszeń ułatwia wyznaczenie przyśpieszeń innych punktów danego układu płaskiego w danej chwili.

73. Przyśpieszenia punktów bryły swobodnej. Ruch bryły swobodnej określony jest przez prędkość ruchu postępowego i przez prędkość ruchu obrotowego. Niech litery $\overline{u}_1$ i $\overline{\varphi}_1$ oznaczają te dwie wielkości w pierwszym okresie czasu; a litery $\overline{u}_2$ i $\overline{\varphi}_2$ niech je oznaczają w następnym okresie. Każdy przeto punkt bryły otrzymuje dwie kolejne prędkości $\overline{u}_1$ i $\overline{u}_2$ wywołane ruchem postępowym; i dwie kolejne prędkości $\overline{c}_1$ i $\overline{c}_2$, wywołane kolejnymi obrotami około osi $\overline{\varphi}_1$ i $\overline{\varphi}_2$.

Prędkość przeto punktu 1-go $= \overline{u}_1 + \overline{c}_1$; — drugiego $= \overline{u}_2 + \overline{c}_2$ przyśpieszenia przeto tego puuktu składa się z przyśpieszenia ruchu postępowego $\overline{p}_u$, które otrzymamy jako $\overline{p}_u = \lim s \dfrac{\overline{u}_2 - \overline{u}_1}{\Delta t} = \dfrac{d\overline{u}}{dt}$; i z przyspieszenia, pochodzącego od kolejnych obrotów bryły około dwóch nie przecinających się osi $\overline{\varphi}_1$ i $\overline{\varphi}_2$; ażeby wyznaczyć to przyśpieszenie, przekształćmy te dwa obroty około osi mijających się na inne ruchy, których przyspieszenia umiemy wyznaczyć; przekształćmy je np. na obroty około osi przecinających się; wyznaczenie bowiem przyśpieszeń podczas takich obrotów jest nam znane z § 67-ego, jako przyśpieszenia ruchu kulistego. W tym celu przyłóżmy do dowolnego punktu O_2 osi φ_2 dwa wektory równoważące się $+ \overline{\varphi}_1'$ i $- \overline{\varphi}_1'$; które nie zmienią stanu ruchu danej bryły; w ten sposób otrzymamy dwa obroty $\overline{\varphi}'_1$ i $\overline{\varphi}_2$, których osi przecinają się w punkcie O_2; oraz ruch postępowy, określony przez parę obrotów $\overline{\varphi}_1$ i $- \overline{\varphi}_1'$; w ten sposób dwa obroty około osi mijających się, zastąpiliśmy ruchem kulistym około dowolnie obranego na osi φ_1 punktu O_2 i ruchem postępowym prostopadłym do płaszczyzny $(\varphi_1, - \varphi_1')$ z prędkością $\varphi_1 \, . \, ds$, § 58-my wniosek 3-ci; gdzie ds oznacza odległość pomiędzy równoległemi wektorami φ_1 i φ_1'; lub inaczej ds oznacza odległość punktu O_2 od osi φ_1.

Przyśpieszenie przeto punktu bryły, będącej w ruchu swobodnym, składa się

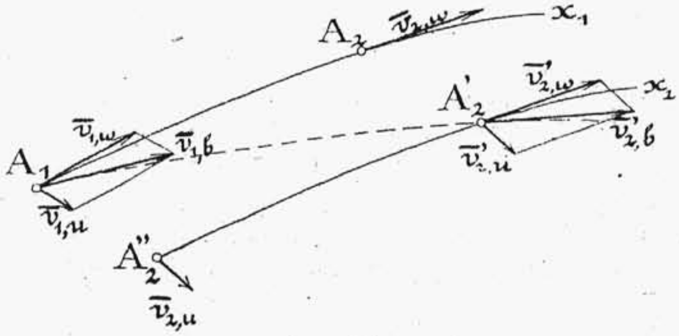
1) z przyśpieszenia ruchu postępowego $\overline{p}_u$, jaki ta bryła posiada;

2) z przyśpieszenia $\overline{p}_0$ ruchu postępowego

$$\overline{p}_s = \mathrm{V} \frac{d\overline{s}}{dt} \, . \, \overline{\varphi} ;$$

3) i z przyśpieszenia, powstałego wskutek ruchu kulistego bryły około punktu O_2; przyśpieszenie to wyznaczyć można ze wzoru 43-ego.

