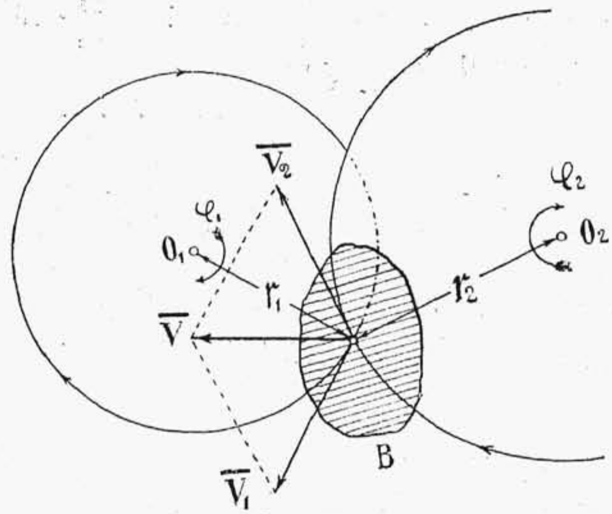
$=\frac{c}{\varphi}=0$, t. j., walec, toczący się, przechodzi w prostą linię i niema w danym razie ruchu toczenia się, jest tylko obrót kuli około nieruchomej osi.

58. Ruchy obrotowe około osi równoległych. Jeżeli bryła obraca się około pewnej osi, i oś ta obraca się jednocześnie około innej osi do niej równoległej, to każdy punkt tej bryły posiada dwie prędkości, które dają prędkość wypadkową; zajmiemy się obecnie wyznaczeniem tej prędkości. W tym celu przeprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do obydwóch osi i niechaj punkty O_1 i O_2 będą punktami przecięcia się jej z osiami obrotów, a figura zakreskowana B — przecięciem się z bryłą. Niechaj figura płaska, rys. 63-ci, obraca się około środka O_2, środek zaś O_2 niech obraca się około O_1. Obierzemy następnie dowolny punkt figury ruchomej, będzie on w tym ruchu posiadał prędkości składowe $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$, które dadzą prędkość bezwzględną $\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2$. Czyniąc to dla każdego punktu danej figury, wyznaczymy w ten sposób prędkości bezwzględne wszystkich jej punktów; wyznaczenie jednakże wszystkich tych prędkości będzie uproszczone i otrzymamy ogólniejszy pogląd na ich rozmieszczenie w przestrzeni, gdy zważymy, że ruch jest płaski, prędkości przeto bezwzględne takiego ruchu są prędkościami, które można wywołać obrotem bryły około innej osi, § 34-ty. Myślą przewodnią poszukiwania takiej osi będzie zasada, że bezwzględne prędkości punktów, leżących na niej, są $=0$; a więc dla punktów takiej osi zachodzi równanie $\bar{v}_1+\bar{v}_2=0$; co może nastąpić, gdy $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ leżeć będą na jednej prostej i gdy ich wartości będą wzajemnie równe, a zwroty przeciwne. Zamiast osi szukać będziemy na naszym rysunku punktu, którego prędkość podczas chwilowego obrotu $=0$, i punkt ten będzie środkiem obrotu. Środek taki leżeć może tylko na prostej x, łączącej O_1 i O_2, rys. 64-ty, gdyż składowe prędkości jej punktów leżą na prostopadłych do niej; i przytem leżeć on może w tej części prostej, w której prędkości składowe posiadają zwroty



Rys. 63.

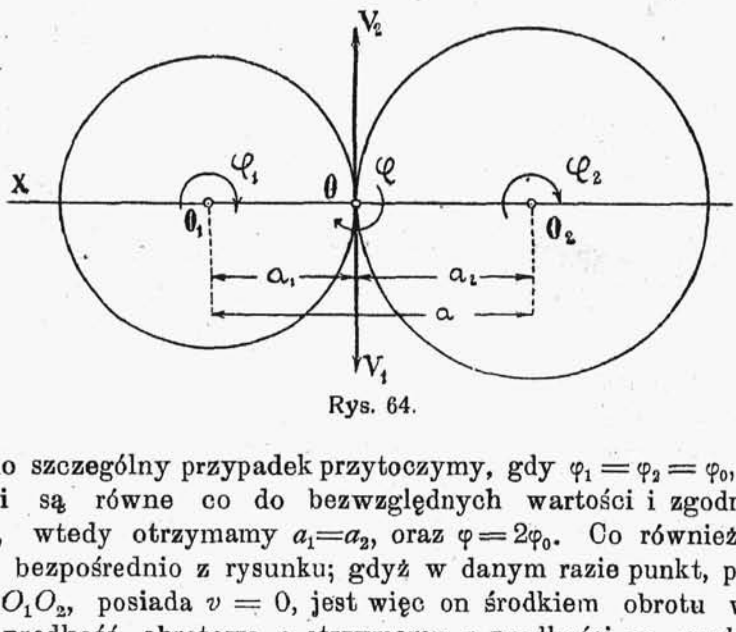
przeciwne. W przypadku, gdy zwroty obrotów składowych są jednakowe, jak pokazano na rys. 64-tym, to środek szukany leżeć będzie pomiędzy, środkami O_1 i O_2.

Oznaczmy odległości szukanego środka od osi O_1 i O_2 przez a_1 i a_2 to na zasadzie równania $v_1 = v_2$, napiszemy

$$a_1\varphi_1 = a_2\varphi_2; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

skąd wyznaczymy położenie tego środka, dzieląc odcinek $O_1O_2 = a$, odwrotnie proporcyonalnie do wielkości algebraicznych prędkości kątowych. Prędkość φ obrotu wypadkowego obliczymy z prędkości wypadkowej jednego z punktów bryły. Tym punktem niechaj będzie środek O_2; wypadkowa jego prędkość $= (a_1 + a_2)\,\varphi_1$, i powinna być równą prędkości około osi wypadkowej, która jest $= a_2\varphi$; a więc napiszemy $(a_1 + a_2)\,\varphi_1 = a_2\,\varphi$, skąd $\varphi = \frac{a_1 + a_2}{a_2}\,\varphi_1 = \varphi_1 + \frac{a_1}{a_2}\,.\,\varphi_1$; ponieważ $a_2\varphi_2 = a_1\varphi_1$, przeto po podstawieniu otrzymamy

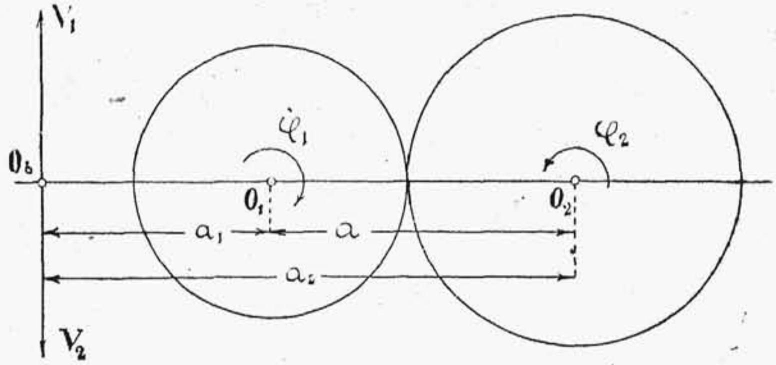
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$



Rys. 64.

