Dla obliczenia równowagi sił, przyłożonych do takiego układu, zastosujemy powyższe metody, przyjąwszy, że t = stałej wielkości, jak powiedzieliśmy to w § 5-tym. Zwrócić jednakże należy uwagę na tę okoliczność, że wyraz pracy wirtualnej, obliczonej przy założeniu t = stałej, może służyć tylko dla wyrażenia *równowagi* danego układu; nie może zaś służyć np. dla wyrażania rzeczywistego jego ruchu; *praca bowiem sił podczas przesunięcia rzeczywistego* jest wogóle inna, niż ta, którą przyjęliśmy, w myśl powyższego założenia, dla t = stałej; siły bowiem odporowe podczas przesunięcia rzeczywistego, t. j. przy zmiennem t, wykonają pewną pracę, choć są one prostopadłe do toru, po którym punkt się porusza; nie są one jednakże prostopadłe do toru rzeczywistego, t. j. do przesunięcia rzeczywistego; tor bowiem w rzeczywistości się porusza, punkty przeto przyłożenia sił odporowych wykonają przesunięcia złożone. Wykonają one przesunięcia wzdłuż toru (względne); podczas tych przesunięć siły odporowe wykonają pracę równą zeru; wykonają one jednakże jednocześnie przesunięcia razem z torem (unoszące), podczas których praca sił odporowych wogóle — *nie* równa się zeru. Pojęcie więc pracy wirtualnej jest ogólniejsze od pojęcia pracy rzeczywistej, czy też możliwej. Z tego ostatniego powodu niektórzy autorzy uważają, iż nazwanie pracy wirtualnej — pracą możliwą, w znaczeniu pracy, wykonanej przez siły podczas przesunięcia możliwego, — jest w tym razie niesłuszne; nie powinno to jednakże prowadzić do błędnego pojmowania.

ROZDZIAŁ VI.

UKŁADY O NIESKOŃCZONEJ LICZBIE STOPNI SWOBODY.
(POCZĄTKI RACHUNKU WARJACYJNEGO).

51. Sformułowanie zadania.

Położenie każdego układu materjalnego jest wyznaczone spółrzędnemi niezależnemi (§ 1-szy). Jeżeli układ ma skończoną liczbę stopni swobody, to spółrzędne te, gdy siły, na niego działające, są w równowadze, obliczymy jako niewiadome z odpowiednich równań równowagi; jeżeli zaś układ posiada nieskończoną liczbę stopni swobody, to mamy do obliczenia nieskończenie wiele spółrzędnych niewiadomych; niewiadome te, t. j. spółrzędne mogą być obliczone z funkcjonalnego związku, jaki zachodzi pomiędzy niemi, o ile ten związek będzie znany. Jako przykład służyć może obliczenie krzywej, jaką przybierze np. łańcuch nierozciągliwy, ciężki, o niezmiennej długości i o nieskończenie małych ogniwach, gdy będzie zawieszony swobodnie na dwóch nieruchomych punktach.

Formę tej krzywej, narazie nieznanej, wyrazimy równaniem:

$$y = \varphi(x). \tag{170}$$

W równaniu tem φ jest nieznaną funkcją, którą mamy obliczyć; jeżeli tę funkcję obliczymy, to będziemy mogli obliczyć spółrzędne (x, y) wszystkich punktów danego układu.

Zadanie przeto polega w tym razie na znalezieniu funkcjonalnego związku pomiędzy spółrzędnemi x, y, t. j. polega na obliczeniu—z danych warunków zadania—*formy matematycznej funkcji* φ.

Podstawą obliczenia tej funkcji jest przedewszystkiem warunek, że siły, działające na dany układ, są w równowadze; następnie powinny być jeszcze dane warunki, określające dane zadanie; np. w powyższym przykładzie powinna być dana długość liny; następnie powinno być powiedziane, że ta długość się nie zmienia i że szukana krzywa ma przechodzić przez dwa dane punkty i t. p. Równowagę w tym razie wyrazimy, jak w poprzednich przykładach, zapomocą wyrazu pracy wirtualnej, który napiszemy bezpośrednio, lub wyprowadzimy z funkcji sił, działających na dany układ.

Funkcję tych sił — w powyższym przykładzie — wyrazimy jako funkcję tylko sił ciężkości cząstek tej liny; siły wewnętrzne bowiem podczas wirtualnego przesunięcia łańcucha wykonają pracę równą zeru (o ile nie uwzględnimy tarcia); wirtualna funkcja sił przeto w tym razie jest następująca:

$$U = \int_A^B y \cdot ds = \int_A^B y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx, \tag{171}$$

gdzie ds oznaczają długości cząstek tego łańcucha, które uważać będziemy za ich ciężary, a litery y i x oznaczają spółrzędne tych cząstek; symbole zaś A i B oznaczają granice całki, t. j. oznaczają spółrzędne punktów zawieszenia danego łańcucha.

Jeżeli będziemy zmieniać dowolnie formę krzywej, jaką przybierać może łańcuch krzywej, przeprowadzając najróżnorodniejsze krzywe pomiędzy punktami zawieszenia, zachowując przytem długość łańcucha, to otrzymamy najróżnorodniejsze wartości dla U. Jeżeli weźmiemy pod uwagę np. dwie dowolne krzywe, blisko siebie leżące, które wyrazimy równaniami:

$$y = \varphi_1(x), \quad \text{oraz} \quad y = \varphi_2(x), \tag{172}$$

to otrzymamy po ich podstawieniu do równania 171-go dwie wartości U_1 i U_2; różnica tych wartości,

$$U_2 - U_1 = \delta U, \tag{173}$$

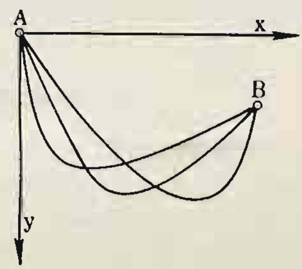
wyraża pracę, jaką w tym razie wykonały siły ciężkości łańcucha podczas przejścia danej krzywej z jednej formy do drugiej.

Na podstawie określenia równowagi powiemy, iż warunkiem równowagi, jakiemu powinna czynić zadość szukana krzywa, jest ten, ażeby praca wirtualna, wykonana przez siły (w tym przykładzie przez ciężary cząstek danej liny) podczas zmiany jej formy, była równa zeru, t. j. ażeby

$$\delta U = 0, \tag{174}$$

gdzie δU oznacza sumę prac tych sił podczas wirtualnego przesunięcia cząstek łańcucha.

Praktyczne rozwiązanie tego zadania polegałoby przeto na wykreśleniu pomiędzy punktami zawieszenia pewnej liczby dowolnych, lecz bliskich sobie krzywych, o jednakowych długościach (rys. 12-ty); następnie na obliczeniu dla każdej z nich wartości U sposobem np. wykreślnym, jeżeli krzywe dane są wykreślnie, lub wogóle — analitycznym; i wreszcie — na wybraniu z pomiędzy nich takiej wartości U, której różnica z sąsiedniemi wartościami zbliżałaby się do zera, t. j. dla której



Rys. 12.

$$\delta U \rightarrow 0.$$

Krzywa, odpowiadająca temu warunkowi, będzie szukaną krzywą; takie byłoby rozwiązanie środkami praktycznemi.

W przykładach, które będziemy rozpatrywali, funkcja sił wyraża się wogóle wzorem:

$$U = \int_A^B f(x, y, y', y'' \cdots\cdots) \cdot dx, \tag{175}$$

w którym f oznacza funkcję znaną, obliczoną z warunków danego zadania, jakeśmy to zrobili we wzorze 171-ym; — y zaś jest funkcją *nieznaną* zmiennej x; symbole zaś y', y'',..... i t. d. oznaczają pochodne tej *nieznanej funkcji* względem x i są również funkcjami x. Zadanie w tym razie polega na znalezieniu takiej funkcji φ, którąby, podstawiona do funkcji sił (rów. 175-te), dała przyrost $\delta U = 0$, gdy formę tej funkcji nieco zmienimy. Sposoby obliczania takich funkcyj daje t. zw. rachunek warjacyjny, którego początki oraz pewne zastosowania tutaj przytoczymy; w § 59-tym zaś podamy sposoby obliczenia funkcyj przybliżonych do nich.

52. Początki rachunku warjacyjnego.

Jeżeli mamy

$$y = \varphi(x), \tag{176}$$

to wogóle zmiana wartości y może nastąpić z trzech powodów:

1) albo z powodu zmiany wartości zmiennej niezależnej x, gdy φ jest funkcją określoną (znaną);

2) albo z powodu zmiany *formy* funkcji φ, przy *tej samej* wartości x, gdy funkcja φ jest nieokreśloną (nieznaną); i wreszcie:

3) z powodu jednoczesnej zmiany wartości zmiennej x, oraz zmiany formy funkcji.

Funkcje, z jakiemi mamy wogóle do czynienia, są albo określone co do swej formy (np. $\sin x$, $\lg x$ i t. d.) inaczej — *stałe*, albo nieokreślone, t. j. *zmienne*; funkcje nieokreślone, inaczej zmienne, oznaczać będziemy w tym rachunku symbolem φ.