74. Przyśpieszenie punktu, będącego w ruchu złożonym. Określenie tego ruchu daliśmy w § 49-ym; obliczyliśmy tam prędkość bezwzględną punktu; zadanie obecne polega na wyznaczeniu **przyśpieszenia** punktu, będącego w ruchu **złożonym** z wielkości, określających ruch unoszący toru i ruch punktu po tym torze. Dla ułatwienia rozpatrywań weźmy najpierw przypadek szczególny, gdy tor unoszący znajduje się w ruchu postępowym; punkt zaś po torze w ruchu dowolnym $s = f(t)$. W celu obliczenia przyśpieszenia bezwzględnego wyobraźmy sobie dwa położenia toru x_1 i x_2, rys. 85-ty; ruch toru x_1, ponieważ przyjmujemy, że jest to ruch postępowy, określimy jedną tylko prędkością postępową $\bar{v}_{1,u}$; ruch toru w drugiem położeniu określimy wektorem $\bar{v}_{2,u}$; ruch względny punktu określimy w pierwszej chwili przez wektor $\bar{v}_{1,w}$ a w następnej chwili, przyjmując, że tor jest w spoczynku, przez $\bar{v}_{2,w}$; te cztery wektory ściśle określają ruch toru i ruch punktu po nim w dwóch sąsiednich chwilach; z tych 4-ch wielkości należy obliczyć przyśpieszenie bezwzględne czyli wypadkową punktu ruchomego.



Rys. 85.

Gdy tor jest w ruchu, to punkt ruchomy w rzeczywistości znajdzie się w położeniu A'_2 i będzie posiadał prędkość względną $\bar{v}'_{2,w}$ wzdłuż toru i prędkość $\bar{v}'_{2,u}$ jako prędkość unoszącą; t. j. prędkość miejsca, w jakiem znajduje się punkt na torze.

Prędkości bezwzględne punktu ruchomego w położeniach właściwych A_1 i A'_2 obliczymy z nast. wzorów:

$$\bar{v}_{1,b} = \bar{v}_{1,w} + \bar{v}_{1,u} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$
$$\bar{v}'_{2,b} = \bar{v}'_{2,w} + \bar{v}'_{2,u}$$

Przyśpieszenie przeto bezwzględne wyrazimy w myśl danego określenia przyśpieszenia, wzorem

$$\bar{p}_b = \lim \frac{\bar{v}'_{2,b} - \bar{v}_{1,b}}{\Delta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

który po podstawieniu powyższych wyrazów, przekształci się na nast.

$$\bar{p}_b = \frac{\bar{v}'_{2,w} - \bar{v}_{1,w}}{\Delta t} + \frac{\bar{v}'_{2,u} - \bar{v}_{1,u}}{\Delta t} \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

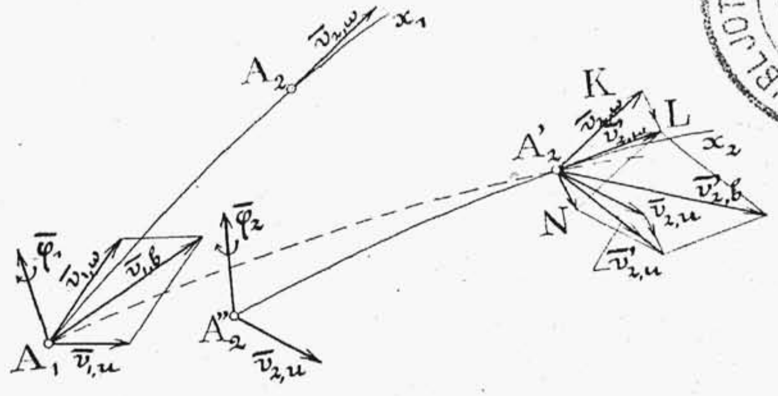
Pomiędzy prędkościami z kreskami, które są dotychczas nieznane, a danemi prędkościami należy znaleźć związek matematyczny.

