C. Ruch obrotowy i ruch toczenia się.

43. Podczas ruchu obrotowego bryły, wszystkie jej punkty zakreślają koła, których środki leżą na osi obrotu, a ich płaszczyzny są do niej prostopadłe. Wielkość kąta obrotowego σ, zakreślonego promieniem wodzącym, jest stałą podczas danego obrotu, dla **każdego punktu** bryły; a więc również i nieskończenie małe kąty obrotu $d\sigma$ są stałe, podczas cząstkowego obrotu; przeto, rozdzieliwszy $d\sigma$ przez dt, otrzymamy dla wszystkich punktów w danej chwili wspólną wartość $\frac{d\sigma}{dt}$; wyraz $\frac{d\sigma}{dt}$ nazwaliśmy prędkością kątową danej bryły i oznaczyliśmy go przez wektor $\bar{\varphi}$, rozumiejąc, że wektor ten wyznacza położenie osi chwilowego obrotu, oraz zwrot i wartość prędkości kątowej. Jeżeli przez $\bar{r}$ oznaczymy odległość jakiegobądź punktu bryły od osi obrotu, to prędkość tego punktu obliczymy ze wzoru: $v = r . \varphi \sin (r . \varphi)$; a kierunek jej będzie prostopadłym do promienia $\bar{r}$ i wektora $\bar{\varphi}$. W oznaczeniach wektorowych napiszemy wzór $\bar{v} = V\bar{r}\bar{\varphi}$.

Szczególnym przejawem obrotu chwilowego jest toczenie się jednej bryły po drugiej. Toczenie się krzywych płaskich określimy już w końcu § 40-tego. Podczas toczenia się jednej krzywej po drugiej, cząstki ich łuków chwilowo pokrywają się; gdy takie, wzajemnie pokrywające się cząstki poznaczymy na obydwóch krzywych, wtedy cząstki łuków, które, podczas toczenia, będą się wzajemnie pokrywać, nazwiemy odpowiadającemi sobie. W tenże sposób mówić możemy o odpowiadających sobie punktach, leżących na tych krzywych. Geometryczny warunek toczenia się wyrazi się zatem wzorem $ds = ds'$, w którym ds i ds' są długościami odpowiadających sobie cząstek łuków.

Gdy, z dowolnie obranego bieguna w przestrzeni, przeprowadzimy promienie do odpowiadających sobie punktów na pomienionych krzywych, natenczas otrzymamy dwa stożki, z których jeden toczyć się będzie po drugim; jeżeli zaś biegun obrotu odsuniemy do nieskończoności, to otrzymamy dwa walce, z których jeden toczy się po drugim. Stożki czy walce w tych przykładach stykają się z sobą wzdłuż tworzących.

W modelach fizycznych, przedstawiających toczenie się jednej bryły po drugiej, zetknięcie się fizyczne brył niekoniecznie ma następować wzdłuż osi, wyznaczonej przez punkty bryły; do toczenia się wystarcza, gdy bryły posiadają dwa wspólne punkty fizycznego zetknięcia się. Ruch bryły, wywołany toczeniem się walca o podstawie kołowej po płaszczyźnie, można wywołać również przez toczenie się dwóch kół, sztywno związanych z daną bryłą, po tejże płaszczyźnie. W ten sam sposób możemy mówić o toczeniu się kuli we wpuście klinowym, rys. 62-gi; należy tylko, aby kula posiadała dwa punkty fizycznego zetknięcia się ze ścianami wpustu; gdyż proste, przeprowadzone przez te punkty i umocowane do ścian wpustu, przedstawiają powierzchnię prostolinijną, po której toczy się inna powierzchnia prostolinijna; tę powierzchnię wyznaczymy, gdy proste zetknięć się umocujemy do toczącej się kuli.

Gdy wpust jest utworzony przez ruch postępowy i prostolinijny dwóch przecinających się prostych, rys. 62-gi, wtedy powierzchnią nieruchomą będzie płaszczyzna, bryła zaś tocząca się będzie walcem. W danym więc razie model fizyczny, złożony z kuli i wpustu, jest zastąpiony przez model geometryczny, złożony z płaszczyzny i walca; model ten odtwarza ściśle ruch modelu fizycznego.

