

PROJEKTOWANIE BELEK ŻELBETOWYCH ZGINANYCH Z UWZGLĘDNIENIEM NAJMNIEJSZEJ WYSOKOŚCI I CIĘŻARU WŁASNEGO

Inż. Emil Łazoryk, Katowice

W pracy ¹⁾, ogłoszonej już przeszło dziesięć lat temu, przy omawianiu projektowania belek żelbetowych zginanych, z uwzględnieniem najmniejszych kosztów i ciężaru własnego, zwrócił autor uwagę, że w pewnych warunkach wpływ ciężaru własnego belki może stać się decydujący w wyznaczeniu przekroju żelbetowego i że trzeba częstokroć uwzględnić naprężenie dopuszczalne nie tylko żelaza, ale i betonu. Przypomniano wówczas, że wzory na najtańszą belkę nie uwzględniają takich wpływów, jak zwiększenie wysokości budynków, zależność kosztu słupów i fundamentów od ciężaru własnego belek, wyższe dojazdy do mostów i t. p. W ostatnich latach zainteresowanie temi wpływami powiększyło się, a w literaturze fachowej rozważa się obecnie nawet racjonalność zastosowania ustroju płytowego zamiast żebrowego, celem osiągnięcia jak najmniejszej wysokości konstrukcyjnej, podyktowanej temi dotychczas pomijanymi względami.

Zdawać by się mogło, że mimo to nie ma potrzeby poruszania tematu projektowania belki żebrowej dla najmniejszej wysokości, gdyż znane są metody wyznaczania przekrojów dla danych naprężeń dopuszczalnych materiałów. Tak jednak nie jest z dwu względów. Przedewszystkiem odnośne wzory są bądźto zawile i z tego powodu unikane w praktyce, bądź też opierają się na tablicach cyfrowych lub wykresnych dla pewnych szczególnych wartości naprężeń, a więc ograniczają swobodę projektanta. Poza tem metody nie uwzględniają ciężaru własnego żebra, który jak wspomniano już jest czynnikiem odgrywającym bardzo dużą rolę, właśnie przy poszukiwaniu najmniejszej wysokości. Wymienione motywy skłoniły zatem autora do przedstawienia takiego sposobu projektowania,

który byłby w stanie zadowolić wymagania życia praktycznego.

Rozpatrując przekrój żebrowy zginany, pominięto ciśnienia w żębrze poniżej płyty, które zwykle nie posiadają większego wpływu, dzięki zaś temu założeniu uprościmy sposób obliczenia.

Z warunku równowagi momentów w przekroju ze względu na punkt O wynika

$$M = C_b \left(h_1 - \frac{x}{3} \right) - C_o \left[h_1 - x + \frac{2}{3} (x - t) \right] \quad (1)$$

Ponieważ jednak z prostolinijnego rozkładu naprężeń mamy

$$C_b = \frac{\sigma_b b x}{2}, \quad C_o = \frac{\sigma_o b (x - t)}{2}, \quad \sigma_o = \sigma_b \frac{x - t}{x} \quad (2)$$

więc po przekształceniu otrzymujemy równanie

$$\frac{6 M}{\sigma_b b t^2} = \frac{x}{t} \left(3 \frac{h_1}{t} - \frac{x}{t} \right) - \frac{\left(\frac{x}{t} - 1 \right)^2}{\frac{x}{t}} \left(3 \frac{h_1}{t} - 2 - \frac{x}{t} \right) \quad (3)$$

Wprowadzając oznaczenia dla przekroju jednostkowego, porównawczego ²⁾

$$\xi = \frac{x}{h_1}, \quad \delta = \frac{t}{h_1}, \quad \omega_t = \frac{M}{b t^2 \sigma_b} \quad (4)$$

można napisać powyższe równanie w postaci

$$6 \omega_t = \frac{\xi}{\delta} \left(\frac{3}{\delta} - \xi \right) - \frac{\left(\frac{\xi}{\delta} - 1 \right)^2}{\frac{\xi}{\delta}} \left(\frac{3}{\delta} - 2 - \frac{\xi}{\delta} \right) \quad (5)$$

stąd zaś po uporządkowaniu

$$\omega_t = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} - \frac{3 - 2\delta}{6\xi} \dots \quad (6)$$

Ponieważ z liniowego rozkładu naprężeń wynika, że

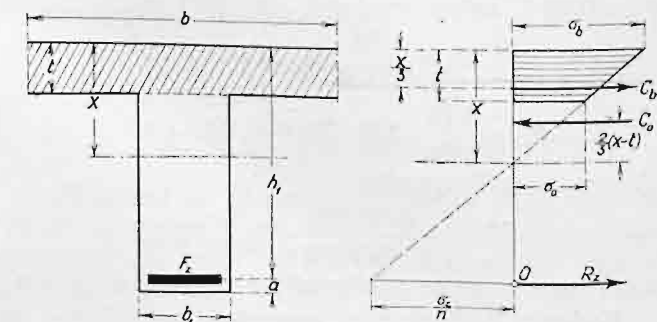
$$\xi = \frac{n}{n + z} \dots \quad (7)$$

przyczem

$$z = \frac{\sigma_z}{\sigma_b} \dots \quad (8)$$

zaś n jest stosunkiem współczynników sprężystości żelaza i betonu, zatem po wstawieniu tych związków do równ. (6) otrzymamy

$$\omega = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} - \frac{3 - 2\delta}{6} \cdot \frac{n + z}{n} \dots \quad (9)$$



Rys. 1.

¹⁾ Por. autora „Projektowanie belek żelbetowych zginanych z uwzględnieniem najmniejszych kosztów i ciężaru własnego”, Czasopismo Techniczne, Lwów 1925.

²⁾ Por. autora „Racjonalne projektowanie przekrojów żelbetowych”, Cement, Warszawa 1932.

Spółczynnik ω_i , przedstawiający jednostkowy moment oporu płyty żebrowej naprężeń betonu, w równ. (9) jest liniową funkcją dla zmiennej z , przy różnych parametrach δ , a zatem w wykresie o osiach współrzędnych ω_i i z wyznaczyć można pęk prostych, odpowiadających różnym wartościom δ .

Równ. (9) jest ważne, gdy zachowany jest warunek

$$\xi > \delta$$

przeto wspomniane proste ograniczone są prostą o równaniu

$$w_i = \frac{1}{2} \frac{n+z}{n} - \frac{1}{6} \quad (10)$$

Z ogólnie znanego wzoru na położenie osi obojętnej

$$x = \frac{n F_z h_1 + \frac{b t^2}{2}}{n h_1 + b t} \quad (11)$$

po wprowadzeniu oznaczeń z wzorów (4) i procentu wzmocnienia

$$\varphi = \frac{100 F_z}{b h_1} \quad (12)$$

wynika

$$\xi = \frac{\frac{n}{100} \varphi + \frac{\delta^2}{2}}{\frac{n}{100} \varphi + \delta} \quad (13)$$

Przyjmując $n = 15$ oraz różne wartości φ , obliczono ξ dla poszczególnych wielkości δ , a otrzymane w ten sposób w wspomnianym wykresie na prostych δ punkty połączono liniami krzywymi, które odpowiadają procentom wzmocnienia φ .

W dalszym ciągu wprowadzimy pojęcie jednostkowego momentu oporu płyty żelbetowej dla naprężeń żelaza, mianowicie

$$\omega_z = \frac{M}{b t^2 \sigma_z} \quad (14)$$

Miedzy współczynnikami ω_z i ω_i zachodzi związek

$$\omega_i = z \omega_z \quad (15)$$

gdyż

$$\omega_z = \frac{M}{b t^2 \sigma_b} \cdot \frac{\sigma_b}{\sigma_z} = \frac{\omega_i}{z} \quad (16)$$

Na podstawie równ. (15) wykreślimy w przyjętym układzie współrzędnych pęk prostych, oznaczonych wartościami ω_z , które pozwolą nam na bardziej wszechstronne zastosowanie praktyczne wykresu. Wreszcie dla całokształtu zagadnienia wyznaczmy wzory na ramię momentu wewnętrznego z . Mianowicie, jak wiadomo,

$$z = \frac{M}{F_z \sigma_z} \quad (17)$$

więc podstawiając odnośne wartości z równ. (14) i (12), oraz wprowadzając oznaczenie

$$\zeta = \frac{z}{h_1} \quad (18)$$

otrzymujemy

$$\zeta = 100 \frac{\omega_z}{\varphi} \delta^2 \quad (19)$$

Przy użyciu współczynnika ω_i zamiast ω_z , będzie

$$\zeta = 100 \frac{\omega_i}{\varphi} \delta^2 \quad (20)$$

W wyniku opisanych rozważań teoretycznych otrzymaliśmy wykres o współrzędnych prostokątnych, z osią poziomą współczynnika z , będących stosunkiem naprężeń σ_i i σ_b i z osią pionową współczynnika ω_i , przedstawiających jednostkowe momenty oporu płyty żebrowej dla naprężeń betonu. U dołu wykresu znajdujemy też poziomą podziałkę wartości ξ , podających położenie osi obojętnej w zależności od stosunku z . Na opisanej siatce prostokątnej znajdują się proste współczynnika δ , zależnych od grubości płyty w stosunku do wysokości przekroju, krzywe φ odpowiadające odnośnym procentom wzmocnienia żelazem i wreszcie proste ω_z dla jednostkowych momentów oporu płyty dla naprężeń żelaza. Tak sporządzony wykres daje możliwość rozwiązania wszystkich zadań praktycznych z dziedziny projektowania i sprawdzania przekroju żebrowego, a mianowicie:

Zadanie 1. Dany jest moment zginający M , wymiary płyty b i t , oraz naprężenia dopuszczalne materiałów σ_z i σ_b , szukamy zaś wysokości użytkowej h_1 i przekroju żelaza F_z , dla których moment M wywołuje równoczesne naprężenia dopuszczalne, czyli szukamy najmniejszej wysokości przekroju jednostronnie wzmocnionego. W tym celu obliczamy wartości pomocnicze z wedle wzoru (8) i ω_i wedle wzoru (4), odnajdujemy odnośny punkt w wykresie, z którego odczytuje się współczynniki φ i δ . Wówczas będzie

$$h_1 = \frac{t}{\delta} \quad F_z = \frac{\varphi}{100} b h_1 = \frac{\varphi}{100} \cdot \frac{t b}{\delta}$$

Zamiast wartości ω_i , można się posłużyć analogicznie współczynnikiem ω_z , przyczem oczywiście wynik musi być ten sam.

Cyfrowo zadanie powyższe przedstawia się przykładowo w następujący sposób.

Przykład 1. Dane $M = 50,0$ tm, $b = 120$ cm, $t = 14$ cm, $\sigma_z = 1200$ kg/cm², $\sigma_b = 60$ kg/cm². Obliczamy

$$z = \frac{1200}{60} = 20,0 \quad \omega_i = \frac{5\,000\,000}{120 \cdot 14^2 \cdot 60} = 3,543$$

Dla tych wielkości z wykresu czytamy $\delta = 0,198$ $\varphi = 0,76\%$ zatem szukane wartości są:

$$h_1 = \frac{14}{0,198} = 70,7 \text{ cm}$$

$$F_z = \frac{0,76}{100} \cdot 120 \cdot 70,7 = 64,5 \text{ cm}^2$$

Używając współczynnika

$$\omega_z = \frac{5000\,000}{120 \cdot 14^2 \cdot 1200} = 0,1772$$

odczytamy te same wielkości δ i φ .

Zadanie 2. Szukamy naprężeń materiałów w danym przekroju, wywołanych pewnym momentem zginającym M , względnie szukamy momentów dopuszczalnych, gdy dane są naprężenia. Celem rozwiązania zadania obliczamy wartości pomocnicze z i φ wedle wzoru (4) i (12), poczem z punktu przecięcia odnośnej prostej δ i krzywej φ , od-

czytamy wielkości α i ω_t względnie ω_s . Wówczas otrzymamy naprężenia

$$\sigma_b = \frac{M}{b t^2 \omega_t} \quad \sigma_s = \alpha \sigma_b$$

lub też momenty dopuszczalne

$$M_b^d = \omega_t b t^2 \sigma_b \quad M_s^d = \omega_s b t^2 \sigma_s$$

Przykład 2. Dane: $M = 18,10 \text{ tm}$, $b = 150 \text{ cm}$, $t = 10 \text{ cm}$, $h_1 = 45 \text{ cm}$, $F_s = 10 \text{ } \varnothing \text{ } 20 \text{ mm} = 31,42 \text{ cm}^2$. Obliczamy

$$\delta = \frac{10}{45} = 0,222 \quad \varphi = \frac{100 \cdot 31,42}{150 \cdot 45} = 0,466\%$$

poczem z wykresu odczytujemy z odnośnego punktu przecięcia

$$\alpha = 27,3 \quad \omega_t = 2,78 \quad \omega_s = 0,102$$

a zatem będzie

$$\sigma_b = \frac{18 \cdot 10 \cdot 1000}{150 \cdot 10^2 \cdot 2,78} = 43,4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s = 43,4 \cdot 27,3 = 1184 \text{ kg/cm}^2$$

Dla naprężeń $\sigma_b = 50 \text{ kg/cm}^2$ i $\sigma_s = 1200 \text{ kg/cm}^2$ momenty dopuszczalne wynoszą

$$M_b^d = 2,78 \cdot 150 \cdot 10^2 \cdot 50 = 2 \, 085 \, 000 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_s^d = 0,102 \cdot 150 \cdot 10^2 \cdot 1200 = 1 \, 836 \, 000 \text{ kg/cm}^2$$

Zadanie 3. Często jest bardzo zagadnienie wyznaczenia przekroju żelaza i sprawdzenia naprężeń betonu, gdy znane są wymiary przekroju betonowego i moment zginający. Zgadza się to z zadaniem wyznaczenia dla przekroju betonowego momentu idealnego M_i , który przy odpowiednim wzmocnieniu żelazem wywołuje naprężenia dopuszczalne. Najpierw obliczamy wielkości δ i ω_s wedle wzorów (4) i (14), poczem z przecięcia się odnośnych prostych w wykresie odczytujemy współczynniki φ i α , przy pomocy których będzie

$$F_s = \frac{\varphi}{100} b h_1 \quad \sigma_b = \frac{\delta_s}{\alpha}$$

W wypadku szukania momentu idealnego, obliczymy δ i α , zaś odczytamy ω_t lub ω_s .

