siły wykonały, gdy punkt ruchomy przesunięto z miejsca np. A do B; wartość więc funkcji sił wyraża pracę *wykonaną*; wartość zaś potencjału, lub, inaczej mówiąc, potencjał, ewent. energja potencjalna w pewnem miejscu wyraża pewien zasób pracy, jaką siły wykonać mogą, gdy punkt dany przesuniemy z miejsca B do miejsca A; czyli wartość ta wyraża, że siły, działające na punkt ruchomy, znajdujący się w miejscu B, są *w stanie* (in potentia) wykonać pracę równą wartości potencjału, obliczonego w danem miejscu, gdy punkt ten przejdzie z miejsca B do A.

Jeżeli przeto wyrazimy wartość funkcji sił w punkcie B literą U, to wartość potencjału w tymże punkcie, który oznaczymy literą V, wyrazimy równaniem:

$$V = -U;$$

z tego określenia wynika przeto:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -P_x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -P_y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -P_z. \tag{41}$$

W wyrazie funkcji sił, jak również w wyrazie potencjału, opuściliśmy stałą całkowania; lecz to nie wpływa na wyniki obliczeń, gdyż zawsze możemy obrać tak spółrzędne, że wartości tych stałych będą równe zeru; jeżeli zaś nie są one równe zeru, to opuszczenie tych stałych w rachunku również nie wpłynie na wartość różnicy, lub na wartość różniczki tych funkcyj, któremi będziemy operować; — z tego więc powodu błąd nie wyniknie; stałą więc całkowania zwykle się w tych razach opuszcza; a wyraz funkcji sił, lub potencjału przedstawia się jako całkę nieokreśloną.

ROZDZIAŁ III.

RÓWNOWAGA SIŁ.

19. Określenie równowagi sił.

Jeżeli siły, działające na pewien układ materjalny swobodny, będący w spoczynku, nie wywołują jego ruchu, to mówimy, że siły te są w równowadze.*)

*) Określenie to wydawać się może zbyt ciasne; odnosi się ono bowiem do sił, działających na układ, będący w spoczynku;—lecz tak nie jest;—przyrosty

W przypadkach, z któremi mamy w „Mechanice" do czynienia, określenie to wypowiemy w innej formie. W tym celu skorzystamy z prawa energietycznego fizyki, że ruch układu materjalnego, może powstać tylko wtedy, gdy siły, działające na ten układ, wykonają pewną pracę; z innemi bowiem rodzajami energij nie mamy w „Mechanice" do czynienia. Na zasadzie przeto prawa zachowania energji w przyrodzie, jaką tu zastosujemy, i mając powyższe określenie na uwadze, możemy powiedzieć: *jeżeli dane siły mają być w równowadze, to suma ich prac podczas dowolnego nieskończenie małego przesunięcia musi być równą zeru;* należy tu rozumieć przez pracę — pracę wszystkich sił, jakie działają na ten układ.

Zdarzyć się może, iż podczas pewnych przesunięć, praca tych sił będzie równa zeru, podczas zaś innych przesunięć nie będzie równa zeru; przez równowagę więc będziemy rozumieli przypadek, w którym praca jest równa zeru podczas *wszelkich przesunięć*. Przesunięć takich możemy wyobrazić sobie wogóle nieograniczenie wielką liczbę, — inaczej nieskończenie wielką liczbę; a więc w ten sposób otrzymamy również nieskończenie wielką liczbę równań równowagi w postaci sum prac, przyrównanych do zera.

Przesunięcia te jednakże będą wogóle od siebie zależne, przeto i odpowiednie równania pracy będą od siebie zależne; ażeby zaś otrzymać równania niezależne (te bowiem przedstawiają podstawę dla rachunku), należy zrobić tylko przesunięcia niezależne, a otrzymamy wtedy tylko tyle niezależnych równań równowagi, ile dany układ materjalny posiada stopni swobody, czyli: *każdy układ materjalny posiada tyle równań równowagi (niezależnych), ile posiada on stopni swobody.* Przykładem mogą być trzy równania równowagi sił, działających na punkt swobodny; sześć równań dla sił, działających na bryłę swobodną, i t. p., które otrzymaliśmy inną drogą w statyce. Zaznaczyć tu należy, że inne przesunięcia, jakie możemy nadać danemu układowi, są zależne od tych ściśle określonych niezależnych przesunięć; równania przeto pracy, jaką wykonają dane siły podczas tych przesunięć zależnych, będą powtórzeniem,—w innej tylko formie,—równań, zestawionych na podstawie przesunięć niezależnych; równania te przeto choć będą słuszne, nie wniosą jednakże nowych warunków do obliczeń.

bowiem wielkości zmiennej nie zależą od tej wielkości; a więc i przyśpieszenia, jakie wywołują dane siły, są niezależne od prędkości punktów danego układu, których są przyrostami; określenie podane można przeto zastosować również do układów, będących w ruchu.

Przesunięcia, jakie stosujemy do obliczenia pracy, musimy przyjąć jako nieskończenie małe; skończone bowiem przesunięcia mogą dać błędne wyniki. Weźmy np. pewien ciężar, spoczywający w zagłębieniu, jak pokazano na rys. 2; podczas nieskończenie małego przesunięcia tego ciężaru siła jego ciężkości wykona pracę zero; znaczy, że ten ciężar pozostaje w tem położeniu w spoczynku, a siły, na niego działające, są w równowadze;— jeżeli zaś zrobimy przesunięcie skończone np. do miejsca B, to praca ciążenia może być różna od zera; wyniknie więc z tego, że dany ciężar w położeniu A nie jest w równowadze, co jest niezgodne ze stanem faktycznym. W pewnych szczególnych przypadkach można stosować do obliczenia równowagi przesunięcia skończone (co się praktykuje w elementarnych podręcznikach), lecz to będzie słuszne tylko w pewnych szczególnych warunkach.*)

Rys. 2

Przesunięcia, które tu stosowaliśmy, nazwaliśmy poprzednio wirtualnemi i to wyrażenie nadal będziemy stosować.

Wymienione dotychczas warunki równowagi tyczyły się układów swobodnych; jeżeli zaś układ jest nieswobodny, to do pracy sił zewnętrznych należy dołączyć pracę sił odporowych — wogóle pracę sił połączeń — i wtedy należy obliczyć pracę wirtualną sił zewnętrznych i wewnętrznych łącznie. Jeżeli zaś chcemy uniknąć wprowadzenia do rachunku sił odporowych,— gdy np. nie dążymy do ich obliczenia, lub gdy chcemy narazie uprościć rachunek, zmniejszając liczbę niewiadomych, — należy nadać danemu układowi takie przesunięcia, podczas których prace sił połączeń nie wejdą do naszych równań, t. j. podczas których praca tych sił będzie równą zeru; przesunięciami takiemi są przesunięcia, któreśmy nazwali wirtualnemi *możliwemi*, inaczej przesunięcia zgodne z warunkami fizycznemi danego układu; gdyż wtedy, jak to było omówione w § 12-ym, praca tych sił równa się zeru.

