ROZDZIAŁ I.

STOPNIE SWOBODY I PRZESUNIĘCIA WIRTUALNE.

1. Spółrzędne niezależne i stopnie swobody.

Punkt, który może się poruszać w przestrzeni w każdym dowolnym kierunku, nazywamy *swobodnym*. W myśl tego określenia balon np., puszczony swobodnie, może być uważany za punkt swobodny; tenże balon, uwiązany na sznurze, będzie punktem *nieswobodnym*; sznur bowiem ogranicza jego ruch.

Dla wyznaczenia np. położenia punktu swobodnego w przestrzeni trójwymiarowej potrzebną i wystarczającą jest znajomość trzech jego spółrzędnych, np. x, y, z; te trzy spółrzędne są konieczne i wystarczające dla wyznaczenia jego położenia; gdybyśmy bowiem obrali czwartą spółrzędną oprócz x, y, z, np. jeszcze odległość tego punktu od początku układu spółrzędnych, to jedna z tych spółrzędnych byłaby w tym razie zbędną; zachodzi bowiem między temi czterema wielkościami zależność geometryczna; — zachodzi pewne równanie, wskutek czego trzy tylko spółrzędne będą niezależne i trzy spółrzędne można obrać z tych czterech dowolnie; czwartą bowiem można już obliczyć.

Spółrzędnemi, wyznaczającemi położenie pewnego układu punktów, mogą być wogóle pewne odległości od otaczających punktów, które to punkty uważać będziemy za nieruchome; mogą być również np. kąty, jakie tworzą promienie wodzące, wyprowadzone z nieruchomych punktów przestrzeni do obranych punktów danego układu; mogą być również pewne powierzchnie, które w przecięciu się wyznaczają położenie punktu. Wogóle—spółrzędnemi mogą być dowolne elementy geometryczne, byle tylko wyznaczały one jednoznacznie położenie danego punktu, — czy też danego układu punktów. Stosowane bywają do obliczeń spółrzędne prostokątne x, y, z, co, oczywiście, nie wyklucza stosowania i innych spółrzędnych.

Sposoby ograniczenia ruchu punktu mogą być różne; od tych ograniczeń zależeć będzie liczba spółrzędnych niezależnych, oznaczających jego położenie, t. j. zależeć będzie liczba jego stopni swobody. Jeżeli np. postawimy warunek, że dany punkt ma się poruszać np. po danej powierzchni, której równanie jest dane w postaci np. $f(x, y, z) = 0$, to dla wyznaczenia położenia punktu na tej powierzchni nie możemy już obrać *dowolnie* trzech spółrzędnych, lecz tylko dwie; trzecią bowiem można już obliczyć z równania powierzchni; mówimy w tym razie, że punkt w tych warunkach posiada tylko dwa stopnie swobody. Gdy postawimy warunek, żeby dany punkt poruszał się po danej krzywej przestrzennej, wtedy warunek ten odejmuje danemu punktowi dwa stopnie swobody; równanie bowiem krzywej w przestrzeni (trójwymiarowej) wyraża się dwoma równaniami; w tym razie dla wyznaczenia położenia punktu w przestrzeni (trójwymiarowej) wystarczy jedna tylko spółrzędna; o takim punkcie powiemy, że posiada on jeden tylko stopień swobody. Wreszcie, gdy postawimy warunek, że punkt ma się znajdować jednocześnie np. na trzech powierzchniach, to położenie jego wogóle jest już wyznaczone; powiemy wtedy, że punkt taki posiada zero stopni swobody, czyli nie może otrzymać żadnego przesunięcia; spółrzędne tego punktu obliczymy w tym razie jako trzy niewiadome danych trzech równań.

W tenże sposób możemy mówić o spółrzędnych niezależnych pewnego zbioru punktów, inaczej—pewnego układu punktów; wtedy powiemy, że dany układ punktów posiada tyle *stopni swobody*, ile trzeba *spółrzędnych niezależnych* dla wyznaczenia położenia wszystkich tych punktów.

Układem niezmiennym, inaczej—sztywnym, lub krótko *bryłą*, nazwiemy zbiór punktów, których wzajemne *odległości* nie zmieniają się podczas naszych rozpatrywań. Dla wyznaczenia położenia takiej bryły w przestrzeni, t. j. dla wyznaczenia położenia każdego jej punktu, koniecznym i wystarczającym warunkiem jest znajomość położenia trzech jej punktów,—byle nie leżących na jednej prostej; położenie bowiem każdego innego punktu tej bryły jest w tym razie już wyznaczone np. przez jego odległości od tych trzech punktów. Dla wyznaczenia położenia tych trzech punktów potrzebna jest znajomość tylko sześciu spółrzędnych niezależnych; położenie bowiem trzech punktów w przestrzeni wymaga wogóle dziewięciu spółrzędnych np. spółrzędnych x, y, z; lecz z chwilą, gdyśmy obrali położenie tych trzech punktów, to przez to są już określone odległości pomiędzy niemi, ponieważ przyjęliśmy w tym razie, że te odległości są niezmienne; wyrazimy je przeto trzema równaniami typu:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2_{1,2} \text{ i t. p.}; \quad (1)$$

