Właściwość ta wynika bezpośrednio z założenia, że dla każdej wartości q mamy jedną tylko wartość λ, co się geometrycznie wyrazi, że proste równoległe do osi λ przecinają daną krzywą równowagi tylko w jednym punkcie; a że w danym przypadku założyliśmy, że na krzywej równowagi jest punkt podwójny, t. j. że w tym punkcie przecinają się dwie gałęzie tej krzywej, przeto jedna z tych gałęzi musi być prosta i równoległa do osi λ; druga zaś może być wogóle krzywą, którą proste równoległe do osi λ przecinają tylko w jednym punkcie, — lub też może być w szczególnym przypadku również prostą. Przypadek ten zachodzi w znacznej liczbie przykładów, w praktyce spotykanych.

ROZDZIAŁ V.

UKŁADY O WIELU STOPNIACH SWOBODY.

39. Równowaga i jej rodzaje.

Rozpatrzymy teraz układy o wielu stopniach swobody. Określenia równowagi i jej rodzajów pozostają w zasadzie te same, jakeśmy podali w poprzednich rozpatrywaniach (§ 26-ty); zmieni się jedynie forma matematyczna ich wyrażenia.

Jeżeli układ posiada n stopni swobody, to funkcja sił wyrazi się funkcją n spółrzędnych niezależnych:

$$q_1, q_2, \cdots q_n,$$

oraz pewnego parametru λ, który przyjęliśmy jako niezależny od tych spółrzędnych, a który jest wyrazem zmienności siły, lub sił, działających na dany układ w każdem jego położeniu.

Funkcja ta wogóle ma postać następującą:

$$U = F(q_1, q_2, \ldots q_n; \lambda). \tag{109}$$

Spółrzędne położenia równowagi danego układu, gdy dany jest parametr λ, obliczymy z równań 63-cich (str. 54-ta)

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0, \quad \cdots\cdot \quad \frac{\partial F}{\partial q_n} = 0, \tag{110}$$

jako funkcje

$$q_1 = \varphi_1(\lambda), \quad q_2 = \varphi_2(\lambda) \text{ i t. d.} \tag{110 a}$$

Rodzaj równowagi tych sił w tem położeniu rozpoznamy, oparłszy się na tej samej zasadzie, co i poprzednio (§ 26-ty), t. j. że rodzaj równowagi zależy od znaku całkowitej pracy wirtualnej ΔU sił, działających na ten układ, jaką one wykonają podczas wirtualnego odkształcenia*) danego układu.

W celu obliczenia tego znaku rozwiniemy równanie

$$U = F(q_1, q_2, \ldots q_n; \lambda)$$

(jak to uczyniliśmy w § 25-tym, równanie 65-te) w szereg Taylor'a i otrzymamy, *po uwzględnieniu równań równowagi*, t. j. równań 63-cich, wzór następujący:

$$\Delta U = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2}\cdot\delta q_1^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial q_1\,\partial q_2}\cdot\delta q_1\cdot\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial q_n^2}\cdot\delta q_n^2\right] + R_3, \quad (111)$$

gdzie R_3 oznacza wyrazy nieskończenie małe 3-go i wyższych rzędów. O znaku przeto wartości ΔU, gdy siły są w równowadze, rozstrzyga znak wartości wyrazu, zawartego w nawiasach, o ile nie jest on równy zeru; pozostałe bowiem wartości, objęte symbolem R_3, są nieskończenie małe wyższych rzędów, które wobec wartości 2-go rzędu można pominąć,

Ażeby przeto dana równowaga była np. stała dla wszelkich odchyleń (które się wyrażają spółrzędnemi δq_1, δq_2 i t. d.) od położenia równowagi, to wyraz 111-ty powinien być ujemny dla wszelkich wartości zmiennych δq_i (negative definit), co może nastąpić tylko wtedy, gdy wartości spółczynników przy tych zmiennych pozostają w pewnym matematycznym związku między sobą; wogóle bowiem wartość ΔU będzie zmieniać znak ze zmianą wartości i ze zmianą znaków przyrostów δq_i. Znalezienie tych związków jest obecnie naszem zadaniem.

Dla uproszczenia pisania pochodnych będziemy stosować następujące — przyjęte w tego rodzaju obliczeniach — oznaczenia:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} = a_{1.1}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q_1\,\partial q_2} = a_{1.2} \text{ i t. d.}; \quad (112)$$

*) Do układów o wielu stopniach swobody będziemy często stosowali wyrażenie odkształcenie wirtualne, lub wprost — odkształcenie danego układu, zamiast wyrażenia przesunięcie danego układu, jakeśmy już stosowali poprzednio; w układach bowiem o wielu stopniach swobody mamy właściwie całe zespoły przesunięć, które z tego tytułu nazywać będziemy odkształceniem danego układu.

badany przeto wyraz, zawarty w nawiasach równania 111-tego, wyrazi się, z pominięciem wielkości 3-go i wyższych rzędów, następującym wzorem:

$$\Delta U = \delta^2 U = a_{1,1} \cdot \delta q_1^2 + 2 a_{1,2} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_2 + \cdots + a_{n,n} \cdot \delta q_n^2, \quad (113)$$

w którym czynnniki $a_{i,k}$ uważać należy za znane; są to bowiem wartości drugich cząstkowych pochodnych funkcji sił, t. j. równania 109-tego, lub też pierwszych pochodnych cząstkowych równań 110-tych dla wartości q_i, obliczonych z równań równowagi, t. j. z równań 110-a; wobec tego *spółczynniki* $a_{i,k}$ *są funkcjami niezależnego parametru* λ; *przyrosty zaś* δq_i *są niezależnie zmienne.*

40. Obliczenie rodzajów równowagi.

Określenie metodyczne związków pomiędzy wartościami spółczynników $a_{i,k}$, przy których wyraz 113-ty będzie miał znak *albo dodatni, albo ujemny* przy *wszelkich dowolnych* wartościach δq_i, jest przedmiotem algebry wyższej; tam też kieruję czytelników, chcących zapoznać się z tą teorją*); tutaj zaś podam sposób poglądowy, — sposób, który, oczywiście, nie ma na celu zastąpienia ścisłej metody dowodzenia, lecz tylko ma na celu unaocznić wyniki tych dowodzeń oraz dać możność stosowania ich do obliczeń.

W tym celu weźmiemy pod uwagę najpierw układ o *dwóch* stopniach swobody; wtedy równanie 113-te przybierze postać następującą:

$$\delta^2 U = a_{1,1} \delta q_1^2 + 2 a_{1,2} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_2 + a_{2,2} \cdot \delta q_2^2. \quad (114)$$

Jeżeli następnie odniesiemy to równanie do trzech osi spółrzędnych prostokątnych: δq_1, δq_2 i $\delta^2 U$ (zamiast zwykle oznaczanych x, y, z), to równanie to przedstawi paraboloidę drugiego stopnia w przestrzeni trójwymiarowej, której osią jest oś $\delta^2 U$ (ewent. z).

Ażeby wartości $\delta^2 U$ posiadały przy *wszelkich* wartościach i znakach spółrzędnych δq_1 i δq_2 znaki albo wyłącznie dodatnie, albo wyłącznie ujemne, należy, ażeby ta paraboloida leżała *po jednej tylko stronie płaszczyzny*, wyznaczonej osiami δq_1 i δq_2, t. j. powinna być paraboloidą eliptyczną; jeżeli zaś będzie ona hy-

*) Początkowe wiadomości w polskim języku z teorji przekształceń wielomianów jednorodnych drugiego stopnia, z jakiemi będziemy mieli tutaj do czynienia, znajdzie czytelnik w podręczniku „Geometrja analityczna" Dr. W. Zajączkowskiego, 1884 r. na str. 75-tej i następnych.

perboliczną, to wartość $\delta^2 U$ będzie miała znaki różne — częściowo dodatnie, częściowo ujemne — zależnie od wartości i od znaków spółrzędnych δq_1 i δq_2; powierzchnia bowiem tej paraboloidy przetnie w tym razie płaszczyznę wyznaczoną osiami δq_1 i δq_2.*)

Jeżeli więc równanie 114-te — w pewnym przypadku — przedstawia paraboloidę eliptyczną, to wartości $\delta^2 U$ będą miały znaki albo *wyłącznie dodatnie*, albo *wyłącznie ujemne* dla *wszelkich wartości* (różnych, oczywiście, od zera) δq_1 i δq_2; a dany układ w tem położeniu (t. j. w położeniu, wyznaczonem spółrzędnemi q_1 i q_2, obliczonemi z równań 110-a), będzie w równowadze *albo* stałej, *albo* niestałej, zależnie od tego, czy oś paraboloidy danej będzie skierowana w stronę ujemną osi $\delta^2 U$, czy też — w stronę dodatnią; jeżeli zaś ta paraboloida będzie hyperboliczna, to równowagę w danem położeniu układu nazwiemy równowagą o *różnym rodzaju*; wtedy bowiem, dla pewnych wartości δq_1 i δq_2, wartość $\delta^2 U$ będzie dodatnią, dla innych zaś ujemną; odpowiednio więc do tych wartości równowaga będzie różnych rodzajów; inaczej powiemy: jeżeli danemu układowi nadamy pewne dowolne odkształcenie, to, po usunięciu czynników odkształcających, powróci ten układ w danym przypadku np. do formy pierwotnej, t. j. do położenia równowagi; jeżeli zaś nadamy mu inną formę odkształcenia, to, po usunięciu czynników odkształcających, będzie dalej się odkształcał. Oczywiście — powrót do pierwotnej formy, lub też dalsze odkształcanie tej formy odbywa się pod działaniem sił, które utrzymywały go w równowadze, a które po odkształceniu układu nie są w równowadze i wywołują odpowiedni ruch.

Zwrócić tu należy uwagę, iż powrót do położenia równowagi należy rozumieć w tym razie jako wahanie się danego układu około położenia równowagi; wahania te trwają tak długo, dopóki, wskutek występujących oporów, energja kinetyczna tego układu nie wygaśnie.

Ażeby następnie rozpoznać z równania 114-go, jaka jest dana paraboloida, należy zbadać rodzaj krzywej wskazującej (indicatrice), — czy jest ona elipsą, czy hyperbolą, czy też pewną odmianą tych krzywych. W tym celu przetniemy tę paraboloidę płaszczyzną równoległą do płaszczyzny (δq_1, δq_2) na odległości bardzo małej $\delta^2 U$ od tej płaszczyzny.

