

D

Nr. 1918

Politechnika Warszawska

ZADANIA I METODY
MATEMATYKI WIELKOŚCI
PRZYBLIŻONYCH.

NAPISAL

H. CZOPOWSKI
INŻYNIER.

Odbitka z Przeglądu Technicznego; r. 1917.

WARSZAWA.

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego, ul. Czackiego 3/5.

—
1917.

ZADANIA I METODY
MATEMATYKI WIELKOŚCI
PRZYBLIŻONYCH.

NAPISAŁ

H. CZOPOWSKI
INŻYNIER.

Odbitka z Przeglądu Technicznego; r. 1917.

WARSZAWA.

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego, ul. Czackiego 3/5.

—
1917.

BIBLIOTEKA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

27854

D.1918

Za pozwoleniem cenzury niemieckiej 18/XI. 1917.

BG05A/013-04

1. Uwagi ogólne.

W naturze niema punktów, linii i powierzchni w tem znaczeniu, w jakim je matematyka stosuje. Niema też materji, któraby odpowiadała prawu Hooke'a; niema takiego płynu, któryby odpowiadał warunkom, jakie przyjmujemy do zestawienia równań hydrodynamicznych; niema gazu, któryby odpowiadał prawu Mariotte'a; niema zjawiska cieplnego, odpowiadającego prawu Carnota! Jednakże obliczenia konstrukcyi technicznych opieramy na tych prawach, na tych założeniach, nie odpowiadających rzeczywistym faktom.

Badacze przyrody sądzą, powiada F. Klein ¹⁾, str. 129, że związki, pomiędzy zmiennymi parametrami danego zjawiska fizycznego, wyrażają się funkcyjami analitycznymi; otóż mniemanie to, powiada on, nie jest uzasadnione; funkcyje te są tylko przybliżonym wyrazem tych związków; a stosujemy je w postaci analitycznej, przytem możliwie prostej, tylko w celu uproszczenia sobie tych rozpatrywań ²⁾ ³⁾.

Poincaré ⁴⁾ na str. 181 powiada: „prawa natury zachowują swą prostotę tylko w eterze ⁵⁾; ale właściwa materya

¹⁾ F. Klein. Anwendung der Differential- und Integralr. auf Geometrie. 1902, Teubner.

²⁾ P. Duhem. Teorye fizyczne ⁷⁾. E. Mach. Die Mechanik, oraz odczyty popularne o ekonomii myślenia.

³⁾ Również M. Smoluchowski. „Poradnik dla samouków“ II, str. 42.

⁴⁾ Wissenschaft u. Hypothese w tłum. niemieckiem.

⁵⁾ Można powiedzieć ogólniej: „—w warunkach, przez nas ustalonych“.

staje się dla nas coraz zawilszą; wszystko, co o jej właściwościach mówimy, jest tylko obrazem przybliżonym“; dalej powiada tenże filozof: „przed 50 laty wyznawano zasadę, że natura lubi prostotę“, lecz obserwacje zjawisk nie stwierdziły tego; prawa bowiem fizyczne, ujęte w znane funkcyjne, są tylko przybliżonym wyrazem zjawisk, zachodzących w rzeczywistości; prawa takie są stosowane tylko w celu ułatwienia rozpatrywań, w celu zaoszczędzenia myślenia. Funkcyjne przeto analityczne dają związki tylko wyidealizowanych obrazów, nieistniejących w naturze.

Ażeby wyrazić tę przybliżoność, F. Klein ¹⁾ proponuje, w celu wyrażenia funkcyjonalnej zależności zmiennych parametrów danego zjawiska, utworzyć sobie zamiast pojęcia funkcyjonalnej analitycznej pojęcie pasa funkcyjonalnego (Funktionsstreifen), wewnątrz którego znajdują się punkty, których spólrzędne są wartościami wielkości obserwowanych. Pasy takich punktów według niego, nie należy wyobrażać sobie ściśle ograniczonymi, lecz przeciwnie należy je sobie wyobrazić z granicami nie wyraźnie zanikającymi na naszym rysunku; z takimi tylko pasami funkcyjonalnymi mamy do czynienia w rzeczywistości, a nie z liniami analitycznymi; taki też zbiór punktów otrzymałby fizyk ze swych doświadczeń, gdyby przedstawił geometrycznie uczynione pomiary z całą ścisłością.

Pojęcia te doprowadzają nas do wniosku, że każdy związek, pomiędzy zmiennymi parametrami wszelkich fizycznych zjawisk, powinien dać się wyrazić nieskończoną liczbą funkcyjonalnych; byle tylko krzywa, obrazująca dany związek, znajdowała się wewnątrz pasa funkcyjonalnego. Matematyka przeto powinna dać nam sposoby znajdowania takich funkcyjonalnych, któreby wyrażały w granicach dokładności naszych pomiarów związki zmiennych parametrów danego zjawiska, t. j., powinna dać sposoby znajdowania nieskończenie wielu funkcyjonalnych, równouprawnionych do wyrażania szukanej zależności.

Stosowanie pojęcia linii analitycznych zamiast pojęcia pasów funkcyjonalnych doprowadza nas często do sprzeczności pomiędzy wynikami teorii a praktyki. Funkcyjona np. e^x .

która jest wynikiem prawa Mariotte'a⁶⁾, nie posiada dla skończonych wartości x ani max. ani minimum; w praktyce jednakże przy wyznaczeniu np. najkorzystniejszego napełnienia cylindra parowego wyróżnia się max. dla pewnych ściśle określonych wartości x .

Nie lepiej sprawa stoi z liczbami, które otrzymujemy z pomiarów i które stosujemy do naszych obliczeń. Liczby, o ile wyrażają pewne wielkości przez nas dowolnie przyjęte, mogą być uważane za ściśle; lecz jeżeli są wynikiem pomiarów, to nie są takimi. Jeżeli np. na zasadzie pomiarów powiemy, że długość danego pręta wynosi 10 *mm*; to również dobrze powiedzieć można, że pręt dany posiada długość 10,01 *mm* lub 10,02, lub 9,99 *mm* i t. p., zależnie od dokładności, jaką przypisujemy naszym instrumentom mierniczym; nie jedną przeto wielkością, lecz nieskończoną ilością liczb określić należy długość jednego i tego samego pręta.

Do liczb nie zupełnie ścisłych doprowadzają nas również obliczenia wartości pierwiastków, obliczenia ilorazu dwóch liczb, obliczenia wartości funkcji trygonometrycznych, logarytmicznych, funkcji eliptycznych i t. p.

Można uważać, iż wymienione tutaj niedokładności funkcji, któremi wyrażamy prawa fizyczne, oraz niedokładności liczb, wynikających z pomiarów, znajdują swą przyczynę we względności naszego poznania; lecz w naukach technicznych popelniamy inne jeszcze niedokładności, które popelniać jesteśmy zmuszeni wskutek odmiennego charakteru zagadnień techniki w stosunku do zagadnień teoretycznych, t. j. do zagadnień, przez nas postawionych. Nauki teoretyczne, jakimi są dla techniki mechanika układów sztywnych, płynnych i gazowych, oraz termodynamika i elektrodynamika, mają charakter nauk ścisłych, lecz oczywiście tylko w stosunku do założeń, na jakich oparły one swe obliczenia; a że założenia te nie są zupełnie zgodne z warunkami, w których odbywa się w rzeczywistości wyrażone przez te wzory zjawisko fizyczne, wyniki przeto wogóle nauk teoretycznych mają dla nas wartość ograniczo-

⁶⁾ Przy obliczaniu np. pracy rozprężających się gazów w cylindrze silnika.

na. Z rozwojem też nauk teoretycznych, powstał rozdźwięk między teorią a tak zwaną praktyką, — rozdźwięk, który doprowadził praktyków do lekceważenia nauk teoretycznych; teoretyków zaś do zasklepienia się w dziedzinie, oderwanej od zjawisk rzeczywistych.

Potrzeby jednakże życia praktycznego nasuwały uczo-
nym zagadnienia, których rozwiązania życie się dopominało; były to zagadnienia, odnoszące się do budowy dróg, mostów, budowli wodnych i budowy maszyn. Lecz do rozwiązania tych zadań nie nadawały się bezpośrednio wzory np. Lagrange'a, Eulera i t. p.; opierały się one bowiem na założeniach, które nie zupełnie odpowiadały warunkom fizycznym, jakie występowały w danych zagadnieniach; należało przeto stworzyć nowe metody badań tych zjawisk, nowe sposoby wyrażenia ich wzorami matematycznymi, oczywiście nie zarzucając bez potrzeby metod, jakie stosowały nauki teoretyczne i nie zarzucając wyników przez nie zdobytych.

Terenem, na którym ta praca się rozpoczęła, była „École polytechnique“ w Paryżu, która zgromadziła do tej pracy naukowej tak teoretyków jak i praktyków.

Nazwiska francuzów: Coriolisa, Naviera, Ponceleta przytaczane są jako nazwiska założycieli dzisiejszych nauk technicznych; w Niemczech bowiem panująca w owe czasy filozofia czystego myślenia (Schelling, Hegel), która uważała, że wszelkie zastosowania nauki do praktyki „zaśmiecają“ naukę, nie sprzyjała rozwojowi nauk stosowanych; w Anglii zaś zaspakajano się w owe czasy czysto praktycznym, empirycznym załatwianiem zagadnień technicznych. Navier w dziale konstrukcyi statycznych; Coriolis i Poncelet, w dziale obliczeń konstrukcyi maszynowych, oraz cały zastęp badaczy szkoły francuskiej, jak: Borda, Dubuat, Girard w dziale hydrauliki stworzyli metody badania zjawisk, spotykanych w technice, oraz stworzyli metody matematycznego ich formułowania; i w ten sposób dali oni podwaliny dzisiejszym naukom technicznym.