Przykład 3. Dane są: $b = 90 \text{ cm}$, $t = 8 \text{ cm}$, $h_1 = 25 \text{ cm}$, $M = 4,15 \text{ tm}$, $\delta_s = 1200 \text{ kg/cm}^2$. Obliczamy

$$\delta = \frac{8}{25} = 0,320 \quad \omega_s = \frac{415 \, 000}{90 \cdot 8^2 \cdot 1200} = 0,06$$

Ponieważ powyższym cyfrom odpowiada w wykresie

$$\varphi = 0,70\% \quad \alpha = 26,0$$

zatem szukane wartości będą

$$F_s = \frac{0,7}{100} \cdot 90 \cdot 25 = 15,74 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_b = \frac{1200}{26,0} = 46,2 \text{ kg/cm}^2$$

Przykład 4. Szukamy momentu idealnego dla przekroju $b = 75 \text{ cm}$, $t = 6 \text{ cm}$, $h_1 = 30 \text{ cm}$ i dla naprężeń $\sigma_s = 1200 \text{ kg/cm}^2$ i $\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2$. Dla tych danych wynosi

$$\delta = \frac{6}{30} = 0,200 \quad \alpha = \frac{1200}{40} = 30,0$$

zatem z wykresu otrzymamy $\omega_t = 3,20$ względnie $\omega_s = 0,107$, z czego wynika $M_i = 3,20 \cdot 75 \cdot 6^2 = 345 \, 300 \text{ kgcm}$

Zadanie 4. Odnosi się ono do sposobu oblicze-

nia naprężeń ścinających dla danego przekroju i siły poprzecznej Q . Wyznaczamy je jak wiadomo z wzoru

$$\tau = \frac{Q}{b_1 \alpha} \quad (21)$$

zaś wielkość α znajdujemy z wzoru (19) lub (20), przyczem potrzebne współczynniki odczytamy z wykresu.

Przykład 5. Dane: $b = 120 \text{ cm}$, $b_1 = 35 \text{ cm}$, $t = 16 \text{ cm}$, $h_1 = 90 \text{ cm}$, $F_s = 10 \text{ } \varnothing \text{ } 25 \text{ mm} = 49,09 \text{ cm}^2$, $Q = 20 \, 000 \text{ kg}$.

Na podstawie wartości

$$\delta = \frac{16}{90} = 0,178 \quad \varphi = \frac{100 \cdot 49,09}{120 \cdot 90} = 0,455\%$$

wyznaczamy z wykresu $\omega_s = 0,131$, zatem wedle (19)

$$\zeta = 100 \frac{0,131}{0,455} \cdot 0,178^2 = 0,911$$

Wobec tego naprężenie ścinające wynosi

$$\tau = \frac{20 \, 000}{35 \cdot 0,911 \cdot 90} = 6,97 \text{ kg/cm}^2$$

Jak już na wstępie wspomniano, metoda projektowania, nie uwzględniająca nieznanego ciężaru własnego belki, nie może posiadać pełnej wartości praktycznej, w zrozumieniu czego autor opracował pewne dodatkowe wzory, usuwające omawiany brak.

Największy moment zginający w belce składa się z momentu M' , wywołanego ciężarami ruchomymi (użytkowymi) i ciężarem stałym³⁾ i z momentu M_g , pochodzącego z nieznanego ciężaru żebra. Moment ten wynosi

$$M_g = \alpha l^2 \gamma b_1 h_1 \quad (22)$$

gdzie α jest współczynnikiem ustrojowym belki (np. dla belki wolnopodpartej $\alpha = 1/8$), l jest rozpiętością teoretyczną przęsła belki, γ ciężarem właściwym żelbetu, b_1 szerokością żebra, zaś h_1 szukaną wysokością użyteczną przekroju. Wobec tego całkowity — miarodajny dla projektowania — moment zginający wynosi

$$M = M' + \alpha l^2 \gamma b_1 h_1 \quad (23)$$

zaś odnośny moment oporu będzie

$$\omega_t = \frac{M'}{b t^2 \sigma_b} + \frac{\alpha l^2 \gamma b_1 h_1}{b t^2 \sigma_b} \quad (24)$$

Po przeprowadzeniu operacji arytmetycznych możemy napisać

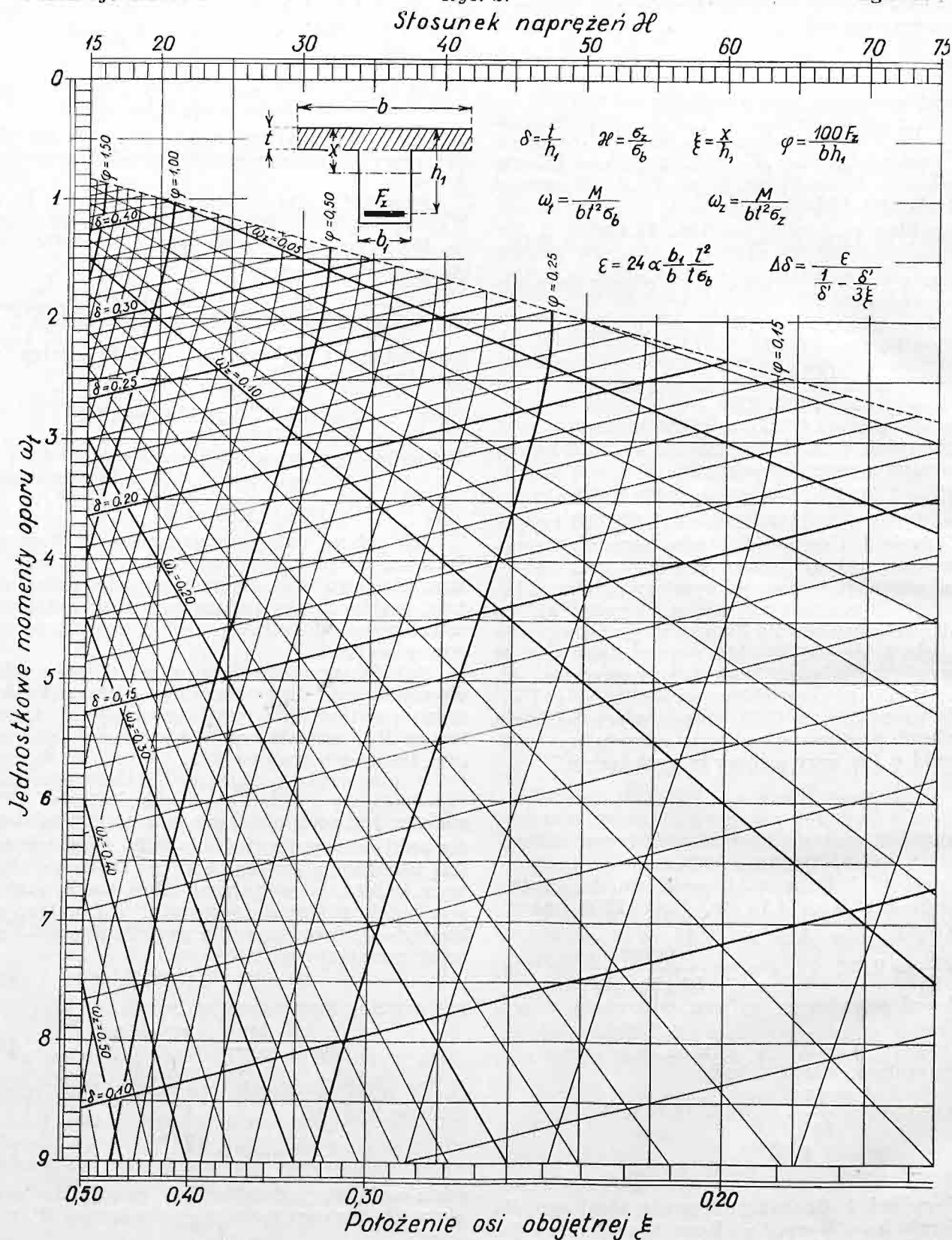
$$\omega_t = \omega_t' + \frac{\varepsilon}{\delta} \quad (25)$$

gdzie ω_t' jest jednostkowym momentem oporu płyty dla znanego momentu zginającego M' , natomiast

$$\varepsilon = \frac{\alpha l^2 \gamma b_1}{b t \sigma_b} \quad (26)$$

jest współczynnikiem bezwymiarowym, charaktery-

³⁾ Nadmieniamy, że do ciężaru stałego należy wliczyć warstwę betonu w żebrze, leżącą poniżej osi wkładek ciągniętych, natomiast nie należy w nim uwzględniać grubości płyty na szerokości żebra.



zującym wpływ ciężaru własnego. Spółczynnik ten równa się jednostkowemu momentowi oporu płyty dla momentu zginającego, wywołanego ciężarem własnym płyty o szerokości żebra. Stosując we wzorze (26) wszystkie wymiary w cm i kg, zaś rozpiętość l w metrach i przyjmując $\gamma = 2400$ kg/m³, można napisać też

$$\varepsilon = 24 \alpha \frac{b_1}{b} \frac{l^2}{t \sigma_b} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Ponieważ współczynnik δ nie jest znany, wprowadzamy związek

$$\delta = \delta' - \Delta \delta \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

gdzie δ' jest wartością znaną przy użyciu mo-

mentu M' z wykresu wyżej omówionego, natomiast $\Delta\delta$ jest szukaną poprawką, o którą należy zmniejszyć wartość δ' , aby otrzymać współczynnik δ , uwzględniający już ciężar własny żebra.

Wobec tego z równ. (28) i (25) wynika

$$\omega_t - \omega'_t = \frac{\varepsilon}{\delta' - \Delta\delta} \quad . \quad . \quad (29)$$

natomiast według równ. (6) można napisać równ. (30)

$$\omega_t - \omega'_t = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} - \frac{3 - 2\delta}{6\xi} - \frac{1}{\delta'} + \frac{1}{2} + \frac{3 - 2\delta'}{6\xi}$$

poczem po wprowadzeniu równ. (28) otrzymamy

$$\omega_t - \omega'_t = \Delta\delta \left[\frac{1}{\delta'(\delta' - \Delta\delta)} - \frac{1}{3\xi} \right] \quad (31)$$

Porównanie równ. (29) i (31) po przekształceniach daje związek

$$\varepsilon = \frac{\Delta\delta}{\delta'} - \frac{\Delta\delta \cdot \delta'}{3\xi} + \frac{(\Delta\delta)^2}{3\xi} \quad . \quad (32)$$

Ponieważ $(\Delta\delta)^2$, jako wartość bardzo małą, można pominąć bez uszczerbku dla praktycznie potrzebnej dokładności, otrzymamy wkońcu wzór na szukaną poprawkę

$$\Delta\delta = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{\delta'} - \frac{\delta'}{3\xi}} \quad . \quad . \quad (33)$$

Obliczywszy tym wzorem $\Delta\delta$, a następnie δ z równ. (28) znajdziemy wysokość h_1 z równ. (4).

Ciężar własny żebra można też uwzględnić w odmienny sposób, a mianowicie obliczając poprawkę Δh_1 , jaką trzeba dodać do wysokości h_1' , odpowiadającej momentowi zginającemu M' . Ponieważ

$$\Delta h_1 = h_1 - h_1' = \frac{t}{\delta} - \frac{t}{\delta'} \quad . \quad (34)$$

zatem po wprowadzeniu równ. (28) i wzoru (33), dojdziemy po operacjach arytmetycznych do wzoru

$$\Delta h_1 = h_1' \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon - \frac{\delta'^2}{3\xi}} \quad . \quad . \quad (35)$$

Jaki jest przebieg projektowania przy użyciu wyprowadzonych wzorów, przedstawimy na przykładzie cyfrowym.

