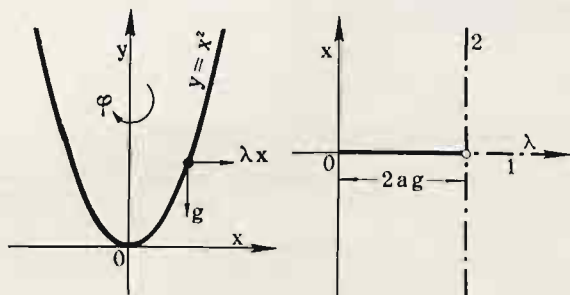


ROZDZIAŁ VIII.

PRZYKŁADY.

PRZYKŁAD 1. Rys. 1-a i 1-b. Po paraboli, której równanie jest $y = ax^2$ i której oś ustawiona jest pionowo, porusza się punkt ciężki o masie $m = 1$. Punkt ten jest odpychany siłą proporcjonalną do odległości

od osi paraboli. Obliczyć położenia i rodzaje równowagi tego punktu, przy zmiennym współczynniku λ , gdy literą λ oznaczymy współczynnik proporcjonalności siły odpychającej. Siłę odpychającą można wywołać w tym przy-



Rys. 1-a i 1-b.

kładzie obrotem danej paraboli około jej osi, gdy parabolę wyobrazimy sobie w postaci drutu gładkiego; a więc:

$$\lambda = m \varphi^2,$$

gdzie φ oznacza prędkość obrotową, a m — masę punktu poruszającego się, którą przyjęliśmy $= 1$.

Wirtualna funkcja sił (§ 17-ty) w tym razie :

$$U = \frac{1}{2} \lambda x^2 - g y;$$

a po podstawieniu $y = ax^2$:

$$U = \frac{1}{2} \lambda x^2 - a g x^2; \tag{1}$$

jako współrzędną niezależną tego układu przyjmujemy zmienną x .

Równanie równowagi jest następujące :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \cdot x - 2 a g \cdot x = x \cdot (\lambda - 2 a g) = 0. \tag{2}$$

Równanie to przedstawia dwie gałęzie równowagi w układzie osi (x, λ) (rys. 1-b).

Pierwsza gałąź, $x=0$, jest prostą, pokrywającą się z osią λ ; druga gałąź, $\lambda - 2ag = 0$, jest prostą równoległą do osi x w odległości $\lambda = 2ag$ od tej osi.

Zwrócić należy uwagę, że położenia równowagi, wyrażone tą prostą, nie zależą od współrzędnej x ; to znaczy, że punkt materialny w każdym położeniu na paraboli, obracającej się z prędkością $\varphi = \sqrt{2ag}$, będzie znajdował się w równowadze.

W celu obliczenia rodzajów równowagi obliczymy z równania 1-go, lub 2-go:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda - 2ag.$$

Dla gałęzi pierwszej, gdy

$$0 < \lambda < 2ag, \text{ otrzymamy } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0;$$

a więc w tych granicach wartości λ równowaga jest stała; gdy zaś

$$\lambda > 2ag, \text{ wtedy } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0;$$

równowaga przeto dla tej części jest niestała.

$$\text{Dla } \lambda = 2ag, \text{ otrzymamy } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0;$$

jest to punkt podwójny krzywej równowagi; przez ten punkt przeto przechodzić powinna nowa gałąź, co też stwierdza równanie 2-gie.

Dla gałęzi 2-ej mamy dla wszystkich jej punktów: $\lambda = 2ag$; wartość przeto dla tych punktów $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$, jak również i wszystkie wyższe pochodne $= 0$; równowaga przeto w położeniach punktu ruchomego, wyznaczonych temi współrzędnymi, jest zupełnie obojętna (jak równowaga kuli ciężkiej na płaszczyźnie poziomej). Rodzaj równowagi w punkcie zmianowym jest również *zupełnie obojętny*; wartości bowiem *wszystkich* drugich pochodnych względem x są w tym punkcie równe zeru.

Do tych samych wyników dojdziemy, gdy w myśl § 45-tego zastosujemy jako równanie równowagi: $U = 0$ (rów. 1-sze).

PRZYKŁAD 2. Rys. 2-a i 2-b. Zadanie, jak poprzednie, tylko równanie toru przyjmujemy w postaci

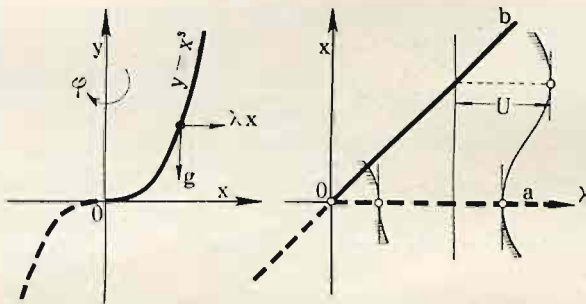
$$y = x^3.$$

Wirtualna funkcja sił w tym razie:

$$U = \frac{1}{2} \lambda x^2 - g y;$$

po podstawieniu: $y = x^3$ otrzymamy:

$$U = \frac{1}{2} \lambda x^2 - g x^3. \quad (1)$$



Rys. 2-a i 2-b.

Równanie równowagi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda x - 3 g x^2 = 0; \quad (2)$$

inaczej

$$x \cdot (\lambda - 3 g x) = 0;$$

otrzymujemy dwie gałęzie równowagi w postaci prostych:

$$a) \quad x = 0; \quad \text{oraz} \quad b) \quad \lambda = 3 g x.$$

Rodzaje równowagi obliczymy z równania 2-go po jego zróżniczkowaniu:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda - 6 g x. \quad (3)$$

Dla gałęzi a), której równanie jest:

$$x = 0, \quad \text{otrzymamy} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda;$$

przeto dla tej gałęzi, gdy

$$\lambda > 0, \text{ otrzymamy } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0;$$

t. j. punkty tej gałęzi przedstawiają równowagę niestabilną; (gdyby $\lambda < 0$, t. j. gdyby dany punkt był przyciągany do osi, to byłaby równowaga stała).

Dla gałęzi b):

$$\lambda = 3gx; \text{ otrzymamy z rów. 3-go: } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -3g;$$

a więc dla

$$x > 0 \text{ otrzymamy } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0;$$

punkty tej gałęzi odpowiadają przeto równowadze stałej.

Na rys. 2-b naniesione są kłady funkcji sił $U = F(q; \lambda)$ dla dwóch wartości λ : dla jednej dowolnej i dla drugiej, gdy $\lambda = 0$. Oś U należy sobie w tym układzie wyobrazić prostopadle do płaszczyzny rysunku; jej kład przeto pokryje się z osią λ .

Położenie punktu zerowego obliczamy z równania $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$, t. j. z równania

$$\lambda - 6gx = 0;$$

gdy podstawimy w nie dla gałęzi a) $x = 0$, wtedy $\lambda = 0$.

Dla gałęzi zaś b), gdy podstawimy w nie $\lambda = 3gx$, otrzymamy $x = 0$.

Punkt o współrzędnych $x = 0$ oraz $\lambda = 0$ jest punktem zmianowym dla gałęzi b).

Kierunek zmiany rodzajów równowagi w punkcie zmianowym obliczymy p-g wzoru 83-go (str. 75-ta):

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \cdot \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial \lambda} = -6g \cdot \frac{dx}{d\lambda} + 1.$$

Dla gałęzi a):

$$\frac{dx}{d\lambda} = 0; \quad \text{więc } \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = 1 > 0;$$

równowaga przeto na tej gałęzi przechodzi ze stałej na niestabilną.

