

Nr. Inm. 600.

WARSZAWSKIE TOWARZYSTWO POLITECHNICZNE.

**Stosunek przyrostów naprężeń  
do przyrostów długości  
prętów kratownicy statycznie  
wyznaczalnej na statycznie  
wyznaczalnych podporach**

PRZEZ

H. CZOPOWSKIEGO.

WARSZAWA

1923.



nr 469

BG 03P/319-04

*Szkulenie im:*  
*Irwin Dymale and*  
*autora*  
15. VII. 1913

Stosunek przyrostów naprężeń do przyrostów  
długości prętów kratownicy statycznie wyznaczalnej  
na statycznie wyznaczalnych podporach.

PRZEZ

H. CZOPOWSKIEGO.

PRACA REFEROWANA NA POSIEDZENIU NAUKOWEM W. T. P. d. 25 XI r. b.

1. **Zadanie.** Jeżeli przez  $S_k$  oznaczymy naprężenie<sup>1)</sup> w  $k$ -tym pręcie; przez  $a_i$  długość  $i$ -tego pręta kratownicy statycznie wyznaczalnej na statycznie wyznaczalnych podporach, to zadanie, które tutaj postawiłem, polega na obliczeniu granicznej wartości ilorazu przyrostu  $\Delta S_k$  naprężenia  $S_k$ , występującego w  $k$ -tym pręcie układu prętów—statycznie wyznaczalnego na statycznie wyznaczalnych podporach—do przyrostu  $\Delta a_i$  pręta  $i$ -tego tegoż układu; przy założeniu, że siły zewnętrzne, które wyobrażamy sobie przyczepionymi do węzłów, zmieniają swe położenia razem z węzłami, niezmieniając swych kierunków i wartości.

1) Wyraz „naprężenie“ stosuję w znaczeniu: „Spannung“, „Stabspenung“; lub l'effort.

Jeżeli przyjmiemy, że w układzie statycznie wyznaczalnym naprężenie  $S_k$  w  $k$ -tym pręcie jest wogóle

$$S_k = f(P, a_1, \dots, a_i, \dots, a_k, \dots, a_n) \dots \dots \dots (1)$$

gdzie litery  $a$  oznaczają długości prętów i są w rozpatrywanych układach niezależnie zmiennymi, to zadanie postawione polega na obliczeniu pochodnej cząstkowej

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = \frac{\partial f}{\partial a_i}; \text{ lub } \frac{\partial S_k}{\partial a_k} = \frac{\partial f}{\partial a_k}; \dots \dots \dots (2)$$

gdy siły zewnętrzne  $P$  pozostają niezmienione podczas odkształcenia układu co do wartości i kierunku, lecz zmieniają punkty przyłożenia razem ze zmianą geometryczną układu; jakiem to już wyżej zastrzegł.

**2. Rozwiązanie zasadnicze.** W celu obliczenia granicznej wartości tego ilorazu przyjmę następujące postępowanie ogólne.

Najpierw obliczę naprężenie  $S_k$  danego układu, jakie występuje w  $k$ -tym pręcie; następnie odkształcę ten układ, zastępując pręt o długości  $a_i$  prętem o długości  $(a_i + \Delta a_i)$  i obliczę naprężenie  $S'_k$  w tymże  $k$ -tym pręcie tego nowego układu; a graniczna wartość ilorazu

$$\lim \frac{S'_k - S_k}{\Delta a_i} = \frac{\partial S_k}{\partial a_i}$$

będzie szukaną wartością.

Do obliczenia naprężeń zastosuję zasadę pracy wirtualnej.

Gdy literą  $L_1$  oznaczmy wartość funkcji sił, obciążających daną kratownicę, wtedy naprężenie  $S_k$  w pręcie  $k$ -tym obliczymy ze wzoru pracy wirtualnej

$$S_k \cdot \delta a_k = \delta L_1; \dots \dots \dots (3)$$

w którym symbol  $\delta a_k$  oznacza wydłużenie wirtualne pręta  $a_k$ , a  $\delta L_1$ —odpowiedni temu wydłużeniu przyrost wartości funkcji sił przy założeniu, o którym już mówiliśmy, że obciążenie jest połączone z układem i z nim razem się przesuwa. Wielkości  $\delta a_k$  i  $\delta L_1$  są od siebie zależne, układ bowiem po przecięciu jednego pręta, posiada jeden tylko stopień swobody.

Przywróćmy następnie po tem przesunięciu wirtualnem dany układ do pierwotnej geometrycznej postaci i następnie zmieńmy jego postać w ten sposób, że  $i$ -temu prętowi, którego długość była  $a_i$ , nadamy przyrost  $da_i$ ; układ wtedy wraz z obciążeniem zmieni swoje położenie i geometryczną postać; a wartość funkcji sił będzie inną niż była poprzednio; oznaczmy tę wartość literą  $L_2$ .

W pręcie  $k$ -tym tej nowej kratownicy wystąpi inne naprężenie, niż było w tym pręcie pierwotnej kratownicy. Naprężenie to oznaczmy literą  $S'_k$ , a wartość jego obliczymy z ogólnego wzoru pracy wirtualnej

$$S'_k \cdot \delta' a_k = \delta' L_2 \dots \dots \dots (4)$$

gdzie wskaźniki' wyrażają, że wielkości wirtualne, zaopatrzone tymi wskaźnikami, są zależne od siebie, t. j.  $\delta'a_k$  jest zależne od  $\delta'L_1$ , oraz  $\delta a_k$  od  $\delta L_1$ .

W tem postępowaniu rozróżnić przeto będziemy trojakiemu rodzaju przyrosty; symbole  $\delta$  i  $\delta'$  oznaczają będą przyrosty wirtualne pręta, którego obliczamy naprężenia; a symbol  $d$  ewent.  $\delta$  oznaczają będzie przyrost geometryczny pręta  $a_i$ ;— w danym przypadku  $\delta$  i  $\delta'$  odnoszą się do wielkości ze wskaźnikiem  $k$ ; a symbole  $d$  lub  $\delta$  do pręta, który wydłużamy, t. j.— odnoszą się do wielkości, zaopatrzonych jak w tym przykładzie wskaźnikiem  $i$ .

W celu obliczenia przyrostu ( $S'_k - S_k$ ) skorzystamy z niezależności obydwóch przesunięć wirtualnych i uzależnimy je w ten sposób, że uczynimy

$$\text{albo 1) } \delta'L_2 = \delta L_1; \dots \dots \dots (5)$$

$$\text{albo 2) } \delta'a_k = \delta a_k; \dots \dots \dots (6)$$

co możemy założyć, równania bowiem 3-cie i 4-te pozostają w mocy dla wszelkich przesunięć wirtualnych.

**3. Pochodna naprężenia, wyrażona przesunięciami.** Jeżeli przyjmiemy:  $\delta'L_2 = \delta L_1$ , t. j. jeżeli przyjmiemy, że przyrost pracy  $\delta'L_2$  podczas drugiego przesunięcia wirtualnego jest równy takiemuż przyrostowi podczas pierwszego przesunięcia, to po odjęciu od równania 4-go równanie 3-cie i po uwzględnieniu równ. 5-go, otrzymamy

$$S'_k - S_k = \delta L_1 \left( \frac{1}{\delta'a_k} - \frac{1}{\delta a_k} \right), \dots \dots \dots (7)$$

rozdzieliwszy to równanie przez  $\delta a_i$ , i sprowadziwszy ułamki do wspólnego mianownika, otrzymamy po odpowiedniemu grupowaniu

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = \frac{\delta L_1}{\delta a_k} \cdot \frac{\delta a_k - \delta'a_k}{\delta'a_k \cdot \delta a_i} \dots \dots \dots (8)$$

po podstawieniu z równania 3-go  $\delta L_1$  i po zastąpieniu w mianowniku wielkości  $\delta'a_k$  przez  $\delta a_k$ , gdyż różnią się te wartości o nieskończenie małą drugiego rzędu, która — w danym razie—po przemnożeniu przez  $\delta a_i$  da wielkość rzędu trzeciego, — otrzymamy

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = - S_k \cdot \frac{\delta'a_k - \delta a_k}{\delta a_i \cdot \delta a_k} \dots \dots \dots (9)$$

ze wzoru tego, po przyjęciu dowolnej wielkości  $\delta a_i$ , wielkość bowiem  $\delta'a_k$  obliczyć można z warunku  $\delta'L_2 = \delta L_1$ ; i po przyjęciu dowolnego przyrostu  $\delta a_i$ , obliczymy szukaną pochodną.

**4. Pochodna względem tegoż pręta.** W szczególnym przypadku, jeżeli za pręt zmienny przyjmiemy pręt, dla którego chcemy obliczyć iloraz  $\frac{\partial S_k}{\partial a_i}$ , jak w danym przypadku dla pręta  $k$ -tego, to postępowanie powyższe nic się nie zmieni; zastąpimy tylko  $da_i$  przez  $da_k$ ; a przyjmąwszy przesunięcie wirtualne  $\delta a_k$  równe przy-

rostowi niezależnemu  $da_k$ , napiszemy

$$\delta' a_k - \delta a_k = \delta^2 a_k \dots \dots \dots (10)$$

otrzymamy zamiast rów. 9-go

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_k} = - S_k \frac{\partial^2 a_k}{\partial a_k^2} \dots \dots \dots (11)$$

**5. Pochodna naprężenia, wyrażona wielkościami kinematycznymi.**

Wzory 9-ty i 11-ty wyrazimy wielkościami kinematycznymi, jak to już było stosowane w Mechanice pod nazwą prędkości wirtualnych; teraz tylko rozszerzymy ten sposób na przyspieszenia wirtualne. Interpretacja kinematyczna wzorów 9-go i 11-go pozwoli stosować do obliczeń twierdzenia i konstrukcje, dowiedzione w Kinematyce. W tym celu po rozdzieleniu wszelkich przesunięć przez różniczkę  $\delta t$  niezależnie zmiennego parametru  $t$ , któremu nadamy znaczenie czasu, otrzymamy wielkości

$$\frac{\delta a_k}{\delta t} = v_k ; \quad \frac{\delta' a_k}{\delta t} = v'_k \dots \dots \dots (12)$$

gdzie  $v_k$  oraz  $v'_k$  są prędkościami względnymi węzłów, które łączył pręt  $a_k$ ; inaczej— prędkościami wirtualnymi. W tenże sposób przyrównamy

$$\frac{v'_k - v_k}{\delta t} = p_{ki}; \quad \text{lub} \quad \frac{v'_k - v_k}{\delta t} = p_{kk} \dots \dots \dots (13)$$

gdzie  $p_k$  są przyspieszeniami względnymi węzłów danego pręta; inaczej— są jego przyspieszeniami wirtualnymi.

