granicach, ażeby przekształcenia rów. 251-go na 255-te oraz równania 262-go na 263-cie nie dało zbyt wielkich odchyłek.

Obliczymy jeszcze rodzaje równowagi tego pręta zapomocą metody ścisłej, t. j. zapomocą metody, jaką nam daje rachunek warjacyjny, t. j. ze wzorów 217-go i 218-go. W tym celu obliczymy najpierw z równania 233-go drugą pochodną funkcji podcałkowej, której wartość jest następująca:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau'^2} = -IE, \tag{273}$$

gdzie f oznacza funkcję podcałkową równania 233-go. Wyraz ten jest ujemny niezależnie od spółrzędnej τ; równowaga więc jest stała, o ile wyraz $\frac{d\tau}{dk_0}$, stosownie do warunku, wyrażonego równaniem 218-em, nie zmienia swego znaku w danym przedziale. Zbadanie tego drogą bezpośredniego obliczenia przedstawia znaczne trudności rachunkowe; praktyczniej przeto będzie zrobić szereg wykresów krzywej (s, τ), wyrażonej równaniem 251-szem przy zmiennym parametrze k_0, co można wykonać, gdy parametry tego zadania są liczbowe, zapomocą tablic Legendre'a i następnie, wykreśliwszy obwiednię tych krzywych (s, τ, k_0), otrzymamy granice dla k_0, w których równowaga będzie stała, t. j. w których znak wyrazu $\frac{\partial^2 f}{\partial \tau'^2}$ będzie rozstrzygał o rodzaju równowagi.*)

ROZDZIAŁ VII.

OBLICZENIE PRZYBLIŻONE RÓWNOWAGI.

59. Sformułowanie zadania.

W rozdziale tym podamy metody obliczenia sposobem przybliżonym odkształceń prętów cienkich, sprężyście giętkich, do których daje się stosować równanie odkształceń

$$y'' = \frac{M}{IE}, \tag{274}$$

oraz podamy metodę obliczenia sił zerowych, ewent. sił krytycznych.

Pręty takie, jakeśmy to już omówili w § 51-szym, uważać możemy za złożone z nieskończenie wielu, nieskończenie krótkich odcinków prostych sztywnych, połączonych ze sobą kolejno koń-

*) Postępowanie takie stosuje Born w pracy „Die elastische Linie".

cami zapomocą przegubów; układ taki posiada przeto nieskończenie wielką liczbę stopni swobody. Zadanie dane polega na obliczeniu równania:

$$y = \varphi(x), \tag{275}$$

krzywej, jaką taki pręt przybierze pod działaniem sił zewnętrznych, gdy siły te są w równowadze, oraz — na obliczeniu ich rodzajów równowagi, w jakich się one znajdują.

W celu obliczenia nieznanej funkcji $y = \varphi(x)$, zestawialiśmy, jak to było pokazane poprzednio, wyraz pracy, inaczej — wyraz funkcji sił, który przyjęliśmy dla danych przykładów w następującej ogólnej postaci:

$$U = \int_A^B f(x, y, y', \ldots) \, . \, dx, \tag{276}$$

gdzie litera f oznacza funkcję *znaną* (z warunków danego zadania); litera zaś φ oznacza funkcję *nieznaną* — szukaną — zmiennej niezależnej x; zadanie polegało na obliczeniu funkcji φ.

Sposób ogólny tego obliczenia daje nam rachunek warjacyjny i doprowadza do równań różniczkowych, z których wogóle można obliczyć równanie krzywej. Postępowanie takie przedstawia jednakże po większej części duże trudności matematyczne, które wynikają z całkowania równań Euler — Lagrange'a.

W celu uniknięcia tych trudności matematycznych stosuje się do tych obliczeń sposoby prostsze, które, choć dają wyniki niezupełnie dokładne pod względem liczbowym, lecz wogóle dostatecznie dokładne dla celów technicznych. Pomiędzy temi sposobami można rozróżnić dwa sposoby, które zresztą są do siebie zbliżone: jeden sposób, który polega na wyrażeniu szukanej funkcji szeregiem; drugi,—który polega na przyjęciu pewnej określonej funkcji, jako funkcji szukanej, której właściwości byłyby zbliżone do właściwości szukanej funkcji. W obydwóch tych sposobach występują pewne parametry nieznane, które należy obliczyć z warunków brzegowych danego zadania oraz z warunków równowagi, wyrażonych pochodnemi cząstkowemi funkcji sił, jakeśmy to robili w przypadkach, gdy dany układ posiadał skończoną liczbę stopni swobody.

60. Metoda szeregów.

Metoda ta polega na tem, że funkcję szukaną zastępujemy sumą pewnych funkcyj znanych, lecz z nieznanemi spółczynnikami, t. j. przyjmujemy, że

$$y = q_1 \cdot \varphi_1(x) + q_2 \cdot \varphi_2(x) + \cdot \cdot \cdot \; q_n \cdot \varphi_n(x),$$

lub inaczej:

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} q_k \cdot \varphi_k(x), \tag{277}$$

gdzie funkcje φ_k możemy obrać, do pewnego stopnia, dowolnie, t. j. przyjmujemy je za znane; spółczynniki zaś q_k przyjmujemy jako nieznane. Zadanie w tym razie polega na obliczeniu wartości wszystkich spółczynników q_k; jeżeli bowiem je obliczymy, to forma szukanej krzywej, jaką dany układ przybierze podczas równowagi sił, będzie określona. Spółczynniki przeto q_k odgrywają w tym razie rolę spółrzędnych niezależnych danego układu; wyznaczają one bowiem jego położenie i jako takie będziemy je traktować w naszym rachunku.

W ten sposób zadanie, które wogóle rozwiązuje się zapomocą rachunku warjacyjnego, można rozwiązać sposobem, jaki stosowaliśmy w rozdziale V-tym dla układów o skończonej liczbie spółrzędnych q_k. Po obliczeniu tych spółrzędnych i po podstawieniu ich do rów. 277-go, otrzymamy równanie krzywej szukanej, a właściwie—równanie krzywej, która jest zbliżona do krzywej szukanej. Krzywa ta będzie o tyle bliższą co do swej formy geometrycznej do krzywej właściwej $y = \varphi(x)$, o ile trafniej obierzemy formy funkcyj φ_k.

Przez trafny wybór należy rozumieć w tym razie wybór takich funkcyj φ_k, któreby swemi właściwościami geometrycznemi jak najwięcej zbliżały się do szukanej funkcji, a przynajmniej nie były sprzeczne z jej właściwościami; wtedy bowiem suma ich, wyrażona równaniem 277-em, będzie również się zbliżała do szukanej krzywej.

Oczywiście, funkcja przybliżona, t. j. rów. 277-me powinno odpowiadać warunkom równowagi, jakim odpowiada funkcja właściwa $y = \varphi(x)$, t. j. funkcja ta, podstawiona do rów. 276-go, powinna spełnić warunek, ażeby

$$\delta U = 0,$$

przy zmiennych q_k, gdzie symbol δ oznacza przyrost wartości U, gdy parametry q_k otrzymują dowolnie małe przyrosty. Postępowanie to unaocznimy sobie w następującym przykładzie.

