przyrost ten, czyli praca wirtualna, wyrazi się wtedy następującym wyrazem:

$$\Delta U = \left| \frac{\partial F}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial q_n} \cdot \delta q_n \right| + \frac{1}{2!} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} \cdot \delta q_1^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_3} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_3 + \cdots \right| + R_3, \qquad (65)$$

który jest *całkowitym* wyrazem pracy, jaką siły wykonały podczas wirtualnego przesunięcia układu z danego położenia do położenia sąsiedniego; litera zaś R_3 oznacza pozostałe wyrazy tego szeregu, które są trzeciego i wyższych rzędów. Wartość δU wyrażona równaniem 62-giem, jest więc tylko częścią wartości tej pracy, resztą zaś tej wartości jest wyrażona następnemi wyrazami szeregu 65-go.

Z tego wyrazu wynika, że praca sił podczas wirtualnego przesunięcia składa się z wartości nieskończenie małych różnych stopni, które — oczywiście — mają swoje fizyczne znaczenie, które rozpatrzymy w następnych paragrafach.

Jeżeli dany układ jest w położeniu równowagi, to równanie 65-te, ze względu na równania równowagi, t. j. na równania 63-cie, otrzyma następującą postać:

$$\Delta U = \frac{1}{2!} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} \cdot \delta q_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_2 + \cdots \right| + R_3. \qquad (66)$$

ROZDZIAŁ IV.

UKŁADY O JEDNYM STOPNIU SWOBODY.

26. Równowaga różnych rzędów i różnych rodzajów.

W celu ułatwienia rozpatrywań właściwości równowagi, weźmiemy najpierw pod uwagę układ o jednym stopniu swobody, t. j. układ, którego położenie wyznacza tylko jedna spółrzędna niezależna; w tym przypadku równanie 65-te otrzyma postać nastepującą:

$$\Delta U = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \delta q^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \cdot \delta q^3 + \cdots; \qquad (67)$$

wielkości δq należy wyobrazić sobie jako przyrosty spółrzędnej q, które nazwiemy przesunięciami układu, gdy układ presunięty zostanie z położenia q do położenia $q + \delta q$.

Główna część wartości pracy sił, działających na dany układ podczas przesunięcia wirtualnego, wyrażona jest wartością pierwszego wyrazu tego szeregu; pozostałe bowiem wyrazy są nieskończenie małemi wielkościami wyższych rzędów. Ażeby przeto zachodziła równowaga sił w pewnem położeniu układu, powinna praca podczas nieskończenie małego przesunięcia, w myśl określenia równowagi (§ 19-ty str. 38-ma), równać się zeru; a więc, w razie równowagi sił, przyłożonych do danego układu, powinno być spełnione równanie

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

z którego obliczymy $q = q_0$, gdy będzie dany parametr λ; — jest to szczególny przypadek równań 63-cich.

Lecz z równania 67-go wynika, że całkowita wartość pracy wirtualnej ΔU może być tylko w szczególnych przypadkach równą zeru, wogóle zaś posiada ona pewne wartości *drugiego i wyższych rzędów*; dlatego też jesteśmy zmuszeni rozróżniać równowagę różnych rzędów — i tak, jeżeli pierwsza pochodna funkcji sił względem zmiennej niezależnej q i dla pewnej jej wartości $q = q_0$ równa się zeru, a następna pochodna dla tejże wartości q_0 *nie* równa się zeru, to powiemy, że mamy równowagę pierwszego rzędu; jeżeli zaś pierwsza i druga pochodna *dla tejże wartości* $q = q_0$ równa się zeru, a następna t. j. trzecia pochodna nie równa się zeru, to powiemy, że mamy do czynienia z równowagą do drugiego rzędu włącznie i t. d.

Wartość najniższej pochodnej funkcji F, która nie znika dla $q = q_0$, wyraża pracę ΔU, jaką siły wykonały podczas danego przesunięcia; wartość tej pracy może być, oczywiście, różnych rzędów; zależy to od rzędu pochodnej, która nie znika; w każdym razie znak tej wartości, jako wartości pracy, którą siły wykonały, wskazuje, czy dany układ, — po wyprowadzeniu go z położenia równowagi i po pozostawieniu go samemu sobie, — będzie się oddalał, czy też będzie się zbliżał do położenia równowagi; a właściwiej mówiąc, czy będzie się oddalał, czy też będzie się wahał około tego położenia. Siły więc, o których mówimy, że są w równowadze, mogą, po wyprowadzeniu danego układu z położenia równowagi, wykonać pewną pracę, lecz pracę nieskończenie małą wyższych rzędów, niż pierwszy; a ponieważ ruch może nastąpić wogóle tylko w tym kierunku, w jakim praca sił jest dodatnia, przeto, jeżeli podczas odchylenia układu z położenia równowagi siły wykonują pracę dodatnią, to nastąpi ruch w kierunku tego przesunięcia; równowagę taką nazwano przeto *niestałą;* jeżeli zaś siły wykonują pracę ujemną, to ruch może nastąpić tylko w kierunku przeciwnym do kierunku tego odchylenia, t. j. w kierunku położenia równowagi; równowagę taką nazwano *stałą.* Jeżeli w szczególnym przypadku wszystkie pochodne do ∞ będą równe zeru (dla $q = q_0$), to powiemy, że mamy do czynienia z równowagą obojętną, w znaczeniu takiem, w jakiem zwykle się mówi w podręcznikach fizyki (gdy się np. mówi o kuli ciężkiej, spoczywającej na płaszczyźnie poziomej); równowagę taką można nazwać *zupełnie obojetną.* A więc, jeżeli mamy układ w równowadze, to należy wogóle rozróżniać jej rząd i jej rodzaje.

Metoda, tutaj podana, obliczenia równowagi i jej rodzajów opiera się na założeniu, że funkcja sił jest ciągła i jej pochodne są ciągłe do rzędu, który stosujemy w danych obliczeniach; w razie zaś, gdy funkcja sił, lub jej pochodne są nieciągłe w danym przedziale, metoda ta nie da nam rozwiązania takiego zadania; należy w tym razie szukać innych sposobów jego rozwiązania. Jeżeli np. weźmiemy pod uwagę punkt materjalny ciężki, który ma się poruszać po linji łamanej, znajdującej się w płaszczyźnie pionowej, to metodą, wyżej podaną, nie znajdziemy ani położenia równowagi tego punktu, ani też nie obliczymy jej rodzajów; choć zasada znalezienia położenia równowagi, jak również określenia jej rodzajów, pozostaje i w tym razie ta sama, na której oparliśmy powyższy rachunek, t. j. zasada równoważności pracy i energji kinetycznej.

27. Interpretacja statyczna rzędów i rodzajów równowagi.

Rzędy i rodzaje równowagi można sobie unaocznić w następujący sposób. Wyobraźmy sobie, że pewnemu układowi, pozostającemu w równowadze, nadamy pewne nieskończenie małe przesunięcie; wtedy siły, działające na ten układ, wykonają pewną pracę, którą wyrazimy ogólnym wzorem:

$$\Delta_1 U = \frac{\partial F(q)}{\partial q} \cdot \delta q, \tag{68}$$

w którym $\Delta_1 U$ oznacza pracę sił podczas przesunięcia δq.

Nadajmy następnie danemu układowi drugie przesunięcie; wtedy praca podczas tego nowego przesunięcia wyrazi się wzorem:

$$\Delta_2 U = \frac{\partial F(q+\delta q)}{\partial q} \cdot \delta q\,;$$

spółrzędną bowiem tego nowego położenia jest $(q+\delta q)$; wzór ten da się przekształcić na następujący:

$$\Delta_2 U = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \delta q^2. \tag{69}$$

Jeżeli zaś mamy przypadek, że praca podczas pierwszego przesunięcia równa się zeru, t. j. gdy, w myśl danego określenia równowagi, zachodzi w tem położeniu równowaga pierwszego rzędu, to wartość pracy podczas następnego, t. j. drugiego przesunięcia wyrazi się w tym razie wzorem:

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \delta q^2. \tag{70}$$

W ten sposób, robiąc kolejno następne przesunięcia i założywszy, że wartości prac podczas poprzednich przesunięć równają się zeru, powiedzieć możemy, że praca podczas każdego kolejnego przesunięcia wyrazi się przy tych warunkach różniczką funkcji sił tego rzędu, którego liczba równa się liczbie porządkowej danego przesunięcia.

Mając to na uwadze, możemy rozumieć przez rzędy równowagi liczbę kolejnych, t. j. po sobie następujących nieskończenie małych przesunięć, podczas których siły, działające na ten układ, nie wykonują pracy; a znak wyrazu pracy podczas najbliższego przesunięcia, którego wartość nie równa się zeru, rozstrzyga o rodzaju tej równowagi.

W ten sposób pojęty rząd równowagi może być również utożsamiony z rzędem styczności toru poruszającego się punktu z powierzchnią, ewent. z krzywą jednakowych wartości funkcji sił, inaczej z powierzchnią ekwipotencjalną danego pola sił.