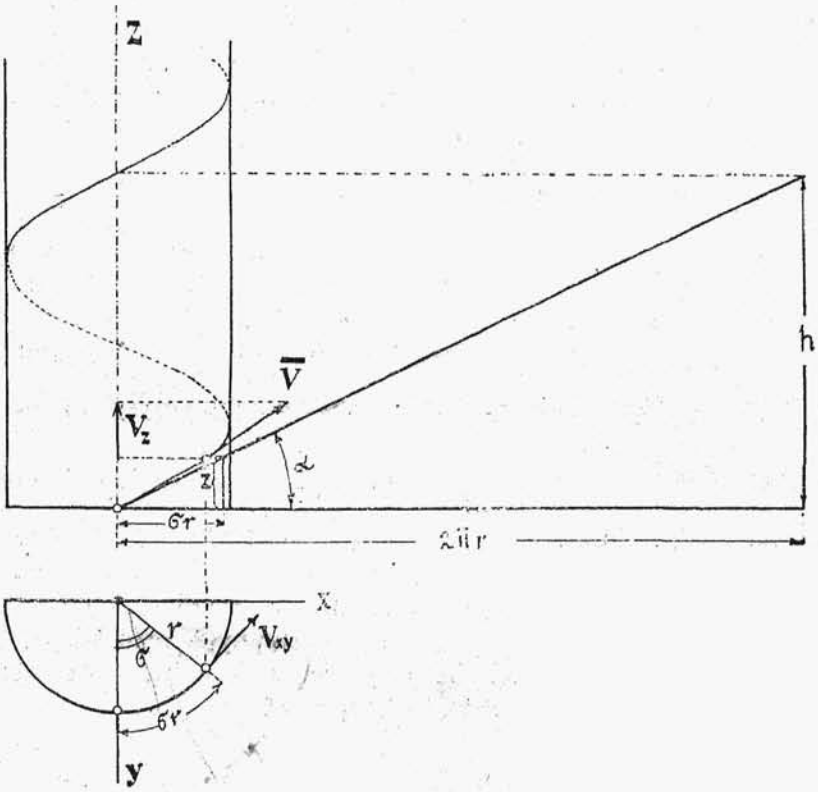
W celu wywołania toczenia się danej bryły po pewnej powierzchni, jest zatem niezbędnem, aby bryła posiadała dwa punkty zetknięcia się z tą powierzchnią; gdyż wrazie posiadania trzech punktów wspólnych, —ruch może stać się niemożliwy; wrazie zaś posiadania jednego punktu wspólnego, ruch mógłby być kulisty. Można więc wywołać toczenie się pewnej bryły, gdy styka się ona z powierzchnią, po której się ma toczyć, w dwóch punktach.

Ponieważ dwa punkty zetknięcia się są **chwilowo** nieruchome, przeto prosta przechodząca przez te punkty, jest, podczas toczenia się, osią chwilowego obrotu. Położenie tej osi w przestrzeni ciągle się zmienia; przeto toczenie się bryły może być uważane za ciągły szereg obrotów około osi chwilowych, które zmieniają swe położenia w przestrzeni. Geometryczne miejsce osi chwilowych obrotów, przedstawia powierzchnię prostolinijną nieruchomą, po której toczy się ruchoma powierzchnia prostolinijna, i która jest złożona z osi chwilowych obrotów, gdybyśmy te osi umocowali do ruchomej bryły.

D. Ruch śrubowy.

44. Określenie linii śrubowej i ruchu śrubowego. Gdy trójkąt prostokątny, wycięty np. z papieru, nawiniemy na walec o podstawie kołowej rys. 50-ty, wtedy przeciwprostokątnia tego trójkąta wyznaczy na walcu linię, zwaną linią śrubową. Odległość pomiędzy dwoma punktami linii śrubowej, leżącymi na jednej i tej samej tworzącej walca, nazwano jej skokiem; a stosunek tej odległości do obwodu podstawy walca t. j. stosunek $\frac{h}{2\pi r} = \operatorname{tg} \alpha$, nazwano pochyleniem linii śrubowej. Wyobraźmy sobie walec nieograniczenie wydłużony, to otrzymamy linię śrubową, również nieograniczenie długą. Wielkość skoku i kąta nachylenia linii śrubowej w każdem jej miejscu jest ta sama. Linia śrubowa ma tę wybitną właściwość geometryczną, że może się sama w sobie przesuwać, t. j. może przesuwać się w ten sposób, jak przesuwają się prosta lub koło; inaczej wypowiemy tę właściwość, że różne odcinki jednej i tej samej linii śrubowej, można nałożyć na siebie w ten sposób, że wszystkie ich punkty wzajemnie się pokryją.

Wybitnym rodzajem ruchu bryły w przestrzeni, jest taki jej ruch, w którym wszystkie punkty zakreślają linie śrubowe. Ażeby sobie wytworzyć obraz tego ruchu, nadajmy bryle jednocześnie dwa ruchy je-



Rys. 50.

dnostajne: ruch obrotowy około pewnej osi i jednocześnie ruch postępowy równoległy do niej. Oznaczmy przez z przesunięcie wzdłuż osi, rys. 50-ty; przez σ kąt obrotu, który powstał podczas przesunięcia z; przez r odległość obranego punktu od osi, to zachodzi stosunek: $\frac{z}{r\sigma} = \operatorname{tg} \alpha$, skąd $z = r\sigma . \operatorname{tg} \alpha$. Ponieważ w ruchu obrotowym odległość każdego punktu bryły od osi obrotu pozostaje, podczas obrotu, niezmienną; przeto każdy punkt zakreśli linię śrubową, nawiniętą na odpowiedni temu punktowi, walec, którego promień jest równy r. Oś obrotu nazywamy w danym razie osią ruchu śrubowego.

Ruch śrubowy może być nieskończenie mały; wtedy zachodzi zależność $dz = d\sigma \, . \, r \, . \operatorname{tg} \alpha$, w której występuje nieskończenie małe przesunięcie postępowe dz i nieskończenie mały obrót $d\sigma$. W ruchu śrubowym bryły wartości dz są w każdej chwili wzajemnie równe dla wszystkich jej punktów, co wypływa ze sztywności bryły; to samo powiemy o wartościach $d\sigma$; wyraz zatem $r \, . \operatorname{tg} \alpha$ jest także w danej chwili stały; z czego wynika, że oddalając się od osi śruby, kąt pochylenia, odpowiedniej temu punktowi linii śrubowej, jest coraz mniejszy; linie śrubowe, zakreślane punktami bryły podczas ruchu śrubowego, w miarę oddalenia się od osi, stają się coraz więcej płaskie; w krańcowych położeniach dla

$$r = 0, \ \alpha = 90^0; \ \text{zaś dla} \ r = \infty, \ \alpha = 0.$$

Do tychże wyników dojdziemy również, analizując równanie $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}$.

