

c) Mosty itp. konstrukcje, rozpatrywane wspólnie z poprzecznicami, oraz teżnikami pionowymi i poziomymi są też utworami przestrzennymi.

IV. Przesunięcia kratownic.

a) Metody analityczne.

Prawo pracy przygotowanej. Jeżeli węzeł m kratownicy dozna przesunięcia $mm' = [\delta_m]$, to praca sił P_i , zaczepiających w m , równa się sumie iloczynów tych sił przez rzuty $\bar{\delta}_i$ przesunięcia $[\delta_m]$ na kierunki tychże sił, więc $L_m = \sum P_i \bar{\delta}_i$. Praca L_m równa się jednak też przesunięciu $[\delta_m]$, pomnożonemu przez rzut wypadkowej tychże sił na kierunek $[\delta_m]$. Jeżeli siły P_i są w równowadze, to wypadkowa ich $= 0$; zatem:

$$\sum P_i \bar{\delta}_i = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$\bar{\delta}_i$ oznacza rzut dowolnie pomyślanego (przygotowanego) niezmiernie małego przesunięcia punktu zaczepienia siły P_i na kierunek jej.

Dla każdego węzła kratownicy, będącej w równowadze, można pomyśleć pewne $[\delta]$ i ustawić równanie (1). Skoro te równania dodamy, to znak \sum rozciągać się będzie na wszystkie zewnętrzne siły Q_m i na napięcia prętów S , działające na węzły. Niech dowolny pręt działa na dwa węzły napięciem S , starając się je zbliżyć (napięcie dodatnie = siła rozciągająca). Jeżeli wskutek pomyślanych przesunięć obu węzłów nastąpi ich oddalenie czyli wydłużenie pręta o Δs , to praca przygotowana napięcia S jest $-S \cdot \Delta s$. Suma prac wszystkich prętów (czyli praca przygotowana sił wewnętrznych) wynosi $-\sum S \Delta s$, zaś prawo pracy przygotowanej brzmi:

$$\sum Q_m \bar{\delta}_m = \sum S \Delta s \dots \dots \dots (2)$$

czyli praca przygotowana sił zewnętrznych = pracy przygotowanej sił wewnętrznych.

Dany rzeczywisty układ sił Q_m , działających we węzłach kratownicy która jest w równowadze, powoduje w jej prętach napięcia S i wydłużenia Δs , tudzież przesunięcia węzłów, których rzuty na kierunek sił Q_m są $\bar{\delta}_m$. Pomyślany (urojony, przygotowany) układ sił \bar{Q}_m , wskutek którego badana kratownica byłaby także w równowadze, wywołałby w prętach napięcia \bar{S} . Zastosujmy równanie (2) do pomyślanego układu sił \bar{Q}_m i przesunięć, wywołanych rzeczywistym układem Q_m , to będzie:

$$\sum \bar{Q}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s \dots \dots \dots (2a)$$

Siły zewnętrzne \bar{Q} składają się z sił \bar{P}_m i oddziaływań \bar{C} , którym w stanie rzeczywistym odpowiadają przesunięcia podpór c , mierzone w kierunku sił C (o ile podpory nie są absolutnie stałe). Równanie (2a) będzie więc brzmiało:

$$\sum \bar{P}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s - \sum \bar{C} c \dots \dots \dots (3)$$

Jeżeli nazwiemy s długość, F przekrój jednego pręta, E moduł sprężystości, ω współczynnik rozszerzalności, t przyrost temperatury pręta i podstawimy:

$$\rho = \frac{s}{EF},$$

to:

$$\Delta s = S \rho + \omega t s,$$

zaś:
$$\Sigma \bar{P}_m \delta_m = \Sigma \bar{S} S \rho + \Sigma \bar{S} \omega t s - \Sigma \bar{C} c \quad \dots \quad (4)$$

Jeżeli przygotowanym stanem sił jest: $\bar{P}_m = 1$, to

$$\Sigma \bar{P}_m \delta_m = 1 \cdot \delta_m.$$

Równanie (4) będzie wtedy brzmiało:

$$1 \cdot \delta_m = \Sigma \bar{S} S \rho + \Sigma \bar{S} \omega t s - \Sigma \bar{C} c \quad \dots \quad (5)$$

W przypadku belki o ścianie pełnej, skoro $\bar{\sigma} \cdot dF =$ napięcie przygotowane włókna o przekroju dF , długości ds i wydłużeniu rzeczywistym Δds , praca przygotowana sił wewnętrznych wynosi:

$$L_w = \int \bar{\sigma} dF \cdot \Delta ds \quad \dots \quad (a)$$

(Znak \int rozciąga się na całkowitą objętość belki.)

Ale:
$$\Delta ds = \left(\frac{\sigma}{E} + \omega t + \omega \frac{\Delta t}{h} v \right) ds \quad \dots \quad (b)$$

przyczem Δt jest różnicą temperatur włókien skrajnych, górnych i dolnych. v odstępem włókna od osi obojętnej, h wysokością belki w danym miejscu.

Dalej:
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}; \text{ podobnie zaś } \bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{F} + \frac{\bar{M}v}{J} \quad \dots \quad (c)$$

Podstawmy $b)$ i $c)$ w $a)$, to z uwagi na $\int dF = F =$ powierzchni przekroju, $\int v dF = 0$, zaś $\int v^2 dF = J =$ momentowi bezwładności przekroju, otrzymamy [analogicznie do (3)] pomijając (zwykle bardzo mały) wpływ sił poprzecznych:

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{P}_m \delta_m + \Sigma \bar{C} c &= L_w = \\ &= \int \bar{M} M \frac{ds}{EJ} + \int \bar{N} N \frac{ds}{EF} + \int \omega t \bar{N} ds + \int \omega \frac{\Delta t}{h} \bar{M} ds \quad \dots \quad (6) \end{aligned}$$

Jeżeli wreszcie układ składa się z pretów i elementów o ścianie pełnej (tarcz sztywnych), to wedle równań (4), (6) i (7) prawo pracy przygotowanej wyrazi się:

$$\begin{aligned} \Sigma P_m \delta_m + \Sigma C c &= \Sigma \bar{S} S \rho + \Sigma S \omega t s + \\ &+ \int \bar{M} M \frac{ds}{EJ} + \int \bar{N} N \frac{ds}{EF} + \int \bar{N} \omega t ds + \int \bar{M} \omega \frac{dt}{h} ds \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

Równanie (5) posłuży do wyznaczenia uogólnionego przesunięcia δ_m w stanie rzeczywistych obciążeń (S, t, c), jeżeli jako obciążenie przygotowane

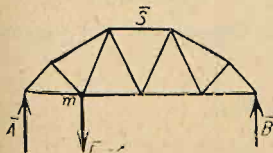


Fig. 331.

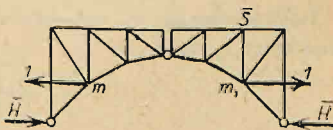


Fig. 332.

(które powoduje napięcia \bar{S} i oddziaływania \bar{c}) obierzemy odpowiednio uogólnioną jednostkę siły. Fig. 331 przedstawia przygotowany stan sił ($P_m = 1, \bar{A}, \bar{B}, \bar{S}$) dla wyznaczenia pionowego ugięcia węzła m . (Podobnie można znaleźć przesunięcie poziome; rzeczywiste przesunięcie jest wypadkową obu przesunięć). Fig. 332 przedstawia uogólnioną jednostkę siły dla wyznaczenia przyrostu

poziomej odległości węzłów m i m_1 ; fig. 333 dla wyznaczenia obrotu pręta $m m_1$ w kierunku wskazówek zegara, fig. 334 dla wyznaczenia przyrostu kąta φ_m między kierunkami prętów $l i k$.

Fig. 335 *a* przedstawia przygotowany stan sił (dwie pary sił na ramionach b i c , których momenty są równe 1, gdyż $\frac{1}{c} \cdot c = 1$) dla wyznaczenia przyrostu kąta α w trójkącie a, b, c wskutek przyrostu boków Δa , Δb i Δc . Jeżeli siłę zaczepiającą w wierzchołku kąta γ rozłożymy na składowe w kierunku a i b (fig. 335 *b*), to napięcie przygotowane pręta a wynosi: $\bar{A} = 1 : b \sin \gamma = 1 : h$, zaś $\bar{B} = -\bar{A} \cos \gamma = -\cos \gamma : h$ i analogicznie $\bar{C} = -\cos \beta : h$. Pomyślmy sobie w wierzchołku α łożysko stałe, w wierzchołku γ łożysko ruchome wzdłuż pręta b , to tylko siła $1 : c$ w wierzchołku β może wykonać pracę na przesunięciu $\delta = c \Delta \alpha$, zatem pracę $(1 : c) \cdot \delta = \Delta \alpha$.