Rozdzieliwszy przeto licznik i mianownik rów. 9-go i 11-go przez  $\delta t^2$ ; otrzymamy

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = - S_k \cdot \frac{p_{ki}}{v_k \cdot v_i}; \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial S_k}{\partial a_k} = - S_k \cdot \frac{p_{kk}}{v_k^2} \dots \dots \dots (8') (11')$$

**6. Pochodna naprężenia, wyrażona funkcją sił.** Przyjmiemy teraz drugą alternatywę (równ. 6-te); że drugie przesunięcie wirtualne jest w ten sposób wykonane: że  $\delta' a_k = \delta a_k$ ; co się znaczy pod względem matematycznym, że  $\delta a_k$  obieramy jako niezależnie zmienną, jak poprzednio obraliśmy  $\delta L_1$ . Z równania 4-go i 3-go otrzymamy wtedy

$$S'_k - S_k = \frac{1}{\partial a_k} \left( \delta' L_2 - \delta L_1 \right) \dots \dots \dots (14)$$

Ażeby obliczyć różnicę prac wirtualnych ( $\delta'L_1 - \delta L_1$ ) przy warunku, że  $\delta'a_k = \delta a_k$ , weźmiemy pod uwagę, że

$$L_1 = F(P, a_1, a_2, \dots, a_k, a_i, \dots, a_p) \dots \dots \dots (15)$$

dla wszelkich wartości  $a_i$ ; — z równania tego, po nadaniu prętowi  $a_k$  przyrostu  $\delta a_k$ , napiszemy

$$\delta L_1 = \frac{\partial L_1}{\partial a_k} \cdot \delta a_k; \dots \dots \dots (16)$$

z pominięciem nieskończenie małych wyższych rzędów.

Po przywróceniu układu do pierwotnej geometrycznej postaci, a następnie po wydłużeniu pręta  $a_i$  o  $da_i$  wyrazimy wartość funkcji sił tego nowego układu równaniem

$$L_2 = F(P, a_1, a_2, \dots, a_k, a_i + da_i, \dots, a_p) \dots \dots \dots (17)$$

skąd po rozwinięciu w szereg względem  $a_i$  otrzymamy, z pominięciem wielkości wyższych rzędów,

$$L_2 = L_1 + \frac{\partial L_1}{\partial a_i} \cdot da_i \dots \dots \dots (18)$$

jest to wyraz wartości funkcji sił kratownicy o wydłużonym pręcie  $a_i$ . Jeżeli teraz wielkości  $a_k$  tego nowego układu nadamy przyrost  $\delta'a_k$ , t. j. wykonamy drugie przysunięcie wirtualne, to otrzymamy z 18-go, po zróżniczkowaniu względem  $a_k$

$$\delta' L_2 = \frac{\partial L_1}{\partial a_k} \cdot \delta'a_k + \frac{\partial^2 L_1}{\partial a_i \cdot \partial a_k} \cdot da_i \cdot \delta'a_k \dots \dots \dots (19)$$

$da_i$  bowiem jest niezależne od  $\delta a_k$ .

Wprowadziwszy warunek  $\delta'a_k = \delta a_k$ , otrzymamy po odjęciu od rów. 19-go row. 16-te

$$\delta' L_2 - \delta L_1 = \frac{\partial^2 L_1}{\partial a_i \cdot \partial a_k} \cdot da_i \cdot \delta a_k \dots \dots \dots (20)$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie 14-te i po rozdzieleniu przez  $\partial a_i$ , otrzymamy

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = \frac{\partial^2 L_1}{\partial a_i \cdot \partial a_k} \dots \dots \dots (21)$$

Dla szczególnego przypadku będzie

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_k} = \frac{\partial^2 L_1}{\partial a_k^2} \dots \dots \dots (22)$$

A więc możemy w dwojaki sposób obliczyć szukane pochodne: albo z równań 9-go i 11-go lub z równań 21-go i 22-go.

**7. Wzajemność pochodnych.** Obliczymy teraz stosunek  $\frac{\partial S_i}{\partial a_k}$  sposobem wyłożonym. W tem obliczeniu równ. 15-te pozostaje w swej mocy; w 16-tem równaniu zastąpimy przyrost  $\delta a_k$  przyrostem  $\delta a_i$ ; t. j. zastąpimy wskaźnik  $i$  wskaźnikiem  $k$ , ponieważ w danym razie odkształcamy układ, wydłużając pręt  $k$ -ty; w równaniach przeto od 17-go do 20-go zastąpimy wskaźniki  $i$  przez  $k$ , a  $k$  przez  $i$ , gdyż i w równaniach 4-tem i 3-ciem ta sama zmiana następuje, i otrzymamy dla danego przypadku zamiast równ. 21-ego równanie

$$\frac{\partial S_i}{\partial a_k} = \frac{\partial^2 L_1}{\partial a_k \cdot \partial a_i} \dots \dots \dots (23)$$

Wyrazy, stojące po prawej stronie równań 21-go i 23-go, są przy pewnych właściwościach funkcji 15-ej, — równe; a że właściwości te odpowiadają wogóle za wyjątkiem układów chwiejnych (t. j. o nieskończeniu małej ruchliwości) właściwościom geometrycznym układów, stosowanych w praktyce, możemy przeto powiedzieć, że wogóle

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = \frac{\partial S_i}{\partial a_k} \dots \dots \dots (24)$$

Ta właściwość jest wynikiem tej okoliczności, że różniczki  $\delta$  i  $d$  są od siebie niezależne, przeto różniczkowanie nie zmienia rezultatu.

Związek 24-ty można również wyrozumować z równania

$$\Sigma (S_k \cdot \delta a_k) = \delta L_1 \dots \dots \dots (25)$$

przyjawszy, że siły zewnętrzne posiadają funkcję sił, t. j. że wyraz pracy cząstkowej sił zewnętrznych jest całkowny co w przykładach praktycznych zwykle zachodzi, a więc i lewa strona tego równania powinna być całkowną, z czego wynikają bezpośrednio warunki matematyczne całkowności, wyrażone wzorem 24-ym, jako warunki całkowności różniczki  $\Sigma (S_k \cdot \delta a_k)$ ; rozumowanie to, aczkolwiek prowadzi do słusznych wyników, nie jest jednakże dostatecznie ścisłe, nie wyraża bowiem szczegółów postępowania, które doprowadziły nas do tegoż wyniku.

**8. Pręty względnie ekonomiczne.** Za pomocą wzorów wyprowadzonych zbadać można czy długość  $a_k$  pręta  $k$ -tego, odpowiada najmniejszej jego objętości, gdy zmieniać będziemy długość innego pręta  $a_i$ ; — pręt  $a_k$ , odpowiadający tym warunkom, nazwiemy ekonomicznym względem innego pręta, jak w danym razie względem  $i$ -tego. W razie jeżeli za pręt  $a_i$  obierzemy pręt  $a_k$ , to nazwiemy go prętem ekonomicznym względem samego siebie.

Przyjawszy, że przekrój pręta jest proporcjonalny do naprężenia, objętość jego będzie proporcjonalną do iloczynu  $(S_k \cdot a_k)$ ; iloczyn ten w przypadku ekonomiczności ma być minimum przy zmiennej  $a_i$ , t. j. powinien zachodzić związek

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (S_k \cdot a_k) = 0 \dots \dots \dots (26)$$



$S_k$  zależy w tym razie od  $a_i$ , wielkość zaś  $a_k$  jest nie zależna, byle tylko  $i$  nie było  $= k$   
Minimum (lub maximum) powyższego iloczynu będzie wtedy, gdy

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = 0 \dots \dots \dots (27)$$

lub inaczej ze wzoru 8'-go, gdy

$$p_{ki} = 0 \dots \dots \dots (28)$$

W tenże sposób znajdziemy, że warunkiem ekonomiczności pręta  $i$  tego  
względem  $k$ -tego będzie wyraz

$$\frac{\partial S_i}{\partial a_k} = 0; \quad \text{lub gdy} \quad p_{ik} = 0 \dots \dots \dots (29)$$

A ponieważ na zasadzie wzoru 24-go wzory 27-my i 29-ty muszą być sobie równe,  
przeto powiemy: względna ekonomiczność dwóch prętów jest wzajemną.

Znajdźmy teraz warunki ekonomiczności obranego pręta względem samego  
siebie; warunek minimum wyrazi się wzorem

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_k} a_k + S_k = 0$$

a że z równania 11-go

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_k} = - S_k \frac{\partial^2 a_k}{\partial a_k^2}; \quad \dots \dots \dots (30)$$

przeto pręt dany jest ekonomiczny względem samego siebie, gdy

$$a_k \cdot \partial^2 a_k = d a_k^2; \quad \text{inaczej gdy} \quad a_k \cdot p_{kk} = v^2_k \quad \dots \dots (31)$$

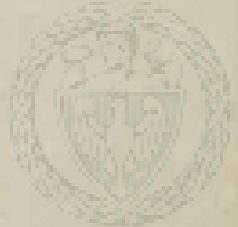
Z tego wzoru wynika, że pewien pręt może być ekonomiczny względem  
samego siebie, jeżeli przyśpieszenie wirtualne jest dodatnie, czyli jest skierowane  
w kierunku wzrastającej długości tego pręta; w przeciwnym razie nie może on być  
ekonomiczny; jest to oczywiście warunek konieczny, lecz, może być, że niewystarczający.