Zagadnienia techniczne są o wiele więcej skomplikowane od zagadnień teoretycznych; warunki bowiem, w jakich występują zjawiska świata technicznego, są tak różnorodne pod względem form materialnych i pod względem sił, w nich występujących, że uświadomienie sobie ich wszy-

stkich, a tem bardziej ujęcie ich wzorami matematycznymi okazało się zbyt trudne, a nieraz nawet niemożliwe; przeto szczególne trudności przy teoretycznem ich traktowaniu wypływają z wymagania, że zadania techniczne muszą być rozwiązane w postaci skończonej, w postaci liczbowej; na co teorye matematyki nie zawsze pozwalają. W celu przeto ujęcia tych zjawisk w formy matematyczne przyjmowali ci uczeni pod uwagę tylko te warunki, które wywierały znaczniejszy wpływ na przebieg danego zjawiska; niektóre zaś z nich pomijali, jako mające mały wpływ na jego przebieg; następnie zaś w celu otrzymania możliwie zgodnych z rzeczywistością wzorów, wyrównywali różnice empirycznie zdobytymi współczynnikami. Wzory przeto, jakie otrzymujemy z tego rodzaju rozpatrywań, są przybliżone; a nieraz nawet bardzo dalekie od wyników rzeczywistych. Myśl przeto konstruktora, korzystającego z takich wzorów, skierowana być powinna przedewszystkiem na określenie granic dokładności, w jakich taki wzór może być stosowany.

Niedokładności wzorów, jakie wynikają z pominięcia w rachunku pewnych warunków fizycznych danego zjawiska, nazwiemy błędami teorii danego zagadnienia; i tak błędem teorii np. obliczenia statycznego kratownic jest założenie, że pręty jej są połączone z sobą przegubowo; błędem teorii regulatora było rozpatrywanie jego ruchu ze stanowiska tylko statycznego a nie kinetycznego; błąd ten jednakże był w tym razie tak wielki, że musiano stworzyć nową teoryę regulatora, uwzględniającą również warunki dynamiczne danego zjawiska.

Oprócz tych błędów teorii posiadamy jeszcze w technice cały szereg błędów, zawartych w współczynnikach empirycznych, które stosujemy w naszych wzorach; takimi są współczynniki wytrzymałości, wpływów, tarcia, przewodnictwa i t. p.

Mając przeto do rozporządzenia tego rodzaju nie zupełnie ścisły materiał naukowy, możemy, przy stosowaniu jego do obliczeń, odpowiednio zmienić postępowanie matematyczne, które stosujemy zwykle do wielkości i związków ścisłych. Zmiany te wypowiemy w sposób następujący:

- 1) Wobec tego, że funkcyje matematyczne, wyrażające

związki zmiennych parametrów zjawisk fizycznych wogóle, dają tylko przybliżony obraz rzeczywistego ich przebiegu, można każdy związek wyrazić nieskończenie wielu funkcjami. Zadaniem w tym razie matematyki wielkości przybliżonych jest wskazanie sposobów odnajdywania takich funkcji; takimi są np. wzory interpolacyjne, funkcje przybliżone, szeregi, przybliżony rachunek waryacyjny i t. p.

2) Wobec tego, że do celów praktycznych potrzebne są wyniki dokładne tylko w granicach naszych pomiarów, wszelkie przeto działania matematyczne takimi wielkościami można uprościć, odrzucając np. pewne liczby czy też wyrazy, jako nie mające wpływu na wynik liczbowy, który powinien się mieścić tylko w granicach praktycznej dokładności; drugim przeto zadaniem matematyki wielkości przybliżonych jest wskazanie takich sposobów działań matematycznych, które z najmniejszym nakładem pracy doprowadzają do praktycznych wyników, takimi są działania skończone na liczbach nie zupełnie ścisłych, całkowanie i różniczkowanie przybliżone, obliczenie przybliżone pierwiastków równań i t. p.

Dział matematyki, w którym bierze się pod uwagę tego rodzaju uproszczenia, nazwano matematyką wielkości przybliżonych w przeciwstawieniu do matematyki ścisłej, która nie pozwala na tego rodzaju uproszczenia.

F. Klein¹⁾ na str. 12 daje następujące określenie: Matematyka przybliżona jest to ta część matematyki, z której rzeczywistość korzystamy w zastosowaniach; matematyka zaś ścisła jest tym szkieletem, po którym matematyka przybliżona się wspina. Przy tem wyjaśnia on, że nazwa matematyki przybliżonej nie obniża poziomu tego działu matematyki; gdyż, ściśle mówiąc, nie jest to matematyka przybliżona, lecz jest to matematyka funkcji i liczb przybliżonych (dlatego też daliśmy nazwę niniejszej pracy: matematyka wielkości przybliżonych a nie matematyki przybliżonej).

Nie należy jednakże sądzić, powiada w tej kwestyi P. Duhem²⁾, ażeby matematyka przybliżona była matematyką mniej ścisłą, pobieżną, przeciwnie jest ona pełniejszą,

¹⁾ La théorie physique, son objet et sa structure. P. Duhem, (w tłum. rosyjskiem, str. 170).

więcej rozwinięta, wymaga ona często metod, przekraczających daleko znane metody algebry społecznej.

W matematyce ścisłej mamy do czynienia z wielkościami, odnoszącymi się do obrazów abstrakcyjnych, nieistniejących w naturze; matematyka zaś wielkości przybliżonych uczy nas operować wielkościami, odnoszącymi się bezpośrednio do obrazów rzeczywistych, fizycznych i posługuje się ona wielkościami takimi, jakimi one są w rzeczywistości, t. j. nieokreślonymi w granicach dokładności naszych pomiarów lub też w granicach naszych założeń teoretycznych.

Matematyka ścisła pomimo, a właściwie wskutek swej ścisłości nie wystarcza dla badań technicznych, nie zawsze bowiem pozwala doprowadzić obliczenia do odpowiedzi liczbowych; nie wystarcza ona, gdyż doprowadza po większej części do takich równań, które jeżeli są różniczkowe, nie zawsze dają się wyrazić funkcjami znanymi, potocznie mówiąc, nie zawsze dają się całkować; lub też, jeżeli są skończone, nie zawsze dają się rozwiązać metodami matematyki ścisłej⁸⁾; matematyka zaś wielkości przybliżonych mając znaczną swobodę wyboru funkcji, trudności tego rodzaju zawsze może ominąć. Następnym brakiem matematyki ścisłej, występującym przy stosowaniu jej do obliczeń zagadnień technicznych (wogóle fizycznych), jest niemożność bezpośredniego stosowania jej metod do funkcji empirycznych, które w praktyce zwykle wyrażamy wykresami lub szeregami zależnych od siebie liczb. Te więc powody skłoniły matematyków, chcących stosować metody matematyki ścisłej do zadań praktycznych, do opracowania matematyki praktycznej, do której zaliczyć należy matematykę wielkości przybliżonych.

Celem niniejszego artykułu jest objaśnienie w krótkości czytelnika, jakiego rodzaju zadania rozwiązuje bezpośrednio ten dział matematyki i jakich metod do tego używa.

⁸⁾ Równanie algebraiczne całkowite możemy rozwiązać sposobem algebraicznym tylko do czwartej potęgi włącznie; dla równań przestępnych nie mamy ogólnych rozwiązań. Równania różniczkowe w wielu przypadkach nie dają się wyrazić funkcjami znanymi.

2. Działania nad liczbami nie zupełnie ścisłymi. ⁹⁾ ¹⁰⁾ ¹¹⁾ ¹²⁾

Jeżeli np. liczbę 0,523, której dalszych liczb dziesiętnych nie jesteśmy w stanie podać, mamy pomnożyć przez drugą podobnie niezupełnie ścisłą, np. 0,871 (są to np. pomiary boków prostokąta), to po zwykłym przemnożeniu otrzymamy liczbę o 6-iu dziesiętnych cyfrach 0,455 533. Lecz liczba ta nie jest jedyną, która wyraża fakt fizyczny odpowiadający danemu iloczynowi (jak w przykładzie powyższym nie jest jedyną, która wyraża wielkość pola danego prostokąta), gdyż właściwe liczby mieszczą się pomiędzy 0,523 i 0,524, oraz pomiędzy 0,871 i 0,872; a więc wartość iloczynu znajduje się pomiędzy liczbą $0,523 \times 0,871 = 0,455\ 533$, a liczbą $0,524 \times 0,872 = 0,456\ 928$; a ponieważ trzy ostatnie cyfry dziesiętne tych iloczynów są nieokreślone, wystarczy przeto, gdy napiszemy: $0,523 \times 0,871 = 0,456$; wypisywanie dalszych cyfr jest zbyteczne, do dokładności bowiem wyniku nie przyczyniają się. Celem praktycznym przeto sposobu wykonania tego mnożenia jest takie jego wykonanie, któreby dało tylko wynik 0,456, gdyż obliczenie pozostałych cyfr jest bezpożyteczną robotą.

Przykład ten nasuwa następujące ogólne zadania, które powtarzają się przy wszystkich tego rodzaju obliczeniach:

1) obliczyć granice błędu największego, który wynika z działań na liczbach nie zupełnie ścisłych, jeżeli dane są granice największych błędów liczb poszczególnych, stosowanych do tych działań;

2) obliczyć, z jaką dokładnością powinny być dane liczby, ażeby wynik działań posiadał pewną określoną dokładność;

3) znaleźć sposób wykonania wskazanych działań, ażeby nie wkładać w nie zbytecznej pracy.

⁹⁾ Literatura E. d. M. W. (Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften). I. 2, str. 978.

¹⁰⁾ Uwagi ogólne o liczbach nieściślych; S. Kwietniewski w Poradniku dla samouków. I, str. 33 i nast.

¹¹⁾ Podręcznik: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Dr. J. Lüroth. Teubner 1900.

¹²⁾ Podręcznik: Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden. Dr. Otto Biermann. Vieweg, 1905.

