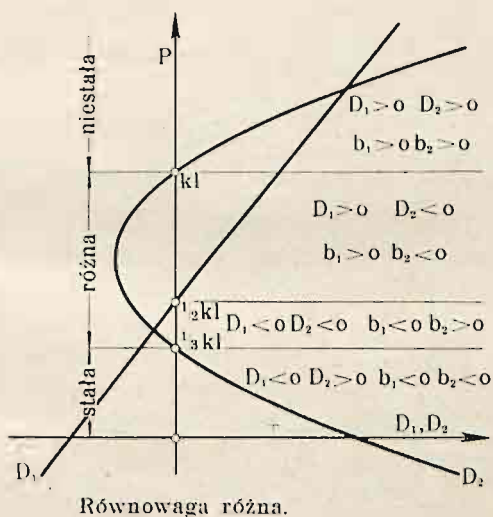


STATYKA ANALITYCZNA

Inż. H. CZOPOWSKI
PROF. POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

STATYKA ANALITYCZNA

DLA STUDJUJĄCYCH NAUKI
INŻYNIERYJNE I FIZYCZNE
JAKO TOM V-TY „MECHANIKI TEORETYCZNEJ”
TEGOŻ AUTORA.



WARSZAWA
1933

BIBLIOTEKA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

~~S. 12965~~

~~C. 1806~~

Zakłady Drukarskie
F. Wyszyński i S-ka
Warszawa, Warecka 15



nr. 148

69/21, 55, 06

BG02P/ 55A-17

SPIS RZECZY.

Wstęp.	Str. 3
----------------	--------

ROZDZIAŁ I.

Stopnie swobody i przesunięcia wirtualne.

§ §		Str.	§ §		Str.
1.	Spółrzędne niezależne i stopnie swobody.	7	5.	Ograniczenia zmienne.	16
2.	Stopnie swobody układów płaskich.	10	6.	Ograniczenia, wyrażone równaniami różniczkowymi niecałkowalnymi.	17
3.	Liczba stopni swobody danego układu nie zależy od rodzaju układu współrzędnych.	13	7.	Ograniczenia jednostronne i dwustronne.	19
4.	Przesunięcia wirtualne i ich wzajemne zależności.	13	8.	Przesunięcia wirtualne, wyrażone prędkościami.	20

ROZDZIAŁ II.

Praca wirtualna i funkcja sił.

§ §		Str.	§ §		Str.
9.	Siły połączeń i siły wewnętrzne.	21		odporowych, gdy połączenia są jednostronne.	28
10.	Wirtualna praca wogóle.	24	15.	Funkcja sił.	28
11.	Wirtualna praca sił połączeń.	25	16.	Istnienie funkcji sił nie zależy od rodzaju układu współrzędnych.	32
12.	Wirtualna praca możliwa.	26	17.	Wirtualna i rzeczywista wartość funkcji sił.	34
13.	Wirtualna praca sił wewnętrznych.	26	18.	Potencjał sił.	36
14.	Wirtualna praca możliwa sił				

ROZDZIAŁ III.

Równowaga sił.

§ §		Str.	§ §		Str.
19.	Określenie równowagi sił.	37		nie geometryczne, lub gdy są tylko analityczne.	41
20.	Metody obliczenia równowagi, gdy ograniczenia są jawne		21.	Obliczenie równowagi, gdy	

— VIII —

§§	Str.	§§	Str.
położenie układu oraz siły wyrażone są współrzędnymi niezależnymi.	52	niem równowagi sił zewnętrz- nych, działających na układ swobodny i na układ nieswo- bodny, zapomocą pracy wir- tualnej i zapomocą statyki.	56
22. Obliczenie równowagi z funk- cji sił.	54	25. Całkowity wyraz pracy wir- tualnej.	56
23. Współrzędne uogólnione i siły uogólnione.	55		
24. Różnica pomiędzy wyraże-			

ROZDZIAŁ IV.

Układy o jednym stopniu swobody.

§§	Str.	§§	Str.
26. Równowaga różnych rzędów i różnych rodzajów.	57	pojedynczy krzywej równo- wagi.	67
27. Interpretacja statyczna rzę- dów i rodzajów równowagi.	59	33. Warunki analityczne istnie- nia punktu zmianowego.	72
28. Interpretacja fizyczna rzędów i rodzajów równowagi.	60	34. Rzędy zmienności rodzajów równowagi.	76
29. Krzywe równowagi.	61	35. Kierunek zmiany rodzajów równowagi.	77
30. Kolejność rodzajów równo- wagi w różnych położeniach danego układu przy tej sa- mej wartości parametru siły.	63	36. Analiza krzywych równo- wagi.	77
31. Punkt zmianowy i punkt ze- rowy.	65	37. Rodzaje równowagi w pun- kcie zmianowym.	82
32. Punkt zmianowy jako punkt podwójny, lub jako punkt		38. Krzywa równowagi, gdy pa- rametr λ jest funkcją jedno- wartościową zmiennej q	85

ROZDZIAŁ V.