Dla gałęzi b):

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{1}{3g}; \quad \text{przeto} \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = -6g \cdot \frac{1}{3g} + 1 = 0;$$

na tej gałęzi równowaga przechodzi z niestałej na stałą, co zresztą można było odczytać z wykresu na podstawie twierdzenia o kolejności rodzajów równowagi.

W punkcie zmianowym równowaga jest różna, gdyż

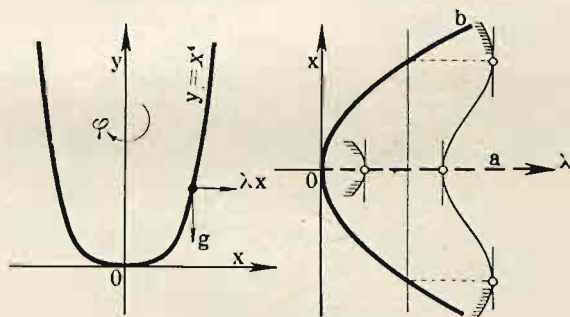
$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = -6g \neq 0.$$

PRZYKŁAD 3. Rys. 3-a i 3-b. Zadanie, jak poprzednie, lecz równanie toru jest następujące:

$$y = x^4. \quad (1)$$

Wirtualna funkcja sił:

$$U = \frac{1}{2} \lambda x^2 - g y;$$



Rys. 3-a i 3-b.

po podstawieniu $y = x^4$, otrzymamy:

$$U = \frac{1}{2} \lambda x^2 - g x^4, \quad (2)$$

skąd równanie równowagi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda x - 4g x^3 = 0. \quad (3)$$

Otrzymamy dwie gałęzie równowagi (rys 3-b):

$$a) \quad x=0; \quad b) \quad \lambda = 4 g x^2. \quad (4)$$

Rodzaje równowagi obliczymy z równania:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda - 12 g x^2. \quad (5)$$

Dla gałęzi a):

$$x=0; \text{ mamy więc z rów. 5-go } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda;$$

a więc dla $\lambda > 0$ równowaga niestała.

Dla gałęzi b):

$$\lambda = 4 g x^2; \quad \text{a więc} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -8 g x^2;$$

dla $x \geq 0$ równowaga jest stała.

Położenie punktu zerowego obliczymy z równania 5-go, gdy uczynimy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lambda - 12 g x^2 = 0;$$

a po podstawieniu z 4-go

$$\text{dla gałęzi a) } x=0, \text{ otrzymamy } \lambda = 0;$$

$$, \quad , \quad b) \quad x^2 = \frac{\lambda}{4g}, \quad \text{otrzymamy} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -2\lambda;$$

niema przeto na gałęzi b) punktu zmianowego; punkt przeto 0 jest zmianowym tylko dla gałęzi a).

Rodzaj równowagi w punkcie zmianowym obliczymy z równania:

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = -24 g x; \quad \text{dla } x=0, \quad \text{otrzymamy} \quad \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0;$$

obliczymy przeto:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = -24 g < 0;$$

t. j. w punkcie zmianowym równowaga zachodzi do trzeciego rzędu włącznie, lub inaczej: równowaga w tym punkcie jest obojętna do 3-go rzędu, a następnie jest stała; właściwość tę możemy

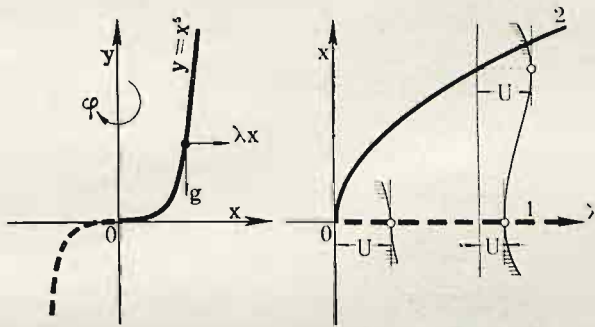
wytłumaczyć sobie tem, że w punkcie ($x=0$; $y=0$) danej paraboli (rys. 3-a) mamy trzy części tej paraboli na prostej poziomej (porów. § 27-my); inaczej, — że styczna w tym punkcie posiada styczność trzeciego rzędu. To samo tłumaczenie można zastosować do innych tego rodzaju przypadków. Fizycznie, t. j. przy skończonem odchyleniu punktu ujawni się, oczywiście, tylko równowaga stała.

PRZYKŁAD 4. Rys. 4-a i 4-b. Zadanie, jak poprzednie, tylko równanie toru przyjęto

$$y = x^5.$$

$$U = \frac{1}{2} \lambda x^2 - g x^5 ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda x - 5 g x^4 = 0. \quad (2)$$



Rys. 4-a i 4-b.

Otrzymujemy dwie gałęzie równowagi (rys. 4-b):

$$1) \quad x = 0; \quad 2) \quad \lambda = 5 g x^4. \quad (3)$$

Rodzaje równowagi obliczymy z równania

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda - 20 g x^3. \quad (4)$$

Dla gałęzi 1-ej, t. j. dla

$$x = 0, \quad \text{otrzymamy} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda;$$

a więc dla $\lambda > 0$ równowaga jest niestała.

Dla gałęzi 2-ej: z równania 4-go, po podstawieniu $\lambda = 5gx^3$,

$$\text{otrzymujemy } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -15gx^3;$$

a więc dla $x > 0$ otrzymamy $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0$; mamy więc równowagę stałą.

Punkt zmianowy posiada współrzędne $x=0$, oraz $\lambda=0$, gdyż zaspakajają one równanie równowagi, t. j. rów. 2-gie oraz równanie 4-te.

W punkcie zmianowym, którego współrzędne są: $x=0$ i $\lambda=0$, rodzaj równowagi określimy w następujący sposób:

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = -60gx^2; \quad \text{dla } x=0 \text{ otrzymamy } \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0;$$

obliczymy przeto:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = -120gx; \quad \text{dla } x=0, \quad \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0;$$

a więc obliczymy

$$\frac{\partial^5 U}{\partial x^5} = -120g < 0;$$

równowaga przeto jest w tym przypadku w punkcie zmianowym różna, t. j. w kierunku rosnącego x jest stała, gdyż z rosnącym x ostatnia pochodna < 0 , co zresztą wywnioskować można z przekrojów.

PRZYKŁAD 5. Rys. 5-a i 5-b. Zadanie, jak poprzednie, tylko równanie toru przyjęto

$$y = e^x.$$

Wirtualna funkcja sił:

$$U = \frac{1}{2} \lambda x^2 - g e^x. \quad (1)$$

Równanie równowagi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda x - g e^x = 0;$$

stąd

$$\lambda = \frac{g e^x}{x}. \quad (2)$$

Dla wykreślenia tej krzywej obliczymy:

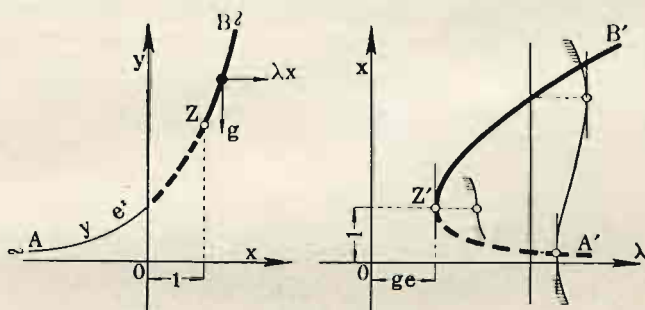
$$\frac{d\lambda}{dx} = ge^x \cdot \frac{x-1}{x^2}.$$

Krzywą równowagi (x, λ) , wyznaczmy z tych równań w następujący sposób (rys. 5-b):

dla $x \rightarrow 0$; $\lambda \rightarrow \infty$; $\frac{d\lambda}{dx} \rightarrow \infty$; oś λ jest asymptotą;

„ $x \rightarrow \infty$; $\lambda \rightarrow \infty$; $\frac{d\lambda}{dx} \rightarrow \infty$;

„ $x = 1$; $\lambda = ge$; $\frac{d\lambda}{dx} = 0$.