Punkty bryły, będącej w ruchu śrubowym, posiadają różne prędkości; kierunki tych prędkości są styczne do odpowiednich linii śrubowych.

Ponieważ dz jest tą samą wartością w danej chwili dla wszystkich punktów bryły, podczas nieskończenie małego jej przesunięcia śrubowego, to wartość $\frac{dz}{dt}$ przedstawia prędkość rzutu punktu bryły na oś śruby; lub inaczej, § 56 ty, wyraz $\frac{dz}{dt}$ przedstawia rzut właściwej prędkości punktu na tę oś; wniosek ten wypowiemy

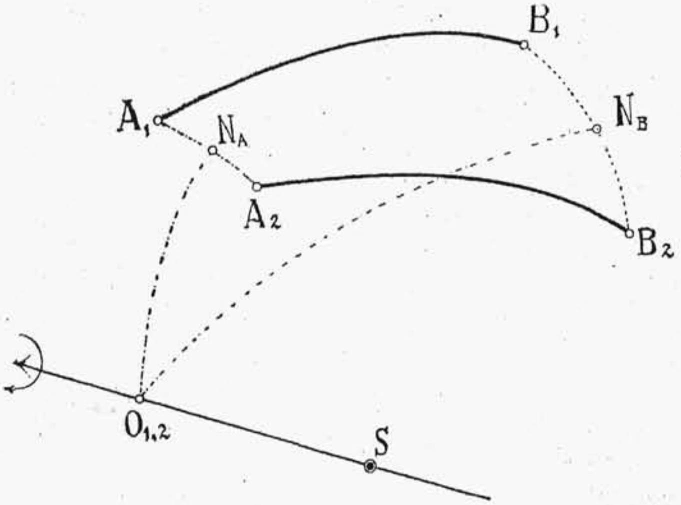
rzuty prędkości punktów bryły, będącej w ruchu śrubowym, **na oś śruby, są w danej chwili wzajemnie równe**. Szczegółowszemi właściwościami ruchu śrubowego zajmiemy się w następnych rozdziałach.

Nieskończenie mały ruch śrubowy nazywają krótko — **skrętem**; oś ruchu śrubowego w danym razie — **osią skrętu**.

E. Ruch kulisty.

45. Oś obrotu. Ruch bryły około punktu nieruchomego nazwaliśmy ruchem kulistym; każdy jej bowiem punkt zakreśla tor, który całkowicie leży na powierzchni kuli, zakreślonej z tego punktu; wszystkie więc punkty danej bryły zakreślają pewne tory, leżące na powierzchniach spółśrodkowych kul. Punkty bryły, które znajdują się na pewnym promieniu, pozostają na tymże promieniu we wszystkich położeniach bryły, podczas tego ruchu. Możemy więc rozpatrywać ruchy punktów, które powstają z przecięcia się promieni, przeprowadzonych do punktów bryły, z powierzchnią **jednej** ze spółśrodkowych kul; inaczej mówiąc, będziemy rozpatrywali ruch kulisty, rozpatrując ruch figur kulistych po powierzchni kuli w ten sposób, jakieśmy rozpatrywali ruch płaski. Zachodzić więc powinna w danym razie zupełna analogia pomiędzy ruchem płaskim i ruchem kulistym.

Zanim przystąpimy do właściwych rozpatrywań, podamy pewne określenia i pojęcia z geometryi kulistej. Przez dwa punkty na kuli przeprowadzić można jedno tylko **koło wielkie**; — tak samo jak na płaszczyźnie przez dwa punkty przeprowadzimy jedną tylko prostą.



Rys. 51.

Odległością dwóch punktów na kuli nazywać będziemy długość łuku koła wielkiego, zawartego pomiędzy tymi punktami. Odcinek koła wielkiego, przyłożony do powierzchni danej kuli w dowolnem jej miejscu, przylega do niej wszystkimi punktami, jak prosta przylega do płaszczyzny. Trzy punkty, obrane na powierzchni kuli i połączone przez odpowiednie koła wielkie, tworzą trójkąt który nazwiemy kulistym. Gdy trzy boki trójkątów kulistych są wzajemnie równe, to trójkąty takie możemy sprowadzić do wzajemnego pokrycia się. Kąt utworzony przez boki trójkąta kulistego, mierzy się kątem płaskim, utworzonym przez płaszczyzny, w których leżą te boki; lub też mierzy się kątem, utworzonym przez styczne, przeprowadzone do boków kulistych w punkcie ich przecięcia się,—t. j. w wierzchołku kąta. Na zasadzie tych określeń mówić możemy o trójkącie kulistym: równoramiennym, równobocznym, prostokątnym i t. p.

Z powyższego wynika, że dwa punkty niezmiennego układu kulistego wyznaczają ruch całego układu; gdyż każdy inny punkt tego układu posiada niezmienne odległości od obranych dwóch punktów i położenie jego może być za pomocą tych odległości wyznaczone. Wniosek ten zresztą wyprowadziliśmy już, wychodząc z ogólnych rozpatrywań ruchu. Posiadając więc pewną niezmienną figurę kulistą, będziemy rozpatrywali ruch nie wszystkich jej punktów, lecz ruch tylko dwóch punktów. Niechaj te punkty będą A_1 i B_1 w pierwszem położeniu, oraz A_2 i B_2 w drugiem położeniu figury, rys. 51-szy, to na zasadzie niezmienności układu, łuk $A_1 B_1$ równy jest łukowi $A_2 B_2$. Połączmy następnie punkty A_1 z A_2, oraz B_1 z B_2 łukami wielkich kół, przepołówmy te łuki w punktach N_A i N_B, wystawmy w tych punktach łuki, prostopadłe do łuków A_1A_2 i B_1B_2, to otrzymamy punkt przecięcia się $O_{1,2}$; z równości odpowiednich trójkątów kulistych wynika, że łuk A_1B_1 może być przeprowadzony do położenia A_2B_2 przez obrót kulisty około punktu $O_{1,2}$. Połączywszy punkt $O_{1,2}$ ze środkiem kuli S, otrzymamy oś, około której możemy obrócić daną figurę kulistą, a z nią całą bryłę, ażeby przeprowadzić ją z jednego położenia do drugiego. Wynik ten wypowiemy w sposób następujący:

