

VIII. Wyboczenie.

73. Doświadczenie podstawowe objaśniające istotę wyboczenia. Jeżeli bardzo smukły prosty pręt, utwierdzony dokładnie pionowo dolnym końcem (fig. 200), obciążymy środkowo na górnym końcu kolejno ciężarem P_1, P_2, \dots coraz to większym, to zauważymy:

1. Przy obciążeniu, nie dochodzącym do pewnej wartości P_{kr} , jest równowaga pręta w pionowej prostej postaci stałą i to tem stałszą, im mniejsze jest P . Przekonywamy się o tem łatwo, zginając obciążony pręt niewielką dodatkową siłą i puszczać go następnie swobodnie. Pręt wraz z ciężarem waha około pionowego położenia równowagi i to tem szybciej, im mniejsze jest P .

2. Gdy obciążenie P zbliża się do P_{kr} , wahania stają się bardzo powolne; pręt wraca leniwo do położenia pionowego; stałość równowagi w tem położeniu zachodzi jeszcze, ale jest już bardzo mała.

3. Skoro wreszcie P przekroczy choćby bardzo nie wiele wartość P_{kr} , to nawet przy największej staranności przy pionowym ustawieniu i środkowym obciążeniu, pręt nie utrzyma się w równowadze w postaci pionowej, lecz przyjmie nową postać równowagi, wygiętą tem silniej, im większe jest P . Ta wygięta postać równowagi jest teraz postacią równowagi stałej, a prosta stała się postacią równowagi niestalej.

Jest rzeczą jasną, że po przekroczeniu przez obciążenie wartości krytycznej staje się wzrost naprężeń w pręcie bez porównania szybszy od poprzedniego (proporcjonalnego do przyrostu obciążenia), albowiem w przekroju utwierdzonym działa obok siły P ,

Fig. 200.

jeszcze moment zginający $P \cdot f$. Dlatego, chociaż iloraz $\frac{P_{kr}}{P}$, określający

naprężenie ściskające przy prostej postaci pręta, nie przekracza wartości bezpiecznej dla materiału, to jednak obciążenie $P = P_{kr}$ musimy uznać za niebezpieczne dla pręta jako elementu konstrukcyjnego, który ma spełniać swoje zadanie w prostej postaci, jako postaci równowagi stałej.

Zjawisko zmiany postaci równowagi stałej przy pewnej wartości obciążenia nazywamy w tym przypadku (i w wielu pokrewnych) wyboczeniem, a odpowiadające obciążenie zowiemy obciążeniem krytycznem albo wybaczajacem.

Rozróżniamy wyboczenie sprężyste i niesprężyste, zależnie od tego, czy siła P_{kr} , ściskająca pręt podłużnie, wywołuje naprężenia poniżej, czy też powyżej granicy sprężystości.

W powyższem podstawowem doświadczeniu zachodzi wyboczenie sprężyste tylko przy dostatecznie wielkiej smukłości pręta. Smukłość można zmierzyć stosunkiem długości do najmniejszego wymiaru poprzecznego. Doskonalsza miara smukłości wynika z teorii wyboczenia.

Doświadczenia pouczają nadto, że bardzo małe zboczenia od prostoliniowości pierwotnej osi pręta, jednolitości materiału i środkowości obciążenia mają pewien niewielki wpływ obniżający na wartość P_{kr} . Te zboczenia powodują oczywiście wygięcie przy każdej dowolnie małej wartości P , ale te wygięcia stają się znacznymi i niebezpiecznymi dopiero przy P zbliżającym się do P_{kr} .

Prawdziwa przyczyna wyboczenia tkwi zatem nie w nieuniknionych drobnych zboczeniach od doskonałej prostoliniowości pręta, jednolitości jego materiału i osiowości obciążenia, lecz w zmianie warunków stałości

równowagi. Dla $P < P_{kr}$ równowaga pręta jest stała przy jego postaci prostej, zaś dla $P > P_{kr}$ jest równowaga w postaci prostej niestała, a postacią równowagi stałej może być tylko postać wygięta (o ile oczywiście przy tem wygięciu nie zostanie pręt złamany). Dla $P = P_{kr}$ mamy widocznie do czynienia z przypadkiem równowagi obojętnej.

74. Wytrzymałość na wyboczenie określa się powszechnie w praktyce jako największe obciążenie podłużne pręta P_w , które on znieśie przed złamaniem lub trwałem wygięciem przy próbie obciążenia. Jest to zupełnie coś innego od określonego powyżej obciążenia krytycznego, czyli wybaczającego. Mieszanie obu pojęć wywołało już wiele nieporozumień naukowych. Do tego przyczynia się nadto niezbyt szczęśliwy zwyczaj nazywania wyboczeniem każdego wygięcia pręta, wywołanego siłą równoległą do osi, jakkolwiek zdecydowanie mimoiródkową. Innym ważnym powodem zamieszania pojęć jest fakt doświadczalny, że w wielu wypadkach jest różnica wartości P_w i P_{kr} , praktycznie znikoma. Wszystko to wyjaśnia naukowo interesowana teoria wyboczenia.

75. Teoria wyboczenia prętów (słupów). Wzory Euler'a. Jeżeli przy jakiegokolwiek możliwej (przygotowanej) zmianie postaci lub położenia układu z danego położenia równowagi z większą się jego energia potencjalna, to równowaga w danem położeniu jest stałą, skoro zaś ta energia się zmniejsza, to równowaga jest niestałą. Wychodząc zatem z prostej postaci równowagi pręta ściskanego daną siłą P , udzielamy mu przygotowanego wygięcia, które powoduje obniżenie obciążonego końca o δy , a zwiększenie energii potencjalnej wewnętrznych sił sprężystości o δV . Razem tedy zwiększa się całkowita energia układu o

$$\delta U = \delta V - P \cdot \delta y.$$

Dla danego P może ta wielkość δU wypaść dodatnia dla wszelkiego wygięcia przygotowanego, a wtedy równowaga prostej postaci pręta jest stałą; w razie ujemnej wartości δU przy innej wartości P jest ta równowaga niestałą. Na granicy obu rodzajów równowagi będzie $\delta U = 0$, a odpowiadająca wartość obciążenia jest oczywiście wartością krytyczną. Ścisłe rozwiązanie zadania wymaga zastosowania rachunku przemienności, atoli w bardzo wielu wypadkach da się uzyskać drogą elementarną, wskazaną już przez Euler'a.

Dla czterech typowych prostych przypadków ustalenia końców, przedstawionych w tablicy I., podano wartości obciążenia krytycznego, znalezione z pominięciem wpływu sił poprzecznych na energię zginania.


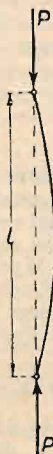


Do powyższych wyników dochodzi się przez całkowanie przybliżonego równania różniczkowego linii ugięcia, napisanego np. dla przypadku II. w postaci:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py$$

przy założeniu, że wyboczenie zajdzie w płaszczyźnie najmniejszej sztywności zginania pręta, czyli, że J jest najmniejszym momentem bezwładności przekroju, a zarazem przy pominięciu zbliżenia końców pręta wskutek wygięcia. To pominięcie nie ma wpływu na wartość krytyczną obciążenia, która wypada zgodnie ze ścisłym rozwiązaniem Lagrange'a, a tylko nie pozwala na obliczenie strzałki wygięcia f . Ta ostatnia da się wyznaczyć tylko przy zastosowaniu dokładnego równania linii ugięcia (D' , str. 1122), całkowanego przy pomocy funkcji eliptycznych.

76. Granice ważności wzoru Euler'a i jego stosowności do praktycznego obliczenia wytrzymałości na wyboczenie. Podstawiawszy

Tablica I.