Rys. 5-a i 5-b.

Na podstawie tych danych zrobiono wykres krzywej na rys. 5-b. Dla określenia rodzajów równowagi obliczymy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda - ge^x.$$

Dla punktów krzywej równowagi podstawimy w to równanie wartość λ , otrzymaną w rów. 2-iem; wyrazimy przeto w tym razie drugą pochodną spółrzedną x

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = g \frac{e^x}{x} \cdot (1-x); \quad (3)$$

z tego równania mamy:

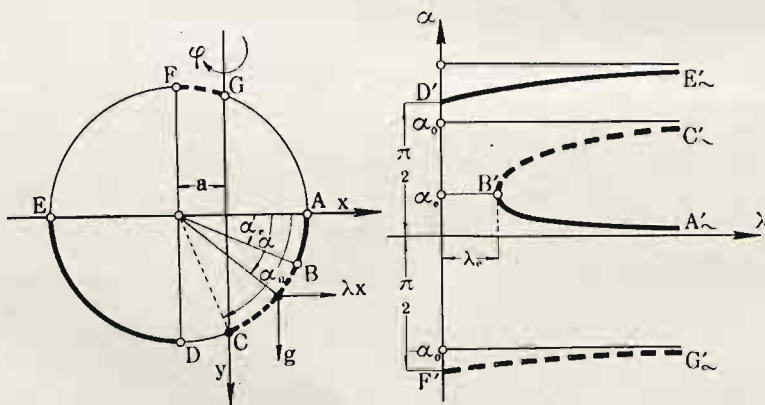
dla $x > 1$; $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0$; równowaga stała (gałąź $Z'B'$ rys. 5-b.)

dla $0 < x < 1$; $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$; równowaga niestała (gałąź $Z'A'$ rys. 5-b.)

Punkt zerowy będzie, gdy $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$, t j. dla współrzędnych $x=1$ i $\lambda = ge$.

W punkcie zerowym Z' , o współrzędnych $x=1$ i $\lambda = ge$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$, zaś $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = -ge < 0$; z rosnącym przeto x wyraz $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ zmienia znak z dodatniego na ujemny; punkt ten przeto jest zmianowy, a równowaga przechodzi z niestałej na stałą.

PRZYKŁAD 6. Rys. 6-a i 6-b. Punkt materialny o masie $m=1$ może ślizgać się bez tarcia po obwodzie koła o promieniu r , znajdującego się w płaszczyźnie pionowej i obracającego się z prędkością kątową φ około osi pionowej, nieprzechodzącej przez środek tego koła.



Rys. 6-a i 6-b.

Obliczyć położenia równowagi tego punktu i jej rodzaje.

Kąt środkowy α obierzemy jako współrzędną niezależną punktu ruchomego na kole (rys. 6-a); litera a niech oznacza odległość środka koła od osi obrotu (mimośrodek). Oznaczmy, jak poprzednio, $m \cdot \varphi^2 = 1 \cdot \varphi^2 = \lambda$.

Wirtualna funkcja sił w danym razie jest następująca:

$$U = \frac{1}{2} \lambda x^2 + g y, \quad (1)$$

gdzie oś x jest pozioma i przechodzi przez środek koła, a oś y pokrywa się z osią obrotu i skierowana jest ku dołowi. Podstawimy w rów. 1-sze:

$$x = r \cos \alpha - a, \quad y = r \sin \alpha$$

i otrzymamy:

$$U = \frac{1}{2} \lambda \cdot (r \cos \alpha - a)^2 + g r \cdot \sin \alpha, \quad (2)$$

skąd

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -\lambda r \cdot (r \cos \alpha - a) \cdot \sin \alpha + g r \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

Równanie przeto równowagi jest następujące:

$$-\lambda (r \cos \alpha - a) \cdot \sin \alpha + g \cdot \cos \alpha = 0, \quad (4)$$

lub inaczej, oznaczwszy

$$\frac{a}{r} = \cos \alpha_0, \quad (5)$$

gdzie α_0 jest kąt środkowy, określający mimośród, i podstawivszy tę wartość w rów. 4-te, otrzymamy:

$$-\lambda (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \cdot \sin \alpha + \frac{g}{r} \cdot \cos \alpha = 0,$$

skąd

$$\lambda = \frac{g}{r} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}. \quad (6)$$

Dla wykreślenia krzywej równowagi w układzie osi (α, λ) (rys. 6-b) obliczymy z równania 6-go

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\cos \alpha_0 - \cos^3 \alpha}{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (7)$$

Z tego równania obliczymy $\alpha = \alpha_e$, przy którym $\lambda = \lambda_e$ (extremum), gdy przyrównamy $\frac{d\lambda}{d\alpha} = 0$; a więc licznik musi być $= 0$; otrzymamy więc:

$$\cos \alpha_e = \sqrt[3]{\cos \alpha_0}. \quad (8)$$

Dla symetrii wzoru wprowadzimy następnie do obliczeń parametr α_e zamiast α_0 ; w tym celu podstawimy wartość α_0 z równ. 8-go do równania 7-go i otrzymamy wyraz pochodnej w nast. postaci:

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\cos^3 \alpha_e - \cos^3 \alpha}{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (9)$$

Zwrócić tu należy uwagę, że znak tej pochodnej zależy tylko od znaku licznika i jest on dodatni dla $\alpha > \alpha_e$.

Z równań 6-go, 7-go i 9-go otrzymamy:

1) dla $\alpha \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} \rightarrow \infty;$ oś λ jest asymptotą;

„ $0 < \alpha < \alpha_e, \lambda > 0, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} < 0;$

jest to gałąź $B'A'_{\infty}$;

2) dla $\alpha_e < \alpha < \alpha_0, \lambda > 0, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} > 0,$ następnie

„ $\alpha \rightarrow \alpha_0, \lambda \rightarrow \infty, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} \rightarrow \infty;$ oś α_0 jest asymptotą;

jest to gałąź $B'C'_{\infty}$;

3) dla $\alpha_0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \lambda < 0, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} > 0;$

w tych granicach równowagi niema, jeżeli $\lambda > 0$;

4) dla $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \lambda > 0, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} > 0;$

jest to gałąź $D'E'_{\infty}$,

5) dla $-\alpha_0 < \alpha < 0, \lambda < 0;$

w tych granicach równowagi niema, jeżeli $\lambda > 0$;

6) dla $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\alpha_0, \lambda > 0, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} > 0;$

jest to gałąź $F'G'_{\infty}$.

Na podstawie tych wyników, wykreślone są gałęzie krzywej równowagi na rys. 6-b; położeniom punktu ruchomego na odcinku AB koła odpowiada krzywa równowagi $A'B$, i t. d.

Następnie z równania 3-go obliczymy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -\lambda \cdot r \cdot (r \cos \alpha - a) \cdot \cos \alpha + \lambda r^2 \cdot \sin^2 \alpha - g r \cdot \sin \alpha. \quad (10)$$

Dla zbadania znaku tej pochodnej w położeniach równowagi, podstawimy wartości λ z równania 6-go oraz $\cos \alpha_0 = \frac{a}{r}$ z równania 5-go i otrzymamy drugą pochodną, jako funkcję zmiennej α :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = \frac{g r \cdot (a - r \cos^3 \alpha)}{\sin \alpha \cdot (r \cos \alpha - a)}, \quad (11)$$

lub inaczej, biorąc pod uwagę wyrazy 5-ty i 8-my:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = \frac{g r}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos^3 \alpha_e - \cos^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos \alpha_0}. \quad (12)$$

Z tego wzoru wynika, że dla $\pi < \alpha < 0$ czynnik $\frac{g r}{\sin \alpha}$ jest dodatni, przeto znak wartości $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}$ w tym przedziale zależy tylko od znaku drugiego czynnika

Wartość przeto drugiej pochodnej rów. 12-go będzie większa od zera, gdy jednocześnie licznik i mianownik będą albo większe, albo mniejsze od zera; w przypadku, gdy licznik i mianownik są większe od zera, powinno być:

$$\alpha_e < \alpha < \alpha_0; \quad (13)$$

punkty przeto gałęzi $B'C'$ (rys. 6-b) odpowiadają równowadze niestałej.