Przykład 6. Szukamy najmniejszej wysokości konstrukcyjnej mostu drogowego, I klasy, przy rozpiętości teoretycznej $l = 16,00$ m i naprężeniach dopuszczalnych $\sigma_b = 60$ kg/cm², $\sigma_s = 1200$ kg/cm². Belki główne są wolnopodparte, w odstępach osiowych $b = 180$ cm, płyta ma grubość 14 cm, zaś obciążenie stałe z jezdni wynosi 0,180 t/m². Przyjmując szerokość żebra $b_1 = 40$ cm i grubość warstwy ochronnej 8 cm, otrzymamy obciążenie stałe belki

z jezdni $1,80 \cdot 0,180$	0,324 t/m
z płyty $(1,80 - 0,40) \cdot 2,40 \cdot 0,14$	0,470 "
z warstwy ochronnej $0,40 \cdot 0,08 \cdot 2,40$	0,077 "
	0,871 t/m

zatem moment zginający będzie

$$M_s = \frac{1}{8} \cdot 0,871 \cdot 16,00^2 = 27,86 \text{ tm}$$

Moment z ciężarów ruchomych z uwzględnieniem

współczynnika dynamicznego i szerokości 1,80 m wynosi

$$M_p = 1,5 \cdot 85,1 \frac{1,80}{2,50} = 91,91 \text{ tm}$$

więc

$$M' = 27,86 + 91,91 = 119,77 \text{ tm}$$

Obliczywszy

$$\alpha = \frac{1200}{60} = 20,0 \quad \omega_t' = \frac{11\,977\,000}{180 \cdot 14^2 \cdot 60} = 5,67$$

$$\varepsilon = 24 \cdot 0,125 \frac{40}{180} \cdot \frac{16,0^2}{14,60} = 0,2032$$

odczytamy z wykresu $\delta' = 0,138$ i $\xi = 0,428$

wobec czego wedle wzoru (33) będzie

$$\Delta\delta = \frac{0,2032}{\frac{1}{0,138} - \frac{0,138}{3 \cdot 0,428}} = 0,0284$$

$$\text{zaś } \delta = 0,138 - 0,028 = 0,110$$

stad

$$h_1 = \frac{14,0}{0,110} = 127,3 \text{ cm}$$

Dla $\delta = 0,110$ i $\alpha = 20,0$ odczytamy z wykresu $\varphi = 0,48\%$ więc

$$F_s = \frac{0,48}{100} \cdot 180 \cdot 127,3 = 110,3 \text{ cm}^2$$

Przyjęto $F_s = 10 \text{ } \emptyset \text{ } 38 \text{ mm} = 113,41 \text{ cm}^2$. Przy ułożeniu wzmocnienia tego w 2 rzędach teoretycznie wobec czego według wzoru (33) będzie

$$a = \frac{3,8}{2} + 3,8 + 1,0 + 2,0 = 8,7 \text{ cm}$$

w wyniku czego całkowita wysokość belki wyniesie

$$h = 127,3 + 8,7 = 136,0 \text{ cm}$$

Uwzględniony ciężar własny żebra przedstawia obciążenie

$$g = 2,40 \cdot 0,40 (1,36 - 0,08) = 1,229 \text{ t/m}$$

zaś odnośny moment zginający

$$M_g = \frac{1}{8} \cdot 1,229 \cdot 16,00^2 = 39,32 \text{ tm}$$

stad $M_{mx} = 119,77 + 39,32 = 159,09 \text{ tm}$

Sprawdzając naprężenie, otrzymujemy

$$\delta = \frac{14}{127,3} = 0,110 \quad \varphi = \frac{100 \cdot 113,41}{180 \cdot 127,3} = 0,495 \%$$

$$\omega_t = 7,53 \quad \alpha = 19,4$$

$$\sigma_b = \frac{15\,909\,000}{150 \cdot 14^2 \cdot 7,53} = 59,4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s = 59,9 \cdot 19,4 = 1162 \text{ kg/cm}^2$$

a zatem w granicach odchylen, wynikających z samej konstrukcji, zgodnie z założeniem.

Stosując wzór (35), po odczytaniu z wykresu δ' i ξ należałoby liczyć następująco:

$$h_1' = \frac{14,0}{0,138} = 101,4 \text{ cm}$$

$$\Delta h_1 = 101,4 \frac{0,2032}{1 - 0,2032 - \frac{0,138^2}{3 \cdot 0,428}} = 26,3 \text{ cm}$$

$$h_1 = 101,4 + 26,3 = 127,7 \text{ cm}$$

Równocześnie potwierdza się, że wpływ ciężaru własnego w tym wypadku jest bardzo poważny, gdyż powoduje zwiększenie potrzebnej wysokości

$$\text{o } 100 \cdot \frac{26,3}{101,4} = 26,0\%.$$

Jak z wyprowadzonych wzorów łatwo można zauważyć, wpływ grubości płyt na wysokość żebra jest bardzo poważny i to w sensie zmniejszania się wysokości żebra przy pogrubianiu płyty. Wpływ ten jest tak znaczny, że, dobierając odpowiednio grubości płyt, można nośność belki powiększyć więcej jak 2-krotnie, przy tej samej wysokości konstrukcyjnej. Stan ten ilustruje dobrze następujący przykład cyfrowy.

Przykład 7. Dla stropu o rozpiętości teoretycz-

nej belek $l = 8,00$ m i obciążenia użytkowego $p = 500$ kg/m², oraz stałego $s = 86$ kg/m², przy naprężeniach dopuszczalnych $\sigma_b = 40$ kg/cm², $\sigma_s = 1200$ kg/cm², obliczamy odstępów żeber a_0 , odpowiadające grubościom płyty od 8 do 16 cm, uwzględniając przytem ciężar własny płyty. Stosownie do przepisów ustalamy szerokość spóldziałającą płyty żebrowej i wedle opisaney metody wyznaczamy potrzebne minimalne wysokości użyteczne żebra. Wyniki zestawiano tabelarycznie:

Najmniejszą wysokość konstrukcyjną stropu osiągamy zatem w danym przykładzie przy grubości płyty 13 cm, odstępów żeber 3,19 m i przy sto-

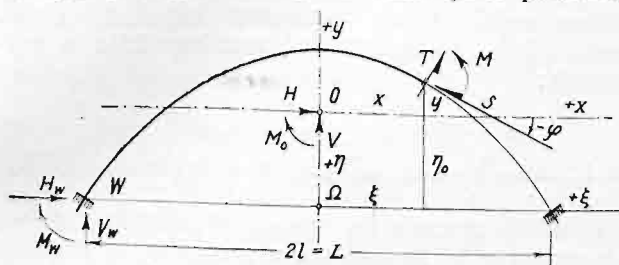
$$\text{sunku } \frac{h_1}{l} = \frac{1}{15,2}.$$

$t =$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	cm
$a_0 =$	1,94	2,20	2,46	2,71	2,95	3,19	3,44	3,68	3,90	m
$q' =$	1,440	1,684	1,943	2,205	2,473	2,750	3,047	3,347	3,640	t/mb
$M' =$	11,52	13,49	15,55	17,65	19,78	22,00	24,38	26,80	29,15	tm
$b_1 =$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	cm
$b =$	106	117	128	139	150	161	172	183	194	cm
$\omega_1' =$	4,25	3,56	3,04	2,62	2,29	2,02	1,81	1,63	1,47	
$\gamma' =$	0,164	0,187	0,207	0,228	0,248	0,267	0,284	0,300	0,317	
$h_1' =$	48,7	48,2	48,3	48,3	48,4	48,7	49,3	50,0	50,5	cm
$\varepsilon =$	0,1472	0,1232	0,1050	0,0911	0,0800	0,0711	0,0638	0,0578	0,0527	
$\Delta \delta =$	0,025	0,024	0,023	0,022	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	
$\delta =$	0,139	0,163	0,184	0,206	0,227	0,247	0,264	0,281	0,298	
$h_1 =$	57,6	55,2	54,4	53,4	52,9	52,6	53,0	53,4	53,7	cm
$\Delta h_1 =$	8,9	7,0	6,1	4,9	4,5	3,9	3,7	3,4	3,2	cm
$100 \frac{\Delta h_1}{h_1'}$	18,3	14,5	12,6	10,2	9,3	8,0	7,5	6,8	6,3	%

NOWA METODA OBLICZENIA I WYKONANIA ŁUKU BETONOWEGO I ŻELBETOWEGO

Inż. dr. Włodzimierz Burzyński, profesor Politechniki Lwowskiej

Przeprowadzone w dalszej części referatu rozważania zyskają na znaczeniu, jeśli wpierw krótko przypomnimy dotychczasowe nasze wiadomości z tej dziedziny. Z braku miejsca pod uwagę weźmiemy jedynie symetryczny łuk obu końcami utwierdzony i rozpatrzmy z ogólnie stosowaną dokładnością wpływy zewnętrzne, działające w płaszczyźnie łuku. Poza oznaczeniami podanymi na rys. 1. wprowadźmy A jako pole przekroju,



Rys. 1.

I jako jego moment bezwładności i s jako spólrzędna, mierzona wzdłuż łuku; rzuty obciążeń położonych na lewo od punktu (x, y) na styczną i normalną w tym punkcie wynoszą S_* i T_* , ich moment zaś względem tegoż punktu wynosi M_* . Niewiadome wielkości podporowe:

$M_w = M_o - V \cdot l + H \cdot \eta_o$, $V_w = V$, $H_w = H$ (1)
węzłowi W redukujemy w postaci M_o , V , H do punktu 0 , określonego spólrzędna:

$$\eta_o = \frac{\int \eta \frac{ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}} \quad (2)$$

Rozwiązanie, wyrażające się znanymi wzorami:

$$M_o = \frac{\int M_* \frac{ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}}, \quad V = \frac{\int M_* \frac{x ds}{J}}{\int \frac{x^2 ds}{J}},$$

$$H = \frac{-\int M_* \frac{y ds}{J} + L E \alpha t}{(1 + \psi) \int \frac{y^2 ds}{J}} \quad (3)$$

ze skrótem:
$$\psi = \frac{\int \cos^2 \varphi \frac{ds}{A}}{\int \frac{y^2 ds}{J}} \quad (4)$$

pozwała obliczyć siłę podłużną i poprzeczną, jak

również moment zginający w dolnym miejscu z formuł:

$$S = V \sin \varphi + H \cos \varphi - S_*, \quad T = -V \cos \varphi + H \sin \varphi - T_*, \quad M = M_o + Vx - Hy - M_* \quad (5)$$

a tem samem załatwia w zupełności sprawę stanu napięcia. Różnice między betonem a żelbetem mieszczą się w wielkości I lub w stałej sprężystości E ; skurcz betonu uwzględniamy, wstawiając jego wartość zamiast czynnika αt , gdzie α jest spólczynikiem rozszerzalności termicznej, a t zmianą temperatury.

Projektując łuk mostowy, stara się konstruktor nadać osi jego taki kształt, aby dwa skrajne ugrupowania wpływów zmiennych i stałych wyrażały się w dowolnie obranym przekroju temi samemi co do bezwzględnej wartości rezultatami wewnętrznemi S , T , M . Wysiłki dotychczasowe w tym kierunku nie doprowadziły do zamierzonego celu Wprowadzie bowiem potrafimy dokładnie wyrównać wyniki działania w dwóch niekorzystnych ustawieniach ciężarów ruchomych, wprowadzając do ciężaru własnego q_o t. zw. obciążenie zastępcze q^*), wprowadzie dalej możemy też wyrównać bezwzględne wartości rezultatów działania zmian temperatury, dorzucając do wielkości skurczu betonu średnią z algebraicznych wartości αt , wprowadzie wreszcie możemy przy pomocy znanego równania różniczkowego:

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q^*}{H^*} \quad (6)$$

zaprojektować względnie dobrze oś łuku, stosując w temże równaniu zamiast ciężaru własnego q_o t. zw. obciążenia zasadnicze:

$$q^* = q_o + q \quad (7)$$

ale mimo tego pozostają do rozpatrzenia wpływy stałe, a więc jednostronne, dla których niestety nie mamy odpowiednika odmiennego znaku.

Przyjawszy, jedynie dla oszczędności miejsca, że bezwzględne wartości zmian temperatury są równe, jako owe wpływy podać możemy skurcz betonu i skrócenie sprężyste pod działaniem ciężaru zasadniczego q^* przed chwilą zaprojektowanej osi łuku. Nie trzeba mianowicie zapominać, że równanie (6) względnie jego zbudowana na wzór (5) całka:

$$M_o^* + V^* - H^* y - M_* = 0 \quad (8)$$

są ważne jedynie dla układu sztywnego; wstawiając zaś obliczone z równania (8) M_o^* w wzory (3) znajdziemy, że dla obciążenia q^* wielkości podpo-

¹⁾ Ściśle rzecz biorąc, ma ono, nawet w wypadku pionowych ciężarów ruchomych, nie tylko składową pionową q , ale i poziomą p .

rowe układu odkształcalnego w rzeczywistości wynoszą:

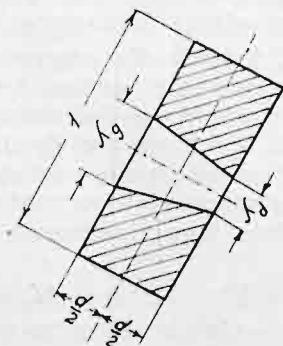
$$M_o = M_o^*, V = V^*, H = \frac{H^*}{1 + \psi} \quad (9)$$

Tem samym zaś, wobec $\psi = 0$, okazuje się, że rezultat (8), wyrażający nieobecność momentów zginających i siły poprzecznej przy obciążeniu zasadniczym w zaprojektowanym łuku, upada przy uwzględnieniu skrócenia osi; linia ciśnienia nie pokrywa się z osią łuku z powodu różnicy między H i H^* .

Wyszczególnione ostatnio dwa wpływy powodują nierównomierność pracy łuku, wymagają niesymetrycznego wzmocnienia wkładkami, powiększają trudności rachunkowe, konstrukcyjne i wykonawcze, prowadzą do nadmiernego zwiększenia wymiarów, a co za tem idzie i kosztów obiektu i w rezultacie często w wyniku końcowym dają łuk nieestetycznie działający na oko. Znanie też są usiłowania poprawienia stosunków. Z środków dotychczas stosowanych wymienić można kilka; betonowanie oddzielnymi odcinkami zmniejszyć ma działanie skurczu; korzystny dobór przekroju, np. teowego, ma za cel dostosowanie się do istniejącej asymetrii; wreszcie są i tacy, którzy utrzymują, że przez zmianę kształtu osi można dojść do zupełnej symetrii wyników; można podać bardzo proste argumenty na to, że zapewnienia te są naiwne, w każdym zaś razie jest pewne, że wyznający tę zasadę tego rodzaju osi nie ujawnili.