Układy o wielu stopniach swobody.

§§	Str.	§§	Str.
39. Równowaga i jej rodzaje.	86	46. Siła krytyczna układów, zło- żonych z prętów sztywnych, połączonych z sobą końcami zapomocą przegubów sprę- żystych.	109
40. Obliczenie rodzajów równo- wagi.	88	47. Zastosowanie pojęcia maxi- mum i minimum funkcji sił do wyrażenia równowagi i jej rodzajów.	112
41. Obliczenie rodzajów równo- wagi różnej.	96	48. Dynamiczna miara siły wy- boczenia.	113
42. Obliczenie sił zerowych.	99	49. Równowaga sił, nie mających funkcji, i jej rodzaje.	114
43. Obliczenie niestałości równo- wagi w pewnych szczegó- lnych przypadkach.	100	50. Równowaga, gdy równania po- łączeń posiadają czas jawnie.	116
44. Obliczenie równowagi i jej rodzajów, gdy funkcja sił jest jednorodna drugiego stopnia współrzędnych niezależnych.	103		
45. Jednorodna funkcja sił jako równanie równowagi.	108		

ROZDZIAŁ VI.

Układy o nieskończonej liczbie stopni swobody.

(Początki rachunku warjacyjnego).

§§	Str.	§§	Str.
51.	Sformułowanie zadania. . . 117		gi zapomocą rachunku war-
52.	Początki rachunku warja- cyjnego. 120	56.	załozenia, na których opie- ra się powyższa metoda ra- chunku warjacyjnego. . . 134
53.	Szczególne przypadki funk- cji sił. 128	57.	Inne zastosowania symbolu δ . 135
54.	Liczba stałych całkowania. . 130	58.	Przykład. 136
55.	Obliczenie rodzaju równowa-		

ROZDZIAŁ VII.

Obliczenie przybliżone równowagi.

§§	Str.	§§	Str.
59.	Sformułowanie zadania. . . 148	63.	Warunki, przy których war- tość siły krytycznej, obliczo- na z równania przybliżone- go, jest ścisła. 169
60.	Metoda szeregów. 149		
61.	Najmniejsza wartość siły P_k i odkształcenie pierwsze. . 156		
62.	Metoda funkcyj przybliżo- nych. 161		

ROZDZIAŁ VIII.

	Str.		Str.
Przykłady.	173	Skorowidz.	201

Wstęp.

Rozwój konstrukcji budowlanych, jak również ulepszenia materiałów budowlanych w kierunku powiększenia ich wytrzymałości, co pociąga za sobą znaczniejsze odkształcenia układów *), wymagają, mojem zdaniem, stosowania ogólniejszych metod statycznych, niż te, które zwykle w podręcznikach są podawane. Oparcie metod statycznych na zasadzie równoległoboku sił nie wystarcza do obliczenia wielu dzisiaj stosowanych konstrukcji, szczególnie, gdy wypadnie obliczyć rodzaje ich równowagi, lub ich odkształcenia.

Nie miałem zamiaru w tej pracy wyprowadzać gotowych wzorów konstrukcyjnych, lecz chciałem wyłożyć pewne pojęcia ogólne, któreby przyczyniły się do uniknięcia różnych niejasności w pojmowaniu zjawisk równowagi i jej rodzajów, a nawet — błędów, jakie w obliczeniach z tego tytułu często spotykamy **).

Wzorem dla tej pracy była dla mnie przedewszystkiem klasyczna praca Lagrange'a — „*Mécanique analytique*“ (wydanie 1888), następnie praca H. Poincaré'go „*Acta mathematica*“ (Stockholm 1885) i tegoż autora „*Figures d'équilibre d'une masse fluide. Leçons professées à la Sorbonne en 1900*“ oraz praca Paul Appell'a „*Traité de Mécanique rationnelle. Figures d'équilibre*“ — tome IV, 1921, która jest oparta na powyższych pracach Poincaré'go. W pracach tych bowiem znalazłem szerokie ujęcie warunków równowagi i metodyczne ich obliczenie, którego brak, mojem zdaniem, odczuwa się

*) Mając to na myśli, podjąłem w swoim czasie obliczenie „Stosunku przyrostów naprężeń do przyrostów długości prętów kratownic statycznie wyznaczalnych“. „Sprawozdania i Prace W. T. P. r. 1922, Zeszyt 4-ty“. Również z tego względu należy, mojem zdaniem, przyjmować do obliczeń zasadniczych materiały jako nieograniczenie sprężyste, a dopiero po rozwiązaniu takiego zadania, można wzory otrzymane zastępować wzorami określonymi z dowolną dokładnością; porówn. przykład 9-ty na str. 190-tej pracy.

**) Artykuł autora w „Czasopiśmie Technicznym“ 1924 r. № 7.

w wielu pracach naukowych o charakterze technicznym; pojęcia i metody tych obliczeń starałem się więc zastosować do zagadnień z dziedziny techniki.