Ze względu na tę okoliczność, że ruch toru przyjęliśmy postępowym, prędkość względna po torze x_2 w tych samych chwilach czasu jest taka sama nietylko co do wielkości ale i co do kierunku, jak prędkość tegoż punktu po torze x_1; gdyż wszystkie cząstki toru w różnych swych położeniach są do siebie równoległe, a więc i styczne w tych samych punktach toru pozostają do siebie równoległe; otrzymamy przeto związki

$$\bar{v}_2{}'_{,w} = \bar{v}_{2,w}; \text{ oraz } \bar{v}'_{2,u} = \bar{v}_{2,u} \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

Po podstawieniu tych wielkości do rów. 51-ego otrzymamy

$$\bar{p}_b = \frac{\bar{v}_{2,w} - \bar{v}_{1,w}}{\Delta t} + \frac{\bar{v}_{2,u} - \bar{v}_{1,u}}{\Delta t}.$$



Rys. 96.

Zważywszy, że pierwszy wyraz przedstawia przyśpieszenie względne; wyraz drugi przyśpieszenie punktu A_1 danego toru, t. j. przyśpieszenie unoszące; to napiszemy

$$\bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Równanie to wypowiemy w następujący sposób:

gdy tor jest w ruchu postępowym, to przyśpieszenie wypadkowe, punktu poruszającego się po nim, równa się sumie przyśpieszenia względnego i unoszącego.

Weźmy teraz pod uwagę przypadek ogólniejszy, gdy tor jest w ruchu dowolnym w przestrzeni. Ruch chwilowy toru jako układu sztywnego określimy w tym razie wektorem jego prędkości postępowej i wektorem prędkości obrotowej; § 47-my. Niech zatem ruch toru w położeniu x_1, rys. 86-ty, określają wektory $\bar{v}_{1,u}$ i $\bar{\varphi}_1$; a następnie w położeniu nieskończenie blizkim wektory $\bar{v}_{2,u}$ i $\bar{\varphi}_2$; ruch zaś punktu po torze określimy w pierwszej chwili wektorami $\bar{v}_{1,w}$, a w następnej $\bar{v}_{2,w}$. Przyśpieszenie ruchu bezwzględnego punktu poruszającego się po torze wyrazi się i w tym razie równaniem jak w poprzednim, rów. 50-te,

$$\bar{p}_b = \frac{\bar{v}_2{}'_{,b} - \bar{v}_{1,b}}{\Delta t}$$

w którem $\bar{v}_2{}'_{,b}$ oznacza prędkość względem punktów we właściwem jego miejscu A'_2. W danym przypadku pozostają w mocy równania 49-te i 51-sze, jak w poprzednim przypadku; równania natomiast 52-gie nie odpowiadają danemu przypadkowi, ruch bowiem toru, nie jest postępowy, jak było poprzednio; napiszemy, po przeprowadzeniu $\overline{A'_2K} = \bar{v}_{2,w}$

$$\bar{v}'_{2,w} = \bar{v}_{2,w} + \overline{KL}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

gdzie odcinek $\overline{KL}$ może być uważany za cząstkę łuku, jaką zakreśli koniec wektora $\bar{v}_{2,w}$ podczas obrotu toru w okresie czasu Δt; cząstkę tę można uważać za wektor nieskończenie mały tegoż rzędu, co i Δt; kierunek jego jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez $\bar{v}_{2,w}$ i $\bar{\varphi}_2$; co wyrazimy wektorowo

$$\overline{KL} = V\bar{v}_{2,w}\bar{\varphi}_2 \,.\, \Delta t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (55)$$

ponieważ jednakże wektory $v_{2,w}$ i $\bar{v}_{1,w}$ są nieskończenie blizkie i tworzą z sobą nieskończenie mały kąt, przeto różnią się między sobą o nieskończenie małą wielkość, którą możemy w porównaniu z wielkością $\bar{v}_{1,w}$ odrzucić; jak również $\bar{\varphi}_2$ możemy zastąpić przez $\bar{\varphi}_1$ i zamiast równania 54-go otrzymamy

$$\bar{v}'_{2,w} = \bar{v}_{2,w} + V\bar{v}_{1,w} \,.\, \bar{\varphi}_1 \,.\, \Delta t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (56)$$