*) Literami δq_1, δq_2 i $\delta^2 U$, ewentualnie — jak to zrobimy następnie — literami δp_1, δp_2 i t. d. oznaczamy, jak to się zwykle w tych razach praktykuje, spółrzędne punktów, jak również osi spółrzędnych; — nie powinno to jednakże prowadzić do niejasności.

W celu rozpoznania, czy ta krzywa jest elipsą, czy hyperbolą, przekształcimy równanie 114-te na równanie, które będzie posiadać spółrzędne tylko w drugich potęgach, t. j. będzie bez iloczynów spółrzędnych δq_1 i δq_2; inaczej się wyrażając, odniesiemy tę krzywą do jej osi sprzężonych (jest ona bowiem stożkowa). Równanie to będzie miało postać następującą:

$$\delta^2 U = b_1 \cdot \delta p_1{}^2 + b_2 \cdot \delta p_2{}^2, \tag{115}$$

gdzie spółczynniki b_1 i b_2 są pewnemi funkcjami spółczynników $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ i $a_{2,2}$, a więc *są funkcjami* niezależnego *parametru* λ, a wielkości δp_1 i δp_2 są spółrzędnemi, odniesionemi do dowolnych osi sprzężonych danej wskazującej, ewentualnie — do jej osi głównych.

Jeżeli *obydwa* spółczynniki b_1 i b_2 równania 115-go będą jednocześnie dodatnie, albo obydwa jednocześnie ujemne, to i wartość $\delta^2 U$ będzie albo dodatnia, albo ujemna dla *wszelkich* wartości zmiennych δp_1 i δp_2; mamy więc w danym razie odpowiednio do tych znaków równowagę albo *niestałą*, albo *stałą*; jeżeli zaś choć jeden z tych spółczynników będzie miał znak różny od drugiego, to nazwiemy odpowiednią równowagę—równowagą o rodzaju *różnym*. Z *praktycznego* punktu widzenia równowagę różną można przyjąć jako równowagę niestałą i można ją nazywać *praktycznie niestałą*.

Równań, które wyrażają krzywą wskazującą danej paraboloidy w odniesieniu do osi sprzężonych (rów. 115-tych), może być nieskończenie wiele; każda bowiem krzywa stożkowa posiada wogóle nieskończenie wiele osi sprzężonych.

Dla pewnych osi sprzężonych można obliczyć spółczynniki b_1 i b_2 ze wzorów następujących:

$$b_1 = a_{1,1}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} : a_{1,1}. \tag{116}$$

Z tych wzorów możemy obliczyć wartości, a więc i znaki spółczynników b_1 i b_2; o te znaki tylko — w danym razie — nam idzie.

Jeżeli dany układ materjalny posiada więcej niż dwa stopnie swobody, wogóle n stopni, to równanie 113-te uważać będziemy również jako równanie paraboloidy, lecz w przestrzeni $(n+1)$ wymiarowej*), i powiemy na zasadzie analogji, do przykładu po-

*) Pojęcie przestrzeni wielowymiarowej stosuje się w matematyce tylko jako analogję do przestrzeni dwu, lub trójwymiarowej. Funkcję np. dwóch zmiennych przedstawiamy zwykle zapomocą *krzywej* w przestrzeni dwuwymiarowej, np. na płaszczyźnie; funkcję trzech zmiennych przedstawiamy jako

przedniego, że paraboloida ta posiada te same właściwości, co i paraboloida w przestrzeni trójwymiarowej (rów. 114-te), t. j. że może znajdować się albo po jednej stronie płaszczyzny, wyznaczonej osiami $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$ (taką płaszczyznę nazwiemy wielowymiarową); w tym razie będzie to paraboloida eliptyczna; lub też może tę płaszczyznę przecinać, a w tym razie będzie to paraboloida hyperboliczna. Wprowadzimy następnie, jak poprzed-

powierzchnię w przestrzeni trójwymiarowej; o funkcji czterech zmiennych powiedzieć możemy *analogicznie*, iż przedstawia ona pewien twór geometryczny w przestrzeni *czterowymiarowej*; wogóle każde równanie z n niewiadomemi możemy uważać za symbol pewnego tworu geometrycznego w przestrzeni n wymiarowej. Powiedzenie takie nie znaczy, ażeby „istniała" taka przestrzeń, jak powiadamy, że „istnieje" przestrzeń trójwymiarowa, lub abyśmy mogli wyobrazić sobie taką przestrzeń i w niej odpowiedni twór geometryczny, określony równaniami z n zmiennemi; lecz znaczy tylko to, że mamy pewną funkcję z n zmiennemi — więcej nic.

Na podstawie tego możemy mówić np. o kuli w przestrzeni czterowymiarowej, co będzie znaczyło, że mamy do czynienia z równaniem o postaci:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2,$$

gdzie x_1, x_2, x_3, x_4 oznaczają spółrzędne punktów powierzchni tej kuli, odniesione do prostokątnego układu osi x_1, x_2, x_3, x_4 w przestrzeni czterowymiarowej; gdy powiemy następnie, że mamy kulę w przestrzeni n wymiarowej, to będzie znaczyło, że mamy do czynienia z funkcją o postaci

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 = r^2.$$

Elipsoidę np. w przestrzeni n wymiarowej wyrazimy wogóle równaniem:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{x_k^2}{a_k^2} = 1,$$

gdzie wielkości a_k nazwiemy—analogicznie do przestrzeni dwu, lub trój-wymiarowej — półśrednicami tej elipsoidy. Odwrotnie, mając takie równanie, możemy powiedzieć, że przedstawia ono elipsoidę w przestrzeni n wymiarowej i t. p.

Płaszczyznę w przestrzeni trójwymiarowej wyrażamy funkcją linjową z 3-ma zmiennemi; o takiej funkcji linjowej z czterema zmiennemi powiemy analogicznie do tego sposobu wyrażania się, że przedstawia ona płaszczyznę wielowymiarową w przestrzeni czterowymiarowej i t. d.; pojęcie więc przestrzeni wielowymiarowej, jakie stosuje się w matematyce, ma tylko *algebraiczne* znaczenie.

Taki sposób przedstawiania danych funkcyj z wieloma zmiennemi daje nam możność wnioskowania o różnych właściwościach analitycznych tych funkcyj na podstawie odpowiednich właściwości tworów geometrycznych w przestrzeni dwu, lub trójwymiarowej, gdy te właściwości przeniesiemy bezpośrednio z przestrzeni dwu, lub trójwymiarowej do przestrzeni wielowymiarowej i następnie na daną funkcję. Sposób ten daje przytem możność zwięzłego i poglądowego sformułowania właściwości analitycznych danej funkcji.

nio, do rozpatrywań równanie *krzywej wskazującej* i w tym celu przekształcimy rów. 113-te, analogiczne do rów. 115-go, na równanie następujące:

$$\delta^2 U = b_1 \cdot \delta p_1^2 + b_2 \cdot \delta p_2^2 + \ldots + b_n \cdot \delta p_n^2, \tag{117}$$

gdzie spółczynniki b_1, b_2 . . . i t. d. są — jak poprzednio — funkcjami zmiennej niezależnej λ. Równania tej postaci nazywają równaniami o postaci kanonicznej.

Ażeby więc była równowaga *stała*, lub *niestała*, powinny być jednocześnie *wszystkie* spółczynniki b_i — *bez wyjątku*— albo ujemne, albo dodatnie; gdy zaś choć jeden z tych spółczynników będzie miał *znak różny* od pozostałych, wtedy powiemy, że równanie to, podobnie jak w przestrzeni trójwymiarowej, przedstawi również paraboloidę hyperboliczną, lecz w przestrzeni $(n+1)$ wymiarowej i wartość $\delta^2 U$ może mieć w tym razie dla różnych wartości δp_i znaki różne*); równowagę taką nazwiemy, jak poprzednio, równowagą o *rodzaju różnym*.

Wnioski te możemy odwrócić i powiemy: jeżeli w równaniu 117-tem *wszystkie* spółczynniki b_i — *bez wyjątku* — są jednocześnie *dodatnie* dla pewnego położenia układu, w którem jest on w równowadze, to w tem położeniu układ dany jest w równowadze *zupełnie niestałej*, gdyż $\delta^2 U > 0$; jeżeli zaś *wszystkie bez wyjątku* są jednocześnie *ujemne*, to znajduje się on w równowadze *zupełnie stałej*, gdyż $\delta^2 U < 0$. W przypadku zaś jeżeli choć jeden ze spółczynników posiada znak różny od pozostałych, to powiemy, że równowaga jest *różnego* rodzaju.

Zwrócić tu należy uwagę na te właściwości analityczne wyrazu 117-go, że *liczba znaków* dodatnich i liczba znaków ujemnych w tem równaniu musi być zawsze ta sama, niezależnie od obranych osi sprzężonych, do których odnosimy tę krzywą; liczba ta bowiem wyraża geometryczne właściwości danej krzywej wskazującej (czy to jest elipsa, czy hyperbola), które nie zależą od wyboru osi odniesienia; liczba ta przeto jest *niezmiennikiem* danej formy.

Jeżeli za podstawę przy określaniu rodzaju równowagi przyjmiemy równowagę (zupełnie) stałą, to liczbę dodatnich wartości

*) Właściwości te możemy odczytać bezpośrednio ze wzoru 117-go bez interpretacji geometrycznej; jeżeli bowiem wszystkie wartości b_i będą np. dodatnie, to wszystkie dodajniki prawej strony tego równania muszą być dodatnie; a więc i suma wszystkich tych wyrazów musi być dodatnią niezależnie od wartości i znaków zmiennych δp_i .

spółczynników b_i, jakie znajdą się w równaniu 117-tem, nazwać można za Poincaré'm—liczbą *stopni niestałości* (inaczej niestateczności) danego układu.