Funkcje określone odpowiadają pojęciu *wielkości* określonych, inaczej wielkości stałych; *funkcje nieokreślone*, inaczej zmienne, odpowiadają pojęciu wielkości niezależnie zmiennych (po niemiecku nazywają je „Argumentfunction"); funkcji przeto pewnej niezależnie zmiennej w zwykłej analizie odpowiada w rachunku warjacyjnym wielkość, wyrażona funkcją określoną (t. j. znaną) pewnej funkcji nieokreślonej, jako niezależnie zmiennej; wielkości takie wyrazimy symbolem:

$$f[\varphi(x)], \tag{177}$$

gdzie f jest funkcją określoną (znaną), a φ jest funkcją nieokreśloną (nieznaną, zmienną), która przedstawia wielkość niezależnie zmienną.

Jeżeli różnica wartości dwóch różnych funkcyj dla tej samej wartości x, t. j. jeżeli różnica wartości:

$$y_1 = \varphi_1(x), \tag{178}$$

oraz

$$y_2 = \varphi_2(x), \tag{179}$$

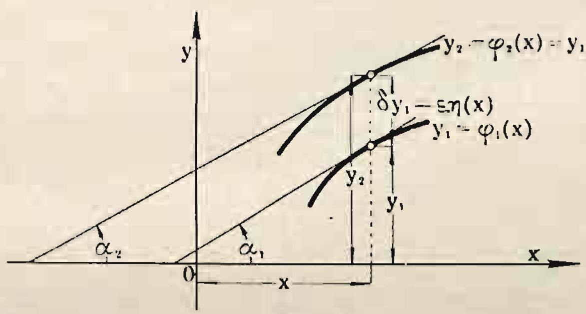
jest nieskończenie mała, to funkcje takie nazwano *sąsiedniemi*, a różnicę wartości tych funkcyj, t. j. $y_2 - y_1$ przyjęto nazywać *warjacją funkcji* y_1 i — oznaczać ją literą δ; a więc napiszemy:

$$\delta y = \varphi_2(x) - \varphi_1(x). \tag{180}$$

Pojęcie przeto warjacji oraz jej symbol δ jest różny od pojęcia różniczki, której przysługuje symbol d i przez którą rozumiemy, jak zwykle, różnicę wartości *znanej funkcji* różnych, lecz nieskończenie bliskich wartości zmiennej niezależnej x; różniczkę więc wyrażamy, jak zwykle, wzorem:

$$d y = \varphi(x + d x) - \varphi(x). \tag{181}$$

Przez *warjację* zaś pewnej funkcji rozumieć będziemy nieskończenie mały przyrost wartości tej funkcji, który powstanie wskutek zmiany jej *formy dla tej samej wartości* niezależnej zmiennej x.



Rys 13.

Geometrycznie unaoczniliśmy na rys. 13-tym warjację funkcji $y_1 = \varphi_1(x)$, jako różnicę rzędnych krzywej $y_1 = \varphi_1(x)$ i sąsiedniej $y_2 = \varphi_2(x)$, która jest bliską do krzywej pierwszej dla tej samej odciętej x. Analitycznie zaś wyrazimy warjację wzorem:

$$\delta y = \varepsilon \cdot \eta(x), \tag{182}$$

w którym $\eta(x)$ jest funkcją dowolną, lecz znikająca w dwóch punktach A i B rozpatrywanego przedziału, ε zaś jest zmienną wielkością, zbliżającą się do zera; w ten sposób dowolna funkcja η wyraża dowolność przyrostu δy*), a wartość ε wyraża dążność

*) Wzór 182-gi jest tylko szczególnym sposobem wyrażania zmiany ilości δy, gdyż nie zawsze zmiana ta jest proporcjonalną do zmiennej $\eta(x)$; jak również wzór ten przesądza o tem, iż wszystkie pochodne zmiennej δy zbli-

do zbliżania się wartości tego przyrostu do zera. Jeżeli wyrazimy wartość pewnej funkcji wzorem:

$$y_1 = \varphi_1(x), \tag{183}$$

to krzywą, wyrażającą jej warjację, wyrazić możemy na zasadzie tego określenia wzorem:

$$y_2 = y_1 + \delta y_1,$$

inaczej wzorem:

$$y_2 = y_1 + \varepsilon \cdot \eta(x). \tag{184}$$

Zbiór krzywych, wyrażonych równaniem 184-tem, nazwiemy krzywemi *sąsiedniemi* krzywej, wyrażonej równaniem 183-ciem. Jeżeli ilość $\varepsilon \longrightarrow 0$, to wszystkie krzywe $y_2 = \varphi_2(x)$ dążą do pokrycia się z krzywą $y_1 = \varphi_1(x)$ *).

Analogicznie do określenia warjacji pewnej funkcji, wyrażonego równaniem 182-giem, wprowadzimy pojęcie *warjacji pochodnej* tej funkcji, rozumiejąc przez nią różnicę *wartości pochodnych* dwóch *sąsiednich funkcyj* dla tej samej wartości x, t. j. wyrazimy warjację pochodnej wzorem:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - \frac{d\varphi_1(x)}{dx}. \tag{185}$$

Wzór ten można przekształcić na zasadzie wzoru 180-ego na następujący:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right] = \frac{d\delta y}{dx}; \tag{186}$$

lub, inaczej, napiszemy ten wyraz:

$$\delta y' = \frac{d\delta y}{dx}, \tag{187}$$

gdzie:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

żają się do zera wraz z wielkością ε, co nie zawsze następuje; zastrzeżenie to należy przeto mieć na uwadze przy stosowaniu wzorów, opartych na tem założeniu; założenie to jednakże nie jest wogóle sprzeczne z warunkami zadań, spotykanych w technice.

*) Rozróżniać jeszcze należy *sąsiedztwa różnych rzędów*; — jeżeli np. tylko wartości spółrzędne y obydwóch funkcyj zbliżają się do siebie, to nazywamy je sąsiedztwami *zerowego rzędu*; jeżeli oprócz tego i wartości pierwszych pochodnych zbliżają się do siebie, to mówimy o sąsiedztwie *pierwszego rzędu* i t. d. W tych rozpatrywaniach mówimy tylko o sąsiedztwie zerowego rzędu.

Możemy, oczywiście, wyrazić również warjację pochodnej jako różnicę wartości tangensów kątów, utworzonych z osią x, przez styczne w punktach (x, y_1) oraz (x, y_2) krzywych sąsiednich, t. j. możemy napisać z rys. 13-go

$$\delta \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1 .$$

W tenże sposób można również napisać warjację drugiej pochodnej jako różnicę wartości drugich pochodnych tych dwóch funkcyj dla tej samej wartości x; otrzymamy wtedy:

$$\delta \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} - \frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] = \frac{d^2 \delta y}{dx^2},$$

lub inaczej:

$$\delta y'' = \frac{d^2 \delta y}{dx^2} \text{ i t. d.} \tag{188}$$

Wzory te wysłowimy w ten sposób: działania matematyczne, określone symbolami δ i d, posiadają własność przemienności dla tych samych wartości x; krócej wyrazimy tę właściwość: *warjacja pochodnej równa się pochodnej warjacji.*

Przemienność działań warjacji i różniczki wynika z tej właściwości różniczkowania, że różniczkowanie jest działaniem rozdzielnościowem (distributiv), t. j. że np. różniczka sumy jest różniczką jej dodajników i odwrotnie; tę właściwość różniczki zastosowaliśmy właśnie do obliczenia wzoru 186-go i 188-go.

Właściwości przemienności różniczkowania i warjacji można rozszerzyć i na inne działania matematyczne, byleby te działania były rozdzielnościowe. To samo przeto prawidło przemienności działań przysługuje również operacji całkowania; całkowanie bowiem jest również działaniem rozdzielnościowem, gdyż całka sumy równa się sumie całek dodajników tej sumy i odwrotnie; przeto, stosownie do określenia warjacji (rów. 180-te), napiszemy:

$$\delta \int_A^B y\,dx = \int_A^B \varphi_2(x)\,dx - \int_A^B \varphi_1(x)\,dx = \int_A^B [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \cdot dx =$$
$$= \int_A^B \delta y \cdot dx; \tag{189}$$

granice A i B oznaczają, że rozpatrywane właściwości odnoszą się do punktów krzywej $y = \varphi(x)$, zawartych pomiędzy punktami

A i *B*. Wynik powyższy wysłowimy w następujący sposób: *warjacja całki równa się całce warjacji* funkcji, znajdującej się pod znakiem całkowania.

Przystąpimy teraz do rozwiązania właściwego zadania, t. j. do obliczenia takiej formy funkcji $y=\varphi(x)$, któraby, podstawiona do równania

$$U=\int_A^B f(x, y, y', y'', \cdots)\cdot dx, \tag{190}$$

dała zmiennej U taką wartość, której przyrost

$$\delta U=0$$

przy zmiennej formie funkcji φ.

