to ilorazy przesunięć przez ten okres czasu będą wyrażały prędkości punktów; ilorazy te nazwano *prędkościami wirtualnemi*, dla odróżnienia od prędkości rzeczywistych, jakie dane punkty otrzymałyby w rzeczywistości pod działaniem sił, na nie działających. Zamiast przeto mówić o przesunięciach wirtualnych, mówić możemy o prędkościach wirtualnych i unaocznić je możemy zapomocą wektorów o skończonych długościach. Takie przedstawienie przesunięć pozwala stosować do obliczenia związków pomiędzy przesunięciami twierdzenia z kinematyki o prędkościach punktów danego układu; pozwala również stosować sposoby wykreślania tych prędkości, co też w Statyce budowlanej znajduje zastosowanie*).

ROZDZIAŁ II.

PRACA WIRTUALNA I FUNKCJA SIŁ.

9. Siły połączeń i siły wewnętrzne.

Punkt materjalny swobodny, będący pod działaniem danych sił, wykona ściśle określony ruch, gdy dana jest masa punktu oraz początkowe warunki ruchu. Sposoby obliczenia tego ruchu daje nam dynamika; obliczenia te nie wchodzą w zakres tych rozpatrywań; stwierdzimy na razie tylko fakt, że ruch danego punktu jest *ściśle wyznaczony* przez siły, masę danego punktu i przez warunki początkowe. Siły te nazywamy siłami zewnętrznemi, działającemi na dany punkt materjalny.

Jeżeli zaś punkt dany nie jest swobodny, t. j. jeżeli podlega on pewnym ograniczeniom swego ruchu, o jakich mówiliśmy poprzednio, to ruch danego punktu pod działaniem danych sił nie będzie taki, jakiby był, gdyby ten punkt był swobodnym. Punkt np. materjalny swobodny pod działaniem sił ciążenia, nie posiadający prędkości początkowej, wykona ruch prostolinijny, pionowo skierowany ku dołowi; jeżeli zaś będzie on zmuszony poruszać się po danej krzywej (np. po drucie dowolnie wygiętym), to wykona on pod działaniem tejże siły ciążenia ruch krzywolinijny

*) Autor niniejszego wprowadził i zastosował do obliczeń statycznych jeszcze pojęcie przyśpieszeń wirtualnych; porów. „Sprawozdanie i prace Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego Nr 3. roku 1923".

taki, na jaki mu pozwalają *warunki fizyczne tego zadania*, t. j. — jak w tym przykładzie — na jaki pozwoli mu dany tor; dany przeto punkt materjalny wykonywa w tym razie, przy tych samych warunkach początkowych i pod działaniem tejże siły inny ruch, aniżeliby on wykonał, gdyby był swobodny.

Ażeby być przeto w zgodzie z określeniem siły, zmuszeni jesteśmy przyjąć, że oprócz sił danych zewnętrznych, działają w tym razie na taki punkt jeszcze inne siły, pochodzące od fizycznych ograniczeń ruchu, a jak w danym przypadku — od toru; siły te nazwano wogóle *siłami połączeń*, w szczególności *siłami odporowemi* (reakcjami). Siły odporowe, inaczej siły połączeń, pochodzą przeto od fizycznych ograniczeń ruchu i działają na dany punkt. Takiemi siłami mogą być np. siły ciągnienia, występujące w sznurze, do którego punkt dany jest umocowany, lub ciśnienia, występujące w podporach i t. p.

Nazwa—siły zewnętrzne — niezupełnie ściśle określa te siły, które mamy tu na na myśli, gdyż, ściśle mówiąc, siły połączeń mogą być również przy zachowaniu pewnych warunków uważane jako siły zewnętrzne; nastąpi to, gdy np. usuniemy połączenia fizyczne i zastąpimy je siłami. Dla rozróżnienia tych rodzajów sił zewnętrznych wprowadzono różne nazwy jak w naszym, tak i w obcych językach; nazwy te jednakże nie wyrażają ściśle tej różnicy w dostatecznej mierze, choć zresztą sprawa jest jasna, co się ma w tym razie na myśli.

Newton nazwał siłę zewnętrzną w znaczeniu tu opisanym, t. j. siłę, wywołującą przyśpieszenie,—„vis impressa"; po polsku nazywają taką siłę—siłą czynną,—siłą działającą (beschleunigende Kraft); siły zaś, wywołane ograniczeniami ruchu, można nazwać — siłami biernemi, — lub siłami połączeń, (które w innych językach nazywają forces de liaison, Zwangs-Kräfte, forces of constraint).

Dla unaocznienia sobie tych rodzajów sił przyjmiemy, że siły, które nazwaliśmy zewnętrznemi, są dane, a więc — znane; siły zaś połączeń przyjmiemy za nieznane, co nie wyklucza przypadków, że i siły, zwane zewnętrznemi, mogą być nieznane.

W pewnych szczególnych przypadkach siły zewnętrzne nazywają obciążeniem danego układu materjalnego, na który działają; jest to nazwa, która — w tym razie — nie dopuszcza żadnych dwuznaczności — jest jednoznaczna.

Z tego wynika, że działanie ograniczeń ruchu w postaci np. drutów, lin, podpór i t. p. może być zastąpione siłami, któreśmy nazwali siłami połączeń i które nadają taki ruch danemu punktowi, czy też danemu układowi materjalnemu, na jaki mu pozwalają te warunki.