Wzory 28-y i 31-szy można wyrazić w formie ogólnej, korzystając ze wzoru  
3-go i 26-go; warunek przeto względnej ekonomiczności dwóch prętów wyrazić  
można w postaci dwóch równań

$$\partial (S_k \cdot da_i) = 0; \quad \text{oraz} \quad \partial (S_k \cdot a_k) = 0 \dots \dots \dots (32)$$

**9. Różniczka zupełna naprężenia.** Funkcja, rów. 1-sze, jaką wyrażamy na-  
prężenie musi być funkcją jednorodną zerowego stopnia względem długości; a więc  
jako taka posiada ona właściwość matematyczną, że suma iloczynów

$$\sum_i \left( \frac{\partial S_k}{\partial a_i} \cdot a_i \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (33)$$



Otrzymujemy przeto równanie, wyrażające związek pomiędzy pochodnymi cząstkowymi naprężeń i długościami prętów.

**10. Przyrosty naprężeń—wskutek wydłużeń niektórych lub wszystkich prętów.** Jeżeli przyjmiemy, że pewne pręty (lub wszystkie) danego układu otrzymują przyrosty  $\Delta a_i$  tak małe, że drugie ich potęgi można pominąć, to po podstawieniu w różniczkę zupełną rów. 1-go  $da_i = \Delta a_i$ , oraz  $dS_k = \Delta S_k$ , otrzymamy

$$\Delta S_k = \sum_i \frac{\partial S_k}{\partial a_i} \cdot \Delta a_i \quad \dots \quad (34)$$

gdzie wskaźnik  $i$  oznacza numer porządkowy prętów, którym nadaliśmy wydłużenia.

a) W szczególnym przypadku, jeżeli nadamy wszystkim prętom danego układu przyrosty  $\Delta a_i = \tau_0 \cdot a_i$ ; t. j. przyrosty proporcjonalne do ich długości, gdy  $\tau_0$  oznacza stały współczynnik proporcjonalności, — to na podstawie rów. 33-go otrzymamy

$$\Delta S_k = 0 \quad \dots \quad (35)$$

t. j. jeżeli wszystkie pręty danego układu doznają wydłużeń proporcjonalnych do swoich długości, to nowy układ—odkształcony—będzie posiadał te same naprężenia, pomimo zmiany swej postaci geometrycznej; oczywiście przy działaniu tych samych obciążeń, przyczepionych do węzłów tego układu. Właściwość tę można sobie również bezpośrednio wyjaśnić geometrycznym podobieństwem obydwóch kratownic. Przypadek ten zachodzi w praktyce, gdy np. wszystkie pręty danego układu zostają jednakowo ogrzane lub ochłodzone i są zrobione z materiału o jednakowej rozszerzalności cieplikowej. Jeżeli zaś współczynnik  $\tau$  nie będzie stały dla wszystkich prętów, to układ w ten sposób odkształcony wykaże naprężenia różne od naprężeń, występujących w nieodkształconym układzie; — pod działaniem tego samego obciążenia. Ażeby obliczyć w tym razie  $\Delta S_k$  należy zastosować wzór ogólny 34-ty.

b) Weźmy teraz pod uwagę wydłużenia prętów, wynikające z ich sprężystości.

W tym razie mamy

$$\Delta a_i = \frac{S_i \cdot a_i}{F_i \cdot E_i} \quad \dots \quad (36)$$

Przyjmijmy teraz, że układ jest *jednakowej wytrzymałości*, t. j. przyjmijmy, że dla każdego pręta, którego odkształcenie rozpatrujemy, zachodzi związek

$$\frac{S_i}{F_i \cdot E_i} = \pm \epsilon_0 \quad \dots \quad (37)$$

gdzie w tym razie  $S_i$  oraz  $\epsilon_0$  oznaczają liczby bezwzględne, skrócenia zaś lub wydłużenia prętów wyrażone są znakami  $\pm$ ; po podstawieniu tej wartości w równ. 36-te otrzymamy

$$\Delta a_i = \pm \epsilon_0 \cdot a_i \quad \dots \quad (38)$$

a po podstawieniu tej wartości w równ. 34-te otrzymamy

$$\Delta S_k = \varepsilon_0 \sum_{i+} \frac{\partial S_k}{\partial a_{i+}} \cdot a_{i+} - \varepsilon_0 \sum_{i-} \frac{\partial S_k}{\partial a_{i-}} \cdot a_{i-} = 0; \dots (39)$$

gdzie znaczki  $i+$  lub  $i-$  wskazują, iż należy daną sumę zestawić z wielkości, odnoszących się do prętów z dodatnimi naprężeniami, — ewent. z odjemnemi.

Dodawszy do równ. 39-go równ. 33-cie przemnożone przez  $\varepsilon_0$ , otrzymamy wzór

$$\Delta S_k = 2 \varepsilon_0 \cdot \sum_{i+} \frac{\partial S_k}{\partial a_{i+}} \cdot a_{i+} \dots (40)$$

Odejawszy zaś od równania 39-go równ. 33-e, przemnożone przez  $\varepsilon_0$ , otrzymamy

$$\Delta S_k = -2 \varepsilon_0 \cdot \sum_{i-} \frac{\partial S_k}{\partial a_{i-}} \cdot a_{i-} \dots (41)$$

w który wchodzi wielkości prętów, których naprężenia są odjemne; w poprzedni zaś wchodzi wielkości prętów, których naprężenia są dodatnie.

Z równań 40-go i 41-go wynika związek

$$\sum_{i+} \frac{\partial S_k}{\partial a_{i+}} \cdot a_{i+} = - \sum_{i-} \frac{\partial S_k}{\partial a_{i-}} \cdot a_{i-} \dots (42)$$

który jest tylko inną postacią równania 33-go. Oczywiście, w myśl wypowiedzianego założenia, wzory 40-ty i 41-szy odnoszą się tylko do kratownic o jednakowej wytrzymałości (równ. 37), których *wszystkie* pręty, wyznaczające ich postać, otrzymują przyrosty, określone równaniem 37-em.

Postępowanie to można zastosować również do przypadku, w którym dany układ składa się z dwóch układów o różnych wytrzymałościach. Przyjmijmy np., co się w praktyce może zdarzyć, że wszystkie pręty w dodatnich naprężeniach posiadają współczynnik  $\varepsilon_{0+}$  jednakowej wytrzymałości; a pręty z odjemnemi naprężeniami inny współczynnik  $\varepsilon_{0-}$  wtedy rów. 40-te otrzyma postać

$$\Delta S_k = (\varepsilon_{0+} + \varepsilon_{0-}) \cdot \sum_{i+} \frac{\partial S_k}{\partial a_{i+}} \cdot a_{i+} \dots (40a)$$

**11. Współczynnik zmienności naprężeń.** Aczkolwiek pochodna naprężenia pręta jest miarą zmienności tego naprężenia w stosunku do zmiany długości dowolnego pręta, jest jednakże niepraktyczną do porównywania tej zmienności w różnych układach, gdyż wartość jej zależy od obranych jednostek miary. W celu uniknięcia tego wprowadzimy współczynniki  $\gamma_i$  określone wzorem

$$\gamma_{ki} = - \frac{p_{ki}}{v_k \cdot v_i} \cdot a_i; \text{ lub } \gamma_{kk} = - \frac{p_{kk}}{v_k^2} \cdot a_k; \dots (43, 44)$$

Są to współczynniki niemianowane, które wyrażają stopień wrażliwości naprężenia w  $k$ -ym pręcie na zmianę długości pręta  $a_i$ , ewent. pręta  $a_k$ .

Z równ. 8'-ego otrzymamy:

$$\frac{\partial S_k}{S_k} : \frac{\partial a_i}{a_i} = \eta_{ki}, \text{ oraz } \frac{\partial S_k}{S_k} : \frac{\partial a_k}{a_k} = \eta_{kk} \dots \dots (45)$$

Obliczywszy przeto wartości tych współczynników dla różnych prętów, można obliczyć np. procentowy przyrost naprężenia dowolnego pręta; gdy dany będzie procentowy przyrost długości innego pręta.

Współczynnik  $\eta$  może być dodatni lub ujemny dla danych prętów; jeżeli będzie on dodatni, to znaczyć będzie, że ze wzrastającą długością pręta odkształcającego (np.  $i$ -tego) bezwzględna wartość naprężenia w rozpatrywanym (np.  $k$ -tym) pręcie będzie wzrastać; — i odwrotnie.

Współczynnik  $\eta$  będzie dodatni, gdy  $p_k < 0$  (przy założeniu, że  $v_k$  i  $v_i$  posiadają te same znaki) t. j. gdy prędkość wirtualna drugiego przesunięcia, przy warunku  $\delta L_1 = \delta L_2$ , będzie mniejsza niż była podczas pierwszego przesunięcia, co jest bezpośrednio zrozumiałe; z malejącą bowiem prędkością wirtualną — przy niezmiennej wartości pracy wirtualnej — naprężenie rośnie.

Ażeby pewien pręt był ekonomiczny względem innego pręta, którego długość zmieniamy, powinno być stosownie do wzoru 28-go

$$\eta_{ki} = 0; \dots \dots \dots (46)$$

ażeby zaś był pewien pręt ekonomiczny względem samego siebie, powinien stosownie do wzoru 31-go współczynnik

$$\eta_{kk} = -1; \dots \dots \dots (47)$$

współczynnik ten wyraża, że powiększając długość pręta ekonomicznego o pewien procent, o ten sam procent zmniejszać się powinno naprężenie jego, a więc i przekrój, t. j. objętość jego powinna pozostawać stałą przy zmiennej jego długości.

**12. Ilość niezależnych pochodnych cząstkowych danego układu.**

Pochodną niezależną nazwiemy taką pochodną, którą musimy obliczyć bezpośrednio z równania 1-go lub ze wzorów tutaj wyprowadzonych; pochodną zaś zależną nazwiemy taką, którą obliczyć można z innej pochodnej tego układu. Jeżeli np.

$\frac{\partial S_k}{\partial a_i}$  obierzemy za pochodną niezależną; to  $\frac{\partial S_i}{\partial a_k}$  będzie pochodną zależną.