PRZYKŁAD. Na belce sprężystej o rozpiętości l, leżącej swobodnie na dwóch podporach, umieszczony jest w odległości ξ od lewej podpory ciężar P, jak pokazano na rys. 16-tym; obliczyć linję ugięcia tej belki.

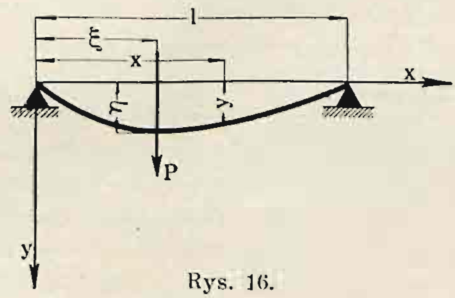
Wyobraźmy sobie równanie szukanej krzywej wyrażone szeregiem np. Fourier'a; t. j. napiszemy:

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} q_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \sum_{k=1}^{k=n} q'_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{278}$$

gdzie q_k i q'_k są nieznane parametry.

Z warunków fizycznych tego zadania wynika, że dla $x=0$ powinna odpowiednia wartość $y=0$, wobec czego szukana funkcja wyrazić się może — w tym razie—szeregiem wyrazów następujących:

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} q_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{279}$$



Rys. 16.

Oprócz tego szukana funkcja — jak w tym razie szukany szereg—powinien czynić zadość warunkowi: dla $x=0$, oraz dla $x=l$ druga pochodna powinna równać się zeru, t. j.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Ponieważ równanie 279-te spełnia ten warunek, przeto przyjmiemy je za równanie przybliżonej krzywej, w którem parametry q_k są niewiadome.

Przyjąwszy więc szereg 279-ty jako funkcję szukanej krzywej, obliczymy parametry q_k i w tym celu z rys. 16-go napiszemy wirtualną funkcję sił w postaci:

$$U = P\eta - \frac{1}{2} IE \int_0^l y''^2 \cdot dx, \tag{280}$$

gdzie z równania 279-go

$$\eta = \sum_{k=1}^{k=n} q_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right).$$

W celu obliczenia całki, zawartej w równaniu 280-tem, obliczymy najpierw z równ. 279-go

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -\sum_{k=1}^{k=n} q_k \cdot \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{281}$$

Dodajniki tej sumy posiadają tę wybitną właściwość, że całki z iloczynów każdych dwóch dodajników tej sumy, jakie otrzymamy po podniesieniu tej sumy do drugiej potęgi, są równe zeru; całki zaś z kwadratów każdego z tych dodajników równe są $= \frac{l}{2}$ *); całka przeto drugiego wyrazu równania 280-go ma postać:

$$\int_0^l y''^2 \cdot dx = \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} q_k^2 k^4, \tag{282}$$

do której nie wchodzą już zmienne x; po podstawieniu tej całki do tego równania i po kolejnem zróżniczkowaniu cząstkowem tego równania względem niezależnie zmiennych (U bowiem nie jest w tym razie funkcją jednorodną spółrzędnych q_k) i po przyrównaniu wreszcie tych pochodnych do zera, jakeśmy to już poprzednio robili, otrzymamy równania równowagi w ogólnej postaci:

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = P \cdot \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) - \frac{1}{2} \cdot IE \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \cdot l \cdot q_k k^4 = 0, \tag{283}$$

z których obliczymy:

$$q_k = \frac{2 P l^3 \cdot \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)}{IE\pi^4 k^4};$$

a po podstawieniu tych wartości do rów. 279-tego, otrzymamy szukaną funkcję w postaci szeregu:

$$y = \frac{2 P l^3}{IE\pi^4} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^4} \cdot \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{284}$$

*) Gdy określona całka z iloczynu dwóch różnych funkcyj równa jest zeru, a całki z kwadratów tych funkcyj w danych granicach są równe pewnej wartości skończonej, to funkcje takie nazywają *ortogonalnemi*. Funkcje przeto sin. i cos. są tylko szczególnemi funkcjami ortogonalnemi. Funkcje ortogonalne są bardzo dogodne w obliczeniach, gdyż, jak w przykładzie powyższym, całka np. z kwadratu sumy równ. 281-go i 282-go będzie wielomianem złożonym z samych tylko kwadratów zmiennych spółrzędnych $q_1, q_2, \ldots q_n$ bez iloczynów tych parametrów, co, oczywiście, znakomicie upraszcza rachunek. Oprócz funkcyj sin. i cos. mamy jeszcze inne funkcje z takiemiż właściwościami; lecz funkcje sin. i cos. mają jeszcze tę bardzo ważną w naszych obliczeniach dogodność, że ich pochodne są także funkcjami ortogonalnemi.

Gdy funkcje ortogonalne są tak dobrane, że całki ich kwadratów są równe 1, to funkcje takie nazywają funkcjami *ortogonalnemi znormowanemi*.

Sprawdzimy słuszność tego wzoru dla szczególnego przypadku i obliczymy np. ugięcie środka belki, gdy siła P jest umieszczona również w jej środku. Dla obliczenia tego przypadku podstawimy w rów. 284-te:

$$x = \frac{l}{2}, \qquad \text{oraz } \xi = \frac{l}{2}$$

i otrzymamy

$$y_{\frac{l}{2}} = \frac{2Pl^3}{IE\pi^4} \cdot \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{IE}, \tag{285}$$

co się zgadza z dokładnem obliczeniem statycznem.

Gdybyśmy wzięli jeden, lub dwa wyrazy szeregu Fourier'a, otrzymalibyśmy, oczywiście, inne wartości — wartości przybliżone. Wziąwszy np. tylko pierwszy wyraz szeregu 284-tego, otrzymamy:

$$y_{\frac{l}{2}} = \frac{1}{48{,}7} \cdot \frac{Pl^3}{IE}; \tag{286}$$

a wziąwszy trzy wyrazy tego szeregu, otrzymamy podług obliczeń Timoszenki

$$y_{\frac{l}{2}} = \frac{1}{48{,}1} \cdot \frac{Pl^3}{IE}, \quad \text{i t. d.}$$

Należy przytem zwrócić uwagę, iż jeżeli weźmiemy np. przy dowolnem położeniu siły P tylko pierwszy wyraz szeregu Fourier'a (rów. 284-te), to otrzymamy linję ugięcia, która wyrazi się wzorem:

$$y = \frac{2Pl^3}{IE\pi^4} \cdot \sin\left(\frac{\pi\xi}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \tag{287}$$

który jest symetryczny względem osi pionowej, połowiącej długość pręta; tymczasem — w rzeczywistości — ta linja w tym razie jest niesymetryczna; — następnie funkcja 287-ma jest ciągła, a rzeczywista linja ugięcia składa się z dwóch, lub więcej (zależnie od liczby sił) linij ciągłych; drugie przeto pochodne odpowiednich funkcyj są wogóle nieciągłe. Równania przeto przybliżone należy stosować z wielką ostrożnością szczególniej przy obliczaniu pochodnych wyższych rzędów.

PRZYKŁAD. Wzdłuż osi pręta sprężystego, opartego swobodnie końcami, działa siła P; obliczyć odkształconą i siły krytyczne zapomocą szeregu Fourier'a.