Rodzaje równowagi pozostałych gałęzi można określić na zasadzie twierdzenia o kolejności rodzajów równowagi, lub też z rów. 12-go.

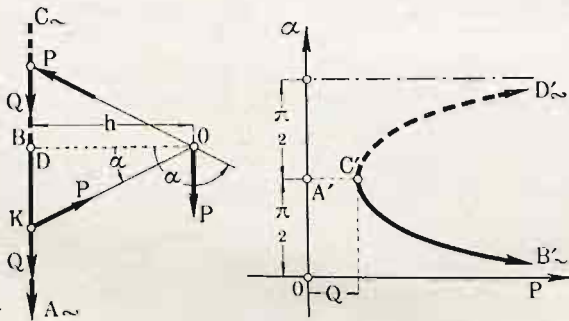
Położenie punktu zerowego ewent. zmianowego α_z obliczymy z równania 12-go, przyrównawszy je do zera; a więc

$$\cos \alpha_z = \cos \alpha_e,$$

co odrazu uwidacznia wykres. Wartość ta odpowiada punktowi B' na rys. 6-b.

Zmiana rodzajów równowagi nastąpić może również, gdy $\rho \rightarrow 0$, t. j. gdy $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \rightarrow \infty$ (porów. § 31-szy), a więc gdy w równaniu 12-em $\alpha \rightarrow \alpha_0$; czyli w położeniu C i G zachodzi zmiana rodzaju równowagi; lecz to następuje łącznie ze zmianą znaku λ ; w przeciwnym bowiem razie nie będzie równowagi.

PRZYKŁAD 7. Rys. 7-a i 7-b. Po przecie pionowym CA może ślizgać się bez tarcia ciężar Q . Ażeby ciężar ten nie spadł, przy-



Rys. 7-a i 7-b.

łożono do niego siłę P , której kierunek przechodzi stale przez punkt nieruchomy O ; siłę tę można wywołać zapomocą sznurka, przerzuconego przez krążek, którego jeden koniec przyczepiony jest do ciężaru; do drugiego zaś końca przyczepiony

jest drugi ciężar P ; obliczyć warunki i rodzaje równowagi ciężaru Q .

Wirtualna funkcja sił w punkcie K :

$$U = Q \cdot BK - P \cdot OK. \quad (1)$$

Obrawszy kąt α za spółrzedną niezależną, napiszemy równanie:

$$U = Q \cdot h \cdot \tan \alpha - P \cdot h \cdot \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (2)$$

z którego:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = Q \cdot h \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - P \cdot h \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}. \quad (3)$$

Równanie przeto równowagi jest następujące:

$$\frac{h}{\cos^2 \alpha} \cdot (Q - P \cdot \sin \alpha) = 0. \quad (4)$$

Równanie to przedstawia dwie gałęzie równowagi:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} &= 0; \text{ jest to gałąź nierzeczywista, oraz} \\ b) \quad P &= \frac{Q}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ażeby wykreślić (rys. 7-b) tę gałąź, obliczymy z rów. 5-go:

$$\frac{d\alpha}{dP} = -\frac{1}{Q} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

Na podstawie rów. 5-go i 6-go mamy:

$$\text{dla } \alpha \rightarrow 0; P \rightarrow \infty; \frac{d\alpha}{dP} \rightarrow -0; \text{ jest to punkt } B'_{\infty};$$

$$\text{dla } \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}; P \rightarrow Q; \frac{d\alpha}{dP} \rightarrow -\infty; \text{ jest to punkt } A', \text{ lub } C';$$

$$\text{dla } \alpha \rightarrow \pi; P \rightarrow \infty; \frac{d\alpha}{dP} \rightarrow 0; \text{ jest to punkt } D'_{\infty};$$

$$\text{dla } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \frac{d\alpha}{dP} < 0; \text{ jest to gałąź } C' B'_{\infty};$$

$$\text{dla } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \frac{d\alpha}{dP} > 0; \text{ jest to gałąź } C' D'_{\infty}.$$

Krzywa równowagi zawarta jest przeto pomiędzy dwiema asymptotami, jak pokazano na rys. 7-b.

W celu obliczenia rodzaju równowagi w różnych położeniach punktu ruchomego, obliczymy drugą pochodną U z równania 3-go:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 2 Q h \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - P h \cdot \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha}; \quad (7)$$

a po podstawieniu wartości P z rów. 5-go otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -\frac{Q h}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}. \quad (8)$$

Dla $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ otrzymamy $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} < 0$; gałąź przeto krzywej równowagi $A'B'_{\infty}$, odpowiadająca położeniu ciężaru Q pomiędzy punktami A i B , wyraża równowagę stałą.

Dla $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} > 0$; gałąź przeto $C'D'_{\infty}$, odpowiadająca położeniom ciężaru Q pomiędzy C i D , wyraża równowagę niestłą.

Punkt zmianowy powinien przeto leżeć w punkcie $A'C'$, i rzeczywiście w tem miejscu:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \rightarrow \infty, \quad (9)$$

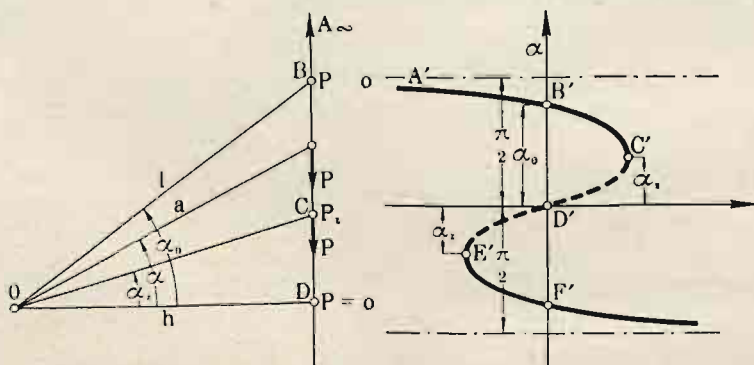
czyli promień krzywizny krzywej funkcji sił w tem miejscu $\rho \rightarrow 0$, a wartość drugiej pochodnej przechodzi z $(-)$ na $(+)$ przez ∞ , co się zgadza ze wzorem 8-ym:

$$\rho = \frac{1}{\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}} = - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{Qh};$$

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = - \frac{1}{Qh} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{2}} > 0,$$

z którego wynika, że, z rosnącym α , ρ zmienia znak z $(-)$ na $(+)$, przechodząc przez zero, t. j. rodzaj równowagi zmienia się ze stałej na niestłą. Zwrócić należy jeszcze uwagę, że $\rho \rightarrow 0$ nietylko, gdy $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, lecz również, gdy $\alpha \rightarrow 0$ i gdy $\alpha \rightarrow \pi$.

PRZYKŁAD 8. Rys. 8-a i 8-b. Pręt nieograniczenie sprężysty w kierunku swej osi (w kierunku zaś poprzecznym sztywny,



Rys. 8-a i 8-b.

t. j. niegiętki) umocowany jest jednym końcem przegubowo (rys. 8-a) w punkcie O , drugim zaś opiera się o ścianę pionową nieruchomą, po której może się ślizgać bez tarcia; na tym końcu zawieszony jest ciężar zmienny P . Obliczyć warunki równowagi i jej rodzaje.