Ażeby z wyrazu funkcji sił rozpoznać rodzaje równowagi, należy obliczyć znaki spółczynników b_i w odniesieniu do jakich bądź osi, byleby te osi były sprzężone; w tym celu skorzystamy z następujących wzorów (analogicznych do wzorów 116-tych), które tu podajemy bez dowodzenia: *)

$$b_1 = D_1\,;\; b_2 = \frac{D_2}{D_1}\,;\quad b_3 = \frac{D_3}{D_2}\,;\; \ldots\; b_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}\,, \tag{118}$$

gdzie: (119)

$$D_1 = a_{1,1}\,;\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}\,;\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

i t. d.

oraz $a_{i,k} = a_{k,i}$. **)

Z tych wzorów wywnioskujemy, co następuje: jeżeli wartości tych wszystkich wyróżników są np. dodatnie, t. j. jeżeli wartości

$$D_1 > 0\,;\quad D_2 > 0\,;\quad D_3 > 0 \text{ i t. d.} \tag{120}$$

dla q_i, obliczonych z równań równowagi dla *pewnej wartości* λ, to z równań 118-ych wynika, że wszystkie spółczynniki b_i są dodatnie, czyli w tym razie równowaga jest *zupełnie niestałą;* jeżeli zaś

$$D_1 < 0\,;\quad D_2 > 0\,;\quad D_3 < 0 \quad \text{i t. d.}, \tag{121}$$

to wszystkie b_i są ujemne; mamy przeto w tym razie równowagę *zupełnie stałą*. Jeżeli zaś nie zachodzą te warunki, to dany układ znajduje się w *równowadze o różnych rodzajach*, t. j. przy pewnych odkształceniach — w równowadze stałej, a przy innych — w równowadze niestałej, zależnie od wartości, jakie nadamy spółrzędnym δp_1, δp_2 i t. d.; inaczej—w zależności od formy odkształcenia, jakie nadamy temu układowi.

Wnioski te można odwrócić.

W powyższem rozpatrywaniu obliczyliśmy spółczynniki stateczności b_i, które odnosiły się do pewnych osi sprzężonych; obie-

*) Wzory te są słuszne, o ile wyróżniki $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$ i t. d.

**) Gdyż te wielkości są drugiemi cząstkowemi pochodnemi jednej i tej samej funkcji — funkcji sił, obliczonemi tylko w różnej kolejności.

rzemy obecnie jako osi odniesienia osi główne danej krzywej wyznaczającej; spółczynniki b_i przybiorą wtedy inne wartości, które oznaczymy symbolem c_i. Wartości przeto wyrazów

$$\sqrt{\frac{\partial^2 U}{c_i}}$$

będą wyrażały w tym razie długości półśrednic głównych danej stożkowej. Spółczynniki c_i można obliczyć jako pierwiastki z następującego wyznacznika, przyrównanego do zera, który to sposób daje teorja wyznaczników: *)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-c & a_{1,2} & a_{1,3} & . & . \\ a_{2,1} & a_{2,2}-c & a_{2,3} & . & . \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}-c & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & a_{n,n}-c \end{vmatrix} = 0. \tag{122}$$

Wyznacznik ten możemy rozwinąć na wielomian, który, przyrównany do zera, będzie równaniem algebraicznem n-tego stopnia parametru c, który uważamy za niewiadomy; otrzymamy przeto wogóle n pierwiastków niewiadomej c.

Jeżeli pierwiastki niewiadomej c równania 122-go będą wszystkie dodatnie, to równanie

$$\delta^2 U = c_1 \cdot \delta\eta_{i1}^2 + c_2 \cdot \delta\eta_{i2}^2 + \cdots, \tag{123}$$

w którem $\delta\eta_{i1}$, $\delta\eta_{i2}\cdots$ są spółrzędne, odniesione do osi głównych krzywej wskazującej, — będzie przedstawiało paraboloidę eliptyczną (dwu—trój—lub wielowymiarową), której oś będzie pokrywać się z osią dodatnią $\delta^2 U$; a wartości $\delta^2 U$ będą dodatnie dla *wszelkich* wartości $\delta\eta_{i\iota}$; wtedy układ dany w położeniu, określonem spółrzędnemi q_i, obliczonemi z równań 110-a, dla pewnej obranej wartości λ, będzie w równowadze (zupełnie) *niestałej*; gdy zaś wszystkie (bez wyjątku) pierwiastki niewiadomej c będą ujemne, to paraboloida, wyrażona równaniem 117-tem, będzie również eliptyczną, lecz z osią, pokrywającą się z ujemną osią obranych osi spółrzędnych; wtedy bowiem mamy $\delta^2 U < 0$, a więc wartość $\delta^2 U$

*) Równania tej postaci nazywają sekularnemi.

będzie ujemną dla wszystkich wartości $\delta\gamma_i$; równowaga będzie w tym razie (zupełnie) *stała.*

Pierwiastki dodatnie tego równania mają te same znaczenie statyczne, co i poprzednie b_i; liczbę ich przeto nazywać możemy, jak poprzednio, liczbą stopni niestałości danego układu.

Ażeby rozpoznać z równania 122-go, bez obliczania jego pierwiastków, jakie znaki posiadają te pierwiastki, weźmiemy pod uwagę znaki równania:

$$c^n + A_1 \cdot c^{n-1} + A_2 \cdot c^{n-2} + \cdots + A_n = 0, \qquad (124)$$

które otrzymamy po rozwinięciu wyznacznika 122-go i po uporządkowaniu otrzymanego wielomianu podług malejących potęg niewiadomej c_i, w którem spółczynniki A_i są określonemi funkcjami spółczynników $a_{i,k}$, a więc są funkcjami parametru λ. Zważywszy następnie, że wszystkie pierwiastki tego równania w danym przypadku są rzeczywiste*), powiemy na zasadzie twierdzenia Descartes'a**), że liczba pierwiastków dodatnich danego równania (t. j. równania 124-go) jest równą liczbie *przemian* znaków jego wyrazów***).

Jeżeli np. znaki wyrazów danego równania *kolejno się zmieniają,* t. j. jeżeli w danem równaniu jest n przemian, to wszystkie pierwiastki danego równania są dodatnie; mamy więc w tym razie równowagę (zupełnie) *niestałą*; jeżeli zaś wszystkie znaki są *dodatnie,* t. j. jeżeli nie mamy przemian, to dane równanie nie ma pierwiastków dodatnich; a więc, ponieważ wszystkie pierwiastki są rzeczywiste, mamy przeto w tym razie pierwiastki tylko ujemne; równowaga więc jest zupełnie *stała.* Jeżeli zaś znaki wyrazów danego równania nie odpowiadają tym warunkom, to mamy rów-

*) Że pierwiastki tego równania muszą być rzeczywiste, możemy objaśnić tą okolicznością, że krzywa wskazująca musi być krzywą rzeczywistą, jako przecięcie się płaszczyzny wielowymiarowej z powierzchnią paraboloidy również wielowymiarowej, przytem jest ona drugiego stopnia; a więc kwadraty jej półśrednic muszą być także rzeczywiste, niezależnie od rodzaju tej krzywej; wartości przeto c_1, c_2... muszą być również rzeczywiste.

**) O ile $A_n \neq 0$;

***) Jeżeli dwie po sobie następujące liczby pewnego szeregu liczb posiadają różne znaki, to powiadamy, że zachodzi w tym razie *przemiana* znaków. Jeżeli więc mamy szereg liczb, to szereg ten posiadać może wogóle pewną liczbę przemian, nie wyłączając zera; np. o szeregu liczb ze znakami następującemi $+ - - + -$, powiemy, iż posiada on trzy przemiany i t. p.

nowagę różnych rodzajów; inaczej — o różnych stopniach niestałości *). Na podstawie powyższego twierdzenia powiemy, że *liczba stopni niestałości danego układu równa się liczbie przemian znaków* równania 124-go.

41. Obliczenie rodzajów równowagi różnej.

Warunkiem równowagi zupełnie stałej, lub zupełnie niestałej był warunek, ażeby wszystkie spółczynniki b_i równania pracy o formie kanonicznej (rów. 117-te) dla danego położenia układu były albo ujemne, albo dodatnie; jeżeli zaś te znaki są różne, to równowagę taką nazwaliśmy równowagą o rodzaju różnym; podczas bowiem różnych odkształceń — z położenia równowagi — wartość $\delta^2 U$ będzie miała znaki różne; a więc równowaga będzie odpowiednio do tych znaków stała lub niestała.

Obecnie zadaniem naszem jest określenie takich odkształceń, po wykonaniu których równowaga okaże się stałą, oraz takich odkształceń, po wykonaniu których równowaga będzie niestałą. Ponieważ odkształcenia te wyrażają się przyrostami $\delta q_1, \delta q_2, . \delta q_n$ spółrzędnych $q_1, q_2, .. q_n$, które określają położenie równowagi dla danego parametru λ, zadanie przeto polega na znalezieniu związków pomiędzy odchyleniami $\delta q_1, \delta q_2, . \delta q_n$, któreby wyrażały równowagę stałą, lub niestałą.

W tym celu rozpatrzymy układ o dwóch stopniach swobody; dla tego przypadku mamy wyraz pracy w ogólnej postaci:

$$\delta^2 U = a_{1,1} \cdot \delta q_1{}^2 + 2\, a_{1,2} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_2 + a_{2,2} \cdot \delta q_2{}^2, \tag{125}$$

lub w postaci kanonicznej:

$$\delta^2 U = b_1 \cdot \delta p_1{}^2 + b_2 \cdot \delta p_2{}^2, \tag{125 a}$$

gdzie

$$b_1 = a_{1,1}, \quad \text{oraz } b_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} : a_{1,1} \cdot \tag{126}$$

Równowaga różna zachodzi w następujących dwóch przypadkach, gdy

$$1) \quad b_1 < 0, \quad \text{zaś } b_2 > 0, \tag{127}$$

lub gdy

$$2) \quad b_1 > 0, \quad \text{zaś } b_2 < 0: \tag{128}$$

*) Jeżeli w szczególnym przypadku pierwiastki równania 124-go będą dwu — lub wielokrotne, to przy obliczeniu ich znaków powstaną pewne nieokreśloności, które należy bliżej rozpatrzeć.

inne bowiem przypadki, o których już mówiliśmy, dają równowagę bądź zupełnie stałą, bądź zupełnie niestałą.