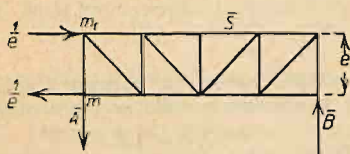


Fig. 333.

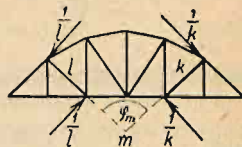


Fig. 334.

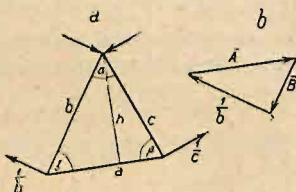


Fig. 335.

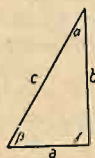


Fig. 336.

Równanie (5) przybierze kształt:

$$\begin{aligned} 1. \Delta \alpha &= \bar{A} \Delta a + \bar{B} \Delta b + \bar{C} \Delta c = \frac{\Delta a}{h} - \frac{1}{h} (\Delta b \cos \gamma + \Delta c \cos \beta) = \\ &= \frac{\Delta a}{a} \frac{a}{h} - \frac{\Delta b}{b} \frac{b \cos \gamma}{h} - \frac{\Delta c}{c} \frac{c \cos \beta}{h} = \\ &= \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta c}{c} \right) \cotg \beta + \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} \right) \cotg \gamma. \end{aligned}$$

Jeżeli wydłużenie Δa spowodowane zostało naprężeniem σ_a i przyrostem temperatury t_a , to:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\sigma_a}{E} + \omega t_a \text{ itd.};$$

wieć:

$$E \Delta \alpha = [(\sigma_a - \sigma_c) + \omega E(t_a - t_c)] \cotg \beta + [(\sigma_a - \sigma_b) + \omega E(t_a - t_b)] \cotg \gamma.$$

Dla $t_a = t_b = t_c$ jest:

$$E \Delta \alpha = (\sigma_a - \sigma_c) \cotg \beta + (\sigma_a - \sigma_b) \cotg \gamma \dots \dots \dots (8)$$

W trójkącie prostokątnym (fig. 336) $\gamma = 90^\circ$, $\cotg \gamma = 0$; więc przyrost kąta ostrego:

$$E \Delta \alpha = (\sigma_a - \sigma_c) \cotg \beta,$$

podobnie:

$$E \Delta \beta = (\sigma_a - \sigma_b) \cotg \gamma,$$

zaś przyrost kąta 90° :

$$E \Delta \gamma = (\sigma_c - \sigma_a) \cotg \beta + (\sigma_c - \sigma_b) \cotg \alpha.$$

Linia ugięcia (ugięta) pasa pomostowego pod ciężarem $P=1$ w punkcie a (fig. 337 *a*) jest zarazem linią wpływową pionowego przesunięcia tegoż punktu. Wedle bowiem prawa wzajemności przesunięć (por. str. 1147)

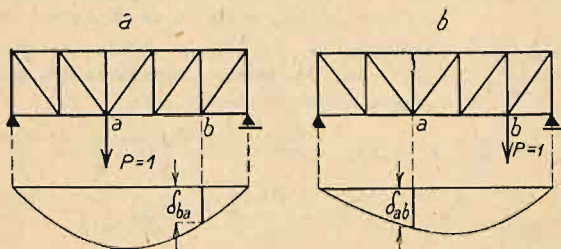


Fig. 337.

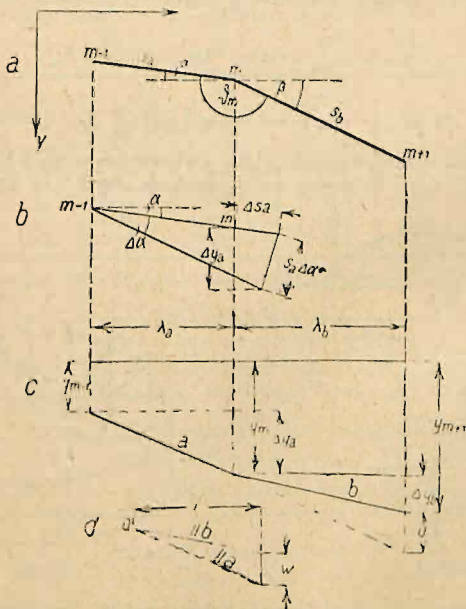


Fig. 338.

pionowe przesunięcie δ_{ba} wskutek ciężaru $P=1$ w a jest takie samo, jak pionowe przesunięcie δ_{ab} punktu a pod działaniem ciężaru $P=1$ w punkcie b (fig. 337 *b*), czyli: $\delta_{ab} = \delta_{ba}$.

Linia ugięcia ciagu prętów jako wielobok sznurowy ciężarów sprężystych (W). Niech będą (fig. 338 *a*) $m-1, m, m+1$ trzema sąsiednimi węzłami sztywnymi łamanego ciągu prętów s_a, s_b, \dots , tworzących

między sobą kąt ϑ_m , mierzony od dołu, zaś y_{m-1} , y_m , y_{m+1} (fig. 338c) rzędnymi linij ugięcia). Równoległe, poprowadzone do boków a i b ugiętej (fig. c) z dowolnego bieguna O (fig. d), odcinają na pionowej odległej od bieguna o 1 odcinek W (t. zw. ciężar sprężysty).

Z fig. c i d wynika: $W : 1 = u : \lambda_b$.

Z fig. c zaś: $(u + \Delta y_b) : \lambda_b = \Delta y_a : \lambda_a$,

czyli: $u : \lambda_b = \Delta y_a : \lambda_a - \Delta y_b : \lambda_b = W \dots \dots \dots (9)$

Przesunięcie m względem $m-1$ (fig. b) składa się geometrycznie z przyrostu Δs_a i obrotu o kąt $\Delta \alpha$, któremu odpowiada łuk $s_a \cdot \Delta \alpha$.

Wieńc: $\Delta y_a = \Delta s_a \sin \alpha + s_a \Delta \alpha \cdot \cos \alpha$;

a stąd: $\Delta y_a : \lambda_a = \Delta y_a : (s_a \cos \alpha) = \frac{\Delta s_a}{s_a} \operatorname{tg} \alpha + \Delta \alpha$.

Podobnie: $\Delta y_b : \lambda_b = \frac{\Delta s_b}{s_b} \operatorname{tg} \beta + \Delta \beta$;

wieńc wedle (9):

$$W = \Delta \alpha - \Delta \beta + \frac{\Delta s_a}{s_a} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\Delta s_b}{s_a} \operatorname{tg} \beta.$$

Ale: $\frac{\Delta s_a}{s_a} = \frac{\sigma_a}{E} + \omega t$, $\Delta \alpha - \Delta \beta = \Delta \vartheta_m$;

zatem: $W = \Delta \vartheta_m - \left[\left(\frac{\sigma_a}{E} + \omega t \right) \operatorname{tg} \beta - \left(\frac{\sigma_a}{E} + \omega t \right) \operatorname{tg} \alpha \right] \dots \dots (10)$

Linję ugięcia można przedstawić jako wielobok sznurowy o biegunowej = 1 dla ciężarów W , zaczepiających we węzłach m , czyli jako linję momentów

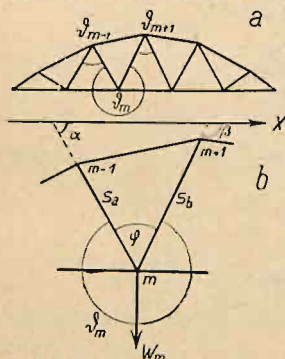


Fig. 339.

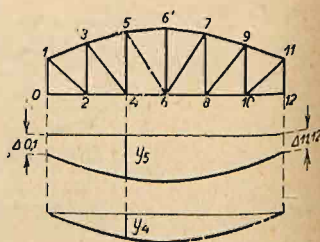


Fig. 340.

dla belki prostej obciążonej ciężarami sprężystymi W . Zamykająca wieloboku sznurowego wynika z warunków podporowych.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie pionowych przesunięć wszystkich węzłów belki, to można równanie (10) zastosować do ciągu złożonego z krzyżulców belki (fig. 339 a). Dla węzła m (fig. b) $\Delta \vartheta_m = -\Delta \varphi_m$. Kąty α i β są to kąty między dodatnim kierunkiem osi X , a przedłużeniem prętów s_a i s_b , mierzone w kierunku wskazówek zegara (fig. b). $\Delta \varphi_m$ można znaleźć z równania (8).