Literą l oznaczmy długość pręta w stanie wolnym od obciążenia, t. j. w stanie naturalnym; literą a oznaczmy długość odkształconą, jaka nastąpi pod wpływem działania ciężaru P .

Spółrzedną punktu przyłożenia tego ciężaru oznaczmy literą y . Dla położenia OB danego pręta (rys. 8-a) mamy:

$$U = -\frac{1}{2} k (l - a)^2 + P(h \operatorname{tg} \alpha_0 - y). \quad (1)$$

Jako niezależnie zmienną obierzemy kąt α ; wtedy, po podstawieniu w powyższe równanie

$$\begin{aligned} y &= h \operatorname{tg} \alpha, & a &= \frac{h}{\cos \alpha}, & h &= l \cdot \cos \alpha_0, \\ \frac{a}{l} &= \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} & \text{oraz} \\ \frac{dy}{d\alpha} &= h \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}, & \frac{da}{d\alpha} &= h \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie kąt α_0 oznacza kąt nachylenia pręta względem poziomu w jego stanie naturalnym, i, po zróżniczkowaniu, otrzymamy:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = k(l - a)h \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - Ph \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad (3)$$

a po podstawieniu odpowiednich wartości z rów. 2-gich, otrzymamy równanie równowagi:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = kl \cdot \left(1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \right) \cdot h \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - Pl \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos^2 \alpha} = 0, \quad (4)$$

skąd

$$P = kl \cdot \left(1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \right) \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

W celu obliczenia rodzajów równowagi obliczymy z równania 4-go wartość wyrazu $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}$ i następnie, podstawivszy P z równania 5-ego, otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = \frac{h^2 k}{\cos^4 \alpha} \cdot \left(\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \alpha_0} - 1 \right). \quad (6)$$

Wartość ta może być dodatnią lub ujemną, zależnie od wartości kąta α ; istnieje przeto na krzywej równowagi punkt zmianowy. Położenie tego punktu znajdziemy z warunku

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 0,$$

co nastąpi dla

$$\cos \alpha_z = \sqrt[3]{\cos \alpha_0}, \quad (7)$$

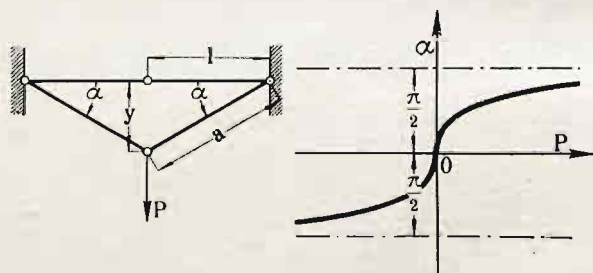
gdzie litera α_z oznacza kąt, w którym następuje zmiana rodzaju równowagi; punkt ten znajduje się w miejscu, w którym występuje P_{extr} .

Dla $\cos \alpha > \sqrt[3]{\cos \alpha_0}$, czyli dla $0 < \alpha < \alpha_z$ mamy $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} > 0$, zatem dla gałęzi $D' C'$ oraz $D' E'$ jest równowaga niestała.

Dla $\alpha_z < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} < 0$, t. j. dla gałęzi $C' B' A'$, równowaga jest stała z warunkiem, że dla części gałęzi $B' A'$, wielkość P stanie się ujemną.

Rodzaj równowagi w punkcie zmianowym α_z określimy bezpośrednio z wykresu krzywej równowagi.

PRZYKŁAD 9. Rys. 9-a i 9-b. Dwa pręty poziome o jednakowych długościach, nieograniczenie sprężyste w kierunku ich osi (lecz



Rys. 9-a i 9-b.

szttywne w kierunku poprzecznym, t. j. niegiętkie), połączone są ze sobą jednymi końcami przegubowo, drugimi zaś umocowane są również przegubowo do dwóch punktów stałych, znajdujących się na tymże poziomie. W

środkowym przegubie tego układu przyczepiony jest ciężar P . Obliczyć równanie równowagi i jej rodzaje.

Po wydłużeniu się prętów położenie ich wyznaczmy zapomocą kąta α , jaki tworzy każdy z tych prętów z poziomem; kąt ten przyjmujemy za współrzędną niezależną tego układu.

W dowolnym położeniu prętów, gdy oznaczmy długość wydłużonego pręta literą a , a współczynnik sprężystości literą k , wzór wirtualnej funkcji sił wyrazi się w formie następującej:

$$U = -2 \cdot \frac{k}{2} (a - l)^2 + P y, \quad (1)$$

gdzie

$$y = l \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad a = \frac{l}{\cos \alpha}; \quad (2)$$

po podstawieniu tych wartości do rów. 1-ego otrzymamy:

$$U = -k l^2 \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)^2 + P l \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Równanie równowagi jest następujące:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -2 k l^2 \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + P l \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0, \quad (4)$$

skąd

$$P = 2 k l \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

W celu wykreślenia krzywej równowagi obliczymy:

$$\frac{dP}{d\alpha} = 2 k l \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \cos \alpha \right). \quad (6)$$

Z równań 5-go i 6-go wykreśliliśmy krzywą równowagi na rys 9-b.

W celu określenia rodzaju równowagi obliczymy z rów. 4-go $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}$ i podstawimy w otrzymane równanie wartość P dla położenia równowagi (rów. 5-te); otrzymamy wtedy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -\frac{2 k l^2}{\cos^4 \alpha} \cdot (1 - \cos^3 \alpha). \quad (7)$$

Wartość ta dla $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ jest ujemną; przeto równowaga w tych granicach dla każdej wartości P jest stałą.

Punkt zerowy, w którym $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 0$, znajduje się w początku układu 0 (tu bowiem dla $\alpha = 0$, jest $P = 0$).

Czy punkt ten jest punktem zmianowym, obliczymy z równania 7-go:

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right) = -2 k l^2 \cdot \left(\frac{4}{\cos^3 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \cdot \sin \alpha. \quad (8)$$

Dla $\alpha = 0$, wyraz ten równa się zeru, co znaczy, że początek układu, t. j. punkt 0 jest tylko punktem zerowym, lecz nie zmianowym,—przynajmniej 2-go rzędu; lecz może być zmianowym wyższego rzędu (§ 34-ty); z przebiegu jednakże krzywej równowagi (rys. 9-b) wnioskować możemy, że nie jest on zmianowy.

Jeżeli kąt α jest tak mały, że moglibyśmy z dostatecznym przybliżeniem przyjąć:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \text{ oraz } \sin \alpha = \alpha,$$

to z rów. 5-go otrzymamy:

$$P \cong 2kl \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2} - 1 \right) \cdot \alpha;$$

lub inaczej, w przybliżeniu:

$$P \cong 2kl \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - 1 \right) \cdot \alpha,$$

skąd

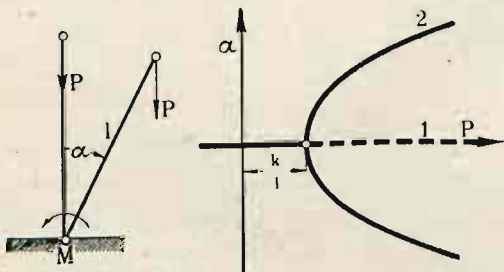
$$\alpha^3 \cong \frac{P}{kl};$$

a podstawiając na k wartość, znaną z Wytrzymałości,

$$k = \frac{EF}{l},$$

otrzymamy

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{P}{EF}}.$$



Rys. 10-a i 10-b.