Kierunek sił połączeń jest uwarunkowany fizycznemi właściwościami ograniczeń. Jeżeli np. powierzchnia, po której dany punkt się porusza, jest zupełnie gładka, wtedy siły styczne do tej powierzchni nie występują; występować mogą tylko siły normalne do niej; ruch bowiem w kierunku stycznym do danej powierzchni gładkiej nie spotyka przeszkody; w kierunku zaś normalnej do tej powierzchni ruch nie może się odbyć. Jeżeli zaś powierzchnia jest chropowata, a punkt porusza się po niej (t. j. ślizga się), to oprócz siły normalnej występuje jeszcze siła styczna, zwana wogóle oporem, w szczególności — *siłą tarcia*. Jeżeli pewien punkt, należący do bryły, nie może się ślizgać, to może powstać toczenie się danej bryły po danej powierzchni. Jeżeli więc zachodzi toczenie się jednej bryły po drugiej, to należy przyjąć, że w punkcie zetknięcia się tych brył występuje pewna siła, którą wyobrazimy sobie rozłożoną na dwie siły: siłę styczną, która powstrzymuje poślizg i którą nazwano siłą przyczepności danej powierzchni, oraz na siłę normalną do tej powierzchni. Należy przytem przyjąć, że siły te są przyłożone do punktu zetknięcia się *toczącej* bryły, a nie bryły, po której bryła ruchoma się toczy. Siły przyczepności należy tak traktować, jak siły odporowe — jak siły połączeń.

Właściwości te możemy sformułować w ten sposób: *siły połączeń, lub inaczej siły odporowe występują w tym kierunku, w jakim poruszający się punkt nie może wykonać ruchu*; a więc, jeżeli punkt ruchomy ślizga się bez tarcia po pewnej powierzchni, to kierunek siły odporowej musi być prostopadły do tej powierzchni.

Wartości sił połączeń zależą od ruchu, jaki one wywołują, t. j. od ruchu, jaki dany punkt wykonuje.

Stosujemy jeszcze w rozpatrywaniach mechaniki pojęcie *sił wewnętrznych*. Siłami wewnętrznemi nazwiemy siły połączeń, które występują *pomiędzy częściami* jednego i tego samego układu. Jeżeli mamy układ złożony np. z dwóch punktów, których połączeniem jest pręt, to przyjąć musimy na zasadzie prawa wzajemnego działania, że w pręcie tym występują dwie siły wzajemnie równe ze strzałkami przeciwnemi. Siły wewnętrzne mogą stać się siłami zewnętrznemi, gdy np. połączenie pomiędzy temi punktami usuniemy i zastąpimy je siłami; w tym przypadku otrzymamy dwa punkty swobodne. Siły wewnętrzne, występujące w punkcie zetknięcia się dwóch brył materjalnych, mają na podstawie prawa — Newton'a — wzajemnego działania, wspólną prostą działania, wartości jednakowe i strzałki wzajemnie przeciwne.

10. Wirtualna praca wogóle.

Mówimy wogóle o pracy pewnej siły, gdy punkt jej przyłożenia przesuwa się; gdy zaś punkt ten nie przesuwa się, wtedy możemy powiedzieć, że siła dana nie wykonuje pracy, lub inaczej, że praca tej siły *w danym razie* równa się zeru. *Pracą wirtualną* nazwiemy pracę danej siły, której punkt przyłożenia doznał przesunięcia nieskończenie małego i dowolnego, które nazwaliśmy wirtualnem. Przesunięcia te, w myśl określenia (§ 4), uważamy za niezależne od działania sił, przyłożonych do danego punktu; przyjmujemy bowiem, że przesunięcia te zostały wykonane przez czynniki, których nie bierzemy pod uwagę.

Do obliczenia pracy wirtualnej stosować należy określenia i twierdzenia podane w podręcznikach np. w Mech. Teor. H. Czopowskiego T. I-szym*).

Pracę wirtualną siły, przyłożonej do danego punktu, wyrazimy na podstawie tego określenia wzorem:

$$\delta L = P \cdot \delta s \cdot \cos(P, \delta s), \tag{13}$$

lub inaczej:

$$\delta L = P \cdot \delta p, \tag{14}$$

gdzie δp jest rzutem przesunięcia wirtualnego na kierunek siły, a δL wyraża wartość pracy podczas tego przesunięcia.

Jeżeli oznaczymy składowe danej siły w kierunkach osi x, y, z, wzajemnie prostopadłych, literami P_x, P_y, P_z, to można napisać wzór pracy wirtualnej również w następującej postaci (Mech. Teor. H. Czopowskiego T. I. str. 149):

$$\delta L = P_x \cdot \delta x + P_y \cdot \delta y + P_z \cdot \delta z, \tag{15}$$

gdzie δx, δy, δz oznaczają rzuty dowolnego przesunięcia punktu przyłożenia danej siły na osi x, y, z; lub, co na jedno wychodzi, są przyrostami spółrzędnych x, y, z.

Jeżeli na punkt swobodny działa pewna liczba sił, to podczas przesunięcia dowolnego δs tego punktu, wszystkie siły, na niego działające, wykonują pracę, którą wyrazimy wzorem:

$$\delta L = \Sigma P_k \cdot \delta p_k .$$

---

*) W szczególności § 89, 90, 91, 116 i nast.;—w podręczniku tym stosowałem nazwę „praca wyobrażalna"; uważam jednakże, że będzie właściwiej zastosować nazwę, przyjętą we wszystkich językach, „pracy wirtualnej".

Należy jeszcze zwrócić uwagę przy stosowaniu metody pracy wirtualnej, że nie jest konieczne przyjmować, iż przesunięcia wirtualne powstają pod działaniem sił, dla których szukamy warunków równowagi; przeciwnie należy dla ogólności wyników przyjąć, że przesunięcia wirtualne są niezależne od działania tych sił.