Jako szczególny przypadek przytoczymy, gdy $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$, t. j. gdy prędkości są równe co do bezwzględnych wartości i zgodne co do zwrotów, wtedy otrzymamy $a_1 = a_2$, oraz $\varphi = 2\varphi_0$. Co również widocznem jest bezpośrednio z rysunku; gdyż w danym razie punkt, połowiący odcinek O_1O_2, posiada $v = 0$, jest więc on środkiem obrotu wypadkowego, a prędkość obrotową φ otrzymamy z prędkości np. punktu O_2.

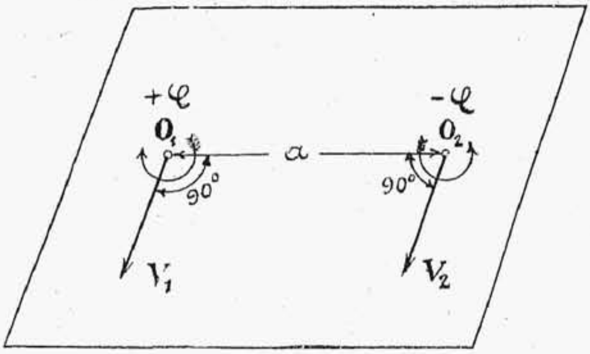
Weźmy obecnie przypadek, gdy zwroty obrotów φ_1 i φ_2 są różne, jak wskazuje rysunek 65-ty. Do tego ruchu zastosujemy poprzednie wzory zamieniwszy φ_2 na $-\varphi_2$, i otrzymamy $\frac{a_1}{a_2} = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, z czego wynika, że odległość a_1 lub a_2 powinna być odjemną; co wyraża, że środek obrotu będzie w danym razie leżał nazewnątrz odcinka $O_1 O_2$, t. j. na przedłużeniu środkowej $O_1 O_2$; — ażeby wyznaczyć jego położenie, przyjmijmy, że leży on po lewej stronie środka O_1; wtedy prędkość wypadkowa każdego punktu, leżącego na tej prostej $v = v_1 - v_2 = a_1 \varphi_1 - a_2 \varphi_2$; dla punktu zaś, który ma być środkiem obrotu wypadkowego, musi zachodzić równanie $a_1 \varphi_1 = a_2 \varphi_2$; ponieważ z rys. 65-go wynika, że $a_1 < a_2$, przeto, ażeby równanie powyższe mogło pozostać w swej mocy, powinno być $\varphi_1 > \varphi_2$;



Rys. 65.

a stąd wyznaczymy ściśle położenie punktu, którego prędkość bezwględna równa się zeru. Gdy $\varphi_1 < \varphi_2$, wtedy szukany środek obrotu leży zewnątrz odcinka $O_1 O_2$ po stronie osi O_2; to samo bowiem rozpatrywanie daje się zastosować do tego przypadku. Prędkość obrotową około osi wypadkowej obliczymy, wprowadzając do rachunku prędkość bezwzględną punktu bryły, który się pokrywa ze środkiem O_2; dla tego punktu $v = a \cdot \varphi_1$; względem zaś nowej osi prędkość tegoż punktu $v = a_2 \varphi$; skąd $a \varphi_1 = a_2 \varphi$; lub $(a_2 - a_1) \varphi_1 = a_2 \varphi$; i wreszcie $\varphi = \varphi_1 - \frac{a_1 \varphi_1}{a_2} = \varphi_1 - \varphi_2$, pod warunkiem, że $\varphi_1 > \varphi_2$. Wynik ten moglibyśmy bezpośrednio otrzymać ze wzoru $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$; podstawiając stosownie do warunków danego zadania $\varphi_2 = - \varphi_2$.

Szczególny przypadek tego ostatniego wzoru zachodzi, gdy $\varphi_1 = \varphi_2$, wtedy $\varphi = 0$; oraz $a_1 = a_2$; prędkość zatem obrotu wypadkowego jest równa zeru; a więc w danym przypadku niema ruchu obrotowego; położenie zaś osi wypadkowej jest w nieskończoności; tylko bowiem punkt, leżący w nieskończoności, odpowiada warunkowi $a_1 = a_2$, gdy $a_1 \gtreqless a_2$. Ażeby następnie obliczyć prędkości wypadkowe punktów bryły, która wykonuje dwa obroty równe, lecz przeciwne co do zwrotów, zauważymy, że w danym razie ruch punktów będzie płaski, a więc prędkości dwóch punktów wyznaczają ruch całej bryły. Obliczymy zatem prędkości punktów O_1 i O_2, rys. 66-ty. Prędkość bezwzględna punktu O_1 $v_1 = \varphi a$, punktu O_2 $v_2 = \varphi a$. Zwroty tych prędkości są jednakowe, przeto wszystkie punkty danej bryły będą posiadały ruch postępowy o prędkości $v = \varphi . a$. Dwa obroty około dwóch osi równoległych, których prędkości bezwzględnie są równe, a zwroty przeciwne, nazwano **parą obrotów**, analogiczne do pary sił; odległość a—nazwano **ramieniem pary**, iloczyn zaś $a\varphi$ **momentem pary**; parę obrotów oznaczają przez $(\varphi, -\varphi)$.



Rys. 66.

Wyniki powyższe streścimy w następujący sposób:

1) ruch bryły, wywołany przez obrót około dwóch osi równoległych, jest ruchem obrotowym około osi, leżącej w płaszczyźnie dwóch poprzednich osi, i do nich równoległej; oś ta dzieli odległość pomiędzy danemi osiami (z zewnątrz lub z wewnątrz) w odwrotnie proporcyonalnym stosunku do prędkości kątowych. Wypadkowa prędkość kątowa równa się sumie algebraicznej prędkości składowych;

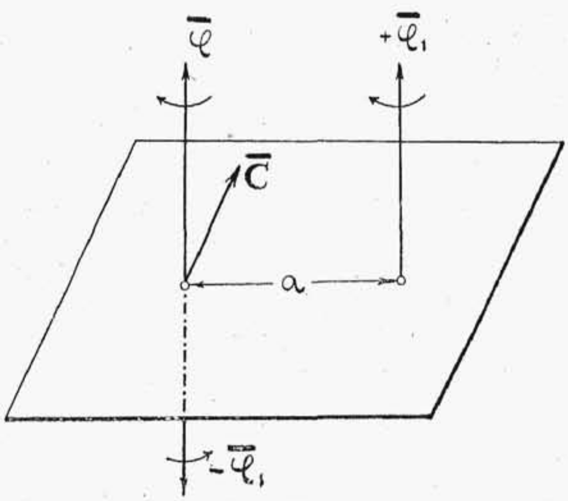
2) gdy zwroty obrotów są z sobą zgodne, to oś wypadkowa leży pomiędzy osiami składowych obrotów; gdy zaś zwroty są przeciwne, to leży ona zewnątrz tych osi, po stronie osi z większą prędkością obrotową;

3) gdy prędkości obrotów składowych są wzajemnie równe, lecz co do zwrotów przeciwne, to ruch wypadkowy jest ruchem postępowym, którego wielkość równa jest iloczynowi $a\varphi$ i kierunek jest prostopadły do środkowej O_1O_2.

Ten ostatni przypadek możemy również streścić w ten sposób; **para obrotów daje ruch postępowy.** Treść tego ostatniego twierdzenia możemy również odwrócić, twierdząc, że ruch postępowy może być wywołany przez parę obrotów. Gdy bowiem prędkość ruchu postępowego równa się c, wtedy parę obrotów, która wywołuje ten ruch, wyznaczymy z równania $c = \varphi a$; gdzie φ przedstawia bezwzględną wartość prędkości obrotowych; a zaś oznacza wzajemną odległość osi obrotowych. Jeżeli nie jest dane ani a ani φ, lecz tylko c, to ruch postępowy możemy wywołać nieskończenie wielu parami obrotów, byleby tylko pary te odpowiadały warunkowi, że ich moment, t. j. iloczyn

$a\varphi = c$. Zadanie więc wywołania ruchu postępowego przez obrotowy, gdy nie są dane ani a ani φ, nie jest ściśle określone.