Ażeby następnie wyrazić wektor $\bar{v}'_{2,u}$, rów. 51-sze, przez dane wektory, weźmiemy pod uwagę, że wektor ten wyraża prędkość punktu A''_2, gdy wyobrazimy sobie, że jest on przymocowany do toru ruchomego; prędkość jego wyrazimy, na zasadzie wzoru 35-go, wzorem

$$\bar{v}'_{2,u} = \bar{v}_{2,u} + V\,\overline{A_2''A_2} \,.\, \bar{\varphi}_2$$

a ponieważ $\overline{A_2''A_1'} = \bar{v}_{1,w} \,.\, \Delta t$; przeto

$$\bar{v}_2{}'_{,u} = \bar{v}_{2,u} + V\bar{v}_{1,w} \,.\, \Delta t \,.\, \bar{\varphi}_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (57)$$

Po podstawieniu wartości 56-ej i 57-ej do równania 51-go, które pozostaje w mocy i dla danego przypadku, otrzymamy wzór ostateczny

$$\bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u + 2V\bar{v}_w \,.\, \bar{\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (58)$$

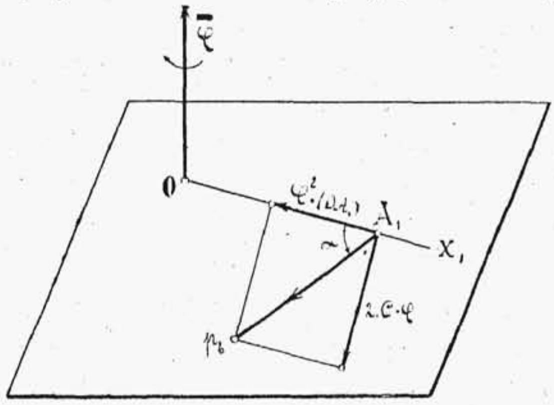
Przyśpieszenie przeto bezwzględne punktu, poruszającego się po torze, będącym w ruchu, składa się z 4-ch przyśpieszeń składowych:

1) z przyśpieszenia względnego punktu po torze; gdy tor wyobrazimy sobie w spoczynku;

2) z przyśpieszenia punktu toru, w którym w danej chwili znajduje się punkt ruchomy:

3) z przyśpieszenia jakie powstaje wskutek obrotu wraz z torem wektora prędkości względnej;

4) z przyśpieszenia, powstałego wskutek zmiany prędkości unoszącej. Te dwa ostatnie przyśpieszenia są sobie równe.



Rys. 87.