Przyrost δU powstaje więc w tym razie jako różnica wartości dwóch całek, a mianowicie — wartości całki:

$$U_2=\int_A^B f(x, y_2, y'_2, y''_2, \cdots)\cdot dx, \tag{191}$$

oraz wartości całki:

$$U_1=\int_A^B f(x, y_1, y'_1, y''_1, \cdots)\cdot dx, \tag{192}$$

gdzie

$$y_1=\varphi_1(x) \quad \text{i} \quad y_2=\varphi_2(x) \tag{193}$$

wyrażają sąsiednie funkcje; zaś y'_1, y'_2 i t. d. wyrażają ich pochodne dla tych samych wartości x.

Podstawimy następnie w równanie 191-sze wartość:

$$y_2=y_1+\delta y_1,$$

a otrzymamy:

$$U_2=\int_A^B f(x, y_1+\delta y_1, y'_1+\delta y'_1, y''_1+\delta y''_1, \cdots)\cdot dx. \tag{194}$$

Rozwiniemy następnie funkcję podcałkową wyrazu 194-go w szereg Taylor'a względem przyrostów δy, $\delta y'$ i t. d. i napiszemy wogóle:

$$\Delta U=U_2-U_1;$$

jeżeli następnie symbolem δU oznaczymy wyrazy, jakeśmy to wyżej oznaczali, tylko pierwszego rzędu szeregu Taylor'a, to napiszemy wzór:

$$\delta U = \int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \delta y' + \frac{\partial f}{\partial y''} \cdot \delta y'' + \cdots \right] \cdot dx, \tag{195}$$

w którym wskaźniki przy y pominięto; są one bowiem już zbędne. Obecnie zajmiemy się przekształceniem całki 195-ej w ten sposób, ażeby z niej można było obliczyć szukaną funkcję $\varphi(x)$, t. j. funkcję, którąby czyniła zadość warunkowi:

$$\delta U = 0.$$

W tym celu postaramy się przekształcić wzór 195-ty w ten sposób, ażeby był niezależny przyrost δy, a nie przyrosty pochodnych y', y'' i t. d., i do tego zastosujemy przemienność warjacji i różniczkowania, t. j. przemienność działań, określonych symbolami δ i d, i napiszemy równanie 195-te, zastąpiwszy, na podstawie równania 187-go i 188-go, wyrazy $\delta y'$, $\delta y''$ wyrazami $\frac{d\delta y}{dx}$ i $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ i t. d. — w następującej postaci:

$$\delta U = \int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y''} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \cdots \right] \cdot dx. \tag{196}$$

Lecz w tem równaniu, oprócz niezależnych przyrostów δy (wynikających ze zmiany formy funkcji), występują jeszcze pochodne tych przyrostów, t. j. pochodne

$$\frac{d\delta y}{dx}, \quad \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \quad \text{i t. d.}$$

Ażeby usunąć te pochodne, zastosujemy do scałkowania wzoru 196-go całkowanie przez części podług ogólnego wzoru:

$$\int_A^B u \cdot dv = u \cdot v - \int_A^B v \cdot du. \tag{197}$$

Ponieważ *pierwszy* dodajnik pod znakiem całki równania 196-tego posiada tylko czynnik δy, przeto pozostawimy go bez zmiany; *drugi* zaś dodajnik scałkujemy w ten sposób, że przyjmiemy

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = u, \quad \text{oraz} \quad \delta y = v;$$

na podstawie więc wzoru 186-go po zastąpieniu $\frac{d\,\delta y}{d\,x}\cdot dx$ wyrazem $d\,\delta y$, napiszemy całkę drugiego dodajnika rów. 196-tego w nast. sposób:

$$\int_A^B \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{d\,\delta y}{d\,x}\cdot d\,x=\int_A^B \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot d\,\delta y=\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\delta y\right|_A^B+$$

$$-\int_A^B \delta y\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\cdot dx; \quad (198)$$

w równaniu tem niema już *pochodnej* przyrostu δy, a tylko przyrost δy. Dodajnik *trzeci* funkcji podcałkowej równania 196-go przekształcimy w tenże sposób, t. j. zastosujemy całkowanie przez części, lecz dwa razy i napiszemy:

$$\int_A^B \frac{\partial f}{\partial y''}\cdot\frac{d^2\delta y}{d\,x^2}\cdot d\,x=\int_A^B \frac{\partial f}{\partial y''}\cdot d\left(\frac{d\,\delta y}{d\,x}\right)=$$

$$=\left|\frac{\partial f}{\partial y''}\cdot\frac{d\,\delta y}{d\,x}\right|_A^B-\int_A^B \frac{d\,\delta y}{d\,x}\cdot\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\cdot d\,x. \quad (199)$$

Ażeby wreszcie pozbyć się jeszcze pochodnej $\frac{d\,\delta y}{d\,x}$, jaka występuje w funkcji podcałkowej wzoru 199-go, zmienimy porządek czynników mnożenia i skasujemy $d\,x$ w liczniku i mianowniku, jakeśmy to poprzednio zrobili, i napiszemy:

$$\int \frac{d\,\delta y}{d\,x}\cdot\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\cdot d\,x=\int \frac{d}{d\,x}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\cdot d\,\delta y. \quad (200)$$

a po scałkowaniu przez części napiszemy:

$$\int_A^B \frac{d\,\delta y}{d\,x}\cdot\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\cdot d\,x=$$

$$=\left|\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\cdot\delta y\right|_A^B-\int_A^B \frac{d^2}{d\,x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\cdot d\,x\cdot\delta y. \quad (201)$$

Po podstawieniu tego wyrazu do równania 199-go otrzymamy 3-ci dodajnik rów. 196-tego w nast. postaci:

$$\int_A^B \frac{\partial f}{\partial y''} \cdot \frac{d^2 \delta y}{d x^2} \cdot d x =$$

$$= \left| \frac{\partial f}{\partial y''} \cdot \frac{d \delta y}{d x} \right|_A^B - \left| \frac{d}{d x} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \cdot \delta y \right|_A^B + \int_A^B \frac{d^2}{d x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \cdot d x \cdot \delta y, \quad (202)$$

gdzie niema pod znakiem całki pochodnych przyrostu δy, lecz tylko same przyrosty δy.

Widzimy z tych przekształceń, że całka każdego dodajnika funkcji podcałkowej równania 196-go równa się (rów. 198-e i 202-e):

1) sumie wyrazów stałych, które obliczymy, gdy dla wartości zmiennych, zawartych w tych wyrazach, podstawimy wartości, odpowiadające spółrzędnym punktów A i B,

2) oraz sumie wartości całek określonych, których funkcja podcałkowa złożona jest z funkcji zmiennych $x, y', y'', \ldots$ oraz z wartości przyrostów δy, (lecz bez ich pochodnych).

Jeżeli następnie podstawimy wyrazy 198-my i 202-gi, do równania 196-go, a następnie, gdy ujmiemy wyrazy stałe w jeden nawias, a całki ujmiemy pod jeden znak całki, wtedy napiszemy po odpowiedniem uporządkowaniu, zamiast równania 196-go, następujące:

$$\delta U = \left| \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{d x} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) + \cdots \right|_A^B \cdot \delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{d x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'''} \right) + \cdots \right|_A^B \cdot \frac{d \delta y}{d x} +$$

$$+ \int_A^B \left| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{d x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{d x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) - \cdots \right| \cdot \delta y \cdot d x. \quad (203)$$

Wartości wyrazów, zawartych w dwóch pierwszych nawiasach, są zależne od zmiany wartości szukanej funkcji tylko na jej granicach A i B; wartość zaś wyrazu całki zależy od zmiany formy funkcji na całej jej rozciągłości i jest różną dla różnych form tej funkcji. Z tego wynika, że, gdy $\delta U = 0$, wtedy wartość całki szukanej funkcji zmiennej wyrażałaby się jej wartościami na granicach; równanie przeto 203-cie (gdy $\delta U = 0$) może posiadać pewne znaczenie rzeczywiste tylko wtedy, gdy suma wyrazów, zawartych w dwóch pierwszych nawiasach, równać się będzie zeru; a wtedy wartość całki będzie także równać się zeru.

Otrzymamy przeto w tym razie z równania 203-go równanie następujące:

$$\int_A^B \left| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{d x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{d x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) - \cdots \right| \cdot \delta y \cdot d x = 0. \quad (204)$$

Jak każdą całkę, tak i całkę równania 204-go możemy uważać jako sumę (graniczną) nieskończenie wielu nieskończenie małych dodajników, z których każdy jest iloczynem, złożonym z trzech wielkości: z wielkości zawartej w nawiasach, następnie — z czynnika δy, który przyjęliśmy, że jest zupełnie dowolny (wirtualny), i z czynnika dx, który jest stały. Ażeby taka suma mogła być równą zeru, co jest warunkiem równowagi, powinien każdy z czynników, stojących przy wielkościach dowolnych δy, być równy zeru; (porówn. np. równ. 62-gie str. 54)*). Ażeby przeto całka, wyrażona równaniem 204-tem, mogła być równą zeru, powinien każdy wyraz w nawiasach, jako znajdujący się przy wielkości dowolnej δy, być równy zeru, co wyrazimy równaniem:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) - \cdots = 0, \qquad (205)$$

które jest równaniem różniczkowem szukanej funkcji $y = \varphi(x)$. Równanie to nazwane jest równaniem Euler — Langrange'a.