Odpowiedź na pierwsze pytanie otrzymamy stosując wzór Taylora, jeżeli bowiem przez a, b, c oznaczymy wielkości ściśle, przez a', b', c' przybliżone, wzięte np. z pomiarów, a przez $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ różnice między niemi, to każdą $f(a, b, c)$ można wyrazić, z pominięciem wyższych potęg wielkości, które są bardzo małe, wzorem:

$$f(a, b, c) - f(a', b', c') = \frac{\partial f}{\partial a} \Big|_{a=a'} \cdot \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \Big|_{b=b'} \cdot \Delta b.$$

Jeżeli mamy przeto np. iloczyn dwóch niezupełnie ścisłych liczb ($a' \cdot b'$), to błąd największy, jaki powstaje z pomnożenia tych wielkości, obliczymy ze wzoru:

$$\Delta(a' \cdot b') = a' \cdot \Delta b + b' \cdot \Delta a.$$

W przykładzie np. poprzednim błąd ten równa się:

$$0,523 \times 0,001 + 0,872 \cdot 0,001 \cong 0,001,$$

wielkości bowiem 0,001 są największymi błędami mnożników; w danym razie powiemy, że dokładność tego iloczynu dochodzi do 1/1000.

Metoda ta daje nam również możliwość dania odpowiedzi i na drugie pytanie. Pytanie to może być np. tego rodzaju: z jaką dokładnością należy zmierzyć boki danego prostokątnego pola, ażeby obliczona wielkość tego pola była dokładną do 1 m^2 .

Sposoby liczenia t. zw. skróconego, sformułowane w pytaniu 3-em, polegają w przypadku mnożenia na mnożeniu wyżej stojących cyfr z niżej stojącymi; np. iloczyn dwóch poprzednich cyfr otrzymamy sposobem skróconym, gdy 523 pomnożymy najpierw przez 8, a następnie odrzuciwszy 3, pomnożymy je przez 7; a następnie odrzuciwszy 2, pomnożymy przez 1; mnożenie to przedstawi się w sposób następujący:

$$\begin{array}{r} 523 \\ 871 \\ \hline 4184 \\ 366 \\ 5 \\ \hline 0,4555 \end{array}$$

i wynik ten napiszemy 0,456, określając jego dokładność ze wzoru poprzedniego do 1/1000.

Dzielenie skrócone wykonywa się w ten sposób, że zamiast dopisywać zera, odrzuca się po jednej liczbie z dziel-

nika. Zrozumiałem teraz się staję, jakim jest nie tylko niezbędne do liczenia, lecz i wystarczające pod względem ścisłości, narzędzie suwaka rachunkowego.

Szczególnych ułatwień doznaje liczenie liczbami małymi, można np. napisać: jeżeli $\alpha < 1$; $(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha$;

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha; \sqrt[n]{\frac{1+\alpha}{1-\beta}} = 1 + \frac{1}{n}(\alpha + \beta); \text{ a więc napiszemy}$$

$$\text{bezpośrednio } \sqrt[3]{\frac{1,02}{0,96}} = 1,02.$$

3. Obliczenie przybliżonych pierwiastków równań dowolnych ze współczynnikami liczbowymi ¹³⁾.

Jeżeli mamy równanie dowolne z jedną niewiadomą $f(x) = 0$, to postępowanie obliczenia jego pierwiastków może polegać na tem, że znajdujemy najpierw w jakibądź sposób (np. drogą prób lub drogą wykreślną) pierwiastek przybliżony danego równania, którego wartość oznaczmy literą x ; a następnie obliczymy poprawki tej wartości z dowolną dokładnością, opierając się na tem, że różnica $\Delta x_1 = x - x_1$ jest bardzo mała, i wyższe jej potęgi w szeregu Taylora, na jaki rozwiniemy daną funkcję $f(x_1 + \Delta x_1)$, odrzucimy, tak iż wartość poprawki może być łatwo obliczona; jest to sposób Newtonowski.

Takie samo postępowanie może być stosowane do obliczenia pierwiastków wielu jednoczesnych równań z wieloma niewiadomymi. Jeżeli mamy np. dwa dowolnej postaci równania $f_1(x, y) = 0$ oraz $f_2(x, y) = 0$, które w przybliżeniu są zaspakajane przez wartości x_1 i y_1 , to podstawivszy w nie $x = x_1 + \Delta x_1$ i $y = y_1 + \Delta y_1$, gdzie Δx_1 i Δy_1 oznaczają szukane poprawki, i rozwiniąwszy dane dwa równania na szeregi, otrzymamy dwa równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi Δx_1 i Δy_1 , gdyż wyższe potęgi tych wielkości można odrzucić. Zadanie więc w tym razie spro-

¹³⁾ Podręcznik: Dr. C. Runge. Praxis der Gleichungen. Sammlung Schubert XIV.

wadza się do obliczenia niewiadomych z dwóch równań liniowych.

W szczególnym przypadku jeżeli mamy dwie wartości, które, podstawione w daną funkcję, dają wartości ze znakami różnymi, to metodą, zwaną „regula falsi“, również można obliczyć pierwiastki z dowolną dokładnością, przyjmując np. że pomiędzy temi przybliżonemi wartościami, które wyobrażamy sobie w wykresie $y = f(x)$ w postaci dwóch punktów, przeprowadzamy prostą i szukamy jej przecięcia się z osią x ; a obliczywszy tę spółrzedną przyjmujemy następnie dwie nowe wartości bliskie poprzednim i postępujemy w ten sposób dalej, aż otrzymamy wartość pierwiastka oznaczonej dokładności.

Do obliczenia pierwiastków równań dowolnych stosować również można sposoby wykresne; jeżeli mamy np. równanie $f(x) = 0$, to piszemy je w postaci $y = f(x)$ i, po wykreśleniu odpowiedniej temu równaniu krzywej w układzie np. osi prostokątnych, szukamy punktów przecięcia się jej z prostą $y = 0$, t. j. z osią x . Znacznie nieraz uprościć można to postępowanie, jeżeli z danej funkcji utworzymy dwie funkcje prostsze; jeżeli np. równanie $x^3 + bx^2 + cx = d$ rozłożymy na dwa równania drugiego stopnia $y = x^2 + bx + c$ oraz $xy = d$, które nie trudno wykreślić; to wartości spółrzednych punktów ich przecięcia się są pierwiastkami danego równania. Sposoby wykresne można uprościć stosując do wykreślenia powyższych krzywych skalę logarytmiczną i wogóle sposoby wskazane przez nomografię¹⁴⁾ 14'). Te sposoby wykresne dają się również stosować do obliczenia pierwiastków wielu równań z wieloma niewiadomemi. Zaznaczyć tu należy, że postępowanie wykresne jest w tym razie zupełnie ścisłe; nieścisłość odpowiedzi wynika tylko z niedokładności rysunku.

4. Obliczanie pierwiastków przybliżonych równań algebraicznych całkowitych.

Jeżeli mamy równanie algebraiczne całkowite (ze współczynnikami liczbowymi), to oprócz sposobów ogólnych

¹⁴⁾ Traité de Nomographie par d'Ocagne. Paris 1899.

^{14')} Graphische Darstellung in Wissenschaft u. Technik. Dr. Marcello v. Pirani. Sammlung Göschen 728.

nych, podanych w paragrafie poprzednim, mamy sposoby, oparte na szczególnych właściwościach, wynikających z rosnących potęg niewiadomych. W tym celu obliczymy najpierw w jaki bądź sposób wartość przybliżoną szukanego pierwiastka; wartość tę oznaczymy literą x_1 i podstawimy w dane równanie $x = x_1 + \Delta x_1$, gdzie Δx_1 jest poprawką wartości x_1 , a otrzymamy nowe równanie algebraiczne:

$$A_n (\Delta x_1)^n + A_{n-1} (\Delta x_1)^{n-1} + \dots + A_1 (\Delta x_1) + A_0 = 0;$$

wziąwszy następnie pod uwagę, że (Δx_1) jest bardzo małą wielkością, odrzucamy wyrazy z wyższemi potęgami tej wielkości i otrzymujemy równanie

$$A_1 \cdot (\Delta x_1) + A_0 = 0,$$

z którego obliczymy Δx_1 ; a więc $x_2 = x_1 + \Delta x_1$, gdzie x_2 oznacza wartość bliższą do x niż x_1 ; jeżeli ta poprawka jest niewystarczająca, to powtarzamy to postępowanie z nową wartością $x = (x_2 + \Delta x_2)$ i szukamy nowej poprawki Δx_2 . Obliczenie to można skrócić, jeżeli np. po obliczeniu $\Delta x_1 =$

$= -\frac{A_0}{A_1}$, podstawimy tę wartość w równanie nie skrócone, a wtedy:

$$\Delta x_2 = -\frac{A_0' + A_2' (\Delta x_1)^2 + \dots}{A_1'}$$

Stosując do obliczeń pierwiastków przybliżonych metodę wykreślną, a następnie do obliczeń nowych równań sposób liczenia, podany przez Hornera^{30'''}), otrzymać można bardzo prędko pierwiastki danego równania z dowolną dokładnością.

Wskazany tu sposób obliczania pierwiastków wymaga znajomości przybliżonych pierwiastków danego równania, ażeby móc obliczyć poprawki; lecz mamy sposoby, którymi bezpośrednio obliczymy wartości przybliżone wszystkich pierwiastków. Sposób ten, podany przez Bernoulliego, stosuje się do równań, których pierwiastki są różne i różniące między ich wartościami są znaczne; wtedy bowiem przyjąć można z pewnem przybliżeniem, że ich suma równa się pierwiastkowi o największej wartości; a ponieważ suma wszystkich pierwiastków równa się współczynnikowi $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$,

przeto wartość największego pierwiastka równa się w przybliżeniu $x_1 \cong -\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Z właściwości innych współczynników równania algebraicznego i z przyjętych założeń wynika, że $x_1 \cdot x_2 \cong -\frac{a_{n-2}}{a_n}$, gdyż iloczyn pozostałych pierwiastków można pominąć; postępując w ten sposób, obliczymy kolejno wszystkie pierwiastki. Lecz zakres równań algebraicznych, do których ten sposób można zastosować, ze względu na uczynione założenia, byłby niewielki, gdyby Graeffe nie poradził temu w ten sposób, że przekształca on każde równanie na inne, którego pierwiastki są znacznymi potęgami pierwiastków danego równania; co się daje rachunkowo łatwo wykonać; w ten sposób rozsuwa on wartości pierwiastków i może stosować sposób powyższy do każdego równania. Metodą tą można obliczyć nawet pierwiastki zespolone. Metoda Graeffego prowadzi najprędzej do celu, jeżeli chcemy obliczyć wszystkie pierwiastki danego równania.