11. Wirtualna praca sił połączeń.

Jeżeli punkt dany, lub układ punktów jest nieswobodny, t. j. jeżeli pewne punkty tego układu zmuszone są poruszać się po danych linjach, lub danych powierzchniach, to, oprócz sił zewnętrznych, działają na niego jeszcze siły połączeń (siły odporowe, — reakcje), jakeśmy to wyżej opisali; w tym razie mówić będziemy o pracy łącznej sił zewnętrznych i sił połączeń podczas danego przesunięcia wirtualnego. Jeżeli literą N_i oznaczymy siłę połączeń, przyłożoną do i — tego punktu pewnego układu, to pracę sił zewnętrznych, działających na dany układ—podczas wirtualnego przesunięcia—wraz z siłami połączeń, wyrazimy wzorem:

$$\delta L = \Sigma P_k \cdot \delta p_k + \Sigma N_i \cdot \delta n_i, \tag{16}$$

gdzie symbol δn_i oznacza rzut tego przesunięcia na kierunek sił N_i.

Dla uniknięcia pewnej niejasności, jaka może się nasunąć przy obliczaniu pracy wirtualnej sił połączeń, należy mieć na uwadze następujące wyjaśnienie: jeżeli do danego punktu nieswobodnego przyłożymy siły połączeń, jakie występują np. w torze, po którym dany punkt się porusza, i następnie, gdy punkt ten, w celu przesunięcia wirtualnego, przesuniemy w ten sposób, że oddzielimy go od tego toru, to ze stanowiska fizycznego możnaby powiedzieć, że siły odporowe przestają wtedy działać, punkt bowiem rozpatrywany został odłączony od toru; o ich więc pracy podczas takiego przesunięcia nie może być mowy; lecz dla obliczania pracy wirtualnej powinniśmy przedstawić sobie to postępowanie w inny sposób; należy wyobrazić sobie, że dany punkt przesuwamy *razem ze wszystkiemi siłami*, na niego działającemi, a więc i z siłami połączeń; nie idzie nam bowiem w danym razie o zjawisko fizyczne przesunięcia, lecz o pracę, wykonaną przez wszystkie siły, działające na ten punkt, tak przez siły zewnętrzne, jak i odporowe podczas tego przesunięcia; praca przeto wirtualna wyrazi się w tym razie wzorem 16-tym.

12. Wirtualna praca możliwa.

Dla szczególnych przesunięć wartość pracy wirtualnej sił połączeń może stać się równą zeru; a to nastąpi, gdy nadamy danemu punktowi takie przesunięcie, które będzie zgodne z ograniczeniami—inaczej—będzie zgodne z fizycznemi warunkami danego zadania; wtedy bowiem będzie ono prostopadłe do sił połączeń (o ile niema sił stycznych); a więc każdy iloczyn

$$N_i \cdot \delta n_i = 0, \tag{17}$$

w którym N_i oznacza siłę połączeń — siłę odporową; — t. j. wtedy praca sił połączeń podczas takiego szczególnego przesunięcia nie wejdzie do wyrazu pracy wirtualnej sił, działających na dany punkt.

Przesunięcia takie, na które pozwalają ograniczenia ruchu, nazywają *przesunięciami wirtualnemi możliwemi*, lub krótko—*przesunięciami możliwemi* *). W przypadku przeto, gdy pomiędzy punktem przesuwanym a torem, po którym on się posuwa, niema wogóle sił stycznych (np. niema sił tarcia), wtedy *praca sił połączeń* (inaczej reakcji, sił odporowych) *podczas przesunięcia wirtualnego możliwego, t. j. zgodnego z warunkami fizycznemi danego zadania, równa się zeru.*

Właściwość tę wyrazimy równaniem 17-tem, które jest w mocy dla przypadków, w których jako ograniczenia ruchu są: umocowania pewnych punktów układu,—ślizganie się,—toczenie się jednej bryły po drugiej,—lub obrót około normalnej, wyprowadzonej w punkcie zetknięcia się jednej bryły z drugą (pivotement).

13. Wirtualna praca sił wewnętrznych.

Siłami wewnętrznemi nazwaliśmy (§ 9-ty) siły, zastępujące działanie połączeń pomiędzy *częściami* rozpatrywanego układu. Jeżeli te połączenia są tego rodzaju, że nie pozwalają na oddalenie się, lub zbliżenie punktów, które one łączą, to połączenia takie wyobrazić sobie możemy w postaci *prętów sztywnych*. Siły, występujące w takich połączeniach, na podstawie prawa wzajem-

*) W literaturze naukowej spotykamy się z dwojakiego rodzaju znaczeniami nazwy przesunięcia wirtualnego, lub pracy wirtualnej. Jedni nazywają tem słowem przesunięcie dowolne (wyobrażalne) (Bernoulli, Lagrange), którego określenie daliśmy tutaj; inni autorzy przez przesunięcie wirtualne rozumieją przesunięcie, któreśmy nazwali *możliwem* t. j. przesunięcie — zgodne z warunkami fizycznemi danego zadania. Pojęcie *wirtualne* w tem znaczeniu, w jakiem je używał Bernoulli i Lagrange, jest przeto ogólniejsze, niż pojęcie *możliwe*; w tem też znaczeniu stosujemy te nazwy w naszych rozpatrywaniach.

nego działania, działają wzdłuż prostych, łączących dwa dowolne punkty danego układu, są przytem wzajemnie równe i posiadają strzałki przeciwne; przeto dowieść można, że podczas przesunięcia dowolnego takich dwóch punktów, t. j. takiego pręta, *suma prac* tych sił równa się *zeru*. (Mech. Teor. H. Czopowskiego T. I § 118-sty). Lecz jeżeli takie połączenie jest *odkształcalne*, t. j. jeżeli ten pręt daje się np. wydłużyć, skrócić, zgiąć lub skręcić, to praca sił wewnętrznych posiada wtedy pewną określoną *wartość*.