Krzywe, czyniące zadość równaniu 205-mu, gdy stałe, wynikające z całkowania, przyjmiemy za zmienne, nazwano wogóle krzywemi extremalnemi (co odpowiada pojęciu całki nieokreślonej); pomiędzy temi krzywemi znajduje się przeto szukana krzywa, inaczej szukana funkcja $y = \varphi(x)$.

53. Szczególne przypadki funkcji sił.

Całkowanie równania 205-go daje się w pewnych szczególnych przypadkach uprościć.

1) Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy w funkcji podcałkowej równania 175-go występują jawnie tylko zmienne x, y i y', t. j. gdy wyższe pochodne od y' *nie* występują; wtedy równanie 205-te przybierze następującą postać:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0; \qquad (206)$$

na podstawie bowiem przyjętego w tym razie założenia $\frac{\partial f}{\partial y''} = 0$ itd.

*) Dochodzą tu jeszcze pewne zastrzeżenia matematyczne, których narazie nie poruszam.

Po obliczeniu wskazanej w tem równaniu pochodnej względem x, uwzględniwszy przytem, że $\frac{\partial f}{\partial y'}$ jest wogóle funkcją zmiennych x, y i y', a y i y' są funkcjami zmiennej x, napiszemy równanie 206-te, po obliczeniu pochodnych, wskazanych w tem równaniu, w następującej postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \tag{207}$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, któremu szukana funkcja $y = \varphi(x)$ powinna uczynić zadość.

Całka równania 206-go, lub 207-go będzie miała postać:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2); \tag{208}$$

posiadać będzie dwie stałe; stałe te obliczymy z warunków brzegowych zadania np. z warunku, jak w przykładzie z łańcuchem, że to równanie powinno się spełniać dla dwóch par wartości (x_a, y_a) oraz (x_b, y_b), jako spółrzędnych punktów A i B; po podstawieniu więc tych wartości do równania 208-go otrzymamy:

$$y_a = \varphi(x_a, C_1, C_2), \quad \text{oraz} \quad y_b = \varphi(x_b, C_1, C_2), \tag{209}$$

z których wogóle możemy obliczyć stałe C_1 i C_2.

Jeżeli dla tych stałych nie otrzymamy wartości rzeczywistych, będzie to znaczyć, że dany układ nie posiada położenia równowagi.

2) Weźmy następnie pod uwagę szczególny przypadek, gdy funkcja podcałkowa równania 175-go ma postać: $f(y, y')$, t. j. gdy funkcja ta nie posiada zmiennej x, t. j. gdy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

a posiada zmienną y oraz tylko pierwszą jej pochodną y'; wtedy odpowiednie równanie różniczkowe, które jest wogóle drugiego rzędu, da się bezpośrednio przekształcić na równanie różniczkowe rzędu pierwszego w następujący sposób.

Równanie Euler-Lagrange'a, t. j. równanie 205-te, w tym przypadku będzie miało, jak rów. 206-te, nast. postać:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{210}$$

W celu uwzględnienia warunku, że w tym razie $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, obliczymy pochodną całkowitą funkcji $f(x, y, y')$ względem x, a zważywszy, że zmienne y i y' są funkcjami zmiennej x, napiszemy równanie tożsamościowe:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot y''. \tag{211}$$

W rozpatrywanym przypadku $\frac{\partial f}{\partial x}=0$; z równania przeto 211-go dla danego przypadku zniknie wyraz $\frac{\partial f}{\partial x}$. Następnie z równania 210-go podstawimy wyraz $\frac{\partial f}{\partial y}$ do równania 211-go i otrzymamy je w postaci:

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\cdot y'+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot y''. \tag{212}$$

Równanie to da się wyrazić pochodną:

$$\frac{d}{dx}\left(f-y'\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0; \tag{213}$$

po obliczeniu bowiem tej pochodnej, otrzymamy równanie 212-te, gdy przy tem obliczeniu uwzględnimy, że funkcje y' i $\frac{\partial f}{\partial y'}$ są funkcjami zmiennej x. Równanie 213-te daje się bezpośrednio scałkować i otrzymamy wtedy:

$$f-y'\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}=C_1, \tag{214}$$

które jest równaniem różniczkowem pierwszego rzędu. Równanie to możemy napisać bezpośrednio z danej funkcji podcałkowej rów. 175-go, co stanowi znaczne uproszczenie rachunkowe.

54. Liczba stałych całkowania.

Gdy w funkcji podcałkowej, t. j. gdy w równaniu

$$U=\int_A^B f(x, y, y', y'', \ldots)\, dx \tag{215}$$

znajdują się pochodne rzędów wyższych, niż pierwszego, to łatwo zauważyć, że po wykonaniu działań, wskazanych w równaniu

205-tem, otrzymamy równanie różniczkowe rzędu, którego liczba będzie podwójną liczby rzędu pochodnej y względem x, znajdującej się pod znakiem całki.

Równanie różniczkowe np. 207-me, którego funkcja podcałkowa, w myśl założenia, posiadała najwyższą pochodną — pierwszą, jest równaniem 2-go rzędu; gdyby zaś y'' było najwyższą pochodną w funkcji podcałkowej, to odpowiednie równanie różniczkowe byłoby czwartego rzędu; wyraz bowiem

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)$$

jest czwartą pochodną zmiennej y względem x; równanie przeto $y = \varphi(x)$ posiadałoby w tym razie cztery stałe, które powinny dać się obliczyć z warunków brzegowych danego zadania; z liczby przeto, wykazującej rząd pochodnej y, znajdującej się w funkcji podcałkowej (funkcji sił), możemy orzec wogóle o liczbie niezależnych warunków brzegowych, potrzebnych do obliczenia, lub też do ścisłego określenia formy szukanej krzywej. I odwrotnie,—jeżeli znamy warunki brzegowe niezależne (jeżeli znamy je np. z rozważań fizycznych danego układu), które dostatecznie wyznaczają formę szukanej krzywej, to będziemy mogli orzec o wysokości rzędu równania różniczkowego, a więc i o odpowiedniej wysokości rzędu pochodnej, która wchodzi do funkcji podcałkowej.

55. Obliczenie rodzaju równowagi zapomocą rachunku warjacyjnego.

Ażeby rozpoznać, czy siły, działające na dany układ materjalny, którego położenie, czy też forma czyni zadość równaniom Euler—Lagrange'a (rów. 205-te), są w równowadze stałej, lub niestałej, należy wziąć, jakeśmy robili z układami o skończonej liczbie stopni swobody*), drugi wyraz szeregu Taylor'a, na jaki rozwijamy funkcję sił; znak tego wyrazu (o ile ten wyraz nie będzie równy zeru) rozstrzygnie o znaku pracy sił, wykonanej podczas zmiany formy tego układu; a więc rozstrzygnie o rodzaju równowagi. W tym celu uzupełnimy szereg Taylor'a, na który rozwi-

*) Zaznaczyć należy, iż zasadniczo nie można obliczać właściwości, wynikających z warunków: n = skończonej liczbie, do właściwości, gdy $n = \infty$; w wielu jednakże przypadkach nie prowadzi to do błędów.

nęliśmy funkcję sił w równaniu 195-em, wyrazem następnym, który oznaczymy symbolem $\delta^2 U$, i napiszemy:

$$\delta^2 U = \frac{1}{2}\int_A^B \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\delta y^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\cdot\delta y\cdot\delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\cdot\delta y'^2\right]\cdot dx. \qquad (216)$$

Ponieważ wyrazy pierwszego rzędu szeregu Taylor'a równają się, wskutek równowagi sił, zeru, przeto znak wyrazu $\delta^2 U$ (rów. 216-te), jak to było poprzednio, rozstrzygnie o znaku wyrazu ΔU, t. j. o rodzaju równowagi danego układu sił.

Jeżeli przeto, w myśl poprzednich rozważań (§ 39-ty), dla położenia równowagi wartość $\delta^2 U$ będzie miała znak dodatni dla wszystkich wartości typu δ, to będzie znaczyć, że układ ten jest w równowadze niestałej; jeżeli zaś ma znak ujemny, to układ ten jest w równowadze stałej; a jeżeli jest równa zeru, to należy zbadać znak trzeciej, ewentualnie, następnych warjacyj; lub też można powiedzieć, że równowaga w tym razie jest obojętną do drugiego rzędu włącznie, co, oczywiście, nie przesądza jeszcze o rodzaju równowagi.

Zadanie przeto obecnie polega na obliczeniu znaku wyrazu $\delta^2 U$ dla położenia równowagi, gdy funkcji $\varphi(x)$ nadawać będziemy dowolne formy.