Określenie przypadku ustalenia końców	I. Jeden koniec doskonale utwardzony, drugi swobodny	II. Oba końce przegibnie ustalone na prostej (pierwotnej osi pręta)	III. Jeden koniec doskonale utwardzony, drugi przegibnie ustalony na pierwotnej osi pręta	IV. Oba końce doskonale utwardzone
Rysunek przypadku				
$P_E =$ Eulerowska wartość obciążenia krytycznego	$\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ}{l^2}$	$\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ praktycznie najważniejszy	(w przybliżeniu) $2\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$	$4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$

$\frac{F_E}{F} = \sigma_E$, $J = F i^2$ i oznaczywszy przez smukłość pręta stosunek $s = \frac{l}{i}$ możemy wzór Euler'a dla II. przypadku¹⁾ napisać w postaci:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{s^2} \dots \dots \dots (1430)$$

Stąd: napężenie Eulerowskie σ_E jest odwrotnie proporcjonalne względem kwadratu smukłości s . Przedstawiający wykreślnie związek między σ_E i s , otrzymujemy (kubiczną) hiperbolę Eulerowską (fig. 201).

Wzór Euler'a traci swą ważność, gdy zeń wypada σ_E większe od granicy proporcjonalności materiału pręta. Taki przypadek zachodzi przy smukłościach mniejszych od wartości granicznej s_{gr} , którą obliczamy z równania:

¹⁾ Tylko ten przypadek jako praktycznie najważniejszy będzie w dalszym ciągu brany pod uwagę.

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{s_{gr}^2}, \quad \text{czyli} \quad s_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}.$$

Wartość smukłości granicznej dla kilku materiałów zawiera tablica II.

Tablica II.

M a t e r i a ł	σ_p (kg/cm ²)	E (kg/cm ²)	s_{gr}
Drewno	150	100 000	80
Żelazo spawane	1500	2 000 000	115
Żelazo zlewne	2000	2 100 000	102
Stal zlewna	2400	2 200 000	95

Jeżeli smukłość pręta jest większa od s_{gr} , to wzór Euler'a podaje rzeczywistą wartość siły wybaczającej, jak to stwierdzono licznymi doświadczeniami. Co więcej, ta siła, wywołująca sprężyste wyboczenie pręta, okazała się zarazem praktycznie równą jego wytrzymałości na wyboczenie w całym stosowanym w technice obszarze zmienności s powyżej s_{gr} .

Teoretycznie tłumaczy się to jasno okolicznością, iż bardzo nawet małe przekroczenie siły Eulerowskiej wywołuje według dokładnego obliczenia tak znaczne wygięcie, że trwałe odkształcenie lub złamanie staje się niechybnem. Wszystko to jest ważne przy

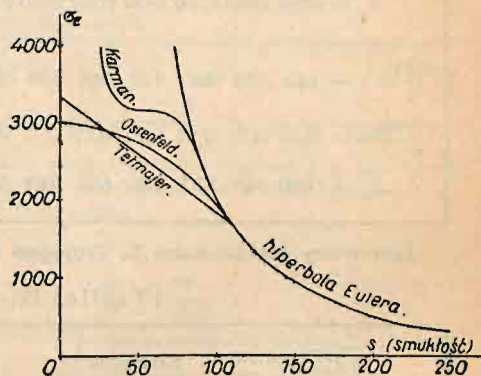


Fig. 201.

bardzo dokładnem spełnieniu podstawowych warunków teorii, tj. środkowości obciążenia, prostolinowości osi, jednolitości materiału i oczywiście ważności prawa Hooke'a.

77. Wyboczenie niesprężyste. Wzory doświadczalne i półempiryczne. Tylko bardzo stosunkowo niskie (krepie) słupy nie objawiają wyboczenia, pękając lub odkształcając się bezułkowato przy nacisku osiowym, wywołującym w materiale zbyt wielkie ciśnienia. Przy takich małych (rzadziej mających praktyczne zastosowanie) smukłościach jest wytrzymałość słupa niezależna od jego wysokości (w pewnych granicach). Przy nieco większych smukłościach można już obserwować wyboczenie niesprężyste, a wytrzymałość maleje ze wzrostem smukłości. Tę zależność ujęto we wzory doświadczalne. Z nich najprostszą postać posiada

a) Wzór Tetmajera: $\sigma_w = a - b s$,

w którym współczynniki a i b obliczył najdokładniej prof. Jasiński na podstawie doświadczeń Bauschinger'a, Considere'a i Tetmajer'a. Dla zwykłego żelaza zlewne (o doraźnej wytrzymałości 4500 kg/cm²) otrzymał Jasiński:

$$\sigma_w = [3387 - 14,83 s] \text{ kg/cm}^2 \quad \text{w granicach } 70 < s < 110. \quad (1450)$$

Fig. 201 przedstawia wykreślnie zależność naprężenia niebezpiecznego (łamiącego) σ_w od smukłości s według powyższego wzoru empirycznego i wzoru Euler'a, który dla żelaza zlewego przybiera postać:

$$\sigma_E = \left[2128 \left(\frac{100}{s} \right)^2 \right] \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots (1451)$$

Wykres może zastąpić tablica III.

Tablica III.

naprężeń krytycznych (łamiących) dla słupów z żelaza zlewego, ściskanych w warunkach przypadku II. (podstawowego).

$\frac{l}{i} = s =$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$\frac{\sigma_w}{K_c} = \alpha =$	0,88	0,84	0,80	0,76	0,71	0,67	0,63	0,59	0,54	0,50	0,42	0,36
$\sigma_w =$	3090	2940	2790	2650	2500	2350	2200	2050	1900	1760	1480	1260

$\frac{l}{i} = s =$	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
$\frac{\sigma_w}{K_c} = \alpha =$	0,31	0,27	0,24	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13	0,11	0,10	0,10
$\sigma_w =$	1090	946	831	736	657	589	532	483	440	402	369	340

Inne wzory doświadczalne L. Tetmajera zawiera tablica IV.

Tablica IV.

Materiał	Wytrzymałość na ciśnienie K_c w kg/cm^2	Granica smukłości $\frac{l}{i} = s$	Naprężenie wyznaczające (łamiące) $\sigma_w = P_w : F$	$\alpha = \frac{\sigma_w}{K_c}$ dla smukłości							
				40	50	60	70	80	90	100	110
Drewno miękkie	280	< 100	prosta Tetmajera 293 — 1,94 s	0,771	0,700	0,632	0,561	0,493	0,421	—	—
		≥ 100	wzór Euler'a	—	—	—	—	—	—	0,353	0,293
Żeliwo	8000	< 80	parabola Tetmajera 7760 — 120 s + + 0,53 s ²	0,476	0,386	0,309	0,245	—	—	—	—
		≥ 80	wzór Euler'a	—	—	—	—	0,194	0,162	0,123	0,102
Żelazo spawalne	3500	< 112	prosta Tetmajera 3030 — 13 s	0,717	0,680	0,643	0,606	0,569	0,531	0,494	0,457
		≥ 112	wzór Euler'a	—	—	—	—	—	—	—	—
Stal zlewna	6000	< 89	prosta Tetmajera 3350 — 6,2 s	0,517	0,507	0,496	0,486	0,476	—	—	—
		≥ 86	wzór Euler'a	—	—	—	—	—	0,457	0,370	0,306

Uwaga. Doświadczenia nowsze wraz z teoretycznymi badaniami Engesser'a, v. Karmán'a i innych dowodzą, że przypadkowe mimośrodowość obciążenia i inne źródła błędów były u Tetmajera jeszcze dość znaczne. Wskutek tego wartości otrzymane z jego wzorów doświadczalnych są zawsze niższe od rzeczywistych σ_w , osiągalnych przy dokładnym osiowym działaniu siły. Mimo to można oczywiście zalecić wzory Tetmajera do praktycznego zastosowania w tych wszystkich przypadkach, kiedy nie mając pewności, że obciążenie działa dokładnie osiowo, nie możemy zarazem ocenić wielkości drobnego przypadkowego mimośrodu tego obciążenia. Na nich opierają się wzory przepisane w Polsce przez Ministerstwo Robót Publ. i Ministerstwo Kolei (por. działy: „Budownictwo“ i „Mosty“).

b) Wzór Johnson'a i Ostenfelda ma charakter półempiryczny i jest przeznaczony dla prętów z żelaza kowalnego. Ma postać:

$$\sigma_w = \sigma_f \left(1 - \frac{s^2}{30000} \right) \dots \dots \dots (1460)$$

przyczem σ_f oznacza granicę plastyczności. Wzór ten daje wartości bardziej zbliżone do rzeczywistych σ_w przy znikomym małych zboczeniach od osiowości działania siły. Jest nadto godny polecenia jeszcze z tego powodu, ponieważ





po podstawieniu $\sigma_w = \frac{n P}{F}$ (n pewność), $F = \varphi i^2$, a więc $J = F i^2 = \varphi \cdot i^4$ i rozwiązaniu względem F , otrzymuje postać:

$$F = F_0 + \frac{1}{3} \varphi l^2 \dots \dots \dots (1461)$$

przyczem $F_0 = \frac{P}{\sigma_{\text{bezp.}}}$ w cm^2 oznacza przekrój, obliczony ze względu na zwykłe ściskanie, a drugi wyraz po podstawieniu długości l w metrach i wartości liczbowej φ z tablicy V. przedstawia zwiększenie przekroju ze względu na niebezpieczeństwo wyboczenia.