Dla belki o kracie prostokątnej (fig. 340) należy oddzielnie znaleźć linję ugięcia obu pasów. Tu dla węzła 4 dla ciągu 3, 4, 5 kąt β , zaś dla węzła 5 i ciągu

4, 5, 6 kąt α jest prosty, zatem $\operatorname{tg} \beta$, względnie $\operatorname{tg} \alpha = \infty$. Dla ciągu 3, 5, 6' jest $\vartheta_5 = \vartheta_{354} + \vartheta_{456} + \vartheta_{656'}$, zatem, $\Delta \vartheta_5 = \Delta \alpha_{354} + \Delta \alpha_{456} + \Delta \alpha_{656'}$. Dla pasu dolnego, prostego, jest $\Delta \vartheta_4 = -(\Delta \alpha_{243} + \Delta \alpha_{345} + \Delta \alpha_{546}) = W_4$. Kąty α i β są tu $= 0$. Zamykająca linii ugięcia pasa górnego wynika stąd, że przesunięcie pionowe węzła 1 = skróceniu pręta 0—1, zaś przesunięcie węzła 11 = skróceniu pręta 11—12. Przyrosty kątów w trójkącie znaleźć można wedle równania (8).

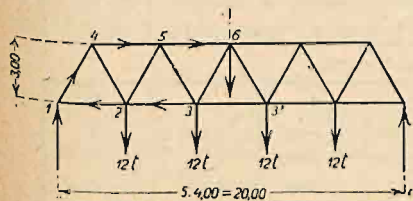


Fig. 341.

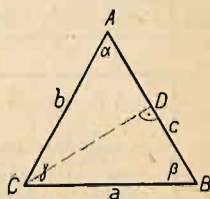


Fig. 342.

Przykład. Obliczyć ugięcie pasa dolnego belki (fig. 341). Długości prętów s , przekroje F siły wewnętrzne S i naprężenia $\sigma = S:F$ zestawiono na tablicy I.

Tablica I.

Pręt	s cm	F cm ²	S t	σ kg/cm ²	Pręt	s cm	F cm ²	S t	σ kg/cm ²
1—2	400	44	+ 16	+ 364	1—4	360	60	— 28,8	— 480
2—3	400	60	+ 40	+ 667	4—2	360	40	+ 28,8	+ 720
3—3'	400	60	+ 48	+ 800	2—5	360	44	— 14,4	— 328
4—5	400	65	— 32	— 492	5—3	360	44	+ 14,4	+ 328
5—6	400	65	— 48	— 739	3—6	360	44	0	0

Kratownica składa się z trójkątów równoramiennych (fig. 342) o podstawie $a = 4\text{ m}$ i wysokości $h = 3\text{ m}$.

Bok:

$$b = c = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3,6\text{ m}.$$

$$\cot \beta = \cot \gamma = 2:3 = 0,667.$$

Poprowadźmy $CD \perp AB$, to z równań $AD^2 + CD^2 = 13$, tudzież $(3,6 - AD)^2 + CD^2 = 16$, otrzymamy $AD = 1,39\text{ m}$, $CD = 3,32\text{ m}$, $\cot \alpha = 1,39:3,32 = 0,42$. Kontrola: $\cot \beta = (3,60 - 1,39):3,32 = 0,667$.

Przyrost kąta α obliczono tabelarycznie (Tabl. II a) według wzoru (8):

$$E \Delta \alpha = 0,667 (2\sigma_a - \sigma_b - \sigma_c).$$

Podobnie: $E \Delta \beta = 0,667 (\sigma_b - \sigma_a) + 0,42 (\sigma_b - \sigma_c)$ (por. Tabl. II b) i $E \Delta \gamma = 0,667 (\sigma_c - \sigma_a) + 0,42 (\sigma_c - \sigma_b)$ (por. Tabl. II c). Kontrolę stanowi warunek: $E(\Delta \alpha + \Delta \beta + \Delta \gamma) = 0$.

Tablice zmiany kątów.

Tablica II a.

1	2	3	4	5
α	$2\sigma_a$	$\sigma_b + \sigma_c$	$\frac{E \Delta \alpha}{0,667}$	$E \Delta \alpha$
425	— 984	+ 392	— 1376	— 918
536	— 1478	+ 328	— 1806	— 1203
142	+ 728	+ 240	+ 488	+ 326
253	+ 1334	0	+ 1343	+ 890
363'	+ 1600	0	+ 1600	+ 1069

Tablica II b.

1	2	3	4	5	6
β	$\sigma_b - \sigma_a$	$(\sigma_b - \sigma_a) 0,667$	$\sigma_b - \sigma_c$	$(\sigma_b - \sigma_c) 0,42$	$E \Delta \beta$
542	+ 164	+ 109	- 1048	- 440	- 331
653	+ 739	+ 493	- 328	- 138	+ 356
421	- 844	- 564	- 1200	- 505	- 1069
532	- 995	- 665	- 656	- 276	- 941
633'	- 800	- 535	0	0	- 535

Tablica II c.

1	2	3	4	5	6
γ	$\sigma_c - \sigma_a$	$(\sigma_c - \sigma_a) 0,667$	$\sigma_c - \sigma_b$	$(\sigma_c - \sigma_b) 0,42$	$E \Delta \gamma$
452	+ 1212	+ 810	+ 1048	+ 440	+ 1250
563	+ 1067	+ 712	+ 328	+ 138	+ 850
412	+ 356	+ 238	+ 1200	+ 505	+ 743
523	- 339	- 226	+ 656	+ 276	+ 50
633'	- 800	- 535	0	0	+ 535

CieŜar spręŜysty we węŜle 2: $W_2 = \Delta \vartheta_2 = -(\Delta \alpha_{423} + \Delta \beta_{421} + \Delta \gamma_{323})$.

Czyli: $E W_2 = -(-918 - 1069 + 50) = +1937 \text{ kg/cm}^2$

Podobnie: $E W_3 = -(-1203 - 941 - 535) = +2679$

Oddziaływanie spręŜyste $E[A] = E(W_2 + W_3) = +4616 \text{ kg/cm}^2$.

Ugięcie węŜła 2: $y_2 = s_{1-2} [A] = 400 \frac{4616}{2,100.000} = 0,88 \text{ cm}$.

Ugięcie węŜła 3: $y_3 = [A] (s_{1-2} + s_{2-3}) - W_2 \cdot s_{2-3} =$
 $= 800 \frac{4616}{2,100.000} - 400 \frac{1937}{2,100.000} = 1,760 - 0,368 = 1,392 \text{ cm}$.

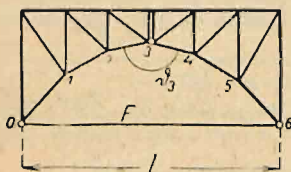


Fig. 343.

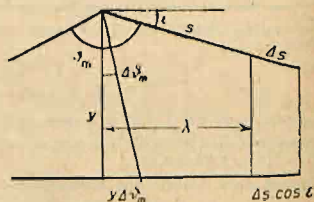


Fig. 344.

Na fig. 343 przyrost kąta ϑ_3 w przegubie znaleźć można wedle równania (5), stosując jako S napięcia wskutek dwu par sił na ramionach 23 i 34, których moment = 1, działających w sensie zwiększenia kąta ϑ_3 . Lepiej jednak znaleźć $\Delta \vartheta_3$ ze związku między przyrostami kątów węzłowych $\Delta \vartheta$, wydłużeniami prętów Δs i wydłużeniem cięciwy l o $\Delta l = \frac{Hl}{EF}$, przyczem H = napięcie, F = przekrój pręta 06. Jeżeli prostopadła odległość węzła m od cięciwy (fig. 344) jest równa y , to wskutek przyrostu $\Delta \vartheta_m$ wzrośnie cięciwa o $y \Delta \vartheta_m$.