Szczególny przypadek pary obrotów nastąpi, gdy odległość między osiami $a=0$, wtedy prędkość wypadkowa $v=0$, t. j. para takich obrotów nie zmienia stanu prędkości danej bryły; możemy więc dowolnie do bryły ruchomej dołączać pary obrotów, które leżą na wspólnej osi, nie zmieniając przez to stanu prędkości danej bryły, co jest również fizycznie zrozumiałe; obroty takie nazywać będziemy **obrotami równoważącymi się.**

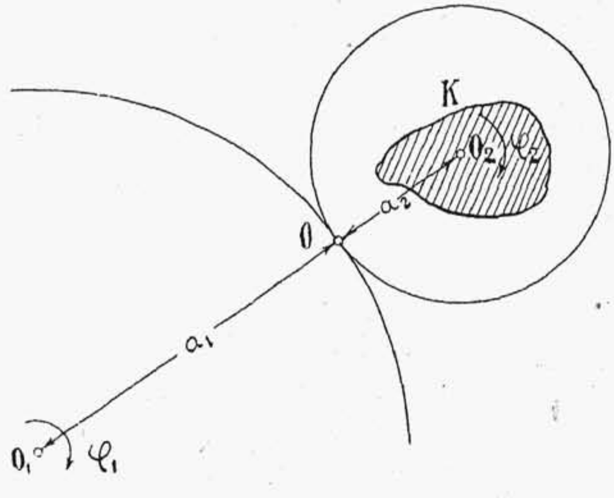


Rys. 67.

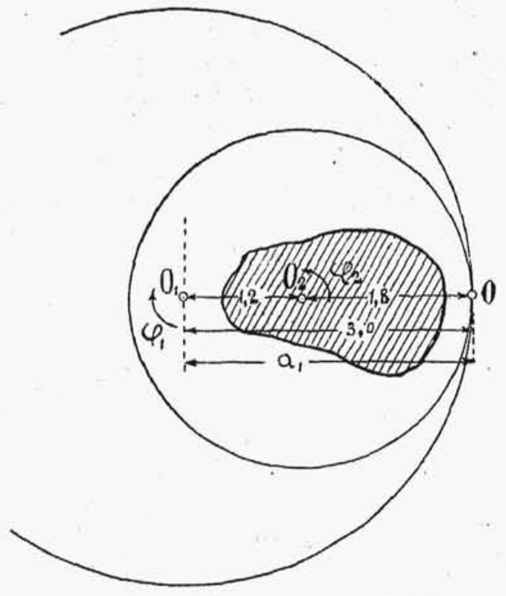
Z wniosków tych skorzystać możemy przy składaniu np. obrotu z ruchem postępowym. Gdy dane jest np. $\bar{\varphi}$ i $\bar{c}$, rys. 67-my, t. j. prędkość obrotowa i prostopadła do niej prędkość postępowa; natenczas c zastąpimy parą obrotów $\varphi a = c$, w której przyjmiemy $\varphi_1 = \varphi$; przytem położenie osi $\bar{\varphi}_1$ obierzemy, na osi danej $\bar{\varphi}$; przy takich warunkach oś $\bar{\varphi}$ posiada dwa obroty przeciwne, które się znoszą i pozostaje z układu $\bar{\varphi}, \bar{c}$ jedna tylko oś obrotowa $+\bar{\varphi}_1$. Do tychże wyników doszliśmy w § 54-ym inną drogą.

Przykład Bryła K, rys. 68-my, robi w pewnym zwrocie ruchem jednostajnym 30 obrotów na minutę około osi, przechodzącej przez punkt O_2; oś tę należy sobie wyobrazić prostopadle do płaszczyzny rysunku. Oś tego obrotu obraca się z tymże zwrotem około osi O_1, rownoległej do pierwszej, czyniąc 18 obrotów na minutę, Wyznaczyć położenie osi chwilowego obrotu i zamienić ruch tej bryły przez ruch toczenia się; należy przytem rozpatrzyć przypadki, w których zwroty są 1) jednakowe; 2) przeciwne; 3) różne i 4) równe. Odległość osi obrotów przyjęto $O_1O_2 = a = 1{,}2$ *m*.

Rozwiązanie. Położenie osi chwilowego obrotu, oznaczonej na rysunku 68-ym przez O, wyznaczymy z równania $a_1\varphi_1 = a_2\varphi_2$. Z warunków zadania obliczymy $\varphi_2 = \dfrac{30 \,.\, 2\pi}{60}$ na sek., $\varphi_1 = \dfrac{18 \,.\, 2\pi}{60}$ na sek.; skąd $\varphi_2 : \varphi_1 = 30 : 18 = 5 : 3$; a więc $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{5}{3}$; ponieważ $a_1 + a_2 = 1{,}2$, przeto $\frac{a_1}{1,2} = \frac{5}{8}$; $a_1 = \frac{6,0}{8} = 0,75$ m, $a_2 = 0,45$ m; $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 =$ $= \frac{48 \cdot 2\pi}{60} = 0,8 \cdot 2\pi$; lub inaczej, ilość obrotów ruchu wypadkowego równa się 48 na minutę. Gdy wszystkie osi chwilowych obrotów unieruchomimy w przestrzeni, natenczas przedstawią one walec kołowy, którego osią jest oś O_1 i promieniem podstawy $a_1 = 0,75$ m. Też same osi, połączone sztywno z bryłą, przedstawią drugi walec kołowy, którego osią jest oś O_2 i promieniem podstawy $a_2 = 0,45$ m. Gdy walec z osią O_2 toczyć się będzie po nieruchomym walcu, z osią O_1, otrzymamy ten sam ruch bryły, jaki ona posiadała podczas dwóch jednoczesnych obrotów. Gdyby prędkości φ_1 i φ_2 miały zwroty przeciwne, np. $\varphi_2 = - \varphi_2$ i przytem jak i w danem zadaniu $\varphi_2 > \varphi_1$; natenczas z równań $a_1 + a_2 = 1,2$, oraz $\frac{a_1}{a_2} = \frac{-5}{3}$, obliczymy $a_1 = 3,0$ i $a_2 = -1,8$; walec toczenia przedstawia się wtedy, jak pokazano na rys. 69-ym, t. j. walec o promieniu $a_2 = -1,8$ m, sztywno związany z ruchomą bryłą, toczy się wewnątrz walca nieruchomego o promieniu $a_1 = 3,0$ m.

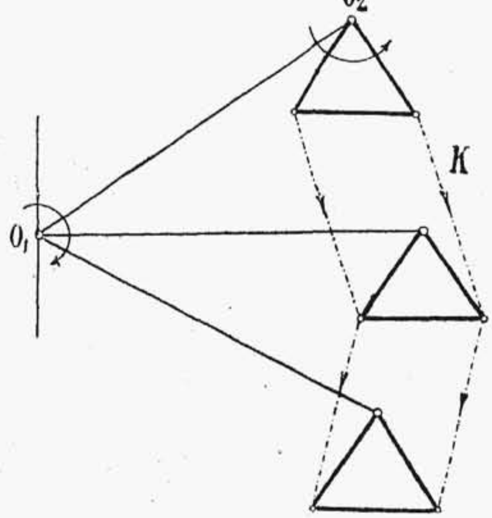


Rys. 68.