Wzór ten wyprowadził Timoszenko (Wytrzymałość § 112), oraz Föppl (Graph. Statik. str. 392),—z odkształceń tego układu, a więc metodą nie ogólną.

PRZYKŁAD 10. Rys. 10-a i 10-b. Pręt sztywny zamocowany jest dolnym końcem przegubowo i usta-

wiony pionowo; na drugim jego końcu zawieszono ciężar P . Obliczyć położenie równowagi pręta i jej rodzaje, przyjmąwszy, że przegub jest sprężysty. Mamy w tym razie:

$$U = Pl \cdot (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} k \cdot \alpha^2, \quad (1)$$

gdzie k oznacza współczynnik proporcjonalności.

Równanie równowagi ma postać:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = Pl \cdot \sin \alpha - k \cdot \alpha = 0; \quad (2)$$

równanie to przedstawia dwie gałęzie krzywej równowagi:

$$1) \quad \alpha = 0;$$

jest to gałąź, która jest niezależna od P ; gałąź ta pokrywa się z osią P wykresu (P, α) (rys. 10-b);

$$\text{oraz} \quad 2) \quad P \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{k}{l}; \quad (3)$$

punkt przecięcia się tej gałęzi z osią P wyznaczymy, gdy $\alpha \rightarrow 0$; w tym razie $P \rightarrow \frac{k}{l}$. Gałąź tę wykreślimy w przybliżeniu i w tym celu rozwinie my $\sin \alpha$ w szereg, zatrzymując tylko pierwsze dwa wyrazy tego szeregu; otrzymamy wtedy z rów. 3-go dla małych wartości α :

$$P \cdot \left(1 - \frac{1}{3!} \alpha^2 \right) \cong \frac{k}{l};$$

$$\text{dla } \alpha = 0, \text{ mamy: } P \cong \frac{k}{l},$$

a wogóle dla małych kątów odchylenia:

$$P \cong \frac{k}{l} \left(1 + \frac{1}{3!} \alpha^2 \right). \quad (4)$$

Dla małych przeto wartości α , odpowiednia gałąź równowagi jest parabolą, której część wykreślona jest na rys. 10-b.

Rodzaje równowagi obliczymy z równania 2-go:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = Pl \cdot \cos \alpha - k. \quad (5)$$

Dla gałęzi 1-szej, t. j. gdy $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = Pl - k;$$

przeto dla $P > \frac{k}{l}$, otrzymamy $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} > 0$; ta część krzywej przedstawia równowagę niestabilną; zaś dla $P < \frac{k}{l}$ mamy równowagę stałą.

Ponieważ rodzaj równowagi zmienia się na tej gałęzi, przeto musi być punkt zmianowy; punkt ten obliczymy z rów. 5-go:

$$Pl \cdot \cos \alpha - k = 0. \quad (6)$$

Podstawiając w nie jako warunek równowagi wartość P z rów. 2-go, otrzymamy:

$$\frac{k \alpha}{l \sin \alpha} \cdot l \cos \alpha - k = 0,$$

$$\text{skąd } \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 1; \quad \text{a więc } \alpha = \alpha_z = 0;$$

odpowiednią wartość P_z obliczymy z równania równowagi, t. j. z rów. 2-go:

$$P_z = \frac{k}{l}.$$

Rodzaj równowagi w punkcie zmianowym obliczymy z równania 5-go:

$$\left. \frac{\partial^3 U}{\partial \alpha^3} = -Pl \cdot \sin \alpha \right|_{\alpha=0} = 0,$$

a więc obliczamy

$$\left. \frac{\partial^4 U}{\partial \alpha^4} = -Pl \cos \alpha \right|_{\alpha=0} < 0.$$

W punkcie przeto zmianowym mamy w tym przypadku równowagę trzeciego rzędu i przytem stałą. Aby obliczyć rodzaj równowagi dla drugiej gałęzi, należy podstawić do rów. 5-go α , lub P z rów. 3-go i otrzymamy:

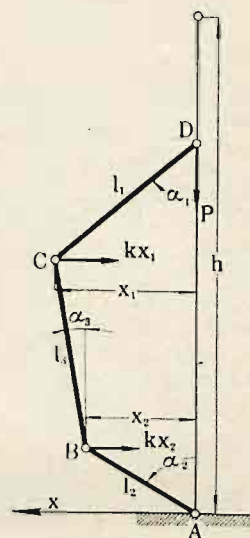
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = k \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 \right). \quad (7)$$

Wartość wyrazu tego dla $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, oraz dla $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ jest ujemna, przeto ta gałąź przedstawia równowagę stałą. Przykład ten ilustruje w najprostszej formie zjawisko t. zw. wyboczenia prętów sprężystych.

PRZYKŁAD 11. Trzy pręty AB , BC i CD , o długościach l_1 , l_2 , l_3 , połączone są przegubowo w punktach B i C ; końce zaś A i D znajdują się na linii pionowej, przyczem koniec A zamocowany jest przegubowo do nieruchomej podpory; koniec zaś D może poruszać się po pionowej, wzdłuż której działa siła P , zaczepiona przegubowo w punkcie D . Punkty B i C przyciągane są do tej osi siłami proporcjonalnymi do odległości od niej (siły te mogą być wywołane odpowiednim urządzeniem sprężynowym).

Należy obliczyć położenia równowagi tego układu, oraz zbadać jej rodzaje; wymiary geometryczne pokazane są na rys. 11-a.

Układ dany jest układem o dwóch stopniach swobody. Jako spórzędne niezależne wybieramy kąty α_1 i α_2 ; wtedy przy danych długościach prętów obliczymy kąt α_3 w zależności od α_1 i od α_2 ; zależność ta jest następująca:



Rys. 11-a.

$$l_1 \sin \alpha_1 = l_3 \sin \alpha_3 + l_2 \sin \alpha_2,$$

skąd

$$\sin \alpha_3 = \frac{l_1 \sin \alpha_1 - l_2 \sin \alpha_2}{l_3}. \quad (1)$$

Wirtualna funkcja sił danego układu jest następująca:

$$U = P[h - AD] - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2, \quad (2)$$

gdzie

$$h = l_1 + l_2 + l_3; \quad AD = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3;$$

$$x_1 = l_1 \sin \alpha_1; \quad x_2 = l_2 \sin \alpha_2;$$

po podstawieniu tych wartości do równania 2-go, otrzymamy wyraz wirtualnej funkcji sił:

$$U = P[l_1 + l_2 + l_3 - l_1 \cos \alpha_1 - l_2 \cos \alpha_2 - l_3 \cos \alpha_3] + \\ - \frac{1}{2} k_1 l_1^2 \sin^2 \alpha_1 - \frac{1}{2} k_2 l_2^2 \sin^2 \alpha_2,$$

z którego obliczymy równania równowagi:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = P \left[l_1 \sin \alpha_1 + l_3 \sin \alpha_3 \cdot \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} \right] - k_1 l_1^2 \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_2} = P \left[l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 \cdot \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_2} \right] - k_2 l_2^2 \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0, \quad (4)$$

w których wyrazy:

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} = \frac{l_1}{l_3} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_3}; \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_2} = -\frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_3}, \quad (5)$$

obliczone są z równania 1-go.

Równania 3-cie i 4-te zaspokojone są wartościami:

$$1) \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0; \quad \alpha_3 = 0, \quad (6)$$

które wyznaczają jedno z położeń równowagi danego układu.