Udało mi się dzięki przypadkowi ustalić nowy pogląd na omawianą sprawę; w metodzie, jaką przedstawię, uzyskuje się zupełne wyrównanie działań obu skrajnych ugrupowań wpływów. Z dotychczasowego wynika, że wystarczy w tym celu wykazać, iż łącznie wzięte działania skurczu betonu i skrócenia sprężystego osi pod ciężarem zasadniczym zredukują się w odpowiednio przygotowanych warunkach do zera.

Załóżmy, że łuk betonujemy odcinkami podzielonymi między sobą klinami narazie niezabetonowanymi; dla uproszczenia przyjmijmy (dokładniejsze potraktowanie sprawy nie nastrocza zresztą żadnych trudności), że rozmieszczenie klinów jest ciągle tak, że rachunek odnieść możemy do



Rys. 2.

jednostki długości łuku. Przypadający na tę długość klin ma wymiary λ_g i λ_o , jak na rys. 2. Wystarczy poza tem wobec zapowiedzianego wyrówna-

nia działań wziąć pod uwagę wypadek, w którym oś łuku połowi jego grubość d .

Po zabetonowaniu klina λ oczekujemy dlań pełnego skurczu δ'' , zaś dla wcześniej zabetonowanej części tylko skurczu $\delta' < \delta''$, bowiem między betonowaniem odcinka i klina upłynął pewien stosownie obrany czas. Pomijając — jak dotychczas — krzywiznę osi, możemy określić oczekiwane skrócenia górne i dolne całego elementu wzorami:

$$\delta_g = (1 - \lambda_g) \delta' + \lambda_g \delta'', \delta_d = (1 - \lambda_d) \delta' + \lambda_d \delta'' \quad (10)$$

z których w dalszym ciągu wyrażamy skrócenie osiowe δ i obrót względny β przekrojów końcowych w postaci:

$$\delta = \frac{\delta_g + \delta_d}{2} = \delta' + \frac{\lambda_o + \lambda_d}{2} (\delta'' - \delta'),$$

$$\beta = \frac{\delta_g - \delta_d}{d} = \frac{\lambda_g - \lambda_d}{d} (\delta'' - \delta') \quad (11)$$

Naodwrot, jeżeli zechcemy uzyskać celowo obrane δ i β , to zastosować musimy klin o wymiarach:

$$\lambda_g = \frac{\delta - \delta' + \beta \frac{d}{2}}{\delta'' - \delta'}, \lambda_d = \frac{\delta - \delta' - \beta \frac{d}{2}}{\delta'' - \delta'} \quad (12)$$

Wróćmy obecnie do rys. 1. Wyobraźmy sobie, że węzłowie W jest oswobodzone i że w miejscu ($\xi = x$, $\eta = y + \eta_o$) stosujemy dla elementu ds skrócenie δ i obrót względny β . Widzimy odrazu, że z zachowaniem dotychczasowej dokładności rachunku, przekrój węzłowiowy przesunie się w kierunku osi ξ o wielkość: $\delta \cos \varphi - \beta \eta$, w kierunku osi η o wielkość: $\delta \sin \varphi + \beta (l + \xi)$, nadto obróci się o kąt: βds przy dodatkowym wyjaśnieniu, że dodatni kierunek brakującej na rys. 1 osi ζ skierowany jest przez Ω ku patrzącemu. Jeśli obecnie deformację δ , β zastosujemy dla całego łuku, to przesunięcia przekroju węzłowiowego i jego obrót względny wyniosą:

$$\int (\delta \cos \varphi - \beta \eta) ds, \int [\delta \sin \varphi + \beta (l + \xi)] ds = l \int \beta ds$$

$$\int \beta ds \quad (13)$$

przyczem uproszczenie środkowej całki zestawienia (13) dokonało się dzięki założonej symetrii łuku i dzięki przyjęciu również symetrycznych zmian δ , β .

Jeśli opisaną operację zastosujemy do łuku obu końcami utwierdzonego, a poddanego przytem i innym wpływom zewnętrznym, to wywołamy wielkości podporowe: M_w, V_w, H_w względnie, co na jedno wychodzi: M_o, V, H . Energia sprężystości wyniesie przy stosowanej dokładności:

$$\Psi(M_w, V_w, H_w) = \frac{1}{2} \int \frac{S^2}{EA} ds + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EJ} ds =$$

$$= \Phi(M_o, V, H) \quad (14)$$

i da się przedstawić wobec relacji (5), jako funkcja pierwszej względnie drugiej trójki niewiadomych. Stosując twierdzenie o najmniejszej energii sprężystości, jako funkcji uogólnionych sił, możemy obecnie napisać:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial M_w} + \int \beta ds = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial V_w} + l \int \beta ds = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial H_w} + \int (\delta \cos \varphi - \beta \eta) ds - L \alpha t = 0 \quad (15)$$

Przechodząc z pierwszej trójki niewiadomych na równoznaczną drugą, zwrócić musimy uwagę na zależności (1) i (14) i znane formuły zamienne typu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial M_o} = \frac{\partial \Psi}{\partial M_w} \cdot \frac{\partial M_w}{\partial M_o} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_w} \cdot \frac{\partial V_w}{\partial M_o} +$$

$$+ \frac{\partial \Psi}{\partial H_w} \cdot \frac{\partial H_w}{\partial M_o} \quad (16)$$

Znajdziemy w ten sposób, uwzględniając jeszcze związek:

$$\eta - \eta_o = y \quad (17)$$

równania:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial M_o} + \int \beta ds = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial H} + \int (\delta \cos \varphi - \beta y) ds + L \alpha t = 0 \quad (18)$$

z których łatwo wyznaczmy:

$$M_o = \frac{\int M_* \frac{ds}{J} - E \int \beta ds}{\int \frac{ds}{J}}, \quad V = \frac{\int M_* \frac{x ds}{J}}{\int \frac{x^2 ds}{J}},$$

$$H = \frac{- \int M_* \frac{y ds}{J} + L E \alpha t - E \int (\delta \cos \varphi - \beta y) ds}{(1 + \psi) \int \frac{y^2 ds}{J}} \quad (19)$$

Otrzymane wzory załatwiają między innymi sprawę skurczu, ale z tytułu koncepcji (11) w sposób jeszcze wieloznaczny. Celem stosownego obioru wielkości δ , β wracamy obecnie do sprawy obciążenia zasadniczego q^* i szkodliwego wpływu liczby ψ . Poddajmy łuk o kształcie (6) działaniu jedynie tego obciążenia, t. zn. przyjmijmy M_* z równania (8), i obliczmy przy użyciu wzorów (19) niewiadome podporowe. Znajdziemy zamiast grupy (9) rozwiązanie:

$$M_o = M_o^* - E \frac{\int \beta ds}{\int \frac{ds}{I}}, \quad V = V^*, \quad H = \frac{H^*}{1 + \psi} -$$

$$- \frac{E}{1 + \psi} \cdot \frac{\int (\delta \cos \varphi - \beta y) ds}{\int \frac{y^2 ds}{I}} \quad (20)$$

Zauważyliśmy już, że linia ciśnienia pod obciążeniem q^* pokryje się dokładnie z osią łuku, jeśli będą dla tego obciążenia zachodzić równości:

$$M_o = M_o^*, \quad V = V^*, \quad H = H^* \quad (21)$$

czyli w zestawieniu (21) z (20), jeśli uda się nam spełnić równania:

$$\int \beta ds = 0, \quad H^* \psi + E \frac{\int (\delta \cos \eta - \beta y) ds}{\int \frac{y^2 ds}{J}} = 0 \quad (22)$$

Przyjmijmy, za chwilę to udowodnimy, że tak jest, to widzimy, że skurczem betonu pobiliśmy skrócenie sprężyste osi łuku dla obciążenia q^* tak, że oba te wpływy wyrażą się jedynie siłą podłużną $S = S^*$, jak dla łuku sztywnego. Działanie zmiany temperatury (wobec uczynionego założenia skracającego referat) wyrównują się; wreszcie, jeśli do rezultatów działania ciężarów ruchomych dołączymy wyniki stałego obciążenia: — q , kompensując w ten sposób fikcję zawartą w (7), otrzymamy i tu wyrównanie bezwzględnych wartości rezultatów tych działań. Badania wymienionych ostatnio wpływów dokonamy przy użyciu wzorów (19), które wobec związków (22) przyjmą obecnie uproszczoną ostateczną postać:

$$M_o = \frac{\int M_* \frac{ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}}, \quad V = \frac{\int M_* \frac{x ds}{J}}{\int \frac{x^2 ds}{J}}, \quad H =$$

$$= \frac{- \int M_* \frac{y ds}{J} + L E \alpha t}{(1 + \psi) \int \frac{y^2 ds}{J}} + \frac{\psi}{1 + \psi} \cdot H^* \quad (23)$$

Wzory te różnią się od dotychczas używanych (3) jedynie dodatkiem pochodzenia H^* ; okazuje się zatem, że obciążenie zasadnicze osi łuku wybija swe wyrażne piętno.

Godny podkreślenia jest fakt, iż dla zgóry danej osi istnieje tylko jedno jedyne obciążenie q^* , którego linia ciśnienia pokrywa się z przyjętą osią. Jeśli dla tejże samej osi zamiast obciążenia q^* wprowadzimy inne nawet podobne np. $c \cdot q^*$ podany efekt znika. Budzi to pewne refleksje na temat t. zw. wyboczenia, na podanie których niema tu miejsca.

Wróćmy obecnie do istotnych dla obliczenia i wykonania łuku równań (22). Widoczne jest, że możemy je spełnić w nieskończenie wiele sposobów. Pożądane jest podać rozwiązanie, któreby zawierało przynajmniej jeden chwilowo nieoznaczony parametr, by móc go potem dostosować do możliwych pewnych dodatkowych wymagań, czy to rachunkowych, czy konstrukcyjno - wykonawczych. Rzut oka na równania (11) i (22) poucza nas, że $\beta = 0$ nie może być rozwiązaniem zadania; z powodu bowiem stale dodatniego δ nie moglibyśmy uczynić zadość drugiemu z warunków (22); przeciwnie wymaga on, by w okolicy klucza było $\beta > 0$, zaś w okolicy wezglowia $\beta < 0$. Najprościej zatem postąpimy, obierając taką funkcję β , która wraz z y zmienia znak. Piękne rozwiązanie daje założenie następujące:

$$\beta = a \cdot A_k \cdot \frac{y}{J}, \quad \delta = \delta_k \cdot \frac{A_k}{A} \cdot \cos \varphi \quad (24)$$

gdzie A_k oznacza pole przekroju kluczowego, zaś δ_k nieustalone tam jeszcze skrócenie. Otóż z tytu-

łu (2) jest $\int \frac{y ds}{J} = 0$, czyli pierwsze z założeń

(24) jest identycznie spełnione, zaś z drugiego otrzymamy po wprowadzeniu skrótu:

$$\varepsilon_k = \frac{H^*}{E A_k} \quad (25)$$

wartość:

$$a = \psi (\varepsilon_k + \delta_k) \quad (26)$$

Rozwiązanie to jest o tyle cenne, że nie wymaga ono żadnych dodatkowych współczynników poza dotychczas znanymi; ten sposób załatwienia sprawy możliwy jest przy łukach o niezbyt wielkiej długości. Przy rozpiętościach większych celowe jest nieco odmienne założenie:

$$\beta = c \cdot A_k \cdot \frac{y}{J}, \quad \delta = \delta_k \quad (27)$$

Tutaj wprowadzić musimy dodatkowy współczynnik:

$$\omega = \frac{L}{A_k \int \frac{y^2 ds}{J}} \quad (28)$$

a rozwiązanie stanowi:

$$c = \psi \varepsilon_k + \omega \delta_k \quad (29)$$

W obu alternatywach doprowadziliśmy do spełnienia równań (22) przyczem wolną rękę pozostawiliśmy sobie odnośnie doboru parametru δ_k . Przy tym wyborze należy pamiętać o tem, że wymiary λ klinów muszą czynić zadość przynajmniej obszerne ograniczeniu $1 > \lambda > 0$ czyli z uwagi na określenie (12) nierówności:

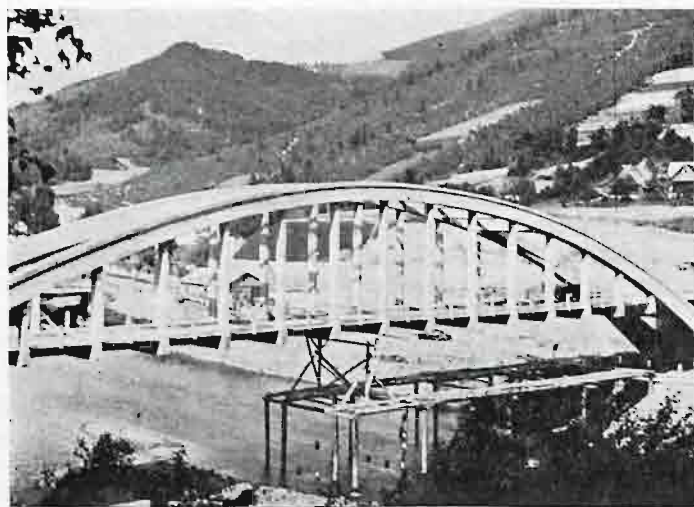
$$\delta'' > \delta \pm \beta \cdot \frac{d}{2} > \delta' \quad (30)$$

Istotny w każdym razie dla przedstawionej metody jest fakt, że równania (22) mogą być spełnione, czyli innymi słowy, że nowe formuły (23) mają egzystencję zapewnioną, a w konsekwencji, że możliwe się obecnie stało idealnie ekonomiczne projektowanie ustroju łukowego.