28. Interpretacja fizyczna rzędów i rodzajów równowagi.

Rzędy i rodzaje równowagi unaocznić sobie możemy fizycznie w ten sposób: danemu układowi, który jest w równowadze któregobądź rzędu, nadamy pewne odchylenie od tego położenia; a ponieważ tego odchylenia nie możemy zrobić (fizycznie) nieskończenie małem (w pojmowaniu matematycznem), wartość przeto pracy

ΔU podczas tego przesunięcia, rozwinięta w szereg Taylor'a, równa się wartości najbliższego jego wyrazu, który nie zniknie dla wartości $q = q_0$, i jeżeli ta wartość będzie dodatnią, to nastąpi ruch w kierunku odchylenia, t. j. będzie równowaga niestała; jeżeli zaś będzie ujemną, nastąpi ruch w kierunku pracy dodatniej, t. j. odbędzie się, jak w tym razie, w kierunku odwrotnym do odchylenia; a więc będzie to równowaga stała. Fizycznem przeto kryterjum rodzaju równowagi jest to, czy dany układ, po małem odchyleniu z położenia równowagi i po usunięciu czynników odchylających, — powróci (po pewnych wahnięciach około położenia równowagi) do położenia równowagi, czy też będzie się od niego oddalać. Kryterjum to może być określeniem fizycznem rodzaju równowagi.

29. Krzywe równowagi.

W tych rozpatrywaniach przyjęliśmy, iż siły, działające na dany układ, są funkcjami spółrzędnych punktów ich przyłożenia i pewnego parametru λ, który jest niezależny od tych spółrzędnych (§ 15-ty).

Jeżeli układ jest o jednym stopniu swobody, to funkcja sił wyrazi się w formie:

$$U = F(q\,;\lambda); \tag{71}$$

warunek zaś równowagi wyrazi się w tym razie równaniem:

$$\frac{\partial F(q\,;\lambda)}{\partial q} = 0; \quad \text{lub inaczej:} \quad F_q'(q\,;\lambda) = 0; \tag{72}$$

jest to bowiem pewna funkcja wogóle zmiennych q i λ.

Z tego równania obliczymy wartość spółrzędnej q, którą oznaczymy literą q_0, jak poprzednio, i która wyznacza położenie równowagi dla danego parametru λ; mamy przeto z równ. 72-go:

$$q_0 = \varphi(\lambda). \tag{73}$$

Rodzaj równowagi (o ile jest ona pierwszego rzędu), w jakim się znajduje dany układ w tem położeniu, określimy, w myśl poprzednich rozważań, ze znaku wartości wyrazu:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \gtrless 0; \text{ dla } q = q_0. \tag{74}$$

Równanie 72-gie, lub 73-cie nazwiemy *równaniem równowagi* (pierwszego rzędu) danych sił.

Zaznaczyć przytem należy, że warunek równowagi, wyrażony równaniem 72-em, nie zawsze wyraża, ażeby U dla wartości $q=q_0$ było maximum, lub minimum w znaczeniu określenia, jakie daje matematyka; wyraża on tylko, że w razie równowagi pochodna zmiennej U powinna być równa zeru; lecz wartość U może być, lub nie być dla wartości q_0 maximum, lub minimum; może być bowiem wartością spółrzędnej punktu przegięcia krzywej, wyrażonej równaniem 71-szem przy danej wartości λ.

W celu unaocznienia związku pomiędzy wielkościami U, q, λ, jaki zachodzi podczas równowagi, obierzemy w przestrzeni trzy osi U, q, λ, — wzajemnie prostopadłe, z których dwie q i λ obierzemy np. w płaszczyźnie naszego rysunku, trzecią zaś U prostopadle do niej. W tym układzie osi równanie $U=F\,(q;\lambda)$ przedstawi pewną powierzchnię, którą nazwiemy *powierzchnią funkcji sił;* wtedy dla pewnej wartości $\lambda=\lambda_1$ otrzymamy pewną krzywą $U=F\,(q;\,\lambda_1)$, leżącą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny $(U,\,q)$; krzywą tę nazwiemy *krzywą funkcji sił dla wartości* λ_1. Jeżeli w tem równaniu wartości λ będziemy zmieniać, to w układzie osi $(U,\,q,\,\lambda)$ otrzymamy cały zbiór takich krzywych, które utworzą omówioną powierzchnię funkcji sił $U=F(q;\lambda)$. Postać geometryczna krzywej funkcji sił $U=F(q;\lambda_1)$ dla obranej wartości $\lambda=\lambda_1$, przedstawiać będziemy na rysunku zapomocą kładów na płaszczyznę (q,λ) (kłady te na rysunkach będą zakreskowane).

Odcięte punktów zetknięcia się stycznej, przeprowadzonej do każdej linji funkcji sił równolegle do osi q, będą przedstawiać, w myśl wzoru 72-go, spółrzędne położenia równowagi danego układu dla danej wartości $\lambda=\lambda_1$. Jeżeli następnie będziemy zmieniać λ w sposób ciągły, to geometryczne miejsca tych punktów styczności utworzą na powierzchni funkcji sił pewną krzywą, którą nazwiemy *krzywą równowagi na powierzchni funkcji sił*, której rzut na płaszczyznę $(q,\,\lambda)$ wyrazi się równaniem $\frac{\partial F}{\partial q}=0$, lub inaczej równaniem o postaci $F'_q\,(q;\lambda)=0$. Krzywą tę nazwiemy krzywą równowagi na płaszczyźnie $(q,\,\lambda)$, lub krótko *krzywą równowagi*; każdemu bowiem punktowi tej krzywej odpowiada pewna spółrzędna q, która określa położenie równowagi, w jakiem układ dany się znajduje pod działaniem siły, której parametr jest λ_1; inaczej — każdy punkt tej krzywej określa położenie równowagi i siłę, która utrzymuje dany układ w tej równowadze.

Jeżeli przeto mamy daną funkcję $U = F(q; \lambda)$, to mamy powierzchnię funkcji sił; a przeprowadziwszy następnie do niej styczne równoległe do osi q, otrzymamy krzywą równowagi na tej powierzchni i wreszcie otrzymamy rzut tej krzywej na płaszczyznę (q, λ), który nazwaliśmy krzywą równowagi (na płaszczyźnie q, λ); a równanie tej krzywej wyrazimy, jakeśmy to już poprzednio podali — równaniem:

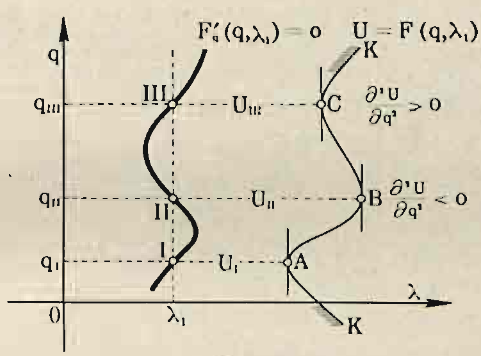
$$F'_q\ (q;\lambda) = 0.$$

30. Kolejność rodzajów równowagi w różnych położeniach danego układu przy tej samej wartości parametru siły.

Niewiadoma q równania równowagi

$$F'_q\ (q;\lambda) = 0$$

posiadać może wogóle dla obranej wartości $\lambda = \lambda_1$ pewną liczbę wartości, co będzie znaczyć, że dany układ, pod działaniem danej siły λ_1, może mieć kilka położeń równowagi. Rodzaje tych równowag są w pewnej między sobą zależności. Rozpatrywanie tej zależności oprzemy na założeniu, że funkcja $U = F(q; \lambda)$ jest *jednowartościową* (i różniczkowalną) oraz, że jej pochodne, przynajmniej pierwsze i drugie, są ciągłe i skończone. Jeżeli dla pewnej wartości $\lambda = \lambda_1$ otrzymamy z równania $F'_q\ (q;\lambda_1) = 0$ pewną liczbę wartości dla q, to na odpowiedniej linji funkcji sił $U = F(q; \lambda_1)$ otrzymamy pewną liczbę punktów A, B, C, $\cdot\cdot$, leżących na stycznych równoległych do osi q, których rzuty oznaczone są na rysunku 4-tym liczbami I, II, III.



Rys. 4.

Ażeby zbadać rodzaje równowagi danego układu w położeniach, odpowiadających tym różnym punktom krzywej równowagi, należy zbadać, czy dla obranej wartości $\lambda = \lambda_1$ i dla wartości q_I, q_{II} i q_{III}, odpowiadających położeniom równowagi, wartość

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \gtreqless 0;$$

inaczej, czy cząstka linji funkcji sił w tych punktach jest wklęsła, czy też wypukła względem widza, stojącego w punktach I, II i III na płaszczyźnie (q, λ) i patrzącego w kierunku osi U.