Obliczenia tego dokonali Legendre i Jacobi, którzy wykazali, że wyraz $\delta^2 U$, obliczony dla położenia równowagi, posiada ten sam znak, jaki posiada wyraz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \qquad (217)$$

przy *warunku*, że w danym przedziale wartość:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} \neq 0, \qquad (218)$$

gdzie równanie $y = \varphi(x, C)$ jest już znanem równaniem szukanej krzywej, a C jest jedną ze stałych całkowania, którą przyjmujemy narazie jako nieokreśloną. Warunek przeto, wyrażony równaniem 218-tem, ogranicza zmianę formy danego układu, jaką stosujemy dla zbadania rodzaju równowagi; kryterjum przeto, wyrażone równaniem 217-tem, odnosi się tylko do odkształceń, które czynią zadość równaniu 218-temu;—do innych form ono się nie odnosi. Ograniczenie to wyrazimy geometrycznie w następujący sposób. Przyjmiemy, że szukane równanie $y = \varphi(x)$ posiada dwie stałe całkowania, które możemy obliczyć z warunków zadania;

przyjmiemy np., że szukana krzywa przechodzi przez dwa dane punkty A i B. Przyjmiemy następnie, że położenie punktu np. A jest określone, położenie zaś punktu B wyobraźmy sobie nieokreślonem, — zmiennem; wtedy warunek 218-ty wyrazimy w następujący sposób:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_B} \neq 0, \tag{219}$$

gdzie C_B przyjmiemy jako parametr zmienny.

W celu geometrycznego zinterpretowania tego warunku, przyjmiemy chwilowo, że punkt B czyni zadość równaniu:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_B} = 0; \tag{220}$$

wtedy równanie

$$y = \varphi(x, C_B) \text{ łącznie z równaniem } \frac{\partial \varphi}{\partial C_B} = 0, \tag{221}$$

po wyrugowaniu parametru C_B, wyznacza obwiednię, jaką utworzą krzywe extremalne $y = \varphi(x, C_B)$ przy zmiennym parametrze C_B.

Nierówność przeto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_B} \neq 0, \tag{222}$$

może być spełniona tylko dla punktów krzywych extremalnych, *nie* leżących na tej obwiedni.

Nierówność 222-ga wyraża jednocześnie, że obwiednia ta nie może przechodzić między punktami A i B; warunek bowiem 218-ty wymaga, ażeby ta nierówność była spełniona dla wszystkich punktów odcinka $A B$.

Znak przeto wyrazu 217-go rozstrzyga o rodzaju równowagi, jeżeli dany odcinek $A B$ znajduje się po jednej stronie obwiedni,— co też należy zbadać. Zbadanie to ze względów na trudności algebraiczne może być wykonane najprościej drogą wykreślną, przez wykreślenie obwiedni krzywych:

$$y = \varphi(x, C_B), \tag{223}$$

gdy przyjmiemy C_B jako zmienny parametr.

Ażeby przeto równowaga danego układu przy danej formie funkcji $y = \varphi(x)$ była stała, lub niestała, powinna wartość wyrazu 217-go i 218-go dla wszystkich wartości zmiennej x, zawartych w danym przedziale całkowania, nie zmieniać swego znaku; — i jeżeli przy tych warunkach i tylko przy tych warunkach wartość wyrazu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0, \tag{224}$$

to dany układ jest w równowadze niestałej; jeżeli zaś

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} < 0, \tag{225}$$

to dany układ jest w równowadze stałej.

Warunki te jednakże *nie zawsze są wystarczające* do orzeczenia, czy dana forma $y = \varphi(x)$ jest formą równowagi stałej, czy też niestałej; w wielu jednakże zagadnieniach technicznych te warunki bywają dostateczne.

56. Założenia, na których opiera się powyższa metoda.

Ważniejsze założenia, któreśmy przyjęli milcząco w tych obliczeniach są następujące:

1) Założono, że funkcja $y = \varphi(x)$, która czyni $\delta U = 0$, istnieje *).

2) Założono, że w danych granicach całkowania funkcja szukana $y = \varphi(x)$ jest jednoznaczną, ciągłą i posiadającą pochodne ciągłe do rzędu, jaki w rachunku jest stosowany;

3) następnie założono, że funkcja podcałkowa $f(x, y, y', \ldots)$ jest względem zmiennych x, y, y',.. jednoznaczną i posiada w danym przedziale cząstkowe pochodne ciągłe względem zmiennych x, y, y', . . .

Jeżeliby przeto szukana krzywa $y = \varphi(x)$ była np. linją łamaną, lub gdyby nie posiadała ciągłych pochodnych, gdyby była np. linją złożoną z krzywych, lub prostych odcinków, lub gdyby była wieloznaczną, (coby nastąpiło, gdyby np. obydwa krańcowe punk-

*) Zagadnienia bowiem, wchodzące w zakres rachunku warjacyjnego, nie zawsze posiadają rozwiązania pomimo, iż posiadają one nieraz wszelkie pozory słuszności; dowód przeto istnienia rozwiązania, a jak w tym razie dowód istnienia odpowiedniego extremum, jest przy metodycznem postępowaniu potrzebny; w praktyce jednakże rachunkowej, ze względu na trudności matematyczne, pomijamy często te dowodzenia i zastępujemy je pewnemi rozważaniami, opartemi na fizycznych właściwościach danego zagadnienia, co, oczywiście, nie zastępuje wogóle ścisłego dowodu.

ty rozpatrywanego łańcucha leżały np. na jednej rzędnej), lub gdyby posiadała w danym przedziale pochodną równą ∞, — wtedy rozwiązania takich zadań, zapomocą podanej tutaj metody nie znaleźlibyśmy; i odwrotnie, — gdybyśmy sposobem tutaj wskazanym nie znaleźli funkcji $y = \varphi(x)$, którąby uczyniła $\delta U = 0$, toby jeszcze nie znaczyło, że niema wogóle takiej krzywej dla danego zadania; mogłaby ona bowiem istnieć, lecz w postaciach, które są wykluczone zastrzeżeniami, poczynionemi w tym rachunku; np. zastrzeżeniem co do ciągłości funkcji i ich pochodnych, zastrzeżeniem co do nierówności 219-tej; takich krzywych, jeżeli są one rozwiązaniem danego zadania, należy szukać inną drogą.

Wyczerpujące wiadomości w tym względzie osiągnąć można drogą głębszych studjów rachunku warjacyjnego. Porów. np. E. Pascal „Rachunek nieskończonościowy", Dr. A. Przeborski „Rachunek warjacyjny" (wyszła tylko część pierwsza tomu I-go); praca ta zakrojona jest na szerszą skalę i ujmuje głęboko dane zagadnienie.

57. Inne zastosowania symbolu δ.

Symbolem δ oznaczyliśmy w tych rozpatrywaniach przyrost wartości pewnej funkcji $y = \varphi(x)$, gdy zmienimy jej formę, nie zmieniając przytem wartości x.

Symbol ten bywa jednakże stosowany również dla oznaczenia innych pojęć matematycznych, nie mających nic wspólnego z zagadnieniem rachunku warjacyjnego, co wywołuje niejasności; stosują go, między innemi, np. do oznaczenia przesunięć dowolnych, niezależnych ani od sił, ani od czasu, które nazwaliśmy przesunięciami wirtualnemi. Otóż symbol ten w tych dwóch przypadkach wyraża dwa różne pojęcia; symbol bowiem δ, zastosowany do przesunięć wirtualnych, nie jest warjacją w znaczeniu wyżej podanem, nie jest przyrostem jakiejś zmiennej, pochodzącym od zmiany *formy* funkcji, lecz oznacza tylko zupełnie dowolny nieskończenie mały odcinek prostej, jako przesunięcie punktu.

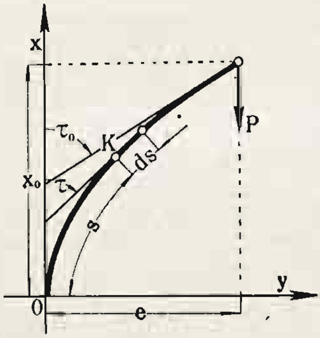
Symbol δ stosowany bywa również dla wyrażenia przyrostu wartości danej funkcji, gdy niezależne zmienne doznają przyrostów dowolnych, nieskończenie małych.

Gdy mamy np.

$$U = f(x, y, z), \tag{226}$$

wtedy przyrost tej wielkości δU, który powstaje, gdy zmiennym niezależnym x, y, z nadamy przyrosty dowolne δx, δy, δz, nazywają również warjacją danej funkcji, a właściwie przyrost δU jest w tym razie pierwszym wyrazem (nieskończenie małych wielkości pierwszego rzędu) szeregu Taylor'a, na jaki rozwiniemy $U = f(x, y, z)$. Symbol ten, jak i nazwa warjacji, nie ma również w tym razie nic wspólnego z pojęciem tejże nazwy, stosowanem w rachunku warjacyjnym.

58. *PRZYKŁAD.* Pręt sprężyście giętki umocowany jest jednym końcem pionowo ku górze; na drugim zaś końcu przyczepiony jest swobodnie ciężar P (rys. 14-ty). Obliczyć metodą rachunku warjacyjnego formę krzywej, jaką przybierze ten pręt pod działaniem ciężaru P, oraz obliczyć rodzaje równowagi.



Rys. 14.

W tem obliczeniu przyjmujemy, że pręt jest cienki (o przekroju np. okrągłym), doskonale sprężysty na gięcie; przyjmujemy następnie, że w kierunku swej osi jest on sztywny i nieodkształcalny, t. j. nie jest on ani rozciągliwy, ani ściśliwy.