Podkreślić wypada drobny szczegół tego, czy innego analogicznego rozwiązania; oto kliny w okolicy wezłowia — odmiennie od tradycyjnego wykonania — otrzymają w naszym rozwiązaniu większy wymiar dolny a mniejszy górny. Wystarczy sobie jednak przypomnieć, chociażby w myśl starszej teorii — sposób zbaczania linii ciśnienia od osi łuku, by od razu zrozumieć, że to co się dotychczas działo było niemożliwe do uzasadnienia.

Na zakończenie pozwalam sobie przedstawić fotografię mostu przez Sołę, na przełożonej drodze wojewódzkiej żywiec — Kęty na granicy gmin Czernichowa i Tresny. Most ten wykonano pod moim kierownictwem technicznym i według mego projektu. Szczegółowe sprawozdanie na ten temat ukaże się w jednym z pierwszych zeszytów rocznika 1936 czasopisma „Cement”. Tutaj podamy tylko kilka dat charakterystycznych.

Rozpiętość teoretyczna łuków i światło przepływu wynoszą 76,05 m i 75,00 m; stosunek strzałki do rozpiętości obrano w wielkości 1 : 6; jezdnie



Rys. 3.

Poza tem, szczególnie przy betonie niewzmocnionym, należy uważać, by kąt zawarty, między normalną do ściany klina a styczną do skrajnych linii ciśnienia, nie przekraczał odnośnej wartości kąta tarcia. Żądania te naogół możemy spełnić to znaczy, że stosowny obiór wielkości δ_k jest zawsze możliwy. Nieco gorzej jest z innymi wprowadzonymi nie koniecznymi, ale celowymi zarządzeniami. Tak np. można wymagać, by objętość reprezentowana klinami była dostatecznie mała w porównaniu z kubaturą całego łuku, a nadto, by czas przerwy w betonowaniu był możliwie krótki. Otóż z dyskusji otrzymanych rezultatów można się przekonać, że dwa ostatnie wymagania wzajemnie się wykluczają; z braku miejsca nie będziemy tego dowodzić.

ma szerokość 5,40 m. Most należy do klasy II-ej; naprężenie dopuszczalne w betonie na ściskanie dochodzi do 70 kg/cm². Wymiary przekrojów łuku w kluczu i wezłowiu są bezwątpienia małe, bo wynoszą: 0,80 × 1,10 m² i 1,24 × 1,90 m². Łuki wraz z wiatrownicami zawierają tylko 215 m³ betonu, pomost wraz z wieszakami 170 m³; na łuki wraz ze stężeniami i wieszakami zużyto 67 ton wkładek żelaznych, na pomost zaś 26 tonn. Łuki zaprojektowano i wykonano według przedstawionej tu metody. Całkowity koszt obiektu łącznie z dużymi — z uwagi na niezbyt korzystne warunki fundowania — blokami fundamentowymi wynosi 270 000 zł.

ZAGADNIENIA STATYKI RUROCIĄGÓW ŻELBETOWYCH ORAZ POKREWNYCH KONSTRUKCYJ Z BETONU ZBROJONEGO Z UWZGLĘDNIENIEM ICH RÓŻNOKIERUNKOWOŚCI¹⁾

Inż. Dr. Wacław Olszak, Karwina

Rurociągi oraz zbiorniki żelbetowe w wykonaniu masywnym i żebrowym, obudowę wyrobisk górniczych oraz sztolni zakładów o sile wodnej, sklepienia tunelowe oraz szereg pokrewnych konstrukcji zaliczyć należy do budowli inżynierskich o doniosłym technicznym i gospodarczym znaczeniu. Mimo, iż konstrukcje te w większości wypadków nacechowane są wyraźną różnokierunkowością (anizotropią struktury) materiałów, z których je wykonano, w obliczeniach statycznych traktuje się je dotychczas wyłącznie jako sprężyste ustroje równokierunkowe (izotropowe) i na tej podstawie ustala się również ich wymiary. Skontrolowanie przy pomocy ściślejszego rachunku, czy uproszczenie takie jest wogóle dopuszczalne, a w szczególności zbadanie, w jakich przypadkach uproszczenie powyższe jest jeszcze dopuszczalne, byłoby ze wszech miar pożądane. Praca niniejsza rozpatruje najprostsze przypadki obciążenia wspomnianych konstrukcji i, posługując się metodami teorii sprężystości, stara się w dokładniejszy sposób ująć charakterystyczne dla nich stany napięcia i odkształcenia, wskazując równocześnie praktyczną wartość oraz stosowność uzyskanych w ten sposób wyników. W części przedostatniej ujęto poza to liczbowo wpływy i rezultaty tego rodzaju ściślejszego rachunku.

I. Uwagi ogólne

Jedno z głównych założeń matematycznej teorii sprężystości w zastosowaniu do zagadnień technicznych i inżynierskich stanowi w znakomitej większości przypadków przyjęcie równokierunkowej charakterystyki danego medium; oznacza to, że wszystkie kierunki uważa się jako równowarte pod względem sprężystego zachowania się rozpatrywanego materiału.

Takie wyidealizowanie problemu chroma jednak nieraz z tej prostej przyczyny, że nie jest ono w stanie ująć z dostateczną dokładnością występujących w rzeczywistości stanów odkształcenia i napięcia badanych ciał. W praktyce inżyniersko-konstrukcyjnej wymienić należy w pierwszym rzędzie wszelkie ustroje z betonu zbrojonego (żelbetu) jako te, które w szczególnej mierze odznaczają się wybitną różnokierunkowością. Spowodowana jest ona po części samym sposobem wykonania takich elementów budowlanych (n. p. kierunkiem i sposobem ubijania, wirowaniem i t. p.), przedewsz-

ystkiem jednak różnym stopniem mocy ich uzbrojenia w poszczególnych kierunkach. Nic też dziwnego, że naukowe zainteresowania się inżynierów problemami różnokierunkowości pierwszy swój impuls znalazły nie gdzieindziej, jak właśnie w badaniu sprężystego zachowania się płyt żelbetowych, zbrojonych na krzyż.

Przeoczono snadź jednak niektóre badania z ubiegłego już stulecia (*F. Gehring'a*, *J. Boussinesq'a*) na temat płyt o podobnej („kryształowej”) strukturze, skoro koło roku 1910 pojawiło się kilka prób przybliżonego ujęcia tego zagadnienia. Próby te nie mogły jednak zadowolić ze względu na zaniedbanie oporu płyt na skręcanie.

Dużą satysfakcją dla nas, inżynierów-Polaków, stanowić winien fakt, że pierwsze wogóle naukowe poprawne i ścisłe, a do zagadnień praktycznych dostosowane rozwiązanie problemu płyt prostokątne-różnokierunkowych zawdzięcza świat techniczny prof. dr. inż. *M. T. Huberowi* („Czasopismo Techniczne” 1914). Po wojnie światowej statyka tych płyt spotkała się z szerszym zainteresowaniem badaczy różnych narodowości.

Prócz wspomnianej właśnie prostolinijowej struktury prostokątnej - różnokierunkowej, dla której przyjęło się dobre wyrażenie „ortotropji”, istnieje jednak jeszcze ortotropja krzywolinjowa. Najprostszym jej przypadkiem będzie ortotropja biegunowa, spotykana n. p. w okrągłych płytach żelbetowych, w których uzbrojenie wykonano w dwóch grupach, a mianowicie: a) z prętów radialnych oraz b) z prętów kołowych, ułożonych współśrodkowo.

W pracy niniejszej zajmujemy się „biegunowo ortotropowymi” tarczami, a więc układami, których płaszczyzny środkowe (symetrii) przy obciążeniu siłami zewnętrznymi nie ulegają zakrzywieniom, oraz pokrewnymi im „cylindrycznym ortotropowym” rurami. Obydwie grupy potraktujemy jako „zagadnienia płaskie” teorii sprężystości.

Typowym przedstawicielem pierwszej grupy jest cienki (t. zn. o małym wymiarze głębokościowym) pierścień kołowy, drugiej — grubościenna rura o dowolnej skończonej lub nieskończonej wielkiej długości. Obydwa typy stanowią w repertuarze inżyniera-konstruktora elementy bardzo ważne. W rozdziałach poniższych podamy dla najprostszych ich obciążeń rozwiązania ścisłe.

Zazwyczaj do tego rodzaju grubościennych układów pierścieniowych stosuje się znane wzory *Lamé'go*, gdy uproszczone przyjęcie o równomiernym rozkładzie naprężeń wzdłuż przekrojów przez grubość ścianki nie da się utrzymać w mocy. Za-

¹⁾ Referat niniejszy stanowi streszczenie pracy, zgłoszonej na III-ci Kongres Międzynarodowego Stowarzyszenia Mostów i Konstrukcyj Inżynierskich.

kładamy przytem narazie, że jako zewnętrzne siły występują jedynie wzdłuż obu konturów równomiernie rozłożone naciski radialne. Jednak taki właśnie sposób obciążenia posiada znaczną praktyczną doniosłość.

Oczywiście, wzory *Lamé'go* stosowane być mogą jedynie do materiałów o charakterze równokierunkowym. Obecnie przekonamy się, o ile i w jakim stopniu możemy ich używać również do badania pierścieni żelbetowych oraz rur, wykonanych z betonu zbrojonego, względnie kiedy oprzeć się będziemy musieli o rachunek dokładniejszy, by nie pominąć wpływu na stan ich napięcia, wywodzącego się z ich różnokierunkowości, która znów — ze swej strony — spowodowana jest zbrojeniem, koniecznym ze względu na występujące pod wpływem sił zewnętrznych naprężenia w materiale, a która w szczególnej mierze uwydatni się przy wzroście tych sił zewnętrznych do dużych wartości, naskutek znacznego w takich wypadkach procentu uzbrojenia w kierunku obwodowym.

II. Cienki pierścień kołowy

Pierścień spółśrodkowy należy do częstych elementów konstrukcyjnych inżyniera budowy i stosowany bywa jako wzmocnienie żebrowe rurociągów, zbiorników i t. p., których ścianki wtedy projektować można o wymiarach szczupłych i ekonomicznych. Pokrewny ustrój wykazują również koła zamachowe, które jednak, jako obciążone siłami odśrodkowymi, a więc objętościowymi (masowymi), traktować należy nieco odmiennie.

Naprężenie normalne σ_r , skierowane prostopadle do płaszczyzny środkowej płaskiego pierścienia, możemy w rozważaniach niniejszego rozdziału pominąć, dochodząc w ten sposób do t. zw. dwuwymiarowego stanu napięcia. Wszystkie uzyskane przy takim założeniu wielkości, charakteryzujące stan napięcia oraz stan odkształcenia, będą wtedy coprawda tylko wartościami średnimi, wziętymi poprzez grubość tarczy, będą one jednak tem bardziej zbliżone do rzeczywistości, im grubość (głębokość) tarczy pierścieniowej będzie mniejsza.

Ze względu na całkowitą symetrię osiową zarówno obciążenia jak i ukształtowania geometrycznego rozpatrywanego układu względem jego środka ciężkości, występować będzie jedna tylko zmienna, promień wodzący r tak, że interesujące nas stany napięcia oraz odkształcenia niezależne będą całkowicie od kąta biegunowego φ , gdy początek spółrzędnych biegunowych (r, φ) usytuujemy w centrum tarczy pierścieniowej. Ze względów powyższych pochodne cząstkowe zastąpimy pochodnymi całkowitemi.

Naprężenia normalne σ_r oraz σ_t działające w kierunku promienia wodzącego względnie w kierunku obwodowym, będą naprężeniami głównymi tak, że w przekrojach $r = \text{const.}$ oraz $\varphi = \text{const.}$ naprężenia ścinające τ całkowicie znikają.

Warunek równowagi statycznej elementu tarczy, wykrojonego z niej zapomocą dwóch nieskończenie bliskich cięć radialnych oraz podobnych cięć spółśrodkowo-kolistych, wyraża się prostym równaniem

$$\sigma_t = \frac{d}{dr} \left[r \sigma_r \right] \quad (1)$$

które jest całkowicie niezależne od sprężystych właściwości materiału.

Zależności, zachodzące między składowymi stanem odkształcenia a składowymi stanem napięcia, ująć możemy w postaci

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = + \frac{1}{E_1} \sigma_r - \frac{1}{m_2} \frac{1}{E_2} \sigma_t \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r} = - \frac{1}{m_1} \frac{1}{E_1} \sigma_r + \frac{1}{E_2} \sigma_t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

gdy przez ε_r oraz ε_t oznaczmy wydłużenia jednostkowe w kierunku radialnym względnie w kierunku obwodowym, natomiast przez u wydłużenie samego promienia. Zakładamy przytem równocześnie, że pozostajemy w obrębie granicy proporcjonalności oraz że stosowalna jest zasada superpozycji skutków. Wartości E_1 , m_1 oraz E_2 , m_2 posiadają znaczenie stałych materiałowych w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach: radialnym oraz obwodowym, przyczem odpowiadają one ściśle znanym nam potocznie stałym materiałowym: modułowi sprężystości *Young'a* E oraz współczynnikowi zwięzienia poprzecznego, względnie t. zw. liczbie

$$\text{Poisson'a } \mu = \frac{1}{m}$$

Wychodząc od wyrażenia ogólnego dla potencjału sprężystości, przekonujemy się, że cztery powyższe wartości nie są od siebie niezależne. Zachodzi między nimi prosta relacja

$$m_1 E_1 = m_2 E_2 = M, \quad (3)$$

której wprowadzenie możemy tutaj pominąć, gdyż kształtuje się ono analogicznie jak przy podobnym zagadnieniu ortotropji prostolinowej, potraktowanem szczegółowo przez prof. *Hubera* w jego zurychskich wykładach gościnnych²⁾.