Formę odkształconej wyrazimy przeto szeregiem:

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} q_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad \text{gdzie } k = 1, 2, \ldots n. \tag{288}$$

Wirtualna funkcja sił

$$U = P \cdot \Delta l - \frac{1}{2} IE \cdot \int_0^l y''^2 \, dx. \tag{289}$$

Z rys. 17-tego (str. 163-cia) odczytamy:

$$\Delta l = \int_0^l (ds - dx) = \int_0^l \left(\sqrt{1 + y'^2} - 1\right) dx \cong \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 \, dx. \tag{290}$$

We wzorach tych

$$y' = \frac{dy}{dx}; \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Ze wzoru 288-go mamy:

$$y' = \sum_{k=1}^{k=n} q_k \left(\frac{k\pi}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right); \quad y'' = -\sum_{k=1}^{k=n} q_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{291}$$

Wziąwszy pod uwagę, że funkcje sin. i cos. są funkcjami ortogonalnemi (porów. dopisek na str. 152-giej), otrzymamy:

$$\int_0^l y'^2 dx = \frac{l}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} q_k^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2; \quad \int_0^l y''^2 \, dx = \frac{l}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} q_k^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4; \tag{292}$$

po podstawieniu tych wyrazów do wyrazu funkcji sił otrzymamy:

$$U = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} q_k^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \frac{IE}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} q_k^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4, \tag{293}$$

skąd napiszemy równania równowagi:

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \cdot 2 q_k \cdot \left| P - IE\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right| = 0. \tag{294}$$

1) Równania te zaspokojone są przedewszystkiem spółrzędnemi $q_k = 0$, niezależnemi od sił P, co znaczy, że odkształconą może być prosta, niezależnie od wartości siły P.

2) Gdy zaś wartość

$$P - IE\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = 0, \tag{295}$$

wtedy q_k przybierać mogą dowolne wartości (ponieważ jednakże ten wzór jest przybliżony, wartości te mogą być tylko bardzo małe; odchyłki bowiem od wartości dokładnych będą rosnąć z powiększaniem wartości q_k); następnie z tego wzoru wynika, że każdej wartości k, odpowiada inna wartość P; wartość tę oznaczymy literą P_k; przeto wywnioskujemy, że każdej wartości P_k odpowiada inna forma odkształconej, którą będzie sinusoida (rów. 288-me) o różnych półfalach, zależnie od wartości P_k.

Ażeby obliczyć siły zerowe i rodzaje równowagi, zestawiamy wyznacznik D_n (rów. 136-te), który ze względu, że w wyrazie U spółrzędne q_k są tylko w kwadratach, ma postać następującą:

$$D_n = \begin{vmatrix} P-EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & P-EI\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & P-EI\left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot & P-EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{296}$$

Ażeby równowaga danego pręta była stałą, powinien każdy wyraz tego wyznacznika, stosownie do rów. 117-tego (str. 76-ta) być ujemny, gdyż wyrazy te są bezpośrednio spółczynnikami stateczności danego układu (można również zastosować nierówności 121-sze).

Przypadek, w którym wyrazy te są ujemne, nastąpi przedewszystkiem wtedy, gdy $P = 0$, t. j. gdy układ dany jest w stanie naturalnym; o czem już poprzednio mówiliśmy (§ 43-ci).

Gdy zaś pręt będzie obciążony pewną siłą P, wtedy warunek, ażeby wszystkie wyrazy wyznacznika 296-tego były ujemne, będzie spełniony, gdy siła obciążająca

$$P < EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^2,$$

co może nastąpić tylko wtedy, gdy odkształcona posiada jedną tylko półfalę.

61. Najmniejsza wartość siły P_k i odkształcenie pierwsze.

W praktycznych zastosowaniach interesuje nas często to wyboczenie, które wywołane jest (z pośród wszystkich P_k) najmniejszą co do swej wartości siłą P_{kr}. W powyższym przykładzie jest to siła dla $k = 1$, t. j. w tym razie

$$P_{kr} = EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = P_E,$$

która może utrzymać w równowadze wyboczenie tylko o jednej półfali.

Wyboczenie, które powstaje przy najmniejszej wartości siły P, nazwiemy *pierwszem wyboczeniem*, a siłę, wywołującą to wyboczenie, nazwiemy *siłą krytyczną* — inaczej granicą stateczności. W powyższym przeto przykładzie pierwszem wyboczeniem jest sinusoida o jednej półfali, a siła krytyczna $P_{kr} = P_E$.

Zwrócić tu należy jednakże uwagę, że pierwsze wyboczenie nie we wszystkich układach ma postać sinusoidy o *jednej* półfali, t. j. nie zawsze siła krytyczna wywołuje wyboczenie o jednej półfali, jakby się pozornie zdawać mogło; może być bowiem takie obciążenie pręta, przy którem siła krytyczna wywoła wyboczenie o pewnej liczbie półfal, t. j. pierwsze wyboczenie posiadać będzie w tym razie kilka półfal, a powiększenie wartości tej siły może wywołać wyboczenie o mniejszej liczbie półfal i wreszcie — przy dostatecznie dużej sile P — może dać wyboczenie o jednej półfali.

Przykładem tego rodzaju wyboczenia może być pręt, jaki stosowaliśmy w poprzednim przykładzie, z tą tylko różnicą, że umieścimy go w środowisku sprężystem, t. j. w środowisku, które wstrzymuje jego wyboczenie siłą proporcjonalną do wielkości wyboczenia; w danym więc razie siła, wstrzymująca wyboczenie, równa się iloczynowi

$$\beta \cdot dx \cdot y, \tag{297}$$

gdzie β oznacza spółczynnik sprężystości danego środowiska na jednostkę długości danego pręta w stanie prostym, y zaś oznacza wielkość wyboczenia*).

---

*) Zadanie to zaczerpnięte jest z konstrukcji mostów i w innej nieco formie było sformułowane przez prof. Jasińskiego i obliczone przez niego w sposób ścisły; obliczenie następne przybliżone z pewną zmianą zaczerpnąłem z pracy Timoszenki „Wytrzymałość materjałów".

Ażeby obliczyć siłę pierwszego wyboczenia takiego pręta sposobem przybliżonym, jak podaje Timoszenko („Wytrzymałość“ str. 338), zastosujemy wzór 293-ci; dodamy tylko do tego wzoru, stosownie do warunków tego zadania, wyraz pracy sił oporowych środowiska, która jest, w myśl założenia co do jego sprężystości,— równą

$$-\frac{1}{2}\beta y^2 \cdot dx; \tag{298}$$

po podstawieniu do tego wyrazu y z równania 288-go i po scałkowaniu go, znajdziemy wyraz pracy sił oporowych danego środowiska w następującej postaci:

$$-\frac{1}{2}\beta\frac{l}{2}\cdot\sum_{k=1}^{k=n} q_k^2 . \tag{299}$$

Wyraz przeto wirtualnej funkcji wszystkich sił, działających na dany pręt, wyrazi się równaniem 293-em, z dodaniem pracy sił sprężystości środowiska; — będzie on następujący:

$$U=\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\sum_{k=1}^{k=n} q_k^2\cdot\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\frac{EI}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\sum_{k=1}^{k=n} q_k^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4+$$
$$-\frac{\beta}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\sum_{k=1}^{k=n} q_k^2 . \tag{300}$$

Z tego równania obliczymy q_k, stosując np. metodę ogólną; a więc napiszemy równanie:

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}=\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot 2q_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\frac{EI}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot 2q_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4-\frac{\beta}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot 2\,q_k=0; \tag{301}$$

a po uporządkowaniu otrzymamy wzór analogiczny do równania 294-go:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot 2q_k\cdot\left[P\cdot\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-EI\cdot\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4-\beta\right]=0, \tag{302}$$

gdzie $k=1,2,\ldots.n$.