każdą bryłę, która jest w ruchu kulistym, można przeprowadzić z jednego położenia do drugiego **przez obrót około pewnej osi, przechodzącej przez środek tego ruchu.**

Jeżeli przesunięcia bryły są nieskończenie bliskie, to biegun $O_{1,2}$, czy też odpowiednia oś obrotu, **jest środkiem czy też osią obrotu chwilowego.** Mając to na uwadze wypowiemy twierdzenie:

chwilowy ruch kulisty może być wywołany przez chwilowy obrót pewnej osi.

Miejsce geometryczne biegunów jest krzywą kulistą, która przedstawia nieruchomy tor biegunów. Jak w ruchu na płaszczyźnie tak i w ruchu kulistym, możemy wykreślić na kuli krzywe, które przedstawią tor ruchomy i tor nieruchomy. Wziąwszy pod uwagę te tory wypowiemy twierdzenie:

ciągły ruch kulisty może być wywołany przez toczenie się pewnej krzywej, związanej sztywno z figurą ruchomą, po drugiej krzywej nieruchomej.

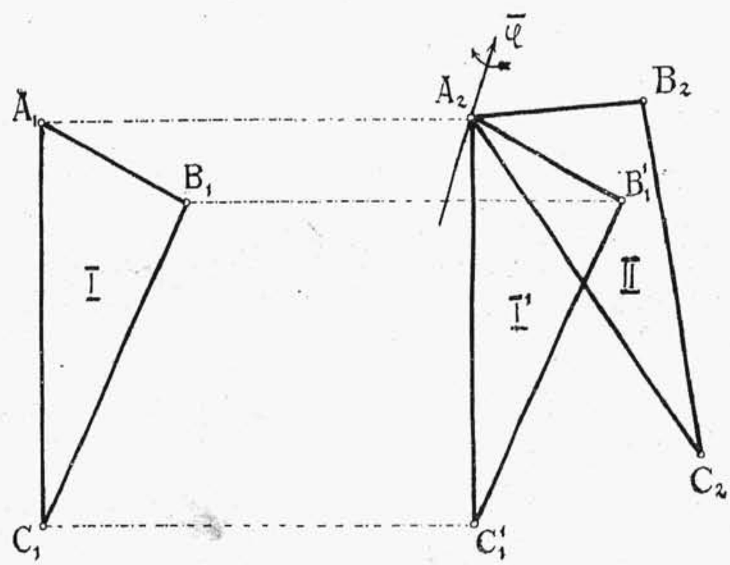
Jeżeli ze środka kuli przeprowadzimy promienie do punktów tych krzywych, to otrzymamy dwa stożki ze wspólnym wierzchołkiem, leżącym w środku kuli, z których jeden toczy się po drugim; na podstawie tego powyższe twierdzenie wypowiemy teraz ogólnie w sposób następujący:

ciągły ruch kulisty bryły może być wywołany przez toczenie się pewnego stożka ruchomego, związanego z bryłą, po drugim stożku nieruchomym; wierzchołki tych stożków leżą w środku ruchu kulistego.

Jeżeli środek kuli obierzemy w nieskończoności, to stożki zamienią się na walce i otrzymamy ruch płaski.

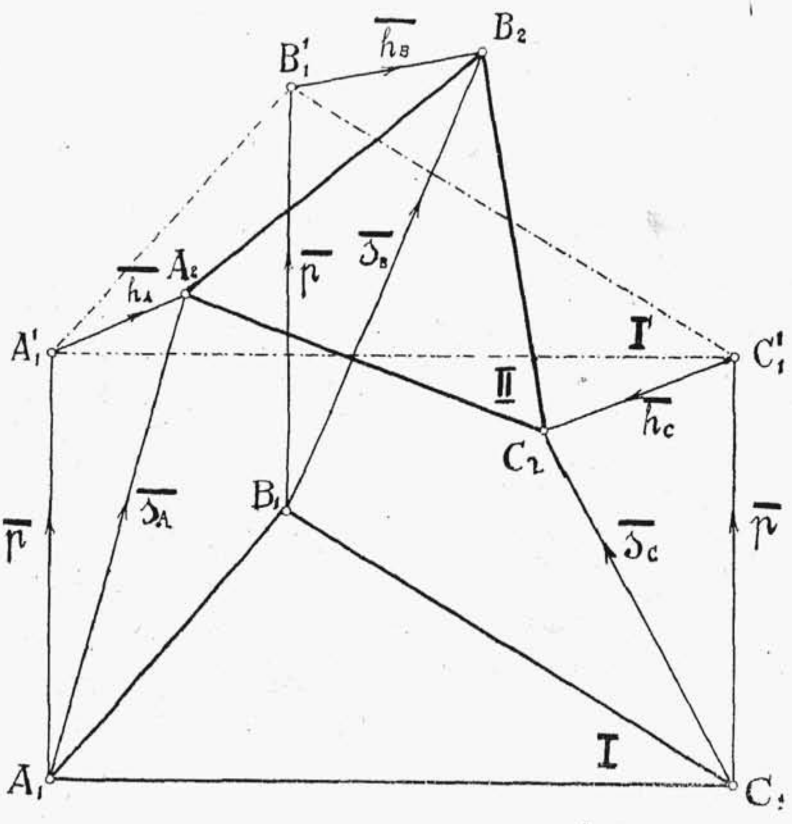
F. Ruch bryły swobodnej.