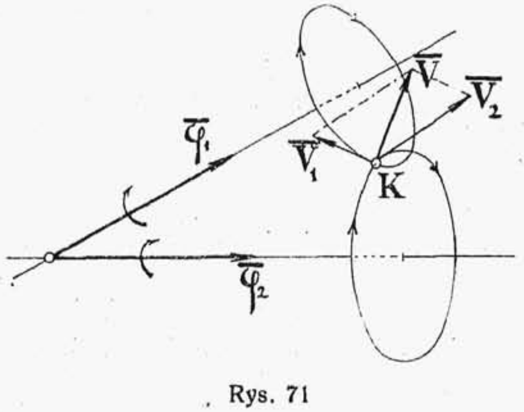
Rys 69.

Gdyby zwroty obrotów były równe i przeciwne t. j. $\varphi_1 = -\varphi_2$; to $a_1 = \infty$, oraz $a_2 = \infty$, powierzchnie walców w danym razie oddalają się w nieskończoność i obrót bryły zamienia się w ruch postępowy. Jako przykład tego ostatniego przypadku przytoczymy, tak zwany na zabawach ludowych, młyn dyabelski. Można dowieść, że prędkości kątowe koła i krzesła posiadają zwroty przeciwne i są wzajemnie równe; przeto siedzenie *K*, rys. 70-ty, musi wykonywać ruch postępowy; t. j. we wszystkich położeniach poziomo się ono ustawia, gdy w początku ruchu było poziomo ustawione.



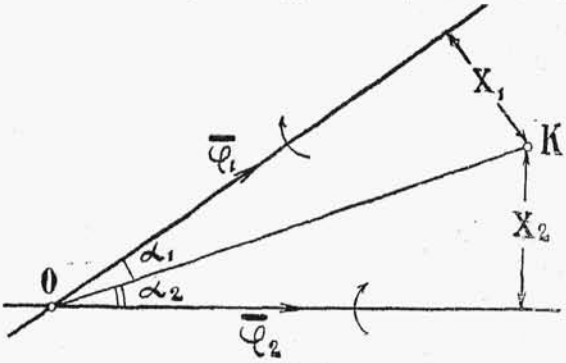
Rys. 70.

59. Ruchy obrotowe około przecinających się osi. Obraz tego ruchu przedstawimy, gdy oś obrotowa bryły obracać się będzie około innej osi, przecinającej pierwszą. Prędkość obrotu bryły oznaczymy przez wektor $\bar{\varphi}_2$; prędkość zaś obrotu tej osi oznaczymy przez $\bar{\varphi}_1$. Każdy punkt *K* tej bryły posiada podczas ruchu złożonego dwie prędkości linijne; każda z tych prędkości będzie styczną do odpowiedniego koła obrotu, rys. 71-szy; prędkości te możemy obliczyć i wyznaczyć ich położenie w przestrzeni, gdy zbudujemy odpowiednie trójkąty $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$; w ten sposób wyznaczyć możemy prędkości wypadkowe wszystkich punktów bryły. Wyznaczenie jednakże tych prędkości łatwiej wykonamy, gdy zważymy, że ruch danej bryły jest ruchem kulistym około punktu przecięcia się osi; a że ruch taki, § 45, można wywołać przez obrót około pewnej osi, przechodzącej przez punkt nieruchomy, zadanie przeto sprowadza się do wyznaczenia położenia i prędkości obrotowej około tej osi. — Jeden punkt tej osi jest punkt nieruchomy; drugi zaś



Rys. 71

jej punkt powinien czynić zadość równaniu $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$; punkt taki może znajdować się tylko na płaszczyźnie osi; oznaczmy jego odległości literami x_1 i x_2 rys. 72; a napiszemy równanie $x_1\varphi_1 = x_2\varphi_2$, z którego obliczymy x_1 i x_2; a właściwie wyznaczymy geometryczne miejsce takich punktów.

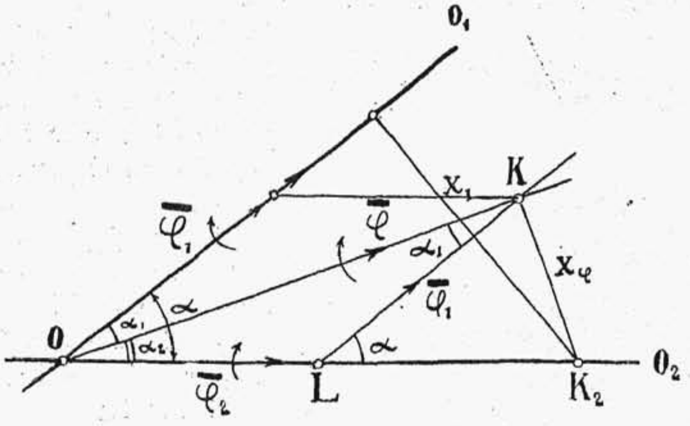


Rys. 72.

Ażeby umocnić sobie położenie tej osi napiszemy $x_1 = OK \sin\alpha_1$, $x_2 = OK \sin\alpha_2$; po podstawieniu tych wartości w powyższe równanie i po skróceniu przez OK, otrzymamy:

$$\varphi_1 \cdot \sin\alpha_1 = \varphi_2 \cdot \sin\alpha_2;$$

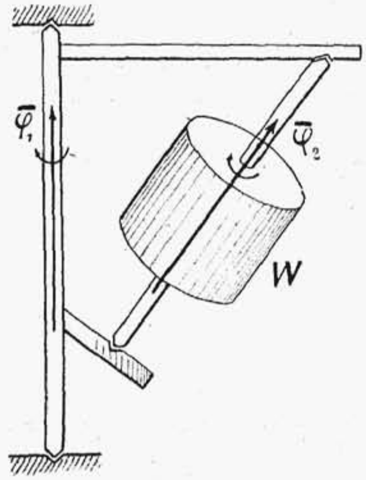
ponieważ $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, obliczymy przeto α_1 i α_2; kąt bowiem α jest dany. Otrzymamy w ten sposób miejsce geometryczne punktów, których prędkości, podczas ruchu bryły, równe są zeru; miejscem geometrycznem tych punktów jest prosta, tworząca z osiami obrotów składowych kąty α_1 i α_2. Sposobem geometrycznym wyznaczymy wielkości tych kątów



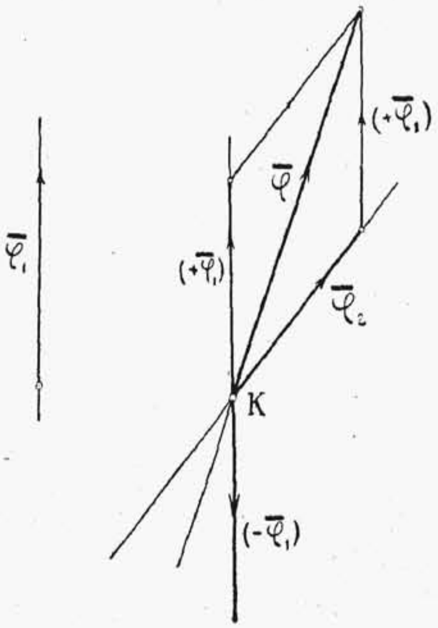
Rys. 73.

z trójkąta OKL, rys. 73, zbudowanego na bokach równych i równoległych do wektorów $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$; z tego trójkąta bowiem odczytamy $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$, oraz $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$; kąty więc, przeciwległe bokom $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$, są kątami α_1 i α_2, jakie tworzy oś obrotu wypadkowego z osiami obrotów składowych.