Ażeby zbadać rodzaje równowagi w tem położeniu, obliczymy, stosownie do wzorów 119-tych, znaki wartości wyznaczników D_1 i D_2 . W tym celu obliczymy z równań 3-go, 4-go i 5-go:

$$a_{1,1} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2} = P \left[l_1 \cos \alpha_1 + l_3 \cos \alpha_3 \cdot \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} \right)^2 + l_3 \sin \alpha_3 \cdot \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial \alpha_1^2} \right] + \\ - k_1 l_1^2 \cos^2 \alpha_1 + k_1 l_1^2 \sin^2 \alpha_1; \quad (7)$$

$$a_{1,2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = P \left[l_3 \cos \alpha_3 \cdot \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} + l_3 \sin \alpha_3 \cdot \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right]; \quad (8)$$

$$a_{2,2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2^2} = P \left[l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 \cdot \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_2} \right)^2 + l_3 \sin \alpha_3 \cdot \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial \alpha_2^2} \right] + \\ - k_2 l_2^2 \cos^2 \alpha_2 + k_2 l_2^2 \sin^2 \alpha_2; \quad (9)$$

oraz z równań 5-tych wyrazy pomocnicze:

$$\frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial \alpha_1^2} = \left(\frac{l_1}{l_3} \right)^2 \cdot \frac{\sin \alpha_3 \cdot \cos^2 \alpha_1}{\cos^3 \alpha_3} - \frac{l_1}{l_3} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_3}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} = \left(\frac{l_2}{l_3} \right)^2 \cdot \frac{\sin \alpha_3 \cdot \cos^2 \alpha_2}{\cos^3 \alpha_3} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_3}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} = - \frac{l_1 l_2 \sin \alpha_3 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{l_3^2 \cos^3 \alpha_3}. \quad (12)$$

Po podstawieniu w te równania wartości spółrzędnych $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, wyznaczających położenie równowagi, i następnie przyjąwszy dla uproszczenia rachunku: $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $k_1 = k_2 = k$, otrzymamy dla tego położenia:

$$D_1 = a_{1,1} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2} = 2Pl - kl^2; \quad (a)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = 3P^2 - 4klP + k^2 l^2. \quad (b)$$

Dla $P=0$ otrzymamy $D_1 < 0$, $D_2 > 0$; znaki te wskazują (wzory 121-sze), że w tem położeniu (t. j. gdy $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$) dany układ znajduje się w równowadze zupełnie stałej (co również wynika z ogólnych rozważań o rodzajach równowagi układów, będących w stanie naturalnym, § 43-ci, str. 102-ga).

Następnie, gdy zwiększać będziemy siłę P , znaki wartości D_1 i D_2 mogą się zmieniać; przyjmiemy, że te znaki będą się zmieniać, gdy wartości D_1 i D_2 przechodzić będą przez zero, (co zresztą wynika z równań a i b). Wartość D_1 przechodzi przez zero, gdy

$$2Pl - kl^2 = 0, \quad \text{t. j. gdy } P = \frac{1}{2} kl,$$

i przytem zmieni znak z ujemnego na dodatni, gdyż pochodna równania a):

$$\frac{dD_1}{dP} > 0.$$

Wartość D_2 przechodzi dwa razy przez zero; z równania bowiem b):

$$D_2 = 3P^2 - 4klP + k^2 l^2 = 0$$

otrzymamy:

$$P_1 = \frac{1}{3} kl, \quad P_2 = kl,$$

i, — przechodząc przez zero, gdy

$$P = \frac{3}{1} kl,$$

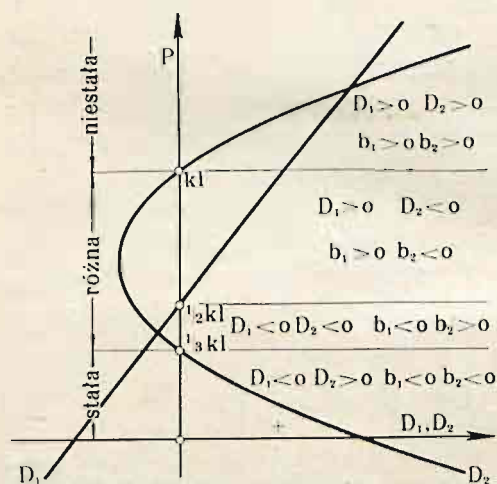
zmienia znak dodatni na ujemny, gdyż dla $P = \frac{1}{3} kl$,

$$\frac{dD_2}{dP} = 6P - 4kl < 0;$$

wreszcie dla $P = kl$, zmienia znak ujemny na dodatni, gdyż dla $P = kl$

$$\frac{dD_2}{dP} > 0.$$

Wyniki te są naszkicowane na rys. 11-b, gdzie na osi poziomej naniesiono wartość D_1 , ewentualnie D_2 , na prostopadłej zaś do niej różne wartości P .



Rys. 11-b.

Wyniki te są również zestawione w następującej tabelicy na podstawie wzorów 120-tych i 121-tych.

Dla $0 < P < \frac{1}{3} kl$, mamy $D_1 < 0$, $D_2 > 0$; równowaga jest przeto (zupełnie) stała;

dla $\frac{1}{3} kl < P < \frac{1}{2} kl$, $D_1 < 0$, $D_2 < 0$, — równowaga różna;

dla $\frac{1}{2} kl < P < kl$, $D_1 > 0$, $D_2 < 0$, — równowaga różna,

dla $kl < P < \infty$, $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, — równowaga (zupełnie) niestała.

Dla wartości

$$\frac{1}{3} kl < P < kl$$

mamy równowagę różną, to znaczy (§ 40-ty str. 88-ma), że przy pewnych odkształceniach układu może być równowaga stała, a przy innych — równowaga niestała.

Obliczenie odkształceń, przy jakich równowaga różna będzie stałą, ewentualnie niestałą, można wykonać na podstawie § 41-ego.

Równania równowagi 3-cie i 4-te mogą mieć jeszcze inne rozwiązania oprócz: $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 0$, lecz ze względu na trudności algebraiczne nie da się ich w tym razie obliczyć. Ażeby jednakże, choć w przybliżeniu, otrzymać rozwiązanie tych równań, zastąpimy w nich sinusy i cosinusy pierwszymi wyrazami szeregu Taylor'a, co dla niewielkich odchyłeń (niekoniecznie nieskończenie małych), w które nie wchodzi pochodne wyższych rzędów niż 2-go, może dać dokładność wystarczającą. A więc podstawimy do równania 3-go i 4-go $\sin \alpha_1 = \alpha_1$, $\cos \alpha_1 = 1$ i t. d. i otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} &= \alpha_1 \cdot (2P - kl)l - \alpha_2 lP = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} &= -\alpha_1 \cdot lP + \alpha_2 (2P - kl)l = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Ponieważ równania te są jednorodne względem niewiadomych α_1 i α_2 , przeto pierwsze położenie równowagi wyznaczone jest współrzędnymi:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0;$$

jest to przypadek, któryśmy już wyżej rozpatrzyli.

Ażeby znaleźć jeszcze inne rozwiązania, powinien wyróżnik równań 13-tych równać się zeru; z tego warunku otrzymamy:

$$P = kl, \quad P = \frac{1}{3} kl,$$

i tylko dla tych wartości P otrzymamy nowe gałęzie; gałęzi takich będzie dwie, lecz nie więcej, gdyż wyróżnik jest wyrazem drugiego stopnia względem P .

Z równań 13-tych

$$\text{dla } P = kl; \quad \text{otrzymamy: } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1; \quad (14)$$

oraz

$$\text{dla } P = \frac{1}{3} kl; \quad \text{otrzymamy: } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -1; \quad (15)$$

są to gałęzie nowych położeń równowagi.