Tablica V.

$$\text{Wartość } \varphi = \frac{F'}{i^2} = \frac{F'^2}{J}.$$

L. p.	Przekroje lite		L. p.	Przekroje złożone	
	Postać	Wartość φ		Postać	Wartość φ
1	Kwadrat	12,0	6	4 kątowniki rozdzielone przestrzenią o szerokości $\sim 1 \text{ cm}$	4,0
2	Prostokąt ($b > h$)	$12 \frac{b}{h}$	7	2 kształtowniki 	
3	Koło	4π		rozdzielone przestrzenią o szerokości $\sim 1 \text{ cm}$	6,0
4	Dźwigar 	10,0	8	 $J_x = J_y$	1,2
5	Kątownik  dla $b:h = \begin{cases} 1:1 & 6,0 \\ 2:3 & 7,0 \\ 2:1 & 11,0 \end{cases}$				

Uwaga. Dla kształtowników są powyższe wartości φ przybliżone. Wyznaczywszy przy ich pomocy F i J (wzgl. i), wypadnie powtórzyć rachunek z dokładną wartością φ .

Pręty znitowane z kształtowników zachowują się jak lite pod warunkiem, że odstepy nitów są co najwyżej 70δ (δ = grubość nitowanych części) i że osłabienie przekroju przez nity nie przekracza 12% (Tetmajer).

Inne wzory półempiryczne, niegdyś bardzo rozpowszechnione w praktyce, dzięki swej uniwersalności, jak np. wzór Naviera - Schwarza - Rankine'a, mają obecnie już tylko znaczenie historyczne.

78. Wyboczenie w przypadku, gdy materiał zbacza od prawa Hooke'a. Zakładając ważność wzoru Eulera przy zmiennym module sprężystości E i przyjmując w przybliżeniu:

$$E = E_0 - \eta \sigma,$$

przyczem E_0 jest wartością E dla $\sigma = 0$, η drugą stałą materiału (bezwymiarową), otrzymujemy po rozwiązaniu względem $\sigma = \frac{P}{F}$

$$\sigma_w = \frac{P_w}{F} = \frac{\pi^2 E_0}{\eta \pi^2 + s^2} = \frac{\frac{E_0}{\eta}}{1 + \frac{s^2}{\eta \pi^2}} \dots \dots (1480)$$

Ten wzór zastosował między innymi Mörsch do betonu i żelazo-betonu, nadając mu charakter półempiryczny na podstawie doświadczeń Bacha nad wyboczeniem słupów żelazno-betonowych. Ma on postać:

$$\text{Dop. } \sigma_w = \frac{1,25 \sigma_b}{1 + 0,0001 s^2} \text{ dla } s \geq 50 \dots \dots (1481)$$

Tutaj oznacza σ_b dopuszczalne ciśnienie w betonie bez niebezpieczeństwa wyboczenia. Podobny wzór można zbudować dla żeliwa.

79. Wpływ sił poprzecznych na obciążenie krytyczne. Inne wpływy. Uwzględniając wpływ sił poprzecznych na energję zginania przy wyboczeniu (por. ust. 49), dochodzimy łatwo do wzoru:

$$P_{kr} = \frac{P_E}{1 + \frac{k' P_E}{G F}} \dots \dots \dots (1482)$$

Tutaj oznacza k' współczynnik liczbowy, zależny od rozkładu naprężeń stycznych w przekroju (który np. dla prostokąta = 1,2) a G moduł ścinania. A zatem dokładna wartość P_{kr} jest nieco mniejsza od obciążenia Eulerowskiego P_E . To zmniejszenie nie przekracza u prętów litych 1%; jest zatem wobec innych źródeł błędów bez praktycznego znaczenia. Atoli bardzo ważną rolę gra wpływ sił poprzecznych, określony wielkością $\frac{k'}{G F}$, u prętów złożonych (kratowych itp.), o czym poniżej (ust. 80).

Przy ściskaniu słupa pionowego współdziała z siłą zewnętrzną P ciężar własny słupa G jako obciążenie dodatkowe przekroju, rosnące linjowo od 0 w górnym końcu słupa do G w końcu dolnym. Wartość krytyczna siły P zmniejsza się wówczas, jak wykazał Sommerfeld, a mianowicie dla przypadku I, o:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) G, \text{ czyli około } 0,30 G,$$

co może grać rolę praktyczną tylko przy bardzo wielkich rozmiarach pręta.

Wpływ osłabienia pręta przez otwory na nity (w równych odstępach) można uważać za równoważny ze zwiększeniem długości swobodnej pręta o Δl , przyczem:

$$\Delta l = \frac{n d}{2} \cdot \frac{J - J'}{J'},$$

jeżeli n oznacza liczbę przekrojów osłabionych, d średnicę otworu, a J' moment bezwładności osłabionego przekroju. Wpływ ten jest wogóle nieznaczny i może być w praktyce pominięty.

Wszystkie dotychczas rozważane wpływy działają zmniejszająco na wartość obciążenia krytycznego, czyli niekorzystnie. Wpływ korzystny ma oczywiście wszystko to, co kępuje swobodę obrotu końcowych przekrojów pręta, a więc sposób podparcia tych przekrojów, tarcie w przegubie łożyskowym itp. Te wpływy, zwiększające P , są jednakowoż mniej uchwytne od tamtych (zmniejszających) i dlatego nie liczymy zwykle na nie w praktyce.

Doświadczenia wykazały, że przy wywarceniu osiowego nacisku na obie płaskie podstawy słupa przez dokładnie przylegające stalowe tłoiki prasy, prowadzone prostoliniowo, zwiększa się P_{kr} w stosunku do przypadku II. tak, że odpowiadająca długość sprowadzona $l_{red} = \infty 0,7 l$.

Podobnie przy innych sposobach rzeczywistego utwierdzenia końców nie obserwowano nigdy teoretycznej wartości $l_{red} = 0,5 l$, odpowiadającej utwierdzeniu doskonałemu, lecz $l_{red} \geq 0,58 l$, przyczem współczynnik redukcji 0,58 odpowiada smukłości $s = 200$ (B. Kirsch) i rośnie, gdy s maleje. To się doskonale tłumaczy niemożliwością zrealizowania utwierdzenia zupełnego z powodu odkształcalności każdego materiału.

80. Wyboczenie prętów złożonych.

Uwzględniając wpływ sił poprzecznych, powstających przy wyboczeniu, na odkształcenie postaciowe pól o długości a i szerokości b (fig. 202) pręta kratowego, doszli jednocześnie Prandtl i Timoszenko do poniżej podanych wzorów, przybliżonych dla P_{kr} . W nich oznacza:

- J_0 moment bezwładności przekroju poprzecznego (z pominięciem kraty) względem osi symetrii,
- F_p pole przekroju poprzecznego przekątnej,
- F_s pole przekroju poprzecznego słupa (rozpory),
- α kąt ostry, jaki tworzą przekątne z kierunkiem prostopadłym do osi pręta, wreszcie:

$$P_E = \pi^2 \frac{E J_0}{l^2}.$$

$$\text{Do fig. a) } P_{kr} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{1}{E F_p \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{E F_s \operatorname{tg} \alpha}}.$$

$$\text{Do fig. b) } P_{kr} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{1}{2 E F_p \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{E F_s \operatorname{tg} \alpha}}.$$

$$\text{Do fig. c) } P_{kr} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{1}{E F_p \cos^2 \alpha \sin \alpha}}.$$

Jeżeli przekrój pręta jest rurowy (według fig. d), to w odpowiadających wzorach należy zamiast F_p i F_s wstawić $2 F_p$ i $2 F_s$.