Przykład. Punkt materyalny porusza się ruchem jednostajnym z prędkością $\bar{c}$ po torze prostym x, rys. 87-my; tor ten obraca się około jednego ze swych punktów O ze stałą prędkością kątową φ. Należy wyznaczyć, bezwzględne przyśpieszenie $\bar{p}_b$ punktu ruchomego, znajdującego się na torze x_1 w miejscu A_1. W tym celu skorzystamy bezpośrednio ze wzoru 58-go; i najpierw wyznaczymy $\bar{p}_w$ punktu ruchomego; zbadajmy zatem ruch punktu po torze, wyobraziwszy sobie, że tor jest nieruchomy; ruch punktu po torze, stosownie do zadania, jest jednostajny i prostolinijny, przeto przyśpieszenie równe jest zeru, a więc i przyśpieszenie w miejscu A_1 równa się zeru, t. j. $p_w=0$. Przyśpieszenie unoszące wyznaczymy, gdy wyobrazimy sobie, iż tor się obraca, stosownie do warunków zadania, i że punkt ruchomy jest przymocowany do toru w A_1; wtedy bowiem jest ono przyśpieszeniem dośrodkowem punktu, przebiegającego ruchem jednostajnym po kole. Wartość przyśpieszenia obliczymy ze wzoru $p=\frac{c^2}{r}$ (wzór 13, § 22), gdy podstawimy $r=OA_1$; $c=\varphi.OA_1$; a zatem: $p_u=\varphi^2.OA_1$, kierunek jego po promieniu OA_1, a zwrot ku środkowi koła; rys. 87-my, Wektor $2\,\mathrm{V}\bar{v}_{1,w}\,\bar{\varphi}$, zwany przyśpieszeniem dodatkowem ruchu złożonego, wyznaczymy, zważywszy, że jest on prostopadły do $\bar{v}_{1,w}$ t. j. do toru x_1, że zwrot ma zgodny ze zwrotem obrotu $\bar{\varphi}$ i że algebraiczna jego wartość równa jest $2\,c\varphi$; zatem przyśpieszenie bezwzględne $\bar{p}_b$ punktu ruchomego w miejscu A_1 na torze x_1

$$\bar{p}_b=\bar{p}_u+2\,\mathrm{V}\,\bar{c}\,\bar{\varphi},$$

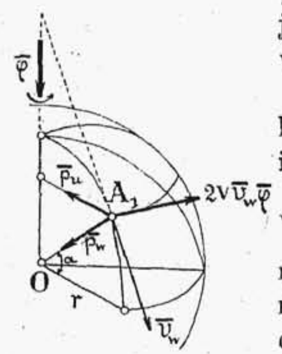
i może być wyznaczone wykreślnie, a następnie obliczone analitycznie.

Analitycznie otrzymamy, rys. 87-my,

$$p_b = \varphi \sqrt{[\varphi^2.OA_1]^2 + (2c\varphi)^2}; \text{ oraz } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2c\varphi}{\varphi^2.OA_1} = \frac{2c}{\varphi.OA_1}.$$

Przykład. Obliczyć $\bar{p}_b$ punktu podczas ruchu jednostajnego po tworzącej walca, gdy walec obraca się około swej osi ruchem jednostajnym, ($\bar{\varphi} =$ stałej); promień walca $= r$. W danem zadaniu $p_w = 0$, gdyż tor jest prostolinjny i $v_w =$ stałej; następnie ponieważ kąt $(v_w, \varphi) = 0$; przeto $\bar{p}_b = \bar{p}_u$; wartość zaś przyśpieszenia unoszącego $\bar{p}_u$ równa się $p_u = \varphi^2 r$ i posiada kierunek promienia i zwrot ku osi walca.

Przykład. Przyjmijmy, że kula ziemska obraca się ruchem jednostajnym około swej osi i że oś ta jest nieruchoma w przestrzeni; wzdłuż południka tej kuli niech porusza się punkt ruchem jednostajnym; należy wyznaczyć jego przyśpieszenie wypadkowe.



Rys. 88.