5. Odwrócenie szeregu.

Jeżeli mamy dany szereg zbieżny

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

i chcemy dla pewnej nie wielkiej wartości y obliczyć wartość x , to napiszemy z tego równania:

$$x = \frac{y}{a_1} - \frac{a_0}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x^2,$$

i wtedy, jeżeli wartość x jest bardzo mała, można zastosować metodę poprzednio już stosowaną, kolejnego obliczenia poprawek. Metoda ta, nazwana metodą iteracji, stosuje się w wielu przypadkach rachunku przybliżonego.

6. Metoda iteracji.

Metoda iteracji ma na celu stopniowe coraz dokładniejsze obliczanie pewnej wartości np. niewiadomej danego równania. Metoda ta stosuje się wtedy, gdy dane równanie $f(x) = 0$, da się sprowadzić do postaci $x = \varphi(x)$ i gdy $\varphi(x)$ mało zmienia swą wartość w okolicach wartości x , czynią-

cej zadość danemu równaniu; podstawivszy bowiem w $\varphi(x)$ wartość $x \cong x_1$, która jest blizką x , otrzymamy, przy powyższem zastrzeżeniu, co do zmienności $\varphi(x)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, gdzie x_2 jest wartością bliższą do x niż x_1 ; powtarzając takie podstawienie dowolną ilość razy, otrzymamy $x_n = \varphi(x_{n-1})$ wartości coraz bliższe wartości x . Można okazać, że takie zbliżanie się następuje, gdy $\frac{d\varphi(x)}{dx} < 1$.

Metodę iteracyi stosowaliśmy już w § 4 i 5-ym; można ją również stosować do wielu równań z wieloma niewiadomymi.

Szczególne jej zastosowanie jest przy obliczaniu całki równania różniczkowego, o czem będzie mowa w § 11-ym.

Charakterystyczną właściwością tego postępowania jest ta okoliczność, że bierzemy za podstawę do naszych obliczeń równanie, w którym niewiadoma wyrażona jest przez tę samą niewiadomą, znajdującą się tylko w pewnych szczególnych warunkach matematycznych.

7) Wzory interpolacyjne.

Gdy dane są dwa szeregi wzajemnie zależnych liczb (np. temperatury i odpowiednie prężności pary), a należy dla pewnej dowolnej wartości jednej niezależnej, nie wchodzącej w dany szereg, obliczyć wartość drugiej zależnej, wtedy działanie takie nazywamy interpolacją. Sposób tego obliczenia polega na znalezieniu pewnej funkcji matematycznej, któraby przez każdą parę wartości danego szeregu liczb była zaspokojona, t. j. ażeby przybrała wartości zera, wtedy bowiem dla każdego x znajdziemy odpowiednie y . W pojęciach geometrycznych zadanie to polega na wykreśleniu krzywej, przechodzącej przez pewną liczbę danych punktów, określonych przez pary wzajemnie zależnych liczb jako spólrzędnych.

W ten sposób jednakże postawione zadanie analityczne czy geometryczne jest jeszcze nie określone, gdyż jak przez dane punkty można przeprowadzić nieskończenie wiele krzywych, tak również można znaleźć nieskończenie wiele funkcji, które będą zaspokojone przez dany szereg liczb; ażeby przeto ściśle określić zadanie, należy podać jeszcze

formę tej funkcji, która ma być zaspokojoną przez dane liczby; np. formę algebraiczną całkowitą lub ułamkową, wykładniczą, trygonometryczną i t. p.; zaznaczyć przytem należy, że wybór tych funkcji nie jest zupełnie dowolny, zależy on bowiem od charakteru funkcyjnej zależności, jaką łączą dane liczby; funkcje takie nazwano wzorami interpolacyjnymi. Najprostszą funkcją tego rodzaju jest funkcja paraboliczna n -tego stopnia:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n \cdot x^n.$$

Jeżeli mamy dane $(n + 1)$ par liczb $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ i t. d., to $(n + 1)$ współczynników $A_0, A_1 \dots A_n$ może być bezpośrednio z $(n + 1)$ równań obliczona; a po ich obliczeniu można obliczyć dla każdej innej wartości x odpowiednią wartość y . Lecz postępowanie to jest pod względem rachunkowym niedogodne, i dlatego wielomian powyższy bywa przedstawiany w rozmaity sposób, np. w sposób następujący:

$$y = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0) (x - x_1) + \dots$$

gdzie współczynniki a_0, a_1 i t. d. obliczyć można z warunku, że to równanie zostaje zaspokojone przez dane pary wielkości. Wzór ten po przemnożeniu i uporządkowaniu przekształca się na wzór poprzedni, jest przeto tylko inną jego odmianą.

Są jeszcze inne sposoby wyrażania funkcji parabolicznej; sposoby te mają na celu bądź uproszczenie obliczenia współczynników, bądź też mają np. na celu takie ich obliczenie, ażeby można było je obliczać dla szeregów o większej liczbie wyrazów, nie zmieniając wartości współczynników, obliczonych dla mniejszej ich ilości ¹⁵⁾.

Dla funkcji okresowych stosujemy wzory interpolacyjne okresowe postaci:

$$y = a_1 \sin x + a_1 \sin (2x) + \dots + a_n \sin (nx) + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos (2x) + \dots + b_n \cos (nx).$$

Ponieważ w danem równaniu jest $(2n + 1)$ współczynników, potrzebna jest przeto taka sama ilość par liczb (x, y) , inaczej punktów. Wogóle powiemy, jeżeli mamy n par liczb (np. z obserwacji), to zależność między nimi mo-

¹⁵⁾ Są to wzory funkcji kulistych. Por. ^{30''')}.

zna wyrazić dowolną funkcją posiadającą n współczynników nieokreślonych, które określimy z n równań otrzymanych przed podstawieniem tych wartości do obranej funkcji.

Wzory interpolacyjne mogą być zestawiane również nie tylko dla funkcji empirycznych, danych w postaci szeregu liczb, lecz i dla funkcji analitycznych; wtedy wzory te mają na celu zastąpienie danej funkcji analitycznej (np. bardzo zawilej) funkcją inną, prostszą. Ażeby wzór taki znaleźć, obliczmy dla danej funkcji analitycznej pewien szereg liczb (punktów) i obliczmy dla tego szeregu, w sposób wyżej wskazany, wzory interpolacyjne.

Markoff¹⁶⁾, w celu obliczenia wzorów interpolacyjnych, stawia zadanie w inny sposób, a mianowicie przyjmuje, że dla pewnych wartości x , znane są nie tylko wartości funkcji $f(x)$, lecz i wartości jej kolejnych pochodnych, a zadanie polega na obliczeniu takiej funkcji całkowitej możliwie niskiego stopnia, któraby odpowiadała danym warunkom. Można okazać, że ze wzoru tego wyprowadzić można jako szczególne przypadki wzory Taylora, Lagrange'a i Newtona.

Dla każdego wzoru interpolacyjnego można obliczyć t. zw. resztki, t. j. błąd największy, jaki powstaje pomiędzy wartościami funkcji analitycznej a wartościami wzoru interpolacyjnego, stosując do tego twierdzenie Rollego.

Rosyjski matematyk Czebyszew, w celu znalezienia wzoru interpolacyjnego, dającego wartości możliwie zbliżone do wartości danej funkcji, oblicza najpierw takie wartości dla x_0, x_1 i t.d., przy których wartość iloczynu, wyrażającego resztkę danego szeregu

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

w granicach interpolacji, najmniej odbiega od zera, a obliczywszy je, oblicza następnie z danej funkcji analitycznej odpowiednie $y_0, y_1 \dots y_n$ i dla tych w ten sposób obliczonych wartości x_k, y_k zestawia wzory interpolacyjne.

Jeżeli posiadamy większą ilość par liczb, inaczej punktów niż współczynników wolnych jest w danym wzorze interpolacyjnym, to sposób powyższy obliczenia współczynników jest nie do zastosowania, gdyż w zadaniu jest więcej

¹⁶⁾ E. d. M. W. I. 2, str. 806. Markoff, *Differenzenrechnung* (tłom. z ros. Lipsk 1896).

równań niż niewiadomych; inną przeto zasadę należy w tym razie postawić, ażeby obliczyć wzór interpolacyjny. Przyjmujemy w tym przypadku, że liczby dane (x_k, y_k) nie mają zaspakajać obranej funkeyi, jak to było poprzednio, lecz podstawione w nią mają dać mniej lub więcej wartości blizkie zera.

Funkeye takie nazwano funkeyami przybliżonemi, względnie krzywemi przybliżonemi.

8. Funkeye przybliżone.

Funkeye przybliżone mają za zadanie zastąpienia danej funkeyi analitycznej lub empirycznej inną funkeyą. Funkcya ta może być mniej więcej dowolną, powinna jednakże mieć pewną ilość współczynników nieokreślonych.

Do funkeyi przybliżonych zaliczyć można wzory interpolacyjne, któreśmy omówili poprzednio; w szczególności jednakże funkeyami przybliżonemi, inaczej—krzywemi przybliżonemi, nazywamy krzywe, które nie przechodzą przez punkty, obliczone z danej funkeyi lub przez punkty dane empirycznie, lecz które przechodzą mimo nich, odpowiednio do przyjętych warunków.

Niechaj będzie dana np. funkeya przybliżona postaci parabolicznej:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

której współczynniki a_0, a_1, \dots, a_n są narazie nieokreślone, funkeya ta ma zastąpić z pewnem przybliżeniem daną funkeyę $f(x)$.