Jeżeli przeto mamy dany układ materjalny nieswobodny, na

*) Nieumiejętność stosowania do rachunku wogóle wielkości nieskończenie małych, była w swoim czasie przeszkodą do rozwoju metody pracy wirtualnej. Myśl obliczania warunków równowagi zapomocą metody pracy wirtualnej rzucił Arystoteles; lecz dopiero po upływie wielu wieków od powstania tej myśli, dopiero po wprowadzeniu przez Newton'a metod rachunku nieskończenie małemi wielkościami, metoda pracy wirtualnej została szeroko ujęta w formę matematyczną przez Bernoulli'ego i w szczególności została ujęta w wytworną formę matematyczną przez Lagrange'a i stała się podstawą do rozwoju Mechaniki.

który działają pewne siły, to, w celu obliczenia warunków równowagi, należy nadać temu układowi wirtualne przesunięcia *możliwe*; podczas tych przesunięć siły zewnętrzne wykonają pewne prace, których suma dla każdego takiego przesunięcia układu równać się powinna zeru.

Gdy siły, przyłożone do danego układu, oznaczymy literami P_k, spółrzędne ich punktów przyłożenia — literami x_k, y_k, z_k, rzuty przesunięć tych punktów na osi x, y, z — literami δx_k, δy_k, δz_k, a rzuty tych przesunięć na kierunki odpowiednich sił—literami δp_k, wtedy wyrazić możemy pracę sił zewnętrznych dla wirtualnego możliwego przesunięcia, bądź ogólnym symbolem (porów. Mech. Teor. H. Czopowskiego T. I str. 186-ta).

$$\Sigma \delta L_p = 0; \tag{42}$$

bądź symbolem

$$\Sigma P_k \cdot \delta p_k = 0,$$

lub inaczej

$$\Sigma (P_{k,x} \cdot \delta x_k + P_{k,y} \cdot \delta y_k + P_{k,z} \cdot \delta z_k) = 0,$$

gdzie $P_{k,x}$, $P_{k,y}$ i $P_{k,z}$ oznaczają składowe danych sił w kierunkach osi x, y, z, a $\Sigma \delta L_p$ sumę prac, jaką siły wykonały podczas wirtualnego przesunięcia.

Jeżeli siły wewnętrzne, występujące w danym układzie, wykonują podczas przesunięcia wirtualnego pewną pracę, gdy np. pręt giętki, lub rozciągliwy odkształca się, to powyższy wyraz sumy prac powiększy się o wyrazy prac tych sił. Oznaczywszy sumę tych prac symbolem δL_w, napiszemy równanie 42-gie w postaci:

$$\Sigma \delta L_p + \Sigma \delta L_w = 0. \tag{42a}$$

Wyraz pracy $\Sigma \delta L_w$ musi być, oczywiście, obliczony oddzielnie dla każdego przypadku szczególnego w zależności od fizycznych właściwości danego układu materjalnego.

Dla obliczenia pracy wirtualnej nie należy przyjmować, że przesunięcia wirtualne powstały pod działaniem danych sił, dla których szukamy warunków równowagi, lecz przeciwnie należy przyjąć, że te przesunięcia są niezależne od działania tych sił, a są one zależne tylko od geometrycznych właściwości danego układu, które się wyrażają liczbą stopni swobody danego układu, oraz związkami geometrycznemi pomiędzy temi przesunięciami (§ 4-ty). Pojmowanie, że te przesunięcia wogóle powinny powstać wskutek działania sił, dla których szukamy równowagi, było długi czas w historji tej metody przeszkodą do uznania jej słuszności: „jakże bowiem — mówiono w swoim czasie — możemy przyjąć, że siły wywołują przesunięcia, gdy są one w równowadze, t. j. gdy żadnego ruchu nie są w stanie wywołać"; pogląd ten był niesłuszny, gdyż przesunięcia wirtualne należy uważać za niezależne od sił, dla których szukamy warunków równowagi. Dla unaocznienia sobie tego postępowania można uważać, że te przesunięcia są wykonane przez czynniki — t. j. przez siły, które nie wchodzą do naszych rozpatrywań — są one tylko siłami pomocniczemi, — które po dokonaniu przesunięcia usuwamy z naszych rozpatrywań; a same przesunięcia można uważać jako przesunięcia próbne, przy pomocy których dowiadujemy się, czy dane siły wykonują pracę, czy nie; ewentualnie — czy wykonują pracę dodatnią, czy ujemną.

20. Metody obliczenia równowagi, gdy ograniczenia ruchu są jawnie geometryczne, lub gdy są tylko analityczne.

Przykłady na obliczenie równowagi sił, działających na układy punktów nieswobodnych, można podzielić pod względem sposobów obliczenia na dwie grupy. Do jednej grupy zaliczyć można zadania, w których ograniczenia ruchu wyrażone są warunkami geometrycznemi (jawnie); do drugiej zaś zaliczymy przykłady, w których ograniczenia ruchu dane są tylko w sposób analityczny (§ 4-ty). Zadania pierwszej grupy, gdy ograniczenia są dane w postaci geometrycznej, mogą być rozwiązane prościej pod względem rachunkowym; przesunięcia bowiem wirtualne możliwe są w danym razie bezpośrednio (jawnie) wskazane geometrycznemi warunkami; a więc wskazane są również kierunki sił połączeń; w przykładach zaś drugiej grupy, gdy ograniczenia są tylko analityczne, nie znamy bezpośrednio kierunków przesunięć możliwych, ani też kierunku sił połączeń; rachunek przeto obliczenia równowagi takich przykładów musi być przeprowadzony na podstawie czysto analitycznych rozważań; nie może być bowiem obliczony na zasadzie geometrycznych naoczności.