Wszystkie te wzory dadzą się przedstawić w postaci:

$$P_{kr} = \alpha' \cdot P_E, \text{ przyczem } \alpha' < 1$$

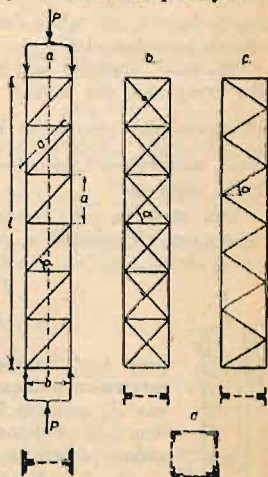


Fig. 202.

jest współczynnikiem zmniejszającym wytrzymałość na wyboczenie pręta złożonego kratowego w porównaniu do pręta litego o tym samym momencie bezwładności przekroju J_0 .

Powyższe wzory wyprowadzono przy założeniu wyboczenia sprężystego. W praktyce można je widocznie stosować i do wyboczenia niesprężystego, wprowadzając zamiast P_E wartość $P_w = F_0 \cdot c_w$, obliczoną z wzorów empirycznych lub tablic (str. 1170). (F_0 oznacza tutaj pole przekroju o momencie bezwładności J_0 .)

Ważność wzorów jest nadto ograniczona warunkiem oczywistym, aby siła krytyczna dla części pasa o długości a i momencie bezwładności J_1 (obliczona dla przypadku II.) wypadła $\geq \frac{1}{2} P_{kr}$. (W przypadku z fig. (d) jest J_1 momentem bezwładności dwu kątowników względem osi łączącej ich środki ciężkości.)

Dla stosowanych często w nowszych czasach prętów bezprzekątniowych (Vierendeel'a; (fig. 203) znaleziono powyższą metodą:

$$P_{kr} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{a^2}{24 EJ_1} + \frac{ab}{12 EJ_2}} \dots (1510)$$



przy tych samych, co powyżej warunkach ważności, a nadto sztywnym połączeniu poprzeczek (słupków) z pasami. Tutaj oznacza J_2 moment bezwładności przekroju słupka (rozpórki) względem osi obojętnej prostopadłej do płaszczyzny wyboczenia (zarazem płaszczyzny rysunku).

Według Müller-Breslau'a (Eisenbau 1916, str. 266) przyjmuje powyższy wzór przybliżoną postać:

$$P_{hr} = \frac{\pi^2 E}{\frac{n-1}{n-0,8} s^2 + 0,8 s_1^2} \dots (1511)$$

przy oznaczeniach $n = l : a$ (liczba pól):

$$s = l : i = l : \sqrt{\frac{J_0}{2 F_1}}, \quad s_1 = a : i_1 = a : \sqrt{\frac{J_1}{F_1}}.$$

Zamiast tego radzi Engesser przyjąć w I. przybliżeniu:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E}{s^2 + s_1^2} \dots (1512)$$

Fig. 203.

IX. Ważniejsze złożone przypadki zgięcia i wyboczenia.

W rozpatrywanych w rozdz. VI.—VII. przypadkach zgięcia prętów i płyt były ugięcia i naprężenia linjowymi funkcjami obciążeń, a energia potencjalna kwadratową jednorodną funkcją uogólnionych sił, albo uogólnionych przesunięć. Szła za tem nader wygodna stosowalność zasady superpozycji, zasady najmniejszości pracy odkształcenia itd. To wszystko przestaje być wogóle ważnem w zagadnieniach niniejszego rozdziału. Dwa razy większa siła nie wywołuje w rozpatrywanych tutaj przypadkach podwójnych ugięć i naprężeń, lecz większe lub mniejsze od nich, stosownie do warunków. Tak się rzecz ma, bez przekroczenia gdziekolwiek granicy proporcjonalności materiału, albowiem powód zmiany prawa zależności tkwi nie w materiale, lecz w tem, że działania sił stają się od siebie nawzajem zależne. Zmiana wielkości jednej siły wywołuje np. zmianę ramienia momentu siły drugiej i nawzajem. Łatwo to zauważyć w każdym z podanych poniżej rozwiązań.

A. Zgięcie prętów prostych w połączeniu z siłami rozciągającymi lub ściskającymi.

81. Przypadek przegibnego ustalenia końców na prostej. Dokładne rozwiązanie prowadzi do bardzo zawiłych wzorów. Do celów praktycznych wystarcza rozwiązanie przybliżone Timoszenki w postaci wzorów następujących.

a) Strzałka ugięcia f (fig. 204):

$$f = \frac{f_0}{1 \mp \frac{S}{S_E}} \dots (1520)$$



Fig. 204.

Tutaj oznacza f_0 strzałkę, wywołaną przez same obciążenia P_i (skierowane zgodnie), $S_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ wartość krytyczną siły ściskającej, znak — odnosi się do przypadku ściskania, + do rozciągania siłą S . Wzór jest dostatecznie dokładny, gdy $S < 0,8 S_E$ (oczywiście przy założeniu, że nigdzie nie przekroczono granicy proporcjonalności).

b) Moment zginający w przekroju środkowym:

$$M = M_0 \pm S \cdot f = M_0 \pm \frac{S f_0}{1 \mp \frac{S}{S_E}} \dots (1530)$$

Jeżeli M_0 oznacza moment wskutek samych obciążeń P_i . Znaki górne odnoszą się do ściskania, dolne do rozciągania.

Uwaga. 1. Przy zastosowaniu tego wzoru do oceny wytrzymałości belki nie wolno wogóle obliczać przekroju z warunku, aby przy danym obciążeniu było $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{bezp}}$, albowiem stopień pewności przeciwko złamaniu mógłby wypaść znacznie mniejszy od $n = \frac{\sigma_{\text{niebezp}}}{\sigma_{\text{bezp}}}$. Obliczenie poprawne przedstawia przykład następujący:

Belka z żelaza kowalnego, obciążona całkowicie ciężarem $q \cdot l$ i ściskana siłą S . Znać wymiary przekroju przy n -krotnej pewności przeciwko przekroczeniu granicy plastyczności σ_f .

Przy danym obciążeniu jest $M_0 = \frac{1}{8} q l^2$, $f_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}$, a zatem ciśnienie we włóknie skrajnym przekroju środkowego, jako niebezpiecznego, jest przy n -krotnej wartości obciążenia:

$$\frac{nS}{F} + \frac{nq l^2}{8W} \left[1 + \frac{1,028 n (S/S_E)}{1 - n (S/S_E)} \right] \leq \sigma_f$$

Podzieliwszy obustronnie przez n otrzymujemy jako warunek wytrzymałości:

$$\frac{S}{F} + \frac{q l^2}{8W} \left[1 + 1,028 \frac{n (S/S_E)}{1 - n (S/S_E)} \right] \leq \frac{\sigma_f}{n} = \sigma_{\text{bezp}}$$

Stąd wyznaczamy szukane wielkości przekrojowe F i W z danych q , S , l , n i σ_{bezp} . Warunek wytrzymałości wyraża tutaj, że przy sumowaniu naprężeń wywołanych siłą po dłużną S , momentem zginającym M_0 obciążenia poprzecznego i momentem zginającym siły S , należy w ostatniej części pomnożyć siłę S przez $n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{\text{bezp}}}$. Dopiero tak obliczone naprężenie winno mieć wartość $\leq \sigma_{\text{bezp}}$.

2. Wzory (1520) i (1530) nie zmieniają postaci w przypadku doskonałego utwierdzenia końców belki, przy stosownej interpretacji wielkości f_0 , M_0 i S_E . W szczególności będzie wtedy:

$$S_E = 4 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

82. Przypadek nieznanych sił podłużnych. Gdy końce belki są ustalone tak, że nie mogą się do siebie zbliżyć wskutek jej zgięcia, to powstaje niewiadoma siła rozciągająca S . W przybliżeniu, wystarczającym do celów praktycznych, można ją obliczyć (Timoszenko, str. 231) z równania warunkowego:

$$\frac{S}{S_E} \left(1 + \frac{S}{S_E} \right)^2 = \frac{f_0^2}{4i^2},$$

przy oznaczeniach z poprzedniego ustępu (i promień bezwładności przekroju).