Jeżeli układ posiada  $p$  prętów, to można napisać w ogóle  $p^2$  pochodnych cząstkowych, jednakże pomiędzy temi pochodnymi zachodzą pewne związki matematyczne, wynikające bądź z określenia różniczki cząstkowej, bądź ze związków, opartych na szczególnych geometrycznych właściwościach danego układu.

Mając na uwadze przemienność różniczkowania t. j. wzajemność przyrostów naprężeń, ilość  $r$  niezależnych pochodnych

$$r = p + \frac{1}{2} p (p - 1) = \frac{1}{2} p (p + 1);$$

następnie wskutek jednorodności funkcji  $f(a)$  (właściwość szczególna rozpatrywanych funkcji) przybywa jedno równanie pomiędzy temi pochodnymi, pozostaje przeto pochodnych niezależnych

$$r = \frac{1}{2} p(p+1) - 1; \dots \dots \dots (49)$$

ujęcie w formę matematyczną innych geometrycznych właściwości każdego układu powinno jeszcze zmniejszyć tę ilość.

**13. Wzór analityczny pochodnych.** W wyrazy pochodnych (rów. 8'-me) wchodzi niezależne zmienne  $v_k$  i  $v_i$ ; wartości jednakże tych pochodnych nie mogą zależeć od tych dowolnych wielkości; pochodne te mogą bowiem być funkcjami tylko współrzędnych węzłów danej kratownicy i sił ją obciążających; z tego należy wywnioskować, że te dowolne wielkości  $v_k$  i  $v_i$  lub też dwie inne, których  $v_k$  i  $v_i$  będą znanymi funkcjami,—muszą się we wzorach 8'-ym skrócić; a wtedy otrzymamy wzory pochodnych, w które będą wchodzić tylko pewne współrzędne węzłów kratownicy i sił ją obciążających; — będą to wzory analityczne szukanych pochodnych. Które współrzędne wejdą do tych wzorów, zależeć będzie od geometrycznej postaci kratownicy i sposobu obciążenia, co należy dla każdego układu obliczyć.

**14. Przykład.** W celu unaocznienia postępowania oraz w celu sprawdzenia w szczególnych przykładach wyprowadzonych wzorów, wezmę do obliczenia wspornik, złożony z 2 prętów  $a_1$  i  $a_2$ ; z których pręt  $a_1$  ślizgać się może końcem B po pionowej kierownicy, drugi zaś koniec połączony jest za pomocą przegubu C z końcem pręta  $a_2$ , którego drugi koniec może się obracać około nieruchomego przegubu A; w przegubie C przyczepiony jest ciężar P.

Wartość funkcji sił wyrazi się w danym razie wzorem

$$L_1 = P [H_0 - \sqrt{a_2^2 - a_1^2}] \dots \dots (49)$$

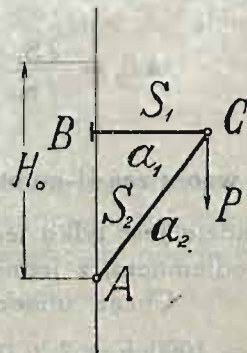
gdzie  $H_0$  oznacza odległość jakiegoś dowolnie obranego lecz stałego poziomu od punktu nieruchomego A.

Obliczywszy pochodne cząstkowe, otrzymamy

$$S_1 = \frac{\partial L_1}{\partial a_1} = \frac{a_1}{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}} \cdot P; \dots \dots (50)$$

w tenże sposób otrzymamy

$$S_2 = \frac{\partial L_1}{\partial a_2} = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}} \cdot P. \dots \dots (50')$$



Rys. 1.

Słuszność tych wyników można stwierdzić z odpowiedniego trójkąta sił.

Gdy następnie pręt  $a_1$  wydłużymy t. j. wielkość  $a_1$  zastąpimy w równaniu 50-tem wielkością  $a_1 + da_1$ , wtedy obliczymy  $S_1'$ , a odjawszy te wielkości jedną od drugiej, otrzymamy po rozdzieleniu przez  $da_1$  pochodną

$$\frac{\partial S_1}{\partial a_1} = \frac{a_1^2}{(a_2^2 - a_1^2)^{3/2}} \cdot P; \dots \dots (51)$$

w tenże sposób

$$\frac{\partial S_2}{\partial a_2} = \frac{a_1^3}{(a_2^2 - a_1^2)^{3/2}} \cdot P \dots \dots \dots (52)$$

Wzory te są zatem drugimi pochodnymi funkcji sił, jak to było w ogólnym przypadku wykazane.

Różniczkując równania 50-te i 50'-e względem  $a_2$  i  $a_1$  napiszemy

$$\frac{\partial S_1}{\partial a_2} = -\frac{a_1 a_2}{(a_2^2 - a_1^2)^{3/2}} \cdot P \dots \dots \dots (53)$$

oraz

$$\frac{\partial S_2}{\partial a_1} = -\frac{a_1 a_2}{(a_2^2 - a_1^2)^{3/2}} \cdot P \dots \dots \dots (53')$$

Równość tych dwóch pochodnych jest stwierdzeniem równ. 24-ego, wyrażającego wzajemność pochodnych. Po przemnożeniu równ. 51-ego przez  $a_1$ ; — a równ. 53-go przez  $a_2$  i po ich dodaniu otrzymamy zero; w ten sposób stwierdzamy równanie 33-cie.

Przyrost całkowity, pochodzący od odkształceń sprężystych obydwóch prętów, gdy układ przyjmiemy o jednakowej wytrzymałości, napiszemy z równania 50-go

$$dS_1 = \frac{\partial S_1}{\partial a_1} \cdot da_1 + \frac{\partial S_1}{\partial a_2} \cdot da_2 ; \text{ następnie}$$

$$\Delta S_1 = \frac{\partial S_1}{\partial a_1} \cdot \epsilon_0 a_1 - \frac{\partial S_1}{\partial a_2} \cdot \epsilon_0 \cdot a_2 = 2\epsilon_0 \frac{a_2^2 a_1}{(a_2^2 - a_1^2)^{3/2}} P = 2 \frac{\partial S_1}{\partial a_1} a_1 \quad (54)$$

ze wzoru zaś 41-go otrzymamy:  $\Delta S_1 = -2\epsilon_0 \frac{\partial S_1}{\partial a_2} \cdot a_1 = 54$ -temu; w danym bowiem układzie jest tylko jeden pręt z dodatnim naprężeniem, jak również jeden tylko z odjemnem; z jednego przeto tylko pręta obliczymy całkowity przyrost naprężenia.

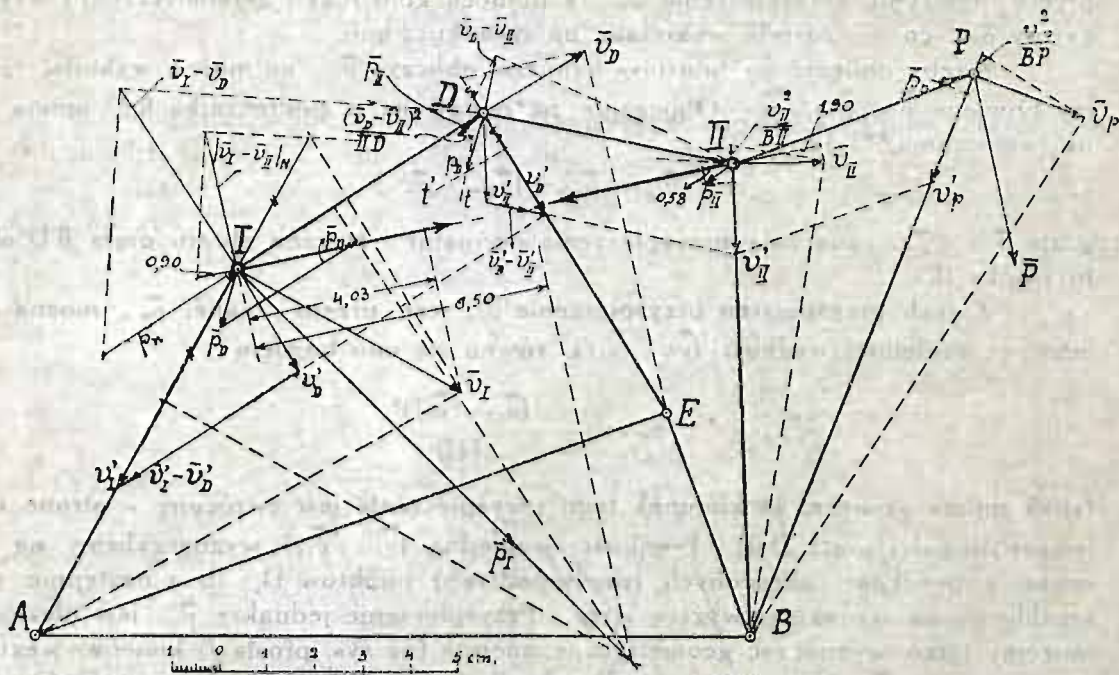
Chcąc unaocznic ten wynik liczbowo, przyjmijmy  $a_2 = 5$ ;  $a_1 = 4$ ; przy  $\sigma = 1000$ ;  $E = 2 \times 10^6$ ;  $\epsilon_0 = \frac{\sigma}{E} = 0,5 \times 10^{-3}$ , a otrzymamy z równania 54-go

$$\Delta S_1 = 2 \times 0,5 \times 10^{-3} \cdot \frac{5^3 \times 4}{3^3} \cdot P = 0,004 P$$

zważywszy, że  $S_1 = \frac{4}{3} P$ , otrzymamy przyrost  $\Delta S_1 = 0,3\% S_1$  po sprężystym odkształceniu prętów całego układu; — przyjmąwszy go o jednakowej wytrzymałości.

15. Przykład obliczenia wykreślnego. Weźmy pod rozpatrywanie układ przegubowy, podany na rys. 2-gim, składający się z dwóch trójkątów I D II

oraz AEB połączonych trzema prętami; do jednego z prętów przymocowany jest trójkąt, na którego wierzchołku przyczepiono siłę P dowolnie skierowaną.



Rys. 2.