Ażeby sobie to postępowanie unaocznić, zrobimy przekrój powierzchni funkcji sił w miejscu $\lambda = \lambda_1$; przekrój ten naniesiony jest na rysunku 4-tym w postaci kładu K; ponieważ przekrój ten na zasadzie naszych założeń jest krzywą ciągłą, jednowartościową względem U i posiada wklęsłości, lub wypukłości w punktach równowagi I, II, III, przeto — z rosnącem q — po każdej wklęsłości tej krzywej musi nastąpić bezpośrednio wypukłość; — następnie znów wklęsłość i t. d. Na podstawie tej właściwości, wyrażonej naocznością geometryczną, wypowiemy twierdzenie:

jeżeli układ o jednym stopniu swobody, pod działaniem danej siły, wyrażonej parametrem λ, posiada kilka położeń równowagi, to rodzaje tych równowag zmieniać się będą w kolejnych po sobie następujących położeniach w ten sposób, że z rosnącą wartością spółrzędnej q po równowadze np. stałej nastąpi bezpośrednio równowaga niestała, — następnie stała i t. d.; właściwość tę nazwiemy *kolejnością rodzajów równowagi.*

Na podstawie tego twierdzenia można wypowiedzieć następujące wnioski:

WNIOSEK 1. Jeżeli dany układ dla wartości $\lambda = \lambda_1$ posiada *tylko dwa* położenia równowagi, to rodzaje równowagi w danych położeniach muszą być różne.

WNIOSEK 2-gi. Jeżeli dany układ dla wartości $\lambda = \lambda_1$ posiada dwa położenia o *jednakowych* rodzajach równowagi, to pomiędzy temi położeniami musi być przynajmniej jedno, a wogóle *nieparzysta* liczba położeń równowagi; jeżeli zaś rodzaje równowagi w danych położeniach są *różne*, to musi być pomiędzy niemi *parzysta* liczba położeń równowagi, lub może nie być wcale położeń równowagi.

UWAGA. Wniosek 2-gi zostaje również stwierdzony przez zachowanie się pręta sprężystego, cienkiego, umocowanego jednym końcem pionowo ku górze i obciążonego wzdłuż swej osi siłą P. Pręt ten pod działaniem odpowiedniej siły obciążającej (większej od siły Euler'owskiej) wygnie się i będzie pozostawał w równowadze stałej w dwóch położeniach, — po obydwóch stronach osi pionowej*); wnioskujemy przeto, że musi być pomiędzy temi dwoma położeniami równowagi choć jedno położenie równowagi nie-

*) Twierdzenie to możemy oprzeć na doświadczeniu, lub na rachunku.

stałej, — i tak jest w rzeczywistości; położenie pionowe jest tem położeniem równowagi, która przy danem obciążeniu siłą $P > P_E$ jest niestałą.

Przykład ten z prętem sprężystym nie powinien być właściwie podporządkowany twierdzeniu o kolejności równowagi, tutaj dowiedzionem; przyjęliśmy bowiem w tych rozpatrywaniach układ o jednym tylko stopniu swobody, gdy tymczasem pręt sprężysty uważać należy za układ, posiadający nieskończoną liczbę stopni swobody; uważać go bowiem można za złożony z nieskończenie małych ogniw, połączonych przegubowo. Zgodność jednakże wyników teoretycznych rozważań układów o jednym stopniu swobody z wynikami doświadczeń (lub obliczeń) pręta sprężystego, tutaj przytoczonego, wskazuje, że te wyniki w tym przypadku są zgodne. Zgodność ta wskazuje przeto, że, przy pewnych warunkach (o których narazie nie mówimy), rozpatrywanie równowagi układów o nieskończonej liczbie stopni swobody może być zastąpione rozpatrywaniem układów o jednym stopniu swobody*).

31. Punkt zmianowy i punkt zerowy.

W celu orzeczenia, czy równowaga w danem położeniu q_0 jest stałą, czy niestałą, należy, jakeśmy to mówili, zbadać znak wartości $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$ dla wartości $q = q_0$ i $\lambda = \lambda_1$. Wartość drugiej pochodnej $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$ w układach o jednym stopniu swobody jest wogóle funkcją dwóch niezależnych zmiennych q i λ; gdy zaś wartości q i λ będą odpowiadały położeniu równowagi, t. j. gdy będą czyniły zadość równaniu $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$, to wartość $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$ będzie funkcją jednej tylko niezależnej q, lub λ. Unaocznimy sobie geometrycznie tę zależność w ten sposób, że jeżeli mamy funkcję $F_q'(q;\lambda) = 0$, t. j. gdy mamy krzywą równowagi, to, ażeby wyznaczyć położenie pewnego punktu

*) W przypadku, gdy funkcja $U = F(q;\lambda)$ jest *wielowartościowa* zmiennej q, to powyższe wnioski o kolejności rodzajów równowagi pozostają w swej mocy; należy tylko wspomnianą kolejność liczyć *nie* na krzywej równowagi, leżącej na płaszczyźnie (q, λ), lecz należy liczyć tę kolejność na krzywej $U = F(q;\lambda_1)$, leżącej na powierzchni funkcji sił, t. j. na krzywej KK, naniesionej na rys. 4-ym. Z tego np. wynika, że gdy krzywa funkcji sił $U = F(q;\lambda_1)$ jest zamknięta, to musi być zawsze parzysta liczba położeń równowagi, z których jedna połowa jest w równowadze stałej, druga zaś połowa w równowadze niestałej.

na tej krzywej, wystarczy obrać wartość jednej tylko zmiennej q, lub λ.

Jeżeli przyjmiemy λ za niezależną zmienną, to wartość wyrazu $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$ i jego znak zależeć będzie tylko od wartości λ i zdarzyć się może, że dla pewnych wartości λ znak wartości $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$ będzie dodatni, — dla innych ujemny. Jeżeli taki przypadek zajdzie, to możemy wnioskować, iż istnieje przynajmniej jedna taka wartość $\lambda = \lambda_z$ (a stąd i odpowiednia wartość $q = q_z$), która, podstawiona do wyrazu $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$, nada mu wartość zera, lub ∞; wartość bowiem funkcji ciągłej przejść może z dodatniej wartości do ujemnej tylko przez zero, lub przez nieskończoność. Wartość przeto wyrazu $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$ w takich punktach posiadać będzie tę właściwość, że gdy dla wartości $\lambda < \lambda_z$ będzie ona np. dodatnią, to dla $\lambda > \lambda_z$ będzie ujemną. Położenie przeto układu, wyznaczone spółrzędną $\lambda = \lambda_z$ (i odpowiednią $q = q_z$), nazwiemy *położeniem zmianowem*, a punkt odpowiedni na krzywej równowagi — *punktem zmianowym*, a siłę λ_z — *siłą zmianową*.

Przejście wartości wyrazu $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$ w punkcie zmianowym przez nieskończoność unaocznić sobie możemy, wprowadziwszy do naszych rozpatrywań promień krzywizny krzywej funkcji sił $U = F(q; \lambda_1)$ w punktach równowagi, t. j. np. w punktach A, B i C krzywej KK na rys. 4-tym, która jest kładem krzywej $U = F(q; \lambda_1)$. Promień krzywizny w dowolnym punkcie tej krzywej wyraża się ogólnym wzorem:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}} \tag{75}$$

(dla dowolnej wartości λ i dla odpowiedniej wartości q); dla punktów zaś równowagi, w których $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$, przekształci się on na następujący:

$$\rho = \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}; \tag{76}$$

dla wypukłości więc względem płaszczyzny (q, λ) będziemy mieli ρ dodatnie; będzie to odpowiadało U_{min}; i odwrotnie.

Jeżeli następnie dla dwóch punktów krzywej równowagi, t. j. dla różnych λ otrzymamy promienie krzywizny z różnemi znakami, to przyjąć należy, że pomiędzy niemi musi leżeć przynajmniej jeden punkt, w którym $\rho = 0$, t. j. $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = \infty$.

Nie można jednakże odwrócić wogóle powyższych twierdzeń co do istnienia punktów zmianowych w tem znaczeniu, że jeżeli $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0$, lub $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = \infty$, to punkt taki musi być zmianowym; mogą być bowiem punkty, w których $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0$, lub $\rho = 0$, a punkty te nie będą zmianowe; wartość bowiem funkcji ciągłej, przechodząc przez zero, niekoniecznie musi zmienić znak. Powyższe warunki wyznaczenia punktów zmianowych zapomocą równań $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0$, lub $\rho = 0$ są przeto konieczne, lecz niewystarczające dla istnienia punktu zmianowego; punkt przeto, w którym

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0, \quad \text{lub} \quad \rho = 0,$$

nazwiemy wogóle punktem *zerowym*; punkt zaś zerowy, w którym zachodzi zmiana znaku tych wartości ze zmianą np. wartości parametru λ, nazwiemy punktem *zmianowym*.

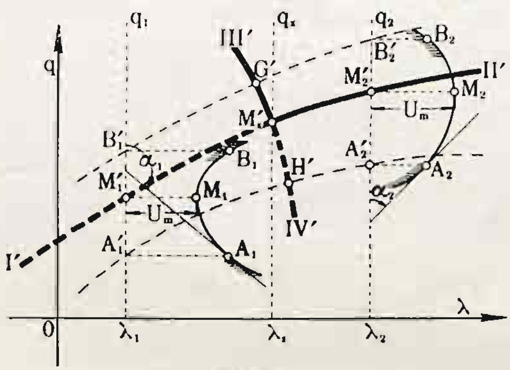
32. Punkt zmianowy jako punkt podwójny, lub jako punkt pojedyńczy krzywej równowagi.