83. Przypadek mimośrodkowego działania sił ściskających. Początkowy moment zginający $P \cdot \delta$ (fig. 205) wywołuje wygięcie sprężyste osi pręta o strzałce f . Do jej wyznaczenia służy równanie linii ugięcia w postaci dokładnej:

$$y = (f + \delta) \left\{ \cos \alpha z + \frac{(\alpha z)^4}{4!} \alpha^2 (f + \delta)^2 - \frac{(\alpha z)^6}{6!} [\alpha^2 (f + \delta)^2 + 11] + \dots \right\} \quad (154,2)$$

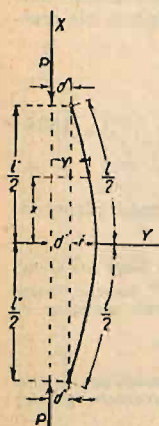


Fig. 205.

przyczem $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$, a z oznacza długość łuku linii ugięcia, mierzoną od jej środka; albo w postaci przybliżonej, wystarczającej do celów praktycznych:

$$y = (f + \delta) \cos \alpha x.$$

Powstające końcowe naprężenia σ_1 (po stronie wklęsłej) i σ_2 (po stronie wypukłej) określają wzory:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{P}{F} \mp \frac{P(f + \delta)}{W_{1,2}}, \quad \text{przyczem} \quad W_1 = \frac{J}{e_1}$$

$$W_2 = \frac{J}{e_2}$$

albo:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{P}{F} \mp \frac{P \delta e_1}{J \cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}}} \quad \dots \quad (154,4)$$

Te wzory, jedynie racjonalne w rozpatrywanym przypadku i bardzo ogólne, zastępuje się w praktyce rozmaitymi przybliżeniami, których granice stosowności są dość nieuchwytnie. Byłoby bardzo pożądanym ułatwić praktyczne zastosowanie równań (154,4) obliczeniem tablic lub nomogramów. Aby znaleźć P_{bezp} dla słupa, należy po lewej stronie pierwszego z tych równań¹⁾ podstawić zamiast σ_1 niebezpieczną wartość ciśnienia (np. granicę plastyczności) i rozwiązać równanie względem P .

Znaleziona wartość obciążenia będzie niebezpieczną P_w . Biorąc jej n -tą część, otrzymujemy:

$$P_{\text{bezp}} = \frac{P_w}{n}, \quad \text{przyczem} \quad n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{\text{bezp}}}.$$

Aby obejść żmudne rozwiązywanie równania przestępnego wyprowadził Ostenfeld przy założeniu niezbyt małych mimośrodków δ i niezbyt wielkich smukłości s wzór pierwszego przybliżenia:

¹⁾ Drugie może służyć za podstawę rachunku tylko w przypadku materiału o wielkiej wytrzymałości na ściskanie, a małej na rozciąganie.

$$\frac{P_w}{E'} = \frac{\sigma_f}{1 + \frac{\delta}{k} \beta s^2} \dots \dots \dots (155,1)$$

Tutaj oznacza P_w obciążenie niebezpieczne, σ_f naprężenie na granicy plastyczności $k = \frac{t^2}{e}$ promień rdzenny, $\beta = \frac{1}{8} \frac{\sigma_f}{E'}$.

B. Zgięcie i wyboczenie prętów prostych objętych sprężystym podłożem.

Założenie: Na każde małe ugięcie pręta y oddziałują podłoże siłą $-ky$ odniesioną do jednostki długości pręta. Współczynnik k (kg/cm^2) cechujący sprężystą podatność podłoża nazywają „znamieniem“ podłoża. Stosowniejszą nazwą byłoby dla k : moduł podatności, zaś dla $\frac{1}{k}$ podatność.

To założenie odpowiada schematowi belki na nieskończenie wielu nieskończenie bliskich i równo odległych podporach sprężystych, odkształcających się niezależnie od siebie nawzajem. Podłoże ciągle zachowuje się, biorąc ściślej, nieco inaczej, albowiem odkształcenie jednego elementu podłoża nie jest możliwe bez współdziałania wszystkich pobliskich. Mimo to teoria, oparta na powyższem uproszczonem założeniu, oddaje dobre usługi w wielu zastosowaniach praktycznych.

84. Belka nieograniczona. Równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky$$

daje po zcałkowaniu w przypadku jednej siły skupionej P (fig. 206) w początku współrzędnych dla belki rozciągającej się w obie strony w nieskończoność:

$$y = \frac{P}{8EJ\alpha^3} \cdot f_1(x), \text{ przy czem } f_1(x) = e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \quad (156,1)$$

Ta funkcja jest ważną dla $0 \leq x \leq \infty$. Lewa gałąź krzywej jest oczywiście symetryczna.

Nadto oznacza $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$.

Moment zginający:

$$M = \frac{P}{4\alpha} f_2(x), \text{ przy czem } f_2(x) = -e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x) \dots (156,2)$$

Siła poprzeczna $Q = -\frac{P}{2} f_3(x)$, przy czem

$$f_3(x) = e^{-\alpha x} \cos \alpha x \dots \dots \dots (156,3)$$

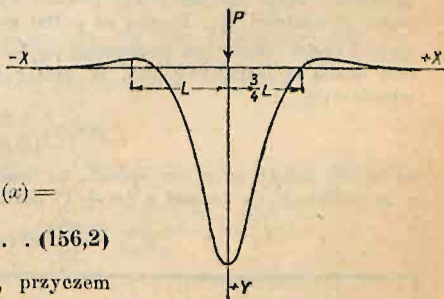


Fig. 206.

Dla funkcji $f_1(x)$, $f_2(x)$ i $f_3(x)$ posiadamy tablice¹⁾, przy pomocy których łatwo obliczyć długą belkę obciążoną dowolnym układem sił, byleby te siły były dość odległe od końców belki. Działanie bowiem każdej siły skupionej daje się odczuwać tylko na niewielkiej długości po obu jej stronach. Linja ugięcia jest falista o długości fali:

$$2L = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}} = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

¹⁾ Ob. np. Timoszenko-Huber: „Wytrzymałość materiałów“, str. 166.

Wysokość fali maleje bardzo szybko z oddaleniem od miejsca obciążonego wskutek czynnika $e^{-\alpha x}$. W odległości większej od $2L$ jest wpływ obciążenia praktycznie znikomy.

85. Belka o długości skończonej. Dokładny rachunek jest bardzo uciążliwy i może być zastąpiony z korzyścią przybliżoną metodą Timoszenki.

W przypadku obciążenia siłą P w środku belki (fig. 207) przyjmujemy w przybliżeniu równanie linii ugięcia:

$$y = a + f \sin \frac{\pi x}{l} \quad \dots \quad (156,5)$$

a z rozważań energii potencjalnej układu znajdujemy:

$$a = \frac{P}{kl} - \frac{3f}{\pi}, \quad f = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EJ} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)} \quad \dots \quad (156,6)$$

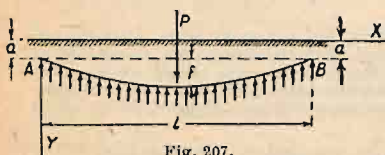


Fig. 207.

Znając a i f , otrzymamy z łatwością nacisk na podłoże $p = -ky$, a stąd momenty zginające itd. Dla największego momentu zginającego w środku otrzymujemy:

$$M = k \left(\frac{a}{8} + \frac{f}{\pi^2} \right) l^2 \quad \dots$$

Warunkiem stosowalności powyższego rozwiązania jest oczywiście:

$$l < \frac{3}{2} L.$$

Inne przypadki traktuje „Kurs Wytrzymałości“ Timoszenki (str. 235).