Obliczmy ze wzoru 44-tego współczynnik  $\eta_{kk}$  dla pręta I II, który nazwiemy prętem  $k$ -tym. Zadanie polega na obliczeniu  $v_k$  i  $p_{kk}$ , gdy obierzemy jedną niezależną zmienną i przyjmiemy warunek, że  $\delta L_1 = \delta' L_1$ . Prędkość  $v_k$  obliczymy ze wzoru 1-go § 17-go

$$v_k = [\bar{v}_{II} - \bar{v}_I]_{ok}.$$

Jako niezależną obierzemy prędkość punktu I-go i obliczymy prędkości pozostałych węzłów za pomocą metody prędkości obróconych (prostopadłych); — na rys. 2-gim prędkości te oznaczono kreskami; po przeprowadzeniu odpowiednich równoległych znajdziemy  $v'_D, v'_{II}$  i  $v'_P$ , a ztąd i właściwe prędkości  $\bar{v}_D, \bar{v}_{II}$  i  $\bar{v}_P$ ; prędkości te wyrażają pierwsze przesunięcie wirtualne.

Następnie wyobraźmy sobie układ przyprowadzony do pierwotnej postaci i przekształćmy go na inny, przez wydłużenie pręta a: o da:; wydłużenie to możemy przyjąć równe przesunięciu wirtualnemu  $\delta a_k$  i w ten sposób wykonamy dwa po sobie następujące przesunięcia, a z ich różnicy obliczymy szukane przyspieszenie  $p_k$ ; przyspieszenie to obliczymy ze wzoru 2-go § 17-tego. Ażeby wyznaczyć przyspieszenie  $p_{II}$  i  $p_I$ , jakie mamy w tym wzorze, nadamy danemu układowi drugie przesunięcie wirtualne, uzależnione od pierwszego warunkiem  $\delta L_1 = \delta' L_1$ ; warunek ten wyrazi się kinematycznie, że wektor przyspieszenia punktu przyłożenia siły P powinien być prostopadły do kierunku tej siły; z tego warunku otrzymujemy kąt, jaki tworzy kierunek tego przyspieszenia z promieni wodzącym BP; ponieważ wielkość tego przyspieszenia jest dla naszego obliczenia niepotrzebną, przejdziemy przeto bezpośrednio do obliczenia przyspieszenia punktu II. Kierunek

tego przyspieszenia tworzy z promieniem wydającym B II kąt, jaki tworzył wektor przyspieszenia punktu P z promieniem BP; a że składowa normalna  $p_{II} = v_{II}^2 / R$ , przeto obliczymy przyspieszenie  $\bar{p}_{II}$  za pomocą konstrukcji geometrycznej i wyznaczymy  $\bar{p}_{II}$ , co też zostało wykonane na rysunku 2-gim.

Ażeby obliczyć  $\bar{p}_I$ , musimy najpierw obliczyć  $\bar{p}_D$ , co można wykonać: znamy bowiem  $\bar{v}_{II}$ ,  $\bar{p}_{II}$  i  $\bar{v}_D$ . Obliczenie to, podawane w podręcznikach,\*) opiera się na twierdzeniu,\*\*) że:

$$\bar{p}_D = \bar{p}_{II} + [\bar{p}_{w,n} + \bar{p}_{w,t}];$$

gdzie  $\bar{p}_{w,n}$  i  $\bar{p}_{w,t}$  oznaczają przyspieszenia normalne i styczne obrotu pręta II D około środka II.

Z tych przyspieszeń przyspieszenie  $\bar{p}_{II}$  jest przeto znane;  $\bar{p}_{w,n}$  można obliczyć ze względnej prędkości  $(\bar{v}_D - \bar{v}_{II})$ , równa się ono bowiem

$$p_{w,n} = - \frac{(\bar{v}_D - \bar{v}_{II})^2}{D_{II}}$$

(znak minus oznacza, że kierunek tego przyspieszenia jest zwrócony w stronę malejącej długości pręta  $D_{II}$ ). Prędkość względną  $(\bar{v}_D - \bar{v}_{II})$  wyznaczyliśmy na rysunku z prędkości obróconych (prostopadłych) punktów D i II; a następnie wykreśliliśmy na rysunku powyższy wzór. Przyspieszenie jednakże  $\bar{p}_{w,t}$  jest nieznanne, możemy tylko wyznaczyć geometryczne miejsce (na rys. prosta  $t$ ) końców wektora przyspieszenia  $\bar{p}_D$ . Następnie punkt D zakreśla koło, którego środek leży w E i którego promień jest ED; ponieważ prędkość  $v_D$  jest znaną, przeto przyspieszenie normalne tego punktu — wzdłuż promienia ED jest możliwe do wyznaczenia; przyspieszenia zaś stycznego tego obrotu nie znamy, możemy jednakże, znając przyspieszenie normalne, wyznaczyć miejsce geometryczne końców wektora  $\bar{p}_D$ ; jest nim na rysunku prosta  $t'$ ; przecięcie się  $t$  i  $t'$  wyznacza koniec szukanego wektora  $\bar{p}_D$ .

W tenże sposób z  $\bar{p}_D$ ,  $\bar{v}_D$  i  $\bar{v}_I$  wyznaczamy  $\bar{p}_I$ ; co też zostało wykonane na rysunku 2-gim.

Znając  $\bar{v}_I$ ,  $\bar{v}_{II}$ ,  $\bar{p}_I$  i  $\bar{p}_{II}$ , wyznaczymy  $v_k$  i  $p_k$  ze wzorów 1-go i 2-go § 17-go; zrzutowawszy wektory tych równań na kierunek pręta  $a_k$ , odczytamy następnie z rysunku:

$$v_k = -4,03 + 1,90 = -2,13 \text{ cm'sek}$$

$$p_k = -6,50 - 0,58 + 0,90 = -6,18 \text{ cm'sek}^2$$

skąd

$$\frac{p_k}{v_k^2} = -1,36 \text{ cm}^{-1}.$$

Odczytamy z rysunku  $a_k = 10,6 \text{ cm}$ , przeto

$$\tau_k = +1,36 \times 10,6 = 14,4.$$

To znaczy, jeżeli wydłużymy pręt  $a_k$  o 1%, to można powiedzieć z dostateczną dokładnością, że bezwzględna wartość  $S_k$  powiększy się o 14,4%.

\*) A. Christman i H. Baer. Grundzüge d. Kinematik, str. 69.

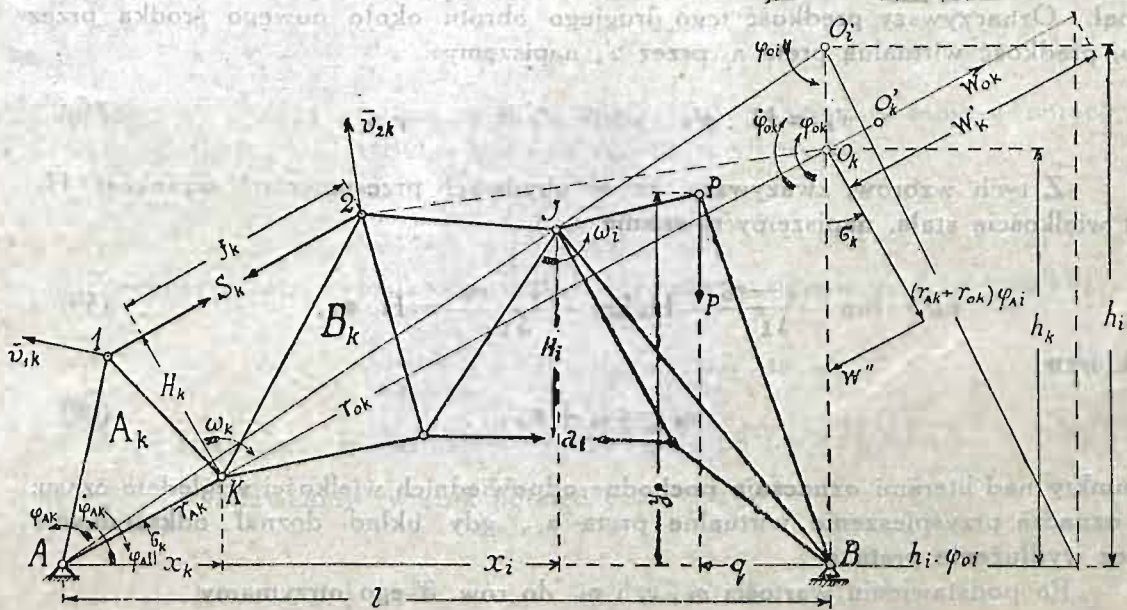
\*\*) H. Czopowski. Mechanika II. 1921 r. § 72.



Ponieważ w danym przykładzie  $S_k = -0,68 P$ , przeto ze wzoru 11'-go

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = +0,68 P \cdot (-1,36) = -0,93 P \text{ kg cm.}$$

**16. Przykład obliczenia wyrazu analitycznego pochodnej.** Obliczymy wzór pochodnej w postaci analitycznej podług wskazówek, podanych w Nr. 13-tym, kratownicy, złożonej z trójkątów, przedstawionej na rys. 3-cim; obliczymy najpierw wzór dla  $\partial S_k : \partial a_i$ .



Rys. 3.

Do obliczenia tego zastosujemy jako niezależne zmienne prędkości względne kątowe, z jakimi obracają się boki trójkątów, wyprowadzone z wierzchołków, leżących naprzeciw odpowiednich prętów; jak to zaraz bliżej objaśnimy.

W celu obliczenia  $v_k$   $k$ -tego pręta, przetnijmy pręt  $a_k$  i nadajmy powstałej części danego układu  $B_k$  obrót wirtualny około środka chwilowego obrotu  $O_k$  z prędkością  $\varphi_{0k}$ ; w związku z tym obrotem część  $A_k$  danego układu wykona obrót około przegubu  $A_k$  z prędkością  $\varphi_{01k}$  i wskutek tych obrotów węzły 1-szy i 2-gi, które łączył dany pręt  $a_k$ , otrzymają prędkości  $\bar{v}_{2k}$  i  $\bar{v}_{1k}$ ; z tych prędkości obliczymy przez zrzutowanie ich na kierunek pręta  $a_k$

$$v_k = [\bar{v}_{2k} - \bar{v}_{1k}]_{a_k}$$

gdzie znaczek  $a_k$  wskazuje, że należy wektory, ujęte w nawias, zrzutować na kierunek pręta  $a_k$ .