Wskutek przyrostu Δs wzrośnie cięciwa o $\Delta s \cos \epsilon = \frac{\Delta s}{s} \lambda$. Zatem:

$$\Delta l = \sum y \Delta \vartheta + \sum \frac{\Delta s}{s} \lambda \dots \dots \dots (11)$$

W równaniu tem dla fig. 343 jest tylko jedna niewiadoma $\Delta \vartheta_3$.

Równanie (9) można napisać (por. fig. 338):

$$W = \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_a} - \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_b} = -y_{m-1} \frac{1}{\lambda_a} + y_m \left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} \right) - y_{m+1} \frac{1}{\lambda_b}.$$

Jeżeli: $\frac{1}{\lambda_a} = \bar{Q}_{m-1}, \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} = \bar{Q}_m, \frac{1}{\lambda_b} = \bar{Q}_{m+1},$

to wedle (2 a): $W_m = \sum \bar{Q} \delta = \sum \bar{S} \Delta s,$

przyczem \bar{S} są to napięcia w prętach wskutek sił \bar{Q} , zaś Δs rzeczywiste wydłużenia. Suma $\sum \bar{S} \Delta s$ rozciąga się zwykle tylko na kilka prętów, na fig. 345

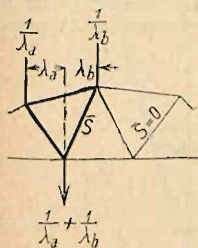


Fig. 345.

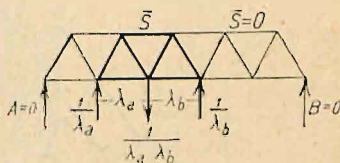


Fig. 346.

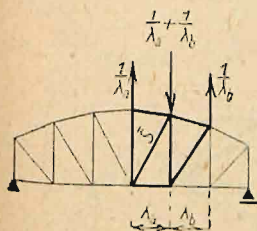


Fig. 347.

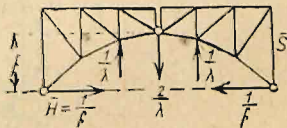


Fig. 348.

trzy pręty, fig. 346 i 347 siedem prętów, w innych prętach bowiem $\bar{S} = 0$. Na fig. 348 w żadnym przecięciu \bar{S} nie jest $= 0$, więc tu nie warto stosować tej metody.

b) Metoda wykreślna.

Jeżeli pręty a i b pewnej kratownicy płaskiej, schodzące się we węzle C , przejdą wskutek jej odkształcenia z położenia ACB w położenie $A_1C_1B_1$ (fig. 349 a), to każdy z prętów doznaje: 1. równoległego przesunięcia w położenie A_1A' względnie B_1B' , 2. wydłużenia Δa , względnie skrócenia Δb i 3. obrotu około punktu A_1 , względnie B_1 , przyczem koniec C pręta a opisuje łuk niezmiernie mały, który zatem można zastąpić odcinkiem $\rho_a \perp a$, podobnie $\rho_b \perp b$. C_1 znajduje się w punkcie przecięcia ρ_a i ρ_b .

Wykreślimy z dowolnego punktu O (fig. 349 b) przesunięcia węzłów A i B , mianowicie $OA' \parallel \delta_a$ i $OB' \parallel \delta_b$, to $A'B'$ przedstawia wzajemne przesunięcie węzłów A i B . Z punktu A' wykreślimy wydłużenie $\Delta a \parallel a$ w kierunku AC , zaś z B' $\Delta b \parallel b$ w kierunku CB ; z końców odcinków Δa i Δb poprowadzone $\rho_a \perp a$, oraz $\rho_b \perp b$ niech się przecinają w C' , to fig. b jest identyczna z figurą zakreskowaną, więc $OC' \parallel CC_1 = \delta_c$ jest przesunięciem węzła C , $A'C'$ jest względem przesunięciem węzłów A i C , zaś $B'C'$ węzłów B i C . Podobnie można znaleźć punkt D' , odpowiadający

węzłowi D kratownicy, nawiązującemu się do węzłów A i C prętami AD i CD itd. Fig. b jest t. zw. planem przesunięć Williot'a.

Jeżeli kratownica (fig. 350 a) jest symetryczna i symetrycznie obciążona, to jeden pręt nie doznaje zmiany kierunku (mianowicie pręt, który leży w osi symetrii, względnie, którego ta oś jest symetralną; na fig. 350 CD). Odcinek równoległy do tego pręta $C'D'$ na fig. b , a przedstawiający w pewnej skali jego wydłużenie, względnie skrócenie, przedstawia zarazem wzajemne (względne) przesunięcie obu jego końców. Można więc, podobnie jak do punktów A' i B' we fig. 349 b do końców odcinka $C'D'$ nawiązywać dalsze punkty planu Williot'a. Węzeł A (fig. 350 a ; łożysko stałe) jest nieruchomy, zatem przesunięcie rzeczywiste dowolnego węzła C jest $A'C'$. Niech A'' (fig. 350 c) będzie rzutem punktu A' na pionową przez A , zaś C'' rzutem C' na pionową przez C , to pionowy odcinek między C'' , a zamykająca $A''A'$ przedstawia

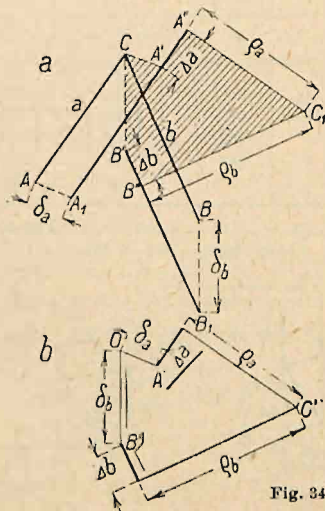


Fig. 349.

pionową składową przesunięcia węzła C . Linia $A''C''D''B''$ jest linią ugięcia pasa dolnego, $A''1''2''3''B''$ zaś pasa górnego. Dla przejrzystości, oznaczmy na planie Williot'a wydłużenia i skrócenia grubo, zaś odcinki ρ cienko.

Jeżeli obciążenie jest niesymetryczne, to nie znamy kierunku żadnego pręta po odkształceniu. Jeśli przyjmiemy, że dowolny pręt nie zmienia swego kierunku, a jeden z jego przekrojów, np. środkowy, jest nieruchomy, to planem względnych przesunięć, nakreślonym dla powyższych przyjęć (fałszywych) wyznaczony jest prawdziwy kształt belki ugiętej, lecz we fałszywym położeniu. Odkształconą belkę, niby tarczę sztywną, należy jeszcze przesunąć tak, aby odpowiadała warunkom podporowym.

Niezmiernie małe przesunięcia tarczy można uważać za obrót około pewnego bieguna (por. str. 1213), a końce wektorów wychodzących z dowolnego punktu O' (albo początki wektorów, których końce zbiegają się w O'), a przedstawiających przesunięcia lub prędkości punktów tarczy, tworzą figurę F'' , podobną do danej tarczy, lecz obróconą o 90° . Rzeczywiste przesunięcie węzła C belki jest sumą geometryczną przesunięcia $O'C'$ względem punktu O , oraz przesunięcia $C''O'$ z powodu obrotu, więc:

$$\overline{C''C} = \overline{C''O'} + \overline{O'C'}.$$

Całkowite rzeczywiste przesunięcie punktu A (łożysko stałe) $A''A' = 0$ (fig. 351 a), więc przesunięcie jego wskutek obrotu belki odkształconej jest

$A'O'$. Punkt A' figury F''' , od której wychodzą wektory przesunięć wskutek obrotu, zbiegające się w O' , nakrywa się więc z punktem A' planu przesunięć względnych. Punkt B'' leży na prostej $A''B'' \perp AB$. Rzeczywiste przesunięcie $B''B'$ punktu B możliwe jest tylko po torze tt łożyska ruchomego, więc $B''B'' \parallel tt$. Znając dwa punkty A'' i B'' figury F''' , możemy

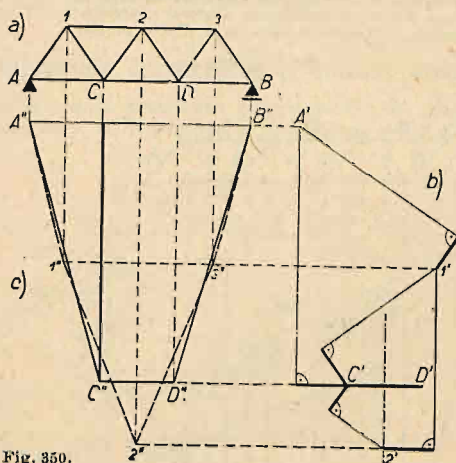


Fig. 350.