86. Wyboczenie pręta objętego sprężystym podłożem. Przy założeniu przegibnego ustalenia obu końców pręta ściskanego osiowo siłą P prowadzi teoria do sinusowej postaci równowagi pręta, po przekroczeniu przez P wartości P_{kr} . Liczba m półfal sinusoidy, mieszczących się na długości l pręta, zależy od podatności podłoża. Im podłoże jest mniej podatne, tem liczba m będzie większa. W szczególności określa teoria wielkość bezwymiarową:

$$B^2 = \frac{kl^4}{16 EJ} \quad \dots \quad (157,0)$$

od której zależy m w ten sposób, że wartość B^2 przy przejściu od postaci o m półfalach do postaci o $(m+1)$ półfalach oblicza się z równania:

$$B_{gr}^2 = \frac{\pi^4}{16} m^2 (m+1)^2 \quad \dots \quad (157,1)$$

Wartościom $m =$	1	2	3	4	5	6	7
odpowiada $B^2 =$	24,35	219,2	876,7	2435	5479	10739	19091

Skoro np. dla danego pręta, przy danem k , wypadnie $B^2 < 24,35$, to powstanie wyboczenie z jedną półfalą; gdy $24,35 < B^2 < 219,2$ to będą dwie półfale itd.

Znając liczbę półfal m , obliczamy P_{kr} z równania:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4} \right) \quad \dots \quad (157,2)$$

Dla długości sprowadzonej mamy wzór:

$$l_{\text{red}} = \frac{l}{\sqrt{m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4}}}$$

Przy wielkiej liczbie półfal zdąża długość jednej półfali λ do wartości:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{4 E J}{k}} \dots \dots \dots (158, 0)$$

zaś P_{kr} do wartości:

$$P_{kr} = \frac{2 \pi^2 E J}{\lambda^2} \dots \dots \dots (158, 1)$$

$(m \rightarrow \infty)$

87. Wyboczenie ściskanych pasów u mostów otwartych. (Fig. 208.)
Pas taki zachowuje się jak pręt na sprężystych podporach, oddziaływają-

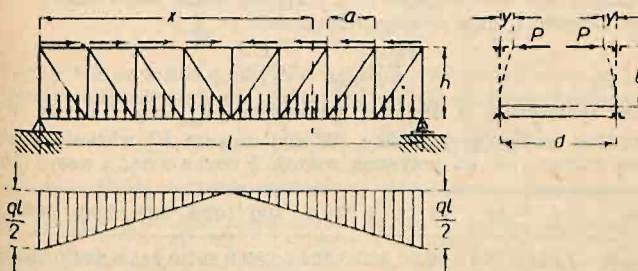


Fig. 208.

cych w kierunku poziomym wskutek sztywności zginania słupów belki kratowej.

a) Końce słupów są punktami podparcia dla pasa. Uważając słup za belkę, dolnym końcem utwierdzoną o sztywności zginania $E J_1$, mamy dla ugięcia y górnego końca pod wpływem poziomej siły P wyrażenie:

$$y = \frac{P b^3}{3 E J_1}$$

Z uwzględnieniem sił S , ściskających słup podłużnie, będzie zamiast powyższego:

$$y = \frac{P b^3}{3 E J_1} \cdot \frac{1}{1 - S/S_E}, \text{ przy czym } S_E = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E J_1}{b^2}.$$

Stąd znajdujemy reakcję P końca słupa, jako podatnej podpory pasa górnego, w postaci:

$$P = \frac{3 E J}{b^3} \left(1 - \frac{S}{S_E} \right) y.$$

Zastąpiwszy dla uproszczenia obliczeń te podpory sprężystym podłożem ciągłym, znajdujemy reakcję podłoża odniesioną do jednostki długości, dzieląc P przez odstęp słupów, czyli:

$$p = \frac{P}{a} = \frac{3 E J_1}{a b^3} \left(1 - \frac{S}{S_E} \right) y = k y,$$

co prowadzi do określenia „znamienia” podłoża:

$$k = \frac{3 E J_1}{a b^3} \left(1 - \frac{S}{S_E} \right) \dots \dots \dots (158, 2)$$

b) Jeżeli przez Q oznaczymy obciążenie całkowite jednej belki, rozłożone równomiernie na rozpiętości l , to siła, przeniesiona przez przekątną na pas górny da się, przy założeniu bardzo wielu węzłów, określić w przekroju oddalonym o x od końca pasa wyrażeniem:

$$\frac{Q}{h \cdot l} \left(x - \frac{l}{2} \right) = \frac{Q}{h} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right).$$

Jest to oczywiście siła, odniesiona do jednostki długości. Ta siła ma na końcu wartość $\frac{Q}{2h}$, maleje potem linjowo ze wzrostem x , a w środku rozpiętości ma wartość 0. Wywołana nią siła wewnętrzna w pasie ma widocznie największą wartość w środku:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2h} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Q \cdot l}{8h}.$$

c) Najprostsza ścisła teoria wyboczenia sprężystego, oparta na powyższych założeniach upraszczających i przyjęciu stałej sztywności EJ pasa na całej długości l , daje według Timoszenki:

$$\left[\frac{Q \cdot l}{8h} \right]_{\text{kryt}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu \cdot l)^2} \dots \dots \dots (159,1)$$

przyczem współczynnik μ długości sprowadzonej $l_{\text{red}} = \mu \cdot l$ należy wyznaczyć według następującej tablicy. W niej oznacza B^2 wielkość liczbowa, określoną wzorem (157,0), przyczem wartość k trzeba wziąć z wzoru (158,2):

$B^2 = 0$	5	10	15	22,8	56,5	100	162,8	200	300	500	1000
$\mu = 0,694$	0,524	0,443	0,394	0,363	0,324	0,289	0,257	0,245	0,224	0,204	0,174

Uwaga. W razie zmienności przekroju pasa wypadnie przy stosowaniu wzoru (159,1) wstawić tę z wartości EJ na całej długości pasa, której odpowiada najmniejsza wartość krytyczna.

C. Wyboczenie prętów zakrzywionych, płyt itp.

88. Wyboczenie łuku kołowego dwuprzegubowego. Równomierny nacisk q (kg/m^2) prostopadły wszędzie do łuku (fig. 209) nie wywołuje w nim momentów zginających, lecz tylko stałą siłę podłużną o wielkości $q \cdot r$.

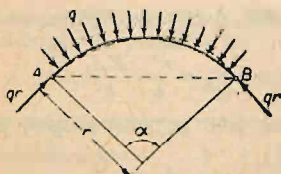


Fig. 209.

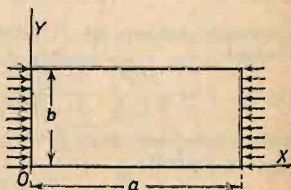


Fig. 210.

Atoli równowaga łuku w tej pierwotnej postaci przestaje być stałą i łuk się „wyboczy” w swej płaszczyźnie (fig. 209), skoro q przekroczy wartość:

$$q_{kr} = \frac{EJ}{r^3} \left(\frac{4\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \dots \dots \dots (160,0)$$

Przy małym kącie α można w powyższym wzorze pominąć 1 wobec wyrazu pierwszego, a oznaczwszy długość łuku $r \cdot \alpha = l$ otrzymujemy:

$$(q \cdot r)_{kr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \dots \dots \dots (160,1)$$

89. Wyboczenie płyt prostokątnych. *a)* Płyta o brzegach dookoła przegibnie ustalonych, równomiernie ściskana w kierunku boków *a* (fig. 210).

Jeżeli $a > b$, to równaniem powierzchni wyboczenia jest:

$$w = f \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

przyczem $n = 1, 2, 3, \dots$, zależnie od wartości stosunku $a:b$. Gdy stosunek $0 < \frac{a}{b} < \sqrt{2}$, to wytwarza się jedna półfala ($n = 1$). n półfal wytwarza się w granicach wartości:

$$\sqrt{(n-1)n} < \frac{a}{b} < \sqrt{n(n+1)}. \dots \dots \dots (160,2)$$

Długość półfali $\frac{a}{n}$ leży przy bardzo wielkiem a między granicami:

$$b \sqrt{1 - \frac{1}{n}} < \frac{a}{n} < b \sqrt{1 + \frac{1}{n}},$$

czyli przy bardzo wielkiej długości dzieli się wyboczona płyta na kwadraty naprzemian wypukłe i wklęsłe. Krytyczną wartość ciśnienia określa równanie:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{\bar{B}}{b^2 h} \left(\frac{1}{n} \frac{a}{b} + n \frac{b}{a} \right)^2 = \Omega \left(\frac{100 h}{b} \right)^2 \dots \dots (161,0)$$

w którym należy wstawić wartość n , dogadzającą warunkowi (160,2). Nadto oznacza $\bar{B} = \frac{m^2}{m^2 - 1} E J = \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot E \cdot \frac{h^3}{3}$ sztywność zginania płyty, zaś h jej grubość.