Po przekształceniach, podanych w Nr. 2-gim uzupełnień § 17-tego, rów. 5-te napiszemy:

$$v_k = H \cdot \omega_k; \text{ gdzie } \omega_k = \varphi_{01k} + \varphi_{0k}, \dots \dots \dots (56)$$

a  $\varphi_{Ak}$  i  $\varphi_{ok}$  oznaczają prędkości obrotowe około środków chwilowych obrotów;  $H_k$  oznacza prostopadłą odległość punktu K od kierunku pręta  $a_k$ .

Przyprowadźmy teraz dany układ do pierwotnej postaci geometrycznej, wydłużmy pręt  $a_i$  o przyrost  $da_i$ ; wydłużenie to wyrazimy prędkością względną  $v_i$  węzłów, które łączą pręt  $a_i$ , a napiszemy wzór

$$v_i = H_i \cdot \omega_i, \text{ w którym } \omega_i = \varphi_{Ai} + \varphi_{oi} \dots \dots \dots (57)$$

Drugi obrót wirtualny nowego układu odbędzie około innego środka obrotu, niż poprzedni; wskutek bowiem wydłużenia pręta  $a_i$  poprzedni środek  $O_k$  się przesunął. Oznaczywszy prędkość tego drugiego obrotu około nowego środka przez  $\varphi'_{o,k}$ , prędkość wirtualną pręta  $a_k$  przez  $v'_k$  napiszemy

$$v'_k = H_k \cdot \omega'_k; \text{ gdzie } \omega'_k = \varphi'_{Ak} + \varphi'_{ok} \dots \dots \dots (58)$$

Z tych wzorów, zważywszy, że w obydwóch przesunięciach wysokość  $H_k$  jest wielkością stałą, napiszemy równanie

$$p_{ki} = \lim \frac{v'_k - v_k}{\Delta t} = H_k \lim \frac{\omega'_k - \omega_k}{\Delta t} = H_k \dot{\omega}_k \dots \dots \dots (59)$$

w którym

$$\dot{\omega}_k = \dot{\varphi}_{Ak} + \dot{\varphi}_{ok}; \dots \dots \dots (60)$$

a punkty nad literami oznaczają pochodne odpowiednich wielkości względem czasu;  $p_{ki}$  oznacza przyspieszenie wirtualne pręta  $a_k$ , gdy układ doznał odkształcenia przez wydłużenie pręta  $a_i$ .

Po podstawieniu wartości  $v_k$ ,  $v_i$  i  $p_{ki}$  do rów. 8'-ego otrzymamy

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = \frac{S_k}{H_i} \cdot \frac{\dot{\omega}_{ki}}{\omega_k \cdot \omega_i} \dots \dots \dots (61)$$

W myśl rozumowań § 13-tego wyrazimy  $\dot{\omega}_{ki}$  wielkościami  $\dot{\omega}_k$  oraz  $\dot{\omega}_i$ , — i w tym celu zastosujemy rów. 60-te.

Pomiędzy  $\varphi_{A,k}$  i  $\varphi_{o,k}$  jest zależność kinematyczna, wynikająca z połączenia obydwóch części kratownicy przegubem K. Ażeby ten związek obliczyć, weźmiemy pod uwagę, że podczas obrotów wirtualnych układ  $B_k$  otrzymuje w pierwszym okresie czasu prędkość obrotową  $\varphi_{o,k}$  około  $O_k$ , a w drugim okresie czasu — obrót  $\varphi'_{o,k}$  około  $O'_k$ ; te dwa obroty można zastąpić przez dwa obroty  $\varphi_{o,k}$  i  $\varphi'_{o,k}$  około jednego środka  $O_k$  i przez ruch postępowy, prostopadły do kierunku  $\overline{O_k O'_k}$  którego prędkość =  $\overline{O_k O'_k} \cdot \varphi_{o,k}$ ; a więc przyspieszenie punktów układu  $B_k$  wyrazi się sumą przyspieszeń: przyspieszenia, pochodzącego z obrotu  $\varphi_{o,k}$  i  $\varphi_{o,k}$  około  $O$  i z przyspieszenia ruchu postępowego =  $\frac{\overline{O_k O'_k}}{dt} \cdot \varphi_{o,k}$  (jak zwykle podczas toczenia się jednej krzywej po drugiej). Oznaczywszy wyraz  $\frac{\overline{O_k O'_k}}{dt}$  przez  $\omega_{o,k}$ , jako prędkość przesunięcia się  $O_k$  wzdłuż osi  $AO_k$ , zważywszy następnie, że przegub K musi

mieć to samo przyspieszenie tak podczas obrotu około A jak i około  $O_k$  napiszemy równość przyspieszeń stycznych tego punktu w nast. postaci

$$r_{Ak} \cdot \dot{\varphi}_{Ak} = r_{ok} \cdot \dot{\varphi}_{ok} + w_{ok} \cdot \varphi_{ok} \dots \dots \dots (62)$$

gdzie  $w_{ok}$  oznacza prędkość punkta  $O_k$  wzdłuż  $r_{ok}$ ; wyraz  $w_{ok} \cdot \varphi_{ok}$  jest również rzutem przyspieszenia  $\ddot{p}_o$  na  $r_o$ .

Prędkość tę obliczymy, jako prędkość złożoną: z prędkości punktu  $O_k$  po osi  $AO_k$ , gdy prosta  $BO_k$  się przesuwa a oś  $AO_k$  pozostaj w spoczynku; wartość tej prędkości, którą oznaczymy literą  $w'$ , odczytamy z rysunku

$$w' = h_i \cdot \varphi_{oi} : \cos \sigma_k ; \dots \dots \dots (63)$$

i z prędkości  $w''_{ok}$  tegoż punktu po  $BO_k$ , gdy  $AO_k$  wyobrazimy sobie w obrocie około A z prędkości  $\dot{\varphi}_{Ak}$ , a  $BO_k$  — w spoczynku; prędkość ta

$$w'' = - (r_{Ak} + r_{ok}) \cdot \dot{\varphi}_{Ai} \cdot \text{tg } \sigma_k ;$$

Prędkość przeto wypadkowa wzdłuż  $AO_k$  równa się sumie tych prędkości:

$$w_{ok} = \frac{h_i \cdot \varphi_{oi}}{\cos \sigma_k} - (r_{Ak} + r_{ok}) \cdot \dot{\varphi}_{Ai} \cdot \text{tg } \sigma_k \dots \dots \dots (64)$$

Po podstawieniu tej wartości w rów. 62-gie i po podstawieniu

$$\dot{\varphi}_{Ai} = \varphi_{oi} \cdot \frac{r_{oi}}{r_{Ai}} \text{ otrzymamy związek pomiędzy } \dot{\varphi}_{Ak} \text{ i } \dot{\varphi}_{ok} :$$

$$\dot{\varphi}_{Ak} = \frac{r_{ok}}{r_{Ak}} \cdot \dot{\varphi}_{ok} + \left[ \frac{h_i}{r_{Ak} \cdot \cos \sigma_k} - \frac{r_{Ak} + r_{ok}}{r_{Ak}} \cdot \frac{r_{oi}}{r_{Ai}} \cdot \text{tg } \sigma_k \right] \varphi_{oi} \cdot \dot{\varphi}_{ok} \dots (65)$$

następnie po podstawieniu

$$\text{tg } \sigma_k = \frac{h_k}{l} ; \quad \varphi_{oi} = \omega_i \cdot \frac{x_i}{l} ; \quad \text{oraz } \varphi_{ok} = \omega_k \cdot \frac{x_k}{l} \dots \dots (66)$$

otrzymamy

$$\dot{\varphi}_{Ak} = \frac{l - x_k}{x_k} \cdot \dot{\varphi}_{ok} + \left[ \frac{h_i}{x_k} - \frac{l}{x_k} \cdot \frac{l - x_i}{x_i} \cdot \frac{h_k}{l} \right] \omega_k \omega_i \cdot \frac{x_i}{l} \cdot \frac{x_k}{l}$$

a dodawszy do tego  $\dot{\varphi}_{ok}$ , otrzymamy

$$\dot{\omega}_k = \dot{\varphi}_{ok} \cdot \frac{l}{x_k} + \left[ \frac{h_i}{x_k} - \frac{l}{x_k} \cdot \frac{l - x_i}{x_i} \cdot \frac{h_k}{l} \right] \frac{x_k}{l} \cdot \frac{x_i}{l} \omega_k \cdot \omega_i \dots \dots (67)$$

po uporządkowaniu, napiszemy

$$\dot{\omega}_k = \dot{\varphi}_{ok} \cdot \frac{l}{x_k} + \left[ \frac{h_i + h_k}{l} \cdot \frac{x_i}{l} - \frac{h_k}{l} \right] \omega_k \cdot \omega_i \dots \dots \dots (68)$$



Teraz należy wyrazić  $\dot{\varphi}_{ok}$  przez  $\varphi_{ok}$  oraz  $\varphi_{oi}$  a następnie przez  $\omega_k$  i  $\omega_i$ . Wartość  $\dot{\varphi}_{ok}$  obliczymy z warunku  $\delta^2 L = 0$ ; dla obliczenia tego przyjmijmy np., że siła, obciążająca daną kratownicę, jest pionowo skierowana i przyczepiona do części kratownicy, ograniczonej przegubem I oraz podporą B (rys. 3-ci); wtedy, podczas obrotu wirtualnego  $\varphi_{ok}$ , siła P wykona pracę

$$\frac{\delta L_1}{\delta t} = - P \cdot q \cdot \varphi_{ok};$$

gdzie q oznacza odległość środka  $O_k$  od kierunku siły P.