W celu obliczenia tych współczynników można np. daną funkeyę $f(x)$ rozwinąć w szereg i zastąpić ją pewną ilością wyrazów tego szeregu; lecz sposób ten dotyczy tylko tego przypadku, gdy rozpatrujemy wartości tej funkeyi w blizkości pewnej ściśle określonej wartości, np. $x = a$. Gdy zaś rozpatrujemy wartości tej funkeyi w pewnych granicach od $x = a$ do $x = b$, to należy postawić pewne warunki, jakim powinny odpowiadać różnice pomiędzy wartościami danej funkeyi a przybliżonej.

Jeżeli wogóle przez $f(x)$ oznaczymy daną funkeyę,

a przez $\varphi(x, a_k)$ funkcję przybliżoną do niej, to błąd, który oznaczymy symbolem $R(x)$, gdzie R jest symbolem niezna-nej funkcji, wyrazi się wzorem:

$$f(x) - \varphi(x, a_k) = R(x).$$

Z warunków jakie sobie postawimy względem wartości $R(x)$, będziemy mogli obliczyć współczynniki a_k .

Warunki te mogą być różne. Poncelet np. dla przykładu $\sqrt{x^2 + y^2} = a_1 x + a_2 y$ ¹⁸⁾ postawił warunek, ażeby wartość $R(x)$ dla krańcowych wartości x , dla których dana funk-cya ma pozostawać w mocy, oraz największa jej wartość — były wzajemnie równe. Te warunki wyrazimy dwoma rów-naniami, z których obliczyć można dwa współczynniki a_1 i a_2 obranej funkcji przybliżonej („Technik“ I, str. 45, wzór 17-ty; porów. również¹⁹⁾

Rosyjski matematyk Czebyszew¹⁷⁾, w celu obliczenia funkcji przybliżonych stawia warunek, ażeby największa wartość $R(x)$, jaka powstać może przy zmiennej wielkości x , była minimum przy zmiennych a_k . Oblicza on również te współczynniki z uwzględnieniem ważności (Gewicht, poids) spostrzeżeń.

Opierając się na tej zasadzie, oblicza Czebyszew współ-czynniki danej funkcji przybliżonej (parabolicznej), której wartości przy zmiennej x (pomiędzy danymi granicami) jak najmniej różnią się od zera. Geometrycznie zadanie to po-lega na znalezieniu takiej krzywej, któraby z całego zbioru krzywych, jaki przedstawia obrona funkcya przybliżona przy różnych wartościach jej współczynników, jak najwię-ciej zbliżała się do osi x . Zadanie to znajduje między inne-mi zastosowanie przy obliczeniu takich wartości x_0, x_1 i t. d., które nadają resztkę wzoru interpolacyjnego wartości naj-mniej różniące się od zera (por. koniec § 6-go).

¹⁷⁾ Tschebysheff. Sur les fonctions, qui different les moins possible du zero. Istnieje w języku rosyjskim, wydany przez Marko-wa, zbiór prac Czebyszewa.

¹⁸⁾ Wzór ten jest przydatny do obliczenia np. ruchu brył z uwzględnieniem tarcia. Porów. K. Henn, str. 108, H. Lorenz Tech-nische Mechanik, str. 197; również H. Czopowski, Mechanika teore-tyczna II, str. 104.

¹⁹⁾ Tschebysheff „Sur les questions de minima“ daje sposoby ogólne zastąpienia pierwiastków ułamkami ciągłymi.

Zadanie to znajduje również bezpośrednio zastosowanie w technice przy obliczaniu prostowodów nieściślych. „Technik“ I, str. 575 ²⁰⁾. W tym razie współczynniki danej funkcji są funkcjami rozmiarów części danego mechanizmu; obliczenie przeto tych współczynników daje takie rozmiary części danego mechanizmu, przy których punkt jego ruchomy zakreśla krzywą najwięcej zbliżoną do prostej.

Metoda ta daje możność obliczenia odchyień prostowodu nieściśłego od prostej, które w wielu razach są tak małe, że dla oka są nieuchwytnie, a dla konstrukcji są ważne.

Czebyszew stosował również swe wzory przybliżone do projektowania map geograficznych o większych obszarach; zwykłymi bowiem sposobami rzutowanie dużych obszarów kulistych na płaszczyznę dawało zbyt małe dokładności.

W przypadku, w którym liczby (x_k, y_k) są wzięte z pomiarów, a więc niezupełnie ściśle, do obliczenia współczynników funkcji przybliżonej stosowana bywa zasada najmniejszych kwadratów, na podstawie której suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami rzeczywistymi a przybliżonemi powinna być minimum, co wyrazimy:

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(x) - \varphi(x, a_k)\}^2 \cdot dx = \text{minimum.}$$

Ze wzoru tego obliczymy współczynniki a_k , przyrównując do zera pochodne cząstkowe tej całki względem tych współczynników.

W ten sposób zastępuje np. C. Runge ²¹⁾ wzór wykładniczy Bacha ²²⁾ $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m$ dwumianem całkowitym $\varepsilon = a_1 \sigma + a_2 \sigma^2$; w którym wartości a_1 i a_2 oblicza z warunku:

$$\int_0^\sigma \{\alpha \sigma^m - (a_1 \sigma + a_2 \sigma^2)\}^2 \cdot d\sigma = \text{minimum.}$$

²⁰⁾ Niestosownie w „Techniku“ t. I na str. 575-ej powiedziano, że prostowód Czebyszewa jest bardzo złożony; porów.: Die Tschebyscheffschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen von N. Delaunay, Teubner 1900.

²¹⁾ C. Runge. Zft. f. Mathematik und Physik Bd. 45, 1900, str. 23.

²²⁾ C. Bach. Elasticität u. Festigkeit 1902, str. 20.

Przyjąwszy wreszcie dla obliczenia współczynników a_k warunek, ażeby wartości $R(x)$ dla każdej poszczególnej wartości danych $x_0, x_1 \dots$ i t. d. równały się zeru, otrzymamy wzory interpolacyjne, omówione w § 7-ym; w danym razie współczynników nieokreślonych w funkcji przybliżonej może być tylko tyle, ile danych jest wartości x_k , to jest ile jest danych punktów.

Wzory interpolacyjne, jak również funkcje przybliżone mogą zastępować dane funkcje bądź analityczne bądź empiryczne we wszelkich działaniach nad niemi, a w szczególności przy obliczaniu np. ich całek, gdy całkowanie funkcji właściwej sprawia znaczne trudności lub gdy całki nie dają się wyrazić funkcjami pospolitemi; można również te funkcje stosować do obliczenia pochodnych funkcji empirycznych, określonych przez szeregi liczb i t. p. i w tem zrozumieniu możemy mówić np. o całce i pochodnej funkcji empirycznej, danej np. w postaci szeregu liczb, jak mówimy o całce lub pochodnej funkcji analitycznej.

9. Wyrównanie spostrzeżeń ²³⁾ i ²⁴⁾.

Zadanie wyrównania spostrzeżeń ma na celu obliczenie najprawdopodobniejszej wartości pewnej wielkości, której kilkakrotne pomiary wskutek ich niedokładności dały liczby do pewnego stopnia różne. Jeżeli mamy zmierzyć jedną wielkość, np. jeżeli mamy określić długość pewnego pręta z kilkakrotnych różniących się między sobą pomiarów, to przyjmiemy na zasadzie intuicji, że długość ta jest średnią arytmetyczną tych pomiarów ²⁵⁾. Obliczenie takie jest utrudnione, gdy pomiędzy wartościami zmierzonych wielkości zachodzą związki matematyczne, gdy np. suma zmierzonych trzech kątów danego trójkąta płaskiego nie równa się 180° , wtedy do obliczenia najprawdopodobniejszych wartości tych kątów zastosujemy zasadę najmniej-

²³⁾ A. B. Danielewicz. Metoda najmniejszych kwadratów.

²⁴⁾ Poradnik dla Samouków I, 442.

²⁵⁾ Lecz postępowanie to nie zawsze daje wyniki zgodne z rzeczywistością; porówn. E. d. M. W. I, 2, str. 773.

szych kwadratów²⁶⁾, którą można uważać jako uogólnioną zasadę średniej arytmetycznej^{26')}.

Dział ten matematyki przybliżonej ze względu na potrzeby astronomów, geodetów i fizyków został już dawno opracowany²⁷⁾. W naukach technicznych znajduje on zastosowanie przy badaniach fizyko-technicznych, oraz przy obliczeniu funkeyi przybliżonych.

10. Obliczenie przybliżonych całek i pochodnych funkeyi danych.

Jeżeli funkeya, którą mamy całkować, daną jest w postaci analitycznej $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, lub wykresłej w układzie osi prostokątnych (y', x) , to możemy ją obliczyć z dowolnem przybliżeniem, stosując do tego bądź metody rachunkowe, bądź wykresłne. Jeżeli funkeya, którą mamy całkować, daną jest w postaci analitycznej $f'(x)$, to pierwszą przybliżoną wartość jej całki otrzymamy, gdy wielkościom dx i dy nadamy pewne skończone wartości Δx i Δy , wtedy bowiem napisać możemy bezpośrednio wzór: $\Delta y_0 = f'(x_0) \cdot \Delta x_0$, w którym x_0 i y_0 oznaczają początkowe wartości zmiennych, a Δx_0 i Δy_0 — ich przyrosty; wynik tego obliczenia bywa często w praktyce wystarczający pod względem dokładności. Ze wzoru tego otrzymamy nową wartość y_1 :

$$y_1 = y_0 + f'(x_0) \cdot \Delta x_0,$$

gdzie (x_0, y_0) są dane spólrzędne początku krzywej całkowej.

Obierzmy następnie nowy przyrost Δx_1 , dla którego obliczymy odpowiedni przyrost:

$$\Delta y_1 = f'(x_0 + \Delta x_0) \cdot \Delta x_1.$$

Postępując w ten sposób, obliczyć można wartość całki dla dowolnych granic.

Sposobem tym otrzymujemy o tyle dokładniejsze wy-

²⁶⁾ Porówn. A. B. Danielewicz: Metoda najmniejszych kwadratów, str. 11, E. Wende i S-ka, 1904 r., str. 113.