Postępowanie rachunkowe obliczenia warunków równowagi da się w przypadku ograniczeń *geometrycznych* ująć w następujący schemat:

1) należy przedewszystkiem określić ilość stopni swobody danego układu i wybrać—możliwie dogodne pod względem rachunkowym — spółrzędne niezależne tego układu;

2) należy nadać danemu układowi nieskończenie małe przesunięcie *możliwe*, t. j. zgodne z warunkami fizycznemi danego zadania; wtedy bowiem nie wejdą do rachunku siły odporowe;

3) następnie — należy napisać wyraz pracy sił zewnętrznych, jaką one wykonały podczas tego przesunięcia; wyraz ten może być napisany w postaci np. wirtualnej funkcji sił (§ 17-ty), którą następnie zróżniczkujemy, lub w postaci bezpośrednio różniczkowej, jako wyraz pracy wirtualnej,

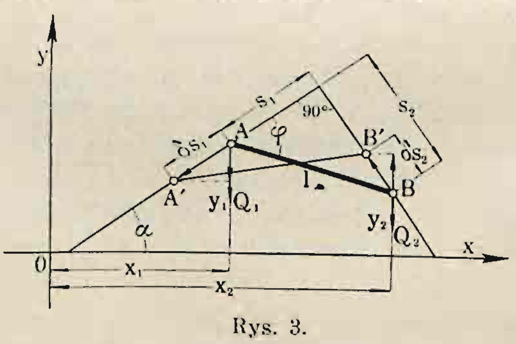
4) i wreszcie należy wyrazić te przesunięcia, a właściwie ich rzuty na kierunki sił, obranemi spółrzędnemi niezależnemi i podstawić je do równania pracy; a po uporządkowaniu tego wyrazu podług niezależnych przyrostów, należy przyrównać czynniki, stojące przy tych przyrostach, do zera; w ten sposób otrzymamy szukane równania równowagi w takiej liczbie, jaką liczbę stopni swobody posiada dany układ; nie będzie w nich jednakże sił odporowych.

Ażeby następnie obliczyć siły odporowe, przyłożymy je do danego układu i zrobimy przesunięcia wirtualne razem z temi siłami. Przesunięć tych, a więc i równań równowagi będzie w tym razie tyle, ile stopni swobody odjęły temu układowi dane ograniczenia; czyli wszystkie siły odporowe będą mogły być obliczone z tych równań. Stosowanie jednakże metody pracy wirtualnej do obliczenia sił odporowych bywa często niedogodne pod względem rachunkowym; w takim razie można zastosować dla obliczenia tych sił — metody statyki.

Obliczenie rodzajów równowagi będzie omówione w rozdziale IV-tym i V-tym tej pracy.

Jako przykład tego postępowania obliczymy następujące zadanie.

Po dwóch prostych gładkich (rys 3-ci), nieruchomych w płaszczyźnie pionowej, przecinających się pod kątem np. prostym, ślizgają się bez tarcia dwa punkty materjalne o ciężarach Q_1 i Q_2. Punkty te są związane prętem nieodkształcalnym (sztywnym) o długości l; należy obliczyć *położenie* równowagi tych punktów, gdy jedna z prostych tworzy kąt α z poziomem. Dany układ materjalny składa się przeto z dwóch punktów sztywno ze sobą związanych w ten sposób, że odległość między niemi się nie zmienia.



Rys. 3.

1) W celu obliczenia stwierdzimy przedewszystkiem, że układ ten jest o *jednym* stopniu swobody; położenie bowiem jednego

z tych punktów na danej prostej, które wymaga znajomości tylko jednej spółrzędnej, np. odległości od wierzchołka, wyznacza ściśle położenie drugiego punktu, — długość bowiem, łączącego te punkty, pręta jest niezmienna. Liczbę stopni swobody danego pręta można obliczyć w tem zadaniu również drogą metodyczną; a mianowicie: pręt ten w ruchu po płaszczyźnie posiada trzy stopnie swobody (§ 2-gi); a że dwa jego punkty muszą się poruszać po dwóch krzywych (w danym razie prostych), co odejmuje mu dwa stopnie swobody,—pozostaje przeto jeden stopień swobody.

Jako spółrzędną niezależną możemy obrać np. odległość s_1 lub kąt φ (rys. 3-ci), lub wreszcie jaką inną wielkość geometryczną, którąby wyznaczyła położenie jednego z tych punktów, np. punktu A; wtedy bowiem jest już wyznaczone położenie punktu B; którą z tych spółrzędnych obierzemy jako niezależną, to można pozostawić narazie biegowi rachunku.

2) Nadajemy następnie danemu układowi przesunięcie wirtualne możliwe, t. j. przesuwamy go do położenia $A' B'$.

3) Równanie pracy będzie miało w tym razie postać następującą:

$$\delta L = Q_1 \cdot \sin\alpha \cdot \delta s_1 - Q_2 \cdot \cos\alpha \cdot \delta s_2 .$$

4) Przesunięcia δs_1 i δs_2 wyrazimy spółrzędną niezależną bezpośrednio z geometrycznych stosunków (które w tym razie są dane jawnie):

$$s_1 = l \cdot \cos\varphi ; \qquad s_2 = l \cdot \sin\varphi ;$$

skąd

$$ds_1 = - l \sin\varphi \cdot d\varphi ; \qquad ds_2 = l \cos\varphi \cdot d\varphi ;$$

na mocy p r z y j ę t y c h przesunięć napiszemy:

$$\delta s_1 = d s_1 ; \qquad \delta s_2 = - d s_2 ; \tag{a}$$

strzałki bowiem przyrostów $d s_1$ i $d s_2$ należy liczyć w kierunku rosnących wartości zmiennych s_1 i s_2; strzałki zaś przesunięć wirtualnych wybraliśmy dowolnie; z tych więc warunków wynikają równania *a*).

Po podstawieniu tych wartości do równania pracy, otrzymamy jej wyraz w następującej postaci:

$$d L = - Q_1 l \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi + Q_2 l \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi ;$$

a ponieważ w razie równowagi $dL = 0$, przeto otrzymamy z tego równania

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q_2}{Q_1} \cdot \operatorname{ctg} \alpha .$$

Zastosowanie w tem obliczeniu równań a) pozwala na wybór dowolnie skierowanych strzałek dla przesunięć wirtualnych, na podstawie których obliczamy następnie pracę wirtualną; związki bowiem a) wskazują właściwe strzałki, t. j. wskazują możliwe kierunki przesunięć. Np. w przykładzie powyższym możemy obrać obydwa przesunięcia δs_1 i δs_2 w kierunku rosnących wartości s_1 i s_2, t. j. w kierunku niewykonalnych zresztą przesunięć, gdyż nić jest nierozciągliwa; lecz związki a) wskażą właściwe — możliwe kierunki tych przesunięć.

Ogólne postępowanie obliczenia równań równowagi w przypadku, gdy ograniczenia ruchu są dane w postaci *analitycznej*, dał nam Lagrange. Postępowanie to odznacza się ogólnością i pewną wytwornością matematyczną; postępowanie to tutaj przytoczę.

Do obliczania pracy wirtualnej potrzebna jest znajomość punktów przyłożenia sił oraz warunki geometryczne, czy też wogóle analityczne przesunięć, które muszą być spełnione podczas wykonywania pracy.

W celu przedstawienia tego obliczenia weźmy pod uwagę układ, złożony z punktów materjalnych, których spółrzędne oznaczymy literami

$$x_k, \; y_k, \; z_k, \text{ gdzie } k = 1, 2, \ldots . i;$$

mamy więc w tym razie $3i$ wielkości, które należy obliczyć, przy warunku, że siły, działające na te punkty, są w równowadze.