Po odkształceniu kratownicy zrobimy drugi obrót wirtualny i otrzymamy związek, wynikający z warunku  $\delta^2 L_1 = 0$

$$\frac{d}{dt} (q \cdot \varphi_{ok}) = 0 \quad (69)$$

w którym  $\varphi_{ok}$  i q są wielkościami zmiennymi; po zróżniczkowaniu, otrzymamy

$$\dot{\varphi}_{ok} = - \frac{dq}{q} \cdot \varphi_{ok} \quad (70)$$

Wartość  $\frac{dq}{dt}$  obliczymy z wydłużenia pręta  $a_i$ , wyrażonego przez obrót około  $O_i$ , a mianowicie

$$\frac{dq}{dt} = h_i \cdot \varphi_{oi} - (h_i - y_p) \cdot \varphi_{oi}; \quad \text{skąd} \quad \frac{dq}{dt} = y_p \cdot \varphi_{oi}; \quad \text{a więc}$$

$$\dot{\varphi}_{ok} = - \frac{y_p}{q} \cdot \varphi_{ok} \cdot \varphi_{oi}; \quad (71)$$

po zastąpieniu  $\varphi_{ok}$  i  $\varphi_{oi}$  z rów. 66-go przez  $\omega_k$  i  $\omega_i$  otrzymamy

$$\dot{\varphi}_{ok} = - \frac{y_p}{q} \cdot \omega_i \cdot \omega_k \cdot \frac{x_i}{l} \cdot \frac{x_k}{l}; \quad (72)$$

a po podstawieniu tej wartości w równ. 68-me

$$\dot{\omega}_k = - \frac{y_p}{q} \cdot \frac{x_i}{l} \cdot \frac{x_k}{l} \cdot \frac{1}{x_k} \cdot \omega_i \cdot \omega_i + \left[ \frac{h_i + h_k}{l} \cdot \frac{x_i}{l} - \frac{h_i}{l} \right] \omega_k \cdot \omega_i \quad (68')$$

i wreszcie po podstawieniu tej wartości w 61 i po skróceniu odpowiednich wartości otrzymamy szukaną pochodną dla przypadku, gdy siła obciążająca połączona jest z częścią kratownicy, leżącą pomiędzy przegubem I a podporą przesuwną B,

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_i} = \frac{S_k}{H_i} \cdot \left[ \frac{y_p}{q} \cdot \frac{x_i}{l} - \left( \frac{h_i + h_k}{l} \cdot \frac{x_i}{l} - \frac{h_i}{l} \right) \right] \quad (73)$$

Obliczmy teraz  $\partial S_k : \partial a_k$ , dla tego samego układu. Zasady obliczenia w tym razie są te same, jakie stosowaliśmy poprzednio; w szczegółach jednakże przebieg obliczenia jest inny. Po przecięciu pręta  $a_k$  nadamy układowi obrót z prędkością  $\varphi_{ok}$  około środka chwilowego obrotu  $O_k$ ; jest to pierwszy obrót wirtualny; następnie mamy układ odkształcić, odkształcenie to, jak w danym razie, wyrazimy tymże obrotem około  $O_k$ , co pozwoli nam przyjąć obrót odkształcający równy wirtualnemu i nadamy temu układowi drugi obrót wirtualny  $\varphi'_{ok}$  około  $O'_k$ . Te dwa obroty zastąpimy (jak poprzednio) obrotami  $\varphi_{ok}$  i  $\varphi'_{ok}$  około środka  $O_k$ , który wskutek odkształcenia układu otrzymał prędkość  $w_k$ , — i odpowiednim przyspieszeniem postępowym. Stosując wzory poprzednie otrzymamy podczas obydwóch obrotów wirtualnych

$$v_k = H_k \cdot \omega_k ; \text{ oraz } v'_k = H'_k \cdot \omega'_k \dots \dots \dots (74)$$

Różnica tych wzorów z poprzednimi jest ta, że w danym razie wskutek odkształcenia pręta  $a_k$  wielkość  $H_k$  się zmieniła.

Z tych wzorów po odjęciu jednego od drugiego mamy:

$$p_{kk} = \frac{d}{dt} (H_k \cdot \omega_k) \dots \dots \dots (75)$$

Możnaby z tego wzoru obliczyć drogą analityczną przyspieszenie  $p_{kk}$ ; lecz w celu otrzymania większej przejrzystości postępowania zastosujemy, jakieśmy to uczynili poprzednio, sposób kinematyczny.

Obliczenie to wykonane zostało w uzupełnieniu Nr. 2-em § 17 rów. 13-te, z którego napiszemy

$$p_{kk} = H_k \dot{\omega} - \frac{f_k (a_k - f_k)}{a_k} \cdot \omega^2_k \dots \dots \dots (76)$$

Związek pomiędzy  $\dot{\omega}_k$  i  $\omega_k$  znajdziemy z warunku  $\partial^2 L_1 = 0$ .

Przyjmijmy, że ciężar  $P$  połączony jest z częścią  $B_k$  kratownicy (jakieśmy przyjęli poprzednio), to warunek  $\partial^2 L = 0$ ; wyrazimy

$$d(q \cdot \varphi_{ok}) = 0; \text{ skąd } \dot{\varphi}_{ok} = - \frac{\frac{dq}{dt}}{q} \cdot \varphi_{ok} \dots \dots \dots (77)$$

w danym razie odczytamy z rysunku

$$\frac{dq}{dt} = - y_p \cdot \varphi_{ok}$$

a więc, po podstawieniu w poprzednie, otrzymamy

$$\dot{\varphi}_{ok} = \frac{y_p}{q} \cdot \varphi^2_{ok} = + \frac{y_p}{q} \cdot \omega^2_k \cdot \left( \frac{x_k}{l} \right)^2 \dots \dots \dots (78)$$

Jest to równanie jednakowe z 72-em, gdy podstawimy w 72-gie  $\omega_i = -\omega_k$ ; strzałki bowiem obrotów przyjęliśmy różne. Wartość przeto  $\dot{\omega}_k$  otrzymamy z 68-go po podstawieniu:  $\omega_i = -\omega_k$ ;  $x_i = x_k$ ;  $h_i = h_k$ , a więc

$$\dot{\omega}_k = \dot{\varphi}_{\rho k} \cdot \frac{1}{x_k} - \left[ \frac{2h_k}{1} \cdot \frac{x_k}{1} - \frac{h_k}{1} \right] \cdot \omega_k^2 \dots \dots (79)$$

Po podstawieniu w to równanie wartości  $\dot{\varphi}_{\rho k}$  z 78-go, i podstawivszy następnie tę wartość  $\dot{\omega}_k$  w 76-te i 11'-te, otrzymamy

$$\frac{\partial S_k}{\partial a_k} = -\frac{S_k}{H_k} \cdot \left[ \frac{y_\rho}{q} \cdot \frac{x_k}{1} - \left( \frac{2h_k}{1} \cdot \frac{x_k}{1} - \frac{h_k}{1} \right) \right] + \frac{S_k}{H_k^2} \cdot \frac{f_k (a_k - f_k)}{a_k} \quad (80)$$

które jest analogiczne do rów. 73-go; różni się od niego drugim wyrazem, stojącym po prawej stronie równania, który jest wynikiem obrotu pręta  $a_k$  w dwóch po sobie następujących okresach czasu; i znakiem pierwszego wyrazu, który jest wynikiem, że  $\omega_i = -\omega_k$ .

Równania 73-cie i 80-te są szukanemi równaniami analitycznemi pochodnych naprężeń względem długości dowolnego pręta, rozpatrywanej kratownicy.

7. **Uzupełnienia obliczeń. № 1.** Ażeby obliczyć  $v_k$  i  $p_k$  (rys. 2-gi) t. j. ruch względny punktów I-go i II-go, jaki one wykonają na prostej, łączących je, z prędkości i przyspieszeń bezwzględnych tych punktów, — zatrzymamy ruch punktu np. I-go, dodawszy do danego układu wektory ( $-\bar{v}_{Ik}$ ) i ( $-\bar{p}_{Ik}$ ); wtedy punkt I-szy pozostanie w spoczynku, punkt II-gi zaś posiadać będzie prędkość ( $\bar{v}_{IIk} - \bar{v}_{Ik}$ ) i przyspieszenie ( $\bar{p}_{IIk} - \bar{p}_{Ik}$ ). Punkt przeto II-gi będzie w ruchu, złożonym: z ruchu unoszącego obrotowego prostej  $a_k$  i z ruchu względnego wzdłuż tej prostej. Do obliczeń zastosujemy twierdzenie o ruchu złożonym, że  $\bar{v}_b = \bar{v}_a + \bar{v}_w$ , t. j. że prędkość bezwzględna  $\bar{v}_b$  równa się prędkości unoszącej i względnej; w naszym przykładzie:  $\bar{v}_b = (\bar{v}_{II} - \bar{v}_I) = \bar{v}_a + \bar{v}_w$ ;  $\bar{v}_w = \bar{v}_k$ ; a zważywszy, że  $\bar{v}_a$  jest prostopadła do  $a_k$  i zrzutowawszy prędkości składowe powyższego równania na oś  $a_k$ , otrzymamy

$$v_k = |\bar{v}_{II} - \bar{v}_I|_{a_k} \dots \dots \dots (1)$$

W tenże sposób rozumując, napiszemy, że przyspieszenie wypadkowe  $p_b$  (inaczej przyspieszenie względne punktu II-go względem I-go)

$$\bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_a + \bar{p}_{cor.}$$

Zrzutowawszy to równanie na oś  $a_k$  i zważywszy, że rzut  $|p_{cor.}|_{a_k} = 0$ ; oraz, że

$$|\bar{p}_a|_{a_k} = -\frac{(\bar{v}_{II} - \bar{v}_I)^2}{a_k}; \quad |\bar{p}_w|_{a_k} = p_k; \quad |\bar{p}_b|_{a_k} = |\bar{p}_{II} - \bar{p}_I|_{a_k}$$

gdzie wskaźnik  $n$  oznacza rzut na normalną do  $a_k$ , — otrzymamy

$$p_k = (\bar{p}_{2k} - \bar{p}_{1k})_{a_k} + \frac{1}{a_k} (\bar{v}_{2k} - \bar{v}_{1k})^2_n; \dots \dots \dots (2)$$