Ruch względny jest ruchem jednostajnym po kole, $\bar{p}_w$ zatem ma kierunek promienia tego koła i zwrot ku środkowi kuli, algebraiczna zaś jego wartość $p_w = \dfrac{v^2_w}{r}$; gdzie r oznacza promień kuli, rys. 88-my, a v_w — prędkość punktu wzdłuż południka. Ruch unoszący w tym przykładzie jest ruchem jednostajnym po równoleżniku, przechodzącym przez ten punkt; przyśpieszenie unoszące składa się zatem z przyśpieszenia stycznego i normalnego, § 23; w danym razie, wobec obrotu jednostajnego, przyśpieszenie styczne $p_t = 0$, a więc przyśpieszenie unoszące $p_u = p_n = \varphi^2 \rho$ i posiada kierunek promienia odnośnego równoleżnika, oraz zwrot ku osi, ρ oznacza promień równoleżnika. Przyśpieszenie dodatkowe $2 V \bar{v}_w \bar{\varphi}$, jest prostopadłe do płaszczyzny, wyznaczonej przez wektory $\bar{v}_w$ i $\bar{\varphi}$, czyli jest prostopadłe do południka, przechodzącego przez dany punkt i ma zwrot zgodny z obrotem $\bar{\varphi}$; zwrot ten w danem zadaniu przyjęliśmy zgodnym ze zwrotem obrotu kuli ziemskiej; wartość algebraiczna wektora $2 V \bar{v}_w \bar{\varphi}$ równa się $2 v_w \varphi \sin (v_w, \varphi)$; kąt (v_w, φ) jest w danym przykładzie szerokością geograficzną rozpatrywanego punktu. Z tych trzech wektorów wyznaczymy przyśpieszenie wypadkowe punktu ruchomego, jako przekątnię równoległościanu podług wzoru $\bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_n + 2 V \bar{v}_w \bar{\varphi}$.

Przyśpieszenia, w tym dziale rozpatrywane, mają charakter czysto geometryczny, pozornie niemający związku z fizycznemi zjawiskami; gdy jednakże wprowadzimy pojęcie siły, jako czynnika, wywołującego przyśpieszenie, natenczas znajdziemy, dla wyłożonych tutaj twierdzeń kinematycznych, obrazy fizyczne, które łatwiej spostrzeżemy w świecie nas otaczającym;—o tem będziemy mówili szczegółowo w dynamice [1]).

I. Ruch bryły z ograniczeniami jednostronnemi.

75. Określenia. Dotychczas rozpatrywaliśmy takie ograniczenia ruchu, które niepozwalały poruszającym się bryłom oddzielić się od brył, linii lub punktów, które ograniczały jej ruch. Teraz rozpatrzymy przypadki, w których dana bryła może oddzielić się w pewnych kierunkach od powierzchni, ograniczający jej ruch. Bryłę, która nie może wogóle oddzielać się od powierzchni, po której się ślizga, posiada połączenie wszechstronnej jeżeli zaś może się oddzielić w kierunku np. strony wypukłej tej powierzchni, to posiada połączenie jednostronne; każdy np. przedmiot, leżący swobodnie na stole, jest bryłą ograniczoną jednostronnie. Bryła taka stanie się swobodna, gdy się oddzieli od tej powierzchni; jest nieswobodną, gdy na niej pozostaje.

76. Ruch płaski. Rozpatrzymy ruch figur płaskich w ich płaszczyźnie; gdy ograniczenia są jednostronne. Figura płaska, gdy nie posiada żadnych ograniczeń ruchu, jest swobodną; jeżeli zaś w płaszczyźnie jej ruchu zbudujemy przeszkodę w postaci linii materyalnej, której nie może ona przekroczyć, a tylko może się na niej oprzeć, a następnie może się ślizgać swym obwodem po danej linii, wtedy jest jednostronnie ograniczona w ciągu ruchu. Wszystkie dźwigary mostowe, dachowe itp. posiadają zwykle ograniczenia jednostronne; nic bowiem nie stoi na przeszkodzie do ich ruchu ku górze.

Jeżeli daną figurę płaską ograniczymy dwoma liniami; to w pewnych kierunkach figura ta będzie swobodną; w innych zaś ograniczoną w swym ruchu; jeżeli następnie położymy trzecią przeszkodę; to kierunki, w których bryła posunięta oddzieli się od tej przeszkody i stanie się swobodną, znacznie się zmniejszą; a może nawet wskutek takich ograniczeń nie będzie już takiego kierunku, w którym mogłaby się poruszyć, t. j. stanie się unieruchomioną.

Zadaniem naszem jest wskazać metody, które pozwolą nam orzec, przy jakich warunkach linji ograniczających dana figura płaska może być unieruchomiona.

---

[1]) Ruch punktu względem przestrzeni poruszającej się jest rozpatrywany ze względu na zastosowanie w dynamice punktu.