Jeżeli np. połączenie takie jest sprężyste w kierunku linji łączącej, t. j. jeżeli odkształcenie jego zależy od siły na niego działającej, to suma prac obydwóch sił w nim występujących podczas wirtualnego przesunięcia takich punktów jest zawsze ujemna. Siła bowiem $W_{i,k}$, występująca w takiem połączeniu pomiędzy punktami np. i — tym i k — tym, posiada strzałkę, zwróconą w stronę przeciwną, niż strzałka przesunięcia. Jeżeli np. siła zewnętrzna rozciąga dane połączenie, t. j. — taki pręt, to siła wewnętrzna posiada strzałkę przeciwną strzałce przesunięcia; praca więc siły wewnętrznej jest ujemna i odwrotnie; — jeżeli siły zewnętrzne ściskają dany pręt, to pręt się skraca, a siła wewnętrzna posiada strzałkę przeciwną strzałce przesunięcia; praca przeto będzie również w tym razie ujemną.*)

Przy pewnych jednakże warunkach fizycznych praca sił wewnętrznych może być dodatnia; to następuje, gdy np. pręt posiada

*) Pojęcie pracy sił wewnętrznych oparliśmy tutaj na przyjętym dowolnie modelu w postaci zbioru punktów, pomiędzy któremi występują siły, któreśmy nazwali wewnętrznemi; a pracę, wykonaną przez te siły podczas przesunięć tych punktów, nazwaliśmy pracą sił wewnętrznych. Lecz model taki nie jest koniecznym do obliczenia pracy sił wewnętrznych; można za model do obliczenia pracy sił wewnętrznych przyjąć również inne, dowolnie zbudowane modele; byle tylko siły w nich występujące, były wogóle zachowawcze, t. j. byle te siły posiadały funkcję; Poincaré bowiem dowiódł (H. Poincaré „Nauka i Hypoteza" dział optyki oraz we wstępie do dzieła „Elektryczność i optyka"), że dla każdego zjawiska fizycznego, w którem występują siły zachowawcze i które daje się odtworzyć zapomocą choć jednego modelu mechanicznego, możemy znaleźć nieskończenie wielką liczbę innych modeli, które również odtworzą dane zjawisko. Twierdzenie to chcę zastosować w szczególności do hypotez Navier'a i Cochy'ego, mających na celu obliczenie pracy sił sprężystych. Na podstawie powyższego twierdzenia powiedzieć możemy, że żaden z tych modeli nie jest „bliższy prawdy", lub też dokładniejszy: takich bowiem modeli możemy wymyśleć nieskończenie wielką liczbę i wszystkie te modele powinny dać te same stosunki *energietyczne*, występujące w danym układzie; przedstawią nam je tylko w różnem oświetleniu, które może być mniej lub więcej pożyteczne, lub dogodne dla naszych rozpatrywań: nie doprowadzą one jednakże do błędnych wniosków: nie mówią one o „rzeczywistym" stanie rzeczy, bo o tem ze stanowiska naukowego mowy być nie może: myśl ta jednakże podlega dyskusji!

przed przesunięciem wirtualnem pewne naprężenie; gdy jest on np. ściśnięty, wtedy podczas odprężania się jego siły wewnętrzne wykonują pracę dodatnią. Obydwa te przypadki wypowiemy w następujący sposób: *jeżeli układ sprężysty sprężamy, to praca sił wewnętrznych jest ujemna; jeżeli zaś—odprężamy, to praca sił wewnętrznych jest dodatnia.*

14. Wirtualna praca możliwa sił odporowych, gdy połączenia są jednostronne.

W rozpatrywaniach powyższych przyjęliśmy, że połączenia punktu ruchomego były dwustronne, t. j., że punkt ruchomy nie mógł się odłączyć od danego toru, lub od danych linij; w tych warunkach przesunięcia możliwe mogą być tylko styczne do toru, czy też do powierzchni, po których dany punkt może się poruszać, wskutek czego praca możliwa siły odporowej podczas przesunięcia możliwego była równa zeru. Inny jednakże będzie wyraz pracy możliwej, gdy ograniczenie jest jednostronne (§ 7-my); wtedy bowiem przesunięcie możliwe będzie nietylko styczne do ograniczających powierzchni, czy też linji, lecz również może być wykonane na zewnątrz takich powierzchni—czy też linji, zależnie od fizycznych warunków ograniczeń; praca więc możliwa będzie w tym razie albo równa zeru, gdy punkt dany przesuwa się stycznie do tych ograniczeń, lub będzie dodatnia, gdy przesuniemy dany punkt wraz z siłą połączenia nazewnątrz tych ograniczeń; a dodatnią będzie dlatego, że siła odporowa zwrócona jest w tym razie w stronę przesunięcia możliwego.

Wniosek ten wypowiemy w następujący sposób: *jeżeli ograniczenia ruchu są jednostronne, to praca możliwa siły odporowej podczas przesunięcia wirtualnego możliwego może być dodatnią, lub równą zeru, lecz nie może być ujemną;* twierdzenie to wyrazimy wzorem, że dla ograniczeń jednostronnych:

$$N_i \cdot \delta n_i \geq 0, \tag{18}$$

gdzie N_i oznacza siłę połączeń (odporową) i- tego punktu; δn_i zaś rzut przesunięcia możliwego na kierunek siły N_i.