We wzorze powyższym przedstawia Ω wartość naprężenia krytycznego, odpowiadającego płycie, której grubość $h = \frac{b}{100}$. Tę wartość podano w poniższej tablicy (VI.) dla żelaza kowalnego, jako materiału płyty:

$$\left(E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, m = \frac{10}{3} \right).$$

W przypadkach innej wartości samego E , np. dla stali, wystarczy liczby tablicy pomnożyć przez $\frac{E}{2 \cdot 10^6}$; zaś dla materiału o innej wartości obu stałych E i m należy liczby tablicy pomnożyć przez $\frac{m^2}{m^2 - 1} E \cdot \frac{0,91}{2 \cdot 10^6}$, aby otrzymać odpowiednie wartości krytyczne naprężeń.

Tablica VI.

$\frac{a}{b} = 0,5$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3		
$\Omega = 1130$	929	819	760	731	723	730	747	774		
$\frac{a}{b} = 1,4$	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2		
$\Omega = 808$	784,5	759,6	742,3	731,2	724,9	723,0	724,8	729,7		
$\frac{a}{b} = 2,3$	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	> 3		
$\Omega = 737,2$	747,3	747,3	737,9	731,2	726,5	723,9	723,0	723		

b) Płyta podparta, jak powyżej pod działaniem naprężeń stycznych, rozłożonych równomiernie na całym konturze (fig. 211).

W takich mniej więcej warunkach znajduje się ścianka blachownicy w miejscach małego momentu zgięcia, a wielkiej siły poprzecznej.

Krytyczną wartość naprężenia τ , po przekroczeniu której wystąpi ukośne pofałdowanie płyty, określa przy a wielkim wobec b , wzór:

$$\tau_{kr} = \pi^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \left(\frac{h}{b} \right)^2 = \Omega \left(\frac{100 h}{b} \right)^2 \dots (161,1)$$

Gdy materiałem jest żelazo kowalne, to powyższy wzór przybiera postać:

$$\tau_{kr} = 1022 \left(\frac{100 h}{b} \right)^2 \dots [\text{w } \text{kg/cm}^2] \dots (161,2)$$

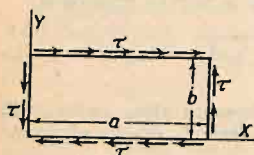


Fig. 211.

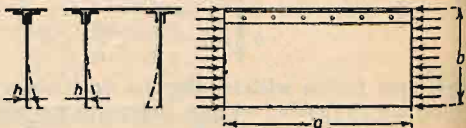


Fig. 212.

Dla szeregu skończonych wartości stosunku $a : b$ podaje Ω (w kg/cm^2) następująca tablica, obliczona według dokładnego rozwiązania Timoszenki w przypadku żelaza kowalnego (jak powyżej):

$\frac{a}{b} = 1$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0
$\Omega = 1703$	1451	1321	1269	1228	1197	1135	1104

c) Płyta, trzema brzegami przegibnie ustalona i ściskana równomiernie siłami równoległymi do brzegu swobodnego^o (fig. 212).

Takie warunki zachodzą np. u blachy stojącej pasa belki kratowej o przekroju T. Teorja wybożenia płyt daje wówczas wzór:

$$\sigma_{kr} = U \frac{\bar{B}}{b^2 h} \dots \bar{B} + \frac{m^2}{m^2 - 1} E \frac{h^3}{12} \dots (162,0)$$

Wartości współczynnika liczbowego U , zależnego od stosunku $a : b$, zawiera tablica następująca („Studja nad belkami I,” str. 95):

$\frac{a}{b} = 0,5$	1	1,5	2	3	5	8	∞
$U = 42,49$	13,04	7,75	6,00	4,88	4,40	4,27	4,20

d) Płyta otwierdzonym jednym brzegu podłużnymi przegibnie ustalonych obu brzegach poprzecznych, ściskana równomiernie wzdłuż. Jest to schemat blachy stojącej pasa ściskanego kształtu U (fig. 212). Wzór teoretyczny dla σ_{kr} ma tę samą postać, co w poprzednim przypadku (162,0), a tylko U ma wartości inne, zestawione w niżej umieszczonej tablicy („Studja...,” str. 101).

$\frac{a}{b} = 0,5$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,65	1,7
$U = 45,28$	16,82	15,41	14,43	13,76	13,32	13,06	12,93	12,91	12,92
$\frac{a}{b} = 1,8$	1,9	2,0	2,2	2,35	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
$U = 13,01$	13,18	13,41	14,06	14,66	14,43	13,76	13,32	13,06	12,93
$\frac{a}{b} = 3,3$	3,4	3,6	3,8	4,0	4,06	4,2	4,5	4,8	4,95
$U = 12,91$	12,92	13,01	13,18	13,41	13,49	13,32	13,06	12,93	12,91
$\frac{a}{b} = 5,1$	5,4	5,7	5,74	6,0	6,4	6,6	6,8	7,2	
$U = 12,92$	13,01	13,18	13,21	13,06	12,93	12,91	12,92	13,01	

90. Wyboczenie poprzeczne lub skrętne (torsyjne). Przekroje belek zginanych w jednej płaszczyźnie, np. pionowej, obiera się zwykle ze względu na wyzyskanie materiału tak, aby $W = \frac{J}{e}$ było jak największe, przy danym polu przekroju F . Jeżeli takie zwiększenie sztywności i wytrzymałości na zgięcie w tej płaszczyźnie odbywa się kosztem zmniejszenia sztywności zginania $B_z = J_z E$ w płaszczyźnie prostopadłej i sztywności skręcania, jak się rzecz ma w przypadku bardzo wysokiego, a wąskiego przekroju prostokątnego albo dwuteowego itp., to może zająć niebezpieczeństwo wyboczenia skrętnego, przedstawionego w prostym szczególnym przypadku na fig. 213. Przy takim wyboczeniu powstaje obok skręcenia belki także jej wygięcie w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny obciążenia, czyli wygięcie poprzeczne. Jeżeli wyboczenie poprzeczne zajdzie, zanim naprężenie zginające we włóknie skrajnym przekroczy granicę sprężystości, to mamy do czynienia z wyboczeniem sprężystym, w razie przeciwnym jest wyboczenie niesprężyste.

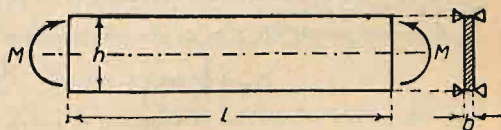


Fig. 213.

Teoria, opracowana najpierw przez A. G. M. Michell'a, Z. Prandtl'a i S. P. Timoszenkę, a sprawdzona doświadczeniami, pozwala w licznych przypadkach praktycznego znaczenia obliczyć wartość obciążenia krytycznego. Ta wartość jest w dość znacznym stopniu zależną od tego, w którym miejscu przekroju działa obciążenie. Np. przy obciążeniu działającym na górny pas belki dwuteowej, jest wartość krytyczna mniejsza, aniżeli przy takim samym obciążeniu pasa dolnego.

Tutaj podamy tylko kilka rozwiązań w najprostszych przypadkach, odayając czytelnika do odpowiednich prac Timoszenki lub do monografii autora p. t. „Studia nad belkami o przekroju I (dwuteowemi)“, Warszawa, 1923.

a) Belka o rozpiętości l , obu końcami swobodnie podparta i narażona na czyste zginanie w płaszczyźnie pionowej momentem M . (Podparcie końcowego przekroju trzeba sobie przytem wyobrazić tak, aby wykluczało obrót tego przekroju około osi równoległej do osi belki, umożliwiając jednocześnie obroty około obu osi do niej prostopadłych.)