Przyjmiemy następnie, że na każdy z tych punktów działa r sił i że liczby r są wogóle inne dla każdego punktu; każda przeto siła takiego układu jest określona symbolem $P_{k,r}$, gdzie k oznacza liczbę porządkową punktu, a r liczbę porządkową siły, przyłożonej do tego punktu. Składowe tych sił w kierunkach osi x, y, z wyrazimy przeto symbolami:

$$P_{k,r,x}, \; P_{k,r,y}, \; P_{k,r,z} .$$

Pracę wirtualną wszystkich sił, w razie ich równowagi, wyrazimy wzorem:

$$\delta L = \sum_{k=1}^{k=i} \sum_{r=1}^{r=r} P_{k,r,x} \cdot \delta x_k + \sum_{k=1}^{k=i} \sum_{r=1}^{r=r} P_{k,r,y} \cdot \delta y_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=i} \sum_{r=1}^{r=r} P_{k,r,z} \cdot \delta z_k = 0. \tag{43}$$

Jeżeli każdy punkt danego układu jest swobodny, t. j. każdy punkt może być przesunięty dowolnie,—niezależnie od przesunięć innych punktów, wtedy wszystkie wartości:

$$\delta x_k, \ \delta y_k, \ \delta z_k, \ \text{dla } k = 1, 2, \ldots\ldots i,$$

są niezależne; równanie 43-cie rozpadnie się przeto na $3i$ równań typu:

$$\sum_{r=1}^{r=r} P_{k,r,x} = 0; \ \sum_{r=1}^{r=r} P_{k,r,y} = 0; \ \sum_{r=1}^{r=r} P_{k,r,z} = 0, \tag{44}$$

gdzie dla każdej takiej trójki równań podstawimy kolejno

$$k = 1, 2, \ldots\ldots i.$$

Równania te wyrażają: ażeby układ punktów swobodnych był w równowadze, powinny w tym razie siły, działające na *każdy* punkt, być w równowadze, co jest pod względem fizycznym bezpośrednio zrozumiałe.

Jeżeli zaś pomiędzy punktami zachodzą pewne połączenia fizyczne, np. połączenia w postaci prętów, lub sznurów, łączących niektóre, — lub wszystkie te punkty pomiędzy sobą, lub też gdy dane są pewne powierzchnie, lub linje, po których wszystkie, lub niektóre z tych punktów muszą się poruszać, — jednem słowem, — jeżeli ruchy punktów są od siebie uzależnione, to obliczenie położenia równowagi i sił połączeń takich układów dał nam Lagrange w następującej formie.

Zależności pomiędzy położeniami danych punktów niech będą wyrażone równaniami nast. typów:

$$\begin{aligned} f_1 (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots z_i) &= 0; \\ f_2 (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots z_i) &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_h (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots z_i) &= 0; \end{aligned} \tag{45}$$

których liczbę przyjmiemy równą h i przyjmiemy, że $3i > h$. Oczywiście — nie koniecznem jest, ażeby w każde z tych równań wchodziły wszystkie spółrzędne wszystkich punktów tego zbioru;

wchodzić będą, oczywiście, tylko te spółrzędne, pomiędzy któremi zachodzą zależności, wywołane pewnemi fizycznemi połączeniami.

Z równań 45-tych, których jest h i w których jest $3i$ niewiadomych, obliczymy h niewiadomych spółrzędnych i wyrazimy je pewnemi funkcjami pozostałych $(3i - h)$ spółrzędnych, które w ten sposób stają się niezależnemi spółrzędnemi; liczba przeto $(3i - h)$, w myśl danego określenia w § 1-szym, jest liczbą stopni swobody całego zbioru punktów—inaczej danego układu. Zadanie nasze polega obecnie na obliczeniu tych pozostałych $(3i - h)$ niewiadomych spółrzędnych, oraz na obliczeniu sił połączeń, jakie występują pomiędzy punktami tego układu, *z warunku*, że siły, działające na ten układ, są w równowadze.

W celu tego obliczenia, nadamy punktom tego zbioru przesunięcia wirtualne i napiszemy, w myśl określenia równowagi, równanie pracy wirtualnej, jaką siły wykonały podczas tych przesunięć, w następującej postaci:

$$\Sigma P_{k,x} \cdot \delta x_k + \Sigma P_{k,y} \cdot \delta y_k + \Sigma P_{k,z} \cdot \delta z_k = 0, \qquad (46)$$

gdzie przyjęto, dla uproszczenia pisania, że na każdy k-ty punkt działa tylko jedna siła P_k; — poprzednio zaś przyjęliśmy r sił w każdym punkcie.

Wielkości δx_k, δy_k, δz_k są w tym razie wzajemnie zależne (porówn. § 4-ty); zależności te obliczymy, wziąwszy pod uwagę, że spółrzędne nowych położeń punktów, t. j. położeń określonych spółrzędnemi $(x_1 + \delta x_1)$ i t. d. muszą czynić zadość równaniom 45-tym, t. j. że muszą zachodzić równania:

$$\begin{aligned} &f_1 (x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, \ldots \ldots) = 0; \\ &f_2 (x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, \ldots \ldots) = 0; \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned} \qquad (47)$$

Równania te, łącznie z równaniami 45-temi, możemy na podstawie wzoru Taylor'a przekształcić (uwzględniwszy wielkości tylko pierwszego rzędu) na równania następujące:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdot \delta z_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z_i} \cdot \delta z_i = 0; \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial z_i} \cdot \delta z_i = 0; \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &\frac{\partial f_h}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \frac{\partial f_h}{\partial z_i} \cdot \delta z_i = 0. \end{aligned} \qquad (48)$$

Równań tych jest tyle, ile było danych równań 45-tych, t. j. h równań; z tych równań możemy obliczyć h niewiadomych typu δx, δy, δz. Niewiadome te oznaczymy symbolem δ_h i wyrazimy je pozostałemi niewiadomemi w liczbie $(3i-h)$; niewiadome te oznaczymy symbolem δ_{3i-h}; które z tych wszystkich niewiadomych zaliczymy do grupy δ_h, a które do grupy δ_{3i-h}, to nie wpływa na wynik rachunku. Podstawimy następnie obliczone już niewiadome typu δ_h do równania pracy, t. j. do równania 46-go, a otrzymamy równanie, w którem będzie tylko $(3i-h)$ wielkości typu δ_{3i-h} i które są już *niezależne*. Ażeby to równanie mogło być spełnione, powinny wszystkie czynniki, stojące przy niezależnie zmiennych typu δ_{3i-h}, być równe zeru i w ten sposób otrzymamy $(3i-h)$ równań z niewiadomemi typu x, y, z. Z równań tych oraz z danych równań połączeń (rów. 45-te) których liczba jest h, obliczymy wreszcie wszystkie $3i$ niewiadome spółrzędne typu x, y, z, które wyznaczają położenie danego układu punktów, w którem dane siły są w równowadze.