Udowodnimy nast. twierdzenie: *jeżeli na krzywej równowagi znajduje się punkt zmianowy, który nie leży na stycznej prostopadłej do osi λ, to przez ten punkt przechodzić musi druga gałąź tej krzywej; inaczej punkt taki musi być punktem podwójnym tej krzywej.*

Niech krzywa $I' M_z' II'$ na rys. 5-tym*) przedstawia krzywą równowagi na płaszczyźnie (q, λ) i niech na niej punkt M_z' oznacza rzut punktu zmianowego M_z, znajdującego się na powierzchni

*) Litery z kreskami ' oznaczają rzuty na płaszczyznę (q, λ) punktów, oznaczonych temi samemi literami bez kresek na powierzchni funkcji sił.

funkcji sił. Jeżeli następnie przyjmiemy, że punkty po lewej stronie gałęzi, licząc od punktu M_z', np. punkt M_1' wyraża położenie, w którem dany układ posiada równowagę np. niestałą, — po prawej zaś np. w punkcie M_2' wyraża położenie, w którem dany układ posiada równowagę stałą, to pas powierzchni funkcji sił, leżący nad lewą gałęzią równowagi, będzie wypukły, — leżący zaś nad prawą gałęzią — wklęsły względem widza, przechodzącego po linji (I', II'). Przekroje tej powierzchni, leżące po prawej i lewej stronie odciętej λ_z w miejscach $\lambda = \lambda_1$ i $\lambda = \lambda_2$, bliskich do λ_z, są naniesione na rys. 5-tym w postaci kładów (krzywe zakreskowane) i oznaczone są literami $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$.



Rys. 5.

Obierzmy następnie na tych dwóch przekrojach punkty A_1 i A_2, których rzuty na płaszczyznę (q, λ) oznaczone są literami A_1' i A_2', i przeprowadźmy w punktach A_1 i A_2 styczne do odnośnych przekrojów; styczna w punkcie A_1, w myśl założenia co do wklęsłości, utworzy z osią q_1 kąt rozwarty, który jest oznaczony w kładzie literą α_1; a styczna w punkcie A_2 utworzy z odpowiednią osią q_2 kąt ostry, oznaczony literą α_2. Połączymy następnie te dwa punkty A_1 i A_2 dowolną krzywą, leżącą na powierzchni funkcji sił, którąby jednakże nie przecinała krzywej równowagi I, II; to na podstawie, że $U = F(q; \lambda)$ i że jej pochodne są skończone i ciągłe w danym przedziale, wywnioskujemy, że wartości kątów, jakie utworzą styczne, przeprowadzone do przekrojów, przeprowadzonych w kolejnych punktach odcinka $A_1 A_2$, leżących na powierzchni funkcji sił, powinny tworzyć ciągły szereg liczb, t. j. ciągły szereg wartości pochodnych $\frac{\partial F}{\partial q}$; a że w punkcie A_1 wartość tej pochodnej jest ujemną, a w punkcie A_2 dodatnią, przeto na odcinku $A_1 A_2$, leżącym na powierzchni funkcji sił, powinien pomiędzy punktami A_1 i A_2 leżeć przynajmniej jeden punkt (a wogóle nieparzysta ich liczba), w którym ta pochodna równać się musi zeru, t. j. w punkcie tym zachodzić musi równość $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$; czyli w sąsiedztwie punktu M_z musi być punkt (lub punkty), który leżeć będzie za obrębem danej krzywej równowagi, a w którym $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$. Na zasadzie tego przychodzimy do wniosku, że w bliskości punktu M_z musi być na powierzchni funkcji sił punkt, który leży zewnątrz rozpatrywanej gałęzi równowagi $I—II$, a którego spółrzędne wyznaczają nowe położenie równowagi; rzut jednego z tych punktów na płaszczyznę (q, λ) jest oznaczony na rysunku 5-tym literą H'. Po drugiej stronie gałęzi równowagi $I—II$ możemy powtórzyć to samo rozważanie, obrawszy na powierzchni funkcji sił punkty B_1 i B_2, których rzuty oznaczone są (rys. 5-ty) literami B_1' i B_2'; i w tenże sposób dojdziemy do wniosku, że w bliskości punktu M_z po tej stronie musi być również nowy punkt G równowagi (lub nieparzysta ich liczba), którego rzut oznaczyliśmy literą G'.

Ponieważ wskutek przyjętej ciągłości, punkty te nie mogą być odosobnione, wnioskujemy, że przez punkt zmianowy M_z' przechodzić musi druga gałąź krzywej równowagi (lub nieparzysta ich liczba) tak, iż w tym razie punkt zmianowy musi być punktem przecięcia się dwóch gałęzi (lub parzystej liczby) krzywych równowagi; czyli: punkt zmianowy w tych warunkach musi być jednocześnie punktem — zwanym w geometrji — punktem podwójnym (lub wielokrotnym) danej krzywej równowagi.

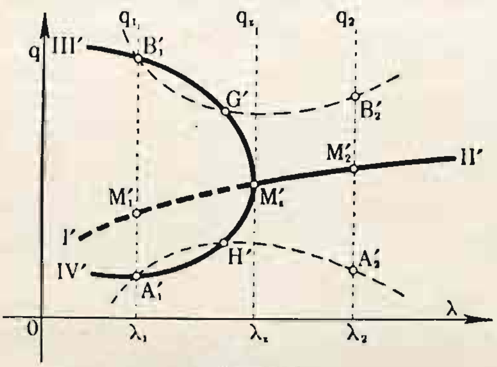
W tych rozpatrywaniach doszliśmy do wniosku, że wogóle liczba punktów G' i H', t. j. punktów równowagi, leżących poza daną krzywą równowagi, lecz w bliskości punktu M_z', musi być nieparzysta; lecz nie wynika z tego, że liczby te muszą być jednakowe; jeżeliby zachodził przypadek, że są one różne, to niektóre z tych nowych gałęzi musiałyby być styczne w punkcie zmianowym do danej gałęzi równowagi, t. j. że niekoniecznie musiałyby się przecinać. Przypadki te pozostają do bliższego rozpatrzenia.

W przypadku przecięcia się dwóch gałęzi równowagi Poincaré nazwał ten punkt „point de bifurcation“.

Jakie rodzaje równowagi przedstawiać będą te nowe gałęzie, można orzec na zasadzie twierdzenia o kolejności rodzajów równowagi, znając rodzaje równowagi jednej z tych gałęzi; jeżeli np. gałąź $I'M_z'$ (rys. 5-ty) przedstawia równowagę niestałą (krzywa przepunktowana), to rodzaj równowagi pozostałych trzech gałęzi odczytamy z rysunku.

Z rozkładu tych rodzajów równowagi wywnioskujemy, że, jeżeli posuwać się będziemy czy to wzdłuż gałęzi $I'\,II'$, czy też wzdłuż $III'\,IV'$ (rys. 5-ty), to przy przejściu przez punkt M_z' rodzaje równowagi się zmienią; właściwość tę wysłowimy w ten sposób, że punkt M_z' jest w tym razie punktem *zmianowym dla obu gałęzi.*

Inaczej przedstawi się układ tych gałęzi krzywej równowagi w przypadku, gdy punkty G i H (inaczej—gdy ich rzuty G' i H'), w których $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$, znajdą się po jednej stronie osi q_z, lecz po obydwóch stronach krzywej równowagi; wtedy — na zasadzie poprzedniego rozumowania — musi przez punkt zmianowy przechodzić nowa gałąź równowagi, jak poprzednio; forma jej jednakże w bliskości punktu M_z' będzie inna, niż poprzednio; nie może ona np. przecinać osi q_z, lecz musi leżeć po jednej jej stronie, a więc musi być styczną do niej w punkcie M_z', gdyż wobec zbliżania przekrojów λ_1 i λ_2 (rys. 6-ty) do przekroju λ_z, punkty H' i G', leżące nieskończenie blisko siebie, zbiegną się z punktem M_z' na osi q_z; gałąź ta przeto będzie styczną do osi q_z. Różnica rodzajów równowagi, jaką przedstawiają punkty tej gałęzi w porównaniu z gałęziami poprzedniego przypadku, jest ta, że w poprzednim przypadku (rys. 5-ty) punkt zmianowy M_z' był punktem zmianowym dla obydwóch gałęzi, w tym zaś przypadku (rys. 6-ty) punkt ten jest zmianowym dla gałęzi I' II', lecz nie jest punktem zmianowym dla gałęzi III' IV' *).



Rys. 6.

Zaznaczyć należy, że rozpatrywanie, tutaj przytoczone, odnosi się do przypadku, w którym wklęsłość przechodzi do wypukłości przez wartość $F''_{q,q} = 0$; wnioski te przeto nie dotyczą przypadku, w którym wklęsłość przechodzi do wypukłości przez $\rho = 0$, t. j. przez wartosć $F''_{q,q} = \infty$; przypadku tego narazie nie rozpatrujemy.