^{26')} Dr. Kasper Weigel. Wykreślny sposób rozwiązywania równań normalnych z dowolną dokładnością wyznaczenia tak niewiadomych jak i ich błędów z błędów funkeyi, w Pamiętniku V Zjazdu techników polskich we Lwowie 1912 r.

²⁷⁾ Literatura E. d. M. W. I, 2, str. 776.

niki, o ile wartości $f'(x)$ nie ulegają znacznym zmianom w granicach obranych przyrostów Δx i, oczywiście, gdy funkcyja ta jest ciągła w tych granicach. Sposób ten bywa stosowany do obliczenia np. krzywej spiętrzeń wody bieżącej²⁸⁾ w kanałach z prędkością zmienną; w tych obliczeniach przyjmuje się w pewnych przypadkach z dostateczną dokładnością $\Delta x = 400 m$.

Dokładniejszą wartość całki otrzymamy, gdy daną funkcyję rozwiniemy w szereg Taylor'a i, zbadawszy warunki zbieżności szeregu, oraz obliczywszy resztkę, zcałkujemy ten szereg. Zaznaczyć przytem należy, iż w razie powolnej zbieżności obliczonego szeregu, można go przekształcić na inny szereg, prędzej zbieżny.

Można również obliczyć wartość całki z wartości $f'(x)$ dla pewnej ilości x -ów. W tym celu wyobrażamy sobie, że pole, ograniczone krzywą $y = f'(x)$, rzędnymi, odpowiadającemi wartościom x_0 i x_1 oraz osią x , jest podzielone na prostokąty lub trapezy; wartość sumy pól tych figur będą wartościami z różną dokładnością całek w danych granicach całkowania. W tem postępowaniu popelnia się błąd, którego wielkość równa się cząstkom pól, ograniczonych krzywą właściwą z jednej strony, a bokami prostokątów czy też trapezów z drugiej strony. Widocznem jest, że te cząstki pól, w przypadku stosowania prostokątów, są większe, niż w przypadku trapezów; błąd przeto w przypadku stosowania prostokątów jest wogóle większy niż w przypadku trapezów.

Mniejszy błąd popelnimy, gdy każde trzy kolejne punkty danej krzywej połączymy łukami parabolicznymi i obliczyny odpowiednie pole; różnica bowiem między ściśle wartością całki, a przybliżoną, równa się w tym razie sumie wielkości pól, zawartych pomiędzy daną krzywą z jednej strony a łukami paraboli z drugiej strony. Wzór całki, oparty na tem założeniu, wprowadzony został przez Simpson'a i nosi jego nazwę.

W powyższy sposób wyprowadzone wzory dają wartość całki jako sumę różnych wartości $f'(x)$ dla różnych lecz ściśle określonych wartości x ; całki te mają ogólną

²⁸⁾ Lorenz. Hydraulika, str. 117, oraz (31) str. 60.

postać $y = \Sigma A_k \cdot f'(x_k)$, gdzie A_k są pewne współczynniki, zależne od postaci pól cząstkowych, na jakie rozłożyliśmy dane pole.

Gauss do obliczenia swego wzoru pozostawia wartości dla A_k nieokreślonymi i przyjmuje tylko ich ilość, a następnie oblicza ich wartości w ten sposób, ażeby błąd nie przewyższał z góry postawionej wartości, określonej pewną ilością wyrazów szeregu, na który rozłożymy daną funkcję. Całka w danym razie otrzymuje postać:

$$\Delta y = \int_{x_0}^x f'(x) dx = A_1 f'(x_1) + A_2 f'(x_2) + \dots + A_n f'(x_n),$$

gdzie n jest obraną ilością podziałek, a czynniki A_1, A_2 i t. d. i x_1 i x_2 i t. d. są na razie wielkościami nieokreślonymi. Czynniki te obliczymy, porównawszy ten wzór z całką szeregu Taylor'a, na jaki rozłożymy daną funkcję, którą mamy całkować. Ponieważ czynniki te dają się obliczyć w zależności tylko od ilości obranych podziałek, na jakie podzielimy wartość międzygraniczną, a nie od postaci funkcji, przeto samo obliczenie całki znacznie się upraszcza; czynniki te bowiem można obliczyć raz na zawsze, dla każdej ilości n . Wzór Gauss'a ma tę zaletę, że z niewielkiej ilości wartości funkcji różniczkowej, otrzymuje się ze znaczną dokładnością wartości liczbowe całek określonych ²⁸⁾.

W szczególnych przypadkach można obliczyć całkę danej funkcji sposobem przybliżonym, obliczywszy np. wartości, pomiędzy którymi wartość szukanej całki się znajduje. Jeżeli np. funkcya, którą mamy całkować, jest

²⁸⁾ Zobrazujmy sobie dokładność tych wzorów z przykładu, zapożyczonego z dzieła Bertranda.

Wartość całki $\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2} \cdot dx :$

dokładnie: $\int = \frac{\pi}{8} \ln 2 = \dots \dots \dots 0,27\ 219\ 82$

ze wzorów na trapezy przy $n = 10$,	0,27 128 37
Cotes'a	" $n = 5$. 0,27 220 41
Simpson'a	" $n = 10$. 0,27 220 12
Gauss'a	" $n = 4$. 0,27 219 80

gdzie n oznacza ilość podziałek; wzór Gauss'a przeto w danym przypadku daje najdokładniejszy wynik pomimo najmniejszej ilości podziałek.

iloczynem kilku funkeyi, z których choć jedna waha się nieznacznie pomiędzy pewnymi granicami, to funkeyę tę, podlegającą słabszym zmianom, można zastąpić stałą wartością równą największej wartości, jaką ona przybierze w danych granicach zmienności, i tę wartość można wynieść przez znak całki, wobec czego wartość nowej całki, którą już łatwiej znaleźć, będzie większą od właściwej wartości; jeżeli następnie weźmiemy najmniejszą wartość tego czynnika, to wartość tej drugiej całki będzie mniejsza od szukanej wartości; w ten sposób wartość właściwej całki znajdować się będzie pomiędzy obliczonymi granicami. Jeżeli różnica pomiędzy temi granicznymi wartościami nie daje dostatecznej dokładności, to można daną funkeyę odpowiednio przekształcić, ażeby te granice zbliżyły się. Sposób ten stosuje F. Klein i Somerfeld ²⁹⁾ na str. 269 do obliczenia przybliżonego funkeyi eliptycznej i daje wskazówki obliczenia jej wartości z dowolną dokładnością ³⁰⁾.

W całkowaniu wykreślnem ^{30')}, ^{30'')} należy wyobrazić sobie krzywą różniczkową $y' = f'(x)$ i krzywą całkową $y = f(x)$ w układzie osi (y', x) i (y, x) tak, iż dla każdej wartości x można odczytać na tej samej rzędnej wartość y' i y , t. j. wartość pochodnej i całki. Krzywe te są względem siebie w pewnym stosunku geometrycznym, wynikającym z określenia całki. Krzywa różniczkowa może być daną również empirycznie w postaci np. szeregu liczb, lub też jako bezpośredni wykres przyrządów samopiszących. Zadanie całkowania wykreślnego polega na wykreśleniu krzywej całkowej, gdy daną jest krzywa różniczkowa.

Z określenia całki i przyjętych oznaczeń wynika:

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f'(x) \cdot dx,$$

czyli różnica spólrzędnych dwóch punktów krzywej całkowej równa się wielkości pola, zawartego pomiędzy rzędne-

²⁹⁾ F. Klein und A. Sommerfeld. Ueber die Theorie des Kreisels, 1897.

³⁰⁾ F. Klein w (29) poleca do obliczenia całek eliptycznych stosować tablice Legendra.

^{30')} Podręcznik: Dr. Rudolf Mehmke. Leitfaden zum graphischen Rechnens. Teubner 1917.

^{30'')} Podręcznik: C. Runge. Graphische Methoden. Teubner. 1915.

mi tych punktów, krzywą różniczkową i osią x . Figurę tę nazwiemy trapezem krzywoliniowym. Gdy przeto są dane współrzędne (x_0, y_0) punktu początkowego krzywej całkowej, to następny jej punkt (x_1, y_1) znajdziemy, gdy zmierzmy w jakibądź sposób pole odpowiedniego trapezu krzywoliniowego; położenie przeto następnego punktu krzywej całkowej nie zależy od postaci odpowiedniej części krzywej różniczkowej, lecz od wielkości pola odpowiedniego trapezu krzywoliniowego; jeżeli zatem obliczymy w jakibądź sposób pole tego trapezu, będziemy mieli przyrost $y_1 - y_0$. Obliczenie tego pola wykonamy wykreślnie, jeżeli zastąpimy dany trapez krzywoliniowy prostokątem o podstawie $(x_1 - x_0)$, t. j. jeżeli zamiast boku krzywoliniowego rozpatrywanego trapezu, przeprowadzimy bok prosty równoległy do osi x w ten sposób, ażeby pole utworzonego prostokąta równało się wartości pola odpowiedniego trapezu. Położenie tego boku wyznaczyć można ze znaczną dokładnością „na oko“, lub też zapomocą mniej lub więcej dokładnych konstrukcyi, (^{30'} str. 99). Z wysokości tego prostokąta można zapomocą prostej konstrukcyi wykreślić punkt szukanej całkowej. Podzieliwszy przeto pole danej krzywej różniczkowej na pewną ilość trapezów krzywoliniowych, wykreślimy wskazanym sposobem odpowiednią ilość punktów szukanej całkowej.

W punktach znalezionych łatwo jest wykreślić styczne; rzędne bowiem odpowiednich tym punktom, punktów krzywej różniczkowej przedstawiają wartości tangensów kątów, jakie tworzą te styczne z osią x .

Innym, podobnym do powyższego, sposobem wykreślenia całkowej otrzymać można styczne, jako owijące szukaną krzywą całkową oraz punkty zetknięcia.

Wykreślenie krzywej różniczkowej może być uproszczone przez zastosowanie skali logarytmicznej, (^{30'} str. 142).