Ażeby tego celu dopiąć, położyłem przedewszystkiem nacisk na wykład pojęcia stopni swobody danych układów oraz na sposoby ograniczenia ich ruchu; następnie określenie równowagi oparłem na zasadzie energetycznej, którą uważam za jedynie ogólną, a więc nadającą się do analizy matematycznej. Wyrazem tej zasady jest praca wirtualna, ewentualnie — funkcja sił, którą wziąłem za podwalinę do obliczeń. Dla wyłożenia tych pojęć korzystałem bezpośrednio ze wspomnianej pracy klasycznej Lagrange'a i z pracy Hertz'a o ograniczeniach, wyrażonych równaniami niecałkowalnymi.

W następnych częściach tej pracy przeprowadziłem analizę matematyczną wyrazu funkcji sił, która doprowadziła do pojęcia wogóle równowagi, a następnie — do pojęcia równowagi o różnych rzędach (§ 16), — o różnych rodzajach (§§ 26, 37, 39), — do pojęcia ich zmiany wogóle, — do pojęcia zmiany różnych rzędów (§ 34), a w szczególności doprowadziła do ważnego pojęcia równowagi różnej (§§ 37, 40) i wreszcie dała możność sprecyzowania pojęcia siły krytycznej (§§ 43, 44, 47, 61) oraz równowagi obojętnej (§ 26); a w układach o jednym stopniu swobody doprowadziła do twierdzenia o kolejności rodzajów równowagi (§ 30). Metodą tą można było również obliczyć rodzaje równowagi przy obciążeniu krytycznym danych układów (§ 31), o czym były wygłaszane w literaturze technicznej różne zdania.

Wreszcie zastosowałem powyższe pojęcia do badania układów o jednym stopniu swobody (Rozdz. IV-ty), następnie — do układów o skończonej liczbie stopni swobody (Rozdz. V-ty) i wreszcie — do układów o nieskończenie wielu stopniach swobody (Rozdz. VI-ty). Pojęcia te, zdobyte analizą matematyczną, starałem się następnie unaocznnić geometrycznie i fizycznie (§§ 28, 29).

W celu ułatwienia rozpoznawania rodzajów równowagi, zastosowałem wyłożone sposoby rozpoznawania do pewnych szczególnych układów: np. do układów naturalnych (§ 43) — do układów, których funkcja sił jest jednorodna drugiego stopnia, i dla tych ostatnich dowiodłem twierdzenie, iż funkcja sił jest w tym razie również równaniem równowagi (§§ 44, 45). Rozpatrzyłem wreszcie równowagę i jej rodzaje układów o jednym stopniu swobody, których siła zewnętrzna jest funkcją linjową współrzędnych danego układu i dowiodłem dla tego przypadku twierdzenie o szczególnych formach odkształconej (§ 38).

Obliczenie warunków rozpoznawania tych rodzajów równowagi wymagało jednakże znajomości pewnych działów matematyki, które w programach politechnicznych zazwyczaj nie bywają uwzględniane; uważałem przeto za odpowiednie braki te uzupełnić.

Działami temi są: przekształcenia wielomianów jednorodnych 2-go stopnia,—określenie form oznaczonych i nieoznaczonych,—warunki rozpoznania tych form (§ 36) i wreszcie, w celu obliczenia równowagi układów o nieskończenie wielu stopniach swobody, wyłożyłem początki rachunku warjacyjnego jako metody ogólnej, która doprowadza do równań równowagi sił i ich momentów (§ 52).

Do wykładu tych uzupełnień starałem się stosować metody ilustracyjne, w czem były mi pomocne pojęcia przestrzeni wielowymiarowej, której określenie i cel dydaktyczny w krótkości podałem w dopisku na str. 90-tej.

Na zakończenie podałem sposoby przybliżone obliczenia równowagi i jej rodzajów — (Rozd. VII str. 148; Jasiński, Ritz, Timoszenko).

Dla ilustracji wyłożonych pojęć podałem obliczenie równowagi i jej rodzajów w szeregu przykładów, przytoczonych w tekście oraz w 11-tu, przykładach, zgrupowanych w rozdziale VIII-mym (str. 173) niniejszej pracy, która, mojem zdaniem, nie wyczerpuje poruszonych tutaj kwestyj.

Kończąc te słów kilka, składaam z prawdziwą przyjemnością podziękowanie p. Profesorowi Antoniemu Przeborskiemu, p. Prof. Stefanowi Straszewiczowi oraz Docentowi Uniwersytetu Warszawskiego, p. Ottonowi Nikodymowi za uprzejme przedyskutowanie ze mną pewnych fragmentów tej pracy, co miało miejsce podczas okolicznościowego spotkania się nad Świdrem w siedzibie Towarzystwa Popierania Nauki; za miłą zaś gościnę, dzięki której to spotkanie nastąpiło, składaam podziękowanie Zarządowi Towarzystwa.

Dziękuję wreszcie p. inż. Adamowi Cybulskiemu, asystentowi Politechniki Warszawskiej, za korektę tego wydawnictwa.

Autor.