Sformułowanie tego obliczenia można uprościć w następujący sposób: ponieważ równania typu 48-go i równanie 46-te są równaniami jednorodnemi stopnia pierwszego względem wielkości typu δ i ponieważ niewiadomych typu δ jest $3i$, równań zaś w tym razie jest tylko $(h+1)$, przeto napisać możemy z macierzy tych równań wyznaczniki w liczbie $(3i-h)$, z których każdy powinien być równy zeru; wyznaczniki te, łącznie z h równaniami typu 45-tego, pozwolą obliczyć $3i$ niewiadomych spółrzędnych typu x, y, z tak, iż położenie danego układu będzie wyznaczone.

Wykonanie obliczenia powyższego jest możliwe, gdy $h < 3i$, cośmy narazie przyjęli jako założenie; w przeciwnym bowiem razie, gdyby $h > 3i$, wtedy rachunku tego nie dałoby się przeprowadzić, równań bowiem byłoby więcej, niż niewiadomych, co wyrażałoby, że albo zadanie, tak postawione, nie ma znaczenia rzeczywistego, lub że równania 45-te są od siebie zależne; o ile więc takie zadanie miałoby mieć sens rzeczywisty, to równania te w tym razie powinny się dać sprowadzić do równań niezależnych, których liczba musi być $< 3i$. Jeżeli zaś $h = 3i$, to wszystkie niewiadome równań 45-tych byłyby już przez to określone; nie byłoby więc żadnych przesunięć; t. j. położenie danego układu punktów byłoby już określone; zadanie przeto obliczenia *położenia* równowagi danego układu nie miałoby w tym razie znaczenia rzeczywistego.

Obydwa podane sposoby obliczenia położenia równowagi danego układu sił tem się odznaczają, że do obliczeń tych nie wchodzą siły połączeń, a tylko siły zewnętrzne oraz spółrzędne, wyznaczające położenie danego układu, gdy te siły są w równowadze.

W celu obliczenia sił połączeń, występujących w powyższym przykładzie, zastosujemy sposób Lagrange'a, który polega na zastosowaniu tak zwanych spółczynników nieokreślonych, wprowadzonych do obliczeń przez Euler'a i Lagrange'a.

W celu przeprowadzenia tego rachunku przemnożymy kolejno równania 48-me przez nieokreślone narazie spółczynniki λ_1, λ_2, ... λ_h i następnie zsumujemy te równania łącznie z równaniem pracy, t. j. z równ. 46-tem; a otrzymamy, po uporządkowaniu względem wielkości typu δx, nast. równania:

$$\left(P_{1.x} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ . \ . \ . \ + \lambda_h \cdot \frac{\partial f_h}{\partial x_1}\right) . \delta x_1 +$$

$$+ \left(P_{2.x} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ . \ . \ . \ + \lambda_h \cdot \frac{\partial f_h}{\partial x_2}\right) . \delta x_2 +$$

. . . .

$$+ \left(P_{1.y} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \ . \ . \ . \ + \lambda_h \cdot \frac{\partial f_h}{\partial y_1}\right) . \delta y_1 +$$

. . . .

$$+ \left(P_{i.z} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \ . \ . \ . \ + \lambda_h \cdot \frac{\partial f_h}{\partial z_i}\right) . \delta z_i = 0 \quad (49)$$

W tych równaniach wielkości δx_1, δx_2 i t. d. *nie* są niezależne; są one bowiem wzajemnie uzależnione równaniami 48-emi; nie możemy przeto przyrównać bezpośrednio do zera czynników, zawartych w nawiasach i stojących przy tych wielkościach, jakeśmy to zrobili w poprzednim przykładzie. Niezależnych wielkości typu δ mamy w tym razie tylko ($3\,i - h$); lecz mamy jeszcze h czynników λ dotychczas nieokreślonych; dobierzemy przeto ich wartości tak, ażeby wartości wyrazów, zawartych w nawiasach, stały się równemi zeru; w tym celu napiszemy z równań 49-tych h równań typu:

$$P_{1.x} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ . \ . \ . \ + \lambda_h \cdot \frac{\partial f_h}{\partial x_1} = 0;$$

. . . . (50)

mamy bowiem tylko h niewiadomych parametrów λ. Z równań tych obliczymy jako niewiadome wartości $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_h$. Po napisaniu tych równań pozostanie w równaniu 49-em tylko $(3i - h)$ przyrostów typu δ, które będą już niezależne; a więc czynniki, znajdujące się w nawiasach przy pozostałych wielkościach typu δ, będziemy mogli przyrównać do zera. W ten sposób przychodzimy do wniosku, że wszystkie czynniki równania 49-go, stojące w nawiasach przy zmiennych typu δ, można przyrównać do zera, jakby one były niezależne; z tą różnicą, że poprzednio mogliśmy przyrównać z tego tytułu, że wszystkie wielkości typu δ były niezależne; obecnie przyrównywać można do zera z tego tytułu, że wielkości typu δ są niezależne tylko w liczbie $(3n - h)$; oprócz tego przyrównać można do zera h spółczynników z tego tytułu, że mamy h niewiadomych wielkości λ; a więc tylko dzięki zastosowaniu nieokreślonych czynników λ możemy *wszystkie czynniki* równania 49-go *przyrównać do zera*; w ten sposób otrzymamy $3 . i$ równań, które łącznie z równaniami połączeń 45-temi w liczbie h stanowią $(3i + h)$ równań, w których jest $3i$ niewiadomych typu x, y, z oraz h niewiadomych typu λ, t. j. razem mamy $(3i + h)$ niewiadomych, które mogą już być obliczone z tych równań.

Równaniom typu 50-go nadamy następującą interpretację statyczną. W równania te wchodzą wyrazy sił $P_{1,x} \cdots$ i t. d. jako dodajniki, a więc na zasadzie jednorodności wyrazów wszystkie inne dodajniki tych równań typu $\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ muszą wyrażać także siły: wartości tych sił są zależne od funkcji f, wyrażających ograniczenia ruchu danego układu, a więc można powiedzieć, że są one wynikiem tych ograniczeń, — inaczej — są to szukane siły połączeń. Przy takiem zrozumieniu, równania typu 50-go przedstawiać będą równowagę sił zewnętrznych i sił odporowych łącznie, przyłożonych do każdego punktu danego układu. Ten wniosek unaocznimy sobie, gdy funkcje, ograniczające ruch (rów. 45-te), przedstawiają jawnie (§ 4-ty) pewne powierzchnie, lub linje.