46. Ruch postępowy i obrotowy bryły. Mówiliśmy już, że ruchy trzech punktów danej bryły wyznaczają w zupełności ruch wszystkich jej punktów. Rozpatrując więc ruch danej bryły, możemy rozpatrywać ruch tylko trzech, dowolnie obranych jej punktów. Niech punkty A_1, B_1, C_1 danej bryły wyznaczają jej położenie, które nazwiemy położeniem I-em, rys. 52-gi; w położeniu II-em tejże bryły punkty te oznaczmy przez A_2, B_2, C_2; obydwa trójkąty, utworzone przez te punkty, należy wyobrazić sobie w przestrzeni w dwóch różnych płaszczyznach.



Rys. 52.

Przeprowadzenie bryły z położenia pierwszego do drugiego wykonamy przesuwając trójkąt ruchem **postępowym** do położenia, oznaczonego na rys. 52-gim przez I^1, w ten sposób, ażeby np. punkt A_1 pokrył się z punktem A_2; następnie wykonamy taki ruch, ażeby pozostałe punkty B_1 z B_2, oraz C_1 z C_2 wzajemnie się pokryły. W tym celu punkt A_2 pozostawimy nieruchomym i bryle danej, znajdującej się w położeniu I^1, nadamy ruch kulisty około punktu A_2. aż do pokrycia się tych punktów. Wiemy już, że ruch kulisty może być zastąpiony przez obrót około pewnej osi, przechodzącej przez środek tego ruchu; w danym razie oś obrotu przechodzić będzie przez punkt A_2, oś tę oznaczyliśmy na rysunku przez $\bar{\varphi}$; w ten sposób daną bryłę przeprowadzimy z położenia I^1 do położenia II, t. j. do położenia właściwego, czyniąc pewien **obrót** około tej osi. Całe to postępowanie możemy opisać w sposób następujący: **każdą bryłę przeprowadzić można z jednego położenia do drugiego ruchem postępowym i ruchem obrotowym około pewnej osi.** Ponieważ punkt A_1 jest punktem dowolnie obranym, przeprowadzenie więc bryły



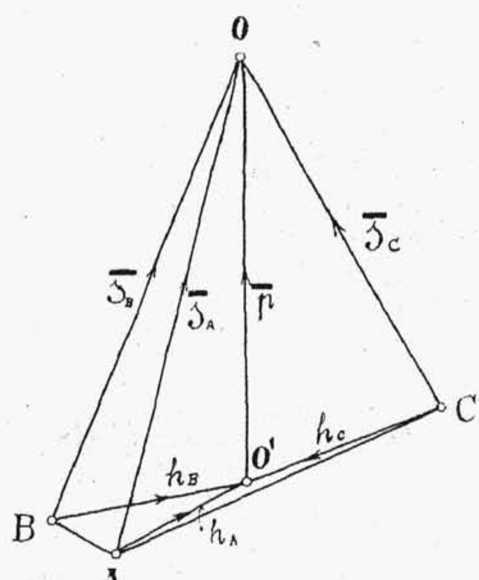
Rys. 55.

z jednego położenia do drugiego ruchem postępowym i obrotowym można wykonać nieskończenie wielu sposobami.

Szczególny przypadek, wspomnianych ruchów, zachodzi, gdy kierunek ruchu postępowego będzie równoległym do osi obrotu i jako zadanie postawimy wyznaczenie takiej osi dla dwóch danych położeń bryły w przestrzeni. W tym celu obierzmy najpierw trzy dowolne punkty A_1, B_1, C_1 danej bryły w jej położeniu, oznaczonem na rys. 53-im cyfra I; w położeniu II-em tejże bryły punkty te oznaczymy przez A_2, B_2, C_2. Wektory $\bar{s}_A$, $\bar{s}_B$, $\bar{s}_C$, oznaczają przesunięcia punktów A, B, C przy przesunięciu bryły z położenia I do II-go. Trójkąt $A_1B_1C_1$, oraz trójkąt

$A_2B_2C_2$ są w rzeczywistości wzajemnie równe; ponieważ wogóle leżą w różnych płaszczyznach, przeto na rysunku mogą przedstawiać się jako trójkąty nierówne. Każdy z trzech punktów A_1, B_1, C_1, jak i każdy inny, możemy obrać jako punkt wyznaczający ruch bryły; lecz taki dowolny wybór nie doprowadzi do rozwiązania postawionego zadania; natomiast weźmiemy pod uwagę tę okoliczność, że jeżeli przejście z I do II ma nastąpić ruchem postępowym i obrotowym, to rzuty odcinków $\bar{s}_A$, $\bar{s}_B$ i $\bar{s}_C$ na nieznany kierunek ruchu postępowego, powinny być wzajemnie równe; ażeby taką oś znaleźć wyprowadzimy z punktu O, dowolnie obranego w przestrzeni, rys. 54-ty, trzy wektory $\bar{s}_A$, $\bar{s}_B$, oraz $\bar{s}_C$, które przedstawiają przesunięcia punktów A_1, B_1, C_1. Na płaszczyznę ABC, utworzoną przez końce tych wektorów, opuśćmy z O prostopadłą, a kierunek tej prostopadłej jest kierunkiem szukanej osi. W celu znalezienia położenia tej osi w przestrzeni zastąpmy każde przesunięcie $\bar{s}_A$, $\bar{s}_B$, $\bar{s}_C$ przez dwa przesunięcia, jak następuje, rys. 54-ty:

$$\bar{s}_A = \bar{p} + \bar{h}_A\,,$$
$$\bar{s}_B = \bar{p} + \bar{h}_B\,,$$
$$\bar{s}_C = \bar{p} + \bar{h}_C\,.$$