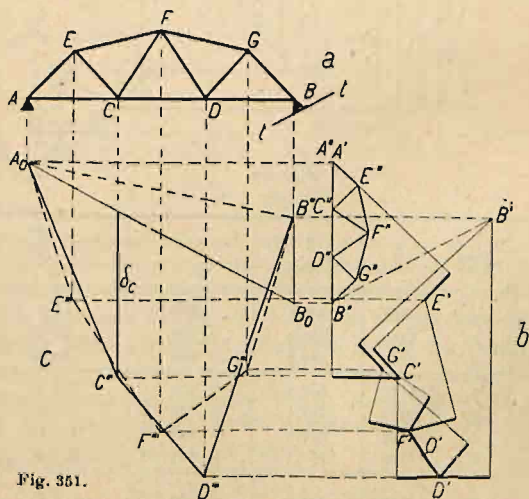


Fig. 351.

ją wykreślić, a tem samem wyznaczyć rzeczywiste przesunięcie dowolnego węzła. Np. rzeczywiste przesunięcie węzła C jest wektorem $C''C'$ (fig. b). Jeżeli chodzi tylko o pionowe składowe przesunięcie węzłów, to kreślenie F''' jest zbyteczne.

Jeżeli A_0 leży na pionowej punktu A i poziomej punktu A'' , podobnie B_0 , zaś C''' na pionowej C i poziomej punktu C' , to pionowy odcinek pomiędzy C''' i zamykającą A_0B_0 jest pionowym przesunięciem δ_c węzła C .

Zatem $A_0 C''' D''' B'''$ (fig. 352 c) jest linią ugięcia pasa dolnego, $A_0 E''' F''' G''' B'''$ jest linią ugięcia pasa górnego belki AB (fig. a). $B_0 B'''$ jest pionową składową przesunięcia punktu B .

Przykład (fig. 352). Znaleźć największe ugięcie węzła 2 belki kratowej (fig. a), obciążonej pociągłem normy A. W tym celu wykreślimy linię wpływową ugięcia węzła 2. Według Maxwell'a będzie to linia ugięcia pasa pomostowego pod ciężarem $P=1$, zaczepiającym we węźle 2. Na tabeli zestawiono długości s , przekroje F i napięcia prętów S . Ostatnia rubryka podaje tysiąckrotne wartości wydłużeń prętów:

$$1000 ds = 1000 \frac{Ss}{EF}.$$

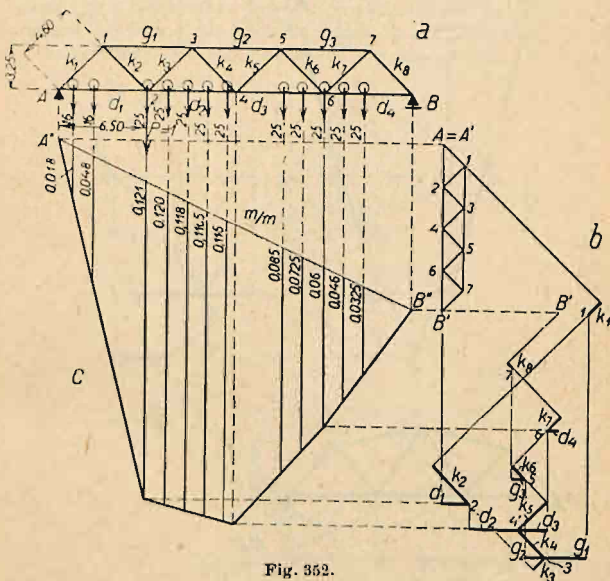


Fig. 352.

		Pręt	s cm	F cm ²	S kg	$10^3 ds = \frac{Ss}{EF} \cdot 10^3$ cm
Pas	górny	g_1	650	308,8	— 1500	— 1,5
		g_2	6180	359,2	— 1000	— 0,86
		g_3	6180	308,8	— 500	— 0,50
	dolny	d_1	6180	208,4	+ 750	+ 1,11
		d_2	6180	208,4	+ 1253	+ 1,86
		d_3	6180	208,4	+ 752	+ 1,12
		d_4	6180	208,4	+ 251	+ 0,37
	Krzyżulce	k_1	460	359,2	— 1060	— 0,65
k_2		460	114,96	+ 1060	+ 2,02	
k_3		460	114,96	+ 354	+ 0,68	
k_4		460	52,0	— 354	— 1,49	
k_5		460	52,0	+ 354	+ 1,49	
k_6		460	52,0	— 354	— 0,68	
k_7		460	114,96	+ 354	+ 0,68	
k_8		460	359,2	— 354	— 0,22	

Moduł sprężystości $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$. Na planie Williot'a (fig. b) przyjęto najpierw kierunek 4—3 jako stały.

Punkty planu Williot'a odrzutowane na pionowych, przechodzących przez węzły A, 2, 4, 6, B (fig. c), dają linię ugięcia pasa dolnego, a zarazem linię wpływową ugięcia węzła 2. Na fig. a i c wskazano najniekorzystniejsze położenie pociągu. Największe ugięcie węzła 2 $\delta_2 = 10^{-3} \cdot [16(18 + 48) + 25(121 + 120 + 118 + 116,5 + 115 + 85 + 72,5 + 60 + 46 + 32,5)] = 10^{-3} \cdot [16 \cdot 66 + 25 \cdot 886,5] = 1,06 + 22,16 = 23,22 \text{ mm}$.

V. Napężenia drugorzędne w belkach kratowych.

Przy obliczaniu belek kratowych przyjmuje się, że pręty są połączone w węzłach przegibnie, że występują w nich zatem tylko siły osiowe. Naj-

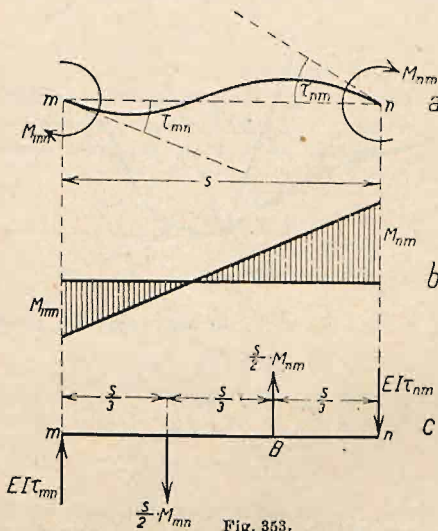


Fig. 353.

częściej jednak węzły są sztywne, więc kąty między prętami we węzłach nie mogą się zmieniać, zaś pręty po odkształceniu belki wyginają się i wskutek tego powstają w nich napężenia zginające, zwane drugorzędami.

Styczne do pręta mn (fig. 353 a) odchyla się od jego cięciwy o kąt τ_{mn} i τ_{nm} , dodatnie, jeżeli w kierunku wskazówek zegara. Na koniec m pręta mn działa moment M_{mn} (moment węzłowy), na koniec n moment M_{nm} . Wzdłuż pręta linia momentów jest prosta (fig. 353 b). Pomijając wpływ siły osiowej, znajdziemy M_{mn} wedle zasady Mohra z równania momentów ciężarów sprężystych (fig. 353 c) ze względu na punkt B:

$$M_{mn} = 2 \frac{EJ}{s} (2\tau_{mn} + \tau_{nm}) \dots \dots \dots (1)$$

Z powodu równowagi suma momentów węzłowych we wszystkich prętach, zbiegających się centrycznie w danym węźle m :

$$\Sigma M_{mn} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Jeżeli połączenie prętów we węźle jest ekscentryczne, to $\Sigma M_{mn} = \Sigma S \cdot c$ (S siła osiowa, c mimośród). Przy w węzłach mamy w równań (2). Jeżeli

znamy przyrosty $\Delta\alpha$ kątów pomiędzy cięciwami prętów, to możemy wszystkie kąty odchylenia τ_{mn} węzła m wyrazić przez jeden z nich ξ_m . Z fig. 354 widać, że

$$\tau_{mn} = \xi_m - \Delta\alpha_{0mn} \dots \dots \dots (3)$$

Jeżeli pomiędzy prętem mo i mn (fig. 354) są jeszcze pręty $m1$, $m2$, to $\alpha_{0mn} = \alpha_{0m1} + \alpha_{1m2} + \alpha_{2mn}$

zatem: $\Delta\alpha_{0mn} = \Delta\alpha_{0m1} + \Delta\alpha_{1m2} + \Delta\alpha_{2mn}$.