Dla wyrażenia równania krzywej równowagi tego pręta obierzemy jako spółrzędne kąt τ, jaki tworzy styczna tej krzywej w dowolnym jej punkcie K z osią x-ów (rys. 14-ty), oraz długość s łuku tej krzywej, mierzoną od punktu umocowania O do punktu dowolnego K tej krzywej.

Obieramy takie spółrzędne*), a nie — spółrzędne np. (x, y), gdyż, jak to zobaczymy, przedstawiają one pewne uproszczenia rachunkowe; a, gdy obliczymy np. związek:

$$\tau = \varphi(s), \tag{227}$$

będziemy mogli przekształcić go na równanie spółrzędnych x i y.

---

*) Spółrzędne te są szczególnem zastosowaniem t. zw. *spółrzędnych naturalnych.* Spółrzędnemi naturalnemi nazywamy pewne wielkości geometryczne, charakteryzujące daną krzywą; związek przeto funkcjonalny pomiędzy temi spółrzędnemi określa właściwości samej krzywej; lecz wogóle nie wyznaczają one jej położenia na danej płaszczyźnie, t. j. względem obranych osi. Związkami spółrzędnych takich bywają: np. związki pomiędzy promieniem krzywizny a długością łuku danej krzywej; pomiędzy promieniem krzywizny a jej obwiednią i t. p. Spółrzędne te upraszczają rachunek; wyrażają bowiem bezpośrednio właściwości geometryczne rozpatrywanej krzywej, nie wyrażają natomiast położenia względem danych osi.

Wyraz pracy sił wewnętrznych U_w podczas zginania tego pręta obliczymy z następującego znanego wzoru:

$$U_w = -\int_0^l \frac{IE}{2} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot ds, \tag{228}$$

gdzie ρ oznacza promień krzywizny w dowolnym punkcie K krzywej szukanej, ds — cząstkę jej łuku, a l — całą długość pręta.

Po podstawieniu w to równanie:

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\tau'}, \tag{229}$$

w którem $\tau' = \frac{d\tau}{ds}$, otrzymamy:

$$U_w = -\int_0^l \frac{IE}{2} \cdot \tau'^2 \cdot ds. \tag{230}$$

Funkcja wirtualna (§ 17-ty) siły P wyraża się nast. wyrazem:

$$U_z = -P \cdot x_0; \tag{231}$$

jest ona ujemna, gdyż strzałka przyrostu zmiennej x (rys. 14-ty) jest przeciwną strzałce siły P.

Z rys. 14-go odczytamy:

$$x_0 = \int_0^{\tau_0} ds \cdot \cos\tau. \tag{232}$$

W położeniu równowagi powinno być:

$$\delta(U_z + U_w) = 0;$$

a więc na podstawie równania 230-go i 231-go napiszemy:

$$\delta \int_0^l \left| -\frac{1}{2} IE\tau'^2 - P \cdot \cos\tau \right| \cdot ds = 0. \tag{233}$$

Przypomnieć należy, że zmienną w tym wyrazie jest forma funkcji $\tau = \varphi(s)$; symbol więc δ oznacza przyrost wartości tej całki, gdy funkcja $\tau = \varphi(s)$ zmieni swą *formę* na formę sąsiednią. Ponieważ pod znakiem całki niema niezależnej zmiennej s, przeto zastosujemy do obliczenia nieznanej funkcji $\tau = \varphi(s)$ równanie 214-te i napiszemy pierwszą całkę równania Euler-Lagrange'a w postaci:

$$f - \tau' \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau'} = C_1, \tag{234}$$

gdzie f oznacza, jak w poprzednich rozpatrywaniach, funkcję podcałkową równania 233-go.

Po wykonaniu wskazanych w równaniu 234-tem działań, otrzymamy z równania 233-go na podstawie równania 234-tego, następujące równanie różniczkowe:

$$\left(-\frac{1}{2} IE\tau'^2 - P\cdot\cos\tau\right) + IE\tau'^2 = C_1, \tag{235}$$

które po uproszczeniu przedstawi się w następującej postaci:

$$\frac{1}{2} IE \cdot \tau'^2 - P\cdot\cos\tau = C_1. \tag{236}$$

Jest to równanie różniczkowe szukanej krzywej wyboczenia; na tem kończy się zastosowanie rachunku warjacyjnego; następnie — są tylko przekształcenia matematyczne.

Stałą C_1 zastąpimy następnie wielkością τ_0, narazie również nieznaną, na podstawie warunku, że dla

$$s = l; \quad \text{mamy} \quad \tau = \tau_0 \quad \text{oraz} \quad \tau'_0 = 0. \tag{237}$$

Wartość τ'_0 w tym razie dlatego równa się zeru, że moment siły P względem punktu $s = l$ równa się zeru, t. j. $M_0 = 0$, a więc w tym punkcie

$$\rho_0 = \frac{IE}{M_0} = \infty,$$

z czego wynika:

$$\left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{s=l} = \tau'_0 = 0,$$

czyli, że jest to punkt przegięcia szukanej krzywej.

Po podstawieniu wartości 237-ych do równania 236-go obliczymy C_1 i otrzymamy:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{IE}{P} \cdot \tau'^2 - (\cos\tau - \cos\tau_0) = 0. \tag{238}$$

Jeżeli następnie równanie to zróżniczkujemy względem s, wziąwszy pod uwagę, że wielkości τ i τ' są funkcjami zmiennej niezależnej s, wielkość zaś τ_0 jest wielkością stałą, to otrzymamy równanie różniczkowe szukanej krzywej w postaci:

$$\frac{IE}{P} \cdot \tau' \cdot \tau'' + \tau' \cdot \sin \tau = 0. \tag{239}$$

Równanie to rozpada się na dwa równania:
na równanie:

$$1) \quad \tau' = 0 \tag{240}$$

i na równanie:

$$2) \quad \frac{IE}{P} \cdot \tau'' + \sin \tau = 0 \, ^{*)}. \tag{241}$$

Wyniki te wysłowimy: kształt krzywej, jaki przybierze dany pręt w położeniu równowagi, przybrać może dwojaką formę: jedną z nich jest prosta (rów. 240-te), niezależna od siły P,—to znaczy, że przy wszelkich wartościach P, prosta ta jest formą równowagi danego pręta; drugą zaś jest krzywa, wyrażona równaniem 241-em.

Pierwszą całką równania 241-go jest równanie 238-me, które jest równaniem różniczkowem pierwszego rzędu; ażeby je scałkować, podstawimy w nie $\tau' = \frac{d\tau}{ds}$ i napiszemy je w postaci:

$$ds = \sqrt{\frac{IE}{2P}} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \tau - \cos \tau_0}}, \tag{242}$$

skąd

$$s = \sqrt{\frac{IE}{2P}} \cdot \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \tau - \cos \tau_0}}. \tag{243}$$

---

*) Jest to równanie jednakowe pod względem algebraicznym z równaniem 95-tem, wyprowadzonem w Mech. Teor. H. Czopowskiego T. III-cim na str. 95-tej dla ruchu wahadła; równanie to jest następujące:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right) \cdot \sin \vartheta = 0;$$

gdy bowiem podstawimy w nie

$$\left(\frac{g}{l}\right) = \left(\frac{P}{IE}\right),$$

otrzymamy rów. 241-sze.

Równania, obliczone dla ruchu wahadła, mogą być przeto zastosowane i do obliczenia siły wyboczenia, gdy podstawimy w nie:

$$\vartheta = \tau; \quad t = s; \quad \vartheta_0 = \tau_0; \quad T = 4\,l,$$

Równanie to po scałkowaniu będzie szukanem równaniem $s = \varphi(\tau)$.

Lecz w równaniu 243-em jest jeszcze nieznany dotychczas parametr τ_0, który zastępuje stałą pierwszego całkowania; parametr ten obliczymy z warunku 237-ego, że dla

$$s = l; \quad \tau = \tau_0;$$

a więc z rów. 243-go otrzymamy:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2P}} \cdot \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{\cos\tau - \cos\tau_0}}; \tag{244}$$

a po wykonaniu całkowania, otrzymamy związek pomiędzy τ_0 i pozostałemi parametrami danego zadania, które uważać należy za

---

i otrzymamy wtedy, np. ze wzoru 101-go Mech. Teor. II. Cz. str. 97-ma, jako wzór przybliżony:

$$4\,l = 2\pi\sqrt{\frac{IE}{P}},$$

skąd

$$P = P_E = \left(\frac{\pi}{2\,l}\right)^2 \cdot IE;$$

lub też otrzymamy ze wzoru 107-go wzór więcej przybliżony:

$$4\,l = 2\pi\sqrt{\frac{IE}{P}} \cdot \left(1 + \frac{\tau_0^2}{16}\right),$$

z którego

$$P = \left(\frac{\pi}{2\,l}\right)^2 \cdot IE \cdot \left(1 + \frac{\tau_0^2}{8}\right), \tag{a}$$

gdyż

$$\left(1 + \frac{\tau_0^2}{16}\right)^2 \cong \left(1 + \frac{\tau_0^2}{8}\right).$$

Równania (a) obliczyłem bezpośrednio w artykule „Słów kilka o wyboczeniu sprężystem", zamieszczonym w „Czasopiśmie Technicznem" 1924 roku Nr. 7.