Rys. 54.

Wspólny wektor $\bar{p}$, który jest rzutem wszystkich przesunięć na kierunek ruchu postępowego, wskazuje, że można trójkąt $A_1B_1C_1$, rys. 53, przesunąć ruchem postępowym, którego wielkość przedstawia wektor $\bar{p}$, do położenia, oznaczonego przez $A'_1B'_1C'_1$, rys. 53-ci; ażeby następnie przeprowadzić ten trójkąt do położenia II-go, należy wierzchołkom A'_1, B'_1, C'_1 nadać jeszcze przesunięcia, wskazane przez wektory $\bar{h}_A$, $\bar{h}_B$, $\bar{h}_C$. Zauważymy z rys. 54-go, że te przesunięcia są równoległe do płaszczyzny ABC, t. j. przeprowadzenie trójkąta $A'_1B'_1C'_1$ (z położenia I^1) do położenia $A_2B_2C_2$ (t. j. do II-go położenia) wykonać można ruchem płaskim, równoległym do płaszczyzny ABC. Nie należy przez to pojmować, że trójkąty $A_1'B_1'C_1'$ i $A_2B_2C_2$ leżą w jednej płaszczyźnie; one leżą wogóle w różnych płaszczyznach, lecz tylko kierunki przesunięć $\bar{A}_1'\bar{A}_2$, $\bar{B}_1'\bar{B}_2$, oraz $\bar{C}_1'\bar{C}_2$ są równoległe do płaszczyzny ABC (porów. zadanie w § 42-gim), a więc można te trójkąty doprowadzić ruchem płaskim do pokrycia się.

Ponieważ każdy ruch płaski może być zastąpiony przez obrót około osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu; przeto wyznaczymy położenie osi obrotu, gdy dwa wierzchołki trójkątów $A'_1B'_1C'_1$ i $A_2B_2C_2$ zrzutujemy na płaszczyznę, przeprowadzoną w dowolnem miejscu przestrzeni równolegle do płaszczyzny ABC; wtedy bowiem otrzymamy na niej dwa układy płaskie, które, podczas obrotu bryły, pokryją się, gdyż odpowiadające im punkty w bryle także się pokryją. Na zasadzie poprzednich twierdzeń wyznaczymy z tych dwóch układów płaskich położenie bieguna obrotu i wielkość kąta obrotu, a prostopadła, wyprowadzona z tego bieguna do płaszczyzny ABC, jest osią obrotu bryły. Każdy punkt bryły, leżący na tej osi, i obrany jako biegun, wykona ruch postępowy, którego kierunek wyznacza ruch postępowy całej bryły.

Przeprowadzenie zatem bryły z jednego położenia do drugiego, możemy wykonać ruchem **postępowym i ruchem obrotowym około osi, która jest równoległą do kierunku ruchu postępowego.**

Ze stosunków kinematycznych, opisanych i przedstawionych powyżej w rys. 53-cim, wypływają jeszcze inne właściwości ruchu brył, które tu przytoczymy. Przeprowadzenie trójkąta $A_1'B_1'C_1'$ z położenia I^1 do położenia II odbywa się ruchem płaskim, przeprowadzenie takie wogóle, § 38-my, składa się z ruchu postępowego, równoległego do płaszczyzny ABC, i obrotowego, którego oś jest prostopadłą do tej płaszczyzny; ruch postępowy jest zależny od obranego bieguna, lecz kierunek osi ruchu obrotowego i wielkość kąta obrotu nie zależą od bieguna, przeto możemy go dowolnie obrać w bryle, której położenie jest wyznaczone przez trójkąt I^1 i otrzymamy dla każdego takiego bieguna ten sam kierunek osi obrotu i ten sam kąt obrotu. Każdy znowuż punkt bryły w położeniu I^1 przeszedł z położenia I-ego ruchem postępowym, który nie wpływa na obrót bryły; wygłosimy zatem twierdzenie:

kierunek osi, około której obracamy bryłę, w celu przeprowadzenia jej z jednego położenia do drugiego, jest **niezależny od obranego punktu, i wielkość kąta obrotu jest stałą dla każdego bieguna**; wybór zaś bieguna wpływa tylko na kierunek ruchu postępowego.