№ 2. Prędkości punktów 1-go i 2-go (rys. 3-ci) wyrazimy wzorami wektorowymi; (porów. H. Czopowski — Mechanika IV § 105):

$$\bar{v}_{2k} = V \bar{O}_k \bar{2}. \bar{\varphi}_{ok} \text{ i } \bar{v}_{1k} = V \bar{A} \bar{1}. \bar{\varphi}_{Ak} \dots \dots \dots (3)$$

Podstawimy w te wzory

$$\bar{O}_k \bar{2} = \bar{r}_{ok} + \bar{K} \bar{2}, \text{ oraz } \bar{A} \bar{1} = \bar{r}_{Ak} + \bar{K} \bar{1}$$

i otrzymamy, po przemnożeniu wektorem, wzięwszy pod uwagę, że

$$V \bar{r}_{ok} \cdot \bar{\varphi}_{ok} = V \bar{r}_{Ak} \cdot \bar{\varphi}_{Ak};$$

$$\bar{v}_{2k} - \bar{v}_{1k} = V \bar{K} \bar{2} \cdot \bar{\varphi}_{ok} - V \bar{K} \bar{1} \cdot \bar{\varphi}_{Ak} \dots \dots \dots (4)$$

Po zrzutowaniu tych wektorów na kierunek  $a_k$  otrzymamy:

$$v_k = |\bar{v}_{2k} - \bar{v}_{1k}|_{a_k} = H_k \cdot \omega_k; \text{ gdzie } \omega_k = \varphi_{Ak} + \varphi_{ok} \dots \dots \dots (5)$$

a po zrzutowaniu tych wektorów (rów. 4-te) na normalną  $n$  do kierunku  $a_k$ , otrzymamy

$$v_{kn} = |\bar{v}_{2k} - \bar{v}_{1k}|_n = f_k \cdot \varphi_{ok} - (a_k - f_k) \varphi_{Ak} \dots \dots \dots (6)$$

gdzie  $f_k$  oznacza rzut promienia  $\bar{K} \bar{2}$  na  $a_k$ ; a odcinek  $(a_k - f_k)$  jest rzutem promienia  $\bar{K} \bar{1}$  na  $a_k$ .

№ 3. Przyspieszenie  $p_k$  obliczymy ze wzoru 2-go

$$p_k = |\bar{p}_{2k} - \bar{p}_{1k}|_{a_k} + \frac{1}{a_k} (\bar{v}_{2k} - \bar{v}_{1k})^2_n \dots \dots \dots (7)$$

Przyspieszenia  $\bar{p}_{2k}$  i  $\bar{p}_{1k}$  wyobrazimy sobie złożone z przyspieszeń stycznych i normalnych, i napiszemy

$$\bar{p}_{2k} = V \bar{O}_k \bar{2} \cdot \bar{\varphi}_{ok} - \bar{O}_k \bar{2} \cdot \varphi_{ok}^2 + \bar{p}_{ok} \dots \dots \dots (8)$$

gdzie  $\bar{p}_{ok}$  oznacza przyspieszenie punktu  $O_k$ ;  $\dot{\varphi}$  — przyspieszenie kątowe; w ten że sposób

$$\bar{p}_{1k} = V \bar{A} \bar{1} \cdot \bar{\varphi}_{Ak} - \bar{A} \bar{1} \cdot \varphi_{Ak}^2 \dots \dots \dots (9)$$

Warunek, że przegub  $K$  ma to samo przyspieszenie jak z obrotu około  $A$ ; tak i z obrotu około  $O_k$ , — pozwoli napisać nast. równanie

$$V \bar{r}_{.Ak} \cdot \dot{\varphi}_{.Ak} - \bar{r}_{.Ak} \cdot \varphi^2 = V \bar{r}_{ok} \cdot \dot{\varphi}_{ok} - \bar{r}_{ok} \cdot \varphi_{ok}^2 + \bar{p}_{ok} \dots (10)$$

podstawimy w rów. 8-me i 9-te, (jak w № 1-ym):

$$\bar{O}_k^2 = \bar{r}_{ok} + \bar{K}^2, \quad \text{oraz} \quad \bar{A}_k^1 = \bar{r}_{.Ak} + \bar{K}^1$$

a po odjęciu równania 9-go od 8-go, otrzymamy

$$\bar{p}_{2k} - \bar{p}_{1k} = [V \bar{K}^2 \cdot \dot{\varphi}_{ok} - \bar{K}^2 \cdot \varphi_{ok}^2] - [V \bar{K}^1 \cdot \dot{\varphi}_{.Ak} - \bar{K}^1 \cdot \varphi_{.Ak}^2] (11)$$

Dla równania tego znaleźć można bardzo bezpośrednią interpretację kinematyczną.

Po zrzutowaniu tego równania na kierunek  $a_k$  i zważywszy, że rzuty wektorów  $K1$  i  $K2$  na normalną do  $a_k$  równają się  $H_k$ , a rzuty tych wektorów na  $a_k$  równają się odcinkom  $f_k$  oraz  $(a_k - f_k)$ , (rys. 3-ci) napiszemy

$$[\bar{p}_{2k} - \bar{p}_{1k}]_{a_k} = H_k \cdot \dot{\omega}_k - f_k \cdot \varphi_{ok}^2 - (a_k - f_k) \cdot \varphi_{.Ak}^2 \dots (12)$$

gdzie  $\dot{\omega}_k = \dot{\varphi}_{ok} + \dot{\varphi}_{.Ak}$ .

Po podstawieniu tej wartości i wartości z rów. 6-go do rów. 7-go otrzymamy

$$p_k = H_k \cdot \dot{\omega} - f_k \cdot \varphi_{ok}^2 - (a_k - f_k) \cdot \varphi_{.Ak}^2 + \frac{1}{a_k} [f_k \cdot \varphi_{ok} - (a_k - f_k) \cdot \varphi_{.Ak}]^2$$

po wykonaniu działań i uproszczeń

$$p_k = H_k \cdot \dot{\omega}_k - \frac{1}{a_k} f_k (a_k - f_k) \cdot \omega_k^2 \dots (13)$$

gdzie  $\omega_k = \varphi_{.Ak} + \varphi_{ok}$ .

## RÉSUMÉ.

Dans le travail présent l'auteur détermine la valeur limite du rapport de l'accroissement de l'effort intérieur à l'accroissement de longueur d'une barre de la construction en treillis statiquement déterminée, reposant sur les appuis également statiquement déterminés. Soit  $S_k$  l'effort intérieur de la barre d'ordre  $k$  et  $a_i$  la longueur de la barre d'ordre  $i$ , l'auteur calcule la limite  $\Delta S_k : \Delta a_i$  en admettant, que les forces extérieures, supposées appliquées aux noeuds, changent de position avec les noeuds en conservant ses directions et ses valeurs. En supposant que l'effort est une fonction de la longueur de barre et des forces (équation 1), le problème est réduit au calcul des équations (2).

Pour arriver aux résultats l'auteur applique le principe des travaux virtuels.



Soit  $L_1$  la fonction de forces extérieures, appliquées au treillis donné;  $L_2$  la fonction de forces correspondante au treillis déformé, où la barre  $a_i$  a été remplacée par une autre de la longueur  $a_i + da_i$ . Dans ce cas on obtient effort  $S_k$  de la barre du treillis, non déformé de l'équation du travail virtuel  $S_k \delta a_k = \delta L_1$ . De la même façon on obtient pour le treillis déformé  $S'_k \delta' a_k = \delta' L_2$ .

Comme les deux vitesses virtuelles sont tout à fait indépendantes on est libre d'admettre  $\delta L_1 = \delta' L_2$ .

De cette manière on obtient pour les dérivées cherchées les expressions (9) et (11). L'auteur applique aux résultats obtenus le sens cinématique en introduisant les équations (12) et (13), où la lettre  $p$  signifie l'accélération virtuelle analogue à la vitesse virtuelle, et arrive aux équations (8') et (11'). L'auteur obtient une autre forme de la dérivée cherchée par l'équation (3) et (4) en partant de l'égalité  $\delta a_k = \delta' a_k$ , au lieu de  $\delta L_1 = \delta' L_2$ . En passant pour les transformations renfermées dans les équations (14) jusqu'à (20) l'auteur arrive à la forme de dérivées, représentées par les équations (21) et (22), et en faisant les restrictions nécessaires, obtient l'équation (24) exprimant le rapport mutuel des accroissements des efforts.

Dans la suite —  $S_k$  étant une fonction homogène du degré zéro des longueurs de barres, on obtient l'équation (33). En appliquant cette équation aux déformations élastiques de toutes les barres supposées d'égale résistance, on arrive à l'expression de la différentielle totale correspondante aux barres soumises les unes aux efforts de traction, les autres aux efforts de compression. De cette façon on arrive à l'équation (40) et (41).

Pour exprimer l'influence du changement de longueur d'une barre sur l'effort de n'importe quelle autre barre, l'auteur propose d'introduire un coefficient abstrait  $\eta$ , ce qui est fait dans les équations (43) et (44).

Pour construire l'expression analytique de la dérivée cherchée, l'auteur calcule les valeurs de  $p$  et  $v$  en fonctions des variables cinématiques indépendantes et des coordonnées correspondantes. A la fin dans les équations (8') (11'), les variables indépendantes se réduisent de sorte qu'ils restent seulement les fonctions de coordonnées.

Dans l'article 14 l'auteur applique sa théorie à un simple exemple. L'art. 15 renferme la recherche graphique de la dérivée  $\partial S_k : \partial a_k$  pour un treillis (fig. 2). Dans ce bût on introduit la condition  $\delta L_1 = \delta' L_2$  en forme de la relation cinématique, basée sur le fait, que l'accélération du point d'application de la force pendant les deux allongements virtuels possède une direction normale à la direction de la force. On calcule alors le vecteur d'accélération de deux noeuds auxquels s'appuie la barre  $a_k$  et enfin par l'équation (55) l'accélération virtuelle  $p$ . En mesurant en échelle les longueurs représentant  $p_k$ ,  $v_k$  l'auteur obtient les valeurs numériques de la dérivée et du coefficient  $\eta_{kk}$ .

L'article (16) renferme l'exemple du calcul analytique de la dérivée; les résultats sont représentés par les formules (73), (80).



НП. 469