Weźmy np. równanie:

$$f(x, y, z) = 0,$$

jako równanie, przedstawiające pewną powierzchnię, na której ma pozostawać pewien punkt danego zbioru.

Kąty kierunkowe normalnych do tej powierzchni w dowolnym punkcie wyrazimy wzorami typu:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}; \qquad (51)$$

kierunki tych normalnych są te same, jakie posiadają siły typu $\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ równania 50-tego; a więc siły, wyrażone wzorem

$$\lambda \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

są to wartości sił normalnych do danej powierzchni, któreśmy już poprzednio nazwali siłami odporowemi (reakcjami), a których składowe w kierunkach osi x, y, z są $\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ i t. d.

PRZYKŁAD. Jako przykład tego postępowania obliczymy tą metodą zadanie z dwoma punktami ciężkiemi, ślizgającemi się po dwóch prostych i związanemi prętem, które rozwiązaliśmy już poprzednio sposobem, który można nazwać bezpośrednim.

Spółrzędne położenia punktów oznaczymy literami (rys. 3-ci, str. 42-ga):

$$x_1,\ y_1 \text{ oraz } x_2,\ y_2.$$

Spółrzędne te, w liczbie czterech, mamy obliczyć z warunku, że siły, działające na te punkty, będą w równowadze.

Równań połączeń mamy w tym razie trzy; dwa z nich są równaniami dwóch prostych, po których dane punkty mają się ślizgać; trzeci zaś wyraża warunek, że odległość tych punktów jest stała i równa l.

Równania te, które odpowiadają typowi 45-temu, są następujące:

$$1)\ y_1 = a x_1 + C_1, \quad 2)\ y_2 = -\frac{1}{a} \cdot x_2 + C_2, \qquad (52)$$
$$3)\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2.$$

Równanie pracy wirtualnej, które odpowiada równaniu 46-emu, jest w danym przykładzie następujące:

$$4)\ -Q_1 \cdot \delta y_1 - Q_2 \cdot \delta y_2 = 0. \qquad (53)$$

Zależności pomiędzy przesunięciami, jak w danym razie pomiędzy δy_1 i δy_2, otrzymamy po zróżniczkowaniu równań połączeń, t. j. równań 52-gich, które odpowiadają równaniom 48-ym. Zależności te napiszemy w następującej postaci:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a\cdot\delta x_1-\delta y_1=0,\quad 2)\ -\dfrac{1}{a}\cdot\delta x_2-\delta y_2=0, \\ 3)\ -(x_2-x_1)\cdot\delta x_1-(y_2-y_1)\cdot\delta y_1+(x_2-x_1)\cdot\delta x_2+ \\ \qquad +(y_2-y_1)\cdot\delta y_2=0. \end{array}\right\} \tag{54}$$

Z tych trzech równań możemy obliczyć trzy przesunięcia np. δx_1, δy_1, δy_2, które odpowiadają poprzednio przytoczonemu typowi δ_h, i wyrazimy je wielkością δx_2, która odpowiada typowi δ_{3i-h}; podstawiwszy następnie te trzy wartości typu δ_h do równania 53-go, t. j. do równania pracy, otrzymamy równanie, które czyni zadość równaniu równowagi i danym połączeniom; będzie to szukane równanie pomiędzy 4-ma spółrzędnemi i danemi siłami Q_1, Q_2. Równanie to, łącznie z trzema równaniami połączeń, (rów. 52-gie) pozwoli obliczyć cztery spółrzędne, wyznaczające położenie danego układu (t. j. danych dwóch punktów), w którem siły dane Q_1 i Q_2 będą w równowadze.

Wykonanie wskazanych działań algebraicznych może być jeszcze inaczej przeprowadzone, jakeśmy to zaznaczyli poprzednio; mianowicie weźmiemy pod uwagę, że równanie pracy wirtualnej, oraz trzy równania połączeń (równania 54-te) są jednorodne względem 4-ch niewiadomych δx i t. d., a ponieważ te niewiadome są rzeczywiste, przeto wyznacznik, zestawiony z czynników, stojących przed niewiadomemi, powinien być równy zeru; a więc z równania 53-go i z równań 54-tych napiszemy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 0, & -Q_1, & 0, & -Q_2 \\ a, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -\dfrac{1}{a}, & -1 \\ -(x_2-x_1), & -(y_2-y_1), & (x_2-x_1), & (y_2-y_1) \end{vmatrix} = 0. \tag{55}$$

Jest to szukane równanie, które z trzema równaniami połączeń (rów. 52-ie) pozwoli obliczyć spółrzędne punktów przyłożenia sił Q_1 i Q_2 dla położenia równowagi.

Lecz obliczenie to nie daje nam ani sił odporowych, ani też siły, występującej w pręcie; określa jedynie spółrzędne układu, gdy siły, działające na niego, są w równowadze. Ażeby zaś obliczyć siły połączeń, lub inaczej siły odporowe, należy zastosować metodę spółczynników Lagrange'owskich. W tym celu pomnożymy każde z równań 54-tych przez spółczynniki λ_1, λ_2, λ_3 i dodamy je do równania pracy, t. j. do rów. 53-go; następnie, w myśl poprzednich ogólnych rozważań, przyrównamy kolejno wszystkie czynniki, stojące przy wielkościach δx_1, δx_2, δy_1, δy_2, do zera, a otrzymamy następujące cztery równania:

$$
\begin{aligned}
a \cdot \lambda_1 \qquad & - (x_2 - x_1) \cdot \lambda_3 = 0, \\
- Q_1 - \lambda_1 \qquad & - (y_2 - y_1) \cdot \lambda_3 = 0, \\
-\frac{1}{a} \cdot \lambda_2 + & \ (x_2 - x_1) \cdot \lambda_3 = 0, \\
- Q_2 \qquad - \lambda_2 + & \ (y_2 - y_1) \cdot \lambda_3 = 0.
\end{aligned} \tag{56}
$$

W tych 4-ch równaniach i w trzech równaniach 52-gich mamy siedem niewiadomych: x_1, y_1, x_2, y_2 i λ_1, λ_2, λ_3, które możemy obliczyć. Położenie równowagi, t. j. cztery spółrzędne x_1, y_1, x_2, y_2 można również bezpośrednio z tych równań obliczyć, gdy zwrócimy uwagę, że dla obliczenia 3-ch niewiadomych λ_1, λ_2, λ_3 mamy cztery równania; ażeby przeto te niewiadome zaspokoiły cztery równania, powinien wyróżnik tych równań równać się zeru; warunek ten łącznie z równaniem połączeń pozwoli obliczyć cztery niewiadome. Należy zauważyć, że wyznacznik ten będzie identyczny z wyznacznikiem poprzednim. Spółczynniki λ_1, λ_2, λ_3, mające swoje statyczne znaczenie, możemy obliczyć z dowolnych trzech równań 56-tych; tak obliczone spółczynniki muszą, oczywiście, zaspokoić te cztery równania, wyznacznik bowiem tych równań jest równy zeru.