15. Funkcja sił.

Jeżeli spółrzędne punktów przyłożenia pewnej siły oznaczymy literami x, y, z, oraz składowe jej w kierunku tych osi—literami P_x, P_y, P_z, to pracę tej siły podczas przesunięcia wirtualnego wyrazimy znanym wzorem:

$$\delta L = P_x \cdot \delta x + P_y \cdot \delta y + P_z \cdot \delta z\,, \tag{19}$$

w którym zakładamy, że P_x, P_y, P_z są wogóle funkcjami spółrzędnych x, y, z punktu przyłożenia tej siły oraz pewnego parametru λ, niezależnego od tych spółrzędnych*); t. j. przyjmujemy, że

$$P_x = f_1(x, y, z; \lambda)\,; \; P_y = f_2(x, y, z; \lambda)\,; \; P_z = f_3(x, y, z; \lambda). \tag{20}$$

W wielu zjawiskach fizycznych zachodzi ta okoliczność, że składowe P_x, P_y i P_z są pochodnemi cząstkowemi pewnej funkcji, wziętemi względem spółrzędnych x, y, z punktu przyłożenia tej siły; funkcję taką nazwano *funkcją* danych *sił*, a wartość jej ze znakiem ujemnym nazwano ich *potencjałem* **).

Na zasadzie tego określenia funkcja sił jest pojęciem ogólniejszem, niż całka pracy cząstkowej danych sił; funkcja bowiem sił nie zawsze wyraża pracę, jaką dane siły wykonały, a wyraża tylko, że jej pochodne cząstkowe są siłami (porów. § 17-ty).

Jeżeli więc funkcję sił wyrazimy wzorem:

$$U = \Phi(x, y, z; \lambda)\,, \tag{21}$$

to składowe danych sił, występujących w punkcie (x, y, z), wyrazimy wzorami:

$$P_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,; \; P_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,; \; P_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,. \tag{22}$$

O siłach takich mówi się, że są one pochodnemi cząstkowemi funkcji sił, lub też, że są pochodnemi ich potencjału ze znakiem odwrotnym.

Przyrost wartości δU, rów. 21-go, gdy spółrzędnym x, y, z

*) Symbol λ nie ma nic wspólnego ze spółczynnikiem Lagrange'a, który stosować będziemy w § 20-tym. W szczególnym przypadku symbol λ, tutaj stosowany, może oznaczać bezpośrednio siłę, gdy wartość tej siły nie zależy od spółrzędnych; t. j. symbol λ będzie miał w tym razie to samo znaczenie, jakie miał poprzednio symbol P. Jeżeli zaś mamy do czynienia np. z obciążeniem stałem na jednostkę długości, lub na jednostkę pola, to $\lambda\, dx$, ewentualnie $\lambda\, dx\, dy$ wyraża ciężar cząstki długości, lub ciężar cząstki pola i t. p. Wartość siły np. odśrodkowej, wywołanej obrotem około osi z prędkością kątową φ pewnego punktu o masie m równa się $m x \varphi^2$, gdzie x oznacza odległość tego punktu od osi obrotu; parametr λ tej siły w tym razie $= m\varphi^2$; a więc siła odśrodkowa $= \lambda x$ i t. p.

**) Wielu autorów nazywa funkcję sił potencjałem; lecz to nie jest słuszne, gdyż znaczenie fizyczne funkcji sił nie odpowiada treści pojęcia „potentia"; z tego też tytułu wynikają nieraz pewne trudności w zrozumieniu tego, o czem dany autor chce mówić.

nadamy wartości $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, wyrazimy wobec tego wzorem:

$$\delta L=\delta U=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\cdot\delta z, \tag{23}$$

który uważać możemy za wyraz wielkości pierwszego rzędu szeregu Taylor'a, na jaki rozwiniemy funkcję $\Phi(x, y, z)$, gdy spółrzędnym x, y, z, nadamy wartości $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ (parametr λ przyjmujemy w tym razie za stały).

W szczególnym przypadku, gdy przyrostom δx, δy, δz nadamy wartości dx, dy, dz, t. j. gdy wielkościom δx, δy, δz nadamy znaczenie przyrostów dx, dy, dz zmiennych x, y, z, wtedy wypowiemy równanie 23-cie w następujący sposób: różniczka zupełna funkcji sił jest wyrazem pracy cząstkowej tych sił i odwrotnie; co napiszemy w postaci następującej:

$$dL=dU=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\cdot dz\,.$$

Właściwość ta pozwala obliczyć funkcję sił, jako całkę pracy cząstkowej danych sił, gdy ten wyraz jest różniczką zupełną.

Nie wszystkie jednakże siły posiadają funkcję sił; składowe bowiem P_x, P_y, P_z mogą być takiemi funkcjami spółrzędnych x, y, z, które nie dadzą się wyrazić pochodnemi cząstkowemi jakiejś funkcji. O takich siłach powiemy, że nie posiadają one funkcji sił. Gdy pewien układ sił określony jest np. równaniami:

$$P_x=y^2;\; P_y=x^2;\; P_z=z^2, \tag{24}$$

wtedy nie znajdziemy takiej funkcji $F(x, y, z)$, którejby pochodne cząstkowe były równe danym funkcjom; inaczej powiemy: nie znajdziemy takiej funkcji, której różniczka zupełna byłaby identyczna z odpowiednim wyrazem pracy wirtualnej; a jak w danym razie, którаby była identyczna z wyrazem:

$$\delta L=y^2\cdot\delta x+x^2\cdot\delta y+z^2\cdot\delta z\,. \tag{25}$$

Tym dwóm wybitnie różnym właściwościom analitycznym wyrazu pracy wirtualnej, t. j. tym przypadkom, w których wyraz pracy wirtualnej posiada funkcję sił, lub jej nie posiada, odpowiadają różne właściwości fizyczne danych sił: a mianowicie: jeżeli siły dane posiadają funkcję sił, to różnica wartości tych funkcyj w dwóch miejscach punktu ruchomego wyraża pracę, jaką siły wykonają, gdy dany punkt materjalny przesuniemy z jednego miejsca do drugiego, i jest *niezależną od postaci toru*, po jakim przesunęliśmy ten punkt z jednego miejsca do drugiego. Z określenia bowiem funkcji sił wynika, że funkcja ta jest funkcją spółrzędnych położeń krańcowych i przytem, jak w danym razie, jest wielkością, wyrażającą pracę, jaką wykonują siły podczas przesunięcia punktu z jednego miejsca do drugiego, — niezależnie od postaci toru.

Sposób rozpoznania, czy dany wyraz pracy wirtualnej (rów. 19-te) posiada funkcję sił, czy jej nie posiada, daje nam matematyka; a mianowicie: dany wyraz pracy wirtualnej (rów. 19-te) posiada funkcję sił, t. j. przedstawia różniczkę zupełną pewnej funkcji, gdy są spełnione trzy następujące warunki:

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} = \frac{\partial P_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial P_x}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial P_y}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial y}. \tag{26}$$

Jeżeli przeto warunki te dla danych sił są spełnione, to powiadamy, że dane siły posiadają funkcję sił; w przeciwnym zaś razie mówimy, że nie posiadają one funkcji sił.

Z tych rozpatrywań widzimy, że funkcję sił możemy wogóle otrzymać drogą całkowania wyrazu pracy wirtualnej i — oczywiście — tylko wtedy, gdy siły P_x, P_y, P_z czynią zadość równaniom 26-tym i gdy są jednowartościowemi funkcjami spółrzędnych punktów ich przyłożenia; gdyby bowiem w punktach danego pola występowała więcej niż jedna siła, wtedy bez wskazówki, które z tych sił mamy wziąć pod uwagę przy obliczaniu pracy wirtualnej, nie moglibyśmy obliczyć ich pracy.

Funkcja sił znajduje duże zastosowanie w obliczeniach statycznych i dynamicznych; dogodniej jest bowiem pod względem techniki rachunkowej stosować do obliczeń jeden tylko wyraz funkcji sił, niż trzy równania 20-te, określające siły w przestrzeni (trójwymiarowej), i trzy warunki 26-te, wyrażające całkowalność pracy wirtualnej tych sił.

Ważnem w powyższem określeniu wyrazu pracy (rów. 13-te) jest to, że określenie to daje wielkość, która jest równoważną z wielkościami różnych energij fizycznych, i że w ten sposób otrzymujemy znaczenie fizyczne funkcji sił i łączność tej wielkości z wielkościami wszystkich zjawisk energietycznych; określenie to jest zasługą Lagrange'a, który je sformułował, mając na uwadze odpowiednie badania swych poprzedników.

Zaznaczyć należy, że pojęcie funkcji sił, wogóle funkcji wektorów stosuje się również i do innych zjawisk fizycznych, mianowicie: jeżeli np. wektorowi, który w tych rozpatrywaniach przyjmowaliśmy jako wyraz siły, nadamy obecnie znaczenie prędkości punktu, do którego jest przyłożony, to możemy mówić o funkcji prędkości (inaczej o potencjale prędkości), jakeśmy mówili o funkcji sił. Znaczenie fizyczne funkcji, czy też potencjału prędkości jest, oczywiście, inne, niż znaczenie funkcji, czy też potencjału sił; matematyczne zaś właściwości tych wielkości są te same; dlatego też pojęcie funkcji sił zostało uogólnione i zastosowane do innych zjawisk o charakterze wektorowym.

Zwrócić należy uwagę, że siły, przyłożone do układu materjalnego o jednym stopniu swobody, zawsze posiadają funkcję sił; praca bowiem wirtualna jest w danym razie różniczką jednej zmiennej niezależnej, a więc jest całkowalna.

16. Istnienie funkcji sił nie zależy od rodzaju układu spółrzędnych.

Przy obliczeniu funkcji sił nasuwa się pytanie, czy wyraz pracy cząstkowej, wyrażony np. spółrzędnemi prostokątnemi (rów. 19-te) i który jest różniczką zupełną pewnej funkcji, będzie również różniczką zupełną, gdy tę pracę wyrazimy innemi spółrzędnemi; t. j. nasuwa się pytanie, czy istnienie funkcji sił danego układu jest zależne, czy niezależne od rodzajów tych spółrzędnych, jakie stosujemy do obliczenia pracy.

Odpowiedź na to pytanie sprowadza się do następującego zagadnienia matematycznego.

Jeżeli wyrażenie

$$f_1(x, y, z) \cdot dx + f_2(x, y, z) \cdot dy + f_3(x, y, z) \cdot dz \tag{27}$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji

$$\Phi(x, y, z), \tag{28}$$

t. j. jeżeli zachodzą następujące równości:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f_1(x, y, z); \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = f_2(x, y, z) \text{ oraz}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = f_3(x, y, z), \tag{29}$$

to zachodzi pytanie, czy nowe wyrażenie, jakie otrzymamy po podstawieniu do wyrazu 27-go spółrzędnych α, β, γ, związanych ze spółrzędnemi x, y, z równaniami niezależnemi:

$$x = \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma); \quad y = \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma); \quad z = \varphi_3(\alpha, \beta, \gamma); \tag{30}$$

t. j. czy wyrażenie, jakie otrzymamy po tem podstawieniu:

$$\psi_1(\alpha, \beta, \gamma) \cdot d\alpha + \psi_2(\alpha, \beta, \gamma) \cdot d\beta + \psi_3(\alpha, \beta, \gamma) \cdot d\gamma, \tag{31}$$

będzie również różniczką zupełną pewnej funkcji zmiennych α, β, γ.