W poprzednich rozważaniach (§ 40-ty) przedstawiliśmy sobie równanie 125-te w postaci paraboloidy, która w tym razie, wobec warunku 127-go, lub 128-go, jest paraboloidą hyperboliczną. Paraboloida ta przetnie przeto płaszczyznę $(\delta q_1, \delta q_2)$ po dwóch prostych, których spółczynniki kierunkowe (względem osi δq_1), wyrażone wzorem $\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)$, obliczymy z równania 125-go, gdy przyrównamy

$$\delta^2 U = 0;$$

a więc z równania:

$$\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)^2 \cdot a_{2,2} + 2\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right) \cdot a_{1,2} + a_{1,1} = 0$$

otrzymamy dwa rozwiązania:

$$\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)_{I,II} = \frac{-a_{1,2} \pm \sqrt{a_{1,2}^2 - a_{1,1} \cdot a_{2,2}}}{a_{2,2}}. \tag{129}$$

Jeżeli znaki tych rozwiązań będą różne, to znaczyć będzie, że oś spółrzędnych δq_1 leży wewnątrz kąta, utworzonego temi dwiema prostemi; znak przeto wartości $\delta^2 U$ we wszystkich punktach, leżących wewnątrz tego kąta, będzie taki, jaki posiada znak $\delta^2 U$ w dowolnym punkcie, obranym wewnątrz tego kąta; dla określenia tego znaku obierzmy dowolny punkt np. na osi δq_1, a znak wielkości $\delta^2 U$ w tym punkcie znajdziemy, gdy w równanie 125-te podstawimy $\delta q_2 = 0$; otrzymamy wtedy:

$$\delta^2 U = a_{1,1} \cdot \delta q_1^2;$$

a więc znak wartości $\delta^2 U$ będzie w punktach tej osi taki, jaki posiada wartość $a_{1,1}$; wszystkie przeto odkształcenia, wyrażone ilorazem $\frac{\delta q_2}{\delta q_1}$, którego wartość leży pomiędzy wartościami $\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)_I$ i $\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)_{II}$, będą miały — odpowiednie temu znakowi — rodzaje równowagi; t. j. jeżeli będzie np. $a_{1,1} < 0$, to równowaga dla takich odkształceń będzie stała i odwrotnie. Zastosujemy ten sposób rozumowania do naszych przypadków i w tym celu weźmiemy najpierw pod uwagę przypadek 1-szy, w którym założyliśmy, że

$$b_1 < 0, \qquad \text{oraz } b_2 > 0, \tag{130}$$

t. j. przyjęliśmy, że (równ. 126-te)

$$a_{1,1} < 0 \qquad \text{oraz, że } a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2}^2 < 0. \tag{131}$$

Drugi z tych wyrazów wskazuje, że pierwiastek równania 129-go jest w tym przypadku rzeczywisty, co również wynika z tego, że rozpatrywana paraboloida jest w tym razie hyperboliczną.

Należy obecnie zbadać, w myśl naszego rozważania, czy rozwiązania równania 129-go mają znaki różne, czy też jednakowe. Jeżeli *znaki* tych rozwiązań są *różne*, to *rodzaj* równowagi dla odkształceń, wyrażonych stosunkiem $\frac{\partial q_2}{\partial q_1}$, którego wartość zawarta jest pomiędzy wartościami $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_I$ i $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_{II}$ — jest *stały*, gdy $a_{1,1} < 0$. Gdyby zaś *znaki* wartości $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_I$ i $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_{II}$ były *jednakowe*, to oś ∂q_1 leżałaby zewnątrz kąta, określonego temi wartościami, jako spółczynnikami kierunkowemi; rodzaj równowagi przeto byłby w tym razie przeciwny poprzedniemu, t. j. rodzaj równowagi byłby w tym przypadku (t. j. dla $a_{1,1} < 0$) niestały.

Weźmy obecnie drugi przypadek, w którym

$$b_1 > 0, \qquad \text{oraz } b_2 < 0, \tag{132}$$

$$\text{t. j. } a_{1,1} > 0, \qquad \text{oraz } a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a^2_{1,2} < 0; \tag{133}$$

na podstawie tych samych rozważań powiemy: jeżeli znaki rozwiązań $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_I$ i $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_{II}$ będą *różne*, to rodzaj równowagi dla odkształceń, wyrażonych ilorazem $\frac{\partial q_2}{\partial q_1}$, zawartym pomiędzy temi rozwiązaniami, jest *niestały*, gdyż założyliśmy w tym razie, że $a_{1,1} > 0$; jeżeli zaś znaki tych rozwiązań będą jednakowe, to rodzaj równowagi będzie *stały*.

Wyniki te można sformułować w następujący sposób: jeżeli znaki rozwiązań równania 129-tego są różne, to rodzaj równowagi dla wartości $\frac{\partial q_2}{\partial q_1}$, leżących pomiędzy wartościami $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_I$ a $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_{II}$,

w przypadku $a_{1,1} < 0$ jest stały,

w przypadku zaś $a_{1,1} > 0$ jest niestały;

jeżeli zaś znaki tych rozwiązań są *jednakowe*, to rodzaj równowagi jest odwrotny poprzedniemu, a mianowicie:

w przypadku $a_{1,1} < 0$ jest niestały,

„ $a_{1,1} > 0$ „ stały.

Gdybyśmy zrobili wartości odkształceń, wyrażonych stosunkiem $\frac{\partial q_2}{\partial q_1}$, równemi wartościom $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_I$, lub $\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)_{II}$, to układ dany, w ten sposób odkształcony, byłby w równowadze obojętnej, — przynajmniej do drugiego rzędu włącznie.

42. Obliczenie sił zerowych.

Z tych rozpatrywań widzimy, że oprócz równowagi zupełnie stałej, lub zupełnie niestałej, w jakiej może znajdować się dany układ materjalny o więcej niż o jednym stopniu swobody, może się taki układ również znajdować w równowadze o różnych rodzajach.

Ażeby unaocznić sobie, przy jakich warunkach wogóle dana równowaga zmienia swój rodzaj w układzie o n stopniach swobody, weźmy pod uwagę tę okoliczność, że spółczynniki b_l równania o postaci kanonicznej (rów. 125-a) są funkcjami parametru λ (co już zaznaczyliśmy); zmieniając więc wartość λ, która jest zmienną niezależną, — możemy wogóle natrafić na takie jej wartości, które nadadzą pewnemu spółczynnikowi b_l wartości o różnych znakach. Przyjąwszy, że wartość takiego spółczynnika, zmieniając znak, przechodzi przez zero, nazwiemy odpowiednią wartość $\lambda = \lambda_z$, przy której spółczynnik $b_l = 0$, — parametrem zerowym, lub *siłą zerową* danego układu (analogicznie do § 33-go).

Różnica pomiędzy parametrem zmianowym λ_z układów o jednym stopniu swobody a takimże parametrem układów o wielu stopniach swobody jest ta, że w układzie o jednym stopniu swobody zmiana rodzaju równowagi przechodzi np. ze stałej na niestałą; — w układzie zaś o wielu stopniach swobody może przechodzić rodzaj równowagi np. z częściowo stałej na częściowo niestałą; w szczególnych przypadkach może się zdarzyć, że przejdzie z zupełnie stałej na zupełnie niestałą.

W celu obliczenia wartości λ_z, przy której pewien spółczynnik b_l stanie się zerem, skorzystamy z następującego twierdzenia z teorji wyznaczników: iloczyn wszystkich spółczynników b_l równania kanonicznego (rów. 117-go) równa się iloczynowi z wyznacznika D_n i z pewnej stałej wartości C*) (nierównej zeru), podniesionej do drugiej potęgi; t. j. mamy związek:

---

*) Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego twierdzenia, a mianowicie: wyznacznik spółczynników wyrazu przekształconego, t. j. 117-go, równa się wyznacznikowi spółczynników równania pierwotnego, t. j. 113-go, pomnożonemu przez wartość wyznacznika, — zwanego *wyznacznikiem przekształceń* i oznaczonego tutaj literą C, inaczej zwanego — *zamiennikiem*, — podniesioną do drugiej potęgi.

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \cdots \cdot b_n = D_n \cdot C^2, \tag{134}$$

gdzie D_n jest wyznacznikiem o postaci następującej:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & . & . & . & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & . & . & . & . \\ a_{3.1} & a_{3.2} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & a_{n.n} \end{vmatrix} \quad \text{i gdzie } a_{i.k} = a_{k.i}. \tag{135}$$

Z rów. 134-go wynika, że jeżeli choć jeden spółczynnik $b_i = 0$, to i $D_n = 0$ (C bowiem nie może być $= 0$); i odwrotnie, — jeżeli $D_n = 0$, to choć jeden ze spółczynników b_i musi być równy zeru. Wartość przeto λ_z, przy której może nastąpić zmiana (całkowita, lub częściowa) rodzaju równowagi, obliczymy z równania

$$D_n = 0, \tag{136}$$

w którem wszystkie wyrazy $a_{k.i}$ są znanemi funkcjami niewiadomej λ.

Jeżeli funkcja sił jest linjową funkcją zmiennej λ, to otrzymamy tyle pierwiastków dla λ, ile dany układ posiada stopni swobody. Z tych pierwiastków interesuje nas ze stanowiska technicznego pierwiastek o najmniejszej wartości; przekroczenie bowiem tej wartości może wywołać zmianę rodzaju równowagi, a więc w pewnych przypadkach i odkształcenie układu. Do obliczenia liczbowego tej najmniejszej wartości dogodnem jest stosowanie metody Graeff'ego*).

43. Obliczenie niestałości równowagi w pewnych szczególnych przypadkach.

W celu ułatwienia obliczenia niestałości równowagi układów o wielu stopniach swobody w pewnych szczególnych przypadkach, co nieraz dla praktycznych celów może być ważne, wprowadzimy pojęcie *układu częściowego* o jednym stopniu swobody danego układu materjalnego o n stopniach swobody. Układem częściowym o jednym stopniu swobody danego układu o n stopniach swobody nazwiemy układ, w którym $(n - 1)$ spółrzędnych niezależnych

---

*) W tym celu można korzystać z podręcznika „Praktische Analysis v. Dr. Horst u. v. Sanden".

(tego układu) przyjmiemy równe zeru. Układ przeto o n stopniach swobody możemy rozłożyć na n częściowych układów, o jednym stopniu swobody — każdy. Jeżeli np. mamy układ o 2-ch stopniach swobody, którego spółrzędne niezależne są q_1 i q_2, to przyjąwszy np. $q_2 = 0$, otrzymamy układ częściowy o jednej niezależnej spółrzędnej q_1. Warunkiem równowagi np. *stałej* tego układu jest nierówność $a_{1,1} < 0$ (dla pewnej wartości λ). Jeżeli zaś weźmiemy teraz pod uwagę cały układ, t. j., jak w tym przypadku, układ o dwóch stopniach swobody, to warunkiem równowagi stałej są dwie nierówności (wyrazy 121-sze):

$$a_{1,1} < 0 \quad \text{oraz} \quad a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2}^2 > 0. \tag{137}$$

Jeżeli jeden z tych częściowych układów będzie w równowadze np. stałej, t. j., gdy np. $a_{1,1} < 0$, a drugi w równowadze niestałej, t. j. $a_{2,2} > 0$, to nierówność $a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2}^2 > 0$ nie będzie mogła być w tym razie spełniona; a więc równowaga układu *całego* nie może być w tym razie stałą; może być ona zupełnie niestałą, lub może być różną.