47. Prędkości punktów bryły swobodnej. Weźmy obecnie pod uwagę dwa nieskończenie blizkie położenia bryły, wtedy wszystkie przesunięcia, rys. 53-ci, będą nieskończenie małe i, w tenże sposób, w jakiśmy wyznaczyli w § 39-tym zależność pomiędzy prędkościami ruchu płaskiego, wyprowadzimy obecnie zależność pomiędzy prędkościami dwóch punktów bryły, gdy dane będą: prędkość chwilowa jednego z nich i wektor prędkości obrotowej; obliczymy zatem zależność prędkości dwóch punktów, które oznaczymy przez A i B. Z rys. 53-go wynika: $\bar{s}_B = \bar{p} + \bar{h}_B$, $\bar{s}_A = \bar{p} + \bar{h}_A$; po wyrugowaniu z tych równań wielkości $\bar{p}$, otrzymamy $\bar{s}_B = \bar{s}_A + \bar{h}_B - \bar{h}_A$; rozdzielmy to równanie przez okres czasu dt, w którym te przesunięcia wykonano, a otrzymamy równanie $\frac{\bar{s}_B}{dt} = \frac{\bar{s}_A}{dt} + \frac{\bar{h}_B}{dt} - \frac{\bar{h}_A}{dt}$; gdy weźmiemy pod uwagę, że przesunięcia są nieskończenie małe, wtedy wyrazy tego równania otrzymają następujące znaczenia $\frac{\bar{s}_B}{dt} = \bar{v}_B$, $\frac{\bar{s}_A}{dt} = \bar{v}_A$, t. j. są prędkościami punktów A i B, pozostałe zaś dwa wyrazy są prędkościami $\bar{v}_{B_1}'$ i $\bar{v}_{A_1}'$ punktów B_1' i A_1' podczas ruchu płaskiego. Skorzystamy z zależności takich prędkości, którą podaje wzór 34-ty i napiszemy na jego podstawie $\bar{v}_{B_1}' - \bar{v}_{A_1} = \mathrm{V}\,\overline{A_1'B_1'}\,.\,\bar{\varphi}$; zważywszy następnie, że $\overline{A_1'B_1'} = \overline{AB}$, otrzymamy, po podstawieniu tych wyrazów w powyższe równanie, szukany związek

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \mathrm{V}\,\overline{AB}\,.\,\bar{\varphi}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(35)$$

Postać tego wzoru i jego wysłowienie pozostaje takie same, jakie było dla ruchu płaskiego;—różnica między tymi wzorami jest tylko w wielkości iloczynu wektorowego; gdyż w ruchu płaskim jest zawsze $\overline{AB} \perp \bar{\varphi}$, w ruchu zaś ogólnym $\overline{AB}$ tworzy pewien kąt z kierunkiem $\bar{\varphi}$; w przypadku więc ruchu ogólnego wartość tego iloczynu $= AB\,.\,\varphi \sin(AB, \varphi)$, w przypadku zaś ruchu płaskiego wartość ta $= AB\,.\,\varphi$, gdyż $\sin 90^0 = 1$.

Zastosujmy wzór 35-ty do ruchów szczególnych. W ruchu postępowym $\varphi = 0$; przeto z powyższego równania $\bar{v}_B = \bar{v}_A$, co jest zgodnem z określeniem tego ruchu. Następnie dla ruchu kulistego, gdy A umieścimy w środku tego ruchu, otrzymamy $\bar{v}_B = \mathrm{V}\,\overline{AB}\,.\,\bar{\varphi}$ skąd $v_B = AB\,.\,\sin(AB, \varphi)$; wielkość AB jest w tem równaniu długością promienia wodzącego punktu B; zatem wyraz $AB\,.\,\sin(AB, \varphi)$ równy jest odległości tego punktu od osi obrotu, czyli jest równy promieniowi równoleżnika, na którym znajduje się punkt B; co jest zgodne z określeniem ruchu obrotowego. Te same wzory otrzymamy dla prędkości ruchu obrotowego, gdy A leży na osi obrotu; uzupełnimy je tylko wypowiedzeniem, że kierunki prędkości punktów są prostopadłe do płaszczyzny, przechodzącej przez oś obrotu i promień wodzący $\overline{AB}$. Dla ruchu wreszcie śrubowego, gdy punkt A obierzemy na osi śruby, wektor $\mathrm{V}\overline{AB}\bar{\varphi}$ jest prostopadły do osi śruby, gdyż jest prostopadły do $\overline{AB}$ i $\bar{\varphi}$; wektor zaś $\bar{v}_A$ może być tylko równoległy do osi śruby; z tych dwóch prędkości składa się prędkość każdego punktu bryły, będącej w ruchu śrubowym.

W rozdziałach poprzednich dowiedliśmy, że każde przeprowadzenie bryły, z jednego miejsca przestrzeni do drugiego, może być wykonane ruchem postępowym bryły i następnie obrotem jej około pewnej osi. Z tego bynajmniej nie wynika, ażeby ruch, jakim dana bryła przeszła z jednego miejsca do drugiego, był zgodny z tymi ruchami. Jeżeli jednakże weźmiemy pod uwagę dwa nieskończenie blizkie położenia bryły, to przeprowadzenie takie może być uważane za zgodne z ruchem rzeczywistym. Jeżeli następnie weźmiemy pod uwagę, że kierunek ruchu postępowego musi być równoległy do osi obrotu; wypowiemy wniosek:

chwilowy ruch bryły swobodnej może być wywołany przez nieskończenie mały ruch śrubowy; inaczej mówiąc — **przez skręt.**

Z rów. 35-go wynika, że znając wektor prędkości chwilowej $\bar{v}_A$ dowolnego punktu oraz wektor prędkości obrotowej $\bar{\varphi}$ w tejże chwili bryły swobodnej, — wektor prędkości każdego innego jej punktu B jest określony. Dwa przeto wektory, — inaczej mówiąc sześć wielkości skalarnych są konieczne i wystarczające do określenia prędkości bryły swobodnej; — co jest zgodne z ilością stopni swobody bryły swobodnej.