Ażeby na to pytanie odpowiedzieć, podstawimy do wyrazu 27-mego wartości x, y, z z równań 30-tych, oraz zamiast dx, dy, dz podstawimy różniczki tych zmiennych, t. j. podstawimy:

$$dx = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} \cdot d\beta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} \cdot d\gamma;$$

$$dy = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} \cdot d\beta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma} \cdot d\gamma;$$

$$dz = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta} \cdot d\beta + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \gamma} \cdot d\gamma; \tag{32}$$

a po wzięciu pod uwagę równości 29-tych, otrzymamy zamiast wyrażenia 27-go następujące:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} \cdot d\beta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} \cdot d\gamma \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} \cdot d\beta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma} \cdot d\gamma \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta} \cdot d\beta + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \gamma} \cdot d\gamma \right);$$

po uporządkowaniu następnie tych wyrazów względem $d\alpha, d\beta, d\gamma$, otrzymamy wyrażenie:

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} \right\} \cdot d\alpha +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta} \right\} \cdot d\beta +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial \gamma} \right\} \cdot d\gamma, \tag{33}$$

w którem $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}$ zastąpić można z równ. 30-tych wyrazem $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ i t. d.

Należy teraz zbadać, czy to nowe wyrażenie, t. j. wyrażenie 33-cie jest różniczką zupełną pewnej funkcji zmiennych α, β, γ. Z wyrażenia tego widzimy, że wyrazy w nawiasach są to różniczki zupełne funkcji Φ względem α, β i γ.

Wyrażenie przeto 33-cie napisać możemy w postaci:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \cdot d\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \cdot d\gamma,$$

które jest różniczką zupełną $\Phi(x, y, z)$, gdy weźmiemy pod uwagę, że zmienne x, y, z są funkcjami zmiennych α, β, γ.

Istnienie przeto funkcji sił nie zależy od rodzaju układu spółrzędnych; — jest ono właściwością danych sił — jest ich *niezmiennikiem*.

17. Wirtualna i rzeczywista wartość funkcji sił.

Pojęcie funkcji sił rozszerzono w ten sposób, że przyjęto nazywać funkcją sił *każdą* funkcję spółrzędnych, której różniczka zupełna względem tych spółrzędnych, przedstawia pracę wirtualną. Jeżeli mamy np. wyraz pracy wirtualnej w postaci:

$$\delta U = P_x \cdot \delta x + P_y \cdot \delta y + P_z \cdot \delta z,$$

to odpowiednią funkcję sił przyjęto pisać również w postaci:

$$U = P_x \cdot x + P_y \cdot y + P_z \cdot z,$$

nie biorąc pod uwagę, że siły P_x, P_y i t. d. mogą być zmienne, t. j. że mogą być funkcjami spółrzędnych x, y, z; a więc w takim razie całka U nie będzie miała tej formy.

Postępowanie takie zasadniczo jest niesłuszne, nie doprowadzi ono jednakże do błędu, gdy nam idzie nie o całkę U, lecz tylko o jej różniczkę; jeżeli bowiem zróżniczkujemy taką funkcję sił, przyjąwszy siłę P za stałą, t. j. niezależną od x, y, z, to otrzymamy różniczkę, która będzie wyrazem pracy wirtualnej.

Interpretację fizyczną takiego postępowania podaje Lagrange w następujący sposób: dla obliczenia *równowagi* (które podajemy w następnych paragrafach), jest rzeczą obojętną, jak się siły zmieniały, gdy układ materjalny był w ruchu; ważną jest zaś tylko ta wartość siły, która występuje podczas równowagi; przeto przy całkowaniu wyrazu pracy wirtualnej przyjąć można te siły za stałe.

Funkcja sił obliczona w ten sposób (przy stałej sile P) nie może, oczywiście, służyć np. do obliczenia ruchu punktu, czy też układu materjalnego; nie wyraża ona bowiem pracy rzeczywistej; tylko bowiem praca *rzeczywista* równa się przyrostowi energji kinetycznej; może jednakże funkcja ta służyć do obliczenia warunków równowagi, jak to dalej stosować będziemy.

Funkcja sił, obliczona przy założeniu, że siła jest stałą, jest przeto tylko *funkcją pomocniczą* dla obliczenia równowagi, lecz nie może służyć do obliczenia np. ruchu danego układu materjalnego.

W wydaniu czwartem t. I na str. 75-ej dzieła Lagrange'a: „Mécanique analytique“ J. Bertrand zrobił przy tem wyjaśnieniu uwagę następującą: „takie zastąpienie sił zmiennych siłami stałemi zmienia zupełnie postać funkcji sił. Weźmy np. siłę przyciągającą odwrotnie proporcjonalnie do odległości p od pewnego środka, t. j. siłę równą:

$$P = \frac{\mu}{p}; \tag{34}$$

wtedy napiszemy wyraz funkcji sił:

$$U = \int P\,dp = \mu \lg p + C; \tag{35}$$

gdy tymczasem, zastąpiwszy tę siłę siłą stałą, otrzymamy funkcję tej siły: $U = P \cdot p + C$, której wyraz jest różny od poprzedniego. W tym razie można tylko to powiedzieć, że dla wartości spółrzędnych, odpowiadających równowadze, obydwie funkcje, chociaż są różne, posiadają jednakże taką samą różniczkę“, — mogą więc być obydwie zastosowane do obliczenia równowagi, — lecz tylko do równowagi. W ten sposób obliczoną funkcję sił (przy stałej sile) nazwano *wirtualną funkcją sił;* (ewent. wirtualnym potencjałem, virtuelle Verschiebungsarbeit *).