Interpretacja tego równania jest taka sama, jak równania 294-go.

W tem rozpatrywaniu szczególniej interesuje nas przypadek, w którym

$$P \cdot \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - EI \cdot \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \beta = 0; \tag{303}$$

wtedy wielkości q_k przybierać mogą dowolne wartości, a, stosownie do założenia, wielkości bardzo małe (lecz niekoniecznie nieskończenie małe); krzywa przeto wyboczenia może przybierać w przybliżeniu formę sinusoidy o różnej liczbie półfal, w zależności od wartości siły P.

Wartość siły $P = P_k$, utrzymującej taką krzywą w równowadze, obliczymy przeto z równania 303-go:

$$P_k = EI\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \beta\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2. \tag{304}$$

Porównując ten wzór ze wzorem 295-tym, widzimy, że wartość tej siły jest w tym razie większa, niż bez oporu środowiska, t. j. gdy $\beta = 0$, przy zresztą jednakowych warunkach, — co fizycznie jest zrozumiałe; środowisko bowiem wstrzymuje wyboczenie. Wartość P_k z rów. 304-go zmienia się z liczbą k; najmniejszą wartość $P_k = P_{kr}$, która wywołuje wyboczenie, obliczymy z równania:

$$\frac{dP_k}{dk} = 2EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot k - 2\beta\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 k^{-3} = 0, \tag{305}$$

skąd:

$$k = k_1 = \frac{l}{\pi}\sqrt[4]{\frac{\beta}{EI}}. \tag{306}$$

Wartość k_1, obliczona z tego wzoru, oznacza liczbę półfal, jaką przybierze dany pręt przy najmniejszej wartości $P = P_{kr}$; druga bowiem pochodna P_k względem k jest dodatnia. Ponieważ jednakże k_1 musi być liczbą całą i przytem > 1, przeto należy wziąć dla k dwie liczby całe, sąsiednie do wartości k_1, obliczonej z rów. 306-go, i obliczyć z rów. 304-go odpowiednią wartość P_{kr}; mniejsza z tych dwóch wartości jest najmniejszą siłą, wywołującą pierwsze wyboczenie, inaczej — jest to granica stateczności.

Z pewnem przybliżeniem obliczymy wartość siły P_{kr}, gdy wartość k_1 z rów. 306-go podstawimy bezpośrednio do rów. 304-go; otrzymamy wtedy:

$$P_{kr} \cong 2\sqrt{\beta EI}.$$

Jeżeli następnie spółczynnik β w rów. 306-tem będzie dostatecznie mały w porównaniu z wartością EI, inaczej — gdy środowisko będzie bardzo łatwo odkształcalne, w stosunku do sztywności pręta, to pierwsze wyboczenie może posiadać jedną półfalę; wynik ten da się unaocznić fizycznie w ten sposób, jak mówi Timoszenko, że łatwiej prętowi przezwyciężyć opór środowiska, niż wygiąć się w kilka fal. Jeżeli zaś wartość $EI \to 0$, t. j. gdy pręt będzie łatwiej odkształcalny, w porównaniu z odkształceniem środowiska, to łatwiej przybierze on bardziej falistą postać, niżby miał odkształcić środowisko trudno odkształcalne.

Ażeby obliczyć rodzaje równowagi takiego pręta, zestawimy odpowiedni wyznacznik, który będzie posiadał wyrazy tylko na swej przekątni; wyrazy te są zawarte w nawiasach równania 302-go, gdy podstawimy kolejno $k = 1, 2, \cdots n$. Wyrazy te różnią się od wyrazów zadania poprzedniego dodajnikiem $(-\beta)$, którego w równaniu 294-em nie było.

To samo rozumowanie da się zastosować do przypadku, w którym wielkości EI oraz β są stałe, a długość pręta l jest zmienna; wtedy odczytamy z równania 306-go, że dla krótkich l wielkość k_1 maleje, a więc może być równe jedności, co fizycznie tak sobie unaocznimy, stosując wyrażenie Timoszenki, że „trudniej" wygiąć się w kilka fal krótkiemu prętowi, niż dłuższemu, co zgadza się z fizycznem pojmowaniem tego zjawiska.

Siły, działające prostopadle do osi, które nazwaliśmy oporem środowiska, nie zawsze są skierowane do osi pręta; mogą one być skierowane również w kierunku przeciwnym; przypadek ten zachodzi, gdy np. wał materjalny o przekroju kołowym wiruje około swej osi geometrycznej; wtedy po małem wyboczeniu tego wału od linji prostej powstają siły odśrodkowe, które przy dostatecznej wielkości mogą go dalej wyboczyć, lub też, gdy będą małe, pozwolą powrócić prętowi do postaci prostej, do czego będzie go zmuszała sprężystość pręta. Siły te wyrażą się w tym przypadku wzorem

$$\beta = -m\varphi^2, \tag{307}$$

gdzie m oznacza masę jednostki długości wału, a φ jego prędkość kątową.

Siłę krytyczną w danym razie obliczymy ze wzoru 304-go:

$$P_k = EI\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - m\varphi^2 \cdot \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2; \tag{308}$$

P_k w tym razie, jak i w poprzednim, jest to siła, która ściska wał wzdłuż osi i która wywołać może wyboczenie. Widzimy z tego wzoru, że siła krytyczna jest w tym razie mniejsza, niż w przypadku $\varphi = 0$, co zgadza się z fizycznem pojmowaniem tego zjawiska.

W szczególnym przypadku, gdy siły osiowej niema, wtedy pręt może się również wyboczyć pod działaniem tylko sił odśrodkowych i dla tego przypadku możemy obliczyć prędkość obrotową, którą nazwiemy *prędkością krytyczną* i oznaczymy ją symbolem φ_{kr}.