Wnioski te można rozszerzyć na układy o wielu stopniach swobody i powiemy: jeżeli choć jeden układ częściowy, określony wyżej, będzie w równowadze niestałej, t. j. jeżeli choć jeden wyraz równania 113-go typu $a_{k,k} > 0$, to układ cały *nie będzie w równowadze stałej*. Jeżeli zaś wszystkie oddzielne układy częściowe będą w równowadze stałej, t. j. wszystkie $a_{k,k} < 0$, to cały układ może być, lub może nie być w równowadze stałej i, ażeby w tym przypadku orzec o rodzaju równowagi, należy obliczyć nierówności 120-te, lub 121-sze.

Twierdzenie powyższe pozwoli nieraz bez uciążliwych obliczeń, jakiemi są obliczenia wyznaczników, orzec, że dana równowaga nie jest stałą, co dla praktycznych celów może być nieraz wystarczającem.

Rozszerzenie wniosków, opartych na układzie o dwóch stopniach swobody, na układy o wielu stopniach swobody, jakieśmy w tej chwili zastosowali, w myśl dopisku na str. 90-tej, można uzasadnić jeszcze następującem rozważaniem. O rodzaju równowagi każdego, wyżej określonego układu częściowego, rozstrzyga znak wartości $\delta^2 U$, obliczonej dla danego parametru λ; wyraz ten

$$\delta^2 U = a_{k,k} \cdot \delta q_k^2 \tag{138}$$

w układzie osi $\delta^2 U$ i δq_k, który poprzednio stosowaliśmy,— wyrazi parabolę, której oś będzie się pokrywać z dodatnią, lub ujemną osią $\delta^2 U$, zależnie od znaku wartości $a_{k,k}$; parabola ta, którą nazwiemy *parabolą* danego *układu częściowego*, będzie, oczywiście, leżeć na powierzchni danej paraboloidy, określonej równaniem 113-tem; jeżeli więc choć jedna wartość $a_{k,k}$ równania 113-go będzie miała znak różny od znaków pozostałych wartości, to będzie znaczyło, że powierzchnia paraboloidy musi przeciąć płaszczyznę (wielowymiarową), przechodzącą przez osi $(\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n)$; streszczając się, możemy powiedzieć: jeżeli parabola choć jednego częściowego układu będzie znajdować się po przeciwnej stronie płaszczyzny $(\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n)$, niż parabola pozostałych częściowych układów, to powierzchnia tej paraboloidy przetnie tę płaszczyznę i otrzymamy dla $\delta^2 U$ różne znaki, zależnie od wartości $\delta q_1, \delta q_2, \cdots \delta q_n$; zwrócić jednakże należy uwagę, że jeżeli wszystkie te parabole będą leżały po jednej stronie wspomnianej płaszczyzny, to okoliczność ta nie przesądzi jednakże o tem, czy dana paraboloida będzie znajdowała się po jednej stronie płaszczyzny $(\delta q_1, \delta q_2 \ldots)$; powierzchnia bowiem tej paraboloidy może przeciąć tę płaszczyznę dwa razy, co się może jednakże nie ujawnić w przekrojach częściowych.

Może się zdarzyć szczególna forma wielomianu 113-go, w którym nie będzie wyrazów z drugiemi potęgami niektórych zmiennych δq_i; przyjmijmy np., że w danym wielomianie nie będzie wyrazu δq_k^2, gdy np. $a_{k,k} = 0$, — parabola więc odpowiedniego układu częściowego zamieni się w tym przypadku na prostą, która pokryje się z osią δq_k. Równanie przeto 113-te nie przedstawia w tym razie paraboloidy eliptycznej, lub hyperbolicznej, o której mówiliśmy w § 40-tym, lecz przedstawi powierzchnię (również drugiego stopnia) o innej postaci; może być nią np. walec o przekroju parabolicznym, który będzie styczny do tej płaszczyzny; wtedy dany układ znajdować się będzie w równowadze oznaczonej, t. j. — stałej, albo niestałej, zależnie od znaku wyrazu $\delta^2 U$. W tych przypadkach należy przeprowadzić szczególne badania, których w danej chwili nie podejmuję.

Rozpatrzymy obecnie równowagę i jej rodzaj układów, będących w stanie naturalnym. Układy materjalne, w których siły wewnętrzne są równe zeru, gdy siły zewnętrzne są równe zeru, *nazwano układami w stanie naturalnym.*

Do takich układów zaliczyć można np. układy sprężyste, które nie posiadają naprężeń początkowych i na które nie działają siły zewnętrzne. Każdy układ w stanie naturalnym jest, oczywiście, w równowadze; nie działają bowiem na niego żadne siły; ażeby zaś zbadać rodzaj tej równowagi, należy nadać takiemu układowi pewne wirtualne odkształcenie i obliczyć następnie znak wyrazu pracy sił, jaką one wykonały podczas tego przesunięcia. Wyraz pracy wirtualnej w przypadkach, w których występują siły zewnętrzne i wewnętrzne, składa się z wyrazów tych poszczególnych prac; lecz ponieważ w układach w stanie naturalnym siły zewnętrzne nie występują, pozostaje przeto praca sił wewnętrznych, która, w myśl rozważań, podanych w § 13-tym str. 28-ma, jest ujemną; wobec tego wypowiemy wniosek: *równowaga układów w stanie naturalnym jest równowagą stałą.*

Jeżeli zaś przyłożymy do takiego układu pewne siły zewnętrzne, to do wyrazu pracy wirtualnej wejdzie wyraz pracy tych sił, który wogóle jest dodatni; suma przeto obydwóch prac może być dodatnią, lub ujemną, zależnie od tego, która z tych wartości będzie w tej sumie przeważać.

Jeżeli mamy do czynienia z przypadkiem, w którym wartość pracy siły zewnętrznej (ew. parametru λ) rośnie z rosnącą wartością tej siły, to natrafić możemy wogóle na taką wartość tej siły, przy której suma prac sił zewnętrznych i wewnętrznych łącznie będzie równa zeru (siłę tę nazwaliśmy zerową); a następnie z powiększeniem siły zewnętrznej suma prac stać się może dodatnią, t. j. równowaga ze stałej stanie się niestałą; taką wartość siły zerowej nazywamy siłą *krytyczną*, lub *granicą stateczności.*

Jeżeli dany układ materjalny posiada skończoną liczbę stopni swobody, to wartość siły krytycznej danego układu (inaczej parametru λ), obliczymy jako najmniejszy pierwiastek równania:

$$D_n = 0\,,$$

o którem już poprzednio mówiliśmy (porówn. również przykład 11-ty).

44. Obliczenie równowagi i jej rodzajów, gdy funkcja sił jest jednorodna drugiego stopnia spółrzędnych niezależnych.

Ze względu na zastosowanie tego przypadku do obliczeń praktycznych, rozpatrzymy go szczegółowiej. Do obliczenia położenia układu, w którym siły, na niego działające, są w równowadze, zastosujemy i w tym razie ogólny sposób postępowania, podany wyżej; mianowicie zastosujemy równania

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0, \quad \cdots\cdots \quad \frac{\partial F}{\partial q_n} = 0, \qquad (139)$$

w których F oznacza, jak poprzednio, funkcję sił; postać tej funkcji jest wogóle następująca:

$$U = F(q_1, q_2, \cdot \cdot \cdot q_n; \lambda), \qquad (140)$$

a w przypadku tutaj rozpatrywanym, przedstawi się ta funkcja w postaci:

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{i,k} \cdot q_i \cdot q_k, \qquad (141)$$

gdzie czynniki $\alpha_{i,k}$ są funkcjami parametrów, wyrażających fizyczne i geometryczne właściwości danego układu (np. I, E, l i t. p.), oraz—parametru λ; a więc $\alpha_{i,k}$ są funkcjami parametrów, niezależnych od spółrzędnych q_i, i przytem $\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$.

W postaci rozwiniętej przedstawi się ta funkcja w następujący sposób:

$$U = \alpha_{1,1} \cdot q_1^2 + 2\alpha_{1,2} \cdot q_1 \cdot q_2 + \alpha_{2,2} \cdot q_2^2 + 2\alpha_{1,3} \cdot q_1 \cdot q_3 + \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_{n,n} q_n^2 . \qquad (142)$$

Równania równowagi, t. j. równania 139-te są w tym razie równaniami jednorodnemi pierwszego stopnia, których postacie rozwinięte są następujące:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 2\alpha_{1,1} \cdot q_1 + 2\alpha_{1,2} \cdot q_2 + 2\alpha_{1,3} q_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot + 2\alpha_{1,n} \cdot q_n = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = 2\alpha_{2,1} \cdot q_1 + 2\alpha_{2,2} \cdot q_2 + 2\alpha_{2,3} q_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot + 2\alpha_{2,n} \cdot q_n = 0,$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad (143)$$

Jednem z położeń równowagi takiego układu jest położenie wyznaczone spółrzędnemi:

$$q_1 = 0, \; q_2 = 0, \cdot \cdot \cdot \cdot q_n = 0; \qquad (144)$$

wartości te bowiem zaspakajają równania 143-cie; jest to przeto położenie równowagi, które zachodzi przy *wszelkich* wartościach parametru λ; *położenie* to nazwiemy *zerowem.*

Równania 143-cie mogą mieć jeszcze inne rozwiązania oprócz rozwiązań 144-tych, lecz to nastąpić może *tylko wtedy*, gdy wyróżnik tych równań będzie równy zeru, t. j. gdy wyróżnik:

$$D_F = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = 0. \tag{145}$$

W równaniu tem niewiadomą jest wartość parametru λ; z równania tego przeto otrzymamy pewną liczbę pierwiastków, wyrażonych wartościami znanych parametrów danego układu. Wartości tych pierwiastków przedstawiają przeto wartości parametrów sił, lub siły, pod działaniem których zachodzą jeszcze inne położenia równowagi oprócz położeń, wyznaczonych równaniami 144-mi, i *tylko przy tych wartościach sił* mogą zachodzić te nowe położenia; — położenia te nazwiemy *odchylonemi*. Spółrzędne $q_1, q_2 \ldots q_n$ tych nowych położeń obliczymy z równań 143-cich, podstawiając do czynników $\alpha_{i,k}$, któremi te spółrzędne się wyrażą, wartości λ, obliczone z równania $D_F = 0$.