Ażeby następnie obliczyć prędkość obrotu wypadkowego zauważymy, że prędkość bezwzględna dowolnego punktu K_2 na osi φ_2, rys. 73-ci, równa się $x_1\varphi_1$; prędkość tegoż punktu możemy również otrzymać jako prędkość obrotu około osi obrotu wypadkowego $\bar{\varphi}$; a napiszemy wtedy wzór $x_1\varphi_1 = x_\varphi \varphi$, w którym x_φ oznacza odległość punktu K_2 od osi φ.



Rys. 74.



Rys. 75.

Z rysunku 73-go odczytamy $x_1 = OK_2 \sin\alpha$, $x_\varphi = OK_2 \sin\alpha_2$; po podstawieniu w powyższe równanie i po skróceniu otrzymamy $\varphi_1 \sin\alpha =$ $= \varphi \sin\alpha_2$; lub inaczej $\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$. Wielkość wektorową $\bar{\varphi}$ wyznaczyć możemy geometrycznie z trójkąta OKL, gdyż $\frac{OK}{LK} = \frac{\sin(180 - \alpha)}{\sin\alpha_2} =$ $= \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_2}$; ponieważ uczyniono $LK = \varphi_1$, przeto wektor $\bar{\varphi} = \overline{OK}$.

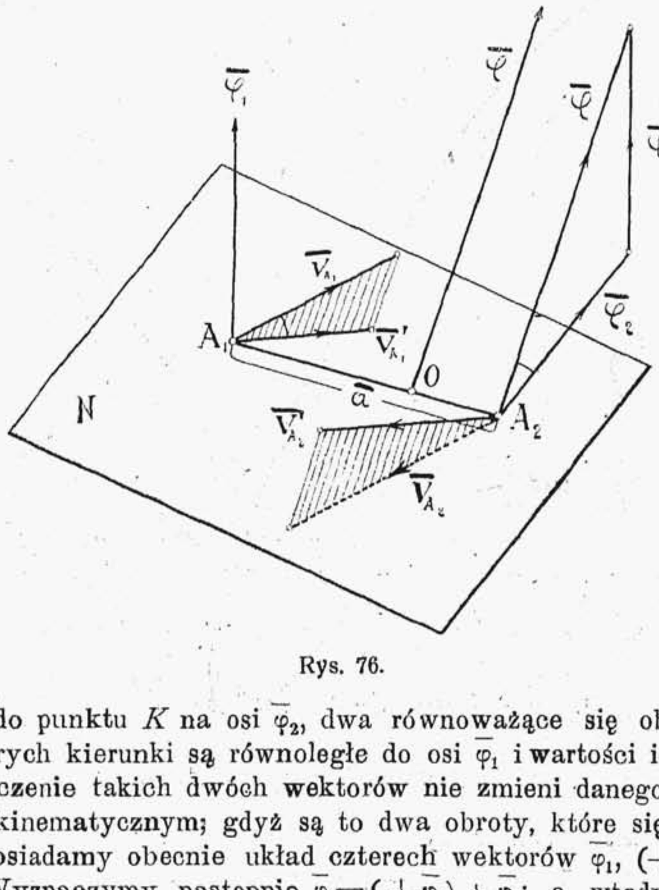
Wzór zatem wektorowy

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

wyraża położenie, wielkość i zwrot prędkości obrotu wypadkowego; gdyż zwrot tego obrotu, sądząc ze zwrotu ruchu punktu K_2, jest ten sam, co zwroty $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$. Wynik ten wypowiemy: wypadkowy ruch dwóch obrotów, o przecinających się osiach, jest obrót około innej osi, która przechodzi przez punkt ich przecięcia się i której kierunek i prędkość kątową wyznaczymy z wektorowego trójkąta prędkości kątowych; lub krócej

prędkość obrotu wypadkowego równa się sumie wektorowej prędkości składowych.

60. Ruchy obrotowe około osi nieprzecinających się. Obraz tego ruchu przedstawiony jest na rys. 74-tym; bryła w postaci walca W obraca się około osi $\bar{\varphi}_2$; oś $\bar{\varphi}_2$ wraz z walcem obraca się około osi nieruchomej $\bar{\varphi}_1$; osi $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$ **nie przecinają się.** W celu wyznaczenia ruchu wypadkowego, przyłożymy, rys. 75-ty, do dowolnie obranego punktu na jednej



Rys. 76.

z osi, np. do punktu K na osi $\bar{\varphi}_2$, dwa równoważące się obroty $(+\bar{\varphi}_1)$ $(-\bar{\varphi}_1)$, których kierunki są równoległe do osi $\bar{\varphi}_1$ i wartości ich są równe φ_1. Przyłączenie takich dwóch wektorów nie zmieni danego układu pod względem kinematycznym; gdyż są to dwa obroty, które się wzajemnie znoszą. Posiadamy obecnie układ czterech wektorów $\bar{\varphi}_1$, $(+\bar{\varphi}_1)$, $(-\bar{\varphi}_1)$, oraz $\bar{\varphi}_2$. Wyznaczymy następnie $\bar{\varphi} = (+\bar{\varphi}_1) + \bar{\varphi}_2$; a wtedy pozostaną w układzie trzy wektory $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_1$ i $(-\bar{\varphi}_1)$; wektor $\bar{\varphi}$ przedstawia obrót bryły około osi, która przechodzi przez K, wektory $\bar{\varphi}_1$ i $(-\bar{\varphi}_1)$, jako para obrotów, dają ruch postępowy, o kierunku prostopadłym do płaszczyzny tej pary. Wynikiem więc obrotów $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$ jest **obrót** około osi $\bar{\varphi}$ i **ruch postępowy**; ruchy te na zasadzie poprzednich twierdzeń dają **ruch**

śrubowy; co było bezpośrednio do przewidzenia; każdy bowiem ruch daje się zastąpić ruchem śrubowym.

Wyznaczmy teraz położenie osi tego ruchu śrubowego, obliczmy jego prędkość obrotową i postępową. Kierunek osi jest wyznaczony przez kierunek wektora $\bar{\varphi}$; gdyż kierunek osi obrotu jest niezależny od obranego bieguna § 46-go. Właściwe położenie tej osi znajdziemy podług sposobu, już stosowanego w końcu § 55-go. W tym celu przeprowadźmy płaszczyznę N, rys. 76-go, prostopadłą do kierunku $\bar{\varphi}$ i zrzutujmy na nią prędkości bezwzględne dwóch punktów danej bryły, z tych rzutów wyznaczymy środek obrotu, przez który przechodzi oś śruby. Płaszczyzna ta, ponieważ jest prostopadłą do $\bar{\varphi}$, jest więc również prostopadłą do płaszczyzny, przechodzącej przez $\bar{\varphi}_1'$ i $\bar{\varphi}_2$, czyli przechodzi ona przez prostą, prostopadłą do kierunku wektorów $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$.

W celu ułatwienia rozpatrywań stosunków geometrycznych; przeprowadźmy wspomnianą płaszczyznę N przez najkrótszą odległość pomiędzy danemi osiami $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$; odległość tę oznaczyliśmy na rysunku 76-ym przez $\bar{a}$. Z tych rozpatrywań wynika jako uboczny wniosek że $\bar{\varphi} \perp \bar{a}$; gdyż $\bar{\varphi}$ leży w płaszczyźnie, utworzonej przez $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$.