Odwrotnym sposobem można wykreślić krzywą pochodną danej krzywej, którą możemy uważać za całkową; w danym razie należy wykreślać styczne do danej krzywej w obranych punktach i następnie z tych stycznych wykreślić krzywą pochodną.

W celu uniknięcia trudności technicznych, z jakimi się spotykamy wogóle przy wykreślaniu stycznych do da-

nej krzywej w obranych punktach, stosuje się do tego pewne sposoby geometryczne lub przyrządy optyczne, które umożliwiają wykreślanie tych stycznych ze znaczną dokładnością.

Przy odpowiednim zręcznym układzie konstrukcyi geometrycznych, można wykreślić krzywe z małym nakładem pracy kreślarskiej, co oczywiście wpływa dodatnio na dokładność wyniku.

Obliczyć można, że $(n + 1)$ punktów szukanej krzywej całkowej wyznaczymy zapomocą wykreślenia $(4n + 1)$ linii; a jeżeli zechcemy i styczne wykreślić w tych punktach, to należy jeszcze wykreślić $3n$ linii.

Ponieważ przy tym sposobie wykreślania błędy się dodają, przeto końcowy punkt krzywej całkowej może dosyć daleko odchyłać się od właściwego położenia. W celu poprawienia tego błędu, można wymierzyć np. w sposób mechaniczny całe pole, utworzone przez odpowiednią krzywą różniczkową, końcowe rzędne i oś x -ów, i z wartości tego pola znaleźć położenie końcowego punktu krzywej całkowej i następnie, mając na uwadze wykreśloną już całkową, wykreślić nową dokładniejszą.

11. Obliczenie przybliżonych całek równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu.

W celu obliczenia wartości całki równania danego

$$\frac{dy}{dx} = f'(x, y)$$

weźmiemy pod uwagę, że całka jego $y = f(x)$ wyraża wartość pola, ograniczonego jej krzywą różniczkową $y' = f'(x)$, odpowiednimi rzędnymi y_0 i y_1 i osią x -ów. Lecz krzywa różniczkowa $y' = f'(x)$ nie jest nam bezpośrednio znana, nie możemy przeto bezpośrednio otrzymać jej całki, jak to było w całkowaniach bezpośrednich; wyobraźmy sobie jednakże, że $y = f(x)$ jest znaną funkcją, wtedy $y' = f'(x, y)$ przedstawiać będzie symbolicznie jej funkcję różniczkową, a szukaną całkę wyrazimy wtedy wzorem:

$$y = \int_{x_0}^x f'(x, y) \cdot dx.$$

Oznaczmy granice całkowania: $x_1 - x_0 = \Delta x_0$ oraz $y_1 - y_0 = \Delta y_0$, i przyjmijmy następnie, że funkcja $f'(x, y)$ jest w granicach całkowania wartością stałą $= f'(x_0, y_0)$, a wtedy obliczymy z pewnem przybliżeniem wartość szukanej całki ze wzoru: $\Delta y_0 = f'(x_0, y_0) \cdot \Delta x_0$. Wzór ten wyraża pole prostokąta o wysokości znanej $f'(x_0, y_0)$ i o znanej podstawie Δx_0 , może być przeto uważany za pierwsze przybliżenie wartości szukanej całki. Chcąc otrzymać dokładniejszy wyraz całki, zastąpmy pole krzywej różniczkowej, nieznaną zresztą, polem trapezu, którego jeden bok jest styczny do krzywej różniczkowej w punkcie $(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x_0)$, a pozostałe boki są przedłużeniami rzędnymi y_0, y_1 i oś x -ów. Pole tego trapezu wyrazi się iloczynem z rzędnej punktu zetknięcia i wysokości trapezu Δx ; inaczej, gdy oznaczymy wielkość tego pola symbolem Δy_s , i uważając ciągle, że $y = f(x)$ jest znane, napiszemy z pewnem przybliżeniem:

$$\Delta y_s = f'(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x_0, y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0) \cdot \Delta x_0;$$

a po podstawieniu z poprzedniego obliczenia wartości przybliżonej Δy_0 , otrzymamy wzór;

$$\Delta y_s = f' [x_0 + \frac{1}{2} \Delta x_0, y_0 + \frac{1}{2} f'(x_0, y_0) \cdot \Delta x_0] \cdot \Delta x_0.$$

Wzór ten nazwiemy wzorem trapezów stycznych danego równania różniczkowego. Geometryczne znaczenie tego równania znaleźć można w ³⁰⁾ na str. 123, a ściśle analityczne obliczenia wzorów tu przytoczonych w Math. Ann. Bd. 46, 1895, przez C. Runge'go.

W podobny sposób obliczyć można wzór szukanej całki jako pole trapezu wpisanego w krzywą całkową; oznaczmy je znakiem Δy_w i napiszemy bezpośrednio wzór tego pola:

$$\Delta y_w = \frac{1}{2} [f'(x_0, y_0) + f'(x_1, y_1)] \cdot \Delta x_0;$$

a po podstawieniu:

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0; y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + f'(x_0, y_0) \cdot \Delta x_0,$$

otrzymamy wzór, z którego jak i z poprzedniego obliczymy przybliżoną wartość całki danego równania różniczkowego, wielkości bowiem x_0, y_0 i Δx_0 powinny być dane przez zadanie.

Jeszcze dokładniejszy wzór otrzymamy, gdy wyobrazimy sobie przez punkt (x_0, y_0) i przez punkt (x_1, y_1) oraz

przez punkt $(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x_0)$, $(y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0)$ przeprowadzoną parabolę, a pole tej paraboli, które oznaczymy symbolem Δy_p , da nam wartość szukanej całki ze znaczniejszem niż poprzednio przybliżeniem; pole to obliczymy na zasadzie znanego wzoru pola paraboli:

$$\Delta y_p = \Delta y_w + \frac{1}{3} (\Delta y_s - y_w);$$

a po podstawieniu odpowiednich wartości z poprzednich wzorów, otrzymamy wartość szukanej całki, wyrażoną w wielkościach x_0 , y_0 i Δx_0 .

Wzory te są w podobny sposób obliczone, w jaki obliczyliśmy wzory dla całkowań bezpośrednich; analogie tych dwóch sposobów przeprowadzić można dalej: można obliczyć np. wzory analogiczne do wzoru Gauss'a, co też uskutecznił K. Heun (w „Zeitschr. f. Mat. u. Physik“ Bd. 45 lub w ^{30''}). Wzory te przy małej ilości wyrazów dają wartości całek bardzo dokładne.

Ażeby obliczyć dokładność wyprowadzonych tu wzorów, należy je rozwinąć w szeregi Taylor'a i następnie porównać je z takimże szeregiem, otrzymanym z rozwinięcia $f(x_0 + \Delta x_0)$; porównanie to pokaże, jak daleko sięga tożsamość wyrazów.

Dr. Hort ³¹⁾ na str. 150-ej stosuje wzór paraboliczny do obliczenia liczbowego ruchu korbowaodu maszyny parowej; obliczenie to przedstawia się bardzo przejrzystie we wszystkich szczegółach.

Różnica pomiędzy tymi wzorami a wzorami, wprowadzonymi poprzednio dla bezpośredniego całkowania funkcji jest ta, że w danym razie mamy niewiadomą Δy tak po lewej jak i po prawej stronie równania; jest to przypadek, z którym już spotkał się przy obliczaniu pierwiastków danych równań — jest to metoda iteracji, zastosowana do obliczania całek danego równania różniczkowego. Obrawszy drogę iteracji, możemy tworzyć nowe metody obliczania całek przybliżonych i zamiast szukania bezpośrednich wzorów możliwie dokładnych, możemy stosować wzory mniej dokładne i następnie poprawiać je metodą iteracji; tą metodą posługuje się sposób wykreślny całkowania.

^{30''}) Dr. Horst v. Sanden. Praktische Analysis.

³¹⁾ W. Hort. Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. Springer. 1914.

W celu obliczenia sposobem wykreślonym krzywych całkowych danych równań różniczkowych pierwszego rzędu, wykreślimy najpierw w danym punkcie (x_0, y_0) styczną, obliczoną z danego równania różniczkowego, i przyjmiemy jak poprzednio, że następny punkt leży na tej stycznej i na rzędnej $x = x_1$. Z otrzymanej w ten sposób wartości y_1 , oraz z obranej x_1 obliczymy z danego równania położenie stycznej w tym punkcie (x_1, y_1) i następnie w tenże sposób postąpimy w celu wyznaczenia następnego punktu (x_2, y_2) . W ten sposób wykreśloną krzywą całkową będziemy uważali za pierwsze jej przybliżenie i równanie jej oznaczymy symbolem $y = f_1(x)$, gdzie znaczek $_1$ przy f wskazuje, że to nie jest właściwa funkcja całkowa, lecz funkcja inna, zbliżona do niej; jeżeli tę wielkość podstawimy w równanie różniczkowe, to otrzymamy równanie $\frac{dy}{dx} = f' [x, f_1(x)]$, które

wyraża z pewnem przybliżeniem krzywą różniczkową szukanej krzywej całkowej; postępując w ten sposób dalej, t. j.—metodą iteracyi, wykonaną w danym razie wykreślnie, dojdziemy do coraz dokładniejszych krzywych całkowych. Są sposoby, które prędzej doprowadzają do wykreślenia dokładniejszych krzywych całkowych, niż wskazany sposób; sposoby te jednakże polegają zawsze na względnie dowolnych założeniach, prowadzących do przybliżonych wyników, które następnie poprawiają się metodą iteracyi.

Sposoby tu wskazane tak analityczne jak i geometryczne, można zastosować do obliczenia całek równań różniczkowych z wielu niewiadomymi, oraz równań wyższych rzędów.