Z równań 143-cich obliczyć jednakże możemy ze względu na ich jednorodność tylko stosunki spółrzędnych q_i do jednej z tych spółrzędnych, którą możemy dowolnie obrać i którą nazwiemy *spółrzędną odniesienia*. Jeżeli obierzemy jako tę spółrzędną np. q_1, to niewiadomemi będą w tym razie stosunki następujące:

$$\frac{q_2}{q_1}, \quad \frac{q_3}{q_1}, \ldots \quad \frac{q_n}{q_1}, \tag{146}$$

które obliczymy z równań 143-cich. Stosunki te przeto przedstawią dla wartości każdego pierwiastka λ i, ze względu na zmienność parametru odniesienia q_1, pewien ciągły zbiór położeń równowagi; a zbiorów takich będzie tyle, ile pierwiastków rzeczywistych λ będzie w równaniu $D_F = 0$.

W celu określenia rodzajów równowagi w położeniach, wyznaczonych spółrzędnemi 146-temi, obliczymy przedewszystkiem wartości parametrów zerowych, t. j. wartości λ_z, przy których może nastąpić zmiana rodzaju równowagi. W tym celu zestawimy, w myśl równania 134-go, — równanie 135-te, t. j.

$$D_n = 0,$$

i z tego równania obliczymy wartości tych parametrów.

Porównując jednakże wyrazy wyróżnika D_F równań 143-cich, t.j. wyróżnik 145-ty z wyrazami wyróżnika D_n równ. 135-tego, dojdziemy do wniosku, iż wyrazy te są jednakowe; otrzymamy bowiem kolejno z równania 142-go oraz z równań 143-cich, mając na uwadze oznaczenia 112-te (str. 87-ma):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} = a_{1,2} = \alpha_{1,2} \quad \text{i t. d.} \tag{147}$$

Wniosek ten wyrazimy tożsamością:

$$D_F \equiv D_n, \tag{148}$$

którą wysłowimy w następujący sposób: *siły*, — posiadające funkcję jednorodną drugiego stopnia, *które utrzymują w równowadze dany układ w położeniach odchylonych, — są jednocześnie siłami zerowemi*, — t. j. siłami, których przekroczenie może zmienić rodzaj równowagi; najmniejszą z nich nazwaliśmy siłą krytyczną, lub — granicą stateczności, o ile dany układ w stanie naturalnym był w równowadze stałej.

Tożsamość wyrazów D_F i D_n może służyć przeto do obliczenia sił zerowych, ewent. krytycznych z równania $D_F = 0$, które napisać możemy bezpośrednio z funkcji sił, t. j. z równania 142-go bez obliczania równań 143-cich, co jest znacznem uproszczeniem rachunku.

Szczególnego uproszczenia przy obliczeniu siły krytycznej doznają w tym razie układy o jednym stopniu swobody, gdyż wtedy D_F jest czynnikiem przy q_1^2, t. j. czynnikiem $\alpha_{1,1}$ równ. 141-szego; a więc po przyrównaniu $\alpha_{1,1} = 0$, otrzymamy wartość siły, utrzymującej dany układ w równowadze, która jest równocześnie i siłą krytyczną; porówn. przykład 1-szy, rozdz. VIII.

W przypadku gdy $D_F \neq 0$, równania 143-cie posiadają jedynie tylko rozwiązania 144-te; a wtedy odpowiedni układ nie posiada sił zerowych, a więc nie posiada również sił zmianowych; rodzaj równowagi takiego układu pozostaje przeto jednakowy dla wszystkich wartości parametru λ; rodzaj ten obliczyć można z równania 120-go i 121-go, lub z równania 124-go z uwzględnieniem, jako dla funkcji jednorodnych, równań 146-ych.

Wyznacznik D_F jest funkcją niewiadomej λ; możemy przeto wogóle obliczyć taką wartość λ, przy której $D_F = 0$; lecz pomiędzy pierwiastkami tego równania mogą być również pierwiastki urojone, które w zadaniach fizycznych — jako rzeczywistych — nie mogą być brane pod uwagę; wartość D_F przeto *nie* będzie dla tych pierwiastków równa zeru; dla pierwiastków przeto urojonych niewiadomej λ, obliczonych z równania $D_F = 0$, mamy równowagę, wyrażoną tylko równaniami:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad q_n = 0. \tag{149}$$

Dla pierwiastków zaś rzeczywistych otrzymujemy oprócz tych położeń równowagi jeszcze tyle zbiorów położeń równowagi typu $\frac{q_i}{q_1}$, ile równanie $D_F = 0$ posiada pierwiastków rzeczywistych dla niewiadomej λ. W geometrycznem przedstawieniu tych przypadków, jaki tutaj stosujemy, otrzymamy tyle płaszczyzn wielowymiarowych, równoległych do płaszczyzny $(q_1, q_2, \ldots q_n)$, ile jest pierwiastków rzeczywistych w równaniu $D_F = 0$. Jeżeli wszystkie pierwiastki równania $D_F = 0$ będą urojone, to nie będziemy mieli żadnej płaszczyzny rzeczywistej, przecinającej oś λ; równowaga przeto nastąpi tylko w położeniu, wyrażonem równaniami 144-temi.

Ponieważ równanie $D_F = 0$ w przypadku, gdy funkcja sił jest jednorodna drugiego stopnia spółrzędnych q i linjowa zmiennej λ, jest równaniem algebraicznem całkowitem n-tego stopnia niewiadomych λ, ze spółczynnikami rzeczywistemi, przeto na zasadzie właściwości takich równań, wypowiemy powyższe wnioski w następujący sposób: *krzywa równowagi układów o nieparzystej liczbie stopni swobody* (n—nieparzyste), *musi mieć przynajmniej jeden, a wogóle nieparzystą liczbę punktów zerowych, a więc i rozgałęzień; krzywe zaś równowagi układów o parzystej liczbie stopni swobody mogą nie mieć wcale punktów zerowych, a więc i rozgałęzień, lub mogą mieć parzystą ich liczbę.*

Zależności powyższe przedstawimy obecnie geometrycznie dla przypadku, gdy dany układ posiada dwa stopnie swobody. W tym celu odniesiemy równania 143-cie, 144-te, 145-te i 146-te do trzech osi wzajemnie prostopadłych q_1, q_2 i λ w przestrzeni trójwymiarowej; gałąź równowagi, wyrażona równaniami 144-temi, przedstawi się w tym razie w postaci prostej, pokrywającej się z osią λ; wartości zaś pierwiastków λ równania $D_F = 0$ (lub $D_n = 0$) przedstawią szereg płaszczyzn równoległych do płaszczyzny (q_1, q_2); (wartości te bowiem są niezależne od tych spółrzędnych); w każdej z tych płaszczyzn znajdować się będzie gałąź równowagi, wyrażona równaniami 146-temi, które są równaniami linjowemi jednorodnemi spółrzędnych q_1 i q_2; równania te przeto przedstawiają—dla układu o dwóch stopniach swobody — proste, które leżą w tych płaszczyznach i które przecinają oś λ. Punkty przecięcia się tych płaszczyzn z osią λ będą jednocześnie punktami zerowemi dla gałęzi równowagi, pokrywającej się z osią λ; w tych bowiem punktach również $D_n = 0$.

W ogólnym przypadku, gdy $n > 2$, możemy w tenże sposób mówić o płaszczyznach wielowymiarowych równoległych do płaszczyzny wielowymiarowej, przeprowadzonej przez proste $(q_1, q_2, . q_n)$, i wogóle o krzywych równowagi danego układu.

45. Jednorodna funkcja sił jako równanie równowagi.

Równania równowagi, gdy dana jest funkcja sił, są wogóle następujące:

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial q_n} = 0. \tag{150}$$

Jeżeli funkcja sił F jest jednorodna (dowolnego stopnia) spółrzędnych q_i, to po przemnożeniu każdego z powyższych równań kolejno przez czynniki $q_1, q_2, \cdots q_n$ i po zsumowaniu tych równań, otrzymamy — na zasadzie twierdzenia Euler'a o funkcjach jednorodnych — równanie:

$$s.\ F(q_1, q_2, \cdots q_n; \lambda) = 0, \quad \text{lub inaczej} \quad U = 0, \tag{151}$$

gdzie s jest spółczynnikiem jednorodności danej funkcji sił; *jednorodna przeto funkcja sił, przyrównana do zera, jest również równaniem równowagi*, lecz, oczywiście, równaniem zależnem od równań 150-tych.

Z jednorodności funkcji sił wynika jeszcze następująca jej wybitna właściwość statyczna. Z równania równowagi jednorodnej funkcji sił, t. j. z równania

$$F(q_1, q_2, \cdots q_n; \lambda) = 0, \tag{152}$$

napiszemy n następujących równań identycznych, wziąwszy pod uwagę, że parametr λ jest w tym razie funkcją zmiennych q_i; równania te są następujące:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial q_i} = 0, \tag{153}$$

dla $i = 1, 2, \cdots n$.

Jeżeli przyjmiemy następnie, że pochodne

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_i} = 0, \tag{154}$$

to otrzymamy z równań 153-cich, że również pochodne

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \tag{155}$$

i odwrotnie; czyli, że warunki 154-te wyznaczają położenie równowagi danego układu tak dobrze, jak równania 155-te, oczywiście — byle

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \neq 0, \tag{156}$$

co w naszych zagadnieniach musi być spełnione. Wniosek ten wypowiemy w następujący sposób: *jeżeli funkcja sił jest jednorodna zmiennych q_i, to wartości extremalne tej funkcji przy zmiennych q_i, wyrażone równaniami 150-temi, odpowiadają wartościom extremalnym zmiennej λ, obliczonym z równań 154-tych.*

Położenie więc równowagi układu, którego funkcja jest jednorodna spółrzędnych niezależnych, możemy obliczyć, albo szukając wartości q_i z równań

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = 0,$$

jak to dotychczas stosowaliśmy, lub szukając q_i z równań

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_i} = 0$$

dla λ, obliczonego z równania 153-go.

To ostatnie postępowanie, t. j. obliczanie $\lambda = \lambda_{extr}$ *) nie przedstawia jednakże, mojem zdaniem, żadnych korzyści ani rachunkowych, ani też metodycznych w stosunku do metody, opierającej się na równaniach 150-tych; przeciwnie — pod względem metodycznym — psuje jednolitość obliczania położenia równowagi, ewentualnie sił zerowych, jakie dają równania $\frac{\partial F}{\partial q_i} = 0$.

46. Siła krytyczna układów, złożonych z prętów sztywnych, połączonych z sobą końcami zapomocą przegubów sprężystych.

Przegubem sprężystym dwóch prętów nazywać będziemy taki przegub, który pozwala na rozchylenie się prętów, zbiegających się w tym przegubie, gdy moment rozchylającej pary sił jest proporcjonalny do kąta rozchylonego (analogicznie do przypadku, gdy siła odkształcająca jest proporcjonalna do odkształcenia).