Rozwiązując równania (2) względem składowych stanu napięcia, otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{M}{m_1 m_2 - 1} \left[\frac{u}{r} + m_2 \frac{du}{dr} \right] \\ \sigma_t &= \frac{M}{m_1 m_2 - 1} \left[m_1 \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Podstawiając wartości powyższe w równanie (1), dochodzimy do poniższego równania różniczkowego dla przesunięcia u

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{m_1}{m_2} \frac{u}{r^2} = 0 \quad (5)$$

Jego całka brzmi

$$u = A r^s + B r^{-s} \quad (6)$$

przyczem s jest liczbą niemianowaną o wartości

$$s = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \quad (7)$$

natomiast współczynniki A oraz B są nieznanymi narazie jeszcze stałymi całkowania, których oznaczenie następuje w prosty sposób tak, by spełnione były warunki brzegowe zagadnienia. Gdy równomiernie wzdłuż wewnętrznego konturu rozłożony nacisk oznaczmy przez p , zaś natężenie analogicznego nacisku zewnętrznego przez q , wspomnia-

²⁾ M. T. Huber, „Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten”, Akad. Nauk. Techn., Warszawa 1929, str. 9 i nast.

ne warunki brzegowe wyrażą się prostej formie

$$\sigma_r = \begin{cases} -p & \text{dla } r = a \\ -q & \text{dla } r = b \end{cases} \quad (8)$$

przyczem przez a oraz b oznaczamy wymiary rozpatrywanego pierścienia, a więc jego promień wewnętrzny oraz zewnętrzny.

Z warunków (8) obliczamy stałe A oraz B :

$$A = -\frac{m_1 m_2 - 1}{M} \frac{1}{1 + s m_2 b^{2s} - a^{2s}} \left[q b^{s+1} - p a^{s+1} \right]$$

$$B = +\frac{m_1 m_2 - 1}{M} \frac{1}{1 - s m_2 b^{2s} - a^{2s}} \left[q a^{s-1} - p b^{s-1} \right]$$

Wstawiając wartości te w równanie (4), otrzymujemy, jako wynik ostateczny, wyrażenia dla składowych stanu napięcia w postaci

$$\sigma_r = \frac{1}{b^{2s} - a^{2s}} \frac{1}{r^{s+1}} \left\{ r^{2s} [p a^{s+1} - q b^{s+1}] - \right. \\ \left. - a^{s+1} b^{s+1} [p b^{s-1} - q a^{s-1}] \right\} \\ \sigma_t = \frac{1}{b^{2s} - a^{2s}} \frac{s}{r^{s+1}} \left\{ r^{2s} [p a^{s+1} - q b^{s+1}] + \right. \\ \left. + a^{s+1} b^{s+1} [p b^{s-1} - q a^{s-1}] \right\} \quad (9a)$$

lub też, gdy wprowadzimy bezwymiarowe parametry α oraz ρ :

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (\text{stosunek promieni}),$$

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad \alpha \leq \rho \leq 1, \quad (\text{zmienną spólrzadną}),$$

wyrażenia o postaci

$$\sigma_r = \frac{1}{1 - \alpha^{2s}} \left\{ \rho^{s-1} [p \alpha^{s+1} - q] - \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{s+1} \right. \\ \left. [p - q \alpha^{s-1}] \right\} \\ \sigma_t = \frac{s}{1 - \alpha^{2s}} \left\{ \rho^{s-1} [p \alpha^{s+1} - q] + \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{s+1} \right. \\ \left. [p - q \alpha^{s-1}] \right\} \quad (9b)$$

Rzuca się w oczy, że w wyrażeniach tych naprężenia σ_r oraz σ_t są między innymi funkcjami wartości s , t. zn. wzajemnego stosunku modułów sprężystości względnie współczynników zwężenia poprzecznego w dwóch wzajemnie krzywoliniowo do siebie prostopadłych kierunkach; bezwzględne ich wartości pozostają jednak — jak dotąd — bez znaczenia. Natomiast liczba s staje się pewnego rodzaju wielkością charakterystyczną dla struktury danego materiału i, jako taka, posiada decydujący wpływ na rozkład naprężeń.

Jest godne uwagi, że relacja $\sigma_r + \sigma_t = \text{const.}$, słuszną dla materiału zbudowanego równokierunkowo, traci obecnie swą ważność. Przyjmując ponadto $p = q$, stwierdzamy łatwo, że nie istnieje tutaj już również prosta zależność

$$\sigma_r = \sigma_t = -p = -q$$

charakterystyczna dla przypadku izotropii. Wyjątkowo tylko dla $p = q = 0$ otrzymujemy również dla biegunowo - ortotropowej struktury materiału

$$\sigma_r = \sigma_t = -p = -q = 0.$$

Wynik taki jednak z góry mogliśmy przewidzieć: jakkolwiek stan napięcia jest niemożliwy, gdy na pierścien przestaną działać siły zewnętrzne. Wykluczamy co prawda w ten sposób możliwość

istnienia wszelkich samonaprężeń w danym układzie. Te jednak z rozważań naszych postanawiamy zasadniczo wyeliminować, tak, że w danym wypadku — n. p. przy naprężeniach skurczowych betonu — trzeba by je do wyników naszych dodatkowo jeszcze wprowadzić.

Dla specjalnego przypadku

$$s = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} = 1 \quad (10)$$

wyrażenia (9b) przekształcają się w prostsze

$$\sigma_r' = \frac{1}{1 - \alpha^2} \left\{ [x^2 p - q] - \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^2 [p - q] \right\} \\ \sigma_t' = \frac{1}{1 - \alpha^2} \left\{ [x^2 p - q] + \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^2 [p - q] \right\} \quad (11)$$

znane nam, jako wzory *Lamé'go*, z podręczników mechaniki względnie wytrzymałości materiałów dla grubościennych rur i pierścieni izotropowych. (Wyniki te zaopatrujemy w kreski' celem odróżnienia ich od wyników ogólniejszych, uzyskanych na podstawie naszych obecnych rozważań).

Gdy przyjmujemy $q = 0$, któryto przypadek posiada szczególną doniosłość dla pierścieni obciążonych jedynie równomiernym naciskiem wewnętrznym p , stan napięcia ująć możemy wzorami

$$\sigma_r = \frac{1}{1 - \alpha^{2s}} \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{s+1} [\rho^{2s} - 1] p \\ \sigma_t = \frac{s}{1 - \alpha^{2s}} \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{s+1} [\rho^{2s} + 1] p \quad (12)$$

Największa wartość naprężenia (jednak nie analityczne ekstremum) wystąpi na brzegu wewnętrznym pierścienia, $r = a$, i to w kierunku obwodowym; obliczamy ją, przyjmując $\rho = \alpha$:

$$\sigma_{t, r=a} = s \frac{1 + \alpha^{2s}}{1 - \alpha^{2s}} p \quad (13)$$

Wartość ta jest zawsze dodatnia, oznacza zatem rozciąganie. Natomiast włókno zewnętrzne pierścienia, $r = b$, narażone jest na rozciąganie o wielkości

$$\sigma_{t, r=b} = 2s \frac{\alpha^{s+1}}{1 - \alpha^{2s}} p \quad (14)$$

którą otrzymujemy, podstawiając w drugim równaniu grupy (12) $\rho = 1$. Bezpośrednio z zależności (11), albo też przez zastosowanie specjalizacji (10) w układzie (12), dochodzimy do ogólnie znanych wyrażen, słusznych dla równokierunkowych rur grubościennych pod hydrostatycznym ciśnieniem wewnętrznym p

$$\sigma_r' = \frac{1}{1 - \alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^2 [\rho^2 - 1] p \\ \sigma_t' = \frac{1}{1 - \alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^2 [\rho^2 + 1] p \quad (15)$$

skąd największą wartość σ_t' dla włókna wewnętrznego wypada

$$\sigma_{t', r=a} = \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} p \quad (16)$$

podczas gdy naprężenie obwodowe wzdłuż konturu zewnętrznego przybiera wartość

$$\sigma_{r, b} = 2 \frac{a^2}{1 - a^2} p \dots (17)$$

Podobnie zbudowane wyrażenia otrzymujemy, przechodząc do przypadku specjalnego $p = 0$, aktualnego gdy działa jedynie tylko nacisk zewnętrzny.

Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że stosowność związków

$$N(p) + p = -N(q) |_{q=p}$$

względnie

$$N(P) + 1 = -N(Q) \dots (18)$$

uzasadnionych przez autora na innym miejscu³⁾ dla całkowicie dowolnie ukształtowanych układów płaskich, ogranicza się zasadniczo tylko do tarcz o strukturze równokierunkowej. Potwierdzają to nasze obecne rozważania, z których wynika, że reguły powyższe ważne są jedynie w dwóch wypadkach szczególnych, a mianowicie dla $s = 1$ (materiał izotropowy) oraz $s = 0$. Przez wyrazy $N(p)$ oraz $N(q)$ oznaczaliśmy przytem stany naprężenia, wywołane samodzielnie występującym ciśnieniem wewnętrznym p względnie takimże ciśnieniem zewnętrznym q , zaś przez $N(P)$ oraz $N(Q)$ stany naprężenia, spowodowane podobnie działającymi obciążeniami jednostkowymi $p = 1$, względnie $q = 1$. Wystarczy wobec powyższego, dla wspomnianych powyżej przypadków, znajomość jednej tylko funkcji $N(P)$ względnie $N(Q)$, byśmy na tej podstawie byli w stanie podać od razu drugi ze stanów naprężenia.

Uzyskane uprzednio wyniki (9) uważać należy za ściśle z punktu widzenia teorii sprężystości; to też poprawność ich wytrzymać musi próbę każdego rachunku kontrolnego. Jedną z takich prób byłoby n. p. utworzenie sumy (całki) z naprężeń obwodowych, zaczepiających normalnie do cięcia, przeprowadzonego wzdłuż średnicy pierścienia. Istotnie, na podstawie łatwej operacji matematycznej dochodzimy do wyniku, który zresztą był do przewidzenia, że

$$\int_a^b \sigma_t \cdot dr = ap - bq.$$

Wyniki, poznane dotychczas, uzyskamy w sposób łatwiejszy może jeszcze i dogodniejszy, gdy posługiwać się będziemy t. zw. funkcją naprężeń.

Nasuwałoby się niejako samo przez się wprowadzenie takiej funkcji naprężeń, z której interesujące nas naprężenia otrzymaćby można przez operacje

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \\ \sigma_t &= \frac{d^2 F}{dr^2} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

Uzyskalibyśmy w ten sposób całkowitą zgodność z analogicznymi równaniami, znanymi nam z wypadków stosowania funkcji naprężeń *Airy'ego*

³⁾ W. Olszak a) „Sprężyste nieograniczone układy płaskie z otworami kołowymi”, Akad. Nauk. Tech., Warszawa, 1934. b) „Über einen einfachen, praktisch wichtigen Zusammenhang von Spannungszuständen“.

F' , dla której równanie różniczkowe, w przypadkach całkowitej symetrii osiowej zarówno obciążenia jak i ukształtowania geometrycznego układu, redukuje się do

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{dF'}{dr} + \frac{d^2 F'}{dr^2} \right) = 0$$

Dla pierścienia izotropowego, obciążonego równomiernie wzdłuż krawędzi wewnętrznej oraz zewnętrznej, dochodzimy tą drogą do znanego⁴⁾ rozwiązania

$$F' = C' \lg r + D' r^2$$

przyczem stałe C' oraz D' , wyprowadzone z warunków (8), brzmią

$$C' = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (q - p)$$

$$D' = \frac{1}{2} \frac{1}{b^2 - a^2} (a^2 p - b^2 q)$$

Stosując działania (19), otrzymujemy składowe stanu naprężenia σ_r' oraz σ_t' w znanej nam formie (11).

Racjonalniejsze jednakże będzie przyjęcie takiej funkcji naprężeń F , z której wartości naprężeń uzyskamy przez zastosowanie poniższych bardzo prostych relacji

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} F' \\ \sigma_t &= \frac{dF}{dr} \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

Zaspokajamy wtedy identycznie warunek równowagi (1), tak, że funkcję F uważać możemy za pewnego rodzaju całkę tego równania.

Mnożąc obecnie drugie z równań grupy (2) przez r , różniczkując je następnie względem r oraz porównując z pierwszym równaniem wspomnianej grupy, otrzymamy następujące równanie różniczkowe dla funkcji naprężeń

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - s^2 \frac{1}{r^2} F = 0 \dots (21)$$

Równanie o powyższej postaci poznaliśmy już uprzednio przy badaniu przesunięcia u [por. równanie (5)].

Jego całka $F = Cr^s + Dr^{-s} \dots (22)$ zawiera dwie stałe, C oraz D , które obliczamy w prosty sposób z warunków brzegowych.