1. Jeżeli przekrój belki jest prostokątem o małej wartości stosunku $b:h$, a nadto $h:l$ jest niewielkie, to wartość krytyczną momentu określa z wielką dokładnością równanie:

$$M_{kr} = \pi \frac{\sqrt{B_2 I'}}{l} \dots \dots \dots (164,0)$$

przyczem sztywność zginania poprzecznego $B_2 = \frac{b^3 h}{12} \cdot E$ (dokładnie), zaś sztywność skręcania $I' = \frac{1}{3} b^3 h \cdot G$ (w dostatecznem przybliżeniu).

2. W przypadku przekroju I o wysokość h mamy:

$$M_{kr} = P_E \cdot \sqrt{\frac{k^2}{4} + \frac{I'}{P_E}} \dots \dots \dots (164,1)$$

jeżeli $P_E = \pi^2 \frac{B_2}{l^2}$, zaś I' wyznaczamy według ust. 32.

2. Jeżeli obok momentu M działa na belkę siła podłużna N , to powyższą wartość momentu krytycznego trzeba pomnożyć przez:

$$\sqrt{1 \mp \frac{N}{P_E}}.$$

przyczem znak — odnosi się do ściskania, a + do rozciągania.

Ten wynik obejmuje także przypadek wyboczenia poprzecznego przy podłużnem ściskaniu siłą P o mimośrodzie δ , leżącym na pionowej osi symetrii przekroju. Wtedy bowiem jest $M = P \cdot \delta$, $N = P$. Po wstawieniu i rozwiązaniu równania względem P otrzymujemy:

$$P_{kr} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \Psi}} \cdot P_E, \quad \text{przyczem} \quad \Psi = \frac{4 \delta^2 P_E}{I' \left(1 + \pi^2 \frac{a^2}{l^2}\right)} \dots \dots (165,1)$$

Nadto $a^2 = \frac{B_2 h^2}{12 I'}$ dla przekroju prostokątnego, albo też $a^2 = \frac{D \cdot h}{2 I'}$ dla przekroju I, jeżeli D oznacza moment bezwładności jednej stopki względem pionowej osi symetrii przekroju

Równanie (165,1) poucza, że zboczenie siły ściskającej od środka przekroju w płaszczyźnie największej sztywności obniża wartość krytyczną siły w porównaniu do wartości Eulerowskiej i to tem bardziej, im mniejszą jest sztywność skręcania I' .

b) Belka, obukoncami swobodnie podparta i obciążona w środku rozpiętości l i wysokości h siłą skupioną P .

Krytyczna wartość siły P da się przedstawić wzorem przybliżonym:

$$P_{kr} = \sqrt{294,4 + 2892,8 \frac{a^2}{l^2}} \cdot \frac{\sqrt{B_2 I'}}{l^2} \dots \dots \dots (164,8)$$

przy tych samych oznaczeniach skracających, co powyżej.

LITERATURA.

A. W języku polskim.

1. Bogucki J.: Wykłady statyki budowli. (Litograf.). Lwów 1911.
2. Bryła S.: Podręcznik statyki budowli. Wyd. 2. Lwów i Warszawa 1926.
3. Franke J. N.: Mechanika teoretyczna. Warszawa 1889. (Rozdz. XVII.).
4. Jęwniewicz H.: Teorja sprężystości. Warszawa 1910.
5. Humnicki A.: Zasady nauki o wytrzymałości materiałów. Wyd. Zakł. Nar. im. Ossolińskich 1922.
6. Karasiński L.: Wytrzymałość tworzyw. Wyd. 2. Warszawa 1921.
7. Kluger Wl.: Wykład wytrzymałości materiałów i stałości budowli. Paryż 1876.
8. Stephan P.: Nauka o wytrzymałości materiałów. Tłum. T. Radziszewski. Warszawa 1914.
9. Thullie M.: Podręcznik statyki budowli. Wyd. 3. Lwów 1917.
10. Timoszenko S. P.: Kurs wytrzymałości materiałów. Przełożył z IV. wyd. (ross.) M. T. Huber. Lwów—Warszawa 1921.

B. W językach obcych.

11. Bach G.: Elastizität und Festigkeit. Wyd. 5. Berlin 1905.
12. Flamant A.: Stabilité des constructions. Résistance des matériaux. Wyd. 3. Paryż 1909.
13. Fontiolant, B. de: Les méthodes modernes de la résistance des matériaux. Wyd. 2. Paryż 1920.

14. Föppl A.: Festigkeitslehre. Wyd. 8. T. III. Vorl. u. Techn. Mech. 1920. Teubner.
15. Föppl A. u. O.: Grundzüge der Festigkeitslehre. 1923. Teubner.
16. Föppl A. u. L.: Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. I. Bd. 3. Aufl. 1924. II. Bd. 1920. Monachium i Berlin.
17. Keck W.—L. Hotopp: Vorträge über Elastizitätslehre. Wyd. 3. Cz. I. 1922. II. 1924. Hannover.
18. Kirpiczew W.: Soprotiwlenje materjałow. 2 tomy. Moskwa i Petrograd 1923.
19. Lorenz H.: Technische Elastizitätslehre. Monachium i Berlin 1913.
20. H. Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. Wyd. IV. Lipsk 1913.
21. Perry J.: Applied mechanics. Londyn 1907. (Także w przekładzie niemieckim R. Schick'a. 1908. Teubner.)
22. Pigeaud G.: Résistance des matériaux et élasticité. Paryż 1920.
23. Prescott J.: Applied elasticity. Londyn 1924.
24. Rabozée H.: Cours de résistance des matériaux. Wyd. 3. Bruksela i Paryż 1926.
25. Swain G. F.: Structural engineering. Strength of materials. New York 1924.
26. Tallquist H.: Lehrbuch der technischen Mechanik. T. II. Helsingfors 1903.
27. Tetmajer L.: Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre. Wyd. 3. Lipsk i Wiedeń 1906.
28. Timoshenko S. & Lessels J. M.: Applied elasticity. East Pittsburgh. Pa. 1926.
29. Timoshenko S.: Kurs teorji uprugosti. 2 tomy. Petersburg 1914—1916.
30. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd. IV. Mechanik. 4 tomy. 1901—1908. Teubner.

C. Niektóre prace autora z powyższego działu.

31. Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału. Lwów Czas. Techn. 1904.
32. Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. Ann. d. Phys. 1904, IV., Bd. 14.
33. O natężeniach wywołanych nierównem ogrzaniem wewnętrznej i zewnętrznej ściany rury. Czas. Techn. 1906.
34. Teorja płyt prostokątne-różnokierunkowych wraz z technicznymi zastosowaniami. Lwów, Tow. Nauk. 1921.
35. Studja nad belkami o przekroju I. Warszawa. Spraw. i prace W. T. P. 1923.
36. Wzory obliczenia statycznego ramy prostokątnej nierównoramiennej o słupach doskonałe utwierdzonych. Przegl. Techn. 1924.
37. Kryterja stałości równowagi i ich stosunek do statyki układów sprężystych. 1926, zes. 3., wyd. Akad. Nauk Techn. w Warszawie.
38. O wytrzymałości rury walcowej na wewnętrzne ciśnienie hydrostatyczne. Technika ciepła 1927.
39. Równanie pięciu momentów. Czas. Techn. 1927.
40. Biegungsprobleme eines durch Querrippen versteiften orthotropen Plattenstreifens. Verhandl. des 2. intern. Kongr. f. techn. Mechanik. Zürich 1926. Orell Füssli Verl. 1927.

Statyka budowli.

I. Wstęp. Belki statycznie wyznaczalne o ścianie pełnej.

Napisal

inż. dr. Stefan Bryła,
profesor politechniki, Lwów.

a) Statyczna wyznaczalność.

Belkę lub dźwigarem płaskim nazywamy ustrój materialny, złożony z (nieważkich) prętów lub tarcz sztywnych, leżących w jednej płaszczyźnie, który służy do przeniesienia na ziemię sił działających w tejże płaszczyźnie czyli obciążeń.

Pręty przenosić mogą tylko siły osiowe, zatem obciążone mogą być tylko w węzłach. Tarcze mogą przenosić prócz sił osiowych także momenty zginające, muszą one zatem posiadać pewien moment bezwładności. Mogą to