*) Sposób ten obliczania λ_{extr} stosuje prof. S. P. Timoszenko w pracy „Ob ustojcziwosti uprugich sistem", oraz w innych swych pracach; w pracach tych jednakże nie spotykamy się z dowodzeniem równania 151-go i równania 154-go, bez którego nie mamy prawa stosować tego sposobu, gdyż zgodność wyników obliczeń wielu nawet przykładów, jakie autor powyższej pracy przytacza, z wynikami obliczeń zapomocą innych metod, nie upoważnia do twierdzenia, że te równania zawsze pozostają w mocy.

Jeżeli literą M oznaczymy moment rozchylający (odkształcający), a literą α kąt odchylenia, to w myśl tego określenia

$$M = k \cdot \alpha, \tag{157}$$

gdzie k jest spółczynnikiem proporcjonalności, a M momentem rozchylającym, skąd wynika, że praca cząstkowa

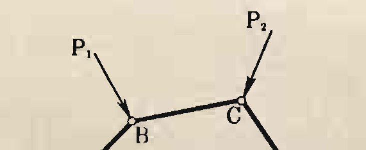
$$d\,L = M \cdot d\alpha = k\,\alpha \cdot d\alpha\,; \tag{158}$$

praca więc — ewentualnie funkcja sił — w tym razie

$$U = \frac{1}{2}\,k\,\alpha^2\,. \tag{159}$$

Zjawisko wyboczenia, jakie występuje w pręcie sprężystym, obciążonym osiowo, może występować również i w układach prętów sztywnych, połączonych ze sobą przegubami sprężystemi (przykład 10-ty, str. 192-ga). Weźmy np. pod uwagę układ prętów sztywnych, połączonych ze sobą zapomocą przegubów; w ten sposób otrzymamy pewną kratownicę. Kratownica ta, zależnie od liczby prętów i od ich ugrupowania, może być geometrycznie sztywną, geometrycznie przesztywnioną, lub geometrycznie zmienną.

Weźmy pod uwagę układ prętów sztywnych*), (t. j. nieodkształcalnych) o pewnej liczbie stopni swobody, a więc układ geometrycznie zmienny, t. j. — układ, który posiada prętów mniej, niż potrzeba do usztywnienia układu, t. j. mniej, niż $(2p - 3)$, gdzie p oznacza liczbę przegubów. Jeżeli na węzły tego układu, które na razie przyjmiemy jako wolne — niesprężyste, działać będą siły, to wogóle nastąpi pod działaniem tych sił zmiana kątów, jakie tworzą między sobą pręty; czyli nastąpi zmiana formy geometrycznej tego układu, którą to zmianę nazwiemy również odkształceniem. Pod działaniem jednakże *szczególnego* układu sił, dany układ prętów pomimo, że jest geometrycznie zmienny, może pozostawać w równowadze tak, iż układ ten będzie miał pozory sztywności; najdrobniejsza jednakże zmiana we wzajemnem poło-



Rys. 11.

*) O takich układach pisałem w „Sprawozdaniach i Pracach" Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego w 1924 r. T. II, z. 1, str. 24-ta i 25-ta.

żeniu tych prętów, np. pewna zmiana kątów, wywołana jakiemibądź czynnikami zewnętrznemi, spowoduje zmianę geometryczną całego układu, która nastąpi pod działaniem sił przyłożonych. Najprostszym przykładem tego może służyć czworobok przegubowy (rys. 11-ty), gdy jeden jego bok będzie unieruchomiony. Czworobok ten jest geometrycznie zmienny o jednym stopniu swobody; pod działaniem więc dowolnych sił, np. P_1 i P_2, zmieni on wogóle swą formę. Możemy jednakże przyłożyć do węzłów tego układu pewien szczególny układ sił, który utrzyma go w niezmienionym stanie. Tym układem sił może być w najprostszym przypadku jedna siła, działająca wzdłuż np. pręta CD; układ ten pod działaniem tej siły nie zmieni swej formy; jeżeli zaś zmienimy nieco formę tego czworoboku, nie zmieniając ani kierunku, ani wielkości tej siły, utrzymującej dany układ w spoczynku, to nastąpi ruch,—nastąpi wogóle zmiana kątów tego czworoboku.

Przyjmijmy następnie, że zmiana kątów pomiędzy prętami, zbiegającemi się w każdym węźle, jest sprężysta, t. j. przyjmijmy, że przeguby, łączące te pręty, są sprężyste, wielkości tych kątów są proporcjonalne do momentów sił zewnętrznych, wywołujących te zmiany; — wtedy powstające momenty sił wewnętrznych, występujących w tych węzłach, będą powstrzymywały układ od zmiany formy, gdy wyprowadzimy go z położenia równowagi. Układ przeto geometrycznie zmienny z węzłami sprężystemi i z prętami sztywnemi może pozostawać w pewnych warunkach w równowadze — nawet po wyprowadzeniu go z położenia równowagi; lub też może pod działaniem sił zewnętrznych w dalszym ciągu odkształcać się; który z tych przypadków nastąpi, zależy od stosunku wartości liczbowej sił zewnętrznych do wartości sił sprężystych, występujących w przegubach.

Przyjmijmy następnie, że spółczynniki sprężystych odkształceń kątów są wielkościami stałemi dla danego układu, wartości zaś wszystkich sił zewnętrznych, utrzymujących dany układ w równowadze, mogą się proporcjonalnie zmieniać. Oczywistem jest, że proporcjonalna zmiana tych wartości nie spowoduje zmiany równowagi danego układu, gdy ten układ był w równowadze, a dopiero po odchyleniu tego układu z położenia równowagi, siły zewnętrzne mogą go dalej odkształcać, o ile są one dostatecznie wielkie, lub też nie wywołają one dalszego odkształcenia, jeżeli węzły są dostatecznie sprężyste, i układ, po usunięciu czynników odkształcających, powrócić może w tym razie do stanu pierwotnego, wbrew działaniu sił zewnętrznych. Ten lub ów przypadek nastąpi w zależności od wielkości spółczynnika proporcjonalności sił zewnętrznych; spółczynnik ten spełnia rolę spółczynnika λ, poprzednio określonego. Przy pewnej przeto wartości spółczynnika λ, układ odchylony z położenia równowagi, może powrócić do położenia równowagi,—lub też może dalej się odkształcać. Najmniejszą wartość tego spółczynnika, którego najdrobniejsze powiększenie wywoła geometryczną zmianę układu, po najdrobniejszem jego odkształceniu, nazwiemy spółczynnikiem *krytycznym*, lub *siłą krytyczną*; siły te można podporządkować pod pojęcia sił zerowych, lub sił zmianowych.

Rozważania te sformułujemy w ten sposób: *każdy układ prętów sztywnych geometrycznie zmienny z przegubami sprężystemi, będący w równowadze pod działaniem pewnego szczególnego układu sił, może być w równowadze stałej, lub niestałej, zależnie od wartości spółczynnika proporcjonalności λ danych sił.*

Jako szczególny przypadek zastosowania układów prętów ze sprężystemi przegubami, przytoczymy prosty pręt, który będziemy uważać za układ geometrycznie zmienny; uważać go bowiem będziemy za złożony z odcinków sztywnych, połączonych ze sobą sprężystemi przegubami, w których występują siły wewnętrzne w ten sposób, że w stanie naturalnym, t. j. bez działania sił zewnętrznych, przyjmuje on formę prostą. Układ ten, pod działaniem siły osiowej ściskającej o dowolnej wielkości, pozostanie prostym; lecz, po odchyleniu go z linji prostej i następnie po usunięciu siły odchylającej, może on się wyprostować pod działaniem sił sprężystości, lub może dalej się giąć pod działaniem sił zewnętrznych, wbrew działaniu sił sprężystych, występujących w przegubach; który z tych przypadków nastąpi, zależy od wielkości parametru λ sił, na niego działających.

Wartość liczbowa tego spółczynnika, po przekroczeniu którego pręt rozpoczyna gięcie, lub przy której, pozostając w stanie prostym, zmienia rodzaj równowagi,—jest siłą krytyczną, jest siłą Euler'owską.

47. Zastosowanie pojęcia maximum i minimum funkcji sił do wyrażenia równowagi i jej rodzajów.

Widzimy z powyższych rozpatrywań, że postępowanie rachunkowe dla obliczenia równowagi i obliczenia jej rodzajów z funkcji sił jest takie same, jakie stosujemy przy obliczaniu maximów i minimów — wogóle extremów pewnej funkcji. Warunki przeto równowagi i jej rodzajów możemy wypowiedzieć również w następujący sposób: jeżeli funkcja sił posiada wartość extremum dla pewnych wartości q, to siły w położeniu, określonem temi spółrzędnemi, są wogóle w równowadze; jeżeli przytem funkcja sił posiada maximum dla tych wartości, to mamy równowagę zupełnie stałą; gdy zaś posiada minimum, to mamy równowagę zupełnie niestałą; jeżeli zaś extremum tej funkcji nie jest ani maximum, ani minimum, to mamy równowagę różnego rodzaju.

Warunek powyższy, że równowaga jest stała, gdy funkcja sił jest maximum, znaleźć może interpretację fizyczną w następującem pojmowaniu równowagi i jej rodzajów: jeżeli siły wykonają maximum pracy podczas wszelkich dowolnych przesunięć, to siły te nie są już w stanie wykonać żadnej pracy, nie może więc powstać ruch;—równowaga przeto musi być przy tym warunku stałą.

48. Dynamiczna miara siły wyboczenia.

Prof. Sommerfeld*) ilustruje w następujący sposób działanie siły Euler'a. Pręt sprężysty, umocowany jednym końcem sztywno i skierowany swobodnym końcem *ku górze*, obciążony jest osiowo; po odchyleniu go od położenia pionowego i następnie po puszczeniu go swobodnie, będzie on wogóle drgał około położenia pionowego. Jeżeli siła sprężystości pręta (która odpowiada sprężystości przegubów), przyprowadzająca go do położenia pionowego, jest znaczna, to pręt szybko wraca do tego położenia, a następnie, wskutek nabytej energji kinetycznej, oddala się od tego położenia; w ten sposób powstają mniej lub więcej szybkie drgania około położenia pionowego. Jako miarę sprężystości tego pręta przyjmiemy wielkość okresu czasu jego wahnięcia; inaczej — liczba wahnięć na jednostkę czasu może być uważana za miarę sprężystości tego pręta.