21. Obliczenie równowagi, gdy położenie układu oraz siły wyrażone są spółrzędnemi niezależnemi.

Pracę wirtualną wyrażamy zwykle spółrzędnemi, pomiędzy któremi zachodzą pewne związki funkcjonalne. Wyraz ten, jak to już zauważyliśmy w § 15-tym, str. 29-ta, jest w pewnych przypadkach różniczką zupełną pewnej funkcji, którą nazwaliśmy funkcją danych sił. Znacznego uproszczenia doznają obliczenia równowagi, gdy zamiast spółrzędnych zależnych, zastosujemy do obliczeń spółrzędne niezależne.

Ażeby wyrazić pracę wirtualną oraz położenie danego układu spółrzędnemi niezależnemi, należy znać związki pomiędzy spółrzędnemi zależnemi, któremi wyrażamy pracę i położenie układu, z jednej strony, a spółrzędnemi niezależnemi z drugiej strony; związki te są następujące *):

$$x_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \cdots q_n);\; y_1 = \psi_1(q_1, q_2, \cdots q_n);\; z_1 = \sigma_1(q_1, q_2, \cdots q_n);$$
$$x_2 = \varphi_2(q_1, q_2, \cdots q_n);\; y_2 = \psi_2(q_1, q_2, \cdots q_n);\; z_2 = \sigma_2(q_1, q_2 \cdots q_n);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x = \varphi_i(q_1, q_2, \cdots q_n);\; y_i = \psi_i(q_1, q_2, \cdots q_n);\; z_i = \sigma_i(q_1, q_2, \cdots q_n);\quad (57)$$

których liczba jest $3i$ i w których x, y, z oznaczają spółrzędne zależne, a $q_1, q_2, \cdots q_n$ oznaczają spółrzędne niezależne.

Dla obliczenia położenia równowagi zapomocą spółrzędnych niezależnych q zróżniczkujemy najpierw równania 57-me względem zmiennych niezależnych q_1, q_2 i t. d. i otrzymamy równania typu:

$$\delta x_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n} \cdot \delta q_n;$$

podstawimy następnie te przyrosty δx i t. d. oraz wartości x, y, z z równań 57-ych do równania pracy wirtualnej, wyrażonego równaniem:

$$\Sigma (P_{k,x} \cdot \delta x_k + P_{k,y} \cdot \delta y_k + P_{k,z} \cdot \delta z_k) = 0, \quad (58)$$

gdzie $P_{k,x}$ i t. d. są funkcjami spółrzędnych x, y, z i niezależnego parametru λ **), a otrzymamy równanie, w którem będą niezależne przesunięcia $\delta q_1, \delta q_2, \cdots \delta q_n$ oraz spółrzędne niezależne $q_1, q_2, \cdots q_n$.

Po uporządkowaniu wyrazów tego równania względem przyrostów δq_1, $\delta q_2, \cdots \delta q_n$, otrzymamy równanie, którego ogólna postać będzie następująca:

$$\Phi_1(q_1, q_2, \cdots q_n) \cdot \delta q_1 + \Phi_2(q_1, q_2, \cdots q_n) \cdot \delta q_2 + \cdots +$$
$$+ \Phi_n(q_1, q_2, \cdots q_n) \cdot \delta q_n = 0 \quad (59)$$

i w którem litery Φ oznaczają pewne funkcje, jakie otrzymamy z przeprowadzenia wskazanych podstawień.

*) Przyjmujemy, iż w tych równaniach nie występuje czas t jawnie, ani też pochodne spółrzędnych względem czasu.

**) W danym razie nie rozpatrujemy sił, które zależą od prędkości poruszającego się punktu materjalnego, lub zależą od czasu.

Ponieważ w tem równaniu, stosownie do założenia, wszystkie przyrosty δq są niezależne, przeto równaniu temu może być uczynione zadość tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki przy tych przyrostach będą równe zeru; czyli równanie 59-te rozpadnie się w tym razie na n następujących równań:

$$\Phi_1(q_1, q_2, \cdots q_n) = 0;\ \Phi_2(q_1\, q_2, \cdots q_n) = 0; \cdots \Phi_n(q_1, q_2, \cdots q_n) = 0, \quad (60)$$

w których jest n niewiadomych q_1, $q_2, \cdots q_n$.

22. Obliczenie równowagi z funkcji sił.

Wybitnego znaczenia nabiera powyższa metoda postępowania, gdy równanie pracy, wyrażone spółrzędnemi niezależnemi, t. j. gdy równanie 59-te jest różniczką zupełną pewnej funkcji zmiennych q_i, t. j. gdy znajdziemy taką funkcję

$$U = F(q_1, q_2, \cdots q_n;\ \lambda), \quad (61)$$

której różniczka zupełna

$$\delta U = \frac{\partial F}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \cdots \frac{\partial F}{\partial q_n} \cdot \delta q_n \quad (62)$$

będzie wyrazem pracy wirtualnej, t. j. będzie identyczną z równaniem 59-tem. Funkcję taką nazwaliśmy w § 18-tym funkcją danych sił. Gdy ten przypadek zachodzi, wtedy ze względu, że w położeniu równowagi

$$\delta U = 0$$

i ze względu, że wszystkie δq są w tym razie niezależne, napiszemy równania:

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = 0;\ \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0;\ \cdots\ \frac{\partial F}{\partial q_n} = 0, \quad (63)$$

które są równaniami równowagi. Równań tych jest tyle, ile dany układ posiada stopni swobody, co jest zgodne z wnioskiem już wypowiedzianym.

Ażeby obliczyć równania 63-cie, należy wyrazić funkcję sił spółrzędnemi niezależnemi, a następnie drogą różniczkowania cząstkowego obliczymy te równania.

Ażeby zaś obliczyć funkcję sił jako funkcję niezależnych q, obliczyć można najpierw (§ 15-ty str. 28-ma)

$$U = F(x, y, z)$$

drogą całkowania wyrazu pracy wirtualnej (rów. 19-te), a, po podstawieniu w niego wartości x, y, z z równań 57-ych, otrzymamy U jako funkcję zmiennych niezależnych q.

W przykładach prostszych można nieraz bezpośrednio wyrazić pracę wirtualną spółrzędnemi niezależnemi; w tym przeto przypadku otrzymamy bezpośrednio równania typu 63-go, co znacznie ułatwia postępowanie rachunkowe.