W obu przypadkach, w których punkty *G i H* leżą po obydwóch stronach osi q_z, lub po jednej jej stronie, punkt zmianowy jest punktem podwójnym—węzłowym krzywej równowagi $F'_q(q;\lambda) = 0$;

*) W skróceniu można wypowiedzieć powyższe dowodzenia w następujący sposób: tangens kąta w punkcie krzywej równowagi, odpowiadającym rzutowi A_1', jest — w myśl założenia — ujemny, w punkcie zaś, odpowiadającym rzutowi A_2', jest dodatni; musi być przeto punkt H, a więc i rzut jego H', w którym tangens kąta kierunkowego = 0, musi być przeto nowy punkt równowagi.

spółrzędne przeto tego punktu (q_z, λ_z) muszą z tego tytułu zaspokoić następujące trzy równania *):

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q\, \partial \lambda} = 0; \tag{77}$$

przeto taki punkt zmianowy nazwiemy punktem podwójnym dla przeciwstawienia pojęciu innego punktu zmianowego, który jest punktem pojedyńczym; wyznaczenie warunków istnienia tego punktu wyrazi się następującem twierdzeniem.

TWIERDZENIE. Jeżeli punkt zmianowy znajduje się na stycznej, prostopadłej do osi λ *(rys. 6-ty), to przez ten punkt może nie przechodzić nowa gałąź równowagi,* co było koniecznem w przypadku poprzednim; a jeżeli przechodzi przez ten punkt nowa gałąź, to musi ona być styczna w punkcie zmianowym do krzywej, na której leży punkt zmianowy, t. j. nie może jej przecinać.

Zwrócimy tu przytem uwagę, że punkt M_z', choć leży na stycznej prostopadłej do osi λ, nie jest jednak zmianowym dla odpowiedniej krzywej.

W rozpatrywaniach poprzednich przytoczyliśmy przypadek, w którym punkt zmianowy leżał na gałęzi krzywej równowagi I′ II′ (rys. 5-ty i 6-ty), która przecinała oś q_z; lecz zdarzyć się może, że punkt zmianowy leżeć będzie na stycznej, pokrywającej się z osią q_z (rys. 7-my); wtedy do tego przypadku nie da się zastosować poprzedniego sposobu rozumowania; nie przeprowadzimy bowiem w tym razie dwóch przekrojów po obydwóch stronach punktu zmianowego, jakeśmy zrobili poprzednio.

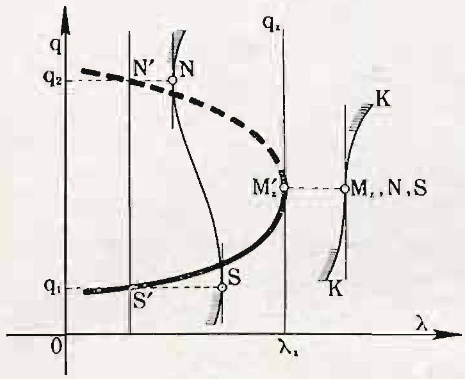
Przyjmiemy więc obecnie, że punkt zmianowy jest punktem styczności gałęzi równowagi z osią q_z, jak to pokazano na rys. 7-ym; jeżeli więc np. górna gałąź danej krzywej przedstawia równowagę niestałą, dolna wtedy przedstawiać musi — na podstawie kolejności rodzajów równowagi — gałąź równowagi stałej; przekrój przeto powierzchni, zrobiony w miejscu $\lambda = \lambda_z$, będzie wypukły nad gałęzią, przedstawiającą równowagę stałą, a wklęsły nad gałęzią, przedstawiającą równowagę niestałą. Przekrój powierzchni funkcji

---

*) Należy sobie przypomnieć, że jeżeli mamy wogóle równanie krzywej w formie np. $f(x, y) = 0$, to w punkcie podwójnym tej krzywej muszą być spełnione równania:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

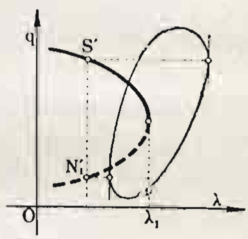
sił w bliskości punktu zmianowego musi mieć przeto w tym razie postać SN, przedstawioną na rys. 7-ym, jako jego kład; jeżeli następnie przekrój ten zbliżać będziemy do przekroju q_z, to rzuty S' i N' punktów wierzchołkowych S i N zbliżać się będą do punktu M_z' i znajdą się na stycznej prostopadłej do osi λ; przekrój przeto q_z przez powierzchnię funkcji sił przedstawi się w tym razie w postaci krzywej KK z punktem przegięcia w M_z. W tym więc przypadku niema konieczności, ażeby przez ten punkt przechodziła nowa gałąź równowagi, jak to było poprzednio.



Rys. 7.

Równowagę, określoną spółrzędnemi punktu M_z', przedstawioną na rysunku 7-ym, Poincaré nazwał *równowagą graniczną* (limite); dwa bowiem pierwiastki q_{I} i q_{II} równania równowagi wzajemnie się pokrywają w tym punkcie.

UWAGA. Przekrój powierzchni funkcji sił, którego dwie cząstki w punktach S' i N' posiadają różne rodzaje równowagi, może przybrać również postać, przedstawioną na rys. 8-ym; lecz jest to przypadek, który należy odmiennie traktować od poprzedniego; dana bowiem funkcja sił U jest w tym razie dwuwartościowa spółrzędnych q.



Rys. 8.

33. Warunki analityczne istnienia punktu zmianowego.

Wykazaliśmy poprzednio, że w punkcie zmianowym zachodzi równość

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0, \tag{78}$$

dla wartości q, obliczonej z równania równowagi: $F'_q(q;\lambda) = 0$; lecz tego warunku nie można odwrócić, t. j. nie można powiedzieć, że jeżeli równanie 78-me jest spełnione, to punkt jest zmianowy; wartość bowiem wyrazu $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$, który jest funkcją niezależnej zmiennej λ (lub q), przechodząc przez zero, nie zawsze zmienia znak.

Warunek przeto powyższy (rów. 78-me) jest warunkiem koniecznym, lecz niewystarczającym dla określenia punktu *zmianowego.* Punkt krzywej równowagi, w którym spełnione jest równanie 78-me, nazwiemy przeto wogóle *punktem zerowym* (o czem już wspominaliśmy poprzednio); a czy jest on zmianowym, czy nie, rozstrzygną o tem inne warunki.

Wartość parametru λ, czyniącą zadość równaniu 78-mu, nazwiemy *siłą zerową*; położenie zaś układu w tym przypadku nazwiemy *położeniem zerowem.*

Punkt zerowy jest punktem zmianowym, gdy wartość wyrazu $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$ w sąsiednich punktach punktu zerowego po obydwóch jego stronach, leżących na odpowiedniej krzywej równowagi, ma znaki różne; ten warunek bowiem wykaże dopiero, że dany punkt jest punktem zmianowym.

Oznaczmy wogóle wartość pochodnej cząstkowej drugiego rzędu funkcji sił $U = F\,(q\,;\lambda)$ względem q symbolem $U''_{q,q}$, to wartość tę, w *dowolnym* punkcie powierzchni $U = F\,(q\,;\lambda)$, wyrazimy wzorem:

$$U''_{q,q} = F''_{q,q}(q\,;\lambda)\,, \tag{79}$$

gdzie q i λ są dotychczas niezależne zmienne; jeżeli zaś rozpatrywać będziemy wartość $U''_{q,q}$ dla położeń równowagi, dla których zachodzi równanie

$$F'_q\,(q\,;\lambda) = 0\,,$$

to pozostanie w równaniu 79-tem jedna tylko niezależna q, lub λ, t. j. funkcja $F''_{q,q}(q\,;\lambda)$ będzie wtedy funkcją jednej tylko niezależnej q, lub λ.