48. Ruch ciągły bryły swobodnej. Obecnie zajmiemy się pewnemi właściwościami osi skrętu oraz jego prędkości postępowej i obrotowej. Bryła, przechodząc z jednego miejsca przestrzeni do drugiego, wymaga pewnego czasu dt; jeżeli rozdzielimy nieskończenie małe przesunięcie i nieskończenie mały obrót przez dt, to otrzymamy wyrazy prędkości postępowej $\bar{v}_\varphi$ i prędkości obrotowej $\bar{\varphi}$, które są składowemi prędkościami ruchu rzeczywistego. Wyznaczenie położenia osi skrętu, jego prędkości obrotowej oraz prędkości postępowej, możemy wykonać podług sposobu wyżej wyłożonego, zastępując w tych rozpatrywaniach wektory przesunięć, które przyjmiemy nieskończenie małymi, — wektorami prędkości, które są do tych przesunięć proporcyonalne.

W pewnej chwili ruchu możemy zatem wyznaczyć położenie osi skrętu oraz obydwie prędkości $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{v}_{\varphi 1}$, lecz po upływie tej chwili, prędkości punktów bryły zmienią się co do kierunku i wartości; dla nowego więc położenia bryły otrzymamy inną oś skrętu oraz inne wektory $\bar{\varphi}_2$ i $\bar{v}_{\varphi_2}$; osi skrętu, wskutek tej zależności od czasu, nazywają się **osiami skrętów chwilowych**.

Gdy bryła jest w ruchu ciągłym, to otrzymamy zbiór osi skrętów, który utworzy w przestrzeni nieruchomą powierzchnię prostolinijną; każdemu położeniu bryły odpowiada na tej powierzchni pewna prosta, około której dana bryła obróci się z prędkaścią $\bar{\varphi}$ i jednocześnie posunie się wzdłuż niej z prędkością $\bar{v}$. Weźmy pod uwagę oś O, leżącą na wspomnianej powierzchni, to w ruchomej bryle znajdziemy prostą O', która w odpowiedniej chwili pokryje się z osią O i około której nastąpi skręt. Czyniąc to samo dla różnych położeń osi O, wyznaczymy w bryle zbiór takich osi O', które utworzą powierzchnię prostolinijną, sztywno związaną z bryłą ruchomą. Pierwszą z tych powierzchni nazwano powierzchnią **nieruchomą**; drugą zaś nazwano powierzchnią **ruchomą.** Ruch powierzchni ruchomej, w danej chwili, składa się z obrotu około pokrywających się osi O i O' oraz z ruchu postępowego wzdłuż tych osi. Ruch obrotowy tego rodzaju nazwaliśmy ruchem „toczenia się"; a ruch postępowy nazwiemy w danym razie ruchem „ślizgania się"; przyjąwszy te nazwy streścimy wyżej wypowiedziane wyniki w sposób następujący:

ciągły ruch bryły może być wywołany jednoczesnem toczeniem się i ślizganiem się pewnej powierzchni prostolinijnej, sztywno związanej z ruchomą bryłą, po drugiej powierzchni również prostolinijnej, która pozostaje nieruchomą w przestrzeni. Proste, zetknięcia się tych powierzchni, są osiami skrętów chwilowych. Poprzednie więc twierdzenia, mówiące o toczeniu się walców podczas ruchu płaskiego lub stożków podczas ruchu kulistego, są szczególnymi przypadkami ruchu ogólnego.

Sposób wywołania każdego ruchu, wyrażony w powyższem twierdzeniu, określa ściśle ruch w stosunku do przestrzeni, nie daje on jednakże pojęcia o czasie, w jakim należy go wykonać. W celu uzupełnienia tego sposobu przedstawiania ruchów, ażeby ściśle on odtwarzał ruch tak w stosunku do przestrzeni, jak i w stosunku do czasu, — nanieśmy na osiach chwilowego obrotu, t. j. na tworzących powierzchnię nieruchomą, przynależne im wektory $\bar{\varphi}$ i $\bar{v}_\varphi$; a wtedy podług takiego obrazu geometrycznego, będziemy mogli z całą ścisłością wykonać jeden jedyny ruch.

G. Ruch złożony i jego prędkości.

49. Określenie. Jeżeli punkt nieswobodny porusza się po pewnym torze i gdy ten tor **jednocześnie** z tym punktem porusza się w przestrzeni, to ruch takiego punktu nazywamy ruchem **złożonym**; gdyż punkt taki posiada ruch własny po torze, oraz jednocześnie bierze on udział w ruchu toru.

Ruch punktu po torze, gdy tor jest w spoczynku, nazwiemy ruchem **względnym**; a ruch, który punkt wykonuje razem z torem, nie poruszając się wzdłuż niego nazwiemy ruchem **unoszącym**. Ruch zaś, który powstaje z tych dwóch ruchów, **jednocześnie** wykonanych, jest ruchem **złożonym**, inaczej **bezwzględnym** lub **wypadkowym**.

Jako obraz ruchu złożonego wyobraźmy sobie np. ruch człowieka, idącego po torze, nakreślonym na pokładzie statku, gdy statek jest w ruchu; ruch wzdłuż toru, gdy statek stoi w spoczynku, jest, w myśl danych określeń, ruchem względnym; ruch zaś, gdy człowiek zatrzyma się w pewnym miejscu toru, statek zaś jest w ruchu, będzie ruchem unoszącym; gdy następnie będzie szedł ów człowiek wzdłuż toru, tor