W celu rozróżnienia tych pojęć, — gdy będzie tego potrzeba, oznaczać będziemy wirtualną funkcję sił symbolem U_{wir}; funkcję zaś, obliczoną jako całkę z uwzględnieniem zmienności sił nazywać będziemy rzeczywistą funkcją sił (ewent. potencjałem rzeczywistym) i oznaczać będziemy literą U_{rz} (virtuelle Arbeit).

Jeżeli siły, które wykonują pracę, są w rzeczywistości stałe, wtedy rzeczywista funkcja sił jest jednakowa z wirtualną funkcją sił, t. j. w tym razie

$$U_{wir.} = U_{rz}.$$

*) Weyrauch, „Teorie der elastischen Koerper", str. 108.

Gdy przeto siły są funkcjami spółrzędnych, wyraz wirtualnej funkcji sił (t. j. obliczony przy stałej sile) nie ma odpowiednika fizycznego w rzeczywistym przebiegu zjawiska, a jedynie jest *umówioną formą matematyczną;* dopiero po zróżniczkowaniu tej funkcji sił (oczywiście przy stałej P) otrzymamy odpowiednik fizyczny tej różniczki w postaci pracy cząstkowej. Przeto napisać możemy:

$$U_{rz} = \int^{\cdots} [P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz]; \tag{36}$$

zaś

$$U_{wir.} = P_x \cdot x + P_y \cdot y + P_z \cdot z. \tag{37}$$

W szczególnym przypadku, gdy U_{rz} jest np. *funkcją jednorodną* spółrzędnych punktów danego układu, to, na zasadzie twierdzenia Euler'a o funkcjach jednorodnych, napiszemy

$$\frac{\partial U_{rz}}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial U_{rz}}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} \cdot z = s \cdot U_{rz};$$

czyli inaczej

$$P_x \cdot x + P_y \cdot y + P_z \cdot z = s \cdot U_{rz}, \tag{38}$$

gdzie s jest spółczynnikiem jednorodności.

Podług powyższego określenia lewa strona tego równania wyraża wirtualną funkcję sił; napiszemy przeto równanie 38-me w postaci

$$U_{wir.} = s \cdot U_{rz},$$

skąd

$$U_{rz} = \frac{1}{s} \cdot U_{wir.}. \tag{39}$$

Dla układów sprężystych funkcja sił jest funkcją jednorodną 2-go stopnia, przeto

$$U_{rz} = \frac{1}{2} U_{wir.}. \tag{40}$$

Jest to tak zwane twierdzenie Clapeyron'a, — które daje możność obliczenia pracy rzeczywistej z wyrazu pracy wirtualnej.

18. Potencjał sił.

W wielu pracach naukowych stosowane bywa, zamiast pojęcia funkcji sił, pojęcie potencjału, inaczej zwane — pojęcie energji potencjalnej. Wartości bezwzględne funkcji sił i potencjału w pewnem miejscu pola sił są przeto te same, posiadają tylko znaki odwrotne. Interpretacja fizyczna tych wielkości może być taka: wartość funkcji sił w punkcie np. B wyraża wartość pracy, jaką siły wykonały, gdy punkt ruchomy przesunięto z miejsca np. A do B; wartość więc funkcji sił wyraża pracę *wykonaną*; wartość zaś potencjału, lub, inaczej mówiąc, potencjał, ewent. energja potencjalna w pewnem miejscu wyraża pewien zasób pracy, jaką siły wykonać mogą, gdy punkt dany przesuniemy z miejsca B do miejsca A; czyli wartość ta wyraża, że siły, działające na punkt ruchomy, znajdujący się w miejscu B, są *w stanie* (in potentia) wykonać pracę równą wartości potencjału, obliczonego w danem miejscu, gdy punkt ten przejdzie z miejsca B do A.

Jeżeli przeto wyrazimy wartość funkcji sił w punkcie B literą U, to wartość potencjału w tymże punkcie, który oznaczymy literą V, wyrazimy równaniem:

$$V = -U;$$

z tego określenia wynika przeto:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -P_x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -P_y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -P_z. \qquad (41)$$

W wyrazie funkcji sił, jak również w wyrazie potencjału, opuściliśmy stałą całkowania; lecz to nie wpływa na wyniki obliczeń, gdyż zawsze możemy obrać tak spółrzędne, że wartości tych stałych będą równe zeru; jeżeli zaś nie są one równe zeru, to opuszczenie tych stałych w rachunku również nie wpłynie na wartość różnicy, lub na wartość różniczki tych funkcyj, któremi będziemy operować; — z tego więc powodu błąd nie wyniknie; stałą więc całkowania zwykle się w tych razach opuszcza; a wyraz funkcji sił, lub potencjału przedstawia się jako całkę nieokreśloną.

ROZDZIAŁ III.

RÓWNOWAGA SIŁ.

19. Określenie równowagi sił.

Jeżeli siły, działające na pewien układ materjalny swobodny, będący w spoczynku, nie wywołują jego ruchu, to mówimy, że siły te są w równowadze.*)

*) Określenie to wydawać się może zbyt ciasne; odnosi się ono bowiem do sił, działających na układ, będący w spoczynku;—lecz tak nie jest;—przyrosty