Do równania 241-go dojść można również drogą statyczną, jeżeli napiszemy równanie równowagi w postaci równowagi momentów w dowolnym przekroju pręta. Równanie to jest następujące:

$$P(l - y) = IE \cdot \frac{d\tau}{ds},$$

gdzie

$$l = \int_0^l \cos\tau \cdot ds; \qquad y = \int_0^s \sin\tau \cdot ds;$$

po zróżniczkowaniu tego równania względem s otrzymamy równanie 241-sze.

dane, — czyli τ_0 może być w zasadzie z tego równania obliczone. Dla następnego obliczenia przekształcimy równanie 243-e w następujący sposób; podstawimy najpierw tożsamości:

$$\cos\tau = 1 - 2\sin^2\frac{\tau}{2},$$

oraz:

$$\cos\tau_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\tau_0}{2};$$

a po wyniesieniu czynnika $\dfrac{1}{\sin^2\frac{\tau_0}{2}}$ przed pierwiastek, napiszemy równanie 243-cie w postaci:

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{IE}{P}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\tau_0}{2}}\cdot\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\tau/2}{\sin^2\tau_0/2}}}. \tag{245}$$

Następnie zmienną τ zastąpimy nową zmienną η, określoną wzorem:

$$\sin\frac{\tau}{2} = k_0\cdot\sin\eta, \tag{246}$$

w którym przyjęliśmy:

$$k_0 = \sin\frac{\tau_0}{2}. \tag{247}$$

Po podstawieniu tych wartości do równania 245-go otrzymamy:

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{IE}{P}}\cdot\frac{1}{k_0}\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\sin^2\eta}}. \tag{248}$$

Różniczkę $d\tau$ zastąpimy następnie różniczką $d\eta$ nowej zmiennej i w tym celu zróżniczkujemy równanie 246-te względem η i τ; różniczka ta jest następująca:

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\tau}{2}\cdot d\tau = k_0\cdot\cos\eta\cdot d\eta; \tag{249}$$

z równania tego obliczymy wartość $d\tau$; podstawimy ją do rów. 248-go, a otrzymamy wtedy:

$$s = \sqrt{\frac{IE}{P}}\int_0^{\tau}\frac{d\eta}{\cos\frac{\tau}{2}}; \tag{250}$$

lub inaczej, wziąwszy pod uwagę równanie 246-te, napiszemy ostatecznie s jako funkcję nowej zmiennej η_1,—do czego dążyliśmy:

$$s = \sqrt{\frac{IE}{P}} \cdot \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta_1}{\sqrt{1 - k_0^2 \sin^2 \eta_1}}; \tag{251}$$

równanie to jest równaniem 243-em, w którem zastąpiliśmy zmienną τ zmienną η_1, określoną równaniem 246-em.

Ażeby obliczyć nieznany dotąd parametr k_0, zastąpimy w równaniu 245-em wielkości τ i τ_0 wielkościami η_1 i η_0; w tym celu skorzystamy z równania 251-go i zastąpimy granicę tej całki, wyrażoną wielkością τ_0 (rów. 244-te) wielkością η_{10}, którą obliczymy z równania 246-go i 247-go, podstawiwszy w te równania

$$\tau = \tau_0, \qquad \text{oraz } \eta_1 = \eta_{10},$$

i otrzymamy z równania 246-go następujące:

$$\sin\frac{\tau_0}{2} = \sin\frac{\tau_0}{2} \cdot \sin \eta_{10},$$

skąd

$$\eta_{10} = \frac{\pi}{2}; \tag{252}$$

podstawiwszy tę wartość oraz wartość

$$s = l$$

do rów. 251-go, otrzymamy równanie:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{P}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta_1}{\sqrt{1 - k_0^2 \sin^2 \eta_1}}, \tag{253}$$

z którego po scałkowaniu można obliczyć wielkość k_0.

Przez te podstawienia sprawa całkowania równania 243-go nie została, oczywiście, posunięta naprzód; równanie to, t. j. 243-cie zostało tylko przedstawione w innej formie, — dogodniejszej do obliczenia.

Całki jednakże równań 251-go i 253-go nie dają się wyrazić funkcjami elementarnemi skończonemi; całki te są t. zw. funkcjami eliptycznemi. Obliczyć jednakże można wartości liczbowe tych całek z odpowiednich tablic Legendre'a, gdy dane są liczbowe wartości parametrów danego zadania; lub też można je obliczyć w sposób przybliżony, jaki stosowaliśmy przy obliczaniu ruchu wahadła w Mech. Teor. H. Cz. T. III, § 46-ty, w którym zastąpiliśmy funkcję podcałkową tego równania inną funkcją, zbliżoną do danej, lecz całkowalną.

W celu wykonania tego obliczenia przybliżonego, zastosujemy przekształcenie danej funkcji, które już stosowaliśmy np. przy obliczaniu wahadła (t. III, str. 100-na, § 46-ty i które też stosowałem w pracy, pomieszczonej w „Czasopiśmie Technicznem“ 1924 r. Nr. 7); mianowicie przyjmiemy, że:

$$(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \cong 1+\frac{1}{2}\xi^2, \tag{254}$$

przy warunku, że $\xi < 1$, w którem to równaniu pomijamy potęgi 4-te i wyższe ułamka rzeczywistego ξ; wartości te bowiem będą bardzo małe w porównaniu z wartością ξ^2. Mając to na uwadze, w celu obliczenia k_0 napiszemy równanie 253-cie, przyjąwszy $\xi = k_0 \sin\eta_1$, — w postaci:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{P}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{1}{2}k_0^2 \sin^2\eta_1\right) d\eta_1; \tag{255}$$

po scałkowaniu otrzymamy:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{P}} \left[\eta_1 + \frac{1}{2}k_0^2\left(-\frac{1}{2}\sin\eta_1\cos\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \tag{256}$$

i wreszcie po podstawieniu granic napiszemy:

$$l = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{IE}{P}} \cdot \left[1+\frac{1}{4}k_0^2\right]; \tag{257}$$

z tego równania obliczyć możemy wartość k_0, znając wartość P oraz pozostałe parametry tego równania; a po podstawieniu następnie tej wartości do równania 251-go, które przekształcimy w tenże sposób, otrzymamy równanie pomiędzy spółrzędnemi τ i s. Z tego równania następnie możemy znaleźć związek pomiędzy x i y, gdy podstawimy w nie

$$dx = ds \cdot \cos\tau; \qquad dy = ds \cdot \sin\tau;$$

otrzymamy bowiem wtedy równanie parametryczne:

$$x = \psi_1(\tau), \qquad \text{oraz } y = \psi_2(\tau); \tag{258}$$

w ten sposób otrzymamy równanie przybliżonej krzywej równowagi pręta sprężystego, t. j. równanie przybliżonej krzywej wyboczenia.

Równanie 257-me daje związek pomiędzy P i k_0, t. j. pomiędzy siłą wybaczającą P a odkształceniem pręta, wyrażonem kątem τ_0; przeto dla $\tau_0 = 0$, t. j. dla $k_0 = 0$, obliczymy siłę P, przy której *rozpoczyna się* odchylenie; wartość tej siły jest następująca:

$$P = \frac{\pi^2 IE}{4 l^2} = P_E, \tag{259}$$

gdzie P_E oznacza siłę Euler'owską. Zwrócimy uwagę jeszcze na pewną właściwość krzywej wyboczenia; równanie krzywej $\tau = \varphi(s)$, otrzymane w postaci ścisłej, lub przybliżonej, zależy w tym razie tylko od jednego parametru k_0, który jest zależny od P.