Punkty A_1 i A_2 powstałe od przecięcia się $\bar{a}$ z $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$, niech będą punktami, których prędkości wyznaczą środek ruchu śrubowego. Wartość prędkości punktu A_1 jest równą $v_{A_1} = a\varphi_2$; kierunek jej jest prostopadły do $\bar{\varphi}_2$; rzut tej prędkości na płaszczyznę N, (rzut ten oznaczyliśmy przez v'_A), obliczymy ze wzoru

$v'_{A_1} = a\bar{\varphi}_2 \cos(v_{A_1}, N)$; w którym kąt $(\bar{v}_A, N) =$ kątowi (φ_2, φ); gdyż $\bar{\varphi}_2 \perp \bar{v}_{A_1}$, $\bar{\varphi}_2 \perp \bar{v}_A$, oraz $\bar{\varphi} \perp N$; a więc

$$v'_{A_1} = a\varphi_2 \cos(\varphi_2, \varphi),$$ i również w tenże sposób

$$v'_{A_2} = a\varphi_1 \cos(\varphi_1, \varphi).$$

Środek obrotu oznaczymy przez O i napiszemy wtedy pg. wzoru 32-ego.

$$\frac{v'_{A_1}}{A_1O} = \frac{v'_{A_2}}{OA_2}; \text{ lub inaczej } \frac{A_1O}{O_1A_2} = \frac{v'_{A_1}}{v'_{A_2}};$$

po podstawieniu odpowiednich wartości zamiast v'_{A_1} i v'_{A_2}, otrzymamy równanie

$$\frac{A_1O}{OA_2} = \frac{\varphi_2 \cos(\varphi_2, \varphi)}{\varphi_1 \cos(\varphi_1, \varphi)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

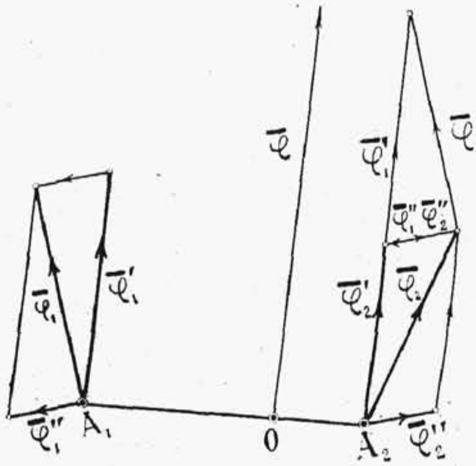
z którego obliczymy odległość punktu O od A_1 i od A_2.

Nadamy temu wzorowi jeszcze inną postać; gdy zauważymy z rys. 76-go

że $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = \dfrac{\sin(\varphi_2, \varphi)}{\sin(\varphi_1, \varphi)}$; po podstawieniu tego stosunku w równanie 41-sze i po uproszczeniu, otrzymamy wzór, z którego bezpośrednio obliczymy położenie punktu O

$$\frac{A_1 O}{O A_2} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1, \varphi)}{\operatorname{tg}(\varphi_2, \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Dla wzoru 41-go znajdziemy bezpośrednio znaczenie kinematyczne. Wyraz bowiem w liczniku $\varphi_2 . \cos(\varphi_2, \varphi)$ jest rzutem wektora $\bar{\varphi}_2$ na kierunek $\bar{\varphi}$; tak samo mianownik przedstawia rzut $\bar{\varphi}_1$ na kierunek $\bar{\varphi}$, rys. 77-my; gdy rzuty te przyjmiemy jako składowe wektorów $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$ w kierunku $\bar{\varphi}$; natenczas przedstawią one dwa obroty wzajemnie równoległe, wypadkowy ich obrót jest $\varphi = \varphi'_1 + \varphi'_2$ z punktem przyłożenia, który obliczymy na podstawie twierdzeń o obrotach około osi równoległych, § 56-ty.



Rys. 77.

Wynik powyższego rachunku nasuwa inny sposób rozwiązania postawionego tutaj zadania; a mianowicie wyznaczamy najpierw $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$, rys. 77-my; następnie rozkładamy $\bar{\varphi}$ i $\bar{\varphi}_2$ w kierunku prostopadłym do niego; wtedy $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}'_1 + \bar{\varphi}''_1$, oraz $\bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}'_2 + \bar{\varphi}''_2$; zatem $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) = (\bar{\varphi}_1' + \bar{\varphi}_2') + (\bar{\varphi}_1'' + \bar{\varphi}_2'')$.

Wektory $\bar{\varphi}_1''$ i $\bar{\varphi}_2''$ są wzajemnie równe i równoległe; punkty ich przyłożenia są w A_1 i A_2; właściwości te wyrazimy przez równanie $\bar{\varphi}_1'' + \bar{\varphi}_2'' = 0$; wektory te przedstawiają zatem parę obrotów, której wynikiem jest ruch postępowy; kierunek tego ruchu jest prostopadły do płaszczyzny tej pary. Na podstawie geometrycznych stosunków można dowieść, że ten ruch jest równoległy do $\bar{\varphi}$.

Ponieważ $\bar{\varphi}_1'' + \bar{\varphi}_2'' = 0$, przeto z poprzedniego równania wynika, że $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1' + \bar{\varphi}_2'$; t. j. $\bar{\varphi}$ jest wypadkową dwóch równoległych obrotów; punkt przyłożenia ich wypadkowej wyznaczymy podług zasady dodawania obrotów około osi równoległych. Wartość prędkości ruchu postępowego v_φ wzdłuż osi $\bar{\varphi}$ obliczymy z pary obrotów, a więc $v_\varphi = \varphi_1'' a$. Sposób ten wskazuje dogodności stosowania do przekształcenia ruchów wielkości i działań wektorowych.

61. Przekształcanie ruchów. Przekształceniem danego ruchu na inny nazwiemy zamianę danego sposobu wywoływania ruchu na inny sposób, który udziela punktom bryły ruchomej tych samych prędkości, jakie one miały poprzednio. Wyrażając się technicznie, powiemy: przekształcenie ruchów ma na celu zastąpienie pewnego mechanizmu, wywołującego ruch, przez inny mechanizm, który wywołuje ten sam ruch.

Określenie to stosuje się do wywołania ruchów **chwilowych lub też ciągłych**. Wyłożone w poprzednich paragrafach teorye i przykłady miały na celu przekształcenie ruchów tak chwilowych, jak i ciągłych. Przekształceniem chwilowego ruchu było np. wyznaczenie osi obrotu wypadkowego dwóch innych obrotów; wektor wypadkowy $\overline{\varphi}$ wyznacza takie prędkości ruchu bryły, jakie ona posiadała **w danej chwili** wskutek dwóch jednoczesnych obrotów $\overline{\varphi}_1$ i $\overline{\varphi}_2$. Gdy następnie wyznaczymy położenia nieskończenie wielu osi $\overline{\varphi}$ dla danego ruchu, możemy wtedy mówić o ruchu ciągłym, wywołanym ruchem złożonym.

Najogólniejszym ruchem **chwilowym** jest **skręt**; najogólniejszym ruchem **ciągłym** jest ruch **toczenia** się wraz ze **ślizganiem** się wzdłuż osi.