Uwzględniając uzyskane w ten sposób wartości

$$C = - \frac{1}{b^{2s} - a^{2s}} [q b^{s+1} - p a^{s+1}]$$

$$D = + \frac{a^{s+1} b^{s+1}}{b^{2s} - a^{2s}} [q a^{s-1} - p b^{s-1}]$$

dochodzimy wreszcie przez wykonanie działań (20) i tą drogą do naprężeń σ_r oraz σ_t , ujętych w znanej nam już formie (9).

III. Rura o dowolnej skończonej długości

Przy rozpatrywaniu ustrojów powyższego typu nie wystarczy już — w ogólnych wypadkach —

⁴⁾ A. i L. Föppl, „Drang und Zwang”, tom I, wyd. II, Monachium — Berlin, 1924, str. 313.

założenie ortotropii biegunowej, ujmującej jedynie różnicę własności sprężystych materiałów w d w u c h kierunkach głównych, oznaczonych uprzednio wskaźnikami „1” oraz „2”. Obecnie przyjąć musimy t r z e c i jeszcze kierunek, kierunek tworzącej rozpatrywanego walca, przez wprowadzenie współczynników E_3 , m_3 , charakteryzujących procesy sprężyste, równoległe do osi walca; dochodzimy w ten sposób do trzeciej głównej osi symetrii. Trójkierunkowe ujęcie własności sprężystych materiału nazwiemy ortotropją walcową (cylindryczną).

Do kategorii ciał rozpatrywanego obecnie typu zaliczyć można n. p. grubościennie rury żelbetowe, zwłaszcza, gdy uwzględnimy sposób ich obciążenia oraz możliwości ich odkształcania się przy próbnym badaniu ich wytrzymałości.

Przez każdy punkt rury wspomnianego typu lub konstrukcji pokrewnej przechodzą więc trzy osie wzajemnie do siebie prostopadłe, wskazujące trzy główne kierunki sprężystości: kierunki te uwarunkowane są nie tylko samym sposobem wykonania konstrukcji żelbetowej (n. p. sposobem wirowania), lecz przede wszystkim różnym procentem uzbrojenia w kierunkach radialnym, obwodowym oraz podłużnym.

Rura krzywolinjowo-anizotropowa i kula wydłużona o podobnej strukturze były przedmiotem badań ³⁾ B. de St. Venant'a już w roku 1865. Nie możemy jednak w naszym wypadku skorzystać z uzyskanych przez badacza tego wyników, gdyż rozpatruje on przypadek t. zw. „izotropii poprzecznej” względem promienia r , w myśl której wszystkie kierunki prostopadłe do tegoż promienia są równowarte. Takie zaś założenie rozbieżne jest z naszym zagadnieniem.

Wydłużenia jednostkowe w kierunku aktualnych obecnie, wzajemnie do siebie prostopadłych trzech osi głównych wynoszą

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = + \frac{1}{E_1} \sigma_r - \frac{1}{m_2 E_2} \sigma_t - \frac{1}{m_3 E_3} \sigma_z \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r} = - \frac{1}{m_1 E_1} \sigma_r + \frac{1}{E_2} \sigma_t - \frac{1}{m_3 E_3} \sigma_z \\ \varepsilon_z &= k = - \frac{1}{m_1 E_1 r} \sigma_r - \frac{1}{m_2 E_2} \sigma_t + \frac{1}{E_3} \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Rozwiązując równania powyższe względem składowych stanu napięcia, otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{M}{N} \left\{ \frac{du}{dr} (m_2 m_3 - 1) + \frac{u}{r} (m_3 + 1) + k (m_3 + 1) \right\} \\ \sigma_t &= \frac{M}{N} \left\{ \frac{du}{dr} (m_3 + 1) + \frac{u}{r} (m_1 m_3 - 1) + k (m_1 + 1) \right\} \\ \sigma_z &= \frac{M}{N} \left\{ \frac{du}{dr} (m_2 + 1) + \frac{u}{r} (m_1 + 1) + k (m_1 m_2 - 1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

przyczem skróty M i N oznaczają

$$M = m_1 E_1 = m_2 E_2 = m_3 E_3 \quad . \quad . \quad (25)$$

$$N = m_1 m_2 m_3 - m_1 - m_2 - m_3 - 2 \quad (26)$$

Do relacji (25) dochodzimy w sposób analo-

giczny, jak do związku (3), wychodząc od formy ogólnej dla potencjału sprężystości.

Mając do czynienia z konstrukcjami żelbetowymi w rodzaju n. p. rur zbrojonych, które w kierunku podłużnym posiadają z reguły jedynie tylko wkładki rozdzielcze o małej średnicy i w znacznych odstępach, będzie w większości wypadków wystarczające przyjęcie

$$m_1 = m_3 \text{ oraz } E_1 = E_3$$

Ponieważ jednak ściśle ujęcie problemu t r ó j osiowej ortotropii cylindrycznej nie stanowi żadnego specjalnego utrudnienia, nie zastosujemy powyższego zbędnego uproszczenia.

Warunek równowagi, określony równaniem (1), pozostaje nadal niezmieniony. Po podstawieniu weń wartości naprężeń z relacji (24), uzyskujemy równanie różniczkowe dla przesunięcia u w postaci

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{m_1 m_3 - 1}{m_2 m_3 - 1} \frac{u}{r^2} + \frac{m_2 - m_1}{m_2 m_3 - 1} \frac{k}{r} = 0 \quad . \quad . \quad (27)$$

którego całka brzmi

$$u = A r^t + B r^{-t} - \frac{1}{m_3} k r \quad . \quad . \quad (28)$$

przyczem

$$t = \sqrt{\frac{m_1 m_3 - 1}{m_2 m_3 - 1}} \quad . \quad . \quad (29)$$

Równanie różniczkowe (27) przypomina swą formą równanie naprowadzone już przez Love'a ³⁾, jego współczynniki posiadają jednak całkowicie odmiennie znaczenie, a to naskutek zasadniczej różnicy w problemie samym.

Stale A oraz B rozwiązania (28) obliczamy ze znanych obciążeń brzegowych, stałą k natomiast w sposób prosty z aktualnych każdorazowo warunków zamocowania rury, a więc n. p. w ten sposób, by suma wszystkich normalnie do przekroju poprzecznego działających naprężeń σ_z — a więc całkowite ciągnięcie (lub ciśnienie) podłużne — równoważyła się z wypadkową ($b^2 \pi q - a^2 \pi p$), występującą przy obu końcach walca.

Model taki byłby charakterystyczny n. p. dla większości prób, stosowanych przy badaniu wytrzymałości rur sposobem hydraulicznym ($q = 0$). Od tego rodzaju prób, w których normalne ciśnienie p działa na wszystkie powierzchnie wewnętrzne obu stronnie zamkniętej rury, a więc i na oba denka, różnią się zasadniczo sposoby, przy których, przez zastosowanie specjalnych urządzeń (wprowadzonych n. p. przez Rudeloff'a, Bausch'a i innych) obciąża się (naciskiem radialnym) jedynie tylko ścianę wewnętrzną rury, przez co eliminuje się wszelkie naprężenia w kierunku osiowym ustroju.

IV. Rura o długości bardzo znacznej (nieskończonej)

Konstrukcje tego rodzaju są przypadkiem szczególnym ($\varepsilon_z = k = 0$) ustrojów, potraktowanych w poprzednim rozdziale III-cim. Obok

³⁾ Por. A. E. H. Love, „Lehrbuch d. Elastizität”, oprac. niem. A. Timpe, Lipsk — Berlin, 1907, str. 194.

wspomnianych już poprzednio naprężeń σ_r oraz σ_t uwzględnić musimy obecnie jeszcze stan napięcia w kierunku osi walca, charakteryzujący się składową σ_z .

Zaznaczyć trzeba, że wytworzony w ten sposób dwuwymiarowy stan odkształcenia, w miarę zbliżania się do końców walca, upodabnia się coraz bardziej do poznanego w rozdziale II-gim dwuwymiarowego stanu napięcia, gdyż płaszczyzny końcowe, ograniczające elementy skrajne, posiadają już pełną swobodę deformacyjną, przyczem $\sigma_z = 0$.

Model obecnie omawiany charakterystyczny jest dla wszelkich budowli o znacznej długości o wydłużonym przekroju walcowym, a więc dla przewodów rurowych, dla obudowy tunelowej i górniczej oraz dla szeregu innych podobnych konstrukcji inżynierskich. Zakładamy oczywiście, że obciążenie przyjąć możemy jako w przybliżeniu choćby od zmiennej z niezależne.

Pomijając ze względu na szczupłość miejsca rachunek pośredni, który zresztą kształtuje się w sposób podobny, jaki poznaliśmy w rozdziałach poprzednich, dochodzimy wreszcie do wartości naprężeń σ_r oraz σ_t , które otrzymujemy ostatecznie w formie znanych nam już równań (9) z tem jednak, że liczbę s każdorazowo zastąpić musimy miarodajną obecnie wartością t .

Prócz tego wystąpi, w miejsce dawnego $\sigma_z = 0$, nowa funkcja

$$\sigma_z = \frac{1}{m_3} (\sigma_r + \sigma_t) \\ = \frac{1}{m_3} \frac{1}{1-\alpha^{2t}} \left\{ (t+1) p^{t-1} [p x^{t+1} - q] + \right. \\ \left. + (t-1) \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{t+1} [p - q x^{t-1}] \right\} \cdot (33)^6$$

reprezentująca wartość tych naprężeń, działających w kierunku wydłużenia walca, które obecnie niejako wymuszają czysto płaskie odkształcenia poszczególnych jego pierścieni elementarnych. Naprężenia σ_z nabierają szczególniejszego znaczenia n. p. wtedy, gdy zechcemy badać miarę wyężenia danego materiału, a więc bezpieczeństwo badanej konstrukcji czyto ze względu na osiągnięcie granicy plastyczności czy też wytrzymałości.

Oczywiście i w obecnym wypadku możnaby wybrać wspomniany już uprzednio drugi sposób rozwiązania zagadnienia przez wprowadzenie funkcji naprężeń, przyczem doszliśmy do równobrzmiących wyników.

V. Wnioski praktyczne. Liczbowe ujęcie wyników.

Jeden z ważniejszych wyników dotychczasowych rozważań ująć możemy w prostym zdaniu: w rozpatrywanych przypadkach ortotropii krzywolinowej nie jest rzeczą obojętną, czy chodzić nam będzie o zbadanie tarczy wyciętej z w n e t r z a wydłużonej konstrukcji walcowej, czy też z partij leżących w pobliżu jej k o ń c ó w — w

zasadniczym odróżnieniu od wypadków struktury izotropowej.

Różnica ta spowodowana jest okolicznością, że w wyrażeniach dla naprężeń σ_r oraz σ_t występuje raz liczba t , to znów liczba s , które, jak to widzimy z porównania równań (29) oraz (7), nie są bynajmniej identyczne.

W praktyce różnica ta nie zaznaczy się drastycznie, co stwierdzamy łatwo, badając wartości s oraz t , zestawione w tabeli I.

Tabela I.

$f_2 \%$	g_2	s	t
0	1,00	1,000	1,000
1	1,09	1,043	1,044
2	1,18	1,086	1,088
3	1,27	1,127	1,130
4	1,36	1,166	1,170
5	1,45	1,204	1,210
7	1,63	1,277	1,286
10	1,90	1,378	1,393

Tabelę tę obliczono dla najczęstszego przypadku, aktualnego dla większości rozpatrywanych konstrukcji żelbetowych; uwzględniono w niej, że w kierunku obwodowym przewidziano pierścieniowe zbrojenie stalowe o mocy $f_2 \%$, podczas gdy w kierunkach radialnym oraz podłużnym ułożono co najwyżej wkładki rozdzielcze, nieposiadające poważniejszego wpływu na własności sprężyste danego zespołu. Gdyby miało być inaczej (n. p. przy kołach zamachowych i t. p.), uwzględnienie odmiennych specjalnych warunków nie sprawi nam żadnej trudności. Gdy bowiem w jednym z głównych kierunków sprężystości ułożone będą wkładki o mocy $f \%$, to moduł sprężystości zespołu żelbetowego w tym kierunku obliczamy według prostego wzoru ⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} E &= E_b \cdot g \\ g &= 1 + (n-1) \frac{f}{100}, \quad g \geq 1 \end{aligned} \right\} \cdot (36)$$

przyczem E_b oraz E_z oznaczają moduły Young'a betonu oraz stali, zaś n ich wzajemny stosunek $\frac{E_z}{E_b}$.

Wracając do tabeli I stwierdzamy zasadniczą relację $t \geq s \geq 1$, przyczem znaki równości przewidziane są dla różnych przypadków szczególnych, których na tem miejscu dyskutować nie możemy, pozwalając sobie odesłać Czytelnika do obszerniejszej pracy kongresowej, w której również znaleźć można dane w sprawie przyjęcia wartości m , koniecznych dla ustalenia liczby t w myśl relacji (29).

Chcielibyśmy natomiast poruszyć jeszcze drugi, o wiele ważniejszy wniosek: Oto, okazuje się, że

⁶⁾ Numeracja równań zgodna jest z numeracją obszerniejszej pracy kongresowej, celem ułatwienia porównania obydwu referatów.

⁷⁾ Por. M. T. Huber, l. c., str. 13.

nie owa wspomniana już powyżej różnica między dwuwymiarowymi stanami napięcia i odkształcenia — będąca raczej natury zasadniczej i teoretycznej, gdyż przy konstrukcjach, normalnie w budownictwie inżynierskim stosowanych, różnica ta, praktycznie biorąc, zupełnie się zacierza — jest rzeczą najciekawszą w badanych przez nas różnokierunkowych ustrojach, lecz okoliczność, że sposób ich wykonania i uzbrojenia posiadać może bardzo niepożądany wpływ na rozkład i wielkość naprężeń. Znajomość wpływu tego, wyrażającego się w podwyższeniu największej wartości naprężenia obwodowego na brzegu wewnętrznym, a w pomniejszeniu jego zewnętrznego wartości skrajnej, jest bardzo ważna dla inżyniera konstruktora, zwłaszcza, gdy chodzić będzie o rurociągi żelbetowe z wewnętrznym ciśnieniem hydrostatycznym, gdyż wtedy wchodzi w rachubę rozciąganie betonu — jego pięta Achillesowa.