Ażeby obliczyć rodzaje równowagi, obliczymy znaki wielkości D_1 i D_2 (wzory 119-te) dla tych położeń. W tem zadaniu mamy:

$$D_1 = 2Pl - kl^2; \quad D_2 = 3P^2 - 4klP + k^2l^2,$$

przeto

$$\text{dla } P = kl, \text{ oraz dla } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1, \text{ otrzymamy:}$$

$$D_1 > 0; \quad D_2 = 0;$$

wartość $D_2 = 0$ wskazuje, że układ dany przy warunkach $P = kl$, oraz $\alpha_1 = \alpha_2$ (rów. 14-te) zachowywać się będzie, jak układ o jednym stopniu swobody; a o rodzaju równowagi tego układu decydować będzie znak wyróżnika D_1 , który w tym razie jest dodatni; równowaga więc jest przy tem odkształceniu *niestała*.

$$\text{Dla } P = \frac{1}{3}kl, \text{ oraz dla } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -1 \text{ (rów. 15-te) otrzymamy:}$$

$$D_1 < 0. \quad D_2 = 0,$$

a więc układ zachowuje się, jak układ o jednym stopniu swobody; lecz równowaga jest w tym razie stała.

Odchylenia α_1 i α_2 , wyrażone równaniami 14-tym i 15-tym, w których układ dany jest w równowadze, nie mogą być znaczne co do ich wielkości, gdyż są to wielkości przybliżone; zupełnie dokładne są one tylko, gdy są nieskończenie małe; dla praktycznych jednakże obliczeń dokładność tych wyników może być wystarczająca.

Dokładność tych wzorów mogłaby być ściślej określona, gdybyśmy zastosowali więcej wyrazów szeregu, na jaki rozwinęliśmy funkcje $\sin.$ i $\cos.$ Jest to taka sama sprawa dokładności, z jaką mieliśmy do czynienia przy obliczaniu ruchu wahadła sposobem przybliżonym.

W innych połozeniach, t. j. przy innych wartościach α_1 i α_2 , niż te, któreśmy tu obliczyli, równowagi być nie może; nie mamy bowiem więcej równań równowagi, z których moglibyśmy obliczyć spórzędne.



nr. 148

SKOROWIDZ.

(Liczby oznaczają stronicę)

Bryła=układ niezmienny punktów=
=układ sztywny punktów 8.

Clapeyron'a twierdzenie 36.

Dynamiczna miara siły wybożenia
113.

Euler—Lagrange'a równanie 128, 129.
Euler'a siła=siła wybożenia 112, 113.

Figura = figura płaska 10.

Forma funkcji 118, 120, 121.

Funkcje nieokreślone=funkcje zmienne
120.

Funkcje określone=funkcje stałe 120.
" ortogonalne 152.

" " znormowane 152.

" sąsiednie 121, 122.

Funkcja sił 29, 34.

Funkcja sił jednorodna 103, 106, 108.

Funkcja sił rzeczywista 34, 35.

Funkcja sił wirtualna 34, 35, 118.

Kierunek zmiany rodzaju równo-
wagi 77.

Kolejność rodzajów równowagi 64.

Krzywe ekstremalne 128, 133.

Krzywa funkcji sił 62.

" równowagi 62 i nast., 85, 107.

Krzywa wskazująca (indicatrice) 89, 92.

Liczba przesunięć niezależnych 15, 16.

" punktów zerowych 107.

" równań równowagi 38.

" stopni niestałości 93, 95, 96.

" stopni swobody 13, 46.

Maximum funkcji sił 112, 113.

Metoda funkcji przybliżonych 161
i nast..

Metoda szeregów 149 i nast., 160.

Minimum funkcji sił 112, 113.

Niestałość równowagi 100 i nast.

Odkształcenie wirtualne 87.

Ograniczenia analityczne 15, 44.

Ograniczenia jawnie geometryczne
15, 41.

Ograniczenie jednostronne 19, 28.

" obustronne 19.

" zmienne 16.

Parabola układu częściowego 102.

Parametr siły (λ) 29, 79, 105.

Płaszczyzna odniesienia 10.

Połączenie odkształcalne 27.

" przegubowe 10.

" sztywne=połączenie w po-
staci prętów sztywnych 26.

Położenie odchylone 105.

" zerowe 73, 104.

" zmianowe 66.

Potencjał sił 29, 36.

Powierzchnia funkcji sił 62.

Praca wirtualna 24.

" " możliwa 26.

" " możliwa sił odporo-
wych, gdy połączenia
są jednostronne 28.

" " sił połączeń 25.

" " sił wewnętrznych 26
i nast.

Prawo zachowania energii = prawo
równowartości pracy i energii ki-
netycznej 38, 114.

Prędkość krytyczna 160.

Prędkość wirtualna 21.

Przegub sprężysty 109.
Przestrzeń wielowymiarowa 90.
Przesunięcia niezależne 15.
 " rzeczywiste 14.
 " wirtualne 13, 17.
 " " możliwe 26, 39.
Punkt nieswobodny 7.
 " podwójny krzywej równowagi
 (wielokrotny) 69, 81, 82, 85.
 " pojedynczy krzywej równowa-
 gi 78, 79, 81.
 " swobodny 7.
 " zerowy 67, 73, 78.
 " " niezmienny 74 i nast..
 " " pojedynczy 78.
 " zmianowy 66, 67, 73 i nast..
 " " k-go rzędu 76.
 " " podwójny 71, 82
 i nast..
 " " pojedynczy 71, 79, 84.
Rachunek warjacyjny 120 i nast..
Rodzaje równowagi 57 i nast., 82
i nast., 86 i nast., 114 i nast., 131
i nast..
Rodzaj równowagi różnej 96 i nast..
Równania połączeń 9, 15.
 " " o skończonej po-
 staci (holonom) 17.
 " " różniczkowe cał-
 kowalne (semi-
 holonom) 19.
 " " niecałkowalne
 (nieholonom)
 18.
 " " zawierające czas
 jawnie 17, 116.
 " równowagi 38, 62, 87, 108.
 " sekularne 94.
Równowaga graniczna (limite) 72.
 " niestała 59, 84, 90, 98,
 112, 134.
 " o rodzaju różnym = rów-
 nowaga różna 83, 89, 90,
 92, 93.
 " sił 37 i nast., 86 i nast.,
 114 i nast., 116 i nast..

Równowaga stała 59, 84, 90, 98, 112, 134.
 " zupełnie niestała 92 i nast..
 " " obojętna 59.
 " " stała 92 i nast..
 " układów w stanie natu-
 ralnym 103.
Różniczka zupełna funkcji sił 30.
Rzędy równowagi 57 i nast..
 " zmienności rodzajów równo-
 wagi 76.
Sąsiedztwa różnych rzędów 122.
Siła krytyczna = granica stateczno-
ści 103, 106, 112, 156 i nast., 169
i nast..
Siły odporowe 22, 23.
Siły oporowe 23.
Siły połączeń = siły bierne 22, 23.
Siła tarcia 23.
Siły uogólnione 55.
Siły wewnętrzne 23.
Siła zerowa 73, 99, 106.
Siły zewnętrzne = siły czynne = siły
działające 22.
Siła zmianowa 65.
Spółczynniki nieokreślone = współczyn-
niki Lagrange'a 48.
Spółrzędne 7.
 " naturalne 136.
 " niezależne 8, 52.
Spółrzędna odniesienia 105.
Spółrzędne uogólnione 55.
 " wewnętrzne 12.
 " zewnętrzne 12.
Stopnie niestałości (niestateczności) 93
 " swobody 8, 9, 46.
Układ brył sztywnych 9.
 " częściowy 100.
 " prętów sztywnych 110.
Układy w stanie naturalnym 102.
Warjaacja całki 124.
 " funkcji 121.
 " pochodnej 122, 123.
Wyboczenie pierwsze 156.
Wyraz całkowity pracy wirtualnej 57.

BIBLIOTEKA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1



MP. 148