Jeżeli ciężar, przyczepiony do pręta, powiększymy do tego stopnia, że drgania pomimo odchylenia przestaną zachodzić, to znaczyć będzie, że siła sprężystości, przywracająca ten pręt do położenia pionowego, jest zrównoważona i pręt przy ciężarze o pewnej, wartości, po odchyleniu go, nie powróci do położenia pionowego.

Po tem omówieniu autor przytacza doświadczenia, które stwierdzają, że ciężar, pod działaniem którego pręt przestaje drgać po odchyleniu go od pionu, równy jest rzeczywiście sile Euler'owskiej. Częstotliwość więc tych drgań może być miarą zbliżenia się przyczepionego ciężaru do wartości siły Euler'owskiej; a mianowicie, o ile będzie mniejsza częstotliwość, to będzie znaczyć, że siła obciążająca zbliżać się będzie do siły Euler'owskiej. Ciekawe zjawisko występuje, gdy pręt skierowany jest swobodnym końcem

*) Zft. d. V. d. Ing. 1905 str. 1329.

ku dołowi, a górnym końcem umocowany jest sztywno; gdy bowiem odchylimy go od położenia pionowego, wtedy, ze zbliżaniem się wartości siły obciążającej do wartości siły Euler'owskiej, liczba drgań pręta zbliża się asymptotycznie do liczby wahnięć zwykłego wahadła, swobodnie zawieszonego, o długości równej długości danego pręta; t. j. pręt sprężysty, umocowany sztywno górnym końcem i obciążony siłą Euler'owską, lub większą, zachowuje się w ten sposób, jak gdyby nie był sprężystym, a był prętem sztywnym umocowanym przegubowo, na którego końcu zawieszono dany ciężar.

49. Równowaga sił, nie mających funkcji, i jej rodzaje.

Podstawą obliczenia równowagi i jej rodzajów sił, nie mających funkcji, jest to samo prawo energietyczne, na którem oparliśmy poprzednie obliczenie, t. j. prawo równowartości pracy i energji kinetycznej. Warunkiem przeto równowagi jest, ażeby praca wirtualna sił, przyłożonych do punktu swobodnego, była równa zeru, co wyrazimy równaniem 42-giem, str. 40-ta.:

$$\delta L = \Sigma(P_{k,x} \cdot \delta x_k + P_{k,y} \cdot \delta y_k + P_{k,z} \cdot \delta z_k) = 0. \qquad (160)$$

Jeżeli zaś punkt jest nieswobodny, t. j. gdy pomiędzy spółrzędnemi x, y, z zachodzą równania połączeń, to zawsze możemy odpowiednią ich liczbę wyrugować i doprowadzić powyższe równanie do następującej postaci (rów. 59-te):

$$\delta L = \Sigma\, Q_k \cdot \delta q_k = 0, \qquad (161)$$

gdzie wielkości Q_k są funkcjami spółrzędnych niezależnych q_i. Przekształcenie to jest możliwe, gdy siły $P_{k,x}, \cdots$ są funkcjami tylko spółrzędnych punktów przyłożenia tych sił, lecz *nie* ich pochodnych, co i w poprzednich rozpatrywaniach było zastrzeżone.

Ponieważ przyrosty δq_k są niezależne, przeto warunkami równowagi sił, nie mających funkcji i będących funkcjami tylko spółrzędnych punktów przyłożenia, są takie same równania, jak dla sił, posiadających funkcję sił, t. j. równania następującej postaci (rów. 60-te):

$$Q_k = 0. \qquad (162)$$

Ażeby następnie orzec o rodzaju równowagi, zrobimy drugie dowolne—wirtualne przesunięcie, jak to omówiliśmy w § 27-mym; podczas tego przesunięcia wartości sił Q_k otrzymują wogóle przyrosty δQ_k, a więc pracę podczas tego przesunięcia obliczymy ze wzoru:

$$\delta^2 L = \Sigma\, \delta Q_k \cdot \delta q_k, \qquad (163)$$

w którym symbolem $\delta^2 L$ oznaczyliśmy różnicę wartości prac, jakie siły wykonały podczas drugiego i pierwszego przesunięcia z uwzględnieniem, że w przypadku równowagi praca podczas pierwszego przesunięcia równa się zeru.

Ponieważ siły Q_k są funkcjami spółrzędnych $q_1, q_2, \cdots q_n$ i parametru λ, i przyjąwszy wartość λ narazie za stałą, napiszemy:

$$\delta Q_k = \frac{\partial Q_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial Q_k}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial Q_k}{\partial q_n} \cdot \delta q_n \tag{164}$$

i, po podstawieniu tego wyrazu do równania 163-ego, otrzymamy wartość pracy podczas drugiego przesunięcia:

$$\delta^2 L = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Q_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_k + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Q_k}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 \cdot \delta q_k + \cdots + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Q_k}{\partial q_n} \cdot \delta q_n \cdot \delta q_k,$$

lub też krócej

$$\delta^2 L = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \cdot \delta q_k. \tag{165}$$

W tym wzorze można uważać wartości wyrazów $\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}$ w bliskości położenia równowagi za stałe, gdyż w te wyrazy należy podstawić wartości q, obliczone z równań 162-ich; inaczej — pochodne te są funkcjami spółrzędnych, odpowiadających położeniu równowagi. Jeżeli przeto równowaga, określona równaniami 162-emi, ma być stała, powinien wyraz 165-ty, wyrażający wartość pracy podczas drugiego wirtualnego przesunięcia, być ujemny dla wszystkich dowolnych wielkości δq_i i δq_k; a to może nastąpić, stosownie do wzorów 121-ych, wtedy, gdy będą spełnione następujące nierówności:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} < 0; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} < 0. \tag{166}$$

Jeżeli te warunki nie będą spełnione, a będą spełnione tylko warunki 162-gie, to równowaga danego układu będzie niestała, lub różna. Przytem należy zwrócić uwagę, że podstawa tego obliczenia jest jednakowa, jak dla sił zachowawczych, tak i dla sił niezachowawczych, z warunkiem dla obydwóch przypadków, że podczas wykonywania pracy wirtualnej, nie zachodzi rozproszenie energji; przypadek ten bowiem nie pozwoliłby nam stosować zasady zachowania energji.

Z tych warunków, jako szczególny przypadek, można wyprowadzić warunki równowagi i jej rodzajów, gdy siły posiadają funkcję sił. Należy tylko wziąć pod uwagę, że w tym razie

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}, \tag{167}$$

gdzie U jest funkcją spółrzędnych q_i.

Po podstawieniu wartości 167-mych do równań 162-gich, otrzymamy warunki równowagi, wyprowadzone w § 22-gim; po podstawieniu zaś wartości 167-mych do nierówności 166-tych, otrzymamy nierówności 121-sze.

Różnica matematyczna pomiędzy kryterjami rodzajów równowagi dla przypadków, gdy siły posiadają i gdy nie posiadają funkcji sił, jest ta, że dla sił, nie posiadających funkcji sił, wyznaczniki 166-te nie są symetryczne względem przekątni; dla sił bowiem, nie posiadających funkcji sił, wyrazy

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \neq \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \quad \text{i t. d.}, \tag{168}$$

gdy tymczasem dla sił, posiadających funkcję na zasadzie równań 26-tych, wyrazy te są wzajemnie równe, gdyż wyraz:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}; \quad \text{a wyraz} \quad \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1}; \tag{169}$$

a więc wyrazy te są równe (przy zwykłych zastrzeżeniach, stawianych w matematyce); wyznaczniki przeto są symetryczne.

50. Równowaga, gdy równania połączeń posiadają czas jawnie.

W powyższych rozważaniach przyjęliśmy równania połączeń, w które nie wchodzi czas jawnie (§ 5-ty); w razie zaś, jeżeli w równanie połączeń wchodzi czas jawnie, to wielkość t wejdzie również do funkcji sił.

Dla obliczenia równowagi sił, przyłożonych do takiego układu, zastosujemy powyższe metody, przyjąwszy, że t = stałej wielkości, jak powiedzieliśmy to w § 5-tym. Zwrócić jednakże należy uwagę na tę okoliczność, że wyraz pracy wirtualnej, obliczonej przy założeniu t = stałej, może służyć tylko dla wyrażenia *równowagi* danego układu; nie może zaś służyć np. dla wyrażania rzeczywistego jego ruchu; *praca bowiem sił podczas przesunięcia rzeczywistego* jest wogóle inna, niż ta, którą przyjęliśmy, w myśl powyższego założenia, dla t = stałej; siły bowiem odporowe podczas przesunięcia rzeczywistego, t. j. przy zmiennem t, wykonają pewną pracę, choć są one prostopadłe do toru, po którym punkt się porusza; nie są one jednakże prostopadłe do toru rzeczywistego, t. j. do przesunięcia rzeczywistego; tor bowiem w rzeczywistości się porusza, punkty przeto przyłożenia sił odporowych wykonają przesunięcia złożone. Wykonają one przesunięcia wzdłuż toru (względne); podczas tych przesunięć siły odporowe wykonają pracę równą zeru; wykonają one jednakże jednocześnie przesunięcia razem z torem (unoszące), podczas których praca sił odporowych wogóle — *nie* równa się zeru. Pojęcie więc pracy wirtualnej jest ogólniejsze od pojęcia pracy rzeczywistej, czy też możliwej. Z tego ostatniego powodu niektórzy autorzy uważają, iż nazwanie pracy wirtualnej pracą możliwą, w znaczeniu pracy, wykonanej przez siły podczas przesunięcia możliwego, — jest w tym razie niesłuszne; nie powinno to jednakże prowadzić do błędnego pojmowania.

ROZDZIAŁ VI.

UKŁADY O NIESKOŃCZONEJ LICZBIE STOPNI SWOBODY.

(POCZĄTKI RACHUNKU WARJACYJNEGO).

51. Sformułowanie zadania.

Położenie każdego układu materjalnego jest wyznaczone spółrzędnemi niezależnemi (§ 1-szy). Jeżeli układ ma skończoną liczbę stopni swobody, to spółrzędne te, gdy siły, na niego działające, są w równowadze, obliczymy jako niewiadome z odpowiednich równań równowagi; jeżeli zaś układ posiada nieskończoną liczbę stopni swobody, to mamy do obliczenia nieskończenie wiele spółrzędnych niewiadomych; niewiadome te, t. j. spółrzędne mogą być obliczone z funkcjonalnego związku, jaki zachodzi pomiędzy niemi, o ile ten