a więc z powyższych dziewięciu spółrzędnych może być tylko sześć *niezależnych*; pozostałe bowiem trzy można obliczyć z tych trzech równań; na podstawie tego mówimy, że bryła swobodna posiada sześć stopni swobody. Takiemi spółrzędnemi mogą być niekoniecznie spółrzędne kartezjuszowskie x, y, z, lecz i inne spółrzędne, np. trzy spółrzędne dowolnego punktu tej bryły i trzy kąty, tak zwane Euler'a, — razem więc sześć. Na podstawie tych rozważań postawimy określenie:

liczbę spółrzędnych niezależnych, wyznaczających położenie danego układu, nazwiemy stopniami swobody tego układu.

Jeżeli postawimy warunek, że pewien punkt danej bryły podczas jej ruchu ma pozostawać na pewnej powierzchni, której równanie jest dane w postaci np.:

$$f(x, y, z) = 0,$$

to odejmujemy przez to danej bryle jeden stopień swobody; spółrzędne bowiem tego punktu muszą zaspokoić równanie danej powierzchni; bryła przeto, której jeden punkt ma pozostawać na danej powierzchni i gdy pozatem jest swobodną, posiada tylko pięć stopni swobody. Gdy równania, wyrażające ograniczenia ruchu, nazwiemy *równaniami połączeń*, to wniosek powyższy wypowiemy: *każde równanie połączeń odejmuje danemu układowi jeden stopień swobody.*

Jeżeli zaś postawimy np. warunek, żeby trzy punkty danej bryły poruszały się po trzech linjach, których równania są niezależne (t. j. gdy pomiędzy parametrami tych równań niema żadnego funkcjonalnego związku), to bryła taka posiada zero stopni swobody, t. j. będzie ona unieruchomiona.

Układem brył sztywnych, lub mechanizmem nazwiemy pewną liczbę brył sztywnych, które są z sobą połączone w jaki bądź sposób, lecz ściśle określony. O układzie złożonym z *k* brył swobodnych (t. j. nie połączonych ze sobą, ani też z otaczającemi bryłami) powiemy, że posiada on *6 k* stopni swobody. Jeżeli zaś np. dwie bryły takiego układu połączone są przegubem, t. j. jeżeli posiadają jeden punkt wspólny, około którego mogą się kręcić*), i ten punkt może poruszać się razem z bryłami, to takie połączenie odejmuje temu układowi trzy stopnie swobody; gdy bowiem oznaczymy spółrzędne tego punktu, jako należącego do jednej bryły, literami (x_1, y_1, z_1), a jako należącego do drugiej bryły — literami (x_2, y_2, z_2), to warunek połączenia przegubowego wyrazimy trzema równaniami:

$$x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2.$$

Każde przeto połączenie przegubowe dwóch brył w przestrzeni trójwymiarowej odejmuje danemu układowi trzy stopnie swobody; a na płaszczyźnie—dwa stopnie swobody. Lecz jeżeli np. *trzy* bryły w przestrzeni trójwymiarowej połączone są jednym przegubem, to na podstawie podobnych do poprzednich rozumowań powiemy, że taki przegub odbiera danemu układowi sześć stopni swobody; a gdy układ jest płaski i ruch może odbywać się tylko w jego płaszczyźnie, to taki przegub odejmuje cztery stopnie swobody i t. p.

2. Stopnie swobody układów płaskich.

Jako szczególny przypadek układów rozpatrzymy zbiór punktów, znajdujących się w jednej płaszczyźnie i mogących poruszać się w tej płaszczyźnie; płaszczyznę taką nazwiemy *płaszczyzną odniesienia*. Punkt swobodny posiada na płaszczyźnie dwa stopnie swobody, co wynika z poprzednich rozważań; trzy bowiem spółrzędne punktu swobodnego w przestrzeni (trójwymiarowej) muszą w tym razie zaspokoić równanie płaszczyzny, po której ma się on poruszać, wskutek czego odpada jeden stopień swobody. Wniosek ten jest widoczny również bezpośrednio; dla wyznaczenia bowiem położenia punktu na danej płaszczyźnie wystarczają dwie jakiekolwiek spółrzędne (np. spółrzędne prostokątne lub biegunowe). Zbiór punktów, leżących w płaszczyźnie i sztywno pomiędzy sobą związanych, nazywać będziemy *figurą płaską*, lub krótko figurą. Dla wyznaczenia położenia figury płaskiej w jej płaszczyźnie, potrzebna jest znajomość trzech niezależnych spółrzędnych, np. dwóch dla wyznaczenia położenia jednego dowolnego jej punktu oraz jednej spółrzędnej, np. kąta, jaki tworzy dowolna prosta,

*) Słowo „obracać" chciałbym stosować tylko do obrotu około osi.

sztywno połączona z tą figurą, z inną prostą, którą przyjmujemy za nieruchomą. Jeśli tą figurą jest np. odcinek prostej, to potrzebną jest dla wyznaczenia jego położenia w danej płaszczyźnie znajomość: np. dwóch spółrzędnych jednego jego punktu oraz np. kąta, jaki tworzy ten odcinek z pewną prostą, należącą do płaszczyzny nieruchomej; a więc razem potrzebne są trzy spółrzędne.

Jeżeli posiadamy w danej płaszczyźnie k figur płaskich swobodnych, to mówimy, że cały ten układ posiada $3k$ stopni swobody. Jeżeli postawimy warunek, że np. dwie z takich figur posiadają jeden punkt wspólny, t.j. że dwie figury połączone są wspólnym przegubem, około którego mogą się obracać, to warunek ten wyrazimy analitycznie, na zasadzie poprzednich rozważań, że spółrzędne (x_1, y_1) tego punktu, jako należącego do figury pierwszej, są równe spółrzędnym (x_2, y_2) tegoż punktu figury drugiej, t.j. że:

$$x_1 = x_2 \; ; \qquad y_1 = y_2 \; ;$$

warunek przeto, że figury płaskie posiadają wspólny przegub, wyraża się dwoma równaniami; a więc odejmuje on danemu układowi dwa stopnie swobody, cośmy już zauważyli w § poprzednim.

Trzy np. swobodne figury, mogące poruszać się w jednej płaszczyźnie, posiadają dziewięć stopni swobody; jeżeli zaś te figury połączone są ze sobą — po dwie — przegubami, to odejmujemy przez to danemu układowi $3 \cdot 2^0 = 6^0$ stopni swobody; dany układ przeto w tym przypadku posiada tylko $9^0 - 6^0 = 3^0$ stopnie swobody, t. j. tyle, ile potrzeba spółrzędnych dla wyznaczenia jego położenia w płaszczyźnie; co jest oczywiste, gdyż w ten sposób połączone trzy figury tworzą jedną figurę sztywną, która, jak już wiemy, posiada na płaszczyźnie trzy stopnie swobody.

Gdybyśmy wzięli cztery figury, np. cztery pręty, i połączyli je wzajemnie czterema przegubami, to układ taki posiadałby

$$s^0 = 3 \cdot 4^0 - 4 \cdot 2^0 = 4^0,$$

t.j. cztery stopnie swobody (s oznacza liczbę stopni swobody). Z tych 4-ch spółrzędnych można sobie wyobrazić jedną jako np. kąt, jaki tworzą z sobą dwa dowolne boki tego czworoboku, a trzy spółrzędne są spółrzędnemi położenia całego czworoboku jako już sztywnego. W ten sposób układ złożony z n figur, połączonych ze sobą po dwie przegubami, posiada $s = 3 \cdot n^0 - 2 \cdot n^0 = n^0$ stopni swobody, z których $(n - 3)$ wyznaczają postać samej figury; pozostałe zaś 3 spółrzędne wyznaczają położenie całego układu na płaszczyźnie odniesienia. Niezależne spółrzędne, które wyznaczają położenie części układu względem innych części tegoż układu, nazwiemy *spółrzędnemi wewnętrznemi;* spółrzędne zaś, które wyznaczają położenie całego układu względem płaszczyzny odniesienia, nazwiemy *spółrzędnemi zewnętrznemi.* Swobodny przeto układ płaski posiada trzy zewnętrzne stopnie swobody i może posiadać pewną liczbę stopni swobody wewnętrznej; jeżeli zaś jest on sztywny, to posiada zero stopni swobody wewnętrznej, a trzy stopnie swobody zewnętrznej.

Łańcuch o n ogniwach, znajdujący się na płaszczyźnie i mający dwa końce umocowane, posiada $n-1$ przegubów, co odejmuje mu $2 \cdot (n-1)$ stopni swobody; dwa końce umocowane (przegubowo) odejmują mu $2 \cdot 2^0$ stopnie swobody; łańcuch przeto taki posiada

$$s^0 = n \cdot 3^0 - (n-1) \cdot 2^0 - 2 \cdot 2^0 = (n-2)^0 \text{ stopni swobody.} \quad (2)$$

Możemy również uważać taki łańcuch za złożony z $(n+1)$ prętów, odcinek bowiem między punktami zawieszenia uważać można za pręt unieruchomiony; wtedy liczba stopni swobody na podstawie poprzednich rozważań wyrazi się wzorem:

$$s^0 = (n+1) \cdot 3^0 - (n+1) \cdot 2^0 - 3^0 = (n-2)^0$$

stopni swobody,—jak porzednio; unieruchomienie bowiem $(n+1)$-ego pręta odejmuje danemu układowi trzy stopnie swobody. Dla wyznaczenia przeto położenia w płaszczyźnie łańcucha o trzech prętach, zawieszonego w dwóch punktach, potrzebna jest znajomość $3 \cdot 3^0 - 2 \cdot 2^0 - 4^0 = 1$-ej spółrzędnej; co można również bezpośrednio geometrycznie stwierdzić.

Jeżeli do danego płaskiego układu prętów dołączymy jeden nowy pręt swobodny, to powiększymy liczbę stopni swobody tego układu o trzy stopnie; lecz jeżeli postawimy warunek, ażeby ten nowy pręt łączył przegubami dwa dowolne punkty tegoż układu, to warunek ten odejmuje mu wogóle 4 stopnie swobody; czyli każdy, w ten sposób dodany pręt, odejmuje danemu układowi jeden stopień swobody.

Do tegoż wniosku dojdziemy również w następujący sposób: gdy wyrazimy warunek dołączenia nowego pręta równaniem typu:

$$(x_k - x_i)^2 + \cdots \quad = l^2_{k,i},$$

wyrażającem, że odległość pomiędzy punktem k — tym a i — tym danego układu jest stałą, wtedy każde takie równanie odejmie danemu układowi, na zasadzie poprzednich rozważań, jeden stopień swobody; przez dodanie, lub odjęcie przeto pewnej liczby prętów danemu układowi możemy dowolnie zmieniać ilość jego stopni swobody.

3. Liczba stopni swobody danego układu nie zależy od rodzaju układu spółrzędnych.

Jeżeli liczba stopni swobody pewnego układu obliczona jest na podstawie pewnych spółrzędnych (np. spółrzędnych prostokątnych x, y, z), to liczba stopni swobody tego układu jest ta sama, gdy obliczymy ją na podstawie innych spółrzędnych, wyznaczających położenie układu; np. na podstawie spółrzędnych biegunowych; czyli liczba stopni swobody danego układu (danego mechanizmu) nie zależy od rodzaju spółrzędnych.

Ażeby tego dowieść ogólnie, oznaczymy literami $q_1, q_2, \cdots q_n$ (zamiast $x_1, x_2, \cdots y_1, y_2$) spółrzędne niezależne, wyznaczające położenie danego układu; wtedy z określenia tych spółrzędnych wynika, że każda inna spółrzędna (np. długość promienia wodzącego, lub kąty kierunkowe i t. p.) powinna dać się wyrazić na zasadzie geometrycznych stosunków pewną funkcją obranych spółrzędnych $q_1, q_2, \cdots q_n$.

Oznaczywszy więc nowe spółrzędne literami $p_1, p_2, \cdots$, napisać możemy następujące równania:

$$p_1 = f_1 (q_1, q_2, \cdots q_n); \; p_2 = f_2 (q_1, q_2, \cdots q_n); \text{ i t. d.}$$

Jeżeli te nowe spółrzędne p mają być spółrzędnemi niezależnemi, wystarczającemi do wyznaczenia położenia danego układu, to wszystkie spółrzędne q, powinny dać się obliczyć z tych równań, co może nastąpić tylko wtedy, gdy równań typu $p_1 = f_1 (q_1, q_2, \cdots q_n)$ będzie tyle, ile jest niewiadomych q, t. j. gdy będzie ich n; a więc, jeżeli n spółrzędnych niezależnych q wyznaczały położenie pewnego układu, to liczba niezależnych spółrzędnych p, które również wyznaczają położenie tego układu, musi być ta sama. *Liczba* przeto *stopni swobody nie zależy od rodzaju układu spółrzędnych*; jest ona jego cechą — jest jego *niezmiennikiem*.

4. Przesunięcia wirtualne i ich wzajemne zależności.

Każde, nieskończenie małe, zupełnie *dowolne* przesunięcie danego punktu, nazwano przesunięciem *wirtualnem*. Pojęcie to zostało wprowadzone dla odróżnienia takiego dowolnego przesunięcia punktu od przesunięcia, wywołanego danemi siłami, przyłożonemi do tego punktu, które to przesunięcie jest przez te siły ściśle określone; nazywają je też przesunięciem *rzeczywistem*. Oczywiście, wyobrazić sobie musimy, że przesunięcia wirtualne są wykonane jakiemiś czynnikami fizycznemi, jakiemiś siłami, lecz tych czynników, tych sił nie bierzemy pod uwagę w naszych rozpatrywaniach; przesunięcia zaś rzeczywiste są wykonane danemi siłami i są przez to ściśle określone. Przesunięcia wirtualne mają więc charakter czysto geometryczny i są niezależne od sił, rozpatrywanych w danem zadaniu;—przesunięcia takie oznaczać będziemy symbolem δ; a więc δx, δs i t. d. są to nieskończenie małe odcinki prostej zaopatrzone strzałkami; zresztą zupełnie dowolne tak co do długości, jak i co do kierunku.

Położenie n punktów swobodnych w przestrzeni trójwymiarowej jest wyznaczone $3\,n$ spółrzędnemi niezależnemi. Punkty te bywają ograniczone w swym ruchu, jakeśmy to już wyżej mówili, np. warunkami, że pewne z nich, lub każdy z nich podczas ruchu zmuszony jest pozostawać np. na danych powierzchniach, lub na danych linjach. Warunki takie wyrazimy wogóle równaniami o postaci:

$$f_r(x_k\,,\,y_k\,,\,z_k) = 0\,; \tag{3}$$

litery x_k, y_k, z_k oznaczają spółrzędne punktów, które mają pozostawać, jak w danym przypadku, na powierzchni, wyrażonej równaniem 3-ciem, litera zaś r oznacza liczbę porządkową tych funkcyj od 1-szej do h-tej. Gdy więc dane jest h takich równań i gdy $h < 3n$, wtedy dany układ będzie posiadał $(3n - h)$ stopni swobody (§ 1-szy).

Gdyby wszystkie $3n$ spółrzędne były niezależne, mielibyśmy wtedy $3\,n$ niezależnych przesunięć, lub, inaczej mówiąc, $3\,n$ niezależnych przyrostów typu $\delta x, \delta y, \delta z$; lecz jeżeli choć niektóre z tych punktów są nieswobodne, to te przyrosty nie są już niezależne; pomiędzy niemi zachodzić będą następujące równania:

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_k} \cdot \delta x_k + \frac{\partial f_r}{\partial y_k} \cdot \delta y_k + \frac{\partial f_r}{\partial z_k} \cdot \delta z_k = 0\,, \tag{4}$$

wynikające z tego, iż równania 3-cie muszą być zaspokojone również spółrzędnemi nowego ich położenia, t. j. spółrzędnemi

$$x_k + \delta x_k\,,\; y_k + \delta y_k\,,\; z_k + \delta z_k\,.$$

Równań 4-tych będzie tyle, ile było równań, ograniczających ruch, t. j. ile było równań typu 3-go; a ponieważ przyjęliśmy, iż tych równań jest h, posiadamy przeto w tym razie tylko $(3n-h)$ *przesunięć niezależnych;* pozostałe zaś przesunięcia, które możemy wykonać, można już z tych równań obliczyć; *przesunięć* przeto *niezależnych jest tyle, ile dany układ posiada stopni swobody.*

Ograniczenia przesunięć mogą być również dane w formie analitycznej, bez ich geometrycznego znaczenia; mogą być dane wogóle jako funkcjonalne związki pomiędzy *różnemi* spółrzędnemi danego układu; np. — w postaci:

$$f_r(x_k,\ x_m,\ y_h, \cdots z_n) = 0; \tag{5}$$

wtedy pomiędzy przesunięciami, t. j. pomiędzy przyrostami typu δx, δy i δz zajdą pewne związki, które obliczymy, nadawszy spółrzędnym x, y, z i t. d. przyrosty δx, δy, δz z odpowiedniemi wskaźnikami. Związki te będą miały postać równań 4-tych, które odejmą również danemu układowi tyle stopni swobody, ile jest tych związków tak, — jak poprzednio. Różnica pomiędzy tem a poprzedniem ograniczeniem jest ta, że obecnie nie mamy tego bezpośredniego geometrycznego znaczenia równań połączeń, t. j. równań 5-tych, jakie było dane poprzednio; w tym razie przeto sposób wyrażenia tych ograniczeń jest ogólniejszy.

Postępowanie analityczne obliczenia zależności pomiędzy przyrostami δx, δy i δz jest w tych obydwóch przypadkach jednakowe; korzystnem jest dla rachunku rozróżnianie tych dwóch sposobów ograniczenia swobody przesunięć; mianowicie — pierwszy sposób ograniczeń, który opiera się na bezpośredniem geometrycznem znaczeniu tych ograniczeń w postaci powierzchni, lub linij; ograniczenia te nazwiemy ograniczeniami *jawnie geometrycznemi;* drugi zaś sposób, który daje ograniczenia w postaci zależności tylko analitycznych, nazwiemy ograniczeniami *analitycznemi*, które mogą mieć, lub nie mieć znaczenia geometrycznego.

Z tych określeń wynika, że ograniczenia geometryczne można zawsze ująć w formę analityczną; lecz czy ograniczenia analityczne dają się wyrazić jako ograniczenia geometryczne, to zależy od możności lub niemożności zinterpretowania geometrycznego odpowiednich równań połączeń, t. j. równań 5-tych.

Równania 3-cie, czy też 5-te nazywają wogóle *równaniami połączeń*, lub też równaniami ograniczającemi ruch.

Punktowi swobodnemu możemy wogóle nadać nieskończenie wiele różnych przesunięć wirtualnych; przesunięcia te możemy sobie wyobrazić w postaci pęku odcinków nieskończenie krótkich*), zaopatrzonych strzałkami, wychodzących z danego punktu. Przesunięcia te możemy jednakże wyrazić, jak w tym razie, tylko trzema niezależnemi przesunięciami, jeżeli dany punkt był swobodny w przestrzeni trójwymiarowej, t. j. zmiennemi δx, δy, δz, które można uważać za przyrosty spółrzędnych niezależnych x, y, z, wyznaczających położenie tego punktu; każde bowiem inne dowolne przesunięcie będzie funkcją tych trzech zmiennych w tenże sposób, w jaki każda inna spółrzędna będzie funkcją obranych trzech spółrzędnych.

Możemy ten wniosek uogólnić i powiedzieć, że wogóle każdy układ materjalny może otrzymać nieskończenie wiele przesunięć, lecz wszystkie te przesunięcia mogą być wyrażone *tyloma tylko niezależnemi przesunięciami, ile dany układ posiada stopni swobody.*

5. Ograniczenia zmienne.

Podane poprzednio sposoby ograniczenia ruchu układów polegały na tem, żeśmy pewne punkty danego układu poruszali po danych powierzchniach, lub krzywych, lub też daliśmy pewne związki analityczne pomiędzy spółrzędnemi punktów. Te powierzchnie, czy też krzywe przyjmowaliśmy jako niezmienne i nieruchome, a związki analityczne przyjmowaliśmy za stałe, t. j. za niezależne od jakich bądź zmiennych parametrów. Analitycznie wyrażaliśmy ten warunek równaniami typu:

$$f(x, y, z) = 0,$$

które nazwaliśmy równaniami połączeń.

Spotykamy się jednakże z takiemi przypadkami, w których dana powierzchnia, czy też krzywa, po której ma się ślizgać pewien punkt danego układu, zmienia swą postać geometryczną, lub też jest w ruchu podczas ruchu po niej danego punktu. Analitycznie wyrazimy tę właściwość jednym, lub kilkoma niezależnemi parametrami, wprowadzonemi do równań połączeń. Jeżeli zrobimy zmiennym np. promień kuli i zmianę taką uzależnimy np. od czasu, to równanie powierzchni, czy też krzywej takiej posiada w tym przypadku, oprócz zmiennych spółrzędnych, jeszcze niezależnie

*) Nic nie stoi na przeszkodzie do przedstawienia sobie tych przesunięć w postaci odcinków o skończonych długościach; należy tylko zastosować do tego odpowiedni spółczynnik proporcjonalności, o czem będzie mowa dalej.

zmienny parametr t, który wyraża czas; równania te będą przeto postaci:

$$f(x, y, z; t) = 0,$$

które dla każdej wartości t przedstawia pewną ściśle określoną powierzchnię, ewentualnie krzywą.

Równania takie nazwano *równaniami połączeń, zawierającemi czas jawnie*. Punkt, poruszający się po takiej powierzchni (lub krzywej), wykonywa w tym razie jednocześnie dwa ruchy: jeden np. po powierzchni, gdy wyobrazimy sobie, że $t =$ stałej (jest to tak zwany ruch względny), oraz ruch razem z daną powierzchnią (lub krzywą), gdy wyobrazimy sobie, że dany punkt jest przymocowany do powierzchni (jest to t. zw. ruch unoszący); jeżeli dany punkt wykonuje jednocześnie te obydwa ruchy, to ruch taki, inaczej przesunięcia takie nazwiemy rzeczywistemi, inaczej bezwzględnemi*). Jeżeli warunki ograniczeń ruchu wyrażone są równaniami, zawierającemi czas jawnie, to *przesunięciem wirtualnem będziemy w tych rozpatrywaniach nazywać przesunięcie, którego punkt dozna, gdy przyjmiemy w danej chwili $t =$ stałej*.

6. Ograniczenia, wyrażone równaniami różniczkowemi niecałkowalnemi.

W powyższych przykładach wyraziliśmy warunki, ograniczające ruch, równaniami połączeń o skończonych postaciach; np. o postaci:

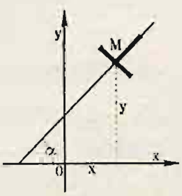
$$f(x, y, z) = 0,$$

które przedstawiają powierzchnie, lub krzywe, po których obrany punkt danego układu ma się poruszać; lub też wprost przedstawiają związki funkcjonalne pomiędzy spółrzędnemi. Równania takie nazwaliśmy *równaniami połączeń o skończonej postaci* (holonom). Lecz równania połączeń, wyrażające ograniczenia ruchu, mogą być również dane w postaci różniczkowej; a przytem w postaci równań różniczkowych, które nie są różniczkami zupełnemi, t. j. nie dającemi się scałkować, ani też nie posiadającemi spółczynników całkowania; w tym razie warunki takie ograniczają ruch tylko w stosunku do nieskończenie małych przesunięć.

Jako przykład takiego ograniczenia podają ruch wózka o dwóch kołach, osadzonych na wspólnej osi. Jeżeli przyjmiemy, że płasz-

*) Porów. Teor. Mech. H. Czopowskiego T. II. str. 75.

czyzna, po której toczy się wózek, o tyle jest chropowata, że nie dopuszcza ślizgania się po nich kół, to wózek taki będzie mógł się tylko toczyć, lecz nie będzie mógł przesuwać się np. w kierunku osi kół; ten warunek właśnie ogranicza jego ruch. Ruch tego wózka może być przeto uważany tylko do pewnego stopnia za swobodny; nie może on bowiem przesuwać się w kierunku osi kół; może on jednakże zająć np. położenie nieskończenie bliskie w kierunku tej osi, lecz tylko wtedy, gdy potoczymy go naprzód, a następnie, po nieskończenie małym obrocie w płaszczyźnie ruchu, cofniemy go do żądanego położenia.



Rys. 1.

Gdy literą M (rys. 1-szy) oznaczymy taki wózek, literami x i y spółrzędne np. jego środka, a położenie jego dyszla wyznaczymy kątem α, wtedy te trzy spółrzędne wyznaczają położenia takiego wózka na płaszczyźnie; warunkiem zaś, ograniczającym ruch tego wózka, jest równanie pomiędzy temi trzema spółrzędnemi, lecz w postaci różniczkowej; w tym przykładzie takiem równaniem jest następujące:

$$-\operatorname{tg}\alpha \cdot dx + dy = 0, \tag{6}$$

które wyraża, że dany wózek może poruszać się tylko w kierunku dyszla; ten bowiem tylko kierunek jest ze względów fizycznych możliwy. Położenie przeto tego wózka jest wyznaczone trzema spółrzędnemi x, y i α, — co jest słuszne; układ ten bowiem jest płaski; posiada więc trzy stopnie swobody; pomiędzy temi spółrzędnemi zachodzi jednakże związek (równ. 6-te) w postaci równania różniczkowego, nie dającego się scałkować. Równanie połączeń tej postaci nazwano *równaniem połączeń różniczkowem niecałkowalnem* (nicht holonom; Hertz).

Warunki niecałkowalne (nicht holonome Bedingungen) występują wtedy, gdy równania połączeń oprócz spółrzędnych, wyznaczających położenie danego układu, zawierają jeszcze warunki, określające kierunki ruchu. Kierunki te są określone np. podczas ruchu statku na wodzie, podczas ruchu łyżwy na lodzie, lub podczas toczenia się kuli, lub wózka, jak to wyżej podaliśmy, po powierzchni chropowatej i t. p.

Z tego wynika, że np. twierdzenie o możności przeprowadzenia takiego układu, jako układu płaskiego, z jednego położenia do drugiego zapomocą obrotu około pewnego punktu nie znajduje w tym razie zastosowania; fizyczne bowiem warunki na to przesunięcie nie pozwalają. Z tych rozpatrywań widzimy, że warunki, ograniczające ruch, wyrażone równaniami różniczkowemi niecałkowalnemi, nie zmniejszają liczby stopni swobody, gdy rozpatrujemy przesunięcie o skończonych wielkościach; taki więc układ może być przeprowadzony do każdego dowolnego położenia; *sposób* tylko przeprowadzenia nie jest dowolny.

Ogólny wzór równania różniczkowego niecałkowalnego, ograniczającego ruch, wyrazimy w przestrzeni trójwymiarowej równaniem:

$$f_1(x, y, z)\cdot\delta x + f_2(x, y, z)\cdot\delta y + f_3(x, y, z)\cdot\delta z = 0, \qquad (7)$$

gdzie litery f_1, f_2, f_3 oznaczają pewne funkcje zmiennych x, y, z gdzie symbol d zastąpiono symbolem δ.

Gdyby do funkcji f_1, f_2, f_3 wchodził czas t, to przesunięciem wirtualnem w danej chwili nazwalibyśmy, jak poprzednio, przesunięcie, wykonane podczas $t =$ stałej; warunkiem przeto przesunięcia wirtualnego, gdy czas wchodzi do równania połączeń, będzie następujące równanie:

$$f_1(x, y, z; t)\cdot\delta x + f_2(x, y, z; t)\cdot\delta y + f_3(x, y, z; t)\cdot\delta z = 0. \qquad (8)$$

Spotykamy nieraz przykłady, w których warunki, ograniczające ruch, są dane w postaci różniczkowej, która jednakże daje się scałkować (układy takie nazywają semi-holonom). Różnica pomiędzy takiemi ograniczeniami a ograniczeniami, danemi w postaci skończonej, jest ta, że w równaniach różniczkowych, dających się scałkować, występuje wielkość stała, którą dowolnie można obrać; ograniczenie takie nie jest więc ściśle określone; w równaniach zaś skończonych niema tej nieokreśloności.

7. Ograniczenia jednostronne i dwustronne.

W powyższych przykładach przyjęliśmy, że punkt poruszający się nie może oderwać się od danej powierzchni, czy też od danej krzywej, lecz musi na niej pozostawać podczas swego ruchu; tego rodzaju połączenie punktu z powierzchnią (lub krzywą) nazwano połączeniem *obustronnem* w przeciwieństwie do ograniczeń *jednostronnych*, które nie pozwalają punktowi oderwać się od danej powierzchni w jedną stronę, lecz pozwalają mu oderwać się w stronę przeciwną. Punkt np. umocowany do końca nici nierozciągliwej, której drugi koniec jest umocowany,—nie może zejść z powierzchni kuli w stronę wypukłą tej kuli, t. j. nazewnątrz kuli; właściwość jednakże fizyczna nici, że nie przyjmuje ona ciśnienia wzdłuż swej osi, pozwoli danemu punktowi opuścić powierzchnię tej kuli do jej wnętrza; nić przeto w tym razie jest ograniczeniem jednostronnem.

Warunek jednostronnego połączenia wyrazi się analitycznie nierównością, jak w danym przykładzie z nicią—nierównością:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2, \tag{9}$$

gdzie x, y, z są spółrzędnemi prostokątnemi punktu ruchomego. Wogóle ograniczenia jednostronne wyrażają się nierównościami typu:

$$f(x, y, z) \gtreqless 0; \tag{10}$$

a, gdy wchodzi czas do równania połączeń, wyrażają się nierównościami:

$$f(x, y, z; t) \gtreqless 0; \tag{11}$$

zależność przeto pomiędzy przesunięciami wirtualnemi wyrazi się nierównościami typu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \delta z \gtreqless 0. \tag{12}$$

Do rozpatrywania możliwości ruchu płaskiego o jednostronnem ograniczeniu nadaje się nieraz sposób wykreślny, który przedstawiłem w krótkości w Teor. Mech. T. II, str. 121.

8. Przesunięcia wirtualne, wyrażone prędkościami.

Zamiast stosować pojęcie nieskończenie małych wielkości do wyrażenia przesunięć wirtualnych, stosuje się nieraz wielkości o skończonych wymiarach. W tym celu wyobrazimy sobie każde z tych nieskończenie małych przesunięć rozdzielone przez dowolną, lecz stałą dla wszystkich przesunięć wielkość skalarną, również nieskończenie małą i przytem tego rzędu, co i dane przesunięcia; otrzymamy wtedy, jako ilorazy, wogóle wielkości skończone, t. j. otrzymamy ściśle określone wektory, których wartości są proporcjonalne do nieskończenie małych przesunięć, a kierunki są zgodne z kierunkami tych przesunięć. Wektory te w tym razie nie mają innego znaczenia fizycznego, lub geometrycznego, jak tylko to, że są one co do długości swej proporcjonalne do danych nieskończenie małych przesunięć.

Jeżeli następnie czynnikowi, przez który dzielić będziemy wszystkie przesunięcia danego układu, nadamy znaczenie czasu, to ilorazy przesunięć przez ten okres czasu będą wyrażały prędkości punktów; ilorazy te nazwano *prędkościami wirtualnemi*, dla odróżnienia od prędkości rzeczywistych, jakie dane punkty otrzymałyby w rzeczywistości pod działaniem sił, na nie działających. Zamiast przeto mówić o przesunięciach wirtualnych, mówić możemy o prędkościach wirtualnych i unaocznić je możemy zapomocą wektorów o skończonych długościach. Takie przedstawienie przesunięć pozwala stosować do obliczenia związków pomiędzy przesunięciami twierdzenia z kinematyki o prędkościach punktów danego układu; pozwala również stosować sposoby wykreślania tych prędkości, co też w Statyce budowlanej znajduje zastosowanie*).

ROZDZIAŁ II.

PRACA WIRTUALNA I FUNKCJA SIŁ.

9. Siły połączeń i siły wewnętrzne.

Punkt materjalny swobodny, będący pod działaniem danych sił, wykona ściśle określony ruch, gdy dana jest masa punktu oraz początkowe warunki ruchu. Sposoby obliczenia tego ruchu daje nam dynamika; obliczenia te nie wchodzą w zakres tych rozpatrywań; stwierdzimy na razie tylko fakt, że ruch danego punktu jest *ściśle wyznaczony* przez siły, masę danego punktu i przez warunki początkowe. Siły te nazywamy siłami zewnętrznemi, działającemi na dany punkt materjalny.

Jeżeli zaś punkt dany nie jest swobodny, t. j. jeżeli podlega on pewnym ograniczeniom swego ruchu, o jakich mówiliśmy poprzednio, to ruch danego punktu pod działaniem danych sił nie będzie taki, jakiby był, gdyby ten punkt był swobodnym. Punkt np. materjalny swobodny pod działaniem sił ciążenia, nie posiadający prędkości początkowej, wykona ruch prostolinijny, pionowo skierowany ku dołowi; jeżeli zaś będzie on zmuszony poruszać się po danej krzywej (np. po drucie dowolnie wygiętym), to wykona on pod działaniem tejże siły ciążenia ruch krzywolinijny

*) Autor niniejszego wprowadził i zastosował do obliczeń statycznych jeszcze pojęcie przyśpieszeń wirtualnych; porów. „Sprawozdanie i prace Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego Nr 3. roku 1923“.