Rozpatrywania, wyżej wyłożone, miały przeważnie na celu sprowadzenie ruchów złożonych do prostszych. Przytem rozpatrywania te tyczyły się składania dwóch ruchów; lecz również w tenże sposób możemy dodawać z sobą wiele ruchów; gdyż w danym razie będziemy kolejno dodawać np. pierwszy ruch z drugim; wypadkowy tych dwóch z trzecim i t. d. Prawo superpozycyi ruchów pozwala przytem na dodawanie w dowolnym porządku; co też zostaje uwględnione w rachunku wektorowym przez prawo przemienności i łączności dodajników. Możemy więc mówić o prędkości punktu lub bryły w trzech i więcej kierunkach i o wypadkowym ich ruchu; również o obrocie około trzech i więcej osi; — o ruchu śrubowym około wielu osi i t. p.

W celu udowodnienia twierdzeń składania ruchów, rozpatrywaliśmy szczegóły przemian ruchu i doszliśmy do dwóch ważnych wniosków; że ruchy obrotowe dodają się wektorowo i że ruch postępowy możemy wywołać przez parę obrotów; obecnie więc możemy do wszelkich przekształceń ruchów stosować bezpośrednio rachunek wektorowy. Wniosek, że prędkości kątowe podlegają prawu dodawania wektorowego, jest wyrazem, w odmiennej nieco postaci, prawa superpozycji nieskończenie małych przesunięć.

Zadanie wymaga nieraz wywołania pewnych ruchów przez ruchy złożone, określone pewnemi warunkami; przekształcenie takie nazwano rozkładem ruchów. Każdy ruch punktu może być zatem uważany jako ruch, złożony z dwóch i więcej ruchów. Gdy np. dane są kierunki, po których mają się odbywać ruchy składowe danego punktu, to ruch punktu na płaszczyźnie da się rozłożyć na **dwie** składowe; — ruch zaś w przestrzeni na **trzy** składowe. W tenże sposób, każdy obrót bryły około osi może być wywołany przez obroty około dwóch lub wielu osi; w celu uczynienia takiego rozkładu muszą być dane odpowiednie ku temu warunki.

62. Podobieństwo właściwości układu wektorów prędkości kątowych i układu wektorów sił. Pomiędzy przekształceniem sił i prędkości, widoczne jest podobieństwo pod względem działań **geometrycznych** na wektorach. Podobieństwo to polega najpierw na tem, że prędkości postępowe $\bar{v}$ i prędkości kątowe $\bar{\varphi}$ w kinematyce, oraz moment $\bar{M}$ i siły $\bar{P}$ w statyce przedstawiamy za pomocą wektorów; co wynika z ich wspólnych właściwości kierunkowych. Następnie wszystkie te wielkości dodają się wektorowo i służy im wspólne prawo superpozycyi oraz przemienności i łączności dodajników.

Pomiędzy poszczególnymi rodzajami wektorów zachodzi jeszcze takie podobieństwo, że wektory $\bar{v}$ i $\bar{M}$ są wektory **przenośne**, punkty ich bowiem przyłożenia mogą być w przestrzeni dowolnie obrane, a pomimo tego będą one wyrażały te wielkości. Wektory $\bar{\varphi}$ i $\bar{P}$ są wektory **przesuwne**, gdyż mogą być tylko przesunięte wzdłuż swych kierunków, nie pociągając dwuznaczności określenia, jakie wyrażają. Wskutek tego, gdy we **wzorach kinematycznych** zastąpimy wektory $\bar{v}$ przez $\bar{M}$ oraz $\bar{\varphi}$ przez $\bar{P}$, wtedy z wzorów kinematycznych otrzymamy wzory statyczne i odwrotnie.

Przytoczymy niektóre takie analogiczne wzory i twierdzenia. Wektor $\bar{v}$ ruchu postępowego wyraża wynik działania pary obrotów; wektor zaś $\bar{M}$ wyraża wynik działania pary sił. Każdy chwilowy ruch bryły da się przekształcić na układ, złożony z wektora $\bar{\varphi}$ i z wektora $\bar{v}_{\varphi}$, równoległego do $\bar{\varphi}$; każdy układ sił da się przekształcić na układ złożony z wektora $\bar{R}$ i z wektora $\bar{M}$, równoległego do $\bar{R}$. Ruch śrubowy wyznacza się temi samemi wektorami jak skrętnik. Położenie osi obrotu wypadkowego dwóch wzajemnie równoległych obrotów obliczymy z tych samych wzorów § 58-my; tenże wzór służy do obliczenia wypadkowej dwóch sił równoległych. Jednem słowem, gdy utworzymy obraz wektorowy lub zestawimy wzory wektorowe dla układu sił, wtedy ten sam obraz czy też wzór może służyć dla układu prędkości; i—odwrotnie. Prawidła zatem o przekształceniu ruchów dają się w zupełności zastosować do przekształcenia układów sił i odwrotnie.

Zaznaczyć jeszcze trzeba, że wspomniane podobieństwo, nie jest podobieństwem kinematycznem; gdyż np. wektor $\bar{M}$ jest miarą działania pary sił, wywołującej obrót; zdawałoby się więc, że wektor $\bar{M}$ można zastąpić przez $\bar{\varphi}$; lecz tak nie jest; różnią się one bowiem właściwościami wektorowemi; wektory bowiem $\bar{M}$ i $\bar{v}$ posiadają wspólną właściwość przenośności, mogą więc wzajemnie się zastępować; również przesuwność wektorów siły i prędkości obrotowej, pozwala te wektory wzajemnie zastąpić. Podobieństwo więc przekształceń w kinematyce i statyce zachodzi tylko pod względem przedstawienia wektorowego; pod względem zaś fizycznem zachodzi pewna odwrotność.

Przykład. Około danej osi $\overline{\varphi}$ obraca się pewna bryła; zastąpić ten ruch przez obrót około innej osi, która jest równoległą do danej i przechodzi przez obrany punkt w przestrzeni. W celu rozwiązania tego zadania, przyłóżmy do obranego punktu dwa równoważące się wektory $(\overline{\varphi})$ i $(-\overline{\varphi})$; wtedy para wektorów $(-\overline{\varphi})$ i $\overline{\varphi}$ przedstawia ruch postępowy, prostopadły do płaszczyzny tej pary; weator zaś $(\overline{\varphi})$, wyznacza obrót bryły około osi, przechodzącej przez dany punkt i równoległy do danej osi. Obrót więc około pewnej osi daje się zastąpić przez obrót około innej osi do niej równoległej, oraz przez ruch postępowy. Jest to odwrotne działanie do tego, któreśmy stosowali przy składaniu ruchów.

Zasadą wszystkich przekształceń ruchu jest możność dodania lub odjęcia od układu wektorowego, który przedstawia dany ruch, dwóch równoważących się wektorów, oraz możność zastąpienia ruchu postępowego przez parę obrotów. Przy wykonaniu tych przekształceń, korzystać należy jeszcze z następujących właściwości wektorów; wektor prędkości obrotowej możemy przesuwać wzdłuż osi, gdyż jego położenie w dowolnem miejscu osi obrotu, wyznacza jeden i ten sam obrót; następnie wektor pary obrotów, t. j. wektor prędkości postępowej, możemy dowolnie przenosić w przestrzeni, gdyż przyłożony do każdego punktu bryły, wyznaczy on zawsze jeden i ten sam ruch postępowy, i wreszcie wektor prędkości punktu jest wektorem umiejscowionym, gdyż może być on tylko przyłożony do punktu, którego prędkość wyraża.

Z powyższych rozpatrywań widzimy, że każdy ruch może być wywołany różnymi ruchami składowymi, których wyrazem matematycznym są odpowiednie układy wektorów.

Dwa różne układy wektorów, które, za pomocą działań wektorowych, mogą być przekształcone jeden na drugi, lub też obydwa mogą być przekształcone na jaki inny trzeci układ, nazywamy **równoważnymi układami wektorów.** Różne lecz **równoważne** układy wektorów przedstawiają przeto jeden i ten sam ruch.