Zamiast zmiennego parametru

$$k_0 = \sin\frac{\tau_0}{2},$$

możemy również zastosować inny parametr; wprowadzimy np. jako parametr zmienny wielkość odchylenia obciążonego końca pręta od pionu; odchylenie to oznaczymy literą e (rys 14-ty) i obliczymy je z geometrycznego związku:

$$e = \int_0^{\tau_0} ds \cdot \sin\tau; \tag{260}$$

następnie podstawimy w nie z równania 242-go ds i otrzymamy:

$$e = \sqrt{\frac{IE}{2P}} \cdot \int_0^{\tau_0} \frac{\sin\tau}{\sqrt{\cos\tau - \cos\tau_0}} \cdot d\tau,$$

lub inaczej:

$$e = -\sqrt{\frac{IE}{2P}} \cdot \int_0^{\tau_0} \frac{d(\cos\tau - \cos\tau_0)}{\sqrt{\cos\tau - \cos\tau_0}},$$

a po scałkowaniu i po przekształceniu otrzymamy:

$$e = -2\sqrt{\frac{IE}{2P}} \cdot \Big| \sqrt{\cos\tau - \cos\tau_0} \Big|_0^{\tau_0} = -2\sqrt{\frac{IE}{2P}}\left[-\sqrt{1 - \cos\tau_0}\,\right],$$

skąd:

$$e = 2\sqrt{\frac{IE}{P}} \cdot \sin\frac{\tau_0}{2}, \quad \text{inaczej:} \quad e = 2\sqrt{\frac{IE}{P}} \cdot k_0,$$

i wreszcie:

$$k_0 = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{P}{IE}}\,. \tag{261}$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie 257-me i po rozwiązaniu względem P, otrzymamy:

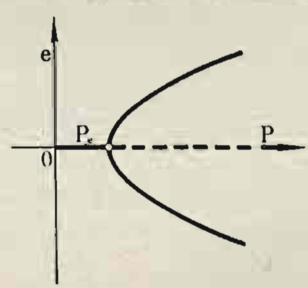
$$P \cong \frac{\pi^2 IE}{4l^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi e}{2l}\right)^2}\,. \tag{262}$$

Zważywszy następnie, że przy niewielkiem odchyleniu (lecz niekoniecznie nieskończenie małem) pręta od pionu wyraz w mianowniku, zawarty w nawiasach, jest < 1, możemy napisać równanie 262-gie z pewnem przybliżeniem w nast. postaci:

$$P \cong \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot IE\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\pi e}{2l}\right)^2\right]. \tag{263}$$

Równanie to daje związek pomiędzy odchyleniem e końca pręta od pionu a siłą odchylającą P.

Wielkość e odgrywa w tym razie rolę spółrzędnej niezależnej, wyznaczającej położenie równowagi danego układu przy ściśle określonej formie gięcia; wobec tego układ dany, t. j. linja wyboczenia może być uważana za układ o jednym stopniu swobody, — oczywiście, przy założeniu, że forma matematyczna równania tej krzywej pozostaje niezmieniona, a tylko jeden jej parametr e jest zmienny.



Rys. 15.

Dla unaocznienia sobie związku pomiędzy siłą P i odchyleniem e zrobimy wykres (P, e) i otrzymamy dwie gałęzie wykresu równowagi: jedną prostą, wyrażoną równaniem 240-tem, drugą — dla małych, oczywiście, odchyleń — paraboliczną, wyrażoną równaniem 263-em. Wykresy te przedstawione są na rys. 15-ym, gdzie dla $e = 0$, t. j. w początku wyboczenia otrzymamy z równania 263-ego:

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot IE = P_E\,. \tag{264}$$

Dla $P = 0$ układ dany jest w stanie naturalnym (§ 43-ci), a więc jest w równowadze stałej; powiemy zatem, że w punkcie $P = 0$ oraz $e = 0$ równowaga jest stała i będzie pozostawać stałą aż do obciążenia $P = P_E$, t. j. do przecięcia się gałęzi prostej z gałęzią paraboliczną, to jest do punktu zmianowego; a następnie, zastosowawszy twierdzenie o kolejności rodzajów równowagi, otrzymamy rozkład rodzajów równowagi danego pręta, jak pokazano na rys. 15-tym, gdzie punkty linji ciągłej odpowiadają równowadze stałej, a punkty linji przerywanej — równowadze niestałej. Rodzaje równowagi tego układu możemy obliczyć jeszcze w następujący sposób.

Jeżeli przyjmiemy wielkość e za spółrzędną niezależną danego układu, wyznaczającą jego położenie, to układ ten możemy uważać za układ o jednym stopniu swobody; wtedy, mając na uwadze, że równanie 263-cie jest całką (przybliżoną) równania 241-go, napiszemy z pewnem przybliżeniem równanie całej krzywej równowagi, t. j. obydwóch jej gałęzi, gdy pomnożymy równanie 263-cie przez e; wtedy otrzymamy równanie (P, e) tej krzywej, t. j. obydwóch gałęzi w następującej postaci:

$$e \cdot \left\{ P - \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 IE \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi e}{2l}\right)^2 \right] \right\} = 0, \tag{265}$$

które przedstawia przybliżone równanie równowagi danego pręta, t. j. daje związek pomiędzy siłą P i spółrzędną e, jaki zachodzi podczas równowagi. Ponieważ wielkość e jest jedną tylko spółrzędną, określającą położenie równowagi tego układu (przy danej formie równania), to równanie 265-te możemy uważać za pochodną funkcji $\Phi = F(P, e)$, którą możemy uważać za wirtualną funkcję sił układu o jednym stopniu swobody. Chcąc przeto zbadać rodzaj równowagi, obliczmy (jakeśmy to robili z układami o jednym stopniu swobody) drugą pochodną tej funkcji, t. j. pierwszą pochodną równania 265-go względem e; a wtedy znak tej pochodnej orzeknie nam o rodzaju równowagi; a więc z równania 265-go, które uważamy za pierwszą pochodną funkcji Φ, otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} = P - \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 IE \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\pi e}{2l}\right)^2 \right], \tag{266}$$

z którego wynika, że:

1) dla gałęzi prostej wykresu równowagi, dla której $e = 0$, otrzymamy wartość drugiej pochodnej przybliżonej funkcji sił:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} = P - \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 IE. \tag{267}$$

Wartość tej pochodnej może być dodatnią, lub ujemną; mianowicie, gdy

$$P < \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 IE, \tag{268}$$

równowaga będzie stałą;
gdy zaś:

$$P > \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot IE, \tag{268a}$$

równowaga będzie niestałą; a dla

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot IE = P_E \tag{268b}$$

mamy położenie zmianowe, a równowagę — obojętną do drugiego rzędu włącznie, która może być stałą, lub niestałą, lub obojętną wyższych rzędów; rodzaj tej równowagi obliczymy ze wzoru 266-ego:

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial e^3} = -\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 \cdot e \Big|_{e=0} = 0; \tag{269}$$

równowaga przeto jest obojętna do trzeciego rzędu włącznie; przeto obliczymy:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial e^4} = -\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 < 0; \tag{270}$$

równowaga więc przy obciążeniu Euler'owskiem jest stała rzędu czwartego.

Sprawdzimy jeszcze rodzaje równowagi na podstawie równania 83-go (str. 75-ta) i otrzymamy w tym przypadku z równania 267-go:

$$\frac{d}{dP}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2}\right) = 1 > 0; \tag{271}$$

czyli rodzaj równowagi w punkcie zmianowym z rosnącem P zmienia się ze stałej na niestałą, co zgadza się z poprzedniem obliczeniem;

2) dla drugiej gałęzi (parabolicznej) wykresu równowagi, która jest wyrażona równaniem 263-em, po podstawieniu P z tego równania do równania 266-go, otrzymamy dla tej gałęzi wartość drugiej pochodnej:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi e}{2l}\right)^2 - \frac{3}{8}\left(\frac{\pi e}{2l}\right)^2 < 0, \tag{272}$$

z którego wynika, że ta gałąź krzywej równowagi przedstawia równowagę stałą dla wszystkich wartości e, w takich jednakże granicach, ażeby przekształcenia rów. 251-go na 255-te oraz równania 262-go na 263-cie nie dało zbyt wielkich odchyłek.

Obliczymy jeszcze rodzaje równowagi tego pręta zapomocą metody ścisłej, t. j. zapomocą metody, jaką nam daje rachunek warjacyjny, t. j. ze wzorów 217-go i 218-go. W tym celu obliczymy najpierw z równania 233-go drugą pochodną funkcji podcałkowej, której wartość jest następująca:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau'^2} = -IE, \tag{273}$$

gdzie f oznacza funkcję podcałkową równania 233-go. Wyraz ten jest ujemny niezależnie od spółrzędnej τ; równowaga więc jest stała, o ile wyraz $\frac{d\tau}{dk_0}$, stosownie do warunku, wyrażonego równaniem 218-em, nie zmienia swego znaku w danym przedziale. Zbadanie tego drogą bezpośredniego obliczenia przedstawia znaczne trudności rachunkowe; praktyczniej przeto będzie zrobić szereg wykresów krzywej (s, τ), wyrażonej równaniem 251-szem przy zmiennym parametrze k_0, co można wykonać, gdy parametry tego zadania są liczbowe, zapomocą tablic Legendre'a i następnie, wykreśliwszy obwiednię tych krzywych (s, τ, k_0), otrzymamy granice dla k_0, w których równowaga będzie stała, t. j. w których znak wyrazu $\frac{\partial^2 f}{\partial \tau'^2}$ będzie rozstrzygał o rodzaju równowagi. *)

ROZDZIAŁ VII.

OBLICZENIE PRZYBLIŻONE RÓWNOWAGI.

59. Sformułowanie zadania.

W rozdziale tym podamy metody obliczenia sposobem przybliżonym odkształceń prętów cienkich, sprężyście giętkich, do których daje się stosować równanie odkształceń

$$y'' = \frac{M}{IE}, \tag{274}$$

oraz podamy metodę obliczenia sił zerowych, ewent. sił krytycznych.

Pręty takie, jakeśmy to już omówili w § 51-szym, uważać możemy za złożone z nieskończenie wielu, nieskończenie krótkich odcinków prostych sztywnych, połączonych ze sobą kolejno koń-

*) Postępowanie takie stosuje Born w pracy „Die elastische Linie".