Ażeby następnie zbadać wartość $U''_{q,q}$ w sąsiedztwie punktu zerowego, dla którego

$$F'_q\,(q\,;\lambda) = 0\,, \text{ oraz } F''_{q,q}(q\,;\lambda) = 0\,, \tag{80}$$

rozwiniemy wyraz $F''_{q,q}(q\,;\lambda)$ w szereg Taylor'a i napiszemy wzór dla przyrostu wartości tej funkcji w dwóch postaciach zależnie od tego, czy obierzemy λ za niezależnie zmienną, czy też q; przyrost ten przedstawi się w następującej postaci:

1) gdy obierzemy λ za niezależnie zmienną, wtedy mamy: *)

*) Symbol d oznacza tutaj—jak wogóle pochodną zupełną, t. j. dla jej obliczenia przyjąć należy, że np. q jest funkcją zmiennej λ, ewent. odwrotnie.

$$\Delta_\lambda U''_{q,q} = \frac{d\,F''_{q,q}}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2F''_{q,q}}{d\lambda^2} \cdot \Delta\lambda^2 + \cdot \cdot \cdot \quad (81)$$

2) gdy zaś przyjmiemy q za niezależną zmienną, napiszemy wtedy.

$$\Delta_q U''_{q,q} = \frac{d\,F''_{q,q}}{d\,q} \cdot \Delta q + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2F''_{q,q}}{d\,q^2}\,\Delta q^2 + \cdot \cdot \cdot \quad (82)$$

Ażeby więc dany punkt zerowy (q_z, λ_z) krzywej równowagi, obliczony z równania

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

oraz z równania

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0,$$

był zmianowym, powinna wartość $\Delta_\lambda U''_{q,q}$ zmieniać znak ze zmianą znaku przyrostu $\Delta\lambda$ — w rów. 81-em, lub — przyrostu Δq w rów. 82-giem, co nastąpi tylko wtedy, gdy najniższy rząd pochodnej

$$\frac{d^k F''_{q,q}}{d\lambda^k},$$

ewent. pochodnej

$$\frac{d^k F''_{q,q}}{d\,q^k},$$

która nie znika w tym punkcie, będzie *nieparzysty*; wtedy bowiem ze zmianą znaku $\Delta\lambda$ (ewent. Δq) otrzymamy zmianę znaku wartości $\Delta\, U''_{q,q}$; a więc jeżeli w równaniu 81-em, ewent. 82-em dla punktu zerowego

$$\frac{dF''_{q,q}}{d\lambda} \neq 0, \quad \text{ewent.} \quad \frac{dF''_{q,q}}{d\,q} \neq 0,$$

to punkt ten jest zmianowym; jeżeli zaś w rów. np. 81-em.

$$\frac{d\,F''_{q,q}}{d\lambda} = 0, \text{ a } \frac{d^2F''_{q,q}}{d\lambda^2} \neq 0,$$

to punkt ten nie będzie zmianowym, lecz będzie *zerowym niezmianowym;* analogiczne warunki można pod aćdla rów. 82-ego.

A więc warunkami, wystarczającemi dla wyznaczenia punktu zmianowego (w przypadku równowagi pierwszego rzędu), gdy dana jest funkcja sił, są następujące związki, które powinny być spełnione:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0, \quad \text{oraz} \quad \frac{d F''_{q,q}}{d\lambda} \neq 0;$$

ewentualnie

$$\frac{d F''_{q,q}}{d q} \neq 0.$$

Wyraz $\frac{d F''_{q,q}}{d\lambda}$ możemy obliczyć w następujący sposób:

1) dla przypadku, w którym λ obierzemy za niezależną zmienną, napiszemy dla punktu zmianowego nast. tożsamość, wziąwszy pod uwagę, że w tym razie q jest funkcją λ; wtedy:

$$\frac{d F''_{q,q}}{d\lambda} = \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \cdot \frac{dq}{d\lambda} + \frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial\lambda} \neq 0; \tag{83}$$

2) gdy zaś obierzemy q za zmienną niezależną, związek ten wyrazimy następującym wzorem, wziąwszy pod uwagę, że w tym razie λ jest funkcją q:

$$\frac{d F''_{q,q}}{d q} = \frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dq} + \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \neq 0. \tag{83 a}$$

Jeżeli w szczególnym przypadku otrzymamy:

$$\frac{d F''_{q,q}}{d\lambda} = 0,$$

ewentualnie

$$\frac{d F''_{q,q}}{d q} = 0,$$

to nie wynika z tego, żeby dany punkt zerowy nie mógł być punktem zmianowym; punkt ten może być zmianowym, lecz wyższego rzędu, lub też może być *zerowym niezmianowym*.

34. Rzędy zmienności rodzajów równowagi.

Jeżeli w punkcie zerowym zajdzie przypadek, o jakim mówiliśmy przed chwilą, że

$$\frac{d\,F''_{q,q}}{d\lambda}=0,$$

ewentualnie

$$\frac{d\,F''_{q,q}}{d\,q}=0, \tag{84}$$

a

$$\frac{d^2F''_{q,q}}{d\lambda^2}\neq 0,$$

to punkt ten nad podstawie równania 81-go, ewent. 82-go *jest zerowy niezmianowy*; ze zmianą bowiem znaku przyrostu $\Delta\lambda$ (ewent. znaku przyrostu Δq) wartość przyrostu $\Delta\, U''_{q,q}$ nie zmienia znaku.

Jeżeli zaś w punkcie zerowym zajdzie przypadek, że

$$\frac{d\,F''_{q,q}}{d\lambda}=0,$$

oraz

$$\frac{d^2F''_{q,q}}{d\lambda^2}=0,$$

a

$$\frac{d^3F''_{q,q,q}}{d\lambda^3}\neq 0, \tag{85}$$

to na podstawie równania 81-ego dany punkt zerowy jest zmianowym; punkt taki nazwiemy dla odróżnienia od przypadków, w których

$$\frac{dF''_{q,q}}{d\lambda}\neq 0,$$

punktem zmianowym 3-go rzędu. Równowaga więc w tem położeniu może być równowagą pierwszego rzędu, lecz zmiana rodzaju tej równowagi jest trzeciego rzędu.

W ten sposób dochodzimy do pojęcia punktu zmianowego k-tego rzędu; pojęcie to określimy w następujący sposób: *punktem zmianowym k-tego rzędu nazwiemy taki punkt krzywej równowagi (równowagi pierwszego rzędu), dla którego najniższy rząd zupełnej pochodnej funkcji $F''_{q,q}$ względem λ, która nie znika, jest liczbą nieparzystą*; to znaczy punktem zmianowym k-tego rzędu nazwiemy punkt równowagi, w którym

$$\frac{d^k F''_{q,q}}{d\lambda^k} \neq 0, \tag{86}$$

gdy k jest *nieparzyste* i gdy przytem wszystkie, poprzedzające pochodne, równe są zeru.

Jeżeli zaś liczba k jest parzysta, to mamy punkt *zerowy niezmianowy*, t. j. taki punkt, po przejściu którego rodzaj równowagi *nie* zmienia się; o punkcie zmianowym rzędu parzystego mowy przeto być nie może; może on być tylko zerowy.

35. Kierunek zmiany rodzaju równowagi.

Ze znaku wartości wyrazu

$$\frac{d F''_{q,q}}{d\lambda}, \text{ lub } \frac{d F''_{q,q}}{d q}$$

w punkcie zmianowym odczytać można kierunek zmiany rodzaju równowagi, t. j. odczytać można, czy z rosnącą wartością λ (ewent. q) rodzaj równowagi przechodzi w punkcie zmianowym ze stałej na niestałą, czy też odwrotnie. Jeżeli otrzymamy dla punktu zmianowego np.

$$\frac{d F''_{q,q}}{d\lambda} < 0,$$

to znaczy, że wartość $F''_{q,q}$ z rosnącem λ przechodzi z (+) na (—), t. j. równowaga w danym razie przechodzi z rosnącem λ z niestałej na stałą; takież wzory można znaleźć dla przypadku, gdy obierzemy q za niezależnie zmienną.

36. Analiza krzywych równowagi.

Ażeby bliżej zbadać właściwości pod względem statycznym krzywych równowagi w różnych przypadkach, zbadamy zachowanie się stycznych, przeprowadzonych do tych krzywych; (oczywiście, w założeniu, że ta krzywa posiada styczne).

Tangens kąta kierunkowego stycznej do krzywej równowagi w dowolnym jej punkcie obliczymy z równania tej krzywej, t. j. z równania równowagi:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0; \tag{87}$$

gdy weźmiemy pod uwagę, że funkcja ta jest funkcją zmiennych q i λ, następnie przyjmiemy, że np. λ jest funkcją zmiennej q, to po zróżniczkowaniu tej funkcji otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dq} = 0, \qquad (88)$$

skąd:

$$\frac{d\lambda}{dq} = - \frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial q^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda}}. \qquad (89)$$

Z równania tego obliczyć można wogóle kąt kierunkowy stycznej do danej krzywej równowagi w dowolnym jej punkcie; kąt zaś w *punkcie zerowym* obliczymy, gdy wprowadzimy warunek, że w tym punkcie zachodzi równość

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0.$$

W tym razie należy rozpatrzeć dwa przypadki: jeden, gdy

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0, \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda} \neq 0, \qquad (90)$$

i drugi, — gdy

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0, \text{ oraz } \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda} = 0. \qquad (91)$$

W przypadku pierwszym, gdy:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0, \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda} \neq 0,$$

otrzymamy z równ. 89-go

$$\frac{d\lambda}{dq} = 0, \qquad (92)$$

z którego wynika, że punkt zerowy przy warunkach 90-tych leżeć może tylko na stycznej prostopadłej do osi λ.

Wniosek ten wysłowimy w następujący sposób: *punkt zerowy pojedyńczy może leżeć tylko na stycznej prostopadłej do osi* λ.

Punkt zerowy nazwaliśmy w tym razie punktem pojedyńczym; posiada on bowiem tylko jedną styczną, t. j. przechodzi przez niego tylko jedna gałąź równowagi. Punkt ten będzie przytem zmianowy, gdy będzie zachodziła nierówność, wskazana równaniem 83-a, t. j. gdy w tym punkcie

$$\frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \neq 0, \tag{93}$$

w tym bowiem przypadku $\frac{d\lambda}{dq} = 0$ (rów. 92-gie).

Z równania 92-go wynika następnie, że w punkcie zerowym pojedyńczym siła, utrzymująca dany układ w równowadze, posiada wartość extremum.

W celu obliczenia, jakie to jest extremum, obliczymy z równania 89-ego drugą pochodną, przyjmując, iż λ jest funkcją q; a więc wogóle:

$$\frac{d^2\lambda}{dq^2} = -\frac{\left|\frac{\partial^3 F}{\partial q^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dq}\right| \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda} - \left|\frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda} + \frac{\partial^3 F}{\partial q \partial \lambda^2} \cdot \frac{d\lambda}{dq}\right| \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}{\left|\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda}\right|^2}. \tag{94}$$

Wziąwszy następnie pod uwagę, że w tym punkcie

$$\frac{d\lambda}{dq} = 0, \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0,$$

i przyjąwszy, że wartości czynników przy tych wyrazach nie zbliżają się do ∞, oraz wziąwszy pod uwagę, że $\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda} \neq 0$, otrzymamy

$$\frac{d^2\lambda}{dq^2} = -\frac{\frac{\partial^3 F}{\partial q^3}}{\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda}}; \tag{95}$$

a ponieważ w tym przypadku (w punkcie pojedyńczym) mianownik jest różny od zera (rów. 90-te), licznik zaś, o ile ten punkt jest zmianowym, także jest różny od zera (wzór 93-ci), przeto uzupełnimy poprzedni wniosek następującym dodatkiem: *w punkcie zmianowym pojedyńczym parametr siły, utrzymującej w równowadze dany układ, jest albo maximum, albo minimum.* Wniosek ten możemy odwrócić i powiedzieć, mając na uwadze kolejność równowagi: *punkt pojedyńczy krzywej równowagi, w którym*

$\lambda =$ *maximum, lub = minimum, musi być punktem zmianowym*; co również wynika z kolejności rodzajów równowagi.

W przypadku 2-im, gdy

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}=0, \quad \text{oraz jednocześnie} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \lambda}=0, \tag{96}$$

rów. 89-te traci swe bezpośrednie znaczenie; wartość prawej strony tego równania obliczymy, gdy wartość licznika i mianownika zbliżać będziemy do zera. Punkt taki jest punktem osobliwym danej krzywej równowagi i może być albo węzłowym, t. j. podwójnym, albo odosobnionym, lub też punktem zwrotnym. Jeżeli wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F'_q}{\partial q \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 F'_q}{\partial q^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F'_q}{\partial \lambda^2} & \dfrac{\partial^2 F'_q}{\partial q \partial \lambda} \end{vmatrix} \begin{matrix} <0, \text{ wtedy punkt jest odosobniony} \\ =0, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \text{zwrotny} \\ >0, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \text{podwójny;} \end{matrix}$$

lub inaczej, jeżeli (97)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda} & \dfrac{\partial^3 F}{\partial q^3} \\[2ex] \dfrac{\partial^3 F}{\partial q \partial \lambda^2} & \dfrac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda} \end{vmatrix} \begin{matrix} <0, \text{ wtedy punkt jest odosobniony} \\ =0, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \text{zwrotny} \\ >0, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \text{podwójny.} \end{matrix}$$

Ażeby obliczyć w tym przypadku pochodną $\frac{d\lambda}{dq}$, zróżniczkujemy rów. 88-me, przyjąwszy np. q za niezależnie zmienną, t. j. λ jako funkcję niezależnej q i wziąwszy przytem pod uwagę, że wyrazy $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$ i $\frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda}$ są funkcjami λ, otrzymamy następujące równanie:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial q \partial \lambda^2} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dq}\right)^2 + 2\frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dq}\right) + \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} = 0;$$

z którego obliczymy

$$\frac{d\lambda}{dq} = \frac{1}{\dfrac{\partial^3 F}{\partial q \partial \lambda^2}} \left[-\frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda}\right)^2 - \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial q \partial \lambda^2}} \right]. \tag{98}$$

W tenże sposób obliczymy z rów. 87-go, przyjąwszy λ za niezależnie zmienną, następującą pochodną:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \frac{dq}{d\lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial q\, \partial \lambda} = 0;$$

a po powtórnem zróżniczkowaniu, otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \cdot \left(\frac{dq}{d\lambda}\right)^2 + 2\frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda} \cdot \left(\frac{dq}{d\lambda}\right) + \frac{\partial^3 F}{\partial q\, \partial \lambda^2} = 0, \tag{99}$$

z którego obliczymy szukaną pochodną:

$$\frac{dq}{d\lambda} = \frac{1}{\frac{\partial^3 F}{\partial q^3}} \cdot \left| -\frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda}\right)^2 - \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial q\, \partial \lambda^2}} \right| . \tag{100}$$

Z równania 98-go, lub 100-go wynika, że gdy w punkcie zerowym,

t. j. gdy $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0$ i jednocześnie $\frac{\partial^2 F}{\partial q\, \partial \lambda} = 0$,

wtedy w tym punkcie przecinają się dwie gałęzie krzywej równowagi*); w tym bowiem punkcie mamy dwie styczne; dlatego też punkt ten H. Poincaré nazwał *punktem podwójnym*, który inaczej nazwać można punktem *węzłowym*, — dla odróżnienia go od punktu poprzedniego, który nazwaliśmy *pojedyńczym*.

Ażeby rozpoznać, czy ten punkt jest zmianowym, zastosujemy równania 83-cie, lub 83-a, a po podstawieniu np. z równania 100-go wartości $\frac{dq}{d\lambda}$ do równania 83-go, otrzymamy:

$$\frac{dF''_{q,q}}{d\lambda} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial \lambda}\right)^2 - \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial q\, \partial \lambda^2}} . \tag{101}$$

Jeżeli wartość pod pierwiastkiem jest > 0, to punkt ten jest zmianowym w kierunkach obydwóch stycznych i rodzaj równowagi zmienia się w kierunku np. stycznej, odpowiadającej dodatniemu znakowi z rosnącą wartością q,—ze stałej na niestałą, w kie-

*) Gałęzie te mogą być również urojone, punkt zaś styczności może być rzeczywisty; wtedy mamy do czynienia z punktem odosobnionym; ciekawe będzie znaczenie statyczne tego przypadku?

runku zaś drugiej stycznej będzie zmiana z niestałej na stałą, co również wynika z twierdzenia o kolejności równowagi. Wnioski te wypowiemy w następujący sposób: *punkt podwójny krzywej równowagi jest punktem zmianowym dla obydwóch gałęzi, o ile styczna w tym punkcie nie jest prostopadła do osi* λ.

Z równania 98-go, lub 100-go możemy obliczyć kąt, jaki tworzą z sobą obydwie styczne w punkcie podwójnym.

Wśród szczególnych przypadków, z któremi spotykamy się w praktyce technicznej, jest przypadek, w którym funkcja sił jest funkcją linjową parametru λ; wtedy mamy identycznie $\frac{\partial^3 F}{\partial q\, \partial \lambda^2} = 0$, a więc w tym razie z równania 100-go otrzymamy:

$$1)\ \frac{dq}{d\lambda} = 0, \quad \text{oraz } 2)\ \frac{dq}{d\lambda} = -2\,\frac{\frac{\partial^3 F}{\partial q^2\, \partial \lambda}}{\frac{\partial^3 F}{\partial q^3}}. \tag{102}$$

Gdyby dla pewnego punktu krzywej równowagi zachodziły rów. 96-te

$$\text{oraz} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial q\, \partial \lambda^2} = 0, \quad \text{ewent.} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial q^2\, \partial \lambda} = 0, \tag{103}$$

wtedy równania 98-me i 100-ne tracą swe bezpośrednie znaczenie; ażeby w tym razie obliczyć np. pochodną $\frac{\partial q}{\partial \lambda}$, zróżniczkujemy np. równanie 99-te, a otrzymamy następujące równanie:

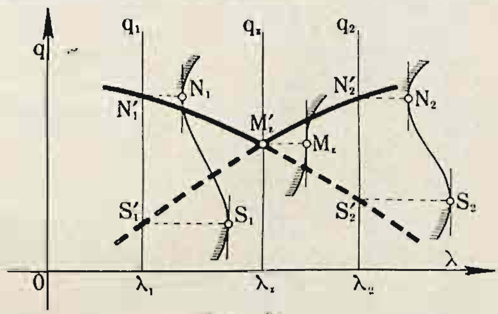
$$\frac{\partial^4 F}{\partial q^4} \cdot \left(\frac{dq}{d\lambda}\right)^3 + 3\,\frac{\partial^4 F}{\partial q^3\, \partial \lambda} \cdot \left(\frac{dq}{d\lambda}\right)^2 + 3\,\frac{\partial^4 F}{\partial q^2 \partial \lambda^2} \cdot \left(\frac{dq}{d\lambda}\right) + \frac{\partial^4 F}{\partial q\, \partial \lambda^3} = 0, \tag{104}$$

z którego wynika, że w takim punkcie przy warunkach, wyrażonych równaniami 103-emi, przecinają się trzy gałęzie i t. d.