Zgodność wyników rachunku wektorowego z zachodzącymi ruchami w rzeczywistości, objaśnia się tem, iż rachunek wektorowy wyraża, za pomocą przyjętych symbolów, nietylko ilościowe stosunki wielkości kinematycznych, lecz uwzględnia również właściwości ich kierunkowe oraz, przez przyjęty sposób dodawania, odtwarza w swym rachunku prawo superpozycyi ruchów. Rachunek zatem wektorowy uważać możemy jako geometryczny model zachodzących ruchów, z którego można odczytywać właściwości kinematyczne jak również zbudować model.

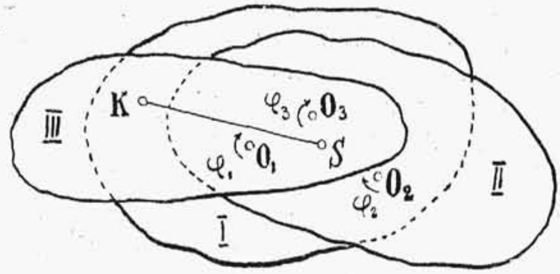
63. Zadania na składanie prędkości.

1) Statek parowy płynie w górę rzeki i przebywa ruchem jednostajnym daną odległość s w pewnym czasie t_1; gdy płynie zaś w dół

rzeki, przebywa on tę samą odległość w czasie t_2. Przyjmijmy, że maszyny statku pracują w obydwóch przypadkach z jednakową energią i że prędkość rzeki jest w tym okresie czasu stałą. Należy obliczyć prędkość rzeki (unoszącą) i prędkość statku, z jakąby płynął na stojącej wodzie.

2) Dana jest prędkość pociągu i prędkość bezwzględna człowieka, idącego wzdłuż tego pociągu. Należy obliczyć prędkość, z jaką idzie ten człowiek.

3) Tarcza I obraca się, rys. 78-my, w swej płaszczyźnie około nieruchomej osi O_1; w punkcie O_2 tej tarczy jest umocowana oś O_2, około której obraca się tarcza II; w punkcie O_3 tej tarczy wystawiona jest oś O_3, około której obraca się tarcza III; wyznaczyć chwilową prędkość punktu K, dowolnie obranego na tarczy III, gdy prędkości obrotowe w danej chwili posiadają wartości φ_1, φ_2 i φ_3. Rozpatrzyć następnie przypadek, gdy $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$; oraz dać odpowiedź, jaki stosunek powinien zachodzić pomiędzy prędkościami φ_1, φ_2 i φ_3, ażeby tarcza III wykonywała ruch postępowy.

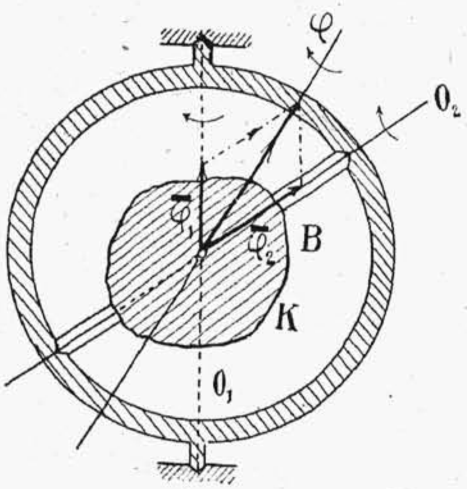


Rys. 78.

Odpowiedź. W przypadku gdy $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$ osią chwilowego obrotu tarczy III jest środek ciężkości S pola trójkąta, wytworzonego przez chwilowe położenie trzech osi obrotu, i wtedy prędkość $\bar{v}_k \perp \bar{S}\bar{K}$ i przytem

$$v_k = SK \,.\, 3\varphi.$$

4) Bryła posiada ruch śrubowy, wyznaczony przez $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{v}_\varphi$. Osi tej śruby nadajemy obrót około innej osi z prędkością $\bar{\varphi}_2$, równoległą do $\bar{\varphi}_1$. Wyznaczyć prędkość chwilową dowolnego punktu bryły.



Rys 79.

5) Bryła w postaci pierścienia, rys. 79-ty, obraca się z prędkością φ_1 około nieruchomej osi O_1. Wewnątrz pierścienia umocowana jest oś O_2, około której obraca się bryła B; wyznaczyć prędkość punktu K, sztywno z nią połączonego.

6) Bąk, puszczony w ruch, obraca się około swej osi ze stałą prędkością $\bar{\varphi}_2$; oś tego obrotu obraca się ze stałą prędkością $\bar{\varphi}_1$ około pionu, wystawionego w punkcie oparcia bąka. Należy zastąpić te ruchy obrotowe przez toczenie się.

W zadaniu tem nie rozpatrujemy warunków, które wywołują dane ruchy, gdyż to należy do dynamiki, lecz, stwierdzając rodzaj ruchów, stawiamy sobie za zadanie te ruchy przekształcić.

Przed przystąpieniem do rozwiązania, należy określić np. obserwacyę zwrotów obrotów $\bar{\varphi}_2$ i $\bar{\varphi}_1$, jakie w danym ruchu zachodzą; gdyż od tych zwrotów należy odpowiedź. Obserwacya przyprowadzi nas do wyniku, że zwroty osi $\bar{\varphi}_2$ i $\bar{\varphi}_1$ są z sobą zgodne i kąt (φ_2, φ_1), który oznaczymy przez α, jest ostry. Stożek nieruchomy jest miejscem geometrycznem osi $\bar{\varphi}$ obrotu wypadkowego; gdyż tylko punkty tej osi posiadają chwilowe prędkości zero. Oznaczmy kąt między $\bar{\varphi}$ i $\bar{\varphi}_2$, przez β; wtedy otrzymamy

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varphi_1 \sin \alpha}{\varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2}, \text{ oraz } \varphi = \varphi_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

W celu wykończenia rozwiązania należy wykreślić oba stożki.

H. Przyśpieszenia punktów poruszającej się bryły.

64. Uwagi ogólne. Ruch bryły swobodnej jest określony przez sześć niezależnych parametrów; mogą być nimi np. trzy parametry wektora prędkości postępowej i trzy parametry prędkości obrotowej (§ 47-my) przez te dwa wektory ruch bryły jest ściśle określony, a więc i prędkość każdego jej punktu powinniśmy obliczyć z tych sześciu parametrów; rozwiązanie tego ogólnego i innych szczegółowych zadań podaliśmy w paragrafach poprzednich.

Obecnie przystąpimy do obliczenia **przyśpieszeń** punktów danej bryły, gdy dany jest jej ruch. Ażeby obliczyć wogóle przyśpieszenie punktu poruszającego się należy znać jego prędkość w dwóch nieskończenie blizkich okresach czasu; prędkości te oznaczymy literami $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$; a różnica tych wektorów rozdzielona przez okres czasu, w jakim ona powstała, daje wektor przyśpieszenia. Ażeby przeto obliczyć przyśpieszenie dowolnego punktu danej bryły należy znać jej ruch w **dwóch** po sobie następujących okresach czasu.

65. Przyśpieszenia punktów bryły, będącej w ruchu postępowym. Gdy bryła jest w ruchu postępowym (§ 32-gi); wtedy wszystkie jej punkty w tej samej chwili posiadają jednakowe prędkości $\bar{v}_1$; jeżeli w następnej chwili bryła wykonywa również ruch postępowy z prędkością wogóle