Ze szczególnych sposobów w całkowaniu równań różniczkowych przytoczę pewien sposób wykreślenia krzywej całkowej równania różniczkowego drugiego rzędu. Równanie różniczkowe jest dane np. w postaci analitycznej $\frac{d^2 y}{dx^2} = f'' \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right)$, oraz dane są spółrzedne (x_0, y_0) punktu początkowego nieznaney krzywej całkowej $y = f(x)$, wraz ze styczną w tym punkcie, określoną wartością $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$; mając te wielkości, obliczymy ze znanego wzoru na promień krzy-

wizny w punkcie (x_0, y_0) i wykreślimy nim cząstkę łuku; łuk ten przedstawiać będzie z pewnym przybliżeniem część łuku szukanej krzywej całkowej; następnie obierzemy na tym łuku w bliskości punktu (x_0, y_0) nowy punkt; wykreślimy w nim styczną do krzywej całkowej, która z pewnym przybliżeniem jest również styczna do koła krzywizny; obliczymy promień krzywizny w tym nowym punkcie i wykreślimy tym nowym promieniem nową cząstkę łuku. Postępując tak dalej określimy krzywą całkową z łuków kół krzywizny w podobny sposób, w jaki wykreśliliśmy ze stycznych krzywą całkową równania różniczkowego pierwszego rzędu. Obliczenie tego rodzaju przeprowadzone w szczegółach jest podane w ³²⁾.

W podobny sposób można wykreślić tor punktu materalnego swobodnego, znajdującego się w danem polu sił; z przyspieszenia bowiem i początkowej prędkości obliczyć można promień krzywizny toru (równanie siły odśrodkowej), następnie obliczyć można z równania siły stycznej następne jego położenie po upływie czasu Δt i postępowanie to powtarzać. Więcej szczegółowe wskazówki do tego obliczenia podane są w ³³⁾ w tomie II na str. 53.

Do pewnych szczególnych badań można zastosować następujący sposób określenia całki, który stosuje F. Klein i Sommerfeld ²⁹⁾ (na str. 559, równ. 11-te) w celu obliczenia ruchu precesyjnego i nutacyjnego giroskopu. Jeżeli mamy np. równanie $\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x, y)$, to spólrzędne punktów przegięcia krzywej całkowej $f(x, y) = 0$ powinny zaspokoić równanie $f''(x, y) = 0$ (w punktach bowiem przegięcia $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$); równanie to przedstawia przeto krzywą, na której leżą punkty przegięcia szukanej krzywej całkowej. Jeżeli odchylenia tej krzywej od krzywej przegięć są niewielkie, co można nieraz z warunków fizycznych wywnioskować, to $f''(x, y) = 0$ może być uważana za pierwsze przybliżenie szukanej krzywej całkowej.

²⁹⁾ *Ztf. f. Mathem. u. Physik* 1916 r., str. 90, R. Rothe: Zur graphischen Integration v. Differentialgleich. zweiter Ordn.

³³⁾ *Mechanika teoretyczna*, inż. H. Czopowski.

Metody matematyki wielkości przybliżonych, powinny znaleźć liczne zastosowania przy obliczaniu całek równań różniczkowych; rozwiązanie ich bowiem metodyczne przedstawia zwykle znaczne trudności. Dlatego też z uznaniem należy powitać kierunek, jaki rozwija się w matematyce (Poradnik dla samouków I, str. 386 § 5 i 9), opisywania właściwości funkcyi całkowych z właściwości samych równań różniczkowych, nie szukając funkcyi całkowych danego równania. Sposób ten stosujemy np. do zbadania ruchu wadła kulistego (porówn. np. ³³), II § 60), lub też do orzeczenia, czy ruch, przedstawiony przez dane równanie różniczkowe, jest okresowy czy też niepowrotny (porówn. np. ³³) II, str. 295).

12. Równania różniczkowe cząstkowe.

Ogólnych sposobów przybliżonego obliczenia całek równań różniczkowych cząstkowych nie spotkałem w odpowiedniej literaturze, spotkałem tylko pewne szczególne obliczenia.

C. Runge³⁴) np. podaje obliczenie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C,$$

wyrażającego naprężenia pręta o przekroju krzyżowym, pracującego na skręcanie; sprawdza następnie dokładność otrzymanych wyników i wykreślił unaocznia powierzchnię odkształceń, t. j.—funkcyę całkową. Zadanie tego rodzaju nie daje się rozwiązać metodycznie ze względu na dowolność postaci przekroju, a jak w danym razie również ze względu na postać jego krzyżową.

K. Heun (Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik, str. 114) pisze w tej sprawie, że opracowanie odpowiednich metod jest możliwe według wskazówek, danych w dziełach Euler'a, Lagrange'a i Fourier'a.

Całkowania przybliżone równań różniczkowych prowadzą z jednej strony drogą bezpośrednią i najkrótszą do

³⁴) *Ztf. f. Mathematik u. Physik.* B. 56, 1908, str. 225. C. Runge. Ueber eine Methode die partielle Differentialgl. $\Delta u = 0$ numerisch zu integrieren.

wyników liczbowych, które mają na celu większość obliczeń technicznych; z drugiej strony usuwają wszystkie trudności matematyki ścisłej, z którymi uporeczywie walczą matematycy.

13. Przybliżony rachunek waryacyjny.

Rachunek ten polega wogóle na znalezieniu funkcji (nie pewnej wartości, jak to bywa w zadaniach na minima i maxima), któraby odpowiadała pewnym danym warunkom maximum lub minimum. Zagadnienia tego rodzaju w technice są bardzo liczne; trudności jednakże formalne, jakie następuje obliczenie takiej funkcji, zmuszają do omijania tych zagadnień. Matematyka wielkości przybliżonych ułatwiła tę metodę; Ritz w Crelles Journal r. 1908 podaje sposób, według którego odnalezienie funkcji, odpowiadającej danym warunkom, zostaje zastąpione obliczeniem nieznanych współczynników dowolnie lecz odpowiednio obranej funkcji. W tym celu przyjmuje on, że szukana funkcja jest sumą iloczynów z nieokreślonych narazie lecz stałych dla danego zadania współczynników i z takich funkcji, któreby czyniły zadość danym warunkom granicznym a resztą dowolnych. Wynik tego obliczenia jest oczywiście przybliżony, zależy bowiem od ilości i trafności obranych funkcji.

Lorenz „Technische Elasticitätslehre 1913“ stosuje ten sposób do obliczenia odkształceń brył sprężystych; opierając się na twierdzeniu teorii sprężystości, że odkształcenia układów sprężystych są takie, że praca naprężeń łącznie z siłami zewnętrznymi jest minimum. Rozwiązanie w ten sposób postawionego zadania należy do rachunku waryacyjnego; Lorenz jednakże rozwiązuje je jako zadanie na zwykłe minimum.

Zakończenie.

Matematycy ostatnich czasów rozwijają swą naukę w kierunku formalnym, starają się oni możliwie jak najszerzej uogólniać jej pojęcia i nadać jej metodom możliwie ści-

słą pod względem logicznym postać. Chociaż postępowanie takie odrywa przedmiot rozpatrywań matematyki od zjawisk rzeczywistych i może nawet tamuje jej rozwój, nie można jednakże powiedzieć, ażeby niedoprowadzało ono do wyników realnych. Przez uogólnienie np. liczby naturalnej, doszliśmy do pojęcia mniej realnego, jakim jest liczba niewymierna, a nawet—do zupełnie nie realnych pojęć jakimi są liczby zespolone i kwaterniony; jednakże wycieczki te umysłu ludzkiego poza zwykłą realność doprowadziły do pojęcia i do teorii wektorów, która jest wyrazem realnego przebiegu pewnych zjawisk fizycznych. Nie odmawiając przeto matematyce oderwanej stanowiska odrębnego jako nauki, która na podstawie zdobytych już metod postępowania, rozwijać się może sama w sobie i szuka następnie realnych obrazów dla swych wyników, powinniśmy jednakże uważać ten kierunek, jako jeden z kierunków, na jakie matematyka się dzieli; a oddzielnym kierunkiem powinien być ten, który bezpośrednio zaspakaja w formie praktycznej wymagania realne życia naszego.

Inżynier konstruktor wymaga od metod matematycznych, ażeby doprowadzały go drogą najprostszą do liczbowych rozwiązań postawionych zadań. Wzory przeto nierozwinięte, w postaci np. całkowej lub różniczkowej, lub w postaci równań nierozwiązalnych, nie wystarczają dla nauk technicznych; bez użytku dla technika jest np. równanie, którego pierwiastków nie można obliczyć; na niewiele przyda mu się funkcya, wyrażająca pewien związek pomiędzy zmiennymi, gdy nie może on z niej „wyczuć“ tego związku; niezaspakaja go nawet zestawienie liczbowe tych zmiennych, chce on bowiem „widzieć i czuć“ ten związek, a prztem często interesuje się nie tyle jego ścisłością, ile zależnością przybliżoną.

Wobec ważności, jaką posiada matematyka w naukach technicznych i wobec ciągłych nowych zagadnień, jakie technika jej nasuwa, matematycy powinni zwrócić baczną uwagę na potrzeby nauk technicznych i przystosować jej metody do tych potrzeb.

Matematyka powstała na tle potrzeb realnych i z tej dziedziny czerpała swe tematy, tak też i nadal czerpać je

powinna z tego źródła i zaspakając potrzeby, jakie nasuwa rozwój kultury ludzkiej ³⁵⁾.

³⁵⁾ Wybitniejszymi rzecznikami tej idei są, między innymi, w Niemczech: F. Klein, K. Heun, H. Lorenz, w Rosyi zaś — Czebyszew. Dwaj pierwsi zarzucają nowoczesnym matematykom, że porzucili badania działu matematyki wielkości przybliżonych, której podstawy dali, ich zdaniem, Poncelet, Euler, Laplace, Gauss i wielu innych matematyków, którzy jednocześnie byli twórcami różnych działów matematyki oderwanej. H Lorenz wypowiada (*Mechanik*, str. 616) przeświadczenie, że zbliżamy się do okresu pracy naukowej, w którym wyszkoleni w matematyce przedstawiciele teorii i w praktyce będący inżynierowie się zbliżają; co wróży powodzenie tak dla nauki jak i dla techniki. W tenże sposób, lecz o wiele wcześniej wyraża się rosyjski matematyk Czebyszew.

BIBLIOTEKA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 3