Przyrosty $\Delta\alpha_{0m1}$, $\Delta\alpha_{1m2}$... znajdziemy według wzoru na zmianę kąta w trójkącie wskutek przyrostu boków [równanie (8), str. 1240].

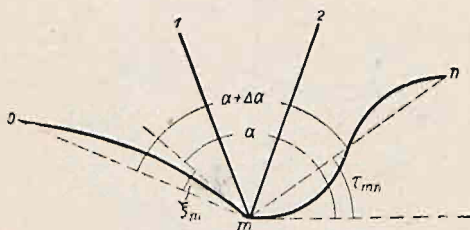


Fig. 354.

Podstawmy (3) w (1) i (1) w (2), to nazywając dla skrócenia:

$$r_{mn} = 2 J_{mn} : s_{mn} \dots \dots \dots (4)$$

i rozwiązując (2) względem ξ_m , otrzymamy:

$$\xi_m = \frac{\sum r \Delta\alpha}{\sum r} - \frac{\sum r \tau_{nm}}{2 \sum r} \dots \dots \dots (5)$$

Sumy rozciągają się na wszystkie pręty, schodzące się we węźle m . Dla każdego węzła mamy takie równanie, więc w równań. Rozwiążemy je drogą kolejnych przybliżeń.

Przyjmując $\tau_{nm} = 0$, otrzymamy pierwszą wartość przybliżoną:

$$\xi'_m = \frac{\sum r \Delta\alpha}{\sum r} \dots \dots \dots (6)$$

Podstawiając (6) w (3), otrzymamy pierwsze wartości przybliżone kątów odchylenia. Wstawiając je w (5), otrzymamy drugie przybliżenie dla ξ_m , tj. ξ''_m . Podobnie znajdziemy ξ''' , ξ^{IV} itd., aż różnice pomiędzy kolejnymi przybliżeniami staną się dowolnie małe. Na podstawie ostatecznych wartości ξ obliczamy kąty odchylenia τ z równania (3) i momenty węzłowe z równania (1). Jako kontrolę mamy równanie (2). Ewentualną odchyłkę należy rozdzielić pomiędzy pręty proporcjonalnie do wartości r . Jest to uproszczony sposób Manderli.

Mohr zastąpił kąt odchylenia τ_{mn} obrotem φ_m węzła m i obrotem ψ_{mn} pręta mn . Fig. 355 przedstawia odkształcenie i przesunięcie pręta mn w położenie $m'n'$. Czytamy z niej:

$$\tau_{mn} = \varphi_m - \psi_{mn} \quad \tau_{nm} = \varphi_n - \psi_{mn} \dots \dots \dots (7)$$

φ_m , φ_n i ψ_{mn} są dodatnie, jeżeli w kierunku wskazówek zegara. Podstawmy (7) i (4) w (1), to:

$$M_{mn} = r E (2 \varphi_m + \varphi_n - 3 \psi_{mn}) \dots \dots \dots (8)$$

Podstawiając (8) w (2), otrzymamy analogicznie do (5):

$$\varphi_m = \frac{\sum r \psi}{\sum r} + \frac{1}{2} \frac{\sum r (\psi - \varphi_n)}{\sum r} \dots \dots \dots (9)$$

System równań (9) rozwiązuje się, podobnie jak (5), drogą kolejnych przybliżeń, przyjmując jako pierwszą wartość przybliżoną:

$$\varphi'_m = \frac{\sum r \psi}{\sum r} \dots \dots \dots (10)$$

Podstawiając w (9) φ'_n za φ_n , otrzymamy drugą wartość przybliżoną φ'_m itd. Podstawiając obliczone wartości φ_m i φ_n w (8), otrzymamy momenty węzłowe. Obroty prętów ψ można odczytać z planu Williot'a. Prętowi mn (fig. 356 a) odpowiadają na planie dwa odcinki: λ = wydłużenie pręta

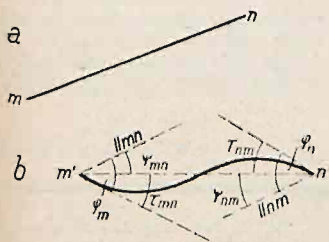


Fig. 355.

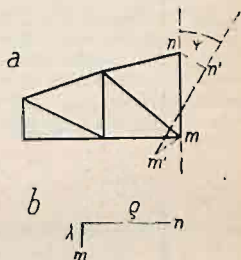


Fig. 356.

i ρ = względne przesunięcie obu węzłów pręta w kierunku prostopadłym do pręta. Jeżeli s_{mn} = długość pręta, to

$$\psi_{mn} = \frac{\rho_{mn}}{s_{mn}} \dots \dots \dots (11)$$

Z momentów węzłowych oblicza się napężenie drugorzędne ze wzoru:

$$\nu = \frac{M e}{J} = \frac{M}{W} \dots \dots \dots (12)$$

przyczem J = moment bezwładności przekroju pręta względem osi ciężkości prostopadłej do płaszczyzny belki, e = odдалenie włókien skrajnych od tejże osi. Dla dowolnego pręta mn mamy dwie wartości M , mianowicie M_{nm} , oraz M_{mn} i wogóle dwie wartości e , tj. e' i e'' , więc cztery wartości ν , z których dwie są tego samego znaku, co napężenie pierwszorzędne. Z pośród tych dwu miarodajna jest bezwzględnie większa.

Jako przykład podajemy obliczenie uproszczonym sposobem Manderli belki (fig. 341, str. 1243), którą Müller-Breslau obliczył swoim sposobem („Graphische Statik II.“ 2, str. 295), zaś Gehler („Die Ermittlung der Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken“, str. 22) sposobem Mohra.

Obliczenie przygotowawcze por. str. 1243. Na tablicy prętów (Tabl. I) zestawiono długości s , przekroje F , momenty bezwładności J , odstępów włókien skrajnych od osi

Tabl. I.

Tablica prętów.

Pręt	s cm	F cm ²	J cm ⁴	e cm	r cm	S t	r_I kg/cm ²	r_{II} kg/cm ² +—	Mohr Gehler	M. Br.	$\frac{r_{II}}{r_I}$ %
12	400	44	400	6,5	2	16	+ 864	91,4	94	92	25
23	400	60	800	8	4	40	+ 667	78,5	77	78	11,7
33'	400	60	800	8	4	48	+ 800	51,5	46	52	6,4
45	400	66	4000	12	20	82	— 492	106,6	106	108	21,7
56	400	66	4000	12	20	48	— 739	85,4	86	89	11,6
14	360	60	900	8,5	5	28,8	— 480	46,6	50	47	9,7
42	360	40	300	5	1,67	28,8	+ 720	36,8	38	35	5
25	360	44	400	6,5	2,22	14,4	— 328	66,1	60	67	20
53	360	44	400	6,5	2,22	14,4	+ 328	61,8	60	61	18,8
36	360	44	400	6,5	2,22	0	0	36,2	44	36	∞

ciężkości e , sztywności $r = 2J:s$, siły osiowe S w tonach i naprężenia główne $r_I = S:F$ (rubryki 1—8). Momenty węzłowe obliczono przy pomocy tablicy kierunków (T. II) i tablicy węzłów (T. III). Jako niewiadome ξ obrano kąty odchylenia kierunków oznaczonych strzałką na fig. 341. Kolumna 4 (T. II) podaje wartości $Ed\alpha_{omn}$ do równania (3). Zmiany kątów zestawiono na tablicy II, str. 1243 i 1244. Dla kierunku 25 jest $Ed\alpha_{025} = Ed\alpha_{125} + Ed\alpha_{925} = -1069 - 918 = -1987$. Rubr. 5 (II) podaje wartości rubr. 4, pomnożone przez r . T. III, rubr. 2 podaje sumy rubr. 3 (II), np. $4 + 2,22 + 2,22 + 4 = 12,44$.