37. Rodzaje równowagi w punkcie zmianowym.

O rodzajach równowagi w punkcie zmianowym rozstrzyga — jak wogóle — tak i w tym przypadku, wklęsłość, ewentualnie wypukłość odpowiedniej linji funkcji sił w tym punkcie; odpowiedź przeto na postawione pytanie sprowadza się do zbadania, czy krzywa funkcji sił $U = F(q; \lambda_z)$ w punkcie zerowym jest wklęsła, czy wypukła, czy też posiada przegięcie. W celu zbadania tego weźmiemy pod uwagę dwa przekroje powierzchni funkcji sił, leżące po obydwóch stronach punktu zmianowego, a zbliżając te przekroje do przekroju q_z, przechodzącego przez punkt zerowy, będziemy mogli orzec o jego wklęsłości, lub wypukłości. Pod tym względem mogą nastąpić następujące przypadki:

1) w przypadku, gdy punkt zmianowy jest punktem podwójnym, jak pokazano na rys. 9-tym, punkty najniższe N_1 i N_2 oraz najwyższe S_1 i S_2 przekrojów q_1 i q_2 zbiegną się w punkcie M_z, gdy oba te przekroje pokryją się z przekrojem q_z; wtedy przekrój (U, q, λ_z) w punkcie M_z będzie miał przegięcie; ten rodzaj równowagi nazwaliśmy już różnym; z rosnącą bowiem wartością q dla tej samej wartości $\lambda = \lambda_z$, będzie rodzaj równowagi inny, z malejącą zaś wartością q inny.



Rys. 9.

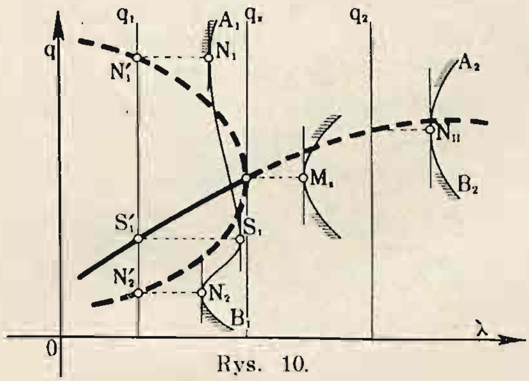
Wniosek ten sformułujemy w następujący sposób: *jeżeli punkt zmianowy na krzywej równowagi (q, λ) jest podwójny i nie leży na stycznej prostopadłej do osi λ, to rodzaj równowagi, odpowiadający temu punktowi, jest różny.* Analitycznie wyrazimy te warunki, że w punkcie zmianowym, t.j. dla wartości q_z i λ_z zachodzą w tym przypadku następujące związki:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q\, \partial \lambda} = 0, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \neq 0. \tag{105}$$

Pierwsze z tych równań wyraża, że w tym punkcie zachodzi równowaga, drugie i trzecie równanie wyraża, że punkt ten jest punktem podwójnym (porówn. równanie 89-te), czwarte zaś wyraża, że krzywa $U = F(q\,; \lambda_z)$ posiada w tym punkcie punkt przegięcia. Może zajść przypadek, że $\frac{\partial^3 F}{\partial q^3} = 0$ (porówn. równanie 103-cie), a wtedy musi być $\frac{\partial^4 F}{\partial q^4} = 0$, zaś $\frac{\partial^5 F}{\partial q^5} \neq 0$, i t. d.

2) Jeżeli punkt zmianowy jest podwójny i leży na stycznej prostopadłej do osi λ (rys. 10-ty), to w tym razie punkty N_1, S_1 i N_2 przekroju $A_1\ B_1$ i punkt N_{II} przekroju $A_2\ B_2$ pokryją się z punk-

tem M_z, gdy te dwa przekroje pokryją się z osią q_z; t. j. część $N_1\ S_1\ N_2$ przekroju $A_1\ B_1$ zniknie w punkcie M_z i pozostaną tylko gałęzie zewnętrzne $N_1\ A_1$ i $N_2\ B_1$, które się pokryją z gałęziami $N_{II}\ A_2$ i $N_{II}\ B_2$, gdy oś q_2 pokryje się z q_z.



Rys. 10.

Wniosek ten wyrazimy w następujący sposób: *jeżeli punkt zmianowy na krzywej równowagi (q, λ) jest podwójny i leży na stycznej, prostopadłej do osi λ, to równowaga danego układu, odpowiadająca temu punktowi, jest albo stała, albo niestała (czyli nie jest różna) i jest tego rodzaju, jakiego rodzaju równowagę wyraża krzywa pojedyńcza, przechodząca przez ten punkt.* W danym przeto przypadku dla punktu zmianowego zachodzą następujące związki analityczne:

$$\frac{\partial F}{\partial q}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial q\, \partial \lambda}=0, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial q^3}=0; \tag{106}$$

w tym razie musi być:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial q^4}\neq 0;$$

a gdyby

$$\frac{\partial^4 F}{\partial q^4}=0, \quad \text{to musiałoby być:}$$

$$\frac{\partial^5 F}{\partial q^5}=0,$$

lecz wtedy

$$\frac{\partial^6 F}{\partial q^6}\neq 0, \quad \text{i t. d.}$$

Rodzaj równowagi w punkcie zmianowym w tym przypadku zależy od znaku najbliższej *parzystej* pochodnej, która w tym punkcie nie znika; jeżeli ten znak jest dodatni, to równowaga jest niestała, jeżeli zaś ujemny — to równowaga stała.

3) W tenże sposób rozważając, przyjdziemy do wniosku: *jeżeli punkt zmianowy leży w punkcie pojedyńczym na stycz-*

nej prostopadłej do osi λ, *to rodzaj równowagi w tym punkcie będzie różny* (rys. 7), a wtedy oprócz tego, że

$$\frac{\partial F}{\partial q}=0, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}=0,$$

będzie jeszcze

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q\, \partial \lambda} \neq 0, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \neq 0; \tag{107}$$

a jeżeliby

$$\frac{\partial^3 F}{\partial q^3}=0,$$

to musiałoby być

$$\frac{\partial^4 F}{\partial q^4}=0,$$

lecz wtedy będzie

$$\frac{\partial^5 F}{\partial q^5} \neq 0, \quad \text{i t. d.}$$

Wnioski te możemy odwrócić.

38. Krzywa równowagi, gdy parametr λ jest funkcją jednowartościową zmiennej q,

t. j. gdy wartość λ, obliczona z równania

$$F_q'(q;\lambda)=0,$$

posiada jedną tylko wartość dla każdej wartości q *i gdy przytem odpowiednia krzywa równowagi posiada punkt podwójny*; inaczej— gdy zachodzą następujące równania dla rozpatrywanego punktu tej krzywej (rów. 96-te):

$$\frac{\partial F}{\partial q}=0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q\, \partial \lambda}=0, \tag{108}$$

oraz gdy wartość *wyznacznika* 97-mego > 0;
wtedy krzywa równowagi rozpada się na dwie gałęzie, z których jedna jest prosta równoległa do osi λ, *druga zaś może być pewną krzywą, lub prostą*. Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest równanie 1-sze rów. 102-gich.

Właściwość ta wynika bezpośrednio z założenia, że dla każdej wartości q mamy jedną tylko wartość λ, co się geometrycznie wyrazi, że proste równoległe do osi λ przecinają daną krzywą równowagi tylko w jednym punkcie; a że w danym przypadku założyliśmy, że na krzywej równowagi jest punkt podwójny, t. j. że w tym punkcie przecinają się dwie gałęzie tej krzywej, przeto jedna z tych gałęzi musi być prosta i równoległa do osi λ; druga zaś może być wogóle krzywą, którą proste równoległe do osi λ przecinają tylko w jednym punkcie, — lub też może być w szczególnym przypadku również prostą. Przypadek ten zachodzi w znacznej liczbie przykładów, w praktyce spotykanych.

ROZDZIAŁ V.

UKŁADY O WIELU STOPNIACH SWOBODY.

39. Równowaga i jej rodzaje.

Rozpatrzymy teraz układy o wielu stopniach swobody. Określenia równowagi i jej rodzajów pozostają w zasadzie te same, jakeśmy podali w poprzednich rozpatrywaniach (§ 26-ty); zmieni się jedynie forma matematyczna ich wyrażenia.

Jeżeli układ posiada n stopni swobody, to funkcja sił wyrazi się funkcją n spółrzędnych niezależnych:

$$q_1, q_2, \cdots q_n,$$

oraz pewnego parametru λ, który przyjęliśmy jako niezależny od tych spółrzędnych, a który jest wyrazem zmienności siły, lub sił, działających na dany układ w każdem jego położeniu.

Funkcja ta wogóle ma postać następującą:

$$U = F(q_1, q_2, \ldots q_n; \lambda). \tag{109}$$

Spółrzędne położenia równowagi danego układu, gdy dany jest parametr λ, obliczymy z równań 63-cich (str. 54-ta)

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial q_n} = 0, \tag{110}$$

jako funkcje

$$q_1 = \varphi_1(\lambda), \quad q_2 = \varphi_2(\lambda) \text{ i t. d.} \tag{110 a}$$