Równania 63-cie są funkcjami spółrzędnych $q_1, q_2, \cdots q_n$, oraz parametru λ; równań tych jest tyle, ile spółrzędnych niezależnych q; możemy przeto wogóle z tych równań obliczyć wartości spółrzędnych $q_1, q_2, \cdots q_n$, jako funkcje zmiennej niezależnej λ. Jeżeli te funkcje oznaczymy literami $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$, to otrzymamy ogólną formę tych rozwiązań:

$$q_1 = \varphi_1(\lambda),\ q_2 = \varphi_2(\lambda), \cdots q_n = \varphi_n(\lambda). \tag{64}$$

23. Spółrzędne uogólnione i siły uogólnione.

W celu ujednostajnienia pojmowania równania 61-go i 62-go nadamy wyrazom równania 62-go następujące znaczenie: przyrosty δq_i będziemy uważali analogicznie do przyrostów δx, δy, δz za przesunięcia w kierunku odpowiednich spółrzędnych q_i; następnie będziemy uważali czynniki typu $\frac{\partial F}{\partial q_i}$, stojące przy tych przesunięciach, również analogicznie do znaczenia fizycznego czynników, stojących przy przesunięciach δx_k, δy_k, δz_k,—jako siły, działające w kierunku odpowiednich spółrzędnych q_i. Spółrzędne q_i i siły, w ten sposób określone, Lagrange nazwał *spółrzędnemi uogólnionemi*, (które nazywaliśmy niezależnemi w § 1-szym) i *siłami uogólnionemi*; siły przeto uogólnione są w tem określeniu funkcjami spółrzędnych uogólnionych w tenże sposób, w jaki — siły właściwe typu P_x są funkcjami spółrzędnych x, y, z; iloczyn tych sił i odpowiednich przesunięć, np. iloczyn $P_x \cdot \delta x$, lub $\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \delta q$ wyrażają prace cząstkowe podczas odpowiednich przesunięć δx, ewentualnie δq.

Z tych określeń wynika, że praca, wyrażona spółrzędnemi uogólnionemi i siłami uogólnionemi, ma tę samą formę algebraiczną, jaką posiada wyraz pracy, wyrażony siłami składowemi w kierunkach osi x, y, z i przesunięciami wzdłuż tych osi, t. j. posiada taką formę, jaką posiada równanie 58-me.

24. Różnica pomiędzy wyrażeniem równowagi sił zewnętrznych, działających na układ swobodny i na układ nieswobodny, zapomocą pracy wirtualnej i zapomocą statyki.

W statyce wykazaliśmy, że ażeby siły, działające na bryłę *swobodną*, były w równowadze, powinna ich suma wektorowa oraz suma wektorowa ich momentów równać się zeru; ażeby zaś siły zewnętrzne, działające na bryłę *nieswobodną*, były w równowadze, t. j., ażeby utrzymały dany układ w spoczynku, jeżeli był on w spoczynku, niekoniecznie mają mieć wypadkową i moment wypadkowy równy zeru; wypadkowa i moment mogą istnieć, lecz ograniczenia ruchu danego układu materjalnego w tym razie powinny być takie, żeby ten układ nie mógł wykonać ruchów, jakieby wywołać mogła wypadkowa, lub wywołać mógł wypadkowy moment tych sił; warunki więc równowagi sił, działających na bryłę *nieswobodną, wyrażone pracą wirtualną możliwą*, nie przesądzają o tem, czy dane siły, t. j. siły zewnętrzne posiadają, czy też nie posiadają siły wypadkowej, lub momentu wypadkowego; warunki te wyrażają tylko, że układ dany (nieswobodny) pod działaniem tych sił pozostanie w spoczynku, jeżeli przed działaniem tych sił był w spoczynku. Jeżeli zaś dołączymy do sił zewnętrznych, działających na bryłę nieswobodną, siły odporowe, wogóle siły połączeń, wtedy dopiero siły zewnętrzne *łącznie* z siłami odporowemi posiadają w razie równowagi wypadkową równą zeru i moment wypadkowy równy zeru, t. j. siły te czynią zadość ogólnym warunkom równowagi, podanym w statyce.

25. Całkowity wyraz pracy wirtualnej.

Jako warunek równowagi sił, przyłożonych do pewnego układu materjalnego, postawiliśmy warunek, ażeby suma pracy podczas każdego wirtualnego przesunięcia równała się zeru.

Dla obliczenia wartości tej pracy, którą wyraziliśmy równaniem 62-giem, stosowaliśmy tylko wielkości nieskończenie małe pierwszego rzędu; w celu jednakże głębszego ujęcia wniosków, wynikających z tej zasady, zastosujemy do obliczenia tej pracy wielkości wyższych rzędów. W tym celu wyobrazimy sobie przesunięcie niekoniecznie nieskończenie małe i wyraz pracy ΔU, jaką siły wykonały podczas tego przesunięcia, rozwiniemy w szereg Taylor'a z uwzględnieniem wszystkich wyrazów tego szeregu;

przyrost ten, czyli praca wirtualna, wyrazi się wtedy następującym wyrazem:

$$\Delta U = \left| \frac{\partial F}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial q_n} \cdot \delta q_n \right| + \frac{1}{2!} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} \cdot \delta q_1^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_3} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_3 + \cdots \right| + R_3, \quad (65)$$

który jest *całkowitym* wyrazem pracy, jaką siły wykonały podczas wirtualnego przesunięcia układu z danego położenia do położenia sąsiedniego; litera zaś R_3 oznacza pozostałe wyrazy tego szeregu, które są trzeciego i wyższych rzędów. Wartość δU wyrażona równaniem 62-giem, jest więc tylko częścią wartości tej pracy, resztą zaś tej wartości jest wyrażona następnemi wyrazami szeregu 65-go.

Z tego wyrazu wynika, że praca sił podczas wirtualnego przesunięcia składa się z wartości nieskończenie małych różnych stopni, które — oczywiście — mają swoje fizyczne znaczenie, które rozpatrzymy w następnych paragrafach.

Jeżeli dany układ jest w położeniu równowagi, to równanie 65-te, ze względu na równania równowagi, t. j. na równania 63-cie, otrzyma następującą postać:

$$\Delta U = \frac{1}{2!} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} \cdot \delta q_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \delta q_1 \cdot \delta q_2 + \cdots \right] + R_3. \quad (66)$$

ROZDZIAŁ IV.

UKŁADY O JEDNYM STOPNIU SWOBODY.

26. Równowaga różnych rzędów i różnych rodzajów.

W celu ułatwienia rozpatrywań właściwości równowagi, weźmiemy najpierw pod uwagę układ o jednym stopniu swobody, t. j. układ, którego położenie wyznacza tylko jedna spółrzędna niezależna; w tym przypadku równanie 65-te otrzyma postać nastepującą:

$$\Delta U = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \delta q^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial q^3} \cdot \delta q^3 + \cdots; \quad (67)$$