T. II.

T a b l i c a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m	n	r	$Ed\alpha_{omn}$	$r\Delta\alpha$	τ'_{mn}	τ''_{mn}	$r\tau''_{nm}$	τ''_{mn}	τ''_{nm}	$r\tau''_{nm}$
3	2	4	0	0	— 1410	527	+ 2108	— 1318	+ 845	+ 3380
	5	2,22	— 941	— 2095	— 469	846	+ 1880	— 377	+ 1160	+ 2678
	6	2,22	— 2146	— 4763	+ 735	535	— 1188	+ 827	— 535	— 1188
	3'	4	— 2680	— 10720	+ 1270	1270	— 5080	+ 1362	— 1362	— 5448
2	1	2	0	0	— 1410	531	— 1062	— 1092	— 324	— 648
	4	1,67	— 1069	— 1785	— 341	309	+ 515	— 23	+ 784	+ 1308
	5	2,22	— 1987	— 4405	+ 577	44	— 98	+ 895	+ 270	+ 600
	3	4	— 1937	— 7748	+ 527	1410	— 5640	+ 845	— 1318	— 5272
1	4	5	0	0	+ 212	17	— 85	+ 419	+ 458	+ 2290
	2	2	+ 743	+ 1486	— 531	1410	— 2820	— 324	— 1092	— 2184
4	5	20	0	0	— 22	1294	— 25880	+ 453	— 980	— 19600
	2	1,67	+ 331	— 553	+ 309	341	— 570	+ 784	— 23	— 38
	1	5	— 5	— 25	— 17	212	+ 1060	+ 458	+ 419	+ 2095
5	3	20	0	0	+ 1260	1385	— 27700	+ 1514	— 1385	— 27700
	6	2,22	+ 354	+ 786	+ 846	469	— 1040	+ 1160	— 377	— 837
	2	2,22	+ 1244	+ 2760	— 44	577	+ 1280	+ 270	+ 895	+ 1987
	4	20	+ 2494	+ 49880	— 1294	22	— 440	— 980	+ 453	+ 9060
6	3	2,22	+ 535		— 535			— 535		
	5	20	+ 1385		— 1385			— 1385		

Podobnie rubr. 3 (III) $\Sigma r A$ a sumę wartości rubr. 5 (II), np.: $0 - 2095 - 4763 - 10720 = -17578$. Rubr. 4 (III) podaje $\xi' = \Sigma r A a : \Sigma r$ (równ. 6), np. $\xi_1' = -17575 : 12,44 = -1410$. W rubr. 6 (II) jest pierwsza wartość przybliżona kąta odchylenia r_{mn} według równ. (3), np. $r_{36}' = -1410 - (-2145) = +735$. W rubr. 7 (II) jest r_{mn}' , w rubr. 8 (II) $r r_{nm}'$. W rubr. 5 (II) $\Sigma r r_{nm}'$, np. $+2108 + 1880 - 1188 - 5080 = -2280$. W rubr. 6 (III) jest $\Sigma r r_{nm}' : 2 \Sigma r$, np. $-2280 : 24,88 = -91,5$, w rubr. 7 (III) jest druga wartość przybliżona. $\xi'' = \xi' - \Sigma r r_{nm}' : 2 \Sigma r$ (równ. 5), np. $\xi_3'' = -1410 - (-91,5) = -1318$.

W podobny sposób przy pomocy T. II, rubr. 9, 10 i 11 i T. III, rubr. 8 i 9, znaleziono ξ_{III} (rubr. 10, III), następnie ξ_{IV} (T. II, 12—14, T. III, 11—13). Z porównania ξ' , ξ'' , ξ''' i ξ_{IV} można wnioskować, że ξ^V już nie wiele się różni od ξ_{IV} , zatem poprzestaniemy na wartości ξ_{IV} , na podstawie której wedle równ. (3) znaleziono r_{mn} (rubr. 15, II). Rubr. 18 (II) podaje wartość $E\eta = (2 r_{mn} + r_{nm})$. Wartości r i ξ w T. II i III są już pomnożone przez E i wyrażone w kg/cm^2 . Rubr. 19 (II) podaje momenty węzłowe według równ. (1): $M_{mn} = r E\eta$, np. $M_{32} = 4 \cdot (-1930) = -7720 kg/cm$. Rubr. 14 (III) podaje ΣM , które wedle równ. (2) powinny być = 0. Odchyłki ΣM rozdzielono proporcjonalnie do r . Rubr. 20 (II) podaje poprawione wartości momentów węzłowych.

Rubr. 9 (I) podaje naprężenie drugorzędne $r_{II} = eM : J$ (równanie 12). Przekroje są symetryczne, więc wartość dodatnia równa się bezwzględnie wartości ujemnej. Dla pręta 1,2 jest $M_{12} = -4,30 tcm$, $M_{21} = -5,62$, więc $|M_{21}| > |M_{12}|$, zatem naprężenie drugorzędne $r_{II 12} = 5620 \cdot 6,5 : 400 = 91,4 kg/cm^2$. Gehler znalazł 94 (rubr. 10, I), Müller-Breslau, licząc dokładniej, 92 (rubr. 11, I). Rubr. 12 (I) podaje wartość naprężenia drugorzędnego w procentach naprężenia głównego. Z powodu symetrii obciążenia wystarczyło tu badać tylko połowę belki. Jako kierunek początkowy węzła 6 obrano kierunek w osi symetrii, zatem kąt odchylenia kierunku 63 $E_{63} = \frac{1}{2} E \Delta \alpha_{63} = -\frac{1}{2} 1069 = -535$, zaś $E_{765} = -E_{763} - E \Delta \alpha_{65} = -535 - 850 = -1385$.

Z przykładu powyższego widać, że sposoby opisane są żmudne i wymagają znajomości przekrojów prętów. Już jednak przy projektowaniu tychże należy mieć choć przybliżony obraz naprężeń drugorzędnych. Dlatego wielką wartość praktyczną posiadają wzory przybliżone.

k i e r u n k ó w.

12	13	14	15	16	17	18	19	20
r'''_{mn}	r'''_{mn}	r'''_{nm}	r_{mn}^{IV}	$2 r_{mn}^{IV}$	r_{nm}^{IV}	$E\eta$	M t cm	M popr. t cm
-1383	730	+ 2920	-1360	-2720	+ 790	1930	- 7,72	- 7,85
- 442	1043	+ 2320	- 419	- 838	+ 1081	243	+ 0,54	+ 0,47
+ 762	535	- 1188	+ 785	+ 1570	- 535	1035	+ 2,30	+ 2,23
+ 1297	1297	- 5188	+ 1320	+ 2640	- 1320	1320	+ 5,28	+ 5,15
-1207	539	- 1078	-1147	-2294	- 470	2764	- 5,63	- 5,62
- 138	638	+ 1064	- 078	- 156	+ 705	549	+ 0,92	+ 0,85
+ 780	153	+ 340	+ 840	+ 1680	+ 191	1871	+ 4,16	+ 4,06
+ 730	1383	- 5532	+ 790	+ 1580	- 1360	220	+ 0,88	+ 0,71
+ 204	312	+ 1560	+ 273	+ 546	+ 379	925	+ 4,63	+ 4,30
- 539	1207	- 2414	- 470	- 940	- 1147	2087	- 4,17	- 4,30
+ 307	1097	- 21940	+ 374	+ 748	- 1039	311	- 6,22	- 7,09
+ 638	138	+ 230	+ 705	+ 1410	- 78	1332	+ 2,22	+ 2,15
+ 312	204	+ 1020	+ 379	+ 758	+ 273	1031	+ 5,16	+ 4,94
+ 1397	1385	- 27700	+ 1435	+ 2870	- 1385	1485	+ 29,10	+ 28,47
+ 1043	442	- 982	+ 1081	+ 2162	- 419	1743	+ 3,87	+ 3,80
+ 153	780	+ 1780	+ 191	+ 382	+ 840	1222	+ 2,72	+ 2,65
- 1097	307	+ 6140	- 1059	- 2118	+ 374	1744	- 34,88	- 35,52
			- 535	- 1070	+ 785	285	- 0,63	- 0,63
			- 1385	- 2770	+ 1485	1335	- 26,70	- 26,70

T. III.

T a b l i c a

1	2	3	4	5	6	7
m	Σr	$\Sigma r A a$	ξ'	$\Sigma r \tau_{nm}$	$: 2 \Sigma r$	ξ''
3	12,44	- 17,578	- 1410	- 2230	- 91,5	- 1318
2	9,89	- 13,933	- 1410	- 5285	- 318	- 1092
1	7	+ 1486	+ 212	- 2905	- 207	+ 419
4	26,67	- 578	- 22	- 25390	- 475	+ 453
5	44,44	+ 53,426	- 1200	- 27900	- 314	+ 1514