Z równania 308-go otrzymamy po podstawieniu $P_k = 0$:

$$\varphi_{kr} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{309}$$

Najmniejsza prędkość krytyczna φ_{kr} będzie w tym razie, t. j. przy warunku $P = 0$, równa najmniejszej liczbie półfal; po podstawieniu przeto w równanie 309-te

$$k = 1,$$

otrzymamy:

$$\varphi_{kr} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{310}$$

Sposób tutaj przytoczony, stosowania szeregów do obliczeń przybliżonych, nazywają niektórzy autorzy—sposobem Ritz'a, lecz ta nazwa nie jest słuszna;—Ritz bowiem w pracy swej „Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mat. Physik", ogłoszonej w czasopiśmie „Journal f. reine u. angew. Mathematik Bd. 135 str. 1—61, 1909", głębiej ujął to zagadnienie, które nie odpowiada rozwiązaniom zapomocą pospolitego stosowania szeregów; Ritz powiada w powyższej pracy: jeżeli mamy funkcję wyraźną np. sin α, lg x i t. p., to możemy ją zastąpić szeregiem i każdy wyraz tego szeregu, wzięty do obliczenia, zbliżać będzie jego wartość do wartości funkcji ścisłej; lecz w naszych zagadnieniach funkcja ta wyrażona jest równaniem różniczkowem, inaczej równaniem $\delta U = 0$, które wyraża extremum zmiennej U, i jeżeli zbliżać będziemy zapomocą szeregu wartość tej funkcji do wartości extremum, to z tego nie wynika, żeby jednocześnie wartość tego szeregu zbliżała się do wartości szukanej funkcji. Ażeby zaś ten wynik osiągnąć, należy odpowiednio dobrać funkcje, z których składa się przyjęty szereg; szczególniej postępowanie takie staje się wątpliwe przy obliczaniu rodzajów równowagi, które wymagają obliczenia pochodnych wyższych rzędów. Sprawę tę omawiają również Courant i Hilbert w pracy „Methoden d. mathematischen Physik“, lecz nie dają jej ostatecznego wyjaśnienia, oraz Madelung „Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers“ 1922 r., str. 104.

Ritz w pomienionej pracy powiada również, że metoda szeregów, przez niego proponowana, nie jest jeszcze zupełnie „jasna“. Materjały więc matematyczne tej metody, ogłoszone w odpowiedniej literaturze, oczekują szczegółowego opracowania; opracowania takiego jednakże jeszcze nie mamy, a postępowanie „po omacku“, jakie przedstawia pospolity sposób stosowania szeregów, nie daje pewności, iż z powiększeniem liczby wyrazów obranego szeregu wyniki obliczeń będą się zbliżały do rzeczywistej wartości; ta okoliczność zaś, że metoda szeregów, stosowana do wielu przykładów, których rozwiązania są skądinąd znane, wykazuje dostateczną zgodność odpowiedzi z rozwiązaniami dokładnemi, nie może być dowodem jej słuszności wogóle; przy jej więc stosowaniu można spodziewać się różnych sprzeczności z rzeczywistym stanem rzeczy. Metoda, która nie pozwala przewidzieć wszystkich ewentualności, nie może być nazwana naukową. Metoda Ritz'a oczekuje przeto szczegółowego opracowania pod względem matematycznym; metodę przeto szeregów należy stosować z wielką oględnością.

62. Metoda funkcyj przybliżonych.

Metoda ta polega na wyborze takiej funkcji skończonej, któraby była możliwie zbliżona do szukanej funkcji i któraby posiadała pewne parametry nieznane. Jeżeli zechcemy wyrazić szukaną funkcję np. wielomianem algebraicznym całkowitym, to wielomian ten, dla większego zbliżenia się do funkcji szukanej, powinien czynić zadość nietylko warunkom brzegowym danego zadania, lecz powinien wyrażać i inne właściwości fizyczne danego układu, np. pewną ściśle określoną liczbę punktów przegięć, którą posiada szukana funkcja, a którą to liczbę możemy określić z warunków zadania. W zadaniu np. z prętem, obciążonym osiowo i jednym końcem umocowanym, posiadamy jeden taki punkt (może być ich więcej, lecz poza granicami rozpatrywanego odcinka); przyjmiemy więc, że szukana krzywa powinna posiadać przynajmniej jeden punkt przegięcia; a więc wielomian, wyrażający tę krzywą, musi być przynajmniej 3-go stopnia; piszemy przeto:

$$y = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3. \qquad (311)$$

Z warunków brzegowych zadania wynika:

dla $x=0$ i $y=0$ otrzymamy $q_0=0$;

„ $x=0$ oraz $y=0$ mamy $y'=0$; przeto $q_1=0$;

„ $x=l$ mamy $y''=0$ a więc $q_2+3q_3l=0$;

po podstawieniu tych wartości do równania 311-go otrzymamy:

$$y=q_3\cdot x^2\cdot(x-3\,l), \tag{312}$$

gdzie wielkość q_3 jest niewiadomą, którą obliczymy z warunku równowagi.

Wyraz pracy sił wewnętrznych jest w tym razie następujący:

$$U_w=-\frac{1}{2}IE\int_0^l y''^2\cdot dx=-\frac{1}{2}IE\int_0^l 36q_3{}^2\cdot(x-l)^2\cdot dx=-6q_3{}^2IEl^3. \tag{313}$$

Wyraz pracy sił zewnętrznych:

$$U_z=\frac{1}{2}P\int_0^l y'^2dx=\frac{12}{5}Pq_3{}^2l^5. \tag{314}$$

W razie równowagi mamy wogóle:

$$\frac{\partial U}{\partial q_3}=0;$$

ponieważ jednak funkcja sił jest w tym razie funkcją jednorodną zmiennej q, przeto możemy napisać bezpośrednio (rów. 151-sze) równanie równowagi w postaci:

$$U=U_z+U_w=0,$$

t. j.

$$\frac{12}{5}\cdot Pq_3^2l^5-6q_3{}^2IEl^3=0, \tag{315}$$

gdzie P jest jednocześnie siłą krytyczną (zerową), jakeśmy dowiedli w § 44-tym i wyrazili rów. 148-em (str. 106), a więc

$$P=P_{kr}=2{,}500\cdot\frac{IE}{l^2}; \tag{316}$$

dokładna zaś wartość siły krytycznej Euler'a w tym razie:

$$P_{kr}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{IE}{l^2}=2{,}467\cdot\frac{IE}{l^2};$$

odchyłka więc od wartości dokładnej jest około 1,3%.

Dla obliczenia przybliżonego możemy również obrać funkcję $y=\varphi(x)$, która nie spełnia, lub niezupełnie spełnia warunki brzegowe; lecz wtedy, oczywiście, spodziewać się należy większej odchyłki od wartości dokładnej.

Przyjmijmy dla powyższego przykładu np. $y=qx^2$; wtedy: $y'=2qx$; $y''=2q$;

$$U_w=-\frac{1}{2}IE\int_0^l y''^2\cdot dx=-\frac{1}{2}IE\cdot 4q^2l;$$

$$U_z=\frac{1}{2}P\int_0^l y'^2\,dx=\frac{1}{2}P\cdot\frac{4}{3}q^2l^3;$$

z równań tych, wskutek jednorodności tych funkcyj (rów. 151-sze, str. 108) względem spółrzędnej q, napiszemy:

$$\frac{1}{2}P\cdot\frac{4}{3}q^2l^3-\frac{1}{2}EI\cdot 4q^2l=0,\ \text{skąd}\ P_{kr}=3\cdot\frac{EI}{l^2};\tag{317}$$

jak widzimy, w tym przypadku odchyłka od wartości ścisłej jest znacznie większa, niż była poprzednio, cośmy przewidzieli.

PRZYKŁAD. Obliczyć zapomocą funkcji przybliżonej siłę krytyczną i rodzaje równowagi pręta, swobodnie podpartego obydwoma końcami i obciążonego osiowo siłą P.

Przyjmiemy równanie przybliżonej krzywej wyboczenia w postaci:

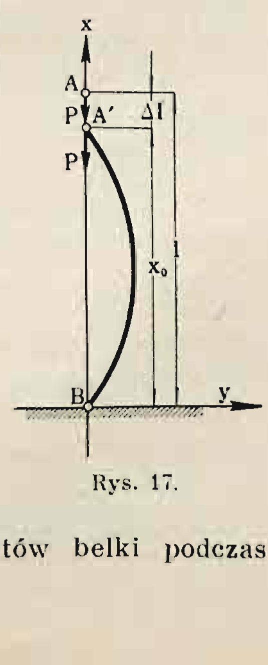
$$y=q\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{x_0}\right).\tag{318}$$

Obliczamy przedewszystkiem dla następnego użytku

$$y'=q\left(\frac{\pi}{x_0}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{x_0}\right);\tag{319}$$

oraz

$$y''=-q\left(\frac{\pi}{x_0}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{x_0}\right),\tag{320}$$



Rys. 17.

gdzie x_0 oznacza odległość końcowych punktów belki podczas wyboczenia; a więc $x_0<l$.

Z tych równań wynika, że

dla $x=0$ oraz dla $y=0$ mamy $y''=0$;

dla $x=x_0$ oraz dla $y=0$ mamy $y''=0$.

Równanie przeto 318-te czyni zadość warunkom brzegowym tego układu; przyjmujemy je przeto jako równanie przybliżonej krzywej. Wirtualna funkcja sił zewnętrznych danego układu:

$$U_z = P\cdot\Delta l,\quad \text{gdzie } \Delta l = \int_0^{x_0}(ds - dx) =$$

$$= \int_0^{x_0}\left(\sqrt{1+y'^2}-1\right)dx \cong \frac{1}{2}\int_0^{x_0} y'^2\cdot dx;$$

po podstawieniu w nie z równania 319-tego wartości y', otrzymamy:

$$U_z = \frac{1}{2}P\cdot\left(q\frac{\pi}{x_0}\right)^2\cdot\int_0^{x_0}\cos^2\left(\pi\frac{x}{x_0}\right)\cdot dx = \frac{1}{2}P\left(q\frac{\pi}{x_0}\right)^2\cdot\frac{x_0}{2};$$

wreszcie:

$$U_z = \frac{1}{4}Pq^2\frac{\pi^2}{x_0}. \tag{321}$$

Następnie — ze znanego wzoru — obliczymy pracę sił wewnętrznych:

$$U_w = -\frac{1}{2}IE\int_0^{x_0} y''^2\,dx, \tag{322}$$

skąd po podstawieniu y'' z rów. 320-go, otrzymamy:

$$U_w = -\frac{1}{2}IEq^2\left(\frac{\pi}{x_0}\right)^4\frac{x_0}{2} = -\frac{1}{4}IE\cdot\frac{q^2\pi^4}{x_0^3}. \tag{323}$$

Wyraz wirtualnej funkcji sił całego układu jest następujący:

$$U = U_z + U_w; \tag{324}$$

po podstawieniu w to równanie obliczonych wartości, otrzymamy wartość q, biorąc cząstkową pochodną rów. 324-tego względem q przy stałej wartości x_0 *):

*) W obliczeniu tem przyjęliśmy wartość x_0 za stałą, co w rzeczywistości nie zachodzi; będzie to tylko słuszne, gdy będziemy rozpatrywali dany układ w postaci prostej; wtedy bowiem $x_0 = l$; jeżeli zaś ten przypadek nie zachodzi,

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{1}{2} P \cdot q \frac{\pi^2}{x_0} - \frac{1}{2} IE \cdot q \frac{\pi^4}{x_0^3} = 0; \tag{325}$$

po uporządkowaniu wyrazów tego równania, otrzymamy równanie:

$$\frac{1}{2} q\pi^2 \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \left(P - \frac{IE\pi^2}{x_0^2}\right) = 0, \tag{326}$$

które rozpada się na dwa równania; — na równanie:

1) $q = 0$, a więc $y = 0$; a przy tych warunkach $x_0 = l$;

krzywa przeto wyboczenia jest w tym razie prostą niezależnie od wartości P, t. j. siła P przy tej formie pręta może posiadać dowolną wielkość, a równowaga będzie zachowana; wartość bowiem zawarta w nawiasach równania 326-go, wobec tego, że $q = 0$, może być dowolną, byleby nie była nieskończenie wielką. Pionowe przeto położenie pręta jest w tym razie położeniem równowagi przy wszelkich wartościach siły P, lecz rodzaje równowagi mogą być w tem położeniu różne, o czem będzie później.

Drugiem równaniem, na jakie rozpada się równanie 326-te, jest następujące:

$$2)\ P - \frac{IE\pi^2}{x_0^2} = 0; \tag{327}$$

w tym razie parametr q może mieć dowolną wartość; przeto dla $q = 0$, t. j. gdy pręt będzie prosty, będzie $x_0 = l$, a więc

$$P = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot IE = P_E; \tag{328}$$

jest to punkt przecięcia się tej gałęzi z gałęzią pierwszą, pokrywającą się z osią P. Wykres (P, q) jest taki sam, jak wykres (P, e) na rys. 15-tym (str. 145-ta).

Gdyby wielkość x_0 podczas wyboczenia była stałą, tobyśmy otrzymali jako drugą gałąź krzywej równowagi linję prostą, równoległą do osi q, na odległości P, obliczonej z rów. 327-go. Lecz ten wniosek jest słuszny tylko dla bardzo małych wartości q,

to wyniki naszych obliczeń nie będą dokładne, a będą przybliżone, co w tych obliczeniach jest dopuszczalne; odchylka jednakże od wartości dokładnych będzie bardzo mała, gdyż rozpatrywać będziemy przypadek, w którym dany pręt niewiele oddala się od swej postaci prostej, t. j. wartość x_0 niewiele różni się od wartości l.

a zupełnie będzie słuszny, gdy q będzie nieskończenie małe; wniosek ten przeto wypowiemy ściślej: że styczna do drugiej gałęzi krzywej równowagi w tym punkcie jest równoległa do osi q, dalszego zaś jej przebiegu z obliczenia tego nie otrzymamy. O dalszym jej przebiegu możemy jeszcze nieco wywnioskować, jeżeli weźmiemy pod uwagę tę okoliczność, fizycznie wyczutą, że z powiększeniem wielkości q, t. j. gdy pręt się wygina, x_0 maleje; a więc odczytamy z rów. 327-go, że z rosnącą wartością q wartość P rośnie; gałąź ta przeto przyjmie postać wklęsłą względem osi q, jak to pokazano na rys. 15-tym; siły przeto $P > P_E$ utrzymywać mogą dany pręt w trzech położeniach równowagi. Gdy weźmiemy pod uwagę twierdzenie o równowadze sił, których funkcja jest jednorodna zmiennych q, (rów. 151-sze, str. 108), możemy wprost napisać z rów. 324-tego rów. 326-te, a więc i rów. 327-me.

Ażeby następnie obliczyć rodzaje równowagi w różnych położeniach tego pręta, obliczymy z równania 325-go:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{x_0} \cdot \left(P - \frac{I E \pi^2}{x_0^2} \right). \tag{329}$$

Znak tego wyrazu określi rodzaj równowagi w położeniach pręta, odpowiadających punktom gałęzi 1-szej i 2-giej; jeżeli więc

$$P - \frac{I E \pi^2}{x_0^2} < 0, \quad \text{t. j. jeżeli} \quad P < \frac{I E \pi^2}{x_0^2},$$

to mamy równowagę stałą; jeżeli zaś

$$P - \frac{I E \pi^2}{x_0^2} > 0, \quad \text{t. j.} \quad P > \frac{I E \pi^2}{l^2},$$

to mamy równowagę niestałą.

Siła przeto

$$P = \frac{I E \pi^2}{l^2} = P_E$$

jest siłą zmianową dla gałęzi 1-ej.

Z prawa kolejności rodzajów równowagi wynika również, że gałąź 2-ga wyraża równowagę stałą, gdyż część gałęzi 1-szej

dla $P > P_E$

przedstawia równowagę niestałą.

Obliczenie powyższe nie dało nam jednakże wartości parametru q, t. j. odchylenia końca pręta od pionowej; z tych obliczeń bowiem wynika, że przy sile $P > P_E$ odchylenie q jest dowolne, niezależne od siły obciążającej; lecz wniosek ten jest słuszny tylko dla nieskończenie małych wartości q; przy powiększeniu bowiem siły $P > P_E$ występuje zależność pomiędzy q i P, której jednakże ze wzoru przybliżonego, wyrażonego równaniem 318-tem, obliczyć nie można.

Przypadek niezależności spółrzędnej q od P, jaka w tym razie występuje, jest pod względem matematycznym identyczny z przypadkiem, spotykanym w ruchu wahadła, gdy dla małych odchyleń zastąpimy ruch wahadłowy ruchem harmonicznym.

Ruch wahadłowy może być uważany *w przybliżeniu* za ruch harmoniczny, lecz w granicach bardzo małych odchyleń (niekoniecznie nieskończenie małych) i wtedy okres np. podwójnego wahnięcia nie zależy od odchylenia pierwotnego; przy większych zaś odchyleniach musimy stosować w obydwóch przypadkach dokładne, lub więcej przybliżone wzory. W tenże sposób odchylenie pręta jest niezależne od siły P, lecz tylko dla nieskończenie małych wartości q; do obliczenia większych odchyleń należy stosować wzory dokładniejsze, lub dokładne.

PRZYKŁAD. Rozwiążemy teraz zapomocą funkcji algebraicznej całkowitej przykład pręta, opartego *swobodnie* końcami i obciążonego osiowo. Równanie krzywej przybliżonej przyjmiemy następujące:

$$y = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + q_4 x^4. \tag{330}$$

W równaniu tem mamy 5 nieokreślonych parametrów q; dla ich określenia mamy warunki, które wyrażą się czterema następującemi równaniami:

dla $x = 0$ powinno być 1) $y = 0$ oraz 2) $y'' = 0$,

„ $x = l$ „ „ 3) $y = 0$ oraz 4) $y'' = 0$;

a więc możemy obliczyć z tych czterech warunków cztery parametry q, piąty zaś obliczymy z ogólnych warunków równowagi. Po podstawieniu tych wartości do rów. 330-tego otrzymamy dwa równania:

$$q_0 = 0, \text{ oraz } q_1 l + q_2 l^2 + q_3 l^3 + q_4 l^4 = 0;$$

następnie z równania:

$$y'' = 2\,q_2 + 6\,q_3 \cdot x + 12\,q_4 \cdot x^2 = 0\,,$$

po podstawieniu $x = 0$, oraz $x = l$,

otrzymamy:

$$q_2 = 0\,, \quad \text{oraz} \quad 6\,q_3\,l + 12\,q_4\,l^2 = 0\,;$$

te cztery równania warunkowe są przeto nast.:

$$q_0 = 0\,,\ q_2 = 0\,,$$

$$q_1 + q_3\,l^2 + q_4\,l^3 = 0\,,$$

oraz

$$q_3 + 2\,q_4\,l = 0\,.$$

Z tych równań otrzymamy:

$$q_3 = -\frac{2}{l^2}\,q_1\,, \qquad \text{oraz} \quad q_4 = \frac{1}{l^3}\,q_1\,,$$

a po podstawieniu tych wartości do rów. 330-tego, otrzymamy:

$$y = q_1 \cdot \left(x - \frac{2}{l^2} \cdot x^3 + \frac{1}{l^3} \cdot x^4 \right), \tag{331}$$

w którem jest tylko jedna spółrzędna nieznana q_1, a którą obliczymy z warunku równowagi.

W tym celu obliczymy:

$$\int_0^l y'^{\,2}\,dx = \frac{17}{35} \cdot q_1^{\,2}\,l\,, \quad \text{oraz} \quad \int_0^l y''^{\,2}\,dx = 4{,}8 \cdot q_1^{\,2}\,\frac{1}{l}\,;$$

a po podstawieniu tych wartości do

$$U = \frac{1}{2}\,P \int_0^l y'^{\,2}\,dx - \frac{1}{2}\,I\,E \int_0^l y''^{\,2}\,dx\,,$$

otrzymamy:

$$U = \frac{1}{2}\left(P \cdot \frac{17}{35} \cdot l - I\,E \cdot 4{,}8 \cdot \frac{1}{l} \right) \cdot q_1^{\,2}\,.$$

Z tego równania na zasadzie twierdzenia o funkcjach jednorodnych napiszemy bezpośrednio

$$P = P_{kr} = \frac{4{,}8 \cdot 35}{17} \cdot \frac{IE}{l^2} = 9{,}882 \cdot \frac{IE}{l^2}; \tag{332}$$

odchyłka więc wynosi w tym razie 0,13% od wartości ścisłej Euler'a.

63. Warunki, przy których wartość siły krytycznej, obliczona z równania przybliżonego, jest ścisła.

Dla obliczenia siły krytycznej, pod działaniem której pręt może się wyboczyć, stosowaliśmy równania różniczkowe, któreśmy otrzymali bądź z funkcji sił zapomocą rachunku warjacyjnego, lub które mogliśmy otrzymać z równań statycznych, wyrażających równowagę sił, ewent. równowagę momentów, działających na dany pręt. Całkowanie jednakże tych równań nie daje się zwykle wykonać w formie skończonej; uciekamy się przeto w tych razach do pewnych skróceń — do pewnych przybliżeń i z tych równań przybliżonych obliczamy siłę krytyczną, cośmy wykonali w §§ poprzednich. Nasuwa się przeto pytanie, czy obliczona z przybliżonych równań wartość siły krytycznej jest również przybliżona, czy też jest ścisła.

Przytoczone wyżej przykłady wskazują, iż dla różnych krzywych przybliżonych otrzymujemy różne wartości P_{kr} dla tego samego przykładu; i tak z równania Euler'a, które jest przybliżone, gdyż przyjmujemy w tem obliczeniu $y' = 0$ oraz $\sin\tau = \tau$, otrzymaliśmy:

$$P_{kr} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{EI}{l^2} = 2{,}467 \cdot \frac{EI}{l^2};$$

z innego równania przybliżonego dla tego samego przykładu otrzymaliśmy:

$$P_{kr} = 2{,}500 \cdot \frac{EI}{l^2};$$

również

$$P_{kr} = 3{,}000 \cdot \frac{EI}{l^2};$$

przypuszczalnie więc dla każdej innej postaci formy odkształconej danego pręta otrzymamy inne wartości siły krytycznej. Lecz, jak zobaczymy z dalszych rozpatrywań, które daje prof. Jasiński, *mogą być* krzywe przybliżone, z których jednakże otrzymamy wartości sił krytycznych jednakowe z wartościami, obliczonemi ze wzorów ścisłych. Zagadnieniem tem zajmował się prof. Jasiński i w pracy swej „Sobranje soczinienij“ T. I na str. 287-ej podał następujące warunki, którym powinny czynić zadość równania przybliżonych krzywych odkształcenia, ażeby można było z nich obliczyć ścisłe wartości siły krytycznej.

Rozważania te postaram się w krótkości powtórzyć.

Prof. Jasiński bierze pod uwagę ścisłe równanie różniczkowe krzywej odkształcenia pręta w postaci ogólnej

$$F\,(x, y, y', \ldots P, r, s, \ldots) = 0; \tag{333}$$

w którem P oznacza siłę, działającą na dany pręt, której szczególna wartość jest szukaną siłą krytyczną; litery r i s oznaczają pewne parametry danego układu, które uważać możemy za znane; temi parametrami mogą być E, I, l i t. d.; wszystkie te parametry są niezależne od spółrzędnych x i y krzywej odkształconej.

Równanie powyższe może być równaniem różniczkowem Euler-Lagrange'a, lub też może być równaniem równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych

Autor następnie przyjmuje, że w ogólnym przypadku wyboczenia krzywa odkształcenia danego pręta składa się z formy prostej i z formy krzywej; siłę krytyczną określimy w tym razie jako siłę, której najdrobniejsze powiększenie spowoduje wyboczenie się pręta, t. j. spowoduje, że forma prosta pręta, która wyrażona jest równaniami

$$y = 0; \quad y' = 0; \quad y'' = 0 \text{ i t. d.}, \tag{334}$$

zacznie przechodzić na formę krzywą, t. j. że wartości y, y' . . zaczną przybierać pewne wartości większe od zera.

W celu obliczenia wartości siły krytycznej, obliczymy wogóle siłę P z równania 333-go; niech będzie

$$P = f\,(x, y, y', \ldots s, r, \cdots). \tag{334 a}$$

Jeżeli następnie oznaczymy literą P_1 tę szczególną wartość siły, przy której krzywa wyboczenia pokrywa się z osią x, t. j. pozostaje prostą, to z równania 334-a otrzymamy:

$$P_1 = f\,(0, 0, \ldots r, s),$$

lub inaczej

$$P_1 = f(r, s). \tag{335}$$

Może jednakże się zdarzyć, powiada prof. Jasiński, że prawa strona równania 335-go przedstawi się w postaci nieokreślonej:

$$P = \frac{0}{0},$$

t. j. w postaci ułamka, którego licznik i mianownik zbliżać się będą do zera.

Forma ta będzie wykazywała, że linja wyboczenia w postaci linji prostej, będzie pozostawała w postaci prostej przy wszelkich wartościach P; wartość bowiem P pozostaje w tym razie nieokreśloną.

Następnie prof. Jasiński dowodzi, iż dla obliczenia P_1 z równania 333-ego niepotrzebne są wielkości rzędów wyższych od najniższego, jaki występuje w tem równaniu, i na zasadzie tego formułuje swój wniosek w następujący sposób: graniczną wartość P_1 siły P, przy której dany pręt może się wyboczyć, można obliczyć wogóle z dokładnego równania różniczkowego w sposób ścisły; jeżeli zaś otrzymamy dla P_1 wyraz nieokreślony $0:0$, to dla obliczenia tej wartości nie potrzeba całkować dokładnego równania (co bywa nieraz niemożliwem w skończonej formie), lecz można je uprościć, dodając, lub odejmując od licznika i mianownika wielkości nieskończenie małe wyższych rzędów, co nie wpłynie na wartość tego wyrazu; wtedy z tego nowego równania zapomocą całkowania można obliczyć P_1 jako graniczną wartość P, gdy $y = 0$, $y' = 0$ i t. d.

Jeżeli przeto równanie krzywej wyboczenia, z którego obliczamy siłę krytyczną, jest równaniem, które wynikło z właściwego równania różniczkowego, t. j. z równania 333-go, przez usunięcie, lub dodanie nieskończenie małych wielkości, to wartość siły krytycznej, otrzymanej z tego równania przybliżonego, będzie wartością tą samą, jaką otrzymalibyśmy z równania dokładnego, chociaż krzywa odkształcenia jest tylko przybliżoną*).

Równanie różniczkowe, które stosował Euler do obliczenia siły krytycznej, jest równaniem przybliżonem, gdyż usunięto z nie-

*) Sądzę, że można ten sposób obliczenia w ten sposób sformułować, że krzywe, które będą ściśle styczne do (nieznanej) krzywej równowagi, będą miały drugie pochodne jednakowe, a więc i rodzaje równowagi te same, choć w dalszym ich przebiegu będą się rozchodziły.

go wielkość y', występującą we wzorze na promień krzywizny; pomimo to, siła krytyczna, obliczona z tego równania, jest ścisłą.

Sposób przeto prof. Jasińskiego stosować można do obliczenia dokładnej wartości siły krytycznej z równań uproszczonych, co w praktycznych zagadnieniach bywa ważne; do obliczenia zaś odkształceń równanie takie wogóle się nie nadaje.

Sposób ten przeto daje większą pewność rachunkową, niż sposób obliczania zapomocą funkcyj przybliżonych, których stopień dokładności jest nam nieznany. Wartość przeto siły krytycznej, obliczona z równania Euler'a, jest dokładna pomimo, że równanie to jest przybliżone.

Na tej podstawie możemy obliczyć dokładną siłę krytyczną np. z rów. 241-go, przyjąwszy

$$\sin \tau = \tau;$$

a otrzymamy wtedy równanie:

$$\frac{d^2\tau}{d s^2} + \frac{P}{I E} \cdot \tau = 0.$$

Całkę tego równania otrzymamy, gdy podstawimy w równanie ruchu harmonicznego (Mech. Teor. H. Czopowskiego T. III, str. 21-sza, rów. 22-gie)

$$t = s; \qquad x = \tau; \qquad \frac{k}{m} = \frac{P}{I E}.$$

Z równania 25-go ruchu harmonicznego mamy np.:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

a po podstawieniu w nie $\frac{1}{2} T = l$, gdzie l oznacza długość pręta, otrzymamy:

$$2 l = 2\pi \sqrt{\frac{I E}{P}},$$

skąd

$$P = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot I E = P_E.$$