Wzrost największej wartości naprężenia na brzegu wewnętrznym — a więc przy rurociągach wzrost maksymalnego rozciągania — będzie tem większy, im bardziej konstrukcja będzie grubościenna (α małe) oraz im mocniejsze będzie zbrojenie obwodowe f_2 (a więc im większe E_2 , a z niem s względnie t).

Jest przytem rzeczą charakterystyczną, że wówczas równocześnie coraz to intensywniej „pracują” partje wewnętrzne pierścienia, w których w coraz to większej mierze koncentruje się przepływ sił wewnętrznych, podczas gdy partje zewnętrzne stopniowo ulegają coraz to większemu odciążeniu z wielką ujmą dla postulatu możliwie równomiernego wykorzystania materiału konstrukcyjnego.

Że ze wzrostem procentu uzbrojenia obwodowego, a z nim wartości E_2 w tymże kierunku [por. równanie (36)], wzrastać musi również największe naprężenie wzdłuż krawędzi wewnętrznej rury czy pierścienia oraz że wysilają się wówczas w coraz znaczniejszej mierze włókna wewnętrzne rury, przy równoczesnym zwięźnieniu się obszaru partyj (w godnej uwagi mierze) wyteżonych, o których to zjawiskach wspomnieliśmy już uprzednio, zrozumiemy łatwo i bez rachunku; w granicznym bowiem przypadku całkowitej sztywności materiału w kierunku obwodowym ($E_2 \rightarrow \infty$) wystarczyłoby już jedno jedyne tylko włókno wewnętrzne badanego pierścienia do przecięcia całego rozporu, przyczem byłoby ono, oczywiście, wyteżone ponad wszelką skończoną miarę.

O procesach tych informuje nas wyraźnie tabela II. Zestawione w niej wartości naprężeń oraz wzajemne liczby porównawcze obliczono dla wypadku, gdy działa jedynie hydrostatyczne parcie wewnętrzne p . Dla różnego rodzaju ukształtów przekroju rury ($\alpha = \frac{a}{b} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4},$

$\frac{5}{10}, 1$) podano w kolumnach pionowych największe naprężenia obwodowe na brzegu wewnętrznym ($r = a, \rho = \alpha$, górne pola) oraz najmniejsze takie naprężenia wzdłuż krawędzi zewnętrznej ($r = b, \rho = 1$, dolne pola) — przy zmiennych wartościach s względnie t . (Wartości S, S', S'' , podane jako liczby bezwymiarowe, zaopatrzyć nale-

ży w mnożnik p , tak że szukane naprężenia $\sigma_i = S \cdot p, \sigma'_i = S' \cdot p, \sigma''_i = S'' \cdot p$. Wszystkie one są dodatnie, oznaczają więc ciągnienia).

Liczby z kolumny pierwszej S' , słuszne są dla struktury izotropowej s wzgl. $t = 1$. Obliczono je ze znanych wzorów *Lamé'go*, względnie z równań (16) oraz (17). Dla dwóch kolumn następnych S' sięgamy po gotowe wyrażenia (13) oraz (14) dla s wzgl. $t = 1,20$ oraz $1,50$, podczas gdy kolumnę ostatnią S'' obliczono dla przypadku idealnego G (niedającego się zresztą zrealizować, o ile własności sprężyste materiału nie mają być funkcjami zmiennej r), przy którym cała siła rozciągająca rozkłada się równomiernie na grubość ściany:

$$S'' = \frac{\sigma_i''}{p} = \frac{a}{b-a} = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

W kolumnie D zaznaczono, w jakim stopniu przy ortotropji biegunowej (s) względnie cylindrycznej (t) interesujące nas największe i najmniejsze naprężenia S z równań (13) względnie (14) różnią się od wartości S' , używanych potocznie, a opartych o formuły *Lamé'go* (w procentach tych ostatnich), podczas gdy kolumny A podają odchyłki rozpatrywanych wartości od wypadku idealnego S'' (w procentach tychże naprężeń S''). Odchyłki te, jak widzimy, skierowane są na obydwóch brzegach przekroju w kierunkach przeciwnych i oznaczają wzdłuż krawędzi wewnętrznej wzrost (+), natomiast wzdłuż konturu zewnętrznego redukcję (—) naprężeń. Sumując te odchyłki, dochodzimy do kolumny U , ilustrującej stopień nierównomierności rozkładu naprężeń wzdłuż przekrojów radialnych przez grubość ścianki pierścienia.

Zarówno wartości D jak i A oraz U rosną z malejącem α (t. zn. ze wzrostem grubościenności rury), jak również ze wzrastającymi cechami materiałowymi s oraz t , potwierdzając słuszność uprzednich naszych uwag o bardzo niekorzystnym wpływie powiększania grubości ścian oraz mocy uzbrojenia obwodowego na rozkład naprężeń obwodowych.

Pominać tu musimy (mniej co prawda ważną) dyskusję rozkładu naprężeń radialnych σ_r w rozpatrywanych ustrojach ortotropowych, jak również godne uwagi praktyczne wnioski, wypływające z uzyskanych wyników dla sposobu wykonania obudowy żelbetowej tunelów i sztolni, zwłaszcza jednak naukowo postawionej fabrykacji rur z betonu zbrojowego, — sposobu, mającego na celu tego rodzaju produkcję gotowego fabrykatu, któryby gwarantował jaknajkorzystniejszy, a więc możliwie jaknajrównomierniejszy rozkład naprężeń obwodowych poprzez całą grubość ścianki rury i zabezpieczał ją w ten sposób od niepożądanych, bo niebezpiecznych, przyrostów maksymalnych naprężeń rozciągających na obwodzie wewnętrznym rurociągu.

Odnośne wskazówki zawiera cytowana już uprzednio praca kongresowa, która prócz tego wysnuwa szereg dalszych wniosków teoretycznych. Podaje ona również, jak wyniki nasze zastosować można do przypadku granicznego $\alpha = 0$, t. zn. do ortotropowej, (nieskończenie) dużej tarczy z otworem kołowym. Układ taki posiadać będzie

Tabela II.

s, t		1,00				1,20				1,50				G	
α	ρ	S'	D°_0	A°_0	U°_0	S	D°_0	A°_0	U°_0	S	D°_0	A°_0	U°_0	S''	U°_0
0,00	α	1,00	± 0	$+\infty$	∞	1,20	$+20$	$+\infty$	∞	1,50	$+50$	$+\infty$	∞	0,00	± 0
	1	0,00		± 0		0,00	± 0	± 0		0,00	± 0	± 0			
0,25	α	1,13	± 0	$+242$	303	1,29	$+14$	$+291$	355	1,55	$+37$	$+370$	440	0,33	± 0
	1	0,13		-61		0,12	-8	-64		0,10	-23	-70			
0,50	α	1,67	± 0	$+67$	100	1,76	$+5$	$+76$	112	1,93	$+16$	$+93$	133	1,00	± 0
	1	0,67		-33		0,64	-4	-36		0,60	-10	-40			
0,75	α	3,57	± 0	$+19$	33	3,62	$+1$	$+21$	36	3,69	$+3$	$+23$	39	3,00	± 0
	1	2,57		-14		2,56	-1	-15		2,53	-2	-16			
0,90	α	9,54	± 0	$+6$	11	9,56	$+0,2$	$+6$	11	9,58	$+0,4$	$+7$	12	9,00	± 0
	1	8,54		-5		8,54	$\sim 0,0$	-5		8,51	$-0,4$	-5			
1,00	α	∞	± 0	± 0	0	∞	± 0	± 0	0	∞	± 0	± 0	0	∞	± 0
	1														

znaczenie n. p. dla tunelu o przekroju kołowym lub dla sztolni pod ciśnieniem, gdy otaczające je partje skalne, naskutek przeciążeń lokalnych lub robót strzelniczych, będą posiadały radialne rysy i pęknięcia.

Na tem miejscu wspomnieć jednak trzeba o pewnej innej ważnej okoliczności, której znajomość przydatna będzie szczególnie inżynierowi-konstruktorowi: naskutek omówionego już uprzednio zagęszczenia się naprężeń wokoło krawędzi wewnętrznej z równoczesnym odciążeniem partyj zewnętrznych, punkt ciężkości powierzchni wykresu naprężeń obwodowych, normalnych do cięcia radialnego poprzez grubość ścianki, przesuwa się o pewną wartość w kierunku konturu wewnętrznego rury i to nie tylko w stosunku do osi, połowiącej grubość ścianki, ale również w stosunku do środka ciężkości podobnego wykresu, skonstruowanego na podstawie formuły *Lamé'go* dla materiału równokierunkowego. Szczegół ten ważny jest dla usytuowania zbrojenia w betonie. Projektując położenie wkładek, przejmujących n. p. przy rurociągach pod ciśnieniem siłę rozciągającą, trzeba o wspomnianem przesunięciu się środka ciężkości wykresu pamiętać, by je w razie potrzeby należyście uwzględnić, jednak co najwyżej tylko przez lekkie dodatkowe zbrojenie, któreby nie zaważyło na wzroście modułu E_z . Zaniechać trzeba podążania

za dyslokacją punktu ciężkości ze zbrojeniem głównym, gdyż zabieg taki pogorszyłby jedynie sytuację przez dalszą koncentrację naprężeń w pasie wewnętrznym. Gdy wkładki rozkładamy na kilka współśrodkowych pierścieni, by w ten sposób umożliwić lepsze ich współdziałanie z betonem, dobrze będzie zachować przy skrajnym pierścieniu wewnętrznym należyty odstęp od wewnętrznego konturu rury, by uniknąć lokalnego podniesienia maksymalnej wartości σ_r wzdłuż tegoż konturu oraz skupień naprężeń ciągnących blisko krawędzi, spowodowanych nieciągłością zbrojenia.

Orientujemy się na tej podstawie również od razu, że rurociągi betonowe niezbrojone legitymują się równomierniejszem, a więc korzystniejszym, wyzyskaniem materiału od zbrojonych, wykonanych w sposób normalny, oczywiście pod warunkiem, że w danych warunkach wogóle można je stosować.

Wspomnieć wreszcie trzeba, że naskutek relacji $t \geq s$ wkładki podłużne nie pozostają bez wpływu na rozkład naprężeń σ_r oraz σ_t , o czem bliżej w pracy kongresowej.

VI. Streszczenie. Uwagi końcowe.

Streszczając najważniejsze wyniki, stwierdzamy, że:

1) przy ortotropowych konstrukcjach żelbetowych dwuwymiarowy stan napięcia (w cienkich pierścieniach) oraz dwuwymiarowy stan odkształcenia (we wnętrzu długiego walca) nie prowadzą już — przynajmniej teoretycznie — do identycznych naprężeń σ_r oraz σ_t , w zasadniczym odróżnieniu od wszelkich wypadków struktury izotropowej, oraz, co ważniejsze, że

2) w ogólnie znany i przyjęty sposób wykonania zbrojenie obwodowe pierścieni i rur, przy ostatecznych w bardzo nieznacznym stopniu nawet ich zbrojenie podłużne, powodują wyraźny wzrost maksymalnego naprężenia obwodowego na wewnętrznej krawędzi konstrukcji. Zwyżka ta uwydatnia się tem dobitniej, im większy będzie procent uzbrojenia pierścieniowego oraz im większa grubość ścianki rozpatrywanej konstrukcji (por. tabele I oraz II). W wielu wypadkach praktycznych wzrost ten, jako nieznacznym, będziemy mogli pominąć, dopuszczając n. p. pewien zgóry określony, drobny błąd w wynikach końcowych; nieraz jednak zdarzyć się może, że przekroczenie wspomniane, uwarunkowane specjalnie grubościennym kształtem przekroju oraz wyjątkowo mocnym zbrojeniem^{s)}

przekroczyć może 10, 15 i więcej procent, jak nas o tem informuje kolumna D tabeli II. Wtedy nad zjawiskiem tem nie można już przejść do porządku dziennego; wypada wówczas niestosowny model izotropowy zastąpić dokładniejszym, do rzeczywistości zbliżonym ortotropowym.

Na zakończenie niech wolno mi nadmienić, że w przygotowaniu jest praca, traktująca ustroje podobne krzywolinjowo-ortotropowe, jednak dla ogólniejszego przypadku, niewychodzącego już od symetrii osiowej obciążenia i ukształtowania konstrukcji, kiedy to znane równanie różniczkowe dla funkcji naprężeń *Airy'ego* F'

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F'}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial r^2} \right) = 0 \quad \dots \quad (40)$$

zastąpić będzie trzeba ogólniejszym wzorem, obejmującym również i powyższy (40) jako graniczny przypadek szczególny, oraz — w tej samej perspektywie — zastosowanie rozważań analogicznych do teorii płyt zginanych o strukturalnie biegunowo-ortotropowej.

^{s)} Por. n.p. autora opis żelbetowych rur podszkawkowych, stosowanych w górnictwie dla ciśnień do 20 i więcej atmosfer: „Eisenbetonrohre für Spülversatzzwecke“, Zement, 1935, Nr. 14, 15, 16.