P a s y. Gdyby krata zmuszała oba pasy do wspólnego identycznego ugięcia, to równanie linii ugięcia osi ciężkości obu pasów byłoby:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{E J_x}$$

W rzeczywistości jest: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu M_x}{E J_x} \dots \dots \dots (13)$

przyczem wedle Bleicha należy przyjąć:

dla belki	równoległej				parabolicznej		
dla stosunku $\frac{h}{l} =$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$
$\mu =$	1,2	1,27	1,35	1,4	1,2	1,25	1,3

W powyższem oznacza h = wysokość belki, l = rozpiętość, M_x = moment w przekroju x , J_x = moment bezwładności przekroju obu pasów względem ich osi ciężkości. Jeżeli F jest przekrojem pasa rozciąganego, F' ściskanego, to

$$J_x = a^2 F + a'^2 F',$$

gdzie:

$$a F = a' F', \quad a + a' = h.$$

Dla samego pasa zachodzi równanie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M'}{E J'},$$

przyczem naprężenie drugorzędne w pasie $\nu_{II} = \frac{M'}{J'} e$,

zatem: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\nu_{II}}{E e} \dots \dots \dots (14)$

Z porównania (13) i (14) otrzymamy:

$$\nu_{II} = \mu \frac{M_x}{J_x} e \dots \dots \dots (15)$$

Dla $F' = F''$ jest:

$$\nu_I = \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2} \dots \dots \dots (16)$$

czyli:

$$\frac{\nu_{II}}{\nu_I} = 2 \mu \frac{e}{h} \dots \dots \dots (17)$$

w e z ł ó w.

8	9	10	11	12	13	14
$\Sigma r r_{nm}^{II}$	$: 2 \Sigma r$	ξ^{III}	$\Sigma r r_{nm}^{III} + : 2 \Sigma r$		ξ^{IV}	ΣM
— 678	— 27	— 1383	1136 — 50		— 1360	+ 0,40
— 4012	— 203	— 1207	5206 — 263		— 1147	+ 0,43
+ 106	+ 8	+ 204	854 — 61		+ 273	+ 0,46
— 17543	— 329	+ 307	21150 — 396		+ 374	+ 1,16
+ 17490	— 197	+ 1397	20812 — 235		+ 1435	+ 1,41

Dla $F' = \kappa F''$

i gdy przekrój użyteczny pasa rozciąganego:

$$F'_u = \lambda F'$$

i odpowiednio:

$$F''_u = \lambda' F'',$$

to uwzględniając na korzyść pewności rozkład naprężeń drugorzędnych wzdłuż pręta wedle trójkąta, otrzymamy dla pasa rozciąganego:

$$\rho = \nu_{II \max} : \nu_I = 2 \mu \lambda (1 + \kappa) \frac{e}{h},$$

zaś dla pasa ściskanego:

$$\rho' = 2 \mu \lambda' \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \frac{e}{h}.$$

Jeżeli chcemy, aby: $\nu_I + \nu_{II \max} = k$,

to potrzebny przekrój użyteczny pasa rozciąganego:

$$F'_u = (1 + \rho) \frac{S_0}{k}.$$

Podobnie:

$$F''_u = (1 + \rho') \frac{S_0}{k}.$$

Oczywiście pas ściskany należy oprócz tego zbadać na wyboczenie. Obliczając naprężenia drugorzędne, należałoby przyjąć napężenie dopuszczalne k o 20% większe niż zwykle.

Jeżeli pomiędzy węzłami I-rzędnymi, odległymi o λ (fig. 357), zawieszona jest poprzecznicą we węźle II-rzędnym przy pomocy słupa o długości h , należy uwzględnić w pasie pomostowym napężenie dodatkowe ν'_{II} . Moment w pasie we węźle II: $M_{II} = \frac{1}{2} P \lambda$, zaś ugięcie węzła II:

$$y = \frac{1}{24} \frac{P \lambda^3}{E J'} = \frac{M_{II} \lambda^2}{6 E J'} = \frac{\nu_s h}{E}$$

(ν_s = napężenie w słupie).

Stąd:

$$\nu'_{II} = \frac{M_{II}}{J'} e = 6 \frac{h e}{\lambda^2} \nu_s.$$

Słupy. Naprężenia drugorzędne w słupach są z reguły większe niż w krzyżulcach i wogóle bardzo znaczne. Przyjmując dla słupa mn w równaniu (8) $\varphi_m = \varphi_n = \varphi$, otrzymamy:

$$M_{mn} = \frac{6 E J}{h} (\varphi - \psi),$$

stąd:

$$\nu_{II} = \frac{6 E e}{h} (\varphi - \psi) \dots \dots \dots (18)$$

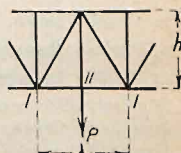


Fig. 357.

Uważając linię ugięcia za parabolę o równaniu $y = \frac{4y_0}{l^2} x(l-x)$, gdzie y_0 = ugięcie w środku rozpiętości, otrzymujemy:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4y_0}{l^2} (l-2x) \quad \dots \quad (19)$$

W przybliżeniu można przyjąć:

$$\psi = \frac{\Delta g + \Delta d}{h} = \nu \text{ śr. } \frac{l-2x}{Eh},$$

gdzie ν śr. jest to średnie naprężenie w pasach (bez względu na znak). Lepiej jednak znaleźć ψ z planu Williot'a. Wzór 18. w połączeniu z 19. można zastosować do narożnika, dla innych słupów należałoby zastosować linie wpływowe naprężeń II-rzędnych.

Z porównania równań (1) i (12) wynika: $\nu_{II} = 2 \frac{e}{s} E' \eta$. Dla prętów o przekroju symetrycznym jest $2e$ równe szerokości pręta. Należy się więc starać o możliwie lekki wygląd belki w widoku. Wartość $\eta = 2\tau_{mn} + \tau_{nm}$ zależy w wysokim stopniu od rodzaju kraty. W pasach (pomijając pola skrajne przy narożnikach) naprężenia drugorzędne w przypadku kraty prostokątnej N i półprzekątniowej K są bardzo małe (około 5%). Jeżeli linia ugięcia pasa pomostowego wykazuje załomy odwrotne, naprężenia II-rzędne są procentowo do naprężeń I-rzędnych znaczne: przy kracie (fig. 357) dochodzą do 28%, kracie N i V z drugorzędnym podparciem odpowiednio do 33 i 44%, przy kracie dwukrotnej do 86% (por. Bażant). Należałoby w tym przypadku zastosować przekrój pasa pomostowego symetryczny, aby zmniejszyć e . Bardzo znaczne są naprężenia drugorzędne w łukach kratowych ze ścięgnem, belkach kratowych wzmocnionych łukiem, belkach trójpasowych, oraz w wieszarach z belkami usztywniającymi.

VI. Ustroje hiperstatyczne.

A. Równania sprężystości.

Jeżeli belka, np. fig. 358 a, jest n_w -krotnie wewnętrznie, względnie n_z -krotnie zewnętrznie hiperstatyczna (statycznie niewyznaczalna; por. str. 1189), to przez opuszczenie n_w prętów istotnych, względnie n_z prętów łożyskowych (pręty nadliczbowe) można kratownicę uczynić izostatyczną (statycznie wyznaczalną), tj. sprowadzić ją do układu zasadniczego (fig. b). Aby stan napięć w układzie zasadniczym był identyczny ze stanem w belce rzeczywistej, należy każdy opuszczony pręt łożyskowy zastąpić siłą, działającą w kierunku tego pręta, jako nacisk na belkę, zaś pręt istotny dwiema siłami zaczepiającymi we węzłach, w których był osadzony i działającymi w sensie ich zbliżenia, jeżeli pręt był rozciągany, zaś oddalania, jeżeli był ściskany, a równemi co do wielkości napięciu tegoż pręta (tensory). Niech będą X_a, X_b, X_c , niewiadome oddziaływania opuszczonych podpór, względnie napięcia opuszczonych prętów istotnych (fig. b). Jeżeli nazwiemy R_0, S_0 reakcje podpór i siły wewnętrzne w układzie zasadniczym (fig. c) wskutek sił zewnętrznych ΣP , zaś R_w, S_w wskutek siły, względnie napięcia $X_a = -1$ (fig. d) i wreszcie odpowiednio $R_b, S_b; R_c, S_c \dots$ (fig. e i f), to w ustroju rzeczywistym (fig. a) na podstawie prawa superpozycji reakcja pewnej podpory: